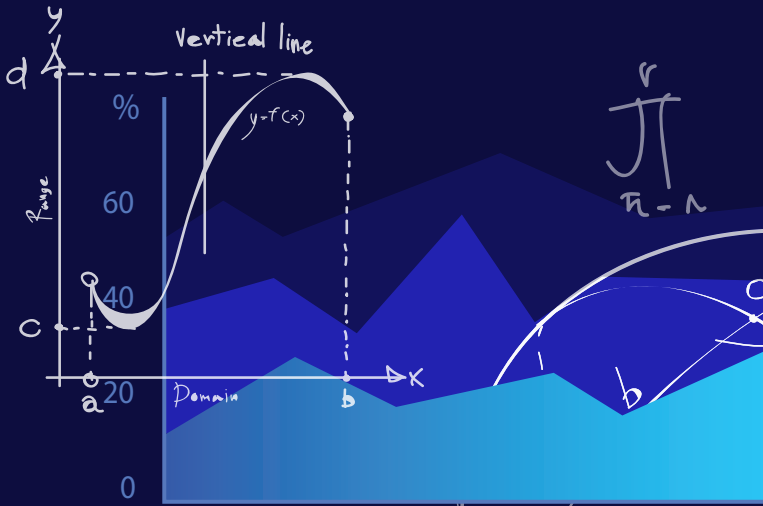


ნუგზარ ლომიძე, იზოლდრა ჯაბნიძე, გეგურ სურმანიძე

ფიზიკური პროცესების მოდელირება



```
Private Sub CommandButton1_Click()
dt = 0.005: m = 1: x = 20: y = 0: vy = 8: vx = 0
For i = 1 To 25000
t = i * dt: r = Sqr(x * x + y * y): cosa = x / r: sina = y / r
F = -2000 / (r * r): ax = F * cosa / m: ay = F * sina / m
vx = vx + ax * dt: vy = vy + ay * dt
x = x + vx * dt: y = y + vy * dt
If i Mod 50 = 0 Then
Cells(i / 50, 1) = t: Cells(i / 50, 2) = x
Cells(i / 50, 3) = y
End If
Next
End Sub
```

```
Sub Furie()
harm_N = 30: Pi = 3.1415926: dt = 2 * Pi / 1000: Period = 2 * Pi
w = 2 * Pi / Period: 'Deffnn U(t) = Abs(10 * Sin(w * t))
```

```
For i = 1 To 1000
t = i * dt: U0 = U0 + Abs(Cos(w * t)) * dt: Next i
```

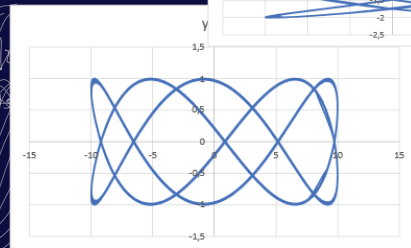
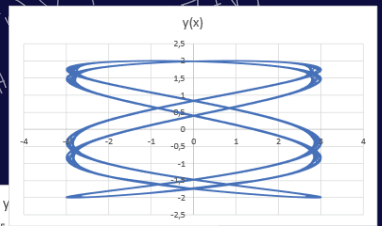
```
U0 = U0 / Period: Cells(1, 5) = U0
For n = 1 To harm_N
aa = 0: bb = 0
```

```
For i = 1 To 1000
t = i * dt: U = Abs(Cos(w * t))
aa = aa + U * Cos(n * w * t) * dt
```

```
Next i: a = 2 * aa / Period
For i = 1 To 1000
```

```
w = 2 * Pi / Period: U = Abs(Cos(w * t))
'If t > Period/2 then U = 0 else U = 10:
t = i * dt: bb = bb + U * Sin(n * w * t) * dt: Next i
```

```
b = 2 * bb / Period: Cells(n, 1) = a: Cells(n, 2) = b
Next n
End Sub
```



$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = u + at$$

$$w = F \cdot s$$

ნუგზარ ღომიძე, იზოლდა ჯაბნიძე, ზებურ სურმანიძე

ფიზიკური პროცესების მოდელირება



გამომცემლობა
„ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი“
ბათუმი – 2023

UDC(უაკ) 53(075.8)
ღ-796

რედაქტორები:

ლალი კალანდაძე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი
ვახტანგ ბერიძე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი

გრაფიკული რედაქტორი

ლუკა ღომიძე

ტექნიკური რედაქტორი

ედუარდ ანანიძე, გამომცემლობა „ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის“ წამყვანი სპეციალისტი

ყდის დიზაინი

ანა სურმანიძე

რეცენზენტები:

ომარ ნაკაშიძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი
ციცინო სარაჯიშვილი - პედაგოგიურ მეცნიერებათა კანდიდატი, ბსუ-ს ასოცირებული პროფესორი

აღიარება:

სახელმძღვანელოდ აღიარებულია ბსუ-ს საგამომცემლო საბჭოს მიერ (ოქმი №1, 26.01.2023)

ISBN 978-9941-488-72-6

© „ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი“ - 2023

სარჩევი

| | |
|---|---------|
| წინასიტყვაობა | - 5 - |
| შესავალი | - 6 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №1. წრფივი თანაბარი მოძრაობის მოდელირება | - 9 - |
| ამოცანები | - 11 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №2. თანაბარცვალებადი მოძრაობის მოდელირება | - 13 - |
| ამოცანები | - 15 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №3. მათემატიკური ქანქარა | - 19 - |
| ამოცანები | - 21 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №4. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელირება ... | - 23 - |
| ამოცანები | - 25 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №5. ზამბარიანი ქანქარას რხევის მოდელირება ნახევარინტერვალთა მეთოდით ... | - 28 - |
| ნახევარინტერვალთა მეთოდი | - 29 - |
| ამოცანები | - 33 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №6. სხეულის ვარდნის მოდელირება წინააღმდეგობის ძალების გათვალისწინებით | - 35 - |
| ლოგიკური ფუნქციების გამოყენება გამოთვლებისას | - 38 - |
| ამოცანები | - 40 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №7. ექსპერიმენტით მიღებული მონაცემების დამუშავება | - 42 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №8. შემთხვევითი ცდომილებების შეფასება | - 45 - |
| შემთხვევითი ცდომილების გავლენის შესწავლა გაზომვის შედეგებზე | - 48 - |
| ამოცანები | - 49 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №9. უმცირესი კვადრატების მეთოდი | - 50 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №10. ალფა ნაწილაკების გაბნევის მოდელირება რეზერფორდის ცდაში | - 59 - |
| ამოცანები | - 63 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №11. მიღწეადი რხევების მოდელირება LRC რხევით კონტურში | - 68 - |
| ამოცანები | - 71 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №12. იძულებითი რხევების მოდელირება ელექტრულ რხევით კონტურში | - 73 - |
| Excel-ის ინსტრუმენტი Goal Seek (ამონახსნის ძიება) | - 74 - |
| ამოცანები | - 76 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №13. მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის აგება | - 77 - |
| ამოცანები | - 79 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №14. მართკუთხა იმპულსების გავლა RC წრედში | - 80 - |
| ამოცანები | - 81 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №15. მართკუთხა იმპულსების გავლა RL წრედში | - 82 - |
| ამოცანები | - 83 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №16. სითხის დინება ჭურჭლიდან | - 84 - |
| კითხვები თვითშეფასებისათვის | - 85 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №17. ფიზიკური ქანქარა | - 86 - |
| ამოცანები | - 87 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №18. ფუკოს ქანქარა | - 88 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №19. სხეულის მოძრაობა ცენტრალურ ძალთა ველში | - 91 - |
| ამოცანები | - 94 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №20. შეკავშირებულ კონტურთა სისტემის მოდელირება | - 95 - |
| ამოცანები | - 98 - |
| ლაბორატორიული ამოცანა №21. ამოცანები მაკროსების გამოყენებით | - 99 - |
| ამოცანა 21.1. ლისაჟუს ფიგურები | - 100 - |
| ამოცანა 21.2. იძულებითი რხევები | - 101 - |
| ამოცანა 21.3. დაფინგის ქანქარა | - 102 - |
| ამოცანა 21.4. პუანკარეს კვეთები | - 103 - |

| | |
|--|---------|
| ამოცანა 21.5. ლორენცის ატრაქტორი | - 105 - |
| ამოცანა 21.6. მოხეტიალე მოლეკულა | - 106 - |
| ამოცანა 21.7. კარნოს ციკლი | - 108 - |
| ამოცანა 21.8. ტემპერატურის განაწილება დეროს გასწვრივ | - 110 - |
| ამოცანა 21.9. სამი მუხტის ველი | - 111 - |
| ამოცანა 21.10. სამი დენიანი გამტარის მაგნიტური ველი..... | - 112 - |
| ამოცანა 21.11. მიმდევრობითი რხევითი კონტური..... | - 113 - |
| ამოცანა 21.12. ტალღების დიფრაქცია. კარნიუს სპირალი | - 116 - |
| ამოცანა 21.13. სიგნალის წარმოდგენა ფურიეს მწკრივად და მისი აღდგენა | - 118 - |
| ამოცანა 21.14. აბსოლუტურად შავი სხეული | - 119 - |
| ამოცანა 21.15. რადიაქტიურობა | - 120 - |
| გამოყენებული ლიტერატურა | - 122 - |
| საძიებელი..... | - 123 - |

წინასიტყვაობა

სახელმძღვანელო „ფიზიკური პროცესების მოდელირება“ განკუთვნილია ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტებისთვის. ლაბორატორიული სამუშაოს შესრულებამდე აუცილებელია, სტუდენტი იცნობდეს შესაბამისი განსახილველი ამოცანის თეორიასა და ანალიზურ ფორმულებს (ე.წ. გამოსათვლელ ფორმულებს), ასევე, უნდა შეეძლოს ფიზიკური პროცესის აღმწერი ცვლადი და მუდმივი პარამეტრების გამოყოფა.

ლაბორატორიული სამუშაოების უმრავლესობა სრულდება Microsoft Excel-ში დამზადებული მზა შაბლონებით. შაბლონებში მოცემულია გამოთვლებისთვის აუცილებელი ძირითადი ფორმულები, სტუდენტს მოეთხოვება, შაბლონის გამოყენებით შეასრულოს ამა თუ იმ პროცესის ანალიზი; სტუდენტს ევალება, განსაზღვროს მუდმივები და ცვლადები ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, შეასრულოს შესაბამისი გამოთვლები და გაანალიზოს შედეგები, იქ, სადაც შესაძლებელია, შედეგები ასახოს გრაფიკულად. ამისთვის აუცილებელია, სტუდენტი გაეცნოს შაბლონის სტრუქტურას, საჭიროებისამებრ დამოუკიდებლად შექმნას ახალი შაბლონები და გადაწყვიტოს სტანდარტული და არასტანდარტული ამოცანები.

მნიშვნელოვანია განისაზღვროს ცხრილში მონაცემთა რაოდენობა. მონაცემთა რაოდენობა ცხრილებში დამოკიდებულია ამოცანის სირთულეზე. ასე მაგალითად, ანალიზური (წერტილოვანი) ფორმულებით წრფივი დამოკიდებულების მოდელირებისთვის საჭიროა მინიმალური რაოდენობა (20-30), უფრო რთული ამოცანებისთვის, მაგალითად, როცა საჭიროა დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა რიცხვითი მეთოდით, შესაძლოა, საჭირო გახდეს 1000-ზე მეტი რიცხვითი მონაცემის დამუშავება, რადგან მცირე მონაცემთა რაოდენობით კარგად ვერ აისახება მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილები, გრაფიკის სიგლუვე და ა.შ.

თითოეული ფიზიკური პროცესისთვის საჭიროა შედგეს ალგორითმი, რაც მოიცავს შუალედური გამოთვლებისთვის საჭირო დამატებითი სიდიდეების (დროითი ინტერვალების, კოორდინატის ნაზრდის ე.წ. ბიჯის, და ა.შ) განსაზღვრას.

ცალკეული ფიზიკური პროცესის მოდელის აგება ხორციელდება Microsoft Excel-ის პროგრამულ გარსაცმში. ამ პროგრამული პაკეტის შერჩევა განპირობებულია ძირითადად. ორი მიზეზით, ჯერ ერთი, ის თითქმის ყველა სტუდენტისთვის ხელმისაწვდომია, რადგან წარმოადგენს Microsoft Office-ის შემადგენელ პაკეტს და ფართოდ არის გავრცელებული და მეორეც, სტუდენტები შეძლებენ Microsoft Excel-ის პაკეტის პროფესიული კუთხით გამოყენებას, ჩასწვდებიან მის უნიკალურ შესაძლებლობებს, მათ შორის, მოდელირების კუთხით. თითოეული ალგორითმი, რომელიც გამოყენებული იქნება ცალკეული ფიზიკური პროცესის მოდელირებისთვის სავსებით შესაძლებელია, რეალიზებულ იქნას MathCad-ის ან MathLab-ის პროგრამულ პაკეტებში. უფრო რთული ამოცანებისთვის შემოთავაზებულია ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდი მაკროსის კოდის საშუალებით, რომელიც იწერება Visual Basic პროგრამულ ენაზე. რა თქმა უნდა, Visual Basic -ის ყველა ბრძანების შესწავლა მოცემული კურსის ფარგლებში შეუძლებელია, თუმცა სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მაგალითების დეტალური განხილვის საფუძველზე სტუდენტი თავისუფლად შეძლებს, გადაწყვიტოს პრაქტიკულად ნებისმიერი სირთულის ამოცანა.

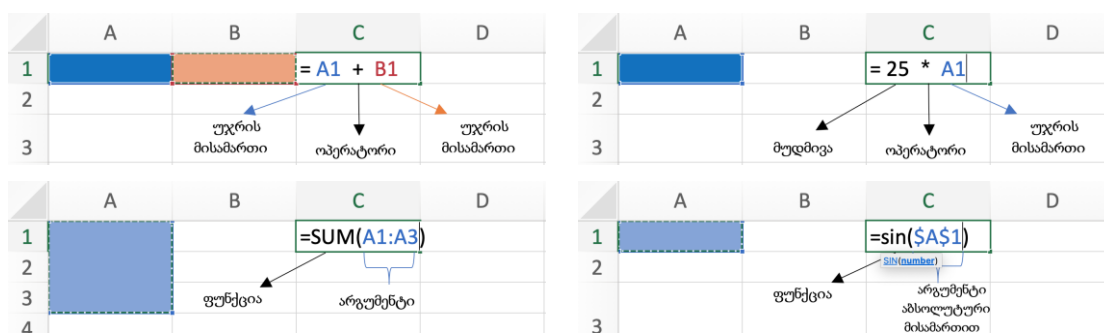
ყოველი ამოცანის ბოლოს მოყვანილია დავალებები. სტუდენტს მოეთხოვება მათი შესრულება. დავალებები სხვადასხვა სახისაა, კერძოდ: ის შეიძლება ეხებოდეს მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრების დადგენას (განსაკუთრებით ეს ეხება მოდელს, რომელთათვისაც ფორმულები მიღებულია რიცხვითი მეთოდებით); საწყისი პარამეტრების გავლენას სხვა სიდიდეებსა თუ დიაგრამის ფორმაზე, ახალი მოდელის აგებას, მაკროსის კოდის დაწერას და სხვა.

შესავალი

Microsoft Excel-ის პროგრამულ გარსაცმში ფორმულის შეტანა იწყება კლავიატურაზე „=“ დილაკის აღებით. ფორმულაში არგუმენტების სახით შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მიმართებები (ფარდობითი და აბსოლუტური) უჯრებზე. Microsoft Excel-ის თითოეული უჯრა დამოუკიდებელი სივრცეა, სადაც შეგვაქვს მონაცემი. მონაცემი შეიძლება იყოს ტექსტი, რიცხვი, ფორმულა და ა.შ.

Microsoft Excel-ის უნიკალურობა იმაში მდგომარეობს, რომ მომხმარებელს შეუძლია გარკვეული ალგორითმით ესა თუ ის უჯრა ან უჯრათა სისტემა დააკავშიროს მეორე უჯრასთან ან უჯრათა სისტემასთან. მოკლედ, რომ ვთქვათ, შესაძლებელია, დაიწეროს ფორმულა, რომელიც საჭირო უჯრებს აკავშირებს ერთმანეთთან. ძირითად მაკავშირებელ ოპერატორებს წარმოადგენს მათემატიკური ოპერაციების ნიშნები („+“ – დამატება, „-“ – გამოკლება, „*“ – გამრავლება, „/“ – გაყოფა, „^“ - ხარისხში აყვანა), თუმცა MS Excel-ს აქვს **ჩაშენებული ფუნქციები (built functions)**, რომლებიც დახარისხებულია კატეგორიების მიხედვით, როგორცაა: მათემატიკური, ლოგიკური, ფინანსური და ა.შ. თითოეული ფუნქციის გამოყენების წესი მითითებული იქნება საჭიროების შემთხვევაში.

ფორმულის შეყვანა შეიძლება ხელით (კლავიატურის გამოყენებით) ან მაუსით (ამისთვის საკმარისია გავააქტიუროთ შესაბამისი უჯრა ან მოვნიშნოთ უჯრათა ღიაპაზონი).



MS Excel -ი მოიცავს რამდენიმე მუშა ფურცელს (Sheet). საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია მათი დამატება, დამალვა, გამოჩენა, წაშლა, სახელის შეცვლა ან გადაადგილება. ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ოპერაცია შესაძლებელია, განხორციელდეს მაუსით, მუშა ფურცლის აღმნიშვნელი სახელწოდების გააქტიურებისა და კონტექსტური მენიუს გამოძახებით (მაუსის მარჯვენა ღილაკით).

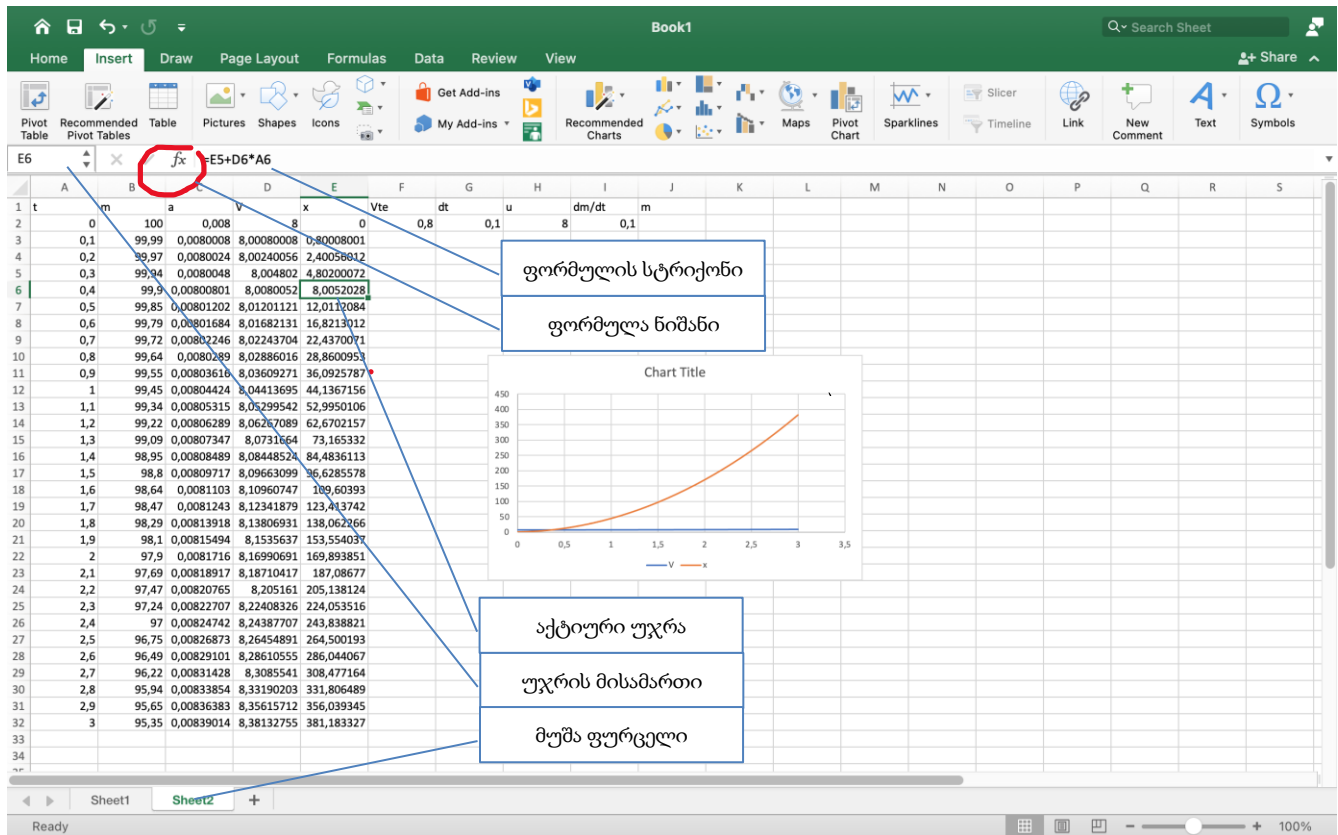
მუშა ფურცელზე კონკრეტული ღიაპაზონის მოსანიშნად, ასევე გამოიყენება მაუსი, ამისთვის მაუსი მარცხენა ღილაკზე თითის აულებლად გადავადგილოთ საჭირო მიმართულებით. კონკრეტული ერთი განმხლოებული უჯრის გასააქტიურებლად საკმარისია ის უბრალოდ მოვნიშნოთ. გააქტიურებულ უჯრას მარჯვენა ქვედა კუთხეში აქვს წერტილით გამოყოფილი აღმნიშვნელი, რომელსაც შევსების მარკერი ეწოდება.

ფორმულაში უჯრის მიმართების გამოყენების რამდენიმე შესაძლო ვარიანტი არსებობს, მაგალითად, რომელიმე C4 უჯრა ფორმულაში შეიძლება სხვადასხვა სახით იქნეს გამოყენებული. აბსოლუტური მიმართების შესაქმნელად გამოიყენება სიმბოლო „\$“. ის შეიძლება ადებული იქნას ემპირიულად უშუალოდ კლავიატურით Shift + F4 კლავიშების კომბინაციით ან ფუნქციონალური კლავიშის F4 გამოყენებით. ქვემოთ მოცემულია ფორმულაში უჯრის მისამართის ჩაწერის ყველა შესაძლო ვარიანტი, კერძოდ:

1. **C4 – ფარდობითი მიმართება.** C სვეტისა და 4 სტრიქონიც ფორმულაში წარმოადგენილია ფარდობითი მიმართების სახით, რაც გულისხმობს იმას, რომ შევსების მარკერით მეზობელ ღიაპაზონებში განხორციელდება არა უბრალოდ უჯრის შიგთავსის კოპირება, არამედ ადგილი ექნება სვეტისა და სტრიქონის ნომრის ცვლილებას ზრდადობის ან კლებადობის პრინციპით (იმის მიხედვით, რა მიმართულებით ხდება შევსების მარკერის გადაადგილება). უჯრის შიგთავსი შეინარჩუნებს დამოკიდებულ უჯრებს შორის სტრუქტურულ კავშირს, ამიტომ კოპირებისას მომდევნო უჯრებში ასახული შედეგი განსხვავებული იქნება.

- 2. \$C\$4 – აბსოლუტური მიმართება.** ჩანაწერი მიგვითითებს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისას (როგორცაა კოპირება, გადაადგილება) ფიქსირდება ორივე პარამეტრი – სვეტისა და სტრიქონის ნომერი, შესაბამისად კოპირებისას მომდევნო უჯრებში ასახული შედეგი უცვლელი იქნება.
- 3. \$C4 – შერეული მიმართება.** ჩანაწერი ნიშნავს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედების შესრულებისას ფიქსირდება ერთი პარამეტრი – სვეტის ნომერი, ჩვენს შემთხვევაში C სვეტი, ხოლო სტრიქონის ნომერი 4, კოპირებისას იცვლება ზრდადობის (5,6,7...) ან კლებადობის (3,2,1...) პრინციპით (ეს უკანასკნელი დამოკიდებულია კოპირების მიმართულებაზე - შევსების მარკერის გადაადგილებაზე).
- 4. C\$4 – შერეული მიმართება.** ჩანაწერი მიგვითითებს, რომ ფორმულით სხვადასხვა მოქმედებების შესრულებისას ფიქსირდება ერთი პარამეტრი – სტრიქონის ნომერი, ჩვენს შემთხვევაში 4, ხოლო სვეტის ნომერი C კოპირებისას იცვლება ასევე ზრდადობის (D, E, F ...) ან კლებადობის (B, A...) პრინციპით.

MS Excel-ის თითოეული უჯრა ასახავს შედეგს, ხოლო ის, თუ რა ფორმულით იქნა მიღებული ესა თუ ის შედეგი, აისახება ფორმულის სტრიქონში, რომელიც MS Excel-ის ფანჯარაში არის ინტეგრირებული და $f(x)$ -სიმბოლოთი არის გამოსახული. ფორმულის სტრიქონში აისახება მონიშნული უჯრის შიგთავსი ან ფორმულა, რომლითაც ეს შიგთავსი იქნა მიღებული.



რადგან ფორმულები აღწერენ ფიზიკურ პროცესებს, ადგენენ ფიზიკურ სიდიდეებს (ცვლადებს) შორის კავშირს, ამიტომ მოდელირების შედეგების გრაფიკული წარმოდგენისთვის გამოიყენება მხოლოდ ერთი ტიპის – წერტილოვანი – დიაგრამა, ხოლო დიაგრამის სახე დამოკიდებულია ამოცანის პირობაზე. დიაგრამის ასაგებად აუცილებელია გვექონდეს მონაცემთა მინიმუმ ერთი ნაკრები – ორი ერთმანეთთან ურთიერთკავშირში მყოფი სიდიდეების მონაცემთა ერთობლიობა, მათემატიკურად ეს გამონათქვამი შეიძლება ჩავეწეროთ $f(x)$ -ით. ამასთან, ერთ-ერთი სიდიდის ცვლილება (როგორც წესი, არგუმენტი x) განისაზღვრება შემსრულებლის მიერ წინასწარ შერჩეული ინტერვალის ან, ე.წ. **სიდიდის ცვლილების**

ბიჯის საშუალებით, ხოლო მეორე (ფუნქციის f) სიდიდის მნიშვნელობები განისაზღვრება გამოთვლებით შესაბამისი არგუმენტების მნიშვნელობებისთვის.

რა თქმა უნდა, MS Excel-ის ყველა შესაძლებლობის, მაგალითად, თუნდაც ფუნქციების სრულყოფილი აღწერა მოცემული კურსის მიზანს არ წარმოადგენს, მაგრამ კონკრეტული მაგალითის განხილვისას სტუდენტი გაეცნობა ელექტრონული ცხრილის უნიკალურ შესაძლებლობებს, ისე, რომ შეძლოს დამოუკიდებლად საკუთარი ცოდნის გაღრმავება.

ლაბორატორიული ამოცანა №1.

წრფივი თანაბარი მოძრაობის მოდელირება

თავდაპირველად განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესის მოდელირება. ერთგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს წრფივი თანაბარი მოძრაობა.

დავუშვათ, სხეული მოძრაობს OX ღერძის გასწვრივ მუდმივი სიჩქარით $\vec{v} = const$. ვთქვათ, $t_0 = 0$ მომენტში სხეული იმყოფებოდა x_0 წერტილში. დროის ნებისმიერი t მომენტისთვის სხეულის კოორდინატი შეიძლება, განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t, \quad (1.1)$$

სადაც v_x არის სიჩქარის ვექტორის გეგმილი OX ღერძზე. იგი სკალარული სიდიდეა, რაც ნიშნავს იმას, რომ შეიძლება იყოს, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. სიჩქარის ვექტორის გეგმილის ნიშანი, ზოგად შემთხვევაში, განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ რა კუთხეს ადგენს იგი OX ღერძის მიმართულებასთან. თუ $\alpha = 0^\circ$, $v_x > 0$ (ე.ი. $v_x = v$, სადაც $v = |\vec{v}|$ სიჩქარის ვექტორის მოდულია), თუ $\alpha = 180^\circ$, $v_x < 0$ (შესაბამისად, $v_x = -v$). რადგან ერთგანზომილებიან შემთხვევას ვიხილავთ, ეს ნიშნავს, რომ მატერიალური წერტილი ან მოძრაობს OX გასწვრივ ან მის საპირისპიროდ.

ამრიგად, წრფივი თანაბარი მოძრაობა უმარტივესი ერთგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესის მაგალითია, სადაც სხეულის საწყისი კოორდინატი და სიჩქარე მუდმივი სიდიდეებია, ხოლო კოორდინატი დროის ნებისმიერ მომენტში ცვლადია და დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე, t - დროზე: $x = f(t)$.

წრფივი თანაბარი მოძრაობის ან ნებისმიერი ერთგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესის მოდელირება გულისხმობს, ცხადი სახის განტოლების ჩაწერას, მუდმივი და ცვლადი სიდიდეების განსაზღვრას, ცვლადებს შორის გრაფიკული დამოკიდებულების აგებას და ანალიზს. ჩვენს შემთხვევაში, ამოცანა დაიყვანება $x = f(t)$ დამოკიდებულებისა და გრაფიკული დამოკიდებულების განსაზღვრაში.

როგორც აღვნიშნეთ, აუცილებელია განსაზღვრულ იქნას მუდმივები და ცვლადები. მოცემულ შემთხვევაში ცვლადი არის t და მასზე დამოკიდებული კოორდინატი x . უნდა განისაზღვროს t ცვლადის ცვლილების არე: $t \in (t_{min}, t_{max})$ და ცვლადის ცვლილების ბიჯი Δt :

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{n}, \quad (1.2)$$

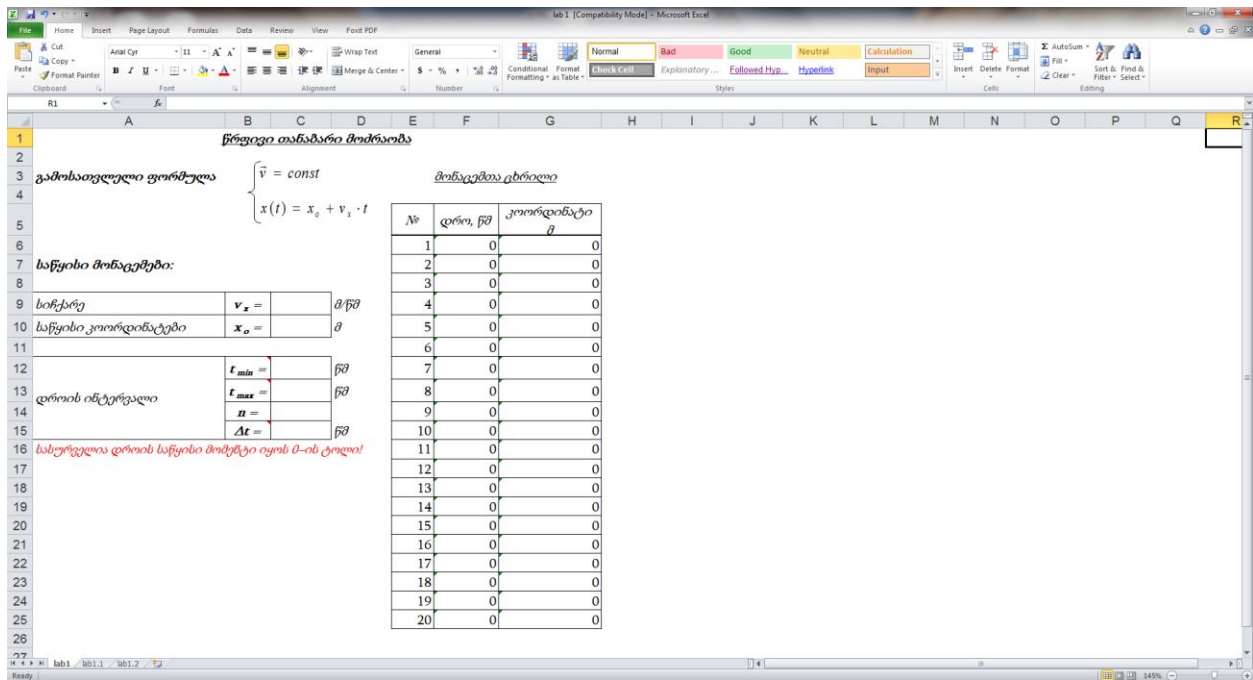
სადაც n ქვეინტერვალთა რაოდენობაა. ცხადია, რაც უფრო დიდია n , მით უფრო მცირეა Δt ბიჯი და შესაბამისად, იზრდება სიზუსტე (გრაფიკზე დატანილი წერტილების რაოდენობა).

ლაბორატორიული ამოცანის მიზანი:

წრფივი თანაბარი მოძრაობის მოდელირება და (1.1) ფორმულით მოცემული დამოკიდებულების გრაფიკულად წარმოდგენა.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab1 - წრფივი თანაბარი მოძრაობა“.



სურ.1.1. წრფივი თანაბარი მოძრაობა - შაბლონი lab1

საწყისი მონაცემები (მუდმივები)

1. სხეულის საწყისი მდებარეობა (კოორდინატი) – x_0 ,
2. სიჩქარის ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – v_x ,
3. დროის ინტერვალი (განისაზღვრება t_{min} დროის საწყისი და t_{max} საბოლოო მომენტებით) და წარმოადგენს პროცესის მიმდინარეობის ხანგრძლივობას.

ცვლადები

1. t დრო
2. x სხეულის კოორდინატი, რომელიც დროის ცხადი ფუნქციაა.

$x = f(t)$ გრაფიკის ასაგებად განსაზღვრეთ ($t; x$) წერტილთა რაოდენობა. განსაზღვრეთ t ცვლადის ცვლილების ბიჯი – Δt , იგი გამოითვლება (1.2) ფორმულით. თუ ამ ფორმულაში n -ით აღვნიშნავთ ქვეინტერვალების რაოდენობას, მაშინ ცხრილი განისაზღვრება $n + 1$ სტრიქონით.

შაბლონის შევსება

1. უჯრებში C9, C10 და C14 შეიტანეთ საწყისი რიცხვითი მონაცემები. დროის ათვლა დაიწყეთ ნულოვანი მომენტიდან. შეიტანეთ შემდეგი მონაცემები:
 $v_x = 2$ მ/წმ; $x_0 = 0$ მ; $t_0 = t_{min} = 0$ წმ; $t_{max} = 5$ წმ.
2. C15 უჯრაში დროის ცვლილების ბიჯი განვსაზღვროთ n ქვეინტეგრალით.
3. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი:
 - F6 უჯრაში შეიტანეთ დროის საწყისი მნიშვნელობა უჯრიდან C12 კოპირების მეთოდით (= C12).
 - F სვეტში ყოველი მომდევნო მნიშვნელობა განსხვავდება Δt -ით ($t_1 = t_0 + \Delta t$; $t_2 = t_1 + \Delta t$; და ა.შ.). ამიტომ F7 უჯრაში შეიტანეთ ფორმულა „=F6+\$C\$15“ (C15 უჯრა შეიცავს დროის ცვლილების ბიჯის მნიშვნელობას, F სვეტის უჯრებისთვის ფორმულის კოპირებისას მისი

მნიშვნელობა არ უნდა შეიცვალოს, ამიტომ გამოიყენეთ აბსოლუტური მიმართება¹ ამ უჯრისათვის), ამის შემდეგ დააკოპირეთ იგი მთელი სვეტის „დრო, წმ“ სიგრძეზე².

4. G6 უჯრა მიამაგრეთ C10-ს, რომლითაც განისაზღვრება საწყისი კოორდინატი (ამისათვის G6 უჯრაში ვწერთ ფორმულას: „= C10“). C10 უჯრაში ნებისმიერი ცვლილება ავტომატურად გამოიწვევს ცვლილებას G6 უჯრაში.
5. G7 უჯრაში შეიტანეთ კოორდინატის გამოსათვლელი ფორმულა: „= \$C\$10 + \$C\$9 * F6“.
6. დააკოპირეთ G7 უჯრაში ჩაწერილი ფორმულა G8: G28 დიაპაზონისათვის, ასევე შევსების მარკერის გამოყენებით.

მითითება: ფორმულების შეტანისას გამოიყენეთ აბსოლუტური მისამართები მუდმივი სიდიდეების ჩაწერისას.

$x(t)$ გრაფიკის აგება

წრფივი თანაბარი მოძრაობისას კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგებად საჭირო მონაცემები მოცემულია ცხრილის F6:F26 დიაპაზონში. ეს მონაცემები გადაიზომება ჰორიზონტულ ღერძზე, ხოლო G6:G26 დიაპაზონი – ვერტიკალურზე.

1. მონიშნეთ მონაცემთა დიაპაზონი F6:G26;
2. აირჩიეთ ბრძანება: “ჩამატება - დიაგრამა (Insert – Chart)”;
3. აირჩიეთ გრაფიკის სახე: “წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნებთან ერთად (Scatter with Smooth Lines and Markers)”.

დიაგრამისა და საკოორდინატო ღერძების დასახელებები ერთეულების მითითებებით შემდეგი სახით:

- “დიაგრამის დასახელება” – **წრფივი თანაბარი მოძრაობა**;
- “X ღერძი” – **დრო t, წმ**;
- “Y ღერძი” – **კოორდინატი x, მ**;
- თითოეულ ღერძზე ჩართეთ ბადის ძირითადი ხაზები (Format Gridlines);
- განალაგეთ დიაგრამა მუშა ფურცელზე;
- შეინახეთ მონაცემები.

ამოცანები

- 1.1 ვთქვათ, მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება კანონით: $x(t) = -3 + 2t$:
 - იპოვეთ $x(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკული სახე, როცა $t \in (0 \div 20)$ შუალედს.
 - განსაზღვრეთ, ახდენს თუ არა გავლენას პროგრამის ბიჯი Δt გრაფიკის ფორმაზე.
 - შეცვალეთ საწყისი მონაცემები C9, C10, C13 და C14 უჯრებში და განსაზღვრეთ, ახდენს თუ არა ეს ცვლილება გავლენას გრაფიკის ფორმაზე.
- 1.2 სამი მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება კანონით: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 5$, $x_3(t) = 2t + 2$
 - ააგეთ $x(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკები თითოეული შემთხვევისათვის,
 - იპოვეთ მათი შეხვედრის ადგილი და დრო გრაფიკულად.
- 1.3 სამი მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება კანონით: $x_1(t) = 5 - 2t$, $x_2(t) = 2 + t$, $x_3(t) = -t + 2$:
 - იპოვეთ თითოეული მათგანისათვის $x(t)$ გრაფიკის ჰორიზონტისადმი დახრის კუთხე და გამოსახეთ გრაფულურად.

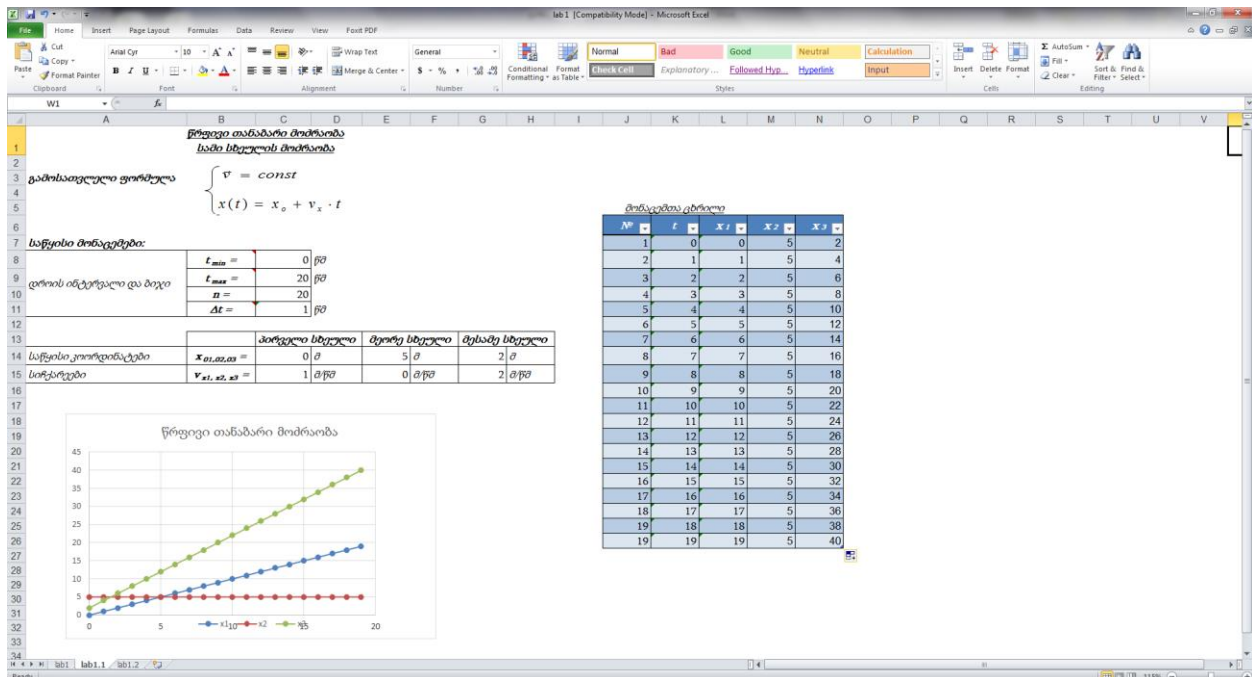
¹ აბსოლუტური მიმართების შექმნის მარტივი გზაა F4 კლავიშების კომბინაციის გამოყენება, როცა კურსორი განლაგებულია მისამართის ველში, რომლის გარდაქმნაც გვსურს აბსოლუტურ მიმართებად.

² დაკოპირებისათვის გამოიყენეთ თვითშევსების მარკერი, რომელიც მაუსით გადაადგილეთ სვეტის გასწვრივ.

1.4 თანაბარი მოძრაობის გამოკვლევა.

- A სვეტში შეიტანეთ დრო t , 1-დან 100-მდე, ბიჯით $\Delta t = 0.1$
- რომელიმე უჯრაში შეიტანეთ $F = 0$ ძალისა და $m = 1$ მასის მნიშვნელობები
- B სვეტში შეიტანეთ სიჩქარე ფორმულით: $v_i = v_{i-1} + \frac{F}{m} \Delta t$. საწყისი სიჩქარის მნიშვნელობად შეარჩიეთ რომელიმე მუდმივი მნიშვნელობა
- C სვეტში შეიტანეთ კოორდინატი ფორმულით: $x_i = x_{i-1} + v_i \Delta t$. საწყისი კოორდინატის მნიშვნელობად შეარჩიეთ, რომელიმე მუდმივა.
- ააგეთ წერტილოვანი დიაგრამა $x(t)$. დარწმუნდით, რომ მიღებული გრაფიკი წრფეა.
- შეადარეთ მიღებული გრაფიკი (1.1) ფორმულის შედეგს. რისთვისაც D სვეტში გამოთვალეთ კოორდინატის მნიშვნელობა (1.1) ფორმულით $x_{ფორ}(t)$.
- ააგეთ $x_{ფორ}(t)$ და $x(t)$ გრაფიკები ერთ წერტილოვან დიაგრამაზე. დარწმუნდით, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა.
- $x_{ფორ}(t)$ და $x(t)$ თანხვედრაში დარწმუნდით ლოგიკური ფუნქციის IF გამოყენებით. კერძოდ, E სვეტში გამოიყენეთ ფორმულა ლიგეკური ფუნქციით: თუ $x(t) - x_{ფორ}(t) \leq \epsilon$, სადაც ϵ დასაშვები ცდომილებაა, რომელიც განსაზღვრავს აუცილებელ სიზუსტეს, მაშინ უჯრას მიენიჭოს მნიშვნელობა „თანხვედრა“, თუ არა მნიშვნელობა - „არა“. დარწმუნდით, რომ ამ სვეტში ყველა მნიშვნელობა არის „თანხვედრა“.

მითითება: 1-3 ამოცანები გადაწყვეტილია lab.1.1 და lab1.2 შაბლონების სახით.



სურ.1.2. წრფივი თანაბარი მოძრაობა. სამი სხეულის მოძრაობის მოდელირება - შაბლონი lab1.1

ლაბორატორიული ამოცანა №2.

თანაბარცვალებადი მოძრაობის მოდელირება

ერთგანზომილებიანი მოძრაობის კიდევ ერთ შემთხვევას წარმოადგენს წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობა.

ცხადია, თანაბარცვალებადი მოძრაობისას სხეულის (სისტემის) აჩქარება მუდმივი სიდიდეა ($\vec{a} = const$). რადგან კვლავ ერთგანზომილებიანი შემთხვევით ვიფარგლებით, ამიტომ თავიდანვე შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მოძრაობა ხდება რომელიმე ჩვენ მიერ შერჩეულ ღერძზე და მამასადამე, საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ერთი კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება მოცემულ შემთხვევაში აღარ არის წრფივი. მამასადამე, კოორდინატი დროის არაწრფივი ფუნქციაა.

დავუშვათ, რომ სხეული მოძრაობს OY ღერძის გასწვრივ. მაგალითად, ვარდება რაიმე სიმაღლიდან ან ვერტიკალურად აისვრიან სხეულს. ეს იმას ნიშნავს, რომ იცვლება სხეულის მდებარეობის აღმწერი $y(t)$ კოორდინატი და მოძრაობის აღმწერი სიჩქარის $v_y(t)$ მდგენელი. მუდმივი რჩება სიჩქარის ცვლილება დროის ტოლ შუალედში, ე.ი. აჩქარება. აჩქარების განმარტების თანახმად:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \quad (2.1)$$

მრიცხველში გვაქვს სიჩქარის ცვლილება, ხოლო მნიშვნელში – დროის შუალედი, რომლის განმავლობაშიც ეს ცვლილება მოხდა. (2.1)-დან:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

რადგან მოძრაობა თანაბარცვალებადია და ერთგანზომილებიანია, ამიტომ ყოველი წამის განმავლობაში იცვლება სიჩქარის მდგენელი $v_y(t)$, რომელიც მიიღებს ერთსა და იმავე ნაზრდს. გადავწეროთ ეს გამოსახულება გეგმილებით:

$$v_y = v_{0y} + a_y t. \quad (2.2)$$

სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი. კერძოდ, როცა $a_y > 0$, სიჩქარის ნაზრდი დადებითია, რაც ნიშნავს, რომ დროის მიხედვით იზრდება სიჩქარე (მოძრაობა აჩქარებულია), ხოლო როცა $a_y < 0$, სიჩქარე დროის მიხედვით მცირდება (მოძრაობა შენელებულია).

როგორც ვიცით, წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას სხეულის კოორდინატი იცვლება დროის მიმართ კვადრატული კანონით:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}, \quad (2.3)$$

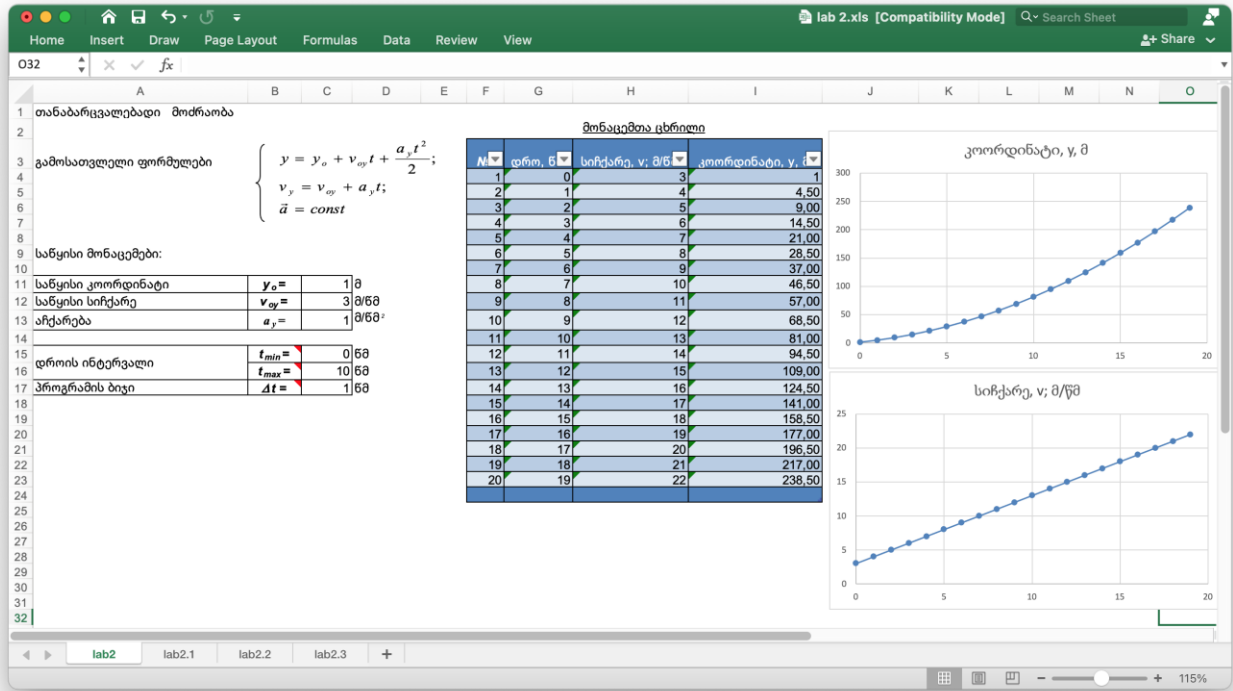
სადაც y_0 - სხეულის საწყისი კოორდინატია, რომელიც შეესაბამება t_{min} საწყის დროის მომენტს.

ამრიგად, (2.2) და (2.3) ფორმულებით ანალიზურად აღიწერება წრფივი თანაბარცვალებადი მოძრაობა. სიჩქარისა და კოორდინატის ცვლილების ცხადი სახის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს, ჩავატაროთ გრაფიკული მოდელირება და ავაგოთ $v_y = f(t)$ და $y = f(t)$ გრაფიკები.

მხედველობაში მივიღოთ, რომ $y = f(t)$ დამოკიდებულების აგებისას y კოორდინატები შეიძლება ავითვალოთ $t \in (t_{min}, t_{max})$ შუალედისათვის ყოველი $t_i + \Delta t$ დროითი მომენტებისათვის, მაშინ როდესაც ცვლადი სიჩქარე, უფრო დიდი სიზუსტისათვის, მიზანშეწონილია ავითვალოთ თითოეული დროითი ინტერვალის ნახევარზე $(t_i + \Delta t)/2$, თუმცა მოცემული ამოცანის შემთხვევაში სიჩქარეც (v_{y_i}) და კოორდინატიც (y_i) ავითვალოთ ერთი და იგივე $t_i + \Delta t$ შუალედებში.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab2“ –“ წრფივი თანაბარცვალებადი მოძრაობა“ (იხ. სურ.2.2).



სურ.2.1. თანაბარჩქარეული მოძრაობა - შაბლონი lab.2

საწყისი მონაცემები

მოძრაობის განტოლების ანალიზიდან გამომდინარე საწყის მონაცემებად გვევლინება:

- სხეულის მდებარეობა დროის ნულოვანი მომენტისათვის (კოორდინატი) – y_0 ,
- საწყისი სიჩქარის ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – v_{0y} ,
- აჩქარების ვექტორის პროექცია არჩეულ მიმართულებაზე – a_y ,
- დროის ინტერვალი $t_{min} \div t_{max}$, რომლის განმავლობაშიც ხდება დაკვირვება მოძრაობაზე.

ცვლადები

- დრო, რომელიც შაბლონზე წარმოდგენილია G სვეტში,
- სიჩქარე, H სვეტი,
- სხეულის კოორდინატი, I სვეტი.

შაბლონის შევსება

1. ცხრილში შეიტანეთ საწყისი რიცხვითი მონაცემები:
 $a_y = 2 \text{ მ/წმ}^2$; $v_{0y} = 5 \text{ მ/წმ}$; $y_0 = 0 \text{ მ}$; $t_0 = t_{min} = 0 \text{ წმ}$; $t_{max} = 10 \text{ წმ}$.
2. C16 უჯრაში დროის ცვლილების ბიჯი განსაზღვრეთ $n = 40$ ქვეინტეგრალით.
3. G სვეტი შეავსეთ დროის მნიშვნელობებით. ყურადღება მიაქციეთ, რომ დროის საწყისი მონაცემი შეესაბამება G4 უჯრას და ის ტოლია $t_0 = t_{min}$ საწყისი დროის, ამიტომ G4 უჯრაში მითითებულია ფორმულა: „=C15“. ყოველი მომდევნო დროის შუალედი განისაზღვრება პროგრამის Δt ბიჯით: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. მაგალითად, G5 უჯრაში მითითებულია ფორმულა „=G4+\$C\$17“, G6 უჯრაში - „=G5+\$C\$17“. ცხადია, ფორმულას მხოლოდ G5 შევიტანთ, ხოლო დანარჩენი უჯრებისათვის დავაკოპირებთ მას შევსების მარკერით. ფორმულაში t_i ჩაწერილია ფარდობითი მიმართებით, ე.ი. იცვლება ყოველი მომდევნო უჯრისათვის პრინციპით $i + 1$, ხოლო Δt -

პროგრამის ბიჯი ჩაწერილია აბსოლუტური მიმართებით, ე.ი. მუდმივი რჩება (ფიქსირდება) ყოველი მომდევნო უჯრისათვის.

4. H სვეტში განსაზღვრეთ სიჩქარე (2.2) ფორმულით. დროის საწყის t_0 მომენტში სიჩქარე არის v_0 , ამიტომ H4 უჯრაში მიუთითეთ ფორმულა: „=C12“. H5 უჯრაში შეიტანეთ ფორმულა „=\$C\$12+\$C\$13*G5“. ამ შემთხვევაში მუდმივი რჩება (ფიქსირდება) აჩქარება, რომელიც C13 უჯრაშია მითითებული და საწყისი სიჩქარე, რომელიც მითითებულია C12 უჯრაში.
5. I სვეტში შეიტანეთ კოორდინატი (2.3) ფორმულის შესაბამისად. კერძოდ: I4 უჯრაში შეიტანეთ საწყისი კოორდინატი „C11“, ხოლო I5 უჯრაში კი შეიტანეთ ფორმულა: „=\$C\$11+\$C\$12*G5+(\$C\$13*G5^2)/2“. ეს ფორმულა დააკოპირეთ I სვეტის დანარჩენ უჯრებში. ფორმულაში აბსოლუტური მიმართებით მითითებულია საწყისი მონაცემები.

მითითება: ფორმულების შეტანისას გამოიყენეთ აბსოლუტური მიმართებები მუდმივი სიდიდეებისათვის.

$x(t)$ და $v(t)$ გრაფიკების აგება

ააგეთ სიჩქარისა (მონაცემთა დიაპაზონი G4:H24) და კოორდინატის (მონაცემთა დიაპაზონი G4:G24; I4:I 24) დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები ცალკეულ დიაგრამებზე.

შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

1. გამოყავით (მონიშნეთ) მონაცემთა დიაპაზონი ყველა ერთად G4:H24 ან მხოლოდ დროის და სიჩქარის სვეტი, ან დროის და კოორდინატის სვეტი. სვეტების „დრო - სიჩქარე - კოორდინატი“ ერთად მონიშნით ერთ დიაგრამაზე აიგება $x(t)$ და $v(t)$ გრაფიკები. თუმცა შეიძლება მათი აგება ცალ-ცალკე დიაგრამებზე, ამისათვის უნდა მონიშნოს შესაბამისი სვეტები.

მითითება: არამოსაზღვრე სვეტების (უჯრების, ან უჯრათა დიაპაზონის) მონიშვნისათვის გამოიყენეთ კლავიში Ctrl+მაუსი.

2. აირჩიეთ ბრძანება „ჩამატება - დიაგრამა ... (Insert – Chart)“;
3. აირჩიეთ გრაფიკის სახე „წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნებებთან ერთად Scatter with Smooth Lines and Markers“.
4. დიაგრამები განათავსეთ მუშა ფურცელზე და მიუთითეთ შესაბამისი სახელწოდებები.

