

510(075.8)

5-95

უმაღლესი მათემატიკა

ს. თოფჩია
ვ. სოჭოლაძე
მ. გაბიაშვილი
ნ. გაჭიაშვილი

- ჯერადი ინტეგრალები
- მწკრივები
- კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები

ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლაშვილი, მ. გაბიაშვილი,
ნ. მაჭარაშვილი

- ჯერადი ინფორმაციები
- მხარეები
- კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები

(თეორია და ამოცანათა კრებული)



საქართველოს რესპუბლიკის განათლების სამინისტრომ
ტრომ დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი
სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

22.11
510 (022) 58
თ. 776
5-35

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს შემდეგ საკითხებს: ჯერადი, წარითი და ზედაპირული ინტეგრირება, ველის თეორიის ელემენტები, მწკრივები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები და მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ელემენტები.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, კიბიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რ ე ე ნ წ ე ნ ტ ე ბ ი 1. საჭ. მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი

ვ. პაატაშვილი;

2. საჭ. მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგე, პროფესორი

ჭ. სანიკიძე.

წიგნის სტრუქტურა

წიგნი ერთერთი ნაწილია სახელმძღვანელოთა იმ სერიისა, რომელშიც, ავტორთა აზრით, უნდა შეადგინოს უმაღლესი მათემატიკის სრული კურსი (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის. იგი დაწერილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია თეორიული მასალა. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და საავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით.

წიგნის ბელწერი გულდასმით წაიკითხეს და სასარგებლო შენიშვნები მოგვცეს რეცენზენტებმა-საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერმა თინათინოშვილმა, პროფესორმა ვ. პაატაშვილმა, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგემ პროფესორმა ჯ. სანიკიძემ, რისთვისაც მათ ვუღწერველ მადლობას მოვასენებთ.

ავტორები

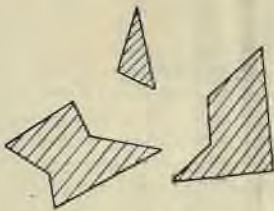
1602010000-604
T 155-92
M-603 (08)-92
ISBN 5-505-01207-08.

© ს. თოფური, ვ. ხოჭოლია,
მ. გაბიაშვილი

ჯერადი ინტეგრალი

§ 1. ფართობი ფიგურები

ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია, შრავალკუთხა ფიგურის ფართობის ცნება. შრავალკუთხა ფიგურა ეწოდება სახარლო რაოდენობის შრავალკუთხედების გაერთიანებას (ნახ. 1). შრავალკუთხა ფიგურის ფართობი



ნახ. 1

არის არაუარყოფითი რიცხვი და იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. თუ P და Q შრავალკუთხა ფიგურებია ანა ანა საერთო შიგნით წერტილები, მაშინ

$$|P \cup Q| = |P| + |Q|;$$

2. თუ P და Q შრავალკუთხა ფიგურებია და $P \subset Q$, მაშინ

$$|P| \leq |Q|;$$

3. თუ P და Q შრავალკუთხა ფიგურები ტოლია, მაშინ

$$|P| = |Q|.$$

შემოვიყვანოთ ახლა ფართობის ცნება ფიგურათა უფრო ფართო კლასისათვის.

* $|D|$ აღნიშნავს D ფიგურის ფართობს.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ბრტყელი D ფიგურა. განვიხილოთ ყველა ისეთი P შრავალკუთხა ფიგურები, რომელთაგან თითოეული მთლიანად ეკუთვნის D -ს ($P \subset D$), ასევე ყველა ისეთი შრავალკუთხა ფიგურები, რომელთაგან თითოეული მთლიანად მოიცავს D -ს ($Q \supset D$). ცხადია, რომ ნებისმიერი Q შრავალკუთხა ფიგურა შეიცავს ყოველ P ფიგურას. ამიტომ ნებისმიერი P და Q შრავალკუთხა ფიგურებისათვის

$$|P| \leq |Q|. \quad (1.1)$$

აღვნიშნოთ E -თი ყველა შესაძლო P შრავალკუთხა ფიგურების ფართობი სიმრავლე. ასევე, E' იყოს ყველა შესაძლო Q შრავალკუთხა ფიგურების ფართობთა სიმრავლე.

(1.1) უტოლობიდან ადვილად დატრფუნდებით, რომ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოთი, ხოლო E' სიმრავლე — ქვემოთი. ამიტომ E სიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი, ხოლო E' სიმრავლეს — ზუსტი ქვედა საზღვარი. ვთქვათ, $\underline{S} = \sup E$, $\overline{S} = \inf E'$. (1.1) უტოლობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\underline{S} \leq \overline{S}.$$

D ფიგურას ეწოდება ფართობად, თუ $\underline{S} = \overline{S}$. ამ შემთხვევაში

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.1. იმისათვის, რომ D ფიგურა იყოს ფართობადი, აუცილებელია და საკმარისი, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს $P \subset D$ და $Q \supset D$ შრავალკუთხა ფიგურები, ისეთი, რომ

$$|Q| - |P| < \varepsilon.$$

ფიგურის ფართობადობის ცნება მჭიდროდ არის დაკავშირებული ნულ ზომის სიმრავლის ცნებასთან.

სიმრავლეს, კერძოდ წირს, ეწოდება ნულ ზომის, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი შრავალკუთხედები, რომლის ფართობი ნაკლებია ε -ზე და რომელიც მთლიანად შეიცავს ამ სიმრავლეს, ასეთი სიმრავლის შესახებ ამბობენ, რომ მისი ფართობი ნულის ტოლია. ამ განსაზღვრების საფუძველზე თეორემა 1.1 შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება.

თეორემა 1.2. იმისათვის, რომ D ფიგურა იყოს ფართობადი, აუცილებელია და საკმარისი, ამ ფიგურის საზღვრის ფართობი იყოს ნულის ტოლი.

მტკიცდება, რომ ყოველი წრფევალი წირის ზომა ნულის ტოლია. ამიტომ თეორემა 1.2-ის ძალით ერთი ან რამოდენიმე წრფევალი წირით შემოსაზღვრული ყოველი ფიგურა ფართობადია.

მტკიცდება აგრეთვე, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციით განსაზღვრული წირის ფართობი ნულის ტოლია.

გამოძიწარე აქედან, თეორემა 1.2-ის ძალით ყოველი ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი ან რამოდენიმე უწყვეტი წირით, რომელთა განტოლებები მოიცემა $y=f(x)$ ფუნქციის სახით, ფართობადია მტკიცდება, რომ ფართობადი ფიგურებისათვის სპარტალიანა შემდეგი დებულებები:

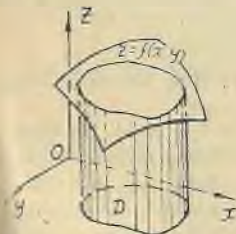
1. თუ D_1 და D_2 ფართობადი ფიგურებია, რომელთაც საერთო შიგა წერტილები არ გააჩნიათ, მაშინ მათი გაერთიანებაც ფართობადია და

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|.$$

2. თუ D_1 და D_2 ფართობადია, მაშინ მათი თანავეთაც ფართობადია.

§ 2. ამოცანები, რომელთაგან პირველი ორგვერდი ინტეგრალის ცნებად

1. ცილინდრული სხეულის მოცულობის გამოთვლა. ვთქვათ, Oxy სიბრტყის რაიმე ფართობად D არეზე მოცემულია უწყვეტი, არაუარყოფითი $f(x, y)$ ფუნქცია. განვიხილოთ სხეული, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=f(x, y)$ ზედაპირით, ქვემოდაც — D არით, ხოლო გვერდებიდან ცილინდრული ზედაპირით რომლის მსახველები Ox ღერძის პარალელურია, ხოლო მიმართველი წირია D არის საზღვარი, ასეთ სხეულს ცილინდრული სხეული ეწოდება (ნახ. 2).



ნახ. 2

ასმის კითხვა: რის ვერძოდით ცილინდრული სხეულის მოცულობა და როგორ გამოვთვალოთ იგი? ამ ამოცანის გადასაწყვეტად მოვიყენოთ შემდეგნაირად.

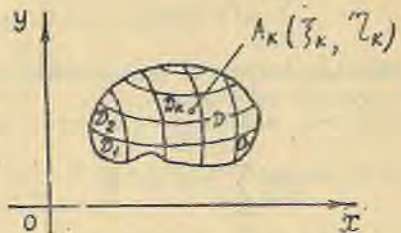
დავთოთ D არე n რაოდენობის $D_1, D_2, \dots, D_n$ ფართობად არეებად, რომელთა ფართობები შესაბამისად

$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (ნახ. 3). აღვნიშნოთ λ -ით $d_1, d_2, \dots, d_n$ რიკებს ზოლის უდიდესი, სადაც d_k წარმოადგენს D_k არის დიამეტრს, ე. ი.

$d_k = \sup_{A, B \in D_k} \rho(A; B), (k=1, 2, \dots, n)$, სადაც $\rho(A; B)$ არის მანძილი $A, B \in D_k$.

A და B წერტილებს შორის.

აჩეთა $D_1, D_2, \dots, D_n$ სისტემას უწოდებენ D არის λ დანაწილებას, ცხადია, რომ ყოველ λ რიკებს შესაბამის უბრალო λ -დანაწილება.



ნახ. 3

ყოველი D_k არიდან ავიღოთ ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი ($k=1, 2, \dots, n$) და შევიღვინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k. \quad (2.1)$$

ცხადია, ყოველი $f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$ ნამრავლი წარმოადგენს იმ მართი ცილინდრის მოცულობას, რომლის ფუტეა D_k და სიმაღლე $h_k=f(\xi_k, \eta_k)$, ხოლო (2.1) ჯამი — ყველა ასეთი ცილინდრებისაგან შედგენილი „საფუტე“ სხეულის მოცულობას.

თუ არსებობს (2.1) ჯამის V ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც D არის λ -დანაწილებაზე და არც $A_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილების შერჩევაზე, მაშინ V სიდიდეს ვერძოდით მოცემული ცილინდრული სხეულის მოცულობა. მაშასადამე

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k. \quad (2.2)$$

2. არაერთგვაროვანი ბრტყელი ფიგურის მასის გამოთვლა. განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ბრტყელი ფიგურა, რომელიც ძვეს Oxy სიბ-

ტყვის რაობე ფართობად D არეზე. ვთქვათ $Q(x, y)$ არის ფიგურის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია.

ფიგურის მასის გამოსათვლელად განვიხილოთ D არის λ დანაწილება $D_1, D_2, \dots, D_n$. ყოველ D_k არეზე ავიღოთ ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი ($k=1, 2, \dots, n$) და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

ეს ჯამი გვაძლევს ფიგურის მასის მიახლოებით მნიშვნელობას და იგი მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა λ .

ფიგურის მასის ზუსტ მნიშვნელობად დავუბნოთ ზღვარი

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

§ 2. ორგანული ინტეგრალის ცნება

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ სხვადასხვა შინაარსის ორივე ამოცანაში მივიყვანა D არეზე განსაზღვრულ ფუნქციაზე ერთიანივე მათემატიკური ოპერაციების ჩატარებამდე. ე. ი. სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების ამოხსნა მოითხოვს ერთიანივე სახის ჯამის ზღვრის გამოთვლას. შევისწავლოთ ასეთი ჯამის ზღვრის არსებობისა და გამოთვლის საკითხი.

ვთქვათ ფართობად D არეზე განსაზღვრულია $f(x, y)$ ფუნქცია. დავ- D არე n რაოდენობის $D_1, D_2, \dots, D_n$ ფართობად არეებად, რომელთა ფართობებია შესაბამისად $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$. აღვნიშნოთ λ -ით $d_1, d_2, \dots, d_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც d_k წარმოადგენს D_k არის დიამეტრს, ე. ი. $d_k = \sup_{A, B \in D_k} \rho(A, B)$, ($k=1, 2, \dots, n$). არეთი $D_1, D_2, \dots, D_n$

სისტემის ეწოდება D არის λ დანაწილება.

ყოველ D_k არეზე ავიღოთ ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k. \quad (3.1)$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება იგი დამოკიდებულია როგორც D არის λ დანაწილებაზე, ისე $A_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილების შერჩევაზე.

განსაზღვრება 3.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ D არის ნებისმიერი λ დანაწილებისათვის $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ წერტილებისათვის, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩაეწეროს $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

განსაზღვრება 3.2. თუ არსებობს (3.1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება ორგანული ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან I არეზე და იგი

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I \quad \text{ან} \quad \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (3.2)$$

სიმბოლოთი აღინიშნება.

(3.2) შემდეგნაირად იკითხება: „ორგანული ინტეგრალი D არეზე $f(x, y) dx dy$ ($f(x, y) d\sigma$)“. D არეს ეწოდება ინტეგრების არე, $f(x, y)$ -ს— ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, x და y ინტეგრების ცვლადებია, ხოლო $dx dy$ ($d\sigma$) — ფართობის ელემენტი.

ამრიგად, ორგანული ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან D არეზე წარმოადგენს (3.1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (3.2) ინტეგრალი, ამბობენ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის* აზრით D არეზე. შემდეგში, თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით D არეზე, სიმოქლისათვის ვიტყვი, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია D არეზე.

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ფართობად D არეზე, მაშინ, როგორც შემდგომში ენახავთ (იხ. თეორემა 3.1) არსებობს ორგანული ინ-

*ა. მ. ფ. რიმანი (1826-1866) — გერმანელი მათემატიკოსი.

ტერალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან D არეზე. ამიტომ (2.2) ტოლობით მოცემული ცილინდრული სხეულის V მოცულობისათვის გვაქვს:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

ამრიგად, ორგერადი ინტეგრალი D არეზე არაუარყოფითი ფუნქტორი $f(x, y)$ ფუნქციიდან უდრას იმ ცილინდრული სხეულის მოცულობას, რომელიც შემოიკმ შემოსაზღვრულია $z = f(x, y)$ ზედაპირით, ქვემოთ D არის, ხოლო გვერდებიდან-ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსაბველები Oz ღერძის პარალელურია, ხოლო მამართველი წირია D არის საზღვარი.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1. თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რაიმე არეზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ არეზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული D არეზე. განვიხილოთ D არის რაიმე λ დანაწილება და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

ცხადია, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული დანაწილების ერთ-ერთი არეზე მაინც. ვთქვათ, ეს არეა D_1 . მაშინ σ ინტეგრალური ჯამის $f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ შესაყრები შეიძლება გაეზარდოს ნებისმიერად დიდ, თუ (ξ_k, η_k) წერტილს შესაბამისად შევარჩევთ, თუ (ξ_k, η_k) , (ξ_{k+1}, η_{k+1}) , ..., (ξ_n, η_n) წერტილები დიფუსირებულია, მაშინ ინტეგრალური ჯამის დანარჩენი შესაყრებები მუდმივია. ამრიგად, (ξ_k, η_k) წერტილის შერჩევით ინტეგრალური ჯამი შეიძლება გაეზარდოს ნებისმიერად დიდ და ამიტომ ცხადია არ არსებობს მისი ზღვარი. ე. ი. $f(x, y)$ ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი D არეზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, იმისათვის, რომ ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი რაიმე ფართობად არეზე, აუცილებელია იგი იყოს შემოსაზღვრული ამ არეზე.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.1-ის შემზღუდველი თეორემა მართებული არ არის, ე. ი. ფუნქციის შემოსაზღვრულობა არ წარმოადგენს ინტეგრებადობის საკმარის პირობას.

მაგალითად, ადვილია ჩვენება, რომ $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ კვადრატზე განსაზღვრული ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ და } y \text{ რაციონალურია;} \\ 0, & \text{თუ } x \text{ ან } y \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

არ არის ინტეგრებადი.

ორგერადი ინტეგრალის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნულ ზომის D არეზე შემოსაზღვრული ყოველი $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ამ არეზე და

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0.$$

§ 4. ღერაუს* ჯამები, ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განვიხილოთ ფართობად D არეზე შემოსაზღვრული $f(x, y)$ ფუნქცია, ავიღოთ D არის რაიმე λ დანაწილება $D_1, D_2, \dots, D_n$, M_k და m_k იყოს შესაბამისად $f(x, y)$ ფუნქციის ზესტი ზედა და ქვედა საზღვრები D_k არეზე. ჯამებს

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta \sigma_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta \sigma_k$$

ეწოდებათ შესაბამისად $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები, ანუ ღერაუს ჯამები. ცხადია, რომ $\underline{\sigma} \leq \bar{\sigma}$.

ლემმა 1. ფართობად D არის მოცემული $D_1, D_2, \dots, D_n$ დანაწილების ყველა ან ზოგიერთი არის დაყოფით ფართობად ქვეარეებად, ღერაუს ქვედა ჯამი არ მცირდება, ხოლო ზედა ჯამი არ იზრდება.

დამტკიცება. საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც დანაწილების მხოლოდ ერთი არე დაყოფილია ორ არედ σ' და σ'' იყოს $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები D არის მოცემული დანაწილებისათვის, ხოლო $\bar{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$ ზედა და ქვედა ჯამები მიღებული ახალი დანაწილებისათვის. ვთქვათ D_k არე დაყოფილია D'_k და D''_k არეებად, რომელთა ფართობებია შესაბამისად $\Delta \sigma'_k$ და

* ვ. ს. ტონ დარბუ (1842-1917) — ფრანგი მათემატიკოსი.

$\Delta\sigma_k$. მაშინ σ' ზედა ჯამი მიიღება σ -გან, თუ მასში $M_k \Delta\sigma_k$ შესა-
კრებს შევცვლით ორი შესატყვისი ჯამით

$$M_k' \Delta\sigma_k' + M_k'' \Delta\sigma_k''$$

სადაც M_k' და M_k'' არის $f(x, y)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა საზღვრები შე-
სამაზისად D_k და D_k' არეებზე. ცხადია, რომ $M_k' \leq M_k$ და $M_k'' \leq M_k$.
ამიტომ

$$M_k' \Delta\sigma_k' + M_k'' \Delta\sigma_k'' \leq M_k (\Delta\sigma_k' + \Delta\sigma_k'') = M_k \Delta\sigma_k,$$

ვ. ი. $\sigma' \leq \sigma$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ შემცირდება, თუ
დანაწილების რომელიმე არეს დავეყოფთ ორ არედ.

ლემმა დამტკიცებულია.

ლემმა 2. არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება არცერთ ზედა ჯამს.
დამტკიცება. ვთქვათ, σ_1 არის მოცემული ფუნქციის ქვე-

და ჯამი D არის რამდენიმე $D_1, D_2, \dots, D_n$ დანაწილებისათვის, ხოლო σ_2 —მავე
ფუნქციის ზედა ჯამი D არის რამდენიმე $D_1', D_2', \dots, D_m'$ დანაწილებისათ-
ვის. σ_1 და σ_2 იყოს შესაბამისად ქვედა და ზედა ჯამები იმ დანაწილე-
ბისათვის, რომელიც მიიღება როგორც $D_1, D_2, \dots, D_n$ არეების რამდენიმე ქვე-
არეებად დაყოფით, ისევე $D_1', D_2', \dots, D_m'$ არეების ვარჯველ ქვეარეებად
დაყოფით. მაშინ ლემა 1-ის ძალით გვაქვს

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \bar{\sigma}_2 \leq \bar{\sigma}_1.$$

ლემმა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.1. ფართობად D არეზე $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგ-
რებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0.$$

გ. ი. ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი,
რომ D არის ნებისმიერი λ დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, ადგილი ჰქონდეს
უტოლობას

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \epsilon.$$

იუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს ინტეგრალი

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

მაშინ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი,
რომ D არის ნებისმიერი λ -დანაწილებისათვის, ადგილი ექნება უტო-
ლობას

$$|\bar{\sigma} - I| < \frac{\epsilon}{4}, \quad (4.1)$$

სადაც σ წარმოადგენს აღებული დანაწილების სათანადო ინტეგრალურ
ჯამს.

შევნიშნოთ, რომ მოცემული λ დანაწილებისათვის ისე შეიძლება შე-
ვარჩიოთ, (ξ_k, η_k) და (ξ_k', η_k') წერტილები ($k=1, 2, \dots, n$), რომ შესა-
ბამისი σ_1 და σ_2 ინტეგრალური ჯამებისათვის ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\bar{\sigma} - \sigma_1 < \frac{\epsilon}{4}, \quad \sigma_2 - \underline{\sigma} < \frac{\epsilon}{4}.$$

მართლაც, ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრების ძალით მოცემუ-
ლი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$
წერტილი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$0 \leq M_k - f(\xi_k, \eta_k) < \frac{\epsilon}{4\Delta\sigma_k}, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

სადაც $\Delta\sigma$ წარმოადგენს D არის ფართობს.

თუ ამ უტოლობებს გავამრავლებთ $\Delta\sigma_k$ -ზე და შევკრებთ, მივი-
ღებთ

$$0 \leq \bar{\sigma} - \sigma_1 < \frac{\epsilon}{4}.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ მეორე უტოლობის მართებულობას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ, როცა, $\lambda < \delta$, მაშინ (4.1) ის ძალით σ_1
და σ_2 ინტეგრალური ჯამებისათვის გვაქვს

$$|\sigma_1 - I| < \frac{\epsilon}{4}, \quad |\sigma_2 - I| < \frac{\epsilon}{4},$$

მივიღებთ

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} = \bar{\sigma} - \sigma_1 + \sigma_1 - I + I - \sigma_2 + \sigma_2 - \underline{\sigma} <$$

$$< |\bar{\sigma} - \sigma_1| + |\sigma_1 - I| + |I - \sigma_2| + |\sigma_2 - \underline{\sigma}| < \epsilon.$$

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არ-
სებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ D არის ნებისმიერი λ -დანაწილების,
 $\lambda < \delta$, სათანადო $\bar{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ ჯამებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \epsilon. \quad (4.2)$$

ლუმა 2-ის ძალით

$$\underline{\sigma} \leq \sup \{ \underline{\sigma} \} \leq \inf \{ \overline{\sigma} \} \leq \overline{\sigma},$$

საიდანაც (4.2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$0 < \inf \{ \underline{\sigma} \} - \sup \{ \underline{\sigma} \} \leq \overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

გ. ი.

$$\inf \{ \overline{\sigma} \} = \sup \{ \underline{\sigma} \}.$$

აღნიშნით

$$I = \inf \{ \overline{\sigma} \} = \sup \{ \underline{\sigma} \}.$$

რადგან

$$\underline{\sigma} \leq I \leq \overline{\sigma}, \quad \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma},$$

ამიტომ $|\sigma - I| < \varepsilon$, როცა $\lambda < \delta$, გ. ი.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I.$$

საქმარისობა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ფართობად D არეზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ფართობად ქვეარეზე.

მართლაც, ვთქვათ, $D' \subset D$. განვიხილოთ D არის ისეთი დანაწილება, რომლის ზოგიერთი არეების გაერთიანება გვაძლევს D' არეს. ცხადია,

ამ დროს მიიღება D' არის ვარკვეული დანაწილება $\underline{\sigma}$ და $\overline{\sigma}$ იყოს დარბუს ქამები D არისათვის, ხოლო $\underline{\sigma}_1$ და $\overline{\sigma}_1$ ასეთივე ქამები D' არისათვის.

რადგან ზედა და ქვედა ქამებს შორის სხვაობის ყოველი შესაყრები არაუარყოფითია, ამიტომ

$$0 \leq \underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} - \underline{\sigma}.$$

აქედან თეორემა 4.1-ის ძალით

$$\lim (\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}) = \lim (\overline{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0,$$

გ. ი. $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია D' არეზე.

§ 2. ინტეგრებად ფუნქციის ზოგადი კლასი

თეორემა 5.1. ჩაკეტილ ფართობად არეზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ არეზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ ფართობად D არეზე.

თიხად D არეზე. მაშინ კანტორის* თეორემის თანახმად ეს ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია მოცემულ არეზე. მაშასადამე, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიპოვდება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ D არის ყოველი $A(x', y')$ და $B(x'', y'')$ წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\rho(A; B) < \delta$, ადვილი ექნება უტოლობას

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\Delta \sigma}.$$

სადაც $\Delta \sigma$ წარმოადგენს D არის ფართობს.

თუ განვიხილავთ D არის ნებისმიერ λ დანაწილებას, $\lambda < \delta$, მაშინ

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{\Delta \sigma}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც M_k და m_k არის $f(x, y)$ ფუნქციის შესაბამისად უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა D_k არეზე. ვვაქვს

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta \sigma_k < \frac{\varepsilon}{\Delta \sigma} \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \varepsilon.$$

აქედან თეორემა 4.1-ის ძალით გამომდინარეობს $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა D არეზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.2. თუ ჩაკეტილ ფართობად არეზე შემოსაზღვრული ფუნქციის წვევების წერტილთა სიმრავლე სასრულოა, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამ არეზე.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის ვივარაუდოთ, რომ $f(x, y)$ ფუნქციის D არეზე აქვს წვევების მხოლოდ ერთი C წერტილი, განვიხილოთ C წერტილის ისეთი $\mu(C, \delta)$ მდამო, რომელიც D არეშია მოთავსებული. D არის λ დანაწილებისათვის, სადაც $\lambda < \delta$, შევადგინოთ $f(x, y)$ ფუნქციის დარბუს ქამების სხვაობა

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta \sigma_k.$$

შევივლით აღნიშვნა

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = P + R,$$

სადაც P არის $\overline{\sigma} - \underline{\sigma}$ სხვაობის იმ შესაყრებითა ჩამო, რომელთა შესაბამის

D_k არეებს არა აქვთ საერთო წერტილი C წერტილის δ -მდამოსთან, ხოლო R დანარჩენ შესაყრებითა ჩამო.

* ჯ. კანტორი (1845-1918) — გერმანელი მათემატიკოსი.

თუ M და m არის $f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები D არეზე, მაშინ ცხადია, რომ

$$R < \pi(\delta + \lambda)^2 (M - m) < 4\pi\delta^2 (M - m).$$

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია, შევარჩიოთ δ რიცხვი ისე, რომ

$$\delta^2 < \frac{\varepsilon}{8\pi(M-m)}.$$

მაშინ გვექნება

$$|\sigma - \sigma| < P + 4\pi\delta^2 (M - m) < P + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1)$$

ჩაღვინ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია C წერტილის δ მიდამოს გარეთ, ამიტომ იგი იქნება თანაბრად უწყვეტი. მაშასადამე, აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დაღებითი $\eta < \delta$ რიცხვი, რომ

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2\Delta\sigma}.$$

როდესაც $\rho(A(x', y'), B(x'', y'')) < \eta$, ნებისმიერი $A, B \in D - u(C, \delta)$ -თვის.

ამიტომ, თუ $\lambda < \eta$ გვექნება

$$P < \frac{\varepsilon}{2\Delta\sigma} (\Delta\sigma - \pi\delta^2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, (5.1)-დან ვღებულობთ

$$|\sigma - \sigma| < \varepsilon.$$

თეორემა 4.1-ის ძალით ეს კი ნიშნავს, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.3. თუ ჩაეტოვოთ ფართობად D არეზე შემოსაზღვრული $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველანაირად გარე წერტილთა ნულ ზომის სამრავლისა, მაშინ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე.

§ 6. ორგანული ინტეგრალის უმარტივესი თვისებები

1. თუ ფართობად D არეზე $f(x, y) = M = \text{const}$, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = M \cdot |D|. \quad (6.1)$$

დამტკიცება. D არის ნებისმიერი დანაწილებისათვის და ნებისმიერი (ξ_k, η_k) წერტილებისათვის გვაქვს

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = M \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = M |D|.$$

საიდანაც გამომდინარეობს (6.1) ტოლობა.

2. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია ფართობად D არეზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(x, y)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებალია D არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D Af(x, y) dx dy = A \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (6.2)$$

გ. ი. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გაითხროთ ორგანოთი ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

დამტკიცება. D არის ნებისმიერი დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n Af(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k = A \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მიიღება (6.2) ტოლობა.

3. თუ $f(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციები ინტეგრებალია ფართობად D არეზე, მაშინ მათი ჯამიც ინტეგრებალია D არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (6.3)$$

დამტკიცება. D არის ნებისმიერი დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n [f(\xi_k, \eta_k) + g(\xi_k, \eta_k)] \Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მიიღება (6.3) ტოლობა.

შედეგით. თუ $f(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციები ინტეგრებალია D არეზე, ხოლო A და B ნებისმიერი მუდმივებია, მაშინ $Af(x, y) + Bg(x, y)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებალია D არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D [Af(x, y) + Bg(x, y)] dx dy = A \iint_D f(x, y) dx dy + B \iint_D g(x, y) dx dy.$$

2. ს. თოფურაძე, გ. ზიკილაძე, 2. გიბიძევილი, 5. მკერაშვილი

ადგენია ჩვენება, რომ ეს თვისება მართებულია შესაქრება ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

4. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე და D არე დაყოფილია ფარგლებად D' და D'' არეებად, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x, y) dx dy + \iint_{D''} f(x, y) dx dy. \quad (6.4)$$

დამტკიცება. თეორემა 4.1-ის შედეგის ძალით $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D' და D'' არეებზე.

განვიხილოთ D' და D'' არეების რაიმე დანაწილებები $D'_1, D'_2, \dots, D'_n$ და $D''_1, D''_2, \dots, D''_m$ მაშინ, ცხადია $D'_1, D'_2, \dots, D'_n, D''_1, D''_2, \dots, D''_m$ წარმოადგენს D არის ვარკველ დანაწილებას. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^m f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k,$$

მაშინ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს, რომელიც შეესაბამება D არეს. ამ უკანასკნელ ტოლობა ი ზღვარზე გადასვლით, როცა $\lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ (6.4) ტოლობას.

ადგენია ჩვენება, რომ ეს თვისება სამართლიანია მაშინაც, როდესაც D არე დაყოფილია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ქვეარეებად.

5. თუ D არეზე ინტეგრებალია $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები განსხვავდება შემოსაზღვრული $\varphi(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობებისაგან წერტილთა მხოლოდ ნულ ზომის სიმრავლეზე, მაშინ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, f და φ ფუნქციები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან D_1 სიმრავლეზე, რომლის ზომა ნულის ტოლია. განვიხილოთ

ფუნქცია $g(x, y) = \varphi(x, y) - f(x, y)$, ე. ი. $g(x, y) \neq 0$ მხოლოდ D_1 სიმრავლეზე, $D_2 = D - D_1$ სიმრავლეზე $g(x, y) \equiv 0$. ცხადია, რომ

$$\iint_{D_1} g(x, y) dx dy = 0, \quad \iint_{D_2} g(x, y) dx dy = 0.$$

გამოვიღებთ აქედან, მე-4 თვისების ძალით

$$\iint_D g(x, y) dx dy = 0.$$

ამიტომ მე-3 თვისების თანახმად

$$\iint_D \varphi(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

შენიშვნა. ამ თვისებიდან ჩანს, რომ შემოსაზღვრული ფუნქციის ინტეგრებალობა და ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობს ფუნქცია ნულ ზომის სიმრავლეზე.

6. თუ $f(x, y)$ და $\varphi(x, y)$ ფუნქციები ინტეგრებალია D არეზე და ამ არეზე $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D \varphi(x, y) dx dy. \quad (6.5)$$

დამტკიცება. რადგან $\Delta \sigma_k > 0$, ამიტომ D არის ნებისმიერი λ დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k \leq \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავიღოთ ზღვარზე, როცა $\lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ დამატებით (6.5) უტოლობას.

შედეგი. თუ არაუარყოფითი $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

7. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალია D არეზე, მაშინ $|f(x, y)|$ ფუნქცია ივრდეთ ინტეგრებალი ამ არეზე და

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (6.6)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ D არის ნებისმიერი λ დანაწილება $D_1, D_2, \dots, D_k$.

M_k და m_k იყოს შესაბამისად $f(x, y)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი D_k არეზე, ხოლო M_k^* და $m_k^* = |f(x, y)|$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი ამავე არეზე. მაშინ ცხადია

$$M_k^* - m_k^* = \sup_{(x', y'), (x'', y'') \in D_k} |f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \sup_{(x', y'), (x'', y'') \in D_k} |f(x', y') - f(x'', y'')| = M_k - m_k.$$

$f(x, y)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ქამები D არეზე აღვნიშნოთ შესაბამისად $\bar{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$ -ით, ხოლო $|f(x, y)|$ ფუნქციის ზედა და ქვედა ქამები $\bar{\sigma}^*$ და $\underline{\sigma}^*$ -ით. D არეზე $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო თეორემა 4.1-ის ძალით გვაქვს

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{\sigma}^* - \underline{\sigma}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta \sigma_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta \sigma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0.$$

ყ. ი.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{\sigma}^* - \underline{\sigma}^*) = 0.$$

მასმალაზე, $|f(x, y)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია D არეზე. (6.6) უტოლობის პარათეზულობა გამოვლინარეობს

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$$

უტოლობიდან.

შენიშვნა. $|f(x, y)|$ ფუნქციის ინტეგრებადობიდან საზოგადოდ არ გამოვლინარეობს $f(x, y)$ ფუნქციის ინტეგრებადობა. მაგალითად, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ კვადრატზე განსაზღვრული ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ და } y \text{ რაციონალურია,} \\ -1, & \text{თუ } x \text{ ან } y \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

არ არის ინტეგრებადი D არეზე, თუმცა $|f(x, y)| \equiv 1$ ინტეგრებადი.

8. ვთქვათ, $f(x, y)$ არაუარყოფითი ფუნქცია ინტეგრებადი ჩაკტილ ფართობად D არეზე. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $M(x_0, y_0) \in D$ წერტილში და $f(M) > 0$, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy > 0.$$

დამტკიცება. $f(x, y)$ ფუნქციის M წერტილში უწყვეტობის გამო, არსებობს D არეში მოთავსებული ჩაკტილი ω არე, რომელიც შეიცავს M წერტილს და $f(x, y) > \frac{1}{2} f(x_0, y_0)$, როცა $(x, y) \in \omega$. ვნათადნ

$$\iint_{D-\omega} f(x, y) dx dy > 0,$$

ამიტომ მე-4, მე-6 და 1-ლი თვისებების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D-\omega} f(x, y) dx dy + \iint_{\omega} f(x, y) dx dy > \\ &> \iint_{\omega} f(x, y) dx dy > \frac{1}{2} f(x_0, y_0) |\omega| > 0. \end{aligned}$$

შედეგი. თუ არაუარყოფითი უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქციისათვის

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0,$$

მაშინ $f(x, y)$ იგივერად ნულის ტოლია D არეზე.

9. რაიმე არეზე ინტეგრებადი ორი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებადია ამ არეზე

დამტკიცება. ვთქვათ, $f(x, y) = \varphi(x, y) g(x, y)$, სადაც $\varphi(x, y)$ და $g(x, y)$ რაიმე D არეზე ინტეგრებადი ფუნქციებია. ამ ფუნქციების ინტეგრებადობიდან გამოვლინარეობს მათი შემოსაზღვრულობა D არეზე, ე. ი. არსებობს ისეთი A და B მუდმივები, რომ ნებისმიერი $(x, y) \in D$ -სათვის $|\varphi(x, y)| \leq A$ და $|g(x, y)| \leq B$.

განვიხილოთ D არის ნებისმიერი λ დანაწილება და აღვნიშნოთ M_k და m_k , M_k^* და m_k^* , M_k^* და m_k^* სიმბოლოებით შესაბამისად $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციების ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები D_k არეზე. D_k არის ნებისმიერი ორი (x', y') და (x'', y'') წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} |f(x', y') - f(x'', y'')| &= |\varphi(x', y') g(x', y') - \varphi(x'', y'') g(x'', y'')| = \\ &= |\varphi(x', y') g(x', y') - \varphi(x'', y'') g(x', y') + \varphi(x'', y'') g(x', y') - \\ &\quad - \varphi(x'', y'') g(x'', y'')| \leq B(M_k^* - m_k^*) + A(M_k^* - m_k^*). \end{aligned}$$

მასმალაზე

$$M_k - m_k \leq B(M_k^* - m_k^*) + A(M_k^* - m_k^*).$$

თუ $\bar{\sigma}$ და $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}'$ და $\underline{\sigma}'$, $\bar{\sigma}''$ და $\underline{\sigma}''$ არის შესაბამისად $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ და $g(x, y)$ ფუნქციების ზედა და ქვედა ჯამები D არეზე, მაშინ

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta \sigma_k \leq \\ &\leq B \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (M'_k - m'_k) \Delta \sigma_k + A \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (M''_k - m''_k) \Delta \sigma_k = \\ &= B \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma}' - \underline{\sigma}') + A \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma}'' - \underline{\sigma}'') = 0. \end{aligned}$$

3. ა. $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებალი D არეზე.

§ 7. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

თეორემა 7.1. თუ $f(x, y)$ და $g(x, y)$ ინტეგრებალი ფუნქციებია D არეზე და $g(x, y)$ ამ არეზე ნიშნის არ იცვლის, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = \mu \iint_D g(x, y) dx dy, \quad (7.1)$$

სადაც $m \leq \mu \leq M$, ხოლო M და m არის $f(x, y)$ ფუნქციის ზედატი ზედა და ქვედა საზღვარი D არეზე.

დამტკიცება. ვთვლით, რომ $g(x, y) \geq 0$, მაშინ

$$m' \leq f(x, y) \leq M$$

უტოლობიდან გვაქვს

$$m g(x, y) \leq f(x, y) g(x, y) \leq M g(x, y).$$

აქედან

$$m \iint_D g(x, y) dx dy \leq \iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy \leq M \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (7.2)$$

რადგან $g(x, y) \geq 0$, ამიტომ

$$\iint_D g(x, y) dx dy \geq 0.$$

თუ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, მაშინ (7.2)-დან

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = 0$$

და (7.1) ტოლობის მართებულობა ცხადია.

ახლა, ვთქვათ, ინტეგრალი $g(x, y)$ ფუნქციიდან დადებითია, მაშინ (7.2) უტოლობებიდან გვაქვს

$$m \leq \frac{\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy}{\iint_D g(x, y) dx dy} \leq M,$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\mu = \frac{\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy}{\iint_D g(x, y) dx dy}, \quad (7.3)$$

მაშინ (7.3)-დან მიიღება (7.1) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ ფართობად D არეზე, ხოლო $g(x, y)$ ანტივარიაციული ფუნქცია ნიშნის არ იცვლის D არეზე, მაშინ ამ არეში არსებობს ერთი მარცხ სიგითი (ξ, η) წერტილი, რომ იდგის აქვე ტოლობას

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (7.4)$$

შედეგი 2. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ ფართობად D არეზე, მაშინ ამ არეში არსებობს ერთი მარცხ სიგითი (ξ, η) წერტილი, რომ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) |D|.$$

ეს ტოლობა მიიღება (7.4) ტოლობიდან, თუ დავუშვებთ, რომ D არეზე $g(x, y) = 1$.

§ 8. ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

იავდაპირველად შემოვიყვანოთ განმეორებითი ინტეგრალის ცნება ორი ცვლადის ფუნქციისათვის. ვთქვათ,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

მართკუთხედზე მოცემული ისეთი $f(x, y)$ ფუნქცია, რომ ყოველი ფიქსირებული $x \in [a, b]$ -სათვის არსებობს ინტეგრალი

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

თუ $F(x)$ ფუნქცია თავის მხრივ ინტეგრირებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრალს

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx,$$

გწოდებთ განმეორებითი ინტეგრალი D მართკუთხედზე $f(x, y)$ ფუნქციიდან და იგი ჩვეულებრივად შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

შემოვიყვანოთ ახლა განმეორებითი ინტეგრალის ცნება, როდესაც ინტეგრირების საზღვრები ცვლია. ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $y = \varphi_1(x)$ და $y = \varphi_2(x)$ ფუნქციები, რომლებიც ლებელოვნ მნიშვნელობებს $[c, d]$ სეგმენტებიდან. მაშინ შეიძლება განვიხილოთ ინტეგრალი

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

ხოლო $F(x)$ ფუნქციის $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრირებადობის შემთხვევაში

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

განმეორებითი ინტეგრალი.

ანალოგიურად განისაზღვრება განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$$

თეორემა 8.1. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

მართკუთხედზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (8.1)$$

დამტკიცება. თეორემა 5.1-ის ძალით, რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეზე, ამიტომ იგი ინტეგრირებადი ამ არეზე. არსებობს აგრეთვე განმეორებითი ინტეგრალები

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

$$\text{რადგან } F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \text{ და } \Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

ფუნქციები უწყვეტია შესაბამისად $[a, b]$ და $[c, d]$ სეგმენტებზე (იხ. [57], თავი III, თეორემა 14.1).

D მართკუთხედის გვერდები დავყოთ n ნაწილად

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d,$$

და დაყოფს წერტილებზე გაავლოთ შესაბამისად Oy და Ox ღერძის პარალელური წრფეები. ამით D მართკუთხედი დაიყოფა Δ_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) მართკუთხედებად:

$$\Delta_{ik} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{k-1} \leq y \leq y_k\}.$$

ვთქვათ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $m_{ik} = \min_{\Delta_{ik}} f(x, y)$,

$$M_{ik} = \max_{\Delta_{ik}} f(x, y). \quad \text{ცხადია, რომ ყოველი } (x, y) \in \Delta_{ik} \text{-სათვის}$$

$$m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}.$$

თუ ამ უტოლობაში დავუშვებთ $x = \xi_i$, სადაც ξ_i არის $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი და მოვახდენთ ინტეგრირებას y ცვლილით y_{k-1} -დან y_k -მდე, მივიღებთ

$$m_{ik} \Delta y_k \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \Delta y_k. \quad (8.2)$$

(8.2) უტოლობების აჯამებით k ინდექსით 1-დან m -მდე გვექნება

$$\sum_{k=1}^m m_{ik} \Delta y_k \leq F(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik} \Delta y_k. \quad (8.3)$$

მიღებული უტოლობები გავამრავლოთ Δx_i -ზე და ავჯამოთ i ინდექსით 1-დან n -მდე:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \leq \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ik} \Delta x_i \Delta y_k.$$

ამ უტოლობებიდან მიიღება, რომ

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

ამოხსნა. რადგან $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ფუნქცია უწყვეტია D მართკუთხედზე, ამიტომ თეორემა 8.1-ის ძალით გვაქვს

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (x^2 + y^2 + 1) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^2 dx = \int_{-1}^1 \left(2x^2 + \frac{14}{3} \right) dx =$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{3}.$$

D არის ეწოდება წესიერი Oy ღერძის მიმართულებით, თუ ამ არის ნებისმიერ შიგა წერტილზე Oy ღერძის პარალელურად გავლებული წრფე D არის საზღვარს ჰყვეს ორ წერტილში.

ანალოგიურად განისაზღვრება Ox ღერძის მიმართულებით წესიერი არე.

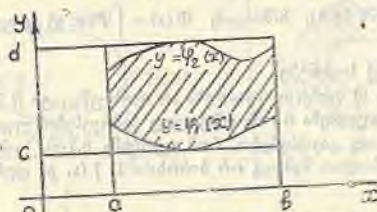
არეს ეწოდება წესიერი, თუ იგი წესიერია როგორც Ox ღერძის მიმართულებით ასევე Oy ღერძის მიმართულებით.

თეორემა 8.2. ვთქვათ Oy ღერძის მიმართულებით წესიერი D არე შემოსაზღვრულია $x=a$, $x=b$ წრფეებით, $a < b$, და $y=\varphi_1(x)$ $y=\varphi_2(x)$ უწყვეტი წირებით, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაკეტილ D არეზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8.3)$$

დამტკიცება. რადგან $y=\varphi_1(x)$ და $y=\varphi_2(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ მათ გააჩნიათ უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე. ვთქვათ $c = \min_{x \in [a, b]} \varphi_1(x)$ და $d =$

$= \max_{x \in [a, b]} \varphi_2(x)$. მაშინ D არე პოლიანდ პოლიედრულია $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ მართკუთხედში (ნახ. 4). ამ მართკუთხედზე



ნახ. 4

ვიზილით $F(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირად არის გან-
ღერებული

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{როდესაც } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{როდესაც } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

ცხადია, რომ $F(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია R მართკუთხედზე,
იგან იგი შეიძლება განიციდეს წყვეტის მხოლოდ ნულ ზომის სიმ-
ლეზე (თეორემა 5.3). ამასთან

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (8.4)$$

რადგან ნებისმიერი x -სათვის $F(x, y)$ ფუნქცია $[c, d]$ სეგმენტზე
ძლება განიციდეს წყვეტის მხოლოდ ორ წერტილში, ამიტომ
 $f(x, y)$ ინტეგრებადია $[c, d]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{aligned} \int_c^d F(x, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_3(x)} F(x, y) dy + \\ &+ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (8.6)$$

თან, რადგან $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია D არეზე, ამიტომ
(8.6) $= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x, y) dy$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე (იხ. [37],
 $\varphi_1(x)$

III, თეორემა 14.1). მაშასადამე $\Phi(x) = \int_c^d F(x, y) dy$ ფუნქცია ინ-

ტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

რადგან $F(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს უწყვეტი R მართკუთ-

ხედზე, ამიტომ თეორემა 8.1-ის უშუალოდ გამოყენების უფლება არა
ეს. თუმცა თუ გავიხსენებთ, რომ თეორემა 8.1-ის დამტკიცების
ას ეყრდნობოდა შემდეგ ორ პირობას: 1) $f(x, y)$ ფუნქცია ინ-

ტეგრებადია მოცემულ მართკუთხედზე; 2) $\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ფუნქ-

ქცია არსებობს და ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, (8.1) ფორმულის
გამოყენება მაინც შეგვიძლია, რადგან როგორც ზემოთ ვახვეთ ჩვენს
შემთხვევაში ორივე ეს პირობა შესრულებულია. ამრიგად, გვაქვს

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან (8.4) და (8.5) ტოლობების გათვალის-
წინებით მივიღებთ დასამტკიცებელ (8.3) ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

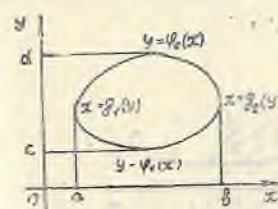
სავსებით ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგ თეორემა.

თეორემა 8.3. ვთქვათ Ox ღერძის მიმართულებით წესიერი D
არე შემოსაზღვრულია $y=c$, $y=d$ ($c < d$) წრფეებით და $x=g_1(y)$,
 $x=g_2(y)$ უწყვეტი წირებით, $g_1(y) < g_2(y)$.

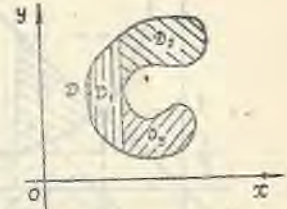
თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია ჩაერთი D არეზე, მაშინ ადგილი
აქვს ტოლობას

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx.$$

შენიშვნა 1. თუ D არე წესიერია (ნახ. 5), მაშინ ადგილი აქვს
როგორც (8.3) ასევე (8.6) ფორმულას. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ
მაგალითში შეიძლება ვისარგებლოთ იმ ფორმულით, რომელიც უფრო
მოსაზერებელია.



ნახ. 5



ნახ. 6

წესიერი არის შემთხვევაში ცხადია ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\xi_1(y)}^{\xi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (8.7)$$

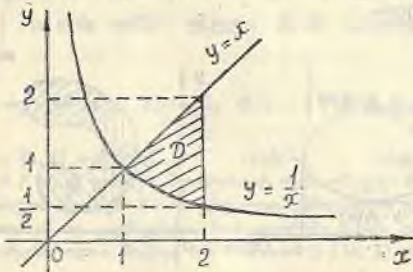
(8.7) ტოლობის ერთ-ერთი მხარის მეორეთი შეცვლას ეწოდება ინტეგრების რიგის შეცვლა განმეორებით ინტეგრალში.

შენიშვნა 2. ზოგჯერ D არე არ არის წესიერი არც Ox და არც Oy ღერძის მიმართულებით, ასეთ შემთხვევაში, თუ შესაძლებელია, D არე უნდა დაველოთ ისეთ არეებად, რომ თითოეული იყოს წესიერი Ox ან Oy ღერძის მიმართულებით. მაგალითად მე-6 ნახაზზე ასეთი არეებია D_1 , D_2 და D_3 .

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, სადაც D არე

შემოსაზღვრულია წირებით $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$.

ამოხსნა. ადვილი დასადგენია, რომ $x=2$ წრფე $y=x$ წრფეს ჰკვეთს (2;2) წერტილში, ხოლო $y=\frac{1}{x}$ ჰიპერბოლას $(2; \frac{1}{2})$ წერტილში, $y=x$ წრფე და $y=\frac{1}{x}$ ჰიპერბოლა კი იკვეთებიან (1;1) წერტილში (ნახ. 7). ცხადია, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია D არეზე,



ნახ. 7

ამიტომ (8.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

30

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{1/x}^x dx = \\ &= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

თუ ორჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (8.6) ფორმულას გვექნება

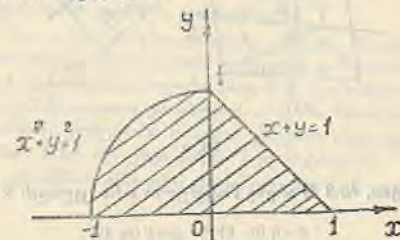
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_{1/2}^1 dy \int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{x^3}{3y^2} \Big|_{1/y}^2 dy + \int_1^2 \frac{x^3}{3y^2} \Big|_y^2 dy = \int_{1/2}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^3} \right) dy + \\ &+ \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

ცხადია მოცემული ინტეგრალის გამოსათვლელად უფრო მოსახერხებელია (8.3) ფორმულის გამოყენება.

მაგალითი 3. შევცვალოთ ინტეგრების რიგი განმეორებით ინტეგრალში

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

ამოხსნა. ინტეგრების საზღვრების მიხედვით ავაგოთ ინტეგრების არე (ნახ. 8). ინტეგრების



ნახ. 8

არე ზემოდან შემოსაზღვრული წირით

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{როცა } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & \text{როცა } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

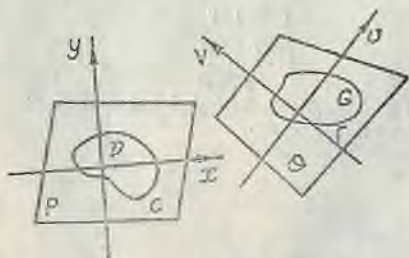
ამიტომ გვაქვს

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

§ 9. ცვლადთა გარდაქმნა ორგანურ ინტეგრალში

ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის დროს ხშირად მიზანშეწონილია ინტეგრების ცვლადთა გარდაქმნა. თავდაპირველად შემოვიყვანოთ ზოგიერთი დამხმარე ცნება.

ვთქვათ მოცემულია ორი სიბრტყე, რომელთაგან თითოეულზე აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა: x და y იყოს კოორდინატები პირველ სიბრტყეზე, ხოლო u და v — მეორე სიბრტყეზე. განვიხილოთ პირველ სიბრტყეზე რაიმე ჩაკეტილი D არე, ხოლო მეორე სიბრტყეზე ასევე ჩაკეტილი G არე. ამ არეთა საზღვრები აღვნიშნოთ შესაბამისად C -თი Γ -თი (ნახ. 9).



ნახ. 9

დავუშვათ, რომ G არეზე მოცემულია ორი ცვლადის ორი ფუნქცია

$$x = \varphi(u, v) \text{ და } y = g(u, v), \quad (9.1)$$

რითი, რომ როდესაც (u, v) წერტილი გაირბენს G არეს, მაშინ შესა-

ბამისი (x, y) წერტილი გაირბენს მიერ D არეს. ე. ი. (9.1) ფუნქციები განსაზღვრავენ G არის გარკვეულ ასახვას D არეში.

მოვიზოთვით, რომ ეს ასახვა აკმაყოფილებდეს შემდეგ სამ პირობას:

1) მოცემული ასახვა ურთიერთცალსახაა, ე. ი. G არის განსხვავებულ წერტილებს შეესაბამება D არის განსხვავებული წერტილები. ცხადია, (9.1) ტოლობები განსაზღვრავენ u და v -ს, როგორც x და y ცვლადების არაცხად ფუნქციებს (D არეზე):

$$u = \bar{\varphi}(x, y), \quad v = \bar{g}(x, y). \quad (9.2)$$

2) (9.1) ფუნქციები უწყვეტია და გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები G არეში.

3) ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

რომელსაც უწოდებენ იაკობის* დეტერმინანტს, ან (9.1) გარდაქმნის (ასახვის) იაკობიანს, განსხვავებულია ნულისაგან თავის განსაზღვრის არეში.

შენიშნოდ, რომ (9.2) ფუნქციები აგრეთვე უწყვეტია და გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი, კერძო წარმოებულები თავიანთ განსაზღვრის I არეში ([37], I თავი, თეორემა 20.4). ამასთან, შეიძლება ჩვენება, რომ

$$I(u, v) I(x, y) = 1,$$

საიდანაც გამოდინარეობს, რომ $I(x, y) \neq 0$ D არეში.

ცხადია, რომ $I(u, v)$ და $I(x, y)$ იაკობიანები უწყვეტია შესაბამისად G და D არეებში, რადგან (9.1) და (9.2) ფუნქციებს გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, ამიტომ ეს იაკობიანები ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს თავიანთ განსაზღვრის არეებში. პართალა, თუ რომელიმე იაკობიანი დებულობს როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობას, მაშინ იგი უნდა გახდეს ნულის ტოლიც.

ასეთი სახის გარდაქმნას უწოდებენ მოცემული არის უწყვეტ გარდაქმნას.

* კარლ გუსტავ იაკობი იაკობი (1804-1851) — გერმანელი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

შეიძლება ჩვენება, რომ უწყვეტი გარდაქმნის დროს, G არის უო-ველი შიგა წერტილით დასახეობა D არის შიგა წერტილში და პირიქით. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ერთი არის საზღვარი დასახეობა მეორე არის საზღვარში, ასევე G არის უბან-უბან გლუვი წირი დასახეობა D არის უბან-უბან გლუვი წირში და პირიქით.

მტკიცდება, რომ D არის S ფართობის გამოსათვლელად ადგილი იქვს ფორმულას (იხ. მეორე თავი, § 4)

$$S = \iint_G |I(u, v)| du dv. \quad (9.3)$$

ვთქვათ ახლა D არეზე მოცემულია უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქცია გან-ვიხილოთ D არის რაიმე λ დანაწილება $D_1, D_2, \dots, D_n$ და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k. \quad (9.4)$$

ჩაღვან $f(x, y)$ უწყვეტია D არეზე, ამიტომ იგი ინტეგრებადია ამ არე-ზე. ე. ი. არსებობს (9.4) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$ და

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (9.5)$$

$D_1, D_2, \dots, D_n$ არეების (9.2) გარდაქმნით მიღებული $G_1, G_2, \dots, G_n$ არე-ები გვძლევს G არის გარკვეულ λ_1 დანაწილებას. D_k არის $\Delta \sigma_k$ ფართობის გამოსათვლელად (9.3) ფორმულას გამოყენებით გვექნება

$$\Delta \sigma_k = \iint_{G_k} |I(u, v)| du dv, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

თუ ამ ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორ-მულას, მივიღებთ

$$\Delta \sigma_k = |I(\bar{u}_k, \bar{v}_k)| \Delta \sigma'_k, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

სადაც $(\bar{u}_k, \bar{v}_k)$ არის რაიმე წერტილი G_k აბოლან, ხოლო $\Delta \sigma'_k$ წარმოადგენს G_k არის ფართობს. ამ ტოლობის გათვალისწინებით (9.4) ინტეგრალური ჯამი მიიღებს სახეს

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) |I(\bar{u}_k, \bar{v}_k)| \Delta \sigma'_k.$$

ჩაღვან (ξ_k, η_k) წერტილი ნებისმიერად არის აღებული D_k აბოლან, ამიტომ იგი ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ $\xi_k = \varphi(\bar{u}_k, \bar{v}_k)$, $\eta_k = g(\bar{u}_k, \bar{v}_k)$, მაშინ σ_n ინტეგრალური ჯამი შემდგომარაოდ ჩაიწერება

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f[\varphi(\bar{u}_k, \bar{v}_k), g(\bar{u}_k, \bar{v}_k)] |I(\bar{u}_k, \bar{v}_k)| \Delta \sigma'_k. \quad (9.6)$$

(9.6) წარმოადგენს $F(u, v) = f[\varphi(u, v), g(u, v)] |I(u, v)|$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს G არეზე. ცხადია, რომ $F(u, v)$ ფუნქცია უწყვეტია G არეზე. ამიტომ იგი ინტეგრებადია ამ არეზე და

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \iint_G F(u, v) du dv. \quad (9.7)$$

D და G არეების განხილული გარდაქმნის უწყვეტობის გამო რო-დესაც $\lambda \rightarrow 0$, მაშინ $\lambda \rightarrow 0$ და პირიქით. ამიტომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma'_n.$$

ამ ტოლობიდან (9.5)-ის და (9.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f[\varphi(u, v), g(u, v)] |I(u, v)| du dv. \quad (9.8)$$

(9.8) ფორმულას უწოდებენ ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულას ორ-ქერად ინტეგრალში.

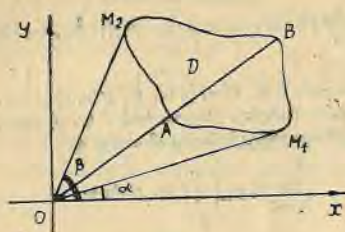
§ 10. ლეჟანდრის* გარდაქმნა ანთროპომორფიკული პოლარულ ანთროპომორფიკული კოორდინატების გამოყენებით

ვთქვათ, Oxy სიბრტყეზე მოცემულია ჩაკეტილი D არე, ისეთი, რომ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი წრფე, D არის საზღვარს კვეთს არა უმეტეს ორი წერტილისა. ჯერ განვიხილოთ შემ-თხვევა, როდესაც D არე არ შეიცავს კოორდინატთა სათავეს (ნახ. 10)

* ლეჟანდრე (1796-1850) — ფრანგი ფილოსოფოსი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და ფილოსოფი.

ბოგორც ცნობილია, დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (10.1)$$



ნახ. 10

α და β -თი აღვნიშნოთ D არის წერტილებისათვის φ კუთხის შესაბამისად უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა. M_1 და M_2 ყოფიან α -სა და β -ს შესაბამისი წერტილები D არის საზღვარზე. M_1 და M_2 წერტილები D არის საზღვარს ყოფენ ორ M_1AM_2 და M_1BM_2 რკალებად. ვთქვათ, ამ რკალების განტოლებებია შესაბამისად

$$\rho = \rho_1(\varphi), \quad \rho = \rho_2(\varphi).$$

(10.1) ტოლობებით D არე აისახება $O\rho\varphi$ სიბრტყის G არეში:

$$G = \{(\rho, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)\},$$

ხოლო ამ გარდაქმნის იაყოზიანია

$$I(\rho, \varphi) = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

რადგანაც D არე არ შეიცავს კოორდინატთა სათავეს, ამიტომ $I(\rho, \varphi) > 0$.

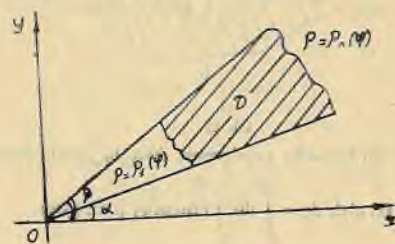
ახლა ვთქვათ, D არეში მოცემულია უწყვეტი $f(x, y)$ ფუნქცია, განვიხილოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

თუ ვისარგებლებთ ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის (9.8) ფორმულით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (10.2)$$

შევნიშნოთ, რომ (10.2) ფორმული მართებულია მაშინაც, როდესაც D არე შემოსაზღვრულია $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$) წირებით (ნახ. 11).



ნახ. 11

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც D არე შეიცავს კოორდინატთა სათავეს. ამ შემთხვევაში $I(\rho, \varphi)$ იაყოზიანია კოორდინატთა სათავეში ნულის ტოლია და, მაშასადამე, ორჯერად ინტეგრალში ცვლადთა გარდაქმნის ფორმულის გამოყენების უფლება საზოგადოდ არა გვაქვს. მოვიქცეთ შემდეგნაირად: განვიხილოთ ε რადიუსიანი ღია წრე $k_\varepsilon \subset D$ ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 12).

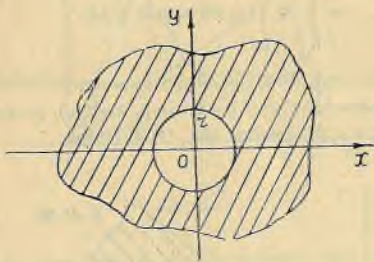
შევიღოთ აღნიშვნა $D_\varepsilon = D - k_\varepsilon$. k_ε წრის საზღვრის განტოლებით $\rho = \varepsilon$. მაშასადამე $\rho_1(\varphi) = \varepsilon$.

რადგან კოორდინატთა სათავე D არის შიგა წერტილი, ამიტომ

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

თუ D არის საზღვრის განტოლება $\rho = \rho(\varphi)$, მაშინ (10.2) ფორმულის მიხედვით, გვაქვს

$$\iint_{D_e} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

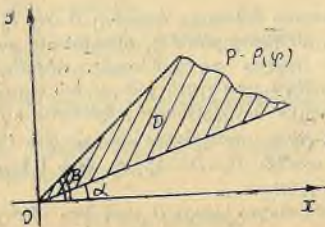


ნახ. 12

ამ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\epsilon \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (10.3)$$

ანალოგიურად შეიძლება ვახევნოთ, რომ, თუ კოორდინატა სათავე მოთავსებულია D არის საზღვარზე (ნახ. 13), მაშინ ადგილი აქვს ფორმულას



ნახ. 13

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (10.4)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\iint_D z^{x^2+y^2} dx dy,$$

სადაც D არის ერთეულწრივის წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

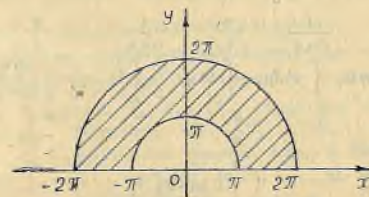
ამოხსნა. რადგან კოორდინატთა სათავე ეკუთვნის D არეს და $\rho(\varphi) = 1$, ამიტომ (10.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} \iint_D z^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z^{\rho^2} \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 z^{\rho^2} \rho d\rho = \pi z^{\rho^2} \Big|_0^1 = \pi(z-1). \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy,$$

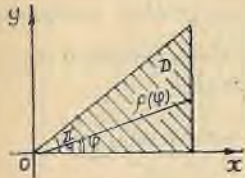
სადაც D წარმოადგენს $\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2$ რგოლის ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძის ზემოთ (ნახ. 14).



ნახ. 14

ამოხსნა. რადგან კოორდინატთა სათავე არ ეკუთვნის D არეს, ამიტომ გამოვიყენოთ (10.2) ფორმულა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha=0$, $\beta=\pi$, $\rho_1(\varphi)=\pi$, $\rho_2(\varphi)=2\pi$ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi d\varphi \int_\pi^{2\pi} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_\pi^{2\pi} \rho^2 d\rho = \pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_\pi^{2\pi} = \\ &= \frac{\pi}{3} (8\pi^3 - \pi^3) = \frac{7}{3} \pi^4. \end{aligned}$$



ნახ. 15

სადაც D არის $y=0$, $y=x$, $x=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული სამკუთხედი (ნახ. 15).

ამოხსნა. რადგან კოორდინატთა სათავე ეკუთვნის D არის საზღვარს, ამიტომ გამოვიყენოთ (10.4) ფორმულა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\rho(\varphi)=\frac{1}{\cos \varphi}$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \iint_D y(x^2+y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho \sin \varphi (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho^4 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cdot \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos^5 \varphi} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos \varphi)}{\cos^5 \varphi} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

§ 11. სამკერადი ინტეგრალი

1. მოცულობადი არეები. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე შეკრული S ზედაპირი, რომელიც ყოფს მთელ სივრცეს ორ სხვადასხვა D და D' არედ. დავუღიწოთ, რომ D წარმოადგენს ზედაპირის მიერ შემოსაზღვრულ არეს. მაშინ D და D' არეებს უწოდებენ შესაბამისად შიგნით და გარე არეებს. განვიხილოთ ყველა ისეთი P მრავალწახნაგები, რომელთაგან თითოეული მთლიანად ეკუთვნის D -ს ($P \subset D$), ასევე ყველა ისეთი Q მრავალწახნაგები, რომელთაგან თითოეული მთლიანად მდებარეობს D -ს ($Q \subset D$). ცხადია, რომ ნებისმიერი Q მრავალწახნაგის შიგნით ყოველ P მრავალწახნაგს, ამიტომ ნებისმიერი P და Q მრავალწახნაგებისათვის

$$|P| \leq |Q|. \quad (11.1)$$

სადაც $|P|$ და $|Q|$ არის შესაბამისად P და Q მრავალწახნაგების მოცულობა.

აღვნიშნოთ E -თი ყველა შესაძლო P მრავალწახნაგების მოცულობათა სიმრავლე. ასევე E' იყოს ყველა შესაძლო Q მრავალწახნაგების მოცულობათა სიმრავლე.

(11.1) უტოლობიდან ადვილად დავრწმუნდებით, რომ E სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო E' სიმრავლე ქვემოდან. ამიტომ E სიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი, ხოლო E' სიმრავლეს — ზუსტი ქვედა საზღვარი. ვთქვათ $\bar{V} = \sup E$, $\underline{V} = \inf E'$. (11.1) უტოლობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ

$$\underline{V} \leq \bar{V}.$$

D არეს ეწოდება მოცულობადი, თუ $\underline{V} = \bar{V}$. ამ შემთხვევაში $V = \underline{V} = \bar{V}$ რიცხვს ეწოდება D არის მოცულობა.

2. სამკერადი ინტეგრალის განსაზღვრება და თვისებები. ვთქვათ მოცულობადი V არეზე განსაზღვრულია $f(x, y, z)$ ფუნქცია. დავუთვოთ V არე n რაოდენობის $V_1, V_2, \dots, V_n$ მოცულობად არეებად, რომელთა მოცულობებია შესაბამისად $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. აღვნიშნოთ λ -ით $d_1, d_2, \dots, d_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც d_k წარმოადგენს V_k არის დიამეტრს, ე. ი. $d_k = \sup_{A, B \in V_k} |AB|$, ($k=1, 2, \dots, n$). ანუ $V_1, V_2, \dots, V_n$ სისტემის ეწოდება V არის λ -დანაწილება.

ყოველი V_k არიან ავილი ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილი და შევიღებოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k. \quad (11.2)$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება, იგი დამოკიდებულია როგორც V არის λ -დანაწილებაზე, ისე $A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილების შერჩევაზე.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ე ბ ა 11.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ V არის ნებისმიერი λ -დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი $A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in V_k$ წერტილებისათვის, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩაეწერათ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ე ბ ა 11.2. თუ არსებობს (11.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება სამკერადი ინტეგრალი $f(x, y, z)$ ფუნქციიდან V არეზე და იგი

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \text{ ან } \iiint_V f(x, y, z) dv$$

სიმბოლოთი აღინიშნება.

ამრიგად, სამკერადი ინტეგრალი $f(x, y, z)$ ფუნქციიდან V არეზე წარმოადგენს (11.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k. \quad (11.3)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (11.3) ინტეგრალი, ამბობენ, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია მოცულობად V არეზე. მტკიცდება

რომ, თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია მოცულობად V არეზე, მაშინ არსებობს სამკერადი ინტეგრალი $f(x, y, z)$ ფუნქციიდან V არეზე. მტკიცდება აგრეთვე, რომ რაიმე არეზე ინტეგრებადი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ არეზე.

მოვიყვანოთ სამკერადი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები, რომლებიც ისევე მტკიცდება, როგორც ორკერადი ინტეგრალის შემთხვევაში.

1. თუ მოცულობად V არეზე $f(x, y, z) = M = \text{const}$, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = m |V|. *$$

2. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია მოცულობად V არეზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(x, y, z)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია V არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iiint_V Af(x, y, z) dv = A \iiint_V f(x, y, z) dv,$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გაეიტანოს სამკერადი ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

3. თუ $f(x, y, z)$ და $g(x, y, z)$ ფუნქციები ინტეგრებადია მოცულობად V არეზე, მაშინ მათი ჯამიც ინტეგრებადია V არეზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dv = \iiint_V f(x, y, z) dv + \iiint_V g(x, y, z) dv.$$

4. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია V არეზე და V არე დაყოფილია მოცულობად V' და V'' არეებად, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V'} f(x, y, z) dv + \iiint_{V''} f(x, y, z) dv.$$

* $|V|$ აღნიშნავს V არის მოცულობას.

5. თუ $f(x, y, z)$ და $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციები ინტეგრებალია V არეზე და ამ არეზე $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) dv \leq \iiint_V \varphi(x, y, z) dv.$$

6. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებალია V არეზე, მაშინ $|f(x, y, z)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებალია ამ არეზე და

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dv.$$

7. რაიმე არეზე ინტეგრებალი ორი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებალია ამ არეზე.

8. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა. სამყარაო ინტეგრალისათვის ადგილი აქვს საშუალო მნიშვნელობის შემდეგ თეორემას.

თეორემა 11.1. თუ $f(x, y, z)$ და $g(x, y, z)$ ინტეგრებალი ფუნქციებია V არეზე და $g(x, y, z)$ ამ არეზე ნიშნის არ იცვლის, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) g(x, y, z) dv = \mu \iiint_V g(x, y, z) dv,$$

სადაც $m \leq \mu \leq M$, ხოლო M და m არის $f(x, y, z)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი V არეზე.

შედეგი 1. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია მოცულობად V არეზე, ხოლო $g(x, y, z)$ ინტეგრებალი ფუნქცია ნიშნის არ იცვლის V არეზე, მაშინ ამ არეში არსებობს ერთი მარცხეთი (ξ, η, ζ) წერტილი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iiint_V f(x, y, z) g(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) \iiint_V g(x, y, z) dv.$$

შედეგი 2. თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია მოცულობად V არეზე, მაშინ ამ არეში არსებობს ერთი მარცხეთი (ξ, η, ζ) წერტილი, რომ

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) |V|.$$

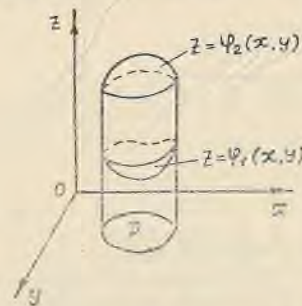
4. სამყარაო ინტეგრალის გამოთვლა. მოვიყვანოთ ახლა სამყარადი ინტეგრალის გამოსათვლელი ფორმულა. ვთქვათ, Oxy სიბრტყეზე

მოცემულია მარტივი წირით შემოსაზღვრული D არე და ვივარსებოთ, რომ $z = \varphi_1(x, y)$ და $z = \varphi_2(x, y)$ ფუნქციები უწყვეტია ამ არეში. ამის გარდა დავუშვათ რომ $\varphi_1(x, y) < \varphi_2(x, y)$. ახლა განვიხილოთ რაიმე V არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $z = \varphi_1(x, y)$, $z = \varphi_2(x, y)$ ზედაპირებით და ცილინდრული ზედაპირით Oz ღერძის პარალელური მსახვევებით, რომლის შიშვართველი წირი D არის საზღვარია (ნახ. 16). თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია V არეში, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

თუ D არე შემოსაზღვრულია უწყვეტი წირებით $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, $(g_1(x) \leq g_2(x))$ და $x = a$, $x = b$ წრფეებით, მაშინ

$$\int_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$



ნახ. 16

და მაშასადამე

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (11.4)$$

თუ V არე პარალელპიპედილი:

$$V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq h\}.$$

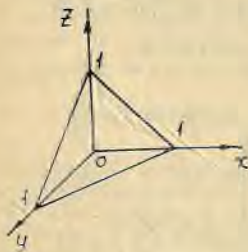
მაშინ (11.4) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z) dz.$$

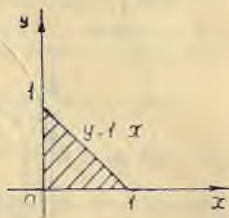
მაგალითი 1. გამოთვალეთ $\iiint_V z dx dy dz$, სადა V არე შემოსა-

ზღვრული სიბრტყეებით $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

ამოხსნა. V არე ქვემოთა და ზემოთა შემოსაზღვრულია შესაბამისად სიბრტყეებით $z=0$ და $z=1-x-y$ (ნახ. 17). ცხადია V არის გვერდილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფეებით $x=0$, $y=0$, $y=1-x$ (ნახ. 18).



ნახ. 17



ნახ. 18

ამიტომ (11.4) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

5. ცვლადთა გარდაქმნა სამკერად ინტეგრალში. ვთქვათ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია ჩაკეტილი V არე, ხოლო $O'uvw$ კოორდინატთა სისტემაში ასევე ჩაკეტილი V' არე.

დავუშვათ, რომ V' არეზე მოცემულია სამი ცვლადის სამი ფუნქცია

$$x=\varphi_1(u, v, w), \quad y=\varphi_2(u, v, w), \quad z=\varphi_3(u, v, w), \quad (11.5)$$

ისეთი, რომ, როდესაც (u, v, w) წერტილი გაირბენს V' არეს, მაშინ შესაბამისი (x, y, z) წერტილი გაირბენს მთელ V არეს. ე. ი. (11.5) ფუნქციები განსაზღვრავენ V არის გარკვეულ ასახვას V არეში.

მოვიზოთ, რომ ეს ასახვა აკმაყოფილებდეს შემდეგ სამ პირობას:

- 1) მოცემული ასახვა ურთიერთცალკეა.
- 2) (11.5) ფუნქციები უწყვეტია და გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები V არეში.
- 3) ფუნქციონალური დეტერმინანტი

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

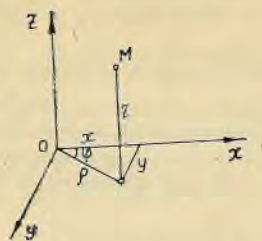
როგორცაც უწოდებენ (11.5) გარდაქმნის იაკობიანს, განსხვავებული ნულისაგან თავის განსაზღვრის არეში.

ისევე, როგორც ორჯერადი ინტეგრალის შემთხვევაში, მტკიცდება, რომ, თუ $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ სამკერადი ინტეგრალისათვის ადგილი აქვს ცვლადთა გარდაქმნის შემდეგ ფორმულას

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \times J(u, v, w) du dv dw. \quad (11.6)$$

6. ცილინდრული კოორდინატები. თუ Oxy სიბრტყეზე $M(x, y, z)$ წერტილის x, y დეკარტის კოორდინატების ნაცვლად შემოვიღებთ ρ, φ პოლარულ კოორდინატებს, ხოლო z აბსცისას უცვლელად დავ-

ტოვებთ (ნახ. 19), მივიღებთ M წერტილის უ. წ. ρ , φ , z ცილინდრულ კოორდინატებს.



ნახ. 19

ცილინდრული კოორდინატები დაკავშირებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებთან შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z, \\ (\rho > 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & -\infty < z < +\infty). \end{aligned} \quad (11.7)$$

გამოვთვალოთ (11.7) გარდაქმნის იაკობიანი

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

ცილინდრული კოორდინატებისათვის (11.6) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

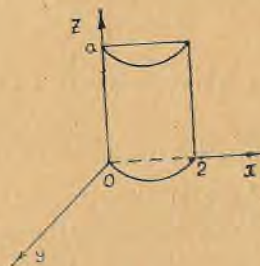
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (11.8)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz$, სადაც V

არე მოცემულია უტოლობებით $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, 0 \leq z \leq a$ (ნახ. 20).

ამოხსნა. რადგან $y = \sqrt{2x - x^2}$ განტოლების ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე $\rho = 2 \cos \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), ამიტომ (11.8) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz &= \iiint_V \rho^2 z d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^a z dz = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = 4 \frac{a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \frac{8a^2}{9}. \end{aligned}$$



ნახ. 20



ნახ. 21

7. სფერული კოორდინატები. M წერტილის მდებარეობა სფერულში ცალსახად განისაზღვრება, თუ მოცემულია ρ მანძილი კოორდინატთა სათავედან ამ წერტილამდე ($0 \leq \rho < +\infty$), θ კუთხე OM რადიუს-ვექტორსა და Oz ღერძის დიდებით მიმართულებას შორის ($0 \leq \theta \leq \pi$) და φ კუთხე ($0 \leq \varphi < 2\pi$) Oxy სიბრტყეზე OM რადიუს-ვექტორის OM_1 გვეგმილსა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის (ნახ. 21).

ρ , θ , φ კოორდინატებს ეწოდებათ M წერტილის სფერული კოორდინატები. ნახაზიდან ჩანს, რომ M წერტილის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები დავაწვრივებულია სფერულ კოორდინატებთან შემდეგი ფორმულებით:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (11.9)$$

გამოვთვალოთ (11.9) გარდაქმნის იაკობიანი

$$I(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

სფერული კოორდინატებისათვის (11.6) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_V f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (11.10)$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, სადაც V არე

შემოსაზღვრულია $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედა ნახევრით.

ამოხსნა. თუ ვაღივალთ სფერულ კოორდინატებზე, მაშინ ცხადია, რომ $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. ამიტომ (11.10) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_V \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

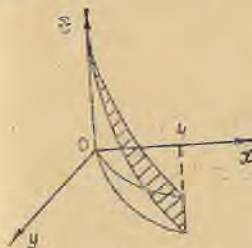
§ 12. უმაღლი ინტეგრალის უზიარბოი პაოოაოაოა

1. ცილინდრული სხეულის მოცულობის გამოთვლა. როგორც ვიცით (იხ. § 3), იმ ცილინდრული სხეულის მოცულობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია Oxy სიბრტყეზე მდებარე ფართობი D არით, ზემოდან $z = f(x, y) \geq 0$ ზედაპირით, ხოლო გვერდებიდან ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია და მიმმართველი წირია D არის საზღვარი, გამოითვლება ფორმულით

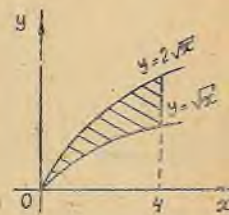
$$v = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (12.1)$$

მაგალითი 1. ვიპოოთ $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

ამოხსნა. მოცემული სხეული წარმოადგენს ცილინდრულ სხეულს, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $x + z = 4$ სიბრტყით, ქვემოდაც $z = 0$ სიბრტყით, ხოლო გვერდებიდან $y = \sqrt{x}$ და $y = 2\sqrt{x}$ ცილინდრული ზედაპირებით (ნახ. 22. ა). ინტეგრების D არე ნახევრებია 22, ბ) ნახაზზე.



ნახ. 22, ა)



ნახ. 22, ბ)

(12.1) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$\begin{aligned} v &= \iint_D (4-x) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x) dy = \int_0^4 (4-x) (2\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx = \\ &= \int_0^4 (4-x) \sqrt{x} dx = \left(4 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

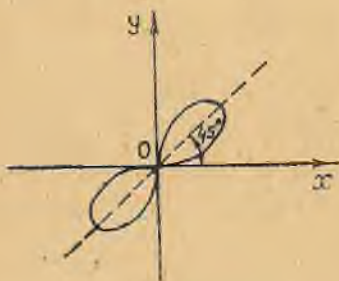
2. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა. ორჯერადი ინტეგრალის პირველი თვისებიდან (იხ. §6) გამოდინარეობს, რომ ფართობადი ბრტყელი D ფიგურის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \iint_D dx dy.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ($a > 0$) ლემნისკატის მთელ შემოსაზღვრული D არის ფართობი.

ამოხსნა. ლემნისკატს აქვს 23-ე ნახევრზე მოცემული სახე, საიდანაც ცხადია, რომ D არის ფართობის გამოსათვლელად საკმარისია გამოვთვალოთ პირველ საკოორდინატო მეოთხედში მოთავსებული მარჯვენის ფართობი და შედეგი გავაორგუცოთ.

თუ გადავათო პოლარულ კოორდინატებზე, ლემნისკატის განტოლებას ეწმება სახე $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ და მაშასადამე (10.4) ფორმულით ძალით გვექნება



ნახ. 22

$$S = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = a^2.$$

3. ზედაპირის ფართობის გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალით.

შემოვიყვანოთ ფართობის ცნება ისეთი ზედაპირისათვის, რომელსაც Oz ღერძის პარალელური ნებისმიერი წრფე აკვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში და რომელსაც ყოველ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე. ამასთან ივლისხმება, რომ ამ ზედაპირის გვემილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს ფართობად D არეს.

განვიხილოთ D არის $D_1, D_2, \dots, D_n$ რაიმე λ — დანაწილება და ყოველი D_k არის საზღვარზე ავივოთ ცილინდრული ზედაპირი, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია. ეს ცილინდრული ზედაპირი ამოკვეთს მოცემული ზედაპირიდან ვარკვეულ S_k ზედაპირს და მაშასადამე, მოცემული ზედაპირი დაიფარება $S_1, S_2, \dots, S_n$ ნაწილებად. ყოველ S_k ზედაპირზე ავილოთ ნებისმიერი M_k წერტილი და მასზე გავავლოთ მოცემული ზედაპირის მხები სიბრტყე. D_k არეზე აგებული ცილინდრული ზედაპირი ამოჭრის ამ მხები სიბრტყიდან ვარკვეულ T_k არეს, თუ D_k არე ფართობადია, მაშინ ფართობადია T_k არეც და იდგილი აქვს ტოლობას

$$|T_k| = \frac{|D_k|}{\cos \gamma_k},$$

სადაც γ_k არის მახვილი კუთხე M_k წერტილში გავლებულ ზედაპირის ნორმალსა და Oz ღერძს შორის. მართლაც, ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ეს ფორმული მართებულია ნებისმიერი მრავალკუთხედისათვის. იგი მართებულია აგრეთვე ნებისმიერი T_k არისათვის, რამდენადაც მისი ფართობი წარმოადგენს, როგორც მასში ჩაბჯულ მრავალკუთხედების ფართობთა ზღვარი.

თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |T_k|,$$

მაშინ მოცემულ ზედაპირს ეწოდება ფართობადი ზედაპირი, ხოლო ამ ზღვარს კი — მოცემული ზედაპირის ფართობი.

თეორემა 12.1. ვთქვათ ზედაპირი მოცემულია განტოლებით $z = f(x, y)$, სადაც $f(x, y)$ კონსაზღვრულია ფართობად D არეზე. თუ $\rho =$

$=f_x(x, y)$ და $q=f'_y(x, y)$, უწყვეტია D არეზე, მაშინ მოცემული ზედაპირი ფართობად და მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy. \quad (12.2)$$

დამტკიცება. თეორემის პირობებში მოცემულ ზედაპირს ყოველ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე.

აღნიშნოთ γ_k -თი მოცემული ზედაპირის $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილში გაღებულ ნორმალსა და Oz ღერძს შორის მახვილი კუთხე. მაშინ

$$|T_k| = \frac{\Delta \sigma_k}{\cos \gamma_k}.$$

სადაც $\Delta \sigma_k$ წარმოადგენს D_k არის ფართობს. მაგრამ როგორც ვიცით (იხ. [37], თავი 1, § 11)

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k, \eta_k)+f_y'^2(\xi_k, \eta_k)}}.$$

მაშასადამე

$$|T_k| = \sqrt{1+f_x'^2(\xi_k, \eta_k)+f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot \Delta \sigma_k.$$

ამრიგად

$$\sum_{k=1}^n |T_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{1+f_x'^2(\xi_k, \eta_k)+f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k.$$

რადგან $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}$ ფუნქცია უწყვეტია D არეში, იმიტომ არსებობს სასრული ზედაპირი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+f_x'^2(\xi_k, \eta_k)+f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} \cdot \Delta \sigma_k,$$

რომელიც უდრის ორჯერად ინტეგრალს

$$\iint_D \sqrt{1+f_x'^2(x, y)+f_y'^2(x, y)} dx dy.$$

მაშასადამე მოცემული ზედაპირი ფართობად და მისი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება (12.2) ფორმულით.

შენიშვნა. ზედაპირის ფართობის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრების იდეა განსხვავდება ჩვენთვის ცნობილი (იხ. [37], მეოთხე თავი, § 2) რკალის სიგრძის განსაზღვრების იდეისაგან. რკალის სიგრძის განსაზღვრისას გამოვლილით რკალში ჩახაზული ტენზილიდან, ხოლო ზედაპირის ფართობის განსაზღვრისას ვსარგებლობით არა მრავალწახნაგებით, რომლებიც ჩახაზულია მოცემულ ზედაპირზე, არამედ მხები სიბრტყეებით. იმიტომ პუნქტოვად ისმის კითხვა: რკალის სიგრძის განსაზღვრის ანალოგიით, შეიძლება თუ არა განვიხილოთ ზედაპირის ფართობი, როგორც ზედაპირზე ჩახაზული მრავალწახნაგების ფართობებისა, როდესაც მრავალწახნაგების ყოველი წახნაგის ლიამეტრი ნულისაყენ მისწრაფვის? თურმე, ზედაპირის ფართობის ასეთნაირი განსაზღვრა უეარგოსია, ვინაიდან აღნიშნული პრეტენსია სიზოვადოდ არ გვაძლევს გარკვეულ ზღვარს (მაგალითად, ასეთი განსაზღვრით წრიული ცილინდრული ზედაპირიც კი არ არის ფართობადი). მაგალითი 3. გამოვთვალოთ R რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა. თუ კოორდინატა სათავეს მოვათავსებთ სფეროს ცენტრში, მაშინ სფეროს ზედა ნახევრის განტოლება იქნება

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

(12.2) ფორმულის ძალით ცხადია, რომ

$$S = 2 \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy,$$

სადაც D არის R რადიუსიანი წრე Oxy სიბრტყეზე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

რადგან

$$z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z},$$

იმიტომ

$$1+z_x'^2+z_y'^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2}.$$

მაშასადამე

$$S = 2 \iint_D \frac{R}{z} dx dy = 2R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

თუ გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე, მივიღებთ

$$S = 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 4\pi R^2.$$

ეს ფორმული ცნობილია ელემენტარული გეომეტრიიდან.

4. **ბრტყელი ფიგურისა და სხეულის მასის გამოთვლა.** ვთქვათ D სიბრტყეზე მოცემულია D ფიგურა და მისი მასის განაწილებს სიმკვრივის უწყვეტი $\rho(x, y)$ ფუნქცია. თუ გავისვენებთ ასეთი ფიგურის m მასის გამოთვლის ამოცანას (იხ. § 2, ამოცანა 2) და ორჭერადი ინტეგრალის განსაზღვრებას, მივიღებთ

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (12.3)$$

სიესებით ანალოგიური მატელობით შეიძლება მივაღწიოთ, რომ თუ $\rho(x, y, z)$ არის z სხეულის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ადგილი აქვს ფორმულას

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ r და R რადიუსისანი კონცენტრული წრეწირებით შემოსაზღვრული D რგოლის მასა, თუ სიმკვრივე რგოლის ყოველ წერტილში უკუპროპორციულია მანძილისა ამ წერტილიდან წრეწირთან საერთო ცენტრამდე.

ამოხსნა. ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ O სათავე დავუდებოთ წრეწირთა საერთო ცენტრს. მაშინ ცხადია $\rho(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტი. ამიტომ (12.3) ფორმულის ძალით

$$m = \iint_D \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

თუ გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე, მივიღებთ

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \frac{k}{\rho} \rho d\rho = 2\pi k(R - r).$$

5. **ბრტყელი ფიგურისა და სხეულის სიმძიმის ცენტრი.** ვთქვათ

Oxy სიბრტყეზე მოცემულია D ფიგურა და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $\rho(x, y)$ ფუნქცია. განვიხილოთ D არის $D_1, D_2, \dots, D_n$ რაზე λ —დანაწილება, რომელთა ფართობებია $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. ყოველ D_k არზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და ვგულისხმობთ, რომ D_k -ს მასა მიახლოებით არის $\rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$. თუ დავუშვებთ, რომ ყოველი ასეთი მასა მოთავსებულია ერთ წერტილში კერძოდ $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილში, მაშინ მატერიალურ წერტილთა ასეთი სისტემის მასის ცენტრის $\bar{x}$ და $\bar{y}$ კოორდინატებისათვის გვაქვს

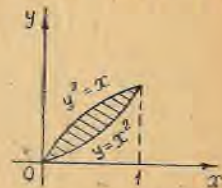
$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k}{\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k}{\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k}.$$

თუ ამ ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ მოცემული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის x_c და y_c კოორდინატების გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულებს

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

თუ D ფიგურა ერთგვაროვანია, ე. ი. $\rho(x, y) = \text{const}$, მაშინ, ცხადია, ადგილი აქვს ფორმულებს

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$



ნახ. 24

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფიგურის (ნახ. 24) სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

პ. მ. ხ. ნ. ა. გვაქვს

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{3},$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x dy = \frac{3}{20},$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy = \frac{3}{20}.$$

ამრიგად (12.4) ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ

$$x_c = y_c = \frac{9}{20}.$$

საესებოთ ანალოგიურად, თუ $\rho(x, y, z)$ არის მოცულობადი v სხეულის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრის x_c, y_c, z_c კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით

$$x_c = \frac{\iiint_v x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_v \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$y_c = \frac{\iiint_v y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_v \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$z_c = \frac{\iiint_v z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_v \rho(x, y, z) dx dy dz}.$$

4. ინერციის მომენტი. როგორც ცნობილია, მატერიალური წერტილის ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ უდრის ამ წერტილის მასის ნამრავს წერტილიდან ღერძამდე მანძილის კვადრატზე, ხოლო მატერიალურ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი უდრის ამ წერტილთა ინერციის მომენტების ჯამს.

ვთქვათ, მოცემულია D ბრტყელი არე და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის $\rho(x, y)$ უწყვეტი ფუნქცია. განვიხილოთ D არის რაიმე λ -დანაწილება $D_1, D_2, \dots, D_n$, რომელთა ფართობებია $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. ყოველ D_k არეზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და ვივლით, რომ D_k -ს მასა მიხედვით არის $\rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$. თუ დავუშვებთ, რომ ყოველი ასეთი მასა მოთავსებულია ერთ წერტილში, კერძოდ $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილში, მაშინ წერტილთა ასეთი სისტემის ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ უდრის

$$\sum_{k=1}^n \eta_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ Ox ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

ანალოგიურად, ინერციის მომენტი Oy ღერძის მიმართ უდრის

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

გამოთვალათ ახლა I_0 ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეს მიმართ. თუ გვივთვალისწინებთ, რომ m მასის მქონე $M(x, y)$ წერტილის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეს მიმართ უდრის $m(x^2 + y^2)$ -ს და ჩავატარებთ ზემოთმოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy,$$

ე. ი.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

სავსებით ანალოგიურად, თუ $\rho(x, y, z)$ არის v სხეულის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ მისი ინტეგრის მომენტები გამოთვლება ფორმულებით

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

7. მილის განივკვეთში გამდინარე სითხის ნაკადი. ვთქვათ, მილში შეიღწევა ρ სმკვრივის მქონე სითხე. განვიხილოთ მილის რაიმე კვეთა, რომელიც სითხის ღონების მიმართულებას მართობულია. თუ ამ კვეთის სიბრტყეში შემოვღებთ Ox მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, მაშინ განხილული კვეთის ყოველ წერტილში სითხის v სიჩქარე წარმოადგენს x და y ცვლადების ფუნქციას, ე. ი. $v = v(x, y)$. გამოვთვალოთ დროის ერთეულში კვეთაში გამავალი სითხის რაოდენობა. განვიხილოთ ამ კვეთის უსასრულოდ მცირე ფართობის ელემენტი ds . ცხადია ფართობის ამ ელემენტში დროის ერთეულში გამავალი სითხის რაოდენობა უდრის, ds ფუძისა და $v(x, y)$ სიმაღლის მქონე სითხის სვეტის მასას, ე. ი.

$$\rho v(x, y) ds.$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ მთელს კვეთაში გამავალი სითხის რაოდენობა უნდა მოვახდინოთ აქამდე, ე. ი. ავიღოთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$\iint_D \rho v(x, y) dx dy.$$

სადაც D არის განხილული კვეთი.

8. სხეულის მიერ მატერიალური წერტილის მიზიდულობის ძალის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემული v სხეული, რომლის სიმკვრივეა $\rho(x, y, z)$ და ამ სხეულის გარეთ მდებარე m მასის მქონე მატერიალური $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი. ვიპოვოთ ძალა, რომლითაც სხეული იზიდავს მათ.

ტერიალურ წერტილს. განვიხილოთ მოცულობის dv ელემენტი. ამ ელემენტის მასაა $\rho(x, y, z) dv$, ხოლო იმ ძალის სიდიდე, რომლითაც იგი იზიდავს მატერიალურ წერტილს, არის

$$\gamma \frac{m \rho(x, y, z) dv}{r^2},$$

სადაც γ -მიზიდულობის მუდმივაა, ხოლო

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

ამ ძალის მიმართულება ემთხვევა იმ $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულებას, რომელიც აერთებს $M_0(x_0, y_0, z_0)$ და $M(x, y, z)$ წერტილებს. რადგან Ox ღერძისა და $\vec{r}$ ვექტორის შორის კუთხის კოსინუსია $\frac{x - x_0}{r}$, ამიტომ ამ ძალის გვეგმილი Ox ღერძზე არის

$$\gamma \frac{(x - x_0) m \rho(x, y, z) dv}{r^3}.$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამ ძალის F_x გვეგმილი Ox ღერძზე უნდა მოვახდინოთ აქამდე, ე. ი. ავიღოთ სამჯერადი ინტეგრალი. ამრიგად,

$$F_x = \iiint_V \gamma m \rho(x, y, z) \frac{(x - x_0)}{r^3} dv.$$

ანალოგიურად მივიღებთ ძალის გვეგმილებს Oy და Oz ღერძებზე

$$F_y = \iiint_V \gamma m \rho(x, y, z) \frac{(y - y_0)}{r^3} dv,$$

$$F_z = \iiint_V \gamma m \rho(x, y, z) \frac{(z - z_0)}{r^3} dv.$$

შენიშვნა. ამ პარაგრაფში განხილული ამოცანების ამოხსნის დროს მიღებული სიმძიმის ცენტრის, ინერციის მომენტების და ა. შ. გამოსათვლელი ფორმულები, ფაქტურად წარმოადგენენ შესაბამისი ცნებების განსაზღვრებებს. განხილული ცნებების ასეთნაირად შემოყვანა გამართლებულია იმით, რომ ამ ფორმულებით ჩატარებული გამოთვლების შედეგები ემთხვევა ექსპერმენტით მიღებულ შედეგებს.

წირითი ინტეგრალები

§ 1. პირველი ჯგუფის წირითი ინტეგრალი

1. ამოცანა, რომელსაც მიყვავართ პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის ცნებამდე, განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.1)$$

პარამეტრული განტოლებებით მოცემული წირი.

ვითვით, რომ (1.1) წირი უწყვეტია, თუ უწყვეტია $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციები.

(1.1) წირს მარტივი, ანუ ჟორდანის* წირი, თუ ყოველი t_1 და t_2 -სათვის $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$, გვაქვს $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ გარდა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა $t_1 = \alpha$ და $t_2 = \beta$. წერტილებს $A(x(\alpha), y(\alpha))$ და $B(x(\beta), y(\beta))$ მოცემული წირის ბოლო წერტილებს ან უბრალოდ ბოლოებს უწოდებენ.

(1.1) პირველ უწყვეტ წირს ეწოდება შეკრული (ჩაკეტილი) თუ $x(\alpha) = x(\beta)$ და $y(\alpha) = y(\beta)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-გახსნილი წირი. გახსნილი წირის შემთხვევაში $(x(\alpha), y(\alpha))$ წერტილს უწოდებენ წირის საწყის წერტილს, ხოლო $(x(\beta), y(\beta))$ წერტილს — ბოლო წერტილს.

(1.1) წირს ეწოდება გლუვი, თუ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე $x'(t), y'(t)$ ფუნქციები უწყვეტია და $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, ამასთან თუ წირი შეკრულია, მაშინ დამატებით უნდა შესრულდეს ტოლობები $x'(\alpha) = x'(\beta)$ და $y'(\alpha) = y'(\beta)$.

წირს ეწოდება უბან-უბან გლუვი, თუ ის შეიძლება დაგანაწილოთ საბრტყეო რაოდენობის გლუვ წირებად.

საქვებით ანალოგიურად ვანისაზღვრება ზემოთ მოყვანილი ცნებები

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

პარამეტრული განტოლებებით მოცემული სივრცითი წირისათვის.

(1.1) განტოლებებით მოცემული ყოველი ჟორდანის შეკრული წირი სიბრტყეს ყოფს ორ არეად, რომელთაგან ერთი შემოსაზღვრულია,

*) ჯ. ჟორდანი (1838—1922) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ბოლო შორე-არა. შემოსაზღვრულ არეს ეწოდება შიგა არე, ხოლო შემოსაზღვრულს — გარე არე.

D არეს ეწოდება ცალიბმული, თუ ნებისმიერი ჟორდანის შეკრული γ წირისათვის, რომელიც მთლიანად შედის D -ში, მისი შიგა ან გარე არე მთლიანად ეკუთვნის D -ს (ნახ. 25 ა), ბ). წინააღმდეგ შემთხვევაში არეს ეწოდება პრავლადმული (ნახ. 25 გ). ეს ნიშნავს, რომ D არეში მოიძებნება ერთი წერტილი ჟორდანის შეკრული წირი, რომლით შემოსაზღვრული არეც შიგა და გარე არეც მთლიანად არ ეკუთვნის D -ს.

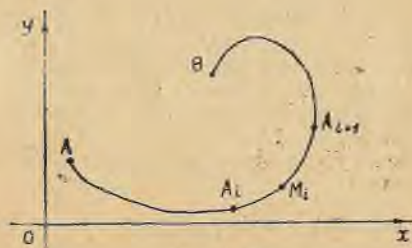


ნახ. 25, ა

ნახ. 25, ბ

ნახ. 25, გ

ეთქვით Oxy სიბრტყეზე მოცემულია უწყვეტი მარტივი წრფეაღი წირი ბოლოებით A და B (ნახ. 26), რომელზედაც განაწილებულია მისი დიფერენციალური ფორმის $\rho(M) = \rho(x, y)$ არის წირზე მისი განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია. ისმის კითხვა: როგორც გამოვთვალოთ მთელი AB წირის m მასა?



ნახ. 26

დავუთოთ AB წირი n რაოდენობის რკალდებად წერტილებით $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$. მიღებული რკალბის სიგრძეები იყოს შესაბამისად $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, აღვნიშნოთ k -თი $\Delta s_k, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი.

რკალბებს $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ სისტემას უწოდებენ AB წირის λ -დანაწილებას, ცხადია, რომ ყოველ λ რიცხვს შეესაბამება უამრავი λ -დანაწილება.

ყოველ $A_{k-1} A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი ($k=1, 2, \dots, n$) და შევიღებოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^n \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

ეს ჯამი გვაძლევს წირის მასის მაჩვენებელს მნიშვნელობას და იგი მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა λ .

თუ არსებობს ამ ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც AB წირის λ -დანაწილებაზე და არც $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვრის მნიშვნელობას უწოდებენ AB წირის მასას. მაშასადამე

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k. \quad (1.2)$$

2. პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის განსაზღვრება და თვისებები. წინა პუნქტში განხილულმა ამოცანამ მიგვიყვანა გარკვეულ სახეს ჯამის ზღვრის გამოთვლამდე. შევისწავლოთ ასეთი ჯამის ზღვრის არსებობისა და გამოთვლის საკითხი.

ყოველთ, Oxy სიბრტყეზე მოცემულ წრფეულ მარტივ L წირზე (პოლოებით A და B) განსაზღვრული $f(M) = f(x, y)$ ფუნქცია, დავუთოთ AB წირი $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ წერტილებით n რაოდენობის $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ რკალბად. ამ რკალბის სიგრძეები იყოს შესაბამისად $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, აღვნიშნოთ k -თი $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, რკალბებს $A_{k-1} A_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) სისტემას უწოდებ AB წირის λ -დანაწილებას.

ყოველ $A_{k-1} A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და შევიღებოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k. \quad (1.3)$$

ამ ჯამის ინტეგრალურა ჯამი ეწოდება იგი დამოკიდებულია როგორც AB წირის λ -დანაწილებაზე, ისე $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილების შერჩევაზე.

განსაზღვრება 1.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ AB რკალის ნებისმიერი λ -დანაწილებისათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილებისათვის, მართებული უტოლობა

$$|\sigma - I| < \epsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

განსაზღვრება 1.2. თუ არსებობს (1.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან AB წირზე და იგი ილენიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთად

$$\int_L f(x, y) ds, \int_L f(M) ds, \int_{AB} f(x, y) ds, \int_{AB} f(M) ds. \quad (1.4)$$

(1.4) შემდეგნაირად იკითხება: „პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი L წირზე $f(x, y) ds$ “. L -ს ეწოდება ინტეგრების წირი, $f(x, y)$ -ს — ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, x და y ინტეგრების ცვლადებია, ხოლო ds -წირის რკალის ელემენტი.

ამრიგად, პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან L წირზე წარმოადგენს (1.3) ინტეგრალურა ჯამის ზღვარს:

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (1.4) ინტეგრალი, ამბობენ, რომ $f(x, y)$ ფუნქცია ინტეგრებადია L წირზე.

ანალოგიურად განსაზღვრება პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი სივრცით L წირზე მოცემული $f(x, y, z)$ ფუნქციიდან:

$$\int_L f(M) ds = \int_L f(x, y, z) ds.$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\Delta s_k > 0$, ამიტომ (1.3) ინტეგრალური ჯამის სტრუქტურიდან გამომდინარე არავითარი მნიშვნელობა არაა ∞ და თითქმის, გ. ხიზოლად, 2. განიხილოთ 5. პიკტურა

აქვე L წირის საწყის და ბოლო წერტილებად ავიღებთ შესაბამისად A და B -ს თუ პირიქით, მაშასადამე

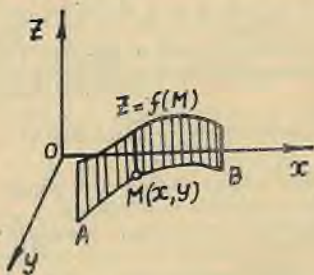
$$\int_{AB} f(M) ds = \int_{BA} f(M) ds.$$

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია წრფეზე L წირზე, მაშინ, როგორც შემდგომში ვნახავთ (იხ. თეორემა 1.1) არსებობს პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი $f(x, y)$ ფუნქციიდან L წირზე. ამიტომ, (1.2) ტოლობის ძალით, L წირის m მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m = \int_L \rho(x, y) ds. \quad (1.5)$$

პირველი გვარის წირით ინტეგრალს აქვს შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი: თუ L არის Oxy სიბრტყეზე მდებარე უწყვეტი წრფეაღი წირი და $f(x, y) \geq 0$, მაშინ $\int_L f(x, y) ds$ რიცხობრივად ტოლია იმ

კოლინდრული ზედაპირის ფართობის, რომლის მიმართველი წირია L , ხოლო მსახველებია L წირის $M(x, y)$ წერტილიდან Oz ღერძის პარალელურად გადღებული $f(x, y)$ სიგრძის მონაკვეთები (ნახ. 27).



ნახ. 27

ჩვენ როგორც ვანსაზღვრული ინტეგრალის შემთხვევაში, მტკიცდება პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1. თუ წრფეზე L წირზე $f(M) = C = \text{const}$, მაშინ

$$\int_L f(M) ds = C \cdot l.$$

სადაც l არის L წირის სიგრძე.

2. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია წრფეზე L წირზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(M)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია L წირზე და აღვლი აქვს ტოლობას

$$\int_L Af(M) ds = A \int_L f(M) ds.$$

3. თუ $f(M)$ და $\varphi(M)$ ფუნქციები ინტეგრებადია L წირზე, მაშინ მათი ჯამიც ინტეგრებადია L წირზე და აღვლი აქვს ტოლობას

$$\int_L [f(M) + \varphi(M)] ds = \int_L f(M) ds + \int_L \varphi(M) ds.$$

4. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია წრფეზე AB წირზე და C წერტილით AB წირი გაყოფილია AC და CB წირებად, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_{AB} f(M) ds = \int_{AC} f(M) ds + \int_{CB} f(M) ds.$$

5. თუ $f(M)$ და $\varphi(M)$ ფუნქციები ინტეგრებადია L წირზე და ამ წირზე $f(M) \leq \varphi(M)$, მაშინ

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L \varphi(x, y) ds.$$

6. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია L წირზე, მაშინ $|f(M)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია ამ წირზე და

$$\left| \int_L f(M) ds \right| \leq \int_L |f(M)| ds.$$

7. თუ $f(M)$ ფუნქცია უწყვეტია წრფეზე L წირზე, მაშინ ამ წირზე არსებობს ერთი მანძილი P წერტილი, რომ

$$\int_L f(M) ds = f(P) \cdot l,$$

სადაც l არის L წირის სიგრძე. ეს არის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა პირველი გვარის წირითი ინტეგრალისათვის.

8. პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის გამოთვლა. ვთქვათ L წრფეაღი წირის საწყისი და ბოლო წერტილებად შესაბამისად A და B .

ამ წირის ნებისმიერი M წერტილის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება AM რკალის s სიგრძის საშუალებით, ამიტომ L წირის პარამეტრული სახის განტოლებები შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad z=z(s) \quad (0 \leq s \leq l), \quad (1.6)$$

სადაც l არის L წირის სიგრძე.

(1.6)-ს წირის ნატურალური განტოლებები ეწოდება.

თეორემა 1.1. ვთქვათ L უწყვეტი წრფეა და წირის განტოლებები მოცემულია (1.6) სახით, თუ $f(M)=f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია L -ზე, მაშინ არსებობს პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი $f(M)$ ფუნქციიდან L წირზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_L f(M) ds = \int_0^l f[x(s), y(s), z(s)] ds. \quad (1.7)$$

დამტკიცება. გავიხილოთ L წირის k -დანაწილება წერტილებით $A=A_0, A_1, \dots, A_n=B$. ყოველ $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი M_k წერტილი, ვთქვათ A_k და M_k წერტილების პარამეტრის მნიშვნელობები შესაბამისად s_k და σ_k , მაშინ

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f[x(s_k), y(s_k), z(s_k)] \Delta s_k, \quad (1.8)$$

სადაც $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$. ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს $F(s) = f(x(s), y(s), z(s))$ უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს $[0, l]$ სეგმენტზე, ამიტომ, თუ (1.8) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k \rightarrow 0$, მივიღებთ (1.7).

თეორემა დამტკიცებულია.

(1.7) ტოლობიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ პირველი გვარის წირითი ინტეგრალს აქვს ნვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები.

თეორემა 1.2. თუ AB წირის პარამეტრული განტოლებებია

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

სადაც $x(t), y(t), z(t)$ უწყვეტად წარმოებდაი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, მაშინ AB წირზე უწყვეტი $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრირდება ამ წირზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (1.9)$$

68

დამტკიცება. ცხადია AB წირი წრფეა. ვთქვათ A წერტილი შეესაბამება პარამეტრის $t=\alpha$ მნიშვნელობას, ხოლო B კი — $t=\beta$ მნიშვნელობას. ამასთან l პარამეტრის ზრდისას AM რკალის $s=s(t)$ სიგრძე იზრდება. მაშინ, როგორც ცნობილია რკალის დიფერენციალი ds გამოითქვება ფორმულით

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

ამიტომ თუ (1.7)-ში მოვახდენთ ცვლილის გარდაქმნას $s=s(t)$, მივიღებთ (1.9)-ს.

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ L წირი მდებარეობს Oxy სიბრტყეზე, მაშინ (1.9) ტოლობა შიიღებს სახეს

$$\int_L f(M) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (1.10)$$

როდესაც L წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით

$$y=y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

მაშინ (1.10) ტოლობიდან გვექნება

$$\int_L f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.11)$$

თუ L წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, მაშინ (1.10) ტოლობიდან ადვილად მივიღებთ

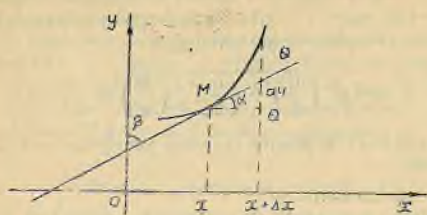
$$\int_L f(M) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi. \quad (1.12)$$

შენიშვნა. ფორმულიდან

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

მიიღება რკალის ds დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი, რადგან $y=y(x)$ ფუნქციის dy დიფერენციალი არის $y=y(x)$ წირის

$M(x, y)$ წერტილში გავლებული მხედის ორდინატის ნაზრდი PQ (ნახ. 28),



ნახ. 28

ამიტომ ds არის მხედის მონაკვეთის სიგრძე $M(x, y)$ წერტილიდან $Q(x+dx, y+dy)$ წერტილამდე ე. ი. ის არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, რომლის კათეტებია $|dx|$ და $|dy|$. ამრიგად

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\int_L xy ds$, სადაც L არის პირველი

მეთხედში მოთავსებული $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის რკალი.

ამოხსნა. ჩვენ წერით ელიფსის განტოლება პარამეტრული სახით: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. ვინიღნ

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t, \quad \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

ამიტომ (1.10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_L xy ds &= \int_0^{2\pi} a^2 \cos t \cdot b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{ab}{4} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2t} \cos 2t dt = \\ &= \frac{ab}{4} \frac{2}{a^2-b^2} \cdot \frac{2}{3} \left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2t \right]^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{3} \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\int_L xyz ds$, სადაც L არის $x=t$,

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{6t^3}, \quad z = \frac{1}{2} t^2 \quad \text{წირის რკალი მოთავსებული } A(0; 0; 0) \text{ და}$$

$$B\left(1; \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ წერტილებს შორის.}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$ds = \sqrt{1+2t+t^2} dt = (1+t) dt, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ამიტომ (1.9) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\int_L xyz ds = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{3/2} (1+t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\int_{AB} y ds$, სადაც AB არის $y^2 = 2x$

პარაბოლის რკალი მოთავსებული $(0; 0)$ და $(2; 2)$ წერტილებს შორის.

ამოხსნა. გვაქვს

$$y = \sqrt{2x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx.$$

(1.11) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int_{AB} y ds = \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1).$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ

$$I = \int_L \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

სადაც L არის $rp = 1$ პიპერბოლური სპირალის რკალი $\varphi = \sqrt{3}$ -დან $\varphi = 2\sqrt{2}$ -მდე.

ამოხსნა. გვაქვს

$$r = \frac{1}{\varphi}, \quad r' = -\frac{1}{\varphi^2}, \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}}.$$

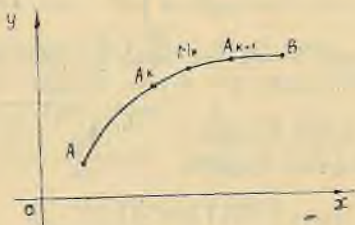
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2 = \frac{1}{\varphi^2}.$$

ამიტომ (1.12) ფორმულის ძალით გვექნება

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}} d\varphi = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \frac{1}{3} (\varphi^2 + 1)^{3/2} \Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = \frac{19}{3}.$$

§ 2. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი

1. ამოცანა, რომელსაც მივეყვართ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის ცნებაში. ვთქვათ მატერიალური M წერტილი $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით გადაადგილება Oxy სისტემაზე მდებარე რაიმე ლია, უწყვეტ, მარტივ წირზე (ნახ. 29). ვივლით, რომ M წერტილზე მოდებუ-



ნახ. 29

ლი $\vec{F}$ ძალა და, მაშასადამე მისი X, Y კოორდინატები წარმოადგენენ M წერტილის x, y კოორდინატების უწყვეტ ფუნქციებს. გამოვთვალოთ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა M წერტილის A მდებარეობიდან B მდებარეობაში გადასვლის დროს.

დავყოთ AB წირი n რაოდენობის რკალეზად წერტილებით:

$$A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n) = B.$$

აღვნიშნოთ λ -თი მიღებული რკალების სიგრძეებს შორის უდიდესი. განხილულ რკალების სისტემას უწოდებენ AB წირის λ -დანაწილებას. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

უოველ $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი ($k=1, 2, \dots, n$). ჩავთვალოთ $A_{k-1}A_k$ რკალის უოველ წერტილში $\vec{F}$ ძალა $\vec{F}(M_k)$ -ს ტოლად. მაშინ $\vec{F}$ ძალის მიერ $A_{k-1}A_k$ რკალზე შესრულებული მუშაობა მიახლოებით იქნება

$$W_k = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k}.$$

სადაც $\vec{F} \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ -თი აღნიშნულია შესაბამისი ვექტორების სკალარული ნამრავლი. თუ სკალარულ ნამრავლს გამოვსახებთ კოორდინატებში, გვექნება

$$W_k = X(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

შევაღვიროთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \quad (2.1)$$

ეს ჯამი გვაძლევს საძებნი მუშაობის მიახლოებით მნიშვნელობას და იგი მით უფრო ზუსტია რაც უფრო მცირეა λ .

თუ არსებობს (2.1) ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, რომელიც არ არის დამოკიდებული არც AB წირის λ დანაწილებაზე და არც M_k წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარის მნიშვნელობას უწოდებენ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებულ W მუშაობას AB წირზე. მაშასადამე

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [X(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Y(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \quad (2.2)$$

2. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის განსაზღვრება და თვისებები. დავუშვათ Oxy სისტემაზე მოცემულია ლია, მარტივი, უწყვეტი, წრფევილი $L=AB$ წირი (ნახ. 29) და მასზე განსაზღვრული $P(x, y)$ ფუნქცია. განვიხილოთ L წირის λ -დანაწილება და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

ყოველ $A_{k-1}A_k$ რკალზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება. იგი დამოკიდებულია, როგორც L წირის λ — დანაწილებაზე, ისე $M_k(\xi_k, \eta_k)$ წერტილების შერჩევაზე.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 2.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ L წირის ნებისმიერი λ — დანაწილებაზე, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k) \in A_{k-1}A_k$ წერტილებისათვის, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 2.2. თუ არსებობს σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $P(x, y) dx$ -დან Ox ღერძის მიმართ L წირზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_L P(x, y) dx \text{ ან } \int_{AB} P(x, y) dx.$$

ამრიგად, მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $P(x, y)$ ფუნქციიდან L წირზე წარმოადგენს σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$$

ანალოგიურად განისაზღვრება მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $Q(x, y)$ ფუნქციიდან Oy ღერძის მიმართ L წირზე

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

თუ არსებობს $\int_L P(x, y) dx$ და $\int_L Q(x, y) dy$ ინტეგრალები,

მაშინ მათ ჯამს ეწოდება ზოგადი სახის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი L წირზე და იგი შემდეგნაირად აღინიშნება

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

შევნიშნოთ, რომ პირველი გვარის წირითი ინტეგრალისაგან განსხვავებით მეორე გვარის წირითი ინტეგრალისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს AB წირზე ინტეგრების მიმართულებას. კერძოდ ინტეგრების მიმართულების შეცვლით $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ ვექტორი იცვლის მიმართულებას და მაშასადამე მისი გეგმილი საკოორდინატო ღერძზე ნიშანს იცვლის. ამიტომ, მეორე გვარის წირითი ინტეგრალისათვის გვაქვს

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx$$

და

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = - \int_{BA} Q(x, y) dy.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები სივრცითი L წირისათვის:

$$\int_L P(x, y, z) dx, \quad \int_L Q(x, y, z) dy, \quad \int_L R(x, y, z) dz.$$

ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება ზოგადი სახის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი L წირზე და შემდეგნაირად აღინიშნება

$$\int_L P dx + Q dy + R dz.$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაშიც ინტეგრების მიმართულების შეცვლით ინტეგრალს ნიშანი ეცვლება, ე. ი.

$$\int_{BA} P dx + Q dy + R dz = - \int_{AB} P dx + Q dy + R dz.$$

3. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის გამოთვლა. ვთქვათ AB წირის განტოლებებია

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (2.3)$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$ უწყვეტად წარმოებული ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \neq 0$ (ე. ი. წირი ვლუვია). ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ პარამეტრის $t=\alpha$ მნიშვნელობის შეესაბამება A წერტილი, ხოლო $t=\beta$ -ს B წერტილი.

თეორემა 2.1. თუ $P(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია (2.3) განტოლებებით მოცემულ ვლუვ AB წირზე, მაშინ არსებობს მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი $P(x, y, z)$ ფუნქციიდან L წირზე Ox ღერძის მიმართ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt. \quad (2.4)$$

დამტკიცება. AB რკალზე A წერტილიდან B წერტილისაკენ პოპრიაბისას ავიღოთ წერტილები

$$A=A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n=B.$$

ვთქვათ t_k არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომელიც A_k წერტილს შეესაბამება, ხოლო τ_k იყოს t პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც A_{k-1} და A_k რკალზე აღებული ნებისმიერი $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ წერტილის შესაბამისია. ცხადია $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. ვინაიდან

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) dt,$$

ამიტომ ინტეგრალური ჯამი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) x'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) x'(t) dt. \end{aligned}$$

მეორეს მხრივ (2.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt.$$

აქედან

$$\sigma - I = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) - P(x(t), y(t), z(t))] x'(t) dt. \quad (2.5)$$

ვინაიდან უწყვეტი $x'(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ $|x'(t)| \leq K$. მეორეს მხრივ უწყვეტი $P(x(t), y(t), z(t))$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ როცა $|t' - t| < \delta$, გვექნება

$$|P(x(t'), y(t'), z(t')) - P(x(t), y(t), z(t))| < \frac{\varepsilon}{K(\beta - \alpha)}.$$

თუ $[t_{k-1}, t_k]$ შუალედს იმდენად მცირეს ავიღებთ, რომ $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, გვექნება

$$|P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) - P(x(t), y(t), z(t))| < \frac{\varepsilon}{K(\beta - \alpha)}.$$

ამ უტოლობიდან (2.5)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

საიდანაც

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma = I, \quad (2.6)$$

სადაც

$$\mu = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, როდესაც $\mu \rightarrow 0$, მაშინ $\lambda \rightarrow 0$ და პირიქით. მართლაც, რადგან

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

$$m\Delta t_k \leq \Delta s_k \leq M\Delta t_k, \quad (2.7)$$

სადაც m და M არის უწყვეტი ფუნქციის შემოღობვის კოეფიციენტები და უდრის მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე. ამასთან $m > 0$ და $M > 0$, ვინაიდან $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$. (2.7) უტორობებიდან მიიღება, რომ, როდესაც $\mu \rightarrow 0$, მაშინ $\lambda \rightarrow 0$ და პირიქით. ამრიგად, (2.6)-დან გვაქვს

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(2.4) ტოლობის ანალიტიკური ფორმულები შეგვიძლია დავამტკიცოთ

ერთ $\int_{AB} Q(x, y, z) dy$ და $\int_{AB} R(x, y, z) dz$ ინტეგრალისათვისაც. საბოლოოდ, თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ და $R(x, y, z)$ უწყვეტი ფუნქციებია AB გზაზე წირზე, მაშინ

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

თუ AB წირი მოთავსებულია Oxy სიბრტყეზე (2.8) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = \\ = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

კერძოდ, როცა AB წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით

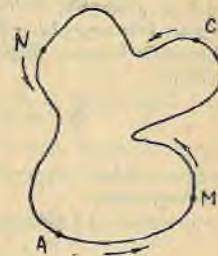
$$y = \varphi(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

სადაც $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებალია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ AB წირზე უწყვეტი ყოველი $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციებისათვის გვაქვს

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] dx. \quad (2.10)$$

(2.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მეორე გვარის წირით ინტეგრალს გააჩნია ჩვეულებრივი განსაზღვრული ინტეგრალის ანალოგიური თვისებები.

ახლა განსაზღვროთ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი შეკრულ L წირზე, ე. ი. იმ შემთხვევაში, როდესაც წირის საწყისი A და ბოლო B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, თუ წირზე მოცემულია ინტეგრების მიმართულება (ნახ. 30), მაშინ წირზე ავიღოთ A -საგან განსხვავებული ნებისმიერი C წერტილი და განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ



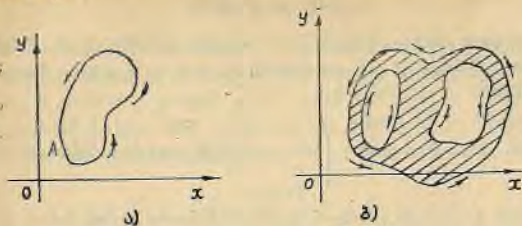
ნახ. 30

$$\oint_L f(M) dx = \int_{AMC} f(M) dx + \int_{CNA} f(M) dx.$$

აღვილი საჩვენებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ინტეგრალის სიდიდე არ არის დამოკიდებული A და C წერტილების არჩევაზე. ამის გარდა შეკრული L კონტურის შემთხვევაშიც სამართლიანია (2.4) ფორმულა.

ზრტყელი შეკრული კონტურების შემთხვევაში წირზე მოძრაობის ორი შესაძლო მიმართულებიდან დადებით მიმართულებად ჩავთვალოთ ის მიმართულება, როდესაც წირზე მოძრაობის დროს კონტურს

რით შემოსაზღვრული არე რჩება დამკვირვებელიდან მარცხნივ (ნახ. 31 ა, ბ)).



ნახ. 31

შეკრულ კონტურზე მოძრაობის დიდებით მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულებას უწოდებენ უარყოფით მიმართულებას. შემდგომში ჩავეთვლო კონტურზე მეორე გვარის წირით ინტეგრალს აღვნიშნავთ

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

სიმბოლოთი, ამასთან ვიგულისხმებთ, რომ ინტეგრება ხდება დადებით მიმართულებით.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy,$$

სადაც AB არის $x = \cos t$, $y = \sin t$ წრეწირის რკალი მოთავსებული ბირთვულ მეთოდებში $A(1; 0)$ წერტილიდან $B(0; 1)$ წერტილამდე.

ამოხსნა. გვაქვს $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, ამიტომ (2.9)

ფორმულის ძალით

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\pi/2} (-\cos^3 t \sin t + \cos^2 t \sin t) dt = 0.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\int_{AB} yz dx + zx dy + xy dz,$$

სადაც AB არის $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = kt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) ხრახნწირი, ამასთან A წერტილი შეესაბამება პარამეტრის $t=0$ მნიშვნელობას, ხოლო B წერტილი — $t=2\pi$ მნიშვნელობას.

