



ჟუჟუნა დიასამიძე

ელექტროდინამიკა



$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$



ელექტროდინამიკა

ჟუჟუნა დიასამიძე
(ლექციების კურსი)

გამომცემლობა
„ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი“
ბათუმი - 2025

UDC(უაკ) 537.8(042.4)

დ-436

**წიგნი აღიარებულია სალექციო კურსად ბათუმის შოთა რუსთაველის საგამომცემლო საბჭოს მიერ
(ოქმი №2, 27.05.2025)**

რედაქტორები:

მზია დიასამიძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბათუმის საზღვაო
აკადემიის პროფესორი

ნუგზარ დომიძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ–ს პროფესორი

ლალი კალანდაძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ–ს პროფესორი

მირანდა ხაჯიშვილი, ფიზიკის დოქტორი, ბსუ-ს ასისტენტ პროფესორი

იზოლდა ჯაბინძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ–ს ასოცირებული
პროფესორი

ზურაბ შაშიკაძე, ბსუ-ს ფიზიკის უფროსი მასწავლებელი

გრაფიკული დიზაინი:

ლუკა ხალვაში

კომპიუტერული უზრუნველყოფა:

მზია დიასამიძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბათუმის საზღვაო
აკადემიის პროფესორი

მირანდა ხაჯიშვილი, ფიზიკის დოქტორი, ბსუ-ს ასისტენტ პროფესორი

სოფი კირკიტაძე, ბსუ-ს ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტი

დავით ჯაკობია, ბსუ-ს ფიზიკის მაგისტრი, ბსუ-ს ფიზიკის დოქტორანტი

ნინო მჟავანაძე, ბსუ-ს ფიზიკის დეპარტამენტის სპეციალისტი

რეცენზენტები:

ომარ ნაკაშიძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ–ს ასოცირებული
პროფესორი

ზაურ გამიშიძე, ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ–ს ასოცირებული
პროფესორი

ISBN 978-9941-519-05-5

© „ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი“ - 2025

წინასიტყვაობა



სახელმძღვანელო ეძღვნება პროფესორ **ჟუჟუნა დიასამიძეს**-გამოჩენილ ქართველ მეცნიერს, ემერიტუსს, პედაგოგსა და ფიზიკოსს, რომლის ღვაწლი ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ფიზიკის, როგორც სამეცნიერო დისციპლინის, განვითარებაში შეუფასებელია.

პროფესორი **ჟუჟუნა დიასამიძე** იყო დასავლეთ საქართველოში პირველი ქალი, რომელსაც მიენიჭა ფიზიკის მეცნიერებათა დოქტორის წოდება. მან თავისი შრომითა და ცოდნით დიდი წვლილი შეიტანა ელექტრომაგნიტური ტალღების თეორიის, რადიოფიზიკის, პლაზმის ფიზიკის, დისტანციური ზონდირებისა და ატმოსფერული ფიზიკის განვითარებაში. მისი სამეცნიერო საქმიანობა მოიცავს მრავალ ფუნდამენტურ კვლევას, რომლებიც დღესაც აქტუალურია თანამედროვე ფიზიკისა და ტექნოლოგიების განვითარებისთვის.

ჟუჟუნა დიასამიძე ათწლეულების განმავლობაში ემსახურებოდა განათლების სფეროს, ზრდიდა ფიზიკოსთა თაობებს, იყო **ჭეშმარიტი მეცნიერის, ასევე, ჰუმანურობისა და სულგრძელობის ნამდვილი მაგალითი.**

მისი პედაგოგიური და სამეცნიერო მოღვაწეობა აღიარებული იყო როგორც საქართველოში, ისე საერთაშორისო სამეცნიერო წრეებში. **ქალბატონი ჟუჟუნა იყო ავტორი მრავალი სამეცნიერო ნაშრომისა თუ სახელმძღვანელოსი, რომლებიც დღესაც წარმოადგენს მნიშვნელოვანი ცოდნის წყაროს ახალგაზრდა ფიზიკოსებისთვის.**

ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის დეპარტამენტი ამაცობს იმით, რომ პროფესორი **ჟუჟუნა დიასამიძე** მრავალი წლის განმავლობაში იყო ფიზიკის დეპარტამენტის სული და გული. წინამდებარე სახელმძღვანელო შედგენილია ხელნაწერი სალექციო კურსის მიხედვით და არის მისი ცხოვრებისეული შრომისა და ერთგულების გამოხატულება.

სახელმძღვანელოს შედგენით ფიზიკის დეპარტამენტი გამოხატავს ღრმა პატივისცემას მისი ხსოვნისა და უდიდესი ღვაწლისადმი მეცნიერებისა და განათლების სფეროში და წარმოაჩენს იმ მნიშვნელოვან გავლენას, რაც მან მოახდინა მომავალი თაობების პროფესიულ განვითარებაზე.

ამ წიგნის თითოეული გვერდი მის მიერ გაკვალილი გზის გაგრძელებაა – გზისა, რომელიც განათლებას, მეცნიერებასა და ახალგაზრდობის შთაგონებას ემსახურება.

ფიზიკის დეპარტამენტი

სახელმძღვანელოს შესახებ

ელექტროდინამიკა თანამედროვე ფიზიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური განყოფილებაა, რომელიც შეისწავლის ელექტრული და მაგნიტური ველების ბუნებას, მათ ურთიერთქმედებას მუხტებსა და დენებთან, ასევე ელექტრომაგნიტური ტალღების თვისებებს. ეს დისციპლინა უდიდეს როლს ასრულებს როგორც ფიზიკის თეორიულ კვლევებში, ასევე პრაქტიკულ ინჟინერიასა და ტექნოლოგიაში.

წინამდებარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს სრულყოფილ ლექციათა კურსს, რომელიც მოიცავს ელექტროდინამიკის ძირითად ცნებებს, მათემატიკურ აპარატს და პრაქტიკულ გამოყენებებს. წიგნის მიზანია, სტუდენტებსა და მკვლევრებს გააცნოს მაქსველის განტოლებები, ელექტროსტატიკური და მაგნიტოსტატიკური ველები, ელექტრომაგნიტური ტალღები, ოთხგანზომილებიანი ფორმალიზმი და სხვა მნიშვნელოვანი საკითხები, რომლებიც აუცილებელია ამ სფეროს სიღრმისეული შესწავლისთვის.

სწავლების პროცესში ყურადღება გამახვილებულია როგორც ფიზიკურ ინტუიციაზე, ასევე მათემატიკური ფორმალიზმის მნიშვნელობაზე. თითოეული თავი შეიცავს თეორიულ განხილვებს, მაგალითებს და თვითშეფასების კითხვებს, რაც მკითხველს საშუალებას აძლევს, არა მხოლოდ გაიაზროს მასალა, არამედ პრაქტიკულადაც გამოიყენოს მიღებული ცოდნა.

მიმდინარე სახელმძღვანელო განსაკუთრებით გამოსადეგია ფიზიკის, ინჟინერიისა და გამოყენებითი მათემატიკის სტუდენტებისთვის, ასევე იმ მკვლევრებისთვის, რომლებიც დაინტერესებულნი არიან ელექტრომაგნიტური მოვლენების სიღრმისეული გააზრებით.

სარჩევი

ლექცია 1. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისეული ფაქტების განზოგადოება I.....	7
შესავალი. კლასიკური ელექტროდინამიკის ისტორია. ელექტროდინამიკის როლი სამყაროს ფიზიკური სურათის ფორმირებაში	7
§ 1. ელექტრომაგნიტური ველი	10
§ 2. გაუსის თეორემის დიფერენციალური ფორმა	12
§ 3. უწყვეტობის განტოლება და წანაცვლების დენი.....	15
ლექცია 2. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისეული ფაქტების განზოგადება II.	19
§ 4. სრული დენის განზოგადოებული კანონი	19
§ 5. ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის დიფერენციალური ფორმა	21
§ 6. მაქსველის განტოლება $div\mathbf{B} = 0$	23
ლექცია 3. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისეული ფაქტების განზოგადება III.....	24
§ 7. მაქსველის განტოლებათა სისტემა ვაკუუმში დიფერენციალური და ინტეგრალური ფორმით	24
§ 8. ენერჯიის შენახვის კანონი ელექტრომაგნიტური ველისათვის	26
ლექცია 4. სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი	29
§ 9. სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები	29
§ 10. განტოლებები და სასაზღვრო პირობები დამუხტული ზედაპირების არსებობისას	30
ლექცია 5. ელექტროსტატიკა. დიელექტრიკები.	35
§11. ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში	35
§12. ლაპლასისა და პუასონის განტოლებები	39
§ 13. გამტარები ელექტროსტატიკურ ველში	41
§ 14. დიელექტრიკის პოლარიზაცია და მულტიპოლები.....	43
§ 15. დიელექტრიკები ელექტროსტატიკურ ველში	46
§16. ელექტრული ველის ენერჯია.....	50
§ 17. მექანიკური ძალები ელექტრულ ველში	55
ლექცია 6. სტაციონარული მაგნიტური ველი I.....	59
§18. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები	59
§ 19. გარე ელექტრომომძრავებელი ძალები და ომისა და ჯოულ-ლენცის კანონები განზოგადოებული სახით.....	61

ლექცია 7. სტაციონარული მაგნიტური ველი II.....	66
§20. მაგნიტოსტატიკური ველი ვაკუუმში. ბიო-სავარის კანონი.....	66
ლექცია 8. სტაციონარული მაგნიტური ველი III.....	74
§21. მაგნეტიკები მაგნიტოსტატიკურ ველში.....	74
§ 22. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის ენერგია.....	80
§ 23. მექანიკური ძალები მაგნიტურ ველში	84
ლექცია 9. კვაზისტაციონარული ველი	89
§24. კვაზისტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი.....	89
§ 25. გამტართა სისტემა ურთიერთინდუქციისა და თვითინდუქციის გათვალისწინებით	93
§ 26. ცვლადი დენის წრედი.....	95
§ 27. დენების ინდუქცია მოძრავ გამტარებში	100
§ 28. სკინ-ეფექტი.....	103
ლექცია 10. ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივება I.....	106
§29. მაქსველის განტოლებები გარემოში	106
§ 30. დაგვიანებისა და წინსწრების პოტენციალები	109
ლექცია 11. ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივება II.....	111
§31. წრფივი ოსცილატორის გამოსხივება.....	111
§ 32. რხევადი ელექტრონის გამოსხივება	118
§ 33. სინათლის გაბნევა თავისუფალი ელექტრონებით	125
§ 34. ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი. სინათლის წნევა.....	126
ლექცია 12. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება I.....	130
§35. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დიელექტრიკებში	130
§ 36. ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღების არეკვლა და გარდატეხა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე. ფრენელის ფორმულები	134
ლექცია 13. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება II	140
§37. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება გამტარ გარემოში.....	140
§ 38. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დისპერსიულ გარემოში.....	143
ლექცია 14. ელექტროდინამიკის ოთხგანზომილებიანი ფორმულირება I	148
§39. ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი და ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივე.....	148
§ 40. მაქსველის განტოლებები ტენზორული ფორმით	150
§ 41. ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორები	154

ლექცია 15. ელექტროდინამიკის ოთხგანზომილებიანი ფორმულირება II.....	158
§42. ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე	158
§43. ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისა და იმპულსის ტენზორი	160
§ 44. ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველი.....	164

ლექცია 1. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისეული ფაქტების განზოგადება I

- შესავალი კლასიკური ელექტროდინამიკის ისტორია. ელექტროდინამიკის როლი სამყაროს ფიზიკური სურათის ფორმირებაში;
- ელექტრომაგნიტური ველი;
- გაუსის თეორემის დიფერენციალური ფორმა;
- მაქსველის განტოლება $div\vec{E} = \rho/\epsilon_0$;
- უწყვეტობის განტოლება და წანაცვლების დენი.

შესავალი. კლასიკური ელექტროდინამიკის ისტორია. ელექტროდინამიკის როლი სამყაროს ფიზიკური სურათის ფორმირებაში

ზოგადი ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ ელექტრომაგნიტური მოვლენების ფართო წრის შესწავლის დროს არ არის აუცილებელი მხედველობაში მიღებული იქნას მატერიალური სხეულების მოლეკულური აგებულება და ელექტრული მუხტების დისკრეტულობა. ასეთი მიდგომით ელექტრომაგნიტური მოვლენების შესწავლის დროს ნივთიერების ელექტრული და მაგნიტური თვისებები ხასიათდება ϵ აბსოლუტური დიელექტრიკული შეღწევადობითა და μ აბსოლუტური მაგნიტური შეღწევადობით, ხოლო გამტარების ელექტროგამტარებლობა აღიწერება γ კუთრი გამტარებლობით. იგულისხმება, რომ მუხტები და დენები სივრცეში უწყვეტად არის განაწილებული და ხასიათდება ρ მუხტის მოცულობითი სიმკვრივითა და \vec{j} დენის სიმკვრივით. მატერიალური სხეულების, მუხტებისა და დენების ასეთი იდეალური აღწერა მთელ რიგ შემთხვევებში დამაკმაყოფილებელია. ელექტრომაგნიტური მოვლენების თეორიას, რომელსაც საფუძვლად უდევს ასეთი იდეალიზაცია, ეწოდება **ფენომენოლოგიური ელექტროდინამიკა**.

ელექტრომაგნიტური მოვლენების თეორიას, რომელიც ითვალისწინებს მატერიალური სხეულების მოლეკულურ აგებულებასა და ელექტრული მუხტების დისკრეტულობას, უწოდებენ **ელექტრონულ თეორიას**. ელექტრონული თეორია შესაძლებლობას იძლევა იმ მრავალი მოვლენის მექანიზმის ახსნისა, რომლებიც ფენომენოლოგიური ელექტროდინამიკის ჩარჩოებში აღიწერება წმინდა ფორმალურად, ან საერთოდ შეუძლებელია მათი ახსნა.

ველის თეორიის კურსთან ერთად შემთხვევით არ ისწავლება **ფარდობითობის თეორია**. პირველ რიგში, მისი აღმოჩენა ისტორიულად დაკავშირებულია ელექტროდინამიკასთან. მეორე მხრივ, ველის თეორია წარმოადგენს ისტორიულად პირველ რელატივისტურად ინვარიანტულ თეორიას. ველის თეორია გვაძლევს ფარდობითობის თეორიის გამოყენების მრავალ მაგალითს, რომელიც შესაძლებელს ხდის, ნათლად გამოვლინდეს ფარდობითობის თეორიის დებულებების და ფორმულების ფიზიკური შინაარსი.

ელექტრომაგნიტური მოვლენები უდიდეს როლს ასრულებენ ბუნებაში. თანამედროვე ფიზიკის თვალსაზრისით, ურთიერთქმედებანი შეიძლება გავაერთიანოთ ოთხ ძირითად ურთიერთქმედებაში, რომელთაც **ფუნდამენტური ურთიერთქმედებანი** ეწოდება. ეს ურთიერთ-

ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება, შემდეგ კი გრავიტაციული. ამის მიზეზი ის არის, რომ ეს ურთიერთქმედებანი ვლინდება მაკროსხეულების ურთიერთქმედებებშიც, **წინააღმდეგ ძლიერი და სუსტი ურთიერთქმედებებისა, რომლებიც აპრობებენ ნაწილაკთა გუნდის ურთიერთქმედებას მხოლოდ მიკროსამყაროში. (მაშინ როცა, ძლიერი და სუსტი ურთიერთქმედებები, განაპრობებულია ნაწილაკთა გუნდის ურთიერთქმედებით მხოლოდ მიკროსამყაროში.)** მიკროსამყაროში კი ურთიერთქმედების ხასიათის დადგენა შედარებით უფრო ძნელია.

დამუხტულ ნაწილაკებს შორის მოქმედი მიზიდულობის ძალები გაცილებით მცირეა ელექტრულ ძალებთან შედარებით. მაგ. ორი ელექტრონი, რომლებიც ერთმანეთისაგან r მანძილით არიან დაშორებული, ურთიერთქმედებენ მიზიდულობის ძალით:

$$F_{გრ} = G \frac{m_0^2}{r^2} \quad (1)$$

სადაც $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ ნ} \cdot \text{მ}^2 / \text{კგ}^2$ – გრავიტაციული მუდმივაა, $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ კგ}$ – ელექტრონის მასაა. მეორეს მხრივ, ელექტრონებს შორის მოქმედებს განზიდვის ელექტრული ძალა:

$$F_{ელ} = \frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}, \quad (2)$$

სადაც $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ კ}$ – ელექტრონის მუხტია, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ფ/მ}$ – დიელექტრიკული მუდმივაა.

(1) და (2) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{F_{ელ}}{F_{გრ}} = \frac{e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 G m_0^2} \approx 10^{43}.$$

ამგვარად, ორი ელექტრონი შორის გრავიტაციული ურთიერთქმედება უმნიშვნელოა ელექტრულ ურთიერთქმედებასთან შედარებით. ელემენტარული ნაწილაკების ურთიერთქმედების სფეროში მიზიდულობის ძალები პრაქტიკულად არავითარ როლს არ ასრულებენ. მიზიდულობის ძალები მნიშვნელოვანია მხოლოდ საკმაოდ დიდი მასების ურთიერთქმედების დროს. მაგალითად, ისინი განმსაზღვრელობს როლს ასრულებენ ასტრონომიული ობიექტების ურთიერთქმედებისას.

ძლიერი ურთიერთქმედებით განპრობებული ბირთვული ძალების ქმედების კანონი ზუსტად ცნობილი არ არის, მაგრამ მათი თვისებები შესწავლილია დაწვრილებით. ცნობილია, რომ ეს ძალები **ახლოქმედების ძალებია**, რომელიც ვლინდება ნუკლონებს შორის 10^{-15} სმ მანძილზე. ასეთ მანძილებზე ბირთვული ძალები ბევრად აღემატება ელექტრომაგნიტურ ძალებს. მანძილის ზრდით ეს ძალები სწრაფად მცირდება ელექტრომაგნიტურ ძალებთან შედარებით. ამიტომ ბირთვული ძალები არსებით როლს ასრულებენ ელემენტარული ნაწილაკების ურთიერთქმედებისას მხოლოდ მცირე მანძილებზე დაახლოების დროს. კერძოდ, ისინი განმსაზღვრელობს თამაშობენ ნივთიერებათა ბირთვების წარმოქმნაში.

სუსტი ურთიერთქმედება ვლინდება ნაწილაკთა ურთიერთგარდაქმნადობის პროცესში. ნაწილაკთა დაშორებისას იგი უმნიშვნელოა.

ამრიგად, ბუნებაში ცნობილი **ოთხი ურთიერთქმედებიდან** მხოლოდ ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება შეიძლება გამოყენებული იქნას დამუხტული ნაწილაკების მოძრაობის სამართავად. ამიტომ, თანამედროვე მეცნიერებაში და ტექნიკაში ელექტრომაგნიტური ძალები უმნიშვნელოვანესია.

მეცნიერების წინაშე დგას ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა – მართვადი

თერმობირთვული რეაქციების პრობლემა. იგი თავისი შინაარსით ველის თეორიის ერთ-ერთი პრობლემაა და დაიყვანება ელექტრომაგნიტური ველის, როგორც „რეზერვუარის“ როლის შესრულებაზე, რომლითაც შესაძლებელი გახდება შეკავებული იქნას **ცხელი პლაზმა**.

კოსმოსურ ფრენებში დიდი მნიშვნელობა აქვს პრაქტიკაში დამკვიდრებულ იონურ და პლაზმურ რეაქტიულ ძრავებს. ელექტროდინამიკის კანონებზეა დაფუძნებული ელექტროტექნიკური, რადიოტექნიკური, ელექტრონული და სხვა მრავალრიცხოვანი ხელსაწყოები და დანადგარები. ელექტროდინამიკური მოვლენები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ასტრონომიაში. ვარსკვლავთაშორის სივრცეში არსებული მაგნიტური ველი იწვევს კოსმოსური დამუხტული ნაწილაკების აჩქარებას, აფეთქებები მზეზე განაპირობებს მზის ზედაპირის მახლობლობაში მაგნიტური ველის არსებით ცვლილებებს, დედამიწის მაგნიტური ველი აკავებს დედამიწის მახლობლობაში დამუხტულ ნაწილაკებს, რის გამოც იქმნება რადიაციული სარტყელი და ა.შ.

ამგვარად, ელექტრომაგნიტური მოვლენები აუცილებელია მივიდეთ მხედველობაში კოსმოსური პრობლემების განხილვის დროსაც. ელექტრომაგნიტური მოვლენების მრავალსახეობა და ფართო გამოვლენა მის თეორიას ხდის, როგორც მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს ბუნების კანონების გაცნობიერებაში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. განსაზღვრეთ ელექტრომაგნიტური ველის ფიზიკური მნიშვნელობა, რატომ ითვლება იგი ფუნდამენტურ ურთიერთქმედებად?
2. როგორია დიელექტრიკული შეღწევადობისა და მაგნიტური შეღწევადობის მნიშვნელობა ვაკუუმში?
3. რა განსხვავებაა ელექტროდინამიკის ფენომენოლოგიურ და ელექტრონულ თეორიებს შორის?
4. როგორ უკავშირდება ელექტრომაგნიტური ველი ფარდობითობის თეორიას?
5. როგორია ელექტრომაგნიტური ძალების როლი ასტროფიზიკაში და კოსმოსურ კვლევებში?

§ 1. ელექტრომაგნიტური ველი

სივრცის არეს, სადაც ვლინდება ელექტრული და მაგნიტური ძალების ქმედება, **ელექტრომაგნიტური ველი** ეწოდება. ელექტრომაგნიტური ველი ხასიათდება ელექტრული ველის დაძაბულობის \vec{E} ვექტორით, ელექტრული ინდუქციის \vec{D} ვექტორით, მაგნიტური ველის დაძაბულობის \vec{H} ვექტორით, მაგნიტური ველის ინდუქციის \vec{B} ვექტორით. ისინი ერთმანეთთან დაკავშირებულია თანაფარდობებით:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.1)$$

სადაც ϵ – აბსოლუტური დიელექტრიკული შეღწევადობაა, ხოლო μ – აბსოლუტური მაგნიტური შეღწევადობა. გაუსის აბსოლუტურ ერთეულთა სისტემაში ϵ და μ მუდმივები უგანზომილებო სიდიდეებია და ვაკუუმისათვის 1-ის ტოლია. \vec{D} და \vec{B} ვექტორები ემთხვევა \vec{E} და \vec{H} ვექტორებს, ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველი ვაკუუმში შეიძლება დახასიათდეს მხოლოდ ორი \vec{E} და \vec{H} ვექტორებით. ეს კი მთელი რიგი განტოლებებისა და ფორმულების მათემატიკური გამარტივების საშუალებას იძლევა. SI სისტემაში \vec{E} და \vec{D} ვექტორებს გააჩნიათ განსხვავებული განზომილება, ამიტომ ϵ განზომილების მქონე სიდიდეა. ვაკუუმისათვის იგი განსხვავებულია

ერთისაგან, და მაშასადამე, \vec{E} და \vec{D} ვექტორები ვაკუუმშიაც კი არ ემთხვევიან ერთმანეთს. იგივე შეიძლება ითქვას \vec{H} , \vec{B} და μ – ს შესახებ. ამგვარად, როგორც მატერიალურ გარემოში, ისე ვაკუუმშიც ელექტრომაგნიტური ველი ხასიათდება ოთხი \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} და \vec{B} ვექტორით. მოვიყვანოთ ვაკუუმისათვის აბსოლუტური დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევალობების მნიშვნელობები:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ ვ/მ} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ვ/მ}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ ჰნ/მ} \quad (1.2)$$

გარემოს აბსოლუტური დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევალობა (1.2) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0, \quad \mu = \mu_r \cdot \mu_0,$$

სადაც ϵ_r და μ_r – სხეულის ფარდობითი დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევალობებია. ველის \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} და \vec{B} ვექტორები წარმოადგენენ კოორდინატებისა და დროის ფუნქციებს μ – მაგნიტური შეღწევალობა და ϵ – დიელექტრიკული შეღწევალობა წარმოადგენენ კოორდინატების ფუნქციას, **იგულისხმება რომ ისინი დროზე ცხადი სახით არ არიან დამოკიდებულნი.**

მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე. მუხტის განაწილება სივრცეში ხასიათდება მოცულობითი სიმკვრივით, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.3)$$

სადაც Δq – მუხტია ΔV მოცულობაში. ეს განმარტება გულისხმობს, რომ მუხტი სივრცეში განაწილებულია უწყვეტად. ელექტრული მუხტის დისკრეტული აგებულება მხედველობაში არ მიიღება. მუხტის მოცულობითი სიმკვრივის განზომილებაა $[\rho] = \text{კ/მ}^3$. (1.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ dV მოცულობის ელემენტში მუხტის სიდიდე ტოლია:

$$dq = \rho dV \quad (1.4)$$

დენის სიმკვრივე. მოცემულ წერტილში დენის სიმკვრივეს უწოდებენ ვექტორს, რომელიც მიმართულებით ემთხვევა დენს, ხოლო მოდულით ტოლია:

$$|\vec{j}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (1.5)$$

სადაც ΔI – მოცემულ წერტილში დენის მიმართულების მართობულად მდებარე ΔS ფართობი გამავალი დენის ძალაა. (1.5) ფორმულიდან დენის სიმკვრივის განზომილებაა $[j] = \text{კ/მ}^2$. (1.5) ფორმულიდან ზედაპირის dS ელემენტში გამავალი დენის ძალა განისაზღვრება სკალარული ნამრავლით:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.6)$$

მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე და დენის სიმკვრივე წარმოადგენენ კოორდინატებისა და დროის ფუნქციებს.

ყოველ წერტილში ელექტრომაგნიტური ველი ხასიათდება \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} და \vec{B} სიდიდეებით. ისინი იცვლებიან როგორც დროის მიხედვით, ასევე წერტილიდან წერტილში გადასვლის დროს. მაგრამ ეს ცვლილება მიმდინარეობს არა ნებისმიერად, არამედ გარკვეული კანონზომიერებებით. ასევე გარკვეული კანონზომიერებებით მიმდინარეობს მუხტებითა და დენებით ელექტრომაგნიტური ველის წარმოშობა. ეს კანონები ფორმულირებულია **მაქსველის განტოლებებში**, რომელსაც ემორჩილება ელექტრომაგნიტური ველის მახასიათებელი სიდიდეები.

კითხვები თვითშეფასებისთვის:

1. ვაკუუმისთვის აქვს თუ არა განზომილება გარემოს აბსოლუტურ დიელექტრიკულ და მაგნიტურ შეღწევადობებს გაუსის სისტემაში? SI სისტემაში?
2. გამოსახეთ მუხტის ელემენტი მუხტის ზედაპირული სიმკვრივით. გამოსახეთ დენის ძალის ელემენტი დენის ძალის წირითი სიმკვრივით.
3. არის თუ არა გარემოს აბსოლუტური დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევადობები დროის ფუნქცია?

§ 2. გაუსის თეორემის დიფერენციალური ფორმა

ვაკუუმში კულონის კანონი განსაზღვრავს q_1 და q_2 წერტილოვან მუხტებს შორის ურთიერთქმედების ძალას, რომლებიც ერთმანეთისაგან იმყოფებიან r მანძილზე:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \tag{2.1}$$

ელექტრომაგნიტური ველის წარმოდგენიდან გამომდინარე, განვიხილოთ მუხტებს შორის ურთიერთქმედების პროცესი ასე:

- 1) q_1 წერტილოვანი მუხტი გარემომცველ სივრცეში ქმნის ელექტრულ ველს, რომლის დაძაბულობაც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1 \vec{r}}{r^2} \tag{2.2}$$

სადაც \vec{r} – რადიუს-ვექტორია მუხტიდან იმ წერტილამდე, სადაც ვეძებთ ელექტრული ველის დაძაბულობას.

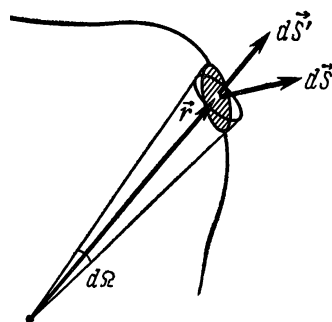
- 2) q_2 წერტილოვანი მუხტი, რომელიც მოთავსებულია \vec{E} დაძაბულობის ველში, განიცდის ამ ველის მხრიდან ქმედებას ძალით:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E} \tag{2.3}$$

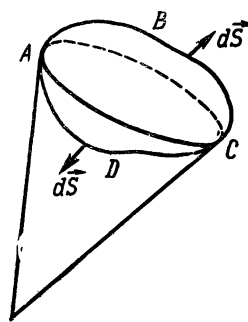
თუ გავითვალისწინებთ (2.2)–ს (2.3) ფორმულაში, მივიღებთ q_1 და q_2 მუხტებს შორის ურთიერთქმედების ძალას:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.4}$$

ამრიგად, (2.1) ფორმულით მოცემული კულონის კანონი გამოისახება (2.2) და (2.3) ფორმულების ერთობლიობით.



ნახ. 2.1



ნახ.2,2

გაუსის თეორემა. გამოვთვალოთ \vec{E} ვექტორის ნაკადი ნებისმიერ ჩაკეტილ S ზედაპირში:

$$N = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

ნახ.2.1– დან ჩანს, რომ:

$$dS' = \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S}' \right) = dS' \cos \left(\frac{\vec{r}}{r}; d\vec{S}' \right) \quad (2.6)$$

მოცემულ წერტილში dS' ფართის ელემენტის პროექციაა რადიუს–ვექტორის მართობულ სიბრტყეში. მაშასადამე,

$$\frac{dS'}{r^2} = d\Omega \quad (2.7)$$

$d\Omega$ - სხეულოვანი კუთხის ელემენტი, რომლის ფარგლებშიც ჩანს განსახილველი ზედაპირი წერტილიდან სადაც მდებარეობს q მუხტი. გავითვალისწინოთ (2.6), (2.7) და (2.2.) ფორმულები და გამოვთვალოთ (2.5) ინტეგრალი:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{S}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

უკანასკნელ ტოლობაში გათვალისწინებულია, რომ სრული სხეულოვანი კუთხე, რომლითაც მოჩანს ჩაკეტილი ზედაპირი მის შიგნით მდებარე წერტილიდან, ტოლია 4π – ს. თუ მუხტი ჩაკეტილი ზედაპირის გარეთაა, მაშინ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ინტეგრალს, ადებულს ABC და ADC ზედაპირებზე, ექნებათ ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაგრამ ნიშნით საპირისპირო (ნახ.2.2). რადგანაც ზედაპირის dS ელემენტის ვექტორი მიმართულია ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულებით, ამიტომ $d\Omega$ სხეულოვან კუთხეს დადებითი ნიშანი გააჩნია, თუ დაკვირვების წერტილიდან მოჩანს ზედაპირის შიგა მხარე, და უარყოფითი – თუ მოჩანს ზედაპირის გარე მხარე. ამგვარად, ჩაკეტილ ზედაპირის შიგნით, როდესაც მუხტი ამ ზედაპირის გარეთაა, \vec{E} ვექტორის ნაკადი ნულის ტოლია:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.10)$$

თუ მოცემული გვაქვს q_i რამდენიმე წერტილოვანი მუხტი, მაშინ ელექტრული ველის დაძაბულობა ტოლია ცალკეული მუხტებით შექმნილი \vec{E}_i დაძაბულობების ჯამისა:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad (2.11)$$

ეს დებულება ცნობილია **სუპერპოზიციის პრინციპის** სახელწოდებით, რომელიც ცდისეული ფაქტების განზოგადებაა. ამ პრინციპის მთავარი მათემატიკური შედეგი შესაბამისი განტოლებების წრფივობაა. ამიტომ (2.11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ის განტოლებები, რომელსაც ემორჩილება დაძაბულობა, უნდა იყოს წრფივი.

ვიპოვოთ \vec{E} ვექტორის ნაკადი ჩაკეტილ S ზედაპირში, რომლის შიგნით იმყოფებიან q_i მუხტები:

$$N = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (2.12)$$

ამგვარად, ჩაკეტილ ზედაპირზე ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნაკადი ტოლია ამ ზედაპირის შიგნით არსებული მუხტების ალგებრული ჯამის ფარდობისა ელექტრულ მუდმივასთან. ეს დებულება ცნობილია **გაუსის ელექტროსტატიკური თეორემის** სახელწოდებით.

მუხტების უწყვეტი განაწილება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც საკმარისად მცირე მუხტების ერთობლიობა, რომლებიც მოთავსებული არიან მოცულობის მცირე ΔV_i მოცულობის ელემენტში: $\Delta q_i = \rho \cdot \Delta V_i$. ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $\Delta V_i \rightarrow 0$, ეს მუხტები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წერტილოვანი, მაშინ (2.12) თეორემა დებულობს შემდეგ სახეს:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \rho \Delta V_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.13)$$

მაქსველის განტოლება $div \vec{E} = \rho / \epsilon_0$. ვისარგებლოთ **გაუს-ოსტროგრადსკის** მათემატიკური თეორემით:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V div \vec{A} dV \quad (2.14)$$

ე.ი. ნებისმიერი \vec{A} ვექტორის ნაკადი ჩაკეტილ ზედაპირზე ტოლია ამ ვექტორის დივერგენსიდან აღებული იმ მოცულობითი ინტეგრალის, რომლითაც შემოსაზღვრულია მოცემული ჩაკეტილი ზედაპირი. გამოვიყენოთ ეს თეორემა (2.13) ფორმულის მარცხენა მხარისათვის, მივიღებთ:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V div \vec{E} dV \quad (2.15)$$

გავითვალისწინოთ (2.15) ფორმულა (2.13)-ში, გვექნება:

$$\int_V \left(div \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad (2.16)$$

ეს ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი საინტეგრაციო V მოცულობისათვის. თუ ნებისმერი საინტეგრაციო მოცულობისათვის ინტეგრალი რაიმე ფუნქციიდან ნულის ტოლია, მაშინ თვით ფუნქციაც იგივეურად ნულის ტოლია. გამოვიყენოთ ეს თეორემა (2.16) ტოლობისათვის, მივიღებთ:

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

ეს განტოლება ცნობილია მაქსველის ერთ-ერთი განტოლების სახელწოდებით. გამოყვანიდან ჩანს, რომ იგი წარმოადგენს **გაუსის თეორემის დიფერენციალურ ფორმას**.

ამგვარად, მაქსველის განტოლების ფიზიკური შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: \vec{E} ვექტორის ველის წყაროსა და ნაკადს წარმოადგენენ ელექტრული მუხტები. \vec{E} ვექტორის ძალწირები იწყებიან დადებით მუხტებზე ($\rho > 0$) და მთავრდებიან უარყოფით მუხტებზე ($\rho < 0$).

კითხვები თვითმუფასებისათვის:

1. ჩამოაყალიბეთ კულონის კანონი ველის წარმოდგენის საშუალებით.
2. წარმოადგინეთ გაუსის თეორემის ფორმულირება ჩაკეტილი ზედაპირისთვის?
3. გამოსახეთ კვშირი ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნაკადსა და მუხტის განაწილებას შორის.

4. როგორ გამოიყენება გაუსის თეორემა სხვადასხვა სიმეტრიის მქონე მუხტების განაწილებისთვის?
5. როგორია გაუსის თეორემის დიფერენციალური ფორმულირება?
6. მიიღეთ მაქსველის განტოლება გაუსის თეორემიდან.
7. რაში მდგომარეობს სუპერპოზიციის პრინციპი და როგორ აისახება ის გაუსის თეორემაში?

§ 3. უწყვეტობის განტოლება და წანაცვლების დენი

ცდით დადგენილი მუხტის შენახვის კანონი მათემატიკურად გამოისახება უწყვეტობის განტოლების სახით. V მოცულობაში არსებული მუხტის სიდიდე გამოისახება ინტეგრალით:

$$q = \int_V \rho dV \quad (3.1)$$

თუ მოცემული მოცულობის შიგნით q მუხტის სიდიდე იცვლება, მაშინ ადგილი ექნება მუხტების მოძრაობას განსახილველი მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირის გავლით. dt დროის განმავლობაში მუხტების სიდიდე, რომელიც გადაკვეთს ზედაპირს, შეიძლება გამოვსახოთ dq -თი:

$$dq = I dt = dt \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.2)$$

$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ გამოსახავს დენის ძალას. ამასთან, დენის ძალა დადებითია, თუ დენი გამოდის განსახილველი მოცულობიდან გარეთ და უარყოფითია, თუ ჩაედინება მასში. მეორეს მხრივ, მუხტის შენახვის კანონის თანახმად, მუხტების ეს გამოდინება ან ჩადინება უნდა იწვევდეს მოცემულ მოცულობაში არსებული q მუხტის სიდიდის ცვლილებას. dt დროში ეს ცვლილება ტოლია:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.3)$$

აქ იგულისხმება, რომ ინტეგრალის წარმოებული ტოლია ინტეგრალქვეშა გამოსახულების წარმოებულის, რადგანაც საინტეგრაციო მოცულობა არ არის დროზე დამოკიდებული. $\frac{dq}{dt}$ წარმოებულის ნიშანი უარყოფითია იმ შემთხვევაში, როდესაც დენი გამოედინება V მოცულობიდან და (3.2) სიდიდე დადებითია. q -ს გაზრდის შემთხვევაში (3.3) და (3.2) ფორმულების ნიშნები იცვლება საპირისპიროთი. მუხტის შენახვის კანონის თანახმად (3.3) და (3.2) სიდიდეები აბსოლუტური მნიშვნელობით ტოლია, მაგრამ ნიშნით ურთიერთსაწინააღმდეგოა:

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.4)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარისათვის ვისარგებლოთ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემით, მივიღებთ:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} \right) dV = 0 \quad (3.5)$$

ეს ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი V მოცულობისათვის, ამიტომ ინტეგრალქვეშა

გამოსახულება ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (3.6)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს უწყვეტობის განტოლებას, რომელიც გამოსახავს მუხტის შენახვის კანონს.

გამტარებლობის დენის წირები. სტაციონარული დენების შემთხვევაში მუხტის სიმკვრივე ყოველ წერტილში მუდმივი სიდიდეა და მაშასადამე,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

ამიტომ, მუდმივი დენებისათვის უწყვეტობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (3.8)$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ მუდმივი დენის წირებს არ გააჩნიათ არც დასაწყისი და არც დასასრული. ისინი წარმოადგენენ ან ჩაკეტილ წირებს, ან კიდევ წირებს, რომლებიც მიდიან უსასრულობაში. ცვლადი დენის შემთხვევაში დენის სიმკვრივის ვექტორის წირები არ არიან ჩაკეტილი, რადგანაც:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad (3.9)$$

მაშასადამე, \vec{j} ვექტორის წირები იწყებიან და მთავრდებიან იმ წერტილებში, სადაც იცვლება მუხტის სიმკვრივე. მუხტის სიმკვრივე დაკავშირებულია მუხტის მოძრაობასთან, ამიტომ მას **გამტარებლობის დენის სიმკვრივეს ან გადატანის დენს უწოდებენ**. ამგვარად, შეიძლება ვთქვათ, რომ ცვლადი დენის შემთხვევაში გამტარებლობის დენის წირები არ წარმოადგენენ ჩაკეტილ წირებს. მაგალითისათვის განვიხილოთ ელექტრული წრედი, რომელიც შეიცავს კონდენსატორს, რომლის შემონაფენებს შორის სივრცე ვაკუუმი. ცნობილია, რომ ასეთ ელექტრულ წრედში მუდმივი დენი არ გადის. ეს კი განპირობებულია იმით, რომ კონდენსატორის შემონაფენებს შორის სივრცეში მუხტებს გადაადგილება არ შეუძლიათ, ამიტომ გამტარებლობის დენის წირები კონდენსატორის შემონაფენებს შორის ვერ გაგრძელდებიან და მაშასადამე, (3.8) განტოლება არ სრულდება.

წანაცვლების დენი. სულ სხვა სურათი გვაქვს ცვლადი დენის შემთხვევაში. კონდენსატორი ატარებს ცვლად დენს. ამიტომ აუცილებელია დავუშვათ, რომ კონდენსატორის შემონაფენებს შორის მიმდინარეობს რაღაც პროცესი, რომელიც გამტარებლობის დენის არსებობის ექვივალენტურია. ამბობენ, რომ კონდენსატორის შემონაფენებს შორის არსებობს წანაცვლების დენი.

წანაცვლების დენის მათემატიკური გამოსახულების მისაღებად მაქსველის განტოლების

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$$

ორივე მხარე გავაწარმოთ დროის მიხედვით. მივიღებთ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.10)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ დივერგენციის გამოთვლა დაიყვანება კოორდინატებით დიფერენცირებაზე, ხოლო კოორდინატები და დრო წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ცვლადებს და დიფერენცირების რიგი შეიძლება შენაცვლებული იქნას. გავითვალისწინოთ (3.10) ფორმულა

(3.6) – ში, მივიღებთ:

$$\operatorname{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0 \quad (3.11)$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\vec{j}_{\text{ხრ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

ვექტორის წირები ყოველთვის ჩაკეტილია.

სიდიდეს:

$$\vec{j}_{\text{ხრ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.12)$$

წანაცვლების დენის სიმკვრივე ეწოდება. წანაცვლების დენის სიმკვრივისა და გამტარებლობის დენის სიმკვრივის განზომილებანი ერთმანეთს ემთხვევა.

ცვლადი დენის წრედში კონდენსატორით, როდესაც წრედში გადის I სიდიდის ცვლადი დენი, მუხტის სიდიდე კონდენსატორის ცალკეულ შემონაფენეზე იცვლება ან $I = dq/dt$ სიდიდით. თუ ბრტყელი კონდენსატორის შემონაფენების ფართია S , მაშინ კონდენსატორის შემონაფენებს შორის \vec{E} - ს მოდული დაკავშირებულია შემონაფენებზე არსებულ q მუხტთან ტოლობით:

$$\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{I}{S}$$

ე.ი. კონდენსატორის შემონაფენებს შორის **წანაცვლების დენის სიმკვრივე იმ გამტარებლობის დენის სიმკვრივის ტოლია, რომელიც გაივლიდა კონდენსატორის შემონაფენებს შორის სივრცე რომ ყოფილიყო გამტარით შევსებული.**

ფიზიკური შინაარსით წანაცვლების დენის სიმკვრივეს არავითარი საერთო არ გააჩნია გამტარებლობის დენის სიმკვრივესთან. **წანაცვლების დენის სიმკვრივე არის სიდიდე, რომელიც პროპორციულია მოცემულ წერტილში ელექტრული ველის ცვლილების სიჩქარის.** მაგრამ ამ სიდიდეს შემთხვევით არ უწოდებენ დენს. საქმე იმაშია, რომ წანაცვლების დენი ქმნის თავის გარშემო ისეთივე მაგნიტურ ველს, რასაც შექმნიდა (3.11) სიდიდის ტოლი გამტარებლობის დენი.

ამგვარად, ელექტრული ველის ცვლილება იწვევს მაგნიტური ველის წარმოშობას. ეს მოვლენა თავის მხრივ, ასახავს კავშირს ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს შორის, რომელიც მოცემულია ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის საფუძველზე. არა მარტო მაგნიტური ველის ცვლილება იწვევს ელექტრული ველის წარმოშობას, არამედ პირიქით – ელექტრული ველის ცვლილება იწვევს მაგნიტური ველის წარმოშობას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის მუხტის შენახვის კანონი და როგორ მიიღება უწყვეტობის განტოლება?
2. განსაზღვრეთ მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე და დენის სიმკვრივე.

3. რა განსხვავებაა სტაციონარული და ცვლადი დენების უწყვეტობის განტოლებებს შორის?
4. რას ნიშნავს, რომ სტაციონარული დენის წირები ყოველთვის ჩაკეტილია?
5. როგორია წანაცვლების დენი და რა როლს ასრულებს ის ელექტრომაგნიტურ ველში?
6. როგორ მიიღება წანაცვლების დენის გამოსახულება და როგორ უკავშირდება იგი კონდენსატორში მიმდინარე პროცესებს?
7. როგორია ელექტრული ველის ცვლილების როლი მაგნიტური ველის წარმოქმნაში?
8. როგორ ავსებს წანაცვლების დენი მაქსველის განტოლებებს?
9. ჩაწერეთ ელექტრომაგნიტური ველი ოთხივე ვექტორის (E , D , B , H) საშუალებით.

ლექცია 2. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისუული ფაქტების განზოგადება II

- §4. სრული დენის განზოგადობული კანონი;
- §5. ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის დიფერენციალური ფორმა;
- §6. მაქსველის განტოლება $div\vec{B} = 0$;

§ 4. სრული დენის განზოგადობული კანონი

გამტარებლობის მუდმივი დენების შემთხვევაში ადგილი აქვს სრული დენის კანონს, რომლის თანახმადაც მაგნიტური ველის ინდუქციის ვექტორის ცირკულაცია ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, ტოლია ამ კონტურის შემომფარგვლელი დენების ალგებრული ჯამის ნამრავლისა ვაკუუმის მაგნიტურ მუდმივაზე:

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 I \quad (4.1)$$

სადაც I – ჩაკეტილი კონტურის შემომფარგვლელი დენების ალგებრული ჯამია. ე. ი. გამტარებლობის **სრული დენია**. ინტეგრირების დროს კონტურის შემოვლის მიმართულება სრული დენის მიმართულებასთან ადგენს მარჯვენა ხრახნულ სისტემას. სრული დენის კანონი შეიძლება მივიღოთ **ბიო–სავარის კანონიდან** უსასრულო სიგრძის წრფივი დენისათვის. უსასრულო სიგრძის წრფივი დენის მიერ შექმნილი მაგნიტური ველის ინდუქცია მისგან ნებისმიერ r მანძილზე განისაზღვრება ფორმულით;

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.2)$$

მაგნიტური ინდუქციის ვექტორს გააჩნია r რადიუსიანი წრეწირის მხედი ვექტორის მიმართულება, რომლის ცენტრიც მდებარეობს დენის მიმართულების მართობულ სიბრტყეში. დაწვრივ \vec{B} ვექტორის ცირკულაცია ნებისმიერი ჩაკეტილი L კონტურის გასწვრივ, რომელიც მდებარეობს დენის მიმართულების მართობულ სიბრტყეში:

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) \quad (4.3)$$

კონტურის რომელიღაც წერტილში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\vec{B}d\vec{l}) = Bdl \cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) . \quad (4.4)$$

როგორც ვიცით

$$dl \cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) = dl_{\perp} \quad (4.5)$$

წარმოადგენს dl ელემენტის გეგმილს რადიუს–ვექტორის მართობულ სიბრტყეზე. კუთხის რადიანული ზომის განმარტებიდან გამოდინარე

$$\frac{dl_{\perp}}{r} = d\alpha \quad (4.6)$$

არის კუთხე, რომლითაც მოჩანს წრეწირის ცენტრიდან dl ელემენტი. ამიტომ (4.2) ფორმულა

შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{dl_{\perp}}{2\pi r} = \mu_0 I \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (4.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ მნიშვნელობას, მაშინ ჩაკეტილი L კონტურის გასწვრივ ინტეგრალი გამოითვლება ასე:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int d\alpha = \mu_0 I \quad (4.8)$$

სადაც:

$$\int d\alpha = 2\pi$$

თუ მოცემული გვაქვს რამდენიმე დენი, მაშინ მაგნიტური ველი წარმოადგენს ცალკეული დენების მიერ შექმნილ მაგნიტურ ველთა გეომეტრიულ ჯამს. თუ გამოვიყენებთ ამ ჯამისათვის (4.8) ფორმულას, გვექნება:

$$\int_L (\vec{B} d\vec{l}) = \sum_i \oint_L \vec{B}_i d\vec{l}_i = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I . \quad (4.9)$$

(4.9) ფორმულაში I_i ნიშანი დამოკიდებულია დენისა და საინტეგრაციო L კონტურის შემოვლის მიმართულებაზე. თუ კონტურის შემოვლის მიმართულება დენის მიმართულებასთან ადგენს მარჯვენა ხრახნულ სისტემას, მაშინ I_i ნიშანი დადებითია. წინააღმდეგ შემთხვევაში – უარყოფითი. ამგვარად, (4.9) ფორმულაში I წარმოადგენს დენების ალგებრულ ჯამს ანუ ამ კონტურით შემოფარგლულ სრულ დენს. ამგვარად, სრული დენის კანონი დამტკიცებულია უსასრულო წრფივი დენებისათვის და ნებისმიერი კონტურისათვის, რომელიც მდებარეობს დენის მიმართულების მართობულ სიბრტყეში. ამ შეზღუდვის მოსახსნელად დავწეროთ (4.9) კანონი დიფერენციალური ფორმით. მოცემული L კონტურის შემომფარგვლელი I დენი ტოლია:

$$I = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) \quad (4.10)$$

გადავწეროთ (4.9) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}) \quad (4.11)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარისათვის ვისარგებლოთ სტოქსის თეორემით:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \int_S (\text{rot} \vec{B} d\vec{S}) \quad (4.12)$$

მაშინ (4.11) თანაფარდობა გადაიწერება ასე:

$$\int_S (\text{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) d\vec{S} = 0 \quad (4.13)$$

რადგანაც S ზედაპირი ნებისმიერია, ამიტომ (4.13) თანაფარდობიდან ვღებულობთ:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (4.14)$$

მოვასდინოთ (4.14) განტოლების ორთავე მხარის ინტეგრაცია S ზედაპირის მიხედვით:

$$\int_S (\text{rot} \vec{B} d\vec{S}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}) \quad (4.15)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ მაგნიტურ ველს ქმნის არა მარტო გამტარებლობის დენი, არამედ წანაცვლების დენიც. ამიტომ თუ მოვასდენთ განზოგადებას, და ვისარგებლებთ სტოქსის თეორემით მაშინ მივიღებთ:

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \int_S \left(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad (4.16)$$

საიდანაც

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.17)$$

(4.17) ფორმულით მოცემული თანაფარდობა წარმოადგენს მაქსველის ერთ-ერთ დიფერენციალურ განტოლებას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რაში მდგომარეობს სრული დენის კანონი?
2. რაში მდგომარეობს ბიო-სავარის კანონი?
3. დაამტკიცეთ სრული დენის კანონის სამართლიანობა უსასრულოდ გრძელი წვრილი დენიანი გამტარის შემთხვევაში?
4. რა შემთხვევაში ითვლება სრული დენის ძალა დადებითად გარე მუდმივ მაგნიტურ ველში?
5. ჩამოაყალიბეთ სტოქსის თეორემა და გააკეთეთ მისი მათემატიკური ფორმულირება
6. ჩაწერეთ სრული დენის კანონი დიფერენციალური ფორმით – მიიღეთ მაქსველის განტოლება

§ 5. ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის დიფერენციალური ფორმა

ჩაკეტილი გამტარი კონტურის შემომსაზღვრელ ზედაპირში Φ მაგნიტური ნაკადის ცვლილების დროს ინდუქციის ელექტრო მამოძრავებელი ძალის ზემოქმედებით გამტარში აღიძვრება ელექტრული დენი. ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონს შემდეგი სახე აქვს:

$$\xi_{\text{ინდუც}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.1)$$

ნიშანი მინუსი მიუთითებს ინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალისა და ნაკადის ცვლილების სიჩქარის მიმართულებაზე. გამტარში ელექტრული დენი აღიძვრება ელექტრული ველის წარმოშობის შედეგად. ჩაკეტილ L კონტურში ელექტრო მამოძრავებელი ძალა რიცხობრივად ტოლია იმ მუშაობის, რომელსაც ასრულებს ელექტრული ველი დადებითი ერთეულოვანი მუხტის გადაადგილებისას ამ კონტურის გასწვრივ:

$$\xi_{ინდუც} = \int_L \vec{E} d\vec{l} \quad (5.2)$$

მაგნიტური ინდუქციის ნაკადი Φ განმარტების თანახმად მოიცემა ფორმულით:

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (5.3)$$

(5.2) და (5.3) – ის გათვალისწინებით (5.1) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (5.4)$$

ელექტრომაგნიტური ინდუქციის მოვლენა არა არის დაკავშირებული ჩაკეტილი გამტარის არსებობასთან. მაგნიტური ინდუქციის ცვლილებას ყოველთვის თან ახლავს ელექტრული ველის წარმოშობა, დამოუკიდებლად იმისა, გვაქვს თუ არა გამტარი. ჩაკეტილი გამტარი უზრუნველყოფს მხოლოდ ელექტრული ველის მოქმედებით დენის წარმოშობას. ამიტომ (5.4) თანაფარდობა სამართლიანია სივრცეში აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურისათვის.

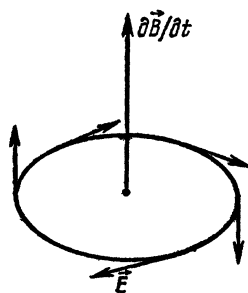
(5.4) ტოლობის მარცხენა მხარისათვის ვისარგებლოთ სტოქსის თეორემით და მივიღოთ მხედველობაში, რომ ტოლობის მარჯვენა მხარეში საინტეგრაციო ზედაპირი S დროზე დამოკიდებული არ არის (დროითი წარმოებული შეიძლება შევიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის შიგნით), მივიღებთ:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.5)$$

რადგანაც ეს ზედაპირი ნებისმიერია, ამიტომ

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.6)$$

ფორმულაში ნიშანი „-“ მიუთითებს იმაზე, რომ მაგნიტური ინდუქციის ცვლილების სიჩქარის ვექტორი და ამ დროს ჩაკეტილ კონტურში აღძრული ინდუქციის ელექტრო მამოძრავებელი ძალა ადგენენ მარცხენა ბურღის წესს (იხ. ნახ.5.1)



ნახ.5.1

(5.6) მაქსველის განტოლება წარმოადგენს ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის დიფერენციალურ ფორმას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. ჩამოაყალიბეთ ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონი.

2. რას უდრის რიცხობრივად ჩაკეტილ კონტურში ადრული ელექტრო მაგნიტული ველების დივიდენცია?
3. ჩაწერეთ ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონი დიფერენციალური ფორმით
4. როგორ განისაზღვრება ჩაკეტილ კონტურში ადრული ინდუქციის ე.მ.დ.-ის მიმართულება?

§ 6. მაქსველის განტოლება $div\vec{B} = 0$

(5.6) განტოლების ორთავე მხარისათვის გამოვიყენოთ ოპერაცია დივერგენცია:

$$div\text{rot}\vec{E} = -div\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (6.1)$$

რადგანაც როტორის დივერგენცია ყოველთვის ნულის ტოლია, ამიტომ

$$div\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}div\vec{B} = 0$$

ამგვარად, $div\vec{B}$ დროზე არ არის დამოკიდებული. მაშასადამე, $div\vec{B}$ მოცემული \vec{B} – თვის ისეთივეა, როგორც \vec{B} –ს სხვა დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის, კერძოდ, როცა $\vec{B} = 0$. მაგრამ, როდესაც $\vec{B} = 0$, დივერგენცია ნულის ტოლია. მაშასადამე, იგი ნულის ტოლია ნებისმიერი \vec{B} – თვისაც

$$div\vec{B} = 0 \quad (6.2)$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ მაგნიტური ინდუქციის \vec{B} ვექტორის წირებს არ გააჩნიათ არც დასაწყისი და არც დასასრული. ეს იმას ნიშნავს, რომ არ არსებობენ მაგნიტური მუხტები, რომლებიც ქმნიან მაგნიტურ ველს მსგავსად იმისა, როგორც ელექტრული მუხტები ქმნიან ელექტრულ ველს.