ამოცანები

1.1 ჩატვირთეთ შაბლონი lab2 და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- შეამოწმეთ, ახდენს თუ არა დროის ბიჯის (ან ქვეინტეგრალების რაოდენობის) ცვლილება გრაფიკის ფორმაზე.
- შეამოწმეთ, რა გავლენას ახდენს C11, C12, C13 და C15 –ში მოცემული საწყისი მონაცემების ცვლილება (მათ შორის უარყოფითი ნიშანი) გრაფიკის ფორმაზე. რა ფიზიკური შინაარსი აქვს y_0, v_{0y}, a_y სიდიდეებისათვის უარყოფით ნიშანს.
- შეადარეთ ერთმანეთს სხეულის მოძრაობები სხვადასხვა აჩქარებით, ამისათვის:
 - C13 უჯრაში შეიტანეთ აჩქარების კიდევ ერთი მნიშვნელობა და ამ მნიშვნელობის შესაბამისად შეავსეთ B13-D14 დიაპაზონი.
 - ცხრილს დაამატეთ ორი სვეტი (J და K სვეტი) და გამოთვალეთ სიჩქარე და კოორდინატი აჩქარების მეორე მნიშვნელობისათვის.
 - თითოეული დიაგრამისათვის დაამატეთ მონაცემთა ახალი რიგები და მონაცემთა რიგების ყოველ წყვილს მიანიჭეთ სახელი.
 - გამოიტანეთ ლეგენდა.
 - გააფორმეთ ცხრილის მონაცემები (H3:H24, I3:I24, J3:J24 და K3:K24 დიაპაზონები), ცხრილში მონაცემთა შრიფტის ფერი შეარჩიეთ გრაფიკის ფერის შესაბამისად.
- დროის მოცემული მომენტისათვის და აჩქარების ყოველი მნიშვნელობისათვის გამოთვალეთ საკონტროლო წერტილები ($u_{საკონტ}$ და $u_{საკონტ}$). დაამატეთ ეს წერტილები დიაგრამაზე

მონაცემთა ცალკეული რიგის სახით. წინასწარ გრაფიკის სახე შევვალეთ წერტილოვანი დიაგრამით მხოლოდ გლუვი ხაზებით.

- მომდევნო სვეტში გამოთვალეთ კოორდინატი ფორმულით: $y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$, სადაც y_i და v_i წარმოადგენს კოორდინატისა და სიჩქარის საწყისი მონაცემები ყოველი Δt ინტერვალისათვის, მაშასადამე მოცემულ შემთხვევაში მუდმივი იქნება მხოლოდ Δt ინტერვალის, იგივე პროგრამის ბიჯი. ერთ დიაგრამაზე ააგეთ ამ ფორმულით და (2.3) ფორმულით გაანგარიშებული კოორდინატები. დარწმუნდით, რომ ისინი ერთმანეთს თითქმის ემთხვევა.

1.2 სამი სხვადასხვა მატერიალური წერტილის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით: $x_1(t) = 2 + 3 \cdot t + t^2$; $x_2(t) = -t^2$; $x_3(t) = 1 + 2 \cdot t$. ააგეთ:

- თითოეული მატერიალური წერტილისათვის $x(t)$ და $v(t)$ გრაფიკები
- იპოვეთ მათი შეხვედრის კოორდინატი და დრო (ასეთი კოორდინატის არსებობის შემთხვევაში).

მიითითება: ამოცანა გადაწყვეტილია lab.2.1 შაბლონის სახით.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following content:

თანაბარსიჩქარეული მოძრაობა (მაგალითი)
სამი მატერიალური წერტილის მოძრაობის მოდელირება

გამოსათვლელი ფორმულები

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3 \cdot t + t^2 \\ x_2(t) = -t^2 \\ x_3(t) = 1 + 2 \cdot t \end{cases}$$

საწყისი მონაცემები

| | | | |
|----------------------------|--------------|----|----|
| დროის ინტერვალი | $t_{min} =$ | 0 | წმ |
| დროის ინტერვალის რაოდენობა | $t_{max} =$ | 20 | წმ |
| ინტერვალის ხანგრძლივობა | $n =$ | 20 | |
| პროგრამის ბიჯი | $\Delta t =$ | 1 | წმ |

საწყისი კოორდინატი (ცმ) $x_{01, 02, 03} =$ 2 | 0 | -1 | მ

საწყისი სიჩქარე (ცმ/წმ) $v_{01, 02, 03} =$ 3 | 0 | 2 | მწმ

არსებობს (ცმ) $a_{1x, 2x, 3x} =$ 2 | 0 | -2 | მწმ²

კოორდინატის ცვლილება

სიჩქარის ცვლილება

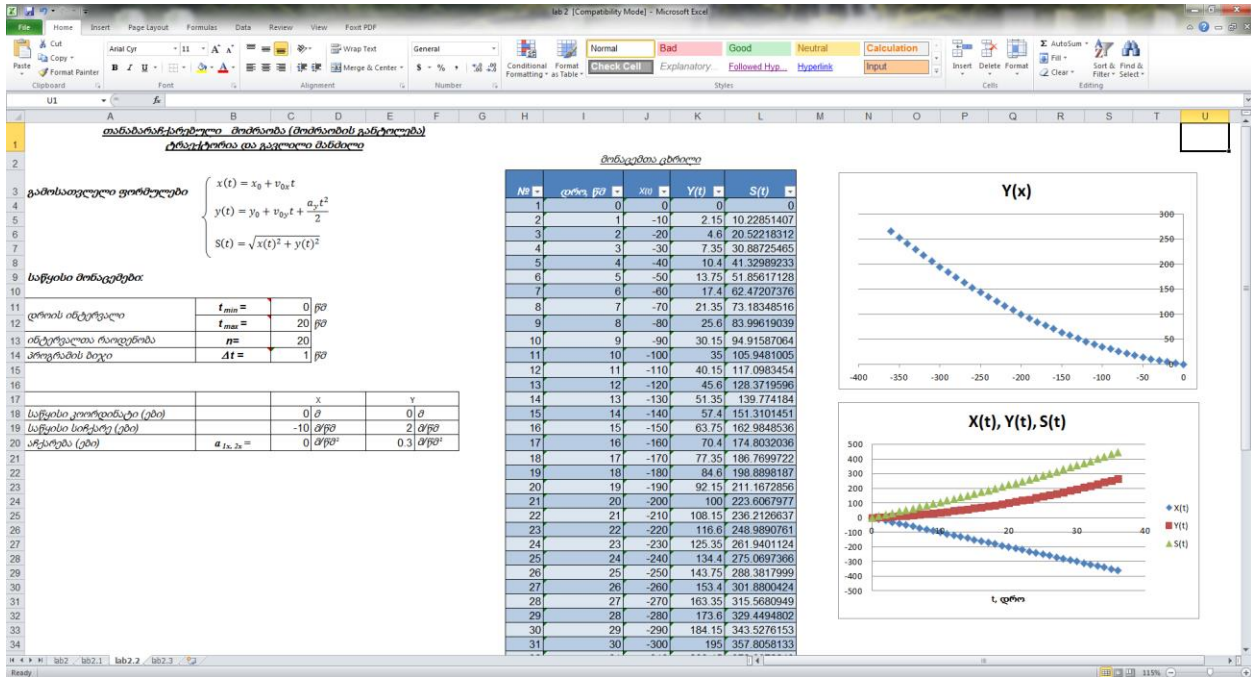
მონაცემთა ცხრილი

| № | დრო წმ | x_{01} | v_{01x} | x_{02} | v_{02x} | x_{03} | v_{03x} |
|----|--------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| 1 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | -1 | 2 |
| 2 | 1 | 6 | 5 | -1 | -2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 12 | 7 | -4 | -4 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 20 | 9 | -9 | -6 | 5 | 2 |
| 5 | 4 | 30 | 11 | -16 | -8 | 7 | 2 |
| 6 | 5 | 42 | 13 | -25 | -10 | 9 | 2 |
| 7 | 6 | 56 | 15 | -36 | -12 | 11 | 2 |
| 8 | 7 | 72 | 17 | -49 | -14 | 13 | 2 |
| 9 | 8 | 90 | 19 | -64 | -16 | 15 | 2 |
| 10 | 9 | 110 | 21 | -81 | -18 | 17 | 2 |
| 11 | 10 | 132 | 23 | -100 | -20 | 19 | 2 |
| 12 | 11 | 156 | 25 | -121 | -22 | 21 | 2 |
| 13 | 12 | 182 | 27 | -144 | -24 | 23 | 2 |
| 14 | 13 | 210 | 29 | -169 | -26 | 25 | 2 |
| 15 | 14 | 240 | 31 | -196 | -28 | 27 | 2 |
| 16 | 15 | 272 | 33 | -225 | -30 | 29 | 2 |
| 17 | 16 | 306 | 35 | -256 | -32 | 31 | 2 |
| 18 | 17 | 342 | 37 | -289 | -34 | 33 | 2 |
| 19 | 18 | 380 | 39 | -324 | -36 | 35 | 2 |
| 20 | 19 | 420 | 41 | -361 | -38 | 37 | 2 |
| 21 | 20 | 462 | 43 | -400 | -40 | 39 | 2 |
| 22 | 21 | 506 | 45 | -441 | -42 | 41 | 2 |
| 23 | 22 | 552 | 47 | -484 | -44 | 43 | 2 |
| 24 | 23 | 600 | 49 | -529 | -46 | 45 | 2 |
| 25 | 24 | 650 | 51 | -576 | -48 | 47 | 2 |
| 26 | 25 | 702 | 53 | -625 | -50 | 49 | 2 |
| 27 | 26 | 756 | 55 | -676 | -52 | 51 | 2 |
| 28 | 27 | 812 | 57 | -729 | -54 | 53 | 2 |
| 29 | 28 | 870 | 59 | -784 | -56 | 55 | 2 |
| 30 | 29 | 930 | 61 | -841 | -58 | 57 | 2 |

სურ.2.2. თანაბარსიჩქარეული მოძრაობა. სამი სხეულის მოძრაობის მოდელირება - შაბლონი lab2.1

1.3 მატერიალური წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე, ისე, რომ მისი x კოორდინატი დროის მიხედვით იცვლება წრფივი კანონით: $x(t) = x_0 + v_{0x}t$, ხოლო y კოორდინატი კი დროის მიხედვით იცვლება კანონით: $y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$. განსაზღვრეთ $y(x)$ და $x(t)$, $y(t)$, $S(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ დამოკიდებულებები, თუ: $x_0 = 0$, $v_{0x} = -10$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 2$ და $a_y = 0,5$.

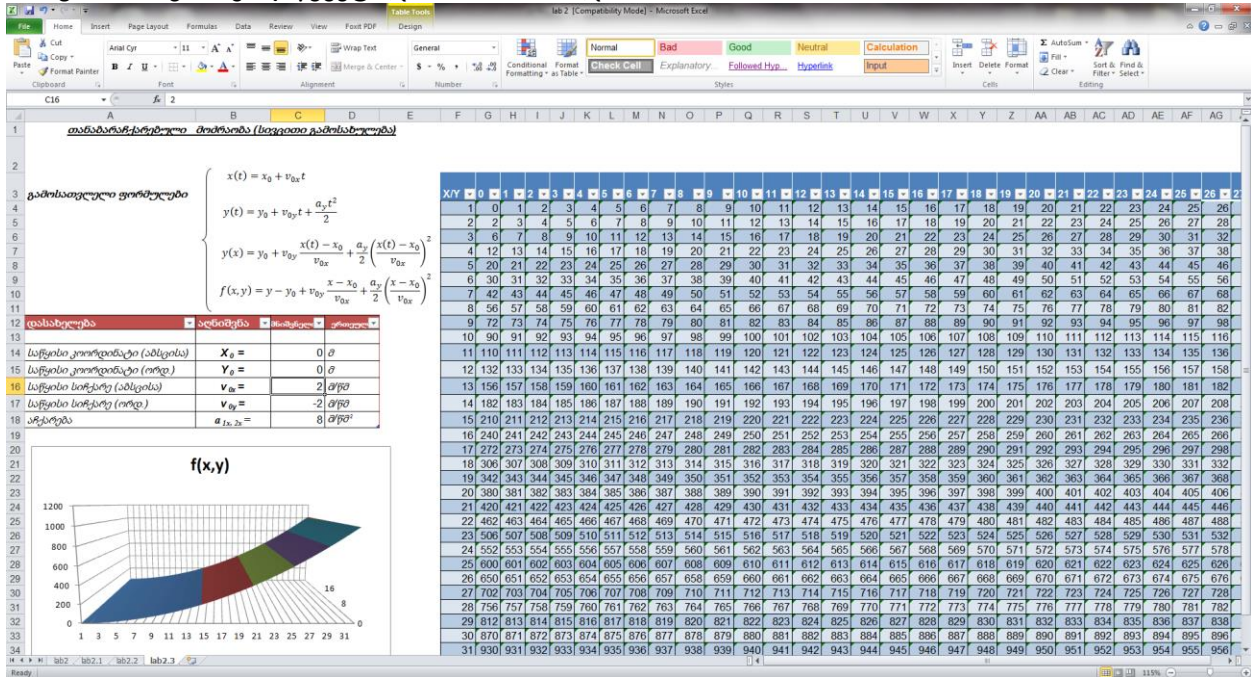
მიითითება: ამოცანა გადაწყვეტილია lab.2.2 შაბლონის სახით.



სურ.2.3. თანაბარჩქარეული მოძრაობა. ტრაექტორია და გავლილი მანძილი - შაბლონი lab2.1

1.4 მატერიალური წერტილი მოძრაობს სიბრტყეზე, ისე, რომ მისი x კოორდინატი დროის მიხედვით იცვლება წრფივი კანონით: $x(t) = x_0 + v_{0x}t$, ხოლო y კოორდინატი კი დროის მიხედვით იცვლება კანონით: $y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$. გამორიცხეთ t და იპოვეთ $y(x)$ დამოკიდებულების ცხადი სახე. ააგეთ $f(x, y)$ დამოკიდებულების სამგანზომილებიანი გრაფიკი თუ: $x_0 = 0, v_{0x} = 2, y_0 = 0, v_{0y} = -2$ და $a_y = 8$.

მითითება: ამოცანა გადაწყვეტილია lab.2.3 შაბლონის სახით.



სურ.2.4. თანაბარჩქარეული მოძრაობა. სამგანზომილებიანი (3D) გრაფიკის აგება - შაბლონი lab2.3

1.5 თანაბარცვალებადი მოძრაობის გამოკვლევა:

- შექმნეით ახალი მუშა ფურცელი;
- შეარჩიეთ უჯრა და შეიტანეთ F ძალის მნიშვნელობა;
- ისარგებლეთ (2.3) ფორმულით. გაითვალისწინეთ, რომ მოძრაობა ამჯერად x ღერძის გასწვრივ ხდება;
- ააგეთ $x(t)$ გრაფიკი;
- დარწმუნდით, რომ $x(t)$ გრაფიკი არის პარაბოლა. გაწრფივების მეთოდით ააგეთ წრფის განტოლება, რისთვისაც ააგეთ წერტილოვანი დიაგრამა $x(t^2)$. დარწმუნდით, რომ $x(t^2)$ გრაფიკი არის წრფე. ნებისმიერი ორი წერტილისათვის გამოთვალეთ კუთხური კოეფიციენტი ფორმულით: $k = \frac{x_2 - x_1}{t_2^2 - t_1^2}$. დარწმუნდით, რომ $k = \frac{a}{2}$.

1.6 ორი წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ კანონებით: $x_1 = 1 + 11t$ და $x_2 = 10 + 2t + 3t^2$. ააგეთ წერტილების კოორდინატებისა და სიჩქარეების დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. დაადგინეთ შეხვდებიან თუ არა ისინი ერთმანეთს. განსაზღვრეთ მათი შეხვედრის დრო და კოორდინატი.

1.7 მატერიალური წერტილი 5 წამის განმავლობაში მოძრაობდა კანონით: $v_1 = 1.2t$, შემდეგ 2 წამის განმავლობაში მოძრაობდა კანონით $x_2 = 2 + 3t - t^2$, ხოლო შემდეგ 6 წამის განმავლობაში მოძრაობდა კანონით $v_3 = 6 - 0.7(t - 10)$. ააგეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატისა და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატი და სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 9 და 11 წამის მომენტში. გამოთვალეთ მატერიალური წერტილის საშუალო სიჩქარე მოძრაობის 13 წამის განმავლობაში.

მითითება: საშუალო სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით:

$$v_{საშ} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

1.8 მატერიალური წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ 3 მ/წმ საწყისი სიჩქარით $x_0 = 1$ საწყისი კოორდინატიდან. მისი აჩქარების ცვლილება მოიცემა კანონით:

$$a_x(t) = \begin{cases} 0.2t, & 0 \leq t < 5 \\ 1 + 0.3(t - 5), & 5 \leq t < 8 \\ 3.4 - 0.4(t - 8), & 8 \leq t < 12 \end{cases}$$

ააგეთ $v_x(t)$ და $x(t)$ დამოკიდებულებები. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატი და სიჩქარე $t = 9.4$ წმ -ში. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის საშუალო სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 2 წმ-ის განმავლობაში.

მითითება: საშუალო სიჩქარე განსაზღვრეთ სიჩქარეთა სვეტის ცხრილიდან. რისთვისაც გამოიყენეთ Excel-ის ფუნქცია Average.

ლაბორატორიული ამოცანა №3. მათემატიკური ქანქარა

ცნობილია, რომ თუ სხეული ასრულებს მიუღვევად თავისუფალ რხევას, მაშინ სხეულის კოორდინატი დროის მიხედვით იცვლება სინუსის ან კოსინუსის კანონით:

$$x = x_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

სადაც x_{max} – რხევის ამპლიტუდაა, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – რხევის ფაზა, φ_0 – საწყისი ფაზა, ω_0 – რხევის საკუთარი ციკლური (წრიული) სიხშირეა. ამასთან, სიჩქარეც (კოორდინატის დროით პირველი რიგის წარმოებული) და აჩქარებაც (კოორდინატის დროით მეორე რიგის წარმოებული) შეიცვლება ჰარმონიული კანონით:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = x_{max} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x_{max} \omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = x'' = -x_{max} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = x_{max} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (3.3)$$

როგორც ვხედავთ, სიჩქარე კოორდინატს უსწრებს $\pi/2$ ფაზით, ხოლო აჩქარება – π ფაზით. ჰარმონიული რხევის განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს (3.1) ამონახსნი, წარმოადგენს ნიუტონის მეორე კანონს, როცა მერხვე სისტემაზე მოქმედი ტოლქმედი ძალა განპირობებულია მხოლოდ წონასწორობის მდებარეობისაკენ მბრუნებელი ძალით.

ზოგად შემთხვევაში, ტოლქმედი ძალა მიიღება მერხვე სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის ვექტორული ჯამით. იმ შემთხვევაში, როცა ამ ძალთა ტოლქმედი წონასწორობის მდგომარეობაში ნულის ტოლია, მაგრამ სისტემა ინერციით აგრძელებს რხევას, მიიღება ჰარმონიული რხევა. ჰარმონიული რხევის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

მერხვე სისტემათა შორის ყველაზე მარტივი და გავრცელებული მოდელია მათემატიკური ქანქარა. მათემატიკური ქანქარა წარმოადგენს m მასის სხეულს, რომელიც დაკიდებულია L სიგრძის უწონად და უჭიმად ძაფზე და ასრულებს რხევას ვერტიკალურ სიბრტყეში. ციკლური სიხშირე მათემატიკური ქანქარას შემთხვევაში დამოკიდებულია ქანქარას სიგრძეზე:

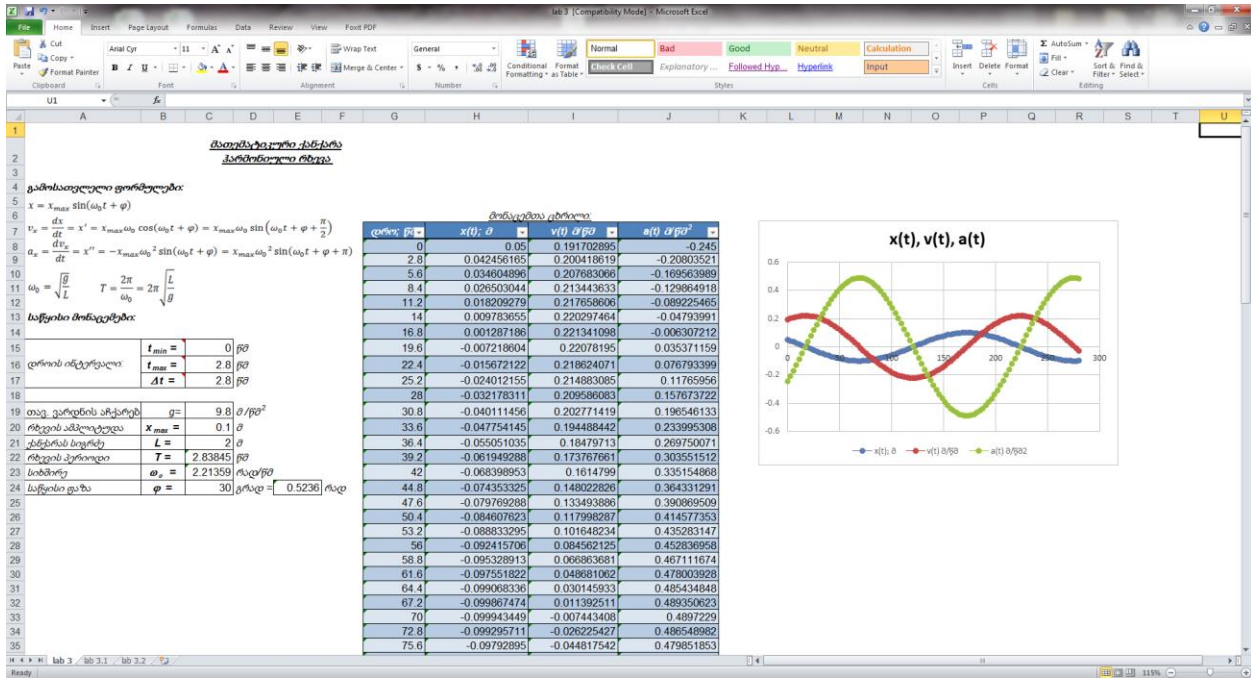
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (3.4)$$

ხოლო რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3.5)$$

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab3“ –" მათემატიკური ქანქარა. ჰარმონიული რხევა“ (სურ.3.1)



სურ.3.1. მათემატიკური ქანქარა. ჰარმონული რხევა - შაბლონი lab3

საწყისი მონაცემები

- ამპლიტუდა (მაქსიმალური წანაცვლება) – x_{max} ,
- საწყისი ფაზა - φ_0 ,
- ძაფის სიგრძე - L ,
- დროის ინტერვალი - Δt ,
- რხევის პერიოდი - T ,
- რხევის სიხშირე - f .

ცვლადები

- სხეულის წანაცვლება წონასწორობის მდგომარეობიდან დროის ყოველ მომენტში (კოორდინატი) - x ,
- სიჩქარე - v ,
- აჩქარება - a ,
- დრო - t .

შაბლონის შევსება

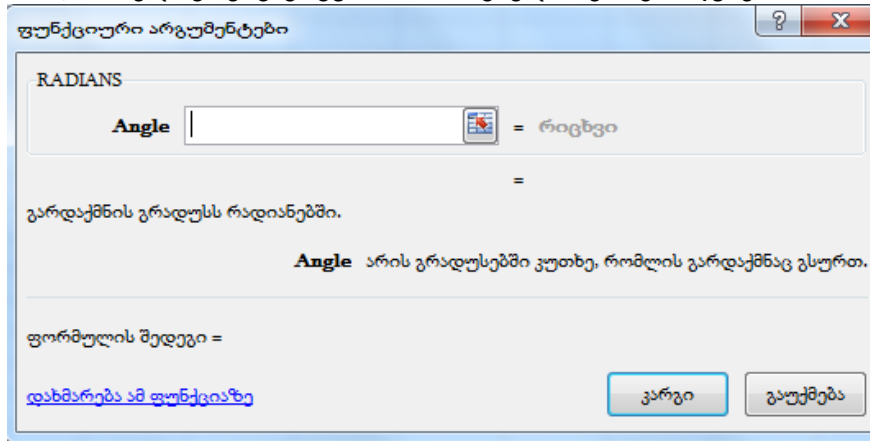
1. ქვეინტეგრალების რაოდენობა განსაზღვრეთ $n = 100$ -ის ტოლი. C10, C11, C14, C15 და C18 გრაფებში შეიტანეთ შემდეგი რიცხვითი მონაცემები:

$$X_{max} = 0.3 \text{ მ}; L = 1 \text{ მ}; t_{max} = 10 \text{ წმ}; \varphi = 30^\circ.$$

დროის საწყისი მომენტი (უჯრა C14) მიიღეთ ნულის ტოლად.

2. C12, C17 და C16 უჯრებში შეიტანეთ პერიოდის, რხევის სიხშირის და Δt დროის ინტერვალის გამოსათვლელი ფორმულები. ცნობილი მუდმივი რიცხვების მნიშვნელობები (თავისუფალი ვარდნის აჩქარება $g = 9,80665$ და $\pi \approx 3,14159265358979$ რიცხვი).
3. საწყისი ფაზის გრადუსული მნიშვნელობები გამოვსახოთ რადიანებით ფუნქცია „RADIANS“-ის გამოყენებით, რადგანაც კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების გამოთვლისას ტრიგონო-

მეტრიული ფუნქციები კუთხეების მნიშვნელობებს თვლიან რადიანებით. ამისათვის მონიშნეთ უჯრა E18. ჩანართში “ფორმულა” – „ფუნქციური ბიბლიოთეკა“ აირჩიეთ «მათემატიკური». მოძებნეთ ფუნქცია „RADIANS“. გამოჩნდება ფორმულათა პანელი, ველში „angle“ შეიყვანეთ იმ უჯრის მისამართი, რომელიც შეიცავს კუთხის მნიშვნელობებს გრადუსებში.



სურ.3.2. დიალოგური ფანქარა. ფუნქცია RADIANS

4. შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი (დრო–კოორდინატი–სიჩქარე–აჩქარება)

x(t), v(t) და a(t) გრაფიკების აგება

მიღებული შედეგებით ააგეთ $x(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ დამოკიდებულებათა გრაფიკები. რადგან სამივე შემთხვევაში OX ღერძის გასწვრივ იზომება ერთი და იგივე სიდიდე (დრო), ამიტომ შესაძლებელია სამივე დამოკიდებულების აგება ერთ კოორდინატთა სისტემაზე. ასეთი მეთოდი გამოიყენება, როცა საჭიროა, შევადაროთ რამდენიმე სიდიდე ან გამოვიკვლიოთ ზოგიერთი სიდიდის საწყის ან ექსპერიმენტის განხორციელების პირობებზე დამოკიდებულება. თუმცა ამ მეთოდს აქვს უარყოფითი მხარეც: მისი გამოყენება მოსახერხებელია მხოლოდ მაშინ, როცა სიდიდეები ერთი და იმავე რიგისაა.

დიაგრამის ასაგებად გამოვიყენოთ მონაცემთა დიაპაზონი G8:J108. პროგრამა Excel ამ დიაპაზონს ავტომატურად დაყოფს მონაცემთა სამ რიგად: პირველი – (G8:H108) (კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება), მეორე – (G8:G108; I8:I108) (სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება) და მესამე (G8:G108; J8:J108) (აჩქარების დროზე დამოკიდებულება), ამასთან პირველი სვეტი სამივე დამოკიდებულებისათვის იქნება საერთო.

გრაფიკის აგების შემდეგი პროცესი სტანდარტულია. ძირითადი მოთხოვნები:

1. აირჩიეთ ბრძანება “ჩამატება - დიაგრამა ... (Insert – Chart)”;
2. აირჩიეთ გრაფიკის სახე - “წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნეებთან ერთად”;
 - მონაცემთა მწკრივების სახელწოდებები – “წანაცვლება”, “სიჩქარე” და “აჩქარება”.
 - დიაგრამის დასახელება – “რხევითი პროცესის გრაფიკი”
 - X ღერძზე გადაზომილი სიდიდის დასახელება – “დრო t, წმ”;
 - Y ღერძზე გადაზომილი სიდიდის დასახელება – “კოორდინატი (მ)”; “სიჩქარე (მ/წმ)”; “აჩქარება (მ/წმ²)”;

ამოცანები

- 3.1 შეისწავლეთ საწყისი მონაცემების (საწყისი წანაცვლება და ფაზა, საქანის სიგრძე) ცვლილების გავლენა გრაფიკის ფორმაზე. შეისწავლეთ x_{max} –სა და L სიდიდეებს შორის კავშირი. განსაზღვრეთ ფაზათა სხვაობები მონაცემთა თითოეული წყვილისათვის. t_{max} –ის ცვლილებით შეისწავლეთ მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრები.
- 3.2 მათემატიკური ქანქარა ასრულებს ჰარმონიულ რხევას, ისე, რომ $L = 2$ მ და $x_{max} = 0,5$ მ. განსაზღვრეთ:

- ქანქარას რხევის პერიოდი და კუთხური სიხშირე,
 - ააგეთ $x(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ გრაფიკები, თუ წონასწორობიდან გამოყვანის მომენტში ქანქარას საწყისი ფაზა 45° -ია.
 - ააგეთ სიჩქარისა და აჩქარების კოორდინატზე დამოკიდებულების გრაფიკები $v(x)$ და $a(x)$ (ერთად).
 - ააგეთ აჩქარების სიჩქარეზე დამოკიდებულების გრაფიკი $a(v)$.
 - როგორაა დამოკიდებული ქანქარას მაქსიმალური სიჩქარე სიგრძეზე? (ააგეთ $v_{max}(L)$ გრაფიკი, ჩათვალეთ, რომ ქანქარას სიგრძე იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ).
 - როგორაა დამოკიდებული ქანქარას მაქსიმალური აჩქარება პერიოდზე? (ააგეთ $a_{max}(T)$ გრაფიკი, ჩათვალეთ, რომ ქანქარას სიგრძე იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ).
 - რას უდრის $L = 15$ მ სიგრძის ქანქარას მაქსიმალური სიჩქარე, როცა რხევის ამპლიტუდა არის 3 მ?
 - რას უდრის $L = 20$ მ სიგრძის ქანქარას მაქსიმალური აჩქარება, როცა რხევის ამპლიტუდა არის 5 მ?
 - ააგეთ მაქსიმალური აჩქარების მაქსიმალურ სიჩქარეზე დამოკიდებულების გრაფიკი $a_{max}(v_{max})$, როცა ქანქარის სიგრძე იცვლება შუალედში $L = 1 - 20$ მ.
- 3.3 მატერიალური წერტილი ირხევა კანონით $x(t) = 12 \sin(5t - 1.3)$. განსაზღვრეთ დროის პირველი სამი მომენტი, რომლისთვისაც $x = -3.2$. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე და აჩქარება დროის ამ მომენტში.
- 3.4 მატერიალური წერტილი ირხევა კანონით $x(t) = 2 \cos(2t + 2.8)$. განსაზღვრეთ დროის პირველი სამი მომენტი, რომლისთვისაც $x = 1.7$. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე და აჩქარება დროის ამ მომენტში.
- 3.5 ორი რხევის შეკრების შედეგად მატერიალური წერტილი მოძრაობს კანონით: $x(t) = 6 \cos(1.3t - 1.2) + 2 \cos(2.6t - 0.4)$. ააგეთ კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატი, სიჩქარე და აჩქარება, როცა $t = 3.5$ წმ-ს.
- 3.6 ორი რხევის შეკრების შედეგად მატერიალური წერტილი მოძრაობს კანონით: $x(t) = 2 \cos(2.3t - 0.2) + 4 \sin(1.6t - 1.4)$. ააგეთ კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის კოორდინატი, სიჩქარე და აჩქარება, როცა $t = 1.5$ წმ-ს.
- 3.7 ორი მატერიალური წერტილი ასრულებს მოძრაობებს შემდეგი კანონებით: $x_1 = 10 - 0.7(t - 2)$, $x_2 = \sin(0.5t - 0.8)$. ააგეთ მათი კოორდინატების, სიჩქარეებისა და აჩქარებების დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ, შეხვდებიან თუ არა ისინი ერთმანეთს. განსაზღვრეთ მათი შეხვედრის დრო და ადგილი.
- 3.8 ორი მატერიალური წერტილი ასრულებს მოძრაობებს შემდეგი კანონებით: $v_1 = 1 + 0.3(t + 1)$, $x_2 = \sin(2.5t + 1)$. ააგეთ მათი კოორდინატების, სიჩქარეებისა და აჩქარებების დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ, შეხვდებიან თუ არა ისინი ერთმანეთს. განსაზღვრეთ მათი შეხვედრის დრო და ადგილი.
- 3.9 სამი მატერიალური წერტილი ასრულებს მოძრაობებს შემდეგი კანონებით: $v_1 = t$, $x_2 = \sin(0.5t + 2)$, $x_3 = 2t^2 + t^3$ ააგეთ მათი კოორდინატების, სიჩქარეებისა და აჩქარებების დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ, შეხვდებიან თუ არა ისინი ერთმანეთს. განსაზღვრეთ მათი შეხვედრის დრო და ადგილი.
- 3.10 სამი მატერიალური წერტილი ასრულებს მოძრაობებს შემდეგი კანონებით: $x_1 = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$, $x_2 = 10 \cos(t + 0.2)$, $x_3 = \sin(2t)$. ააგეთ მათი კოორდინატების, სიჩქარეებისა და აჩქარებების დროზე დამოკიდებულებების გრაფიკები. განსაზღვრეთ, შეხვდებიან თუ არა ისინი ერთმანეთს. განსაზღვრეთ მათი შეხვედრის დრო და ადგილი.

ლაბორატორიული ამოცანა №4.

ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელირება

გადავიდეთ ორგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესის განხილვაზე. ასეთი მოძრაობის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა. სინამდვილეში კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა სამგანზომილებიანია, მაგრამ გარკვეულ პირობებში ეს ამოცანა შეიძლება წარმოვადგინოთ სიბრტყეზე.

ვთქვათ, ჰორიზონტისადმი α კუთხით გასროლილ სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა (ჰაერის წინაღობის ძალა უგულებელყოფილია). თუ დავაკვირდებით ასეთი სხეულის მოძრაობას, შევნიშნავთ, რომ სხეულის მოძრაობისას იცვლება ორი კოორდინატი. შემოვიდოთ XOY კოორდინატთა სისტემა. სხეულის ნებისმიერი მდებარეობა განვსაზღვროთ ორი (x,y) კოორდინატებით, წერტილიდან წერტილში გადაადგილებისას იცვლება ორივე კოორდინატი ერთდროულად.

კოორდინატების ცვლილების კანონი შეიძლება დავადგინოთ შემდეგი მოსაზრებებიდან გამომდინარე: ჩვენი დაშვების თანახმად სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა, რომელიც მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ, ამიტომ აბსცისთა ღერძის გასწვრივ სიმძიმის ძალის გეგმილი ნულის ტოლია, ხოლო მოძრაობა – თანაბარი. შესაბამისად, კოორდინატი შეიცვლება კანონით:

$$x = v_x t, \quad (4.1)$$

ხოლო სიჩქარე $v_x = v_{0x} = const$, სადაც v_x არის სიჩქარის გეგმილი აბსცისთა ღერძზე.

სიმძიმის ძალა სხეულს ანიჭებს ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართულ g აჩქარებას. ამიტომ y ღერძის გასწვრივ მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია. შესაბამისად, სიჩქარის გეგმილი ორდინატთა ღერძზე შეიცვლება შემდეგი კანონით:

$$v_y = v_{0y} + g_y t, \quad (4.2)$$

ხოლო ორდინატი y იცვლება კანონით:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}. \quad (4.3)$$

ტრაექტორიის განტოლება რომ მივიღოთ, უკანასკნელი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ დრო. (4.1)-დან გამოვთვალოთ დრო:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}. \quad (4.4)$$

მოძრაობის დასაწყისში:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \quad (4.5)$$

(4.4) ჩავსვათ (4.3)-ში და გავითვალისწინოთ, რომ $g_y = -g$, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^2} x^2 \quad (4.6)$$

მოცემული განტოლება შეიძლება ასეც გადავწეროთ:

$$y = y_0 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (4.7)$$

ტრაექტორია შეესაბამება შემობრუნებულ პარაბოლას. ტრაექტორიის ყოველ წერტილში სხეულის სიჩქარე მიმართულია მოცემულ წერტილში ტრაექტორიისადმი გავლებული მხების გასწვრივ და შეიძლება დავშალოთ ორ მდგენელად:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad (4.8)$$

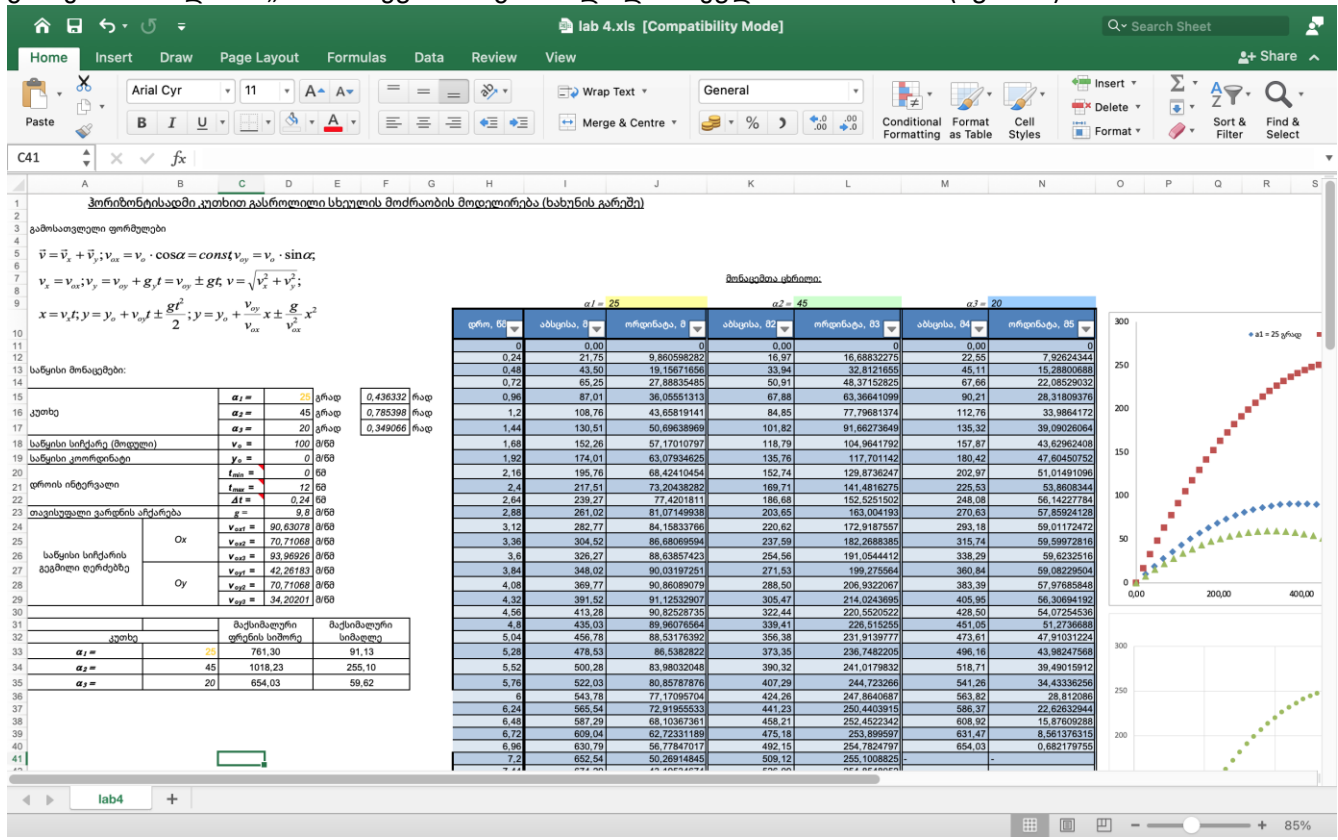
სადაც $\vec{v}_x = \vec{v}_{0x}$. ამასთან სიჩქარის მოდული:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2}. \quad (4.9)$$

ამოცანაში შეიძლება გამოვიკვლიოთ კოორდინატების ერთმანეთზე და დროზე დამოკიდებულებები. გარდა ამისა, გამოვიკვლიოთ ფრენის სიშორის დამოკიდებულება გასროლის კუთხესა და საწყისი სიჩქარის სიდიდეზე.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab4“ – "კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა" (სურ.4.1).



სურ.4.1. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მოდელირება - შაბლონი lab4

მოძრაობის ტრაექტორიის ასაგებად გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{cases} x = v_x t = x = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{oy} t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

გაანალიზეთ გამოსათვლელი ფორმულები და გამოყავით საწყისი, ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები.

შაბლონის შევსება

შეავსეთ მონაცემთა ცხრილი შემდეგი მონაცემებისათვის:

- $\alpha_1 = 36^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \alpha_3 = 60^\circ, v_0 = 100; y_0 = 0, t_0 = t_{min} = 0; t_{max} = 12\text{წმ}$.
მონაცემები შეიტანეთ შემდეგ უჯრებში:

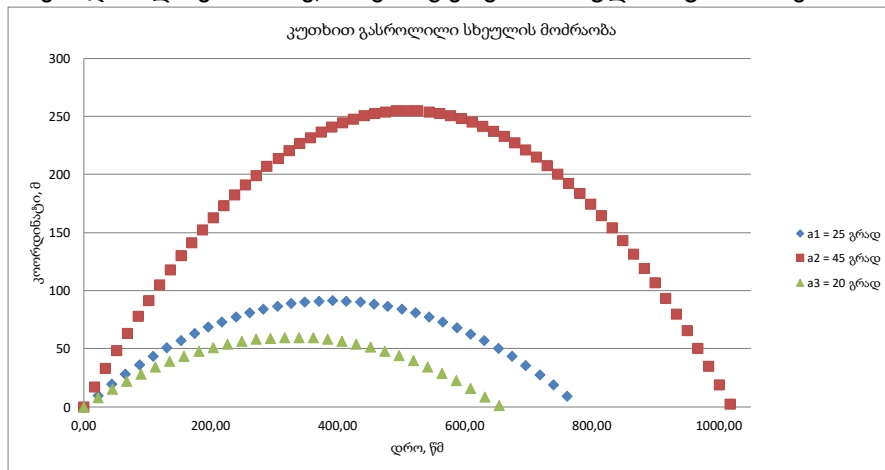
- 1) D15, D16, D17 უჯრებში საწყისი სიჩქარესა და Ox ღერძს შორის კუთხეები (გრადუსებით). ეს მოგვცემს საშუალებას, შევისწავლოთ ტრაექტორიის ფორმის დამოკიდებულება ჰორიზონტისადმი გასროლის α კუთხეზე. თუ კუთხეთა მნიშვნელობები მოცემულია რადიანებში, მაშინ ისინი უნდა ჩაიწეროს F15, F16, F17 უჯრებში.
 - 2) საწყისი სიჩქარის მოდული – D18–ში;
 - 3) საწყისი ორდინატა (სიმაღლე, რომლიდანაც გაისროლეს სხეული) – D19–ში;
 - 4) დროის საბოლოო მნიშვნელობა – D21–ში;
 - 5) თავისუფალი ვარდნის აჩქარება g – D23–ში;
 - 6) დროის საწყისი მომენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი;
2. თუ კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, საჭიროა მათი გადაყვანა რადიანებში. ფორმულა შეიძლება ჩაწეროთ მხოლოდ F15 უჯრაში, შემდეგ გადააკოპირეთ F16: F17 უჯრებში.
 3. D22 უჯრაში გამოთვალეთ t , როცა დროის ინტერვალი დაყოფილია $n = 50$ ექვივალენტურადად.
 4. გამოსათვლელი ფორმულების საშუალებით გამოთვალეთ საწყისი სიჩქარის პროექციები Ox და Oy ღერძებზე (D24: D26; D27: D29).
 5. მონაცემთა ცხრილი დროის სვეტის გარდა შეიცავს სამ წყვილ სვეტს „აბსცისა–ორდინატა“ α კუთხის სამი მნიშვნელობისათვის.

მითითება: ფორმულების შედგენისას მუდმივებისათვის გამოიყენეთ აბსოლუტური მიმართებები.

$y(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკის აგება

ცხრილი შედგება სამი წყვილი მონაცემთა რიგისაგან (I11:J61; K11:L61; M11:N61). რადგან კოორდინატთა ღერძებზე ხდება მსგავსი წევრების გადაზომვა, ამიტომ შესაძლებელია სამივე გრაფიკის ერთ დიაგრამაზე აგება. ამით შესაძლებელი იქნება ერთმანეთს შევადაროთ ტრაექტორიები (ასვლის სიმაღლე, ფრენის სიშორე) კუთხის სამივე მნიშვნელობისათვის. გრაფიკების აგება დაიწყეთ მხოლოდ ერთი წყვილით (მაგალითად, I11: J61 – თვის), ხოლო შემდეგ კონტექსტურ მენიუში ბრძანების „მონაცემთა არჩევა“ საშუალებით რიგრიგობით დაამატეთ შემდეგი ორი წყვილი. თითოეულ რიგს მიანიჭეთ სახელწოდებები.

დიაგრამა გააფორმეთ დაახლოებით ისე, როგორც ეს გამოსახულია სურ.4.2-ზე.



სურ.4.2. ჰორიზონტისადმი სხვადასხვა კუთხით გასროლილი სხეულების მოძრაობის ტრაექტორიის ამსახველი დიაგრამა

ამოცანები

- 4.1 შეისწავლეთ, რა გავლენას ახდენს საწყისი მონაცემების ცვლილება ტრაექტორიის ფორმაზე. განსაზღვრეთ, კუთხის რა მნიშვნელობისათვის აღწევს ფრენის სიშორე მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

- 4.2 ერთსა და იმავე დიაგრამაზე ააგეთ $y(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკები კუთხის სამივე მნიშვნელობისათვის და შეადარეთ ისინი ერთმანეთს.
- 4.3 საწყისი მონაცემების ცხრილში გამოთვალეთ საკონტროლო წერტილები და აღნიშნეთ ისინი დიაგრამაზე.
- 4.4 დაამატეთ ახალი გვერდი. შეადგინეთ ცხრილი $y(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგებად ტრაექტორიის განტოლების გამოყენებით: $y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$. ამ განტოლების მიხედვით საწყისი მონაცემები იქნება:
- 1) საწყისი ორდინატა (სიმაღლე) - y_0 ;
 - 2) საწყისი სიჩქარე (მოდული) - v_0 ;
 - 3) კუთხე α ;
 - 4) თავისუფალი ვარდნის აჩქარება - g ;
- ამ შემთხვევაში ფუნქციის არგუმენტი იქნება აბსცისა. ამიტომ საჭირო იქნება x კოორდინატის დიაპაზონის განსაზღვრა ($x_0, (x_{min} \div x_{max})$), რომლის გასწვრივაც განიხილება სხეულის მოძრაობა და Δx ცვლილების ბიჯი n რაოდენობის ქვეინტეგრალისათვის.
- 4.5 განსაზღვრეთ მოცემული კუთხისას მაქსიმალური ფრენის სიშორე და სიმაღლე. კუთხის შერჩევით დაადგინეთ კუთხის ორი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მაქსიმალური ფრენის სიშორე არის 510 მეტრი.

მითითება:

- მაქსიმალურ ფრენის სიშორედ ითვლება მანძილი საკოორდინატო სათავიდან $y = 0$ სიბრტყეზე დაცემის წერტილამდე. შესაბამისად, გრაფიკების სრულად აგებისათვის სხვადასხვა კუთხის შემთხვევაში x მონაცემთა სხვადასხვა რაოდენობა იქნება საჭირო. კერძოდ, საინტერესოა მხოლოდ ის x მონაცემები, რომლის შესაბამისი $y \geq 0$. ამიტომ x ცვლადების განსაზღვრის გამოიყენეთ ლოგიკური ფუნქცია IF. მაგალითად, რომელიმე I11 უჯრაში, სადაც წესით ანგარიშობთ ფრენის სიშორეს ფორმულით $x = v_{0x}t$ („=D\$24*H11“ - აქ D\$24 - შეესაბამება v_{0x} -ს, ხოლო H11 - კი t დროს), ჩაწერეთ ფორმულა „=IF(I11<0;0;D\$24*H11)“. ამ ფორმულის მიხედვით ყველა x გახდება ნულის ტოლი, რომლის შესაბამისი $y < 0$ (I11<0).
 - სრულყოფილი გრაფიკული სახის მისაღებად საჭიროებისამებრ დაამატეთ მონაცემები ცხრილში და პირიქით, გრაფიკზე ზედმეტი მონაცემები (მონაცემები, რომლებისთვისაც $x = 0$) გააქრეთ. ამისათვის მონიშნეთ კონკრეტული გრაფიკი, შესაბამისად გააქტიურდება გრაფიკის შესატყვისი მონაცემები ცხრილში. ავტომატური შევსების მარკერით დაარეგულირეთ მონაცემთა სასურველი რაოდენობა.
 - ფრენის სიშორისა და სიმაღლის მაქსიმალური მნიშვნელობების დასადგენად გამოიყენეთ Excel-ის ფუნქცია max (I11:I125), რომელსაც არგუმენტად მიეთითება მონაცემთა ის დიაპაზონი, რომლიდანაც მაქსიმალური მონაცემის განსაზღვრა გვსურს.
- 4.6 ქვა აისროლეს ჰორიზონტისადმი $\alpha = 60^\circ$ კუთხით, $v_0 = 15$ მ/წმ სიჩქარით. გამოთვალეთ მისი x და y კოორდინატები, სიჩქარის პროექციები v_x და v_y . სიჩქარის v მოდული და γ კუთხე \vec{v} სიჩქარის ვექტორსა და x ღერძს შორის. განსაზღვრეთ ქვის აჩქარების a_x ტანგენციალური და a_y ნორმალური მდგენელები.
- 4.7 ქვა აისროლეს ჰორიზონტისადმი $\alpha = 57^\circ$ კუთხით, $v_0 = 20$ მ/წმ სიჩქარით. გამოთვალეთ მისი x და y კოორდინატები, სიჩქარის პროექციები v_x და v_y . სიჩქარის v მოდული და γ კუთხე \vec{v} სიჩქარის ვექტორსა და x ღერძს შორის. განსაზღვრეთ ქვის აჩქარების a_x ტანგენციალური და a_y ნორმალური მდგენელები.
- 4.8 ერთდროულად აისროლეს ორი ქვა $\alpha_1 = 30^\circ$ და $\alpha_2 = 75^\circ$ კუთხეებით და $v_{01} = 10$ მ/წმ და $v_{02} = 25$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით. გამოთვალეთ მათი x_1, x_2, y_1 და y_2 კოორდინატები, სიჩქარის პროექციები v_{x1}, v_{x2}, v_{y1} და v_{y2} . სიჩქარის v_1 და v_2 მოდულები, γ_1 და γ_2 კუთხეები შესაბამისად \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეთა ვექტორებსა და x ღერძს შორის. განსაზღვრეთ ქვების აჩქარების a_{x1} და a_{x2}

ტანგენციალური და a_{y1} და a_{y2} ნორმალური მდგენელები. დაადგინეთ, რამდენადაა ქვების დაჯახების შესაძლებლობა და თუ არის, განსაზღვრეთ შეხვედრის ადგილი და დრო.

4.9 კოორდინატებიდან $x_1 = 10$ და $x_2 = 0$ ერთდროულად აისროლეს ორი ქვა $\alpha_1 = -10^\circ$ და $\alpha_2 = 25^\circ$ კუთხეებით და $v_{01} = -20$ მ/წმ და $v_{02} = 10$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით. გამოთვალეთ მათი x_1 , x_2 , y_1 და y_2 კოორდინატები, სიჩქარის პროექციები v_{x1} , v_{x2} , v_{y1} და v_{y2} . სიჩქარის v_1 და v_2 მოდულები, α_1 და α_2 კუთხეები, შესაბამისად, \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეთა ვექტორებსა და x ღერძს შორის. განსაზღვრეთ ქვების აჩქარების a_{x1} და a_{x2} ტანგენციალური და a_{y1} და a_{y2} ნორმალური მდგენელები. დაადგინეთ, რამდენადაა ქვების დაჯახების შესაძლებლობა და თუ არის, განსაზღვრეთ შეხვედრის ადგილი და დრო.

4.10 კოორდინატებიდან $x_1 = 15$ და $x_2 = 0$ ერთდროულად აისროლეს ორი ქვა $\alpha_1 = -12^\circ$ და $\alpha_2 = 5^\circ$ კუთხეებით და $v_{01} = -10$ მ/წმ და $v_{02} = 8$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით. გამოთვალეთ მათი x_1 , x_2 , y_1 და y_2 კოორდინატები, სიჩქარის პროექციები v_{x1} , v_{x2} , v_{y1} და v_{y2} . სიჩქარის v_1 და v_2 მოდულები, α_1 და α_2 კუთხეები შესაბამისად \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეთა ვექტორებსა და x ღერძს შორის. განსაზღვრეთ ქვების აჩქარების a_{x1} და a_{x2} ტანგენციალური და a_{y1} და a_{y2} ნორმალური მდგენელები. დაადგინეთ, რამდენადაა ქვების დაჯახების შესაძლებლობა და თუ არის, განსაზღვრეთ შეხვედრის ადგილი და დრო.

ლაბორატორიული ამოცანა №5.

ზამბარიანი ქანქარას რხევის მოდელირება ნახევარინტერვალთა მეთოდით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ, რხევითი მოძრაობის მოდელირება მათემატიკური ქანქარას რხევის მაგალითზე, რომელიც განპირობებული იყო მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ახლა კი განვიხილოთ რხევითი მოძრაობა, რომელიც განპირობებულია დრეკადობის ძალის მოქმედებით.

ვთქვათ, m მასის ტვირთი დამაგრებულია k სიხისტის ზამბარაზე და ჰორიზონტალურ სიბრტყეში ასრულებს რხევით მოძრაობას მხოლოდ დრეკადობის ძალის მოქმედებით. რხევების მიღება უგულებელყოფილია.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი სხეულს ანიჭებს აჩქარებას:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (5.1)$$

სადაც m – სხეულის მასაა, \vec{F} – სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი, \vec{a} – ამ ძალების მიერ სხეულზე მინიჭებული აჩქარება. ჩავწეროთ ეს განტოლება ზამბარაზე მიმაგრებული სხეულისათვის, რომელიც ირხევა ჰორიზონტალური ღერძის გასწვრივ. Ox ღერძი მივმართოთ მარჯვნივ, სხეულის წონასწორობის მდგომარეობას კი შევუსაბამოთ კოორდინატთა ღერძის სათავე. აღებულ Ox მიმართულებაზე მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$F_x = ma_x, \quad (5.2)$$

რადგან სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ დრეკადობის ძალა, ამიტომ ძალების ტოლქმედი დრეკადობის ძალის ტოლია.

$$F_x = -kx,$$

შესაბამისად გვექნება:

$$ma_x = -kx. \quad (5.3)$$

ამ განტოლებას ზამბარაზე მიმაგრებული ტვირთის მოძრაობის განტოლება ეწოდება. გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$a_x = -\frac{k}{m}x.$$

რადგან:

$$a_x = x''$$

ამიტომ:

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \quad (5.4)$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2x, \quad (5.5)$$

სადაც:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

უწოდებენ მერხვევი სისტემის საკუთარ ციკლურ სიხშირეს ან წრიულ სიხშირეს. ამრიგად,

$$x'' + \omega_0^2x = 0. \quad (5.6)$$

განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ ამ განტოლების ამონახსნია:

$$\begin{cases} x = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ v_0 = -\omega_0 x_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \\ a_x = -\omega_0^2 x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \end{cases} \quad (5.7)$$

ეს ფორმულები გვაძლევს საშუალებას, გამოვთვალოთ x , v და a დროის ნებისმიერ მომენტში, რადგან ტვირთის მოძრაობა ხდება ცვლადი ძალის მოქმედებით, ამიტომ ამოცანა საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტისათვის სარგებლობენ ე.წ. რიცხვითი მეთოდებით. ეს მეთოდი მიახლოებითია, მაგრამ გარკვეულ პირობებში იძლევა საკმაოდ კარგ შედეგებს. ყველაზე მარტივ რიცხვით მეთოდს მიეკუთვნება ნახევარინტერვალთა მეთოდი. განვიხილოთ ამ მეთოდის არსი.