ამოხსნა. გვაქვს

$$x' = -\sin t, \quad y' = \cos t, \quad z' = k,$$

ამიტომ (2.8) ფორმულის ძალით

$$\begin{aligned} \int_{AB} yz dx + zx dy + xy dz &= \int_0^{2\pi} (-kt \sin^2 t + kt \cos^2 t + k \sin t \cos t) dt = \\ &= k \int_0^{2\pi} \left(t \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ

$$\int_{AB} (x+y) dx - \frac{x^2}{y^2} dy,$$

სადაც AB არის $y = x^2$ წირის რკალი, $A(1; 1)$ წერტილიდან $B(2; 8)$ წერტილამდე.

ამოხსნა. ვინაიდან $y' = 2x^2$ და $1 \leq x \leq 2$, ამიტომ (2.10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\int_{AB} (x+y) dx - \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(x + x^2 - \frac{3}{x^2} \right) dx = 3\frac{3}{4}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ

$$\oint_L (x+y) dx + xy dy,$$

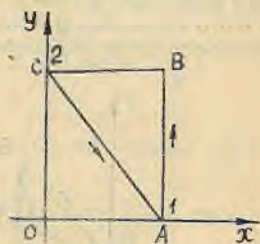
სადაც L არის $A(1; 0)$, $B(1; 2)$, $C(0, 2)$ წერტილების მქონე სამკუთხედის კონტური.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA},$$

სადაც ინტეგრება ხდება 32-ე ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით. ვინაიდან AB წრფეზე $x=1$ ($dx=0$), ხოლო BC წრფეზე $y=2$ ($dy=0$), ამიტომ

ნ. ს. თოფჩიძე, ვ. ხოჭოლაძე, შ. გაბაძე, ნ. მაჭარაშვილი



ნახ. 32

$$\int_{AB} (x+y) dx + xy dy = \int_{AB} xy dy = \int_0^2 y dy = 2,$$

$$\int_{BC} (x+y) dx + xy dy = \int_{BC} (x+y) dx = - \int_0^1 (x+2) dx = -\frac{5}{2}.$$

რადგან CA წრფის განტოლებაა $y=2-2x$, ამიტომ

$$\int_{CA} (x+y) dx + xy dy = \int_0^1 [2-x-2x(2-2x)] dx = \frac{5}{6}.$$

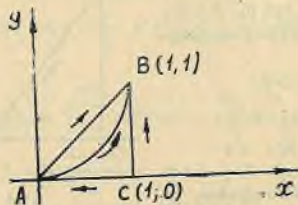
ამრიგად

$$\oint_L (x+y) dx + xy dy = 2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ

$$\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy,$$

სადაც AB არის: ა) $y=x$ წრფის მონაკვეთი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე; ბ) $y=x^2$ პარაბოლის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე; გ) $A(0;0)$, $C(1;0)$ და $B(1;1)$ წერტილების შემავრთებული ტეხილი (ინტეგრება ხდება A -დან B -სკენ, ნახ. 33).



ნახ. 33

ამოხსნა. (2.10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$ა) \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2;$$

$$ბ) \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2;$$

$$გ) \int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy = \int_{AC} 3x^2 y dx + \int_{CB} (x^3 + 1) dy = \\ = \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 (1 + 1) dy = 2.$$

შევნიშნოთ, რომ სამივე შემთხვევაში ინტეგრალის მნიშვნელობა ერთიდაიგივეა მიუხედავად იმისა, რომ $A(0;0)$ და $B(1;1)$ წერტილების შემავრთებული წიგები (ინტეგრების გზა) სხვადასხვაა.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ

$$\int_{AB} (x-y) dx - (2x+y) dy,$$

სადაც AB არის: ა) $y=x$ წრფის მონაკვეთი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე; ბ) $y=x^2$ პარაბოლის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე; გ) $A(0;0)$, $C(1;0)$ და $B(1;1)$ წერტილების შემავრთებული ტეხილი (ინტეგრება ხდება A -დან B -სკენ, ნახ. 33).

$$ა) \int_{AB} (x-y) dx - (2x+y) dy = - \int_0^1 3x dx = -\frac{3}{2};$$

$$ბ) \int_{AB} (x-y) dx - (2x+y) dy = \int_0^1 (x-5x^3-2x^2) dx = -\frac{5}{3};$$

$$გ) \int_{AB} (x-y) dx - (2x+y) dy = \int_{AC} (x-y) dx - \int_{CB} (2x+y) dy = \\ = \int_0^1 x dx - \int_0^1 (2+y) dy = -2.$$

შენიშნა. მაგალითი 6 გვიჩვენებს, რომ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობა საზოგადოდ დამოკიდებულია ინტეგრების გზაზე. თუმცა, როგორც ეს მაგალითი 5-დან ჩანს, ზოგ შემთხვევაში, მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობა ერთიდაიგივე წერტილების შემაერთებული სხვადასხვა წირების გასწვრივ ერთიდაიგივეა. ეს გარემოება შემთხვევითი არ არის და იგი დაწვრილებით იქნება შესწავლილი § 5-ში.

§ 3. კავშირი პირველი და მეორე გვარის წირითი ინტეგრალს შორის

განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე $x=x(s)$, $y=y(s)$ ($0 \leq s \leq l$) ნატურალური პარამეტრებით მოცემული გლუვი $L=AB$ წირი. AB წირის ყოველ M წერტილში გავლევთ მხეზზე ორი შესაძლო მიმართულებიდან დადებითი ვეწოდით იმ მიმართულებას, რომელიც შეესაბამება M წერტილის A -დან B -სკენ მოძრაობის მიმართულებას. ვთქვათ α არის კუთხე $M(x, y)$ წერტილში გავლევთ მხეზზე დადებით მიმართულებასა და Ox ღერძს შორის, მაშინ (იხ. § 1, პუნქტი 3-ის შენიშვნა)

$$x'(s) = \cos \alpha, \quad y'(s) = \sin \alpha. \quad (3.1)$$

ვთქვათ $f(M)$ უწყვეტი ფუნქციაა L წირზე. (2.4) და (3.1)-ის ძალით გვაქვს

$$\int_L f(M) dx = \int_0^l f(x(s), y(s)) x'(s) ds = \int_0^l f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds. \quad (3.2)$$

მეორეს მხრივ თანახმად (1.7)-ისა

$$\int_0^l f(x(s), y(s)) \cos \alpha ds = \int_L f(M) \cos \alpha ds. \quad (3.3)$$

(3.2) და (3.3)-დან გვაქვს

$$\int_L f(M) dx = \int_L f(M) \cos \alpha ds.$$

ამრიგად მივიღეთ კავშირი პირველი და მეორე გვარის წირითი ინტეგრალს შორის.

ანალოგიურად მიიღებოდა, რომ

$$\int_L f(M) dy = \int_L f(M) \sin \alpha ds.$$

თუ L წირზე მოცემულია ორი უწყვეტი $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქცია, მაშინ

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds. \quad (3.4)$$

(3.4) ტოლობის ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ კავშირი სივრცით L წირზე განსაზღვრულ პირველი და მეორე გვარის წირითი ინტეგრალს შორის:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

სადაც α , β და γ არიან შესაბამისად კუთხეები მხეზზე დადებით მიმართულებასა და საკოორდინატო ღერძებს შორის.

§ 4. გრინის* ფორმულა

გრინის ფორმულა ამყარებს კავშირს ორჯერად ინტეგრალსა და წირითი ინტეგრალს შორის.

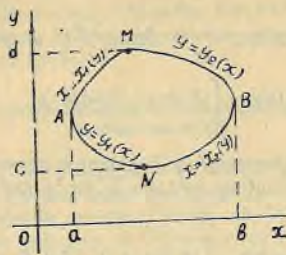
განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე მოთავსებული ჩაკეტილი D არე, რომლის საზღვარი წარმოადგენს უბან-უბან გლუვ წირს. ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ D არე წესიერია, ე. ი. D არის ნებისმიერ შიგა წერტილზე გავლევთ საკოორდინატო ღერძების პარალელული წრფეები D არის L საზღვარს პვეთს ორ წერტილში.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, ჩაკეტილი, წესიერი D არის საზღვარი უბან-უბან გლუვი L წირი, თუ $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები უწყვეტია D არეში, მაშინ ადგილი აქვს გრინის ფორმულას

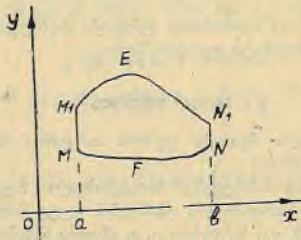
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (4.1)$$

* ჯორჯ გრინი (1793 — 1841) — ინგლისელი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი.

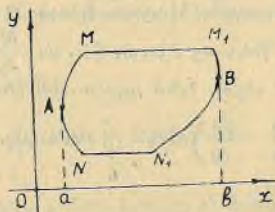
ლაპტაიციბა. ვთქვათ Oxy სისტემაზე მოცემულია უბან-
უბან გლუვი L წირით შემოსაზღვრული ჩაკეტილი წესიერი D არე
(ნახ. 34, 35, 36). ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც D არე ქვე-



ნახ. 34



ნახ. 35



ნახ. 36

შოდან შემოსაზღვრულია $y = y_1(x)$ წირით და ზემოდან $y = y_2(x)$ წი-
რით, $y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$. (ნახ. 34, 36). გამოვთვალოთ

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

რადგან $P(x, y)$ და $\frac{\partial P}{\partial y}$ ფუნქციები უწყვეტია D არეში, ამიტომ
ნიუტონ-ლეიბნიცის* ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

წირითი ინტეგრალის გამოსათვლელი (2.10) ფორმულის თანახმად

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, y_2(x)) dx &= \int_{AMB} P(x, y) dx - \int_{BMA} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \int_{ANB} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

ამიტომ (4.2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \left[\int_{BMA} P(x, y) dx + \int_{ANB} P(x, y) dx \right],$$

ე. ი.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (4.3)$$

* ი. ნიუტონი (1643 — 1727) — ინგლისელი მექანიკოსი, ფიზიკოსი, ასტ-
რონომი და მათემატიკოსი

გ. ლეიბნიცი (1646 — 1716) — გერმანელი მათემატიკოსი.

ეს ფორმულა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც L წარის ნაწილს შეადგენს Oy ღერძის პარალელური MM_1 და NN_1 მონაკვეთები (ნახ. 35). მართლაც, ვინაიდან

$$\int_{MM_1} P(x, y) dx = \int_{NN_1} P(x, y) dx = 0,$$

ხოლო

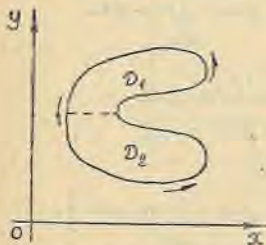
$$\int_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \left[\int_{MEN} P(x, y) dx + \int_{N_1EM_1} P(x, y) dx \right].$$

ამიტომ გვექნება

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx.$$

ახლა, თუ $\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ ინტეგრალსათვის ჩავტარებთ ან-

ლოგიურ გამოთვლებს, ამასთან გავითვალისწინებთ (ნახ. 34, 35), რომ



ნახ. 37, ა)

$$D = \{ (x, y) : c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \}.$$

შეიღებთ

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (4.4)$$

(4.3) ტოლობიდან (4.4) ტოლობის გამოკლებით მივიღებთ დამატებით (4.1) ფორმულას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. გრინის ფორმულა მართებულია ისეთი ჩაკეტილი არეებისთვისაც, რომელიც დამატებითი ხაზების საშუალებით შეიძლება დავყოთ სასრულ რაოდენობა წესიერ ჩაკეტილ არეებად. მართლაც ვთქვათ D არეს, რომლის საზღვარია L წირი (ქვეს 37-ა) ნახაზზე მოცემული სახე. გავყოთ ის ორ წესიერ D_1 და D_2 არეებად. თითოეუ-

ლი ამ არისათვის დავწეროთ გრინის ფორმულა და ისინი შევჯეროთ. მარცხნივ მივღებთ ორჯერად ინტეგრალს მიღებულ D არეზე, ხოლო მარჯვნივ მიღებულ L წირზე (ვინაიდან წირითი ინტეგრალი დამატებითი ხაზზე აიღება ორჯერ ურთიმართის საწინააღმდეგო მიმართულებით და შეეცდებიან დროის ისინი ერთმანეთს აბათილებენ).

შენიშვნა 2. თუ D მრავალბმული არეა, ე. ი. იგი შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი შეკრული წირებით (ნახ. 37 ბ))

$$L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n,$$

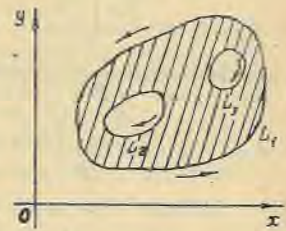
მაშინ აიღებთ (4.1)

ტოლობას. მართლაც, დამატებითი ხაზების გველეხით D არე შევცდით დავანაწილოთ შენიშვნა 1-ში აღნიშნული ტიპის სასრული რაოდენობის არეებად, რომელთაგანაც გრინის ფორმულა უკვე დადგენილია. თითოეული ამ არისათვის დავწეროთ გრინის ფორმულა და ისინი შევჯეროთ. დამატებითი ხაზების გასწვრივ აღებული წირითი ინტეგრალები გაბათილდება და მივიღებთ გრინის ფორმულას მრავალბმული არისათვის, რომელსაც გარეგნულად (4.1) სახე ექნება. მაგრამ მარჯვნივ ნაწილში აღებული ინტეგრალი მოცემულ D არის L საზღვარზე ოქნება გავრცელებული. ამასთან ყოველ კონტურზე შემოვლა ხდება დადებითი მიმართულებით.

შენიშვნა 3. $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ კრძო წარმოებულების უწყვეტობა არ წარმოადგენს აუცილებელ პირობას გრინის ფორმულის მართებულობისათვის. მართლაც, $P = \frac{x}{x^2 + y^2}$ და $Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ფუნქციების $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ კრძო წარმოებულები წყვეტილია $(0,0)$ წერტილში. მაგრამ თუ D არედი იღებთ ერთეულ რადიუსიან წრეს $x^2 + y^2 \leq 1$, მაშინ აიღებთ შესაძლებელსა, რომ

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy = 0,$$

სადაც L არის ერთეულ რადიუსიანი წრეწირი $x^2 + y^2 = 1$.



ნახ. 37, ბ)

გრინის ფორმულა საშუალებას იძლევა მივიღოთ ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა ამ არის საზღვარზე გავრცელებული მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის საშუალებით. მართლაც, თუ გრინის (4.1) ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = 0$$

გვექნება

$$S = \iint_D dx dy = - \oint_L y dx, \quad (4.5)$$

სადაც S წარმოადგენს D არის ფართობს.

ანალოგიურად, თუ $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$, მივიღებთ

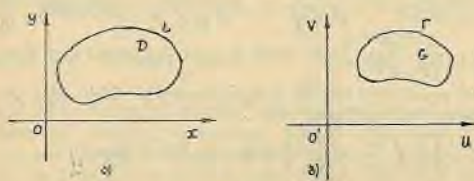
$$S = \iint_D dx dy = \oint_L x dy. \quad (4.6)$$

(4.5) და (4.6) ტოლობებიდან გვაქვს

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4.7)$$

ახლა ვანგენოთ I თავის (9.3) ფორმულის მართებულობა. განვიხილოთ ორი სიბრტყე, ერთერთ მათგანზე ავიღოთ მართკუთხა Oxy კოორდინატთა სისტემა, ხოლო მეორეზე $O'uv$ (ნახ. 38, ა, ბ). ამ სიბრტყეებზე ავიღოთ შესაბამისად ჩაკეტილი D და G არეები, რომლებიც შემოსაზღვრულია გლუვი L და Γ წირებით. დავუშვათ, რომ D და G არეებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალკისა შესაბამისობა ფორმულებით

$$x = \varphi(u, v), \quad y = g(u, v). \quad (4.8)$$



ნახ. 38

ფიგურისათვის, რომ φ და g ფუნქციების კერძო წარმოებულები $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ უწყვეტია G არეში და იკოები

$$I(u, v) = \frac{D(\varphi, g)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ნულისაგან განსხვავებულია, ე. ი. ნიშანს ინარჩუნებს G არეში. მოყვანილ პირობებში G არის Γ საზღვარი გადასახება D არის L საზღვარში. ვთქვათ, Γ კონტურის პარამეტრული განტოლებებია

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (4.9)$$

სადაც $u(t)$ და $v(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. L კონტურის პარამეტრული განტოლებები იქნება

$$x = \varphi[u(t), v(t)], \quad y = g[u(t), v(t)], \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

ეს ფუნქციებიც უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. (4.6)-ის ძალიან I არის S ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \iint_D x dy = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi[u(t), v(t)] g'_t[u(t), v(t)] dt,$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია L -ზე დადებითი მიმართულებით, რადგან

$$\frac{dy}{dt} = g'_t[u(t), v(t)] = \frac{\partial g}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} v'(t),$$

ამიტომ

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi[u(t), v(t)] \left[\frac{\partial g}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} v'(t) \right] dt. \quad (4.10)$$

პირობის ძალით $P = \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u}$ და $Q = \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v}$ ფუნქციები უწყვეტია G არეში, ამიტომ არსებობს წირითი ინტეგრალი

$$\int_{\Gamma} \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} du + \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} dv = \int_{\Gamma} \varphi(u, v) \left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right). \quad (4.11)$$

გველისხმობთ, რომ ინტეგრალი აღებულია დადებითი მიმართულებით. (4.9)-ის გათვალისწინებით (4.11)-დან მივიღებთ

$$\int_{\Gamma} \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} du + \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} dv = \\ = \pm \int_a^b \varphi[u(t), v(t)] \left[\frac{\partial g}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} v'(t) \right] dt. \quad (4.12)$$

ინტეგრალის წინ აიღება ნიშანი „+“, თუ t პარამეტრის ცვლილებას α -დან β -მდე შეესაბამება (u, v) წერტილის მოძრაობა Γ კონტურზე დადებითი მიმართულებით, ხოლო ნიშანი „-“ წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამრიგად (4.10) და (4.12) ტოლობებიდან გვაქვს

$$S = \pm \int_a^b \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} du + \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} dv, \quad (4.13)$$

სადაც ინტეგრალის წინ აიღება ნიშანი „+“, თუ (4.8) ასახვის დროს Γ კონტურის დადებითი მიმართულებას შეესაბამება L კონტურის დადებითი მიმართულება, წინააღმდეგ შემთხვევაში აიღება „-“ ნიშანი.

რადგან $P = \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u}$ და $Q = \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v}$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებათა G არეში და

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} - \varphi \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} = I(u, v),$$

ამიტომ გრინის ფორმულის ძალით (4.13)-დან გვაქვს

$$S = \pm \int_a^b \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial u} du + \varphi(u, v) \frac{\partial g}{\partial v} dv = \\ = \pm \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv = \pm \iint_G I(u, v) du dv.$$

მეზსაღამე

$$S = \pm \iint_G I(u, v) du dv. \quad (4.14)$$

აქ (4.14) ინტეგრალზე გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, მივიღებთ

$$S = \pm \bar{S} \cdot I(\xi, \eta),$$

სადაც $\bar{S}$ არის G არის ფართობი, ხოლო (ξ, η) კი G არის რაღაც წერტილი.

რადგან S და $\bar{S}$ დადებითი რიცხვებია, ამიტომ (4.14) ინტეგრალის წინ ნიშანი გამოვყავთ $I(\xi, \eta)$ რიცხვის ნიშანს, ე. ი. $I(u, v)$ -ს ნიშანს G არეში $I(u, v)$ ნიშანს ინარჩუნებს G არეში. ამრიგად (4.14) ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$S = \iint_G |I(u, v)| du dv.$$

მაგალითი 1. გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ წირითი ინტეგრალი

$$\oint_L (3x+y) dx - (y+3x) dy,$$

სადაც L არის წრეწირი $x^2 + y^2 = R^2$.

ამოხსნა. ფუნქციები $P(x, y) = 3x + y$, $Q(x, y) = -(y + 3x)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -3$ უწყვეტია $x^2 + y^2 \leq R^2$ წრეში, ამიტომ გრინის ფორმულის ძალით გვექნება

$$\oint_L (3x+y) dx - (y+3x) dy = \iint_D (-3-1) dx dy = -4 \iint_D dx dy = -4\pi R^2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

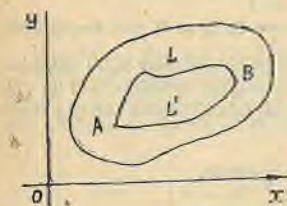
ამოხსნა. ელიფსის დადებითი მიმართულებით შემოვლის დროს t პარამეტრი იზრდება 0-დან 2π -მდე. ამიტომ (4.7) ფორმულის ძალით ვაქვს

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

§ 5. წირითი ინტეგრალის ინტეგრაციის ზოგადი
დამოუკიდებლობის პირობები

ვთქვათ Oxy სიბრტყის D არეზე მოცემულია უწყვეტი $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციები. ავიღოთ D არეში რაიმე უწყვეტი, უბან-უბან გლუვი L წირი, რომლის ბოლოებია A და B წერტილები (ნახ. 39). განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_L Pdx + Qdy. \quad (5.1)$$



ნახ. 39

თუ D არეში ავიღებთ L' წირს, რომელიც აგრეთვე იკრთება A და B წერტილებს, მაშინ, როგორც ფაქტად, წირი-თი ინტეგრალი

$$\int_{L'} Pdx + Qdy$$

საზოგადოდ განსხვავდება (5.1) ინტეგრალისაგან (§ 2 მაგალითი 5.6). ვიტყვი, რომ (5.1) წირითი ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრირების გზაზე D არეში, თუ მისი მნიშვნელობა D არეში მდებარე, საერთო სათაფისა და საერთო ბოლოს მქონე, ნებისმიერი უწყვეტი, უბან-უბან გლუვი წირის გასწვრივ ერთიდაიგივეა.

წირითი ინტეგრალის გზისაგან დამოუკიდებლობის პირობებს გვაძლევს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1. თუ $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტი

ფუნქციებია რაიმე ჩაკეტილ ცალკეულ D არეში, მაშინ შემდეგი ოთხი პირობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

1) D არეში მოთავსებული ნებისმიერი ჩაკეტილ უბან-უბან გლუვი L წირისათვის

$$\int_L Pdx + Qdy = 0;$$

2) D არის ნებისმიერი A და B წერტილებისათვის

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ინტეგრირების გზაზე;

3) გამოსახულება $Pdx + Qdy$ წარმოადგენს D არეზე განსაზღვრულ რაიმე ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს ე. ი. არსებობს D არეზე განსაზღვრული ისეთი $F(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$dF = Pdx + Qdy,$$

4) D არის ნებისმიერი წერტილში

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (5.2)$$

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცებას ჩავატარებთ შემდეგი სქემით

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1,$$

ე. ი. ვაჩვენებთ, რომ პირველი პირობიდან გამომდინარეობს მეორე, მეორედან — მესამე, მესამედან — მეოთხე, ხოლო მეოთხედან — პირველი. ამით ნაჩვენებია იქნება, რომ ერთ-ერთი პირობის შესრულება უზრუნველყოფს დანარჩენი სამი პირობის შესრულებას.

პირველი ნაბიჯი: $1 \Rightarrow 2$. განვიხილოთ D არეში A და B

წერტილების შემოკრთვადი ორი ნებისმიერი უწყვეტი, უბან-უბან გლუვი ACB და ADB წირი (ნახ. 40). ეს ორი წირი ერთად შეადგენს D არეში მოთავსებულ ჩაკეტილ L წირს. 1) პირობის თანახმად

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0,$$

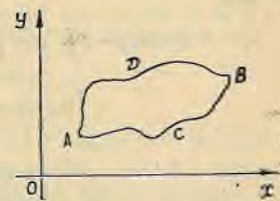
მაგრამ

$$\begin{aligned} \int_L Pdx + Qdy &= \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy.$$

ე. ი. სრულდება 2) პირობა.



ნახ. 40

მეორე ნაბიჯი: $2 \Rightarrow 3$. დავუშვათ $\int_{AB} Pdx + Qdy$ არ არის

დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე, ე. ი. დამოკიდებულია მხოლოდ A და B წერტილებზე. თუ დავაფიქსირებთ $A(x_0, y_0)$ წერტილს, მაშინ ეს ინტეგრალი იქნება $B=B(x, y)$ წერტილის x და y კოორდინატების ფუნქცია:

$$F(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy.$$

ვაჩვენოთ, რომ $F(x, y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია და

$$dF = Pdx + Qdy.$$

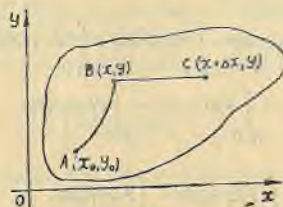
$P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციების D არეში უწყვეტობის გამო საკმარისია, ვაჩვენოთ, რომ D არის ნებისმიერ B წერტილში

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (5.3)$$

შევადგინოთ $F(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდი x ცვლადით $B(x, y)$ წერტილში:

$$\begin{aligned} \Delta_x F &= F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{AC} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{BC} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

სადაც C არის წერტილი კოორდინატებით $x + \Delta x$ და y (ნახ. 41). ვინაიდან ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე, ამი-



ნახ. 41

ტომ $B(x, y)$ და $C(x + \Delta x, y)$ წერტილებს შორის ინტეგრების გზად ავიღოთ ამ წერტილების შემადგენელი მონაკვეთი. მაშინ გვექნება

$$\Delta_x F = \int_{BC} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

თუ უკანასკნელი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, მივიღებთ

$$\Delta_x F = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

საიდანაც, $P(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, გვექნება

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y).$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. ამრიგად სრულდება

3) პირობა.

მესამე ნაბიჯი: $3 \Rightarrow 4$. ვთქვათ $F(x, y)$ არის D არეზე განსაზღვრული ისეთი ფუნქცია, რომ $dF = Pdx + Qdy$, მაშინ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

აქედან შეარცის* თეორემის (იხ. [37], თავი 1, § 17) ძალით გვაქვს

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

ე. ი. მივიღეთ დამატკიცებული (5.2) ტოლობა.

მეოთხე ნაბიჯი: $4 \Rightarrow 1$. დავუშვათ სრულდება 4) პირობა. ავიღოთ D არეში მოთავსებული ნებისმიერი ჩაკეტილი უბან-უბან გლუვი L წირი. რადგან D არე ცალკეულია, L წირი იქნება D -ში მოთავსებული რაიმე D^* არის საზღვარი. დავწეროთ გრძინის ფორმულა D^* არისათვის

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

* შეარცის (1843-1921) — გერმანელი მათემატიკოსი.

4) პირობის ძალით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომარეობა ინტეგრალი ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თეორემაში მოყვანილი პირობა D არის ცალკეობის შესახებ არსებითია.

განვიხილოთ ორადგილად $D = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ არეზე განსაზღვრული

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ და } Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ფუნქციები. ცხადია $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები უწყვეტია D არეში, ამასთან $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

D არეში მოთავსებული ნებისმიერი ρ რადიუსისა და I წრეწირისათვის, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \frac{-\rho \sin t (-\rho \sin t) + \rho \cos t \rho \cos t}{\rho^2 \cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

ამრიგად, მიუხედავად იმისა რომ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ მოცემული ინტეგრალი შეკრულ წირზე არ არის ნულის ტოლი. ეს გამოიწვია D არის მრავალაღმუხლოვანად.

§ II. სრული დიფერენციალის ინტეგრალი

ვთქვათ $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები უწყვეტია ცალკეობულ D არეში. დავუშვათ, რომ ამ არის ყოველ წერტილში

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad \text{მაშინ თეორემა 5.1-ის ძალით}$$

$$Pdx + Qdy \quad (6.1)$$

გამოსახულება წარმოადგენს

$$F(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

ფუნქციის სრულ დიფერენციალს D არეში, სადაც $A(x_0, y_0)$ წარმოადგენს D არის ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილს.

ვთქვათ (6.1) გამოსახულება აგრეთვე წარმოადგენს რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. მაშინ $\Phi(x, y) = u(x, y) - F(x, y)$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

ამიტომ $\Phi(x, y) = C$ (იხ. [37], თავი I, § 19), ე. ი.

$$u(x, y) = F(x, y) + C, \quad (6.2)$$

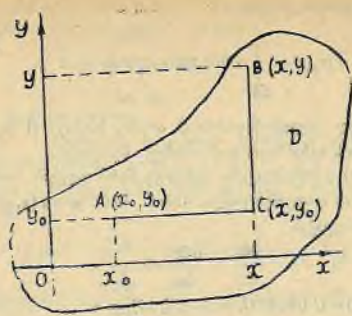
სადაც C რაიმე მუდმივია, ამრიგად, ნებისმიერ ფუნქციას, რომლის სრული დიფერენციალია (6.1) გამოსახულება, აქვს სახე

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + C. \quad (6.3)$$

მაშასადამე, $u(x, y)$ ფუნქციის აღსადგენად მისი სრული დიფერენციალის საშუალებით, საჭიროა D არეში ავიღოთ ნებისმიერი $A(x_0, y_0)$ წერტილი, დავაფიქსიროთ ის და გამოვთვალოთ

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \quad (6.4)$$

ინტეგრალი D არეში მდებარე ნებისმიერი იმ უბან-უბან გლუვი წირის გასწვრივ, რომელიც აერთებს $A(x_0, y_0)$ წერტილს ნებისმიერ $B(x, y)$ წერტილთან. ვინაიდან განხილული ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე, ამიტომ ინტეგრების წირი შეგვიძლია შევარჩიოთ სპეციალურად. (6.4) ინტეგრალის გამოთვლა შესაძრწევად მარტივდება, თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს ტეხილს, რომლის მდგენელი საკოორდინატო ღერძების პარალელურია. მაგალითად, თუ $A(x_0, y_0), C(x, y_0)$ და $B(x, y)$ წერტილების შემადგენელი ტეხილი (ნახ. 42) მოლინოდ მდებარეობს D არეში, მაშინ,



ნახ. 42

ვინაიდან AC მონაკვეთზე $dt=0$, ხოლო CB მონაკვეთზე $dx=0$, ამიტომ გვექნება

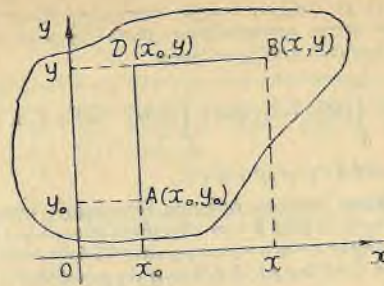
$$\begin{aligned} \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dt + Q d\tau &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P dt + Q d\tau + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} P dt + Q d\tau = \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P(t, y_0) dt + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Q(x, \tau) d\tau = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

ამრიგად, (6.3)-დან გვაქვს

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, \tau) d\tau + C. \quad (6.5)$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, თუ ინტეგრების გზად ავიღებთ $A(x_0, y_0)$, $D(x_0, y)$ და $B(x, y)$ წერტილების შემაერთებელ ტეხილს (ნახ. 43), მაშინ

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, \tau) d\tau + \int_{x_0}^x P(t, y) dt + C.$$



ნახ. 43

შენიშვნა. თუ ACB და ADB ტეხილები გამოდიან D არიდან, მაშინ ინტეგრების გზად უნდა ავიღოთ რაიმე სხვა ტეხილი, რომლის მდებარეობა საკონკრეტო ღერძების პარალელურია. მაგალითად, ტეხილი, რომელიც მოცემულია 44-ე ნახაზზე.

მაგალითი 1. შევამოწმოთ წარმოადგენს თუ არა $(3x^2y^2 - y^3 + 4x)dx + (2x^2y - 3xy^2 + 5)dy$ გამოსახულება რომელიმე ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს რაიმე არეში. არსებობის შემთხვევაში ვაპოვოთ ეს ფუნქცია.

ამოხსნა. გვაქვს

$$P = 3x^2y^2 - y^3 + 4x, \quad Q = 2x^2y - 3xy^2 + 5,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y - y^3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^2y - 3y^2.$$

როგორც ვხედავთ P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ფუნქციები უწყვეტია მთელ Oxy

სიბრტყეზე და ამ სიბრტყის ყოველ წერტილში $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. ამიტომ არსებობს $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი მოცემული გამოსახულების ტოლია, ანუ $u(0, 0) = 0$ წერტილი და ვიპოვოთ $u(x, y)$ ფუნქცია (6.5) ფორმულით. გვაქვს

$$u(x, y) = \int_0^x (3t^2 \cdot 0 - 0 + 4t) dt + \int_0^y (2x^2 t - 3xt^2 + 5) dt + C = 2x^2 + x^2 y^2 - xy^2 + 5y + C.$$

ახლა მივიღოთ ტოლობა, რომელიც წარმოადგენს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმული ანალოგს წირითი ინტეგრალებისათვის. თუ (6.2) ტოლობაში დავუშვებთ $x = x_0, y = y_0$ და გავითვალისწინებთ რომ $F(x_0, y_0) = 0$, მივიღებთ $C = U(x_0, y_0)$. ამიტომ (6.2) ასე გადაიწერება

$$F(x, y) = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

შ. ი.

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

უკანასკნელ ტოლობაში დავუშვებთ $x = x_1, y = y_1$. მივიღებთ

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)}, \quad (6.6)$$

სადაც $u(x, y)$ არის ნებისმიერი ფუნქცია რომლის სრული დიფერენციალია $P dx + Q dy$ გამოსახულება. მივიღეთ ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის ანალოგი წირითი ინტეგრალებისათვის. შევნიშნოთ, რომ მიღებული ფორმულა მართებულია მაშინ, როდესაც წირითი ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ წირითი ინტეგრალი $(xy^2 - x^2)dx + (x^2y - y^2)dy$ გამოსახულებიდან არ არის დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე და გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{(-1, 1)}^{(2, 3)} (xy^2 - x^2) dx + (x^2y - y^2) dy.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$P = xy^2 - x^2, \quad Q = x^2y - y^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

ამიტომ არსებობს მთელ Oxy სიბრტყეზე განსაზღვრული $u(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალია მოცემული ინტეგრალქვეშა გამოსახულება. სწავის წერტილად ავიღოთ $(0, 0)$ და გამოვივლოთ $u(x, y)$ ფუნქცია (6.5) ფორმულით

$$u(x, y) = \int_0^x (0 - t^2) dt + \int_0^y (x^2 t - t^2) dt + C = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + C.$$

ამიტომ (6.6)-ის ძალით მივიღებთ

$$I = \int_{(-1, 1)}^{(2, 3)} (xy^2 - x^2) dx + (x^2y - y^2) dy = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{(-1, 1)}^{(2, 3)} = \frac{25}{4}.$$

§ 7. წირითი ინტეგრალის ზოგადი გამოყენება

1. წირის მასის გამოთვლა. ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია უწყვეტი წრფევიანი L წირი და მასზე მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $\rho(x, y)$ ფუნქცია. ასეთი წირის m მასა (1.5)-ის ძალით გამოთვლება ფორმულით

$$m = \int_L \rho(x, y) ds. \quad (7.1)$$

ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება მივიღოთ, რომ, თუ $\rho(x, y, z)$ არის სივრცითი L წირის მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ L წირის m მასისათვის გვაქვს

$$m = \int_L \rho(x, y, z) ds.$$

მაგალითი 1. $y = \ln x$ წირზე წერტილებს შორის რომლის აბსცისებია $x_1 = 4\sqrt{3}$ და $x_2 = 4\sqrt{5}$ განაწილებული მასა. იპოვეთ ეს მასა, თუ მასი სიმკვრივე წირის ყოველ წერტილში ამ წერტილის აბსცისის კვადრატის ტოლია.

ამოცანა 1. ვინაიდან $\rho = x^2$, ამიტომ (7.1)-ის თანახმად გვაქვს

$$m = \int_L x^2 ds = \int_{-4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{-4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \\ = \frac{1}{3} (1 + x^2)^{3/2} \Big|_{-4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} = \frac{386}{3}.$$

2. მატერიალური წირის მიერ მატერიალური წერტილის მიზიდულობის ძალის გამოთვლა. ვთქვათ უწყვეტ წრფეზე L წირზე განაწილებულია მასა რომლის სიმკვრივეა უწყვეტი $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ ფუნქცია. დავუშვათ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ არის m_0 მასის მქონე მატერიალური წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს მოცემულ წირზე. ვიპოვოთ $\vec{F}$ ძალა, რომლითაც წირი იზიდავს მატერიალურ წერტილს.

განვიხილოთ წირის რეალის ds ელემენტი. ამ ელემენტის მასაა $\rho(M)ds$, ხოლო იმ ძალის სიდიდე, რომლითაც იგი იზიდავს მატერიალურ წერტილს, არის

$$\gamma \frac{m_0 \rho(M) ds}{r^2},$$

სადაც γ — მიზიდულობის მუდმივა, ხოლო $r = |\vec{M}_0 \vec{M}|$. ამ ძალის მიმართულება ემთხვევა იმ $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულებას, რომელიც აერთებს $M_0(x_0, y_0, z_0)$ და $M(x, y, z)$ წერტილებს. ამ ძალის გვერდები Ox , Oy და Oz ღერძებზე შესაბამისად იქნება

$$\gamma \frac{m_0 \rho(M) \cos \alpha}{r^2} ds, \quad \gamma \frac{m_0 \rho(M) \cos \beta}{r^2} ds \quad \text{და} \quad \gamma \frac{m_0 \rho(M) \cos \gamma}{r^2} ds,$$

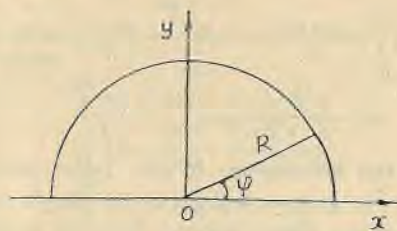
სადაც $\cos \alpha$, $\cos \beta$ და $\cos \gamma$ არიან $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსები.

იმისათვის, რომ მივიღოთ საძიებელი ძალის F_x , F_y და F_z გვერდები საკოორდინატო ღერძებზე უნდა მოვახდინოთ აქამდე, ე. ი. ავიღოთ პირველი გვერდის წილობითი ინტეგრალი. ამრიგად,

$$F_x = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(M) \cos \alpha}{r^2} ds, \\ F_y = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(M) \cos \beta}{r^2} ds, \\ F_z = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(M) \cos \gamma}{r^2} ds. \quad (7.2)$$

ამოცანა 2. ვიპოვოთ ის ძალა, რომლითაც იზიდავს R რადიუსის მქონე ერთგვაროვანი ნახევარწრეწირი მის ცენტრში მოთავსებულ ერთეულოვან მასას.

ამოცანა. ვთქვათ ნახევარწრეწირის მასის განაწილების სიმკვრივეა ρ . კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ნახევარწრეწირის ცენტრში ისე, რომ Ox ღერძი დაემთხვეს ნახევარწრეწირის დიამეტრს (ნახ. 45). გვაქვს $r = R$, $m_0 = 1$.



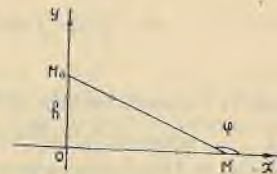
ნახ. 45

$\rho(M) = \rho$, $ds = R d\varphi$, ამიტომ (7.2)-დან მივიღებთ

$$F_x = \gamma \int_L \frac{\rho \cos \varphi}{r^2} ds = \frac{\gamma \rho}{R} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0, \\ F_y = \gamma \int_L \frac{\rho \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{r^2} ds = \frac{\gamma \rho}{R} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2\gamma \rho}{R}.$$

ამოცანა 3. ვიპოვოთ ის ძალა, რომლითაც იზიდავს ერთგვაროვანი წრფე ($\rho = 1$) მისგან h მანძილით დაშორებულ ერთეულოვან მასას.

ამოცანა. ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი დაემთხვეს მოცემულ წრფეს და Oy ღერძი გადმოვსდეს ერთეულოვან მასაზე (ნახ. 46). ჩვენ შემთხვევაში



ნახ. 46

$$ds = dx, \quad r = \sqrt{x^2 + h^2}, \quad \sin \varphi = -\frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad m_0 = 1, \quad \rho = 1.$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma \int_L \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \varphi}{r^2} dx = 0, \\ F_y &= \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sin \varphi}{r^2} dx = -\gamma h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{1}{h} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2}{h}. \end{aligned}$$

3. ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა. ვთქვათ მატერიალური M წერტილი $\vec{F}(x, y)$ ძალის მოქმედებით გადაადგილება Oxy სიბრტყეზე მდებარე ღია, უწყვეტ, მარტივ L წირზე. თუ გავიხსენებთ ამ დროს შესრულებული W მუშაობის გამოთვლის ამოცანას (იხ. § 22, პუნქტი 1) და მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის განსაზღვრებას, მივიღებთ

$$W = \int_L Xdx + Ydy.$$

საესებოთ ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება მივიღოთ, რომ $F(x, y, z)$ ძალის მიერ მატერიალური წერტილის სივრცით L წირზე გადაადგილების დროს შესრულებული მუშაობა გამოითვლება ფორმულით

$$W = \int_L Xdx + Ydy + Zdz.$$

4. დენის მოქმედება მაგნიტზე. ვთქვათ $Oxyz$ სივრცეში მოცემულია L გამტარი, რომელშიც გადის I ძალის დენი. დავუშვათ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილში, რომელიც არ მდებარეობს გამტარზე, მოთავსებულია m მასის მაგნიტი. ვიზოვით ძალა რომლითაც გამტარი მოქმედებს მაგნიტზე.

განვიხილოთ გამტარის წირის რკალის ds ელემენტი. ბიოსავარის კანონის თანახმად იმ ძალის სიდიდე, რომლითაც ds გამტარი მოქმედებს m მასის მაგნიტზე, ტოლია

$$d\vec{F} = \frac{mI}{r^2} [\vec{r} \times d\vec{s}],$$

სადაც $M(x, y, z)$ გამტარის ds რკალზე მდებარე წერტილია, $\vec{r} = \vec{M_0M}$, $r = |\vec{r}|$, $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$.

განხილული $d\vec{F}$ ძალის გვემილები Ox , Oy და Oz ღერძებზე შესაბამისად იქნება

$$\frac{mI}{r^2} [(y - y_0) dz - (z - z_0) dy],$$

$$\frac{mI}{r^2} [(z - z_0) dx - (x - x_0) dz],$$

$$\frac{mI}{r^2} [(x - x_0) dy - (y - y_0) dx].$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ საძებნი $\vec{F}$ ძალის F_x , F_y და F_z გვემელები საკოორდინატო ღერძებზე უნდა მოვახდინოთ აჯამება, ე. ი. ავიღოთ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი. ამრიგად,

$$F_x = mI \int_L \frac{(y - y_0) dz - (z - z_0) dy}{r^2},$$

$$F_y = mI \int_L \frac{(z - z_0) dx - (x - x_0) dz}{r^2},$$

$$F_z = mI \int_L \frac{(x - x_0) dy - (y - y_0) dx}{r^2}.$$

შესავალი თავი

ზედაპირული ინტეგრალები

§ 1. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი

1. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის განსაზღვრება და თვისებები. განვიხილოთ $Oxyz$ სივრცეში გლუვი წირით შემოსაზღვრული ფართობად S ზედაპირი და მასზე განსაზღვრული $f(M) =$

$=f(x, y, z)$ ფუნქცია. მოცემული ზედაპირი რაიმე წესით დავყოთ n რაოდენობის ფართობად $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ ნაწილებად, რომელიც ფართობები შესაბამისად $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ აღნიშნით λ -ით ამ ნაწილების დამატრეხს შორის უდიდესია. $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ სისტემას ეწოდება S ზედაპირის $\lambda \rightarrow 0$ -დანაწილება. განზღუდული დანაწილების ყოველ Δs_k ნაწილზე ნებისმიერად ავიღოთ $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k. \quad (1.1)$$

ამ ჯამს ინტეგრალური ჯამი ეწოდება.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 1.1. I რიცხვს ეწოდება σ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი როცა $\lambda \rightarrow 0$, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ S ზედაპირის ნებისმიერი λ — დანაწილება-სათვის, $\lambda < \delta$, და ნებისმიერი M_k წერტილებისათვის მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

და ამ ფაქტს შემდგენიარად ჩაეწერეთ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 1.2. თუ არსებობს (1.1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი $f(M)$ ფუნქციიდან S ზედაპირზე და იგი შემდგენიარად აღინიშნება:

$$\iint_S f(M) ds \text{ ან } \iint_S f(x, y, z) ds. \quad (1.2)$$

(1.2) შემდგენიარად იკითხება: „პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი S ზედაპირზე $f(M) ds$ “. S -ს ეწოდება ინტეგრალის ზედაპირი, $f(M) = f(x, y, z)$ -ს ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ხოლო ds — ზედაპირის ფართის ელემენტი.

ამრიგად, პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი $f(M)$ ფუნქციიდან S ზედაპირზე წარმოადგენს (1.1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\iint_S f(M) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta s_k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (1.2) ინტეგრალი ამბობენ, რომ $f(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია S ზედაპირზე.

ისევე როგორც ორწევრი ინტეგრალის შემთხვევაში, მტკიცდება პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1. თუ ფართობად S ზედაპირზე $f(M) = C = \text{const}$, მაშინ

$$\iint_S f(M) ds = C |S|,$$

სადაც $|S|$ არის S ზედაპირის ფართობი.

2. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ფართობად S ზედაპირზე და A მუდმივია, მაშინ $Af(M)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია S ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S Af(M) ds = A \iint_S f(M) ds.$$

3. თუ $f(M)$ და $\varphi(M)$ ფუნქციები ინტეგრებადია ფართობად S ზედაპირზე, მაშინ მათი ჯამიც ინტეგრებადია S ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S [f(M) + \varphi(M)] ds = \iint_S f(M) ds + \iint_S \varphi(M) ds.$$

4. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია ფართობად S ზედაპირზე და S ზედაპირი დაყოფილია ფართობად S_1 და S_2 ზედაპირებად, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_S f(M) ds = \iint_{S_1} f(M) ds + \iint_{S_2} f(M) ds.$$

5. თუ $f(M)$ და $\varphi(M)$ ფუნქციები ინტეგრებადია S ზედაპირზე და ამ ზედაპირზე $f(M) \leq \varphi(M)$, მაშინ

$$\iint_S f(M) ds \leq \iint_S \varphi(M) ds.$$

6. თუ $f(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია S ზედაპირზე, მაშინ $|f(M)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია ამ ზედაპირზე და

$$\left| \iint_S f(M) ds \right| \leq \iint_S |f(M)| ds.$$

7. თუ $f(M)$ ფუნქცია უწყვეტია ფართობად S ზედაპირზე, მაშინ ამ ზედაპირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი P წერტილი, რომ

$$\iint_S f(M) ds = f(P) \cdot |S|.$$

ეს არის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალისათვის.

2. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოთვლა.

თეორემა 1.1. ვთქვათ S ზედაპირის განტოლებაა $z = \varphi(x, y)$

და D წარმოადგენს S ზედაპირის გეგმის Oxy სიბრტყეზე. თუ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$

და $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ უწყვეტია D არეზე, მაშინ S ზედაპირზე უწყვეტი $f(x, y, z)$

ფუნქცია ინტეგრებალია ამ ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad (1.3)$$

სადაც $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

დამტკიცება. განვიხილოთ S ზედაპირის λ -დანაწილება $S_1, S_2, \dots, S_n$, როგორც უიციო (იხ. თავი 1, § 12)

$$\Delta S_k = \iint_{D_k} \sqrt{1 + \varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y)} dx dy, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

სადაც D_k წარმოადგენს S_k ზედაპირის გეგმის Oxy სიბრტყეზე. ორჯერადი ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\Delta S_k = \sqrt{1 + \varphi_x^2(\xi_k, \eta_k) + \varphi_y^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta D_k, \quad (1.4)$$

სადაც ΔD_k წარმოადგენს D_k არის ფართობს, ხოლო $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$. მაშინ

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k$$

ინტეგრალური ჯამი ასე წარმოიდგინება

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)) \sqrt{1 + \varphi_x^2(\xi_k, \eta_k) + \varphi_y^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta D_k.$$

მეორე მხრივ შევადგინოთ (1.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის შესაბამისი ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)) \sqrt{1 + \varphi_x^2(x_k, y_k) + \varphi_y^2(x_k, y_k)} \Delta D_k.$$

(1.4) ტოლობიდან ჩანს, რომ როდესაც $\mu \rightarrow 0$, მაშინ $\lambda \rightarrow 0$ და პირიქით, სადაც μ არის D_k ($k=1, 2, \dots, n$) არეების დიამეტრების შორის უდიდესი. თეორემის პირობებში

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma^* = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

ამიტომ (1.3) ტოლობის დისამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma^*.$$

ვამტკიცებ

$$\sigma - \sigma^* = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k)) [\sqrt{1 + \varphi_x^2(\xi_k, \eta_k) + \varphi_y^2(\xi_k, \eta_k)} - \sqrt{1 + \varphi_x^2(x_k, y_k) + \varphi_y^2(x_k, y_k)}] \Delta D_k. \quad (1.5)$$

უწყვეტი $f(x, y, \varphi(x, y))$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის ვიძო $|f(x, y, \varphi(x, y))| < k$. მეორეს მხრივ უწყვეტი $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ჩაკეტილ D არეზე. ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ტოცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ, როცა $\mu < \delta$ გვექნება

$$\left| \sqrt{1 + \varphi_x^2(\xi_k, \eta_k) + \varphi_y^2(\xi_k, \eta_k)} - \sqrt{1 + \varphi_x^2(x_k, y_k) + \varphi_y^2(x_k, y_k)} \right| < \frac{\varepsilon}{k|D|}. \quad (1.6)$$

თუ S ზედაპირის დაყოფას ისეთნაირად ჩავატარებთ, რომ $\lambda < \delta$, მაშინ (1.5)-დან (1.6)-ის ძალით გვექნება

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon.$$

ვ. ი.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma^*.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

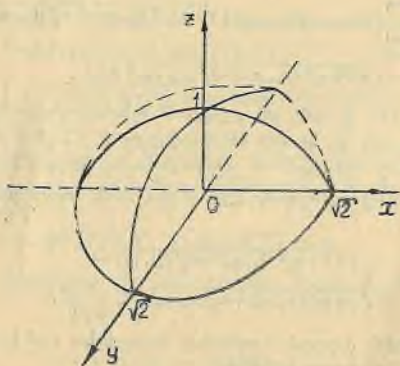
$$\int_S \sqrt{1+x^2+y^2} ds,$$

სადაც S არის $z=1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$ ბრუნვითი პარაბოლოიდისაგან $z=0$

სიბრტყით მოკვეთილი ნაწილი.

ამოხსნა. S ზედაპირის D გეგმილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს $x^2+y^2 \leq 2$ წრეს (ნახ. 47). ამ წრეში ფუნქციები $z'_x = -x$, $z'_y = -y$ უწყვეტია. ამიტომ (1.3) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_S \sqrt{1+x^2+y^2} ds &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy = \\ &= \iint_D (1+x^2+y^2) dxdy. \end{aligned}$$



ნახ. 47

მიღებული ორჭედადი ინტეგრალი გამოვთვალოთ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით. გვაქვს

$$\iint_D (1+x^2+y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (1+\rho^2) \rho d\rho = 4\pi.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$\int_S (\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2} + xy) ds,$$

სადაც S არის $z^2 = x^2 + y^2$ კონუსის ზედაპირის ზედა ნაწილი, მოთავსებული $x^2 + y^2 = 2x$ ცილინდრში.

ამოხსნა. S ზედაპირის D გეგმილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 2x$ წრეს (ნახ. 48). ზედაპირის განტოლებიდან გვაქვს

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

ამიტომ (1.3) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$I = \iint_S (\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2} + xy) ds = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2 + xy) dxdy.$$

მიღებული ორჭედადი ინტეგრალი გამოვთვალოთ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით. გვაქვს

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad D = \left\{ (\rho, \varphi) : -2 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi \right\},$$

$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} [\rho^2 + \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi] \rho d\rho = 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi (1 + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi =$$

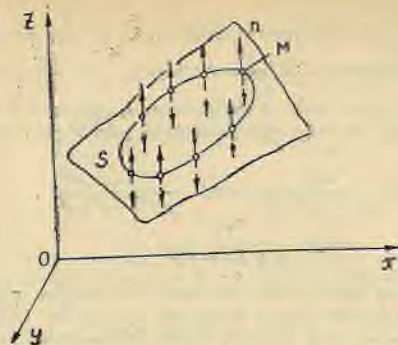
8. ს. თოდუბერი, გ. ხოჭოლაძე, მ. გაბიაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi - 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d \cos \varphi = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi.
\end{aligned}$$

§ 2. მეორე ბაპარის ზღაპირული ინტეგრალი

1. ორმხრივი და ცალმხრივი ზედაპირები. ვთქვათ ზედაპირს ყოველ წერტილში გააჩნია მხები სიბრტყე, რომელიც უწყვეტად იცვლება ზედაპირზე წერტილის უწყვეტად მოძრაობის დროს (ე. ი. როდესაც ზედაპირის ორ წერტილს შორის მანძილი მისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ ამ წერტილებზე გავლებულ მხებ სიბრტყეებს შორის კუთხე მისწრაფვის ნულისაკენ). ასეთ ზედაპირს გლუვი ზედაპირი ეწოდება. ევროპად, თუ გლუვი ზედაპირი მოცემულია $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, ვხტოლუბით, მაშინ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ და $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ უწყვეტია D არეზე. ზედაპირს ეწოდება უბან-უბან გლუვი, თუ იგი შეიძლება დავანაწილოთ სასრულო რაოდენობის გლუვ ზედაპირებად.

ვატყვათ S გლუვი ზედაპირია, და მაშისადავთ, მის ყოველ წერტილში შეძლება ნორმალის გაყვება. S ზედაპირის ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ გარკვეული მიმართულების (ერთ-ერთი ორი შესაძლო მიმართულებიდან) ერთეულოვანი $\vec{n}(M)$ ნორმალი. მოცემულ ზედაპირზე ავიღოთ M წერტილზე გამავალი ნებისმიერი შეკრული L კონტური, რომელიც არ კვეთს ზედაპირის საზღვარს. დავუშვათ, რომ M წერტილის L კონტურზე მოძრაობისას ამ წერტილზე გამავალი $\vec{n}(M)$ ნორმალის მიმართულება უწყვეტად იცვლება (ნახ. 49). M წერტილის საწყის მდებარეობაში დაბრუნებისას $\vec{n}(M)$ ნორმალს ექნება ან თავდაპირველი მიმართულება ან მისი მოპირდაპირე მიმართულება.



ნახ. 49

თუ ზედაპირის ნებისმიერი M წერტილისათვის აღვიღოთ აქვე პირველ შემთხვევას, მაშინ ზედაპირს ეწოდება ორმხრივი ანუ ორიენტირებადი ზედაპირი. ე. ი. ამ შემთხვევაში $\vec{n}(M)$ განსაზღვრავს ზედაპირის გარკვეულ მხარეს და ხდის მას ორიენტირებულს. ამიტომ, თუ ჩვენ ვიტყვით, რომ S ორიენტირებული ზედაპირია ამის ქვეშ გვესმის არა მარტო S ზედაპირი (წერტილი სიმრავლე), არამედ ისიც რომ ამ ზედაპირზე მოცემულია $\vec{n}(M)$ ნორმალი, რომელიც მიმართულებას ინარჩუნებს საწყის წერტილში დაბრუნებისას ნებისმიერ შეკრულ კონტურზე მოძრაობის დროს.

იგივე ზედაპირი $\vec{n}(M)$ ვექტორის მოპირდაპირე ნორმალით ვვამლევს ზედაპირს საწინააღმდეგო ორიენტაციით. S ზედაპირის ორი ურთიერთსაწინააღმდეგოდ ორიენტირებული ზედაპირები უნდა აღვნიშნოთ სხვადასხვა სიმბოლოებით. კერძოდ, მოხერხებულია ერთ-ერთი მათგანი აღვნიშნოთ S^+ -ით, ხოლო მეორე $-S^-$ -ით.

თუ ზედაპირის ნებისმიერი M წერტილისათვის არსებობს ერთი მაინც შეკრული კონტური, რომელზედაც მოძრაობის დროს M წერტილის საწყის მდებარეობაში დაბრუნებისას $\vec{n}(M)$ ნორმალს ექნება თავდაპირველი მიმართულების მოპირდაპირე მიმართულება, მაშინ ზედაპირს ეწოდება ცალმხრივი ზედაპირი.

ორმხრივი ზედაპირების მავალითება: 1) სიბრტყე; 2) სფერო; 3) პარაბოლოიდი.

ორმხრივი ზედაპირის მავალითის წარმოადგენს აგრეთვე $z = \varphi(x, y)$

ფუნქციით განსაზღვრული S ზედაპირი, სადაც $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

ფუნქციები უწყვეტია რაიმე D არეში. როგორც ცნობილია, S ზედაპირის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები გამოიხატება ფორმულებით

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

თუ, მოცემულ ფორმულაში, რადიკალის წინ აღვდებთ გარკვეულ ნიშანს, ამით ზედაპირის უოველ წერტილში დავადგენთ ნორმალის გარკვეულ მიმართულებას. პირიბის ძალით მიმართულებას კოსინუსები წარმოადგენენ წერტილის კოორდინატების უწყვეტ ფუნქციებს, ამიტომ ნორმალის დადგენილი მიმართულებაც უწყვეტადაა დამოკიდებული წერტილის მდებარეობაზე. აქედან ცხადია, რომ მოცემილი ფორმულაში რადიკალის წინ ნიშნის შერჩევას გეომეტრიულად შეესაბამება ზედაპირის გარკვეული მხარის აღება.

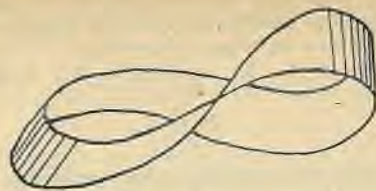
თუ $z = \varphi(x, y)$ განტოლებით მოცემული S ზედაპირის ნორმალი Oz ღერძთან აღდგენს მახვილ კუთხეს, მაშინ ამბობენ რომ არჩეულია ზედაპირის ზედა მხარე, ხოლო თუ ეს კუთხე ბლაგვია — ქვედა მხარე.

შეთანხმებით მივიღოთ, რომ თუ S არის $z = \varphi(x, y)$ განტოლებით მოცემული ორმხრივი ზედაპირი, დადებითი მხარეა S -ის ზედა მხარე და უარყოფითია ქვედა მხარე.

კლასიკური ზედაპირის კლასიკურ მავალითის წარმოადგენს ეგერტ-წოდებული მებრუსის* ფურცელი. ავიღოთ ქაღალდის მოგრძო ლენტა, ერთხელ გადავვრთხოთ (მისი ერთი ბოლო მოვებრუნოთ 180° -ით) და წაბრება ერთმანეთს მივაწებოთ, მივიღებთ მებრუსის ფურცლის მოდელს (ნახ. 50).

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორმხრივ ზედაპირებს.

ვთქვათ S ორიენტირებული ზედაპირია, რომელიც შემოსაზღვრულია მარტივი შეკრული L კონტურით. L კონტურზე მოძრაობის დადებითი მიმართულებად ჩავთვალოთ ის მიმართულება, როდესაც ზედა-

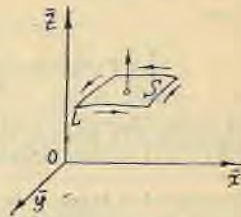


ნახ. 50

პირის არჩეულ მხარეზე, L წიზე დამკვირვებლის მოძრაობის დროს, კონტურით შემოსაზღვრული ზედაპირი ტრეზა დამკვირვებლიდან მარცხნივ (ნახ. 51).

ფიგურირად განსაზღვრება მოძრაობის დადებითი მიმართულება ზედაპირზე მდებარე ყოველი მარტივი შეკრული კონტური-სათვის, რომელიც ზედაპირის ნაწილს შემოსაზღვრავს.

ზედაპირზე მდებარე შეკრულ კონტურზე მოძრაობის დადებითი მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულებას უწოდებენ უარყოფით მიმართულებას.



ნახ. 51

3. მეორე ვარიანტის ზედაპირული ინტეგრალის განსაზღვრება და თვისებები. განვიხილოთ $Oxyz$ სივრცეში $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$ ტოლობით მოცემული ვლუვი S ზედაპირი და მასზე განსაზღვრული $R(M) = R(x, y, z)$ ფუნქცია. ამ ზედაპირზე ავირჩიოთ გარკვეული მხარე, მოცემული ზედაპირი რაიმე წესით დავყოთ n რაოდენობის ფართობად ნაწილებად $S_1, S_2, \dots, S_n$. აღვნიშნოთ λ -თი ამ ნაწილების დიამეტრებს შორის უდიდესი. განვიღოთ დანაწილებას ეწოდება S ზედაპირის λ -დანაწილება. ყოველ S_k ნაწილზე ნებისმიერად ავიღოთ $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n R(M_k) \Delta D_k, \quad (2.1)$$

* ივანტს ტვრდინანდ მებრუსი (1790-1866) — გერმანელი მათემატიკოსი.

სადაც ΔD_k წარმოადგენს Oxy სიბრტყეზე S_k არის გვემოლს ფართობს, აღებული $n+1$ ნიშნით, თუ ზედაპირზე არჩეულია ზედა მხარე, ხოლო $n-1$ ნიშნით, თუ არჩეულია ქვედა მხარე.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 2.1. თუ არსებობს (2.1) ინტეგრალური ჯამის ზღვარი.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma = I,$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი $R(x, y, z)$ ფუნქციიდან S ზედაპირის არჩეულ მხარეზე და იგი შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy \text{ ან } \iint_S R(M) dx dy. \quad (2.2)$$

ამრიგად,

$$\iint_S R(M) dx dy = \lim_{k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(M_k) \Delta D_k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (2.2) ინტეგრალი ამბობენ, რომ $R(x, y, z)$ ფუნქცია ინტეგრებადია S ზედაპირზე x და y ცვლადებით.

განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ, თუ S ცილინდრული ზედაპირია, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია, მაშინ

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = 0.$$

ანალოგიურად განსაზღვრება მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი S ზედაპირის არჩეულ მხარეზე $P(x, y, z)$ და $Q(x, y, z)$ ფუნქციებიდან შესაბამისად y, z და z, x ცვლადებით:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz, \quad \iint_S Q(x, y, z) dz dx.$$

თუ არსებობს

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy, \quad \iint_S P(x, y, z) dy dz \text{ და } \iint_S Q(x, y, z) dz dx$$

ინტეგრალები, მაშინ მათ ჯამს ეწოდება ზოგადი ნახის მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი S ზედაპირის არჩეულ მხარეზე და იგი შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

შემდგომში თუ სპეციალურად არ არის მითითებული უთვლელის ფაქტორის მხედობ, რომ ინტეგრება ზღვება ზედაპირის დადებით მხარეზე (ზედა მხარეზე).

ისევე, როგორც წირით ინტეგრალის შემთხვევაში მტკიცდება მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის შემდეგი თვისებები, რომლებსაც მოვიყვანთ მხოლოდ (2.2) ინტეგრალისათვის:

1. თუ ფართობად S ზედაპირზე $R(M) = C = \text{const}$, მაშინ

$$\iint_S R(M) dx dy = C \cdot |D|,$$

სადაც $|D|$ არის Oxy სიბრტყეზე S ზედაპირის გვემოლის ფართობი.

2. თუ $R(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია S ზედაპირზე და C მუდმივია, მაშინ $CR(M)$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია S ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S CR(M) dx dy = C \iint_S R(M) dx dy.$$

3. თუ $R_1(M)$ და $R_2(M)$ ფუნქციები ინტეგრებადია S ზედაპირზე, მაშინ მათი ჯამიც აგრეთვე ინტეგრებადია S ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S [R_1(M) + R_2(M)] dx dy = \iint_S R_1(M) dx dy + \iint_S R_2(M) dx dy.$$

4. თუ $R(M)$ ფუნქცია ინტეგრებადია S ზედაპირზე და S ზედაპირი გაყოფილია ფართობად S_1 და S_2 ზედაპირებად, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\iint_S R(M) dx dy = \iint_{S_1} R(M) dx dy + \iint_{S_2} R(M) dx dy.$$

5. თუ $R_1(M)$ და $R_2(M)$ ფუნქციები ინტეგრებალია S ზედაპირზე და ამ ზედაპირზე $R_1(M) \leq R_2(M)$, მაშინ

$$\int_S R_1(M) dx dy \leq \int_S R_2(M) dx dy.$$

6. თუ $R(M)$ ფუნქცია ინტეგრებალია S ზედაპირზე, მაშინ $|R(M)|$ ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებალია ამ ზედაპირზე და

$$\left| \int_S R(M) dx dy \right| \leq \int_S |R(M)| dx dy.$$

7. ზედაპირული ინტეგრალი $R(M)$ ფუნქციიდან ერთი და იმავე S ზედაპირის სხვადასხვა მხარეზე მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ე. ი.

$$\int_S^- R(M) dx dy = - \int_S^+ R(M) dx dy.$$

8. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოთვლა.

თეორემა 2.1. ვთქვათ ვლუფი S ზედაპირი მოცემულია $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, გინტოლებით, სადაც D ჩაკეტილი არეა თუ $R(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია S ზედაპირზე, მაშინ ავი ინტეგრებალია S ზედაპირზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_S R(x, y, z) dx dy = \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \quad (2.3)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ S ზედაპირის λ — დანაწილება და დაავადგილოთ ის Oxy სიბრტყეზე. D არე დაიყოფა $D_1, D_2, \dots, D_n$ ნაწილებად. ზედაპირის λ — დანაწილების თითოეულ ნაწილზე ავი-ლით ნებისმიერი წერტილი $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta D_k.$$

სადაც ΔD_k არის D_k -ს ფართობი. ვინაიდან $\zeta_k = \varphi(\xi_k, \eta_k)$, ამიტომ

$$\sigma = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \varphi(\xi_k, \eta_k)) \Delta D_k. \quad (2.4)$$

(2.4) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს D არეზე უწყვეტი $R(x, y, \varphi(x, y))$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს, ამიტომ (2.4) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$, მივიღებთ (2.3)-ს.

თეორემა დამტკიცებულია.
ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ტოლობების მართებულობა

$$\begin{aligned} \int_S P(x, y, z) dy dz &= \int_E P(\varphi(y, z), y, z) dy dz, \\ \int_S Q(x, y, z) dz dx &= \int_G Q(x, g(x, z), z) dz dx, \end{aligned}$$

სადაც S ზედაპირი მოცემულია შესაბამისად განტოლებებით $x = \varphi(y, z)$, $(y, z) \in E$ და $y = g(x, z)$, $(x, z) \in G$.

ასლა განსაზღვროთ მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი შეკრული S ზედაპირისათვის. S ზედაპირი დაეყოთ ისეთ $S_1, S_2, \dots, S_n$ ნაწილებად (თუ ეს შესაძლებელია), რომ თითოეულ მათგანზე მოცემული $R(x, y, z)$ ფუნქცია იყოს ინტეგრებალი. განსაზღვრებით მივიღოთ, რომ

$$\int_S R(x, y, z) dx dy = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} R(x, y, z) dx dy,$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარეში ინტეგრება ზღვება თითოეული S_k ზედაპირის იმ მხარეზე, რომელიც ემთხვევა S ზედაპირის გარე მხარეს.

ანალოგიურად განისაზღვრება შეკრული S ზედაპირისათვის

$$\int_S P(x, y, z) dy dz \quad \text{და} \quad \int_S Q(x, y, z) dz dx$$

ინტეგრალები.

თუ S შეკრული ზედაპირია, შეთანხმებით მივიღოთ, რომ დადებითი მხარეა S -ის გარე მხარე და უარყოფითია — შიგნით მხარე.

შემდგომში, თუ სპეციალურად არ იქნება მითითებული, ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ინტეგრება ზღვება ზედაპირის დადებითი მხარეზე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_S x^2 y^2 z dx dy,$$

სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ქვედა ნახევარი და ინტეგრება ზღვბა S ზედაპირის ზედა მხარეზე.

ამოხსნა. $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფეროს გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის $x^2 + y^2 \leq R^2$ წრე. ამიტომ (2.3) ფორმულის ძალით

$$I = - \iint_D x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

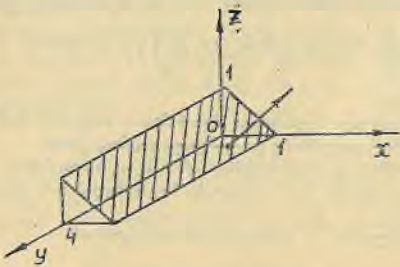
გადავიღეთ პოლარულ კოორდინატებზე $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. გვექნება

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = - \frac{\pi}{4} \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = - \frac{2\pi R^7}{105}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

სადაც S არის $x + y - 1 = 0$ სიბრტყიდან $y = 0$ და $y = 4$ სიბრტყეებით. მოკვეთილი ნაწილის ზედა მხარე მოთავსებული პირველ ოქტანტში (ნახ. 52).



ნახ. 52

ამოხსნა. გავსაზღვრებთ

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S x dy dz + \iint_S y dz dx + \iint_S z dx dy.$$

ვინაიდან S სიბრტყე Oy ლერძის პარალელურია, ამიტომ

$$\iint_S y dz dx = 0.$$

ვთქვათ D_1 და D_2 არის S ზედაპირის გეგმილები შესაბამისად Oyz და Oxz სიბრტყეებზე, მაშინ (2.3) და (2.5) ფორმულების ძალით მივიღებთ

$$\iint_S z dx dy = \iint_{D_2} (1-x) dx dy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1-x) dx = 2,$$

$$\iint_S x dy dz = \iint_{D_1} (1-z) dy dz = \int_0^4 dy \int_0^1 (1-z) dz = 2.$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2 + 2 = 4.$$

§ 8. კავშირი პირველი და მეორე გზების უმდვიულო ინტეგრალის შორის

ვთქვათ, ფართობი S ზედაპირის განტოლებაა $z = \varphi(x, y)$, ხოლო ამ ზედაპირის გეგმილი Oxy სიბრტყეზე არის ჩაკეტილი D არე.

ვიგულისხმეთ, რომ S ზედაპირი გლუვია, ე. ი. $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ და $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

ფუნქციები უწყვეტია D არეზე.

განვიხილოთ S ზედაპირის λ — დანაწილება: $S_1, S_2, \dots, S_n$. ვთქვათ D_k წარმოადგენს S_k -ს გეგმის Oxy სიბრტყეზე, მაშინ როგორც ვიცით (იხ. თავი I, § 12)

$$\Delta S_k = \iint_{D_k} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad (3.1)$$

სადაც ΔS_k არის S_k ზედაპირის ფართობი. თუ მხედველობაში მი-

ვიღებთ, რომ S ზედაპირის ზედა მხარის ნორმალის მიერ Oz ღერძთან შედგენილი კუთხის კოსინუსი გამოითვლება ფორმულით

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

მაშინ (3.1) ტოლობა ასე გადაიწერება

$$\Delta S_k = \iint_{D_k} \frac{dx dy}{\cos \gamma}.$$

აქედან საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით მივიღებთ

$$\Delta S_k = \frac{\Delta D_k}{\cos \gamma_k^*}, \quad (3.2)$$

სადაც γ_k^* არის კუთხე, რომელსაც Oz ღერძთან შეადგენს S_k -ს ერთ-ერთ გარკვეულ წერტილზე გავლებული ნორმალი, ხოლო ΔD_k წარმოადგენს D_k -ს ფართობს.

(3.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\Delta D_k = \cos \gamma_k^* \Delta S_k, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

შევადგინოთ S ზედაპირზე უწყვეტი $R(x, y, z)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta D_k = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k^* \Delta S_k.$$

ახლა ვთქვათ, γ_k არის კუთხე რომელსაც შეადგენს (ξ_k, η_k, ζ_k) წერტილზე გავლებული ზედაპირის ზედა მხარის ნორმალი Oz ღერძთან. შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cos \gamma_k \Delta S_k.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \iint_S R(x, y, z) dx dy, \quad (3.3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^* = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma ds. \quad (3.4)$$

ვიხვეწოთ, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^*. \quad (3.5)$$

გვაქვს

$$|\sigma - \sigma^*| < \sum_{k=1}^n |R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)| |\cos \gamma_k^* - \cos \gamma_k| \Delta S_k. \quad (3.6)$$

D არეზე $\cos \gamma$ -ს თანაბრად უწყვეტობის გამო, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ S ზედაპირის ნებისმიერი λ — დანაწილებისათვის, როცა $\lambda < \delta$, გვაქვს

$$|\cos \gamma_k^* - \cos \gamma_k| < \frac{\varepsilon}{M|S|},$$

სადაც M არის $|R(x, y, z)|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა S ზედაპირზე. ამიტომ (3.6) უტოლობიდან მივიღებთ

$$|\sigma - \sigma^*| < M \frac{\varepsilon}{M|S|} \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \varepsilon.$$

ამით (3.5) ტოლობა დამტკიცებულია.

(3.3), (3.4) და (3.5)-ის ძალით გვაქვს

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma ds. \quad (3.7)$$

ამრიგად, მივიღეთ კავშირი პირველი და მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგრალებს შორის.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha ds, \quad (3.8)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta ds, \quad (3.9)$$

(3.7), (3.8) და (3.9) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ კავშირს ზოგადი სახის მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგრალსა და პირველი გვარის ზედაპირულ ინტეგრალს შორის:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

§ 4. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა

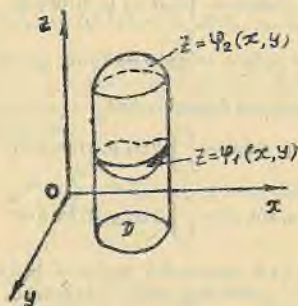
გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ამყარებს კავშირს ჩაყვრილ არე-ზე გავრცელებულ სამყარად ინტეგრალსა და ამ არის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე განსაზღვრულ ზედაპირულ ინტეგრალს შორის.

$Oxyz$ სივრცეში მოთავსებულ ჩაყვრილ T არეს ეწოდება მარტივი (მარტივი სხეული), თუ მის ნებისმიერ შიგა წერტილზე სათორღინა-ტო ღერძების პარალელურად გამოვლი წრფეები T არის S საზღვარს ჰყვითს ორ წერტილში.

თეორემა 4.1. ვთქვათ მარტივი T არე შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი S ზედაპირით. თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ ფუნქციები უწყვეტია T არეში, მაშინ ადგილი აქვს გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულას

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (4.1)$$

დამტკიცება. ვთქვათ T სხეული ქვემოთა და ზემოთა შე-მოსაზღვრულია შესაბამისად S_1 და S_2 ზედაპირებით, რომელთა გან-ტოლებებია $z = \varphi_1(x, y)$ და $z = \varphi_2(x, y)$, ($\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$), ხო-ლო გვერდებიდან Δz ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველები Oz ღერძის პარალელურია (ნახ. 53). განვიხილოთ ინტეგრალი



ნახ. 53

* ქ. ფ. გაუსი (1777-1855) — გერმანელ მათემატიკოსი
მ. ვ. ოსტროგრადსკი (1801-1861) — რუსი მათემატიკოსი

$$I = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

თუ D წარმოადგენს T არის გეგმის Oxy სიბრტყეზე, მაშინ გვექ-ნება

$$I = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R[x, y, \varphi_2(x, y)] dx dy - \iint_D R[x, y, \varphi_1(x, y)] dx dy.$$

უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალები, (2.3) ფორმულის თანახმად წარმოადგენენ შესაბამისად S_2 და S_1 ზედაპირე-ბის ზედა მხარეზე განსაზღვრულ მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგ-რალებს, ამიტომ

$$I = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy - \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy.$$

ვინაიდან

$$\iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{S_1^-} R(x, y, z) dx dy$$

და

$$\iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

ამიტომ გვექნება

$$I = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1^-} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) dx dy.$$

შორეოდ

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R(x, y, z) dx dy. \quad (4.2)$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P(x, y, z) dy dz, \quad (4.3)$$

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q(x, y, z) dz dx. \quad (4.4)$$

(4.2), (4.3) და (4.4) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ დასამტკიცებელ (4.1) ფორმულას.

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ გამოვიყენებთ კავშირის პირველი და მეორე გვირგვინის ზედაპირულ ინტეგრალებს შორის, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ისეც ჩაიწერება

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

სადაც $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ წარმოადგენენ S ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი ჩაკეტილი სივრცითი T არისათვის, რომელიც (დამატებითი ზედაპირების გავლებით) შეიძლება დავანწილოთ სასრული რაოდენობის არეებად, რომელთაგან თითოეული მარტივია. მართლაც, თუ დაყოფის შედეგად მიღებული თითოეული არისათვის დავწერთ (4.1) ფორმულას და მიღებულ ტოლობებს შევკრებთ, ტოლობის მარცხენა ნაწილში მივიღებთ სამჯერად ინტეგრალს მთელ T არეზე, ხოლო მარჯვენა ნაწილში ზედაპირულ ინტეგრალს S ზედაპირზე (ვინაიდან ზედაპირული ინტეგრალი თითოეულ დამატებით ზედაპირზე იღებდა ორჯერ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მხარეზე და ამიტომ შეკრების დროს ისინი ერთმანეთს აბათილებენ).

ზოგჯერ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით ზედაპირული ინტეგრალის გამოთვლა მარტივდება.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

სადაც S არის $2x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ პირამიდის გარე მხარე (ნახ. 54).

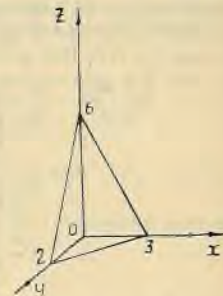
შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის ძალით

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy =$$

$$= \iiint_T (1 + 1 + 1) dx dy dz =$$

$$= 3 \iiint_T dx dy dz = 3 V_{\text{პირ}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 18.$$



ნახ. 54

შ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

სადაც S არის $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს გარე მხარე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის ძალით, გვაქვს

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = 3 \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

გადავიღეთ სფერულ კოორდინატებზე: $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$. ჩვენ შემთხვევაში $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. ამიტომ

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta =$$

$$= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2,$$

შ. ს. თოდუბა, ვ. ხოქოლაძე, შ. გვამამეილი, ნ. მაკარაშვილი

ამიტომ გვაქვს

$$I = 3 \int_0^R \rho d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \theta d\varphi = 6\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12}{5} \pi R^5.$$

გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა საშუალებას იძლევა მივიღოთ სხეულის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა მის საზღვარზე გავრცელებული მხოლოდ გვარის ზედაპირული ინტეგრალის საშუალებით. მართლაც, თუ (4.2), (4.3) და (4.4) ფორმულებში შესაბამისად დავუშვებთ, რომ $R(x, y, z) = z$, $P(x, y, z) = x$ და $Q(x, y, z) = y$, გვქვია

$$V = \int_S z dx dy, \quad (4.5)$$

$$V = \int_S x dy dz, \quad (4.6)$$

$$V = \int_S y dz dx, \quad (4.7)$$

სადაც V არის S ჩაკეტილი ზედაპირით შემოსაზღვრული T სხეულის მოცულობა. (4.5), (4.6) და (4.7) ტოლობებიდან გვაქვს

$$V = \frac{1}{3} \int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ბირთვის მოცულობა.

ამოხსნა. (4.5) ფორმულის ძალით

$$\frac{V}{2} = \iint_S z dx dy,$$

სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედა ნახევარი. მისი გვემილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

წრის, ამიტომ

$$V = 2 \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

§ 4. ბრონის მეთოდი ფორმულა

ბრონის მეთოდი ფორმულა ისევე, როგორც გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ამყარებს კავშირს ჩაკეტილ არეზე განსაზღვრულ სამჯერად ინტეგრალსა და ამ არის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალს შორის.

თეორემა 5.1. ვთქვათ ჩაკეტილი T არე შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი S ზედაპირით. თუ $u(x, y, z)$ და $v(x, y, z)$ ფუნქციების მხოლოდ რივის კერძო წარმოებულები უწყვეტია T არეში, მაშინ ადგილი აქვს ბრონის მეთოდი ფორმულას

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (5.1)$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial n}$ აღნიშნავს წარმოებულს S ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულებით, ხოლო $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ლაპლასის* ოპერატორია.

დამტკიცება. ვინაიდან

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

ამიტომ გვაქვს

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &= \iiint_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz - \iiint_T u \Delta v dx dy dz. \end{aligned}$$

* პ. ს. ლაპლასი (1749—1827) ფრანგი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი.

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაყრებისათვის გამოვიყენებთ გუს-ოსტროგრადსკის ფორმულას, გვექნება

$$I = \int_S u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) ds - \iiint_T u \Delta v dx dy dz,$$

სადაც ზედაპირული ინტეგრალი აღებულია S ზედაპირის გარე მხარეზე, ხოლო $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ წარმოადგენენ S ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულების კოსინუსებს.

ეინაიდან

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial v}{\partial n},$$

ამიტომ

$$I = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iiint_T u \Delta v dx dy dz. \quad (5.2)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$I = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iiint_T v \Delta u dx dy dz. \quad (5.3)$$

(5.2) და (5.3)-დან მიიღება (5.1) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია. ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.2. ვთქვათ Oxy სიბრტყეზე მდებარე ჩაკეტილი D არე შემოსაზღვრულია უბან-უბან გლუვი L წიგით. თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციებს გააჩნიათ მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები D არეში, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (5.4)$$

სადაც $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ წარმოადგენს ლაპლასის ოპერატორს, ხოლო

$\frac{\partial}{\partial n}$ არის წარმოებული L კონტურის გარე ნორმალის მიმართულებით.

თუ (5.4) ტოლობაში დავუშვებთ $v(x, y) = 1$, მივიღებთ

$$\int_D \Delta u dx dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

ასევე თუ (5.1) ფორმულაში დავუშვებთ $v(x, y, z) = 1$, მივიღებთ (5.5)-ის ანალოგიურ ტოლობას სივრცითი არისათვის:

$$\iiint_T \Delta u dx dy dz = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

u ფუნქციის ეწოდება ჰარმონიული რაიმე არეში, თუ ამ არეში მას გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და ყოველ წერტილში $\Delta u = 0$.

(5.5) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ $u(x, y)$ ფუნქცია იყოს ჰარმონიული D არეში, აუცილებელია და საკმარისი, D არეში მოთავსებული ყოველი შეკრული L კონტურისათვის ადგილი ჰქონდეს პირობას

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

მაგალითი. გრინის მეორე ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

სადაც S წარმოადგენს $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$, $H > 0$ ცილინდრულ ზედაპირს, ხოლო $u = x^2 + y^2 + x + z$, $v = x^2 + y^2 + 2z + x$. ინტეგრება ხდება S ზედაპირის გარე მხარეზე.

ამოხსნა (5.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$I = \iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz,$$

სადაც T წარმოადგენს S ზედაპირით შემოსაზღვრულ ცილინდრს. ეინაიდან $\Delta u = 4$, $\Delta v = 4$, ამიტომ

$$I = -4 \iiint_T z dx dy dz.$$

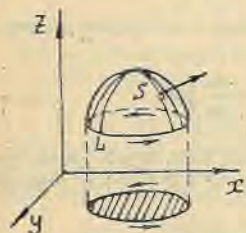
გადავიღეთ ცილინდრულ კოორდინატებზე $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. მივიღებთ

$$I = -4 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^H dz = -2\pi R^2 H^2.$$

§ 6. სტოქსის* ფორმულა

სტოქსის ფორმულა ამყარებს კავშირს S ზედაპირზე განსაზღვრულ ზედაპირულ ინტეგრალსა და ამ ზედაპირის შემოშლის ზღვრულ L კონტურზე გავრცელებულ წირით ინტეგრალს შორის. ე. ი. სტოქსის ფორმული წარმოადგენს გრანის ფორმულის ანალოგს ზედაპირისათვის.

ვთქვათ $z = \varphi(x, y)$ განტოლებით მოცემული გლუვი S ზედაპირი შემოსაზღვრული L კონტურით. დავუშვათ D წარმოადგენს S ზედაპირის გვერდის Oxy სიბრტყეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია I კონტურით. ცხადია, რომ I წირი წარმოადგენს L წირის გვერდის Oxy სიბრტყეზე (ნახ. 55). $\cos \alpha$, $\cos \beta$ და $\cos \gamma$ — იყოს $M(x, y, z)$ წერტილში გვერდული S ზედაპირის ზედა მხარის ნორმალის მიმართულების კოსინუსები. როგორც ვიცით



ნახ. 55

$$\cos \alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

სადა $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. აქედან ვაქვს, რომ

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \\ q &= -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

თეორემა 6.1. თუ S ზედაპირზე განსაზღვრულ $P(x, y, z)$ ფუნქციის გაანზი პირველი რიგის უწყვეტი კერძი წარმოებულა ამ ზედაპირზე, მაშინ

* ჟორჯ გაბრიელ სტოქსი (1819—1903) — «ნელსონ» ფიზიკის დოქტორი.

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) ds. \quad (6.2)$$

დამტკიცება. L ჩაკეტილ კონტურზე განსაზღვრული

$$\oint_L P(x, y, z) dx$$

წირითი ინტეგრალი წარმოადგენს S ზედაპირზე განსაზღვრული ზედაპირული ინტეგრალის საშუალებით ამ გარდაქმნის ჩატარებით შემდეგი სქემით:

$$\oint_L \rightarrow \oint_I \rightarrow \iint_D \rightarrow \iint_S.$$

ე. ი. ჯერ ზივრით L კონტურზე განსაზღვრულ წირით ინტეგრალს წარმოადგენს Oxy სიბრტყეზე მოთხსეზულ შეკრულ I კონტურზე მოცემული წირითი ინტეგრალით, შემდეგ მას გამოვსახავთ D არეზე განსაზღვრული ორჯერადი ინტეგრალით და ბოლოს ამ ორჯერად ინტეგრალს წარმოვიდგენთ S ზედაპირზე განსაზღვრული ზედაპირული ინტეგრალით.

განვიხილოთ L კონტურის λ — დანაწილება, ცხადია მივიღებთ I კონტურის რაღაც დანაწილებასაც. ადვილი შესაძენეია, რომ ამ დანაწილებების შესაბამისი ნაწილების გვერდები Ox ღერძზე ტოლია. ამის გარდა, ვინაიდან L კონტურის წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას $z = \varphi(x, y)$ ამიტომ $P(x, y, z)$ ფუნქციის მნიშვნელობები L კონტურზე უდრის $P(x, y, \varphi(x, y))$ ფუნქციის მნიშვნელობებს კონტურის შესაბამისი წერტილებში. ამიტომ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალს შესაბამისი ინტეგრალური გამები $P(x, y, z)$ ფუნქციიდან L -ზე და $P(x, y, \varphi(x, y))$ ფუნქციიდან I -ზე ერთმანეთის ტოლია. გამოვლინარე აქედან

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_I P(x, y, \varphi(x, y)) dx. \quad (6.3)$$

გრანის ფორმულის ძალით (იხ. (4.3))

$$\begin{aligned} \oint_I P(x, y, \varphi(x, y)) dx &= - \iint_D \frac{\partial P[x, y, \varphi(x, y)]}{\partial y} dx dy = \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot q \right) dx dy. \end{aligned} \quad (6.4)$$

(6.3) და (6.4)-დან გვაქვს

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot q \right) dx dy, \quad (6.5)$$

სადაც $P(x, y, z)$ ფუნქციის z -ის ნაცვლად ჩასმულია $q(x, y)$. ვინაიდან

$$ds = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \frac{dx dy}{\cos \gamma},$$

ამიტომ (1.3) ფორმულის ძალით და (6.1)-ის ვითვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} q \right) \cos \gamma \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \\ &= - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma ds = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) ds. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

იგივენაირად მტკიცდება, რომ ანალოგიურ პირობებში სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) ds, \quad (6.6)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial z} \cos \beta \right) ds. \quad (6.7)$$

(6.2), (6.6) და (6.7) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ სტოქსის ფორმულას:

$$\begin{aligned} \int_B P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] ds = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ კავშირს პირველი და მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგრალებს შორის, სტოქსის ფორმულა შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} \oint_S P dx + Q dy + R dz &= \iint_L \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (6.8)$$

კერძოდ, თუ S ზედაპირი წარმოადგენს L კონტურით შემოსაზღვრულ Oxy სიბრტყეზე მდებარე არეს, მაშინ ინტეგრალები $dzdx$ -ით და $dydz$ -ით ნულის ტოლია და სტოქსის ფორმულა დაემთხვევა გრიონის ფორმულას.

სტოქსის ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჩაკეტილ სივრცით კონტურზე მოცემული წირითი ინტეგრალის გამოსათვლელად.

მაგალითი 1. სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ

$$\oint_L x^4 y^3 dx - 3dy + z^2 dz,$$

სადაც L არის $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 1$ განტოლებებით მოცემული წრეწირი. ინტეგრება ხდება დადებითი მიმართულებით.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ სტოქსის ფორმულა, სადაც S ზედაპირად ავიღოთ $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ წრეწირზე მოქმედი ნებისმიერი გლუვი ზედაპირი რომლის გვემთხვევა Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq R^2$ წრეს. ვინაიდან

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^4 y^3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

ამიტომ (6.8) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \oint_L x^4 y^3 dx - 3dy + z^2 dz &= - \iint_S x^4 y^3 dx dy = \\ &= -3 \iint_D x^4 y^3 dx dy = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^7 \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi d\rho = -\frac{3\pi}{64} R^8. \end{aligned}$$

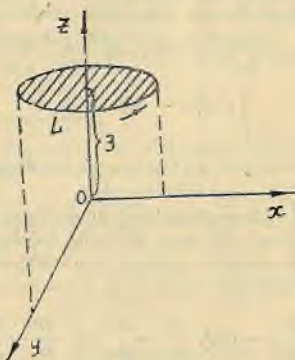
მაგალითი 2. გამოვთვალოთ

$$I = \oint_L y dx + x^2 dy - z dz,$$

წირითი ინტეგრალი $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ წრეწირის გასწვრივ: 1) უშუალოდ, 2) სტოკსის ფორმულის გამოყენებით (ინტეგრება ხდება დადებითი მიმართულებით).

ამოხსნა. 1) L წირის პარამეტრული სახის განტოლებები იქნება

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 3 \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi,$$



ნახ. 56

ამიტომ II თავის (2.8) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [2 \sin t (-2 \sin t) + 4 \cos^2 t \cdot 2 \cos t - 3 \cdot 0] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (8 \cos^3 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi. \end{aligned}$$

2) სტოკსის ფორმულის გამოყენებისათვის, უნდა ავიღოთ L წრეწირზე მოჭიმული რაიმე გლუვი S ზედაპირი, რომლის გვემილი Oxy სიბრტყეზე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს. ბუნებრივია S ზედაპირად ავიღოთ L კონტურით შემოსაზღვრული წრე (ნახ. 56). ვინაიდან

$$P = y, \quad Q = x^2, \quad R = -z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

ამიტომ (6.8) ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$I = \iint_S (2x - 1) dx dy = \iint_D (2x - 1) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho = -4\pi.$$

§ 8. სივრცითი წირზე განსაზღვრული წირითი ინტეგრალის ინტეგრირების მეთოდი დაამუშავდა პირველად, სრული ლიზარენციის ინტეგრირება

არეს ეწოდება ზედაპირულად ცალკეობილი, თუ ამ არეში აღებული ნებისმიერ მარტივ, ჩაკეტილ, უბან-უბან გლუვ კონტურზე შეიძლება მოიჭიმოს უბან-უბან გლუვი ზედაპირი, რომელიც მთლიანად ექცევენ ამ არეს.

ზედაპირულად ცალკეობილი არეების მაგალითებია: ბირთვი, მთელი სივრცე; ორ კონცენტრულ სფეროს შორის მოთავსებული სივრცის ნაწილი და სხვა. ბირთვი, რომელშიც ამოჭრილია ცილინდრული ფორმის ხვრელი, წარმოადგენს ისეთი არის მაგალითს, რომელიც არ არის ზედაპირულად ცალკეობილი.

წირითი ინტეგრალის ინტეგრირების გზისაგან დამოუკიდებლობის პირობებს გვაძლევს შემდეგი თეორემა, რომელიც მტკიცდება ისევე როგორც სწავლითური თეორემა სიბრტყეზე.

თეორემა 8.1. თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z}$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე შემოსაზღვრულ ზედაპირულად ცალკეობილ T არეში, მაშინ შემდეგი ოთხი პირობა ერთმანეთს ექვივალენტურია:

1) T არეში მოთავსებული ნებისმიერი ჰაერული ელემენტის გზა L წირისათვის

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0;$$

2) T არის ნებისმიერი A და B წერტილებსაშორის

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული A და B წერტილების შემავრთველი წირის ფორმასზე;

3) გამოსახულება $P dx + Q dy + R dz$ წარმოადგენს T არეში განსაზღვრულ რაიმე სამი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალს; ე. ი. არსებობს T არეში განსაზღვრული ისეთი $F(x, y, z)$ ფუნქცია, რომ

$$dF = P dx + Q dy + R dz;$$

4) T არის ნებისმიერ წერტილში

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

ახლა განვიხილოთ სრული დიფერენციალის ინტეგრების საკითხი. უთქვამთ გამოსახულება $P dx + Q dy + R dz$ წარმოადგენს რაიმე სამი ცვლადის $F(x, y, z)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ე. ი.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

მაშინ ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის ინტეგრების ანალოგიურად (იხ. თავი II, § 6) მივიღებთ, რომ

$$F(x, y, z) = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz, \quad (8.1)$$

სადაც $A(x_0, y_0, z_0)$ წარმოადგენს T არის ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილს.

(8.1) ფორმულა შესაძენეად მარტივდება თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს ტეხილს, რომლის მდგენეები ჰაეროქრდინატო ღერძების პარალელურია. მაგალითად, თუ $A(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ და $B(x, y, z)$

წერტილებს შემავრთველი ტეხილი მაღლიანად მდებარეობს T არეში, მაშინ

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C.$$

პრობლემა თავი

პელების თეორიის ელემენტები

§ 1. საკლარული და ვეგირული ველი

ველის ცნება საფუძვლად უდევს თანამედროვე ფიზიკის მრავალი მოვლენის შესწავლას.

ამბობენ, რომ სივრცეში მოცემულია რაიმე u სიდიდის ველი, თუ სივრცის (ან სივრცის რაიმე ნაწილის) ყოველ წერტილში განსაზღვრულია ამ სიდიდის მნიშვნელობა. მაგალითად, ვაზის ნაკადის დინების შესწავლისას ერთდროულად საჭირო ხდება რამოდენიმე ველის გამოყენება. ესაა ტემპერატურათა ველი (ვაზის ყოველ წერტილში ტემპერატურას აქვს გარკვეული მნიშვნელობა), წნევათა ველი, სიჩქარეთა ველი და სხვა.

რაიმე u სიდიდის მნიშვნელობათა ველს ეწოდება სტაციონალური, ან მდგრადი, თუ u არ არის დამოკიდებული დროზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში ველს ეწოდება არასტაციონალური ან არამდგრადი.

ფიზიკურ ამოცანებში უფრო ხშირად საუბრე გვაქვს სკალარულ ან ვექტორულ სიდიდეებთან. ამის შესაბამისად არჩევენ ორი სახის ველს: სკალარულს და ვექტორულს.

1. **სკალარული ველი.** ვთქვათ G არეა სივრცეში ან სიბრტეზე. თუ G არის ყოველ M წერტილში განსაზღვრულია სკალარული u სიდიდის მნიშვნელობა, ამბობენ, რომ G არეზე მოცემულია სკალარული ველი.

შევნიშნოთ, რომ სკალარული ველისა და G არეზე განსაზღვრული ფუნქციის ცნება ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ ხშირად გამოიყენება: სკალარული ველი მოცემულია $u = F(M)$ ფუნქციის საშუალებით. F ფუნქციას უწოდებენ სკალარულ ფუნქციას.

თუ სივრცეში შემოვიღებთ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემას, მაშინ ყოველ M წერტილს ექნება გარკვეული x, y, z კოორდინატები და სკა-

ლაჩქელი u სიდიდე იქნება ამ კოორდინატთა ფუნქცია $u = F(M) = F(x, y, z)$.

სკალარული ველის მახასიათებელია სხეულის ტემპერატურათა ველი, სიმკვრივეთა ველი.

სკალარული ველის დასახასიათებლად გამოიყენება გრადიენტი. სკალარული $u = u(x, y, z)$ ფუნქციის გრადიენტი, როგორც ვიცი, განისაზღვრება ფორმულით

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

სკალარული ველის გრადიენტი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე და გვიჩვენებს მიმართულებას, რომლის გასწვრივაც სკალარული u სიდიდის მნიშვნელობა სხვა მიმართულებებთან შედარებით უფრო სწრაფად იზრდება. მართლაც, როგორც ვიცი, ფუნქციის წარმოებული მოცემული მიმართულებით გვიჩვენებს ამ მიმართულებით ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს. ამასთან იგი გრადიენტთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

ცხადია, უდიდეს მნიშვნელობას მოცემული სკალარული ნამრავლი აღწევს მაშინ, როდესაც $\vec{l}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა გრადიენტის მიმართულებას. ამ შემთხვევაში

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

ამრიგად, სკალარული ველის გრადიენტი არის ვექტორი, რომელიც გვიჩვენებს სკალარული $u = u(M)$ სიდიდის ზრდის უდიდეს სიჩქარეს, აქედან ჩანს, რომ გრადიენტი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

ვთქვათ φ და g სკალარული ველები, რომელთაც გააჩნიათ გრადიენტი, ხოლო f — ერთი ან რამდენიმე ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქცია. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi + g) &= \text{grad } \varphi + \text{grad } g, \\ \text{grad}(\varphi \cdot g) &= \varphi \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } \varphi, \\ \text{grad } f(\varphi) &= f'(\varphi) \text{grad } \varphi, \\ \text{grad } f(\varphi, g) &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \text{grad } \varphi + \frac{\partial f}{\partial g} \text{grad } g. \end{aligned}$$

პირველი ორი ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს გრადიენტის განსაზღვრებიდან და ფუნქციის წარმოებულის თვისებებიდან. ვაჩვენოთ შესაბამისად მეორე ტოლობის მართებულობა.

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვაქვს

$$\text{grad } f(\varphi) = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial z} \vec{k} =$$

$$= f'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + f'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + f'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = f'(\varphi) \text{grad } \varphi.$$

$$\text{grad } f(\varphi, g) = \frac{\partial f(\varphi, g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(\varphi, g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(\varphi, g)}{\partial z} \vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{k} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial g} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \text{grad } \varphi + \frac{\partial f}{\partial g} \text{grad } g.$$

2. ვექტორული ველი. სკალარული ველის ანალოგიურად შემოდის ვექტორული ველის ცნება: თუ G არის უოველ M წერტილში განსაზღვრული ვექტორული $\vec{u}$ სიდიდის მნიშვნელობა, ამბობენ რომ G არეზე მოცემულია ვექტორული ველი.

ამრიგად, G არეზე მოცემულია ვექტორული ველი ნიშნავს, რომ უოველ $M \in G$ წერტილში განსაზღვრულია ვექტორი $\vec{F}(M)$. ამ შემთხვევაში $\vec{F}(M)$ ფუნქციას, რომლის საშუალებითაც მოცემულია ველი ეწოდება ვექტორული ფუნქცია.

ვექტორული ველის მახასიათებელია ნებისმიერი ბუნების ძალთა ველი, სიჩქარეთა ველი და სხვა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ უძრავი დერძის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით მბრუნავი მყარი სხეულის წერტილთა $\vec{v}(M)$ სიჩქარის ვექტორული ველი.

ამოხსნა. სხეულის M წერტილის $\vec{v}(M)$ სიჩქარე ტოლია მბრუნავი სხეულის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარისა და პრუვის დერძის მდებარეობაზე დისტანციის O წერტილის მიმართ M წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-

ვექტორის ვექტორული ნამრავისა, ე. ი. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. აქედან $\vec{v}$ წერტილი მარჯვნივ კოორდინატთა სისტემის სათავედ, ხოლო სხეულის ზრუნვის ღერძი Oz ღერძად. მაშინ $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ამიტომ

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

ვექტორული ველი წარმოადგენს მბრუნავი სხეულის წერტილთა სინქარის ვექტორულ ველს.

ვექტორული ველის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს ასრულებს $\nabla \cdot \vec{F}$ ვექტორული წიგნები. ვთქვათ G არეში მოცემულია ვექტორული ველი

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

განსაზღვრება 1.1. $\vec{a}$ ველის ვექტორული წიგნი ეწოდება წიგნი, რომლის ნებისმიერ M წერტილში გავლებულ მხებს აქვს $\vec{a}(M)$ ვექტორის მიმართულება.

ვექტორული წიგნები: 1) მდინარის სიხის სინქარეთა ველში ის წიგნები, რომელზედაც მოძრაობენ სიხის ნაწილაკები; 2) ძალთა წიგნები ელექტრულ ველში; 3) მაგნიტური ველის წიგნები.

ჩაღვან ნულოვან ვექტორის მიმართულება არ გააჩნია, ამიტომ ვექტორული წიგნები იქნება განსაზღვრული იმ G' არეში, რომელშიც $\vec{a} \neq 0$.

მივიღოთ ვექტორული წიგნების განტოლება. ვთქვათ Γ წიგნი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

ფიქვსსებით, რომ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ წარმოადგენს ფუნქციებს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ვთქვათ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ წარმოადგენს Γ წიგნის რაიმე

$M(x, y, z)$ წერტილის რადიუს ვექტორს. როგორც ვიცით, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ ვექტორი $M(x, y, z)$ წერტილში გავლებული მხების

პარალელურია ამიტომ Γ წიგნი იქნება $\vec{a}(x, y, z)$ ვექტორული ველის ვექტორული წიგნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\vec{a} \parallel \frac{d\vec{r}}{dt}$, ე. ი.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \quad (1.1)$$

(1.1) განტოლებები წარმოადგენენ ვექტორული წიგნების დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

ზოგჯერ ვანიხილავთ ზედაპირებს, რომლებიც შექმნილია ვექტორული წიგნებისაგან. მათ უწოდებენ ვექტორულ ზედაპირებს. თუ G' არეში ივლივთ ვექტორულ Γ წიგნს და მის ყოველ წერტილში გავავლებთ ვექტორულ წიგნს, მივიღებთ ზედაპირს, რომელსაც ვექტორული მილაკი ეწოდება. ცხადია, ვექტორული მილაკის ყოველ M წერტილში გავლებული ნორმალი $\vec{n}(M)$ ვექტორის პარალელურია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ Oxy სიბრტყეზე მოცემული $\vec{a} = 2y\vec{i} - \vec{j}$ ველის ვექტორული წიგნები.

ამოხსნა. მოცემული ველისათვის (1.1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან გვაქვს

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-1}.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ ვექტორული წიგნების განტოლებას $y^2 = -x + C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\vec{a} = [\vec{C}, \vec{r}]$ ველის ვექტორული წიგნები, სადაც $\vec{C} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$ მუდმივი ვექტორი, ხოლო $\vec{r}$ არის წერტილის რადიუს-ვექტორი.

ამოხსნა. გამოვსახოთ ვექტორული ნამრავი $\vec{C}$ და $\vec{r}$ ვექტორების კოორდინატებით

$$\vec{a} = [\vec{C}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (C_2z - C_3y)\vec{i} + (C_3x - C_1z)\vec{j} + (C_1y - C_2x)\vec{k}.$$

აქედან გამოდინარე, ვექტორული წიგნების განტოლება იქნება

$$\frac{dx}{C_2z - C_3y} = \frac{dy}{C_3x - C_1z} = \frac{dz}{C_1y - C_2x}.$$

საიდანაც

$$\begin{cases} dx = \lambda(C_1 z - C_2 y), \\ dy = \lambda(C_2 x - C_1 z), \\ dz = \lambda(C_1 y - C_2 x). \end{cases} \quad (1.2)$$

თუ ამ სისტემის განტოლებებს გაავსრავლებთ შესაბამისად x , y , z -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

აქედან

$$x^2 + y^2 + z^2 = A, \quad A = \text{const} > 0.$$

ახლა, თუ (1.2) სისტემის განტოლებებს გაავსრავლებთ შესაბამისად C_1 , C_2 , C_3 -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ

$$C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz = 0,$$

საიდანაც

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = B, \quad B = \text{const}.$$

ამრიგად, ვექტორული წირების განტოლება იქნება

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = A, \\ C_1 x + C_2 y + C_3 z = B. \end{cases}$$

ამ სისტემიდან ჩანს, რომ ვექტორული წირები მიიღება $C = C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j} + C_3 \vec{k}$ ვექტორის მართობული სიბრტყეებისა და იმ სფეროების თანაკვეთით, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათიფეშია.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ უსასრულო ღენიანი გამტარის მაგნიტური ველის ვექტორული წირები.

ამოხსნა. დავამთხვიოთ Ox ღერძი ღენიან გამტარს. ღენიანი

გამტარის მიერ შექმნილი მაგნიტური ველის $\vec{H}$ დამახულობა $M(x, y, z)$ წერტილში ტოლია

$$\vec{H} = \frac{2}{\rho^3} [\vec{l}, \vec{r}],$$

სადაც $\vec{l} = l\vec{k}$ არის ღენის ძალის ვექტორი, $\vec{r} = M(x, y, z)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი, ხოლო ρ -მანძილი $M(x, y, z)$ წერტილიდან ღენიან გამტარამდე.

თუ $[\vec{l}, \vec{r}]$ ვექტორულ ნამრავლს გამოვსახებთ $\vec{l}$ და $\vec{r}$ ვექტორების კოორდინატებით, მივიღებთ

$$\vec{H} = -\frac{2ly}{\rho^3} \vec{i} + \frac{2lx}{\rho^3} \vec{j}.$$

ვექტორული წირების დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

ამ სისტემის ამონახსნია

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = C. \end{cases}$$

ამრიგად $\vec{H}$ ველის ვექტორული წირებია წრეწირები, რომლებიც ღენიანი გამტარის მართობულ სიბრტყეებში მდებარეობენ, ხოლო ცენტრი ღენიან გამტარზეა.

3. პოტენციალური ველი. განვიხილოთ G არეზე მოცემული რაიმე $F(M)$ სკალარული ველი. თუ G არის უოველ წერტილში განსაზღვრული ვექტორი $\text{grad} F$, მაშინ ამ ვექტორების ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური ველი, ხოლო თვით სკალარულ ველს კი ვექტორული ველის პოტენციალი. პოტენციალური ველის ვექტორებს უწოდებენ პოტენციალურ ვექტორებს. ამრიგად, $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველი პოტენციალურია, თუ არსებობს ისეთი სკალარული ფუნქცია $F(M)$, რომ

$$\vec{a} = \text{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.3)$$

დავადგინოთ, თუ რა შემთხვევაში იქნება მოცემული $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველი პოტენციალური. ვთქვათ $\vec{a}(M)$ ვექტორის კოორდინატებია P, Q, R ფუნქციები, ე. ი.

$$\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

(1.3) ტოლობის თანახმად $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველი იქნება პოტენციალური, თუ არსებობს $F(M)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R. \quad (1.4)$$

როგორც ვიცით (იხ. III თავი, § 7) გამოსახულება $Pdx + Qdy + Rdz$, სადაც P, Q, R ფუნქციებს გააჩნიათ პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, წარმოადგენს რაიმე $F(x, y, z)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესრულებულია პირობები

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (1.5)$$

გავრცედავთ, თუ $Pdx + Qdy + Rdz = dF$, მაშინ მართებული იქნება (1.4) ტოლობებიც. ამრიგად (1.5) არის საკმარისი პირობა იმისა, რომ ვექტორული ველი იყოს პოტენციალური.

პოტენციალური ველის მახასიათებელი მსოფლიო მიზიდულობის ძალაა ველი. ვთქვათ მარცხენა კოორდინატთა სისტემის სათავეში მოთავსებულია m მასა. ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონის თანახმად ეს მასა მის გარშემო სივრცეში ქმნის გრავიტაციულ მიზიდულობის ველს. სივრცის ნებისმიერ M წერტილში მოთავსებულ ერთეულ მასაზე მასზე იმოქმედებს მიზიდულობის ძალა $F(M)$, რომელიც მიმართულია კოორდინატთა სისტემის სათავესაკენ და რიცხობრივად ტოლია $k \frac{m}{r^2}$ სიდიდისა, სადაც $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ არის მანძილი M წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, ხოლო k გრავიტაციული მუდმივა.

საყოორდინატო ღერძებზე $\vec{F}(M)$ ძალის გვერდებშია

$$P = |\vec{F}| \cos \alpha = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{x}{r} \right) = -\frac{kmx}{r^3},$$

$$Q = |\vec{F}| \cos \beta = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{y}{r} \right) = -\frac{kmy}{r^3},$$

$$R = |\vec{F}| \cos \gamma = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{z}{r} \right) = -\frac{k mz}{r^3}.$$

სადაც $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ არის $\vec{F}(M)$ ვექტორის მიმართულებების კოსინუსები.

აღვივოთ ჩვენება, რომ განხილული ვექტორული ველი პოტენციალურია და მისი პოტენციალური ფუნქციაა $u(M) = \frac{kM}{r}$.

ახლა ვიპოვოთ $F(M)$ ძალის მუშაობა, როდესაც მისი მოქმედებით ერთეულ მასა გადაადგილდება $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილში.

როგორც ვიცით, ეს მუშაობა გამოითვლება

$$A = \int_{M_1 M_2} Pdx + Qdy + Rdz$$

წირით ინტეგრალით, როდესაც მოცემული ძალაა ველი პოტენციალური, ამტომ ინტეგრალქვეშ გამოსახულება წარმოადგენს u ფუნ-

ქციის სრულ დიფერენციალს. ამის გამო ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ინტეგრირების გზაზე და შეგვეძლება გამოვთვალოთ ფორმულით

$$A = \int_{M_1}^{M_2} Pdx + Qdy + Rdz = u(M_2) - u(M_1),$$

ე. ი. $\vec{F}(M)$ ძალის მუშაობა M_1 და M_2 წერტილებში პოტენციალური ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობის ტოლია. ჩვენ შემთხვევაში

$$A = u(M_2) - u(M_1) = \frac{km}{r_2} - \frac{km}{r_1} = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

სადაც r_1 და r_2 არის მანძილი კოორდინატთა სათავედან შესაბამისად M_1 და M_2 წერტილებამდე.

§ 2. ვექტორული ველის ნაპაღი. დიფერენციალი

1. ამოცანა ვექტორული ველის ნაპაღის შესახებ. ვთქვათ სივრცის რაიმე G არეში მიედინება სითხე. დავუშვათ G არის ფოველ $M(x, y, z)$ წერტილში ცნობილია სითხის დინების სიჩქარე $\vec{V}(M)$, ე. ი. G არეში მოცემულია სითხის დინების სიჩქარეთა ვექტორული ველი:

$$\vec{V}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

სადაც ვექტორები P, Q, R ფუნქციები სიჩქარის გვერდებია საყოორდინატო ღერძებზე. გამოვთვალოთ სითხის ის რაოდენობა Π , რომელიც გადის დროის ერთეულში G არეში მდებარე რაიმე ორიენტირებულ გლუვ S ზედაპირში. სითხის სიმკვრივე ჩავთვალოთ ერთეულის ტოლად.

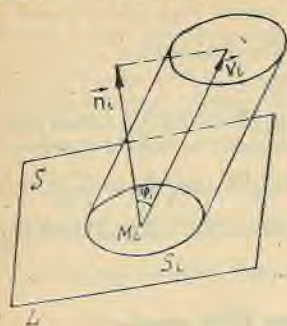
ვთქვათ

$$\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$$

ვექტორი S ზედაპირის ერთეულფოვენი სივრცის ნორმალა.

დავყოთ S ზედაპირი $S_1, S_2, \dots, S_n$ ნაწილებად და ყოველ S_i ზედაპირზე დავთვალოთ რაიმე $M_i(x_i, y_i, z_i)$ წერტილი ($i=1, 2, \dots, n$). აღვნიშნოთ კვლავ $\vec{n}_i = \vec{n}(M_i)$ და $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i)$ ვექტორებს შორის ფიქსირებული

(ნახ. 57). თუ φ_i კუთხე მასელით, ე. ი. სიბრტყე შეიღებება იქით, სადაც გვიყვანებს ნორმალს, ΔS_i ზედაპირში გამავალი სიბრტყის რაოდენობა Π_i ჩვე-



ნახ. 57

თვლით დაღებიათ, ხოლო თუ φ_i პლაველია — უარყოფითად. როდესაც S_i ზედაპირები საკმარისად მცირეა, მაშინ გარკვეული სიზუსტით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ სიბრტყე S_i ზედაპირის ყოველ წერტილში ერთნაირია, ხოლო თვით S_i ზედაპირი კი — ბრტყელია. მაშინ დროის ერთეულში S_i ზედაპირში გამავალი სიბრტყის რაოდენობა მისი სიზუსტით ტოლი იქნება იმ ცილისდრის მოცულობისა შესაბამისი ნიშნით, რომლის ფუძეა S_i , ხოლო სიმაღლე ტოლია $\vec{V}_i$ სიბრტყის ვექტორის $\vec{n}_i$ ნორმალ-

ზე. ე. ი. $\Pi_i = \Delta S_i \cdot h_i$, სადაც $h_i = |\vec{V}_i| \cos \varphi_i = |\vec{V}_i| \cdot |\vec{n}_i| \cos \varphi_i = (\vec{V}_i, \vec{n}_i)$. ამრიგად

$$\Pi_i = (\vec{V}_i, \vec{n}_i) \Delta S_i.$$

მაშასადამე

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i, \vec{n}_i) \Delta S_i \quad (2.1)$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებული ჯამი წარმოადგენს $(\vec{V}, \vec{n})$ ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს. $(\vec{V}, \vec{n}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ ფუნქცია უწყვეტია, რადგან $\vec{V}$ ვექტორის P, Q, R კოორდინატები და $\vec{n}$ ვექტორის მდებარეობების კოსინუსები უწყვეტია ფუნქციებია. ამიტომ არსებობს (2.1) ჯამის ზღვარი, როდესაც $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ დანაწილებათა დიამეტრებს შორის უდიდესის λ სიგრძე მისწრაფის ნულისაკენ. ეს ზღვარი წარმოადგენს პირველი გვარის ზედაპირულ ინტეგრალს S ზედაპირზე $(\vec{V}, \vec{n})$ ფუნქციადან. ამას-

თან (2.1) ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ S ზედაპირში გამავალი სიბრტყის რაოდენობის ზუსტ მნიშვნელობას. ამრიგად,

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{V}_i, \vec{n}_i) \Delta S_i = \iint_S (\vec{V}, \vec{n}) dS.$$

თუ $(\vec{V}, \vec{n})$ სკალარულ ნამრავლს გამოვსახებთ კოორდინატებით, გვექნება

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

აქედან პირველი და მეორე გვარის ზედაპირულ ინტეგრალებს შორის კავშირის დიფერენციალური გამოყენებით მივიღებთ

$$\Pi = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (2.2)$$

ამრიგად, ორიენტირებულ S ზედაპირში დროის ერთეულში გამავალი სიბრტყის რაოდენობა შეიძლება გამოვთვალოთ S ზედაპირზე აღებული მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის საშუალებით.

ნებისმიერი ბუნების $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველისათვის მეორე გვარის ზედაპირულ (2.2) ინტეგრალს ეწოდება $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის ნაკადი S ზედაპირში. ცხადია, რომ, თუ $\vec{V}(M)$ ვექტორული ველი სხვა ბუნებისაა, ვიდრე განხილულ ამოცანაში, მაშინ ვექტორული ველის ნაკადსაც ექნება სხვა ფიზიკური მნიშვნელობა.

2. დიფერენცია. ვთქვათ სივრცის G არეში, რომელშიც შემოსაზღვრულია S ზედაპირით, მოცემულია $\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ ვექტორული ველი, ისეთი, რომ $P(M), Q(M), R(M)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულებები უწყვეტია G არეში.

განსახილვრება 2.1. $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის დივერგენცია $\text{div} \vec{a}(M)$ ეწოდება სკალარულ ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\text{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.3)$$

თუ გამოვიყენებთ დივერგენციისა და ვექტორული ველის ნაკადის ცნებას, გაუსის ტეორემა დავრღმნა შეგვიძლია ჩავწეროთ უფ-

რომ კომპაქტური სახით მართლაც, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა-ში შედამართული ინტეგრალი წარმოადგენს ვექტორული ველის ნაკადს, ხოლო სამჭერადი ინტეგრალის ქვეშ მოთავსებული ფუნქცია არის ამ ველის დივერგენცია. ამიტომ გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$\int_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \int_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz. \quad (2.4)$$

ამრიგად, ვექტორული ველის ნაკადი ჩაეკტილ ზედაპირზე ტოლია სამჭერადი ინტეგრალისა ამ ველის დივერგენციიდან მოცემული ზედაპირით შემოსაზღვრულ არეზე.

ახლა ვაჩვენოთ დივერგენციის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება. კერძოდ, ის, რომ დივერგენცია არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, თუმცა იგი განსაზღვრული კოორდინატული ფუნქციებით, რომლებიც დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

თვლით ნებისმიერი M_0 წერტილი და M_0 -ის შემცველი რაიმე G არე. გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა (2.4) ტოლობაში შემავალი სამჭერადი ინტეგრალისათვის. მივიღებთ

$$\int_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \operatorname{div} \vec{a}(M) |G|,$$

სადაც M არის G -ს რაიმე წერტილი, $|G|$ კი — G არის მოცულობა, ამ ტოლობიდან

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\int_S (\vec{a}, \vec{n}) ds}{|G|}.$$

გადავიღეთ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე, როდესაც G არის d დამეტრი მისწრაფვის ნულისკენ. მაშინ ცხადია, რომ $M \rightarrow M_0$ და მივიღებთ

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\int_S (\vec{a}, \vec{n}) ds}{|G|}. \quad (2.5)$$

ამრიგად, $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის დივერგენცია M_0 წერტილში ტოლია M_0 წერტილის შემცველი არის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე

იღებელი ვექტორული ველის ნაკადისა და ამ არის მოცულობის შეფარდების ზღვრისა, როდესაც არის დამეტრი მისწრაფვის ნულისკენ. მაგრამ ჩადგან ვექტორული ნაკადი და მოცულობა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ამიტომ დივერგენციაც არ იქნება დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორული, ხოლო φ სკალარული ველია. მართებულია შემდეგი ტოლობები

$$\operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b},$$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}).$$

პირველი ტოლობის მართებულობა ცხადია. ვაჩვენოთ მეორე ტოლობის მართებულობა. თუ $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varphi \vec{a}) &= \frac{\partial (\varphi P)}{\partial x} + \frac{\partial (\varphi Q)}{\partial y} + \frac{\partial (\varphi R)}{\partial z} = \varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q + \frac{\partial \varphi}{\partial z} R \right) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}). \end{aligned}$$

3. დივერგენციის ფიზიკური შინაარსი. (2.5) ფორმულის საშუალებით დავადგინოთ დივერგენციის ფიზიკური შინაარსი. ვთქვათ $\vec{V}(M)$ სითხის დინების სიჩქარეთა ვექტორული ველია. სითხის სიმკვრივე ჩვეულებით ერთეულის ტოლად, მაშინ, როგორც ვიცით,

$$\Pi = \int_S (\vec{V}, \vec{n}) ds$$

სილიდგ წარმოადგენს დროის ერთეულში S ზედაპირში $\vec{n}$ ნორმალის

მიმართულებით გასული სითხის რაოდენობას. ვთქვათ $\vec{n}$ ზედაპირის გარე ნორმალა. ჩადგან S ჩაეკტილი ზედაპირია, ამიტომ Π იქნება სითხის ის რაოდენობა, რომელიც შედის G მოცულობაში ($\Pi < 0$) ან გამოდის G მოცულობიდან ($\Pi > 0$) დროის ერთეულში. ვუწოდოთ Π სილიდგ G არედან გამოდინარე წყაროს სრული სიმძლავრე, როცა $\Pi > 0$, ხოლო G არეში ჩამდინარე წყაროს სრული სიმძლავრე, როცა $\Pi < 0$. განვიხილოთ შედარლება

$$\frac{\int_S (\vec{a}, \vec{n}) ds}{|G|}.$$

იგი წარმოადგენს G -დან გამომდინარე (ან G -ში ჩამდინარე) წყაროს-სამუილო სიმძლავრეს, ზღვარს

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ M_0 \in G}} \frac{\iint_{\Delta} (\vec{a}, \vec{n}) ds}{|G|},$$

უწოდებენ G არეიდან გამომდინარე ან G არეში ჩამდინარე წყაროს სიმძლავრეს M_0 წერტილში. ამრიგად სითხის სინქარული ვექტორული ველის დიფერენცია აბსოლუტურად სითხის წყაროს სიმძლავრეს, თუ ნების-

მიერა $M \in G$ -თვის $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, მაშინ $\Pi > 0$, ე. ი. G არეიდან გამოედინება მტეი სითხე, ვიდრე ჩაედინება და პირიქით, თუ $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ მაშინ $\Pi < 0$ და G არეში ჩაედინება მტეი სითხე, ვიდრე გამოედინება.

როდესაც $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, მაშინ $\Pi = 0$, ე. ი. რამდენი სითხეც ჩაედინება G არეში, იმდენივე გამოედინება.

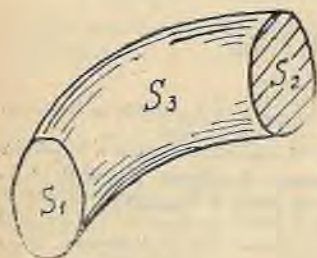
ნებისმიერი ბუნების ვექტორული ველისათვის დიფერენციის აქვს იგივე ფიზიკური შინაარსი. იგი ყოველთვის აბსოლუტურად ვექტორული ველის წყაროს სიმძლავრეს.

4. სოლენოიდური ველი.

ვექტორულ ველს, რომლის დიფერენცია იგივერად ნულია, ეწოდება სოლენოიდური ველი.

სოლენოიდური მავალითად, მელში სითხის დინების სინქარული ვექტორული ველი.

სოლენოიდური ველისათვის ადვილი აქვს ე. წ. ვექტორული მელის ინტენსივობის მუდმივობის კანონი, რომელიც ზუსტად მდგომარეობს: სოლენოიდური ველის ვექტორული ნაკადის მუდმივობა ვექტორული მელის (იხ. § 1) ნებისმიერ კვთაში ერთიად იგივეა.



ნახ. 58

მართლაც, განვიხილოთ სოლენოიდური $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის რაიმე ვექტორული მელის მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია მის S_1 და S_2 კვთებს შორის (ნახ. 58). S_1 და S_2 ზედაპირები მელის.

