ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ომარ ფურთუხია

მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა, სტატისტიკა

თსუ-2013

სარჩევი

თავი I. მონაცემთა წარმოდგენა 3

თავი II. ცენტრალური ტენდენციის საზომები 18

თავი III. მონაცემთა გაფანტულობის საზომები 32

თავი IV. დაწყვილებული მონაცემები, კორელაცია 44

თავი V. ალბათობის ელემენტები. გეომეტრიული ალბათობა 52

თავი VI. შედგენილი ხდომილებების ალბათობები 69

თავი VII. სრული ალბათობის ფორმულა. განმეორებითი ცდები 78

თავი VIII. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე და მისი რიცხვითი მახასიათებლები 88

თავი IX. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე 115

თავი X. ნორმალური განაწილება 124

თავი XI. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე 133

თავი XII. წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები 139

თავი XIII. ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის 148

დანართი. სტატისტიკური ცხრილები 155

პასუხები 160

თავი I

მონაცემთა წარმოდგენა

მონაცემებს უწოდებენ ობიექტთა რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისებრივ მახასიათებელთა დაკვირვებული მნიშვნელობების ერთობლიობას. ამ ერთობლიობის ყოველ წევრს **დაკვირვება, მონაცემი** ან **მონაცემი წერტილი** ეწოდება. იგი შეიძლება იყოს ფიზიკური გაზომვის შედეგი (მაგალითად, წონა ან სიმაღლე), პასუხი კითხვაზე (კი ან არა) ან რაიმე ნიშნის მიხედვით კლასიფიკაციის შედეგი. ყველა შესაძლო დაკვირვებათა სიმრავლე შეადგენს სტატისტიკურ პოპულაციას: **სტატისტიკური პოპულაცია** არის კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის ერთობლიობა. პოპულაციის საპირისპიროდ შერჩევა ან ამოკრეფა მხოლოდ ზოგიერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას მოიცავს: **შერჩევა** ანუ **ამოკრეფა** არის დაკვირვებათა ერთობლიობა, რომელიც შეადგენს პოპულაციის მხოლოდ რაიმე ნაწილს. სტატისტიკური კვლევის საბოლოო მიზანი პოპულაციის შესწავლაა. იმ შემთხვევაში, როცა პოპულაცია სრულადაა მოცემული, ამბობენ, რომ ხელთა გვაქვს სრული აღწერის შედეგები. მაგრამ პრობლემა სწორედ ისაა, რომ ხშირად სრული აღწერა შეუძლებელი ან მიზანშეუწონელია და მკვლევარის განკარგულებაში მხოლოდ შერჩევაა.

თავდაპირველ მონაცემებს რაიმე აზრით დალაგების, დაჯგუფებისა და კრებსითი (ერთიანი) მიმოხილვის გარეშე ნედლი (დაუმუშავებელი) მონაცემები ეწოდება. ნედლი მონაცემების დალაგების, დაჯგუფებისა და კრებსითი მიმოხილვის მეთოდოლოგია შეადგენს დესკრიფციულ ანუ აღწერით სტატისტიკას. ნედლი მონაცემები ხშირად რიცხვებია, რომლებიც ჩაწერილია ისე როგორც ისინი ცდის (ექსპერიმენტის, დაკვირვების) შედეგად მიიღებიან. უფრო მოხერხებულია ეს მონაცემები ცხრილის სახით ჩაიწეროს.

მაგალითი 1. ათი აბიტურიენტი გადის ტესტირებას მათემატიკაში. ნებისმიერ მათგანს შეუძლია დააგროვოს ნულიდან 5 ქულამდე ჩათვლით. X_i -- იყოს ქულათა ის რაოდენობა, რომელიც დააგროვა i-მა აბიტურიენტმა, $i=1,2,\ldots,10$.

მაშინ მნიშვნელობები 0, 1, 2, 3, 4, 5 – ერთი აბიტურიენტის მიერ დაგროვილ ქულათა შესაძლო რაოდენობა -- ქმნის პოპულაციას. შერჩევა $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ -- ათი აბიტურიენტის ტესტირების შედეგია. **შერჩევის რელიზაციები** შეიძლება იყოს რიცხვების შემდეგი ერთობლიობები (ათეულები): {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5} ან {4,4,5,3,3,1,5,5,2,5} ან {3,4, 5,0,1,2,3,4,5,4} და ა. შ. ადვილი დასანახია, რომ საზოგადოდ შესაძლო რეალიზაციების რაოდენობა ე. წ. გამრავლების პრინციპის თანახმად იქნება 10^5 (ცხადია, რომ ეს იგივეა რაც დაბრუნებით დალაგებული ამორჩევის შემთხვევაში განსხვავებულ შედეგთა რაოდენობა).

შერჩევა 5,3,0,1,4,2,5,4,1,5 ჩავწეროთ ცხრილის სახით. ამ შერჩევაში ქულა "5" გვხვდება 3-ჯერ, 3 არის "5"-ის **სიხშირე.** ანალოგიურად, "4"-ის სიხშირე არის 2, "3"-ის – 1, "2"-ის -- 1, "1"-ის – 2 და "0"-ის – 1. შევადგინოთ ცხრილი, რომლის პირველ სტრიქონში ჩაწერილა ქულები, ხოლო მეორე სტრიქონში კი – სიხშირეები:

ქულა	0	1	2	3	4	5
სიხშირე	1	2	1	1	2	3

ცხადია, რომ ეს ცხრილი შეიცავს იგივე ინფორმაციას, რასაც ნედლი მონაცემები, ოღონდ ის უფრო თვალსაჩინო და მოხერხებულია.

ნედლი მონაცემების ჩაწერის უძველეს ფორმას წარმოადგენს ე. წ. **პიქტოგრამა,** რომელსაც ადამიანები იყენებდნენ ჯერ კიდევ დამწერლობის შექმნამდე (უფრო ზუსტად, პიქტოგრამა შეიძლება ჩაითვალოს დამწერლობის პირველ ფორმად). პიქტოგრამა წარმოადგენს მონაცემების წარმოდგენის (ჩვენების) მიმზიდველ საშუალებას (ხერხს). პიქტოგრამა არის სხვადასხვა საგნებისა და მოვლენების სქემატური წარმოდგენა. სახელწოდება პიქტოგრამა წარმოდგება ლათინური *pictus*, რომელიც ნიშნავს ხატვას და ბერძნული γράμμα, რომელიც ნიშნავს ჩაწერას. პიქტოგრამა გამოიყენებო-

და ადრეულ დამწერლობით სისტემებში, მაგალითად, იეროგლიფებში. ამ შემთხვევაში ნახაზებს გამოიყენებდნენ ფონეტიკური ასოების აღსანიშნავად. იეროგლიფი წარმოდგება ბერძნული სიტყვებისაგან: ἱερός, რომელიც ნიშნავს წმინდას და γλύφειν, რომელიც ნიშნავს ნაჭდევ წერილს. ნაცვლად იმისა, რომ გამოვიყენოთ მესრები ან დიაგრამები, ვიყენებთ სურათებს (სიმბოლოებს). თანამედროვე გაგებით, პიქტოგრამა არის ცხრილის ფორმა, რომელშიც საგნები ან მათი რაოდენობები გამოსახულია რაიმე ნიშნებით (სიმბოლოებით).

მაგალითი 2. გამოკითხულ იქნა 50 სკოლის მოსწავლე, თუ რა ტრანსპორტით მიდიოდნენ ისინი სკოლაში. 18 მოსწავლის პასუხი იყო ავტობუსი, 7 მოსწავლის – მატარებელი, 8 მოსწავლის – ავტომობილი, 14 მოსწავლის – ფეხით, ხოლო 3 მოსწავლის კი – ველოსიპედით. წარმოვადგინოთ ეს მონაცემები პიქტოგრამის სახით. გავითვალისწინოთ, რომ ნებისმიერ პიქტოგრამას უნდა ჰქონდეს "**გასაღები**". ამ შემთხვევაში სიმბოლოთი ♫ -- ავღნიშნოთ ორი ადამიანი, ხოლო ♪ სიმბოლოთი -- ერთი ადამიანი. მაშინ პიქტოგრამას ექნება სახე:

ტრანსპორტის სახეობა	გასაღები: ♪ -- 1 ადამიანი, ♫ -- 2 ადამიანი
ავტობუსი	♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫
მატარებელი	♫ ♫ ♫ ♪
ავტომობილი	♫ ♫ ♫ ♫
ფეხით მოსიარულე	♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫ ♫
ველოსიპედი	♫ ♪

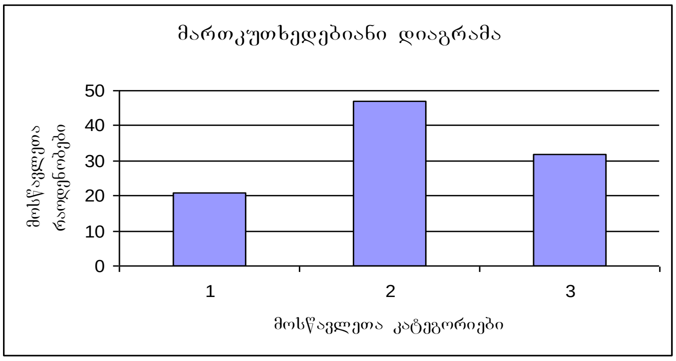
ამჟამად პიქტოგრამები გამოიყენება საგზაო ნიშნებზე, კომპიუტერულ ტექნიკაში, როგორც სასოფლო-სამეურნეო, ისე სამრეწველო პროდუქციაზე სხვადასხვა მონაცემებისა და მოხმარების წესების გამოსახატავად (მაგალითად, რა ტემპერატურის მქონე უთოთი შეიძლება ტანსაცმლის დაუთოება).

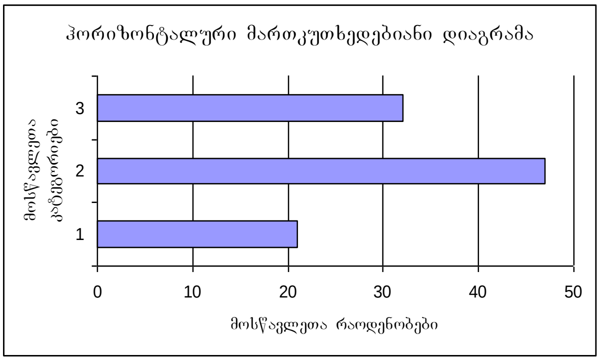
წერტილვანი, ხაზოვანი, სვეტოვანი, წრიული და ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამები

თვისებრივ მონაცემთა განაწილების გრაფიკული წარმოდგენისათვის ორი ძირითადი საშუალება არსებობს: მართკუთხედებიანი (ანუ სვეტოვანი) დიაგრამები და წრიული (ანუ სექტორებიანი) დიაგრამები.

მაგალითი 1. ქვემოთ მოყვანილია სკოლის დამამთავრებელი კლასების მოსწავლეთა აკადემიური მოსწრება ნიშნების მიხედვით. I კატეგორია: "9 – 10 ბალიანი" – 21 მოსწავლე, II კატეგორია: "7 – 8 ბალიანი" – 47 მოსწავლე, III კატეგორია: "5 – 6 ბალიანი" – 32 მოსწავლე.

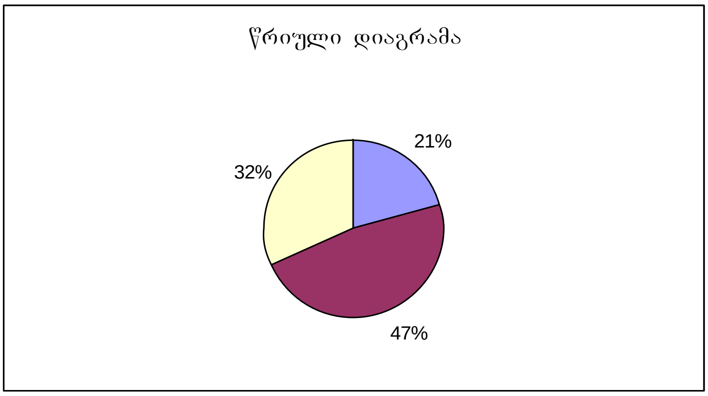
ავიღოთ აბსცისთა ღერძზე მდებარე ტოლი ფუძეების მქონე სამი მართკუთხედი, რომელთა სიმაღლეები პროპორციულია მოსწავლეთა რაოდენობების და ისინი ერთმანეთისაგან ტოლი დაშორებით განვალაგოთ. ორდინატთა ღერძზე გადაიზომება სიხშირეები. ასე მიღებულ ნახატს **მართკუთხედებიანი დიაგრამა** ეწოდება. ცხადია, რომ ვერტიკალურ ღერძზე შეიძლებოდა გადაგვეზომა ფარდობითი სიხშირე.





წრიული დიაგრამა განკუთვნილია დროის მოცემულ მომენტში ან მოცემულ შუალედში ობიექტთა მოცემული რაოდენობის კომპონენტებად დაყოფის ანუ ამ ობიექტთა კლასიფიკაციის აღსანიშნავად, იგი უფრო მოხერხებულია პროცენტებში გამო-

თქმული ნაწილების ან ფარდობითი სიხშირეების გამოსახატად. ჩვენს მაგალითში ვაგებთ სექტორებს, რომლებიც შეადგენენ სრული კუთხის – 360^0-ის შესაბამისად 21/100-ს, ანუ 21%-ს, 47/100-ს ანუ 47%-ს, 32/100-ს ანუ 32%-ს.



სტატისტიკაში ინტენსიურად გამოიყენება წრიული დიაგრამა. წრიული დიაგრამის გამოყენების მიზანია ვაჩვენოთ მთელის ნაწილებს შორის ურთიერთმიმართება სექტორების ზომების ვიზუალური შედარების გზით. გამოიყენება როგორც პროცენტები, ისე პროპორციები. სიდიდეები შეიძლება იყოს როგორც რიცხობრივი, ისე კატეგორიული ბუნების.

წრიული დიაგრამა ეს არის სექტორებად დაყოფილი წრე, სადაც თითოეული სექტორი შეესაბამება ნებისმიერი კატეგორიის განაწილებაში მონაწილე სიხშირეების პროცენტულ გამოსახულებებს ან ფარდობით სიხშირეებს.

მაგალითი 2. ქვემოთ მოყვანილია 1998 წლის განმავლობაში მსუბუქ საუზმეზე დახარჯული ფუნტების რაოდენობის განაწილება საკვების სახეობების მიხედვით. ავაგოთ წრიული დიაგრამა.

მსუბუქი საუზმე	ფუნტები (სიხშირე)
კარტოფილის "ჩიფსი"	11.2 მილიონი
სიმინდის "ჩიფსი"	8.2 მილიონი
ფუნთუშა	4.3 მილიონი
სიმინდის ბურბუშელა	3.8 მილიონი
კექსი	2.5 მილიონი
	ჯამი $n = 30.0$ მილიონი

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ვინაიდან წრე შედგება 360 გრადუსისაგან, თითოეული კლასის სიხშირე უნდა გადავიყვანოთ წრის პროპორციულ ნაწილში. ეს გადაყვანა უნდა მოხდეს შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$\text{გრადუსი} = \frac{f}{n}\cdot 360^\circ ,$$

სადაც f -- არის თითოეული კლასის შესაბამისი სიხშირე, ხოლო n -- არის სიხშირეთა ჯამი. ამიტომ გვექნება შემდეგი თანაფარდობები (ცხადია, რომ ყველა გრადუსის ჯამი უნდა იყოს 360^0):

$$\text{კარტოფილის “ჩიფსი”} \quad — \quad \frac{11.2}{30}\cdot 360^\circ = 134^\circ$$

$$\text{სიმინდის “ჩიფსი”} \quad — \quad \frac{8.2}{30}\cdot 360^\circ = 98^\circ$$

$$\text{ფუნთუშა} \quad — \quad \frac{4.3}{30}\cdot 360^\circ = 52^\circ$$

$$\text{სიმინდის ბურბუშელა} \quad — \quad \frac{3.8}{30}\cdot 360^\circ = 46^\circ$$

$$\text{კექსი} \quad — \quad \frac{2.5}{30}\cdot 360^\circ = 30^\circ$$

$$\text{ჯამი} \quad ——— \quad 360^\circ .$$

ნაბიჯი 2. თითოეული სიხშირე უნდა გადავიყვანოთ აგრეთვე პროცენტებში, რისთვისაც უნდა ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\% = \frac{f}{n}\cdot 100\% .$$

შესაბამისად, ჩვენ მივიღებთ შემდეგ პროცენტებს (ცხადია მათი ჯამი უნდა იყოს 100%):

კარტოფილის "ჩიფსი" — $\frac{11.2}{30} \cdot 100\% = 37.7\%$

სიმინდის "ჩიფსი" — $\frac{8.2}{30} \cdot 100\% = 27.3\%$

ფუნთუშა — $\frac{4.3}{30} \cdot 100\% = 14.3\%$

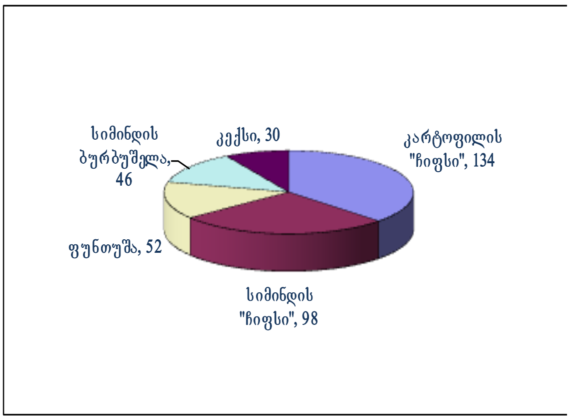
სიმინდის ბურბუშელა — $\frac{3.8}{30} \cdot 100\% = 46\%$

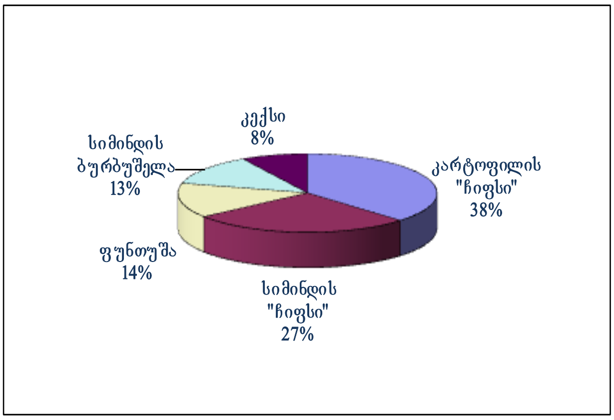
კექსი — $\frac{2.5}{30} \cdot 100\% = 8.3\%$

ჯამი ——— **100%.**

შენიშვნა: დამრგვალების გამო გრადუსების ჯამი შეიძლება ყოველთვის არ იყოს 360 გრადუსი, ისევე როგორც პროცენტების ჯამი – 100%.

ნაბიჯი 3. ვისარგებლოთ ტრანსპორტირით, დავხაზოთ წრიული დიაგრამა და მასზე მივუთითოთ თითოეული სექტორის დასახელება და შესაბამისი ერთეული, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები.





მაგალითი 3. ავაგოთ წრიული დიაგრამა არმიის ახალწვეულთა სისხლის ჯგუფების სიხშირეთა განაწილების ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის მიხედვით:

კლასი	სიხშირე
A	5
B	7
O	9
AB	4
	ჯამი 25

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ თითოეული კლასის შესაბამისი გრადუსული ზომა შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$\text{გრადუსი} = \frac{f}{n} \cdot 360^{\circ} .$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მივიღებთ გრადუსების შემდეგ რიცხვებს:

A — 72° , B — 100.8°, O — 129.6° , AB — 57.6° .

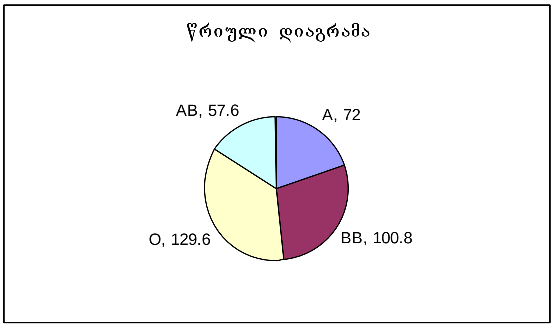
ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ თითოეული კლასის შესაბამისი პროცენტი, შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

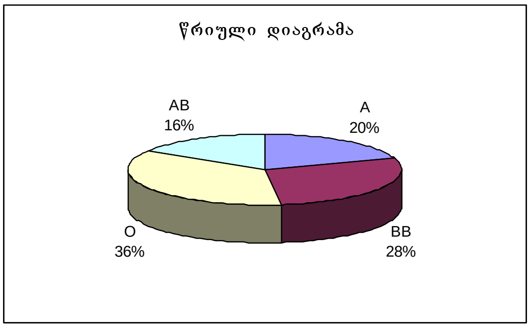
$$\% = \frac{f}{n} \cdot 100\% .$$

მივიღებთ შესაბამისად პროცენტების შემდეგ რიცხვებს:

A — 20%, B — 28%, O — 36% , AB — 16%.

ნაბიჯი 3. ვისარგებლოთ ტრანსპორტირით, ავაგოთ წრიული დიაგრამა და მასზე მოვნიშნოთ თითოეული სექტორის სახელი. გვექნება:





ამ დიაგრამიდან ჩანს, რომ ყველაზე მეტად გავრცელებული სისხლის ჯგუფია O (36%). იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ წრიულ დიაგრამაზე წარმოდგენილი მონაცემები, უნდა შევადაროთ სექტორები. მაგალითად, არის თუ არა რომელიმე სექტორი შედარებით დიდი ყველა დანარჩენთან შედარებით? ეს დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ ყველა დანარჩენ სისხლის ტიპს შორის ყველაზე მეტად გავრცელებულია O ტიპის სისხლი. ადამიანები, რომელთაც აქვთ AB ტიპის სისხლი, არიან უმცირესობაში. ადამიანების ორჯერ უფრო მეტ რაოდენობას აქვს O ტიპის სისხლი, AB ტიპის სისხლთან შედარებით.

მაგალითი 4. მსხვილი კომპანიის კადრების განყოფილების უფროსს დაევალა ჩაეტარებინა თანამშრომელთა სამსახურში არ გამოცხადების ანალიზი. ქვევით მოცემულია უკანასკნელი 21 სამუშაო დღის განმავლობაში სამსახურში არ გამოცხადებულ თანამშრომელთა რაოდენობები.

1, 1, 2, 2, 1, 0, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 0, 2, 1, 4, 1, 3.

პირველ რიგში მონაცემები დავალაგოთ ზრდადობის მიხედვით (გავაკეთოთ **ვარიაციული მწკრივი**). მივიღებთ შემდეგ მწკრივს:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4.

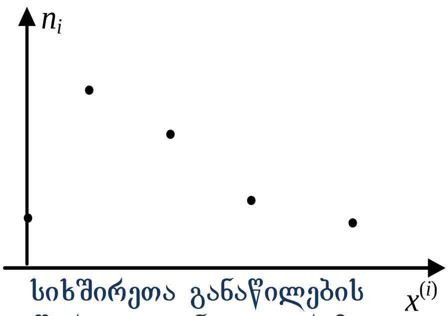
ვარიაციული მწკრივიდან ჩვენ ადვილად შეგვიძლია ამოვწეროთ მასში შემავალი განსხვავებული რიცხვითი მნიშვნელობები, ანუ **ვარიანტები** და ამ მნიშვნელობათა **სიხშირეები**, ანუ ვარიანტების გამეორებათა რაოდენობები. მოცემულ ვარიაციულ მწკრივში 5 განსხვავებული მნიშვნელობაა: 0, 1, 2, 3, 4. ამასთანავე, უკანასკნელი 21 სამუშაო დღის განმავლობაში მხოლოდ ორჯერ იყო სრული გამოცხადება, რვაჯერ არ გამოცხადდა მარტო ერთი თანამშრომელი და ა. შ. ყველა ამ ინფორმაციას შეგვიძლია თავი მოვუყაროთ ერთ ცხრილში, რომელიც გვაძლევს სამსახურში არ გამოცხადებულ თანამშრომელთა სიხშირული განაწილების სურათს:

არ გამოცხადებულთა რაოდენობა (ვარიანტი)	0	1	2	3	4	დაკვირვებული დღეების რაოდენობა
გაცდენილი დღეების რაოდენობა (სიხშირე)	2	8	6	3	2	21

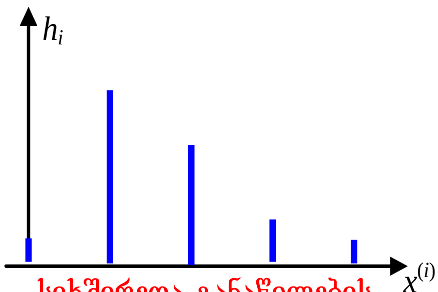
ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ცხრილი იქნება:

ვარიანტები	0	1	2	3	4	ჯამი
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	1

ეს ცხრილები შეიძლება **წერტილოვანი** ან **მესერული დიაგრამების** საშუალებით გამოისახოს:

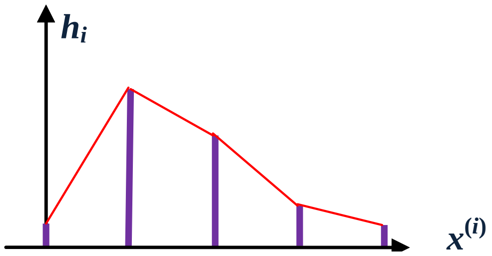


სიხშირეთა განაწილების წერტილოვანი დიაგრამა



სიხშირეთა განაწილების მესერული დიაგრამა

გარდა ამისა, მონაცემთა წარმოსადგენად გამოიყენება **სიხშირეთა პოლიგონი**. იგი მიიღება წერტილოვანი დიაგრამის წერტილების მიმდევრობითი შეერთებით. მას შემდეგი სახე აქვს:



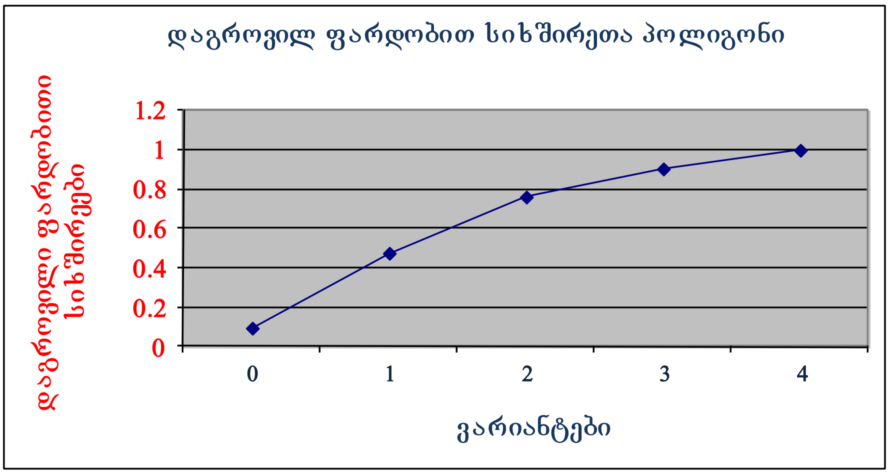
გადავიდეთ **დაგროვილ ფარდობით სიხშირეებზე**. ვარიანტის მოცემული მნიშვნელობისათვის დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე განისაზღვრება როგორც იმ ვარიანტების ფარდობითი სიხშირეების ჯამი, რომლებიც არ აღემატება ვარიანტის მოცემულ მნიშვნელობას. მოცემულ მაგალითში დაგროვილი ფარდობითი სიხშირეების ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

ვარიანტები	0	1	2	3	4
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}+\frac{8}{21}$	$\frac{2}{21}+\frac{8}{21}+\frac{6}{21}$	$\frac{2}{21}+\frac{8}{21}+\frac{6}{21}+\frac{3}{21}$	1

საბოლოოდ ეს ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

ვარიანტები	0	1	2	3	4
დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე	$\frac{2}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{19}{21}$	1

ამასთანავე, **დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონს** (ანუ **ოგივას**) ექნება შემდეგი სახე:



სიხშირეთა განაწილება გრაფიკულად შეიძლება გამოისახოს აგრეთვე ე. წ. **ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამით**, რაც გულისხმობს მოცემული რიცხვებიდან ათობითი ნიშნის გამოყოფას (ფოთლები) და დანარჩენი ნიშნების შესაბამისი რიცხვების ზრდის მიხედვით ჩამოწერას თითოჯერ ზევიდან ქვემოთ ვერტიკალურად (**ვერტიკალური ღერო**). შემდეგ, ვერტიკალურ ღეროზე დატანილი ფიქსირებული პირველი რამოდენიმე საერთო ათობითი ნიშნის გვერდით, ამ რიცხვების ბოლო ათობითი ნიშნების (ფოთლების) ამოწერას რიგრიგობით ჰორიზონტალურად (**ჰორიზონტალური ღერო**). ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა არის მონაცემთა ორგანიზების მეთოდი, რომელიც შედგება მონაცემთა დახარისხების და გრაფიკულად გამოსახვის კომბინაციისაგან. დაგროვილ სიხშირეთა განაწილებასთან შედარებით მისი უპირატესობა იმაშია, რომ იგი უკეთ ინახავს ფაქტიურ მონაცემებს გრაფიკულ წარმოდგენასთან შედარებით.

ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დაგრამა წარმოადგენს მონაცემების განლაგების სქემას (გეგმას), რომელშიც დაკვირვებული თითოეული მონაცემის ერთი ნაწილი

გამოიყენება როგორც ვერტიკალური ღერო, ხოლო მეორე ნაწილი კი როგორც ფოთოლი, რათა მოხდეს ჯგუფებისა და კლასების ფორმირება.

მაგალითი 5. ქვემოთ მოყვანილია იმ პაციენტების რაოდენობა, რომლებმაც ამბულატორიული მკურნალობის ცენტრს მიმართეს კარდიოგრამის გადასაღებად 20 დღიანი შერჩევის განმავლობაში. ავაგოთ ამ მონაცემებისათვის ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა.

25	31	20	32	13
14	43	02	57	23
36	32	33	32	44
32	52	44	51	45

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. დავალაგოთ მონაცემები ზრდადობის მიხედვით:

02, 13, 14, 20, 23, 25, 31, 32, 32, 32,
32, 33, 36, 43, 44, 44, 45, 51, 52, 57.

ნაბიჯი 2. განვაცალკევოთ (დავაჯგუფოთ) მონაცემები პირველი ციფრის მიხედვით, ისე როგორც ქვემოთაა ნაჩვენები:

02 13, 14 20, 23, 25 31, 32, 32, 32, 32, 33, 36
43, 44, 44, 45 51, 52, 57.

ნაბიჯი 3. ავაგოთ დიაგრამა, რისთვისაც მონაცემის პირველი ციფრი გამოვიყენოთ ვერტიკალურ ღეროდ, ხოლო მომდევნო ციფრი კი – ფოთლად. მაგალითად, მონაცემისათვის 32, პირველი ციფრი 3, არის ღერო, ხოლო მეორე ციფრი 2, არის ფოთოლი. მონაცემისათვის 14, 1 არის ღერო, ხოლო 4 კი ფოთოლი და ა. შ. საბოლოოდ, მივიღებთ ქვემოთ მოყვანილ დიაგრამას:

0	2					
1	3	4				
2	0	3	5			
3	1	2	2	2	2	3	6
4	3	4	4	5		
5	1	2	7			

აგებული ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ მონაცემების ამ განაწილებას პიკი აქვს ცენტრში და მონაცემებში არ არის წყვეტა. 20 დღიდან 7 დღის განმავლობაში იმ პაციენტების რაოდენობა, რომლებმაც გადაიღეს კარდიოგრამა მოთავსებულია 31-დან 36-მდე. დიაგრამა აგრეთვე გვიჩვენებს, რომ ამბულატორიულ ცენტრში პაციენტების რაოდენობა დღის განმავლობაში მერყეობდა მინიმუმ 2 პაციენტიდან მაქსიმუმ 57 პაციენტამდე.

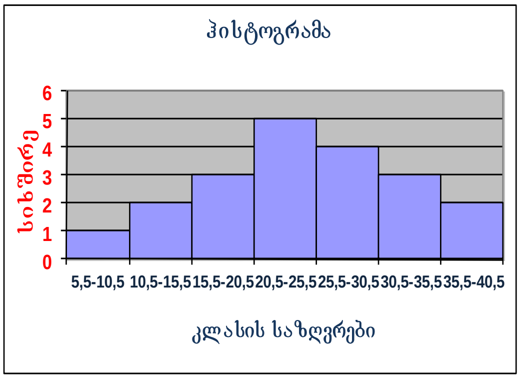
ჰისტოგრამა, პოლიგონი, ოგივა

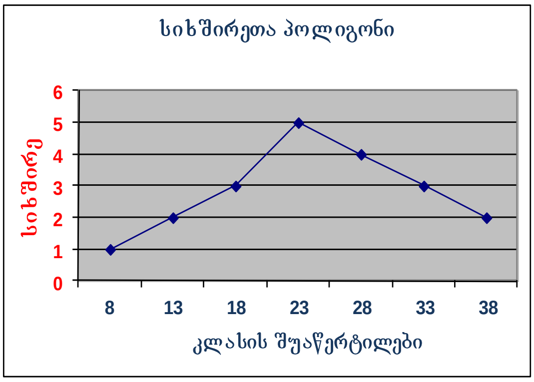
მას შემდეგ რაც მონაცემები ორგანიზებულია სიხშირეთა განაწილების სახით, ისინი შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნეს გრაფიკული ფორმით. სტატისტიკაში, გრაფიკებისა და დიაგრამების მიზანია მკითხველსა და მაყურებელს მიაწოდოს მონაცემები თვალსაჩინო ფორმით. უმეტესობა ადამიანებისათვის უფრო ადვილია ჩაწვდეს (გაიაზროს) გრაფიკულად წარმოდგენილი მონაცემების შინაარსს, ვიდრე რიცხობრივი ცხრილების ან სიხშირეთა განაწილებების ფორმით წარმოდგენილ მონაცემებს. ეს განსაკუთრებით არსებითია იმ მომხმარებლისათვის, რომელსაც აქვს მცირე ან საერთოდ არა აქვს სტატისტიკური განათლება.

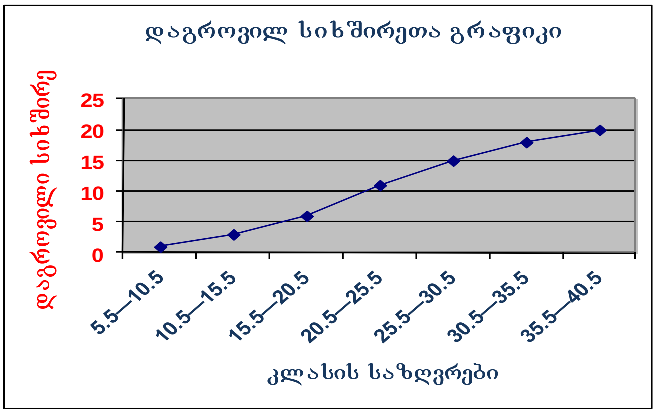
მკვლევარების მიერ სამი ყველაზე ხშირად გამოყენებადი გრაფიკებია:

1. **ჰისტოგრამა.**
2. **სიხშირეთა პოლიგონი.**
3. **დაგროვილ სიხშირეთა პოლიგონი** ანუ **ოგივა.**

ქვემოთ ჩვენ მოგვყავს გრაფიკების სამივე ტიპი, სადაც მონაცემები სამივე გრაფიკში წარმოადგენს კვირის განმავლობაში შემთხვევით შერჩეული 20 მორბენალის მიერ გარბენილი მანძილი გამოსახული მილებში.







ჰისტოგრამა წარმოადგენს დიაგრამის სახეობას, რომელიც გამოსახავს მონაცემებს სხვადასხვა სიმაღლის მოსაზღვრე ვერტიკალური მართკუთხედების გამოყენებით (გარდა იმ შემთხვევისა, როცა სიხშირე ნულია), რომელთა სიმაღლეები მონაცემების სიხშირეს შეესაბამება.

მაგალითი 1. ავაგოთ ჰისტოგრამა იმ მონაცემების წარმოსადგენად, რომლებიც მოყვანილია ქვემოთ და შეესაბამება ამერიკის 50-ივე შტატის რეკორდულად მაღალ ტემპერატურებს:

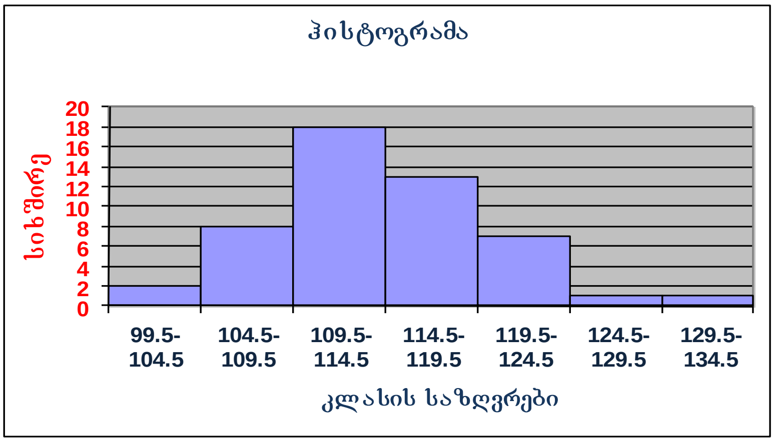
კლასის საზღვრები	სიხშირე
99.5-104.5	2
104.5-109.5	8
109.5-114.5	18
114.5-119.5	13
119.5-124.5	7
124.5-129.5	1
129.5-134.5	1

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. დავხაზოთ საკოორდინატო სიბრტყე და მოვნიშნოთ მასზე მასზე x და y ღერძები. x ღერძი ყოველთვის ჰორიზონტალლური ღერძია, ხოლო y ღერძი ყოველთვის ვერტიკალური ღერძია.

ნაბიჯი 2. გადავზომოთ სიხშირეები y ღერძზე, ხოლო კლასის საზღვრები კი -- x ღერძზე.

ნაბიჯი 3. გამოვიყენოთ სიხშირეები სიმაღლეებად და ყოველი კლასის ზემოთ დავხაზოთ შესაბამისი მართკუთხედი. მივიღებთ ჰისტოგრამას:



როგორც ეს ჰისტოგრამა გვიჩვენებს, მონაცემთა მნიშვნელობების ყველაზე დიდი რაოდენობის (18) მქონე კლასია 109.5—114.5, შემდეგ მოდის 13 მონაცემით კლასი საზღვრებით 114.5-119.5. ამ დიაგრამას აქვს ერთი პიკი, რომლის ირგვლივაც გროვდება მონაცემები.

იგივე მონაცემთა სიმრავლის წარმოსადგენად შეიძლება გამოყენებულ იქნას განსხვავებული სახის დიაგრამა (გრაფიკი) – ე. წ. სიხშირეთა პოლიგონი.

სიხშირეთა პოლიგონი წარმოადგენს დიაგრამის სახეობას, რომელიც გამოსახავს მონაცემებს ტეხილის საშუალებით, რომლის წვეროებს წარმოადგენენ კლასების შუაწერტილებისა და სიხშირეების წყვილი. ამასთანავე, სიხშირეები შეესაბამება შუაწერტილების სიმაღლეებს.

მაგალითი 2. წინა მაგალითში მოყვანილი სიხშირეთა განაწილებისათვის ავაგოთ სიხშირეთა პოლიგონი.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ თითოეული კლასის შუაწერტილი. გავიხსენოთ, რომ შუაწერტილის საპოვნელად საჭიროა კლასის ქვედა და ზედა საზღვრები შეიკრიბოს და გაიყოს 2-ზე:

$$\frac{99.5+104.5}{2}=102\,,\quad \frac{104.5+109.5}{2}=107\,,$$

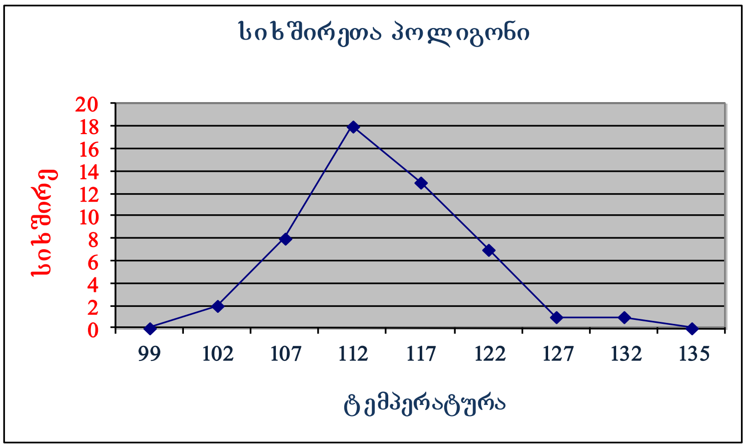
და ა. შ. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ცხრილი:

კლასის საზღვრები	შუაწერტილები	სიხშირე
99.5-104.5	102	2
104.5-109.5	107	8
109.5-114.5	112	18
114.5-119.5	117	13
119.5-124.5	122	7
124.5-129.5	127	1
129.5-134.5	132	1

ნაბიჯი 2. დავხაზოთ x და y ღერძები. x ღერძზე მოვნიშნოთ თითოეული კლასის შუაწერტილი, და შემდეგ შევარჩიოთ მოხერხებული მასშტაბი y ღერძზე სიხშირის გადასაზომად.

ნაბიჯი 3. გამოვიყენოთ შუაწერტილები x-ის მნიშვნელობებად, ხოლო სიხშირეები როგორც y-ის მნიშვნელობები და მოვნიშნოთ შესაბამისი წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე.

ნაბიჯი 4. შევაერთოთ მეზობელი წერტილები სწორი ხაზებით (მონაკვეთებით). გრაფიკი დავიწყოთ და დავამთავროთ x ღერძზე: პირველი წერტილიდან დავბრუნდეთ უკან x ღერძზე და უკანასკნელი წერტილიდან აგრეთვე მივიდეთ x ღერძამდე იმავე მანძილზე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე:



სიხშირეთა პოლიგონი და ჰისტოგრამა არის მონაცემთა წარმოადგენის ორი განსხვავებული გზა. ამ ორი გზიდან მკვლევარი თავისი შეხედუებისამებრ ირჩევს რომელი გამოიყენოს. დიაგრამების (გრაფიკების) მესამე ტიპი გამოიყენება კლასების დაგროვილი სიხშირეების წარმოსადგენად. ამ ტიპის დიაგრამას ეწოდება დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა ან ოგივა. **დაგროვილი სიხშირე** არის ჯამი მოცემული კლასის შესაბამისი სიხშირისა და მანამდე არსებული ყველა სიხშირის. **ოგივა** არის დიაგრამის სახეობა რომელიც გამოიყენება სიხშირეთა განაწილების კლასების დაგროვილი სიხშირეების წარმოსადგენად გრაფიკული ფორმით.

მაგალითი 3. მაგალით 1-ში მოყვანილი განაწილებისათვის ავაგოთ ოგივა.

ამოხსნა.

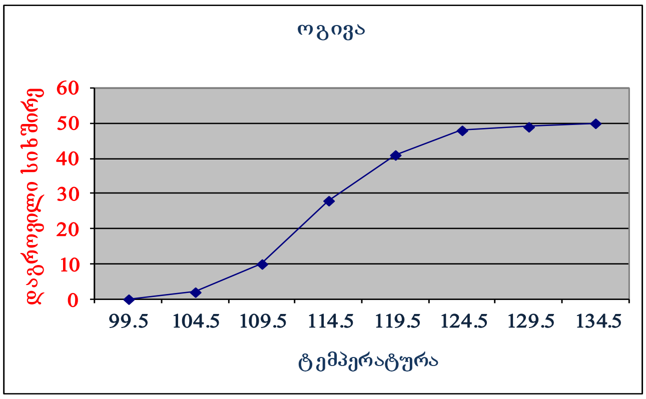
ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ დაგროვილი სიხშირე თითოეული კლასისათვის:

კლასის საზღვრები	დაგროვილი სიხშირე
99.5-104.5	2
104.5-109.5	10
109.5-114.5	28
114.5-119.5	41
119.5-124.5	48
124.5-129.5	49
129.5-134.5	50

ნაბიჯი 2. დავხაზოთ x და y ღერძები. x ღერძზე მოვნიშნოთ თითოეული კლასის საზღვრები, და შემდეგ შევარჩიოთ მოხერხებული მასშტაბი y ღერძზე დაგროვილი სიხშირის გადასაზომად. (იმის მიხედვით თუ რა რიცხვები წერია დაგროვილი სიხშირეების სვეტში, შეიძლება გამოყენებული იქნეს ისეთი გრადუირება (სკალირება) როგორიცაა 0, 1, 2, 3, . . . , ან 0, 5, 10, 15, 20, . . . , ან 0, 1000, 2000, 3000, ... y ღერძზე **არ უნდა მოინიშნოს** რიცხვები დაგროვილი სიხშირეების სვეტიდან). ამ მაგალითში გამოყენებული იქნება სკალა 0, 5, 10, 15, ...

ნაბიჯი 3. მოვნიშნოთ დაგროვილი სიხშირეები ყოველი კლასის ზედა საზღვრის თავზე: მოვნიშნოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატებია კლასების ზედა საზღვრები (აბსცისა) და დაგროვილი სიხშირეები (ორდინატა). ზედა საზღვრები იმიტომ აიღება, რომ დაგროვილი სიხშირეები წარმოადგენენ კლასის ზედა საზღვრამდე მოთავსებული მონაცემთა მნიშვნელობების შესაბამისი სიხშირეების ჯამს.

ნაბიჯი 4. დავიწყოთ პირველი კლასის ზედა საზღვრიდან, 104.5-დან და შევაერთოთ მეზობელი წერტილები სწორი ხაზებით, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. ბოლოს გრაფიკი გავაგრძელოთ პირველი კლასის ქვედა საზღვრამდე, 99.5-მდე x ღერძზე:



დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა გამოიყენება იმის საილუსტრაციოდ, თუ მონაცემთა რამდენი მნიშვნელობა არ აღემატება გარკვეული კლასის ზედა საზღვარს. მაგალითად, იმის გასაგებად, თუ რამდენი რეკორდულად მაღალი ტემპერატურა არის ნაკლები ვიდრე 114.5, მოვძებნოთ x ღერძზე 114.5 და ამ წერტილზე ავღმართოთ ვერტიკალური ხაზი გრაფიკის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილში გავავლოთ ჰორიზონტალური ხაზი y ღერძის გადაკვეთამდე. y ღერძზე ვღებულობთ 28-ს.

როგორც ზემოთ ვნახეთ. ჰისტოგრამა, სიხშირეთა პოლიგონი, და ოგივა იგება ნედლი (დაუმუშავებელი) მონაცემების სიხშირეების გამოყენებით. ეს განაწილებები შესაძლებელია გადავიყვანოთ განაწილებებში, რომლებიც გამოიყენებენ პროპორციებს (შეფარდებებს) ნაცვლად ნედლი მონაცემების სიხშირეებისა. ამ ტიპის დიაგრამებს უწოდებენ **ფარდობით სიხშირეთა დიაგრამებს.** დიაგრამები, რომლებიც იყენებენ ფარდობით სიხშირეებს, ნაცვლად სიხშირეებისა, გამოიყენება მაშინ როდესაც პროპორცია მონაცემთა იმ მნიშვნელობების, რომლებიც შედიან მოცემულ კლასში უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ფაქტიური რაოდენობა მონაცემთა იმ მნიშვნელობების, რომლებიც შედიან იმავე კლასში.

იმისათვის რომ სიხშირეები გადავიყვანოთ პროპორციებში ან ფარდობით სიხშირეებში, თითოეული კლასის სიხშირე უნდა გავყოთ ერთობლივ სიხშირეზე. ფარდობით სიხშირეთა ჯამი ყოველთვის ერთის ტოლი იქნება. ეს დიაგრამები იქნება ანალოგიური (მსგავსი) სიხშირეების შესაბამისი დიაგრამების, იმ განსხვავებით, რომ ორდინატთა ღერძზე აქ გადაიზომება ფარდობითი სიხშირეები ნაცვლად სიხშირეებისა. მოვიყვანოთ ამ დიაგრამების შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 4. ავაგოთ ჰისტოგრამა, სიხშირეთა პოლიგონი და ოგივა ფარდობითი სიხშირეების გამოყენებით 20 შემთხვევით შერჩეული მორბენალის მიერ კვირის განმავლობაში გარბენილი მანძილების განაწილების მიხედვით:

კლასის საზღვრები	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
5.5—10.5	1	1
10.5—15.5	2	3
15.5—20.5	3	6
20.5—25.5	5	11
25.5—30.5	4	15
30.5—35.5	3	18
35.5—40.5	2	20
	ჯამი 20	

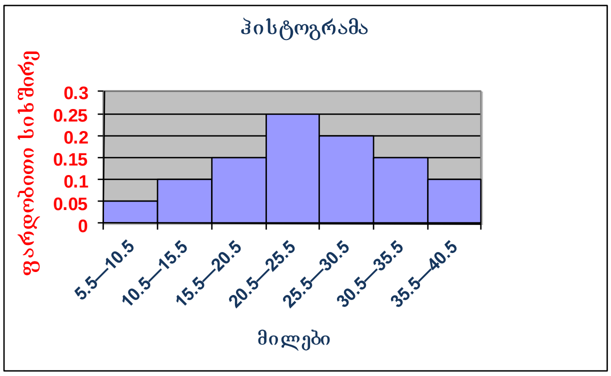
ამოხსნა.

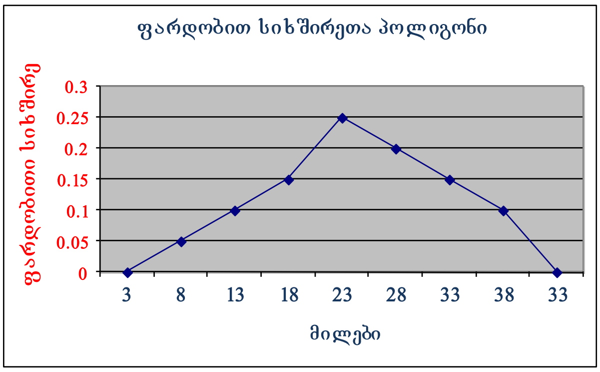
ნაბიჯი 1. გადავიყვანოთ სიხშირეები პროპორციებში ანუ ფარდობით სიხშირეებში თითოეული კლასის სიხშირის გაყოფით დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაზე. 5.5—10.5 კლასისათვის ფარდობითი სიხშირე იქნება 1/20=0.05, 10.5—15.5 კლასისათვის ფარდობითი სიხშირე იქნება 2/20=0.10, 15.5—20.5 კლასისათვის ფარდობითი სიხშირე არის 3/20=0.15, და ა. შ.

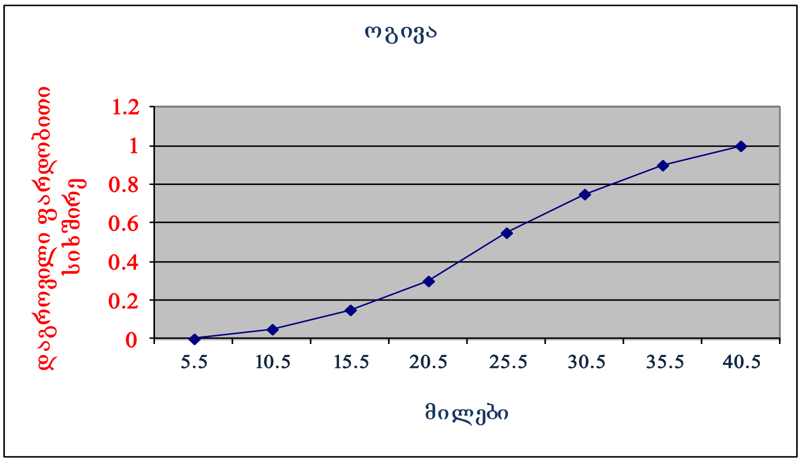
ნაბიჯი 2. იგივე პროცედურის გამოყენებით ვიპოვოთ ფარდობითი სიხშირეები დაგროვილი სიხშირეების სვეტისათვის. საბოლოოდ, მივიღებთ ფარდობითი სიხშირეების შემდეგ ცხრილს:

კლასის საზღვრები	შუაწერტილები	ფარდობითი სიხშირე	დაგროვილი ფარდობითი სიხშირე
5.5—10.5	8	0.05	0.05
10.5—15.5	13	0.10	0.15
15.5—20.5	18	0.15	0.30
20.5—25.5	23	0.25	0.55
25.5—30.5	28	0.20	0.75
30.5—35.5	33	0.15	0.90
35.5—40.5	38	0.10	1.00
		ჯამი 1.00	

ნაბიჯი 3. დავხაზოთ სამივე ტიპის დიაგრამა. ჰისტოგრამისა და ოგივის შემთხვევებში აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ კლასის საზღვრები, ხოლო სიხშირეთა პოლიგონის შემთხვევაში აბსცსისთა ღერძზე გადავზომოთ კლასის შუაწერტილები. ორდინატთა ღერძზე კი გადავზომოთ ფარდობითი სიხშირები.







მაგალითი 5. ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემულია დიდი ზომის ავტომანქანების საწვავის დანახარჯის დასადგენად ჩატარებული 100 დაკვირვების მონაცემები. ცხრილი გვიჩვენებს 1 გალონი (=3.78 ლიტრი) საწვავით ავტომანქანის გავლილ მანძილს მილებში (1 მილი = 1.609 კმ):

მილი/გალონზე

19.0	20.8	22.0	22.7	20.0	18.9	16.6	16.8	20.8	14.7
15.1	21.8	21.1	21.5	21.1	15.5	19.3	15.1	20.6	16.8
18.2	20.5	15.3	16.2	16.3	22.8	22.7	21.9	22.5	17.1
19.1	21.6	19.0	18.3	18.6	22.1	17.5	22.9	21.7	18.7
21.9	20.2	14.5	14.1	22.9	20.2	17.3	22.6	19.3	21.7
21.5	22.6	18.7	19.2	22.8	21.6	21.7	20.5	22.7	20.4
18.8	15.1	16.5	20.5	19.1	17.4	19.7	19.2	16.4	21.9
14.3	19.2	19.7	17.1	21.4	21.9	21.7	19.2	23.9	19.6
20.9	18.5	20.2	18.2	20.2	22.4	20.4	21.6	21.3	22.4
20.5	18.1	20.7	21.3	16.9	20.3	23.9	18.8	21.1	21.9

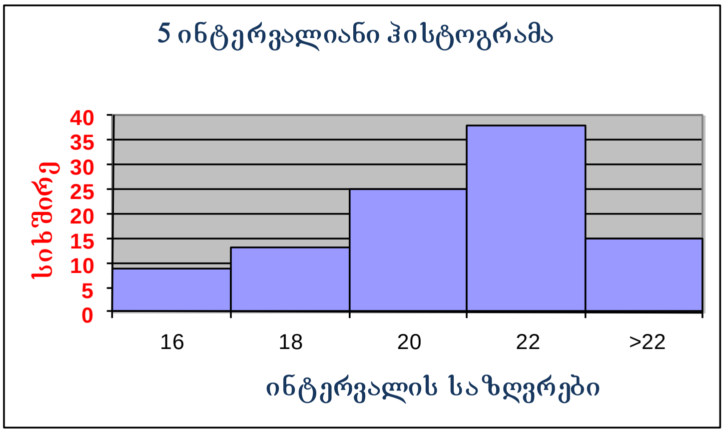
ამ მონაცემების დამუშავება მდგომარეობს შემდეგში:

I. დაკვირვებულ მონაცემებს შორის უნდა მოიძებნოს მინიმალური და მაქსიმა-ლური მნიშვნელობები. წარმოდგენილ მონაცემებში უმცირესი რიცხვითი მნიშვნელობაა $x_{min}=14.1$, ხოლო უდიდესი -- $x_{max}=23.9$. ეს ორი რიცხვი განსაზღვრავს მონაცემთა გაფანტულობის უმარტივეს მახასიათებელს – **გაბნევის დიაპაზონს**, რომელიც არის სხვაობა მონაცემთა მაქსიმალურ და მინიმალურ რიცხვით მნიშვნელობებს შორის. შესაბამისად, მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი ტოლია 23.9-14.1=9.8.

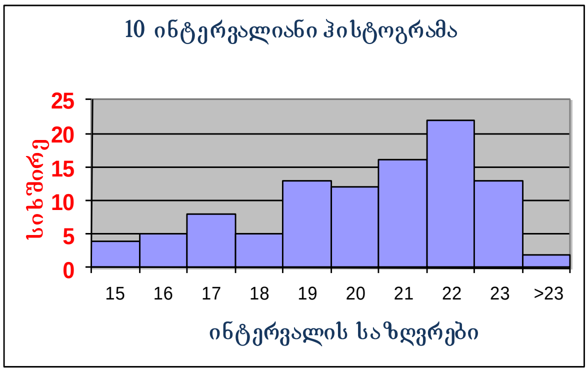
II. შემდეგი ნაბიჯია – მონაცემთა დაჯგუფების ინტერვალების გამოყოფა. ამისათვის უმარტივეს შემთხვევაში გაბნევის დიაპაზონს ყოფენ ერთი და იგივე სიგრძის დაახლოებით 5 – 20 ქვეინტერვალად. მოცემულ შემთხვევაში ავირჩიოთ 5 ტოლი სიგრძის ინტერვალი. სიმარტივისათვის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები დავამრგვალოთ უახლოეს მთელ რიცხვებამდე: კერძოდ, მინიმუმად ავიღოთ 14, ხოლო მაქსიმუმად – 24. მაშინ თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძედ უნდა ავიღოთ $\Delta=(24-14)/5=2$. შესაბამისად, დაჯგუფების ინტერვალები იქნება: $(-\infty,16]$, (16,18], (18,20], (20,22], $(22,+\infty)$. გამოვთვალოთ ამ ქვეინტერვალებში მოხვედრილი მონაცემების სიხშირეები და ჩავწეროთ ისინი ცხრილის სახით:

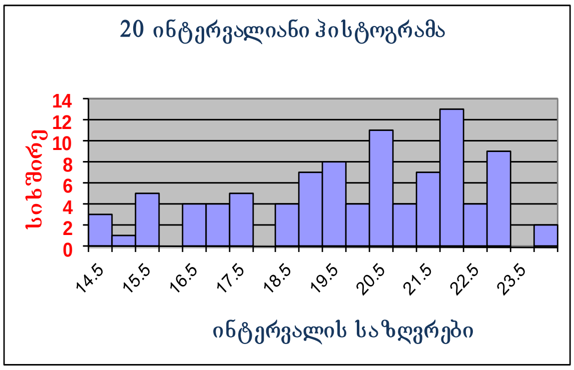
ინტერვალი	სიხშირეთა გამოთვლა	სიხშირე
$(-\infty,16]$	///// ////	9
(16,18]	///// ///// ///	13
(18,20]	///// ///// ///// ///// /////	25
(20,22]	///// ///// ///// ///// ///// ///// ///// ///	38
$(22,+\infty)$	///// ///// /////	15
	სულ	100

ამ ცხრილის მიხედვით აგებულ ჰისტოგრამას ექნება შემდეგი სახე:



თუ იგივე მონაცემებს დავაჯგუფებთ 10 ან 20 ქვეინტერვალში, მაშინ ჰისტოგრამებს ექნებათ შესაბამისად შემდეგი სახეები:





როგორც ვხედავთ, მონაცემთა დაჯგუფების ქვეინტერვალების რაოდენობის ზრდასთან ერთად ჰისტოგრამა სულ უფრო და უფრო დაკბილული ხდება. ამასთანავე, ამ შემთხვევაში დაჯგუფების 5 და 10 ინტერვალი იძლევა უფრო მკაფიოდ გამოხატულ კანონზომიერებას, მაშინ როდესაც 20 ინტერვალის შემთხვევაში გაჩნდა ბევრი, მოვლენის შინაარსიდან გამომდინარე, აზრს მოკლებული “რხევა”, რაც გამოწვეულია

მონაცემთა მოცემული რაოდენობისათვის დაჯგუფების ინტერვალთა დიდი რაოდენობით.

ამოცანები

1. ქვემოთ მოყვანილია ავტოსტრადაზე რადარის მიერ დაფიქსირებული 200 სატვირთო მანქანის სიჩქარეების (მილი/სთ-ში) დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი:

სიჩქარის ინტერვალი	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
სიხშირე	12	32	56	72	20	8

ა) ააგეთ მონაცემთა სიხშირეების ჰისტოგრამა.

ბ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა.

გ) შეაფასეთ პროცენტული რაოდენობა იმ ავტომობილების, რომლებიც მოძრაობენ 65 მილი/სთ-ზე მეტი სიჩქარით.

დ) შეაფასეთ სიჩქარე, რომელზე ნაკლები სიჩქარით მოძრაობს ავტომობილების 25%.

2. ქვემოთ მოყვანილია სანაპიროზე მოგროვილი 60 ნიჟარის მასების (გრამებში) დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი:

მასის ინტერვალი	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39
სიხშირე	2	5	8	14	17	11	3

ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

3. დავუშვათ აგებულია მონაცემების სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

ა) პირველი ორი ინტერვალური კლასის საზღვრებია 2.0 და 2.25 და 2.25 და 2.5 შესაბამისად, 5-ისა და 12-ის ტოლი სიხშირეებით. ჰისტოგრამის პირველი მართკუთხედის სიმაღლეა 2.5 სმ. რისი ტოლია მეორე მართკუთხედის სიმაღლე?

ბ) მესამე ინტერვალური კლასის საზღვრებია 2.5 და 2.75. რისი ტოლია ამ კლასის სიხშირე, თუ შესაბამისი მართკუხედის სიმაღლეა 3.5 სმ?

4. ქვემოთმოყვანილი დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი გვიჩვენებს 275 სტუდენტის მიერ სტატისტიკის გამოცდაზე მიღებულ ქულას:

ქულა	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59
სიხშირე	6	21	51	84	82	31

ა) კლასების საზღვრებად აიღეთ არსებულ საზღვრებს ±0.5 და ააგეთ მონაცემთა სიხშირეების ჰისტოგრამა.

ბ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა.

გ) ცნობილია, რომ თუ სტუდენტი რომელიც მიიღებს სულ ცოტა 44 ქულას, მაშინ მისი შეფასებაა A. იპოვეთ პროცენტული რაოდენობა იმ სტუდენტების, რომლთა შეფასებაა A.

დ) ცნობილია, რომ სტუდენტთა 81.8%-მა მიიღო შეფასება E ან უფრო უკეთესი შეფასება. იპოვეთ იმ ქულების ქვედა საზღვარი, როცა სტუდენტი მიიღებას შეფასებას E.

5. ქვემოთ მოყვანილია კლინიკის 45 პაციენტის სისხლში დეციმილებში გაზომილი (მოხერხებული ფორმით დალაგებული) ჰემოგლობინის დონე:

9.1	10.1	10.7	10.7	10.9	11.3	11.3	11.4	11.4	11.4	11.6	11.8	12.0	12.1	12.3
12.4	12.7	12.9	13.1	13.2	13.4	13.5	13.5	13.6	13.7	13.8	13.8	14.0	14.2	14.2
14.2	14.6	14.6	14.8	14.8	15.0	15.0	15.0	15.1	15.4	15.6	15.7	16.2	16.3	16.9

ა) შეადგინეთ დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი ინტერვალთა 8 კლასისათვის.

ბ) ააგეთ მონაცემთა სიხშირეების ჰისტოგრამა.

6. ქვემოთ მოყვანილია 34 მოსწავლის მიერ ამოცანის ამოხსნაზე დახარჯული დრო წუთებში:

4	3.75	5	6.25	7	3	7	5.25	7.5	8.75	7.5	4.5
6.5	4.5	8	7.25	6.75	5.75	4.75	8.25	7	3.5	5.5	7.25

8.5 6.5 5 7.25 6.75 7.75 5.75 6 7.75 6.5

ა) დაიწყეთ 3–3.75-ით და შეადგინეთ დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი ინტერვალთა 6 კლასისათვის.

ბ) რა იქნება პირველი კლასის საზღვრები.

გ) ააგეთ მონაცემთა სიხშირეების ჰისტოგრამა.

7. ქვემოთმოყვანილი ცხრილი გვიჩვენებს გოლფის კლუბის 200 წევრის ასაკთა განაწილებას:

ასაკი	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79
წევრთა რიცხვი	12	40	44	47	32	15	10

ა) შეადგინეთ ცხრილი, რომელიც გვიჩვენებს კლასთა საზღვრებს.

ბ) ააგეთ მონაცემთა სიხშირეების ჰისტოგრამა.

8. 2010 წლის ევროპული ქვეყნების მოსახლეობის ასაკის განაწილების შეფასებაა:

ასაკი	16-მდე	16–39	40–64	65–79	80–99
პროცენტი	14.3	33.1	35.3	11.9	5.4

ა) ააგეთ პროცენტულ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა.

ბ) თუ ადამიანმა 2010 წელს მიაღწია 60 წელს, მას ენიშნება სახელმწიფო პენსია. შეაფასეთ ადამიანთა რიცხვი, რომელიც მიიღებს სახელმწიფო პენსიას, ქვეყანაში, რომლის მოსახლეობა 42.5 მილიონია.

9. 2006 წლის 360 დღის განმავლობაში მომუშავე სუპერმარკეტის დღიური ნავაჭრის ჩანაწერები (გაზომილი 10 000 ლარებში) ასე გამოიყურება:

ნავაჭრი, x	$x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$4\le x<5$
დღეთა რიცხვი	15	27	64	72

ნავაჭრი, x	$5\le x<6$	$6\le x<7$	$7\le x<8$	$8\le x<9$
დღეთა რიცხვი	86	70	16	10

დღე, როცა ნავაჭრი ეცემა 32 500 ლარის ქვემოთ, ითვლება "ცუდ" დღედ, ხოლო დღე, როცა ნავაჭრი აღემატება 77 500 ლარს, ითვლება "კარგ" დღედ. დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამის საშუალებით შეაფასეთ "ცუდი" და "კარგი" დღეების რიცხვი 2006 წელს.

10. კომპანიის 132 თანამშრომელი ცხოვრობს ქალაქგარეთ. უახლოეს კილომეტრამდე დამრგვალებული მანძილები, x კმ, რასაც თანამშრომლები გადიან სამსახურამდე, თავმოყრილია ქვემოთმოყვანილ დაჯგუფებულ სიხშირეთა ცხრილში:

x	5-მდე	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29
სიხშირე	12	29	63	13	12	3

ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამა და მისი საშუალებით იპოვეთ კილომეტრების რიცხვი, რომელზე ნაკლების გავლაც უწევს თანამშრომელთა: ა) ერთ მეოთხედს, ბ) სამ მეოთხედს.