კითხვებითვისა და ამოცანებისათვის:

1. მიიღეთ მაქსველის განტოლება $div\vec{B} = 0$
2. რას გვიჩვენებს მაქსველის განტოლება $div\vec{B} = 0$?

ლექცია 3. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში, როგორც ცდისეული ფაქტების განზოგადება III

- §7. მაქსველის განტოლებათა სისტემა ვაკუუმში დიფერენციალური და ინტეგრალური ფორმით;
- §8. ენერჯის შენახვის კანონი ელექტრომაგნიტური ველისათვის;
- §9. ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია და პოტენჯის ვექტორი.

§ 7. მაქსველის განტოლებათა სისტემა ვაკუუმში დიფერენციალური და ინტეგრალური ფორმით

(2.17), (4.17), (5.6) და (6.2) განტოლებები შეადგენენ მაქსველის განტოლებათა სისტემას ვაკუუმში:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (I) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (II) \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (III) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & (IV) \end{aligned} \tag{7.1}$$

(7.1) ფორმულით მოცემული განტოლებები წარმოადგენენ რვა სკალარულ განტოლებათა სისტემას ექვსი $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ სიდიდის განსასაზღვრავად. მოცემულ სიდიდეებად ითვლებიან ρ, j_x, j_y, j_z . ამგვარად, განტოლებათა რაოდენობა აღემატება უცნობ სიდიდეთა რაოდენობას და (7.1) სისტემა გვეჩვენება გადაჭარბებულად, მაგრამ სინამდვილეში ეს თავსებადი განტოლებათა სისტემაა, რადგანაც (II), (III) და (I), (IV) განტოლებებს გაჩნიათ ერთნაირი დიფერენციალური შედეგი და ამით არიან ისინი ერთმანეთთან დაკავშირებულნი.

(II) და (III) განტოლებებიდან ნათლად ჩანს, რომ (II)–ს ორივე მხარეზე ოპერაცია div -ს გამოყენებით და (III) განტოლების ორივე მხარის გადიფერენციალებით დროის მიხედვით მივიღებთ, რომ (III) განტოლება (II) განტოლების შედეგია.

ანალოგიურად, (3.6) მუხტის შენახვის კანონის გათვალისწინებით, (IV) განტოლება შეიძლება განვიხილოთ როგორც (I) განტოლების დიფერენციალური შედეგი. ამისათვის გამოვიყენოთ (I) განტოლების მიმართ ოპერაცია div , გვექნება:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} \tag{7.2}$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$$

გვექნება:

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (7.3)$$

თუ შევადარებთ (7.3) (3.6)–ს, დავინახავთ, რომ

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.4)$$

ე.ი. მიიღება (III) განტოლება. ამრიგად, (III) განტოლება (I) – ის შედეგია.

დავწეროთ მაქსველის განტოლებები ინტეგრალური ფორმით. მაქსველის განტოლება:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

შეიძლება წარმოვადგინოთ ინტეგრალური ფორმით, თუ გამოვთვლით განტოლების ორივე მხარეში შესაბამისი სიდიდეების ნაკადს L კონტურით შემოსაზღვრულ S ზედაპირზე და ვისარგებლებთ სტოქსის თეორემით. მაგ., (I) განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} \quad (7.5)$$

სტოქსის თეორემის თანახმად

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \oint_L \vec{B} d\vec{l} \quad (7.6)$$

ამიტომ:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} \quad (7.7)$$

სადაც

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

S ზედაპირზე გამავალი დენის ძალაა. (7.7) განტოლება წარმოადგენს (I) განტოლების ინტეგრალურ ფორმას. ანალოგიურად (II) განტოლება გარდაიქმნება ასე:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (7.8)$$

(III) და (IV) განტოლებები გარდაიქმნებიან ინტეგრალური ფორმით, თუ მოვახდენთ ამ განტოლებების ორივე მხარის ინტეგრაციას S ზედაპირით შემოსაზღვრული V მოცულობის მიხედვით და ვისარგებლებთ გაუს–ოსტროგრადსკის თეორემით:

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (7.9)$$

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.10)$$

სადაც

$$q = \int_V \rho dV$$

V მოცულობაში არსებული მუხტის სიდიდეა.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. დაამტკიცეთ, რომ მაქსველის განტოლება $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ არის მაქსველის განტოლების $\text{rot} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ შედეგი.
2. დაამტკიცეთ, რომ მაქსველის განტოლება $\text{div} \vec{B} = 0$ არის მაქსველის განტოლების $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ განტოლების შედეგი.

§ 8. ენერჯის შენახვის კანონი ელექტრომაგნიტური ველისათვის

მაქსველის განტოლებებიდან გამომდინარე შედეგები რომ შევადაროთ ექსპერიმენტს, აუცილებელია გამოვსახოთ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯია ველის ვექტორებით. ამ გამოსახულების მისაღებად განვიხილოთ რაიმე V მოცულობა, რომელიც S ზედაპირითაა შემოსაზღვრული. ამ მოცულობის შიგნით არის ელექტრომაგნიტური ველი და მოძრავი მუხტები. ელექტრული ველი ასრულებს მუშაობას მუხტების მოძრაობის მდგომარეობის შესაცვლელად. მაგნიტური ველის მხრიდან მოქმედი ძალა მუშაობას არ ასრულებს, რადგან იგი სიჩქარის მართობულია. q მუხტის dr მანძილზე გადაადგილებისას \vec{E} დაძაბულობის ველში ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = q \vec{E} d\vec{r}$$

მაშინ სიმძლავრე, ე.ი. დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა ტოლი იქნება:

$$dP = \frac{dA}{dt} = q \vec{E} \frac{d\vec{r}}{dt} = q(\vec{E} \vec{v}) = (\vec{E} \vec{j}) dV$$

ამიტომ სრული სიმძლავრე V მოცულობაში იქნება:

$$P = \int_V \vec{E} \vec{j} dV \quad (8.1)$$

რომელიც ახასიათებს ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯის V მოცულობაში არსებული მუხტების კინეტიკურ ენერჯიად გარდაქმნას. ენერჯის ამ გარდაქმნისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ენერჯის შენახვის კანონი, რადგანაც მისი საყოველთაო სამართლიანობა ექვს

გარეშეა. ამისათვის აუცილებელია დავრწმუნდეთ, რომ არ არსებობს ენერჯიის სხვა ფორმები და წყაროები, გარდა განსახილველისა. მოცემულ შემთხვევაში ეს ცხადია.

გავითვალისწინოთ (8.1) ტოლობაში j – ის მნიშვნელობა მაქსველის (I) განტოლებიდან, გვექნება:

$$P = \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} dV - \epsilon_0 \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV \quad (8.2)$$

ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი თანაფარდობით:

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - [\text{div} \vec{E} \vec{B}] \quad (8.3)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.1., II) განტოლებას $\text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ -სთვის (8.2) ფორმულა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$P = -\frac{1}{\mu_0} \int_V [\text{div} \vec{E} \vec{B}] dV - \int_V \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad (8.4)$$

მივიღოთ მხედველობაში შემდეგი ცხადი ფორმულები:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E^2, \quad \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B^2$$

და რომ V მოცულობა არ არის დროზე დამოკიდებული. მაშინ თუ შევცვლით დიფერენცირებისა და ინტეგრირების რიგს, (8.4) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე წევრში, მივიღებთ:

$$\int_V \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \equiv \frac{\partial W}{\partial t} \quad (8.5)$$

(8.4) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალისათვის ვისარგებლოთ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემით:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_V \text{div} [\vec{E} \vec{B}] dV = \frac{1}{\mu_0} \int_S \text{div} [\vec{E} \vec{B}] dS = \int_S \vec{\Pi} dS \quad (8.6)$$

სადაც

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}]$$

მაშინ (8.4) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int_S \vec{\Pi} dS \quad (8.7)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს ენერგიის შენახვის კანონს ელექტრომაგნიტური ველისათვის. (8.6) და (8.7) ფორმულებში ზედაპირი აღნიშნულია S – ით.

ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია და პოიტინგის ვექტორი. სიდიდე,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) dV \quad (8.8)$$

წარმოადგენს V მოცულობაში ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიას. (8.7) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ამ მოცულობაში ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია იცვლება ორი ფაქტორით: დროის ერთეულში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობითა და V მოცულობის შემომსაზღვრელი S ზედაპირიდან ენერგიის ნაკადით. რადგან (8.7) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მეორე წევრი ითვალისწინებს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ნაკადს V მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე, ამიტომ ცხადია, რომ ვექტორი

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}]$$

ახასიათებს ელექტრომაგნიტური ველის მოძრაობას სივრცეში და მას უწოდებენ პოიტინგის ვექტორს.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. ჩაწერეთ q მუხტის dr მანძილზე გადაადგილებისას ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მუშაობა.
2. ჩაწერეთ q მუხტის dr მანძილზე გადაადგილებისას ელექტრული ველის სიმძლავრე
3. გამოთვალეთ ელექტრომაგნიტური ველის სრული სიმძლავრე.
4. ჩაწერეთ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია.
5. განმარტეთ პოიტინგის ვექტორის ფიზიკური არსი.

ლექცია 4. სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი

- §9. სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები.
- §10. სასაზღვრო პირობები დამუხტული ზედაპირების არსებობისას:
 - ა) სასაზღვრო პირობა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის;
 - ბ) სასაზღვრო პირობა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელისათვის.

§ 9. სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები

ველის დამახასიათებელი სიდიდეების დროის მიხედვით მუდმივობისას (7.1) მაქსველის განტოლებები ვაკუუმისათვის იყოფა ორ ჯგუფად:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{I}), \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II}) \quad (9.1)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ სტაციონარულ შემთხვევაში ელექტრულ და მაგნიტურ ველს შორის კავშირი არ გვაქვს და ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ ერთმანეთისაგან იზოლირებულად. როგორც (9.1) განტოლებები გვიჩვენებენ, ამ შემთხვევაში მაგნიტური ველის ერთადერთ წყაროს წარმოადგენს გამტარებლობის დენი, ხოლო ელექტრული ველისას კი – მუხტები. სტაციონარულ შემთხვევაში მაგნიტური ველის წარმოშობას ცვლადი ელექტრული ველით და ელექტრული ველის წარმოშობას ცვლადი მაგნიტური ველით ადგილი არ აქვს. არსებობს **მაგნიტური ველის კიდევ ერთი წყარო – ელემენტარული ნაწილაკების მაგნიტური მომენტი, რომელიც დაკავშირებულია მათ სპინთან**. მაგრამ მაქსველის კლასიკური თეორია ვერ ხსნის მაგნიტური მომენტის ბუნებას.

ელექტროსტატიკური მოვლენების არე ხასიათდება არა მარტო ელექტრული ველის სტაციონარულობით, არამედ მოთხოვნით ელექტრული დენების არარსებობის შესახებ. ამიტომ ვაკუუმში ელექტროსტატიკის განტოლებებს წარმოადგენს (9.1) ფორმულების პირველი წყვილი დამატებითი პირობის $\vec{j} = 0$ გათვალისწინებით.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის სტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველის ძირითადი მახასიათებლები?
2. როგორ ჩაიწერება მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში სტაციონარული ველის პირობებში?
3. რატომ შეიძლება განვიხილოთ ელექტრული და მაგნიტური ველები დამოუკიდებლად სტაციონარულ შემთხვევაში?
4. რატომ არის გამტარებლობის დენი მაგნიტური ველის ერთადერთი წყარო სტაციონარულ პირობებში?
5. რა როლს ასრულებს ელემენტარული ნაწილაკების მაგნიტური მომენტი მაგნიტური ველის წარმოქმნაში?

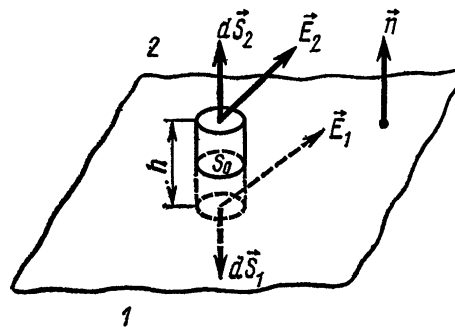
6. რატომ ვერ ხსნის მაქსველის კლასიკური თეორია ელემენტარული ნაწილაკების მაგნიტური მომენტის ბუნებას?
7. ჩაწერეთ ელექტროსტატიკური ველის განტოლებები ვაკუუმში?

§ 10. განტოლებები და სასაზღვრო პირობები დამუხტული ზედაპირების არსებობისას

დავუშვათ, რომ სივრცეში მატერიალური სხეულები არ არსებობენ. იბადება კითხვა, როგორ შეიძლება დარჩეს მუხტები უძრაობის მდგომარეობაში, თუ მათზე მოქმედებს ელექტრული ველი? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა ელექტროსტატიკის ჩარჩოებში შეუძლებელია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მუხტების რომელიღაც წონასწორული ელექტროსტატიკური კონფიგურაცია შეუძლებელია. ამიტომ ვაკუუმში უძრავი მუხტების სურათი ელექტროსტატიკური ველის პირობებში წარმოადგენს იდეალიზაციას. დავუშვათ, რომ არსებობს გარკვეული ძალები, რომლებიც აკავებენ მუხტებს მათ ადგილებში. ჩავთვალოთ, რომ ეს ძალები ისეთია, რომ მუხტებით შექმნილ ელექტრულ ველს არ ცვლიან.

ანალოგიურად შეიძლება ვისარგებლოთ ზედაპირული მუხტის ცნებით, თუ დავუშვებთ, რომ მუხტი სივრცეში მოთავსებულია რომელიღაც ზედაპირზე და შეკავებულია გარკვეული ძალებით, რომელთა ბუნებაც არ ზუსტდება. არსებითია მხოლოდ ის, რომ ეს ძალები არ უნდა იწვევდნენ ზედაპირული მუხტებით შექმნილი ველის ცვლილებას. ზედაპირული მუხტების სიმკვრივე, ე.ი. ზედაპირის ერთეულ ფართზე მუხტის სიდიდე აღვნიშნოთ σ – თი. მაშასადამე, ზედაპირის dS ელემენტზე მუხტის სიდიდე ტოლია σdS .

წარმოვიდგინოთ σ ზედაპირული მუხტის მქონე რაღაც ზედაპირი, მაშინ მის მიერ შექმნილი ელექტრული ველი მიმართულია ზედაპირის სხვადასხვა მხარეს ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით. მაშასადამე, ელექტრული ველის დაძაბულობა განიცდის ნახტომისებურ ცვლილებას დამუხტულ ზედაპირზე, ე. ი. არ წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას. განტოლებებს, რომლებიც აკავშირებენ ელექტრული ველის დაძაბულობას ზედაპირის სხვადასხვა მხარეს, უწოდებენ სასაზღვრო პირობებს.



ნახ.10.1

ა) სასაზღვრო პირობა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის.

ეს პირობა მიიღება მაქსველის განტოლებიდან:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.1)$$

განვიხილოთ საკმაოდ მცირე ცილინდრი, რომელსაც კვეთს 1 და 2 გარემოს გამყოფი ზედაპირი (იხ. ნახ.10.1)

გამყოფი ზედაპირის ნორმალის დადებით მიმართულებად ჩავთვალოთ მიმართულება 1 გარემოდან 2 გარემოსაკენ. ცილინდრის ფუძეების ფართია S_2 და S_1 , ამასთან, ფუძეების ზედაპირი გამყოფი ზედაპირის პარალელურია. აღვნიშნოთ ცილინდრის ზედაპირთან გადაკვეთის ფართი S_0 – ით, გვერდითი ზედაპირის ფართი კი – $S_{\partial\partial}$, ცილინდრის სიმაღლე h – ით. მოვახდინოთ (10.1) განტოლების ორივე მხარის ინტეგრაცია ცილინდრის მოცულობის მიხედვით:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (10.2)$$

ვისარგებლოთ გაუს–ოსტროგრადსკის თეორემით, მივიღებთ:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\partial\partial}} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (10.3)$$

$d\vec{S}$ ვექტორი მიმართულია \vec{n} ნორმალის გასწვრივ S_2 ზედაპირის მიხედვით ინტეგრირების დროს და საპირისპირო მიმართულებით S_1 –ით ინტეგრირებისას. რადგანაც ცილინდრი საკმარისად მცირეა, ამიტომ \vec{E} ვექტორის ცვლილება ყოველ გარემოში ინტეგრირებისას შეიძლება უგულებელვყოთ, მაშინ გვექნება:

$$\int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = |\vec{E}_2| S_2 \cos(\widehat{\vec{E}_2, \vec{n}}) = E_{2n} S_2$$

$$E_{2n} = |\vec{E}_2| \cos(\widehat{\vec{E}_2, \vec{n}_2}) \quad (10.4)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $d\vec{S}$ ვექტორის მიმართულება S_2 ზედაპირზე ემთხვევა გამყოფი ზედაპირისადმი ჩვენს მიერ არჩეული ნორმალის დადებით მიმართულებას. E_{2n} - ის ინდექსში იგულისხმება \vec{E} ვექტორის ნორმალური მდგენელი მეორე გარემოში. ანალოგიურად გამოითვლება ინტეგრალი S_1 ზედაპირზე, მაგრამ $d\vec{S}$ ვექტორს ამ ზედაპირზე გააჩნია \vec{n} ნორმალის საწინააღმდეგო მიმართულება:

$$\int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = |\vec{E}_1| S_1 \cos(\widehat{\vec{E}_1, \vec{n}_1}) = -E_{1n} S_1 \quad (10.5)$$

გვერდით ზედაპირზე ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ საშუალო თეორემის მიხედვით:

$$\int_{S_{\partial\partial}} \vec{E} d\vec{S} = \langle E_{\partial\partial} \rangle S_{\partial\partial} \quad (10.6)$$

სადაც $\langle E_{\partial\partial} \rangle$ – ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის საშუალო მნიშვნელობაა გვერდით ზედაპირზე. გავითვალისწინოთ (10.4), (10.5) და (10.6) ფორმულები (10.3) – ში, გვექნება:

$$E_{2n} S_2 - E_{1n} S_1 + \langle E_{\partial\partial} \rangle S_{\partial\partial} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (10.7)$$

ცხადია, რომ როცა $h \rightarrow 0$, მივიღებთ:

$$S_1 \rightarrow S_0, S_2 \rightarrow S_0, S_{\partial\partial} \rightarrow 0 \quad (10.8)$$

ამიტომ $h \rightarrow 0$ ზღვრულ შემთხვევაში გვექნება:

$$(E_{2n} - E_{1n})S_0 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (10.9)$$

რადგანაც

$$\frac{q}{S_0} = \sigma$$

ამიტომ:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (10.10)$$

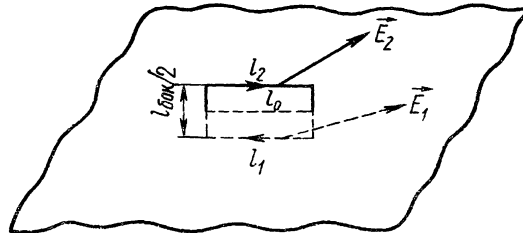
ამრიგად, ორი გარემოს გამყოფ ზედაპირზე ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნორმალ-მდგენელები განიცდიან წყვეტას, თუ გამყოფ ზედაპირზე არსებობს σ ზედაპირული სიმკვრივის მუხტი.

ბ) სასაზღვრო პირობა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელისათვის.

ეს პირობა მიიღება მაქსველის შემდეგი განტოლების დახმარებით:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \quad (10.11)$$

დავუშვათ, რომ გამყოფი ზედაპირი იკვეთება S ფართის მქონე საკმაოდ მცირე S ფართის მართკუთხედით, რომელიც შემოსაზღვრულია L კონტურით (იხ. ნახ.10.2)



ნახ.10.2

იგი კვეთს გამყოფ ზედაპირს l_0 წირის გასწვრივ. ჩავთვალოთ, რომ ფართის l_2 და l_1 გვერდები გამყოფი ზედაპირის პარალელურია. გამყოფი ზედაპირის გადამკვეთი გვერდის სიგრძე აღვნიშნოთ $l_{\partial\partial}$, მოვახდინოთ (10.11) განტოლების ინტეგრაცია S ზედაპირის მიხედვით:

$$\int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S} = 0 \quad (10.12)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარისათვის ვისარგებლოთ სტოქსის თეორემით:

$$\int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S} = \int_{l_2} \vec{E}d\vec{l} + \int_{l_1} \vec{E}d\vec{l} + \int_{l_{\partial\partial}} \vec{E}d\vec{l} \quad (10.13)$$

L კონტურის შემოვლის დადებით მიმართულებად ჩავთვალოთ ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულება, მაშინ:

$$\int_{l_2} \vec{E} d\vec{l} = |\vec{E}_2| l_2 \cos(\vec{E}_2, d\vec{l}_2) = E_{2t} l_2 \quad (10.14)$$

ანალოგიურად,

$$\int_{l_1} \vec{E} d\vec{l} = |\vec{E}_1| l_1 \cos(\vec{E}_1, d\vec{l}_1) = -E_{1t} l_1 \quad (10.15)$$

$l_{\partial\partial}$ – ზე ინტეგრალი გამოითვლება საშუალო მნიშვნელობის თეორემით:

$$\int_{l_{\partial\partial}} \vec{E} d\vec{l} = \langle E_{\partial\partial} \rangle l_{\partial\partial} \quad (10.16)$$

ამგვარად, (10.12) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$E_{2t} l_2 - E_{1t} l_1 + \langle E_{\partial\partial} \rangle l_{\partial\partial} = 0 \quad (10.17)$$

დავუშვათ, $l_{\partial\partial} \rightarrow 0$, მაშინ ცხადია, რომ მთელი S ზედაპირი მიისწრაფვის l_0 წრფისაკენ:

$$l_1 \rightarrow l_0, \quad l_2 \rightarrow l_0, \quad l_{\partial\partial} \rightarrow 0, \quad S \rightarrow 0 \quad (10.18)$$

მაშასადამე, ზღვრულ შემთხვევაში გვექნება:

$$(E_{2t} - E_{1t}) l_0 = 0$$

საიდანაც:

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (10.19)$$

ამგვარად, ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელები უწყვეტია. თუმცა ელექტრული ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელები კი ამ დროს განიცდიან წყვეტას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რატომ არის მუხტების უძრაობის პირობები ელექტროსტატიკისთვის იდეალიზაცია?
2. ჩაწერეთ ელექტროსტატიკური ველის განტოლებები ზედაპირული მუხტების არსებობისას.
3. განსაზღვრეთ ზედაპირული მუხტის სიმკვრივე.
4. რატომ განიცდის ელექტრული ველის დაძაბულობა ნახტომისებურ ცვლილებას დამუხტულ ზედაპირზე?
5. რას ნიშნავს ელექტრული ველის სასაზღვრო პირობები?
6. მიიღეთ სასაზღვრო პირობა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის.
7. რატომ განიცდის ნორმალური მდგენელი წყვეტას ზედაპირული მუხტის არსებობისას?
8. მიიღეთ ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელის სასაზღვრო პირობა.
9. ახსენით სტოქსის თეორემის მნიშვნელობა ტანგენციალური კომპონენტის უწყვეტობის დასამტკიცებლად.

10. რა განსხვავება ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის და ელექტრული ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალურ კომპონენტებს შორის?
11. რატომ შეიძლება ინდუქციის ტანგენციალური კომპონენტები განიცდიდნენ წყვეტას, ხოლო დაძაბულობის ვექტორი - არა?
12. როგორია სასაზღვრო ჰირობის მნიშვნელობა პრაქტიკულ გამოყენებებში, მაგალითად, კონდენსატორებში და ნახევარგამტარების მოწყობილობებში?

ლექცია 5. ელექტროსტატიკა. დიელექტრიკები

- §11. ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში;
- §12. ლაპლასისა და პუასონის განტოლებები; თანაბრად დამუხტული უსასრულო ფირფიტა;
- §13. გამტარები ელექტროსტატიკურ ველში;
- §14. დიელექტრიკის პოლარიზაცია და მულტიპოლები;
- §15. დიელექტრიკები ელექტროსტატიკურ ველში;
- §16. ელექტრული ველის ენერგია;
- §17. მექანიკური ძალები ელექტრულ ველში.

§11. ელექტროსტატიკური ველი ვაკუუმში

ელექტროსტატიკური ველის განტოლებებს და სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

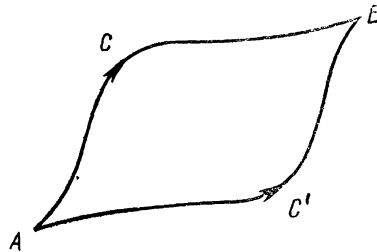
$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (11.1)$$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho, E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (11.2)$$

ისეთ ვექტორულ ველს, რომლის როტორიც ნულის ტოლია, პოტენციალური ველი ეწოდება. ელექტროსტატიკური ველი წარმოადგენს პოტენციალურ ველს, რადგანაც

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (11.3)$$

ელექტროსტატიკურ ველში მუხტის ერთი წერტილიდან მეორეში გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა არ არის დამოკიდებული იმ გზის ფორმაზე, რომელზედაც ხდება გადაადგილება, არამედ ამ გზის საწყისი და საბოლოო წერტილების მდებარეობაზე. იგი უშუალოდ გამომდინარეობს (11.3) პირობიდან. დავუშვათ, მოცემული გვაქვს ორი სხვადასხვა გზა C და C' , რომლებიც აკავშირებენ A და B წერტილებს (იხ. ნახ.11.1)



ნახ.11.1

ველის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა დადებითი ერთეულოვანი მუხტის გადაადგილებისას ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, რომელიც შედგება C და C' გზებისაგან, ტოლია:

$$\oint_{C, -C'} \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11.4)$$

სადაც S მოცემული კონტურის შემომფარგვლელი ზედაპირია. (11.4) ფორმულაში გამოყენებულია სტოქსის თეორემა და (11.3) პირობა. ამგვარად,

$$\int_{c,-c'} \vec{E} d\vec{l} = \int_c \vec{E} d\vec{l} + \int_{-c'} \vec{E} d\vec{l} = \int_c \vec{E} d\vec{l} - \int_{-c} \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (11.5)$$

ე.ი.

$$\int_c \vec{E} d\vec{l} = \int_{c'} \vec{E} d\vec{l} \quad (11.6)$$

C და C' გზები ნებისმიერია. ის გარემოება, რომ ველის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა არ არის დამოკიდებული იმ გზის ფორმაზე, რომლის გასწვრივაც გადაადგილდება მუხტი ორ წერტილს შორის, განაპირობებს ისეთი სკალარული φ ფუნქციის არსებობას, რომლის სხვაობით გზის საწყისი და საბოლოო წერტილებისათვის განისაზღვრება ეს მუშაობა. ამგვარი სკალარული φ ფუნქცია ცნობილია სკალარული პოტენციალის სახელწოდებით.

რადგანაც გრადიენტის როტორი ყოველთვის ნულის ტოლია, ამიტომ (11.3) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (11.7)$$

ნიშანი „-“ შემოტანილია ისტორიულად, და მას არანაირი პრინციპული მნიშვნელობა არ გააჩნია. ნიშანი მინუსის არსებობის გამო (11.7) ფორმულაში ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი მიმართულია პოტენციალის შემცირების მიმართულებით. (11.7) ფორმულის საფუძველზე (11.6) ინტეგრალის გამოსახულება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B (-grad\varphi \cdot d\vec{l}) = - \int_A^B d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B) \quad (11.8)$$

(11.8)–ში გათვალისწინებულია, რომ:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = grad\varphi \cdot d\vec{l} \quad (11.9)$$

$d\vec{l}$ – გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია dx , dy და dz . (11.8) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ორ წერტილს შორის მუხტის გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა მართლაც გამოისახება ამ წერტილების შესაბამისი პოტენციალთა სხვაობით.

თვით პოტენციალი წარმოადგენს დამხმარე სიდიდეს. მის რიცხვით მნიშვნელობას არანაირი ფიზიკური შინაარსი არ გააჩნია და არ შეიძლება გაიზომოს. ფიზიკური შინაარსი გააჩნია მხოლოდ პოტენციალთა სხვაობას, რომელიც შეიძლება ექსპერიმენტულად განისაზღვროს. მაგრამ ეს პოტენციალთა სხვაობა არ შეიცვლება, თუ სივრცის ყოველ წერტილში პოტენციალის მნიშვნელობას დავუმატებთ ერთსა და იმავე მუდმივ სიდიდეს, რადგანაც პოტენციალთა სხვაობის გამოთვლის დროს ეს მუდმივი გაბათილდება. ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ პოტენციალი განსაზღვრულია მხოლოდ ადიტიური მუდმივის სიზუსტით, რომელიც შეიძლება შერჩეული იქნას ნებისმიერად. თუ ვისარგებლებთ ამ გარემოებით, მაშინ პოტენციალი ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილში შეიძლება გავხადოთ წინა მნიშვნელობის შესაბამისი სიდიდის ტოლი. მაშინ ყველა დანარჩენ წერტილებში პოტენციალი აღმოჩნდება ცალსახად განსაზღვრული. სკალარულ პოტენციალზე ცალსახობის მინიჭების ასეთ პროცედურას უწოდებენ **პოტენციალის ნორმირებას**. პრაქტიკულ ელექტროტექნიკაში, პოტენციალის ნორმირების პირობად ირჩევენ შემდეგს: თვლიან, რომ დედამიწის პოტენციალი ნულის ტოლია.

თეორიულ ფიზიკაში კი პოტენციალს ნულის ტოლად თვლიან უსასრულობაში, თუ მუხტები განლაგებულია სივრცის სასრულო მოცულობაში.

ასეთი ნორმირების დროს პოტენციალი $\varphi(\infty) = 0$. (11.8) ტოლობა იმ შემთხვევაში, როდესაც B წერტილი უსასრულობაშია, გადაიწერება შემდეგი თანაფარდობის სახით:

$$\varphi(A) = \int_A^{\infty} \vec{E} d\vec{l} \quad (11.10)$$

სადაც საინტეგრაციო გზის ფორმა ნებისმიერია. პრაქტიკული გამოთვლებისათვის ეს გზა მიზანშეწონილია არჩეულ იქნას ინტეგრირებისათვის მოსახერხებელი ფორმით.

წერტილოვანი მუხტის პოტენციალი. q წერტილოვანი მუხტის ველი წარმოადგენს სფერული სიმეტრიის ველს. მაშასადამე, წერტილოვანი მუხტის პოტენციალიც ასევე სფერული სიმეტრიისაა. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ r მანძილზე წერტილოვან მუხტსა და იმ წერტილს შორის, სადაც ველები პოტენციალს. მივიღოთ მხედველობაში, რომ წერტილოვანი მუხტის მიერ შექმნილი ველის დაძაბულობა მისგან r მანძილზე განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (11.11)$$

თუ ვისარგებლებთ (11.10) ფორმულით, მივიღებთ:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad (11.12)$$

ამგვარად, q წერტილოვანი მუხტის პოტენციალი r მანძილზე პროპორციულია მუხტის სიდიდის ფარდობისა ამ მანძილთან. თუ გვეცოდინება პოტენციალი, როგორც კოორდინატების ფუნქცია, მაშინ რთული არ არის ვიპოვოთ ელექტრული ველის დაძაბულობა (11.7) ფორმულის საფუძველზე.

წერტილოვან მუხტთა სისტემის პოტენციალი. დავუშვათ, მოცემული გვაქვს ორი წერტილოვანი q_1 და q_2 მუხტი, რომლებიც ქმნიან \vec{E}_1 და \vec{E}_2 ველებს. მაშინ ამ ორი მუხტით შექმნილი ველის დაძაბულობა ტოლია:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -grad\varphi_1 - grad\varphi_2 = -grad\varphi,$$

სადაც $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. ამრიგად, ამ ორი წერტილოვანი მუხტით შექმნილი φ პოტენციალი ტოლია ცალკეული წერტილოვანი მუხტებით შექმნილი პოტენციალების ჯამისა. ამიტომ q_i მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი პოტენციალი ტოლი იქნება:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

სადაც r_i წარმოადგენს მანძილს q_i მუხტიდან იმ წერტილამდე, სადაც ველები ველის პოტენციალს. თუ იმ წერტილის კოორდინატებს, სადაც გამოითვლება ველის პოტენციალი, აღვნიშნავთ (x, y, z) , ხოლო q_i მუხტის კოორდინატებს (x_i, y_i, z_i) , მაშინ უკანასკნელი ფორმულა უფრო დაწვრილებით შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \quad (11.13)$$

უწყვეტად განაწილებული მუხტების პოტენციალები. ρ სიმკვრივით უწყვეტად განაწილებული მუხტების შემთხვევაში მთლიან მოცულობას ყოფენ უსასრულოდ მცირე ΔV_i ელემენტებად, რომლებიც შეიცავენ $\rho_i \Delta V_i$ მუხტებს. ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $\Delta V_i \rightarrow 0$, ამ მუხტებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ (11.13) ფორმულა (წერტილოვან მუხტთა სისტემის პოტენციალი). შედეგად მივიღებთ:

$$\varphi(x, y, z) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho_i q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (11.14)$$

თუ მუხტი განაწილებულია, σ ზედაპირული სიმკვრივით S ზედაპირზე, მაშინ წინა შემთხვევის ანალოგიურად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma d\vec{S}}{\vec{r}} \quad (11.15)$$

თუ გვაქვს როგორც ზედაპირული, ასევე მოცულობითი მუხტები, მაშინ (11.14) და (11.15) ფორმულები შეიძლება გავაერთიანოთ და ჩავწეროთ ერთი ფორმულის სახით:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\vec{V}}{\vec{r}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma d\vec{S}}{\vec{r}} \quad (11.16)$$

შევნიშნოთ, რომ პოტენციალის პირდაპირი გამოთვლის ეს გზა ყოველთვის არახელსაყრელია, რადგანაც ზოგჯერ მიყვავართ ძალიან რთულ გამოთვლებამდე. მეორე მხრივ, ამ ფორმულის გამოყენება მოითხოვს სპეციალურ ანალიზს, თუ მუხტები სივრცის სასრულო მოცულობაში არ არის განლაგებული. ამ შემთხვევაში ხელსაყრელია პოტენციალის პოვნის ამოცანა დაყვანილ იქნას დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. ჩაწერეთ ელექტროსტატიკური ველის განტოლებები ვაკუუმში.
2. რატომ არის ელექტროსტატიკური ველი პოტენციალური?
3. არის თუ არა ელექტროსტატიკურ ველში შესრულებული მუშაობა დამოკიდებული მუხტის გადაადგილების გზაზე?
4. რა არის სკალარული პოტენციალი და როგორ განისაზღვრება იგი?
5. მიიღეთ ელექტრული ველის დაძაბულობის გამოსახულება პოტენციალის საშუალებით.
6. განისაზღვრეთ წერტილოვანი მუხტის პოტენციალი.
7. რაში მდგომარეობს ელექტროსტატიკური ველების სუპერპოზიციის პრინციპი?
8. განსაზღვრეთ უწყვეტად განაწილებული მუხტების პოტენციალი?

§12. ლაპლასისა და პუასონის განტოლებები

ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამონახსნიც უნდა იყოს სკალარული პოტენციალი φ . ვისარგებლოთ მაქსველის განტოლებით:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.1)$$

და კავშირით ელექტრული ველის დაძაბულობასა და პოტენციალს შორის:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (12.2)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi \quad (12.3)$$

სადაც ∇^2 – ლაპლასის ოპერატორია.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.4)$$

თუ გავითვალისწინებთ (12.2) ფორმულას (12.1) – ში, მივიღებთ:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.5)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს **პუასონის განტოლებას**. სივრცის იმ არეში, სადაც $\rho = 0$, ეს განტოლება გადადის ლაპლასის განტოლებაში:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (12.6)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, φ პოტენციალი ყველგან სასრულო სიდიდეა. ასევე ცხადია, რომ φ პოტენციალის წარმოებულები კოორდინატებით ყველგან უნდა იყოს სასრულო სიდიდე, რადგანაც ამ წარმოებულების უსასრულობა მიუთითებს ელექტრული ველის უსასრულობაზე, რასაც, ფიზიკური თვალსაზრისით აზრი არ აქვს. მათი სასრულობა მიუთითებს φ პოტენციალის უწყვეტობაზე. ამგვარად, შეიძლება ვთქვათ, რომ φ პოტენციალი წარმოადგენს უწყვეტ და სასრულო ფუნქციას კოორდინატების მიხედვით სასრულო წარმოებულებით. ეს არის ის მოთხოვნა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს (12.5) განტოლების ამონახსნი.

მთელ რიგ შემთხვევებში ხელსაყრელია ვიპოვოთ პოტენციალი (12.5) პუასონის დიფერენციალური განტოლების დახმარებით. ეს განპირობებულია იმით, რომ თუ პოტენციალს გავითვალისწინებთ (12.2) ფორმულაში, მაშინ (11.3) განტოლება დაკმაყოფილდება და სამი ფუნქციის $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$, $E_z(x, y, z)$ პოვნის ამოცანა დაიყვანება ერთი $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციის პოვნაზე. პუასონის განტოლების გამოყენების მეორე მნიშვნელოვანი უპირატესობა პოტენციალის გამოთვლისათვის მდგომარეობს მის ფართო გამოყენებაში. ფორმულა (11.16) გულისხმობს, რომ ყველა მუხტი იმყოფება სივრცის სასრულო მოცულობაში, რის გამოც აზრი აქვს პოტენციალის ნორმირების პირობას, კერძოდ, უსასრულობაში მისი ნულთან ტოლობის პირობას. პუასონის განტოლება არ უშვებს პოტენციალის გარკვეულ ნორმირებას და მუხტების არარსებობას უსასრულობაში.

თანაბრად დამუხტული უსასრულო ფირფიტა. მაგალითის სახით განვიხილოთ მუდმივი ρ მოცულობითი სიმკვრივის მუხტით თანაბრად დამუხტული a სისქის უსასრულო ფირფიტა და გამოვთვალოთ მის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალი. ვიგულისხმობთ, რომ მთელ სივრცეში

ფირფიტის ჩათვლით დიელექტრიკული შედენვადობა მუდმივია და ϵ_0 ტოლია. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ X და Y ღერძები მდებარეობდეს ფირფიტის შუა სიბრტყეში. ცხადია, რომ პოტენციალი ამ შემთხვევაში დამოკიდებული იქნება მხოლოდ და მხოლოდ z კოორდინატზე, რადგანაც ფირფიტა X და Y ღერძების მიმართულებით უსასრულოა და დამუხტულია თანაბრად. ამიტომ (12.5) პუასონის განტოლება სივრცის სხვადასხვა არეში ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} &= 0, & z &\leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dz^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}, & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}, \\ \frac{d^2\varphi_3}{dz^2} &= 0, & z &> \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

ამ განტოლებების ამონახსნები კი გამოისახება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1z + B_1, \\ \varphi_2 &= -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + A_2z + B_2, \\ \varphi_3 &= A_3z + B_3. \end{aligned} \quad (12.8)$$

ნორმირების პირობად ავირჩიოთ შემდეგი: დავუშვათ, რომ პოტენციალი შუა სიბრტყეში ნულის ტოლია $\varphi_2(0) = 0$. (12.8) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ამისათვის აუცილებელია დავუშვათ, რომ

$$\vec{B}_2 = 0 \quad (12.9)$$

სიმეტრიის პირობიდან გამომდინარე, ფირფიტის შუა სიბრტყეში ველი ნულის ტოლია ($Z=0$). აქედან კი ვღებულობთ ტოლობას:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad A_2 = 0. \quad (12.10)$$

ვისარგებლოთ პოტენციალისა და მისი წარმოებულების უწყვეტობის პირობით $z = \pm a/2$:

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(-\frac{a}{2}\right) &= \varphi_2\left(-\frac{a}{2}\right); & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{a}{2}} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{a}{2}}, \\ \varphi_2\left(\frac{a}{2}\right) &= \varphi_3\left(\frac{a}{2}\right); & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=\frac{a}{2}} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} \Big|_{z=\frac{a}{2}}, \end{aligned} \quad (12.11)$$

მუდმივებისათვის კი ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho a}{2\epsilon_0}, & B_1 &= \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, \\ A_3 &= -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}, & B_3 &= \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}, \end{aligned}$$

მაშინ (12.8) განტოლებების ამონახსნები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi_1 = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \frac{z + \frac{a}{4}}{2} \quad z < -\frac{a}{2};$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z^2 & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}; \\ \varphi_1 &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{a}{2} \left(-z + \frac{a}{4}\right) & z > \frac{a}{2}; \end{aligned} \quad (12.12)$$

ველისათვის $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ ვპოულობთ:

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} z & z < -\frac{a}{2}; \\ E_2 &= -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z & -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}; \\ E_2 &= -\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{a}{2} & z > \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

ამგვარად, ფირფიტის შუა სიბრტყიდან მის ზედაპირამდე ველი იზრდება მანძილის მიხედვით, რომელიც ფირფიტის სხვადასხვა მხარეს მიმართულია საპირისპირო მიმართულებებით. ფირფიტის ზედაპირზე კი ველი აბსოლუტური სიდიდით აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ფირფიტის გარეთ ველი მუდმივია და ამ მაქსიმალური მნიშვნელობის ტოლია.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. ჩამოაყალიბეთ ლაპლასისა და პუასონის განტოლებების ფიზიკური ინტერპრეტაცია.
2. მიიღეთ პუასონის განტოლება.
3. განიხილეთ ლაპლასის განტოლების გამოყენების შემთხვევები.
4. როგორ ვპოულობთ პოტენციალს პუასონის დიფერენციალური განტოლების დახმარებით?
5. განსაზღვრეთ თანაბრად დამუხტული უსასრულო ფირფიტის პოტენციალი.
6. როგორ გამოითვლება ველის დაძაბულობა თანაბრად დამუხტული უსასრულო ფირფიტის გარშემო?

§ 13. გამტარები ელექტროსტატიკურ ველში

გამტარებს უწოდებენ ისეთ სხეულებს, რომლებშიც ელექტრული ველის არსებობისას ადგილი აქვს მუხტების მოძრაობას, ე. ი. აღიძვრება ელექტრული დენი. მათემატიკურად გამტარები ხასიათდება იმით, რომ მათი გამტარებლობა $\gamma \neq 0$. რადგანაც ელექტროსტატიკაში განიხილავენ უძრავი მუხტების შემთხვევას ($\vec{j} = 0$), ამიტომ განტოლებიდან

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = 0 \quad (13.1)$$

გამომდინარეობს, რომ გამტარში მუხტების მოძრაობის არ არსებობისას, ე. ი. ელექტროსტატიკური წონასწორობის დროს:

$$\vec{E} = 0 \quad (13.2)$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ გამტარში ველი ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როდესაც მასში არ არსებობს დენი, ხოლო მუხტები იმყოფებიან წონასწორობის მდგომარეობაში. როდესაც გამტარის შიგნით არსებობს დენი, ელექტრული ველის დაძაბულობა, რომელიც განაპირობებს მის არსებობას, განსხვავებულია ნულისაგან.

რადგანაც ელექტროსტატიკური წონასწორობის დროს გამტარის შიგნით ველი არ არსებობს, ამიტომ:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (13.3)$$

განტოლებიდან:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (13.4)$$

გამომდინარეობს, რომ მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე გამტარის შიგნით ნულის ტოლია:

$$\rho = 0 \quad (13.5)$$

გამტარში მუხტები კონცენტრირდებიან მის ზედაპირზე ატომური ზომის სისქის ფენაში. თუ გამტარი იმუხტება, მაშინ განზიდულობის ძალების არსებობის გამო ერთსახელიანი მუხტები გადანაწილდებიან ზედაპირზე ისე, რომ გამტარის შიგნით ველი არ არსებობს. თუ ამის შემდეგ გამტარს შევითანთ გარე ელექტროსტატიკურ ველში, მაშინ მუხტები გამტარის ზედაპირზე ხელმეორედ გადანაწილდებიან ისე, რომ გამტარის შიგნით ველი, რომელიც წარმოადგენს გარე ველისა და გამტარის ზედაპირული მუხტებით შექმნილი ველების ჯამს, რჩება კვლავ ნულის ტოლი. გარე ელექტროსტატიკურ ველში გამტარის შეტანის შედეგად გამტარის ზედაპირზე მუხტების გადანაწილების მოვლენას უწოდებენ ელექტროსტატიკური ინდუქციის მოვლენას.

გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში ელექტრული ველი შეიძლება ვიპოვოთ სასაზღვრო პირობების დახმარებით. ჩავთვალოთ გამტარის ზედაპირის ნორმალის დადებით მიმართულებად \vec{n} გარე ნორმალის მიმართულება. მაშინ სასაზღვრო პირობების დახმარებით ვღებულობთ:

$$\varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = \sigma, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (13.6)$$

ინდექსი 2 აღნიშნულია გამტარის გარე სივრცე, ხოლო ინდექსი 1 – გამტარის შიგნით სივრცე. (13.6) ფორმულაში გათვალისწინებულია, რომ გამტარის დიელექტრიკული შედრწევალობა ვაკუუმის დიელექტრიკული შედრწევალობის ტოლია. მივიღოთ მხედველობაში, რომ გამტარის შიგნით ელექტრული ველი ნულის ტოლია, ამიტომ:

$$E_{1n} = E_{1t} = 0, \quad (13.7)$$

(13.6) ფორმულიდან გამტარის გარეთ ველის მდგენელებისათვის გვაქვს:

$$E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad E_{2t} = 0 \quad (13.8)$$

ამგვარად, გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში, მისგან გარეთ, ველი მიმართულია გარე ნორმალის მიმართულებით, ხოლო აბსოლუტური სიდიდით ტოლია σ/ε :

$$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{n}}{\varepsilon} \quad (13.9)$$

გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში ველის ტანგენციალური მდგენელის არ არსებობა ცხადია: ასეთი მდგენელი გამოიწვევდა მუხტების მოძრაობას ზედაპირის გასწვრივ. წონასწორობა მყარდება მაშინ, როდესაც ასეთ მოძრაობას ადგილი არ აქვს, ე. ი. როდესაც ტანგენციალური მდგენელი ნულის ტოლია.

გამტარის პოტენციალი. რადგანაც გამტარის შიგნით ველის დაძაბულობა \vec{E} ნულის ტოლია, მთელი გამტარის გასწვრივ პოტენციალი მუდმივი იქნება. თუ $\varphi(A)$ და $\varphi(B)$ წარმოადგენენ გამტარის A და B წერტილების პოტენციალებს, მაშინ (11.8) ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$\varphi(A) - \varphi(B) = \int \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (13.10)$$

მაშასადამე,

$$\varphi(A) = \varphi(B)$$

ცხადია, რომ პოტენციალი დამოკიდებულია გამტარის ფორმაზე, მუხტზე და გარემომცველ სივრცეში არსებულ სხვა გამტარებზე მუხტების განაწილებაზე.

გამტარის ელექტროტევალობა. თუ განვიხილავთ განმხოლოებულ გამტარს, ე. ი. გამტარს, რომელიც დამორებულია სხვა სხეულებისაგან და მუხტებისაგან საკმარისად შორს, ისე რომ ამ სხეულებმა და მუხტებმა არ გამოიწვიონ განსახილველ გამტარზე მუხტების გადაწილება, მაშინ მისი პოტენციალი დამოკიდებული იქნება მხოლოდ გამტარის ფორმაზე და მუხტზე. გამტარის ტევალობას უწოდებენ განმხოლოებულ გამტარზე არსებული მუხტის სიდიდის ფარდობას მის პოტენციალთან:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (13.11)$$

თუ გამტარი განმხოლოებული არ არის, მაშინ მისი პოტენციალი დამოკიდებულია გამტარის ფორმაზე, მუხტებზე და სხვა გამტარების განლაგებაზე. ტევალობის ერთეულია ფარადი: 1ფ=1კ/1ვ.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. განსაზღვრეთ გამტარები ელექტროსტატიკურ ველში.
2. რატომ არ არსებობს ელექტრული ველი გამტარის შიგნით ელექტროსტატიკური წონასწორობისას?
3. ახსენით ელექტროსტატიკური ინდუქცია.
4. ჩამოაყალიბეთ სასაზღვრო პირობები გამტარის ზედაპირზე.
5. როგორ განისაზღვრება გამტარის პოტენციალი?
6. რა არის გამტარის ტევალობა და როგორ გამოითვლება იგი?

§ 14. დიელექტრიკის პოლარიზაცია და მულტიპოლები

დიელექტრიკები ხასიათდებიან იმით, რომ მათში არსებული მუხტები გარე ველის ზეგავლენით წაინაცვლებენ მხოლოდ მცირე მანძილებზე. ელექტრონები ატომებს არ ტოვებენ, ადგილი აქვს ატომის შიგნით მუხტების მხოლოდ გარკვეულ გადაწილებას. რადგანაც დადებითი მუხტები ცდილობენ წაინაცვლონ გარე ველის მიმართულებით, ხოლო უარყოფითი მუხტები კი – ველის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მთლიანობაში ატომი რჩება ნეიტრალური, მაგრამ დადებითი და უარყოფითი მუხტების „განცალკევების“ შემთხვევაში ეს ნეიტრალური ატომი ქმნის ელექტრულ ველს გარე სივრცეში, რომელიც იკრიბება თავდაპირველად მოდებულ ელექტრულ ველთან. დიელექტრიკებში მუხტების განაწილების ცვლილებას მოდებული ელექტრული ველის ზეგავლენით უწოდებენ პოლარიზაციას. ეს არის პოლარიზაციის პირველი ფაქტორი. პოლარიზაციის მეორე ფაქტორი მდგომარეობს შემდეგში: მოლეკულებს შეიძლება ჰქონდეთ მუხტების ასიმეტრიული განაწილება გარე ელექტრული ველის არ არსებობის დროს, რის შედეგადაც ნეიტრალური მოლეკულა გარე სივრცეში ქმნის ელექტრულ ველს. ასეთი მოლეკულების მქონე დიელექტრიკის გარე ელექტრულ ველში შეტანის

შედეგად ადგილი აქვს მოლეკულების სივრცეში ხელახალ ორიენტაციას. ეს მოვლენა ასევე ცნობილია პოლარიზაციის სახელწოდებით.

მოლეკულებში მუხტების განაწილების რაოდენობრივი მახასიათებელი. მულტიპოლური. დავუშვათ, სივრცის რაიმე მოცულობაში მუხტია განაწილებული. მაშინ მოცულობის გარეთ პოტენციალი და მუხტის განაწილება ხელსაყრელია წარმოვადგინოთ უსასრულო მწკრივის სახით, რომლის წევრებიც ჩვეულებრივ, საკმარისად სწრაფად მცირდება.

ათვლის კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ მუხტების განაწილების არის შიგნით. მაშინ \vec{r} წერტილში შექმნილი ველის პოტენციალისათვის გვექნება:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (14.1)$$

ჩვენ გვინტერესებს სივრცის ის არე, რომლისთვისაც $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$, ამიტომ ხელსაყრელია გავშალოთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება მწკრივად $1/r$ - ის მიხედვით, რაც თავის მხრივ დაიყვანება ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ - ის შესაბამის გამლაზე (გაძლა მულტიპოლურების მიხედვით).

ამ შემთხვევაში გაძლა დაიყვანება ტეილორის მწკრივზე:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} + x'_3 \frac{\partial}{\partial x'_3} \right)^n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|_{|\vec{r}'=0}}, \quad (14.2)$$

ამ ფორმულის ჩანაწერის გამარტივებისათვის გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები: $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$. პირველი სამი წევრის გამოთვლა ელემენტარულია, შედეგად ვღებულობთ:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_i x'_i x_i + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j + \dots \quad (14.3)$$

გავითვალისწინოთ (14.3) ფორმულა (14.1) - ში, მაშინ პოტენციალისათვის მივიღებთ:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{p\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right), \quad (14.4)$$

სადაც

$$q = \int_V \rho(\vec{r}') dV' \quad (14.5 \text{ ა})$$

სისტემის სრული მუხტია,

$$p = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (14.5 \text{ ბ})$$

მუხტთა სისტემის დიპოლური მომენტი,

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV' \quad (14.6)$$

მუხტთა სისტემის კვადრუპოლური მომენტი. მწკრივის მომდევნო წევრები წარმოადგენენ უფრო მაღალი რიგის მულტიპოლებს და სწრაფად ეცემიან, როცა $r' \ll r$.

თუ ეს სისტემა მთლიანობაში ელექტრულად ნეიტრალურია, როგორც მაგალითად, მოლეკულა, მაშინ $q = 0$ და გაშლის მთავარი წევრი იქნება დიპოლური. თუ გარე ველის არ არსებობისას მოლეკულის დიპოლური მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ იგი აღიძვრება გარე ველის მოქმედებით. გაშლის მთავარი წევრი იქნება დიპოლური. თუ გარე ველის არ არსებობისას მოლეკულის დიპოლური მომენტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ პოლარიზაციას ადგილი ექნება, როგორც დიპოლების ორიენტაციის ცვლილების, ასევე მათი მნიშვნელობების რაღაც ცვლილებისას. მაგრამ მეორე ეფექტი ჩვეულებრივ მნიშვნელოვნად მცირეა პირველთან შედარებით და მას მხედველობაში არ დებულობენ.

კვადრუპოლური მომენტი ბევრად უფრო მცირეა დიპოლურთან შედარებით და იგი შეიძლება გათვალისწინებულ იქნას ან როგორც დიპოლური მომენტის შესწორება, ან კიდევ როგორც მთავარი წევრი, თუ მოცემული პირობებისას დიპოლური მომენტი არ არსებობს.

დიპოლური მომენტი. ნეიტრალური სისტემის ელექტრული თვისებები პირველ მიახლოებაში ხასიათდება მისი დიპოლური მომენტით. დიპოლური მომენტის უმარტივეს მოდელს წარმოადგენს სხვადასხვა ნიშნის ორი წერტილოვანი მუხტი, რომლებიც ერთმანეთისაგან მცირე მანძილით არიან დაშორებული. დავუშვათ, უარყოფითი წერტილოვანი მუხტი მდებარეობს r'_1 რადიუს-ვექტორის მქონე წერტილში, ხოლო დადებითი მუხტი კი – r'_2 წერტილში. მაშინ:

$$\rho(\vec{r}') = q\{\delta(\vec{r}'_1 - \vec{r}') - \delta(\vec{r}'_2 - \vec{r}')\} \quad (14.7)$$

(14.5 ბ) ფორმულის თანახმად მოცემული მუხტთა სისტემის დიპოლური მომენტი ტოლია:

$$\vec{P} = q(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1) = q\vec{l}, \quad (14.8)$$

სადაც

$$\vec{l} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$$

ვექტორს, რომელიც გავლებულია უარყოფითი მუხტიდან დადებითი მუხტისაკენ, უწოდებენ დიპოლის მხარს.

დიპოლის ველი. დიპოლის მიერ შექმნილი ელექტრული ველის დაძაბულობა ტოლია:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right]. \quad (14.9)$$

მაშასადამე, ველის დაძაბულობა ეცემა დიპოლიდან მანძილის კუბის უკუპროპორციულად.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. განსაზღვრეთ დიელექტრიკების პოლარიზაცია, ახსენით როგორ ხორციელდება იგი.
2. განისაზღვრეთ პოლარიზაციის ვექტორი.
3. რა განსხვავებაა მულტიპოლურ განვითარებაში დიპოლურ და კვადრუპოლურ მომენტებს შორის?
4. ახსენით დიპოლური მომენტის ფიზიკური მნიშვნელობა.
5. ჩაწერეთ დიპოლის მიერ შექმნილი ველის დაძაბულობის განტოლება.
6. როგორ იცლება დიპოლური მომენტის ორიენტაცია გარე ელექტრული ველის ზემოქმედებით?