გვერდით S_3 ზედაპირთან ერთად შემოიან ჩაკეტულ ზედაპირს, რადგან $\vec{a}(M)$ ველი სოლენოიდურია, ე. ი. $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, ამიტომ

$$\iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}) ds + \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}) ds + \iint_{S_3} (\vec{a}, \vec{n}) ds = 0, \quad (2.6)$$

სადაც ივთლისხმება, რომ თითოეული ინტეგრალი აღებულია ზედაპირის გაზე მხარეზე. რადგან S_3 -ზე $\vec{a} \perp \vec{n}$, ამიტომ მხოლოდ შესაყრები ნელის ტოლია. თუ დარჩენილი ორი შესაყრებიდან ერთერთში ნორმალის მიმართულებას შევცვლით საპირისპირო მიმართულებით, (2.6) ტოლობა შეგვიძლია ჩაწეროთ შემდეგი სახით

$$\iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}) ds.$$

აქედან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ სითხის დინებათა ველში მელის ნებისმიერ კვთაში გამავალი სითხის რაოდენობა ერთიად იგივეა.

§ 2. სირკულაცია და როტორი. სტრუქტურის ფორმულის ჩაწერა აბსოლუტური სახით

განვიხილოთ რაიმე არეში მოცემული ვექტორული ველი

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}.$$

ვთქვათ L არის ამ არეში მოთავსებული უბანთან გლუვი კონტური, რომელზედაც არჩეულია გარკვეული მიმართულება. აღვნიშნოთ $\vec{dl}$ -ით ვექტორი, რომლის მიმართულება კონტურის ყოველ წერტილში ემთხვევა კონტურზე არჩეულ მიმართულებას, ხოლო სიგრძე რკალის დიფერენციალის ტოლია:

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

წარით ინტეგრალს $\vec{a}(M)$ და $\vec{dl}$ ვექტორთა სკალარული ნამრავლიდან

$$\int_L \vec{a}(M) \vec{dl} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

ეწოდება $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის ცირკულაცია L წირის გასწვრივ. თუ $\vec{a}(M)$ არის ძალთა ველი, მაშინ ცირკულაცია გამოისახავს L წირის გასწვრივ მატერიალური წერტილის გადაადგილებაზე შესრულებულ მუშაობას.

გ ა ნ ს ა ზ ე ვ რ ე ბ ა 3.1. $\vec{a}(M)$ ველის როტორი ეწოდება ვექტორს, რომელც $\text{rot } \vec{a}(M)$ სიმბოლოთი აღინიშნება და ვანისაზღვრება ტოლობით

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

$\vec{a}(M)$ ველის როტორი მოხერხებულია სიმბოლურად ჩაეწეროს შემდეგი სახით

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

ცირკულაციისა და როტორის საშუალებით სტოქსის ფორმულა

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \int_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \gamma \right] ds,$$

შევვიძლია ჩაეწეროს უფრო კომპაქტური სახით

$$\oint_L \vec{a}(M) d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n} ds. \quad (3.1)$$

შეიძლება $\vec{a}(M)$ ვექტორული ველის ცირკულაცია ჩაეყვანოს L კონტურზე ტოლია როტორის ნაკადის ამ კონტურით შემოსაზღვრულ რაიმე S ზედაპირზე.

ვექტორული ველის როტორი, ისევე როგორც დივერგენცია, არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ან ფაქტის დამტკიცება ხდება (3.1) ფორმულის გამოყენებით ისეთივე მეთოდით,

როგორც მეთოდითაც ვაჩვენებთ დივერგენციის დამოუკიდებლობა კოორდინატთა სისტემისაგან.

კერძოდ, მტკიცდება, რომ თუ L არის M_0 წერტილის შემცველი და რაიმე $\vec{n}$ ვექტორის მართობული ბრტყელი ზედაპირის შემოსაზღვრული კონტური, მაშინ

$$\lim_n \text{rot } \vec{a}(M_0) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{\int_L \vec{a}(M) d\vec{l}}{|S|}, \quad (3.2)$$

სიდაც $|S|$ არის S -ის ფართობი.

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ $\text{rot } \vec{a}(M_0)$ -ის გეგმილი $\vec{n}$ ვექტორზე არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. რადგან $\vec{n}$ ნებისმიერია, ამიტომ არც $\text{rot } \vec{a}(M_0)$ არ იქნება დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემაზე.

ეთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორული, ხოლო φ სკალარული ველია. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b}; \\ \text{rot}(\varphi \vec{a}) &= \varphi \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \varphi, \vec{a}]. \end{aligned}$$

მართლაც, თუ $\vec{a} = P_1 \vec{i} + Q_1 \vec{j} + R_1 \vec{k}$ და $\vec{b} = P_2 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + R_2 \vec{k}$, მაშინ

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) &= \left(\frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial y} - \frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots = \\ &= \left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots \right] + \left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots \right] = \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b}. \\ \text{rot}(\varphi \vec{a}) &= \left(\frac{\partial(\varphi R_1)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q_1)}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots = \varphi \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} R_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} Q_1 \right) \vec{i} + \dots \right] = \varphi \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \varphi, \vec{a}]. \end{aligned}$$

ვექტორული ველის როტორის გაანხივად გარკვეული ფიზიკური შენაარსი. ამის ნათელსაყოფად განვიხილოთ სითხის დინების სიჩქარეთა $\vec{a}(M)$ ველი. მოვათავსოთ სითხის ნაკადში მცირე ზომის ზორბალი,

ბორბლის შემოშლადეველ L წრეწირზე მიმაგრებულია პატარა ნიჭბე-
ში (ნახ. 59).

სითხის ნაკადის მოქმედებით ბორბალი დაიწევს ბრუნვის სიჩქა-
რით, რომელიც საზოგადოდ დამოკიდებულია ბორბლის ღერძის მა-
მართულებაზე. ბუნებრივად ვადავით, რომ L წრეწირის ყოველი წერ-
ტილის სიჩქარე ტოლი იქნება $\vec{a}(M)$ ვექტორის წრეწირის შესაბამის
მხეზე გვერდის საზოგადო მნიშვნელობისა (პრაქტიკული გამოთვლე-
ბი ამ მოსაზრებას ადასტურებენ),
ე. ი.



ნახ. 59

$$V = \frac{1}{2\pi R} \oint_L \vec{a} d\vec{l} \quad (3.3)$$

სტოქსის (3.1) ფორმულის გამო-
ყენებით (3.3) წირითი ინტეგრალი
გამოვსახოთ ზედაპირული ინტეგრა-
ლით. მივიღებთ

$$V = \frac{1}{2\pi R} \iint_S (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) ds,$$

სადაც S არის ბორბლის ზედაპირი. თუ ბორბალი საკმარისად მცირეა,

მაშინ ინტეგრალი $\iint_S (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}) ds$ გარკვეული სიზუსტით ტოლი

იქნება ბორბლის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობისა და ბორ-
ბლის ფართობის ნამრავლისა, ე. ი.

$$V = \frac{R}{2} (\text{rot } \vec{a}, \vec{n}).$$

ბორბლის ღერძი მივმართოთ ისეთნაირად, რომ სიჩქარის მნიშვნელო-
ბა იქნას მაქსიმალური. ამისათვის ბორბლის ღერძის მიმართულება
უნდა დავმთხვეს ბორბლის ცენტრში ველის როტორის მიმართულებას.
ამ შემთხვევაში

$$V_{\max} = \frac{R}{2} |\text{rot } \vec{a}(M)|.$$

ანუ

$$|\text{rot } \vec{a}(M)| = \frac{2V_{\max}}{R}.$$

შეგვად $\frac{V}{R} = \omega$ სადაც ω არის ბორბლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

ამრიგად, მივედიო შემდეგ დასკვნამდე: თუ ბორბალი ორიენტირებუ-
ლია ისეთნაირად, რომ მისი ბრუნვის სიჩქარე მაქსიმალურია, მაშინ
ბორბლის კუთხური სიჩქარე $|\text{rot } \vec{a}(M)|$ -ის ნახევრის ტოლია, ხოლო
ბორბლის ღერძის მიმართულება $\text{rot } \vec{a}(M)$ ვექტორის მიმართულებას
ემთხვევა.

ამრიგად, $\text{rot } \vec{a}(M)$ ახასიათებს სიჩქარეთა ველის „მბრუნებელ
კომპონენტს“. იგი სითხის უსასრულოდ მცირე ნაწილაკის ბრუნვის
კუთხური სიჩქარის გაორგეცხულის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ე. ვიზუალურ უძრავი Ox ღერძის გარშემო კუთხური სიჩ-
ქარით მბრუნავი მყარი სხეულის წერტილების სიჩქარეთა ვექტორთ-
ლი ველის როტორი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც § 1-ის მაგალით 1-ში ვნახეთ, ვექტორულ
ველს აქვს სახე $\vec{V}(M) = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$. თუ გამოვიყენებთ როტორის ფა-
საზღვრას, გვექნება

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k}.$$

როგორც ვხედავთ, ვექტორული ველის როტორი მიმართულია
ბრუნვის ღერძის გასწვრივ, ხოლო მოდულით კუთხური სიჩქარის გა-
ორგეცხულის ტოლია.

როტორის ცნება მჭიდროდ არის დაკავშირებული პოტენციალურ
ველის ცნებასთან. როგორც ვიცით ვექტორული ველი $\vec{a}(M) = P\vec{i} +$
 $+ Q\vec{j} + R\vec{k}$ პოტენციალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

თუ ვავიხსენებთ როტორის განსაზღვრებას, შევამჩნევთ, რომ ამ
ტოლობების მართებულობის შემთხვევაში როტორის სამივე კოორდი-
ნატ იქნება ნულის ტოლი. ამრიგად, ამისათვის, რომ ვექტორული ვე-
ლი იყოს პოტენციალური, აუცილებელია და საკმარისი, შესრულდეს
პირობა

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \vec{0}.$$

ველის თეორიის ძირითადი ცნებები: გრადიენტი, დივერგენცია, როტორი მოხერხებულია ჩაწერით ე. წ. პამილტონის ოპერატორის, ანუ „ნაბლა“ ოპერატორის საშუალებით

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

პამილტონის ოპერატორს განვიხილავთ როგორც სიმბოლურ ვექტორს, რომლის კოორდინატებია სიმბოლოები $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ და $\frac{\partial}{\partial z}$. ოპერაციებს ∇ ოპერატორზე ვაწარმოებთ ვექტორული ალგებრის წესების მიხედვით. ამასთან $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ და $\frac{\partial}{\partial z}$ სიმბოლოებისა და სკალარული ფუნქციის ნამრავლის ჯერე ვიგულისხმებთ ამ ფუნქციის შესაბამის კერძო წარმოებულებს.

ვთვათ $u(x, y, z)$ — სკალარული ფუნქცია. მაშინ ∇ ოპერატორის u ფუნქციაზე ნამრავლი მოგვცემს u ფუნქციის გრადიენტს

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u.$$

პამილტონის ოპერატორით შეგვიძლია ჩაწერით აგრეთვე დივერგენცია და როტორი. მართლაც, ვთვათ $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ არის ვექტორ ფუნქცია. მაშინ ∇ ოპერატორისა და $\vec{a}(M)$ ვექტორ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლი მოგვცემს ამ ფუნქციის დივერგენციას

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a}(M) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{a}(M). \end{aligned}$$

∇ ოპერატორისა და $\vec{a}(M)$ ვექტორ-ფუნქციის ვექტორული ნამრავლი ამ ფუნქციის როტორის ტოლია

* ჟ. რ. პამილტონი (1805—1865) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

$$\begin{aligned} [\nabla, \vec{a}(M)] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{a}(M). \end{aligned}$$

ვექტორული ანალიზის მრავალი ფორმულის ჩაწერა მოხერხებულია ∇ ოპერატორის საშუალებით. განვიხილოთ რამდენიმე მავალით.

1. ვაჩვენოთ, რომ

$$\text{div rot } \vec{a}(M) = 0.$$

მართლაც

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{a}(M) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned}$$

ცხადია, ამ ტოლობის დამტკიცებისას იგულისხმება, რომ P, Q, R ფუნქციებს გააჩნიათ მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები. რადგან

$$\text{div rot } \vec{a}(M) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = (\nabla, \vec{a} \times \nabla).$$

ამიტომ ∇ ოპერატორის საშუალებით (4.1) ფორმულა შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$(\nabla, \nabla \times \vec{a}) = 0.$$

ამრიგად, $\nabla, \nabla \times \vec{a}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ნულის ტოლია. ვექტორთა ალგებრიდან ცნობილი შერეული ნამრავლის თვისებების ძალით ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან შერეულ ნამრავლში ორი ვექტორი ერთმანეთის ტოლია.

2. ვაჩვენოთ, რომ, თუ u ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ

$$\text{rot grad } u = \vec{0}. \quad (4.2)$$

14. ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლაძე, მ. გიბიძაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

$$\operatorname{rotgrad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \vec{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}.$$

რადგან

$$\operatorname{rotgrad} u = \nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla) u$$

ამიტომ (4.2) ფორმულა ∇ ოპერატორით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$(\nabla \times \nabla) u = \vec{0}.$$

ვექტორთა ილევების თეორემაზე ეს ტოლობაც ცხადია, რადგან ვექტორის თავის თავზე ვექტორული ნამრავლი ნულვექტორია.

3. ვახვეთოთ, რომ

$$\operatorname{graddiv} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k}.$$

მართლაც

$$\operatorname{graddiv} \vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{a}) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{a}) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{a}) \vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k}.$$

4. ვახვეთოთ, რომ თუ u ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის კვადრატული წარმოებული, მაშინ

$$\operatorname{divgrad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$\operatorname{divgrad} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

ლაპლასის

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ოპერატორის გამოყენებით უკანასკნელი ტოლობა შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\operatorname{divgrad} u = \Delta u. \quad (4.3)$$

ლაპლასის ოპერატორი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ∇ ოპერატორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი, მართლაც

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \Delta.$$

ამრიგად (4.3) ტოლობა ნაზღა ოპერატორით შემდეგი სახით ჩაიწერება

$$\operatorname{divgrad} u = \nabla^2 u.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\Delta u = 0$$

განტოლებას ეწოდება ლაპლასის განტოლება. სკალარულ $u(x, y, z)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\Delta u = 0$, ეწოდება ჰარმონიული ფუნქცია.

5. მართებულია ტოლობა

$$\operatorname{rotrot} \vec{a} = \operatorname{graddiv} \vec{a} - \Delta \vec{a}.$$

§ 4. ვეკტორული ოპერაციები გრადიენტულ ვეკტორებში

ვიტყვი, რომ სივრცით არეში განსაზღვრულია პრუდწირული u, v, w კოორდინატები, თუ მოცემული არის ყოველ წერტილს რამდენიმე წესით შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (u, v, w) სამეული ისე, რომ არის განსხვავებულ წერტილებს შეესაბამება განსხვავებული სამეულები.

იმ წერტილში გეომეტრიულ ადგილს, სადაც $u = \text{const}$, ან $v = \text{const}$ ან $w = \text{const}$, ეწოდება საკოორდინატო ზედაპირები. ორი საკოორდინატო ზედაპირის თანაცვეთის-საკოორდინატო წირები.

ვთქვათ მოცემულ არეში განსაზღვრულია აგრეთვე მართკუთხა x, y, z კოორდინატებში. მაშინ არს წერტილი x, y, z მართკუთხა კოორდინატებსა და u, v, w მრუდწირულ კოორდინატებს შორის დამკარგება ურთიერთცალსახა თანადობა

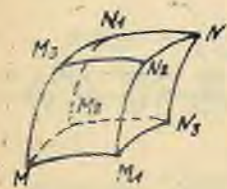
$$x=x(u, v, w), y=y(u, v, w), z=z(u, v, w). \quad (5.1)$$

ეს შესაბამისობა შეიძლება მოცემულ იქნას აგრეთვე შემდეგი ცალსახა ფუნქციებით

$$u=u(x, y, z), v=v(x, y, z), w=w(x, y, z). \quad (5.2)$$

ვიგულისხმეთ, რომ (5.1) ფუნქციებს გააჩნიათ უწყვეტი კერძო წარმოებულები და იყოფიანი $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ ნული არ ხდება (ე. ი. ინარჩუნებს ნიშანს). ამ შემთხვევაში (5.2) ფუნქციებსაც ექნებათ იგივე თვისებები.

განსახილვეთ ნახ. 60. მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური, თუ საკოორდინატო წირები ნებისმიერ წერტილში ურთიერთმართობულია.



ნახ. 60

განვიხილოთ, თუ როგორ ჩაიწერება მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში სკალარული და ვექტორული ველის ძირითადი დიფერენციალური ოპერაციები. ამისათვის პირველ რიგში ვაჩვენოთ, როგორ გამოისახება სიგრძის, ფართობისა და მოცულობის ელემენტები მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში.

განვიხილოთ უსასრულოდ მცირე მრუდწირული პარალელებედი, რომელიც შემოსაზღვრულია სამი წვერილი საკოორდინატო ზედაპირებით, რომლებიც შეესაბამება მრუდწირული კოორდინატების $u, v, w, u+du, v+dv, w+dw$ მნიშვნელობებს (ნახ. 60).

განვიხილოთ MM_1 წიბო. ვთქვათ M წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია (u, v, w) , ხოლო M_1 წერტილისა — $(u+du, v, w)$. აღვნიშნოთ M წერტილის დეკარტის კოორდინატები x, y, z -ით, ხოლო M_1 -ის კი — $x+dx, y+dy, z+dz$ -ით. ცხადია, რომ MM_1 ვექტორის dl_1 სიგრძე ტოლია

$$dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

რადგან MM_1 წიბოს გასწვრივ x, y და z კოორდინატები მხოლოდ u ცვლიდის ფუნქციებით, ამიტომ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du.$$

ამრიგად

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} du.$$

ანალოგიურად, MM_2, MM_3 წიბოების dl_2, dl_3 სიგრძეებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} dv,$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} dw.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$H_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$

$$H_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}, \quad (5.3)$$

$$H_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}.$$

ამ აღნიშვნებში dl_1, dl_2, dl_3 სიგრძეები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$dl_1 = H_u du, \quad dl_2 = H_v dv, \quad dl_3 = H_w dw. \quad (5.4)$$

H_u, H_v, H_w სიდიდეებს ღამეს* კოეფიციენტები ეწოდებათ

რადგან, u, v, w მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია, ამიტომ $MM_2N_1M_3$ წახნაგის ds_1 ფართობი ტოლი იქნება dl_2 და dl_3 -ის ნამრავლის, ე. ი.

$$ds_1 = H_v H_w dv dw. \quad (5.5)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $MM_1N_2M_3$ და $MM_1N_3M_2$ წახნაგების ds_2 და ds_3 ფართობები შესაბამისად ტოლია

$$ds_2 = H_u H_w du dw \quad \text{და} \quad ds_3 = H_u H_v du dv.$$

* ნ. ლ. მ. გ. (1795-1870) — ფრანგი მათემატიკოსი და ინჟინერი.

როც შევხება მოცემული პარალელებების dG მოცულობას იგი ტოლი იქნება dl_1 , dl_2 და dl_3 სიდიდეთა ნამრავლის ე. ი.

$$dG = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3 = H_u H_v H_w du dv dw. \quad (5.6)$$

ამრიგად მივიღეთ სივრცის, ფართობის და მოცულობის ელემენტების გამოსათვლელი ფორმულები მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში.

M წერტილში MM_1 , MM_2 და MM_3 საკოორდინატო წირებისადმი ელემენტული მხებების მკვეთები შესაბამისად იყოს $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, რადგან მრუდწირული კოორდინატა სისკემა ორთოგონალურია, ამიტომ ცხადია $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ვექტორთა სისტემა იქნება სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, შევნიშნოთ, რომ დეკარტის $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ბაზისისაგან განსტავებით ეს ბაზისი დამოკიდებულია M წერტილზე, ე. ი. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ვექტორები წარმოადგენენ u , v , w ცვლადების ფუნქციებს.

1. გრადიენტი მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. ვთქვათ φ სკალარული ველია, თუ შევვიღებთ u , v , w მრუდწირულ კოორდინატებს, მაშინ φ იქნება ამ ცვლადებს ფუნქცია, როგორც ვიცი, გრადიენტის გეგმილი რაიმე $\vec{a}$ ვექტორზე ამ ვექტორის მიმართულეებით ფუნქციის წარმოებულის ტოლია, ე. ი.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{a}} = \frac{(\text{grad } \varphi, \vec{a})}{|\vec{a}|}.$$

გამომდინარე აქედან, იმსათვის, რომ ეიზოფთ $\text{grad } \varphi$ -ს კოორდინატები $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ბაზისში, საკმარისია ვიპოვოთ φ ფუნქციის წარმოებულები ამ ვექტორების მიმართულებით. ვთქვათ $\Delta \varphi = \varphi(M_1) - \varphi(M)$, მაშინ (5.4) ფორმულების გათვალისწინებით მოვიღებთ

$$(\text{grad } \varphi, \vec{e}_1) = \lim_{d\vec{e}_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{d\vec{e}_1} = \lim_{d\vec{e}_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{H_u du} = \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$(\text{grad } \varphi, \vec{e}_2) = \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \text{და} \quad (\text{grad } \varphi, \vec{e}_3) = \frac{1}{H_w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \vec{e}_3. \quad (5.7)$$

2. დივერგენცია მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში.

ვთქვათ $\vec{a} = \vec{a}(M)$ ვექტორული ველია, გამოვთვალოთ $\vec{a}$ ველის დივერგენცია u , v , w მრუდწირულ, ორთოგონალურ კოორდინატებში, დივერგენციის ინვარიანტული განსაზღვრის თანახმად (იხ. (2.5))

$$\text{div } \vec{a}(M) = \lim_{G \rightarrow 0} \frac{\iint_G (\vec{a}, \vec{n}) ds}{|G|},$$

სადაც G არის M -ის შემცველი რაიმე არე, S კი — მისი შემოღმსარებელი ზედაპირი ამიტომ $\text{div } \vec{a}(M)$ შეგვიძლია გამოვთვალოთ როგორც მე-60 ნახაზზე გამოსახულ უსასრულოდ მცირე პარალელოპედში ვიშავალი $\vec{a}(M)$ ველის ვექტორული ნაკადისა და ამ პარალელებების მოცულობის შეფარდება. ვთქვათ

$$\vec{a} = P \vec{e}_1 + Q \vec{e}_2 + R \vec{e}_3.$$

გამოვთვალოთ $\vec{a}$ ველის ნაკადი პარალელებების ორ $MM_2N_1M_3$ და $M_1N_2NN_3$ წახნაგებში, რომლებიც MM_1 წირის მართობულია. $MM_2N_1M_3$ წახნაგს ვერე ნორმალი ემთხვევა — $\vec{e}_1$ ვექტორს, ამიტომ $\vec{a}$ ველის ნაკადი ამ წახნაგებში იქნება (dG -სთან შედარებით უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეს სიზუსტით)

$$(\vec{a}, \vec{e}_1) d\vec{e}_1 = (P H_u H_w)_M du dv dw, \quad (5.8)$$

სადაც $(P H_u H_w)_M$ -ით აღნიშნულია $P H_u H_w$ ფუნქციის მნიშვნელობა M წერტილში.

ახლა განვიხილოთ $\vec{a}$ ველის ნაკადი $M_1N_2NN_3$ წახნაგში ამ წახნაგზე ვერე ნორმალს შექნება $\vec{e}_2$ ვექტორის მიმართულება, ამიტომ $\vec{a}$ ველის ნაკადი ამ წახნაგში იქნება

$$(\vec{a}, \vec{e}_2) d\vec{e}_2 = (P H_v H_w)_M dv dw.$$

ჩაღვან M_1 წერტილის კოორდინატებია $u+du, v, w$ ამიტომ ტეილორის* ფორმულის ძალით (პირველი შესაყრების სიზუსტით)

$$(PH_w H_w)_{M_1} = (PH_w H_w)_M + \frac{\partial (PH_w H_w)}{\partial u} \Big|_M du.$$

ამრიგად

$$(a, \vec{e}) ds_1 = \left[(PH_w H_w)_M + \frac{\partial (PH_w H_w)}{\partial u} \Big|_M du \right] dudw.$$

ამ ტოლობისა და (5.8)-ის შეკრებით მივიღებთ, რომ $\vec{a}$ ველის ნაკადი პარალელურ $MM_2N_1M_3$ და $M_1N_2NN_3$ წახნაგებში იქნება

$$\frac{\partial}{\partial u} (P_u H_u H_w) du dv dw.$$

ანალოგიურად, დანართენ ორ წვეთელ ზედაპირებზე $\vec{a}$ ველის ნაკადის მნიშვნელობებია

$$\frac{\partial}{\partial v} (QH_u H_w) du dv dw \text{ და } \frac{\partial}{\partial w} (RH_u H_w) du dv dw.$$

თუ შევკრებთ ამ სიღაღებებს და გავყოფთ dG -ზე (იხ. (5.6)), მივიღებთ დივერგენციის გამოსათვლელ ფორმულის შრულწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{1}{H_u H_v H_w} \left[\frac{\partial (P H_u H_w)}{\partial u} + \frac{\partial (Q H_u H_w)}{\partial v} + \frac{\partial (R H_u H_w)}{\partial w} \right]. \quad (5.9)$$

3. როტორი შრულწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. წინა პარაგრაფში ვანთვით, რომ $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$ -ის ვეგმილი რაიმე n ვექტორზე გამოითვლება ფორმულით

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(M))_n = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} d\vec{l}}{|S|}.$$

სადაც S არის n -ის მართობული ბრტყელი ზედაპირი, L კი ამ ზედაპირის შემოშლისწერელი წიბი. ამ ფორმულის ძალით, ჩვენ შეგვიძლია გამოვივლიოთ $\operatorname{rot} \vec{a}$ -ს ვეგმილი $\vec{e}_1$ ვექტორზე, თუ გამოვთვლით $\vec{a}$ ველის ცირკულაციას $MM_2N_1M_3M$ (იხ. ნახ. 60) კონტურის გასწვრივ და გავყოფთ მას dS_1 -ზე.

* მ. ტეილორი (1685-1723) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

წარმოვიღებინოთ $\vec{a} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3$ ველის ცირკულაცია აღნიშნული კონტურის გასწვრივ ოთხი შესაყრების სახით, რომლებიც შეესაბამება MM_2, M_2N_1, N_1M_3 და M_3M მონაკვეთებს და გამოვთვალოთ თითოეული შესაყრები ცალ-ცალკე, დავიწყოთ პირველით. ჩაღვან $\vec{a}$ -ს ვეგმილი MM_2 მიმართულებებზე არის Q_1 ამიტომ MM_2 -ზე $\vec{a}$ ველის ცირკულაცია (5.4)-ის ძალით ტოლია (dS_1 -ზე უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირის სიზუსტით)

$$QdS_1 = (QH_w)_M dw, \quad (5.10)$$

სადაც $(QH_w)_M$ -ით აღნიშნულია QH_w ფუნქციის მნიშვნელობა M წერტილში.

ახლა გამოვთვალოთ $\vec{a}$ ველის ცირკულაცია N_1M_3 წირზე. ამ წირზე ინტეგრება ხდება $-\vec{e}_2$ ვექტორის მიმართულებით. ამიტომ $\vec{a}$ ველის ცირკულაცია N_1M_3 წირზე იქნება

$$-QdS_2 = -(QH_v)_{M_3} dv.$$

ჩაღვან M_3 წერტილის კოორდინატებია $u, v, w+dw$, ამიტომ ტეილორის ფორმულის ძალით (პირველი შესაყრების სიზუსტით)

$$(QH_v)_{M_3} = (QH_v)_M + \frac{\partial (QH_v)}{\partial w} \Big|_M dw.$$

ამრიგად

$$-QdS_2 \Big|_{M_3} = - \left[(QH_v)_M + \frac{\partial (QH_v)}{\partial w} \Big|_M dw \right] dv. \quad (5.11)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ M_2N_1 და M_3M წირებზე ცირკულაცია შესაბამისად იქნება

$$RdS_3 \Big|_{M_2} = \left[(RH_w)_M + \frac{\partial (RH_w)}{\partial v} \Big|_M dv \right] dw \quad (5.12)$$

და

$$RdS_3 \Big|_M = -(RH_u)_M du. \quad (5.13)$$

(5.10), (5.11), (5.12), (5.13) ტოლობების შეკრებით, მივიღებთ, რომ n -ის ცირკულაცია $MM_2N_1M_3M$ კონტურის გასწვრივ არის

$$= \frac{\partial (QH_v)}{\partial w} dudw + \frac{\partial (RH_u)}{\partial v} dv dw.$$

თუ მიღებულ სიდიდებს ვაყენებთ $MM_2N_1M_3$ წახანის $ds_1 = H_u H_v dv du$ ფართობზე (იხ. (5.5)) მივიღებთ, $\text{rot} \vec{a}$ -ს ვეგებულს $\vec{e}_3$ ვექტორზე

$$\text{ვგ}_{\vec{e}_3}(\text{rot} \vec{a}) = \frac{1}{H_u H_v} \left\{ \frac{\partial(RH_u)}{\partial v} - \frac{\partial(QH_v)}{\partial u} \right\}. \quad (5.14)$$

ანალოგიურად გამოითვლება დანარჩენი ორი კომპონენტი

$$\text{ვგ}_{\vec{e}_2}(\text{rot} \vec{a}) = \frac{1}{H_u H_u} \left\{ \frac{\partial(PH_u)}{\partial u} - \frac{\partial(RH_u)}{\partial u} \right\}, \quad (5.15)$$

$$\text{ვგ}_{\vec{e}_1}(\text{rot} \vec{a}) = \frac{1}{H_u H_u} \left\{ \frac{\partial(QH_u)}{\partial u} - \frac{\partial(PH_u)}{\partial u} \right\}. \quad (5.16)$$

(5.14), (5.15) და (5.16) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{a} = & \frac{1}{H_u H_v} \left(\frac{\partial(RH_u)}{\partial v} - \frac{\partial(QH_v)}{\partial u} \right) \vec{e}_3 + \\ & + \frac{1}{H_u H_u} \left(\frac{\partial(PH_u)}{\partial u} - \frac{\partial(RH_u)}{\partial u} \right) \vec{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_u H_u} \left(\frac{\partial(QH_u)}{\partial u} - \frac{\partial(PH_u)}{\partial u} \right) \vec{e}_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

4. ლაპლასის ოპერატორი ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში. თუ გამოვიყენებთ grad და div სიდიდეებს გამოსათვლელ ფორმულებს მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში, მივიღებთ ლაპლასის ოპერატორის გამოსახულებას მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. მართლაც, როგორც ვიცით (იხ. 4.3), $\Delta \varphi = \text{div grad} \varphi$. ამიტომ (5.7) და (5.9) ფორმულების ძალით ვვაქვს

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \text{div grad} \varphi = & \frac{1}{H_u H_v H_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_u H_w}{H_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H_u H_w}{H_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{H_u H_w}{H_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ აგრეთვე შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \ln \frac{H_u H_w}{H_u} + \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{H_u H_w}{H_v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{1}{H_w} \cdot \frac{\partial}{\partial w} \ln \frac{H_u H_w}{H_w}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

5. ვექტორული ოპერაციები ცილინდრულ კოორდინატებში. განვიხილოთ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა ρ, φ, z , რომლებიც მართკუთხა კოორდინატთა სისტემასთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

როგორც ვიცით, ასეთნაირად განსაზღვრულ ρ, φ, z კოორდინატთა სისტემას ეწოდება ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა (იხ. თავი I, § 11, პუნქტი 6). ამ შემთხვევაში საკოორდინატო წერტილებს წარმოადგენენ (ნახ. 61): 1) სხივები, რომელთა სათავე Oz ღერძზეა და რომლებიც Oz ღერძის მართობულა; 2) წრეწირები, რომლებიც Oz ღერძის მართობულებია და ცენტრი Oz ღერძზე მდებარეობს; 3) წრფეები, რომლებიც Oz ღერძის პარალელურია.

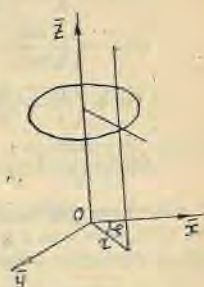
აღვლია შემოწმება, რომ სივრცის ნებისმიერ წერტილში დამოუკიდებელი საკოორდინატო წერტილები ურთიერთმართობულია, ა. ე. ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია. ამ სისტემისათვის (5.3)-ის თანახმად ლაშვს კოეფიციენტები იქნება

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1,$$

ვთქვათ i -სკალარული ველია, ხოლო $\vec{a}$ -ვექტორული ველი (5.7) (5.9), (5.17) და (5.18) ფორმულებიდან მივიღებთ შესაბამისად გრადიენტს, დივერგენციას, როტორის და ლაპლასის ოპერატორის გამოსახულებებს ცილინდრულ კოორდინატებში:



ნახ. 61

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3;$$

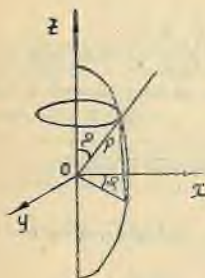
$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} P + \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{Q}{\rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_3;$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

6. ვექტორული ოპერაციები სფერულ კოორდინატებში. ჩოგორც ვიცით, მართკუთხა x, y, z კოორდინატები დაკავშირებულია სფერულ ρ, φ, θ კოორდინატებთან შემდეგი ფორმულებით (იხ. თავი I, (11.9)):

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$



ნახ. 62

სფერული კოორდინატების შემთხვევაში საკოორდინატო წირებს წარმოადგენენ (ნახ. 62): 1) სხივები, რომლებიც გამოდიან კოორდინატის სათავედან; 2) წრეწირები, რომლებიც მართებულია Oz ღერძის და რომელთა ცენტრი Oz ღერძზე მდებარეობს; 3) ნახევარწრეწირები, რომელთა დიამეტრი Oz ღერძზე მდებარეობს, ხოლო ცენტრი კოორდინატის სათავეშია.

სფერულ კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია. ლამეს კოეფიციენტები სფერულ კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში იქნება:

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \rho \sin \theta,$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho.$$

ვთქვათ f — სკალარული ველი, $\vec{a}$ — ვექტორული. ვექტორულ ოპერაციებს სფერულ კოორდინატებში იქნება შემდეგი სახე

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_3,$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\rho^2 P)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial (R \sin \theta)}{\partial \theta},$$

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{\partial (Q \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial (R \rho)}{\partial \rho} \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (Q R)}{\partial \rho} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_3.$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right).$$

მეხუთე თავი

რიცხვთა მწკრივი

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ნაწილს მწკრივთა თეორია წარმოადგენს, მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ამოცანაა ფუნქციის შესწავლა. ლიფერენციალური ალრიცხვა საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა, ექსტრემუმში, ვრავიციის ამოზნეცილობა და ჩაზნეცილობა, გადილუნივის წერტილი, ფუნქციის მნიშვნელობათა მიახლოებითი გამოთვლა და სხვა. მაგრამ მხოლოდ ლიფერენციალური ალრიცხვის გამოყენებით ჩვენ არ შეგვიძლია ეფექტურად შევისწავლოთ ზოგიერთი ფუნქცია, მაგალითად უწყვეტი ფუნქციები, რომლებსაც არც ერთ წერტილში

წარმოებული არ გააჩნია; უფრო მეტიც, მართო დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენებით ასეთი ფუნქციების არსებობის ფაქტის დადგენაც კი არ ზერბდება. ასეთი ფუნქციების შესწავლის პრობლემა, ისევე როგორც მათემატიკური ანალიზის პრაქტიკული სხვა პრობლემა, შეიძლება წარმატებით გადაიჭრას მწკრივთა თეორიის გამოყენებით. მწკრივები წარმოადგენს მოცემული თვისებების მქონე ფუნქციის აგებისა და მისი შემდგომი შესწავლის ერთ-ერთ ძირითად საშუალებას. მწკრივების საშუალებით შეიძლება აგრეთვე ვიპოვოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები ფუნქციის, ინტეგრალის, დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების და სხვა.

§ 1. ნამდვილ რიცხვთა მწკრივი. კრებადობა და განსაზღვრება

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ამ მიმდევრობის წევრებისაგან შევადგინოთ გამოსახულება

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1.1)$$

(1.1) გამოსახულებას რიცხვთა მწკრივი ეწოდება. a_n რიცხვს მწკრივის n -ური წევრი ანუ მწკრივის n -ე წევრი ეწოდება. გამოიყენება აგრეთვე ასეთი გამოთქმა: მწკრივი ზოგადი a_n წევრით, ან მოკლედ (a_n) მწკრივი.

(1.1) გამოსახულებას ჯამის სიმბოლოს გამოყენებით ასე ჩაწერა

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ჯამს

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ეწოდება (1.1) მწკრივის n -ური ჯამი ან უბრალოდ — ჯამი. თუ n -ს მივნიჭებთ $1, 2, \dots, n, \dots$ მნიშვნელობებს, მივიღებთ (1.1) მწკრივის ჯამთა მიმდევრობას

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

განსაზღვრება 1.1. (1.1) მწკრივი ეწოდება კრებადი, თუ ამ მწკრი-

ვის ჯამი $\{S_n\}$ მიმდევრობა კრებადი. $\{S_n\}$ მიმდევრობის S ზღვარს ეწოდება (1.1) მწკრივის ჯამი და ჩაიწერება ასე:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ მოცემულ

მწკრივს განსაზღვრული ეწოდება.

შევისწავლოთ მწკრივის კრებადობის საკითხი ნიშნის, დავადაგონოთ მწკრივი კრებადი თუ განსაზღვრული.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

ამ მწკრივის წევრები შეადგენენ უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი $\frac{1}{2}$. ამიტომ n -ური ჯამი S_n გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

მაშასადამე მოცემული მწკრივი კრებადი და მისი ჯამი 2.

მაგალითი 2. განვიხილოთ ეგრეთწოდებული ლეიბნიცის მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

ამ მწკრივის n -ური ჯამი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

იქედან ვლუბულობთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. ამრიგად, ლეიბნიცის მწკრივი კრებადი და მისი ჯამი $S=1$.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობაა

$$S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, \dots, S_{2n-1}=1, S_{2n}=0, \dots$$

ამ მიმდევრობისათვის $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ არ არსებობს. ამრიგად, მოცემული მწკრივი განშლილია.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვაჩვენოთ, რომ

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

მწკრივი განშლილია, მართლაც

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

რადგანაც $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, ამიტომ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, ე. ი. მოცემული მწკრივი განშლილია.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ბ ა 1.2. (a_n) მწკრივის ნაშთი n -ური წევრის შემდეგ, ეწოდება მწკრივის

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i}.$$

თ ე ო რ ე შ ა 1.1. თუ მწკრივი კრებადი, მაშინ მისი ნებისმიერი ნაშთი კრებადი. თუ (1.1) მწკრივის რაიმე ნაშთი კრებადი, მაშინ კრებადი თვით მწკრივიც, ამასთან, თუ

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad S_m = \sum_{i=1}^m a_i, \quad R_m = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i},$$

მაშინ

$$S = S_m + R_m. \quad (1.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის კერძო ჯამებია $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n=1, 2, \dots$ ხოლო $\sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i}$ ნაშთის კერძო ჯამებია $S_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$. ცხადია, რომ, თუ $n=m+k$, მაშინ

$$S_n = S_m + S_k^{(m)}. \quad (1.3)$$

(1.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული m -თვის $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{(m)}$. ე. ი. მწკრივი კრებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როდესაც კრებადი მისი რაიმე ნაშთი $R_m = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{(m)}$.

ამრიგად მწკრივი და მისი ნებისმიერი ნაშთი ერთდროულად კრებადი ან ერთდროულად განშლილია.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ მწკრივში რამოდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით, ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დავუმატებთ) რამოდენიმე წევრს ამით მწკრივის კრებადობა არ შეიცვლება.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ მწკრივი კრებადი, მაშინ მისი ნაშთის R_m ჯამი მისწრაფვის ნულისაკენ.

მართლაც (1.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (S - S_m) = 0.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ კრებადი მწკრივის ჯამი შეიძლება გამოვითვალოთ მიხედვით ნებისმიერი სიზუსტით მისი S_n კერძო ჯამის საშუალებით.

§ 2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

მართებული შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1 (მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა). (a_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ მისი ზოგადი a_n წევრი მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ (a_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია S . რადგან $a_n = S_n - S_{n-1}$, ამიტომ გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, ან $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ არ არსებობს, მაშინ მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 1. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$

განშლადია, რადგანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

მაგალითი 2. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}$ განშლადია, რადგანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{3} \text{ არ არსებობს.}$$

შეგნიშნოთ, რომ მწკრივის ზოგადი წევრის ნულისაკენ მისწრაფება არის მწკრივის კრებადობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა. ე. ი. თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს

რომ მწკრივი კრებადია. ამ დებულების დამამტკიცებლად (თუმცა ეს

გამომდინარეობს § 1-ის მაგალითი 4-დანაც) განვიხილოთ უვრცელყოფადებული პარმონიული მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2.1)$$

ვაჩვენოთ, რომ (2.1) მწკრივი განშლადია. მართლაც, რადგან ყოველი $k \in \mathbb{N}$ -თვის

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k},$$

ამიტომ

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

მაშასადამე

$$S_n > \ln(n+1)$$

ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ -თვის. ამ უტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

ე. ი. პარმონიული მწკრივი განშლადია.

ახლა მოვიყვანოთ მწკრივის კრებადობის კოშის* კრიტერიუმი (აუცილებელი და საკმარისი პირობა). (a_n) მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n\}$ მიმდევრობის კრებადობის კრიტერიუმი ამავე დროს არის $\{a_n\}$ მწკრივის კრებადობის კრიტერიუმიც. მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის თანახმად, (იხ. [36], თავი II, თეორემა 8.1.) $\{S_n\}$ მიმდევრობა კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

ნებისმიერი $n > n_0$ -სათვის და ყოველი ნატურალური p -სათვის. მაგრამ $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$. ამიტომ (a_n) მწკრივის კრებადობის კრიტერიუმი ასე ჩამოყალიბდება

* ი. კოშის (1789-1857) — ფრანგი მათემატიკოსი.

თეორემა 2.2 (მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმი). (a_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი რიცხვი n_0 , რომ ყოველი ნატურალური p რიცხვისათვის აღვიღო $\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n$ უტოლობას

$$|a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_{n_0+p}| < \varepsilon,$$

როცა $n > n_0$.

თეორემა 2.3. გეომეტრიული პროგრესია

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0)$$

არის კრებადი მწკრივი, როცა $|q| < 1$ და მისი ჯამია $S = \frac{a}{1-q}$. ეს

მწკრივი განშლადია, როცა $|q| > 1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $|q| < 1$. გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის ძალით

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}. \quad (2.2)$$

ვინაიდან, როცა $|q| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = 0,$$

ამიტომ (2.2) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}.$$

ე. ი., როცა $|q| < 1$, მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $\frac{a}{1 - q}$.

აბლა ვთქვათ $|q| > 1$. მაშინ ყოველი n -თვის $|aq^n| \gg |a|$ და ამიტომ მწკრივის ზოგადი წევრის ზოგადი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. არაა შესრულებული მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა, გამომდინარე აქედან მწკრივი განშლადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. კრებადი მწკრივის მრავალჯეროვანი თვისებები

თეორემა 3.1. თუ კრებადი

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3.1)$$

მწკრივის წევრებს შათი რიგის შეუცვლელად ისე დავაჯგუფებთ, რომ ყოველი ჯგუფის წევრთა რიცხვი სასრულოა და ამ ჯგუფების ჯამებისაგან მწკრივს შევადგენთ, მიღებული მწკრივი

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}) + \dots \quad (3.2)$$

კრებადი იქნება და მისი ჯამი თავიდან აღებული მწკრივის ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ S_m და S'_m სიმბოლოებით შესაბამისად (3.1) და (3.2) მწკრივების m -ური კერძო ჯამები. ცხადია, რომ ნებისმიერი ნატურალური k -სათვის

$$S'_k = S_{n_k}.$$

ე. ი. $\{S'_k\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს კრებადი $\{S_m\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობას, ამიტომ, თუ $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, მაშინ აუცილებლად $\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = S$.

ამრიგად, თუ (3.1) მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ, მაშინ (3.2) მწკრივიც კრებადია იმავე S რიცხვისაკენ.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ (3.2) მწკრივი განშლადია, მაშინ (3.1) მწკრივიც აგრეთვე განშლადია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.1-ის შეზღუდვებული თეორემა მართებული არ არის: (3.2) მწკრივის კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს (3.1) მწკრივის კრებადობა. მართლაც, მწკრივი

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

კრებადია და მისი ჯამი უდრის 0-ს, მაგრამ მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

განშლადია.

თეორემა 3.2. თუ (a_n) მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი λ რიცხვისათვის (λa_n) მწკრივი კრებადია λS რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$S_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n.$$

ცხადია, რომ

$$S_n = \lambda A_n.$$

აქედან მიიღება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda S.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაკუთრება 3.1. (a_n) და (b_n) მწკრივების ჯამი ეწოდება $(a_n + b_n)$ მწკრივს, ხოლო სხვაობა კი $(a_n - b_n)$ მწკრივს.

თეორემა 3.3. თუ (a_n) და (b_n) მწკრივები კრებადია და მათი ჯამია, შესაბამისად, A და B , მაშინ $(a_n + b_n)$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $A + B$. ასევე $(a_n - b_n)$ მწკრივიც კრებადია და მისი ჯამია $A - B$.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n).$$

ცხადია, რომ

$$S_n = A_n + B_n.$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + B.$$

შ. ი. $(a_n + b_n)$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $A + B$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $(a_n - b_n)$ მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია $A - B$.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. დადებითი მწკრივები. კონსერვაციის პრინციპი და სპეციალური შემთხვევები

(a_n) მწკრივს, რომლის ყოველი წევრი დადებითი რიცხვია, დადებითი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 4.1. დადებითი მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ვთქვათ (a_n) დადებითი მწკრივია. ცხადია, რომ ამ მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია. თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ მონოტონური მიმდევ-

რობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი იგი იყოს შემოსაზღვრული (იხ. [36], თავი II, § 5).

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.2. ვთქვათ (a_n) დადებითი მწკრივია და $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$. (a_n) მწკრივი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც კრე-

$$\text{ბადია } \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \text{ მწკრივი.}$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$S_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}.$$

როცა $n < 2^k$, გვაქვს

$$A_n \leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^{k-1}}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = S_k.$$

შ. ი.

$$A_n \leq S_k \quad (n < 2^k). \quad (4.1)$$

თუ $n > 2^k$, მაშინ გვაქვს

$$A_n \geq a_1 + a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k}) \geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} S_k.$$

შ. ი.

$$A_n \geq \frac{1}{2} S_k \quad (n > 2^k). \quad (4.2)$$

(4.1) და (4.2) უტოლობებიდან გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.3 (შედარების პრინციპი ნიშანი). ვთქვათ (a_n) და (b_n) დადებითი მწკრივებია. თუ $a_n \leq b_n$ ($n=1, 2, \dots$), მაშინ (b_n) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებადობა, ხოლო (a_n) მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს (b_n) მწკრივის განშლადობა.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

პირობის ძალით

$$A_n \leq B_n \quad (4.3)$$

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$, მაშინ (4.3) უტოლობიდან გვაქვს

$$A_n \leq B_n \leq B.$$

ე. ი. $\{A_n\}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოაზღვრულია, ამიტომ თეორემა 4.1-ის ძალით (a_n) მწკრივი კრებალია.

თუ (a_n) მწკრივი განშლილია, ე. ი. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$, მაშინ (4.3)-ის

ძალით აგრეთვე $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = +\infty$.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ე ნ ა 1. თეორემა 4.3 მართებულია, თუ $a_n \leq b_n$ პირობა შესრულებულია არა ყოველი n -თვის, არამედ დაწყებული n -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვახვეთ, რომ მწკრივი

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

კრებალია, მართლაც, შევადაროთ ამ მწკრივის წევრები ლეიბნიცის

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

მწკრივის შესაბამის წევრებს. გვაქვს

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

მაგარა ლეიბნიცის მწკრივი კრებალია, მაშასადამე, თეორემა 4.3-ის ძალით მოცემული მწკრივი კრებალია.

ამრიგად, თეორემა 1. 1-ის შედეგი 1-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (4.4)$$

მწკრივი კრებალია.

შ ე ნ ი შ ე ნ ა 2. ჩვენ დავადგინოთ, რომ (4.4) მწკრივი კრებალია, მაგრამ არა გვაქვს გამოთვლილი მისი ჯამი. მწკრივის ჯამის პოვნა საზოგადოდ უფრო რთული ამოცანაა, ვიდრე მწკრივის კრებალობის დადგენა. უფრო მეტიც, ზოგიერთი კრებალი მწკრივის ჯამის პოვნა პრაქ-

ტიკულად არ ხერხდება. (4.4) მწკრივის ჯამის გამოთვლის საკითხი განხილულია მეშვიდე თავის § 5-ში, ხოლო მერვე თავის § 6-ში ნახვეუ-

ბია, რომ ამ მწკრივის ჯამია $\frac{\pi^2}{6}$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sin \frac{1}{1^2} + \sin \frac{1}{2^2} + \dots + \sin \frac{1}{n^2} + \dots$$

ვიცით, რომ

$$\sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2},$$

აქედან გამომდინარე მოცემული მწკრივი კრებალია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვახვეთ, რომ

$$\lg \frac{1}{1} + \lg \frac{1}{2} + \dots + \lg \frac{1}{n} + \dots$$

მწკრივი განშლილია. მართლაც, ვიცით რომ

$$\lg \frac{1}{n} > \frac{1}{n},$$

ე. ი. მოცემული მწკრივის წევრები მეტია ჰარმონიული მწკრივის შესაბამის წევრებზე. მაშასადამე თეორემა 4.3-ის ძალით ეს მწკრივი განშლილია.

თეორემა 4.3-დან მიიღება:

შ ე დ ე გ ი 1. თუ (a_n) და (b_n) მწკრივებისათვის არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \leq k < \infty)$$

მაშინ (b_n) მწკრივის კრებალობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებალობა.

დამტკიცება. რადგანაც $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, ამიტომ ზღვრის განსა-

ზღვრების ძალით $\varepsilon = 1$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}$ რიცხვი, რომ

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < 1, \text{ როცა } n > n_0.$$

აქედან

$$\frac{a_n}{b_n} < k + 1,$$

საიდანაც

$$a_n < (k+1)b_n, \quad n > n_0$$

ამ უტოლობიდან და (b_n) მწკრივის კრებადობიდან თეორემა 4.3-ის ძალით გამოდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებადობა.

შედეგი 2. თუ არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < \infty),$$

მაშინ (b_n) მწკრივის განშლილობიდან გამოდინარეობს (a_n) მწკრივის განშლილობა.

დამტკიცება. ვთქვათ $k \neq +\infty$. თუ დავუშვებთ, რომ (a_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ პირობიდან $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k} \quad (0 < \frac{1}{k} < +\infty)$,

შედეგი 1-ის ძალით ვეძებოდა, რომ (b_n) მწკრივი კრებადია, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. ე. ი. (a_n) მწკრივი განშლილია. თუ $k = +\infty$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, ამიტომ შედეგი 1-ის ძალით ამ შემთხვევაშიც, თუ (a_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ (b_n) მწკრივიც კრებადი იქნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. (b_n) მწკრივი განშლილია.

შედეგი 3. თუ არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < \infty),$$

მაშინ (a_n) და (b_n) მწკრივები ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლილია.

მაგალითი 4. დავადგინოთ კრებადია თუ არა მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

რადგანაც $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ შედეგი 1-ის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 5. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sin \frac{1}{1} + \sin \frac{1}{2} + \dots + \sin \frac{1}{n} + \dots$$

გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

პარამონიული $\left(\frac{1}{n}\right)$ მწკრივი განშლილია, ამიტომ შედეგი 2-ის ძალით მოცემული მწკრივი განშლილია.

მაგალითი 6. შევისწავლოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)$$

მწკრივის კრებადობის საკითხი.

გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n} - 1}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n} - 1}{\ln n^{1/n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

რადგანაც $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ მწკრივი განშლილია (ვინაიდან მისი წევრები მეტია ვიდრე პარამონიული მწკრივის შესაბამისი წევრები), ამიტომ შედეგი 2-ის ძალით მოცემული მწკრივი განშლილია.

მაგალითი 7. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$$

გვაქვს

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}.$$

აქედან გამოდინარე მოცემული მწკრივი განშლილია.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$$

მწკრივის კრებადობა. აღვილია ჩვენება, რომ (იხ. [36], თავი V, § 16)

$$\ln(1+x) < x \quad (x \neq 0, -1 < x < +\infty).$$

ამ უტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}, \quad (4.5)$$

და

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1}. \quad (4.6)$$

(4.5) და (4.6)-ის ძალით ვწერთ

$$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული მწკრივი კრებადია.

(4.5) და (4.6) უტოლობებიდან მიიღება

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

თუ n -ს მივცემთ მნიშვნელობებს, 1, 2, 3, ..., ვაქტებთ

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1,$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

აქედან გვაქვს, რომ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ჯამს აქვს $\ln n$ -ის რიგი.

შტაცილება, რომ მიმდევრობა $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ კლუბდია და ქვემოდას შემოსაზღვრული. ამიტომ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ არსებობს, მას აღნიშნავენ c ასოთი და ეილერის* მუდმივას უწოდებენ. ეილერის მუდმივას მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$c = 0,5772156649.$$

ამრიგად

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + c + o(n).$$

სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o(n) = 0.$$

მაგალითი 9. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{1}{n}$$

მწკრივი კრებადია.

გამოვიყენოთ ზღუდარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

რადგანაც $\frac{1}{n^2}$ მწკრივი კრებადია, ამიტომ შედეგი 1-ის ძალით

მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ln \cos \frac{1}{n} \right)$ კრებადია. გამომდინარე აქედან კრებადია

მოცემული მწკრივიც.

* ლ. ეილერი (1707-1783) — მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, მექანიკოსი და ასტრონომი. წარმოშობით შვეიცარიელი.

შავალითი 10. დამატებით, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$$

შწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ ფარდობა

$$x_n = \frac{\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n,$$

აქედან

$$\ln x_n = \ln n + n \ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right).$$

ცნობილია, რომ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} + \alpha_m x^m,$$

სადაც $\alpha_m(x) \rightarrow 0$, როდესაც $m \rightarrow \infty$.

ამ ტოლობის გამოყენებით ვწერთ

$$\ln \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2. \quad (4.7)$$

(4.7)-ის ძალით გვაქვს

$$\ln x_n = -\frac{1}{2} \frac{\ln^2 n}{n} + \alpha_2 \cdot \frac{\ln^2 n}{n} \rightarrow 0.$$

მაშასადამე, $x_n \rightarrow 1$, როდესაც $n \rightarrow \infty$. აქედან გამომდინარე შედეგი 2-ის ძალით მოცემული შწკრივი განშლადია.

თეორემა 4.4 (შედარების მკორე ნიშანი). ვთქვათ (a_n) და (b_n) დადებითი შწკრივებია. თუ n -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული (ვთქვათ $n > n_0$ -დან) აღილი აქვს უტოლობას

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad (4.8)$$

მაშინ (b_n) შწკრივის კრებადიდან გამომდინარეობს (a_n) შწკრივის კრებადი, ხოლო (a_n) შწკრივის განშლადიდან გამომდინარეობს (b_n) შწკრივის განშლადობა.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (4.8) პირობა სრულდება ყოველი n -თვის ($n = 1, 2, \dots$).

(4.8) უტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}.$$

აქედან

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

აქედან თეორემა 4.3-ის ძალით გამომდინარეობს თეორემა 4.4-ის მართებულობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. დადებითი მკარვითა კარვადობის კოშვის და დაღამბარის* ნიშნები

თეორემა 5.1 (კოშის ზოგადი ნიშანი). თუ დადებითი (a_n) შწკრივის წევრები, n -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან (ვთქვათ $n > n_0$ -დან) დაწყებული აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \quad (5.1)$$

მაშინ (a_n) შწკრივი კრებადია, ხოლო თუ n -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad (n > n_0), \quad (5.2)$$

მაშინ შწკრივი განშლადია.

* დ. კ. დ. ლ. მ. შ. ზ. ზ. (1717-1783) — ურანგი მათემატიკისა და ფილოსოფიის.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივთხოვოთ, რომ (5.1) უტოლობას ადგილი აქვს ყოველი n -თვის. მაშინ

$$a_n \leq q^n \quad (0 < q < 1).$$

(q^n) მწკრივი კრებადია (თეორემა 2.3), ამიტომ თეორემა 4.3-ის ძალით (a_n) მწკრივიც კრებადია.

(5.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$a_n \geq 1 \quad (n > n_0).$$

აქედან ჩანს, რომ არ არის შესრულებული მწკრივის კრებადობის უცლიერებელი პირობა, ე. ი. (a_n) მწკრივი განშლადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.2 (კოშის ზღვრული ნიშანი). თუ დადებითი (a_n) მწკრივის წევრებისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad (5.3)$$

მაშინ:

- 1) როდესაც $l < 1$, მწკრივი კრებადია,
 - 2) როდესაც $l > 1$, მწკრივი განშლადია,
 - 3) როდესაც $l = 1$, გვაქვს გაურკვეველი შემთხვევა, ე. ი. ამ შემთხვევაში გაურკვეველი რჩება კრებადია თუ განშლადია მწკრივი.
- დამტკიცება. ვთქვათ $l < 1$. ავიღოთ რაიმე q რიცხვი, ისეთი რომ $l < q < 1$. (5.3) ტოლობის ძალით არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ

$$\sqrt[n]{a_n} < q, \text{ როცა } n > n_0.$$

თეორემა 5.1-ის ძალით აქედან გამომდინარეობს, რომ (a_n) მწკრივი კრებადია.

თუ $l > 1$, მაშინ (5.3) ტოლობის ძალით მოიძებნება ისეთი n_0 რიცხვი, რომ

$$\sqrt[n]{a_n} > 1, \text{ როცა } n > n_0.$$

ამიტომ იმავე თეორემა 5.1-ის ძალით (a_n) მწკრივი განშლადია.

როცა $l = 1$, გაურკვეველი რჩება კრებადია თუ განშლადია მწკრივი.

მართლაც, პარმანიული $\left(\frac{1}{n}\right)$ მწკრივისათვის, რომელიც განშლადია, გვაქვს

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

ვინაიდან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln \sqrt[n]{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

ასევე $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ მწკრივისათვის, რომელიც კრებადია, აგრეთვე გვაქვს

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

მაშასადამე, არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივები, რომელთათვისაც $l = 1$, ე. ი. როდესაც $l = 1$, გვაქვს გაურკვეველი შემთხვევა, რომელიც მოითხოვს დამატებით გამოკვლევას.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ (a_n) მწკრივი, სადაც

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია,} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{თუ } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

გაშლილი სახით ეს მწკრივი ასე ჩაიწერება

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{3^{2k}} + \dots$$

ცხადია, რომ

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, & \text{თუ } n \text{ კენტია,} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases} \quad (5.4)$$

ე. ი.

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

13. ნ. თოფურია, ზ. ჩოქოლაძე, მ. გამბიაშვილი, ნ. შაჭავაძე

მაშასადამე, კოშის ზოგადი ნიშნის მიხედვით მწკრივი კრებალია. მაგრამ (5.4)-დან ვლტბულობო, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ არ არსებობს. ე. ი.

კოშის ზღვრული ნიშანი ამ მწკრივის კრებალობას ვერ არცვევს. ამრიგად, მაგალითი 1-დან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კოშის ზოგადი ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე კოშის ზღვრული ნიშანი. მაგალითი 2. გამოვიყვლიოთ კრებალობაზე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

გვაქვს

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

კოშის ზღვრული ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებალია. თეორემა 5.3 (დალამბერის ზოგადი ნიშანი). თუ დადებითი (a_n) მწკრივის წევრებისათვის n -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული შესრულებულია პირობა

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad (n > n_0), \quad (5.5)$$

მაშინ (a_n) მწკრივი კრებალია, ხოლო თუ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad (n > n_0), \quad (5.6)$$

მაშინ მწკრივი განშლალია.

დაშტკიცება. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $b_n = q^n$, მაშინ

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q.$$

(5.5) პირობის ძალით გვაქვს

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n > n_0).$$

ამ უტოლობიდან, თეორემა 4.4-ის ძალით (b_n) მწკრივის კრებალობიდან გამომდინარეობს (a_n) მწკრივის კრებალობა.

ახლა ვთქვათ შესრულებულია (5.6) პირობა. მაშინ გვაქვს

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n > n_0).$$

აქედან ჩანს, რომ (a_n) მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამიტომ (a_n) მწკრივი განშლალია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.2-ის ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.4 (დალამბერის ზღვრული ნიშანი). თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

მაშინ

- 1) როდესაც $l < 1$, მწკრივი კრებალია,
- 2) როდესაც $l > 1$, მწკრივი განშლალია,
- 3) როდესაც $l = 1$, გვაქვს გაურკვეველი შემთხვევა.

როგორც კოშის ზღვრული ნიშნის შემთხვევაში, აქაც შეგვიძლია ვთხვიოთ, რომ არსებობს როგორც კრებალი, ისე განშლალი მწკრივები, რომელთათვისაც $l = 1$.

მაგალითი 3. განვიხილოთ (a_n) მწკრივი, სადაც

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{n-1}, & \text{თუ } n \text{ კენტი,} \\ \frac{1}{3} a_{n-1}, & \text{თუ } n \text{ ლუწი,} \end{cases}$$

$(a_0 = 1)$. გაშლილი სახით ეს მწკრივი ასე ჩაიწერება

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2^k \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^{k+1}} + \dots$$

ცხადია, რომ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

დალამბერის ზოგადი ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებალია. რაც შეეხება დალამბერის ზღვრულ ნიშანს, ის ამ მწკრივის კრებალობა

ბას ვერ არკვევს, რადგან $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ არ არსებობს. ე. ი. დალამბერის ზოგადი ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე დალამბერის ზღვრული ნიშანი.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 4. დაგამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}$$

კრებადია. გვაქვს

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n! 2^n}{n^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1.$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივი კრებადია.

მტკიცდება შემდეგი (იხ. [36], მავალითი 4.54)

თ ე ო რ ე შ ა 5.5. თუ (a_n) მწკრივისათვის არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

სასრული ან უსასრულო, მაშინ არსებობს აგრეთვე $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ და

მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

ე. ი. თუ მწკრივის კრებადობა დადგენილია დალამბერის ნიშნით, მაშინ კრებადობის დადგენა შეიძლება კოშის ნიშნითაც.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვთქვათ $0 < q < 1$. განვიხილოთ (a_n) მწკრივი, სადაც

$$a_n = \begin{cases} q^{n/3}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ \frac{n+3}{q^2}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

ეს მწკრივი გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება

$$q^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{3}{3}} + q^{\frac{4}{3}} + q^{\frac{5}{3}} + \dots + q^{\frac{n-1}{3}} + q^{\frac{n}{3}} + q^{\frac{n+1}{3}} + q^{\frac{n+2}{3}} + \dots$$

ცხადია, რომ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია,} \\ q^{\frac{1}{3}}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ შეიძლება იყოს როგორც ერთზე მეტი, ისე ერთზე ნაკლები. ამრიგად, დალამბერის ნიშანი ამ მწკრივის კრებადობას ვერ არკვევს.

კოშის ნიშნის გამოყენება გვაძლევს

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{q}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ \frac{n+3}{q^{\frac{2}{n}}}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{q} < 1.$$

მაშასადამე, კოშის ზღვრული ნიშნის მიხედვით მოცემული მწკრივი კრებადია.

თეორემა 5.5 და მავალითი 5-დან გამომდინარეობს, რომ მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე დალამბერის ნიშანი.

§ 6. ლაშაბით მწკრივთა კრებადობის კოშის ინამბარაღური ნიშანი

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ დადებითი მწკრივის კრებადობის კიდე ერთ ნიშანს, რომელიც ზოგიერთ შემთხვევაში წარმატებით წყვეტს საკითხს მწკრივის კრებადობის შესახებ, მაშინ როდესაც კოშისა და დალამბერის ნიშნებით მათი კრებადობის დადგენა ვერ ხერხდება. კრებადობის ეს ნიშანი დამყარებულია $f(x)$ ფუნქციის არსაკუთრივე ინტეგრალის კრებადობის დადგენაზე, სადაც $f(x)$ ფუნქცია ისეა შერჩეული, რომ მოცემული მწკრივის თითოეული წევრი წარმოადგენს ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს არგუმენტის მთელი მნიშვნელობებისათვის.

თეორემა 6.1. ვთქვათ $f(x)$ დადებითი, უწყვეტი და არაზრდა-
დი ფუნქციაა $[a, +\infty]$ შუალედში, სადაც a რაიმე ნატურალური რი-
ცხეა, მაშინ

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a+n) + \dots \quad (6.1)$$

მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსა-
კუთრივი ინტეგრალი $\int_a^\infty f(x) dx$ იყოს კრებადი.

დაშტკიცება. რადგან $f(x)$ ფუნქცია არაზრდადი, ამიტომ

$$f(a+k) \leq f(x) \leq f(a+k-1), \text{ როცა } a+k-1 \leq x \leq a+k, k \in \mathbb{N}.$$

თუ მოვახდენთ ამ უტოლობების წევრ-წევრად ინტეგრებას
($a+k-1$ -დან ($a+k$)-მდე, გვექნება

$$f(a+k) \leq \int_{a+k-1}^{a+k} f(x) dx \leq f(a+k-1).$$

მივანიჭოთ k -ს მნიშვნელობები $1, 2, \dots, n$, მივიღებთ

$$f(a+1) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq f(a),$$

$$f(a+2) \leq \int_{a+1}^{a+2} f(x) dx \leq f(a+1).$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(a+n) \leq \int_{a+n-1}^{a+n} f(x) dx \leq f(a+n-1).$$

ამ უტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით, გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n f(a+k) \leq \int_a^{a+n} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k). \quad (6.2)$$

თუ (6.1) მწკრივის n -ურ კერძო ჯამს აღვნიშნავთ S_n -ით, მაშინ
(6.2)-დან, გვექნება

$$S_n - f(a) \leq \int_a^{a+n} f(x) dx \leq S_n - f(a+n). \quad (6.3)$$

პირობით $f(x)$ ფუნქცია დადებითი, ამიტომ $\int_a^{a+n} f(x) dx$ იზრდება

n -თან ერთად. გამომდინარე აქედან თუ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ კრე-

ბადია, მაშინ კრებადია (6.1) მწკრივიც, და პირიქით, თუ (6.1) მწკრივი

კრებადია, მაშინ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ინტეგრალიც კრებადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

შეგალითი 1. გამოვიყვილოთ კრებადობაზე მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots \quad (6.4)$$

თუ $\alpha < 0$, მაშინ მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულო-
საკენ, ამიტომ ის განშლადია. ვთქვათ $\alpha > 0$. იღვილია შემოწმება, რომ
კოშისა და დალამბერის ნიშნებით ამ მწკრივის კრებადობის დადგენა
ვერ ხერხდება. კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით (6.4)
მწკრივის კრებადობის დადგენა იდვილია. $[1, +\infty]$ შუალედში განვი-

ხილოთ ფუნქცია $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა

6.1-ის ყველა პირობას. მოცემული (6.4) მწკრივი შეგვიძლია განვიხილოთ

როგორც (6.1) სახის მწკრივი, რადგან (6.4) მწკრივის წევრები წარმოად-

გენ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ფუნქციის მნიშვნელობებს როცა $x=1, 2, 3, \dots$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - 1) \right], \text{ როცა } \alpha \neq 1,$$

$$\ln A, \text{ როცა } \alpha = 1.$$

აქედან გვაქვს:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \text{ თუ } \alpha > 1, \text{ ე. ი. ინტეგრალი კრებალია და,}$$

შეშასადამე, როცა $\alpha > 1$, თორემ 6.1-ის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებალია.

2) თუ $\alpha \leq 1$, მაშინ

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty,$$

ამიტომ იმავე თეორემის თანახმად მოცემული მწკრივი განშლადია. მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}.$$

დიფერენციალური კრიტერიუმის მიხედვით ეს მწკრივი კრებალია და რა მნიშვნელობებისათვის განშლადი. $[2, +\infty[$ შუალედში განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}.$$

აღვილია ჩვენება, რომ არსაყუთრივი ინტეგრალი

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x}$$

კრებალია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \leq 1$. ამრიგად, თორემ 6.1-ის ძალით მოცემული მწკრივი კრებალია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \leq 1$.

§ 7. ნიშანმცვლელი მწკრივების ლიწისი

გ ა ნ ს ა ზ ე რ ე ბ ა 7.1. ნიშანმცვლელი მწკრივი ეწოდება ისეთ მწკრივს, რომლის წევრებს რიგრიგობით დადებითი და უარყოფითი ნიშნები აქვთ.

ნიშანმცვლელი მწკრივი შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (7.1)$$

სადაც $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ დადებითი რიცხვებია. ასეთი მწკრივებისათვის მართებულია შემდეგი

თეორემა 7.1 (ლეიბნიცი). თუ ნიშანმცვლელი (7.1) მწკრივის წევრები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$1) a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

მაშინ (7.1) მწკრივი კრებალია და მისი S ჯამისათვის ადგილი აქვს შემდეგებს

$$0 < S \leq a_1. \quad (7.2)$$

გარდა ამისა, მწკრივის R_n ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია უკუგდებული პირველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე:

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}. \quad (7.3)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჯერ განვიხილოთ ლუწი ინდექსიანი კერძო ჯამები. გვაქვს

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

პირობის ძალით ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდეები არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ $\{S_{2n}\}$ მიმდევრობა არაკლებადია. მეორეს მხრივ

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$S_{2n} \leq a_1.$$

ამრიგად, $\{S_{2n}\}$ მიმდევრობა მონოტონურია და ზემოდან შემოკლებული, ამიტომ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S.$$

ვინაიდან

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1},$$

ამიტომ თეორემის პირობის ძალით ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$), გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S.$$

ამრიგად, დამტკიცებულია, რომ (7.1) მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n\}$ მიმდევრობა კრებადია, რაც მოცემული მწკრივის კრებადობას ნიშნავს.

(7.2) შედგება გამომდინარეობს (7.4) უტოლობიდან, (7.3) უტოლობა კი (7.2)-ის შედეგია.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (7.5)$$

გამავლილებს ლეიბნიცის თეორემის ორივე პირობას, ამიტომ ის კრებადია და მისი ჯამი ნაცლებია 1-ზე. VII თავის § 5-ში ნაჩვენებია, რომ (7.5) მწკრივის ჯამი ტოლია $\ln 2$ -ის.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 2. მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \quad \text{და} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^a n}$$

კრებადია ყოველი $a > 0$ რიცხვისათვის.

შ ე ნ ი მ ე ნ ა. ლეიბნიცის თეორემის ყველა პირობა არსებითად (საზოგადოდ არცერთი პირობის უგულებელყოფა არ შეიძლება). მართლაც, განვიხილოთ ნიშანშონაცვლეობითი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \dots \quad (7.6)$$

ამ მწკრივისათვის შესრულებულია ლეიბნიცის თეორემის 2) პირობა (ზოგადი წევრის ნულისაგან მისწრაფების პირობა), მაგრამ დამატებულია პირობა a_n -ის კლებადობის შესახებ, ვაჩვენოთ რომ ეს მწკრივი განშლადია თეორემა 3.1-ის ძალით ვწერთ:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \dots &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right) = +\infty. \end{aligned}$$

ე. ი. (7.6) მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ მწკრივი

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad (7.7)$$

ამ მწკრივისათვის შესრულებულია ლეიბნიცის თეორემის 1) და 2) პირობები. ვაჩვენოთ, რომ ის განშლადია. განვიხილოთ (7.7) მწკრივის კერძო ჯამთა შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$\frac{S_{n(n+1)}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } n \text{ ჯერია;} \\ 0, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n(n+1)}}{2}$ არ არსებობს.

მაშასადამე მოცემული მწკრივი განშლადია. (7.7) მწკრივისათვის დარღვეულია პირობა ნიშანშონაცვლეობის შესახებ.

რაც შეეხება 2) პირობას მისი მოხსნა ცხადია არ შეიძლება, რადგან ის არის მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.

(7.3) უტოლობა შეიძლება გამოვიყენოთ მწკრივის ჯამის მიახლოებითი მნიშვნელობის ცდომილების შეფასებაში.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$S = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \quad (7.8)$$

თუ ავიღებთ პირველი ხუთი წევრის ჯამს

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4},$$

მაშინ

$$|S - S_5| < \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} < 0,00078.$$

მაშასადამე, (7.8) მწკრივის პირველი ხუთი წევრის ჯამი საკმაოდ კარგი სიზუსტით გვაძლევს ამ მწკრივის ჯამის მიახლოებას.

§ 8. პასოლუზურად და პირიქით არამაღი მწკრივები

განვიხილოთ მწკრივი

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (8.1)$$

სადაც $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

შედეგით (8.1) მწკრივის წევრების აბსოლუტური სიდიდეები-
საგან მწკრივი

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (8.2)$$

ჯანსაზღვრება 8.1. (8.1) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად
კრებალი, თუ კრებალია (8.2) მწკრივი.

თეორემა 8.1. თუ (8.2) მწკრივი კრებალია, მაშინ კრებალი იქ-
ნება (8.1) მწკრივიც.

დამტკიცება. რადგან კრებალია (8.2) მწკრივი, ამიტომ თეო-
რემა 2.2-ის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი
 n_ε რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური P რიცხვისათვის იდგილი
ექნება უტოლობას

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+P}| < \varepsilon, \text{ როცა } n > n_\varepsilon.$$

მაგრამ

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+P}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+P}|.$$

ამიტომ

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+P}| < \varepsilon.$$

ყოველი $P \in \mathbb{N}$ -თვის და $n > n_\varepsilon$ -თვის. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (8.1)
მწკრივი კრებალია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ქვე შევნიშნოთ, რომ (8.1) მწკრივი შეიძლება იყოს კრებალი, მაგ-
რამ (8.2) არ იყოს კრებალი. მართლაც, როგორც ზემოთ ვნახეთ ნიშან-
შონაცვლეობითი (7.5) მწკრივი კრებალია, მისი წევრების აბსოლუტუ-
რი სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი არის პარმონიული მწკრივი,
რომელიც როგორც ვიცით განშლადია.

ჯანსაზღვრება 8.2. თუ (8.1) მწკრივი კრებალია, ხოლო (8.2)
მწკრივი განშლადია, მაშინ (8.1) მწკრივის პირობით ანუ არააბსოლუ-
ტურად კრებალი მწკრივი ეწოდება.

მაშასადამე, (7.5) მწკრივი პირობით კრებალი მწკრივია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n (\ln n)^2}. \quad (8.3)$$

გამოვივლით, α რიცხვის რა მნიშვნელობისთვისაა ეს მწკრივი აბსო-
ლუტურად კრებალი და რა მნიშვნელობისთვის პირობით კრებალი.

(8.3) მწკრივი არის ნიშანშონაცვლეობითი მწკრივი. აღვიღია ჩვე-
ნება, რომ ყოველი ფიქსირებული α რიცხვისათვის მოცემული მწკრი-

ვის წევრები აკმაყოფილებს ლეიბნიცის თეორემის პირობებს, ამიტომ
ის ყოველი ფიქსირებული α -სათვის კრებალია.

5-ის მაგალითი 2-ის ძალით (8.3) მწკრივი აბსოლუტურად კრება-
ლია როცა $\alpha > 1$ და პირობით კრებალია, როცა $\alpha \leq 1$.

შენიშვნა. 1) თეორემა 1.1-ის შედეგი 1-დან გამომდინარეობს,
რომ პირობით კრებალი მწკრივი შეიცავს როგორც დადებით, ასევე
უარყოფით წევრთა უსასრულო რაოდენობას.

2) დადებითი მწკრივის კრებალობის ზემოთ მოყვანილი ყველა ნი-
შანი მართებულია მწკრივის აბსოლუტურად კრებალობის დასადგენად.
მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

აბსოლუტურად კრებალია.

კოშის ზღვრული ნიშნის გამოყენებით გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

ე. ი. მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(2n-1) \frac{\pi}{4}}{n!}$$

აბსოლუტურად კრებალია.

დალამბერის ზღვრული ნიშნის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 n! \cos(2n+1) \frac{\pi}{4}}{(n+1)! n^2 \cos(2n-1) \frac{\pi}{4}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (n+1)}{\frac{\sqrt{2}}{2} n^2} = 0 < 1, \end{aligned}$$

ე. ი. მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

მაგალითი 4. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი უფელი x -სათვის. მართლაც, როგორც არ უნდა იყოს n და x , ვქვს

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

მაგრამ მწკრივი $\left(\frac{1}{n^2} \right)$ კრებადი. აქედან გამომდინარე მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი.

§ 9. კომპლექსურწმინდობის მწკრივი

განვიხილოთ კომპლექსურ წევრებიანი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (9.1)$$

სადაც $z_n = x_n + i y_n$, x_n და y_n ნამდვილი რიცხვებია.

(9.1) მწკრივის n -ური კერძო ჯამი აღვნიშნოთ W_n -ით ე. ი.

$$W_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k = A_n + i B_n,$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n y_k.$$

კომპლექსურწევრებიანი მწკრივის კრებადობა განისაზღვრება ისე, როგორც ნამდვილწევრებიანი მწკრივის კრებადობა.

თეორემა 9.1. იმისათვის, რომ (z_n) მწკრივი კრებადი იყოს $z = x + i y$ რიცხვისაკენ, აუცილებელია და საკმარისი, (x_n) იყოს კრებადი x რიცხვისაკენ და (y_n) იყოს კრებადი y რიცხვისაკენ.

206

დამტკიცება. თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან

$$|A_n - x| \leq |w_n - z|, |B_n - y| \leq |W_n - z|, |W_n - z| \leq |A_n - x| + |B_n - y|.$$

თეორემა 9.2. იმისათვის, რომ (z_n) მწკრივი იყოს აბსოლუტურად კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი აბსოლუტურად კრებადი იყოს მწკრივები (x_n) და (y_n) .

დამტკიცება. თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან

$$|x_n| \leq |z_n|, |y_n| \leq |z_n|, |z_n| \leq |x_n| + |y_n|.$$

ნამდვილწევრებიანი მწკრივებისათვის ცნობილი თეორემები, ორი კრებადი მწკრივის ჯამის, სხვაობის, რიცხვის მწკრივზე ნამრავლის, მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობის შესახებ მართებულია კომპლექსურწევრებიანი მწკრივებისთვისაც.

§ 10. მწკრივის წმინდა გადაწვევა

სასრულ წევრებიანი ჯამის ერთ ერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა: შესაერებთა გადაწვევებით ჯამი არ იცვლება. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არის თუ არა სასრულწევრებიანი ჯამის ეს თვისება მართებული კრებადი მწკრივებისათვის, ე. ი. თუ კრებად მწკრივში მოვახდენთ წევრების ნებისმიერად გადანაცვლებას, მაშინ ახალი მწკრივის ჯამი იქნება თუ არა ტოლი მოცემული მწკრივის ჯამის (და საზოგადოდ იქნება თუ არა ახალი მწკრივი კრებადი?). როგორც ქვემოთ ვნახავთ ამ კითხვაზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია. პირობით კრებად მწკრივში შეიძლება წევრების ისე გადანაცვლება, რომ მიღებული მწკრივი განსვლიდი იყოს ან იყოს კრებადი ნებისმიერი წინასწარ დასაბუთებული რიცხვისაკენ, რაც შეეხება აბსოლუტურად კრებად მწკრივებს, მისი წევრების ნებისმიერი გადანაცვლებით მწკრივის კრებადობის „ხასიათი“ და ჯამი არ იცვლება.

ლემმა 1. ლაღებით კრებად მწკრივში წევრთა ნებისმიერი გადანაცვლებით მწკრივის ჯამი არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ (a_n) ლაღებითი მწკრივია და მისი ჯამია S . დავუშვათ, რომ (b_n) არის (a_n) მწკრივის წევრთა რაიმე გადანაცვლებით მიღებული მწკრივი. ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივიც კრებადი და მისი ჯამია S . ვთქვათ

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

207

B_n -ის ეს წევრები რაღაცა ნომრებით $k_1, k_2, \dots, k_n$ არიან (a_n) მწკრივში. ლევშევი $N = \max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ და

$$A_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

ცხადია, რომ

$$B_n \leq A_N \leq S.$$

აქედან n -ის ნებისმიერობის ძალით გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = S'$, ამასთან

$$S' \leq S. \quad (10.1)$$

ახლა, თუ (b_n) მწკრივს ჩვეულებით გამოსავალ მწკრივად, მაშინ (a_n) მწკრივი მიიღება (b_n) მწკრივისაგან წევრთა რაღაც გადანაცვლებით, ამიტომ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$S \leq S'. \quad (10.2)$$

(10.1) და (10.2)-დან გამომდინარეობს, რომ $S = S'$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10.1 (დირიხლე)*. აბსოლუტურად კრებად მწკრივში წევრთა ნებისმიერი გადანაცვლებით მიღებული მწკრივი კვლავ აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი უდრის მოცემული მწკრივის ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ (a_n) ნამდვილწევრებიანი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივია. (b_n) იყოს (a_n) მწკრივის წევრთა რაიმე გადანაცვლებით მიღებული მწკრივი. განვიხილოთ მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n).$$

ეს მწკრივები კრებადია. ამიტომ ლემა 1-ის ძალით

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n| + b_n)$$

მწკრივებიც კრებადია და აქვე შესაბამისად იგივე ჯამები, რაც $(|a_n|)$

* პეტერ გუსტავ ლევენ დირიხლე (1805 — 1859) — გერმანელი მათემატიკოსი.

და $(|a_n| + a_n)$ მწკრივებს. აქედან გამომდინარე (b_n) მწკრივი კრებადია და ამასთან

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n| + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა (a_n) მწკრივის წევრები კომპლექსური რიცხვებია. ვთქვათ $a_n = x_n + iy_n$, სადაც x_n და y_n ნამდვილი რიცხვებია. რადგან (a_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, ამიტომ თეორემა 9.2-ის ძალით, აბსოლუტურად კრებადია (x_n) და (y_n) მწკრივები, ამასთან

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

ლევშევი, რომ

$$b_n = x'_n + iy'_n,$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y'_n.$$

მაგრამ ზემოთ დამტკიცებულის ძალით (x'_n) და (y'_n) მწკრივების ჯამი შესაბამისად ტოლია (x_n) და (y_n) მწკრივების ჯამისა. გამომდინარე აქედან

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ პირობით კრებადი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

14. ს. თოფური, ვ. ხოჭოლაძე, ზ. გაბიაშვილი, ნ. შაჰარაშვილი

ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ S -ით. ლეიბნიცის თეორემის ძალით $0 < S < 1$. ამ მწკრივში მოვახდინოთ წევრების გადანაცვლება ისე, რომ პირველი დაღებული წევრის შემდეგი მომდევნო ორი წევრი იყოს უარყოფითი მოცემულ მწკრივში მათი მიმდევრობის რიგის შეუცვლელად. აღნიშნული გადანაცვლებით მივიღებთ მწკრივს

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots \quad (10.3)$$

ვაჩვენოთ, რომ (10.3) მწკრივი კრებადი და მისი ჯამი უდრის $\frac{1}{2} S$.

მართლაც, განვიხილოთ კერძო ჯამი

$$\begin{aligned} S_{2n}^* &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} S_{2n} \end{aligned}$$

სიღაც S_{2n} არის მოცემული მწკრივის კერძო ჯამი, ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}^* = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{1}{2} S.$$

აქედან და (10.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S'_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} S, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S'_{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S'_{2n+1} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

შეშალამდე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \frac{1}{2} S.$$

ამრიგად, განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ პირობით კრებად მწკრივში წევრთა გადანაცვლებამ შეიძლება შეცვალოს მისი ჯამი.

მოვიყენოთ ნამდვივწევრიანი პირობით კრებადი მწკრივის ზოგიერთი თვისება. ვთქვათ (a_n) პირობით კრებადი მწკრივია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+, \dots$ იყოს (a_n) მწკრივის არაუარყოფითი წევრები, ხოლო $-a_2^-, -a_3^-, \dots, -a_n^-, \dots$ ($a_n^+ > 0$) იყოს (a_n) მწკრივის უარყოფითი წევრები აღებული იმ რიგით, რა რიგითაც ისინი არიან (a_n) მწკრივში.

ლემმა 2. თუ (a_n) პირობით კრებადი მწკრივია, მაშინ (a_n^+) და (a_n^-) მწკრივები განშლადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ A_n^+ და A_n^- სომბოლოებით შესაბამისად (a_n^+) და (a_n^-) მწკრივების იმ წევრთა ჯამი, რომლებიც შედიან (a_n) მწკრივის A_n კერძო ჯამის შემადგენლობაში. $\tilde{A}_n$ იყოს $(|a_n|)$ მწკრივის n -ური კერძო ჯამი. ცხადია ადვილი აქვს ტოლობებს

$$A_n = A_n^+ - A_n^-,$$

$$\tilde{A}_n = A_n^+ + A_n^-.$$

პირობით

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^+ - A_n^-) = S,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^+ + A_n^-) = +\infty.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+ = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^- = +\infty.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10.2. (რიმანის). თუ (a_n) მწკრივი პირობით კრებადი, მაშინ ამ მწკრივის წევრთა სათანადო გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ როგორც განშლადი, ისე ნებისმიერი წინასწარ მოცემულ S რიცხვისაკენ კრებადი მწკრივი.

დამტკიცება. განვიხილოთ პირობით კრებადი (a_n) მწკრივი. თანახმად ლემა 2-ისა

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad (10.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty. \quad (10.5)$$

ავილოთ ნებისმიერი რიცხვი S , გარკვეულობასთან უფულისმით, რომ $S > 0$. ვაჩვენოთ, არსებობა (a_n) მწკრივის წევრთა ისეთი ჯაღანაცვლებისა, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი იყოს S . ამისათვის ავილოთ (10.4) მწკრივის მინიმალური რაოდენობის $a_1^+, a_2^+, \dots, a_{n_1}^+$ წევრები, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{n_1}^+ > S.$$

შემდეგ ამ ჯამს გამოვკლოთ (10.5) მწკრივის მინიმალური რაოდენობის $a_1^-, a_2^-, \dots, a_{n_2}^-$ წევრები, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \dots - a_{n_2}^- < S.$$

ამის შემდეგ, მიღებულ ჯამს მივუმატოთ (10.4) მწკრივის მინიმალური რაოდენობის $a_{n_1+1}^+, a_{n_1+2}^+, \dots, a_{n_3}^+$ წევრები, რომ

$$a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \dots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + a_{n_1+2}^+ + \dots + a_{n_3}^+ > S.$$

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს ჩვენ მივიღებთ მწკრივს, რომელ-
შიც შევა (a_n) მწკრივის ყველა წევრს.

განვიხილოთ მიღებული მწკრივის შემდეგი კერძო ჯამები

$$S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_1+n_2+n_3}, \dots, S_{n_1+n_2+\dots+n_k}, \dots, k=1, 2, \dots$$

მწკრივის აგებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ

$$S_{n_1-1} < S < S_{n_1}, S_{n_1+n_2-1} < S < S_{n_1+n_2}, S_{n_1+n_2+n_3-1} < S < S_{n_1+n_2+n_3}, \dots$$

გამომდინარე აქედან

$$|S - S_{n_k+n_{k+1}}| < |S_{n_k+n_{k+1}} - S_{n_k+n_{k+1}-1}| = a_{n_k+n_{k+1}}^{\pm}, \quad (10.6)$$

სადაც $a_{n_k+n_{k+1}}^{\pm}$ სიმბოლოით აღნიშნულია ადებული მწკრივის n_k+n_{k+1} ინდექსის აბსოლუტური სიდიდე. რადგან (a_n) მწკრივი კრებალია, ამიტომ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. გამომდინარე აქედან $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+n_{k+1}}^{\pm} = 0$. ამ ტოლობის გათვალისწინებით (10.6)-დან გვაქვს

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k+n_{k+1}} = S. \quad (10.7)$$

გადაწვევებული მწკრივის კონსტრუქციიდან გამომდინარე ყოველი $n \in N$ -თვის არსებობს ისეთი $k=k(n)$, რომ ადგილი ექნება ან

$$S_{n_k+n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

უტოლობას, ან

$$S_{n_{k+1}+n_{k+2}} \leq S_n \leq S_{n_k+n_{k+1}}$$

უტოლობას ამ უტოლობებიდან (10.7)-ის ძალით, გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

+∞-საკენ კრებადი მწკრივის მისაღებად (a_n) მწკრივის წევრები შემდეგნაირად დავალაგოთ: ავილოთ (10.4) მწკრივის იმდენი წევრი, რომ მათი ჯამი მეტი იყოს ერთზე და ამ ჯამს გამოვკლოთ (10.5) მწკრივის პირველი წევრი. მიღებულ ჯამს მივუმატოთ (10.4)-ის იმდენი წევრი, რომ ახლად მიღებული კერძო ჯამი ორზე მეტის იყოს და ამ ჯამს გამოვკლოთ (10.5) მწკრივის მეორე წევრი. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ მწკრივს, რომლის ჯამი იქნება +∞.

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (a_n) მწკრივის წევრები ისე შეგვიძლია გადავანაცვლოთ, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი იყოს -∞.

თუორივე დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ მწკრივი პირობით კრებალია, მაშინ არსებობს ამ მწკრივის წევრების ისეთი ჯაღანაცვლება, რომ მიღებული მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობის ზღვარი არ არსებობს.

§ 11. მწკრივის კრებალობის ღირსშესა და აბსოლუტური მწკრივი

ლემმა 1. ვთქვათ მოცემულია რიცხვები $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ თუ $B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), მაშინ

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \quad (11.1)$$

დამტკიცება. რადგან

$$b_k = B_k - B_{k-1}, \quad b_n = B_n - B_{n-1},$$

* ნ. ა. ბ. ლ. (1802-1829) — ნორვეგიელი მათემატიკოსი.

ამიტომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

$$(11.1) \text{ ფორმულას } \sum_{k=1}^n a_k b_k \text{ ზემოთ აღვნიშნავთ ეწოდება.}$$

ლ ე მ ა 2 (აბელის უტოლობა). თუ

$$a_k \geq a_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad (11.2)$$

ან

$$a_k \leq a_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad (11.3)$$

და

$$|B_k| = |b_1 + b_2 + \dots + b_k| \leq B, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (11.4)$$

მაშინ

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq B (|a_1| + 2|a_n|). \quad (11.5)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. (11.2) და (11.3) პირობების ძალით $a_k - a_{k+1}$ სხვაობები ერთიანი ნიშნისაა, ამიტომ (11.1) ფორმულიდან (11.4)-ის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| + |a_n| \cdot |B_n| \leq \\ &\leq B \left[\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + |a_n| \right] = B (|a_1 - a_n| + |a_n|) \leq \\ &\leq B (|a_1| + 2|a_n|). \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 11.1 (დირიხლეს ნიშანი). თუ $\{a_n\}$ მიმდევრობა მონოტონურად მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო $\{b_n\}$ მწკრივის კერძო ჯამთა $\{B_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (11.6)$$

მწკრივი კრებალია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $\{B_n\}$ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის ძალით არსებობს ისეთი $B > 0$ რიცხვი, რომ $|B_n| \leq B$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -თვის. აქედან ნებისმიერი $n=2, 3, \dots$ და არაუარყოფითი მთელი p რიცხვისათვის

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k \right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leq |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leq 2B. \quad (11.7)$$

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ მოცემული რიცხვია. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ პირობის ძალით არსებობს ისეთი n_ε რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_\varepsilon$ -თვის ადვილი ეწევა უტოლობას

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \quad (11.8)$$

თუ $\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k$ ჯამზე (სადაც $n > n_\varepsilon$) გამოვიყენებთ აბელის (11.5)

უტოლობას და გავითვალისწინებთ (11.7) და (11.8) უტოლობებს, მივიღებთ

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2B (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

აქედან, მწკრივის კრებალობის კოშის კრიტერიუმის ძალით (თეორემა 2.2), გამოძღინარეობს (11.6) მწკრივის კრებალობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. ნიშანშრიცვლებითი $\{a_n\}$ მწკრივის კრებალობისათვის საკმარისია, რომ $\{a_n\}$ მიმდევრობა იყოს აზარბადალი და $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

მაგალითი 1. ვთქვათ $a_1 > a_2 > \dots > a_n \dots$ და $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
დამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad (11.9)$$

შწკრივი კრებალია ყოველი $x \in R$ -თვის, ხოლო

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (11.10)$$

შწკრივი კრებალია, როცა $x \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$B_n = \sum_{k=1}^n \sin kx, \quad C_n = \sum_{k=1}^n \cos kx. \quad (11.11)$$

აღვიღოთ ზეგნება (იხ. თავი VIII, § 3), რომ, თუ $x \neq 2\pi k$, მაშინ

$$B_n = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad C_n = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

საიდანაც ($x \neq 2\pi k$)

$$|B_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \quad |C_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

გამომდინარე აქედან დირიხლეს ნიშნის მიხედვით (11.9) და (11.10) შწკრივები კრებალია, როცა $x \neq 2\pi k$.

* ამასათვის საკმარისია (11.11) ტოლობების ორივე მხარე ვეგამრავლოთ

$2 \sin \frac{x}{2}$ -ზე და გამოვიყენოთ ფორმულები

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos \left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

$$2 \cos kx \sin \frac{x}{2} = \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)x.$$

თუ $x = 2\pi k$, $k \in Z$, მაშინ $\cos nx = 1$, ხოლო $\sin nx = 0$ ყოველი $n \in N$ -თვის. ამიტომ როცა $x = 2\pi k$ შწკრივი (11.9) კრებალია, ხოლო

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

შწკრივი შეიძლება იყოს კრებალი და შეიძლება — განშლადი.

კერძოდ ყოველ $\alpha > 0$ რიცხვისათვის და ყოველი $x \in R$ -თვის კრებალია

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln^\alpha n}$$

შწკრივები, ხოლო

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln^\alpha n}$$

შწკრივები კრებალია, როცა $x \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

თეორემა 11.2 (აბელის ნიშანი). თუ $\{a_n\}$ მონოტონური შემსაზღვ-

რული მიმდევრობაა, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ შწკრივი კრებალია, მაშინ (11.6)

შწკრივიც აგრეთვე კრებალია.

დამტკიცება. $\{a_n\}$ მიმდევრობის შემსაზღვრულობის ძალით არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ $|a_n| \leq M$, $n = 1, 2, \dots$

ახლა ვთქვათ $\varepsilon > 0$ მოცემული რიცხვია. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ შწკრივის კრებალი-

ბის ძალით არსებობს ისეთი n_ε რიცხვი, რომ ყოველი ნატურალური $n > n_\varepsilon$ -თვის და არაუარყოფითი მთელი p რიცხვებისათვის ადგლი ვქნება უტოლობა

$$\left| \sum_{k=0}^p b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

გამომდინარე აქედან ლემა 2-ის ძალით

$$\left| \sum_{k=0}^p a_{n+k} b_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} (|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon \quad (11.12)$$

ყოველი ნატურალური $n > n_\varepsilon$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი p -თვის.

მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის (თეორემა 2.2) ძალით (11.12)-დან გამომდინარეობს (11.6) მწკრივის კრებადობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cos \frac{\pi}{n}}{\ln \ln n}$$

მწკრივი კრებადია ყოველი $x \in R$ -თვის.

ღირსილეს ნიშნის ძალით $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$ მწკრივი კრებადია ყოველი

$x \in R$ -თვის. $\left\{ \cos \frac{\pi}{n} \right\}_{n \geq 2}$ მიმდევრობა მონოტონურია, ამიტომ აბელი ნიშნის მიხედვით მოცემული მწკრივი კრებადია ყოველი $x \in R$ -თვის.

§ 12. მწკრივების პარავლუზა

ვთქვათ მოცემულია ორი მწკრივი

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

გ ა ნ ს ა ზ ლ გ რ ე ბ ა 12.1. (a_n) და (b_n) მწკრივების ნამრავლი (კოშის მიხედვით) ეწოდება (c_n) მწკრივს

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

სიდაც

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 12.1 (მერტენსი). თუ (a_n) და (b_n) მწკრივები კრებადია შესაბამისად A და B რიცხვებისაკენ ამასთან ერთ-ერთი მოცემული მწკრივებიდან აბსოლუტურად კრებადია (შავალითად (a_n)), მაშინ (c_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი უდრის AB .

თეორემა 12.2. თუ (a_n) და (b_n) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (c_n) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. 1) თუ (a_n) და (b_n) მწკრივები პირობით კრებადია, მაშინ (c_n) მწკრივი შეიძლება განშლადი აღმოჩნდეს.

მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი

შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. დავამტკიცოთ, რომ პირობით კრებადია

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{(-1)^n}{\ln n} + \dots$$

მწკრივის თავისთავზე ნამრავლი განშლადია. ამ შემთხვევაში

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln(n-1)} \cdot \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\ln n} \right), \quad n=2, 3, \dots$$

აქედან

$$|c_n| > \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{\ln n} + \dots + \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{\ln n} = \frac{n-1}{\ln^2 n},$$

საიდანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = +\infty$$

მაშასადამე, (c_n) მწკრივის ზოგადი წევრი ნულისაკენ არ მიისწრაფვის და ამიტომ (c_n) მწკრივი განშლადია.

2) პირობით კრებადია (a_n) და (b_n) მწკრივების ნამრავლი შეიძლება კრებადია აღმოჩნდეს. ამ შენიშვნის დამატებულად განვიხილოთ შემდეგი

შ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვაჩვენოთ, რომ პირობით კრებადია

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

მწკრივს თავისთავზე ნამრავლი ერებადია. მოცემული მწკრივისათვის გვაქვს

$$c_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{i(n-i+1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] =$$

$$= (-1)^n \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (12.3)$$

აქ გამოყენებულია ტოლობა

$$\frac{1}{i(n-i+1)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1} \right) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

§ 4-ის მაგალით 8-ში ვაჩვენეთ, რომ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ჯამს აქვს $\ln n$ -ის რიგი. გარდა ამისა, ადვილია ჩვენება, რომ მიმდევრობა $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n \geq 2}$ მონოტონურად კლებდა და ნულისაკენ მიისწრაფვის. მაშასადამე, (12.3) ტოლობიდან გამომდინარე $\{c_n\}$ მიმდევრობა მონოტონურად კლებდა და ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ამრიგად, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ აკმაყოფილებს ლეიბნიცის თეორემის პირობებს, გამომდინარე აქედან ის ერებადია.

მაგალითი 2-დან ეღებულობთ, რომ თეორემა 12.1-ში პირობა, მოცემული მწკრივიდან ერთ-ერთი აბსოლუტურად ერებადი იყოს, აუცილებელი არ არის. მართებულია შემდეგი

თეორემა 12.3. თუ (a_n) , (b_n) და (c_n) მწკრივები ერებადი და მათი ჯამია შესაბამისად A , B და C , მაშინ $C=A \cdot B$.

მიკვამ თავი

ფუნქციონა მწკრივები

§ 1. ფუნქციონა მიმდევრობისა და მწკრივის განმარტება

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციონა მიმდევრობა

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1.1)$$

და ფუნქციონა მწკრივი

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (1.2)$$

განსახილერება 1.1. (1.1) მიმდევრობის ეწოდება ერებადი $x_0 \in E$ წერტილში, თუ ერებადია რიცხვთა $\{f_n(x_0)\}$ მიმდევრობა. თუ რიცხვთა ეს მიმდევრობა განშლადია, მაშინ (1.1) მიმდევრობის ეწოდება განშლადი x_0 წერტილში.

(1.1) მიმდევრობის ეწოდება ერებადი $D \subseteq E$ სიმრავლეზე, თუ ის ერებადია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში. თუ $G \subseteq E$ სიმრავლის ყოველ წერტილში (1.1) მიმდევრობა განშლადია, მაშინ (1.1) მიმდევრობის ეწოდება განშლადი G -ზე.

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in D$, მაშინ ვიტყვით, რომ (1.1) მიმდევრობა ერებადია $f(x)$ ფუნქციონსაკენ D -ზე.

ანალოგიური განსაზღვრება შეიძლება მოვიყვანოთ (1.2) მწკრივისთვისაც.

განსახილერება 1.2. (1.2) მწკრივის ეწოდება ერებადი $x_0 \in E$ წერტილში, თუ ერებადია რიცხვთა მწკრივი

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

თუ რიცხვთა ეს მწკრივი განშლადია, მაშინ (1.2) მწკრივი ეწოდება განშლადი x_0 წერტილში.

(1.2) მწკრივის ეწოდება ერებადი $D \subseteq E$ სიმრავლეზე, თუ ის ერებადია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში. თუ $G \subseteq E$ სიმრავლის ყოველ წერტილში (1.2) მწკრივი განშლადია, მაშინ (1.2) მწკრივის ეწოდება განშლადი G -ზე.

E სიმრავლის x წერტილს, რომელზედაც მიმდევრობა (მწკრივი) ერებადია ეწოდება ამ მიმდევრობის (მწკრივის) ერებადობის წერტილი, ხოლო წერტილს, რომელზედაც მიმდევრობა (მწკრივი) განშლადია, ამ მიმდევრობის (მწკრივის) — განშლადობის წერტილი.

ამრიგად, E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციონა ყოველი მიმდევრობის (მწკრივის) მიმართ E სიმრავლე იყოფა ორ სიმრავლედ: ერებადობის წერტილთა სიმრავლედ და განშლადობის წერტილთა სიმრავლედ. პირველ მათგანს ეწოდება ფუნქციონა მიმდევრობის (მწკრივის) ერებადობის არე, მეორეს კი — განშლადობის არე.

მაგილობრად,

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

მწკრივი განსაზღვრულია ყველა ნამდვილ რიცხვზე. ადვილია ჩვენება, რომ ამ მწკრივის კრებადობის არეს წარმოადგენს $[-1, 1]$ ნახევარსეგმენტი (იხ. თავი VII, § 2, მაგალითი 1).

გ ა ნ ს ა ზ ე რ ე ბ ა 1.3. (1.2) მწკრივის ეწოდება აბსოლუტურად

კრებადი D სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე კრებადია $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

მწკრივი. გამოსახულებას

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

ეწოდება (1.2) მწკრივის n -ური კერძო ჯამი, ანუ უბრალოდ კერძო ჯამი.

თუ D სიმრავლეზე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x),$$

მაშინ $S(x)$ ფუნქციას ეწოდება (1.2) მწკრივის ჯამი D -ზე. ამ გარემოებას ასე ჩავწერთ

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

და ვიტყვი, რომ $S(x)$ ფუნქცია D არეზე იშლება $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ მწკრივად.

ამრიგად, (1.2) მწკრივს შეგვიძლია შევესაბამოთ მისი კერძო ჯამთა $\{S_n(x)\}$ მიმდევრობა და, პირიქით, ფუნქციასა ყოველ მიმდევრობას

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

შეგვიძლია ცალსახად შევესაბამოთ ფუნქციასა მწკრივი

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

რომლის კერძო ჯამთა მიმდევრობაა $\{f_n(x)\}$. მართლაც, თუ

$$u_1(x) = f_1(x), u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \dots, u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \dots$$

მაშინ $\{u_n(x)\}$ მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა იქნება $\{f_n(x)\}$.

მაშასადამე, ფუნქციასა მიმდევრობიდან შეგვიძლია გადავიღეთ ფუნქციასა მწკრივზე და პირიქით. ამიტომ ყოველი დებულება, რომელიც იქნება ჩამოყალიბებული და დამტკიცებული ფუნქციასა მწკრივისათვის, შეიძლება სათანადო ფორმულირებით ჩამოყალიბოთ ფუნქციასა მიმდევრობისთვისაც და პირიქით. ამ გარემოებით ხშირად ვისარგებოდათ შემდეგში.

(1.2) მწკრივის ნაშთი n -ური წევრის შემდეგ, ეწოდება მწკრივს

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x). \quad (1.3)$$

(1.3) მწკრივი კრებადია D არეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა D -ზე კრებადია თვით (1.2) მწკრივი.

თუ ამ შემთხვევაში (1.3) მწკრივის ჯამს აღვნიშნავთ $R_n(x)$ -ით, მაშინ

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

ამრიგად $R_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (1.2) მწკრივის კრებადობის არეში და ამ არის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი რომელიც დაკავშირებულია ფუნქციასა მწკრივებთან, შემდეგში მღვდარდობს: თუ მწკრივის წევრებს აქვთ რაიმე თვისება, ინარჩუნებს თუ არა იგივე თვისებას მწკრივის ჯამიც.

მაგალითად, თუ მწკრივის წევრები უწყვეტია, იქნება თუ არა ჯამიც უწყვეტი? პასუხი ამ კითხვებზე საზოგადოდ უარყოფითია. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ფუნქციასა მწკრივი

$$(x-1) + (x^2-x) + (x^3-x^2) + \dots + (x^n-x^{n-1}) + \dots \quad (1.4)$$

(1.4) მწკრივის წევრები განსაზღვრულია დი უწყვეტია $]-\infty; +\infty[$

შუალედში. უიპოვოთ ამ მწკრივის კრებულობის არც ერთ წ.მ. (1.4) მწკრივის $(S_n(x))$ კერძო ჯამი იქნება

$$S_n(x) = -1 + x^n.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{თუ } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

როცა $x < -1$, მაშინ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ არ არსებობს, როცა $x > 1$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = +\infty.$$

მაშასადამე, (1.4) მწკრივის კრებულობის არცა

$[-1, 1]$ ნახევარსეგმენტი, ხოლო მისი ჯამია

$$S(x) = \begin{cases} -1, & \text{თუ } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{თუ } x = 1, \end{cases}$$

რომელიც წყვეტილია $x=1$ წერტილში.

ამრავალ უწყვეტ ფუნქციას (1.4) მწკრივის ჯამი წარმოადგენს წყვეტილ ფუნქციას.

მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad x \in R.$$

ამ მწკრივის წევრები განსაზღვრულია და უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. ადვილია შემოწმება, რომ მწკრივის კრებულობის არცა აგრეთვე $]-\infty, +\infty[$ შუალედში და მისი ჯამია ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x=0, \\ \frac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ფაქტობრივად წყვეტის 0 წერტილში.

ამრიგად, უწყვეტ ფუნქციას კრებადი მწკრივის ჯამი, საზოგადოდ უწყვეტი არ არის, ე. ი. საზოგადოდ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0).$$

მოკლემილი მაგალითები გვიჩვენებს, რომ მწკრივის წევრების ესა თუ ის თვისება საზოგადოდ არა აქვს მის ჯამს. მწკრივის წევრების ამა თუ იმ თვისების შენარჩუნება ჯამისათვის დავაგვირგებელია კრებულობის „ხასიათთან“, რაზედაც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

§ 2. ფუნქციის მწკრივის თანაბარი კრებადობა

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციის მიმდევრობა

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (2.1)$$

განსაზღვრება 2.1. (2.1) მიმდევრობას ეწოდება $D \subseteq E$ სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისა, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს x -სთან დამოკიდებული ისეთი $n(x)$ რიცხვი, რომ D სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (2.2)$$

როცა $n > n(x)$.

თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა D სიმრავლეზე კრებადი $f(x)$ ფუნქციისა, ამას სიმბოლურად ასე ჩაეწერათ

$$f_n(x) \xrightarrow{D} f(x).$$

თუ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა D სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისა, ამას ასე ჩაეწერათ

$$f_n(x) \xrightarrow{D} f(x).$$

კრებადობა და თანაბრად კრებადობის შორის განსხვავება ის არის, რომ: თუ $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და

$x \in D$ -თვის არსებობს რიცხვი n_0 , დამოკიდებული ε და x -ზე, ისეთი, რომ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ უტოლობა შესრულდება, როცა $n > n_0$; ხოლო თუ $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს

n_0 რიცხვი (დამოკიდებული მხოლოდ ε -ზე), რომელიც გამოდგება ყოველი $x \in D$ -თვის.

ცხადია, რომ, თუ (2.1) მიმდევრობა თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისა, D სიმრავლეზე, მაშინ ის კრებადი ამ ფუნქციისა, D სიმრავლეზე.

ზენერბრივად ისმება კითხვა: ფუნქციის მიმდევრობის კრებადობიდან გამომდინარეობს თუ არა თანაბრად კრებადობა? ე. ი. როცა $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ ამ შემთხვევაში შეიძლება თუ არა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$

რიცხვისათვის n_0 ისე შევარჩიოთ, რომ (2.2) უტოლობა შესრულდეს D სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის და ყველა n -თვის, რომელიც n_0 ს. თითქმის, ე. ი. ნიჭილად. მ. ვამბისაშვილი, ნ. მამარაშვილი

დაკმაყოფილებს პირობას $n > n_0$, თუ D სპერული სიმრავლეა, მაშინ ცხადია, რომ $n_0 = \max_{x \in D} (n_0(x))$ რიცხვისთვის (2.2) სრულდება $\forall x \in D$ -თვის. თუ კი D სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ $n_0 = \sup_D n_0(x)$ შეიძლება აღმოჩნდეს $+\infty$ -ის ტოლი, როგორც არ უნდა იყოს შერჩეული $n_0(x)$ რიცხვები.

მართლაც განვიხილოთ მიმდევრობა $f_n(x) = x^n$. ეს მიმდევრობა $D \in]0; 1[$ შედეგზე კრებადი 0-საკენ, ე. ი. $f(x) = 0$ ყოველი $x \in]0; 1[$ -თვის, ვიქვით $0 < x < 1$ ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვი, მაშინ უტოლობას

$$x^n < \varepsilon \quad (2.3)$$

აღვლი უწყება მხოლოდ მაშინ, როცა $n > n_0(x, \varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. ჩაღვნიავ

$\sup_{x \in]0; 1[} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = +\infty$, ამიტომ ჩვენ არ შეგვიძლია ისეთი n_0 რიცხვი შევარჩიოთ, რომ (2.3) უტოლობა შესრულდეს ყოველი $x \in]0; 1[$ -თვის, როცა $n > n_0$, ე. ი. $\{x^n\}$ მიმდევრობა $]0; 1[$ შედეგზე თანაბრად კრებადი არ არის ზღვრული ფუნქციისაკენ.

ამრიგად ფუნქციითა მიმდევრობის კრებადობა წარმოადგენს ცოკალურ ცნებას, ხოლო თანაბარი კრებადობა კი წარმოადგენს გლობალურ ცნებას, იგი ახასიათებს კრებადობას მთელ სიმრავლეზე.

თუ ფუნქციითა მიმდევრობა კრებადი რაიმე სიმრავლეზე, მაგრამ არ არის თანაბრად კრებადი ამ სიმრავლეზე, მაშინ ასეთ მიმდევრობას უწოდებენ არათანაბრად კრებად მიმდევრობას.

ვთქვათ $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$. თუ არსებობს დადებითი ε რიცხვი, ნატურალური n_0 და D სიმრავლის წერტილთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon, \text{ როცა } n > n_0,$$

მაშინ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა არათანაბრად კრებადი D სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ფუნქციითა მიმდევრობის კრებადობისა და თანაბარი კრებადობის განსაზღვრებები ჩვეურობით ზოგადობისა და არსებობის კვანტორების სიმბოლოებით გამოვყენებით:

$$f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \quad \exists n(\varepsilon) \quad \forall n > n(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \quad \forall x \in D \quad \forall n > n(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ამ წინაწერში ერთი განსაზღვრება განსვადდება მეორისაგან $\forall x \in D$ და $\exists n(\varepsilon)$ სიმბოლოების გადსმათ.

თეორემა 2.1. $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობის D სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ თანაბარი კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს ნულისაკენ კრებადი არაუარყოფითი რიცხვთა ისეთი p_n მიმდევრობა, რომ

$$|f_n(x) - f(x)| \leq p_n, \quad \forall x \in D. \quad (2.4)$$

საკმარისობა. ვთქვათ შესრულებულია (2.4) და $p_n \rightarrow 0$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს n_0 რიცხვი, ისეთი, რომ, როცა $n > n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq p_n < \varepsilon, \quad \forall x \in D,$$

საიდანაც

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D, \quad n > n_0. \quad (2.5)$$

ე. ი. $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადი D -ზე.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადი D -ზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 , რომ იდგლი უქნება (2.5) უტოლობას. გამოვიღიანარე აქედან

$$p_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n > n_0).$$

ე. ი. ადგილი აქვს (2.4) პირობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.2 (კოშის კრიტერიუმი). იმისათვის, რომ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა იყოს თანაბრად კრებადი D სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ, აუცილებელია და საკმარისი, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს α -ზე დამოკიდებული ისეთი n_0 რიცხვი, რომ D სიმრავლას ნებისმიერი x წერტილისათვის და ყოველი ნატურალური p -სათვის შესრულდეს უტოლობა

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad (2.6)$$

როცა $n > n_0$.

აუცილებლობა. ვთქვათ $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადი D სიმრავლეზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური p -თვის შესრულდება უტოლობა

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon, \quad \forall x \in D.$$

ე. ი. ადგილი აქვს (2.6) უტოლობას.

საკმატისობა. ექვეყნით, შესრულებულია (2.6). მაშინ ნების-
მიერი ფიქსირებული $x \in D$ -თვის ადგილი აქვს რიცხვთა მიმდევრობის
კრებლობის კოშის კრიტერიუმს, გამომდინარე აქედან $\{f_n(x)\}$
მიმდევრობა კრებადია რადიკ $f(x)$ ფუნქციისაკენ. (2.6) უტოლობაში
ფიქსირებული $n > n_0$ -თვის გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $p \rightarrow \infty$, მივი-
ღებთ

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D, n > n_0.$$

ე. ა. $\{f_n(x)\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია D -ზე $f(x)$ ფუნ-
ქციისაკენ.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $f_n(x) = x^n$ მიმდევრობა თა-
ნაბრად კრებადია $[0, q]$ სეგმენტზე, სადაც $0 < q < 1$.

მართლაც,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0, \quad \forall x \in [0, q].$$

ამიტომ

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq q^n.$$

აქედან თეორემა 2.1-ის ძალით გამომდინარეობს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

თანაბრად $[0, q]$ -ზე.

როცა $q = 1$, მაშინ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

ამიტომ

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & \text{თუ } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

აქედან ვაქვს

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

გამომდინარე აქედან არ არსებობს ისეთი ნულისაკენ კრებადი p_n
მიმდევრობა, რომლისთვისაც ადგილი ექნება (2.4) პირობას. ე. ა. $\{x^n\}$
მიმდევრობა არათანაბრად კრებადია $[0, 1]$ სეგმენტზე. ეს ფაქტი ჭე-
ვითაც ვგვხვდება ნაწევრები.

ახლა განვიხილოთ ფუნქციითა მწკრივი

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2.7)$$

განსახილვერება 2.2. (2.7) მწკრივის ეწოდება თანაბრად კრე-
ბადი D -ზე, თუ ამ მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n(x)\}$ მიმდევრობა $(S_n(x) =$

$$= \sum_{k=1}^n u_k(x)), \text{ თანაბრად კრებადია } D\text{-ზე.}$$

თეორემა 2.2 მწკრივებისათვის ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 2.3. იმისათვის, რომ (2.7) მწკრივი იყოს თანაბრად
კრებადი D სიმრავლეზე, აუცილებელია და საკმარისი, ყოველი $\varepsilon > 0$
რიცხვისათვის არსებობდეს x -ზე დამოუკიდებელი ისეთი n_0 რიცხვი,
რომ D სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის და ყოველი ნატუ-
რალური p -სათვის შესრულდეს უტოლობა

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

როცა $n > n_0$.

აქედან კერძოდ, როცა $p = 1$, მიიღება (2.7) მწკრივის თანაბრად
კრებადობის აუცილებელი პირობა:

თანაბრად კრებადი ფუნქციითა მწკრივის ზოგადი წევრი თანაბრად
შეისწრაფვის ნულისაკენ.

თეორემა 2.4 (თანაბრად კრებადობის ვეიერშტრასის* ნიშა-
ნი). თუ (2.7) მწკრივის წევრები D სიმრავლის ყოველი წერტილისათ-
ვის აკმაყოფილებს პირობას

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

სადაც

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2.9)$$

წარმოადგენს დადებით კრებად მწკრივს, მაშინ (2.7) მწკრივი თანა-
ბრად და აბსოლუტურად კრებადია D სიმრავლეზე.

დამტკიცება. რადგანაც (2.9) მწკრივი კრებადია, ამიტომ ნე-
ზისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon, \quad (2.10)$$

როცა $n > n_0$.

(2.8) პირობის ძალით

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leq |u_{n+1}(x)| +$$

$$+ |u_{n+2}(x)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

* კარლ ვეიერშტრასი (1815—1897 — გერმანელი მათემატიკოსი.

აქედან (2.10)-ის თანახმად, ყოველი $x \in D$ -თვის, მივიღებთ

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| < \varepsilon, \text{ როცა } n > n_0.$$

ე. ი. (2.7) ფუნქციის მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრება-

ლია.

თეორემა დამტკიცებულია.

(2.9) მწკრივს ეწოდება (2.7) მწკრივის მატორანტული მწკრივი.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

თანაბრად კრებალია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

მართლაც, მოცემული მწკრივის თანაბრად კრებადობა გამომდინა-

რეობს

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

უტოლობიდან და გეიერშტრასის ნიშნიდან.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

ეს მწკრივი კრებალია $]-1, 1[$ ინტერვალში და მისი ჯამია $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

ვაჩვენოთ, რომ ის არათანაბრად კრებალია ამ ინტერვალში. მართლაც,

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

ამიტომ

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x^{n+1}|}{1-x}.$$

იქიდან $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, ცხადია $x_n \rightarrow 1$, როცა $n \rightarrow \infty$. რიცხვით ამ

მიმდევრობისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = +\infty.$$

მაშასადამე მოცემული მწკრივი არათანაბრად კრებალია $]-1, 1[$ ინ-

ტერვალში.

მაგალითი 4. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n^2 x^2} \sin nx$$

თანაბრად კრებალია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში.

$$\text{ცხადია } |z^{-n^2 x^2} \sin nx| \leq n |x| z^{-n^2 x^2}.$$

ფიქსირებული n -თვის, ვიპოვოთ $V_n(x) = n |x| z^{-n^2 x^2}$ ფუნქციის მაქ-

სიმუმი. რადგან $V_n(x)$ ლეწია, ამიტომ საჭიროა განვიხილოთ შემთხვევა

$x \geq 0$. $V_n(x)$ ფუნქცია მაქსიმუმს ლეზულობს $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2n^{3/2}}}$ წერტილში

(შეამოწმეთ!). რადგანაც $V_n(x) \geq 0$, $V_n(0) = 0$ და $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x) = 0$,

ამიტომ

$$V_n(x) \leq V_n(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2n^{3/2}}} z^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

მაგრამ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ მწკრივი კრებალია, ამიტომ ვეიერშტრასის ნიშნის

ძალით, მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებალია მთელ რიცხვით ლერძზე.

მაგალითი 5. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ თანაბრად კრება-

ლია $]-1; +\infty[$ შუალედში.

მართლაც, ცხადია, რომ $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}$, ხოლო

$S(x) = \frac{1}{1+x}$. გამომდინარე აქედან $R_n(x) = \frac{1}{n+x+1}$. პირობით

$x+1 > 0$, ამიტომ $|R_n(x)| < \frac{1}{n}$. აქედან ცხადია, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

თანაბრად.

შავალითი 6. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n} \quad (2.11)$$

თანაბრად კრებადიი $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, ხოლო მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობისაგან შედგენილი მწკრივი კი განშლადია იმავე შუალედში.

ლუბინიცის თეორემის ძალით (2.11) მწკრივი კრებადია მთელ რიცხვით ღერძზე და

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $R_n(x) \rightarrow 0$, როცა $-\infty < x < \infty$, ე. ი. მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (2.11) მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი განშლადია ყოველ x წერტილზე. მართლაც, შევადაროთ ამ მწკრივის $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ წევრები პარ-

ზიული მწკრივის $V_n = \frac{1}{n}$ წევრებს. ვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^2+n} = 1 \neq 0.$$

ე. ი. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n}$ განშლადია ყველგან.

თეორემა 2.5. თუ $\{u_n(x)\}$ მიმდევრობა ყოველი $x \in E$ -თვის მონო-

ტონურია და თანაბრად კრებადია ნულისაგან E -ზე, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$

მწკრივის ყრპო ჯამთა მიმდევრობა შემოსაზღვრულია E -ზე, მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე.

ეს თეორემა შტაკელბერგის ზეხუთე თავის თეორემა 11.1-ის ანალოგიურია.

შავალითი 7. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (2.12)$$

მოცემული მწკრივები, როცა $\alpha > 1$ (თანაბრად ფუნქციითა მწკრივის თანაბარი კრებადობის ვეიერშტრასის ნიშნისა) თანაბრად კრებადია მთელ რიცხვით ღერძზე. როცა $\alpha \leq 1$, მაშინ (2.12) მწკრივებზე

ვეიერშტრასის ნიშანი არ გამოიყენება, რადგან $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ მწკრივი განშლადია.

ამ შემთხვევაში თეორემა 2.5-ის ძალით აღვიღოთ ჩვენება, რომ მოცემული მწკრივები თანაბრად კრებადია $[e, 2\pi - e]$ სეგმენტზე ნებისმიერი $0 < e < \pi$ რიცხვისათვის. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ,

რომ $[e, 2\pi - e]$ სეგმენტზე $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ მწკრივების კერძო ჯამთა მიმდევრობები შემოსაზღვრულია (იხ. მეხუთე თავის § 11-ის შავალითი 1).

§ 8. თანაბრად კრებადი მწკრივის თვისებები

1. ფუნქციითა მწკრივის ჯამის უწყვეტობა. როგორც ვიცით, თუ უწყვეტ ფუნქციითა რიცხვი სასრულია, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა. როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, თუ ფუნქციითა მწკრივის წევრები უწყვეტია რაიმე სეგმენტზე, მაშინ მწკრივის ჯამი შეიძლება წყვეტილი აღმოჩნდეს. ახლა დავამტკიცოთ თეორემა უწყვეტ ფუნქციითა მწკრივის ჯამის უწყვეტობის შესახებ.