11. სადაზღვევო კომპანიის ხელმძღვანელობას აინტერესებს გამოიკვლიოს გასული ზაფხულის 30 დღის განმავლობაში დიდ ქალაქში მოპარულ ავტომანქანათა განაწილება. დაკვირვებული ნედლი მონაცემები მოყვანილია ქვემოთ:

52	62	51	50	69
58	77	66	53	57
75	56	55	67	73
79	59	68	65	72
57	51	63	69	75
65	53	78	66	55

ავაგეთ ფოთლებიანი ღეროების მსგავსი დიაგრამა შემდეგი კლასების გამოყენებით: 50—54, 55—59, 60—64, 65—69, 70—74, 75—79 და გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები.

თავი II

ცენტრალური ტენდენციის საზომები

ჩვენ უკვე განვიხილეთ თუ როგორ შეიძლება ნედლი მონაცემებიდან სასარგებლო ინფორმაციის მოპოვება (მიღება) პირველ ეტაპზე მათი სიხშირული განაწილების სახით ორგანიზებით, ხოლო შემდგომ კი მონაცემების წარმოდგენით სახადასხვა დიაგრამების გამოყენებით. ახლა ჩვენ ვიწყებთ იმ სტატისტიკური მეთოდების შესწავლას, რომლებიც მონაცემების დაჯამებისა და შესაბამისი დასკვნების გაკეთების საშუალებას მოგვცემენ. ამ მეთოდებს შორის ყველაზე ცნობილია **საშუალოს** მოძებნის მეთოდი. პოპულარულ ენაზე, საშუალო ნიშნავს განაწილების ცენტრს ან უფრო ტიპიურ შემთხვევას. საშუალოს საზომებს აგრეთვე უწოდებენ **ცენტრალური ტენდენციის საზომებს** და მათ მიეკუთვნება **საშუალო, მედიანა** და **მოდა**.

მონაცემთა სიმრავლის საშუალოს ცოდნა არ არის საკმარისი მონაცემთა სიმრავლის სრულად აღსაწერად. დამატებით, საშუალოს ცოდნასთან ერთად, საჭიროა ვიცოდეთ თუ როგორაა მონაცემთა მნიშვნელობები გაბნეული. უფრო ზუსტად, არის თუ არა მონაცემთა მნიშვნელობები დაჯგუფებული (თავმოყრილი) საშუალოს ირგვლივ, თუ ისინი უფრო თანაბრად არიან გაბნეული მთელი განაწილების გასწვრივ? საზომებს, რომლებიც განსაზღვრავენ მონაცემთა მნიშვნელობების გაფანტულობას (გაბნევას) უწოდებენ **გადახრის საზომებს** ან **გაფანტულობის (გაბნევის) საზომებს**. ამ ტიპის საზომებია: **გაბნევის დიაპაზონი, სტანდარტული გადახრა** და **საშუალო კვადრატული გადახრა**. გარდა ამისა, გამოიყენება ე.წ. **მონაცემთა პოზიციის მახასიათებლები**. ისინი გვიჩვენებენ სპეციფიური მნიშვნელობების მდებარეობას მომაცემთა სიმრავლეში ან მათს ფარდობით მდებარეობას მონაცემთა სხვა მნიშვნელობებთან მიმართებაში. ყველაზე გავრცელებული პოზიციის მახასიათებლებია: **პროცენტილები** და **რანგები**. ეს მახასიათებლები ინტენსიურად გამოიყენება ფსიქოლოგიაში და განათლებაში.

საზომებს (მახასიათებლებს), რომელთა საპოვნელად გამოიყენება პოპულაციის ყველა მონაცემის მნიშვნელობები, ეწოდება **პარამეტრები**. ხოლო საზომებს (მახასიათებლებს), რომელთა მისაღებად გამოიყენება შერჩევის მონაცემების მნიშვნელობები, ეწოდება **სტატისტიკები**.

დამრგვალების ზოგადი წესი: სტატისტიკაში დამრგვალების ძირითადი წესი მდგომარეობს იმაში, რომ სანამ გამოთვლები გრძელდება, დამრგვალება არ უნდა მოხდეს, ვიდრე არ იქნება მიღებული საბოლოო პასუხი. როდესაც დამრგვალება ხდება შუალედურ ეტაპზე, მაშინ იზრდება განსხვავება პასუხსა და ზუსტ შედეგს შორის.

საშუალო, რომელიც აგრეთვე ცნობილია როგორც არითმეტიკული საშუალო, მიიღება თუ შევკრიბავთ მონაცემების მნიშვნელობებს და გავყოფთ მნიშვნელობების საერთო რაოდენობაზე. მაგალითად, **3, 2, 6, 5** და **4**-ის საშუალო მიიღება შეკრებით **3+2+6+5+4 = 20** და **5**-ზე გაყოფით. შესაბამისად, ამ მონაცემების საშუალოა **20/5 = 4**. მონაცემების მნიშვნელობები გამოისახება x-ებით. მონაცემთა ამ სიმრავლეში $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=5$ და $x_5=4$. x-ის ყველა მნიშვნელობათა ჯამის აღსანიშნავად გამოიყენება $\sum$ სიმბოლო (ბერძნული დიდი სიგმა ასო), და $\sum x$ აღნიშნავს მონაცემთა სიმრავლის x-ის ყველა მნიშვნელობათა ჯამს.

საშუალო (mean) არის მნიშვნელობათა ჯამი გაყოფილი მნიშვნელობათა საერთო რაოდენობაზე. შერჩევის საშუალოს აღნიშნავენ $\bar{x}$ სიმბოლოთი:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

სადაც n გვიჩვენებს მნიშვნელობათა საერთო რაოდენობას შერჩევაში.

თუ შერჩევაში x_1 მონაცემის სიხშირეა f_1, x_2 მონაცემის სიხშირეა f_2, და ა. შ. x_k მონაცემის სიხშირეა f_k, მაშინ საშუალო გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}=(\sum_{i=1}^{k}f_ix_i)/(\sum_{i=1}^{k}f_i).$$

მაგალითი 1. ფირმის წლიური საპროცენტო შემოსავალი ბოლო ათი წლის განმავლობაში იყო: **8.1, -6.2, 20.9, -2.7, 33.6, 42.9, 24.4, 5.2, 3.1, 30.5.** როგორია ფირმის საშუალო წლიური შემოსავალი ამ ათი წლის განმავლობაში?

ცხადია, რომ

$$\bar{x}=(8.1+(-6.2)+20.9+(-2.7)+33.6+42.9+24.4+5.2+3.1+30.5)/10=16.$$

ე. ი. საშუალო წლიური შემოსავალი არის 16%.

არითმეტიკულ საშუალოს შეიძლება მიეცეს შემდეგი მარტივი ინტერპრეტაცია: არითმეტიკული საშუალო არის შერჩევის ერთ ინდივიდზე ან ობიექტზე მოსული ჯამურ დაკვირვებათა წილი (საშუალო რაოდენობა).

მაგალითი 2. 10 ოჯახში ბავშვთა რაოდენობებია:

3, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 2.

მაშინ ერთ ოჯახზე მოსული ბავშვების საშუალო რაოდენობა იქნება

$$(3+2+1+1+2+3+3+1+2+2)/10=2.$$

ამრიგად, თუ 10 ოჯახს ჯამში ყავს 20 ბავშვი, მაშინ არითმეტიკული საშუალო უდრის ბავშვთა იმ რაოდენობას, რომელიც მოვიდოდა ერთ ოჯახზე იმ შემთხვევაში რომ ბავშვები თანაბრად გაენაწილებინათ.

საშუალოს დამრგვალების წესი: საშუალო უნდა დამრგვალდეს ერთი ათობითი ნიშნით მეტზე ვიდრე ნედლი მონაცემებია წარმოდგენილი. ამ წესის ახსნა იმაში მდგომარეობს, რომ განასხვავოს საშუალო ნედლი მონაცემებისაგან.

დაჯგუფებული მონაცემების შემთხვევაში საშუალოს პოვნის პროცედურა იყენებს კლასების შუაწერტილებს. ამ პროცედურას ჩვენ ქვემოთ მოვიყვანთ.

მაგალითი 3. მოცემულია კვირის განმავლობაში შემთხვევით შერჩეული 20 მორბენალის მიერ გარბენილი მანძილების სიხშირული განაწილების ცხრილი

კლასის საზღვრები	სიხშირე
5.5—10.5	1
10.5—15.5	2
15.5—20.5	3
20.5—25.5	5
25.5—30.5	4
30.5—35.5	3
35.5—40.5	2
	$n=20$

ვიპოვოთ საშუალო.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ცხრილს დავამატოთ შუაწერტილებისა და შუაწერტილების სიხშირეებზე ნამრავლის სვეტები.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ თითოეული კლასის შუაწერტილი და შევიტანოთ *C* სვეტში:

$$x_m=\frac{5.5+10.5}{2}=8,\ \frac{10.5+15.5}{2}=13,\ \text{და ა. შ.}$$

ნაბიჯი 3. ყოველი კლასის შესაბამისი სიხშირე გავამრავლოთ კლასის შუაწერტილზე, როგორც ქვემოთაა ნაჩვენები და შედეგები შევიტანოთ *D* სვეტში: $1\cdot8=8$, $2\cdot13=26$, და ა. შ. დასრულებულ ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

A კლასები	*B* სიხშირე (*f*)	*C* შუაწერტილი (x_m)	*D* $f\,x_m$
5.5—10.5	1	8	8
10.5—15.5	2	13	26
15.5—20.5	3	18	54
20.5—25.5	5	23	115
25.5—30.5	4	28	112
30.5—35.5	3	33	99

35.5—40.5	2	38	76
	$n=20$		$\sum f \cdot x_m = 490$

ნაბიჯი 4. ვიპოვოთ D სვეტის მნიშვნელობათა ჯამი.
ნაბიჯი 5. საშუალოს მისაღებად მიღებული ჯამი გავყოთ n-ზე:

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x_m}{n} = \frac{490}{20} = 24.5 \text{ მილი.}$$

მაგალითი 4. მე-10 კლასელი 204 მოსწავლის ძმებისა და დების რიცხვის ქვემოთმოყვანილი სიხშირული ცხრილის მიხედვით გამოთვალეთ საშუალო.

ძმებისა და დების რაოდენობა, x_i	სიხშირე, f_i
0	36
1	94
2	48
3	15
4	7
5	3
6	1
	სულ: 204

ამოხსნა. დავამატოთ სიხშირული განაწილების ცხრილს მესამე სვეტი, რომელშიც მოხდება მონაცემებისა და მათი სიხშირეების გადამრავლება $f_i x_i$:

ძმებისა და დების რაოდენობა, x_i	სიხშირე, f_i	$f_i x_i$
0	36	0
1	94	94
2	48	96
3	15	45
4	7	28
5	3	15
6	1	6
ჯამი	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 204$	$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = 284$

შესაბამისად, საშუალო იქნება $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{7} f_i x_i)/(\sum_{i=1}^{7} f_i) = 284/204 = 1.39$.

შენიშვნა. ზოგიერთ შემთხვევაში ჩვენ შეიძლება დაგვჭირდეს საშუალოს შეფასება დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამის მიხედვით. ამ შემთხვევაში დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამიდან წინასწარ შევადგინოთ სიხშირეთა ცხრილი, ხოლო შემდგომ ვიმოქმედოთ ჩვეულებრივი გზით. სიხშირული ცხრილის მისაღებად საჭიროა: ა) აბსცისთა ღერძზე მოვნიშნოთ მონაცემთა უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები – $x_{\min}$ და $x_{\max}$; ბ) მათ შორის მოთავსებული ინტერვალი დავყოთ თანაბარი სიგრძის (მოხერხებულ რაოდენობა) ინტერვალებად და მოვნიშნოთ მათი საზღვრები – $x_1, x_2, \ldots, x_k$; გ) თითოეული მონიშნული წერტილიდან გავავლოთ ვერტიკალური ხაზები გრაფიკის გადაკვეთამდე და მოვძებნოთ შესაბამისი დაგროვილი სიხშირეები (გრაფიკთან გადაკვეთის წერტილებიდან გავავლოთ ჰორიზონტალური ხაზები ორდინატთა ღერძის გადაკვეთამდე) – $y_{\min} = 0$, y_1, y_2, . . . , y_k, $y_{\max}$; დ) შევადგინოთ ცხრილი:

მონაცემები, რომლებიც	დაგროვილი სიხშირე
$< x_{\min}$	0
$< x_1$	y_1
$< x_2$	y_2
. . .	. . .
$< x_k$	y_k

$< x_{\max}$	$y_{\max}$

ე) ავაგოთ სიხშირული განაწილების ცხრილი:

კლასის საზღვრები	შუა-ინტერვალური მნიშვნელობა	სიხშირე, f_i
$x_{\min} \le x < x_1$	$(x_{\min} + x_1)/2$	y_1
$x_1 \le x < x_2$	$(x_1 + x_2)/2$	$y_2 - y_1$
$x_2 \le x < x_3$	$(x_2 + x_3)/2$	$y_3 - y_2$
. . .	. . .	. . .
$x_{k-1} \le x < x_k$	$(x_{k-1} + x_k)/2$	$y_k - y_{k-1}$
$x_k \le x < x_{\max}$	$(x_k + x_{\max})/2$	$y_{\max} - y_k$

მოვიყვანოთ საშუალოს თვისებები:

1. მონაცემთა დაკვირვებული მნიშვნელობების საშუალოდან გადახრების ჯამი ნულის ტოლია: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.

2. ნებისმიერი a რიცხვისათვის: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$.

3. თუ არსებული $x_1, \ . \ . \ . \ ,x_n$ მონაცემებიდან გადავალთ ახალ $y_1 = ax_1 + b, \ . \ . \ . \ ,$ $y_n = ax_n + b$ მონაცემებზე (სადაც a და b ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი წყვილია), მაშინ $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a\bar{x} + b$.

4. თუ $x_1, \ . \ . \ . \ ,x_n$ და $y_1, \ . \ . \ . \ ,y_n$ ტოლი მოცულობის ორი შერჩევაა და გადავალთ ახალ შერჩევაზე $z_1 = ax_1 \pm by_1, \ . \ . \ . \ , z_n = ax_n \pm by_n$, მაშინ $\bar{z} = a\bar{x} \pm b\bar{y}$.

5. თუ $x_1, \ . \ . \ . \ ,x_n$ და $y_1, \ . \ . \ . \ ,y_m$ ორი შერჩევაა, მაშინ $x_1, \ . \ . \ . \ ,x_n$, $y_1, \ . \ . \ . \ ,$ y_m გაერთიანებული შერჩევის საშუალო მოიცემა ფორმულით:

$$\bar{z} = \frac{n}{n+m}\bar{x} + \frac{m}{n+m}\bar{y}.$$

მიუხედავად იმისა, რომ საშუალო ადვილი გამოსათვლელია, გააჩნია მარტივი ინტერპრეტაცია, მონაცემთა ახალი მასივის გაჩენისას ინარჩუნებს არითმეტიკულ ოპ-ერაციებს და წარმოადგენს მომაცემთა ცენტრის ერთერთ ყველაზე გავრცელებულ რიცხვით მახასიათებელს, აღსანიშნავია, რომ საშუალოს გააჩნია ერთი სერიოზული ნაკლი, იგი ზედმეტად რეაგირებს ექსტრემალური დაკვირვებების უმნიშვნელო რაოდ-ენობაზეც კი. ასეთი დაკვირვებები შეიძლება იყოს ორი ტიპის. პირველ ტიპს მიეკუთ-ვნება ე. წ. “ამოვარდნილი” დაკვირვებები ანუ ის დაკვირვებები (მონაცემები), რომლე-ბიც მკვეთრადაა განსხვავებული მონაცემთა ძირითადი მასივისაგან. ამ შემთხვევაში საშუალო მკვეთრად იქნება წანაცვლებული “ამოვარდნილი” დაკვირვებების მიმართუ-ლებით. ექსტრემალურ დაკვირვებებთან საქმე გვაქვს იმ შემთხვევაშიც, როცა მონაც-ემებით აგებული (გაგლუვებული) ჰისტოგრამა ძლიერ ასიმეტრიულია რომელიმე მიმა-რთულებით, ანუ მას გააჩნია რომელიმე მიმართულებით გაწელილი გრძელი “კუდი”, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით კი – “მოკლე” კუდი. ამ შემთხვევაშიც საშუ-ალო წანაცვლებულია გრძელი “კუდის” მიმართულებით და მონაცემთა ძირითადი მა-სა მის ერთ მხარეს აღმოჩნდება. ასეთი მონაცემებისათვის საშუალო არ წარმოადგ-ენს ცენტრალური ტენდენციის საიმედო საზომს.

მაგალითი 5. ვთქვათ, მუსიკალურ ნაწარმოებთა კატალოგიდან ამოვარჩიეთ ხუ-თი ნაწარმოები, რომელთა ხანგრძლივობებია (წუთებში): 37, 46, 40, 57 და 50. მაშინ $\bar{x} = 46$. თუ ახლა მეხუთე ნაწარმოებს, რომლის ხანგრძლივობა იყო 50 წუთი, შევცვ-ლით სხვა ნაწარმოებით, რომლის ხანგრძლივობაა 200 წუთი, მაშინ საშუალო იქნება

$\bar{x}=76$. ანუ საშუალომ გადაინაცვლა ექსტრემალური მნიშვნელობისაკენ, ყველა დანარჩენი მონაცემი საგრძნობლად ნაკლებია მასზე. ამ შემთხვევაში $\bar{x}$ არ არის განლაგების (ლოკალიზაციის) მდგრადი მახასიათებელი. თუ მეხუთე მონაცემს შევცვლით 400-ით, მაშინ $\bar{x}=116$.

მკვეთრად ასიმეტრიული (მარჯვნივ) ფორმა აქვს მოსახლეობის შემოსავლების სიხშირულ განაწილებებს, ამიტომ $\bar{x}$ მკვეთრად წანაცვლებული აღმოჩნდება მარჯვნივ (ექსტრემალურად დიდი შემოსავლების მიმართ-ულებით) და გასაშუალოებული შემოსავლების გამოყენება ცხოვრების დონის აღსაწერად აზრს მოკლებულია.

მაგალითი 6. ქვევით მოყვანილია ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტეტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები (1000 დოლარებში): 28, 109, 26, 32, 30, 26, 29. მაშინ საშუალო იქნება $\bar{x}=40$. როგორც ვხედავთ, ყველა მონაცემი გარდა ერთისა (109) 40-ზე ნაკლებია და ამდენად, საშუალო არ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს.

ამოცანები

1. 8 სტუდენტის ტესტირების ქულებია:

18	2	5	0	17	15	16

იპოვეთ საშუალო ქულა.

2. ა) იპოვეთ $\bar{x}$,თუ $\sum_{i=1}^{20} x_i = 226$.

ბ) იპოვეთ $\bar{y}$, თუ ცნობილია რომ $\sum_{i=1}^{12}(y_i - 100) = 66$.

3. 182 გვერდიანი წიგნის თითოეულ გვერდზე შეცდომების რაოდენობა მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

შეცდომების რაოდენობა	0	1	2	3	4
გვერდების რაოდენობა	144	24	10	2	2

იპოვეთ გვერდზე შეცდომების რაოდენობის საშუალო.

4. ქვემოთ მოყვანილია სპორტულ შეჯიბრებაზე პაუზების ხანგრძლივობის (წამებში) სიხშირული განაწილების ცხრილი:

პაუზის ხანგრძლივობა	1	2	3	4	5	6	7	8
სიხშირე	2	20	15	12	10	5	3	1

გამოთვალეთ საშუალო.

5. ქვემოთმოყვანილი ცხრილი გვიჩვენებს თსუ 50 სტუდენტის მიერ წლის განმავლობაში ლექციაზე არასაპატიო მიზეზით დაგვიანებების რაოდენობას:

დაგვიანებების რაოდენობა	0–4	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44
სიხშირე	1	1	1	6	17	16	4	2	2

გამოთვალეთ დაგვიანებათა საშუალო რიცხვი.

6. ავტოსტრადაზე რადარის მიერ დაფიქსირებული 200 სატვირთო მანქანის სიჩქარეების (მილი/სთ-ში) დაჯგუფებული სიხშირეების ქვემოთმოყვანილი ცხრილის მიხედვით შეაფასეთ სიჩქარეების საშუალო.

სიჩქარის ინტერვალი	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
სიხშირე	12	32	56	72	20	8

7. გამყიდველი ქალის მიერ განხორციელებული 30 სატელეფონო საუბრის ხანგრძლივობა (წუთებში) თავმოყრილია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

საუბრის

ხანგრძლივობა	0–2	3–5	6–8	9–11	12–14
საუბრების რაოდენობა	17	6	4	2	1

ა) ამოწერეთ კლასების საზღვრები.

ბ) შეაფასეთ სატელეფონო საუბრების ხანგრძლივობის საშუალო.

8. 8 სპორტსმენის საშუალო წონა შეადგენს 100კგ-ს. მათ შეუერთდა მეცხრე სპორტსმენი, რომელიც იწონის 55კგ-ს. გამოთვალე 9 სპორტსმენის საშუალო წონა.

9. როცა 6 მეზღვაურისაგან შემდგარ ეკიპაჟს შეუერთდა მე-7 მეზღვაური მათი საშუალო წონა გაიზარდა 110 კგ-დან 111კგ-მდე. იპოვეთ მე-7 მეზღვაურის წონა.

10. CD დისკების ჩანაწერის ხანგრძლივობის (წუთებში) სიხშირული განაწილების ქვემოთმოყვანილი ცხრილის მიხედვით შეაფასეთ ჩანაწერის ხანგრძლივობის საშუალო:

ჩანაწერის ხანგრძლივობა, x (წთ)	კლასის საზღვრები	სიხშირე
40-44	$39.5 \le x < 44.5$	1
45–49	$44.5 \le x < 49.5$	7
50–54	$49.5 \le x < 54.5$	12
55–59	$54.5 \le x < 59.5$	24
60–64	$59.5 \le x < 64.5$	29
65-69	$64.5 \le x < 69.5$	14
70–74	$69.5 \le x < 74.5$	5
75–79	$74.5 \le x < 79.5$	3
		სულ: 95

11. სხვადასხვა მაღაზიაში შეძენილი 60 CD დისკის ფასების ჯამი აღმოჩნდა $\sum_{i=1}^{60} x_i = 773.4$. გამოთვალეთ CD დისკების საშუალო ფასი. გარდა ამისა, გამოთვალეს სხვა 40 CD დისკის საშუალო ფასი და იგი აღმოჩნდა 11.64. იპოვეთ 100-ივე CD დისკის საშუალო ფასი.

მედიანა (median) განეკუთვნება მონაცემთა მდებარეობის ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომების ჯგუფს (განსხვავებით საშუალოსაგან). მონაცემთა რაიმე რიცხვითი მახასიათებლის **მდგრადობა** ნიშნავს, რომ დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის ცვლილებას შეზღუდული გავლენა აქვს აღნიშნულ მახასიათებელზე, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია ამ ცვლილების სიდიდე. სწორედ ამ თვისების გამო მედიანა, საშუალოს შემდეგ, წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე გავრცელებულ საზომს.

როგორც ცნობილია, გეომეტრიაში მედიანა არის სამკუთხედის წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან შემაერთებელი მონაკვეთი, ხოლო ფართე გაგებით მედიანა არის “შუა”-ს სინონიმი. სტატისტიკაშიც, მედიანა განიმარტება, როგორც მონაცემთა ვარიაციული მწკრივის შუაში მდგომი მნიშვნელობა იმ აზრით, რომ მასზე ნაკლები რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობა მასზე დიდი რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობის ტოლია. გასაგებია, რომ თუ დაკვირვებულ მონაცემთა რაოდენობა კენტია, მაშინ მედიანა მართლაც არის ვარიაციული მწკრივის შუა ელემენტი. თუ დაკვირვებათა რაოდენობა ლუწია $n = 2k$, მაშინ მედიანის განმარტებას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი რიცხვი (x_k, x_{k+1}) რიცხვითი შუალედიდან. ე. ი. ამ შემთხვევაში მედიანა ცალსახად არ განიმარტება. შესაბამისად, ამ გაუგებრობის თავიდან აცილების მიზნით მიღებულია შემდეგი შეთანხმება: როცა $n = 2k$, მაშინ მედიანას უწოდებენ ვარიაციული მწკრივის შუაში მდგომი ორი ელემენტის საშუალო არითმეტიკულს.

დავუშვათ, რომ $x_1, \ . \ . \ . \ , x_n$ შერჩევის ელემენტებია, ხოლო $x_{(1)}, \ . \ . \ . \ , x_{(n)}$ კი – შესაბამისი ვარიაციული მწკრივია. მედიანა აღინიშნება $\tilde{x}$ (ან m_e) სიმბოლოთი და იგი აიგება შემდეგი წესით:

$x = x_{((n+1)/2)}$, როცა n კენტია, და $x = \dfrac{x_{(n/2)} + x_{((n/2)+1)}}{2}$, როცა n ლუწია.

ამრიგად, მედიანის მოსაძებნად საჭიროა შემდეგი ნაბიჯები: I. დავალაგოთ ნედლი მონაცემები ზრდადობის მიხედვით (ავაგოთ ვარიაციული მწკრივი) და II. შევარჩიოთ (ან ავაგოთ) შუაწერტილი. როგორც ვხედავთ, მედიანის მოსაძებნად საჭიროა ვარიაციული მწკრივის აგება (განსხვავებით საშუალოს მოძებნის შემთხვევისაგან), რაც დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის დროს გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული.

მაგალითი 7. ქვემოთ მოყვანილია შვიდი სამხედრო ახალწვეულის წონა (ფუნტებში, 1 ფუნტი = 453,6 გრამი):

180, 201, 220, 191, 219, 209, 186.

იპოვეთ მედიანა.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. დავალაგოთ მონაცემები ზრდადობის მიხედვით:

180, 186, 191, 201, 209, 219, 220.

ნაბიჯი 2. შევარჩიოთ შუაწერტილი. ვინაიდან $n=7$, ამიტომ მედიანა იქნება

$$x = x_{((7+1)/2)} = x_{(4)} = 201.$$

მაგალითი 8. აშშ-ში რვა წლის განმავლობაში მომხდარი ტორნადოების რაოდენობებია:

684, 764, 656, 702, 856, 1133, 1132, 1303.

იპოვეთ მედიანა.

ამოხსნა. ვარიაციული მწკრივი იქნება:

656, 684, 702, 764, 856, 1132, 1133, 1303.

ვინაიდან შუაწერტილი მდებარეობს 764-სა და 856-ს შორის, ამიტომ მედიანას ვპოულობთ ამ ორი მნიშვნელობის შეკრებითა და 2-ზე გაყოფით:

$$x = \frac{x_{(8/2)} + x_{((8/2)+1)}}{2} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{764+856}{2} = 810,$$

ე. ი. ტორნადოების რაოდენობის მედიანაა 810.

მოვიყვანოთ მედიანის თვისებები:

I. შერჩევის მედიანა წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამოხსნას:

$$\sum_{i=1}^{n} sign(x_i - x) = 0,$$

სადაც $sign x = 1$, თუ $x > 0$; $sign 0 = 0$ და $sign x = -1$, თუ $x < 0$.

II. ნებისმიერი a რიცხვისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|.$$

III. თუ არსებული $x_1, \ldots, x_n$ მონაცემებიდან გადავალთ ახალ $z_1 = ax_1 + b, \ldots, z_n = ax_n + b$ მონაცემებზე (სადაც a და b ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი წყვილია), მაშინ: $\tilde{z} = ax + b$.

მაგალითი 9. დავუბრუნდეთ საშუალოზე მე-5 მაგალითის მონაცემებს და წარმოვადგინოთ ისინი ვარიაციული მწკრივის სახით:

$$x_{(1)} = 26,\ x_{(2)} = 26,\ x_{(3)} = 28,\ x_{(4)} = 29,\ x_{(5)} = 30,\ x_{(6)} = 32,\ x_{(7)} = 109.$$

მაშინ, ვინაიდან $n=8$ კენტია, მედიანა იქნება $x = x_{((7+1)/2)} = x_{(4)} = 29$. გავიხსენოთ, რომ საშუალო იყო $\bar{x} = 40$. საიდანაც ჩანს, რომ მედიანა ამ მაგალითში უკეთ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს, ვიდრე საშუალო.

მოვახდინოთ ახლა დაკვირვებათა ცვლილება და შევხედოთ როგორ იქცევა საშუალო და მედიანა. ვთქვათ, დაკვირვება $x_{(7)} = 109$ შევცვალეთ 200-ით. მაშინ შეცვლილი მონაცემებისათვის მედიანა დარჩება იგივე $x = 29$, ხოლო საშუალო წაინაცვლებს

დიდი დაკვირვების (200-ის) მიმართულებით $\bar{x}=53$. ამდენად, მედიანა მდებარეობის უფრო მდგრადი მახასიათებელია, ვიდრე საშუალო.

ვთქვათ, ახლა დაკვირვება $x_{(2)}=26$ შევცვალეთ 300-ით. მაშინ ახალი მონაცემების ვარიაციული მწკრივი იქნება:

$$x_{(1)}=26,\ x_{(2)}=28,\ x_{(3)}=29,\ x_{(4)}=30,\ x_{(5)}=32,\ x_{(6)}=109,\ x_{(7)}=300.$$

ამ შემთხვევაში მედიანა იცვლება მხოლოდ ერთი ერთეულით $x=x_{(4)}=30$, მაშინ როდესაც საშუალო კვლავ მკვეთრად იზრდება $\bar{x}=78.85$. რაც ისევ მეტყველებს მედიანის, როგორც ცენტრის მახასიათებლის მდგრადობაზე.

მედიანას გააჩნია კიდევ ერთი სასარგებლო თვისება: მედიანის გამოსათვლელად საჭიროა ვარიაციული მწკრივის მხოლოდ შუაში მოქცეული ინდივიდის (თუ n კენტია) ან ორი შუა ინდივიდის (თუ n ლუწია) გაზომვა.

მედიანა განსაკუთრებით მნიშვნელოვან ინფორმაციას იძლევა მაშინ, როცა მოცემულ შერჩევაში დაკვირვებების შედარებით მცირე რაოდენობა მნიშვნელოვნად განსხვავდება დანარჩენი სიმრავლისაგან. მაგალითად, მოსახლეობის გარკვეული ჯგუფის შემოსავლების განაწილების მონაცემებში მედიანა მოსახლეობის ამ ჯგუფის ცხოვრების დონის უფრო აზრიან სურათს იძლევა, ვიდრე საშუალო (რომელზედაც დიდ გავლენას ახდენს ერთი ინდივიდის შემოსავალი).

თუმცა ეს არ უნდა გავიგოთ ისე, რომ მედიანას ყოველთვის უნდა მიენიჭოს უპირატესობა საშუალოსთან შედარებით. საშუალო გამოითვლება ყველა მონაცემის მეშვეობით (ყველა მონაცემის სიდიდის გათვალისწინებით) და შეიცავს მეტ ინფორმაციას, ვიდრე მედიანა, მისი მგრძნობიარობა კი ხშირ შემთხვევაში მას მოცემული შერჩევის კარგ მახასიათებლად აქცევს. საშუალო შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც საზომი, რომელიც ასახავს, თუ საშუალოდ რა სიდიდისაა შერჩევის ელემენტები. ორი სხვადასხვა ჯგუფის ელემენტების შედარების მიზნით ჩვეულებრივ, პირველ რიგში, ადარებენ მათ არითმეტიკულ საშუალოებს.

მაგალითი 10. მოცემულია ორი A და B ფირმის შემოსავლიანობა (პროცენტებში) ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ფირმა *A*: 8.3, -6.2, 20.9, -2.7, 33.6, 42.9, 24.4, 5.2, 3.1, 30.5;

ფირმა *B*: 12.1, 6.4, 12.2, 27.8, 25.7, 18.2, 10.7, -1.3, 11.4, -2.8.

თუ გამოვთვლით საშუალოებს A და B ფირმების შემოსავლიანობებისათვის, მივიღებთ:

$$\bar{x}_A=16\% \text{ და } \bar{x}_B=12\%.$$

ამ ორი საშუალოს შედარება გვაძლევს საფუძველს დავასკვნათ, რომ A ფირმის შემოსავლიანობა საშუალოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ფირმისა (შემდგომი ანალიზი კი წარმოებს სხვა მახასიათებლების საშუალებით).

ხშირად მონაცემთა სიმრავლე საკმაოდ დიდია და ის მოცემულია სიხშირეთა ცხრილის საშუალებით.

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ მედიანა მე-10 კლასელი 204 მოსწავლის ძმებისა და დების რიცხვის ზემოთმოყვანილი სიხშირული ცხრილის მიხედვით.

ამოხსნა. მედიანის მოძებნის ტრადიციული მეთოდი გულისხმობს ვარიაციული მწკრივის შედგენას და მისი შუა მონაცემის პოვნას. ამ შემთხვევაში უნდა გავამწკრივოთ ერთ სტრიქონში 36 ცალი 0, შემდგომ 94 ცალი 1 და ა. შ. ბოლოს 1 ცალი 6, მოვძებნოთ ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული $\frac{1}{2}\times 204=102$-ე და 103-ე მნიშვნელობები და გამოვთვალოთ მათი საშუალო არითმეტიკული. გაცილებით მარტივი მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ სიხშირული განაწილების ცხრილს დავამატოთ დაგროვილი სიხშირეების სვეტი, როგორც ეს ქვემოთაა გაკეთებული:

ძმებისა და დების რაოდენობა	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
0	36	36
1	94	130
2	48	178
3	15	193
4	7	200
5	3	203
6	1	204
	სულ: 204	

ამ ცხრილიდან ჩვენ შეგვიძლია ადვილად დავინახოთ, რომ როცა ჩვენ ჩავალთ 0-ების ბოლოში, ჩვენ ჯერ კიდევ არა ვართ მიღწეული 102-ე მნიშვნელობასთან, მაგრამ 1-იანების ბოლოში ჩვენ უკვე მივაღწიეთ 130-ე მნიშვნელობასთან, რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორც 102-ე, ისე 103-ე მნიშვნელობა 1-იანია და შესაბამისად, მედიანა ისევე 1-იანია.

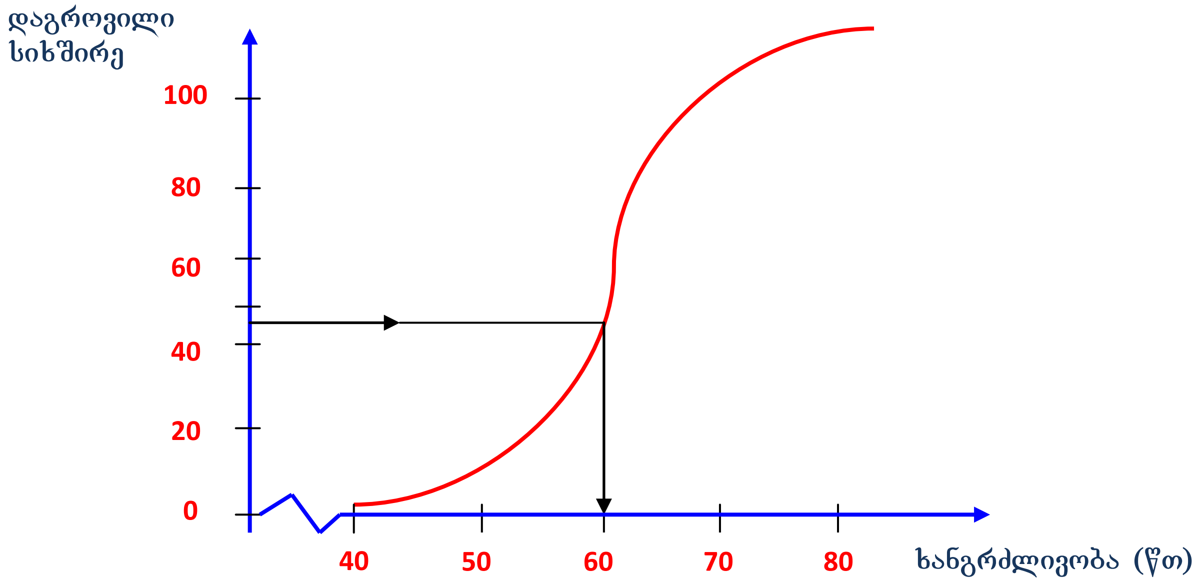
უწყვეტი ტიპის მონაცემთა დიდი მასივების შემთხვევაში, როგორც წესი, ჩვენ ხშირად მოცემული გვაქვს არა კონკრეტული მონაცემები, არამედ ერთმანეთთან ახლოს მყოფი დაჯგუფებული მონაცემები (შესაბამისად, კონკრეტული მნიშვნელობები დაკარგულია). ამ შემთხვევაში ჩვენ არ შეგვიძლია ზუსტად დავადგინოთ მედიანა, მაგრამ შეგვიძლია შევაფასოთ იგი.

მაგალითი 12. განვიხილოთ CD დისკების საკმაოდ დიდი რაოდენობის ჩანაწერის ხანგრძლივობის (წუთებში) სიხშირული განაწილების ზემოთმოყვანილი ცხრილი და შევაფასოთ ჩანაწერის ხანგრძლივობის მედიანა.

ამოხსნა. სიხშირული განაწილების ცხრილს დავამატოთ დაგროვილი სიხშირეების სვეტი, როგორც ეს ქვემოთაა გაკეთებული:

ჩანაწერის ხანგრძლივობა, x (წთ)	ინტერვალის საზღვრები	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
40-44	$39.5 \le x < 44.5$	1	1
45–49	$44.5 \le x < 49.5$	7	8
50–54	$49.5 \le x < 54.5$	12	20
55–59	$54.5 \le x < 59.5$	24	44
60–64	$59.5 \le x < 64.5$	29	73
65-69	$64.5 \le x < 69.5$	14	87
70–74	$69.5 \le x < 74.5$	5	92
75–79	$74.5 \le x < 79.5$	3	95
		სულ: 95	

მედიანის შეფასება შესაძლებელია დაგროვილ სიხშირეთა დიაგრამის (ოგივას) საშუალებით – აბსცისთა ღერძზე გადავზომოთ ჩანაწერის ხანგრძლივობა, ორდინატთა ღერძზე კი დაგროვილი სიხშირეები (დაგროვილი სიხშირის მნიშვნელობა გადაიზომება ინტერვალის ზედა საზღვრის გასწვრივ), ავაგოთ ოგივა და მოვძებნოთ დაგროვილი სიხშირეთა ღერძზე ისეთი წერტილი, რომელიც შუაზე ყოფს ერთობლივ სიხშირეს. ამ შემთხვევაში ეს არის $\frac{1}{2}\times 95 = 47.5$. ამ წერტილის შესაბამისი აბსცისა კი იქნება მედიანის შეფასება (ორდინატთა ღერძის 47.5-ის შესაბამისი წერტილიდან ვავლებთ ჰორიზონტალურ ხაზს გრაფიკის გადაკვეთამდე და ვპოულობთ ამ გადაკვეთის წერტილის შესაბამის აბსცისას – ვუშვებთ მართობს აბსცისთა ღერძზე), ვინაიდან ჩანაწერის ხანგრძლივობის დაახლოებით ნახევარი იქნება მასზე ნაკლები და დაახლოებით ნახევარი კი მასზე მეტი. ჩვენს შემთხვევაში მედიანის შეფასება გამოვა 60.



ამრიგად, იმისათვის რომ ვიპოვოთ დაჯგუფებული მონაცემების მედიანა, დაგროვილი სიხშირეების გრაფიკის საშუალებით, უნდა მოვძებნოთ დაკვირვებულ მონაცემთა დიაპაზონში ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება იმ დაგროვილ სიხშირეს, რომელიც ერთობლივი სიხშირის ნახევრის ტოლია.

ამოცანები

1. იპოვეთ მედიანა ქვემოთმოყვანილი 20 სტუდენტის მასისათვის (ფუნტებში):

118	147	146	138	175	118	155	146	135	127
136	122	114	140	106	159	127	143	153	139.

2. იპოვეთ შემდეგ მასების მედიანა:

6.6კგ 3.2კგ 4.8 კგ 7.6კგ 5.4კგ 7.1კგ 2.0კგ 6.3კგ 4.3კგ

მასების ამ სიმრავლეს დაუმატეს 6.0კგ. რა იქნება 10 მასის მედიანა?

3. გამოთვალეთ მონაცემთა შემდეგი სიმრავლეების მედიანები.

ა) ქალქის ქუჩაზე გაზომილი 20 ავტომობილის სიჩქარე კმ/სთ-ებში:

41	15	4	27	21	32	43	37	18	25
29	34	28	30	25	52	12	36	6	25

ბ) ტექნიკური მომსახურების სადგურში 17 ავტომობილის შეკეთებაზე დახარჯული დრო სთ-ებში

0.9 1.0 2.1 4.2 0.7 1.1 0.9 1.8
0.9 1.2 2.3 1.6 2.1 0.3 0.8 2.7 0.4

4. იპოვეთ კლინიკის 45 პაციენტის სისხლში ჰემოგლობინის დონის მედიანა, თუ გაზომვის შედეგებია:

9.1	10.1	10.7	10.7	10.9	11.3	11.3	11.4	11.4	11.4	11.6	11.8	12.0	12.1	12.3
12.4	12.7	12.9	13.1	13.2	13.4	13.5	13.5	13.6	13.7	13.8	13.8	14.0	14.2	14.2
14.2	14.6	14.6	14.8	14.8	15.0	15.0	15.0	15.1	15.4	15.6	15.7	16.2	16.3	16.9

5. 2006 წლის 360 დღის განმავლობაში მომუშავე სუპერმარკეტის დღიური ნავაჭრის ჩანაწერები (გაზომილი 10 000 ლარებში) ასე გამოიყურება:

ნავაჭრი, x	$x<2$	$2\le x<3$	$3\le x<4$	$4\le x<5$
დღეთა რიცხვი	15	27	64	72

ნავაჭრი, x	$5\le x<6$	$6\le x<7$	$7\le x<8$	$8\le x<9$
დღეთა რიცხვი	86	70	16	10

შეაფასეთ დღიური ნავაჭრის მედიანა.

6. ქვემოთ მოყვანილია 80 აალებადი ნივთიერების დალაგებული აალების დრო (წამებში):

1.2	1.4	1.4	1.5	1.5	1.6	1.7	1.8	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.5	2.5	2.5
2.5	2.6	2.7	2.8	3.1	3.2	3.5	3.6	3.7	3.8	3.8	3.9	3.9	4.0	4.1	4.2
4.3	4.5	4.5	4.6	4.7	4.7	4.8	4.9	5.1	5.1	5.1	5.2	5.2	5.3	5.4	5.5
5.6	5.8	5.9	5.9	6.0	6.3	6.4	6.4	6.4	6.4	6.7	6.8	6.8	6.9	7.3	7.4
7.4	7.6	7.9	8.0	8.6	8.8	8.8	9.2	9.4	9.6	9.7	9.8	10.6	11.2	11.8	12.4

ა) დააჯგუფეთ მონაცემები 8 თანაბარი სიგრძის კლასად (დაიწყეთ 1.0–2.4-დან) და შეადგინეთ დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილი. ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა. რას გვიჩვენებს ჰისტოგრამა?

ბ) დაჯგუფებული სიხშირეების ცხრილის მიხედვით ააგეთ დაგროვილი სიხშირეების დიაგრამა და შეაფასეთ მედიანა.

დ) პირდაპირი გზით მოძებნეთ მონაცემების ზუსტი მედიანა და იპოვეთ განსხვავება მასა და მედიანის შეფასებას შორის.

7. ქვემოთ მოყვანილია CD დისკების მწარმოებელ კომპანიაში 100 დღის განმავლობაში დაკვირვებული დეფექტური დისკების დაჯგუფებული სიხშირული განაწილების ცხრილი:

დეფექტური დისკების რაოდენობა	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59
დღეების რიცხვი	5	8	19	37	22	9

შეაფასეთ დეფექტური დისკების მედიანა.

ცენტრალური ტენდენციის მესამე საზომს წარმოადგენს **მოდა (mode).**

მოდა წარმოადგენს იმ მნიშვნელობას შერჩევიდან, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება. ზოგჯერ ამბობენ, რომ მოდა არის ყველაზე ტიპიური შემთხვევა. მონაცემთა სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს ერთი მოდა, ერთზე მეტი მოდა ან საერთოდ არ ჰქონდეს მოდა. ვნახოთ მაგალითების მიხედვით.

მაგალითი 12. ქვემოთ მოყვანილია აშშ-ის მრავალჯერადი გამოყენების კოსმოსური ხომალდის ფრენის ხანგრძლივობა (დღეებში) 1992–94 წლებში:

8, 9, 9, 14, 8, 8, 10, 7, 6, 9, 7, 8, 10, 14, 11, 8, 14, 11.

ვიპოვოთ მოდა.

ამოხსნა. მოდის მოსაძებნად სასარგებლოა (მოხერხებულია) მონაცემების დალაგება ზრდის მიხედვით, თუმცა ეს არ არის აუცილებელი:

6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 14, 14, 14.

ვინაიდან 8-დღიანი ფრენა მოხდა 5-ჯერ (8-ის სიხშირე უფრო დიდია ვიდრე ნებისმიერი სხვა რიცხვის), ამიტომ ამ მონაცემების მოდა არის 8.

მაგალითი 13. იპოვეთ სამხრეთ-დასავლეთ პენსილვანიის 10 შერჩეულ საგრაფოში ქვანახშირის მოპოვებაში დასაქმებული მუშათა რიცხვის მოდა. ეს მონაცემებია:

110, 731, 1031, 84, 20, 118, 1162, 1977, 103, 752.

ამოხსნა. ვინაიდან ყველა მნიშვნელობა გვხვდება მხოლოდ ერთხელ, აქ მოდა არ არსებობს.

შენიშვნა: არ უნდა ვთქვათ, რომ მოდა არის ნული. ეს იქნება არაკორექტული, ვინაიდან მონაცემთა ზოგიერთი სიმრავლისათვის (მაგალითად, როგორიცაა ტემპერატურა) ნული შეიძლება აღმოჩნდეს ფაქტიური (რეალური) მნიშვნელობა.

მაგალითი 14. შემოწმებულ (გაზომილ) იქნა 11 სხვადასხვა ავტომობილის სამუხრუჭე მანძილის სიდიდე, როცა ისინი მოძრაობდნენ 15 მილი/საათში სიჩქარით. ვიპოვოთ მოდა, თუ მიღებული იყო შემდეგი მონაცემები:

15, 18, 18, 18, 20, 22, 24, 24, 24, 26, 26.

ამოხსნა. ვინაიდან 18 და 24 ორივე გვხვდება მაქსიმალურ რიცხვჯერ – 3-ჯერ, ამიტომ მოდა არის 18 და 24. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მონაცემთა სიმრავლე არის **ბიმოდალური**.

შეიძლება ისე მოხდეს, რომ შერჩევაში ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება არ აღმოჩნდეს. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ ე. წ. **მოდალურ ინტერვალზე**, რომელიც ასე განიმარტება: თუ აგებული გვაქვს ასე თუ ისე მისაღები ჰისტოგრამა (ანუ ჰისტოგრამა, რომელიც ადეკვატურად აღწერს მონაცემთა

სიხშირულ განაწილებას), მაშინ **მოდალური ინტერვალი** ეწოდება იმ ინტერვალს, რომელსაც შეესაბამება ჰისტოგრამის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ანუ მოდალური ინტერვალი არის ის ინტერვალი, რომელშიც მოხვდა მონაცემთა ყველაზე დიდი რაოდენობა. გარკვეულობისათვის, მოდას უწოდებენ მოდალური ინტერვალის შუაწერტილს. თუ შერჩევის მოცულობა დიდია, მაშინ სწორედ მონაცემთა დაჯგუფებას და მოდალური ინტერვალის მოძებნას ამჯობინებენ.

გასაგებია, რომ მოდის (მოდალური ინტერვალის) მოძებნა საკმაოდ რთულია. იმ ინტერვალის მითითება, სადაც მოხვდა მონაცემთა მაქსიმალური რაოდენობა, დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ დავაჯგუფებთ მონაცემებს, კერძოდ, იმაზე თუ რა სიგრძის ინტერვალებად დავყოფთ ინტერვალს $(x_{\min}, x_{\max})$. შესაბამისად, მოდალური ინტერვალის დადგენას თან ახლავს ყველა ის სიძნელე, რაც დაკავშირებულია ჰისტოგრამის აგებასთან.

მაგალითი 15. ვიპოვოთ მოდალური კლასი კვირის განმავლობაში შემთხვევით შერჩეული 20 მორბენალის მიერ გარბენილი მანძილების სიხშირული განაწილების ცხრილის მიხედვით:

კლასის საზღვრები	სიხშირე
5.5—10.5	1
10.5—15.5	2
15.5—20.5	3
20.5—25.5	5
25.5—30.5	4
30.5—35.5	3
35.5—40.5	2
	$n = 20$

ამოხსნა. მოდალური კლასი იქნება კლასი 20.5–25.5, ვინაიდან მას აქვს ყველაზე დიდი სიხშირე. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ზოგჯერ მოდას უწოდებენ მოდალური კლასის შუაწერტილს. შესაბამისად, მოდად შეიძლება მიჩნეულ იქნეს (20.5+25.5)/2=23 მილის გარბენა კვირაში.

მოდა არის ერთადერთი ცენტრალური ტენდენციის საზომებიდან, რომლის გამოყენებაც შეიძლება სახელდებითი ან კატეგორიული მონაცემებისათვის, ვინაიდან, ცხადია რომ კატეგორიზებული მონაცემებისათვის საშუალოსა და მედიანის გამოყენება უაზრობაა, ხოლო მოდა კი იძლევა სასარგებლო ინფორმაციას ყველაზე ტიპიური შემთხვევის გამოსავლენად.

მაგალითი 16. სტუდენტებში ჩატარებულ იქნა გამოკითხვა იმის შესახებ თუ რა სფეროში აპირებდნენ ისინი მოღვაწეობას სწავლის დასრულების შემდეგ. მიღებულ იქნა სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილი:

მოღვაწეობის სფერო	სიხშირე
ბიზნესი	1425
ჰუმანიტარული მეცნიერებები	878
კომპიუტერული მეცნიერებები	632
განათლება	471
სახელმწიფო სტრუქტურები	95

ამოხსნა. ვინაიდან ყველაზე მაღალი სიხშირის მქონე კატეგორიაა ბიზნესი, ამიტომ ყველაზე ტიპიური დასაქმების სფეროა ბიზნესში დასაქმება.

მონაცემთა განლაგების ცენტრის სამივე მახასიათებელი: საშუალო, მედიანა და მოდა წარმოადგენს პოპულაციის შესაბამისი მახასიათებლების: საშუალოს, მედიანისა და მოდის შერჩევით ანალოგებს. ალბათობის თეორიაში მტკიცდება, რომ შერჩევის მოცულობის ზრდისას შერჩევის რიცხვითი მახასიათებლები იკრიბება (უახლოვდება) პოპულაციის ანალოგიურ მახასიათებლებს. აქედან გამომდინარე, შერჩევითი მახასიათებლები შეიძლება ჩაითვალოს პოპულაციის მახასიათებლების შეფასებად და გამოყენებულ იქნას ამ უკანასკნელის შესახებ სტატისტიკური დასკვნების მისაღებად.

ცხადია, რომ საშუალო, მედიანა და მოდა ხშირად სხვადასხვა ინფორმაციას იძლევა. როცა მოცემულია ცენტრის მახასიათებელი, მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ის

საშუალოა, მედიანა თუ მოდა. როცა ჩვენ ვითვლით ცენტრის მახასიათებელს, მნიშვნელოვანია შევარჩიოთ ის მახასიათებელი, რომელიც ყველაზე უფრო ტიპიურია მოცემულ შემთხვევაში.

მაგალითი 17. ქალაქგარეთ მცხოვრებ ადამიანს სამსახურში წასასვლელად შეუძლია ისარგებლოს ორი მარშრუტით: მარშრუტი X და მარშრუტი Y. მან გადაწყვიტა შეადაროს მგზავრობაზე დახარჯული დროები თითოეული მარშრუტისათვის. მან დაალაგა 10 მომდევნო სამუშაო დღისათვის მგზავრობაზე დახარჯული დროები (წუთებში) თითოეული მარშრუტისათვის და მიიღო შემდეგი სურათი:

მარშრუტი *X*	53	52	48	51	49	47	42	48	57	53
მარშრუტი *Y*	43	41	39	108	52	42	38	45	39	51

გამოთვალეთ საშუალო და მედიანა თითოეული მარშრუტისათვის. რომელი მახასიათებელია უფრო მოხერხებული ამ მარშრუტებზე მგზავრობის დროების შესადარებლად?

ამოხსნა. X და Y მარშრუტების საშუალო იქნება შესაბამისად:

$$\bar{x} = (\sum_{i=1}^{10} x_i)/10 = 500/10 = 50 \quad \text{და} \quad \bar{y} = (\sum_{i=1}^{10} y_i)/10 = 498/10 = 49.8\,.$$

მედიანების მოსაძებნად დავალაგოთ მონაცემები ზრდადობის მიხედვით:

მარშრუტი *X*	42	47	48	48	49	51	52	53	53	57
მარშრუტი *Y*	38	39	39	41	42	43	45	51	52	108

ვინაიდან მონაცემთა რაოდენობა 10-ის ტოლია, მედიანა იქნება მე-5 და მე-6 მონაცემების საშუალო არითმეტიკული. ამიტომ X და Y მარშრუტების მედიანა იქნება შესაბამისად:

$$(49+51)/2 = 50 \quad \text{და} \quad (42+43)/2 = 42.5\,.$$

როგორც ვხედავთ, X მარშრუტის მედიანა და საშუალო ერთიდაიგივეა, ხოლო Y მარშრუტის შემთხვევაში საშუალო მეტია მედიანაზე, რაც გამოწვეულია ერთი უჩვეულოდ დიდი მონაცემით (კერძოდ 108 წუთის ტოლი მგზავრობის დროით). ეს არაჩვეულებრივი (ამოვარდნილი) მგზავრობის დრო სავარაუდოდ განპირობებულია ცუდი ამინდით ან ავტოსაგზაო შემთხვევით და არაა ტიპიური. ამიტომ მგზავრობის დროის შეფასებისას უკეთესია ვისარგებლოთ მედიანით, რამდენადაც იგი არ განიცდის ამ ტიპის ამოვარდნების ზემოქმედებას. შესაბამისად, Y მარშრუტი 42.5 წუთის ტოლი მედიანით უფრო სწრაფია, ვიდრე X მარშრუტი 50 წუთის ტოლი მედიანით.

ამოცანები

1. მიუთითეთ რომელ განაწილებას აქვს მოდა ან მოდალური კლასი:

ა)

x_i	0	1	2	3	4
f_i	7	4	2	5	1

ბ)

x_i	70	75	80	85	90
f_i	7	7	7	7	7

გ)

x_i	2–3	4–5	6–7	8–9	10–11
f_i	7	4	2	5	1

დ)

თვალის ფერი	ცისფერი	თაფლის ფერი	მწვანე
f_i	23	39	3

2. ცენტრალური ტენდენციის რომელი მახასიათებლით სარგებლობა იქნება უფრო მიზანშეწონილი ქვემოთმოყვანილ სიტუაციებში:

ა) ფეხსაცმლების მაღაზიის მენეჯერს სურს შეუკვეთოს სხვადასხვა ზომის ფეხსაცმელი.

ბ) ქალაქის საკრებულოს სურს დაგეგმოს ახალი სკოლის მშენებლობა. იმისათვის, რომ შეაფასოს მოსწავლეთა რაოდენობა, ის იკვლევს ერთნაირი მოცულობისა და მდგომარეობის ოჯახებს.

გ) ივანე რეგულარულად მგზავრობს თბილისიდან გორში და აღრიცხავს მგზავრობის დროს. მას სურს შეაფასოს მომავალი მგზავრობის დრო.

3. უძრავი ქონების აგენტმა გააკეთა შემდეგი განცხადება: მიმდინარე თვეში სახლების დაახლოებით 60% გაიყიდა უფრო ძვირად, ვიდრე საშუალაო გასაყიდი ფასია. განიხილეთ ამ მტკიცებულების შესაძლო მართებულობა და რა იგულისხმება “საშუალოში”.

4. მიუთითეთ ქვემოთჩამოთვლილთაგან რომელ სიდიდეს ექნება ასიმეტრიული ან დაახლოებით სიმეტრიული განაწილება:

ა) მდედრობითი სქესის უნივერსიტეტის სტუდენტების სიმაღლე.

ბ) მარათონულ შეჯიბრებაში მონაწილეთა სირბილის დრო.

გ) ადვილ გამოცდაზე სტუდენტების მიერ მიღებული ქულები.

დ) ბიბლიოთეკის წიგნების გვერდების რაოდენობა.

5. ქვემოთ მოყვანილია 32 მოსწავლის მიერ 8 კითხვიან მათემატიკურ ტესტში მიღებული ქულები:

სწორი პასუხების რაოდენობა	0	1	2	3	4	5	6	7	8
მოსწავლეთა რაოდენობა	1	2	1	4	4	6	7	4	3

ა) იპოვეთ სწორი პასუხების რაოდენობის საშუალო, მედიანა და მოდა. გააკეთეთ მედიანისა და მოდის ინტერპრეტაცია მათემატიკური ტესტის კონტექსტში.

ბ) დაახასიათეთ განაწილების მოხაზულობა.

თავი III

მონაცემთა გაფანტულობის საზომები

სტატისტიკაში, იმისათვის რომ ზუსტად (ადექვატურად) აღვწეროთ მონაცემთა სიმრავლე, სტატისტიკოსმა უნდა იცოდეს უფრო მეტი, ვიდრე ცენტრალური ტენდენციის საზომებია. ჩვენ შევისწავლეთ მონაცემთა ცენტრალური ტენდენციის (ანუ მონაცემთა ცენტრის მდებარეობის) სამი რიცხვითი მახასიათებელი: შერჩევითი საშუალო, შერჩევითი მედიანა და შერჩევითი მოდა. გასაგებია, რომ ეს სამი მახასიათებელი სრულად ვერ წარმოადგენს მონაცემთა სიმრავლის თვისებებს. მეორე ეტაპზე, ბუნებრივად იბადება კითხვა რამდენად ტიპიურია მონაცემთა ცენტრის მახასიათებელი კერძოდ, საშუალო, მონაცემთა მთელი სიმრავლისათვის? როგორია მონაცემთა გაფანტულობა საერთოდ და კონკრეტულად კი საშუალოს მიმართ? როგორია მონაცემთა ცვალებადობის ხარისხი და რა სიდიდეებით შეიძლება მისი დახასიათება?

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ მოცემულია მონაცემთა ორი მწკრივი:

A	8	9	10	10	13
B	1	5	10	16	18.

გამოვთვალოთ თითოეულის საშუალო. გვაქვს:

$$\bar{x}_A = (8+9+10+10+13)/5 = 10 \quad \text{და} \quad \bar{x}_B = (1+5+10+16+18)/5 = 10\,.$$

აღმოჩნდა, რომ ორივე მონაცემს აქვს ერთი და იგივე საშუალო, მაგრამ ცხადია, რომ B მწკრივის ელემენტთა ცვალებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივის ელემენტების. A მწკრივის ელემენტები უფრო მჭიდროდ არიან თავმოყრილი (კონცენტრირებული) საშუალოს ირგვლივ, ვიდრე B მწკრივის ელემენტები.

ხშირ შემთხვევაში, თვალით შემჩნევა იმისა, თუ რომელი მწკრივის ცვალებადობა უფრო დიდია, საკმაოდ ძნელია (მაგალითად, მონაცემთა დიდი რაოდენობის დროს). ამიტომ აუცილებელია ცვალებადობის ანუ გაფანტულობის საზომების შემოღება, ე. ი. ისეთი რიცხვითი მახასიათებლების შემოღება, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ მონაცემთა გაბნევის ხარისხი.

მონაცემთა გაფანტულობის ერთ-ერთი უმარტივესი რიცხვითი მახასიათებელია **გაბნევის დიაპაზონი (range)**, რომელიც წარმოადგენს შერჩევის მაქსიმალური (უდიდესი) და მინიმალური (უმცირესი) მნიშვნელობების სხვაობას. სხვა სიტყვებით – გაბნევის დიაპაზონი წარმოადგენს ვარიაციული მწკრივის უკანასკნელი და პირველი წევრების სხვაობას, თუმცა გაბნევის დიაპაზონის დასადგენად არ არის აუცილებელი (უბრალოდ მოხერხებულია) ვარიაციული მწკრივის შექმნა (მონაცემების დალაგება ზრდადობის მიხედვით). გაბნევის დიაპაზონი აღინიშნება R ასოთი. შესაბამისად, თუ $x_1,\ldots,x_n$ მოცემული n მოცულობის მქონე შერჩევაა (ხოლო $x_{(1)},\ldots,x_{(n)}$ კი – შესაბამისი ვარიაციული მწკრივი), მაშინ:

$$R = \max_{1\le i\le n} x_i - \min_{1\le i\le n} x_i = x_{(n)} - x_{(1)}\,,$$

სადაც $\mathrm{x_n} = \max\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad (x_{(1)} = \min\limits_{1\le i\le n} x_i)$ -- მაქსიმალური (შესაბამისად, მინიმალური) სიდიდის მინაცემია.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში მონაცემთა A მწკრივის გაბნევის დიაპაზონი არის $R_A = 13 - 5 = 8$, ხოლო B მწკრივის კი – $R_B = 18 - 1 = 17$.

მონაცემთა გაბნევის დიაპაზონი გამოთვლისა და ინტერპრეტაციის სიმარტივის გამო ფართოდ გამოიყენება ისეთი ამოცანების გადაწყვეტისას, სადაც გამოთვლის სისწრაფესა და მარტივ შინაარს გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება. მაგალითად, ხარისხის კონტროლის სფეროში. სხვა შემთხვევებში კი ამ მახასიათებლის მიმართ წარმოიშობა სერიოზული პრობლემები. გაბნევის დიაპაზონზე დიდ გავლენას ახდენს იშვიათი ან ე. წ. ამოვარდნილი დაკვირვებები. მაგალითად, დავუშვათ, რომ ჩვენ რომელიმე რეგიონში ვაწარმოებთ შერჩევას მამაკაცთა სიმაღლის განაწილების შერჩევის მიზნით. ვთქვათ, ამ რეგიონში ცხოვრობს მამაკაცი, რომლის სიმაღლეა 210 სმ. ცხადია, რომ თუ შერჩევაში შემთხვევით აღმოჩნდება ეს მამაკაცი (რაც იშვიათი ხდომილებაა), გაბნევის დიაპაზონი უფრო დიდი იქნება, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როცა

მის ნაცვლად შერჩევაში მოხვდება სხვა ტიპიური სიმაღლის მქონე მამაკაცი. ანალოგიური სურათი შეიძლება გვქონდეს მოსახლეობის შემოსავლების განაწილების შესწავლისას, როდესაც განსაკუთრებით დიდი შემოსავლების მქონე ადამიანი აღმოჩნდება (იშვიათი ხდომილება) ჩვენს შერჩევაში.

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ერთ ექსტრემალურად მაღალ (სხვა შემთხვევაში შეიძლება ექსტრემალურად დაბალ) მონაცემის მნიშვნელობას შეუძლია მნიშვნელოვანი გავლენა მოახდინოს გაბნევის დიაპაზონზე.

მაგალითი 2. ქვემოთ მოყვანილია ერთ-ერთი წარმოების მუშაკთა წლიური შემოსავალი დოლარებში.

თანამდებობა	შემოსავალი
მეპატრონე	100 000
მენეჯერი	40 000
გაყიდვების აგენტი	30 000
I თანრიგის მუშა	25 000
II თანრიგის მუშა	18 000
III თანრიგის მუშა	15 000

იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი.

ამოხსნა. აბნევის დიაპაზონი $R = 100000 - 15000 = 85000$.

შერჩევის გაბნევის დიაპაზონის, როგორც მონაცემთა გაფანტულობის საზომის მთავარი ნაკლი ისაა, რომ ის არ შეიცავს ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ როგორაა გაბნეული დანარჩენი (საშუალედო) მონაცემები მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს შორის. შესაძლოა ეს მონაცემები გროვდებოდნენ საშუალო მნიშვნელობასთან, ან ექსტრემალური მნიშვ-ნელობების მახლობლობაში, ან თანაბრად იყვნენ განაწილებული მათ შორის და სხვა. საშუალედო მონაცემების განლაგებისა და შესაბამისად, მათი გაფანტულობის შესახებ ინფორმაციას იძლევა ე. წ. **პროცენტილები (percenttiles).**

პროცენტილები ერთდროულად წარმოადგენს მონაცემთა განლაგებისა და მათი გაფანტულობის საზომს. ვთქვათ, P რაიმე რიცხვია, მოთავსებული 0-სა და 100-ს შორის $0 < p < 100$. მონაცემთა სიმრავლის P **რიგის პროცენტილი** (უბრალოდ P**-პროცენტილი**) ეწოდება ისეთ x_P მნიშვნელობას (სიდიდეს), რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება: მონაცემთა არაუმეტეს P%-ისა ნაკლებია x_P-ზე და არაუმეტეს (100-P)%-ისა მეტია x_P-ზე.

მიღებულია P რიცხვის წარმოდგენა $P = 100 \cdot \alpha$ სახით, სადაც $0 < \alpha < 1$. მაგალითად, თუ P=10-ს, მაშინ $\alpha = 0.1$, თუ P=25-ს, მაშინ $\alpha = 0.25$. მ შემთხვევაში P-**პროცენტილის** განსაზღვრება ასე გამოითქმის: x_P ისეთი რიცხვია, რომ ერთდროულად უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ორი უტოლობა:

$$N\{x_i : x_i < x_P\} \le \alpha n, \qquad N\{x_i : x_i > x_P\} \le (1-\alpha)n,$$

სადაც $N\{x_i : \cdots\}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია იმ დაკვირვებების რაოდენობა, რომელთათვისაც სრულდება ორი წერტილის შემდეგ მოთავსებული თვისება. $P = 100 \cdot \alpha$ პროცენტილი არის α-კვანტილის (F განაწილების α-კვანტილი x_α განიმარტება შემდეგნაირად: $x_\alpha = \min\{x : F(x) \ge \alpha\}$) შერჩევითი ანალოგი.

სიმარტივისათვის, ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ვარიაციული მწკრივი მკაცრად ზრდადი მიმდევრობაა: $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$.