§ 15. დიელექტრიკები ელექტროსტატიკურ ველში

გარე ელექტრული ველის გავლენით პოლარიზაციის შედეგად დიელექტრიკები დამატებითი ველის წყარო ხდება. ამიტომ ელექტრულ ველში დიელექტრიკების გათვალისწინება დაიყვანება მისი პოლარიზაციისა და მის მიერ შექმნილი ველის გათვალისწინებაზე.

პოლარიზაციის ინტენსივობას ახასიათებენ \vec{P} პოლარიზაციის ვექტორით, რომელიც განისაზღვრება ერთეულოვანი მოცულობის შესაბამისი დიპოლური მომენტი. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ დიელექტრიკის მოცულობის ელემენტის დიპოლური მომენტი ტოლია:

$$dp = \vec{P}dV \quad (15.1)$$

მოცემულ წერტილში \vec{P} პოლარიზაციის ვექტორი ამ წერტილში ელექტრული ველის დაძაბულობის პროპორციულია:

$$\vec{P} = x\varepsilon_0\vec{E}, \quad (15.2)$$

სადაც x უგანზომილებო სიდიდეა, რომელსაც **დიელექტრიკულ ამთვისებლობას** უწოდებენ. იგი ახასიათებს დიელექტრიკის პოლარიზაციის უნარს. უმრავლესობა მყარი და თხევადი დიელექტრიკების დიელექტრიკული ამთვისებლობა რიცხობრივად გამოისახება რამდენიმე ერთეულის რიგით. უმრავლესობა გაზების დიელექტრიკული ამთვისებლობა შეადგენს ერთეულის მეთათასეულ ნაწილს და პრაქტიკულად მხედველობაში არ მიიღება. მაგრამ, არსებობს დიელექტრიკები, რომელთა ამთვისებლობა აღწევს დიდ მნიშვნელობებს. წყლისთვის $x = 80$, ხოლო სპირტისათვის $x = 25 - 30$. ზოგიერთი ნახევარგამტარის ამთვისებლობა ასეულ ათას ერთეულს აღწევს.

დიელექტრიკების მნიშვნელოვან კლასს წარმოადგენენ **სეგნეტოელექტრიკები** (სეგნეტის მარილი, ბარიუმის ტიტანატი და ა.შ.). ისინი ხასიათდებიან პოლარიზაციის ველის დაძაბულობაზე არაწრფივი დამოკიდებულებით და ნარჩენი პოლარიზაციის მოვლენით, ე.ი. მათი პოლარიზაცია ნულსაგან განსახვავებულია. მას შემდეგ, რაც გაქრება ამ პოლარიზაციის გამომწვევი გარე ელექტრული ველი. მრავალი სეგნეტოელექტრიკების დიელექტრიკული ამთვისებლობა აღწევს რამდენიმე ათასს.

ნივთიერების პოლარიზაცია შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მარტო ელექტრული ველის ზემოქმედებით, არამედ მექანიკური ზემოქმედებითაც. ეს მოვლენა ცნობილია **პიეზოელექტრული ეფექტის** სახელწოდებით. იგი დაკვირვებადია კვარცში და ტექნიკაში ფართოდ გამოიყენება.

პოლარიზაციის ვექტორი მიმართულებით ყოველთვის არ ემთხვევა ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის მიმართულებას. ასეთი ანიზოტროპია ხშირად დაკვირვებადია კრისტალურ დიელექტრიკებში. ამ შემთხვევაში დიელექტრიკის პოლარიზაცია სხვადასხვა მიმართულებით განსხვავებულია. ამიტომ მისი დიელექტრიკული ამთვისებლობა ხასიათდება დიელექტრიკული ამთვისებლობის ტენზორით.

სკალარული პოტენციალი დიელექტრიკის არსებობისას.

დიელექტრიკის გავლენა ელექტროსტატიკურ ველზე დაიყვანება დიელექტრიკის პოლარიზაციის შედეგად დამატებითი ველის წარმოშობაზე. ამიტომ დიელექტრიკის არსებობისას ელექტრული ველი წარმოადგენს **თავისუფალი მუხტების ველის** (მუხტები, რომლებიც არ

არიან დაკავშირებული დიელექტრიკის მოლეკულებთან და ატომებთან) და დიელექტრიკის პოლარიზაციით წარმოშობილი ველის ჯამს. მაშასადამე, ელექტრული ველის პოტენციალი:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_D, \quad (15.3)$$

სადაც φ_0 – თავისუფალი მუხტების ელექტრული ველის პოტენციალია; φ_D – პოლარიზებული დიელექტრიკით შექმნილი ელექტრული ველის პოტენციალია.

ცხადია, რომ:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (15.4)$$

სადაც ρ და σ თავისუფალი მუხტების მოცულობითი და ზედაპირული სიმკვრივეებია. (14.4) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ დიპოლის პოტენციალი ტოლია:

$$d\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(d\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}. \quad (15.5)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულაში (15.1)–ს, მივიღებთ:

$$d\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} dV \quad (15.6)$$

მაშასადამე,

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} dV \quad (15.7)$$

სადაც ინტეგრაცია მიმდინარეობს დიელექტრიკის V მოცულობის მიხედვით. ხელსაყრელია, ამ ფორმულას მივცეთ სხვა სახე. ვექტორული ანალიზიდან ცნობილია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} \varphi, \quad (15.8)$$

სადაც φ და \vec{A} წერტილის სკალარული და ვექტორული ფუნქციებია. გამოვიყენოთ (15.8) ფორმულა (15.7)–ის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გარდასაქმნელად. გავიხსენოთ, რომ (15.7) ფორმულაში \vec{r} რადიუს–ვექტორი გავლებულია dV მოცულობის ელემენტიდან იმ წერტილამდე, სადაც გამოითვლება პოტენციალი. ამიტომ ოპერაციებში div და grad გავითვალისწინოთ ოპერაცია dV მოცულობის ელემენტის კოორდინატების მიხედვით, გვექნება:

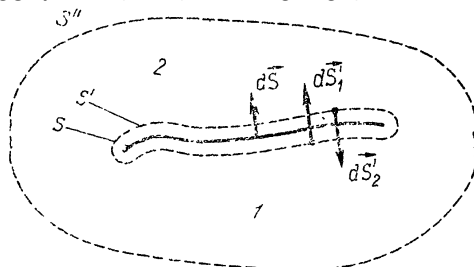
$$\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{p} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) - \frac{\operatorname{div} \vec{p}}{r} \quad (15.9)$$

მაშასადამე,

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \vec{p}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) dV. \quad (15.10)$$

(15.10) ფორმულის მეორე ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ გაუს–ოსტროგრადსკის თეორემის საფუძველზე. ეს თეორემა სამართლიანია მთელ სივრცეში, სადაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უწყვეტია. მაგრამ (15.2) ფორმულის თანახმად \vec{P} პოლარიზაციის ვექტორი

განიცდის წყვეტას სხვადასხვა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე, ამიტომ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემა შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი მოცულობისათვის, თუ მისგან გამოვიყოფთ სხვადასხვა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვრს. ამ საზღვრებიდან ერთ-ერთი გამოვიყოთ განსახილველი მოცულობიდან დამხმარე ზედაპირით (იხ. ნახ.15.1)



ნახ.15.1

მაშინ დარჩენილ მოცულობაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია და მისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემა:

$$\int_V \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} dV = \int_{S''} \frac{\vec{P}}{r} d\vec{S} + \int_{S'} \frac{\vec{P}}{r} d\vec{S}, \quad (15.11)$$

სადაც S'' - მოცემული მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირია. გამყოფი S ზედაპირის ნორმალის დადებით მიმართულებად ავირჩიოთ მიმართულება 2 დიელექტრიკიდან 1 დიელექტრიკისაკენ, მაშინ:

$$\int_{S'} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{r} = - \int_S \frac{\vec{P}_2 \cdot d\vec{S}}{r} + \int_S \frac{\vec{P}_1 \cdot d\vec{S}}{r} = \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS \quad (15.12)$$

\vec{P}_2 ვექტორის წინ ნიშანი მინუსი (15.12)-ში შემოვიდა გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემის გამოყენების დროს V მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირით ინტეგრირებისას. ზედაპირის $d\vec{S}$ ელემენტს გააჩნია გარე ნორმალის მიმართულება. მაშასადამე, \vec{S} ზედაპირით ინტეგრირების დროს მეორე გარემოს მხრიდან $d\vec{S}_2$ ვექტორი მიმართულია გამყოფი ზედაპირის $d\vec{S}$ ელემენტის საპირისპიროდ, ამიტომ:

$$\vec{P}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -\vec{P}_2 \cdot d\vec{S}$$

$P_{1n} - P_{2n}$ სიდიდე ახასიათებს პოლარიზაციის ვექტორის ნორმალური მდგენელების წყვეტას დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე. ჩავთვალოთ, რომ ყველა დიელექტრიკი თავმოყრილია სივრცის სასრულო მოცულობაში, ხოლო S'' ზედაპირი - უსასრულობაშია, ცხადია, რომ მასზე $\vec{P} = 0$, ამიტომ (15.11) ფორმულაში პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია. ანალოგიური გამოსახულებანი მიიღება დიელექტრიკების სხვა გამყოფი საზღვარისათვისაც. ამრიგად, გვაქვს:

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div}\vec{P}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS \quad (15.13)$$

(15.13) და (15.4) ფორმულების შედარებიდან ჩანს, რომ ρ უნდა შეიცვალოს $-\operatorname{div}\vec{P}$ -თი, ხოლო σ კი $P_{1n} - P_{2n}$ - ით. ამიტომ თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს:

$$\rho_{\partial\partial} = -\operatorname{div}\vec{P}, \quad \sigma_{\partial\partial} = P_{1n} - P_{2n}, \quad (15.14)$$

მაშინ (15.13) ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{\partial\partial}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_{\partial\partial}}{r} dS \quad (15.15)$$

(15.3) ფორმულა სრული პოტენციალისათვის (15.4) და (15.15) ფორმულების გათვალისწინებით ჩაიწერება ასე:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho + \rho_{\partial\partial}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma + \sigma_{\partial\partial}}{r} dS . \quad (15.16)$$

$\rho_{\partial\partial}$ და $\sigma_{\partial\partial}$ სიდიდეებს უწოდებენ შესაბამისად ბმული მუხტების მოცულობით და ზედაპირულ სიმკვრივეებს. ეს სახელწოდება განპირობებულია იმით, რომ დიელექტრიკებში დამატებითი ელექტრული ველის წარმოშობაში თავისი როლის მიხედვით, ეს სიდიდეები სრულიად ანალოგიურია მუხტის მოცულობითი და ზედაპირული სიმკვრივეებისა. თავისუფალი მუხტებისაგან განსხვავებით ბმულ მუხტებს არ შეუძლიათ თავისუფლად გადაადგილება დიელექტრიკში. (15.15) ფორმულიდან ჩანს, რომ ზედაპირული ბმული მუხტები წარმოიქმნებიან სხვადასხვა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე და დიელექტრიკისა და ვაკუუმის გამყოფ საზღვარზე, ხოლო მოცულობითი ბმული მუხტები კი წარმოიქმნებიან იქ, სადაც ადგილი აქვს არაერთგვაროვან პოლარიზაციას, რომელიც შეიძლება წარმოადგენდეს დიელექტრიკის არაერთგვაროვნების, ან ელექტრული ველის არაერთგვაროვნების შედეგს.

კავშირი დიელექტრიკულ შეღწევადობასა და დიელექტრიკულ ამთვისებლობას შორის. როგორც ვნახეთ, დიელექტრიკის არსებობა მთლიანად შეიძლება გათვალისწინებულ იქნას, თუ თავისუფალ მუხტებთან ერთად მხედველობაში მივიღებთ ბმულ მუხტებს და დიელექტრიკში ელექტრულ ველს ადვილად იგივე განტოლებებით, რომელიც გვექონდა ვაკუუმის შემთხვევაში. ამიტომ განტოლება $div\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ დიელექტრიკების შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$div\vec{E} = \frac{\rho + \rho_{\partial\partial}}{\epsilon_0} . \quad (15.17)$$

გავითვალისწინოთ ამ გამოსახულებაში (15.14) ფორმულა:

$$div\vec{E} = \frac{\rho - div\vec{P}}{\epsilon_0}$$

რომელიც ხელსაყრელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$div(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho . \quad (15.18)$$

გამოსახულებას

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (15.19)$$

უწოდებენ ელექტრული ინდუქციის ვექტორს. ამ სიდიდის დახმარებით (15.18) ფორმულა ჩაიწერება მაქსველის განტოლების სახით:

$$div\vec{D} = \rho , \quad (15.20)$$

რომელიც სამართლიანია როგორც ვაკუუმისათვის, ისე მატერიალური გარემოსათვის. ვაკუუმში:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} .$$

(15.2) ფორმულიდან ჩანს, რომ \vec{P} პროპორციულია \vec{E} . ამიტომ (15.10) ფორმულიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ: \vec{D} პროპორციულია \vec{E} , ე. ი. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (15.21)$$

მივიღოთ მხედველობაში (15.21) და (15.2) ფორმულები, მაშინ (15.19) ფორმულა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (15.22)$$

საიდანაც:

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi), \quad \chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \epsilon_r - 1. \quad (15.23)$$

რადგანაც $\epsilon > \epsilon_0$, ამიტომ χ დადებითია.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა გავლენა აქვს დიელექტრიკს ელექტროსტატიკურ ველზე?
2. გამოსახეთ პოლარიზაციის ვექტორი ელექტრული ველის დაძაბულობის საშუალებით.
3. რა არის დიელექტრიკული ამთვისებლობა და როგორია მისი მნიშვნელობები სხვადასხვა მასალებისთვის?
4. ჩაწერეთ სკალარული პოტენციალის გამოსახულება დიელექტრიკების არსებობისას.
5. განსაზღვრეთ ბმული მუხტების მოცულობითი და ზედაპირული სიმკვრივეები.
6. გამოსახეთ კავშირი დიელექტრიკულ შეღწევადობასა და დიელექტრიკულ ამთვისებლობას შორის.

§16. ელექტრული ველის ენერგია

ელექტრული ველის ენერგიის ფორმულა ველის ვექტორების საშუალებით მიიღება ვაკუუმში ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის გამოსახულების ანალოგიურად, ოღონდ მაქსველის $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ განტოლების ნაცვლად უნდა ვისარგებლოთ $\text{div} \vec{D} = \rho$ განტოლებით. მაქსველის განტოლებაში $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ნაცვლად მოვახდინოთ ცვლილება

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ამ ცვლილების გათვალისწინებით დიელექტრიკების შემთხვევაში ელექტრული ველის ენერგიისათვის მიიღება შემდეგი გამოსახულება:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV; \quad (16.1)$$

როდესაც $\epsilon = \epsilon_0$, იგი დაიყვანება შესაბამის ფორმულაზე ვაკუუმისათვის.

სასაზღვრო პირობები დიელექტრიკების არსებობისას. დიელექტრიკების არსებობისას ველის ვექტორებისათვის სასაზღვრო პირობები მიიღება დიელექტრიკების არ არსებობისას მიღებული სასაზღვრო პირობების ანალოგიურად. სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (16.2 \text{ ა})$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (16.2 \text{ ბ})$$

ენერგია, გამოსახული პოტენციალისა და მუხტის სიმკვრივის საშუალებით. (16.1) ფორმულაში შევცვალოთ \vec{E} ვექტორი თანაფარდობით:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

და ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით:

$$-\vec{D}\text{grad}\varphi = \varphi\text{div}\vec{D} - \text{div}(\varphi\vec{D}).$$

მაშინ (16.1) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV - \frac{1}{2} \int \text{div}(\varphi\vec{D}) dV, \quad (16.3)$$

სადაც

$$\text{div}\vec{D} = \rho.$$

(16.3) ფორმულის მეორე ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის საფუძველზე ზედაპირულ ინტეგრალად. φ პოტენციალი სივრცის ყველა წერტილში უწყვეტია, ხოლო \vec{D} ვექტორი განიცდის წყვეტას დამუხტულ ზედაპირებზე, ამიტომ საჭიროა იგი გამოიყოს საინტეგრაციო არიდან. თუ ჩავატარებთ ზუსტად ანალოგიურ გამოთვლებს, რომელიც გვქონდა (15.11) ფორმულის მიღების დროს, გვექნება:

$$\int_V \text{div}(\varphi\vec{D}) dV = \int_{S''} \varphi\vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S'} \varphi\vec{D} \cdot d\vec{S}, \quad (16.4 \text{ ა})$$

$$\int_{S'} \varphi\vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_S \varphi\vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \int_S \varphi\vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_S \varphi(D_{2n} - D_{1n}) dS \quad (16.4 \text{ ბ})$$

მივიღოთ მხედველობაში (16.2 ა) სასაზღვრო პირობა, მაშინ (16.4 ბ) გადაიწერება ასე:

$$\int_{S''} \varphi\vec{D} \cdot d\vec{S} = - \int_S \varphi\sigma dS$$

თუ ჩავთვლით, რომ S'' ზედაპირი უსასრულოა, ხოლო მუხტები თავმოყრილია სივრცის სასრულო მოცულობაში, მაშინ ინტეგრალი S'' ზედაპირზე მიისწრაფვის ნულისაკენ. ეს კი ჩანს შემდეგი შეფასებიდან გამომდინარე. ცნობილია, რომ წერტილოვანი მუხტის პოტენციალი ეცემა მანძილის მიხედვით, როგორც $1/r$. ამიტომ წერტილოვანი მუხტთა სისტემის პოტენციალი ამ სისტემიდან დიდი მანძილებზე ეცემა, როგორც $1/r$, სადაც r – მანძილია სისტემის რომელიღაც წერტილიდან. \vec{E} ველი, როგორც პოტენციალის გრადიენტი, მუხტთა

სისტემიდან დიდ მანძილებზე ეცემა, როგორც $1/r^2$. მაშასადამე, ინტეგრალექვემა გამოსახულება $\varphi \cdot \vec{D}$ ეცემა როგორც $1/r^3$. საინტეგრაციო ფართი კი იზრდება r^2 – ის პროპორციულად. აქედან გამომდინარეობს, რომ S^{\parallel} საინტეგრაციო ზედაპირის დაშორებისას ინტეგრალი ეცემა როგორც $1/r$, ე. ი. ზღვრულ შემთხვევაში $r \rightarrow \infty$ ინტეგრალი მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამიტომ საბოლოოდ (16.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (16.5)$$

ეს ფორმულა რიცხობრივად იგივე შედეგს იძლევა, რასაც (16.1), მაგრამ მისი ფიზიკური შინაარსი რამდენადმე განსხვავებულია. (16.1) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ელექტრული ველის ენერგია მთელ სივრცეში განაწილებულია სიმკვრივით:

$$w = \vec{D} \cdot \frac{\vec{E}}{2}. \quad (16.6)$$

(16.5) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია წარმოადგენს მუხტთა ურთიერთქმედების ენერგიას. მუხტის ელემენტს, რომელიც იმყოფება ყველა დანარჩენი მუხტებით შექმნილ φ პოტენციალურ ველში, გააჩნია პოტენციალური ენერგია $\varphi \rho dV$. ინტეგრალში მამრავლი $\frac{1}{2}$ შემოტანილია იმის გამო, რომ ინტეგრირების დროს მუხტის ყოველი ელემენტის წვლილი ენერგიაში ორჯერ არის გათვალისწინებული. პირველად, როდესაც გამოითვლება ამ მუხტის პოტენციალური ენერგია ყველა დანარჩენი მუხტებით შექმნილ ველში და მეორედ, როდესაც მხედველობაში მიიღება ყველა დანარჩენი მუხტების პოტენციალური ენერგია ამ მუხტის ველში.

წერტილოვან მუხტთა ურთიერთქმედების ენერგია. წერტილოვანი მუხტი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც იმ მუხტის ზღვრული შემთხვევა, რომელიც განაწილებულია სივრცის მცირე მოცულობაში, როდესაც ამ მოცულობის ზომები მიისწრაფვის ნულისაკენ, მუხტი მოცულობაში რჩება მუდმივი. ამ შემთხვევაში მუხტის სიმკვრივე წერტილში, რომლისკენაც მიისწრაფვის მოცულობა, მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, ხოლო სივრცის სხვა წერტილებში მუხტის სიმკვრივე ნულის ტოლია. ამიტომ მუხტის მოცულობითი სიმკვრივე $\rho(r)$ q წერტილოვანი მუხტის არსებობისას \vec{r}_0 წერტილში შეიძლება წარმოვადგინოთ δ ფუნქციის საშუალებით:

$$\rho(\vec{r}) = q\sigma(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (16.7)$$

δ ფუნქციისათვის სამართლიანია ინტეგრირების შემდეგი წესი:

$$\int_V f(\vec{r})\sigma(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = f(\vec{r}_0). \quad (16.8)$$

\vec{r}_0 წერტილი მდებარეობს საინტეგრაციო V მოცულობის შიგნით. რამდენიმე წერტილოვანი მუხტის შემთხვევაში, ისინი შეიძლება განვიხილოთ როგორც იმ მუხტების ზღვრული შემთხვევა, რომელთაც გააჩნიათ მუდმივი მნიშვნელობა და უჭირავთ უსასრულოდ მცირე ΔV_i მოცულობები, როცა $\Delta V_i \rightarrow 0$. მივიღოთ მხედველობაში, რომ ამ შემთხვევაში ზედაპირული ინტეგრალები ნულის ტოლია და (16.5) ფორმულა შეიძლება გარდავქმნათ ასე:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi_i dV_i, \quad (16.9)$$

სადაც $\Delta V_i - i$ მუხტის მიერ დაკავებული მოცულობაა; φ_i – როგორც i , ასევე სხვა მუხტებით შექმნილი პოტენციალია. ამგვარად:

$$\varphi_i = \varphi'_i + \varphi_i^{საკ},$$

სადაც $\varphi_i - i$ მუხტის გარდა ყველა დანარჩენი მუხტებით შექმნილი ველის პოტენციალია; $\varphi_i^{საკ} - i$ მუხტის ელემენტების მიერ შექმნილი ველის პოტენციალია. პოტენციალის ამ ნაწილის არსებობა განაპირობებს მუხტის საკუთარი ენერჯიის არსებობას. ამიტომ (16.9) ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi'_i dV_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi_i^{საკ} dV_i \quad (16.10)$$

ზღვრულ შემთხვევაში, როცა

$$dV_i \rightarrow 0$$

პირველი ჯამის ინტეგრალისათვის ვღებულობათ:

$$\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi'_i dV_i = q_i \varphi'_i,$$

რადგანაც

$$\rho_i \rightarrow q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

და ინტეგრაციის დროს შეიძლება ვისარგებლოთ (16.8) ფორმულით. (16.10) ფორმულაში მეორე ჯამის ინტეგრალი, როცა $\Delta V_i \rightarrow 0$, გადალევს უსასრულობას. რადგანაც ამ დროს არა მარტო $\rho_i \rightarrow \infty$, არამედ $\varphi_i^{საკ} \rightarrow \infty$. ამიტომ $\Delta V_i \rightarrow 0$ ზღვრულ შემთხვევაზე გადასვლის დროს (16.10) ფორმულა ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi'_i + \infty.$$

მეორე, უსასრულობის ტოლი წევრი წარმოადგენს, ერთი და იმავე წერტილოვანი მუხტის სხვადასხვა ელემენტების ერთმანეთთან ურთიერთქმედების უსასრულო ენერჯიას. ეს წევრი არ არის დამოკიდებული წერტილოვან მუხტთა ურთიერთფარდობით მდებარეობაზე და შეიძლება უგულებელვყოთ. ასე, რომ ურთიერთქმედების ენერჯია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით;

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (16.11)$$

სადაც, $\varphi_i - i$ მუხტის გარდა ყველა დანარჩენი მუხტების მიერ q_i მუხტის მდებარეობის წერტილში შექმნილი პოტენციალია. სიმარტივისათვის φ_i –ს შტრიხის სიმბოლო არ აქვს. მამრავლი $\frac{1}{2}$ იმავე თვალსაზრისით გათვალისწინებულია, რაც (16.5) ფორმულაში.

q წერტილოვანი მუხტის ენერჯია φ პოტენციალურ ველში ტოლია:

$$W = q\varphi \quad (16.12)$$

(16.5) ფორმულიდან (16.11) ფორმულაზე გადასვლის დროს ჩვენ მხედველობაში არ მიგვიღია ყოველი წერტილოვანი მუხტების ელემენტების ერთმანეთთან ურთიერთქმედების უსასრულო

ენერგია, რომელსაც ჩვეულებრივ, საკუთარ ენერგიას უწოდებენ. (16.5) და (16.1) ფორმულების სიდიდეები რიცხობრივად ერთმანეთის ტოლია და ყოველთვის დადებითია, რადგანაც

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{E}^2 > 0 \quad (16.13)$$

(16.11) ფორმულა პოტენციალის ფორმულის გამოყენებით შეიძლება გარდაქმნათ წერტილოვან მუხტთა სისტემის მიერ შექმნილი პოტენციალის გამოსათვლელად:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}, \quad (16.14)$$

სადაც φ_i – პოტენციალია i მუხტის მდებარეობის წერტილში, რომელიც იქმნება ყველა დანარჩენი მუხტებით $j \neq i$ r_{ij} მანძილია i და j წერტილოვან მუხტებს შორის. გავითვალისწინოთ (16.14) ფორმულა (16.11) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (16.15)$$

დავწეროთ ეს ფორმულა კერძო შემთხვევაში ორი მუხტისათვის:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2, \quad (16.16)$$

სადაც $\varphi_i - q_2$ მუხტით შექმნილი პოტენციალია q_1 მუხტის მდებარეობის წერტილში. ეს ფორმულა თავის მხრივ გამოხატავს q_1 და q_2 წერტილოვანი მუხტების ურთიერთქმედების ენერგიას, რომლებიც იმყოფებიან ერთმანეთისაგან r_{12} მანძილზე. სხვადასხვა ნიშნის მუხტებისათვის ეს ენერგია უარყოფითია.

დამუხტული გამტარის ენერგია. გამტარებში მოცულობით მუხტები არ არსებობენ, ამიტომ (16.5) ფორმულაში ρ ნულის ტოლია. პოტენციალი ცალკეულ გამტარზე წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს. ამიტომ გამტარების შემთხვევაში (16.5) ფორმულა დებულობს შემდეგ სახეს:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \varphi_i \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \int_{S_i} \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \quad (16.19)$$

სადაც φ_i და $\sigma_i - i$ გამტარის პოტენციალი და ზედაპირული სიმკვრივეა; Q_i - მუხტია.

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა დამუხტული კონდენსატორის ენერგიის გამოსათვლელად, მივიღებთ:

$$W = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \quad (16.18)$$

სადაც Q, V და C შესაბამისად კონდენსატორის ფირფიტის მუხტი, ფირფიტებს შორის პოტენციალთა სხვაობა და ტევადობაა.

დიპოლის ენერგია გარე ველში. დიპოლის ენერგია გარე ველში ტოლია მისი მუხტების ენერგიათა ჯამის. ამიტომ

$$W = q[\varphi(\vec{r} + \vec{l}) - \varphi(\vec{r})]. \quad (16.19)$$

გავშალოთ $\varphi(\vec{r} + \vec{l})$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად, გვექნება:

$$\varphi(\vec{r} + \vec{l}) = \varphi(\vec{r}) + l_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + l_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots$$

თუ ამ გამლაში შემოვისაზღვრებით l – ის მიხედვით პირველი რიგის პროპორციული წევრებით, მივიღებთ:

$$\varphi(\vec{r} + 1) - \varphi(\vec{r}) = -l_x \vec{E}_x - l_y \vec{E}_y - l_z \vec{E}_z ,$$

სადაც $\vec{E} = -grad\varphi$. ამგვარად, გარე ელექტრულ ველში დიპოლის ენერგიისათვის ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} , \tag{16.20}$$

სადაც \vec{P} დიპოლის მომენტი.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. ჩაწერეთ ელექტრული ველის ენერგიის ფორმულა.
2. როგორ ვპოულობთ ელექტრული ველის ენერგიას დიელექტრიკის არსებობისას?
3. როგორია ელექტრული ველის ენერგიის სასაზღვრო პირობები?
4. გამოითვალეთ ელექტრული ველის ენერგია მუხტისა და პოტენციალის საშუალებით.
5. ჩაწერეთ წერტილოვანი მუხტების ურთიერთქმედების ენერგიის გამოსახულება.
6. როგორ განისაზღვრება დამუხტული კონდენსატორის ენერგია?
7. გამოსახეთ ელექტრული დიპოლის ენერგია გარე ელექტრულ ველში.

§ 17. მექანიკური ძალები ელექტრულ ველში

წერტილოვან მუხტზე მოქმედი ძალა. \vec{E} ელექტრულ ველში წერტილოვან მუხტზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით:

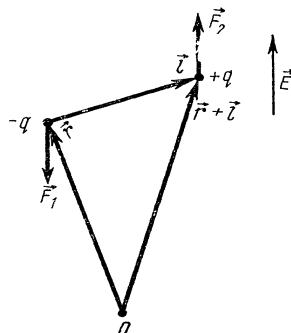
$$\vec{F} = q\vec{E} . \tag{17.1}$$

უწყვეტად განაწილებულ მუხტზე მოქმედი ძალა. თუ მუხტი განაწილებულია V მოცულობაში ρ მოცულობითი სიმკვრივით, მაშინ \vec{E} ელექტრულ ველში მასზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} dV . \tag{17.2}$$

დიპოლზე მოქმედი ძალა. დიპოლზე მოქმედი ძალა წარმოადგენს დიპოლის მუხტებზე მოქმედი ძალების ჯამს (იხ. ნახ.17.1):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1), \tag{17.3}$$



ნახ.17.1

სადაც \vec{E}_2 , \vec{E}_1 დიპოლის დადებითი და უარყოფითი მუხტების მდებარეობის წერტილებში ელექტრული ველის დაძაბულობებია. დავუშვათ, რომ მუხტებს შორის l მანძილი მცირეა იმ მანძილებთან შედარებით, რომელზედაც გარე ელექტრული ველი იცვლება მნიშვნელოვნად, მაშინ \vec{E}_2 ველის დაძაბულობა შეიძლება გავშალოთ ტეილორის მწკრივად და შემოვიხსნათ პირველი რიგის პროპორციული წევრებით:

$$\vec{E}_2 \equiv \vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{E}(\vec{r}) + l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \dots = \vec{E}_1 + (\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E} + \dots, \quad (17.4)$$

სადაც

$$(\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E} = \left(l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E} = l_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

და

$$\vec{E}_1 = \vec{E}(\vec{r}).$$

მივიღოთ მხედველობაში (17.3), (17.4) ფორმულები და გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{P} = q\vec{l}$, მაშინ დიპოლზე მოქმედი ძალისათვის ვღებულობთ:

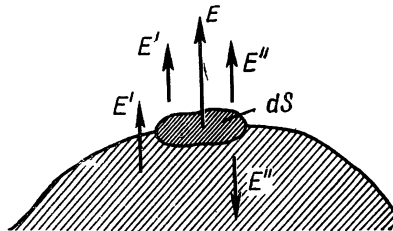
$$\vec{F} = (p \cdot \nabla) \vec{E}. \quad (17.5)$$

ერთგვაროვან ელექტრულ ველში ეს ძალა ნულის ტოლია, რადგანაც დიპოლის სხვადასხვა ნიშნის მუხტებზე მოქმედებს ტოლი, მაგრამ ურთიერთსაპირისპიროდ მიმართული ძალები, რომლებიც აკომპენსირებენ ერთმანეთს. რაც უფრო მნიშვნელოვანია ელექტრული ველის არაერთგვაროვნება, მით უფრო დიდი ძალა მოქმედებს დიპოლზე.

გამტარზე მოქმედი ძალა. გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში ველის დაძაბულობა ტოლია:

$$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{n}}{\epsilon}, \quad (17.6)$$

სადაც \vec{n} გამტარის ზედაპირის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორია, σ – ზედაპირული მუხტების სიმკვრივეა. გამოვყოთ გამტარის ზედაპირის უსასრულოდ მცირე dS უბანი და გამოვიკვლიოთ ველი ამ უბნის მახლობლობაში (იხ. ნახ.17.2)



ნახ.17.2

იგი იქმნება როგორც dS ფართზე არსებული მუხტებით, ასევე სხვა დანარჩენი მუხტებითაც. ცხადია, რომ dS ფართზე არსებულ მუხტებზე მოქმედებს მხოლოდ ის ველი, რომელსაც ქმნის dS ფართის გარეთ არსებული ყველა დანარჩენი მუხტი. აღვნიშნოთ ამ ველის დაძაბულობა \vec{E}' , dS ფართზე არსებული მუხტებით შექმნილი ველის დაძაბულობა კი \vec{E}'' – ით. dS ფართის ორივე მხარეს ცხადია, რომ \vec{E}' გააჩნია ერთნაირი მნიშვნელობა და მიმართულება, ე. ი. ველი უწყვეტია. ფართის სხვადასხვა მხარეს \vec{E}'' დაძაბულობას გააჩნია ერთნაირი მნიშვნელობა, მაგრამ

ურთიერთსაპირისპირო მიმართულება. გამტარის გარეთ \vec{E} და \vec{E}^{\parallel} დაძაბულობები იკრიბება და გვაძლევს საბოლოო ველს \vec{E} დაძაბულობით:

$$\vec{E}' + \vec{E}'' = \vec{E} = \frac{\sigma \vec{n}}{\epsilon} \quad (17.7)$$

გამტარის შიგნით ჯამური ველი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\vec{E}' = \vec{E}'' \quad (17.8)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ტოლობას, მაშინ (17.7.) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\vec{E}' = \vec{E}'' = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (17.9)$$

კერძოდ,

$$\vec{E}' = \frac{\sigma \vec{n}}{2\epsilon} \quad (17.10)$$

ზედაპირის dS ელემენტზე არსებობს $dq = \sigma dS$ მუხტი, რომელზედაც მოქმედებს \vec{E} დაძაბულობის ველი. მაშასადამე, ამ მუხტზე მოქმედებს ძალა, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$d\vec{F} = dq \vec{E}' = \frac{\sigma^2 \vec{n} dS}{2\epsilon} \quad (17.11)$$

ამიტომ ძალის ზედაპირული სიმკვრივე f_n , ე. ი. გამტარის ზედაპირის ერთეულზე მოქმედი ძალა ტოლია:

$$\vec{f}_n = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2 \vec{n}}{2\epsilon} \quad (17.12)$$

თუ გამოვრიცხავთ ამ ფორმულიდან მუხტის σ სიმკვრივეს, მაშინ (17.6) ფორმულის დახმარებით მივიღებთ ძალის ზედაპირული სიმკვრივის გამოსახულებას:

$$\vec{f}_n = \frac{\epsilon \vec{E}^2 \vec{n}}{2} \quad (17.13)$$

სადაც E გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში სრული დაძაბულობაა. (17.12) და (17.13) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ გამტარის ზედაპირზე ყოველთვის მოქმედებს ძალა, რომელიც მიმართულია ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულებით. ამ ძალის სიმკვრივე რიცხობრივად ტოლია გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში ელექტროსტატიკური ველის ენერგიის სიმკვრივის. ელექტროსტატიკურ ველში გამტარზე მოქმედი სრული ძალის გამოსათვლელად საჭიროა მოვახდინოთ ძალის სიმკვრივის ინტეგრაცია გამტარის მთლიანი S ზედაპირის მიხედვით:

$$\vec{F} = \int_S f_n dS = \frac{\epsilon}{2} \int_S \vec{E}^2 dS = \frac{1}{2\epsilon} \int_S \sigma^2 dS \quad (17.14)$$

სადაც $\vec{dS} = \vec{n} dS$ გამტარის ზედაპირის ელემენტია გარე ნორმალის მიმართულებით.

დიელექტრიკზე მოქმედი მოცულობითი ძალები. \vec{E} ელექტრულ ველში პოლარიზებული დიელექტრიკის dV მოცულობის ელემენტის დიპოლური მომენტი $d\vec{p} = \vec{P} dV$, მოცულობის ამ ელემენტზე (17.5) ფორმულის თანახმად მოქმედებს ძალა:

$$d\vec{F}=(d\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}dV \quad (17.15)$$

აქედან ძალის მოცულობითი სიმკვრივისათვის ვღებულობთ:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}. \quad (17.16)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულაში (15.2) და (15.23) ფორმულებს, მაშინ ეს გამოსახულება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით;

$$\vec{f} = (\varepsilon - \varepsilon_0)(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}. \quad (17.17)$$

ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით:

$$(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} = \frac{1}{2\text{grad}E^2} - [\vec{E} \text{ rot}\vec{E}], \quad (17.18)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ ელექტროსტატიკური ველისათვის $\text{rot}\vec{E} = 0$, მაშინ ძალის მოცულობითი სიმკვრივისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \text{grad}E^2 = \frac{\chi\varepsilon_0}{2} \text{grad}E^2. \quad (17.19)$$

აქედან ჩანს, რომ დიელექტრიკზე მოქმედი ძალის მიმართულება არ არის დამოკიდებული ველის მიმართულებაზე. იგი ყოველთვის მიმართულია ელექტრული ველის დაძაბულობის მაქსიმალური ზრდის მიმართულებით. ეს იმას ნიშნავს, რომ დიელექტრიკი წარიტაცება ელექტროსტატიკური ველის უდიდესი დაძაბულობის შესაბამის არეში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. განსაზღვრეთ წერტილოვან მუხტზე მოქმედი ძალა ელექტრულ ველში.
2. როგორ გამოითვლება უწყვეტად განაწილებული მუხტებზე მოქმედი ძალა?
3. გამოსახეთ დიპოლზე მოქმედი ძალის განტოლება.
4. გამოთვალეთ გამტარზე მოქმედი ელექტროსტატიკური ძალა.
5. განსაზღვრეთ დიელექტრიკზე მოქმედი მოცულობითი ძალები.
6. როგორია ძალის მოქმედების მიმართულება ელექტრული ველის სხვადასხვა რეგიონებში?
7. ჩაწერეთ ელექტროსტატიკურ ველში სხეულზე მოქმედი ძალების ინტეგრალური გამოსახულება.

ლექცია 6. სტაციონარული მაგნიტური ველი I.

- §18. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები:
 - ა) სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის.
 - ბ) სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელისათვის.
- §19. გარე ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები და ომისა და ჯოულ-ლენცის კანონები განზოგადოებული სახით.

§18. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები

ველის განტოლებები. სტაციონარულ შემთხვევაში ელექტრული და მაგნიტური ველები შესაძლებელია, განხილული იქნას ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. მუდმივი დენით შექმნილი მაგნიტური ველის განტოლებებს ვაკუუმში აქვთ შემდეგი სახე:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (18.1)$$

სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ინდუქციის \vec{B} ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის. ეს პირობა მიიღება მაქსველის განტოლებიდან:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (18.2)$$

იმ მეთოდის ანალოგიურად, რომელიც გვქონდა ელექტროსტატიკური ველის შემთხვევაში. მაგრამ \vec{D} ვექტორის ნაცვლად უნდა ვისარგებლოთ \vec{B} ვექტორით. თუ მოვახდენთ (18.2) განტოლების ინტეგრაციას ცილინდრის მოცულობის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\int_{S_1} (\vec{B} d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{B} d\vec{S}) + \int_{S_{\text{გ}}} (\vec{B} d\vec{S}) = 0 \quad (18.3)$$

დანარჩენი გამოთვლები სრულიად ანალოგიურია და თუ გადავალთ ზღვრულ შემთხვევაზე, როდესაც $h \rightarrow 0$, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$(B_{2n} - B_{1n})S_0 = 0 \quad (18.4)$$

აქედან, სასაზღვრო პირობას მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (18.5)$$

ამრიგად, მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელები უწყვეტია.

სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ველის ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელისათვის. გამოსავალ განტოლებას წარმოადგენს მაქსველის განტოლება:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (18.6)$$

აქაც თუ გავიმეორებთ ანალოგიურ გამოთვლებს, რომელიც გვექონდა, (10.12) ფორმულის მიღების დროს, გვექნება:

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S}) = \mu_0 \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = \mu_0 I \quad (18.7)$$

$$\int_{l_1} (\vec{B} d\vec{l}) + \int_{l_2} (\vec{B} d\vec{l}) + \int_{l_{\partial\partial}} (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 I$$

$$(B_{2t} - B_{1t})l_0 + \langle B_{\partial\partial} \rangle l_{\partial\partial} = \mu_0 I \quad (18.8)$$

დავუშვათ, $l_{\partial\partial} \rightarrow 0$, მაშინ $l_2 \rightarrow l_0$, $l_1 \rightarrow l_0$, $\langle B_{\partial\partial} \rangle l_{\partial\partial} \rightarrow 0$, ხოლო I დენის ძალა გამოისახება ზედაპირული დენის ძალის საშუალებით, რომელიც გადის ზედაპირის გასწვრივ და კვეთს l_0 მონაკვეთს. ამიტომ ზღვრულ შემთხვევაში ვღებულობთ:

$$(B_{2t} - B_{1t})l_0 = \mu_0 I_{\text{ზედ}} \quad (18.9)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ $j_{\text{ზედ}} = I_{\text{ზედ}}/l_0$ - ზედაპირული დენის სიმკვრივეა. ამრიგად, მაგნიტური ველის ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელებისათვის სასაზღვრო პირობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(B_{2t} - B_{1t})l_0 = \mu_0 j_{\text{ზედ}} \quad (18.10)$$

თუ ზედაპირული დენები არ არსებობენ, მაშინ მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელები უწყვეტია:

$$B_{2t} = B_{1t} \quad (18.11)$$

სასაზღვრო პირობა დენის სიმკვრივის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელისათვის. ეს პირობა მიიღება ომის კანონის დიფერენციალური ფორმიდან:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (18.12)$$

თუ დავაგეგმილებთ ამ განტოლების ორთავე მხარეს მხებ მიმართულებაზე, მივიღებთ: $j_{2t} = \gamma_2 E_{2t}$, $j_{1t} = \gamma_1 E_{1t}$. გავყოთ წევრობრივ პირველი ტოლობა მეორეზე და მივიღოთ მხედველობაში, რომ $E_{2t} = E_{1t}$, გვექნება:

$$\frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (18.3)$$

ამგვარად, თუ ორი გარემოს ელექტროგამტარებლობები განსხვავებულია, მაშინ დენის სიმკვრივე გამყოფი ზედაპირის გასწვრივ, მისგან სხვადასხვა მხარეს, განსხვავებულია.

სასაზღვრო პირობა დენის სიმკვრივის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის. ეს პირობა მიიღება მაქსველის განტოლებიდან:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.14)$$

ზუსტად ანალოგიური გამოთვლებით, რომელიც გვექონდა მაგნიტური ინდუქციის და ელექტრული ინდუქციის ვექტორების ნორმალური მდგენელებისათვის, მივიღებთ:

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (18.5)$$

სადაც σ – ზედაპირული მუხტის სიმკვრივეა. მაშასადამე, დენის სიმკვრივის ნორმალური მდგენელები განიცდიან წყვეტას იმ შემთხვევაში, როცა გამყოფ ზედაპირზე გვაქვს ცვლადი ზედაპირული მუხტის სიმკვრივე.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის სტაციონარული მაგნიტური ველი და როგორ განისაზღვრება მისი განტოლებები?
2. როგორია მაგნიტური ველის განტოლებები ვაკუუმში?
3. რა პირობით შეიძლება მაგნიტური და ელექტრული ველები განვიხილოთ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად?
4. როგორია მაქსველის განტოლებები მაგნიტოსტატიკური ველისთვის?
5. როგორია სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელისათვის?
6. როგორ მიიღება მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელის სასაზღვრო პირობა?
7. რა არის მაგნიტური ინდუქციის ტანგენციალური კომპონენტის სასაზღვრო პირობა და როგორ გამოითვლება?
8. როგორია მაქსველის განტოლებიდან მიღებული სასაზღვრო პირობა ტანგენციალური კომპონენტისთვის?
9. როგორია ტანგენციალური კომპონენტის უწყვეტობის პირობა ზედაპირული დენების არარსებობის შემთხვევაში?
10. როგორია დენის სიმკვრივის ვექტორის ტანგენციალური კომპონენტის სასაზღვრო პირობა?
11. როგორია დენის სიმკვრივის ნორმალური კომპონენტის სასაზღვრო პირობა?
12. რატომ განიცდის დენის სიმკვრივის ნორმალური კომპონენტი წყვეტას გამყოფ ზედაპირზე?
13. როგორ უკავშირდება ელექტროგამტარობა დენის სიმკვრივის ველის განაწილებას გამყოფ ზედაპირზე?

§ 19. გარე ელექტრომაგნიტური ძალები და ომისა და ჯოულ-ლენცის კანონები განზოგადოებული სახით

მუდმივი დენებისათვის უწყვეტობის განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (19.1)$$

რომლის თანახმადაც დენის სიმკვრივის ვექტორის წირებს არა აქვთ არც დასაწყისი და არც დასასრული. გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\oint_l (\vec{j} d\vec{l}) \quad (19.2)$$

რამე l ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ, რომელიც ემთხვევა ჩაკეტილი დენის წირის მიმართულებას. თუ გვაქვს მხოლოდ კულონური წარმოშობის ელექტროსტატიკური ველი \vec{E} , მაშინ \vec{j} დენის სიმკვრივე დაკავშირებულია \vec{E} ელექტრული ველის დაძაბულობასთან განტოლებით:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

სადაც

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\gamma = const$, მაშინ (19.2) ფორმულა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l} = \gamma \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\gamma \int_L grad\varphi \cdot d\vec{l} = -\gamma \int_L d\varphi = 0. \quad (19.3)$$

მეორე მხრივ, (19.2) ინტეგრალში ინტეგრაცია მიმდინარეობს დენის სიმკვრივის წირის გასწვრივ. ამიტომ საინტეგრაციო $d\vec{l}$ ელემენტი გზის ყოველ წერტილში პარალელურია დენის სიმკვრივის ვექტორის. მამასადამე:

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \pm j dl.$$

დადებითი ნიშანი გვექნება იმ შემთხვევაში, როდესაც \vec{j} და $d\vec{l}$ მიმართულებით ემთხვევიან, ხოლო უარყოფითი ნიშანი კი – როცა ისინი მიმართულებით ურთიერთსაპირისპირონი არიან. ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, (19.3) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l} = \pm \int_L j dl = 0.$$

ინტეგრალექვემა გამოსახულება მთელ საინტეგრაციო გზაზე არ იცვლის ნიშანს. ამ პირობის დროს ინტეგრალის ნულთან ტოლობიდან გამომდინარეობს ინტეგრალექვემა გამოსახულების ნულთან ტოლობა $j = 0$. ამასთან დამტკიცებულია, რომ მუდმივი დენის არსებობა შეუძლებელია მხოლოდ ელექტროსტატიკური ველის კულონური ძალების არსებობით.

გარე ელექტრომამოძრავებელი ძალები. მუდმივი დენი შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ არაელექტროსტატიკური წარმოშობის ველების შემთხვევაში. ასეთი ველები არსებობენ დენის წყაროებში – გალვანური ელემენტები, აკუმულატორები, გენერატორები და ა.შ. ამ ველებს უწოდებენ გარე ველებს, ხოლო მათთან დაკავშირებულ ძალებს, რომლებიც განაპირობებენ მუხტების მოძრაობას და დენის წარმოშობას, უწოდებენ გარე ელექტრომამოძრავებელ ძალებს.

ომის განზოგადოებული კანონი. დენის სიმკვრივე განპირობებულია არა მარტო ელექტროსტატიკური ველით, არამედ გარე ძალების შესაბამისი ველებით. გარე ძალების ველი ხასიათდება $\vec{E}^{გარე}$ ვექტორით, რომელიც განისაზღვრება ელექტრული ველის დაძაბულობით, რომელიც წარმოქმნის ელექტრული დენის ისეთივე სიმკვრივეს, რასაც ქმნის არაელექტროსტატიკური ბუნების გარე ძალები. აქედან გამომდინარე, ომის კანონი შეიძლება ჩაწეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{გარე}). \quad (19.4)$$

ომის ინტეგრალური კანონი მთლიანი წრედისათვის. გავამრავლოთ (19.4) განტოლების ორთავე მხარე $d\vec{l}$ ელემენტის სიგრძეზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია დენის სიმკვრივის ჩაკეტილი წირის გასწვრივ დენის მიმართულებით:

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{l} = \gamma \oint (\vec{E} + \vec{E}) \cdot d\vec{l}.$$

გავყოთ ამ ტოლობის ორთავე მხარე γ -ზე და მივიღოთ მხედველობაში (19.3) ფორმულა, გვექნება:

$$\oint \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon . \quad (19.5)$$

სადაც შემოტანილია აღნიშვნა:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (19.6)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ (19.5) ინტეგრალში \vec{j} და $d\vec{l}$ მიმართულებით ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\oint \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint \frac{j dl}{\gamma} = \oint j \vec{S} \frac{d\vec{l}}{\gamma S}, \quad (19.7)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$dR = \frac{dl}{\gamma S}, \quad (19.8)$$

რომელიც წარმოადგენს S განივკვეთის და γ გამტარებლობის dl დენიანი მილის წინაღობას, ხოლო ამ მილში გამავალი დენის ძალა ტოლია:

$$I = jS,$$

მაშასადამე,

$$\oint j \vec{S} \frac{dl}{\gamma S} = \int IdR = I \int dR = IR . \quad (19.9)$$

(19.9) და (19.7) ფორმულების საფუძველზე (19.5) ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$IR = \varepsilon . \quad (19.10)$$

ეს თანაფარდობა ცნობილია ომის კანონის სახელწოდებით. ამ ფორმულიდან ცხადად ჩანს, რომ მუდმივი დენის ძალა და მისი არსებობა ნამდვილად განპირობებულია გარე ელექტრომაგნიტური ველების ძალებით.

ჯოულ-ლენცის განზოგადოებული კანონი. რაიმე V მოცულობაში დროის ერთეულში დენის მიერ გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{P} = \int_V \frac{j^2 dV}{\gamma}.$$

გარდავექმნათ ინტეგრალექვემა გამოსახულება (19.4) ომის განზოგადოებული კანონის გამოყენებით:

$$\frac{j^2}{\gamma} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E} ,$$

მაშინ

$$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (19.11)$$

სირთულეს არ წარმოადგენს იმის დამტკიცება, რომ პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

და ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზიდან ცნობილი ფორმულით, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j} \text{grad}\varphi = -\text{div}(\varphi\vec{j}) + \varphi \text{div}\vec{j}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = -\int_V \text{div}(\varphi\vec{j})dV + \int_V \varphi \text{div}\vec{j}dV. \quad (19.12)$$

(19.1) ფორმულის ძალით მეორე ინტეგრალი ნულის ტოლია, ხოლო პირველი ინტეგრალი შეიძლება გარდავექმნათ ზედაპირულ ინტეგრალად გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემის საფუძველზე:

$$\int_V \text{div}(\varphi\vec{j})dV = \int_S \varphi\vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

დავუშვათ, რომ ყველა დენი თავმოყრილია V მოცულობაში. ამიტომ V მოცულობის შემომსაზღვრელ S ზედაპირში გამავალი დენი არ არსებობს. ეს იმას ნიშნავს, რომ S ზედაპირზე დენის სიმკვრივე ნულის ტოლია. ამით, მაშასადამე დამტკიცებულია (19.12) ინტეგრალის ნულთან ტოლობაც და (19.11) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{P} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (19.13)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მუდმივი დენი სითბოს გამოყოფს მთლიანად იმ ენერგიის ხარჯზე, რომელსაც ანიჭებს მას გარე ელექტრომამოძრავებელი ძალები. მაგნიტური ველის ენერგია ამ დროს რჩება მუდმივი.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის უწყვეტობის განტოლება და რას გვიჩვენებს იგი დენის შესახებ?
2. როგორ შეიძლება დაიყვანოს უწყვეტობის განტოლება მუდმივი დენებისთვის?
3. რატომ შეუძლებელია მუდმივი დენის არსებობა მხოლოდ კულონური წარმოშობის ელექტროსტატიკური ველით?
4. რა არის გარე ელექტრომამოძრავებელი ძალები და როგორია მათი როლი მუდმივი დენების წარმოქმნაში?
5. როგორია გარეგანი ველების წარმოშობის ძირითადი წყაროები?
6. როგორ განისაზღვრება დენის სიმკვრივე გარე ველების არსებობისას?

7. როგორია ომის კანონის განზოგადოებული ფორმა?
8. როგორ მიიღება ომის კანონის სრული ფორმულირება სრული წრედისთვის?
9. როგორ უკავშირდება ომის კანონი ელექტრომაგნიტური ძალებს?
10. როგორია ჯოულ-ლენცის კანონის განზოგადოებული ფორმა?
11. როგორ შეიძლება ომის კანონის გამოყენება ელექტრულ წრედში ენერჯის გადაცემის პროცესების შესაფასებლად?
12. როგორია ომის განტოლება ელექტრული წრედის იმპედანსის გათვალისწინებით?
13. როგორია ჯოულ-ლენცის კანონის გამოყენება სითბური ენერჯის გამოთვლაში?
14. როგორია ელექტრული ენერჯის გარდაქმნის პრინციპი სითბურ ენერჯიად დენის გავლით?
15. როგორ მოქმედებს ომის კანონი და ჯოულ-ლენცის კანონი ერთად პრაქტიკულ ელექტრულ სისტემებში?

ლექცია 7. სტაციონარული მაგნიტური ველი II.

§20. მაგნიტოსტატიკური ველი ვაკუუმში. ბიო-სავარის კანონი. წრფივი დენი. ელემენტარული დენის ველი.

§20. მაგნიტოსტატიკური ველი ვაკუუმში. ბიო-სავარის კანონი

მაქსველის განტოლება:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (20.1)$$

გვიჩვენებს, რომ ელექტროსტატიკური ველისაგან განსხვავებით, მაგნიტოსტატიკური ველი არ წარმოადგენს პოტენციალურ ველს, ხოლო განტოლება:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (20.2)$$

მიუთითებს იმაზე, რომ არ არსებობს მაგნიტური მუხტი, როგორც მაგნიტური ველის წყარო, როცა ელექტრული მუხტი ელექტრული ველის წყაროა.

ვექტორული ანალიზიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი ვექტორის როტორის დივერგენცია იგივურად ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ (20.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს ნებისმიერი \vec{A} ვექტორის როტორს:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (20.3)$$

\vec{A} ვექტორს უწოდებენ მაგნიტური ველის ვექტორ-პოტენციალს, ან მარტივად – ვექტორ-პოტენციალს. ვექტორული პოტენციალი, მოცემული \vec{B} მაგნიტური ველით ცალსახად არ განისაზღვრება. თუ \vec{A} პოტენციალი აღწერს მოცემულ \vec{B} მაგნიტურ ველს (20.3) ფორმულის თანახმად, მაშინ პოტენციალი

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi \quad (20.4)$$

(χ კოორდინატების ნებისმიერი ფუნქციაა) აღწერს იმავე \vec{B} ველს, რადგანაც

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \chi) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad (20.5)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ გრადიენტის როტორი ყოველთვის ნულის ტოლია. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ \vec{A} და \vec{A}' პოტენციალები, რომლებიც განსხვავდებიან ნებისმიერი ფუნქციის გრადიენტით, აღწერენ ერთსა და იმავე მაგნიტურ ველს. ვისარგებლოთ პოტენციალის არჩევის ამ ნებისმიერობით, მაშინ პოტენციალს შეიძლება დავადოთ დამატებითი პირობა. მაგნიტოსტატიკაში მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (20.6)$$

ვექტორ-პოტენციალი წარმოადგენს დამხმარე სიდიდეს და მას არანაირი პირდაპირი ფიზიკური შინაარსი არ გააჩნია.