თეორემა 3.1. ვთქვათ $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ფუნქციები უწყვეტია

$x_0 \in E$ წერტილში. თუ ფუნქციითა მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ თანაბრად კრება-

დია E სიმრავლეზე, მაშინ მისი $S(x)$ ჯამი აგრეთვე უწყვეტია x_0 წერტილში.

დამტკიცება ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვად ვთქვათ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad x \in E.$$

თეორემის პირობის ძალით

$$S_n(x) \xrightarrow{E} S(x).$$

გამოვძინარე იქედან არსებობს ისეთი $n(x)$ რიცხვი, რომ

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in E, \quad (3.1)$$

როცა $n > n(x)$. ავიღოთ ნებისმიერი $n_0 > n(x)$. $S_{n_0}(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში (როგორც სასრული რაოდენობის უწყვეტ ფუნქციათა ჯამი). ამიტომ არსებობს $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა } |x - x_0| < \delta. \quad (3.2)$$

(3.1) და (3.2)-ის ძალით ვაქვს

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{როცა } |x - x_0| < \delta.$$

ე. ი. $S(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებულ თეორემას შეიძლება მივყავთ შემდეგი სახე:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

მაგრამ რაღებაც $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ფუნქციები უწყვეტია $x_0 \in E$ წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

ამრიგად თეორემა 3.1-ის პირობებში მწკრივის ჯამის ზღვარი უდრის მისი წევრების ზღვრების ჯამს, ე. ი. თანაბრად კრებადი მწკრივის შემთხვევაში შესაძლებელია ზღვარზე წევრ-წევრად გადასვლა.

შედეგად თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა მწკრივი თანაბრად კრებადი ამ სეგმენტზე, მაშინ მწკრივის ჯამიც უწყვეტია იმავე სეგმენტზე. ა წერტილზე ივლისსმება უწყვეტობა მარჯნიდან, ხოლო b წერტილზე კი მარცხნიდან.

შენიშვნა. მწკრივის თანაბარი კრებადობა არ არის აუცილებელი პირობა უწყვეტ ფუნქციათა მწკრივის ჯამის უწყვეტობისათვის. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} x [k^2 e^{-kx} - (k-1)^2 e^{-(k-1)x}]. \quad (3.3)$$

ეს მწკრივი განსაზღვრულია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. ადვილია შემოწმება, რომ ამ მწკრივის n -ური კერძო ჯამია

$$S_n(x) = x n^2 e^{-nx}.$$

იქედან ცხადია, რომ $[0; +\infty[$ შუალედში მოცემული მწკრივი კრებადი და მისი ჯამი $S(x) = 0$, ე. ი. (3.3) მწკრივის ჯამი უწყვეტია $[0; +\infty[$ შუალედში, ვაჩვენოთ, რომ (3.3) მწკრივი არათანაბრად კრებადი ამ შუალედში.

განვიხილოთ ნიშნით $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = -x n^2 e^{-nx}$. ავიღოთ $x_n = \frac{1}{n}$. ცხადია, რომ $x_n \rightarrow 0$. რიცხვით ამ მიმდევრობისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_n) = -\frac{n}{2} = -\infty.$$

მაშასადამე მოცემული მწკრივი არათანაბრად კრებადი $[0; +\infty[$ შუალედში.

(3.3) არის მაგალითი ისეთი არათანაბრად კრებადი უწყვეტი ფუნქციისა, რომლის ჯამიც უწყვეტია.

2. ფუნქციათა მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება. ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ სეგმენტზე ინტეგრებად სასრული რაოდენობის ფუნქციათა ჯამი აგრეთვე ინტეგრებადი და ჯამის ინტეგრალი უდრის ინტეგრალთა ჯამს, ვაჩვენოთ, რომ ეს თვისება ფუნქციათა მწკრივის შემთხვევაში საზოგადოდ ძალაში არ არჩება. მოვიყვანოთ მაგალითი.

შედეგად 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} x[n(1-x^2)^n - (n-1)(1-x^2)^{n-1}], \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (3.4)$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამია

$$S_n(x) = nx(1-x^2)^n.$$

ცხადია

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

შეორეს მხრივ

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2n+2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

ამრიგად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx.$$

მაშასადამე

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx.$$

(3.4) არის მაგალითი ისეთი უწყვეტ ფუნქციითა მწკრივისა, რომლის წევრ-წევრად ინტეგრება არ შეიძლება.

ლემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციითა

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (3.5)$$

მწკრივი თანაბრად კრებალია ამივე სეგმენტზე, მაშინ როგორც არ უნდა იყოს $c \in [a, b]$ წერტილი, მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t) dt \quad (3.6)$$

აგრეთვე თანაბრად კრებალია $[a, b]$ -ზე.

236

დამტკიცება. რადგანაც (3.5) უწყვეტ ფუნქციითა თანაბრად კრებალი მწკრივია, ამიტომ თეორემა 3.1-ის ძალით მისი ჯამი $S(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. ამდენად ის ინტეგრებადიცაა $[a, b]$ -ზე: ვაჩვენოთ, რომ (3.6) მწკრივი თანაბრად კრებალია $[a, b]$ სეგმენტზე.

$$\sigma(x) = \int_c^x S(t) dt \quad \text{ფუნქციისაა.}$$

ვთქვათ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

შემდეგ

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_c^x u_k(t) dt = \int_c^x \left(\sum_{k=1}^n u_k(t) \right) dt = \int_c^x S_n(t) dt.$$

ახლა ნებისმიერი $x \in [a, b]$ -თვის ვვაქვს

$$|\sigma_n(x) - \sigma(x)| = \left| \int_c^x S_n(t) dt - \int_c^x S(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_c^x |S_n(t) - S(t)| dt \right| = \left| \int_c^x |R_n(t)| dt \right| \leq$$

$$\leq \max_{[a, b]} |R_n(t)| \left| \int_c^x dt \right| = |x - c| \max_{[a, b]} |R_n(t)|. \quad (3.7)$$

(3.5) მწკრივის თანაბრად კრებალობის ძალით (იხ. თეორემა 2.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[a, b]} |R_n(t)| = 0.$$

ამიტომ (3.7) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (3.6) მწკრივი თა-

ნაბრად კრებალია $\sigma(x) = \int_c^x S(t) dt$ ფუნქციისაა.

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციითა

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ მწკრივი თანაბრად კრებალია ამავე სეგმენტზე $S(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (3.8)$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

თეორემის პირობის ძალით $R_n(x) \rightarrow 0$. ამიტომ (3.7) უტოლობიდან ნებისმიერი $x \in [a, b]$ და $c \in [a, b]$ -თვის, გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x S_n(t) dt = \int_c^x S(t) dt = \int_c^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

აქედან, კერძოდ როცა $c=a$ და $x=b$ მიიღება (3.8) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციითა თანაბრად კრებალი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება ყოველთვის შეიძლება.

შენიშვნა. მწკრივის თანაბრად კრებალობა არ არის აუცილებელი პირობა უწყვეტ ფუნქციითა მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებისათვის. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 3. განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციითა მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

სადაც

$$u_k(x) = kx(1-x)^k - (k-1)x(1-x)^{k-1}.$$

ამ მწკრივის კერძო ჯამია

$$S_n(x) = nx(1-x)^n.$$

ცხადია, მოცემული მწკრივის კრებალობის არეა $[0, 2]$ შუალედი, ამასთან

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \quad 0 \leq x < 2.$$

ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მწკრივი არ არის თანაბრად კრებალი $[0, 1]$ სეგმენტზე. პართლაც, წერტილთა $x_n = \frac{1}{n}$ მიმდევრობისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

ე. ი. მწკრივი არ არის თანაბრად კრებალი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება შეიძლება. გვაქვს

$$\int_0^1 S_n(x) dx = n \int_0^1 x(1-x)^n dx.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მოვახდენთ ჩასმას $1-x=t$ მივიღებთ

$$\int_0^1 S_n(x) dx = n \int_0^1 t^n (1-t) dt = n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

აქედან გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^1 u_k(x) dx = 0.$$

შეორეს მხრივ

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \int_0^1 S(x) dx = 0.$$

ე. ი.

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u_k(x) dx.$$

ამრიგად, მოცემული მწკრივი არის მაგალითი, უწყვეტ ფუნქციას არათანაბრად კრებადი მწკრივისა, რომლის წევრ-წევრად ინტეგრება შესაძლებელია.

3. ფუნქციითა მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება. ცნობილია, რომ სასრული რაოდენობის წარმოებად ფუნქციითა ჯამი წარმოებადია და ჯამის წარმოებელი წარმოებულთა ჯამის ტოლია. მწკრივის შემთხვევაში ეს დებულება საზოგადოდ მართებული არ არის. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 4. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n-1}} \right). \quad (3.9)$$

ამ მწკრივის წევრები განსაზღვრულია და წარმოებადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. (3.9) მწკრივის კერძო ჯამია

$$S_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

ამდენად (3.9) მწკრივის კრებულის არეა $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. ამ შუალედში მწკრივის ჯამი იქნება

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) \neq \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right]'. \quad (3.10)$$

თეორემა 3.3. ვთქვათ $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე და

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (3.10)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ -ზე. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ მწკრივი

ვიკრებადია ერთ $x_0 \in [a, b]$ წერტილში მაინც, მაშინ ის თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მისი ჯამი

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (3.11)$$

უწყვეტად წარმოებადია და

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (3.12)$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (3.13)$$

თეორემის პირობის ძალით $\sigma(x)$ უწყვეტია და გარდა ამისა შესაძლებელია (3.13) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება (იხ. თეორემა 3.2):

$$\int_{x_0}^x \sigma(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)], \quad (3.14)$$

$$a \leq x \leq b.$$

ლემის ძალით

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.15)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია, თეორემის პირობის ძალით კრებადია რიცხვთა

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \quad (3.16)$$

მწკრივი. ამიტომ თანაბრად კრებადი (3.15) და (3.16) მწკრივების ჯამიც, ე. ი. თანაბრად კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leq x \leq b.$$

გამომდინარე აქედან (3.14) ტოლობა ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\int_{x_0}^x \sigma(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

ანუ რაც იგივეა

$$\int_{x_0}^x \sigma(t) dt = S(x) - S(x_0). \quad (3.17)$$

რადგანაც $\sigma(t)$ უწყვეტია, აიტომ $\int_{x_0}^x \sigma(t) dt$ წარმოებალია. (3.17)-დან გვაქვს

$$\sigma(x) = S'(x). \quad (3.18)$$

(3.13) და (3.18) ტოლობებიდან მიიღება დასამტკიცებელი (3.12) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად თეორემა 3.3-ის პირობებში შესაძლებელია ფუნქციითა მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება.

შენიშვნა 1. უწყვეტად წარმოებად ფუნქციითა მწკრივზე, მართა ამ მწკრივის თანაბრად კრებადობის მოთხოვნა, საკმარისი არ არის წევრ-წევრად გაწარმოებისათვის. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 5. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad (3.19)$$

სადაც

$$u_1(x) = \operatorname{arctg} x, \quad u_k(x) = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} x^k - \frac{1}{k-1} \operatorname{arctg} x^{k-1}, \quad k=2, 3, \dots$$

ცხადია, რომ $u_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) ო ფუნქციები უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. (3.19) მწკრივის კერძო ჯამია

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n.$$

აქედან მწკრივის ჯამი

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

(3.19) მწკრივი თანაბრად კრებალია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. მართლაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - S(x)| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

ე. ი. (3.19) თანაბრად კრებალია $]-\infty, +\infty[$ შუალედში. შემდეგ

$$S'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}.$$

აქედან $S'_n(1) = \frac{1}{2}$. მაშასადამე

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(1) = \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

მეორეს მხრივ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.21)$$

(3.20) და (3.21)-დან გამომდინარეობს, რომ მოცემული მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება არ შეიძლება, თუმცა ეს მწკრივი თანაბრად კრებალია.

შენიშვნა 2. თეორემა 3.3-ში მართა $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x)$ მწკრივის

თანაბარი კრებადობის მოთხოვნა საკმარისი არ არის მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებისათვის. მართა ამ პირობის შესრულება საზო-

გადოდ არ უზრუნველყოფს $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ მწკრივის კრებადობასაც

ე. ი. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 6. ვიწვილოთ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, სადაც $a_k(x)=1$,

$k=1, 2, \dots$

ეს მწკრივი ყველგან განშლადია, თუმცა ამ მწკრივის წევრების წარმოებულებისაგან შედგენილი მწკრივი $0+0+\dots+0+\dots$ თანაბრად კრებადია მთელ რიცხვით ღერძზე.

მეშვიდე თავი

ხარისხობანი მწკრივები

§ 1. ხარისხობანი მწკრივის კრიტერიუმის ინტერპოლაცია და კრიტერიუმის რადიუსი

ფუნქციათა მწკრივებს შორის, გამოყენების თვალსაზრისით, ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია ევრეფთოდებული ხარისხობანი მწკრივები. ხარისხობანი მწკრივი ეწოდება

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (1.1)$$

სახის მწკრივს, სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ მუდმივი რიცხვებია. ამ მუდმივებს ხარისხობანი მწკრივს კოეფიციენტები ეწოდება.

ჩვეულებრივ ხარისხობანი მწკრივი განიხილება უფრო ზოგადი სახით

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (1.2)$$

ეს მწკრივი $x-x_0=1$ ჩასმით დაიყვანება (1.1) სახედ. ამიტომ შემდგომში სიმარტივისათვის განვიხილავთ (1.1) სახის მწკრივებს.

ხარისხობანი მწკრივითა თვორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხია ხარისხობანი მწკრივის კრებადობის არის სტრუქტურას დადგენა.

შევნიშნოთ, რომ ხარისხობანი მწკრივის კრებადობის არე ცარველი სიმრავლე არ არის, რადგან (1.1) სახის ნებისმიერი ხარისხობანი მწკრივი კრებადია $x=0$ წერტილში მაინც და ამ წერტილში მისი ჯამია a_0 .

თეორემა 1.1 (ბელის პირველი თეორემა). თუ (1.1) ხარისხობანი მწკრივი კრებადია $x_0 \neq 0$ წერტილში, მაშინ ის აბსოლუტუ-

რად კრებადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| < |x_0|$.

დამტკიცება. პირობის ძალით $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ რიცხვითი მწკრივი კრებადია გამოდინარე აქედან $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. რადგან კრე-

ბადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

ახლა განვიხილოთ x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x| < |x_0|$. დავუშვათ $q = \left| \frac{x}{x_0} \right|$, მაშინ $0 < q < 1$, ამიტომ

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M q^n \quad (n=0, 1, \dots).$$

ამრიგად, ისეთი x -სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $|x| < |x_0|$ პირობას, (2.1) მწკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება დადებით კრებად

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots \quad (0 < q < 1)$$

მწკრივის სათანადო წევრებს. ამიტომ მწკრივთა შედარების პირველი ნიშნის ძალით (1.1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ (1.1) მწკრივი განშლადია x_1 წერტილში, მაშინ ის განშლადია ნებისმიერ x წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| > |x_1|$.

მართლაც (1.1) ხარისხობანი მწკრივი კრებადია რომ ყოს ისეთი x -თვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| > |x_1|$, მაშინ აბელის თეორემის ძალით (1.1) მწკრივი კრებადია იქნებოდა x_1 წერტილში, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

ბელის თეორემისა და მისი შედეგის აზრი მდგომარეობს შემდეგში: თუ ხარისხობანი მწკრივი კრებადია x_0 წერტილში, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია $]-|x_0|, |x_0|$ ინტერვალში, ხოლო თუ არსებობს ხარისხობანი მწკრივი, რომელიც კრებადია $]-\infty; \infty$ ხარისხობანი მწკრივი განშლადია x_1 წერტილში, მაშინ ის განშლადია $]-|x_1|, |x_1|$ სეგმენტის გარეთ.

არსებობს ისეთი ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, ასეთია მაგალითად, მწკრივი

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$$

არსებობს ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც კრებადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, ასეთია მაგალითად, მწკრივი

$$1 + x + \frac{x^2}{2^n} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

არსებობს აგრეთვე მწკრივი, რომლის კრებადობის არც სასრული შუალედი, ასეთია მაგალითად, მწკრივი

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა $]-1, 1[$ ინტერვალა.

თეორემა 1.2. თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x_0 \neq 0$ წერტილში და განმარტებულია x_0 -ში, მაშინ არსებობს $R > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $|x| < R$ და განმარტებულია, როცა $|x| > R$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ E -თი მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის სიზრავლე. პირთბის თანახმად არსებობს x_2 რიცხვი, რომლისთვისაც მოცემული მწკრივი განმარტებულია აქედან ახლოს თეორემის ძალით E სიზრავლის ყოველი x წერტილისათვის $|x| < |x_2|$, ე. ი. E სიზრავლე შემოსაზღვრულია, აღვნიშნოთ R ასეთი E სიზრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი $R = \sup_{x \in E} |x|$. რადგან მწკრივი

ვი კრებადია არა მარტო $x=0$ წერტილში, ამიტომ $R > 0$.

ავიღოთ ნებისმიერი x , ისეთი, რომ $|x| < R$. თანახმად ზუსტი ზედა საზღვრის თვისებების არსებობს $x_0 \in E$ წერტილი, ისეთი რომ $|x| < x_0 < R$. აქედან ახლოს თეორემის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია აღებულ x წერტილში.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი x , რომლისთვისაც $|x| > R$. ცხადია ასეთი x არ ეკუთვნის E სიზრავლეს. მაშასადამე, ასეთი x -თვის მოცემული მწკრივი განშლადია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, დადგენილია, რომ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $]-R; R[$ ინტერვალში და განმარტებულია $]-R; R[$ სეგმენტის გარეთ, რაც შეეხება $x=-R$ და $x=R$ წერტილებს, ამ წერტილებში კრებადობის საკითხი შესწავლენა ყოველი კონკრეტული მწკრივისათვის

ვის. შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს უფრო ვიწრო შუალედს, რომელშიც მწკრივი შეიძლება კრებადია იქნეს თორავ წერტილში, ან კრებადია იქნეს ამ წერტილებიდან მხოლოდ ერთ-ერთში, ან განმარტებული იქნეს თორავ წერტილში.

$]-R; R[$ ინტერვალს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალა, ხოლო R რიცხვს კი კრებადობის რადიუსი, თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაშინ ვიტყვი, რომ ამ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=0$, ხოლო, როცა ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, მაშინ ვიტყვი, რომ ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=+\infty$.

შენიშვნა 1. თუ (1.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია R , მაშინ (1.2) მწკრივის კრებადობის ინტერვალა იქნება $|x-x_0| < R$, ან რაც იგივეა $]-R+x_0; R+x_0[$ ინტერვალა.

შენიშვნა 2. თუ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არეა სეგმენტი, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია ამ სეგმენტის ბოლოებზე, ხოლო, თუ კრებადობის არეა ნახევრად ღია სეგმენტი, მაშინ ის პირბათი კრებადია კრებადობის არის ბოლო წერტილზე.

§2. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლა

მოგვიყვანოს ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსის გამოთვლის ორი ზეგზი, რომლებიც მოიღება რიცხვითი მწკრივის კრებადობის კოშისა და დალამბერტის ზღვრული ნიშნების გამოყენებით.

თეორემა 2.1. თუ (1.1) ხარისხოვანი მწკრივისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

მაშინ კრებადობის რადიუსი

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{როცა } 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & \text{როცა } L = 0, \\ 0, & \text{როცა } L = +\infty. \end{cases}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| L.$$

აქედან, როცა $0 < L < +\infty$, მაშინ დადებითი რიცხვითი მწკრივის კრებადობის კოშის ზღვრული ნიშნის მიხედვით (1.1) ხარისხოვანი

შეკრივი კრებადი იქნება ისეთი x -ებისათვის, რომელთათვისაც $|x| \cdot L < 1$, ე. ი. როდესაც $|x| < \frac{1}{L}$ და განზღუდვი იქნება როცა $|x| > \frac{1}{L}$. გამომდინარე აქედან ამ შემთხვევაში $R = \frac{1}{L}$.

როცა $L = 0$, მაშინ ყოველი x -თვის $|x| \cdot L = 0 < 1$, გამომდინარე აქედან შეკრივი კრებადია ყველგან მთელ რიცხვით ღერძზე, ე. ი. $R = +\infty$.

როცა $L = +\infty$, მაშინ ყოველი $x \neq 0$ რიცხვისათვის $|x| \cdot L = +\infty$ და გამომდინარე აქედან $R = 0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

რიცხვითი შეკრივის კრებადობის დასამბერის ზღერული ნიშნის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.2. თუ (1.1) ხარისხოვანი შეკრივისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

მაშინ კრებადობის R რადიუსი

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{როცა } 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & \text{როცა } L = 0, \\ 0, & \text{როცა } L = +\infty. \end{cases}$$

(1.1) ხარისხოვანი შეკრივის კრებადობის რადიუსის დასადგენად მართებულია უფრო ზოგადი თეორემა.

თეორემა 2.3 (კოში-ადამარი*). (1.1) ხარისხოვანი შეკრივის კრებადობის R რადიუსისათვის მართებულია ფორმულა

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (2.1)$$

მაგალითი 1. ვიზოვით

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

შეკრივის კრებადობის არე.

$$\text{ვუქვს } a_n = \frac{1}{n} \text{ და } a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \text{ ამიტომ}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

* ე. ი. ა. ა. მარტი (1865 — 1963) — ურანგა მათემატიკოსი.

ადვილია შემოწმება, რომ $x=1$ წერტილში მოცემული შეკრივი განზღუდია, ხოლო $x=-1$ წერტილში — კრებადია. ამრიგად მოცემული შეკრივის კრებადობის არეა $[-1; 1]$ შუალედი.

მაგალითი 2. ვიზოვით

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

შეკრივის კრებადობის არე.

$$\text{რადგან } a_n = \frac{1}{n^2}, \text{ ამიტომ}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

ადვილია შემოწმება, რომ შეკრივი კრებადია $R=-1$ და $R=1$ წერტილებში. ამრიგად, მოცემული შეკრივის კრებადობის არეა $[-1; 1]$ სეგმენტი.

მაგალითი 3. ვიზოვით $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ შეკრივის კრებადობის

არე.

ამ შეკრივისათვის

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3.$$

ადვილია შესამჩნევია, რომ მოცემული შეკრივი განზღუდია $x = -\frac{1}{3}$

და $x = \frac{1}{3}$ წერტილებში. მაშასადამე, შეკრივის კრებადობის არეა $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ ინტერვალი.

მაგალითი 4. ვიზოვით $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ შეკრივის კრებადობის რადიუსი.

სი. ამ შეკრივისათვის

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

გამოძლინარე აქედან $R = +\infty$, ე. ი. მოცემული მწკრივი კრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, შევნიშნოთ, რომ თანახმად მწკრივის კრებალობის ადელეგელი პირობისა, ყოველი x -თვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$ მწკრივის კრებალობის რადიუსი. შემოვიღოთ აღნიშვნა $5x^5 = t$, მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

მაგრამ მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ კრებალია, როცა $|t| < 1$ და ვაწმლია, რომ

ცა $|t| > 1$. გამოძლინარე აქედან $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$ მწკრივი კრებალია თუ

$5|x|^5 < 1$ ე. ი., როცა $|x| < \sqrt[5]{\frac{1}{5}}$. ამრიგად, მოცემული მწკრივის კრებალობის რადიუსი $R = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

შევნიშნოთ, რომ R შეიძლება ვიპოვოთ (2.1) ფორმულის გამოყენებით, პარტალა, რადგან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} = \sqrt[5]{5}.$$

ამიტომ (2.1)-ის ძალით $R = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

§ 3. ხარისხიანი მწკრივების უზღოვრებელი თვისება

1. ხარისხიანი მწკრივის თანაბრად კრებალობა და ჯამის უწყვეტობა. როგორც ზემოთ ვნახეთ ხარისხიანი მწკრივი შეიძლება თა-

ნაბრად კრებალი არ ყოფილიყოს თავის კრებალობის ინტერვალში. მივიღოთ $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ მწკრივი არათანაბრად კრებალია $]-1, 1[$ ინტერვალში. შარტებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1. თუ (1.1) ხარისხიანი მწკრივის კრებალობის რადიუსია $R > 0$, მაშინ ეს მწკრივი თანაბრად კრებალია ყოველ $[-r, r]$ სეგმენტზე, სადაც $0 < r < R$.

დამტკიცება. რადგან $r < R$, ამიტომ კრებალია რიცხითი მწკრივი

$$|a_n| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \dots + |a_n|r^n + \dots$$

მეორეს მხრივ, როცა $|x| \leq r$, ვთქვამ $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. ამიტომ ვეიერშტრასის თეორემის ძალით (1.1) მწკრივი თანაბრად კრებალია $[-r, r]$ სეგმენტზე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2. ხარისხიანი მწკრივს ჯამი უწყვეტია კრებალობის ინტერვალში.

დამტკიცება. ვთქვათ ხარისხიანი მწკრივის კრებალობის რადიუსია R . ავიღოთ ნებისმიერი x_0 ისეთი, რომ $-R < x_0 < R$, არსებობს ისეთი $r > 0$, რიცხვი რომ $-R < -r < x_0 < r < R$. მაგრამ $[-r, r]$ სეგმენტზე თეორემა 3.1-ის ძალით, მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებალია. ამიტომ მისი ჯამიც (როგორც უწყვეტი ფუნქციით თანაბრად კრებალი მწკრივის ჯამი) უწყვეტი ფუნქციაა $[-r, r]$ სეგმენტზე, კერძოდ x_0 წერტილშიც.

თეორემა დამტკიცებულია.

2. აბელის მცირე თეორემა. თეორემა 3.2-ის თანახმად ხარისხიანი მწკრივის ჯამი უწყვეტია კრებალობის $]-R, R[$ ინტერვალში. ისლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ხარისხიანი მწკრივი კრებალია $x = R$ ან $x = -R$ წერტილში.

თეორემა 3.3 (აბელი). ვთქვათ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ხარისხიანი

მწკრივის კრებალობის რადიუსია R . თუ ეს მწკრივი კრებალია $x = R$ წერტილში, მაშინ ის თანაბრად კრებალია $[0, R]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცებლად საჭიარსია ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მწკრივი $[0, R]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს თანაბრად კრებალობის კოშის კრიტერიუმს (იხ. თავი VI, თეორემა 2.3). დავუშვათ

$$S_{n,p} = a_{n+1} R^{n+1} + \dots + a_{n+p} R^{n+p}, \quad p=1, 2, \dots$$

მუხადია, რამე

$$\begin{aligned} a_{n+1} R^{n+1} &= S_{n,1}, \quad a_{n+2} R^{n+2} = S_{n,2} - S_{n,1}, \dots, \\ a_{n+p} R^{n+p} &= S_{n,p} - S_{n,p-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

იგივე ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რაცხვი, რადგანაც რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

კრებალია, ამიტომ არსებობს ისეთი $n(\varepsilon)$ რიცხვი რომ ყოველი $p \in N$ -თვის

$$|S_{n,p}| < \varepsilon, \quad (3.2)$$

როცა $n > n(\varepsilon)$.

თუ $0 \leq x \leq R$, მაშინ

$$\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \leq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} \leq \dots \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1. \quad (3.3)$$

(3.1), (3.2) და (3.3)-დან ვვაქვს

$$\begin{aligned} &|a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| = \\ &= |a_{n+1} R^{n+1} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \dots + a_{n+p} R^{n+p} \times \\ &\times \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}| = |S_{n,1}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right] + \\ &+ S_{n,2} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right] + \dots + \\ &+ S_{n,p-1} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right] + S_{n,p} \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \leq \\ &\leq |S_{n,1}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right] + |S_{n,2}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right] + \dots + |S_{n,p-1}| \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right] + \\ &+ |S_{n,p}| \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} < \varepsilon \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right] + \\ &+ \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right] + \dots + \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right] + \\ &+ \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} = \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0, R]. \end{aligned}$$

$\forall p \in N$ -თვის და $\forall x \in [0, R]$ -თვის, როცა $n > n(\varepsilon)$.

თეორემა დამტკიცებულია.

შეინიშნავთ ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ, თუ მწკრივი კრებალია $x = -R$ წერტილში, მაშინ ის იქნება თანაბრად კრებალი $[-R, 0]$ სეგმენტზე. ხოლო, თუ მწკრივი კრებალია ორივე $x = -R$ და $x = R$ წერტილში, მაშინ ის იქნება თანაბრად კრებალი $[-R, R]$ სეგმენტზე.

შედეგი. ვთქვათ ხარისხოვანი მწკრივის კრებალობის რადიუსია R . თუ ეს მწკრივი კრებალია $x = R$ წერტილში, მაშინ მისი უწყვეტია $[0, R]$ სეგმენტზე, ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow R} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

3. ხარისხოვანი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება და გაწარმოება. განვიხილოთ მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (3.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}, \quad (3.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (3.6)$$

(3.5) მწკრივი მიიღება (3.4) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით $[0, x]$ შუალედში, ხოლო (3.6) კი — (3.4) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით.

ლემმა (3.4), (3.5) და (3.6) მწკრივების კრებალობის რადიუსები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ R, R_1 და R_2 არის შესაბამისად (3.4), (3.5) და (3.6) მწკრივების კრებალობის რადიუსები. უტოლობებიდან

$$\left| \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \right| \leq |x| |a_n x^n| \leq x^2 |n a_n x^{n-1}|, \quad n=1, 2, \dots$$

გამომდინარეობს, რომ, თუ რამე x წერტილში კრებალია (3.6) მწკრივი, მაშინ იმავე წერტილში კრებალია (3.4) მწკრივი, და თუ რამე x

წერტილში კრებადია (3.4) მწკრივი, მაშინ იმავე წერტილში კრებადია (3.5) მწკრივიც. გამოდინარე აქედან

$$R_2 \leq R \leq R_1, \quad (3.7)$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ

$$R_1 \leq R_2. \quad (3.8)$$

იგივეს რაიმე $x_0 \neq 0$, ისეთი რომ $|x_0| < R_1$. ვაჩვენოთ, რომ ამ წერტილში კრებადია (3.6) მწკრივი. აჩვენოთ ისეთი r , რომ $|x_0| < r < R_1$. გვაქვს

$$|n a_n x_0^{n+1}| = \frac{n(n+1)}{x_0^2} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n+1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.9)$$

(3.5) მწკრივი კრებადია $x=r$ წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| = 0.$$

გამოდინარე აქედან არსებობს $M > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ

$$\left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \leq M, \quad n=0, 1, \dots$$

ვთქვათ $q = \left| \frac{x_0}{r} \right|$, მაშინ (3.9)-დან მივიღებთ

$$|n a_n x_0^{n+1}| \leq \frac{n(n+1)}{x_0^2} M q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

მწკრივი ზოგადი წევრით $\frac{n(n+1)}{x_0^2} M q^{n+1}$ კრებადია (შეამოწმეთ დამატების ნიშნით). ამიტომ $x=x_0$ წერტილში კრებადია აგრეთვე (3.6) მწკრივიც, ამით (3.8) უტოლობა დამტკიცებულია. (3.7) და (3.8) უტოლობებიდან გამომდინარე $R=R_1=R_2$. ლემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა არსებობს $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, ლემის პრაქტიკულობა გამომდინარეობს ტოლობებიდან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

თეორემა 3.4. ვთქვათ, (3.4) მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R > 0$, ხოლო ჯამია $f(x)$, მაშინ ყოველი $x \in]-R, R[$ -თვის

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

დამტკიცება. თეორემა 3.1-ის ძალით ყოველ $[-r, r]$ სუბ-ინტერვალზე, სადაც $0 < r < R$, (3.4) მწკრივი თანაბრად კრებადია. ამიტომ შესაძლებელია მისი წევრ-წევრად ინტეგრება.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.5. (3.4) მწკრივის $f(x)$ ჯამი წარმოუხადია ამ მწკრივის კრებადობის $]-R, R[$ ინტერვალში და ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad (3.10)$$

დამტკიცება. ლემის ძალით (3.10) მწკრივის კრებადობის რადიუსია R . ამიტომ თეორემა 3.1-ის თანახმად (3.10) მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ $[-r, r]$ სუბინტერვალზე, სადაც $0 < r < R$. ამრიგად პრაქტიკულია (3.10) ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ხარისხიანი მწკრივის ჯამს აქვს ყველა რიგის წარმოებული თავის კრებადობის ინტერვალში. ამასთან, ჯამის n -ური ($n=1, 2, \dots$) რიგის წარმოებული წარმოადგენს მწკრივის n -ვერ წევრ-წევრად გაწარმოებით მიღებულ მწკრივის ჯამს.

§ 4. ფუნქციის მაქსიმალური ხარისხიანი მწკრივად აპროქსიმაცია და მანკოვიჩის* მწკრივი

განსახილვეთ 4.1. ვთქვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია $]-r, r[$

ინტერვალში იშლება $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ხარისხიანი მწკრივად, თუ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in]-r, r[. \quad (4.1)$$

* პ. მანკოვიჩი (1898 — 1946) — შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

თეორემა 3.5-ის შედეგის თანახმად იქნათვის, რომ ფუნქცია გაი-
შალოს ზარბაზნებზე მწკრივად, აუცილებელია ამ ფუნქციას ჰქონდეს
ყველა რიგის წარმოებული მოცემულ შეიღულში.
გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 4.2. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია
 x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და ამ წერტილში აქვს ყველა რიგის
წარმოებული. მაშინ მწკრივს

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (4.2)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი x_0 წერტილში, როცა
 $x_0=0$, (4.2) მწკრივს მაკლორენის მწკრივი ეწოდება.
ახლა დავამტკიცოთ თეორემა, რომლისადაც გამოდინარეობს,
რომ ერთიადივე ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს (4.1) სახის ორი
სხვადასხვა გაშლა.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. ვთქვათ ზარბაზნებანი

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (4.3)$$

მწკრივის კრებლობის რადიუსია $R>0$, მაშინ ეს მწკრივი წარმოად-
გენს თავისი ჯამის ტეილორის მწკრივს.

დ ა მ ტ ე ბ ა 4.1. ვთქვათ

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

თეორემა 3.5-ის შედეგის თანახმად $f(x)$ ფუნქციის აქვს ყველა
რიგის წარმოებული $]-R, R[$ ინტერვალში და

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)n \dots 2a_{n+1}(x-x_0) + \dots$$

თუ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ გამოსახულებებში x -ის ნაცვლად
ჩავსვით x_0 -ს, მივიღებთ

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, \dots, f^{(n)}(x_0) = n! a_n, \dots$$

საიდანაც

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

ამრიგად, (4.3) მწკრივი წარმოადგენს თავისი $f(x)$ ჯამის ტეილო-
რის მწკრივს.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.1-დან გამომდინარეობს, რომ, თუ კრებლობის რადიუსი
ორი ზარბაზნებანი მწკრივის ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ტოლი
იქნება მათი კოეფიციენტები. ე. ი. თუ $f(x)$ ფუნქცია იშლება ზარბა-
ზნებანი მწკრივად, მაშინ ეს გაშლა ერთადერთია და ეს ზარბაზნები
მწკრივი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივს.

ისმემა კითხვა, მართებულია თუ არა შეზღუდული დებულება?
თუ $f(x)$ ფუნქციას $]-R, R[$ ინტერვალში გააჩნია ყველა რიგის
წარმოებული, მაშინ ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი იქნება თუ
არა კრებადი $]-R, R[$ ინტერვალში, და თუ კრებადი, იქნება თუ
არა მისი ჯამი $f(x)$ -ის ტოლი? საზოგადოდ პასუხი ამ კითხვაზე უარ-
ყოფილია მოცემულით სათანადო მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

ამ ფუნქციას $]-\infty, \infty[$ შეიღულში გააჩნია ყველა რიგის წარმოებუ-
ლი. მართლაც, თუ $x \neq 0$, ცხადია

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^5} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ყველა რიგის წარ-
მოებული $x=0$ წერტილშიც და გამოვთვალოთ ის. ცხადია, რომ

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0,$$

$$f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 0, \dots$$

მაშასადამე $f(x)$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივია

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

ამრიგად, მოცემული $f(x)$ ფუნქციისა და მათი მაკლორენის მწკრი-
ვის ჯამი ერთმანეთს ემთხვევა მხოლოდ და მხოლოდ $x=0$ წერტილში.

17. ს. თოფჩია, ე. ზიქილაძე, მ. გამახშილი, ნ. პეტრეშვილი

2. ი. $f(x)$ ფუნქცია არ იშლება თავის ტეილორის მწკრივად $x=0$ წერტილის არცერთ მიდამოში.

მოყვანილი ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული და მისი ტეილორის მწკრივი ყველგან კრებადი, მაგრამ მწკრივის ქაში არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას.

განვიხილოთ მაგალითიდან გამომდინარეობს, რომ ორ სხვადასხვა ფუნქციას ერთი და იგივე შუალედში შეიძლება ჰქონდეს ერთობლი-

ვივე ტეილორის მწკრივი, მართლაც თუ $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, მაშინ

ცხადია, რომ იგივე $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ტეილორის მწკრივი x_0 წერტილში

აქვს $\psi(x) + f(x)$ ფუნქციას, სადაც

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}, & \text{როცა } x \neq x_0, \\ 0, & \text{როცა } x = x_0. \end{cases}$$

მაგალითი 2. განვიხილოთ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ფუნქცია. ცხადია,

რომ ამ ფუნქციას გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული $]-\infty; \infty[$ შუალედში. $x=0$ წერტილის მიდამოში ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივია

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

მაგრამ ეს მწკრივი კი კრებადი $\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციისავე მხოლოდ $]-1, 1[$ ინტერვალში.

ეს არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომლის ტეილორის მწკრივი კრებადია მოცემული ფუნქციისავე მხოლოდ ამ ფუნქციის წარმოებადობის არის ნაწილში.

შევინახოთ, რომ არსებობს ისეთი ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული, მაგრამ მისი ტეილორის მწკრივი ყველგან განშალა, გარდა ერთი წერტილისა. მოვიყვანოთ ასეთი ფუნქცია მაგალითი.

მაგალითი 3. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cos n^2 x.$$

ამ ფუნქციას $]-\infty; \infty[$ შუალედში გააჩნია ყველა რიგის წარმოებული და

$$f^{(2k-1)}(0) = 0, \quad k \in N,$$

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n^{2k}, \quad k=0, 1, \dots$$

2. ი. მოცემული ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი შეიცავს მხოლოდ ლუწი ხარისხის შემცველ წევრებს და მისი $2k$ -ური წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობისათვის მართებულია შეფასება

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} n^{2k} x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n} \quad (x \neq 0),$$

ნებისმიერი $n=0, 1, 2, \dots$ -თვის და კერძოდ, როცა $n=2k$. n -ის ამ მნიშვნელობისათვის და ნებისმიერი $x \neq 0$ -თვის

$$\left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e} \right)^{2k} > 1,$$

აუ

$$k > \frac{e}{2|x|}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი განშალა ყველგან გარდა $x=0$ წერტილისა.

ახლა დავადგინოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $f(x)$ ფუნქცია, რომ მისი ტეილორის (4.2) მწკრივი რაიმე $]x_0-R; x_0+R[$ ინტერვალში, კრებადი იყოს $f(x)$ ფუნქციისავე. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ ეს საკითხი, დავწეროთ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულა

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + r_n(x), \quad (4.4)$$

რომელიც მართებულია ნებისმიერი $n \in N$ -თვის. (4.4) ფორმულაში $r_n(x)$ არის ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი და არა ტეილორის მწკრივის ნაშთითი წევრი. ვთქვათ

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

ამ აღნიშვნის გამოყენებით (4.4) ისე ჩაიწერება

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \quad (4.5)$$

ამ ტოლობაში $S_n(x)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივის n -ურ კერძო ჯამს.

თეორემა 4.2. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი კრებადი იყოს $f(x)$ ფუნქციისაკენ $[x_0 - R; x_0 + R]$ ინტერვალში, აუცილებელია და საკმარისი ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში აღვლილი ჰქონდეს ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (4.6)$$

თეორემის მართებულობა გამოდინარეობს (4.5) ტოლობიდან. მოვიყვანოთ (4.6) ტოლობის შესრულების საკმარისი ეფექტური პირობა.

თეორემა 4.3. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციის $[x_0 - R; x_0 + R]$ ინტერვალში აქვს ყველა რიგის წარმოებული, თუ არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad x \in [x_0 - R; x_0 + R], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

მაშინ $[x_0 - R; x_0 + R]$ ინტერვალში $f(x)$ ფუნქცია იშლება ტეილორის მწკრივად

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R.$$

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი $r_n(x)$ მისწრაფვის ნულისაკენ $[x_0 - R; x_0 + R]$ ინტერვალში. ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი ჩაგწეროთ ლაგრანჟის* სახით:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

ზღაღ $|\xi - x_0| < |x - x_0| < R$. (4.7) უტოლობის ძალით

$$|r_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (4.8)$$

* მ. ა. ლაგრანჟი (1736 — 1813) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ჩადგანაც (იხ. § 2-ის შიგლითი 4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

ამიტომ (4.8)-დან გვაქვს,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

ყოველი x -თვის $[x_0 - R; x_0 + R]$ ინტერვალთან. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გზაზე გამოდინარეობის მწკრივები

1. მანვენბლიანი e^x ფუნქცია. რადგანაც $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \dots$, ამიტომ ნებისმიერი $R > 0$ რიცხვისთვის

$$0 < f^{(n)}(x) < e^R, \quad \forall x \in [-R; R], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

მაშასადამე, e^x ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 4.3-ის პირობებს ნებისმიერ სასრულ ინტერვალში. ამიტომ e^x გაიშლება ხარისხოვან მწკრივად მთელს რიცხვით ღერძზე:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (5.1)$$

2. ჰიპერბოლური $\sinh x$ და $\cosh x$ ფუნქციები. (5.1)-დან გვაქვს

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \quad (5.2)$$

(5.1) და (5.2)-დან მივიღებთ

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (5.3)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (5.4)$$

ფუნქციის ხარისხიდან მწკრივად გაშლის ერთადერთობის ძალით (5.3) და (5.4) მწკრივები წარმოადგენენ შესაბამისად $\cosh x$ და $\sinh x$ ფუნქციების ტეილორის მწკრივებს $]-\infty; +\infty[$ შუალედში.

3. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ ფუნქცია. (5.1)-ის ძალით e^{-t^2} ფუნქციის ტეილორის მწკრივია:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R = +\infty$, ამიტომ შეიძლება მისი წევრ-წევრად ინტეგრება

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots, \quad (5.5)$$

ამრიგად, მივიღეთ ე. წ. პუასონის* ინტეგრალის (რომელიც წარმოადგენს არაელემენტარულ ფუნქციას) გაშლა ხარისხიდან მწკრივად.

4. $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციები. თუ $f(x) = \sin x$, მაშინ $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, ამიტომ $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ ყოველი $x \in]-\infty; +\infty[$ თვის. აქედან გამომდინარე თეორემა 4.3-ის ძალით $\sin x$ ფუნქცია იშლება მაკლორენის მწკრივად მთელს რიცხვით ღერძზე:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (5.6)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \quad (5.7)$$

* ს. ლ. პუასონი (1781—1840) — ფრანგი მათემატიკოსი და ფიზიკოსი.

$$5. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ ფუნქცია. (5.6)-ის ძალით, როცა } t \neq 0 \text{ გვაქვს}$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots \quad (5.8)$$

თუ ჩავთვლით, რომ $\left. \frac{\sin t}{t} \right|_{t=0} = 1$, მაშინ (5.8) გაშლის ადგილი ექნება $t = 0$ -თვისაც. (5.8) მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ სასრულ ინტერვალში. ამიტომ თუ მოვახდენთ (5.8) ტოლობის წევრ-წევრად ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (5.9)$$

ინტეგრალს $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ეწოდება ინტეგრალური სინუსი და აღინიშნება $\text{Si} x$ სიმბოლოთი. როგორც ვიცით ის არაელემენტარული ფუნქციაა:

$$\text{Si} x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

6. $\int_0^x \sin t^2 dt$ ფუნქცია. (5.6)-ის ძალით $y = \sin t^2$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივია:

$$\sin t^2 = \frac{t^2}{1!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \dots$$

ეს მწკრივი კრებადია $]-\infty; +\infty[$ ინტერვალში. ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \dots \quad (5.10)$$

$$\int_0^x \sin t^2 dt \text{ არაელემენტარული ფუნქციაა.}$$

7. $\ln(1+x)$ ფუნქცია. როგორც ვიცით

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრირებით, როცა $|x| < 1$, მივიღებთ

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (5.11)$$

ამ მწკრივის ეწოდება ლოგარითმული მწკრივი. მისი კრებადობის რადიუსი $R=1$.

(5.11) ფორმულა ძალაში რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა $x=1$. მართლაც, თუ $x=1$, გვაქვს მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

რომელიც კრებალია. მაშასადამე აბელის მეორე თეორემის ძალით

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ე. ი.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (5.12)$$

8. $\arctg x$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი მიიღება

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots$$

მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრირებით ($|x| < 1$):

$$\arctg x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (5.13)$$

ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=1$.

(5.13) ფორმულა ძალაში რჩება მაშინაც, როცა $x=1$. მართლაც ამ შემთხვევაში მიიღება მწკრივი

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

ეს მწკრივი კრებალია. ამიტომ აბელის მეორე თეორემის ძალით

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctg x = \arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

ე. ი.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots \quad (5.14)$$

9. $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$, ფუნქცია. ელემენტარული გამოთვლებით მიიღება, რომ

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n},$$

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1).$$

მტკიცდება, რომ ფუნქციის მაკლორენის ფორმულის $R_n(x)$ ნაშთითი წევრისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (-1 < x < 1).$$

ამიტომ ნებისმიერი ნამდვილი a -თვის $(1+x)^a$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივს აქვს სახე

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k = \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \quad (5.15)$$

თუ $a \in \mathbb{N}$, მაშინ $(1+x)^a$ — მრავალწევრია, ამიტომ $R_n(x) \equiv 0$, როცა $n > a$ და ამ შემთხვევაში (5.15) მწკრივი იქნება ტეილორის მრავალწევრი.

შე ნ ი შ ვ ნ ა. მტკიცდება, რომ (5.15) მწკრივი $x=1$ წერტილში აბსოლუტურად კრებალია, როცა $a > 0$, პირობით კრებალია, როცა $-1 < a < 0$, ხოლო ვანშლადია, როცა $a \leq -1$. (5.15) მწკრივი $x=-1$ წერტილში აბსოლუტურად კრებალია, როცა $a > 0$ და ვანშლადია, როცა $a < 0$. (5.15) მწკრივის ბინომურის მწკრივი ეწოდება.

10. $\arcsin x$ ფუნქცია. რადიანად $(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. ამიტომ ჯერ კიბოვით $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ფუნქციის ვაშლა ტეილორის მწკრივად. (5.15)-ის ძალით $(x = -t^2, \alpha = -\frac{1}{2})$:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n} + \dots$$

ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრირებით 0-დან x -მდე ($|x| < 1$) მივიღებთ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (5.16)$$

ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=1$. მტკიცდება, რომ (5.16) მწკრივი კრებადია $x = \pm 1$ წერტილებშიც.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ მწკრივის ჯამის გამოთვლა. ადვილია ჩვენება, რომ

ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R=1$. ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როცა $|x| < 1$ და განშლადია, როცა $|x| \geq 1$. თუ ამ მწკრივის ჯამს აღვნიშნავთ $S(x)$ -ით, მაშინ

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (|x| < 1, x \neq 0).$$

მოვხაზინოთ ამ მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება 0-დან x -მდე ($|x| < 1$), გვექნება

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

* გენსაზღვრებით $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)$.

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ იგივეობას:

$$\frac{S(x)}{x} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

საიდანაც

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

12. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ მწკრივის ჯამის გამოთვლა. ამ მწკრივის კრება-

დობის რადიუსი $R=1$. მოცემული მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით მივიღებთ

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

აქედან

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

საიდანაც

$$S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}. \quad (5.17)$$

ცხადია, რომ $S(0)=0$, ამიტომ (5.17)-ის ინტეგრირებით 0-დან x -მდე გვექნება

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

ამრიგად, მოცემული მწკრივის ჯამი არაელემენტარული ფუნქციაა.

§ 6. ხარისხიანი მწკრივების გამოყენება
ფიზიკურში გამოთვლებში

1. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა. გამოვთვალოთ 0,0001 სიზუსტით $\sin 18^\circ$.

18° რადიანებში იქნება $\frac{\pi}{10}$ (5.6) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \dots$$

მივიღოთ ნიშანმოწველობითი მწკრივი, რომელიც აკმაყოფილებს ლეიბნიცის თეორემის პირობებს. ამიტომ ამ მწკრივის ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია უკუგდებული პირველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე. რადგანაც $\frac{\pi^3}{3!10^3} > 0,0001$, ხო-

ლო $\frac{\pi^5}{5!10^5} < 0,0001$, ამიტომ $0,0001$ სიზუსტით გვაქვს

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\pi \approx 3,14159 \Rightarrow \pi^3 \approx 31,00624$, მაშინ

$$\sin 18^\circ = \frac{3,14159}{10} - \frac{31,00624}{6000} = 0,31416 - 0,00517 = 0,30899,$$

ამრიგად $\sin 18^\circ \approx 0,3090$.

2. **ლოგარითმის გამოთვლა.** გამოვთვალოთ $0,00001$ სიზუსტით $\ln 2$. (5.12)-ის ძალით

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

აქედან ჩანს: იმისათვის, რომ მივიღოთ $\ln 2$ -ის მნიშვნელობა 10^{-5} სიზუსტით საჭიროა ავიღოთ მწკრივის პირველი 100000 წევრი. ეს მწკრივი „ნელი“ კრებადი მწკრივია, ამდენად მისი გამოყენება $\ln 2$ -ის ღირს სიზუსტით გამოსათვლელად პრაქტიკულად უეარგისია. ამიტომ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ლოგარითმის გამოსათვლელად მიმართავენ სხვა ხერხს. (5.11) ტოლობაში x შევცვალოთ $-x$ -ით, მივიღებთ

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

ეს ტოლობა გამოვიყენოთ (5.11) ტოლობას წევრ-წევრად, გვაქნება

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

თუ ამ ფორმულაში ჩავსვამთ $x = \frac{1}{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, მივიღებთ ნატურალური რიცხვების ლოგარითმების გამოსათვლელ შემდეგ ფორმულას

$$\ln(m+1) = \ln m + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2m+1)^{2k+1}} \quad (6.1)$$

(6.1) „სწრაფად“ კრებადი მწკრივია. თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $m=1$, გვაქნება

$$\ln 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} \quad (6.2)$$

ეს მწკრივი გეომეტრიულ პროგრესიაზე სწრაფად კრებადი მწკრივია. 10^{-5} სიზუსტით $\ln 2$ -ის გამოსათვლელად, საჭიროა ავიღოთ (6.2) მწკრივის პირველი ხუთი წევრის ჯამი:

$$\ln 2 \approx 0,693146.$$

3. **π -ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა.** გამოვთვალოთ 10^{-6} სიზუსტით π რიცხვი. (5.14)-დან გვაქვს

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad (6.3)$$

ეს მწკრივიც ნიშანმოწველობითი ნელა კრებადი მწკრივია. ამ მწკრივის ნაშთი (ლეიბნიცის თეორემის ძალით) ფასდება უტოლობით

$$|R_n| = \left| 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| < \frac{4}{2n+1}$$

აქედან ცხადია, $|R_n| < 10^{-6}$, როცა $n = 2 \cdot 10^6$. ამრიგად უნდა ავიღოთ (6.3) მწკრივის 2 მილიონი შესაყარები, რათა მივიღოთ π -ს მნიშვნელობა 10^{-6} სიზუსტით. რაც ბუნებრივია პრაქტიკულად უეარგისია.

ამიტომ მიმართავენ სხვა გზას, ვთქვათ $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, მაშინ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tg} \left(4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

აქედან

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

საიდანაც (5.13)-ის გამოყენებით, გვაქვს

$$\begin{aligned} \pi &= 16\alpha - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \\ &= 16 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვნივ მდგომი მწკრივები სწრაფად კრებადი მწკრივებია. აღვიღოთ შემოწმება, რომ პირველი მწკრივის ოთხი შესატყვისა და მეორე მწკრივის ორი შესატყვისი აღება გვაძლევს სასურველ შედეგს:

$$\pi \approx 3,141592.$$

4. ღვხვის გამოთვლა. გამოვთვალოთ 10^{-3} სიზუსტით $\sqrt[5]{40}$. წარმოვაღვიწხოთ $\sqrt[5]{40}$ შემდეგი სახით $\sqrt[5]{40} = 2 \sqrt[5]{\frac{40}{32}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{1/5}$.

(5.15)-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{40} &= 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{1/5} = 2 \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \left(\frac{1}{5} - 2 \right) \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \left. \right) = 2 + \frac{2}{5 \cdot 4} - \\ &- \frac{2 \cdot 4}{2! \cdot 5^2 \cdot 4^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot 4^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 4^4} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{ენიდან } \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot 4^3} > 0,001, \text{ ხოლო } \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 4^4} < 0,001,$$

ამიტომ საკმარისია ავიღოთ პირველი ოთხი წევრის ჯამი, რაც გვაძლევს $\sqrt[5]{40} \approx 2,0915$.

5. ინტეგრალის გამოთვლა. ა) გამოვთვალოთ 10^{-3} სიზუსტით ინტეგ-

$$\text{რალი } \int_0^{1/3} e^{-x^2} dx.$$

(5.5)-ის ძალით გვაქვს

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3! \cdot 3^7} + \dots \quad (6.4)$$

$$\text{ჩაღვნიავ } \frac{1}{3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0,001, \text{ ხოლო } \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,001,$$

ამიტომ 10^{-3} სიზუსტით $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ -ის მნიშვნელობას გვაძლევს (6.4)

მწკრივის პირველი ორი წევრის ჯამი:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0,3333 - 0,0123 = 0,3210.$$

ამრიგად

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx 0,321.$$

ბ) გამოვთვალოთ 10^{-4} სიზუსტით ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. (5.9)

ტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (6.5)$$

აღვიღოთ შემოწმება, რომ $\frac{1}{7 \cdot 7!} < 0,00003$, ამიტომ 10^{-4} -ის სი-

ზუსტით მოცემული ინტეგრალის გამოსათვლელად საკმარისია ავიღოთ (6.5) მწკრივის პირველი სამი წევრი:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0,9461.$$

ვ) გამოვთვალოთ 10^{-4} სიზუსტით ინტეგრალი $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

(5.10)-დან გვაქვს

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \dots \quad (6.6)$$

რადგანაც $\frac{1}{1320} > \frac{1}{10000}$, ხოლო $\frac{1}{75600} < \frac{1}{10000}$,

ამიტომ საკმარისია ავიღოთ (6.6) მწკრივის პირველი სამი წევრი:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0,31027.$$

§ 7. ხარისხობანი მწკრივების გამოყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნაში

1. ვიპოვოთ $y'' = xy$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ საწყის პირობებს.

ვუძებნოთ ამ განტოლების ამონახსნი

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (7.1)$$

ხარისხობანი მწკრივის სახით.

საწყისი პირობების გათვალისწინებით

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

(7.1)-დან გვაქვს

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \dots$$

თუ y და y'' -ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში მივიღებთ

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \dots = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots + a_n x^{n+1} + \dots$$

x -ის ერთნაირი ხარისხის კოეფიციენტების გატოლებით გვექნება

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 0, \\ 6a_3 &= 1, \\ 12a_4 - a_1 &= 0, \\ 20a_5 - a_2 &= 0, \\ 30a_6 - a_3 &= 0, \\ 42a_7 - a_4 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} a_2 &= a_4 = \dots = a_{2n+2} = \dots = 0, \\ a_1 &= a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0, \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad a_5 = \frac{1}{5 \cdot 7} a_3, \dots, a_{2n+3} = \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} a_{2n+1}, \dots$$

ე. ი. საბოლოოდ გვაქვს

$$a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1 \cdot 4}{6!}, \dots, a_{2n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!},$$

მაშასადამე

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{2n+1} + \dots \quad (7.2)$$

ადვილია ჩვენება, რომ ეს მწკრივი კრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. ამიტომ (7.2) აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას ნებისმიერი x -თვის.

2. ვიპოვოთ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (7.3)$$

ბესელის* განტოლების ზოგადი ამონახსნი ($\nu = \text{const}$). ვუძებნოთ კერძო ამონახსნი

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^{k+\lambda}$$

* ფ. ვ. ბესელის (1784—1846) — გერმანელი ასტრონომი, 18. ს. თოფური, ე. სოპოლივი მ. გამბაშვილი, ნ. შაპარაშვილი

ხარისხოვანი მწკრივის სახით, მაშინ

$$\begin{aligned} xy' &= \sum_{k=0}^{\infty} (v+k) a_k x^{v+k}; \\ x^2 y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} (v+k)(v+k-1) a_k x^{v+k}; \\ (x^2 - v^2) y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{v+k+2} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{v+k} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{v+k} - v^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{v+k}. \end{aligned}$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2) y &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(v+k)^2 - v^2] a_k x^{v+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{v+k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(2v+k) a_k x^{v+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{v+k} = 0, \end{aligned}$$

ანუ

$$(2v+1) a_1 x^{v+1} + \sum_{k=2}^{\infty} [k(2v+k) a_k + a_{k-2}] x^{v+k} = 0,$$

აქედან $a_k (k=0, 1, \dots)$ უცნობების განსაზღვრავად ვღებულობთ წრფივ განტოლებათა უსასრულო სისტემას

$$\begin{cases} (2v+1) a_1 = 0, \\ k(2v+k) a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

იქიდან გამომდინარე $a_1=0$, მივიღებთ, რომ ყველა კენტინდექსიანი კოეფიციენტი იქნება ნული ($a_{2k+1}=0$), ხოლო ლუწინდექსიანი კოე-

ფიციენტები, ნებისმიერი a_0 -თვის (ჩვეულებრივ, კი a_0 მუდმივად იღებენ $a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$ რიცხვს, სადაც Γ არის ეილერის გამა-ფუნქცია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას $\Gamma(v+1) = v \Gamma(v)$):

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{4(v+1)} = -\frac{1}{2^{v+2}(v+2)\Gamma(v+1)} = -\frac{1}{2^{v+2}1!\Gamma(v+2)}; \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4 \cdot 2(v+1)} = \frac{1}{2^{v+4}2!(v+2)\Gamma(v+2)} = \frac{1}{2^{v+4}2!\Gamma(v+3)}; \\ &\dots \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{v+2k}k!\Gamma(v+k+1)}; \\ &\dots \end{aligned}$$

ამრიგად, (7.3) განტოლების ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} x^v - \frac{1}{2^{v+2} 1! \Gamma(v+2)} x^{v+2} + \frac{1}{2^{v+4} 2! \Gamma(v+3)} x^{v+4} - \\ &\dots + \frac{(-1)^k}{2^{v+2k} k! \Gamma(v+k+1)} x^{v+2k} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{v+2k}}{k! \Gamma(v+k+1)}. \end{aligned}$$

ეს მწკრივი კრებალია $[0, +\infty[$ შუალედში და გამომდინარე აქედან წარმოადგენს (7.3)-ის ამონახსნს ამ შუალედში (იმ კერძო შემთხვევაში, როცა v მთელია) $]-\infty; +\infty[$ ($x \neq 0$) შუალედში).

ფუნქციას

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{v+2k}}{k! \Gamma(v+k+1)} \quad (7.4)$$

ეწოდება ბესელის, v რიგის, პირველი გვარის ფუნქცია. ის ბესელის განტოლების ერთი კერძო ამონახსნია. იმ შემთხვევაში როცა v არა-უარყოფითი მთელი რიცხვაა ($v=n$), მაშინ (7.4)-დან მივიღებთ

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!},$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

როცა γ არ არის მთელი რიცხვი, მაშინ $I_\gamma(x)$ და $I_{-\gamma}(x)$ ფუნქციები წარმოადგენენ (7.3) განტოლების კერძო ამონახსნებს, ეს ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, ვინაიდან მათი შესაბამისი (7.4) მწკრივები იწყება x -ის სხვადასხვა ხარისხიდან; ამიტომ

$$I = C_1 I_\gamma(x) + C_2 I_{-\gamma}(x) \quad (7.5)$$

არის (7.3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თუ $\gamma = -n$ (მთელი უარყოფითი რიცხვია), მაშინ მტკიცდება, რომ

$$I_{-n}(x) = (-1)^n I_n(x).$$

ე. ი. ეს ფუნქციები წრფივად დამოკიდებელია, ამიტომ (7.5) ამ შემთხვევაში არ გვაძლევს (7.3)-ის ზოგად ამონახსნს. არა მთელი γ რიცხვისთვის შემოვიღოთ ფუნქცია

$$y_\nu(x) = \frac{I_\nu(x) \cos \nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

მტკიცდება, რომ ფუნქცია

$$y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} y_\nu(x)$$

აკმაყოფილებს (7.3) განტოლებას და, ფუნქციები $I_n(x)$ და $y_n(x)$ წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. ამდენად, ამ შემთხვევაში ბესელის (7.3) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 y_n(x).$$

$y_n(x)$ ფუნქციას ეწოდება ბესელის, n რიგის, მეორე ვარიანტის ფუნქცია.

მოდვეთა

ფორმის* მწკრივები

ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკაში ხშირად საჭმე გვაქვს პერიოდულ პროცესებთან, მაგალითად, მანქანებისა და ხელსაწყოების სხვადასხვა ნაწილის რხევითი და ბრუნვითი მოძრაობა, ციური სხეულები

* ჟ. ფ. ჟ. ი. ე. (1768 — 1830) — ფრანგი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი.

ბისა და ელემენტარული ნაწილაკების პერიოდული მოძრაობა, აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური რხევები და სხვა.

მათემატიკურად ყველა ასეთი პროცესი აღიწერება პერიოდული ფუნქციებით.

§ 1. პერიოდული ფუნქციები, პერიოდული გაზრდილობა

ვაქვით f ფუნქციის განსაზღვრის სიძრავლეა E . f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული პერიოდით l ($l \neq 0$), თუ ყოველი x -თვის E -დან, რიცხვები $x+l$ და $x-l$ აგრეთვე ეკუთვნის E -ს და მართებულია ტოლობა*

$$f(x+l) = f(x).$$

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მთელი n სათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x+nl) = f(x).$$

თუ f ფუნქციის პერიოდია l , მაშინ $\varphi(x) = f(ax)$ ფუნქციის პერიოდი, ზალიც $a \neq 0$, იქნება $\frac{l}{a}$. მართლაც $\forall x \in]-\infty; +\infty[$ გვაქვს

$$\varphi\left(x + \frac{l}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{l}{a}\right)\right] = f(ax+l) = f(ax) = \varphi(x).$$

თეორემა 1.1. თუ f ფუნქციის პერიოდია l და ის ინტეგრებალია რაიმე $[a, a+l]$ სეგმენტზე, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_b^{b+l} f(x) dx = \int_a^{a+l} f(x) dx, \quad (1.1)$$

სადაც b ნებისმიერი რიცხვია.

ღამტკიცება გვაქვს

$$\int_b^{b+l} f(x) dx = \int_b^a f(x) dx + \int_a^{a+l} f(x) dx + \int_{a+l}^{b+l} f(x) dx. \quad (1.2)$$

* ამ თავში ჩვენ საჭმე გვაქვს $]-\infty; +\infty[$ მთელში განსაზღვრულ პერიოდულ ფუნქციებთან.

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მესამე ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა $x=t+l$, მივიღებთ

$$\int_{a+l}^{b+l} f(x) dx = \int_a^b f(t+l) dt = \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx.$$

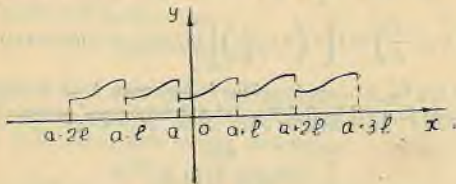
(1.2) და (1.3)-დან მიიღება (1.1).

თვორცემა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ ინტერვალში. განესაზღვროთ F ფუნქცია ტოლობით

$$F(x) = \begin{cases} f(x-kl), & \text{როცა } a+kl < x < b+kl, \\ \frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}, & \text{როცა } x = a+kl, \end{cases}$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო $l=b-a$. ცხადია, რომ F ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში; იგი პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდი უდრის l -ს. ამ F ფუნქციის ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პერიოდული გაგრძელება (ნახ. 63).



ნახ. 63

§ 2. პერიოდული მართკუთხედის ფუნქციის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა

ტრიგონომეტრიული მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2.1)$$

სადაც $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ნამდვილი რიცხვებია. ამ რიცხვებს (2.1) მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება. ცხადია რომ თუ (2.1)

მწკრივი კრებადია მაშინ ამ მწკრივის ჯამი წარმოადგენს 2π პერიოდის მქონე ფუნქციას.

(2.1) მწკრივის კერძო ჯამები წარმოადგენენ

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (2.2)$$

სისტემის ფუნქციათა წრფივ კომბინაციებს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ე რ ე ბ ა 2.1. ფუნქციათა (2.2) სისტემას ეწოდება ტრიგონომეტრიული სისტემა.

ლ ე მ ა. (2.2) ტრიგონომეტრიულ სისტემას აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, \quad n \neq m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ყოველი მთელი არაუარყოფითი m და n -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $m \neq n$, გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx = \\ &= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება (2.3)-ის მეორე და მესამე ტოლობები. შემდეგ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.1. ვთქვათ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.4)$$

და (2.4) მწკრივი თანაბრად კრებადი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n=0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

დამტკიცება. რადგან (2.4) მწკრივი თანაბრად კრებადი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ მისი $f(x)$ ჯამი უწყვეტია ამ სეგმენტზე. გარდა ამისა, თუ ამ მწკრივის წევრ-წევრად გაამრავლებთ $\cos mx$ -ზე მივიღებთ

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos mx$$

აგრეთვე თანაბრად კრებად მწკრივს $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ამ ტოლობის წევრ-წევრად ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx.$$

აქედან (2.3) ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m,$$

საიდანაც

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

ანალოგიურად მტკიცდება (2.5)-ის მეორე ტოლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

განსახილვერება 2.2. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. (2.1) ტრიგონომეტრიულ მწკრივს, სადაც a_n და b_n კოეფიციენტები გამოთვლილია (2.5) ფორმულებით ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ანუ, შეშოკლებით, ფურიეს მწკრივი, ხოლო a_n და b_n რიცხვებს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები.

ცხადია, რომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი f ფუნქციისათვის ყოველთვის შეგვიძლია შევადგინოთ ფურიეს კოეფიციენტები და, მაშასადამე ფურიეს მწკრივიც. მაგრამ ეს მწკრივი შეიძლება იყოს კრებადი და შეიძლება არა (არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი ზოგიერთ წერტილზე განშლილია). კრებადობის შემთხვევაში მწკრივის ჯამი კრებადობის წერტილზე შეიძლება არ უდრიდეს იმ ფუნქციის მნიშვნელობას, რომლის ფურიეს მწკრივსაც იგი წარმოადგენს.* ამიტომ ვწერთ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

ასეთი ჩაწერა მხოლოდ იმას ნიშნავს, რომ ამ მწკრივის კოეფიციენტები f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. სიზოლო $\sim$ შევადგინა შევცვალოთ = ნიშნით მხოლოდ მაშინ, როდესაც მწკრივი კრებადი $f(x)$ -საქენ. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ f ფუნქცია იშლება ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად.

* მტკიცდება, რომ, თუ უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადი, მაშინ მისი ჯამი იუთილბლად უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას კრებადობის წერტილზე (იხ. თეორემა 14.1-ის შედეგი 1).

ჩვენი მიზანია შევსწავლოთ ის პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ფურიეს მწკრივის კრებადობას. კრებადობის შემთხვევაში დავადგინოთ რას უდრის მისი ჯამი, კერძოდ რა პირობებში ემთხვევა ის იმ ფუნქციას, რომლის ფურიეს მწკრივსაც იგი წარმოადგენს.

ახლა თვორემა 2.1-ის შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

თანაბრად კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი მისი ჯამის ფურიეს მწკრივია.

(2.1) მწკრივის წევრები შეიძლება ჩავწეროთ ე. წ. პარმონიკების სახით

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nx \right) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos nx \cos \omega_n + \sin nx \sin \omega_n) = A_n \cos (nx - \omega_n),$$

სადაც

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{და} \quad \omega_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

$A_n \cos (nx - \omega_n)$ ფუნქცია განსაზღვრავს წერტილის პარმონიკულ რხევას A_n ამპლიტუდით, n სიხშირით და ω_n ფაზით.

§ 3. დირიხლეს ინაპერალ

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n -ური კერძო ჯამი, რომელსაც აღნიშნავენ $S_n(f; x)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ a_k და b_k -ს მნიშვნელობებს (2.5) ტოლობებიდან და მოვახდენთ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \quad (3.1)$$

სადაც

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$D_n(t)$ ფუნქციის ეწოდება დირიხლეს გული, ხოლო (3.1) ინტეგრალს — დირიხლეს ინტეგრალი.

ლ ე მ ა 1. დირიხლეს გულს აქვს თვისებები:

1) ის 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი ლუწი ფუნქციაა, ამასთან

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

$$2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \quad (3.4)$$

3) თუ $t \neq 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, მაშინ

$$D_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

დ ა მ ტ ა ი ც ე ბ ა. დირიხლეს გულის პერიოდულობა, ლუწობა და უწყვეტობა უშუალოდ გამომდინარეობს (3.2) ტოლობიდან. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, აგრეთვე (3.3)-ის და (3.4)-ის მართებულობა;

მართლაც

$$D_n(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 0 = \frac{1}{2} + n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = \pi.$$

გაჩვენეთ (3.5)-ის მართებულობა. გვაქვს

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{t}{2} \cos kt \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{2k+1}{2} t - \sin \frac{2k-1}{2} t \right) \right] = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

$t \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \dots$

ლემმა დამტკიცებულია.

რადგანაც $D_n(t)$ ლუწოა, ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt,$$

საიდანაც (3.4)-ის ძალით გვაქვს

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1. \quad (3.6)$$

ლემმა 2. თუ $f(x)$ არის 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია, მაშინ

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt \quad (3.7)$$

და

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (3.8)$$

დამტკიცება. (3.1) ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $t-x=u$, გვექნება

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du.$$

ვინაიდან $f(x+u)$ და $D_n(u)$ ფუნქციების პერიოდია 2π , ხოლო $[-\pi-x, \pi-x]$ სეგმენტის სიგრძეა 2π , ამიტომ თეორემა 1.1-ის ძალით

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

ე. ი. მართებულია (3.7) ფორმულა.

ახლა ვახეენოთ (3.6)-ის მართებულობა. (3.7)-დან გვაქვს

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x+t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt. \quad (3.9)$$

რადგან $D_n(-t) = D_n(t)$, ამიტომ თუ (3.9) ტოლობის პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას $t=-u$ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x+t) dt &= - \int_{-\pi}^0 D_n(-u) f(x-u) du = \\ &= \int_0^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.9) და (3.10)-დან მიიღება (3.8).

ლემმა დამტკიცებულია.

თუ (3.6)-ს გავამრავლებთ S -ზე და გამოვაკლებთ (3.8)-ს, მივიღებთ

$$S_n(f; x) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S] D_n(t) dt. \quad (3.11)$$

ფურიეს მწკრივის კრებადობის დასადგენად ვისარგებლებთ (3.11) ფორმულით.

ამრიგად, ფურიეს მწკრივის კრებადობის საკითხის შესწავლა x წერტილში დაყვანილია ღირისლეს ინტეგრალის კრებადობის შესწავლაზე იმავე წერტილში.

§ 4. რიგების ლეზა. ლოპატიშვილის პრინციპი

განსაკუთრება 4.1. f ფუნქციის ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ არსებობს ამ სეგმენტის სასრული დანაწილება $a=x_0 < x_1 < \dots < x_k=b$ ისეთი, რომ f უწყვეტია ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, k$) ინტერვალზე და არსებობს სასრული ლეზები

$$f(x_{i-1}+) = \lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x),$$

$$f(x_i-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x).$$

ლემმა (რიმანი), თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0, \quad (4.1)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0. \quad (4.2)$$

დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ (4.1) ტოლობის მართებულობა, ვინაიდან (4.2) ტოლობა მტკიცდება ანალოგიურად. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებია $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ ($x'_1 < \dots < x'_p$). (4.1) ტოლობის დამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $f(x) \cos \lambda x$ ფუნქციიდან მოისწრაფვის ნულისაკენ ყოველ $[a, x'_1], [x'_1, x'_2], \dots, [x'_p, b]$ სეგმენტზე, როცა $\lambda \rightarrow \infty$. ვთქვათ $[a, \beta]$ ერთ-ერთი ასეთი სეგმენტი. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია გავულისხმიოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, \beta]$ სეგმენტზე (ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე თუ რა მნიშვნელობას მიიღებს $f(x)$ ფუნქცია a და β წერტილებში). რადგან $f(x)$ უწყვეტია $[a, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ ის იქნება შემოსაზღვრული და თანაბრად უწყვეტიც ამ სეგმენტზე:

$$|f(x)| \leq M \quad (a \leq x \leq \beta). \quad (4.3)$$

თანაბრად უწყვეტობის ძალით ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს, ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $x', x'' \in [a, \beta]$ -თვის

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - a)}, \quad \text{როცა } |x' - x''| < \delta. \quad (4.4)$$

დევანაწილოთ $[a, \beta]$ სეგმენტი წერტილებით $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$ ისე, რომ

$$x_i - x_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

მაშინ

$$\left| \int_a^\beta f(x) \cos \lambda x dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x dx \right| =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \cos \lambda x dx + \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx \right|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

რადგან

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx \right| = \left| \frac{\sin \lambda x_i - \sin \lambda x_{i-1}}{\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|},$$

ამიტომ (4.5)-დან (4.3)-ისა და (4.4)-ის ძალით, გვაქვს

$$\left| \int_a^\beta f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2(\beta - a)} dx + \sum_{i=1}^n \frac{2M}{|\lambda|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Mn}{|\lambda|}.$$

აქედან, როცა $|\lambda| > \frac{4Mn}{\varepsilon}$, მიიღება

$$\left| \int_a^\beta f(x) \cos \lambda x dx \right| < \varepsilon.$$

შ. ი.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

ლემმა დამტკიცებულია.

შედეგი. უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები a_n და b_n ნულისაკენ მოისწრაფვიან, როდესაც $n \rightarrow \infty$, რიმანის ლემის უშუალო შედეგია აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 4.1. $S_n(f; x)$ კერძო ჯამის ზღვრის არსებობა, როცა $n \rightarrow \infty$ და ამ ზღვრას სიდიდე დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ f ფუნქციის მნიშვნელობაზე x წერტილის მიდამოში.

ე. ი. თუ δ ნებისმიერი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt.$$

ამ თეორემას უწოდებენ ლოკალიზაციის პრინციპს.

ლოკალიზაციის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორი ფუნქცია რაიმე x წერტილის მიდამოში (რაგინდ „მცირე“ არ უნდა იყოს ის) ლეზულობს ერთმანეთის ტოლ მნიშვნელობებს, მაშინ მათი ფურიეს მწკრივები ამ x წერტილზე ერთდროულად ან კრებადია ან ვანშლიდი, ამასთან კრებადობის შემთხვევაში მათი ჯამი ერთი მეორის ტოლია. ეს გაგრძელება საინტერესოა იმით, რომ ასეთი ფუნქციების ფურიეს მწკრივები სხვადასხვა, მაგრამ x წერტილზე კი კრებადობის თვალსაზრისით მათ ერთნაირი თვისებები გააჩნიათ.

შენიშვნა: მტკიცდება, რომ რიმანის ლემა მართებულია უფრო ფართე კლასის ფუნქციებისათვის. მაგალითად, თუ $f(x)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე ე. ი. არსაყუთრთივი ინტეგრალი

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty, \quad \text{მაშინ ასეთი ფუნქციებისათვის აღდგენილი აქვს (4.1) და (4.2) ტოლობებს.}$$

§ 5. ფურიეს მწკრივის წარმოდგენა აკმაბლუმის ზომიერით ნიშნად

ვთქვათ 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე. (3.11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის x წერტილში S რიცხვისაგან კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისია

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2S] D_n(t) dt = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0. \end{aligned}$$

$$\text{რადგანაც } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = 1, \text{ ამიტომ ეს პირობა}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0$$

პირობის ექვივალენტურია.

თუ x არის f ფუნქციის პირველი ვიწრო წვერის წერტილი, მაშინ მისი მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები x წერტილში განსაზღვრებად შესაბამისად ტოლობები

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ f_-(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

განსაზღვრება 5.1. f ფუნქციას ვწოდებ უბან-უბან წარმოდგენილად $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ არსებობს ამ სეგმენტის სასრული დანაწილება $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ ისეთი, რომ f წარმოებადია ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ ინტერვალში და არსებობს სასრული წარმოებულები $f_+(x_{i-1}), f_-(x_i), i=1, 2, \dots, n$.

თეორემა 5.1. ვთქვათ 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. თუ $f(x)$ ფუნქციის x წერტილში აქვს სასრული ცალმხრივი წარმოებულები $f_+(x)$ და $f_-(x)$, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი x წერტილში კრებადია

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (5.1)$$

მნიშვნელობისაგან*. კერძოდ როცა x არის უწყვეტობის წერტილი, მაშინ ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x)$ -სავე.

დამტკიცება. (3.11) ტოლობა $S = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ -თვის

მიიღებს სახეს

$$S_n(f; x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} =$$

* $x=-\pi$ და $x=\pi$ წერტილებში მწკრივის ჯამი უდრის $\frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_1(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_2(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt, \quad (5.2)
\end{aligned}$$

სადაც

$$F_1(t) = \frac{f(x+t) - f(x+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad F_2(t) = \frac{f(x-t) - f(x-)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

ეს ფუნქციები უბან-უბან უწყვეტია $[0; \pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ რი-
მანის ლემის ძალით (5.2)-დან გამომდინარეობს თეორემის მართებუ-
ლობა.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია $[-\pi; \pi]$
სეგმენტზე. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებალია $x_0 \in]-\pi; \pi[$ წერტილ-
ში, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი ამ წერტილში კრებალია $f(x_0)$ -საკენ.

შედეგი 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან წარმოებალია $[-\pi; \pi]$
სეგმენტზე, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი კრებალია $[-\pi; \pi]$ ინტერვა-
ლის ყოველ წერტილში (5.1) მნიშვნელობისაკენ.

შედეგი 3. $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე უწყვეტი და უბან-უბან წარ-
მოებალი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებალია ფუნქციის მნიშვნელო-
ბისაკენ $[-\pi; \pi]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო $x = -\pi$ და
 $x = \pi$ წერტილებში კრებალია

$$\frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

მნიშვნელობისაკენ.

განსახილვეთ 5.2. f ფუნქციის ეწოდება უბან-უბან მონო-
ტონური $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ არსებობს ამ სეგმენტის სასრული და-

ნაწილები $a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, ისეთი, რომ f მონოტონურია ყოველ
] $x_{i-1}; x_i$ [$i=1, 2, \dots, k$ ინტერვალზე*.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ f ფუნქცია უბან-
უბან მონოტონურია და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ
მას შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვირგვინის წერტილები. მართ-
ლაც, თუ $x=c$ არის f ფუნქციის წვედის წერტილი, მაშინ მონოტო-
ნურობის ძალით $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ არსებობს, ე. ი. c წერ-

ტილი არის პირველი გვირგვინის წვედის წერტილი. მართებულია შემდე-
გი თეორემა.

თეორემა 5.2. თუ 2π პერიოდის მქონე f ფუნქცია უბან-უბან
მონოტონურია და შემოსაზღვრულია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი
ფურიეს მწკრივი კრებალია ყოველ x წერტილში $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ რი-
ცებისაკენ.

ამრიგად, თუ შემოსაზღვრული f ფუნქცია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე
აქმაყოფილებს ღირებულს პირობებს, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი კრე-
ბალია ყოველ წერტილში. მისი ქამი უდრის $f(x)$ -ს, თუ x არის $f(x)$
ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი და $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ -ს, თუ x არის
 $f(x)$ -ის წვედის წერტილი.

§ 6. ლევი და კანტორ ფუნქციის მონოტონურობა

განსახილვეთ 6.1. ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია ნუ-
ლის მიმართ სიმეტრიულ რაიმე E სიმრავლეზე. $f(x)$ -ს ეწოდება ლე-
ვი ფუნქცია, თუ ყოველი x -სათვის E -დან $f(-x) = f(x)$, ხოლო $f(x)$ -ს
ეწოდება კანტი ფუნქცია, თუ $f(-x) = -f(x)$.

როგორც ვიცით ადგილი ჰქვს ტოლობას

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{თუ } f \text{ ლევი,} \\ 0, & \text{თუ } f \text{ კანტია.} \end{cases} \quad (6.1)$$

* ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქცია აქმაყოფილებს ღირებულს პირობებს.

ნულის მიმართ სიმეტრიულ E სმრავლებზე განსაზღვრული ყოველი $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოადგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამად. მართლაც

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \varphi(x) + g(x).$$

სადაც

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}; \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

ცხადია რომ φ ლუწია, ხოლო g — კენტი.

ვთქვათ 2π პერიოდის მქონე $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია ლუწია. ცხადია $f(x)\cos nx$ ფუნქციაც ლუწია, ხოლო $f(x)\sin nx$ იქნება კენტი ფუნქცია. ამიტომ (6.1) ფორმულის ძალით f ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტებისათვის გვაქვს

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

$$b_n = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

ამრიგად, ლუწი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიცავს კოსინუსებს:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (6.3)$$

სადაც a_n კოეფიციენტები გამოითვლება (6.2) ფორმულით. (6.3) მწკრივის უწოდებენ აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოსინუს მწკრივს.

ახლა ვთქვათ, $f(x)$ არის 2π პერიოდის მქონე კენტი ფუნქცია, მაშინ $f(x)\cos nx$ იქნება კენტი ფუნქცია, ხოლო $f(x)\sin nx$ კი ლუწი. ამიტომ (6.1) ფორმულის ძალით

$$a_n = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (6.4)$$

ამრიგად, კენტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს სახე

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (6.5)$$

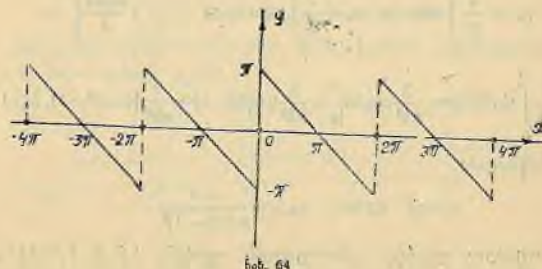
სადაც b_n კოეფიციენტი გამოითვლება (6.4) ფორმულით. (6.5) მწკრივს უწოდებენ აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს მწკრივს. ეს მწკრივი $x=k\pi$ ($k=0; \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობებიდან დამოუკიდებლად, ყოველთვის კრებადია ნულისაკენ.

შ ა ჯ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია, განსაზღვრული ტოლობით

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & \text{როცა } 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

მოცემული ფუნქცია კენტია (ნახ. 64). მისი ფურიეს კოეფიციენტები $a_k=0$, ხოლო b_k -სთვის გვაქვს

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = -\frac{2}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{k} - \frac{2}{\pi k^2} \sin kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$



$f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს, ამიტომ

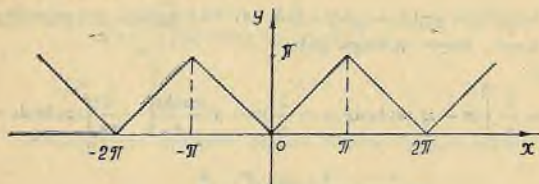
$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty).$$

კერძოდ

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

მაგალითი 2. გავშალოთ ფურიეს მწკრივად 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია ტოლობით $f(x) = |x|$.

ცხადია $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა (ნახ. 65). მისი ფურიეს კოეფიციენტები $b_k = 0$, ხოლო a_k -სათვის გვაქვს



ნახ. 65

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1], \quad k \geq 1.$$

მაშასადამე

$$a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi (2k-1)^2}.$$

მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს, ამიტომ

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

აქედან კერძოდ, როცა $x=0$, მიიღება

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

ამ ტოლობის გამოყენებით გამოითვლება $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ მწკრივის

S ჯამი. ცხადია

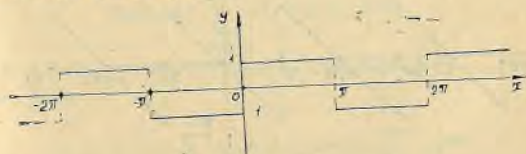
$$S = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

$$\text{საიდანაც } S = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{ე. ი. } \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

მაგალითი 3. გავშალოთ ფურიეს მწკრივად 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც $[-\pi; \pi]$ შუალედზე განსაზღვრულია ტოლობით

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & \text{როცა } -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{როცა } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{როცა } x = -\pi, x = 0. \end{cases}$$

$f(x)$ კენტი ფუნქციაა (ნახ. 66). მისი ფურიეს კოეფიციენტები $a_k = 0$, ხოლო b_k -სათვის გვაქვს



ნახ. 66

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin kx dx =$$

$$= -\frac{\cos kx}{2k} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{2k} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{როცა } k \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{როცა } k \text{ ლენტია.} \end{cases}$$

მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს, ამიტომ

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$

აქედან, როცა $x = \frac{\pi}{2}$, მიიღება

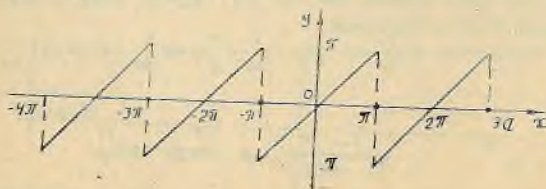
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

მაგალითი 4. ფუნქციის ფურიეს მწკრივად 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე მოცემულია ტოლობით

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{როცა } x = \pm\pi. \end{cases}$$

მოცემული ფუნქცია კენტია (ნახ. 67). მისი ფურიეს კოეფიციენტები $a_k = 0$, ხოლო b_k -სთვის გვაქვს

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2 \cos k\pi}{k} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (k=1, 2, \dots).$$



ნახ. 67

მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს, ამიტომ

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right), \quad -\pi < x < \pi,$$

§ 7. პი პერიოდის მქონე ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების სახე

ვთქვათ, 2π პერიოდის მქონე f ფუნქცია ინტეგრებალია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე და მისი ფურიეს მწკრივია

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (7.1)$$

სადაც a_k და b_k გამოითვლება (2.5) ფორმულებით.

თუ გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულას

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = -i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2},$$

მივიღებთ

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - ib_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} =$$

$$= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_k - ib_k}{2} = c_k, \quad \frac{a_k + ib_k}{2} = c_{-k}.$$

შავინ (7.1) მწკრივი მიიღებს სახეს:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}). \quad (7.2)$$

(7.2) მწკრივის (და მაშასადამე (7.1) მწკრივის) n -ური კეპოი ჯამი ასე ჩაიწერება

$$S_n(f; x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

ამიტომ ბუნებრივია (7.2) მწკრივი ისე ჩავწეროთ

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (7.3)$$

სადაც $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ სიმბოლოს ქვეშ გვესმის $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n$. (7.3) არის $f(x)$

ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსური სახე.

ვიპოვოთ c_k კოეფიციენტის გამოსახულება, როცა $k > 0$ გვაქვს

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - i b_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

რადგანაც $c_{-k} = \overline{c_k}$, ამიტომ (7.4) ფორმულა პირთებული ნე-
ბისმიერი მთელი k -სათვის, მაშასადამე

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

c_k -ს ეწოდება f ფუნქციის ფურიეს კომპლექსური კოეფიციენტი.
 f ფუნქციის დიფერენცირებადობის წერტილზე გვაქვს

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

§ 5. ნაბისმიერი პერიოდის მქონე ფუნქციის ფურიეს მწკრივის წარმოდგენა

ვთქვათ f არის $2l$ პერიოდის მქონე ფუნქცია, რომელიც ინტეგრე-
ბადია $[-l, l]$ სეგმენტზე, სადაც l ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ბოლოვს ვიცით $f(at)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{2l}{a}$. შევარჩიოთ a ისე,

რომ $\frac{2l}{a} = 2\pi$, საიდანაც $a = \frac{l}{\pi}$. ამდენად თუ შემოვიღებთ ჩასმას-

$x = \frac{lt}{\pi}$ გვექნება

$$f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t).$$

φ არის 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია. ამიტომ φ ფუნქციისათვის,
შეგვიძლია შევადგინოთ ფურიეს მწკრივი

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos kt \, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin kt \, dt \quad (k=1, 2, \dots)$$

თუ დაფუძნდებით ძველ ცვლადს ე. ი. მოვახდენთ ჩასმას $t = \frac{\pi x}{l}$

მივიღებთ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (8.1)$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

a_k და b_k კოეფიციენტებს, რომლებიც (8.2) ფორმულებითაა განსაზღვრული, ეწოდება $2l$ პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, ხოლო (8.1) მწკრივს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

§ 9. ნახშირბადი პერიოდის მქონე ლუწი და კენტი ფუნქციების ფურიეს მწკრივები

ვთქვათ $f(x)$ არის $2l$ პერიოდის მქონე ლუწი ფუნქცია, მაშინ (8.2) ფორმულები მიიღებს სახეს

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = 0, \quad (k=1, 2, \dots).$$

გამომდინარე იქედან $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, მაშინ

$$a_k = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k=1, 2, \dots)$$

და მაშასადამე f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

მაგალითი. გავშალოთ ფურიეს მწკრივად $f(x) = |\sin x|$ ფუნქცია. ცხადია $f(x)$ ლუწი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით π . ამიტომ $b_k = 0$, ხოლო

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x] dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1} \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi(k^2-1)} [(-1)^k + 1] = \begin{cases} \frac{4}{\pi(k^2-1)}, & \text{როცა } k \\ 0, & \text{როცა } k \text{ კენტია.} \end{cases} \end{aligned}$$

მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს, ამიტომ

$$\begin{aligned} |\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} = \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \dots + \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

§ 10. ნახშირბადი პერიოდის მქონე ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსური სახე

ვთქვათ f არის $2l$ პერიოდის მქონე ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია $[-l; l]$ სეგმენტზე. $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ არის 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია, ამიტომ (7.3) მწკრივი მიიღებს სახეს

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad (10.1)$$

ხოლო

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) e^{-ikt} dt. \quad (10.2)$$

თუ (10.1) და (10.2) გამოსახულებებში მოვახდენთ ჩასმის $t = \frac{\pi}{l}x$, მივიღებთ

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i k \pi x}{l}} \quad (10.3)$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i k \pi x}{l}} dx \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.3)$$

(10.3) მწკრივს, სადაც c_k კოეფიციენტი განსაზღვრულია (10.4) ტოლობებით ეწოდება $2l$ პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსურია სახე.

§ 11. 21 სიხშირის სარგებო პანსაზღვრული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი

ზემოთ მოყვანილი ყველა დებულება ჩამოყალიბებული იყო მხოლოდ და მხოლოდ მთელს რიცხვით ლერძზე განსაზღვრული პერიოდული ფუნქციისათვის. გამოყენებაში ხშირად საქმე ევაქს არადერიოდულ ფუნქციებთან, ზოგჯერ გვხვდება ისეთი ფუნქციებიც რომლებიც განსაზღვრულია მხოლოდ $[-l; l]$ სეგმენტზე. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს ასეთ ფუნქციებზე გამოვიყენოთ ფურიეს მწკრივად გაშლის დებულებები საჭიროა $f(x)$ ფუნქცია პერიოდულად გაავრცელოთ $[-l; l]$ სეგმენტადან მთელს Ox ლერძზე. მივიღებთ პერიოდულ $F(x)$ ფუნქციას, რომელიც $[-l; l]$ ინტერვალზე ემთხვევა $f(x)$ ფუნქციას, ასეთი სახით ავებულ F ფუნქციებზე შეიძლება გამოვიყენოთ ფურიეს მწკრივად გაშლის თეორემები. თანახმად (8.2) ფორმულებშია $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების ფურიეს მწკრივები ერთიდაიგივეა. ამასთან თუ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $[-l; l]$ შუალედზე კრებადია $f(x)$ -საკენ, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი მთელს Ox ლერძზე გარდა შესაძლებელია $x=(2k+1)l$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) წერტილებშია კრებადი იქნება $F(x)$ -საკენ, რომელიც წარმოადგენს $f(x)$ -ის პერიოდულ გაგრძელებას $[-l; l]$ სეგმენტიდან.

მაშასადამე დავწეროთ $[-l; l]$ სეგმენტზე მოცემული $f(x)$ ფუნქციას ფურიეს მწკრივი ნიშნავს: დავწეროთ $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, რომელიც მიიღება $f(x)$ ფუნქციის პერიოდულად გაგრძელებით მთელს Ox ლერძზე. ამრიგად, გამოვძინაზე აქედან სავსარისაო ფურიეს მწკრივის კრებადობის ნიშნები ჩამოვყალიბოთ პერიოდული ფუნქციებისათვის.

$f(x)$ ფუნქციის პერიოდულად გაგრძელების ღირსი არსებითი მნიშვნელობა აქვს შუალედის ბოლო წერტილებს $x=\pm l$ მისაღონელია შემდეგი შემთხვევები:

1. $f(-l)=f(l)$. ამ შემთხვევაში პერიოდული გაგრძელება განისაზღვრება ტოლობით $F(x)=f(x-2kl)$, როდესაც $-l+2kl \leq x < l+2kl$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

ცხადია, რომ $F(x)$ არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით $2l$ და $F(x)=f(x)$, როდესაც $x \in [-l; l]$. ამასთანავე, თუ f უწყვეტია $[-l; l]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფუნქციის გაგრძელება $F(x)$ იქნება უწყვეტ მთელს Ox ლერძზე.

2. $f(-l) \neq f(l)$. რადგანაც პერიოდულობის განსაზღვრის მიხედვით უნდა ეკონდეს $F(-l)=F(l)$, ამიტომ $f(-l)$ და $f(l)$ მნიშვნელობებს შუალედულად ვერ განვახორციელებთ f -ის გაგრძელებას პერიოდულად მთელს Ox ლერძზე. ამ შემთხვევაში $F(x)$ ფუნქციას განსაზღვრავენ ტოლობით

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl), & \text{როდესაც } -l+2kl \leq x < l+2kl, \\ \frac{f(-l)+f(l)}{2}, & \text{როდესაც } x = (2k+1)l, \end{cases}$$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ცხადია, რომ $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-\infty; \infty]$ შუალედში; იგი პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდი უდრის $2l$ -ს. ამას თანავე თუ $f(x)$ უწყვეტია $[-l; l]$ სეგმენტზე, მაშინ $F(x)$ ფუნქციას Ox ლერძზე იქნება წყვეტა მხოლოდ $x=(2k+1)l$ ($k=0, \pm 1, \dots$) წერტილებში.

თუ $f(x)$ ფუნქცია $[-l; l]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს ფურიეს მწკრივად გაშლის პირობებს, მაშინ

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_k \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

ყოველი $x \in [-\infty; \infty]$, ხოლო

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_k \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

როდესაც $x \in [-l; l]$.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $[-l; l]$ სეგმენტის ნაცვლიდ შეიძლება ითვლებოდ $2l$ სიგრძის ნებისმიერი სეგმენტი $[a; a+2l]$.

§ 12. [0; l] სიზღვრება მოცემული ფუნქციის ფაქტის
პრინციპი

თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია $[0; l]$ სეგმენტზე, მაშინ ის ცალსახად შეიძლება გაფარდებული მთელ Ox ღერზე ისე რომ გაფარდებული ფუნქცია $F(x)$ იყოს ლუწი და პერიოდული პერიოდით $2l$. მართლაც, ამისათვის საჭიროა F ფუნქცია განესაზღვროთ ტოლობით

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl), & \text{როდესაც } 2kl < x < (2k+1)l, \\ f(2kl-x), & \text{როდესაც } (2k-1)l < x < 2kl, \end{cases}$$

სადაც $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ცხადია რომ $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-\infty; \infty]$ შუალედში, იგი ლუწი პერიოდული ფუნქციაა და მისი პერიოდი უდრის $2l$.

თუ f ფუნქცია $[0; l]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს ფურიეს მწკრივად გაშლის პირობებს, მაშინ

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

ყოველი $x \in [-\infty; \infty]$ სათვის, ხოლო

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

როდესაც $x \in [0; l]$,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

§ 13. [0; l] სიზღვრება მოცემული ფუნქციის
ფაქტის სინუსი

თუ f ფუნქცია მოცემულია $[0; l]$ ინტერვალზე, მაშინ ის ცალსახად შეიძლება გაფარდებული მთელ Ox ღერზე ისე, რომ გაფარდებული ფუნქცია $F(x)$ იყოს კენტი და პერიოდული პერიოდით $2l$.

მართლაც ამისათვის საჭიროა F ფუნქცია განესაზღვროთ ტოლობით

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl), & \text{როდესაც } 2kl < x < (2k+1)l, \\ -f(2kl-x), & \text{როდესაც } (2k-1)l < x < 2kl, \\ 0, & \text{როდესაც } x = kl, \end{cases}$$

სადაც $k=0; \pm 1, \pm 2, \dots$ ადგილია შემოწმება, რომ $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-\infty; \infty]$ შუალედში და კენტი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით $2l$. თუ f ფუნქცია $[0; l]$ სეგმენტზე აკმაყოფილებს ფურიეს მწკრივად გაშლის პირობებს, მაშინ

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ყოველი $x \in [-\infty; \infty]$ სათვის, ხოლო

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

როდესაც $x \in [0; l]$,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

§ 14. ფურიეს* ჯაბი და ვიიერშტრასის თეორემა

არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლილია ერთ წერტილში. უფრო მეტიც, არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლილია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტის რაციონალურ წერტილთა სიმრავლეზე (ასეთი ფუნქციების მაგალითები ავებული იყო დიუმბუარეონის** და ფეიერის მიერ). ამდენად, მართალია ფუნქციის უწყვეტობა არ არის საჭიროის რაიმე მისი ფურიეს მწკრივი იყოს კრებადი. მიუხედავად ამისა, თუ განვიხილავთ მიმდევრობას, რომლის n -ური წევრი წარმოადგენს უწყვეტი პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯაბი მიმდევრობის პირველი n წევრის საშუალო არითმეტიკულს, თურმე ის თანაბრად კრებადია ფუნქციის მნიშვნელობისავე მთელს რიცხვით ღერზე.

ვთქვათ 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივია

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

* ლ. ჯეფრე (1880-1959) უნგრელი მათემატიკოსი.

** ე. დიუმბუარეონი (1818-1896) — გერმანელი ფიზიკისი და ფიზიოლოგი.

20. ს. თოფური, ე. სოჟოლავა, მ. გამბაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

ხოლო მისი კერძო წამი

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

აღნიშნით $\sigma_n(f; x)$ სიმბოლოთი $S_0(f; x)$, $S_1(f; x)$, ..., $S_n(f; x)$ ფუნქციათა საშუალო არითმეტიკული:

$$\sigma_n(f; x) = \frac{S_0(f; x) + S_1(f; x) + \dots + S_n(f; x)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x).$$

$\sigma_n(f; x)$ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფიქსირებული x -ის მიხედვით $\sigma_n(f; x)$ -ის კომპაქტური გამოსახულება. (3.7)-ის ძალით, გვაქვს

$$\begin{aligned} \sigma_n(f; x) &= \frac{1}{\pi(n+1)} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t) dt, \end{aligned} \quad (14.1)$$

სადაც

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t),$$

ხოლო $D_k(t) = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ — დირიხლეს გულია. ამრიგად

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n [\cos kt - \cos(k+1)t] = \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

ამრიგად

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

$\Phi_n(t)$ ფუნქციის ეწოდება ფიქსირებული t -ის.

მოვიყვანოთ $\Phi_n(t)$ გულის შემდეგი თვისებები:

1) ის არაუარყოფითი, ლუწი, n -ური რიგის ტრიგონომეტრიული პრავალწევრია;

$$2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1, \quad (14.2)$$

შართლაც, (3.4)-ის ძალით, გვაქვს

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1.$$

3) ნებისმიერი $0 < \delta < \pi$ რიცხვისათვის

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) = 0. \quad (14.3)$$

შართლაც, რადგანაც $\Phi_n(t) \geq 0$, ამიტომ

$$0 \leq \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) = \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

საიდანაც გამომდინარეობს (14.3).

თეორემა 14.1. 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი ფუნქციის ფი-
ერის ჯამი თანაბრად კრებალია ამ ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x)$ არის 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი
ფუნქცია. (14.1) და (14.2) ტოლობების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned}\sigma_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt - f(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \Phi_n(t) dt.\end{aligned}$$

აქედან ფიერის გულის 1) თვისების ძალით

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \Phi_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta},\end{aligned}\quad (14.4)$$

სადაც $0 < \delta < \pi$.

რადგანაც $f(x)$ უწყვეტი პერიოდული ფუნქციაა, ამიტომ ის შემო-
საზღვრულია, ე. ი.

$$|f(x)| \leq M.$$

აქედან

$$|f(x+t) - f(x)| \leq 2M \quad (15.5)$$

ნებისმიერი t და x -თვის.

შემდეგ $f(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე,
ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი,
რომ ყოველი x , $x+t \in [-\pi; \pi]$ -თვის

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა } |t| \leq \delta. \quad (14.6)$$

ახლა (14.4)-ში ავიღოთ δ -ისეთი, როგორც შიითვებულია (14.6)
უტოლობაში, მაშინ (14.6)-ის ძალით ნებისმიერი x -თვის გვაქვს

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \Phi_n(t) dt &\leq \frac{\varepsilon}{3\pi} \int_{-\pi}^{\delta} \Phi_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}\quad (14.7)$$

(14.4)-ის დანარჩენი ორი ინტეგრალი ფასდება ერთნაირად. კერ-
ძოდ, (14.5)-ის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \Phi_n(t) dt &\leq \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{2M}{\pi} \max_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t) \int_{\delta}^{\pi} dt \leq 2M \max_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t).\end{aligned}\quad (14.8)$$

(14.3)-ის ძალით აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0
რიცხვი, რომ

$$\max_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t) < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \text{როცა } n > n_0.$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით (14.8)-დან ყოველი x -თვის გვაქვს

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა } n > n_0. \quad (14.9)$$

ანალოგიურად, ყოველი x -თვის

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)| \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა } n > n_0. \quad (14.10)$$

(14.4), (14.7), (14.9) და (14.10)-დან, ყოველი x -თვის გვაქვს

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{როცა } n > n_0. \quad (14.11)$$

რადგანაც x_0 არ არის დამოკიდებული x -ზე ამიტომ (14.11) ნიშნავს $\sigma_n(f, x)$ -ის თანაბრად კრებადობას $f(x)$ -საკენ.

თვორემა დამტკიცებულია.

შედეგ 1. თუ პერიოდული უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის კრებადია ფუნქციის მნიშვნელობისაკენ ამ წერტილში.

დამტკიცება. აღვიღო ჩვენება, რომ თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$, მაშინ

$$\text{აგრეთვე } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = S \text{ (იხ. [36], გვ. 53), ამიტომ თუ უწყვეტი პერიოდული } f(x) \text{ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია } x_0 \text{ წერტილში, რაიმე } A \text{ რიცხვისაკენ, ე. ი. } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = A, \text{ მაშინ აგრეთვე}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x_0) = A. \text{ შეორეს მხრივ თეორემა 14.1-ის ძალით } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x_0) = f(x_0), \text{ გამომდინარე აქედან } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x_0) = f(x_0).$$

შედეგ 2. ორ სხვადასხვა უწყვეტ პერიოდულ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთდროიანი ფურიეს მწკრივი.

დამტკიცება. ვთვალო $f_1(x)$ და $f_2(x)$ სხვადასხვა უწყვეტი პერიოდული ფუნქციები. დავამტკიცოთ, რომ მათ შეესაბამებ სხვადასხვა ფურიეს მწკრივი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ მათ შესაბამეობა ერთი და იგივე ფურიეს მწკრივი

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$f_2(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

მაშინ უწყვეტი პერიოდული $f(x) = f_1(x) - f_2(x) \neq 0$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი იქნება ნულის ტოლი, გამომდინარე აქედან $\sigma_n(f; x) \equiv 0$, საიდანაც $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) \equiv 0$, შეორეს მხრივ თეორემა 14.1-ის ძალით $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; x) = f(x)$, ამრიგად $f(x) \equiv 0$. მაშასადამე,

ჩვენი დავება იმის შესახებ, რომ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთი

და იგივე ფურიეს მწკრივი არ არის სწორი, ე. ი. თუ უწყვეტი პერიოდული ფუნქციის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ იგივე ფუნქცია იგივერად ნულის ტოლია.

შედეგ 2-დან გამომდინარეობს, რომ უწყვეტი პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი (დამოუკიდებლად იმისა, კრებადია თუ ღაშუ-ღაღია ის რაიმე წერტილში) საშუალებას გვაძლევს ცალსახად აღვადგინოთ ის ფუნქცია რომლის ფურიეს მწკრივსაც ის წარმოადგენს, ამისათვის საჭიარისია ამ მწკრივის კერძო ჯამებისაკენ შევადგინოთ ფურიეს ჯამი და გამოვთვალოთ მისი ზღვარი.

თეორემა 14.2 (ვეიერშტრასი). თუ $f(x)$ უწყვეტი, 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

მრავალწევრი, რომ ყოველი x -სათვის $[-\infty; \infty]$ შუალედოში

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

იგორება 14.2. წარმოადგენს თეორემა 14.1-ის შედეგს. მართლაც, $T(x)$ მრავალწევრად შეიძლება ავიღოთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს $\sigma_n(f; x)$ ჯამი, რომელიც წარმოადგენს ისეთ ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრს, რომლის რიგი არ აღემატება n -ს.

შედეგ 3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a) = f(a+2\pi)$, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ალგებრული $T(x)$ მრავალწევრი ისეთი, რომ

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq a + 2\pi.$$

მართლაც, რადგანაც $f(a) = f(a+2\pi)$, ამიტომ $f(x)$ პერიოდულად შეიძლება გაფართოვოთ მთელ რიცხვით ღერძზე. გაგრძელებული ფუნქცია იქნება აგრეთვე უწყვეტი $]-\infty; \infty[$ შუალედში. ამ გაფართოვებულ ფუნქციაზე კი შეგვიძლია გამოვიყენოთ თეორემა 14.2.

თეორემა 14.3 (ვეიერშტრასი). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ალგებრული $p(x)$ მრავალწევრი ისეთი, რომ

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (14.12)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(t) = f\left[a + \frac{t}{n}(b-a)\right],$$

რომელიც განსაზღვრულია და უწყვეტია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე. ჯერ გავიყვანოთ ეს ფუნქცია $[-\pi; 0]$ შუალედში ლუწად:

$$g(t) = g(-t) \quad (-\pi \leq t \leq 0),$$

ხოლო შემდეგ კი პერიოდულად (პერიოდით 2π) მოელს რიცხვით ღერძზე. მიღებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $G(t)$ -თი. ცხადია $G(t)$ უწყვეტი პერიოდული ფუნქციაა, პერიოდით 2π . ამიტომ თეორემა 14.2-ის ძალით ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი $T(t)$, ისეთი, რომ ყოველი $t \in [-\pi; \pi]$ -თვის

$$|G(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.13)$$

რადგან $T(t)$ ტრიგონომეტრიული მრავალწევრია, ამიტომ ის გაიშლება ტეილორის მწკრივად, რომელიც თანაბრად კრებადი იქნება $[-\pi; \pi]$ შუალედში $T(t)$ ფუნქციისაკენ.

ვთქვათ, $P_n(t)$ არის ამ ტეილორის მწკრივის კერძო ჯამი. რადგანაც $P_n(t)$ თანაბრად კრებადი $T(t)$ -საკენ, ამიტომ აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ

$$|T(t) - P_{n_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad (14.14)$$

(14.13) და (14.14)-ის ძალით გვაქვს

$$|G(t) - P_{n_0}(t)| \leq |G(t) - T(t)| + |T(t) - P_{n_0}(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

ახლა დავუშვათ, რომ $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, მაშინ (14.12)-ის ძალით გვექნება

$$\left| f(x) - P_{n_0}\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right) \right| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b,$$

სადაც ცხადია, $P(x) = P_{n_0}\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$ არის ალგებრული მრავალწევრი.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ტრიგონომეტრიული $T(x)$ მრავალწევრი, ისეთი, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

დამტკიცება. თუ $f(-\pi) = f(\pi)$, მაშინ თეორემა 14.2-ის შედეგის ძალით არსებობს ტრიგონომეტრიული $T(x)$ მრავალწევრი ისეთი, რომ

$$|f(x) - T(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

ამიტომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx < \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi} dx = \varepsilon.$$

ამ კერძო შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ $f(-\pi) \neq f(\pi)$. ვთქვათ

$$M = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)|.$$

შევარჩიოთ $\delta > 0$ რიცხვი ისე, რომ

$$4M^2\delta < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (14.15)$$

ვანვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{როცა } -\pi \leq x \leq \pi - \delta \\ f(-\pi), & \text{როცა } x = \pi, \\ f(\pi), & \text{როცა } \pi - \delta \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ და

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

ამასთან (14.15)-ის ძალით

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx &= \int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq \\ &\leq \int_{\pi-\delta}^{\pi} 4M^2 dx = 4M^2\delta < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

რადგანაც $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, ამიტომ არსებობს ტრიგონომეტრიული $T(x)$ მრავალწევრი ისეთი, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - T(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (14.17)$$

(14.16), (14.17) და $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ უტოლობებს გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - T(x)]^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - T(x)|^2 dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 15. ფუნქციის ორთონორმირებადი სისტემები.
ფორმის მქონე ორთონორმირებადი სისტემის
მიმართ

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (15.1)$$

ინტეგრებალ ფუნქციის სისტემა.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 15.1. ფუნქციის (15.1) სისტემას ეწოდება ორთონორმალური $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ სქალარული ნაშთი*

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \text{ როცა } m \neq n.$$

$\varphi_k(x)$ ფუნქციის ნორმა განსაზღვრება ტოლობით

$$\lambda_k = \|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

ჩვენ განვიხილავთ ისეთ სისტემას, რომლისთვისაც $\lambda_k \neq 0$.

* რაიმე სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციის ნაშთი აგრეთვე ინტეგრებალია ამ სეგმენტზე (იხ. [26,] თავი 111, § 5).

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ე ბ ა 15.2. ფუნქციის (15.1) სისტემას ეწოდება ორთონორმირებული $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა } m \neq n, \\ 1, & \text{როცა } m = n. \end{cases}$$

მაგალითად, ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

ორთონორმირებული სისტემა $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე.

ასევე

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos \frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \dots, \frac{\cos \frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \dots$$

სისტემა ორთონორმირებულია $[-l, l]$ სეგმენტზე.

ცხადია, თუ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ორთონორმალური სისტემაა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{\lambda_0}}, \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}, \dots$$

სისტემა ორთონორმირებულია იმავე სეგმენტზე. ამიტომ ზოგადადობის შეუზღუდავად განვიხილავთ ორთონორმირებულ სისტემებს.

$[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი (15.1) ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ეწოდება მწკრივს

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (15.2)$$

სილიც

$$c_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k=0, 1, \dots \quad (15.3)$$

(15.3) ტოლობით განსაზღვრულ c_k რიცხვებს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_k$ სისტემის მიმართ. (15.2)

მწკრივს უწოდებენ აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ორთოგონალურ მწკრივს, (15.2) გამოსახულებაში $\sim$ სიმბოლო იმას ნიშნავს, რომ (15.2) მწკრივის c_k კოეფიციენტები გამოთვლილია (15.3) ფორმულებით.

თეორემა 2.1-ის ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 15.1. ვთქვათ (15.1) ორთონორმირებული სისტემის n -ში ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია იშლება თანაბრად კრებად ორთოგონალურ მწკრივად, მაშინ ეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივია.

§ 16. შარბის კოეფიციენტების მინიმალურობის თვისება. ბასისის უაღლოება

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია და ორთონორმირებული (15.1) სისტემა. გამოსახულებას

$$T_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

ზადე $a_0, a_1, \dots, a_n$ ნებისმიერი ნამდვილო რიცხვებია ეწოდება n -ური რიგის მრავალწევრი (15.1) სისტემის მიმართ.

აღვნიშნოთ $S_n(f; x)$ -ით $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს (15.2) მწკრივის n -ური კრება გამო:

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x).$$

განვიხილოთ ამოცანა: n -ური რიგის ყველა $T_n(x)$ მრავალწევრითა შარბის ეპოვოთ ის, რომლისთვისაც

$$\int_a^b |f(x) - T_n(x)|^2 dx$$

ინტეგრალი მინიმუმს უმცირეს მნიშვნელობას. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 16.1. თუ (15.1) სისტემა ორთონორმირებულია, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის

$$\min_{a_n} \int_a^b |f(x) - T_n(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x) - S_n(f; x)|^2 dx, \quad (16.1)$$

ამასთან

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \quad (16.2)$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \\ &+ \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=0}^n a_k^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k=0}^n (c_k - a_k)^2, \end{aligned} \quad (16.3)$$

სადაც $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს მოცემული სისტემის მიმართ. (16.3) ტოლობიდან ჩანს, რომ

$\int_a^b |f(x) - T_n(x)|^2 dx$ ინტეგრალს უმცირესი მნიშვნელობა აქვს, როცა $a_k = c_k$, ე. ი. როცა $T_n(x) = S_n(f; x)$, ე. ი. პარტებული (16.1) და (16.2) ტოლობებით.

თეორემა დამტკიცებულია.

(16.2) ტოლობიდან გამოდინარეობს, რომ ყოველი n -თვის ადგილობრივად უტოლობას

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

აქედან n -ის ნებისმიერობის ძალით გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (16.4)$$

ამ უტოლობას ბესელის უტოლობა ეწოდება.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როცა ორთონორმირებული (15.1) სისტემა ისეთია, რომ ბესელის (16.4) უტოლობა გადაიქცევა

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx \quad (16.5)$$

ტოლობად ყოველი ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისათვის. (16.5) ტოლობას ეწოდება პარსევის* ტოლობა (იხ. თეორემა 17.4-ის შედეგი 1).

შედეგი 1. ვთქვათ $\{\varphi_k(x)\}$ ორთონორმირებული სისტემაა $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს c_k კოეფიციენტების კვადრატებისაგან შედგენილი $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ მწკრივი კრებალია.

შედეგი 2. ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს c_k კოეფიციენტი ორთონორმირებული სისტემის მიმართ მისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$, ე.ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

§ 17. სრული და ჩამოყალიბებული სივრცეები. საშუალოდ კრებალობა

განსაზღვრება 17.1. ვთქვათ E არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციათა სივრცე. ფუნქციათა

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (17.1)$$

სისტემას ეწოდება სრული E სივრცეში თანაბარი მიახლოების აზრით, თუ ყოველი $f \in E$ -თვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომ

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (17.2)$$

* ჰ. პარსევი (1755-1836) — ფრანგი მათემატიკოსი.

სისტემის სისრულის ცნების (თანაბარი მიახლოების აზრით) გამოყენებით ვეიერშტრასის თეორემა 14.2 და 14.3, შესაბამისად ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 17.1. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა (2.2) სისტემა სრულია თანაბარი მიახლოების აზრით 2 π პერიოდის მქონე, უწყვეტ ფუნქციათა კლასში*.

თეორემა 17.2. ხარისხოვანი

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

ფუნქციათა სისტემა სრულია თანაბარი მიახლოების აზრით ფუნქციათა $C[a, b]$ კლასში, სადაც a და b ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვებია.

განსაზღვრება 17.2. ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. რიცხვს

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციიდან $g(x)$ ფუნქციის საშუალო კვადრატული ინტეგრალური გადახრა.

განსაზღვრება 17.3. ფუნქციითა (17.1) სისტემას ეწოდება სრული E სივრცეში საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრით, თუ ყოველი $f \in E$ -თვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, არსებობს ისეთი $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ რიცხვები, რომ

$$\sqrt{\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx} < \varepsilon. \quad (17.3)$$

აღვლია ჩვენება, რომ თუ (17.1) სისტემა სრულია თანაბარი მიახლოების აზრით, მაშინ ის სრული იქნება საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრითაც. მატილაც, (17.2)-ის ძალით ვვაქცე

$$\sqrt{\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b \varepsilon^2 dx} = \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

* თეორემა 17.1 შეიძლება ასეც ჩამოყალიბდეს: ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა (2.2) სისტემა სრულია თანაბარი მიახლოების აზრით $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე უწყვეტ, ისეთ ფუნქციათა კლასში, რომლისთვისაც $f(-\pi) = f(\pi)$.

განმარტება 17.3-ის გამოყენებით თეორემა 14.4 ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 17.3. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციითა (2.2) სისტემა სრული საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრით ფუნქციითა $C[-\pi; \pi]$ კლასში.

თეორემა 17.4. იმისათვის, რომ ფუნქციითა (17.1) სისტემა იყოს სრული $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციითა კლასში, საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრით, აუცილებელი და საკმარისია

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_n(f; x)]^2 dx = 0, \quad (17.4)$$

სადაც $S_n(f; x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი.

საკმარისობა. ვთქვათ ადგილი აქვს (17.4) ტოლობას. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს n_0 რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x) \right]^2 dx < \varepsilon, \quad \text{როცა } n > n_0,$$

სადაც

$$C_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

(17.1) სისტემა სრული $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციითა კლასში, საშუალო კვადრატული მიახლოების აზრით.

აუცილებლობა. ვთქვათ (17.1) სისტემა სრული $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციითა კლასში, საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრით. ე. ი. $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალი ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0}$ რიცხვები, რომ ადგილი აქვს (17.3) უტოლობას. მაგრამ თეორემა 16.1-ის ძალით, როცა $n > n_0$

$$\int_a^b [f(x) - S_n(f; x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n C_k^2 <$$

$$\begin{aligned} &< \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n_0} C_k^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n_0} C_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - S_{n_0}(f; x)]^2 dx < \\ &< \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x) \right]^2 dx < \varepsilon^2, \quad n > n_0. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_n(f; x)]^2 dx = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

როცა შესრულებულია (17.4) ტოლობა, მაშინ ამბობენ რომ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი საშუალოდ კრებალია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შედეგი 1. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციითა ორ-თონობრივად (17.1) სისტემა სრული $[a, b]$ სეგმენტზე ინტეგრებალ ფუნქციითა კლასში, საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების აზრით, მაშინ ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2. \quad (17.5)$$

ამ ტოლობის მართებულობა გამომდინარეობს (16.2) და (17.4) ტოლობებიდან.

შედეგი 2. თუ $f \in C[-\pi; \pi]$, მაშინ ამ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი საშუალოდ კრებალია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ამ შედეგის მართებულობა გამომდინარეობს თეორემა 17.3 და თეორემა 17.4-დან.

თეორემა 17.3-ის ძალით ტრიგონომეტრიულ ფუნქციითა (2.2) სისტემა სრული საშუალო კვადრატული ინტეგრალური მიახლოების

აბრით $C[-\pi; \pi]$ კლასში, ამიტომ პარსევალის (17.5) ტოლობა ამ სისტემისათვის მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

§ 18. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბარი კრებალობა

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. დავუშვათ, რომ არსებობს $[a, b]$ სეგმენტის სასრული დანაწილება $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ისეთი, რომ $f(x)$ უწყვეტია ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ ინტერვალზე და არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_{i-1}+)$ და $f(x_i-)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (ე. ი. $f(x)$ უბან-უბან უწყვეტია, იხილეთ განსაზღვრება (4.1)).

განვიხილოთ ფუნქციები

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1}+), & \text{თუ } x = x_{i-1}, \\ f(x_i-), & \text{თუ } x = x_i. \end{cases}$$

განსაზღვრება 18.1. თუ ყოველი $f_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) ფუნქცია უწყვეტად წარმოებალია $[x_{i-1}, x_i]$ სეგმენტზე, მაშინ $f(x)$ -ს ეწოდება უბან-უბან უწყვეტად წარმოებალი (უბან-უბან გლუვი) ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე.

თეორემა 18.1. თუ 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტად წარმოებალია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (18.1)$$

მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებალია $]-\infty; \infty[$ შუალედში, ამასთან მისი ჯამი ყოველ წერტილში უდრის $f(x)$ -ს.

დამტკიცება. $f(x)$ აკმაყოფილებს თეორემა 5.1-ის პირობებს, ამიტომ (18.1) მწკრივი კრებალია ყველგან და მისი ჯამია $f(x)$. ვაჩვენოთ, რომ (18.1) მწკრივი კრებალია თანაბრად და აბსოლუტურად. აღვნიშნოთ a_n' და b_n' -ით $f'(x)$ ფუნქციის* ფურიეს კოეფიციენტები, მაშინ

* $f'(x)$, როგორც უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია აბსოლუტურად $]-\pi; \pi[$ სეგმენტზე.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \left[f(x) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{b_n'}{n}.$$

ასევე

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} \left[f(x) \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi n} [f(\pi) \cdot (-1)^n - f(-\pi) \cdot (-1)^n] + \frac{a_n'}{n} = \frac{a_n'}{n}.$$

განვიხილოთ რიცხვთა მწკრივი

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \right). \quad (18.2)$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივი, რომელიც წარმოადგენს (18.1) მწკრივის მაფორანტულ მწკრივს, კრებალია. მართლაც

$$\frac{|b_n'|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|a_n'|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

მაგრამ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ მწკრივი კრებალია, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'^2$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'^2$ მწკრივების კრებალობა გამომდინარეობს ბესელის უტოლობიდან

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx. *$$

* $a_0' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0.$

გამომდინარე აქედან (შეღარების ნიშანი) (18.2) მწკრივი კრებადი, (18.2) მწკრივის კრებადობიდან თავი VI-ის თეორემა 2.4-ის ძალით გვაქვს (18.1) მწკრივის თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მეხუთე თავი

ფურიეს ინტეგრალის და ფურიეს გარდაქმნის

§ 1. ფურიეს ინტეგრალის ცნება

როგორც ვიცით, თუ $f(x)$ არის $[-l; l]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქცია, მაშინ ვარკვეულ პირობებში ეს ფუნქცია შეიძლება გადმოვსაზღვროთ ტრიგონომეტრიულ მწკრივად:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{l}},$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{l}} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ახლა ვთქვათ, რომ f არის $]-\infty; \infty[$ შუალედში აბსოლუტურად ინტეგრებადი არამერიული ფუნქცია, ე. ი. არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

f ფუნქციის ფურიეს ინტეგრალი ეწოდება შემდეგი სახის ინტეგრალს

$$\int_0^{+\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du, \quad (1.1)$$

სადაც

$$\left. \begin{aligned} a(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut dt \quad (u \geq 0), \\ b(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut dt \quad (u \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

(1.1) ინტეგრალი ფურიეს მწკრივის ანალოგიურია: ჯამის ნიშანი შეცვლილია ინტეგრალის ნიშნით, ხოლო მთელი k პარამეტრის ნაცვლად გვაქვს უწყვეტი პარამეტრი. (1.2) ტოლობებით განსაზღვრული $a(u)$ და $b(u)$ ფუნქციები მოგვაგონებს ფურიეს კოეფიციენტებს.