შენიშვნა. თუ ვარიაციულ მწკრივში მონაცემები მეორდება, ნაცვლად რაოდენობისა $N\{x_i : x_i < x_P\}$ (შესაბამისად, $N\{x_i : x_i > x_P\}$) უნდა დავითვალოთ რაოდენობა იმ პოზიციების, რომელიც მოთავსებულია x_P-ის პოზიციიხ მარცხნივ (შესაბამისად, მარჯვნივ)). ამ შეთანხმების გათვალისწინებით, პროცენტილის ცნება ადვილად გავრცელდება დაჯგუფებული მონაცემების შემთხვევაში.

ადვილი მისახვედრია, რომ მედიანა წარმოადგენს 50-პროცენტილს.

თუ $P=100\cdot\alpha$, მაშინ მედიანის ანალოგიურად P-პროცენტილის (x_p-ს) გამოსათვლელი გამოსახულება იქნება:

$$x_p = x_{([n\alpha]+1)},\ \text{როცა } n\alpha \text{ არ არის მთელი რიცხვი, და}$$

$$x_p = \frac{x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}}{2},\ \text{როცა } n\alpha \text{ მთელი რიცხვია}$$

(უკანასკნელ შემთხვევაში, ისევე როგორც მედიანის დროს, P-პროცენტილი ცალსახად არ განიმარტება. მის როლში შესაძლებელია ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი $(x_{(n\alpha)}, x_{(n\alpha)+1})$ ინტერვალიდან. ამიტომ თანხმდებიან, რომ P-პროცენტილი ვუწოდოთ ამ ინტერვალის შუაწერტილს).

მაგალითი 3. თუ მოცემულია $n=15$ მოცულობის მქონე შერჩევა, და $P=10$, მაშინ $\alpha=0.1$. შესაბამისად, $n\alpha=1.5$ და ვინაიდან $n\alpha$ არ არის მთელი რიცხვი, ხოლო მისი მთელი ნაწილია [1.5] = 1, ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ფორმულის თანახმად: $x_{10}=x_{(2)}$, ანუ 10-პროცენტილი ვარიაციული მწკრივის მეორე წევრის ტოლია. მართლაც,

$$N\{x_i : x_i < x_{(2)}\} = 1 < n\alpha = 1.5 \quad \text{და} \quad N\{x_i : x_i > x_{(2)}\} = 13 < n(1-\alpha) = 13.5\,.$$

მაგალითი 4. თუ კი $n=20$, $P=10$, მაშინ $\alpha=0.1$, $n\alpha=2$ -- მთელი რიცხვია და ისევ ზემოთ მოყვანილი ფორმულის თანახმად:

$$x_{10} = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2},$$

ანუ 10-პროცენტილი არის $[x_{(2)}, x_{(3)}]$ ინტერვალის შუა წერტილი. ამ შემთხვევაშიც

$$N\{x_i : x_i < x_{10}\} = 2 = n\alpha \quad \text{და} \quad N\{x_i : x_i > x_{10}\} = 18 = n(1-\alpha)\,.$$

ამოცანები

1. იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი და 25-პროცენტილი (I კვარტილი) შემდეგი სიმრავლეებისათვის:

ა) 7 9 12 13 8 11

ბ) 7 8 22 20 15 18 19 13 11

2. იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი და 75-პროცენტილი (III კვარტილი) 20 სტუდენტის მასებისათვის:

106	114	118	118	122	127	127	135	136	138
139	140	143	146	146	147	153	155	159	175

3. შეაფასეთ 25-პროცენტილი და 75-პროცენტილი CD დისკების ჩანაწერის ხანგრძლივობის (წუთებში) ზემოთმოყვანილი სიხშირული განაწილების ცხრილიდან.

3. იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი და 45-პროცენტილი მონაცემთა შემდეგი ერთობლიობებისათვის:

ა) 7 4 14 9 12 2 19 6 15

ბ) 7.6 4.8 1.2 6.9 4.8 7.2 8.1 10.3 4.8 6.7

5. 50 კვირის მანძილზე აკვირდებოდნენ გარკვეული დანადგარის მუშაობას და აფიქსირებდნენ მის კვირაში დაზიანებათა რაოდენობას. მიღებულ იქნა შემდეგი მონაცემები:

დაზიანებათა რიცხვი	0	1	2	3	4	5	6
კვირათა რიცხვი	2	12	14	8	8	4	2

ა) იპოვეთ გაბნევის დიაპაზონი და 35-პროცენტილი.

ბ) იპოვეთ კვირაში დანადგარის დაზიანებათა რიცხვის 95-პროცენტილი.

რანგები და პროცენტული რანგები

დავუშვათ, რომ მოცემულია n მოცულობის განსხვავებული მნიშვნელობების მქონე შერჩევა $x_1,\ldots,x_n$, სადაც $x_i \neq x_j$, თუ $i \neq j$, ე. ი. არც ერთი მნიშვნელობა არ მეორდება. შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი (დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით):

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}.$$

x_i დაკვირვების **რანგი (rank)** ეწოდება ამ დაკვირვების ნომერს ვარიაციულ მწკრივში (იგი წარმოადგენს მონაცემთა პოზიციის ერთ-ერთ მახასიათებელს). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, x_i-ს რანგი ეწოდება ისეთ მთელ რიცხვს r_i, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$x_{(r_i)} = x_i.$$

სინამდვილეში x_i დაკვირვების რანგი r_i არის იმ დაკვირვებების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატებიან x_i დაკვირვებას:

$$r_i = N\{x_j : x_j \leq x_i\},$$

ამასთანავე გასაგებია, რომ მაქსიმალური დაკვირვების რანგი დაემთხვევა შერჩევის მოცულობას.

მაგალითი 5. განვიხილოთ შემდეგი მონაცემები: **5, 6, 2, 7, 9, 8, 10** და თითოეულ მათგანს მივუწეროთ თავისი რანგი.

ამოხსნა. ვარიაციული მწკრივი არის: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10. ამიტომ $x_1 = 5$-ის რანგი იქნება $r_1 = 2$ (დაკვირვებას 5 არ აღემატება ორი დაკვირვება: 2 და 5); $x_2 = 6$-ის რანგია $r_2 = 3$ (დაკვირვებას 6 არ აღემატება სამი დაკვირვება: 2, 5 და 6) და ა. შ. საბოლოოდ მონაცემთა მოცემული სიმრავლე ქვეშ მიწერილი რანგებით ასე გამოიყურება:

5	6	2	7	9	8	10
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	3	1	4	6	5	7

მაგალითი 6. მონაცემებია: 18, 13, 15, 12, 16, 20. მივუწეროთ რანგები. გვაქვს:

18	13	15	12	16	20
5	2	3	1	4	6

აღსანიშნავია, რომ რანგები ინვარიანტულია (არ იცვლება) მონაცემთა ნებისმიერი გადალაგების მიმართ. თუ ამ მაგალითის მონაცემებს დავალაგებთ სხვა თანმიმდევრობით, მაგალითად, შემდეგნაირად: 15, 20, 12, 18, 13, 16, მაშინ რანგები იქნება

15	20	12	18	13	16
3	6	1	4	2	5

ანუ ყოველ წევრს იგივე რანგი მიეწერა რაც ადრე.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: თუ მოცემულია შერჩევა $x_1,\ldots,x_n$, ისეთი, რომ პირობა $x_i \neq x_j$, თუ $i \neq j$ არ სრულდება, ანუ ზოგიერთი წევრი შერჩევაში მეორდება, მაშინ როგორი წესით მოხდება რანგების მიწერა?

ვთქვათ, ჩვენი მონაცემებია: 18, 28, 23, 29, 32, 18, 21, 14, 18, 14. რანგის განმარტების თანახმად ძველი წესის თანახმად ვარიაციული მწკრივის სახით გადაწერილ ამ მონაცემებს რანგები ასე უნდა მიეწეროს:

14	14	18	18	18	21	23	28	29	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

როგორც ვხედავთ, 14-ის ტოლი დაკვირვება შეგვხვდა ორჯერ და ძველი წესით პირველს მივაწერეთ რანგი 1, ხოლო მეორეს კი – რანგი 2 (ანალოგიურად, 18 შეგვხვდა სამჯერ და შესაბამისად, მას დაკავებული პოზიციის მიხედვით მიეწერა რანგები: 3, 4 და 5). გამოდის, რომ ერთ-ერთ მათგანს მივანიჭეთ უპირატესობა. უმჯობესია განმეორებადი დაკვირვებებისათვის მიგვეწერა ერთი და იგივე რანგი შემდეგი წესით: ტოლი დაკვირვებებიდან თითოეულს მივანიჭოთ მათზე მოსული რანგების საშუალო არითმეტიკული. მაგალითად, დაკვირვებებს, რომელთა მნიშვნელობებია 14, უნდა მიე-

ნიჭოს რანგი 1.5 (რადგანაც (1+2)/2=1.5), 18-ის ტოლ დაკვირვებებს – რანგი 4 (ვინაიდან (3+4+5)/3=4).

მეორეს მხრივ, იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შერჩევაში არცერთი ელემენტი არ მეორდება, ელემენტის რანგის მითითება არ იძლევა ამომწურავ ინფორმაციას მის მდებარეობაზე, თუ ამავე დროს ჩვენთვის ცნობილი არ არის შერჩევის მოცულობაც. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ $x^{\bullet}$ ელემენტს n მოცულობის შერჩევიდან და $y^{\bullet}$ ელემენტს მეორე, m მოცულობის შერჩევიდან გააჩნიათ ერთი და იგივე რანგი, ჩვენ ჯერ კიდევ ვერ დავასკვნით, რომ მათი პოზიციები იდენტურია, თუ არ გვექნება დამატებითი ინფორმაცია იმის შესახებ, რომ $m=n$.

საზოგადოდ, როგორ შევადაროთ ერთმანეთს იმ ორი მონაცემის პოზიციები, რომლებიც განსხვავებული მოცულობის სხვადასხვა შერჩევას ეკუთვნის და რანგებიც განსხვავებულები აქვს? (ამ ტიპის კითხვები წარმოიშობა, მაგალითად, ქართული ეროვნული გამოცდების დროს, როცა შეფასების ცენტრმა უნდა შეადაროს სხვადასხვა აბიტურიენტების პოზიციები (რეიტინგები) სხვადასხვა დისციპლინებში ან მაშინაც კი, როცა ერთი დისციპლინის ფარგლებში მათ შეასრულეს სხვადასხვა საგამოცდო ვარიანტი). ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ე. წ. **პროცენტული რანგის (percentile rank)** ცნება.

თუ n შერჩევის მოცულობაა, ხოლო დაკვირვების რანგია r, მაშინ ამ დაკვირვების პროცენტული რანგი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{r-1}{n}\cdot 100\%+\frac{0.5}{n}\cdot 100\%=\frac{2r-1}{2n}\cdot 100\%.$$

მოცემული დაკვირვების **პროცენტული რანგი** წარმოადგენს ამ დაკვირვების ქვევით მდგომ მონაცემებზე მოსული პროცენტებისა ($\frac{r-1}{n}\cdot 100\%$) და თავად დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევრის ($\frac{0.5}{n}\cdot 100\%$) ჯამს.

ამრიგად, მოცემული დაკვირვების პროცენტული რანგი მიგვითითებს დაკვირვებულ მნიშვნელობათა რა პროცენტს (მინუს ამ დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევარი) აღემატება ეს მონაცემი. ცხადია, რომ რაც უფრო მაღალია დაკვირვების პროცენტული რანგი, მით უფრო უკეთესია მისი პოზიცია (თუ ნიშნები განლაგებულია აღმავლობის მიხედვით).

ფაქტიურად, პროცენტული რანგი გვიჩვენებს, ამა თუ იმ შერჩევის კონკრეტული მონაცემი, მონაცემების რამდენი პროცენტის წინაა. შესაბამისად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მონაცემებს სხვადასხვა შერჩევებში მოხვედრის თანაბარი შანსები აქვთ, მაშინ ბუნებრივი იქნება ერთ შერჩევაში უკეთეს პოზიციაზე მდგომ მონაცემს მიენიჭოს უპირატესობა სხვა შერჩევაში უარეს პოზიციაზე მდგომ მონაცემთან შედარებით. მაგალითად, ეროვნულ გამოცდებზე ზოგადი უნარების გამოცდის პირველ ვარიანტში 37 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტს უპირატესობა ენიჭება მესამე ვარიანტში 36 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტთან შედარებით, ან ინგლისურ ენაში 43 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტს უპირატესობა ენიჭება გერმანულ ენაში 42.9 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტთან შედარებით.

მაგალითი 7. ვთქვათ, კლასში არის 10 მოსწავლე და გიორგის ნიშნები უფრო მაღალია, ვიდრე ხუთი მოსწავლის. კოტე სწავლობს 50 მოსწავლისაგან შემდგარ კლასში და მისი ნიშნები უფრო მაღალია, ვიდრე 17 მოსწავლის. რომელს უკავია უკეთესი პოზიცია თავის კლასში, კოტეს თუ გიორგია?

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ მოსწავლეები დალაგებულია ნიშნების ზრდის მიხედვით და გიორგის რანგია 6, ხოლო კოტეს რანგია 18. ჩავატაროთ თითოეულის პოზიციის პროცენტული ანალიზი. გიორგი უკეთესია 5 მოსწავლეზე, რომლებიც შეადგენენ კლასის 50%-ს, თვითონ გიორგიზე მოდის 10%, ხოლო 40%-ს აქვს გიორგიზე უკეთესი ნიშნები. ამ მონაცემებით გიორგის პროცენტული რანგია:

50%+5%=55%.

კოტეს ნიშნები უკეთესია 17 მოსწავლის ნიშნებზე, რომელიც შეადგენს კლასის 34%-ს, კოტეზე მოდის 2%, ამიტომ მისი პროცენტული რანგია:

34%+1%=35%.

ვინაიდან, გიორგის პროცენტული რანგი (55) უფრო მაღალია, ვიდრე კოტესი (35), ამიტომ გიორგის პოზიცია თავის კლასში უკეთესია, ვიდრე კოტესი საკუთარ კლასში.

ეს მაგალითი ამავე დროს გვიჩვენებს, რომ რანგის ცნების შემოსაღებად არ არის აუცილებელი გაგვაჩნდეს რიცხვითი მონაცემები, საკმარისია მხოლოდ ობიექტების ან ინდივიდების სიმრავლის რაიმე თვისების ან ნიშნის (მაგალითად, ნიჭიერება, სიმაღლე, პოპულარობა და ა. შ.) გაძლიერების ან ზრდის მიხედვით დალაგება და ყოველი მათგანისათვის რიგობრივი ნომრის მიწერა.

პროცენტილებსა და პროცენტულ რანგებს შორის შემდეგი კავშირია: თუ შერჩევის ელემენტის პროცენტული რანგია P, მაშინ ეს ელემენტი წარმოადგენს შერჩევის P-პროცენტილს (თუმცა არ არის სავალდებულო, რომ P-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის P-პროცენტილი წარმოადგენდეს შერჩევის ელემენტს).

დისპერსია და სტანდარტული გადახრა

ისევ დავუბრუნდეთ ადრე განხილულ მაგალითს. დავუშვათ, რომ მოცემულია მონაცემთა ორი მწკრივი:

A	8	9	10	10	13
B	1	5	10	16	18.

როგორც ჩვენ ვნახეთ, $\overline{x}_A = \overline{x}_B = 10$. გარდა ამისა, დავასკვენით, რომ B მწკრივის ელემენტების ცვალებადობა უფრო მაღალია, ვიდრე A მწკრივის ელემენტებისა. ჩვენ ამ შემთხვევაში ვიზუალურად დავინახეთ, რომ A მწკრივის წევრები უფრო ნაკლებად არიან გადახრილი საშუალოსაგან, ვიდრე B მწკრივისა. გასაგებია, რომ თუ მონაცემთა სიმრავლე დიდი მოცულობისაა, ასეთი ფაქტების ვიზუალურად აღმოჩენა შეუძლებელია. შესაბამისად, ბუნებრივად ჩნდება საჭიროება ისეთი საზომის შემოღებისა, რომელიც გაგვიადვილებდა მონაცემების თავისი საშუალოს მიმართ გაფანტულობის შესახებ დასკვნის გაკეთებას. სწორედ ასეთ საზომს წარმოადგენს **შერჩევითი დისპერსია (sample variance).**

გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები ზემოთ მოყვანილი მწკრივებისათვის (თითოეულ მონაცემს გამოვაკლოთ საშუალო):

A --	$\overline{x}_A - x_i$:	-2	-1	0	0	3
B --	$\overline{x}_B - x_i$:	-9	-5	0	6	8

პირველი რაც შეიძლება აზრად მოგვივიდეს: შეიძლება გვეფიქრა, რომ გაფანტულობის საზომად შეიძლებოდა აგვეღო ამ გადახრების არითმეტიკული საშუალო, მაგრამ ორივე შემთხვევაში ეს იქნებოდა ნული. შესაბამისად, ეს სიდიდე არანაირ ინფორმაციას არ მოგვცემს. ამიტომ შემოაქვთ ე. წ. **შერჩევითი დისპერსია**, რომელიც წარმოადგენს საშუალოდან გადახრების კვადრატების საშუალო არითმეტიკულს და აღინიშნება s^2 სიმბოლოთი. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს:

$$s_A^2 = (4+1+0+0+9)/5 = 2.6 \quad \text{და}$$

$$s_B^2 = (81+25+0+36+64)/5 = 41.2\ ,$$

ანუ $s_A^2 < s_B^2$.

საზოგადოდ, თუ მოცემულია n მოცულობის $x_1, \dots, x_n$ შერჩევა, მაშინ შერჩევითი დისპერსიის ანალიზური გამოსახულება შემდეგია:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\ .$$

შერჩევითი დისპერსია შეიძლება გადაიწეროს გამოთვლებისათვის მოხერხებული უფრო მარტივი ფორმით:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (\overline{x})^2 .$$

შევნიშნავთ, რომ შერჩევითი დისპერსია წარმოადგენს პოპულაციის დისპერსიის ემპირიულ ანალოგს, რომელიც დაკვირვებათა რიცხვის უსასრულოდ ზრდისას მიისწრაფის პოპულაციის დისპერსიისაკენ.

მოსახერხებელია გაფანტულობის ოდნავ მოდიფიცირებული საზომის განხილვა, რომელსაც **შესწორებულ შერჩევით დისპერსიას** უწოდებენ:

$$s_n^{'2} = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n(\overline{x})^2] .$$

შენიშვნა. აღსანიშნავია, რომ შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს პოპულაციის საშუალოს საუკეთესო შეფასებას (კერძოდ, იგი წარმოადგენს ე.წ. ჩაუნაცვლებელ შეფასებას), მაშინ როდესაც შერჩევითი დისპერსია არ წარმოადგენს პოპულაციის დისპერსიის საუკეთესო შეფასებას, ის ე.წ. ჩანაცვლებული შეფასებაა. იმისათვის, რომ მიიღონ ჩაუნაცვლებელი შეფასება n-ს ცვლიან $n-1$-ით (ჩაუნაცვლებლობა გულისხმობს შემდეგს: მიუხედავად იმისა, რომ სხვადასხვა შერჩევის მიხედვით გამოთვლილი პარამეტრის შეფასება საზოგადოდ სხვადასხვა შედეგს იძლევა, ის საშუალოდ ემთხვევა პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობას).

შევნიშნოთ, რომ თუ პოპულაციის μ საშუალო ცნობილია, მაშინ შერჩევითი დისპერსია განისაზღვრება ფორმულით

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 ,$$

უცნობი საშუალოს შემთხვევაში კი μ-ს ნაცვლად უნდა ვისარგებლოთ შერჩევითი $\overline{x}$ საშუალოთი, მაგრამ როგორც ცნობილია (საშუალოს მეორე თვისება):

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 ,$$

ანუ x_i-ები უფრო ახლოსაა $\overline{x}$-თან, ვიდრე μ-სთან. ამის საკომპენსაციოდ $s_n^{'2}$-ის ფორმულაში n-ის ნაცვლად გამოიყენება $n-1$.

მოვიყვანოთ შერჩევითი დისპერსიის თვისებები:

I. თუ არსებული $x_1,...,x_n$ მონაცემებიდან შევქმნით ახალ მონაცემებს $y_i = ax_i + b$, $i = 1,...,n$, მაშინ $s_y^2 = a^2 s_x^2$ და $s_y^{'2} = a^2 s_x^{'2}$.

II. თუ $x_1,...,x_n$ და $y_1,...,y_m$ ორი შერჩევაა, მაშინ გაერთიანებული შერჩევისათვის $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m$ შერჩევითი დისპერსია და შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები გადაითვლება შემდეგნაირად:

$$s^2 = \frac{n}{m+n}s_x^2 + \frac{m}{m+n}s_y^2 + \frac{mn}{(m+n)^2}(\overline{x} - \overline{y})^2 \quad \text{და}$$

$$s^{'2} = \frac{n-1}{m+n}s_x^{'2} + \frac{m-1}{m+n}s_y^{'2} + \frac{mn}{(m+n-1)(m+n)}(\overline{x} - \overline{y})^2 .$$

(იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $m = n$ და $\overline{x} = \overline{y}$, გაერთიანებული შერჩევის შერჩევითი დისპერსია იქნება თავიდან აღებული შერჩევების შერჩევითი დისპერსიების საშუალო არითმეტიკული: $s^2 = (s_x^2 + s_y^2)/2$).

როგორც ვხედავთ, შერჩევითი დისპერსიის განზომილება უდრის დაკვირვებათა განზომილების კვადრატს. სტატისტიკოსს ხშირად ესაჭიროება გაფანტულობის ისეთი საზომი, რომელიც იმავე ერთეულებში იზომება, რაც საწყისი მონაცემები. ასეთი საზომი მიიღება შერჩევითი დისპერსიიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით და მას **სტა-**

ნდარტული გადახრა **(standard deviation)** ან **საშუალო კვადრატული გადახრა (mean square deviation)** ეწოდება.

სტანდარტული გადახრა (შესაბამისად, **შესწორებული სტანდარტული გადახრა**) წარმოადგენს არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან (შესაბამისად, **შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან**)

$$s = +\sqrt{s^2} \quad (\text{შესაბამისად, } s' = +\sqrt{s'^2}).$$

შენიშვნა: შესწორებული სტანდარტული გადახრის ნაცვლად იხმარება აგრეთვე ტერმინი შერჩევითი (შერჩევის) სტანდარტული გადახრა.

შემდგომში შერჩევითი დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრის გამოსათვლელად გამოიყენება შედარებით მოხერხებული ფორმულები, რომლებიც მათემატიკურად ექვივალენტურია ზემოთმოყვანილი ფორმულების, მაგრამ არ საჭიროებს საშუალოს წინასწარ გამოთვლას. ამ ფორმულებს უწოდებენ შერჩევითი დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრის შემოკლებულ ფორმულებს და მათ აქვთ შემდეგი სახე:

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - [(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 / n]}{n-1} \quad \text{-- } \textbf{შერჩევითი დისპერსია,}$$

$$s' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - [(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 / n]}{n-1}} \quad \text{-- } \textbf{შერჩევითი სტანდარტული გადახრა.}$$

საზოგადოდ, თუ x_i მონაცემის სიხშირეა f_i $(i = 1,2,...,k)$ და $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$, მაშინ

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ან} \quad s_n^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \bar{x}^2.$$

$$s_n'^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ან} \quad s_n'^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2.$$

მაგალითი 8. ვიპოვოთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა ევროპაში ექვს წელიწადში გაყიდული ავტომანქანების ერთობლივი ღირებულების შერჩევის მიხედვით (მონაცემები მოყვანილია მილიონ დოლარებში):

11.2 11.9 12.0 12.8 13.4 14.3.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ მნიშვნელობათა ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 11.2+11.9+12.0+12.8+13.4+14.3=75.6;$$

ნაბიჯი 2. თითოეული მნიშვნელობა ავიყვანოთ კვადრატში და ვიპოვოთ მათი ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 11.2^2+11.9^2+12.0^2+12.8^2+13.4^2+14.3^2=958.94;$$

ნაბიჯი 3. შევიტანოთ შესაბამის ფორმულაში და გამოვთვალოთ:

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - [(\sum_{i=1}^{6} x_i)^2 / 6]}{6-1} = \frac{958.94 - [(75.6)^2 / 6]}{5} = 1.28;$$

ე. ი. შერჩევის დისპერსიაა 1.28. სტანდარტული გადახრა კი იქნება $s' = \sqrt{1.28} \approx 1.33$.

ცნობილია, რომ მცირე ინვესტორისათვის, როგორც საინვესტიციო ალტერნატივა, დიდი პოპულარობით სარგებლობს ინვესტიციების ჩადება საინვესტიციო ფონდებში – ტრესტებში. იმისათვის, რომ ინვესტორს გაუადვილდეს გადაწყვეტილების მიღება, თუ რომელ კონკრეტულ ტრესტში მოახდინოს ინვესტირება, ფინანსურ ჟურნალებში რეგულარულად ქვეყნდება ყოველი ცალკეული ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო ათი წლის განმავლობაში. პუბლიკაციებში ამასთან

ერთად მითითებულია ყოველი ტრესტის რისკის დონე: მაღალი, საშუალო და დაბალი. რისკის დონეების კლასიფიკაცია კი ხდება საშუალო წლიური საპროცენტო შემოსავლის ისტორიული ცვალებადობის მიხედვით. რაც უფრო მაღალია წლიერი საპროცენტო შემოსავლის ცვალებადობა, მით უფრო მაღალია რისკის დონე.

მაგალითი 9. მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ტრესტი *A*	8.3	-6.2	20.9	-2.7	33.6	42.8	24.4	5.2	3.1	30.5
ტრესტი *B*	12.1	-2.8	6.4	12.2	27.8	25.3	18.2	10.7	-1.3	11.4

რომელი ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს, A თუ B?

ამოხსნა. რადგან დისპერსია მონაცემთა ცვალებადობის ყველაზე თვალსაჩინო საზომია, ყოველი ტრესტის მონაცემების მიხედვით უნდა გამოვთვალოთ თითოეული მათგანის შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, $s_A^{'2}$ და $s_B^{'2}$ და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს. წინასწარ გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალოები. გვაქვს:

$$\overline{x}_A = (8.3 - 6.2 + 20.9 - 2.7 + 33.6 + 42.8 + 24.4 + 5.2 + 3.1 + 30.5)/10 = 16\,\%,$$

$$\overline{x}_B = (12.1 - 2.8 + 6.4 + 12.2 + 27.8 + 25.3 + 18.2 + 10.7 - 1.3 + 11.4)/10 = 12\,\%.$$

შესაბამისად,

$$s_A^{'2} = (8.3^2 + \dots + 10.5^2 - 10 \cdot 16^2)/9 = (5083.36 - 2560)/9 = 280.34\,(\%)^2,$$

$$s_B^{'2} = (12.1^2 + \dots + 11.4^2 - 10 \cdot 12^2)/9 = (2334.36 - 1440)/9 = 99.38\,(\%)^2.$$

როგორც ვხედავთ, $s_A^{'} > s_B^{'}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ A ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს (უფრო რისკიანია), ვიდრე B ტრესტი, იმავდროულად, $\overline{x}_A > \overline{x}_B$, ანუ A ტრესტის ამონაგები საშუალოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ტრესტისა. ეს ფაქტი სავსებით ეთანხმება ჩვენს ინტუიციას: ინვესტიცია, რომელიც დაკავშირებულია რისკის უფრო მაღალ დონესთან, უნდა იძლეოდეს უფრო მაღალ საშუალო ამონაგებსაც.

მაგალითი 10. დავუშვათ, რომ 10 წლის წინ თქვენ მოახდინეთ ტოლი თანხების ინვესტირება A და B ტრესტებში, ე. ი. შექმენით საინვესტიციო პორტფელი, რომელშიც A და B ტრესტებში ინვესტიციათა წონები ტოლია და უდრის 1/2-ს. ახალი პორტფელი აღვნიშნოთ C-თი. შევადაროთ A, B და C პორტფელების რისკიანობა.

ამოხსნა. წინასწარ შემოვიღოთ **შემოსავლიანობის** ცნება: დავუშვათ, რომ საინვესტიციო თანხა წლის დასაწყისში უდრის P_0-ს და ამ თანხის ინვესტირებამ A და B ტრესტებში წლის ბოლოს მოგვცა, შესაბამისად, P_A და P_B თანხები. მაშინ A და B ტრესტების ამონაგები R_A და R_B შემდეგი ფორმულებით მოიცემა (%-ში):

$$R_A = \frac{P_A - P_0}{P_0} \cdot 100\%, \qquad R_B = \frac{P_B - P_0}{P_0} \cdot 100\%.$$

ვთქვათ, ახლა A და B ტრესტებიდან თითოეულში ინვესტირებულია $\frac{1}{2}P_0$-ის ტოლი თანხა. მაშინ წლის ბოლოს C პორტფელისაგან მიღებული თანხაა $\frac{1}{2}P_A + \frac{1}{2}P_B$. ამიტომ მისი ამონაგები იქნება:

$$R_C = \frac{(\frac{1}{2}P_A + \frac{1}{2}P_B) - P_0}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}(P_A - P_0) + \frac{1}{2}(P_B - P_0)}{P_0} = \frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}R_B.$$

გასაგებია, რომ წინა მაგალითში მოყვანილი მონაცემები წარმოადგენენ ბოლო 10 წლის დაკვირვებებს R_A-სა და R_B-ზე, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შევქმნათ C პორტფელის ამონაგებთა მწკრივი. ის იქნება:

10.2 -4.5 13.65 4.75 30.7 34.1 21.3 7.95 0.9 20.95.

სტანდარტული გადახრის მეშვეობით შევადაროთ C პორტფელის რისკიანობა A და B ტრესტებში ინვესტიციათა რისკიანობას. საშუალოს მე-3 და მე-4 თვისებების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{2}(\bar{x}_A + \bar{x}_B) = 14\% .$$

ამიტომ, შესწორებული შერჩევითი დისპერსია იქნება:

$$s_C^{'2} = (10.2^2 + \cdots + 20.95^2 - 10 \cdot 14^2)/9 = 159.45(\%)^2 ,$$

შესაბამისად, $s_C^{'} = 12.63\%$.

როგორც ვხედავთ, რისკიანობის მიხედვით A , B და C ინვესტიციები დალაგდა შემდეგი მიმდევრობით:

$$s_B^{'} < s_C^{'} < s_A^{'} ,$$

ხოლო მათი ამონაგები კი შემდეგი მიმდევრობით:

$$R_A > R_C > R_B .$$

დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრის მოძებნის პროცედურა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის ანალოგიურია დაჯგუფებული მონაცემებისათვის საშუალოს მოძებნის პროცედურის და ის იყენებს თითოეული კლასის შუაწერტილს.

მაგალითი 11. კვირის განმავლობაში შემთხვევით შერჩეული 20 მორბენალის მიერ გარბენილი მანძილების ზემოთმოყვანილი სიხშირული განაწილების ცხრილის მიხედვით გამოვთვალოთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. გავაკეთოთ შემდეგი სახის ცხრილი, ვიპოვოთ თითოეული კლასის შუაწერტილი და შევიტანოთ ***C*** სვეტში:

$$x_m = \frac{5.5 + 10.5}{2} = 8 , \quad \frac{10.5 + 15.5}{2} = 13 , \text{ და ა. შ.}$$

ნაბიჯი 2. გავამრავლოთ თითოეული კლასის სიხშირე ამავე კლასის შუაწერტილზე და ნამრავლი ჩავწეროთ ***D*** სვეტში:

$$1 \cdot 8 = 8 , \quad 2 \cdot 13 = 26 , \text{ და ა. შ. } \quad 2 \cdot 38 = 76 .$$

ნაბიჯი 3. გავამრავლოთ თითოეული კლასის სიხშირე ამავე კლასის შუაწერტილის კვადრატზე და ნამრავლი ჩავწეროთ ***E*** სვეტში:

$$1 \cdot 8^2 = 64 , \quad 2 \cdot 13^2 = 338 , \text{ და ა. შ. } \quad 2 \cdot 38^2 = 2888 .$$

ნაბიჯი 4. ვიპოვოთ ***B, D*** და ***E*** სვეტების ჯამი. ***B*** სვეტის ჯამია n , ***D*** სვეტის ჯამია $\sum f \cdot x_m$, ხოლო ***E*** სვეტის ჯამია $\sum f \cdot x_m^2$. საბოლოოდ ცხრილს ექნება ასეთი სახე:

A კლასები	***B*** სიხშირე (*f*)	***C*** შუაწერტილი (x_m)	***D*** $f x_m$	***E*** $f x^2_m$
5.5—10.5	1	8	8	64
10.5—15.5	2	13	26	338
15.5—20.5	3	18	54	972
20.5—25.5	5	23	115	2645
25.5—30.5	4	28	112	3136
30.5—35.5	3	33	99	3267
35.5—40.5	2	38	76	2888
	$n = 20$		$\sum f \cdot x_m = 490$	$\sum f \cdot x_m^2 = 13310$

ნაბიჯი 5. შევიტანოთ მიღებული მონაცემების შესაბამის ფორმულაში და გამოვთვალოთ დისპერსია:

$$s^{'2} = \frac{\sum_{m=1}^{n} f \cdot x_m^2 - [(\sum_{m=1}^{n} f \cdot x_m)^2 / n]}{n-1} = \frac{13310 - [490^2/20]}{20-1} = 68.7 .$$

ნაბიჯი 6. სტანდარტული გადახრის გამოსათვლელად ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი დისპერსიიდან:

$$s^{'}=\sqrt{68.7}\approx 8.3\,.$$

ცხადია, რომ $s^{'}=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შერჩევის ყველა მნიშვნელობა ტოლია. საჭიროა აღინიშნოს, რომ სტანდარტული გადახრა არ წარმოადგენს გაფანტულობის მდგრად საზომს, ის გაცილებით უფრო მგრძნობიარეა ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ, ვიდრე საშუალო. მართლაც, განვიხილოთ მონაცემები: **34 46 40 57 50.** მაშინ მათთვის საშუალო იქნება $\overline{x}=46$. გამოვთვალოთ სტანდარტული გადახრა $s^{'}$. ჯერ გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები, გვექნება: **-9 0 6 11 4.** შესაბამისად, $s^{'2}=(81+0+36+121+16)/4=63.5$. ამიტომ $s^{'}=\sqrt{63.5}\approx 8$. 2

ახლა მონაცემთა მოყვანილ სიმრავლეში მონაცემი 50 შევცვალოთ 200-ით, ანუ განვიხილოთ ახალი მონაცემები: **34 46 40 57 200.** ამ შემთხვევაში საშუალო იქნება $\overline{x}=76$, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი:

$$s^{'}=\sqrt{(39^2+30^2+36^2+19^2+124^2)/4}=\sqrt{4383.5}\approx 66\,.$$

როგორც ვხედავთ, შედარებით თანაბრად განაწილებული მონაცემებიდან ერთ-ერთი მონაცემის მკვეთრ ცვლილებაზე სტანდარტული გადახრის რეაგირება უფრო ძლიერი აღმოჩნდა, ვიდრე საშუალოსი. ამ ცვლილებით მონაცემები გახდა მარჯვნივ ასიმეტრიული. მკვეთრად ასიმეტრიული, მაგალითად, მარჯვნივ ასიმეტრიული განაწილებებისათვის, მარჯვენა მხარეს გრძელი კუდით, შერჩევითი დისპერსია დიდია და არ იძლევა სასარგებლო ინფორმაციას გაფანტულობის შესახებ.

ამოცანები

1. იპოვეთ მონაცემების საშუალო:

ა) 1 2 3 4 5 6 7; ბ) 4 12 -2 7 0 9.

გამოთვალეთ თითოეული სიმრავლის სტანდარტული გადახრა და გაერთიანებული მონაცემების სტანდარტული გადახრა.

2. მე-10 კლასელი 204 მოსწავლის ძმებისა და დების რიცხვის ზემოთმოყვანილი სიხშირული ცხრილის მიხედვით გამოთვალეთ შერჩევითი დისპერსია.

3. გამოთვალეთ სტანდარტული გადახრა მონაცემთა თითოეული სიმრავლისათვის:

ა) 2 1 5.3 -4.2 6.7 3.1;

ბ) 15.2 12.3 5.7 4.3 11.2 2.5 8.7.

4. გრამებში გაზომილი 25 ხიზილალის ქილის მასების ჯამი და მასების კვადრატების ჯამი აღმოჩნდა შესაბამისად:

$$\sum_{i=1}^{25}x_i=1268.2 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{25}x_i^2=64585.16\,.$$

იპოვეთ მასების საშუალო და დისპერსია. რომელი ერთეულით იზომება დისპერსია?

5. ქვემოთ მოყვანილია, კრიკეტის 12 თამაშის განმავლობაში, ტომისა და ვილის მიერ ტაფელით მოგერიებული ბურთების რაოდენობა:

ტომი	23	83	40	0	89	98	71	31	102	48	15	18
ვილი	43	32	61	75	68	92	17	15	25	43	86	12

თქვენი აზრით, რომელი მოთამაშეა: ა) უკეთესი; ბ) უფრო სტაბილური.

6. კლასის 12 ბიჭის სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა შესაბამისად ტოლია 148.8 სმ და 5.4 სმ. მათ დაემატა ერთი ბიჭი, რომლის სიმაღლეა 153.4 სმ. გამოთვალეთ 13 ბიჭის სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

7. დიდი პოპულაციიდან აღებული შემთხვევითი შერჩევა შედგება შემდეგი მონაცემებისაგან: 13.2 5.7 8.3 6.7 9.2 11.4 9.7 8.1 6.3 გამოთვალეთ პოპულაციის საშუალოსა და სტანდარტული გადახრის ჩაუნაცვლებელი შეფასებები.

8. კლასში 25 მოსწავლეა, რომელთაგან 12 ვაჟია და 13 ქალი. მათემატიკაში ტესტირების შედეგად 12 ვაჟის საშუალო ქულამ შეადგინა 31, ხოლო სტანდარტული გადახრა

იყო 6.2. გოგონების საშუალო ქულა იყო 36, სტანდარტული გადახრა კი 4. ვიპოვოთ მათემატიკაში ტესტირების ქულების საშუალო და სტანდარტული გადახრა მთელი კლასის 25 მოსწავლისათვის.

9. ცნობილია, რომ $n=10$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 410$ და $s_n^2 = 12$. იპოვეთ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

10. 80 სტუდენტი გოგონას სიმაღლეების ჯამი და სიმაღლეების კვადრატების ჯამია შესაბამისად: $\sum_{i=1}^{80} x_i = 13040$ და $\sum_{i=1}^{80} x_i^2 = 2133520$. იპოვეთ სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

11. ქვემოთ მოყვანილია 96 დღის განმავლობაში აკადემიური პერსონალის მიერ გაცდენილი ლექციების რაოდენობა უნივერსიტეტში:

გაცდენილი ლექციების რაოდენობა	0	1	2	3	4	5
დღეების რაოდენობა	54	24	11	4	2	1

გამოთვალეთ გაცდენილი ლექციების რაოდენობის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

12. მენეჯერი სამუშაო დღის ბოლოს ამოწმებს მხატვრის მიერ დღის განმავლობაში მოხატული თეფშების ხარისხს და მათ ნაწილს იწუნებს. ქვემოთ მოყვანილია 30 დღის განმავლობაში მენეჯერის მიერ დაწუნებული თეფშების რიცხვი:

დაწუნებული თეფშების რიცხვი	0	1	2	3	4	5	6
დღეების რიცხვი	18	5	3	1	1	1	1

შეამოწმეთ, რომ წუნდებული თეფშების რაოდენობის სტანდარტული გადახრა დაახლოებით ტოლია გაბნევის დიაპაზონის მეთხედის.

13. ქვემოთ მოყვანილია 80 მორბენალის მიერ 20 კილომეტრიან მარათონულ დისტანციაზე დახარჯული დროების (წუთებში) დაჯგუფებული სიხშირული განაწილების ცხრილი:

სირბილის დრო	60–80	80–100	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
მორბენალთა რიცხვი	1	4	26	24	10	7	8

შეაფასეთ სირბილის დროის შერჩევითი დისპერსია. თუ ეს 80 მორბენალი შემთხვევით იქნა შერჩეული მარათონში მონაწილე 2000 მორბენალიდან, რა იქნება 2000 მორბენალის დისპერსიის უკეთესი შეფასება.

14. შეარჩიეს ყავის 80 პაკეტი და მათი მასები (გრამებში) განაწილებული აღმოჩნდა შემდეგნაირად:

პაკეტის მასა	244–246	247–249	250–252	253–255	256–258
პაკეტის რიცხვი	10	20	24	18	8

შეაფასეთ მასების საშუალო და სტანდარტული გადახრა. როგორ შეიძლება შეფასების სიზუსტის გაზრდა?

15. საწარმოს 104 მუშის ასაკი განაწილებულია შემდეგნაირად:

ასაკი	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–50	51–60	61–70
სიხშირე	5	12	18	14	25	16	8	6

შეაფასეთ მუშების ასაკის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.
სხვა საწარმოში, სადაც მუშათა რიცხვი ისევ 104-ია, ასაკის საშუალო შეადგენს 28.4 წელს, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 9.9 წელია. შეადარეთ ამ საწარმოების მუშათა ასაკის განაწილებები.

თავი IV

დაწყვილებული მონაცემები, კორელაცია

ხშირ შემთხვევაში მკვლევარი დაინტერესებულია დაადგინოს ორ სიდიდეს შორის კავშირი არსებობს თუ არა. ამ მიზნის მისაღწევად, მკვლევარმა უნდა შეაგროვოს მონაცემები ორივე მახასიათებლებზე ერთდროული დაკვირვებების შედეგად და მიღებული მონაცემები დააწყვილოს ერთმანეთთან (უფრო ზუსტად, ორი დამკვირვებელი ერთდროულად ატარებს დაკვირვებებს და მიღებულ მონაცემებს აწყვილებს ერთმანეთთან). მაგალითად, თუ ჩვენ გვაინტერესებს კავშირი ჰაერის ტემპერატურასა და ატმოსფერულ წნევას შორის, მაშინ დროის ერთი და იმავე მომენტში პირველი დამკვირვებელი ზომავს ჰაერის ტემპერატურას, ხოლო მეორე – ატმოსფერულ წნევას. პირველი დაკვირვების ან გაზომვის ობიექტს (ამ შემთხვევაში – ტემპერატურას) უწოდებენ **დამოუკიდებელ სიდიდეს**, და აღნიშნავენ **X**-ით, ხოლო მეორე დაკვირვების ან გაზომვის ობიექტს (ამ შემთხვევაში -- ატმოსფერულ წნევას) უწოდებენ **დამოკიდებულ სიდიდეს** და აღნიშნავენ **Y**-ით. ამა თუ იმ ორ მახასიათებელს (ან ორ მაჩვენებელს) შორის კავშირის შესწავლის მიზნით ამ მახასიათებლების დაკვირვებული მნიშვნელობების სიმრავლე წარმოვადგინოთ წყვილების შემდეგი სიმრავლის სახით: (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . ,(x_n, y_n). ამ მონაცემების მიხედვით აგებენ ე. წ. **გაბნევის დიაგრამას** შემდეგი წესით: სიბრტყეზე, კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში, მონიშნავენ წერტილებს, რომელთა კოორდინატებია (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

გაბნევის გრაფიკი ან გაბნევის დიაგრამა წარმოადგენს მონაცემთა მნიშვნელობების დალაგებული წყვილების გრაფიკს (დიაგრამას), რომელიც გამოიყენება ორ სიდიდეს შორის არსებული კავშირის დასადგენად.

მაგალითი 1. მკვლევარს აინტერესებს დაადგინოს არსებობს თუ არა კავშირი ველოსიპედით წვიმიან ამინდში მომხდარ მსუბუქ ავარიათა რიცხვსა და სიკვდილით (ფატალური შედეგით) დამთავრებულ ავარიათა რიცხვს შორის. ქვემოთ მოყვანილია 10 წლის განმავლობაში წვიმიან ამინდში ველოსიპედით მომხდარი ავარიების რიცხვის ცხრილი ორივე შემთხვევაში:

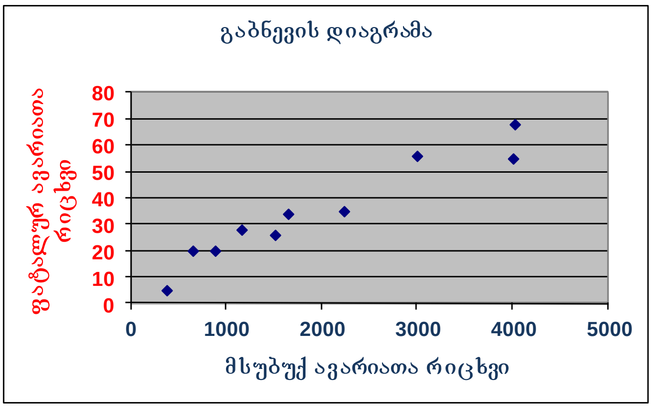
მსუბ. ავარიებ-ის რიცხვი, *x*	376	650	884	1162	1513	1650	2236	3002	4028	4010
ფატ. ავარიებ-ის რიცხვი, *y*	5	20	20	28	26	34	35	56	68	55

ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა ამ მონაცემებისათვის.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. სიბრტყეზე ავაგოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და მოვნიშნოთ x და y ღერძები.

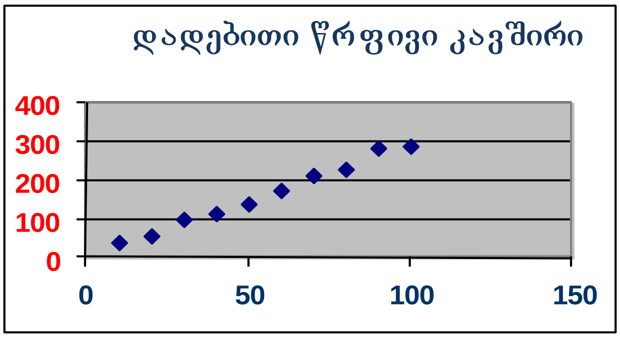
ნაბიჯი 2. ავაგოთ წერტილთა წყვილები საკოორდინატო სიბრტყეზე ისე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:

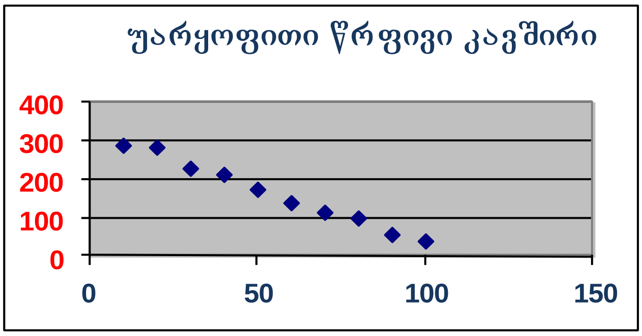


X და **Y** სიდიდეებს შორის შესაძლებელია არსებობდეს რამოდენიმე განსხვავებული ტიპის დამოკიდებულება. ამ დამოკიდებულების გარკვევა (იდენტიფიცირება) შესაძლებელია საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილების განლაგების სტრუქტურაზე დაყრდნობით. ქვემოთ მოყვანილი იქნება წერტილების სტრუქტურული განლაგების სხვადასხვა ტიპები და შესაბამისი დამოკიდებულების სახეები.

1. **დადებითი წრფივი კავშირი** არსებობს (გვაქვს) იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით ლაგდება (თავმოყრილია, კონცენტრირებულია) აღმავალი სწორი ხაზის ირგვლივ (მიდამოში) და ერთდროულად ორივე **X** და **Y** სიდიდის მნიშვნელობები ზრდადია. ასეთი კავშირი გვაქვს მაშინ, როდესაც **X** სიდიდის ზრდასთან ერთად იზრდება **Y** სიდიდეც.

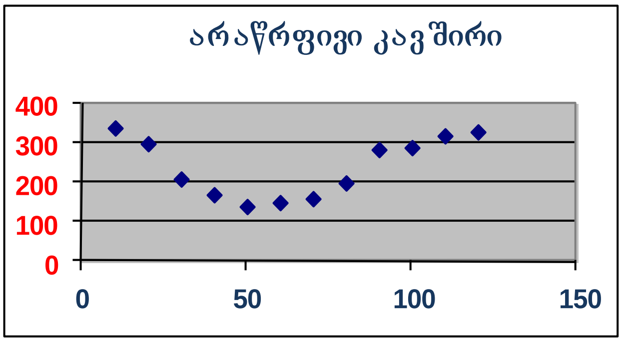
2. **უარყოფითი წრფივი კავშირი** არსებობს (გვაქვს) იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით ლაგდება (თავმოყრილია, კონცენტრირებულია) დაღმავალი სწორი ხაზის ირგვლივ. ასეთი კავშირი გვაქვს მაშინ, როდესაც **X** სიდიდის ზრდასთან ერთად კლებულობს **Y** სიდიდე და პირიქით -- **X** სიდიდის კლებასთან ერთად იზრდება **Y** სიდიდე.

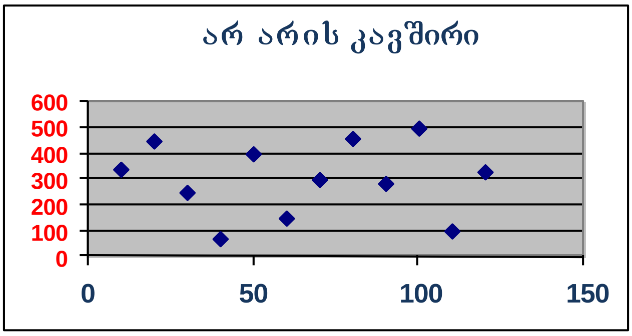




3. **არაწრფივი კავშირი** არსებობს (გვაქვს) იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით ლაგდება (თავმოყრილია, კონცენტრირებულია) არაწრფივი (მრუდი) ხაზის (წირის) ირგვლივ. ეს დამოკიდებულება აღიწერება შესაბამისი წირის ბუნებით.

4. **არ არის კავშირი** გვაქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები უწესრიგოდაა მიმოფანტული, არ ჩანს რომ ისინი რაიმე წირის ირგვლივაა კონცენტრირებული.





ზემოთ მოყვანილ მაგალითში **X** (მსუბუქ ავარიათა რიცხვი) და **Y** (ფატალურ ავარიათა რიცხვი) სიდიდეებს შორის ადგილი აქვს წრფივ დადებით კავშირს (დამოკიდებულებას). სხვა სიტყვებით, როგორც კი სველ ასფალტზე ველოსიპედით მსუბუქ ავარიათა რიცხვი იწყებს ზრდას, მაშინ იმ ავარიების რიცხვი, სადაც დადგა სასიკვდილო შედეგი, აგრეთვე მატულობს.

წირს, რომელიც აღწერს კავშირს (დამოკიდებულებას) **X** და **Y** სიდიდეების მნიშვნელობებს შორის **მისადაგების წირი** ეწოდება. ამ წირის პოვნის საკითხებს სწავლობს მათემატიკური სტატისტიკის ნაწილი, რომელსაც **რეგრესიული ანალიზი** ეწოდება. აქ მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ წირის მოსაძებნად იყენებენ ე. წ. **უმცირეს კვადრატთა მეთოდს**, რომლის თანახმადაც იძებნება ისეთი წირი $y = f(x)$, რომლისთვისაც სრულდება პირობა:

გამოსახულება $\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2$ აღწევს თავის მინიმუმს,

ანუ წირი, რომლიდანაც დამოუკიდებელი **X** სიდიდის დაკვირვებული x_i მნიშვნელობების შესაბამისი დაკვირვებული y_i მნიშვნელობების თეორიული $f(x_i)$ მნიშვნელობებისაგან ვერტიკალური გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია.

თუ მაგალითად, სიდიდეებს შორის გვაქვს წრფივი კავშირი, მაშინ ბუნებრივია მისადაგების წირი ვეძებოთ წრფივ ფუნქციებს შორის, ანუ $f(x) = ax + b$. წრფივი ფუნქციის მოძებნა ნიშნავს a და b კოეფიციენტების პოვნას. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის თანახმად უნდა ვიპოვოთ ისეთი a და b კოეფიციენტები, რომ გამოსახულებამ -- $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ მიიღოს თავისი მინიმალური მნიშვნელობა. ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის წესის თანახმად, აღნიშნული გამოსახულება უნდა გავაწარმოოთ როგორც a-ს, ისე b-ს მიმართ, მიღებული წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა a და b-ს მიმართ. საბოლოოდ, მივიღებთ, რომ:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad \text{და} \quad b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

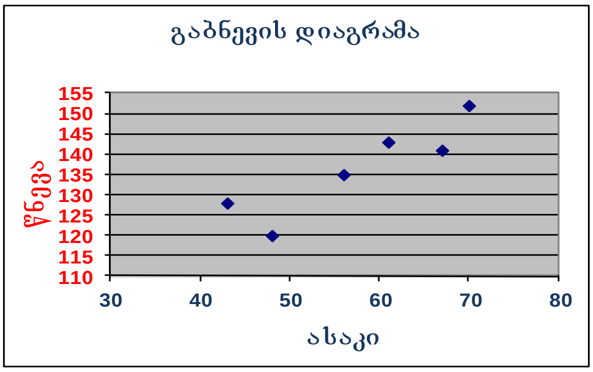
მაგალითი 2 . ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა მონაცემებისათვის, რომელიც მიიღება 6 შემთხვევით შერჩეული პიროვნების ასაკსა და არტერიული წნევას შორის დამოკიდებულების შესწავლისას. მონაცემების ცხრილია:

პერსონა	ასაკი, *x*	წნევა, *y*
A	43	128
B	48	120
C	56	135
D	61	143
E	67	141
F	70	152

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. დავხაზოთ საკოორდინატო სიბრტყე და მოვნიშნოთ x და y ღერძები.

ნაბიჯი 2. მოვნიშნოთ თითოეული წერტილი გრაფიკზე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:



კორელაციის კოეფიციენტი, გამოთვლილი მონაცემთა შერჩევის მიხედვით, წარმოადგენს ორ სიდიდეს შორის წრფივი დამოკიდებულების ხარისხისა და მიმართულების საზომს. შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი აღინიშნება r ასოთი, ხოლო პოპულაციის მიხედვით გამოთვლილი კორელაციის კოეფიციენტი აღინიშნება ბერძნული ρ (რო) ასოთი.

თავდაპირველად განვმარტოთ შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი. ორ **X** და **Y** სიდიდეს შორის **კოვარიაციის კოეფიციენტი** აღინიშნება $\mathbf{cov(X, Y)}$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგი თანაფარდობით:

$$\mathbf{cov(X, Y)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

სადაც $\bar{x}$ და $\bar{y}$ არის შესაბამისად **X** და **Y** სიდიდეების შერჩევითი საშუალო ($\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$).

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი მოიცემა შემდეგი თანაფარდობით:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{S_X S_Y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}.$$

კოვარიაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად მოხერხებულია ვისარგებლოთ შემდეგი ექვივალენტური და გამარტივებული ფორმულით:

$$\mathbf{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}}.$$

თუ მოცემულია მონაცემთა ორი სიმრავლე $x_1,...,x_n$ და $y_1,...,y_n$, მაშინ მონაცემთა ახალი $z_i = x_i \pm y_i$ $(i=1,...,n)$ სიმრავლისათვის შერჩევითი დისპერსია ასე გამოითვლება: $s_z^2 = s_x^2 + s_y^2 \pm 2\,\mathrm{cov}(x,y)$ (თუ $\mathrm{cov}(x,y)=0$, მაშინ $s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$). ანალოგიურად,

$$s_z^{'2} = s_x^{'2} + s_y^{'2} \pm 2\,\mathrm{cov}^{'}(x,y), \quad \text{სადაც}$$

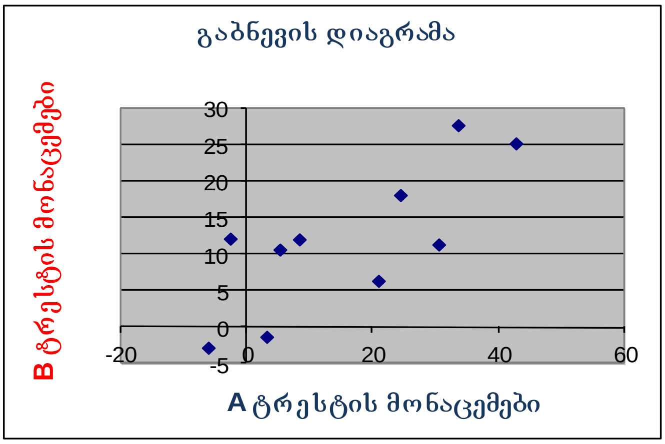
$$\mathrm{cov}^{'}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{n}{n-1}\mathrm{cov}(x,y)\ .$$

მაგალითი 3. მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ტრესტი A	8.3	-6.2	20.9	-2.7	33.6	42.8	24.4	5.2	3.1	30.5
ტრესტი B	12.1	-2.8	6.4	12.2	27.8	25.3	18.2	10.7	-1.3	11.4

ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა და გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი.

ამოხსნა. A ტრესტის მონაცემები გადავზომოთ x ღერძზე, B ტრესტისა კი y ღერძზე.



ამ შემთხვევაში $\bar{x}=16$, $\bar{y}=12$, $s_x=17.65$ და $s_y=10.51$. ამიტომ გვაქვს:

$$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot[8.3\cdot 12.1 + (-6.2)\cdot(-2.8) + \cdots + 30.5\cdot 11.4] - 16\cdot 12 = 71.48\ ,$$

შესაბამისად,

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{71.48}{17.65\cdot 10.51} \approx 0.39\ .$$

კორელაციის კოეფიციენტის ეს მნიშვნელობა გვაეწმუნებს, რომ არსებობს სუსტად გამოხატული პოზიტიური წრფივი კავშირი A და B ტრესტების ამონაგებს შორის, რასაც გაბნევის დიაგრამაც ადასტურებს.

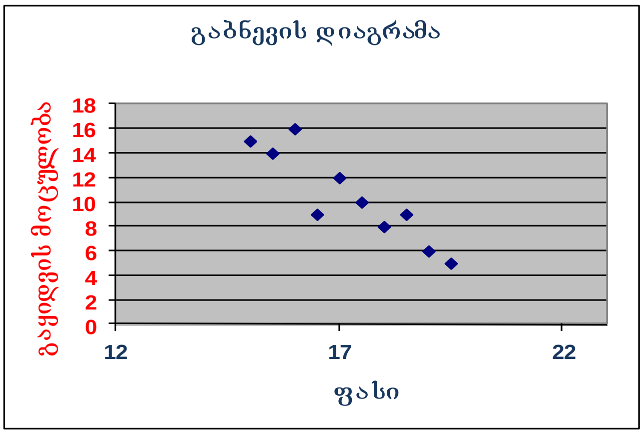
მაგალითი 4. ახალი პროდუქციის ფასის დასადგენად კომპანიამ შეარჩია 10 ქალაქი, რომელთაც არსებითად ერთი და იგივე ყიდვის პოტენციალი გააჩნია და გამოი-

ტანა პროდუქცია ბაზარზე ყოველ მათგანში სხვადასხვა ფასად. კომპანიის მიერ მიღებული შედეგები მოყვანილია ცხრილში:

ქალაქის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ფასი, x	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
გაყიდვის მოცულობა, y	15	14	16	9	12	10	8	9	6	5

დავადგინოთ გაყიდვის მოცულობის ფასზე დამოკიდებულების სახე.

ამოხსნა. ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა



როგორც დიაგრამა გვიჩვენებს, ჩვენს წინაშეა უარყოფითი წრფივი კავშირის ტენდენცია: მონაცემები თავმოყრილი არიან უარყოფითი დახრილობის წრფის მიდამოში. რადგანაც კორელაციის კოეფიციენტი ზომავს ორ სიდიდეს შორის არსებული წრფივი კავშირის სიძლიერეს, უნდა მოველოდეთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი საკმაოდ ახლოს იქნება -1-თთან. გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი. გვაქვს:

$$\bar{x}=17.25\,,\quad s_x=1.44\,,\quad \bar{y}=10.4\,,\quad s_y=3.56\,,\quad \operatorname{cov}(x,y)=-4.75 \quad \text{და}$$

$$r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}=\frac{-4.75}{5.13}\approx -0.93\,.$$

კორელაციის კოეფიციენტის ეს მნიშვნელობა ადასტურებს გაბნევის დიაგრამის დახმარებით მიღებულ დასკვნას. მაგრამ ეს მნიშვნელობა არაფერს გვეუბნება იმ წრფის შესახებ, რომლის მიდამოშიაც თავმოყრილია დაკვირვებული წყვილები. ამ წრფის მოსაძებნად იყენებენ უმცირეს კვადრატთა მეთოდს, რომლის თანახმადაც ეძებენ ისეთ წრფეს $y=ax+\tilde{b}$, რომლის კოეფიციენტებისთვისაც სრულდება პირობა:

$$\min_{a,b\in(-\infty,+\infty)}\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-\tilde{b})^2\,,$$

ანუ, წრფე რომლიდანაც y_i-ების ვერტიკალური გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია. ამ წრფის კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ ორი ცვლადის $\varphi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax-b)^2$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილები, რისთვისაც, თავის მხრივ, უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial}{\partial a}\varphi(a,b)=0 \quad \text{და} \quad \frac{\partial}{\partial b}\varphi(a,b)=0\,,$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial a}\varphi(a,b)$ და $\frac{\partial}{\partial b}\varphi(a,b)$ სიმბოლოებით აღნიშნულია $\varphi(a,b)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები შესაბამისად a-სა და b-ს მიმართ.

ძნელი დასანახი არ არის, რომ უკანასკნელი სისტემის ამონახსნია:

$$a=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x^2} \quad \text{და} \quad \tilde{b}=\bar{y}-a\bar{x}\,.$$

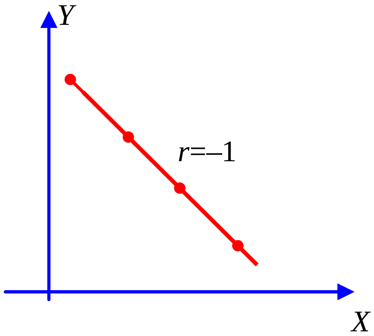
ამ მაგალითში მოყვანილი მონაცემებისათვის გვექნება:

$$a=\frac{-4.75}{1.44^2}=-\frac{4.75}{2.07}\approx -2.29 \quad \text{და} \quad \tilde{b}=10.4+2.29\cdot 17.25\approx 49.90\,,$$

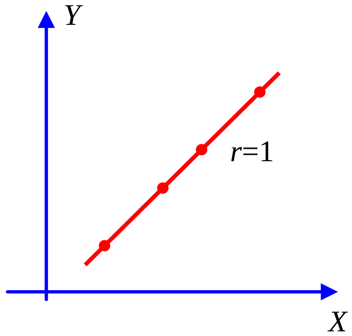
ამიტომ საძებნი წრფის განტოლება იქნება: $y=-2.29x+49.9$.

ეს განტოლება კომპანიას საშუალებას აძლევს ახალი პროდუქციის ამა თუ იმ ფასის შემთხვევაში გააკეთოს პროგნოზი გაყიდვის შესაძლო მოცულობის შესახებ.

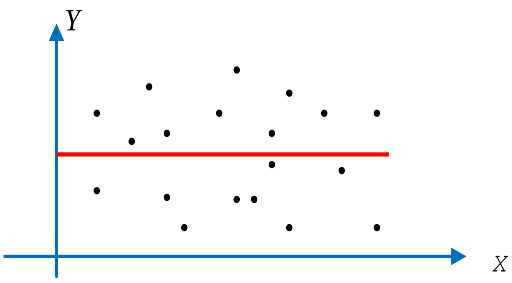
კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა მოთავსებულია -1-სა და 1-ს შორის. თუ ორ სიდიდეს შორის ადგილი აქვს **მკაცრად დადებით წრფივ დამოკიდებულებას**, მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა +1-თან. თუ ორ სიდიდეს შორის ადგილი აქვს **მკაცრად უარყოფით წრფივ დამოკიდებულებას**, მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა -1-თან. როდესაც ორ სიდიდეს შორის არა გვაქვს წრფივი დამოკიდებულება, ან ამ სიდიდეებს შორის სუსტი კავშირია, მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა 0-თან. ქვემოთ მოყვანილია კორელაციის ხარისხის სიტყვიერი დახასიათებისათვის მიღებული ტერმინოლოგია და შესაბამისი დიაგრამები:



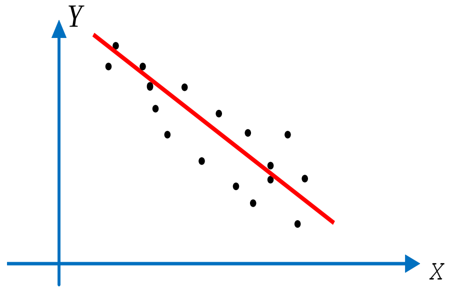
სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია



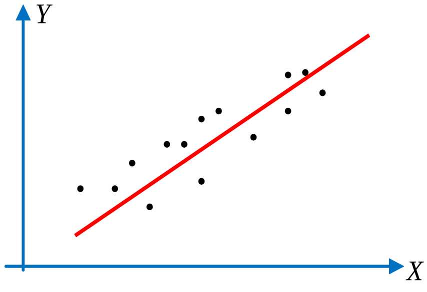
სრულყოფილი დადებითი კორელაცია



არ არის კორელაცია



ძლიერი უარყოფითი კორელაცია



ძლიერი დადებითი კორელაცია

კორელაციის კოეფიციენტის პირდაპირი გამოთვლისათვის (როცა წინასწარ არ არის გამოთვლილი სიდიდეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა) იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$r=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)-(\sum_{i=1}^{n}x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{\sqrt{[n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]\cdot[n(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2]}},$$

სადაც n მონაცემთა წყვილების რაოდენობაა.