განტოლება ვექტორული პოტენციალისათვის. თუ გავითვალისწინებთ (20.1) ფორმულაში \vec{B} -ს მნიშვნელობას (20.3) ფორმულიდან, მივიღებთ:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (20.7)$$

ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (20.8)$$

და მხედველობაში (20.6) ფორმულა, მაშინ (20.8) განტოლების პირველი წევრი ნულის ტოლი იქნება. საბოლოოდ, ვექტორ-პოტენციალისათვის ვღებულობთ შემდეგ განტოლებას:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (20.9)$$

ეს განტოლება შეილება ჩავწეროთ ასევე სამი სკალარული განტოლების სახით ვექტორთა კომპონენტებისათვის :

$$\nabla^2 \vec{A}_x = -\mu_0 \vec{j}_x, \quad \nabla^2 \vec{A}_y = -\mu_0 \vec{j}_y, \quad \nabla^2 \vec{A}_z = -\mu_0 \vec{j}_z.$$

ამგვარად, ვექტორ-პოტენციალი აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას, რომლის ამონახსნიც შეიძლება ჩავწეროთ სკალარული პოტენციალისათვის პუასონის განტოლების ამონახსნის ანალოგიურად:

$$\vec{A}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_x dV}{r}, \quad \vec{A}_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_y dV}{r}, \quad \vec{A}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_z dV}{r}$$

ან ვექტორული ფორმით:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{r} \quad (20.10)$$

ამ ფორმულაში \vec{A} ვექტორ-პოტენციალის მნიშვნელობაა იმ წერტილში, რომელშიც გამოითვლება ველი; \vec{j} დენის სიმკვრივეა dV საინტეგრაციო მოცულობის ელემენტში; r – მანძილია dV მოცულობის ელემენტსა და იმ წერტილს შორის, რომელშიც გამოითვლება პოტენციალი.

ბიო-სავარის კანონი. მაგნიტური ველის ინდუქცია გამოითვლება (20.3) ფორმულის საფუძველზე ვექტორული პოტენციალის დახმარებით (20.10) ფორმულის საფუძველზე. გავითვალისწინოთ (20.10) ფორმულა (20.3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\vec{j} dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) dV, \quad (20.11)$$

სადაც როტორის ნიშანი შეტანილია ინტეგრალის შიგნით, რადგანაც საინტეგრაციო მოცულობა არ არის დამოკიდებული იმ ცვლადებზე, რომლის მიხედვითაც აიღება ოპერაცია როტორი. ე. ი. არ არის დამოკიდებული იმ წერტილის კოორდინატებზე, რომელშიც გამოითვლება ვექტორ-პოტენციალი.

(20.11) ფორმულაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გარდასაქმნელად ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის ფორმულით:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\vec{j}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}\vec{j} + \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}\right] \quad (20.12)$$

(20.11) ფორმულაში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ დენის სიმკვრივის ვექტორი \vec{j} დამოკიდებულია საინტეგრაციო წერტილის კოორდინატებზე, ხოლო ოპერაცია როტორი მიმდინარეობს იმ წერტილების კოორდინატების მიხედვით, რომელშიც გამოითვლება ველი, ე. ი. სულ სხვა დამოუკიდებელი ცვლადებით. მაშასადამე, (20.12) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველ წევრში (20.11) ფორმულაში ჩასმისას ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში უნდა დავუშვათ $\operatorname{rot}\vec{j}$ ნულის ტოლად. ასევე მივიღოთ მხედველობაში, რომ:

$$\left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}\right] = -\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\vec{j}\right] = \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3}, \quad (20.13)$$

და გავითვალისწინოთ (20.12) ფორმულა (20.11)–ში, მივიღებთ ბიო–სავარის კანონს:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV \quad (20.14)$$

შევნიშნოთ, რომ \vec{r} რადიუს–ვექტორი ამ ფორმულაში წარმოადგენს რადიუს–ვექტორს, გავლებულს საინტეგრაციო მოცულობის ელემენტიდან იმ წერტილში, რომელშიც გამოითვლება ველი.

წრფივი დენი. პრაქტიკულად, მთელ რიგ შემთხვევებში მუდმივი დენი გადის საკმარისად თხელ გამტარებში, რომლის განიკვეთშიც იგი განაწილდება თანაბარი სიმკვრივით. ასეთ დენებს წრფივ დენებს უწოდებენ. ამ განმარტებაში სადენი ითვლება თხელ გამტარად, თუ მისი განიკვეთის ხაზოვანი ზომები გაცილებით მცირეა იმ მანძილებთან შედარებით, რომელშიც ველი გამოითვლება.

(20.14) ფორმულით მოცემული ბიო–სავარის კანონი წრფივი დენებისათვის მარტივ სახეს ღებულობს. განვიხილოთ გამტარის dl ელემენტი. მისი მოცულობა $dV = S \cdot dl$, სადაც S – განიკვეთის ფართობია, ამიტომ

$$\vec{j}dV = \vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l} \quad (20.15)$$

სადაც $I = jS$ – გამტარში გამავალი დენის ძალაა, ხოლო $d\vec{l}$ – გამტარის ელემენტის სიგრძეა, რომლის მიმართულებაც ემთხვევა დენის მიმართულებას გამტარში. (20.15) გარდაქმნა შეიცავს ინტეგრაციას გამტარის განიკვეთის მიხედვით. რადგანაც გამტარის განიკვეთის ხაზოვანი ზომები ბევრად ნაკლებია იმ წერტილამდე მანძილთან შედარებით, რომელშიც ველი გამოითვლება, ამიტომ ასეთი ინტეგრაციის დროს შეიძლება უგულებელვყოთ ამ მანძილის ცვლილება სხვადასხვა დენიან ელემენტებამდე და ჩავთვალოთ იგი მუდმივ სიდიდედ. ამიტომ (20.14) ფორმულაში წრფივ დენზე გადასვლა ხორციელდება შემდეგი ცვლილებით:

$$dV \rightarrow Id\vec{l} \quad (20.16)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში r ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ. ამის შემდეგ ინტეგრალში რჩება ჩასატარებელი ინტეგრაციის ოპერაცია $d\vec{l}$ – ის მიხედვით მთელი გამტარის გასწვრივ. ასეთი ინტეგრაციის დროს I დენის ძალა წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, რადგანაც ერთი და იმავე გამტარის სხვადასხვა განიკვეთებში დენის ძალა ერთი და იგივეა, ამიტომ I შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის წინ. ამგვარად, წრფივ დენებზე გადასვლის შემდეგ (20.14) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} dV \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{[d\vec{l} \vec{r}]}{r^3} \quad (20.17)$$

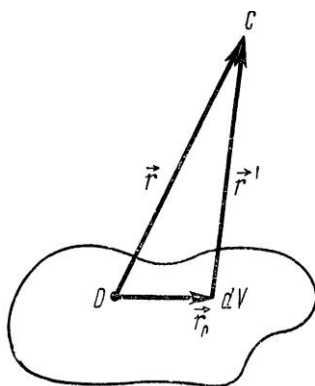
სადაც V – გამტარის მოცულობაა, L – გამტარის წრფივი კონტურია. ამრიგად, წრფივი დენების შემთხვევაში მაგნიტური ველის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება ბიო–სავარის ფორმულის დახმარებით მრუდწირული ინტეგრალის გამოთვლაზე გამტარის კონტურის მიხედვით.

ელემენტარული დენის ველი. ელემენტარულს უწოდებენ ჩაკეტილ დენს, რომელიც გადის სივრცის იმ არეში, რომლის საზოგადოებრივი ზომებიც გაცილებით ნაკლებია ამ არიდან იმ წერტილამდე მანძილთან შედარებით, რომელშიც გამოითვლება მაგნიტური ველის ინდუქცია. ელემენტარული დენის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს დენიანი ჩარჩო, რომლის ზომებიც გაცილებით ნაკლებია იმ მანძილთან შედარებით, რომელშიც ველი გამოითვლება. გარკვეულ საზღვრებში ნებისმიერი მუდმივი დენი წარმოადგენს ელემენტარულ დენს. ამ გარემოებით განპირობებულია სწორედ ელემენტარული დენების ველის განხილვა.

ელემენტარული დენის ვექტორ–პოტენციალი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \frac{\vec{j} dV}{r'} \quad (20.18)$$

(20.18) ფორმულაში შემავალი სხვადასხვა სიდიდეები ნაჩვენებია ნახაზზე (იხ. ნახ.20.1).



ნახ.20.1

კოორდინატთა სისტემის სათავე მოთავსებულია O წერტილში, ხოლო ველი გამოითვლება C წერტილში; V - დენიანი გამტარის მოცულობაა. არის ზომების სიმცირის მაჩვენებელი პირობების მათემატიკური გამოსახულებანი წარმოდგენილია შემდეგი უტოლობების სახით:

$$\frac{r_0}{r'} \ll 1, \quad \frac{r_0}{r} \ll 1. \quad (20.19)$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad (20.20)$$

აქედან:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (20.21)$$

გავითვალისწინოთ (20.19) პირობა (20.21) ფორმულაში, გავშალოთ იგი მწკრივად და ამ გაშლაში შემოვიხსნათ მხოლოდ და მხოლოდ r_0/r წრფივი წევრებით, მივიღებთ:

$$\left(1 - 2 \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2}.$$

ამგვარად, მიიღება შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^3} + \dots,$$

გავითვალისწინოთ იგი (20.18) ფორმულაში, მივიღებთ ვექტორ-პოტენციალისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \int \vec{j} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \int \vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) dV. \quad (20.22)$$

(20.22) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ საინტეგრაციო მოცულობას დავყოფთ ცალკეულ დენიან მილებად და ცალკეული დენიანი მილისათვის ინტეგრირების დროს გამოვიყენებთ (20.16) გარდაქმნას. მივიღებთ:

$$\int_V \vec{j} dV = I \oint d\vec{l} = 0$$

რადგანაც ყოველი დენიანი მილი ჩაკეტილია და, მაშასადამე გვექნება:

$$\oint d\vec{l} = 0$$

(20.22) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ვექტორული ალგებრიდან ორმაგი ვექტორული ნამრავლისათვის ფორმულით:

$$[[\vec{r}_0 \vec{j}] \vec{r}] = \vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) - \vec{r}_0(\vec{j} \cdot \vec{r})$$

ეს ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) = \left[[\vec{r}_0 \vec{j}] \frac{\vec{r}}{2}\right] + \frac{\vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) + \vec{r}_0(\vec{j} \cdot \vec{r})}{2}$$

გავითვალისწინოთ უკანასკნელი გამოსახულება (20.22) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V [[\vec{r}_0 \vec{j}] \vec{r}] dV + \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V [\vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) + \vec{r}_0(\vec{j} \cdot \vec{r})] dV \quad (20.23)$$

დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$\vec{K} = \int_V [\vec{j}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) + \vec{r}_0(\vec{j} \cdot \vec{r})] dV$$

ნულის ტოლია. ამისათვის გავამრავლოთ იგი ნებისმიერ მუდმივ \vec{a} ვექტორზე:

$$\vec{a} \cdot \vec{K} = \int_V [(\vec{a} \cdot \vec{j})(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) + (\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{j} \cdot \vec{r})] dV \quad (20.24)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება შეიძლება გარდავქმნათ შემდეგი ტოლობის საფუძველზე:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{j})(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) + (\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{j} \cdot \vec{r}) &= \vec{j} \text{grad}[(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)] = \\ &= \text{div}[\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)] - (\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) \text{div} \vec{j} \end{aligned} \quad (20.25)$$

გავითვალისწინოთ (20.25) ფორმულა (20.24) ფორმულაში და მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\text{div} \vec{j} = 0$, გვექნება:

$$\vec{a} \cdot \vec{K} = \int_V \text{div}[\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)] dV = \int_S \vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) dS = 0 \quad (20.26)$$

სადაც გამოყენებულია გაუს–ოსტროგრადსკის თეორემა და გათვალისწინებულია, რომ ყველა დენი თავმოყრილია V მოცულობის შიგნით, რის გამოც \vec{j} დენის სიმკვრივე V მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის ყოველ წერტილში ნულის ტოლია და მაშასადამე, ნულის ტოლია ამ ზედაპირზე ინტეგრალიც (20.26) ფორმულაში. ტოლობიდან:

$$\vec{a} \cdot \vec{K} = 0 \quad (20.27)$$

ნებისმიერი \vec{a} ვექტორისათვის ვღებულობთ:

$$\vec{K} = 0 \quad (20.28)$$

ეს კი ცხადია, თუ \vec{K} ვექტორს მივმართავთ საკოორდინატო დერძების მიმართულებით, მაშინ (20.27) ფორმულა მიუთითებს იმაზე, რომ ყველა კომპონენტები K_x, K_y, K_z ნულის ტოლია, მაშასადამე $\vec{K} = 0$. ამგვარად, თუ მივიღებთ მხედველობაში (20.28) ფორმულას, გვექნება:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V [(\vec{r}_0 \cdot \vec{j}) \vec{r}] dV = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \left[\left(\int_V (\vec{r}_0 \cdot \vec{j}) dV \right) \vec{r} \right] \quad (20.29)$$

ვექტორს,

$$P_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r}_0 \cdot \vec{j}) dV \quad (20.30)$$

უწოდებენ ელემენტარული დენის მაგნიტურ მომენტს. (20.29) და (20.30) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ვექტორ–პოტენციალი და მაშასადამე, ჩაკეტილი დენის მაგნიტური ველის ინდუქცია მისგან საკმაოდ დიდ მანძილებზე პირველ მიახლოებაში განისაზღვრება ამ დენის მაგნიტური მომენტით:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[P_m \vec{r}]}{r^3} \quad (20.31)$$

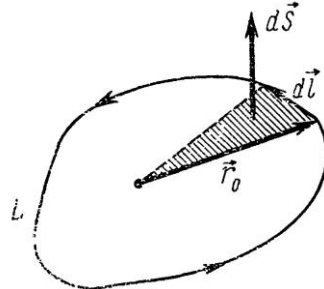
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{[P_m \vec{r}]}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(P_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{P_m}{r^3} \right) \quad (20.32)$$

(20.32) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ჩაკეტილი დენის მაგნიტური ველი ეცემა მანძილის კუბის უკუპროპორციულად.

წრფივი დენის მაგნიტური მომენტი. წრფივი დენის შემთხვევაში (20.30) ფორმულა მაგნიტური მომენტისათვის დებულობს მარტივ სახეს. გავითვალისწინოთ (20.16) ფორმულა, მივიღებთ:

$$P_m = \frac{1}{2} \int_v [\vec{r}_0 \vec{j}] dV = \frac{I}{2} \int_L [\vec{r}_0 d\vec{l}] \quad (20.33)$$

სადაც L – ჩაკეტილი დენის კონტურია (იხ. ნახ.20.2):



ნახ.20.2

მივიღოთ მხედველობაში, რომ:

$$\frac{1}{2} [\vec{r}_0 d\vec{l}] = d\vec{S} \quad (20.34)$$

ე. ი. $d\vec{S}$ - დენიანი კონტურის შემომსაზღვრელი ზედაპირის ელემენტის ვექტორია, მაშასადამე:

$$\frac{I}{2} \int_L [\vec{r}_0 d\vec{l}] = \int_S d\vec{S} = \vec{S} \quad (20.35)$$

რომელიც წარმოადგენს L დენიანი კონტურის ზედაპირის ვექტორს. გავითვალისწინოთ (20.35) ფორმულა (20.33) –ში, გვექნება:

$$P_m = I\vec{S} \quad (20.36)$$

ზედაპირის \vec{S} ვექტორი დენიანი კონტურის შემოვლის მიმართულებასთან ადგენს მარჯვენა ხრახნულ სისტემას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია მაქსველის განტოლებები მაგნიტოსტატიკური ველისთვის?
2. რატომ არ წარმოადგენს მაგნიტოსტატიკური ველი პოტენციალურ ველს?
3. რატომ არ არსებობს მაგნიტური მუხტი, ხოლო ელექტრული მუხტი არის ელექტრული ველის წყარო?
4. რას გვიჩვენებს ნებისმიერი ვექტორის როტორის დივერგენციის ტოლობა ნულთან?
5. როგორ არის განსაზღვრული ვექტორ-პოტენციალი მაგნიტური ველისთვის?
6. რატომ არ არის ვექტორ-პოტენციალი ცალსახად განსაზღვრული?
7. როგორია ვექტორ-პოტენციალის ცვალებადობის პირობები?
8. რა ფორმას იღებს ვექტორ-პოტენციალის განტოლება ჰუასონის განტოლების მიხედვით?
9. როგორია ვექტორ-პოტენციალის ფიზიკური მნიშვნელობა?

10. როგორ მიიღება ბიო-სავარის კანონი ვექტორ-პოტენციალის გამოყენებით?
11. როგორ არის დაკავშირებული ბიო-სავარის კანონი ვექტორული ანალიზის ძირითად ფორმულებთან?
12. როგორ განისაზღვრება მაგნიტური ველის ინდუქცია ბიო-სავარის კანონის მიხედვით?
13. რა განსხვავებაა წრფივი დენისთვის და განაწილებული დენისთვის ბიო-სავარის კანონის გამოსახულებებს შორის?
14. როგორია ბიო-სავარის კანონის გამოყენება რთული რხევითი კონტურისთვის?
15. როგორ მოქმედებს რადიუს-ვექტორის ცვალებადობა საინტეგრაციო მოცულობის შიგნით?
16. რა პირობებში ითვლება დენი წრფივ დენად?
17. როგორ არის განაწილებული დენის სიმკვრივე წრფივ გამტარში?
18. როგორია ბიო-სავარის კანონის გამარტივებული ფორმულირება წრფივი დენებისთვის?
19. როგორია ინტეგრაციის პრინციპი გამტარის კონტურის მიხედვით?
20. რატომ შეიძლება უგულებელვყოთ გამტარის განიკვეთის გავლენა ველის გამოთვლაზე?
21. როგორია წრფივი დენისთვის მაგნიტური ველის გამოსახულება?
22. რას ნიშნავს ელემენტარული დენი და როგორ განისაზღვრება იგი?
23. როგორია ელემენტარული დენის მაგნიტური ველი დამორებული წერტილებში?
24. როგორ არის დაკავშირებული ელემენტარული დენის ველი ვექტორ-პოტენციალთან?
25. როგორ მიიღება მაგნიტური მომენტის გამოსახულება ელემენტარული დენისთვის?
26. როგორია მაგნიტური ველის დასუსტების კანონი მანძილის ზრდასთან ერთად?
27. რა როლს ასრულებს მაგნიტური მომენტი ელემენტარული დენისთვის?
28. როგორ მოქმედებს ჩაკეტილი დენის ფორმა მაგნიტური ველის სტრუქტურაზე?
29. რა არის მაგნიტური მომენტი და როგორ განისაზღვრება იგი?
30. როგორია წრფივი დენიანი კონტურის მაგნიტური მომენტის ფორმულირება?
31. როგორია კონტურის შემოსაზღვრული ზედაპირის ვექტორი?
32. როგორია ბიო-სავარის კანონის გამოყენება მაგნიტური მომენტის გამოთვლაში?
33. როგორ არის დაკავშირებული ჩაკეტილი დენის მაგნიტური მომენტი მის მიერ წარმოქმნილ ველთან?
34. როგორ მოქმედებს ზედაპირის ვექტორი დენის კონტურის მარჯვენა ხრახნულ სისტემასთან?

ლექცია 8. სტაციონარული მაგნიტური ველი III

- §21. მაგნეტიკები მაგნიტოსტატიკურ ველში;
- §22. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის ენერგია;
- §23. მექანიკური ძალები მაგნიტურ ველში.

§21. მაგნეტიკები მაგნიტოსტატიკურ ველში

მაგნეტიკებს უწოდებენ ნივთიერებებს, რომელთაც შესწევთ უნარი, გავლენა მოახდინონ მაგნიტურ ველზე, ალაგზნონ იგი, ან სახე უცვალონ მას. გარე მაგნიტურ ველში მაგნეტიკების მოთავსების შედეგად ისინი იძენენ მაგნიტურ მომენტს (მაგნიტდებიან). მაგნეტიკის დამაგნიტების ინტენსივობას ახასიათებენ დამაგნიტების \vec{j} ვექტორით, რომელიც განისაზღვრება მაგნეტიკის ერთეულოვანი მოცულობის შესაბამისი მაგნიტური მომენტით. ამგვარად, მაგნეტიკის dV მოცულობის ელემენტის $d\vec{P}_m$ მაგნიტური მომენტი, რომლის დამაგნიტებაც ხასიათდება დამაგნიტების \vec{j} ვექტორით, ტოლია:

$$d\vec{P}_m = \vec{j}dV \quad (21.1)$$

მოცულობის ყოველი ელემენტისათვის მაგნიტური მომენტის არსებობა განაპირობებს, რომ ეს მაგნიტური მომენტი (20.32) ფორმულის თანახმად წარმოქმნის დამატებით მაგნიტურ ველს, რომელიც იკრიბება გარე მაგნიტურ ველთან. ამგვარად, მაგნეტიკის დამაგნიტების გავლენა მაგნიტურ ველზე ანალოგიურია დიელექტრიკის პოლარიზაციის გავლენისა ელექტრულ ველზე. მაგრამ მათ შორის არსებითი განსხვავებაა. დიელექტრიკებში დამატებითი ელექტრული ველი ყოველთვის მიმართულია პირველსაწყისი გარე ველის საპირისპიროდ. ამიტომ დიელექტრიკში სრული ველი ყოველთვის მცირეა პირველსაწყის ველთან შედარებით. მაგნეტიკებში მაგნეტიკის თვისებებზე დამოკიდებულების მიხედვით დამატებითი ველი შეიძლება მიმართული იყოს პირველსაწყისი ველის საწინააღმდეგო, ან მისი თანხვდენილი მიმართულებით. მაგნეტიკები, რომელთა დამატებითი მაგნიტური ველი მიმართულია პირველსაწყისი ველის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ცნობილია დიამაგნეტიკების სახელწოდებით. მაგნეტიკები, რომელთა დამატებითი მაგნიტური ველი მიმართულია პირველსაწყისი ველის მიმართულებით, ცნობილია პარამაგნეტიკების სახელწოდებით. ამგვარად, დიამაგნეტიკები ასუსტებენ მაგნიტურ ველს, ხოლო პარამაგნეტიკები კი – აძლიერებენ. ყველა დიამაგნეტიკებისა და უმრავლესობა პარამაგნეტიკების დამატებითი მაგნიტური ველი გაცილებით მცირეა პირველსაწყის გარე ველთან შედარებით. პირველსაწყისი მაგნიტური ველის გაქრობისას დამატებითი მაგნიტური ველიც ქრება, ე. ი. დიამაგნეტიკები და პარამაგნეტიკები მთლიანად განმაგნიტდებიან. არსებობს კიდევ მაგნეტიკების მესამე კლასი, რომელთა დამაგნიტებით შექმნილი მაგნიტური ველი გაცილებით დიდია პირველსაწყის ველზე და ეს დამატებითი ველი არ ქრება პირველსაწყისი ველის გაქრობის დროს. მაშასადამე, ეს მაგნეტიკები ხასიათდებიან ნარჩენი დამაგნიტებით. მათ შესწევთ უნარი, არა მარტო სახე უცვალონ მაგნიტურ ველს, არამედ დამოუკიდებლად ალაგზნონ იგი. ასეთ მაგნეტიკებს ფერომაგნეტიკებს უწოდებენ. კლასიკური ელექტროდინამიკის დახმარებით შეუძლებელია აგებული იქნას ფერომაგნეტიკების დამაგნიტების მკაცრი თეორია,

რადგანაც მათი დამაგნიტება განპირობებულია ელექტრონების სპინური მაგნეტიზმით, რომელთა აღწერისათვის დიდ როლს თამაშობს კვანტური კანონზომიერებები. ამიტომ ელექტროდინამიკის კურსში მაგნეტიკების თეორია გამოიყენება მხოლოდ დიამაგნეტიკებისა და პარამაგნეტიკებისათვის.

განმარტების თანახმად დამაგნიტების ვექტორი ტოლია:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{P}_{mi} \quad (21.2)$$

ვექტორ-პოტენციალი მაგნეტიკების არსებობისას. მაგნეტიკის გავლენა მაგნიტურ ველზე დაიყვანება მაგნეტიკის დამაგნიტებით წარმოქმნილ დამატებით ველზე. ამიტომ მაგნეტიკის არსებობისას სრული მაგნიტური ველი წარმოადგენს ორი ველის ჯამს:

- 1) გამტარებლობის დენის მაგნიტური ველი (რომლის ვექტორ-პოტენციალია \vec{A}_0);
- 2) მაგნეტიკის დამაგნიტებით წარმოქმნილი მაგნიტური ველი (რომლის ვექტორ-პოტენციალია \vec{A}_M).

ამიტომ სრული მაგნიტური ველის ვექტორ-პოტენციალი ტოლია:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_M \quad (21.3)$$

სადაც

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} dV}{r} \quad (21.4)$$

აქ \vec{j} გამტარებლობის დენის სიმკვრივეა V მოცულობაში. (20.31) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $d\vec{P}_m$ მაგნიტური მომენტი წარმოქმნილი $d\vec{A}_M$ ვექტორ-პოტენციალი განისაზღვრება გამოსახულებებით:

$$d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[d\vec{P}_m \times \vec{r}]}{r^3} \quad (21.5)$$

თუ გავითვალისწინებთ (21.1) ფორმულას, მივიღებთ:

$$d\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (21.6)$$

მაშასადამე,

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV \quad (21.7)$$

და, მაგნეტიკის დამაგნიტებით შექმნილი ველის ამოცანა ამოხსნილია. (21.7) ფორმულას ხელსაყრელია მივცეთ სხვა სახე. ამისათვის ვისარგებლოთ ვექტორული ალგებრის ფორმულით, რომელსაც მოცემულ შემთხვევაში ეწევა შემდეგი სახე:

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{j} + \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{j} \right] \quad (21.8)$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა (21.7) ფორმულაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გარდასაქმნელად. ამასთან, საჭიროა მივიღოთ მხედველობაში, რომ (21.7) ფორმულაში \vec{r} რადიუს-ვექტორი გავლებულია dV მოცულობიდან იმ წერტილისაკენ, სადაც გამოითვლება \vec{A}_M ვექტორ-პოტენციალი. ცხადია, რომ (21.8) ფორმულაში დიფერენცირება წარმოებს ერთი და იმავე ცვლადით. ამიტომ, თუ მივიღებთ მხედველობაში როტორისა და გრადიენტის ოპერაციებში დიფერენცირებას dV მოცულობის ელემენტის კოორდინატების მიხედვით, გვექნება:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \vec{J} + \frac{[\vec{r} \times \vec{J}]}{r^3} = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \vec{J} - \frac{[\vec{J} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (21.9)$$

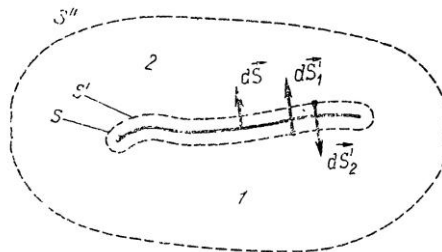
აქ \vec{r} კვლავ რადიუს-ვექტორია dV მოცულობიდან იმ წერტილამდე, რომელშიც გამოითვლება ველი. (21.9) ფორმულის დახმარებით (21.7) ფორმულით მოცემული პოტენციალის გამოსახულება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \vec{J}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dV \quad (21.10)$$

(21.10) ფორმულის მეორე ინტეგრალის შემდგომი გარდაქმნისათვის ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით:

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{A} dV = \oint [d\vec{S} \times \vec{A}] \quad (21.11)$$

სადაც \vec{A} – უწყვეტი ვექტორული ფუნქციაა V არეში; $d\vec{S}$ - მიმართულია ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულებით. (21.2) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ დამაგნიტების \vec{J} ვექტორი განიცდის წყვეტას მაგნეტიკების გამყოფ საზღვარზე და მაგნეტიკისა და ვაკუუმის გამყოფ საზღვარზე. იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ (21.11) ფორმულით, (21.10) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მეორე ინტეგრალის გარდასაქმნელად, აუცილებელია გამოვყოთ \vec{J} ვექტორული ფუნქციის წყვეტის საზღვარი (იხ. ნახ.21.1)



ნახ.21.1

დავუშვათ, S'' ზედაპირი აღნიშნავს განსახილველი მოცულობის შემოსაზღვრულ ზედაპირს, ხოლო S ზედაპირი – მაგნეტიკების გამყოფ ზედაპირს, რომელზედაც \vec{J} ვექტორი განიცდის წყვეტას. \vec{J} ვექტორის წყვეტის ამ ზედაპირს საინტეგრაციო არიდან გამოვყოფთ S' ზედაპირით. ესლა V მოცულობა შემოსაზღვრულია S'' და S' ზედაპირებით. ამ მოცულობაში \vec{J} ვექტორი უწყვეტია, ასე რომ, შეიძლება გამოვიყენოთ (21.11) ფორმულა:

$$\int_V \text{rot} \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dV = \int_{S''} \frac{[d\vec{S} \times \vec{J}]}{r} + \int_{S'} \frac{[d\vec{S} \times \vec{J}]}{r} \quad (21.12)$$

ჩავთვალოთ, რომ S ზედაპირის დადებითი ნორმალური მიმართულია 2 მაგნეტიკის მხარეს, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. და თუ მივასწრაფებთ S' ზედაპირს S ზედაპირისაკენ, მივიღებთ:

$$\int_{S'} \frac{[d\vec{S} \times \vec{J}]}{r} = - \int_S \frac{[d\vec{S} \times \vec{J}_2]}{r} + \int_S \frac{[d\vec{S} \times \vec{J}_1]}{r} = \int_S \frac{[d\vec{S} \times (\vec{J}_1 - \vec{J}_2)]}{r} = \int_S \frac{[\vec{n} \times (\vec{J}_1 - \vec{J}_2)]}{r} dS \quad (21.13)$$

სადაც \vec{n} - S ზედაპირის ნორმალ-ვექტორის ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც მიმართულია 2 მაგნეტიკის მხარეს. თუ ჩავთვლით, რომ ყველა მაგნეტიკი განლაგებულია V მოცულობის შიგნით ისე, რომ S'' ზედაპირი არ კვეთს მაგნეტიკებს, მაშინ (21.12) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში ვექტორი $\vec{J} = 0$. ამიტომ (21.12) ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია. მეორე ინტეგრალი კი გარდაიქმნება (21.13) ფორმულის დახმარებით. ამგვარად, (21.13) და (21.12) - ის გათვალისწინებით (21.10) ვექტორ-პოტენციალის გამოსახულება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \vec{J}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{[\vec{n} \times (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)]}{r} dS \quad (21.14)$$

სადაც S მაგნეტიკების ყველა გამყოფი ზედაპირების ჯამია, რომელზედაც \vec{J} განიცდის წყვეტას. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, მაქსველის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ მაგნიტური მუხტები არ არსებობენ. მაგნიტურ ველს ქმნის მხოლოდ დენი. ამიტომ დამაგნიტება, რომელიც იწვევს დამატებითი მაგნიტური ველის წარმოშობას, დაკავშირებული უნდა იყოს რომელიღაც დენებთან. მაგრამ გამტარებლობის დენისაგან განსხვავებით, რომელიც დაკავშირებულია მუხტების გადაადგილებასთან მაკროსკოპულ მანძილებზე, ეს დენები დაკავშირებულნი არიან მუხტების მოძრაობასთან მიკროსკოპულ არეებში, ე. ი. დაკავშირებულნი არიან მუხტების მოძრაობასთან მოლეკულებში. ამიტომ მათ მოლეკულურ დენებს უწოდებენ. ამგვარად, დამაგნიტება განპირობებულია მოლეკულური დენებით. შევნიშნოთ ერთხელ კიდევ, რომ აქ მსჯელობა მიმდინარეობს მხოლოდ პარამაგნეტიკებზე და დიამაგნეტიკებზე. ფერომაგნეტიკების მაგნიტური თვისებები განპირობებულია ელექტრონების მაგნიტური თვისებებით და არ შეიძლება აიხსნას მოლეკულური დენებით.

შევადაროთ (21.14) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი (21.4) გამოსახულებას. ვხედავთ, რომ დამაგნიტებით წარმოქმნილი ვექტორ-პოტენციალის (21.14) გამოსახულებაში დენის მოცულობითი სიმკვრივის როლს ასრულებს $\text{rot} \vec{J}$. მაშასადამე, მოლეკულური დენების საშუალო მოცულობითი სიმკვრივე ტოლია:

$$\langle j_{\text{ზედ.მოლ.}} \rangle = \text{rot} \vec{J} \quad (21.15)$$

აქ საუბარია საშუალო სიმკვრივეზე, რადგანაც მოლეკულური დენების ქუჩმარტივი მოცულობითი სიმკვრივე, ცხადია, ძალიან სწრაფად იცვლება ერთი ატომიდან მეორეზე გადასვლის დროს, \vec{J} დამაგნიტება კი ითვალისწინებს რომელიღაც საშუალო დამაგნიტებას, რომელიც განპირობებულია ამ მოლეკულური დენებით. ამგვარად, (21.14) ფორმულაში პირველი წევრი

ითვალისწინებს მაგნიტური ველის წარმოშობას მოლეკულური დენების საშუალო მოცულობითი სიმკვრივის არსებობით. აქედან გამომდინარეობს, რომ (21.14) ფორმულაში მეორე წევრი აღწერს მაგნიტური ველის წარმოშობას ზედაპირული მოლეკულური დენების საშუალო სიმკვრივის არსებობით $\langle j_{\text{ზედ.მოლ.}} \rangle$. მაშასადამე:

$$\langle j_{\text{ზედ.მოლ.}} \rangle = [\vec{n} \times (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)] \quad (21.16)$$

მაშინ (21.14) ფორმულა მაგნეტიკის დამაგნიტებით შექმნილი ველის ვექტორ-პოტენციალისათვის, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\langle j_{\text{ზედ.მოლ.}} \rangle}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\langle j_{\text{ზედ.მოლ.}} \rangle}{r} dS \quad (21.17)$$

ამგვარად, (21.17) ფორმულის საფუძველზე შეიძლება ვთქვათ, რომ მაგნეტიკების დამაგნიტებით შექმნილი მაგნიტური ველი დაკავშირებულია მაგნეტიკების მოცულობით და ზედაპირულ მოლეკულურ დენებთან.

კავშირი მაგნიტურ შედწევადობასა და მაგნიტურ ამთვისებლობას შორის. როგორც აღვნიშნეთ, მაგნეტიკების არსებობისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ გამტარებლობის დენებით შექმნილ მაგნიტურ ველთან ერთად მოლეკულური დენებით შექმნილი მაგნიტური ველი. ვაკუუმში გამტარებლობის დენით შექმნილი მაგნიტური ველი აღიწერება მაქსველის განტოლებით:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (21.18)$$

მაგნეტიკების არსებობის შემთხვევაში (21.18) ფორმულაში \vec{j} გამტარებლობის დენთან ერთად ჩავწეროთ მოლეკულური დენის სიმკვრივეც (21.15). ამიტომ თუ \vec{B} ქვემ ვიგულისხმებთ მაგნეტიკების არსებობისას მაგნიტურ ინდუქციას, მაშინ (21.18) განტოლება საჭიროა გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \text{rot} \vec{j}) \quad (21.19)$$

(21.19) ფორმულაში გადავიტანოთ $\text{rot} \vec{j}$ ტოლობის მარცხენა მხარეში და ორთავე მხარე გავყოთ μ_0 -ზე, მივიღებთ:

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \right) = \vec{j} \quad (21.20)$$

გამოსახულებას:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} = \vec{H} \quad (21.21)$$

მაგნიტური ველის დაძაბულობას უწოდებენ. მისი დახმარებით (21.20) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (21.22)$$

მაშასადამე, მაგნიტური ველის დაძაბულობა იქმნება გამტარებლობის დენებით და არ წარმოადგენს აუცილებლობას ცალკე გავითვალისწინოთ მოლეკულური დენები და დამაგნიტება, ე. ი. იგი წარმოადგენს მაგნიტური ველის ფენომენოლოგიურ აღწერას და არის ელექტრული ველის \vec{D} ინდუქციის ვექტორის ანალოგი. (21.21) ფორმულა (21.23)-ის

გათვალისწინებით გვიჩვენებს, რომ \vec{j} პროპორციულია როგორც \vec{B} , ასევე \vec{H} ვექტორების. ე. ი. ეს თანაფარდობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ორი ფორმულის სახით:

$$\vec{j} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\vec{B}, \quad \vec{j} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H} \quad (21.23)$$

სადაც

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (21.24)$$

ხშირად იყენებენ (21.23)–ის მეორე ფორმულას, რომელშიც

$$\chi = \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \quad (21.25)$$

და რომელსაც მაგნიტურ ამთვისებლობას უწოდებენ. მაშასადამე, მაგნიტური μ შეღწევადობა გამოისახება χ მაგნიტური ამთვისებლობით შემდეგნაირად:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (21.26)$$

χ შეიძლება იყოს როგორც დადებით, ასევე უარყოფითი. შესაბამისად ამისა, მაგნეტიკის მაგნიტური შეღწევადობა შეიძლება იყოს მაგნიტურ მუდმივაზე როგორც მეტი, ასევე ნაკლები. დიამაგნეტიკებისათვის:

$$\chi < 0, \quad \mu < \mu_0$$

პარამაგნეტიკებისათვის კი:

$$\chi > 0, \quad \mu > \mu_0$$

მაგნეტიკები, რომელთა მაგნიტური შეღწევადობა დამოკიდებულია ველის დაძაბულობაზე, და გარდა ამისა, გვაქვს ნარჩენი მაგნეტიზმი, ცნობილია ფერომაგნეტიკების სახელწოდებით. ფერომაგნეტიკებისათვის $\mu \gg \mu_0$.

ველის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები მაგნეტიკების არსებობისას. მაქსველის განტოლებებს მაგნეტიკების შემთხვევაში აქვთ შემდეგი სახე:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad (21.27)$$

სასაზღვრო პირობები მაგნიტური ველის ვექტორებისათვის მიიღება (21.27) განტოლებების საფუძველზე ანალოგიურად, რომელიც გვექონდა ელექტრული ველის ვექტორებისათვის. სასაზღვრო პირობა მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელებისათვის რჩება იგივე:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (21.28)$$

ხოლო სასაზღვრო პირობას მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელებისათვის აქვს შემდეგი სახე;

$$H_{2t} - H_{1t} = j_{\text{ზედ}} \quad (21.29)$$

სადაც $j_{\text{ზედ}}$ ზედაპირული დენის სიმკვრივეა.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის მაგნეტიკები და როგორია მათი გავლენა მაგნიტურ ველზე?
2. როგორია მაგნეტიკის კლასიფიკაცია დამაგნიტების მიხედვით?

3. რა არის დამაგნიტების ვექტორი და როგორ განისაზღვრება იგი?
4. რა განსხვავებაა დიამაგნეტიკებს, პარამაგნეტიკებსა და ფერომაგნეტიკებს შორის?
5. როგორია დიამაგნეტიკისა და პარამაგნეტიკის გავლენა გარე მაგნიტურ ველზე?
6. რატომ ხასიათდებიან ფერომაგნეტიკები ნარჩენი დამაგნიტებით?
7. როგორია მაგნიტური ველის წარმოქმნის ძირითადი მექანიზმი მაგნეტიკებში?
8. როგორია ველის დამაგნიტებით წარმოქმნილი დამატებითი კომპონენტების განტოლებები?
9. როგორია ვექტორ-პოტენციალი მაგნეტიკებში?
10. როგორია მოლეკულური დენების როლი მაგნეტიზმში?

§ 22. მუდმივი დენის მაგნიტური ველის ენერჯია

მაგნეტიკების არსებობისას მაგნიტური ველის ენერჯიის გამოსახულება მიიღება ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის გამოსახულებისაგან:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (22.1)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მაგნიტური ველის ენერჯია განაწილებულია სივრცეში სიმკვრივით:

$$w = \left(\vec{H} \cdot \frac{\vec{B}}{2} \right) \quad (22.2)$$

დენის სიმკვრივითა და ვექტორული პოტენციალით გამოსახული ენერჯია. ვისარგებლოთ მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის შემდეგი გამოსახულებით:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

მაშინ ვექტორული ანალიზის ფორმულის გამოყენებით ინტეგრალქვეშა გამოსახულება გარდავექმნათ ასე:

$$(\vec{H} \cdot \vec{B}) = (\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A}) = [\text{div} \vec{A} \times \vec{H}] + (\vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}) = [\text{div} \vec{A} \times \vec{H}] + (\vec{A} \cdot \vec{j}) \quad (21.3)$$

სადაც უკანასკნელ ტოლობაში გათვალისწინებულია მაქსველის განტოლება:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

მაშასადამე, მაგნიტური ველის ენერჯიისათვის (22.1) ფორმულის ნაცვლად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$W = \frac{1}{2} [\text{div} \vec{A} \times \vec{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV \quad (21.4)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემის საფუძველზე გარდაიქმნება ზედაპირულ ინტეგრალად:

$$\int_V [\operatorname{div} \vec{A} \times \vec{H}] dV = \oint_S [\vec{A} \times \vec{H}] dS \quad (22.5)$$

თუ ყველა დენი თავმოყრილია სივრცის სასრულ მოცულობაში, მაშინ მისგან დიდ მანძილებზე:

$$A \sim \frac{1}{r^2}, \quad H \sim \frac{1}{r^3}.$$

მაშასადამე, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დიდ მანძილებზე ეცემა როგორც $1/r^2$. რადგანაც საინტეგრაციო ზედაპირი იზრდება როგორც r^2 -ის პროპორციული სიდიდე, მაშინ ინტეგრალი, როცა $S \rightarrow \infty$, ეცემა როგორც $1/r^3$. ამიტომ ზედაპირის უსასრულობაში დაშორების დროს (22.5) ინტეგრალი მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე, მაგნიტური ველის დენტან ურთიერთქმედების ენერჯიის ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV \quad (22.6)$$

დენიან ელემენტთა ურთიერთქმედების მაგნიტური ველის ენერჯია. თუ (22.6) ფორმულაში \vec{A} ვექტორ-პოტენციალს შევცვლით დენის საშუალებით:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j' dV'}{r} \quad (22.7)$$

მაშინ

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \frac{(j \cdot j')}{r} dV dV' \quad (22.8)$$

სადაც r წარმოადგენს მანძილს dV და dV' მოცულობის ელემენტებს შორის.

წრფივი დენიანი სისტემის მაგნიტური ველის ენერჯია. წრფივ დენებზე გადასვლა ხორციელდება (20.16) ფორმულით. გავითვალისწინოთ (22.6) ფორმულაში ეს წესი, რომლის თანახმადაც ინტეგრირება დაიყვანება ცალკეული გამტარების მოცულობითი ინტეგრალების ჯამზე, რომლებიც დანომრილია ინდექსი k . მაშინ:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV = \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV = \frac{1}{2} \sum_k \int_{L_k} (\vec{A} I_k \cdot d\vec{l}) = \frac{1}{2} \sum_k I_k \int_{L_k} (\vec{A} \cdot d\vec{l}) \quad (22.9)$$

აქ V_k და L_k - შესაბამისად, k გამტარის მოცულობა და კონტურია; I_k - k გამტარში გამავალი სრული დენის სიდიდეა. ვისარგებლოთ სტოქსის თეორემით:

$$\oint_{L_k} (\vec{A} \cdot d\vec{l}) = \int_{S_k} (\operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_k} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \Phi_k \quad (22.10)$$

სადაც Φ_k – მაგნიტური ინდუქციის ნაკადია k გამტარის ზედაპირში, რომელიც შემოსაზღვრულია L_k კონტურით. ამრიგად, წრფივი დენიანი სისტემის მაგნიტური ველის ენერჯის ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k \quad (22.11)$$

კერძო შემთხვევაში, თუ მოცემული გვაქვს მხოლოდ ერთი გამტარი, მაშინ:

$$W = \frac{1}{2} I \Phi \quad (22.12)$$

თვითინდუქცია და ურთიერთინდუქცია. (22.8) ფორმულაში ინტეგრირება დაიყვანება გამტართა მოცულობის მიხედვით ინტეგრირებაზე. ამიტომ, თუ აღვნიშნავთ k გამტარის მოცულობას V_k , გვექნება:

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \frac{j \cdot j'}{r} dV dV' = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j_i \cdot j_k}{r_{ik}} dV_i dV_k \quad (22.13)$$

სადაც \vec{j}_i და \vec{j}_k – i და k გამტარებში გამავალი დენის სიმკვრივეა; r_{ik} - მანძილია dV_i და dV_k მოცულობის ელემენტებს შორის. (22.13) ფორმულა შეიძლება გარდავქმნათ ასე:

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} I_k I_i \cdot \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j_i \cdot j_k}{r_{ik}} dV_i dV_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \quad (22.14)$$

სადაც

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j_i \cdot j_k}{r_{ik}} dV_i dV_k \quad (22.15)$$

L_{ik} კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ გამტარების ფორმაზე, მათ ურთიერთმდებარეობაზე, მაგრამ არ არის დამოკიდებული გამტარებში გამავალი დენის ძალაზე, რადგანაც დენის ძალის ცვლილების დროს (22.15) ფორმულის მრიცხველი და მნიშვნელი იცვლება ერთსა და იმავე რიცხვჯერ. მაშასადამე, მოცემულ გამტართა სისტემისათვის L_{ik} კოეფიციენტები შეიძლება გამოთვლილი იქნას ერთხელ და სამუდამოდ. ვიცით რა მათი მნიშვნელობა და გამტარებში გამავალი დენის ძალა, მაშინ (22.14) ფორმულის საფუძველზე შეიძლება გამოვთვალოთ დენიან გამტართა სისტემის მაგნიტური ველის ენერჯია. L_{ik} კოეფიციენტს, როდესაც $i \neq k$, უწოდებენ ურთიერთინდუქციის კოეფიციენტს i და k გამტარებისათვის. ხოლო როცა $i = k$, უწოდებენ თვითინდუქციის კოეფიციენტს შესაბამისი გამტარისათვის.

(22.14) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ გამტარის თვითინდუქციის განსაზღვრისათვის. ერთი იზოლირებული გამტარისათვის ამ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (22.16)$$

თუკი შესაძლებელი იქნება W ენერჯის გამოთვლა ან გაზომვა, მაშინ ამ ფორმულიდან შეიძლება ვიპოვოთ L მნიშვნელობა. ეს მეთოდი ხშირად გამოიყენება. L_{ik} ურთიერთინდუქციის

კოეფიციენტის გამოთვლის დროს. წრფივი დენების შემთხვევაში (22.15) ფორმულაში შეიძლება გამოვიყენოთ ცვლილება (20.16) ფორმულით. მივიღებთ:

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{dl_i \cdot dl_k}{r_{ik}}, \quad i \neq k \quad (22.17)$$

ამ ფორმულას ნეიმანის ფორმულას უწოდებენ. თვითინდუქციის გამოსათვლელად ამ ფორმულის გამოყენება შეუძლებელია, რადგანაც (22.17) ფორმულაში ინტეგრალი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. (22.15) და (22.17) ფორმულებიდან გამომდინარეობს:

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (22.18)$$

თვითინდუქციისა და ურთიერთინდუქციის კავშირი მაგნიტური ინდუქციის ნაკადთან. თუ შევადარებთ (22.11) ფორმულას (22.14)–ს, ჩაწერილს შემდეგი სახით:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \sum_i L_{ik} I_i$$

მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ:

$$\Phi_k = \sum_i L_{ik} I_i \quad (22.19)$$

ურთიერთინდუქციისა და თვითინდუქციის საშუალებით ადვილად გამოითვლება მაგნიტური ინდუქციის ნაკადი. (22.19) ფორმულა ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს რომელიღაც მახასიათებელი გამტართა სისტემა, რომლებისთვისაც ურთიერთინდუქცია და თვითინდუქცია მოცემულია ცხრილებში. ერთი იზოლირებული გამტარისათვის მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi = LI \quad (22.20)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (22.21)$$

ამგვარად, თუ გვეცოდინება მაგნიტური ინდუქციის ნაკადი, რომელიც იქმნება გამტარში გამავალი ცნობილი დენით, მაშინ (22.21) ფორმულის საფუძველზე შეიძლება გამოვთვალოთ გამტარის თვითინდუქცია. (22.21) ფორმულა ხშირად გამოიყენება თვითინდუქციის გამოსათვლელად.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია მაგნიტური ველის ენერჯიის განაწილების კანონზომიერება?
2. როგორ მიიღება მაგნიტური ველის ენერჯიის სიმკვრივე?
3. როგორია ენერჯიის გამოსახულება ვექტორ-პოტენციალით?
4. როგორია მაგნიტური ველის და დენის ურთიერთქმედების ენერჯიის ფორმულირება?
5. როგორია ინდუქციურ სისტემაში ენერჯიის ფორმულირება?
6. როგორია წრფივი დენიანი სისტემის მაგნიტური ველის ენერჯიის გამოსახულება?
7. რა არის თვითინდუქცია და როგორია მისი მათემატიკური გამოხატულება?
8. რა არის ურთიერთინდუქცია და როგორ განისაზღვრება იგი?

9. როგორია თვითინდუქციისა და ურთიერთინდუქციის კავშირი მაგნიტური ინდუქციის ნაკადთან?
10. როგორ არის დაკავშირებული ნეიმანის ფორმულა ურთიერთინდუქციის გამოთვლასთან?

§ 23. მექანიკური ძალები მაგნიტურ ველში

დენიან ელემენტზე მოქმედი ძალა. ამპერის კანონის თანახმად \vec{B} მაგნიტურ ველში $\vec{j}dV$ დენიან ელემენტზე მოქმედი ძალა განისაზღვრება ფორმულით:

$$d\vec{F} = [\vec{j} \times \vec{B}]dV \quad (23.1)$$

წრფივი დენების შემთხვევაში ეს ფორმულა დებულობს შემდეგ სახეს:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (23.2)$$

სადაც $d\vec{l}$ - გამტარის ელემენტის სიგრძეა.

რომ ვიპოვოთ გამტარის სასრულო უბანზე მოქმედი ძალა, აუცილებელია მოვახდინოთ ინტეგრაცია:

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j} \times \vec{B}]dV, \quad (23.3)$$

$$\vec{F} = I \int_L [d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (23.4)$$

სადაც V და L შესაბამისად, გამტარის ან მისი ნაწილის მოცულობა და კონტურია.

ელემენტარულ დენზე მოქმედი ძალა. ელემენტარული დენით შექმნილი მაგნიტური ველის გამოკვლევის დროს ვნახეთ, რომ იგი პირველ მიახლოებაში მთლიანად განისაზღვრება დენის მაგნიტური მომენტი. ვაჩვენოთ, რომ მოცემულ მაგნიტურ ველში ელემენტარულ დენზე მოქმედი ძალაც პირველ მიახლოებაში მთლიანად განისაზღვრება ამ დენის მაგნიტური მომენტით. ელემენტარული დენის განმარტებას საჭიროა დაემატოს კიდევ ერთი დამატებითი მოთხოვნა: იმ არის საზოგადოებრივი ზომები, რომელშიც ელემენტარული დენი გადის, იმდენად მცირეა, რომ ამ არეში გარე მაგნიტური ველის ცვლილება მცირეა, ამიტომ გამოთვლების დროს შეიძლება შემოვიხსნათ არის საზოგადოებრივი ზომების პირველი რიგის პროპორციული წევრებით. ავირჩიოთ ელემენტარული დენის მახლობლობაში რაიმე წერტილი კოორდინატთა სისტემის სათავედ. ელემენტარული დენის განმარტებიდან გამომდინარე, შეიძლება მაგნიტური ველის დაძაბულობა გავშალოთ ტეილორის მწკრივად სათავეს მიმართ და შემოვიხსნათ წრფივი წევრებით:

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(0,0,0) + x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} + \dots \quad (23.5)$$

ამ გაშლაში წარმოებულები აღებულია $x = y = z = 0$ წერტილში. (23.2) ფორმულა (23.5) ფორმულის გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j} \times \vec{B}_0] dV = \int_V \left[\vec{j} \times \left(x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \right] dV \quad (23.6)$$

სადაც $\vec{B}_0 = \vec{B}(0,0,0)$. პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია, რადგანაც $\vec{B}(0,0,0)$ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს და მაშასადამე,

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j} \times \vec{B}_0] dV = \left[\left(\int_V \vec{j} dV \right) \times \vec{B}_0 \right] = 0 \quad (23.7)$$

რადგანაც ჩაკეტილი დენისათვის

$$\int_V \vec{j} dV = 0 \quad (23.8)$$

გამოვიკვლიოთ \vec{F} ძალის რომელიმე მდგენელი, მაგალითად z მდგენელი:

$$\begin{aligned} \vec{F}_z &= V \left[\int_V \vec{j} \times \left(x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \right]_z dV = \\ &= \int_V \left\{ j_x \left(x \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} \right) - j_y \left(x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + y \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} + z \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (23.9)$$

დავამტკიცოთ, რომ:

$$\int_V x j_x dV = \int_V y j_y dV = \int_V z j_z dV = 0 \quad (23.10)$$

მაგალითისათვის გამოვთვალოთ პირველი ინტეგრალი:

$$x j_x = \frac{1}{2} \text{grad} x^2 = \frac{1}{2} \text{div}(\vec{j} x^2) - \frac{1}{2} x^2 \text{div} \vec{j} \quad (23.11)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\text{div} \vec{j} = 0$, და ვისარგებლოთ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემით, გვექნება:

$$\int_V x j_x dV = \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\vec{j} x^2) dV = \frac{1}{2} \int_S (\vec{j} x^2 \cdot \vec{S}) = 0 \quad (23.12)$$

რადგანაც ყველა დენი თავმოყრილია V მოცულობაში და იგი შემოსაზღვრულია S ზედაპირით, ამიტომ $\vec{j} = 0$. ანალოგიურად, დამტკიცდება (23.10) ფორმულაში შემავალი დანარჩენი ტოლობების სამართლიანობაც. ასევე შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ:

$$\int_V x j_y dV = - \int_V y j_x dV = P_{mz},$$

$$\int_V yj_z dV = - \int_V zj_y dV = P_{mx}, \quad (23.13)$$

$$\int_V zj_x dV = - \int_V xj_z dV = P_{my}$$

სადაც p_{mx} , p_{my} , p_{mz} - ელემენტარული დენის მაგნიტური მომენტის ვექტორის კომპონენტებია, რომლებიც განისაზღვრებიან (20.30) ფორმულით.