ცხადია, რომ $]-\infty; +\infty[$ შუალედში აბსოლუტურად ინტეგრებადი f ფუნქციისათვის ყოველთვის შეგვიძლია შევადგინოთ (1.2) ტოლობებით განსაზღვრული $a(u)$ და $b(u)$ ($u \geq 0$) ფუნქციები და, მაშასადამე ფურიეს (1.1) ინტეგრალი. მაგრამ, როგორც ფურიეს მწკრივის შემთხვევაში, ეს ინტეგრალი შეიძლება იყოს კრებადი და შეიძლება არ უდრიდეს იმ ფუნქციის მნიშვნელობას ინტეგრალის კრებადობის წერტილზე რომლის ფურიეს ინტეგრალსაც იგი წარმოადგენს, ამიტომ ვწეროთ

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du. \quad (1.3)$$

თუ (1.1) ინტეგრალი კრებადია $f(x)$ -საკენ, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქცია წარმოიდგინება ფურიეს ინტეგრალთა x წერტილში.

(1.2) ტოლობებიდან $a(u)$ და $b(u)$ -ს მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1.1) ინტეგრალში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos ux \cos ut + \sin ux \sin ut) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.4) ტოლობის მარჯვენა ინტეგრალს ფურიეს ორჯერადი ინტეგრალი ეწოდება.

§ 2. უპირის ინტეგრალთა უაღრესი წარმოდგენის
საპიარის პირობები

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. როგორც ფურიეს მწკრივის შემთხვევაში, გარკვეულ პირობებში, ფურიეს ინტეგრალიც გვაძლევს ფუნქციის წარმოდგენას, ე. ი. (1.3)-ში სიმბოლო $\sim$ შეცვლილი შეცვალათ = ნიშნით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S_\lambda(f; x) = \int_0^\lambda [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt.$$

$S_\lambda(f; x)$ წარმოადგენს ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამის ანალოგს. ცხადია, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt.$$

ბადავან $|f(t) \cos u(x-t)| \leq |f(t)|$ და ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$

კრებალია, ამიტომ გვაქვს

$$S_\lambda(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^\lambda \cos u(x-t) du = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt. \quad (2.1)$$

ფურიეს ინტეგრალის კრებალობის დასადაგენად უნდა ვისარგებლოთ (2.1) ფორმულით.

თეორემა 2.1. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია ყოველ სასრულ შუალედზე და აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. თუ ყოველ x წერტილში $f(x)$ ფუნქციის აქვს სასრული ცალმხრივი წარმომადგენლები $f_+(x)$ და $f_-(x)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt. \quad (2.2)$$

დამტკიცება. თეორემის დასადატკიცებლად საპიარისა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda(f; x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt = \\ = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

თუ ვისარგებლებთ ტოლობით (იხ. § 5, მაგალითი 1)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{1}{2} \quad (\lambda > 0),$$

მაშინ (2.1) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$S_\lambda(f; x) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - f(x_+) - f(x_-)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^M \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x_+) - f(x_-)}{t} \sin \lambda t dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_M^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_M^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{\pi} \int_M^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt, \quad (2,3)$$

სადაც M — რაიმე დადებითი რიცხვი.

ვთქვათ მოცემულია $\varepsilon > 0$ რიცხვი. რადგანაც $\left| \frac{\sin \lambda t}{t} \right| \leq 1$, როცა $t \geq 1$, ამიტომ

$$|f(x \pm t) \frac{\sin \lambda t}{t}| \leq |f(x \pm t)| \quad (t \geq 1).$$

გამომდინარე აქედან

$$\int_0^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt, \quad \int_0^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt$$

ინტეგრალები აბსოლუტურად კრებალია. ამიტომ M რიცხვი ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ (2.3) ტოლობის მართი და მესამე ინტეგრალების აბსოლუტური მნიშვნელობები ნაკლები იყოს $\frac{\varepsilon}{4}$ -ზე.

ასევე, რადგანაც ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt$ კრებალია, M რიცხვი

ისე შეიძლება შეირჩეს, რომ

$$\left| \frac{f(x_+) + f(x_-)}{\pi} \int_M^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (\lambda \geq 1).$$

შერევეთ თავის თეორემა 5.1-ის ძალით

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x_+) - f(x_-)}{t} \sin \lambda t dt = 0.$$

ამიტომ აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი λ_0 რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^M \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x_+) - f(x_-)}{t} \sin \lambda t dt \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

როცა $\lambda > \lambda_0$.

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს

$$\left| S_\lambda(f; x) - \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \right| < \varepsilon, \quad \text{როცა } \lambda > \lambda_0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ აღვნიშნეთ აქვს (2.2) ტოლობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან წარმოებალია ყოველ სასრულ შუალედში და აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, მაშინ ყოველ x წერტილში ადგილი აქვს (2.2) ტოლობას.

შედეგი 2. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია ყოველ სასრულ შუალედზე და აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებალია x წერტილში, მაშინ მისი ფურიეს ინტეგრალი ამ წერტილში კრებალია $f(x)$ -საკენ.

§ 8. შუამდგომლობა ლევი და კანტორი ფუნქციებისათვის

ვთქვათ $f(x)$ ლევი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.1-ის პირობებს, მაშინ

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut dt,$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut dt = 0.$$

ამიტომ (2.6) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} &= \int_0^{+\infty} a(u) \cos ux du = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ux du \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut dt. \end{aligned} \quad (3,1)$$

(3.1) არის ლუწი ფუნქციის ფურიეს ინტეგრალი. მას ფურიეს კოსინუს ინტეგრალსაც უწოდებენ.

ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ უწყვეტია x წერტილზე, მაშინ

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ux \, du \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt. \quad (3.2)$$

ახლო ვთქვათ, რომ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა. მაშინ

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt = 0, \\ b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

მაშასადამე (2.2) ტოლობა ლეზულობს სახეს

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \int_0^{+\infty} b(u) \sin ux \, du = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ux \, du \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt. \quad (3.3)$$

(3.3) არის კენტი ფუნქციის ფურიეს ინტეგრალი. მას ფურიეს სინუს ინტეგრალსაც უწოდებენ.

თუ x არის $f(x)$ -ის უწყვეტობის წერტილი, მაშინ

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ux \, du \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt. \quad (3.4)$$

§ 4. ფურიეს ინტეგრალის კომპლექსური სახე

ვიღერის ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$a(u) \cos ux + b(u) \sin ux = a(u) \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} + b(u) \frac{e^{iux} - e^{-iux}}{2i} = \\ = a(u) \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} - ib(u) \frac{e^{iux} - e^{-iux}}{2} = \frac{a(u) - ib(u)}{2} e^{iux} + \\ + \frac{a(u) + ib(u)}{2} e^{-iux} = c(u) e^{iux} + c(-u) e^{-iux}, \quad (4.1)$$

სადაც

$$c(u) = \frac{a(u) - ib(u)}{2}, \quad c(-u) = \frac{a(u) + ib(u)}{2}.$$

მაშასადამე, ფურიეს (1.3) ინტეგრალი მიიღებს ასეთ სახეს

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} [c(u) e^{iux} + b(u) e^{-iux}] \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} c(u) e^{iux} \, du, \quad (4.2)$$

სადაც $\int_{-\infty}^{+\infty}$ სიმბოლოს ქვეშ გვსმის $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda}$.

ვიპოვოთ $c(u)$ ფუნქციის გამოსახულება. როცა $u > 0$, გვაქვს

$$c(u) = \frac{a(u) - ib(u)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos ut - i \sin ut) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} \, dt. \quad (4.3)$$

რადგანაც $c(-u) = c(u)$, ამიტომ (4.3) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი u -სათვის

ვთქვათ x არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებდობის წერტილი. მაშინ თუ (4.2)-ში $c(u)$ -ს შევცვლით მისი მნიშვნელობით (4.3)-დან მივიღებთ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} \, dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iu(x-t)} \, dt. \quad (4.4)$$

(4.4)-ს ეწოდება ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა კომპლექსური სახით.

ვთქვათ x არის $f(x)$ ფუნქციის წარმოებლობის წერტილი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad (5.1)$$

მაშინ (თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა) (3.2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(u) \cos ux \, du. \quad (5.2)$$

(5.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა. ამრიგად, მივიღეთ რომ, თუ $F_c(u)$ არის ლუწი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა, მაშინ $f(x)$ თავის მხრივ არის $F_c(u)$ ფუნქციის ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა.

ახლა ვთქვათ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt, \quad (5.3)$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებლობის x წერტილზე მივიღებთ

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(u) \sin ux \, du. \quad (5.4)$$

(5.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს გარდაქმნა. მაშასადამე, თუ $F_s(u)$ არის კენტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს გარდაქმნა, მაშინ $f(x)$ თავის მხრივ არის $F_s(u)$ ფუნქციის სინუს გარდაქმნა.

ვთქვათ $f(x)$ აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედ-ში. ფუნქციას

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} \, dt \quad (5.5)$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა, ან მის ფურიეს პირდაპირ გარდაქმნას ეწოდებენ. თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iux-i(x-t)t} \, dt,$$

მაშინ თანახმად (5.5) ტოლობისა გვაქვს

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{iux} \, du. \quad (5.6)$$

(5.6) ტოლობით განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციის ეწოდება $F(u)$ -ს ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა.

(5.5) და (5.6)-ს ეწოდებენ ფურიეს შებრუნების ფორმულებს.

F_c , F_s და F შევიძლია განვიხილოთ როგორც ამონახსნი შესაბამისად (5.2), (5.4) და (5.6) ინტეგრალური განტოლებებისა.

აღვლია ჩვენება, რომ, თუ $f(x)$ ლუწი მაშინ $F(u) = F_c(u)$ (ვეულისხმობთ, რომ $u < 0$ -სათვის F_c ფუნქცია გაგრძელებულია ლუწად), როცა $f(x)$ კენტი მაშინ $F(u) = -iF_s(u)$ (აქ იგულისხმება, რომ $u < 0$ -სათვის $F_s(u)$ გაგრძელებულია კენტად).

როგორც ვიცით, $1-i\infty; +i\infty$ შუალედში განსაზღვრული ყოველი $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ლუწი $g(x)$ და კენტი $h(x)$ ფუნქციების ჯამად. გამოვდინარე ბქედან

$$F(u) = G_c(u) - iH_s(u).^{*)}$$

აღნიშნული გარემოების გამო საკმარისია განვიხილოთ კოსინუს და სინუს გარდაქმნათა მატალიცები.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } |x| = a, \\ 0, & \text{როცა } |x| > a, \end{cases} \quad (a > 0),$$

ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა.

* G_c -ით აღნიშნული g -ს ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა, ხოლო H_s აღნიშნავს h -ის ფურიეს სინუს გარდაქმნას.

ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი ფურიეს გარდაქმნა იქნება ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos ut \, dt = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left. \frac{\sin ut}{u} \right|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin au}{u}.$$

მაშასადამე

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin au}{u} \cdot \cos ux \, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au}{u} \cos ux \, du.$$

ამრიგად

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au}{u} \cos ux \, du = \begin{cases} 1, & \text{როცა } |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } |x| = a, \\ 0, & \text{როცა } |x| > a. \end{cases}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < a, \\ -1, & \text{როცა } -a < x < 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0 \text{ და } |x| > a, \end{cases} \quad (a > 0)$$

ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა.

ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქცია კენტია, ამიტომ მისი ფურიეს გარდაქმნა იქნება ფურიეს სინუს გარდაქმნა

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin ut \, dt = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left. \frac{\cos ut}{u} \right|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos au}{u},$$

საიდანაც

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos au}{u} \cdot \sin ux \, du.$$

ამრიგად

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos au}{u} \cdot \sin ux \, du = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < a, \\ -1, & \text{როცა } -a < x < 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0 \text{ და } |x| > a. \end{cases}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$f(x) = e^{-ax}, \quad (a > 0),$$

ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი ფურიეს გარდაქმნა იქნება ფურიეს კოსინუს გარდაქმნა

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos ut \, dt = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + u^2}.$$

ამრიგად (5.2) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + u^2} \cos ux \, du = e^{-ax} \quad (x \geq 0),$$

საიდანაც

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2a} e^{-ax} \quad (x \geq 0). \quad (5.7)$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -e^{-ax}, & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია კენტია, ამიტომ მისი ფურიეს გარდაქმნა იქნება ფურიეს სინუს გარდაქმნა:

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \sin ut \, dt = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{u}{a^2 + u^2}.$$

(5.3) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u}{a^2 + u^2} \sin ux \, du = e^{-ax} \quad (x > 0).$$

ქედონ

$$\int_0^{+\infty} \frac{u \sin ux}{a^2 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \quad (x > 0). \quad (5.8)$$

(5.7) და (5.8) ინტეგრალებს ლაპლასის ინტეგრალებს უწოდებენ

მათი თაობა

მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. პირველი ცნებები

როგორც ვიცით, დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება კერძო-წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება, თუ მასში შემავალი უცნობი ფუნქცია წარმოადგენს ორი ან უფრო მეტი ცვლადის ფუნქციას.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებებს, კერძოდ სიმის რხევის, სიბოჭავტარობის და ლაპლასის განტოლებებს, რომლებსაც ჩვეულებრივად უწოდებენ მათემატიკური ფიზიკის ძირითად განტოლებებს.

ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0, \quad (1.1)$$

სადაც F ცხობილი ფუნქციაა, x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო u ამ ცვლადებზე დამოკიდებული სიმრედიანი ფუნქციაა. თუ (1.1) განტოლება წარმოადგენს უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიხედვით, მაშინ მას ეწოდება წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება, მისი ზოგადი სახეა

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y), \quad (1.2)$$

სადაც A, B, C, a, b, c ორი x და y ცვლადების მოცემული ფუნქციებია.

თუ $f(x, y) \equiv 0$, მაშინ (1.2) განტოლებას ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი.

განვიხილოთ 1.1. რაიმე D არეში განსაზღვრულ $u = u(x, y)$ ფუნქციის ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (ინტეგრალი) D არეში, თუ ამ არეში u ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით და ეს ფუნქცია მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს D არის ყოველი (x, y) წერტილისათვის.

ვთქვათ მოცემულია მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0. \quad (1.3)$$

(1.3) განტოლების ამონახსნებს აქვთ შემდეგი თვისებები:

1. თუ u_1 და u_2 ფუნქციებია (1.3) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნები, მაშინ $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ ფუნქცია, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია, აგრეთვე იქნება იმავე განტოლების ამონახსნი.

როგორც ვიცით, ანალიზური ფუნქცია განიხილავს ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებასაც. შევნიშნოთ, რომ n -ური რიგის ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ზუსტიად n წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნი, რომელთა წრფივი კომბინაცია გვაძლევს ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს. რაც შეეხება კერძო-წარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებას, მას შეიძლება ჩქონდეს წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე, ე. ი. ისეთი სიმრავლე, რომლის ყოველი სასრული ნაწილი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია.

II. თუ $\{u_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ წარმოადგენს მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების მამდივრობას, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) \quad (1.4)$$

შეკრების ჯამიც იქნება იმავე განტოლების ამონახსნი ისეთ D არეში, რომელშიც (1.4) მწკრივი თანაბრად კრებილი და შესაძლებელია მისი ორჯერ წევრად წევრად გაწარმოება.

22. ზ. ათეიძის, გ. ხიჭიძისა და კახიძის მიერ

III. თუ $[a, b]$ შუალედვიდან a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის $u(x, y, a)$ ფუნქცია წარმოადგენს (1.3) განტოლების ამონახსნს, მაშინ $[a, b]$ შუალედში უწყვეტი ნებისმიერი $C(a)$ ფუნქციისათვის ინტეგრალი

$$\int_a^b C(a) u(x, y, a) da \quad (1.5)$$

იქნება ამავე განტოლების ამონახსნი იმ პირობით, რომ (1.5) ინტეგრალს გააჩნია საჭირო რაოდენობა უწყვეტო კერძო წარმოებულებისა, ანაერთვეაროვანი განტოლებისათვის დამახასიათებელია შემდეგი თვისება:

არაერთგვაროვანი (1.2) განტოლების u ამონახსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების v ამონახსნის $u+v$ ჯამი არაერთგვაროვანი (1.2) განტოლების ამონახსნია.

მოვახდინოთ მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაცია ამისათვის განვიხილოთ (1.2) განტოლება და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (1.6)$$

(1.6) გამოთხატულებს ეწოდება (1.2) განტოლების დისკრიმინანტი, D არეში $\Delta(x, y)$ ფუნქციის ნიშნის მიხედვით (1.2) განტოლება მიეკუთვნება ერთ-ერთ შემდეგი ტიპებიდან:

$\Delta < 0$ — ელიფსური ტიპი;

$\Delta = 0$ — პარაბოლური ტიპი;

$\Delta > 0$ — ჰიპერბოლური ტიპი;

თუ Δ ნიშანს არ ინარჩუნებს D არეში, მაშინ განტოლებას ეწოდება შერეული ტიპის. შევნიშნოთ, რომ (1.2) განტოლების ტიპი არ იცვლება ნებისმიერი არაფანსაკუთრებული გარდაქმნის დროს. ე. ი. თუ მოვახდენთ ცვლილთა გარდაქმნას

$$t = \varphi(x, y), \quad \tau = g(x, y),$$

სადაც φ და g ფუნქციებს აქვთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები D არეში და გარდაქმნის იაკობიანი

$$\frac{D(\varphi, g)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

D არის ყოველ წერტილში, მაშინ (1.2) განტოლებიდან ცვლილთა ამ გარდაქმნით მივიღებთ განტოლებას, რომელსაც ეწეება იგივე ტიპი, მტყიცვება, რომ (1.2) სახის განტოლება როცა Δ ინარჩუნებს ნიშანს, არაფანსაკუთრებული გარდაქმნით დამოუკიდებელია ერთ-ერთ შემდეგი განტოლებებიდან:

1) ელიფსური განტოლება (ჰესიონის განტოლება)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y);$$

2) პარაბოლური განტოლება (სითბოგამტარობის განტოლება)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y);$$

3) ჰიპერბოლური განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

შეგალითი 1. გამოვარკვეოთ განტოლების ტიპი

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

ამონახსნა. ვუთქვამ $A = x^2, B = 0, C = -y^2, \Delta = B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$.

ე. ი. მოცემული განტოლება ჰიპერბოლური ტიპისაა.

შეგალითი 2. გამოვარკვეოთ განტოლების ტიპი

$$y^{m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (m \geq 0).$$

ამონახსნა. $A(x, y) = y^{m+1}, B = 0, C = 1, \Delta = -y^{m+1}$. ამრიგად, როდესაც $y > 0$, განტოლება ელიფსური ტიპისაა, ხოლო როცა $y < 0$ — ჰიპერბოლური ტიპის.

§ 2. მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები აკონანის, დანა და მისი აპრიპროპიონა

1. მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები. ჩვენ განვიხილავთ მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებებს ორი დამუკიდებელი ცვლილთა, თანაც მხოლოდ კონკრეტულს, რომლებიც არსებითია ფიზიკის, მექანიკის და ტექნიკისათვის. ასეთებია:

I. რხვის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

II. სიბოლოგამტარობის განტოლება

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

III. ლაპლასის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

ზემოთმოცემულ განტოლებებს ეწოდება მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები, რადგან ისინი წარმოადგენენ ფიზიკური მოვლენების მათემატიკურ მოდელს (ფიზიკური ამოცანები დაყვანილია დიფერენციალურ განტოლებებზე). მართლაც (2.1) განტოლების გამოყენებამდე მივყავართ სიბის განივი რხვის, ღეროს ვრცელი რხვის, სიღრმეში ელექტრული რხეებისა, ლილვის გრძელთი რხეების, აირის რხეების და სხვა პროცესების განხილვას. (2.1) არის პიერბოლური ტიპის უმარტივესი განტოლება.

(2.2) განტოლების გამოყენებამდე მივყავართ შეძვევი პროცესების განხილვას: სითბოს გავრცელებას, სითბოსა და აირის დიფუზიის ფორმის გარემოში (მაგალითად, ნავთობისა და აირის ფილტრაცია ქვინაში), აღმართბათი დიფუზიის ზოგიერთ საკითხს და სხვა. (2.2) არის პარაბოლური ტიპის უმარტივესი განტოლება.

(2.3) განტოლებამდე მივყავართ ამოცანების განხილვას ვამტარის ზედაპირზე ელექტრული მასის წინაწილობის, ერთფეროვანი სხეულების (ტაციონალური თბური მდგომარეობის, უფრშეადი სიბის შიდა რაობის შესახებ და სხვა. (2.3) არის ელიფსური ტიპის უმარტივესი განტოლება.

2. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანის დასმა და მასი კორექტულობა. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კერძოწარმოდებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას საზოგადოდ აქვს უამრავი ამონახსნი, ქვემოთ ვნახეთ, რომ (2.1) (2.2) და (2.3) განტოლებებზეც აქვთ ამონახსნისა უსასრულო სიმრავლე. კონკრეტული ფიზიკური ამოცანის ამოხსნის დროს ავტოლებულია ამონახსნისა ამ სიმრავლიდან გამოიყოს ის ერთი, რომელიც დაყვანილია დამატებით ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე გარკვეულ დამატებით პირობებს. ასეთია, პირობები მოცემული განსაზღვრული არის საზღვარზე, რომლებსაც უწოდებენ სასაზღვრო პირობებს და პირობები, რომლებიც მოცემულია დროის რაიმე $t=t_0$ მომენტი-ზე.

საიდან, რომლიდანაც იქნება განსაზღვრული პირობების შესწავლა. ამ პირობებს უწოდებენ საწყის ან კოშის პირობებს.

საწყის და სასაზღვრო პირობათა ერთობლიობას ეწოდება შერეული პირობები.

ვიტყვი, რომ მათემატიკური ფიზიკის ამოცანა დასმულია კორექტულად, თუ ამ ამოცანის ამონახსნი ერთადერთია ის დაყვანილია ვეღვს დამატებით პირობას და ამასთან იქნება მდგრადი, ე. ი. ისეთი, რომ ამოცანის მოცემულობებიდან ნებისმიერი მცირეოდენი ცვლილება შესაბამისად გამოიწვევს ამონახსნის უზრუნველყო ცვლილებას. მდგრადობის მოთხოვნა იმით არის განპირობებული, რომ თუ ამოცანის მონაცემები შეცვლილია ემპირიულად, რაც დაყვანილია გარკვეულ ცდომილებასთან, მაშინ მონაცემებში დაშვებულმა მცირეოდენმა ცდომილებამ არ უნდა გამოიწვიოს ამონახსნის მნიშვნელოვანი ცვლილება. ამრავალ მხოლოდ კორექტულად დასმული ამოცანის ამონახსნს აქვს პრაქტიკული ღირებულება.

3. ცნება ზოგადი ამონახსნის შესახებ. როგორც ვიცით, n -ური n -გან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.4)$$

ზოგადი ამონახსნი ეწოდება

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ფუნქციის, რომელიც დამოკიდებულია $c_1, c_2, \dots, c_n$ ნებისმიერ მუდმივებზე და დაყვანილია ზემოთ პირობებს:

1) $\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ფუნქცია $c_1, c_2, \dots, c_n$ -ის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს (2.4) განტოლების ამონახსნს.

2) მოცემული საწყისი პირობისათვის

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ მუდმივები შეიძლება ისე შეირჩეს, რომ ფუნქცია $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ დაყვანილია მოცემულ საწყის პირობებს (ესაღია ფულისში, რომ $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ეკლფებს (2.4) განტოლების ამონახსნის ატუბობისა და ერთადრობის ატეს).

(2.4) განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება ფუნქცია $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$, რომელიც მიიღება $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ზოგადი ამონახსნიდან $c_1, c_2, \dots, c_n$ მუდმივების კონკრეტული $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ მნიშვნელობებით.

კერძოწარმოდებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თვითონ-შეც შეიძლება დასტეს საკითხი ზოგადი ამონახსნის ცნების შესახებ, როგორც ისეთი ამონახსნისა, რომელიც შეიცავს იმდენ ნებისმიერ

დუნქისას, რამდენიც არის განტოლების რიცხი და რომლიდანაც ამ ფუნქციას სიბრტყის პერტევი შეიძლება მივიღოთ შერტული ან კონის ნებისმიერი ამოცანების ამოხსნა.

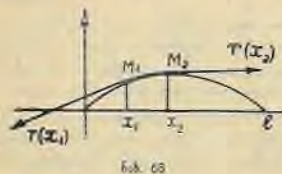
§ 2. სიმის რაზმის პანტოლუა

მათემატიკურ ფიზიკაში სიმა ეწოდება დრეკად, მოქნილ, წვრილ ძაფს, რომელიც არაფართო წინააღმდეგობას არ უწყევს მისი ფორმის ისეთ შეცვლას, რომელიც არ არის დაკავშირებული სივრცის ცვლილებასთან, ე. ი. მას შეუძლია თავისუფლად ვრცელა და ღუნა. სიმის დამუშავის დროს მასში აღიქვება ე. წ. დაკუმულობის ძალები, რომელიც სიმის ნებისმიერ წერტილში შიშართულია ამ წერტილში სიმისადმი ვერტიკული მხედის გასწვრივ.

ვთქვათ l სიგრძის მქონე სიმა დროს საწყის პოზიციებში ძეგს Ox ღერძზე ისე, რომ მისი ერთი ბოლო მოთავსებულია კოორდინატის სათავეში, დეფუშვით, რომ სიმის ბოლოები დამატებულია შესაბამისად $x=0$ და $x=l$ წერტილებში.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ სიმის განივ რტეებს, თანაც ვივლით-ხმებით, რომ მოძრაობა წარმოებს ერთ სიბრტყეში ისე, რომ სიმის უცვლელ წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის პერპენდიკულარულად.

თუ სიმს გამოვიყვანთ წონასწორობის მდგომარეობიდან და შემდეგ მივცემთ მას თავისუფალი მოძრაობის საშუალებას სიმა დაიწყებს რტეებს, ამოცანა მდგომარეობს შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება სიმის ნებისმიერ t პოზიციებში. აღვნიშნოთ $u(x, t)$ -ით წონასწორობიდან სიმის იმ წერტილის გადახრა დროის t პოზიციისათვის, რომლის აბსცისაა x . ცხადია $u(x, t)$ ფუნქცია დიფერენციალური x -ისა და $u(x, t)$ ფუნქცია წარმოადგენს x აბსცისის მქონე წერტილის მოძრაობის გან-



ნახ. 66

და მისი წარმოებული $\frac{\partial u}{\partial x}$ იმდენად მცირეა, რომ უგულისხმევით შეიძლება კიდრატებში ამ სიდიდებიდან შედარებით.

352

გამოყვით სიმის ნებისმიერი (x_1, x_2) უბანი, რომელიც სიმის რტეებს დროს დეფორმირდება M_1, M_2 უბანში (ნახ. 66). ამ უბნის რკალის სიგრძე დროის t პოზიციებში იქნება

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx x_2 - x_1 = \Delta x. \quad (3.1)$$

(3.1)-დან გამომდინარე, შევადგინოთ ვივლით-ხმებით, რომ რტეების პრეტენსიის სიმის უბნის წერტილებზე არ წარმოებს. პუკის * კანონის თანახმად, აქედან გამომდინარეობს, რომ სიმის ყოველ წერტილში დამუშავის ძალის სიდიდე არ არის დამოკიდებული l დროზე. ამრიგად, ჩვენი დამუშავის ძალით, სიმის დაჭიმვის ძალის ცვლილება (რიტორიკულად), რომელიც წარმოიშობა მისი მოძრაობის პრეტენსიის შეიძლება უგულისხმევად, აღვნიშნოთ წონასწორობის მდგომარეობაში სიმაში აღმოჩენილი დაჭიმვის ძალა T -ით.

განვიხილოთ სიმის M_1, M_2 უბანი (ნახ. 66). ამ უბნის ბოლოებზე სიმის მტების მიმართებულია მიღებულია დაჭიმულობის ძალები $\vec{T}(x_1)$

და $\vec{T}(x_2)$ ($|\vec{T}(x_1)| = |\vec{T}(x_2)| = T$). ვთქვათ M_1 და M_2 წერტილებში ვივლით-ხმებით მხედები Ox ღერძთან ადგენენ შესაბამისად φ და $\varphi + \Delta\varphi$ კუთხეებს. მაშინ სიმის M_1, M_2 უბანზე მოქმედი დაჭიმულობის ძალების ვეგვილი Ox ღერძზე იქნება $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$. რადგან φ კუთხე მცირეა, შევძლებთ დავუშვათ, რომ $\sin \varphi \approx \lg \varphi$, $\sin(\varphi + \Delta\varphi) \approx \lg(\varphi + \Delta\varphi)$ მაშინ ვეგვიქნება

$$\begin{aligned} T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi &\approx T \lg(\varphi + \Delta\varphi) - T \lg \varphi = \\ &= T \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = T \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x = \\ &\approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

სიმის რტეებს განტოლების მისაღებად გამოვიყენოთ ნიუტონის II კანონი, რაც იმაზე მდგომარეობს, რომ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედი სხეულის მასისა და აჩქარების ნამრავლის ტოლია. აქედან გამომდინარე, ამ ძალების ნებისმიერ ღერძზე ვეგვილია განივ სხეულის მასისა და ამჟამ ღერძზე აჩქარების ვეგვილის ნამრავლის ტოლი იქნება

* პუკი (1632 — 1703) — ანგლისელი ფიზიკოსი.

ვთქვათ სიმის წრფივი სიმკვრივეა $\rho(x)$. მაშინ $M_1 M_2$ უბნის მასა იქნება $\rho(x) \Delta x$, ხოლო $M_1 M_2$ უბნის აჩქარება კი $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. $P(x, t)$ -თი აღვნიშნათ სიმზე მოქმედი გარეშე ძალის წრფივი განაწილების გვერდითი Ou ღერძზე. მაშინ $M_1 M_2$ უბანზე მოქმედი გარეშე ძალის Ou ღერძზე გვერდითი უქნება $P(x, t) \Delta x$.

ნოუტონის მეორე კანონის თანახმად გვექნება:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + P(x, t) \Delta x,$$

საიდანაც

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x, t), \quad (3.2)$$

(3.2) არის სიმის რხევის განტოლება.

თუ სიმი ერთგვაროვანია, ე. ი. $\rho(x) = \text{const}$, მაშინ (3.2) ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.3)$$

სადაც

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f(x, t) = \frac{P(x, t)}{\rho}.$$

თუ რხევა თავისუფალია, ე. ი. $P(x, t) = 0$, მაშინ (3.3) მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

(3.4) არის სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება.

(3.4) განტოლებას გააჩნია ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე. ამიტომ (3.4) განტოლება არ არის საკმარისი სიმის რხევის შესასწავლად. საძიებელი $u(x, t)$ ფუნქცია, რომელიც გამოხატავს სიმის რხევას, გარდა ამ განტოლებისა დამატებით უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს, რომლებიც გამოდინარეობენ ამოცანის ფიზიკური შინაარსიდან.

ვთქვათ, სიმის ბოლოები $x=0$ და $x=l$ უძრავია, მაშინ ნებისმიერი t -თვის უნდა შესრულდეს პირობები

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.5)$$

ცხადია, დროის საწყის მომენტში სიმს გააჩნია გარკვეული ფორმა, მის წერტილებს კი გარკვეული სიჩქარე. ვთქვათ ეს ფორმაცხადი-

საზღვრება $\varphi_1(x)$ ფუნქციით, ხოლო წერტილთა საწყისი სიჩქარე კი $\varphi_2(x)$ -ით. მაშინ გვექნება

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x). \quad (3.6)$$

(3.5) პირობებს ეწოდება სასაზღვრო პირობები, (3.6)-ს საწყისი პირობები, ხოლო (3.5) და (3.6) პირობებს ერთად კი — შერეული პირობები.

§ 4. უსასრულო სიმის რხევა. დალამბერის ფორმულა

თუ სიმის სიგრძე საკმაოდ დიდია, მაშინ რხევები, რომელთაც სადაც სიმის შუაში აღიძვრება, უმნიშვნელო არას დამოკიდებული სიმის ბოლოებზე. სიმს, რომელსაც აქვს ისეთი სიგრძე, რომ ბოლოები არ ახდენს შესამჩნევ გავლენას შუა ნაწილის რხევაზე, უსასრულო სიმი ეწოდება. უსასრულო სიმის თავისუფალი რხევის შესწავლისათვის უნდა განვიხილოთ რხევის განტოლება

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

მხოლოდ საწყისი პირობებით

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x). \quad (4.2)$$

ისტენიარად დამსმულ ამოცანას ეწოდება კოშის ამოცანა ან ამოცანა საწყისი პირობებით.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შემოვიღოთ ახალი ცვლადები

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (4.3)$$

მაშინ (4.1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (4.4)$$

გაითიან (4.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2a}.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)'_t \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} = \left(-\frac{1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \frac{1}{2a} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2} = -\frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. ი.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

ამ ტოლობიდან ცხადად ჩანს, რომ (4.4) და (4.1) განტოლებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

(4.4) განტოლების ამონახსნი

$$u = \varphi(\xi) + g(\eta)$$

სახის ნებისმიერი ორჯერ უწყვეტად წარმოებული ფუნქცია. ამიტომ (4.1) განტოლების ამონახსნი იქნება

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + g(x + at). \quad (4.5)$$

საწყისი პირობების საშუალებით ვიპოვოთ φ და g ფუნქციები. (4.5)-ის ჩასმით (4.2) საწყის პირობებში მივიღებთ

$$\varphi(x) + g(x) = f(x) \quad (4.6)$$

$$-a\varphi'(x) + ag'(x) = F(x). \quad (4.7)$$

(4.7) ტოლობის $[0, x]$ სეგმენტზე ინტეგრებით გვექნება

$$-\varphi(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(y) dy + C, \quad (4.8)$$

სიდაც C რაიმე მუდმივია. (4.6) და (4.8) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy - \frac{C}{2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy + \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

საბოლოოდ, (4.1) განტოლების ამონახსნი (4.2) პირობების ვითვლისწინებით იქნება

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + g(x + at) =$$

$$= \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy. \quad (4.10)$$

(4.10) ფორმულის ეწოდება დალამბერტის ფორმული.

ვაჩვენოთ, რომ კოშის ამოცანა (4.1)-(4.2) კორექტურულია. ამისათვის საჭიროა დამტკიცდეს რომ ამონახსნი ერთადერთია და მდგრადი. ამონახსნის ერთადერთობა უშუალოდ გამომდინარეობს თვით (4.10) ფორმულის ბიძების მსგელობიდან.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ (4.10) ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული საწყის პირობებზე. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ამ რიცხვისათვის დავადგინოთ ისეთი $\delta > 0$ რიცხვის არსებობა, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

თუ საწყისი პირობები

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = F_1(x)$$

და

$$u_2(x, 0) = f_2(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = F_2(x).$$

დააკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \delta, \quad |F_1(x) - F_2(x)| < \delta.$$

მართალია

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|f_1(x - at) - f_2(x - at)|}{2} +$$

$$+ \frac{|f_1(x + at) - f_2(x + at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |F_1(y) - F_2(y)| dy \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leq \delta(1 + t_0).$$

ამრიგად, თუ $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$, მაშინ

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon.$$

უ. ი. (4.10) მდგარიდან, მაშასადამე დამტკიცდა, რომ კოშის (4.1)-(4.2) ამოცანა დასმულია კორექტულად.

ახლა განვიხილოთ ერთი დამავრებული უსასრულო სიმა. მას ნახევრად უსასრულო სიმა ეწოდება, ვთქვათ ნახევრად უსასრულო სიმა მოთავსებულია Ox ღერძით ნახევარღერძზე, მისი ბოლო მოთავსებულია კოორდინატთა სათვეში და დამავრებულია უძრავად. ამ შემთხვევაში სიმის რხევის ამოცანა შემდგენიარად ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ (4.1) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაეყრდნობება (4.2) საწყის პირობებსა და შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$u(0, t) \equiv 0. \quad (4.11)$$

ამ ამოცანის ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ დალამბერის (4.10) ფორმულიდან, წინასწარ შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციები მოცემული ამოცანიდან გამოდინარე, განსაზღვრულია მხოლოდ $[0; \infty[$ შუალედში, ამასთან (4.2) და (4.11) პირობების ძალით $f(0) = 0$.

გავვარაუდოთ $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციები $]-\infty; 0[$ შუალედში ნებისმიერად, მაშინ ასეთი f და F ფუნქციებისათვის $u(0, t)$ -ს ექნება სახე

$$u(0, t) = \frac{f(-at) + f(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} F(\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

(4.12) ტოლობიდან გამომდინარე იმისათვის, რომ შესრულდეს ტოლობა $u(0, t) \equiv 0$, საჭიროა f და F ფუნქციები $[0; \infty[$ შუალედში $]-\infty; 0[$ შუალედში გავავარაუდოთ ენტიად, ე. ი. ისე, რომ აღვნიშნოთ ტოლობას

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{და} \quad F(-x) = -F(x).$$

ასეთიარად განსაზღვრული f და F ფუნქციებისათვის ეწერტ დალამბერის ფორმულას

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

(4.13) ტოლობით გამოსახული $u(x, t)$ ფუნქცია $x \geq 0$ -სათვის ვეძებოვს (4.1), (4.2), (4.11) ამოცანის ამონახსნს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაეყრდნობება პირობებს

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = x.$$

ამოხსნა. (4.10) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \tau d\tau = \frac{1}{8} \tau^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8} [(x+2t)^2 - (x-2t)^2] = xt.$$

მაგალითი 2. სიმის რხევა განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ვიპოვოთ სიმის ფორმა $t = \frac{\pi}{2a}$ მომენტისათვის, თუ

$$u \Big|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1.$$

ამოხსნა. (4.10)-დან მივიღებთ

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\tau = \sin x \cos at + t.$$

თუ $t = \frac{\pi}{2a}$, მაშინ $u = \frac{\pi}{2a}$, ე. ი. სიმა Ox ღერძის პარალელურია.

§ 5. ორივე ზოლვით დამავრებული სიმის რხევის განტოლების ამოხსნა ცალკეულ განაღვრვის (ფარების) მეთოდით

განვიხილოთ l სიგრძის სიმა, რომლის ერთი ბოლო დამავრებულია კოორდინატთა სათვეში, მეორე კი Ox ღერძის $x=l$ წერტილში. ასეთ შემთხვევაში სიმის რხევას ამოცანა შემდგენიარად ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

განტოლებას ის ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad (5.2)$$

საწყის პირობებს და

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5.3)$$

სასაზღვრო პირობებს.

ამ ამოცანის ამოხსნისათვის თავდაპირველად ვიპოვოთ (5.1) განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს (5.3) სასაზღვრო პირობებს, ვერცხვით ეს ამონახსნი შემდეგი სახით

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (5.4)$$

თუ (5.4) ფუნქციას ჩავსვამთ (5.1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$T''(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

საიდანაც

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (5.5)$$

(5.5) განტოლების მარცხენა მხარეში დგას ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე, ხოლო მარჯვენა მხარეში კი ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ x ცვლადზე. ცხადია, რომ მათ შორის ტოლობას მხოლოდ მაშინ შეიძლება მქონდეს ადგილი, როდესაც (5.5) ტოლობის ორივე მხარე, ისე მარცხენა მხარე ერთი და იგივე რიცხვის ტოლი მუდმივი ფუნქციებია. ვთქვათ ეს რიცხვია $-\lambda$, ე. ი.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

აქედან მიიღება ორი მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (5.6)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (5.7)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ (5.1) განტოლების არანულოვანი ამონახსნი (5.4) სახით, რომელიც დაემაყოფილებს (5.3) სასაზღვრო პირობებს, აუცილებელია ვიპოვოთ (5.6) განტოლების ის არანულოვანი ამონახსნები, რომლებიც დაემაყოფილებენ პირობებს

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (5.8)$$

მარტივად, მივიღეთ ამოცანა: ვიპოვოთ λ პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებსთვისაც (5.6) განტოლებას აქვს ისეთი არანულოვანი ამონახსნები, რომლებიც დაემაყოფილებენ (5.8) სასაზღვრო პირობებს.

λ პარამეტრის ასეთ მნიშვნელობებს ეწოდება საკუთრივი მნიშვნელობები, ხოლო შესაბამის ამონახსნებს — (5.6), (5.8) სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივი ფუნქციები.

ვიპოვოთ (5.6), (5.8) ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ფუნქციები, საჭიროა ვაჩვენოთ კალკულუსში შემთხვევები:

$$1) \lambda < 0, \quad 2) \lambda = 0, \quad 3) \lambda > 0.$$

$$1) \lambda < 0 \text{ -თვის (6.6) განტოლების ზოგადი ამონახსნია}$$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

(5.8) პირობებიდან ვღებულობთ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $C_1 = C_2 = 0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (5.6) განტოლების გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი, რომელიც (5.8) პირობებს აკმაყოფილებს.

$$2) \lambda = 0 \text{ -სათვის (5.6) განტოლების ზოგადი ამონახსნია}$$

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

(5.8) პირობებიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + C_2 \cdot l = 0. \end{cases}$$

საიდანაც $C_1 = C_2 = 0$. ამ შემთხვევაშიც $X(x) \equiv 0$.

$$3) \text{ როცა } \lambda > 0, \text{ (5.6) განტოლების ზოგადი ამონახსნია}$$

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

(5.8) პირობებიდან ვღებულებ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან მივიღებთ $C_1 = 0$. მეორე განტოლებიდან კი

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

რადგან ჩვენ ვეძებთ არანულოვან ამონახსნს, ამიტომ უნდა ჩავთვალოთ, რომ $C_2 \neq 0$. მაშასადამე, უკანასკნელი ტოლობიდან გამოვდინებთ

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

სილინაჲ

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, \quad k=1, 2, \dots$$

(ჩვენ არ ვიღებთ მნიშვნელობას $k=0$, რადგან ამ შემთხვევაში $X \equiv 0$), ამრიგად, საბოლოოდ მივიღეთ

$$X(x) = C \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

λ პარამეტრის იმ მნიშვნელობებს, რომლისთვისაც (5.6) განტოლებას აქვს ისეთი არანულოვანი ამონახსნები, რომლებიც (5.8) საწყის პირობებს აკმაყოფილებს, ეწოდება (5.1), (5.2), (5.3) მოცანის საკუთრივი ამონახსნები.

ამრიგად, დასმული ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k=1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

ხოლო საკუთრივი ამონახსნებია

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (5.10)$$

სადაც A_k ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული მუდმივებია.

$\lambda = \lambda_k$ -თვის (5.7) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l},$$

სადაც B_k და D_k ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, ყოველი λ_k -თვის (5.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც (5.3) სისაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს, არის ფუნქცია

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \left(B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) = \\ &= \sin \frac{k\pi x}{l} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right), \end{aligned}$$

სადაც $a_k = A_k B_k$ და $b_k = A_k D_k$.

352

რადგან (5.1) განტოლება წრფივი და ერთგვაროვანია, ამიტომ მისი ამონახსნთა სისტემის (5.1) განტოლების ამონახსნია. (5.1) განტოლების ამონახსნი იქნება აგრეთვე მწკრივი

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (5.11)$$

თუ ეს მწკრივი თანაბრად კრებალია და შესაძლებელია მისი იარაღი წევრ-წევრად გაწარმოება x და t ცვლადებით. ესაღია, $u(x, t)$ ფუნქცია დაკმაყოფილებს საწყის პირობებს.

დავვარა განვსაზღვროთ a_k და b_k მუდმივები ისე, რომ (5.11) ტოლობით განსაზღვრულმა $u(x, t)$ ფუნქციამ დაკმაყოფილოს (5.2) საწყისი პირობები. ამის მიღწევა შესაძლებელია a_k და b_k მუდმივების შეტრეფით. თუ (5.11) ტოლობაში ჩავსვათ $t=0$ და გავითვალისწინებთ (5.2) საწყის პირობებს მივიღებთ

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (5.12)$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ შესაძლებელია $[0, l]$ შუალედში მისი ფურცის სინუს მწკრივად გაშლა, მაშინ (5.12)-დან გვიქვს

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (5.13)$$

ანალოგიურად, თუ (5.11) ტოლობას გავწარმოებთ t ცვლადით და $\frac{\partial u}{\partial t}$ ფუნქციაში ჩავსვათ $t=0$, (5.2) საწყისი პირობის ვათვალისწინებთ გვექნება

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{ak\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

აქაც ვივლისებთ, რომ $F(x)$ ფუნქცია $[0, l]$ შუალედში იშლება ფურცის სინუს მწკრივად, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$b_k \frac{ak\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx,$$

25 ს. თოფურია, ვ. ზოჭოდივა, ჯ. გაბაშვილი, ნ. მაქარაშვილი

353

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (5.14)$$

ამრიგად, (5.1)-(5.3) ამოცანის ამონახსნია (5.11) მწკრივით განსაზღვრული ფუნქცია, სადაც a_k და b_k კოეფიციენტები განისაზღვრება შესაბამისად (5.13) და (5.14) ფორმულებით.

აქვე შევნიშნათ, რომ ჩვენ დავაზუსტებთ, თუ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $f(x)$ და $F(x)$ ფუნქციები, რათა შესაძლებელი იყოს (5.11) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება. ფიზიკურ ამოცანებში ეს პირობები ჩვეულებრივ შესრულებულია.

შავალით ი. ეიპოვით ორივე, $x=0$ და $x=l$ ბოლოებით დამაგრებული სიმის რჩევა, თუ სიმის საწყისი ფორმაა $f(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$, სადაც n მთელი რიცხვია და სიმის საწყისი სიჩქარე უდრის ნულს.

ამოცანა. უნდა ვიპოვოთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{aligned} u \Big|_{x=0} &= u \Big|_{x=l} = 0, \\ u \Big|_{t=0} &= f(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= F(x) = 0. \end{aligned}$$

როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების ამონახსნა განისაზღვრება ფორმულით

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \\ b_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

პირობის ძალით $b_k = 0$, ხოლო

$$a_k = \frac{2A}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა } k \neq n, \\ A, & \text{როცა } k = n. \end{cases}$$

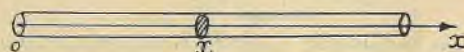
ამრიგად

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi at}{l}.$$

§ 6. სითბოგამტარობის განტოლება

1. სითბოგამტარობის განტოლების გამოყენება. განვიხილოთ ერთგვაროვანი l სიგრძის ღერო, რომლის გვერდითი ზედაპირი დაფარულია თბოიზოლაციით, ე. ი. სითბო შეუღწევადია. ვიგულისხმობთ, რომ ღეროს განივი კვეთის ყოველ წერტილში ტემპერატურა ერთნაირია. თუ საწყის მდგომარეობაში ღერო არათანაბრდება, გამთბარი, მაშინ სითბოგამტარობის ძალით ღეროში იწარმოებს სითბოს გადაცემა უფრო გამთბარი ნაწილიდან ნაკლებად გამთბარისაკენ. ამ პროცესის შედეგად მოხდება ღეროს წერტილებში ტემპერატურის ცვლილება და დროთა განმავლობაში ღეროს ყველა წერტილში ტემპერატურა გათანაბრდება. შევისწავლოთ ღეროში სითბოს გავრცელების პროცესი.

აბსცისთა ღერძად ავიღოთ ღეროს ღერძი, ღეროს ერთი ბოლო შოვათავსოთ კოორდინატთა სათავეში, მეორე კი $x=l$ წერტილში (ნახ. 69).



ნახ. 69

ვთქვათ, ღეროს l მომენტში ტემპერატურა ღეროს იმ კვეთში, რომლის აბსცისაა x , არის $u(x, t)$. ფიქსირებული t -სათვის, $u(x, t)$ ფუნქცია

გვაძლევს ღეროს წერტილების ტემპერატურას ღეროს მოცემულ პო-
მენტში, ხოლო ფიქსირებული x -თვის კი ტემპერატურის ცვლილებას
ღეროს მიხედვით ღეროს იმ კვეთაში, რომლის აბსცისაა x . $\frac{\partial u}{\partial x}$ გამო-

სახავს ტემპერატურის ცვლილებას Ox ღერძის შიშართულებით.

სითბოგამტარობის დიფერენციალური განტოლების გამოყენება გე-
წარება შემდეგ დებულებებს:

1) სითბოს რაოდენობა რომელიც ატყვლებულა შეიწივით ერთ-

ჯვარედინ სხეულს, რაბა მისმა ტემპერატურამ მოიმატოს Δu სიდიდით,

ტოლია

$$Q = c\rho V \Delta u, \quad (6.1)$$

სადაც V არის სხეულის მოცულობა, c -მისი სიმკვრივე, ρ -კუთხის სით-
ბოტევადობა.

2) სითბოს რაოდენობა, რომელიც Δt დროის შუალედში გამოედ-
ნება ღეროს განივი კვეთიდან, პროპორციულია კვეთის ფართობისა,
ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარისა, რომელიც მიმართულია კვეთის
პერპენდიკულარულად და Δt დროსა, ე. ი. ტოლია

$$-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t, \quad (6.2)$$

სადაც S განივი კვეთის ფართობია, k -სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

განვიხილოთ ღეროს მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია იმ გა-
ნივ კვეთებს შორის, რომელთა აბსცისებია x_1 და x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta x$).
სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც გაივლის x_1 აბსცისის მქონე კვეთა-
ში Δt დროის განმავლობაში ტოლია

$$Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t,$$

ხოლო სითბოს რაოდენობა, რომელიც გამოვა x_2 კვეთიდან, იქნება

$$Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t.$$

ესადაც, სითბოს ის ΔQ რაოდენობა, რომელიც მიიღო ღეროს გან-
საზღვრულმა მონაკვეთმა Δt დროის განმავლობაში, ტოლი იქნება Q_1 და
 Q_2 სითბოს რაოდენობების სხვაობისა:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \left[-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t \right] - \left[-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t \right]. \quad (6.3)$$

ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით (6.3)-დან მივიღებთ:

$$\Delta Q = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \cdot S \Delta t. \quad (6.4)$$

სითბოს ეს რაოდენობა მოხმარდება ღეროს მონაკვეთის ტემპერა-
ტურის გაზრდის რაიმე Δu სიდიდით ამიტომ (6.1) ფორმულის ძალით
გვექნება

$$\Delta Q = c\rho S \Delta x \Delta u. \quad (6.5)$$

(6.4) და (6.5) ტოლობებიდან, თუ გავიყვანოთ Δx -ს ნიშნით, რომ $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$,

მივიღებთ

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \cdot S \Delta t = c\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

ანუ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{k}{c\rho} = a^2$, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.6)$$

(6.6) განტოლება წარმოადგენს ერთგვაროვან ღეროში (რომელშიც არ
არის სითბოს წყარო) სითბოგამტარობის განტოლებას.

შევნიშნოთ, რომ სითბოგამტარობის განტოლება თხელი ერთგვარო-
ვანი ფორმისათვის დებულებას შემდეგ სახეს

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (6.7)$$

იმისათვის, რომ ფიზიკით ღეროს ტემპერატურა ღეროს ნებისმიერ
პოინტში, მართა (6.6) განტოლება საკმარისი არ არის, საჭიროა ამო-
ცანის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე გარკვეული დამატებითი
პირობები:

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u(x), \quad (6.8)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = g_1(t), \quad (6.9)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=l} = g_2(t). \quad (6.10)$$

(6.8) საწყისი პირობის ფიზიკური შინაარსი იმაში მდგომარეობს, რომ ღეროს $l=0$ მომენტში ღეროს სხვადასხვა კვეთაში ტემპერატურა არის $\varphi(x)$. (6.9) და (6.10) სასაზღვრო პირობების შინაარსი კი არის ის, რომ ღეროს $x=0$ და $x=l$ ბოლოებში ტემპერატურა შესაბამისად ტოლია $g_1(t)$ და $g_2(t)$ -ს.

2. უსასრულო ღეროში სითბოგამტარობის განტოლების ამოხსნა ფურცელზე მეთოდით. თუ ღერო იმდენად გრძელია, რომ მის შუა ნაწილში სითბოს გავრცელების პროცესზე არსებით გავლენას არ ახდენს ტემპერატურის რეჟიმი მის ბოლოებზე, მაშინ ღეროს უსასრულო ღეროს უწოდებენ.

განვიხილოთ უსასრულო ღერო. თუ Ox ღერძი ვმთხვევა ღეროს ღერძს, მაშინ სითბოგამტარობის ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოვალიბდება: ვიპოვოთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.11)$$

განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (6.12)$$

სადაც $f(x)$ განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე. (6.11)-(6.12) ამოცანის ეწოდება კოშის ამოცანა ან ამოცანა საწყისი პირობებით. ამისათვის (6.11) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (6.13)$$

თუ $u(x, t)$ ფუნქციის (6.13) მნიშვნელობას ჩავსვამთ (6.11) განტოლებაში, მივიღებთ

$$X(x) T'(t) = a^2 T(t) X''(x),$$

ანუ

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad (6.14)$$

სადაც λ მუდმივია (როგორც კვეთით ვნახეთ, (6.14) ფარდობა ამოცანის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე არ შეიძლება იყოს დადებითი). (6.14)-დან გამომდინარეობს ორი განტოლება

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (6.15)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (6.16)$$

(6.15) და (6.16) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია. მათი ზოგადი ამონახსნი შესაბამისად არის

$$T(t) = C e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (6.17)$$

და

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

სადაც A, B და C ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, მივიღებთ, რომ ფუნქცია

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) C e^{-a^2 \lambda^2 t} = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t} \quad (6.18)$$

ნებისმიერი $\alpha = AC$ და $\beta = BC$ მუდმივებისათვის არის (6.11) განტოლების ამონახსნი. ფიქსირებული λ -თვის (6.18) ფუნქცია არის (6.11) განტოლების ამონახსნი, ამიტომ λ -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ α და β -ს სხვადასხვა მნიშვნელობები. აქედან გამომდინარე, α და β შეიძლება იყოს λ -ს ნებისმიერი ფუნქციები $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$. მაშასადამე, მავიღებთ (6.11) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს

$$u_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

რომელიც დამოკიდებულია λ პარამეტრზე. λ -ს შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა $]-\infty; \infty[$ შუალედიდან. (6.14) ტოლობიდან გამომდინარე, საკმარისია განვიხილოთ λ -ს მნიშვნელობები $[0; \infty[$ შუალედიდან.

(6.11) განტოლება წრფივია და ერთგვაროვანი, ამიტომ ფუნქცია

$$u(x, t) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \quad (6.19)$$

ივრცოვებოქნება (6.11) განტოლების ამონახსნი, თუ (6.19) ინტეგრალი კრებოლია და შესაძლებელია მისი წევრ-წევრად ვიწარმოება x -ით ორჯერ და t -ით ერთჯერ.

დავვარაუდოთ, რომ $\alpha(\lambda)$ და $\beta(\lambda)$ ფუნქციები ისე, რომ (6.19) ამონახსნი დაკმაყოფილოს (6.12) საწყისი პირობა, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

* (6.17)-დან გამომდინარეობს, რომ, თუ (6.14) ფარდობა იმდენად დიდია, რომ ტემპერატურა მხოლოდ ერთი წამით შეიძლება იყოს დადებითი, მაშინ ტემპერატურა მხოლოდ ერთი წამით შეიძლება იყოს დადებითი, რითაც $\lambda \rightarrow \infty$, რაც დავუშვავთ.

$$u \Big|_{t=0} = f(x) = \int_0^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (6.20)$$

თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს, მაშინ (6.20) ინტეგრალი წარმოადგენს მის ფურიეს ინტეგრალს, ამიტომ $\alpha(\lambda)$ და $\beta(\lambda)$ განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \lambda \tau d\tau, \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \lambda \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

$\alpha(\lambda)$ და $\beta(\lambda)$ -ს მნიშვნელობები (6.21)-დან ჩავსვით (6.20)-ში. მივიღებთ

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (\cos \lambda x \cos \lambda \tau + \sin \lambda x \sin \lambda \tau) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \lambda (\tau - x) d\tau. \end{aligned}$$

თუ შევცვლით ინტეგრების რიგს, გვექნება

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (\tau - x) d\lambda. \quad (6.22)$$

ცნობილია ფორმულა

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2 t}}.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით (6.22) მიიღებთ სახეს

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau. \quad (6.23)$$

(6.23) ინტეგრალს ეწოდება ბუასონის ინტეგრალი. ისეა ვაჩვენოთ, რომ (6.23) ტოლობით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6.11) განტოლებას და (6.12) საწყის პირობას. მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\xi = \frac{x - \tau}{2a\sqrt{t}}.$$

აქედან

$$\tau = x - 2a\xi\sqrt{t}, \quad d\tau = -2a\sqrt{t} d\xi.$$

მივიღებთ

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2a\xi\sqrt{t}) e^{-\xi^2} d\xi,$$

საიდანაც გვექნება (იხ. [37], გვ. 215)

$$u \Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\xi^2} d\xi = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = f(x) *.$$

ე. ი. (6.23) ფუნქცია აკმაყოფილებს (6.12) საწყის პირობას. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F_\tau(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}. \quad (6.24)$$

აღვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{\partial F_\tau(x, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} + \frac{(x-\tau)^2}{8a^2 t^2 \sqrt{\pi t}} \right\} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}$$

და

$$\frac{\partial^2 F_\tau(x, t)}{\partial x^2} = \left\{ -\frac{1}{4a^2 t \sqrt{\pi t}} + \frac{(x-\tau)^2}{8a^4 t^2 \sqrt{\pi t}} \right\} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}.$$

აქედან გამომდინარე

$$\frac{\partial F_\tau(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 F_\tau(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6.25)$$

* მგულისხმობთ, რომ $t=0$ ჩანსა დისკონტინუა.

გ. ი. ფუნქცია $F_{\tau}(x, t)$ არის (6.11) განტოლების ამონახსნი, $F_{\tau}(x, t)$ ფუნქციის ეწოდება (6.11) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი. თუ დავუღებთ, რომ შესაძლებელია (6.23) ინტეგრალში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოება, მაშინ (6.25)-დან ვღებულობთ, რომ (6.23) ფორმულით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია არის (6.11) განტოლების ამონახსნი.

ვაჩვენოთ, რომ სითბოგამტარობის (6.11)-(6.12) ამოცანა დასმულია კორექტულად. მტკიცდება, რომ (6.23) ამონახსნი ერთადერთია. ვაჩვენოთ, რომ (6.23) ამონახსნი მდგრადია. ვთქვათ $u(x, t)$ არის (6.11) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (6.12) პირობას, ხოლო $\bar{u}(x, t)$ კი იყოს (6.11)-ის ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$\bar{u} \Big|_{t=0} = \bar{f}(x).$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\bar{u}(x, t) - u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{f}(\tau) - f(\tau)] e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau.$$

ქვედან

$$|\bar{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(\tau) - f(\tau)| e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau. \quad (6.26)$$

დავუშვათ, რომ

$$|\bar{f}(\tau) - f(\tau)| < \varepsilon, \quad (-\infty < \tau < \infty),$$

მაშინ (6.26)-დან გვქვია:

$$|\bar{u}(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon$$

ნებისმიერი x და t -თვის.

შეშავდამე სითბოგამტარობის (6.11)-(6.12) ამოცანა კორექტულია.

3. ნახევრად უსასრულო ღერო. განვიხილოთ ნახევრად უსასრულო ღერო, რომლის ღერძი ემთხვევა Ox დამდებით ნახევარღერძს. ვივარაუდოთ, რომ გვერდითი ზედაპირი თბოიზოლირებულია. განვიხილოთ α -რი ამოცანა:

ამოცანა ა) ვთქვათ, ღეროს მარცხენა ბოლო თბოიზოლირებულია.

ლია, ე. ი. $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$. ამ შემთხვევაში სითბოგამტარობის ამოცანა მათემატიკურად ასე ჩამოყალიბდება. ვიპოვოთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.27)$$

განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს

$$u \Big|_{t=0} = f(x) \quad (6.28)$$

საწყის პირობას და

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.29)$$

სასაზღვრო პირობას, სადაც $f(x)$ განსაზღვრულია $[0; \infty]$ შუალედში.

დასმული ამოცანის ამოხსნა მიიღება (6.23) ფორმულიდან, ვაგავრძელოთ $f(x)$ ფუნქცია მთელ რიცხვით ღერძზე ისე, რომ ის იყოს ლუწი ფუნქცია, ე. ი. ადგილი ჰქონდეს ტოლობას $f(-x) = f(x)$. მაშინ ფუნქცია

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau \quad (6.30)$$

იქნება (6.27)-(6.29) ამოცანის ამონახსნი. მართლაც, როგორც ზემოთ ვნახეთ, (6.30) ტოლობით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (6.27) განტოლებას და (6.28) საწყის პირობას. ვაჩვენოთ, რომ ის დააკმაყოფილებს აგრეთვე (6.29) სასაზღვრო პირობას. (6.30)-დან გვაქვს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4a^2 t \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (x-\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau,$$

ქვედან

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4a^2 t \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau f(\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4a^2 t}} d\tau = 0,$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია.

ამრიგად, (6.30) არის დასმული ამოცანის ამონახსნი რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს სხვა სახით (f ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2t}} f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} d\tau = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2t}} \right\} d\tau. \end{aligned}$$

ამოცანა ბ) ვთქვათ, ღეროს მარცხენა ბოლოში შენარჩუნებულია მუდმივი ტემპერატურა. სიმარტივისათვის ვგულისხმობთ, რომ $u|_{x=0} = 0$. ამ შემთხვევაში სითბოგამტარობის ამოცანა ჩამოყალიბდება ასე:

ვიპოვოთ (6.27) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს (6.28) საწყის პირობას და

$$u|_{x=0} = 0 \quad (6.31)$$

სასაზღვრო პირობას.

გავავრცელოთ $f(x)$ ფუნქცია მთელ რიცხვით ღეროზე კენტად. ე. ი. $f(-x) = -f(x)$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში დასმული ამოცანის ამონახსნი იქნება ფუნქცია

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} d\tau. \quad (6.32)$$

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ის დააკმაყოფილებს (6.31) სასაზღვრო პირობას. მართლაც

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4a^2t}} d\tau = 0,$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია. (6.32) ამონახსნი f ფუნქციის კენტობის გათვალისწინებით შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2t}} \right\} d\tau.$$

4. სითბოს გავრცელება სასრულ ღეროში. განვიხილოთ სითბოს გავრცელების პროცესი სასრული l სიგრძის ღეროში. ვივარაუდოთ, რომ ღეროს ღერძი ემთხვევა Ox ღერძს და მისი ბოლოები მოთავსებულია წერტილებში, აბსცისებით $x=0$ და $x=l$. ასეთი ღეროსათვის განვიხილოთ სამი ამოცანა.

ამოცანა ა) ვთქვათ ღეროს ბოლოები თბოიზოლირებულია, ე. ი. ბოლოებში სითბოცვლა არ ხდება. ამ შემთხვევაში უნდა ვიპოვოთ (6.27) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს (6.28) საწყის პირობას და

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (6.33)$$

სასაზღვრო პირობებს.

როგორც გეოგრაფიკულ პუნქტში ვნახეთ, (6.27) განტოლების ამონახსნებია

$$u(x, t) = X(x) T(t) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

სადაც α , β და λ ნებისმიერი მუდმივებია. (6.33) სასაზღვრო პირობებიდან გამოვღწეოთ, რომ $X'(0) = X'(l) = 0$, ანუ

$$X'(0) = (-\alpha \lambda \sin \lambda x + \beta \lambda \cos \lambda x) \Big|_{x=0} = \beta \lambda = 0,$$

ე. ი. $\beta = 0$ და

$$X'(l) = -\alpha \lambda \sin \lambda l + \beta \lambda \cos \lambda l = 0.$$

აქედან $\beta=0$ ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\alpha \sin \lambda l = 0. \quad (6.34)$$

ცხადია, რადგან ჩვენ ვეძებთ არანულოვან ამონახსნს, უნდა ჩავთვალოთ, რომ $\alpha \neq 0$ და $\sin \lambda l = 0$. უკანასკნელი ტოლობა შესრულდება ანუ $\lambda l = k\pi$, $k=0, 1, 2, \dots$ ამრიგად (6.27), (6.28), (6.33) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნები მიიღება λ პარამეტრის შემდეგი მნიშვნელობებისათვის

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

ყოველ λ_k -ს შეესაბამება საკუთარი ფუნქციები

$$X_k(x) = \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

ამრიგად (6.27) განტოლების და (6.33) სასაზღვრო პირობებს დაკმაყოფილებს ფუნქციები

$$u_k(x, t) = \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (6.35)$$

ცხადია აკრძალულია, რომ სასრულო ჯამი

$$u_N(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2} t},$$

სადაც α_k ნებისმიერი მუდმივებია, თვის მხრივ იქნება (6.27) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც (6.33) სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს. ამიტომ თუ α_k კოეფიციენტებს გარკვეული პირობით შევარჩევთ, მაშინ უსასრულო მწკრივის ჯამიც

$$u(x, t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2} t}, \quad (6.36)$$

ასევე იქნება (6.27), (6.33) ამოცანის ამონახსნი, დისკრეტულ შევარჩივით α_k კოეფიციენტები, ისე, რომ $u(x, t)$ ფუნქციამ დაკმაყოფილოს საწყისი პირობა $u(x, 0) = f(x)$, ანუ შესრულდეს ტოლობა

$$* \text{ კოეფიციენტები, რომ } u_0(x, t) = \frac{\alpha_0}{2}.$$

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2} t}, \quad 0 < x < l. \quad (6.37)$$

(6.37) ტოლობა წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ვაშლის ფურცის კო-სინუს მწკრივად (ცხადია ივლისსმება, რომ $f(x)$ სათანადო პირობებს აკმაყოფილებს), ამიტომ α_k კოეფიციენტები იქნება $f(x)$ -ის ფურცის კოეფიციენტები და ისინი გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (6.38)$$

ამრიგად, (6.27), (6.28) (6.33) ამოცანის ამონახსნია (6.36) მწკრივით განსაზღვრული ფუნქცია $u(x, t)$, სადაც α_k კოეფიციენტები (6.38) ტოლობით გამოითვლებიან.

ამოცანა 3) ვთქვათ დეროს ბოლოებზე შენარჩუნებულია ერთი და იგივე მუდმივი ტემპერატურა. სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $u(0, t) = u(l, t) = 0$. ამ პირობებში სიბოლოებში ამოცანა წამოყალიბდება ასე:

ვიპოვოთ (6.27) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაკმაყოფილებს (6.28) საწყის პირობას და

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (6.39)$$

სასაზღვრო პირობებს.

ისევე, როგორც ეს მოხდა ამოცანა ა) ამონახსნის, წარედგება, რომ (6.27) განტოლების და (6.39) სასაზღვრო პირობებს დაკმაყოფილებს

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (6.40)$$

ფუნქცია.

ამათი უნდა აღინიშნოს, რომ (6.40) იქნება (6.27)-ის ამონახსნი იმ შემთხვევაში, თუ შესაძლებელია მისი თვითი ვაშარმოება x -ით და t ცვლილით.

(6.28) საწყისი პირობის ძალით (6.40)-დან მივიღებთ

$$u|_{t=0} = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad 0 < x < l. \quad (6.41)$$

(6.41) წარმოადგენს $f(x)$ -ის გაშლის ფურიეს სინუს მწკრივად $]0; l[$ შუალედში, ამიტომ

$$\beta_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (6.42)$$

ამრიგად, (6.27), (6.28), (6.39) ამოცანის ამონახსნია (6.40) მწკრივით განსაზღვრული $u(x, t)$ ფუნქცია, სადაც β_k განისაზღვრება (6.42) ფორმულით.

ამოცანა ე) ვთქვათ ღეროს $x=l$ ბოლოზე შენარჩუნებულია მუდმივი ტემპერატურა u_0 , ხოლო მეორე ბოლო $x=0$ თბოიზოლირებულია. ამ შემთხვევაში სითბოგამტარობის ამოცანა ჩამოყალიბდება ასე: ვიპოვოთ (6.27) განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს (6.28) საწყის პირობას და

$$u \Big|_{x=l} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6.43)$$

სასაზღვრო პირობებს.

შემოვიყვანოთ ახალი უცნობი v ფუნქცია $u = u_0 + v$ პირობით ცხადია, v დააკმაყოფილებს (6.27) განტოლებას. (6.43) სასაზღვრო პირობებში v ფუნქციისათვის იქნება:

$$v \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (6.44)$$

ხოლო საწყისი პირობა მიიღებს სახეს

$$v \Big|_{t=0} = f(x) - u_0. \quad (6.45)$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, (6.27) განტოლების ამონახსნებია

$$v(x, t) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

სადაც α , β და λ ნებისმიერი მუდმივებია. (6.44) სასაზღვრო პირობების ძალით ვვაქვს

$$X'(x) \Big|_{x=l} = (-\alpha \lambda \sin \lambda x + \beta \lambda \cos \lambda x) \Big|_{x=l} = \beta \lambda = 0,$$

ე. ი. $\beta = 0$.

შემდეგ

$$X(t) = \alpha \cos \lambda l = 0,$$

საიდანაც (რადგან $\alpha \neq 0$)

$$\lambda_k = (2k-1) \frac{\pi}{2l} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (6.46)$$

მაშასადამე, (6.27) განტოლებას და (6.44) სასაზღვრო პირობებს გარკვეულ პირობებში დააკმაყოფილებს ფუნქცია

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x, \quad (6.47)$$

სადაც λ_k განისაზღვრება (6.46) ტოლობით. (6.45) საწყისი პირობიდან მიიღება

$$f(x) - u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos (2k-1) \frac{\pi x}{2l}. \quad (6.48)$$

გარკვეულ პირობებში (6.48) წარმოადგენს $f(x) - u_0$ ფუნქციის გაშლის ფურიეს მწკრივად. ამიტომ α_k კოეფიციენტები გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos (2k-1) \frac{\pi x}{l} dx - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{u_0}{2k-1}. \quad (6.49)$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} \cos \frac{(2k-1) \pi x}{2l}. \quad (6.50)$$

მაშასადამე, (6.27), (6.28), (6.43) ამოცანის ამონახსნია (6.50) მწკრივით განსაზღვრული ფუნქცია $u(x, t)$, სადაც α_k განისაზღვრება (6.49) ფორმულით.

კერძოდ, თუ $f(x) \equiv 0$, მაშინ (6.50) მიიღებს სახეს

$$u(x, t) = u_0 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.51)$$

24. ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლია, მ. გაბიაშვილი, ნ. შატრაშვილი

369

განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობას

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{თუ } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & \text{თუ } x < x_1 \text{ ან } x > x_2. \end{cases}$$

ამოხსნა (6.23) ფორმულის ძალით

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau.$$

ეს ფუნქცია გამოისახება ე. წ. ალბათობის ინტეგრალის საშუალებით:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi.$$

მართლაც ცვლადთა გარდაქმნით

$$\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t}} = \xi, \quad d\tau = -2a\sqrt{t} d\xi,$$

მივიღებთ

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

ამრიგად, ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობას

$$u|_{t=0} = u_0$$

და

$$u|_{x=0} = 0$$

სასაზღვრო პირობას.

370

ამოხსნა აქ ნევნ გვაქვს ნახევრად უსასრულო ღერო, რომლის მარცხენა ბოლოში შენარჩუნებულია ნულოვანი ტემპერატურა. (6.32)-ის თანახმად ვწერთ

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4t}} \right] d\tau.$$

პირველ ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\frac{x-\tau}{2\sqrt{t}} = \xi, \quad d\tau = -2\sqrt{t} d\xi,$$

მივიღებთ

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} d\tau = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

მეორე ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა ფორმულით

$$\frac{x+\tau}{2\sqrt{t}} = \xi, \quad d\tau = 2\sqrt{t} d\xi,$$

ვპოულობთ

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\tau)^2}{4t}} d\tau = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$u(x, t) = u_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობას

$$u|_{t=0} = \begin{cases} x, & \text{თუ } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ l-x, & \text{თუ } \frac{l}{2} \leq x < l \end{cases}$$

371

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=l} = 0$$

სასაზღვრო პირობებს.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს l სიგრძის ლერძთან, რომლის ორივე ბოლოზე შენარჩუნებულია ნულოვანი ტემპერატურა. (6.40) ფორმულის თანახმად, ამონახსნი იქნება

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{k \pi x}{l},$$

სადაც

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} x \sin \frac{k \pi x}{l} dx + \\ &+ \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx = \frac{4l}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k \pi}{2}. \end{aligned}$$

ამრიგად, საძებნი ამონახსნია

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{k \pi}{2} \sin \frac{k \pi x}{l} = \\ &= \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2k+1) \pi x}{l}. \end{aligned}$$

ფ. 2. ლაპლასის პანორამა

1. ამოცანა, რომელსაც მიეკუთვნება ლაპლასის განტოლება, დროტორც წინა პარაგრაფში შეგნაშნეთ, ურთვეაროვან თხელ ფირფიტაში სრთბოგამტარობის განტოლებას სრთბოს წყაროს უქონლობის შემთხვევაში აქვს სახე (ფ. 6.7))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (7.1)$$

ლიფეშეით, რომ ფირფიტის ყოველ წერტილში ტემპერატურა დამუარებულია, ე. ი. ტემპერატურა დროზე არ არის დამოკიდებული. მაშინ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ და (7.1) განტოლება მაიღებს სახეს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

ლაპლასის ოპერატორის გამოყენებით (7.2) განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება $\Delta u = 0$.

(7.2) განტოლებას ეწოდება ლაპლასის განტოლება. ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია თავის კერძო წარმოებულებთან ერთად მთავრე რიგის წარმოებულების ჩათვლით და რომელიც აკმაყოფილებს (7.2) განტოლებას სიბრტყის რაიმე D არეში, ეწოდება ჰარმონიული ფუნქცია D არეში.

საზოგადოდ (7.2) განტოლებას გააჩნია უამრავი ამონახსნი. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს სრთბოს გავრცელების პროცესს თხელ ფირფიტაში, საჭმარისია მართო სასაზღვრო პირობები, ხოლო საწყისი პირობების ცოდნა კი საჭირო არ არის, რადგან პროცესი სტაციონალურია და ტემპერატურა დროის მიხედვით არ იცვლება. აღვნიშნოთ D არის საზღვარი S -ით. ვთქვათ

$$u \Big|_S = f(M), \quad (7.3)$$

სადაც $f(M)$ არის S -ზე განსაზღვრული მოცემული უწყვეტი ფუნქცია. ამოცანას, რომელიც მდგომარეობს (7.2) განტოლების იმ ამონახსნის პოვნაში, რომელიც (7.3) პირობას დააკმაყოფილებს, ეწოდება დირიხლეს ამოცანა.

2. ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. ჩავწეროთ ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში. კავშირი დეკარტის (x, y) და პოლარულ (r, φ) კოორდინატებს შორის ასეთია:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (7.4)$$

რთულ ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (7.5)$$

(7.4) ფორმულიდან გვაქვს

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

აქედან

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}. \quad (7.6)$$

ან

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (7.7)$$

(7.6) და (7.7)-ის ჩასმით (7.5)-ში, მივიღებთ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (7.8)$$

ვიპოვოთ მეორე რიგის $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ წარმოებული

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

(7.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}.$$

პირველი ტოლობა გადავამრავლოთ $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$ -ზე, მეორე ტოლობა

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$ -ზე და შევკრებთ, მაგაჟი წევრების შეერთების შემდეგ

გვქვს

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \quad (7.9)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \\ + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \quad (7.10)$$

(7.9) და (7.10) ტოლობების შეკრებით, მივიღებთ ლაპლასის ოპერატორის გამოსახულებას პოლარულ კოორდინატებში

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (7.11)$$

(7.11) გამოსახულება შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

ამრიგად, ლაპლასის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7.12)$$

3. ღირისლეს ამოცანის ამოხსნა წრისათვის. $D(R)$ -ით აღვნიშნოთ R -რადიუსიანი წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ღირისლეს ამოცანა $D(R)$ წრისათვის ჩამოყალიბდება ასე: ეიპოვოთ $D(R)$ -ში განსაზღვრული ჰარმონიული ფუნქცია $u(r, \varphi)$, რომელიც დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$u(r, \varphi) \Big|_{r=R} = f(\varphi). \quad (7.13)$$

ამოცანათ დისპულ ამოცანა ფურიეს ცვლადთა განტოლების მეთოდით. ამისათვის (7.12) განტოლებას ამოხსნის ვეძებთ შემდეგი ნამრავლის სახით

$$u(r, \varphi) = F(r) \Phi(\varphi). \quad (7.14)$$

რადგან საძიებელმა ფუნქციამ (r, φ) და $(r, \varphi + 2\pi)$ წერტილებზე უნდა მიიღოს ერთი და იგივე მნიშვნელობა (რადგან ორივე $D(R)$ -ის ერთი

თი და იგივე წერტილს შეესაბამება), ამიტომ $\Phi(\varphi)$ უნდა იყოს პერიოდული ფუნქცია პერიოდით 2π , თუ (7.14)-დან $u(r, \varphi)$ -ს ჩივსვამთ (7.12)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) \Phi = -\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} F,$$

საიდანაც

$$\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda, \quad (7.15)$$

რადგანაც (7.15) ტოლობის მარცხენა მხარე მხოლოდ r -ზეა დამოკიდებული, ხოლო მარჯვენა — მხოლოდ φ -ზე, ამიტომ ამ ტოლობის ადგილი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ტოლობის ორივე ნაწილი ერთი და იგივე მუდმივი რიცხვის ტოლია, აღვნიშნოთ ეს მუდმივი λ -თი, მივიღებთ შემდეგ ორ განტოლებას

$$\frac{r}{F} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) = \lambda, \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\lambda. \quad (7.17)$$

(7.17) განტოლებას ამონახსნი უნდა იყოს პერიოდული ფუნქცია, ამიტომ აქედან გამომდინარე, λ მუდმივი უნდა იყოს არაუარყოფითი. ასეთ შემთხვევაში (7.17) განტოლებას ზოგადი ამონახსნია

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi, \quad (7.18)$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. რადგანაც $\Phi(\varphi)$ პერიოდული ფუნქციაა, ამიტომ $\sqrt{\lambda}$ უნდა იყოს მთელი რიცხვი; აღვნიშნოთ ის n -ით (საქმარისია განვიხილოთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვები). ამრიგად, $\lambda = n^2$ საკუთრივი რიცხვებია, შესაბამისი ფუნქციაა

$$\Phi(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi.$$

(7.16) განტოლებაში $\lambda = n^2$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - n^2 F = 0. \quad (7.19)$$

(7.19) განტოლების ამონახსნი ეძებოთ $F = r^\alpha$ სახით, ჩასმით გვექნება

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

აქედან

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$$

$$\alpha^2 = n^2, \quad \alpha = \pm n.$$

შეგ

შემაღიამე.

$$F(r) = r^n \quad \text{ან} \quad F(r) = r^{-n}.$$

ამონახსნი $F(r) = r^{-n}$ უვარგისია, რადგანაც იგი $n > 0$ -სათვის კოორდინატო სათავეზე უსასრულო ხდება.

ამრიგად, (7.12) განტოლების ამონახსნებია

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (7.20)$$

სადაც A_n და B_n n -ზე დამოკიდებული ნებისმიერი მუდმივებია.

რადგანაც ლაპლასის განტოლება წრფივი და ერთგვაროვანია, ამიტომ ფუნქცია

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (7.21)$$

იქნება აგრეთვე (7.12) განტოლების ამონახსნი, თუ (7.21) მწკრივი თანაბრად კრებალია და შესაძლებელია მისი ორჯერ წევრ-წევრად გაზარ-შოება r და φ ცვლილებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

მაშინ (7.21) ასე ჩაიწერება:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (7.22)$$

a_0 , a_n და b_n განუსაზღვრელ მუდმივებს ვოლულობით (7.13) სპაზლ-ვრო პირობიდან, ამ პირობაში მონაწილე $f(\varphi)$ ფუნქცია აგრეთვე უნ-და იყოს პერიოდული 2π პერიოდით.

(7.22) ამონახსნში $r=R$ -ის ჩასმით მივიღებთ

$$u \Big|_{r=R} = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^n \cos n\varphi + b_n R^n \sin n\varphi). \quad (7.23)$$

თუ $f(\varphi)$ აკმაყოფილებს ვარკვეულ პირობებს, მაშინ (7.23) მწკრივი იქნება მისი ფურიეს მწკრივი, ამიტომ $a_n R^n$ და $b_n R^n$ განისაზღვრებაან ფორმულებით:

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta,$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n=0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

ამრიგად, (7.12), (7.13) ამოცანის ამონახსნია (7.22) მწკრივით განსაზღვრული ფუნქცია $u(r, \varphi)$, სადაც a_n და b_n კოეფიციენტები განისაზღვრებიან (7.24) ფორმულებით.

მოვცემთ მიღებულ ამონახსნს უფრო კომპაქტური სახე. ამ მიზნით a_n და b_n კოეფიციენტების მნიშვნელობები (7.24)-დან შევიტანოთ (7.22)-ში. ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right\} f(\theta) d\theta.$$

გამოვთვალოთ ჯამი

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\varphi, \quad 0 < \rho < 1.$$

ვიღვრის ფორმულის ძლით $\cos nt = \operatorname{Re} e^{int}$, ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos nt &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n e^{int} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho e^{it}}{1 - \rho e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \rho e^{it}}{1 - \rho e^{it}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \rho e^{it})(1 - \rho e^{-it})}{(1 - \rho e^{it})(1 - \rho e^{-it})} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \rho^2 + 2i\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის გამოყენებით გვაქვს $\left(\rho = \frac{r}{R}, \quad t = \varphi - \theta \right)$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

ამრიგად, ამონახსნი $u(r, \varphi)$ ასე ჩაიწერება:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(\theta) d\theta. \quad (7.25)$$

(7.25)-ს პუასონის ინტეგრალი ეწოდება. მაშასადამე, ღირისლეს (7.12), (7.13) ამოცანის ამონახსნი გამოისახება პუასონის (7.25) ინტეგრალით.

შტკიცდება, რომ (7.12), (7.13) ამოცანის (ღირისლეს ამოცანის) ამონახსნი ერთადერთია და მდგრადია. ე. ი. ღირისლეს ამოცანა კორექტულია.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ ღირისლეს ამოცანა

$$D \{ 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l \}$$

კვადრატში

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, l) = x(l - x), \\ u(0, y) &= u(l, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

სასაზღვრო პირობებით.

ამოხსნა. განვიხილოთ ლაპლასის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.27)$$

გვძებნით (7.27) განტოლების კერძო ამონახსნები

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

ნამრავლის სახით.

თუ $u(x, y)$ -ის ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (7.27)-ში, მივიღებთ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (\lambda = \text{const}). \quad (7.28)$$

(7.26) და (7.28)-დან გამომდინარეობს, რომ $X(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (7.29)$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (7.30)$$

(7.29), (7.30) ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობები და შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

როცა $\lambda = \lambda_k$, მაშინ $Y(y)$ -სათვის მიიღება განტოლება

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი (ჩაწერილი ჰიპერბოლურ ფუნქციებში):

$$Y_k(y) = a_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{l} + b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{l}, *$$

სადაც a_k და b_k ნებისმიერი მუდმივებია.

ამრიგად, ფუნქციები

$$u_k(x, y) = X_k(x) Y_k(y) \quad (k=1, 2, \dots)$$

აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლების და ნულოვან სასაზღვრო პირობებს კვადრატის $x=0$ და $x=l$ გვერდებზე.

რადგან (7.27) განტოლება წრფივი და ერთგვაროვანია, ამიტომ ამ განტოლების ამონახსნი იქნება აგრეთვე მწკრივი

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{l} + b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (7.31)$$

თუ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია და შესაძლებელია მისი ორჯერ წევრ-წევრად გაწარმოება x და y ცვლადებით.

განესაზღვროთ a_k და b_k მუდმივები იმ პირობით, რომ (7.31) ტოლობით განსაზღვრულმა $u(x, y)$ ფუნქციამ დააკმაყოფილოს (7.26) სასაზღვრო პირობები.

* ჰიპერბოლური სინუსი და კოსინუსი განისაზღვრებათ ფორმულით

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$u(x, 0) = u(x, l) = x(l-x)$ პირობებიდან მიიღება

$$x(l-x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (7.32)$$

და

$$x(l-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{ch} k\pi + b_k \operatorname{sh} k\pi) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (7.33)$$

(7.32)-დან გვაქვს

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{4l^3}{\pi^3 k^3} (1 - \cos k\pi),$$

ი. ი.

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{8l^3}{\pi^3 (2n-1)^3}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

მეორეს მხრივ, (7.33)-დან ვწერთ

$$a_k = a_k \operatorname{ch} k\pi + b_k \operatorname{sh} k\pi,$$

საიდანაც

$$b_k = \frac{1 - \operatorname{ch} k\pi}{\operatorname{sh} k\pi} a_k.$$

a_k და b_k -ს მიღებულ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (7.31)-ში, მივიღებთ

$$u(x, y) = \frac{8l^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi y}{l} + \frac{1 - \operatorname{ch} (2n-1)\pi}{\operatorname{sh} (2n-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{l} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

მაგალითი 2. მოცემულია თხელი R რადიუსიანი წრიული ფირფიტა ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამ ფირფიტის საზღვრის ზედა ნახევარზე შენარჩუნებულია ტემპერატურა 1° , ხოლო ქვედა ნახევარზე კი 0° . ეიზოვით ფირფიტაზე ტემპერატურის სტაციონარული განაწილება.

ამოხსნა. პირების ძალით, როცა $0 < \theta < \pi$, მაშინ $f(\theta) = 1$, ხოლო $f(\theta) = 0$, როცა $\pi < \theta < 2\pi$, ამიტომ ტემპერატურის განაწილება გამოისახება ინტეგრალით

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

ვთქვათ, (r, φ) წერტილი ძევს ზედა ნახევარ წრეზე, ე. ი. $0 < \varphi < \pi$, მაშინ $\theta - \varphi$ იცვლება საზღვრებში φ -დან $\pi - \varphi$ -მდე და ეს ინტერვალში, რომლის სიგრძეა π , არ შეიცავს წერტილებს $\pm \pi$. ამიტომ შეიძლება შემოვიღოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\operatorname{tg} \frac{\theta - \varphi}{2} = t, \quad \cos(\theta - \varphi) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2 + (R + r)^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} t \right) \Big|_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{R + r}{R - r} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \left(\frac{R + r}{R - r} \right)^2} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2R \sin \varphi}. \end{aligned}$$

აქედან

$$\operatorname{tg} u = -\frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}.$$

ამ ტოლობიდან (რადგანაც მარჯვენა მხარე უარყოფითია) გამოვძიწარეობს, რომ, როცა $0 < \varphi < \pi$, მაშინ $\frac{1}{2} < u < 1$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ამონახსნია

$$\operatorname{tg}(\pi - u) = \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}.$$

ან

$$u = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi} \quad (0 < \varphi < \pi).$$

ახლა ვთქვათ, (r, φ) წერტილი ძევს ქვედა ნახევარ წრეზე, ე. ი. $\pi < \varphi < 2\pi$. ამ შემთხვევაში $\theta - \varphi$ სხვაობის ცვლილების ინტერვალში $[-\varphi, \pi - \varphi]$ შეიცავს $-\pi$, მაგრამ არ შეიცავს 0 წერტილს. ამიტომ შეგვიძლია მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა ფორმულით

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} = t, \quad \cos(\theta - \varphi) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad d\theta = -\frac{2dt}{t^2 + 1}.$$

ამრიგად φ -ს აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R + r)^2 + (R - r)^2 t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{R - r}{R + r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R - r}{R + r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

აქედან მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi} \quad (\pi < \varphi < 2\pi).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია ($\sin \varphi < 0$). ამიტომ, როცა $\pi < \varphi < 2\pi$, გვექნება $0 < u < \frac{1}{2}$.

შეიძლება თქვას

კონვალუცური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები

§ 1. გაზართოვანი კონვალუცური სივრცე

ვთქვათ, მოცემულია D -ში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. განვიხილოთ S ლეერო ცენტრით $(0, 0, \frac{1}{2})$ წერტილში და რადიუსით $\frac{1}{2}$.

შეშვავებით ახლა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ზღვრისა და უწყვეტობის ცნება ვთქვათ $w=f(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია z_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით z_0 წერტილისა.

$A \neq \infty$ რიცხვს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ზღვარი z_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

როდესაც შესრულებულია პირობა $0 < |z - z_0| < \delta$ და წერტილი

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

შენიშნით, რომ, თუ $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ და $z_0 = x_0 + i y_0$, მაშინ z_0 წერტილში $f(z)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობა

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) \quad \text{და} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y)$$

ზღვრების არსებობის ტოლფასია. ამასთან

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) + i \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y).$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციის ზღვრებისათვის ცნობილი უმარტივესი თვისებები პარტულა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებისთვისაც, მაგალითად, თუ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = B,$$

მაშინ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm \varphi(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot \varphi(z)] = A \cdot B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციის ზღვარი $z = \infty$ წერტილში.

$A \neq \infty$ რიცხვს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც z მიისწავის ∞ -კენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N = N(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

როდესაც შესრულებულია პირობა $|z| > N$ და წერტილი

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A.$$

დისკრეტულს, ვთქვათ $f(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია z_0 (სასრული ან უსასრულოდ დაშორებული) წერტილის რაიმე მიდამოში*, გარდა შესაძლებელია თვით z_0 წერტილისა. თუ ნებისმიერი $N > 0$ რიცხვისათვის არსებობს z_0 -ის ისეთი მიდამო, რომ უტოლობა $|f(z)| > N$ შესრულებული იქნება ნებისმიერი $z \neq z_0$ -სათვის ამ მიდამოდან, მაშინ ამბობენ, რომ $f(z)$ მიისწავიფის ∞ -კენ, როდესაც z მიისწავიფის z_0 -კენ და წერტილი $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

$f(z)$ ფუნქციის ეწოდება უწყვეტი z_0 (სასრულ ან უსასრულოდ დაშორებულ) წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია z_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty.$$

$f(z)$ ფუნქციის ეწოდება უწყვეტი z_0 არეზე, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილში.

ცხადია, თუ $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ და $z_0 = x_0 + i y_0$, მაშინ $f(z)$ უწყვეტია z_0 წერტილში, თუ შესრულებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{და} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

ამრიგად კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია z_0 წერტილში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი, განხილული როგორც ორი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციები, უწყვეტია იმავე წერტილში.

აქედან გამომდინარე, ცხადია, ნამდვილი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციასა უმარტივესი თვისებები, მაგალითად, თვითრეგები უწყვეტ ფუნქ-

* უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამო ეწოდება კომპლექსური პლანის ყველა ისეთ z წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|z| > R$, სადაც R ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ცაითა ჯამს, ნამრავლისა და ფარდობის შესახებ მართებულია კომპლექსური ცვლადის უწყვეტი ფუნქციებისათვისაც.
თუ $\Delta z = z - z_0$ -ს ვუწოდებთ არცუფერის ნაზრდს, ხოლო $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ -ს ფუნქციის ნაზრდს, მაშინ $f(z)$ ფუნქციის უწყვეტობა z_0 წერტილში შეიძლება შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

§ 2. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციითა თვითრითა ელემენტარული ფუნქციების ქვეშ იგულისხმება შემდეგი ფუნქციები:

$$f(z) = az + b \text{ — წრფე,}$$

$$f(z) = z^n, \text{ (n მთელი) — ხარისხიანი,}$$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ — წილად-წრფე,}$$

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m} \text{ — რაციონალური,}$$

აგრეთვე მანვენებლიანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული და პიერბოლური ფუნქციები.

1) მანვენებლიანი ფუნქცია $e^z = e^x + i e^y$ განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

თუ $x=0$, $y=\varphi$, მაშინ მივიღებთ ჩვენთვის ცნობილ ეილერის ფორმულას

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

შეგნიშნოთ, რომ ნამდვილ ლერზე, ე. ი. როცა $y=0$, მანვენებლიანი ფუნქცია ექვსდება ნამდვილ ცვლადის ანალოგიდან ცნობილ მანვენებლიან ფუნქციას.

გარეშეთ, რომ მანვენებლიან ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

მართლაც,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)] = e^{(x_1+x_2) + i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თვისებები.

კომპლექსური ცვლადის მანვენებლიან ფუნქციას გააჩნია ნამდვილი ცვლადის მანვენებლიანი ფუნქციისაგან განსხვავებული თვისებები. მაგალითად, ნებისმიერი მთელი k -სათვის

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1,$$

მაშინ, როდესაც e რიცხვის ნამდვილი ზარისი ერთის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როდესაც მანვენებელი უდრის ნულს. უკანასკნელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მანვენებლიანი ფუნქცია წარმოადგენს პერიოდულ ფუნქციას $2\pi i$ პერიოდით. მართლაც,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

გარეშეთ, რომ $2\pi i$ წარმოადგენს მანვენებლიანი ფუნქციის ძირითად პერიოდს, ე. ი. ნებისმიერ სხვა პერიოდს უნდა ჰქონდეს სახე $2k\pi i$, სადა k მთელი რიცხვია.

მართლაც, ვთქვათ, $w = a + bi$ წარმოადგენს მანვენებლიანი ფუნქციის პერიოდს, მაშინ

$$e^{z+w} = e^z$$

ნებისმიერი z -სათვის. კერძოდ, როდესაც $z=0$, მივიღებთ:

$$e^w = e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b) = 1.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $e^w = 1$, ე. ი. $a=0$ და $\cos b + i \sin b = 1$, ე. ი. $b=2k\pi$. მაშასადამე, $w = a + bi = 2k\pi i$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

2) ლოგარითმული ფუნქცია განსაზღვრება, როგორც მანვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია: z კომპლექსური რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება w ხარისხის მანვენებელს, რომელმაც უნდა ავიყვანოთ e რიცხვი, რომ მივიღოთ z და იგი $\ln z$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$e^w = z.$$

თუ $w = u + iv$ და $z = r e^{i\varphi}$, მაშინ

$$e^{u+iv} = r e^{i\varphi}$$

ტოლობიდან მივიღებთ

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ე. ი.

$$w = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

აქედან, ცხადია, ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის ნატურალური ლოგარითმს გააჩნია მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, ამასთან ნულის ლოგარითმი არ არსებობს.

გამოსახულებას $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ეწოდება z რიცხვის ნატურალური ლოგარიტმის მთავარი მნიშვნელობა, ეხადია, თუ z ნამდვილი დადებითი რიცხვი, მაშინ $\ln z = \ln |z|$, ე. ი. ნამდვილი დადებითი რიცხვის ნატურალური ლოგარიტმის მთავარი მნიშვნელობა ემთხვევა ამ რიცხვის ჩვეულებრივ ნატურალურ ლოგარიტმს.

გაჩვენეთ, რომ ლოგარიტმულ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

სადაც ტოლობა სიმრავლური თვალსაზრისით გვესმის. მართლაც,

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln |z_1 \cdot z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

ანალოგიურად მტკიცდება მეორე თვისებაც.

ლოგარიტმის საშუალებით შეიძლება განისაზღვროს კომპლექსური რიცხვის ნებისმიერი ხარისხი, კერძოდ, თუ μ და ν კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან $\mu \neq 0$, მაშინ

$$\mu^\nu = e^{\nu \operatorname{Ln} \mu}.$$

აქედან ჩანს, რომ ხარისხს საზოგადოდ გააჩნია მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე.

3) კომპლექსური არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

ეილერის ფორმულების გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ ნამდვილი არგუმენტისათვის ეს ფუნქციები ემთხვევა ნამდვილი არგუმენტის ჩვეულებრივ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

კომპლექსური ცვლადის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ინარჩუნებს ნამდვილი ცვლადის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბევრ თვისებას. მაგალითად, $\sin z$ და $\cos z$ ფუნქციების პერიოდია 2π , ხოლო $\operatorname{tg} z$ და $\operatorname{ctg} z$ ფუნქციებისა კი — π . მართლაც, $\sin z$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ სხვა ფუნქციების პერიოდულობას.

შველა ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფორმულა მართებულია აგრეთვე კომპლექსური ცვლადის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვისაც, მაგალითად,

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2),$$

ე. ი.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში დავუშვებთ $z_1 = z$, $z_2 = -z$, მივიღებთ

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

შევნიშნოთ, რომ ნამდვილი ცვლადის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისაგან განსხვავებით $\sin z$ და $\cos z$ შემოუსაზღვრელი ფუნქციებია. კერძოდ, ადვილი აქვს შეფასებას

$$\frac{1}{2} |e^y - e^{-y}| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}),$$

$$\frac{1}{2} |e^y - e^{-y}| \leq |\cos z| \leq \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}).$$

4) z კომპლექსური რიცხვის არსინუსი ეწოდება ისეთ w რიცხვს, რომლისთვისაც $\sin w = z$ და $\operatorname{Arcsin} z$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

სინუსის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z,$$

ანუ

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0,$$

საიდანაც

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

აქედან

$$iw = \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

და სიმბოლოდ

$$w = \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

* აქ $\sqrt{w}$ სიმბოლოს ქვეშ აგებულია კვადრატული ფუნქციის ორივე მნიშვნელობა.

უქანისკენელი ტოლობიდან, ცხადია, $\text{Arcsin} z$ წარმოადგენს მრავალსახა ფუნქციას.

ანალოგიურად განისაზღვრება კომპლექსური ცვლადის სხვა შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიც, რომელთათვისაც ადგილი ჰქვს ფორმულებს:

$$\text{Arc cos } z = \frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\text{Arc tg } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{i - z}{i + z},$$

$$\text{Arc ctg } z = -\frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

5) ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან მჭიდროდაა დაკავშირებული ჰაიერბოლური ფუნქციები, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებით:

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}, \quad \text{cth } z = \frac{\text{ch } z}{\text{sh } z}.$$

თუ გავთვალისწინებთ, რომ $\text{sh } z = -i \sin iz$ და $\text{ch } z = \cos iz$, მივიღებთ

$$\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = (\cos iz)^2 + (\sin iz)^2 = 1.$$

§ 4. წარმოშობა, ადგილი ანალიზის პირობები

ვთქვათ, $w = f(z)$ ცალსახა ფუნქცია განსაზღვრულია z წერტილის რაიმე მიდამოში და $z + \Delta z$ წერტილი ეკუთვნის აღნიშნულ მიდამოს. Δw -ით აღნიშნოთ $f(z)$ ფუნქციის ნაზრდი z წერტილში, ე. ი.

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

თუ არსებობს $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ შეფარდების სასრული ზღვარი, როდესაც Δz ნებისმიერად მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის წარმოებული z წერტილში და იგი $f'(z)$, ან $\frac{df(z)}{dz}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

ფუნქციის ეწოდება ანალიზური D არეში, თუ იგი უწყვეტად წარმოებადია D არის ყოველ წერტილში.

ფუნქციის ეწოდება ანალიზური z წერტილში, თუ იგი ანალიზურია z წერტილის რაიმე მიდამოში.

ფუნქციის ანალიზურობა საკმაოდ დიდი პირობების შესრულების მოთხოვნას ამ ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების მიხედვით პირობების მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 4.1. იმისათვის, რომ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ფუნქცია იყოს ანალიზური D არეში, აუცილებელი და საკმარისია, ამ არეში, არსებობდნენ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციათა უწყვეტი კერძო წარმოებულები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ე. წ. კოში-რიმანის პირობებს:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (4.1)$$

აქ ცილქსოვთ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში, ე. ი. ნებისმიერი $z \in D$ -სათვის არსებობს უწყვეტი წარმოებული

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

რადგან ზღვარი არ არის დამოკიდებული Δz -ის ნულისაკენ მასწრაფების ხასიათზე, ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta y = 0$ მივიღებთ:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x},$$

ე. ი.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2)$$

ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta x = 0$, გვექნება:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y},$$

ე. ი.

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.3)$$

(4.2) და (4.3) ტოლობებიდან მიიღება

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ამასთან $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციების კერძო წარმოებულების უწყვეტობა გამომდინარეობს $f'(z)$ წარმოებულის უწყვეტობიდან.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. როგორც ცნობილია, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციითა თვორიდან, თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციებს გააჩნიათ უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y),$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta(x, y, \Delta x, \Delta y),$$

სადაც

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha(x, y, \Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\beta(x, y, \Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0. \quad (4.4)$$

ამ წარმოდგენების საფუძველზე ვაქვს

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + \alpha}{\Delta x + i \Delta y} + i \frac{v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + \beta}{\Delta x + i \Delta y},$$

საიდანაც კოში-რიმანის პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} &= \frac{u'_x \Delta x - v'_y \Delta y + \alpha}{\Delta x + i \Delta y} + i \frac{v'_x \Delta x + u'_y \Delta y + \beta}{\Delta x + i \Delta y} = \\ &= \frac{u'_x \Delta x + i u'_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{i v'_x \Delta x - v'_y \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = \\ &= u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) + \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y}. \end{aligned}$$

რადგან (4.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha + i \beta}{\Delta x + i \Delta y} = 0,$$

ამიტომ არსებობს $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ შეფარდების ზღვარი, როდესაც $\Delta z \rightarrow 0$, ე. ი. არსებობს $f'(z)$, ამასთან

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = u'_x(x, y) + i v'_x(x, y). \quad (4.5)$$

ამრიგად, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში, რადგან $u'_x(x, y)$ და $v'_x(x, y)$ კერძო წარმოებულების უწყვეტობიდან გამომდინარეობს $f'(z)$ -ის უწყვეტობა D არეში.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ (4.5) ტოლობიდან კოში-რიმანის (4.1) პირობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ $f'(z)$ წარმოებული გამოითვლება ერთ-ერთით შემდეგი ფორმულებიდან:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $w = e^z$ ფუნქცია ანალიზურია მთელს კომპლექსურ სიბრტყეზე და $(e^z)' = e^z$.

მართლაც, მიჩვენებლიანი ფუნქციის გამსაზღვრად $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, ვვუქვს, რომ $u = e^x \cos y$ და $v = e^x \sin y$, საიდანაც

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ამრიგად, კოში-რიმანის პირობები შესრულებულია და

$$(e^z)' = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

ზნობად, ფუნქციის ანალიზურობის შესამოწმებლად უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ კოში-რიმანის პირობებით, რომელიც გამოსახულია პოლარულ კოორდინატებში. თუ დავუშვებთ, რომ $u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ და $v(x, y) = v(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, ადვილად სჩვენებელია, რომ კოში-რიმანის პირობებს პოლარულ კოორდინატებში აქვთ სახე

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi, \end{aligned}$$

გ. ბ.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე ტოლობაც.

თუ გაითვალისწინებთ, რომ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ და $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, შეიძლება ვთქვათ, რომ

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{ ან } f'(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

შართლაც,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + i \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{r}{x} + \\ &+ \left(-r \frac{\partial u}{\partial r} + ir \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left(\frac{r}{x} + ir \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - ir \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{z}{z} = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ფორმულაც.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ $w = z^n$ ხარისხოვანი ფუნქცია ანალიზური მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე და $(z^n)' = n z^{n-1}$.

შართლაც, რადგან $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi$, ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= n r^{n-1} \cos n\varphi, & \frac{\partial v}{\partial r} &= n r^{n-1} \sin n\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -n r^n \sin n\varphi, & \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= n r^n \cos n\varphi. \end{aligned}$$

საიდანაც ჩანს, რომ კოში-რიმანის პირობები შესრულებულია და

$$\begin{aligned} (z^n)' &= \frac{r}{z} (n r^{n-1} \cos n\varphi + in r^{n-1} \sin n\varphi) = \frac{nr^n}{z} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \\ &= \frac{nr^n e^{in\varphi}}{z} = \frac{n z^n}{z} = n z^{n-1}. \end{aligned}$$

ისევე, როგორც წამდგენი ცვლადის ფუნქციებისათვის, ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $f(z)$ და $\varphi(z)$ ანალიზური ფუნქციებია D არეში, მაშინ $f(z) \pm \varphi(z)$, $f(z)\varphi(z)$ და $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$, ($\varphi(z) \neq 0$), აგრეთვე ანალიზური ფუნქციებია D -ში, ამასთან

$$(f \pm \varphi)' = f' \pm \varphi', \quad (f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi', \quad \left(\frac{f}{\varphi} \right)' = \frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2}.$$

ამას გარდა, თუ D არეში ანალიზური $w = f(z)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე G არე, რომელზედაც გამსაზღვრელია $\varphi(w)$ ანალიზური ფუნქცია, მაშინ რთული ფუნქცია $F(z) = \varphi[f(z)]$ აგრეთვე ანალიზურია D არეში.

თეორემა 4.2. თუ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში, მაშინ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქციებია ამ არეში, და მტკიცება კოში-რიმანის პირობების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

ე. ი. $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქციებია D არეში.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქციებია D არეში, მაშინ საზოგადოდ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ არ არის ანალიზურია D არეში.

$u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციებს ეწოდებათ შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქციები D არეში, თუ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში.

ცხადია, რომ შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქციები აკმაყოფილებენ კოში-რიმანის პირობებს.

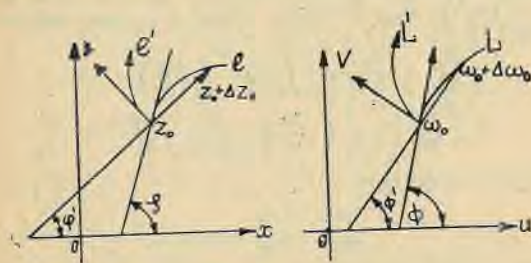
* u და v ფუნქციების მეორე როგორ უწოდებენ კერძო წარმოებულების არსებობა დამტკიცებულ იქნება მე-8 პარაგრაფში.

განვიხილოთ D არეში ანალიზური $w=f(z)$ ფუნქცია.
ცნობილია, რომ ამ ფუნქციით გაზოგადებული ასახვა ხასიათ-
დება შემდეგი თვისებებით:

1) ყოველ $G \subset D$ არეს $w=f(z)$ ფუნქცია გადასახავს (w) სიბრტყის
 G' არეში, ამასთან G არის საზღვარი გადისახება G' არის საზღვარში
ორიგენტიკის შენარჩუნებით.

2) G არის ყოველი უწყვეტი (გლუვი) L წირი გადასახება G' არის
უწყვეტი (გლუვი) L' წირში.

უიყვით, $z_0 \in D$ და $f'(z_0) \neq 0$, $w=f(z)$ ფუნქცია (z) სიბრტყის z_0
წერტილის ასახვის (w) სიბრტყის $w_0=f(z_0)$ წერტილში (ნახ. 71.)



ნახ. 71

z_0 წერტილზე გვევლით რაიმე L წირი, რომელსაც $w=f(z)$
ფუნქცია გადასახავს w_0 წერტილზე გვევლით L' წირში. L წირზე აღე-
ბული ნებისმიერი $z=z_0+\Delta z$ წერტილი გადასახება L' წირის $w=$
 $w_0+\Delta w$ წერტილში.

წარმოებულის გამაზღვრის თანახმად

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w-w_0}{z-z_0}, \quad (5.1)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w-w_0}{z-z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}.$$

შეიძლება $|f'(z_0)|$ წარმოადგენს w_0 და w წერტილებს შორის მანძილს
 z_0 და z წერტილებს შორის მანძილთან შეფარდების ზღვარს, როდესაც
 z მიდრეკილია z_0 -ს. ამ წერტილში $f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობის
გამო ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული z წერტილის z_0 -ს მიმართ.
ფაქტობრივად, ე. ი. ამ წერტილზე გვევლით L წირის შერჩევად. აქე-
ლინ გამოდის, რომ $|f'(z_0)|$ საიდანაც ვღებულობთ განვიხილოთ, როგორც
 $w=f(z)$ ასახვის დროს z_0 წერტილში გაჭიმვის კოეფიციენტი.

ამრიგად, $w=f(z)$ ანალიზური ასახვის ახსიათებს გაჭიმვის მუდმი-
ვობა ყოველ z_0 წერტილში, სადაც $f'(z) \neq 0$. ამასთან:

თუ $|f'(z_0)| > 1$, მაშინ z_0 წერტილში ხდება გაჭიმვა;

თუ $|f'(z_0)| < 1$, მაშინ z_0 წერტილში ფაქტობრივად ხდება შეკუმშვა.

თუ $|f'(z_0)| = 1$, მაშინ z_0 წერტილში არც გაჭიმვა ხდება და არც
შეკუმშვა.

(5.1) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg \frac{w-w_0}{z-z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \{ \arg(w-w_0) - \arg(z-z_0) \} \quad (5.2)$$

(2π წერტილის სიხსტით).

$\arg(z-z_0)$ წარმოადგენს $\Delta z = z-z_0$ ვექტორის მიერ Ox ნამდვილ
ღერძთან შედგენილ φ კუთხეს (ნახ. 71). ანალიზურად, $\arg(w-w_0)$
წარმოადგენს $\Delta w = w-w_0$ ვექტორის მიერ $O'u$ ნამდვილ ღერძთან შედ-
გენილ Φ კუთხეს. უიყვით, φ და Φ იქონიან შესაბამისად L და L' წირე-
ბისადმი z_0 და w_0 წერტილებში გვევლით მზებრის მიერ ნამდვილ
ღერძთან შედგენილი კუთხე. მაშინ $\varphi \rightarrow \Phi$ და $\Phi' \rightarrow \Phi$, როდესაც $z \rightarrow z_0$,
ამიტომ (5.2)-დან ვღებულობთ

$$\arg f'(z_0) = \Phi - \varphi,$$

ანუ

$$\Phi = \varphi + \arg f'(z_0). \quad (5.3)$$

თუ კავთულისხმებით, რომ Ox და $O'u$ ღერძებს მიმართულება ერ-
თმანეთს ემთხვევა, მაშინ (5.3)-დან გამოდის, რომ $\arg f'(z_0)$
წარმოადგენს კუთხეს, რომელზედაც მობრუნდება L წირისადმი z_0 წერ-
ტილში გვევლით მზებრის $w=f(z)$ ასახვის დროს.

$f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობის გამო $\arg f'(z_0)$ ერთი და იგივეა z_0
წერტილზე გვევლით ნებისმიერი L წირისათვის, ამიტომ $\arg f'(z_0)$ -ს
უწოდებენ მობრუნებას z_0 წერტილში $w=f(z)$ ასახვის დროს.

ვთქვათ z_0 წერტილზე გადებულია L -დან განსხვავებული რაიმე L' წირი, რომელსაც $w=f(z)$ ფუნქცია გადასახვს ამ წერტილში გამოვალ L' წირში φ_1 და Φ_1 იყოს შესაბამისად L' და L წირებისადმი z_0 და ამ წერტილებში გავლებული მხეხის მიერ ნამდვილ ლერძთან შედგენილი კუთხე, მაშინ (5.3)-ს ანალიტიკური მიუღებთ, რომ

$$\Phi_1 = \varphi_1 + \arg f'(z_0). \quad (5.4)$$

(5.3) და (5.4) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\Phi_1 - \Phi = \varphi_1 - \varphi. \quad (5.5)$$

$\varphi_1 - \varphi$ სხვაობა წარმოადგენს z_0 წერტილში L და L' წირებისადმი გავლებულ მხეხებს შორის კუთხეს, ხოლო $\Phi_1 - \Phi$ სხვაობა კი — ამ წერტილში L და L' წირებისადმი გავლებულ მხეხებს შორის კუთხეს.

ამრიგად, (5.5)-დან გამოდინარეობს, რომ თუ $w=f(z)$ ანალიტიკური ასახვის დროს $f'(z_0) \neq 0$, მაშინ ნებისმიერ z_0 წერტილში ვადასკვეთთ იმ წირი ანახვა ისეთი $w=f(z)$ წერტილში ვადასკვეთ წირებში, რომ კუთხე საწყისი და ასახული წირებისადმი შესაბამისად z_0 და ამ წერტილებში გავლებულ მხეხებს შორის იქნება ერთი და იგივე როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით. მაშასადამე, $w=f(z)$ ანალიტიკური ასახვის აბსოლიტურ კუთხეების შენარჩუნების თვისება ეწოდება z_0 წერტილში, სადაც $f'(z_0) \neq 0$.

ასახვას, რომელსაც აბსოლიტურ კუთხეების შენარჩუნებისა და გეგმის შედგენიობა, კონფორმული ასახვა ეწოდება. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ $w=f(z)$ ანალიტიკური ასახვა კონფორმულია ყოველ წერტილში, სადაც $f'(z_0) \neq 0$.

თუ $w=f(z)$ ასახვას ეწოდება კონფორმული D არეში, თუ იგი კონფორმულია D არის ყოველ წერტილში, მაშასადამე, თუ $w=f(z)$ ფუნქცია ანალიტიკური D არეში, ამასთან ამ არის ყოველ წერტილში $f'(z_0) \neq 0$, მაშინ $w=f(z)$ ასახვა კონფორმულია D არეში.

შეიძლება დამტკიცდეს შემოწმებული დებულება: თუ $w=f(z)$ ასახვა კონფორმულია D არეში, მაშინ $w=f(z)$ ფუნქცია ანალიტიკური D არეში და ამ არის ყოველ წერტილში $f'(z) \neq 0$.

§ 6. კომპლექსური ინტეგრალის ინტეგრალი

1. ინტეგრალის განსაზღვრა და თვისებები. ვთქვათ, $f(z)$ კომპლექსური ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია განსაზღვრული უბან-უბან გულზე რაიმე C წირზე, რომლის საწყისი წერტილია z_0 და ბოლო წერტილი — z . საწყისი და ბოლო წერტილებს მოცემა განსაზღვრავს C წირზე დი-

დებით მიმართულებას, რომელსაც ნახაზზე (ნახ. 72) ისრით აღვნიშნავთ (C შეიძლება იყოს როგორც ჩაკეტილი, ისე ღია). C წირი ნებისმიერი წესით დავეყოთ n ელემენტარულ ტყალად $z_0, z_1, \dots, z_n$ წერტილებს სიმუდლებით, რომლებიც დღევანდელი ერთმანეთის შემდეგ C წირის დიდებით მიმართულებით, ყოველ ელემენტარულ (z_k, z_{k+1}) ტყალზე ნებისმიერად ავიღოთ ξ_k წერტილი და შევიღვინოთ ვაში

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k, \quad (6.1)$$

სადაც $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

(6.1) გამოს ზღვარს, როდესაც $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, ეწოდება ინტეგრალი $f(z)$ ფუნქციის C წირზე და ასე აღვნიშნავთ:

$$\int_C f(z) dz.$$

ნახ. 72

2. ა.

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k. \quad (6.2)$$

ნამოკვანაობით კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება:

$$1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz,$$

სადაც C და C^- აღვნიშნავს ერთი და იგივე წირის დადებით და უარყოფით მიმართულებას;

$$2) \int_C [A f(z) + B \varphi(z)] dz = A \int_C f(z) dz + B \int_C \varphi(z) dz,$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია;

3) თუ C წირი შედგება $C_1, C_2, \dots, C_n$ წირებისაგან, მაშინ

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

26. 1. თიერისა; 2. ზოგადი; 3. განსაზღვრული; 4. მიმართული

$$4) \int_C dz = z - z_0.$$

5) თუ $|f(z)| \leq M$, C წირის გასწვრივ და C წირის სიგრძე არის l , მაშინ

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq Ml.$$

ეს თვისებები უშუალოდ გამოდინარეობენ ინტეგრალის განსაზღვრიდან.

2. ინტეგრალის გამოთვლა. ვაჩვენოთ, რომ $f(z)$ ფუნქციის უწყვეტობის შემთხვევაში უბან-უბან გლუვ C წირზე (6.2) ინტეგრალი არსებობს და მისი გამოთვლა დაიყვანება წირითი ინტეგრალების გამოთვლაზე. ამ მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები: $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z_k = x_k + i y_k$, $\xi_k = \xi_k + i \eta_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k$, სადაც $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

(6.1) ჯამი ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i \Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=0}^{n-1} [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

როგორც ვიცით, როდესაც $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, მაშინ უწყვეტი $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციებისათვის და უბან-უბან გლუვი C წირისათვის არსებობს (6.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის შესაყრება ზღვრები რომლებიც დამოკიდებული არ არიან ξ_k წერტილის შერჩევაზე და დაყოფის წესზე და ისინი გამოისახებიან შესაბამისად

$$\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy \quad \text{და} \quad \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

წირითი ინტეგრალებით.

ამრიგად, (6.3) ტოლობის ორივე მხარეში ზღვარზე გადავდგა, როდესაც $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, პოგვეძებს

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (6.4)$$

თუ C წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

ან რაც იგივეა,

$$z = z(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

განტოლებით, სადაც $z(t) = x(t) + i y(t)$, მაშინ წირითი ინტეგრალის გამოთვლის წესიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_1} \{u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t)\} dt + \\ &+ i \int_{t_0}^{t_1} \{v[x(t), y(t)] x'(t) + u[x(t), y(t)] y'(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \{u(x(t), y(t)) + \\ &+ i v(x(t), y(t))\} \{x'(t) + i y'(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned}$$

ამრიგად, კომპლექსური ცვლადის ინტეგრალი, შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (6.5)$$

შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $\int_C |z| dz$, სადაც C არის წრფის მონაკვეთი მიმართული 0 წერტილიდან $2+i$ წერტილამდე.

◦ მ ო ხ ს ა. ამ მონაკვეთის პარამეტრული განტოლება

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$$

ან კომპლექსური ფორმით $z = x + i y = (2+i)t$.

სადაც $0 \leq t \leq 1$. (6.5) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს

$$\int_C |z| dz = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2} (2+i) dt = \sqrt{5} (2+i) \int_0^1 t dt = \frac{\sqrt{5}(2+i)}{2}.$$

3. კოშის თეორემა.

თეორემა 6.1 (ცალკეობის კრიტერიუმის). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ცალკეობულ D არეში, ხოლო C მოლიანად ამ არეში მოთავსებული უბან-უბან გლუვი შეკრული კონტურია, მაშინ

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

დამტკიცება. რადგან $f(z) = u + iv$ ანალიზური ფუნქციაა D არეში ამიტომ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოგებადი ფუნქციებია და მათთვის სრულდება კოში-რიმანის პირობები

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ამ პირობებში ინტეგრალები $\int_C u dx - v dy$ და $\int_C v dx + u dy$ გზისაგან

დამოუკიდებელია, ხოლო, რადგანაც C შეკრული კონტურია, ამიტომ ორივე ინტეგრალი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე (6.4) ფორმულის ძალით $\int_C f(z) dz = 0$, D არეში მდებარე ყოველი ჩაკეტილი C წირისათვის.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.2 (მრავალკუთხედიანი კონტურის კრიტერიუმის). ვთქვათ, D არის n -კუთხედი* არე, რომელიც შემოსაზღვრულია დადებითად ორიენტირებული Γ წირით. თუ $f(z)$ ანალიზურია D არეში, მაშინ

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\Gamma = C_0 + C_1 + \dots + C_{n-1}$ (ნახ. 73) $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ კონტურები შევყავით $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ორიენტირებული

* თუ მრავალკუთხედი D არე შეიძლება ექცეოდეს ცალკეობულ არეში $n-1$ ($n > 1$) კუთხის ვატარებით, ხოლო ნაკლები რაოდენობის კუთხეებით ამის მაღწევა შეუძლებელია, მაშინ D არის ეწოდება n -კუთხედი.

ვთქვათ γ_1 კონტურის წირი, რომლის ერთი ან ორივე ბოლო D არის საზღვარს ეკუთვნის, ხოლო ყველა სხვა წერტილი D -შია მოთავსებული, D არის n -კუთხედი.

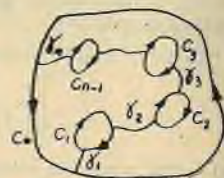
კვადრატით, როგორც ეს 73-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. მაშინ D არე გვიყოფა ორ ცალკეობულ არედ, რომელთა შემოსაზღვრული დადებითად ორიენტირებული წირები აღვნიშნოთ Γ' და Γ'' . რადგანაც $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია როგორც Γ' და Γ'' წირებზე, ისე მათ მიერ შემოსაზღვრულ ცალკეობულ არეებზე, ამიტომ კოშის თეორემის (ცალკეობის კრიტერიუმის) თანახმად

გვექნება

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0$$

და, მაშასადამე,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0.$$



ნახ. 73

თუ გავითვალისწინებთ ინტეგრალების 3) თვისებას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma'} f(z) dz &= \int_{C_n} f(z) dz + \int_{C_{n-1}} f(z) dz + \dots + \int_{C_1} f(z) dz = \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

რადგან ინტეგრირება $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ კვადრატზე შეგვხვდება ორ-ორჯერ, თანაც ინტეგრირების მიმართულებები იქნება ურთიერთსაწინააღმდეგო, ამიტომ ეს ინტეგრალები ერთმანეთს გააბათილებენ, თეორემა დამტკიცებულია.

(6.6) ფორმულია ისე შეიძლება ჩააწეროს

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_{n-1}} f(z) dz. \quad (6.7)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D მრავალკუთხედი არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ვარც C_0 წირით და ვარც $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ წირებით, რომლებიც ორიენტირებულია ისე როგორც C_0 , მაშინ ინტეგრალი ვარც კონტურზე უდრის ნულს.

გა კონტურებზე ინტეგრალების ჯამს. იმ შემთხვევაში, როდესაც $n=2$, მივიღებთ

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

ხშირად (6.7) ფორმულას უწოდებენ კოშის ფორმულას შედგენილი კონტურისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ 2. გამოვთვალოთ

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0},$$

სადაც L არის დადებითად ორიენტირებული წრეწირი ცენტრით z_0 წერტილში.

L წირის განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$z = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

სადაც ρ არის L წრეწირის რადიუსი. ამიტომ

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

ე. ი.