ეს ფორმულა საკმაოდ რთულად გამოიყურება. გამოთვლების გამარტივების მიზნით ჩვენ ვიხელმძღვანელებთ ქვემოთ მოყვანილი ცხრილით.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა იმ მონაცემებისათვის, რომელიც მიიღებული იყო 6 შემთხვევით შერჩეული პიროვნების ასაკსა და არტერიული წნევას შორის დამოკიდებულების შესწავლისას.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. გავაკეთოთ ცხრილი ისე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:

ნაბიჯი 2. გამოვთვალოთ xy, x^2 და y^2 გამოსახულებათა მნიშვნელობები და შევიტანოთ ცხრილის შესაბამის სვეტებში. შევკრიბოთ სვეტებში მოთავსებული მნიშვნელობები. დასრულებულ ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

პერსონა	ასაკი, x	წნევა, y	xy	x^2	y^2
A	43	128	5.504	1.849	16.384
B	48	120	5.760	2.304	14.400
C	56	135	7.560	3.136	18.225
D	61	143	8.723	3.721	20.449
E	67	141	9.447	4.489	19.881
F	70	152	10.640	4.900	23.104
	$\sum x=345$	$\sum y=819$	$\sum xy=47.634$	$\sum x^2=20.399$	$\sum y^2=112.443$

ნაბიჯი 3. მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ კორელაციის კოეფიციენტის ფორმულაში და გამოვთვალოთ r:

$$r=\frac{6\cdot 47.634-345\cdot 819}{\sqrt{(6\cdot 20.399-345^2)\cdot(6\cdot 112.443-819^2)}}=0.897\ .$$

დასკვნა. კორელაციის კოეფიციენტის მიღებული მნიშვნელობა გვეუბნება, რომ ადამიანის ასაკსა და არტერიულ წნევას შორის არსებობს მკაცრად დადებითი წრფივი დამოკიდებულება.

ამოცანები

1. წამლის მოქმედების ეფექტურობის შესამოწმებლად ჩატარდა 20 ცდა (X წამლის დოზაა, ხოლო Y ავადმყოფობის მახასიათებელი):

X	8	6	5	1	0	2	4	3	8	10	9	9	5	1	3	2	6	4	8	5
Y	13	15	16	21	23	19	17	17	14	12	13	12	18	20	18	17	14	16	13	18

ააგეთ გაბნევის დიაგრამა, იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი, მისი საშუალებით დაადგინეთ როგორ კავშირში იმყოფებიან ეს ცვლადები. შეადგინეთ რეგრესიის წრფე და მისი საშუალებით გააკეთეთ პროგნოზი: რისი ტოლი იქნება ავადმყოფობის მახასიათებელი თუ წამლის დოზა იქნება 7-ს ტოლი.

2. ლექციებზე აქტიურობასა და საგნის წარმატებით ათვისების შესამოწმებლად ჩატარდა 20 ცდა (X აქტიურობაა, ხოლო Y წარმატებულება):

X	2	16	18	10	8	6	9	13	15	12	17	16	6	4	11	14	9	17	14	12
Y	4	17	17	11	7	5	11	12	13	13	16	17	4	5	10	12	11	15	15	13

ააგეთ გაბნევის დიაგრამა, იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი, მისი საშუალებით დაადგინეთ როგორ კავშირში იმყოფებიან ეს ცვლადები. შეადგინეთ რეგრესიის წრფე და მისი საშუალებით გააკეთეთ პროგნოზი: რისი ტოლი იქნება წარმატებულება თუ აქტივობა იქნება 20-ს ტოლი.

თავი V

ალბათობის ელემენტები. გეომეტრიული ალბათობა

შემთხვევითი მოვლენის ცალკეულ შესაძლო შედეგს **ელემენტარული ხდომილება** ეწოდება, მათ ერთობლიობას – **ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე** და აღინიშნება Ω ასოთი: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\}$. თუ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სასრულია, ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ მისი ელემენტები. იმ შემთხვევაში, როცა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე დიდია ან უსასრულოა, მაშინ მოხერხებულია მისი ელემენტები აღიწეროს რაიმე თვისებით (წესით). მაგალითად, თუ ექსპერიმენტის (დაკვირვების) შესაძლო შედეგებია მსოფლიოს ის ქალაქები, რომელთა მოსახლეობა მილიონს აღემატება, მაშინ შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ჩაიწერება შემდეგნაირად:

Ω={x : x არის ქალაქი, რომლის მოსახლეობა 1000000-ზე მეტია}.

ანალოგიურად, თუ ჩვენ შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს 3 რადიუსის მქონე წრიდან ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, მაშინ: $\Omega=\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$.

აღსანიშნავია, რომ ერთი და იგივე ექსპერიმენტი შეიძლება აღიწეროს სხვადახვა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით იმის მიხედვით, თუ რითი ინტრესდება ექსპერიმენტატორი. მაგალითად, კამათლის გაგორებისას, თუ ჩვენ გვაინტერესებს რომელი რიცხვი გამოჩნდება მის ზედა წახნაგზე, მაშინ $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$, ხოლო თუ ჩვენ გვაინტერესებს ეს რიცხვი კენტია თუ ლუწი, მაშინ $\Omega_2=\{\text{კენტი, ლუწი}\}$. ამ შემთხვევაში Ω_1 შეიცავს მეტ ინფორმაციას ვიდრე Ω_2. მაგ.: თუ ჩვენ ვიცით Ω_1-ის რომელი ელემენტი მოხდა, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ Ω_2-ის რომელ ელემენტარულ ხდომილებას ჰქონდა ადგილი, მაგრამ, პირიქით, ეს შეუძლებელია. სასურველია, საზოგადოდ, ვისარგებლოთ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით.

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ ჩვენ შემთხვევით ვარჩევთ ქარხნის მიერ გამოშვებულ სამ ნაწარმს და ვამოწმებთ თითოეულ მათგანს სტანდარტულია (ს) თუ წუნდებული (წ). მაშინ მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება: $\Omega_1=\{\text{სსს, სსწ, სწს, წსს, სწწ, წსწ, წწს, წწწ}\}$.

უფრო ნაკლები ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება: $\Omega_2=\{0,1,2,3\}$, რომელიც გვიჩვენებს, თუ არჩეული სამი ნაწარმიდან რამდენია სტანდარტული (ან წუნდებული).

მაგალითები: I. მონეტის ერთხელ აგდებისას – Ω={გ, ს}; **II.** მონეტის ორჯერ აგდებისას, ან ორი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω={გგ, გს, სგ, სს}; **III.** მონეტის სამჯერ აგდებისას, ან სამი მონეტის ერთდროულად აგდებისას –Ω= {გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, სსგ, სსს}; **IV.** მონეტის n-ჯერ აგდებისას $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,...,a_n)$, $a_i=$გ ან ს} და შედეგების საერთო რაოდენობა ტოლია 2^n-ის; **V.** ერთი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}; **VI.** ვთქვათ, თავიდან ვაგდებთ მონეტას. თუ მოვა გერბი, მაშინ ვაგორებთ სათამაშო კამათელს; ხოლო თუ მოვა საფასური, მაშინ კიდევ ერთჯერ ვაგდებთ მონეტას. ამ შემთხვევაში Ω={გ1, გ2, გ3, გ4, გ5, გ6, სგ, სს}; **VII.** ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={(1,1); (1,2); . . .; (1,6); (2,1); (2,2); . . . ; (2,6); . . . ; (6,1); . . . ; (6,6)} ანუ $\Omega=\{(i,j): i,j=1,2,...,6\}$; **VIII.** პროდუქციის ვარგისიანობის დადგენისას – Ω={„ვარგისი“, „უვარგისი“}; **IX.** სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რაოდენობა – Ω={0, 1, 2, . . . }; **X.** ძაბვა ქსელში – Ω={[0, 250]}.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს **ხდომილება** ეწოდება. თუ ექსპერიმენტის კონკრეტული შედეგი ეკუთვნის რაიმე ხდომილებას, მაშინ ამბობენ რომ ეს ხდომილება **მოხდა**, ხოლო რომელსაც არ ეკუთვნის – ის ხდომილე-

ბა **არ მოხდა**. ხდომილებები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A,B,C,D,...$. ხდომილებას $A=\Omega$ უწოდებენ **აუცილებელ ხდომილებას**, ხოლო $\varnothing$-ს – **შეუძლებელ ხდომილებას**. A და B ხდომილების **გაერთიანება** (ან **ჯამი**) ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ამ ხდომილებებიდან ერთი მაინც ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\cup B$ (ან $A+B$). A და B ხდომილების **თანაკვეთა** (ან **ნამრავლი**) ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ეს ხდომილებები ერთდროულად ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\cap B$ (ან AB). A ხდომილების **საწინააღმდეგო** ხდომილება ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A არ ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\overline{A}$. A და B ხდომილების **სხვაობა** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ხდება A, მაგრამ არ ხდება B და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\setminus B$. A და B ხდომილებას ეწოდება **უთავსებადი** თუ $A\cap B=\varnothing$.

თუ Ω-ს ნებისმიერ ელემენტარულ ხდომილებას ω_i შეესაბამება გარკვეული რიცხვები $p_i=P(\omega_i)$, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს: $0\le p_i\le 1$ და $\sum_i p_i=1$, მაშინ ამ რიცხვებს ეწოდებათ ω_i ელემენტარული ხდომილებების **ალბათობები**. A **ხდომილების ალბათობა** კი ეწოდება სიდიდეს $P(A):=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i)$. თუ $P(\omega_i)=const$ და $|\Omega|<\infty$ მაშინ ვღებულობთ **ალბათობის კლასიკურ განმარტებას**: $P(A)=|A|/|\Omega|$ – თუ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა სასრულია და ყველა მათგანი ერთნაირად მოსალოდნელია (ტოლ შესაძლებელია), მაშინ ნებისმიერი ხდომილების ალბათობა ტოლია ხდომილებაში შემავალი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა გაყოფილი ყველა შესაძლო ელემენტარული ხდომილების რაოდენობაზე.

ხდომილების **სტატისტიკურ ალბათობად** ითვლება ამ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე $W_N(A)=M/N$ (სადაც N – ცდათა საერთო რიცხვია, M კი – ხდომილების მოხდენათა რიცხვი) ან მასთან ახლოს მყოფი რიცხვი (მათემატიკურად ზუსტი ფორმულირება ასეთია: $P(A)=\lim_{N\to\infty}W_N(A)$).

გეომეტრიული ალბათობა. თუ L მონაკვეთიდან შემთხვევით ირჩევენ წერტილს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ წერტილი აღმოჩნდება $l\subset L$ მონაკვეთიდან განიმარტება როგორც: $P=|l|/|L|$ (სიგრძეების შეფარდება). ანალოგიური განმარტება გვაქვს სიბრტყეზე (ფართობების შეფარდება) და სივრცეში (მოცულობების შეფარდება).

მაგალითი 2. მრგვალი სამიზნის ფართობი არის 143 კვ.ინჩი. სამიზნის ცენტრში მდებარე წრიულ არეს, რომლის ფართობია 1 კვ.ინჩი უწოდებენ „ხარის თვალს“. დანარჩენი არე დაყოფილია 20 სექტორად, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 20-მდე. „ხარის თვალის“ გარეთ არის აგრეთვე სამჯერადი რგოლი ფართობით 10 კვ. ინჩი და ორჯერადი რგოლი ფართობით 15 კვ. ინჩი. ვიგულისხმოთ, რომ სამიზნეს შემთხვევით ესვრიან ისარს და ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანდება: ა) ორჯერადი რგოლი მე-14 სექტორში; ბ) მე-14 სექტორი, მაგრამ არა ორჯერადი რგოლი; გ) სამჯერადი რგოლი ან „ხარის თვალი“; დ) ლუწნომრიანი სექტორი ან ორჯერადი რგოლი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $\mathrm{A}=\{$დაზიანდა მე-14 სექტორი$\}$,

$\mathrm{B}=\{$დაზიანდა "ხარის თვალი"$\}$, $\mathrm{D}=\{$დაზიანდა ორჯერადი რგოლი$\}$,

$\mathrm{T}=\{$დაზიანდა სამჯერადი რგოლი$\}$, $\mathrm{E}=\{$დაზიანდა ლუწნომრიანი სექტორი$\}$.

ცხადია, რომ თითოეული სექტორის ფართობი იქნება $(143-1)/20=7.1$ კვ.ინჩი, ხოლო ორჯერად რგოლს თითოეულ სექტორთან საერთო ექნება $15/20=0.75$ კვ. ინჩი ფართი. ამიტომ, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობები იქნება შესაბამისად:

ა) $P(D\cap A)=0.75/143\approx 0.005$;

ბ) $P(A\setminus D)=P(A)-P(A\cap D)=7.1/143-0.75/143\approx 0.044$;

გ) $P(B\cup T)=P(B)+P(T)=1/143+10/143\approx 0.077$;

დ) $P(E\cup D)=P(E)+P(D)-P(E\cap D)=10\cdot 7.1/143+15/143-10\cdot 0.75/143\approx 0.55$.

ბერტრანის პარადოქსი. შემთხვევით იღებენ (ავლებენ) ქორდას წრეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქორდის სიგრძე აღემატება წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდს?

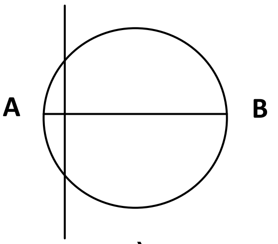
ამოხსნა 1. სიმეტრიის მოსაზრებიდან გამომდინარე წინასწარ შეიძლება მოცემულ იქნეს ქორდის მიმართულება. გავავლოთ ქორდის პერპენდიკულარული დიამეტრი. მაშინ მხოლოდ ის ქორდა აღემატება ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდს, რომელიც კვეთს დიამეტრს მისი სიგრძის 1/4-დან 3/4-მდე. შესაბამისად, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$[(3/4-1/4)2r]/2r=1/2.$$

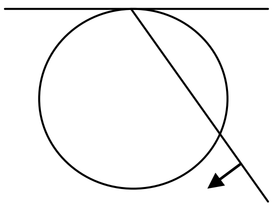
ამოხსნა 2. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ქორდის ერთი ბოლო დავაფიქსიროთ წრეწირზე. ამ წერტილში გავლებული მხები და ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის ორი გვერდი, რომლის წვერო ამ წერტილშია, ქმნის სამ 60 გრადუსის ტოლ კუთხეს. ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ ის ქორდები, რომლებიც ხვდება შუათანა 60 გრადუსიანი კუთხის შიგნით. ამიტომ ამ გზით გამოთვლილი საძიებელი ალბათობა იქნება: $60^\circ/180^\circ=1/3$.

ამოხსნა 3. ქორდის მდებარეობის დასადგენად საკმარისია დავასახელოთ მისი შუაწერტილი. ქორდა აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი შუაწერტილი მოთავსებულია მოცემული წრეწირის კონცენტრული წრეწირის შიგნით, რომლის რადიუსი პირვანდელის ნახევარია. ამიტომ საძიებელი ალბათობა ტოლია: $\pi(r/2)^2/\pi r^2=1/4$.

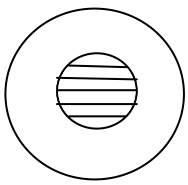
პარადოქსის ახსნა. საქმე იმაშია, რომ ამოცანის პირობაში არაა დაზუსტებული რა იგულისხმება ქორდის შემთხვევით გავლებაში. პირველ შემთხვევაში, დიამეტრის გასწვრივ ვასრიალებთ ღერძს, ის შეიძლება გაჩერდეს დიამეტრის ნებისმიერ წერტილზე. ტოლალბათურად ითვლება ღერძის გაჩერება დიამეტრის ტოლი სიგრძის ინტერვალებში, მათი მდებარეობისგან დამოუკიდებლად დიამეტრის შიგნით. მეორე შემთხვევაში, წრეწირის ერთ წერტილში დამაგრებული ღერძი ასრულებს 180 გრადუსიან რხევას და ითვლება, რომ ღერძის გაჩერება მოცემული სიგრძის რკალის შიგნით დამოკიდებულია მხოლოდ რკალის სიგრძეზე და არა მის მდებარეობაზე, ანუ ტოლალბათურად ითვლება ღერძის გაჩერება წრეწირის ტოლი სიგრძის რკალებში. რაც შეეხება მესამე ამოხსნას, აქ წერტილს ვაგდებთ r რადიუსიანი წრის შიგნით და ვეძებთ ალბათობას იმისა, რომ ის მოხვდება $r/2$ რადიუსის მქონე კონცენტრული წრის შიგნით. შესაბამისად, სხვადასხვა პასუხი აიხსნება ამოცანის სხვადასხვანაირი დასმით.



ა)



ბ)



გ)

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სიმეტრიული მონეტის ორი დამოუკიდებელი აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\Omega=\{$გგ, გს, სგ, სს$\}$; $P\{$გგ$\}=P\{$გს$\}= =P\{$სგ$\}=P\{$სს$\}=1/4$; $A=\{$გგ, გს, სგ$\}$ და $P(A)=3/4$.

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერ სათამაშო კამათლის სამჯერ გაგორებისას მოსული ქულები ერთი და იგივეა?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება ისეთი დალაგებული (i,j,k) სამეულების ერთობლიობა, სადაც თითოეული კომპონენტი ღებულობს მნიშვნელობებს 1,2,...,6 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად (იხ. თავი II), ასეთი სამეულების რაოდენობა იქნება: $|\Omega|=6\cdot6\cdot6=216$. ვინაიდან სათამაშო კამათელი წესიერია, ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდ-

ნელია. ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება აღვნიშნოთ A სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $A = \{(1,1,1); (2,2,2); (3,3,3); (4,4,4); (5,5,5); (6,6,6)\}$ და ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ვპოულებთ, რომ საძიებელი ალბათობა იქნება $P(A) = 6/216 = 1/36$.

მაგალითი 6. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული გოგონა, რომელსაც ჰყავს ორი დედმამიშვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას არ ჰყავს და?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება (a,b,c) სამეულების ერთობლიობა, სადაც I ადგილას წერია სამშვილიანი ოჯახის პირველი შვილის სქესი, II ადგილას – მეორე შვილის სქესი და III ადგილას – მესამე შვილის სქესი. ბიჭი აღვნიშნოთ b ასოთი, გოგონა – g ასოთი, ხოლო შერჩეული გოგონა – g^s სიმბოლოთი, მაშინ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega = \{g^s gg, gg^s g, ggg^s, g^s gb, gg^s b, g^s bg, gbg^s, bg^s g, bgg^s, g^s bb, bg^s b, bbg^s\}.$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$\{\text{არ ჰყავს და}\} = 3/12 = 1/4.$$

მაგალითი 7. 20 სტუდენტიდან ნახევარი ქალია და ნახევარი ვაჟი. მათგან შემთხვევით ირჩევენ სტუდენტთა საბჭოს პრეზიდენტსა და ვიცე-პრეზიდენტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პრეზიდენტი გახდება ქალი, ხოლო ვიცე-პრეზიდენტი – ვაჟი?

ამოხსნა. ცხადია, რომ საქმე გვაქვს განმეორების გარეშე 20 ობიექტიდან 2 ობიექტის შერჩევასთან და როგორც ვიცით ეს შესაძლებელია $20 \cdot 19 = 380$ სხვადასხვანაირად. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სწორედ ამ 380 ერთნაირად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან. ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, იქნება $10 \cdot 10 = 100$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება $100/380 = 5/19$.

მაგალითი 8. ტეხასურ ლოტოში თქვენ ირჩევთ ხუთ რიცხვს და კიდევ ერთ ბონუს რიცხვს 1,...,44 რიცხვებიდან. მომგებიანი რიცხვები ირჩევა შემთხვევით (გვაქვს 5 მომგებიანი და 39 წამგებიანი რიცხვი). რა უფრო მოსალოდნელია: თქვენ მოიგებთ პირველი ხუთი რიცხვით ბონუს რიცხვის გარეშე, თუ მოიგებთ პირველი ხუთიდან ოთხი რიცხვითა და ბონუს რიცხვით?

ამოხსნა. 44 ობიექტიდან 5 ობიექტს ვირჩევთ დაბრუნების გარეშე და დალაგებას არ ექცევა ყურადღება. შესაბამისად, გვაქვს C_{44}^5 კომბინაცია (იხ. თავი II) და თითოეული მათგანისათვის ბონუს რიცხვის არჩევის 44 შესაძლებლობა. ამდენად, სულ ჩვენ გვაქვს $C_{44}^5 \cdot 44 = 47784352$ ელემენტარული ხდომილება. შემოვიღოთ ხდომილებები: $=\{$მოგება პირველი ხუთი რიცხვებით, ბონუს რიცხვის გარეშე$\}$ და $=\{$მოგება ხუთიდან ოთხი რიცხვითა და ბონუს რიცხვის რიცხვით$\}$. ცხადია, რომ პირველი ხუთი რიცხვი იგებს ერთადერთ შემთხვევაში, ხოლო ბონუს რიცხვის გამორიცხვა ხდება 43 შემთხვევაში, ამიტომ A ხდომილების ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა არის $1 \cdot 43 = 43$. შესაბამისად, $P(A) = 43/47784352 \approx 9 \cdot 10^{-7}$.

მომგებიანი 5 რიცხვიდან 4-ის ამოჩევა შეიძლება $C_5^4 = 5$ სხვადასხვანაირად, ხოლო მეხუთე მომგებიანის გამორიცხვა კი $C_{39}^1 = 39$ სხვადასხვანაირად. ამასთანავე, B ხდომილებას ხელს უწყობს ბონუს რიცხვის ერთადერთი ვარიანტი და საბოლოოდ გვაქვს: $|B| = 5 \cdot 39 \cdot 1 = 195$. შესაბამისად, $P(B) = 195/47484352 \approx 4 \cdot 10^{-6}$.

ე. ი. B ხდომილება $4 \cdot 10^{-6}/(9 \cdot 10^{-7}) \approx 4.44$-ჯერ უფრო მოსალოდნელია ვიდრე A.

მაგალითი 9. 52 კარტიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 5 კარტს. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება „გული“; ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში იქნება k „გული“ $(k = 0,1,...,5)$; გ) „გულების“ რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი?

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება C_{52}^5 (დალაგებებს ყურადღებას არ ვაქცევთ). ა) შემთხვევაში ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილების მისაღებად 5 კარტის არჩევა უნდა მოხდეს $52 - 13 = 39$ არა „გულიდან“ და რადგან ეს შესაძლებელია C_{39}^5 სხვადასხვანაირად, ამიტომ ვღებულობთ:

$$P\{\text{არა "გული"}\} = C_{39}^5 / C_{52}^5 \approx 0.22\,;$$

შენიშვნა. საძიებელი ალბათობა არ შეიცვლება თუ დალაგებას გავითვალისწინებთ, მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც ელემენტარული ხდომილებების საერთო რაოდენობაში, ისე ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობაშიც. ეს აიხსნება იმ გარემოებით, რომ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$A_m^k / A_n^k = C_m^k / C_n^k\,.$$

ბ) შემთხვევაში k „გული" უნდა აირჩეს გულების საერთო რაოდენობიდან ანუ 13-დან. ეს შესაძლებელია C_{13}^k სხვადასხვანაირად. დანარჩენი $5-k$ კარტი უნდა აირჩეს დარჩენილი 39 კარტიდან, რაც შესაძლებელია C_{39}^{5-k} სხვადასხვანაირად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k}$ და საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P\{k\ \text{"გული"}\} = C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k} / C_{52}^5\,,\ \ k = 0,1,\ldots,5\,.$$

გ) წინა პუნქტში მიღებული გამოსახულების გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ ყველაზე უფრო მოსალოდნელია 1 „გული" ალბათობით 0.41.

მაგალითი 10 („ბედნიერ" ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 „ბედნიერია", ხოლო დანარჩენი 20 – „არა ბედნიერი". რომელ სტუდენტს აქვს „ბედნიერი" ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ პირველი სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი i ასოთი, ხოლო მეორე სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი j ასოთი. დავუშვათ, რომ „ბედნიერი" ბილეთების ნომრებია: 1, 2, 3, 4, 5. მაშინ ცხადია, რომ $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,25, i \neq j\}$, $|\Omega| = 25 \cdot 24 = 600$ და, ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილება ტოლალბათურია: $P(i,j) = 1/600$.

შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A = \{\text{პირველმა სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი}\},$$

$$B = \{\text{მეორე სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი}\},$$

მაშინ ამ ხდომილებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$A = \{(i.j) : i = 1,\ldots,5;\ j = 1,\ldots,25; i \neq j\} \text{ და } B = \{(i,j) : i = 1,\ldots,25;\ j = 1,\ldots,5; i \neq j\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $|A| = 5 \cdot 24 = 120$, $|B| = 5 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 120$. ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A) = P(B) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}\,.$$

ე.ი. ორივე სტუდენტს აქვს კარგი ბილეთის აღების ერთი და იგივე ალბათობა.

მაგალითი 11. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი არ ჩავარდება ამ წრეში ჩახაზულ წესიერ ექვსკუთხედში.

ამოხსნა. დავუშვათ, რომ წრის რადიუსია R, მაშინ მასში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდიც იქნება R. ამასთანავე, წრის ფართობია $|S| = \pi R^2$, ხოლო ექვსკუთხედის ფართობია – $|s| = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

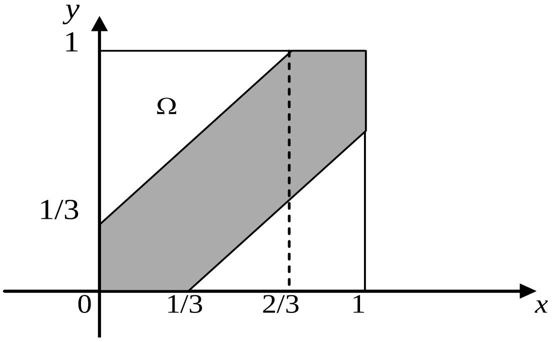
$$P = \frac{|S| - |s|}{|S|} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{\pi R^2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}174.$$

მაგალითი 14 (შეხვედრის ამოცანა). ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 6-დან 7 საათამდე. თითოეული მათგანი შემთხვევით მომენტში მიდის დათქმულ ადგილას და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე (შემდეგ კი მიდის). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები შეხვდებიან ერთმანეთს.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ, ერთ-ერთი პირის დათქმულ ადგილზე მისვლის დრო $6+x$-ით, ხოლო მეორე პირის – $6+y$-ით (სადაც x და y გამოსახულია საათებში). ელემე-

ნტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში შეგვიძლია ავიღოთ იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ერთეულოვან კვადრატს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესო წერტილთა (ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა) სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები ერთმანეთისაგან დაშორებულია არა უმეტეს $20/60=1/3$-ით: $A=\{(x,y);|x-y|\le 1/3\}\cap\Omega$.

ვინაიდან $|x-y|\le 1/3 \Leftrightarrow -1/3\le y-x\le 1/3 \Leftrightarrow x-1/3\le y\le x+1/3$. ამიტომ ადვილი გასაგებია, რომ A სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის შიგნით $y=x-1/3$ და $y=x+1/3$ წრფეებს შორის მოქცეული გაფერადებული არე (როცა $0\le x\le 1/3$, მაშინ $y=x-1/3$ წრფის ნაცვლად ქვედა საზღვრის როლში იქნება x ღერძი: $0\le y\le x+1/3$, ხოლო როცა $2/3\le x\le 1$, მაშინ ზედა საზღვარი $y=x+1/3$ წრფის ნაცვლად იქნება $y=1$ წრფე: $x-1/3\le y\le 1$).



ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1-2/3\cdot 2/3}{1}=\frac{5}{9}.$$

ამოცანები

1. ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები:
   - ა) 1-დან 50-მდე მოთავსებული 7-ის ჯერადი მთელი რიცხვები;
   - ბ) $\Omega=\{x: x^2+x-6=0\}$;
   - გ) ერთდროულად აგდებენ სათამაშო კამათელს და მონეტას;
   - დ) $\Omega=\{x: x$ არის კონტინენტი$\}$;
   - ე) $\Omega=\{x: 2x-4=0$ და $x>5\}$.

2. აღწერეთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, თუ შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს პირველი მეოთხედიდან, რომელიც მოთავსებულია 2 რადიუსის მქონე წრეში ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

3. რომელია ტოლი ქვემოთ ჩამოთვლილი ხდომილებებიდან?
   - ა) $A=\{1,3\}$;
   - ბ) $B=\{x: x$ არის კამათელზე მოსული ქულა$\}$;
   - გ) $C=\{x: x^2-4x+3=0\}$;
   - დ) $D=\{x: x$ არის გერბთა რიცხვი მონეტის 6-ჯერაგდებისას$\}$.

4. აგდებენ ორ კამათელს, რომელთაგან ერთი ყვითელია, ხოლო მეორე წითელი და იწერენ მოსულ ქულებს. ა) ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები; ბ) ჩამოთვალეთ A ხდომილების ელემენტები – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 5-ზე; გ) ჩამოთვალეთ B ხდომილების ელემენტები – ერთ კამათელზე მაინც მოვა 6 ქულა; დ) ჩამოთვალეთ C ხდომილების ელემენტები – ყვითელ კამათელზე მოვიდა 2 ქულა; ე) გამოსახეთ ვენის დიაგრამების საშუალებით A, B და C ხდომილებებს შორის კავშირი; ვ) ჩამოთვალეთ $A\cap C$ ხდომილების ელემენტები.

5. თუ მონეტის აგდების შედეგად მოვიდა გერბი, მაშინ მას აგდებენ ხელმეორედ, ხოლო თუ პირველადი აგდებისას მოვიდა საფასური, მაშინ აგორებენ სათამაშო კამა-

თელს. ა) ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები; ბ) ჩამოთვალეთ A ხდომილების ელემენტები – სათამაშო კამათელზე მოვიდა 4-ზე ნაკლები ქულა; გ) ჩამოთვალეთ B ხდომილების ელემენტები – მოვიდა ორი საფასური.

6. შემთხვევით შერჩეულ სამ დიასახლისს ეკითხებიან: იყენებენ თუ არა ისინი ჭურჭლის სარეცხად ლიმონის შემცველ ქელეს? დადებითი პასუხი აღინიშნება სიმბოლოთი Y, ხოლო უარყოფითი პასუხი კი – N. ა) ჩამოთვალეთ ელენმენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტები; ბ) ჩამოთვალეთ A ხდომილების ელემენტები – სულ ცოტა ორი დიასახლისი მაინც იყენებს ლიმონის შემცველ ქელეს; გ) განსაზღვრეთ ხდომილება, რომელის ელემენტების სიმრავლეა $\{YYY, NYY, YYN, NYN\}$.

7. აღწერეთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე: ა) აგორებენ სამ სათამაშო კამათელს და ითვლიან მოსულ ქულათა ჯამს; ბ) ირჩევენ ორ ნამდვილ რიცხვს 0-სა და 1-ს შორის; გ) შემთხვევით ირჩევენ ამერიკელს და ახდენენ კლასიფიცირებას სქესისა და ასაკის მიხედვით; დ) ორ განსხვავებულ მთელ რიცხვს ირჩევენ 1-სა და 10-ს შორის და ალაგებენ ზრდის მიხედვით; ე) შემთხვევით ირჩევენ ორ წერტილს 20 სმ სიგრძის სახაზავზე და ზომავენ მათ შორის მანძილს.

8. მოცემულია ხდომილებები A, B და C. გამოსახეთ ამ ხდომილებების საშუალებით შემდეგი ხდომილებები: ა) მოხდა ზუსტად ერთი ამ ხდომილებებიდან; ბ) არც ერთი ამ ხდომილებებიდან არ მოხდა; გ) სულ ცოტა ერთი მაინც მოხდა; დ) ყველა ხდომილება მოხდა.

9. დინამოს სათამაშო აქვს 7 მატჩი. B_k იყოს ხდომილება, რომ დინამომ მოიგო k-ური მატჩი და გამოვსახოთ B_k-ს ტერმინებში ხდომილებები: ა) დინამომ მოიგო I მატჩი; ბ) დინამომ წააგო I და მოიგო II და III შეხვედრები; გ) დინამომ მოიგო ყველა შეხვედრა; დ) დინამომ ბოლო სამი შეხვედრიდან მოიგო ორი შეხვედრა და წააგო ერთი; ე) დინამომ მოიგო პირველი სამი შეხვედრა და დანარჩენი წააგო.

10. ააგეთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას. გამოყავით ხდომილებები: A – მოსულ ქულათა ჯამი მეტია 5-ზე, მაგრამ ნაკლებია 9-ზე; B – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 6-ზე ან მეტია 8-ზე; C – მოსულ ქულებში ერთი მაინც ოთხიანია; D – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია; E – მოსულ ქულათა სხვაობა ტოლია 4-ის. მიუთითეთ თავსებად და უთავსებად ხდომილებათა ყველა წყვილი.

11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cup B = A\cup C$, მაშინ $B = C$ არაა მართებული.

12. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cap B = A\cap C$ და $A \neq \varnothing$, მაშინ $B = C$ არაა მართებული.

13. იწვევს თუ არა ხდომილება $A\cup(B\cap C)$ ხდომილებას $A\cup(B\cup C)$?

14. სამართლიანია თუ არა ჩართვა $[(B\cap C)\cup B]\cup C \subset [(C\cap C)\cup B]\cap(B\cup B)$?

15. დაამტკიცეთ შემდეგი თანაფარდობები:

ა) $B\cup(A\cap A) = A\cup(B\cup B)$;

ბ) $(A\cup\varnothing)\cap(A\cup\Omega) = A\cap(A\cup B)$;

გ) $B\cup(A\cap B) = (B\cup B)\cup(\varnothing\cap A)$;

დ) $(A\cup A)\cup(A\cap\varnothing) = (A\cup\Omega)\cap A$;

ე) $[B\cap(A\cup B)]\cup A = (B\cap B)\cup(A\cap A)$;

ვ) $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{A} = \overline{A}\cup\overline{B}$;

ზ) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cup\overline{(A\cap B)} = (\overline{A}\cup\varnothing)\cup\overline{B}$;

თ) $[\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{A})]\cup[\overline{(A\cap B)}\cup\overline{B}] = \overline{A\cap B}$.

16. ყუთში 10 წითელი, 5 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთია. შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ამოღებულია ლურჯი ბურთი. ბ) არაა ამოღებული წითელი ბურთი. გ) არაა ამოღებული თეთრი ბურთი. დ) ამოღებულია წითელი ან თეთრი ბურთი.

17. რვა ადამიანისაგან, რომელთა შორის 3 დოქტორია და 5 კანდიდატი, უნდა შევადგინოთ სამკაციანი კომისია. კომისიის წევრები შეირჩევა შემთხვევით. როგორია ალ-

ბათობა იმისა, რომ კომისიაში მოხვდება: ა) სამი დოქტორი? ბ) ორი დოქტორი და ერთი კანდიდატი? გ) ერთი დოქტორი და ორი კანდიდატი? დ) სამი კანდიდატი?
18. 9 წიგნიდან, რომელთა შორის 4 ხელოვნებაზეა და 5 დეტექტივია, შემთხვევით ირჩევენ სამს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივე წიგნი იქნება ხელოვნებაზე? ბ) სამივე იქნება დეტექტივი? გ) ერთი ან ორი წიგნი იქნება ხელოვნებაზე? დ) ზუსტად ორი იქნება დეტექტივი?
19. მონეტას აგდებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა) კენტ რიცხვჯერ? ბ) ლუწ რიცხვჯერ? გ) არც ერთხელ? დ) ორჯერ მაინც?
20. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა) კენტ რიცხვჯერ? ბ) ლუწ რიცხვჯერ? გ) არანაკლებ ორჯერ? დ) ერთჯერ მაინც?
21. მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ საფასური მოვა: ა) არანაკლებ სამჯერ? ბ) არანაკლებ ორჯერ? გ) არანაკლებ ერთჯერ? დ) არც ერთხელ?
22. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. რა უფრო ალბათურია – ჯამში მოვა: ა) 6 ქულა თუ 8 ქულა? ბ) 5 ქულა თუ 9 ქულა? გ) 5 ქულა თუ 6 ქულა? დ) 5 ქულა თუ 8 ქულა? ე) 6 ქულა თუ 7 ქულა? ვ) 7 ქულა თუ 5 ქულა?
23. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოვა ისეთი ქულები, რომლებიც ორჯერ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან?
24. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 6 ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 6 ქულა?
25. ცნობილია, რომ თევზის გარკვეული სახეობა იწონის 10 ფუნტზე მეტს ალბათობით 0.01. დავუშვათ, რომ დაიჭირეს 10 ასეთი თევზი და აწონეს. აჩვენეთ: ალბათობა იმისა, რომ 10 თევზის ჯამური წონა გადააჭარბებს 100 ფუნტს არ აღემატება 0.1-ს.
26. სათამაშო „რულეტი" შედგება 38 ტოლი ფართობის მქონე სექტორისაგან, რომელთაგან 18 შავია, 18 წითელია და 2 კი მწვანე. აგდებენ ბურთს, რომელიც საბოლოოდ ჩერდება ერთ-ერთ სექტორში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთი: ა) გაჩერდება წითელ სექტორში; ბ) არ გაჩერდება შავ სექტორში.
27. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სამი ციფრიდან: ა) სამივე განსხვავებულია; ბ) სამივე დაემთხვევა ერთმანეთს; გ) ორი მაინც დაემთხვევა ერთმანეთს; დ) მხოლოდ ორი დაემთხვევა ერთმანეთს.
28. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 4 მწვანე კალკულატორი. იღებენ ორ კალკულატორს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე კალკულატორი წითელია; ბ) ორივე მწვანეა; გ) ზუსტად ერთი კალკულატორი წითელია; დ) ერთი კალკულატორი მაინც წითელია; ე) მეორე კალკულატორი წითელია.
29. 52 კარტიდან იღებენ ორ კარტს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე კარტი სურათებიანია (K, Q, J); ბ) არც ერთი არ არის სურათებიანი; გ) ერთი მაინც სურათებიანია; დ) ერთი მაინც წითელია.
30. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთეულოვან გვერდიან კვადრატში შემთხვევით შერჩეული წერტილი ამ კვადრატის უახლოესი გვერდიდან დაშორებული იქნება არაუმეტეს 0.15-ით.
31. ორი სიგნალი მიმღებ მოწყობილობაზე T დროის მანძილზე შემთხვევით მომენტში მიიღება. მოწყობილობა მათ განასხვავებს, თუ ისინი t დროით მაინც არიან დაცილებული ერთმანეთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სიგნალი მიღებული იქნება?
32. ყუთში დევს 10 ბურთი გადანომრილი 1-დან 10-მდე რიცხვებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ 6 ბურთში აღმოჩნდება: ა) ბურთი № 9; ბ) ბურთი № 9 და №10.
33. სიბრტყეზე, რომელიც დაფარულია a გვერდის მქონე კვადრტთა ბადით, შემთხვევით აგდებენ მონეტას რადიუსით $r < a/2$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტა არ გადაკვეთს არც ერთი კვადრატის გვერდს.
34. შემთხვევით იღებენ ორ დადებით რიცხვს, რომელთაგან თითოეული არ აღემატება 2-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათი ნამრავლი არ აღემატება 1-ს, ხოლო განაყოფი კი არ აღემატება 2-ს.

35. ორი ადამიანი შეთანხმდა, რომ ერთმანეთს შეხვდეს 19^{00}-დან 19^{30}-მდე. როგორია შეხვედრის ალბათობა, თუ ა) ერთი ადგილზე მოსვლის შემდეგ იცდის 30 წუთს, ხოლო მეორე საერთოდ არ იცდის? ბ) ერთი იცდის 10 წუთს, ხოლო მეორე 5 წუთს?

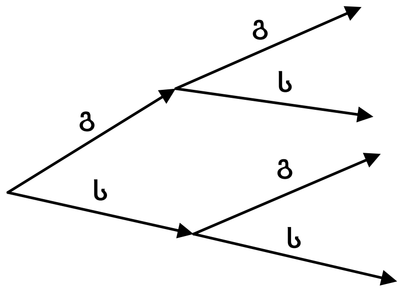
ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით

ალბათობის ამოცანების ამოხსნის პირველ ეტაპზე, უმეტეს შემთხვევაში, აუცილებელია განისაზღვროს როგორც ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტთა საერთო რაოდენობა, ისე ამა თუ იმ ხდომილების ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობის გამოსათვლელ ძირითად პრინციპს წარმოადგენს ე.წ. ნამრავლის პრინციპი, რომლის კერძო შემთხვევაში ასე ფორმულირდება:

ნამრავლის პრინციპი: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n სხვადასხვა გზით და თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია m სხვადასხვა გზით, მაშინ ობიექტთა წყვილის შერჩევა შესაძლებელია nm სხვადასხვა გზით.

მაგალითად, თუ მამაკაცს აქვს 4 პერანგი და 2 პიჯაკი, მაშინ ამ მამაკაცს აქვს პერანგისა და პიჯაკის შერჩევის $4\times2=8$ შესაძლებლობა (ვარიანტი).

ნამრავლის პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი (**ხისებრი**) **დიაგრამის** ანუ **დენდროგრამის** გამოყენება. მაგალითად, დენდროგრამით გამოსახული მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე იქნება:



მაგალითი 1. რამდენი ელემენტარული ხდომილებისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე თუ ორ კამათელს ვაგორებთ ერთჯერ?

ამოხსნა. პირველი კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე (კამათელის ზედა წახნაგზე შეიძლება გამოჩნდეს ნებისმიერი 6 რიცხვიდან). ამ 6 შესაძლებლობიდან თითოეულისათვის მეორე კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე. ამიტომ ნამრავლის პრინცეპის თანახმად ორი კამათელი შეიძლება დაეცეს $6\cdot6=36$ სხვადასხვანაირად.

მაგალითი 2. ვაგდებთ ერთ მონეტას და ვაგორებთ ერთ სათამაშო კამათელს. მონეტა შეიძლება დაეცეს 2 სხვადასხვა მხარეზე. ამ ორი შესაძლებლობიდან თითოეულისათვის კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე. შესაბამისად, შესაძლო შედეგთა რაოდენობა, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, იქნება $2\cdot6=12$. ეს შედეგებია: გ1, გ2, . . . ,გ6, ს1, ს2, . . . ,ს6.

მაგალითი 3. ვაგდებთ მონეტას ერთჯერ, თუ მოვიდა გერბი მეორეჯერ ვაგდებთ მონეტას, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ვაგორებთ სათამაშო კამათელს. მონეტა ისევ შეიძლება დაეცეს 2 სხვადასხვა მხარეზე და კამათელი ასევე შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე, მაგრამ აქ დარღვეულია ნამრავის პრინციპის ძირითადი მოთხოვნა, რომ პირველი პროცედურის თითოეული შედეგისათვის მეორე პროცედურის შედეგთა რაოდენობა იყოს უცვლელი (აქ კი მეორე შემთხვევაში გვაქვს ან 2 ან 6 შესაძლებლობა). ამიტომ შესაძლო შედეგთა რაოდენობის ნამრავლის პრინციპით გამოთვლა არ იქნება მართებული. სინამდვილეში აქ მოსალოდნელია 8 სხვადასხვა შედეგი. ეს შედეგებია: გგ, გს, ს1, ს2, . . . ,ს6.

ნამრავლის პრინციპი ზოგადად ასე ყალიბდება: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_1 სხვადასხვა გზით, თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობი-

ექტის შერჩევა შესაძლებელია n_2 სხვადასხვა გზით, თითოეულისათვის პირველი ორი შესაძლებლობიდან მესამე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_3 სხვადასხვა გზით და ა. შ., მაშინ ობიექტთა m-ეულის (ამ პროცედურის m-ჯერ გამეორების შე-დეგად) შერჩევა შესაძლებელია $n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ სხვადასხვა გზით.

მაგალითი 4. წვნიანის, ბუტერბროდის, დესერტისა და წვენისაგან შემდგარი სა-უზმის რამდენი სხვადსხვა კომბინაციის შეთავაზება შეიძლება მომხმარებლისათვის, თუ შერჩევა შესაძლებელია 4 სახეობის წვნიანისა, 3 სახეობის ბუტერბროდისა, 5 სა-ხეობის დესერტისა და 4 სახეობის წვენისაგან?

ამოხსნა. საუზმის ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა, ნამრავლის პრინ-ციპის თანახმად, იქნება: $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240$.

მაგალითი 5. რამდენი ლუწი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრების 1, 2, 5, 6 და 9 საშუალებით, თუ თითოეული გამოყენებული იქნება მხოლოდ ერთჯერ?

ამოხსნა. ვინაიდან რიცხვი უნდა იყოს ლუწი, ჩვენ გვაქვს ერთეულის არჩევის მხოლოდ ორი შესაძლებლობა. თითოეული არჩეული ერთეულისათვის ჩვენ შეგვიძ-ლია ასეულების ციფრი შევარჩიოთ 4 სხვადასხვა გზით და ერთეულისა და ასეულის არჩევის შემდეგ ათასეულების ციფრი შეგვიძლია შევარჩიოთ 3 სხვადასხვა გზით. შე-საბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ სხვადსხვა ლუწი სამნიშნა რიცხვი.

გადანაცვლებები – ეს არის კომბინაციები, რომლებიც შედგენილია მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა n ელემენტისაგან და ერთამანეთისაგან განხსვავდება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით. $P_n = n!$.

წყობები – ეს არის m ელემენტიანი კომბინაციები n განსხვავებული ელემენტის მქონე სიმრავლიდან, რომელებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტების შე-მადგენლობით ან ელემენტების განლაგების რიგით. $A_n^m = n!/(n-m)!$.

ჯუფდებები – ეს არის n ელემენტიანი სიმრავლის დაულაგებელი m ელემენტია-ნი ქვესიმრავლეები.$C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$. ცხადია, რომ $C_n^m \cdot m! = A_n^m$.

მაგალითი 6. რამდენი განსხვავებული სია შეიძლება შედგენილ იქნეს 7 სხვა-დასხვა გვარისაგან?

ამოხსნა. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

მაგალითი 7. შეჯიბრებაში მონაწილე 10 სპორტსმენიდან პირველ სამ ადგილზე გასული სამი გამარჯვებული რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს დასა-ჯილდოებელ კვარცხლბეკზე?

ამოხსნა. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

მაგალითი 8. შესარჩევ შეჯიბრებაში მონაწილეობს 10 ადამიანი, რომელთაგან ფინალში გადის სამი. ფინალისტების რამდენი განსხვავებული სამეული შეიძლება გამოვლინდეს?

ამოხსნა. წინა მაგალითისაგან განსხვავებით, აქ ფინალისტების რიგს (დალაგე-ბას) მნიშვნელობა არა აქვს. ამიტომ ვიყენებთ ჯუფდების ფორმულას:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

მაგალითი 9. 20 ლატარიის ბილეთიდან იღებენ ორს I და II პრიზის მოსაგებად. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

მაგალითი 10. იპოვეთ 6 განსხვავებულციფრიანი ტელეფონის ნომრების რიცხვი, თუ ნებისმიერ ადგილას შესაძლებელია ეწეროს ნებისმიერი ციფრი.

ამოხსნა. $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

მაგალითი 11. რამდენი გზით შეიძლება მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდიუმის 5 წევრიდან სამი სხვადასხვა მომხსენებლის შერჩევა მათემატიკური საზოგადოების სამი სხვადასხვა შეხვედრისათვის?

ამოხსნა. კომბინაციათა რაოდენობა იქნება

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 .$$

მაგალითი 12. ვიპოვოთ 4 სტუდენტისა და 3 პროფესორისაგან შედგენილ შესაძლო დელეგაციათა რაოდენობა, რომელიც შედგება 2 სტუდენტისა და 1 პროფესორისაგან.

ამოხსნა. 4 სტუდენტისაგან 2 სტუდენტის შერჩევა შეიძლება $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ სხვადასხვა გზით, ხოლო 3 პროფესორისაგან 1 პროფესორის შერჩევა შეიძლება $C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ სხვადასხვანაირად. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ყველა შესაძლო დელეგაციათა რაოდენობა იქნება $C_4^2 \cdot C_3^1 = 6 \cdot 3 = 18$.

მაგალითი 13. რამდენნაირად შეიძლება 6 სახეობის ასაფეთქებელი ნივთიერება დავალაგოთ გრძელ თაროზე, თუ ცნობილია, რომ ორი მათგანი არ შეიძლება ერთმანეთის გვერდით დაიდოს?

ამოხსნა. ამ ორი ასაფეთქებელი ნივთიერებიდან ერთ-ერთი გადავდოთ ცალკე და დანარჩენი 5 დავალაგოთ თაროზე. 5 ნივთიერების თაროზე დალაგება შესაძლებელია 5! სხვადასხვანაირად. მას შემდეგ რაც თაროზე დალაგებულია 5 ნივთიერება მე-6 ნივთიერება ვერ დაიდება ერთ-ერთი მათგანის გვერდზე (არც მარჯვნივ და არც მარცხნივ), შესაბამისად, მე-6 ნივთიერება შესაძლებელია დაიდოს $6-2=4$ ადგილას. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, საძიებელი რაოდენობა იქნება: $5!\times 4 = 480$.

მაგალითი 14. განვიხილოთ მართკუთხოვანი $m \times n$ ბადე, რომელიც შედგება 1×1 კვადრატებისაგან. ვიპოვოთ იმ უმოკლესი გზების რაოდენობა, რომელსაც მივყავართ მარცხენა ქვედა კუთხიდან – წერტილიდან (0,0) მარჯვენა ზედა კუთხეში – წერტილში (m,n).

ამოხსნა. უმოკლესი გზა (0,0) წერტილიდან (m,n) წერტილში შედგება $m+n$ მონაკვეთისაგან, რომელთა შორის m ჰორიზონტალურია და n კი ვერტიკალური. სხვადასხვა გზა განსხვავდება მხოლოდ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მონაკვეთების მონაცვლეობის რიგით. ამიტომ გზების საერთო რაოდენობა ემთხვევა იმ შესაძლებლობების რაოდენობას რამდენნაირადაც $m+n$ მონაკვეთისაგან შესაძლებელია შეირჩეს m ჰორიზონტალური მონაკვეთი, ანუ C_{m+n}^m (შეიძლებოდა განგვეხილა იმ შესაძლებლობების რაოდენობა რამდენნაირადაც შესაძლებელია შეირჩეს არა m ჰორიზონტალური მონაკვეთი, არამედ n ვერტიკალური მონაკვეთი და, მაშინ, პასუხი იქნებოდა C_{m+n}^n. ამით, ფაქტობრივად, გეომეტრიულად შევამოწმეთ, რომ $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$).

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: იმ n ობიექტის განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომელთა შორის n_1 პირველი ტიპისაა, n_2 მეორე ტიპისაა, და ა. შ. n_k – k-ური ტიპისაა, შეადგენს:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \qquad (\text{ცხადია, რომ } P_n^{\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-\text{ჯერ}}} = P_n).$$

მაგალითი 15. რამდენაირად შეიძლება 3 წითელი, 4 ყვითელი და 2 ლურჯი ნათურა განვათავსოთ საახალწლო ნაძვის ხის გამნათებელ მოწყობილობაში, რომელსაც ნათურის 9 ბუდე გააჩნია?

ამოხსნა. განსხვავებულ განლაგებათა რაოდენობა იქნება

$$\frac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!} = 1260 .$$

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ნაწილად შესაძლო დაყოფათა რაოდენობა, სადაც პირველი ნაწილი შეიცავს n_1 ელემენტს, მეორე ნაწილი – n_2 ელემენტს და ა. შ. m-ური ნაწილი – n_m ელემენტს აღინიშნება სიმბოლოთი $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_m}$ და ტოლია:

$$C_n^{n_1,n_2,\dots,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}, \text{ სადაც } n_1+n_2+\dots+n_m = n.$$

მაგალითი 16. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება გადანაწილდეს 7 მეცნიერი სასტუმროს ერთ 3 ადგილიანსა და ორ 2 ადგილიან ნომრებში?

ამოხსნა. შესაძლო გადანაწილებათა რაოდენობა იქნება

$$C_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210.$$

მაგალითები: I. კურსზე, რომელზეც სამი ჯგუფია, ჯგუფხელების არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვია $n_1\cdot n_2\cdot n_3$, სადაც n_i – i-ურ ჯგუფში სტუდენტების რაოდენობაა (ვიყენებთ ნამრავლის პრინციპს); **II.** რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია m მგზავრი განვათავსოთ n ვაგონში, ტოლია n^m (დალაგებული ამორჩევა დაბრუნებით, სადაც $M=n$ და $n=m$); **III.** m ადამიანის დაბადების დღეების ყველა შესაძლო კომბინაცია (იმ პირობით, რომ თითეული დაბადების დღე არის რომელიმე 365 დღიდან) ტოლია 365^m (საქმე გვაქვს ამორჩევასთან დაბრუნებით, ამასთანავე ამორჩევები ითვლება დალაგებულად, სადაც $M=365$ და $n=m$); **IV.** რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია 5 ბურთი განვათავსოთ 5 ყუთში, ისე რომ ერთ ყუთში იყოს ერთი ბურთი, ტოლია 5! (ნამრავლის პრინციპის თანახმად); **V.** პარტიების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედგეს n მონაწილისაგან შემდგარ წრიულ საჭადრაკო ტურნირში ტოლია $C_n^2 = n(n-1)/2$ (დაულაგებელი ამორჩევა დაბრუნების გარეშე).

მაგალითი 17. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 6-ჯერ აგედბისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A-თი ხდომილება, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი. ვინაიდან მონეტის ყოველი აგდება შეიძლება დასრულდეს ორი სხვადასხვა შედეგით დამოუკიდებლად სხვა აგდებების შედეგებისაგან. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $2^6 = 64$ ელემენტარული ხდომილებისაგან. ამ შემთხვევაში უფრო მოხერხებულია საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილებაზე გადასვლა, რომელიც ნიშნავს, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას არც ერთჯერ არ მოვიდა გერბი. ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ ერთ შემთხვევაში – თუ ექვსივეჯერ მოვიდა საფასური. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1/64$. ამიტომ

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1/64 = 63/64.$$

მაგალითი 18. 15 დეტალისაგან შემდგარი პარტიის შესამოწმებლად, რომელთა შორის 5 უვარგისია, შემთხვევით არჩევენ სამ დეტალს. დეტალების პარტია ითვლება უვარგისად თუ უვარგისი აღმოჩნდება ერთი დეტალი მაინც. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პარტია იქნება უვარგისი.

ამოხსნა. პირველი დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 15 სხვადასხვანაირად, მეორე დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 14 სხვადასხვანაირად და მესამე დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 13 სხვადასხვანაირად. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ყველა შესაძლო სამეულთა რაოდენობა იქნება $15\cdot 14\cdot 13$. გადავიდეთ ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილებაზე: $\overline{A}$ – ამორჩეულ სამ დეტალში სამივე იქნება ვარგისი. ასეთი სამეულის არჩევა უნდა მოხდეს 10 ვარგისი დეტალიდან და, წინა მსჯელობის ანალოგიურად, $\overline{A}$-ის ხელშემწყობ სამეულთა რაოდენობა იქნება $10\cdot 9\cdot 8$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{15\cdot 14\cdot 13}=\frac{67}{91}.$$

მაგალითი 19. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის, რომელთა შორის 12 თბილისელია, სასტუმროში დაჯავშნულია 20 ნომერი. ამ ნომრებიდან 12 გადაჰყურებს ზღვას. ადმინისტრატორი შემთხვევით აწვდის კონფერენციის მონაწილეებს ნომრების გასაღებებს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 12 თბილისელს შეხვდება ის ნომრები, რომლებიც ზღვას გადაჰყურებს.

ამოხსნა. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის 20 სხვადასხვა ნომრის მიცემა იმდენნაირად შეიძლება, რამდენნაირადაც 20 ობიექტი შეიძლება განთავსდეს 20 ადგილას, ანუ $|\Omega|=20!$. ანალოგიურად, 12 ნომერში 12 თბილისელის განთავსება შესაძლებელია 12! სხვადასხვანაირად, ხოლო დარჩენილ 8 ნომერში კონფერენციის დანარჩენი 8 მონაწილის განთავსება შესაძლებელია 8! სხვადასხვანაირად, დამოუკიდებლად იმისაგან თუ რომელი თბილისელი ზღვაზე ხედის მქონე რომელ ნომერში მოხვდება. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A|=12!\cdot 8!$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{12!\cdot 8!}{20!}=\frac{8\cdot 7\cdots 1}{20\cdot 19\cdots 13}\approx 7.9\cdot 10^{-6}.$$

მაგალითი 20. აგდებენ n ცალ სათამაშო კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი იქნება: ა) n; ბ) $n+1$.

ამოხსნა. სათამაშო კამათლის ყოველი აგდება შეიძლება დასრულდეს 6 სხვადასხვა შედეგით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $\underbrace{6\cdot 6\cdots 6}_{n-\text{ჯერ}}=6^n$ სხვადასხვა n-ეულისაგან. ამათგან, ერთადერთი იქნება ისეთი სადაც მოსულ ქულათა ჯამი არის n (კერძოდ, $(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-\text{ჯერ}})$). მეორე შემთხვევაში კი ხელშემწყობი n-ეულებია ისინი, სადაც ერთ ადგილას დგას 2-იანი, ყველა დანარჩენი კი 1-იანებია. შესაბამისად, ასეთ n-ეულთა რაოდენობა ემთხვევა n ადგილიდან ერთი ადგილის შერჩევათა რაოდენობას ანუ n-ს. ამიტომ საძიებელი ალბათობები იქნება: ა) $1/6^n$; ბ) $n/6^n$.

მაგალითი 21. ივ. ჯავახიშვილის სახ. უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი, ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი და წერეთელის უნივერსიტეტის 4 სტუდენტი შემთხვევით ჯდება 3 ვაგონში. თითეული მგზავრის ნებისმიერ ვაგონში მოხვედრის ალბათობები ერთი და იგივეა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი მოხვდება სხვადახვა ვაგონში (ხდომილება A); ბ) ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი მოხვდება სხვადასხვა ვაგონში (ხდომილება B).

ამოხსნა. ა) ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|\Omega|=\underbrace{3\cdot 3\cdots 3}_{9-\text{ჯერ}}=3^9$. ავიღოთ სხვადასხვა ვაგონის ნებისმიერი 3 ბილეთი და გავუნაწილოთ ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტს, ამის გაკეთება შესაძლებელია 3! სხვადასხვანაირად. თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 6 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^6 შესაძლებლობა. ამიტომ $|A|=3!\cdot 3^6$ და, მაშასადამე,

$$P(A)=3!\cdot 3^6/3^9=3!/3^3=2/9.$$

ბ) ილიას უნივერსიტეტის I სტუდენტს შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი 3 ვაგონიდან, მეორე სტუდენტს კი ნებისმიერი დარჩენილი 2 ვაგონიდან და ყოველი ამ კომბინაციისათვის არსებობს დანარჩენი 7 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^7 შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|B|=3\cdot 2\cdot 3^7$ და, ამგვარად, $P(B)=3\cdot 2\cdot 3^7/3^9=2/3$.

მაგალითი 22. ლატარიის 100 ბილეთიდან 25 მომგებიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 3 ბილეთის შეძენისას თქვენ დარჩებით მოგების გარეშე (ხდომილება A).

ამოხსნა. განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნის ორი გზა, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის განმარტებით.

I ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე განვმარტოთ, როგორც ნაყიდი ბილეთების ნომრების მიმდევრობა. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ $|\Omega|=A_{100}^3$, ხოლო $|A|=A_{75}^3$ და საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{A_{75}^3}{A_{100}^3}=\frac{75\cdot74\cdot73}{100\cdot99\cdot98}\approx0.418.$$

II ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე განვმარტოთ როგორც ნაყიდი ბილეთების ერთობლიობა, სიმრავლე (სამეული). ეს შესაძლებელია რადგან ჩვენ გვაინტერესებს არა როგორი რიგითობით იქნა შეძენილი ბილეთები, არამედ მათში მომგებიანების რაოდენობა. ამ შემთხვევაში გასაგებია, რომ $|\Omega|=C_{100}^3$ და $|A|=C_{75}^3$, ხოლო საძიებელი ალბათობა იქნება: $P(A)=\dfrac{C_{75}^3}{C_{100}^3}=\dfrac{75\cdot74\cdot73}{100\cdot99\cdot98}\approx0.418$.

მაგალითი 23. დავუშვათ, რომ ლატარეაში თამაშდება 6 მომგებიანი ნომერი 49-დან. მომგებიანი ნომრების ამოღების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. ლატარეაში მონაწილე ირჩევს 6 ნომერს 49-დან. ვიპოვოთ 4 მომგებიანი ნომრის გამოცნობის ალბათობა (ხდომილება A).

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილება იქნება 6 ნომრის ერთობლიობა 49-დან. ასეთი 6 ნომრიანი ერთობლიობების რაოდენობა ემთხვევა 49 ელემენტიანი სიმრავლის 6 ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას, ანუ $|\Omega|=C_{49}^6$. ლატარეის გათამაშების შემდეგ გათამაშებაში მონაწილე 49 ნომერი იყოფა ორ ჯგუფად: 6 მომგებიანი ნომერი და 43 არამომგებიანი ნომერი. 6 მომგებიანი ნომრიდან 4 მომგებიანი ნომრის შერჩევა შესაძლებელია C_6^4 სხვადასხვანაირად და თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 2 არამომგებიანი ნომრის არჩევის C_{43}^2 შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A|=C_6^4\cdot C_{43}^2$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$P(A)=C_6^4\cdot C_{43}^2/C_{49}^6\approx9.7\cdot10^{-4}.$$

მაგალითი 24 (დამთხვევებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) m შემთხვევით არჩეული ადამიანის დაბადების დღეები არ დაემთხვევა ერთმანეთს (იმ პირობით, რომ ყველა დღე ტოლალბათურია); ბ) m შემთხვევით არჩეულ ადამიანში მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომელთა დაბადების დღეები დაემთხვევა ერთმანეთს.

ამოხსნა. ა) ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შეესაბამება დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნებით, სადაც $M=365$ და $n=m$, ანუ $|\Omega|=365^m$; ხოლო ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები კი დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნების გარეშე, სადაც აგრეთვე $M=365$ და $n=m$, ამიტომ მათი რაოდენობაა – A_{365}^m. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$P(m)=\frac{A_{365}^m}{365^m}=(1-\frac{1}{365})(1-\frac{2}{365})\cdots(1-\frac{m-1}{365}).$$

ბ) საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოთვლის წესის თანახმად კი გვაქვს, რომ $Q(m)=1-\dfrac{A_{365}^m}{365^m}$.

მოვიყვანოთ ამ ალბათობის მნიშვნელობების ცხრილი ზოგიერთი m-ის შემთხვევაში:

m	4	16	22	23	40	64	70
Q(m)	0.01636	0.28360	0.47569	0.50730	0.89123	0.99711	0.99916

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ (მოლოდინის საწინააღმდეგოდ!) კლასის მოსწავლეთა რაოდენობა, რომელშიც 1/2-ის ტოლი ალბათობით მოიძებნება ორი მოსწავლე მაინც ერთი და იგივე დაბადების დღეებით, არც ისე დიდია: იგი ტოლია მხოლოდ 23-ის.

მაგალითი 25 (ორ „ტუზზე“). განვიხილოთ პრეფერანსის თამაში, როდესაც კარტის შეკვრის მაღალი 32 კარტი შემთხვევით ნაწილდება (რიგდება) სამ მოთამაშეს შორის, ისე რომ თითეული ღებულობს 10 კარტს და ორი კარტი ინახება „საყიდლებში“. როგორია ალბათობა იმისა, რომ „საყიდლებში“ აღმოჩნდება ორი „ტუზი“?

ამოხსნა. ორი კარტის სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აღმოჩნდეს „საყიდლებში“, ტოლია $C_{32}^2 = 496$. კარტის შეკვრაში ოთხი „ტუზია“- და სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც მოგვცემდა ორ „ტუზს“ , ტოლია $C_4^2 = 6$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$C_4^2 \Big/ C_{32}^2 = 6 \big/ 496 = 0{,}012 .$$

ამოცანები

1. რამდენნაირად შეიძლება საკლასო ჟურნალში 9 ბაშვის გვარისა და სახელის შეტანა?
2. რამდენნაირად შიძლება 20 საგამოცდო საკითხიდან 3 საკითხის შერჩევა?
3. რამდენნაირად შიძლება 6 ადგილიან მერხზე 4 სტუდენტის განთავსება?
4. რამდენნაირად შეიძლება 3 საპრიზო ადგილის განაწილება სიმღერის ფესტივალზე მონაწილე 20 კონკურსანტს შორის?
5. რამდენი 5 ასოიანი საავტომობილო ნომრის დამზადება შეიძლება ქართული ანბანის გამოყენებით?
6. სტუდენტის საბოლოო შეფასება აღინიშნება სიმბოლოებით A, B, C, D, E. რამდენნაირად შეიძლება შეფასდეს 10 სტუდენტი?
7. რამდენი ექვსნიშნა სატელეფონო ნომრის შედგენა შეიძლება, რომელიც არ იწყება ნულით და არ მთავრდება კენტი ციფრით?
8. 2010 წელს საშუალო სკოლა დაამთავრა 35938 საქართველოს მოქალაქემ. შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ, სულ ცოტა, ორი მათგანის სახელის, გვარისა და მამის სახელის პირველი ასოები ერთმანეთს დაემთხვა?
9. ნაძვის ხეზე 9 ნათურაა. რამდენნაირად შეიძლება მასზე 4 ნათურის ანთება?
10. ნაძვის ხეზე გაბმულ სადენზე 12 ნათურის ბუდეა. რამდენნაირად შეიძლება მასზე 6 წითელი, 4 ლურჯი და 2 მწვანე ნათურის ჩამოკიდება?
11. წრეწირზე 10 წერტილია. რამდენი ქორდა გაივლება ამ წერტილებზე?
12. წრეწირზე 10 წერტილია. რამდენი სამკუთხედი ჩაიხაზება წრეწირში წვეროებით ამ წერტილებზე?
13. გარნიზონში 50 ჯარისკაცი და 10 ოფიცერია. რამდენი საპატრულო ჯგუფის შედგენა შეიძლება, რომელშიც შედის 2 ოფიცერი და 5 ჯარისკაცი?
14. რამდენნაირად შეიძლება 10 წიგნის თაროზე დალაგება, ისე რომ გარკვეული ორი წიგნი ერთმანეთის გვერდით არ აღმოჩნდეს?
15. რამდენნაირად შეიძლება თაიგულის შეკვრა 7 ყაყაჩოს, 6 ყოჩივარდასა და 10 ვარდისაგან, ისე რომ თაიგულში იყოს თითოეული ყვავილის სამ-სამი სახეობა?
16. რამდენ ელემენტს უნდა შეიცავდეს სიმრავლე, რომ მისი ელემენტებისაგან შედგენილი ყველა გადანაცვლებათა რიცხვი იყოს: ა) არა უმეტეს 1000-ისა; ბ) არა ნაკლებ 500-ისა.
17. რამდენი განსხვავებული ბილეთის შედგენა შეიძლება 10 ალგებრული და 6 გეომეტრიული ამოცანის გამოყენებით, თუ თითოეულ ბილეთში შედის 3 ალგებრული და 2 გეომეტრიული ამოცანა?
18. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენნაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 5 ადამიანი, რომელთაგან ერთს არა აქვს უფლება დაიკავოს ადგილი საჭესთან?
19. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენნაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 4 ადამიანი, თუ საჭესთან ადგილის დაკავება შეუძლია ორ მათგანს?