ნახევარინტერვალთა მეთოდი

ვირჩევთ დროის $t_{min} \div t_{max}$ შუალედს (როგორც წესი $t_{min} = 0$), რომელიც იყოფა n თანაბარ ქვეინტერვალად:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{n}$$

ქვეინტერვალთა რაოდენობა აიღება ნებისმიერად. მიახლოება გამოიხატება იმაში, რომ თითოეულ ასეთ უბანზე მოძრაობა ითვლება თანაბარჩქარებულად. სწორედ Δt ინტერვალის სიდიდეზეა დამოკიდებული გამოთვლის სიზუსტე. რაც უფრო მცირეა ეს ინტერვალი, მით უფრო ნაკლები განსხვავება იქნება გამოთვლებით მიღებული შედეგები ზუსტ მნიშვნელობასთან.



სურ.5.1. დროითი ღერძი. ინტერვალის და ბიჯის წარმოდგენა დროით ღერძზე

(5.7) ტოლობის ზუსტი ტოლობებიდან გადავიდეთ მიახლოებითზე, ამისათვის კი გამოვიყენოთ წარმოებულის ცნება:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (5.8)$$

სადაც $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$, ან ზოგადად $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, სადაც i იცვლება 0-დან n -მდე. ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), ანალოგიურად $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. გავითვალისწინოთ რომ $x' = v_x$ და $x'' = v_x'$. ამავე პრინციპით დავწეროთ მეორე რიგის წარმოებულის:

$$x'' = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad (5.9)$$

(5.8)-დან და (5.9)-დან ჩანს, რომ რაც მცირეა ქვეინტერვალის სიდიდე, მით უფრო ზუსტია ამონახსნი. ნახევარინტერვალთა მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში:

1) სიჩქარის მნიშვნელობებს ვიხილავთ Δt ინტერვალის შუაში, ანუ

$$t_{1/2} = \frac{t_1 - t_0}{2} = \frac{\Delta t}{2},$$

$$t_{3/2} = \frac{t_2 - t_1}{2} = 3 \frac{\Delta t}{2},$$

$$t_{i+1/2} = \frac{t_{i+1} - t_i}{2} = (2i + 1)\frac{\Delta t}{2},$$

$$\dots$$

$$t_{n-1/2} = \frac{t_n - t_{n-1}}{2} = (2n - 1)\frac{\Delta t}{2}.$$

მომენტებში. (5.9) გავითვალისწინოთ (5.7)-ში:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \approx -\frac{k}{m}x.$$

2) კოორდინატების მნიშვნელობები განისაზღვრება დროის ყოველი ინტერვალის ბოლოს, ანუ წერტილებში $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n$. წერტილები, სადაც გამოითვლება სიჩქარისა და კოორდინატების მნიშვნელობები, წანაცვლებულია ერთმანეთისაგან ნახევარი ინტერვალით. თუმცა თვით მნიშვნელობები გამოითვლება Δt ინტერვალის სხვაობით. სიჩქარის პროექციის მნიშვნელობები პირველი ინტერვალის შუაში გამოითვლება შემდეგი პირობიდან:

$$\frac{(v_x)_{1/2} - (v_x)_0}{(\Delta t/2)} \approx -\frac{k}{m}x_0,$$

სადაც სიჩქარისა და კოორდინატის ინდექსები აღნიშნავს დროის იმ მომენტებს, რომლისთვისაც ისინი არის აღებული. შესაბამისად,

$$(v_x)_{1/2} \approx (v_x)_0 - \frac{k}{m}x_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

დროის შემდეგი მომენტისათვის

$$(v_x)_{3/2} \approx (v_x)_{1/2} - \frac{k}{m}x_1 \cdot \Delta t,$$

$$(v_x)_{5/2} \approx (v_x)_{3/2} - \frac{k}{m}x_2 \cdot \Delta t,$$

...

$$(v_x)_{i+1/2} \approx (v_x)_{i-1/2} - \frac{k}{m}x_i \cdot \Delta t,$$

...

ამრიგად, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის სიჩქარის მნიშვნელობა განისაზღვრება კოორდინატისა და სიჩქარის უკვე ცნობილი მნიშვნელობებით. დროის t_1 მომენტისათვის სხეული კოორდინატი ვიპოვოთ შემდეგი პირობიდან:

$$x' = v_x \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

შესაბამისად, გვექნება:

$$(v_x)_{1/2} \approx \frac{x_1 - x_0}{\Delta t},$$

$$x_1 \approx x_0 + (v_x)_{1/2} \cdot \Delta t.$$

დროის შემდეგი მომენტებისთვის:

$$x_2 \approx x_1 + (v_x)_{3/2} \cdot \Delta t,$$

$$x_3 \approx x_2 + (v_x)_{5/2} \cdot \Delta t,$$

$$x_{i+1} \approx x_i + (v_x)_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t.$$

ზემოთ განხილულის განზოგადებით რხევის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება ასე:

$$\begin{cases} (v_x)_{1/2} \approx (v_x)_0 - \frac{k}{m} x_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}, \\ (v_x)_{i+\frac{1}{2}} \approx (v_x)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{k}{m} x_i \cdot \Delta t, \\ x_{i+1} \approx x_i + (v_x)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (5.10)$$

სწორედ ამ გრაფიკების საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ $x(t)$ და $v(t)$ დამოკიდებულებების გრაფიკები. ნახევარინტერვალთა მეთოდით გამოთვლების თანმიმდევრობა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

| t_0 | x_0 | v_0 |
|-------------|-------|-------------|
| $t_{1/2}$ | x_1 | $v_{1/2}$ |
| t_1 | x_2 | $v_{3/2}$ |
| $t_{3/2}$ | x_3 | $v_{5/2}$ |
| t_2 | ... | ... |
| $t_{5/2}$ | ... | ... |
| t_3 | ... | ... |
| ... | ... | ... |
| $t_{i+1/2}$ | x_i | $v_{i+1/2}$ |
| t_i | ... | ... |
| ... | ... | ... |

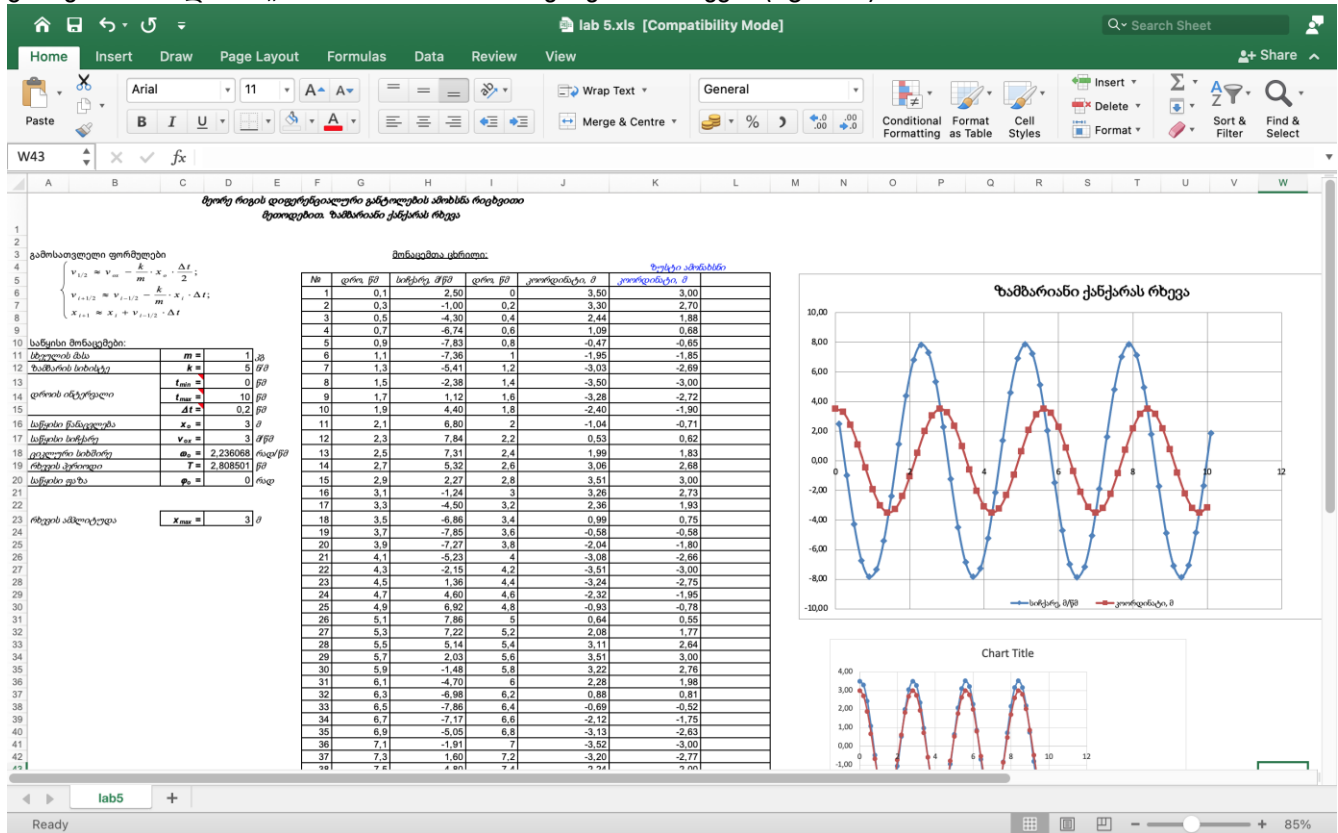
სურ.5.2. გამოთვლების თანმიმდევრობა ნახევარინტერვალთა მეთოდით

ყურადღება მიაქციეთ იმ გარემოებას, რომ კოორდინატი ღრობის ნებისმიერი t_i მომენტისათვის განისაზღვრება (5.10) სისტემის მესამე ფორმულით, ხოლო სიჩქარე პირველი ინტერვალის შუაში განისაზღვრება (5.1) სისტემის პირველი ფორმულით, დანარჩენი ინტერვალისათვის კი (5.1) სისტემის მეორე ფორმულით.

როგორც ცნობილია, ფიზიკაში მრავალი პროცესი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით, რომელთათვისაც შეუძლებელია ზუსტი ამონახსნის პოვნა. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ზემოთ აღწერილი ალგორითმი შეიძლება გამოყენებულ იქნას მსგავსი განტოლებების ამოხსნის ზოგად სქემად.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab5“ – "ზამბარიანი ქანქარას რხევა" (სურ.5.1).



სურ.5.3. ზამბარიანი ქანქარას რხევის მოდელირება. შაბლონი Lab5

გაანალიზეთ გამოსათვლელი ფორმულები და გამოყავით საწყისი, ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები.

- 1) ცხრილში შეიტანეთ საწყისი მონაცემები:
 - $m = 1$ კგ; $k = 5$ ნ/მ; $t_{max} = 10$ წმ; $v_0 = 3$ მ/წმ; $x_0 = 0$ მ; $t_0 = 0$.
 - სხეულის მასა – D11 უჯრაში;
 - ზამბარის სიხისტე – D12 უჯრაში;
 - დროის მომენტი – D14 უჯრაში;
 - საწყისი წანაცვლება – D16 უჯრაში;
 - საწყისი სიჩქარე – D17 უჯრაში;
- 2) დროის საწყისი მომენტი განტოლების ნახევარ ინტერვალთა მეთოდით ამოხსნისას მიიღეთ ნულის ტოლად: $t_0 = 0$ წმ (D13 უჯრაში).
- 3) შეიტანეთ Δt დროის ინტერვალის (ბიჯი), ციკლური სიხშირისა და პერიოდის გამოსათვლელი ფორმულა (ქვეინტერვალების რაოდენობა განსაზღვრეთ მონაცემთა ცხრილებით).
- 4) შეავსეთ მონაცემთა ცხრილები (დრო–სიჩქარე; დრო–კოორდინატი).

G და I სვეტების შეიცავს დროის მნიშვნელობებს. დროის ორ სვეტად შევსება აუცილებელია, რადგან სიჩქარეები და კოორდინატები გამოითვლება დროის სხვადასხვა მომენტისათვის. G6 და I6 უჯრებში შეიტანეთ დროის საწყისი მომენტები (D13 უჯრიდან). I7–უჯრაში შეიტანეთ t_1 მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა და გადააკოპირეთ მთელ დიაპაზონზე. G7 უჯრაში შეიტანეთ $t_{1/2}$ მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა. დროის შემდეგი ცვლილება კი G სვეტში ისევე ხდება Δt ინტერვალით.

სვეტები H და J შეიცავს სიჩქარისა და კოორდინატის მნიშვნელობებს. ამ სვეტების შევსება ხდება ანალოგიურად. ეს იმას ნიშნავს, რომ სიჩქარის სვეტის შევსებისას, თავდაპირველად, უნდა შევიტანოთ შუალედური ფორმულა დროის პირველი ინტერვალის შუაში, ე.ი. დროის საწყისი მომენტიდან $\Delta t/2$ ინტერვალში. სიჩქარის შემდეგი მნიშვნელობების გამოთვლა კი ხდება ზოგადი ფორმულით Δt ბიჯით. J7 უჯრაში შეიტანეთ კოორდინატის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა და გადააკოპირეთ მთელ დიაპაზონზე.

მიითება

- ყურადღება მიაქციეთ იმას, რომ სიჩქარისა და კოორდინატების გამოსათვლელად არ გამოიყენება დროის მნიშვნელობები დროის სვეტიდან. ისინი საჭიროა მხოლოდ გრაფიკების ასაგებად.
- ფორმულების შეტანისას არ დაივიწყოთ აბსოლუტური მისამართების გამოყენება მუდმივი სიდიდეებისათვის!!!

გრაფიკის აგება

მიღებული გამოთვლების საშუალებით ააგეთ ორი გრაფიკი: $x(t)$ და $v(t)$. რადგან ორივე დამოკიდებულებისას აბსცისთა ღერძზე იზომება ერთი და იგივე სიდიდე (დრო), ამიტომ ორივე გრაფიკი შეიძლება ავაგოთ ერთ დიაგრამაზე.

- აირჩიეთ ბრძანება: „ჩამატება - დიაგრამა (Insert Scatter)“
- აირჩიეთ გრაფიკის ტიპი: „წერტილოვანი გლუვ ხაზებთან და სანიშნებთან ერთად (Scatter with Smooth line and Markers)“;
- მონაცემთა რიგებს მიანიჭეთ სახელწოდებები: „სიჩქარე, მ/წმ“ და „კოორდინატი, მ“ (შეიყვანეთ ეს მონაცემები შესაბამის ველში კლავიატურით ან შესაბამისი უჯრის „მონაცემთა ცხრილი“ მისამართზე მიმართებით);
- მიანიჭეთ დიაგრამას სახელწოდება: „სხეულის რხევა დრეკადი ძალების ზემოქმედებით“
- X ღერძის სახელწოდება: „დრო, წმ“
- Y ღერძის სახელწოდება: „კოორდინატი (მ)“; „სიჩქარე (მ/წმ)“.

ამოცანები

5.1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ზამბარიანი ქანქარა, რომელიც ასრულებს ჰარმონიულ რხევას: $x = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

- ააგეთ კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები.
- განსაზღვრეთ პროგრამის ბიჯი და ნახევარინტერვალთა მეთოდით ააგეთ $x(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ დამოკიდებულებები.
- განსაზღვრეთ ზამბარის სიხისტე, თუ მასზე დამაგრებული ტვირთის მასაა 0.15 კგ.
- $x(t)$ სვეტიდან Excel-ის ფუნქციით MAX() განსაზღვრეთ კოორდინატის მაქსიმალური გადახრა. ცალკე სვეტში იპოვეთ ფაზის ცვლილება ფორმულით: $\varphi_0 = \arccos \frac{x}{x_{max}}$.
- ცალკე სვეტში გამოთვალეთ კოორდინატის, სიჩქარისა და აჩქარების ზუსტი ამონახსნი და შეადარეთ მიახლოებითი ამონახსნი თეორიის შედეგს. დარწმუნდით, რომ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა.
- გააფორმეთ ცხრილის სვეტები დიაგრამაზე გამოსახული გრაფიკის ფერების მიხედვით.
- შექმენით ცალკე მუშა ფურცელი და შეასრულეთ ანალოგიური მოდელირება მათემატიკური ქანქარისათვის.
- ჩართეთ ან გამორთეთ გრაფიკზე ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ხაზები (ბადე).
- შექმენით „ჭკვიანი ცხრილი“, რომელიც საშუალებას მოგცემთ, ცხრილში მონაცემების დამატების შემთხვევაში შედეგები ავტომატურად აისახოს გრაფიკზე.

მითითება: ჭკვიანი ცხრილის შესაქმნელად საჭიროა, მონიშნოთ მთელი ცხრილი და შეასრულოთ ბრძანება $Ctrl + T$. ცხრილი მიიღებს სპეციფიკურ ფორმატს, რომელშიდაც ყოველი ახალი მონაცემის დამატების შემთხვევაში შედეგები ავტომატურად აისახება გრაფიკზე.

5.1 მოცემული გვაქვს ზამბარიანი ქანქარას რხევის განტოლება: $x = e^{-2.3t} \sin(5t + 2.2)$. განსაზღვრეთ ზამბარას სიხისტე, მიღევის კოეფიციენტი, რხევის პერიოდი. ააგეთ კოორდინატის, სიჩქარის და აჩქარების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები მიახლოებითი ნახევარინტერვალთა მეთოდით და ფორმულებით. შეადარეთ მიახლოებითი მეთოდით მიღებული შედეგი ფორმულით მიღებულ შედეგს.

5.2 ორ ვერტიკალურ კედელს შორის მოძრაობს m_1 და m_2 მასის ორი ნაწილაკი. ისინი გადაბმული არიან ერთმანეთთან k სიხისტის ზამბარით და სრიალებენ კედლებს შორის დამაგრებული ჰორიზონტალური ღეროს გასწვრივ. ჩათვალით, რომ მოცემულია ნაწილაკების საწყისი კოორდინატები და საწყისი სიჩქარეები. კედელთან დაჯახებისას ნაწილაკები განიცდიან დრეკად დაჯახებას და იცვლიან მიმართულებას. ააგეთ $x_1(t)$ და $x_2(t)$ გრაფიკები.

მითითება: პირველ ნაწილაკზე მეორე ნაწილაკის მხრიდან მოქმედებს დრეკადობის ძალა: $F_{1x}(t) = k[(x_2 - x_1) - b]$, b - მიღევის კოეფიციენტი. რადგან კედელთან დაჯახება დრეკადია, ამიტომ $F_{1x}(t) = -F_{2x}(t)$. ნაწილაკების აჩქარებები კი იქნება: $a_{1x}(t) = \frac{F_{1x}(t)}{m_1}$, $a_{2x}(t) = -\frac{F_{2x}(t)}{m_2}$. ნაწილაკთა სისტემა გადაადგილდება, როგორც ერთიანი სისტემა ერთი კედლიდან მეორე კედლისაკენ. ამასთან, ნაწილაკები ასრულებს თავისუფალ რხევებს სისტემის საერთო მასათა ცენტრის მიმართ. ყურადღება მიაქციეთ იმ გარემოებას, რომ თითოეული კოორდინატი ირხევა ჰარმონიული კანონით $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ და $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ სიხშირეებით.

ლაბორატორიული ამოცანა №6.
სხეულის ვარდნის მოდელირება წინააღმდეგობის ძალების
გათვალისწინებით

რეალურ ექსპერიმენტში ატმოსფეროში ვარდნილ სხეულებზე მოქმედებს წინააღმდეგობის ძალა. როგორც ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, მცირე მასის სხეულებზე, რომლებიც მცირე სიჩქარით ვარდებიან ეს წინააღმდეგობის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარის bv , ხოლო მასიური სხეულების შემთხვევაში, რომელთა ვარდნის სიჩქარე დიდია, ჰაერის მხრიდან მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარის კვადრატის bv^2 (b პროპორციულობის კოეფიციენტია შესაბამისად მცირე და დიდი სიჩქარით ვარდნილი სხეულებისათვის). ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{სიძ} + \vec{F}_{წიძ} \quad (6.1)$$

დიფერენციალური ფორმით ეს განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$my'' = m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y,$$

ან

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m}, \quad (6.2)$$

სადაც F_y - წარმოადგენს ვარდნილ სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედს. ვთქვათ, მოცემულ შემთხვევაში დადებით მიმართულებად ითვლება სიძიძის ძალის მიმართულება. ე.ი. y ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სხეულის ვარდნის სიჩქარე საკმაოდ დიდია, ე.ი. წინააღმდეგობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია:

$$F_{წიძ} = -bv^2.$$

ტოლქმედი ძალის პროექციისათვის გვექნება:

$$F_y = F_{სიძ} + F_{წიძ} = mg - bv^2. \quad (6.3)$$

შესაბამისად:

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mg - bv^2}{m} = g - \alpha v^2 = g - \alpha \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad (6.4)$$

სადაც $\alpha = \beta/m$. რადგან სხეულის სიჩქარე იცვლება, ამიტომ მოძრაობა მიმდინარეობს ცვლადი ძალის მოქმედებით. (6.4) განტოლების ამონახსნი ვიპოვოთ რიცხვითი მეთოდით, კერძოდ, ნახევარინტერვალთა მეთოდით, რომელსაც **ეილერის დაზუსტებულ მეთოდსაც უწოდებენ**.

გამოვიყენოთ №5 ლაბორატორიულ სამუშაოში გამოყენებული ალგორითმი და შევადგინოთ სიჩქარისა და კოორდინატის გამოსათვლელ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{1/2} \approx \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \left(g - \alpha \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2\right) \cdot \frac{\Delta t}{2}, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+1/2} \approx \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1/2} + \left(g - \alpha \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1/2}^2\right) \cdot \Delta t, \\ y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (6.5)$$

თუ გავანალიზებთ ამოცანას, მოცემულ შემთხვევაში სხეულის ვარდნისას იზრდება რა სიჩქარე, თანდათანობით მცირდება სიჩქარის ნაზრდი - აჩქარება. ბოლოს და ბოლოს სიჩქარის ნაზრდი ნულის ტოლი გახდება, სხეულის სიჩქარე მუდმივ სიდიდეს მიაღწევს და შესაბამისად, ვამბობთ, რომ დამყარდება მოძრაობის საბოლოო სიჩქარეც. ამ სიჩქარეს შეიძლება ასევე ვუწოდოთ **დამყარებული სიჩქარე**, რომელიც შეიძლება გამოვთვალოთ თეორიულად. კერძოდ, სიჩქარე დამყარდება მაშინ, როცა სხეულზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლი იქნება (შესაბამისად სიჩქარის ნაზრდიც ნულის ტოლი გახდება), ე.ი. სიმძიმის ძალა გაუტოლდება წინააღმდეგობის ძალას:

$$bv_{\text{დამყ}}^2 = mg, \quad (6.6)$$

აქედან:

$$v_{\text{დამყ}} = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}. \quad (6.7)$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს გამოთვლების კრიტერიუმს. მოდელირებისას, ალგორითმი ისე უნდა მუშაობდეს, რომ როცა სიჩქარე მიუახლოვდება დამყარებული სიჩქარის მნიშვნელობას გარკვეული სიზუსტით, სიჩქარის მომდევნო მნიშვნელობები გაუტოლდეს (6.7) ფორმულით გამოთვლილ დამყარებულ სიჩქარეს. (6.5) და (6.7) ფორმულებით გამოთვლილი სიჩქარეების მიახლოების სიზუსტეს კი თვით მომხმარებელი განსაზღვრავს ამოცანის პირობის შესაბამისად.

დაწვრილებით განვიხილოთ ზემოთ მიღებულ განტოლებათა სისტემა. შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

1. განვსაზღვროთ პროგრამის ბიჯი Δt . როგორც ცნობილია, ნახევარინტერვალთა მეთოდით ჩატარებული გამოთვლების სიზუსტე მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მცირეა ეს ინტერვალი.
2. მივუთითოთ ფორმულა, რომლითაც შესაძლებელი იქნება, გამოვთვალოთ სიჩქარე დროის განსაზღვრული მომენტებისათვის. ამისათვის (6.2) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(v_y)' = g - \alpha \cdot v_y^2.$$

წარმოებულის განმარტების თანახმად, მარცხენა მხარე გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(v_y)' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \approx \frac{\Delta v_y}{\Delta t}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ამ მეთოდით სიჩქარე გამოითვლება ყოველი ინტერვალის შუაში, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(v_y)' \approx \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{(v_y)_{i+1/2} - (v_y)_{i-1/2}}{\Delta t},$$

აქედან:

$$(v_y)_{i+1/2} \approx (v_y)_{i-1/2} + \left(g - \alpha \cdot (v_y)_{i-1/2}^2 \right) \cdot \Delta t.$$

სიჩქარე პირველი ინტერვალის ცენტრში იქნება:

$$(v_y)_{1/2} \approx (v_y)_0 + \left(g - \alpha \cdot (v_y)_0^2 \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}.$$

3. კოორდინატებს ვითვლით დროის ღერძის დაყოფის წერტილებში, ე.ი. ყოველი ინტერვალის ბოლოს. ფორმულის მისაღებად საჭიროა გამოვიყენოთ წარმოებულის განმარტება:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{\Delta t},$$

აქედან:

$$y_{i+1} \approx y_{i-1} + (v_y)_{i+1/2} \Delta t.$$

ამრიგად, საანგარიშო ფორმულებს წარმოადგენს:

$$y_{i+1} \approx y_{i-1} + (v_y)_{i+1/2} \Delta t, \tag{6.8}$$

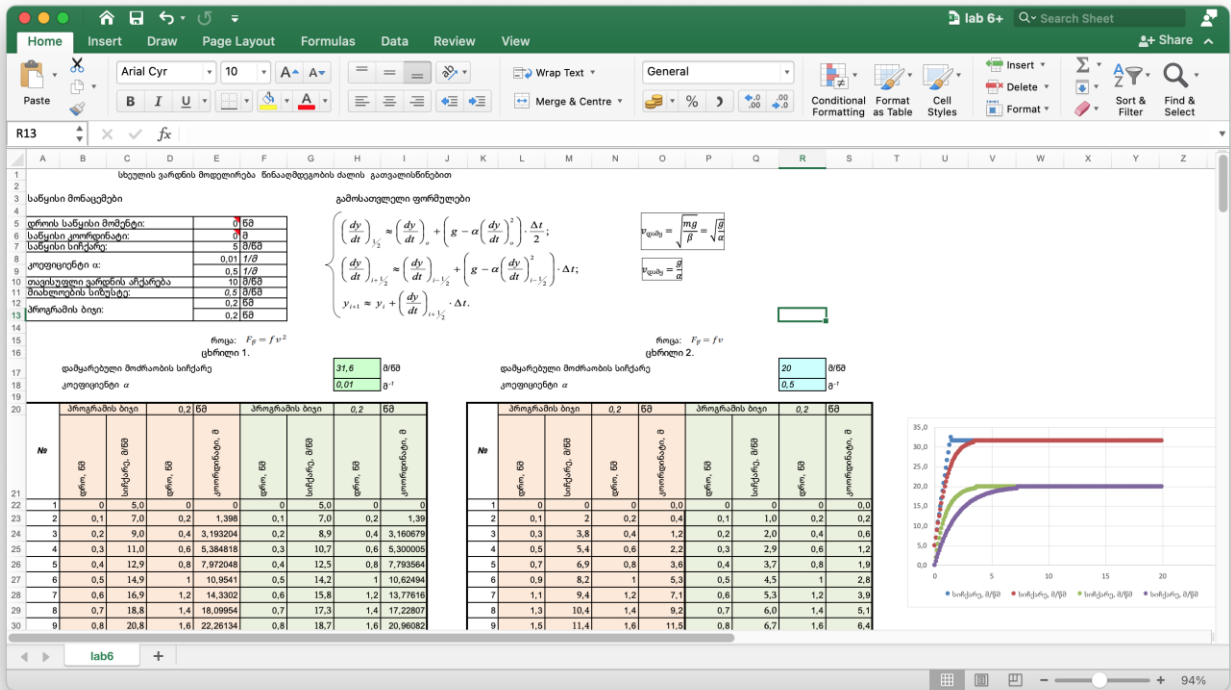
$$(v_y)_{1/2} \approx (v_y)_0 + (g - \alpha \cdot (v_y)_0^2) \cdot \frac{\Delta t}{2}, \tag{6.9}$$

$$(v_y)_{i+1/2} \approx (v_y)_{i-1/2} + (g - \alpha \cdot (v_y)_{i-1/2}^2) \cdot \Delta t. \tag{6.10}$$

(6.8) – (6.10) ფორმულები (6.7) პირობასთან ერთად განსაზღვრავს მოცემული ამოცანის ამონახსნს.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab6“ –"სხეულის ვარდნა ხახუნის გათვალისწინებით“ (სურ.6.1).



სურ.6.1. სხეულის ვარდნის მოდელირება წინააღმდეგობის ძალების გათვალისწინებით. შაბლონი lab 6

მოცემულია ორი ცხრილი, რომელთაგან ერთი შეესაბამება მაღალი სიჩქარით ვარდნის პროცესს, რომლის დროსაც წინააღმდეგობის ძალები სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია: $F_{წინ} = -bv^2$, ხოლო მეორე ცხრილი შეესაბამება დაბალი სიჩქარით ვარდნის პროცესს, როცა წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია მოძრაობის სიჩქარისა: $F_{წინ} = -\beta v$. პირველ შემთხვევაში დამყარებული სიჩქარე განისაზღვრება (8.7) პირობით, ხოლო მეორე შემთხვევაში - ფორმულით: $v_{დამყ} = \frac{g}{\alpha}$.

თითოეული ცხრილი დაყოფილია ორ ნაწილად Δt ბიჯის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. თვალსაჩინოებისათვის ისინი გამოყოფილია ფერებით. მაგალითად, $\Delta t = 0.1$ ბიჯს შეესაბამება ცხრილის ნაწილი ვარდისფერი ფონით, ხოლო $\Delta t = 0.3$ ბიჯს შეესაბამება ცხრილის ნაწილი მწვანე ფონით.

მაბლონის შევსება

1. საწყისი მონაცემები შეიტანეთ შესაბამის უჯრებში:

$$t_0 = 0 \text{ წმ}, \quad y_0 = 0 \text{ მ}, \quad (v_y)_0 = 0 \text{ მ/წმ}, \quad \alpha_1 = 0.03 \text{ მ}^{-1}, \quad \alpha_2 = 0.1 \text{ მ}^{-1}, \quad \Delta t_1 = 0.1 \text{ წმ}, \quad \Delta t_2 = 1 \text{ წმ}.$$

2. H16 და R16 უჯრებში გამოთვალეთ დამყარებული მოძრაობის სიჩქარე, იგი გამოიყენეთ გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმად (სიჩქარის მიღებულ მნიშვნელობაზე გამოთვლები უნდა შეწყდეს).

3. ცხრილი N1 შეავსეთ შემდეგი თანმიმდევრობით, საწყის მონაცემთა ცხრილის შესაბამისი უჯრები დააკავშირეთ შემდეგ უჯრებთან:

- 1) H17 – α_1 კოეფიციენტის მნიშვნელობა E8 უჯრასთან;
- 2) R17 – α_2 კოეფიციენტის მნიშვნელობა E9 უჯრასთან;
- 3) D19 – Δt_1 პროგრამის ბიჯის მნიშვნელობა E12 უჯრასთან;
- 4) H19 – Δt_2 პროგრამის ბიჯის მნიშვნელობა E13 უჯრასთან;
- 5) B21, D21, F21, H21 უჯრებში – დროის საწყისი მომენტის მნიშვნელობა E5 უჯრასთან;
- 6) C21 და G21 უჯრებში – საწყისი სიჩქარის მნიშვნელობა E7 უჯრასთან;
- 7) E21 და I21 უჯრებში – საწყისი კოორდინატის მნიშვნელობა E6 უჯრასთან;
4. სიჩქარის გამოთვლა კრიტერიუმით. C23 უჯრაში გამოთვალეთ სიჩქარე პირველი ინტერვალისათვის, ხოლო C24-ში შეიტანეთ სიჩქარის ფორმულა მომდევნო ინტერვალისათვის.
5. ცხრილი N2 შეავსეთ დამოუკიდებლად.

ლოგიკური ფუნქციების გამოყენება გამოთვლებისას

რადგან გამოთვლები ტარდება მანამ, ვიდრე სიჩქარე მიაღწევს მუდმივ, ე.წ., დამყარებულ მნიშვნელობას (იხ. გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმი), ამიტომ შევარჩიოთ მიახლოების სიზუსტე, მაგალითად 0.01. ეს იმას ნიშნავს, რომ გამოთვლები ჩატარდება, ვიდრე სიჩქარის მიღებული მნიშვნელობები თეორიულად გამოთვლილ მნიშვნელობას არ მიუახლოვდება მოცემული სიზუსტით. ამისათვის კი საჭიროა გამოთვლილი სიჩქარის ყოველი მნიშვნელობა შეადაროთ თეორიულ მნიშვნელობას. ფორმულის ასეთ აგებას პირობითი ამოხსნა ეწოდება. პირობის განსაზღვრისათვის გამოიყენება ლოგიკური ფუნქციები (IF, AND, OR, NOT).

ფუნქცია IF გამოიყენება მნიშვნელობებისა და ფორმულების პირობებთან შესადარებლად. იგი ციკლურად აბრუნებს ცვლადის მნიშვნელობას, ვიდრე ლოგიკური პირობა - კრიტერიუმი არ განდება ქეშმარიტი. ფუნქციის სინტაქსისა:

$$=IF(\text{logical_test}; \text{value_true}; \text{value_if_fals})$$

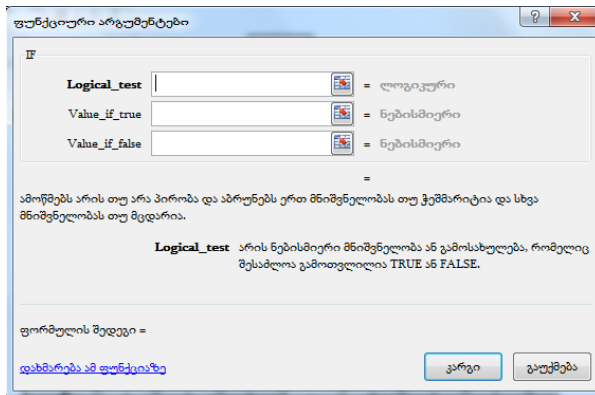
IF ფუნქციის არგუმენტებია:

1. logical_test – ეს არის ნებისმიერი მნიშვნელობა ან გამოსახულება, რომელიც დებულობს ქეშმარიტ ან მცდარ მნიშვნელობებს. ლოგიკურ გამოსახულებად შეიძლება, გამოიყენოთ მათემატიკური ფორმულა ან სხვა ლოგიკური ფუნქცია. ჩვენს შემთხვევაში უნდა შევამოწმოთ პირობა:

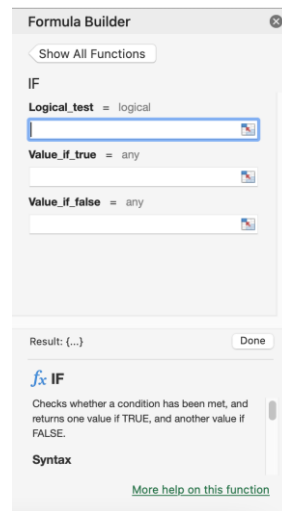
$$v_{\text{დამყ}} - v_{\text{გამოთ}} < 0,01. \quad (6.11)$$

2. value_true – ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც ენიჭება უჯრას, თუ ეს პირობა ტოლია ქეშმარიტების. ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ ზემოთ მოცემული სიზუსტე მიღწეულია, საჭიროა, გამოთვლები შეჩერდეს და შემდეგ უჯრებს მიენიჭოს გარკვეული მნიშვნელობა, მაგალითად, „0“, „ “ (ცარიელი უჯრა) და ა.შ.

3. value_if_fals – ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც ენიჭება მოცემულ უჯრას, თუ ლოგიკური გამოსახულება მცდარია. ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ფორმულა. ჩვენს შემთხვევაში – ძირითადი გამოსათვლელი ფორმულა, რომლითაც ხორციელდება სიჩქარის გამოთვლა.



ა)



ბ)

სურ.6.2. დიალოგური ფანჯარა IF: ა) MS-Ecxel 2013, ბ) MS-Ecxel 2016

IF ფუნქციის ჩაწერისას ფუნქციური არგუმენტები გამოყოფილია წერტილ-მძიმით, რაც ძალიან მნიშვნელოვანია ფუნქციის ხელით შეყვანისას. ფუნქციის დიალოგური ფანჯრის შევსებისას, ფუნქციის არგუმენტების წერტილ-მძიმით ავტომატურად გამოიყოფა.

C23 უჯრაში შეიყვანეთ ფორმულა:

$$=IF(\$H\$17-C22<=\$E\$11;\$H\$17;C22+(\$E\$10-\$E\$8*C22)*\$E\$12)$$

და დააკვირეთ დანარჩენ უჯრებში. ეს ლოგიკური ფუნქცია განსაზღვრავს პირობას, როცა სრულდება (6.11) პირობა, მაშინ სიჩქარეს მიანიჭოს დამყარებული სიჩქარის მნიშვნელობა, რომელიც გამოთვლილია H17 უჯრაში. როგორც შედეგი, იმ შემთხვევაში, როცა ჯერ კიდევ არ სრულდება პირობა (ლოგიკური გამოსახულების მნიშვნელობა მცდარია), გამოჩნდება სიჩქარის მნიშვნელობა მოცემული მომენტისათვის, ხოლო პირობის შესრულებისას აისახება დამყარებული სიჩქარის მნიშვნელობა \$H\$17.

შეიძლება ნაცვლად დამყარებული სიჩქარისა ლოგიკური ფუნქციით (6.11) პირობის შესრულებისას სიჩქარეს მივანიჭოთ ნული. მას შემდეგ რაც, სიჩქარე ლოგიკური პირობით განუღდება, შემდეგ უჯრაში ფორმულა აიღებს საწყისი სიჩქარის ნულოვან მნიშვნელობას - 0-ს. იმისათვის, რომ გამოთვლები შეწყდეს ან სიჩქარის ყოველმა მომდევნო მნიშვნელობამ, ასევე, მიიღოს მნიშვნელობა - 0 (რადგან დამყარებული სიჩქარის მნიშვნელობა მიღწეულია), საჭიროა, კიდევ ერთი პირობის შემოწმება: C22=0. ერთ-ერთი უნდა შესრულდეს. ამისათვის შეიძლება, გამოიყენებულ იქნას ლოგიკური ფუნქცია OR(logical1;logical2;...). მოცემულ ლოგიკურ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს მრავალი არგუმენტი, რომლებიც ლოგიკურ პირობებს წარმოადგენს. თუ ერთ-ერთი ლოგიკური პირობა სრულდება, მაშინ ფუნქცია მიიღებს ჭეშმარიტ მნიშვნელობას (True). თუ არადა, ციკლურად აბრუნებს გამოთვლებს, ვიდრე პირობები არის მცდარი (false).

ლოგიკურ OR სინტაქსს აქვს სახე:

$$OR(\$H\$16-C22<\$E\$11;C22=0)$$

ამრიგად, მოცემულ ამოცანაში გამოიყენება ორი ლოგიკური პირობა. საზოგადოდ კი, შეიძლება გამოყენებულ იქნას 30-მდე პირობა, რომლებიც შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ან მცდარი. საბოლოოდ C22 უჯრაში ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$=IF(OR(\$H\$16-C22<\$E\$11;C22=0);0;C22+(\$E\$10-\$E\$8*C22^2)*\$E\$8) .$$

შედეგად, დროის რომელიმე მომენტიდან ყველა უჯრაში ჩაიწერება 0, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ სხეულის სიჩქარე აღარ იცვლება. ანალოგიურად შეავსეთ სიჩქარის G სვეტი პროგრამის ბიჯის სხვა მნიშვნელობისათვის.

კოორდინატი გამოთვალეთ კოორდინატის სვეტის გასწვრივ E და I სვეტებში. ამისათვის E22-ში შეიტანეთ კოორდინატის გამოსათვლელი ფორმულა და გადააკოპირეთ E23:E220 დიაპაზონზე. ანალოგიურად შეავსეთ I სვეტი Δt დროის ინტერვალის სხვა მნიშვნელობისათვის. თუმცა ლოგიკურია სიჩქარისა და კოორდინატის დროის ინტერვალებს შორის გავამყაროთ შესაბამისობა. ამისათვის გამოვიყენოთ ლოგიკური ფუნქცია IF, ამ შემთხვევაში ვიყენებთ მხოლოდ ერთ ლოგიკურ ფუნქციას. კოორდინატის E სვეტში ჩაწერეთ ფორმულა:

$$=IF(C22=0;0;E21+C22*\$E\$12),$$

ფორმულიდან ჩანს, რომ როცა სრულდება პირობა $C22=0$, E22 უჯრას მიენიჭება მნიშვნელობა 0, წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება კოორდინატი შესაბამისი დროის მომენტისათვის. გადააკოპირეთ ფორმულა E23:E220 დიაპაზონზე. ანალოგიურად, ჩაწერეთ ფორმულა კოორდინატის I სვეტში პროგრამის ბიჯის სხვა მნიშვნელობისათვის;

შეავსეთ „დრო, წმ“ სვეტის (B და F სვეტები) სიჩქარისათვის. გაითვალისწინეთ, რომ სიჩქარე, იცვლება ყოველ დროით ინტერვალში, ამიტომ სიჩქარის მნიშვნელობას ვიღებთ ინტერვალის შუა წერტილისათვის. განსხვავებული იქნება სიჩქარის ფორმულა პირველი ინტერვალისათვის, რომლის ფორმულაშიც გათვალისწინებული უნდა იქნას $\Delta t/2$. ამის შემდეგ, სიჩქარის ფორმულაში უნდა გავითვალისწინოთ Δt . ამის გარდა, დიაგრამაზე გამოისახება დროის ის მომენტებიც, რომლისთვისაც სიჩქარე ნულის ტოლი გახდება. იმისათვის, რომ ეს არ მოხდეს, გამოიყენეთ დროის გამოთვლა პირობით:

$$=IF(C23=0;0;B22+\$E\$12/2)$$

სიჩქარის მნიშვნელობის გამოთვლის შეწყვეტასთან ერთად შეწყდეს დროის გამოთვლაც. გადააკოპირეთ ფორმულა B24:B220 და F24:F220 უჯრებზე.

შეავსეთ დრო, წმ სვეტის (D და H სვეტები) კოორდინატებისათვის. ამ შემთხვევაში დრო იცვლება Δt ინტერვალით, რადგან კოორდინატი გამოითვლება დროის დერძის დაყოფის წერტილებში (ყოველი ინტერვალის ბოლოში). ამ შემთხვევაშიც დროის გამოთვლა უნდა შეწყდეს სიჩქარის მნიშვნელობის გამოთვლის შეწყვეტასთან ერთად.

გრაფიკების აგება

ააგეთ $v(t)$ და $y(t)$ დამოკიდებულებების გრაფიკი, დიაგრამები ააგეთ ცალკე გვერდზე. აირჩიეთ გრაფიკის ტიპი – „წერტილოვანი, სახე - წერტილოვანი სანიშნებთან ერთად“;

ამოცანები

6.1 გახსენით შაბლონი lab6 და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- ცვალეთ α კოეფიციენტი და შეისწავლეთ, რა გავლენას ახდენს ეს ცვლილება თანაბარი მოძრაობის სიჩქარის მნიშვნელობაზე.
- განსაზღვრეთ პროგრამის ბიჯის ცვლილების გავლენა გამოთვლის სიზუსტეზე. განსაზღვრეთ, რა შემთხვევაში არ მუშაობს მოდელი.
- განიხილეთ შემთხვევა, როცა:
 - ა) საწყისი სიჩქარე განსხვავებულია ნულისაგან. როგორ გავითვალისწინოთ სიტუაცია, როცა ეს მნიშვნელობა აღემატება თეორიულად გამოთვლილ დამყარებულ სიჩქარეს?
 - ბ) საწყისი სიჩქარის პროექცია უარყოფითია (სხეულს აგდებენ ზევით). ამ შემთხვევაში შეიცვლება წინააღმდეგობის ძალის მიმართულება (წინააღმდეგობის ძალა ყოველთვის მიმართულია სხეულის მოძრაობის (სიჩქარის) საწინააღმდეგო მიმართულებით, ამიტომ (6.2) და

(6.3) ფორმულებში შეიცვლება ოპერაციის ნიშანი. როგორ გავითვალისწინოთ ასეთი სიტუაცია?

- დაამატეთ გვერდი, შექმენით ახალი ცხრილი, შეასრულეთ გამოთვლები და ააგეთ ანალიზური დიაგრამები შემთხვევისათვის, როცა სხული ვარდება მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით. ახსენით, რატომ ემთხვევა ერთმანეთს Δt დროის სხვადასხვა ინტერვალისათვის აგებული გრაფიკები.
- დაამატეთ გვერდი, შეასრულეთ გამოთვლები, როცა სხული ვარდება სიმძიმის ძალისა და წინააღმდეგობის ძალის ზემოქმედებით, ოღონდ ჩათვალეთ, რომ წინააღმდეგობის ძალა არა სიჩქარის კვადრატის, არამედ სიჩქარის პირდაპირპროპორციულია. ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები.

6.2 მატერიალური წერტილი ირხევა კანონით: $x(t) = 23e^{-0.05t} \sin(2.4t - 0.3)$. განსაზღვრეთ დროის პირველი სამი მომენტი რომლისთვისაც $x = 8$. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე და აჩქარება დროის ამ მომენტებში.

6.3 მატერიალური წერტილი ირხევა კანონით: $x(t) = 23e^{-0.04t} \sin(3.2t + 0.4)$ სმ. განსაზღვრეთ დროის პირველი სამი მომენტი, რომლისთვისაც $v_x = -16$ სმ/წმ. განსაზღვრეთ მატერიალური წერტილის სიჩქარე და აჩქარება დროის ამ მომენტებში.

6.4 k სიხისტის ზამბარიანი ქანქარას ერთი ბოლო დამაგრებულია ჭერზე. მეორე ბოლოზე დაკიდებულია m მასის ტვირთი. სისტემა გამოყავთ წონასწორობის მდგომარეობიდან, გადახრიან რა მას y_0 საწყისი კოორდინატით და ანიჭებენ v_0 საწყის სიჩქარეს. სისტემა რხევას ასრულებს გარემოში, რომელიც ხასიათდება β მილევის კოეფიციენტით. ააგეთ ფაზური მრუდები: $v(y)$, $a(y)$ და $a(v)$.

6.5 ვან-დერ-ჰოლის თვითმერხვი სისტემის განტოლება ჩაიწერება ტოლობით: $m\ddot{x} + kx = \beta(1 - x^2)\dot{x}$. ააგეთ $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ დამოკიდებულებები და ფაზური მრუდები $v(x)$, $a(v)$.

ლაბორატორიული ამოცანა №7. ექსპერიმენტით მიღებული მონაცემების დამუშავება

ვთქვათ, ექსპერიმენტის შედეგად გაზომილი იქნა რომელიმე x სიდიდე N -ჯერ. აღვნიშნოთ x_i – ით x – სიდიდის i – ური მნიშვნელობა. გაზომილი x სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება სიდიდეს:

$$X_{\text{საშ}} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7.1)$$

ყოველი გაზომილი მონაცემი განსხვავდება საშუალო მნიშვნელობისაგან სიდიდით:

$$\Delta_i = |\bar{x} - x_i|, \quad (7.2)$$

(7.2) ფორმულით მოცემულ Δ_i გამოსახულებას **ცალკეული გაზომილი მონაცემის აბსოლუტური ცდომილება** ეწოდება და იგი განსაზღვრავს საშუალოდან გადახრას. აბსოლუტური ცდომილების საშუალო არითმეტიკული გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta_{\text{საშ}} = \bar{\Delta} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\langle x \rangle - x_i|. \quad (7.3)$$

ექსპერიმენტურლი გაზომვების შესაფასებლად სარგებლობენ **ფარდობითი ცდომილებით**:

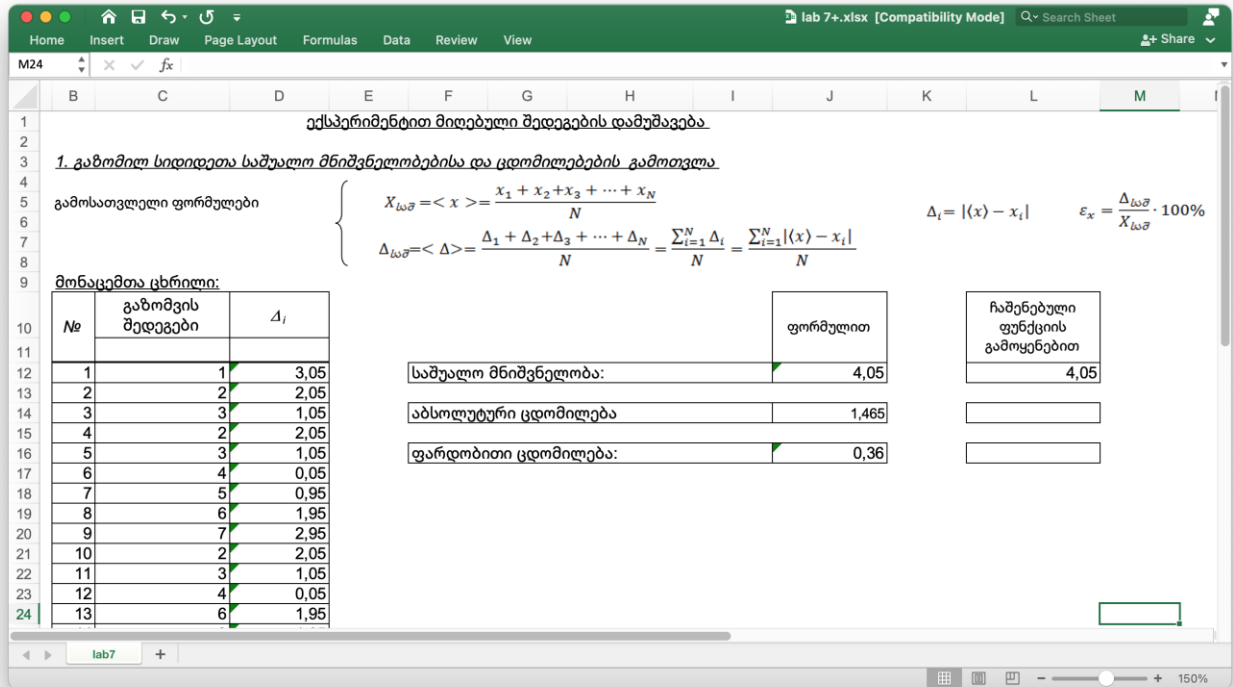
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{\text{საშ}}}{X_{\text{საშ}}} \cdot 100\%. \quad (7.4)$$

ფარდობითი ცდომილება გამოისახება პროცენტებში და განსაზღვრავს გაზომვის ხარისხს.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab 7“ – "ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება" (სურ.7.1), სადაც გაზომილ მონაცემთა ცხრილი და ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც გამოითვლება გაზომილ სიდიდეთა საშუალო მნიშვნელობა, აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.

lab.7 – ში წარმოდგენილია ექსპერიმენტით გაზომილი x მონაცემების 20 მნიშვნელობა.



სურ.7.1. ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავება. შაბლონი Lab 7

შაბლონის შევსება

- საწყისი მონაცემები შეიტანეთ შემდეგ უჯრებში:
 - C11: x ფიზიკური სიდიდის დასახელება და ერთეული;
 - D11: აბსოლუტური ცდომილების ერთეული;
 - C12:C31 დიაპაზონი: x ფიზიკური სიდიდის ექსპერიმენტულ გაზომვათა შედეგები. (თუ თქვენი მონაცემები არ გაქვთ, მაგალითისთვის შეიტანეთ მნიშვნელობები ქვემოთ მოცემული ცხრილიდან).
- გამოთვლები ჩაატარეთ ორი მეთოდით: (7.15)-(7.18) ფორმულების გამოყენებით და excel ჩაშენებული ფუნქციებით.

I მეთოდი. ცდომილებების გამოთვლა ფორმულებით საშუალოს გამოთვლა

J12 უჯრაში შეიტანეთ საშუალო არითმეტიკულის გამოსათვლელი ფორმულა (7.15)-ის შესაბამისად. გაზომილ მონაცემთა დიდი რიცხვის შემთხვევაში უმჯობესია გამოიყენოთ ჩაშენებული ფუნქცია SUM(), რომლის არგუმენტად მიუთითეთ იმ უჯრათა დიაპაზონი, რომელიც შეიცავს ექსპერიმენტის მონაცემებს. ცხადია, გაზომვების რაოდენობა N სხვადასხვაა და დამოკიდებულია კონკრეტულ ექსპერიმენტზე. იმ შემთხვევაში, თუ გაზომილ მონაცემთა რიცხვი დიდია, შეიძლება გამოყენებული იქნას ჩაშენებული ფუნქცია COUNT(), რომლის არგუმენტადაც, ასევე უნდა მიუთითოთ იმ უჯრათა დიაპაზონი, რომელიც შეიცავს ექსპერიმენტის მონაცემებს. საბოლოოდ J12 უჯრაში შეტანილ ფორმულას ექნება სახე:

$$=SUM(C12:C31)/COUNT(C12:C31).$$

აბსოლუტური ცდომილების გამოთვლა

აბსოლუტური ცდომილების საშუალოს გამოსათვლელად შეასრულეთ შუალედური გამოთვლები, კერძოდ: D12:D32 დიაპაზონში გამოთვალეთ თითოეული გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება. D12 უჯრაში შეიტანეთ ფორმულა:

$$=ABS(\$J\$12-C12)$$

დააკოპირეთ ეს ფორმულა შევსების მარკერის გამოყენებით D32 უჯრის ჩათვლით.

J14 გამოთვალეთ აბსოლუტური ცდომილების საშუალო ფორმულით:

$$=SUM(D12:D31)/COUNT(D12:D31)$$

J14 უჯრას მიანიჭეთ ექსპონენციალური ფორმატი. გააქტიურეთ J14 უჯრა, მუსის მარჯვენა ღილაკით გამოიდახეთ კონტექსტური მენიუ და აირჩიეთ ბრძანება: “უჯრების დაფორმატება – რიცხვი – სამეცნიერო (Forman sells – Numbers - Scientific)”. ჩაწერეთ რიცხვი მეასედი სიზუსტით.

ფარდობითი ცდომილების განსაზღვრა

J16 უჯრაში შეიტანეთ ფარდობითი ცდომილების გამოსათვლელი ფორმულა:

$$=(J14/J12)*100%$$

უჯრას მიანიჭეთ პროცენტის ფორმატი. რისთვისაც გააქტიურეთ J16 უჯრა, გამოიდახეთ კონტექსტური მენიუ, შეასრულეთ ბრძანება: „უჯრების დაფორმატება – რიცხვი – პროცენტული (Forman sells – Numbers - Percentage)“.