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i; \quad (6.8)$$

მ ა გ ა ლ ი თ 3. გამოვთვალოთ

$$\int_L (z - z_0)^n dz,$$

სადაც L არის წინა მავალითში განხილული წრეწირი, ხოლო n ნებისმიერი მთელი რიცხვია, რომელიც არ უდრის -1 -ს.

ა მ თ ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$\int_L (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t} dt = i \rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

რადგან $e^{i(n+1)2\pi} = 1$ ნებისმიერი მთელი n -სათვის, თუ $n \neq -1$. ე. ი.

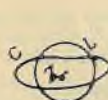
$$\int_L (z - z_0)^n dz = 0, \quad \text{თუ } n \neq -1. \quad (6.9)$$

კოშის თეორემიდან (შედგენილი კონტურისათვის) გამომდინარეობს, რომ, თუ C ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი კონტურია, რომელიც არ გადის z_0 წერტილში და z_0 მდებარეობს C წირით შემოსაზღვრულ არეში (ნახ. 74), მაშინ

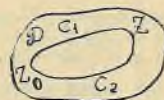
$$\int_C (z - z_0)^n dz = \int_L (z - z_0)^n dz.$$

ამიტომ (6.8) და (6.9) ფორმულები შეიძლება უფრო ზოგადად ასე ჩავწეროთ:

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{როცა } n = -1, \\ 0, & \text{როცა } n \neq -1. \end{cases} \quad (6.10)$$



ნახ. 74



ნახ. 75

4. ინტეგრალის წირის სახისაგან დამოუკიდებლობა. განუსაზღვრელი ინტეგრალი. კოშის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ფუნქცია ანალიზურია რაიმე D არეში, მაშინ ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან ნებისმიერ ღია წირზე, რომელიც მთლიანად ამ არეშია მოთავსებული, დამოუკიდებელია მხოლოდ წირის საწყის და ბოლო წერტილებზე (ნახ. 75), ე. ი.

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

თუ წირის საწყის წერტილს დავაფიქსირებთ, ხოლო ბოლო წერტილს შევცვლით ისე, რომ იგი არ გამოვიდეს D არიდან, მაშინ

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

იქნება z წერტილის ფუნქცია.

ვარგევნოთ, რომ, თუ $f(z)$ ანალიზურია D არეში, რომელშიც იცვლება z , მაშინ

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

ფუნქცია ანალიზურია D არეში და $F'(z) = f(z)$.

მართლაც, თუ $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ და $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, მაშინ

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = U(x, y) + iV(x, y),$$

სადაც

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx - v dy, \quad V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v dx + u dy.$$

სრული დიფერენციალიდან აღებული წარითი ინტეგრალის თვისებებიდან გამოდინარეობს, რომ $U(x, y)$ და $V(x, y)$ ფუნქციათა სრული დიფერენციალები შესაბამისი ინტეგრალქვეშ გამოსახულებების ტოლია, ამიტომ

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= u(x, y), & \frac{\partial U}{\partial y} &= -v(x, y), \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= v(x, y), & \frac{\partial V}{\partial y} &= u(x, y). \end{aligned}$$

ქედინ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

ამრიგად, $F(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს კოში-რიმანის პირობებს, ე. ი. $F(z)$ ანალიზურია. ამასთან

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = u(x, y) + iv(x, y) = f(z).$$

$F(z)$ ფუნქციას ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია. აღვნიშნავთ, რომ $f(z)$ ფუნქციის ორი პირველადი ფუნქცია მხოლოდ მუდმივი შესაყრების სინუსტით შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისაგან, ამიტომ, თუ $F(z)$ არის $f(z)$ -ის ერთ-ერთი პირველადი, მაშინ

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + C,$$

სადაც C მუდმივია. თუ ამ ტოლობაში დავუშვებთ $z = z_0$, მივიღებთ $F(z_0) + C = 0$, ანუ $C = -F(z_0)$ და

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0) = F(z) \Big|_{z_0}^z.$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულის ანალოგს კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციის ინტეგრალისათვის.

5. კოშის ინტეგრალური ფორმულა. დავუშვათ, რომ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ცალკეულ D არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია C კონტურით, ხოლო z_0 წარმოადგენს D არის რაიმე წერტილს. $\gamma \in D$ იყოს წრეწირი ცენტრით z_0 წერტილში და რადიუსით ρ . მაშინ კოშის თეორემა შედგენილია კონტურისათვის გვაძლევს

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (6.11)$$

რადგანაც $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია, იგი უწყვეტია D არეში. ამიტომ ნებისმიერი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი z წერტილისათვის γ წრეწირზე მართებულია უტოლობა

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

როცა ρ საკმარისად მცირეა, ამიტომ

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-z_0} - \int_{\gamma} \frac{f(z_0) dz}{z-z_0} \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \int_{\gamma} |dz| = \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon. \quad (6.12)$$

(6.10)-ის ძალით

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0) dz}{z-z_0} = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

(6.11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-z_0}$ არ არის დამოკიდებული ρ -ზე, ამიტომ (6.12) თანაფარდობა შეიძლება ასე გადავწყვიტოთ:

$$\left| \int_C \frac{f(z) dz}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\epsilon. \quad (6.13)$$

რადგანაც $\epsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია, ამიტომ (6.13)-დან გვაქვს

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

საიდანაც

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z-z_0}. \quad (6.14)$$

(6.14) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებულ გამოსახულებას კოშის ინტეგრალი ეწოდება. ამ ინტეგრალის გამოთვლა შესაძლებელია, თუ ცნობილია $f(z)$ -ის მნიშვნელობები მხოლოდ C კონტურზე. მაშასადამე, კოშის ინტეგრალური ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ანალიზური ფუნქციის მნიშვნელობები D არის ნებისმიერ შიგა წერტილში, თუ ცნობილია მისი მნიშვნელობები D არის საზღვარზე. თუ z_0 ჰყვას D არის ზღვრით, მაშინ კოშის თეორემის ძალით კოშის ინტეგრალი ნულის ტოლია.

მაგალითი 4. გამოთვლით ინტეგრალი

$$\int_L \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2-1} dz,$$

სადაც L არის $|z-1|=1$ წრეწირი.

ამოხსნა. L კონტური არის ერთეულწრივსიანი წრეწირი ცენტრით $z=1$ წერტილში. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2-1}$ წარმოადგენს შემდეგნაირად:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z+1} \cdot \frac{1}{z-1}.$$

$\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z+1}$ ფუნქცია ანალიზურია მოცემული წრის შიგნით, ამიტომ კოშის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_L \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z+1} \cdot \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z+1} \right)_{z=1} = \pi i.$$

8. ანალიზური ფუნქციის მაღალი რიგის წარმომადგენლობა. კოშის თეორემა გამოვიყენოთ ერთი შეტად მნიშვნელოვანი ფაქტის დასამტკიცებლად, რომელიც ჩამოყალიბებულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 6.3. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $\overline{D}$ არეში, მაშინ D არის ყოველ z_0 წერტილში არსებობს ამ ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმომადგენელი და მართებულია ფორმულა

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (6.15)$$

სადაც C არის D -ს დადებითად ორიენტირებული საზღვარი.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ (6.15) ფორმულის მართებულობა $n=1$ შემთხვევაში. ვთქვათ, z_0 წარმოადგენს D არის

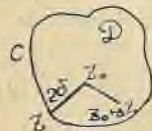
ნებისმიერ წერტილს, ხოლო Δz ნებისმიერი რიცხვი იმდენად მცირე მოდულით, რომ $z_0 + \Delta z$ აგრეთვე ეკუთვნის D არეს. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად და კოშის ფორმულის გამოყენებით $z_0 + \Delta z$ და z_0 წერტილებისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_C f(z) \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \frac{z - z_0 - \Delta z + \Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}. \quad (6.16) \end{aligned}$$

აქედან, ცხადია, (6.15) მართებული იქნება, თუ (6.16) ფორმულის მარჯვენა მხარეში მეორე შესაყრება ნულის ტოლია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \quad (6.17)$$

შემოსაზღვრულია. რადგანაც $f(z)$ უწყვეტია $\bar{D}$ არეში, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია, ე. ი. არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ $\bar{D}$ არეში $|f(z)| < M$. ვთქვათ, ახლა 2δ არის უმცირესი მანძილი z_0 წერტილიდან C კონტურამდე (ნახ. 76). შევვიღოთ რადიუსით, რომ



ნახ. 76

| $\Delta z| < \delta$, მაშინ ვეძებთ $|z - z_0| \geq 2\delta$ და $|z - z_0 - \Delta z| \geq |z - z_0| - |\Delta z| \geq 2\delta - \delta = \delta$, თუ გამოვიყენებთ ინტეგრალების 5) თვისებას ვღებულობთ

$$\left| \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \right| < \frac{M}{\delta(2\delta)^2} l,$$

სადაც l არის C წირის სიგრძე. მაშასადამე, (6.17) ინტეგრალი შემოსაზღვრულია. ამრიგად $n=1$ შემთხვევისათვის (6.15) ფორმულა დამტკიცებულია.

ცხებულია ნებისმიერი n -სთვის ეს ფორმულა მტკიცდება ინდუქციით.

თეორემა დამტკიცებულია.

შევიხსენოთ, რომ (6.15) ფორმულა მიიღება კოშის (6.14) ფორმულიდან, ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ z_0 ცვლით n -ჯერ გაწარმოებით. დავუშვათ, ახლა, რომ Γ რიიმე უბან-უბან გლეფა, არა აუცილებლად შეკრულა, თრიენტირებული წირია, ხოლო $\varphi(z)$ ამ წირზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. გამოისახელებს

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) dz}{z - z_0}. \quad (6.18)$$

კოშის ტიპის ინტეგრალი ეწოდება. მის ახრი აქვს ყველა მათი z_0 წერტილისათვის, რომლებიც Γ წირზე არ მდებარეობენ.

სავსებით ისევე, როგორც წინა თეორემა, მტკიცდება, რომ (6.18) ფორმულით განსაზღვრული $F(z_0)$ ფუნქცია ანალიზურია ყველა z_0 წერტილისათვის, რომელიც Γ წირზე არ მდებარეობს და მისი წარმოებული გამოიხატება (6.15) ფორმულის საშუალებით.

§ 7. მწკრივები

1. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციითა მწკრივი. განვიხილოთ კომპლექსური რიცხვთა E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციითა მიმდევრობა $\{f_n(z)\}$ და შევიღებოთ მწკრივი

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z). \quad (7.1)$$

ეს მწკრივი E სიმრავლის ყოველი z_0 წერტილისათვის გვაძლევს

ჩიცხვით მწკრივს $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)$. თუ იგი კრებადია, მაშინ ამბობენ, რომ (7.1) მწკრივი კრებადია z_0 წერტილში. ხოლო თუ ვანშლით, მაშინ (7.1) მწკრივი ვანშლია z_0 წერტილში. E სიმრავლეს ეწოდება (7.1) მწკრივის განსაზღვრის სიმრავლე. E სიმრავლის ყველა ამ წერტილითა E_1 სიმრავლეს, რომელზედაც (7.1) მწკრივი კრებადია, ეწოდება ამ მწკრივის კრებადობის სიმრავლე. ხოლო $E - E_1$ სიმრავლეს კი ვანშლობის სიმრავლე. ცხადია, თუ E_1 არის (7.1) მწკრივის კრებადობის სიმრავლე, მაშინ ამ მწკრივის ქაში იქნება E_1 -ზე განსაზღვრული ფუნქცია.

(7.1) მწკრივი კრებადია z_0 წერტილში, ხოლო თუ ვანშლით, მაშინ (7.1) მწკრივი ვანშლია z_0 წერტილში. E სიმრავლეს ეწოდება (7.1) მწკრივის განსაზღვრის სიმრავლე. E სიმრავლის ყველა ამ წერტილითა E_1 სიმრავლეს, რომელზედაც (7.1) მწკრივი კრებადია, ეწოდება ამ მწკრივის კრებადობის სიმრავლე. ხოლო $E - E_1$ სიმრავლეს კი ვანშლობის სიმრავლე. ცხადია, თუ E_1 არის (7.1) მწკრივის კრებადობის სიმრავლე, მაშინ ამ მწკრივის ქაში იქნება E_1 -ზე განსაზღვრული ფუნქცია.

(7.1) მწკრივის ეწოდება E_1 სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი $f(z)$ ფუნქციისაკენ, თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს δ -საყენ და-

მოცემული ისეთი ნატურალური რიცხვი $n_0(x)$, რომ E_1 სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > n_0.$$

მოვიყვანოთ დაემტკიცებოდ თანაბრად კრებადი მწკრივის ზოგადი თვისება:

თეორემა 7.1. თუ (7.1) მწკრივის წევრები უწყვეტია D არეში (L წირზე) და მწკრივი თანაბრად კრებადი ამ არეში (L წირზე), მაშინ მწკრივის $f(x)$ ჯამიც აგრეთვე უწყვეტია D -ში (L წირზე).

თეორემა 7.2. თუ (7.1) მწკრივის წევრები უწყვეტია D არეში და თანაბრად კრებადი $f(x)$ ფუნქციისავე ამ არეში, მაშინ D არის ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი L წირისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_L f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(x) dx.$$

თეორემა 7.3 (დირიხლესი). ვთქვათ, (7.1) მწკრივის ყველა წევრი ანალიზურია D არეში, ხოლო მწკრივი თანაბრად კრებადი $f(x)$

ფუნქციისავე D -ს ყოველ ჩაკეტილ პეარეში $\bar{D}^* \subset D$, მაშინ

- 1) $f(x)$ ანალიზური ფუნქციაა D არეში;
- 2) ნებისმიერი ნატურალური k -სათვის

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x).$$

- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ მწკრივი თანაბრად კრებადი D -ს ყოველ ჩაკეტილ $\bar{D}^*$ პეარეში.

შენიშვნა. როგორც ვიცით სწავლობს $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ნამდვილი ცვლადის დიფერენცირებადი $\{f_n(x)\}$ ფუნქციათა მიმ-

დევრობა, ისეთი რომ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ მწკრივი თანაბრად კრებადი $f(x)$ -სავე,

მაგრი $f(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ -ზე არ არის დიფერენცირებადი. იმ შემთხ-

ვეთშიც კი, როცა $f(x)$ დიფერენცირებადი $[a, b]$ -ზე, საზოგადოდ ადგილი არა აქვს ტოლობას

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, მწკრივის გადიფერენციალების თეორემა კომპლექსურ ანალიზში მიიღო არსებითი გაძლიერება.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობის ვეიერშტრასის ნიშანი:

თეორემა 7.4 (ვეიერშტრასი). თუ ყოველი $x \in E_1$ -სათვის $|f_n(x)| \leq C_n$

და მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ კრებადი, მაშინ (7.1) მწკრივი E_1 -ზე თანაბრად კრებადი.

2. ხარისხიანი მწკრივები. ფუნქციათა მწკრივის

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad (7.2)$$

სადაც $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო z კომპლექსური ცვლადი, ეწოდება კომპლექსური ცვლადის ხარისხიანი მწკრივი. $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ შედგენს ხარისხიანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

ხარისხიანი მწკრივის კრებადობის სიმრავლის სტრუქტურის დადგენაში არსებით როლს ასრულებს აბელის პირველი თეორემა, რომელიც ასევე მტკიცდება, როგორც "შესაბამისი" თეორემა ნამდვილი ცვლადის ხარისხიანი მწკრივისათვის (თავი VII, თეორემა 1.1).

თეორემა 7.5. თუ (7.2) მწკრივი კრებადი $z \neq 0$ წერტილში, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადი ნებისმიერ z წერტილში, რომელიც ამაყოფილებს უტოლობას $|z| < |z_0|$, ხოლო თუ მწკრივი განშლადია z_0 წერტილში, მაშინ იგი განშლადია ნებისმიერ z წერტილში, რომელიც ამაყოფილებს უტოლობას $|z| > |z_0|$.

აბელის პირველი თეორემის გამოყენებით მტკიცდება, რომ მართებულია შემდეგი დებულება:

ყოველი ხარისხიანი (7.2) მწკრივისათვის არსებობს R რადიუსი, ანუ წრე ცენტრით კოორდინატის სთავეში ისეთი, რომ მოცემული ხარისხიანი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი ამ წრის შიგნით და განშლადია მის გარეთ.

ამ წრეს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კრებლობის წრე, ხოლო R რადიუსს — კრებლობის რადიუსს, თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია მხოლოდ $z=0$ წერტილში, მაშინ მისთვის $R=0$, თუ ის კრებადია მთელ კომპლექსურ სიბრტყეში, მაშინ $R=+\infty$. ამრიგად, ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისათვის $0 \leq R \leq +\infty$.

თუ კრებლობის წრის წერტილის რომელიმე წერტილზე ხარისხოვანი მწკრივი პირობით კრებადია ან განშლადი, მაშინ ის ამ წერტილის ყოველ წერტილზე ან პირობით კრებადია ან განშლადი, ე. ი. კრებლობის წრის საზღვარზე შეიძლება იყოს როგორც კრებლობის, ისევე განშლადობის წერტილები.

ხარისხოვანი მწკრივის კრებლობის რადიუსი შეიძლება განვსაზღვროთ რიცხვითი მწკრივებისათვის ცნობილი აბსოლუტური კრებლობის საკმარისი ნიშნების გამოყენებით. ასე, მაგალითად, კოშის და ლამბერის ნიშნების გამოყენებით ადვილად მტკიცდება, რომ (7.2) მწკრივის კრებლობის რადიუსი ტოლია

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{როცა } L \neq 0 \\ +\infty, & \text{როცა } L = 0 \\ 0, & \text{როცა } L = +\infty, \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\text{სიღაც } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} \text{ ან } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|.$$

ამელისა და ჯეიერსტრასის თეორემების გამოყენებით ადვილად მტკიცდება თეორემები ხარისხოვანი მწკრივებისთვის შემდეგ: თუ $0 < L < +\infty$, თუ (7.2) მწკრივის კრებლობის რადიუსია R , მაშინ ყოველი $r < R$ -სათვის (7.2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $|z| < r$ ჩაკეტილ წრეში.

თუ $0 < L < +\infty$, ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი ანალიზური ფუნქციაა კრებლობის წრეში.

თუ $0 < L < +\infty$, ხარისხოვანი მწკრივის კრებლობის რადიუსი არ იცვლება ამ მწკრივის წევრ-წევრულ ინტეგრირების და გაწარმოების შედეგად, ე. ი. კრებლობის არის შეიძლება ხარისხოვანი მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრულ გაწარმოებით და ვაინტეგრირებ ნებისმიერ ჩრტვრულ, ამასთან მიღებული მწკრივების კრებლობის რადიუსი უდრის მოცემული მწკრივის კრებლობის რადიუსს.

თუ $0 < L < +\infty$ (ამელის თეორემა). თუ (7.1) ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია კრებლობის წრის საზღვრის $z_0 = Re^{i\varphi}$ წერტილზე, მაშინ ამ მწკრივის $f(z)$ ჯამისათვის გვაქვს

$$\lim_{r \rightarrow R} f(re^{i\varphi_0}) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n e^{in\varphi_0}.$$

ე. ი. $f(z)$ უწყვეტია $z_0 = Re^{i\varphi_0}$ წერტილში $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ რადიუსის გასწვრივ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n} z^n$ ($a > 1$) ხარისხოვანი მწკრივის კრებლობის რადიუსი.

ამოხსნა. ლამბერის ნიშნის გამოყენებით გვაქვს

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! a^{n+1}}{n! a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a} = \frac{1}{a}.$$

მაშასადამე, (7.3)-ის ძალით $R = +\infty$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ მწკრივის კრებლობის რადიუსი.

ამოხსნა. კოშის ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

ამრიგად, (7.3)-ის ძალით $R = \frac{1}{e}$.

2. ტეილორის მწკრივი. ვაქვს,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (7.4)$$

ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $f(z)$ ფუნქციისათვის $|z - z_0| < R$ წრეში. როგორც ვიცით, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია კრებლობის წრეში და მისი ნებისმიერი რივის წარმოებული შეიძლება მივიღოთ (7.4) მწკრივის წევრ-წევრულ გაწარმოებით შესაბამისი ჩრტვრული

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= C_1 + 2C_2(z - z_0) + \dots + nC_n(z - z_0)^{n-1} + \dots \\ f''(z) &= 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(z - z_0) + \dots + n(n-1)C_n(z - z_0)^{n-2} + \dots \\ f^{(n)}(z) &= n!C_n + (n+1)!C_{n+1}(z - z_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

27. ს. თოდუა, 2. ხიჭიაშვილი, 3. გამბახაშვილი, 5. მაჭარაშვილი

თუ (7.4) და (7.5) ტოლობებში ჩავსვათ $z = z_0$, გვექნება

$$C_0 = f(z_0), C_1 = f'(z_0), C_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \dots, C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \dots$$

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ კრებადობის $|z - z_0| < R$ წრის ნებისმიერი z წერტილისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (7.6)$$

(7.6) მწკრივს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი. თუ $z_0 = 0$, მაშინ (7.6) მწკრივს მაკლორენის მწკრივი ეწოდება.

ამრიგად, (7.4) ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა $|z - z_0| < R$ ($R > 0$) კრებადობის წრეში, ამასთან ეს ხარისხოვანი მწკრივი არის მისი ჯამის ტეილორის მწკრივი კრებადობის წრეში.

ბუნებრივად ისმება ამოცანა: ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $|z - z_0| < R$ წრეში, შეიძლება თუ არა ამ ფუნქციის შევუსაბამოთ ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც ამ წრეში კრებალია $f(z)$ ფუნქციისაკენ? ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.10 (ტეილორი). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $|z - z_0| < R$ წრეში, მაშინ ის გაიშლება ტეილორის მწკრივად:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad (7.7)$$

სადაც

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{n+1}}, \quad r < R.$$

ეს ფაქტა ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, z არის $|z - z_0| < R$ წრის ნებისმიერი წერტილი (ნახ. 77). შევიჩინოთ $r < R$ რიცხვი ისე, რომ z ეკუთვნოდეს $|z - z_0| < r$ წრეს. აღვნიშნოთ C_r -ით $|z - z_0| = r$ წრეწირი.

კოშის ინტეგრალური ფორმულის ძალით გვაქვს

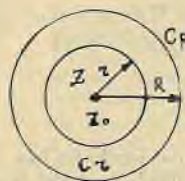
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(t) dt}{t - z}. \quad (7.8)$$

ჩავდგანაც $|z - z_0| < r$ წრის ყოველი ფიქსირებული z წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1, \quad t \in C_r.$$

ამიტომ

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}.$$



ნახ. 77



ნახ. 78

ეს მწკრივი თანაბრად კრებალია t -ს მიმართ C_r წრეწირზე. ამიტომ ამ წრეწირზე თანაბრად კრებალი იქნება

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(t)}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad (7.9)$$

მწკრივიც, ვინაიდან C_r წრეწირზე $f(t)$ შემოსაზღვრულია. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია (7.9) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრება C_r წრეწირზე, რაც (7.8) ფორმულის გამოყენებით მოგვცემს

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

სადაც

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (7.10)$$

ამრიგად, $|z - z_0| < R$ წრის ნებისმიერი z წერტილისათვის მართებული (7.7) ტოლობა.

(7.10) ტოლობიდან ჩანს, რომ ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივად ჯამლა ერთადერთია.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ტეილორის თეორემა დამტკიცებულია იმ პირობით, რომ $f(z)$ ანალიზურია წრეში $|z - z_0| < R$. ტეილორის თეორემიდან შეიძლება ქვემოთ მოყვანილი შედეგი.

შედეგად ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია L წირით (ნახ. 78) და $z_0 \in D$, მაშინ $f(z)$ შეიძლება გაიშალოს $z - z_0$ სტეილის ხარისხოვან მწკრივად რომელიც იქნება კრებული $f(z)$ ფუნქციისა, $|z - z_0| < R$, წრეში, სადაც R არის მანძილი z_0 წერტილიდან L წირამდე, ე. ი.

$$R_{z_0} = \min_{l \in L} |l - z_0|.$$

ყოველი ცალსახა ელემენტარული ფუნქცია ანალიზურია მისი განსაზღვრის არეში. აქედან გამომდინარე, ის გაიშლება ტეილორის მწკრივად ყოველი ასეთი წერტილის მიდამოში.

კერძოდ, ადვილია ჩვენება, რომ e^z , $\sin z$ და $\cos z$ ფუნქციების ტეილორის მწკრივად გაშლას $z=0$ წერტილის მიდამოში იქვე შეგდება ისევე

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4. ლორანის* მწკრივი. შემდეგი სახის მწკრივი

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (7.11)$$

სადაც z_0 კომპლექსური სიბრტყის ფიქსირებული წერტილია, C_n — მოცემული კომპლექსური რიცხვებია, ეწოდება ლორანის მწკრივი. (7.11)

* ლორანი (1813-1884) — ფრანგი მათემატიკოსი.

მწკრივს ეწოდება კრებული z წერტილში, თუ ამ წერტილში კრებულია მწკრივები

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (7.12)$$

და

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (7.13)$$

ხოლო (7.11) მწკრივის z ამი განსაზღვრით უდრის (7.12) და (7.13) მწკრივების ჯამს, ე. ი. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

(7.12) მწკრივი წარმოადგენს ჩვეულებრივ ხარისხოვან მწკრივს, მას ეწოდება ლორანის (7.11) მწკრივის წესიერი ნაწილი, მისი კრებადობის არეა $|z - z_0| < R$ წრე (როცა $R=0$, (7.12) მწკრივი კრებადობა მხოლოდ z_0 წერტილში, ხოლო, როცა $R=+\infty$, მაშინ მთელ კომპლექსურ სიბრტყეში). ამ წრეში $f_1(z)$ ანალიზურია.

(7.13) მწკრივს ეწოდება ლორანის (7.11) მწკრივის მთავარი ნაწილი, თუ ამ მწკრივში მოეხდენო ცულის შეცვლას $z - z_0 = \frac{1}{t}$, მაშინ

ის მიიღებს სახეს $\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n$, რომელიც ჩვეულებრივი ხარისხოვან მწკრივია t ცულის მიმართ. მისი კრებადობის არეა წრე $|t| < \alpha$, აქედან გამომდინარე (7.13) მწკრივი კრებადია.

$$|z - z_0| > r = \frac{1}{\alpha}$$

არეში, თუ $r < R$ მაშინ (7.11) მწკრივი კრებადია წრიულ რგოლში

$$r < |z - z_0| < R, \quad (7.14)$$

რომლის ცენტრია z_0 . ამ რგოლის ფართ მდებარე ყოველ წერტილში ლორანის (7.11) მწკრივი განშლადია, რადგანაც ამ წერტილში (7.12) და (7.13) მწკრივებიდან ერთ-ერთი განშლადია ამრიგად, (7.11) მწკრივის კრებადობის არეა წრიული (7.14) რგოლი, თუ შესრულებულია $r < R$ პირობა, კრებადობის (7.14) რგოლის საზღვრის წრეწირებზე შეიძლება იყოს როგორც კრებადობის წერტილები, ისევე განშლადობის წერტილებიც, თუ $r > R$, მაშინ (7.12) და (7.13) მწკრივების კრებადობა

ბის არეებს არა აქვთ საერთო ნაწილი, ამიტომ (7.11) მწკრივი ამ შემთხვევაში ყველგან განშლადია.

ახლისა და გეიერშტრასის თეორემების გამოყენებით მტკიცდება, რომ (7.11) მწკრივის ჯამი $f(z)$ არის ანალიზური ფუნქცია კრებადობის (7.14) წრიულ რგოლში. მართებულია შემდეგი შეზღუდული ლემემა.

თეორემა 7.11 (ლორანი). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $r < |z - z_0| < R$ წრიულ რგოლში, მაშინ ის წარმოდგინება ამ რგოლში კრებულ ლორანის მწკრივად:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (7.15)$$

სადაც

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.16)$$

ხოლო C_ρ არის $|z - z_0| = \rho$ წრეწირი, $r < \rho < R$. ასეთი ვაშლა ერთდერითია.

დამტკიცება. ვთქვათ, z არის $r < |z - z_0| < R$ რგოლის რაიმე წერტილი. ავიღოთ r_1 და R_1 ისე, რომ $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. მრავალჯერადი არეებისათვის კოშის ინტეგრალური ფორმულის ძალით გვაქვს

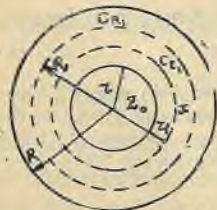
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(t) dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad (7.17)$$

სადაც C_r და C_{R_1} არიან შესაბამისად $|z - z_0| = r_1$ და $|z - z_0| = R_1$ წრეწირები (ნახ. 79). როცა $t \in C_{R_1}$ ცხადია, გვაქვს

$$\left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R_1} = q < 1,$$

ამიტომ

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}.$$



ნახ. 79

ეს მწკრივი თანაბრად კრებალია C_{R_1} წრეწირზე. თუ ამ მწკრივს ვავშარავლებთ შემოსაზღვრულ $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(t) dt}{t - z}$ ფუნქციაზე და მოვიხდენთ მიღებული მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებას, მივიღებთ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(t) dt}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (7.18)$$

სადაც

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq 0, \quad (7.19)$$

როცა $t \in C_{r_1}$ მაშინ

$$\left| \frac{t - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} = q_1 < 1,$$

ამიტომ

$$-\frac{1}{t - z} \cdot \frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{1 - \frac{t - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

აქედან გვაქვს

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(t) dt}{t - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (7.20)$$

სადაც

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} f(t) (t - z_0)^{n-1} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{-n+1}}, \quad n > 0. \quad (7.21)$$

(7.17), (7.18) და (7.20) ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ $r_1 < |z - z_0| < R_1$ რგოლის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს (7.15) ვაშლას, რომლის კოეფიციენტებია განისაზღვრებიან (7.19) და (7.21) ფორმულებით.

შევნიშნოთ, რომ (7.19) და (7.21) ტოლობებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციები ანალიზურია $r_1 < |z - z_0| < R_1$ რგოლში. ამიტომ კოშის ინტეგრალური თეორემის ძალით ამ ინტეგრალებში ინტეგრების წარად

შეიძლება ავიღოთ $|z - z_0| = \rho$, $r_1 < \rho < R_1$ წრეწირი ე. ი. მართებულია (7.16) ფორმულა.

რადგანაც r_1 შეიძლება ავიღოთ რაგინდ ახლოს r -თან, ხოლო R_1 რაგინდ ახლოს R -თან, ამიტომ (7.13) მწკრივი კრებადი $r < |z - z_0| < R$ რეალის ყოველ წერტილში.

ახლი დავამტკიცოთ ვაშლის ერთადერთობა. დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს ორ ვაშლს

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს ვავშრავლებთ $(z - z_0)^{-n-1}$ გამოსახულებზე და ვინტეგრირებთ C_n , $r < \rho < R$ წრეწირის გასწვრივ, მივიღებთ $C_n = b_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, რაც ვაშლის ერთადერთობას ამტკიცებს.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. ანალიზური ფუნქციის წარმოშობა, იზოლირებადი განსაკუთრებული წერტილები და მათი კლასიფიკაცია

ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია z_0 წერტილში. z_0 წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის m -ქრადი, ანუ m -ური რიგის წერტილი, თუ შესრულებულია პირობები

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

როცა $m=1$, მაშინ z_0 წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის მარტივი წერტილი. z_0 წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია გაიშლება ტეილორის მწკრივად

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+m} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad C_m = \varphi(z_0) \neq 0. \quad (8.1)$$

(8.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს: იშისათვის, რომ z_0 იყოს ამ წერტილში ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის m ქრადი წერტილი, აუცილებელია და საჭიროა z_0 წერტილის მიდამოში ადგილი ჰქონდეს (8.1) ტოლობას, სადაც $\varphi(z)$ ანალიზურია z_0 წერტილში და $\varphi(z_0) \neq 0$.

მოვიყვანოთ დამტკიცებლად თეორემა ანალიზური ფუნქციის ერთადერთობის შესახებ.

თეორემა 8.1. ვთქვათ, $f_1(z)$ და $f_2(z)$ ანალიზური ფუნქციებია D არეში და $z_0 \in D$, თუ $f_1(z_n) = f_2(z_n)$, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$ სადაც $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$,

მაშინ $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall z \in D$.

ამ თეორემიდან, როგორც შედეგი, მიიღება შემდეგი:

თეორემა 8.2. ანალიზური $f(z)$ ფუნქციას თავის ანალიზურობის არეში შეიძლება ჰქონდეს არა უმეტესი თვალსაზრისით რაოდენობა წერტილის (იგულისხმება, რომ $f(z) \neq 0$).

დამტკიცება. 8.1 თეორემის ძალით ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობის D არეში $f(z)$ -ის იმ წერტილის რაოდენობა, რომლებიც D არის L სისწრაფიდან დამოკიდებულია არა ნაკლები $1/n$ მანძილით, სისრულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

z_0 წერტილის ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ არსებობს z_0 წერტილის $|z - z_0| < \delta$ მიდამო, რომელშიც $f(z)$ ანალიზურია ყველგან, გარდა z_0 წერტილისა (z_0 წერტილზე $f(z)$ ფუნქცია შეიძლება არც იყოს მოცემული).

ვთქვათ, z_0 ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილია. z_0 წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქციის ლორანის მწკრივად ვაშლის აქვს სახე

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}. \quad (8.2)$$

იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილების კლასიფიკაციას სიფუძვლედ უდევს $f(z)$ ფუნქციის ლორანის მწკრივად ვაშლს z_0 წერტილის მიდამოში. განვიხილება სამი შესაძლო შემთხვევა:

1) ლორანის (8.2) მწკრივი არ შეიცავს მთავარ ნაწილს. ამ შემთხვევაში z_0 -ს ეწოდება აცილებელი განსაკუთრებული წერტილი.

2) (8.2) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაყრებთა საზღვრ რაოდენობას. ამ შემთხვევაში z_0 -ს ეწოდება პოლუსი. ამასთან თუ ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილის კოეფიციენტი $C_{-m} \neq 0$, ხოლო ყველს მიმდევრო კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ z_0 წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის m -ური რიგის პოლუსი, თუ $m=1$, მაშინ z_0 წერტილს ეწოდება მარტივი პოლუსი.

3) თუ (8.2) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაყრებთა უსასრულო რაოდენობას, მაშინ z_0 -ს ეწოდება არსებითად განსაკუთრებული წერტილი.

შევისწავლოთ ახლა ანალიზური ფუნქციის ყოფიერება განსაკუთრებული წერტილების მიღამოში.

1. აცოდებადი განსაკუთრებული წერტილი. თუ z_0 არის $f(z)$ ფუნქციის აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ z_0 წერტილის მიღამოში

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \quad (8.3)$$

(8.3) წარმოადგენს ჩვეულებრივ ხარისხიდან მწყვეს, რომელიც კრებადია z_0 წერტილის მიღამოში z_0 წერტილის ჩათვლით. მისი ტიპი ანალიზურია z_0 -ის მიღამოში (z_0 წერტილიზღვად). ეს ფუნქცია ემთხვევა $f(z)$ -ს, როცა $z \neq z_0$.

აქედან გამომდინარე, თუ დავუშვებთ $f(z_0) = C_0$, მაშინ შეიძლება, რომ $f(z)$ ანალიზურია z_0 წერტილის მიღამოში დეით z_0 -ის ჩათვლით. აქედან წარმოადგება საბელწოდება "აცილებადი განსაკუთრებული" წერტილი.

ამრიგად, აცილებადი განსაკუთრებული წერტილის მიღამოში მოცემული ფუნქცია შემოსაზღვრულია.

$$\text{მაგალითად, } f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

ფუნქციისათვის $z=0$ წერტილი არის აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი.

2. პოლუსი. თუ z_0 არის $f(z)$ ფუნქციის პოლუსი, მაშინ (8.2) გაშლას ექნება სახე

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (8.4)$$

სადაც $m \geq 1$ და $C_{-m} \neq 0$.

(7.4) ტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} [C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots + C_0(z - z_0)^m + \dots],$$

ანუ

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (8.5)$$

სადაც $\varphi(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots + C_0(z - z_0)^m + \dots$ ცხადია, $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, ე. ი. თუ z_0 წერტილი პოლუსია, მაშინ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია ამ წერტილის მიღამოში.

თეორემა 8.3. იმისათვის, რომ z_0 წერტილი იყოს $f(z)$ ანალიზური ფუნქციის m -ჯერადი ნული, აუცილებელია და საჭიარისი

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{ფუნქციისათვის ეს წერტილი იყოს } m\text{-ური ჰივის პოლუსი.}$$

3. არსებითად განსაკუთრებული წერტილი. არსებითად განსაკუთრებული წერტილის მიმართ მართებულია შემდეგი დებულებები:

თეორემა 8.4. თუ არსებითად განსაკუთრებული z_0 წერტილის რაიმე მიღამოში ანალიზური ფუნქცია $f(z) \neq 0$, მაშინ ეს წერტილი იქნება ავრთვე

$$\frac{1}{f(z)} \quad \text{ფუნქციისათვის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი.}$$

თეორემა 8.5 (სოხოცკი)*. თუ z_0 არის $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ ყოველი სასრული ან უსასრულო w_0 რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\{z_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{და} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0.$$

თეორემა 8.6 (პიკარი)**. თუ z_0 არის $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ ყოველი სასრული w_0 რიცხვისათვის, გარდა შესაძლებელია ერთი გამონაკლისისა, არსებობს ისეთი $\{z_n\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{და} \quad f(z_n) = w_0.$$

მაგალითად, $f(z) = e^{1/z}$ ფუნქციისათვის $z=0$ წერტილი არის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი და მისთვის გამოჩაყლის მნიშვნელობის წარმოადგენს $w_0=0$ რიცხვი, რადგან მაჩვენებლიანი ფუნქცია, როგორც ვიცით, ნული არ ხდება.

$z=\infty$ არსაკუთრებ წერტილის ეწოდება ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ $z=0$ წერტილი

* ი. ე. სოხოცკი (1842-1922) — რუსი მათემატიკოსი.

** ე. პიკარი (1856-1941) — ფრანგი მათემატიკოსი.

არის $\varphi(z) = f(1/z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, ამასთან $z = \infty$ ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის აცილებადი, პოლუსი ან არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, თუ $z = 0$ წერტილი არის $\varphi(z) = f(1/z)$ ფუნქციის შესაბამისად აცილებადი, პოლუსი ან არსებითად განსაკუთრებული წერტილი.

$f(z)$ ფუნქციის ლორანის მწკრივად გაშლის $z = \infty$ წერტილის მიდამოში აქვს სახე

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}. \quad (8.6)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ მწკრივს ეწოდება ლორანის (8.6) მწკრივის მთავარი ნაწილი,

ხოლო $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}$ მწკრივს კი წესიერ ნაწილი.

სასრული იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში, ანალიზური ფუნქციის ზემოთ მოყვანილი ყველა თვისება მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც იზოლირებულ წერტილს წარმოადგენს $z = \infty$.

ფ. ზუსათის ნაშთი და მისი უზავიერო გამოყენება

1. ნაშთის განსაზღვრა. ვთქვათ, z_0 წერტილი ანალიზური ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილია. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი z_0 წერტილის მიმართ ეწოდება

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz \quad (9.1)$$

ინტეგრალს, სადაც L ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი შეკრული წირია, რომელიც მაღლიანად ძევს $f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობის არეში, თავის შიგნით შეიცავს z_0 წერტილს და არ შეიცავს სხვა განსაკუთრებულ წერტილებს. თანახმად კოშის თეორემისა, (9.1) ინტეგრალის მნიშვნელობა იარ არის დამოკიდებული L წირის სხეზე, სპიტიკი ნაშთის გამოთვლის დროს ვიგულისხმებთ, რომ L არის

$|z - z_0| = \delta$ წრეწირი. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი z_0 წერტილის მიმართ აღინიშნება სიმბოლოთი $\text{Res } f(z)$, ან $\text{Res } f(z_0)$, ან კიდევ $\text{Res } f(z)$.

ფ. ი.

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz$$

ვთქვათ, $z_0 \neq \infty$. ვაგვიხსოვს $f(z)$ ფუნქცია z_0 წერტილის მიდამოში ლორანის მწკრივად

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \quad (9.2)$$

როგორც ვიცით,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

სადაც L არის წრეწირი ცენტრით z_0 წერტილში. კერძოდ,

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz = \text{Res } f(z).$$

ამრიგად, $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი z_0 წერტილის მიმართ უდრის $f(z)$ ფუნქციის ლორანის (9.2) მწკრივად გაშლაში $(z - z_0)^{-1}$ გამოსახულების შემცველი წევრის C_{-1} კოეფიციენტს.

ნაშთის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ z_0 წერტილი $f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობის ან აცილებადი განსაკუთრებული წერტილია, მაშინ

$$\text{Res } f(z) = 0.$$

ვთქვათ, ახლა $f(z)$ ანალიზურია არასაკუთრებელი $z = \infty$ წერტილის მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით ამ წერტილისა. ასეთ შემთხვევაში $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი არასაკუთრებელი წერტილის მიმართ ეწოდება

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz$$

ინტეგრალს, სადაც L წრეწირია, რომელიც მთლიანად მდებარეობს $z=\infty$ წერტილის ისეთ მიდამოში, სადაც $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია და ეს მიდამო სხვა განსაკუთრებულ წერტილებს არ შეიცავს.

$f(z)$ ფუნქციის ნაშთი $z=\infty$ წერტილის მიმართ უდრის ლორანის შესაბამის გაშლაში z^{-1} წევრის კოეფიციენტს შებრუნებული ნიშნით, ე. ი.

$$\operatorname{Res} f(z) = -C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz. \quad (9.3)$$

(9.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ უსასრულოდ დაშორებული აცილებადი წერტილის მიმართ ნაშთი საზოგადოდ ნულის ტოლი არ არის.

2. ნაშთის გამოთვლა. ვთქვათ, z_0 წერტილი $f(z)$ ფუნქციის m -ჯერადი პოლუსია ($m > 1$), მაშინ (9.2) გვყავს ექნება სახე

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n.$$

ამიტომ

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=1}^m C_{-n} (z-z_0)^{m-n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^{m+n}.$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)! C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \dots (n+2) C_n (z-z_0)^{n+1},$$

აქედან

$$C_{-1} = \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (9.4)$$

კერძოდ, თუ z_0 მარტივი პოლუსია ($m=1$), მაშინ

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0) f(z)]. \quad (9.5)$$

თუ $f(z)$ ფუნქცია z_0 წერტილის მიდამოში წარმოდგენება

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$$

სახით, სადაც $\varphi(z_0) \neq 0$, $g'(z_0) \neq 0$, ე. ი. z_0 არის $f(z)$ ფუნქციის მარტივი პოლუსი, მაშინ

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (9.6)$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{\varphi(z)}{g(z)} \right] = \\ &= \varphi(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \end{aligned}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $f(z) = \frac{z^3}{z-2}$ ფუნქციის ნაშთი $z=2$ წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. $z=2$ წერტილი არის $\frac{z^3}{z-2}$ ფუნქციის მარტივი პოლუსი, ამიტომ თანხმად (9.5) ფორმულას, გვქვია:

$$\operatorname{Res}_2 \frac{z^3}{z-2} = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z^3}{z-2} = 8.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$ ფუნქციის ნაშთები მისი წარმომადგენელი წერტილების მიმართ.

ამოხსნა. $f(z)$ ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილებია $z=0$ და $z=1$. $z=0$ არის $f(z)$ ფუნქციის მესამე რიგის პოლუსი, ამიტომ თანხმად (9.4) ფორმულას, გწერთ

$$\operatorname{Res}_0 f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z-1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^3-4z+5)e^z}{(z-1)^3} = -\frac{5}{2}.$$

$z=1$ წერტილი არის $f(z)$ ფუნქციის მარტივი პოლუსი, ამიტომ (9.5) ფორმულას ძალით გვქვია:

$$\operatorname{Res}_1 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z^3} = e.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ ფუნქციის ნაშთი მისი

$z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ მარტივი პოლუსების მიმართ.

ამოხსნა. თანახმად (9.6) ფორმულისა ვწერთ

$$\operatorname{Res}_{z^n} \frac{1}{\cos z} = - \frac{1}{\sin z} \Big|_{z=z_n} = - \frac{1}{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n-1}.$$

მაგალითი 4. გამოვფალოთ $f(z) = 1 + \frac{2}{z}$ ფუნქციის ნაშთი $z = \infty$ აცილებადი განსაკუთრებული წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. თანახმად (9.3) ფორმულისა, $\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -C_{-1}$, მაგრამ $C_{-1} = 2$ და აქედან გამოდინარე, $\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -2$. (როგორც ამ მაგალითიდან ჩანს, არასაკუთრებელი აცილებადი განსაკუთრებული წერტილის მიმართ ნაშთი საზოგადოდ ნულის ტოლი არ არის).

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ ფუნქციის ნაშთი განსაკუთრებული $z=0$ წერტილის მიმართ.

ამოხსნა. $z=0$ არის მოცემული ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; მართლაც, ამ ფუნქციის $z=0$ წერტილის მიმართ ლორანის მწკრივად გავშალთ აქვს სახე

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2! z^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{1}{n! z^{\frac{2n-1}{2}}} + \dots \right) = z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2! z^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{1}{n! z^{\frac{2n-1}{2}}} + \dots$$

$$\text{მაშასადამე, } \operatorname{Res}_0 f(z) = \frac{1}{2}.$$

3. ძირითადი თეორემა ნაშთის შესახებ.

თეორემა 9.1. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია შეკრული L წიკით შემოსაზღვრულ D არეში, გარდა $z_1, z_2, \dots, z_n$ განსაკუთრებული წერტილებისა, რომელთა რიცხვი სასრულია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z). \quad (9.7)$$

დამტკიცება. შემოვხაზოთ $z_1, z_2, \dots, z_n$ წერტილების გარშემო $C_1, C_2, \dots, C_n$ წრეწირები იმდენად მცირე რადიუსით, რომ მათ მიერ შე-

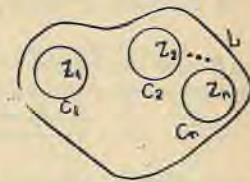
მოსაზღვრული ყველა წრე ეკუთვნოდეს D არეს და წვეთ-წვეთად საერთო წერტილები არ ჰქონდეთ (ნახ. 80).

კონტურებით შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ მრავალბმულ არეში $f(z)$ ანალიზურია, ამიტომ თანახმად კოშის თეორემისა, გვაქვს

$$\int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz.$$

აქედან

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z). \end{aligned}$$



ნახ. 80

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მთელს კომპლექსურ სიბრტყეზე, გარდა იზოლირებული წერტილებისა $z_0 = \infty, z_1, z_2, \dots, z_n$, რომელთა რიცხვი სასრულია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0. \quad (9.8)$$

დამტკიცება. ავიღოთ იმდენად დიდი R , რომ ყველა $z_k (k=1, 2, \dots, n)$ წერტილი ეკუთვნოდეს $|z| < R$ წრეს. მაშინ ძირითადი თეორემის თანახმად

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz, \quad (9.9)$$

სადაც C არის $|z| = R$ წრეწირი. ამავე დროს

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z). \quad (9.10)$$

(9.9) და (9.10) ტოლობების შეკრებით მიიღება (9.8).

28 ს. თოფურია, ე. ზოჭოლია, შ. გაბაშვილი, ნ. მჭირაშვილი

4. ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაშთის გამოყენებით. ნაშთთა თეორია გამოიყენება ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლაში. ჩვენ განვიხილავთ ქვემოთ მოყვანილ სამსახის ინტეგრალს:

$$1) I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

სადაც R თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქციაა.

მოვასწოროთ ჩასმა $z = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $|z| = 1$. ცხადია,

$$dx = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

ამიტომ I_1 ინტეგრალი ლებულობს სახეს

$$I_1 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z}.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება (9.7) ფორმულით

$$I_1 = 2\pi \sum \operatorname{Res} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z},$$

სადაც ნაშთი იღება $|z| < 1$ წრეში მდებარე განსაჯუთრებულ წერტილების მიმართ.

მაგალითი 6. გამოთვალეთ ჰუსონის ინტეგრალი

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2},$$

სადაც $0 < p < 1$.

ამოხსნა. ჩასმით $z = e^{ix}$, მივიღებთ

$$I(p) = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left[1 - 2p \left(z + \frac{1}{z} \right) + p^2 \right]} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} = 2\pi \operatorname{Res}_{z=p} \left\{ \frac{1}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} \right\} = -2\pi \frac{1}{2pz - (p^2 + 1)} \Big|_{z=p} = \frac{2\pi}{1 - p^2}.$$

$$2) I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

სადაც $f(z)$ ანალიზური ზედა ნახევარსფეროში ($\operatorname{Im} z > 0$), გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობა იზოლირებული განსაჯუთრებულ წერტილებისა $z_1, z_2, \dots, z_n$, რომლებიც არ მდებარეობენ ნამდვილ ღერძზე. თუ $f(z)$ ფუნქცია ამ არეში აკმაყოფილებს პირობას

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M > 0, \quad \delta > 0, \quad |z| > R_0 > 0, \quad (9.11)$$

მაშინ I_2 ინტეგრალი არსებობს და გამოითვლება ფორმულით

$$I_2 = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z). \quad (9.12)$$

მართლაც, ავიღოთ R იმდენად დიდი, რომ $f(z)$ ფუნქციის ყველა განსაჯუთრებული წერტილი მოთავსდეს $|z| < R$ წრეში.

ვთქვათ, C_R არის $|z| = R$ წრეწირის ნახევარი, მოთავსებული ზედა ნახევარსფეროში (ნახ. 81). (9.7) ფორმულის ძალით

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z). \quad (9.13)$$

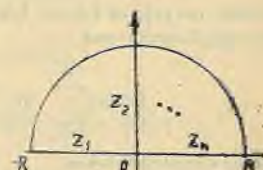
როცა $R \gg R_0$, (9.11) პირობის გამოყენებით გვაქვს

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| < \frac{M\pi}{R^\delta}. \quad (9.14)$$

გადავიღოთ ზღვარზე (9.13) ტოლობაში, როცა $R \rightarrow \infty$, (9.14) უტოლობის გათვალისწინებით მიიღება (9.12).

კერძოდ, (9.12) ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ისეთი წილად რაციონალური ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1. მნიშვნელს არა აქვს ნამდვილი ფესვები;
2. მნიშვნელის ხარისხი ორით მაინც მეტია მრიცხველის ხარისხზე.



ნახ. 81

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ზედა ნახევარსიბრტყეში აქვს ერთადერთი მეოთხე რიგის პოლუსი $z=i$, (9.4)-ის ძალით გვაქვს

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{3!} \left[\frac{1}{(z+i)^4} \right]_{z=i} = -\frac{5i}{32}.$$

აქედან გამოდინარე, (9.12) ფორმულიდან ვღებულობთ

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{5\pi}{16}.$$

$$3) I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha > 0,$$

სადაც $f(z)$ ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში ($\operatorname{Im} z > 0$), გარდა შე-
საძლებელია სასრული რაოდენობა იზოლირებული განსაკუთრებული
წერტილებისა $z_1, z_2, \dots, z_n$, რომლებიც არ მდებარეობენ ნამდვილ ღერ-
ძზე.

თუ

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (9.15)$$

თანაბრად $\varphi = \arg z$ -ის მიმართ, მაშინ I_3 ინტეგრალი არსებობს და ის
გამოითვლება ფორმულით

$$I_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{i\alpha z}]. \quad (9.16)$$

ძირითადი თეორემის ძალით

$$\int_{-R}^R f(x) e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) e^{i\alpha z}. \quad (9.17)$$

იღვნიშნოთ

$$M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|.$$

(9.15) პირობის ძალით

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0. \quad (9.18)$$

შემდეგ

$$\left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-\alpha \operatorname{Im} z} R d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} R d\varphi < \pi. \quad (9.19)$$

(9.18) და (9.19)-დან ვვაქვს

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \pi M(R) \rightarrow 0, \quad \text{როცა } R \rightarrow \infty. \quad (9.20)$$

(9.20)-ის გათვალისწინებით (9.17)-დან მიიღება (ზღვარზე გადასვლით,
როცა $R \rightarrow \infty$) დასამტკიცებელი (9.16) ტოლობა.

კერძოდ, როცა $f(x)$ ნამდვილი ფუნქციაა, (9.16)-დან მიიღება

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{i\alpha z}] \right\}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} [f(z) e^{i\alpha z}] \right\}. \end{aligned}$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}, \quad (a > 0).$$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}.$$

ვანვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}.$$

$f(z)$ ფუნქციას ზედა ნახევარსიბრტყეში აქვს ერთი მარტივი პოლუსი a_1 და

$$\operatorname{Res}_{z=a_1} f(z) = -i \frac{e^{-a}}{2a}.$$

ნაშთთა თეორიის ძირითადი თეორემის ძალით

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iz} dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}. \quad (9.21)$$

(9.20)-ის მიხედვით

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 0.$$

ამიტომ, თუ (9.21) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $R \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a},$$

აქედან კი

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

ამრიგად,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

მეთოდები თავი

თავისთავი ალგებრა და მისი უმთავრესი აპლიკაციები

გასულ საუკუნეში მრავალი მათემატიკოსი სწავლობდა ევრეთ წოდებულ სიმბოლურ ალგებრას, რომელსაც საფუძვლიან ედო ფორმა-

ლური ოპერაცია $p = \frac{d}{dt}$ სიმბოლოზე. მაგალითად,

$$p^n x = \frac{d^n x(t)}{dt^n}, \quad \frac{1}{p} x = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad \frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t,$$

$$\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = \frac{1}{p} \int_0^t dt = \int_0^t t d\tau = \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}.$$

ამ სიმბოლური ალგებრის პოპულარიზაციას ზღვს უწყობდა ინჟინერ-ელექტრიკოსი ო. ხევისაიდი*, რომელმაც გამოიყენა იგი ელექტროტექნიკაში (წრფოვ სისტემებში გარდამავალი პრაცესების შესწავლის დროს). ამ საკითხების შესწავლა მიიყვანება მუდმივკუთხოვნი ტენიანი წრფოვი დიფერენციალური განტოლების ან განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე.

ასეთი მეთოდი იმ დროისათვის დაფუძნებული არ იყო, ამიტომ ზოგიერთ შემთხვევაში არასწორ შედეგს ლეზლობდნენ, მხოლოდ ჩვენი საუკუნის 20-იან წლებში აღნიშნულმა მეთოდმა პპოვა ფართო გამოყენება და მას ეწოდა ოპერაციული ალგებრა. ამ მეთოდის მიხედვით გაწარმოება და ინტეგრება იცვლება აღგებრული ოპერაციებით, ხოლო დიფერენციალური განტოლება — აღგებრული. პოულობენ აღგებრული განტოლების ამონახსნს და შემდეგ ამის მიხედვით აღადგენენ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს.

§ 1. ლაპლასის გარდაქმნა და მისი თვისებები

ვთქვათ, $f(t)$ ნამდვილი t ცვლადის კომპლექსური ფუნქციაა განსაზღვრული $]-\infty, \infty[$ შუალედში, ხოლო $p = s + i\sigma$ კომპლექსური ცვლადია, რომელიც იცვლება კომპლექსური სიბრტყის რაიმე D არეში.

განვიხილოთ კომპლექსური p პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთარი ინტეგრალი

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.1)$$

(1.1) ინტეგრალს $f(t)$ ფუნქციის ლაპლასის ინტეგრალი ეწოდება. ცხადია, რომ (1.1) არასაკუთარი ინტეგრალი საზოგადოდ არ იქნება კრებადი ნებისმიერი $f(t)$ ფუნქციისათვის და p პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის. ამიტომ ისმის ამოცანა: გამოიყოს კლასი ფუნქ-

* ო. ხევისაიდი (1850-1925) — ინგლისელი ინჟინერ-ელექტრიკოსი.

ცეებისა და განსაზღვრის p პარამეტრის მნიშვნელობათა არე, რომელიც ლაპლასის ინტეგრალი კრებალია

ნენ განვიხილოთ ნამდვილი ცვლის კომპლექსურ $f(t)$ ფუნქცია, რომელიც დაყვანილია პირობებს:

1) $f(t) \equiv 0$, როცა $t < 0$.

2) როცა $t \geq 0$, ფუნქცია $f(t)$ უწყვეტია იმ ყოველ სსრულ შუალედში აქვს სასრული სიმრავლე პირველი გვარის წვეტის წერტილები.

3) არსებობს ისეთი $M > 0$ და $s_0 > 0$ რიცხვები, რომ ყოველი t -სათვის ადვილი აქვს უტოლობა

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}. \quad (1.2)$$

ს რიცხვთა ზუსტ კვება საზღვარს ($s_0 = \inf$), რომლისთვისაც ადვილი აქვს (1.2)-ს, ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ზრდის მაჩვენებელი, თუ $s_0 < \infty$, მაშინ ვიტყვი, რომ $f(t)$ -ს აქვს შემოსაზღვრული ზრდა. შევნიშნოთ, რომ $s = s_0$ -სათვის (1.2) უტოლობა შეიძლება ადვილი არ ჰქონდეს, მაგალითად, $f(t) = t^s$ კათვის ($\operatorname{Re} s \geq 0$), $s_0 = 0$ და (1.2) უტოლობა ადვილი არ აქვს.

ფუნქცია, რომელიც დაყვანილია 1), 2) და 3) პირობებს ეწოდება ფუნქცია — ორიგინალი.

$f(t) = e^{st}$ ფუნქციისათვის (1.2) უტოლობა არ სრულდება ე. ი. ის ორიგინალი არ არის.

$\sigma_s(t)$ ფუნქციის, რომელიც განსაზღვრულია პირობით

$$\sigma_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } t \geq 0, \\ 0, & \text{როცა } t < 0, \end{cases}$$

ეწოდება ჰევიზაიდის ერთეულოვანი ფუნქცია.

ცხადია, რომ $\sigma_s(t)$ არის ორიგინალი ზრდის მაჩვენებლით $s_0 = 0$. ვთქვათ, ფუნქცია $f(t)$ განსაზღვრულია შუალედში $]-\infty; \infty[$ და აკმაყოფილებს ორიგინალიზმის 2) და 3) პირობებს, მაგრამ $f(t) \neq 0$, როცა $t < 0$. განვიხილოთ ფუნქცია $f(t)\sigma_s(t)$. ადვილია შეჩვენება, რომ

$$f(t)\sigma_s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{როცა } t \geq 0, \\ 0, & \text{როცა } t < 0. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე, $f(t)\sigma_s(t)$ არის ორიგინალი.

შემდეგში წერის შემოკლების მიზნით ნაცვლიდ $f(t)\sigma_s(t)$ დავწერთ $f(t)$ -ს და ვივალისხმებით, რომ განსახილველი ფუნქცია $]-\infty; \infty[$ შუალედში ივადრად ნულის ტოლია.

$p = s + i\omega$ -ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლისთვისაც (1.1) არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებალია, ეწოდება მისი კრებალობის არე.

(1.1) ინტეგრალის კრებალობის არის სტრუქტურის შესახებ ზამებს გვადევნებს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1. ვთქვათ s_0 არის $f(t)$ ფუნქციის ზრდის მაჩვენებელი, მაშინ (1.1) ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებალია ნებისმიერ p წერტილში, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\operatorname{Re} p > s_0$. ამასთან, თუ $\operatorname{Re} p \geq s_0 > s_0$, კრებალობა იქნება თანაბარი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $p = s + i\omega$, $s > s_0$. შევარჩიოთ $\varepsilon > 0$ -ზე ისე, რომ $s > s_0 + \varepsilon$, მაშინ

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{(s_0 + \varepsilon)t} dt = M \int_0^\infty e^{-(s - s_0 - \varepsilon)t} dt = \\ &= M \frac{e^{-(s - s_0 - \varepsilon)t}}{-(s - s_0 - \varepsilon)} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s - s_0 - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია. თუ $s > s_0 > s_0$ მაშინ

$$|F(p)| \leq M \int_0^\infty e^{-(s - s_0 + \varepsilon)t} dt = \frac{M}{s - s_0 - \varepsilon} < \frac{M_1}{s - s_0},$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში კრებალობა თანაბარია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ $f(t)$ -ს აქვს შემოსაზღვრული ზრდა, მაშინ (1.1) ინტეგრალის კრებალობის არეა ნახევარსიბრტყე $\operatorname{Re} p > s_0$.

შედეგად, თუ $f(t)$ ორიგინალია, მაშინ

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (1.4)$$

ამ დებულების მართებულება გამომდინარეობს (1.3) უტოლობიდან,

თუ, კერძოდ, $F(p)$ ფუნქცია ანალიზურია უსასრულოდ დამოკიდებულ წერტილში, მაშინ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

სხვათაშორის, რომ ვთქვათ, თუ გამოსახულება $F(p)$ ანალიზურია უსასრულოდ დამოკიდებულ წერტილში, მაშინ მას იქ აუცილებლად აქვს

ნული. მართლაც, $F(p)$ ფუნქციის ლორანის მწკრივს უსასრულოდ-
შორებულ წერტილის მიდამოში აქვს სახე

$$F(p) = C_0 + \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \dots + \frac{C_n}{p^n} + \dots,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = C_0.$$

აქედან (1.4)-ის გათვალისწინებით გვაქვს $C_0 = 0$.

კომპლექსურია $p = s + it$ ცვლადის $F(p)$ ფუნქციას, რომელიც გან-
საზღვრულია (1.1) ტოლობით, ვწოდებთ $f(t)$ ორიგინალის გამოსახულებ-
ა (ლაპლასის მიხედვით), ხოლო $f(t)$ ორიგინალიდან $F(p)$ გამოსახუ-
ლებზე გადასვლის — ლაპლასის გარდაქმნა

ის ფაქტი, რომ $F(p)$ არის $f(t)$ ორიგინალის გამოსახულება, სიმბო-
ლურად ასე ჩაიწერება:

$$f(t) \doteq F(p) \text{ ან } F(p) = L\{f(t)\}.$$

ლაპლასის გარდაქმნის ერთ-ერთი ძირითადი თვისებებია მისი ინალი-
ზურობა. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 1.2. გამოსახულება $F(p)$ ინალიზური ფუნქციაა
 $\text{Re } p > s_0$ ნახევარსიბრტყეზე, სადაც s_0 არის $f(t)$ ორიგინალის ზრდის
მაჩვენებელი, ამისთან

$$F'(p) = - \int_0^\infty e^{-pt} t f(t) dt,$$

ე. ი.

$$- t f(t) \doteq F'(p).$$

დ ა მ ტ ვ ე ბ ა. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\text{Re } p > s_0$ ნახევარსიბრ-
ტყის ყოველ წერტილში არსებობს $F'(p)$.

ვუკვათ, $p = s + it$ წარმოადგენს $\text{Re } p = s > s_1$ ნახევარსიბრტყის რე-
ბისმიერ წერტილს, სადაც $s_1 > s_0$. ვვაქვს

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p} &= \frac{1}{\Delta p} \{F(p + \Delta p) - F(p)\} = \\ &= \int_0^\infty f(t) \frac{1}{\Delta p} \{e^{-(p+\Delta p)t} - e^{-pt}\} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-pt}}{\Delta p} (e^{-t\Delta p} - 1) dt = \\ &= \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-pt}}{\Delta p} \left\{ -t\Delta p + \frac{(t\Delta p)^2}{2!} - \frac{(t\Delta p)^3}{3!} + \dots \right\} dt = \\ &= \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} \left\{ -1 + \frac{t\Delta p}{2!} - \frac{(t\Delta p)^2}{3!} + \dots \right\} dt = \\ &= - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt + \eta(\Delta p), \end{aligned} \quad (1.5)$$

სადაც

$$\eta(\Delta p) = \Delta p \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-pt} \left(\frac{1}{2!} - \frac{t\Delta p}{3!} + \dots \right) dt.$$

(1.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაყრები არ არის
დამოკიდებული Δp -ზე, ამიტომ $F'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p}$ -ის არსებობის სა-
კითხი დამოკიდებულია $\eta(\Delta p)$ -ზე. შევაფასოთ $|\eta(\Delta p)|$. ვვაქვს

$$|\eta(\Delta p)| = |\Delta p| \cdot \left| \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-pt} \left(\frac{1}{2!} - \frac{t\Delta p}{3!} + \dots \right) dt \right| \leq$$

$$\leq |\Delta p| \int_0^\infty t^2 |f(t)| e^{-pt} \left(\frac{1}{2!} + \frac{t|\Delta p|}{3!} + \dots \right) dt <$$

$$< |\Delta p| \int_0^\infty t^2 M e^{-(s-s_1)t} \left(1 + \frac{t|\Delta p|}{1!} + \frac{(t|\Delta p|)^2}{2!} + \dots \right) dt =$$

$$= M |\Delta p| \int_0^\infty t^2 e^{-(s-s_1)t} e^{t|\Delta p|} dt =$$

$$= M |\Delta p| \int_0^\infty t^2 e^{-(s-s_1-|\Delta p|)t} dt. \quad (1.6)$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით იღვლილ შიბ-
ლებზე, რომ

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-\alpha t} dt = \frac{2}{\alpha^2}, \quad (\alpha > 0).$$

ამ ტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-(s-s_1-|\Delta p|)t} dt = \frac{2}{(s-s_1-|\Delta p|)^2}, \quad (1.7)$$

როცა $s-s_1-|\Delta p| > 0$.

ამოგვად, (1.7)-ის გამოყენებით (1.6)-დან მივიღებთ

$$|\eta(\Delta p)| < \frac{2M|\Delta p|}{(s-s_1-|\Delta p|)^2}.$$

სადაც η დამოკიდებულია

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \eta(\Delta p) = 0.$$

შეშისაღმე, (1.5)-დან გვექნება

$$F'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.8)$$

ამით $F(p)$ ფუნქციის ანალიზურობა $\text{Rep} > s_0 + |\Delta p|$ ნახევარსიბრტყე-
ში ნაჩვენებია, რადგან $|\Delta p|$ შეიძლება ავიღოთ რაღაც მცირე, ამი-
ტომ აქედან გამომდინარე $F(p)$ ანალიზურია $\text{Rep} > s_0$ არეში.

თეორემა დამტკიცებულია.

აღვილია შემჩნევა, რომ (1.8) ტოლობის მარჯვენა მხარე მიიღება
(1.1) ტოლობის მარჯვენა მხარის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ გაწარმოე-
ბით p ცვლილით.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია $g(p)$
არ შეიძლება იყოს გამოსახულება, მას აქვს უსასრულო სიმრავლე
 $p_k = \frac{2k-1}{2} \pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) პოლუსების, რომლებიც განლაგებულია

შთელ π ღერძზე. ასევე p^2 ფუნქცია არ არის გამოსახულება, რადგანაც
ის არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $s \rightarrow +\infty$.

შევჩინოთ იგრეთვე, რომ გამოსახულება $F(p)$ შეიძლება არსებობ-
დეს ისეთი ფუნქციისათვის, რომელიც ორიგინალი არ არის. მაგალი-
თად, $f(t) = t^{\alpha}$, $-1 < \alpha < 0$, ფუნქცია არ არის ორიგინალი, თუმცა
მისთვის ლაპლასის ინტეგრალი (1.1) კრებალია, მაშასადამე, ორიგინა-
ლობის 1), 2), და 3) პირობები არის გამოსახულების არსებობის საკ-
მარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობები.

მაგალითი 1. შევამოწმოთ არის თუ არა ორიგინალი ფუნქცია

$$f(t) = \sin 2t e^{(2+i)t}.$$

ამოხსნა. ცხადია, რომ $f(t)$ უწყვეტია ყველგან, ამიტომ 1) და 2)
პირობები შესრულებულია. ცხადია, რომ ყოველი t -სათვის ადგილი
აქვს უტოლობას

$$|f(t)| \leq e^{2t}.$$

იქედან გამომდინარე $f(t)$ არის ორიგინალი ზრდის მაჩვენებლით 3.

მაგალითი 2. შევამოწმოთ არის თუ არა ორიგინალი

$$f(t) = e^{1/t}$$

ფუნქცია.

ამოხსნა. ადვილია ჩვენება, რომ ყოველი ფიქსირებული $\alpha > 0$ -
სათვის იდგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{1/t}}{e^{\alpha t}} = \infty.$$

მაშასადამე, $e^{1/t}$ არ ემაყოფილებს 3) პირობას, ე. ი. ის არ არის ორი-
გინალი.

§ 2. ორიგინალის თვისებები

I. თუ $f(t)$ ორიგინალია, მაშინ ორიგინალია იგრეთვე $|f(t)|$, ზრდის
იმევე მაჩვენებლით.

ამ დებულების მართებულება გამომდინარეობს ორიგინალობის
განსაზღვრებიდან.

II. თუ $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ ორიგინალებია შესაბამისად $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(n)}$
ზრდის მაჩვენებლებით, მაშინ

$$f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \dots + C_n f_n(t)$$

ფუნქცია, სადაც $C_1, C_2, \dots, C_n$ მუდმივებია (ნამდვილი ან კომპლექსუ-
რი), იქნება აგრეთვე ორიგინალი და მისი ზრდის მაჩვენებელია

$$\alpha_0 = \max \{ \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(n)} \}.$$

III. თუ $f(t)$ ორიგინალია s_0 ზრდის მარჯვენა-
ლია შემდეგი ფუნქციები:

1) $f_1(t) = f(at)$ ($a > 0$), s_0 ზრდის მარჯვენა-
ლია;

2) $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$, $s_0 + \operatorname{Re} \lambda$ ზრდის მარჯვენა-
ლია;

3) $f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < \tau, \\ f(t - \tau), & \text{როცა } t \geq \tau \end{cases}$

s_0 ზრდის მარჯვენა-
ლია;

4) $f_4(t) = t^z f(t)$ ($\operatorname{Re} z > 0$), s_0 ზრდის მარჯვენა-
ლია.

ლაშქრის ცემა $f_1(t)$, $f_2(t)$ და $f_3(t)$ ფუნქციების ორიგინალი-
ბის დამტკიცება მარტივია. დავამტკიცოთ, რომ $f_4(t)$ ორიგინალია ზრდის
მარჯვენა-ლია s_0 .

ვთქვათ, $s_2 > s_1 > s_0$, განვიხილოთ ფარდობა

$$\left| \frac{t^z f(t)}{e^{s_2 t}} \right| = \left| t^z f(t) e^{-s_2 t} \right| \leq M t^{\operatorname{Re} z} e^{-(s_2 - s_1)t}.$$

იქედან გვაქვს

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t^z f(t)}{e^{s_2 t}} \right| = 0. \quad (2.1)$$

(2.1)-დან გამოდინარეობს $\left| \frac{t^z f(t)}{e^{s_2 t}} \right|$ ($s_2 > s_1$) ფუნქციის შემოსაზღვრულობა
 $0 \leq t < \infty$ შეაღწევი. ე. ი.

$$\left| \frac{t^z f(t)}{e^{s_2 t}} \right| \leq M_1 = \text{const.}$$

საიდანაც

$$|t^z f(t)| \leq M_1 e^{s_2 t} \quad (s_2 < s_0).$$

რადგანაც s_2 ნებისმიერი დადებითი რიცხვია მეტი s_0 -ზე, ამიტომ
 $f_4(t) = t^z f(t)$ ფუნქციის ზრდის მარჯვენა-ლიაა s_0 .

ორიგინალიობის სხვა პირობებს, ცხადია, $t^z f(t)$ ფუნქცია აკ-
მაყოფილებს. ამით ეს თვისება დამტკიცებულია.

IV. თუ $f(t)$ ორიგინალია ზრდის მარჯვენა-ლია s_0 , მაშინ

$$\varphi(t) = \int_0^t f(u) du$$

უწყვეტი ორიგინალია ზრდის მარჯვენა-ლია s_0 .

ლაშქრის ცემა ცხადია, რომ $\varphi(t)$ უწყვეტია ყოველ t წერ-
ტილზე. დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(t)$ არის ორიგინალი. ვერ ვანვიხილოთ შემ-
თხვევა, როცა $f(u) \geq 0$. ვთქვათ, $s > s_1 > s_0$, მაშინ

$$\begin{aligned} \varphi(t) e^{-st} &= e^{-st} \int_0^t f(u) du = e^{-(s-s_1)t} \int_0^t f(u) e^{-s_1 u} du \leq \\ &\leq e^{-(s-s_1)t} \int_0^t f(u) e^{-s_1 u} du \leq e^{-(s-s_1)t} \int_0^\infty f(u) e^{-s_1 u} du = M_1 e^{-(s-s_1)t}, \end{aligned}$$

საიდანაც $\varphi(t) \leq M_1 e^{s_1 t}$.

ამრიგად, $\varphi(t)$ -ს აქვს შემოსაზღვრული ზრდა და რადგანაც s_1
არის s_0 -ზე მეტი ნებისმიერი რიცხვი, ამიტომ მისი ზრდის მარჯვენა-
ბელი უდრის s_0 -ს.

ახლა დავუშვათ, რომ $f(t)$ კომპლექსური ფუნქციაა, მაშინ

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^t |f(u)| du,$$

მაგრამ უკვე დამტკიცებულის ძალით ამ უტოლობის მარჯვენა მხე-
რე ორიგინალია, ამიტომ $\varphi(t)$ -ც აგრეთვე ორიგინალია, ამით ეს თვისე-
ბა დამტკიცებულია.

§ 2. ლაპლასის პარაფინის თვისებები

1. წრფივობა. თუ

$$f_k(t) \doteq F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

სადაც $s_0^{(k)}$ არის $f_k(t)$ ფუნქციის ზრდის მარჯვენა-ლია, მაშინ ყოველი
 C_k ($k=1, 2, \dots, n$) მუდმივებისათვის

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n C_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \max_{1 \leq k \leq n} \{s_0^{(k)}\}. \quad (3.1)$$

დამტკიცება. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრით გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \doteq \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \right\} e^{-pt} dt = \\ = \sum_{k=1}^n C_k \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n C_k F_k(p).$$

თუ ინტეგრალები $\int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt$ კრებალია შესაბამისად $\operatorname{Re} p > s_k^{(k)}$, ($k=$

$= 1, 2, \dots, n$) ნახევარსიბრტყეებში, მაშინ ინტეგრალი $\int_0^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n f_k(t) \right\} e^{-pt} dt$

კრებალი იქნება $\operatorname{Re} p > \max_{1 \leq k \leq n} \{s_k^{(k)}\}$ ნახევარსიბრტყეში.

ამით ეს თვისება დამტკიცებულია.

II. მსგავსება. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

მაშინ

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha s_0 \quad (\alpha > 0). \quad (3.2)$$

დამტკიცება. მართლაც,

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt.$$

აქედან ცვლითა გარდაქმნით $\alpha t = \tau$ მივიღებთ

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha s_0.$$

III. დავგვიანება. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

მაშინ ნებისმიერი დადებითი τ -სათვის

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.3)$$

დამტკიცება. განსაზღვრით გვაქვს

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt. \quad (3.4)$$

თუ მოვახდენთ ცვლითა გარდაქმნას $t - \tau = u$, მაშინ (3.4)-დან მივიღებთ

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(\tau+u)} du = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} du = e^{-p\tau} F(p).$$

(3.3)-ის მართებულება დამტკიცებულია.

IV. გასწრება. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

მაშინ ნებისმიერი $\tau > 0$ -სათვის

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} \left\{ F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right\}, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.5)$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$f(t + \tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t + \tau) e^{-pt} dt. \quad (3.6)$$

მოვახდენთ ცვლითა გარდაქმნას $t + \tau = u$, მაშინ (3.6)-დან მივიღებთ

$$f(t + \tau) \doteq \int_{\tau}^{\infty} f(u) e^{-p(u-\tau)} du = e^{p\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(u) e^{-pu} du = \\ = e^{p\tau} \left[\int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} du - \int_0^{\tau} f(u) e^{-pu} du \right] = \\ = e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^{\tau} f(u) e^{-pu} du \right], \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

ამით (3.5) ფორმულის მართებულება დამტკიცებულია.

29. ს. თეთური, გ. ზოგოლივი, 2. გამომავალი, ნ. შაქარაშვილი

V. გამოსახულების ძვრა. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \text{Re } p > s_0,$$

მაშინ ნებისმიერი λ რიცხვისათვის

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda), \quad \text{Re}(p - \lambda) > s_0. \quad (3.7)$$

დამტკიცება გვაქვს

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq \int_0^\infty e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p-\lambda), \quad \text{Re}(p-\lambda) > s_0.$$

ძვრის თვისება დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვიზოვით $f(t) = C = \text{const}$ ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა. გვაქვს

$$C \doteq \int_0^\infty C e^{-pt} dt = -C \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = \frac{C}{p} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}).$$

აქედან, თუ $\text{Re } p > 0$, მაშინ $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} = 0$ და, მაშასადამე,

$$C \doteq \frac{C}{p}, \quad \text{Re } p > 0.$$

კერძოდ,

$$1 \doteq \frac{1}{p}, \quad \text{Re } p > 0.$$

მაგალითი 2. ვიზოვით $f(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda = \text{const}$) ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა. ძვრის (3.7) თვისების გამოყენებით გვაქვს

$$1 \cdot e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p - \lambda}, \quad \text{Re}(p - \lambda) > 0 \quad \text{ან} \quad \text{Re } p > \text{Re } \lambda. \quad (3.8)$$

კერძოდ, (3.8)-დან გვაქვს

$$e^{i\omega t} \doteq \frac{1}{p - i\omega}, \quad \text{Re } p > \text{Re}(i\omega) = -\text{Im } \omega.$$

$$e^{-i\omega t} \doteq \frac{1}{p + i\omega}, \quad \text{Re } p > \text{Re}(-i\omega) = \text{Im } \omega,$$

სადაც ω ნებისმიერი რიცხვია.

მაგალითი 3. ვიზოვით $f(t) = t^n$ (n მთელი არაუარყოფითი რიცხვია) ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის n -ჯერ გამოყენების შემდეგ მივიღებთ

$$t^n \doteq \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = \frac{t^n e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty + \frac{n}{p} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-pt} dt = \dots = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

ე.ი.

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}. \quad (3.9)$$

საზოგადოდ, თუ $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$t^\alpha \doteq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}. \quad (3.10)$$

მართლაც,

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^\alpha}{p^{\alpha+1}} \frac{du}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

თუ $\alpha = -\frac{1}{2}$, მაშინ (3.10)-დან გვაქვს

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \doteq \frac{\Gamma(1/2)}{p^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}. \quad (3.11)$$

მაგალითი 4. ვიზოვით $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\text{sh } \omega t$ და $\text{ch } \omega t$ ფუნქციების გამოსახულებები.

ამოხსნა. როგორც ვიცით,

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

$$\text{sh } \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}), \quad \text{ch } \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

* $\Gamma(\alpha+1)$ ეილერის გამა-ფუნქცია და განისაზღვრება ტოლობით $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$ ($\alpha > -1$). კერძოდ, თუ n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მაშინ $\Gamma(n+1) = n!$

აქედან წრფივობის (3.1) თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} (\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|;$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|;$$

$$\operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|.$$

მაგალითი 5. ვიზოვით $f(t) = e^{-\pi t} \sin 5t \cos 2t$ ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\sin 5t \cos 2t = \frac{1}{2} (\sin 7t + \sin 3t).$$

(3.12) ტოლობის გათვალისწინებით, წრფივობისა და ძვრის თვისებების ძალით გვექნება

$$e^{-\pi t} \sin 5t \cos 2t \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{7}{(p+3)^2 + 49} + \frac{3}{(p+3)^2 + 9} \right].$$

მაგალითი 6. ვიზოვით $e^{\lambda t} t^n$, $e^{\lambda t} \sin \omega t$ და $e^{\lambda t} \cos \omega t$ ფუნქციების გამოსახულებები, სადაც λ და ω ნებისმიერი რიცხვებია.

ამოხსნა. (3.9), (3.12) და (3.13) ფორმულებიდან ძვრის თვისების ძალით გვაქვს:

$$e^{\lambda t} t^n \doteq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}.$$

მაგალითი 7. ვიზოვით $\frac{\sin \omega t}{\sqrt{t}}$ და $\frac{\cos \omega t}{\sqrt{t}}$ ფუნქციების გამოსახულება, სადაც ω ნებისმიერი რიცხვია.

ამოხსნა. (3.11)-სა და ძვრის თვისების ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned} \frac{\sin \omega t}{\sqrt{t}} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{p-i\omega}} - \frac{1}{\sqrt{p+i\omega}} \right) = \\ &= \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{p+i\omega} - \sqrt{p-i\omega}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\frac{\cos \omega t}{\sqrt{t}} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{p+i\omega} + \sqrt{p-i\omega}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|. \quad (3.15)$$

VI. ორიგინალის წარმოებულის გამოსახულება. ვთქვათ $f'(t)$ ორიგინალია ზრდის მიჩვენებით s_0 , მაშინ $f(t)$ ფუნქციაც ორიგინალია ზრდის მიჩვენებით s_0 , ამასთან თუ $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ

$$f'(t) \doteq pF(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.16)$$

კერძოდ, თუ $f(t)$ უწყვეტია $t=0$ წერტილზე, მაშინ

$$f'(t) \doteq pF(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.17)$$

დამტკიცება. $f(t)$ ფუნქციის ორიგინალობა გამომდინარეობს ორიგინალის IV თვისებიდან (იხ. § 2).

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \\ &= pF(p) - f(0+) + \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) e^{-pt}], \end{aligned} \quad (3.18)$$

მაგრამ

$$|f(t)| \leq M e^{s_1 t}, \quad s_1 > s_0.$$

ამიტომ

$$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{-(s-s_1)t}, \quad \operatorname{Re} p = s > s_1 > s_0,$$

საიდანაც

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) e^{-pt}] = 0, \quad \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

ამ ვარტეგების ვარტეგისწინებით (3.18)-დან ვღებულობთ (3.16)-ს. ცხადია, რომ თუ $f(t)$ უწყვეტია $t=0$ წერტილზე, მაშინ $f(0+)=0$, ამიტომ (3.16)-დან მიიღება (3.17). ამით ეს თვისება დამტკიცებულია.

VII. შევეცდეთ თვისების განზოგადება. თუ $f^{(n)}(t)$ ორიგინალის ზრდის მანვერებით s_0 , მაშინ ფუნქციები $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ აგრეთვე ორიგინალის ზრდის მანვერებით s_0 და თუ

$$f(t) \doteq F(p),$$

მაშინ

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - f(0+)p^{n-1} - f'(0+)p^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0+). \quad (3.19)$$

$\text{Rep} > s_0$.

დამტკიცება. $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ ფუნქციების ორიგინალობა გამომდინარეობს ორიგინალის IV თვისებიდან. (3.19)-ის მართებულება მტკიცდება ინტეგრაციის მეთოდის გამოყენებით. ეს ტოლობა მართებულია, როცა $n=1$. დავუშვათ, რომ ის მართებულია $n-1$ -სათვის, ე. ი. დავუშვათ, რომ

$$f^{(n-1)}(t) \doteq p^{n-1} F(p) - f(0+)p^{n-2} - f'(0+)p^{n-3} - \dots - f^{(n-2)}(0+).$$

აქედან (3.16)-ის ძალით გწერთ

$$f^{(n)}(t) \doteq p(p^{n-1} F(p) - f(0+)p^{n-2} - f'(0+)p^{n-3} - \dots - f^{(n-2)}(0+)) - f^{(n-1)}(0+) = p^n F(p) - f(0+)p^{n-1} - f'(0+)p^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ $\text{erf}(\sqrt{t})$ ფუნქციის გამოსახულება, სადაც

$$\text{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du.$$

$\text{erf}(t)$ ფუნქციას ეწოდება ალბათობის ინტეგრალი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $\text{erf}(t)$ ფუნქცია უწყვეტია და ზრდალია $[0; \infty]$ შუალედში, ამასთან $\text{erf}(0)=0$, $\text{erf}(\infty)=1$. ვანვიხილოთ ფუნქცია $f(t) = e^t \text{erf}(\sqrt{t})$. ვთქვათ, $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ (3.16) ფორმულის ძალით და (3.11)-ის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} f'(t) &= \{e^t \text{erf}(\sqrt{t})\}' = e^t \text{erf}(\sqrt{t}) + e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \\ &= e^t \text{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

საიდენტი

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

ამრიგად,

$$e^t \text{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

აქედან ძვრის თვისების ძალით გვქვს

$$\text{erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

მაგალითი 9. ვიპოვოთ $\text{Erf}(\sqrt{t})$ ფუნქციის გამოსახულება, სადაც

$$\text{Erf}(\sqrt{t}) = 1 - \text{erf}(t).$$

ამოხსნა. წრფივობის თვისების ძალით ადვილად მიიღება, რომ

$$\text{Erf}(\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}.$$

VIII. გამოსახულების გაწარმოება. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \text{Rep} > s_0,$$

მაშინ

$$-tf(t) \doteq F'(p), \quad \text{Rep} > s_0. \quad (3.20)$$

დასაზოგადოდ

$$(-1)^n t^n f(t) \doteq F^n(p), \quad \text{Rep} > s_0. \quad (3.21)$$

დამტკიცება. (3.20) ტოლობა იგივეა, რაც § 1-ის (1.8):

$$L\{-tf(t)\} = \int_0^\infty (-tf(t)) e^{-pt} dt = -\frac{d}{dp} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -F'(p).$$

(3.21) ტოლობა მიიღება (3.20)-დან ინტეგრაციის მეთოდის გამოყენებით.

მაგალითი 10. გამოსახულების გაწარმოების თვისებების გამოყენებით ვიპოვოთ $t \sin \omega t$ და $t \cos \omega t$ ფუნქციების გამოსახულებები. ამოხსნა. როგორც ვიცით,

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Rep} > |\text{Im } \omega|,$$

ამიტომ (3.20)-ის ძალით მივიღებთ

$$-t \sin \omega t \doteq \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)' = -\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2},$$

საიდანაც

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > \|\operatorname{Im} \omega\|.$$

IX. ორიგინალის ინტეგრება. თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0,$$

მაშინ

$$\int_0^t f(u) du \doteq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.22)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\varphi(t) = \int_0^t f(u) du \doteq \Phi(p), \quad \varphi(0) = 0.$$

მაშინ (3.17)-ის ძალით გვაქვს

$$\varphi'(t) = f(t) \doteq p\Phi(p),$$

ე. ი.

$$F(p) = p\Phi(p).$$

საიდანაც

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

ამით (3.22)-ის მართებულება დამტკიცებულია.

მაგალითი 11. უბოვოთ $S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du$ და $C(t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du \quad \text{ფუნქციების გამოსახულებები.}$$

ამოხსნა. (3.14)-დან (3.22)-ის გამოყენებით ვვაქვს

$$\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \doteq \frac{i\sqrt{\pi}}{2p} \cdot \frac{\sqrt{p-i} - \sqrt{p+i}}{\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

საიდანაც

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \doteq \frac{i}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{p-i} - \sqrt{p+i}}{p\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du \doteq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{p+i} - \sqrt{p-i}}{p\sqrt{p^2+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

X. გამოსახულების ინტეგრება. თუ $\frac{f(t)}{t}$ ორიგინალია ზრდის მაჩვენებლით s_0 , მაშინ $f(t)$ ფუნქცია აგრეთვე ორიგინალია s_0 ზრდის მაჩვენებლით და თუ

$$f(t) \doteq F(p),$$

მაშინ

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq, \quad (3.23)$$

სადაც

$$\int_p^\infty F(q) dq = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \int_p^p F(q) dq.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p)$, მაშინ (3.20)-ის ძალით

$$f(t) \doteq -\Phi'(p).$$

აქედან

$$F(p) = -\Phi'(p).$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ინტეგრირებას p -დან P -მდე, მივიღებთ

$$\Phi(p) - \Phi(P) = \int_p^P F(q) dq. \quad (3.24)$$

რადგან $\lim_{\text{Rep} \rightarrow +\infty} \Phi(P) = 0$ (იხ. ტოლობა (1.4)), ამიტომ (3.24)-დან გვაქვს

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(q) dq.$$

ე. ი. აღვღიო აქვს (3.23) ტოლობას.

ამ თვისებიდან კერძოდ გამოდინარეობს, რომ, თუ $\frac{f(t)}{t}$ ორიენა-

ლია, $f(t) \doteq F(p)$ და არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ კრება-

ლია, მაშინ აღვღიო აქვს ტოლობას

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(t) dt. \quad (3.25)$$

მაგალითი 12. გამოსახულების ინტეგრების თვისების გამოყენებით ვიპოვოთ $f(t) = \frac{\sin \omega t}{t}$ ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა. როგორც ვიცით,

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Rep} > |\text{Im} \omega|.$$

აქედან (3.23) ფორმულის ძალით გვაქვს

$$\frac{\sin \omega t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{\omega dq}{q^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{p}{\omega} = \text{arctg} \frac{p}{\omega}, \quad \text{Rep} > |\text{Im} \omega|.$$

მაგალითი 13. ორიგინალის ინტეგრების თვისების გამოყენებით ვიპოვოთ

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

ინტეგრირების სინუსის გამოსახულება.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. მაგალითი 12)

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \text{arctg}' p.$$

აქედან (3.22)-ის ძალით გვაქვს

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \doteq \frac{1}{p} \text{arctg} p.$$

მაგალითი 14. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

ამოხსნა. გვაქვს $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$.

(3.25) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{arctg} t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

XI. თუ $f_t(t) \doteq F(p)$, $\text{Rep} > 0$, მაშინ

$$\int_i^\infty \frac{f(u)}{u} du \doteq \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq, \quad \text{Rep} > 0. \quad (3.26)$$

ლაშტკი ცეპა. მსგავსების (3.2) თვისების გამოყენებით ყოველი $\alpha > 0$ -სათვის გვაქვს

$$\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \doteq F(\alpha p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

თუ მოვანდენთ ამ ტოლობის ინტეგრებას α -თი 0-დან 1-მდე, მივიღებთ

$$\int_0^1 F(\alpha p) d\alpha = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} \doteq \int_0^1 F(\alpha p) d\alpha, \quad \text{Rep} > 0. \quad (3.27)$$

თუ (3.27)-ის მარცხენა ინტეგრალში მოვიანდენთ ჩასმას $u = \frac{t}{\alpha}$, ხოლო მარჯვენა ინტეგრალში $q = \alpha p$, მივიღებთ (3.26) ფორმულას.

მაგალითი 15. ვიპოვოთ $\int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ და $\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du$ ფუნქციების გამოსახულება.

ამოხსნა. რადგანაც $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, $\text{Rep} > 0$, ამიტომ (3.26) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \doteq \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{1}{p} \text{arctg } p; \quad \text{Rep} > 0.$$

ანალოგიურად მივიღეთ, რომ $\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \doteq \frac{\text{Ln}(p^2 + 1)}{2p}$, $\text{Rep} > 0$.

ორიგინალებისა და მათი გამოსახულებათა ცხრილი

ორიგინალი $f(t)$	გამოსახულება $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$	შენიშვნა
t^n	$n! / p^{n+1}$	n -ნატურალური
$e^{\pm \alpha t}$	$1/(p \pm \alpha)$	$\text{Rep} > \text{Re } \alpha$
a^t	$1/(p - \ln a)$	$\text{Rep} > \text{Re } \ln a, \text{ Re } a > 0$
$\ln t$	$(\ln 1/p + C)/p$	$C=0,57722\dots$ ეილერის მუდმივი
$t^n e^{\pm \alpha t}$	$n!/(p \pm \alpha)^{n+1}$	
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$	$\text{Rep} > \text{Im } \omega $
$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$	$\text{Rep} > \text{Im } \omega $
$\text{sh } \omega t$	$\omega/(p^2 - \omega^2)$	$\text{Rep} > \text{Re } \omega $
$\text{ch } \omega t$	$p/(p^2 - \omega^2)$	$\text{Rep} > \text{Re } \omega $
$t \sin \omega t$	$2p\omega/(p^2 + \omega^2)^2$	$\text{Rep} > \text{Im } \omega $
$t \cos \omega t$	$(p^2 - \omega^2)/(p^2 + \omega^2)^2$	$\text{Rep} > \text{Im } \omega $
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\omega/((p - \alpha)^2 + \omega^2)$	
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$(p - \alpha)/((p - \alpha)^2 + \omega^2)$	
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\text{arctg } \frac{p}{\omega}$	$\text{Rep} > \text{Im } \omega $

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დიფერენციალური განტოლებების ამო-
ხსნაში თანაბრად აღრიცხვის გამოყენების დროს ჯერ ვპოულობთ
ამონახსნის გამოსახულებას, შემდეგ კი ამ გამოსახულების მიხედვით
საჭიროა მოვეძებნოთ შესაბამისი ორიგინალი. ამ თანაბრების ეწოდება
ლაპლასის გარდაქმნის შეზღუდული თანაბრება და აღინიშნება სიმ-
ბოლოთი

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

მართებულია შეზღუდული შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4.1. თუ $f(t)$ ორიგინალია s_0 წარდის მაჩვენებლით,
ხოლო $F(p)$ მისი გამოსახულებაა, მაშინ $f(t)$ ფუნქციის წარმოებულობის
ყოველ t წერტილზე

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (4.1)$$

სადაც $s > s_0$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ხოლო ინტეგრალი გვესმის
კოშის მთავარი მნიშვნელობის ახრით, ე. ი.

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s-iN}^{s+iN}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(t) = e^{-st} f(t), \quad s > s_0.$$

თუ $f(t)$ წარმოებალია t წერტილზე, მაშინ ამ წერტილზე წარმოებალია
აგრეთვე $\varphi(t)$, გარდა ამისა, $\varphi(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრებალია $]-\infty;$
 $\infty[$ შუალედში ამიტომ t წერტილში ის წარმოადგინება ფურიეს ინ-
ტეგრატით:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{i u (\tau - t)} d\tau.$$

* $s-i\infty, s+i\infty$ არის $\text{Re } z = s$ წრფე.

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\varphi(t) = e^{-st} f(t)$ -ს და გავთავისუფლებთ,
რამ $f(t) \equiv 0$, როცა $t < 0$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} e^{-st} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-st} e^{i u (\tau - t)} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u t} du \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(s+i u)\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4.2)$$

აღვნიშნოთ $p = s + iu$, მაშინ $dp = i du$, ამიტომ (4.2)-დან გვექნება

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u t} du \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(s+i u)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \end{aligned}$$

ამით (4.1) ტოლობის მართებულობა დამტკიცებულია, მის მეორის*
ინტეგრალი ეწოდება: ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოსახუ-
ლების მიხედვით ვიპოვოთ შესაბამისი ორიგინალი.

დამტკიცებული თეორემიდან, როგორც შედეგი, მიიღება ორიგინა-
ლის ერთადერთობის შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4.2 თუ $F(p)$ არის $f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალების გამო-
სახულება, მაშინ $f_1(t) = f_2(t)$ მათი წარმოებალობის წერტილზე.

როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. § 3), ყოველი $F(p)$ ფუნქცია არ წარ-
მოადგენს რაიმე ორიგინალის გამოსახულებას. მოვიყვანოთ აქ საკმა-
რისი პირობები იმისა, რომ ანალიზური $F(p)$ ფუნქცია იყოს გამოსახუ-
ლება. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.3 (ორიგინალის არსებობის შესახებ). თუ კომპლექ-
სური ცვლადის $F(p)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

- 1) $F(p)$ ანალიზურია $\text{Re } p > s_0$ ნახევარსიბრტყეში;
- 2) ნებისმიერ $\text{Re } p > s_0$ ნახევარსიბრტყეში $F(p)$ მისწრაფვის
ნულისკენ თანაბრად $\arg p$ -ს მიხედვით, როცა $|p| \rightarrow \infty$;

* რ. ხ. მელინი (1854-1933) — ფინელი მათემატიკოსი.

3) ყოველი $s > s_0$ -სათვის აბსოლუტურად კრებალია

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) dp^*$$

ინტეგრალი, მაშინ $F(p)$ გამოსახულებაა $f(t)$ ფუნქციის, რომელიც ორიგინალია და განისაზღვრება მელინის ინტეგრალით

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (s > s_0, t > 0). \quad (4.3)$$

შეიშვენი. ამ შემთხვევაში, როცა $F(p)$ ფუნქცია ანალიზური მთელ კომპლექსურ სიბრტყეში, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობა განსაკუთრებული წერტილებისა $p_1, p_2, \dots, p_n$, რომლებიც მდებარეობენ $s = s_0$ წრფის მარცხნივ და $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, მაშინ ნაშთია თე-

ორის ძირითადი თეორემის გამოყენებით (4.3) ინტეგრალი გამოითვლება ფორმულით

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}]. \quad (4.4)$$

მაგალითი 1. შექცევის (4.3) ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

გამოსახულების ორიგინალი.

ამოხსნა. ადვილია შემოწმება, რომ თეორემა 4.3-ის ყველა პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გამოსახულება, შესრულებულია. ამიტომ ფუნქცია

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + 1} dp, \quad s > 0,$$

* ე. ი. კრებალია ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{\infty} |F(s+it)| dt$.

არის ორიგინალი ინტეგრალქვეშა ფუნქციის აქვს ორი მარტივი პოლუსი i და $-i$. (4.4) ფორმულის გამოყენებით ვწერთ

$$f(t) = \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{pt}}{p^2 + 1} \right) + \operatorname{Res}_{-i} \left(\frac{e^{pt}}{p^2 + 1} \right) = \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i} = \sin t.$$

ახლა მოვიყვანოთ (4.4) ფორმულის გამოყენება იმ კერძო (მაგრამ მნიშვნელოვან) შემთხვევაში, როცა $F(p)$ წილადრაციონალური ფუნქციაა:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

სადაც $A(p)$ და $B(p)$ მრავალწევრებია, ამასთან $A(p)$ -ს ხარისხი ნაკლებია $B(p)$ -ს ხარისხზე, ამ შემთხვევაში

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A(p)}{B(p)} = 0.$$

გარდა ამისა, $F(p)$ -ს აქვს განსაკუთრებული წერტილების სასრული რაოდენობა, ეს წერტილები $B(p)$ მრავალწევრების ნულებია და აქედან გამომდინარე წარმოადგენს $F(p)$ ფუნქციის პოლუსებს (იგულისხმება, რომ $A(p)$ და $B(p)$ მრავალწევრებს საერთო ფესვები არა აქვთ, ე. ი. წილადი უკვეცია).

შემოთ ვაცეთებელი შენიშვნის ძალით $F(p)$ გამოსახულება, შესაბამისი ორიგინალი გამოითვლება (4.4) ფორმულით, რომელშიც ყველა განსაკუთრებული p_k წერტილი პოლუსია. თუ გამოვიყენებთ ნე-ზისმიერის რიგის პოლუსის მიმართ ნაშთის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = \sum_{k=1}^l \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}] = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p) (p - p_k)^{n_k} e^{pt}], \quad (4.5)$$

სადაც p_k არის $F(p)$ -ს პოლუსი, ხოლო n_k -მისი წერტილობის მძევრებელი. შეკრება ხდება ყველა პოლუსის მიმართ.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $F(p) = \frac{p^2 + 1}{(p - 1)(p + 1)^2}$ გამოსახულების

ორიგინალი.

შ. ს. თოფურია, გ. ხოჭოლაძე, ზ. გაბაშვილი, ნ. შაჰარშვილი

ამოხსნა. $F(p)$ გამოსახულების მნიშვნელის ნულგზია

$$p_1=1, \quad n_1=1,$$

$$p_2=-1, \quad n_2=2,$$

ამიტომ (4.5) ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$f(t) = \operatorname{Res}_1 \{F(p) e^{pt}\} + \operatorname{Res}_{-1} \{F(p) e^{pt}\}.$$

მაგრამ

$$\operatorname{Res}_1 \{F(p) e^{pt}\} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2} e^{pt} = \frac{1}{2} e^t,$$

$$\operatorname{Res}_{-1} \{F(p) e^{pt}\} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left\{ \frac{p^2 + 1}{p-1} e^{pt} \right\} =$$

$$= \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ \frac{p^2 - 2p - 1}{(p-1)^2} e^{pt} + \frac{p^2 + 1}{p-1} t e^{pt} \right\} = \frac{1}{2} e^{-t} - t e^{-t}.$$

შეშინაღამე,

$$f(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - t e^{-t}.$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $F(p)$ -ს პოლუსები მარტივია, (4.5) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$L^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.6)$$

(4.6) ფორმულის მიღების დროს გამოყენებულია მარტივი პოლუსის მიმართ ნაშთის გამოსათვლელი ფორმულა.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $F(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}$ გამოსახულების ორიგინალი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $A(p) = p-1$, $B(p) = (p+1)(p^2+1)$, $B'(p) = 3p^2+2p+2$, $B(p)$ -ს აქვს მარტივი ნულგზი

$$p_1=-1, \quad p_2=i, \quad p_3=-i.$$

ამიტომ (4.6) ფორმულით მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A(-1)}{B'(-1)} e^{-t} + \frac{A(i)}{B'(i)} e^{it} + \frac{A(-i)}{B'(-i)} e^{-it} = \\ &= -e^{-t} + \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it} = \cos t - e^{-t}. \end{aligned}$$

როცა გამოსახულებას აქვს სახე $F(p) = \frac{A(p)}{PB(p)}$, სადაც $A(p)$ -ს რიგი

არ აღემატება $B(p)$ -ს რიგს და $B(p)$ -ს აქვს მარტივი ნულგზი განსხვავებული ნულისგან, მაშინ (4.6) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{P_k B'(p_k)} e^{p_k t},$$

სადაც შეკრება ხდება $B(p)$ -ს ყველა ფესვის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა უსასრულოდ დაშორებული (არასიკუთრივი) წერტილს $|p| > R$ მდებარეობს $F(p)$ გამოსახულების ლორანის მწკრივად გაშლის აქვს სახე

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{p^{k+1}}. \quad (4.7)$$

ამ შემთხვევაში აღვიღოთ ჩვენება, რომ $F(p)$ გამოსახულების ორიგინალია ფუნქცია

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (4.8)$$

პირიქით, თუ $t > 0$ -სათვის

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k t^k}{k!}$$

და $f(t)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$|f(t)| < M e^{\frac{t}{2}}, \quad t > 0, \quad M = \text{const},$$

მაშინ $f(t)$ ორიგინალია და მისი გამოსახულება $F(p)$, $p = \infty$ წერტილის მიდამოში გაიშლება ლორანის (4.7) მწკრივად.

მიგალითი 4. ვიპოვოთ $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-(1/p)}$ ($n=0, 1, \dots$) გამო-
სახულების ორიგინალი.
ამოხსნა. $F(p)$ ფუნქციის $p = \infty$ წერტილის მიდამოში ლორანის
მწკრივად გავლა იქნება

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+1+k}}.$$

ამიტომ (4.8)-ის ძალით ვწერთ

$$f(t) = t^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{n+1}} e^{-(1/p)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+1)!}.$$

§ 5. გამოსახულების რაციონალურობის აუდილუგალი
და ჰამილტონი პირობა

მოვიყვანოთ რაციონალური გამოსახულების შესაბამისი ორიგინალის
პოვნის კიდევ ერთი წესი, რომელიც ზოგ შემთხვევაში პრაქტიკულად
უფრო გამოსაყენებელია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი ფორმულე-
ბი. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 5.1. იმისათვის, რომ გამოსახულება იყოს რაციონალ-
ური ფუნქცია, აუცილებელია და საკმარისი ორიგინალი იყოს $t^n e^{at}$
(n მთელი არაუარყოფითი რიცხვა) ფუნქციითაა წარდგენილი კომბინაცია.
საკმარისობა. ვთქვათ, ორიგინალი $f(t)$ არის $t^n e^{at}$ ფუნქ-
ციითაა წარდგენილი კომბინაცია, რადგანაც

$$t^n e^{at} = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

ამიტომ წარდგენის თვისების ძალით ვასკენით, რომ $f(t)$ ორიგინალის
გამოსახულება იქნება $\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$ სახის ფუნქციითაა წარდგენილი კომბინა-
ცია, ე. ი. წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას.

ბუცილებლობა. ვთქვათ, გამოსახულება $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ წესიერია
(უკვეთი) წილად-რაციონალური ფუნქციაა, რომლის პოლუსები $P_1, P_2, \dots$
 $\dots, P_n$ შესაბამისად $n_1, n_2, \dots, n_l$ ჯერადობით.

ფუნქციის გაშლის მარტივ წილადად იქნება სახე

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_{11}}{p-P_1} + \frac{A_{12}}{(p-P_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(p-P_1)^{n_1}} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{21}}{p-P_2} + \frac{A_{22}}{(p-P_2)^2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(p-P_2)^{n_2}} +$$

$$\dots + \frac{A_{l1}}{p-P_l} + \frac{A_{l2}}{(p-P_l)^2} + \dots + \frac{A_{ln_l}}{(p-P_l)^{n_l}} = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{n_k} \frac{A_{kv}}{(p-P_k)^v}, \quad (5.1)$$

სადაც A_{kv} რაიმე კომპლექსური რიცხვებია. რადგან

$$\frac{A_{kv} t^{v-1}}{(v-1)!} e^{pt} = \frac{A_{kv}}{(p-P_k)^v},$$

ამიტომ წარდგენის თვისების ძალით $F(p)$ გამოსახულების (რომელიც
მოცემულია (5.1) ტოლობით) ორიგინალი იქნება

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{n_k} \frac{A_{kv} t^{v-1}}{(v-1)!} e^{p_k t}. \quad (5.2)$$

(5.2) ტოლობით განსაზღვრული $f(t)$ ფუნქცია წარმოებდა, ამიტომ
ერთადერთობის § 4-ში მოყვანილი თეორემა 4.2-ის ძალით $f(t)$, რომე-
ლიც განსაზღვრულია (5.2) ფორმულით, იქნება ერთადერთი ფუნქცია,
რომლის გამოსახულება უდრის $F(p)$ -ს.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან ვღებულობთ რაციონალური გამოსა-
ხულების მიხედვით ორიგინალის პოვნის შემდეგ წესს: ვთქვათ, $F(p) =$
 $\frac{A(p)}{B(p)}$ წესიერი (უკვეთი) წილად-რაციონალური ფუნქციაა, რომლის მნიშ-
ვლის ნულებია $p_1, p_2, \dots, p_l$, შესაბამისად $n_1, n_2, \dots, n_l$ ჯერადობით,
სადაც $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ (n არის $B(p)$ მრავალწევრის ხარისხი). თუ
 $F(p)$ ფუნქციის გაშლის მარტივ წილადად იქნება სახე

$$F(p) = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{n_k} \frac{A_{kv}}{(p-p_k)^v},$$

მაშინ ორიგინალი $f(t)$, რომლის გამოსახულებაა $F(P)$, იქნება

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{n_k} \frac{A_{kv} t^{v-1}}{(v-1)!} e^{p_k t}.$$

თუ $p_k (k=1, 2, \dots, l)$ მარტივი პოლუსებია, მაშინ (5.1) და (5.2) ფორმულები ღებულობენ ასეთ სახეს:

$$F(P) = \sum_{k=1}^l \frac{A_k}{P - p_k},$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^l A_k e^{p_k t}.$$

მაგალითი. ვიზოთ $F(P) = \frac{P+1}{P^2(P-1)(P+2)}$ გამოსახულების ორიგინალი.

ამოხსნა. $F(P)$ ფუნქციის მარტივ წილადებად წარმოდგენას აქვს სახე

$$\frac{P+1}{P^2(P-1)(P+2)} = \frac{-1}{P^2} - \frac{3}{4P} - \frac{1}{6(P-1)} + \frac{11}{12(P+2)}.$$

საიდანაც (5.2) ფორმულის გამოყენებით

$$f(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} - \frac{1}{6}e^t + \frac{11}{12}e^{-2t}, \quad t > 0.$$

§ 6. ფუნქციის ნახევრი და მისი გამოსახულება
(თვისება გამოსახულებათა პარავალიის
შესახება)

ვთქვათ, $f(t)$ და $\varphi(t)$ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებია განსაზღვრული $[0, \infty]$ შუალედში. $f(t)$ და $\varphi(t)$ ფუნქციების ნახევრი ეწოდება ინტეგრალს

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau$$

და აღინიშნება სიმბოლოთი $f(t) * \varphi(t)$, ე. ი.

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau.$$

ფუნქციათა ნახევრს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. სიმეტრიულობა

$$f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t). \quad (6.1)$$

მართლაც, თუ მოვახდენთ ჩასმას $t-\tau=u$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(t) * \varphi(t) &= \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = - \int_t^0 f(t-u) \varphi(u) du = \\ &= \int_0^t \varphi(u) f(t-u) du = \varphi(t) * f(t). \end{aligned}$$

ე. ი. ადგილი აქვს (6.1) ტოლობას.

2. თუ $f(t)$ და $\varphi(t)$ უწყვეტი ორიგინალებია შესაბამისად s_0' და s_0'' ზრდის მაჩვენებლით, მაშინ მათი ნახევრი $f(t) * \varphi(t)$ აგრეთვე უწყვეტი ორიგინალია და მისი ზრდის მაჩვენებელია

$$s_0 = \max(s_0', s_0'').$$

დამტკიცება. უწყვეტობა და ორიგინალობის 1 და 2 თვისებების შესრულება ცხადია. ვაჩვენოთ 3 თვისებებს მართებულობა. პირების ძალით გვაქვს

$$|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}, \quad s_1 > s_0',$$

$$|\varphi(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}, \quad s_2 > s_0''.$$

თუ $s = \max(s_1, s_2)$, მაშინ

$$\left| \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{s\tau} e^{s(t-\tau)} d\tau = M_1 M_2 t e^{st}. \quad (6.2)$$

რადგანაც ყოველ $\varepsilon > 0$ -სათვის $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\varepsilon t}} = 0$, ამიტომ (6.2)-დან გვქვნება

$$\left| \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right| \leq M e^{(\varepsilon+\delta)t}.$$

აქედან, რადგანაც φ ნებისმიერი დადებითი რიცხვით, გამომდინარეობს, რომ $f(t) * \varphi(t)$ ნახევრის ზრდის მიჩვენებულია

$$s_0 = \max(s_0', s_0'').$$

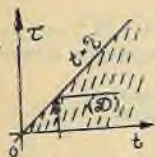
შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ t და $\sin t$ ფუნქციების ნახევრი და ამ ნახევრის გამოსახულება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსაზღვრებით გვაქვს

$$\begin{aligned} t * \sin t &= \int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau = \tau \cos(t-\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = \\ &= t - \sin t = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}. \end{aligned}$$

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 6.1 (ბოჩელას* თეორემა გამოსახულებათა გამრავლების თვისების შესახებ). თუ $f(t) \doteq F(p)$, $s > s_0'$, $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, $s > s_0''$, მაშინ ნამრავლი $F(p)\Phi(p)$, წარმოადგენს $f(t) * \varphi(t)$ ნახევრის გამოსახულებას, ე. ი.



ნახ. 82

$$\begin{aligned} f(t) * \varphi(t) &\doteq F(p)\Phi(p), \text{ Rep} > s_0 = \\ &= \max(s_0', s_0'') \end{aligned} \quad (6.3)$$

დ ი მ ტ ე ი ც ე მ ა. ლაპლასის გარდაქმნის განსაზღვრებით

$$f(t) * \varphi(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არის ორჯერადი ინტეგრალი გარდაქმნილი (t, τ) სიბრტყის უსასრულო D სექტორზე (ნახ. 82). ეს ორჯე-

* ე. ბორელი (1871 — 1956) — ფრანგი მათემატიკოსი.

რადი ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია $\text{Rep} > s_0$ ნახევარსიბრტყეში, ამიტომ შეიძლება ინტეგრირების რიგის შეცვლა, გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau &\doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty \varphi(t-\tau) e^{-pt} dt^* \end{aligned}$$

თუ ამ ბოლო ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას გვიღებთ

$$\begin{aligned} f(t) * \varphi(t) &\doteq \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_0^\infty \varphi(u) e^{-p(\tau+u)} du = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pu} \varphi(u) du = F(p)\Phi(p). \end{aligned}$$

ამრიგად, (6.3) ტოლობა დამტკიცებულია.

(6.3) ფორმულას ბშირად იყენებენ მოცემული გამოსახულების მიხედვით შესაბამისი ორიგინალის პოვნაში, იმ შემთხვევაში, როცა შესაძლებელია გამოსახულება წარმოადგინოთ ისეთ თანამიმრავლებად, რომელთა ორიგინალი ცნობილია.

შ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $F(p) = \frac{p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$ გამოსახულების ორიგინალი

ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ვიცით

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+\omega^2}\right\} = \cos \omega t, \quad L^{-1}\left\{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right\} = \sin \omega t,$$

* აქ გამოყენებულია ე. წ. ლიბლეს ფორმულა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ $f(t, \tau)$ უწყვეტია სამკლბა $a < \tau < b$ არეში, მაშინ იღვლია აქვს

ტოლობას $\int_a^b dt \int_a^t f(t, \tau) d\tau = \int_a^b d\tau \int_a^b f(t, \tau) dt$, რომელიც მართებულია იგზეთვე ნა-

ბიშზე ნახევრები უსასრულო არის შემთხვევაშიც, თუ ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

ამიტომ გამოსახულებათა ნამრავლის თვისების (6.3) ფორმულის გამოყენებით გვეჩვენება

$$L^{-1}\left\{\frac{P\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{P}{p^2+\omega^2}\right\}=\sin\omega t+\cos\omega t=$$

$$=\int_0^t \sin\omega\tau \cos\omega(t-\tau)d\tau=\frac{t}{2}\sin\omega t.$$

გამოყენებაში ხშირად გვხვდება ამოცანა: $pF(p)\Phi(p)$ გამოსახულების მიხედვით ვიპოვოთ შესაბამისი ორიგინალი. ამასთან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი თეორემა (რომელიც წარმოადგენს ბორელის თეორემის შედეგს).

თეორემა 6.2. ვთქვათ, $f(t)\doteq F(p)$, $s>s_0'$ და $\varphi(t)\doteq \Phi(p)$, $s>s_0''$, ამასთან დავუშვათ, რომ $\varphi'(t)$ ორიგინალია, მაშინ იდეალი აქვს ტოლობას

$$f(t)\varphi(0^+)+\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau=f(t)\varphi(0^+)+\int_0^t \varphi'(\tau)f(t-\tau)d\tau\doteq$$

$$\doteq pF(p)\Phi(p), \quad \text{Rep}>\max(s_0', s_0''). \quad (6.4)$$

და მტკიცება. $pF(p)\Phi(p)$ ნამრავლი ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$pF(p)\Phi(p)=F(p)\varphi(0^+)+F(p)\{p\Phi(p)-\varphi(0^+)\}. \quad (6.5)$$

ორიგინალის წარმოებულის შესახებ თვისებისა (იხ. § 3-ის (3.16)) და ბორელის თეორემა 6.1-ის ძალით გვაქვს

$$\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau=\int_0^t \varphi'(\tau)f(t-\tau)d\tau\doteq F(p)\{p\Phi(p)-\varphi(0^+)\}, \quad (6.6)$$

ხოლო სიწრფივის თვისების გამოყენებით ვწერთ

$$f(t)\varphi(0^+)\doteq F(p)\varphi(0^+). \quad (6.7)$$

(6.6) და (6.7)-ს თუ ჩავსვამთ (6.5)-ში მივიღებთ დასამტკიცებელ (6.4) ფორმულას.

თუ $f^*(t)$ ორიგინალია, მაშინ (6.4) ფორმულის ანალოგიურად მიიღება

$$\varphi(t)f(0^+)+\int_0^t \varphi(\tau)f'(t-\tau)d\tau=\varphi(t)f(0^+)+\int_0^t f^*(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\doteq$$

$$\doteq pF(p)\Phi(p), \quad \text{Rep}>\max(s_0', s_0''). \quad (6.8)$$

(6.4) და (6.8) ფორმულებს დიუჰამელის* ფორმულები ეწოდება.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით

$$F(p)=\frac{1}{p(p+1)}$$

გამოსახულების შესაბამისი ორიგინალი.

ამოხსნა. ცხადია,

$$F(p)=p\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

ამასთან

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}=t=\varphi(t), \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}=e^{-t}=f(t)$$

$$\varphi'(t)=1, \quad \varphi(0^+)=0.$$

ამიტომ დიუჰამელის (6.4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+1)}\right\}=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t}.$$

შემდეგ პარაგრაფში მოვიყვანთ დიუჰამელის ფორმულების გამოყენებას დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაში.

§ 7. თვისება ორიგინალთა ნამრავლის შესახებ

ვთქვათ,

$$f(t)\doteq F(p), \quad \text{Rep}>s_0',$$

$$\varphi(t)\doteq \Phi(p), \quad \text{Rep}>s_0''.$$

$F(p)$ და $\Phi(p)$ გამოსახულებათა ნახევრი ეწოდება ინტეგრალს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z)\Phi(p-z)dz, \quad (7.1)$$

* დიუჰამელი (1797—1872) — ფრანგი მათემატიკოსი.

სადაც ინტეგრირება ხდება წრფეზე $\text{Re } z = s > s_0'$, ხოლო p ისეთი კომპლექსური ცვლადია, რომ $\text{Re } p > s_0' + s_0''$. პარტიკულ მტკიცდება, რომ (7.1) ნახვევი კომპლექტურია. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7.1 (ორიგინალთა გამრავლების შესახებ). თუ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \text{Re } p > s_0',$$

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p), \quad \text{Re } p > s_0'',$$

მაშინ $f(t)\varphi(t)$ წარმოადგენს ორიგინალს და

$$f(t)\varphi(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z)\Phi(p-z)dz, \quad (7.2)$$

სადაც $\text{Re } z = s > s_0'$ და $\text{Re } p > s_0' + s_0''$, ე. ი. ორიგინალთა ნამრავლს შეესაბამება გამოსახულებათა ნახვევი.

დამტკიცება. ცხადია, $f(t)\varphi(t)$ ორიგინალია, ამასთან

$$f(t)\varphi(t) \doteq \int_0^\infty f(t)\varphi(t)e^{-pt}dt. \quad (7.3)$$

თუ (7.3) ინტეგრალში $f(t)$ -ს შევცვლით მისი მნიშვნელობით მედიანას (4.1) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ ($\text{Re } p = s > s_0'$)

$$\begin{aligned} f(t)\varphi(t) &\doteq \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{zt} F(z) dz \right\} \varphi(t) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z) dz \int_0^\infty \varphi(t) e^{-(p-z)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(z)\Phi(p-z) dz. \end{aligned}$$

ამით (7.2) ფორმულის მართებულება დამტკიცებულია.

დამტკიცებლად მოვიყენეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7.2. ვთქვათ

$$f(t) \doteq F(p), \quad \text{Re } p > 0,$$

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p), \quad \text{Re } p > 0,$$

და არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_0^\infty f(t)\Phi(t)dt, \quad \int_0^\infty \varphi(t)F(t)dt$$

აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int_0^\infty f(t)\Phi(t)dt = \int_0^\infty \varphi(t)F(t)dt. \quad (7.4)$$

(7.4) ფორმულას პარსევალის ფორმულა ეწოდება.

მაგალითი. პარსევალის (7.4) ფორმულის გამოყენებით გამოვ-

თვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} dt$.

ამოხსნა. რადგანაც

$$\sin^2 t = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t),$$

ამიტომ

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{3 \sin t - \sin 3t}{t} dt.$$

ვთქვათ,

$$f(t) = 3 \sin t - \sin 3t, \quad \Phi(p) = \frac{1}{p}.$$

მაშინ

$$F(p) = \frac{3}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+9}, \quad \varphi(t) = 1.$$

პარსევალის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t} dt &= \frac{3}{4} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+9} \right) dt = \frac{3}{4} \arctg t \Big|_0^\infty - \\ &- \frac{1}{4} \arctg \frac{t}{3} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

§ 8. მუდმივკოეფიციენტებიანი წარმოშობის დიფერენციალური
განტოლების ამოხსნა ოპერაციული ალგებრის
მეთოდებით

განვიხილოთ მეორე რიგის არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტების
წარმოშობის დიფერენციალური განტოლება

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \quad a_0 \neq 0, \quad (8.1)$$

სადაც $f(t)$ ორიგინალია.

ვთქვათ, საძიებელია (8.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკ-
მაყოფილებს საწყის პირობებს (კოშის პირობები):

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $y''(t)$ და $f(t)$ ორიგინალია, მაშინ დამსმული
ამოცანა ამოიხსნება ოპერაციული ალგებრის მეთოდების გამოყენებით.
შარტლაც, ვთქვათ,

$$y(t) \doteq Y(p), \quad f(t) \doteq F(p)$$

ორიგინალის გაწარმოების თვისების გამოყენებით გვაქვს

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &\doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - C_0, \\ y''(t) &\doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - C_0 p - C_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

სიწრაფის თვისების გამოყენებით (8.1) განტოლებიდან (8.2) ტოლო-
ბების გათვალისწინებით $Y(p)$ -ს მიმართ მივიღებთ ოპერაციულ გან-
ტოლებას

$$a_0 p^2 Y(p) - a_0 C_0 p - a_0 C_1 + a_1 p Y(p) - a_1 C_0 + a_2 Y(p) = F(p).$$

აქედან

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) Y(p) = F(p) + C_0 (a_0 p + a_1) + C_1 a_0,$$

სადაც

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)} \quad (8.3)$$

აქ

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0 p^2 + a_1 p + a_2, \\ B(p) &= C_0 (a_0 p + a_1) + C_1 a_0. \end{aligned}$$

თუ საწყისი პირობები წესდებოდა, მაშინ (8.3) ტოლობა მიიღებს სა-
ხეს

$$Y(p) = \frac{F(p)}{A(p)}. \quad (8.4)$$

დამსმული ამოცანის ამოხსნისათვის, საჭიროა შევქცევს ფორმულის
გამოყენებით ეილერის ორიგინალი

$$y(t) = L^{-1} \{Y(p)\}.$$

ზემოთ მოყვანილი მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერი
რიგის მუდმივკოეფიციენტების წარმოშობის დიფერენციალური განტო-
ლების ამოხსნის დროს. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n -ური რიგის გან-
ტოლება

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t), \quad a_0 \neq 0. \quad (8.5)$$

ეილერის ამ განტოლების ამოხსნის, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყ-
ის პირობებს:

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}. \quad (8.6)$$

თუ $y(t) \doteq Y(t)$ და $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ ორიგინალის გაწარმოებისა და
ლაპლასის გარდაქმნის სიწრაფის თვისებების გამოყენებით (8.5) გან-
ტოლებიდან (8.7) პირობების გათვალისწინებით $Y(p)$ -ს მიმართ მივიღ-
ებთ ოპერაციულ განტოლებას

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) &= C_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + \\ &+ a_{n-2} p + a_{n-1}) + C_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p + \\ &+ a_{n-2}) + \dots + C_{n-1} a_0 + F(p), \end{aligned}$$

სადაც

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)},$$

სადაც

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

$$B(p) = C_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-2} p + a_{n-1}) + \dots + C_{n-1} a_0.$$

დამსმული ამოცანის ამოხსნისათვის

$$y(t) = L^{-1} \{Y(p)\}.$$

შენიშვნა. თუ დავუშვებთ, რომ საწყისი მნიშვნელობები $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ არ არის მოცემული, ისინი ნებისმიერი მუდმივებისა, მაშინ
აღნიშნული მეთოდით მივიღებთ (8.5) განტოლების ზოგად ამონახსნს.
მაგალითი 1. ეილერის

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{2t}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$F(p) = L\{2e^{2t}\} = \frac{2}{p-3}.$$

(8.4) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$Y(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3},$$

საიდანაც

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$F(p) = L\{t^2 e^{-2t}\} = \frac{3!}{(p+2)^4}.$$

შემდეგ (8.3) ტოლობის მიხედვით მივიღებთ

$$Y(p) = \frac{3}{(p+2)^4} + \frac{p+6}{(p+2)^3} = \frac{3!}{(p+2)^4} + \frac{4}{(p+2)^3} + \frac{1}{p+2},$$

აქედან

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{3!}{(p+2)^4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4}{(p+2)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} =$$

$$= \frac{3!}{5!} t^3 e^{-2t} + 4t e^{-2t} + e^{-2t} = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^3}{20}\right).$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$y' + y = \cos t$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დაემაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$F(p) = L\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

(8.4) ფორმულის ძალით გწერთ

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{(p-i)^2} - \frac{1}{(p+i)^2} \right],$$

საიდანაც

$$y(t) = \frac{1}{4i} \left[L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-i)^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+i)^2}\right\} \right] =$$

$$= \frac{1}{4i} (t e^{it} - t e^{-it}) = \frac{1}{2} t \sin t.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $y'' - 2y' + y = 4$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. გვაქვს

$$F(p) = L\{4\} = \frac{4}{p}.$$

(8.3) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$Y(p) = \frac{C_0 p(p-2) + C_1 p + 4}{p(p-1)^2} = \left[-\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1} \right] C_0 +$$

$$+ \frac{C_1}{(p-1)^2} + \frac{4}{p} + \frac{4}{(p-1)^2} - \frac{4}{p-1},$$

საიდანაც

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = C_0 (-t e^t + e^t) + C_1 t e^t + 4 + 4t e^t - 4 e^t, \quad t > 0.$$

ფი. კოშის ამოცანის ამოხსნა მუდმივკოეფიციენტების
წარმოშობის დიფერენციალური განტოლებისათვის დიფერენციალური
ფორმულის გამოყენებით

ეთქვით, საძიებელია

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \quad (a_0 \neq 0). \quad (9.1)$$

* ვიგულისხმებთ, რომ $f(t)$ ორიგინალია.