20. ა) რამდენნაირად შეიძლება 5 ადამიანი გამწკრივდეს ავტობუსში ასასვლელად? ბ) თუ ორი ადამიანი უარს იტყვის ერთმანეთს მიყვეს, მაშინ რამდენი შესაძლებლობა დარჩება ავტობუსში ასასვლელად?
21. რამდენი განსხვავებული კომბინაციით შეიძლება განთავსდეს კალათბურთის 5 საწყის პოზიციაზე 9 მოთამაშე, რომელთაგან თითოეულს შეუძლია ყველა პოზიციაზე თამაში?
22. დეველოპერულ კომპანიას სურს ააშენოს 5 განსხვავებული დიზაინის მქონე სახლი. რამდენი განსხვავებული გზით შეუძლია კომპანიას სახლების განლაგება ქუჩაზე, თუ ქუჩის ერთ მხარეს უნდა აშენდეს 3, ხოლო მოპირდაპირე მხარეს კი 2 სახლი?
23. რამდენნაირად შეიძლება 13 კარტის დარიგება 36 კარტიდან (ყოველი წარმომადგენელი ცხრა-ცხრა ცალია), რომელშიც შევა 5 "აგური", 3 „გული", 3 „ჯვარი" და 2 „ყვავი"?
24. სამი ადამიანი კენჭს იყრის ქალაქის მერის ერთ ადგილზე. A და B კანდიდატებს გააჩნიათ მოგების ერთი და იგივე შანსი, ხოლო C კანდიდატის მოგების შანსი ორჯერ მეტია, ვიდრე ცალკე აღებულ A ან B კანდიდატის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) მოიგებს C კანდიდატი; ბ) არ მოიგებს A კანდიდატი.
25. ყუთში მოთავსებულია 500 ერთნაირი კონვერტი, რომელთაგან 50-ში დევს 100 ლარი; 100-ში – 25 ლარი და 350-ში – 10 ლარი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ კონვერტს, რომლის ყიდვა შეიძლება 25 ლარად. რა იქნება შემთხვევით ამოღებულ კონვერტში ფულის რაოდენობის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე? რა იქნება თითოეული ელემენტარული ხდომილების ალბათობა? რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ კონვერტში დევს 100 ლარზე ნაკლები? იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი კონვერტის შეძენით თქვენ არ იზარალებთ.
26. ოთხ კონვერტში მოთავსებულია 4 განსხვავებული თანხა. თქვენ შეგიძლიათ ერთიმეორის მოყოლებით გახსნათ თითო კონვერტი. ყოველ ეტაპზე თქვენ შეგიძლიათ აიღოთ კონვერტში მოთავსებული თანხა ან უარი თქვათ მასზე და გახსნათ შემდეგი კონვერტი. თუ მომდევნო თანხა უფრო ნაკლები აღმოჩნდა თქვენ უფლება არა გაქვთ უკან დაბრუნდეთ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აიღებთ უდიდეს თანხას შემდეგი განსხვავებული სტრატეგიებით: ა) თქვენ იღებთ პირველ კონვერტს; ბ) თქვენ ხსნით პირველ კონვერტს, ნახულობთ, რომ ის შეიცავს x თანხას, უარს ამბობთ მასზე და იღებთ შემდეგ კონვერტს, რომლის თანხა მეტია x-ზე (თუ ასეთი თანხა არ აღმოჩნდება, თქვენ უნდა აიღოთ უკანასკნელი კონვერტის თანხა); გ) თქვენ უნდა გახსნათ პირველი ორი კონვერტი, ნახოთ მათში მოთავსებული თანხები x და y, უარი თქვათ ორივეზე და აიღოთ შემდეგი თანხა, რომელიც მეტია ორივეზე.
27. 8×8 განზომილების საჭადრაკო დაფაზე (თეთრი და შავი ფერებით) შემთხვევით ირჩევენ 3 უჯრას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყველა ეს უჯრა: ა) პირველ სტრიქონშია; ბ) შავია; გ) ერთი და იგივე სტრიქონშია; დ) ერთი და იგივე სტრიქონშია და ერთი და იგივე ფერისაა.
28. საკოორდინატო სიბრტყის სათავიდან (0,0) იწყებენ მონეტის გადაადგილებას თითო-თითო უჯრით გვერდზე ((1,0)-სკენ) ან ზევით ((0,1)-სკენ) და n-ჯერადი გადაადგილების შემდეგ აღწევენ წერტილს (j,k), სადაც $j+k=n$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ჯერ გაკეთდა ყველა j გადაადგილება გვერდზე და შემდეგ k გადაადგილება ზევით; ბ) ჯერ გაკეთდა ყველა j გადაადგილება გვერდზე და შემდეგ k გადაადგილება ზევით ან ჯერ გაკეთდა ყველა k გადაადგილება ზევით და შემდეგ j გადაადგილება გვერდზე; გ) ყველა j გადაადგილება გვერდზე მოხდა ერთ სტრიქონში.
29. ურნაში მოთავსებულია n წითელი, n თეთრი და n შავი ბურთი. ურნიდან შემთხვევით იღებენ k ბურთს ($k\le n$) დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ არ იქნება ამოღებული ყველა ფერი.

30. ურნაში მოთავსებულია n თეთრი და m შავი ბურთი. თქვენ შემთხვევით იღებთ ბურთებს დაბრუნების გარეშე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველად შავი ბურთი ამოღებული იქნება k-ური ამოღებისას, $k=1,2,...,n+1$.

31. ერთდროულად აგორებენ ორ სათამაშო კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ჯამური ქულა იქნება: ა) 5? ბ) არა უმეტეს 4-ის?

32. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 5 კარტს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათში არის: ა) 2 „ტუზი“ და 2 „მეფე“; ბ) 5 „გული“.

33. საკრედიტო ბარათის მფლობელს დაავიწყდა უკანასკნელი სამი ციფრი და შემთხვევით აკრიფა ისინი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ის ისარგებლებს ბარათით, თუ ცნობილია, რომ ეს ციფრები განსხვავებულია.

34. 10 საგამოცდო ბილეთიდან შემთხვევით ირჩევენ 8-ს და ურიგებენ 8 სტუდენტს, რომლებიც სხედან ერთ რიგში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) მე-3 და მე-7 ბილეთი გამოუყენებელი დარჩება; ბ) მე-3 და მე-7 ბილეთი შეხვდება ერთმანეთის გვერდით მსხდომ სტუდენტებს; გ) გამოყენებული ბილეთების ნომრების დალაგება შესაძლებელია ზრდადობით, სადაც არ იქნება გამოტოვებული ნომერი.

35. 52 კარტი შემთხვევით იყოფა ორ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) თითოეულ ნაწილში ორ-ორი ტუზია; ბ) ყველა ტუზი ერთ ნაწილშია; გ) ერთ ნაწილში იქნება 1 ტუზი, ხოლო მეორეში კი 3 ტუზი.

36. იგულისხმეთ, რომ ნებისმიერი ადამიანის დაბადების დღე ტოლი ალბათობებით შეიძლება იყოს წლის ნებისმიერი დღე და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ n მოსწავლისაგან შემდგარ კლასში ყველა დაბადების დღე იქნება განსხვავებული.

37. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 5 კარტს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათში არის: ა) 2 „ტუზი“ და 2 „მეფე“; ბ) 5 „გული“.

38. A და B არათავსებადი ხდომილებებია, $P(A)=0.4$ და $P(B)=0.5$. იპოვეთ: ა) $P(A\cup B)$; ბ) $P(\overline{A})$; გ) $P(\overline{A}\cap B)$; დ) $P(A\setminus B)$.

39. ფარავნის ტბაზე მოწყობილია ერთნაირი მიმზიდველობის მქონე 30 თევზსაჭერი ადგილი. 5 მეთევზეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თავაზობენ ამოირჩიონ თევზსაჭერი ადგილი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი ამოირჩევენ სხვადასხვა ადგილებს.

40. სასტუმროში 6 ერთადგილიანი ნომერია. სასტუმროში შემთხვევით მიდის 6 კაცი და 4 ქალი და თითოეულს მისვლისთანავე აძლევენ ნომერს, თუკი რომელიმე ნომერი თავისუფალია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნომრებს მიიღებს: ა) ექვსივე კაცი; ბ) 4 კაცი და 2 ქალი; გ) ერთი მაინც ქალი.

თავი VI

შედგენილი ხდომილებების ალბათობები

ჯამის ალბათობის ფორმულა: თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა: თუ $B \subset A$, მაშინ $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

საზოგადოდ: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

თუ $A_i \cap A_j =$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

როცა ხდომილებები თავსებადია: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

საზოგადოდ:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

პირობითი ალბათობის ფორმულა

A **ხდომილების პირობითი ალბათობა** პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილებას აღინიშნება $P(A \mid B)$ (ან $P_B(A)$) სიმბოლოთი და

$$P(A \mid B) := P(A \cap B) / P(B), \text{ თუ } P(B) \neq 0.$$

თვისებები:

$$0 \leq P(A \mid B) \leq 1;$$
$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \mid B) = 0;$$
$$B \subset A \Rightarrow P(A \mid B) = 1;$$

თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P[(\sum_{i=1}^{n} A_i) \mid B] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$;

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B);$$
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B});$$
$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B});$$
$$P[(A \cup B) \mid C] = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P[(A \cap B) \mid C];$$
$$P[(A \setminus B) \mid C] = P(A \mid C) - P[(A \cap B) \mid C].$$

ნამრავლის ალბათობის ფორმულა

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P[C \mid (A \cap B)].$$

საზოგადოდ:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

შენიშვნა. საზოგადოდ $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) \neq 1$.

დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ხდომილებები

A ხდომილებას ეწოდება B ხდომილებისაგან **დამოუკიდებელი,** თუ $P(A \mid B) = P(A)$ ან რაც იგივეა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. თუ $P(A \mid B) \neq P(A)$, მაშინ გვაქვს **დამოკიდებული** ხდომილებები.

თუ A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, მაშინ ხდომილებები $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებელია.

ორ A და B ხდომილებას ეწოდება **პირობითად დამოუკიდებელი** მოცემული C ხდომილების მიმართ, თუ $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) P(B \mid C)$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი** თუ: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i \neq j$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **ერთობლივად დამოუკიდებელი** თუ $\forall \ \ k \le n$, $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

მაგალითი 1. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში არის 2/3, ხოლო ფიზიკაში კი 4/9. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ერთ საგანში მაინც შეადგენს 4/5-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე ორივე საგანში გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში, B – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ფიზიკაში. მაშინ ჩვენ გვაქვს, რომ: $P(A) = 2/3$, $P(B) = 4/9$ და $P(A \cup B) = 4/5$. საპოვნელია – $P(A \cap B)$. ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

შესაბამისად, გვაქვს:

$$P(A \cap B) = 2/3 + 4/9 - 4/5 = 14/45.$$

მაგალითი 2. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7 ან 11 ქულა?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7 ქულა, B – ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 11 ქულა. ცხადია, რომ $A = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2)(3,4),(4,3)\}$ და $B = \{(5,6),(6,5)\}$. როგორც აღნიშნული იყო, ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ტოლშესაძლებელი 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად: $P(A) = 6/36 = 1/6$ და $P(B) = 2/36 = 1/18$. გარდა ამისა, გასაგებია, რომ A და B ხდომილებები უთავსებადია და, შესაბამისად, გვაქვს:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/6 + 1/18 = 2/9.$$

მაგალითი 3 (მეტეოროლოგიური პარადოქსი). ერთი მეტეოროლოგიური სადგური 10-დან 9 შემთხვევაში სწორად იცნობს ამინდს, ხოლო მეორე კი 10-დან 8 შემთხვევაში. 1 აგვისტოსათვის პირველმა სადგურმა იწინასწარმეტყველა „სველი“ ამინდი, მეორე სადგურმა კი „მშრალი“ ამინდი. ვინაიდან სხვა შესაძლებლობა არ არსებობს, ამ ორი ხდომილების გაერთიანება წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას: $\{"\text{სველი}"\} \cup \{"\text{მშრალი}"\} = \Omega$. ამასთანავე, ეს ხდომილებები ურთიერთგამომრიცხავია. შესაბამისად,

$$P(\{"\text{სველი}"\} \cup \{"\text{მშრალი}"\}) = P\{"\text{სველი}"\} + P\{"\text{მშრალი}"\} = 1.$$

შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A = \{\text{I სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\},$$

$$B = \{\text{II სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\}.$$

მაშინ, პირობის თანახმად $P(A) = 0.9$ და $P(B) = 0.8$. აქედან გამომდინარე, 1 აგვისტოს „სველი“ ამინდს უნდა ველოდეთ ალბათობით $P\{"\text{სველი}"\} = 0.9$, ხოლო „მშრალი“ ამინდს ალბათობით $P\{"\text{მშრალი}"\} = 0.8$. შესაბამისად,

$$1 = P(\Omega) = P\{"\text{სველი}"\} \cup \{"\text{მშრალი}"\} = P\{"\text{სველი}"\} + P\{"\text{მშრალი}"\} =$$
$$= 0.9 + 0.8 = 1.7.$$

სად დავუშვით შეცდომა? არ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $P\{"\text{სველი}"\} = P(A)$ და $P\{"\text{მშრალი}"\} = P(B)$, თუნდაც იმის გამო, რომ A და B არ არის უთავსებადი (სინამდვილეში 0.9 არის პირობითი ალბათობა იმისა, რომ 1 აგვისტოს იქნება „სველი“ ამინდი, პირობაში რომ პროგნოზს აკეთებს I სადგური).

მაგალითი 4. თქვენ მოისმინეთ ახალ ამბებში, რომ 50%-ია შანსი იმისა, რომ შაბათს იწვიმებს და 50%-ია შანსი იმისა, რომ კვირას იწვიმებს. არის თუ არა სწორი: 100%-ია შანსი იმისა, რომ დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს.

ამოხსნა. ეს დასკვნა არ არის სწორი. თუ შემოვიღებთ ხდომილებებს: $A=\{$შაბათს იწვიმებს$\}$ და $B=\{$კვირას იწვიმებს$\}$, ხდომილება – დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს არის $A\cup B$. გვაქვს: $P(A)=P(B)=0.5$. ამიტომ

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(A\cap B),$$

რაც ნაკლებია 1-ზე, ანუ შანსი იმისა, რომ დასვენების დღეებში იწვიმებს ნაკლებია 100%-ზე. შეცდომა მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ შეგვიძლია ალბათობების პირდაპირი შეკრება მხოლოდ მაშინ, როცა ხდომილებები უთავსებადია მაშინ, როდესაც, საზოგადოდ, ალბათობების ჯამს უნდა გამოვაკლოთ თანაკვეთის ალბათობა, რომელიც ამ შემთხვევაში ნიშნავს, რომ იწვიმებს როგორც შაბათს, ისე კვირას.

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რიცხვებიდან 1,...,100 შემთხვევით ამორჩეული რიცხვი გაიყოფა ან 2-ზე, ან 3-ზე, ან 5-ზე.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A_k=\{$რიცხვი იყოფა $k-$ზე$\}$, $k=1,2,\ldots$. მაშინ საძიებელია $P(A_2\cup A_3\cup A_5)$. ცხადია, რომ: $A_2\cap A_3=A_6$, $A_2\cap A_5=A_{10}$, $A_3\cap A_5=A_{15}$ და $A_2\cap A_3\cap A_5=A_{30}$. ადვილი მისახვედრია, რომ:

$$P(A_2)=50/100=0.5,\ P(A_3)=33/100=0.33;\ P(A_5)=20/100=0.2;$$

$$P(A_6)=16/100=0.16;\ P(A_{10})=10/100=0.1;\ P(A_{15})=6/100=0.06;$$

$$P(A_{30})=3/100=0.03.$$

ამიტომ სამი ხდომილებისათვის ჯამის ალბათობის ფორმულის მიხედვით ვღებულობთ, რომ: $P(A_2\cup A_3\cup A_5)=0.5+0.33+0.2-0.16-0.1-0.06+0.03=0.74$.

მაგალითი 6. ყუთში არის 10 თეთრი, 10 შავი და 10 წითელი ბურთი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 5 ბურთს დაბრუნების გარეშე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება ყველა ფერი?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$W=\{\text{არ არის თეთრი}\},\ B=\{\text{არ არის შავი}\}\text{ და }R=\{\text{არ არის წითელი}\}.$$

მაშინ ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება იქნება $W\cup B\cup R$. ცხადია, რომ $W\cap B\cap R=\varnothing$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(W)=P(B)=P(R)=C_{20}^5/C_{30}^5;\ P(W\cap B)=P(B\cap R)=P(R\cap W)=C_{10}^5/C_{30}^5.$$

შესაბამისად, სამი ხდომილებისათვის ჯამის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს:

$$P\{\text{არ არის ყველა ფერი}\}=3C_{20}^5/C_{30}^5-3C_{10}^5/C_{30}^5+0\approx 0.32.$$

მაგალითი 7. ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს შაბათს იგივეა რაც ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს კვირას და არის 0.5. ასევე ცნობილია, რომ წვიმიან დღეს მოსდევს წვიამიანი დღე ალბათობით 0.7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A=\{$შაბათს იწვიმებს$\}$ და $B=\{$კვირას იწვიმებს$\}$, მაშინ ხდომილება – დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს არის $A\cup B$. გვაქვს: $P(A)=P(B)=0.5$ და $P(B\,|\,A)=0.7$. შესაბამისად,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(A\cap B),$$

ხოლო ნამრავლის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს, რომ

$$P(A\cap B)=P(B\,|\,A)P(A)=0.7\cdot 0.5=0.35.$$

ამიტომ გვაქვს: $P(A\cup B)=1-0.35=0.65$.

მაგალითი 8. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 4 კარტს დაბრუნების გარეშე. თუ მათში აღმოჩნდა k „ტუზი“, მაშინ მეორე 52 კარტიდან იღებენ k კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე დასტიდან აღებული იქნება ზუსტად ორ-ორი „ტუზი“?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A=\{$ორი "ტუზი" I დასტიდან$\}$ და $B=\{$ორი "ტუზი" II დასტიდან$\}$. ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება იქნება $A\cap B$,

რომლის ალბათობის პირდაპირი გზით გამოთვლა არ არის მარტივი, მაგრამ საქმე საკმაოდ გამარტივდება თუ გამოვიყენებთ პირობით ალბათობის ცნებას და ვისარგებლებთ ნამრავლის ალბათობის ფორმულით. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A)=\frac{C_4^2\cdot C_{48}^2}{C_{52}^2} \quad \text{და} \quad P(B\,|\,A)=\frac{C_4^2}{C_{52}^2}$$

და, შესაბამისად, $P(A\cap B)=P(B\,|\,A)P(A)\approx 0.0001$.

მაგალითი 9. განვიხილოთ ოჯახები, სადაც ორ-ორი ბავშვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში ორივე ბავშვი ვაჟია თუ ცნობილია, რომ: ა) უფროსი ბავშვი – ვაჟია; ბ) ერთი ბავშვი მაინც – ვაჟია?

ამოხსნა. აქ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ასეთია

$$\Omega=\{ვვ, ვქ, ქვ, ქქ\},$$

სადაც „ვ“ აღნიშნავს ვაჟს, ხოლო „ქ“ – ქალს. ჩავთვალოთ, რომ ოთხივე შედეგი ტოლალბათურია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – იყოს ხდომილება, რომ უფროსი ბავშვი – ვაჟია, ხოლო B – იყოს ხდომილება, რომ უმცროსი ბავშვი – ვაჟია. მაშინ $A\cap B$ – იქნება ხდომილება, რომ ორივე ბავშვი ვაჟია, ხოლო $A\cup B$ – კი იქნება ხდომილება, რომ ერთი ბავშვი მაინც ვაჟია. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობები იქნება: ა) $P(A\cap B\,|\,A)$ და ბ) $P(A\cap B\,|\,A\cup B)$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A\cap B\,|\,A)=\frac{P[(A\cap B)\cap A]}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2},$$

$$P(A\cap B\,|\,A\cup B)=\frac{P[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

მაგალითი 10. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია, მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე ხდომილებები: A და $\overline{B}$, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$. ადვილი მისახვედრია, რომ საკმარისია შემოწმდეს A და $\overline{B}$ ხდომილებების დამოუკიდებლობა. შესამოწმებელია, რომ $P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$. გვაქვს:

$$P(A)=P(A\cap\Omega)=P[A\cap(B\cup\overline{B})]=P[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})]=$$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}).$$

ამიტომ, A და B ხდომილებების დამოუკიდებლობის საფუძველზე ვღებულობთ შესამოწმებელ თანაფარდობას:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\overline{B}).$$

მაგალითი 11. ორ კამათელს აგდებენ ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ამ აგდებებისას მოსულ ქულათა ჯამები იქნება 7 და 11.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i – ორი კამათლის i-ური ($i=1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი 7 ქულა, B_i – ორი კამათლის i-ური ($i=1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 11 ქულა. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1 და B_2 და A_2 და B_1 დამოუკიდებელია, როგორც დამოუკიდებელი აგდებების შედეგები, ხოლო ხდომილებები $A_1\cap B_2$ და $B_1\cap A_2$ უთავსებადია. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P[(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap A_2)]=P(A_1\cap B_2)+P(B_1\cap A_2)=$$

$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{54}.$$

მაგალითი 12. A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია და $P(A\,|\,B)+P(A\,|\,\overline{B})=1$. იპოვეთ $P(A)$.

ამოხსნა. ვინაიდან A და B დამოუკიდებელია, ამიტომ დამოუკიდებელი იქნება აგრეთვე A და $\overline{B}$. შესაბამისად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1=P(A\,|\,B)+P(A\,|\,\overline{B})=P(A)+P(A)=2P(A).$$

ამიტომ $P(A)=1/2$.

მაგალითი 13. თუ უთავსებად A და B ხდომილებებს გააჩნიათ არანულოვანი ალბათობები, მაშინ ისინი არადამოუკიდებელია. მართლაც, ვინაიდან $A\cap B=\varnothing$, ამიტომ თუ A და B იქნებოდა დამოუკიდებელი, მაშინ უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$P(A)P(B)=P(A\cap B)=P(\varnothing)=0,$$

რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$.

მაგალითი 14. 36 კარტისაგან შემდგარი დასტიდან შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. არის თუ არა დამოუკიდებელი ხდომილებები: A – ეს კარტი მეფეა, B – ეს კარტი აგურისაა?

ამოხსნა. ცხადია, რომ $A\cap B$ იქნება ხდომილება, რომ ეს კარტი აგურის მეფეა. ალბათობის კლასიკური განმარტებიდან გვაქვს:

$$P(A\cap B)=1/36,\ P(A)=4/36,\ P(B)=9/36.$$

რამდენადაც ამ შემთხვევაში სრულდება ტოლობა $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, ამიტომ აღნიშნული ხდომილებები დამოუკიდებელია.

მაგალითი 15. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A={კარტი „ტუზია“} და B={კარტი „გულისაა“}. არის თუ არა A და B დამოუკიდებელი?

ამოხსნა. ინტუიციურად გასაგებია, რომ ეს ხდომილებები არ იძლევა ინფორმაციას მეორის შესახებ. „ტუზის“ ამოღების ალბათობაა 4/52=1/13 და თუ თქვენ გაქვთ ინფორმაცია, რომ ამოღებული კარტი „გულისაა“, მაშინ „ტუზის“ ალბათობა ისევ 1/13-ია. „ტუზის“ პროპორცია მთლიან დასტაში იგივეა რაც ცალკე განხილულ „გულებში“.

ახლა ფორმალურად შევამოწმოთ, რომ ეს ხდომილებები დამოუკიდებელია. გვაქვს:

$$P(A)=4/52,\ P(B)=13/52=1/4,\ P(A\cap B)=P\{\text{"ტუზი" "გულისაა"}\}=1/52$$

და, შესაბამისად, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. მაშასადამე, A და B დამოუკიდებელია.

მაგალითი 16. თუ მაგალით 15-ში კარტის დასტიდან წინასწარ გადავაგდებთ „აგურის“ 2-იანს დარჩება თუ არა A და B დამოუკიდებელი?

ამოხსნა. ერთი შეხედვით უნდა ვიფიქროთ, რომ პასუხი დადებითია, ვინაიდან „აგურის“ 2-იანს არაფერი საერთო არა აქვს არც „გულებთან“ და არც „ტუზებთან“. მაგრამ სინამდვილეში ეს ასე არ არის. კარტის გადაგდებამ შეცვალა „ტუზის“ პროპორცია დასტაში (4/51-ის ნაცვლად გახდა 4/51), მაშინ როცა არ შეცვლილა პროპორცია „გულებში“ (ის ისევ დარჩა 1/13). ფორმალურად უპირობო ალბათობა $P(A)=4/51$, ხოლო პირობითი კი არის $P(A\,|\,B)=1/13$ და ესენი ტოლი არ არის.

მაგალითი 17 (დე მერეს ამოცანა). აზარტული თამაშების მოყვარული ფრანგი შევალიე დე მერე სთავაზობდა პარტნიორებს თამაშის შემდეგ პირობებს: ის გააგორებს ორ კამათელს 24-ჯერ და მოგებული იქნება თუ ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი. მისი მოწინააღმდეგე გააგორებს ოთხ კამათელს ერთჯერ და მოიგებს თუ ერთი ექვსიანი მაინც მოვა. ერთი შეხედვით დე მერე ეშმაკობს, მაგრამ სინამდვილეში ის უფრო ხშირად აგებდა, ვიდრე იგებდა და გაკვირვებულმა მიმართა ცნობილ მათემატიკოსს ბ. პასკალს. გავარკვიოთ რა უპასუხა მას პასკალმა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A={ორი კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი};

A_i={ორი კამათლის i-ური გაგორებისას არ მოვა ორი ექვსიანი}, $i=1,2,\ldots 24$;

B={ოთხი კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა ერთი ექვსიანი მაინც};

B_i={ექვსიანი არ მოვა i-ურ კამათელზე}, $i=1,2,3,4$.

ცხადია, რომ A_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და $\overline{A}=\bigcap_{i=1}^{24} A_i$. გარდა ამისა, $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_{24})=35/36$. შესაბამისად,

$$P(\overline{A})=P(\bigcap_{i=1}^{24} A_i)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_{24})=(\frac{35}{36})^{24}.$$

ამიტომ შევალიე დე მერეს მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(\frac{35}{36})^{24}\approx 0.491404.$$

ანალოგიურად გასაგებია, რომ B_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, $\overline{B}=\bigcap_{i=1}^{4} B_i$, $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=5/6$ და

$$P(\overline{B})=P(\bigcap_{i=1}^{4} B_i)=P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3)\cdot P(B_4)=(\frac{5}{6})^{4}.$$

შესაბამისად, შევალიე დე მერეს მოწინააღმდეგის მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-(\frac{5}{6})^{4}\approx 0.517747.$$

როგორც ვხედავთ, $P(A)<P(B)$, რაც წარმოადგენს დე მერეს დაკვირვების მეცნიერულ ახსნას.

მაგალითი 18. გონებაგაფანტული მოქალაქე უადგილო ადგილას ქუჩაზე გადასვლისათვის 12-ჯერ იქნა დაჯარიმებული. ცნობილია, რომ ეს ყოველთვის ხდებოდა სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით. აიხსნება ეს შემთხვევითობით, თუ ამ დღეებში პატრული აძლიერებს საგზაო მოძრაობის კონტროლს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A=\{12$-ჯერ დააჯარიმეს სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით შემთხვევით$\}$;

$A_k=\{k$-ური დაჯარიმება სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით შემთხვევით$\}$, $k=1,2,\ldots 12$;

$B=\{12$-ჯერ დააჯარიმეს კვირის ერთსა და იმავე ორ დღეს შემთხვევით$\}$.

ცხადია, რომ $A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{12}$; $P(A_k)=2/7$, $k=1,2,\ldots,12$ და

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_{12})=(2/7)^{12}\approx 0.0000003.$$

მეორეს მხრივ, კვირის ერთსა და იმავე ორ დღეს 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება იქნება გაერთიანება თანაუკვეთი ხდომილებების: 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება ორშაბათობით ან სამშაბათობით, 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება ორშაბათობით ან ოთხშაბათობით და ა.შ. 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება შაბათობით ან კვირაობით. თითოეული ამ ხდომილების ალბათობა ტოლია 0.0000003-ის, ხოლო მათი რაოდენობა შეადგენს $C_7^2=21$-ს. შესაბამისად,

$$P(B)=21\cdot 0.0000003=0.0000063.$$

ორივე ეს ალბათობა ძალიან მცირეა ანუ როგორც ერთ, ისე მეორე შემთხვევაში დაჯარიმების ალბათობა მიზერულად მცირეა, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ აღნიშნულ დღეებში პატრული უფრო მეტად მომთხოვნია.

მაგალითი 19. სისტემა შედგება დამოუკიდებლად ფუნქციონირებადი ორი კომპონენტისაგან, რომელთაგან თითოეული ფუნქციონირებს ალბათობით p. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სისტემა იფუნქციონირებს კომპონენტების: ა) მიმდევრობითი შეერთებისას; ბ) პარალელური შეერთებისას.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A=\{$სისტემა ფუნქციონირებს$\}$,

$A_1=\{$I კომპონენტი ფუნქციონირებს$\}$,

$A_2 = \{\text{II}$ კომპონენტი ფუნქციონირებს$\}$.

მაშინ ა) შემთხვევაში $A = A_1 \cap A_2$, ხოლო ბ) შემთხვევაში კი – $A = A_1 \cup A_2$ და დამოუკიდებლობის გამო შესაბამისად გვაქვს:

ა) $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p \cdot p = p^2$;

ბ) $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) =$

$= 1 - (1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^2$.

მაგალითი 20 („ბედნიერ" ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 „ბედნიერია", ხოლო დანარჩენი 20 – „არა ბედნიერი". რომელ სტუდენტს აქვს „ბედნიერი" ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. ჩვენ ეს მაგალითი უკვე ამოვხსენით ალბათობის კლასიკური განმარტების გამოყენებით. ამოვხსნათ ახლა იგი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ახლებური შემოტანითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით. წინასწარ შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ მეორე სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი. მაშინ ცხადია, რომ ურთიერთგამომრიცხავ ხდომილებათა სიმრავლე შედგება ოთხი ხდომილებისაგან $A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}$.

ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $P(A) = 5/25 = 1/5$, ხოლო $P(\overline{A}) = 20/25 = 4/5$. მეორე მხრივ, ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, თუ ცნობილია, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი, მაშინ ალბათობა იმისა რომ მეორე სტუდენტი აიღებს ბედნიერ ბილეთს ისევ შეიძლება გამოვითვალოთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით: ამ შემთხვევაში ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობაა 24, ხოლო ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი მხოლოდ 4 (რადგან ერთი ბედნიერი ბილეთი უკვე აღებულია) და, შესაბამისად,

$$P(B \mid A) = 4/24 = 1/6.$$

ანალოგიურად, $P(\overline{B} \mid A) = 20/24 = 5/6$, $P(B \mid \overline{A}) = 5/24 = 5/24$ და $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 19/24$. ამიტომ ორი ხდომილების ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 1/5 \cdot 1/6 = 1/30; \; P(A \cap \overline{B}) = 1/5 \cdot 5/6 = 1/6;$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 4/5 \cdot 5/24 = 1/6 \;\text{ და }\; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 4/5 \cdot 19/24 = 19/30$$

(შევნიშნავთ, რომ ჩვენ აქ მხოლოდ სისრულისათვის გამოვთვალეთ ყველა შესაძლო პირობითი და ნამრავლის ალბათობები).

ცხადია, რომ $B = (A \cap B) + (\overline{A} \cap B)$. ამიტომ ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 1/30 + 1/6 = 1/5 \; (= P(A)).$$

მაგალითი 21. კარტების ნაკრებიდან (რომელშიც 36 კარტია) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „აგურისაა", ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „სურათიანია" წითელი ფერით. არიან თუ არა ეს ხდომილებები დამოუკიდებელი?

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$|\Omega| = 36, \; P(A) = 9/36 = 1/4, \; P(B) = 8/36 = 2/9 \;\text{ და}$$

$$P(A \cap B) = 4/36 = 1/9 \neq 1/4 \cdot 2/9 = P(A) \cdot P(B).$$

ე.ი. ეს ხდომილებები არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 22. დავუშვათ, რომ ვაგორებთ ორ სათამაშო კამათელს. განვიხილოთ ხდომილებები: A – პირველ კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, B – მეორე კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, C – ორივე კამათელზე მოსულ ქულათა ჯამი კენტია. გავარკვიოთ ამ ხდომილებების დამოუკიდებლობის საკითხი.

ცხადია, რომ $P(A) = P(B) = 3/6 = 1/2$, ხოლო $P(A \cap B) = 3 \cdot 3/36 = 1/4$. ამიტომ A და B ხდომილებები დამოუკიდებლია. გარდა ამისა, რომ $P(C) = 1/2$ (**შეამოწმეთ!**).

შევნიშნოთ, რომ A და B ხდომილებიდან ერთ-ერთის მოხდენის პირობაში C ხდომილება ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან პირველ, ან მეორე კამათელზე, შესაბამისად, მოვიდა ლუწი ქულა ანუ გვაქვს თანაფარდობები:

$$A \cap C = A \cap \overline{B} \text{ და } B \cap C = \overline{A} \cap B.$$

A და B ხდომილებების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარე ხდომილებები A და $\overline{B}$ და $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებლებია, ამიტომ

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 1/4 \text{ და } P(\overline{A} \cap B) = 1/4.$$

შესაბამისად, $P(A \cap C) = P(A \cap \overline{B}) = 1/4$ და $P(B \cap C) = P(\overline{A} \cap B) = 1/4$.

ეს თანაფარდობები კი, $P(C) = 1/2$ ალბათობის გათვალისწინებით ნიშნავს, რომ დამოუკიდებლებია A და C და B და C ხდომილებათა წყვილებიც. მაგრამ ეს ხდომილებები არ არის ერთობლივად დამოუკიდებელი (**შეამოწმეთ!**).

ამოცანები

1. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A \cup B)$ და $P(A \cap B)$ ალბათობები A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის:
ა) A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;
ბ) A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;
გ) A – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე მეტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია;
დ) A – მოსულ ქულათა ჯამი 10-ზე ნაკლებია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 5-ზე მეტია;
ე) A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 8-ზე ნაკლებია;
ვ) A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 3-ზე ნაკლებია.

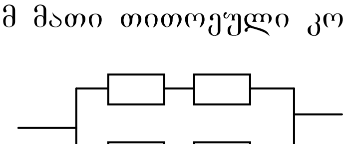
2. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ პირობითი ალბათობა $P_B(A)$ A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის და მიუთითეთ დამოუკიდებლებია თუ არა ისინი:
ა) A – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, B – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია;
ბ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა 3 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 3 ქულა;
გ) A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 1, B – მოსულ ქულათა ჯამია 5;
დ) A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 2, B – მოსულ ქულათა ჯამია 8;
ე) A – მოსულ ქულათა ჯამია 7, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა;
ვ) A – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 6-ზე, B – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 10ზე.

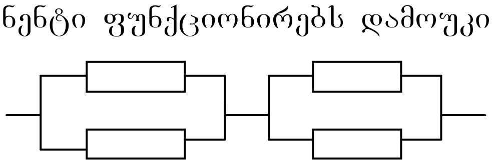
3. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულები ერთობლივად დამოუკიდებელია და გამოთვალეთ ალბათობები გადაკვეთების: $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$:
ა) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მეოთხე აგდებისას მოვიდა გერბი;
ბ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი;
გ) A – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მეოთხე აგდებისას მოვიდა გერბი;
დ) A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი.

4. სათამაშო კამათელს აგდებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი იქნება; ა) 4; ბ) 5; გ) 6; დ) 7; ე) 8; ვ) 9; ზ) 10?

5. ექვსი მონადირე ერთდროულად ესვრის გადამფრენ იხვს. სამი მათგანისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.4, ხოლო დანარჩენი სამისათვის – 0.6. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოახვედრებს ერთი მონადირე მაინც?

6. A და B არათავსებადი ხდომილებებია, $P(A)=0.4$ და $P(B)=0.5$. იპოვეთ: ა) $P(A\cup B)$; ბ) $P(\overline{A})$; გ) $P(\overline{A}\cap B)$; დ) $P(A\setminus B)$.
7. რაიონულ ცენტრს გააჩნია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ორი სახანძრო მანქანა. ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტული მანქანა თავისუფალია საჭიროების შემთხვევაში არის 0.99. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში არც ერთი მანქანა არ იქნება თავისუფალი? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება ერთი მაინც სახანძრო მანქანა? გ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება ზუსტად ერთი სახანძრო მანქანა? დ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საჭიროების შემთხვევაში თავისუფალი იქნება არა უმეტეს ერთი სახანძრო მანქანა?
8. ალბათობა იმისა, რომ ივანე (შესაბამისად, პავლე) ცოცხალი იქნება 20 წლის შემდეგ არის 0.6 (შესაბამისად, 0.9). რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 20 წლის შემდეგ: ა) არც ერთი იქნება ცოცხალი? ბ) ერთი მაინც იქნება ცოცხალი? გ) მხოლოდ ერთი იქნება ცოცხალი?
9. ალბათობა იმისა, რომ დაოჯახებული მამაკაცი (შესაბამისად, ქალი) უყურებს სერიალს არის 0.4 (შესაბამისად, 0.5). ალბათობა იმისა, რომ მამაკაცი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ცოლი უყურებს მას ტოლია 0.7-ის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) დაოჯახებული წყვილი უყურებს სერიალს; ბ) ცოლი უყურებს სერიალს პირობაში, რომ მისი ქმარი უყურებს მას; გ) სულ ცოტა ერთი მეუღლეთაგანი უყურებს სერიალს.
10. დამზადებულია მონეტა, რომელზეც გერბის მოსვლის ალბათობაა p. ეს მონეტა ავაგდოთ 3-ჯერ და განვიხილოთ ხდომილებები: A={ერთხერ მაინც მოვიდა საფასური} და B={ყოველ აგდებაზე მოვიდა ერთი და იგივე მხარე}. p-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება A და B ხდომილებები დამოუკიდებელი?
11. ალბათობა იმისა, რომ ადამიანი დაბადებულია წლის I ნახევარში არის p. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ორი ადამიანი დაბადებულია წლის ერთი და იგივე ნახევარში. p-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ეს ალბათობა მინიმალური?
12. გარკვეული ტექსტის 1/3 ნაწილი ხმოვანია, ხოლო 2/3 ნაწილი – თანხმოვანი. შემთხვევით ირჩევენ 5 ასოს და გთავაზობენ ჩამოთვალოთ ეს ასოები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყველა ასო იქნება გამოცნობილი, თუ თქვენ: ა) ხმოვანსა და თანხმოვანს ასახელებთ თანაბარი ალბათობებით; ბ) ხმოვანს ასახელებთ ალბათობით 1/3, ხოლო თანხმოვანს – ალბათობით 2/3; გ) ყოველთვის ასახელებთ თანხმოვანს.
13. სამ ისარს ერთმანეთისაგან დამუკიდებლად და შემთხვევით ესვრიან მიზანს. ერთი ისრის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 1/3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) არ მოხვდება არც ერთი; ბ) მოხვდება ერთი მაინც; გ) მოხვდება კენტი რაოდენობა; დ) მოხვდება ზუსტად ორი.
14. ყუთში არის 10 თეთრი, 10 შავი და 10 წითელი ბურთი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 5 ბურთს დაბრუნებით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება ყველა ფერის ბურთი?
15. გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი ორი სისტემის საიმედოობა, თუ ცნობილია, რომ მათი თითოეული კომპონენტი ფუნქციონირებს დამოუკიდებლად ალბათობით p:





16. თამაში მდგომარეობს შემდეგში: თქვენ დებთ 1 ლარს, აგორებენ წესიერ სათამაშო კამათელს და თუ კამათელზე მოვიდა 6 ქულა თქვენ იგებთ 4 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კარგავთ თქვენს 1 ლარს. თუ თქვენ გეძლევათ უფლება დაასახელოთ კამათლის გაგორებათა რიცხვი, რომლის შემდეგაც თქვენ წყვიტავთ თამაშს, როგორ უნდა შეარჩიოთ ის ისე რომ მაქსიმალური იყოს თქვენი შანსი დარჩეთ მოგებაში და რას უდრის ამის ალბათობა?

17. $P(A)=3/4$, $P(B\,|\,A)=1/5$, $P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=4/7$. იპოვეთ: ა) $P(A\bigcap B)$; ბ) $P(B)$; გ) $P(A\,|\,B)$.

18. სტუდენტმა უნდა გაიაროს ტესტირება ლაბორატორიაში მუშაობის დასაწყებად. ტესტირების გავლის შემდეგ სტუდენტი ტესტს უკან არ აბრუნებს. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სტუდენტი ტესტირებას გაივლის პირველ ცდაზე არის 1/3. განმეორებითი ტესტირების შემთხვევაში ჩაჭრის ალბათობა არის წინა ცდაზე ჩაჭრის ალბათობის ნახევარი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი: ა) გაივლის ტესტირებას არა უმეტეს 3 მცდელობის შედეგად; ბ) გაივლის ტესტირებას პირველ მცდელობაზე, თუ ცნობილია, რომ მან ტესტირება გაიარა არა უმეტეს 3 მცდელობით.

19. მოყვარული სინოპტიკოსის თეორიის თანახმად თუ ერთ წელს იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი განმეორდება მომდევნო წელს არის 0.7, ხოლო თუ ერთ წელს არ იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი არ იქნება მომდევნო წელს არის 0.6. გასულ წელს წყალდიდობა არ ყოფილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წყალდიდობა იქნება: ა) მომდევნო სამ წელიწადს ზედიზედ; ბ) ზუსტად ერთჯერ მომდევნო სამი წლის განმავლობაში.

20. ჩანთაში დევს 25 დისკი, რომელთაგან ნაწილი თეთრია და დანარჩენი შავი. ჩანთიდან ერთდროულად შემთხვევით იღებენ ორ დისკს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დისკები ერთი და იგივე ფერისაა ემთხვევა ალბათობას იმისა, რომ ეს დისკები სხვადასხვა ფერისაა. რამდენი თეთრი დისკია ჩანთაში?

თავი VII

სრული ალბათობის ფორმულა. განმეორებითი ცდები

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **ხდომილებათა სრული სისტემა,** თუ $A_i \cap A_j =$, როცა $i \neq j$ და $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (მაგალითად, A და $\overline{A}$).

თუ $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა ($P(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$), მაშინ ადგილი აქვს **სრული ალბათობის ფორმულას:**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i) .$$

თუ $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, $P(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$, მაშინ ადგილი აქვს **ბაიესის ფორმულას:**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B \mid A_j)} .$$

განვიხილოთ ერთი და იგივე ექსპერიმენტების სერია, რომლებიც ტარდება ერთი და იგივე პირობებში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამასთანავე, ყოველ კონკრეტულ ექსპერიმენტში ჩვენ განვასხვავებთ მხოლოდ ორ შედეგს: გარკვეული A ხდომილების მოხდენა (რომელსაც პირობითად **„წარმატებას“** უწოდებენ) და მისი არ მოხდენა – $\overline{A}$ (რომელსაც **„მარცხს“** უწოდებენ). A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ნებისმიერი ექსპერიმენტისათვის მუდმივია და ტოლია $P(A) = p$, სადაც $0 < p < 1$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p := q \quad (p + q = 1)$.

ალბათობას იმისა, რომ n ექსპერიმენტში A ხდომილება მოხდა k-ჯერ გამოითვლება ე. წ. **ბერნულის ფორმულით:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} .$$

ალბათობების ერთობლიობას $P_n(k)$, როცა $k = 0, 1, ..., n$ ეწოდება **ალბათობების ბინომიალური განაწილება.**

ისეთ k_0 რიცხვს, რომლის შესაბამისი ალბათობა $P_n(k_0)$ უდიდესია $P_n(0)$, $P_n(1)$ $, ..., P_n(n)$ ალბათობებს შორის **უალბათესი რიცხვი** ეწოდება. უალბათესი რიცხვი გვიჩვენებს n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი. უალბათესი რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის მთელ ამონახსნს: $np - q \leq k_0 \leq np + p$.

მაგალითი 1. სიტყვიდან „სამშობლო“ შემთხვევით ვიღებთ ორ ასოს და შემდეგ შემთხვევით ვდებთ უკან ამ ასოებს ცარიელ ადგილებზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისევ მივიღებთ სიტყვას „სამშობლო“.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა: 1) ამოღებულია ორივე „ო“, რომელ შემთხვევაშიც ნებისმიერი დაბრუნებისას მიიღება სიტყვა „სამშობლო“ და 2) ამოღებულია სხვადასხვა ასო, რომელ შემთხვევაშიც სიტყვა „სამშობლო“ მიიღება თუ ასოების დაბრუნება მოხდება მათ საწყის მდებარეობაზე. ცხადია, რომ ეს ორი შემთხვევა გამორიცხავს ერთმანეთს და ამოწურავს ყველა შესაძლებლობებს. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენება შესაძლებელია. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აღწერის გარეშე ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ხდომილებები:

$$A = \{\text{მიიღება სიტყვა "სამშობლო"}\} \text{ და } B = \{\text{ორივე ასოა "ო"}\} .$$

ცხადია, რომ $P(A \mid B) = 1$. თუ ასოები განსხვავებულია, მაშინ ისინი თავიანთ მდებარეობას დაუბრუნდება ალბათობით 1/2, ანუ $P(A \mid \overline{B}) = 1/2$. ორი ასოს შერჩევა 8-

დან შესაძლებელია $C_8^2 = 28$ სხვადასხვანაირად, რომელთა შორის მხოლოდ ერთ (ფორმალურად $C_2^2 = 1$) შემთხვევაში შეგვხვდება ორი „ო“. შესაბამისად, $P(B) = 1/28$ და $P(\overline{B}) = 27/28$ (შედეგი არ შეიცვლება, თუ ასოების ამოღებისა და დაბრუნების რიგს გავითვალისწინებთ: $P(B) = A_2^2 / A_8^2 = 1/28$). ამიტომ, საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A) = \frac{1}{28} \times 1 + \frac{27}{28} \times \frac{1}{2} = \frac{29}{56}.$$

მსჯელობის ეს გზა ხშირად საკმარისია ამოცანის ამოსახსნელად და იმავდროულად იგი თავიდან გვაცილებს ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აგების პროცედურას.

მაგალითი 2. ფილტვების კიბოს განვითარების რისკი საზოგადოდ დაახლოებით 0.1%-ია, ხოლო მწეველებს შორის კი 0.4%. ცნობილია, რომ მოსახლეობის 20% მწეველია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არამწეველს განუვითარდება ფილტვების კიბო?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $=\{$განუვითარდება კიბო$\}$ და $=\{$მწეველია$\}$. საძიებელია პირობითი ალბათობა – $P(A|\overline{B})$. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს, რომ:

$$P(A) = 0.1\% : 100\% = 0.001, \quad P(B) = 20\% : 100\% = 0.2,$$

$$P(\overline{B}) = 1 - 0.2 = 0.8, \quad P(A|B) = 0.4\% : 100\% = 0.004.$$

შევიტანოთ ეს მონაცემები სრული ალბათობის ფორმულაში და იქიდან ამოვხსნათ საძიებელი პირობითი ალბათობა. გვაქვს: $0.001 = 0.2 \times 0.004 + 0.8 \times P(A|\overline{B})$, საიდანაც $P(A|\overline{B}) = 0.00025$.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ მარტივ მაგალითს კამათლებზე, რომელშიც ერთი შეხედვით თქვენ არ უნდა გქონდეთ უპირატესობა, მაგრამ სინამდვილეში ეს ასეა.

მაგალითი 3. განვიხილოთ სამი სათამაშო კამათელი A, B და C, რომელთა წახნაგებზე შესაბამისად წერია:

კამათელი A: **1, 1, 5, 5, 5, 5**
კამათელი B: **3, 3, 3, 4, 4, 4**
კამათელი C: **2, 2, 2, 2, 6, 6**

თამაში მიმდინარეობს შემდეგნაირად: თქვენ და თქვენი მოწინააღმდეგე დებთ თითო-თითო ლარს და თქვენ თავაზობთ მოწინააღმდეგეს აირჩიოს სათამაშო კამათელი და გააგოროს იგი. შემდგომ თქვენ ირჩევთ ერთ-ერთს დარჩენილი კამათლებიდან და აგორებთ მას. მოგებულია ის ვისაც მოუვა უფრო მაღალი ქულა. თითქოს თქვენს მოწინააღმდეგეს გააჩნია უპირატესობა, ვინაიდან იგი პირველი ირჩევს კამათელს. მაგრამ, რამდენადაც თქვენთვის ცნობილია მისი არჩევანი, ყოველთვის შეგიძლიათ ისე შეარჩიოთ მოგების ალბათობა, რომ ის მეტი იყოს 1/2-ზე. ეს აიხსნება შემდეგი გარემოებით: სათამაშო კამათლები ისეთია, რომ A კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე B კამათელზე; B კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე C კამათელზე და C კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე A კამათელზე. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ აგრეთვე სათამაშო კამათლებზე მოსულ ქულებს შესაბამისად A, B და C ასოებით, მაშინ ცხადია, რომ

$$P(A > B) = P(A = 5) = 4/6 = 2/3,$$

$$P(B > C) = P(C = 2) = 4/6 = 2/3,$$

ხოლო მესამე შემთხვევისათვის ვისარგებლოთ სრული ალბათობის ფორმულით:

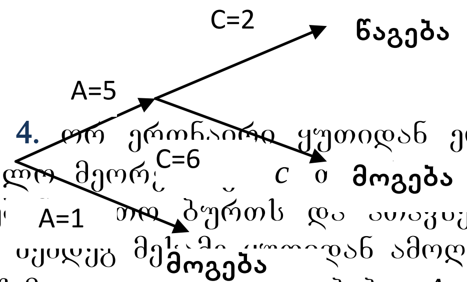
$$P(C > A) = P(C > A | A = 1)P(A = 1) + P(C > A | A = 5)P(A = 5) =$$

$$= 1 \times \frac{2}{6} + P(C = 6) \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

როგორც ვხედავთ, ყველა ეს ალბათობა ნახევარზე მეტია. გასაგებია რა იქნება მეორე გამგორებლის სტრატეგია: ა) თუ პირველი აირჩევს A კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს C კამათელი; ბ) თუ პირველი აირჩევს B კამათელს, მაშინ მეორემ

უნდა არჩიოს A კამათელი; გ) თუ პირველი აირჩევს C კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს B კამათელი. მართალია, თითქოს თქვენ ძალიან გულუხვი ხართ თქვენი ოპონენტის მიმართ აძლევთ რა მას უფლებას გააკეთოს პირველი არჩევანი, მაგრამ სწორედ მისი არჩევანის ცოდნა გაძლევთ უპირატესობას.

ხისებრი დიაგრამა წარმოადგენს სრული ალბათობის ფორმულის ილუსტრირების საუკეთესო საშუალებას. აქ ყოველი განსხვავებული შემთხვევა წარმოიდგინება ხის ტოტის სახით და გრძელდება მანამ სანამ არ დადგება ჩვენთვის საინტერესო დადებითი ან უარყოფითი პასუხი. თითოეულ განშტოების ალბათობა გამოითვლება მისი ტოტების შესაბამისი ალბათობების გადამრავლებით, ხოლო საძიებელი ალბათობა მიიღება განშტოებების ალბათობების შეკრებით. ქვემოთ მოყვანილია ა) შემთხვევის შესაბამისი ხისებრი დიაგრამა (დენდროგრამა):



მაგალითი 4. ორ ერთნაირი ყუთიდან ერთში მოთავსებულია a თეთრი და b შავი ბურთი, ხოლო მეორეში c თეთრი და d შავი ბურთი. თითოეული ყუთიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბურთს და ათავსებენ მესამე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მესამე ყუთიდან ამოღებული ერთი ბურთი იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i $(i=1,2)$ – i-ური ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია; B – მესამე ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია. მესამე ყუთში შესაძლებელია აღმოჩნდეს: ორი თეთრი ბურთი – ხდომილება $A_1 \cap A_2$; ერთი თეთრი და ერთი შავი ბურთი – ხდომილება $(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$ ან ორი შავი ბურთი – ხდომილება $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. გასაგებია, რომ ხდომილებები $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cap A_2$ და $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას. აღვნიშნოთ ეს ხდომილებები შესაბამისად H_1, H_2, H_3 და H_4-ით. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1, A_2; $A_1, \overline{A_2}$; $\overline{A_1}, A_2$ და $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ დამოუკიდებელია. ამიტომ გვაქვს:

$$P(H_1) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d}; \; P(H_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d};$$

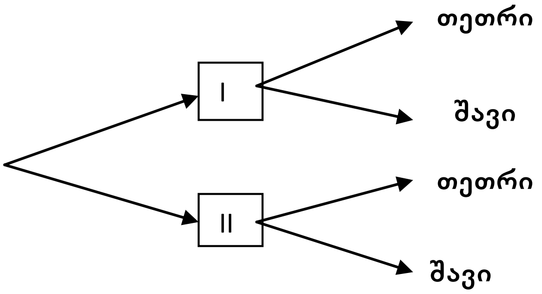
$$P(H_3) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d}; \; P(H_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d}.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ: $P(B|H_1)=1$; $P(B|H_2)=P(B|H_3)=1/2$; $P(B|H_4)=0$. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot 1 + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d} \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$

შენიშვნა. იგივე იქნება ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი თეთრია. მართლაც, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ხდომილებათა სრული სისტემა იქნება: შეირჩა I ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_1-ით) ან შეირჩა II ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_2-ით, ცხადია, რომ $P(C_1)=P(C_2)=1/2$), ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა გვაძლევს:

$$P(B) = P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) = \frac{1}{2} \cdot [\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}] = \frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$



ახლა განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ცნობილია პირობითი ალბათობები ერთი მიმართულებით და გამოსათვლელია „შებრუნებული“ პირობითი ალბათობები. შესაბამის შედეგს წარმოადგენს ბაიესის ფორმულა, რომელიც მიიღება ნამრავლის ალბათობისა და სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით და რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს სახე:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})}\,.$$

მაგალითი 5. სიცრუის დეტექტორი (პოლიგრაფი) 95 % შემთხვევაში იძლევა ზუსტ პასუხს. ცნობილია, რომ საშუალოდ ყოველი ათასი ადამიანიდან ერთი ცრუობს. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი, რომელიც გადის ტესტირებას დეტექტორზე და რომელსაც გადაწყვეტილი აქვს იცრუოს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დეტექტორი აღმოაჩენს, რომ ის ცრუობს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: L={ადამიანი ცრუობს}, L_P={დეტექტორმა დაადგინა რომ ადამიანი ცრუობს}. ამოცანის პირობის თანახმად $P(L)=1/1000=0.001$ და $P(L_P\,|\,L)=P(\overline{L_P}\,|\,\overline{L})=\;=95/100=0.95$. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(L\,|\,L_P)$, რომელიც ბაიესის ფორმულის თანახმად იქნება:

$$P(L\,|\,L_P)=\frac{P(L)P(L_P\,|\,L)}{P(L)P(L_P\,|\,L)+P(\overline{L})P(L_P\,|\,\overline{L})}=\frac{0.95\times 0.001}{0.95\times 0.001+0.05\times 0.999}\approx 0.02\,.$$

ალბათობის თეორია განსაკუთრებით ხშირად გამოიყენება სამართალწარმოებაში, როცა მტკიცებულებებში ფიგურირებს ადამიანის „დნმ“. განვიხილოთ ე. წ. კუნძულის ამოცანა.

მაგალითი 6. (კუნძულის ამოცანა). კუნძულზე მოკლეს ადამიანი და მკვლელი უნდა იყოს კუნძულის დარჩენილი n მცხოვრებიდან ერთ-ერთი. დანაშაულის ადგილის შესწავლისას გაკეთებულმა „დნმ“-ს ანალიზმა აჩვენა, რომ მკვლელს გააჩნია განსაკუთრებული გენოტიპი, რომელიც ცნობილია და მთელ მოსახლეობაში გვხვდება p პროპორციით. ვიგულისხმოთ, რომ კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპები დამოუკიდებელია. გამომძიებელმა დაიწყო კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპების შემოწმება. პირველი ვინც შეამოწმეს იყო ბატონი ზეზვა და მას აღმოაჩნდა მკვლელის გენოტიპი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: C={ბატონი ზეზვა დამნაშავეა} და D={ბატონი ზეზვას გენოტიპი აღმოჩენილია მკვლელობის ადგილზე}. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(C\,|\,D)$, რომლის გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულით, სადაც დაგვჭირდება როგორც $P(C)$-ს, ისე „პირდაპირი“ პირობითი ალბათობების ცოდნა. $P(C)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა მანამ სანამ გენოტიპების შემოწმება დაწყებულა და, თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ არანაირი მიზეზი არ არსებობს იმისა, რომ რომელიმე პერსონაში მეტი ეჭვი შევიტანოთ ვიდრე სხვა რომელიმეში, მაშინ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $P(C)=1/n$. თუ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა, მაშინ მისი გენოტიპი აუცილებლად აღმოჩნდება დანაშაულის ადგილზე და, შესაბამისად, $P(D\,|\,C)=1$. თუკი ბატონი ზეზვა უდანაშაულოა, მაშინ მისი გენოტიპი ისევ შეიძლება აღმოჩნდეს დანაშაულის ადგილზე იმ ალბათობით რა პროპორციითაც გვხვდება აღნიშნული გენოტიპი საზოგადოდ ადამიანთა პოპულაციაში, ანუ $P(D\,|\,\overline{C})=p$. ამიტომ:

$$P(C\,|\,D)=\frac{1\times(1/n)}{1\times(1/n)+p\times(1-1/n)}=\frac{1}{1+(n-1)p}\,.$$

მაგალითი 7. მაღაზიაში შემოსული ტელევიზორების შესაბამისად 2, 5 და 3 ნაწილი დამზადებულია I, II და III ფირმის მიერ. საგარანტიო დროის განმავლობაში I, II და III ფირმის მიერ შემოტანილი ტელევიზორი მოითხოვს რემონტს შესაბამისად 15%, 8% და 6% შემთხვევებში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მაღაზიის მიერ გაყი-

დული ტელევიზორი საგარანტიო დროის განმავლობაში მოითხოვს რემონტს (ხდომილება B).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებათა სრული სისტემა: A_i – გაყიდული ტელევიზორი დამზადებულია i-ური ფირმის მიერ $(i=1,2,3)$. პირობის თანახმად მაღაზიაში არსებული ტელევიზორებიდან I, II და III ფირმის მიერ დამზადებულია შესაბამისად $2x$, $5x$ და $3x$ ტელევიზორი. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A_1)=2x/10x=1/5,\ P(A_2)=5x/10x=1/2,\ P(A_3)=3x/10x=3/10.$$

გარდა ამისა, ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს:

$$P(B\,|\,A_1)=15/100=0.15,\ P(B\,|\,A_2)=8/100=0.08,\ P(B\,|\,A_3)=6/100=0.06.$$

საბოლოოდ, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=\frac{1}{5}\cdot 0.15+\frac{1}{2}\cdot 0.08+\frac{3}{10}\cdot 0.06=0.088.$$

მაგალითი 8. პაციენტის ნახვის შემდეგ ექიმს მიაჩნია, რომ თანაბრად შესაძლებელია ორი ავადმყოფობიდან ერთ-ერთი: X ან Y. დიაგნოზის დასაზუსტებლად პაციენტს აგზავნიან ანალიზზე, რომლის შედეგი X ავადმყოფობის დროს დადებით რეაქციას იძლევა 30% შემთხვევაში, ხოლო Y ავადმყოფობის დროს კი 20% შემთხვევაში. ანალიზმა მოგვცა დადებითი რეაქცია (ხდომილება B). რომელი ავადმყოფობაა უფრო ალბათური?

ამოხსნა. ხდომილებათა სრულ სისტემას ქმნის ხდომილებები: A_1= {პაციენტს აქვს X ავადმყოფობა}, A_2={პაციენტს აქვს Y ავადმყოფობა}. ამასთანავე, $P(A_1)=P(A_2)=0.5$. გარდა ამისა, $P(B\,|\,A_1)=30/100=0.3$ და $P(B\,|\,A_2)=20/100=0.2$ ამიტომ ბაიესის ფორმულა გვაძლევს:

$$P(A_1\,|\,B)=\frac{P(A_1)P(B\,|\,A_1)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)}=\frac{0.15}{0.25}=0.6,$$

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{P(A_2)P(B\,|\,A_2)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)}=\frac{0.1}{0.25}=0.4.$$

ვინაიდან $P(A_1\,|\,B)>P(A_2\,|\,B)$, ამიტომ X ავადმყოფობა უფრო ალბათურია.

მაგალითი 9. კლუბის წევრებმა უნდა აირჩიონ კლუბის პრეზიდენტი. ალბათობა იმისა, რომ არჩეული იქნება ბექა, ნიკა ან ლუკა შესაბამისად არის 0.3, 0.5 და 0.2. თუ აირჩევენ ბექას, ნიკას ან ლუკას, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ გაიზრდება კლუბის საწევრო გადასახადი შესაბამისად არის 0.8, 0.1 და 0.4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ლუკა, თუ ცნობილია, რომ საწევრო გადასახადი გაიზარდა.

ამოხსნა. განვიხილოთ ხდომილებები: A_1,A_2,A_3 – კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ბექა, ნიკა, ლუკა; B – საწევრო გადასახადი გაიზარდა. ცხადია, რომ A_1,A_2,A_3 ხდომილებები ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას და ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A_3\,|\,B)=\frac{P(A_3)P(B\,|\,A_3)}{P(A_1)P(B\,|\,A_1)+P(A_2)P(B\,|\,A_2)+P(A_3)P(B\,|\,A_3)}.$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$P(A_1)=0.3,\ P(A_2)=0.5,\ P(A_3)=0.2;$$

$$P(B\,|\,A_1)=0.8,\ P(B\,|\,A_2)=0.1,\ P(B\,|\,A_3)=0.4.$$

ამიტომ

$$P(A_3\,|\,B)=\frac{0.2\cdot 0.4}{0.3\cdot 0.8+0.5\cdot 0.1+0.2\cdot 0.4}=\frac{0.08}{0.24+0.05+0.08}=\frac{8}{37}.$$

მაგალითი 10. მოქალაქემ იპოვა სხვისი საკრედიტო ბარათი, რომლის კოდი ოთხციფრიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოქალაქეს ეყოფა ორი მცდელობა კოდის გამოსაცნობად (მეტ შესაძლებლობას ბანკომატი არ იძლევა).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i $(i=1,2)$ – მოქალაქემ პირველად კოდი გამოიცნო i-ური მცდელობისას. მაშინ საძიებელი ხდომილება იქნება $A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$. ვინაიდან A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებები არათავსებადია, მითუმეტეს არათავსებადი იქნება ხდომილებები A_1 და $\overline{A_1} \cap A_2$. ამიტომ ხდომილებათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1}),$$

სადაც

$$P(A_1) = 1/10^4,\ P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 1/10^4,\ P(A_2 \mid \overline{A_1}) = 1/(10^4 - 1).$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(A) = 1/10^4 + (1 - 1/10^4)\cdot[1/(10^4 - 1)] = 2/10^4.$$

მაგალითი 11. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 10-ჯერ აგდებისას 2-ჯერ მოვა გერბი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით. ამ შემთხვევაში: $n=10$, $k=2$ და $p=q=1/2$. შესაბამისად,

$$P_{10}(2) = C_{10}^2(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^{10-2} = \frac{45}{1024} \approx 0.044\,.$$

მაგალითი 12. ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 1/8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 12 გასროლიდან არც ერთი მოხვდება მიზანს?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს: $n=12$, $k=0$, $p=1/8$ და $q=7/8$. ამიტომ ბერნულის ფორმულის თანახმად:

$$P_{12}(0) = C_{12}^0(\frac{1}{8})^0 \cdot (\frac{7}{8})^{12} = (\frac{7}{8})^{12} \approx 0.25\,.$$

მაგალითი 13. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 4 ბურთს დაბრუნებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან თეთრი ბურთების რაოდენობა მეტი იქნება შავი ბურთების რაოდენობაზე?

ამოხსნა. თუ წარმატებად ჩავთვლით თეთრი ბურთის ამოღებას, მაშინ პირობის თანახმად ერთ ცდაში წარმატების ალბათობა იქნება $p=3/8$. საძიებელი ხდომილების ხელშემწყობ უთავსებად შემთხვევებს წარმოადგენს ოთხ ცდაში 3 ან 4 თეთრი ბურთის ამოღება, რომელთა ალბათობები, ბერნულის ფორმულის თანახმად, შესაბამისად ტოლია:

$$P_4(3) = C_4^3\cdot(3/8)^3\cdot(1-3/8)^{4-3} = 135/1024 \text{ და } P_4(4) = C_4^4\cdot(3/8)^4\cdot(5/8)^0 = 81/4096\,.$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა, ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად, იქნება:

$$135/1024 + 81/4096 = 621/4096\,.$$

მაგალითი 14. საშუალოდ ბანკის მიერ გაცემული კრედიტების 5% არ ბრუნდება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბანკის მიერ გაცემულ 100 კრედიტიდან დაბრუნების პრობლემა შეიქმნება არანაკლებ ორ შემთხვევაში. იგულისხმება, რომ კრედიტები გაიცემა და ბრუნდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად.

ამოხსნა. კრედიტის არ დაბრუნებას დავარქვათ „წარმატება“ და ვისარგებლოთ ბერნულის სქემით, სადაც „წარმატების“ ალბათობა $p=0.05$. ერთი და იგივე ცდა, რომელიც მდგომარეობს კრედიტის გაცემაში, მეორდება $n=100$-ჯერ. მოსაძებნია ალბათობა ხდომილების – A={კრედიტი არ დაბრუნდება 2 შემთხვევაში მაინც}. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე – $\overline{A}$={კრედიტი არ დაბრუნდება ორზე ნაკლებ შემთხვევაში}. ეს უკანასკნელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ორი ხდომილების გაერთიანების სახით: B={კრედიტი არ დაბრუნდება 0 შემთხვევაში} და C={კრედიტი

არ დაბრუნდება 1 შემთხვევაში}. შესაბამისად, ბერნულის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$P(\overline{B}) = P(B) + P(C) = C_{100}^{0} \cdot (0.05)^{0} \cdot (0.95)^{100} + C_{100}^{1} \cdot (0.05)^{1} \cdot (0.95)^{99} =$$
$$= (0.95)^{100} + 5 \cdot (0.95)^{99}.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (0.95)^{100} - 5 \cdot (0.95)^{99} \approx 0.96.$$

ამოცანები

1. განვითარებულ ქვეყნებში საზოგადოდ ახალშობილის გადარჩენის შანსი შეადგენს 99.3%-ს. ახალშობილთა 15% იბადება საკეისრო კვეთის გამოყენებით და მათი გადარჩენის შანსია 98.7%. რას უდრის ახალშობილის გადარჩენის შანსი, თუ ცნობილია, რომ ის არ დაბადებულა საკეისრო კვეთის გამოყენებით.