დავამტკიცოთ (23.13) ფორმულის პირველი ტოლობის სამართლიანობა. შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$xj_y = \frac{xj_y - yj_x}{2} + \frac{xj_y + yj_x}{2} \quad (23.14)$$

მაგრამ

$$\frac{1}{2}(xj_y + yj_x) = \frac{1}{2}\vec{j}\text{grad}(xy) = \frac{1}{2}\text{div}(\vec{j}xy) - \frac{1}{2}xy\text{div}\vec{j} \quad (23.15)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\text{div}\vec{j} = 0$, მივიღებთ:

$$\int_V xj_y dV = \frac{1}{2} \int_V (xj_y - yj_x) dV + \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\vec{j}xy) dV = \frac{1}{2} \int_V (xj_y - yj_x) dV + \frac{1}{2} \int_S (\vec{j}xy \cdot d\vec{S}) \quad (23.16)$$

უკანასკნელი ინტეგრალი ნულის ტოლია იმ გარემოების გამო, რომელიც მითითებული იყო (23.12) ფორმულის დამტკიცებისას. ამიტომ:

$$\int_V xj_y dV = \frac{1}{2} \int_V (xj_y - yj_x) dV = P_{mz} \quad (23.17)$$

ანალოგიურად დამტკიცდება (23.13)-ის დანარჩენი ტოლობების სამართლიანობაც. (23.10) და (23.13) ფორმულების დახმარებით (23.9) გამოსახულება ჩაიწერება ასე:

$$\vec{F}_z = -P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} + P_{my} \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} - P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} \quad (23.18)$$

მაქსველის განტოლებიდან:

$$\text{div}\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} = 0 \quad (23.19)$$

ვღებულობთ:

$$-P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} - P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} = P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} \quad (23.20)$$

და მაშასადამე, (23.18) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{F}_z = P_{mx} \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} + P_{my} \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} + P_{mz} \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} = P_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (23.21)$$

ანალოგიურად მიიღება ძალის დანარჩენი კომპონენტების შესაბამისი ფორმულები.

ამიტომ საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{F}_x = P_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}, \quad \vec{F}_y = P_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}, \quad \vec{F}_z = P_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (23.22)$$

ამგვარად, მოცემულ მაგნიტურ ველში ელემენტარულ დენზე მოქმედი ძალა მთლიანად განისაზღვრება ამ დენის მაგნიტური მომენტით. იგი მით უფრო დიდია, რაც უფრო მნიშვნელოვანია მაგნიტური ველის არაერთგვაროვნება. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ეს ძალა ნულის ტოლია.

მაგნეტიკზე მოქმედი ძალა. თუ მაგნეტიკს მოვათავსებთ მაგნიტურ ველში, იგი განიცდის დამაგნიტებას. მაგნეტიკის dV მოცულობის ელემენტი ამ დროს იძენს მაგნიტურ მომენტს:

$$d\vec{P}_m = \vec{j} dV \quad (23.23)$$

(23.22) ფორმულის საფუძველზე მაგნეტიკის მოცულობის ელემენტზე მოქმედი ძალა განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_x &= \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} dV, \\ d\vec{F}_y &= \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dV, \\ d\vec{F}_z &= \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dV \end{aligned} \quad (23.24)$$

მივიღოთ მხედველობაში (21.24) ფორმულა:

$$\vec{j} = (\mu - \mu_0) \cdot \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \quad (23.25)$$

და გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულება (23.24) – ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_x &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} dV, \\ d\vec{F}_y &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial y} dV, \\ d\vec{F}_z &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial z} dV, \end{aligned} \quad (23.26)$$

ეს სამი ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ ერთი ვექტორული ტოლობის დახმარებით:

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \text{grad} B^2 dV \quad (23.27)$$

ამგვარად, მაგნეტიკზე მოქმედი ძალის მოცულობითი სიმკვრივე \vec{f} ტოლია:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad} B^2 \quad (23.28)$$

თუ შევადარებთ ამ ფორმულას დიელექტრიკზე მოქმედი ძალის სიმკვრივის ფორმულას, მივიღებთ, რომ \vec{E} და ϵ – ის როლს მაგნიტური ველის თეორიაში ასრულებს \vec{B} და $1/\mu$ და არა \vec{H} და μ .

(23.28) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მოცემულ მაგნიტურ ველში პარამაგნეტიკები და დიამაგნეტიკები იქცევიან სხვადასხვანაირად: მათზე მოქმედებენ ძალები ურთიერთსაპირისპირო მიმართულებით. რადგანაც პარამაგნეტიკებისათვის $\mu > \mu_0$, ამიტომ f ძალის სიმკვრივე მიმართულებით ემთხვევა მაგნიტური ინდუქციის კვადრატის გრადიენტს. ეს იმას ნიშნავს, რომ პარამაგნეტიკები წარიტაცებიან მაქსიმალური ინდუქციის არეში. დიამაგნეტიკებისათვის $\mu < \mu_0$, ამიტომ ისინი გამოიღვენიან დიდი ინდუქციის არიდან და გადაინაცვლებენ მცირე ინდუქციის არეში. მაგალითად, სპილენძის ღერო (პარამაგნეტიკი) მიიზიდება სოლენოიდის მიერ, რომელშიც გადის დენი, ხოლო ბისმუტის ღერო (დიამაგნეტიკი) განიზიდება სოლენოიდიდან.

ფერომაგნეტიკები, რომელთათვისაც $\mu \gg \mu_0$, ასევე წარიტაცებიან დიდი ინდუქციის არეში, მაგრამ გაცილებით ძლიერი ძალით, ვინემ პარამაგნეტიკები, რომლებისთვისაც μ მცირედით განსხვავდება μ_0 – საგან. და მაშასადამე, (23.28) ფორმულაში შემავალი სიდიდე $(\mu - \mu_0)/\mu$ მცირეა. ფერომაგნეტიკების ამ თვისებას იყენებენ სხვადასხვა გამზომ ხელსაწყოებში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია ამპერის კანონი და როგორ განისაზღვრება ძალა დენიან ელემენტზე?
2. როგორია ელემენტარულ დენზე მოქმედი ძალის გამოთვლის პრინციპი?
3. როგორ განისაზღვრება წრფივი დენიანი გამტარის ძალა?
4. როგორია ელემენტარული დენის მაგნიტური მომენტის როლი?
5. როგორია მაგნიტური ველის დაძაბულობის გრადიენტის გავლენა ძალის წარმოქმნაზე?
6. როგორ მოქმედებს პარამაგნეტიკები და დიამაგნეტიკები მაგნიტურ ველში?
7. როგორ განისაზღვრება მაგნეტიკზე მოქმედი ძალის სიმკვრივე?
8. როგორია მაგნიტური ინდუქციის როლი ძალების წარმოქმნაში?
9. როგორ შეიძლება განისაზღვროს ძალა მოცემული მაგნეტიკისათვის?
10. როგორ იყენებენ ფერომაგნეტიკების მაგნიტურ თვისებებს პრაქტიკაში?

ლექცია 9. კვაზისტაციონარული ველი

- §24. კვაზისტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი;
- §25. გამტართა სისტემა ურთიერთინდუქციისა და თვითინდუქციის გათვალისწინებით;
- §26. ცვლადი დენის წრედი;
- §27. დენების ინდუქცია მოძრავ გამტარებში;
- §28. სკინ-ეფექტი.

§24. კვაზისტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი

ელექტრომაგნიტურ ველს ეწოდება კვაზისტაციონარული, რომელიც დროის მიხედვით საკმარისად ნელა იცვლება, ამასთან, „საკმარისად ნელა“ ცვლილების კრიტერიუმი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ელექტრომაგნიტური ველი იცვლება იმდენად ნელა, რომ გამტარი გარემოს შიგნით შეიძლება უგულებელვყოთ წანაცვლების დენი გამტარებლობის დენთან შედარებით:

$$|j_{წახ}|_{max} \ll |j|_{max} \quad (24.1)$$

თუ ელექტრომაგნიტური ველი იცვლება ω სიხშირით, მაგალითად:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (24.2)$$

მაშინ

$$j_{წახ} = \frac{\partial D}{\partial t} = i\omega \epsilon E_0 e^{i\omega t}, \quad j = \gamma E = \gamma E_0 e^{i\omega t} \quad (24.3)$$

მაშასადამე, (24.1) კრიტერიუმის შესასრულებლად დაცული უნდა იყოს უტოლობა:

$$\frac{|j_{წახ}|_{max}}{|j|_{max}} = \frac{\omega \epsilon}{\gamma} \ll 1 \quad (24.4)$$

მივიღოთ მხედველობაში რომ, ლითონის გამტარებისათვის $\epsilon \approx \epsilon_0, \gamma \approx 10^7$ სიმ · მ⁻¹ (სიმ¹). ჩვენ ვხედავთ, რომ წანაცვლების დენი არ არის მნიშვნელოვანი სიხშირის შემდეგ არეში:

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{ წმ}^{-1} \quad (24.5)$$

ე. ი. სპექტრის ულტრაიისფერი ნაწილის რხევების შესაბამის სიხშირემდე. ეს შეფასება მიახლოებითია, რადგანაც იგი არ ითვალისწინებს გარემოს ინერციულ თვისებებს, რომლებიც არსებით როლს ასრულებენ ძალიან მაღალი სიხშირეების დროს. ნივთიერების ინერციული

¹ სიმენსი - ერთეულთა საერთაშორისო სისტემის (SI) ელექტრული გამტარობის ერთეული. ქართული აღნიშვნა - სიმ, საერთაშორისო - S. სიმენსი ტოლია ისეთი გამტარის ელექტრული გამტარობისა, რომლის წინაღობა 1 ომია. სახელი ეწოდა ე. სიმენსის პატივსაცემად. XIX საუკუნეში სიმენსის სახელით იყო ცნობილი ახლა ხმარებიდან გამოსული ელექტრული წინაღობის ერთეული, რომელიც ტოლია 1 მ სიგრძისა და 1 მმ² განივკვეთის ფართობის მქონე ვერცხლისწყლის სვეტის წინაღობისა 0 °C-ზე.

თვისებების გათვალისწინება ასუსტებს ამ შეფასებას რამდენიმე რიგით, თუმცა ამის შემდეგაც იმ სიხშირის დიაპაზონში, რომლის დროსაც წანაცვლების დენის უგულბელებოება შეიძლება გამტარებლობის დენტან შედარებით, რჩება საკმაოდ დიდი.

ბ) ველის ცვლილება მიმდინარეობს იმდენად ნელა, რომ განსახილველი სივრცის არეში შეიძლება უგულბელებოდა დაგვიანების ეფექტები, რომელიც განპირობებულია ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების სიჩქარის სასრულო სიდიდით. ბრტყელი ტალღის დამახასიათებელი სიდიდეების ცვლილება, როდესაც ტალღა ვრცელდება x ღერძის გასწვრივ c სიჩქარით, შეიძლება ჩაწეროს შემდეგი სახით:

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} = E_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega x/c} \quad (24.6)$$

გავშალოთ უკანასკნელი ექსპონენციალური მამრავლი მწკრივად, მივიღებთ:

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{i\omega x}{c} + \dots \right) \quad (24.7)$$

აქედან ჩანს, რომ დაგვიანების ეფექტი შეიძლება უგულბელებოდა მაშინ, როდესაც (24.7) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შეიძლება უგულბელებოდა x – ზე დამოკიდებულება, ე.ი. როდესაც დაცულია უტოლობა:

$$\frac{\omega}{c} x \ll 1 \quad (24.8)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ :

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (24.9)$$

სადაც λ – ტალღის სიგრძეა, (24.8) პირობა შეიძლება გადაწეროს შემდეგი სახით:

$$x \ll \lambda \quad (24.10)$$

ე. ი. ჩავთვალოთ ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების სიჩქარე უსასრულო სიდიდედ და უგულბელებოდა დაგვიანების ეფექტები, თუ არის ხაზოვანი ზომები გაცილებით ნაკლებია ტალღის სიგრძესთან შედარებით. ასე მაგალითად, თუ განვიხილავთ ჩვეულებრივ ტექნიკურ დენს 50 ჰც სიხშირით, მაშინ შესაბამისი ტალღის სიგრძე ტოლია რამდენიმე ათასეული კმ–ის და მაშასადამე, ამ შემთხვევაში დაგვიანების ეფექტები შეიძლება უგულბელებოდა შედარებით დიდი ზომის არეებისათვის. მაშასადამე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ კვაზისტაციონარულ ელექტრომაგნიტურ ველებს მიეკუთვნება ელექტროტექნიკაში განხილული ველების უმრავლესობა, ასევე მრავალი ველი, რომელიც გვხვდება რადიოტექნიკაში.

მაქსველის განტოლებები კვაზისტაციონარულ არეში. წანაცვლების დენის უგულბელებოდასას მაქსველის განტოლებები ღებულობენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \end{aligned} \quad (24.11)$$

სადაც

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{გარე}})$$

ამგვარად, კვაზისტაციონარული ველების არეში, ელექტრული და მაგნიტური ველების განხილვა ცალკე-ცალკე შეუძლებელია. თუმცა მათ შორის მთავარი კავშირი ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონით განისაზღვრება. წანაცვლების დენით კავშირი ნაკლებად მნიშვნელოვანია და კვაზისტაციონარული ველების შემთხვევაში მას მხედველობაში არ ღებულობენ.

ელექტრული ველის დაძაბულობის გამოსახვა ველის პოტენციალებით. ელექტრული კვაზისტაციონარული ველის დაძაბულობა აღიძვრება არა მარტო მუხტებით, არამედ მაგნიტური ველის ცვლილებებითაც. იგი დამოკიდებულია როგორც სკალარულ, ასევე ვექტორულ პოტენციალზე. \vec{A} ვექტორული პოტენციალი შემოდის ისევე, როგორც გვაქვს სტაციონარული მაგნიტური ველის შემთხვევაში:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad \text{div}\vec{A} = 0 \quad (24.12)$$

საზოგადოდ, კვაზისტაციონარულ შემთხვევაში ელექტრული ველი არ წარმოადგენს პოტენციალურ ველს, რადგანაც:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0 \quad (24.13)$$

ამიტომ, ელექტრული ველის დაძაბულობის \vec{E} ვექტორი არ შეიძლება წარმოდგენილი იქნას სკალარული პოტენციალის გრადიენტის სახით. (24.13) ფორმულაში \vec{B} ვექტორი ჩავწეროთ \vec{A} ვექტორული პოტენციალის დახმარებით, მივიღებთ:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} = -\text{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (24.14)$$

ამ ფორმულაში შენაცვლებულია დროით გაწარმოების ოპერაცია და როტორის გამოთვლის ოპერაცია იმ მოსაზრებიდან გამომდინარე, რომ როტორის გამოთვლა დაიყვანება კოორდინატების მიხედვით კერძო წარმოებულის გამოთვლაზე, ხოლო კოორდინატებისა და დროის მიხედვით დიფერენცირების რიგი წარმოდგენს დამოუკიდებელ ცვლადს და ასეთი შენაცვლება დასაშვებია. გადავწეროთ (24.14) ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (24.15)$$

აქედან ჩანს, რომ:

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (24.16)$$

წარმოადგენს პოტენციალურ ვექტორს და იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ სკალარული ფუნქციის გრადიენტის სახით:

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi \quad (24.17)$$

ამგვარად, ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი გამოისახება სკალარული და ვექტორული პოტენციალების დახმარებით შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (24.18)$$

(24.18) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მეორე წევრი ითვალისწინებს ფარადის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონს, რომელიც განაპირობებს ელექტრული ველის არაპოტენციალურობას კვაზისტაციონარულ შემთხვევაში. ამ წევრის არსებობის გამო ორ წერტილს შორის მუხტის გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა საზოგადოდ, დამოკიდებულია გზის ფორმაზე.

განტოლება სკალარული პოტენციალისათვის. განვიხილოთ ერთგვაროვანი გარემო ($\epsilon = const$). გავითვალისწინოთ მაქსველის განტოლებაში

$$\operatorname{div} \vec{D} = \epsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad (24.19)$$

\vec{E} ვექტორის გამოსახულება პოტენციალებით, მივიღებთ:

$$\operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (24.20)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$$

და

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (24.21)$$

ამიტომ, სკალარული პოტენციალის შესაბამის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (24.22)$$

(როგორც სტატიკური ველების შემთხვევაში). ეს კი განპირობებულია იმით, რომ კვაზისტაციონარული ველის შემთხვევაში უგულებელყოფენ დაგვიანების ეფექტებს და თვლიან, რომ სკალარული პოტენციალი სივრცის მოცემულ წერტილში დროის რომელიღაც მომენტისათვის განისაზღვრება მთელ სივრცეში მუხტების განაწილებით დროის იმავე მომენტისათვის. ამასთან, მუხტების მოძრაობის ხასიათს არანაირი მნიშვნელობა არ აქვს. ამიტომ სკალარულ პოტენციალს გააჩნია ისეთივე მნიშვნელობა, როგორც უძრავი მუხტების შემთხვევაში.

განტოლება ვექტორული პოტენციალისათვის. ყველა გამოთვლები და მსჯელობა სრულიად ანალოგიურია იმის, რომელიც გამოყენებული იყო სტატიკური მაგნიტური ველის შემთხვევაში ვექტორული პოტენციალის განტოლების მიღების დროს, რადგანაც გამოსავალი განტოლებები ერთნაირია. ამის გამო განტოლებები ვექტორული პოტენციალისათვის ემთხვევიან ერთმანეთს:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (24.23)$$

ვაკუუმისათვის ამ განტოლებაში $\mu = \mu_0$. ამ განტოლების სტატიკური მაგნიტური ველის განტოლებასთან დამთხვევის მიზეზი ისეთივეა, რომელიც გვაქვს სკალარული პოტენციალის შემთხვევაში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის კვაზისტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველი და რა პირობებში შეგვიძლია მისი გამოყენება?
2. როგორია კვაზისტაციონარული ველის კრიტერიუმები?
3. რატომ შეიძლება უგულებელვყოთ წანაცვლების დენი კვაზისტაციონარულ ველში?
4. როგორია მაქსველის განტოლებების ფორმულირება კვაზისტაციონარულ არეში?
5. როგორია ელექტრული და მაგნიტური ველების კავშირი კვაზისტაციონარულ შემთხვევაში?
6. რა როლს ასრულებს ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონი კვაზისტაციონარულ ველებში?
7. როგორ გამოისახება ელექტრული ველის დაძაბულობა პოტენციალებით?
8. რა განსხვავებაა კვაზისტაციონარული და სტატიკური ველების პოტენციალებს შორის?

§ 25. გამტართა სისტემა ურთიერთინდუქციისა და თვითინდუქციის გათვალისწინებით

ელექტრომაგნიტური ინდუქციის მოვლენა განაპირობებს სხვადასხვა გამტარში გამავალი დენებისა და ერთსა და იმავე გამტარში სხვადასხვა დენიან ელემენტთა ურთიერთგავლენას. ამიტომ წრედის რომელიმე უბანში გამავალი დენი არ შეიძლება განვიხილოთ იზოლირებულად წრედის სხვა უბნებში და სხვა წრედებში გამავალი დენებისაგან. აუცილებელია მივიღოთ მხედველობაში დენების მთლიანი ერთობლიობა, რომლებიც ერთმანეთთან ინდუქციურ კავშირში იმყოფებიან. ვისარგებლოთ ომის კანონის დიფერენციალური ფორმით:

$$\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{არე}) \tag{25.1}$$

რომელიმე k გამტარისათვის. ამისათვის (25.1) ტოლობის ორთავე მხარე გავყოთ γ -ზე, გავამრავლოთ გამტარის წრფივ $d\vec{l}$ ელემენტზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია გამტარის ჩაკეტილი კონტურის მიხედვით:

$$\oint_{L_k} \frac{j dl}{\gamma} = \oint_{L_k} E dl + \oint_{L_k} E^{არე} dl \tag{25.2}$$

აქ L_k – k გამტარის კონტურია. მარცხენა მხარეში ინტეგრალქვეშა გამოსასხულება შეიძლება გარდავქმნათ ასე:

$$\vec{J} \cdot \frac{d\vec{l}}{\gamma} = \frac{j dl}{\gamma} = \frac{j S dl}{\gamma S} = I dR \tag{25.3}$$

ჩავთვალოთ, რომ წრფივ გამტარში \vec{J} და $d\vec{l}$ მიმართულებებით თანხვდენილია; $dR = \frac{dl}{\gamma S}$ – გამტარის $d\vec{l}$ სიგრძის უბნის წინაღობაა S განივკვეთით; $I = jS$ – გამტარში გამავალი დენის ძალაა. ამგვარად:

$$\int_{L_k} \frac{j d\vec{l}}{\gamma} = \int_{L_k} I dR = I_k \int_{L_k} dR = I_k R_k \quad (25.4)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ ჩაკეტილი გამტარის ნებისმიერ განივკვეთში გამავალი დენის ძალა ერთი და იგივეა და მაშასადამე, გამტარის ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ ინტეგრირების დროს იგი მუდმივი სიდიდეა და შეიძლება ინტეგრალის ნიშნის წინ გავიტანოთ. R_k - k გამტარის სრული წინაღობაა.

(25.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალი:

$$\int_{L_k} \vec{E}^{პარე} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_k^{პარე} \quad (25.5)$$

თავის მხრივ წარმოადგენს, k გამტარზე მოდებულ გარე ელექტრომაგნიტურ ველს. (25.2) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მეორე ინტეგრალი (24.18) ფორმულის დახმარებით შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l} = - \oint_{L_k} \text{grad} \varphi \cdot d\vec{l} - \oint_{L_k} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} \quad (25.6)$$

რადგანაც L_k კონტური ჩაკეტილია, ამიტომ (25.6) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალი ნულის ტოლია:

$$\oint_{L_k} \text{grad} \varphi \cdot d\vec{l} = \oint_{L_k} d\varphi = 0$$

(25.6) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ ასე:

$$\oint_{L_k} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{L_k} \vec{A} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_k} \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S} = \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (25.7)$$

სადაც

$$\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}$$

მაგნიტური ინდუქციის ნაკადია S_k ზედაპირში. (25.7) ფორმულაში გათვალისწინებულია, რომ L_k კონტური უძრავია, ამიტომ დროითი წარმოებულ შეიძლება გავიტანოთ ინტეგრალის წინ. ამგვარად, გავითვალისწინოთ (25.4), (25.5) და (25.7) ფორმულები, მაშინ (25.2) განტოლება გადაიწერება ასე:

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k^{პარე} - \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (25.8)$$

ეს ფორმულა გამოსახავს ომის კანონს ელექტრომაგნიტური ინდუქციის გათვალისწინებით k გამტარისათვის, რომელიც აღიწერება ამ განტოლების მარჯვენა მხარის მეორე წევრით.

განტოლება გამტართა სისტემისათვის. k გამტარის შემომსაზღვრელ კონტურში მაგნიტური ინდუქციის ნაკადი Φ_k შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N L_{ik} I_i \quad (25.9)$$

სადაც აჯამვა i ინდექსით მიმდინარეობს ყველა გამტარის მიხედვით, რომელთა რაოდენობაც, ვთქვათ არის N . Φ_k – ს ეს მნიშვნელობა გავითვალისწინოთ (25.8) ფორმულაში, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k^{\text{გარე}} - \sum_{i=1}^N L_{ik} \frac{dI_i}{dt}; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (25.10)$$

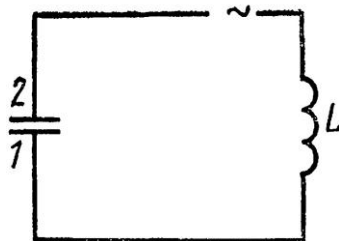
აქ ითვლება, რომ L_{ki} კოეფიციენტები მუდმივი სიდიდეა, ხოლო კერძო წარმოებული შევცვალოთ სრული წარმოებულით, რადგანაც ამ განტოლებებში დრო ერთადერთი ცვლადია, რომელზედაც ცხადად არის დამოკიდებული I_i დენის ძალა. ამგვარად, გვაქვს N რაოდენობის განტოლებები I_1, I_2, \dots, I_n N უცნობებით. მოცემული საწყისი პირობების გათვალისწინებით ამ სისტემას გააჩნია ცალსახა ამონახსნი.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორ განისაზღვრება ურთიერთინდუქცია და თვითინდუქცია?
2. როგორია ომის კანონის ფორმულირება ელექტრომაგნიტური ინდუქციის გათვალისწინებით?
3. როგორია ინდუქციური კავშირი გამტართა შორის და როგორია მისი მათემატიკური გამოხატულება?
4. როგორ მოქმედებს ელექტრომაგნიტური ინდუქცია სხვადასხვა წრედზე?
5. როგორ აისახება ურთიერთინდუქცია ელექტრული წრედების ამუშავებაზე?
6. როგორია მაგნიტური ნაკადის გავლენა ინდუქციურ კავშირზე?
7. როგორია დენის ძალის ცვლილება ინდუქციური კავშირის პირობებში?
8. როგორია მთლიან სისტემაში ინდუქციური პროცესების გათვალისწინება?

§ 26. ცვლადი დენის წრედი

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ნახ.26.1-ზე მოცემული ცვლადი დენის წრედი.



ნახ.26.1

მოცემული ცვლადი დენის წრედისათვის სამართლიანია განტოლება:

$$\frac{\vec{J}}{\gamma} = \vec{E} + \vec{E}^{\text{ზარე}} \quad (26.1)$$

განტოლების ორივე მხარე გამტარის $d\vec{l}$ ელემენტის სიგრძეზე და მოვანდინოთ ინტეგრაცია კონდენსატორის შემონაფენების მიხედვით, ე. ი. 1 წერტილიდან 2 წერტილამდე (იხ. ნახ.):

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{J} d\vec{l}}{\gamma} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{\text{ზარე}} \cdot d\vec{l} \quad (26.2)$$

ტოლობის მარცხენა მხარეში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება გარდაიქმნება (25.3) ფორმულის ანალოგიურად, ხოლო მარჯვენა მხარეში კი – (25.5) და (25.6) ფორმულების ანალოგიურად. შედეგად მივიღებთ:

$$\int_{(1)}^{(2)} IdR = \mathcal{E}^{\text{ზარე}} - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{(1)}^{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (26.3)$$

ინტეგრალი:

$$\int_{(1)}^{(2)} \text{grad}\varphi \cdot d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (26.4. \text{ ა})$$

წარმოადგენს კონდენსატორის შემონაფენებს შორის პოტენციალთა სხვაობას. ინტეგრალი:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (26.4. \text{ ბ})$$

გამოვთვალოთ მიახლოებით შემდეგნაირად. რადგანაც \vec{A} პოტენციალი წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას, ხოლო მანძილი კონდენსატორის შემონაფენებს შორის გაცილებით ნაკლებია გამტარის სიგრძეზე, რომლის გასწვრივაც აიღება (26.4.ბ) ინტეგრალი, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi$$

სადაც L_1 - ჩაკეტილი კონტურია, რომელიც შედგება გამტარისაგან და კონდენსატორის შემონაფენებს შორის არსებული მცირე მანძილისაგან. Φ – მაგნიტური ინდუქციის ნაკადია L_1 - კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში. (26.3) ფორმულის მარცხენა მხარე გამოითვლება (25.4) ფორმულის ანალოგიურად. მაშინ (26.3) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$IR = \mathcal{E}^{\text{ზარე}} - (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{d\Phi}{dt} \quad (26.5)$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\Phi = LI \quad (26.6)$$

სადაც L - კონტურის ინდუქტივობაა. გავითვალისწინოთ, რომ კონდენსატორის შემონაფენებს შორის $\varphi_2 - \varphi_1$ პოტენციალთა სხვაობა შემონაფენებზე არსებულ Q მუხტთან დაკავშირებულია ტოლობით:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{C} \quad (26.7)$$

სადაც C – კონდენსატორის ტევადობაა. გავითვალისწინოთ (26.6) და (26.7) ფორმულები (26.5) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}^{\text{ბარე}} \quad (26.8)$$

(26.8) განტოლების ორივე მხარე გავადიფერენციალოთ დროის მიხედვით და მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad (26.9)$$

მივიღებთ C ტევადობითა და L ინდუქტივობით ელექტრული წრედისათვის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{\text{ბარე}} \quad (26.10)$$

ამრიგად, ელექტრულ წრედთან დაკავშირებული აღნიშნული ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება (26.10) ჩვეულებრივი, მუდმივ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე.

ცვლადი დენის წრედი მუდმივი ელექტრომამოძრავებელი ძალის ჩართვის და გამორთვის შემთხვევაში. დავუშვათ, დროის $t = 0$ მომენტისათვის წრედში ჩართულია მუდმივი $\mathcal{E}^{\text{ბარე}}$ ემ ძალა. ჩავთვალოთ, რომ წრედში კონდენსატორი არ გვაქვს. საჭიროა ვიპოვოთ დენის ზრდის კანონი წრედში, ე. ი. $I = I(t)$ ფუნქცია.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ხელსაყრელია ვისარგებლოთ (26.8) განტოლებით, რომელსაც $t > 0$ –თვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{LdI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0^{\text{ბარე}} \quad (26.11)$$

საწყისი პირობა ცხადია, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$I(0) = 0 \quad (26.12)$$

(26.11) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{ბარე}}}{R} + \alpha e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (26.13)$$

სადაც α – ნებისმიერი მუდმივია, რომელიც განისაზღვრება (26.12) საწყისი პირობიდან ჩაწერილი (26.13) ფორმულის საფუძველზე:

$$\frac{\mathcal{E}_0^{\text{ბარე}}}{R} + \alpha = 0, \quad \alpha = -\frac{\mathcal{E}_0^{\text{ბარე}}}{R} \quad (26.14)$$

ამრიგად, საბოლოო ამონახსნი განისაზღვრება ფუნქციით:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{გარე}} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)}{R}; \quad t \geq 0 \quad (26.15)$$

ანალოგიურად ამოიხსნება ამოცანა წრედიდან მუდმივი ელექტრომაგნიტური ძალის გამორთვის შემდეგ. დენის ძალის დაცემის კანონი ამ შემთხვევაში წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{გარე}} e^{-\frac{Rt}{L}}}{R}; \quad t \geq 0 \quad (26.16)$$

ამრიგად, თვითინდუქციის მოვლენის გამო ელექტრული წრედიდან მუდმივი ემ ძალის გამორთვის შემდეგ დენის ძალა ნულამდე ეცემა არა მყისიერად, არამედ დროის რაღაც შუალედის განმავლობაში. დროის ის შუალედი, რომლის განმავლობაშიც დენის ძალა ეცემა e (ნეპერის რიცხვი) - ჯერ, ცნობილია რელაქსაციის დროის სახელწოდებით. (26.16) ფორმულიდან ჩანს, რომ რელაქსაციის დრო განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$t_p = \frac{L}{R} \quad (26.17)$$

იდელური რხევითი კონტური. ჩავთვალოთ, რომ ელექტრული წრედის ომური წინაღობა უგულვებელყოფილია ($R = 0$) და გარე ემ ძალა არ გვაქვს ($\mathcal{E}_{\text{გარე}} = 0$). ამ შემთხვევაში (26.10) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (26.18)$$

ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს წარმოადგენს ფუნქცია:

$$I = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (26.19)$$

სადაც წრიული სიხშირე ტოლია:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (26.20)$$

ამრიგად, ასეთ კონტურში რხევების პერიოდი:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (26.21)$$

ამ რხევების აგზნება შესაძლებელია ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის საფუძველზე. ომური წინაღობის არსებობა კი იწვევს რხევების თანდათანობით მიღევადობას.

ზოგადი შემთხვევა. განვიხილოთ (26.10) განტოლება და გავითვალისწინოთ ერთდროულად ტევადობა, წინაღობა და ინდუქტივობა. თუ გარე ემ ძალა წარმოადგენს ω სიხშირის პერიოდულ ფუნქციას:

$$\mathcal{E}_{\text{გარე}} = \mathcal{E}_0^{\text{გარე}} e^{-i\omega t} \quad (26.22)$$

მაშინ (26.10) განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$I = I_0 e^{-i\omega t} \quad (26.23)$$

გავითვალისწინოთ (26.23) (26.10) განტოლებაში და მოვახდინოთ დიფერენცირება, მივიღებთ თანაფარდობას:

$$I\left(-L\omega^2 - Ri\omega + \frac{1}{C}\right) = -i\omega \mathcal{E}^{\text{ბარე}} \quad (26.24)$$

ეს თანაფარდობა შეიძლება ჩავწეროთ ომის კანონის სახით:

$$IZ = \mathcal{E}^{\text{ბარე}} \quad (26.25)$$

სადაც

$$Z = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (26.26)$$

რომელსაც **იმპედანსს** უწოდებენ. დავწეროთ (26.25) ფორმულით მოცემული თანაფარდობა შემდეგი სახით:

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{ბარე}}}{Z} \quad (26.27)$$

გამოვყოთ ნამდვილი ნაწილი, დენის ძალისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{ბარე}} \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L - 1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \text{tg} \alpha = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cdot \frac{1}{R} \quad (26.28)$$

ეს დენი განპირობებულია გარედან მოღებულ დენით:

$$\mathcal{E}^{\text{ბარე}} = \mathcal{E}_0^{\text{ბარე}} \cos \omega t \quad (26.29)$$

ამგვარად, დენის ძალა მოღებულ დენის მიმართ წანაცვლებულია ფაზით, ხოლო ომური წინაღობის გამო გაჩნდა ინდუქტიური წინაღობა.

თუ გარე ემ ძალა გამორთულია ($\mathcal{E}^{\text{ბარე}} = 0$), მაშინ წრედში დენი ასრულებს რხევებს, რომლის კომპლექსური სიხშირე (26.25) ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება პირობიდან $Z = 0$. მაშასადამე:

$$\omega = -i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (26.30)$$

თუ ფესვქვეშა გამოსახულება უარყოფითია

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2,$$

მაშინ კომპლექსური სიხშირე წმინდა წარმოსახვითი სიდიდეა, და მაშასადამე მამრავლი $e^{-i\omega t}$ არ იქნება პერიოდული ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს მიღევად აპერიოდულ განმუხტვას.

თუ ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითია

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2,$$

მაშინ აღიძვრება მიღევადი რხევები, რომელთა სიხშირეც განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (26.31)$$

ხოლო რხევების ამპლიტუდის შემცირების სიჩქარე განისაზღვრება მამრავლით:

$$e^{-\frac{Rt}{2L}} \quad (26.32)$$

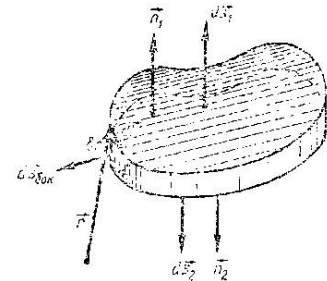
სადაც $R/2L$ ამ რხევების მილევადობის დეკრემენტია. მცირე ომური წინააღობის შემთხვევაში (26.31) ფორმულაში შეიძლება დავუშვათ, რომ $R = 0$, მაშინ ეს ფორმულა გარდაიქმნება თავისუფალი რხევების სიხშირის ტომსონის ფორმულად (26.20).

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია ელექტრული წრედის განტოლება ცვლადი დენისთვის?
2. როგორ მიიღება დენის ზრდის და შემცირების კანონები წრედში?
3. როგორია რელაქსაციის დრო და რა მნიშვნელობა აქვს მას?
4. როგორია ინდუქტივობის გავლენა წრედში მიმდინარე პროცესებზე?
5. როგორია კონდენსატორის ტევადობის გავლენა დენის რხევებზე?
6. როგორია რხევითი კონტურის ტალღური პარამეტრები?
7. როგორია ომური წინააღობის გავლენა ელექტრულ რხევებზე?
8. როგორია იმპედანსის როლი ცვლად დენიან წრედში?
9. როგორია მილევადი და აპრიოდული რხევების განსხვავება?
10. როგორია ტომსონის ფორმულის გამოყენება თავისუფალი რხევების სიხშირის განსაზღვრაში?

§ 27. დენების ინდუქცია მოძრავ გამტარებში

ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის მოვლენის გამოკვლევის დროს იგულისხმებოდა, რომ L - კონტური, რომელშიც გამოითვლებოდა ინდუქციის ემ ძალა იყო უძრავი, და მაგნიტური ინდუქციის Φ ნაკადის ცვლილება განპირობებული იყო მაგნიტური ველის ინდუქციის დროში ცვლილებით. დავუშვათ, მოცემული გვაქვს ჩაკეტილი წრფივი გამტარი L , რომელიც ნებისმიერად მოძრაობს გარე \vec{B} მაგნიტურ ველში. ამ დროს დასაშვებია გამტარის ფორმის დეფორმაცია (იხ. ნახ.27.1)



ნახ.27.1

თუ გამტარის $d\vec{l}$ ელემენტი \vec{v} სიჩქარით მოძრაობს \vec{B} მაგნიტურ ველში, მაშინ $d\vec{l}$ ელემენტზე არსებულ ყოველ თავისუფალ ელექტრონზე მოქმედებს ლორენცის ძალა:

$$\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (27.1)$$

რომელიც განაპირობებს ელექტრონების მოწესრიგებულ მოძრაობას, ე. ი. ქმნის ელექტრულ დენს. ამ თვალსაზრისით შეიძლება ვთქვათ, რომ გამტარში აღიძვრება რომელიღაც ელექტრული ველი:

$$\vec{E}_{\text{ვგ}} = [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (27.2)$$

რომელიც ქმნის ინდუქციის ემ ძალას ჩაკეტილ L - კონტურში:

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}_{\text{ვგ}} d\vec{l}) = \oint_L ([\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l}) \quad (27.3)$$

დავუშვათ, რომ \vec{r} – გამტარის $d\vec{l}$ ელემენტის რადიუს-ვექტორია განვიხილოთ L - კონტურის ორი მდებარეობა δt დროის შუალედში. δt დროში კონტურის $d\vec{l}$ ელემენტი

წაინაცვლებს $\delta\vec{r}$ – ით, მაშინ

$$\vec{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \quad (27.4)$$

ამიტომ (27.3) ტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathcal{E} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_L ([\delta\vec{r} \times \vec{B}] d\vec{l}) \quad (27.5)$$

რადგანაც შერეულ ნამრავლში შესაძლებელია ვექტორების ციკლური გადაადგილება, ამიტომ:

$$([\delta\vec{r} \times \vec{B}] d\vec{l}) = ([d\vec{l} \times \delta\vec{r}] \vec{B}) \quad (27.6)$$

მივიდოთ მხედველობაში, რომ:

$$[d\vec{l} \times \delta\vec{r}] = -d\vec{S}_{\text{ვგ}} \quad (27.7)$$

სადაც $d\vec{S}_{\text{ვგ}}$ – იმ ფართის ვექტორია, რომელიც იქმნება $d\vec{l}$ ელემენტით, მისი $\delta\vec{r}$ მანძილით წანაცვლებისას. $d\vec{S}_{\text{ვგ}}$ ვექტორი მიმართულია იმ მოცულობის გარე ნორმალის მიმართულებით, რომელიც შემოსაზღვრულია S_1 , S_2 , და $S_{\text{ვგ}}$ ზედაპირებით. \vec{B} ვექტორის ნაკადი ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირში ნულის ტოლია:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_1} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_{\text{ვგ}}} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (27.8)$$

მაშასადამე,

$$\int_{S_{\text{ვგ}}} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_{\text{ვგ}}} (\vec{B} \cdot [d\vec{l} \times \delta\vec{r}]) = \int_{S_1} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_2} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) \quad (28.9)$$

მოდრავი კონტურით შემოსაზღვრული ზედაპირის ნორმალის დადებით მიმართულებად საჭიროა ავირჩიოთ ის მიმართულება, რომელიც კონტურის გარშემოვლის მიმართულებასთან ადგენს მარჯვენა ხრახნულ სისტემას (იხ. ნახ.-ზე ნორმალი \vec{n}_1). ამიტომ (27.9) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ინტეგრალებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi(t), \quad \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi(t + \delta t) \quad (27.10)$$

მეორე ტოლობაში ნიშანი მინუსი მიუთითებს იმაზე, რომ \vec{n}_2 გარე ნორმალს გააჩნია არჩეული დადებითი მიმართულების საპირისპირო მიმართულება. ამგვარად, (27.9) თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_{S_{\partial V}} (\vec{B} \cdot [d\vec{l} \times \delta\vec{r}]) = -[\Phi(t + \delta t) - \Phi(t)] = -\delta\Phi \quad (27.11)$$

სადაც $\delta\Phi$ – მაგნიტური ინდუქციის ნაკადის ცვლილებაა L - კონტურით შემოსაზღვრულ ზედაპირში, რომელიც მისი მოძრაობითა და დეფორმაციითაა გამოწვეული. გავითვალისწინოთ (27.11) ფორმულა (27.5) – ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\mathcal{E} = -\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\delta t} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (27.12)$$

ეს ფორმულა გარეგნული სახით ჰგავს ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის გამომსახველ (5.1) ფორმულას, მაგრამ მისი შინაარსი სულ სხვაა: (5.1) ფორმულაში უძრავ გამტარში მაგნიტური ინდუქციის ნაკადის ცვლილება განპირობებული იყო დროში ცვლადი მაგნიტური ველით, ხოლო (27.12) ფორმულაში მაგნიტური ინდუქციის ნაკადის ცვლილება განპირობებულია გამტარის მოძრაობითა და დეფორმაციით დროის მიხედვით მუდმივ მაგნიტურ ველში. მაშასადამე,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

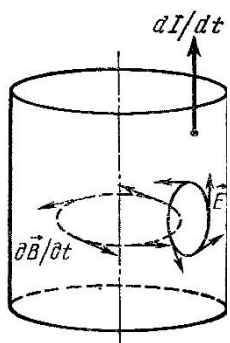
ფორმულა გამოიყენება Φ –ის ნებისმიერი მიზნით ცვლილებისას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია ფარადეის ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის მოქმედება მოძრავ კონტურებზე?
2. როგორ მოქმედებს ლორენცის ძალა ელექტრონებზე მოძრავ გამტარებში?
3. როგორ ხდება ინდუქციური ელექტრომოდრავებული ძალის წარმოქმნა მოძრავ გამტარში?
4. როგორია კონტურის გადაადგილების გავლენა ინდუქციის პროცესზე?
5. როგორ მოქმედებს მოძრავი გამტარის ფორმის დეფორმაცია ელექტრული ველის წარმოქმნაზე?
6. როგორია ინდუქციური ველის ეფექტი ჩაკეტილ კონტურზე?
7. რა განსხვავებაა უძრავ და მოძრავ გამტარში ინდუქციური პროცესების მიმდინარეობას შორის?

§ 28. სკინ-ეფექტი

მოვლენის არსი. მუდმივი დენი გამტარის განივკვეთში ნაწილდება თანაბრად. ცვლადი დენის შემთხვევაში სურათი იცვლება – დენის სიმკვრივე გამტარის ზედაპირთან იზრდება, ხოლო ცენტრში კი – მცირდება. ამ მოვლენას – **ცვლადი დენის კონცენტრაციას გამტარის ზედაპირით – უწოდებენ სკინ-ეფექტს**. სკინ-ეფექტი განპირობებულია დენიან ელემენტთა ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებით.



ნახ.28.1

დავუშვათ, ცვლადი დენი გადის უსასრულო წრფივ ცილინდრულ გამტარში (იხ. ნახ.28.1). ჩავთვალოთ, რომ დროის რომელიმე მომენტისათვის გამტარში დენი გადის ნახაზზე ნაჩვენები ისრის მიმართულებით და დენის ძალა იზრდება ამ მიმართულებით. დენის მაგნიტური ველის წირები წარმოადგენენ კონცენტრულ წრეწირებს, რომელთა ცენტრიც გამტარის ღერძზე მდებარეობს. დენის ძალის ზრდის დროს ინდუქციის წირების ფორმა არ იცვლება, მაგრამ ყოველ წერტილში ინდუქციის მნიშვნელობა იზრდება, მაშასადამე, დენის ძალის ცვლილების დროს მაგნიტური ველის ინდუქცია ყოველ წერტილში მიმართულებით შენახვადია, მაგრამ სიდიდით იცვლება. ამიტომ $d\vec{B}/dt$ წარმოებული მიმართულია მაგნიტური ველის ინდუქციის შესაბამისი ძალწირის მხები მიმართულებით. ელექტრომაგნიტური ინდუქციის

კანონის საფუძველზე ცვალებადი მაგნიტური ველი წარმოშობს გრიგალურ ელექტრულ ველს, რომლის ძალწირებიც მდებარეობს $d\vec{B}/dt$ ვექტორის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში. ელექტრული ველის დაძაბულობის ძალწირის გარშემოვლის დადებითი მიმართულება და $d\vec{B}/dt$ ვექტორის მიმართულება ადგენენ მარცხენა ხრახნულ სისტემას, რაც ნახაზიდან უშუალოდ ჩანს. გრიგალური \vec{E} ველის მიმართულება ისეთია, რომ იგი აძლიერებს დენის ძალას გამტარის ზედაპირთან და ასუსტებს მას გამტარის შიგნით. ამიტომ დენის სიმკვრივე გამტარის ზედაპირთან იზრდება, ხოლო გამტარის ცენტრისაკენ მცირდება. ჩვენ გავანალიზეთ დენის ძალის ზრდის შემთხვევა. ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ იმაში, რომ დენის ძალის შემცირების შემთხვევაში გრიგალური ელექტრული ველის მიმართულება ისეთია, რომ დენის სიმკვრივე იზრდება გამტარის ცენტრიდან მისი ზედაპირისაკენ.

სკინ-ეფექტის ელემენტარული თეორია. გამოთვლების გამარტივების მიზნით განვიხილოთ უსასრულო ერთგვაროვანი გამტარი, რომელსაც უჭირავს $Y \geq 0$ ნახევარსივრცე. დენი გადის X ღერძის მიმართულებით, გამტარის ზედაპირის პარალელურად, რომელიც ემთხვევა XZ სიბრტყეს. თეორიის გამოსავალ განტოლებებს წარმოადგენენ შემდეგი განტოლებები:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} = \gamma\vec{E} \tag{28.1}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{28.2}$$

სადაც

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \tag{28.3}$$

გავადიფერენციალოთ (28.1) განტოლების ორივე მხარე დროის მიხედვით და მარცხენა მხარეში dH/dt წარმოებული გამოვრიცხოთ (28.2) განტოლებიდან. მივიღებთ:

$$-\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (28.4)$$

რადგანაც ერთგვაროვან გამტარში თავისუფალი მუხტები არ არსებობენ, ხოლო

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}, \quad \text{და} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

ამიტომ (28.4) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (28.5)$$

ანალოგიურად მიიღება განტოლება \vec{H} ვექტორისათვისაც:

$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (28.6)$$

ჩვენ ვიკვლევთ შემთხვევას, როდესაც დენი X ღერძის გასწვრივ გადის, ამიტომ

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = j_z = 0 \quad (28.7)$$

(28.3) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს:

$$E_x = E_x(y, t), \quad E_y = E_z = 0 \quad (28.8)$$

მაშინ (28.5) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (28.8)$$

თუ ω ცვლადი დენის სიხშირეა, მაშინ (28.9) განტოლების ამონახსნი საჭიროა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$E_x(y, t) = E_{x0}(y) e^{i\omega t} \quad (28.9)$$

გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულება (28.9) განტოლებაში და დროით გაწარმოების ოპერაციის შემდეგ შევკვავოთ $e^{i\omega t}$ მამრავლზე, მივიღებთ:

$$\frac{d^2 E_{x0}}{dy^2} = 2ip^2 E_{x0}, \quad p^2 = \frac{\mu\gamma\omega}{2} \quad (28.11)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახისაა:

$$E_{x0}(y) = A_0 e^{ky} + B_0 e^{-ky} \quad (28.12)$$

ამასთან,

$$k^2 = 2ip^2, \quad k = p\sqrt{2i} = p(1+i) \quad (28.13)$$

ამგვარად:

$$E_{x0} = A_0 e^{py} e^{ipy} + B_0 e^{-py} e^{-ipy} \quad (28.14)$$

(28.14) გამოსახულების პირველი შესაკრები შემოუსაზღვრელად იზრდება, როდესაც $y \rightarrow \infty$, რომელსაც ფიზიკური აზრი არ აქვს. ამიტომ საჭიროა დავუშვათ, რომ $A_0 = 0$. თუ გავითვალისწინებთ (28.10) ფორმულას, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$E_x(y, t) = e^{-py} B_0 e^{i(\omega t - py)} \quad (28.15)$$

ან თუ გადავალთ ამ გამოსახულებაში ნამდვილ სიდიდეებზე, და ავიღოთ, მაგალითად, ნამდვილი ნაწილი:

$$E_x = e^{-py} B_0 \cos(\omega t - py) \quad (28.16)$$

მივიღოთ მხედველობაში (28.3) გამოსახულება, რომელიც (28.16) ფორმულის საფუძველზე შესაძლებლობას გვაძლევს დავწეროთ დენის სიმკვრივის გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$j_x = e^{-py} j_0 \cos(\omega t - py) \quad (28.17)$$

სადაც j_0 - გამტარის ზედაპირზე დენის სიმკვრივის ამპლიტუდაა. ამგვარად, დენის სიმკვრივე გამტარის ზედაპირიდან დაშორებისას ეცემა, ამასთან, ამ დაცემის სიჩქარე ხასიათდება e^{-py} ექსპონენციალური მამრავლით გამტარის ზედაპირიდან.

$$\Delta = \frac{1}{p} \quad (28.18)$$

მანძილზე დენის სიმკვრივე ეცემა e - ჯერ, ამიტომ პრაქტიკულად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მთელი დენი კონცენტრირებულია გამტარის Δ სისქის ზედაპირულ ფენაში. მივიღოთ მხედველობაში (28.11) გამოსახულება p - სთვის, მაშინ (28.18) ფორმულა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta = \sqrt{\frac{T}{\pi \gamma \mu}} \quad (28.19)$$

სადაც T – რხევის პერიოდია. ამგვარად, ცვლადი დენის სიხშირის ზრდით სკინ-ეფექტი იზრდება და დენი კონცენტრირდება უფრო თხელ ფენაში გამტარის ზედაპირის მახლობლობაში. სკინ-ეფექტი ასევე იზრდება გამტარის გამტარებლობის გაზრდით, ე. ი. გამტარის კუთრი წინააღობის შემცირებით. შევაფასოთ Δ – ს რიგი. ლითონებისათვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mu \approx \mu_0$, $\gamma \approx 10^7$ ომი/მ. მაშინ $T \approx 10^{-3}$ წმ მივიღებთ:

$$\Delta = \sqrt{\frac{10^{-3}}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7}} \text{ მ} \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ მ}$$

თუ სიხშირე გაიზრდება 100-ჯერ, მაშინ $\Delta = 0,5$ მმ. ამრიგად, $T = 10^{-5}$ წმ პერიოდისათვის, რომელიც შეესაბამება ტალღის $l = c \cdot T = 3$ კმ სიგრძეს, ე. ი. პრაქტიკულად, მთელი დენი გადის ნახევარმილიმეტრიანი სისქის ფენაში. მოყვანილი შეფასებები გვიჩვენებენ, რომ საკმაოდ დიდი სიხშირის არეში სკინ-ეფექტი იწვევს გამტარის განივკვეთში დენის არსებით გადანაწილებას. ცილინდრულ გამტარში სკინ-ეფექტის გამოთვლები მიმდინარეობს ანალოგიურად, ახალს იგი არაფერს არ შეიცავს, მაგრამ საკმაოდ დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული და აქ არ განვიხილავთ.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის სკინ-ეფექტი და რა განაპირობებს მის წარმოშობას?
2. როგორია დენის განაწილება ცვლად დენიან გამტარში?
3. როგორ იცვლება დენის სიმკვრივე გამტარის ზედაპირიდან ცენტრისკენ?
4. როგორია გრიგალური ელექტრული ველის გავლენა დენის გადანაწილებაზე?

5. როგორ აიხსნება სკინ-ეფექტი ელექტრომაგნიტური ინდუქციის კანონის საფუძველზე?
6. როგორია სკინ-ეფექტის მათემატიკური აღწერა?
7. როგორია სკინ-ეფექტის გავლენა სხვადასხვა სიხშირის დენის შემთხვევაში?
8. როგორ მოქმედებს სკინ-ეფექტი ცილინდრულ გამტარებში?
9. როგორია სკინ-ეფექტის დამოკიდებულება გამტარის წინაღობაზე?
10. როგორ იზრდება სკინ-ეფექტი სიხშირის ზრდასთან ერთად?

ლექცია 10. ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივება I.

- §29. მაქსველის განტოლებები გარემოში. პოტენციალების დაყალიბება;
- §30. დაგვიანებისა და წინსწრების პოტენციალები.

§29. მაქსველის განტოლებები გარემოში

მაქსველის განტოლებებს გარემოში აქვთ შემდეგი სახე:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II}) \quad (29.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{IV})$$

ხოლო მატერიალურ განტოლებებს კი:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{V})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{VI}) \quad (29.2)$$

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{გარე}}) \quad (\text{VII})$$

(29.10) და (29.2) განტოლებები სამართლიანია შემდეგი პირობების დაცვისას: 1) ყველა მატერიალური სხეული, რომელიც იმყოფება ველში, უძრავია; 2) ε, μ, γ სიდიდეები, რომლებიც ახასიათებენ გარემოს მატერიალურ თვისებებს, არ არის დამოკიდებული დროზე და ველის ვექტორებზე; 3) ველში არ არსებობენ მუდმივი მაგნიტები და ფერომაგნიტური ნივთიერებები.

თუ (29.2) ფორმულების დახმარებით გამოვრიცხავთ (29.1) განტოლებებიდან $\vec{D}, \vec{B}, \vec{j}$ ვექტორებს, მაშინ დარჩება რვა განტოლება $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ ექვსი დამოუკიდებელი ცვლადისათვის: მოცემული საწყისი და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მაქსველის განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ერთადერთობა მტკიცდება §7-ში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად.

ისევე, როგორც კვაზისტაციონარულ შემთხვევაში, კავშირს ელექტრული და მაგნიტური ველის ვექტორებსა და პოტენციალებს შორის აქვთ იგივე სახე:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (29.3)$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (29.4)$$

განტოლება ვექტორული პოტენციალისათვის. განვიხილოთ ერთგვაროვანი გარემო ($\mu = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$). გავითვალისწინოთ მაქსველის განტოლებაში:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (29.5)$$

(29.3) და (29.4) გამოსახულებები, მივიღებთ:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (29.6)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება გარდავქმნათ:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$$

ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} - \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (29.7)$$

განტოლება სკალარული პოტენციალისათვის. მაქსველის განტოლებაში $\text{div} \vec{D} = \rho$ გავითვალისწინოთ (29.4) გამოსახულება. მაშინ ერთგვაროვანი გარემოსათვის მივიღებთ:

$$\text{div} \left(-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (29.8)$$

ან რაც იგივეა:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (29.9)$$

პოტენციალების ცალსახობა და დაყალიბება. (29.3) და (29.4) ფორმულებით მოცემული \vec{E} და \vec{B} ვექტორები საშუალებას არ იძლევა შემოვიტანოთ პოტენციალები ცალსახად.