31. ს. თოფური, ვ. ხოვლია, 2. ვაბიძაშვილი, ნ. შაქარაშვილი

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ნულოვანი საწყისი პირობებით

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (9.2)$$

დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით დასმული ამოცანის ამონახსნი დაიყვანება შემდეგი ამოცანის ამონახსნად: ეიზენვოთ

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1. \quad (9.3)$$

განტოლებას ამონახსნი ნულოვანი საწყისი პირობებით

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0. \quad (9.4)$$

(9.3) განტოლებას ეწოდება დამხმარე განტოლება.

გარდა, ეთქვას, $z(t) \doteq Z(p)$, მაშინ ორიგინალის გაწარმოების თვისების გამოყენებით და (9.4) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} z'(t) &\doteq pZ(p), \\ z''(t) &\doteq p^2 Z(p), \\ &\vdots \\ z^{(n)}(t) &\doteq p^n Z(p). \end{aligned} \quad (9.5)$$

რადგანაც $1 \doteq \frac{1}{p}$ ამიტომ (9.3) განტოლებიდან (9.5) ტოლობების გამოყენებით $Z(p)$ -ს მიმართ მივიღებთ ოპერატორულ განტოლებას

$$a_0 Z(p) p^n + a_1 Z(p) p^{n-1} + \dots + a_{n-1} Z(p) p + a_n Z(p) = \frac{1}{p},$$

საიდანაც

$$Z(p) \doteq \frac{1}{pA(p)}. \quad (9.6)$$

აქ

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

ეთქვას, $y(t)$ არის (9.1)–(9.2) ამოცანის ამონახსნი, ხოლო $Y(p)$ მისი გამოსახულება, თუ $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ (9.1) განტოლების ოპერატორული განტოლება იქნება

$$a_0 Y(p) p^n + a_1 Y(p) p^{n-1} + \dots + a_{n-1} Y(p) p + a_n Y(p) = F(p),$$

აქედან

$$Y(p) \doteq \frac{F(p)}{A(p)}. \quad (9.7)$$

(9.6) და (9.7) ტოლობებიდან მიიღება

$$Y(p) \doteq pF(p) Z(p).$$

დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით ვწერთ

$$y(t) \doteq Y(p) = pF(p) Z(p) \doteq \dot{f}(t) z(0) + \int_0^t \dot{f}(\tau) z(t-\tau) d\tau.$$

შეგვამ $z(0) = 0$, ამიტომ

$$y(t) = \int_0^t \dot{f}(\tau) z'(t-\tau) d\tau.$$

ან

$$y(t) = z(t) f(0) + \int_0^t z(t-\tau) f'(\tau) d\tau.$$

ნახევრის სიმეტრიულობის თვისების ძალით $y(t)$ ამონახსნი შეიძლება ჩავწეროთ აგრეთვე ასე:

$$y(t) = \int_0^t z'(\tau) f(t-\tau) d\tau,$$

ან

$$y(t) = z(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) z(t-\tau) d\tau.$$

შე ნ ი შ ვ ნ ა. 1) $z(t)$ -ს საპოვნელად არ არის საჭირო ვიცოდეთ $f(t)$ ფუნქციის გამოსახულება $F(p)$. 2) დიუჰამელის ფორმულის გამოყენება ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როცა ამონახსნელია ნულოვანი საწყისი პირობებით რამდენიმე დიფერენციალური განტოლება, რომლებიც განსჯადებულია მხოლოდ მარჯვენა მხარეებით. ასეთ შემთხვევაში დიუჰამელის ფორმულა საგონიერად ამცირებს გამოთვლითი სამუშაოს მოცულობას.

შ ა კ ა ლ ი თ ი 1. დიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ

$$y'' - 2y' = e^t$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

ამოხსნა. შევადგინოთ დამხმარე განტოლება

$$z'' - 2z' = 1, \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

ამ განტოლებისათვის (9.6) ფორმულის მიხედვით

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 - 2p)} = \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{4p} + \frac{1}{4(p-2)},$$

საიდანაც

$$z(t) = L^{-1}(Z(p)) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t},$$

ხოლო

$$z'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

(9.6) ფორმულის გამოყენებით დასმული ამოცანის ამონახსნია

$$y(t) = \int_0^t \tau^2 e^\tau \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)} \right] d\tau = 1 + e^{2t} - 2e^t - te^t, \quad t > 0.$$

§ 10. პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წარმოადგენილი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

უნივერსალურ პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წარმოადგენილი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = f_1(t), \\ y_2' + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = f_2(t), \\ \dots \\ y_n' + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = f_n(t), \end{cases} \quad (10.1)$$

სადაც a_{km} ($k, m = 1, 2, \dots, n$) მუდმივი რიცხვებია, ხოლო $f_k(t)$ ნამდვილი ცვლადის მოცემული ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ ორიგინალს. ეთქვას, საძიებელია (10.1) სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს:

$$y_k(0) = c_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (10.2)$$

ეთქვას $y_k(t) \doteq Y_k(p)$, $f_k(t) \doteq F_k(p)$ ($k=1, 2, \dots, n$),

შეშინ ორიგინალის გაწარმოებისა და ლაპლასის გარდაქმნის სიწრფივის თვისებების გამოყენებით (10.1) სისტემიდან (10.2) პირობების გათვალისწინებით $Y_k(p)$ -ს მიმართ შევიღებთ ოპერატორულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} (a_{11} + p)Y_1 + a_{12}Y_2 + \dots + a_{1n}Y_n = C_1 + F_1, \\ a_{21}Y_1 + (a_{22} + p)Y_2 + \dots + a_{2n}Y_n = C_2 + F_2, \\ \dots \\ a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \dots + (a_{nn} + p)Y_n = C_n + F_n. \end{cases} \quad (10.3)$$

გვხსნით (10.3) სისტემას, როგორც ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, $Y_k(p)$ -ს ($k=1, 2, \dots, n$), მიმართ, შემდეგ შევცვლით ფორმულის გამოყენებით ვბოლოვით დასმული ამოცანის ამონახსნს $y_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$):

$$y_k(t) = L^{-1}\{Y_k(p)\} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}$$

დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$x(0) = y(0) = 0.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\begin{aligned} F_1(p) &= L\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}, \\ F_2(p) &= L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

ეთქვას, $x(t) \doteq X(p)$ და $y(t) \doteq Y(p)$. ოპერატორულ (10.3) განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} (-2 + p)X(p) - 4Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}, \\ X(p) + (2 + p)Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{cases} \quad (10.4)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -2+p & -4 \\ 1 & 2+p \end{vmatrix} = p^2.$$

კრიტიკის ფორმულების გამოყენებით (10.4) სისტემიდან მივიღებთ

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(p^2 + 1)}, \quad Y(p) = \frac{-1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

აღვილია წვედება, რომ

$$X(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1},$$

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2 + 1}.$$

აქედან გვიქნება

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t,$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = -2t - 2 \sin t.$$

§ 11. წარმოადგენილი განტოლება ცვლადი კოორდინატებით

განვიხილოთ ცვლადი კოორდინატებით წარმოდგენილი განტოლება

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \quad (11.1)$$

სადაც $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ მრავალწევრებია t ცვლადის მიმართ, რომელთა რიგი $< n$, ხოლო $f(t)$ თრეგინალია. დავუშვათ, რომ (11.1) განტოლებას აქვს ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \quad (11.2)$$

ქოქვათ, $y(t) \equiv Y(p)$. თრეგინალისა და გამოსახულების გაწარმოებათა თვისების გამოყენებით თუ დავითვალისწინებთ (11.2) პირობებს, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &\equiv Y(p), & ty(t) &\equiv -Y'(p), & t^2 y(t) &\equiv Y''(p), \dots \\ y'(t) &\equiv pY(p) - y_0, & ty'(t) &\equiv -\{pY(p)\}', & t^2 y'(t) &\equiv \{pY(p)\}'', \dots \\ y''(t) &\equiv p^2 Y(p) - y_0 p - y_1, & ty''(t) &\equiv -\{p^2 Y(p)\} + y_0, & t^2 y''(t) &\equiv \{p^2 Y(p)\}'', \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

თუ (11.1) განტოლების ორივე მხარეზე გამოვიყენებთ ლაპლასის გარდაქმნას, მაშინ (11.3) ტოლობების ძალით $Y(p)$ გამოსახულების მიმართ მივიღებთ ცვლადი კოორდინატებით m -ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც ზოგ შემთხვევაში უფრო მარტივია, ვიდრე მოცემული (11.1) განტოლება.

მაგალითი. ვიპოვოთ $ty'' + y' + y = 0$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს საწყის პირობებს

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

ამოხსნა. ვოქვათ, $y(t) \equiv Y(p)$. (11.3) ტოლობების ძალით ვწერთ:

$$y'(t) \equiv pY(p) - 1;$$

$$y''(t) \equiv p^2 Y(p) - p + 1;$$

$$ty''(t) \equiv \{p^2 Y(p) - p + 1\}' = -p^2 Y'(p) - 2pY(p) + 1.$$

აქედან გამომდინარე, ოპერატორული განტოლება იქნება

$$Y'(p) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)Y(p) = 0.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა განცალკევებას, მივიღებთ,

$$\frac{dY(p)}{Y(p)} = \left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)dp,$$

საიდანაც

$$\ln Y(p) = -\ln p - \frac{1}{p} + \ln C,$$

ან

$$Y(p) = C \frac{1}{p} e^{-1/p}.$$

აქედან (იხილეთ § 4-ის მაგალითი 4)

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = C L^{-1}\left\{\frac{1}{p} e^{-1/p}\right\} = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} t^k.$$

საწყისი პირობების გამოყენებით ფუნქცია

$$1 = y(0) = C.$$

ამრიგად

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} t^k.$$

მეცხეადაე თავი

ფუნქციის საწყისი პირობების ტრიგონომეტრიული და ალგებრული მრავალწევრებით

მერვე თავში ნაჩვენებია იყო, რომ 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი ფუნქცია იშლება თანაბრად კრებად ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრთა მწკრივად (იხ. თეორემა 14.2) ხოლო $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია კი იშლება, ამ სეგმენტზე თანაბრად კრებად ალგებრულ მრავალწევრთა მწკრივად (იხ. თეორემა 14.3). ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $n_0(\varepsilon)$, რომ

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \text{ როცა } n > n_0(\varepsilon).$$

სადაც $P_n(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მწკრივის n -ური კერძო წევრი.

მაგრამ პრაქტიკულ გამოყენებადობის მნიშვნელოვანია აიგოს მრავალწევრთა ისეთი მიმდევრობა, რომელიც რაც შეიძლება „სწრაფად“ იკრიბება მოცემულ ფუნქციისაკენ. ე. ი. ამოცანა შეიძლება ასე დაიყოს: მიხედვით რა სიზუსტის შეიძლება მივაღწიოთ, თუ მიხედვით მრავალწევრთა რიგი წინასწარ შეზღუდულია, დამოკიდებულია მრავალწევრებით ფუნქციის საუკეთესო მიხედვით ამოცანა, რომელიც ცუთქნის პ. ლ. ჩებიშევის*.

§ 1. საწყისი პირობების ალგებრული მრავალწევრი

1. საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრის ცნება. აღვნიშნოთ H_n -ით იმ ალგებრულ მრავალწევრთა (ნამდვილი კოეფიციენტებიანი) სიმრავლე, რომელთა რიგი არ აღემატება n -ს. ცხადია, ალგებრული აქვს ჩართვას

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$$

* პ. ლ. ჩებიშევი (1821 — 1894) — რუსი მათემატიკოსი.

ვთქვათ, $f(x) \in C[a, b]$ და $P(x) \in H_n$. განვიხილოთ გამოსახულება

$$\Delta(P) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.$$

$\Delta(P)$ რიცხვს ეწოდება $P(x)$ მრავალწევრის გადახრა $f(x)$ ფუნქციისაკენ. $\Delta(P)$ არაუარყოფითია, ამიტომ არსებობს რიცხვთა ამ სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი, აღვნიშნოთ ის $E_n(f)$ -ით:

$$E_n(f) = \inf_{P \in H_n} \{\Delta(P)\} = \inf_{P \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.$$

$E_n(f)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიხედვით $[a, b]$ სეგმენტზე იმ ალგებრული მრავალწევრებით, რომელთა რიგი არ აღემატება n -ს.

ალგებრული მრავალწევრთა, რომ

$$E_0 \geq E_1 \geq E_2 \geq \dots$$

აქედან და ვაიერშტრასის თეორემაზე გამოვიყენებოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0.$$

$t_n(x) \in H_n$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრი, თუ

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - t_n(x)|.$$

ზენდერევი, ისმის ამოცანა, არსებობს თუ არა საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრი და თუ არსებობს, როგორცაა მათი სიმრავლე.

ამ კითხვას პასუხს გვაძლევს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1 (ზენდერი). ყოველი $f(x) \in C[a, b]$ ფუნქციისათვის H_n სიმრავლეში არსებობს საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრი.

თეორემა 1.2 (ჩებიშევი). H_n სიმრავლეში არსებობს ერთადერთი საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრი.

საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრის ერთი შესანიშნავი თვისება მოცემულია ჩებიშევის შემდეგ თეორემაში:

თეორემა 1.3 (ჩებიშევი). იმისათვის რომ $P_n(x) \in H_n$ მრავალწევრი იყოს $f(x) \in C[a, b]$ ფუნქციის საუკეთესო მიხედვით მრავალწევრი ($f \in H_n$), აუცილებელი და საკმარისი, არსებობდეს $n+2$ წერტილი $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, ისეთი, რომ

$$1) |f(x_i) - P_n(x_i)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad (i=1, 2, \dots, n+2),$$

2) რიცხვები $f(x_i) - P_n(x_i)$ ნიშნის იცვლის x_i -დან x_{i+1} -ზე გადასვლისას, ე. ი.

$$[f(x_i) - P_n(x_i)][f(x_{i+1}) - P_n(x_{i+1})] < 0.$$

2. ფუნქციათა საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრის მაგალითები. ჩებიშევის მრავალწევრი. წინა პუნქტში მოყვანილი ბორელისა და ჩებიშევის თეორემები აღგენენ ყოველ უწყვეტი ფუნქციისათვის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრის არსებობას და ერთადერთობას. ეს თეორემები არ ჯდება საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრის აგების რაიმე სერესს. აღნიშნული წარმოადგენს რთულ ამოცანას და დღეისათვის იგი ზოგად შემთხვევაში ამოხსნილი არ არის. განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანები საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრების აგების შესახებ.

ამოცანა 1. ვთქვათ, $f(x) \in C[a, b]$, ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მუდმივი (ნულგანი რიგის მრავალწევრი).

ამოხსნა. დავუშვათ, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$. დავამტკიცოთ,

რომ რიცხვი $p = \frac{M+m}{2}$ არის $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების

მუდმივი $[a, b]$ სეგმენტზე. მართლაც, თუ $M = f(x_1)$, $m = f(x_2)$, მაშინ

$$P - f(x_1) = -\frac{M-m}{2}, \quad P - f(x_2) = \frac{M-m}{2}.$$

რადგან

$$\Delta(P) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P| = \frac{M-m}{2}.$$

ამიტომ x_1 და x_2 წერტილები აკმაყოფილებენ ჩებიშევის თეორემა 1.3-ის პირობებს. ამრიგად, რიცხვი $\frac{M+m}{2}$ არის საუკეთესო მიახლოების

მუდმივი და $E_0(f) = \frac{M-m}{2}$ საუკეთესო მიახლოება.

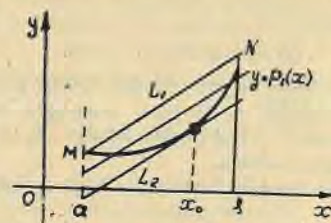
ამოცანა 2. ვთქვათ, $f(x)$ ორჯერ უწყვეტად წარმოებული $[a, b]$ სეგმენტში და $f''(x)$ ნიშნის ინარჩუნებს. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი, რომლის რიგი არ აღემატება ერთს, ე. ი. ვკუთვნის H_1 კლასს.

490

ამოხსნა. ზოგადობის შეუზღუდავად შევიძლება ვივარაუდოთ, რომ

$$f'(x) > 0. \quad (1.1)$$

ანალიზური მტკიცების ვარგულ ვახვეთ გეომეტრიულად (ნახ. 83) თუ როგორ შეიძლება ავიკეთო საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი $f(x)$ ფუნქციის გრადიენტის $M(a, f(a))$ და $N(b, f(b))$ წერტილები შევა-



ნახ. 83

ერთი L_1 მონაკვეთით, ამ მონაკვეთის განტოლება იყოს $y = l_1(x)$. (1.1) პირობის ძალით $[a, b]$ შუალედში არსებობს ერთადერთი წერტილი x_0 ისეთი, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის გრადიენტის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გადებული L_2 მხები პარალელური იქნება L_1 -ის. L_1 -ის განტოლება იყოს $y = l_2(x)$ (ცხადია, L_2 -ის ხარისხი არ აღემატება ერთს). (1.1) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$l_2(x) \leq f(x) \leq l_1(x).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მრავალწევრი

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(l_1(x) + l_2(x)),$$

რომლის რიგი არ აღემატება ერთს, არის $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_1(x)| &= f(a) - P_1(a) = f(b) - P_1(b) = \\ &= -[f(x_0) - P_1(x_0)]. \end{aligned}$$

ამრიგად, a , x_0 და b წერტილები აკმაყოფილებენ ჩებიშევის თეორემა 1.3-ის პირობებს.

ამოცანა 3 (ჩებიშევის მრავალწევრი). H_{n-1} კლასში ვიპოვოთ $f(x)=x^n$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი $[-1, 1]$ სეგმენტზე.

ამოცანა 4. თავდაპირველად განვიხილოთ მრავალწევრი

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1.$$

მრავალწევრს

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1,$$

ჩებიშევის მრავალწევრი ეწოდება, მას აქვს შემდეგი თვისებები.

1. $T_n(x)$ წარმოადგენს n -ური რიგის მრავალწევრს, რომლის x^n -ის კოეფიციენტი უდრის 2^{n-1} , ლუწი (კენტი) n -სათვის $T_n(x)$ შეიცავს x -ის მხოლოდ ლუწ (კენტი) ხარისხებს.

მათლად, გამსაზღვრით $T_0(x)=1$ და $T_1(x)=x$. შემდეგი ტოლობიდან

$$\cos(n+2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$$

გამომდინარეობს, რომ $(\theta = \arccos x)$

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x). \quad (1.2)$$

(1.2) ტოლობა საშუალებას გვაძლევს ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ, რომ $T_n(x)$ არის n -ური რიგის მრავალწევრი, რომლის x^n -ის კოეფიციენტი 2^{n-1} ($n \geq 1$). გარდა ამისა, ცხადია, ლუწი (კენტი) n -სათვის $T_n(x)$ შეიცავს x -ის მხოლოდ ლუწ (კენტი) ხარისხებს.

2. $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1$, ამასთან $T_n(x_m) = (-1)^m$, სადა

$$x_m = \cos \frac{m\pi}{n}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

მათლად $T_n(x)$ -ის განსაზღვრიდან ვეაქვს

$$T_n(x_m) = \cos m\pi = (-1)^m.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $Q(x) = x^n - \tilde{T}_n(x)$ მრავალწევრი, რომელიც ცხადია, ეკუთვნის H_{n-1} კლასს, საძებნი მრავალწევრია.

ამასათვის განვიხილოთ წერტილები

$$x_k = \cos \frac{n-k+1}{n} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n+1. \quad (1.3)$$

ცხადია, რომ

$$-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = 1.$$

და

$$\tilde{T}_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n-k+1)\pi = \frac{(-1)^{n-k+1}}{2^{n-1}}. \quad (1.4)$$

ვაჩვენოთ, რომ $Q(x)$ მრავალწევრი აკმაყოფილებს ჩებიშევის თეორემა 1.3-ის პირობებს $n+1$ რაოდენობის (1.3) წერტილებში. მართლაც

$$\begin{aligned} |x_k^n - Q(x_k)| &= |\tilde{T}_n(x_k)| = \frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \\ &= \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n - Q(x)|. \end{aligned}$$

რაც შეეხება ჩებიშევის თეორემა 1.3-ის მეორე პირობას, მისი მართებულობა გამომდინარეობს (1.4) ტოლობიდან.

შედეგად $[-1; 1]$ სეგმენტზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$E_{n-1}(x^n) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

შენიშვნა 1. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ n -ური რიგის იმ მრავალწევრთა შორის, რომლის უმაღლესი ხარისხის კოეფიციენტი ერთია, $\tilde{T}_n(x)$ მრავალწევრი $[-1; 1]$ სეგმენტზე არის 0 -ის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი.

შენიშვნა 2. $T_n(x)$ მრავალწევრს $[-1; 1]$ ინტერვალში აქვს n ნამდვილი ფესვი, რომელიც გამოითლება ფორმულით

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

მათლად

$$T_n(x_k) = \cos(n \arccos x_k) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0.$$

თუ $[-1; 1]$ სეგმენტზე ინტერპოლაციის კვანძებად ავიღებთ ჩებიშევის $T_{n+1}(x)$ მრავალწევრის ფესვებს, ე. ი. წერტილებს

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

მაშინ მტკიცდება, რომ ეს კვანძები წარმოადგენენ ობტიმალურს საინტერპოლაციო მრავალწევრის ცვლილების შეფასებისათვის $[-1; 1]$ სეგმენტზე. ე. ი. ეს კვანძები საუკეთესოა.

§ 2. საუკეთესო მიახლოების ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი

აღნიშნოთ $\tilde{H}_n$ -ით

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ტრიგონომეტრიულ მრავალწევრთა სიმრავლე რომელთა რიგი არ აღემატება n -ს. ვთქვათ $f(x) \in C_{2\pi}^*$. ამ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება $E_n(f)$, ტრიგონომეტრიული მრავალწევრებით, რომელთა რიგი არ აღემატება n -ს, განისაზღვრება ტოლობით

$$E_n(f) = \inf_{T(x) \in \tilde{H}_n} \{ \max_{x \in R} |f(x) - T(x)| \}.$$

$T_n(x) \in \tilde{H}_n$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი, თუ

$$E_n(f) = \max_{x \in R} |f(x) - T_n(x)|.$$

შარტებულის შემდეგი თეორემები

თეორემა 2.1. ყოველი $f(x) \in C_{2\pi}$ ფუნქციისათვის $\tilde{H}_n$ კლასში არსებობს ერთადერთი საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი.

თეორემა 2.2. იმისათვის, რომ $T_n(x) \in \tilde{H}_n$ მრავალწევრი იყოს $f(x) \in C_{2\pi}$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი ($f(x) \notin \tilde{H}_n$), აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს $2n+2$ წერტილი $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+2} < 2\pi$, ისეთი, რომ

$$1) |f(x_i) - T_n(x_i)| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - T_n(x)| \quad (i=1, 2, \dots, 2n+2).$$

* $C_{2\pi}$ არის 2π პერიოდის მქონე უწყვეტ ფუნქციათა კლასი.

2) რიცხვები $f(x_i) - T_n(x_i)$ ნიშნის იცვლის x_i -დან x_{i+1} -ზე გადავლილას, ე. ი.

$$[f(x_i) - T_n(x_i)] [f(x_{i+1}) - T_n(x_{i+1})] < 0.$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანები საუკეთესო მიახლოების ტრიგონომეტრიული მრავალწევრის აგებაზე.

ამოცანა. ვთქვათ $m > n$ და $f(x) = A \cos mx + B \sin mx$. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი $\tilde{H}_n$ კლასში.

ამოცანა. (A, B) წერტილის პოლარული კოორდინატები აღვნიშნოთ R და ω -თი, მაშინ $A = R \cos \omega$ და $B = R \sin \omega$. თუ A და B -ს ამ მნიშვნელობებს შევცვლით $f(x)$ -ის გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$f(x) = R \cos(mx - \omega) = R \cos m(x - x_0),$$

სადაც $x_0 = \frac{\omega}{m}$.

განვიხილოთ წერტილები

$$x_0, x_0 + \frac{\pi}{m}, x_0 + \frac{2\pi}{m}, \dots, x_0 + \frac{(2n+1)\pi}{m}.$$

აღვილია შემოწმება, რომ ეს წერტილები $0 = f(x)$ სხვაობისათვის აკმაყოფილებენ თეორემა 2.2-ის პირობებს. რადგანაც ყველა ეს წერტილი ეკუთვნის $[x_0, x_0 + 2\pi]$ შუალედს, ამიტომ იმავე თეორემა 1.2-ის ძალით 0 არის მოცემული ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი, ხოლო $f(x)$ -ის საუკეთესო მიახლოება იქნება $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი $\tilde{H}_n$ კლასში იქნება

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

მრავალწევრი, ამასთან

$$E_n(f) = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}.$$

§ 2. უწინდის უწყვეტობის მოდული

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $\langle a, b \rangle$ შუალედზე (ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი $[a, b]$, ინტერვალი $[a, b]$, რიცხვითი ღერძი $] - \infty; \infty [$, ნახევრად ღია $[a, b]$ სეგმენტი და სხვა). ავიღოთ რაიმე $\delta > 0$ რიცხვი და განვიხილოთ ფუნქცია

$$\omega(\delta) = \omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \langle a, b \rangle.$$

$\omega(\delta)$ -ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული მიითვებულ შუალედში.

უწყვეტობის მოდულს აქვს შემდეგი თვისებები:

I $\omega(\delta)$ ფუნქცია არაუკლებდია. ე. ი. თუ $\delta_2 > \delta_1 > 0$, მაშინ $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$. ამ თვისებიდან გამომდინარეობს ცალმხრივი ზღვრის არსებობა:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta).$$

II. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს თანაბრად უწყვეტი $\langle a, b \rangle$ შუალედზე აუცილებელია და საკმარისი

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta) = 0.$$

III. თუ $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $0 < y - x < n\delta$. ვიყუთოთ $[x, y]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$x = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = y.$$

გვაქვს

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

ჩაღვან $0 < x_k - x_{k-1} = \frac{y-x}{n} \leq \delta$, ამიტომ $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \omega(\delta)$.

გამომდინარე აქედან

$$|f(y) - f(x)| \leq n\omega(\delta), \quad \omega(n\delta) = \sup_{|y-x| \leq n\delta} |f(y) - f(x)| \leq n\omega(\delta).$$

IV. ნებისმიერი $\lambda > 0$ რიცხვისათვის

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta).$$

დამტკიცება. ვთქვათ n არის λ -ს მთელი ნაწილი, ე. ი. $n < \lambda < n+1$. მაშინ

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega((n+1)\delta) \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta).$$

განსაკუთრება. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია $\langle a, b \rangle$ შუალედში აკმაყოფილებს ლიფშიცის* პირობას $\alpha > 0$ მარვენებლით და M კონფიციენტით, თუ

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha, \quad x, y \in \langle a, b \rangle,$$

და ამ გარემოებას სიმბოლურად ასე ჩაეწეროთ

$$f(x) \in \text{Lip}_M \alpha.$$

აღვილია შემჩნევა, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის* პირობას რაიმე $\alpha > 0$ მარვენებლით, მაშინ ის თანაბრად უწყვეტია.

V. თუ $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$ და $\alpha > 1$, მაშინ $f(x) = \text{const}$. მართლაც, ასეთი ფუნქციებისათვის

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M|y - x|^{\alpha-1}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f'(x) \equiv 0$, საიდანაც გვაქვს $f(x) = \text{const}$.

VI. თუ $[a, b]$ -ზე $f(x)$ ფუნქცია წარმოდგება და $|f'(x)| \leq M$, მაშინ $f(x) \in \text{Lip}_M 1$.

ეს თვისება გამომდინარეობს ლაგრანჟის ფორმულიდან

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \quad (x < z < y).$$

VII. თუ $0 < \alpha < \beta$ და $\langle a, b \rangle$ სასრულო შუალედი, მაშინ

$$\text{Lip } \alpha \supset \text{Lip } \beta. \quad \text{ე. ი. ყველაზე „კარგი“ კლასია Lip 1.}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) \in \text{Lip}_M \beta$. თუ x და y ისეთია, რომ $|x - y| < 1$, მაშინ

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\beta \leq M|y - x|^\alpha.$$

თუ $|x - y| > 1$, მაშინ

$$|f(y) - f(x)| \leq (|f(x)| + |f(y)|) \leq 2k|x - y|^\alpha,$$

სადაც $k = \sup |f(x)|$.

* ე. მ. ლიფშიცის (1915 — 1985) — საბჭოთა დიზოკოსი.

32. ს. თოფურია, ე. ხოჭოლაძე, მ. გაბიაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

ამრიგად ნებისმიერი x და y -სათვის გვაქვს

$$|f(y) - f(x)| \leq A|x - y|^{\alpha},$$

სადაც $A = \max(M, 2k)$.

VIII. $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha \iff \omega(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$.

და მტკიცება. თუ $\omega(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$, მაშინ ნებისმიერი x და y -თვის

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega(|y - x|) \leq M|y - x|^{\alpha}.$$

შებრუნებით, თუ $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$, მაშინ როცა $|y - x| < \delta$ გვაქვს

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^{\alpha} \leq M\delta^{\alpha}.$$

ჩაადგან ეს უტოლობა მართებულია ნებისმიერი ისეთი x და y -სთვის, რომელთათვისაც $|y - x| < \delta$, ამიტომ $\omega(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$.

§ 4. ფუნქციის სრულყოფილი თვისებების გავლენა

ამ ფუნქციის კრიტერიუმები და აღმავალი მრავალწევრებით მიახლოების რიგზე

ამ პარაგრაფში დამტკიცებლად მოვიყვანთ ჯეკსონის* თეორემებს, რომლებიც გვინებენ თუ რა გავლენას ახდენს $f(x)$ ფუნქციის სტრუქტურული თვისებების გაუმჯობესება ამ ფუნქციის საუკეთესო $E_n(f)$ მიახლოების კლების რიგზე.

თეორემა 4.1. თუ $f(x)$ არის 2π პერიოდის მქონე უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

$$E_n(f) \leq 6\omega\left(f; \frac{1}{n+2}\right).$$

შედეგი 1. თუ $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$, ე. ი. $\omega(\delta) \leq M\delta^{\alpha}$, მაშინ

$$E_n(f) \leq \frac{6M}{(n+2)^{\alpha}}. \quad (4.1)$$

შედეგი 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებულია და $|f'(x)| \leq M$, მაშინ

$$f(x) \in \text{Lip}_M 1 \quad \text{და} \quad E_n(f) \leq \frac{6M}{n+2}.$$

თეორემა 4.2. თუ 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია k -ჯერ წარმოებულია და $f^{(k)}(x)$ უწყვეტია, მაშინ

$$E_n(f) \leq \frac{6^{k+1}\omega\left(f^{(k)}; \frac{1}{n+2}\right)}{(n+2)^k}.$$

თეორემა 4.3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-1, 1]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი ილვებრელი მრავალწევრით საუკეთესო მიახლოებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$E_n(f) \leq 6\omega\left(f; \frac{1}{n+2}\right).$$

თეორემა 4.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია $[-1, 1]$ სეგმენტზე k -ჯერ წარმოებულია და $f^{(k)}(x)$ უწყვეტია, მაშინ

$$E_n(f) \leq \frac{6^{k+1}\omega\left(f^{(k)}; \frac{1}{n+2-k}\right)}{(n+2)(n+1)\dots(n+3-k)}, \quad k \leq n+2.$$

§ 5. ფუნქციის დიფერენციალური თვისებების დახასიათება

ამ ფუნქციის საკათხოს მიახლოების ეფექტურობის საზომად

ჯეკსონის თეორემით დადგენილია უტოლობა (4.1), თუ $f(x) \in \text{Lip}_M \alpha$. პუნდეროვით ისმება ამოცანა:

საბოლოოა თუ არა ეს შეფასება? უფრო ჩქარა, ხომ არ მიისწრაფვის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ვიდრე (4.1) შეფასება გვაძლევს ამას?

ამ პარაგრაფში დამტკიცებლად მოვიყვანთ ბერნშტეინის* თეორემებს საიდანაც გამომდინარეობს ჯეკსონის თეორემებში მოყვანილი შეფასებების საბოლოობა.

თეორემა 5.1. თუ $f(x) \in C_{2\pi}^{\alpha}$ და

$$E_n(f) \leq \frac{A}{n^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

მაშინ $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

* ს. ნ. ბერნშტეინი (1880—1968) — საბჭოთა მათემატიკოსი.

თეორემა 5.2. თუ $f(x)$ არის 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია და

$$E_n(f) \leq \frac{A}{n^{k+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია k -ჯერ წარმოებალია და $f^{(k)}(x) \in \text{Lip } \alpha$.

თეორემა 4.2 და 5.2-დან როგორც შედეგი მიიღება

თეორემა 5.3. იმისათვის, რომ 2π პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია იყოს k -ჯერ წარმოებალი და $f^{(k)}(x) \in \text{Lip } \alpha$, აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$E_n(f) \leq \frac{A}{n^{k+\alpha}}, \quad n \in N, \quad 0 < \alpha < 1.$$

თეორემა 5.4. თუ $f(x) \in C[a, b]$ და

$$E_n(f) < \frac{A}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

მაშინ $[a', b']$ ($a < a' < b' < b$) სეგმენტზე $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

თეორემა 5.5. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს

$$E_n(f) \leq \frac{A}{n^{k+\alpha}}, \quad k, n \in N, \quad 0 < \alpha < 1,$$

მაშინ $[a', b']$ ($a < a' < b' < b$) სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია k -ჯერ წარმოებალია და $f^{(k)}(x) \in \text{Lip } \alpha$.

ამრიგად, ფუნქციის მრავალწევრებით საუკეთესო მიახლოების საფუძველზე ამოწურავად შეიძლება დაახასიათდეს ამ ფუნქციის დიფერენციალური თვისებები.

პრობლემათა კრებული

§1. რიგვარი ინტეგრალი

გამოთვალეთ განმეორებითი ინტეგრალი (№ №1.1—1.4):

$$1.1. \quad 1) \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy; \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2-y) dy;$$

$$3) \int_1^2 dx \int_{-1}^0 x^2 y dy; \quad 4) \int_0^{\pi/2} dx \int_{-1}^2 y \sin x dy.$$

$$1.2. \quad 1) \int_1^2 dy \int_0^1 e^{x+y} dx; \quad 2) \int_0^3 dy \int_0^1 \frac{y^2}{1+x^2} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/3} dy \int_0^1 \frac{y}{\cos^2 xy} dx; \quad 4) \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{x}{y^2} e^{x/y} dy,$$

$$1.3. \quad 1) \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy; \quad 2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} \frac{xdy}{x^2+y^2};$$

$$3) \int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} x dx; \quad 4) \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} e^y dy.$$

$$1.4. \quad 1) \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2 dy}{y^2}; \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy;$$

$$3) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr; \quad 4) \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} r^2 \sin^2 \varphi dr;$$

$$5) \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \sin \varphi dr;$$

$$6) \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^a r dr.$$

1.5. სპოლორდინატო სიბრტყეზე ვამოსახეთ განმეორებითი ინტეგრალის ინტეგრების აბე

$$1) \int_{-2}^1 dx \int_{-1}^3 f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx;$$

$$3) \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy;$$

$$4) \int_0^{\pi} dx \int_{-\sqrt{\pi x-x^2}}^{\sin x} f(x, y) dy;$$

$$5) \int_1^3 dx \int_{\ln x}^{2x} f(x, y) dy;$$

$$6) \int_0^{\pi/4} dy \int_{\arcsin y}^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

შეცვალეთ ინტეგრების რიგი (№№1.6—1.10):

$$1.6. 1) \int_0^2 dx \int_{-2}^4 f(x, y) dy;$$

$$2) \int_{-3}^1 dy \int_0^4 f(x, y) dx;$$

$$3) \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy; (a > 0);$$

$$4) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx.$$

$$1.7. 1) \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx;$$

$$3) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$4) \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

$$1.8. 1) \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_0^1 dy \int_{0-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx;$$

$$4) \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{\arcsin y}^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

$$1.9. 1) \int_0^2 dx \int_{x-3}^{3-x} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx;$$

$$4) \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) dx.$$

$$1.10. 1) \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy;$$

$$2) \int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx;$$

$$4) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) dx.$$

ვამოსახეთ $\iint_D f(x, y) dx dy$ ინტეგრალი თარივე განმეორებითი ინტეგრალის საშუალებით, თუ (№№ 1.11—1.14):

1.11. D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით:

- 1) $x=1, x=4, y=-2, y=1$;
- 2) $x=0, y=0, x+y=1$;
- 3) $x=0, y=1, y=x$;
- 4) $y=3x, y=-\frac{x}{2}, y=3$;
- 5) $y=0, y=2, x+y-5=0, 2x-y+4=0$;
- 6) $x+y-2=0, 2x-y+2=0, 3x+y+3=0, 3x-2y-6=0$.

1.12. D არე წარმოადგენს სამკუთხედს რომლის წვეროებია:

- 1) $A(0; 0), B(0; 1), C(1; 1)$;
- 2) $A(0; 0), B(1; 1), C(1; 3)$;
- 3) $A(0; 0), B(2; 1), C(-\frac{1}{2}; 1)$;
- 4) $A(1; 1), B(2; 3), C(3; -1)$.

1.13. D არე წარმოადგენს ოთხკუთხედს, რომლის წვეროებია:

- 1) $M(0; 0), N(0; 1), L(2; 1), K(0; 1)$;
- 2) $M(1; 1), N(1; 3), L(2; 4), K(2; 3)$;
- 3) $M(-1; 0), N(0; 3), L(2; 0), K(0; -4)$;
- 4) $M(-1; 1), N(2; 2), L(3; -2), K(-2; -1)$.

1.14. D არე შემოსაზღვრულია წირებით:

- 1) $x^2 + y^2 = R^2$;
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x=0, y=0$
($x \geq 0, y \geq 0$);
- 3) $x^2 + y^2 = x$;
- 4) $x^2 + y^2 = 2, y = x^2$ ($y > 0$);
- 5) $y = x^2, y = 4x - 3$;
- 6) $y = x^2, x = -y^2$;
- 7) $x^2 + y^2 = 2x, y^2 = x, y=0, (y > 0)$;
- 8) $y = \sin x, y = \cos x, y=0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$.

გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი (№№ 1.15—1.20):

1.15. 1) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;

2) $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=3, x=4, y=1, y=2$ წრფეებით;

3) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0, x=1, y=0, y=1$ წრფეებით;

4) $\iint_D x \sin(x+y) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

1.16. 1) $\iint_D x dx dy$, სადაც D წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით $A(0; 0), B(1; 1), C(0; 1)$.

2) $\iint_D e^{y/x} dx dy$, სადაც D წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x, y=0, x=1$ წრფეებით;

3) $\iint_D e^{x/y} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0, y=1, y^2=x$ წირებით;

4) $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=2, x=4, y=x, y=2x$ წრფეებით.

1.17. 1) $\iint_D e^x dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0, y=2, y=e^x$ წირებით.

2) $\iint_D x dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y+x=2$, $x^2+y^2=2y$, ($x>0$) წირებით;

3) $\iint_D (x+2y) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ წირებით;

4) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=2$, $y=x$, $xy=1$ წირებით.

1.18. 1) $\iint_D \cos(x+y) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=\pi$, $y=x$ წირებით;

2) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \leq 4$ წრის ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში;

3) $\iint_D (\sqrt{xy}-y^2) dx dy$, სადაც D წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით $A(0; 0)$, $B(10; 1)$, $C(1; 1)$;

4) $\iint_D (\sqrt{xy}-y^2) dx dy$, სადაც D წარმოადგენს ოთხკუთხედს წვეროებით $A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(10; 2)$, $D(2; 2)$.

1.19. 1) $\iint_D \sqrt{x^2-y^2} dx dy$, სადაც D წარმოადგენს სამკუთხედს წვეროებით $A(0; 0)$, $B(1; -1)$, $C(1; 1)$;

2) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \leq 1$ წრის ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში;

3) $\iint_D x^2 y^2 \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ წირებით;

4) $\iint_D xy dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $(x-2)^2+y^2=1$, $y=0$ ($y>0$) წირებით.

1.20. 1) $\iint_D \frac{x dx dy}{x^2+y^2}$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x \operatorname{tg} x$, $y=x$ წირებით;

2) $\iint_D xy dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$ წირებით;

3) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x}}$, სადაც D წარმოადგენს პირველ მეოთხედში მოთავსებულ $1/2$ რადიუსიან წრეს, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს;

4) $\iint_D |xy| dx dy$, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \leq 4$ წრეს;

5) $\iint_D y dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით და $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი თალით ($0 \leq t \leq 2\pi$);

6) $\iint_D xy dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $x=R \cos^2 t$, $y=R \sin^2 t$ ასტროიდის რკალით ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

შ ი თ ი თ ე ბ ა. 5) ცხადია

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{2\pi a} \left[\int_0^{f(x)} y dy \right] dx,$$

სადაც $y=f(x)$ არის ციკლოიდის მოცემული თაღის შესაბამისი ცხელი სახის ფუნქცია. შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა $x=a(t-\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ცხელია, რომ ყოველი ფიქსირებული x -სათვის y იცვლება 0-დან $a(1-\cos t)$ -მდე. ამრიგად

$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a(1-\cos t)} y \, dy \right] a(1-\cos t) \, dt.$$

1.21. გამოთვალეთ $z=f(x, y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა* D არეზე:

- 1) $z=12-2x-3y$, D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით $12-2x-3y=0$, $x=0$, $y=0$;
- 2) $z=x+6y$, ხოლო D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით $y=x$, $y=5x$, $x=1$;
- 3) $z=xy^2$, ხოლო $D=\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;
- 4) $z=8x$, ხოლო D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით $2x-y-1=0$, $2x+y-9=0$, $y=1$, $y=3$;
- 5) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, ხოლო $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leq R^2\}$;
- 6) $z=|x|+|y|$, ხოლო $D=\{(x, y): |x|+|y| \leq 1\}$.

1.22. შეათვისეთ ინტეგრალი $I=\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ თუ:

- 1) $f(x, y)=x+y+1$, ხოლო $D=\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;
- 2) $f(x, y)=x^2+4y^2+9$, ხოლო $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leq 4\}$;
- 3) $f(x, y)=x+xy-x^2-y^2$, ხოლო $D=\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$;
- 4) $f(x, y)=\frac{1}{9+\sin^2 x + \sin^2(x+y)}$, ხოლო $D=\{(x, y): |x|+|y| \leq 3\}$.

* $f(x, y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე ეწოდება

$$I = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

რითეს, სადა S წარმოადგენს D არის ფართობს.

$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ ორჯერად ინტეგრალში გადავით პოლარულ

კოორდინატებზე და ჩაწერეთ ის დანშეორებითი ინტეგრალის საშუალებით, თუ (№№ 1.23, 1.24):

- 1.23. 1) $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leq R^2\}$;
- 2) $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leq ax\}$;
- 3) $D=\{(x, y): x^2+y^2 \leq by\}$;
- 4) D არე შემოსაზღვრულია წრეებით $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$, $y=2x$.
- 1.24. 1) D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით $y=x$, $y=-x$, $y=1$;
- 2) D არე შემოსაზღვრულია წრფეებით $y=x$, $y=0$, $x=1$;
- 3) D არე შემოსაზღვრულია წრეებით $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$;
- 4) D არე შემოსაზღვრულია წრეებით $x^2+y^2=4$, $x+y=2$ ($x > 0$).

1.25. მოცემული განმეორებითი ინტეგრალი ჩაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) \, dy; & 2) \int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y) \, dx; \\ 3) \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2) \, dy; & 4) \int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2}) \, dy. \end{array}$$

1.26. შეცვალეთ ინტეგრების რიგი:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R f(\rho, \varphi) \, d\rho; & 2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\rho, \varphi) \, d\rho; \\ 3) \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\varphi} f(\rho, \varphi) \, d\rho; & 4) \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\rho, \varphi) \, d\rho. \end{array}$$

1.27. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მოცემული ორჭერადი ინტეგრალი ჩაწერეთ ერთმაგი ინტეგრალის საშუალებით:

1) $\int_D \int f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$;

2) $\int_D \int f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq x\}$;

3) $\int_D \int f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია წრეებით $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $x=2$;

4) $\int_D \int f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : |y| \leq |x|, |x| \leq 1\}$.

შ ი თ ი თ ბ ა. 3) რადვან

$$D = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\} \cup \{(\rho, \varphi) : 2\sqrt{2} \leq \rho \leq 4, \arccos \frac{2}{\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\},$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \int_D \int f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \rho f(\rho) d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^4 \int_{\arccos(2/\rho)}^{\pi/3} \rho f(\rho) d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho) d\rho + \int_{2\sqrt{2}}^4 \rho f(\rho) \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{\rho} \right) d\rho. \end{aligned}$$

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ ინტეგრალი (№№ 1.28—1.32):

1.28. 1) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy$; 2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$;

3) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$; 4) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy$;

5) $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy$; 6) $\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

1.29. 1) $\int_D \int \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq a^2\}$;

2) $\int_D \int e^{x^2+y^2} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$;

3) $\int_D \int \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$;

4) $\int_D \int \sqrt{x^2+y^2-9} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : 9 \leq x^2+y^2 \leq 25\}$.

1.30. 1) $\int_D \int \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$;

2) $\int_D \int \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$;

3) $\int_D \int \frac{dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$;

4) $\int_D \int (1-2x-3y) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$.

1.31. 1) $\int_D \int y dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 2x\}$;

2) $\int_D \int (x^2+y^2) dx dy$, სადაც $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 2ax\}$;

$$3) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ სადაც } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

$$4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ სადაც } D \text{ არე შემოსაზღვრული წირებით } x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = 2ax, y = 0 (y > 0).$$

$$1.32. 1) \iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy, \text{ სადაც } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3}\};$$

$$2) \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}, \text{ სადაც } D \text{ არე შემოსაზღვრული წირებით } x^2 = 2y, x^2 + y^2 = 8, y = 0 (x > 0).$$

$$3) \iint_D \frac{x+y}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ სადაც } D \text{ არე შემოსაზღვრული წირებით } x^2 + y^2 = 1, x + y = 1 (x > 0);$$

$$4) \iint_D xy dx dy, \text{ სადაც } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4 \text{ და } x^2 + y^2 \leq 4y\}.$$

1.33. გადამოკიდებული u და v ცვლადებზე და მიღებული ინტეგრალი ჩაწერეთ განმეორებითი ინტეგრალის საშუალებით:

$$1) \int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta), \text{ თუ } u = x, v = \frac{y}{x};$$

$$2) \int_0^3 dx \int_{1-x}^{3-x} f(x, y) dy, \text{ თუ } u = x + y, v = x - y;$$

$$3) \iint_D f(x, y) dx dy, D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\};$$

$$\text{თუ } u = x + y, av = uv;$$

$$4) \iint_D f(x, y) dx dy, D \text{ არე შემოსაზღვრულია წირებით } xy = p, xy = q, y = ax, y = bx (0 < p < q, 0 < a < b); \text{ თუ } u = xy, y = vx.$$

1.34. ცვლადთა მითითებული გარდაქმნით გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$1) \iint_D (x + 2y) dx dy, D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\};$$

მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა $x + y = u, y = uv$;

$$2) \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ სადაც } D \text{ არე შემოსაზღვრულია } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ელიფსით. მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა } x = ap \cos \varphi, y = bp \sin \varphi;$$

$$3) \iint_D e^{-(x+y)^2} dx dy, \text{ სადაც } D = \{(x, y): x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა $x = u(1-v), y = uv$;

$$4) \iint_D (y^2 - x^2) dx dy, \text{ სადაც } D \text{ არე შემოსაზღვრულია წირებით } y = \frac{5}{2}, y = \sqrt{4 + x^2}.$$

მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა $x = u - v, y = u + v$.

1.35. დაამტკიცეთ, რომ თუ m და n ნატურალური რიცხვებიდან ერთი მაინც კენტი, მაშინ

$$\iint_D x^m y^n dx dy = 0,$$

სადაც $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}.$

1.36. გამოთვალეთ

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

თუ $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, ხოლო $f(x, y) = F_{xy}(x, y)$.

1.37. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_D f(x, y) dx dy = f(0; 0),$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}.$$

1.38. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\iint_D f(x) g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy,$$

$$\text{სადაც } D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

1.39. დაამტკიცეთ ღირებულების ფორმულა

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad a > 0.$$

1.40. ღირებულების ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x) f(x) dx.$$

1.41. დაამტკიცეთ, რომ

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} t f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi,$$

თუ

$$F(t) = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

$$\text{სადაც } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}.$$

§ 2. ორგანული ინტეგრალის ზომიერების პამოთვევა

გამოთვალეთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით (№№ 2.1.—2.6):

2.1. 1) $3x + 2y - 6 = 0, x=0, y=0;$

2) $y=2x, y=4x, x=1;$

3) $y=x^2, y=1;$

4) $y=4-x^2, y=3x.$

2.2. 1) $y=x^2+1, x=0, y=0, x=3;$

2) $y=x^2, y=x^3;$

3) $y=\sqrt{x}, y=0, x=9;$

4) $y^2=2x, x=2.$

2.3. 1) $3y^2=5x; 5x^2=9y;$

2) $y^2=2x+1; x+y=1;$

3) $xy=4, x+y=5;$

4) $y^2=10x+25, y^2=-6x+9.$

2.4. 1) $y=\frac{3}{x}, y=4e^x, y=3, y=4;$

2) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}, y=\frac{1}{2x}, x=16;$

3) $y=\sqrt{x+2}, y=x, x=4;$

4) $y=\frac{1}{x^2+1}, x=2y, x=0.$

2.5. 1) $y=\ln x, y=1, x=2e;$

2) $x^2+y^2=12, x^2=-\sqrt{6}y \ (y \leq 0);$

3) $y=\sin 2x, y=\cos 2x, x=0 \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{8});$

4) $y=6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x=0 \ (x \geq 0).$

2.6. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

2) $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=4x, y=x, y=0;$

3) $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=2x;$

4) $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=6y.$

2.7. 1) გამოთვალეთ $\rho=a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდი და $\rho=a \cos \varphi$ ($a>0$) წრეწირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი;

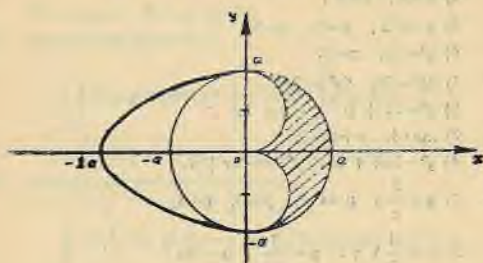
2) გამოთვალეთ $\rho=a(1-\cos\varphi)$ კარდიოიდი და $\rho=a$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი, რომელიც ძევს კარდიოიდის გარეთ;

3) გამოთვალეთ $\rho = a \cos \varphi$ და $\rho = b \cos \varphi$ ($b > a$) წრეწირებს შორის მოთავსებული არის ფართობი;

4) გამოთვალეთ $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

შ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოსათვლელია

$$D = \{(\rho, \varphi) : a(1 - \cos \varphi) \leq \rho \leq a\}$$



ნახ. 84

არის ფართობი, რადგან D არე სიმეტრიულია პოლარული ლერძის მიმართ (ნახ. 84), ამიტომ

$$s = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^{2a} \rho d\rho = \frac{a^2(8-\pi)}{4}$$

2.8. პოლარულ კოორდინატებზე გაღებული გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული პრეტყელი ფიგურის ფართობი:

- 1) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$;
- 2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = 2ax$;
- 3) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - 3xy^2)$, $a > 0$;
- 4) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4$;
- 5) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a > 0$);
- 6) $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$.

გამოთვალეთ მოცემული ზედაპირებით შემოსაზღვრულ სხეულის მოცულობა (ნახ. 2.9-2.14):

- 2.9. 1) $x + y + z = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
2) $z = 1 + x + y$, $x + y = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$$3) z = x^2 + y^2 + 1, x=0, y=0, z=0, x=4, y=4;$$

$$4) z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, x=0, x=1, y=0, y=1, z=0.$$

- 2.10. 1) $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
2) $x + y + z = 6$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $y=0$, $z=0$;
3) $z = 4 - x^2 - y^2$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z=0$;
4) $z = x^2 - y^2$, $y=0$, $z=0$, $x=1$.

- 2.11. 1) $x^2 + y^2 = 9$, $y=0$, $z=0$, $y=x$;
2) $z = 4y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z=0$;
3) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y=1$, $z=0$;
4) $z = x^2 + y^2$, $y = 2x$, $y = 6 - x$, $y=1$, $z=0$.

- 2.12. 1) $z^2 = xy$, $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$;
2) $x + y + z = 4$, $x^2 + y^2 = 4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
3) $x + z = 6$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z=0$;
4) $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z=0$.

- 2.13. 1) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 2x$, $z = 4x$;

$$2) x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2;$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0);$$

$$4) x^2 - y^2 = 4z, x^2 + y^2 = 4, z=0 \text{ (ცილინდრის შიგა ნაწილი)}.$$

- 2.14. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ (ცილინდრის გარე ნაწილი);
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$);
3) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2$ ($a > 0$);
4) $z^2 = 2(x^2 + y^2) - a^2$, $2z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ ($a > 0$).

2.15. გამოთვალეთ მოცემული სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო სიბრტყეებს შორის:

$$1) 3x + 6y + 2z = 6, \quad 2) 6x - 3y + 2z = 12.$$

2.16. გამოთვალეთ: 1) $x - y + z = 1$ სიბრტყიდან $x^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრით ამოკვეთილი ნაწილის ფართობი; 2) $2x - 2y - z = 3$ სიბრტყიდან $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრით ამოკვეთილი ნაწილის ფართობი.

2.17. იპოვეთ $x + y + z = a$ სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც მისგან ამოჭრის $y^2 = ax$ ცილინდრი და $x = a$ სიბრტყე.

2.18. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ სფეროდან $z = -3$ სიბრტყით მოკვეთილი მცირე სფერული სეგმენტის ზედაპირის ფართობი.

2.19. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროს იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ცილინდრში ($b \leq a$).

2.20. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ სფეროს ზედაპირის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x = -8$ და $x = 6$ სიბრტყეებს შორის.

2.21. იპოვეთ $z = xy$ ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x^2 + y^2 = 1$ ცილინდრის შიგნით.

2.22. იპოვეთ $z^2 = 2xy$ ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც მისგან გამოკვეთს $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ სიბრტყეები.

2.23. იპოვეთ $x^2 + y^2 = 2x$ ცილინდრის შიგნით მოთავსებული $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ზედაპირის ფართობი.

2.24. იპოვეთ $x^2 + z^2 = y^2$ კონუსის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც მისგან გამოკვეთს $y^2 = 2px$ ($p > 0$) ცილინდრი.

2.25. იპოვეთ $x^2 + z^2 = y^2$ კონუსის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც მისგან გამოკვეთს სიბრტყეები $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

2.26. იპოვეთ $x^2 + z^2 = a^2$ ცილინდრის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც მისგან გამოკვეთს $y^2 = a(a - x)$ ცილინდრი.

2.27. იპოვეთ $x^2 + z^2 = a^2$ და $y^2 + z^2 = a^2$ ცილინდრებით შემოსაზღვრული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

2.28. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროდან $x^2 + y^2 = ax$ ცილინდრით ამოჭრილი ზედაპირის ფართობი.

2.29. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფერო $x^2 + y^2 = ax$ ცილინდრიდან.

2.30. იპოვეთ სფეროს იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი პარალელური და ორი მერდიანით.

§ 3. სამუხრამლაო ინტეგრალი

გამოთვალეთ განმეორებითი ინტეგრალი (№№ 3.1; 3.2).

3.1. 1) $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (x+y+z) dz$; 2) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$;
3) $\int_0^3 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{y^2} dz$; 4) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz$.

3.2. 1) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz$; 2) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^2 y^2 z dz$;
3) $\int_0^3 dz \int_0^{2z} dy \int_0^{\sqrt{yz}} x dx$; 4) $\int_0^2 dy \int_0^y dz \int_0^{\frac{4y-z^2}{2}} y dx$.

გამოსახეთ $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ ინტეგრალი განმეორებითი ინტეგრალის საშუალებით, თუ V არე შემოსაზღვრულია ზედაპირებით (№№ 3.3; 3.4):

3.3. 1) $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
2) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $x+y-z=0$;
3) $x=1$, $y=0$, $y=x$, $z=0$, $z=xy$;
4) $x=1$, $y=0$, $y=x$, $z=0$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
3.4. 1) $x^2+y^2=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$;
2) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$;
3) $z=\sqrt{20-x^2-y^2}$, $z=x^2+y^2$;
4) $x=y^2+z^2$, $x=3$.

გამოთვალეთ სამუხრამლაო ინტეგრალი (№№ 3.5; 3.6):

3.5. 1) $\iiint_V (xy + yz + xz) dx dy dz$, სადაც $V = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0\}$;
2) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z)^3}$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ სიბრტყეებით;
3) $\iiint_V x y z dx dy dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$;

4) $\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $z=xy$, $x+y=1$, $z=0$ ($z \geq 0$).

3.6. 1) $\iiint_V y \cos(x+z) \, dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$;

2) $\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდით;

3) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz$, სადაც V შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $x^2+y^2=z^2$, $z=1$;

4) $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედა ნახევრითა და $z=0$ სიბრტყით.

3.7. ცილინდრულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ ინტეგრალი:

1) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^2 dz$;

2) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} \, dz$;

3) $\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{x^2+y^2} dz$;

4) $\iiint_V dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ ზედაპირებით და შეიცავს $(0, 0, R)$ წერტილს;

5) $\iiint_V (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია ზედაპირებით $x^2+y^2=2z$, $z=2$;

6) $\iiint_V z \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz$, სადაც $V=\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq z \leq a\}$.

3.8. სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ ინტეგრალი:

1) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz$;

2) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) \, dz$;

3) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dx \, dy \, dz$, სადაც $V=\{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq x\}$;

4) $\iiint_V (x^2+y^2) \, dx \, dy \, dz$, სადაც $V=\{(x, y, z) : R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2, z \geq 0\}$.

გამოთვალეთ შემდეგი ზედაპირებით შემოსაზღვრული არის მოცულობა (№№ 3.9—3.11):

3.9. 1) $y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$, $z=\pm h$;

2) $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=2x$ ($z \geq 0$);

3) $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2az$, $z=0$;

4) $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$.

- 8.10. 1) $z=x^2+y^2$, $z=x^2+2y^2$, $y=x$, $y=2x$, $x=1$;
 2) $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x^2$, $y=x$;
 3) $z=\ln(x+2)$, $z=\ln(6-x)$, $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$;
 4) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z^2=x^2+y^2$ (არე შეიცავს $(0; 0; \frac{a}{2})$ წერტილს).
- 8.11. 1) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3x$ (არე შეიცავს $(0; 0; 1)$ წერტილს);
 2) $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2+z^2=a^2$ (არე შეიცავს $(\frac{a}{2}, 0, 0)$ წერტილს);
 3) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$, $x=a$; 4) $(x^2+y^2+z^2)^2=2xyz$.

§ 4. უბრალო ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკაში

- 4.1. იპოვეთ R რადიუსიანი წრიული ფირფიტის მასა, თუ სიმკვრივე ფირფიტის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან ფირფიტის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის პროპორციულია, ამასთან სიმკვრივე ფირფიტის კიდეზე 0-ს ტოლია.
- 4.2. იპოვეთ $2a$ სიგრძის ჯვარდის მქონე კვადრატული ფირფიტის მასა თუ სიმკვრივე ფირფიტის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან ფირფიტის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილამდე მანძილის კვადრატის პროპორციულია, ამასთან სიმკვრივე ფირფიტის წვეროებში ერთის ტოლია.
- 4.3. ბრტყელი ფირფიტა შემოსაზღვრულია R და r რადიუსის მქონე ორი კონცენტრული წრეწირით. იპოვეთ ამ ფირფიტის მასა, თუ სიმკვრივე ფირფიტის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან წრეწირების ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია. ამასთან სიმკვრივე შიდა წრეწირის წერტილებში ერთეულის ტოლია.
- 4.4. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტის მასა, რომლის კათეტების სიგრძეებია $OB=a$ და $OA=b$, თუ სიმკვრივე ფირფიტის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან OA კათეტამდე მანძილის ტოლია.

- 4.5. იპოვეთ $V=(x, y, z)$: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ კუბის მასა თუ სიმკვრივე ნებისმიერ $M(x, y, z)$ წერტილში გამოითვლება ფორმულით $\rho=x+y+z$.
- 4.6. იპოვეთ $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის მასა, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ტოლია z აბსციისას.
- 4.7. გამოთვალეთ H სიმაღლისა და R რადიუსის მქონე მართი წრიული ცილინდრის მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან ფუძის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის ტოლია.
- 4.8. იპოვეთ R რადიუსიანი პირფრის მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ წერტილში, ამ წერტილიდან ცენტრამდე მანძილის კუბის პროპორციულია, ამასთან ცენტრიდან 1-ის ტოლ მანძილზე დამოუკიდებელ წერტილებში სიმკვრივე უ-ს ტოლია.
- 4.9. იპოვეთ $x^2+y^2=2az$ პარაბოლოიდითა და $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ ნახევარსფეროთი შემოსაზღვრული სხეულის მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ წერტილში, ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილის კვადრატის ტოლია.
- 4.10. იპოვეთ $x^2+y^2-z^2=1$ ჰიპერბოლოიდითა და $z=0$, $z=1$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული სხეულის მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ წერტილში, ამ წერტილის აბსციის პროპორციულია, ამასთან $z=1$ სიბრტყეში სიმკვრივე უ-ს ტოლია.
- იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფირფიტის სიმძიმის ცენტრი (№№ 4.11; 4.12):
- 4.11. 1) $y=x^2$, $x+y=2$; 2) $y^2=x$, $y=x^2$;
 3) $\sqrt{x} + \sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$;
 4) $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.
- 4.12. 1) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$;
 2) $(x^2+y^2)^2=2xy$ ($x>0$, $y>0$);
 3) $\rho=a(1+\cos \varphi)$;
 4) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y=0$.
- იპოვეთ შემდეგი ზედაპირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი (№№ 4.13; 4.14):
- 4.13. 1) $x+y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$$2) x+y+z=8, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x=2, \quad y=4;$$

$$3) z = \frac{3}{r^2} (x^2 + y^2), \quad z=3;$$

$$4) z = \frac{4}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (R > 0), \quad z=4.$$

$$4.14. \quad 1) z=y^2-x^2, \quad z=0, \quad y=0, \quad y=1;$$

$$2) z=x^2+y^2, \quad x+y=a, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0;$$

$$3) y^2+2z^2=4x, \quad x=2;$$

$$4) y = \frac{b}{a^2} x^2, \quad z = \frac{h}{b} (b-y), \quad z=0 \quad (a > 0, \quad b > 0, \quad h > 0).$$

4.15. იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფიგურის ინერციის მომენტი Ox და Oy ღერძების მიმართ ($\rho=1$):

$$1) x+y=1, \quad x+2y=2, \quad y=0;$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$3) (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \quad x=0, \quad y=0 \quad (0 \leq x \leq a);$$

$$4) \rho = a(1 + \cos \varphi).$$

4.16. იპოვეთ შემდეგი წარებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი ფიგურის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ ($\rho=1$):

$$1) (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2); \quad 2) x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2);$$

$$3) xy=1, \quad xy=2, \quad x=2y, \quad y=2x, \quad (x > 0, \quad y > 0);$$

$$4) y^2 = ax, \quad y=a, \quad x=0.$$

4.17. იპოვეთ შემდეგი ზედაპირებით შემოსაზღვრული ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ ($\rho=1$):

$$1) z = \frac{R}{a^2} (y^2 - x^2), \quad z=0, \quad y=\pm a;$$

$$2) z=x^2+y^2, \quad x+y=\pm 1, \quad x-y=\pm 1, \quad z=0;$$

$$3) x^2+y^2+z^2=2, \quad x^2+y^2=z^2, \quad (z > 0);$$

$$4) (x^2+y^2+z^2)^2 = z.$$

§ 8. პირველი პარამეტრის წიგნით ინტეგრალი და მისი გამოთვლა

გამოთვალეთ პირველი ფერის წირითი ინტეგრალი (მათე 5.1—5.7):

$$5.1. \quad 1) \int_L (3y^2 + x^2) ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y=1+x \text{ წრფის მონაკვეთი}$$

$A(0; 1)$ წერტილიდან $B(2; 3)$ წერტილამდე;

$$2) \int_L \frac{ds}{x-y}, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ წრფის მონაკვეთი}$$

$A(2; 1)$ წერტილიდან $B(4; 0)$ წერტილამდე.

$$3) \int_L \frac{y}{x} ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ პარაბოლის რკალი}$$

$A(0; 0)$ წერტილიდან $B(\sqrt{3}; \frac{3}{2})$ წერტილამდე;

$$4) \int_L \frac{y}{\sqrt{1+16x^2}} ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y=2x^2+1 \text{ პარაბოლის რკალი}$$

$A(-1; 3)$ წერტილიდან $B(0; 1)$ წერტილამდე.

$$5.2. \quad 1) \int_L (y+1)^2 ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y=e^{-x}-1 \text{ წრფის რკალი}$$

$A(-\ln \sqrt{3}; \sqrt{3}-1)$ წერტილიდან $B(-\ln \sqrt{2}; \sqrt{2}-1)$ წერტილამდე.

$$2) \int_L \frac{ds}{x\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y=1+\ln x \text{ წრფის რკალი}$$

$A(1; 1)$ წერტილიდან $B(2; 1+\ln 2)$ წერტილამდე;

$$3) \int_L \sin^2 x ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y = \ln \sin x \text{ წრფის რკალი}$$

$A(\frac{\pi}{2}; 0)$ წერტილიდან $B(\frac{3\pi}{4}; -\ln \sqrt{2})$ წერტილამდე;

$$4) \int_L \frac{\sin^2 2x}{\sqrt{4+\sin^2 2x}} ds, \quad \text{სადაც } L \text{ არის } y = \ln \operatorname{tg} x \text{ წრფის რკალი}$$

$A(\frac{\pi}{4}; 0)$ წერტილიდან $B(\frac{\pi}{3}; \ln \sqrt{3})$ წერტილამდე.

5.3. 1) $\int_L (x+y)ds$, სადაც L არის სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ და $O(0; 0)$ წერტილები;

2) $\int_L xyds$, სადაც L არის მართკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $O(0; 0)$, $A(4; 0)$ და $C(0; 2)$ წერტილები;

3) $\int_L x^2 y^2 ds$, სადაც L არის კვადრატის კონტური, რომლის წვეროებია $A(1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 1)$ და $D(-1; -1)$ წერტილები;

4) $\int_L xy ds$, სადაც L არის $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ელიფსის რკალი მოთავსებული პირველ მეთოთხედში.

5.4. 1) $\int_L xds$, სადაც L არის წირი: $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = 2t^2 - 1$, $0 \leq t \leq 1$;

2) $\int_L \frac{y}{x} ds$, სადაც L არის წირი: $x = 2t^2$, $y = t^2 + 3$, $1 \leq t \leq 2$.

3) $\int_L \left(x + \frac{9}{32} y^2 \right) ds$, სადაც L არის წირი: $x = t - t^2$, $y = -\frac{4\sqrt{2}}{3} t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$;

4) $\int_L x^2 ds$, სადაც L არის წირი: $x = t$, $y = \ln t + 1$, $1 \leq t \leq \sqrt{3}$.

5.5. 1) $\int_L xy ds$, სადაც L არის წირი: $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

2) $\int_L y^2 ds$, სადაც L არის $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის ერთი თალი;

3) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, სადაც L არის წირი: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

4) $\int_L (y-x) ds$, სადაც L არის წირი: $x = 1 - \sin t$, $y = 1 + \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$;

5) $\int_L ye^{-x} ds$, სადაც L არის წირი: $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\arctgt - t$, $0 \leq t \leq 1$;

6) $\int_L xy ds$, სადაც L არის წირი: $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $0 \leq t \leq t_0$.

5.6. 1) $\int_L x ds$, სადაც L არის $\rho = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) ლოგარიტმული ხეის რკალი $A(a; 0)$ წერტილიდან $O(0; -\infty)$ წერტილამდე;

2) $\int_L (x+y) ds$, სადაც L არის $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატის მარჯვენა ფოთოლი;

3) $\int_L (x^2 + y^2)^n ds$, სადაც L არის $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის კონტური;

4) $\int_L (x-y) ds$, სადაც L არის $x^2 + y^2 = ax$ წრეწირის კონტური.

მითითებული 3) და 4) მაგალითებში წირის განტოლება ჩაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში.

5.7. 1) $\int_L (x+z) ds$, სადაც L არის წირი: $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$;

2) $\int_L xyz \, ds$, სადაც L არის წირი: $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$,
 $0 \leq t \leq 1$;

3) $\int_L (x^2+y^2+z^2) \, ds$, სადაც L არის $x=a \cos t$, $y=a \sin t$,
 $z=bt$ ხრახნის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 2\pi$;

4) $\int_L z \, ds$, სადაც L არის $x=t \cos t$, $y=t \sin t$, $z=t$ კონუსური ხრახნის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 2\pi$;

5) $\int_L xyz \, ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$

წრეწირის ნაწილი რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

6) $\int_L (x+y) \, ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$ წრეწირის მეოთხედი მოთავსებული პირველ ოქტანტში.

შ ი თ ი თ ე ბ ა. 5) ინტეგრების წირის პარამეტრული განტოლებებია

$x=\frac{R}{2} \cos t$, $y=\frac{R}{2} \sin t$, $z=\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

6) ინტეგრების წირის პარამეტრული განტოლებებია

$x=t$, $y=t$, $z=\sqrt{R^2-2t^2}$, $0 \leq t \leq R\sqrt{2}$.

5.8. გამოთვალეთ პარამეტრულად მოცემული წირის რკალის სიგრძე:

1) $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, $0 \leq t \leq 1$;

2) $x=e^{-t} \cos t$, $y=e^{-t} \sin t$, $z=e^{-t}$, $0 \leq t < \infty$;

3) $y=4 \arcsin \frac{x}{4}$, $z=\ln \frac{4-x}{4+x}$, $0 \leq x \leq 3$;

4) $x^2+y^2=z$, $y=x \lg z$, $0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$, $(x>0)$.

შ ი თ ი თ ე ბ ა. 3) პარამეტრულად აღიღეთ $x=t$;

4) მოცემული წირის პარამეტრული განტოლებებია $x=\sqrt{t} \cos t$,
 $y=\sqrt{t} \sin t$, $z=t$.

5.9. იპოვეთ $x=a \cos t$, $y=b \sin t$ ელიფსის პირველ მეოთხედში მოთავსებული რკალის მასა, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე უდრის ამ წერტილის ორდინატს.

5.10. იპოვეთ

$y=\frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$

ჯამეწირის იმ რკალის მასა, რომელიც მოთავსებულია $x_1=0$ და $x_2=a$ აბსცისების შესაბამის წერტილებს შორის, თუ წირის ყოველ წერტილში სიმკვრივე უკუპროპორციულია ამ წერტილის ორდინატისა. ამასთან $(0; a)$ წერტილში სიმკვრივე უდრის 0.

5.11. იპოვეთ $y=\ln x$ წირის იმ რკალის მასა, რომელიც მოთავსებულია $x_1=\sqrt{3}$ და $x_2=\sqrt{8}$ აბსცისების შესაბამის წერტილებს შორის, თუ წირის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ამ წერტილის აბსცისის კვადრატის ტოლია.

5.12. იპოვეთ $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\sqrt{3}t$ ხრახნის პირველი ხედი მასა, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ამ წერტილის პოლარულ რადიუსის კვადრატის ტოლია.

5.13. იპოვეთ $x=e^t \cos t$, $y=e^t \sin t$, $z=e^t$ წირის იმ რკალის მასა, რომელიც მოთავსებულია $t_1=0$ და $t_2=\ln 2$ პარამეტრის შესაბამის წერტილებს შორის, თუ წირის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ამ წერტილის პოლარული რადიუსის კვადრატის უკუპროპორციულია. ამასთან $(1; 0; 1)$ წერტილში სიმკვრივე უდრის ერთს.

5.14. იპოვეთ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) გოლფაროვიანი ციკლოიდის რკალის სიმახმის ცენტრი.

5.15. იპოვეთ $y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ერთგვაროვანი ჯამეწირის იმ ნაწილის სიმახმის ცენტრი, რომელიც მოთავსებულია $A(0; a)$, $B(b; h)$ წერტილებს შორის.

5.16. იპოვეთ $x=a \cos t$, $y=a \sin t$, $z=ht$ ერთგვაროვანი ხრახნის იმ ნაწილის სიმახმის ცენტრი, რომელიც მოთავსებულია $t_1=0$ და $t_2=\pi$ პარამეტრის შესაბამის წერტილებს შორის.

34. ს. თოფურია, ე. ზოტოლაძე, მ. ვახაშვილი, ნ. შატაშვილი

529

1. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის გამოთვლა.

გამოთვალეთ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი (№№ 6.1—6.9):

6.1. 1) $\int_L y dx$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $A(0;1)$ წერტილიდან $B(1;4)$ წერტილამდე;

2) $\int_L (x+y) dx$, სადაც L არის $y=3x^2-2$ პარაბოლის რკალი $A(1;1)$ წერტილიდან $B(2;10)$ წერტილამდე;

3) $\int_L (2x^2+y^2) dy$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $A(-1;-2)$ წერტილიდან $B(2;1)$ წერტილამდე;

4) $\int_L \frac{\sin x}{y} dy$, სადაც L არის $y=e^x$ წირის რკალი $A(0;1)$ წერტილიდან $B\left(\frac{\pi}{2}; e^{\pi/2}\right)$ წერტილამდე.

6.2. 1) $\int_L (4x-y) dx + x^2 y dy$, სადაც L არის $y=3x^2$ პარაბოლის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;3)$ წერტილამდე;

2) $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $A(1;3)$ წერტილიდან $B(2;6)$ წერტილამდე;

3) $\int_L e^{-2x} dx - y dy$, სადაც L არის $y=e^{-x}$ წირის რკალი $A(0;1)$ წერტილიდან $B\left(1; \frac{1}{e}\right)$ წერტილამდე;

4) $\int_L x \cos y dx - y \sin x dy$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(\pi; 2\pi)$ წერტილამდე.

6.3. $\int_L xy dx + (x-2y) dy$, L არის მოცემული წირის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე:
1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $y=\sqrt{x}$;
5) $y=2x^3-x$; 6) $y=\sin \frac{\pi}{2} x$.

6.4. $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, სადაც L არის მოცემული წირის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(1;1)$ წერტილამდე:
1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $y=\sqrt{x}$;
5) $y=2x^3-x$; 6) $y=\sin \frac{\pi}{2} x$.

6.5. 1) $\int_L (x+y) dx + \cos x dy$, სადაც L არის წირი:
 $y = \begin{cases} 1+x, & \text{როცა } -\pi \leq x \leq 0, \\ \cos x, & \text{როცა } 0 < x \leq \pi; \end{cases}$
2) $\int_L (x^2+y^2) dx + y dy$, სადაც L არის წირი:
 $y = \begin{cases} 1-x^2, & \text{როცა } -1 \leq x \leq 0, \\ e^x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

3) $\int_L x^2 y dx - e^{-x^2} dy$, სადაც L არის $y=|x^2-1|$ წირის რკალი $A(0;1)$ წერტილიდან $B(2;3)$ წერტილამდე;

4) $\int_L (x^2+y^2) dx + (x^2-y^2) dy$, სადაც L არის $y=1-|1-x|$ წირის რკალი $A(0;0)$ წერტილიდან $B(2;0)$ წერტილამდე.

6.6. 1) $\int_L (x-y) dx + y^2 dy$, სადაც L არის წირი: $x=t^2$, $y=t^2$, $0 \leq t \leq 1$;

$$2) \int_L ydx + xdy, \text{ სადაც } L \text{ არის წირი: } x=R \cos t, y=R \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi;$$

$$3) \oint_L ydx - xdy, \text{ სადაც } L \text{ არის ელიფსი } x=a \cos t, y=b \sin t.$$

$$4) \int_L (2a-y)dx - (a-y)dy, \text{ სადაც } L \text{ არის } x=a(t - \sin t), \\ y=a(1-\cos t) \text{ ციკლოიდის ერთი თალი.}$$

6.7. 1) $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, სადაც L არის ნახევარწრეწირი

$$x=R \cos t, y=R \sin t, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$2) \oint_L \frac{(x+y)^2 dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}, \text{ სადაც } L \text{ არის } R \text{ რადიუსისანი}$$

წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში;

$$3) \int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}, \text{ სადაც } L \text{ არის } x=R \cos^3 t, y=R \sin^3 t \text{ ასტ-}$$

როიდის მეოთხედო ($R; 0$) წერტილიდან ($0; R$) წერტილამდე;

$$4) \oint_L \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}, \text{ სადაც } L \text{ არის } \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \text{ ლენისკა-}$$

ტის ფოთლის მარჯვენა ნაწილი.

6.8. 1) $\int_L zdx + xdy + ydz$, სადაც L არის წირი: $x=t, y=t^2, z=t^3$,

$$0 \leq t \leq 1;$$

$$2) \int_L x dx + y dy + (x+y-1) dz, \text{ სადაც } L \text{ არის წრფის მონაკე-}$$

ვეთი $A(1; 1; 1)$ წერტილიდან $B(2; 3; 4)$ წერტილამდე;

$$3) \int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}, \text{ სადაც } L \text{ არის წრფის მონაკე-}$$

თი $A(0; 1; 1)$ წერტილიდან $B(4; 4; 4)$ წერტილამდე;

$$4) \int_L ydx + zdy + xdz, \text{ სადაც } L \text{ არის: ა) წრფის მონაკევეთი}$$

$O(0; 0; 0)$ წერტილიდან $C(a; a; a)$ წერტილამდე; ბ) $OABC$ ტეხილი, თუ $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(a; a; a)$ (ინტეგრება ხდება O წერტილიდან C წერტილისაკენ).

$$5) \int_L -yz dx + xz dy + xy dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x=a \cos t, y=asint,$$

$$z=ht \text{ ხრახნწირი } (0 \leq t \leq 2\pi);$$

$$6) \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ სფე-}$$

როსა და $x^2 + y^2 = Rx$ ($R>0, z>0$) ცილინდრის თანაკვეთა, ამისთან ინტეგრება ხდება იმ მიმართულებით, რომელიც სიბრ-
ველიდან ჩანს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 2) წრფის მონაკევეთის პარამეტრული განტოლე-
ბებია: $x=t+1, y=2t+1, z=3t+1, 0 \leq t \leq 1$.

ბ) თუ f პარამეტრულ ავილებზე L წირის Oxy სიბრტყეზე ვეგ-
მილის ($x^2 + y^2 = Rx$ წრეწირის) წერტილის რადიუს-ვექტორის
მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს, მაშინ L წირის პარამეტ-

რული განტოლებები იქნება: $x=R \cos^2 t, y=\frac{1}{2}R \sin 2t; z=$

$$=R|\sin t|, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \text{ ამიტომ}$$

$$\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -\frac{R^3}{4} \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} \sin^3 2t dt + R^3 \int_{-(\pi/2)}^{\pi/2} \sin^2 t \cos 2t dt -$$

$$-R^2 \int_{-(\pi/2)}^0 \cos^5 t dt + R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^5 t dt = 2R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos 2t dt.$$

6.9. 1) $\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, სადაც L არის $ABCD$ კვადრატის კონტური წერტილებით: $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$ წერტილებში;

2) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, სადაც L არის $OABO$ სამკუთხედის კონტური წერტილებით $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ წერტილებში;

3) $\oint_L (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2) dy$, სადაც L არის $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ნახევარწრეწირითა და Ox ღერძით შემკმნილი კონტური;

4) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, სადაც L არის $y=\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) სინუსოიდის ზედა ნახევარსა და Ox ღერძით შემკმნილი კონტური.

შეამოწმეთ, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება სრული დიფერენციალია და გამოთვალეთ მთელი გზის წირითი ინტეგრალი მითითებული A საწყისი და B ბოლო წერტილების შემავრთებელ ნებისმიერ კონტურზე (№№ 6.10—6.12):

6.10. 1) $\int_L xdy + ydx$, $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$;

2) $\int_L (x+y) dx + (x-y) dy$, $A(0; 1)$, $B(2; 3)$;

3) $\int_L x \sin y dx + \frac{1}{2} x^2 \cos y dy$, $A(0; 0)$, $B\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\int_L x(1+2y^2) dx + 3y^2(x^2-1) dy$, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$.

6.11. 1) $\int_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, $A(3; 4)$, $B(5; 12)$ (L წირი არ გადის კოორდინატთა სათავეზე);

2) $\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2}$, $A(2; 1)$, $B(1; 2)$ (L წირი არ ჰკვეთს Oy ღერძს);

3) $\int_L \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A(1; 0)$, $B(6; 8)$ (L წირი არ გადის კოორდინატთა სათავეზე);

4) $\int_L \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$, $A(0; -1)$, $B(1; 0)$ (L წირი არ ჰკვეთს $y=x$ წრედს).

6.12. 1) $\int_L xdx - y^2 dy + zdz$, $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 3)$;

2) $\int_L yz dx + xz dy + xy dz$, $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$;

3) $\int_L \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A(0; 0; 1)$, $B(3; 4; 5)$;

4) $\int_L \frac{xz dy + xy dz - yz dx}{(x-yz)^2}$, $A(7; 2; 3)$, $B(5; 3; 1)$ (L წირი არ ჰკვეთს $x=yz$ ზედაპირს).

იპოვეთ ფუნქცია მისი სრული დიფერენციალის მიხედვით (№№ 6.13; 6.14):

6.13. 1) $du = x^2 dx + y^2 dy$;

2) $du = (2x + 3y) dx + (3x - 4y) dy$;

3) $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$;

4) $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$.

6.14. 1) $du = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$;

2) $du = e^{x-y} [(1+x+y) dx + (1-x-y) dy]$;

3) $du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$;

4) $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$.

შეამოწმეთ, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება რაიმე u ფუნქციის სრული დიფერენციალია, იპოვეთ u ფუნქცია და მისი საშუალებით გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი (№№ 6.15; 6.16):

(2; 1)

6.15. 1) $\int 2xy dx + x^2 dy;$

(0; 0)

(3; 0)

2) $\int (x^4 + 4xy^2) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy;$

(-2; -1)

($\pi/4$; 2)

3) $\int x e^{xy} \cos xy dx + y e^{\sin xy} \cos xy dy;$

(0; 1)

(1; 0)

4) $\int \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}.$

(0; -1)

(2; π)

6.16. 1) $\int \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy;$

(1; π)

(e ; 0)

2) $\int \frac{(x + 2y) dx + y dy}{(x + y)^2};$

(0; 1)

(4; 1; 2)

3) $\int \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz;$

(0; 3; 1)

(1; 0; 3)

4) $\int \frac{2(xz dy + xy dz - yz dx)}{(x - yz)^2}.$

(0; 1; 1)

2. გრინის ფორმულა.

6.17. გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი:

1) $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx,$ სადაც L არის $x^2 + y^2 = R^2$ წრეწირი;

(2; 1)

2) $\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy,$ სადაც L არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ელიფსი;

3) $\oint_L e^{y^2 - x^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy),$ სადაც L არის $x^2 + y^2 = R^2$

წრეწირი;

4) $\oint_L e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy],$ სადაც L არის

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) სინუსოიდის რკალი და Ox ღერძით შეჭმნილი კონტური;

5) $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy,$ სადაც L არის $x^2 +$

$+ y^2 = ax$ წრეწირი;

6) $\oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy,$ სადაც L არის სამკუთხედის

კონტური რომლის წვეროებია $A(1; 1), B(2; 2)$ და $C(1; 3)$. გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი:

1) $x = a \cos t, y = b \sin t$ ელიფსი;

2) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ასტროიდი ($0 \leq t \leq 2\pi$);

3) $x = 2a \cos t - a \cos 2t, y = 2a \sin t - a \sin 2t$ კარდიოიდი;

4) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის პირველი თალი და Ox ღერძით (t იცვლება 2π -დან 0 -მდე);

5) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ დეკარტის ფოთლის მარჯვენა;

6) $(x + y)^3 = xy$ წირის მარჯვენა.

შ ი თ ი თ ე ბ ა. 5) წირის პარამეტრული განტოლებებია:

$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, 0 \leq t < +\infty.$

3. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის გამოყენება.

6.19. გამოთვალეთ $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა წერტილის გაღმავდილებად $O(0; 0)$ წერტილიდან $A(1; 1)$ წერტილამდე; 1) $y = x$ წრფის გასწვრივ; 2) $y = x^2$ პარაბოლის გასწვრივ.

6.20. სიბრტყის ყოველ წერტილზე მოქმედებს მუდმივი F , სიდიდის ტოლი ძალა, რომელიც ემთხვევა Ox ღერძის დადებით მიმართულებას. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა მატერიალური წერტილის საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით გადასადგილებლად $x^2 + y^2 = R^2$ წრეწირის გასწვრივ პირველ მეოთხედში.

6.21. იპოვეთ სიძიმის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, როდესაც m მასის მქონე მატერიალური წერტილი გადაადგილდება $A(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილში (Ox ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით).

6.22. იპოვეთ $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა თუ მისი მოქმედებით მატერიალური წერტილი გადაადგილდება $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($y > 0$) ელიფსზე $A(a; 0)$ წერტილიდან $B(-a; 0)$ წერტილამდე.

6.23. მატერიალური წერტილი მოძრაობს $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ელიფსზე ისე, რომ ყოველ წერტილში მასზე მოქმედებს F ძალა, რომელიც სიდიდით უდრის მანძილს ამ წერტილიდან ცენტრამდე და მიმართულია ცენტრისაკენ. იპოვეთ F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, როდესაც მატერიალური წერტილი ასრულებს სრულ ბრუნს.

6.24. აჩვენეთ რომ $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ ძალის მიერ A წერტილიდან B წერტილში მატერიალური წერტილის გადაადგილებასზე შესრულებული მუშაობა არ არის დამოკიდებული გადაადგილებული გზის ფორმასზე.

6.25. იპოვეთ $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, თუ მისი მოქმედებით მატერიალური წერტილი გადაადგილდება

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 2a^2 \\ y = x \end{cases}$$

წირზე ($a; a; 0$) წერტილიდან ($a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; a$) წერტილამდე.

§ 7. ზედაპირული ინტეგრალი

1. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი.

გამოთვალეთ პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი (მაგ. 7.1—7.3):

538

7.1. 1) $\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) ds$, სადაც S არის $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

სიბრტყის ნაწილი მოთავსებული პირველ ოქტანტში;

2) $\iint_S (x + y + z) ds$, სადაც S არის $3x + y + z = 6$ სიბრტყის

ნაწილი მოთავსებული პირველ ოქტანტში;

3) $\iint_S xyz ds$, სადაც S არის $x + y + z = 1$ სიბრტყის ნაწილი

მოთავსებული პირველ ოქტანტში;

4) $\iint_S \frac{ds}{(x + z + 1)^2}$, სადაც S არის $x - y + z - 1 = 0$ სიბრტყის ნა-

წილი მოთავსებული მეორე ოქტანტში ($x > 0$, $y < 0$, $z > 0$).

7.2. 1) $\iint_S (x + y + z) ds$, სადაც S არის $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,

$0 \leq z \leq 1$ კუბის ზედაპირი;

2) $\iint_S x ds$, სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედაპირის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში;

3) $\iint_S (x^2 + y^2) ds$, სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს

ზედაპირი;

4) $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds$, სადაც S არის $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ სხე-

ვარსფერო.

7.3. 1) $\iint_S x^2 y^2 ds$, სადაც R არის $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფერო;

2) $\iint_S z ds$, სადაც S არის $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ კონუსის ზედაპირის

ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $z=1$ და $z=2$ სიბრტყეებს შორის;

3) $\iint_S \frac{z ds}{x^2 + y^2}$, სადაც S არის $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის ნაწილი, რომელიც მისთვის ამოიკვეთება $x^2+y^2=2$ ცილინდრით;

4) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$, სადაც S არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ კონუსის ვერტიკალი ზედაპირი ($0 \leq z \leq b$).

2. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალის გამოთვლა.

გამოთვალეთ მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი (№№ 7.4—7.6):

7.4. 1) $\iint_S z dx dy$, სადაც S არის $x+2y+3z=6$ სიბრტყის პირველ ოქტანტში მოთავსებული ნაწილის ზედა მხარე;

2) $\iint_S z dx dy$, სადაც S არის $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს გარე მხარე;

3) $\iint_S z dx dy$, სადაც S არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის გარე მხარე;

4) $\iint_S z^2 dx dy$, სადაც S არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის გარე მხარე.

7.5. 1) $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, სადაც S არის $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ სიბრტყეებით შედგენილი კუბის გარე მხარე;

2) $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, სადაც S არის $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ სიბრტყეებით შედგენილი კუბის გარე მხარე;

$z=0, x+y+z=1$ სიბრტყეებით შედგენილი პირამიდის გარე მხარე;

3) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, სადაც S არის $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფეროს ზედა მხარე;

4) $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$, სადაც S არის $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფეროს ზედა მხარე.

7.6. 1) $\iint_S (z-R)^2 dx dy$, სადაც S არის $z=R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფეროს ზედა მხარე;

2) $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, სადაც S არის $x+2z=2$ სიბრტყის ზედა მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და ჩამოჭრილია $y=4$ სიბრტყით;

3) $\iint_S yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx$, სადაც S არის $x=0, y=0, z=0, z=H$ სიბრტყეებითა და $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრით შემოსაზღვრული ზედაპირის გარე მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში;

4) $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$, სადაც S არის $x^2+y^2=z^2$ ($0 \leq z \leq H$) კონუსური ზედაპირის გარე მხარე.

3. გაუს-ოსტროგრადსკისა და სტოკის ფორმულები

გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ზედაპირული ინტეგრალები (№№ 7.7, 7.8):

7.7. 1) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, სადაც S არის $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ კუბის ზედაპირის გარე მხარე;

$$2) \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } x=0, y=0,$$

$z=0, x+y+z=a$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის ზედაპირის გარე მხარე;

$$3) \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ სფეროს გარე მხარე};$$

$$4) \iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz, \text{ სადაც } S \text{ არის}$$

$z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$ ზედაპირებითა და $x=0, y=0, z=0$ ($x>0, y>0$) სიბრტყეებით შეღვანილი ზედაპირის გარე მხარე.

$$7.8. 1) \iint_S (1+2x) dy dz + y dz dx + z dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის}$$

$x^2+y^2=z^2, z=4$ ($z>0$) ზედაპირებით შეღვანილი ზედაპირის გარე მხარე;

$$2) \iint_S x dy dz + xz dz dx + y dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } z=4-x^2-y^2,$$

$z=0, (z>0)$, ზედაპირებით შეღვანილი ზედაპირის გარე მხარე;

$$3) \iint_S (y^2+z^2) dy dz - y^2 dz dx + 2yz dx dy, \text{ სადაც } S$$

არის $x^2+z^2=y^2, y=1$ ($y>0$) ზედაპირებით შეღვანილი ზედაპირის გარე მხარე;

$$4) \iint_S \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6y z^2 \right) dy dz + 2x \operatorname{arctg} y dz dx -$$

$$- \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } z=1-x^2-y^2;$$

$z=0$ ($z>0$) ზედაპირებით შეღვანილი ზედაპირის გარე მხარე.

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალი (№№ 7.9; 7.10):

$$7.9. 1) \oint_L z dx + x dy + y dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x^2 + y^2 = 4, z=0 \text{ წრე-წირი};$$

$$2) \oint_L y dx - x dy + z dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, (z>0), \text{ წრეწირი};$$

$$3) \oint_L y dx - x dy + (x+y) dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } z=x^2+y^2, z=1 \text{ წრეწირი};$$

$$4) \oint_L z y^2 dx + x z^2 dy + x^2 y dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x=y^2+z^2, x=9 \text{ წრეწირი};$$

$$7.10. 1) \oint_L y dx - x dy + z dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x^2 + y^2 + z^2 = 1, z=x \text{ წრეწირი};$$

$$2) \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a) \text{ წერტილების მქონე სამკუთხედის } ABCA \text{ კონტური};$$

$$3) \oint_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x^2 + y^2 = 1, x+z=1 \text{ ელიფსი};$$

$$4) \oint_L y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } x=a \cos t, y=a \cos 2t, z=a \cos 3t, \text{ ჩაკეტილი წირი (ინტეგრების მიმართულულება შეესაბამება პარამეტრის ზრდას).}$$

§ 8. მალის თეორიის ელემენტები

$$8.1. \text{ იპოვეთ მოცემული ფუნქციის გრადიენტი მითითებულ წერტილში:}$$

$$1) u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad M(1; 1; -1);$$

$$2) u = ze^{x^2+y^2+z^2}, \quad M(0; 0; 0);$$

$$3) u = \sqrt{4+x^2+y^2+2z}, \quad M(2; 1; 0);$$

$$4) u = \arctg \frac{xy}{z}, \quad M(2; 1; 1).$$

8.2. იპოვეთ კუთხე u ფუნქციის გრადიენტებს შორის M_1 და M_2 წერტილებში, თუ:

$$1) u = \arctg \frac{x}{y}, \quad M_1(1; 1), \quad M_2(-1; -1);$$

$$2) u = (x+y)e^{x+y}, \quad M_1(0; 0), \quad M_2(1; 1).$$

8.3. იპოვეთ კუთხე $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ და $v = \ln(x^2+y^2+z^2)$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M(0; 0; 1)$ წერტილში.

8.4. იპოვეთ წერტილები, რომელშიც $u = \sin(x+y)$ ფუნქციის გრადიენტი ტოლია $\vec{i} + \vec{j}$ ვექტორის.

8.5. იპოვეთ წერტილები, რომელშიც $u = \ln \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ფუნქციის გრადიენტის სიგრძე ტოლია ერთის.

8.6. ვთქვათ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, ხოლო $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივი ვექტორებია. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის გრადიენტი:

$$1) u = \ln |\vec{r}|; \quad 2) u = (\vec{a}, \vec{r});$$

$$3) u = (\vec{a}, \vec{r}) \cdot (\vec{b}, \vec{r}); \quad 4) u = |\vec{a}, \vec{r}|^2.$$

8.7. დაამტკიცეთ, რომ

$$1) (\text{grad } u(|\vec{r}|), \vec{r}) = u'(|\vec{r}|) \cdot |\vec{r}|;$$

$$2) [\text{grad } u(|\vec{r}|), \vec{r}] = 0.$$

იპოვეთ შემდეგი ვექტორული ველის ვექტორული წირები (№№ 8.8; 8.9):

$$8.8. \quad 1) \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}; \quad 2) \vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k};$$

$$3) \vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}; \quad 4) \vec{a} = 2x\vec{j} + 4y\vec{k};$$

$$5) \vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}; \quad 6) \vec{a} = z\vec{j} - y\vec{k}.$$

$$8.9. \quad 1) \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad 2) \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$

სადაც a_1, a_2, a_3 მუდმივებია;

$$3) \vec{a} = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k};$$

$$4) \vec{a} = \frac{\vec{i}}{x} + \frac{\vec{j}}{y} + \frac{\vec{k}}{z}.$$

8.10. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველის M წერტილში გამავალი ვექტორული წირი;

$$1) \vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}, \quad (b = \text{const}), \quad M(1; 0; 0);$$

$$2) \vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}, \quad M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

შეამოწმეთ, რომ $\vec{a}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია და იპოვეთ მისი პოტენციალი (№№ 8.11—8.13):

$$8.11. \quad 1) \vec{a} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j};$$

$$2) \vec{a} = \frac{\sin 2x \cos 2y}{\sqrt{\cos^2 x \cdot \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}} \vec{i};$$

$$3) \vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k};$$

$$4) \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

$$8.12. \quad 1) \vec{a} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k};$$

$$2) \vec{a} = (xz+1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k};$$

$$3) \vec{a} = (2xy+z)\vec{i} + (x^2-2y)\vec{j} + x\vec{k};$$

$$4) \vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$8.13. \quad 1) \vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \text{სადაც } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$2) \vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}; \quad 3) \vec{a} = \|\vec{r}\| \cdot \vec{r};$$

$$4) \vec{a} = e^x \sin y \vec{i} + e^x \cos y \vec{j} + \vec{k}.$$

იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველის ნაკადი მიითითებულ ნაკედალ S ზე-
პე. ს. თოფურია, ე. ზოხოლაძე, მ. ვახაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი

დაპირხე უშუალოდ და გავს-ოსტროგრადის ფორმულის გამოყენებით (NEN 8.14; 8.15):

- 8.14. 1) $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k}$, $S: \begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ z = 4; \end{cases}$
 2) $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = H, H > 0; \end{cases}$
 3) $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{j}$, $S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2; \\ z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0; \end{cases}$
 4) $\vec{a} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2, \\ y = 1, (0 \leq y \leq 1). \end{cases}$
- 8.15. 1) $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2; \\ z = x^2 + y^2; \end{cases}$
 2) $\vec{a} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0, z = 1; \end{cases}$
 3) $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ 3z = x^2 + y^2; \end{cases}$
 4) $\vec{a} = yx\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

8.16. შეამოწმეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველი არის თუ არა სოლენოიდული:

- 1) $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - (x^2 + y^2)z\vec{k}$;
 2) $\vec{a} = x(x^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$;
 3) $\vec{a} = y^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j} + z(3y^2 + 1)\vec{k}$;
 4) $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} - y^2z\vec{j} + (z^2y - 2zy + 1)\vec{k}.$

8.17. გამოთვალეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველის ცირკულაცია L წირზე:

- 1) $\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
 2) $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$
 3) $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3; \end{cases}$
 4) $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = Rx. \end{cases}$

8.18. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველის როტორი:

- 1) $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$;
 2) $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$;
 3) $\vec{a} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$;
 4) $\vec{a} = \frac{1}{2}(-y^2\vec{i} + x^2\vec{j}).$

8.19. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ მუდმივი ვექტორებია, ხოლო $\vec{r}$ არის $M(x, y, z)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი, მაშინ

$$\text{rot}(\vec{r}, \vec{a})\vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}];$$

8.20. აჩვენეთ, რომ

$$\text{rot}(|\vec{r}| \vec{a}) = \frac{1}{|\vec{r}|} [\vec{r}, \vec{a}],$$

სადაც $\vec{a}$ მუდმივი ვექტორია, ხოლო $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

8.21. აჩვენეთ, რომ

$$\text{rot}(f(|\vec{r}|)\vec{a}) = \frac{f'(|\vec{r}|)}{|\vec{r}|} [\vec{r}, \vec{a}],$$

სადაც f თავისი არგუმენტის დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $\vec{a}$ მუდმივი ვექტორია.

8.22. აჩვენეთ, რომ $\vec{a} = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია, ე. ი. $\text{rot} \vec{a} = 0$.

8.23. აჩვენეთ, რომ

$$\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \text{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot} \vec{b}).$$

8.24. დაადგინეთ $\vec{a}$ ვექტორულ ველში $\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$ წირითი ინტეგრალი დამოკიდებულია თუ არა ინტეგრირების გზის ფორმაზე:

$$1) \vec{a} = x y^2 z \vec{i} + x^2 y z \vec{j} + \frac{1}{2} x^2 y^2 \vec{k};$$

$$2) \vec{a} = z^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + y^2 \vec{k};$$

$$3) \vec{a} = \frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}};$$

$$4) \vec{a} = \frac{y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

8.25. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორული ველის ცირკულაცია მითითებულ L კონტურზე უშუალოდ და სტოქსის ფორმულის გამოყენებით:

$$1) \vec{a} = z^2 \vec{i}, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x=0, \quad y=0, \quad z=0; \end{cases}$$

$$2) \vec{a} = y^2 \vec{i} + z^2 \vec{j}, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3y + 4z = 5; \end{cases}$$

$$3) \vec{a} = y \vec{i} + x^2 \vec{j} - z \vec{k}, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3; \end{cases}$$

$$4) \vec{a} = y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = x. \end{cases}$$

8.26. $u = \frac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ სკალარულ ველში გადადით სფერულ კოორდინატებზე და იპოვეთ $\text{grad } u$ და Δu .

8.27. $u = \frac{2xyz + x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ სკალარულ ველში გადადით ცილინდრულ კოორდინატებზე და იპოვეთ $\text{grad } u$ და Δu .

8.28. $\vec{a} = \frac{x \vec{j} - y \vec{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ვექტორულ ველში გადადით სფერულ კოორდინატებზე და იპოვეთ $\text{div } \vec{a}$ და $\text{rot } \vec{a}$.

8.29. $\vec{a} = xz \vec{i} + yz \vec{j} - z \sqrt{x^2 + y^2} \vec{k}$ ვექტორულ ველში გადადით ცილინდრულ კოორდინატებზე და იპოვეთ $\text{div } \vec{a}$ და $\text{rot } \vec{a}$.

8.30. იპოვეთ შემდეგი ველების გრადიენტი და ლაპლასიანი:

$$1) u = f(\rho), \quad \text{სადაც } \rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$2) u = f(\rho), \quad \text{სადაც } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$3) u = f(\rho, \theta), \quad \text{სადაც } \rho, \theta \text{ — სფერული კოორდინატები};$$

$$4) u = f(\rho, z), \quad \text{სადაც } \rho, z \text{ — ცილინდრული კოორდინატები};$$

§ 9. რიცხვთა მწკრივები

შეამოწმეთ შესრულებულია თუ არა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა (№№ 9.1—9.3):

$$9.1. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

$$9.2. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n.$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^3}.$$

$$9.3. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-2}{3n^2+1} \right)^{n^3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \arctg \frac{1}{n+2};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \log_n \frac{n+1}{n-1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

შეადგინეთ მწკრივის კერძო ჯამი S_n და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი (ხედავ. 9.4 — 9.9):

$$9.4. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

$$9.5. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3}.$$

$$9.6. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{6^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{6^{n+1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 6^n}{12^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^n + 4}{9^n}.$$

$$9.7. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)};$$

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$9.8. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left(2 + \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n+2} - 2\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n});$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2+n} \cos \frac{2n+1}{n^2+n}.$$

შეითხოვება:

$$1) \frac{1}{n+1} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1};$$

$$3) S_n = \ln \prod_{k=1}^n \frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)} = \ln \frac{2(n+2)}{n+4};$$

$$4) \sin \frac{1}{n^2+n} \cdot \cos \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2}{n} - \sin \frac{2}{n+1} \right).$$

$$9.9. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} (\log_{n+1} 3) \cdot [1 - \log_n(n+1)].$$

შეითხოვება:

$$1) \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n};$$

$$2) \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg} (n+1) - \operatorname{arctg} (n-1);$$

$$3) \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} (n+1) - \operatorname{arctg} n;$$

$$4) (\log_{n+1} 3) \cdot [1 - \log_n(n+1)] = \log_{n+1} 3 - \log_n 3.$$

9.10. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით აჩვენეთ შემდეგი მწკრივის კრებალობა:

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2n^2}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha^n}{n^2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{n}. \end{array}$$

9.11. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით აჩვენეთ შემდეგი მწკრივების განშლადობა:

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

შეღარების ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებალობის საკითხი (№№ 9.12 — 9.18):

$$\begin{array}{ll} 9.12. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9.13. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}; & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^2+2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}. \end{array}$$

$$9.14. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^2}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n^2+1}.$$

$$9.15. \quad 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{n+1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$$

$$9.16. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1});$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n});$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}).$$

$$9.17. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \lg^2 \frac{\pi}{4\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}.$$

$$9.18. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+n}{n^2+1}.$$

კოშის ნიშნის გამოყენებით შესწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№ 9.19—9.21):

$$9.19. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{3^n}.$$

$$9.20. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^{n^3}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}.$$

$$9.21. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^3 \cdot 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^n} \ln^n \frac{n^2+1}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^{2n} \ln^n \frac{n^2+1}{n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით შესწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№ 9.22—9.26):

$$9.22. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n!}.$$

$$9.23. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n \cdot 5^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n (n+1)!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

$$9.24. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(3n+2)!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! n!}{(3n)!}.$$

$$9.25. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(2n+1)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdots (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}.$$

$$9.26. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4) \cdot 3^n}{(2n+1)!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n+1)!}{(3n)!}.$$

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით შეისწავლეთ მწკრივის კრებულობის საკითხი (№№ 9.27 — 9.29):

$$9.27. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n^2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$9.28. \quad 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n (\ln^2 n + 1)}.$$

$$9.29. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} e^{\sqrt[3]{n^2}}}; \quad 4) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2 (\ln \ln n)^2}.$$

შეისწავლეთ მწკრივის კრებულობის საკითხი (№№ 9.30 — 9.33):

$$9.30. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2}{1 + n^4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.01};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(n+1)}{n^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln^2 n}.$$

$$9.31. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 5) \ln n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 - 3) \ln^2 n}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 - 1) \ln n}.$$

$$9.32. \quad 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_a n)^p}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt[3]{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$9.33. \quad 1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2,6)^n n!}{n^n}.$$

დაამტკიცეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი ტოლობების მართებულობა შესაბამისი მწკრივის კრებულობის დადგენით (№№ 9.34; 9.35):

$$9.34. \quad 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}, \quad (a > 1);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

$$9.35. \quad 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^n} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2^n)!} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$$

9.36. ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ დადებითი განშლადი მწკრივებია. აჩვენეთ,

რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ განშლადია, ხოლო $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$

შეიძლება იყოს კრებადი.
მ ი თ ი თ ე ბ ა. მწკრივები

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

და

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

განშლადია, ხოლო

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

მწკრივი კრებადია.

9.37. დამტკიცეთ, რომ თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) მწკრივი კრებადია,

მაშინ კრებადია აგრეთვე მწკრივიც $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. შებრუნე-

ბული დებულება საზოგადოდ მართებული არ არის. მო-
იყვანეთ სათანადო მაგალითი.

9.38. დამტკიცეთ, რომ თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ კრებადია, მაშინ

კრებადია აგრეთვე მწკრივები:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

9.39. აჩვენეთ, რომ თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n \neq 0$, ($a_n > 0$), მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

განშლადია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. შეადარეთ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი ჰარმონიულ
მწკრივს.

9.40. აჩვენეთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ ($a_n > 0$) ზღვრის არ არსებობა არ არის

აუცილებელი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის კრებადობისათვის.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მართლაც

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

კრებადი მწკრივისათვის: $n a_n = \frac{1}{n}$, როცა n არ არის სრული

კვადრატი, ხოლო $n a_n = 1$ წინააღმდეგ შემთხვევაში.

9.41. თუ (a_n) მიმდევრობა ($a_n > 0$) მონოტონურად კლებდა, მაშინ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია

$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. აჩვენეთ, რომ ეს პირობა მწკრივის კრებადო-

ბისათვის საკმარისი არ არის.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. მართლაც, ნებისმიერი m და $n > m$ -სათვის

$$(n - m) a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < R_m,$$

სადაც R_m მოცემული მწკრივის ნაშთია, ამ უტოლობიდან ვაქვს

$$n a_n < \frac{n}{n-m} R_m.$$

გთქვამთ $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი ε -ისთვის. შევარჩიოთ m ისე, რომ $R_m < \varepsilon$. ე. ი. $\frac{\varepsilon}{R_m} > 1$. ამიტომ არსებობს ისეთი n_0 , რომ $\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{R_m}$, როცა $n > n_0$. ე. ი. $n a_n < \varepsilon$, როცა $n > n_0$.

9.42. დამტკიცეთ, რომ თუ დადებითი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი კრებალია, მაშინ კრებალია $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ მწკრივიც. აჩვენეთ, რომ

შებრუნებული დებულება საზოგადოდ მართებული არ არის. მითითებულია, რადგან $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ამიტომ არსებობს ისეთი n_0 , რომ $a_n^2 < a_n$, როცა $n > n_0$.

9.43. დამტკიცეთ, რომ თუ დადებითი მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობის ერთი მაინც ქვემიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ ეს მწკრივი კრებალია.

9.44. დამტკიცეთ, რომ თუ $(n a_n)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ მწკრივი კრებალია.

9.45. დამტკიცეთ, რომ თუ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, სადაც $a_n \geq 0$, კრებალია

და $a_{n+1} \leq a_n$ ($n \in \mathbb{N}$), მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ მწკრივი აბრუვე კრებალია.

მითითებულია, რადგან $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ მონოტონურად კლებადია და

მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ კრებალია, ამიტომ (იხ. ამოცანა 9.41):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = 0.$$

ე. ი. $\exists M > 0$ ისეთი, რომ $\sqrt{n} a_n < M$. აქედან

$$a_n^2 = \sqrt{n} a_n \cdot \frac{a_n}{\sqrt{n}} < M \cdot \frac{a_n}{\sqrt{n}}.$$

შეისწავლეთ ნიშანშრიცულულობითი მწკრივის კრებალობის, პირაზით კრებალობის და აბსოლუტურად კრებალობის საკითხი (იხ. 9.46—9.50):

$$9.46. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$9.47. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{3n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + \sin^2 n}.$$

$$9.48. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

26. ს. თოფურია, ე. ზოტოლაძე, მ. გიბაშვილი, ნ. შიგინაშვილი

9.49. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin \frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

9.50. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n+4}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos \pi n$.

შ ი თ ი ე ბ ა. 4) აჩვენეთ, რომ

$$\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} > 0$$

და გამოთქალეთ ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right).$$

9.51. დამტკიცეთ, რომ მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2+2}$;
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right).$

9.52. ვთქვათ $f(x)$ არის $[1; +\infty[$ შუილდზე განსაზღვრული და-

ღებითი კლებადი ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ თუ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

მწკრივი კრებალია, მაშინ მისი

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

ნაშთი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

9.53. (1) უტოლობის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული მწკრივის ჯამი Σ სიზუსტით:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\Sigma=0,01$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\Sigma=0,001$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1) \cdot 5^n}$, $\Sigma=0,01$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, $\Sigma=0,01$.

9.54. იპოვეთ მოცემული ნიშანდონაცვლეობითი მწკრივის ჯამი Σ სიზუსტით:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $\Sigma=0,01$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$, $\Sigma=0,1$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n$, $\Sigma=0,01$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}$, $\Sigma=0,001$.

შეისწავლეთ კომპლექსურწევრებიანი მწკრივის კრებადობის საკითხი (№№ 9.55; 9.56):

9.55. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n \cdot 2^n}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i \ln n}{n^2 \ln n}$.

9.56. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

9.57. შეამოწმეთ კრებადობა თუ არა სხვაობა შემდეგი განშლადი მწკრივების:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+2)}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$.

9.58. შეკრიბეთ მწკრივები და გამოთვალეთ მიღებული მწკრივის ჯამი:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} - \frac{(-1)^n \cdot 5}{2^{n+1}} \right]$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-5)^{n+1}}{10^n}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)}{3^n}$
და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} + (-1)^{n+1} (n+1)}{3^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{3}}{2^n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}}$.

9.59. გამოთვალეთ მოცემულ მწკრივთა ნამრავლის c_n ზოგადი წევრი:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}, |a| < 1$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1}, |b| < 1$;
2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ და $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}, |a| < 1$.

9.60. შეიწავლეთ კრებულობაზე შემდეგი მწკრივების ნამრავლი:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{და} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

9.61. აჩვენეთ, რომ კრებულში $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ მწკრივის თავის თავზე ნამრავლი განშლადია.

9.62. ვთქვათ $\alpha > 0$, $\beta > 0$. აჩვენეთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$$

მწკრივების ნამრავლი კრებულადია, როცა $\alpha + \beta > 1$ და განშლადია როცა $\alpha + \beta < 1$.

9.63. აჩვენეთ, რომ

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \right) = 1.$$

§ 10. ფუნქციის მიმდევრობის ზღვართი

იპოვეთ $f_n(x)$ ფუნქციის მიმდევრობის ზღვართი $f(x)$ ფუნქცია E სიმრავლეზე (№№ 10.1 — 10.3):

10.1. 1) $f_n(x) = x^n$, $E = [0; 1]$;

2) $f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+4}$, $E = [0; 1]$;

3) $f_n(x) = x^4 \cos \frac{1}{nx}$, $E =]0; +\infty[$;

4) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $E =]-\infty; +\infty[$.

10.2. 1) $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}$, $E =]-\infty; +\infty[$;

2) $f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}$, $E =]0; +\infty[$;

3) $f_n(x) = \frac{nx^2}{x + 3n + 2}$, $E =]-\infty; +\infty[$;

4) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $E =]-\infty; +\infty[$.

10.3. 1) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $E = [0; +\infty[$;

2) $f_n(x) = n^2 x^n e^{-nx}$, $E = [0; +\infty[$;

3) $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$, $E = [0; 1]$;

4) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right)$, $E =]0; +\infty[$.

აჩვენეთ, რომ $f_n(x)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებულადია E სიმრავლეზე (№№ 10.4; 10.5):

10.4. 1) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $E = [1; +\infty[$;

2) $f_n(x) = x^{2n}$, $E = [0; \delta]$, $0 < \delta < 1$;

3) $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}$, $E = [-1; 1]$;

4) $f_n(x) = \sqrt{n} \sin \frac{x}{n\sqrt{n}}$, $E =]-\infty; +\infty[$.

10.5. 1) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+x}, \quad E=[1; +\infty[;$

2) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad E=[-\infty; +\infty[;$

3) $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}, \quad E=[0; +\infty[;$

4) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad E=[1; +\infty[.$

10.6. აჩვენეთ, რომ $f_n(x)$ მიმდევრობა არ არის თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე:

1) $f_n(x) = x^n, \quad E=[0; 1];$

2) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad E=[0; 2];$

3) $f_n(x) = \sin^n x, \quad E=[0; \frac{\pi}{2}];$

4) $f_n(x) = x^n + x^{2n} - 2x^{3n}, \quad E=[0; 1];$

5) $f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad E=[0; 1];$

6) $f_n(x) = \ln\left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right), \quad E=[0; +\infty[.$

იპოვეთ ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობისა და აბსოლუტურად კრებადობის არე (იხილეთ 10.7—10.13):

10.7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n.$

10.8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}.$

10.9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(1+x^2); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^x.$

10.10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^n};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

10.11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi nx;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot n^{-x}.$

10.12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1};$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sin x}.$

$$10.13. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi x}{n} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n \sin^n x}.$$

10.14. განსაზღვრების საფუძველზე იპოვეთ მწკრივის ჯამი და კრებულობის არე:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(2x-1)}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+x^2)+1}{(n+x^2)^2(n+x^2+1)^2};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \cos \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{x} \right);$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\alpha; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha.$$

10.15. განსაზღვრების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad E = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right];$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}, \quad E = [\delta; +\infty[, \quad \delta > 0;$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}, \quad E = [0; 1];$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{x}}}, \quad E = [0; +\infty[.$$

ვეიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე №№ 19.16—10.20):

$$10.16. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}, \quad E = [0; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad E = [1+\delta; +\infty[, \quad \delta > 0;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n^2+1}}, \quad E = [-3; 3].$$

$$10.17. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\cos nx}}{n \ln^2 n}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, \quad E = [0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \quad E =]-\infty; +\infty[.$$

$$10.18. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad E = [1; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2(n+1)} \right), \quad E = [0; 2];$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2 + \sin x)}, \quad E = [1; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad E = [0; +\infty[.$$

$$10.19. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \ln^2 n, \quad E = [\delta; +\infty[, \quad \delta > 0;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n^2}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(1+nx)}{x^n}, \quad E = [2; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4 + n^2 x^2}, \quad E = [0; +\infty[.$$

$$10.20. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1+n^2 x}, \quad E = [0; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} nx e^{-x^2 n^5}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2 x^2}, \quad E =]-\infty; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \right), \quad E =]0; +\infty[.$$

შეიძლება კრებულობაზე და თანაბრად კრებულობაზე მწკრივების (№№ 10.21 — 10.26):

$$10.21. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}, \quad E = [-1; 2];$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \quad E = [0; 2\pi];$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{x 3^n}, \quad E =]0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}, \quad E =]0; +\infty[.$$

$$10.22. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^2 x^4}, \quad E = [0; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}, \quad E=[0; 1];$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x} \cos nx}{n(2nx^2+1)}, \quad E=[0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \sin nx, \quad E=[-\infty; +\infty[.$$

$$10.23. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad E=[2; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{n \sqrt{n}}, \quad E=[1; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \ln \left(1 + \sin \frac{1}{4^n(x+1)}\right), \quad E=[0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad E=[0; +\infty[.$$

$$10.24. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left(1 + \frac{x}{1+n^2 x^2}\right), \quad E=[0; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x^3}{n}}{x^3 \sqrt{n+1}}, \quad E=[-\infty; +\infty[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} \left(1 + \frac{1}{n} - x\right)^n, \quad E=[0; 1];$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right)^2, \quad E=[-\infty; +\infty[.$$

$$10.25. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^2 e^{-nx}, \quad E=[0; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \operatorname{tg} x}, \quad E=\left]0; \frac{\pi}{2}\right[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{nx} \sin^2 \frac{nx}{n^2+x}, \quad E=[0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} n x^2 e^{-nx} \sin \frac{1}{n}, \quad E=[0; +\infty[.$$

$$10.26. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad E=[0; +\infty[;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x^n), \quad E=\left]\frac{1}{2}; 1\right[;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \sqrt{n}}, \quad E=[0; +\infty[;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n}, \quad E=[0; +\infty[.$$

აჩვენეთ ფუნქციის მწკრივის ჯამის უწყვეტობა E სიმრავლეზე (№№ 10.27; 10.28):

10.27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $E=[0; +\infty[$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + x}$, $E=[-3; +\infty[$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{x^2 + n^2}$, $E=[-\infty; +\infty[$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}$, $E=[0; +\infty[$.

10.28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg nx}{\sqrt[n]{n^2 + x}}$, $E=[-\infty; +\infty[$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt[n]{n}}$, $E=[-1; 2[$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x^2}$, $E=[-\infty; +\infty[$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$, $E=[-1; 1[$.

10.29. აჩვენეთ, რომ შესაძლებელია $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$ მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება $]-\infty; +\infty[$ შუალედში.

10.30. აჩვენეთ, რომ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში.

10.31. აჩვენეთ, რომ შესაძლებელია $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოება $[-1; 1]$ სეგმენტზე ნებისმიერ რიცხვ-ვერ.

10.32. აჩვენეთ, რომ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ ფუნქციის აქვს ყველა რი-ვის წარმოებული $]0; +\infty[$ შუალედში.

10.33. აჩვენეთ, რომ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ ფუნქცია უწყვეტია $[0; +\infty[$ შუალედზე, ხოლო წარმოებალია $]0; +\infty[$ -ზე.

10.34. აჩვენეთ, რომ $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ მიმდევრობა კრებულია $[0; 1]$ სეგმენტზე, მაგრამ

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

10.35. აჩვენეთ, რომ $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ მიმდევრობა თანაბრად კრე-ბალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედზე და

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$$

ყველგან გარდა $x=0$ წერტილისა.

10.36. აჩვენეთ, რომ

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

მიმდევრობა თანაბრად კრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედზე, მაგრამ

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

არცერთი x -სათვის.

10.37. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^4} dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2 x^4} \right) dx.$$

10.38. აჩვენეთ, რომ შესაძლებელია $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ მწკრივის წევრ-წევრა გაწარმოება $]-\infty; +\infty[$ შუალედზე.

10.39. აჩვენეთ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ მწკრივი თანაბრად კრებალია $]-\infty; +\infty[$ შუალედზე, მაგრამ არ შეიძლება მისი წევრ-წევრა გაწარმოება არცერთ შუალედზე.

10.40. ვთქვათ $\{r_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) არის $[0; 1]$ სეგმენტის ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}, \quad x \in [0; 1],$$

უწყვეტია $[0; 1]$ სეგმენტზე, წარმოებალია რაციონალურ წერტილებზე და არ არის წარმოებალი რაციონალურ წერტილებზე.

მითითება. უწყვეტობა ცხადია, $|x - r_n|$ ($n \in \mathbb{N}$) ფუნქცია ყველგან წარმოებალია იმდენად $x = r_n$ წერტილის ამიტომ $f(x)$ არ არის წარმოებალი არცერთ რაციონალურ წერტილზე.