II მეთოდი. ჩაშენებული ფუნქციების გამოყენება

მნიშვნელობათა საშუალოს გამოთვლა შეიძლება ჩაშენებული ფუნქციის AVERAGE() გამოყენებით. უჯრა J12–ში გამოთვალეთ ფუნქციის AVERAGE () გამოყენებით. არგუმენტად აირჩიეთ C სვეტის მონაცემთა დიაპაზონი:

$$=AVERAGE(C12:C31)$$

აბსოლუტური ცდომილების საშუალოს გამოთვლა ფუნქციის AVEDEV() გამოყენებით. L14 უჯრაში გამოთვალეთ ფუნქციის AVEDEV () გამოყენებით. არგუმენტად, საშუალოს გამოსათვლელი ფუნქციის ანალოგიურად, აირჩიეთ C სვეტის მონაცემთა დიაპაზონი:

$$=AVEDEV(C12:C31)$$

ლაბორატორიული ამოცანა №8. შემთხვევითი ცდომილებების შეფასება

დავუბრუნდეთ ლაბორატორიულ სამუშაოს №7. მასში ჩვენ განვიხილეთ ექსპერიმენტით გაზომილი სიდიდის საშუალოს და აბსოლუტური ცდომილების საშუალოს გამოთვლის მეთოდები.

სამეცნიერო ექსპერიმენტებით გაზომილი სიდიდეების სიზუსტე ხასიათდება ე.წ. **სტანდარტული გადახრით**.

გაზომილი სიდიდეების სტანდარტული გადახრა (ან ცალკეული გაზომვის **საშუალო კვადრატული ცდომილება**) ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს ცალკეული გაზომილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის ხარისხს და განისაზღვრება ფორმულით:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N - 1}}. \quad (8.1)$$

როგორც ვხედავთ, ფესვქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს გაზომვით მიღებული ცალკეული სიდიდის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის საშუალოს კვადრატს. საშუალო კვადრატული ცდომილების უპირატესობა აიხსნება მრავალი მიზეზით. ერთ-ერთი მათგანი დაკავშირებულია გასაზომი სიდიდის საშუალო არითმეტიკულის არსთან, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ იგი იძლევა საშუალებას, მინიმუმამდე დაიყვანოს სწორედ სტანდარტული გადახრა და არა აბსოლუტური ცდომილების საშუალო. მეორე მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ საშუალო კვადრატული ცდომილება ფასდება ისე, რომ $\bar{x} \pm \sigma_x$ ინტერვალში ხვდება გაზომილ მნიშვნელობათა 68% (მნიშვნელობათა დაახლოებით 2/3), $\bar{x} \pm 2\sigma_x$ ინტერვალში – 95% და, ბოლოს, $\bar{x} \pm 3\sigma_x$ ინტერვალში – 99,7%. დარჩენილი 0,3% წარმოადგენს უხეშ შეცდომას და შემდგომში მათი მნიშვნელობები შეგვიძლია, გამოვრიცხოთ მონაცემთა მნიშვნელობებიდან. ეს ფაქტი შეგვიძლია გამოვიყენოთ უხეში შეცდომების აღმოჩენის კრიტერიუმად. კერძოდ, ის მონაცემები, რომელთათვისაც $\Delta_i > 3\sigma_x$ შეიძლება გამოვრიცხოთ.

ფუნქცია STDEV() საშუალებას გვაძლევს შუალედური გამოთვლების გარეშე განვსაზღვროთ სტანდარტული გადახრა. უარყოფს ლოგიკურ მნიშვნელობებს და ტექსტს მოდელში.

ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება ახასიათებს მეთოდის სიზუსტეს, რადგან იგი დამოკიდებულია ცალკეული გაზომვის სიზუსტეზე და პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული გაზომვების რიცხვზე. თუმცა, რადგან გაზომილ სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული უფრო ზუსტად აღწერს გაზომვის შედეგს, ვიდრე ცალკეული გაზომვები, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება უნდა იყოს ნაკლები ცალკეული გაზომვების ცდომილებასთან შედარებით. ამ ცდომილებას ახასიათებენ სიდიდით, რომელსაც **საშუალოს სტანდარტულ გადახრას** უწოდებენ:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}.$$

როგორც ვხედავთ, გაზომვათა რიცხვის ზრდასთან ერთად საშუალო ან სტანდარტული გადახრა მცირდება. ეს ფორმულა გამოსახავს გაზომვათა რაოდენობის ზრდასთან ერთად გაზომვის სიზუსტის ზრდის ფუნდამენტურ კანონს.

ხშირად გაზომვათა მნიშვნელობების შეფასების მიზნით აგებენ დიაგრამას, რომელიც გვიჩვენებს, რა სიხშირით მეორდება ესა თუ ის მნიშვნელობა. ასეთ დიაგრამას **ჰისტოგრამას** უწოდებენ.

დავუშვათ, მრავალჯერადი გაზომვის შედეგად, რომელიცაც x სიდიდის გაზომვისას მიღებულია N რაოდენობის მნიშვნელობა, ამასთან, ზოგიერთი მათგანი რამდენჯერმე მეორდება:

- x_1 - მნიშვნელობა მიიღება n_1 -ჯერ;
- x_2 - მნიშვნელობა მიიღება n_2 -ჯერ;
- x_3 - მნიშვნელობა მიიღება n_3 -ჯერ;

...

x_k - მნიშვნელობა მიიღება n_k -ჯერ,

მაშინ გაზომვათა მოცემული სერიისათვის არითმეტიკული საშუალო შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{N} = \frac{\sum_k x_k \cdot n_k}{N}. \quad (8.2)$$

ასეთ ჯამს შეწონილი ეწოდება, რადგან თითოეული x_k მნიშვნელობა მრავლდება n_k რიცხვზე, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ მოხდა ამ მნიშვნელობის რეალიზება. ამასთან

$$\sum_k n_k = N.$$

ხშირად n_k რიცხვის ნაცვლად შემოაქვთ ფარდობა:

$$f_k = \frac{n_k}{N}. \quad (8.3)$$

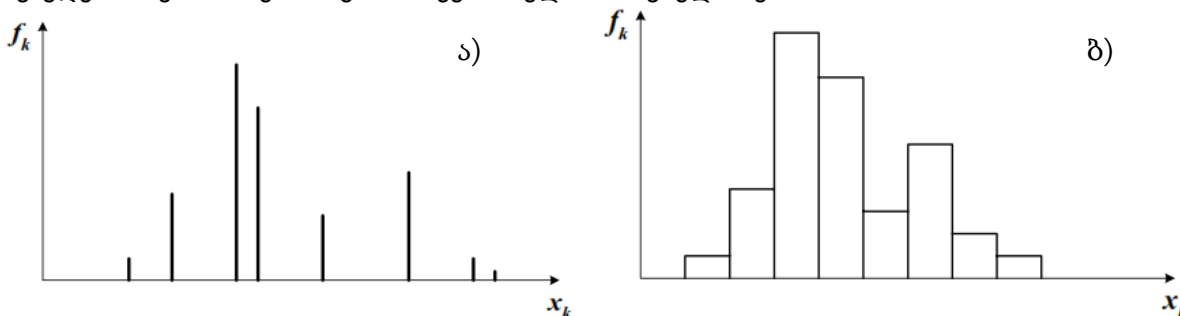
რომელიც გვიჩვენებს გაზომვათა სრული რაოდენობიდან რა ნაწილი მოდის x_k მნიშვნელობის რეალიზებაზე და უწოდებენ **სიხშირეს**. ამ ტერმინის გამოყენებით საშუალოს ფორმულა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$\bar{x} = \sum_k x_k \cdot f_k. \quad (8.4)$$

ამასთან, ცხადი,

$$\sum_k f_k = 1,$$

მაშინ ჰისტოგრამა არის n_k ან f_k -ს დამოკიდებულება x_k -ზე, რომელზეც ჰორიზონტალური ღერძის გასწვრივ გაზომილია x_k , ხოლო x_k წერტილებიდან გავლებული ვერტიკალური ხაზების სიმაღლე გვიჩვენებს f_k სიხშირეს. მსგავს ჰისტოგრამას უწოდებენ წყვეტილი სიდიდის ჰისტოგრამას (სურ.8.1 ა), ჰისტოგრამის ეს ტიპი მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როცა x_k მნიშვნელობები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ან აქვს მთელი მნიშვნელობები.



სურ.8.1. დისკრეტული (ა) და უწყვეტი (ბ) სიდიდეების ჰისტოგრამები

ხშირ შემთხვევაში გაზომვები არ იძლევა ზუსტ მთელ მნიშვნელობებს. ასეთ შემთხვევაში გაზომილ სიდიდეთა დიაპაზონს ყოფენ (x_{min} –დან x_{max} –მდე) ტოლ ინტერვალებად, ე.წ. „ბინებად“ და ითვლიან რამდენჯერ მოხდება გაზომილი სიდიდე თითოეულ „ბინში“. შედეგად დებულობენ გრაფიკს, რომელსაც უწყვეტ სიდიდეთა ჰისტოგრამას უწოდებენ (სურ.8.1 ბ).

გამოთვლების ჩატარება და ჰისტოგრამის აგება

1. ჩართული ფუნქციების გამოყენებით x სიდიდის N გაზომვათა სერიისათვის გამოთვალეთ საშუალო არითმეტიკული, საშუალო აბსოლუტური ცდომილება და მნიშვნელობათა სტანდარტული

გადახრები, და მათი საშუალო. გამოთვლები შეასრულეთ ყოველი ათი გაზომვის შემდეგ, იმისათვის, რომ შევისწავლოთ გაზომვათა რაოდენობის გავლენა ანალიზის შედეგებზე.

2. ექსპერიმენტის მონაცემებიდან საშუალო კვადრატული გადახრის დაანგარიშების საფუძველზე E20:E39, F20:F39, G20:G39 დიაპაზონში გამოიტანეთ მონაცემები, რომლებიც არ მოხვდება, შესაბამისად ,შუალედებში: $\bar{x} \pm \sigma_x$ (68%), $\bar{x} \pm 2\sigma_x$ (95%) და $\bar{x} \pm 3\sigma_x$ (97%). რისთვისაც შესაბამის უჯრებში შეიყვანეთ ფორმულები:

$$=IF(AND(C20>=P22-P26;C20<=P22+P26);C20;"არ ვარგა")$$

$$=IF(AND(C20>=P22-2*P26;C20<=P22+2*P26);C20;"არ ვარგა")$$

$$=IF(AND(C20>=P22-3*P26;C20<=P22+3*P26);C20;"არ ვარგა")$$

3. გამოტანეთ გრაფიკული ანალიზის შედეგი ექსპერიმენტის საწყის მონაცემებსა და მონაცემთა განმეორების სიხშირის მაჩვენებელ სვეტში. რისთვისაც მონიშნეთ ჯერ C20:C39 უჯრები, გამოიძახეთ კონტექსტური მენიუ და შეასრულეთ ბრძანება Quick analysis. გახსნილ ფანჯარაში გაააქტიურეთ ჩანართი Formating და აირჩიეთ Data Bars. ხოლო სიხშირის სვეტში აირჩიეთ Color bar.

4. Ms Excel-ის შესაბამისი ფუნქციის საშუალებით განსაზღვრეთ გაზომილი ფიზიკური სიდიდის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები. შეარჩიეთ ბინის (რეალიზაციათა) n რაოდენობა ექსპერიმენტალურად ან სტერჯესის ფორმულით: $n = 1 + 3,322lgN$. გამოთვალეთ ბინის სიგანე შერჩეული ინტერვალისათვის: $\Delta x = \frac{x_{max}-x_{min}}{n}$. რადგან, როგორც წესი, შედეგად მიიღება არამთელი რიცხვი, ამიტომ უმჯობესია დაამრგვალოთ მთელ რიცხვამდე ფუნქციის ROUND() გამოყენებით.

შემთხვევითი ცდომილების შეფასება

1. გაზომილი სიდიდეთა საშუალო მნიშვნელობებისა და ცდომილებების გამოთვლა

გამოსაყვანი ფორმულები

$$X_{საშ} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

საშუალო არითმეტიკული

$$\Delta_{საშ} = \langle \Delta \rangle = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X_{საშ})}{N}$$

ასსოლუტური ცდომილების საშუალო

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N ((x_i - X_{საშ})^2)}{N - 1}}$$

საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$\sigma_{\omega} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

საშუალო სტანდარტული გადახრა

$n = 1 + 3,322lgN$ სტერჯესის ფორმულა $f_k = \frac{N_k}{N}$ სიხშირე

მონაცემთა ცხრილი

| № | ექსპერიმენტის შედეგები X_i | ასსოლუტური ცდომილება Δ_i | მნიშვნელობა $(x_i) \pm \sigma_x$ | მნიშვნელობა $(x_i) \pm 2\sigma_x$ | მნიშვნელობა $(x_i) \pm 3\sigma_x$ | სიხშირე N_k |
|----|------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------|
| 1 | 10 | 5.2 | არ ვარგა | არ ვარგა | არ ვარგა | 1 |
| 2 | 2 | 2.8 | 2 | 2 | 2 | 5 |
| 3 | 2 | 2.8 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 4 | 2 | 2.8 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 1.8 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 0.8 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | 5 | 0.2 | არ ვარგა | 5 | 5 | 2 |
| 8 | 6 | 1.2 | არ ვარგა | 6 | 6 | 2 |
| 9 | 8 | 3.2 | არ ვარგა | არ ვარგა | 8 | 4 |
| 10 | 2 | 2.8 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 8 | 3.2 | არ ვარგა | არ ვარგა | 8 | 3 |
| 12 | 4 | 0.8 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| 13 | 6 | 1.2 | არ ვარგა | 6 | 6 | 1 |
| 14 | 3 | 1.8 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 15 | 4 | 0.8 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| 16 | 8 | 3.2 | არ ვარგა | არ ვარგა | 8 | 2 |
| 17 | 5 | 0.2 | არ ვარგა | 5 | 5 | 1 |
| 18 | 4 | 0.8 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| 19 | 8 | 3.2 | არ ვარგა | არ ვარგა | 8 | 1 |
| 20 | 2 | 2.8 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | |
|------------------------------------|------|
| საშუალო მნიშვნელობა | 4.8 |
| ასსოლუტური ცდომილება | 2.08 |
| ფარდობითი ცდომილება | 0.43 |
| საშუალო კვადრატული ცდომილება | 2.50 |
| საშუალო სტანდარტული გადახრა | 0.56 |
| ბინის რაოდენობა სტერჯესის ფორმულით | 3 |
| ბინის სიგანე | 3 |

სურ.8.1. შემთხვევითი ცდომილების შეფასება. შაბლონი lab8

5. შექმენით ახალი ცხრილი, რომლის ერთ სვეტშიც გამოტანილი იქნება $(x_{min} + \Delta x; x_{max})$ მნიშვნელობები. ყოველი შემდეგი მნიშვნელობა განსხვავებულია წინა მნიშვნელობისაგან Δx ინტერვალით. ამასთან, მოცემულ შემთხვევაში საჭიროა მიღებული იყოს ბინების მხოლოდ მარჯვენა საზღვარი! ამიტომ პირველ მნიშვნელობას ვირჩევთ $x_{min} + \Delta x$ -ის ტოლად. ხოლო ბოლო მნიშვნელობად – გაზომილ მნიშვნელობათა შორის მაქსიმალურის ტოლ მნიშვნელობას. ახალი ცხრილის ამ სვეტს მივანიჭოთ სახელწოდება x_i .

6. x_i სვეტის გვერდით მარჯვნივ, შექმნათ სვეტი სიხშირე f_k . ამ სვეტის ყველა უჯრა, რომლებიც $(x_{min} + \Delta x; x_{max})$ მნიშვნელობებს შეესაბამება და ფორმულის სტრიქონში აკვრიფოთ ფორმულა:

$$=FREQUENCY(C20:C39;K43:K51)$$

სადაც C20:C39 - განსაზღვრავს ექსპერიმენტის შედეგების დიაპაზონს, ხოლო K43:K51 - კი ($x_{min} + \Delta x; x_{max}$) - მნიშვნელობათა დიაპაზონს. იმისათვის, რომ შედეგი ყველა უჯრაში აისახოს, გამოიყენეთ ღილაკების კომბინაცია: Ctrl+Alt+Enter.

შემთხვევითი ცდომილების გავლენის შესწავლა გაზომვის შედეგებზე

განვიხილოთ ორი ურთიერთდაკავშირებული სიდიდის გაზომვის პროცესი. დავუშვათ მათ შორის $y = ax + b$ სახის წრფივი კავშირია. ამ დამოკიდებულებით შესაძლებელია განვსაზღვროთ y მნიშვნელობა x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მოცემული a და b პარამეტრებისათვის. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა x სიდიდე გაზომილია ზუსტად, ხოლო მეორე – გარკვეული ცდომილებით.

1. ცალკეულ უჯრებში, რომელიც ყვითელი ფონით არის გამოყოფილი შევიტანოთ საწყისი მონაცემები:

- წრფის პარამეტრები a და b ;
 - x სიდიდის გაზომვის ბიჯი (მაგალითად $\Delta x=1$);
 - x_0 - საწყისი მონაცემი.
2. C7:C31 შევიტანოთ ($x_0, x_0 + \Delta x$) მონაცემები.
 3. D7:D31 გამოვთვალოთ $y^{თეო} = ax + b$ ფორმულით.
 4. ააგეთ $f(x)$ დამოკიდებულების გრაფიკი.
 5. გამოვთვალოთ მაქსიმალური საშუალო კვადრატული σ_y , რისთვისაც N14 უჯრაში შევიტანოთ ფორმულა:

$$=STDEV(D7:D31)$$

6. σ_y მნიშვნელობის საფუძველზე მოვასდინოთ $y^{ქსპ}$ ექსპერიმენტული მონაცემების შემთხვევითი გენერირება, რისთვისაც გამოვიყენოთ შემთხვევითი რიცხვების გენერატორი ფუნქცია RAND(), რომელიც აგენერირებს შემთხვევით რიცხვებს 0-დან 1-მდე. იმისთვის, რომ მივიღოთ შემთხვევითი ნამდვილი სიდიდე ნებისმიერ ორ მოცემულ შუალედში, მაგალითად ($n; m$) შუალედში, სადაც n ამ დიაპაზონის ქვედა ზღვარია, m კი - ზედა, საჭიროა, ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$y^{ქსპ} = RAND()(m - n) + n$$

სადაც:

$$n = y^{თეო} - \sigma_y, \quad m = y^{თეო} + \sigma_y,$$

შევიტანოთ ეს ფორმულები E, F და G სვეტებში.

7. ავაგოთ $x = f(y^{ქსპ})$ დამოკიდებულების გრაფიკი $x = f(y^{თეო})$ გრაფიკთან ერთად.

V20 fx

შემთხვევითი ცდომილებები

მონაცემთა ცხრილი

| № | x | y ^{თეო} | m | n | y ^{აქტუ} |
|----|-------|------------------|--------|---------|-------------------|
| 1 | 0,00 | 2,00 | 149,20 | -145,20 | 78,26 |
| 2 | 2,00 | 22,00 | 169,20 | -125,20 | 37,13 |
| 3 | 4,00 | 42,00 | 189,20 | -105,20 | 104,75 |
| 4 | 6,00 | 62,00 | 209,20 | -85,20 | -59,13 |
| 5 | 8,00 | 82,00 | 229,20 | -65,20 | 159,99 |
| 6 | 10,00 | 102,00 | 249,20 | -45,20 | 100,47 |
| 7 | 12,00 | 122,00 | 269,20 | -25,20 | 76,60 |
| 8 | 14,00 | 142,00 | 289,20 | -5,20 | 19,44 |
| 9 | 16,00 | 162,00 | 309,20 | 14,80 | 87,29 |
| 10 | 18,00 | 182,00 | 329,20 | 34,80 | 221,64 |
| 11 | 20,00 | 202,00 | 349,20 | 54,80 | 67,42 |
| 12 | 22,00 | 222,00 | 369,20 | 74,80 | 250,74 |
| 13 | 24,00 | 242,00 | 389,20 | 94,80 | 276,75 |
| 14 | 26,00 | 262,00 | 409,20 | 114,80 | 115,11 |
| 15 | 28,00 | 282,00 | 429,20 | 134,80 | 173,23 |
| 16 | 30,00 | 302,00 | 449,20 | 154,80 | 398,44 |
| 17 | 32,00 | 322,00 | 469,20 | 174,80 | 323,29 |
| 18 | 34,00 | 342,00 | 489,20 | 194,80 | 341,65 |
| 19 | 36,00 | 362,00 | 509,20 | 214,80 | 487,09 |
| 20 | 38,00 | 382,00 | 529,20 | 234,80 | 355,47 |
| 21 | 40,00 | 402,00 | 549,20 | 254,80 | 435,62 |
| 22 | 42,00 | 422,00 | 569,20 | 274,80 | 399,60 |
| 23 | 44,00 | 442,00 | 589,20 | 294,80 | 368,77 |
| 24 | 46,00 | 462,00 | 609,20 | 314,80 | 461,14 |
| 25 | 48,00 | 482,00 | 629,20 | 334,80 | 626,13 |

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} - a^2}; \sigma_b = \frac{\sigma_a}{N} \sqrt{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$y = bx + a$$

| b | a | x ₀ | Δx |
|----|---|----------------|----|
| 10 | 2 | 0 | 2 |

| σ _a | σ _b |
|----------------|----------------|
| -2,72395 | -7082,26 |

| ∑x _i | ∑y _i | ∑x _i y _i | ∑x _i ² | N | σ _y |
|-----------------|-----------------|--------------------------------|------------------------------|----|----------------|
| 600,00 | 5906,89 | 197008,8 | 19600 | 25 | 147,196 |

სურ.8.2. შემთხვევითი ცდომილებები. შაბლონი lab8.1

- ცვალეთ x_0 , Δx და σ_b და დააკვირდით გრაფიკზე ცვლილებებს.
- გამოთვალეთ წრფის პარამეტრების ცდომილებები ფორმულებით:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} - a^2}, \quad \sigma_b = \frac{\sigma_a}{N} \sqrt{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}. \quad (8.5)$$

ამოცანები

8.1 შეარჩიეთ y სიდიდის გაზომვის მაქსიმალური საშუალო კვადრატული ცდომილება – $y_{შს}^{max}$ – მისი სიდიდე განისაზღვრება $y^{თეო}$ (როგორც წესი, ექსპერიმენტის ფარდობითი ცდომილება შეიძლება, აღწევდეს 10–30%-ს).

ლაბორატორიული ამოცანა №9.
უმცირესი კვადრატების მეთოდი

დავუშვათ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ იქნა ორი – x და y – ურთიერთდამოკიდებული სიდიდის N წყვილი: (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, N$). ვთქვათ, ამ სიდიდეებს შორის თეორიულად არსებობს $y^{\text{თეორ}} = ax + b$ სახის დამოკიდებულება. მაგრამ ხელსაწყოების ცდომილებებისა თუ სხვადასხვა შემთხვევითი ფაქტორების გავლენით ექსპერიმენტით მიღებული შედეგები განსხვავებული იქნება ნამდვილი მნიშვნელობებისაგან. თუ მიღებულ მნიშვნელობებს გადავზომავთ გრაფიკზე, მიღებული წერტილები გრაფიკზე იქნება ერთგვარად გაბნეული, ამიტომ შეუძლებელი იქნება ისეთი წრფის გავლება, რომელიც მოიცავს ყველა ექსპერიმენტულ მონაცემს. ანალიტიკური თვალსაზრისით, გაზომვის შედეგების დამუშავება გულისხმობს ისეთი a და b პარამეტრების პოვნას, რომელიც რაც შეიძლება ზუსტად აღწერს წრფივ დამოკიდებულებას. ე.ი.:

$$y^{\text{თეორ}} = ax + b. \tag{9.1}$$

ამ პარამეტრების განსაზღვრის ერთ-ერთი მეთოდია **უმცირესი კვადრატების მეთოდი**.

შემოვიღოთ სხვაობა y_i –სა (ექსპერიმენტით მიღებული) და $y_i^{\text{თეორ}}$ –ს შორის. ყოველი i –ური მნიშვნელობისათვის ამ სხვაობას აქვს სახე:

$$r_i = y_i^{\text{თეორ}} - y_i. \tag{9.2}$$

თუ a და b კოეფიციენტი კარგადაა შერჩეული, მაშინ წერტილთა ნახევარი განლაგებული იქნება წრფის ზემოთ ($r_i < 0$), მეორე ნახევარი კი ქვემოთ ($r_i > 0$). რადგან r_i –ის მნიშვნელობები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი, ამიტომ შემოაქვთ სხვაობის კვადრატის r_i^2 მნიშვნელობა:

$$(r_i)^2 = (y_i^{\text{თეორ}} - y_i)^2.$$

ექსპერიმენტული მონაცემების საუკეთესოდ აღწერის კრიტერიუმი (**ლაგრანჟის კრიტერიუმი**) მდგომარეობს იმაში, რომ კვადრატების ჯამი იყოს მინიმალური (N - მონაცემთა რაოდენობა):

$$\sum_{i=1}^N (r_i)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^{\text{თეორ}} - y_i)^2. \tag{9.3}$$

$y_i^{\text{თეორ}}$ გამოვთვალოთ (9.1) განტოლებიდან და ჩავსვათ (7.2)-ში. მაშინ

$$\sum_{i=1}^N (r_i)^2 = \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2. \tag{9.4}$$

შესაბამისად, ჩვენი ამოცანაა, ვიპოვოთ ისეთი a და b კოეფიციენტები, რომელთათვისაც ამ გამოსახულებას ექნება მინიმალური მნიშვნელობა. ვისარგებლოთ ექსტრემუმის პირობებით. ვიპოვოთ (9.4) გამოსახულების წარმოებულები a და b და გავუტოლოთ ნულს.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N (r_i)^2}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^N (r_i)^2}{\partial b} = 0. \tag{9.5}$$

(9.4) გავითვალისწინოთ (9.5)-ში:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2 = 0, \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2 = 0. \tag{9.7}$$

მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^N ax_i^2 + \sum_{i=1}^N bx_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad (9.8)$$

$$\sum_{i=1}^N ax_i + \sum_{i=1}^N b = \sum_{i=1}^N y_i. \quad (9.9)$$

ამრიგად, კოეფიციენტების გამოსათვლელად მივიღეთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^N x_i + Nb = \sum_{i=1}^N y_i. \end{cases} \quad (9.10)$$

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა კრამერის მეთოდით, a და b კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & N \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}. \quad (9.11)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i - N \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}, \quad (9.12)$$

$$b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}. \quad (9.13)$$

თუ წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ წრფის განტოლება შეიძლება, ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = kx.$$

ზემოთ აღწერილი მსჯელობის ანალოგიურად შეიძლება, ვიპოვოთ k პარამეტრი:

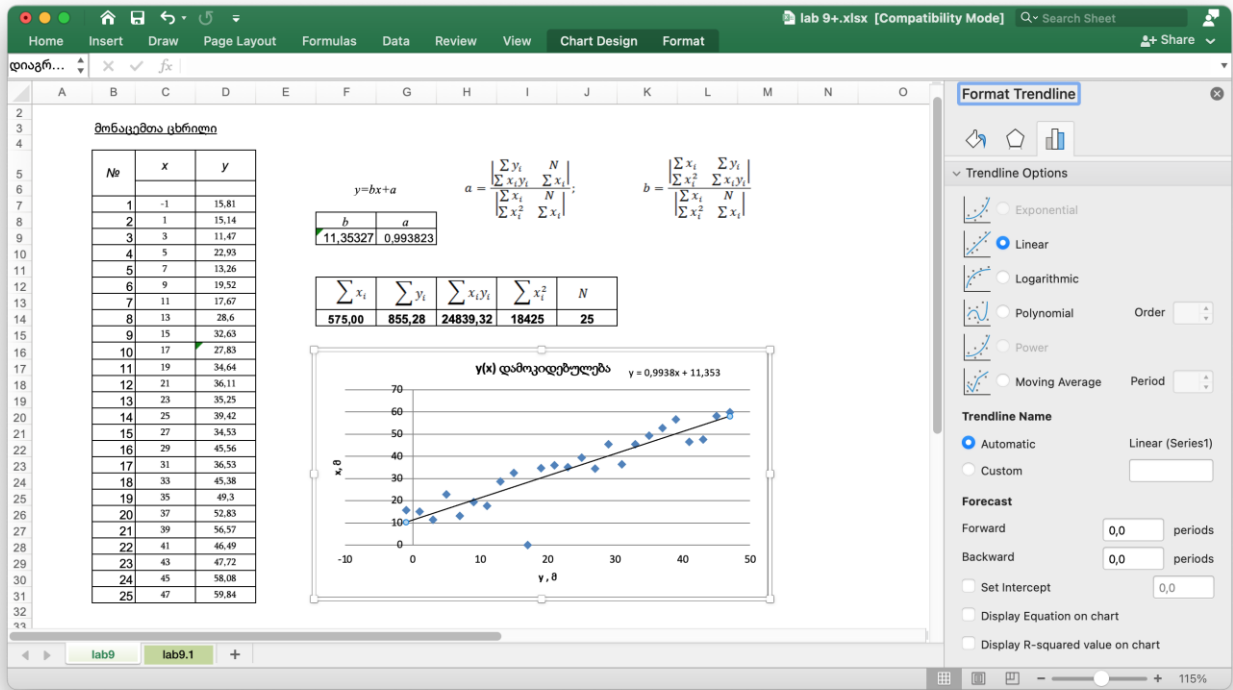
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (r_i)^2 &= \sum_{i=1}^N (kx_i - y_i)^2, \\ \frac{\partial}{\partial k} \sum_{i=1}^N (kx_i - y_i)^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial k} \sum_{i=1}^N (k^2 x_i^2 - 2kx_i y_i + y_i^2) &= 0, \\ k &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

როგორც ვხედავთ, წრფის პარამეტრების ფორმულით გამოთვლა საკმაოდ რთული პროცესია, თუმცა Excel-ის დამხმარე ფუნქცია გვაძლევს საშუალებას, არ ვაწარმოოთ ასეთი საფუძვლიანი გამოთვლები.

გრაფიკული თვალსაზრისით, წრფე გავლებულია საუკეთესოდ, თუ ექსპერიმენტული წერტილები განლაგდებიან ამ წრფის ორივე მხარეს თანაბარი მანძილებით. ეს მეთოდი გამოიყენება, როცა ორ სიდიდეს შორის წრფივი დამოკიდებულებაა.

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab9“.



სურ.9.1. ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით. შაბლონი lab9

შეიტანეთ საწყისი მონაცემები შემდეგ უჯრებში:

- C6 - x ფიზიკური სიდიდის აღნიშვნა (ან დასახელების) და განზომილების მითითება;
- D6 - უჯრაში y ფიზიკური სიდიდის აღნიშვნა (ან დასახელების) და განზომილების მითითება;
- C7:C31 - ღიაპაზონში შეიტანეთ ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული x ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობები.
- D7:D31 - ღიაპაზონში შეიტანეთ ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული y ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობები.

მითითება

თუ თქვენი მონაცემები არ გაქვთ, შეგიძლიათ, გამოიყენოთ ქვემოთ მოყვანილი ცხრილიდან.

ცხრილი 9.1. ექსპერიმენტული გაზომვის მაგალითები

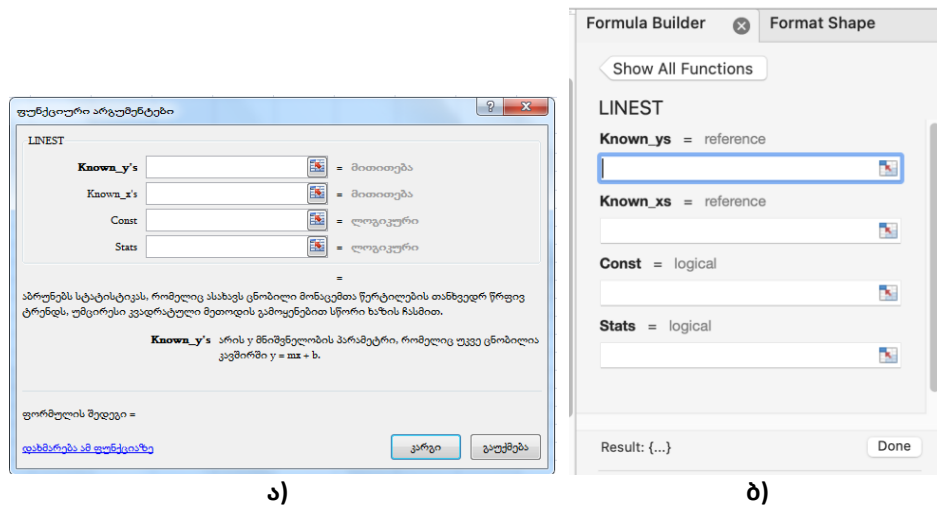
| x, მ | y, მ | ΔT, კელ | E, B | t, წმ | v, მ/წმ | B, ტეს | Δφ, ვ |
|------|-------|---------|------|-------|---------|--------|-------|
| -1 | 15,81 | -5 | 2,10 | 0 | -0,61 | 3 | -0,99 |
| 1 | 15,14 | -4 | 1,11 | 1 | 0,17 | 4 | 0,16 |
| 3 | 11,47 | -3 | 4,94 | 2 | 4,56 | 5 | 2,30 |
| 5 | 22,93 | -2 | 7,46 | 3 | 7,77 | 6 | 4,96 |
| 7 | 13,26 | -1 | 7,82 | 4 | 9,16 | 7 | 3,55 |

| | | | | | | | |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|
| 9 | 19,52 | 0 | 9,65 | 5 | 8,12 | 8 | 5,30 |
| 11 | 17,67 | 1 | 12,79 | 6 | 13,79 | 9 | 4,34 |
| 13 | 28,60 | 2 | 15,03 | 7 | 13,63 | 10 | 8,19 |
| 15 | 32,63 | 3 | 18,29 | 8 | 17,65 | 11 | 6,43 |
| 17 | 27,83 | 4 | 16,07 | 9 | 19,80 | 12 | 8,91 |
| 19 | 34,64 | 5 | 21,79 | 10 | 20,02 | 13 | 8,22 |
| 21 | 36,11 | 6 | 23,60 | 11 | 21,16 | 14 | 10,01 |
| 23 | 35,25 | 7 | 22,09 | 12 | 21,75 | 15 | 10,21 |
| 25 | 39,42 | 8 | 28,12 | 13 | 25,40 | 16 | 13,93 |
| 27 | 34,53 | 9 | 25,62 | 14 | 29,14 | 17 | 11,92 |
| 29 | 45,56 | 10 | 31,44 | 15 | 28,45 | 18 | 16,09 |
| 31 | 36,53 | 11 | 29,85 | 16 | 32,69 | 19 | 15,93 |
| 33 | 45,38 | 12 | 32,25 | 17 | 36,05 | 20 | 15,53 |
| 35 | 49,30 | 13 | 33,54 | 18 | 37,77 | 21 | 16,67 |
| 37 | 52,83 | 14 | 40,27 | 19 | 36,52 | 22 | 16,78 |
| 39 | 56,57 | 15 | 37,92 | 20 | 37,56 | 23 | 18,17 |
| 41 | 46,49 | 16 | 40,42 | 21 | 44,29 | 24 | 19,34 |
| 43 | 47,72 | 17 | 45,79 | 22 | 45 | | |
| 45 | 58,08 | | | 23 | 46,80 | | |
| 47 | 59,84 | | | | | | |

ააგეთ $y(x)$ დამოკიდებულება წერტილოვან დიაგრამაზე. მოახდინეთ მონაცემთა გაწვრივება, რისთვისაც გამოიყენეთ ფუნქცია:

LINEST (known_y's; known_x's; const; stats)

ფუნქციის არგუმენტები. პარამეტრებს ფუნქცია ითვლის უმცირესი კვადრატების მეთოდით. ეს ფუნქცია ითვლის a და b კოეფიციენტებს ავტომატურად. ამ ფუნქციის გამოიყენეთ შემდეგი წესით:



სურ.9.2. LINEST ფუნქციის დიალოგური ფანჯარა. ა) MS-Excel 2013, ბ) MS-Excel 2016

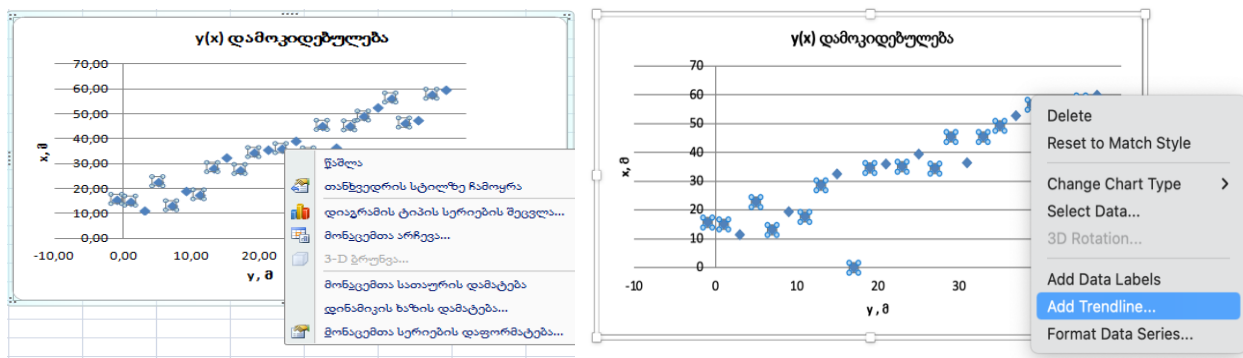
- გამოყავით დიაპაზონი F9:G9 და შეასრულეთ ბრძანება $f(x)$, კატეგორია სტატისტიკურში აირჩიეთ ფუნქცია „LINEST“.
- ველში „known_y's“ შეიტანეთ y -ის ექსპერიმენტით განსაზღვრული მნიშვნელობების დიაპაზონი.

- ველში „known_x’s” შეიტანეთ x-ის ექსპერიმენტით განსაზღვრული მნიშვნელობების დიაპაზონი.
- ველში „const” შეიტანეთ ლოგიკური მნიშვნელობები, რომელიც განისაზღვრავს b მუდმივის გამოთვლის აუცილებლობას: თუ ველს „const” მინიჭებული აქვს მნიშვნელობა True ან ველი ცარიელია, მაშინ იგი გამოითვლება ჩვეულებრივად; თუ ველს „const” მინიჭებული აქვს მნიშვნელობა False, მაშინ b ითვლება 0-ის ტოლად, ე.ი. წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე.
- ბოლო ველი დატოვეთ ცარიელი.
- იმისათვის რომ ფუნქციამ გამოთვალოს ორივე (a და b) პარამეტრი, ფორმულის ჩაწერა დაასრულეთ ღილაკთა კომბინაციით - Ctrl+Shift+Enter.

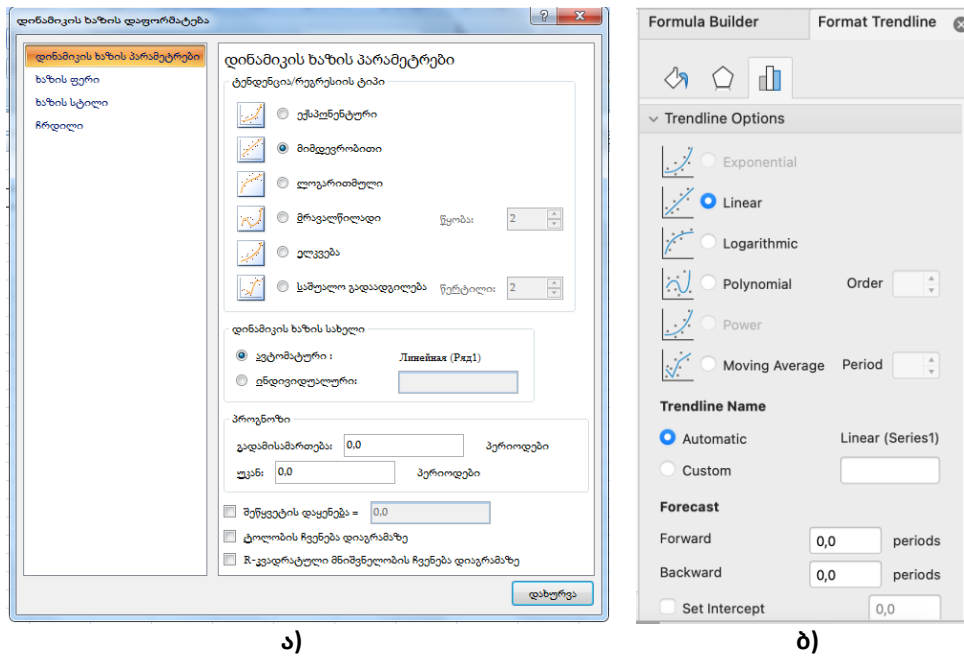
y(x) დამოკიდებულების გრაფიკის აგება

1. მონიშნეთ რიცხვითი მონაცემების შემცველი უჯრების დიაპაზონი და ააგეთ y(x) დამოკიდებულების გრაფიკი.
2. ძირითადი მოთხოვნები:
 - 1) დიაგრამის ტიპი – წერტილოვანი;
 - 2) დიაგრამის დასახელება – ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით (ან ფიზიკურ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება, მაგალითად, ვოლტ–ამპერული მახასიათებელი, ან სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება და ა.შ.);
3. მიუთითეთ დასახელებები ღერძების გასწვრივ გადაზომილი სიდიდეებისა და მათი განზომილებები;

დაამატეთ წრფე, რომელიც აიგება უმცირესი კვადრატების მეთოდით (ე.წ. დინამიკის ხაზი (trendline)), ამისათვის გრაფიკის ერთ-ერთი წერტილზე გამოიძახეთ კონტექსტური მენიუ და აირჩიეთ პუნქტი **„დინამიკის ხაზის დამატება (add trenline)”**, დიალოგურ ფანჯარაში **„დინამიკის ხაზის პარამეტრები (format trendline)”** აირჩიეთ ტიპი **„მიმდევრობითი (linear)”**. იმისათვის, რომ გავიგოთ მოცემული წრფის განტოლება, აირჩიეთ პუნქტი **„ტოლობის ჩვენება დიაგრამაზე (display equation on chart)”**.



სურ.9.3. კონტექსტური მენიუს გამოიძახება „დინამიკის ხაზის დამატება (add trenline)”: ა) MS-Ecxel 2013, ბ) MS-Ecxel 2016



სურ.9.4. დიალოგური ფანჯარა „დინამიკის საზის ფორმატირება (Trendline Options): ა) MS-Ecel 2013, ბ) MS-Ecel 2016

შეადარეთ თეორიულად ფუნქციის საშუალებით გამოთვლილი წრფის პარამეტრები გრაფიკზე გამოყვანილი განტოლებიდან მიღებულ მნიშვნელობებს.

a და b კოეფიციენტების გამოთვლა

a და b კოეფიციენტები გამოითვლება(9.11) ან (9.12) და (9.13) ფორმულების საშუალებით, რისთვისაც საშიროა გამოვიანგარიშოთ $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$, $\sum x_i^2$ და დავითვალოთ N ექსპერიმენტების რიცხვი. ამ პარამეტრების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ Excel –ის ჩაშენებული ფუნქციებით. კერძოდ:

SUMM() – რომლითაც გამოვითვლით $\sum x_i$ და $\sum y_i$ მონაცემთა ჯამს.

SUMPRODUCT() - ფუნქციით გამოვითვლით მწკრივთა ნამრავლის ჯამს, ანუ $\sum x_i y_i$.

SUMSQ() - ფუნქციით გამოვითვლით არგუმენტის კვადრატების ჯამს. არგუმენტებს შეიძლება წარმოადგენდეს მასივები, ჩვენს შემთხვევაში ამ ფუნქციას გამოვიყენებთ $\sum x_i^2$ გამოსათვლელად.

COUNT() – ფუნქცია ითვლის დიაპაზონში რიცხვთა რაოდენობას. ამ ფუნქციას გამოვიყენებთ N -ის გამოსათვლელად.

ამოცანები

9.1 ზემოთ აღწერილი მსჯელობით შეასრულეთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების ძალის მანძილზე დამოკიდებულების მოდელირება. დავუშვათ ორი ცნობილი მასის (ვთქვათ თითოეულის მასა 50 კგ-ის ტოლია) სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალის გაზომვას ვახორციელებთ სხვადასხვა მანძილზე. მოცემული გვაქვს გაზომვის შედეგები ქვემოთ მოცემული ცხრილის სახით:

| | | | | | | |
|-------|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| r (მ) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| F (ნ) | $1.6 \cdot 10^{-7}$ | $3 \cdot 10^{-8}$ | $2 \cdot 10^{-8}$ | $1 \cdot 10^{-8}$ | $6 \cdot 10^{-9}$ | $4 \cdot 10^{-9}$ |

მსოფლიო მიზიდულობის კანონის თანახმად, ორ სხეულს შორის ურთიერთქმედების ძალა პირდაპირპროპორციულია ამ სხეულების მასების ნამრავლის და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატის.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

სადაც $G = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ ნმ}^2/\text{კგ}^2$ - გრავიტაციული მუდმივაა. თეორიული კანონის მიხედვით, ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია, მაშასადამე $F(r)$ დამოკიდებულება არ არის წრფივი. შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

ა) გახსენით ახალი მუშა ფურცელი და დაიტანეთ მასზე ექსპერიმენტული გაზომვის მონაცემები.

ბ) ააგეთ $F(r)$ - დამოკიდებულების გრაფიკი წერტილებით.

გ) დაამატეთ ტრენდის მრუდი. შეარჩიეთ კვადრატული პოლინომი, რადგან ვიცით, რომ ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად იცვლება. განსაზღვრეთ პოლინომის კოეფიციენტები a და b გრაფიკზე გამოტანილი განტოლების საფუძველზე.

დ) შეასრულეთ ანალიზური გამოთვლები უმცირესი კვადრატის მეთოდის საფუძველზე a და b მუდმივების გამომანგარიშების მიზნით. ჩათვალეთ, რომ თეორიული შედეგი მოიცემა ხარისხობრივი სახით:

$$F_{\text{თ}} = ar^b, \quad (9.15)$$

ანალიზური გამოთვლებისას ისარგებლეთ (7.2) და (7.4) ფორმულებით.

ე) გამომანგარიშეთ a და b კოეფიციენტები Excel-ში თქვენ მიერ ანალიზურად მიღებული ფორმულების საფუძველზე და შეადარეთ ტრენდის მრუდის განტოლებას.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ (9.15) დამოკიდებულება უნდა წარმოადგინოთ ისე, რომ a და b ცვლადების მიმართ წრფივი დამოკიდებულება მივიღოთ. ამისათვის საჭიროა, გავალოგარითმოთ (9.15) განტოლების ორივე მხარე:

$$\ln(F_{\text{თ}}) = \ln(a) + b \ln(r). \quad (9.16)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$y_{\text{თ}} = \ln(F_{\text{თ}}),$$

$$A = \ln(a),$$

$$x = \ln(r),$$

$$y = \ln(F).$$

(9.16) ტოლობა ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y_{\text{თ}} = A + bx$$

უმცირესი კვადრატების მეთოდის თანახმად, მინიმალური უნდა იყოს:

$$\Delta^2 = (y_{\text{თ}} - y)^2 = (A + bx - y)^2.$$

ზოგად შემთხვევაში გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N (A + bx_i - y_i)^2. \quad (9.17)$$

A და b პარამეტრები მოვძებნოთ (7.17) ტოლობიდან, ამ ცვლადების მიხედვით კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობით:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N \Delta_i^2}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^N \Delta_i^2}{\partial b} = 0.$$

მიღებული განტოლებებიდან ვიპოვით A და b -ს:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}.$$

ჩვენ მიერ დაშვებული აღნიშვნებიდან ვიპოვით $a = \exp(A)$, ხოლო (9.15) ტოლობის საფუძველზე ვიპოვით განტოლებას, რომელიც ყველაზე უკეთ აღწერს ექსპერიმენტს.

9.2 იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლება: $PV = RT$ რეალური აირებისათვის ზუსტად არ სრულდება. რეალური აირებისათვის გამოიყენებენ **რედგის-კუონგის** ნახევრად ემპირიულ განტოლებას:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{\sqrt{T} \cdot V(V + b)},$$

სადაც, P - აირის წნევაა, V - აირის მოცულობაა, T - ტემპერატურაა, $R = 8.31$ ჯ/მოლი \cdot K - აირის უნივერსალური მუდმივაა, a და b - კოეფიციენტები განისაზღვრება ექსპერიმენტით. უმცირესი კვადრატების მეთოდით იპოვეთ a და b - კოეფიციენტები თუ მოცემულია რეალური აირის ექსპერიმენტული მახასიათებლები:

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $P, \text{ატმ}$ | 33 | 43 | 45 | 26 | 37 | 39 | 39 | 64 |
| $V, \text{სმ}^3/\text{მოლი} \cdot K$ | 500 | 500 | 600 | 700 | 600 | 700 | 400 | 400 |
| T, K | 273 | 323 | 373 | 273 | 323 | 373 | 273 | 373 |

9.3 ააგეთ იონოსფეროს წნევის სიმაღლეზე დამოკიდებულების გრაფიკი უმცირესი კვადრატების მეთოდით. გაზომვის შედეგები მოცემულია ცხრილში:

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $h, \text{კმ}$ | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| T, K | 274 | 274 | 253 | 232 | 210 | 180 | 150 | 130 | 180 |
| $\rho, 10^{-6} \text{კგ}/\text{მ}^2$ | 1.1 | 0.61 | 0.35 | 0.19 | 0.099 | 0.046 | 0.021 | 0.009 | 0.0037 |
| $n, 10^{-16} \text{სმ}^{-3}$ | 2.4 | 1.3 | 7.3 | 4.0 | 2.1 | 9.5 | 4.3 | 1.9 | 7.6 |
| $P, \text{მმ. ვწყ. სვ.}$ | 0.67 | 0.36 | 0.19 | 0.096 | 0.045 | 0.019 | 0.0073 | 0.0022 | 0.0007 |

მითითება: ზედა ატრომსფეროს სიმკვრივე ქიმიური შემადგენლობის გათვალისწინებით, ემორჩილება ჰიდროსტატიკური წონასწორობის პირობას წნევის გრადიენტსა და სიმძიმის ძალას შორის:

$$\rho g + \frac{dP}{dh} = 0,$$

სადაც ρ ატმოსფეროს ზედა ფენების სიმკვრივეა, g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, P - აირის წნევაა, h - სიმაღლეა დედამიწის ზედაპირიდან. თავის მხრივ, წნევა დაკავშირებულია სიმკვრივესთან იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლებით:

$$P = nKT = \rho \frac{KT}{M},$$

სადაც n აკონცენტრაცია, $K = 1.38 \cdot 10^{-23}$ ჯ/კ - ბოლცმანის მუდმივაა, T - ტემპერატურაა, M - მოლური მასაა. თუ პირველი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ სიმკვრივეს და გავითვალისწინებთ მეორე განტოლებაში, ვღებულობთ:

$$P = P_0 \exp \left\{ - \int_0^h \frac{Mg}{KT} dh \right\}.$$

ლაბორატორიული ამოცანა №10.

ალფა ნაწილაკების გაბნევის მოდელირება რეზერფორდის ცდაში

განვიხილოთ ცვლადი ძალით სხეულის მოძრაობის კიდევ ერთი მაგალითი, როცა იცვლება ერთდროულად ორი კოორდინატი. ვთქვათ M_α მასისა და $+2e$ მუხტის მქონე ალფა-ნაწილაკი მოძრაობს $+Ze$ მუხტის მქონე უძრავი ატომის ველში. Z – წარმოადგენს ელემენტის რიგით ნომერს მენდელეევის პერიოდულ სისტემაში, $e = -1.6021892(46) \cdot 10^{-19}$ კულონს - ელექტრონის მუხტის სიდიდეა. ალფა-ნაწილაკსა და ბირთვს შორის მოქმედების კულონური განზიდვის ძალა:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (10.1)$$

სადაც $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{ნმ}^2}{\text{კგ}^2}$. \vec{r} – ალფა-ნაწილაკის რადიუს-ვექტორია. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (x და y – ალფა-ნაწილაკების კოორდინატებია დროის განსაზღვრულ t მომენტში).

ალფა-ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\begin{cases} M_\alpha \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \\ M_\alpha \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \end{cases} \quad (10.2)$$

სადაც F_x და F_y – \vec{F} ძალის პროექციაა, შესაბამისად, Ox და Oy ღერძებზე, ხოლო x'' და y'' – ალფა-ნაწილაკის პროექციაა, შესაბამისად, Ox და Oy ღერძებზე.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{M_\alpha} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{M_\alpha} = \frac{F}{M_\alpha} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{M_\alpha} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{M_\alpha} = \frac{F}{M_\alpha} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \end{cases} \quad (10.3)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (10.4)$$

ამოვხსნათ (10.4) განტოლებები ნახევარინტერვალთა მეთოდით, ამისათვის ჩავწეროთ (10.4) შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ v'_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (10.5)$$

(10.5) განტოლებების მარცხენა მხარეს „მტრისის“ ქვეშ იგულისხმება წარმოებულ დროით.

ვისარგებლოთ №5 და №6-ე ლაბორატორიული ამოცანების დროს გამოყენებული ალგორითმებით და ჩავწეროთ (10.5) განტოლებების მარცხენა მხარე წარმოებულის განმარტების შესაბამისად, მივიღებთ მიახლოებით განტოლებებს:

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+1/2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i-1/2} + \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{x_i}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)^3}} \Delta t, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+1/2} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i-1/2} + \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{y_i}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)^3}} \Delta t. \end{cases} \quad (10.6)$$

სადაც $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ – დროითი ინტერვალია, რომელსაც პროგრამის ბიჯსაც უწოდებენ. ცხადია (10.6), თანაფარდობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა პროგრამის ბიჯი ანუ დროითი ინტერვალი Δt .

ნაწილაკის კოორდინატის გამოსათვლელად საჭიროა, მივიღოთ ორი განტოლება, რომელიც ასევე წარმოებულის განმარტებიდან მიიღება, ოღონდ ამჯერად x' და y' კოორდინატების წარმოებულებს ვგულისხმობთ:

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, \\ y' = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}, \\ x_{i+1} = x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t, \\ y_{i+1} = y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t. \end{cases} \quad (10.7)$$

(10.6) და (10.7) განტოლებათა სისტემას უნდა დავემატოთ კიდევ ერთი განტოლებათა სისტემა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს, გამოვთვალოთ ნაწილაკის სიჩქარე $t_{1/2} = \Delta t/2$ დროისათვის (პირველი დროითი ინტერვალის შუაში) დროის საწყის $t_0 = 0$ მომენტში სიჩქარისა და კოორდინატის მნიშვნელობების საშუალებით.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{1/2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{x_0}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}} \frac{\Delta t}{2}, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{1/2} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \frac{2kZe^2}{M_\alpha} \frac{y_0}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}} \frac{\Delta t}{2}. \end{cases} \quad (10.8)$$

(10.8) პირობა საჭიროა, გამოყენებულ იქნას მხოლოდ ერთხელ პირველი დროითი ინტერვალისათვის, ხოლო მომდევნო დროითი ინტერვალისათვის უნდა ვისარგებლოთ (10.6) ფორმულებით ნაწილაკის სიჩქარის გამომანგარიშების მიზნით და (10.7) ფორმულებით ნაწილაკის კოორდინატის გამომანგარიშების მიზნით.

დროითი ინტერვალი Δt შეირჩევა ნებისმიერი მეთოდით. რადგან ჩვენი ამოცანაა, ავაგოთ ალფა-ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია გამბნევი ბირთვის ველში ე.ი. $y(x)$ დამოკიდებულება, საჭიროა მოცემული გვექონდეს არა დროითი ინტერვალი $t_{min} \dots t_{max}$, არამედ არე საკოორდინატო სიბრტყეზე, $(x_{min} \dots x_{max}, y_{min} \dots y_{max})$, რომლის ფარგლებშიდაც უნდა განხორციელდეს რიცხვითი გამოთვლები. ამ პირობის ორგანიზებაში ჩვენ ამჯერადაც დაგვეხმარება ლოგიკური ფუნქციები *if, And*.