დავუშვათ, $\chi(\vec{r}, t)$ კოორდინატებისა და დროის ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო φ და \vec{A} პოტენციალებია, რომლებიც აღწერენ (29.3) და (29.4) ფორმულებით რომელიდაც \vec{E} და \vec{B} ელექტრომაგნიტურ ველს. მტკიცდება, რომ პოტენციალები:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (29.10)$$

განსაზღვრავენ იმავე \vec{E} და \vec{B} ველს. ამ უკანასკნელის დასამტკიცებლად ვიპოვოთ (29.10) \vec{A}' და φ' პოტენციალებით განსაზღვრული \vec{E}' და \vec{B}' ელექტრომაგნიტური ველი. (29.10) ფორმულის თანახმად:

$$\vec{B}' = \text{rot} \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad} \chi) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \text{grad} \chi = \text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad (29.11)$$

ანალოგიურად,

$$\vec{E}' = -grad\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -grad\left(\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + grad\chi) = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (29.12)$$

ამგვარად, φ და \vec{A} პოტენციალები აღწერენ იმავე ელექტრომაგნიტურ ველს, რასაც φ' და \vec{A}' პოტენციალები, რომლებიც განიმარტებიან (29.10) ფორმულებით ნებისმიერი χ ფუნქციისათვის. (29.10) ფორმულით მოცემულ გარდაქმნას უწოდებენ გრადიენტულ გარდაქმნას, ან დაყალიბებას. თუ ვისარგებლებთ პოტენციალების შერჩევის არაცალსახობით, მაშინ მათ შეიძლება დავადოთ გარკვეული დამატებითი პირობები.

პოტენციალების დაყალიბება.

ლორენცის დაყალიბება. პოტენციალების შერჩევის არაცალსახობიდან გამომდინარე პოტენციალებზე გარკვეული პირობების დადებას უწოდებენ დაყალიბებას. განსაკუთრებით გამოიყენება ლორენცისა და კულონური დაყალიბება. მათი სახე დამოკიდებულია (29.7) განტოლების მაქსიმალურ გამარტივებაზე. ცხადია, რომ ამისათვის პოტენცილებს უნდა დაედოს პირობა:

$$div\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (29.13)$$

რომელსაც ლორენცის პირობას, ანუ პოტენციალის ლორენცის დაყალიბების პირობას უწოდებენ. ამ შემთხვევაში (29.7) და (29.8) განტოლებები ღებულობენ შემდეგ სახეს:

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad (29.14)$$

$$\nabla^2 \varphi + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (29.15)$$

(29.14) და (29.15) განტოლებები მათემატიკურ ფიზიკაში ცნობილია როგორც ტალღის განტოლებების, ანუ დალამბერის განტოლებების სახელწოდებით. როგორც ამ განტოლებებიდან ჩანს, ლორენცის დაყალიბება ხელსაყრელია არა მარტო იმით, რომ იგი მნიშვნელოვნად ამარტივებს (29.7) განტოლებას, არამედ იმით, რომ ვექტორული და სკალარული პოტენციალების განტოლებები ღებულობენ ერთნაირ სახეს. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ თუ რომელიღაც \vec{A} და φ პოტენციალები აკმაყოფილებენ (29.14) და (29.15) განტოლებებს, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი χ ფუნქცია, რომლის დახმარებით (29.10) ფორმულით მოცემული დაყალიბების გარდაქმნა გადაიყვანს ამ განტოლებებს φ' და \vec{A}' – სათვის (29.14) და (29.15) განტოლებებში; ამავდროულად დაცულია ლორენცის დაყალიბების (29.13) პირობა. გავითვალისწინოთ (29.10) ფორმულა (29.14) და (29.15) განტოლებებში, ვხედავთ, რომ ამისათვის დაცული უნდა იყოს პირობა:

$$\nabla^2 \chi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + div\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (29.16)$$

ე. ი. აუცილებელია χ ფუნქციად ავირჩიოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\nabla^2 \chi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\left(div\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad (29.17)$$

ამასთან, დროს φ' და \vec{A}' პოტენციალები აკმაყოფილებენ (29.11), (29.15) და (29.13) პირობებს. მტრიხიანი პოტენციალები (29.13) ფორმულით მოცემულ ლორენცის პირობას და (29.14) და

(29.15) განტოლებებს დააკმაყოფილებენ მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ χ ფუნქცია ასეთი დაყალიბების გარდაქმნის დროს წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$\nabla^2 \chi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (29.18)$$

კულონური დაყალიბება. კულონური დაყალიბება გამოისახება პირობით:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (29.19)$$

(29.9) განტოლება სკალარული პოტენციალისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (29.20)$$

იგი წარმოადგენს პუასონის განტოლებას სკალარული პოტენციალისათვის, რომელიც თავის მხრივ კულონის კანონის დიფერენციალური ფორმულირებაა. ეს პოტენციალი აღწერს ρ მუხტის განაწილებით წარმოქმნილ მყისიერ კულონურ ველს, რის გამოც დაყალიბებას უწოდებენ კულონურს. კულონური დაყალიბების პირობა ხელსაყრელია ველის აღსაწერად სივრცის იმ არეში, სადაც არ არსებობენ დენები და მუხტები. ამ დროს შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\varphi = 0$, ხოლო ვექტორული პოტენციალი აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას. ველს გამოსახავენ ვექტორული პოტენციალით:

$$\vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია მაქსველის განტოლებები გარემოში და რა პირობითაა ისინი ძალაში?
2. როგორია მატერიალური განტოლებების ფორმულირება?
3. რატომ არის მნიშვნელოვანი გარემოს უძრავობის და დროის მიმართ ინვარიანტულობის პირობები მაქსველის განტოლებებში?
4. როგორია ვექტორული და სკალარული პოტენციალების კავშირი ელექტრომაგნიტურ ველთან?
5. როგორ მიიღება ვექტორული პოტენციალის განტოლება ერთგვაროვანი გარემოსთვის?
6. რა განსხვავებაა ვექტორული და სკალარული პოტენციალის განტოლებებს შორის?
7. როგორ განისაზღვრება პოტენციალების ცალსახობა და მათი დაყალიბების პრინციპი?
8. რას ნიშნავს პოტენციალების გრადიენტული გარდაქმნა და რატომ არის ის მნიშვნელოვანი?
9. როგორია ლორენცის დაყალიბების პირობა და როგორ აისახება ის განტოლებებზე?
10. როგორია კულონური დაყალიბება და რაში გამოიხატება მისი მნიშვნელობა?
11. რატომ არის ლორენცის დაყალიბება ხელსაყრელი ველის აღწერისას?
12. როგორია კულონური დაყალიბების პუასონის განტოლება და რა კავშირშია კულონის კანონთან?
13. როგორია სკალარული და ვექტორული პოტენციალების დაყალიბება სივრცის იმ რეგიონში, სადაც დენები და მუხტები არ არიან?

§ 30. დაგვიანებისა და წინსწრების პოტენციალები

(29.14) და (29.15) განტოლებების ამონახსნები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

1) დაგვიანებული პოტენციალებით:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x'y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (30.1)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x'y', z', t - \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (30.2)$$

სადაც

$$dV' = dx' dy' dz'$$

საინტეგრაციო მოცულობის ელემენტი,

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (30.3)$$

r – მანძილია საინტეგრაციო წერტილსა და იმ წერტილს შორის, რომელშიც გამოითვლება ფუნქციის მნიშვნელობა.

2) წინსწრების პოტენციალებით:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x'y', z', t + \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (30.4)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x'y', z', t + \frac{r}{v})}{r} dV' \quad (30.5)$$

ამ ფორმულებში v სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (30.6)$$

უდიდესი მნიშვნელობა გააჩნია დაგვიანებულ პოტენციალებს. თეორიულად ელექტრომაგნიტური ტალღების არსებობა თეორიულად გამომდინარეობს იქედან, რომ ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალები აკმაყოფილებენ დალამბერის განტოლებებს, რომლის თანახმადაც დასაშვებია ამონახსნები ტალღების სახით.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია დაგვიანებული და წინსწრების პოტენციალების განტოლებები?
2. რას წარმოადგენს საინტეგრაციო მოცულობის ელემენტი და მანძილი პოტენციალების გამოსათვლელად?
3. როგორია პოტენციალების გავრცელების სიჩქარე და რაზეა დამოკიდებული მისი მნიშვნელობა?
4. რა ფიზიკურ პროცესს ასახავს დაგვიანებული პოტენციალები?
5. რატომ არის უფრო მნიშვნელოვანი დაგვიანებული პოტენციალები წინსწრების პოტენციალებთან შედარებით?
6. როგორ უკავშირდება დალამბერის განტოლებები ელექტრომაგნიტური ტალღების არსებობის თეორიულ საფუძვლებს?
7. როგორ აიხსნება ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება პოტენციალების მიხედვით?

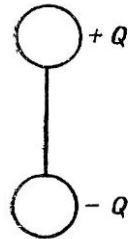
8. როგორია მაქსველის განტოლებებიდან გამომდინარე დასკვნები პოტენციალების ტალღური თვისებების შესახებ?
9. რა პირობით მიიღება წინსწრების პოტენციალები, და რატომ არ აქვთ მათ ფიზიკური მნიშვნელობა რეალურ პროცესებში?
10. როგორ შეიძლება დაგვიანებული პოტენციალების გამოყენება პრაქტიკულ გამოთვლებში?

ლექცია 11. ელექტრომაგნიტური ტალღების გამოსხივება II.

- §31. წრფივი ოსცილატორის გამოსხივება;
- §32. რხევადი ელექტრონის გამოსხივება. გამოსხივება დამუხრუჭებით;
- §33. სინათლის გაბნევა თავისუფალი ელექტრონებით;
- §34. ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი. სინათლის წნევა.

§31. წრფივი ოსცილატორის გამოსხივება

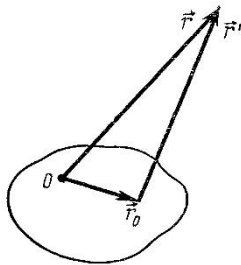
ჰერცის ვიბრატორი. ელექტრომაგნიტური ტალღების გამომსხივებელ უმარტივეს წყაროს წარმოადგენს ჰერცის ვიბრატორი და დენიანი ჩარჩო. ჰერცის ვიბრატორი წარმოადგენს ორი ლითონის ბურთულას ერთობლიობას, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებული არიან გამტარით (იხ. ნახ.31.1).



ნახ.31.1

თუ ბურთულებს მივანიჭებთ სიდიდით ტოლ და ნიშნით საწინააღმდეგო მუხტებს, ხოლო სისტემას მივუშვებთ თავისთავად, მაშინ ადგილი ექნება ბურთულების გადამუხტვის რხევით პროცესს. ბურთულების შემაერთებელ გამტარში გაივლის დენი, რომლის ძალაც პერიოდულად იცვლება. დენის ეს რხევები იქნება მიღევადი. მაგრამ თუ გამტარის წინაღობა მცირეა, მაშინ დიდი პერიოდის რხევები პრაქტიკულად არ მიიღევა. დიდ მანძილებზე, ჰერცის ვიბრატორის ველი შეიძლება აღიწეროს როგორც დროის მიხედვით ცვალებადი დიპოლური ველი, რომლის მომენტიც p' იცვლება დროის მიხედვით.

დიპოლის დროში ცვლადი სკალარული პოტენციალი. ავირჩიოთ დიპოლის



ნახ.31.2

მახლობლობაში ათვლის კოორდინატა სისტემის სათავედ რომელიღაც O წერტილი (იხ. ნახ.31.2)

იმ წერტილის რადიუს-ვექტორი, რომელშიც პოტენციალი გამოითვლება, აღვნიშნოთ r' . (30.2) ფორმულის თანახმად შეიძლება დავწეროთ:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} dV \quad (31.1)$$

სადაც $dV = dx_0 dy_0 dz_0$; r' – მანძილია საინტეგრაციო წერტილიდან იმ წერტილამდე, რომელშიც ვეძებთ პოტენციალს. გამოვთვალოთ პოტენციალი დამუხტული სისტემიდან დიდ მანძილებზე ($\frac{r_0}{r} \ll 1$). მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$, $r' = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_0 + r_0^2}$, მაშინ r' – ის გამოსახულება შეიძლება გავშალოთ მწკრივად $\frac{r_0}{r}$ მიხედვით და ამ გაშლაში შემოვიხსნათ წრფივი წევრებით:

$$r' = r \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r} + \dots \quad (31.2)$$

ვისარგებლოთ (31.2) ფორმულით, მაშინ (31.1) ფორმულაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება შეიძლება გავშალოთ ტეილორის მწკრივად r წერტილში:

$$\frac{\rho(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} = \frac{\rho(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})}{r} \right) + \dots = \frac{\rho}{r} - \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{r}_0 \rho}{r} \right) \quad (31.3)$$

გაშლაში პირველი რიგის წევრების შენარჩუნება შესაძლებელია, თუ გაშლის დანარჩენი წევრები მცირე სიდიდეებია. გავითვალისწინოთ (31.3) ფორმულა (31.1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_V \vec{r}_0 \rho dV \quad (31.4)$$

მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებში ინტეგრალი ნულის ტოლია სისტემის ნეიტრალურობის გამო, ხოლო მეორე შესაკრებში კი ინტეგრალი წარმოადგენს დიპოლის მომენტს.

$$\int_V \vec{r}_0 \rho \left(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c} \right) dV = \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (31.5)$$

მაშასადამე, დიპოლის პოტენციალი დებულობს შემდეგ სახეს:

$$\varphi(\vec{r}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right) \quad (31.6)$$

თუ ვისარგებლებთ სფერულ კოორდინატებში დივერგენციის ფორმულით, მაშინ ეს გამოსახულება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(\vec{r}, t) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad (31.7)$$

ვექტორული პოტენციალი. (30.1) ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c} \right)}{r'} dV \quad (31.8)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება გავშალოთ მწკრივად (31.3) ფორმულის ანალოგიურად:

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} = \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})}{r} + \dots$$

შედეგად ვღებულობთ:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c}) dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) dV \quad (31.9)$$

მოცემულ შემთხვევაში დენი ჩაკეტილი არ არის, ამიტომ (31.9) ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ინტეგრალი ნულისაგან განსხვავებულია. იგი განსაზღვრავს სწორედ პოტენციალის მთავარ ნაწილს. მის გამოსათვლელად გავადიფერენციალოთ (31.5) გამოსახულება დროის მიხედვით:

$$\frac{\partial \vec{p}(t - \frac{r}{c})}{\partial t} = \int \vec{r}_0 \frac{\partial \rho(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})}{\partial t} dV$$

და ვისარგებლოთ უწყვეტობის განტოლებით, რომელშიც

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x_0} + \frac{\partial j_y}{\partial y_0} + \frac{\partial j_z}{\partial z_0}$$

სადაც x_0, y_0, z_0 წარმოადგენენ რადიუს-ვექტორის კომპონენტებს. მაშასადამე,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = - \int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j} dV \quad (31.10)$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორთავე მხარე ნებისმიერ მუდმივ \vec{a} ვექტორზე:

$$\vec{a} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = - \int_V (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \operatorname{div} \vec{j} dV \quad (31.11)$$

გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} \varphi$$

მივიღებთ:

$$(\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)) - \vec{j} \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0) = \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)) - (\vec{a} \cdot \vec{j})$$

მაშინ:

$$\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right) = - \int_V \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)) dV + \vec{a} \int_V \vec{j} dV \quad (31.12)$$

მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი შეიძლება გარდავქმნათ გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემის საფუძველზე:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0)) dV = \oint_S \vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}_0) d\vec{S} = 0$$

ინტეგრალი S ზედაპირზე ნულის ტოლია, რადგანაც ყველა დენი თავმოყრილია V მოცულობის შიგნით, ხოლო S ზედაპირზე დენი არ გადის. ე. ი. დენის სიმკვრივე S ზედაპირის წერტილებში ნულის ტოლია. მაშასადამე, (31.12) ფორმულის ნაცვლად გვექნება ტოლობა:

$$\left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\right) = \vec{a} \int_V \vec{j} dV \quad (31.13)$$

\vec{a} - ს ნებისმიერობიდან გამომდინარე ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t} = \int_V \vec{j}\left(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c}\right) dV \quad (31.14)$$

საბოლოოდ, (31.9) და (31.12) ფორმულების საფუძველზე ვღებულობთ ვექტორ-პოტენციალისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right) \quad (31.15)$$

წრფივი ოსცილატორის ელექტრული და მაგნიტური ველი. წრფივ ოსცილატორს ანუ ვიბრატორს უწოდებენ დიპოლს, რომლის მომენტიც იცვლება კანონზომიერებით:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 f(t)$$

სადაც \vec{p}_0 - მუდმივი ვექტორია, $f(t)$ - პერიოდული ფუნქციაა. გამოთვლების ხელსაყრელობის მიზნით მიზანშეწონილია შემოვიტანოთ ვექტორი:

$$\vec{\Pi}(t, r) \equiv \frac{\vec{p}_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \vec{p}_0 \Phi(t, r) \quad (31.16)$$

რომელსაც ჰერცის ვექტორს, ანუ პოლარიზაციულ პოტენციალს უწოდებენ. იგი აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (31.17)$$

ვისარგებლოთ კავშირით ველის ვექტორებსა და პოტენციალებს შორის, მივიღებთ:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\Pi} \quad (31.18)$$

$$\begin{aligned} E &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi} \end{aligned} \quad (31.19)$$

სადაც გათვალისწინებულია (31.17) განტოლება და ვექტორული ანალიზის ფორმულა

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{და} \quad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

მაშინ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულის

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \vec{A}$$

საფუძველზე გვექნება:

$$\operatorname{rot} \vec{\Pi} = \operatorname{rot}(\vec{p}_0 \Phi) = \operatorname{grad}[\Phi \times \vec{p}_0] = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} [\vec{r} \times \vec{p}_0] \quad (31.20)$$

შემდგომი გამოთვლები ხელსაყრელია ჩავატაროთ სფერულ კოორდინატთა სისტემაში. სფერული კოორდინატთა სისტემის პოლარული ღერძი Z მივმართოთ \vec{p}_0 ვექტორის გასწვრივ, ხოლო კოორდინატთა სისტემის სათავე კი მოვათავსოთ დიპოლის ცენტრში (იხ. ნახ.31.3). პოლარული და აზიმუტალური კუთხეები აღვნიშნოთ შესაბამისად θ და α – თი, მაშინ:

$$[\vec{r} \times \vec{p}_0]_r = [\vec{r} \times \vec{p}_0]_\theta = 0$$

$$[\vec{r} \times \vec{p}_0]_\alpha = -r p_0 \sin \theta$$

ამიტომ:

$$\operatorname{rot}_r \vec{\Pi} = \operatorname{rot}_\theta \vec{\Pi} = 0$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{\Pi} = -\sin \theta \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$$

აქედან (31.18) ფორმულის საფუძველზე სფერულ კოორდინატთა სისტემაში მაგნიტური ველის კომპონენტებისათვის ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

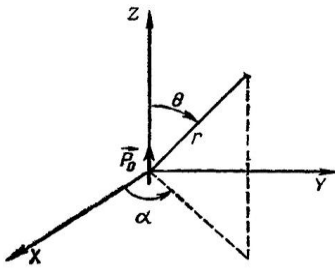
$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_\alpha \Pi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial r} \quad (31.21)$$

ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის კომპონენტები გამოითვლება სფერულ კოორდინატთა სისტემაში როტორის გამოსათვლელი ფორმულების დახმარებით:

$$E_r = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \operatorname{rot}_\alpha \Pi) = -\frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{rot}_\alpha \Pi) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \quad (31.22)$$

$$E_\alpha = 0$$



ნახ.31.3

(31.21) და (31.22) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი მდებარეობს მერიდიანულ სიბრტყეში, ხოლო მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი – პერპენდიკულარულია შესაბამის წერტილზე გამავალი მერიდიანული სიბრტყის. ამასთან, ინდუქციის წირები ემთხვევა სფერული კოორდინატთა სისტემის პარალელებს. ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები ყოველ წერტილში ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან. (31.21) და (31.22) ფორმულები სამართლიანია დიპოლური მომენტის დროის მიხედვით ნებისმიერი ცვლილების დროს. თუ დიპოლური მომენტი იცვლება ჰარმონიული კანონით

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t} \quad (31.23)$$

მაშინ ჰერცის ვექტორი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{\Pi} = \vec{p}_0 \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \quad (31.24)$$

თუ ჩავატარებთ (31.21) და (31.22) ფორმულებში სათანადო დიფერენცირებას, მივიღებთ ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის კომპონენტებისათვის ნულისაგან განსხვავებულ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi \sin\theta \\ E_r &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi \cos\theta \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi \sin\theta \end{aligned} \quad (31.25)$$

ოსცილატორის უშუალო მახლობლობაში ველი იმ მანძილებზე, რომელიც მცირეა ტალღის სიგრძესთან

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$$

შედარებით, ემთხვევა სტატიკური დიპოლისა და დენის ველს. განსაკუთრებით საინტერესოა ველი სივრცის იმ არეში, რომლის წერტილებამდე მანძილიც გაცილებით დიდია გამოსხივებული ტალღის სიგრძესთან შედარებით, ე. ი. როდესაც $r \gg \lambda$ სივრცის ამ არეს ტალღურ ზონას უწოდებენ.

ოსცილატორის ველი ტალღურ ზონაში. განმარტებიდან გამომდინარე, r მანძილი ტალღური ზონის წერტილებამდე აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c} \quad (31.26)$$

მაშინ (31.25) ფორმულებში შეიძლება უგულებელვყოთ $1/r$ და $1/r^2$, ω/c და ω^2/c^2 შედარებით. ველის დაძაბულობის კომპონენტებისათვის შედეგად მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned} B_\alpha &= -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \Pi \sin\theta, & B_r &= B_\theta = 0 \\ E_\theta &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \sin\theta, & E_r &= E_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (31.27)$$

ამ ფორმულებში Π – ს ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ (31.24) გამოსახულების ხან ნამდვილი, ხან კიდევ წარმოსახვითი ნაწილი, მაგალითად,

$$\Pi = \frac{p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (31.28)$$

ამგვარად, ტალღურ ზონაში ოსცილატორის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველი საბოლოოდ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} E_\theta &= cB_\alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2} \frac{p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \\ E_r &= E_\alpha = 0, & B_r &= B_\theta = 0 \end{aligned} \quad (31.29)$$

(31.29) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\sqrt{\epsilon_0} E_\theta = \sqrt{\mu_0} H_\alpha \quad (31.30)$$

(31.29) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ ტალღურ ზონაში ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული არიან და პერპენდიკულნი არიან \vec{r} რადიუს-ვექტორის. \vec{E} , \vec{H} , \vec{r} ვექტორები ადგენენ მარჯვენა ხრახნულ სისტემას. ველის დაძაბულობები კი აბსოლუტური სიდიდით ეცემიან მანძილის პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად. (31.29) ფორმულებით მოცემული ტალღა ცნობილია სფერული ტალღის სახელწოდებით. იგი ვრცელდება \vec{r} რადიუს-ვექტორის მიმართულებით. ამ ტალღის მუდმივი ფაზის ზედაპირები წარმოადგენენ თავის მხრივ სფეროებს. ტალღის ფაზური სიჩქარე სინათლის c სიჩქარის ტოლია. ამგვარად, ოსცილატორი გამოსხივებას ახორციელებს სფერული ელექტრომაგნიტური ტალღების სახით. ოსცილატორიდან დიდ მანძილებზე ტალღის მცირე უბნები წარმოადგენენ ბრტყელ ელექტრომაგნიტურ ტალღებს.

ოსცილატორის მიერ გამოსხივებული ენერგია. ელექტრომაგნიტური ენერგიის ნაკადი ხასიათდება პოინტინგის ვექტორით:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (31.31)$$

გამოვთვალოთ r რადიუსის მქონე სფეროს S ზედაპირში ენერგიის ნაკადი:

$$P = \oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{S} = \int_S E_\theta H_\alpha dS = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (31.32)$$

ეს გამოსახულება წარმოადგენს სფეროს ზედაპირზე ენერგიის ნაკადის სიმძლავრეს, ე. ი. ენერგიას დროის ერთეულში. ეს ენერგია გამოსხივდება ოსცილატორის მიერ. ოსცილატორის

მიერ გამოსხივებული ენერჯის სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობა პერიოდის განმავლობაში ტოლია:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{r} \int_0^r P dt = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \quad (31.33)$$

ამგვარად, ოსცილატორის მიერ გამოსხივებული ენერჯის სიმძლავრე გაცილებით ძლიერ დამოკიდებულია სიხშირეზე, კერძოდ, იგი სიხშირის მე-4 ხარისხის პროპორციული სიდიდეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოსხივების სიმძლავრის გადიდებისათვის ხელსაყრელია გადავიდეთ უფრო მოკლე ტალღებზე.

რადგანაც პოინტინგის ვექტორი მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად ეცემა, ხოლო სფეროს ზედაპირი მანძილის კვადრატის პირდაპირპროპორციულად იზრდება, ამიტომ ენერჯის ნაკადი, რომელიც გადაკვეთს სფეროს, არ იცვლება მანძილის მიხედვით. ამგვარად, ენერჯია დანაკარგების გარე გადაიტანება ოსცილატორიდან სივრცის დაშორებულ უბნებზე მის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერჯის სახით. გამოსხივებაზე ენერჯის დაკარგვის გამო ოსცილატორის რხევები უნდა იყოს მილევადი. რომ გვექონდეს ოსცილატორის არამილევადი რხევები, აუცილებელია მუდმივად მივაწოდოთ მას ენერჯია გარედან.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის ჰერცის ვიბრატორი და როგორია მისი ძირითადი მახასიათებლები?
2. როგორ ხდება ელექტრომაგნიტური ტალღების წარმოქმნა ჰერცის ვიბრატორის მიერ?
3. როგორია დიპოლის დროში ცვალებადი სკალარული პოტენციალის მათემატიკური აღწერა?
4. როგორია დიპოლის ვექტორული პოტენციალის გამოსახულება?
5. როგორია წრფივი ოსცილატორის ელექტრული და მაგნიტური ველის განტოლებები?
6. როგორია სფერულ კოორდინატთა სისტემაში ელექტრული და მაგნიტური ველის კომპონენტების გამოსახულებები?
7. როგორია ოსცილატორის გამოსხივების ძირითადი მახასიათებლები ტალღურ ზონაში?
8. როგორ არის დაკავშირებული ოსცილატორის მიერ გამოსხივებული ენერჯია სიხშირესთან?
9. როგორ ხასიათდება გამოსხივებული ენერჯის ნაკადი პოინტინგის ვექტორით?
10. როგორ იცვლება ელექტრომაგნიტური ტალღის ენერჯია მანძილის ზრდასთან ერთად?

§ 32. რხევადი ელექტრონის გამოსხივება

დრეკადად ბმული ელექტრონის თავისუფალი რხევები. დავუშვათ, რომ წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრილ ელექტრონზე მოქმედებს გადახრის პროპორციული მაბრუნებელი ძალა. მოვათავსოთ კოორდინატთა სისტემის სათავე წონასწორობის წერტილში და Z ღერძი შევუთავსოთ ელექტრონის წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრის მიმართულებას, მაშინ ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad (32.1)$$

ამ განტოლების ამონახსნი შემდეგია:

$$z = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (32.2)$$

სადაც

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

a და b - ნებისმიერი მუდმივებია. რხევადი ელექტრონის ენერგია ტოლია:

$$W = \frac{mz^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2) \quad (32.3)$$

რხევადი ელექტრონის გამოსხივება. წარმოვიდგინოთ აზრობრივად კოორდინატთა სისტემის სათავეში ელექტრონის მუხტის ტოლი დადებით მუხტი. ეს მუხტი უძრავია და კულონის კანონის თანახმად სივრცეში ქმნის დროის მიხედვით მუდმივ ელექტრულ ველს, რომელიც ეცემა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად. მოძრავი ელექტრონისა და უძრავი დადებითი მუხტის ერთობლიობა ქმნის დიპოლს, რომლის მომენტიც იცვლება დროის მიხედვით. გამოსხივების ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორები წარმოადგენენ ცვლად სიდიდეებს და ეცემიან მანძილის პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად. ცხადია, რომ ამ ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივებას არავითარი საერთო არ გააჩნია უძრავი დადებითი მუხტის მუდმივ ველთან, რომელიც მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად ეცემა. გამოსხივების ველი აღიძვრება ელექტრონის მოძრაობის გამო, ე. ი. წარმოადგენს რხევადი ელექტრონის გამოსხივების ველს. დადებით მუხტი კოორდინატთა სისტემის სათავეში ჩვენ აზრობრივად ფორმალურად მოვათავსეთ, რათა გვეხელმძღვანელა §31 –ის ფორმულებით. ელექტრონის კოორდინატთა სათავედან $z(t)$ –თი გადახრის დროს დიპოლის მომენტი ტოლია:

$$\vec{P}(t) = -|e|z(t)\vec{k} \quad (32.4)$$

სადაც \vec{k} – ერთეულოვანი ვექტორია Z ღერძის მიმართულებით. ნიშანი მინუსი შემოტანილია იმის გამო, რომ დიპოლის მხარი არის ვექტორი, რომელიც მიმართულია უარყოფითი მუხტიდან დადებითი მუხტისაკენ. (32.2) ფორმულაში a და b მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით. ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ დროის ათვლის საწყისი ისე, რომ a ან b კოეფიციენტი იყოს ნულის ტოლი. ამიტომ (32.4) ფორმულით მოცემული ჰარმონიული რხევა დროის ათვლის საწყისის სათანადო შერჩევის შედეგად შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$z = b \cos \omega t \quad (32.5)$$

გავითვალისწინოთ z – ის ეს გამოსახულება (32.4) – ში, მივიღებთ:

$$\vec{P} = -\vec{k}|e|b \cos \omega t \quad (32.6)$$

თუ შევადარებთ (32.6) ფორმულას (31.23) გამოსხივების ნამდვილ ნაწილს დიპოლისათვის, მივიღებთ, რომ \vec{p}_0 ვექტორი (31.23) – ში დაკავშირებულია ელექტრონის მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებთან ტოლობებით:

$$\vec{p}_0 = -\vec{k}|e|b, \quad |\vec{p}_0| = |e|b \quad (32.7)$$

(31.29) ფორმულა, რომელიც ახასიათებს გამოსხივების ველის ვექტორებს, აქ ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$E_r = E_\alpha = 0, \quad B_r = B_\theta = 0,$$

$$E_{\theta} = cB_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 \sin\theta}{c^2 r} |e|b \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \quad (32.8)$$

სადაც τ – ტალღის მოსვლის დროა r რადიუსის სფეროზე. (32.5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\ddot{z} = -\omega^2 b \cos\omega\tau \quad (32.9)$$

მაშინ (32.8) ფორმულა გადაიწერება ასე:

$$E_{\theta} = cB_{\alpha} = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial^2 z\left(\tau - \frac{r}{c}\right)}{\partial \tau^2} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial^2 z\left(\tau - \frac{r}{c}\right)}{\partial \tau^2} \quad (32.10)$$

სადაც გათვალისწინებულია, რომ ელექტრონის მუხტი უარყოფითია ($e = -|e|$). (31.32) ფორმულა სფეროს ზედაპირზე ენერჯიის ნაკადის სიმძლავრისათვის (32.9) ფორმულის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{P} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{\partial^2 z\left(\tau - \frac{r}{c}\right)}{\partial \tau^2} \right\}^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \dot{z}^2 \quad (32.11)$$

სადაც

$$\dot{z} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \quad t = \tau - \frac{r}{c}$$

რხევადი ელექტრონის გამოსხივების ნაკადის სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობა პერიოდის განმავლობაში განისაზღვრება (31.33) ფორმულის საფუძველზე

$$\langle P \rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 b^2 \quad (32.12)$$

ეს არის გამოსხივების ნაკადის საშუალო სიმძლავრე, რომელის გადატანა ხდება r რადიუსის სფეროს ზედაპირზე τ დროის მომენტში. ცხადია, რომ ეს ენერჯია გამოსხივებული იქნა რხევადი ელექტრონის მიერ დროის წინა მომენტებში. ამიტომ (32.12) ფორმულა ახასიათებს ელექტრონის მიერ გამოსხივებაზე დაკარგული W ენერჯიის სიჩქარეს. ენერჯიის შენახვის კანონის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{dW}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 b^2 \quad (32.13)$$

(32.12) ფორმულიდან (როცა $a = 0$) გამომდინარეობს, რომ:

$$b^2 = \frac{2}{m\omega^2} W$$

ამიტომ (32.12) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{dW}{dt} = -\gamma W, \quad \gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} \quad (32.14)$$

ამ განტოლების ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$W(t) = W_0 e^{-\gamma t} \quad (32.15)$$

სადაც W_0 – რხევადი ელექტრონის ენერგიაა დროის $t = 0$ მომენტისათვის. (32.3) ფორმულიდან, რომელიც აკავშირებს რხევადი ელექტრონის ენერგიას რხევის ამპლიტუდასთან, ჩანს რომ ელექტრონის ენერგია მცირდება (32.15) ფორმულით მოცემული კანონზომიერებით. თუ a და b აღნიშნულ კანონზომიერებას ემორჩილებიან:

$$a = a_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}, \quad b = b_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \quad (32.16)$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ გამოსხივებაზე ენერგიის დანაკარგს (32.2) ფორმულის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ:

$$z = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (a_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t) \quad (32.17)$$

მაშასადამე, გამოსხივების გათვალისწინებით (32.1) ფორმულით მოცემული ელექტრონის მოძრაობის განტოლება უნდა შეიცვალოს და დაემატოს ძალა, რომელიც ახასიათებს ელექტრონის დამუხრუჭებას გამოსხივებით.

გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალა. გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალა ფიზიკურად შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც რეაქცია გამოსხივების ველის მხრიდან. ელექტრომაგნიტური ტალღაც ხასიათდება იმპულსით. იმპულსის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, ჩაკეტილი სისტემის იმპულსი (ელექტრონი+გამოსხივება) მუდმივია. ამიტომ ელექტრონის იმპულსი შეიძლება შეიცვალოს მის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის იმპულსის ცვლილების შესაბამისად. ეს ექვივალენტურია იმის, რომ გამოსხივების დროს ელექტრონზე მოქმედებს ძალა. რადგანაც გამოსხივების შედეგად ელექტრონის ენერგია და სიჩქარე მცირდება, ეს ძალა იქნება დამამუხრუჭებელი. (32.1) განტოლებას დავუმატოთ F ძალა, რომელიც აღწერს დამუხრუჭებას გამოსხივებით:

$$m\ddot{z} + kz = F \quad (32.18)$$

გავამრავლოთ ამ განტოლების ორთავე მხარე \dot{z} -ზე, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{k}{2} z^2 \right) = F\dot{z} \quad (32.19)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარე ტოლია გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობის დროის ერთეულში. განმარტების თანახმად იგი ტოლია გამოსხივების სიმძლავრის, რომელიც განისაზღვრება (32.11) ფორმულის საფუძველზე:

$$F\dot{z} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2 \quad (32.20)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს ენერგიის შენახვის კანონს. ზოგადი სახით F – ის წარმოდგენა z – ისა და მისი წარმოებულების წრფივი ფუნქციის სახით შეუძლებელია. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მიახლოებით, თუ დავუშვებთ, რომ: ა) რხევების მიღვეადობა არც თუ ისე დიდია. ასე, რომ პერიოდის არც თუ ისე დიდი რიცხვის დროს მოძრაობა მიახლოებით პერიოდულია; ბ) ენერგიის შენახვის კანონი საკმარისია ჩამოვაცალიბოთ მხოლოდ საშუალოდ, პერიოდების არც თუ ისე დიდი რიცხვისათვის. ცხადი ტოლობა:

$$\ddot{z}^2 = (\dot{\ddot{z}}) + \frac{d}{dt} (\dot{z}\ddot{z})$$

გავსაშუალოთ დროის მიხედვით ზემოთ აღნიშნული დაშვებების საფუძველზე. პერიოდულობის გამო, ცხადია:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\dot{z}\dot{z}) \right\rangle = \frac{1}{T} [(\dot{z}\dot{z})_{t=T} - (\dot{z}\dot{z})_{t=0}] = 0$$

ამიტომ (32.20) ფორმულა ორივე მხარის გასაშუალოების შედეგად გვაძლევს:

$$\langle F\dot{z} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \langle (\ddot{z}\dot{z}) \rangle$$

ეს თანაფარდობა დაცული იქნება, თუ:

$$F = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z} \quad (32.21)$$

ამგვარად, (32.18) მოძრაობის განტოლება გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალის გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m\ddot{z} + kz - \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z} = 0 \quad (32.22)$$

მისი ამონახსნი, რომელსაც აქვს (32.17) ფორმულის სახე, ვეძებთ კომპლექსური ფორმით:

$$z = de^{i\omega_\gamma t} \quad (32.23)$$

გავითვალისწინოთ ეს გამოსახულება (32.22) განტოლებაში, მაშინ ω_γ განსაღვრისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$-\omega_\gamma^2 + \omega^2 + i\gamma\omega^{-2}\omega_\gamma^3 = 0 \quad (32.24)$$

სადაც

$$\omega = \frac{k}{m}, \quad \gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

პირობის თანახმად, მიღვეადობა მცირეა, ეს იმას ნიშნავს, რომ რხევის პერიოდის

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

შესაბამისი დროის განმავლობაში (32.16) ფორმულებში ექსპონენციალური მამრავლები მცირედით განსხვავდება ერთისაგან. ე. ი.

$$\gamma \ll \omega \quad (32.25)$$

(32.24) განტოლების ამონახსნს, როცა $\gamma = 0$, აქვს შემდეგი სახე:

$$\omega_\gamma = \pm\omega \quad (32.26)$$

γ – ს მცირე მნიშვნელობების დროს ეს ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\omega_\gamma = \pm\omega + \varepsilon \quad (32.27)$$

სადაც $\varepsilon \ll \omega$ გავითვალისწინოთ (32.27) (32.24)–განტოლებაში და უგულებელვყოთ ε^2 , $\gamma\varepsilon$ და მაღალი რიგის წევრები, მივიღებთ $\varepsilon = \frac{i\gamma}{2}$. ამგვარად:

$$\omega_\gamma = \pm\omega + \frac{i\gamma}{2} \quad (32.28)$$

z-სათვის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ასე:

$$z = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t}) \quad (32.29)$$

ამ გამოსახულების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი (32.17) –ის ანალოგიურია. ძალის (32.21) გამოსახულება გამოიყენება მხოლოდ საკმაოდ მცირე მილევადობის მქონე თითქმის პერიოდული მოძრაობისათვის. ამ შემთხვევაში იგი შეიძლება გარდავქმნათ ასე:

$$F = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z} \approx -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 z \quad (32.30)$$

აქედან ჩანს, რომ გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალა მიმართულია \dot{z} სიჩქარის საპირისპიროდ.

(32.30) ფორმულის გათვალისწინებით (32.22) მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება როგორც რხევის განტოლება ხახუნის გათვალისწინებით:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (32.31)$$

გამოსხივების ფორმულის განზოგადება. (32.11) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ დროის რომელიმე მომენტისათვის მყისი სიმძლავრე განისაზღვრება დამუხტული ნაწილაკის აჩქარებით დროის იმავე მომენტისათვის. მაშასადამე, დროის მოცემული მომენტისათვის გამოსხივების სიმძლავრე არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მოძრაობდა ნაწილაკი დროის მოცემულ მომენტამდე და როგორ იმოძრაებს იგი დროის ამ მომენტის შემდეგ. მიუხედავად იმისა, თუმცა (32.11) ფორმულა გამოყვანილია ჰარმონიული მოძრაობისათვის, იგი სამართლიანია ნებისმიერი მოძრაობისათვის, თუ \dot{z}^2 ქვეშ ვიგულისხმებთ ნაწილაკის აჩქარების კვადრატს ამ მოძრაობაში. აქედან ვასკვნით, რომ თუ ნებისმიერი მოძრაობის დროს ნაწილაკის მდებარეობა ხასიათდება მისი რადიუს-ვექტორით $\vec{r}(t)$, მაშინ ამ ნაწილაკის გამოსხივების სიმძლავრე ტოლია:

$$P = \frac{dW}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{\vec{r}})^2 \quad (32.32)$$

ეს ფორმულა სამართლიანია იმ სიჩქარეებისათვის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე.

გამოსხივების რეაქციის უგულებელყოფის პირობები. გამოსხივების რეაქცია შეიძლება უგულებელყოფილ იქნას იმ შემთხვევაში, თუ ენერგიის დანაკარგი გამოსხივებაზე დროის რომელიმე მომენტისათვის ნაკლებია იმ ენერგიაზე, რომელიც შეიძლება გამოსხივდეს. დავუშვათ, ნაწილაკი უძრაობის მდგომარეობიდან მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად a აჩქარებით. (32.32) ფორმულის თანახმად დროის τ მომენტისათვის იგი ასხივებს ენერგიას:

$$E = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2}{c^3} \tau \quad (32.33)$$

(32.33) შეესაბამება კლასიკური გამოსხივების ფორმულას, რომელიც გამომდინარეობს (32.32) **ლარმოვის (Larmor)** ფორმულიდან. ლარმოვის ფორმულა, რომელიც წარმოადგენს

წერტილოვანი მუხტის მიერ გამოსხივებული ენერგიის სიჩქარეს გამოწვეული მუხტის აჩქარებული მოძრაობით. მაშასადამე, მუხტი იძენს კინეტიკურ ენერგიას:

$$E_j = \frac{ma^2\tau^2}{2} \quad (32.34)$$

გამოსხივების რეაქცია ამ პროცესში მნიშვნელოვანია $E_j \leq E$ პირობის დროს. ე. ი.

$$\tau \leq \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^3} = \frac{4r_0}{3c} \quad (32.35)$$

სადაც

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3}$$

დამუხტული ნაწილაკის კლასიკური რადიუსია. ელექტრონისათვის $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$ მ, ამიტომ გამოსხივების რეაქცია მნიშვნელოვანია მხოლოდ დროის ძალიან მცირე შუალედისათვის ($\tau \sim 10^{-24}$ წმ) თუ ნაწილაკი რხევით მოძრაობაშია ω_0 სიხშირითა და A ამპლიტუდით, მაშინ გამოსხივების რეაქციის პირობა ჩაიწერება ასე:

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \leq \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^4 A^2}{c^3} \frac{1}{\omega_0} \quad (32.36)$$

სადაც $a \sim \omega_0^2 A$ ინტერვალი $T \sim \frac{1}{\omega_0}$,

$$\omega_0 \geq \frac{3c}{4r_0} \quad (32.37)$$

ე. ი. გამოსხივების რეაქცია მნიშვნელოვანია რხევების ძალიან დიდი სიხშირეებისათვის. ელექტრონის შემთხვევაში – ეს ციკლური სიხშირეები $\omega \sim 10^{24}$ წმ⁻¹ რიგისაა.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია დრეკადად ბმული ელექტრონის თავისუფალი რხევების განტოლება?
2. რა არის რხევადი ელექტრონის ენერგია და როგორ იცვლება იგი დროის მიხედვით?
3. როგორ ხდება ელექტრონის მიერ ელექტრომაგნიტური გამოსხივება?
4. როგორია რხევადი ელექტრონის გამოსხივების ინტენსივობის დამოკიდებულება აჩქარებაზე?
5. როგორ გამოითვლება ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ენერგიის სიმძლავრე?
6. როგორია გამოსხივების დამამუხრუჭებელი ძალა და როგორია მისი ფიზიკური ინტერპრეტაცია?
7. როგორია გამოსხივების რეაქციის პირობები და როდის შეიძლება მისი უგულებელყოფა?
8. როგორია ელექტრონის რხევების მიღწევადობის კანონი და როგორ მოქმედებს იგი გამოსხივების პროცესზე?
9. როგორ ხდება ელექტრონის მიერ გამოსხივების შედეგების განზოგადება ნებისმიერი მოძრაობისთვის?

§ 33. სინათლის გაბნევა თავისუფალი ელექტრონებით

დავუშვათ, Y ღერძის მიმართულებით თავისუფალ ელექტრონს ეცემა ბრტყელი პოლარიზებული ტალღა, რომლის ელექტრული ვექტორი მიმართულია Z ღერძის გასწვრივ ($E_z = E$). ტალღის ელექტრული ველის ზემოქმედებით ელექტრონი მოძის მოძრაობაში, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$m_0 \ddot{z} = eE(t) \quad (33.1)$$

ელექტრონი მოძრაობის დროს განიცდის ტალღის ელექტრომაგნიტური ველის მხრივ ძალის ქმედებას, რომელიც სიდიდით ნაკლებია ელექტრულ ძალასთან შედარებით იმდენჯერ, რამდენჯერაც ელექტრონის სიჩქარე ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე. ამიტომ არალატივისტური სიჩქარით ელექტრონის მოძრაობისას მაგნიტური ველის მხრივ მოქმედი ძალა შეიძლება უგულებელვყოთ.

მოძრაობის პროცესში, რომელიც (33.1) განტოლებით აღიწერება, ელექტრონი ასხივებს ელექტრომაგნიტურ ტალღებს, ამასთან, გამოსხივების სიმძლავრე (31.11) ფორმულის საფუძველზე განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \frac{e^2 E^2}{m_0^2} \quad (33.2)$$

ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ტალღის და ელექტრონზე დამცემი ტალღის მოძრაობის მიმართულებანი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. ამგვარად, ელექტრონების მიერ ელექტრომაგნიტური ტალღის გამოსხივების მთელი განსახილველი პროცესი, როდესაც ელექტრონი მოძრაობაში მოჰყავს დამცემ ელექტრომაგნიტურ ტალღას, შეიძლება განვიხილოთ როგორც თავისუფალი ელექტრონების მიერ დამცემი ელექტრომაგნიტური ტალღის გაბნევის პროცესი.

გაბნევის ინტენსივობა ხასიათდება გაბნევის ეფექტური განიკვეთით, რომელიც განისაზღვრება იმ ფართით, რომელიც უნდა ჰქონდეს ელექტრონის განივ კვეთას, რათა ამ ფართზე მოსული ენერგია დამცემ ტალღაში ტოლი იყოს ელექტრონის მიერ გაბნეული ენერგიის. ენერგიის ნაკადის სიმკვრივე დამცემ ტალღაში განისაზღვრება პოინტინგის ვექტორით:

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \quad (33.3)$$

ეს არის ენერგია, რომელიც ეცემა ერთეულოვან ფართს დროის ერთეულში ტალღის გავრცელების მიმართულების მართობულად. თუ თავისუფალ ელექტრონზე გაბნეული სინათლის ეფექტურ განიკვეთს აღვნიშნავთ σ –თი, მაშინ განმარტებიდან გამომდინარე:

$$S_\sigma = P \quad (33.4)$$

ხოლო

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \quad (33.5)$$

სადაც

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ მ}$$

ელექტრონის კლასიკური რადიუსია.

ამგვარად, თუ ელექტრონს წარმოვიდგენთ სფერული ფორმის ნაწილაკის სახით, რომელიც მის ზედაპირზე დაცემულ ელექტრომაგნიტურ ტალღებს გააბნევს, მაშინ ელექტრონის რადიუსის ტოლად უნდა ავიღოთ გამოსახულება: $r_0 \sqrt{\frac{8}{3}}$ სინამდვილეში გამოთვლების დროს იგულისხმებოდა ელექტრონი წერტილოვან ნაწილაკად, ხოლო მისი სასრულო ზომებით წარმოდგენა შემოტანილია ეფექტური განიკვეთის თვალსაჩინო ინტერპრეტაციისათვის, რომელიც ახასიათებს გაბნევის ინტენსივობას.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია თავისუფალი ელექტრონის მოძრაობის განტოლება ბრტყელი პოლარიზებული ტალღის შემოქმედებისას?
2. როგორ ხასიათდება გაბნევის ინტენსივობა და რა არის გაბნევის ეფექტური განიკვეთა?
3. როგორია ელექტრონის მიერ გამოსხივებული ტალღის მიმართულება შედარებით დამცემელ ტალღასთან?
4. როგორია გაბნევის პროცესის ფიზიკური ინტერპრეტაცია?
5. როგორ არის დაკავშირებული ელექტრონის კლასიკური რადიუსი გაბნევის ინტენსივობასთან?
6. როგორ მოქმედებს ტალღის სიხშირე გაბნევის ეფექტურობაზე?
7. როგორია სინათლის გაბნევის ძირითადი მახასიათებლები?

§ 34. ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი. სინათლის წნევა.

განვიხილოთ რაიმე V მოცულობა, რომელშიც გვაქვს ელექტრომაგნიტური ველი, რომელიც ურთიერთქმედებს ამ მოცულობაში არსებულ მუხტებთან. ელექტრომაგნიტური ველის მხრივ ამ მოცულობაზე მოქმედი ძალა:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV \tag{34.1}$$

სადაც $\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho[\vec{v} \times \vec{B}]$ ლორენცის ძალის სიმკვრივეა. მაქსველის განტოლებების დახმარებით:

$$\rho \vec{v} = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \rho = \text{div} \vec{D} \tag{34.2}$$

შეიძლება ლორენცის ძალის სიმკვრივის გამოსახულებიდან გამოვრიცხოთ ρ და \vec{V} სიდიდეები. მივიღებთ:

$$\vec{f} = \vec{E} \text{div} \vec{D} + [\text{rot} \vec{H} \times \vec{B}] - \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right] \tag{34.3}$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (34.4)$$

მაშინ (34.3) ტოლობა ადვილად გარდაიქმნება ასე:

$$f_x = \vec{E}_x \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H}_x \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B}]_x + [\operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{D}]_x - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \times \vec{B}]_x \quad (34.5)$$

განვიხილოთ ამ ძალის, მაგალითად, x მდგენელი:

$$f_x = \vec{E}_x \operatorname{div} \vec{D} + \vec{H}_x \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B}]_x + [\operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{D}]_x - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \times \vec{B}]_x$$

უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ ეს გამოსახულება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f_x = \operatorname{div} \vec{F} - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \times \vec{B}]_x \quad (34.6)$$

სადაც \vec{F} ვექტორის კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\vec{F}_x = D_x E_x + H_x B_x - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{E}) + (\vec{H} \cdot \vec{B})}{2}$$

$$\vec{F}_y = D_y E_y + H_y B_y$$

$$\vec{F}_z = D_z E_z + H_z B_z$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ ამგვარად, ძალის x მდგენელი, რომელიც მოქმედებს V მოცულობაში მუხტებზე, შეიძლება ჩავეწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{F}_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}]_x dV \quad (34.7)$$

ანალოგიური გამოსახულებები მიიღება ძალის დანარჩენი მდგენელებისათვისაც.

\vec{F} ძალა, რომელიც მოქმედებს V მოცულობაში მუხტებზე, ანიჭებს ამ მუხტებს აჩქარებას. ადვინიშნით V მოცულობაში ნაწილაკთა სრული იმპულსი G , მაშინ ნიუტონის კანონის თანახმად:

$$\frac{dG}{dt} = \vec{F} \quad (34.8)$$

ამიტომ (34.7) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d}{dt} \left(G + \int_V \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}]_x dV \right) = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = F_x^{\text{ზედ}} \quad (34.9)$$

სადაც გამოყენებულია გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემა:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = F_x^{\text{ზედ}}$$

$F_x^{\text{ზედ}}$ წარმოადგენს V მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე მოქმედი ძალის x მდგენელს.

(34.9) ფორმულის ანალოგიური ფორმულები მიიღება ძალის დანარჩენი კომპონენტებისთვისაც. ამიტომ, თუ გადავალთ კომპონენტებიდან ვექტორზე, მაშინ (34.9) ფორმულის ნაცვლად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{d}{dt}(G^{\text{ნაწ}} + G^{\text{ჰოლო}}) = F^{\text{ზედ}} \quad (34.10)$$

სადაც

$$\vec{G}^{\text{ჰოლო}} = \int_V \vec{g} dV, \quad \vec{g} = \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

(34.10) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ V მოცულობა წარმოადგენს იზოლირებულ სისტემას და მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე არანაირი ძალა არაა მოღებული, მაშინ

$$\frac{d\vec{G}^{\text{ნაწ}}}{dt} = -\frac{d\vec{G}^{\text{ჰოლო}}}{dt} \quad (34.11)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ V მოცულობაში მატერიალური სხეულის იმპულსი იცვლება ველის იმპულსის ცვლილების გამო. მაშასადამე, $\vec{G}^{\text{ჰოლო}}$ წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსს V მოცულობაში, ხოლო \vec{g} – წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის სიმკვრივეს.

სინათლის წნევა. თუ ელექტრომაგნიტური ტალღა ეცემა მატერიალურ სხეულს და შთანთქმება მის მიერ, მაშინ ტალღის იმპულსი გადაეცემა მატერიალურ სხეულს. ეს იმას ნიშნავს, რომ მატერიალურ სხეულზე მოქმედებს ძალა, რომელიც ვლინდება წნევის სახით (სინათლის წნევა, თუ ეს ტალღები სინათლის ტალღებია). გამოვთვალოთ ეს წნევა. იგი ტოლია ტალღის მიერ სხეულზე გადაცემული იმპულსის დროის ერთეულში ერთეულოვან ზედაპირზე. მაშასადამე, ელექტრომაგნიტური ტალღის დაცემის დროს ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით და მისი სრული შთანთქმის დროს წნევა განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$p = cg = \frac{EH}{c} = \epsilon_0 E^2 = \omega \quad (34.12)$$

სადაც $\omega = \frac{ED+HB}{2} = \epsilon_0 E^2$ – ელექტრომაგნიტურ ტალღაში ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯის სიმკვრივეა. ამგვარად, ელექტრომაგნიტური ტალღის წნევა რიცხობრივად ტოლია ტალღის ენერჯის სიმკვრივის. თუ სხეულის ზედაპირი აბსოლუტურად ამრეკლავია. მაშინ ტალღის იმპულსი არეკვლის დროს იცვლება საპირისპიროთი. მაშასადამე, აბსოლუტურად ამრეკლავი სხეულის ზედაპირზე იმპულსის ცვლილება იქნება ორჯერ მეტი, ვიდრე ტალღის სრული შთანთქმის დროს. მაშასადამე, წნევაც იქნება ორჯერ მეტი, ვინემ სრული შთანთქმის დროს. თუ ელექტრომაგნიტური ტალღა ზედაპირს ეცემა რაიმე კუთხით, მაშინ წნევის გამოთვლა მიმდინარეობს წინა შემთხვევის ანალოგიურად, ოღონდ აუცილებელია გავითვალისწინოთ ელექტრომაგნიტური ტალღის იმპულსის მდგენელი ზედაპირის პერპენდიკულარული მიმართულებით. ანალოგიურად განიხილება ნაწილობრივი არეკვლა და შთანთქმა.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის განსაზღვრება?
2. როგორ მოქმედებს ელექტრომაგნიტური ტალღა მატერიალურ სხეულზე?
3. როგორია იმპულსის შენახვის კანონის ფორმულირება ელექტრომაგნიტურ ველში?

4. როგორ ხდება სინათლის წნევის გამოთვლა?
5. როგორია სინათლის წნევის გავლენა მასალებზე?
6. როგორ იცვლება სინათლის წნევა იმ შემთხვევაში, თუ ტალღა აბსოლუტურად შთაინთქმება ან აირეკლება?
7. როგორია სინათლის წნევის მნიშვნელობა ასტროფიზიკურ და ტექნიკურ პროცესებში?

ლექცია 12. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება I.

- §35. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დიელექტრიკებში.
- §36. ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღის არეკვლა და გარდატეხა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე. ფრენელის ფორმულები.