2. ნახმარი ავტომობილების დაახლოებით 5% ადრე დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო და სპეციალისტების შეფასებით ასეთი ავტომობილების 80%-ს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები, ხოლო თუ ნახმარი ავტომობილები ადრე არ იყო დაზიანებული წყალდიდობის გამო, მაშინ ამ ავტომობილების მხოლოდ 10%-ს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. თუ თქვენს ავტომობილს შეექმნა ძრავის პრობლემები, მაშინ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ შეიძინეთ ავტომობილი, რომელიც დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო.

3. ყუთში დევს ორი ჩვეულებრივი მონეტა მხარეებზე გერბისა და ნომინალის გამოსახულებებით და ერთი მონეტა ორივე მხარეზე გერბის გამოსახულებით. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული მონეტა ორგერბიანია; ბ) შემთხვევით ამოიღეს ერთი მონეტა და დაუხედავად აგდების შემდეგ მასზე მოვიდა გერბი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის ორგერბიანია.

4. 52 კარტიდან დაბრუნების გარეშე შემთხვევით იღებენ ორ კარტს და დებენ სხვა 52 კარტში. ასე მიღებულ 54 კარტს ურევენ ერთმანეთში და მისგან იღებენ ერთ კარტს. თუ ამოღებული კარტი „ტუზია“, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი დასტიდან მეორეში „ტუზი“ არ გადაუტანიათ.

5. ერთ ურნაში მოთავსებულია 1-დან 10-მდე გადანომრილი 10 ბურთი, ხოლო მეორეში კი – 1-დან 100-მდე გადანომრილი 100 ბურთი. შემთხვევით შეარჩიეს ყუთი და იქიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთის ნომერია 5. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთი ამოღებულია პირველი ყუთიდან; ბ) რა იქნება ა) პუნქტის ალბათობა, თუ ბურთი შემთხვევით იქნება ამოღებული ყველა 110 ბურთიდან.

6. გარკვეული დაავადება გვხვდება ადამიანთა პოპულაციის 0.1%-ში. დიაგნოსტიკის მეთოდი კორექტულ პასუხს იძლევა ალბათობით 0.99. პაციენტმა გაიარა შემოწმება და გამოკვლევამ აჩვენა დადებითი შედეგი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პაციენტი დაავადებულია?

7. I ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%-ს, რომელთა შორის 1% წუნდებულია. II ბრიგადა აწარმოებს იმავე დეტალების 20%-ს, რომელთა შორის 3% წუნდებულია. III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 50%-ს, რომელთა შორის 2% წუნდებულია. ერთ საწყობში მოგროვილი ამ დეტალებიდან შემთხვევით აიღეს ერთი დეტალი და ის აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დაამზადა: ა) I ბრიგადამ; ბ) II ბრიგადამ; გ) III ბრიგადამ?

8. ავადმყოფის გამოკვლევის შედეგად გაკეთდა დასკვნა, რომ მას აქვს ერთ-ერთი ორი დაავადებიდან – ან A_1 (ჰიპოთეზა A_1), ან A_2 (ჰიპოთეზა A_2). $P(A_1) = 0.4$ და $P(A_2) = 0.4$. ექიმმა გადაწყვიტა დიაგნოზის დაზუსტება და დანიშნა ანალიზის ჩატარება, რომლის შედეგს წარმოადგენს დადებითი ან უარყოფითი რეაქცია. თუ პაციენტს აქვს A_1 ავადმყოფობა, ანალიზმა უნდა მოგვცეს დადებითი რეაქცია ალბათობით 0.9 და უარყოფითი რეაქცია – ალბათობით 0.1. თუ კი პაციენტს აქვს A_2 ავადმყოფობა, მაშინ დადებითი და უარყოფითი რეაქციები ტოლალბათურია. ანალიზი ჩატარდა და მან მოგვცა უარყოფითი

რეაქცია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს შედეგი განპირობებულია: ა) A_1 ავადმყოფობით; ბ) A_2 ავადმყოფობით?

9. ერთ ჩანთაში დევს 4 თეთრი და 3 შავი ბურთი, მეორე ჩანთაში კი 3 თეთრი და 5 შავი ბურთი. პირველი ჩანთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთს და დებენ მეორეში. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ჩანთიდან ამოღებული ბურთი იქნება შავი. ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ჩანთიდან მეორეში გადატანილი ბურთი იყო თეთრი, თუ ცნობილია, რომ გადატანის შემდეგ მეორე ჩანთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია.

10. ყუთიდან, რომელშიც დევს 5 შავი და 3 წითელი ბურთი მიმდევრობით იღებენ 3 ბურთს დაბრუნებით (აფიქსირებენ ამოღებული ბურთის ფერს, აბრუნებენ ყუთში და შემდეგ იღებენ მომდევნო ბურთს). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივე ბურთი თეთრია; ბ) სამივე ბურთი ერთი და იგივე ფერისაა; გ) ერთი თეთრია და 2 შავი; დ) ორივე ფერი იქნება წარმოდგენილი.

11. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა: ა) ზუსტად ორჯერ? ბ) არა უმეტეს ორჯერ? გ) არანაკლებ ერთჯერ?

12. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ორჯერ მოვა წახნაგი 3-ის არა ჯერადი ქულით?

13. ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ საწარმოში ელექტროენერგიის დღიური დანახარჯი არ გადააჭარბებს დადგენილ ნორმას, ტოლია 0.8-ის. როგორია ალბათობა იმისა, რომ კვირის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯი არ გავა ნორმიდან ოთხი დღის განმავლობაში?

14. ალბათობა იმისა, რომ ნათურა არ გადაიწვება 1000 საათის მუშაობის შედეგად, ტოლია 0.95-ის. რისი ტოლია 500 ნათურაში იმ ნათურების უალბათესი რიცხვი, რომლებიც არ გადაიწვა 1000 საათის მუშაობის შედეგად?

15. წუნდებული პროდუქციის გამოშვების ალაბათობაა $p=0.04$. რამდენჯერ უნდა შევამციროთ წუნდებული პროდუქციის პროცენტი იმისათვის, რომ 20-ჯერ გაიზარდოს ალბათობა იმისა, რომ 1000 ერთეულ პროდუქციაში არ აღმოჩნდეს არც ერთი წუნდებული?

16. მონეტა ისეა დამზადებული, რომ გერბის მოსვლის ალბათობა ორჯერ მეტია საფასურის მოსვლის ალბათობაზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 3-ჯერ აგდებისას საფასური მოვა 2-ჯერ?

17. წყალქვეშა ნავი ესვრის კრეისერს 4-ჯერ თითოთითო ტორპედოს. თითოეული გასროლისას ტორპედოს მოხვედრის ალბათობაა 3/4. ყოველ ტორპედოს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გახვრიტოს კრეისერის 10 განყოფილებიდან რომელიმე განყოფილება, რომელიც დაზიანების შედეგად წყლით ივსება. კრეისერი იძირება, თუ წყლით აივსო ორი განყოფილება მაინც. გამოვთვალოთ კრეისერის ჩაძირვის ალბათობა.

18. ტელევიზორი შედგება 10 ელემენტისაგან. თითოეული ელემენტი წლის განმავლობაში მუშაობს ალბათობით p. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წლის განმავლობაში მწყობრიდან გამოვა: ა) ერთი ელემენტი მაინც; ბ) ზუსტად ერთი ელემენტი; გ) ორი ელემენტი.

19. ალბათობა იმისა, რომ მომავალი წლის ივნისის პირველი დღე იქნება მშრალი არის 0.4. თუ ივნისის რომელიმე კონკრეტული დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.6. სხვა შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ივნისის პირველი ორი დღე იქნება მშრალი; ბ) ივნისის მეორე დღე იქნება მშრალი გ) ივნისის პირველი სამი დღიდან, სულ ცოტა, ერთი იქნება მშრალი.

20. $P(A)=0.3$. B ხდომილება დამოუკიდებელია A ხდომილებისაგან. $P(B)=0.4$. C არის ხდომილება რომ არც A მოხდა და არც B. იპოვეთ: ა) $P(A\setminus B)$; ბ) $P(A\bigcup B)$; გ) $P(C|A)$.

21. ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტული დღე მშრალია არის 3/10. ალბათობა იმისა, რომ „დინამო“ მოიგებს მშრალ დღეს არის 3/8, ხოლო – სველ დღეს 3/11. ა) „დინამომ“ შემდეგი მატჩი ორშაბათს უნდა ჩაატაროს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ

„დინამო“ მოიგებს; ბ) გასულ ოთხშაბათს „დინამომ“ მატჩი მოიგო. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხშაბათს მშრალი ამინდი იყო; გ) გასულ შაბათს „დინამომ“ მატჩი წააგო. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შაბათს სველი ამინდი იყო.

22. კაზინოში დგას სამი სათამაშო მაგიდა A და A' ტიპის, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. ამასთანავე, A' ტიპის მაგიდა ორი ცალია. A ტიპის მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო A' ტიპის მაგიდაზე – 1/4. ა) იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა; ბ) თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა; გ) თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და წააგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A' მაგიდა.

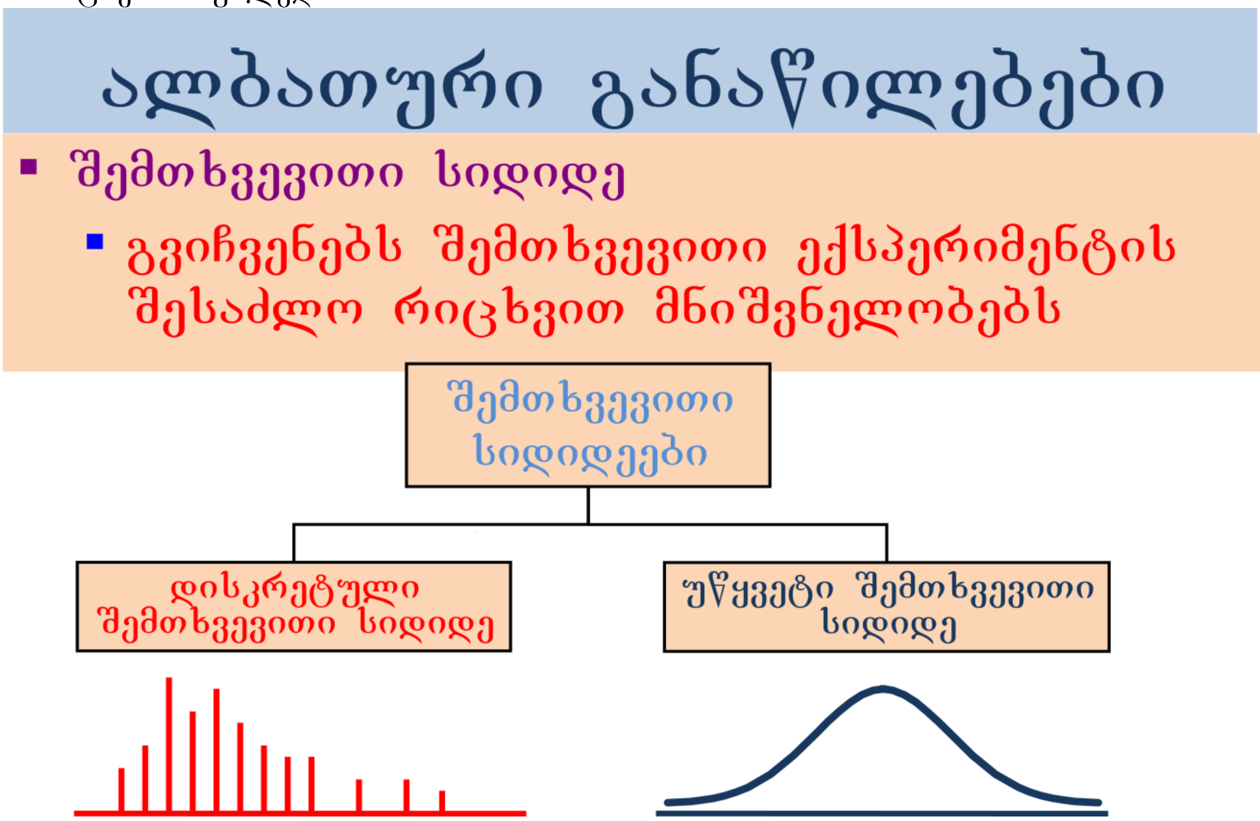
23. ერთ ყუთში არის 3 თეთრი და 2 ლურჯი ბურთი, მეორეში კი 4 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთი. I ყუთიდან შემთხვევით გადაიტანეს 2 ბურთი მეორეში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ II ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი.

თავი VIII

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე და მისი რიცხვითი მახასიათებლები

ალბათობის თეორიაში შემთხვევითი ხდომილების ცნებასთან ერთად გამოიყენება გარკვეული აზრით უფრო მოხერხებული *შემთხვევითი სიდიდის* ცნება. ცვლად სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობები დამოკიდებულია შემთხვევითი ექსპერიმენტის ან მოვლენის შესაძლო შედეგებზე, შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ. შემთხვევითი სიდიდის მაგალითებია: სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა რიცხვი; მონეტის განმეორებითი აგდებისას მონეტის რომელიმე მხარის გამოჩენათა რიცხვი; გასროლათა რაოდენობა მიზანში პირველად მოხვედრამდე; მანძილი სამიზნის ცენტრიდან დაზიანების წერტილამდე; სხვადასხვა დროს გარკვეულ პროდუქციაზე მოთხოვნათა რაოდენობა; სითხეში ჩაძირული მტვრის მცირე ნაწილაკის (რომელსაც ვაკვირდებით მიკროსკოპში) მდებარეობა და ა. შ.

განმარტება 1. შემთხვევითი ექსპერიმენტის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განსაზღრულ რიცხვით ფუნქციას **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული ტიპის** თუ ის ღებულობს ცალკეულ, იზოლირებულ შესაძლო მნიშვნელობებს. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის** თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე მთლიანად ავსებს რაიმე სასრულ ან უსასრულო რიცხვით შუალედს.

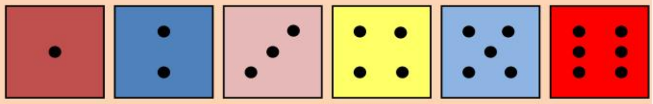


დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს სასრულ ან თვლად რაოდენობა განსხვავებულ მნიშვნელობებს, ხოლო უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა რაოდენობა კონტინიუმის სიმძლავრისაა.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

- ღებულობს თვლად რაოდენობა მნიშვნელობებს

მაგალითები:



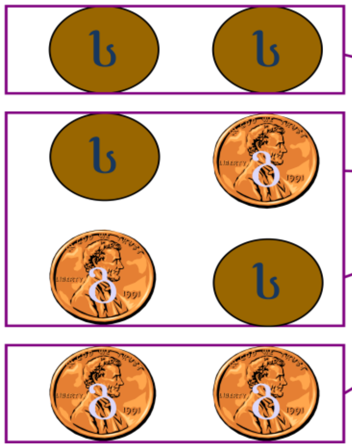
- კამათელს ვაგორებთ ორჯერ.
  X იყოს 4 ქულის მოსვლათა რიცხვი
  (მაშინ **X** შეიძლება იყოს 0, 1, ან 2)

- მონეტას ვაგდებთ ხუთჯერ.
  X იყოს მოსულ გერბთა რიცხვი
  (მაშინ **X = 0, 1, 2, 3, 4,** ან **5**)

შემთხვევით სიდიდეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით: $X, Y, Z, ...$ (ან პატარა ბერძნული ასოებით $\xi, \eta, \varsigma, ...$), ხოლო შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს აღნიშნავენ პატარა ლათინური ასოებით: $x_i, y_j, z_k, ...$.

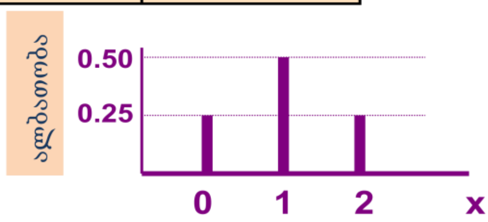
ექსპერიმენტი: მონეტის 2-ჯერ აგდება. X–გერბთა რიცხვი. გამოვთვალოთ P(X = x) ყველა x -თვის.

4 შესაძლო შედეგი



ალბათური განაწილება

x მნ-ბა	ალბათობა
0	1/4 = 0.25
1	2/4 = 0.50
2	1/4 = 0.25



მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რიცხვი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე რვა ელემენტიანი სიმრავლეა:

$$\Omega = \{გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, სსგ, სსს\}$$

და, შესაბამისად, საძიებელი შემთხვევითი სიდიდე იქნება Ω-ზე განსაზღრული შემდეგი რიცხვითი ფუნქცია:

$$X(გგგ) = 3;\ X(გგს) = X(გსგ) = X(სგგ) = 2;$$

$$X(გსს) = X(სგს) = X(სსგ) = 1 \text{ და } X(სსს) = 0.$$

ცხადია ეს შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, ის ღებულობს იზოლირებულ მნიშვნელობებს, მაგალითად, 1-სა და 2-ს შორის ის არ ღებულობს არცერთ მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega = \{(i,j): i,j = 1,2,\ldots,6\},$$

ხოლო შემთხვევითი სიდიდე ცალკეულ ელემენტარულ ხდომილებას (i,j) (სადაც i -- პირველ კამათელზე მოსული ქულაა, ხოლო j -- მეორე კამათელზე მოსული ქულა) შეუსაბამებს: $X(i,j) = i + j$ (პირველ და მეორე კამათელზე მოსული ქულების ჯამი). მაგალითად, $X(1,3) = X(2,2) = X(3,1) = 4$. აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: 2, 3, . . . , 12. ის ასევე დიკრეტული ტიპისაა.

ზემოთ ჩამოთვლილი მაგალითებიდან უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეა მანძილი სამიზნის ცენტრიდან დაზიანების წერტილამდე და მტვრის ნაწილაკის მდებარეობა სითხეში. თითოეული მათგან ნებისმიერ ორ მიღებულ მნიშვნელობას შორის არ გამოტოვებს არცერთ მნიშვნელობას.

შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია თუ ჩვენ ვიცით ექსპერიმენტის ამა თუ იმ შედეგს რა რიცხვი შეესაბამება. მაგრამ, იმისათვის რომ ალბათურად დავახასიათოთ შემთხვევითი სიდიდე, ჩვენ კიდევ უნდა ვიცოდეთ თუ რამდენად ხშირად ანუ რა ალბათობებით ღებულობს ეს შემთხვევითი სიდიდე თავის ამა თუ იმ მნიშვნელობას. შესაბამისობას, შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებსა და მათ შესაბამის ალბათობებს შორის, დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონი** ეწოდება. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძლება მოცემული იყოს *ცხრილის, ფორმულის ან გრაფიკის* სახით.

ცხრილს, რომელშიც ჩამოთვლილია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და მათი შესაბამისი ალბათობები, დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების მწკრივი** ეწოდება:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

შევნიშნოთ, რომ ხდომილება, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას თავისი შესაძლო მნიშვნელობებიდან, წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას და ამიტომ: $\sum_i p_i = 1$ (ჩვენ არ ვუთითებთ შესაკრებთა რაოდენობას, ის შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულო).

მაგალითი 3. ორი მსროლელი თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. მათ მიერ სამიზნის დაზიანების (მიზანში მოხვედრის) ალბათობებია შესაბმისად 0.6 და 0.7. შემთხვევითი სიდიდე X იყოს დაზიანებულ სამიზნეთა რაოდენობა. შევადგინოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ X შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: 0 (ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე), 1 (მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე) და 2 (ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე). ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

ბუნებრივია შეგვძლია ვიგულისხმოთ რომ პირველი და მეორე მსროლელის სროლის შედეგები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A -- პირველმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე და B -- მეორე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე. მოცემულია, რომ $P(A) = 0.6$ და $P(B) = 0.7$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 0.4$ და $P(\overline{B}) = 0.3$. გარდა ამისა, A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებია აგრეთვე: $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

ადვილი დასანახია, რომ ხდომილება – ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე იქნება $\overline{A} \cap \overline{B}$, ხდომილება -- მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ და ხდომილება -- ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნ-

ება $A \cap B$. გასაგებია, რომ $(A \cap \bar{B})$ და $(\bar{A} \cap B)$ უთავსებადი ხდომილებებია $(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

ამიტომ, დამოუკიდებელ ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობისა და უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P(X=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.4 \cdot 0.3 = .12;$$

$$P(X=1) = P\{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\} = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) =$$

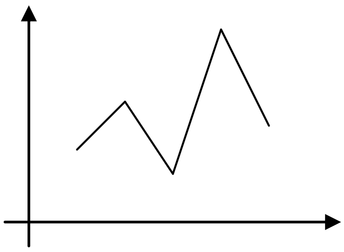
$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46;$$

$$P(X=2) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$$

შესაბამისად, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i	0	1	2
p_i	0.12	0.46	0.42

გრაფიკულად დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძლება წარმოვადგინოთ *განაწილების მრავალკუთხედის სახით,* რომელიც წარმოადგენს ტეხილს სიბრტყეზე, რომელიც მიიღება საკოორდინატო სიბრტყეზე იმ წერტილების შეერთებით, რომელთა კოორდინატებია (x_i, p_i).



x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე X და რაიმე რიცხვითი g ფუნქცია, მაშინ $g(X)$ ისევ იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების მწკრივის პირველ სტრიქონში იქნება $g(x_i)$ რიცხვები ($g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები), ხოლო მეორე სტრიქონში იგივე p_i ალბათობები, რაც გვქონდა X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივში, ვინაიდან:

$$P\{g(X) = g(x_i)\} = P\{X = x_i\} = p_i,$$

ანუ გვექნება განაწილების მწკრივი:

$g(x_i)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…	$g(x_n)$	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია X-ის რომელიმე ორი განსხვავებული $x_i \neq x_j$ მნიშვნელობისათვის $g(x_i) = g(x_j)$, მაშინ $g(X)$-ის განაწილების მწკრივში მხოლოდ ერთ ადგილას დავწერთ $g(x_i)$-ს და ქვეშ მივუწერთ შესაბამისი ალბათობის როლში $(p_i + p_j)$ სიდიდეს. მაგალითად, თუ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივია:

x_i	-3	-1	0	1	2
p_i	0.15	0.12	0.2	0.18	0.35

მაშინ X^2-ის (ამ შემთხვევაში $g(x) = x^2$) განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0.2	0.3	0.35	0.15

აქ

$$P\{X^2 = 1\} = P\{(X = -1) \cup (X = 1)\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.12 + 0.18 = 0.3.$$

ბერნულის განაწილება. დავუშვათ, რომ ვატარებთ ორშედეგიან ცდას (ექსპერიმენტს). ცდის ერთერთ შედეგს პირობითად ვუწოდოთ “წარმატება”, ხოლო მეორეს – “მარცხი”. ცდაში “წარმატების” მოხდენის ალბათობა იყოს p, მაშინ “მარცხის” ალბათობა იქნება $1-p:=q$. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა იყოს 1 თუ მოხდა “წარმატება” და იყოს 0 თუ მოხდა “მარცხი”. ასეთ შემთხვევით სიდიდეს **ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს** უწოდებენ, ხოლო შესაბამის განაწილებას კი **ბერნულის განაწილებას**:

x_i	1	0
p_i	p	$1-p$

ბერნულის განაწილება

- განიხილება მხოლოდ ორი შედეგი : “წარმატება” ან “მარცხი”
- **P**-თი აღნიშნულია წარმატების ალბათობა
- **1 – P** არის მარცხის ალბათობა
- განვსაზღვროთ შემთხვევითი სიდიდე **X:**
  x = 1 წარმატების დროს, **x = 0** მარცხის დროს
- მაშინ ბერნულის განაწილების კანონი არის:

$$\boxed{P(0)=(1-P) \quad \text{and} \quad P(1)=P}$$

ბინომიალური განაწილება. დავუშვათ, რომ დამოუკიდებლად და ერთიდაიგივე პიობებში n-ჯერ ვატარებთ ორშედეგიან ცდებს (ექსპერიმენტებს). ცალკეული ცდის ერთერთ შედეგს პირობითად ვუწოდოთ “წარმატება”, ხოლო მეორეს – “მარცხი”. ცალკეულ ცდაში “წარმატების” მოხდენის ალბათობა იყოს p, მაშინ “მარცხის” ალბათობა იქნება $1-p:=q$. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა იყოს n დამოუკიდებელ ცდაში “წარმატებათა” რიცხვი. ასეთ შემთხვევით სიდიდეს **ბინომიალური შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. მან შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები $0,1,\ldots,n$, ალბათობებით:

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას **ბინომიალური განაწილება** ეწოდება.

ბინომიალური განაწილების ფორმულა

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,P^{x}\,(1-P)^{n-x}$$

P(x) = **n** ცდაში **x** წარმატების ალბათობა, ყოველ ცდაში წარმატების **P** ალბათობით

x = "წარმატებების" რიცხვი შერჩევაში (**x = 0, 1, 2, ..., n**)

n = შერჩევის მოცულობა (ცდათა ან დაკრვებათა რაოდენობა)

P = "წარმატების" ალბათობა

მაგალითი: მონეტის 4-ჯერ აგდება, **x = #** გერბების:

n = 4

P = 0.5

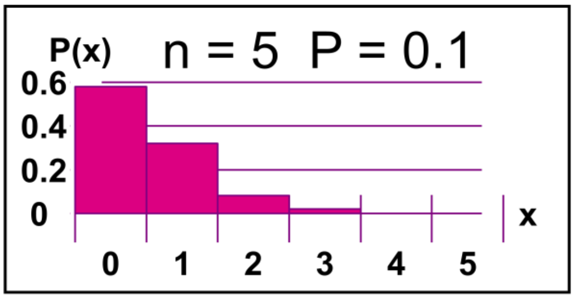
1 - P = (1 - 0.5) = 0.5

x = 0, 1, 2, 3, 4

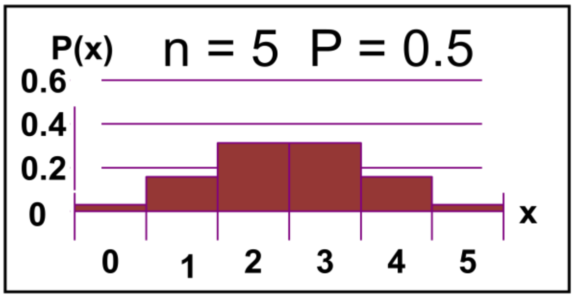
ბინომიალური განაწილება

- ბინომიალური განაწილების ფორმა დამოკიდებულია **P**-ზე და **n**-ზე

- აქ, **n = 5** და **P = 0.1** (მარჯვნივ-ასიმეტრიული)



- აქ, **n = 5** და **P = 0.5** (სიმეტრიული)



მაგალითი 4. ვიპოვოთ წესიერი მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $2^4=16$ ტოლშესაძლებელი ოთხეულისაგან, ხოლო განსახილველი X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია k = 0, 1, 2, 3 ან 4. გასაგებია, რომ საქმე გვაქვს ბერნულის სქემასთან, სადაც წარმატებაა გერბის მოსვლა და რადგან მონეტა წესიერია, წარმატების ალბათობაა 1/2. შემთხვევითი სიდიდე ამ შემთხვევაში წარმოადგენს მონეტის ოთხჯერ აგდებისას წარმატებათა რაოდენობას და შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$p_k = P(\xi = k) = P_4(k) = C_4^k (\frac{1}{2})^k (1-\frac{1}{2})^{4-k} = C_4^k /16, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

ამიტომ $p_0 = 1/16$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/8$, $p_3 = 1/4$, $p_4 = 1/16$.

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. დავუშვათ, რომ ყუთში N ბურთია და მათ შორის M თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ყუთიდან ვიღებთ n ბურთს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ n ბურთს შორის ზუსტად k ცალი იქნება თეთრი?

აღვნიშნოთ μ_n-ით ამოღებულ n ბურთს შორის თეთრი ბურთების რაოდენობა. ჩვენ გვაინტერესებს $P\{\mu_n = k\}$ ალბათობა. ვისარგებლოთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით. გასაგებია, რომ ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობა დაემთხვევა N ელემენტიანი სიმრავლის n ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას, ანუ $P(\Omega) = C_N^n$. ჩვენთვის საინტერესო n ელემენტიანი ქვესიმრავლეები უნდა შედგებოდნენ ზუსტად k ცალი თეთრი და $n-k$ ცალი შავი ბურთებისაგან. k ცალი თეთრი ბურთი შეიძლება შეირჩეს C_M^k სხვადასხვა გზით, ხოლო $n-k$ ცალი შავი ბურთი კი -- C_{N-M}^{n-k} სხვადასხვანაირად. ნამრავლის წესის თანახმად ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებთა რაოდენობა იქნება $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$. შესაბამისად, კლასიკური განმარტების საფუძველზე გვაქვს:

$$P(N;M;n;k) := P\{\mu_n = k\} = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0,1,\dots,\min(n,M).$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას **ჰიპერგეომეტრიული განაწილება** ეწოდება.

მაგალითი 5. აუდიტორიაში მყოფი 15 სტუდენტიდან 5 ვაჟია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 6 სტუდენტს შორის 3 ვაჟია?

ამოხსნა. თუ მივუსადაგებთ ზემოთ განხილულ სქემას, გასაგებია, რომ: $N = 15$, $M = 5$, $n = 6$ და $k = 3$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(15;5;6;3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{15-5}^{6-3}}{C_{15}^6} = \frac{10 \cdot 120}{5005} \approx 0.239.$$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფორმულა

$$P(x)=\frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N}=\frac{\frac{S!}{x!(S-x)!}\times\frac{(N-S)!}{(n-x)!(N-S-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

სადაც, **N =** პოპულაციის მოცულობა
S = პოპულაციაში წარმატებების (თეთრი ბურთების) რიცხვი
N – S = პოპულაციაში მარცხის (შავი ბურთების) რიცხვი
n = შერჩევის მოცულობა
x = შერჩევაში წარმატებების (თეთრი ბურთების) რიცხვი
n – x = შერჩევაში მარცხის (შავი ბურთების) რიცხვი

- მაგალითი: დეპარტამენტის 10 კომპიუტერიდან 4-ში ჩატვირთულია არალიცენზირებული პროგრამა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 3 კომპიუტერიდან 2-ში იქნება არალიცენზირებული პროგრამა?

N = 10   n = 3
S = 4   x = 2

$$P(x=2)=\frac{C_x^S\cdot C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N}=\frac{C_2^4\cdot C_1^6}{C_3^{10}}=\frac{6\cdot 6}{120}=0.3$$

ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 3 კომპიუტერიდან 2-ში იქნება არალიცენზირებული პროგრამა არის **0.30** ანუ **30%.**

დავუშვათ, რომ ვატარებთ დამოუკიდებელი ორშედეგიანი ცდების სერიას ერთ-ერთი შედეგის (პირობითად მას ვუწოდოთ “წარმატება”) პირველად მოხდენამდე. ცალკეულ ცდაში “წარმატების” ალბათობა იყოს p (მეორე შედეგის ალბათობა იქნება $1-p:=q$). შემთხვევითი სიდიდე იყოს ჩატარებული ცდების რაოდენობა. მაშინ ცხადია, რომ ეს შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას k ალბათობით pq^{k-1}, $k=1,2,\ldots$.

გეომეტრიული განაწილება. დისკრეტულ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს ნატურალურ k მნიშვნელობებს ალბათობებით

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},$$

სადაც $0<p<1$ $(q=1-p)$, **გეომეტრიული კანონით განაწილებული** შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება.

უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენებით ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ალბათობების ჯამი 1-ის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p\cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\cdot\frac{1}{1-q} = p\cdot\frac{1}{p} = 1.$$

პუასონის განაწილება. განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე X, რომელიც ღებულობს მხოლოდ მთელ არაუარყოფით მნიშვნელობებს $(0,1,2,\dots)$. ასეთ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **პუასონის კანონით განაწილებული**, თუ ალბათობა იმისა, რომ ის მიიღებს მნიშვნელობას k, გამოისახება ფორმულით:

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

სადაც λ -- გარკვეული დადებითი სიდიდეა, რომელსაც პუასონის კანონის (განაწილების) **პარამეტრი** ეწოდება. თუ ვისარგებლებთ e^x ფუნქციის გაშლით ხარისხოვან მწკრივად ($e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$), ადვილად დავინახავთ, რომ ამ ალბათობების ჯამი 1-ის ტოლია. მართლაც,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

პუასონის განაწილების ფორმულა

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

სადაც:

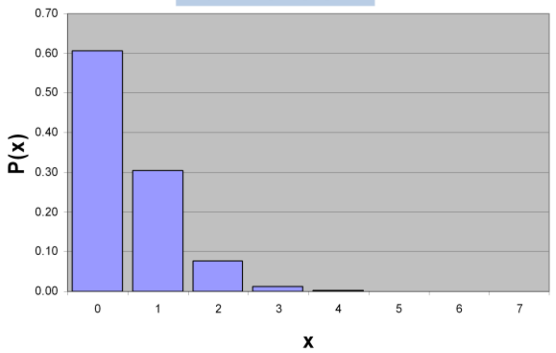
x = წარმატებათა რაოდენობა დროის ერთეულში

λ = წარმატებათა მოსალოდნელი რაოდენობა დროის ერთეულში

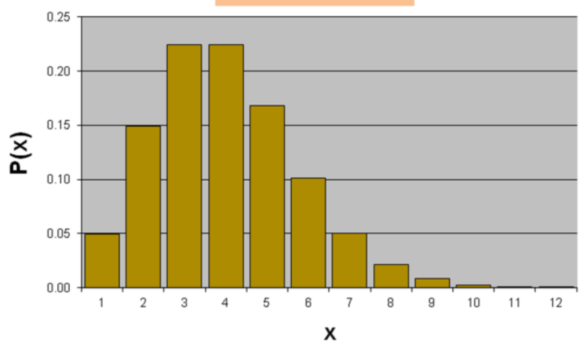
e = ნატურალური ლოგარითმის ფუძე – ნეპერის რიცხვი **(2.71828...)**

- პუასონის განაწილების ფორმა დამოკიდებულია λ პარამეტრზე:

λ = 0.50



λ = 3.00



განვიხილოთ ტიპიური ამოცანა, რომელსაც მივყავართ პუასონის განაწილებამდე. დავუშვათ, რომ აბსცისთა ღერძზე შემთხვევით განაწილდებიან წერტილები, ამასთანავე მათი განაწილება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) ალბათობა იმისა, რომ გარკვეული რაოდენობის წერტილები მოხვდება l სიგრძის ინტერვალში დამოკიდებულია მხოლოდ ინტერვალის სიგრძეზე და არაა დამოკიდებული აბსცისთა ღერძზე მის მდებარეობაზე (ე. ი. წერტილები განაწილებულია ერთნაირი საშუალო სიმკვრივით);

2) წერტილები ნაწილდებიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად: ალბათობა იმისა, რომ წერტილთა რაიმე რაოდენობა მოხვდება მოცემულ ინტერვალში არ არის დამოკიდებული წერტილთა რაოდენობაზე, რომლებიც მოხვდნენ ნებისმიერ სხვა ინტერვალში;

3) პრაქტიკულად შეუძლებელია ორი ან მეტი წერტილის დამთხვევა.

მაშინ შემთხვევითი სიდიდე X -- l სიგრძის ინტერვალში მოხვედრილ წერტილთა რაოდენობა – განაწილებულია პუასონის კანონით, სადაც λ -- არის l სიგრძის ინტერვალზე მოსულ წერტილთა საშუალო რიცხვი.

შენიშვნა. პუასონის ფორმულა გამოსახავს ბინომიალურ განაწილებას ცდათა დიდი რიცხვისა და ხდომილების მცირე ალბათობის შემთხვევაში, ამიტომ პუასონის კანონს ხშირად უწოდებენ **იშვიათ მოვლენათა კანონს.**

პუასონის განაწილება წარმოადგენს კარგ მათემატიკურ მოდელს იშვიათ ხდომილებათა აღსაწერად: დროის ფიქსირებულ შუალედში მომხდარ ხდომილებათა რაოდენობა ხშირად ემორჩილება პუასონის განაწილებას. მაგალითად შეიძლება გამოდგეს რადიაქტიური დაშლის შედეგად გეიგერის მთვლელის მიერ t დროში რეგისტრირებული α ნაწილაკების რაოდენობა; სატელეფონო სადგურში t დროის განმავლობაში რეგისტრირებულ გამოძახებათა რაოდენობა. როგორც ცნობილია, წარმატებების მცირე ალბათობისა და ცდათა რიცხვის საკმაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში პუასონის განაწილება გვევლინება ბინომური განაწილების მიახლოებად.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილება – ეს არის ფუნქცია, რომელიც ცალსახად განსაზღვრავს ალბათობას იმისა, რომ: შემთხვევითმა სიდიდემ მიიღო მოცემული მნიშვნელობა ან შემთხვევითი სიდიდე ეკუთვნის გარკვეულ მოცემულ ინტერვალს. თუ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს სასრულ რაოდენობა მნიშვნელობებს, მაშინ განაწილება მოიცემა ფუნქციით $P\{X=x\}$, რომელიც X შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო x მნიშვნელობას შეუსაბამებს ალბათობას იმისა, რომ $X=x$.

თუ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს უსასრულოდ ბევრ მნიშვნელობას (რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რომელზეც განმარტებულია შემთხვევითი სიდიდე შედგება უსასრულო რაოდენობა ელემენტარული ხდომილებებისაგან), მაშინ განაწილება მოიცემა $P\{a<X\le b\}$ ალბათობების ერთობლიობით რიცხვთა ნებისმიერი a,b წყვილისათვის, $a<b$. განაწილება შესაძლებელია მოცემულ იქნეს ე. წ. **განაწილების ფუნქციით:**

$$F(x):=P\{X\le x\},$$

რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისთვის განსაზღვრავს ალბათობას იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x-ზე ნაკლებ ან ტოლ მნიშვნელობებს. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a).$$

განაწლების ფუნქციის თვისებები:

1). ნებისმიერი x-სათვის $0\le F(x)\le 1$;

2). განაწილების ფუნქცია არაკლებადია;

3). განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან;

4). $F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}P\{X=x_k\}$;

5). $P\{X=x_k\}=F(x_k)-F(x_k-0)$.

განაწილების ფუნქცია შეიძლება იყოს ან დისკრეტული, ან უწყვეტი, ან მათი კომბინაცია. დისკრეტული განაწილების ფუნქცია შეესაბამება დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს სასრულ რაოდენობა მნიშვნელობებს ან მნიშვნელობებს ისეთი სიმრავლიდან, რომლის ელემენტების გადანომვრაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით (ასეთ სიმრავლეებს, მათემატიკაში, *თვლად სიმრავლეებს* უწოდებენ). დისკრეტულ განაწილების ფუნქციას აქვს საფეხურა კიბის სახე.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ წესიერი მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რაოდენობის განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

X	0	1	2	3	4
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

შესაბამისად, განმარტების თანახმად ($F_X(x) = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$) გვაქვს:

$$F_X(0) = p_0 = 1/16,$$
$$F_X(1) = p_0 + p_1 = 5/16,$$
$$F_X(2) = p_0 + p_1 + p_2 = 11/16,$$
$$F_X(3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 15/16,$$
$$F_X(4) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 0, \\ 1/16, & \text{თუ} \quad 0 \le x < 1, \\ 5/16, & \text{თუ} \quad 1 \le x < 2, \\ 11/16, & \text{თუ} \quad 2 \le x < 3, \\ 15/16, & \text{თუ} \quad 3 \le x < 4, \\ 1, & \text{თუ} \quad x \ge 4. \end{cases}$$

მაგალითი 7. ცნობილია, რომ $P\{X > 3\} = 1/3$. იპოვეთ $F_X(3)$.

ამოხსნა. განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$F_X(3) = P\{X \le 3\} = 1 - P\{X > 3\} = 2/3.$$

მაგალითი 8. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

X	-1	0
P	0.5	0.5

Y	0	1
P	0.5	0.5

შეადარეთ ერთმანეთს $F_X(F_Y(0.5))$ და $F_Y(F_X(0.5))$.

ამოხსნა. განაწილების ფუნქციის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$F_Y(0.5) = P\{Y \le 0.5\} = P\{Y = 0\} = 0.5,$$

შესაბამისად,

$$F_X(F_Y(0.5)) = P\{X \le 0.5\} = P\{X = -1\} + P\{X = 0\} = 1.$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $F_Y(F_X(0.5)) = 1$.

მაგალითი 9. საქონლის პარტიაში დეფექტურ ნაწარმთა რიცხვი X ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს ალბათობით – 0.3; მნიშვნელობა 1-ს ალბათობით –0.4; მნიშვნელობა 2-ს ალბათობით – 0.2 და მნიშვნელობა 3-ს ალბათობით – 0.1 ანუ X-ის განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

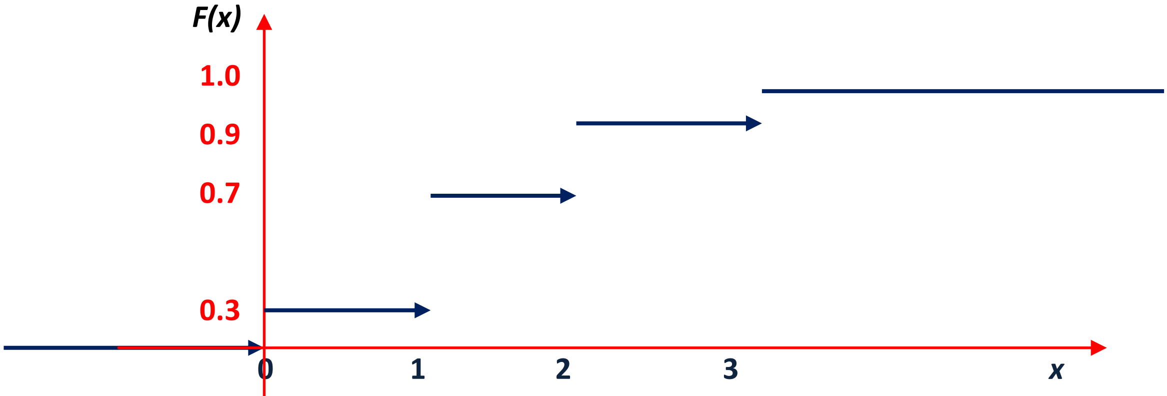
x_i	0	1	2	3
p_i	0.3	0.4	0.2	0.1

გამოვთვალოთ X-ის განაწილების ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

თუ $x < 0$, მაშინ $F(x) = P\{X \le x\} = P\{\varnothing\} = 0$;

თუ $0 \le x < 1$, მაშინ $F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = 0.3$;

თუ $1 \le x < 2$, მაშინ $F(x) = P\{X \le x\} = P\{(X = 0) \cup (X = 1)\} =$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0.3 + 0.4 = 0.7;$$
თუ $2 \le x < 3$, მაშინ $F(x) = P\{X \le x\} = P\{(X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)\} =$
$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0.3 + 0.4 + 0.2 = 0.9;$$
და ბოლოს, თუ $x \ge 3$, მაშინ $F(x) = P\{X \le x\} = P\{\Omega\} = 1$.
შესაბამისად, განაწილების ფუნქციის გრაფიკი იქნება შემდეგი სახის:



უწყვეტ განაწილების ფუნქციას ნახტომები არა აქვს. ის მონოტონურად იზრდება არგუმენტის ზრდასთან ერთად 0-დან (როცა $x \to -\infty$) 1-მდე (როცა $x \to +\infty$). შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, უწოდებენ **უწყვეტ შემთხვევით** სიდიდეს.

შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ხშირად შემთხვევითი სიდიდის დასახასიათებლად უფრო მოხერხებულია რიცხვითი მახასიათებლები, ნაცვლად ფუნქციონალურისა (როგორიცაა განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია). შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის პირველ რიგში გამოყოფენ ისეთებს, რომელთა "ირგვლივ" ("გარშემოც") ლაგდება (ჯგუფდება) შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები. ერთერთ ასეთ რიცხვით მახასიათებლს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის *მათემატიკური ლოდინი,* რომელსაც მისი არსიდან გამომდინარე (რასაც ჩვენ ქვემოთ დავინახავთ) შემთხვევითი სიდიდის *საშუალო მნიშვნელობასაც* ეძახიან.

ალბათობის თეორიის ძალიან ბევრ საკითხში მოსახერხებელია შემოვიტანოთ მათემატიკური ლოდინის ცნება. როცა მოთამაშემ უნდა მიიღოს განსაზღრული თანხა, თუ მოხდება გარკვეული შემთხვევითი ხდომილება, რომლის ალბათობა ცნობილია, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი არის ის თანხა, რომელიც სამართლიანად უნდა შემოუტანოს მას იმან, ვინც იყიდის მისგან მოგების შანსებს. მაგალითად, მოთამაშემ უნდა გააგოროს ერთხელ სათამაშო კამათელი და მიიღოს მოგება 6 ლარი, თუ მოვა ციფრი 4. ადვილი დასანახია, რომ მისი მათემატიკური ლოდინი ტოლია 1 ლარის, ე. ი. იმ თანხის (6 ლარის), რომლიც შეიძლება მიიღოს მოთამაშემ, ნამრავლი სასურველი შედეგის ალბათობაზე (1/6ზე).

მართლაც, დავუშვათ, რომ ბანკომატი გვთავაზობს გავაგოროთ კამათელი და ყოველ მსურველს აძლევს შესაძლებლობას დადოს სანაძლეო მის მიერ შერჩეულ წახნაგზე (ქულაზე), რათა მოგების შემთხვევაში მიიღოს 6 ლარი. თუ 6 სხვადასხვა მოთამაშე დადებს ფსონს შესაბამისად 6 სხვადასხვა წახნაგზე, მაშინ ბანკომატმა ნებისმიერ შემთხვევაში უნდა გადაიხადოს 6 ლარი, ვინაიდან იქნება ერთი და მხოლოდ ერთი მოგებული. იმისათვის რომ თამაში იყოს სამართლიანი, საჭიროა რომ 6 მოთამაშიდან თითოეულმა შეიტანოს ბანკომატში 1 ლარი, რადგანაც არ არსებობს არანაირი საფუძველი იმისათვის, რომ რომელიმე მათგანმა გადაიხადოს სხვაზე მეტი ან ნაკლები, ვინაიდან სათამაშო კამათლის ექვსივე წახნაგი ტოლალბათურია. აქედან ჩვენ ვასკვნით, რომ მათემატიკური ლოდინი თითოეული მოთამაშისათვის შეადგენს 1 ლარს.

განმარტება 2. $X:\Omega\to R^1$ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი აღინიშნება EX სიმბოლოთი (E არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა ***Expectation***, რომელიც ნიშნავს – ლოდინი, მოსალოდნელობა) და ეწოდება რიცხვს:

$$EX=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega), \tag{1}$$

ე. ი. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების შეწონილ ჯამს წონებით, რომლებიც ტოლია შესაბამისი ელემენტარული ხდომილებების ალბათობების.

შევნიშნავთ, რომ მათემატიკური ლოდინის აღსანიშნავად ასევე გამოიყენება სიმბოლო MX (M არის პირველი ასო რუსული სიტყვისა ***Математическое ожидание***).

მაგალითი 10. გამოვთვალოთ სათამაშო კამათელზე მოსული ქულათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. (1) თანაფარდობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$EX=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3.5.$$

მათემატიკური ლოდინის ზემოთმოყვანილი განმარტება ტოლფასია შემდეგი განმარტების:

განმარტება 3. თუ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს $x_1,x_2,\ldots,x_n$, ხოლო ამ მნიშვნელობების მიღების ალბათობებია $P\{X=x_i\}:=p_i$, $i=1,2,\ldots,n$, მაშინ მათემატიკური ლოდინი ეწოდება სიდიდეს:

$$EX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n. \tag{2}$$

მათემატიკური ლოდინის ცნება ალბათურ-სტატისტიკურ თეორიაში შეესაბამება სიმძიმის ცენტრის ცნებას მექანიკაში. რიცხვითი ღერძის $x_1,x_2,\ldots,x_n$ წერტილებში განვათავსოთ შესაბამისად p_1, p_2, ... , p_n მასები. მაშინ (2) თანაფარდობა გვიჩვენებს, რომ მატერიალური წერტილების ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მათემატიკურ ლოდინს.

იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს მათემატიკური ლოდინის შინაარსი, დავუშვათ, რომ ჩავატარეთ n დაკვირვება (ექსპერიმენტი) X შემთხვევით სიდიდეზე და ვთქვათ, რომ მან n_1-ჯერ მიიღო მნიშვნელობა x_1, n_2-ჯერ – მნიშვნელობა x_2, და ა. შ. n_m-ჯერ – მნიშვნელობა x_m. ცხადია $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$, ხოლო შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებული მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$ გამოითვლება ფორმულით

$$\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\cdots+x_mn_m}{n},$$

ანუ,

$$\bar{x}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\cdots+x_m\frac{n_m}{n}. \tag{3}$$

აქ $\frac{n_1}{n}$ არის x_1-ის განხორციელების ფარდობითი სიხშირე, $\frac{n_2}{n}$ არის x_2-ის განხორციელების ფარდობითი სიხშირე და ა. შ. $\frac{n_m}{n}$ არის x_m-ის განხორციელების ფარდობითი სიხშირე. თუ დავუშვებთ, რომ დაკვირვებათა რაოდენობა საკმარისად დიდია, მაშინ ფარდობითი სიხშირე ახლოსაა ხდომილების ალბათობასთან

$$\frac{n_1}{n}=p_1,\frac{n_2}{n}=p_2,\ldots,\frac{n_m}{n}=p_m.$$

თუ ახლა (2) თანაფარდობაში ფარდობით სიხშირეებს შევცვლით შესაბამისი ალბათობებით და გავითვალისწინებთ (3) თანაფარდობას, მივიღებთ, რომ

$$\overline{x}=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=EX\ .$$

ე. ი. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი დაახლოებით ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულის.

ცხადია, რომ არაა აუცილებელი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლი იყოს მისი რომელიმე შესაძლო მნიშვნელობის.

თუ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე თანაბარი კანონითაა განაწილებული ანუ ის ყველა თავის მნიშვნელობას $x_1,x_2,...,x_n$ ღებულობს თანაბარი (ერთი და იგივე) ალბათობებით ($p_1=p_2=\cdots=p_n=1/n$), მაშინ მათემატიკური ლოდინი ზუსტად ემთხვევა მისი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულს:

$$EX=x_1\frac{1}{n}+x_2\frac{1}{n}+\cdots+x_m\frac{1}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

განმარტება 4. თუ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე თვლადია, მაშინ

$$EX=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i\ ,$$

თუ ცნობილია, რომ შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია –

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\,x_i\,|\,p_i<\infty\ ,$$

სადაც $p_i:=P\{X=x_i\},\ i=1,2,...$ და $p_1+p_2+\cdots=1$.

მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

თუ X და Y ერთი და იგივე ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განმარტებული შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო $c=const$ რაიმე მუდმივია, მაშინ:

ა) $Ec=c$;

ბ) $E(X+Y)=EX+EY$ და $E(X-Y)=EX-EY$;

გ) $E(cX)=cEX$;

დ) $E(X-EX)=0$;

ე) $E(X-c)^2=E(X-EX)^2+(c-EX)^2$;

ვ) თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია (ანუ ნებისმიერი a და b ნამდვილი რიცხვებისათვის დამოუკიდებელია ხდომილებები $\{X=a\}$ და $\{Y=b\}$), მაშინ $E(X\cdot Y)=EX\cdot EY$.

შედეგი 1. ბ) და გ) პუნქტების გაერთიანება გვაძლევს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი ტოლია მათი მათემატიკური ლოდინების წრფივი კომბინაციის:

$$E(aX+bY)=aEX+bEY\ ,$$

სადაც a და b მუდმივებია.

შედეგი 2. ვინაიდან ე) პუნქტის თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში მეორე შესაკრები ყოველთვის არაუარყოფითია და ნულია მხოლოდ მაშინ, როცა $c=EX$, ამიტომ გამოსახულება $E(X-c)^2$ თავის მინიმუმს c-ს მიმართ აღწევს როცა $c=EX$:

$$\min_{c\in(-\infty,+\infty)}E(X-c)^2=E(X-EX)^2\ .$$

შენიშვნა: საზოგადოდ, ბ) პუნქტის ანალოგიური შედეგი ნამრავლისათვის არამართებულია. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითი. ავიღოთ შემთხვევითი სიდიდე X განაწილების კანონით: $P\{X=0\}=P\{X=1\}=1/2$, ხოლო Y იყოს $Y=1-X$. მაშინ Y იგივე კანონით იქნება განაწილებული:

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=1/2\ ,\ \ P\{Y=0\}=P\{X=1\}=1/2$$

და ცხადია, რომ

$$EX = EY = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

გარდა ამისა, გასაგებია, რომ $XY = 0$ და შესაბამისად, $E(XY) = E0 = 0$. მაგრამ, ვინაიდან $EX\cdot EY = 1/4$, ამიტომ $E(XY) \neq EX\cdot EY$.

შენიშვნა: საზოგადოდ, ე) პუნქტის შებრუნებული დებულება არასწორია. მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი: დავუშვათ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სამი ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილებისაგან $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$. განვმარტოთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად: $X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 0$, $X(\omega_3) = -1$; $Y(\omega_1) = 1, Y(\omega_2) = 0$, $Y(\omega_3) = 1$. მაშინ გასაგებია, რომ $XY = X$, $E(XY) = EX = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + (-1)\cdot\frac{1}{3} = 0$. შესაბამისად,

$$E(XY) = EX\cdot EY.$$

მეორეს მხრივ,

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = P(\omega_2) = 1/3,$$

მაშინ როდესაც X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი რომ იყოს $\{X = 0, Y = 0\}$ ხდომილების ალბათობა უნდა ყოფილიყო $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ($\{X = 0\}$ და $\{Y = 0\}$ ხდომილებების ალბათობების ნამრავლი), ე. ი X და Y შემთხვევითი სიდიდეები არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 11. დავუშვათ, $g(x) = x^3 - 4x$ და მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

-2	-1	0	2
0.1	0.3	0.4	0.2

დავადგინოთ $Y = g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ცხადია, რომ $g(-2) = g(0) = g(2) = 0$ და $g(-1) = 3$. ამიტომ Y შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{Y = 0\}$ და $P\{Y = 3\}$. რადგან ხდომილებები $\{X = -2\}$, $\{X = 0\}$ და $\{X = 2\}$ უთავსებადია, ამიტომ ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{Y = 0\} = P\{(X = -2) \cup (X = 0) \cup (X = 2)\} =$$
$$= P\{X = -2\} + P\{X = 0\} + P\{X = 2\} = 0.1 + 0.4 + 0.2 = 0.7.$$

გარდა ამისა, $P\{Y = 3\} = P\{X = -1\} = 0.3$. ამიტომ $Y = g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

0	3
0.7	0.3

ამიტომ, განმარტების თანახმად $EY = 0\cdot 0.7 + 3\cdot 0.3 = 0.9$.

$Y = g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა შესაძლებელია მეორენაირადაც. კერძოდ,

$$EY = g(-2)\cdot 0.1 + g(-1)\cdot 0.3 + g(0)\cdot 0.4 + g(2)\cdot 0.2 =$$
$$= 0\cdot 0.1 + 3\cdot 0.3 + 0\cdot 0.4 + 0\cdot 0.2 = 0.9.$$

საზოგადოდ, სამართლიანია **შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციებიდან მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა** – თუ $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, მაშინ $Y = g(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოითვლება ფორმულით:

$$Eg(X) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \cdots + g(x_n)p_n = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i .$$

მაგალითი 12. გამოვთვალოთ პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი ($P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$).

თუ ვისარგებლოთ წარმოდგენით $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$, მაშინ გვექნება:

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

ე. ი. პუასონის განაწილების λ პარამეტრი წარმოადგენს ამ განაწილების მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას).

მაგალითი 13. წრიულ სამიზნეს შეუძლია იტრიალოს ცენტრის გარშემო. ის დაყოფილია თანაბარი ზომის რვა სექტორად, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 8-მდე. სამიზნის საკმარისად სწრაფი ტრიალის შემთხვევაში მსროლელი ვერ ასხვავებს სექტორის ნომრებს და იძულებულია ისროლოს შემთხვევით. თუ ტყვია მოხვდება i-ურ სექტორს მსროლელი იგებს i ლარს ($i=1,2,\ldots,8$). მიზანშეწონილია თუ არა მსროლელმა ესროლოს სამიზნეს, თუ ამაში მან უნდა გადაიხადოს 5 ლარი?

ამოხსნა. რადგანაც სამიზნე სწრაფად ტრიალებს, მსროლელის შესაძლებლობებს არანაირი აზრი არ გააჩნია: მიზანში მოხვედრა – წმინდა წყლის შემთხვევითობაა. შემთხვევითი სიდიდე X იყოს შესაძლო მოგებები. მან შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები 1, 2, ... , 8, და ვინაიდან ყველა სექტორი ერთნაირია, თითოეულ ამ მნიშვნელობას შემთხვეითი სიდიდე მიიღებს ერთი და იმავე ალბათობით 1/8. შესაბამისად, მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$EX=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+\cdots+8\cdot\frac{1}{8}=4.5 \text{ ლარი}.$$

მაშასადამე, საშუალო მოგება შეადგენს 4.5 ლარს და ამიტომ არ ღირს სროლის უფლებაში 5 ლარის გადახდა.

თამაშის მათემატიკური ლოდინი. მოთამაშე დებს 1 ლარს, ასახელებს რაიმე რიცხვს 1-დან 6-მდე, აგორებენ წესიერ კამათელს და თუ მოვა მოთამაშის მიერ დასახელებული რიცხვი, ის იგებს 4 ლარს და, ამასთანავე, უკან უბრუნებენ 1 ლარს. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოთამაშე კარგავს 1 ლარს. ვიპოვოთ მოგების მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. თუ მოგებას აღვნიშნავთ X სიმბოლოთი, მისი განაწილების კანონი იქნება:

X	4	-1
P	1/6	5/6

შესაბამისად, $EX=4\cdot(1/6)+(-1)\cdot(5/6)=-1/6\approx-0.1667$. ეს იმას ნიშნავს, რომ თამაში არ არის სამართლიანი – თამაში ისეთია, რომ მოთამაშე საშუალოდ აგებს. ადვილი დასანახია, რომ თუ ამოცანის პირობაში 4 ლარს შევცვლით 5 ლარით, მაშინ თამაში გახდება „სამართლიანი“ – $EX=0$. *თამაშს ეწოდება სამართლიანი, თუ მოგების მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია, ანუ გრძელ სერიაში მოთამაშე არც იგებს და არც აგებს.*

მათემატიკური ლოდინი და დაზღვევა. დავუშვათ, რომ თქვენ გსურთ დააზღვიოთ თქვენი 2000 ლარის ღირებულების ვიდეოსისტემა მოპარვისაგან. სადაზღვევო კომპანია წელიწადში თქვენგან ითხოვს პრემიას (შენატანს) 225 ლარს. კომპანიამ ემპირიულად დაადგინა, რომ წლის განმავლობაში ვიდეოსისტემის მოპარვის ალბათობაა 0.1. რა იქნება თქვენი მოსალოდნელი დანაკარგი დაზღვევის შემთხვევაში?

ამოხსნა. ეს ფაქტობრივად არის თამაში, სადაც თქვენ დებთ 225 ლარს და 0.1-ის ტოლი ალბათობით იგებთ $2000-225=1775$ ლარს, ხოლო 0.9-ის ტოლი ალბათობით აგებთ 225 ლარს. ამ „თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი წინა მაგალითის მიხედვით იქნება:

$$EX=1775\cdot0.1+(-225)\cdot0.9=-25.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ თქვენ მრავალი წლის განმავლობაში დააზღვევთ თქვენს ვიდეოსისტემას ერთი და იგივე პირობებში, მაშინ საშუალოდ წელიწადში თქვენ დაკარგავთ 25 ლარს სადაზღვევო კომპანიის სასარგებლოდ.

შევხედოთ ამ ამოცანას სადაზღვევო კომპანიის თვალთახედვით: კომპანია იგებს 225 ლარს 0.9 ალბათობით და აგებს 1775 ლარს 0.1 ალბათობით. შესაბამისად, მისი „თამაშის“ მათემატიკური ლოდინი იქნება:

$$EY = 225 \cdot 0.9 + (-1775) \cdot 0.1 = 25\,.$$

ე. ი. თუ კომპანიაში თქვენნაირ პირობებში რეგულარულად დაეზღვევა ბევრი კლიენტი, კომპანია წელიწადში თითოეულისგან საშუალოდ მოიგებს 25 ლარს.

მათემატიკური ლოდინი და გადაწყვეტილების მიღება. კულტურის დეპარტამენტს სურს პოპულარული მუსიკალური ჯგუფის კონცერტი ჩაატაროს ღია სტადიონზე და შიშობს, რომ შესაძლებელია იყოს წვიმა. სინოპტიკოების პროგნოზით წვიმის ალბათობა შეადგენს 0.24-ს. დეპარტამენტის შეფასებით, თუ არ იწვიმებს კონცერტისაგან შემოვა 100000 ლარი, ხოლო წვიმის შემთხვევაში მხოლოდ 10000 ლარი. სადაზღვევო კომპანია თანახმაა ეს კონცერტი დააზღვიოს წვიმისაგან 100000 ლარით 20000 ლარიანი პრემიის სანაცვლოდ. უნდა იყიდოს თუ არა დეპარტამენტმა ასეთი დაზღვევა?

ამოხსნა. კულტურის დეპარტამენტს აქვს ორი არჩევანი: A – დააზღვიოს კონცერტი ან B – არ დააზღვიოს კონცერტი. სანამ დეპარტამენტი გადაწყვეტილებას მიიღებს მან უნდა გამოთვალოს ორივე ქმედების შედეგად მოსალოდნელი საშუალო. X და Y ასოებით აღვნიშნოთ, შესაბამისად, თუ რას მიიღებს დეპარტანენტი თითოეულ შემთხვევში. მაშინ გასაგებია, რომ მათ ექნებათ შემდეგი განაწილებები:

ქმედება		იწვიმა	არ იწვიმა
A	X	90000	80000
B	Y	10000	100000
	P	0.24	0.76

შევნიშნოთ, რომ აქ 90000 მიღებულია შემდეგნაირად: დეპარტამენტმა დააზღვია კონცერტი (რაშიც გადაიხადა 20000 ლარი) და მოვიდა წვიმა – კონცერტიდან შემოვიდა 10000 ლარი, ხოლო სადაზღვევო კომპანიამ დეპარტმენტს გადაუხადა 100000 ლარი ($-20000 + 10000 + 100000 = 90000$). თითოეული ქმედებისაგან მოსალოდნელი საშუალოები იქნება:

$$EX = 90000 \cdot 0.24 + 80000 \cdot 0.76 = 82400\,,$$
$$EY = 10000 \cdot 0.24 + 100000 \cdot 0.76 = 78400\,.$$

აქედან გამომდინარე, დეპარტამენტმა კონცერტი უნდა დააზღვიოს.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია

მათემატიკური ლოდინი გვიჩვენებს თუ რომელი წერტილის (მნიშვნელობის) ირგვლივ ჯგუფდება (ლაგდება) შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები. ხშირ შემთხვევაში საჭიროა შეგვეძლოს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების ცვლილების (ცვალებადობის) გაზომვა მათემატიკური ლოდინის მიმართ. განვიხილოთ ორი დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების შემდეგი კანონებით:

X	-3	1
P	1/4	3/4

Y	-90	45
P	1/3	2/3

გამოვთვალოთ თითოეულის მათემატიკური ლოდინი:

$$EX = (-3) \cdot 1/4 + 1 \cdot 3/4 = 0 \quad \text{და} \quad EY = (-90) \cdot 1/3 + 45 \cdot 2/3 = 0\,.$$

როგორც ვხედავთ ორივე შემთხვევით სიდიდეს აქვს ერთი და იგივე მათემატიკური ლოდინი, მაგრამ მათი განაწილებები განსხვავდებიან იმით, რომ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები გაცილებით ახლოსაა მათემატიკურ ლოდინთან (ამ შემთხვევაში ნულთან), ვიდრე Y შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები.

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მათემატიკური ლოდინის მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ გამოსახულება $E(X-c)^2$ აღწევს მინიმუმს c-ს მიმართ როცა $c = EX$. ამიტომ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გაფანტულობის საზომად ბუნებრივია ავიღოთ $E(X-EX)^2$.

განმარტება 5. X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია (აღინიშნება DX -ით, D არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა -- ***Dispersion***) ეწოდება $(X-EX)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$$DX := E(X-EX)^2. \qquad (4)$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით დისპერსია შესაძლებელია გადაიწეროს სხვა ფორმით:

$$DX = E(X-EX)^2 = E[X^2 - 2X\cdot EX + (EX)^2] =$$
$$= EX^2 - 2EX\cdot EX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2. \qquad (5)$$

თუ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

მაშინ მათემატიკური ლოდინისა და შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციებიდან მათემატიკური ლოდინის გამოსათველელი ფორმულების თანახმად დისპერსიის გამოსათვლელ ფორმულებს (4) და (5) ფორმულების მიხედვით ექნება შესაბამისად შემდეგი სახე:

$$DX = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j p_j)^2 p_i, \qquad (6)$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (\sum_{j=1}^{n} x_j p_j)^2. \qquad (7)$$

მაგალითი 14. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

გამოვთვალოთ მისი დისპერსია.

ვინაიდან დისპერსიის გამოსათვლელად გვაქვს ორი (6) და (7) ფორმულები, შესაბამისად, გვექნება დისპერსიის გამოთვლის ორი ხერხი. მოხერხებულია ეს გამოთვლები ჩაიწეროს ცხრილების სახით.