შაბლონის ჩატვირთვა

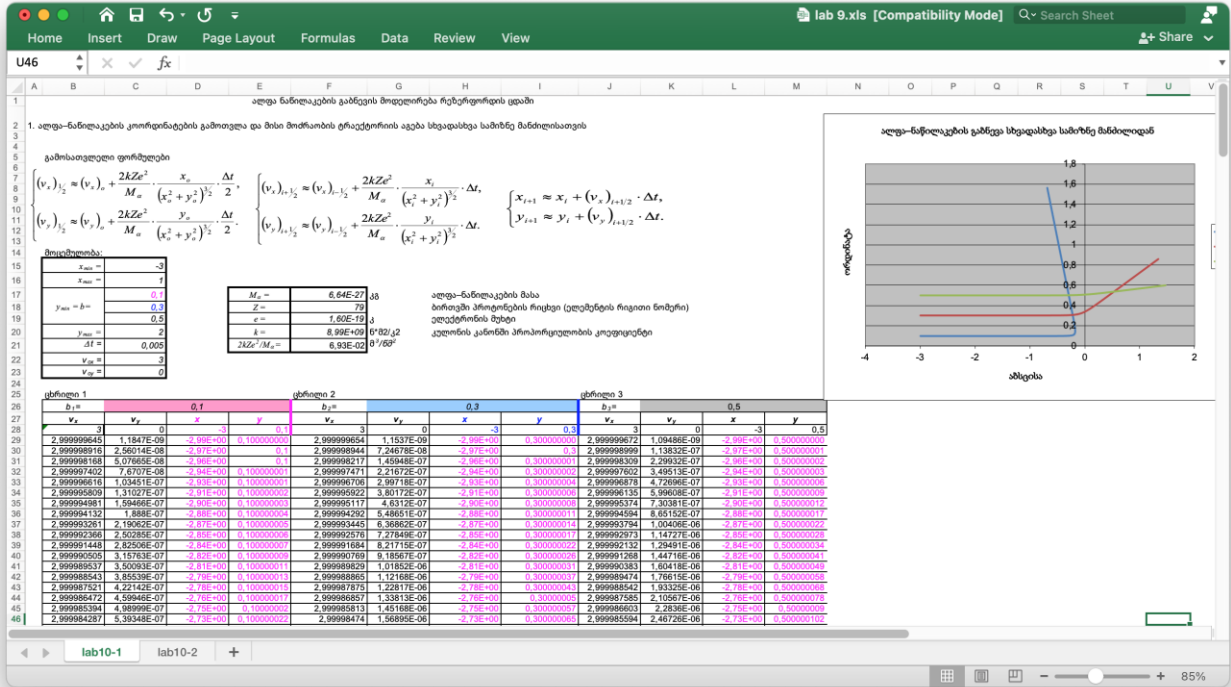
გახსენით შაბლონი „lab10“. შაბლონი შეიცავს ორ მუშა ფურცელს. „lab10-1“ და „lab10-2“. პირველ მუშა ფურცელზე განხილულია სხვადასხვა სამიზნე მანძილებიდან გამოტყორცნილი ალფა-ნაწილაკების მოძრაობის ტრაექტორიის მოდელირება, ხოლო მეორე მუშა ფურცელზე კი ჩატარებულია ანალოგიური მოდელირება სხვადასხვა საწყისი სიჩქარის მიხედვით (უფრო ზუსტად სხვადასხვა საწყისი სიჩქარის Ox ღერძზე პროექციის მიხედვით). შაბლონი აგებულია 300 მნიშვნელობისათვის, თუმცა საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია დამატება.

შაბლონის შევსება

1. შევითანოთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები:

- C15 - $x_0 = x_{min} = -3$
- C16 - $x_{max} = 1$
- C17, C18 და C19 - შეიტანეთ სამიზნე დაშორება (საწყისი ორდინატები $y_0 = y_{min}$). ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $y_0 = y_{min}$ სამი სხვადასხვა მნიშვნელობა 0.1, 0.3, 0.5.
- C20 - საბოლოო ორდინატი: $y_{max}=0.2$.
- C21 - პროგრამის ბიჯი: $\Delta t = 0.01$.
- C22 და C23 - საწყისი სიჩქარის პროექციები: $v_{0x} = 3$, $v_{0y} = 0$.
- F17 - ალფა-ნაწილაკის მასა: $M_\alpha = 6.638 \cdot 10^{-27}$ კგ.
- F18 - ელემენტის რიგითი ნომერი პერიოდულ სისტემაში. მაგალითად, ოქროს შემთხვევაში: $Z = 79$ მ.
- F19 - ელექტრონის მუხტის სიდიდე: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ კ.
- F20 - პროპორციულობის კოეფიციენტი კულონის კანონში: $k \approx 8.98 \cdot 10^9$ ნ მ²/კ².
- F21 - მუდმივი მამრავლი: $\frac{2kZe^2}{M_\alpha}$.

მითითება: ელემენტის რიგითი ნომრის გამოკლებით, ყველა სხვა რიცხვითი მონაცემი ან ძალიან დიდია ან ძალიან მცირეა. ასეთი რიცხვები აუცილებლად უნდა შეტანილი იქნას ინგლისურ ენოვან რეგისტრში ექსპონენციალური ფორმით, მაგალითად: 6.63E-27, 8.987551777E+9.



სურ.10.1. აღვა ნაწილაკების გაბნევის მოდელირება რეზერფორდის ცდამი. შაბლონი lab10

2. C26 უჯრაში გადააკოპირეთ C17 უჯრის შიგთავსი და დამყარეთ ამ უჯრებს შორის კავშირი.
3. მუშა ფურცელზე მოცემული საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად გამოთვალეთ სიჩქარის გეგმილები საკორდინატო დერძებზე B28:C30 უჯრებში). ფორმულები უჯრებიდან B30:C30 გადააკოპირეთ უჯრათა დიაპაზონში - B31:C327. რადგან „x“ და „y“ (D და E სვეტები) ჯერ კიდევ არ არის შევსებული, ამიტომ „v_x“ და „v_y“-ის შესაბამის სვეტებში (B და C სვეტები) გამოტანილი იქნება გამოთვლის შეცდომა (#DIV/0! – ნულზე გაყოფა).
4. კოორდინატის გამოთვლა ვაწარმოთ შემდეგი სქემის მიხედვით:

- D28 და E28 დააკოპირეთ ნაწილაკის საწყისი კოორდინატები უჯრებიდან C15 და C17.
- ისარგებლეთ მუშა ფურცელზე დატანილი ან ლაბორატორიული ამოცანის თეორიულ ნაწილში მოცემული საანგარიშო ფორმულებით ნაწილაკის კოორდინატების გამოსათვლელად. ამასთან ყველა გრაფიკი უნდა მოთავსდეს ჩვენ მიერ შერჩეულ არეში, ამიტომ გამოთვლით მიღებული შედეგები აუცილებელია მუდმივად შეადაროთ მნიშვნელობებს ამ არის საზღვრებზე (ე.ი. $x_{min}, x_{max}, y_{max}$, მნიშვნელობებთან), რომელიც წარმოადგენს გამოთვლის კრიტერიუმს. თუკი ერთ-ერთი მითითებული კრიტერიუმი სრულდება (ე.ი. გამოთვლის არის ერთ-ერთი საზღვარი მიღწეულია) გამოთვლები სრულდება და უჯრას ენიჭება რიცხვი „0“. ვისარგებლოთ ფუნქციათა ოსტატით და D29 უჯრაში შევიტანოთ გამოსახულება:

$$=IF(AND(D28<C$15;D28>C$16;E28>C$20);D28;D28+B29*C$21)$$

ხოლო E29 უჯრაში შევიტანოთ გამოსახულება:

$$=IF(D29=D28;E28;E28+C29*C$21)$$

და გადააკოპირეთ D29 და E29 უჯრებში შეტანილი ფორმულები D30:E327 უჯრებში. ორდინატის გამოსათვლელ ფორმულაში შესაძლებელია, შეფასდეს ისეთივე სამი პირობა, როგორსაც ადგილი ჰქონდა აბსცისის გამოთვლისას, მაგრამ ამის აუცილებლობა მოცემულ შემთხვევაში არ არის და ფორმულა გაცილებით მარტივდება, თუ გამოვიყენებთ ერთ ლოგიკურ პირობას:

D29=D28, სწორედ ამიტომ ორდინატის გამოსათვლელ ფორმულაში აღარ არის აუცილებლობა, გამოვიყენოთ ლოგიკური ოპერატორი AND.

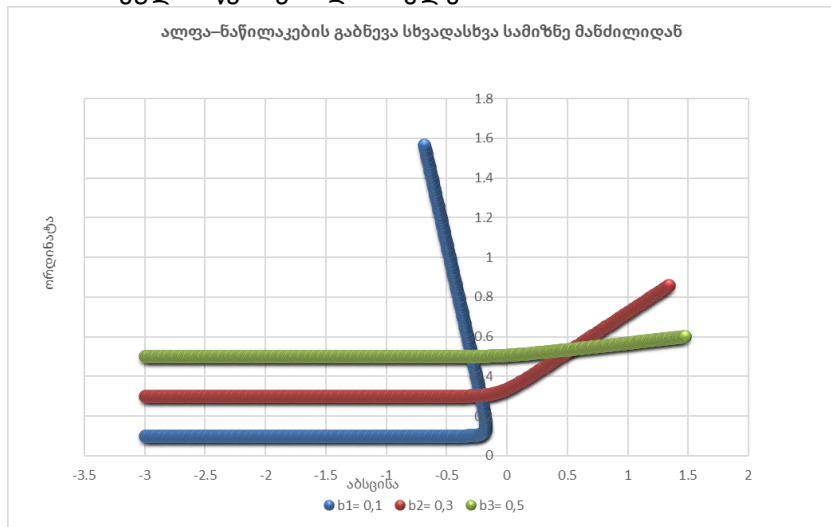
5. ანალოგიურად შეავსეთ „ცხრილი 2“ და „ცხრილი 3“:

y(x) გრაფიკის აგება

მიღებული მონაცემების საფუძველზე უნდა ავაგოთ y(x) დამოკიდებულება, რომელიც გამოსახავს ალფა-ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიას. საშუალება გვქვია, ავაგოთ გრაფიკები სხვადასხვა საწყის სამიზნე მანძილების შემთხვევაში ერთ დიაგრამაზე. გრაფიკის აგება, თავდაპირველად, წარმოებს ერთი ცხრილის, ვთქვათ, „ცხრილი 1“-ის მონაცემების საფუძველზე, რომელიც მოიცავს უჯრათა დიაპაზონს D28:E327, ხოლო სხვა ცხრილების მონაცემები ემატება გრაფიკული გამოსახულების აგების შემდეგ. აგებულ გრაფიკზე მარჯვენა ღილაკით გამოვიძახოთ კონტექსტური მენიუ და შევასრულოთ ბრძანება:

Source Data → Series → Add,

სადაც უნდა მივუთითოთ დიაგრამაზე „ცხრილი 2“ და „ცხრილი 3“ მონაცემები. დიაგრამის ტიპი უნდა შევარჩიოთ წერტილოვანი. გრაფიკები წარმოადგენს წერტილების ერთობლიობას, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან პროგრამის ბიჯზე და ალფა-ნაწილაკის აჩქარებაზე. რადგან დიაგრამა რამდენიმე გრაფიკს შეიცავს აუცილებელია დიაგრამაზე დავიტანოთ ლეგენდა, რომელზედაც მითითებული იქნება თითოეული მწკრივის დასახელება.



სურ.10.2. ალფა-ნაწილაკების ტრაექტორია სხვადასხვა სამიზნე მანძილზე

ამოცანები

10.1 გახსენით შაბლონი lab10 და შეასრულეთ შემდეგი დავალებები:

- დააკვირდით გრაფიკის ცვლილებას სამიზნე მანძილის ცვლილებისას, ელემენტის რიგითი ნომრის ცვლილებისას პერიოდულ სისტემაში, პროგრამის ბიჯის ცვლილებისას.
- ერთ-ერთი გრაფიკის ტიპი „წერტილოვანი“ შეცვალეთ გარდამავალი მაკავშირებელი ხაზებით. ეს შეიძლება შესრულდეს კონტექსტური მენიუდან ბრძანების “Chart Type” მეშვეობით.
- დაადგინეთ, რატომ არ შეიძლება კოორდინატის გამოსათვლელ ფორმულაში უჯრებს მივანიჭოთ მნიშვნელობა „0“, მითითებული კრიტერიუმის დაკმაყოფილების შემდეგ. შეეცადეთ, აგრეთვე, გამოიყენოთ მნიშვნელობა “False” ამ ფორმულაში.
- გაეცანით მუშა ფურცელს „lab10-2“. საანგარიშო ფორმულები ისეთივეა, რაც იყო პირველ მუშა ფურცელზე. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ამ შემთხვევაში მოდელირებას ექვემ-

დებარება ნაწილაკის ტრაექტორიის ფორმის დამოკიდებულება ალფა-ნაწილაკის საწყისი სიჩქარის პროექციაზე Ox ღერძზე უცვლელი სამიზნე მანძილის შემთხვევაში.

- დამოუკიდებლად შეავსეთ „lab10-2“ და ააგეთ $y(x)$ დამოკიდებულება სხვადასხვა v_{0x} სიჩქარისათვის ერთ დიაგრამაზე.

10.2 თვითმერხევი სისტემა შედგება k სიხისტის ზამბარაზე დაკიდებული m მასის ტვირთისაგან და სარქველისაგან, რომელიც არეგულირებს გარე პერიოდული ძალიდან (წყაროდან) სისტემაზე ენერჯიის თანმიმდევრობით მიწოდებას. რხევა წარმოებს Ox ღერძის გასწვრივ. ტვირთის წონასწორობის მდგომარეობაში გავლისას ($|x| < 0.5$) Ox ღერძის მიმართულებით სისტემაზე მოქმედებს მუდმივი F ძალა. განსაზღვრეთ სისტემის მდგომარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში. ააგეთ $x(t)$ გრაფიკი და $v(x)$ ფაზური მრუდი.

მიითითება: მერხევი სისტემის მათემატიკური მოდელი აღიწერება ფორმულებით:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x - kx - \beta v_x}{m}, \quad v_x = \frac{dx}{dt},$$

$$F(x, v_x) = \begin{cases} 5, & |x| < 0, v_x \geq 0 \\ 0, & \text{ყველა სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

10.3 m მასის სხული ვარდება სიმძიმის ძალის ზემოქმედებით. იატაკზე დაცემის შედეგად კარგავს რა ენერჯიის ნაწილს აისხლიტება მისგან. დაჯახება არადრეკადია. ავაგოთ სხულის კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

მიითითება: ვინაიდან დაჯახება არადრეკადია, სხულის იატაკიდან ასხლეტისას მისი სიჩქარე მცირდება ისე, რომ დაჯახების შემდეგ სიჩქარე არის იატაკზე დაჯახებამდე სიჩქარე გამრავლებული ფარდობითი სიჩქარის კოეფიციენტზე w . სიჩქარის დანაკარგის გამო ასხლეტის შემდეგ სიმაღლე შემცირდება. ამოცანის ამოხსნისას საწყის მონაცემებს წარმოადგენს Δt დროის ინტერვალი, საცნისი სიჩქარე, w სიჩქარის აღდგენის კოეფიციენტი. სიჩქარეს ვითვლით ფორმულით:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} v_{i-\frac{1}{2}} - w(v_{i-\frac{1}{2}} - g\Delta t), & y_i = 0 \\ v_{i-\frac{1}{2}} - g\Delta t, & y_i \neq 0 \end{cases}$$

შემდეგ გამოთვალეთ კოორდინატი:

$$y_{i+1} = y_i + v_{i+\frac{1}{2}}\Delta t$$

ააგეთ $y(t)$ გრაფიკი.

10.4 სხული ვარდება ბლანტ სითხეში. ააგეთ კოორდინატისა და სიჩქარის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები.

მიითითება: ბლანტ სითხეში სხულის ვარდნისას მასზე მოქმედებს სამი ძალა. სიმძიმის ძალა $F_g = mg$, არქიმედეს ძალა $F_s = \rho gV$ და სითხის მხრიდან მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა $F_f = bv$. მოძრაობის დასაწყისში $v_0 = 0$ და $F_f = 0$. სიჩქარის ზრდასთან ერთად იზრდება წინააღმდეგობის ძალა და სხულზე მოქმედი ძალა იქნება: $F = mg - bv$, რომელიც სიჩქარის ზრდასთან ერთად თანდათან მცირდება და ბოლოს დამყარდება თანაბარი მოძრაობა ე.ი. $F = 0$, ხოლო $v_{\infty} = \frac{mg}{b}$. საწყის მონაცემებს წარმოადგენს Δt დროის ინტერვალი, ρ სითხის სიმკვრივე, g თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, V სხულის მოცულობა, b სითხის სიბლანტე. გამოთვლების კრიტერიუმი ედება აჩქარებას:

$$a_i = \begin{cases} g - \frac{b}{m} v_{i-\frac{1}{2}}, & v_{i-\frac{1}{2}} \neq \frac{mg}{b} \\ 0, & v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{mg}{b} \end{cases}$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} + a_i \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{i+\frac{1}{2}} \Delta t$$

ააგეთ $y(t)$, $v(t)$ და $a(t)$ გრაფიკები

10.5 m მასის რაკეტას უშვებენ დედამიწის ზდაპირიდან ვერტიკალური მიმართულებით v_0 საწყისი სიჩქარით. ააგეთ რაკეტის კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, თუ ცნობილია მასის ცვლილების სიჩქარე $\frac{dm}{dt}$.

მითითება: რაკეტა იმპულსს იღებს საქმენიდან გამოტყორცნილი აირის ხარჯზე, რომელიც იწვის. შედეგად მცირდება რაკეტის მასა. მაშასადამე, ადგილი გვაქვს ცვლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობასთან. რეაქტიული მოძრაობა ემორჩილება მესჩერსკის განტოლებას, რომლის თანახმად, მასის შემცირების სიჩქარე რაკეტის სიჩქარის ზრდის ტოლია.

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{m} \frac{dm}{dt}.$$

სიჩქარე და კოორდინატი გამოთვალეთ ფორმულებით:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} + a_i \Delta t,$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{i+\frac{1}{2}} \Delta t.$$

10.6 ვთქვათ, მოცემულია ორი სხეული სხვადასხვა ტემპერატურით. სხეულები ერთმანეთს შეახეს. ააგეთ თითოეული სხეულის ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები. გაითვალისწინეთ გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმი, როცა დამყარდება სითბური წონასწორობა.

მითითება: სითბური ბალანსის თანახმად, მაღალი ტემპერატურის სხეული გასცემს სითბოს, ხოლო დაბალი ტემპერატურის სხეული მიიღებს მას. უსასრულოდ მცირე Δt დროში, სხეულის გასცემს დაბალი ტემპერატურის სხეულს სითბოს:

$$\Delta Q_1 = m_1 C_1 (T_1 - T_0),$$

დაბალი ტემპერატურის სხეული მიიღებს სითბოს:

$$\Delta Q_2 = m_2 C_2 (T_0 - T_2),$$

სითბური ბალანსის თანახმად:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2,$$

$$m_1 C_1 (T_1 - T_0) = m_2 C_2 (T_0 - T_2).$$

სხეულთა ტემპერატურები მცირე dt დროში იცვლება კანონით:

$$\Delta Q = R(T_1 - T_2) \Delta t,$$

სადაც R სითბური წინააღობაა, C_1 და C_2 პირველი და მეორე სხეულის სითბოტევადობებია. პირველი სხეულისათვის:

$$R(T_1 - T_2) \Delta t = m_1 C_1 (T_1 - T_0),$$

მეორე სხეულისათვის:

$$R(T_1 - T_2) \Delta t = m_2 C_2 (T_0 - T_2).$$

შესაბამისად გვაქვს:

$$T_1 = \frac{m_1 C_1 T_0 - R T_2 \Delta t}{m_1 C_1 - R \Delta t}, \quad T_2 = \frac{m_2 C_2 T_0 - R T_1 \Delta t}{m_2 C_2 - R \Delta t}.$$

შეცდომების თავიდან აცილების მიზნით, უკანასკნელი გამოსახულებები უმჯობესია ჩავწეროთ ისე, როგორც ამას Excel -ში ალგორითმის აგებისას გამოიყენებთ:

$$(T_1)_{i+1} = \frac{m_1 C_1 T_0 - R (T_2)_i \Delta t}{m_1 C_1 - R \Delta t}, \quad (T_2)_{i+1} = \frac{m_2 C_2 T_0 - R (T_1)_i \Delta t}{m_2 C_2 - R \Delta t}.$$

10.7 q მუხტისა და m მასის დამუხტული ნაწილაკი v_0 საწყისი სიჩქარით მოძრაობს \vec{B} ინდუქციის ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, რომელსაც ქმნის უსასრულო სიგრძის სწორი დენიანი გამტარი. ააგეთ მისი ტრაექტორია.

მიითითება: დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა მაგნიტურ ველში აღიწერება ნიუტონის მეორე კანონით:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

სადაც:

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}],$$

ლორენცის ძალაა. ყველაზე მარტივ შემთხვევას წარმოადგენს მოძრაობა ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, როცა მაგნიტური ინდუქციის \vec{B} ვექტორის სიდიდე და მიმართულება ერთნაირია სივრცის ყველა წერტილში. ამ დროს დამუხტული ნაწილაკი მოძრაობს წარმოსახვითი ცილინდრის ზედაპირზე, რომლის რადიუსიც გამოისახება ფორმულით:

$$r_0 = \frac{mv_0}{qB}.$$

ცილინდრის ღერძი მიმართულია მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის გასწვრივ. ნაწილაკის ცილინდრის ზედაპირზე ბრუნვის ციკლურ სიხშირეს **ციკლოტრონული სიხშირე** ეწოდება:

$$\omega_0 = \frac{qB}{m}.$$

დავუშვათ \vec{B} ვექტორი მიმართულია დენიანი გამტარის მართობულად Z ღერძის გასწვრივ, დენიანი გამტარი ორიენტირებულია y ღერძის გასწვრივ, მაშინ მაგნიტური ველის მხრიდან ნაწილაკზე მოქმედი ძალა მიმართული იქნება xy სიბრტყეში. ე.ი.:

$$ma_x = F_x = q[\vec{v}\vec{B}]_x = qv_y B_z,$$

$$ma_y = F_y = q[\vec{v}\vec{B}]_y = -qv_x B_z.$$

მოსახერხებელია ეს ფორმულები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$(v_x)_{i+\frac{1}{2}} = (v_x)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{q}{m} (v_y)_{i-\frac{1}{2}} B,$$

$$(v_y)_{i+\frac{1}{2}} = (v_y)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{q}{m} (v_x)_{i-\frac{1}{2}} B$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{i+\frac{1}{2}} \Delta t.$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{i+\frac{1}{2}} \Delta t.$$

საწყის მონაცემებს წარმოადგენს:

$$(v_x)_0 = 0, \quad (v_y)_0 = v_0, \quad x_0 = r_0, \quad y_0 = 0.$$

10.8 e მუხტისა და m_e მასის ელექტრონი მოძრაობს \vec{B} ინდუქციის ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. ელექტრონი განიცდის შემფოთებას q მუხტისა და m_p მასის პროტონისაგან, რომელიც მოძრაობს ელექტრონისა და პროტონის მახლობლად. განსაზღვრეთ ელექტრონისა და პროტონის ტრაექტორია.

მითითება: ვთქვათ ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი მიმართულია Z ღერძის გასწვრივ. დროის საწყის მომენტში ელექტრონი და პროტონი განთავსებულია ერთ სიბრტყეში და ეს სიბრტყე მაგნიტური ველის პერპენდიკულარულია. დავუშვათ, დროის საწყის მომენტში ნაწილაკებს შორის დაშორება არის r_0 , რომელიც გამოითვლება ელექტრონის საწყისი სიჩქარით:

$$r_0 = \frac{mv_0}{qB}.$$

ელექტრონისა და პროტონის მოძრაობის განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება განტოლებებით:

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = eq \frac{\vec{R}}{R^3} - e[\vec{v}_e \vec{B}],$$

$$m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} = -eq \frac{\vec{R}}{R^3} + q[\vec{v}_p \vec{B}],$$

სადაც $\vec{R} = \vec{r}_p - \vec{r}_e$ - ელექტრონისა და პროტონს შორის მანძილია. გავითვალისწინოთ, რომ $|q| = |e|$ და ნაწილაკთა მოძრაობა ხდება xy სიბრტყეში, შედეგად, ჩავეწეროთ ვექტორული განტოლებები სკალარული მდგენელების სახით:

$$\frac{d(v_{ex})_{i+\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{e^2}{m_e} \frac{(x_p)_i - (x_e)_i}{R^3} - \frac{e}{m} (v_{ey})_{i-\frac{1}{2}} B,$$

$$\frac{d(v_{ey})_{i+\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{e^2}{m_e} \frac{(-y_p)_i + (y_e)_i}{R^3} + \frac{e}{m} (v_{ex})_{i-\frac{1}{2}} B,$$

$$\frac{d(v_{px})_{i+\frac{1}{2}}}{dt} = -\frac{e^2}{m_e} \frac{(x_p)_i - (x_e)_i}{R^3} + \frac{e}{m} (v_{py})_{i-\frac{1}{2}} B,$$

$$\frac{d(v_{py})_{i+\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{e^2}{m_e} \frac{(-y_p)_i + (y_e)_i}{R^3} - \frac{e}{m} (v_{px})_{i-\frac{1}{2}} B.$$

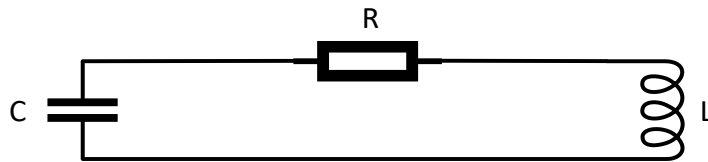
საწყის მონაცემებს წარმოადგენს:

$$(v_{ex})_0 = 1, \quad (v_{ey})_0 = 0, \quad (v_{px})_0 = 1, \quad (v_{py})_0 = 0,$$

$$(x_e)_0 = 0, \quad (y_e)_0 = 0, \quad (x_p)_0 = 0, \quad (y_p)_0 = 0.$$

ლაბორატორიული ამოცანა №11.
მილევადი რხევების მოდელირება LRC რხევით კონტურში

განვიხილოთ ელექტრული წრედი, რომელშიც ჩართულია მიმდევრობით შეერთებული C ტევადობის კონდენსატორი, L ინდუქტივობის კოჭა და R აქტიური წინაღობა. გარკვეულ პირობებში ასეთ კონტურში აღიძვრება ელექტრული რხევა, ე.ი. ადგილი ექნება დენის ძალის, კონდენსატორის შემონაფენებზე მუხტისა და წრედის ცალკეულ უბნებზე ძაბვის მნიშვნელობების პერიოდულ ცვლილებას. ამიტომ ასეთ წრედს **ჩაკეტილ ელექტრულ რხევით კონტურს უწოდებენ**. წრედში აქტიური წინაღობის არსებობა განაპირობებს სითბოს გამოყოფას (ელექტრული ენერჯიის სითბურ ენერჯიად გარდაქმნას), ამიტომ დროთა განმავლობაში რხევა მიილევა, ამასთან, რაც უფრო დიდია წინაღობა, მით უფრო სწრაფად მიილევა რხევა.



სურ.11.1. თავისუფალი რხევები LRC რხევით კონტურში

დავმუხტოთ კონდენსატორი და ჩავრთოთ ჩამრთველი. კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას. წრედში გაივლის ელექტრული დენი, მაგრამ ელექტრული დენი, თვითინდუქციის გამო, მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს არა მეყსეულად, არამედ თანდათანობით. ელექტრული დენი თანდათან გაიზრდება და იმ მომენტში, როცა ის მიაღწევს მაქსიმუმს, კონდენსატორზე ელექტრული მუხტი ნულს გაუტოლდება. ამ მომენტიდან, კოჭას ინდუქტივობის გამო, დაიწყება ელექტრული დენის თანდათანობით შემცირება წრედში და კონდენსატორის ხელმეორედ დამუხტვა. ამიტომ, როცა დენი წრედში სრულად მიილევა, კონდენსატორი აღმოჩნდება მაქსიმალურად დამუხტული, ამასთან, კონდენსატორის შემონაფენები დაიმუხტებიან საპირისპირო ნიშნით, თავდაპირველ მდგომარეობასთან შედარებით. ამის შემდეგ პროცესი მეორდება, მაგრამ პირველი პროცესისგან განსხვავებით დენი გაივლის საპირისპირო მიმართულებით და წრედი დაუბრუნდება თავდაპირველ მდგომარეობას. **დროის შუალედს, კონდენსატორის დამუხტვიდან ხელმეორედ სრულად დამუხტვამდე (როცა კონდენსატორი უბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას) რხევის პერიოდი ეწოდება.**

ამრიგად, რხევის პროცესში კონდენსატორის ელექტრული ველის ენერჯია სრულად ან ნაწილობრივ გარდაიქმნება კოჭას მაგნიტური ველის ენერჯიად. თუ წრედში არ აქვს ადგილი ენერჯიის კარგვას (ანუ -ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერჯია არ გარდაიქმნება სითბურ ენერჯიად), ე.ი. $R = 0$, მაშინ სრული ენერჯია (ელექტრული და მაგნიტური ველების ენერჯიების ჯამი) არ შეიცვლება და რხევები იქნება მიუღვეადი. წრედში აქტიური წინაღობის არსებობა ($R \neq 0$) იწვევს ელექტრო-მაგნიტური ველის თანდათანობით გარდაქმნას გამტარის შინაგან ენერჯიად, რის გამოც რხევის ამპლიტუდა დროის განმავლობაში შემცირდება. ასეთ შემთხვევაში რხევა აღარ იქნება პერიოდული, რადგან სისტემის მდგომარეობა ზუსტად არ მეორდება. მაგრამ რადგან მუხტის სიდიდე კონდენსატორის შემონაფენებზე აღწევს მაქსიმუმს (ან მინიმუმს) დროის ტოლ შუალედში (პერიოდულად), ამიტომ ასეთი რხევები შეიძლება დავახასიათოთ პირობითი პერიოდით, რომელსაც მილევადი რხევის პერიოდი ეწოდება.

სურ.11.1-ზე გამოსახული რხევითი კონტურისათვის განტოლების შესადგენად ვისარგებლოთ შემდეგი მოსაზრებებით: კონდენსატორსა და აქტიურ წინაღობაზე ძაბვის ვარდნის ჯამი ტოლი უნდა იყოს კოჭაში აღძრული თვითინდუქციის ემძ-ს:

$$U_C + U_R = \varepsilon_C, \tag{11.1}$$

სადაც $U_C = \frac{q}{C}$, $U_R = IR$, $\varepsilon_C = -LI'$. q და I – შესაბამისად, კონდენსატორის მუხტი და წრედში დენის ძალის მნიშვნელობაა დროის რომელიღაც მომენტში. (11.1) შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$LI' + IR + \frac{q}{C} = 0, \quad (11.2)$$

(11.2) წარმოადგენს სწორედ მიღვადი რხევის განტოლებას ელექტრულ რხევით კონტურში. უმჯობესია ის გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0 \rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (11.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (11.4)$$

სადაც β – რხევის მიღვების კოეფიციენტი (იგი მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია აქტური წინაღობა R). შედეგად რხევის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.5)$$

მიღვადი რხევების თეორია საკმარისად რთულია, თუმცა ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ ამოვხსნათ მსგავსი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით. შევადაროთ (11.5) განტოლება ზამბარიანი ქანქარას რხევის განტოლებას, შეიძლება გავაკეთოთ რამდენიმე ანალოგია, კერძოდ: კოორდინატის როლს მოცემულ შემთხვევაში ასრულებს მუხტი, ხოლო სიჩქარის როლს კი – დენის ძალა. ამ ანალოგიის გათვალისწინებით (11.5) განტოლების ამონახსნის სახით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} I_{1/2} \approx I_0 - (2\beta I_0 + \omega_0^2 q_0) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ I_{i+1/2} \approx I_{i-1/2} - (2\beta I_{i-1/2} + \omega_0^2 q_i) \cdot \Delta t; \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+1/2} \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (11.6)$$

ანალიზური გამოთვლები საშუალებას გვაძლევს, განვსაზღვროთ მიღვადი რხევის ციკლური სიხშირე და პერიოდი:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad \omega < \omega_0, \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} > T_0. \quad (11.7)$$

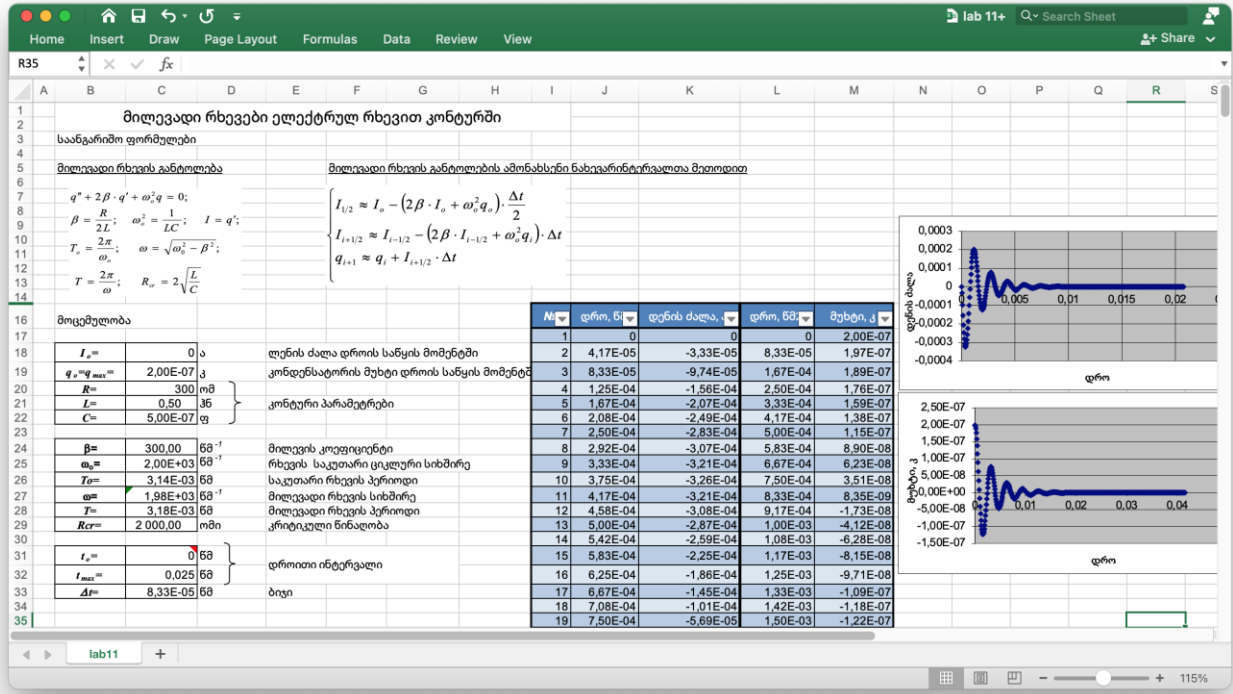
ყოველი ელექტრული რხევითი კონტურისათვის არსებობს ე.წ. **კრიტიკული წინაღობა** რომლისთვისაც რხევები აღარ წარმოიქმნება და ადგილი აქვს კონდენსატორის აპერიოდულ (ე.ი. არაპერიოდულ) განმუხტვას. ცხადია, ეს მოვლენა შეესაბამება შემთხვევას, როცა $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = 0$, ანუ $\omega_0^2 = \beta^2$. თუ გავითვალისწინებთ (11.4)–ს მივიღებთ კრიტიკული წინაღობის გამოსახულებას:

$$R_{cr} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11.8)$$

რხევის ამპლიტუდა, როგორც თეორია გვიჩვენებს, მცირდება ექსპონენციალური კანონით. ლაბორატორიული ამოცანა №10 სწორედ ამ თეორიის შემოწმებას ეძღვნება. საანგარიშო ფორმულებს წარმოადგენს (11.4), (11.6), (11.7) და (11.8).

შაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით შაბლონი „lab 11“. გააანალიზეთ საანგარიშო ფორმულები და განსაზღვრეთ მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები.



სურ.11.1. მილევადი რხევები ელექტრულ რხევით კონტურში. შაბლონი lab11

შაბლონის შევსება

1. შევიტანოთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები შემდეგ უჯრებში:

- 1) C18 – დენის ძალის საწყისი მნიშვნელობა ($t_0 = 0$ მომენტში), მაგალითად: $I_0 = 0$ ა;
- 2) C19 - მუხტი დროის საწყისი მომენტში, მაგალითად: $q_0 = q_{max} = 2 \cdot 10^{-6}$ კ;
- 3) C20 - აქტიური წინაღობა, მაგალითად: $R = 200$ ომი;
- 4) C21 – კოჭის ინდუქტიურობა, მაგალითად: $L = 0.5$ ჰმ;
- 5) C22 – კონდენსატორის ტევადობა, მაგალითად: $C = 0.5 \cdot 10^{-6}$ ფ;
- 6) C31 – დროის საწყისი მომენტი $t_0 = 0$ წმ;
- 7) C32 – საბოლოო დრო $t_{max} = 0.025$ წმ.
- 8) C33 - შევიტანოთ პროგრამის ბიჯი ანუ დროითი ინტერვალი Δt .

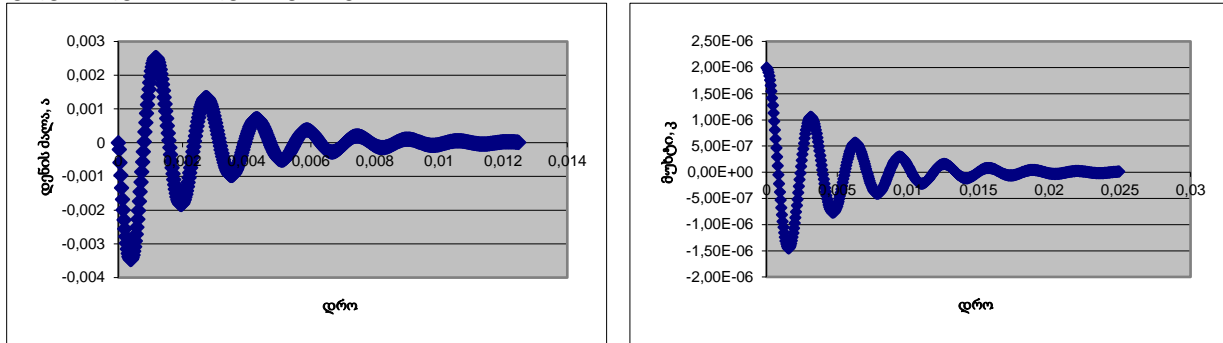
3. გამოვთვალოთ:

- 1) C24 – მილევის კოეფიციენტი – (11.4)–ის პირველი ფორმულა;
- 2) C25 - რხევის საკუთარი ციკლური სიხშირე – (11.4)–ის მეორე ფორმულა;
- 3) C26 - საკუთარი რხევის პერიოდი – (11.7) მეორე ფორმულა;
- 4) C27 - მილევადი რხევის სიხშირე – (11.7) პირველი ფორმულა;
- 5) C28 - მილევადი რხევის პერიოდი;
- 2) C29 - კრიტიკული წინაღობა – (11.8) ფორმულა.

3. შევავსოთ ცხრილი (დრო– დენის ძალა; დრო– მუხტი) (11.6) საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად და გავითვალისწინოთ, რომ ნახევარინტერვალია მეთოდის შინაარსიდან გამომდინარე, დენის ძალა უნდა გავიანგარიშოთ ყოველი დროითი ინტერვალის შუაში, ისევე, როგორც სიჩქარე №5 და №8 ლაბორატორიული ამოცანების გადაწყვეტისას, ხოლო მუხტი უნდა გამოვთვალოთ ყოველი დროითი ინტერვალის ბოლოში, ისევე როგორც კოორდინატი ზემოთ ნახსენებ ლაბორატორიულ ამოცანებში.

გრაფიკების აგება

საჭიროა ავაგოთ ორი გრაფიკი: $I(t)$ – რომელიც აიგება K17:L516 მონაცემების საფუძველზე და $q(t)$ – რომელიც აიგება M17:N516 მონაცემების საფუძველზე. გრაფიკების აგება უნდა განხორციელდეს სხვადასხვა დიაგრამაზე, რადგან მასშტაბი ორდინატთა ღერძზე შესაძლოა, ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს რამდენიმე რიგით.



სურ.11.2. დენის ძალისა და მუხტის მილევადი რხევები

ამოცანები

გახსენით შაბლონი lab11 და შეასრულეთ შემდეგი დავალებები:

- 11.1 ისარგებლეთ №5 და №6 ლაბორატორიული ამოცანების მეთოდით და დამოუკიდებლად მიიღეთ (11.6) განტოლებათა სისტემა.
- 11.2 ცვალეთ რა t_{max} -ის მნიშვნელობა (შესაბამისად Δt) დაადგინეთ როდის კარგავს მოცემული მოდელი არსს? შეადარეთ ეს დროითი ინტერვალი საკუთარი რხევების პერიოდს?
- 11.3 ცვალეთ რხევითი კონტურის პარამეტრები R, L, C და განსაზღვრეთ, როგორ იცვლება გრაფიკების სახე. დაადგინეთ, როგორ იცვლება ამ პარამეტრების ცვლილებისას მილევადი რხევის ციკლური სიხშირე ω და პერიოდი T .
- 11.4 გრაფიკებზე (თუნდაც ერთ მათგანზე) ჩართეთ ვერტიკალური ხაზები (კონტექსტური მენიუთი შეასრულეთ ბრძანება Chart Option → Gridlines → Value (x) axis → Major Gridlines) და ექსპერიმენტულად (გრაფიკულად) დაადგინეთ მილევადი რხევის პერიოდი რხევითი კონტურის მოცემული პარამეტრებისათვის. შეადარეთ თქვენ მიერ განსაზღვრული რხევის პერიოდი თეორიულ შედეგს. მეტი სიზუსტისათვის შეგიძლიათ, შეცვალოთ მასშტაბი (შკალა) აბსცისთა ღერძზე, რისთვისაც მონიშნეთ აბსცისთა ღერძი, გამოიძახეთ კონტექსტური მენიუ მასშტაბის მარჯვენა დილაკით და შეასრულეთ ბრძანება Format axis → Scale, რის შედეგადაც გაჩნდება დიალოგური სარკმელი, სადაც ველში Maximum მიუთითეთ სასურველი პარამეტრი მასშტაბის გაზრდისათვის (მაგალითად, 0,006).
- 11.5 გრაფიკების საშუალებით განსაზღვრეთ დენის ძალასა და მუხტს შორის ფაზათა წანაცვლება.
- 11.6 ცხრილს დაუმატეთ ორი ახალი სვეტი „პოტენციალის ვარდნა აქტიურ წინაღობაზე“ და „პოტენციალის ვარდნა კონდენსატორის მომჭერებზე“. შეადგინეთ ფორმულები და განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კონტურის ამ ელემენტებზე. ააგეთ პოტენციალთა ვარდნის დროზე დამოკიდებულებები ერთ გრაფიკზე. განსაზღვრეთ გრაფიკულად მათ შორის ფაზათა ძვრა და შეადარეთ იგი დენის ძალასა და მუხტს შორის თქვენ მიერ დადგენილ ფაზათა ძვრას.
- 11.7 განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კოჭაზე (11.1) ფორმულის საფუძველზე და ააგეთ $U_L(t)$ დამოკიდებულება იმავე დიაგრამაზე. განსაზღვრეთ ფაზათა ძვრების თანაფარდობა პოტენციალთა ვარდნებს შორის წრედის თითოეული ელემენტისათვის.

11.8 კონტურის პარამეტრები შეარჩიეთ ისე, რომ გრაფიკულად იმზირებოდეს ათამდე პერიოდის რხევები. გაანალიზეთ ცხრილური მონაცემები (დრო – მუხტი) და ცალკე ცხრილში ამოწერეთ მუხტის მხოლოდ დადებითი ამპლიტუდები შესაბამისი დროითი მომენტის მითითებით. ამ მონაცემებზე დაყრდნობით ააგეთ ახალი გრაფიკი $q(t)$. შეარჩიეთ გრაფიკზე მოცემული წერტილების შეერთების რეგრესიის ტიპი, ბრძანებით Add Trendlines და დააგინეთ კანონი, რომლითაც მცირდება მიღევადი რხევის ამპლიტუდა.

ლაბორატორიული ამოცანა №12.

იძულებითი რხევების მოდელირება ელექტრულ რხევით კონტურში

მოცემული ამოცანა ორ ნაწილად დავეყოთ. პირველ ნაწილში ავაგოთ იძულებითი რხევის დენის ძალისა და მუხტის დროზე დამოკიდებულების ამსახველი გრაფიკები, ხოლო მეორე ნაწილში შევისწავლოთ იგივე რხევები რეზონანსული სიხშირის მახლობლად.

რხევები, რომლებიც წარმოებს გარე პერიოდული ძალის მოქმედებით იწოდება იძულებით რხევებად. როგორც თეორია გვამცნობს იძულებითი რხევები წარმოებს გარე პერიოდული ძალის სიხშირით. ელექტრულ რხევით კონტურში იძულებითი რხევების მიღება შესაძლებელია, თუ რხევით კონტურში ჩავრთავთ დენის წყაროს, რომლის ელექტრომამოძრავებელი ძალა იცვლება დროში ჰარმონიული კანონით:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max} \cos(\omega t), \tag{12.1}$$

იძულებითი რხევების განტოლებას როგორც ცნობილია აქვს შემდეგი სახე:

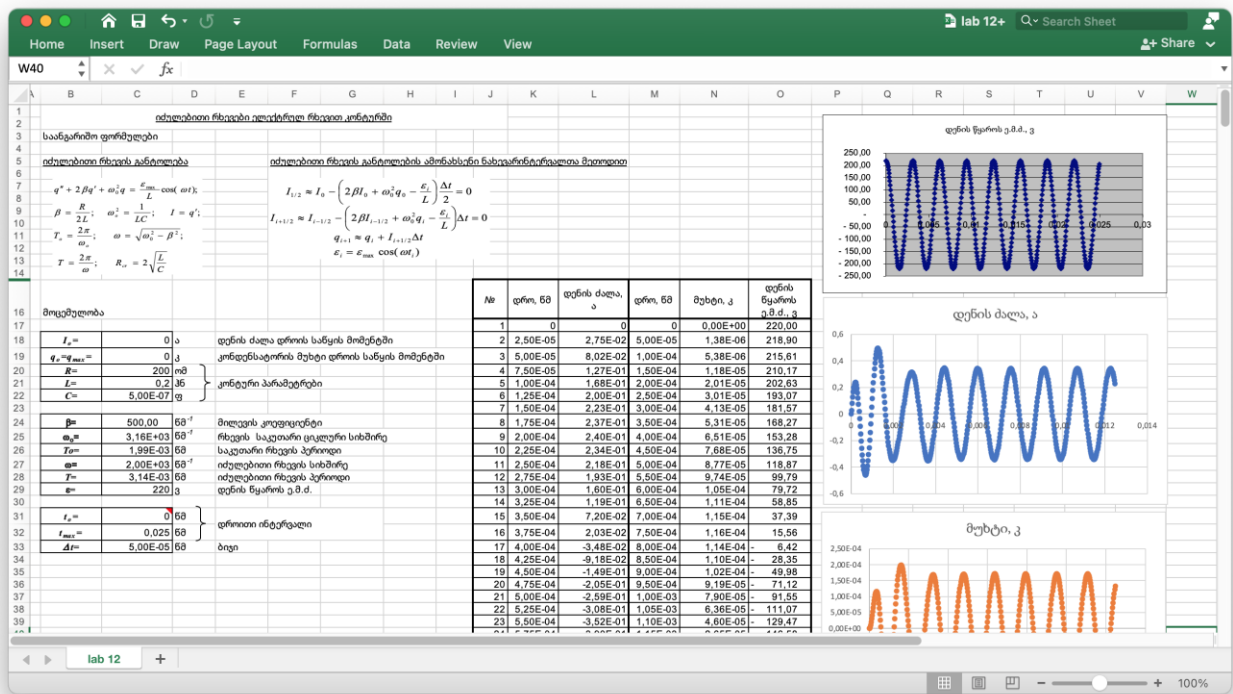
$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_{max}}{L} \cos(\omega t). \tag{12.2}$$

ამ განტოლების ამოხსნა ნახევარინტერვალთა მეთოდით გვაძლევს:

$$\begin{cases} I_{\frac{1}{2}} \approx I_0 - \left(2\beta I_0 + \omega_0^2 q_0 - \frac{\varepsilon_{max}}{L} \cos(\omega t_0) \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ I_{i+\frac{1}{2}} \approx I_{i-\frac{1}{2}} - \left(2\beta I_{i-\frac{1}{2}} + \omega_0^2 q_i - \frac{\varepsilon_{max}}{L} \cos(\omega t_0) \right) \cdot \Delta t; \\ q_{i+1} \approx q_i + I_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{12.3}$$

მაბლონის ჩატვირთვა

გახსენით მაბლონი „lab12“ (სურ. 12.1).



სურ.12.1. იძულებითი რხევები ელექტრულ რხევით კონტურში. მაბლონი lab12

მაბლონის შევსება

- შეიტანეთ საწყისი რიცხვითი მნიშვნელობები უჯრებში: C18:C32
- შეავსეთ ცხრილი („დრო – დენის ძალა“; „დრო–მუხტი–დენის წყაროს ემძ“) (12.1) და (12.3) საანგარიშო ფორმულების შესაბამისად და გაითვალისწინეთ, რომ ნახევარინტერვალთა მეთოდის შინაარსიდან გამომდინარე დენის ძალა უნდა გამოთვალოთ ყოველი დროითი ინტერვალის შუაში, ისევე როგორც სიჩქარე N_{e5} და N_{e6} ლაბორატორიული ამოცანების გადაწყვეტისას, ხოლო მუხტი და დენის წყაროს ე.მ.ძალა კი უნდა გამოთვალოთ ყოველი დროითი ინტერვალის ბოლოში, ისევე როგორც კოორდინატი ზემოთ ნახსენებ ლაბორატორიულ ამოცანებში.

გრაფიკების აგება

საჭიროა ავაგოთ სამი გრაფიკი: $I(t)$ – რომელიც აიგება K17:L516 მონაცემების საფუძველზე და $q(t)$ – რომელიც აიგება M17:N516 მონაცემების საფუძველზე და $\varepsilon(t)$, რომელიც აიგება M და O სვეტის მონაცემების საფუძველზე. ისე, როგორც N_{e11}–ე ლაბორატორიული ამოცანის დროს, აქაც სასურველია განხორციელდეს სხვადასხვა დიაგრამაზე, რადგან მასშტაბი ორდინატთა ღერძზე შესაძლოა ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს რამდენიმე რიგით.

Excel-ის ინსტრუმენტი Goal Seek (ამონახსნის ძიება)

ახლა შევისწავლოთ დენის ძალისა და ძაბვის რხევები რზონანსულ სიხშირეზე, ე.ი. როცა გარე პერიოდული ძალის სიხშირე ემთხვევა კონტურის საკუთარ სიხშირეს. რეზონანსულ სიხშირეზე დენის ძალა და ძაბვა მიმდევრობით რხევით კონტურში მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს.

პირველ რიგში საჭიროა შევადგინოთ ამოცანის მათემატიკური ალგორითმი. საძიებელ ფუნქციას წარმოადგენს რხევითი კონტურის დენის ძალისა და ძაბვის ამპლიტუდა. ცნობილია, რომ მიმდევრობით რხევით კონტურში დენის ძალის ამპლიტუდა მოიცემა გამოსახულებით:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (12.4)$$

საჭიროა ვიპოვოთ ω სიხშირის რა მნიშვნელობისათვის იქნება დენის ძალა მაქსიმალური. ძაბვა ავითვალთ აქტიური წინაღობის ბოლოებზე:

$$U_0 = I_0 R. \quad (12.5)$$

ცხადია, დენის ძალა და ძაბვა მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს ერთსა და იმავე სიხშირეზე.

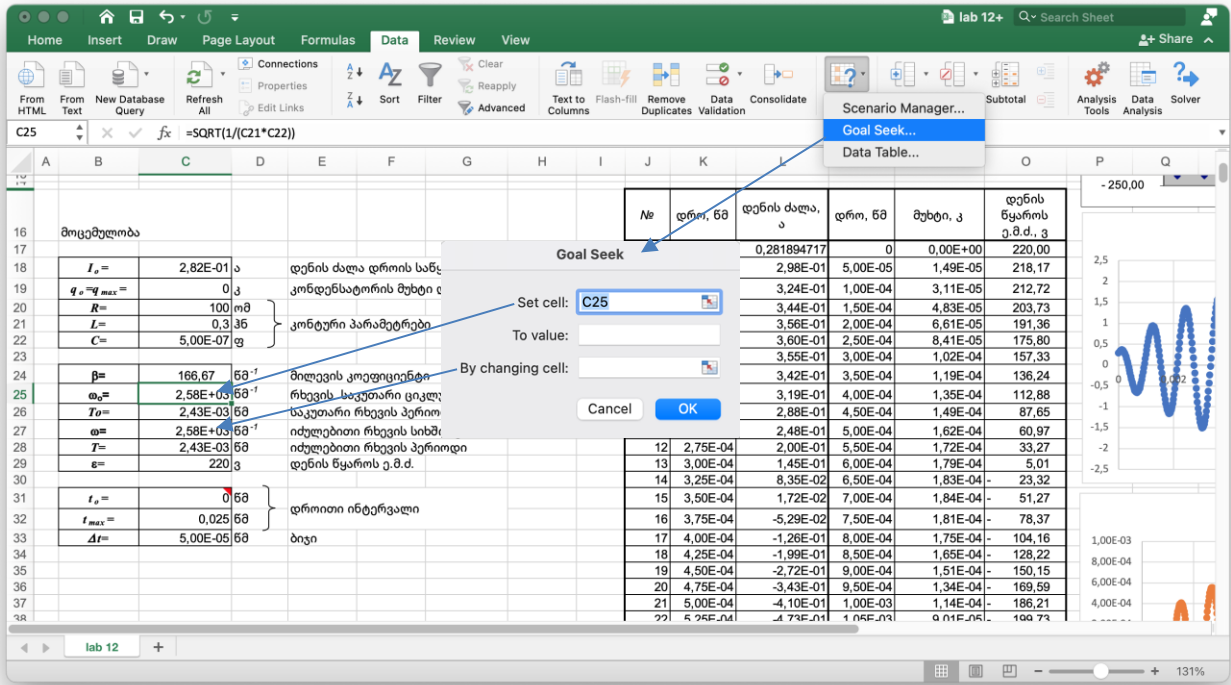
რეზონანსული სიხშირის პოვნა შესაძლებელია MS-Excel-ის მონაცემთა ანალიზისა და პროგნოზირების ფუნქციით Goal Seek (ამონახსნის ძიება). ეს ფუნქცია გააქტიურდება შემდეგნაირად:

Data → What is analysis → Goal Seek

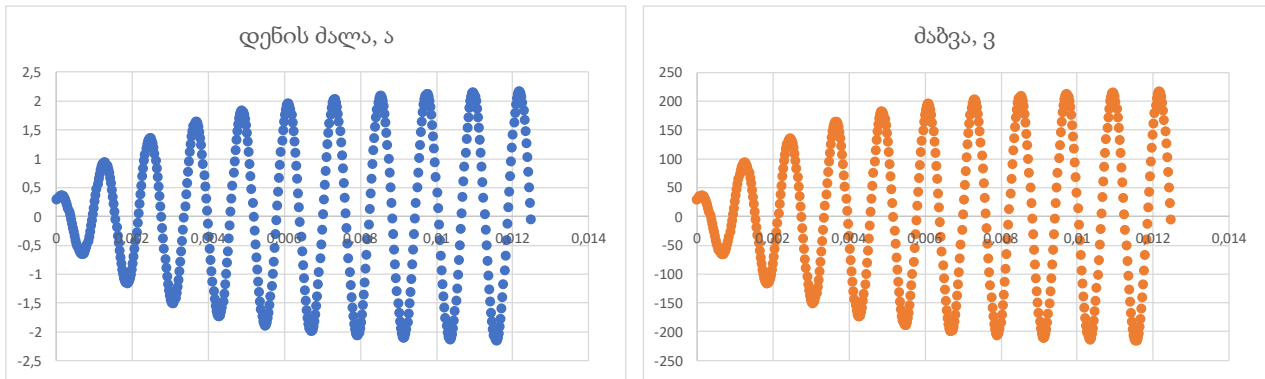
გაიხსნება დიალოგური ფანჯარა Goal Seek (ამონახსნის ძიება) (სურ.12.2), რომელსაც გააჩნია სამი ველი:

- Set cell: უჯრა, რომელიც გავლენას ახდენს სამიზნე შედეგზე,
- To value: მნიშვნელობა, რომელიც უნდა მიიღოს სამიზნე უჯრა,
- By changing cell: სამიზნე უჯრა.