§35. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დიელექტრიკებში

ბრტყელი მონოქრომატული ტალღები. ელექტრომაგნიტურ ტალღას ეწოდება ბრტყელი, თუ ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები ერთნაირია ტალღის გავრცელების მიმართულების მართობული ნებისმიერი სიბრტყის ყველა წერტილში. ამგვარად, ბრტყელ ტალღაში მუდმივი ფაზის ზედაპირებს წარმოადგენენ სიბრტყეები, რომლებიც მდებარეობენ ტალღის გავრცელების მიმართულების მართობულად. ტალღას ეწოდება მონოქრომატული, თუ ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები დროის მიხედვით იცვლებიან ჰარმონიული კანონით გარკვეული სიხშირით. ასე მაგალითად, თუ ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღა ვრცელდება Z ღერძის გასწვრივ, მაშინ ტალღის ველის დაძაბულობის ვექტორებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z)e^{i\omega t}, \quad \vec{H}(z, t) = \vec{H}(z)e^{i\omega t} \quad (35.1)$$

ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობების განტოლებები. განვიხილოთ ერთგვაროვანი შემოსაზღვრავი გარემო $\varepsilon = const$, $\mu = const$ მუხტების არ არსებობისას. მისი გამტარებლობა $\gamma = 0$ გამოსავალ განტოლებებს წარმოადგენენ მაქსველის შემდეგი განტოლებები:

$$rot \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (35.2)$$

$$rot \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (35.3)$$

გავადიფერენციალოთ (35.2) განტოლების ორთავე მხარე დროის მიხედვით და მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარეში (35.3) განტოლების საფუძველზე გამოვრიცხოთ $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ წარმოებული, მივიღებთ:

$$-\frac{1}{\mu} rot rot \vec{E} = \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (35.4)$$

ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის ფორმულით ორმაგი როტორისათვის და მივიღოთ მხედველობაში, რომ ერთგვაროვან გარემოში მუხტების არ არსებობისას ელექტრული ველის დივერგენცია ნულის ტოლია. მაშინ (35.1) განტოლების ნაცვლად საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებას:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (35.5)$$

ანალოგიურად მიიღება განტოლება \vec{H} ვექტორისათვისაც, რომელსაც (35.2) და (35.3) განტოლებების სიმეტრიის შედეგად ექნება ისეთივე სახე, როგორც (35.5) განტოლებას:

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (35.6)$$

ამგვარად, ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობანი აკმაყოფილებენ ერთსა და იმავე ტალღის განტოლებას ერთი და იგივე გავრცელების სიჩქარით:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (35.7)$$

ამონახსნი ბრტყელი მონოქრომატული ტალღის სახით. დავუშვათ, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების მიმართულება ემთხვევა Z ღერძის მიმართულებას. ამ შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები გამოისახება (35.1) ფორმულებით. განვიხილოთ, მაგალითად, განტოლება \vec{E} ვექტორისათვის. გავითვალისწინოთ \vec{E} ვექტორის (35.1) გამოსახულება (35.5) განტოლებაში და დროის მიხედვით გადიფერენციალების შემდეგ შევკვეცოთ ექსპონენციალურ დროით მამრავალზე, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}(z) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (35.8)$$

ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{E}(z) = \vec{a}_1 e^{-ikz} + \vec{a}_2 e^{ikz} \quad (35.9)$$

გავითვალისწინოთ (35.9) გამოსახულება (35.1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{a}_1 e^{-i(\omega t - kz)} + \vec{a}_2 e^{i(\omega t - kz)} \quad (35.10)$$

(35.10) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში პირველი წევრი წარმოადგენს ტალღას, რომელიც ვრცელდება Z ღერძის დადებითი მიმართულებით. ეს კი გამომდინარეობს იქედან, რომ მუდმივი ფაზის წერტილი

$$\omega t - kz = const \quad (35.11)$$

მოძრაობს z ზრდის მიმართულებით, ე. ი. (35.1) გამოსახულებაში t -ს ზრდით z იზრდება. ანალოგიურად, (35.10) ფორმულაში მეორე წევრი აღწერს Z ღერძის უარყოფითი მიმართულებით მოძრავ ტალღას. (35.6) განტოლების ამონახსნი მოიძებნება ანალოგიურად, ამიტომ Z ღერძის დადებითი მიმართულებით მოძრავი ელექტრომაგნიტური ტალღის ვექტორებისათვის შეიძლება დავწეროთ შემდეგი გამოსახულებები:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \vec{H}(z, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (35.12)$$

სადაც \vec{E}_0 და \vec{H}_0 ველის დაძაბულობების ამპლიტუდებია. (35.12) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ ერთგვაროვან დიელექტრიკში ბრტყელი ტალღები ვრცელდებიან უცვლელი ამპლიტუდებით, მილევადობის გარეშე. ტალღის ფაზური სიჩქარე განისაზღვრება (35.11) განტოლებიდან დროის მიხედვით დიფერენცირების შედეგად

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon' \mu'}} = v \quad (35.13)$$

λ ტალღის სიგრძე დაკავშირებულია k - სთან ტოლობით:

$$\vec{k} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (35.14)$$

(35.12) ფორმულა ჩაწერილია კოორდინატთა სისტემის სპეციალური შერჩევის დროს, როდესაც Z დერძი ტალღის გავრცელების მიმართულების თანხვედნილია. ეს შეზღუდვა შეიძლება მოიხსნას, თუ შემოვიტანთ \vec{k} ტალღურ ვექტორს, რომელიც მიმართულებით ემთხვევა ტალღის გავრცელების მიმართულებას, ხოლო სიდიდით კი განისაზღვრება (35.8) გამოსახულებით. ბრტყელი ტალღისათვის, რომელიც ვრცელდება Z დერძის გასწვრივ, \vec{E}_0 და \vec{H}_0 ვექტორების მოდული Z დერძის პერპენდიკულარული სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში ერთი და იგივეა. დავუშვათ, მუდმივი ფაზის სიბრტყეში რომელიმე წერტილის რადიუს-ვექტორი არის \vec{r} . ცხადია, რომ $kz = (\vec{k} \cdot \vec{r})$ და მაშასადამე, (35.12) ფორმულის ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r}))} \quad (35.15)$$

ეს ფორმულები აღწერენ ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობებს, რომლებიც ვრცელდება \vec{k} ვექტორის მიმართულებით. ტალღის სიხშირე ტოლია ω , ხოლო ტალღის სიგრძე λ განისაზღვრება (35.14) ფორმულით. ბრტყელი ტალღის თვისებების გამოსაკვლევად გავითვალისწინოთ (35.15) გამოსახულება მაქსველის განტოლებაში. ვექტორულ ანალიზში ვექტორული ოპერატორი ∇ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (35.16)$$

ამ ოპერატორის დახმარებით ნებისმიერი \vec{A} ვექტორისათვის ოპერაცია დივერგენცია და როტორი შესაბამისად ჩაიწერება როგორც ∇ ოპერატორის ამ ვექტორზე სკალარული და ვექტორული ნამრავლით:

$$\operatorname{div} \vec{A} = (\nabla \cdot \vec{A}), \quad \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla \times \vec{A}] \quad (35.17)$$

(35.17) ტოლობის სამართლიანობა ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ (35.16) გამოსახულების გათვალისწინებით. გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ:

$$\nabla e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = -i\vec{k} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

ერთგვაროვანი დიელექტრიკის შემთხვევაში მოცულობით მუხტები არ არსებობენ და მაშასადამე, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. გავითვალისწინოთ \vec{E} ვექტორის ნაცვლად მისი გამოსახულება (35.15) ფორმულიდან და გავითვალისწინოთ (35.17) და (35.18) ფორმულები, მივიღებთ:

$$\operatorname{div} \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) = -(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0$$

ანალოგიურად მაქსველის განტოლებიდან ერთგვაროვან გარემოში ($\operatorname{div} \vec{H} = 0$) გვაქვს:

$$\operatorname{div} \vec{H} = (\nabla \cdot \vec{H}) = -(\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0$$

სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა:

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \quad (35.19)$$

მიუთითებს იმაზე, რომ ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში \vec{E} და \vec{H} ვექტორები მდებარეობენ ტალღის გავრცელების მიმართულების მართობულ სიბრტყეში.

თუ (35.3) მაქსველის განტოლებაში გავითვალისწინებთ \vec{E} და \vec{H} -ის მნიშვნელობებს, (35.15) ფორმულიდან, მაშინ მივიღებთ თანაფარდობას:

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E}) = -\omega\mu(\vec{k} \cdot \vec{H}) \quad (35.20)$$

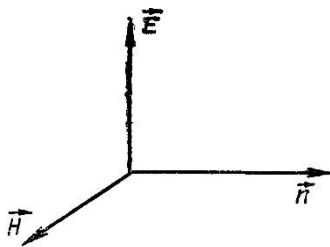
დავუშვათ, \vec{n} წარმოადგენს ერთეულოვან ვექტორს ტალღის გავრცელების მიმართულებით, მაშინ (35.8) თანაფარდობის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{k} = \vec{n}k = \omega\vec{n}\sqrt{\epsilon\mu}$$

გავითვალისწინოთ \vec{k} ვექტორის ეს გამოსახულება (35.20) ფორმულაში, მივიღებთ თანაფარდობას:

$$\sqrt{\epsilon}[\vec{n} \times \vec{E}] = \sqrt{\mu}\vec{H} \quad (35.21)$$

აქედან ჩანს, რომ \vec{E} და \vec{H} ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან. ადრე აღვნიშნეთ, რომ ისინი პერპენდიკულარულნი არიან \vec{n} . (35.21) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ \vec{E} , \vec{H} და \vec{n} ვექტორები ადგენენ ურთიერთპერპენდიკულარულ ვექტორთა მარჯვენა ხრახნულ სამეულს (იხ. ნახ.35.1).



ნახ.35.1

განვიხილოთ (35.21) ტოლობის ორივე მხარის მოდული, მივიღებთ:

$$\sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}| \quad (35.22)$$

(35.21) ფორმულიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ერთგვაროვან დიელექტრიკში ბრტყელ ტალღაში \vec{E} და \vec{H} ვექტორები იცვლებიან ერთი და იმავე ფაზით.

ელექტრომაგნიტური ტალღის ნაკადის სიმკვრივე მოიცემა პოინტინგის ვექტორით, რომელიც ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში აბსოლუტური სიდიდით ტოლია:

$$|\vec{S}| = |[\vec{E} \times \vec{H}]| = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{2\sqrt{\epsilon\mu}}$$

სადაც გათვალისწინებულია (35.22) ტოლობა. მივიღოთ მხედველობაში, რომ $v = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}}$ ბრტყელი ტალღის ფაზური სიჩქარეა, ხოლო $\frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{2} = \omega$ – ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიის სიმკვრივეა, მაშინ პოინტინგის ვექტორის გამოსახულება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{S} = \omega\vec{v} \quad (35.23)$$

ამგვარად, ერთგვაროვან დიელექტრიკში ბრტყელი ტალღის მიერ გადატანილი ენერჯიის მოძრაობის სიჩქარე ტალღის ფაზური სიჩქარის ტოლია. (35.15) ფორმულის საფუძველზე ბრტყელი ტალღა ერთგვაროვან დიელექტრიკში ვრცელდება ამპლიტუდის ცვლილების გარეშე, ე. ი. ენერჯიის დანაკარგის გარეშე.

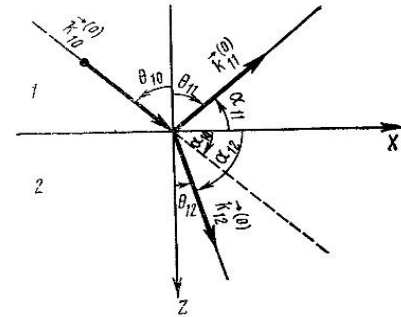
კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღა და რა პირობის შესრულებისას ითვლება ტალღა ბრტყელად?
2. როგორ განისაზღვრება ბრტყელი მონოქრომატული ტალღა?
3. როგორია ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობების განტოლებები მუხტების არარსებობისას?
4. როგორ მიიღება ტალღის განტოლება მაქსველის განტოლებებიდან?
5. რა განსხვავებაა ელექტრული და მაგნიტური ველის ტალღის განტოლებებს შორის?
6. როგორია ტალღის ფაზური სიჩქარის გამოსახულება?
7. როგორია ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების განტოლება ერთგვაროვან დიელექტრიკულ გარემოში?

8. რა როლს თამაშობს ტალღური ვექტორი ტალღის მიმართულების განსაზღვრაში?
9. როგორია ელექტრული და მაგნიტური ვექტორების ურთიერთმიმართულება ბრტყელ ტალღაში?
10. როგორ განისაზღვრება პოინტინგის ვექტორი და რა ინფორმაცია გვაძლევს იგი?
11. როგორია ტალღის მიერ გადატანილი ენერჯიის მოძრაობის სიჩქარე?

§ 36. ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღების არეკვლა და გარდატეხა დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე. ფრენელის ფორმულები

სასაზღვრო პირობები ელექტრომაგნიტური ტალღის ვექტორებისათვის. დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე ბრტყელი ტალღების არეკვლისა და გარდატეხის ამოცანა იხსნება სასაზღვრო პირობების დახმარებით. დავუშვათ, ორი გარემო (იხ. ნახ.36.1) გაყოფილია ბრტყელი საზღვრით, რომელსაც პირველი გარემოდან ეცემა ელექტრომაგნიტური ტალღა.



ნახ.36.1

ეს ტალღა საზღვარზე დაცემისას ნაწილობრივ აირეკლება პირველ გარემოში, ხოლო ნაწილობრივ კი გარდატეხდება მეორე გარემოში. ამგვარად, პირველ გარემოში გვაქვს დამცემი და არეკვლილი ტალღები, ხოლო მეორე გარემოში გარდატეხილი ტალღა. აღვნიშნოთ ტალღის დამახასიათებელი სიდიდეები შემდეგი ინდექსებით: დამცემი – 10, არეკვლილი – 11, გარდატეხილი – 12. მაშინ დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების ელექტრული ველის დაძაბულობებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შესაბამისად შემდეგი გამოსახულებანი:

$$\vec{E}_{10}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10}^{(0)} e^{i(\omega_{10}t - \vec{k}_{10} \cdot \vec{r})} \quad (36.1)$$

$$\vec{E}_{11}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{11}^{(0)} e^{i(\omega_{11}t - \vec{k}_{11} \cdot \vec{r})} \quad (36.2)$$

$$\vec{E}_{12}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{12}^{(0)} e^{i(\omega_{12}t - \vec{k}_{12} \cdot \vec{r})} \quad (36.3)$$

ანალოგიური გამოსახულებები აქვს ასევე ტალღის მაგნიტური ველის დაძაბულობებს. ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ტანგენციალური მდგენელებისათვის სასაზღვრო პირობას მოცემულ შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{E}_{10t}^{(0)} e^{i(\omega_{10}t - (\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}))} + \vec{E}_{11t}^{(0)} e^{i(\omega_{11}t - (\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}))} = \vec{E}_{12t}^{(0)} e^{i(\omega_{12}t - (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}))} \quad (36.4)$$

სიხშირის შენახვა არეკვლისა და გარდატეხის დროს. სიმარტივისათვის (36.4) პირობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{a} e^{i\omega_{10}t} + \vec{b} e^{i\omega_{11}t} = \vec{c} e^{i\omega_{12}t} \quad (36.5)$$

სადაც a, b, c დროზე არ არიან დამოკიდებულნი. გავადიფერენციალოთ (36.5) ტოლობის ორივე მხარე მივიღებთ:

$$i\omega_{10}\vec{a} e^{i\omega_{10}t} + i\omega_{11}\vec{b} e^{i\omega_{11}t} = i\omega_{12}\vec{c} e^{i\omega_{12}t} \quad (36.6)$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში შევცვლით მისი გამოსახულებით (36.5) ფორმულიდან, მივიღებთ:

$$i\vec{a}(\omega_{10} - \omega_{12})e^{i\omega_{10}t} = i\vec{b}(\omega_{12} - \omega_{11})e^{i\omega_{12}t} \quad (36.7)$$

(36.7) ტოლობა იგივერად სამართლიანია t -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ

$$\omega_{10} = \omega_{11} \quad (36.8)$$

ანალოგიურად, თუ შევცვლით (36.6) ტოლობაში $\vec{b} = e^{i\omega_{12}t}$ მისი გამოსახულებით (36.5) ფორმულიდან და გავიმეორებთ იმავე მსჯელობას, მივიღებთ:

$$\omega_{10} = \omega_{12} \quad (36.9)$$

ამგვარად, არეკვლისა და გარდატეხის დროს ტალღის სიხშირე არ იცვლება:

$$\omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{10} \quad (36.10)$$

ვაჩვენოთ, რომ დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი სხივები მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში. (36.4) სასაზღვრო პირობაში \vec{r} წარმოადგენს გამყოფი ზედაპირის წერტილის რადიუს-ვექტორს. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ გამყოფი ზედაპირის ერთ-ერთი წერტილი, მაშინ \vec{r} მთლიანად მდებარეობს გამყოფი ზედაპირის სიბრტყეში. ამ შემთხვევაში (36.4) სასაზღვრო პირობა შეიძლება ჩაწეროთ ასე:

$$a'e^{-i(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r})} + b'e^{-i(\vec{k}_{11} \cdot \vec{r})} = c'e^{-i(\vec{k}_{12} \cdot \vec{r})} \quad (36.11)$$

სადაც a', b', c' – არ არის დამოკიდებული \vec{r} – ზე. (36.11) ტოლობის ორთავე მხარისათვის გამოვიყენოთ ოპერაცია:

$$(\vec{r} \cdot \nabla) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ:

$$(\vec{r} \cdot \nabla)e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = -i(\vec{k} \cdot \vec{r})e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

მივიღებთ:

$$-ia'(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r})e^{-i(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r})} - ib'(\vec{k}_{11} \cdot \vec{r})e^{-i(\vec{k}_{11} \cdot \vec{r})} = -ic'(\vec{k}_{12} \cdot \vec{r})e^{-i(\vec{k}_{12} \cdot \vec{r})} \quad (36.12. ა)$$

(36.12.ა) ტოლობის მარჯვენა მხარეში (36.11) ფორმულის საფუძველზე გამოვრიცხოთ $c'e^{-i\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}}$ მივიღებთ თანაფარდობას:

$$ia'\{(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) - (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r})\}e^{-i(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r})} = ib'\{(\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}) - (\vec{k}_{11} \cdot \vec{r})\}e^{-i(\vec{k}_{11} \cdot \vec{r})} \quad (36.12. ბ)$$

იგი სამართლიანია ნებისმიერი r ვექტორისათვის, რომელიც მდებარეობს გამყოფ სიბრტყეში და დასაშვებია მხოლოდ და მხოლოდ შემდეგი პირობის დროს:

$$(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) = (\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}) \quad (36.14)$$

თუ (36.12.ა) ფორმულაში შევცვლით $b'e^{-i\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}}$ (36.11) ტოლობის საფუძველზე, და ჩავატარებთ ანალოგიურ გამოთვლებს, მივიღებთ თანაფარდობას:

$$(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) = (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}) \quad (36.14)$$

ამგვარად,

$$(\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}) = (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}) (= \vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) \quad (36.15)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ვექტორები $k_{10}, k_{11},$ და k_{12} მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში. მართლაც, \vec{r} ვექტორი მდებარეობს გარემოს გამყოფ სიბრტყეში, ხოლო დანარჩენში – ნებისმიერია. ავირჩიოთ მისი მიმართულება ერთ-ერთი ტალღური ვექტორის მართობულ მიმართულებად, მაგალითად. მაშინ \vec{k}_{10} (36.15) პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) = (\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}) = (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}) = 0$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ \vec{k}_{11} და \vec{k}_{12} ვექტორები ასევე პერპენდიკულარულნი არიან \vec{r} ვექტორის, ე. ი. მდებარეობს იმავე სიბრტყეში, რომელშიც \vec{k}_{10} . ამგვარად, დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი სხივები მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში.

თანაფარდობა დაცემის, არეკვლისა და გარდატეხის კუთხეებს შორის. სნელიუსის კანონი. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ დიელექტრიკების გამყოფი ზედაპირის ის წერტილი, რომელსაც ეცემა სხივი. XZ სიბრტყე ემთხვეოდეს იმ სიბრტყეს, რომელშიც მდებარეობს დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი სხივები. Z ღერძი მიმართულია გამყოფი ზედაპირის მართობულად, ხოლო X ღერძი კი გამყოფი ზედაპირის გასწვრივ (იხ. ნახ.36.1). დაუშვათ, $k_{10}^{(0)}, k_{11}^{(0)}, k_{12}^{(0)}$ ერთეულოვანი ვექტორებია, რომლებიც ახასიათებენ შესაბამისი სხივების მიმართულებებს. სხვადასხვა კუთხეების აღნიშვნები ნაჩვენებია ნახაზზე. (36.15) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში, რომლის სათავეც გამყოფ ზედაპირზე მდებარეობს. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავე რომელიღაც წერტილში, რომელიც მდებარეობს X ღერძის უარყოფით უბანზე. ამ შემთხვევაში \vec{r} ვექტორი მიმართულებით თანხვდენილი იქნება X ღერძის დადებითი მიმართულების, მაშასადამე,

$$(\vec{k}_{10} \cdot \vec{r}) = k_{10}r \cos a_{10}, \quad (\vec{k}_{11} \cdot \vec{r}) = k_{11}r \cos a_{11}, \quad (\vec{k}_{12} \cdot \vec{r}) = k_{12}r \cos a_{12}$$

ამიტომ (36.15) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$k_{10} \cos a_{10} = k_{11} \cos a_{11} = k_{12} \cos a_{12} \quad (36.16)$$

აღვნიშნოთ v_{10}, v_{11}, v_{12} –ით შესაბამისად დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების k_{10}, k_{11}, k_{12} ტალღურ რიცხვებთან ტოლობებით:

$$k_{10} = \frac{\omega}{v_{10}}, \quad k_{11} = \frac{\omega}{v_{11}}, \quad k_{12} = \frac{\omega}{v_{12}} \quad (36.17)$$

სადაც სამივე ტალღის სიხშირე ერთნაირია. რადგანაც დამცემი და არეკვლილი ტალღა ვრცელდება ერთსა და იმავე გარემოში, ამიტომ:

$$v_{10} = v_{11}, \quad k_{10} = k_{11}$$

მაშასადამე, (36.16) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\cos a_{10} = \cos a_{11}, \quad a_{10} = a_{11}$$

საიდანაც:

$$\theta_{10} = \theta_{11} \quad (36.18)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ დაცემის კუთხე არეკვლის კუთხის ტოლია. (36.16) – დან (36.17)–ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\frac{1}{v_{10}} \cos a_{10} = \frac{1}{v_{12}} \cos a_{12} \quad (36.19)$$

მივიღოთ მხედველობაში $\cos a_{10} = \sin \theta_{10}$ და $\cos a_{12} = \sin \theta_{12}$ მაშინ (36.19) ტოლობა გარდაიქმნება ასე:

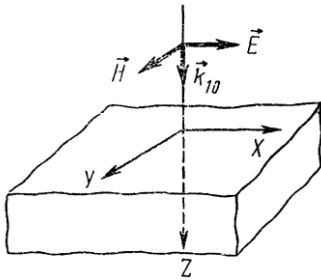
$$\frac{\sin \theta_{10}}{\sin \theta_{12}} = \frac{v_{10}}{v_{12}} \quad (36.20)$$

გავითვალისწინოთ, რომ $v_{10} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$, $v_{12} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$, მაშინ (36.20) ფორმულა ჩაიწერება ასე:

$$\frac{\sin \theta_{10}}{\sin \theta_{12}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = n_{12} \quad (36.21)$$

ამრიგად, დაცემის კუთხის სინუსის ფარდობა გარდატეხის კუთხის სინუსთან ტოლია გარდატეხის მაჩვენებლის მეორე გარემოს პირველის მიმართ (სნელიუსის კანონი).

თანაფარდობა დამცეში, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების ინტენსივობებს შორის. ფრენელის ფორმულები. განვიხილოთ გარემოს გამყოფ საზღვარზე ტალღის ნორმალური დაცემა. Z ღერძი მივმართოთ დამცეში ტალღის გავრცელების მიმართულებით. რომელიც გამყოფი ზედაპირის მართობულია. X და Y ღერძები მდებარეობს გამყოფ სიბრტყეში (იხ. ნახ.36.2).



ნახ.36.2

X ღერძი პარალელურია დამცეში ტალღის ვექტორის. მაშინ, ცხადია, რომ Y ღერძი პარალელური იქნება ელექტრომაგნიტური ტალღის ვექტორის. ამგვარად, დამცეში ტალღისათვის გვაქვს:

$$E_x = \vec{E}_{10}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{10} \cdot \vec{z})}, \quad E_y = E_z = 0 \quad (36.22)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{10}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{10} \cdot \vec{z})}, \quad H_x = H_z = 0 \quad (36.23)$$

(36.23) ფორმულაში გათვალისწინებულია ბრტყელ ტალღაში ელექტრული და მაგნიტური ვექტორების ამპლიტუდებს შორის არსებული თანაფარდობა. გარდატეხილი ტალღის ვექტორების გამოსახულებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$E_x = \vec{E}_{10}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{10} \cdot \vec{z})}, \quad E_y = E_z = 0 \quad (36.24)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \vec{E}_{12}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{11} \cdot \vec{z})}, \quad H_x = H_z = 0 \quad (36.25)$$

რომ დავწეროთ არეკვლილ ტალღაში \vec{E} და \vec{H} ვექტორების გამოსახულებანი, საჭიროა გავითვალისწინოთ ორი გარემოება. 1) არეკვლილი ტალღა ვრცელდება Z ღერძის უარყოფითი მიმართულებით; 2) რადგანაც \vec{E}, \vec{H} და ტალღის გავრცელების მიმართულების მაჩვენებელი ვექტორი ყოველთვის ადგენენ ურთიერთპერპენდიკულარული ვექტორების მარჯვენა ხრახნულ სისტემას, ამიტომ ტალღის გავრცელების მიმართულება შეიცვლება საპირისპირო მიმართულებით იმ პირობით, რომ ერთ-ერთი ვექტორი, \vec{E} ან \vec{H} შეიცვლის მიმართულებას საპირისპიროთი, როცა მეორე ვექტორი მიმართულებით რჩება უცვლელი. არეკვლილ ტალღაში

მიმართულებას იცვლის \vec{H} ვექტორი. გავითვალისწინოთ ეს ორი გარემოება, მივიღებთ, რომ ველის დაძაბულობის ვექტორებს არეკვლილ ტალღაში უნდა ჰქონდეთ შემდეგი სახე:

$$E_x = \vec{E}_{11}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{11} \cdot \vec{z})}, \quad E_y = E_z = 0 \quad (36.26)$$

$$H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \vec{E}_{11}^{(0)} e^{i(\omega t - \vec{k}_{11} \cdot \vec{z})}, \quad H_x = H_z = 0 \quad (36.27)$$

მოცემულ შემთხვევაში სასაზღვრო პირობებს ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორთა მხევი მდგენელებისათვის აქვთ შემდეგი სახე:

$$\vec{E}_{10}^{(0)} + \vec{E}_{11}^{(0)} = \vec{E}_{12}^{(0)} \quad (36.28)$$

$$\sqrt{\epsilon_1} \vec{E}_{10}^{(0)} - \sqrt{\epsilon_1} \vec{E}_{11}^{(0)} = \sqrt{\epsilon_2} \vec{E}_{12}^{(0)} \quad (36.29)$$

სადაც დიელექტრიკებისათვის $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ (36.28), (36.29) ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ჩაიწერება ასე:

$$\vec{E}_{12}^{(0)} = \frac{2\vec{E}_{10}^{(0)}}{1 + n_{12}} \quad (36.30)$$

$$\vec{E}_{11}^{(0)} = \frac{(1 - n_{12})\vec{E}_{10}^{(0)}}{1 + n_{12}} \quad (36.31)$$

სადაც:

$$n_{12} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

ტალღის ინტენსივობა ხასიათდება პოინტინგის ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობით:

$$|\vec{S}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2$$

სადაც $\mu \approx \mu_0$ რადგანაც ტალღაში \vec{E} და \vec{H} ვექტორები იცვლებიან ჰარმონიული კანონით, ამიტომ პერიოდის განმავლობაში ამ ვექტორების საშუალო მნიშვნელობები \vec{E}_0 და \vec{H}_0 ამპლიტუდებთან დაკავშირებულია ტოლობებით:

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos \omega t \rangle = \frac{E_0^2}{2}, \quad \langle H^2 \rangle = \frac{H_0^2}{2}$$

მაშასადამე, პერიოდის განმავლობაში ტალღის ინტენსივობა \bar{S} დაკავშირებულია ტალღის ამპლიტუდასთან თანაფარდობით:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2$$

შევნიშნოთ, რომ ოპტიკურ დიაპაზონში \bar{S} უწოდებენ სხივური ნაკადის ზედაპირულ სიმკვრივეს ან გამოსხივების ნაკადის ზედაპირულ სიმკვრივეს. ამგვარად, პერიოდის განმავლობაში დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების ინტენსივობების საშუალო მნიშვნელობებს ექნებათ სახე:

$$\bar{S}_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_{10}^{(0)2} \quad (36.32)$$

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_{11}^{(0)2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 E_{10}^{(0)2} = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 \bar{S}_{10} \quad (36.33)$$

(36.32)–(36.34) ფორმულებს უწოდებენ **ფრენელის ფორმულებს**. ისინი ახასიათებენ დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების ინტენსივობებს.

არეკვლის კოეფიციენტს r უწოდებენ არეკვლილი ტალღის ინტენსივობის ფარდობას დამცემი ტალღის ინტენსივობასთან. (36.33) და (36.32) ფორმულების საფუძველზე:

$$r = \frac{\bar{S}_{11}}{\bar{S}_{10}} = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 \quad (36.34)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება გარდატეხის კოეფიციენტი χ , როგორც გარდატეხილი ტალღის ინტენსივობის ფარდობა დამცემი ტალღის ინტენსივობასთან:

$$\chi = \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{10}} = \frac{4n_{12}}{(1 + n_{12})^2} \quad (36.35)$$

(36.32) და (36.34) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ:

$$\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12} = \bar{S}_{10} \quad (36.36)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ დამცემი ტალღის ენერგია მთლიანად გარდაიქმნება არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღის ენერგიად, ე. ი. დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე არეკვლისა და გარდატეხის დროს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია არ გარდაიქმნება ენერგიის სხვა ფორმაში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა პირობა უნდა დაკმაყოფილდეს, რომ მოხდეს ელექტრომაგნიტური ტალღის არეკვლა და გარდატეხა?
2. როგორია სასაზღვრო პირობები ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორებისთვის?
3. როგორია სიხშირის შენახვის პირობა არეკვლისა და გარდატეხის დროს?
4. როგორ ხვდება დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი სხივები ერთ სიბრტყეში?
5. როგორია დაცემის, არეკვლის და გარდატეხის კუთხეებს შორის დამოკიდებულება?
6. როგორია სნელიუსის კანონის ფორმულირება?
7. რა დამოკიდებულებაა დამცემი, არეკვლილი და გარდატეხილი ტალღების ინტენსივობებს შორის?
8. როგორია ფრენელის ფორმულების ძირითადი პრინციპი?
9. როგორ განისაზღვრება არეკვლისა და გარდატეხის კოეფიციენტები?
10. რატომ არ იცვლება ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია დიელექტრიკების გამყოფ საზღვარზე?
11. როგორ შეიძლება პრაქტიკაში გამოვიყენოთ ფრენელის ფორმულები ოპტიკური მოწყობილობების დაგეგმვისას?

ლექცია 13. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება II

- §37. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება გამტარ გარემოში.
- §38. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დისპერსიულ გარემოში.

§37. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება გამტარ გარემოში

კომპლექსური დიელექტრიკული ამთვისებლობა. ერთგვაროვან შემოუსაზღვრელ გამტარ გარემოში ($\gamma = const$, $\mu = const$, $\varepsilon = const$, ამასთან $\gamma \neq 0$) მაქსველის პირველ ორ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (37.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (37.2)$$

გავითვალისწინოთ ამ განტოლებებში \vec{E} და \vec{H} ვექტორების გამოსახულებები (35.15) ფორმულის საფუძველზე, მივიღებთ:

$$i[\vec{k} \times \vec{H}] = i\omega \left(\varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega} \right) \vec{E} \quad (37.3)$$

$$i[\vec{k} \times \vec{H}] = i\omega\mu \vec{H} \quad (37.4)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\gamma = 0$, მაშინ (37.3) განტოლება გადადის დიელექტრიკებისათვის შესაბამის განტოლებაში. (37.4) განტოლება დიელექტრიკების შემთხვევაში არ განსხვავდება შესაბამისი განტოლებისაგან. ამგვარად, გამტარი გარემო მათემატიკური თვალსაზრისით დიელექტრიკებისაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ გამტარი გარემოს განტოლებაში ε აბსოლუტური დიელექტრიკული შეღწევადობის ნაცვლად შედის კომპლექსური დიელექტრიკული შეღწევადობა:

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon + \frac{\gamma}{i\omega} = \varepsilon - \frac{i\gamma}{\omega} \quad (37.5)$$

ყველა დანარჩენი გამოთვლები თავისი ფორმით ემთხვევა იმ გამოთვლებს, რომელიც განხილული იყო დიელექტრიკებში ბრტყელი ტალღების შემთხვევაში, მხოლოდ საჭიროა ყველა სიდიდეში ε -ის ნაცვლად ჩავსვათ ε_ω . ამგვარად, k ნამდვილი სიდიდის ნაცვლად გვაქვს ახლა კომპლექსური სიდიდე k_ω , ამასთან

$$k_\omega^2 = \omega^2 \varepsilon_\omega \mu = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \gamma \mu \quad (37.6)$$

წარმოვადგინოთ k_ω კომპლექსური სახით:

$$k_\omega = k = is \quad (37.7)$$

მაშინ (37.6) ტოლობა შეიძლება გარდავექმნათ ასე:

$$k_\omega - 2iks - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \gamma \mu$$

თუ გავუტოლებთ ამ ტოლობის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \equiv a \quad (37.8)$$

$$2ks = \omega \gamma \mu \equiv b \quad (37.9)$$

ამ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} + 1} \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2 + 1} \right] \quad (37.10)$$

$$s^2 = \frac{a}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2 - 1} \right] \quad (37.11)$$

(35.15) ფორმულის ანალოგიურად, ჩავწეროთ გამტარ გარემოში Z ღერძის დადებითი მიმართულებით გავრცელებადი ბრტყელი ტალღა შემდეგი სახით:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_\omega z)} = \vec{E}_0 e^{-sz(\omega t - kz)} \quad (37.12)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_\omega z)} = \vec{E}_0 e^{-sz(\omega t - kz)} \quad (37.13)$$

ამგვარად, ტალღის ამპლიტუდა მცირდება. მაშასადამე, გამტარ გარემოში ელექტრომაგნიტური ტალღა ვრცელდება მილევადობით.

შეღწევის სიღრმე.

$$\Delta = \frac{1}{s} \quad (37.14)$$

მანძილზე ტალღის ამპლიტუდა მცირდება e -ჯერ (Δ – ტალღის შეღწევის სიღრმეა გამტარ გარემოში).

შევაფასოთ სხვადასხვა სიგრძის ტალღისათვის შეღწევის სიღრმე. ხილული სინათლის ტალღის სიგრძე ტოლია $\lambda = (0,4 - 0,75) \cdot 10^{-6}$ მ, რომელსაც შეესაბამება $\omega = 5 \cdot 10^{15}$ წმ⁻¹. ლითონების გამტარებლობა $\gamma = 10^7$ სიმ/მ. ε მიახლოებით შეიძლება ჩაითვალოს ε_0 -ის ტოლად. ამგვარად, ამ შემთხვევაში $\frac{\gamma}{\varepsilon \omega} = 2 \cdot 10^2 \gg 1$

მცირე სიხშირეების შემთხვევაში, ე. ი. დიდი ტალღის სიგრძეებისათვის ეს უტოლობა მკაცრად სრულდება. მაშასადამე, (37.11) ფორმულაში ყველგან შეიძლება უგულებელვყოთ ერთი $\frac{\gamma}{\varepsilon \omega}$ -სთან შედარებით. მაშინ:

$$s = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu}{2}}$$

მაშასადამე, შეღწევის სიღრმე ტოლია:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu}} \quad (37.15)$$

რადგანაც λ ტალღის სიგრძე ω სიხშირესთან დაკავშირებულია თანაფარდობით:

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\omega\gamma\mu}}$$

ამიტომ (37.15) ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (37.16)$$

სადაც $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ – გარემოს ტალღური წინაღობაა. ვაკუუმის ტალღური წინაღობა ტოლია $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377$ ომი. განვიხილოთ მაგალითის სახით სპილენძი, რომლისთვისაც $\gamma = 5 \cdot 10^7$ სიმ/მ, $\mu \approx \mu_0$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. $\lambda = 10^{-6}$ მ ტალღის სიგრძისათვის შეღწევის სიღრმე $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9}$ მ.

ამგვარად, ამ შემთხვევაში შეღწევის სიღრმე ტალღის სიგრძეზე გაცილებით ნაკლებია. ამიტომ მკაცრად რომ ვთქვათ, აზრი არა აქვს ვილაპარაკოთ გამტარ გარემოში ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელებაზე, რადგან ტალღა ძალიან სწრაფად მიილევს. როგორც (37.16) ფორმულიდან ჩანს, ეს დასკვნა სამართლიანი რჩება დიდი ტალღის სიგრძეებისათვისაც, რადგანაც შეღწევის სიღრმე იზრდება როგორც კვადრატული ფესვი ტალღის სიგრძიდან, ე. ი. უფრო ნელა, ვინემ იზრდება ტალღის სიგრძე.

გამტარ გარემოში ელექტრომაგნიტური ტალღების სწრაფი მილევადობის ფიზიკური მიზეზი მდგომარეობს შემდეგში: ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია გარდაიქმნება ჯოულის სითბოდ: ტალღის ელექტრული ველის დაძაბულობა აღძრავს გამტარებლობის დენს, ხოლო გამტარებლობის დენის არსებობისას ჯოულ–ლენცის კანონის საფუძველზე გამოიყოფა სითბო.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორია ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების ძირითადი განტოლებები გამტარ გარემოში?
2. რა განსხვავებაა დიელექტრიკულ და გამტარ გარემოში ელექტრომაგნიტური ტალღის განტოლებებს შორის?
3. რა არის კომპლექსური დიელექტრიკული შეღწევადობა და როგორ გამოითვლება ის?
4. როგორია კომპლექსური ტალღური რიცხვის ($k\omega$) სტრუქტურა?
5. როგორია გამტარ გარემოში გავრცელებული ტალღის ამპლიტუდის ცვლილება მანძილის მიხედვით?
6. როგორ განისაზღვრება შეღწევის სიღრმე (Δ) და რას გვიჩვენებს იგი?
7. როგორ იცვლება შეღწევის სიღრმე ტალღის სიგრძის ცვლილებისას?
8. რა ფიზიკური მექანიზმები განაპირობებს ტალღის მილევადობას გამტარ გარემოში?
9. როგორია ჯოულ-ლენცის კანონის როლი გამტარ გარემოში ტალღის ენერგიის გარდაქმნაში?
10. რა ხდება ტალღის ენერგიასთან გამტარ გარემოში და როგორ არის დაკავშირებული გამტარებლობის მნიშვნელობასთან?

§ 38. ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება დისპერსიულ გარემოში

დიელექტრიკებში სინათლის გავრცელებისა და გარდატეხის ანალიზის დროს იგულისხმებოდა, რომ ε აბსოლუტური დიელექტრიკული შეღწევადობა იყო მუდმივი სიდიდე იმ თვალსაზრისით, რომ იგი კოორდინატებზე და დროზე დამოკიდებული არ იყო. ელექტრომაგნიტური ტალღების სიხშირეზე შესაძლო დამოკიდებულების საკითხი არც დასმულა, რადგანაც განიხილებოდა მხოლოდ რომელიღაც კონკრეტული სიხშირის მონოქრომატული ტალღები. ყველა შედეგი სამართლიანია კონკრეტული სიხშირისათვის მიუხედავად იმისა, ε სიხშირეზე დამოკიდებული იყო, თუ არა. დიელექტრიკული შეღწევადობის სიხშირეზე დამოკიდებულებას დისპერსიას უწოდებენ. თუ იგი სიხშირეზე დამოკიდებულია, მაშინ სიხშირეზე დამოკიდებული იქნება აგრეთვე ტალღის გავრცელების სიჩქარე და გარდატეხის მაჩვენებელიც.

(36.21) ფორმულა ხელსაყრელია გადავწეროთ, როგორც გარდატეხის მაჩვენებელი ვაკუუმის მიმართ:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r}, \quad \mu \approx \mu_0 \quad (38.1)$$

ამ უკანასკნელს მივყავართ არადისპერსიულ და დისპერსიულ გარემოებში არამონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების განსხვავებაზე. მაგალითად, თუ ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღების ერთობლიობა ვრცელდება ერთი მიმართულებით და ეცემა ორი სხვადასხვა გარემოს გამყოფ საზღვარს რაიმე კუთხით, მაშინ არადისპერსიულ გარემოში სხვადასხვა სიხშირის გარდატეხილი ტალღები გავრცელდებიან პარალელური მიმართულებებით, ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ ერთ–ერთი გარემო დისპერსიულია, მაშინ სხვადასხვა სიხშირის ტალღები გარდატეხის შედეგად გავრცელდებიან სხვადასხვა მიმართულებებით. სხვადასხვა სიხშირის ტალღების ერთობლიობას არამონოქრომატულ ტალღას უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელებისას დისპერსიულ და არადისპერსიულ გარემოს შორის განსხვავება ვლინდება მხოლოდ ტალღების არამონოქრომატულობის მიმართ. განმარტების თანახმად, მონოქრომატული ტალღების მიმართ დისპერსია, არ ვლინდება. სანამ გადავიდოდეთ დისპერსიულ გარემოში არამონოქრომატული ტალღების გავრცელების ანალიზზე, საჭიროა მოკლედ გავცნოთ დისპერსიის წარმოშობის მიზეზებს და მის ფიზიკურ ბუნებას. ამისათვის კი საჭიროა მივიღოთ მხედველობაში ელექტრომაგნიტური ტალღების ზემოქმედებით ატომებში ელექტრონების რხევები.

დრეკად ბმული ელექტრონის იძულებითი რხევები. ატომში ელექტრონის წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრისას აღიძვრება ძალა, რომელიც ცდილობს დააბრუნოს იგი წონასწორობის მდებარეობაში. თუ წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრა მცირეა, მაშინ დამაბრუნებელი ძალა შეიძლება გავშალოთ მწკრივად გადახრის მიხედვით და შემოვისაზღვროთ გაშლაში პირველი რიგის წევრით, რომელიც წარმოადგენს გადახრის პროპორციულ დრეკად ძალას (ჰუკის კანონი). ასეთი ძალის მოქმედებით ელექტრონი ასრულებს დრეკად რხევებს რომელიღაც ω_0 სიხშირით. ელექტრონის თავისუფალი რხევების განტოლებას მილევადობის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე:

$$m\ddot{r} + m\gamma\dot{r} + m\omega_0^2\vec{r} = 0 \quad (38.2)$$

სადაც γ ახასიათებს მილევალობას. თუ ატომს ეცემა მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ტალღა, მაშინ ამ ტალღის ელექტრული ვექტორის ზემოქმედებით აღიძვრება ელექტრონის იძულებით რხევები, რომლის განტოლებასაც შემდეგი სახე აქვს:

$$m\ddot{r} + m\gamma\dot{r} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (38.3)$$

სადაც E_0 და ω დამცემი ტალღის ამპლიტუდა და სიხშირეა. (38.3) განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (38.4)$$

დიელექტრიკის პოლარიზაცია. e მუხტის r მანძილზე წანაცვლება აღძრავს დიპოლურ მომენტს:

$$\vec{p} = e\vec{r} = a\varepsilon_0\vec{E} \quad (38.5)$$

სადაც

$$a = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

მოცემულ შემთხვევაში ფარდობითი დიელექტრიკული შეღწევალობა განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0} = \varepsilon_{r\omega} = 1 + aN = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (38.6)$$

მკვრივ გაზებში და კონდენსირებულ გარემოებში ელექტრონზე მოქმედებს ლოკალური ველი, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

მაშინ:

$$\frac{3(\varepsilon_{r\omega} - 1)}{\varepsilon_{r\omega} + 2} = \alpha N \quad (38.7)$$

სადაც α განსაზღვრულია (38.5) ფორმულით. თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით $\varepsilon_{r\omega}$ - ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\frac{\varepsilon_\omega}{\varepsilon_0} = \varepsilon_{r\omega} = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega - \frac{e^2 N}{3\varepsilon_0 m}} \quad (38.8)$$

ამ ფორმულას აქვს (38.6) ფორმულის სახე იმ განსხვავებით, რომ სიხშირის კვადრატი შეცვლილია შემდეგი გამოსახულებით:

$$\omega_0^2 - \frac{e^2 N}{3\varepsilon_0 m}$$

დანარჩენი კი ერთნაირია.

(38.6) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $\varepsilon_{r\omega}$ მცირე სიდიდით განსხვავდება ერთისაგან იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \ll |\omega_0^2 - \omega^2| \quad (38.9)$$

ე. ი. გაიშვიათებული გაზებისათვის. ამ დროს, როგორც იყო მოსალოდნელი, (38.8) ფორმულა გადადის (38.6) ფორმულაში.

(38.6) და (38.8) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ დიელექტრიკული შეღწევადობა წარმოადგენს კომპლექსურ სიდიდეს. მაშასადამე, n'_ω გარდატეხის მაჩვენებელიც, რომელიც დაკავშირებულია $\varepsilon_{r\omega}$ დიელექტრიკულ შეღწევადობასთან (38.1) ფორმულით, წარმოადგენს კომპლექსურ სიდიდეს. ვისარგებლოთ $\varepsilon_{r\omega}$ – სთვის (38.6) ფორმულით, მივიღებთ:

$$n'^2_\omega = \varepsilon_{r\omega} = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (38.10)$$

აქედან ჩანს, რომ თუ

$$n'_\omega = n_\omega - i\xi_\omega \quad (38.11)$$

მაშინ

$$n^2_\omega - \xi^2_\omega = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (38.12. ა)$$

$$2n_\omega \xi_\omega = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (38.12. ბ)$$

კომპლექსური გარდატეხის მაჩვენებლის გამოსახულებაში წარმოსახვითი ნაწილი დაკავშირებულია ელექტრომაგნიტური ტალღების შთანთქმასთან. ნამდვილი ნაწილი აღწერს დისპერსიის მოვლენას.

ნორმალური დისპერსია ოპტიკურ არეში. ოპტიკურ არეში

$$\gamma^2\omega^2 \ll (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \quad (38.13)$$

ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\xi_\omega \approx 0$ მაშინ (38.12.ა) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

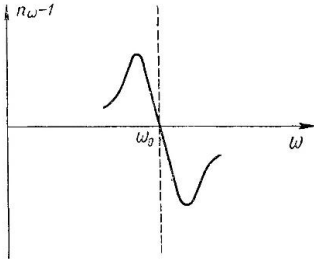
$$n^2_\omega = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (38.14)$$

ეს ფორმულა მიღებულია იმ დაშვებით, რომ ერთეულოვან მოცულობაში არსებობენ N ელექტრონები რხევების საკუთარი ω_0 სიხშირით. სინამდვილეში, ატომში ყველა ელექტრონი წონასწორობის მდებარეობაში შეკავებულია ერთნაირი დრეკადი ძალებით, და მაშასადამე, ყველა მათგანის რხევის საკუთარი სიხშირეები არ იქნება ერთნაირი. აღვნიშნოთ N_i – ით ერთეულოვან მოცულობაში ელექტრონების რიცხვი, რომელთა რხევების საკუთარი სიხშირეებია ω_{0i} . მაშინ (38.14) ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ:

$$n^2_\omega = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (38.15)$$

თუ გარდატეხის მაჩვენებელი ახლოსაა ერთთან, რომელსაც ადგილი აქვს მხოლოდ საკმაოდ გაიშვიათებული გაზებისათვის ($n_\omega - 1 \ll 1$), მაშინ (38.15) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$n_\omega = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (38.16)$$



ნახ.38.1

ნახ.38.1-ზე წარმოდგენილია დისპერსიული მრუდები. მთელ გამჭვირვალე არეში გარდატეხის მაჩვენებელი იზრდება სიხშირის ზრდასთან ერთად. მცირე სიხშირეებისათვის (38.16) ფორმულა გვაძლევს გარდატეხის მაჩვენებლისათვის სტატიკურ მნიშვნელობას:

$$n = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2} \quad (38.17)$$

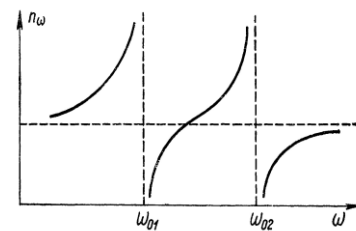
ძალიან დიდი სიხშირეებისათვის ($\omega \gg \omega_{0i}$) მაჩვენებელი მიისწრაფვის ერთისაკენ, მაგრამ ყოველთვის ნაკლებია ერთზე, რადგანაც (38.16) ფორმულაში ჯამში ყველა წევრი უარყოფითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ძალიან მოკლე ტალღის

გამოსხივებისათვის დიელექტრიკი წარმოადგენს ოპტიკურად ნაკლებად მკვრივ გარემოს, ვინემ ვაკუუმი. ასე რომ შეიძლება დაკვირვება სრულ არეკვლაზე. იგი დაკვირვებადია რენტგენის გამოსხივებისათვის. მკვეთრი რენტგენის გამოსხივებისათვის ($\omega \gg \omega_{0i}$) (38.16) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$n_\omega = 1 - \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} \sum_i N_i$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში ატომში ელექტრონების ბმის ხასიათი არავითარ როლს არ ასრულებს, ხოლო გარდატეხის მაჩვენებელი კი განისაზღვრება მხოლოდ ელექტრონების საერთო რაოდენობით.

ანომალური დისპერსია. ნახ.38.2-ზე გამოსახული დისპერსიული მრუდი მიღებულია (38.15) ფორმულის საფუძველზე, რომელიც მიიღება (38.6) – დან მიღევადობის უგულვებლყოფის დროს ($\gamma = 0$). თუ მიღევადობას გავითვალისწინებთ, მაშინ ($\omega = \omega_{0i}$) წერტილში დისპერსიული მრუდი შეიცვლება უწყვეტად, და არა ისე, როგორც ნახ.38.2 ნახაზზეა გამოსახული. გარდატეხის მაჩვენებელი წარმოვადგინოთ (38.11)–ის სახით. თუკი $|n'_\omega|$ მცირედით განსხვავდება ერთისაგან, მაშინ (38.6) ფორმულის დახმარებით გვექნება:



ნახ.38.2

$$n_\omega - i\xi_\omega = \sqrt{\varepsilon_{r\omega}} = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (38.19)$$

საიდანაც გვაქვს:

$$n_\omega = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} N \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (38.20. ა)$$

$$\xi_\omega = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} N \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (38.20. ბ)$$

რეზონანსული სიხშირის არეში ($\omega = \omega_0$) დისპერსიული მრუდის სახე ნაჩვენებია ნახაზზე.

მაშასადამე, ω_0 რეზონანსული სიხშირის მახლობლობაში სიხშირის ზრდით გარდატეხის მაჩვენებელი მცირდება. სიხშირის ზრდასთან ერთად გარდატეხის მაჩვენებლის ამგვარ შემცირებას **ანომალური დისპერსია** ეწოდება.

შთანთქმა. §35 – ში ვაჩვენეთ, რომ თუკი Z ღერძის გასწვრივ გავრცელებული ტალღის ელექტრულ ვექტორს წარმოვადგენთ

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (38.21)$$

სახით, მაშინ k ტალღური რიცხვი დიელექტრიკულ და მაგნიტურ შეღწევადობებზე დამოკიდებულია თანაფარდობით:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2}} \quad (38.22)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mu_r = 1$ და ჩავსვამთ (38.22) ფორმულაში $\sqrt{\epsilon_r \omega}$ გამოსახულებას (38.19) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$k = \frac{\omega n_\omega}{c} - \frac{i\omega \xi_\omega}{c} \quad (38.23)$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (38.21) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\omega \xi_\omega \frac{z}{c}} e^{i(\omega t - \omega n_\omega \frac{z}{c})} \quad (38.24)$$

მაშასადამე, გარდატეხის მაჩვენებლის წარმოსახვითი ნაწილი აღწერს დიელექტრიკში ბრტყელი ტალღის მიღევას. იგი გამოწვეულია იმით, რომ დიელექტრიკში გავლისას ნივთიერების ცალკეულ ატომებზე ტალღა ასრულებს მუშაობას: ტალღის ენერგია იხარჯება ელექტრონების იძულებითი რხევების აღძვრაზე. რხევადი ელექტრონები გააბნევენ ამ შექნილ ენერგიას ყველა მიმართულებით გამოსხივების ენერგიის სახით.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რას ეწოდება დისპერსია და როგორ განისაზღვრება იგი?
2. როგორია არადისპერსიულ და დისპერსიულ გარემოში ტალღების გავრცელების ძირითადი განსხვავება?
3. როგორ მოქმედებს დისპერსია ტალღის სიჩქარეზე და გარდატეხის მაჩვენებელზე?
4. რა არის დრეკადად ბმული ელექტრონის იძულებითი რხევები და როგორია მათი განტოლება?
5. როგორია დისპერსიის წარმოშობის ძირითადი მექანიზმი ატომებში?
6. რა არის ნორმალური დისპერსია და როგორ გამოითვლება იგი?
7. როგორია ანომალური დისპერსიის ფიზიკური არსი და რა პირობებში ვლინდება იგი?
8. როგორ მოქმედებს შთანთქმა ელექტრომაგნიტურ ტალღებზე დისპერსიულ გარემოში?
9. როგორ უკავშირდება კომპლექსური გარდატეხის მაჩვენებლის წარმოსახვითი ნაწილი ტალღების შთანთქმას?
10. როგორია ტალღის ენერგიის განაწილება დისპერსიულ გარემოში?

ლექცია 14. ელექტროდინამიკის ოთხგანზომილებიანი ფორმულირება I

- §39. ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი და ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივე.
- §40. მაქსველის განტოლებები ტენზორული ფორმით.
- §41. ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორები.

§39. ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი და ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივე

გარდავქმნათ ოთხგანზომილებიან ფორმაში პოტენციალების განტოლებები

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \rho \vec{v} \quad (39.1)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (39.2)$$

მასთან დაკავშირებული ლორენცის პირობა

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (39.3)$$

და უწყვეტობის განტოლება:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (39.4)$$

(39.3) განტოლებას $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} = 0 \quad (39.5)$$

სადაც

$$\Phi_1 = A_x, \quad \Phi_2 = A_y, \quad \Phi_3 = A_z, \quad \Phi_4 = \frac{i\varphi}{c}$$

(39.5) განტოლება წარმოადგენს რელატივისტურად ინვარიანტულ განტოლებას, თუ დავუშვებთ, რომ $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ სიდიდეების ერთობლიობა ქმნის ოთხგანზომილებიან ვექტორს. ამ პირობის დროს (39.5) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს ამ ვექტორის ოთხგანზომილებიან დივერგენციას, რომელიც ინვარიანტულია. ამგვარად, \vec{A} ვექტორული და φ სკალარული პოტენციალები ქმნიან ერთიან ოთხგანზომილებიან ვექტორს Φ_ν , რომლის კომპონენტებიც ტოლია:

$$A_x, \quad A_y, \quad A_z, \quad \frac{i\varphi}{c} \quad (39.6)$$

ვექტორს უწოდებენ ოთხგანზომილებიან პოტენციალს. (39.4) განტოლებას ოთხგანზომილებიან ფორმაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0 \quad (39.7)$$

სადაც $s_1 = \rho v_x$, $s_2 = \rho v_y$, $s_3 = \rho v_z$, $s_4 = ic\rho$.