§ 11. ხარისხობანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი და კრებადობის არე (№№ 11.1 — 11.12):

იპოვეთ ხარისხობანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი და კრებადობის არე (№№ 11.1 — 11.12):

11.1. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.

11.2. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

11.3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^n x^n$.

11.4. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, ($a > 0$, $b > 0$).

11.5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n \ln(n+1)}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.
 11.6. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!} x^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+5)^{n^2}} x^n$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n} x^n$.
 11.7. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1) 2^n}$;
 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$.
 11.8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[n]{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$.
 11.9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (x-3)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n^2} (x-1)^n$;
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{-n} \right] (x+1)^n$.
 11.10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n \ln(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$.
 11.11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{n^2}{2}} x^{\frac{n^2}{2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n^2}{2}}}{2^{\frac{n^2}{2}}}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\frac{n^2}{2}} (x+1)^{\frac{n^2}{2}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{\frac{n^2}{2}}}{n^n}$.
 11.12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} x^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{\frac{n^2}{2}}}{(n+1)^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^2+2) (x-1)^{2n}$.
 იპოვეთ ხარისხობანი მწკრივის კრებადობის არე და ჯამი
 (№№ 11.13; 11.14):
 11.13. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$;

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) x^n}{3^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$11.14. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n) x^{n-1}}{2^{n-1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} 2nx(x^2-2)^{n-1}.$$

მითითებ. 4) ვთქვათ მწკრივის ჯამია $S(x)$. იპოვეთ $S'(x)$ და $S''(x)$. მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $S''(x) = S(x)$ საწყისი პირობებით $S(0)=1$, $S'(0)=0$.

5) აღნიშნეთ $(x^2-1)=y$.

გამოთვალეთ რიცხვითი მწკრივის ჯამი (№№ 11.15; 11.16):

$$11.15. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) 3^{n-1}};$$

$$11.16. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 4^n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1) 2^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{2^{n+2}}.$$

გამოთვალეთ $f(x)$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად და იპოვეთ მისი ბოლო მწკრივის კრებადობის არე (№№ 11.17 — 11.22):

$$11.17. \quad 1) f(x)=2^x; \quad 2) f(x)=e^{3x};$$

$$3) f(x)=\cos 5x; \quad 4) f(x)=\sin x^2.$$

$$11.18. \quad 1) f(x)=e^{-x^4}; \quad 2) f(x)=\cos \frac{2}{3} x^3;$$

$$3) f(x)=\frac{2}{1-3x^2}; \quad 4) f(x)=\frac{x^2}{1+x}.$$

$$11.19. \quad 1) f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 1, & \text{როცა } x=0; \end{cases}$$

$$2) f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 3, & \text{როცა } x=0; \end{cases}$$

$$3) f(x)=\sqrt[3]{1+x}; \quad 4) f(x)=\sqrt{1+2x}.$$

$$11.20. \quad 1) f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}; \quad 2) f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$3) f(x)=x^5 \ln(1+x^2); \quad 4) f(x)=\sin^2 x.$$

$$11.21. \quad 1) f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}; \quad 2) f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)};$$

$$3) f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}; \quad 4) f(x)=\frac{3x+4}{x^2+x-6}.$$

$$11.22. \quad 1) f(x)=\ln \frac{3-2x}{2+3x}; \quad 2) f(x)=\ln(12-x-x^2);$$

$$3) f(x)=\ln(1-5x+4x^2); \quad 4) f(x)=\ln(1-x+x^2).$$

გამოთვალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად x_0 წერტილის მიდამოში და იპოვეთ მისი ბოლო მწკრივის კრებადობის არე (№№ 11.23 — 11.25):

$$11.23. \quad 1) f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=1; \quad 2) f(x)=\ln x, \quad x_0=1;$$

$$3) f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=2; \quad 4) f(x)=\frac{1}{x}, \quad x_0=-2.$$

$$11.24. \quad 1) f(x)=\frac{1}{3+x}, \quad x_0=-2; \quad 2) f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}, \quad x_0=-3;$$

$$3) f(x) = e^x, \quad x_0 = 1; \quad 4) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$11.25. \quad 1) f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2; \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, \quad x_0 = -2;$$

$$3) f(x) = \ln(5x + 3), \quad x_0 = -\frac{2}{5};$$

$$4) f(x) = \ln(4 + 3x - x^2), \quad x_0 = 2.$$

გამათხილეთ ფუნქცია მკლორენის მწკრივად მისი წარმომადგენლის მკლორენის მწკრივის გამოყენებით და იპოვეთ მიღებული მწკრივის კრებლობის რადიუსი (№№ 11.26 — 11.29):

$$11.26. \quad 1) y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; \quad 2) y = \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}};$$

$$3) y = \operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2}; \quad 4) y = \operatorname{arctg} \frac{2-2x^2}{1+4x^2}.$$

$$11.27. \quad 1) y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; \quad 2) y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$3) y = \frac{1}{8} \arccos \frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^4}}; \quad 4) y = \arccos \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}.$$

$$11.28. \quad 1) y = \int_0^x t^2 \operatorname{sh} t \, dt; \quad 2) y = \int_0^x \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} dt;$$

$$3) y = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt; \quad 4) y = \int_0^x \frac{\ln(1+4t)}{t} dt.$$

$$11.29. \quad 1) y = \int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t}; \quad 2) y = \int_x^1 \ln \frac{3+t}{3-t} dt;$$

$$3) y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}; \quad 4) y = \int_0^x \frac{t \, dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$5) y = \int_0^x \frac{\arcsin t}{t} dt; \quad 6) y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

შესაბამისი ფუნქციის ხარისხიდან მწკრივად გაშლის გამოყენებით გამოთვალეთ ε სიზუსტით ფუნქციის შემდეგი მნიშვნელობა (№№ 11.30; 11.31):

$$11.30. \quad 1) \sin 1^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-4}; \quad 2) \cos 10^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-4};$$

$$3) \sqrt[3]{\varepsilon}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 4) \ln 1, 2, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$11.31. \quad 1) \sqrt[3]{1, 3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 2) \sqrt[3]{80}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 4) \arcsin \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

ინტეგრალზე მკლორენის მწკრივად გაშლის გამოყენებით გამოთვალეთ ε სიზუსტით შემდეგი ინტეგრალები (№№ 11.32; 11.33):

$$11.32. \quad 1) \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 2) \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3) \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 4) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$11.33. \quad 1) \int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 2) \int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$3) \int_2^4 e^{1/x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$5) \int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}; \quad 6) \int_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

11.34. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$1) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}, \quad xy' = (x+1)y;$$

$$2) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}, \quad y' - xy = 0;$$

$$3) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}, \quad xy'' + y' - y = 0;$$

$$4) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad y'' - xy' - y = 0.$$

11.35. ხარისხოვანი მწკრივების გამოყენებით იპოვეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობებს:

$$1) (1+x^2)y' - 1 = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$2) y'' - xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$3) (1-x^2)y'' - xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$4) (1-x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

§ 12. უპირისპირო და უპირისპირო ინტეგრალი

გამოთვალეთ ფუნქციის მწკრივად 2π პერიოდის მქონე ფუნქცია (№№ 12.1; 12.2):

$$12.1. \quad 1) f(x) = \sin^2 x; \quad 2) f(x) = \cos^2 x;$$

$$3) f(x) = \sin^4 x; \quad 4) f(x) = \sin^6 x.$$

$$12.2. \quad 1) f(x) = \operatorname{sign}(\sin x); \quad 2) f(x) = \operatorname{sign}(\cos x);$$

$$3) f(x) = \arcsin(\sin x); \quad 4) f(x) = \arccos(\cos x).$$

$$\text{მითითება. } 4) \arcsin(\cos x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{როცა } -\pi \leq x \leq 0, \\ -x + \frac{\pi}{2}, & \text{როცა } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

გამოთვალეთ ფუნქციის მწკრივად $]-\pi; \pi[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია (№№ 12.3 — 12.6):

$$12.3. \quad 1) f(x) = x; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & -\pi < x < 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$12.4. \quad 1) f(x) = \pi^2 - x^2; \quad 2) f(x) = x + \operatorname{sign} x;$$

$$3) f(x) = x^2; \quad 4) f(x) = \pi + x.$$

$$12.5. \quad 1) f(x) = \operatorname{ch} x; \quad 2) f(x) = \operatorname{sh} x;$$

$$3) f(x) = |x|; \quad 4) f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x \leq 0, \\ 3x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$12.6. \quad 1) f(x) = e^{ax}, \quad a \neq 0; \quad 2) f(x) = e^{a|x|};$$

$$3) f(x) = x \sin x; \quad 4) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

12.7. გამოთვალეთ ფუნქციის კოსინუსის მწკრივად $]0; \pi[$ შუალედში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია:

$$1) f(x) = x; \quad 2) f(x) = \frac{\pi - x}{2};$$

$$3) f(x) = x \sin x; \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

12.8. გაშალეთ ფურიეს სინუს მწკრივად $[0; \pi]$ შუალედზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია:

- 1) $f(x) = x$;
- 2) $f(x) = \cos 2x$;
- 3) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$;
- 4) $f(x) = x(\pi - x)$;
- 5) $f(x) = x \sin x$;
- 6) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

12.9. გაშალეთ $[0; \pi]$ შუალედზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია:
ა) ფურიეს კოსინუს მწკრივად, ბ) ფურიეს სინუს მწკრივად.

- 1) $f(x) = 2x$;
- 2) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$;
- 3) $f(x) = e^x$;
- 4) $f(x) = \operatorname{ch} x$.

12.10. გაშალეთ $f(x) = x^2$ ფუნქცია:

- ა) $[0; \pi]$ შუალედში ფურიეს კოსინუს მწკრივად;
- ბ) $[0; \pi]$ შუალედში ფურიეს სინუს მწკრივად;
- გ) $[-\pi; \pi]$ შუალედში ფურიეს მწკრივად;
- დ) $[0; 2\pi]$ შუალედში ფურიეს მწკრივად ისე, რომ მწკრივის ჯამი იკლებოდეს ნული იქონი $[-\pi; 0]$ შუალედში.

12.11. გაშალეთ ფურიეს მწკრივად პერიოდული ფუნქცია:

- 1) $f(x) = |\cos x|$;
- 2) $f(x) = |\sin x|$;
- 3) $f(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$;
- 4) $f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

გაშალეთ ფურიეს მწკრივად $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში (იხილეთ 12.12 — 12.14):

- 12.12. 1) $f(x) = |x|$, $[-1; 1]$;
- 2) $f(x) = 2x$, $[0; 1]$;
- 3) $f(x) = e^x$, $[-1; 1]$;
- 4) $f(x) = e^x - 1$, $[0; 2\pi]$.

- 12.13. 1) $f(x) = x$, $[1; 3]$;
- 2) $f(x) = x^2$, $[-1; 1]$;

- 3) $f(x) = x \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$;
- 4) $f(x) = 4 - x$, $[2; 6]$.

12.14. 1) $f(x) = (x - 2\pi)^2$, $[\pi; 3\pi]$;

- 2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 3\pi < x < 4\pi, \\ 2, & \text{როცა } x = 4\pi, \\ 3, & \text{როცა } 4\pi < x < 5\pi, \end{cases}$ $[3\pi; 5\pi]$;

- 3) $f(x) = \begin{cases} a, & \text{როცა } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{a+b}{2}, & \text{როცა } x = \frac{\pi}{2}, \\ b, & \text{როცა } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, \end{cases}$ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$;

- 4) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{როცა } 1 < x < 2, \\ 3-x, & \text{როცა } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$ $[0; 3]$.

12.15. გაშალეთ ფურიეს კოსინუს მწკრივად $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{როცა } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ $[0; 2]$;
- 2) $f(x) = e^x$, $[0; \ln 2]$;
- 3) $f(x) = x + 2\pi$, $[-3\pi; -2\pi]$;

- 4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \frac{3}{2} < x \leq 2, \\ 3-x, & \text{როცა } 2 < x < 3, \end{cases}$ $\left[\frac{3}{2}; 3 \right]$.

12.16. გაშალეთ ფურიეს სინუს მწკრივად $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში:

- 1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$ $[0; \pi]$;

- 2) $f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & \text{როცა } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{როცა } x = 1; \end{cases}$ $[0; 1]$;

- 3) $f(x) = \pi$, $[1\pi; 2\pi]$;

- 4) $f(x) = x - \pi$, $[\pi; 2\pi]$.

12.17. ჩაწერეთ $f(x)$ ფუნქციის ფორმის მწკრივი კომპლექსური ფორმით მითითებულ შუალედში:

1) $f(x) = |x|$, $[-\pi; \pi]$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{როცა } x = \pi, \\ -1, & \text{როცა } \pi < x \leq \pi; \end{cases} \quad [0; \pi];$

3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases} \quad [0; \pi];$

4) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{როცა } -\pi < x < \pi, \\ \chi \pi, & \text{როცა } x = \pm \pi, \end{cases} \quad [-\pi; \pi];$

5) $f(x) = x^3$, $[-\pi; \pi]$;

6) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{როცა } 1 < x < 3, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } x = 0 \text{ ან } x = 1. \end{cases}$

12.18. მითითებული ფუნქციის ფორმის ტრიგონომეტრიულ მწკრივად გაშლის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი პიქტეითი მწკრივის ჯამი:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{როცა } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0; \end{cases}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $f(x) = |x|$, როცა $-\pi \leq x \leq \pi$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $f(x) = x^2$, როცა $-\pi \leq x \leq \pi$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $f(x) = x^3$, როცა $-\pi \leq x \leq \pi$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $f(x) = x^2$, როცა $-\pi \leq x \leq \pi$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$, $f(x) = x(\pi - x)$, როცა $0 \leq x \leq \pi$.

($f(x)$ გამოვლეთ ფორმის სინუს მწკრივად).

12.19. იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

წარმოადგინეთ $f(x)$ ფუნქცია ფორმის ინტეგრალით (№№ 12.20 — 12.22):

12.20. 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{თუ } x = 1 \text{ და } x = -1, \\ 0, & \text{თუ } |x| > 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \text{ } x > 1 \text{ და } f(-x) = -f(x); \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{როცა } |x| > \pi; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

12.21. 1) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{როცა } -2 < x < -1, \\ x, & \text{როცა } -1 < x < 1, \\ -x+2, & \text{როცა } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{როცა } |x| > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = e^{-|x|}$; 3) $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$;

4) $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$.

12.22. 1) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0)$;

2) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \quad (\alpha > 0)$;

3) $f(x) = e^{-x^2}$; 4) $f(x) = x e^{-x^2}$;

5) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -e^{-x}, & \text{როცა } x < 0; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{როცა } x \geq 0, \\ e^x, & \text{როცა } x < 0. \end{cases}$

12.23. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ფორმას ვარაუდშენა, თუ:

1) $f(x) = e^{-a^2|x|}$; 2) $f(x) = x e^{-|x|}$;

3) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x$.

12.24. იპოვეთ $\varphi(x)$ ფუნქციას, თუ:

1) $\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt \, dt = \frac{1}{1+x^2}$;

2) $\int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt \, dt = e^{-x} \quad (x > 0)$.

§ 12. მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალური განტოლებები

გარკვევით განტოლების ტიპი (№№ 13.1; 13.2):

13.1. 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

2) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

4) $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

13.2. 1) $\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

2) $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - (\cos^2 x - 2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

13.3. იპოვეთ მოცემული განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობებს:

1) $\frac{y^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$;

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u|_{t=0} = x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x$;

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = A \sin x$.

13.4. სიმის რხევა განისაზღვრება განტოლებით

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

იპოვეთ სიმის ფორმა $t = \pi$ მომენტისათვის, თუ

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x.$$

იპოვეთ (ფურცის მეთოდით) სიმის რხევის განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც დაკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო და საწყის პირობებს (№№ 13.5 — 13.7):

13.5. 1) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$

$$u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

2) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & \text{თუ } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & \text{თუ } c \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0;$$

3) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{4h}{l^2} x(l-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

4) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v_0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

13.6. 1) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & \text{თუ } x \in [\alpha, \beta]; \\ 0, & \text{თუ } x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

სადაც $0 \leq \alpha < \beta \leq l;$

2) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } 0 \leq x < x_0 - \alpha, \\ A \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, & \text{თუ } x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \\ 0, & \text{თუ } x_0 + \alpha < x \leq l; \end{cases}$$

3) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin \frac{2\pi}{l} x;$$

4) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos \frac{\pi}{2l} x;$$

13.7. 1) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x;$$

2) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x;$$

3) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1;$$

4) $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

13.8. იპოვეთ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

სითბოგამტარობის განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის პირობას:

$$1) u|_{t=0} = \begin{cases} u_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right), & \text{როცა } 0 \leq x \leq l, \\ u_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), & \text{როცა } -l \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{როცა } x > l \text{ ან } x < -l; \end{cases}$$

$$2) u|_{t=0} = u_0 e^{-\sigma^2 x^2}, \quad u_0 > 0, \sigma > 0;$$

$$3) u|_{t=0} = u_0 e^{-\sigma^2 |x|}.$$

13.9 იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (სითბოგამტარობის განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{როცა } 0 < x < x_1, \\ u_0, & \text{როცა } x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{როცა } x_2 < x \end{cases}$$

და სასაზღვრო პირობებს

$$u|_{x=0} = v_0.$$

იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მითითებულ საწყის და სასაზღვრო პირობებს (პნპ 13.10 — 13.12):

$$13.10. 1) u|_{t=0} = \frac{Cx(l-x)}{l^2}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$$

$$2) u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & \text{თუ } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{თუ } \frac{l}{2} < x < l, \end{cases} \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$$

$$3) u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}, & \text{თუ } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \text{თუ } \frac{l}{2} < x < l; \end{cases} \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$$

$$4) u|_{t=0} = u_0 \quad (0 < x < l), \quad u|_{x=0} = u_1, \quad u|_{x=l} = u_2.$$

$$13.11. 1) u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & \text{თუ } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \text{თუ } \frac{l}{2} < x < l, \end{cases}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1;$$

$$2) u|_{t=0} = u_0, \quad 0 < x < l, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1;$$

$$3) u|_{t=0} = \frac{u_0}{l}x, \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1;$$

$$4) u|_{t=0} = \frac{u_0}{l}(l-x), \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1.$$

$$13.12. 1) u|_{t=0} = x^2 - 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0;$$

$$2) u|_{t=0} = u_0(l-x), \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = u|_{x=l} = 0;$$

$$3) u|_{t=0} = u_0 x, \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = q;$$

$$4) \left. u \right|_{x=0} = 0, \quad 0 < x < l, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. u \right|_{x=l} = 0.$$

იპოვეთ ერთეულწიფიანი წრეში პარმონიული u ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას (№13.13; 13.14):

$$13.13. \quad 1) \left. u \right|_{r=1} = A; \quad 2) \left. u \right|_{r=1} = A \cos \varphi;$$

$$3) \left. u \right|_{r=1} = A + By; \quad 4) \left. u \right|_{r=1} = Axy.$$

$$13.14. \quad 1) \left. u \right|_{r=1} = A + B \sin \varphi; \quad 2) \left. u \right|_{r=1} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi;$$

$$3) \left. u \right|_{r=1} = \sin^2 \varphi; \quad 4) \left. u \right|_{r=1} = \cos^2 \varphi.$$

13.15. იპოვეთ ლაპლასის განტოლების ამონახსნი წრულ რეგულში $1 < r < 2$, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$1) \left. u \right|_{r=1} = A, \quad \left. u \right|_{r=2} = B;$$

$$2) \left. u \right|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi, \quad \left. u \right|_{r=2} = \sin^2 \varphi;$$

$$3) \left. u \right|_{r=1} = 0, \quad \left. u \right|_{r=2} = y.$$

13.16. იპოვეთ $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha$ წრულ რეგულში პარმონიული ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$1) \left. u \right|_{\varphi=0} = \left. u \right|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad \left. u \right|_{r=R} = A\varphi;$$

$$2) \left. u \right|_{r=R} = \frac{u_0}{\alpha} \varphi, \quad \left. u \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. u \right|_{\varphi=\alpha} = u_0.$$

13.17. იპოვეთ $0 < x < a$, $0 < y < b$ მართკუთხედში პარმონიული u ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$1) \left. u \right|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \left. u \right|_{x=a} = 0,$$

$$\left. u \right|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \left. u \right|_{y=b} = 0;$$

$$2) \left. u \right|_{x=0} = Ay(b-y), \quad \left. u \right|_{x=a} = 0,$$

$$\left. u \right|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \left. u \right|_{y=b} = 0.$$

13.18. იპოვეთ $0 < x < a$, $0 < y < \infty$ უსასრულო ზოლში პარმონიული ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$\left. u \right|_{x=0} = \left. u \right|_{x=a} = 0, \quad \left. u \right|_{y=0} = A \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad \left. u \right|_{y=\infty} = 0.$$

13.19. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ პარმონიულია $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ კვადრატში და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$\left. u \right|_{x=0} = 0, \quad \left. u \right|_{x=1} = e^{-y} \sin 1, \quad \left. u \right|_{y=0} = \sin x, \quad \left. u \right|_{y=1} = e^{-1} \sin x.$$

§ 14. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების თეორია ელემენტები

იპოვეთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები შემდეგი კომპლექსური რიცხვების (№14.1; 14.2):

$$14.1. \quad 1) e^{-\frac{\pi}{3}i}; \quad 2) e^{\frac{1}{2}-2i}; \quad 3) e^{1+\frac{\pi}{2}i}; \quad 4) e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4}i}.$$

$$14.2. \quad 1) \cos(2+i); \quad 2) \sin(1-5i); \quad 3) \sin i; \quad 4) \operatorname{ch}(1+2i).$$

14.3. დაამტკიცეთ ტოლობა:

$$1) \sin 2z = 2 \sin z \cos z; \quad 2) \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$3) \sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad 4) \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z.$$

14.4. იპოვეთ:

- 1) $\operatorname{Re}(\sin z)$; 2) $\operatorname{Im}(\sin z)$;
3) $\operatorname{Re}(ze^z)$; 4) $\operatorname{Im}(ze^z)$.

14.5. ახვეწეთ, რომ:

- 1) $|\sin 2i| > 1$; 2) $|\cos 3i| > 1$.

გამოთვალეთ (№№ 14.6; 14.7):

14.6. 1) $\ln 4$; 2) $\operatorname{Ln}(-i)$; 3) $\operatorname{Ln}(1+7i)$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$.

14.7. 1) i^i ; 2) $(1+i)^i$; 3) 2^i ; 4) 3^{3+i} .

დაადგინეთ კოზი-რიმანის პირობების მართებულობა ქვემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციებისათვის და გამოიყვანეთ მათი გაწარმოების წესი (№№ 14.8 — 14.11):

14.8. 1) $f(z)=z^n$; 2) $f(z)=e^z$;
3) $f(z)=\ln z$; 4) $f(z)=\frac{1}{z}$.

14.9. 1) $f(z)=\sin z$; 2) $f(z)=\cos z$;
3) $f(z)=\operatorname{tg} z$; 4) $f(z)=\operatorname{ctg} z$.

14.10. 1) $f(z)=\operatorname{sh} z$; 2) $f(z)=\operatorname{ch} z$;
3) $f(z)=\operatorname{th} z$; 4) $f(z)=\operatorname{cth} z$.

14.11. 1) $f(z)=\operatorname{arc} \sin z$; 2) $f(z)=\operatorname{arccos} z$;
3) $f(z)=\operatorname{arctg} z$; 4) $f(z)=\operatorname{arccctg} z$.

დაადგინეთ წარმოებადია თუ არა შემდეგი ფუნქციები და მოძებნეთ წარმოებული მისი არსებობის შემთხვევაში (№№ 14.12 — 14.15):

14.12. 1) $f(z)=z$; 2) $f(z)=\bar{z}$;
3) $f(z)=z^2$; 4) $f(z)=z^3$.

14.13. 1) $f(z)=y+xi$; 2) $f(z)=|z|$;

3) $f(z)=x^2+y^2-2xyi$; 4) $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$.

14.14. 1) $f(z)=e^{2z+i}$; 2) $f(z)=e^{2iz}$;

3) $f(z)=e^{2x} \cos 3y - i e^{2x} \sin 3y$;

4) $f(z)=\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

14.15. 1) $f(z)=ze^{-z}$; 2) $f(z)=\frac{e^z}{z}$;

3) $f(z)=2z+3\bar{z}$; 4) $f(z)=e^{iz}$.

14.16. იპოვეთ ყველა ის წერტილი, სადაც წარმოებადია ფუნქცია:

1) $f(z)=\operatorname{Re} z$; 2) $f(z)=z \operatorname{Re} z$;
3) $f(z)=x^2+iy^2$; 4) $f(z)=x^2y^2$.

გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 14.17 — 14.20):

14.17. 1) $\int_L |z| dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $z_0=0$ წერტილიდან

$z_1=2+i$ წერტილამდე;

2) $\int_L [i+(z)^2] dz$, სადაც L არის $y=x^2$ პარაბოლის რკალი $z_0=0$ წერტილიდან $z_1=1+i$ წერტილამდე;

3) $\int_L \operatorname{Im} z dz$, სადაც L არის ნამდვილი ღერძის მონაკვეთი $z_0=-3$ წერტილიდან $z_1=3$ წერტილამდე;

4) $\int_L z \cdot \bar{z} dz$, სადაც L არის $|z|=1$ წრეწირის რკალი $0 \leq \arg z \leq \pi$.

14.18. 1) $\int_L [y+1-xi] dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $z_0=1$ წერტილიდან $z_1=-i$ წერტილამდე;

2) $\int_L z^2 dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი $z_0=1$ წერტილიდან $z_1=i$ წერტილამდე;

3) $\int_L z^2 e^{z^2} dz$, სადაც L არის რაღაც წირი, რომელიც აერთებს $z_0=0$ და $z_1=i\sqrt{\pi}$ წერტილებს;

4) $\int_L z \sin z dz$, სადაც L არის რაღაც წიბი, რომელიც აერთებს $z_0=0$ და $z_1=i$ წერტილებს.

14.19. 1) $\int_L \operatorname{Im} z dz$, სადაც L არის $|z|=3$ წრეწირის რკალი, $0 \leq \arg z \leq \pi$;

2) $\int_L z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, სადაც L არის $|z|=1$ წრეწირის რკალი, $-\pi \leq \arg z \leq 0$;

3) $\int_L \operatorname{Re} z dz$, სადაც L არის $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ ნახევარ-წრეწირი;

4) $\int_L (2z+1) \bar{z} dz$, სადაც L არის $|z|=1$ წრეწირი.

14.20. 1) $\int_L e^z dz$, სადაც L არის ტეხილი, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ წერტილები;

2) $\int_L \bar{z} dz$, სადაც L არის ტეხილი, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$ წერტილები;

3) $\int_L |z| \bar{z} dz$, სადაც L შეკრული კონტურია, რომელიც შედგება $|z|=1$ ზედა ნახევარწრეწირისა და $-1 \leq x \leq 1$ მონაკვეთისაგან;

4) $\int_L (z-z_0)^n dz$, სადაც L არის $|z-z_0|=R$ წრეწირი (n მთელი რიცხვი).

კოშის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალი მითითებული წრეწირის გასწვრივ (იხილეთ 14.21—14.26):

14.21. 1) $\int_L \frac{\sin z}{z+i} dz$, $L: |z+i|=3$;

2) $\int_L \frac{dz}{1-z^2}$, $L: |z-1|=1$;

3) $\int_L \frac{dz}{z^2+1}$, $L: |z+i|=1$;

4) $\int_L \frac{dz}{z^2+1}$, $L: |z|=2$.

14.22. 1) $\int_L \frac{\cos z dz}{z+2i}$, $L: |z+i|=2$;

2) $\int_L \frac{e^{2z} dz}{z-\pi i}$, $L: |z|=4$;

3) $\int_L \frac{e^z}{z^2-1} dz$, $L: |z|=2$;

4) $\int_L \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, $L: |z-2|=\frac{3}{2}$.

14.23. 1) $\int_L \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$, $L: |z|=4$;

2) $\int_L \frac{z dz}{z^4-1}$, $L: |z-2|=2$;

3) $\int_L \frac{e^{1/z}}{z^2+z} dz$, $L: |z-1|=\frac{1}{2}$;

4) $\int_L \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z} dz$, $L: |z|=1$.

14.24. 1) $\int_L \frac{dz}{z^3(z^2+1)}, \quad L: |z-i|=1;$

2) $\int_L \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{z+1}} dz, \quad L: |z|=1;$

3) $\int_L \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3} dz, \quad L: |z|=2;$

4) $\int_L \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}, \quad L: |z+1|=1.$

14.25. 1) $\int_L \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz, \quad L: |z-i|=1;$

2) $\int_L \frac{\operatorname{sh} z^2}{z^3} dz, \quad L: |z|=1;$

3) $\int_L \frac{1-\sin z}{z^2} dz, \quad L: |z|=\frac{1}{2};$

4) $\int_L \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}, \quad L: |z|=2.$

14.26. 1) $\int_L \frac{e^z dz}{(z-i)^3}, \quad L: |z-i|=1;$

2) $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz; \quad L: |z-a|=2;$

3) $\int_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3} dz, \quad L: |z-1|=1;$

4) $\int_L \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^3} dz, \quad L: |z-1|=\frac{1}{2}.$

ამოცემთა კრებულების რედაქციის შეკრების (№№ 14.27 — 14.31):

14.27. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n;$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{2^n}.$

14.28. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n.$

14.29. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni) z^n; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i} \right)^n z^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in} \right)^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n+1}}{2n+1}.$

14.30. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!};$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}.$

14.31. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 (i+1)^n};$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

14.32. იპოვეთ მწკრივის კრებადობის არე:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n};$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{2^n (n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2)^n}.$$

გაშალეთ ტეილორის მწკრივად $z=0$ წერტილის მიდამოში შემდეგი ფუნქციები (№№ 14.33; 14.34):

14.33. 1) $\operatorname{sh} z$; 2) $\operatorname{ch} z$; 3) $\sin^2 z$; 4) $e^z \sin z$.

14.34. 1) $\cos^2 z$; 2) $\cos 2z$; 3) $\sin 2z$; 4) $\ln \frac{1+z}{1-z}$.

14.35. გაშალეთ $\ln z$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $z=1$ წერტილის მიდამოში და იპოვეთ მისი კრებადობის წრე.

14.36. გაშალეთ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $z=1$ წერტილის მიდამოში:

$$1) \frac{z}{z+2};$$

$$2) \frac{z^2}{(z+1)^2}.$$

გაშალეთ ლორანის მწკრივად მთითებულ რვაღებში შემდეგი ფუნქციები (№№ 14.37; 14.38):

14.37. 1) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $2 < |z| < 3$;

2) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$, $1 < |z| < 2$;

3) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$, $2 < |z| < \infty$;

4) $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $3 < |z| < \infty$.

14.38. 1) $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$, $0 < |z| < 1$;

2) $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$, $1 < |z| < \infty$;

3) $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$;

4) $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1 < |z| < 2$;

5) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, $0 < |z| < \infty$;

6) $f(z) = (1-z) \sin \frac{1}{z^2}$, $0 < |z| < \infty$.

იპოვეთ ნულები და განსაზღვრეთ მისი რიგი შემდეგი ფუნქციებისათვის (№№ 14.39—14.41):

14.39. 1) $z^2 - z^2$; 2) $z^2 (1-z)$; 3) $\frac{\sin z}{z}$; 4) $z^2 \sin z$.

14.40. 1) $(z^2+1)^2$; 2) $\cos z$; 3) $(z^2+2z+1)^2$; 4) $\operatorname{tg}^2 z$.

14.41. 1) $\frac{z^2+1}{z+1}$; 2) $\operatorname{ctg}^2 z$; 3) $\sin 3z - 3 \sin z$; 4) $\frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z+1}}$.

იპოვეთ განსაკუთრებული წერტილი და განსაზღვრეთ მისი ხისი-ათი შემდეგი ფუნქციებისათვის (№№ 14.42; 14.43):

14.42. 1) $f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$; 2) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$;

3) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; 4) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+z^2}$.

14.43. 1) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$; 2) $f(z) = z e^{1/z}$;

3) $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$; 4) $f(z) = z (e^{1/z} - 1)$.

გამოთვალეთ (№№ 14.44; 14.45):

$$14.44. \quad 1) \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3}; \quad 2) \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{ctg} z;$$

$$3) \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} z; \quad 4) \operatorname{Res}_{z=1} z e^{\frac{1}{z-1}}.$$

$$14.45. \quad 1) \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z}; \quad 2) \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{-z}}{z^2};$$

$$3) \operatorname{Res}_{z=\infty} e^{1/z}; \quad 4) \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}.$$

14.46. გამოთვალეთ ნაშთი ქვემოთ ჩამოთვლილი ფუნქციებისათვის შათი უცვლელ სასრული განსაკუთრებული წერტილების მიმართ:

$$1) f(z) = \frac{1}{\sin z}; \quad 2) f(z) = \frac{1}{\cos z};$$

$$3) f(z) = \frac{1}{z+z^3}; \quad 4) f(z) = \frac{1}{e^z+1}.$$

ნაშთების გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები (№№ 14.47 — 14.53):

$$14.47. \quad 1) \int_L \frac{dz}{z^3-z^5}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=3 \text{ წრეწირი};$$

$$2) \int_L \frac{z dz}{(z-1)(z^2+1)}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z+i|=1 \text{ წრეწირი};$$

$$3) \int_L \frac{z dz}{1-2\sin^2 z}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=2 \text{ წრეწირი};$$

$$4) \int_L \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=2 \text{ წრეწირი}.$$

$$14.48. \quad 1) \int_L \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z-2|=\frac{1}{2} \text{ წრეწირი};$$

$$2) \int_L \frac{dz}{z^2(z^2-1)}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=3 \text{ წრეწირი};$$

$$3) \int_L \frac{dz}{z^2+1}, \text{ სადაც } |z-1-i|=1 \text{ წრეწირი};$$

$$4) \int_L \frac{dz}{z^2+1}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z-1|=1 \text{ წრეწირი}.$$

$$14.49. \quad 1) \int_L \frac{\operatorname{ctg} z dz}{4z-\pi}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=1 \text{ წრეწირი};$$

$$2) \int_L e^{\frac{z}{1-z}} dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=2 \text{ წრეწირი};$$

$$3) \int_L \sin^2 \frac{1}{z} dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=r \text{ წრეწირი};$$

$$4) \int_L \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=1 \text{ წრეწირი}.$$

$$14.50. \quad 1) \int_L z^3 \sin \frac{1}{z} dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=\frac{1}{2} \text{ წრეწირი};$$

$$2) \int_L \frac{z^2 dz}{2z^4+1}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=1 \text{ წრეწირი};$$

$$3) \int_L \frac{dz}{(2z^2+1)(z^4-1)^2}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=2 \text{ წრეწირი};$$

$$4) \int_L \frac{dz}{(z^2+1)^2(z^4+1)^2}, \text{ სადაც } L \text{ არის } |z|=4 \text{ წრეწირი}.$$

$$14.51. \quad 1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a \cos x}, \quad (0 < a < 1);$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad (n \geq 1);$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2};$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$14.52. \quad 1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2};$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx;$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx;$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx.$$

$$14.53. \quad 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2};$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} dx, \quad (0 < a < 1);$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx;$$

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

§ 15. უკარგავი პლანისა და მისი ზოგადი
გამოყენება

დაადგინეთ მოცემული ფუნქციებიდან, რომელია ორიგინალი და
იპოვეთ მისი ზრდის მაჩვენებელი (№№ 15.1—15.4):

$$15.1. \quad 1) f(t) = t^6; \quad 2) f(t) = e^{(3+5i)t};$$

$$3) f(t) = \frac{1}{t}; \quad 4) f(t) = e^{-t^2}.$$

$$15.2. \quad 1) f(t) = t \sin \frac{1}{t}; \quad 2) f(t) = \frac{1}{t-1};$$

$$3) f(t) = \operatorname{tg} t; \quad 4) f(t) = \operatorname{ctg} t.$$

$$15.3. \quad 1) f(t) = \operatorname{ch}(2-3i)t; \quad 2) f(t) = \operatorname{sh}(5-2i)t;$$

$$3) f(t) = \sin(3+7i)t; \quad 4) f(t) = \cos(4-i)t.$$

$$15.4. \quad 1) f(t) = t^t; \quad 2) f(t) = \frac{1}{t^2+t+1};$$

$$3) f(t) = a^t, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad 4) f(t) = e^{t^2}.$$

იპოვეთ შემდეგი ორიგინალების გამოსახულება (№№ 15.5—15.14):

$$15.5. \quad 1) f(t) = 4 - 5e^{2t}; \quad 2) f(t) = \frac{1}{3} \sin 3t - 5;$$

$$3) f(t) = 3 \sin 4t - 2 \cos 5t; \quad 4) f(t) = 2 \sin 2t + 3 \operatorname{sh} 2t.$$

$$15.6. \quad 1) f(t) = \sin t \cdot \sin 2t; \quad 2) f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t;$$

$$3) f(t) = \operatorname{ch} 2t + 2e^{-2t} + 1; \quad 4) f(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} + t.$$

$$15.7. \quad 1) f(t) = \sin^2 \omega t; \quad 2) f(t) = \cos^2 t;$$

$$3) f(t) = \sin(\omega t \pm \varphi); \quad 4) f(t) = \cos(\omega t \pm \varphi).$$

$$15.8. \quad 1) f(t) = e^{\lambda t} \sin(\omega t \pm \varphi); \quad 2) f(t) = e^{\lambda t} \cos(\omega t \pm \varphi);$$

$$3) f(t) = e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \beta t; \quad 4) f(t) = e^{-\lambda t} \operatorname{ch} \beta t.$$

$$15.9. \quad 1) f(t) = 3t^2 + 2t - 5; \quad 2) f(t) = 3t^2 e^{-t} + 2t^2 - 1;$$

$$3) f(t) = \frac{\sin t}{t}; \quad 4) f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

$$15.10. \quad 1) f(t) = \frac{e^t - 1}{t}; \quad 2) f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t};$$

$$3) f(t) = e^{\lambda t} \sin^2 t; \quad 4) f(t) = e^{-\lambda t} \cos^2 \beta t.$$

$$15.11. \quad 1) f(t) = \operatorname{sh} \lambda t \cdot \sin \lambda t; \quad 2) f(t) = \operatorname{ch} \lambda t \cdot \cos \lambda t;$$

$$3) f(t) = t \operatorname{sh} \omega t; \quad 4) f(t) = t \operatorname{ch} \omega t.$$

$$15.12. \quad 1) f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}; \quad 2) f(t) = \frac{\sin^2 3t \cdot \sin 7t}{t};$$

$$3) f(t) = \frac{e^{-t}}{t} (1 - \cos t); \quad 4) f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

$$15.13. \quad 1) f(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}; \quad 2) f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2};$$

$$3) f(t) = \frac{\operatorname{sh} \omega t}{\sqrt{t}}; \quad 4) f(t) = \frac{\operatorname{ch} \omega t}{\sqrt{t}}.$$

$$15.14. \quad 1) f(t) = \frac{\cos t - 1}{t}; \quad 2) f(t) = \int_0^t \frac{\cos u - 1}{u} du.$$

$$3) f(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < a, \\ 1, & \text{როცა } t > a; \end{cases} \quad 4) f(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < 2, \quad t > 3, \\ 1, & \text{როცა } 2 < t < 3. \end{cases}$$

იპოვეთ შემდეგი გამოსახულების ორიგინალი (№№ 15.15 — 15.17):

$$15.15. \quad 1) F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}; \quad 2) F(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)^2};$$

$$3) F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}; \quad 4) F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}.$$

$$15.16. \quad 1) F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)};$$

$$2) F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 6p + 11}; \quad 3) F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)};$$

$$4) F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}.$$

$$15.17. \quad 1) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}; \quad 2) F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p-1)(p+1)^2};$$

$$3) F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}; \quad 4) F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2+4)};$$

$$5) F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}; \quad 6) F(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p^2+1)}.$$

15.18. იპოვეთ მოცემული ორიგინალების ნახევრი და ამ ნახევრის გამოსახულება:

$$1) f(t) = t, \quad \varphi(t) = \cos t; \quad 2) f(t) = t, \quad \varphi(t) = e^t;$$

$$3) f(t) = \operatorname{sh} t, \quad \varphi(t) = t^2; \quad 4) f(t) = \operatorname{sh} t, \quad \varphi(t) = \sin t;$$

$$5) f(t) = t^\alpha, \quad \varphi(t) = t^\beta, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0;$$

$$6) f(t) = e^t, \quad \varphi(t) = e^{-t}.$$

15.19. გამოსახულებათი ნაშრომისთვის თვისების გამოყენებით იპოვეთ მოცემული გამოსახულების შესაბამისი ორიგინალი:

$$1) F(p) = \frac{1}{p^2 - 1}; \quad 2) F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2};$$

$$3) F(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)^2}; \quad 4) F(p) = \frac{1}{p^4 - 1};$$

$$5) F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}; \quad 6) F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2}.$$

15.20. დიუჰამელის ფორმულების გამოყენებით იპოვეთ ორიგინალი შემდეგი გამოსახულებების:

$$1) F(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}; \quad 2) F(p) = \frac{1}{p^3(p^2+1)};$$

$$3) F(p) = \frac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

15.21. პარსევალის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრირებული ინტეგრალები:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cdot \cos at}{t} dt; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^3} dt;$$

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt; \quad 4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin at - a \sin t}{t^2} dt \quad (a > 0).$$

$$\sin at = \sin(a \cos \theta + \sin \theta) = \sin a \cos \theta + \cos a \sin \theta$$

იპოვეთ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც დააყენოთ მოცემულ საწყის პირობებს (№№ 15.22 — 15.25):

15.22. 1) $y' + y = 1$, $y(0) = 0$; 2) $y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$;
3) $y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$; 4) $y' + 2y = \sin t$, $y(0) = 0$.

15.23. 1) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
2) $y'' + 3y' = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$;
3) $y'' + 9y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$;
4) $y'' - y' = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

15.24. 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
2) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
3) $y'' + 3y' + 2y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$;
4) $y'' - y' = t^2$, $y(0) = y'(0) = 0$.

15.25. 1) $y'' - 2y' - 3y = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$;
2) $y'' + y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$;
3) $y'' + 4y = \sin 3t$, $y(0) = y'(0) = 0$;
4) $y'' + y = t \cos 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

15.26. 1) $y''' - y'' = \sin t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
2) $y''' - y'' - 6y' = 0$, $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$;
3) $y''' + 4y' = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
4) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

15.27. 1) $y''' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
2) $y''' + y' = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
3) $y^{IV} + y''' = \cos t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$;
4) $y^{IV} - 2y'' + y = \sin t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

15.28. იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

1) $y''' - 3y' + 2y = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$;
2) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12t^2 e^{2t} - e^{2t}$;
3) $y^{IV} + y''' = \cos t$;
4) $y^{IV} - y = t e^t + \cos t$.

დიფერენციალური განტოლებებით იპოვეთ კოშის ამონახსნი ამონახსნი ნულოვანი საწყისი პირობებით შემდეგი განტოლებებისათვის (№№ 15.29; 15.30):

15.29. 1) $y'' - y' = t - 2$; 2) $y'' + y = 2 + e^{-t}$;
3) $y'' + y = 5t^2$; 4) $y'' - 5y' + 6y = \sin t$.

15.30. 1) $y'' - y = \frac{1}{1+e^t}$; 2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$;
3) $y''' - y' = 2e^t$; 4) $y'' - a^2 y = b e^{-t^2}$.

იპოვეთ დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააყენოთ მოცემულ საწყის პირობებს (№№ 15.31; 15.32):

15.31. 1) $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 15$;

2) $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$;

3) $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4$;

4) $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + 3x - 2y = 2e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$.

15.32. 1) $\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$;

2) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' - y - z = 0, \\ y' - x - z = 0, \\ z' - x - y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = y(0) = 0$;

5) $\begin{cases} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$;

6) $\begin{cases} x'' + 3y'' - x = 0, \\ x' + 3y' - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{2}{3}$.

15.33. იპოვეთ ცვლადკოორდინატებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებულ საწყის პირობებს:

- 1) $ty'' + y' + ty = 0$, $y(0) = 1$;
- 2) $ty'' + y' + y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$;
- 3) $ty'' + y' + ty = \cos t$, $y(0) = 1$;
- 4) $ty'' + y' + 4ty = \sin 2t$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

3333333

§ 1.

- 1.1. 1) 1; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $-\frac{7}{6}$; 4) $\frac{3}{2}$. 1.2. 1) $e(e-1)^2$;
 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) $\ln 2$; 4) $(\sqrt{e}-1)^2$. 1.3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi-2}{16}$; 4) $\frac{1}{2}$.
 1.4. 1) $\frac{9}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 2, 4; 5) $\frac{4}{3}a^2$; 6) $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$.
 1.6. 1) $\int_{-2}^4 dy \int_0^2 f(x, y) dx$; 2) $\int_0^4 dx \int_{-3}^1 f(x, y) dy$; 3) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$;
 4) $\int_0^1 dx \int_1^x f(x, y) dy$. 1.7. 1) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$; 2) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$;
 3) $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$; 4) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^0 f(x, y) dy$. 1.8. 1) $\int_0^1 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx +$
 $+\int_1^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y) dx$; 2) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$;
 3) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$; 4) $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy$.
 1.9. 1) $\int_{-3}^{-1} dy \int_0^{y+3} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$;

$$2) \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}+2} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$3) \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x, y) dy;$$

$$4) \int_0^1 dx \int_{x^2/2}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^2 f(x, y) dy.$$

$$1.10. 1) \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx; 2) \int_0^3 dy \int_{10-y}^y f(x, y) dx; 3) \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^y f(x, y) dy;$$

$$4) \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{x^2/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2/2}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2/2}^1 f(x, y) dy. \quad 1.11.$$

$$1) \int_1^4 dx \int_{-2}^1 f(x, y) dy = \int_{-2}^1 dy \int_1^4 f(x, y) dx; 2) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx;$$

$$3) \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx; 4) \int_0^3 dy \int_{-2y}^y f(x, y) dx =$$

$$= \int_{-6}^{-3} dx \int_{-x/2}^x f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_{3x}^1 f(x, y) dy; 5) \int_0^1 dy \int_{1/2}^{5-y} f(x, y) dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{2x+4}^1 f(x, y) dy + \int_{-1}^3 dx \int_0^2 f(x, y) dy + \int_3^5 dx \int_0^{5-x} f(x, y) dy.$$

$$6) \int_{-1}^0 dx \int_{-3x-3}^{2x+2} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x-3}^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{-\frac{1}{3}y-1}^{\frac{2}{3}y+2} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y-1}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$1.12. 1) \int_0^1 dx \int_1^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx; 2) \int_0^1 dx \int_x^{3x} f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y/3}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y/3}^1 f(x, y) dx; 3) \int_0^1 dy \int_{-\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^1 dx \int_{-2x}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy; 4) \int_1^2 dx \int_{1-2x}^{2x-1} f(x, y) dy +$$

$$+ \int_2^3 dx \int_{2-x}^{11-4x} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{2-y}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y+1}{2}}^{11-y} f(x, y) dx. \quad 1.13.$$

$$1) \int_0^1 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 f(x, y) dy;$$

$$2) \int_1^2 dx \int_{2x-1}^{x+2} f(x, y) dy = \int_1^3 dy \int_1^{y+1} f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_{y-2}^2 f(x, y) dx;$$

$$3) \int_0^1 dx \int_{3x+3}^y f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{2x-4}^y f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{-\frac{y+4}{4}}^y f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y-3}{3}}^y f(x, y) dx;$$

$$-1 \quad -4x-4 \quad 0 \quad 2x-4 \quad -4 \quad \frac{y+4}{4} \quad 0 \quad \frac{y-3}{3}$$

$$\begin{aligned}
& 4) \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\frac{x+7}{5}}^{2x+3} f(x, y) dy + \int_{-1}^2 dx \int_{-\frac{x+7}{5}}^{\frac{x+4}{3}} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{x+7}{5}}^{10-4x} f(x, y) dy = \\
& = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-5y-7}^{\frac{10-y}{4}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\frac{10-y}{4}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{3y-4}^{\frac{10-y}{4}} f(x, y) dx. \\
& 1.14. 1) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx; \\
& 2) \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} f(x, y) dx; 3) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy = \\
& = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x, y) dx; 4) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \\
& + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx. 5) \int_1^3 dx \int_1^{4x-3} f(x, y) dy = \int_1^9 dy \int_{\frac{y+3}{4}}^{\frac{y+3}{1}} f(x, y) dx; \\
& 6) \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{-x}}^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-1-\sqrt{y}}^{-y^2} f(x, y) dx; 7) \int_0^1 dy \int_{y^2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy; 8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\sqrt{2}}{2} \arccos y} f(x, y) dx = \\
& = \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_0^{\cos x} f(x, y) dy. 1.15. 1) \frac{8}{3}; 2) \ln \frac{25}{24}; 3) \frac{\pi}{12}; \\
& 4) \pi - 2. 1.16. 1) \frac{1}{6}; 2) \frac{e-1}{2}; 3) \frac{1}{2}; 4) 9. 1.17. 1) \frac{1}{2}; \\
& 2) \frac{1}{6}; 3) \frac{9}{20}; 4) \frac{9}{4}. 1.18. 1) -2; 2) \pi; 3) 6; 4) \frac{112}{9}. 1.19. \\
& 1) \frac{\pi}{6}; 2) \frac{\pi}{6}; 3) \frac{4}{135}; 4) \frac{4}{3}. 1.20. 1) \frac{\pi^2}{32}; 2) \frac{1}{280}; 3) \frac{4}{3}; \\
& 4) 8; 5) \frac{5}{2} \pi a^2; 6) \frac{R^4}{80}. 1.21. 1) 4; 2) 12 \frac{2}{3}; 3) \frac{1}{6}; 4) -10; 5) \frac{2}{3} R; \\
& 6) \frac{2}{3}. 1.22. 1) 2 < I < 8; 2) 36\pi < I < 100\pi; 3) -8 < I < \frac{2}{3}; 4) 1,63 < I < 2. \\
& 1.23. 1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a \cos \varphi}{2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; \\
& 3) \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; 4) \int_0^{\arctg 2} d\varphi \int_0^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \\
& 1.24. 1) \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; \\
& 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - \varphi)}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad 1.25. \quad 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; \\
& 2) \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{\frac{2R \sin \varphi}{2 \sin \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho; \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R f(\rho^2) \rho d\rho; \\
& 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\cos \varphi}} \rho f(\rho) d\rho. \quad 1.26. \quad 1) \int_0^R d\rho \int_0^{\arccos \rho} f(\rho, \varphi) d\varphi; \quad 2) \int_0^1 d\rho \int_{-\arccos \rho}^{\arccos \rho} f(\rho, \varphi) d\varphi; \\
& 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2} - \arcsin \rho^2} f(\rho, \varphi) d\varphi; \quad 4) \int_0^{\frac{1}{2} - \arcsin \rho^2} d\rho \int_0^{\frac{1}{2} - \arcsin \rho^2} f(\rho, \varphi) d\varphi. \quad 1.27. \quad 1) 2\pi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho; \\
& 2) \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) \cdot \cos^2 \varphi d\varphi; \quad 3) \frac{\pi}{12} \int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \rho f(\rho) d\rho + \int_{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{\rho}\right) \rho f(\rho) d\rho; \\
& 4) \pi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{\rho}\right) \rho f(\rho) d\rho. \quad 1.28. \quad 1) \frac{\pi a^2}{6};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) \frac{\pi}{4} (e-1); \quad 3) \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1); \quad 4) \frac{\pi}{2}; \quad 5) \frac{2}{3} \pi a^2; \quad 6) a. \\
& 1.29. \quad 1) \frac{2}{3} \pi a^2; \quad 2) \frac{\pi e}{4} (e^3 - 1); \quad 3) -6\pi^2; \quad 4) \frac{128}{3} \pi. \quad 1.30. \quad 1) \frac{2\pi}{3}; \\
& 2) \frac{\pi a^2}{3}; \quad 3) \pi; \quad 4) \pi R^2. \quad 1.31. \quad 1) \frac{2}{3}; \quad 2) \frac{2}{3} \pi a^4; \quad 3) \frac{R^2}{3} \left(\pi - \frac{4}{3}\right); \\
& 4) \frac{45}{64} \pi a^4. \quad 1.32. \quad 1) \frac{\pi^2}{6}; \quad 2) 2 - \ln 2; \quad 3) \frac{4 - \pi}{2}; \quad 4) \frac{1}{2}. \quad 1.33. \\
& 1) \int_a^b u du \int_a^{\beta} f(u, uv) dv; \quad 2) \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{2}} du \int_{-u}^{\frac{3}{2}-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv; \\
& 3) \frac{1}{a} \int_0^a dv \int_0^{\frac{a}{a-v}} f\left(\frac{u(a-v)}{a}, \frac{uv}{a}\right) u du; \quad 4) \frac{1}{2} \int_p^q du \int_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \frac{dv}{v}. \\
& 1.34. \quad 1) \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{2}{3} \pi ab; \quad 3) \frac{e-1}{2}; \quad 4) 10 \frac{5}{16} - 8 \cdot \ln 2. \quad 1.36. \quad F(a, c) - \\
& - F(a, d) - F(b, c) + F(b, d).
\end{aligned}$$

§ 2

$$\begin{aligned}
& 2.1. \quad 1) 3; \quad 2) 1; \quad 3) \frac{4}{3}; \quad 4) 42 \frac{1}{6}. \quad 2.2. \quad 1) 12; \quad 2) \frac{1}{12}; \quad 3) 18; \\
& 4) \frac{16}{3}. \quad 2.3. \quad 1) 5; \quad 2) \frac{16}{3}; \quad 3) \frac{1}{2} (15 - 16 \ln 2); \quad 4) \frac{16}{3} \sqrt{15}. \quad 2.4. \quad 1) 1; \\
& 2) 21 - \ln 4; \quad 3) 13 \frac{1}{3}; \quad 4) \frac{\pi-1}{4}. \quad 2.5. \quad 1) e (\ln 4 - 1); \quad 2) 3\pi + 2; \\
& 3) \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \quad 4) 3 (4\pi - 3 \sqrt{3}). \quad 2.6. \quad 1) \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}; \quad 2) \frac{3}{4} (\pi + 2); \\
& 3) \frac{\pi-2}{2}; \quad 4) 8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \quad 2.7. \quad 1) \frac{5}{4} \pi a^2; \quad 2) \frac{1}{4} a^2 (3 - \pi); \\
& 3) \frac{\pi}{4} (b^2 - a^2); \quad 4) a^2. \quad 2.8. \quad 1) \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} a^2; \quad 2) (\pi - 1) a^2; \\
& 3) \frac{\pi a^2}{4}; \quad 4) \frac{3}{4} \pi; \quad 5) \frac{5}{8} \pi a^2; \quad 6) \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}\right) a^2. \quad 2.9. \quad 1) \frac{1}{6}; \\
& 2) \frac{5}{6}; \quad 3) 186 \frac{2}{3}; \quad 4) \frac{1}{6} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right). \quad 2.10. \quad 1) \frac{1}{6}; \quad 2) 12;
\end{aligned}$$

3) $13\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$. 2.11. 1) 9; 2) π ; 3) $\frac{88}{105}$; 4) $78\frac{15}{32}$. 2.12. 1) $\frac{8}{9}a^3$;
 2) $4\pi - \frac{16}{3}$; 3) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; 4) $\frac{17}{12} - 2\ln 2$. 2.13. 1) 2π ; 2) $\frac{16}{3}R^2$;
 3) $\frac{16}{3}ab^2$; 4) 4. 2.14. 1) $4\sqrt{3}\pi a^2$; 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi$; 3) $\frac{2}{3}\pi a^2(2-\sqrt{2})$;
 4) $\frac{2}{3}\pi a^3(3-\sqrt{2})$; 2.15. 1) $\frac{7}{2}$; 2) 14. 2.16. 1) $\sqrt{3}\pi R^2$;
 2) $3\pi R^2$. 2.17. $\frac{4a^2}{\sqrt{3}}$. 2.18. 8π . 2.19. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 2.20. 280π .
 2.21. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. 2.22. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2.23. $\pi\sqrt{2}$. 2.24. $2\sqrt{2}\pi p^3$.
 2.25. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 2.26. $8\sqrt{2}a^2$. 2.27. $16a^2$. 2.28. $2a^2(n-2)$. 2.29. $4a^2$.
 2.30. $(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)R^2$, სადაც $[\varphi_1, \varphi_2]$ გერონის ცვლილებების არეა, $[\theta_1, \theta_2]$ პარალელის ცვლილების არეა, ხოლო R სფეროს რადიუსია.

§ 3

3.1. 1) 18; 2) $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1}{24}$. 3.2. 1) $\frac{1}{6}$;
 2) $\frac{1}{110}$; 3) $\frac{81}{4}$; 4) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. 3.3. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$;
 2) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$; 3) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$;
 4) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz$. 3.4. 1) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 f(x, y, z) dz$;
 2) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz$; 3) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{20-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$;
 4) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y, z) dz$.

4) $\int_0^3 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x-y^2}}^{\sqrt{x-y^2}} f(x, y, z) dz$. 3.5. 1) -2 ; 2) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$; 3) $\frac{1}{196}$;
 4) $\frac{1}{180}$. 3.6. 1) $\frac{\pi^2-8}{16}$; 2) $\frac{4}{15}\pi a^3 bc$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi R^4}{4}$. 3.7. 1) π .
 2) $\frac{8}{9}a^2$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) πR^2 ; 5) $\frac{16}{3}\pi$; 6) $\frac{8}{9}a^2$. 3.8. 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{4}{15}\pi R^2$;
 3) $\frac{\pi}{10}$; 4) $\frac{4\pi}{15}(R_2^3 - R_1^3)$. 3.9. 1) $\frac{32}{9}a^2 h$; 2) 36; 3) $\frac{3}{4}\pi a^2$; 4) 8.
 3.10. 1) $\frac{7}{12}$; 2) $\frac{3}{35}$; 3) $4(4-3\ln 3)$; 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. 3.11.
 1) $\frac{19}{6}\pi$; 2) $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$; 3) πabc ; 4) $\frac{1}{45}$.

§ 4

4.1. $\frac{1}{2}\pi \delta R^2$. 4.2. $\frac{4}{3}a^2$. 4.3. $2\pi r(R-r)$. 4.4. $\frac{a^2 b}{6}$. 4.5. $\frac{3}{2}$.
 4.6. $\frac{a^4}{24}$. 4.7. $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2+2H^2)$. 4.8. $\frac{2}{3}\pi \gamma R^6$. 4.9. $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-97)$.
 4.10. $\frac{3}{4}\pi \gamma$. 4.11. 1) $(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5})$; 2) $(\frac{2}{5}; \frac{1}{2})$;
 3) $(\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$; 4) $(\frac{2}{5}; 0)$. 4.12. 1) $(\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}; \frac{\pi}{6(4-\pi)})$;
 2) $(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8})$; 3) $(\frac{5}{6}a; 0)$; 4) $(\pi a; \frac{5}{6}a)$. 4.13. 1) $(1; 1; 1)$;
 2) $(\frac{14}{15}; \frac{26}{15}; \frac{8}{3})$; 3) $(0; 0; 2)$; 4) $(0; 0; 3)$. 4.14. 1) $(0; \frac{4}{5}; \frac{4}{15})$;
 2) $(\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a; \frac{7}{25}a^2)$; 3) $(\frac{4}{3}; 0; 0)$; 4) $(0; \frac{3}{7}b; \frac{2}{7}h)$.
 4.15. 1) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{7}{12}$; 2) $I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$, $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$; 3) $I_x =$
 $= I_y = \frac{a^4}{16}(16-5\pi)$; 4) $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y = \frac{49}{32}\pi a^4$. 4.16. 1) $I_0 = \frac{\pi a^4}{8}$;
 2) $I_0 = \frac{3\pi a^4}{2\sqrt{2}}$; 3) $I_0 = \frac{9}{4}$; 4) $I_0 = \frac{26}{105}a^4$. 4.17. 1) $\frac{8}{5}a^4$; 2) $16\ln 2 -$

$$-9\frac{3}{8}; 3) \frac{5}{4}\pi R^4; 4) \frac{35}{12}\pi a^4. \text{ 4.18. } 1) \frac{8}{15}ha^4; 2) \frac{14}{15}; 3) \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5);$$

$$4) \frac{\pi}{5}.$$

§ 5

$$\text{5.1. } 1) \frac{86\sqrt{2}}{3}; 2) \frac{\sqrt{5}}{3}\ln 4; 3) \frac{7}{6}; 4) \frac{5}{3}. \text{ 5.2. } 1) \frac{19}{3}; 2) \frac{1}{2};$$

$$3) \frac{\sqrt{2}}{2}; 4) \frac{1}{4}. \text{ 5.3. } 1) \sqrt{2}+1; 2) 24; 3) 1; 4) \frac{14}{9}. \text{ 5.4. } 1) \frac{\sqrt{17}}{8};$$

$$2) \frac{3\sqrt{5}}{2}(1+2\ln 2); 3) \frac{59}{60}; 4) \frac{2}{3}(4-\sqrt{2}). \text{ 5.5. } 1) \frac{a^3}{2}; 2) \frac{256}{15}a^2;$$

$$3) 2\pi^2 a^3(1+2\pi^2); 4) 4; 5) \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2; 6) \frac{a^2}{6}\operatorname{ch}^{3/2} t_0 - 1). \text{ 5.6.}$$

$$1) \frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}; 2) \sqrt{2}a^2; 3) 2\pi a^{2n+1}; 4) \frac{\pi a^2}{2}. \text{ 5.7. } 1) \frac{56\sqrt{7}-1}{54};$$

$$2) \frac{16\sqrt{2}}{143}; 3) \frac{2\pi}{3}(3a^3+4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2+b^2}; 4) \frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+2\pi^2)^{3/2}-1];$$

$$5) \frac{R^4\sqrt{3}}{32}; 6) R^2\sqrt{2}. \text{ 5.8. } 1) 5; 2) \sqrt{3}; 3) 3+\ln 7; 4) \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+1\right).$$

$$\text{5.9. } \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2e}\arcsin e, \quad e = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2ab}. \text{ 5.10. } a\delta.$$

$$\text{5.11. } \frac{19}{3}. \text{ 5.12. } 4\pi(1+4\pi^2). \text{ 5.13. } \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 5.14. } x_0=y_0=\frac{4a}{3}. \text{ 5.15.}$$

$$x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}, \quad y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}. \text{ 5.16. } x_0=0, \quad y_0=$$

$$\frac{2a}{\pi}, \quad z_0=\frac{b\pi}{2}.$$

§ 6

$$\text{6.1. } 1) \frac{5}{2}; 2) \frac{13}{2}; 3) 9; 4) 1. \text{ 6.2. } 1) 4; 2) \frac{3\ln 2}{5}; 3) 1-\frac{1}{e^2};$$

$$4) -4\pi. \text{ 6.3. } 1) -\frac{1}{6}; 2) -\frac{1}{12}; 3) -\frac{1}{20}; 4) -\frac{4}{15}; 5) 0;$$

$$6) \frac{4-2\pi}{\pi^2}. \text{ 6.4. } 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1. \text{ 6.5.}$$

$$1) 2+\pi-\frac{\pi^2}{2}; 2) e^2+\frac{7}{10}; 3) 5-\frac{2}{e}+\frac{1}{e^2}. \text{ 6.6. } 1) \frac{7}{30}; 2) 0;$$

$$3) -2\pi ab; 4) \pi a^2. \text{ 6.7. } 1) -\frac{4}{3}R; 2) -2\pi; 3) \frac{3}{16}\pi R\sqrt{R}; 4) 0.$$

$$\text{6.8. } 1) \frac{91}{60}; 2) 13; 3) 3\sqrt{3}; 4) a) \frac{3}{2}a^2; b) a^2; 5) 2\pi^2 a^2 h; 6) \frac{\pi R^3}{4}.$$

$$\text{6.9. } 1) 0; 2) -\frac{1}{3}; 3) 2R^2; 4) -4\pi. \text{ 6.10. } 1) 8; 2) 4; 3) \frac{\pi^2}{32};$$

$$4) \frac{1}{2}. \text{ 6.11. } 1) \ln \frac{13}{5}; 2) -\frac{3}{2}; 3) 9; 4) 1. \text{ 6.12. } 1) \frac{10}{3}; 2) 0;$$

$$3) 5\sqrt{2}-1; 4) -\frac{9}{2}. \text{ 6.13. } 1) u=\frac{x^2+y^2}{3}+C; 3) u=x^2+$$

$$+3xy-2y^2+C; 3) u=(x^2-y^2)^2+C; 4) u=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$

$$\text{6.14. } 1) u=x^2\cos y+y^2\cos x+C; 2) u_1=(x+y)e^{x-y}+C;$$

$$3) u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C; 4) u=\ln|x+y+z|+C.$$

$$\text{6.15. } 1) 4; 2) 62; 3) e-1; 4) 1. \text{ 6.16. } 1) \pi+1; 2) 2; 3) 2; 4) 2.$$

$$\text{6.17. } 1) \frac{\pi R^2}{2}; 2) -2\pi ab; 3) 0; 4) -\frac{1}{5}(e^\pi-1); 5) -\frac{\pi a^3}{8};$$

$$6) -\frac{4}{3}. \text{ 6.18. } 1) \pi ab; 2) \frac{3}{8}\pi a^2; 3) 6\pi a^2; 4) 3\pi a^2; 5) \frac{3}{2}a^2; 6) \frac{1}{60}.$$

$$\text{6.19. } 1) \frac{4}{3}; 2) \frac{17}{12}. \text{ 6.20. } RF. \text{ 6.21. } mg(z_1-z_2). \text{ 6.22. } \pi ab. \text{ 6.23. } 0.$$

$$\text{6.25. } \left(2\sqrt{2}-\frac{7}{3}\right)a^2.$$

§ 7

$$\text{7.1. } 1) 4\sqrt{61}; 2) 28\sqrt{11}; 3) \frac{\sqrt{3}}{120}; 4) \sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{7.2. } 1) 9; 2) \frac{\pi R^3}{4}; 3) \frac{8}{3}\pi R^4; 4) \pi R^3. \text{ 7.3. } 1) \frac{2}{15}\pi R^3; 2) \frac{14\sqrt{2}\pi}{3};$$

$$3) \frac{13\pi}{3}; 4) \frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}. \text{ 7.4. } 1) 6; 2) \frac{4}{3}\pi R^2; 3) \frac{4}{3}\pi abc; 4) 0.$$

$$\text{7.5. } 1) 3; 2) \frac{1}{8}; 3) \frac{\pi R^4}{2}; 4) \frac{2}{105}\pi R^7. \text{ 7.6. } 1) \frac{\pi R^4}{2}; 2) 8;$$

3) $HR^2 \left(\frac{2R}{3} + \frac{H\pi}{8} \right)$; 4) 0. 7.7. 1) $3a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}$; 3) $\frac{12}{5}\pi R^2$; 4) $\frac{\pi}{8}$.
 7.8. 1) $-\frac{256}{3}\pi$; 2) 8π ; 3) 0; 4) $-\pi$. 7.9. 1) 4π ; 2) -4π ; 3) -2π ;
 4) 729π . 7.10. 1) $-\sqrt{2}\pi$; 2) $-a^2$; 3) 4π ; 4) 0.

§ 8

8.1. 1) $\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$; 2) $\vec{k}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$; 4) $\frac{1}{5}(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$. 8.2. 1) $-\pi$; 2) 0. 8.3. 0. 8.4. (x, y) , სადაც
 $y = -x + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 8.5. (x, y, z) , სადაც $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 8.6. 1) $\frac{r}{|r|^2}$; 2) $\vec{a}$; 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b}, \vec{r}) + \vec{b} \cdot (\vec{a}, \vec{r})$; 4) $2|\vec{a}|^2 \vec{r} - 2(\vec{a}, \vec{r})\vec{a}$. 8.8. 1) $x^2 = C_1 y$, $z = C_2$; 2) $z = C_1 x$, $y = C_2$; 3) $xy = C_1$,
 $z = C_2$; 4) $x = C_1$, $2y^2 - z^2 = C_2$; 5) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1$, $z = C_2$; 6) $y^2 + z^2 = C_1$,
 $x = C_2$. 8.9. 1) $x = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}$; 2) $\frac{x}{a_1} = \frac{y - C_1}{a_2} = \frac{z - C_2}{a_3}$.
 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2, \\ x + y + z = C_2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - x^2 = C_1, \\ z^2 - x^2 = C_2. \end{cases}$ 8.10. 1) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = bt$;
 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y^2} = 4. \end{cases}$ 8.11. 1) $F = x^2 y - xy^2 + C$; 2) $F =$
 $= 2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} + C$; 3) $F = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + C$;
 4) $F = xy + xz + yz + C$. 8.12. 1) $F = x^2 yz + C$; 2) $F = x + xyz + C$;
 3) $F = x^2 y - y^2 + xz + C$; 4) $F = xyz + C$. 8.13. 1) $F = |\vec{r}| + C$;
 2) $F = \ln |\vec{r}| + C$; 3) $F = \frac{1}{3}|\vec{r}|^3 + C$; 4) $F = e^x \sin y + z + C$.
 8.14. 1) 16π ; 2) πH^2 ; 3) $\frac{32\pi}{3}$; 4) 0. 8.15. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 4π ; 3) $\frac{19\pi}{3}$;
 4) $\frac{32}{3}\pi$. 8.16. 1) სოლენოიდური; 2) სოლენოიდური; 3) არასოლენოი-

დური; 4) სოლენოიდური. 8.17. 1) $\frac{3}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$; 2) $-\pi$; 3) -2π ;
 4) $-\frac{\pi R^2}{4}$. 8.18. 1) $\text{rot } \vec{a} = -\vec{i} - (2x - 1)\vec{j}$; 2) $\text{rot } \vec{a}_1 = -$
 $-2(z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k})$; 3) $\text{rot } \vec{a} = 3(z^2 - x^2)\vec{j}$; 4) $\text{rot } \vec{a} = (x + y)\vec{k}$.
 8.24. 1) არ არის დამოკიდებული; 2) დამოკიდებულია; 3) არ არის
 დამოკიდებული; 4) დამოკიდებულია. 8.25. 1) $\frac{128}{3}$; 2) 0; 3) -4π ;
 4) $-\sqrt{2}\pi$. 8.26. $u = \rho^2 \sin 2\varphi \cos 2\theta$, $\text{grad } u = 2\rho \left(\sin 2\varphi \cos 2\theta \cdot \vec{e}_1 - \right.$
 $\left. - \sin 2\varphi \sin 2\theta \cdot \vec{e}_2 + \frac{\cos 2\varphi \cos 2\theta}{\sin \theta} \vec{e}_3 \right)$, $\Delta u = 3 \sin 2\varphi (1 - 2 \text{ctg}^2 \theta)$.
 8.27. $u = \rho z \sin 2\varphi + \rho \cos 2\varphi$, $\text{grad } u = (z \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \vec{e}_1 +$
 $+ 2(z \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \vec{e}_2 + \rho \sin 2\varphi \vec{e}_3$, $\Delta u = -\frac{3u}{\rho^2}$. 8.28. $\vec{a} = \sin \theta \cdot \vec{e}_3$,
 $\text{div } \vec{a} = 0$, $\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{\rho} (2 \cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_2)$. 8.29. $\vec{a} = \rho z (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$,
 $\text{div } \vec{a} = 2z - \rho$, $\text{rot } \vec{a} = (\rho + z) \vec{e}_3$. 8.30. 1) $\text{grad } u = f'(\rho) \vec{e}_1 = f'(\rho) \frac{\vec{r}}{\rho}$,
 $\Delta u = f''(\rho) + \frac{f'(\rho)}{\rho}$; 2) $\text{grad } u = f'(\rho) \vec{e}_1 = f'(\rho) \frac{\vec{r}}{\rho}$, $\Delta u = f''(\rho) + \frac{2f'(\rho)}{\rho}$;
 3) $\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_2$, $\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} +$
 $+ \frac{\text{ctg } \theta}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$; 4) $\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$, $\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

§ 9

9.1. 1) არა; 2) არა; 3) არა; 4) კი; 5) არა; 6) არა. 9.2. 1) კი; 2) არა;
 3) კი; 4) არა; 5) არა; 6) კი. 9.3. 1) არა; 2) არა; 3) კი; 4) არა; 5) კი;
 6) არა. 9.4. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{23}{81}$. 9.5. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{11}{18}$;
 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$. 9.6. 1) 7,5; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 10,5. 9.7.
 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{60}$; 3) $\frac{11}{96}$; 4) 2. 9.8. 1) 1; 2) $1 - \sqrt[3]{2}$; 3) $\ln 2$;

4) $0,5 \sin 2$. 9.9. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $-\log_2 3$.

9.12. 1) განზღუდვი; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.13. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.14. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.15. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.16. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.17. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) განზღუდვი; 4) კრებულის. 9.18. 1) კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.19. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.20. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) განზღუდვი; 4) კრებულის. 9.21. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) განზღუდვი; 4) კრებულის. 9.22. 1) კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.23. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.24. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.25. 1) კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.26. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.27. 1) კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.28. 1) განზღუდვი; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.29. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.30. 1) განზღუდვი; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.31. 1) კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.32. 1) განზღუდვი ნებისმიერი p -თვის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.33. 1) განზღუდვი; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის როცა $a > 1$ (ნებისმიერი) და როცა $a = 1$; $\beta > 1$; 4) კრებულის. 9.34. 1) პირობით კრებულის; 2) პირობით კრებულის; 3) განზღუდვი; 4) განზღუდვი. 9.35. 1) განზღუდვი; 2) აბსოლუტურად კრებულის; 3) პირობით კრებულის; 4) აბსოლუტურად კრებულის. 9.36. 1) პირობით კრებულის; 2) პირობით კრებულის; 3) პირობით კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.37. 1) აბსოლუტურად კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) პირობით კრებულის; 4) პირობით კრებულის. 9.38. 1) 1,20; 2) 1,645; 3) 0,08; 4) 1,025. 9.39. 1) აბსოლუტურად კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) კრებულის. 9.40. 1) აბსოლუტურად კრებულის; 2) განზღუდვი; 3) კრებულის; 4) აბსოლუტურად კრებულის. 9.41. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) კრებულის; 4) განზღუდვი. 9.42. 1) $\frac{5}{4}$; 2) $\frac{11}{8}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 1. 9.43.

1) $C_n = \begin{cases} \frac{b^n - a^n}{b - a}, & \text{თუ } b \neq a, \\ na^{n-1}, & \text{თუ } b = a. \end{cases}$ 2) $C_n = \frac{8^n}{n!}$; 3) $C_n = \frac{2^{n+1}}{(n-1)!}$;

4) $C_n = \frac{n}{n+1} \sigma^n$. 9.44. 1) კრებულის; 2) კრებულის; 3) განზღუდვი; 4) განზღუდვი.

§ 10

10.1. 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{თუ } x = 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = x^2$;

4) $f(x) = 0$. 10.2. 1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{3}$; 4) $f(x) = |x|$;

10.3. 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 \leq x < 1, \\ x, & \text{როცა } 1 \leq x < +\infty; \end{cases}$ 2) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = \ln x$; 4) $f(x) = \frac{1}{2x}$. 10.7. აბსოლუტურად კრებულის, როცა $|x| > 1$; 2) აბსოლუტურად

კრებულის, როცა $x > 1$; 3) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > 1$; პირობით კრებულის, როცა $0 < x < 1$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $\frac{1}{e} < x < e$. 10.8. 1) აბსოლუტურად კრებულის $]-\infty; +\infty[$ -ზე;

2) აბსოლუტურად კრებულის R -ზე; 3) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > 0$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x < -3$ ან $x > -1$; პირობით კრებულის, როცა $x = -3$. 10.9. 1) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $-\sqrt{e-1} < x < \sqrt{e-1}$; 2) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $-2 < x < -\sqrt{2}$ და $\sqrt{2} < x < 2$; 3) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $\frac{1}{e} < x < e$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x < -1$. 10.10. 1) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $|x| > 1$; 2) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $|x| > \sqrt{e}$; 3) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > 0$; პირობით კრებულის, როცა $x = 0$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x \neq \pm 1$.

10.11. 1) პირობით კრებულის $]-\infty; +\infty[$ შუალედში; 2) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > 0$ და $x = -kn$, $k \in \mathbb{N}$; 3) კრებულის, როცა $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > 1$. 10.12. 1) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $|x| > 1$; 2) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $|x| > 1$; პირობით კრებულის, როცა $x = 1$; 3) აბსოლუტურად კრებულის $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 10.13. 1) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x \neq 0$; 2) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > e$; 3) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $x > e$; 4) აბსოლუტურად კრებულის, როცა $kx + \frac{\pi}{6} < x < kx + \frac{5}{6}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 10.14. 1) $\frac{\ln(2x-1)}{\ln(2x-1)-1}$; კრებულის

არცა $x > \frac{e+1}{2}$ და $\frac{1}{2} < x < \frac{e+1}{2e}$; 2) $\frac{1}{x}$; კრებული, როცა $x \neq -1, -2, -3, \dots$ 3) $\frac{1}{(1+x)^2}$ კრებული ყველგან; 4) $\sin \frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right)$, კრებული ყველგან გარდა $x=0$ -ისა; 5) $\frac{x \sin \alpha}{1-2x \cos \alpha + x^2}$, კრებული, როცა $|x| < 1$; 6) $\frac{x(\cos \alpha - x)}{1-2x \cos \alpha + x^2}$; კრებული, როცა $|x| < 1$. 10.21. 1) თანაბრად კრებული; 2) თანაბრად კრებული; 3) არათანაბრად კრებული; 4) არათანაბრად კრებული. 10.22. 1) თანაბრად კრებული; 2) არათანაბრად კრებული; 3) თანაბრად კრებული; 4) არათანაბრად კრებული. 10.23. 1) თანაბრად კრებული; 2) არათანაბრად კრებული; 3) თანაბრად კრებული; 4) არათანაბრად კრებული. 10.24. 1) თანაბრად კრებული; 2) თანაბრად კრებული; 3) თანაბრად კრებული; 4) არათანაბრად კრებული. 10.25. 1) არათანაბრად კრებული; 2) არათანაბრად კრებული; 3) თანაბრად კრებული; 4) თანაბრად კრებული. 10.26. 1) არათანაბრად კრებული; 2) არათანაბრად კრებული; 3) თანაბრად კრებული; 4) თანაბრად კრებული.

§ 11

11.1. 1) $R=1, [-1; 1]$; 2) $R=1, [-1; 1]$; 3) $R=1, [-1; 1]$; 4) $R=3, [-3; 3]$. 11.2. 1) $R=1, [-1; 1]$; 2) $R=2, [-2; 2]$; 3) $R=1, [-1; 1]$; 4) $R=1, [-1; 1]$. 11.3. 1) $R=1, [-1; 1]$; 2) $R=0$; 3) $R=2, [-2; 2]$; 4) $R=\frac{1}{2}, [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. 11.4. 1) $R=0$; 2) $R=\frac{1}{e}, [-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}]$; 3) $R=1, [-1; 1]$; 4) $R=-\max\{a; b\}, [-R; R]$. 11.5. 1) $R=\infty$; 2) $R=2, [-2; 2]$; 3) $R=1, [-1; 1]$; 4) $R=e, [-e; e]$. 11.6. 1) $R=\infty$; 2) $R=4, [-4; 4]$; 3) $R=2, [-2; 2]$; 4) $R=e^2, [-e^2; e^2]$; 5) $R=1, [-1; 1]$; 6) $R=1, [-1; 1]$. 11.7. 1) $R=\frac{1}{3}, [-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}]$; 2) $R=2, [-1; 3]$; 3) $R=1, [0; 2]$; 4) $R=\frac{1}{2}, [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$. 11.8. 1) $R=1, [0; 2]$; 2) $R=\frac{3}{2}, [-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}]$; 3) $R=3,$

$[-2; 4]$; 4) $R=1, [-2; 0]$. 11.9. 1) $R=\frac{1}{2}, [-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}]$; 2) $R=1, [2; 4]$; 3) $R=e, [1-e; 1+e]$; 4) $R=e, [1-1-e; e-1]$. 11.10. 1) $R=2, [0; 4]$; 2) $R=\frac{1}{2}, [1; 2]$; 3) $R=\frac{1}{2}, [-1; 0]$; 4) $R=1, [-4; -2]$. 11.11. 1) $R=\frac{1}{3}, [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$; 2) $R=2, [-2; 2]$; 3) $R=\frac{1}{4}, [-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}]$; 4) $R=1, [-4; -2]$. 11.12. 1) $R=\sqrt[3]{3}, [1-\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{3}]$; 2) $R=1, [-1; 1]$; 3) $R=1, [-6; -4]$; 4) $R=\frac{1}{\sqrt{3}}, [1-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1+\frac{1}{\sqrt{3}}]$. 11.13. 1) $[-1; 1], \frac{1}{(1-x)^2}$; 2) $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], -\ln(1-2x)$; 3) $[-3; 3], \frac{9}{(x+3)^2}$; 4) $[-1; 1], (1-x) \ln(1-x) + x$. 11.14. 1) $[-2; 2], \frac{16}{(2-x)^2}$; 2) $[-1; 1], \frac{x}{(1-x^2)^2}$; 3) $[-1; 1], -\left(1+\frac{1}{x}\right) \ln(1-x)-1$, როცა $x \neq 0$; 4) $[-\infty; +\infty], \operatorname{ch} x$; 5) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}], x \neq 0; \frac{1}{(2-x^2)^2}$; 6) $1 < |x| < \sqrt{3}, \frac{2x}{(3-x^2)^2}$. 11.15. 1) $\frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right]$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 11.16. 1) $\ln \frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; 3) 6; 4) $\frac{7}{2}$. 11.17. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^2 2}{n!} x^n, [-\infty; +\infty]$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, [-\infty; +\infty]$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, [-\infty; +\infty]$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, [-\infty; +\infty]$. 11.18. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, [-\infty; +\infty]$;

$$\begin{aligned}
& 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{6n}}{3^{2n} (2n)!}, \quad]-\infty; +\infty[; \quad 3) 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}, \quad]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}[; \\
& 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}, \quad]-1; 1[. \quad \mathbf{11.19.} \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \quad]-\infty; +\infty[; \\
& 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-2}, \quad]-\infty; +\infty[; \quad 3) 1 + \frac{x}{4} + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{4^n n!} x^n, \quad]-1; 1[; \quad 4) 1+x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \times \\
& \times \frac{(2n-3)!!}{n!} x^n, \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \quad \mathbf{11.20.} \quad 1) 1 + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{5^n n!} x^n, \quad]-1; 1[; \quad 2) x^2 + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{n!} x^{2n+2}, \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]; \\
& 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+5}}{n}, \quad]-1; 1[; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad]-\infty; +\infty[. \\
& \mathbf{11.21.} \quad 1) \frac{x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n 3^{2n+1}} x^{2n+1}, \quad]-3; 3[; \\
& 2) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n, \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} [(-1)^{n+1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3^{n+1}}] x^n, \quad]-1; 1[; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \right] x^n, \quad]-2; 2[. \\
& \mathbf{11.22.} \quad 1) \ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^n - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] \frac{x^n}{n}, \quad \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right]; \\
& 2) \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4 \cdot 9 \cdots 3^n}{n} x^n, \quad]-3; 3[; \quad 3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{n} x^n, \\
& \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right]; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad]-1; 1[. \\
& \mathbf{11.23.} \quad 1) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n n!} (x-1)^n, \quad]0; 2[; \\
& 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}, \quad]0; 2[; \quad 3) \sqrt{2} \left[1 + \frac{x-2}{4} + \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{4^n n!} (x-2)^n \left. \right], \quad]0; 4[; \quad 4) -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}, \\
&]-4; 0[. \quad \mathbf{11.24.} \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^n, \quad]-3; -1[; \\
& 2) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} (x+3)^n, \quad]-4; -2[; \quad 3) e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, \\
&]-\infty; +\infty[; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, \quad]-\infty; +\infty[.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11.25. \quad & 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} \right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty; +\infty [; \\
& 2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{6 \cdot 3^n} - \frac{1}{10 \cdot 5^n} \right) (x+2)^n \right], \quad |x| < 5; 1 [; \\
& 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 5^n}{n} \left(x + \frac{2}{5} \right)^n, \quad \left] -\frac{7}{5}; \frac{3}{5} \right]; \\
& 4) \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} \cdot 3^{-n} - 2^{-n}] (x-2)^n, \quad [0; 4]. \\
11.26. \quad & 1) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1; \quad 2) -\frac{\pi}{4} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R=\frac{1}{2}; \quad 3) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\
& \times \frac{x^{4n+2}}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}, \quad R=\sqrt{2}; \quad 4) \operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}}{2n+1} x^{4n+2}, \\
& R=\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 11.27. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R=1; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1; \\
& 3) \frac{\pi}{16} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{2n+1} x^{4n+2}, \quad R=\frac{1}{2}; \quad 4) \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \\
& \times \frac{x^{4n+2}}{(2n+1) \cdot 2^{2n+2}}, \quad R=2. \quad 11.28. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{2(n+2)(2n+1)!}, \quad R=\infty;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n)!}, \quad R=\infty; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad R=1; \\
& 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4^n}{n^2} x^n, \quad R=\frac{1}{4}. \quad 11.29. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \quad R=1; \\
& 2) 10 \ln 2 - 5 \ln 3 - x \ln 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}, \quad R=3; \\
& 3) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(4n+1)(2n)!}, \quad R=1; \quad 4) \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1}(2n+1) \cdot n!} x^{4n+2}, \\
& \quad R=1; \\
& 5) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1)^2 n!} x^{2n+1}, \quad R=1; \quad 6) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (3n+1) \cdot n!} x^{3n+1}, \\
& \quad R=1. \\
11.30. \quad & 1) 0,0175; \quad 2) 0,9848; \quad 3) 1,28403; \quad 4) 0,1823. \quad 11.31. \quad 1) 1,140; \\
& 2) 4,309; \quad 3) 0,304; \quad 4) 0,340. \quad 11.32. \quad 1) 0,905; \quad 2) 3,057; \quad 3) 0,487; \\
& 4) 1,057. \quad 11.33. \quad 1) 0,507; \quad 2) 0,508; \quad 3) 2,835; \quad 4) 0,927; \quad 5) 0,608; \\
& 6) 0,384. \quad 11.35. \quad 1) y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad 2) y = x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \\
& + \frac{x^7}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7)} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \dots (3n(3n+1))} + \dots \\
& 3) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad 4) y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n}.
\end{aligned}$$

§ 12

$$\begin{aligned}
12.1. \quad & 1) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad 2) \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x; \quad 3) \frac{3}{8} - \\
& - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x; \quad 4) \frac{1}{32} (10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - \cos 6x).
\end{aligned}$$

12.2. 1) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; 2) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x$;
 3) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$; 4) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.
 12.3. 1) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.
 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; 4) $f(x) = \frac{3}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$.
 12.4. 1) $\frac{2}{3} [\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx]$;
 2) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}(1+\pi)}{n} \sin nx$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx$;
 4) $\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$.
 12.5. 1) $\frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2} \cos nx \right)$;
 2) $\frac{2\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \sin nx$; 3) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;
 4) $\frac{5\pi}{4} - 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left((1 - (-1)^n) \frac{\cos nx}{n^2} + (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right)$.
 12.6. 1) $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\tau \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right)$;

2) $\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2\pi} - 1}{n^2 + 4} \cos nx$; 3) $1 - \frac{1}{2} \cos x +$
 $+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \cos nx$; 4) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.
 12.7. 1) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;
 3) $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{\pi n}{4} \cos nx$.
 12.8. 1) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$; 2) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) \sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$;
 3) $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{4n^2 - 1}$; 4) $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$;
 5) $\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx$; 6) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n} \sin nx$.
 12.9. 1) a) $\pi - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, б) $4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$;
 2) a) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$; 3) a) $\frac{e^{\pi} - 1}{\pi} +$
 $+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n e^{\pi} - 1] \cos nx}{1 + n^2}$, б) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{\pi}] \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$;

4) ა) $\frac{\text{sh } \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{1+n^2} \right]$; ბ) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n \text{ch } \pi}{1+n^2} n \sin nx$.

12.10. ა) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$; ბ) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{n} - \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3} \right] \sin nx$; გ) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$;

დ) $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right)$; ე) $\frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx +$
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] - \frac{\pi}{n} \right\} \sin nx$. 12.11. 1) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}$;

2) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$; 3) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos nx$;

4) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}$. 12.12. 1) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

2) $1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$; 3) $\text{sh } l \left[\frac{1}{l} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l \cos \frac{n\pi x}{l} - \pi n \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2 \pi^2} \right]$;

4) $\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right) \right] - 1$. 12.13.

1) $2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin n\pi x$; 2) $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$;

3) $\frac{16}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2n\pi x \right)$; 4) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$.

12.14. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cos nx$; 2) $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

3) $\frac{a+b}{2} + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos(2n-1)x$; 4) $\frac{2}{5} -$
 $- \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$. 12.15. 1) $\frac{3}{2} -$
 $- \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$; 2) $\frac{1}{\ln 2} + 2 \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos n\pi - 3}{\ln^2 2 + n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{\ln 2}$.

3) ა) $-\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; ბ) $f(x)$ ფუნქციის $[-4\pi; -3\pi]$
 შუალედში განესაზღვრეთ ტოლობით $f(x) = -x - 4\pi$ და შეზღუდვით
 გაგვრძელებით პერიოდულად პერიოდით 2π , ბ) $-\frac{\pi}{6} -$
 $- \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos \frac{2n\pi}{3}}{n^2} \cdot \cos \frac{n\pi x}{3}$, თუ $f(x)$ ფუნქციის $[-2\pi; 0]$
 შუალედში განესაზღვრეთ ტოლობით $f(x) = 0$ და შეზღუდვით გაგვრძელებით
 პერიოდულად პერიოდით 3π . 4) ა) $\frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} +$
 $+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$; ბ) $f(x)$ ფუნქციის $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ შუალედში

განვსაზღვრავთ $f(x)=1$, ტოლობით, ხოლო $[0; \pi]$ შუალედში კი $f(x)=x$

ტოლობით. 18.16. 1) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$

$$2) \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n^2(2n-1)^2} \right) \frac{\sin(2n-1)nx}{2n-1} - \frac{\sin 2n\pi x}{2n} \right];$$

$$3) 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)x}{2}, \text{ თუ } f(x) \text{ ფუნქციის } [0; \pi] \text{ შუა-}$$

ლედში განვსაზღვრავთ $f(x)=\pi$ ტოლობით. 2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)x}{2}$

$$-2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x, \text{ თუ } f(x) \text{ ფუნქციის } [0; \pi] \text{ შუა-}$$

ლედში განვსაზღვრავთ $f(x)=0$ ტოლობით, ხოლო $f(\pi)=\frac{\pi}{2}$.

$$1) 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x -$$

$$-4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)^2} \sin \frac{(4k+1)x}{2} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)^2} \sin \frac{(4k+3)x}{2},$$

თუ $f(x)$ ფუნქციის $[0; \pi]$ სეგმენტზე განვსაზღვრავთ $f(x)=x$ ტოლობით.

$$4) 1) -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{(4k+1)^2} \sin \frac{4k+1}{2} x -$$

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{(4k+3)^2} \sin \frac{4k+3}{2} x, \text{ თუ } f(x) \text{ ფუნქციის } [0; \pi] \text{ სეგმენტზე}$$

$$\text{განვსაზღვრავთ ტოლობით } f(x)=0. \text{ 2) } 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{2k+1} -$$

$$-\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{4k+1}{2} x}{(4k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)^2} \sin \frac{4k+3}{2} x,$$

თუ $f(x)$ ფუნქციის $[0; \pi]$ შუალედზე განვსაზღვრავთ $f(x)=\pi-x$ ტო-

$$\ლობით, ხოლო $f(0)=0$. 18.17. 1) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3} e^{inx};$$$

$$2) -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}; \quad 3) \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2ni + (-1)^n}{1-4n^2} e^{inx};$$

$$4) \frac{\sin \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}; \quad 5) \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e^{inx};$$

$$6) \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{\frac{2\pi i n}{3}}}{n} e^{\frac{2\pi i n x}{3}}. \quad 18.18. \quad 1) \frac{\pi}{4}; \quad 2) \frac{\pi^2}{8};$$

$$3) \frac{\pi^3}{6}; \quad 4) \frac{\pi^3}{12}; \quad 5) \frac{\pi^2}{8}; \quad 6) \frac{\pi^2}{32}. \quad 18.19. \quad 1) -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right);$$

$$2) \frac{\pi-x}{2}; \quad 3) e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x); \quad 4) e^{\sin x} \sin(\sin x). \quad 18.20.$$

$$1) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cos xt \, dt; \quad 2) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} \sin xt \, dt;$$

$$3) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{1-t^2} \sin xt \, dt; \quad 4) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi t}{2}}{1-t^2} \cos xt \, dt.$$

$$12.21. 1) f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t) \sin t}{t^2} \sin xt \, dt; \quad 2) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t^2} \, dt;$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos xt \, dt; \quad 4) f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin xt \, dt. \quad 12.22.$$

$$1) f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(t+\beta)^2 + \alpha^2} \right] \cos xt \, dt; \quad 2) f(x) =$$

$$= \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{[(t-\beta)^2 + \alpha^2][(t+\beta)^2 + \alpha^2]} \, dt; \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} \cos xt \, dt;$$

$$4) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} \sin xt \, dt; \quad 5) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin xt}{1+t^2} \, dt;$$

$$6) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} \, dt. \quad 12.23. 1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2}{t^2 + a^2};$$

$$2) -t \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{t}{(t^2 + 1)^2}; \quad 3) e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad 4) e^{-\frac{t^2 + a^2}{2}} \operatorname{chad}. \quad 12.24.$$

$$1) e^{-x} (x > 0); \quad 2) \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x^2} (x > 0).$$

§ 18

12.1. 1) პიერბოლური; 2) პარაბოლური; 3) პიერბოლური; 4) ელიფსური. 12.2. 1) პარაბოლური; 2) პიერბოლური; 3) ელიფსური; 4) ელიფსური ტიპისა I და III საკოორდინატო მეთოდებში, პიერბოლური ტიპისა II და IV საკოორდინატო მეთოდებში, პარაბოლური ტიპისა საკოორდინატო ლერძებში.

12.3. 1) $u(x, t) = x^2 + t^2$

2) $u(x, t) = x(1-t)$; 3) $u(x, t) = \frac{1}{a} \cos x \sin at$; 4) $u(x, t) =$

$$= \frac{A}{a} \sin x \sin at. \quad 12.4. \quad u(x, \pi) = -\sin x. \quad 12.5. 1) u(x, t) =$$

$$= \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad 2) u(x, t) =$$

$$= \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi a t}{l}; \quad 3) u(x, t) =$$

$$= \frac{32h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l}; \quad 4) u(x, t) =$$

$$= \frac{4l a_0}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{l}. \quad 12.6.$$

$$1) u(x, t) = \frac{2l a_0}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\cos \frac{k\pi a}{l} - \cos \frac{k\pi b}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a t}{l};$$

$$2) u(x, t) = \frac{2A a}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[1 - \left(\frac{2ak}{l} \right)^2 \right] \cos \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a t}{l};$$

$$3) u(x, t) = \frac{l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi a}{l} t \sin \frac{2\pi}{l} x; \quad 4) u(x, t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi}{2l} t \times$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} t \sin \frac{5\pi}{2l} x. \quad 12.7. 1) u(x, t) = \frac{2l}{\pi} \sin \frac{\pi}{2l} t \times$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2l} x + \frac{2l}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2l} t \sin \frac{3\pi}{2l} x + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t \times$$

$$\times \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x; \quad 2) u(x, t) = \cos \frac{\pi}{2l} t \cos \frac{\pi}{2l} x + \frac{2l}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2l} t \times$$

$$\times \cos \frac{3\pi}{2l} x + \frac{2l}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2l} t \cos \frac{5\pi}{2l} x; \quad 3) u(x, t) = t + \frac{l}{2} -$$

$$= \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x; \quad 4) u(x, t) =$$

$$= \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \quad 18.8.$$

$$1) u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{x}{l} \right) \Phi \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{2x}{l} \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \Phi \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right\} + \frac{u_0 a}{l} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left\{ e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2 t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2 t}} \right\}; \quad 2) u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4a^2 \sigma^2 t}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{1+4a^2 \sigma^2 t}};$$

$$3) u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{a^2 \sigma^2 t} \left\{ e^{-\sigma^2 x} \left[1 + \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - a\sigma\sqrt{t} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + e^{\sigma^2 x} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + a\sigma\sqrt{t} \right) \right] \right\}. \quad 18.9. \quad u(x, t) =$$

$$= u_0 \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right\} + \frac{u_0}{2} \left\{ \Phi \left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}} \right) - \right.$$

$$\left. - \Phi \left(\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}} \right) + \Phi \left(\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}} \right) \right\}. \quad 18.10. \quad 1) u(x, t) =$$

$$= \frac{8C}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}; \quad 2) u(x, t) =$$

$$= \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}};$$

$$3) u(x, t) = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+2)\pi x}{l} e^{-\frac{(2k+2)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}};$$

$$4) u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x + \frac{2}{\pi} (u_0 - u_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} (u_2 - u_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}. \quad 18.11.$$

$$1) u(x, t) = u_1 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} +$$

$$+ \frac{8u_1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}};$$

$$2) u(x, t) = u_1 + \frac{4(u_0 - u_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}};$$

$$3) u(x, t) = u_1 + \frac{4(u_0 - u_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} -$$

$$- \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}};$$

$$4) u(x, t) = u_1 - \frac{4u_1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} +$$

$$+ \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}};$$

$$18.12. \quad 1) u(x, t) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2};$$

$$2) u(x, t) = \frac{8u_0 l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l};$$

$$3) u(x, t) = q_0 + \frac{(u_0 - q_0) l}{2} - \frac{4l(u_0 - q_0)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi x}{l}; \quad 4) u(x, t) = x - l + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad 13.13. \quad 1) u=A; \quad 2) u=Ar \cos \varphi; \quad 3) u=A+B y^2$$

$$4) u=Axy. \quad 13.14. \quad 1) u=A+B r \sin \varphi; \quad 2) u=\frac{A}{2}(1-r^2 \cos 2\varphi) +$$

$$+\frac{B}{2}(1+r^2 \cos 2\varphi); \quad 3) u=\frac{r}{4}(3 \sin \varphi - r^2 \sin 3\varphi); \quad 4) u=\frac{3}{8} +$$

$$+\frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{r^4}{8} \cos 4\varphi. \quad 13.15. \quad 1) u=A+(B-A) \frac{\ln r}{\ln 2};$$

$$2) u=\frac{3}{2} - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left(\frac{2}{3r^2} - \frac{1}{6} r^2\right) \cos 2\varphi; \quad 3) u=\frac{8}{3} \operatorname{sh}(\ln r) \cdot \sin \varphi.$$

$$13.16. \quad 1) u(r, \varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{k\pi/\alpha} \sin \frac{k\varphi\pi}{\alpha};$$

$$2) u(r, \varphi) = \frac{u_0}{\alpha} \varphi. \quad 13.17. \quad 1) u=A \frac{\operatorname{sh} \frac{(a-x)\pi}{b}}{\operatorname{sh} \frac{a\pi}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} +$$

$$+B \frac{\operatorname{sh} \frac{(b-y)\pi}{a}}{\operatorname{sh} \frac{b\pi}{a}} \cdot \sin \frac{\pi x}{a}; \quad 2) u=B \frac{\operatorname{sh} \frac{(b-y)\pi}{a}}{\operatorname{sh} \frac{b\pi}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{8Ab}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{b}} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k+1)(a-x)\pi}{b}.$$

$$13.18. \quad u(x, y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{k\pi y}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

§ 14

$$14.1. \quad 1) \frac{1}{2} e^2; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} e^2; \quad 2) \sqrt{e} \cos 3; \quad -\sqrt{e} \sin 3; \quad 3) 0; \quad e;$$

$$4) \sqrt{2}; \quad \sqrt{2}. \quad 14.2. \quad 1) \operatorname{ch} 1 \cos 2; \quad -\operatorname{sh} 1 \sin 2; \quad 2) \operatorname{ch} 5 \sin 1;$$

$$-\operatorname{sh} 5 \cos 1; \quad 3) 0; \quad \operatorname{sh} 1; \quad 4) \operatorname{ch} 1 \cos 2; \quad \operatorname{sh} 1 \sin 2. \quad 14.4. \quad 1) \sin x \operatorname{ch} y;$$

$$2) \cos x \operatorname{sh} y; \quad 3) e^x (x \cos y - y \sin y); \quad 4) e^x (x \sin y + y \cos y).$$

$$14.6. \quad 1) \ln 4 + 2k\pi i; \quad 2) \left(2k - \frac{1}{2}\right) \pi i; \quad 3) \frac{1}{2} \ln 50 + i(\operatorname{arctg} 7 + 2k\pi);$$

$$4) \frac{1}{2} \ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right) i. \quad 14.7. \quad 1) e^{-\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi}$$

$$- \left(\frac{1}{4} + 2k\right) i \ln \sqrt{2}; \quad 2) e^{-\frac{1}{4} + 2k i \ln 2}; \quad 3) e^{-2k\pi + 4i \ln 2}; \quad 4) e^{2 \ln 3 - 2k\pi + i(\ln 3 + 4k\pi)}.$$

$$14.12. \quad 1) \operatorname{go}, \quad f'(z)=1; \quad 2) \operatorname{ბოა}; \quad 3) \operatorname{go}, \quad f'(z)=2z; \quad 4) \operatorname{go}, \quad f'(z)=3z^2.$$

$$14.13. \quad 1) \operatorname{ბოა}; \quad 2) \operatorname{ბოა}; \quad 3) \operatorname{ბოა}; \quad 4) \operatorname{go}, \quad f'(z)=3z^2. \quad 14.14. \quad 1) \operatorname{go},$$

$$f'(z)=2e^{2z+i}; \quad 2) \operatorname{go}, \quad f'(z)=2e^{iz}; \quad 3) \operatorname{ბოა}; \quad 4) \operatorname{go}, \quad f'(z)=\cos z. \quad 14.15.$$

$$1) \operatorname{go}, \quad f'(z)=(1-z)e^{-z}; \quad 2) f'(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)e^z \quad (z \neq 0); \quad 2) \operatorname{ბოა};$$

$$4) \operatorname{go}, \quad f'(z)=\operatorname{sh} z e^{ch z}. \quad 14.16. \quad 1) \operatorname{ბოა}; \quad 2) z=0 \text{ წერტილი}; \quad 3) y=x \text{ წრფის წერტილები}; \quad 4) x=0 \text{ და } y=0 \text{ წრფის წერტილები}.$$

$$14.17. \quad 1) \frac{\sqrt{5}(2+i)}{2}; \quad 2) -\frac{1}{15} + \frac{2}{3} i; \quad 3) 0; \quad 4) -2.$$

$$14.18. \quad 1) -1; \quad 2) -\frac{1}{3}(1+i); \quad 3) -\frac{2}{3}; \quad 4) -\frac{i}{e}. \quad 14.19.$$

$$1) -\frac{3}{2} \pi; \quad 2) \frac{\pi}{2}; \quad 3) \frac{\pi}{2} i; \quad 4) 2 \pi i. \quad 14.20. \quad 1) 2e - e^{1-i} - 1;$$

2) $\frac{5}{2} + 2i$; 3) πi ; 4) 0, როცა $m \geq 0$ ან $m < -1$; $2\pi i$, როცა $m = -1$. 14.21. 1) $2\pi \operatorname{sh} 1$; 2) $-\pi i$; 3) $-\pi$; 4) 0. 14.22. 1) $\pi(e^2 + e^{-2})i$; 2) $2\pi i$; 3) $2\pi i \operatorname{sh} 1$; 4) $\frac{2}{3}\pi e^2 i$. 14.23. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}i$; 3) 0; 4) πi . 14.24. 1) πi ; 2) 0; 3) $\pi i \cos 1$; 4) $-\frac{\pi}{4}i$. 14.25. 1) $-\pi i \operatorname{ch} 1$; 2) πi ; 3) $-2\pi i$; 4) $12\pi i$. 14.26. 1) $\pi(i \cos 1 - \sin 1)$; 2) $e^{\frac{a}{2}}(1 + \frac{a}{2})$; 3) $-\frac{\pi^2}{2}i$; 4) $-\frac{i+1}{2}e^i$. 14.27. 1) $R=1$; 2) $R=0$; 3) $R=1$; 4) $R=2$. 14.28. 1) $R=+\infty$; 2) $R=1$; 3) $R=e$; 4) $R=1$. 14.29. 1) $R=1$; 2) $R=\frac{1}{2}$; 3) $R=+\infty$; 4) $R=\frac{1}{2}$. 14.30. 1) $R=1$; 2) $R=1$; 3) $R=1$; 4) $R=1$. 14.31. 1) $R=3$; 2) $R=\sqrt{2}$; 3) $R=\frac{\sqrt{2}}{3}$; 4) $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 14.32. 1) $1 < |z| < 5$; 2) $1 < |z-2i| < 2$. 14.33. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. 3) $-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4} z^n$. 14.34. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. 14.35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, $|z-1| < 1$. 14.36. 1) $\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3n+1}$; 2) $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$.

14.37. 1) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$; 2) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{z^{n+1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$. 14.38. 1) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$; 4) $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$; 5) $\frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)! z^n}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1-z}{z^{2n+2}}$. 14.39. 1) $z=0$ მეორე რიგის წვლით; $z=1$ და $z=\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ მარტივი წვლით; 2) $z=0$ მეორე რიგის წვლით, $z=1$ —მარტივი წვლით; 3) $z=\pi n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) მარტივი წვლით; 4) $z=0$ მეორე რიგის წვლით, $z=\pi n$ ($n=\pm 1, \pm 2, \dots$)—მარტივი. 14.40. 1) $z=-1$ და $z=\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ —მეორე რიგის წვლით; 2) $z=\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) მარტივი წვლით; 3) $z=-1$ მესამე რიგის წვლით; 4) $z=\pi k$ ($k=0, \pm 1, \dots$) მესამე რიგის წვლით. 14.41. 1) $z=\pm i$ მარტივი წვლით; 2) $z=\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) მეორე რიგის წვლით; 3) $z=\pi k$ ($k=0, \pm 1, \dots$) მესამე რიგის წვლით; 4) $z=0$ მეორე რიგის წვლით. 14.42. 1) $z=-1$, აცილებული; 2) $z=0$, აცილებული; 3) $z=\pm i$ მარტივი პოლუსები; 4) $z=0$ და $z=-1$ მარტივი პოლუსები, $z=\infty$ არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 14.43. 1) $z=0$ მეორე რიგის პოლუსი, $z=\infty$ არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 2) $z=0$ არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, $z=\infty$ მარტივი პოლუსი; 3) $z=0$ და $z=\infty$ არსებითად განსაკუთრებული წერტილი.

ლები; 4) $z=0$ არსებითი განსაკლებული წერტილი, $z=\infty$ აკოლ-
ბალი წერტილი. 14.44. 1) 1; 2) 1; 3) -1; 4) $\frac{3}{2}$. 14.45. 1) -1;

2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) 0. 14.46. 1) $\text{Res } f(z) = (-1)^n$; 2) $\text{Res } f(z) = (-1)^n$;
 $z=ni$ $z=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

3) $\text{Res } f(z)=1$, $\text{Res } f(z)=-\frac{1}{2}$; 4) $\text{Res } \frac{1}{z-(2n+1)\pi i} = -1$ ($n=0, \pm 1, \dots$).

14.47. 1) 0; 2) $-\frac{\pi}{2}(1+i)$; 3) $-\frac{\pi^2 i}{2}$; 4) $\pi i \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} \right)$.

14.48. 1) $-2\pi i$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$; 4) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 14.49.

1) $2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right)$; 2) $-\frac{2\pi i}{e}$; 3) 0; 4) $-\frac{2}{9}\pi i$. 14.50.

1) $-\frac{1}{3}\pi i$; 2) πi ; 3) $-\frac{\pi}{2}i$; 4) $2\pi i$. 14.51. 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$;

2) $\frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$; 3) $\frac{3}{16}\pi$; 4) $\frac{\pi}{2}$. 14.52. 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$;

3) $\frac{\pi}{2e}$; 4) $\frac{\pi}{e^2}$. 14.53. 1) $-\frac{\pi}{27}$; 3) $\frac{\pi}{\sin ax}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\beta-\alpha}{2}\pi$.

§ 16

15.1. 1) ორიგინალი და $a_0=0$; 2) ორიგინალი და $a_0=3$; 3) არ
არის ორიგინალი; 4) ორიგინალი და $a_0=0$. 15.2. 1) ორიგინალი და
 $a_0=0$; 2) არ არის ორიგინალი; 3) არ არის ორიგინალი; 4) არ არის
ორიგინალი. 15.3. 1) ორიგინალი და $a_0=2$; 2) ორიგინალი და $a_0=5$;
3) ორიგინალი და $a_0=7$; 4) ორიგინალი და $a_0=1$. 15.4. 1) არ არის
ორიგინალი; 2) ორიგინალი და $a_0=0$; 3) ორიგინალი და $a_0=\ln a$;

4) არ არის ორიგინალი. 15.5. 1) $\frac{8+p}{2p-p^2}$; 2) $\frac{1}{p^2+9} - \frac{5}{p}$;

3) $\frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}$; 4) $\frac{10p^2+81}{p^4-16}$. 15.6. 1) $\frac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

2) $\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$; 3) $\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{p+3} + \frac{1}{p}$; 4) $\frac{1}{p+1} + \frac{3}{p+2} + \frac{1}{p^2}$.

15.7. 1) $\frac{2\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}$; 2) $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; 3) $\frac{\omega \cos \varphi \pm p \sin \varphi}{p^2+\omega^2}$;

4) $\frac{p \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{p^2+\omega^2}$. 15.8. 1) $\frac{\omega \cos \varphi \pm (p-\lambda) \sin \varphi}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$;

2) $\frac{(p-\lambda) \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$; 3) $\frac{\beta}{(p-\lambda)^2-\beta^2}$; 4) $\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2-\beta^2}$.

15.9. 1) $\frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2} - \frac{5}{p}$; 2) $\frac{18}{(p+1)^4} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}$; 3) $\text{arctg } p$;

4) $\frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}$. 15.10. 1) $\ln \frac{p}{p-1}$; 2) $\ln \frac{p-b}{p-a}$; 3) $\frac{2}{(p-\lambda)[(p-\lambda)^2+4]}$;

4) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+\lambda} + \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+4\beta^2} \right]$. 15.11. 1) $\frac{2\lambda^2 p}{p^4+4\lambda^4}$; 2) $\frac{p^3}{p^4+4\lambda^4}$;

3) $\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$; 4) $\frac{p^3+\omega^3}{(p^2-\omega^2)^2}$. 15.12. 1) $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+4}{p^2}$; 2) $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+100}{p^2+16}$;

3) $\frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{(p+1)^2} \right]$; 4) $\frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}$. 15.13. 1) $\frac{1}{4} \ln \frac{p^3}{p^3-4}$;

2) $\text{arctg } \frac{2}{p} - \frac{p}{4} \ln \left(1 + \frac{4}{p^2} \right)$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\sqrt{p+a} - \sqrt{p-a}}{\sqrt{p^2-\omega^2}}$;

4) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{p+\omega} + \sqrt{p-\omega}}{\sqrt{p^2-\omega^2}}$. 15.14. 1) $\ln \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$; 2) $\frac{1}{p} \ln \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$;

3) $\frac{e^{-ap}}{p}$; 4) $\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$. 15.15. 1) $f(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t$;

2) $f(t) = \cos t - \frac{1}{2} t \sin t$; 3) $f(t) = \frac{t^3}{2} + 2e^{-t} \sin t$; 4) $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-2t})$.

15.16. 1) $f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2} e^{-2t} - \frac{5}{3} e^{-3t}$; 2) $f(t) = e^{-2t} \cos \sqrt{2} t$;

3) $f(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{2}{5} e^{-3t}$; 4) $f(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t}$.

15.17. 1) $f(t) = \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3t e^t)$; 2) $f(t) = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} t e^{-t}$;

3) $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{12} \cos 2t$; 4) $f(t) = t e^{2t} + \frac{1}{2} \sin 2t$;

5) $f(t) = \frac{t-1}{27} e^t + \frac{1}{18} \left(t^3 + \frac{4}{3} t + \frac{2}{3} \right) e^{2t}$; 6) $f(t) = \frac{1}{5} t e^{2t} -$

$-\frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} \cos t$. 15.18. 1) $t \cdot \cos t = 1 - \cos t \neq \frac{1}{p(p^2+1)}$;

2) $t * e^t = e^t - t - 1 \div \frac{1}{p^2(p-1)}$; 3) $\operatorname{sh} t * t^2 = 2 \operatorname{ch} t - 2 \div \frac{2}{p(p^2-1)}$; 4) $\operatorname{sh} t * \sin t = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - \sin t) \div \frac{1}{p^4-1}$; 5) $t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta+1} \div \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{p^{\alpha+\beta+2}}$; 6) $e^t * e^{-t} = \operatorname{sh} t \div \frac{1}{p^2-1}$. 15.19. 1) $f(t) = \operatorname{sh} t$; 2) $f(t) = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$; 3) $f(t) = \frac{1}{2} (t \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)$; 4) $f(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - \sin t)$; 5) $f(t) = t - \sin t$; 6) $f(t) = \frac{1}{2\beta^2} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$. 15.20. 1) $f(t) = -1 - t + e^t$; 2) $f(t) = -1 + \frac{t^2}{2} + \cos t$; 3) $f(t) = \frac{1}{5} (3 \sin 3t - 2 \sin 2t)$; 4) $f(t) = \frac{1}{2\beta^2} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$. 15.21. 1) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcc} |a| < 1$; $\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcc} |a| = 1$; 0, $\operatorname{arcc} |a| > 1$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-a \ln a$. 15.22. 1) $y = 1 - e^{-t}$; 2) $y = e^t$; 3) $y = (t+1)e^{-t}$; 4) $y = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t)$. 15.23. 1) $y = \cos t$; 2) $y = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$; 3) $y = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t$; 4) $y = e^t - t - 1$. 15.24. 1) $y = e^{2t} \sin t$; 2) $y = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$; 3) $y = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$; 4) $y = 2e^t - \frac{t^2}{3} - t^2 - 2t - 2$. 15.25. 1) $y = \frac{1}{4}t e^{2t} - \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-t}$; 2) $y = \frac{t}{2} \sin t$; 3) $y = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$; 4) $y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right)$. 15.26. 1) $y = \frac{1}{2}e^t - t - 1 + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$; 2) $y = 6 + 5e^{-2t} + 4e^{2t}$; 3) $y = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t$; 4) $y = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}$. 15.27. 1) $y = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$; 2) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} +$

$+\frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$; 3) $y = t^2 - t + 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$; 4) $y = \frac{1}{8}[e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2 \sin t]$. 15.28. 1) $y = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-2t} + (t^2 + t - 1)e^{-t}$; 2) $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} + t e^{2t} + (2t^2 - 9t^2 + 21t)e^{3t}$; 3) $y = C_1 t^2 + C_2 t + C_3 + C_4 e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$; 4) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t + \frac{t^2 - 3t}{8}e^t - \frac{1}{4}t \sin t$. 15.29. 1) $y = 1 + t - \frac{t^2}{2} - e^t$; 2) $y = 2 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{5}{2}\cos t$; 3) $y = 5(t^2 - 2 + 2 \cos t)$; 4) $y = \frac{1}{10}(e^{2t} - 2e^{3t} + \sin t + \cos t)$. 15.30. 1) $y = \frac{1}{2}(e^t - t e^t - 1) - \operatorname{sh} t - \ln \frac{1+t}{2}$; 2) $y = e^t - 2e^{2t} + t e^{2t}$; 3) $y = t e^t + 2e^t + \operatorname{sh} t - 2$; 4) $y = \frac{b}{a} \int_0^t e^{-\tau^2} \operatorname{sh} a(t-\tau) d\tau$. 15.31. 1) $\begin{cases} x = -8e^{-2t} + 11e^{-3t}, \\ y = 4e^{-2t} + 11e^{-3t}, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^{-2t}(1-2t), \\ y = e^{-2t}(1+2t); \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{28}{9}e^{2t} - e^{-t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}, \\ y = \frac{28}{9}e^{2t} + e^{-t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t, \end{cases}$ 15.32. 1) $\begin{cases} x = e^t + e^{2t}, \\ y = e^t - e^{2t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}, \\ y = 2 - \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}, \\ y = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t, \\ y = 1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \frac{16}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{t/2}, \\ y = -\frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{t/2}. \end{cases}$

15.33. 1) $y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$; 2) $y = t - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot t^k$;
 3) $y = \sin t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$; 4) $y = -\frac{1}{2} \cos 2t +$
 $+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} t^{2k}$.

ლათინური ანბანი

A, a — ა	N, n — ენ
B, b — ბ	O, o — ო
C, c — ც	P, p — პ
D, d — დ	Q, q — ქ
E, e — ე	R, r — რ
F, f — ფ	S, s — ს
G, g — გ	T, t — ტ
H, h — ჰ	U, u — უ
I, i — ი	V, v — ვ
J, j — ჯ	W, w — ლუბლ-ვე
K, k — კ	X, x — იქს
L, l — ლ	Y, y — იგრეკ
M, m — მ	Z, z — ზეტ

ბერძნული ანბანი

A, α — ალფა	N, ν — ნიუ
B, β — ბეტა	Ξ, ξ — ქსი
Γ, γ — გემა	Ο, ο — ომიკრონი
Δ, δ — დელტა	Π, π — პი
E, ε — ეფსილონი	P, ρ — რო
Z, ζ — ჯეტა	Σ, σ — სიგმა
H, η — ეტა	T, τ — ტაუ
Θ, θ — თეტა	Φ, φ — ფი
I, ι — იოტა	X, χ — ხი
K, κ — კაპა	Υ, υ — იფსილონი
Λ, λ — ლამბდა	Ψ, ψ — ფსი
M, μ — მიუ	Ω, ω — ომეგა

24. Кувшинсов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (ТР). М.: «Высшая школа», 1983. — 174 с.
25. Лукацкий Г. Л. в др. Высшая математика, под редакцией Г. Н. Яковлева, М., «Прогресс», 1988. — 431 с.
26. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. II. М., «Наука», 1985. — 360 с.
27. Романовский П. П. Рязань Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Ламаласа. М., «Наука», 1973. — 336 с.
28. Залозный В., Фелокор М. В., Шабунов М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1976. — 407 с.
29. Тер-Кракоров А. М., Шабунов М. И. Курс математического анализа. М., «Наука», 1988. — 816 с.
30. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1968. — 724 с.
31. Толстой Г. П. Элементы математического анализа, т. II. М., «Наука», 1974. — 471 с.
32. Котеленица, Э. პანკაძე, ვ. ზნებავაშვილი, ვ. ხოჭოლაძე. გამოცემული შედეგები, თბილისი, სსსრ გამოცემები, 1990. — 156 გვ.
33. კ. კოტელენიკა, ი. ზაზბაძე. კომპლექსური რიცხვები და მნიშვნელოვანი კომპლექსური ფუნქციები, თბილისი სსსრ გამომცემი, 1979. — გვ. 82.
34. კ. კოტელენიკა, ე. ჯგერაძე, ვ. ზნებავაშვილი, ვ. ხოჭოლაძე. შედეგები ფიქსირებული წერტილების პირობებში თვითნებური მახასიათებლების 1982. — 76 გვ.
35. კ. კოტელენიკა, ე. პანკაძე, ვ. ზნებავაშვილი, ვ. ხოჭოლაძე. კომპლექსური ცვლადის ფიქსირებული თვითნებური პირობების ელემენტები, თბილისი, სსსრ გამოცემები, 1982. — 159 გვ.
36. კ. კოტელენიკა, ვ. ხოჭოლაძე, ვ. ზაზბაძე, ვ. ზნებავაშვილი, ვ. ჯგერაძე. ფუნქციის მნიშვნელობები ცვლადის ფიქსირებული პირობების თვითნებური პირობების, თბილისი, გამოცემები, 1989. — 490 გვ.
37. კ. კოტელენიკა, ვ. ხოჭოლაძე, ვ. ზაზბაძე, ვ. ზნებავაშვილი, ვ. ჯგერაძე. მნიშვნელოვანი ცვლადის ფიქსირებული პირობების თვითნებური პირობების, თბილისი, გამოცემები, 1991. — 606 გვ.
38. Уваров И. М., Мездер М. З. Курс математического анализа, т. II. М., «Прогресс», 1976. — 470 с.
39. Фиксированный Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М., «Наука», 1963. — 800 с.
40. Фиксированный Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. М.-Л., «Физматгиз», 1960. — 636 с.
41. ჯგერაძე, ე. ლომჯიჩი, ვ. ზაზბაძე. ფუნქციის შედეგები ფიქსირებული პირობების, თბილისი, გამოცემები, 1972. — 450 გვ.
42. ჯგერაძე, ვ. ჯგერაძე. შედეგები თბილისის ფიქსირებული პირობების ფიქსირებული გამოცემები, 1989. — 207 გვ.
43. ჯგერაძე, ვ. ჯგერაძე. შედეგები მნიშვნელოვანი ცვლადის ფიქსირებული პირობების ფიქსირებული გამოცემები, 1975. — 637 გვ.
44. Шабунин В. С. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1990. — 471 с.

Топурия Сергей Багратиевич,
Хочолава Владимир Владимирович,
Габидзашвили Мераб Ахметович,
Мачарашвили Нодар Давидович

- КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
- РЯДЫ
- ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(На грузинском языке)

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ზ. მახარაშვილი
უფროსი კორექტორი ი. დონაძე
კორექტორი დ. ყვავაძე
გამომწვები ი. მამისლურიძე

ასოთამშყობი მ. მამულაშვილი
ლინოტიპისტი მ. ხუჭუა

ИБ № 4504. Учебное издание.

გადაეცა ისაწყობად 4.01.91. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 13.12.92. საბეჭდი ქა-
ღალი № 2, ქაღალდის ზომა 60X90^{1/16}, გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი ნაბეჭდი
თაბახი 41,5. საღებავგატარება 38,82. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 31,1
ტირაჟი 1500 შეკვეთა № 69

უასი სახელმწიფო

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, გ. ნუბინაშვილის ქ. № 50.

Издательство «Ганатლება», Тбилиси, ул. Г. Чубинашвили № 50.
1993

საქართველოს რესპუბლიკის პოლიგრაფიისა და საგამომცემლო საქმის კორპორაციის
თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, გრაგოლ რთბაქიძის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И Чавчавадзе пр. Гр. робакидзе № 7.