ამ მეთოდით შეგვიძლია ω იძლევათი რხევის სიხშირე შევარჩიოთ ისეთი, რომ ის ძალიან ახლოს იყოს ω_0 რხევითი კონტური საკუთარი რხევის სიხშირესთან. შესაბამისად, $\omega = \omega_{\text{რეზ}}$ სიხშირეზე დენის ძალა და ძაბვა რხევით კონტურში იქნება მაქსიმალური, ხოლო ჩვენ შეგვიძლია დავაკვირდეთ რხევებს რეზონანსული სიხშირის მახლობლად (სურ.12.2)



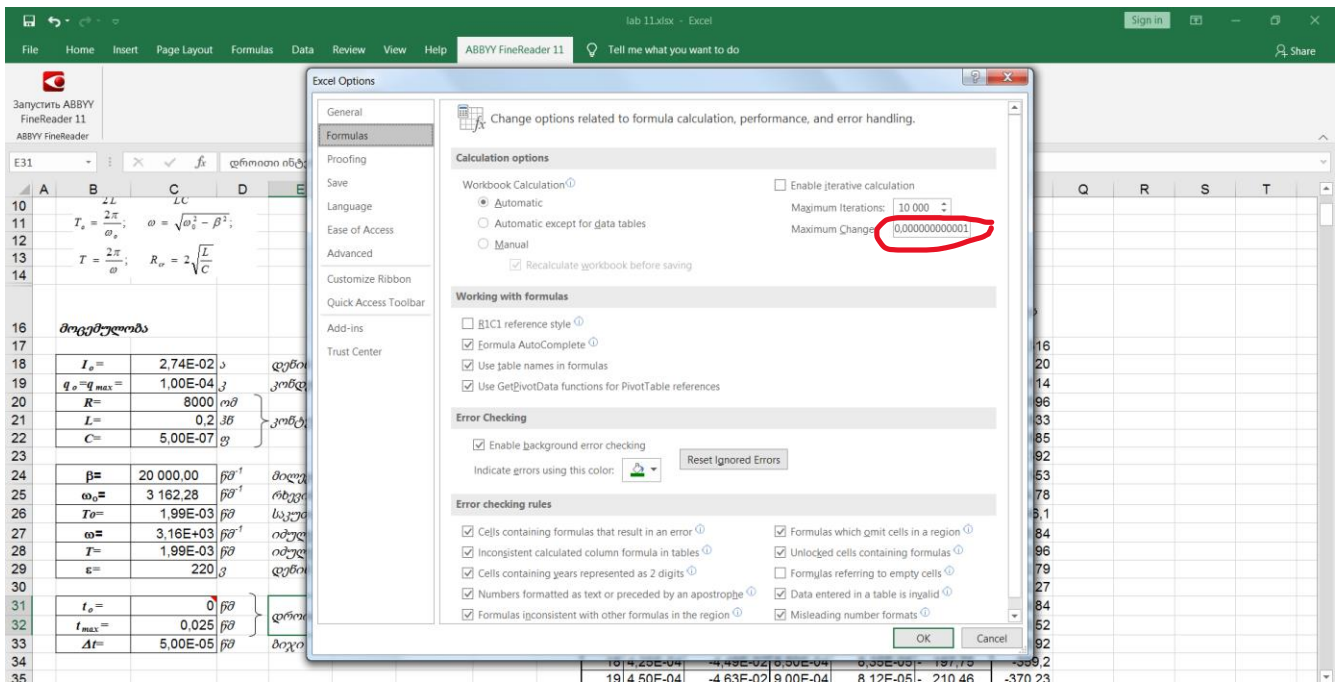
სურ.12.2. Goal Seek (ამონახსნის ძიება) ფანჯარის გამოძახება



სურ.12.3. დენისა და ძაბვის დროზე დამოკიდებულება რეზონანსულ სიხშირეზე

Goal Seek ინსტრუმენტი ამონახსნის ძიება მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული გამოთვლების სიზუსტეზე, რომელიც შეიძლება შეცვალოთ Excel-ის ოფციებიდან:

File → Options → Formulas → Maximum Change



სურ.12.4. გამოთვლის სიზუსტის ცვლილება Excel-ის ოფციებში

ამოცანები

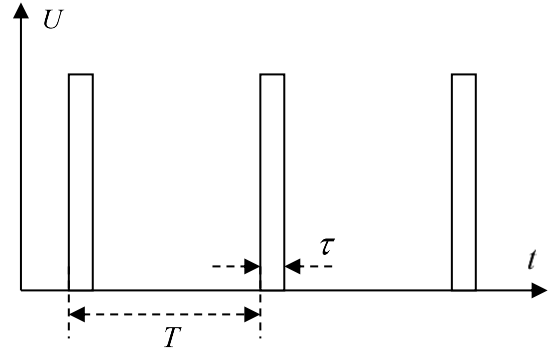
12.1 გახსენით შაბლონი lab12 და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- პროგრამის ბიჯის ცვლილებით დაადგინეთ "lab12"-ის გამოყენების საზღვრები;
- ცვალებით გარე პერიოდული ძალის სიხშირე ω და გრაფიკების ცვლილების მიხედვით დაადგინეთ მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა.
- აგებული გრაფიკების საფუძველზე განსაზღვრეთ ფაზათა ძვრა დენის ძალასა და წყაროს ემძ-ს შორის, აგრეთვე დენის ძალასა და მუხტს შორის.
- ცხრილს დაუმატეთ ორი ახალი სვეტი „პოტენციალის ვარდნა აქტიურ წინაღობაზე“ და „პოტენციალის ვარდნა კონდენსატორის მოძქერებზე“. ააგეთ პოტენციალთა ვარდნის დროზე დამოკიდებულებები ერთ გრაფიკზე. განსაზღვრეთ გრაფიკულად მათ შორის ფაზათა სხვაობა დამყარებული იძულებითი რხევების დროს.
- განსაზღვრეთ პოტენციალთა ვარდნა კოჭის ბოლოებზე. ისარგებლეთ კავშირით U_R და U_C დაბვებსა და ε და ε_C შორის.

ლაბორატორიული ამოცანა №13.
მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის აგება

მართკუთხა სიგნალი წარმოადგენს განსაზღვრული სიდიდის (ამპლიტუდის) მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობას და ხასიათდება იმპულსის τ ხანგრძლივობით და სიდიდით, რომელიც გამოსახავს სიგნალის პერიოდის ფარდობას იმპულსის ხანგრძლივობასთან.

განვიხილოთ სურ.13.1-ზე ნაჩვენები მართკუთხა იმპულსების მიღების პრინციპი. ასეთი იმპულსები ხასიათდება იმით, რომ ძაბვის ნიშანი არ იცვლება. მართკუთხა იმპულსები შეიძლება მივიღოთ სინუსოიდური იმპულსების საფუძველზე. მართკუთხა სიგნალის მისაღებად საჭიროა, განვსაზღვროთ **პირველადი მონაცემები**:



სურ.13.1. მართკუთხა სიგნალი

1. ცვლადი სინუსოიდური დენის ძაბვა $U(t)$, რომლის მეყსეული მნიშვნელობა შეიძლება, ჩაწერილი იქნას სინუსის ან კოსინუსის კანონით. ვთქვათ $U(t)$ ძაბვა მოცემულია შემდეგი ფორმით:

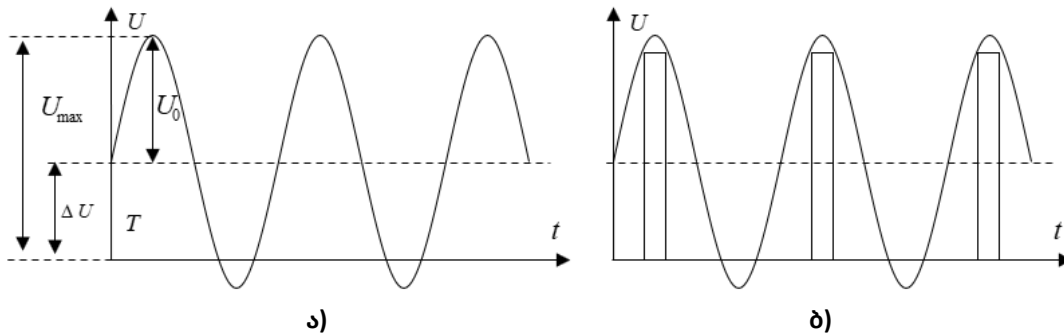
$$U(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \Delta U, \quad (13.1)$$

სადაც, ΔU სიგნალის მუდმივი მახასიათებელია. მოცემული მოდელისათვის $0 \leq \Delta U \leq U_0$ და ვთვლით, რომ დადებითია, თუმცა ზოგად შემთხვევაში ΔU შეიძლება, უარყოფითიც იყოს;

2. სიგნალის პერიოდი T ;
3. პერიოდების რიცხვი n :

$$n = \frac{t_{max}}{T}. \quad (13.2)$$

4. შემოიტანოთ k – მამრავლი, რომელიც გვიჩვენებს სინუსოიდური იმპულსის მაქსიმალური (ამპლიტუდური) მნიშვნელობის რა ნაწილს შეადგენს მართკუთხა იმპულსი;
5. დროითი ინტერვალი $(0, t_{max})$, სადაც t_0 , როგორც წესი, ნულის ტოლად მიიჩნევა, ხოლო t_{max} გამოითვლება სიგნალის პერიოდისა და პერიოდების რიცხვის საშუალებით (13.2) ფორმულიდან.
6. პროგრამის ბიჯი Δt , რომელიც განისაზღვრება დროითი ინტერვალის მოსაზღვრე მონაცემების საფუძველზე და დამოკიდებულია იმ წერტილების რაოდენობაზე, რომლითაც არის დაყოფილი მოცემული დროითი ინტერვალი. აღსანიშნავია, რომ მისი მნიშვნელობა გავლენას ახდენს მოცემული მოდელის გამოყენების საზღვრებზე.



სურ.13.2. ა) სინუსოიდური სიგნალი მუდმივი ΔU მახასიათებელით, ბ) მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა, რომლებიც შექმნილია სინუსოიდური იმპულსების საფუძველზე

სხვადასხვა დროითი შუალედისათვის საჭიროა, გამოთვლილ იქნას სინუსოიდური სიგნალის მეყსეული მნიშვნელობები მუდმივი ΔU მახასიათებლის გათვალისწინებით. იმისათვის, რომ ავსაგოთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა, საჭიროა, სინუსოიდურ იმპულსს დავადოთ პირობა, კერძოდ, თუ სინუსოიდური იმპულსის მეყსეული მნიშვნელობა აღემატება kU_{max} ნამრავლს, მაშინ მისი სიდიდე უნდა გავუტოლოთ თვით ამ ნამრავლს, წინააღმდეგ შემთხვევაში სინუსოიდური იმპულსის მეყსეული მნიშვნელობა ნულის ტოლად უნდა ჩავთვალოთ. ამ პირობის საშუალებით, რომლის დადებაც მარტივად შესაძლებელია ლოგიკური ოპერატორით IF(), მართკუთხა სიგნალი იქნება ჩახაზული სინუსოიდურ იმპულსში სურ.13.2-ზე ნაჩვენები მეთოდით. რაც შეეხება U_{max} -ს, ის შეიძლება განისაზღვროს $U(t)$ მეყსეული მნიშვნელობების საშუალებით, თუ გამოვიყენებთ MS-Excel-ის ფუნქციას MAX(L17:L1016), რომელიც $U(t)$ მეყსეული მნიშვნელობებიდან გამოყოფს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

იმისათვის, რომ დიაგრამაზე გამოტანილ იქნას მოცემული რაოდენობის პერიოდები, საჭიროა, მივუთითოთ გამოთვლის შეწყვეტის კრიტერიუმი. მოცემულ შემთხვევაში ამ კრიტერიუმს შეიძლება წარმოადგენდეს დროითი ინტერვალის ზედა t_{max} დროითი შუალედი.

გახსენით შაბლონი lab13 (სურ.13.3). და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

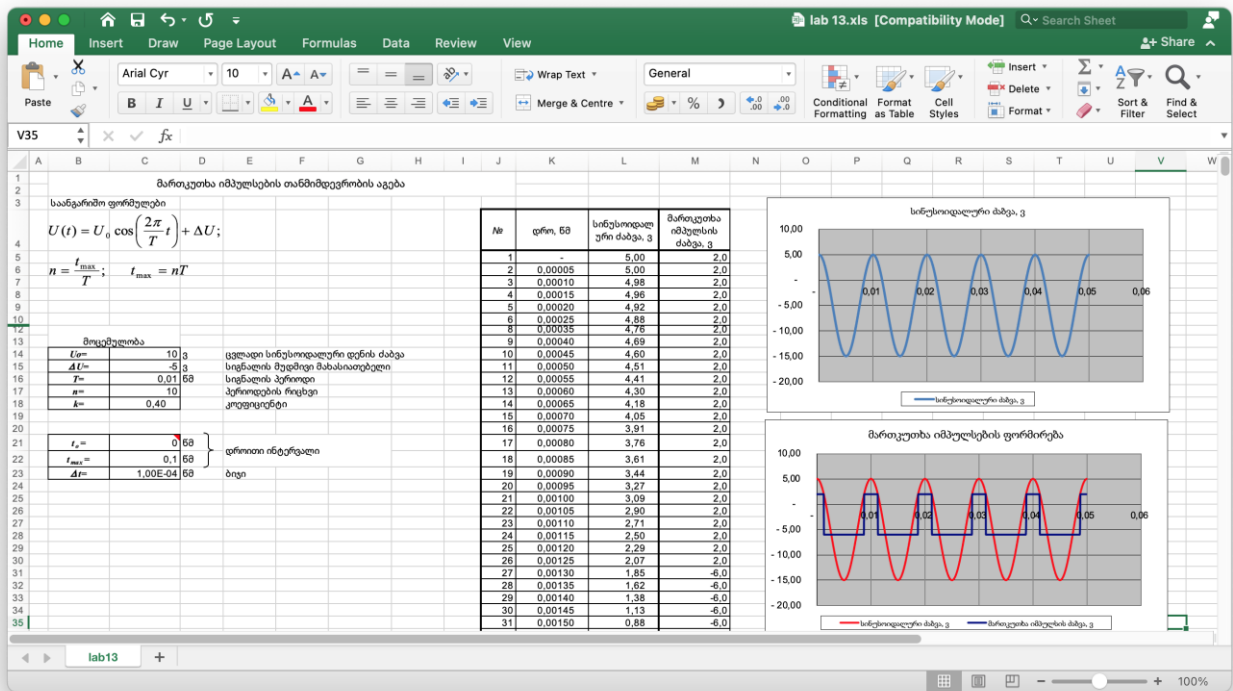
- შეიტანეთ საწყისი მონაცემები,
- განსაზღვრეთ დროის შუალედი,
- პროგრამის ბიჯი და k კოეფიციენტი.
- ცხრილში შეიტანეთ ფორმულები ცხრილში, კერძოდ, K სვეტში $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, L სვეტში ფორმულა (13.1), ხოლო M სვეტში კი კრიტერიუმი:

$$U_{\Pi} = \begin{cases} kU_{max}, & U \geq kU_{max} \\ kU_{min}, & U < kU_{max} \end{cases}$$

კრიტერიუმი ააგეთ ლოგიკური ფუნქციის გამოყენებით, შეიტანეთ ფორმულა:

$$=IF(L13>=C18*MAX(L13:L1012);C18*MAX(L13:L1012);C18*MIN(L13:L1012))$$

- ერთ დიაგრამაზე ააგეთ სინუსოიდური და ფორმირებული მართკუთხა იმპულსის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკები, ცვალებით k პარამეტრი და 0-დან 1-მდე შუალედში და დააკვირდით იმპულსის ფორმას.



სურ.13.3. მართკუთხა იმპულსების ფორმირება. შაბლონი lab13

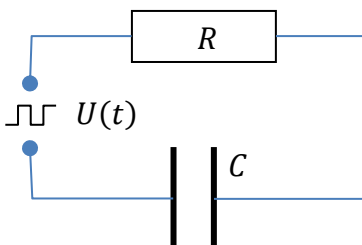
ამოცანები

- 13.1 მოახდინეთ ისეთი მართკუთხა იმპულსების ფორმირება, რომლის მაქსიმუმიცაა kU_{max} , ხოლო მინიმუმი - 0.
- 13.2 მოახდინეთ ისეთი მართკუთხა იმპულსების ფორმირება, რომლის მაქსიმუმიცაა 0, ხოლო მინიმუმი - kU_{min} .
- 13.3 მოახდინეთ ისეთი მართკუთხა იმპულსების ფორმირება, რომლის მაქსიმუმი არის 1, ხოლო მინიმუმი - 0.
- 13.4 მოახდინეთ სამკუთხა იმპულსების ფორმირება ისე, რომ ფორმირებული იმპულსი აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}t, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{T}t, & \frac{T}{2} < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

ლაბორატორიული ამოცანა №14. მართკუთხა იმპულსების გავლა RC წრედში

RC წრედის შესასვლელში მივაწოდოთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა. კონდენსატორი მოცემულ შემთხვევაში პერიოდულად დაიმუხტება და განიმუხტება. წრედში გაივლის დროში ცვალებადი ელექტრული დენი, ეს არის კონდენსატორის დამუხტვისა და განმუხტვის დენი.



სურ.14.1. RC რხევითი კონტური

კონდენსატორის ბოლოებზე დაბვის ვარდნისა და რეზისტორის ბოლოებზე დაბვის ვარდნის ჯამი გვაძლევს მოცემული წრედის შესასვლელზე დაბვის ვარდნას: „

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t), \quad (14.1)$$

(14.1) შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$U(t) = i(t)R + \frac{1}{C}q(t) = q'(t)R + \frac{1}{C}q(t).$$

აქედან შეიძლება გამოვსახოთ მუხტის წარმოებული დროით:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{U(t)}{R} - \frac{q(t)}{RC}. \quad (14.2)$$

(14.2) განტოლების ანალიზური ამოხსნა უადრესად რთულია, რადგან წრედის შესასვლელზე მოდებული დაბვა იცვლება დროში. მაგრამ რადგან საქმე გვაქვს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებასთან, შესაბამისად, მარტივია მისი გადაწყვეტა რიცხვითი მეთოდით, ე.ი. მიახლოებით განტოლებაზე გადასვლით, როგორც ეს ახსნილი იყო lab.5-ის გარჩევისას. დენის ძალა წრედის R აქტიურ წინაღობაზე შეიძლება ნაპოვნი იქნას ომის კანონის საფუძველზე. მოცემულ ამოცანაში საჭიროა, შესწავლილ იქნას მუხტის ცვლილება კონდენსატორის შემონაფენებზე, აგრეთვე - დაბვის ცვლილება დროის მიხედვით კონდენსატორისა და რეზისტორის ბოლოებზე. ამოცანის მოდელის აგება წარმოებს იმავე გზით, როგორც ეს შესრულდა მართკუთხა იმპულსების შემთხვევაში. (14.2) განტოლების ანალიზური ამოხსნა გვაძლევს, რომ დაბვა რეზისტორის ბოლოებზე შემავალი დაბვის წარმოებულის ტოლია (დიფერენცირებადი RC წრედის შემთხვევა), ხოლო დაბვა კონდენსატორის მომჭერებზე კი არის ინტეგრალი შესავალი სიგნალიდან (ინტეგრირებადი RC წრედის შემთხვევა). მაშასადამე, მოცემული წრედი შეიძლება ემსახურებოდეს შემავალი დაბვის, როგორც დიფერენცირებას, ასევე ინტეგრირებას.

ამრიგად, ძირითადი საანგარიშო ფორმულები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$I_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}U_i - \frac{1}{RC}q_i, \quad (14.3)$$

$$q_{i+1} = q_i + \left(I_{i+\frac{1}{2}}\right) \Delta t. \quad (14.4)$$

$$U_{C,i+1} = \frac{1}{C}q_{i+1}, \quad (14.5)$$

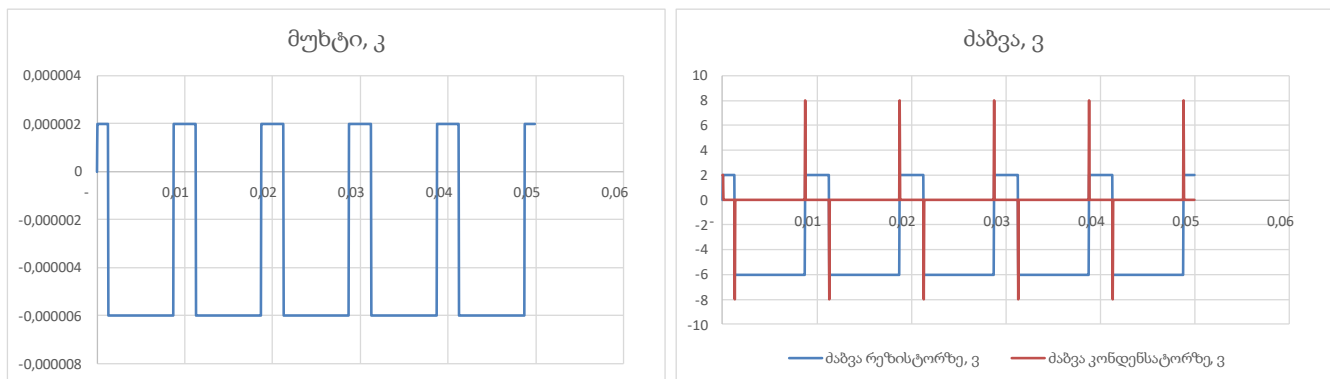
$$U_{R,i+1} = RI_{i+\frac{1}{2}}. \quad (14.6)$$

მოდელირების შესასრულებლად საჭირო პირველადი მონაცემები:

- 1) კონდენსატორის შემონაფენებზე მუხტის საწყისი მნიშვნელობა q_0 (ითვლება, რომ დროის საწყის მომენტში კონდენსატორი მუხტს არ შეიცავდა ე.ი. $q_0 = 0$ კ)
- 2) რეზისტორის R აქტიური წინაღობა და კონდენსატორის C ტევადობა, რომლებიც საწყის მომენტში ისე შეირჩევა, რომ RC – წრედის მუდმივა იყოს იმავე რიგის, რაც იმპულსის ხანგრძლივობა, რომლითაც უშუალოდ გრაფიკულად განისაზღვრება მართკუთხა სიგნალის შემთხვევაში. ეს მუდმივაც ასევე - შეიძლება, ჩათვლილი იქნას პირველად მონაცემად.

გრაფიკული გამოსახულების სიზუსტისთვის უმჯობესია გამოთვლებისას მიცემულ იქნას გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმი. გამოთვლების შეწყვეტის კრიტერიუმს წარმოადგენს დროის მაქსიმუმი t_{max} .

პირველადი მონაცემების საფუძველზე უნდა აიგოს გრაფიკები $q(t)$, $U_C(t)$, $u_R(t)$ (ამასთან, ბოლო ორი მათგანი უნდა აიგოს ერთ გრაფიკზე).



სურ.14.2. მუხტისა და ძაბვების ცვლილება დენის მიხედვით, როცა კონდენსატორს მიეწოდება მართკუთხა იმპულსები

გრაფიკების აგების შემდეგ საჭიროა, განისაზღვროს მოდელის გამოყენების საზღვრები; საჭიროა, დადგინდეს, წრედის პარამეტრების ცვლილება როგორ გავლენას ახდენს გრაფიკის ვიზუალურ ფორმაზე.

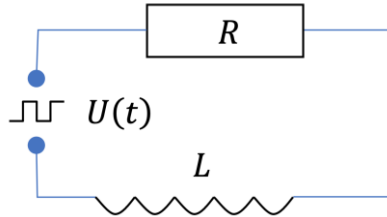
ამოცანები

- 14.1 განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც რამდენიმე ინტეგრირებადი RC წრედი შეერთებულია მიმდევრობით (გამომავალი ძაბვა აიღეთ კონდენსატორის მომჭერებიდან. პირველი მათგანის შესასვლელში მოდებულია მართკუთხა ძაბვა, ხოლო ყოველი მომდევნო RC წრედის შესასვლელში კი მოდებულია წინამდებარე წრედის გამომავალი ძაბვა).
- 14.2 განიხილეთ ანალოგიური შემთხვევა დიფერენცირებადი RC წრედებისათვის (გამომავალი ძაბვა აღებულ უნდა იქნას რეზისტორის ბოლოებიდან).

ლაბორატორიული ამოცანა №15.

მართკუთხა იმპულსების გავლა RL წრედში

განვიხილოთ, თუ როგორ შეიცვლება დენი წრედში, რომელიც შეიცავს L ინდუქციურობის კოჭას და R აქტიურ წინაღობას, როდესაც მის შესასვლელში მოვდებთ მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობას. დროის ყოველ მომენტში შესასვლელში მოდებული დაბვა იქნება დროის ფუნქცია:



სურ.15.1. LC რხევითი კონტური

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t), \quad (15.1)$$

$$U(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}. \quad (15.2)$$

გამოვსახოთ დენის წარმოებული შემდეგი სახით:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{U(t)}{L} - \frac{i(t)R}{L} = \frac{U(t)}{L} - \frac{i(t)}{\tau}. \quad (15.3)$$

როგორც (15.2) დიფერენციალური განტოლების ანალიზური ამონახსნი გვიჩვენებს, დაბვა კოჭას ბოლოებზე პირდაპირპროპორციულია შემავალი დაბვის წარმოებულისა (დიფერენცირებადი RL წრედი), ხოლო დაბვა რეზისტორის ბოლოებზე პროპორციულია ინტეგრალის შემავალი სიგნალიდან (ინტეგრირებადი RL წრედი). ამრიგად, ნახაზზე წარმოდგენილი წრედი შეიძლება ემსახურობდეს შემავალი დაბვის, როგორც ინტეგრირებას, ისე დიფერენცირებას.

(15.2) განტოლება უნდა ამოიხსნას მიახლოებითი მეთოდით, დენის ძალის მიმართ, ე.ი. მკაცრი (15.2) განტოლებიდან უნდა გადავიდეთ მიახლოებით განტოლებაზე ლაბ. 5-ში განხილული მაგალითის მსგავსად. წინაღობაზე დაბვის ვარდნა შეიძლება ნაპოვნი იქნას ომის კანონის საშუალებით, ხოლო ინდუქციურობის კოჭაზე დაბვის ვარდნა წარმოადგენს სხვაობას შემავალ დაბვასა და წინაღობაზე დაბვის ვარდნას შორის.

ამოცანის მიზანია მართკუთხა იმპულსების RL წრედში გავლისას აგებულ იქნას გრაფიკული გამოსახულებები $i(t)$ და $u(t)$ წრედის აქტიურ წინაღობასა და ინდუქციურობის კოჭაზე. ამიტომ, პირველადი მონაცემების გარდა, მოცემულ მოდელში საჭიროა, დამატებით გათვალისწინებულ იქნას:

- 1) აქტიური წინაღობა R ;
- 2) ინდუქციურობა L ;
- 3) დროითი მუდმივა $\tau = L/R$, მისი საწყისი მნიშვნელობა მოსახერხებელია შეირჩეს ისე, რომ ის ნაკლები იყოს მართკუთხა იმპულსის ხანგრძლივობაზე. მართკუთხა იმპულსის ხანგრძლივობის განსაზღვრა კი უშუალოდ გრაფიკულად ხორციელდება.
- 4) დენის ძალის საწყისი მნიშვნელობა $i_0 = 0$.

გამოთვლის შედეგების მიხედვით უნდა აიგოს გრაფიკები $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$, (ამასთან, ბოლო ორი მათგანი სასურველია, აიგოს ერთ გრაფიკზე).

მოდელის აგების შემდეგ საჭიროა, დადგინდეს მისი გამოყენების საზღვრები; დადგინდეს გრაფიკების ფორმაზე წრედის პარამეტრების გავლენა.

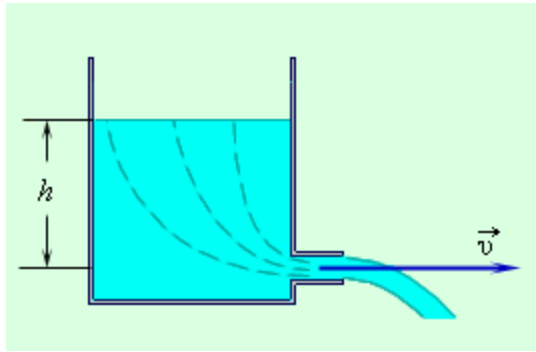
ამოცანები

- 15.1 განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც რამდენიმე ინტეგრირებადი RL წრედი (გამომავალი დაბვა აიღება რეზისტორიდან), შეერთებულია მიმდევრობით (პირველი მათგანის შესავალზე მოდებულია მარტკუთხა ფორმის იმპულსური სიგნალი, ხოლო ყოველ მომდევნოზე - პირველის გამომავალი დაბვა). გრაფიკები წარმოდგენილ უნდა იქნას ერთ დიაგრამაზე.
- 15.2 განვიხილოთ ანალოგური შემთხვევა დიფერენცირებადი RL წრედისათვის. მოცემულ შემთხვევაში გამომავალი დაბვა აითვლება ინდუქციურობის კოჭიდან.

ლაბორატორიული ამოცანა №16.

სითხის დინება ჭურჭლიდან

განვიხილოთ მართკუთხა ფორმის ჭურჭელი სითხით. სითხის საწყისი სიმაღლე აღვნიშნოთ – h_0 -ით. სითხის ფსკერზე აქვს S_0 ფართობის ხვრელი, რომლიდანაც სითხე გამოედინება ხახუნის გარეშე. ჭურჭლის ფსკერის ფართობია – S . სითხის გამოდინების სიჩქარე შეიძლება განვსაზღვროთ მექანიკური ენერჯის შენახვის კანონის გამოყენებით. ცხადია, იგი დამოკიდებული იქნება სითხის სიმაღლეზე და შესაბამისად, შეიცვლება დროის მიხედვით.



სურ.16. სითხის დინება ჭურჭლიდან

დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში ჭურჭელში სითხის სიმაღლე შეიცვლება:

$$dh = -\frac{dV}{S} = -\frac{S_0 \cdot v \cdot dt}{S}, \quad (16.1).$$

სადაც dV დროის dt შუალედში ხვრელიდან გამოდენილი სითხის მოცულობაა, ნიშანი „-“ აიხსნება იმით, რომ სითხის სიმაღლე ჭურჭელში მცირდება. დროის dt შუალედი უნდა იყოს იმდენად მცირე, რომ სითხის გამოდენის სიჩქარე შეიძლება, ჩაითვალოს თანაბრად.

თუ გადავალთ სასრულ ინტერვალებზე ($\Delta h, \Delta t$) შესაბამისად, მიახლოებულ ტოლობას, შესაძლებელია, განისაზღვროს სითხის სვეტის სიმაღლე დროის სხვადასხვა $t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}$ მომენტებისათვის.

(16.1) ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$h_{i+1} = h_i - \frac{S_0}{S} v_{i+\frac{1}{2}}(t_i + \Delta t). \quad (16.2)$$

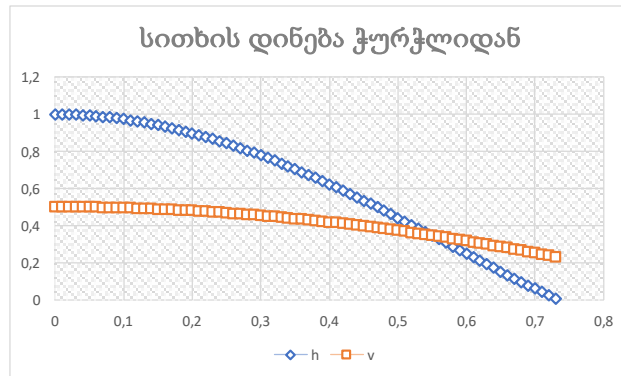
$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} - a_i(t_i + \Delta t). \quad (16.3)$$

საწყისი მონაცემები:

- 1) ჭურჭელში სითხის სვეტის საწყისი სიმაღლე h_0, m ;
- 2) ჭურჭლის ფუძის ფართობი S, m^2 ;
- 3) ხვრელის ფართობი S_0, m^2 ;
- 4) დროის ინტერვალი (დროის საწყისი და საბოლოო მომენტები);
- 5) პროგრამის ბიჯი $\Delta t, წმ$, გათვლილი 100–200 წერტილისათვის;
ამასთან, საწყისი მონაცემთა ცხრილში შეიძლება, განისაზღვროს სითხის გამოდინების საწყისი სიჩქარე.

ამოცანის მიზანია – სითხის სვეტის სიმაღლის დროზე დამოკიდებულების დიაგრამის აგება. $\Delta t, v$ და h სიდიდეების გამოსათვლელად გამოიყენეთ ფუნქცია $if()$ იმისათვის, რომ გამოთვლები შეჩერდეს მას

შემდეგ, რაც ჭურჭლიდან მთელი სითხე გამოედინება (გამოთვლის შეწყვეტის კრიტერიუმი $h_i \leq 0, v_{i+\frac{1}{2}} > 0$).



სურ.16.1. სითხის სვეტის სიმაღლისა და დინების სიჩქარისა დამოკიდებულება დროზე

კითხვები თვითშეფასებისათვის

- 16.1 მოდელის შექმნის შემდეგ განსაზღვრეთ მისი გამოყენების საზღვრები.
- 16.2 როგორ აისახება გრაფიკზე შემთხვევა, როცა ხვრელის ფართობი აღემატება ჭურჭლის ფსკერის ფართობს?
- 16.3 როგორ გავითვალისწინოთ ფორმულაში ასეთი თანაფარდობის დაუშვებლობა?

ლაბორატორიული ამოცანა №17.

ფიზიკური ქანქარა

ფიზიკური ქანქარა წარმოადგენს m მასის მყარ სხეულს, რომელიც რხევებს ასრულებს რომელიმე უძრავი წერტილის ირგვლივ. ეს უძრავი წერტილი ფიზიკური საქანის ინერციის ცენტრს წარმოადგენს. წონასწორობის მდგომარეობაში ინერციის ცენტრი დაკიდების წერტილის ქვემოთ მდებარეობს. ვთქვათ, ფიზიკური ქანქარას სიგრძეა L და წარმოადგენს h სიმაღლისა და R ფუძის რადიუსის ერთგვაროვან ცილინდრს.

ქანქარა გადავხაროთ θ კუთხით ვერტიკალიდან და გამოვიყვანოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან, მაშინ მასზე წარმოიქმნება მახრუნებელი მომენტი, რომელიც ცდილობს, დაუბრუნოს ქანქარას წონასწორობის მდგომარეობა:

$$M_0 = -mgl \cdot \sin\theta,$$

სადაც l - მანძილია დაკიდების წერტილიდან ქანქარას ინერციის ცენტრამდე. ჩვენს შემთხვევაში, რადგან ქანქარა წარმოადგენს ერთგვაროვან ცილინდრს, ამიტომ:

$$l = L + \frac{H}{2}.$$

ქანქარას ინერციის მომენტი წონასწორობის მდგომარეობაში აღვნიშნოთ J_0 -ით, მაშინ მოცემული ფიზიკური ქანქარას ბრუნვითი მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება ტოლობით:

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin\theta = -mg \left(L + \frac{H}{2} \right) \sin\theta. \quad (17.1)$$

მცირე გადახრებისას $\sin\theta \approx \theta$, მაშინ (17.1) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{mg}{J_0} \left(L + \frac{H}{2} \right) \theta. \quad (17.2)$$

შტეინერის თეორემის თანახმად, ქანქარას ინერციის მომენტი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$J_0 = J_{\text{სხ}} + ml^2 = J_{\text{სხ}} + m \left(L + \frac{H}{2} \right)^2. \quad (17.3)$$

$J_{\text{სხ}}$ - სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ, რომელიც ინერციის ცენტრზე გადის. ჩვენს შემთხვევაში ამ სხეულს ცილინდრი წარმოადგენს, რომლის ინერციის მომენტი, როგორც ცნობილია, გამოითვლება ფორმულით:

$$J_{\text{სხ}} = \frac{1}{12} mH^2 + \frac{1}{4} mR^2. \quad (17.4)$$

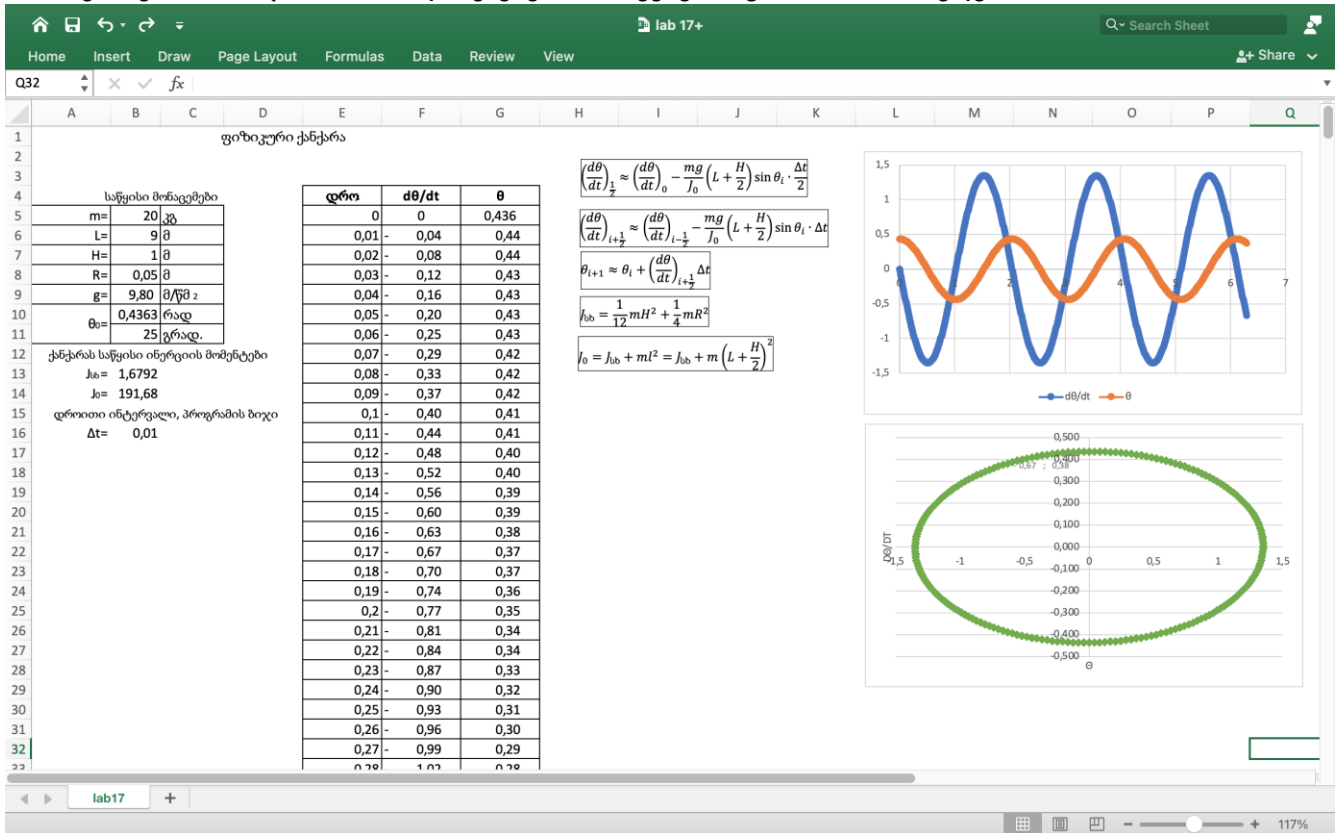
ფიზიკური საქანის მოდელირება მიზნად ისახავს ბრუნვის θ კუთხის დროში ცვლილების შესწავლას, ამისათვის (17.1) განტოლება უნდა ამოვხსნათ ნახევარინტერვალთა მეთოდით. მოდელირებისათვის საჭირო ანალიზური ფორმულები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 - \frac{mg}{J_0} \left(L + \frac{H}{2} \right) \sin\theta_0 \cdot \frac{\Delta t}{2}, \quad (17.5)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{i+\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{mg}{J_0} \left(L + \frac{H}{2} \right) \sin\theta_i \cdot \Delta t, \quad (17.6)$$

$$\theta_{i+1} \approx \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t. \quad (17.7)$$

გახსენით შაბლონი lab17 და შეავსეთ მონაცემები სურ.17.1 -ის მიხედვით.



სურ.17.1. ფიზიკური ქანქარას რხვის მოდელირება. შაბლონი lab17

ამოცანები

17.1 გახსენით შაბლონი lab17 და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- განსაზღვრეთ ამოცანის სამართლიანობის კრიტერიუმები. ცვალებით ქანქარას პარამეტრები და პროგრამის ბიჯი, განსაზღვრეთ, რა შემთხვევაში აღარ არის სამართლიანი მოდელი?
- გამოიყენეთ ლოგიკური ფუნქციები და შეაჩერეთ გამოთვლები იმ შემთხვევაში, როცა ცილინდრის სიმაღლე აღემატება ან ტოლია ქანქარას სიგრძის და როცა პროგრამის ბიჯი აღემატება 0.5-ს.
- შეასრულეთ მოდელირება, როცა დროის საწყის მომენტში კუთხური სიჩქარე ნულისაგან განსხვავებულია. განიხილეთ შემთხვევები, როცა $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 5, 10, 15$.

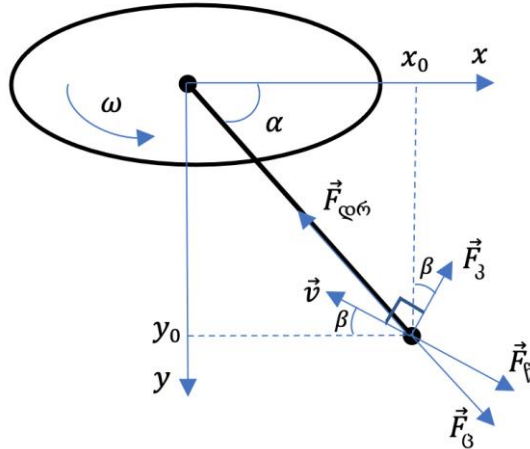
17.2 განიხილეთ რხვითი პროცესი, როცა ფიზიკური ქანქარა წარმოადგენს: 1) L სიგრძისა და m მასის ერთგვაროვან ღეროს, 2) თოკზე დაკიდებულ m მასისა და R რადიუსის ერთგვაროვან სფეროს.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ L სიგრძისა და m მასის ერთგვაროვანი ღეროს ინერციის მომენტი გამოითვლება ფორმულით: $J_{\text{ს}} = \frac{1}{12} m L^2$, სფეროს ინერციის მომენტი კი გამოითვლება ფორმულით: $J_{\text{ს}} = \frac{1}{2} m R^2$.

ლაბორატორიული ამოცანა №18.

ფუკოს ქანქარა

ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავ დისკზე დამონტაჟებულია ფუკოს ქანქარა. ფუკოს ქანქარა შედგება გრძელ თოკზე დაკიდებული ბირთვისაგან. ქანქარა ირხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში. განსაზღვრეთ ფუკოს ქანქარაზე დაკიდებული ბირთვის მოძრაობის ტრაექტორია დისკთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში.



სურ.18.1. ფუკოს ქანქარა მბრუნავ დისკოზე

თუ მათემატიკური ქანქარა მცირე რხევებს ასრულებს, მაშინ წონასწორობის მდებარეობისაკენ მბრუნებელი ძალა პროპორციულია დისკის O ცენტრიდან გადახრის სიდიდისა. წონასწორობისაკენ მბრუნებელი ძალა შეიძლება, კვაზიდრეკად ძალად ჩავთვალოთ:

$$\vec{F}_{\text{დრ}} = -k\vec{r}. \quad (18.1)$$

მბრუნავი არაინერციული სისტემის - დისკოს მხრიდან, მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს ცენტრიდანული ძალა და კორიოლისის ძალა:

$$\vec{F}_{\text{ც}} = \omega^2 \vec{r}, \quad (18.2)$$

$$\vec{F}_{\text{წ}} = 2m [\vec{v}, \vec{\omega}], \quad (18.3)$$

ჩავთვალოთ, რომ ჰაერი ირხევა დისკოსთან ერთად იმავე ω კუთხური სიჩქარით. მერხევ ქანქარაზე მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა იქნება:

$$\vec{F}_{\text{წ}} = -b\vec{v}. \quad (18.4)$$

სადაც, b - წინააღმდეგობის კოეფიციენტი. ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, შეიძლება, ვიპოვოთ ქანქარას ფარდობითი აჩქარება და სიჩქარე, დროის რომელიმე t მომენტში.

$$\vec{a}_i = \frac{1}{m} (\vec{F}_{\text{დრ},i} + \vec{F}_{\text{ც},i} + \vec{F}_{\text{წ},i} + \vec{F}_{\text{გ},i}), \quad (18.5)$$

$$\vec{v}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{v}_{i-\frac{1}{2}} + \vec{a}_i \cdot \Delta t, \quad (18.6)$$

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \vec{v}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t, \quad (18.7)$$

სადაც

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$v_x = v \cos \beta, \quad v_y = -v \sin \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \beta = -\frac{v_y}{v}.$$

$$v_x = v_{0x} + \omega r \cdot \sin \alpha = v_{0x} + \omega y$$

$$v_y = v_{0y} - \omega r \cdot \cos \alpha = v_{0y} + \omega x$$

ვიპოვოთ ძალების მდგენელები (17.1) – (17.4) ფორმულებიდან:

$$F_{\text{გრ},x} = -kx, \quad F_{\text{გრ},y} = -ky,$$

$$F_{\text{ც},x} = \omega^2 x, \quad F_{\text{ც},y} = \omega^2 y$$

$$F_{\text{ვ},x} = -2m v \omega \cdot \sin \beta = 2m v \omega \frac{v_y}{v} = 2m \omega (v_{0y} + \omega x),$$

$$F_{\text{ვ},y} = -2m v \omega \cdot \cos \beta = -2m v \omega \frac{v_x}{v} = -2m \omega v_x = -2m \omega (v_{0x} + \omega y)$$

$$F_{\text{ფ},x} = -b v_{0x}, \quad F_{\text{ფ},y} = -b v_{0y}$$

(18.5) ჩავწეროთ კოორდინატებში:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} (-kx + \omega^2 x + 2m \omega (v_{0y} + \omega x) - b v_{0x})$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{m} (-ky + \omega^2 y - 2m \omega (v_{0x} + \omega y) - b v_{0y})$$

$$(v_x)_{i+\frac{1}{2}} = (v_x)_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{m} \left(-kx_i + \omega^2 x_i + 2m \omega \left((v_y)_{i-\frac{1}{2}} + \omega x_i \right) - b(v_x)_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta t$$

მიღებული გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგი სახით

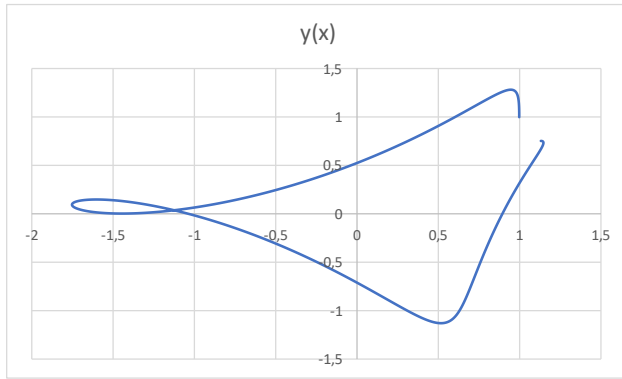
$$(v_x)_{i+\frac{1}{2}} = (v_x)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{-k + \omega^2 + 2m \omega^2}{m} x_i - \frac{b}{m} (v_x)_{i-\frac{1}{2}} + 2 \omega (v_y)_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta t, \quad (18.8)$$

$$(v_y)_{i+\frac{1}{2}} = (v_y)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{-k + \omega^2 - 2m \omega^2}{m} y_i - 2 \omega (v_x)_{i-\frac{1}{2}} - \frac{b}{m} (v_y)_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta t. \quad (18.9)$$

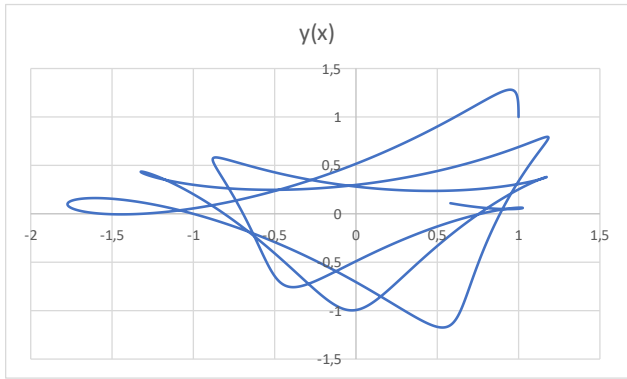
(18.7) ჩავწეროთ კოორდინატებში:

$$x_{i+1} = x_i + (v_x)_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t, \quad (18.10)$$

$$y_{i+1} = y_i + (v_y)_{i+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t. \quad (18.11)$$



ა)



ბ)

სურ.18.2. ფუკოს ქანქარას ტრაექტორია, როცა: $m = 0.2$, $\omega = 2$, $k = 10$, $b = 0.08$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 1$. ა) $\Delta t = 0.001$, ბ) $\Delta t = 0.003$

გახსენით შაბლონი lab18 (სურ.18.3) და შეასრულეთ შემდეგი დავალებები:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data tables:

| k | ω | m | b | Δt | v_{x0} | v_{y0} |
|----|----------|-----|------|------------|----------|----------|
| 10 | 2 | 0.2 | 0.08 | 0.001 | 1 | 1 |

| t | v_x | v_y | x | y |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1.001 |
| 0.001 | -0.018 | 0.961562 | 0.999982 | 1.001962 |
| 0.002 | -0.03615 | 0.923175 | 0.999946 | 1.002885 |
| 0.003 | -0.05444 | 0.884841 | 0.999891 | 1.003777 |
| 0.004 | -0.07287 | 0.846561 | 0.999819 | 1.004616 |
| 0.005 | -0.09145 | 0.808339 | 0.999727 | 1.005424 |
| 0.006 | -0.11018 | 0.770175 | 0.999617 | 1.006195 |
| 0.007 | -0.12905 | 0.732072 | 0.999488 | 1.006927 |
| 0.008 | -0.14805 | 0.694032 | 0.99934 | 1.007621 |
| 0.009 | -0.1672 | 0.656057 | 0.999173 | 1.008277 |
| 0.01 | -0.1865 | 0.618149 | 0.998986 | 1.008895 |
| 0.011 | -0.20593 | 0.58031 | 0.99878 | 1.009475 |
| 0.012 | -0.2255 | 0.542541 | 0.998555 | 1.010018 |
| 0.013 | -0.2452 | 0.504846 | 0.998309 | 1.010523 |
| 0.014 | -0.26505 | 0.467225 | 0.998044 | 1.011099 |
| 0.015 | -0.28503 | 0.42968 | 0.997759 | 1.01142 |
| 0.016 | -0.30515 | 0.392215 | 0.997454 | 1.011812 |
| 0.017 | -0.3254 | 0.35483 | 0.997129 | 1.012167 |
| 0.018 | -0.34579 | 0.317527 | 0.996783 | 1.012484 |
| 0.019 | -0.36631 | 0.280309 | 0.996417 | 1.012764 |
| 0.02 | -0.38696 | 0.243177 | 0.99603 | 1.013008 |
| 0.021 | -0.40775 | 0.206133 | 0.995622 | 1.013214 |
| 0.022 | -0.42866 | 0.169179 | 0.995193 | 1.013383 |
| 0.023 | -0.44971 | 0.132318 | 0.994744 | 1.013515 |
| 0.024 | -0.47089 | 0.09555 | 0.994273 | 1.013611 |
| 0.025 | -0.49219 | 0.058878 | 0.993781 | 1.01367 |
| 0.026 | -0.51362 | 0.022304 | 0.993267 | 1.013692 |
| 0.027 | -0.53518 | -0.01417 | 0.992732 | 1.013678 |
| 0.028 | -0.55686 | -0.05054 | 0.992175 | 1.013627 |
| 0.029 | -0.57867 | -0.08681 | 0.991596 | 1.01354 |
| 0.03 | -0.6006 | -0.12298 | 0.990996 | 1.013417 |
| 0.031 | -0.62265 | -0.15904 | 0.990373 | 1.013258 |
| 0.032 | -0.64483 | -0.19499 | 0.989728 | 1.013063 |

სურ.18.3. ფუკოს ქანქარა. შაბლონი lab18

- ცვალეთ წინააღმდეგობის კოეფიციენტი და გაანალიზეთ, რა მოსდის ფუკოს ქანქარას ტრაექტორიას წინააღმდეგობის კოეფიციენტის ზრდით ან შემცირებით?
- როგორი იქნება ფუკოს ქანქარას ტრაექტორია, თუ $v_{0x} = 5$, $v_{0y} = 8$?
- როგორ შეიცვლება სიჩარე და ტრაექტორია, თუ ქანქარაზე დაკიდებული ტვირთის მასას გავზრდით 10-ჯერ?
- როგორი იქნება ტრაექტორია თუ $k = 6, 7, 8$?

ლაბორატორიული ამოცანა №19. სხეულის მოძრაობა ცენტრალურ ძალთა ველში

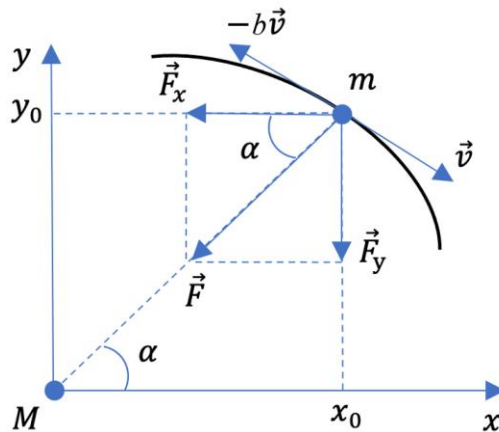
ლაბორატორიული ამოცანის მიზანია ცენტრალურ ძალთა ველში სხეულთა მოძრაობის კანონების შესწავლა. ცენტრალური ძალა ეწოდება ძალას, რომლის მოქმედების ძალწირიც დროის ყოველ მომენტში გადის განსაზღვრულ წერტილზე, რომელსაც ძალური ველის ცენტრი ეწოდება. ცენტრალურ ველში მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა დამოკიდებულია მხოლოდ ცენტრიდან \vec{r} - რადიუს ვექტორის სიდიდეზე. პოტენციური ენერგია, ასევე, დამოკიდებულია მასზე.