დისპერსიის გამოთვლის პირველი ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	$(x_i - EX)^2$	$(x_i - EX)^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	5.29	0.5290
2	0	0.15	0	1.69	0.2535
3	1	0.30	0.3	0.09	0.0270
4	2	0.25	0.5	0.49	0.1225
5	3	0.20	0.6	2.89	0.5780
			$EX = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1.3$		$DX = \sum_{i=1}^{5}(x_i - EX)^2 p_i = 1.51$

დისპერსიის გამოთვლის მეორე ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	1	0.1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0.3

4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1.8
			$EX=\sum_{i=1}^{5}x_ip_i=1.3$ $DX=EX^2-(EX)^2=1.51$		$EX^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2p_i=3.2$

დისპერსიის თვისებები:

I. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია -- $Dc=0$. მართლაც,

$$Dc=E(c-Ec)^2=E(c-c)^2=0;$$

II. $D(aX+b)=a^2DX$. მართლაც, მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით გვაქვს:

$$D(aX+b)=E[(aX+b)-E(aX+b)]^2=E[aX+b-aEX-b]^2=$$

$$=E[a(X-EX)]^2=E[a^2(X-EX)^2]=a^2E(X-EX)^2=a^2DX.$$

III. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მათი ჯამის (და აგრეთვე სხვაობის) დისპერსია თითოეულის დისპერსიების ჯამია:

$$D(X\pm Y)=DX+DY.$$

შენიშვნა. რაც შეეხება ჯამის მათემატიკურ ლოდინს ის ყოველთვის შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია, მიუხედავად იმისა დამოუკიდებელია თუ დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეები.

ეს ორი თანაფარდობა არსებით როლს თამაშობს მათემატიკურ სტატისტიკაში მონაცემთა შერჩევითი მახასიათებლების შესწავლის დროს, ვინაიდან შერჩევაში მონაწილე დაკვირვებებისა და გაზომვების შედეგები, მათემატიკურ სტატისტიკაში, გადაწყვეტილებების მიღების თეორიაში და ეკონომეტრიკაში, როგორც წესი განიხილება როგორც დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების რეალიზაციები.

მაგალითი 15. ცნობილია, რომ X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ორ მნიშვნელობას $x_1=2$ და $x_2=3$, ხოლო მისი მათემატიკური ლოდინია $EX=2.2$. იპოვეთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, განაწილების ფუნქცია და დისპერსია.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $P\{X=2\}=p$, მაშინ $P\{X=3\}=1-p$. მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვაქვს

$$2.2=2p+3(1-p),$$

საიდანაც $p=0.8$. შესაბამისად, განაწილების კანონს აქვს სახე:

X	2	3
P	0.8	0.2

აქედან გამომდინარე, განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<2\\ 0.8, & \text{თუ } 2\le x<3,\\ 0.8+0.2, & \text{თუ } x\ge 3.\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{თუ } x<2\\ 0.8, & \text{თუ } 2\le x<3,\\ 1, & \text{თუ } x\ge 3.\end{cases}$$

გამოვთვალოთ დისპერსია:

$$DX=(2-2.2)^2\cdot 0.8+(3-2.2)^2\cdot 0.2=0.16.$$

მაგალითი 16. A კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 40%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.3, ხოლო B კომპანია ინვესტორებს პირდება წლიურ 30%-ს, მაგრამ შესაძლებელია გაკოტრდეს ალბათობით 0.2. იგულისხმება, რომ კომპანიების გაკოტრება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ინვესტორმა A კომპანიაში ჩადო 20 მილიონი ლარი, ხოლო B კომპანიაში კი 18 მილიონი ლარი. შეადგინეთ ორივე კომპანიიდან ინვესტორის ერთობლივი შემოსავლების X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, გამოთვალეთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ამოხსნა. ცხადია, რომ X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია:

$x_1 = 0$, თუ ორივე კომპანია გაკოტრდა;

$x_2 = 20 + 0.4 \cdot 20 = 28$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ B კომპანია;

$x_3 = 18 + 0.3 \cdot 18 = 23.4$, თუ გაკოტრდა მხოლოდ A კომპანია;

$x_4 = 28 + 23.4 = 51.4$, თუ არცერთი კომპანია არ გაკოტრდა.

X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{X = x_i\}, i = 1,2,3,4$. ამ მიზნით შემოვიღოთ ხდომილობები: $C=\{A$ კომპანია გაკოტრდება$\}$, $D=\{B$ კომპანია გაკოტრდება$\}$. მაშინ ცხადია, რომ $P\{X = x_1\} = P\{CD\}$ და ვინაიდან ამოცანის პირობებში ეს ხდომილობები დამოუკიდებელია, ამიტომ დამოუკიდებლობის განმარტების თანახმად:

$$P\{X = x_1\} = P\{CD\} = P\{C\}P\{D\} = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 .$$

გარდა ამისა, გასაგებია, რომ $P\{X = x_2\} = P\{\overline{C}D\}$, $P\{X = x_3\} = P\{C\overline{D}\}$ და $P\{X = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\}$. როგორც ცნობილია, როცა ორი ხდომილოება დამოუკიდებელია, მაშინ აგრეთვე დამოუკიდებელია ერთ-ერთი მეორის საწინააღმდეგოსგან . საიდანაც ვღებულობთ, რომ დამოუკიდებლებია $\overline{C}$ და D, C და $\overline{D}$, $\overline{C}$ და $\overline{D}$. ამიტომ გვაქვს:

$$P\{X = x_2\} = P\{\overline{C}D\} = P\{\overline{C}\}P\{D\} = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14 ;$$

$$P\{X = x_3\} = P\{C\overline{D}\} = P\{C\}P\{\overline{D}\} = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24 ;$$

$$P\{X = x_4\} = P\{\overline{C}\,\overline{D}\} = P\{\overline{C}\}P\{\overline{D}\} = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56 .$$

შესაბამისად, X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება:

X	0	23.4	28	51.4
P	0.06	0.24	0.14	0.56

განმარტების თანახმად:

$$EX = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 38.32 ;$$

$$DX = \sum_{i=1}^{4} (x_i - EX)^2 p_i = 252.25 .$$

მაგალითი 17. განვიხილოთ რაიმე A ხდომილება და X შემთხვევითი სიდიდე, ისეთი, რომ $X(\omega) = 1$, თუ $\omega \in A$ და $X(\omega) = 0$, თუ $\omega \notin A$ (ასეთ შემთხვევით სიდიდეს A ხდომილების **მახასიათებელი ფუნქცია** ან **ინდიკატორი** ეწოდება). შევამოწმოთ, რომ

$$EX = P(A), \ DX = P(A)(1 - P(A)) ,$$

კერძოდ, თუ $P(A) = p$, მაშინ $EX = p$, $DX = p(1 - p)$.

გასაგებია, რომ ამ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება

x_i	1	0
p_i	$P(A)$	$1- P(A)$

ასეთი კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს **ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს** უწოდებენ.

მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად გვექნება

$$EX = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = P(A) .$$

შესაბამისად, $Y = (X - EX)^2 = (X - P(A))^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი იქნება:

y_i	$(1 - P(A))^2$	$(P(A))^2$
p_i	$P(A)$	$1- P(A)$

ამიტომ,

$$DX = EY = (X - P(A))^2 = (1 - P(A))^2 \cdot P(A) + (P(A))^2 \cdot (1 - P(A)) =$$
$$= P(A) \cdot (1 - P(A)) \cdot [1 - P(A) + P(A)] = P(A) \cdot (1 - P(A)) . \quad ■$$

ბერნულის განაწილების საშუალო და დისპერსია

- საშუალო: μ = P

$$\mu = E(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-P) + (1)P = P$$

- დისპერსია: $\sigma^2 = P(1-P)$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$$
$$= (0-P)^2(1-P) + (1-P)^2 P = P(1-P)$$

მაგალითი 18. გამოვთვალოთ ბინომიალური განაწილების რიცხვითი მახასიათებლები.

ადვილი დასანახია, რომ ბინომიალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე ($P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$) წარმოიდგინება n ცალი დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით: $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$, სადაც $X_i=1$ თუ i-ურ ცდაში მოხდა "წარმატება" და $X_i=0$ თუ i-ურ ცდაში მოხდა "მარცხი". შესაბამისად,

$$EX = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n = np \text{ და } DX = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n = np(1-p).$$

ბინომიალური განაწილების საშუალო და დისპერსია

- საშუალო $\mu = E(x) = nP$

- დისპერსია და სტანდარტული გადახრა

$$\sigma^2 = nP(1-P)$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)}$$

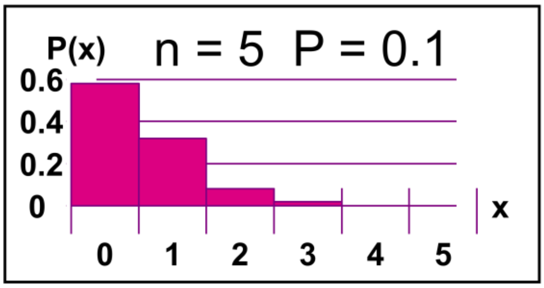
სადაც **n =** შერჩევის მოცულობა
P = "წარმატების" ალბათობა
(1 – P) = "მარცხის" ალბათობა

ბინომიალური მახასიათებლები

მაგალითები

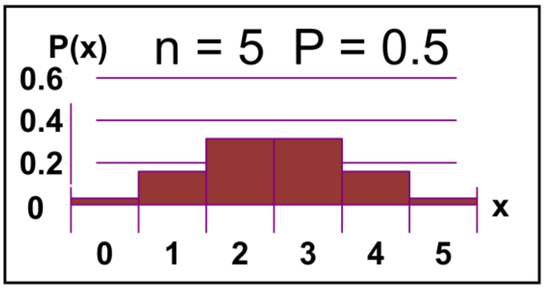
$$\mu = nP = (5)(0.1) = 0.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.1)(1-0.1)} = 0.6708$$



$$\mu = nP = (5)(0.5) = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.5)(1-0.5)} = 1.118$$



ჰიპერგეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში ($P\{X=k\} = \dfrac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k = 0,1,\ldots,\min(n, M)$) გვაქვს:

$$EX = \frac{n \cdot M}{N} \quad \text{და} \quad DX = \frac{n \cdot M \cdot (N-M) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}.$$

გამოვთვალოთ **პუასონის განაწილების** ($P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$) დისპერსია. როგორც ჩვენ უკვე ვნახეთ პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი ემთხვევა მის λ პარამეტრს. წინასწარ ვიპოვოთ პუასონის შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი. თუ ვისარგებლოთ წარმოდგენით: $X^2=X(X-1)+X$, გვექნება:

$$EX^2=E[X(X-1)]+EX=E[X(X-1)]+\lambda.$$

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციიდან მათემატიკური ლოდინის გამოთვლის წესის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2.$$

საბოლოოდ, გვაქვს:

$$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

ე. ი. პუასონის განაწილების როგორც მათემატიკური ლოდინი, ისე დისპერსია ტოლია ამ განაწილების λ პარამეტრის.

- **საშუალო**

$$\boxed{\mu=E(x)=\lambda}$$

- **დისპერსია და სტანდარტული გადახრა**

$$\boxed{\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\lambda} \qquad \boxed{\sigma=\sqrt{\lambda}}$$

სადაც λ = წარმატებათა მოსალოდნელი რაოდენობა დროის ერთეულში

გეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში ($P\{X=k\}=pq^{k-1},\ k=1,2,\ldots$):

$$EX=1/p \quad \text{და} \quad DX=q/p^2.$$

სტანდარტული გადახრა

განმარტება 7. X შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან და აღინიშნება σX სიმბოლოთი:

$$\sigma X=+\sqrt{DX}.$$

σX-ს ხშირად **სტანდარტულ გადახრასაც** უწოდებენ. გადახრის ამ მახასიათებლის შემოღება განპირობებულია იმით, რომ განსხვავებით დისპერსიისაგან, იგი ზომის იგივე ერთეულებში გამოისახება, რაც X შემთხვევითი სიდიდე.

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა დაახლოებით მიუთითებს იმაზე, თუ რამდენად განსხვავდება შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული

მნიშვნელობა მათემატიკური ლოდინისაგან. კომერციული მოღვაწეობის ხშირ შემთხვევაში სტანდარტული გადახრა არის რისკის მახასიათებელი, მიუთითუთებს რა, თუ რამდენად განუსაზღვრელია სიტუაცია.

შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია. დავუშვათ, რომ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია EX, ხოლო საშუალო კვადარტული გადახრაა -- σX. განვიხილოთ ახალი შემთხვევითი სიდიდე

$$Y = \frac{X - EX}{\sigma X} \tag{8}$$

და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებებიდან გამომდინარე ადვილი დასანახია, რომ $EY = 0$ და $DY = 1$. მართლაც, გვაქვს:

$$EY = E(\frac{X - EX}{\sigma X}) = E[\frac{1}{\sigma X} \cdot (X - EX)] = \frac{1}{\sigma X} \cdot E[(X - EX)] = 0$$

და

$$DY = D(\frac{X - EX}{\sigma X}) = D[\frac{1}{\sigma X} \cdot (X - EX)] = \frac{1}{(\sigma X)^2} \cdot D[(X - EX)] = \frac{1}{DX} \cdot DX = 1.$$

(8) გარდაქმნას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის **ცენტრირება** (მათემატიკური ლოდინის გამოკლება) და **ნორმირება** (საშუალო კვადრატულ გადახრაზე გაყოფა) ან უფრო მოკლედ -- X შემთხვევითი სიდიდის **სტანდარტიზაცია.**

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ სტანდარტიზაცია არის შემთხვევითი სიდიდის ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომელსაც გარკვეული მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის მქონე შემთხვევითი სიდიდე დაყავს ნოლოვანი მათემატიკური ლოდინისა და ერთეულოვანი დისპერსიის მქონე (ანუ სტანდარტულ) შემთხვევით სიდიდეზე.

ამოცანები

1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი კამათლის აგდებისას მოსულ ქულათა: ა) ჯამი; ბ) ნამრავლი; გ) განაყოფი; დ) სხვაობა; ე) სხვაობის მოდული. ააგეთ განაწილების კანონი.

2. კამათელს აგდებენ ერთხელ. 6 ქულის მოსვლის შემთხვევაში კამათელს აგდებენ მეორედ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ქულათა ჯამი (თუ I აგდებისას არ მოვიდა 6 ქულა, მაშინ II შესაკრებად ჩავთვალოთ 0). ააგეთ განაწილების კანონი.

3. ჩანთაში დევს 2 წითელი და 3 ლურჯი ფანქარი. ჩანთიდან შემთხვევით იღებენ ორ ფანქარს დაბრუნების გარეშე. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მათში ლურჯი ფანქრების რიცხვი. ააგეთ განაწილების კანონი.

5. წესიერ მონეტას აგდებენ ორჯერ. ააგეთ მოსულ გერბთა რიცხვის განაწილების კანონი.

6. ორ წესიერ კამათელს აგდებენ ერთდროულად. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მიღებული ქულებიდან უდიდესსა და უმცირესს შორის სხვაობა (როცა დაკვირვებები ტოლია – სხვაობა არის 0). ააგეთ განაწილების კანონი.

7. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთხელ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის ნახევარი, როცა ქულა ლუწია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გაორმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.

8. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 3 მწვანე კალკულატორი. ჩანთიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 2 კალკულატორს. ააგეთ მათში მწვანე კალკულატორთა რიცხვის განაწილების კანონი.

9. ქვემოთ მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

ξ	1	2	3	4	5
P	q	$2q$	$3q$	$4q$	$5q$

იპოვეთ: ა) q, ბ) $P\{\xi \le 3\}$, გ) $P\{\xi > 2\}$.

10. კომპიუტერი დაპროგრამებულია 0-დან 9-ის ჩათვლით ერთნიშნა რიცხვების მისაღებად (ξ შემთხვევითი სიდიდე) ისე, რომ კენტი ციფრების (1, 3, 5, 7, 9) მიღების ალბათობა არის ლუწი ციფრების (0, 2, 4, 6, 8) მიღების ალბათობის ნახევარი. იპოვეთ განაწილების კანონი.
11. იპოვეთ p თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	-2	-1	0	3	4
P	p	0.3	0.12	0.34	p^2

12. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე ლუწი ქულის მოსვლის ალბათობა 3-ჯერ მეტია კენტი ქულის მოსვლის ალბათობაზე. ამ კამათელს აგდებენ 420-ჯერ. გამოთვალეთ მოსალოდნელი რიცხვი (სიხშირე) იმისა, რომ მოვა: ა) 1 ქულა; ბ) ლუწი ქულა; გ) მარტივი რიცხვი.
13. ქვემოთ მოყვანილია ξ შემთხვევითი სიდიდის დაგროვილი ალბათური განაწილების კანონი (ანუ $P\{\xi \le k\}$ ნაცვლად $P\{\xi = k\}$-სი):

ξ	0	1	2	3	4	5
$P\{\xi \le k\}$	0.116	0.428	0.765	0.946	0.995	1.000

გაკეთდა 100 დაკვირვება ξ შემთხვევით სიდიდეზე. გამოთვალეთ უახლოეს მთელ რიცხვამდე დამრგვალებული ყველა შედეგის მოსალოდნელი სიხშირე.
14. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} 0.3\cdot(0.7)^k, & \text{თუ } k = 1,2,3,4; \\ p, & \text{თუ } k = 5; \\ 0, & \text{ყველა დანარჩენი } k-\text{თვის}. \end{cases}$$

იპოვეთ p და $\{\xi = 3\}$ ხდომილების მოსალოდნელი სიხშირე, როცა ξ შემთხვევითი სიდიდეზე ტარდება 1000 დაკვირვება.
15. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4
P	0.1	a	0.3	b

ცნობილია, რომ $E\xi = 3$. იპოვეთ a და b.
16. ცნობილია, რომ არც ერთი სოკო არ ცოცხლობს მომავალ წლამდე. ნებისმიერი სოკო მომდევნო წელს იძლევა ξ რაოდენობის ახალ სოკოს. დავუშვათ, რომ მიმდინარე წელს ხარობს ორი სოკო. ვიპოვოთ მომავალ წელს სოკოთა η რაოდენობის განაწილების კანონი, გამოვთვალოთ η-ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

მ ი თ ი თ ე ბ ა: შეადგინეთ დამოუკიდებელი ξ, ξ წყვილის ერთობლივი განაწილების კანონი – $\eta = \xi + \xi$.
17. გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი განაწილების კანონების მიხედვით შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

ξ	0	1	2	3	4
P	1/8	3/8	1/8	1/4	1/8

ξ	-2	-1	0	1	2	3
P	0.15	0.25	0.3	0.05	0.2	0.05

ξ	1	2	3	4	5	6	7
P	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1

ξ	3	4	5	6	7

P	1/18	5/18	7/18	1/18	4/18

18. წესიერი სათამაშო კამათლის წახნაგებზე დაწერილია ციფრები 1, 2, 2, 3, 3 და 3. ავღნიშნოთ ξ ასოთი კამათლის ერთხელ გაგორებისას მოსული ქულა. ვიპოვოთ ξ-ს მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

19. წესიერი სათამაშო კამათლის წახნაგებზე დაწერილია ციფრები 1, 2, 2, 3, 3 და 3. ავღნიშნოთ ξ ასოთი კამათლის ორჯერ გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ააგეთ ξ-ს განაწილების კანონი და გამოთვალეთ მისი ლოდინი და დისპერსია.

20. სამშენებლო კომპანიას სთავაზობენ ორ A და B პროექტს და ფინანსურმა დირექტორმა უნდა ურჩიოს კომპანიას ამ პროექტებიდან რომელი უნდა აირჩიოს. მისი შეფასებით A პროექტი იძლევა 150000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.5, 250000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.2 და 100000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.3. B პროექტი იძლევა 100000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.6, 200000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.3 და 50000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.1. დაადგინეთ რომელ პროექტს უნდა დაუჭიროს მხარი ფინანსურმა დირექტორმა. მითითება: შეადარეთ ერთმანეთს $E(A)$ და $E(B)$.

21. სუპერმარკეტში კვერცხები იყიდება ყუთებით, რომელშიც დევს 6 – 6 კვერცხი. გატეხილი კვერცხების ξ რაოდენობის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.8	0.14	0.03	0.02	0.01	0	0

იპოვეთ: ა) ξ-ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია; ბ) გაუტეხავი კვერცხების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

22. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4	5
P	a	0.3	0.2	0.1	0.2

იპოვეთ: a და ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

23. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	2	3	4	5	6	7
P	0.05	0.25	a	b	0.1	0.3

ცნობილია, რომ $E\xi = 4.9$. ვაჩვენოთ, რომ $a = b$ და გამოვთვალოთ ξ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტული გადახრა.

24. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ მანამ სანამ არ გამოჩნდება 6 ქულა ან არ ჩატარდება 4 აგდება. ξ იყოს ჩატარებულ აგდებათა რაოდენობა, ხოლო η – კი მოსული 6 ქულების რაოდენობა ამ თამაშში. იპოვეთ: ა) ξ-ს განაწილების კანონი; ბ) ξ-ს სტანდარტული გადახრა; გ) $E\eta$.

25. კომიტეტი, რომლის შემადგენლობაში შედის 6 მამაკაცი და 4 ქალი, ირჩევს თავის 2 წარმომადგენელს. ვიგულისხმოთ, რომ კომიტეტის ნებისმიერი წევრის არჩევა თანაბარად შესაძლებელია და ავაგოთ არჩეული ქალების რაოდენობის განაწილების კანონი. ვიპოვოთ არჩეული ქალების მოსალოდნელი რიცხვი.

26. აგდებენ წესიერ ოთხწახნაგა პირამიდას, რომელზეც აღნიშნულია ციფრები 1, 2, 3 და 4. შემდეგ აგდებენ წესიერ მონეტას იმდენჯერ რა ციფრიც მოვა პირამიდის ფუძეზე. ξ იყოს პირამიდის ფუძეზე მოსული ქულა, ხოლო η – კი მოსული გერბების რაოდენობა: ა) აჩვენეთ, რომ $P\{\eta = 2\} = 1/4$; ბ) ააგეთ η-ს განაწილების კანონი; გ) აჩვენეთ, რომ $E\eta = \frac{1}{2}E\xi$; დ) გამოთვალეთ $D\xi$.

27. მონადირეს აქვს 4 ტყვია. ის ესვრის კურდღელს მანამ სანამ არ მოარტყამს ან ტყვია არ გაუთავდება. გამოთვალეთ სროლათა რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი, თუ ცნობილია, რომ მოხვედრის ალბათობაა 0.25.

28. ზეინკალი ემსახურება 4 ჩარხს. ალბათობა იმისა, რომ ეს ჩარხები 1 საათის განმავლობაში არ მოითხოვს კორექტირებას შესაბამისად არის 0.9, 0.8, 0.75 და 0.7. იპო-

ვეთ იმ ჩარხების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი, რომლებიც 1 საათის განმავლობაში არ მოითხოვს კორექტირებას.

29. სამიზნეს ესვრიან მეორე მოხვედრამდე. იპოვეთ სროლათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი, თუ ერთი სროლით მოხვედრის ალბათობაა 0.2.

30. მძღოლმა უნდა გაიაროს 4 შუქნიშანი. თითოეული შუქნიშანი მას გაატარებს 0.5 ალბათობით. იპოვეთ შუქნიშანთა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი მძღოლს პირველ გაჩერებამდე.

31. სამიზნეს ესვრიან პირველ მოხვედრამდე. ტყვიების რაოდენობა შეუზღუდავია. ერთი სროლით მოხვედრის ალბათობაა p. გამოთვალეთ, თუ რამდენი ტყვია დაიხარჯება საშუალოდ.

32. კალათბურთელს საჯარიმოს ჩაგდება შეუძლია ალბათობით 0.5. ზედიზედ საშუალოდ რამდენი საჯარიმოს ჩაგდება შეუძლია კალათბურთელს.

33. მოცემულია ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.15	0.2	0.15	0.1	0.15	0.05	0.15	0.05

η	9	8	7	6	5	4	3	2
P	0.15	0.1	0.15	0.1	0.15	0.1	0.15	0.1

გამოთვალეთ: ა) $D\xi$; ბ) $D\eta$; გ) $D(\xi+\eta)$, თუ ცნობილია, რომ ξ და η დამოუკიდებელია.

34. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 1/3. იპოვეთ მიზანში მოხვედრთა რიცხვის დისპერსია.

35. სამიზნეს ესვრიან 3-ჯერ. მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.4. იპოვეთ მიზანში მოხვედრათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

36. კალათბურთელი ბურთს ისვრის კალათში პირველ ჩაგდებამდე. ბურთის კალათში ჩაგდების ალბათობაა 0.6. იპოვეთ სროლათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

37. იპოვეთ დისპერსია ξ შემთხვევითი სიდიდის, რომელიც წარმოადგენს A ხდომილების მოხდენათა რაოდენობას ორ დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში თუ ცნობილია, რომ A ხდომილების მოხდენის ალბათობები ამ ექსპერიმენტებში ერთი და იგივეა და $E\xi=1.2$.

38. ξ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას: x_1 და x_2, ამასთანავე $x_2>x_1$; $P(\xi=x_1)=0.6$. ააგეთ ξ-ს განაწილების კანონი, თუ ცნობილია, რომ $E\xi=1.4$ და $D\xi=0.24$.

39. ცნობილია, რომ $E\xi=a$ და $D\xi=b$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდეების: ა) $\eta=-\xi$; ბ) $\theta=\xi+2\eta-1$; გ) $\delta=3\xi-\eta+2\theta-3$.

40. წლიური სადაზღვევო შესატანი სურათის 5000 ლარიანი სადაზღვევო პოლისისათვის შეადგენს 650 ლარს. თუ ემპირიული ალბათობა იმისა, რომ სურათს მოიპარავენ წლის განმავლობაში არის 0.1, რა იქნება თქვენი მოსალოდნელი დანაკარგი სურათის დაზღვევის შემთხვევაში?

თავი IX

უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდე

ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის,** თუ მისი განაწილების ფუნქცია – $F_\xi(x) := P\{\xi \le x\}$ უწყვეტია. თუ განაწილების ფუნქცია წარმოიდგინება

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$$

სახით, მაშინ $f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე.** სიმკვრივეს აქვს შემდეგი თვისებები:

ა) $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის;

ბ) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;

გ) $P\{\xi \in \langle a,b\rangle\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx$, სადაც $\langle a,b\rangle$ არის ნებისმიერი (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ინტერვალებიდან.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მედიანა** Me არის ის მნიშვნელობა, რომელიც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებულ ფართობს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად. მათემატიკურად ის ასე განიმარტება:

$$P\{\xi \le Me\} = F_\xi(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის p**-კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p მნიშვნელობას, რომელ მნიშვნელობამდეც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული ფართობი p-ს ტოლია:

$$P\{\xi \le x_p\} = F_\xi(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f_\xi(x)dx = p.$$

გასაგებია, რომ $x_{0.5} = Me$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **ქვედა კვარტილი** Q_1 (შესაბამისად, **ზედა კვარტილი,** Q_3) ეწოდება $\frac{1}{4}$-კვანტილს (შესაბამისად, $\frac{3}{4}$-კვანტილს).

სხვაობას $Q_3 - Q_1$ **კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება.

განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილს **ზედა** α**-კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** Mo ეწოდება არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, სადაც სიმკვრივე აღწევს მაქსიმუმს: $f_\xi(Mo) = \max_x f_\xi(x)$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი (ანუ საშუალო)** განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E\xi = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** გამოითვლება ფორმულით:

$$D\xi = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \mu^2.$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი a გამოითვლება ფორმულით:

$$a=\frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^3 f_\xi(x)dx\,.$$

ექსცესის კოეფიციენტი e ტოლია:

$$e=\frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^4 f_\xi(x)dx-3\,.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & \text{თუ } 1\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) შეამოწმეთ, რომ $f_\xi(x)$ აკმაყოფილებს სიმკვრივის ა და ბ თვისებას;
ბ) გამოთვალეთ $P\{1.5\le\xi\le 2\}$.

ამოხსნა. ა) $f(x)\ge 0$ ყოველი x-სათვის, ვინაიდან $\frac{2}{3}x>0$, როცა $x>0$; გარდა ამისა,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x)dx=\int_1^2\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\cdot(2^2-1^2)=1\,.$$

ბ) $$P\{1.5\le\xi\le 2\}=\int_{1.5}^{2}f_\xi(x)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1.5}^{2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(2^2-1.5^2)=\frac{1}{3}\cdot 1.75=0.583\,.$$

მაგალითი 2. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}k(1+x^2), & \text{თუ } -1\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან,}\end{cases}$$

სადაც k მუდმივია. იპოვეთ: ა) k; ბ) $P\{0.3\le\xi\le 0.6\}$; გ) $P\{|\xi|\le 0.2\}$.

ამოხსნა. ა) ვისარგებლოთ სიმკვრივის ბ თვისებით:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x)dx=\int_{-1}^{1}k(1+x^2)dx=k(x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=k(1+\frac{1}{3}\cdot 1^3)-k[(-1)+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3]=k\cdot\frac{4}{3}-k\cdot(-\frac{4}{3})=\frac{8k}{3}\,,$$

ე. ი. $\frac{8k}{3}=1$. საიდანაც $k=3/8$;

ბ) $$P\{0.3\le\xi\le 0.6\}=\int_{0.3}^{0.6}\frac{3}{8}(1+x^2)dx=\frac{3}{8}(x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{0.3}^{0.6}=$$

$$=\frac{3}{8}(0.6+\frac{1}{3}\cdot 0.6^3)-\frac{3}{8}(0.3+\frac{1}{3}\cdot 0.3^3)=0.136\,;$$

გ) $$P\{|\xi|<0.2\}=P\{-0.2<\xi<0.2\}=\int_{-0.2}^{0.2}\frac{3}{8}(1+x^2)dx=\frac{3}{8}(x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-0.2}^{0.2}=$$

$$=\frac{3}{8}(0.2+\frac{1}{3}\cdot 0.2^3)-\frac{3}{8}[-0.2+\frac{1}{3}\cdot(-0.2)^3]=0.152\,.$$

მაგალითი 3. სავაჭრო ცენტრის გამყიდველთა წლიური ხელფასი ξ, გაზომილი 1000 ლარებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} cx^{-7/2}, & \textit{თუ } x\ge 16; \\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c-ს მნიშვნელობა; ბ) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული გამყიდველის წლიური ხელფასი მოთავსებულია 20 000 ლარსა და 30 000 ლარს შორის.

ამოხსნა.

ა) $$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx=\int_{16}^{\infty} cx^{-7/2}dx=-\frac{2}{5}\cdot cx^{-5/2}\,|_{16}^{\infty}=(-0)-(-\frac{2}{5}\cdot c\cdot 16^{-5/2})=\frac{c}{2560},$$

საიდანაც $c=2560$;

ბ) $$P\{20\le\xi\le 30\}=\int_{20}^{30} 2560x^{-7/2}dx=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot x^{-5/2}\,|_{20}^{30}=$$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 30^{-5/2}-2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 20^{-5/2}=0.365.$$

მაგალითი 4. 100 000 ლიტრებში გაზომილი ბენზინის ყოველკვირეული გაყიდვები ξ აღიწერება ორი A და B მოდელით. A მოდელის მიხედვით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 2x, & \textit{თუ } 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან,}\end{cases}$$

ხოლო B მოდელის თანახმად:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 12x^3(1-x^2), & \textit{თუ } 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) იპოვეთ პირველი მოდელის მედიანა M_A; ბ) აჩვენეთ, რომ მეორე მოდელსაც იგივე მედიანა აქვს, $M_B=M_A$.

ამოხსნა. ა) განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_A} f_\xi(x)dx=\int_0^{M_A} 2xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}\,|_0^{M_A}=(M_A)^2.$$

ამიტომ $M_A=\sqrt{1/2}$;

ბ) ანალოგიურად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_B} f_\xi(x)dx=\int_0^{M_B} 12x^3(1-x^2)dx=(3x^4-2x^6)\,|_0^{M_B}=$$

$$=3\cdot(M_B)^4-2\cdot(M_B)^6=(M_B)^4\cdot[3-2\cdot(M_B)^2].$$

გავიხსენოთ, რომ $(M_A)^2=\frac{1}{2}$. მეორე მხრივ, რადგანაც $(\frac{1}{2})^2\cdot[3-2\cdot\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$, ამიტომ ცხადია, რომ $M_B=M_A=\sqrt{1/2}$.

მაგალითი 5. მე-3 მაგალითში გამოთვალეთ წლიური ხელფასის: ა) მედიანა; ბ) ქვედა და ზედა კვარტილები; გ) მოდა; დ) მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. ა) გვაქვს:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M} f_\xi(x)dx=\int_{16}^{M} 2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\,|_{16}^{M}=-1024M^{-5/2}+1.$$

ამიტომ მედიანისათვის ვღებულობთ განტოლებას:

$$-1024M^{-5/2}+1=1/2.$$

საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $M^{5/2}=2048$, ანუ $Me=21.1$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მედიანა იქნება $21.1\cdot 1000=21100$ ლარი;

ბ) განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{4}=\int_{-\infty}^{Q_1} f_\xi(x)dx=\int_{16}^{Q_1} 2560x^{-7/2}dx=2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_{16}^{Q_1}=-1024Q_1^{-5/2}+1.$$

შესაბამისად, ქვედა კვარტილისათვის გვაქვს განტოლება: $-1024Q_1^{-5/2}+1=1/4$, საიდანაც გვაქვს: $Q_1=(1024\cdot\frac{4}{3})^{2/5}=18$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ ზედა კვარტილი $Q_3=27.9$;

გ) ვინაიდან სიმკვრივე კლებადი ფუნქციაა ინტერვალზე $[16,+\infty)$, ამიტომ მოდა იქნება $Mo=16$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მოდაა $16\cdot 1000=16000$ ლარი.

დ) განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx=\int_{16}^{\infty} x\cdot 2560x^{-7/2}dx=\int_{16}^{\infty} 2560x^{-5/2}dx=$$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot x^{-3/2}\Big|_{16}^{\infty}=0-2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot 16^{-3/2}\Big|_{16}^{\infty}=26\frac{2}{3}.$$

ე. ი. გამყიდველთა ხელფასის საშუალოა $26\frac{2}{3}\cdot 1000=26700$ ლარი.

შევნიშნავთ, რომ საშუალო მეტია მედიანაზე, ვინაიდან განაწილება დადებითად ასიმეტრიულია.

მაგალითი 6. გამოთვალეთ მოდა მე-4 მაგალითის B მოდელში.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ სიმკვრივე და გავუტოლოთ ნულს:

$$[12x^3(1-x^2)]'=36x^2-60x^4=12x^2(3-5x^2)=0.$$

ამ განტოლების ფესვებია: 0, $-\sqrt{3/5}$ და $\sqrt{3/5}$, რომელთაგან $0\le x\le 1$ შუალედში ვარდება მხოლოდ $\sqrt{3/5}$ და აქ $12x^3(1-x^2)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. შესაბამისად, მოდა არის $\sqrt{3/5}=0.775$. ამიტომ გაყიდული ბენზინის მოდაა:

$$0.775\cdot 100\,000=77\,500 \text{ ლიტრი.}$$

მაგალითი 7. ბენზინგასამართი სადგურის ყოველკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე ξ გაზომილი 1000 ლიტრებში მოდელირდება სიმკვრივის ფუნქციით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}120x^2(1-x), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

გამოთვალეთ საშუალოკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx=\int_0^1 x\cdot 120x^2(1-x)dx=120\cdot\int_0^1 (x^3-x^4)dx=$$

$$=(30x^4-24x^5)\Big|_0^1=30-24=6.$$

შესაბამისად, ბენზინგასამართი სადგურის საშუალო მოთხოვნა ბენზინზე კვირაში შეადგენს: $6\cdot 1000=6000$ ლიტრს.

მაგალითი 8. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot x(2-x), & \text{თუ } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) საშუალო; ბ) დისპერსია; გ) $P\{\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\}$.

ამოხსნა.

ა) $$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx=\int_0^2 (\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3)dx=$$

$$=(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^4}{16})\Big|_0^2=4-3=1;$$

ბ) $$\sigma^2 = D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \mu^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x(2-x)dx - 1^2 =$$

$$= \int_0^2 (\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4)dx - 1 = (\frac{3x^4}{8} - \frac{3x^5}{20})|_0^2 - 1 = (6 - \frac{24}{5}) - 0 - 1 = \frac{1}{5} = 0.2;$$

გ) $$P\{\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma\} = P\{1 - \sqrt{0.2} < \xi < 1 + \sqrt{0.2}\} =$$

$$= \int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} \frac{3}{4} \cdot x(2-x)dx = \int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} (\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2)dx = (\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4})|_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}} =$$

$$= (\frac{3\cdot(1+\sqrt{0.2})^2}{4} - \frac{(1+\sqrt{0.2})^3}{4}) - (\frac{3\cdot(1-\sqrt{0.2})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{0.2})^3}{4}) =$$

$$= (\frac{3\cdot(1.447)^2}{4} - \frac{(1.447)^3}{4}) - (\frac{3\cdot(0.552)^2}{4} - \frac{(0.552)^3}{4}) = 0.626.$$

მაგალითი 9. მოცემულია განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ფორმულით: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

თუ $x \le 0$, მაშინ $f(x) = 0$. შესაბამისად, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$;

თუ $0 < x \le \pi/2$, მაშინ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^x \cos u du = \sin x$;

თუ $x > \pi/2$, მაშინ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^{\pi/2} \cos u du + \int_{\pi/2}^{x} 0du = \sin x|_0^{\pi/2} = 1$.

საბოლოოდ გვაქვს: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

ამოცანები

1. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c(1 - \frac{1}{8}x), & \text{თუ } 0 \le x \le 8; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi \ge 6\}$;
გ) $P\{4 \le \xi \le 6\}$.

2. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{თუ } 0 \le x \le 3; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi \le 2\}$;
გ) $P\{1.5 \le \xi \le 2.5\}$; დ) x-ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $P\{\xi \le x\} = 0.2$.

3. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c(x^2+2), & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi\le 1.5\}$.

4. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c(4-x^2), & \text{თუ } -2\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ) $P\{\xi\ge 0\}$; გ) $P\{\xi\ge 1\}$; დ) $P\{|\xi|\ge 1\}$; ე) $P\{-0.5\le\xi\le 0.5\}$.

5. კომპიუტერის „კარტრიჯის“ მუშაობის ხანგრძლივობაა ξ საათი. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} cx^{-2}, & \text{თუ } x\ge 400;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

გამოთვალეთ c მუდმივის მნიშვნელობა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) „კარტრიჯი“ იმუშავებს სულ ცოტა 500 საათი; ბ) „კარტრიჯი“ შესაცვლელი გახდება მანამ სანამ ის იმუშავებს 600 საათი; გ) ორი „კარტრიჯი“ შესაცვლელი იქნება მანამ სანამ თითოეული იმუშავებს 600-600 საათი; დ) ოთხი „კარტრიჯიდან“ ორი იმუშავებს 600 საათზე მეტს, ხოლო ორი 600 საათზე ნაკლებს.

6. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c(x-a)^2, & \text{თუ } 0\le x\le a;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა) a და c მუდმივის მნიშვნელობები, თუ $a^2c=1$; ბ) $P\{\xi\ge a/2\}$.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა) მედიანა; ბ) ქვედა და ზედა კვარტილები.

8. კომპიუტერის „კარტრიჯის“ საღებავის მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 400x^{-2}, & \text{თუ } x\ge 400;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ „კარტრიჯის“ მუშაობის ხანგრძლივობის მედიანა.

9. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 2x-4, & \text{თუ } 2\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და მოდა; გ) იპოვეთ კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

10. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{2}{5}(1-\frac{1}{5}x), & \text{თუ } 0\le x\le 5;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და მოდალური მნიშვნელობა.

11. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x(2-x), & \text{თუ } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდალური მნიშვნელობა.

12. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^2(1-x), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) იპოვეთ c; ბ) გამოთვალეთ მოდა; გ) დაწერეთ განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს მედიანა M.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

14. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2x-4, & \text{თუ } 2\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

15. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-\frac{1}{8}x), & \text{თუ } 0\le x\le 8;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

16. საწარმოს მიერ გამოშვებული სილიკონის მასა ξ, გაზომილი კილოგრამებში, მოდელირდება განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{32}(4x-x^2), & \text{თუ } 0\le x\le 4;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ სილიკონის მასის საშუალო და დისპერსია.

17. ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}3000x^{-4}, & \text{თუ } x\ge 10;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ) იპოვეთ ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალო და დისპერსია.

18. კომპიუტერის „კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^{-2}, & \text{თუ } 400\le x\le 900;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა) გამოთვალეთ c-ს მნიშვნელობა; ბ) დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; გ) იპოვეთ „კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალო და დისპერსია.

19. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0.5x-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც: ა) ნაკლებია 0.2-ზე; ბ) ნაკლებია 3-ზე; გ) არ არის ნაკლები 3-ზე; დ) არ არის ნაკლები 5-ზე.

20. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე 3-ჯერ მიიღებს მნიშვნელობას (0.25, 0.75) შუალედიდან.

21. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე, თუ განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

22. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე, თუ განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$$

23. იპოვეთ განაწილების ფუნქცია, თუ განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

24. იპოვეთ განაწილების ფუნქცია, თუ განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\begin{cases}x-1/2, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

25. იპოვეთ [2, 8] მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და სტანდარტული გადახრა.

26. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x<-1,\\ \frac{1}{3}(x+1), & \text{თუ} \quad -1\le x<2,\\ 1, & \text{თუ} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას (0,1] ინტერვალიდან.

27. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad x<-\pi/2,\\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & \text{თუ} \quad -\pi/2\le x<\pi/2,\\ 1, & \text{თუ} \quad x\ge \pi/2.\end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $(0,\pi/4]$ ინტერვალიდან.

28. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < -\pi/2, \\ \frac{1}{2}\cos x, & \text{თუ} \quad -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 0, & \text{თუ} \quad x \ge \pi/2. \end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ $\xi \le \pi/6$.

29. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{თუ} \quad 0 \le x < \pi, \\ 0, & \text{თუ} \quad x \ge \pi. \end{cases}$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას $[\pi/4, \pi/2]$ ინტერვალიდან.

30. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x < 0, \\ 2x^2, & \text{თუ} \quad 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{თუ} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

გამოთვალეთ დისპერსია.

31. ელექტრომოწყობილობის გამართული მუშაობის დრო განაწილებულია კანონით $f(x) = 0.03e^{-0.03x}$, სადაც x არის დრო საათებში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ელექტრომოწყობილობა გამართულად იმუშავებს არანაკლებ 100 საათს.

32. ტრაქტორის საწვავის ტუმბოს 98% მწყობრიდან გამოდის 3000 საათი მუშაობის შემდეგ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ტუმბო მწყობრიდან გამოვა დროის ინტერვალში [2000 სთ, 2500 სთ]?

მითითება: იგულისხმეთ, რომ ტუმბოს მუშაობის დრო განაწილებულია ექსპონენციალურად.

თავი X

ნორმალური განაწილება

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ნორმალური** და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)$, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს (შესაბამისად, განაწილების ფუნქციას) აქვს სახე:

$$f_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(შესაბამისად, $F_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$).

$$EN(\alpha,\sigma^2)=MoN(\alpha,\sigma^2)=MeN(\alpha,\sigma^2)=a \quad \text{და} \quad DN(\alpha,\sigma^2)=\sigma^2 .$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ($N(0,1)$) სიმკვრივე (შესაბამისად, განაწილების ფუნქცია) აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\varphi(x):=f_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(შესაბამისად, $\Phi(x):=F_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

გარდა ამისა, იხმარება აღნიშვნა: $\Phi_0(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

ცხადია, რომ: $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$; $\Phi(x)=0.5+\Phi_0(x)$, $x>0$;

$$\frac{N(a,\sigma^2)-a}{\sigma}=N(0,1); \qquad P\{N(0,1)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(d)-\Phi(c);$$

$$P\{N(a,\sigma^2)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right); \quad x_p^{a,\sigma^2}=\sigma\cdot x_p^{0.1}+a; \quad x_p^{0.1}=\frac{x_p^{a,\sigma^2}-a}{\sigma},$$

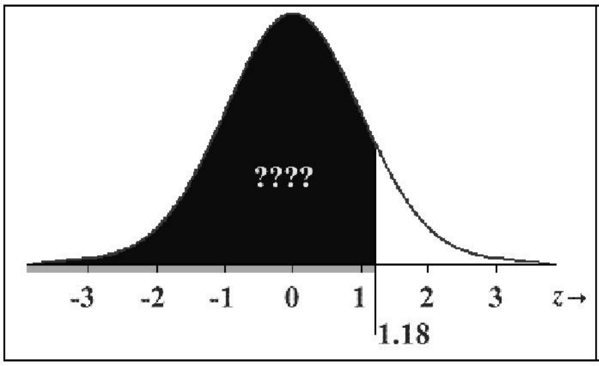
სადაც x_p^{a,σ^2} **არის** $N(a,\sigma^2)$-ის p **-კვანტილი;**

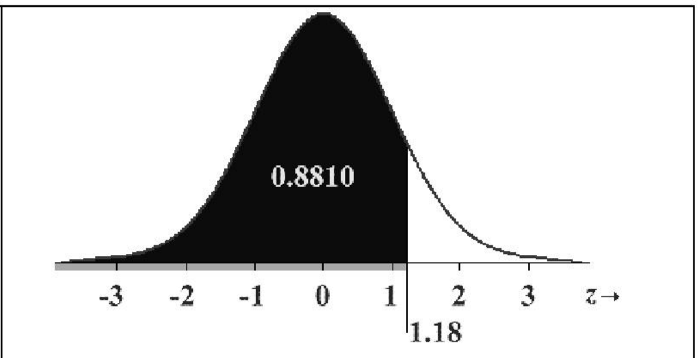
***Z* მნიშვნელობა:** $Z=(N(a,\sigma^2)-a)/\sigma$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია 1.18-ზე, $P(N(0,1)<1.18)$?

ამოხსნა. დავხაზოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის წირი და აბსცისთა ღერძზე ავღნიშნოთ 1.18-ის შესაბამისი წერტილი (ამ შემთხვევაში $z=1.18$).





ნორმალური განაწილების ცხრილის პირველ სვეტში მოვძებნოთ რიცხვი 1.1, ხოლო პირველ სტრიქონში კი – რიცხვი .08.

1.1-ის შესაბამისი სტრიქონისა და .08-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ რიცხვს – 0.8810. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

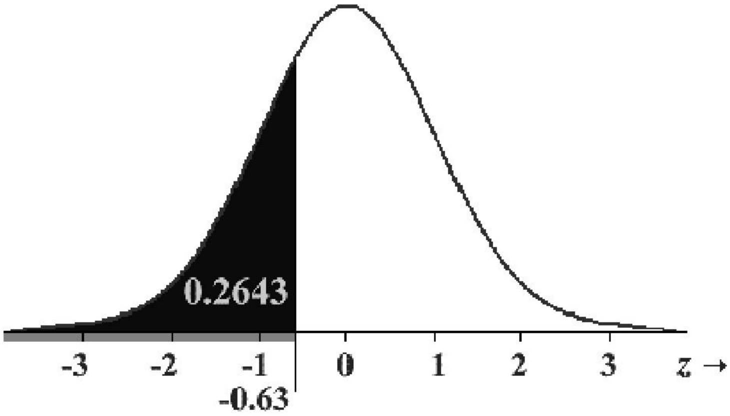
$$P(N(0,1) < 1.18) = 0.8810 \quad \text{ანუ } 88.10\%.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია -0.63-ზე, $P(N(0,1) < -0.63)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z = -0.63$ და საძიებელი ალბათობა იქნება

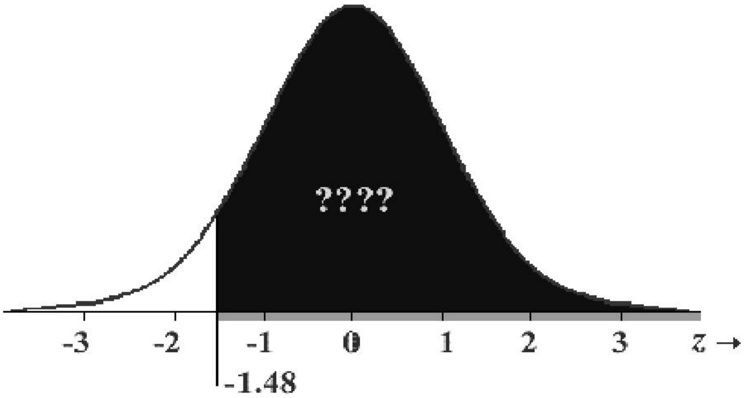
$$P(N(0,1) < -0.63) = P(N(0,1) > 0.63) = 1 - \Phi(0.63) = 1 - 0.7357 = 0.2643$$

ანუ 26.43%.



მაგალითი 3. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მეტია -1.48-ზე, $P(N(0,1) > -1.48)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z = -1.48$ და გამოსათვლელია ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ -1.48-ის მარჯვნივ მოთავსებული არის ფართობი.



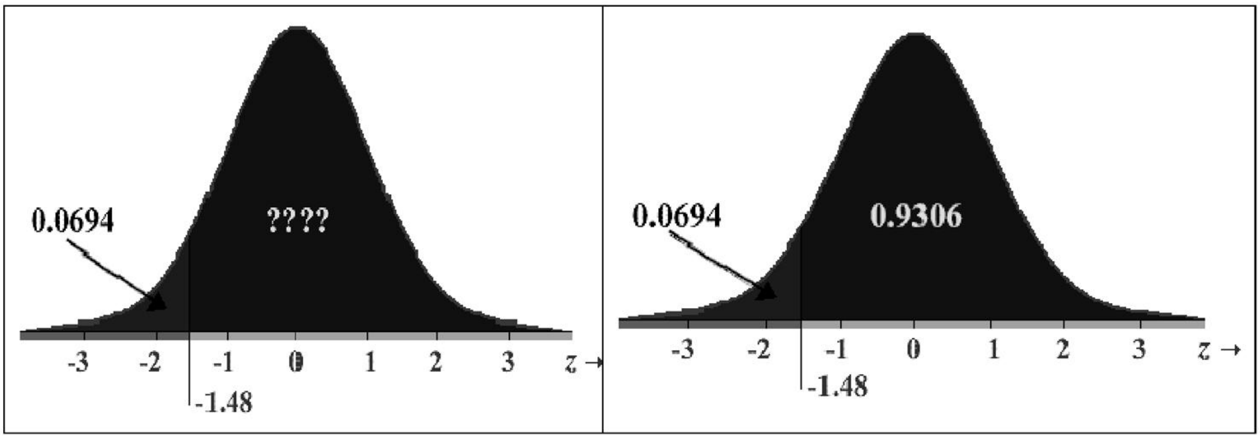
თუ ვისარგებლებთ ნორმალური განაწილების სიმეტრიულობითა და $\Phi(z)$ ფუნქციის ცხრილებით, მივიღებთ:

$$P(N(0,1) > -1.48) = P(N(0,1) < 1.48) = \Phi(1.48) = 0.9306\,.$$

შენიშვნა. შეგვიძლია ვისარგებლოთ საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით და მაშინ მაგალითი დაიყვნება წინა მაგალითზე:

$$P(N(0,1) > -1.48) = 1 - P(N(0,1) \le -1.48) = 1 - P(N(0,1) < -1.48) =$$

$$= 1 - 0.0694 = 0.9306.$$

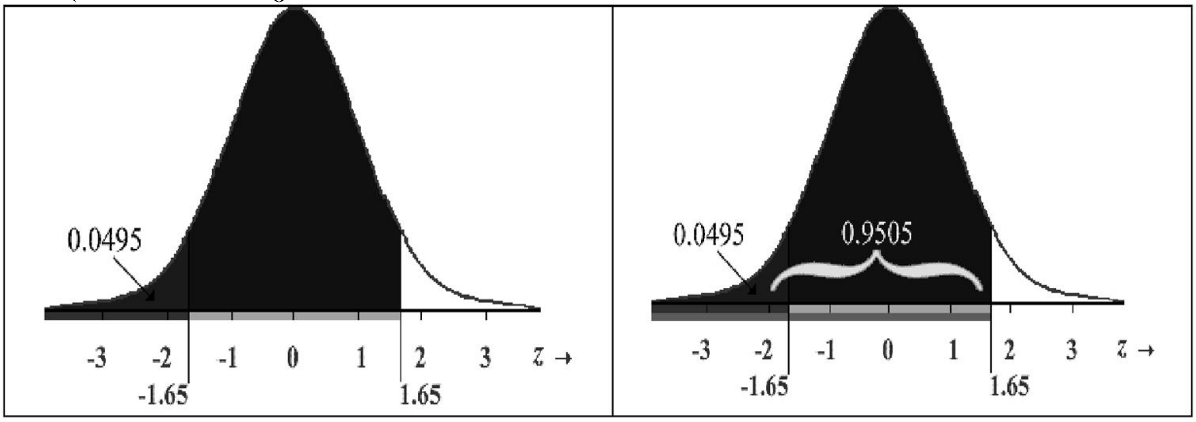


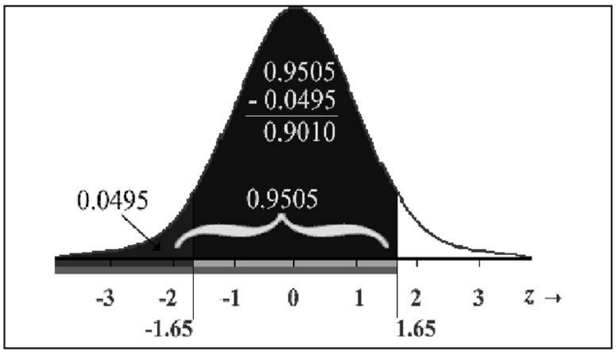
მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მოთავსებულია შუალედში -1.65-სა და 1.65-ს შორის, $P(-1.65 < N(0,1) < 1.65)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში საძიებელი ალბათობა იქნება;

$$P(-1.65 < N(0,1) < 1.65) = \Phi(1.65) - \Phi(-1.65) =$$
$$= \Phi(1.65) - [1 - \Phi(1.65)] = 2\Phi(1.65) - 1 = 2 \times 0.9505 - 1 = 0.9010.$$

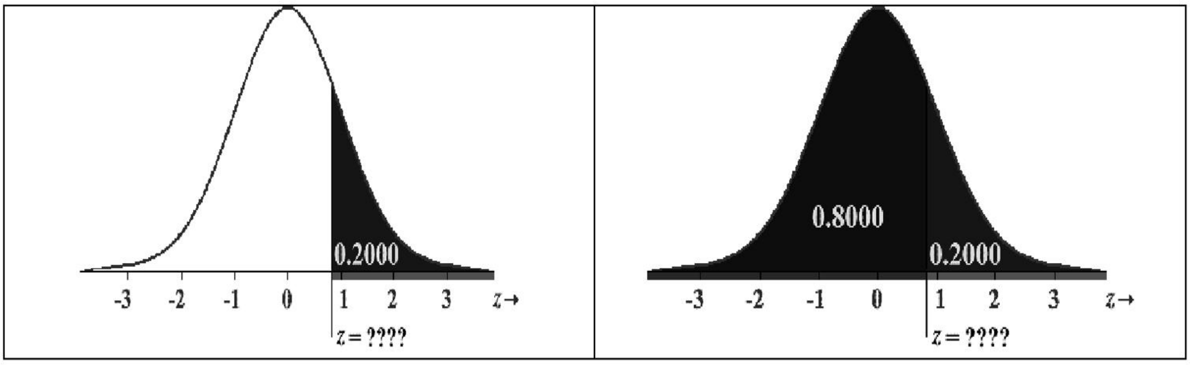
შევნიშნავთ, რომ ამოხსნის პროცედურები სქემატურად გამოსახულია ქვემოთ - მოყვანილ სამ ნახაზზე:

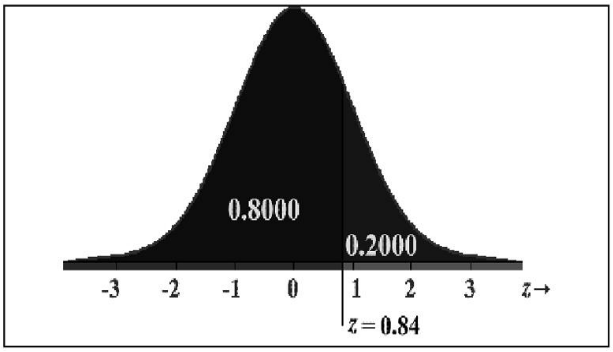




მაგალითი 5. ვიპოვოთ z-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის მარჯვნივ სტანდარტული ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 0.2000-ის?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ეს ამოცანა ტოლფასია z-ის ისეთი მნიშვნელობის მოძებნის, რომლის მარცხნივ ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 1-0.2000=0.8000-ის. ნორმალური განაწილების ცხრილში ვპოულობთ 0.8000-სთან ყველაზე ახლოს მდგომ რიცხვს – 0.7995-ს. ეს რიცხვი დგას 0.8-ის შესაბამისი სტრიქონისა და 0.4-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე. ამიტომ გასაგებია, რომ z-ის საძიებელი მნიშვნელობაა $z = 0.84$.





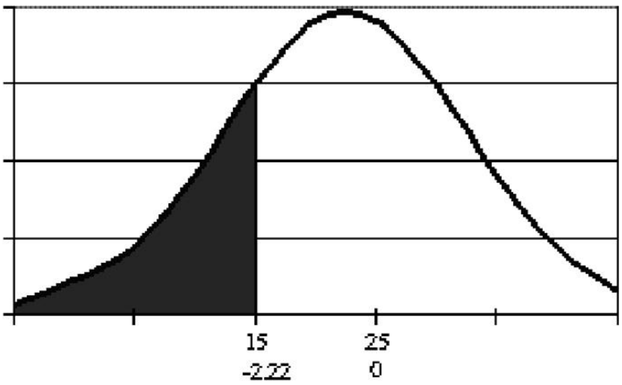
მაგალითი 6. დავუშვათ, რომ ავტომობილის დაზიანების შემთხვევაში ავარიულ გამოძახებაზე რეაგირების საშუალო დრო არის 25 წუთი. ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე განაწილებულია დაახლოებით ნორმალურად და მისი სტანდარტული გადახრა ტოლია 4.5 წუთის. შემთხვევით შერჩეულ იქნა 80 გამოძახება. დაახლოებით რამდენ მათგანზე მოხდება რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 15-ის მარცხნივ მდებარე არის ფართობი.

ნაბიჯი 1. დავხაზოთ გრაფიკი და მოვნიშნოთ საძიებელი არე.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ 15-ის z მნიშვნელობა:

$$z=\frac{X-EX}{\sigma X}=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{15-25}{4.5}=-\frac{10}{4.5}=-2.22\,.$$



ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ $z=-2.22$-სა და $z=0$-ს შორის მდებარე არის ფართობი. ის ტოლია 0.4868-ის.

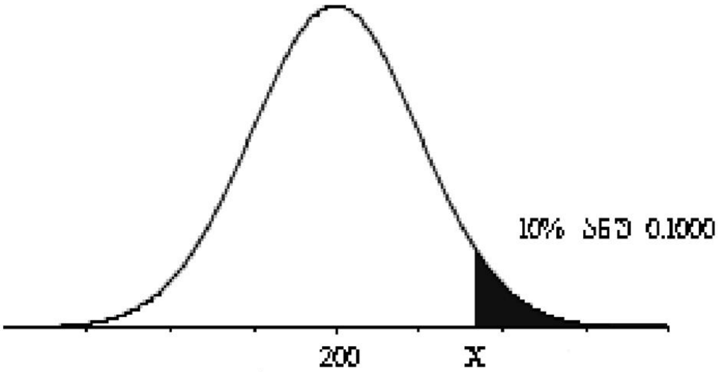
ნაბიჯი 4. გამოვაკლოთ 0.5000-ს 0.4868. მივიღებთ 0.0132-ს.

ნაბიჯი 5. იმისათვის, რომ გავიგოთ რამდენ გამოძახებაზე მოხდა რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში, გავამრავლოთ შერჩევის მოცულობა (80) მიღებულ ფართობზე (0.0132). მაშინ მივიღებთ 1.056-ს. მაშასადამე, 1.056 ანუ დაახლოებით ერთ გამოძახებაზე მოხდება რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში.

მაგალითი 7. ცნობილია, რომ აბიტურიენტების მხოლოდ 10% შეიძლება გახდეს სტუდენტი. ჩავთვალოთ, რომ აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 200 და სტანდარტული გადახ-

რით 20. ვიპოვოთ ის მინიმალური ქულა, რომელიც საჭიროა რათა აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი.

ამოხსნა. ვინაიდან აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული, ამიტომ იმ ქულის მნიშვნელობა (X), რომლის ზევითაც აბიტურიენტი გახდება სტუდენტი, არის ისეთი რიცხვი, რომლის მარჯვნივ ნორმალური წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 10%-ის ანუ 0.1000-ის:



ნაბიჯი 1. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 200-სა და X-ს შორის მდებარე არის ფართობი 0.5000-ს გამოვაკლოთ 0.1000, მივიღებთ 0.4000-ს.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.4000-ს. იმ შემთხვევაში, როცა ცხრილში არ იძებნება ზუსტად ეს მნიშვნელობა ვიღებთ მასთან ყველაზე ახლოს მყოფს, ამ შემთხვევაში 0.3997-ს. შესაბამისი $z = 1.28$.

ნაბიჯი 3. შევიტანოთ 1.28 z მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულაში $z = (X - \mu)/\sigma$ და ამოვხსნათ X.

$$1.28 = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$1.28 \times 20 + 200 = X$$
$$X = 25.60 + 200 = 225.60$$
$$X = 226.$$

ე.ი. იმისათვის, რომ აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი, მან უნდა მოაგროვოს 226 ქულა.

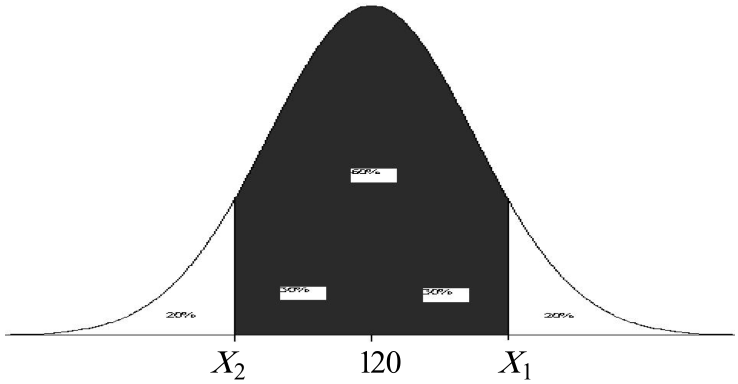
შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა ფართობის მნიშვნელობა ვარდება ცხრილის ორი მნიშვნელობის ზუსტად შუაში, მაშინ ვიღებთ მათი შესაბამისი **z** მნიშვნელობებიდან უფრო დიდს. მაგალითად, თუ ფართობის მნიშვნელობაა 0.4500, ის იმყოფება 0.4495-ისა და 0.4505-ის შუაში და **z** მნიშვნელობად ვიღებთ 1.65-ს და არა 1.64-ს.

საწყისი მნიშვნელობის გამოთვლა z მნიშვნელობის მიხედვით:

$$X = z \cdot \sigma + \mu .$$

მაგალითი 8. სამედიცინო გამოკლეველის მიზნით მკვლევარს სურს შეარჩიოს არტერიული წნევის საფუძველზე შედგენილი პოპულაციის შუაში მდგომი ადამიანების 60%. ვიგულისხმოთ, რომ არტერიული წნევა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 120 და სტანდარტული გადახრით 8. დავადგინოთ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი.

ამოხსნა. გასაგებია, რომ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი იქნება ის ორი მოპირდაპირე რიცხვი, რომელთა გარეთ ნორმალური წირის ქვეშ მოქცეული თითოეული კუდის ფართობია 20%.



ცხადია, რომ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.5000-0.2000=0.3000 ფართობს ტოლია 0.84-ის. შევიტანოთ იგი $X = z \cdot \sigma + \mu$ ფორმულაში. მივიღებთ, რომ

$$X_1 = z \cdot \sigma + \mu = 0.84 \times 8 + 120 = 126.72 .$$

მეორეს მხრივ, სტანდარტული ნორმალური განაწილების საშუალოს მიმართ სიმეტრიულობის გამო X_2-ის გამოსათვლელად უნდა ავიღოთ $z = -0.84$. შესაბამისად გვექნება:

$$X_2 = z \cdot \sigma + \mu = -0.84 \times 8 + 120 = 113.28 .$$

ე. ი. მკვლევარმა უნდა შეარჩიოს ისეთი ადამიანები, რომელთა არტერიული წნევა მერყეობს 113.8-სა და 126.72-ს შორის,

$$113.28 < X < 126.72 .$$

მაგალითი 9. მოცემულია $\xi \cong N(23, \sigma^2)$ და $P\{\xi < 27\} = 0.83$. იპოვეთ σ.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $Z = \dfrac{\xi - 23}{\sigma} \cong N(0,1)$. გარდა ამისა, ხდომილებები $\{\xi < 27\}$ და $\{\dfrac{\xi - 23}{\sigma} < \dfrac{27-23}{\sigma}\}$ ეკვივალენტურია. ამიტომ

$$P\{\xi < 27\} = P\{\frac{\xi - 23}{\sigma} < \frac{27-23}{\sigma}\} = P\{Z < \frac{4}{\sigma}\} = 0.83,$$

ანუ $\Phi(\dfrac{4}{\sigma}) = 0.83$. საიდანაც, მაგალითი 5-ის ანალოგიურად: $\dfrac{4}{\sigma} = 0.9542$ და, შესაბამისად, $\sigma = \dfrac{4}{0.9542} = 4.19$.

მაგალითი 10. მას შემდეგ რაც ნიკა ჩამოსვამს ეკას მანქანიდან ქალაქის ცენტრალურ ფოსტასთან, ის მოძრაობს ქალაქში და გარკვეული დროის შემდეგ ბრუნდება ეკას წასაყვანად. ნიკას ვარაუდით ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 6 წუთი და სტანდარტული გადახრით 1.3 წუთი. რამდენი წუთის შემდეგ უნდა დაბრუნდეს ნიკა ფოსტასთან, რომ არ მოუწიოს ლოდინი სულ ცოტა 95%-იანი გარანტიით.