თუ დავუშვებთ, რომ სიდიდეების ერთობლიობა ქმნის ოთხგანზომილებიან ვექტორს, მაშინ (39.7) განტოლება წარმოადგენს რელატივისტურად ინვარიანტულ განტოლებას, რომელიც გამოსახულია s_ν ვექტორის ოთხგანზომილებიანი დივერგენციის ნულთან ტოლობით. s_ν ოთხგანზომილებიან ვექტორს კომპონენტებით

$$\rho v_x, \quad \rho v_y, \quad \rho v_z, \quad ic\rho \quad (39.8)$$

უწოდებენ ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივეს.

ოთხგანზომილებიანი პოტენციალითა და ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივით (39.1) და (39.2) განტოლებები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\square \Phi_\nu = -\mu_0 s_\nu \quad (39.9)$$

სადაც \square – დალამბერის ინვარიანტული ოპერატორია. მაშასადამე, (39.9) ნამდვილად წარმოადგენს ტენზორულ განტოლებას. ამგვარად, თუ დავუშვებთ, რომ Φ_ν და s_ν სიდიდეები ქმნიან ოთხგანზომილებიან ვექტორებს, მაშინ (39.1)–(39.4) განტოლებები წარმოადგენენ რელატივისტურად ინვარიანტულ განტოლებებს. მაგრამ სინამდვილეში ქმნიან თუ არა ისინი ოთხგანზომილებიან ვექტორებს, შეიძლება შევამოწმოთ ექსპერიმენტთან თანხვდენის გზით ამ დაშვებიდან გამომდინარე მრავალრიცხოვანი შედეგების მიხედვით. ამ შედეგების ექსპერიმენტული მტკიცებულება გვიჩვენებს, რომ (39.6) და (39.8) სიდიდეები მართლაც წარმოადგენენ ოთხგანზომილებიან ვექტორებს.

დავუშვათ k' კოორდინატთა სისტემაში მუხტი უძრავია და აქვს ρ_0 სიმკვრივე. მაშინ ოთხგანზომილებიანი დენის კომპონენტები შემდეგია:

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0, \quad s'_4 = ic\rho_0 \quad (39.10)$$

კოორდინატთა იმ სისტემაში, რომლის მიმართაც ეს მუხტი მოძრაობს v სიჩქარით, ოთხგანზომილებიანი დენის კომპონენტები მიიღება გარდაქმნის ფორმულების საფუძველზე

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{s'_1 - i\beta s'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ s_2 &= s'_2 = 0, \quad s_3 = s'_3 = 0 \\ s_4 &= \frac{i\beta s'_1 - s'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (39.11)$$

რადგანაც განმარტების თანახმად $s_1 = \rho v$ და $s_4 = ic\rho$ ამიტომ ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მოძრავი მუხტის სიმკვრივე მეტია უძრავი მუხტის სიმკვრივეზე:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (39.12)$$

აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რომელიმე მოცულობაში dq მუხტი ინვარიანტული სიდიდეა. თუ რაიმე dV_0 მოცულობა მოძრაობს v სიჩქარით, მაშინ მოძრაობის მიმართულებით მასშტაბების შემცირების გამო იგი მცირდება და ტოლი ხდება შემდეგი გამოსახულების:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (39.13)$$

ეს თანაფარდობა (39.12) – თან კომბინაციაში გვაძლევს:

$$dq = \rho dV = \rho_0 dV_0 = dq_0 \quad (39.14)$$

ე. ი. მუხტი არის ინვარიანტული სიდიდე.

(39.8) ფორმულები დენის სიმკვრივის კომპონენტებისათვის (39.12) ფორმულის გათვალისწინებით ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\rho_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & s_2 &= \frac{\rho_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ s_3 &= \frac{\rho_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & s_4 &= \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (39.15)$$

თუ ვისარგებლებთ ოთხ განზომილებიანი სიჩქარის კომპონენტებით, მივიღებთ:

$$s_\nu = \rho_0 u_\nu \quad (39.16)$$

სადაც s_ν და u_ν ოთხ განზომილებიანი ვექტორებია, ρ_0 – სკალარია. ეს განტოლება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ოთხ განზომილებიანი დენის სიმკვრივის განმარტება.

მუხტის მოძრაობის სიჩქარეზე დამოუკიდებლობა დამტკიცებულია მრავალი ცდით. კერძოდ, თუკი ეს ასე არ იქნებოდა, მაშინ ატომიც ნეიტრალური არ იქნებოდა. ამიტომ შეიძლებოდა (39.14) თანაფარდობიდან გამოვსულიყავით, როგორც ექსპერიმენტალური ფაქტიდან და დაგვემტკიცებინა, რომ s_ν სიდიდეები ქმნიან ოთხგანზომილებიან ვექტორს.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი და როგორ განისაზღვრება მისი კომპონენტები?
2. როგორია ლორენცის პირობა ოთხგანზომილებიან ფორმულირებაში?
3. როგორ შეიძლება მაქსველის განტოლებების წარმოდგენა ოთხგანზომილებიან ვექტორებში?
4. რა არის ოთხგანზომილებიანი დენის სიმკვრივე და როგორია მისი კომპონენტები?
5. რატომ არის მუხტი ინვარიანტული სიდიდე?
6. როგორია მოძრავი მუხტის სიმკვრივისა და მოცულობის დამოკიდებულება სიჩქარეზე?
7. როგორ შეიძლება დენის სიმკვრივის გამოსახვა ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის საშუალებით?

§ 40. მაქსველის განტოლებები ტენზორული ფორმით

იმისათვის, რომ ნათლად ჩამოვყალიბოთ თეორია რელატივისტურად ინვარიანტული სახით, აუცილებელია ჩავწეროთ მისი განტოლებები ტენზორული ფორმით. მაქსველის განტოლებები:

$$\text{rot}\vec{H} = \rho\vec{v} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{D} = \rho \quad (40.1)$$

შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორთა კომპონენტებისათვის ოთხი განტოლების სახით:

$$0 + \frac{\partial\vec{H}_z}{\partial x_2} - \frac{\partial\vec{H}_y}{\partial x_3} - \frac{\partial(ic\vec{D}_x)}{\partial x_4} = \rho v_x$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial x_3} - \frac{\partial(ic\vec{D}_y)}{\partial x_4} = \rho v_y \quad (40.2)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial x_2} + 0 - \frac{\partial(ic\vec{D}_z)}{\partial x_4} = \rho v_z$$

$$\frac{\partial(ic\vec{D}_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(ic\vec{D}_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial(ic\vec{D}_z)}{\partial x_3} + 0 = ic\rho$$

როგორც (39.8) ფორმულიდან ჩანს, (40.2) განტოლებების მარჯვენა მხარეში დგას ოთხგანზომილებიანი დენის ვექტორის კომპონენტები. ამიტომ ცხადია, რომ ოთხი სიდიდე, რომელიც დგას ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეში, უნდა ქმნიდეს ოთხგანზომილებიან ვექტორს. ყველა მათგანს ერთად აქვს ოთხგანზომილებიანი დივერგენციის სახე. თუ რაიმე ვექტორის ოთხგანზომილებიანი დივერგენცია ქმნის ოთხგანზომილებიან ვექტორს, მაშინ თვით ეს სიდიდე უნდა იყოს მეორე რანგის ტენზორი. (40.2) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ ამ ტენზორს უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{H}_z & -\vec{H}_y & -ic\vec{D}_x \\ -\vec{H}_z & 0 & \vec{H}_x & -ic\vec{D}_y \\ \vec{H}_y & -\vec{H}_x & 0 & -ic\vec{D}_z \\ ic\vec{D}_x & ic\vec{D}_y & ic\vec{D}_z & 0 \end{pmatrix} \quad (40.3)$$

ამ ტენზორის დახმარებით (40.2) განტოლებები ჩაიწერებიან შემდეგი ტენზორული განტოლების სახით:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu \quad (40.4)$$

სადაც s_μ განსაზღვრულია (39.8) ან (39.16) ტოლობით.

ქვემოთ მოცემული მაქსველის ორი ვექტორული განტოლება:

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad div \vec{B} = 0$$

ჩაწეროთ კომპონენტებში:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(cB_x)}{\partial x_4} + \frac{\partial(-iE_z)}{\partial x_2} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial(-iE_z)}{\partial x_1} + \frac{\partial(iE_x)}{\partial x_3} + \frac{\partial(-cB_y)}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial(iE_x)}{\partial x_2} + \frac{\partial(cB_z)}{\partial x_4} + \frac{\partial(-iE_y)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial(cB_z)}{\partial x_3} + \frac{\partial(cB_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial(cB_y)}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (40.5)$$

შემოვიტანოთ ტენზორი:

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -\vec{H}_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & \vec{H}_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (40.6)$$

მისი დახმარებით (40.5) განტოლებები შეიძლება ჩაწეროს ტენზორული ფორმით:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (40.7)$$

სადაც μ, ν და λ ინდექსები ღებულობენ მნიშვნელობებს 1,2,3,4, ამასთან $\mu \neq \nu \neq \lambda$. (40.7) განტოლებაში ინდექსების ყველა შესაძლო კომბინაცია შეიძლება იყოს 4-ზე მეტი, მაგრამ მოცემული განტოლებისათვის არსებითად მნიშვნელოვანია მხოლოდ 4. ეს ჩანს შემდეგი გარემოებიდან. თუ ინდექსებს შორის რომელიმე ორი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ (40.6) ტენზორის ანტისიმეტრიულობიდან გამომდინარე შესაბამისი განტოლება იგივერად ნულის ტოლია. მაგალითად, დავუშვათ $\mu = \nu$. მაშინ (40.7) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial H_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (40.8)$$

მაგრამ ეს არ არის განტოლება, არამედ არის იგივეობა, რადგანაც $H_{\mu\mu} = 0$, $H_{\mu\lambda} = -H_{\lambda\mu}$ ამიტომ (40.7) განტოლებებს შორის მნიშვნელოვანია მხოლოდ ოთხი განტოლება, რომლებშიც $\mu \neq \nu \neq \lambda$, ე. ი. სადაც ინდექსები μ, ν, λ ღებულობენ მნიშვნელობებს:

$$(\mu, \nu, \lambda) = (2, 3, 4), \quad (3, 4, 1), \quad (4, 1, 2), \quad (1, 2, 3) \quad (40.9)$$

ამ ინდექსების კომბინაცია (40.7) განტოლებაში გვაძლევს სწორედ (40.5) განტოლებებს. და ბოლოს, ჩაწეროთ ინვარიანტული ფორმით განტოლებები:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (40.10)$$

უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ (40.10) განტოლებები შეიძლება ჩაწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} u_\nu^{(0)} = \epsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} u_\nu^{(0)}, \\ \frac{1}{c} (H_{\mu\nu} u_\lambda^{(0)} + H_{\nu\lambda} u_\mu^{(0)} + H_{\lambda\mu} u_\nu^{(0)}) = \mu_0 (F_{\mu\nu} u_\lambda^{(0)} + F_{\nu\lambda} u_\mu^{(0)} + F_{\lambda\mu} u_\nu^{(0)}) \end{cases} \quad (40.11)$$

სადაც $u_\nu^{(0)}$ უძრავ კოორდინატა სისტემაში ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის კომპონენტია:

$$u_\nu^{(0)} = (0, 0, 0, ic) \quad (40.12)$$

მაგრამ (40.11) განტოლებებს აქვთ ტენზორული ფორმა, ამიტომ ისინი სამართლიანია იმ კოორდინატა სისტემისათვისაც, რომელიც მოძრაობს \vec{v} სიჩქარით, მაშასადამე ოთხგანზომილებიანი სიჩქარე ტოლია:

$$u_\nu = \left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (40.13)$$

სადაც $\beta = v/c$ (40.11) განტოლებას მოძრავ კოორდინატა სისტემაში აქვს ისეთივე სახე, მხოლოდ $u_v^{(0)}$ -ის ნაცვლად მონაწილეობას დებულობს ოთხგანზომილებიანი u_v სიჩქარე;

$$\frac{1}{c} \sum_{v=1}^4 F_{\mu v} u_v = \varepsilon_0 \sum_{v=1}^4 H_{\mu v} u_v \quad (40.14)$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu v} u_\lambda + H_{v\lambda} u_\mu + H_{\lambda\mu} u_v) = \mu_0 (F_{\mu v} u_\lambda + F_{v\lambda} u_\mu + F_{\lambda\mu} u_v)$$

თუ ამ განტოლებებს ჩავწერთ კომპონენტებში და წარმოვადგენთ ვექტორული ფორმით, მაშინ:

$$\begin{aligned} \vec{D} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H} &= \varepsilon_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} &= \varepsilon_0 (\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}) \end{aligned} \quad (40.15)$$

როცა $\vec{v} = 0$, მაშინ როგორც მოსალოდნელი იყო, ეს განტოლებები გადადის (40.10) განტოლებებში უძრავ კოორდინატა სისტემისათვის.

ამგვარად, (40.3) და (40.6) ტოლობებით განმარტებული $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ ტენზორების დახმარებით, მაქსველის განტოლებები ჩაიწერებიან შემდეგი ტენზორული განტოლებების სახით:

$$\sum_{v=1}^4 \frac{\partial F_{\mu v}}{\partial x_v} = S_\mu \quad (40.16)$$

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{v\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (40.17)$$

$$\frac{1}{c} \sum_{v=1}^4 F_{\mu v} u_v = \varepsilon_0 \sum_{v=1}^4 H_{\mu v} u_v \quad (40.18)$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu v} u_\lambda + H_{v\lambda} u_\mu + H_{\lambda\mu} u_v) = \mu_0 (F_{\mu v} u_\lambda + F_{v\lambda} u_\mu + F_{\lambda\mu} u_v) \quad (40.19)$$

სადაც $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორებია.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რატომ არის აუცილებელი მაქსველის განტოლებების ტენზორული ფორმულირება?
2. რა არის ოთხგანზომილებიანი ველის ტენზორი და როგორ გამოითვლება მისი კომპონენტები?
3. როგორ უკავშირდება მაქსველის განტოლებები ტენზორულ წარმოდგენას?
4. როგორ გამოითვლება ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის დივერგენცია?
5. რატომ არის ტენზორი ანტისიმეტრიული და რა მნიშვნელობა აქვს ამ თვისებას?
6. როგორ ხდება მაქსველის განტოლებების გარდაქმნა ინვარიანტული ფორმით?
7. როგორ მოქმედებს ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის ტენზორული წარმოდგენა ველის კომპონენტებზე?

§ 41. ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორები

ტენზორები. უნინარეს ყოვლისა დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ სიდიდეები ნამდვილად წარმოადგენენ ტენზორებს. ამისათვის ვისარგებლოთ ფორმულებით, რომლებიც გამოსახავენ ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობებს პოტენციალებით:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (41.1)$$

ოთხგანზომილებიანი Φ_ν პოტენციალის გამოყენებით ეს განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} E_x &= ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right), & B_x &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \\ E_y &= ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right), & B_y &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} \\ E_z &= ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right), & B_z &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (41.2)$$

ამიტომ (40.6) სიდიდეების ერთობლიობა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$H_{\mu\nu} = c \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) \quad (41.3)$$

მაგრამ Φ_1, Φ_2, Φ_3 და Φ_4 ქმნიან ოთხგანზომილებიან ვექტორს. ოთხგანზომილებიანი ვექტორის კომპონენტების ოთხგანზომილებიანი კოორდინატების მიხედვით წარმოებულების ერთობლიობა წარმოადგენს ტენზორს. ტენზორების სხვაობა ასევე ტენზორია. მაშასადამე, Φ_ν ვექტორული ხასიათიდან გამომდინარეობს, რომ $H_{\mu\nu}$ სიდიდეთა ერთობლიობა წარმოადგენს ტენზორს.

დავამტკიცოთ, რომ $F_{\mu\nu}$ სიდიდეთა ერთობლიობა ასევე წარმოადგენს ტენზორს, ამისათვის შევნიშნოთ, რომ $F_{\mu\nu}$ გამოისახება $H_{\mu\nu}$ ტენზორის საშუალებით შემდეგი ფორმულის დახმარებით:

$$F_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_{\mu\nu} \quad (41.4)$$

რადგანაც $H_{\mu\nu}$ წარმოადგენს ტენზორს, ასევე $F_{\mu\nu}$ სიდიდეები ქმნიან ტენზორს, რადგანაც ისინი განსხვავდებიან $H_{\mu\nu}$ –საგან მხოლოდ მუდმივი მამრავლით.

მაშასადამე, დამტკიცებულია რომ $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ სიდიდეები წარმოადგენენ ტენზორს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ერთი კოორდინატთა სისტემიდან მეორეში გადასვლის დროს ისინი უნდა გარდაქმნან ტენზორებისათვის გარდაქმნის ფორმულების საფუძველზე:

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\gamma} F_{\alpha\gamma}, \quad H'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\gamma} H_{\alpha\gamma} \quad (41.5)$$

ველების გარდაქმნა. (41.5) ფორმულაში კოეფიციენტები $a_{\alpha\gamma}$ მოცემულია შემდეგი მატრიცით:

$$a_{\alpha\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & i\beta \\ \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2} \end{vmatrix}$$

ვისარგებლოთ ამ კოეფიციენტის მნიშვნელობებით, მაშინ (41.5) ფორმულები შეიძლება სამგანზომილებიან ფორმაში ჩავწეროთ ასე:

$$\begin{aligned} D'_x &= D_x, & H'_x &= H_x, \\ D'_y &= \frac{D_y - \frac{vH_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & H'_y &= \frac{H_y - \frac{vD_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ D'_z &= \frac{D_z - \frac{vH_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & H'_z &= \frac{H_z - \frac{vD_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \quad (41.6)$$

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - \frac{vB_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & B'_y &= \frac{B_y - \frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z - \frac{vB_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - \frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \quad (41.7)$$

სადაც $\beta = v/c$, ხოლო v არის k კოორდინატთა სისტემის სიჩქარე k – ს მიმართ. შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულები მიიღება შტრიხიანი სიდიდეების უშტრიხო სიდიდეებით შეცვლისას და პირიქით, v სიჩქარის ნიშნის ცვლილებისას. (47.6) და (47.7.) ფორმულები ხელსაყრელია ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით, რომლებშიც ისინი უფრო ცხადად ჩანს:

$$\begin{aligned} \vec{D}'_{\parallel} &= \vec{D}_{\parallel}, & \vec{D}'_{\perp} &= \left(\frac{\vec{D} + \left[\vec{v} \times \frac{\vec{H}}{c^2} \right]}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp} \\ \vec{H}'_{\parallel} &= \vec{H}_{\parallel}, & \vec{H}'_{\perp} &= \left(\frac{\vec{H} - [\vec{v} \times \vec{D}]}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp}, \\ \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \left(\frac{\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp}, \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \left(\frac{\vec{B} - \left[\vec{v} \times \frac{\vec{E}}{c^2} \right]}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp} \end{aligned} \quad (41.8)$$

სადაც \parallel და \perp აღნიშნავს შესაბამისი სიდიდეების მდგენელებს კოორდინატთა სისტემის მოძრაობის სიჩქარის პარალელურად ან პერპენდიკულარულად. ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ (40.15) ფორმულით მოცემული განტოლებები წარმოადგენენ:

$$\vec{D}' = \epsilon_0 \vec{E}', \quad \vec{B}' = \mu_0 \vec{H}'$$

განტოლების ჩაწერას k კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც მიღებულია უძრავად. (41.6) და (41.7) ფორმულები შესაძლებლობას იძლევიან ვიპოვოთ ველის ვექტორები მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში, თუ ისინი ცნობილი არიან უძრავ კოორდინატთა სისტემაში და პირიქით.

კოორდინატთა სისტემის ფარდობითი მოძრაობის მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში, როდესაც შეიძლება $\beta^2 \ll 1$ რიგის წევრების უგულებელყოფა, (41.6) და (41.7) ფორმულები დებულობენ უფრო მარტივ სახეს:

$$\vec{D}' = \vec{D} + c^{-2}[\vec{v} \times \vec{H}], \quad \vec{H}' = \vec{H} - c^{-2}[\vec{v} \times \vec{D}] \quad (41.10)$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - c^{-2}[\vec{v} \times \vec{E}] \quad (41.11)$$

ეს განტოლებები განსაკუთრებულად ცხადად გვიჩვენებენ ველის ვექტორების სხვადასხვა როლს. ისინი გვიჩვენებენ, რომ მაგნიტური ველის \vec{H} და \vec{B} ვექტორები ასრულებენ ისეთივე როლს, რასაც შესაბამისი \vec{D} და \vec{E} ვექტორები ელექტრულ ველში. ამიტომ თუ \vec{E} ვექტორი წარმოადგენს ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორს, მაშინ სწორი იქნებოდა მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ვუწოდოთ \vec{B} ვექტორს. მაგრამ ეს სახელწოდება მინიჭებული აქვს \vec{H} ვექტორს, თუმცა ეს არც თუ ისე სამართლიანია. ფაქტიურად, \vec{H} ვექტორი ასრულებს ინდუქციის როლს.

ველის ტენზორების ინვარიანტები. (41.6)–(41.9) ფორმულების დახმარებით უშუალო გამოთვლებით შეიძლება შევამოწმოთ, რომ ერთი კოორდინატთა სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს არ იცვლიან თავის სიდიდეებს შემდეგი ინვარიანტები:

$$\begin{aligned} I_1 &= c^2 B^2 - E^2, & I'_1 &= H^2 - c^2 D^2, \\ I_2 &= [\vec{B} \times \vec{E}], & I'_2 &= [\vec{H} \times \vec{D}], \\ I_3 &= [\vec{H} \times \vec{B}] - [\vec{D} \times \vec{E}], \end{aligned} \quad (41.12)$$

ამ სიდიდეების ინვარიანტულობა შესაძლებლობას გვაძლევს, გავაკეთოთ ზოგიერთი დასკვნები ველის ვექტორების ყოფაქცევის შესახებ ერთი კოორდინატთა სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს:

- თუ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში $c^2 B^2 > E^2$ და $\vec{B} \perp \vec{E}$ მაშინ შესაძლებელია ავირჩიოთ კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომელშიც ელექტრული ველი არ არსებობს, ხოლო მაგნიტური კი განსხვავებულია ნულისაგან. თუ \vec{B} არ არის \vec{E} – ს პერპენდიკულარული, მაშინ ასეთი კოორდინატთა სისტემა არ არსებობს;
- თუ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში $c^2 B^2 < E^2$ და $\vec{B} \perp \vec{E}$ მაშინ შესაძლებელია ავირჩიოთ კოორდინატთა ისეთი სისტემა, რომელშიც მაგნიტური ველი არ არსებობს, ხოლო ელექტრული ველი განსხვავებულია ნულისაგან. თუ \vec{B} არ არის \vec{E} – ს პერპენდიკულარული, მაშინ ასეთი კოორდინატთა სისტემა არ არსებობს.
- თუ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში გვაქვს მხოლოდ ელექტრული, ან მხოლოდ მაგნიტური ველი, მაშინ სხვა კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის დროს გვექნება

როგორც ელექტრული, ისე მაგნიტური ველები, რომლებიც ერთმანეთის პერპენდიკულარულია;

- ბრტყელი ტალღა, რომლისთვისაც $cB = E$ და $\vec{B} \perp \vec{E}$ ყველა კოორდინატთა სისტემაში რჩება ბრტყელი.

ყველა ეს მტკიცებულება მიეკუთვნება ველის ვექტორების ყოფაქცევას ოთხგანზომილებიანი სივრცის ერთ რომელიმე წერტილში.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ველის სიდიდეები ტენზორებს ქმნიან?
2. როგორ გამოისახება ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობა პოტენციალებით?
3. როგორია ელექტრომაგნიტური ველის გარდაქმნის ტენზორული ფორმულირება?
4. როგორია ელექტრული და მაგნიტური ველების გარდაქმნის კანონები ერთ სისტემიდან მეორეში?
5. რა ფიზიკური მნიშვნელობა აქვს ველის ტენზორების ინვარიანტებს?
6. როგორ შეიძლება ავირჩიოთ ისეთი კოორდინატთა სისტემა, რომელშიც მხოლოდ ელექტრული ან მხოლოდ მაგნიტური ველი არსებობს?
7. როგორია ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღის თვისებები და მისი ინვარიანტულობა?

ლექცია 15. ელექტროდინამიკის ოთხგანზომილებიანი ფორმულირება II

- §42. ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე
- §43. ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისა და იმპულსის ტენზორი.
- §44. ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველი.
- §45. ლენარ-ვიხერტის პოტენციალები.

§42. ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივე

ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივის ვექტორი. დავწეროთ ლორენცის ძალის სიმკვრივე:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \quad (42.1)$$

(40.6) და (39.8) ფორმულების გათვალისწინებით კომპონენტებში:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\dots + H_{12}S_2 + H_{13}S_3 + H_{14}S_4}{c} \\ f_y &= \frac{H_{21}S_1 + \dots + H_{23}S_3 + H_{24}S_4}{c} \\ f_z &= \frac{H_{31}S_1 + H_{32}S_2 + \dots + H_{34}S_4}{c} \end{aligned} \quad (42.2)$$

ამ განტოლებების სიმეტრიული სტრუქტურა შესაძლებლობას გვაძლევს შემოვიტანოთ ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივის ვექტორი ფორმულით:

$$f_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} S_\nu \quad (42.3)$$

ამ განტოლების პირველი სამი კომპონენტი (f_1, f_2, f_3) ემთხვევა (42.1) ფორმულით მოცემული ლორენცის ძალის სივრცულ კომპონენტებს, ხოლო მეოთხე კომპონენტი კი ტოლია გამოსახულების:

$$f_4 = \frac{H_{41}S_1 + H_{42}S_2 + H_{43}S_3}{c} = i\rho \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{E}}{c} \right) \quad (42.4)$$

(42.1) ფორმულის საფუძველზე f_4 წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$f_4 = i(\vec{v} \cdot \vec{f})c \quad (42.5)$$

ამგვარად, ეს მდგენელი i/c მამრავლის სიზუსტით ტოლია იმ მუშაობის, რომელსაც ასრულებს ლორენცის ძალის სიმკვრივე ერთეულოვან მოცულობაში (რადგანაც \vec{f} ძალის სიმკვრივეა, ეს მუშაობა ეკუთვნის ერთეულოვან მოცულობას)

მინკოვსკის ძალის ოთხგანზომილებიანი ვექტორი. რომ გამოვთვალოთ რაიმე მოცულობაში მუხტზე მოქმედი სრული ძალა, საჭიროა მოვანდინოთ ძალის სიმკვრივის ინტეგრაცია

$$f_4 = \int f_v dV \quad (42.6)$$

სადაც dV - სივრცითი მოცულობის ელემენტი. მაგრამ F_v სიდიდეები არ ქმნიან ოთხგანზომილებიან ვექტორს, რადგანაც dV სივრცითი მოცულობის ელემენტი არ არის ინვარიანტი.

წერტილოვან ელექტრონზე მოქმედი ოთხგანზომილებიანი ძალის ვექტორის მისაღებად შევნიშნოთ, რომ ოთხგანზომილებიანი მოცულობის ელემენტი $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. ამ დებულების დასამტკიცებლად დავწეროთ მოცულობის ელემენტისათვის გარდაქმნის ფორმულა ცვლადების შეცვლისას:

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = \frac{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (42.7)$$

სადაც

$$\frac{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

– იაკობის დეტერმინანტია. იგი გარდაქმნის კოეფიციენტებიდან აგებული დეტერმინანტის ტოლია. უშუალო გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ ეს დეტერმინანტი ერთის ტოლია. ამიტომ (42.7) ფორმულა მიიღებს ტოლობის სახეს:

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (42.8)$$

რომელიც ადასტურებს სწორედ ოთხგანზომილებიანი მოცულობის ინვარიანტულობას. ჩავთვალოთ, რომ წერტილოვანი ელექტრონი მოთავსებულია $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ მოცულობის ელემენტში. f_v სიმკვრივის და ოთხგანზომილებიანი მოცულობის ინვარიანტულობის დამარებით შესაძლებელია ავაგოთ ძალის იმპულსის ოთხგანზომილებიანი ვექტორი:

$$dP_v = f_v dx_3 dx_2 dx dt \quad (42.9)$$

გავყოთ ტოლობის ორთავე მხარე ელექტრონის ინვარიანტულ საკუთარი $d\tau$ დროის ელემენტზე და მოვახდინოთ ინტეგრაცია სივრცითი კოორდინატების მიხედვით, მივიღებთ ელექტრონზე მოქმედი ოთხგანზომილებიანი ძალის ვექტორს:

$$K_v = \int \frac{dP_v}{d\tau} = \int f_v dV \frac{dt}{d\tau} = \int f_v \frac{dV}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (42.10)$$

სადაც $dt = dt\sqrt{1-\beta^2}$, K_v - მინკოვსკის ძალაა. წერტილოვანი ელექტრონის შემთხვევაში (42.10) ფორმულაში ინტეგრაცია მოცულობის მიხედვით დაიყვანება შემდეგი ფორმულის გამოყენებაზე:

$$\int \rho dV = e \quad (42.11)$$

მაშასადამე, მინკოვსკის ძალის პირველი სამი მდგენელი ტოლია ლორენცის ძალის სამი მდგენელის:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \quad (42.12)$$

გაყოფილი $\sqrt{1 - \beta^2}$ -ზე, ხოლო მეოთხე მდგენელი კი (42.4) ფორმულის საფუძველზე ტოლია:

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{e}{\sqrt{1 - \beta^2}} [\vec{v} \times \vec{E}] \quad (42.13)$$

ამრიგად, მინკოვსკის ოთხგანზომილებიანი ძალა შეიძლება ჩაწეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{K} = \left(\frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{i}{c} \frac{e(\vec{v}, \vec{E})}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (42.14)$$

სადაც \vec{F} განისაზღვრება (42.12) ფორმულის საფუძველზე.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. როგორ განისაზღვრება ოთხგანზომილებიანი ძალის სიმკვრივის ვექტორი?
2. რა განსხვავებაა ოთხგანზომილებიანი ძალის ვექტორსა და ლორენცის ძალას შორის?
3. როგორ მივიღოთ მინკოვსკის ოთხგანზომილებიანი ძალა ლორენცის ძალიდან?
4. რატომ არის ოთხგანზომილებიანი მოცულობის ელემენტი ინვარიანტული ლორენცის გარდაქმნების მიმართ?
5. როგორია ოთხგანზომილებიანი ძალის ვექტორის ფიზიკური მნიშვნელობა და როგორ განისაზღვრება მისი კომპონენტები?

§43. ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისა და იმპულსის ტენზორი

ტენზორი. იმისათვის, რომ დავასრულოთ ვაკუუმისათვის ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებებისა და სიდიდეების რელატივისტურად ინვარიანტულ ფორმაში ჩაწერა, აუცილებელია ვიპოვოთ კიდევ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯის სიმკვრივისა და იმპულსის ინვარიანტული წარმოდგენა. ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონების საფუძველზე ელექტრომაგნიტური ველის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ხასიათდება ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯისა და იმპულსის სათანადო ცვლილებით. მაშასადამე, ოთხგანზომილებიანი ძალის f_ν ვექტორი დაკავშირებული უნდა იყოს ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯის სიმკვრივესთან და იმპულსთან. ამიტომ ეს ვექტორი გამოვსახოთ ელექტრომაგნიტური ველის დამახასიათებელი სიდიდეების საშუალებით, ე. ი. ველის ტენზორებით. გავითვალისწინოთ (42.3) ფორმულაში s_ν -ს მნიშვნელობა (40.3) მაქსველის განტოლებიდან, მივიღებთ:

$$f_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\nu} \quad (43.1)$$

ვისარგებლოთ შემდეგი ცხადი ფორმულით:

$$H_{\mu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial (H_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu})}{\partial x_\nu} - \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} F_{\alpha\nu} \quad (43.2)$$

და გავითვალისწინოთ, რომ $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ ტენზორების ანტისიმეტრიულობის გამო სამართლიანია ტოლობა:

$$\frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} \right) \quad (43.3)$$

(43.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{\alpha,\gamma} \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\gamma} \left(\frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} \right) \quad (43.4)$$

სადაც, მეორე წევრში გადანაცვლებულია აჯამვის ინდექსები $\alpha \rightarrow \gamma$ და $\gamma \rightarrow \alpha$:

$$\sum_{\alpha,\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha,\gamma} \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\gamma} \quad (43.5)$$

(43.4) გამოსახულებაში უკანასკნელ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება (40.7) განტოლების საფუძველზე ტოლია $-\frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu}$ მაშასადამე

$$\sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\gamma} \sum_{\alpha,\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu}$$

ამ სიდიდის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (41.4) –ით, მაშინ

$$\sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu} = \sum_{\alpha,\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\alpha,\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma} \quad (43.6)$$

მაშასადამე, გავითვალისწინოთ (43.2), (43.4) და (43.6) ფორმულები, მაშინ (43.1) გამოსახულება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$f_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\gamma=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\sum_{\alpha=1}^4 H_{\mu\alpha} F_{\alpha\gamma} \right) + \frac{1}{4c} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\alpha,\gamma} F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma} \quad (43.7)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^4 H_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4c} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\gamma=1}^4 (F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}) \quad (43.8)$$

სადაც $\delta_{\mu\nu}$ კრონეკერის სიმბოლოა:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases}$$

მაშინ f_ν ძალის სიმკვრივის გამოსახულება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad (43.9)$$

ე. ი. $T_{\mu\nu}$ ტენზორის ოთხგანზომილებიანი დივერგენციის სახით. $T_{\mu\nu}$ ტენზორს უწოდებენ ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიისა და იმპულსის ტენზორს. როგორც (43.8) ფორმულიდან

ჩანს, იგი წარმოადგენს სიმეტრიულ ტენზორს. ამ ტენზორის კომპონენტების გამოსახულებანი ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის საშუალებით შეიძლება მივიღოთ, თუ გავითვალისწინებთ (43.8) ფორმულაში $F_{\mu\nu}$ და $H_{\mu\nu}$ ტენზორების მნიშვნელობებს (40.3) და (40.6) ფორმულების საფუძველზე. (43.8) ფორმულის მუდმივი წევრი გამოისახება ასე:

$$\frac{1}{4c} \sum_{\nu=1}^4 (F_{\alpha\nu} H_{\alpha\nu}) = \frac{1}{2} \{(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{D} \cdot \vec{E})\} \quad (43.10)$$

(43.8) ფორმულით მოცემული ტენზორის დანარჩენი სხვა კომპონენტები გამოითვლება ანალოგიურად (40.3) და (40.6) ფორმულების საფუძველზე. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= D_x E_x + H_x B_x - \frac{1}{2} \{(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{D} \cdot \vec{E})\} \\ T_{xy} &= T_{yx} = D_x E_y + H_x B_y = E_x D_y + B_x H_y \\ T_{yy} &= D_y E_y + H_y B_y - \frac{1}{2} \{(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{D} \cdot \vec{E})\} \\ T_{yz} &= T_{zy} = D_y E_z + H_y B_z = D_z E_y + B_y H_z \\ T_{zz} &= D_z E_z + H_z B_z - \frac{1}{2} \{(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{D} \cdot \vec{E})\} \\ T_{zx} &= T_{xz} = E_z D_x + B_z H_x = D_z E_x + B_x H_z \end{aligned} \quad (43.11)$$

მათი დახმარებით და

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}], \quad \vec{g} = \left[\vec{E} \times \frac{\vec{H}}{c^2} \right]$$

$$w = \frac{(\vec{D} \cdot \vec{E}) + (\vec{H} \cdot \vec{B})}{2}$$

გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ ენერჯისა და იმპულსის ტენზორს შემდეგი სახით:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & w \end{pmatrix} \quad (43.12)$$

ცალკეული კომპონენტების შინაარსი. გამოვარკვით $T_{\mu\nu}$ ტენზორის კომპონენტების შინაარსი და (43.9) სხვადასხვა განტოლების შინაარსი. მოვახდინოთ (43.9) განტოლების ($\mu = 4$) ინტეგრაცია სამგანზომილებიანი მოცულობის $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ მიხედვით:

$$\int_V f_4 dV = \int_V \left(\frac{\partial T_{41}}{\partial x} + \frac{\partial T_{42}}{\partial y} + \frac{\partial T_{43}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int_V w dV \quad (43.13)$$

ვისარგებლოთ f_ν – სათვის (42.5) ფორმულით და (43.12) ფორმულის საფუძველზე გამოვსახოთ T_{4i} კომპონენტი, გადავწეროთ (43.13) განტოლება ასე:

$$\int_V (\vec{v} \cdot \vec{f}) dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{S} \cdot dV - \frac{d}{dt} \int_V w dV = - \int_S (\vec{S} \cdot d\vec{\sigma}) - \frac{d}{dt} \int_V w dV \quad (43.14)$$

სადაც გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემის საფუძველზე მოცულობითი ინტეგრალი გარდაქმნილია ზედაპირულ ინტეგრალში. (43.14) განტოლება გამოსახავს სწორედ ენერჯის შენახვის კანონს ელექტრომაგნიტური ველისათვის.

ამგვარად, (43.9) განტოლება, როდესაც $\mu = 4$, გამოსახავს ენერჯის შენახვის კანონს ელექტრომაგნიტური ველისათვის. ამ ფაქტით გამართლებულია (43.12) – ის უკანასკნელ სტრიქონში S_x, S_y, S_z -ის ჩაწერა, რომლებიც ახასიათებენ ენერჯის ნაკადს და არა g_x, g_y, g_z სიდიდეების ჩაწერა, რომლებიც ახასიათებენ იმპულსს, თუმცა

$$\frac{S}{c} = cg \quad (43.15)$$

და ფორმალურად შეიძლებოდა (43.12) ფორმულის უკანასკნელ სვეტში სამი წევრისათვის ადგილების შენაცვლება უკანასკნელი სტრიქონის სამი წევრით. განვიხილოთ ახლა (43.9) –ის განტოლებებიდან ერთ-ერთი პირველი განტოლება, მაგალითად, როცა $\mu = 1$. ანალოგიურად მოვახდინოთ ინტეგრაცია მოცულობის მიხედვით:

$$\int_V f_1 dV = \int_V \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int_V T_{14} dV$$

რადგანაც $f_1 = f_x$ არის ძალის სიმკვრივის x მდგენელი, ამიტომ (43.16) –ის მარცხენა მხარეში გვაქვს dV მოცულობაში არსებულ მუხტებზე მოქმედი ძალა. (43.16)–ის უკანასკნელი შესაკრები

$$- \frac{d}{dt} \int_V g_x dV$$

გამოსახავს ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის x კომპონენტის ცვლილებას dV მოცულობაში. (43.16)–ის პირველ ინტეგრალში T_{1i} სიდიდე შეიძლება განვიხილოთ როგორც \vec{F} ვექტორის სხვადასხვა კომპონენტი;

$$\vec{F}_x = T_{11}, \quad \vec{F}_y = T_{12}, \quad \vec{F}_z = T_{13} \quad (43.17)$$

მაშინ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის საფუძველზე ეს ინტეგრალი შეიძლება გარდაიქმნას ზედაპირულ ინტეგრალად:

$$\int_V \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \right) dV = \int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (43.18)$$

(43.16)–ის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ძალას. მაშასადამე, (43.18) ინტეგრალსაც უნდა ჰქონდეს ძალის განზომილება. ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ იგი წარმოადგენს V მოცულობის შემომსახურველ ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალის x მდგენელს. ძალა

$$\int_V f_1 dV \quad (43.19)$$

კლასიკური მექანიკის კანონების თანახმად იწვევს მატერიალური ნაწილაკების $G^{6აწ}$ იმპულსის ცვლილებას, მაშინ

$$\frac{dG_x}{dt} = \int_V f_1 dV \quad (43.20)$$

ამგვარად, (43.16) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dt} \left(G_x + \int_V g_x dV \right) = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (43.21)$$

იგი ემთხვევა V მოცულობაში არსებულ მუხტებზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობას, რომელიც ადრე გვქონდა მიღებული პირდაპირი გამოთვლების დროს. (43.9) განტოლების ანალოგიური განტოლებები მიიღება აგრეთვე როცა $\mu = 2, 3$. ისინი გამოსახავენ იმპულსის შენახვის კანონს, რადგანაც იგი აკავშირებს (43.21) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მოცულობაზე მოქმედ სრულ ძალას მატერიალური სხეულებისა და ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსის ცვლილებასთან.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის ელექტრომაგნიტური ველის ენერჯიისა და იმპულსის ტენზორი?
2. როგორ უკავშირდება ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონს?
3. რატომ არის ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი სიმეტრიული?
4. როგორ განისაზღვრება ტენზორის კომპონენტები ელექტრული და მაგნიტური ველების მეშვეობით?
5. როგორია ენერჯიის შენახვის კანონის მათემატიკური ფორმულირება ოთხგანზომილებიან სივრცეში?
6. როგორ არის ელექტრომაგნიტური ველის იმპულსი დაკავშირებული მატერიალური სხეულების იმპულსთან?

§ 44. ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონის ელექტრომაგნიტური ველი

ლენარ-ვიხერტის პოტენციალები. დავუშვათ, ელექტრონის კოორდინატებია $y_1, y_2, y_3, y_4 = ict'$ ხოლო იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც გამოითვლება მოძრავი ელექტრონის მიერ შექმნილი ველის პოტენციალი, არის $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ მივიღოთ მხედველობაში, რომ ელექტრონიდან ელექტრომაგნიტური შეშფოთება ვრცელდება სინათლის სიჩქარით. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = c^2(t - t')^2 \quad (44.1)$$

თუ შემოვიტანთ ვექტორს კომპონენტებით

$$R_i = x_i - y_i \quad (44.2)$$

მაშინ (44.1) პირობა შეიძლება ჩავწეროთ რელატივისტურად ინვარიანტული ფორმით:

$$R^2 = \sum_{i=1}^4 R_i^2 = 0 \quad (44.3)$$

საჭიროა ვიპოვოთ ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$, რომელსაც ქმნის ნებისმიერად მოძრავი ელექტრონი. იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც დროის მოცემული მომენტისათვის ელექტრონი უძრავია, მის მიერ შექმნილი ოთხგანზომილებიანი პოტენციალი ცნობილია:

$$\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)} = \Phi_3^{(0)} = 0, \quad \Phi_4^{(0)} = i \frac{\varphi^{(0)}}{c} = \frac{i}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \quad (44.4)$$

რადგანაც ამ შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ველი დაიყვანება წერტილოვანი მუხტის კულონურ ველზე. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში, ე. ი. კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც ელექტრონი ნებისმიერად მოძრაობს, ოთხგანზომილებიანი პოტენციალის ფორმულები, საჭიროა (44.4) ტოლობა გადავწეროთ ერთი ვექტორული განტოლების სახით. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც დროის მოცემული მომენტისათვის ელექტრონი უძრავია, ელექტრონის ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის $u_i = dy_i/dt$ კომპონენტები ტოლია:

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0, \quad u_4^{(0)} = ic \quad (44.5)$$

ამიტომ (44.4) ტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$\Phi_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eu_v}{r_0 c^2} \quad (44.6)$$

სადაც r_0 ინვარიანტული სიდიდეა, რომელიც ტოლია სამგანზომილებიანი მანძილის ელექტრონიდან განსახილველ წერტილამდე იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც ელექტრონი უძრავია. ეს ინვარიანტი ტოლია:

$$r_0 = -\frac{1}{c} \sum_i R_i u_i \quad (44.7)$$

(44.7) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შედის ორი ოთხგანზომილებიანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი, რომელიც ინვარიანტულია. ხელსაყრელია მისი სიდიდე გამოვთვალოთ იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც ელექტრონი უძრავია, მაგრამ ამ კოორდინატთა სისტემაში (44.7) ტოლობა ცხადია. მით უმეტეს, იგი დამტკიცებულია ნებისმიერ სხვა სისტემაში. (44.3) დამატებითი პირობის გათვალისწინებით (44.7) ტოლობის დახმარებით (44.6) გამოსახულება საბოლოოდ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi_v = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eu_v}{c \sum_i R_i u_i} \quad (44.8)$$

(44.8) ფორმულა მთლიანად რელატივისტურად ინვარიანტულია. ჩავწეროთ იგი იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომელშიც ელექტრონი მოძრაობს, მივიღებთ მოძრავი ელექტრონის მიერ შექმნილი პოტენციალების გამოსახულებებს.

მივიღოთ მხედველობაში, რომ:

$$(u_1, u_2, u_3) = \frac{(v_1, v_2, v_3)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (44.9)$$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ - ელექტრონის სამგანზომილებიანი სიჩქარეა და გავითვალისწინოთ:

$$\sum_{i=1}^4 R_i u_i = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{rc}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (44.10)$$

მაშინ (44.8) გამოსახულება ოთხგანზომილებიანი პოტენციალისათვის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი განტოლებების სახით ვექტორული და სკალარული პოტენციალებისათვის:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[\frac{ev}{r - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c}} \right]_{t-\frac{r}{c}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{ev}{r - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c}} \right]_{t-\frac{r}{c}} \quad (44.11)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\left(r - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c} \right)_{t-\frac{r}{c}}} \quad (44.12)$$

ამ ფორმულებში \vec{A} და φ პოტენციალები გამოითვლება სივრცის რომელიღაც წერტილში დროის t მომენტისათვის. მარჯვენა მხარეში ელექტრონის \vec{v} სიჩქარე და \vec{r} რადიუს-ვექტორი, რომელიც გავლებულია ელექტრონის მდებარეობის წერტილიდან იმ წერტილამდე, რომელშიც გამოითვლება პოტენციალი, უნდა ავიღოთ არა დროის t მომენტისათვის, არამედ დროის $t - r/c$ წინა მომენტისათვის, რის გამოც გათვალისწინებულია ელექტრომაგნიტური ქმედების გავრცელების სიჩქარის სასრულობა, გამოსახული (44.3) ტოლობით. (44.11) და (44.12) პოტენციალები ცნობილია ლენარ-ვიხერტის პოტენციალების სახელწოდებით. მათი დახმარებით შესაძლებელია გამოვთვალოთ ნებისმიერად მოძრავი წერტილოვანი მუხტის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველი.

ნებისმიერად მოძრავი მუხტის ველი. ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორები პოტენციალებთან დაკავშირებული არიან ფორმულებით:

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = rot\vec{A} \quad (44.13)$$

ამასთან, სკალარული და ვექტორული პოტენციალები მოცემულია (44.11) და (44.12) ფორმულებით, რომლებიც ხელსაყრელია, გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{e\vec{v}}{s} \right), \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{s} \right), \quad \tau = t - \frac{r}{c}, \quad s = r - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c} \quad (44.14)$$

ელექტრონის მოძრაობის კოორდინატები მოცემულია, როგორც t' დროის ფუნქციები:

$$y_1 = y_1(t'), \quad y_2 = y_2(t'), \quad y_3 = y_3(t') \quad (44.15)$$

(44.1) პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$c(t - t') = r = \sqrt{[x_1 - y_1(t')]^2 + [x_2 - y_2(t')]^2 + [x_3 - y_3(t')]^2} \quad (44.16)$$

ეს განტოლება არაცხადი სახით განსაზღვრავს t' -ს, როგორც x_1, x_2, x_3, t -ს ფუნქციას. \vec{r} ცხადად არის დამოკიდებული

მხოლოდ x, y, z და t' -ზე, ხოლო სიჩქარის \vec{v} ვექტორი, რომლის მდგენელებიც $y_i = dy_i/dt'$ ცხადად არის დამოკიდებული მხოლოდ t' -ზე. t დრო პოტენციალების გამოსახულებებში ცხადი სახით არ შედის.

(44.13) ფორმულიდან (44.14)-ის გათვალისწინებით \vec{E} დაძაბულობისათვის ვლებულობთ შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{s^2} \text{grad}s + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{e\vec{v}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{e}{s} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \quad (44.17)$$

მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ვექტორული ანალიზის შემდეგი ფორმულით:

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \text{rot} \vec{A} + [\text{grad} \varphi \times \vec{A}]$$

მივიღებთ:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi s} \text{rot} \vec{v} + \frac{\mu_0}{4\pi} e \left[\text{grad} \frac{1}{s} \times \vec{v} \right] = \frac{\mu_0 e}{4\pi s} \text{rot} \vec{v} - \frac{\mu_0 e}{4\pi s^2} [\text{grad} s \times \vec{v}] \quad (44.18)$$

ამგვარად, დაძაბულობის გამოთვლის ამოცანა დაიყვანება $\frac{\partial s}{\partial t}$, $\text{grad} s$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\text{rot} \vec{v}$ სიდიდეების გამოთვლაზე. გავითვალისწინოთ, რომ \vec{v} ვექტორი დამოკიდებულია x, y, z, t კოორდინატებზე არაცხადი სახით t' -ის საშუალებით, ხოლო s კი შეიცავს x, y, z -ს ცხადი სახით, ამიტომ;

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \left(-\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r} - \frac{c^2}{c} - \frac{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}})}{c} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (44.19)$$

სადაც

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} = \vec{v}, \quad \frac{\partial r}{\partial t'} = -\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r}$$

შემდეგ

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \dot{\vec{v}} \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (44.20)$$

$$\text{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \dot{v}_z \frac{\partial t'}{\partial y} - \dot{v}_y \frac{\partial t'}{\partial z} = \text{grad}_y t' \dot{v}_z - \text{grad}_z t' \dot{v}_y = [\text{grad} t' \times \dot{\vec{v}}]_x \quad (44.21)$$

$\text{rot} \vec{v}$ სხვა მდგენელებს აქვთ ანალოგიური სახე, ამიტომ:

$$\text{rot} \vec{v} = [\text{grad} t' \times \dot{\vec{v}}] \quad (44.22)$$

$\partial t'/\partial t$ და $\text{grad} t'$ სიდიდეები მიიღებიან (44.16) ტოლობიდან t -თი გადიფერენციალებისა და გრადიენტის დახმარებით, მივიღებთ:

$$c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$-c \operatorname{grad} t' = \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r} \operatorname{grad} t' \quad (44.23)$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{1 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{rc}} = \frac{\vec{r}}{s}, \\ \operatorname{grad} t' &= -\frac{\vec{r}}{rc \left(1 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{rc}\right)} = -\frac{\vec{r}}{cs} \end{aligned} \quad (44.24)$$

გავითვალისწინოთ მიღებული გამოსახულებები (44.17) და (44.18) ფორმულებში, მივიღებთ ველის დაძაბულობებისათვის შემდეგ ფორმულებს:

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \vec{E} &= \frac{e}{s^2} \frac{r}{c^2} \dot{\vec{v}} + \frac{er}{s^3} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \right) \\ 4\pi\epsilon_0 \vec{H} &= -\frac{e}{s^2} \frac{[\vec{r} \times \dot{\vec{v}}]}{c} + \frac{ec}{s^3} [\vec{v} \times \vec{r}] \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (44.25)$$

უშუალო შემოწმებით ადვილად ვრწმუნდებით, რომ:

$$\frac{\vec{H}}{c} = \left[\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{D} \right] \quad (44.26)$$

ე.ი. მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ყოველთვის პერპენდიკულარულია რადიუს-ვექტორის, ელექტრულ ვექტორს კი გააჩნია რადიალური მდგენელი:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{s^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (44.27)$$

(44.25) ფორმულებით აღწერილი ველი შეიძლება გავშალოთ ორ ნაწილად, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან: ა) მხოლოდ სიჩქარეზე. ეს ველი ეცემა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად და აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{E}_1 &= \frac{er}{s^3} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \\ 4\pi\epsilon_0 \vec{H}_1 &= \frac{ce}{s^3} [\vec{v} \times \vec{r}] \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (44.28)$$

ბ) მხოლოდ აჩქარებაზე. ეს ველი ეცემა მანძილის პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად და აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{E}_2 &= -\frac{er}{c^2 s^2} \dot{\vec{v}} + \frac{er}{c^2 s^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{v}}{c} \right), \\ 4\pi\vec{H}_2 &= -\frac{e}{cs^3} [\vec{r} \times \dot{\vec{v}}] + \frac{e}{cs^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) [\vec{r} \times \vec{v}] \end{aligned} \quad (44.29)$$

უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ:

$$\frac{\vec{H}_2}{c} = \left[\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{D}_2 \right] \quad (44.30)$$

ორივე \vec{E}_2 და \vec{H}_2 ვექტორები პერპენდიკულარულნი არიან რადიუს-ვექტორის. თუ (44.30) ფორმულის ორივე მხარიდან ავიღებთ მოდულს, მივიღებთ:

$$\frac{\vec{H}_2}{c} = \vec{D}_2.$$

$$\frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (44.31)$$

გავითვალისწინოთ, რომ მაშინ ეს ტოლობა შეიძლება წარმოვადგინოთ კიდევ შემდეგი სახით:

$$\sqrt{\epsilon_0 E_2} = \sqrt{\mu_0 H_2} \quad (44.32)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ აჩქარებაზე დამოკიდებულ ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობების ვექტორებს შორის არსებობს თანაფარდობა, რომელიც დამახასიათებელია ელექტრომაგნიტური ტალღისათვის. ამ ველს გააჩნია სფერული ელექტრომაგნიტური ტალღის სახე, რომელსაც ელექტრონი ასხივებს. სიჩქარესთან დაკავშირებული პირველი ველი წარმოადგენს ელექტრონთან ერთად მოძრავ ელექტროსტატიკურ ველს, ხოლო მეორე ველი, რომელიც განპირობებულია აჩქარებით, წარმოადგენს გამოსხივების ველს. ელექტრონიდან გაცილებით დიდ მანძილებზე გამოსხივების ველი უპირატესი ველია, რადგანაც იგი ეცემა მანძილის მიხედვით ნელა, ვინემ პირველი ველი. ამგვარად, (44.25) ფორმულები შესაძლებლობას გვაძლევს ვიპოვოთ ველი, თუ ცნობილია ამ ველის შემქმნელი მუხტის მოძრაობა.

კითხვები თვითშეფასებისათვის:

1. რა არის ლენარ-ვიხერტის პოტენციალები და როგორ გამოითვლება ისინი?
2. რატომ არის საჭირო ელექტრომაგნიტური ქმედების გავრცელების სიჩქარის (c) გათვალისწინება?
3. როგორ განისაზღვრება მოძრავი ელექტრონის მიერ შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველი?
4. როგორ არის ელექტრული ველი დაკავშირებული აჩქარებასთან და სიჩქარესთან?
5. რატომ ეცემა აჩქარებაზე დამოკიდებული ელექტრული ველი მანძილის პირველი ხარისხის უკუპროპორციულად, ხოლო სიჩქარეზე დამოკიდებული ველი – კვადრატულად?
6. რა არის მოძრავი მუხტის ელექტრული და მაგნიტური ველების პერპენდიკულარობის მიზეზი?
7. რა განსხვავებაა ელექტროსტატიკურ ველსა და გამოსხივების ველს შორის?
8. როგორია ელექტრომაგნიტური ტალღის მახასიათებლები, რომელიც ელექტრონიდან წარმოიქმნება?