ცენტრალური ველის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს გრავიტაციული ძალა და კულონის ძალა. განვიხილოთ ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა დედამიწის ირგვლივ. ხელოვნური თანამგზავრი შეიძლება კონკრეტულ პირობებში მივიჩნიოთ მატერიალურ წერტილად და ჩავწეროთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება ფორმულით:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (19.1)$$

სადაც M პლანეტის მასაა, m - კომეტის მასაა, \vec{r} - რადიუს ვექტორია, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ ნ კგ²/კვ² - გრავიტაციული მუდმივაა.

პლანეტა (ან კომეტა) მოძრაობს დედამიწის გრავიტაციულ ველში. ვიპოვოთ კომეტის მოძრაობის ტრაექტორია, მისი კოორდინატები და სიჩქარის გეგმილება. ვცვალოთ მასები, საწყისი კოორდინატები (x_0, y_0) და საწყისი სიჩქარეები (v_{x0}, v_{y0}) .



სურ.19.1. სხეულის მოძრაობა ცენტრალურ ძალთა ველში

ნახაზის მიხედვით მიზიდულობის ძალა შეიძლება, წარმოვადგინოთ მდგენელების სახით:

$$F_x = -F \cos \alpha = -F \frac{x}{r} = -F \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (19.2)$$

$$F_y = -F \sin \alpha = -F \frac{y}{r} = -F \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (19.3)$$

დინამიკის ძირითადი კანონების საფუძველზე ვპოულობთ აჩქარების, სიჩქარის და კოორდინატის გეგმილებს:

$$ma_x = F_x = -F \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$ma_y = F_y = -F \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$a_x = -GM \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (19.4)$$

$$a_y = -GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (19.5)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \Delta t, \quad (19.6)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y \Delta t, \quad (19.7)$$

$$x = x_0 + v_x \Delta t, \quad (19.8)$$

$$y = y_0 + v_y \Delta t. \quad (19.9)$$

მოდრაობის ტრაექტორიას სხვადასხვა საწყისი სიჩქარეებისათვის სურ.19.2-ზე წარმოდგენილი სახე აქვს.

გამოთვლებისას ვისარგებლოთ ქვემოთ მოცემული ფორმულებით:

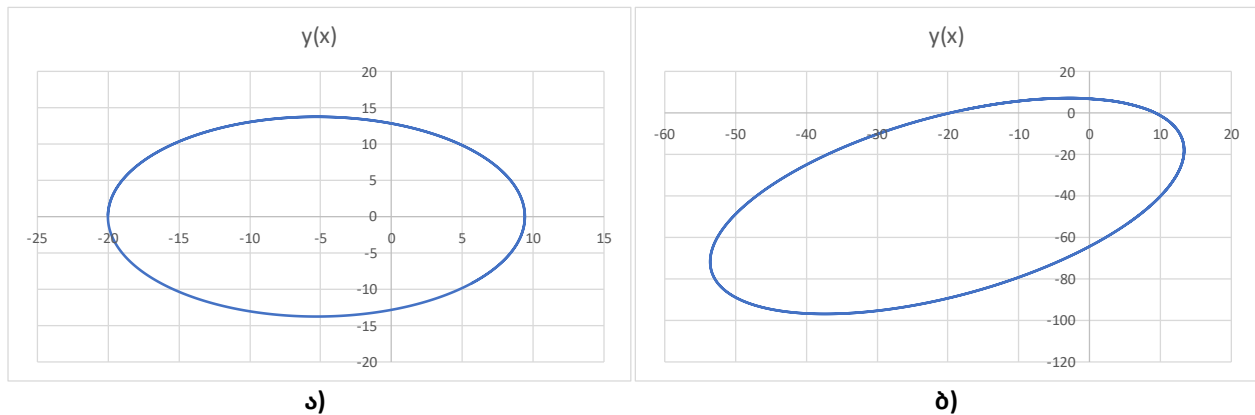
$$(v_x)_{i+\frac{1}{2}} = (v_x)_{i-\frac{1}{2}} - \left(GM \frac{x_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Delta t, \quad (19.10)$$

$$(v_y)_{i+\frac{1}{2}} = (v_y)_{i-\frac{1}{2}} - \left(GM \frac{y_i}{(x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Delta t, \quad (19.11)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i+\frac{1}{2}} \Delta t, \quad (19.12)$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i+\frac{1}{2}} \Delta t. \quad (19.13)$$

ჩავთვალოთ, რომ პლანეტა განთავსებულია საკოორდინატო სათავეში, ხოლო კომეტა მოძრაობს მის ირგვლივ. პლანეტის მოძრაობის ტრაექტორია ნაჩვენებია სურ.19.2-ზე.



სურ.19.2. პლანეტის მზის ირგვლის მოძრაობის ტრაექტორია $x_0 = -20, y_0 = 0, v_x = 8, \Delta t = 0.005, GMm = 2000, m = 1$. ა) $v_x = 0$, ბ) $v_x = 10$

ცენტრალურ ძალთა ველში მოძრაობა ყოველთვის ხდება რომელიმე ფიქსირებულ სიბრტყეში. შესაბამისად, კონკრეტულ მოცემულ პირობებში (19.1) განტოლება აღწერს მრუდს, რომელიც პოლარულ კოორდინატთა (r, φ) სისტემაში ჩაიწერება განტოლებით:

$$r = \frac{P}{1 - \eta \cos \varphi}, \quad (19.14)$$

სადაც:

$$P = \frac{v^2 r^2}{GM}, \quad (19.15)$$

ორბიტის პარამეტრია, ხოლო:

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2E_0 v^2 r^2}{mG^2 M^2}}, \quad (19.16)$$

ექსცენტრისიტეტი,

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r}. \quad (19.17)$$

სისტემის სრული მექანიკური ენერჯია.

(19.14) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის მრუდის განტოლებას პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ასეთი ფუნქცია აღწერს:

- ჰიპერბოლას, როცა $\eta > 1$ ანუ $E_0 > 0$.
- პარაბოლას, როცა $\eta = 1$, $E_0 = 0$,
- ელიფს, როცა $\eta < 1$, $-\frac{mG^2 M^2}{2v^2 r^2} < E_0 < 0$
- წრეს, როცა $\eta = 0$, $E_0 = -\frac{mG^2 M^2}{2v^2 r^2}$

საწყის მონაცემებს წარმოადგენს:

- ლედამისიწ მასა: $M = 6.4 \cdot 10^{24}$ კგ,
- თანამგზავრის მასა: $m = 5000$ კგ,
- ორბიტის რადიუსი: $r_0 = 7000$ კმ,
- გრავიტაციული მუდმივა: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ ნ კგ²/კ².

გამოსათვლელ სიდიდეებს წარმოადგენს თანამგზავრის v_1 სიჩქარე, რომელიც შეესაბამება წრიულ ორბიტაზე მოძრაობას და თანამგზავრის v_2 სიჩქარე, რომელიც შეესაბამება პარაბოლურ ორბიტაზე მოძრაობას. v_1 - სიჩქარის გამოსათვლელად (19.17)-ის მარცხენა მხარეს ენერჯიის ნაცვლად ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა $\eta = 0$ -სათვის, $E_0 = -\frac{mG^2 M^2}{2v^2 r^2}$, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r_0}}, \quad (19.18)$$

პარაბოლურ ორბიტაზე მოძრაობის სიჩქარის გამოსათვლელად (19.17)-ში ვითვალისწინებთ, რომ $E_0 = 0$, მივიღებთ:

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{r_0}} = \sqrt{2} v_1. \quad (19.19)$$

მამასადამე, თუ თანამგზავრის საწყისი სიჩქარე მოთავსებულია შუალედში $v_1 < v_0 < v_2$, მაშინ ის მოძრაობს ელიფსზე. ამიტომ, თანამგზავრის ელიფსზე მოძრაობის კრიტერიუმს წარმოადგენს საწყისი სიჩქარისადმი დადებული პირობა.

გამოვთვალოთ ორბიტის პარამეტრი - P , სისტემის საწყისი ენერჯია E_0 და ექსცენტრისიტეტი η .

ავაგოთ $r(\varphi)$ დამოკიდებულება იმ პირობით, რომ როცა $\varphi > 2\pi$ გამოთვლები შეწყდეს. (19.14) საანგარიშო ფორმულა გამოთვლების თანმიმდევრობის გათვალისწინებით ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$r_{i+1} = \frac{P_i}{1 - \eta_i \cos \varphi_{i+1}}. \quad (19.20)$$

ამოცანები

19.1 შეასრულეთ მოდელირება სისტემისათვის „დედამიწა - მზე“: დედამიწის მასა $m = 6.4 \cdot 10^{24}$ კგ, $M = 2 \cdot 10^{30}$ კგ, $r_0 = 149\,000\,000$ კმ.

19.2 შეამოწმეთ კეპლერის კანონების სამართლიანობა.

მითითება: კეპლერის I კანონი. ყველა პლანეტა მოძრაობს ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში განთავსებულია მზე. სხვადასხვა საწყისი სიჩქარით მოძრავი თანამგზავრის ტრაექტორია ყოველთვის არის ელიფსი. ელიფს ორი ფოკუსი აქვს. თანამგზავრის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში განისაზღვრება r_1 და r_2 მანძილებით ფოკუსებიდან. დარწმუნდით, რომ ამ მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა ტრაექტორიის ნებისმიერი წერტილისათვის. ე.ი.:

$$r_1 + r_2 = const.$$

კეპლერის II კანონი. რადიუს-ვექტორი, რომელიც პლანეტას აერთებს მზესთან, დროის ტოლ შუალედებში შემოწერს ერთნაირ ფართობს:

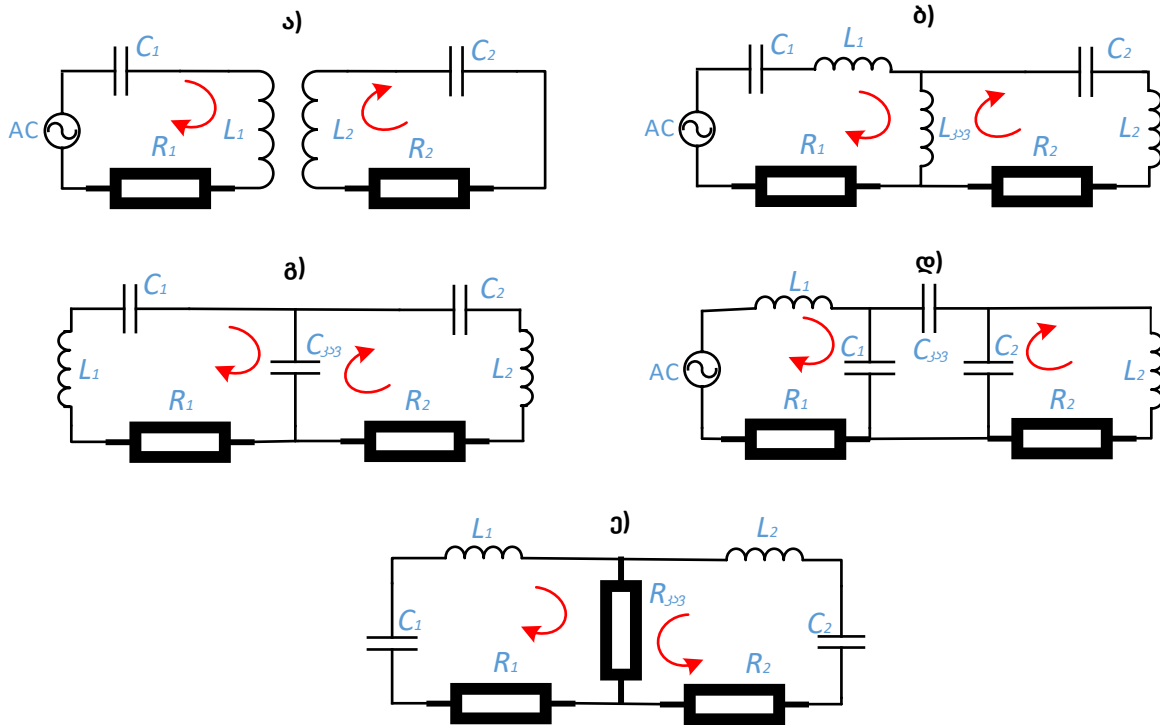
$$\frac{dS}{dt} = \frac{vr}{2}.$$

კეპლერის III კანონი. პლანეტების მზის ირგვლივ მიმოქცევის პერიოდების კვადრატები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი ელიფსური ტრაექტორიების დიდი ნახვავრღერძების კუბები:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{A_1^3}{A_2^3}.$$

ლაბორატორიული ამოცანა №20.
შეკავშირებულ კონტურთა სისტემის მოდელირება

შეკავშირებული ეწოდება ორ ან მეტ კონტურთა სისტემას, რომლებიც ისეა ჩართული, რომ ერთ კონტურში წარმოქმნილი ელექტრომაგნიტური რხევები გადაეცეს მეორე კონტურს და მამასადამე, ადგილი ჰქონდეს კონტურებს შორის ენერგიის ურთიერთცვლას.



სურ.20.1. შეკავშირებულ კონტურთა სახეები. ა) ტრანსფორმატორული კავშირი; ბ) ავტოტრანსფორმატორული კავშირი; გ) შიგა ტევადური კავშირი; დ) გარე ტევადური კავშირი; ე) ინდუქციურ - ტევადური (რეზისტორული) კავშირი

ორკონტურიან შეკავშირებულ კონტურთა სისტემაში პირველადი კონტური იკვებება უშუალოდ ემძ წყაროდან, მეორე კი ენერგიას იღებს პირველადი კონტურიდან. პირველადი და მეორე კონტურების საერთო ელემენტს **კავშირის წინაღობას** უწოდებენ. ამ წინაღობის გვარობის მიხედვით განარჩევენ კავშირის შემდეგ სქემებს:

- **საერთო მაგნიტური ველით** - ინდუქციური კავშირი (ტრანსფორმატორული ან ავტოტრანსფორმატორული, სურ.20.1 ა, ბ);
- **საერთო ელექტრული ველით** - შიგა ტევადური (უბრალოდ ტევადური, სურ.20.1 გ) ან გარე ტევადური კავშირი (რთული ტევადური, სურ.20.1 დ);
- **საერთო აქტიური წინაღობით** - ინდუქციურ-ტევადური კავშირი (სურ.20. ე).

განვიხილოთ სურ.20.1 გ)-ზე წარმოდგენილი შეკავშირებული რხევითი კონტური. დავყოთ იგი ორ ნაწილად და დავწეროთ თითოეული მათგანისათვის კირხოფის განტოლება კონტურებში მითითებული ღენების მიმართულების გათვალისწინებით:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C_{33}} q_3 = 0, \tag{20.1}$$

$$L_2 \frac{dl_2}{dt} + I_2 R_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C_{333}} q_3 = 0. \quad (20.2)$$

სადაც

$$I_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad I_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad (20.3)$$

მუხტის შენახვის კანონის თანახმად,

$$q_3 = q_1 - q_2. \quad (20.4)$$

(20.4) და (20.3) გავითვალისწინოთ (20.1)-სა და (20.2)-ში:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\frac{R_1}{L_1} \frac{dq_1}{dt} - \frac{1}{L_1 C_1} q_1 - \frac{q_1 - q_2}{L_1 C_{333}}, \quad (20.5)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -\frac{R_2}{L_2} \frac{dq_2}{dt} - \frac{1}{L_2 C_2} q_2 + \frac{q_1 - q_2}{L_2 C_{333}}. \quad (20.6)$$

გავამარტივოთ სიტუაცია, ჩავთვალოთ, რომ ყველა ინდუქციურობა, ტევადობა და წინაღობა ერთმანეთის ტოლია:

$$R_1 = R_2 = R, \quad L_1 = L_2 = L, \quad C_1 = C_2 = C,$$

და დავწეროთ ახალი განტოლებები. ამისათვის ჯერ შევკრიბოთ, ხოლო შემდეგ გამოვაკლოთ (20.5) და (20.6) განტოლებები:

$$\frac{d^2(q_1 + q_2)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{d(q_1 + q_2)}{dt} - \frac{1}{LC} (q_1 + q_2), \quad (20.7)$$

$$\frac{d^2(q_1 - q_2)}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{d(q_1 - q_2)}{dt} - \left(\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_{333}} \right) (q_1 - q_2). \quad (20.8)$$

ამრიგად, მივიღეთ ორი დამოუკიდებელი რხევის განტოლება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$q' = q_1 + q_2, \quad q'' = q_1 - q_2. \quad (20.9)$$

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_{333}}}. \quad (20.10)$$

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (20.11)$$

(20.7) და (20.8) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 q'}{dt^2} = -2\beta \frac{dq'}{dt} - \omega'^2 q', \quad (20.12)$$

$$\frac{d^2 q''}{dt^2} = -2\beta \frac{dq''}{dt} - \omega''^2 q''. \quad (20.13)$$

პრაქტიკულად მივიღეთ ორი დამოუკიდებელი თავისუფალი რხევის განტოლება ω' და ω'' სიხშირეებით და β მილევის კოეფიციენტით. მათი ამოხსნა მარტივი შესაძლებელია ნახევარინტერვალთა მეთოდით:

$$\begin{cases} (I')_{\frac{1}{2}} = (I')_0 - [2\beta(I')_0 + \omega'^2(q')_0] \frac{\Delta t}{2} \\ (I')_{i+\frac{1}{2}} = (I')_{i-\frac{1}{2}} - [2\beta(I')_{i-\frac{1}{2}} + \omega'^2(q')_i] \Delta t \\ (q')_{i+1} = (q')_i + (I')_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \end{cases} \quad (20.14)$$

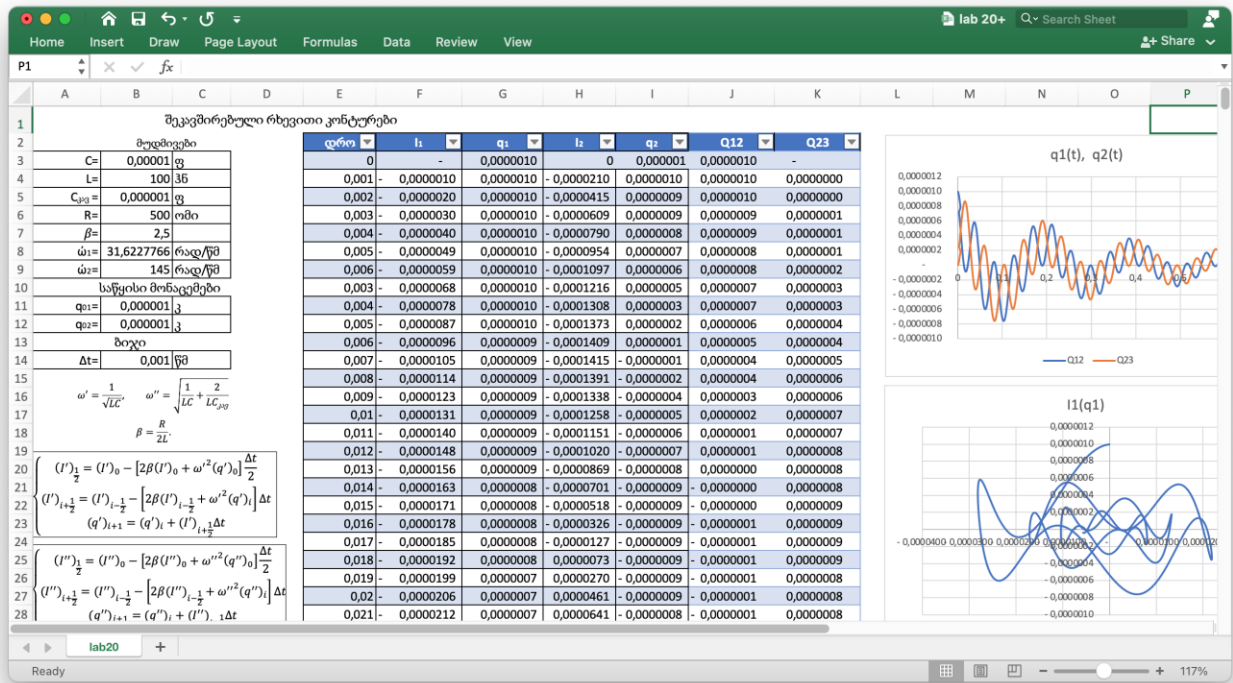
$$\begin{cases} (I'')_{\frac{1}{2}} = (I'')_0 - [2\beta(I'')_0 + \omega''^2(q'')_0] \frac{\Delta t}{2} \\ (I'')_{i+\frac{1}{2}} = (I'')_{i-\frac{1}{2}} - [2\beta(I'')_{i-\frac{1}{2}} + \omega''^2(q'')_i] \Delta t \\ (q'')_{i+1} = (q'')_i + (I'')_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \end{cases} \quad (20.15)$$

მას შემდეგ, რაც ვიპოვით q' და q'' ამონახსნებს, (20.9) განტოლებათა სისტემიდან შეგვიძლია, ვიპოვოთ q_1 და q_2 :

$$(q_1)_{i+1} = \frac{1}{2} [(q')_{i+1} + (q'')_{i+1}], \quad (20.16)$$

$$(q_2)_{i+1} = \frac{1}{2} [(q')_{i+1} - (q'')_{i+1}]. \quad (20.17)$$

გახსენით შაბლონი lab20 (სურ.20.2).



სურ.20.2. შეკავშირებული რხევითი კონტურები. შაბლონი lab 20

ცვალეთ პარამეტრები და განსაზღვრეთ მეორად კონტურში რხევების წარმოქმნის პირობები.

ამოცანები

20.1 გახსენით შაბლონი lab20 და შეასრულეთ შემდეგი მოქმედებები:

- ცვალეთ აქტიური კონტურის აქტიური წინაღობა და დაადგინეთ, როგორ გავლენას ახდენს ის კონტურის რხევებზე. რა მოხდება, თუ კონტურში აქტიურ წინაღობას ნულის ტოლად ჩათვლით?
- კონდენსატორის ტევადობა ჩათვალეთ 25 ნფ-ის ტოლად, აქტიური წინაღობა 100 ომი. ცვალეთ ინდუქციურობა, კავშირის ტევადობა, მუხტის სიდიდე პირველად კონტურში და დროის ინტერვალი (ბიჯი) ისე, რომ გრაფიკზე აისახოს რხევის მინიმუმ 3 პერიოდი.

20.2 შეასრულეთ იგივე ამოცანა, თუ პირველად კონტურში ჩართულია სინუსოიდური გენერატორი, რომლის ძაბვაც იცვლება კანონით $U = 2 \cos(\Omega t)$, სადაც Ω გარე პერიოდული ძალის სიხშირეა.

20.3 შეასრულეთ სურ.20.1 ბ)-ზე მოცემული შეკავშირებული კონტურის მოდელირება. განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) როცა კონტურში არ არის ჩართული გენერატორი, ბ) როცა კონტურში ჩართულია გენერატორი, რომელიც მართკუთხა იმპულსების გენერირებას ახდენს მინიმალური ძაბვით 0 ვ, მაქსიმალური ძაბვით 1 ვ.

მითითება: მართკუთხა იმპულსების ფორმირება მოახდინეთ იმავე მეთოდით, როგორც განხილული იყო შაბლონში lab13.

20.4 შეასრულეთ სურ.20.1 დ)-ზე მოცემული შეკავშირებული კონტურის მოდელირება. განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) როცა კონტურში არ არის ჩართული გენერატორი, ბ) როცა კონტურში ჩართულია გენერატორი, რომელიც მართკუთხა იმპულსების გენერირებას ახდენს მინიმალური ძაბვით -5 ვ, მაქსიმალური ძაბვით 5 ვ.

მითითება: მართკუთხა იმპულსების ფორმირება მოახდინეთ ლოგიკური ფუნქციების გამოყენებით, რომ შესრულდეს პირობა:

$$U(t) = \begin{cases} 5, & t \in [0, \tau] \\ -5, & t \notin [0, \tau] \end{cases}$$

სადაც τ იმპულსის ხანგრძლივობაა და მისი მნიშვნელობა განსაზღვრეთ ცალკე უჯრაში, როგორც მუდმივი.

20.5 შეასრულეთ სურ.20.1 ა)-ზე მოცემული შეკავშირებული კონტურის მოდელირება. განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) როცა კონტურში არ არის ჩართული გენერატორი, ბ) როცა კონტურში ჩართულია გენერატორი, რომელიც სამკუთხა იმპულსების გენერირებას ახდენს.

მითითება: სამკუთხა იმპულსების ფორმირება მოახდინეთ ლოგიკური ფუნქციების გამოყენებით, რომ შესრულდეს პირობა:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{5}{\tau}t, & 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ -\frac{5}{\tau}t, & \frac{\tau}{2} < t = \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

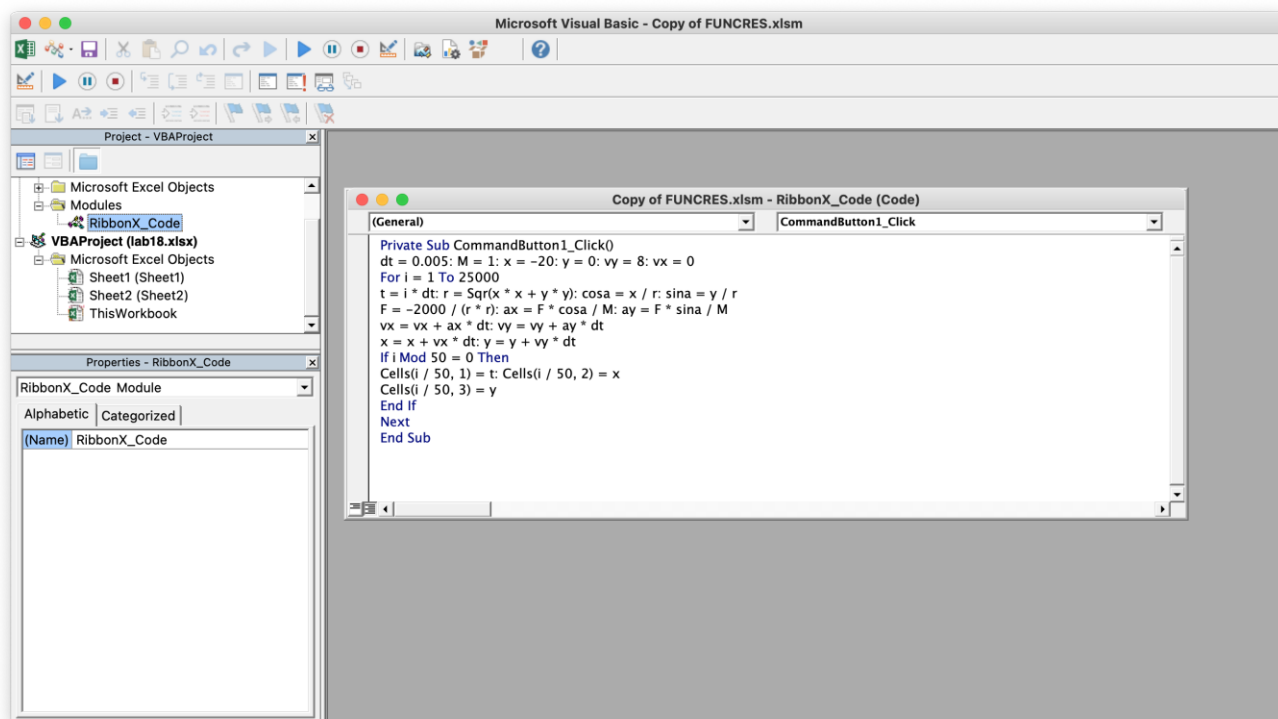
სადაც τ იმპულსის ხანგრძლივობაა და მისი მნიშვნელობა განსაზღვრეთ ცალკე უჯრაში, როგორც მუდმივი.

ლაბორატორიული ამოცანა №21. ამოცანები მაკროსების გამოყენებით

შედარებით რთული ამოცანების გადაწყვეტისათვის მიზანშეწონილია დავწეროთ მაკროსი. მაკროსი წარმოადგენს პატარა პროგრამას, რომელიც იქმნება სპეციალურ ბლოკში. იგი იწერება Visual Basic -ის ენაზე და შეიძლება შეიცავდეს ციკლებს, მასივებს. მისი საშუალებით შეიძლება ინტეგრალების და წარმოებულების პოვნა და ა.შ.

იმისათვის, რომ მაკროსი დავწეროთ, საჭიროა, გავხსნათ VBA (Visual Basic Application). ამისათვის შევასრულოთ ბრძანება:

- View → Panel Instrument →
- Tools → Macro → Visual Basic Editor
- ან გამოვიყენოთ კლავიშების კომბინაცია Alt+F11



სურ.21.1. რედაქტორი Visual Basic Editor

ახალი სტანდარტული მოდულის დასაწერად შეასრულეთ ბრძანება:

Insert → Module

გაიხსნება მოდულის ფანჯარა, სადაც შესაძლებელია დაიწეროს მაკროსის კოდი. მაგალითად, №19 ლაბორატორიული ამოცანის მაკროსის კოდს აქვს ქვემოთ მოცემული სახე:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
dt = 0.005: m = 1: x = -20: y = 0: vy = 8: vx = 0
For i = 1 To 25000
t = i * dt: r = Sqr(x * x + y * y): cosa = x / r: sina = y / r
F = -2000 / (r * r): ax = F * cosa / m: ay = F * sina / m
vx = vx + ax * dt: vy = vy + ay * dt
```

```

x = x + vx * dt: y = y + vy * dt
If i Mod 50 = 0 Then
Cells(i / 50, 1) = t: Cells(i / 50, 2) = x
Cells(i / 50, 3) = y
End If
Next
End Sub

```

მაკროსის შესრულებაზე გასაშვებად შევასრულოთ ბრძანება: Run → Macro ან დავაჭიროთ კლავიშს F5.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 21.1. ლისაჟუს ფიგურები

მატერიალური წერტილი ერთდროულად მონაწილეობს ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ ჰარმონიულ რხევაში. დავუშვათ, ამ ჰარმონიული რხევების ამპლიტუდებია A_x და A_y , სიხშირეები ω_x და ω_y . რხევებს შორის ფაზათა სხვაობა არის φ_0 . განვსაზღვროთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია და მისი კოორდინატები x და y დროის ნებისმიერ მომენტში.

ჰარმონიული რხევების კოორდინატები შეიძლება წარმოვადგინოთ განტოლებებით:

$$x(t) = A_x \sin(\omega_x t),$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_0)$$

ამპლიტუდებისა და სიხშირეების მნიშვნელობები ჩავწეროთ მუშა ფურელის E1–E5 უჯრებში. დავწეროთ მაკროსი

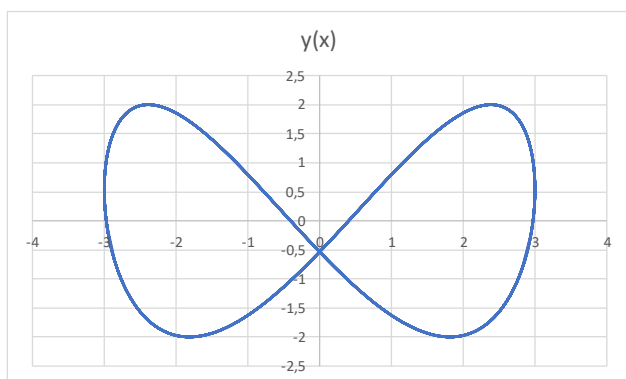
```

Private Sub CommandButton1_Click()
Ax = Cells(1, 5): Ay = Cells(2, 5)
wx = Cells(3, 8): wy = Cells(4, 5)
fi = Cells(5, 5): dt = 0.2
While t < 60
t = t + dt: i = i + 1
x = Ax * Cos(wx * t)
y = Ay * Cos(wy * t + fi)
Cells(i, 1) = x: Cells(i, 2) = y
Wend
End Sub

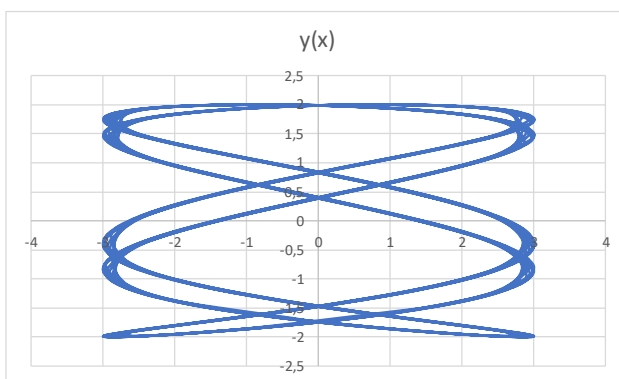
```

ბრძანება Cells(1, 5) მონაცემებს იღებს უჯრიდან, რომელიც განთავსებულია 1 სტრიქონის მეხუთე სვეტში. ბრძანება While ციკლურად აბრუნებს ცვლადს, ვიდრე სრულდება პირობა $t < 60$. ბრძანება Cells(i, 1) = x, 1-ლი სვეტის i-ურ სტრიქონში გამოაქვს მონაცემები.

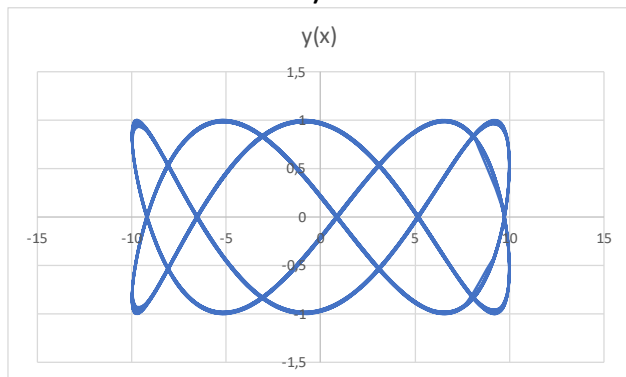
პროგრამა საშუალებას იძლევა მატერიალური წერტილის მოძრაობის მოდელირება განვანხორციელოთ სხვადასხვა ამპლიტუდისა და სიხშირისთვის, აგრეთვე, ფაზათა ძვრისათვის. შესაბამისად, მიიღება ჩაკეტილი ფიგურები, რომლებსაც ლისაჟუს ფიგურებს ეწოდება.



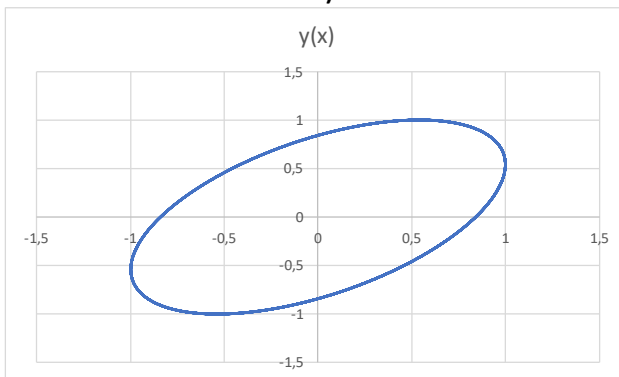
ა)



ბ)



გ)



დ)

სურ.21.1. ა) $A_x = 3, A_y = 2, \omega_x = 1, \omega_y = 1, \varphi_0 = 1.3$, ბ) $A_x = 3, A_y = 2, \omega_x = 5, \omega_y = 1, \varphi_0 = 2$, გ) $A_x = 10, A_y = 1, \omega_x = 2, \omega_y = 5, \varphi_0 = 1$, დ) $A_x = 1, A_y = 1, \omega_x = 1, \omega_y = 1, \varphi_0 = 1$

ამოცანა 21.2. იძულებითი რხევები

განვიხილოთ ზამბარიანი ქანქარას იძულებითი რხევები. მოვახდინოთ სისტემის მოდელირება სისტემის სხვადასხვა პარამეტრისათვის მაკროსის საშუალებით. ვთქვათ, იძულებითი რხევის სიხშირეა ω . ქანქარა რხევას იწყებს x_0 კოორდინატით და v_0 საწყისი სიჩქარით. ავაგოთ კოორდინატისა და სიჩქარის რხევის ფაზური მრუდები.

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად, გვაქვს:

$$ma_x = -kx - \beta v_x + F_m \sin(\omega t),$$

სადაც: $F = F_m \sin(\omega t)$ გარე პერიოდული ძალაა. აჩარების, სიჩქარისა და კოორდინატისათვის ვწერთ:

$$a_x = \frac{1}{m} \{-kx - \beta v_x + F_m \sin(\omega t)\},$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \Delta t,$$

$$x = x_0 + v_x \Delta t.$$

პროგრამას მაკროსისათვის აქვს სახე:

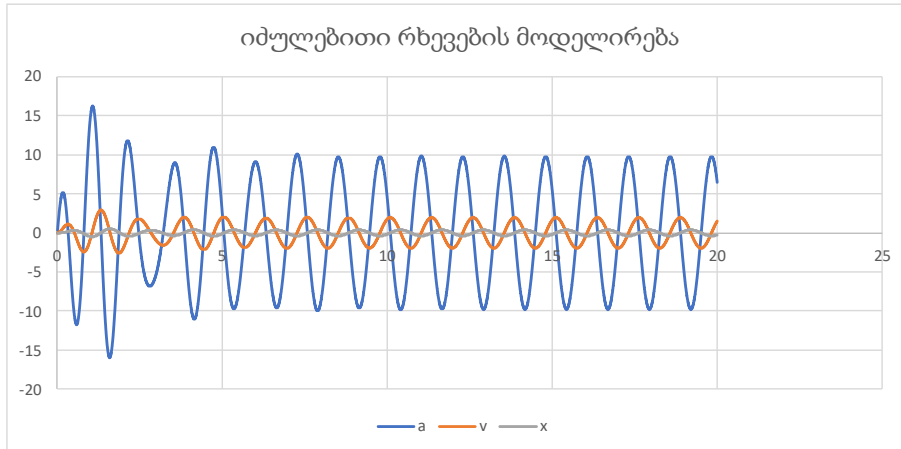
```
Private Sub CommandButton1_Click()
m = 0.2: k = 10: r = 0.2
w = 5: dt = 0.005
While t < 20
t = t + dt: i = i + 1: F = 2 * Sin(w * t)
a = (F - k * x - r * v) / m: v = v + a * dt
```

```

x = x + v * dt: Cells(i, 1) = t: Cells(i, 2) = a
Cells(i, 3) = v: Cells(i, 4) = x
Wend
End Sub

```

პროგრამის შედეგი არის აჩქარების, სიჩქარისა და კოორდინატის მონაცემები, რომლებიც განთავსდება, შესაბამისად B, C და D სვეტებში. ამ მონაცემების საფუძველზე აგებული გრაფიკი წარმოდგენილია სურ.21.1.2-ზე.



სურ.21.2. იძულებითი რხევების მოდელირება. $m = 0.2; k = 10; r = 0.2; \omega = 5; \Delta t = 0.005$

ამოცანა 21.3. დაფინგის ქანქარა

დაფინგის ქანქარა წარმოადგენს ბირთვს, რომელიც მოთავსებულია პოტენციური ორმოს შიგნით. პოტენციურ ორმოს ორი ჩაღრმავება აქვს. მისი პოტენციური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$U(x) = k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right).$$

შევისწავლოთ ბირთვის ქაოსური მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როცა მასზე მოქმედებს პერიოდულად ცვლადი ძალა:

$$F_x(t) = F_m \cos(\omega t).$$

პოტენციური ორმოს შიგნით ბირთვზე მოქმედებს მახრუნებელი ძალა:

$$\frac{dF_x(t)}{dt} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -k(x^3 - x).$$

დაფინგის ქანქარას იძულებითი რხევები აღიწერება განტოლებით:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + k(x^3 - x) = F_m \cos(\omega t).$$

დავწეროთ მაკროსი ამ განტოლების ამოსახსნელად. მოცემულ შემთხვევაში საანგარიშო ფორმულები ასე ჩაიწერება:

$$a = \frac{1}{m} \left\{ F_m \cos(\omega t) - \beta \frac{dx}{dt} + k(x^3 - x) \right\},$$

$$v_x = v_{0x} + a_x \Delta t,$$

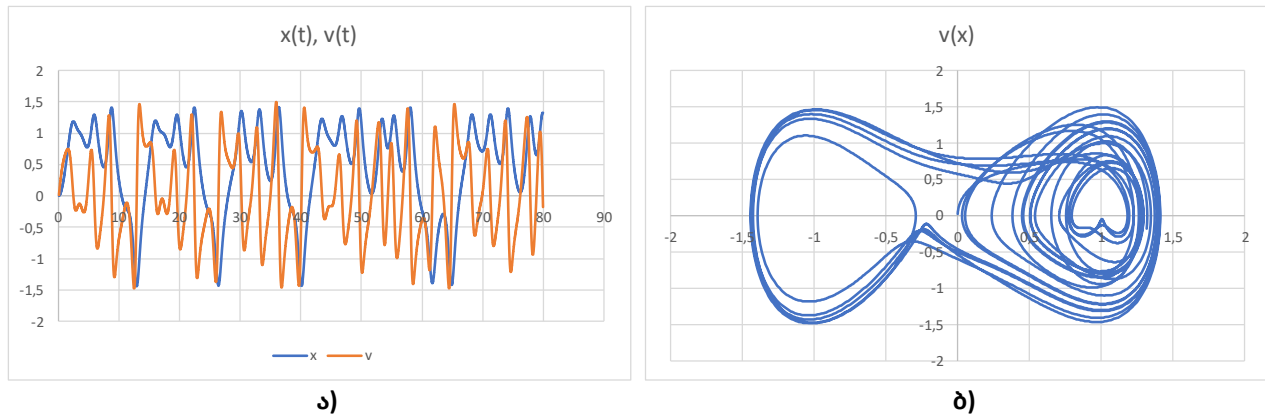
$$x = x_0 + v_x \Delta t.$$

მაკროსის კოდს აქვს შემდეგი სახე:

```

Sub daphing()
F = 1: k = 4: r = 0.5: m = 1: w = 2.3: dt = 0.001
fi = 2.64: phy = 1
While t < 80
j = j + 1: t = t + dt: Z = Cos(w * t + phy)
a = (F * Cos(w * t) - k * (x * x * x - x) - r * v) / m
v = v + a * dt: x = x + v * dt
If j Mod 20 = 0 Then
Cells(j / 20, 1) = t: Cells(j / 20, 2) = x
Cells(j / 20, 3) = v
End If
Wend
End Sub

```



სურ.21.3. დაფინგის ქანქარას იძულებითი რხევები პოტენციურ ორმოში

ამოცანა 21.4. პუნკარეს კვანძები

დაფინგის ქანქარა იძულებით რხევებს ასრულებს. ავაგოთ პუნკარეს კვანძები იძულებითი $F_x = F_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ რხევის სხვადასხვა φ ფაზისათვის. განვსაზღვროთ თავისუფლად მერხევი პუნკარეს ქანქარათა სისტემის ფაზური სურათი, დროის რომელიმე ფიქსირებულ მომენტში, როცა: ა) მიღების კოეფიციენტი ნულია $\beta = 0$, ბ) $\beta \neq 0$.

მოცემულ შემთხვევაში აუცილებელია, ამოვხსნათ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + k(x^3 - x^2) = F_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

ეს განტოლება უნდა ამოვხსნათ იგივე მეთოდით, როგორც წინა ამოცანაში. სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება x კოორდინატის ცვლილებით, იმპულსის p_x გეგმილითა და $F_x(t)$ იძულებითი ძალის გეგმილით.

პუნკარეს კვანძი შეესაბამება იძულებითი ძალის φ ფაზას და აიგება შემდეგნაირად: დროის იმ მომენტში, როცა $\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$, ფაზურ სიბრტყეში აიგება წერტილი კოორდინატებით (x, p_x) . პუნკარეს კვანძებს აქვს ფრაქტალური სტრუქტურა და აღწერს ქაოსურ რხევებს.

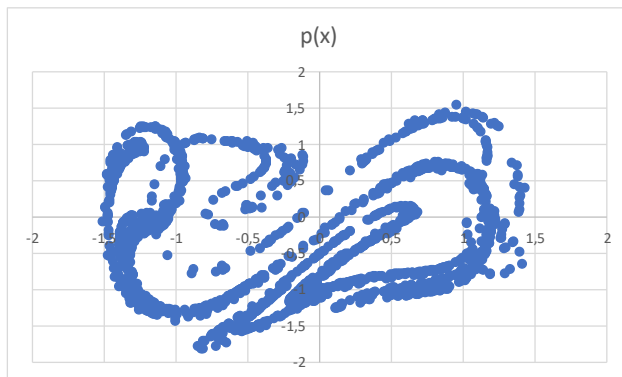
დაწეროთ მაკროსის კოდი, რომელშიდაც t დრო იცვლება დისკრეტულად Δt ბიჯით, იმ პირობით, რომ, როცა: $\cos(\omega t + \varphi_0) = 0$ რხევები პრაქტიკულად არ სრულდება. მაშასადამე, პროგრამაში რხევების კრიტერიუმს წარმოადგენს $\cos(\omega(t - \Delta t) + \varphi_0) < 0$ და $\cos(\omega t + \varphi_0) > 0$.

მაკროსის კოდს აქვს სახე:

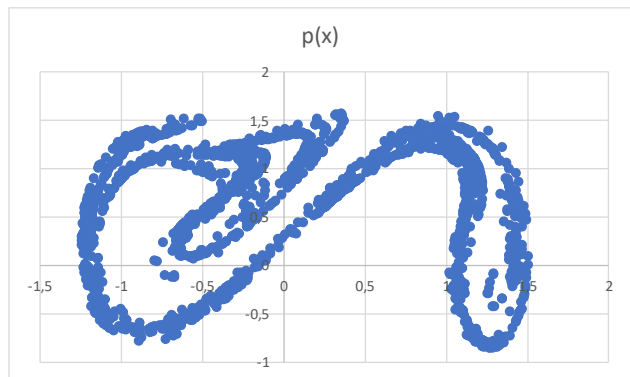
```

Sub Puankare()
F = 1: k = 3: beta = 0.3: m = 1: w = 2: dt = 0.001
fi = 2.64: phase = Cells(1, 5)
While t < 5000
t = t + dt: y = Cos(w * t + phase)
a = (F * Cos(w * t) - k * (x * x * x - x) - beta * v) / m
v = v + a * dt: x = x + v * dt
If (y > 0) And (y1 < 0) Then
j = j + 1: Cells(j, 1) = x: Cells(j, 2) = v
End If
y1 = y
Wend
End Sub

```



ა)



ბ)

სურ.21.4. დაფინგის ქანქარას პუანკარეს კვთები (იმპულსის დამოკიდებულება კოორდინატზე), როცა: $\omega = 2$, $\beta = 3$. ა) $\varphi_0 = 0$, ბ) $\varphi_0 = 10$

ამოცანის მეორე ნაწილთან დაკავშირებით, წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული გვაქვს 900 ერთ-ნაირი დაფინგის ქანქარა, რომლებიც ასრულებს თავისუფალ რხევებს. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ საწყისი პირობებით, x_0 კოორდინატით და p_{0x} იმპულსით. ვინაიდან ქანქარები თავისუფალ რხევებს ასრულებს მათი რხევის განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + k(x^3 - x^2) = 0.$$

დავუშვათ, $t = 0$ საწყის მომენტში ქანქარების საწყისი ფაზური წერტილები (x_0, p_{0x}) მოთავსებულია მართკუთხედის შიგნით, რომელიც შემოსაზღვრულია დიაპაზონით $[x, x + \Delta x]$ და $[p, p + \Delta p]$. დავწეროთ პროგრამა, რომელიც აღწერს თითოეული ქანქარის მდგომარეობას რომელიღაც t' დროში. t' დრო თავიდანვე განვსაზღვროთ Excel-ის მუშა ფურცლის რომელიმე უჯრაში.

პროგრამის კოდს აქვს სახე:

```

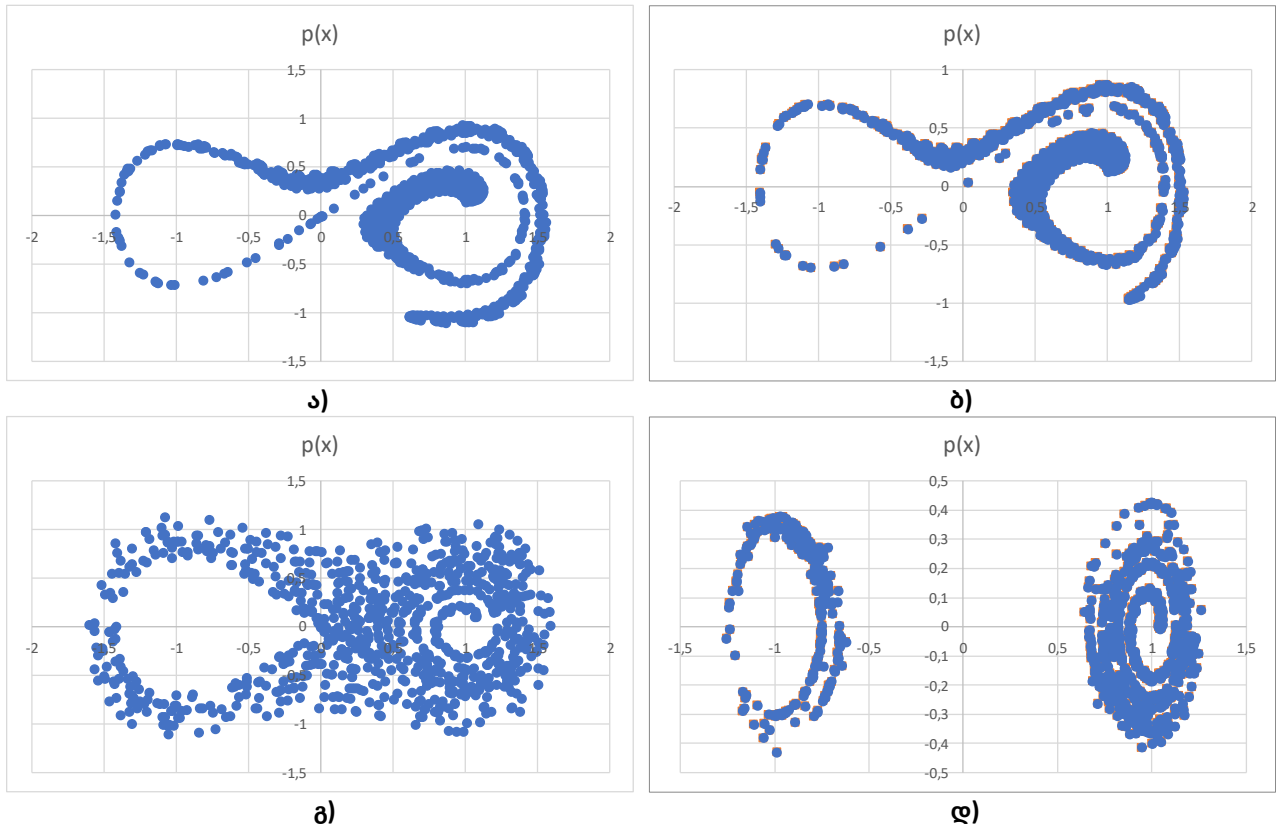
Sub Puankare_Phase()
m = 1: k = 1: beta = 0.02: dt = 0.002
For i = 1 To 30: For j = 1 To 30
x = 0.03 * i: v = 0.03 * j
t = 0: y = y + 1
Dro = Cells(1, 4)
While t < Dro
t = t + dt

```

```

a = (-k * (x * x * x - x) - beta * v) / m
v = v + a * dt: x = x + v * dt
Wend:
Cells(y, 1) = x: Cells(y, 2) = v
Next: Next
End Sub

```



სურ.21.5. დაფინგის ქანქარების (x, p_x) ფაზური მდგომარეობა, როცა: ა) $t = 10, \beta = 0$, ბ) $t = 10, \beta = 0.02$, გ) $t = 100, \beta = 0$, დ) $t = 100, \beta = 0.02$

ამოცანა 21.5. ლორენცის ატრაქტორი

შევასრულოთ ლორენცის ატრაქტორის მოდელირება, თუ ის მოცემულია განტოლებათა სისტემით:

$$\dot{x} = a(-x + y), \quad \dot{y} = bx - y - xz, \quad \dot{z} = -cz + xy.$$

მოცემულ განტოლებათა სისტემა აღწერს ატმოსფეროში კონვექციური ნაკადების მოძრაობას. მოცემულ შემთხვევაში a, b და c მუდმივებია. დავწეროთ პროგრამა, რომლითაც აღვწერთ კოორდინატების ცვლილებას დროში. მოცემული განტოლებათა სისტემა პრაქტიკულად წარმოადგენს ნაკადის სიჩქარეების გეგმილებს x, y და z ღერძებზე:

$$v_{i+1}(x) = a(-x_i + y_i), \quad v_{i+1}(y) = bx_i - y_i - x_i z_i, \quad v_{i+1}(z) = -cz_i + x_i y_i.$$

შესაბამისად, კოორდინატები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

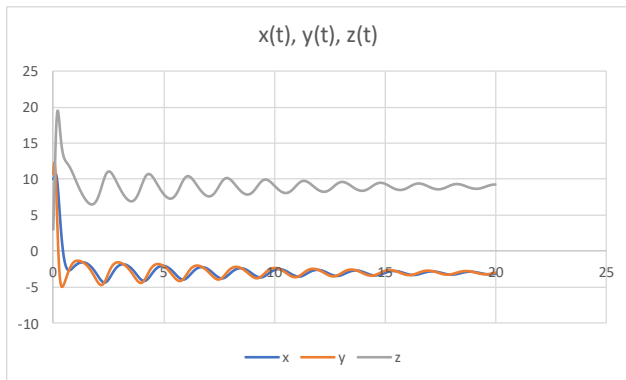
$$x_{i+1} = x_i + v_{i+1}(x)\Delta t, \quad y_{i+1} = y_i + v_{i+1}(y)\Delta t, \quad z_{i+1} = z_i + v_{i+1}(z)\Delta t.$$

მაკროსის კოდი მარტივია:

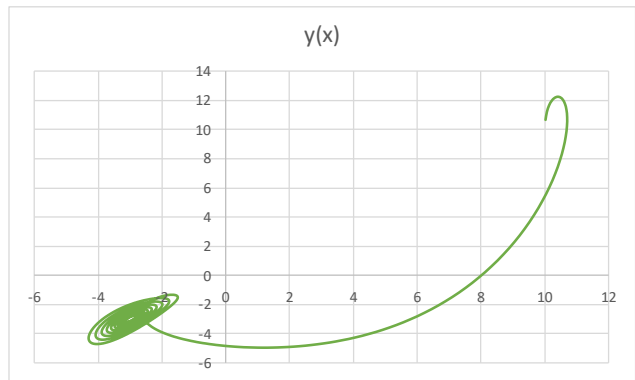
```

Sub Atractor_Lorentz()
a = 5: b = 10: c = 1: dt = 0.001
x = 10: y = 10: Z = 2
While i < 20000
i = i + 1
x = x + a * (-x + y) * dt
y = y + (b * x - y - x * Z) * dt
Z = Z + (-c * Z + x * y) * dt
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 1) = i * dt
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 2) = x
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 3) = y
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 4) = Z
Wend
End Sub

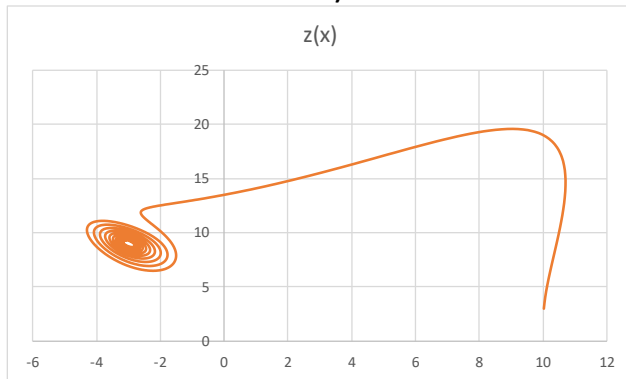
```



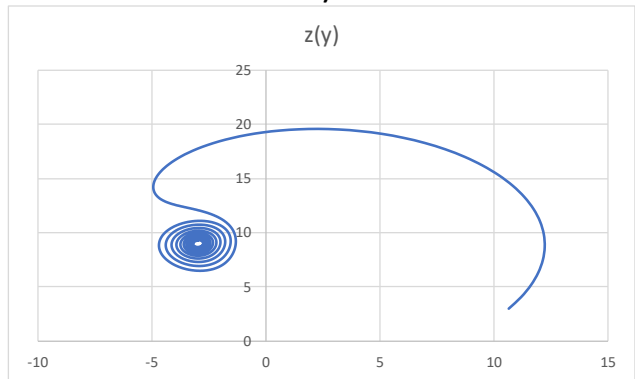
ა)



ბ)



გ)



დ)

სურ.21.6. ლორენცის ატრაქტორი, როცა: $a = 5, b = 10, c = 1, x_0 = 10, y_0 = 10, z_0 = 2$. ა) $x(t), y(t), z(t)$ დამოკიდებულებები, ბ) $y(x)$ დამოკიდებულება, გ) $z(x)$ დამოკიდებულება, დ) $z(y)$ დამოკიდებულება

ამოცანა 21.6. მოხეტიალე მოლეკულა

მოლეკულა სხვა მოლეკულების მხრიდან ქაოსური დაჯახებების გამო შემთხვევით მოძრაობას ასრულებს Ox ღერძის გასწვრივ. მოლეკულას კოორდინატები სხვადასხვა Δt დროის შუალედში არის $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. შევისწავლოთ მოლეკულის საბოლოო x_N კოორდინატის განაწილება სხვადასხვა N რიცხვისათვის. N - წარმოადგენს პროგრამის ბიჯს.

ეს ამოცანა იხსნება პირსონის ამოცანის მსგავსად, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: საჭიროა, განისაზღვროს ქვეითის გადაადგილება, რომელიც ასრულებს N სხვადასხვა ნაბიჯს შემთხვევითი მიმართულებით.

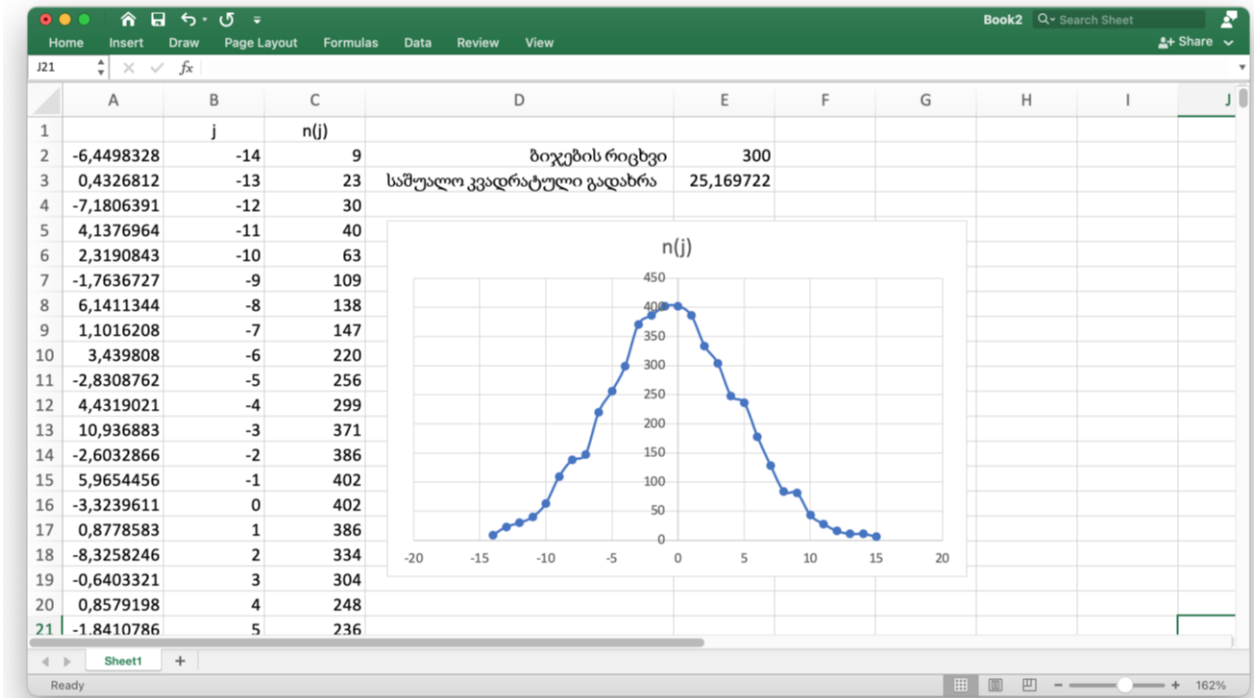
გამოვიყენოთ სტატისტიკური მეთოდი. პროგრამამ შემთხვევითობის პრინციპით უნდა განსაზღვროს ადამიანის ნაბიჯის სიგრძე და მიმართულება. მაგალითად, ერთი ნაბიჯის შემთხვევაში პირი გადაადგილდება შემთხვევითი სიდიდით $[-0.5; 0.5]$ ინტერვალში, რისთვისაც შეიძლება გამოვიყენოთ ოპერატორი RND (Random):

$$x = x + RND - 0.5$$

ასევე ჩვენს შემთხვევაშიც, პროგრამამ $N_{ცდა} = 1000 - 10000$ ცდიდან უნდა გამოთვალოს N რაოდენობის ბოლო x_N კოორდინატის დაშორება კოორდინატთა სათავიდან. ე.ი. პროგრამა ითვლის x^N - დისპერსიას, $[j; j + 1]$ ($j = -15, -14, \dots, 14, 15$) ინტერვალში მოლეკულის მოხვედრის n_j რიცხვს და გამოაქვს ეს მონაცემები ცხრილის სახით.

მაკროსის კოდს აქვს შემდეგი სახე:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim n(30): Bijebis_ricxvi = Cells(1, 5): Cdis_ricxvi = 5000
For i = 1 To Cdis_ricxvi
For j = 1 To Bijebis_ricxvi
x = x + Rnd - 0.5: Next
Cells(i, 1) = x: S = x * x + S
For j = 1 To 30
If (x >= j - 15) And (x < j - 14) Then n(j) = n(j) + 1
Next: x = 0: Next
Cells(2, 5) = S / Cdis_ricxvi
For j = 1 To 30
Cells(j, 2) = j - 15: Cells(j, 3) = n(j)
Next
End Sub
```



სურ.21.7. შემთხვევითად მოხეტიალე მოლეკულის მოდელირება

ამოცანა 21.7. კარნოს ციკლი

3 მოლ აირს უკავია 2 ლიტრი მოცულობა 300 K ტემპერატურაზე. კარნოს ციკლის პროცესში: 1) აირი იზოთერმულად ფართოვდება 5 ლ მოცულობამდე, 2) ადიაბატურად ფართოვდება 10 ლ მოცულობამდე, 3) იზოთერმულად იკუმშება 4 ლ მოცულობამდე, 4) ადიაბატურად იკუმშება საწყის მოცულობამდე. ავადგოთ $P(V)$ გრაფიკი. პოლიტროპის მაჩვენებელია $\gamma = 1.7$.

იზოთერმული პროცესისას:

$$PV = \nu RT = C$$

C -ს დათვლით შეგვიძლია გავითვალოთ საწყისი წნევა:

$$P_0 = \frac{C}{V_0}$$

მივყვით კარნოს ციკლის თითოეულ ეტაპს.

1) იზოთერმული გაფართოება 5 ლ-მდე:

$$V_{i+1} = V_i + \Delta V$$

$$P_{i+1} = \frac{C}{V_i}$$

2) ადიაბატური გაფართოება 10 ლ მოცულობამდე:

$$D = PV^\gamma = const,$$

$$E = TV^{\gamma-1} = const,$$

$$V_{i+1} = V_i + \Delta V,$$

$$P_{i+1} = \frac{D}{(V_i)^\gamma}$$

$$T_{i+1} = \frac{E}{(V_{i+1})^{\gamma-1}}.$$

3) იზოთერმული შეკუმშვისას 10 ლ-დან 4 ლ-მდე:

$$C = \nu RT,$$

$$V_{i+1} = V_i - \Delta V,$$

$$P_{i+1} = \frac{C}{V_i}.$$

4) ადიაბატური შეკუმშვისას 4 ლ-დან 1 ლიტრამდე:

$$D = PV^\gamma = const,$$

$$E = TV^{\gamma-1} = const,$$

$$V_{i+1} = V_i - \Delta V,$$

$$P_{i+1} = \frac{D}{(V_i)^\gamma},$$

$$T_{i+1} = \frac{E}{(V_{i+1})^{\gamma-1}}.$$

დავწეროთ მაკროსის კოდი:

Sub KARNO()

dv = 0.0001: V = 0.002: nu = 3: R = 8.31: T = 300

Gamma = 1.7: C = nu * R * T: p0 = C / V: p = p0: i = 1

While V < 0.005

Cells(i, 1) = V: Cells(i, 2) = p: Cells(i, 3) = T

V = V + dv / 10: i = i + 1: p = C / V

Wend: D = p * V ^ Gamma: E = T * (V ^ (Gamma - 1))

While V < 0.01

Cells(i, 1) = V: Cells(i, 2) = p: Cells(i, 3) = T

V = V + dv: i = i + 1

p = D / (V ^ Gamma): T = E / (V ^ (Gamma - 1))

Wend: C = nu * R * T

While V > 0.004

Cells(i, 1) = V: Cells(i, 2) = p: Cells(i, 3) = T

V = V - dv: i = i + 1: p = C / V

Wend: D = p * V ^ Gamma: E = T * (V ^ (Gamma - 1))

While (p < p0)

Cells(i, 1) = V: Cells(i, 2) = p: Cells(i, 3) = T

V = V - dv / 10: i = i + 1

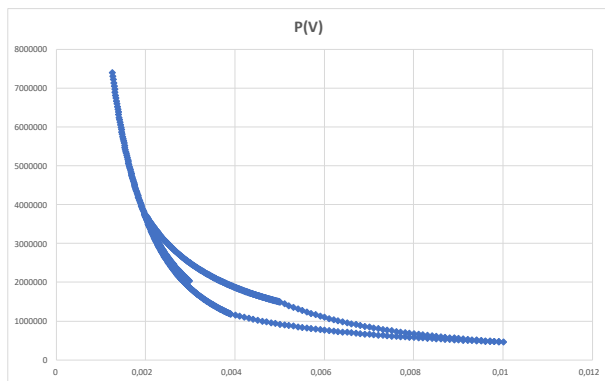
p = D / (V ^ Gamma): T = E / (V ^ (Gamma - 1))

A=p*V

Cells(i, 4)=A

Wend:

End Sub



სურ.21.8. კარნოს ციკლი. $P(V)$ დამოკიდებულება

ამოცანა 21.8. ტემპერატურის განაწილება ღეროს გასწვრივ

მოცემული გვაქვს ერთგვაროვანი ღერო L სიგრძით და α სითბოგამტარებლობით. მოცემულია $T(x)$ ტემპერატურისა და სითბოს წყაროს $q(x)$ სიმძლავრის საწყისი განაწილება ღეროზე. გამოვიტვალოთ ღეროს სხვადასხვა წერტილის ტემპერატურა დროის ნებისმიერ მომენტში. ღეროს სითბოგამტარობის განტოლება:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{c\rho}.$$

ავაგოთ $T(x)$ ერთგანზომილებიანი დამოკიდებულება ბიჯით: $\Delta x = 1, \Delta t = 0.01$.

საბოლოო ტემპერატურა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

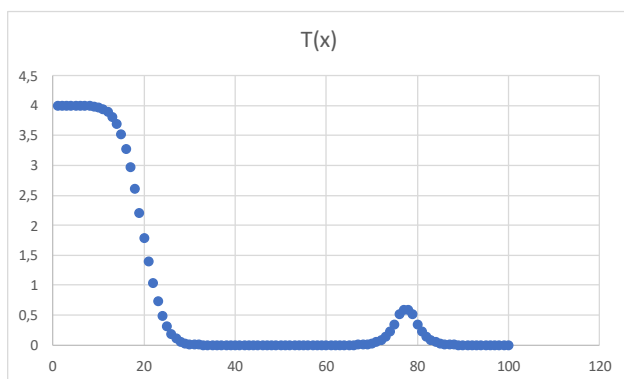
$$T_{i+1} = T_i + \alpha \frac{(T_{i-1})^2}{\Delta x^2} \Delta t + \frac{q_i}{c\rho} \Delta t.$$

დავწეროთ მაკროსის კოდი:

```

Sub Gero()
Dim t(100) As Single
Dim t1(100) As Single
dx = 1: dt = 0.01
For i = 1 To 100: Cells(i, 1) = i * dx
If i < 20 Then t(i) = 4 Else: t(i) = 0
Next i: Dro = Cells(1, 4)
For k = 1 To Dro: For i = 2 To 99
If (i > 75) And (i < 80) Then q = 0.2 Else q = 0
t1(i) = t(i) + 1.5 * (t(i - 1) - 2 * t(i) + t(i + 1)) * dt / dx / dx + q * dt
Next i
For i = 1 To 100: t(i) = t1(i): Next i
t(1) = 4: t(100) = t(99): Next k
For i = 1 To 100: Cells(i, 2) = t(i): Next i
Cells(1, 4) = Cells(1, 4) + 300
End Sub

```



სურ.21.9. ტემპერატურის განაწილება ღეროს გასწვრივ

ამოცანა 21.9. სამი მუხტის ველი

სამი დამუხტული ნაწილაკი q_1 , q_2 და q_3 მუხტებით განლაგებულია Ox ღერძზე. ავაგოთ $\varphi(x)$ და $E(x)$ დამოკიდებულებები პოტენციალისა და ელექტრული ველის დაძაბულობისათვის.

პოტენციალის და ელექტრული ველის დაძაბულობის ჯამური პროექცია Ox ღერძზე გამოითვლება ფორმულით:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = k \frac{q_1}{|x - x_1|} + k \frac{q_2}{|x - x_2|} + k \frac{q_3}{|x - x_3|},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = k \frac{|q_1|}{(x - x_1)^2} + k \frac{|q_2|}{(x - x_2)^2} + k \frac{|q_3|}{(x - x_3)^2}.$$

ყველა დადებითი მუხტის ელექტრული ველის დაძაბულობის პროექცია უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$E_{ix} = \begin{cases} -E_i, & x < x_i \\ E_i, & x > x_i \end{cases}$$

შესაბამისად, ჯამური ველის დაძაბულობა იქნება:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x}.$$

მაკროსის კოდს აქვს ქვემოთ მოცემული სახე:

Sub electruli_veli()

q1 = 1: q2 = -20: q3 = 10: k = 0.009

x1 = 0.3: x2 = 0.5: x3 = 0.7

x = 0.1: dx = 0.01

While x < 1

x = x + dx: i = i + 1

r1 = Abs(x - x1): r2 = Abs(x - x2): r3 = Abs(x - x3):

fi = k * q1 / r1 + k * q2 / r2 + k * q3 / r3

If fi > 10 Then fi = 10

If fi < -10 Then fi = -10

E1 = k * q1 / r1 / r1

E2 = k * q2 / r2 / r2

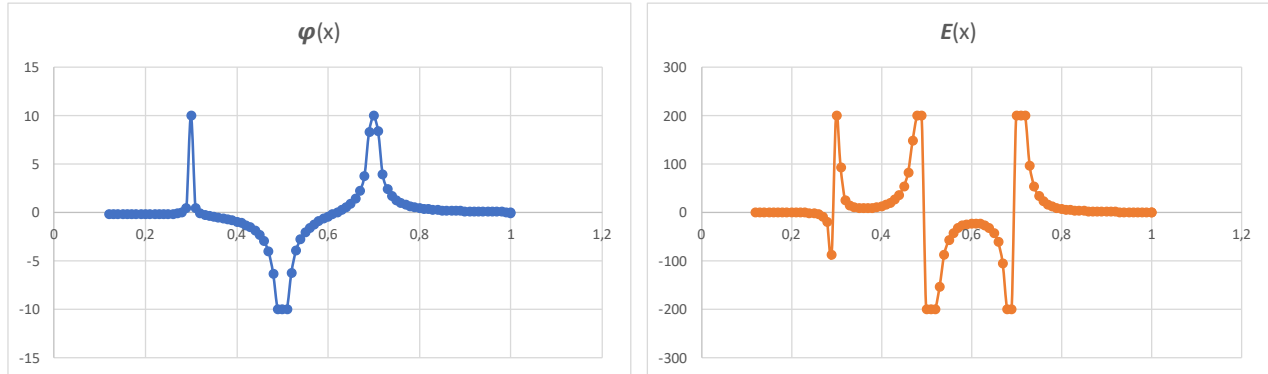
E3 = k * q3 / r3 / r3

If x < x1 Then E1 = -E1

If x < x2 Then E2 = -E2

If x < x3 Then E3 = -E3

E = E1 + E2 + E3:
If E > 200 Then E = 200
If E < -200 Then E = -200
Cells(i, 1) = x: Cells(i, 2) = fi: Cells(i, 3) = E
Wend
End Sub



სურ.21.10. $\varphi(x)$ და $E(x)$ დამოკიდებულებები, როცა: $q_1 = 1, q_2 = -20, q_3 = 10, x_1 = 0.3, x_2 = 0.5, x_3 = 0.7$

ამოცანა 21.10. სამი დენიანი გამტარის მაგნიტური ველი

სამი პარალელური დენიანი გამტარი დენებით I_1, I_2, I_3 , განთავსებულია XOY სიბრტყის პერპენდიკულარულად. დენიანი გამტარები სიბრტყეს გადაკვეთენ წერტილებში $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$. ავადგოთ მაგნიტური ველის ძალწირები მოცემულ $C_0(x_0, y_0)$ წერტილში.

თავდაპირველად, გადავწყვიტოთ შედარებით მარტივი ამოცანა. ვთქვათ, ორი დენიანი გამტარი I_1, I_2 დენებით კვეთს XOY სიბრტყეს $A_1(x_1, y_1)$ და $A_2(x_2, y_2)$ წერტილებში. თუ დენები მიმართულია XOY სიბრტყის მართობულად ჩვენგან სიბრტყისაკენ, მაშინ მაგნიტური ველის ინდუქცია, რომელსაც ქმნის ეს ორი დენიანი გამტარი $C_0(x_0, y_0)$ წერტილში გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

$$B_x = -B_1 \sin \alpha_1 - B_2 \sin \alpha_2, \quad B_y = B_1 \cos \alpha_1 + B_2 \cos \alpha_2,$$

$$B_1 = \frac{kI_1}{r_1}, \quad B_2 = \frac{kI_2}{r_2},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x - x_1}{r_1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{y - y_1}{r_1},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x - x_2}{r_2}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{y - y_2}{r_2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

იმ შემთხვევაში, თუ დენები მიმართულია ჩვენკენ, მაშინ განტოლებებში i_i და B_i უნდა ავიღოთ მინუსი ნიშნით.

ახლა დავუბრუნდეთ სამი დენიანი გამტარის შემთხვევას. $C_0(x_0, y_0)$ წერტილში ძალწირებს განსაზღვრავს მაგნიტური ინდუქციის პროექციები. დენიანი გამტარიდან $C_0(x_0, y_0)$ წერტილამდე გავვლოთ $a = |\vec{C_0C_i}|$ მონაკვეთი. დავუშვათ, რომ ეს მონაკვეთები თითოეული დენიანი გამტარიდან მოცემულ წერტილამდე არის მცირე და მიახლოებით შეიძლება, ჩავთვალოთ ერთმანეთის ტოლად. დენიანი გამტარებიდან მაგნიტური ველის მიმართულება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$x_{i+1} = x_i + a \cos \alpha, \quad y_{i+1} = y_i + a \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{B_x}{B}, \quad \sin \alpha = \frac{B_y}{B},$$

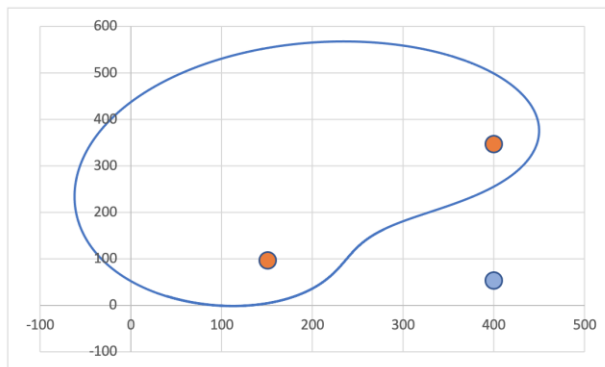
სადაც α - არის კუთხე \vec{B} ვექტორსა და OX ღერძს შორის. ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის, უნდა განისაზღვროს C_i წერტილების კოორდინატები, შედეგები ცხრილის სახით ჩამოიწეროს. მიღებული მონაცემების საფუძველზე უნდა ავაგოთ ველის ძალური სტრუქტურა.

მაკროსის კოდს აქვს შემდეგი სახე:

```

Sub Magnituri_veli()
x1 = 150: y1 = 100: x2 = 400: y2 = 100: x3 = 300
y3 = 300: I1 = 1: I2 = -2: I3 = 2: x = 40: y = 20
While k < 10000
r1 = Sqr((x - x1) * (x - x1) + (y - y1) * (y - y1))
r2 = Sqr((x - x2) * (x - x2) + (y - y2) * (y - y2))
r3 = Sqr((x - x3) * (x - x3) + (y - y3) * (y - y3))
B1 = I1 / r1: B2 = I2 / r2: B3 = I3 / r3
cosa1 = (x - x1) / r1: sina1 = (y - y1) / r1
cosa2 = (x - x2) / r2: sina2 = (y - y2) / r2
cosa3 = (x - x3) / r3: sina3 = (y - y3) / r3
Bx = -B1 * sina1 - B2 * sina2 - B3 * sina3
By = B1 * cosa1 + B2 * cosa2 + B3 * cosa3
B = Sqr(Bx * Bx + By * By): x = x + 0.2 * Bx / B
y = y + 0.2 * By / B: k = k + 1
Cells(k, 1) = x: Cells(k, 2) = y: Cells(k, 3) = x1
Cells(k, 4) = y1: Cells(k, 5) = x2: Cells(k, 6) = y2
Wend
End Sub

```



სურ.21.11. დენიანი გამტარების მაგნიტური ველი

ამოცანა 21.11. მიმდევრობითი რხევითი კონტური

მიმდევრობით შეერთებულია 50 ომი წინაღობის რეზისტორი, 150 მკფ ტევადობის კონდენსატორი, 0.03 ჰნ ინდუქციურობის კოჭა და მართკუთხა იმპულსების წყარო. იმპულსების ამპლიტუდა 90 ვ-ია, ხოლო სიხშირე ω . ავაგოთ $i(t)$, $u_C(t)$ და $u_L(t)$ გრაფიკები სხვადასხვა ω სიხშირეებისათვის.

კირხოფის მეორე კანონის თანახმად გვაქვს:

$$\varepsilon(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = iR + \frac{1}{C}q + L \frac{d^2q}{dt^2},$$

სადაც

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 90, & \text{როცა } \sin(\omega t) > 0 \\ -90, & \text{როცა } \sin(\omega t) \leq 0 \end{cases}$$

საანგარიშო ფორმულები ჩავენეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)_{i+1} = \varepsilon_i - \left(\frac{dq}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} R - \frac{1}{C} q_i,$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)_{i+1} \Delta t,$$

$$q_{i+1} = q_i + \left(\frac{dq}{dt}\right)_{i+\frac{1}{2}} \Delta t.$$

$$u_{C,i+1}(t) = \frac{1}{C} q_{i+1},$$

$$u_{L,i+1}(t) = \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)_{i+1} \cdot L.$$

მაკროსის კოდს აქვს სახე:

Sub RLC_Impuls()

Um = 90: w1 = 100: R = 50

L = 0.03: C = 0.00015: dt = 0.0001

While t < 0.25

t = t + dt: i = i + 1

If Sin(w1 * t) > 0 Then e = Um Else: e = -Um

ii = (e - R * Deni - q / C) / L

Deni = Deni + ii * dt: q = q + Deni * dt

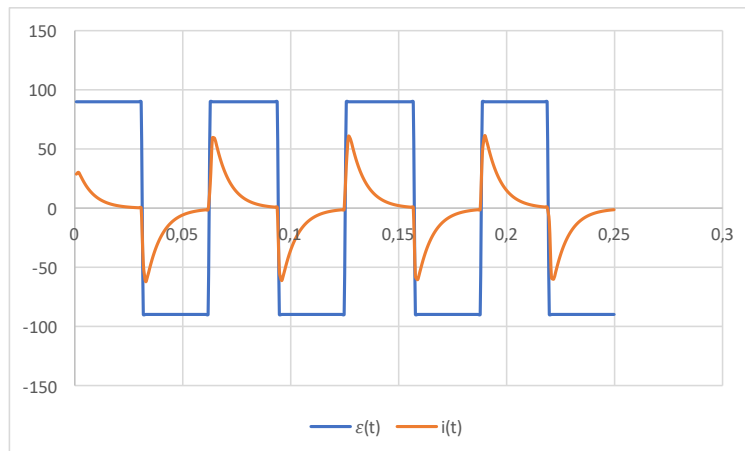
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 1) = t

If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 2) = e

If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 3) = 20 * Deni

Wend

End Sub

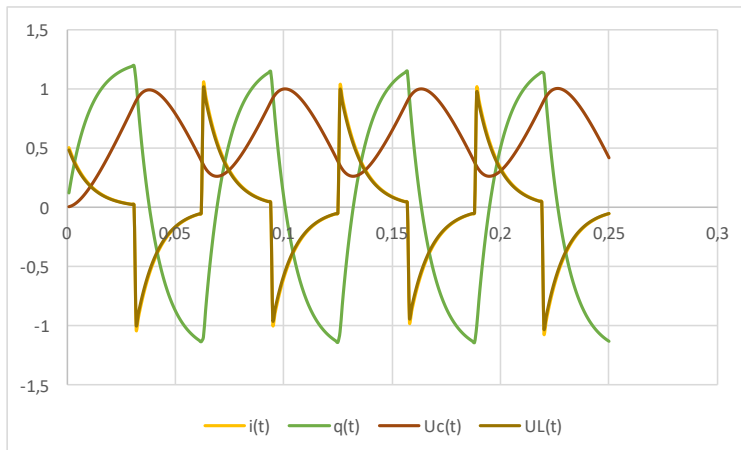


სურ.21.12. ღენის ძალის და წყაროს ემძ-ს დროში ცვლილება მიმდევრობით რხევით კონტურში

სურ.21.12-ზე $u_c(t)$ და $u_L(t)$ გრაფიკები დატანილი არ არის, რადგან ერთ მასშტაბში მათი აგება არ იძლევა დამზერის საშუალებას. თუმცა შეიძლება მათი ნორმირება და აგება ერთ მასშტაბში, რათა დავაკვირდეთ ფორმის ცვლილებას. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ, თუ რა სიდიდეზე უნდა მოვანდინოთ თითოეული სიდიდის ნორმირება, ცხრილებში გამოტანილი მნიშვნელობების მაქსიმუმები განვსაზღვროთ Excel-ის ფუნქციით MAX(). მაგალითად, იმავე ამოცანისათვის, როცა მიმდევრობით შეერთებულია 100 ომი წინალობის რეზისტორი, 100 მკფ ტევადობის კონდენსატორი, 0.01 ჰნ ინდუქციურობის კოჭა მაკროსის კოდს აქვს სახე:

```

Sub RLC_Impuls()
Um = 50: w1 = 100: R = 100
L = 0.01: C = 0.0001: dt = 0.0001
While t < 0.25
t = t + dt: i = i + 1: U = U + 0.2
If U > Um Then U = Um
If Sin(w1 * t) > 0 Then e = Um Else: e = -Um
ii = (e - R * Deni - q / C) / L
Deni = Deni + ii * dt
q = q + Deni * dt
Uc = Uc + q / C
UL = UL + ii * L
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 1) = t
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 2) = e
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 3) = Deni / 0.9
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 4) = q / 0.004
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 5) = Uc / 12500
If i Mod 10 = 0 Then Cells(i / 10, 6) = UL / 94
Wend
End Sub
    
```

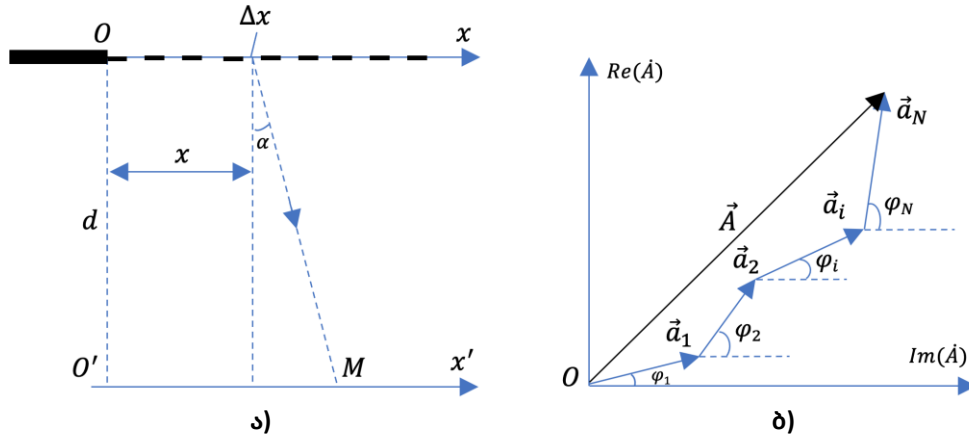


სურ.21.13. ღენის ძალის, მუხტის, კონდენსატორისა და კოჭას ბოლოებზე ძაბვის ცვლილება მიმდევრობით რხევით კონტურში

ამოცანა 21.12. ტალღების დიფრაქცია. კარნიუს სპირალი

გაუმჭვირვალე ფირფიტის სწორ ზედაპირზე ნორმალურად ეცემა ბრტყელი ბგერითი ტალღა λ ტალღის სიგრძით. ფირფიტის მეორე მხარეს d მანძილზე განთავსებულია მიმმართველი, რომლის გასწვრივაც გადაადგილდება სენსორი. ავაგოთ კორნიუს სპირალი სენსორის სხვადასხვა მდგომარეობისათვის.

ტალღური ზედაპირი აზრობრივად დავყოთ N ელემენტარულ Δx სიგანის ზოლად, რომლებიც ფირფიტის სწორ ზედაპირზე. თითოეული მათგანი წარმოადგენს S_i სინათლის ელემენტარულ წყაროს. შვეისწავლოთ ინტენსივობის განაწილება OX' ღერძის გასწვრივ.



სურ.21.14. ა) დიფრაქცია ფირფიტის კიდეზე, ბ) ვექტორული დიაგრამა

რომელიმე $M(x')$ წერტილში ჯამური ინტენსივობა შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორული დიაგრამის საშუალებით, რომელიც მოსახერხებელია აგებულ იქნას კომპლექსურ სიბრტყეში. O წერტილიდან გავატაროთ \vec{a}_1 - ვექტორი, რომლის სიგრძეც ამპლიტუდის ტოლია, ხოლო φ_1 კუთხე, რომელსაც ეს ვექტორი ადგენს, ნამდვილ რიცხვთა ღერძთან არის S_1 წყაროს რხევის ფაზა. S_1 წყარო დაკვირვების წერტილში ქმნის \vec{a}_2 ვექტორს φ_2 ფაზით და ა.შ. \vec{a}_1 ვექტორის ბოლოს, პარალელური გადატანის მეთოდით, მოვდეთ \vec{a}_2 - ვექტორი, ამ უკანასკნელის ბოლოს \vec{a}_3 - ვექტორი და ა.შ. ვექტორული შუკრების გზით მივიღებთ კომპლექსურ ამპლიტუდას:

$$\dot{A} = a_1 + a_2 + \dots + a_N .$$

გამოვყოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$Re(\dot{A}) = \sum_{i=1}^N a_i \cos \varphi_i , \quad Im(\dot{A}) = \sum_{i=1}^N a_i \sin \varphi_i .$$

$M(x')$ – დაკვირვების წერტილში მიღებული ტალღის ამპლიტუდა იქნება:

$$A = \sqrt{Re(\dot{A})^2 + Im(\dot{A})^2} .$$

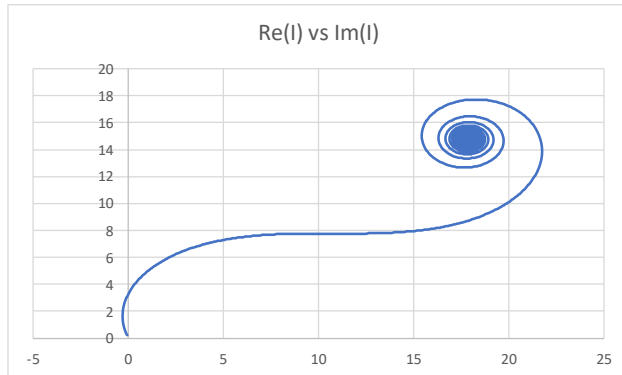
მაკროსის კოდს აქვს სახე:

```
Sub SPIRAL_KORNIU()
Pi = 3.1415: dx = 0.01: d = 5: lambda = 0.2: x1 = 2
For i = 1 To 6000
x = i * dx: l = Sqr(d * d + (x - x1) * (x - x1))
Re = Re + Cos(2 * Pi * l / lambda) * d / (l * l)
Im = Im + Sin(2 * Pi * l / lambda) * d / (l * l)
End Sub
```

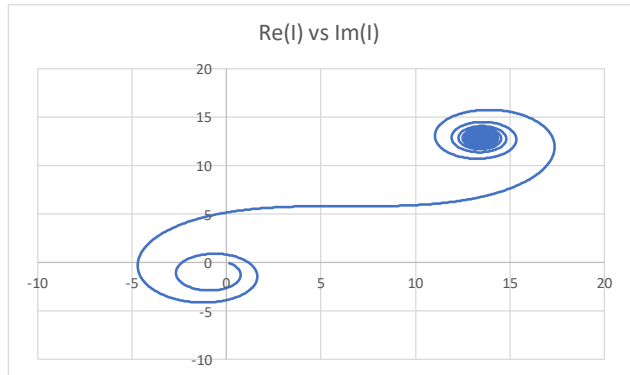
```

Cells(i, 1) = Re: Cells(i, 2) = Im
Next
End Sub

```



ა)



ბ)

სურ.21.15. კარნიუს სპირალი. ა) $d = 5, \lambda = 0.2, x' = 0.8$; ბ) $d = 5, \lambda = 0.2, x' = 1$

ამავე ამოცანაში შეიძლება დავთვალოთ ინტენსივობის განაწილება დაკვირვების წერტილში. დაკვირვების წერტილში მოსული ინტენსივობა პროპორციულია სუპერპოზიციის შედეგად მიღებული ტალღის ამპლიტუდის კვადრატის:

$$I = kA^2 = k \{ \text{Re}(A)^2 + \text{Im}(A)^2 \}.$$

სუპერპოზიციის შედეგად მიღებული კომპლექსური ამპლიტუდა მიიღება ცალკეული Δx_i ზოლიდან გამოსხივებული ამპლიტუდების ვექტორული ჯამით:

$$A = \sum_{i=1}^N \dot{a}_i \cos\left(\frac{\alpha_i}{l_i}\right) = \sum_{i=1}^N \left\{ \cos\left(\frac{2\pi l_i}{\lambda}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi l_i}{\lambda}\right) \right\} \cos\left(\frac{\alpha_i}{l_i}\right),$$

სადაც

$$l_i = \sqrt{d^2 + (x'_i - x_i)^2}$$

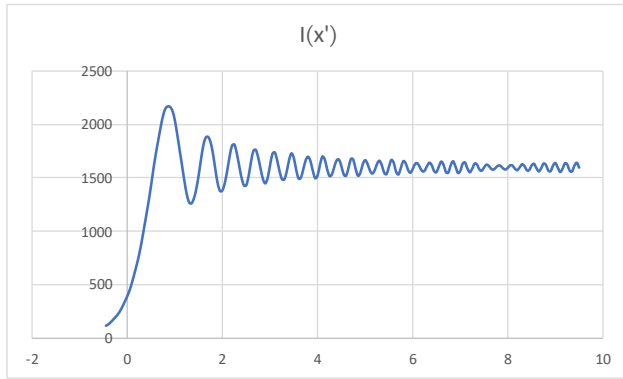
ცალკეული Δx_i ზოლიდან დაკვირვების $M(x')$ წერტილამდე სხივის მიერ განვლილი მანძილია.

დაკვირვების წერტილში ინტენსივობის განაწილების შესასწავლად მაკროსის კოდს აქვს სახე:

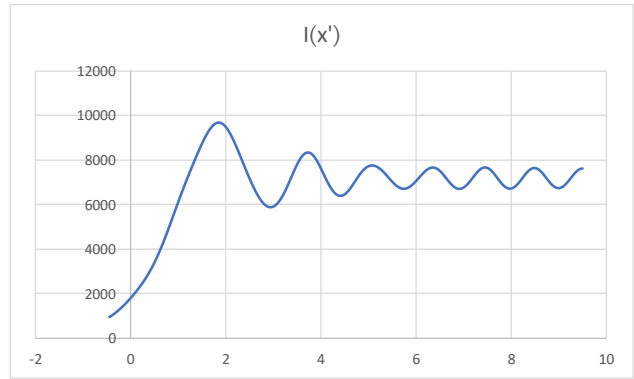
```

Sub Intensity_Korniu()
Pi = 3.1415: dx = 0.005: d = 5: lambda = 0.2: y = 1
For j = 1 To 200
y = j * 0.05 - 0.5: Re = 0: Im = 0
For i = 1 To 4000
x = i * dx: l = Sqr(d * d + (x - y) * (x - y))
Re = Re + Cos(2 * Pi * l / lambda) * d / (l * l)
Im = Im + Sin(2 * Pi * l / lambda) * d / (l * l)
S = Re * Re + Im * Im: Next
Cells(j, 1) = y: Cells(j, 2) = S: Next
End Sub

```



ა)



ბ)

სურ.21.16. ტალღების დიფრაქცია ფირფიტის კიდეზე. ა) $d = 5, \lambda = 0.2, x' = 1$; ბ) $d = 5, \lambda = 0.9, x' = 1$

ამოცანა 21.13. სიგნალის წარმოდგენა ფურიეს მწკრივად და მისი აღდგენა

ვთქვათ, დაბვა იცვლება კანონით $u(t) = |\cos(\omega t)|$. გავშალოთ დაბვის იმპულსები ფურიეს მწკრივად. აღვადგინოთ სიგნალი 2 და 23 ჰარმონიკების მიხედვით. ავაგოთ $u(t)$ გრაფიკი.

ფურიეს თეორემის თანახმად, პერიოდული $u(t)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი შესაკრების ჯამის სახით:

$$u(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\},$$

სადაც

$$u_0 = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \text{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n},$$

$$u_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt.$$

დავწეროთ მაკროსი, რომლითაც შეგვეძლება პერიოდული სიგნალი გავშალოთ ფურიეს მწკრივად.

Sub Furie()

harm_N = 30: Pi = 3.1415926: dt = 2 * Pi / 1000: Period = 2 * Pi

w = 2 * Pi / Period: 'Deffnn U(t) = Abs(10 * Sin(w * t))

For i = 1 To 1000

t = i * dt: U0 = U0 + Abs(Cos(w * t)) * dt: Next i

U0 = U0 / Period: Cells(1, 5) = U0

For n = 1 To harm_N

aa = 0: bb = 0

For i = 1 To 1000

t = i * dt: U = Abs(Cos(w * t))

aa = aa + U * Cos(n * w * t) * dt

Next i: a = 2 * aa / Period

For i = 1 To 1000

w = 2 * Pi / Period: U = Abs(Cos(w * t))

'{If t>Period/2 then U:=0 else U:=10;}

```

t = i * dt: bb = bb + U * Sin(n * w * t) * dt: Next i
b = 2 * bb / Period: Cells(n, 1) = a: Cells(n, 2) = b
Next n
End Sub

```

ამ მაკროსის შედეგად მიიღება რიცხვითი მონაცემები Excel-ის პირველ და მეორე სვეტში. ეს მონაცემები შეესაბამება a_n და b_n კოეფიციენტებს. მაშასადამე, პერიოდული სიგნალი ფურიეს მწკრივად გაშლილია.

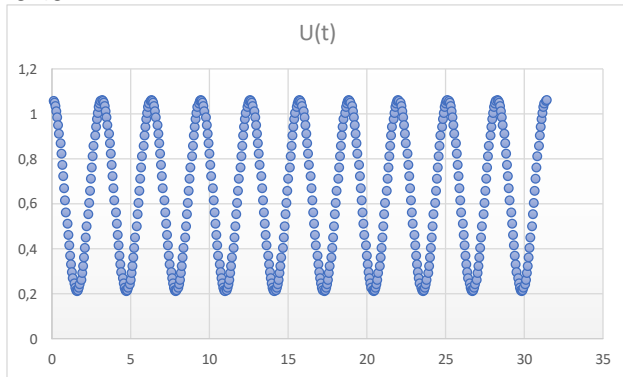
ამის შემდეგ აღვადგინოთ სიგნალი, რისთვისაც დავწეროთ მაკროსი:

```

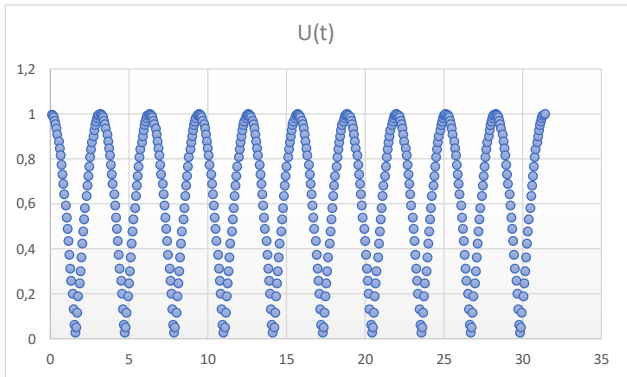
Sub upFurie()
harm_N = 23: Pi = 3.1415926
dt = 2 * Pi / 1000: Period = 2 * Pi
w = 2 * Pi / Period: U0 = Cells(1, 5)
For i = 1 To 500
t = i * dt * 10: UV = U0
For n = 1 To harm_N
a = Cells(n, 1): b = Cells(n, 2)
UV = UV + a * Cos(n * w * t) + b * Sin(n * w * t)
Next n: Cells(i, 3) = t: Cells(i, 4) = UV: Next i
End Sub

```

harm_N პარამეტრის ცვლილებით, შეიძლება, აღვადგინოთ სიგნალი 2 და 23 ჰარმონიკების მიხედვით.



ა)



ბ)

სურ.21.17. პერიოდული სიგნალის აღდგენა ჰარმონიკების რიცხვის მიხედვით: ა) $n = 2$, ბ) $n = 23$

ამოცანა 21.14. აბსოლუტურად შავი სხეული

ავაგოთ აბსოლუტურად შავი სხეულის სპექტრული განათებულობის სიხშირეზე დამოკიდებულება სხვადასხვა ტემპერატურისას.

აბსოლუტურად შავი სხეულის სპექტრული განათებულობის დამოკიდებულება სიხშირეზე მოიცემა პლანკის ფორმულით:

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)},$$

სადაც h - პლანკის მუდმივაა, T - შავი სხეულის აბსოლუტური ტემპერატურაა, ν - სიხშირეა. პლანკის ფორმულაში აბსოლუტური ტემპერატურა და სიხშირე წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$T' = T \frac{k}{h} \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3}, \quad \nu' = \nu \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3}.$$

პლანკის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$r(\nu', T') = \frac{2\pi h (\nu')^3}{e^{\frac{h\nu'}{kT'}} - 1}.$$

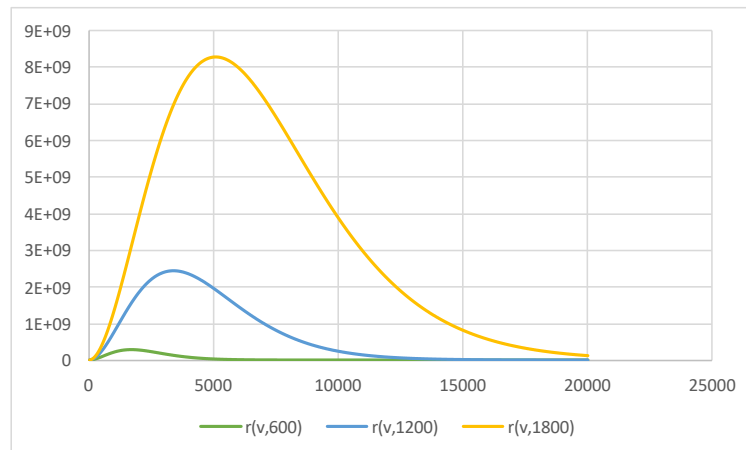
ამ ფორმულის მიხედვით დავწეროთ მაკროსის კოდი, ისე, რომ ტემპერატურა იცვლებოდეს $T' = 600, 1200, 1800$. მაკროსის კოდს აქვს შემდეგი სახე:

```

Sub Black()
For i = 1 To 3
T = 600 * i
For j = 1 To 1000
six = 20 * j: F = six * six * six / (Exp(six / T) - 1)
Cells(j, 1) = six: Cells(j, 1 + i) = F
Next: Next
End Sub

```

$r(\nu', T')$ დამოკიდებულებას სხვადასხვა ტემპერატურისათვის აქვს სურ.19.18-ზე მოცემული სახე.



სურ.21.18. $r(\nu', T')$ დამოკიდებულება აბსოლუტურად შავი სხეულისათვის

ამოცანა 21.15. რადიაქტიურობა

A იზოტოპი ნახევარდაშლის პერიოდით T_A დაშლის შემდეგ წარმოქმნის B იზოტოპს ნახევარდაშლის პერიოდით T_B . ავადგოთ იზოტოპების ატომების რიცხვის დამოკიდებულების გრაფიკები დროზე. ავადგოთ ორივე იზოტოპის ჯამური აქტივობის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. განვსაზღვროთ დროის ის მომენტი, როცა B იზოტოპის ატომების რიცხვი არის მაქსიმალური.

დავწეროთ რადიოდაშლის კანონი თითოეული იზოტოპისათვის:

$$N_A = N_{0A} e^{-\lambda_A t}, \quad N_B = N_{0B} e^{-\lambda_B t},$$

$$\lambda_A = \ln\left(\frac{2}{T_A}\right), \quad \lambda_B = \ln\left(\frac{2}{T_B}\right).$$

ვთქვათ, დროის რომელიმე მომენტში A იზოტოპში ატომების რიცხვი არის N_A , B იზოტოპში კი N_B . dt დროის შემდეგ დარჩენილი ატომების რიცხვი იქნება:

$$N_A(t + dt) = N_A(t)e^{-\lambda_A dt}, \quad N_B(t + dt) = N_B(t)e^{-\lambda_B dt}.$$

ამ დროს დაშლილი ატომების რიცხვი იქნება:

$$dN'_A(t + dt) = N_A(t) - N_A(t + dt) = N_A(t)[1 - e^{-\lambda_A dt}],$$

$$dN'_B(t + dt) = N_B(t) - N_B(t + dt) = N_B(t)[1 - e^{-\lambda_B dt}].$$

ამოცანის პირობის თანახმად, A იზოტოპის დაშლის შედეგად წარმოიქმნება B იზოტოპი. ამიტომ:

$$N_A(t + dt) = N_A(t) - dN'_A$$

$$N_B(t + dt) = N_B(t) - dN'_B + dN'_A.$$

რაც შეეხება ჯამურ აქტიურობას, ის გამოითვლება დროის მოცემულ მომენტში დაშლილი ატომების რიცხვით:

$$A(t) = \frac{dN'_A + dN'_B}{t}.$$

დავწეროთ კოდი იმ შემთხვევისათვის, როცა: $T_A = 5$ წთ, $T_B = 1$ სთ:

Sub Radioactivoba()

TA = 5 * 60: TB = 60 * 60: NA = 10000: dt = 10

lambdaA = 0.693 / TA: lambdaB = 0.693 / TB

While t < 2000

t = t + dt: i = i + 1

dNA = NA * (1 - Exp(-lambdaA * dt))

NA = NA - dNA: NB = NB + dNA - dNB

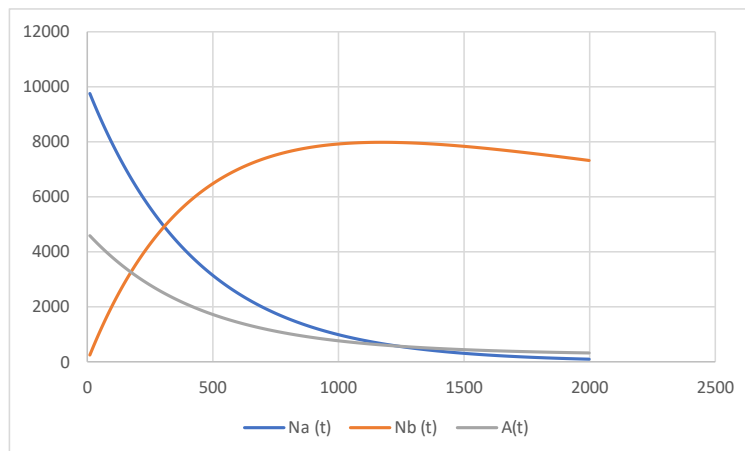
dNB = NB * (1 - Exp(-lambdaB * dt))

Cells(i, 1) = t: Cells(i, 2) = NA: Cells(i, 3) = NB

Cells(i, 4) = (dNA + dNB) * 200 / dt

Wend

End Sub



სურ.21.19. იზოტოპების დაშლილი ატომების რიცხვისა და ჯამური აქტივობის დამოკიდებულება დროზე

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] ღომიძე ნ., ღომიძე ხ. ფიზიკა. ბსუ, გამომცემლობა „ბათუმის უნივერსიტეტი“, ISBN 978-9941-434-38-9, 2013.
- [2] ღომიძე ნ., ჯაბნიძე ი. ფიზიკური პროცესების მოდელირება. აღიარებულია ბსუ-ს აკადემიური საბჭოს მიერ, დადგენილება №102, 23.07.2014
- [3] სინიკაძე თ., სურმანიძე ზ. Microsoft Excel. ბსუ, გამომცემლობა „ბათუმის უნივერსიტეტი“, ბათუმი, 2008.
- [4] Bernard V. Modelling physics with Microsoft Excel. Morgan & Claypool publishers, 2014
- [5] Physics Laboratory. Excel tutorials. Clemson University
- [6] Benacka J. Introduction to 3D graphics though Excel. Journal Informatics in Education, 2013, Vol.12, #2, 221-230
- [7] Богуславский А.А., Щеглова И.Ю. Моделирование физических процессов. Лабораторный практикум (методическая указания). Коломнаб 2002
- [8] Штейн Б.М. Моделирование физических процессов в Microsoft Excel. Физика, Мечфника. 2009
- [9] Майер Р.В. Решение Физических задач в электронных таблицах Excel. ISBN: 978-5-93008-211-1, 2016.

საძიებელი

- AVEDEV, - 46 -
AVERAGE, - 19 -, - 46 -
COUNT, - 45 -, - 46 -, - 57 -
Ctrl+Shift+Enter, - 56 -
FREQUENCY, - 49 -
IF, - 13 -, - 28 -, - 40 -, - 41 -, - 42 -, - 49 -, - 63 -, - 78
-
Insert Scatter, - 35 -
LINEST, - 55 -
MAX, - 35 -, - 78 -, - 113 -
OR, - 40 -, - 41 -
RAND, - 50 -
Scatter with Smooth line and Markers, - 35 -
STDEV, - 47 -, - 50 -
SUM, - 45 -, - 46 -
SUMM, - 57 -
SUMPRODUCT, - 57 -
SUMSQ, - 57 -
trendline, - 56 -
VBA (Visual Basic Application), - 97 -
აბსოლუტური ცდომილება, - 44 -
აბსოლუტურად შავი სხეული, - 117 -, - 118 -
აბსოლუტური მიმართება, - 8 -, - 12 -
ალფა-ნაწილაკი, - 60 -, - 61 -, - 62 -, - 64 -, - 65 -
გამოთვლის კრიტერიუმი, - 63 -
დამყარებული სიჩქარე, - 38 -
დაფინგის ქანქარა, - 4 -, - 100 -, - 101 -, - 102 -
ელიერის დაზუსტებული მეთოდი, - 37 -
ერთგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესი, - 10
-
ზამბარიანი ქანქარა, - 4 -, - 30 -, - 34 -, - 35 -, - 36
-, - 43 -, - 69 -, - 99 -
იზოტოპები, - 119 -
იძულებითი რხევები, - 4 -, - 73 -, - 76 -, - 99 -, -
100 -, - 101 -
კავშირის წინაღობა, - 93 -
კარნიუს სპირალი, - 5 -, - 113 -, - 115 -
კარნოს ციკლი, - 5 -, - 106 -, - 108 -
კრიტიკული წინაღობა, - 69 -, - 70 -
ლისაჟუს ფიგურები, - 98 -
ლოგიკური ფუნქციები, - 4 -, - 40 -, - 61 -, - 87 -, -
96 -
ლორენცის ატრაქტორი, - 5 -, - 103 -, - 104 -
მათემატიკური ქანქარა, - 4 -, - 20 -, - 21 -, - 22 -, -
30 -, - 88 -
მოხეტიალე მოლეკულა, - 5 -, - 104 -
ნახევარინტერვალთა მეთოდი, - 4 -, - 30 -, - 31 -,
- 33 -, - 35 -, - 37 -, - 38 -, - 60 -, - 70 -, - 73 -, - 74
-, - 86 -, - 94 -
ორგანზომილებიანი ფიზიკური პროცესი, - 25 -
პუნკარეს კვანძები, - 4 -, - 101 -, - 102 -
რადიაქტიურობა, - 5 -, - 118 -
რხევითი კონტური, - 68 -
საშუალო კვადრატული ცდომილება, - 47 -, - 51
-
საშუალოს სტანდარტული გადახრა, - 47 -
სითბური ბალანსი, - 66 -
სიხშირე, - 20 -, - 21 -, - 23 -, - 30 -, - 36 -, - 48 -, -
49 -, - 69 -, - 70 -, - 74 -, - 75 -, - 76 -, - 94 -, - 96 -,
- 98 -, - 99 -, - 111 -, - 117 -
სტანდარტული გადახრა, - 47 -
უმცირესი კვადრატების მეთოდი, - 4 -, - 52 -, -
54 -, - 55 -, - 56 -, - 58 -
ფარდობითი მიმართება, - 7 -
ფარდობითი ცდომილება, - 44 -
ფიზიკური ქანქარა, - 4 -, - 86 -, - 87 -
ფუკოს ქანქარა, - 4 -, - 88 -, - 90 -
ფუნქცია RADIANS, - 22 -
ფურიეს მწკრივი, - 5 -, - 116 -, - 117 -
შეკავშირებული რხევითი კონტურები, - 95 -
შერეული მიმართება, - 8 -
ჩამენებული ფუნქციები (built functions), - 7 -
ცვლადი მასის მქონე სხეულის მოძრაობა, - 66 -
ჰარმონიკები, - 116 -, - 117 -
ჰისტოგრამა, - 47 -, - 48 -

გამომცემლობის დირექტორი – ნანა ხახუტაიშვილი
გამომცემლობის რედაქტორი – გუნა სამნიძე
ტექნიკური რედაქტორი – ედუარდ ანანიძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 19.07.2023

ფიზიკური თაბახი 7.75

ტირაჟი 50