ამოხსნა. T იყოს ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო. მაშინ $T \cong N(6, 1.3^2)$. t იყოს ფოსტასთან ეკას ჩამოსმიდან ნიკას უკან დაბრუნებამდე გასული დრო. მოსაძებნია ისეთი t, რომლისთვისაც: $P\{T \le t\} \ge 0.95$. ეს თანაფარდობა ტოლფასია: $P\{\dfrac{T-6}{1.3} \le \dfrac{t-6}{1.3}\} \ge 0.95$, ანუ $\Phi(\dfrac{t-6}{1.3}) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$, საიდანაც გვაქვს: $\dfrac{t-6}{1.3} \ge 1.645$. აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ $t \ge 8.1385 \approx 8.14$. მაშასადამე, ნიკა არ უნდა დაბრუნდეს 8.14 წუთზე ადრე.

მაგალითი 11. ბიოლოგი აგროვებს მონაცემებს კონკრეტული სახეობის კაქტუსის სიმაღლის შესახებ. მისი დაკვირვებით კაქტუსების 34.25%-ის სიგრძე 12 სმ-ზე ნაკლებია, ხოლო 18.4%-ის სიგრძე 16 სმ-ზე მეტია. ბიოლოგმა დაუშვა, რომ სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ ამ განაწილების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა. კაქტუსის სიმაღლე ავღნიშნოთ H-ით, $H \approx N(a,\sigma^2)$. მოსაძებნია a და σ. ბიოლოგის დაკვირვების თანახმად: $P\{H<12\}=0.342$ და $P\{H>16\}=0.184$. შესაბამისად,

$$\Phi(\frac{12-a}{\sigma})=0.342 \quad \text{და} \quad \Phi(\frac{16-a}{\sigma})=1-0.184=0.816.$$

ამიტომ $\frac{12-a}{\sigma}=-0.407$ და $\frac{16-a}{\sigma}=0.900$. საიდანაც ვასკვნით, რომ: $a=13.2$ და $\sigma=3.06$.

მაგალითი 12. სუპერმარკეტში დღის განმავლობაში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა მოდელირდება ნორმალური განაწილებით. აღმოჩნდა, რომ ხანგრძლივი პერიოდის მანძილზე დღეში საშუალოდ იყიდებოდა 35 კგ. ციტრუსი, ხოლო 15 კგ-ზე ნაკლები გაყიდულ იქნა საშუალოდ ყოველი 20 დღიდან ერთ დღეში. ა) გამოთვალეთ გაყიდვების სტანდარტული გადახრა σ; ბ) ცნობილია, რომ კონკრეტულ დღეს გაიყიდა 53 კგ-ზე მეტი ციტრუსი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ დღეს გაიყიდა 56 კგ-ზე მეტი ციტრუსი.

ამოხსნა. დღეში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა აღვნიშნოთ ξ-თი. მაშინ: $\xi \cong N(35,\sigma^2)$ და $P\{\xi<15\}=\frac{1}{20}=0.05$.

ა) $$P\{\xi<15\}=0.05 \Rightarrow \Phi(\frac{15-35}{\sigma})=0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15-35}{\sigma}=-1.6448 \Rightarrow \sigma=12.2;$$

ბ) $$P\{\xi>56 \mid \xi>53\}=\frac{P\{(\xi>56)\bigcap(\xi>53)\}}{P\{\xi>53\}}=\frac{P\{\xi>56\}}{P\{\xi>53\}}=$$

$$=\frac{1-\Phi(\frac{56-35}{12.2})}{1-\Phi(\frac{53-35}{12.2})}=\frac{1-0.9574}{1-0.9299}=0.608.$$

ამოცანები

1. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობები:
ა) $P\{Z<1.23\}$; ბ) $P\{Z \le 2.47\}$; გ) $P\{Z<0.16\}$; დ) $P\{Z \ge 1.24\}$;
ე) $P\{Z>2.38\}$; ვ) $P\{Z \ge 0.59\}$; ზ) $P\{Z>-1.83\}$; თ) $P\{Z \le -2.06\}$;
ი) $P\{Z>-0.07\}$; კ) $P\{Z \le -1.83\}$; ლ) $P\{Z<-2.76\}$; მ) $P\{Z \le -0.21\}$.
2. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. იპოვეთ ალბათობები:
ა) $P\{1.15<Z<1.35\}$; ბ) $P\{1.11 \le Z \le 2.22\}$; გ) $P\{0.39<Z<2.42\}$;
დ) $P\{0 \le Z<1.55\}$; ე) $P\{-1.82<Z<2.33\}$; ვ) $P\{-0.85<Z \le 2.03\}$;
ზ) $P\{-2.51<Z<1.09\}$; თ) $P\{-0.55 \le Z \le 0\}$;
ი) $P\{-2.82<Z<-1.82\}$; კ) $P\{-1.75 \le Z \le -1.00\}$;
ლ) $P\{-2.57<Z<-0.12\}$; მ) $P\{-1.96 \le Z<1.96\}$.
3. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:
ა) $P\{Z<s\}=0.67$; ბ) $P\{Z<t\}=0.88$; გ) $P\{Z<u\}=0.98$;
დ) $P\{Z<v\}=0.85$; ე) $P\{Z>s\}=0.41$; ვ) $P\{Z>t\}=0.12$;
ზ) $P\{Z>u\}=0.01$; თ) $P\{Z>v\}=0.22$; ი) $P\{Z>s\}=0.99$;
კ) $P\{Z>t\}=0.97$; ლ) $P\{Z>u\}=0.85$; მ) $P\{Z>v\}=0.5$.
4. მოცემულია $\xi \cong N(20,16)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები:

ა) $P\{\xi \le 26\}$; ბ) $P\{\xi > 30\}$; გ) $P\{\xi \ge 17\}$; დ) $P\{\xi < 13\}$.

5. მოცემულია $\xi \cong N(24,9)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები:

ა) $P\{\xi \le 29\}$; ბ) $P\{\xi > 31\}$; გ) $P\{\xi \ge 22\}$; დ) $P\{\xi < 16\}$.

6. მოცემულია $\xi \cong N(50,16)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები:

ა) $P\{54 \le \xi \le 58\}$; ბ) $P\{40 < \xi \le 44\}$; გ) $P\{47 < \xi < 57\}$;

დ) $P\{39 \le \xi < 53\}$; ე) $P\{44 \le \xi \le 56\}$.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 3 და დისპერსიით 4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობას.

8. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a $(a>0)$ და დისპერსიით $a^2/4$. ა) იპოვეთ $P\{\xi > 1.5a\}$; ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ უარყოფითია.

9. მოცემულია $\xi \cong N(44,25)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:

ა) $P\{\xi \le s\} = 0.98$; ბ) $P\{\xi \ge t\} = 0.77$;

გ) $P\{\xi \ge u\} = 0.05$; დ) $P\{\xi \le v\} = 0.33$.

10. მოცემულია $\xi \cong N(15,4)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u, v ან w თუ:

ა) $P\{\xi \le s\} = 0.91$; ბ) $P\{\xi \ge t\} = 0.57$; გ) $P\{\xi \le u\} = 0.10$;

დ) $P\{\xi \le v\} = 0.39$; ე) $P\{15 - w < \xi < 15 + w\} = 0.9$.

11. მოცემულია $\xi \cong N(35.4,12.5)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ:

ა) $P\{\xi < s\} = 0.96$; ბ) $P\{\xi > t\} = 0.94$;

გ) $P\{\xi > u\} = 0.29$; დ) $P\{\xi < v\} = 0.15$.

12.ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 32 და დისპერსიით σ^2. ალბათობა იმისა, რომ ξ ნაკლებია 33-ზე არის 0.64. იპოვეთ σ^2.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად დისპერსიით 18 და $P\{\xi > 73\} = 0.03$. იპოვეთ საშუალო.

14. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, $P\{\xi \ge 59\} = 0.02$ და $P\{\xi \ge 29\} = 0.93$. იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

15. მოცემულია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $P\{\xi \ge 9.81\} = 0.16$ და $P\{\xi \le 8.82\} = 0.01$. იპოვეთ a და σ.

16. აფთიაქში წამლის დამზადებაზე დახარჯული დრო განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 15 წუთი და სტანდარტული გადახრით 2.8 წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წამლის დამზადებაზე დახარჯული დრო: ა) 20 წუთზე მეტია; ბ) 8 წუთზე ნაკლებია; გ) მოთავსებულია 10 წუთსა და 18 წუთს შორის.

17. ჯგუფში 16 წლის გოგონების სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 161.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 4.7 სმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ჯგუფიდან ერთი გოგონას სიმაღლე: ა) 165 სმ-ზე მეტია; ბ) 150 სმ-ზე ნაკლებია; გ) მოთავსებულია 165 სმ-სა და 170 სმ-ს შორის; დ) მოთავსებულია 150 სმ-სა და 163 სმ-ს შორის. 16 წლის 500 შერჩეული გოგონასათვის შეაფასეთ რაოდენობა იმ გოგონების, რომელთა სიმაღლე გავა ზემოთ მოყვანილი 4 დიაპაზონიდან.

18. ავტომობილის შუშის საწმენდი რეზინის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთ 25 სმ და სტანდარტული გადახრით 0.2 სმ. შეაფასეთ 200 ცალი შუშის საწმენდიდან რამდენის სიგრძეს უნდა მოველოდეთ, რომ იქნება: ა) 25.3 სმ ან მეტი; ბ) მოთავსებული 24.89 სმ-სა და 25.11 სმ-ს შორის; გ) მოთავსებული 24.89 სმ-სა და 25.25 სმ-ს შორის.

19. ავტომობილის გაცვეთილი სამუხრუჭე ხუნდის შეცვლის დრო განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 90 წუთი და სტანდარტული გადახრით 5.8 წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხუნდის შეცვლას დასჭირდება: ა) 105 წუთზე მეტი; ბ) 85 წუთზე ნაკლები. დაადგინეთ საშუალოს მიმართ სიმეტრიული (a,b) ინტერვალი, რომელშიც მოხვდება ხუნდის შეცვლის დრო 90%-იანი საიმედოობით.

20. კომპანიის მიერ წარმოებული დღის განათების მუშაობის ხანგრძლივობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 2010 საათი და სტანდარტული გადახრით 20.1 საათი. კომპანიამ გადაწყვიტა გაზარდოს გაყიდვების რიცხვი, რისთვისაც მან ვალდებულება აიღო საგარანტიო დროის გასვლამდე გაფუჭებული ნებისმიერი დღის განათება უფასოდ შეცვალოს ახლით. ვიპოვოთ ის საგარანტიო დრო, რომლის დაწესების შემთხვევაში კომპანიას მოუწევს უფასოდ შეცვალოს დღის განათების მხოლოდ 3%.

21. ყვავილის ფოთოლის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 18.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 2.3 სმ. ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყვავილის ფოთლის სიგრძე მოთავსებულია 16 სმ-სა და 20 სმ-ს შორის; ბ) ყვავილის ფოთლების 12% h სმ-ზე გრძელია, ხოლო 20% l სმ-ზე მოკლეა. იპოვეთ h და l; გ) შეაფასეთ ყვავილის 500 ფოთლიდან რამდენი იქნება 14 სმ-ზე მოკლე.

22. ბოთლს, რომელშიც ასხია უალკოჰოლო სასმელი, აწერია 330 მლ. სინამდვილეში ჩამოსხმული უალკოჰოლო სასმელის მოცულობა განაწილებულია ნორმალურად სტანდარტული გადახრით 2.5 მლ. რამდენი უნდა იყოს ჩამოსხმული უალკოჰოლო სასმელის მოცულობის საშუალო, რათა დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ბოთლების სულ ცოტა 99%-ში სასმელი მეტი იქნება 330 მლ-ზე.

23. ფუთას, რომელშიც იყიდება შაქარი, აქვს წარწერა – 1 კგ. შაქარი. ფაქტობრივად, ფუთაში მოთავსებული შაქრის წონა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 1.08 კგ. ფუთების შემოწმებამ აჩვენა, რომ ფუთების 2.5% ნაკლულია (შეიცავს მითითებულ 1 კგ-ზე ნაკლებ შაქარს). ა) იპოვეთ ამ განაწილების სტანდარტული გადახრა; ბ) თუ მოცემული ფუთა ნაკლულია, მაშინ გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მისი წონა საშუალოზე 3 სტანდარტული გადახრით ნაკლებია.

24. გენერატორის მუშაობის ხანგრძლივობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 210 სთ. აღმოჩნდა, რომ გენერატორების 4% მუშაობს 222 საათზე მეტს. იპოვეთ ამ განაწილების დისპერსია.

25. ალბათობის გამოცდაზე სტუდენტების 15% ღებულობს 63 ქულაზე მეტს, ხოლო 10% – 32 ქულაზე ნაკლებს. ვიგულისხმოთ, რომ ქულები განაწილებულია ნორმალურად და ვიპოვოთ ქულების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

26. მზიანი საათების რაოდენობა თვეში, H გარკვეულ კურორტზე, განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 130 სთ. ცნობილია, რომ $P\{H < 179\} = 0.975$. ა) გამოთვალეთ H-ის სტანდარტული გადახრა; ბ) გამოთვალეთ $P\{100 < H < 150\}$.

თავი XI

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე

დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონს (ანუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივ განაწილების კანონს)** აქვს ორგანზომილებიანი ცხრილის სახე, რომელიც გვაძლევს შესაძლო მნიშვნელობების ცალკეული კომპონენტების ჩამონათვალს და იმ $p(x_i, y_j)$ ალბათობებს, რა ალბათობებითაც მიიღება მნიშვნელობა (x_i, y_j):

η	ξ					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1;\;\; P(\xi = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j);\;\; P(\eta = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)\,.$$

ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია** (ან ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივი განაწილების ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას: $F(x, y) = P(\xi \le x,\ \eta \le y)$.

1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

2) $F(x, y)$ არის თითოეული არგუმენტის მიმართ არაკლებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია;

3) ადგილი აქვს ზღვრულ თანაფარდობებს:

$F(-\infty, y) = 0;\ F(x, -\infty) = 0;\ F(-\infty, -\infty) = 0;\ F(\infty, \infty) = 1;$

4) $F(x, \infty) = F_1(x) := P(\xi \le x);\ \ F(\infty, y) = F_2(y) := P(\eta \le y).$

შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **დამოუკიდებელი,** თუ

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j),\ \forall i, j\,.$$

უწყვეტი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის **ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე (ანუ ორგანზომილებიანი სიმკვრივე)** ეწოდება ერთობლივი განაწილების ფუნქციის შერეულ მეორე რიგის კერძო წარმოებულს:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

1) $f(x,y)\ge 0$; 2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$; 4) $p((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy.$

5) $f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}=\frac{dF(x,\infty)}{dx}=\frac{d\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)dydu\right)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$,

ანალოგიურად, $f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$

6) უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x,y)=f_1(x)\, f_2(y)$.

კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი.

კოვარიაციის კოეფიციენტი ან უბრალოდ **კოვარიაცია** ეწოდება სიდიდეს:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]\equiv E(\xi\eta)-E\xi E\eta .$$

1) თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=0$ (შებრუნებული დებულება არაა სამართლიანი);
2) $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$;
3) $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$;
4) $\operatorname{cov}(c\cdot\xi,\eta)=c\cdot\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;
5) $\operatorname{cov}(\xi\pm\eta,\varsigma)=\operatorname{cov}(\xi,\varsigma)\pm\operatorname{cov}(\eta,\varsigma)$;
6) $D(\xi\pm\eta)=D\xi\pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)+D\eta$;
7) $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)|\le\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$.

კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\rho(\xi,\eta):=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}\equiv E\left(\frac{\xi-E\xi}{\sigma\xi}\cdot\frac{\eta-E\eta}{\sigma\eta}\right).$$

ა) $-1\le\rho(\xi,\eta)\le 1$.

ბ) თუ $\rho(\xi,\eta)=1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k>0$.

გ) თუ $\rho(\xi,\eta)=-1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b – მუდმივებია, $k<0$.

დ) თუ $\eta=k_1\xi+b_1$, $(k_1\neq 0)$ ან $\xi=k_2\eta+b_2$ $(k_2\neq 0)$, მაშინ $\rho(\xi,\eta)=1$ როცა $k_i>0$; $\rho(\xi,\eta)=-1$ როცა $k_i<0$ $(i=1,2)$.

მაგალითი 1. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

η	ξ		
	-2	3	6
-0.8	0.1	0.3	0.1
-0.5	0.15	0.25	0.1

ვიპოვოთ ცაკლკეული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. ცხრილში მოყვანილი ალბათობების სვეტების მიხედვით შეკრებით მივიღებთ ξ–ს განაწილების მწკრივს:

ξ	-2	3	6
p	0.25	0.55	0.2

ალბათობების შეკრებით სტრიქონების მიხედვით მივიღებთ η-ს განაწილების მწკრივს:

η	-0.8	-0.5
p	0.5	0.5

მაგალითი 2. მოცემულია ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი:

ξ	-2	3	6
p	0.2	0.5	0.3

η	-0.8	-0.5
p	0.4	0.6

ვიპოვოთ $Z = \max\{\xi, \eta\}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. Z შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: -0.8; -0.5; 3 და 6. გამოვთვალოთ შესაბამისი ალბათობები. გვაქვს:

$$P(Z=-0.8) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.8)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.8) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08\,;$$

$$P(Z=-0.5) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.5)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.5) = 0.2\cdot 0.6 = 0.12\,;$$

$$P(Z=3) = P\{[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)] = 0.5\cdot 0.4 + 0.5\cdot 0.6 = 0.5\,;$$

$$P(Z=6) = P\{[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)] = 0.3\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.6 = 0.3\,.$$

მაგალითი 3. დავუშვათ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სამი ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილებისაგან $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$. განვმარტოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად: $\xi(\omega_1) = 1,\ \xi(\omega_2) = 0,\ \ \xi(\omega_3) = -1$;

$$\eta(\omega_1) = 1,\ \eta(\omega_2) = 0,\ \eta(\omega_3) = 1.$$

მაშინ გასაგებია, რომ $\xi\eta = \xi$, $E(\xi\eta) = E\xi = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + (-1)\cdot\frac{1}{3} = 0$. შესაბამისად, $E(\xi\eta) = E\xi\cdot E\eta$. მეორეს მხრივ,

$$P\{\xi=0\} = P\{\eta=0\} = P\{\xi=0, \eta=0\} = P(\omega_2) = 1/3\,,$$

მაშინ როდესაც ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელი რომ იყოს $\{\xi=0,\eta=0\}$ ხდომილების ალბათობა უნდა ყოფილიყო $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, ე. ი ξ და η არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 4. დავუშვათ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ, ე. ი. $E\xi=0$. ვთქვათ, $\eta=\xi^2$. მაშინ $E(\xi\eta)=E(\xi^3)=0$, ვინაიდან ξ^3 აგრეთვე, სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ. მეორეს მხრივ, $E\xi E\eta=0$, ვინაიდან $E\xi=0$. ამიტომ:

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{E(\xi\eta)-E\xi E\eta}{\sigma\xi\sigma\eta}=0.$$

ე. ი. კორელაცია (და, მაშასადამე, კოვარიაცია) შეიძლება იყოს ნული, მაშინაც კი როცა შემთხვევითი სიდიდეები დამოკიდებულია.

მაგალითი 5. დავუშვათ, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

η / ξ	1	2	
1	1/5	0	1/5
2	0	3/5	3/5
3	1/5	0	1/5
	2/5	3/5	

ცხადია, რომ:

$$E\xi=1\cdot 1/5+2\cdot 3/5+3\cdot 1/5=2;\quad E\eta=1\cdot 2/5+2\cdot 3/5=8/5;$$

$$E(\xi\eta)=1\cdot 1\cdot 1/5+2\cdot 2\cdot 3/5+3\cdot 1\cdot 1/5=16/5;\quad E(\xi\eta)-E\xi E\eta=0.$$

აქედან გამომდინარე, კორელაციის კოეფიციენტი ნულია, მაშინ როდესაც (ისევე როგორც წინა მაგალითში) ნათელია, რომ ადგილი აქვს η შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ξ შემთხვევით სიდიდეზე.

მაგალითი 6. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ქვემოთ მოყვანილი ერთობლივი განაწილების კანონის მიხედვით გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი ρ(ξ,η).

η / ξ	1	2	3	
10	1/36	0	0	1/36
20	2/36	1/36	0	3/36
30	2/36	2/36	2/36	6/36
40	1/36	9/36	16/36	26/36
	6/36	12/36	18/36	

$$E\xi = 10\cdot 1/36 + 20\cdot 3/36 + 30\cdot 6/36 + 40\cdot 26/36 \approx 35.83;$$
$$E\eta = 1\cdot 6/36 + 2\cdot 12/36 + 3\cdot 18/36 \approx 2.3;$$
$$D\xi = (10-35,83)^2\cdot 1/36 + (20-35.83)^2\cdot 3/36 + (30-35.83)^2\cdot 6/36 +$$
$$+(40-35,83)^2\cdot 26/36 \approx 57.64;\ \sigma\xi \approx 7.6;$$
$$D\eta = (1-2,3)^2\cdot 6/36 + (2-2.3)^2\cdot 12/36 + (3-2.3)1^2\cdot 18/36 \approx 0.556;\ \sigma\eta \equiv 0.746;$$
$$E(\xi\eta) = 10\cdot 1\cdot 1/36 + 20\cdot 1\cdot 2/36 + 20\cdot 2\cdot 1/36 + 30\cdot 1\cdot 2/36 + 30\cdot 2\cdot 2/36 +$$
$$+30\cdot 3\cdot 2/36 + 40\cdot 1\cdot 1/36 + 40\cdot 2\cdot 9/36 + 40\cdot 3\cdot 16/36 = 86.94;$$
$$\rho(\xi,\eta) = (6.94 - 2.3\cdot 35.83)/(7.6\cdot 0.746) \approx 0.8.$$

ამოცანები

1. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ მანამ სანამ არ გამოჩნდება 6 ქულა ან არ ჩატარდება 4 აგდება. ξ იყოს ჩატარებულ აგდებათა რაოდენობა, ხოლო η – კი მოსული 6 ქულების რაოდენობა ამ თამაშში. იპოვეთ: ა) ξ-ს განაწილების კანონი; ბ) ξ-ს სტანდარტული გადახრა; გ) $E\eta$.

2. წინა ამოცანის პირობებში, თუ მოთამაშეს თამაშის განმავლობაში მოუვიდა 6 ქულა, მაშინ ის იგებს 100 ლარს, ხოლო თუ თამაშის განმავლობაში არ მოვა 6 ქულა, მაშინ მოთამაშე აგებს 150 ლარს. ვიპოვოთ მოთამაშის მიერ მოგებული თანხის მათემატიკური ლოდინი.

3. კომიტეტი, რომლის შემადგენლობაში შედის 6 მამაკაცი და 4 ქალი, ირჩევს თავის 2 წარმომადგენელს. ვიგულისხმოთ, რომ კომიტეტის ნებისმიერი წევრის არჩევა თანაბარად შესაძლებელია და ავაგოთ არჩეული ქალების რაოდენობის განაწილების კანონი. ვიპოვოთ არჩეული ქალების მოსალოდნელი რიცხვი.

4. აგდებენ წესიერ ოთხწახნაგა პირამიდას, რომელზეც აღნიშნულია ციფრები 1, 2, 3 და 4. შემდეგ აგდებენ წესიერ მონეტას იმდენჯერ რა ციფრიც მოვა პირამიდის ფუძეზე. ξ იყოს პირამიდის ფუძეზე მოსული ქულა, ხოლო η – კი მოსული გერბებ-ის რაოდენობა: ა) აჩვენეთ, რომ $P\{\eta = 2\} = 1/4$; ბ) ააგეთ η-ს განაწილების კანონი; გ) აჩვენეთ, რომ $E\eta = \frac{1}{2}E\xi$; დ) გამოთვალეთ $D\xi$.

5. მონეტას აგდებენ 5-ჯერ. ξ შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსულ გერბთა რიცხვი, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ბოლო ორ აგდებაში მოსულ გერბთა რიცხვი. ავაგოთ ამ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი და ვიპოვოთ კოვარიაცია.

6 32 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 2-ს. ξ შემთხვევითი სიდიდე იყოს ამოღებული ტუზების რიცხვი, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ამოღებული მეფეების რიცხვი. ავაგოთ ამ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი და ვიპოვოთ კორელაციის კოეფიციენტი.

7. მოცემულია ξ, η და ζ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები:

ξ	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0.1	0.1	0.1	0.09	0.3	0.009	0.3	0.001

η	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.001	0.2	0.001	0.3	0.008	0	0.09	0.4

ζ	20	10	5	2	1	-2	-5	-10
P	0.001	0.2	0.009	0.29	0.001	0.009	0.2	0.29

გამოთვალეთ: ა) $E(\xi^2)$; ბ) $E(2\eta)$; გ) $E(\zeta/2)$ ბ) $D(\xi+\eta-\zeta)$, თუ ცნობილია, რომ ξ, η და ζ დამოუკიდებელია.

8. ცნობილია, რომ $E\xi = a$ და $D\xi = b$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდეების: ა) $\eta = -\xi$; ბ) $\theta = \xi + 2\eta - 1$; გ) $\delta = 3\xi - \eta + 2\theta - 3$.

9. A იყოს ხდომილება: 3 წესიერი მონეტის აგდებისას ორი გერბის მოსვლა. 3 მონეტას აგდებენ n-ჯერ. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია შემთხვევითი სიდიდეების ξ და η, სადაც ξ არის n ცდაში A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი, ხოლო $\eta = \xi/n$ კი A ხდომილების სიხშირე.

10. ნავთობმომპოვებელი კომპანია განიხილავს ორი მიმართულებით ბურღვის შესაძლებლობას. შეფასების მიხედვით I მიმართულებით წარმატების ალბათობაა 0.2 და ეს იძლევა 30 მილიონიან მოგებას, ხოლო მარცხის ალბათობა შეადგენს 0.8-ს და ეს იწვევს 3 მილიონიან დანაკარგს. II მიმართულების შემთხვევაში კი 0.1 ალბათობით მიიღებს 70 მილიონიან მოგებას და 0.9 ალბათობით დაკარგავს 4 მილიონს. რომელ მიმართულებაზე უნდა გააკეთოს არჩევანი კომპანიამ?

11. რა შეიცვლება წინა ამოცანაში, თუ II მიმართულებით წარმატების ალბათობა იქნება 0.1-ის ნაცვლად 0.11?

12. საარჩევნო კამპანიისათვის თანხის შეგროვების ორი მეთოდი განიხილება: I) წერილების მიწერა და II) კარდაკარ სიარული. წინა წლების გამოცდილების მიხედვით შედგენილი საშუალო შემოწირულობები და შესაბამისი ალბათობები შეფასებულია შემდეგნაირად:

I) მეთოდი			
x_i	10	5	0
p_i	0.3	0.2	0.5

II) მეთოდი			
x_i	15	3	0
p_i	0.3	0.1	0.6

როგორია საშუალო შემოსავლები? რომელი ქმედება ჯობია?

13. იპოვეთ $E(\delta+\theta)$ და $D(\delta-\theta)$, სადაც $\delta = 2\xi - 3\eta$, $\theta = \frac{1}{4}\varsigma - 13$, თუ ცნობილია, რომ: $E\xi = -2$, $D\xi = 0.5$, $E\eta = 3$, $D\eta = 2$, $E\varsigma = 4$, $D\varsigma = 1, E(\xi\eta) = -1$, $\operatorname{cov}(\xi,\varsigma) = 5$, $\rho(\eta,\varsigma) = 0.5$
.

თავი XII

წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები. ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის

შეფასების ამოცანა: n მოცულობის $X=(X_1,...,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე გავაკეთოთ დასკვნები გენერალური ერთობლიობის უცნობი θ პარამეტრის შესახებ. შერჩევის ნებისმიერ $T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ ფუნქციას **სტატისტიკა (შეფასება)** ეწოდება. **წერტილოვანი შეფასების ამოცანაა** მოიძებნოს ისეთი სტატისტიკა $T_n(X_1,...,X_n)$, რომლის შერჩევითი მნიშვნელობა $T_n(x_1,...,x_n)$, გარკვეული აზრით, შეიძლება ჩაითვალოს უცნობი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი (რეალური) მნიშვნელობის მიახლოებად (შეფასებად) და გამოყენებულ იქნეს მის ნაცვლად. ასეთ სტატისტიკას (შეფასებას) **წერტილოვანი სტატისტიკა (შეფასება)** ეწოდება.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება **ჩაუნაცვლებელი (ანუ გადაუადგილებადი),** თუ $E_\theta T(X)=\theta$.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება **ძალმოსილი (ანუ ძალდებული),** თუ $T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (T_n ალბათობით კრებადია θ-სკენ), როცა $n\to\infty$.

ჩაუნაცვლებელ შეფასებას ეწოდება **ოპტიმალური (ანუ ეფექტური),** თუ მას სხვა ჩაუნაცვლებელ შეფასებებს შორის გააჩნია უმცირესი დისპერსია.

თუ n მოცულობის შერჩევა წარმოდგენილია ვარიაციული მწკრივის სახით, მაშინ **შერჩევითი საშუალო** ეწოდება სიდიდეს:

$$\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+...+x_kn_k}{n}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+...+x_k\frac{n_k}{n}.$$

თუ შერჩევიდან მიღებული მნიშვნელობები არაა დაჯგუფებული, მაშინ შერჩევითი საშუალო

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i .$$

შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს უცნობი მათემატიკური ლოდინის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას.

შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\frac{n_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 .$$

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s'^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 .$$

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას.

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა (შესაბამისად, **შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა**) ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან $s=\sqrt{s^2}$ (შესაბამისად, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან $s'=\sqrt{s'^2}$).

შერჩევითი ასიმეტრიის კოეფიციენტი

$$a_{შერ} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,)^3}$$

შერჩევითი ექსცესის კოეფიციენტი

$$e_{შერ} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,)^4} - 3$$

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{s_x s_y}, \text{ სადაც } \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i ;$$

$$s_x = \sqrt{s_x^{\ 2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} ; \qquad s_y = \sqrt{s_y^{\ 2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} .$$

შერჩევითი პარამეტრების განაწილება ნორმალური პოპულაციისათვის.

დავუშვათ, რომ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ წარმოადგენს შერჩევას ნორმალური გენერალური ერთობლიობიდან, $X_i \cong N(a, \sigma^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, მაშინ: $\bar{X}$ და S^2 $(S^{'2})$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია; $\bar{X} \cong N(a, \sigma^2 / n)$;

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 / \sigma^2 \cong \chi^2(n) ; \quad \frac{(n-1)S^{'2}}{\sigma^2} \cong \chi^2(n-1) ;$$

$$Z = \frac{\bar{X} - a}{\sigma / \sqrt{n}} \cong N(0,1) ; \quad T = \frac{\bar{X} - a}{S / \sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X} - a}{S^{'} / \sqrt{n}} \cong t(n-1) .$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი: ვთქვათ, $p(x_i, \theta)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x_o მნიშვნე-ლობას. **მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია** ეწოდება θ არგუმენტის ფუნქციას: $(x_1,\ x_2,\ \ ,\ x_n;\ \theta)\ =\ \mathcal{J}(b_1,\ \theta)\mathcal{J}(b_2,\ \theta)\ \mathcal{J}(b_6,\ \theta)$ ($\ln L$ ფუნქციას **მაქსიმალური დასაჯერო-ბის ლოგარითმული ფუნქცია** ეწოდება). **მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას** უწო-დებენ θ-ს იმ მნიშვნელობას, სადაც მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია (ან რაც იგივეა $\ln L$) აღწევს თავის მაქსიმუმს. მის მოსაძებნად საჭიროა: 1. ვიპოვოთ წარმოე-ბული $\partial \ln L / \partial\theta$; 2. გავუტოლოთ წარმოებული ნულს (მივიღებთ ე. წ. **მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმულ განტოლებას**) და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები; 3. ვიპოვოთ მეორე წარმოებული $\partial^2 \ln L / \partial\theta^2$; თუ ის უარყოფითია კრიტიკულ წერტილში, მაშინ ეს წერტილი – მაქსიმუმის წერტილია.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, რომლის $g(b,\ \theta)$ განაწილების სიმ-კვრივის სახე ცნობილია, მაგრამ იგი შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს, მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta) .$$

უცნობი პარამეტრის მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების საპოვნელად უნდა ჩავატაროთ იგივე პროცედურები, რაც დისკრეტულ შემთხვევაში.

მომენტთა მეთოდი: მომენტთა მეთოდი დაფუძნებულია იმ გარემოებაზე, რომ საწყ-ისი და ცენტრალური ემპირიული მომენტები წარმოადგენენ შესაბამისი საწყისი და ცენტრალური თეორიული მომენტების ძალმოსილ შეფასებებს. ამიტომ ამა თუ იმ შე-ფასების მისაღებად თეორიული მომენტები უნდა გავუტოლოთ იმავე რიგის შესაბამის

ემპირიულ მომენტებს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება ან განტოლებათა სისტემა.

θ უცნობი პარამეტრის γ (ან $1-\alpha$) **საიმედოობის მქონე ანუ** $100\gamma\%$**-იანი (ან** $100(1-\alpha)\%$**-იანი) ნდობის ინტერვალი** ეწოდება. ინტერვალს (T_1, T_2), რომლისთვისაც: $P\{T_1 < \theta < T_2\} = \gamma$ (ან $1-\alpha$), სადაც T_1 და T_2 θ პარამეტრის გარკვეული წერტილოვანი შეფასებებია, $\gamma \in (0,1)$ $(\alpha \in (0,1))$; α-ს **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება; ნდობის ინტერვალის სიგრძის ნახევარს **შეფასების სიზუსტე** ეწოდება.

α **მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის ცნობილი** σ^2 **დისპერსიის შემთხვევაში** არის:

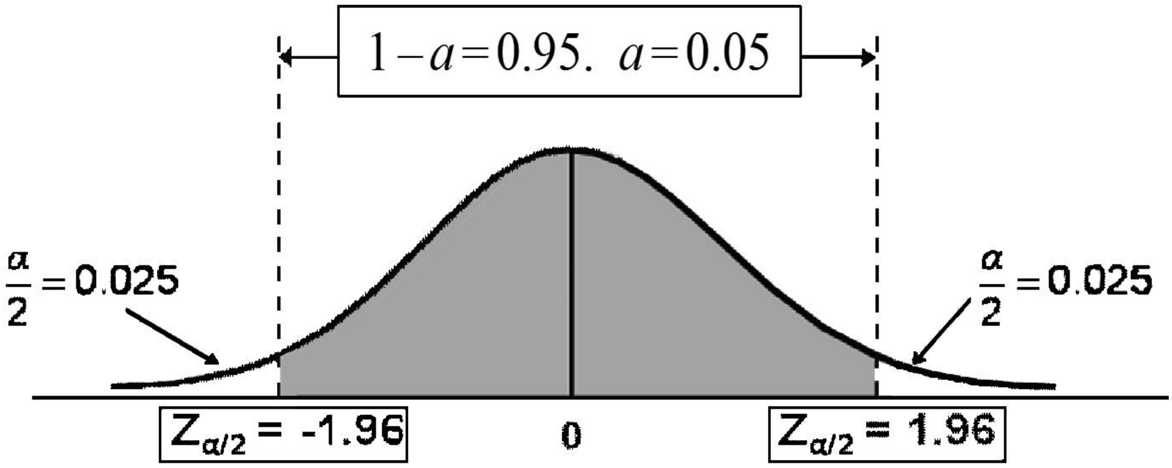
$$\left(\overline{X} - \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right),$$

სადაც $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. აქ შეფასების სიზუსტეა $l = \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$.

შეფასების წინასწარ დაფიქსირებული l სიზუსტის უზრუნველსაყოფად საჭირო შერჩევის მინიმალური მოცულობაა:

$$n^* = [(\frac{\sigma}{l} z_{\alpha/2})^2] + 1.$$

95%-იანი ნდობის ინტერვალი



α **მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში** აქვს შემდეგი სახე:

$$(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}}),$$

სადაც $t_{n-1,\alpha/2}$ არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილი.

α **მნიშვნელოვნების დონის მქონე ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი (არანორმალური) პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში (** $n \geq 30$**), როცა დისპერსია ცნობილია, არის:**

$$(\overline{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

ხოლო უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში კი:

$$(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}).$$

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი (არანორმალური) პოპულაციის საშუალოსათვის, როცა σ უცნობია და $n<30$:

$$(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}).$$

როდის გამოიყენება Z ან T განაწილება

ცნობილია თუ არა σ? — დიახ → გამოიყენე $z_{\alpha/2}$ შერჩევის მოცულობის მიუხედავად*

↓ არა

არის თუ არა $n\geq 30$? — დიახ → გამოიყენე $z_{\alpha/2}$ და ფორმულაში σ შეცვალე S'-ით

↓ არა

გამოიყენე $t_{n-1,\alpha/2}$ და S' ფორმულაში**

* სიდიდე უნდა იყოს ნორმალურად განაწილებული როცა $n<30$.
** სიდიდე უნდა იყოს მიახლოებით ნორმალური.

მაგალითი 1. უნივერსიტეტის რექტორს სურს შეაფასოს წელს ჩარიცხული სტუდენტების საშუალო ასაკი. წარსული გამოკვლევებიდან ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა არის 2 წელი. აღებულია 50 სტუდენტისაგან შემდგარი შერჩევა და მისთვის გამოთვლილი საშუალო ტოლია 23.2 წლის. იპოვეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. იგულისხმება, რომ ასაკი დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ნიშნავს, რომ ნდობის ინტერვალის საიმედოობა $1-\alpha = 95\%/100\% = 0.95$, ანუ $\alpha = 0.05$. ამიტომ ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. შესაბამისად, საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(23.2-1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{50}}, 23.2+1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{50}}),\quad (22.6, 23.8),$$

ანუ 23.2 ± 0.6. ამრიგად, 50 სტუდენტის ასაკიდან გამომდინარე, 95%-იანი საიმედოობით, უნივერსიტეტის რექტორს შეუძლია თქვას, რომ სტუდენტების საშუალო ასაკი მოთავსებულია 22.6 წელსა და 23.8 წელს შორის.

მაგალითი 2. ცნობილია, რომ გარკვეული მედიკამენტის გამოყენების შედეგად პულსის რიცხვი მატულობს. ცნობილია, რომ პულსის რიცხვის სტანდარტული გადახრა არის 5 დარტყმა წუთში. შერჩეულ იქნა ამ მედიკამენტის 30 მომხმარებელი და მათთვის პულსის რიცხვის საშუალო აღმოჩნდა 104 დარტყმა წუთში. ვიპოვოთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პულსის რიცხვის ჭეშმარიტი საშუალოსათვის. იგულისხმება, რომ შესაბამისი განაწილება დაახლოებით ნორმალურია.

ამოხსნა. აქ $1-\alpha = 0.99$, ანუ $\alpha = 0.01$. ამიტომ $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$. შესაბამისად, ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$104-2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}<a<104+2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}, \text{ ანუ } 102<a<106.$$

მაშასადამე, 30 მომხმარებლისაგან შედგენილი შერჩევის საფუძველზე, 99%-იანი საიმედოობით, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ მედიკამენტის ყველა მომხმარებლის პულსის რიცხვის საშუალო მოთავსებულია (ცვალებადობს) 102-სა და 106-ს შორის.

მაგალითი 3. კოლეჯის პრეზიდენტმა დაავალა სტატისტიკის მასწავლებელს შეაფასოს კოლეჯის სტუდენტების საშუალო ასაკი. რა მოცულობის შერჩევაა აუცილებელი? სტატისტიკის მასწავლებელი თვლის, რომ საიმედოობა უნდა იყოს 99%, რათა შეფასება იყოს სწორი ერთი წლის სიზუსტით. წინა გამოკვლევებიდან ცნობილია, რომ ასაკთა სტანდარტული გადახრა არის 3 წელი. იგულისხმება, რომ ასაკი დაახლოებით ნორმალურდაა განაწილებული

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $l=1$; $\sigma=3$; $\alpha=1-0.99=0.01$. ამიტომ $z_{\alpha/2}=z_{0.005}=2.58$. შესაბამისად, შერჩევის მინიმალური მოცულობა იქნება:

$$n^*=[(\frac{2.58}{1}\cdot 3)^2]+1=[59.9]+1=60.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ მასწავლებელმა შეაფასოს სტუდენტთა ასაკის საშუალოს ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ერთი წლის სიზუსტით 99%-იანი საიმედოობით, მას სჭირდება სულ ცოტა 60 სტუდენტისაგან შემდგარი შერჩევა.

მაგალითი 4. შემთხვევით შეარჩიეს 10 ავტომობილი და გაზომეს მარჯვენა წინა საბურავის პროტექტორის სიღრმე. საშუალო აღმოჩნდა 0.32 დიუმი (1 დიუმი არის 2.54 სმ.), ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა – 0.08 დიუმი. იპოვეთ 95%-იანი საიმედოობის ნდობის ინტერვალი პროტექტორის სიღრმის საშუალოსათვის. იგულისხმეთ, რომ სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=10$, $\overline{X}=0.32$, $s'=0.08$. ვინაიდან პოპულაციის სტანდარტული გადახრა σ უცნობია, ის უნდა შევცვალოთ შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრით $s'=0.08$. თავისუფლების ხარისხია $n-1=10-1=9$. $\alpha=1-0.95=0.05$, $\alpha/2=0.05/2=0.025$. შესაბამისად t განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში მე-9 სტრიქონისა და 0.025-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ $t_{n-1,\alpha/2}$-ის მნიშვნელობას: $t_{n-1,\alpha/2}=t_{9,0.025}=2.262$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(0.32-2.262\cdot\frac{0.08}{\sqrt{10}}, 0.32+2.262\cdot\frac{0.08}{\sqrt{10}}), \text{ ანუ } (0.26, 0.38).$$

ამრიგად, 10 მოცულობის მქონე შერჩევის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ავტომობილების წინა მარჯვენა საბურავების პროტექტორების სიღრმის პოპულაციის საშუალო 95%-იანი საიმედობით მოთავსებულია 0.26 დიუმსა და 0.38 დიუმს შორის (1 დიუმი = 2.54 სმ).

მაგალითი 5. მოცემულია გენერალური ერთობლიობა გარკვეული მახასიათებლით, რომელიც განაწილებულია ნორმალურად 6.25-ის ტოლი დისპერსიით. ჩატარებულია $n=27$ მოცულობის შერჩევა და მიღებულია მახასიათებლის საშუალო შერჩევითი მნიშვნელობა $\overline{x}=12$. ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი, რომელიც ფარავს გენერალური ერთობლიობის გამოსაკვლევი მახასიათებლის უცნობ მათემატიკურ ლოდინს საიმედოობით $\gamma=0.99$.

ამოხსნა. გვაქვს: $\sigma=\sqrt{6.25}=2.5$; $n=27$; $\overline{x}=12$; $\alpha=1-0.99=0.01$; $z_{\alpha/2}=z_{0.005}=2.57$. აქედან ვღებულობთ საძებნ ნდობის ინტერვალს: (10.76, 13.24).

მაგალითი 6. 20 ელექტრონათურის საკონტროლო შემოწმებისას მათი მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 2000 საათის ტოლი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 11 საათის ტოლი. ცნობილია, რომ ნათურის მუშაობის ხანგრძლივობა წარმოადგენს ნორმალური კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს.

განვსაზღვროთ ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი საიმედოობით 0.95.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$. სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან (თავისუფლების 19-ის ტოლი ხარისხით) ვპოულობთ, რომ $t_{n-1,\alpha/2} = t_{19,0.025} = 2.093$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება (1994.8, 2005.2).

ამოცანები (σ *ცნობილია ან* $n \geq 30$)

1. იპოვეთ $z_{\alpha/2}$ (სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$-ზედა კრიტიკული წერტილი): ა) 99%-იანი; ბ) 98%-იანი; გ) 95%-იანი; დ) 90%-იანი და ე) 94%-იანი ნდობის ინტერვალებისათვის.
2. გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა, ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის და იპოვეთ შეფასების სიზუსტე. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 11. ისარგებლეთ შემდეგი შერჩევით:

43	52	18	20	25	45	43	21	42	32
24	32	19	25	26	44	42	41	41	53
22	25	23	21	27	33	36	47	19	20

3. ქვემოთ მოყვანილი შერჩევის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის:

47.596	68.751	5.838	69.831	28.843	53.107	31.391	48.829	50.706	32.785
62.892	55.105	63.974	56.674	38.362	51.549	31.938	31.851	56.088	48.321
34.906	38.359	72.086	34.009	50.850	43.801	46.127	49.926	54.960	49.671

4. 35 მეხუთე კლასელის კითხვის ქულების საშუალო არის 82, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 15. ა) იპოვეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი მეხუთე კლასელების კითხვის ქულების საშუალოსათვის; ბ) იპოვეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი მეხუთე კლასელების კითხვის ქულების საშუალოსათვის; გ) რომელი ინტერვალია უფრო განიერი? ახსენით რატომ.
5. გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ევროპელი მოქალაქის წლიური შემოსავლის საშუალოსათვის, თუ ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეული 50 ევროპელი მოქალაქის შემოსავლები გაზომილი ათასობით ევროებში:

84	14	31	72	26	49	252	104	31	8
3	18	72	23	55	133	16	29	225	138
85	24	391	72	158	4340	346	19	5	846
461	254	125	61	123	60	29	10	366	47
28	254	6	77	21	97	6	17	8	82

6. 40 პედაგოგზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ 12.6 წუთს ანდომებენ ერთი ნაწერის გასწორებას. ა) ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი გასწორების დროის საშუალოსათვის, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა ტოლია 2.5 წუთის; ბ) რამდენად მოსალოდნელია, რომ რომელიმე პედაგოგმა თქვას, რომ ის საშუალოდ 30 წუთს ანდომებს ნაწერის გასწორებას?
7. შემთხვევით შერჩეული 40 თავდამსხმელის საშუალო ქულა არის 186, ხოლო თავდამსხმელთა პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 6. ა) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი თავდამსხმელთა პოპულაციის საშუალო ქულისათვის; ბ) ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი თავდამსხმელთა პოპულაციის საშუალო ქულისათვის იმ შემთხვევაში, როცა 40 თავდამსხმელის ნაცვლად განიხილება 100 თამდამსხმელისაგან შედგენილი შერჩევა იმავე საშუალო ქულით; გ) რომელი ინტერვალია უფრო პატარა (ზუსტი) და რატომ?
8. შემთხვევით შერჩეულ 49 ბავშვზე დაკვირვებამ (რომელთა ასაკი მერყეობდა 8-დან 12 წლამდე) აჩვენა, რომ ისინი სავაჭრო ცენტრში საშუალოდ ხარჯავენ 18.5 ლარს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1.56 ლარი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის

ინტერვალი 8-დან 12 წლამდე ასაკის ბავშვების მიერ სავაჭრო ცენტრში დახარჯული თანხის საშუალოსათვის.
9. გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ აშშ-ს მოქალაქეს საშუალოდ ჭირდება 5.9 თვე ახალი სამუშაოს მოსაძებნად. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სამუშაოს მოძებნის საშუალოსათვის, თუ გამოკითხული 36 სამუშაოს მძებნელისათვის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 0.8 თვე.
10. ქვემოთ მოყვანილია აშშ-ს შემთხვევით შერჩეულ 40 კომპანიაში დროებითი სამუშაო ადგილების რაოდენობა:

7685	3100	725	850	11778	7300	3472	540	11370	5400
1570	160	9953	3114	2600	2821	6200	3483	8954	8
1000	1650	1200	390	1999	400	3473	600	1270	873
400	713	11960	1195	2290	175	887	1703	4236	1400

გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი დროებითი სამუშაო ადგილების საშუალოსათვის.
11. 48 შემთხვევით შერჩეული დღის მონაცემების მიხედვით დიდ ჰოსპიტალში დღის განმავლობაში შემოსული პაციენტების საშუალოდ 38% საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 4. ა) ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ პაციენტების რაოდენობის საშუალოსათვის, ვინც საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას; ბ) ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ პაციენტების რაოდენობის საშუალოსათვის, ვინც საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას, თუ პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 8 ნაცვლად 4-სა; გ) რატომაა მეორე შემთხვევაში ნდობის ინტერვალი უფრო განიერი?
12. ცენტრალური რესპუბლიკური საავადმყოფოს 84 სხვადასხვა ადგილას გაზომილი ხმაურის დონის საშუალო იყო 61.2 დეციბალი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 7.9 დეციბალი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საავადმყოფოში ხმაურის დონის რეალური საშუალოსათვის.
13. მკვლევარს სურს შეაფასოს დედაქალაქიის პოლიციის ოფიცრის საშუალო ხელფასი. მისი მიზანია, რომ შეფასების საიმედოობა იყოს 95%. ცნობილია, რომ პოლიციის ოფიცრის ხელფასის სტანდარტული გადახრაა 1050 ლარი. რა მოცულობის შერჩევა დასჭირდება მკვლევარს იმისათვის, რომ შეფასების სიზუსტე იყოს 200 ლარი?
14. ფაკულტეტის დეკანატს სურს შეაფასოს მოწვეული პედაგოგების საშუალო კვირეული დატვირთვა. წინა გამოკვლევის მიხედვით სტანდარტული გადახრა იყო 2.6 სთ. რამდენად დიდი მოცულობის შერჩევის აღება იქნება საჭირო, თუ დეკანატს სურს 99%-იანი საიმედოობით ჭეშმარიტ საშუალოსა და შერჩევის საშუალოს შორის განსხვავება არ აღემატებოდეს 1 საათს.
15. ცენტრალური სამხედრო ჰოსპიტალის 117 სხვადასხვა ოთახში ხმაურის საშუალო დონე იყო 58 დეციბალი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 4.8 დეციბალი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჰოსპიტალში ხმაურის დონის ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.
16. სადაზღვევო კომპანია ცდილობს შეაფასოს ავადმყოფობის დღეების საშუალო რაოდენობა მაკდონალდსის ქსელში მომუშავე პერსონალისათვის. საპილოტე შემოწმებით დადგინდა, რომ შესაბამისი სტანდარტული გადახრაა 2.5 დღე. რა მოცულობის შერჩევაა საჭირო, რომ კომპანიამ 95%-იანი საიმედოობით დაადგინოს ინტერვალი, რომელიც შეიცავს ავადმყოფობის დღეების რეალურ საშუალოს მაქსიმალური ცდომილებით 1 დღე?
17. რესტორნის მეპატრონეს სურს დაადგინოს 99%-იანი ნდობის ინტერვალი შამპანიურის ფასის რეალური საშუალოსათვის. რა მოცულობის უნდა იყოს შერჩევა, რომ შეფასების სიზუსტე იყოს 0.1 ლარი, თუ წინა გამოკვლევის თანახმად ფასის სტანდარტული გადახრა იყო 0.12 ლარი.
18. სამშობიარო სახლის პერსონალს სურს შეაფასოს ახალშობილთა წონა. რა მოცულობის შერჩევა იქნება საჭირო, რომ 90%-იანი საიმედოობით წონის რეალური საშუალო მოთავსებული იყოს შერჩევის საშუალოსაგან 6 უნციის (1 უნცია = 28.3 გრ)

ფარგლებში, თუ ცნობილია, რომ ახალშობილთა წონის სტანდარტული გადახრაა 8 უნცია.

ამოცანები (σ უცნობია და $n<30$)

19. იპოვეთ $t_{n-1,\alpha/2}$ (თავისუფლების $(n-1)$ ხარისხის მქონე სტუდენტის განაწილების $\alpha/2$-ზედა კრიტიკული წერტილი): ა) 99%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=18$; ბ) 95%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=23$; გ) 98%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=15$; დ) 90%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=10$; ე) 95%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=20$.

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმეთ, რომ ყველა სიდიდე განაწილებულია დაახლოებით ნორმალურად:

20. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემებისათვის გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა, ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის და იპოვეთ შეფასების სიზუსტე:

625 675 535 406 512 680 483 522 619 575.

21. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის:

62 81 86 79 73 88 90 98 78 93 87 82 78 59 63 97 93 84.

22. შემთხვევით შერჩეული 20 პაციენტის 100 მილილიტრ სისხლში ჰემოგლობინის საშუალო შემცველობა აღმოჩნდა 16 გრამი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 გრ. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

23. მეტეოროლოგმა 15 ცივი ჰაერის მასივზე დაკვირვების შედეგად დაადგინა, რომ მათი გავრცელების საშუალო სიჩქარეა 18 მილი/სთ, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 2 მილი/სთ. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალო სიჩქარისათვის.

24. შტატის წარმომადგენელს სურს შეაფასოს შტატის საკანონმდებლო ორგანოში ქალების საშუალო რიცხვი. მან შემთხვევით შეარჩია 17 შტატი და მიიღო შემდეგი მონაცემები: 5, 33, 35, 37, 24, 31, 16, 45, 19, 13, 18, 29, 15, 39, 18, 58, 132. გამოთვალეთ საშუალოს წერტილოვანი შეფასება, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. რატომაა ნდობის ინტერვალი ასე განიერი?

25. 20 თინუსზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ ცურავენ 8.6 მილს საათში. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1.6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

26. შემთხვევით არჩეული 6 სპილოს საშუალო წონაა 12200 ფუნტი (1 ფუნტი = 453.6 გრ), ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 200 ფუნტი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

27. რეგიონის 8 სკოლის სათადარიგო მასწავლებლის ყოველდღიური ხელფასებია: 60ლ, 56ლ, 60ლ, 55ლ, 70ლ, 55ლ, 60ლ, 55ლ. იპოვეთ წერტილოვანი შეფასებები და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი რეგიონში სათადარიგო მასწავლებლის ყოველდღიური ხელფასების ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

28. 28 მოქალაქის გამოკითხვის მიხედვით მათი ამჟამინდელ მისამართზე ცხოვრების საშუალო ხანგრძლივობამ შეადგინა 9.3 წელი, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 2 წელი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის.

29. ავტომაღაზიის მენეჯერმა დაადგინა, რომ მის 6 თანამშრომელს ავტომობილის წყლის ტუმბოს შეცვლა შეუძლია საშუალოდ 18 წუთში, ხოლო შერჩევის შესწორე-

ბული სტანდარტული გადახრა არის 3 წუთი. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

30. შემთხვევით შერჩეული 25 ავტომობილიანი სტუდენტი კვირაში საშუალოდ ხარჯავს 18.53 ლარის ბენზინს. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3 ლარი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

31. სტრესულ სიტუაციაში მყოფი 10 კაციანი ჯგუფის გულისცემის საშუალო რიცხვი წუთში შეადგენს 126-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 4. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სტრესულ სიტუაციაში მყოფი კაცების გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

32. სტრესულ სიტუაციაში მყოფი 6 ქალი გულისცემის საშუალო რიცხვი წუთში შეადგენს 115-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 6. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სტრესულ სიტუაციაში მყოფი ქალების გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

33. ჰოსპიტლის 24 საოპერაციო ოთახში ხმაურის დონის საშუალო იყო 41.6 დეციბალი, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 7.5 დეციბალი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საოპერაციო ოთახებში ხმაურის დონის რეალური საშუალოსათვის.

34. ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის, თუ მისგან აღებული შერჩევაა:

22	24	120	382	50	38	297
29	23	70	56	17	51	38

35. ეროვნულ გამოცდაზე მათემატიკაში 20 აბიტურიენტის გულისცემის საშუალო იყო 96 დარტყმა წუთში, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

36. დედაქალაქის 28 ახალდაქორწინებულის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 58219 ლარს, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 56 ლარი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი შემოსავლების რეალური საშუალოსათვის.

თავი XIII

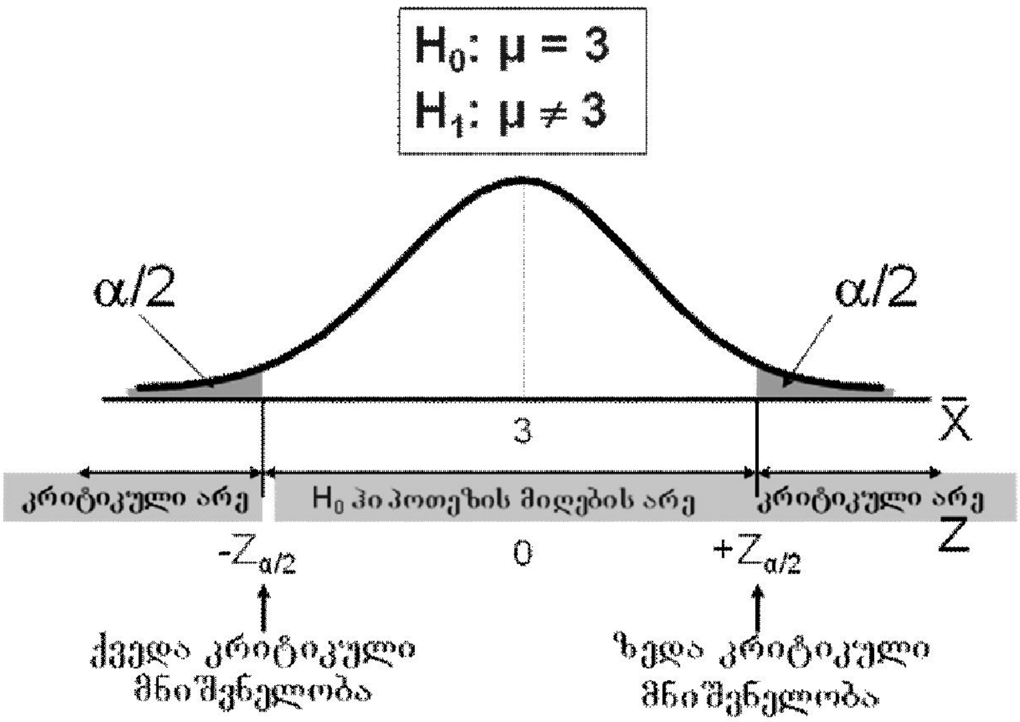
ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის

განაწილების პარამეტრების მნიშვნელობების შესახებ ან ორი განაწილების პარამეტრების სიდიდეების შედარების ჰიპოთეზებს **პარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზებს განაწილების სახის შესახებ კი **არაპარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზას, რომელიც წამოყენებულია შერჩევით მონაცემებთან მისი თანხმობის შესამოწმებლად, **ნულოვანი ჰიპოთეზა** ეწოდება და აღინიშნება H_0-ით (H_0 ამტკიცებს, რომ არ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არ არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). H_0 ჰიპოთეზასთან ერთად იხილავენ (წამოაყენებენ) **ალტერნატიულ** ანუ **საწინააღმდეგო** ჰიპოთეზასაც, რომელსაც H_1-ით აღნიშნავენ (H_1 ამტკიცებს, რომ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). ნულოვანი ჰიპოთეზა მოიცავს ტოლობის ნიშანს:

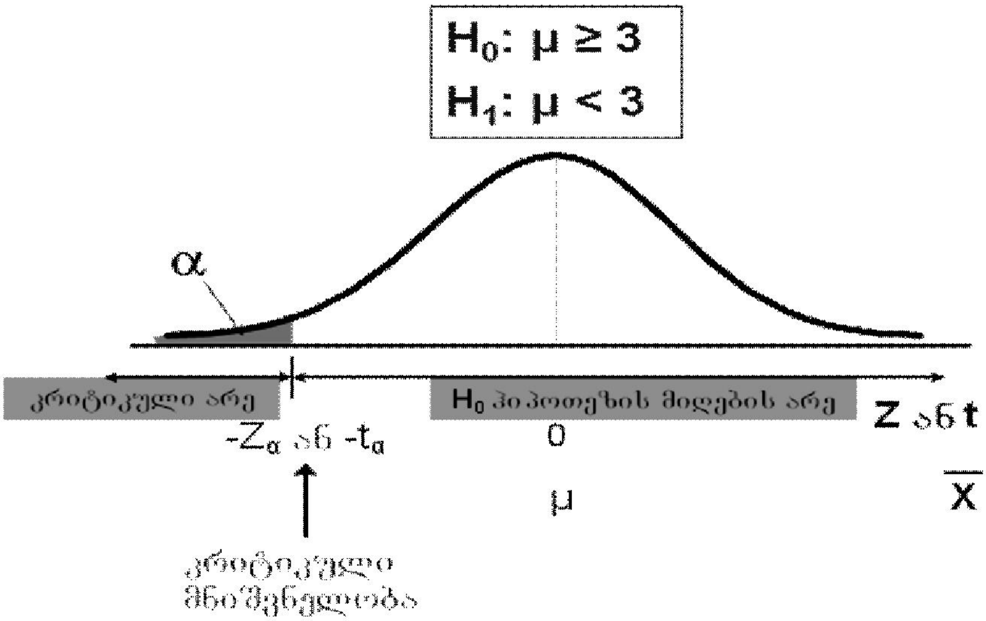
კრიტერიუმი:

ორმხრივი	მარჯვენა ცალმხრივი	მარცხენა ცალმხრივი
$H_0: \theta = \theta_0$	$H_0: \theta \le \theta_0$	$H_0: \theta \ge \theta_0$
$H_1: \theta \ne \theta_0$	$H_1: \theta > \theta_0$	$H_1: \theta < \theta_0$

ორმხრივი ჰიპოთეზა



მარცხენა ცალმხრივი ჰიპოთეზა



სამართლიანი ჰიპოთეზის უკუგდებას **პირველი გვარის შეცდომა** ეწოდება. პირველი გვარის შეცდომის დაშვების ალბათობას **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება და α-თი აღინიშნება. არასამართლიანი ჰიპოთეზის მიღებას **მეორე გვარის შეცდომა** ეწოდება. მისი ალბათობა აღინიშნება β ასოთი. რიცხვს $1-\beta$, რომელიც ტოლია ალბათობის იმისა, რომ არ იქნება დაშვებული მეორე გვარის შეცდომა **კრიტერიუმის სიმძლავრე** ეწოდება.

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში:

$\xi \cong N(\cdot,\sigma^2)$; $D\xi=\sigma^2$ ცნობილია; $E\xi$ უცნობია.

ჰიპოთეზა: $H_0: E\xi = a_0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z=\dfrac{\overline{X}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}} \cong N(0,1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z=\dfrac{\overline{x}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	**კრიტიკული არე C.R.** (H_0**-ის უარყოფის არე)**
$H_1: E\xi = a_1 > a_0$	$z \ge z_\alpha$,
$H_1: E\xi = a_1 < a_0$	$z \le -z_\alpha$,
$H_1: E\xi \ne a_0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ან $z \ge z_{\alpha/2}$

(სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ **კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.**).

გადაწყვეტილება: თუ $z \in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

შერჩევის მინიმალური რაოდენობა $n^{\bullet}$, რომლისთვისაც I გვარის შეცდომის ალბათობაა α, ხოლო II გვარის შეცდომის ალბათობა ნაკლებია β-ზე:

$$n^{\bullet} = [\sigma^2 (z_\alpha + z_\beta)^2 / (a_1 - a_0)^2] + 1$$

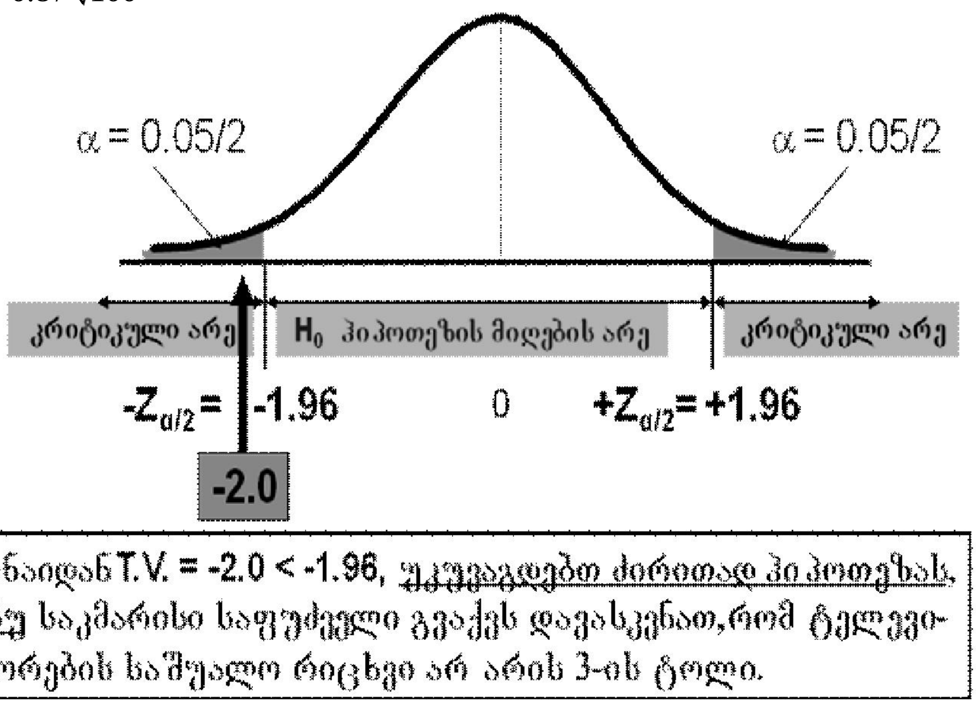
შენიშვნა: თუ შერჩევის მოცულობა მეტია ან ტოლი 30-ის და სტანდარტული გადახრა σ უცნობია, **კრიტერიუმის სტატისტიკად** განიხილება:

$$Z = \frac{\overline{X} - E\xi}{s^{'} / \sqrt{n}} \, .$$

ორმხრივი ჰიპოთეზის შემოწმება (σ ცნობილია)

$a = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შევამოწმოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ტელევიზორების საშუალო რიცხვი აშშ-ს მოსახლეობის ოჯახებში არის 3-ის ტოლი, თუ ცნობილია, რომ $\sigma = 0.8$ და შემთხვევით შერჩეულ 100 ოჯახში ტელევიზორების საშუალო რიცხვი აღმოჩნდა 2.84.

გვაქვს: $a = 0.05$; $\sigma = 0.8$ $n = 100$; $\overline{x} = 2.84$. ამიტომ $\pm z_{a/2} = \pm 1.96$ და $T.V. = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{2.84 - 3}{0.8 / \sqrt{100}} = \dfrac{-0.16}{0.08} = -2.0$. შესაბამისად, გვექნება შემდეგი სურათი:



მაგალითი 1. სამეცნიერო ანგარიშის თანახმად სრული პროფესორის საშუალო წლიური შემოსავალი აღემატება 42000 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 30 სრული პროფესორის წლიური შემოსავლის საშუალო აღმოჩნდა 43260 ლარი. 0.05 მნიშვნელოვნების დონისათვის შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სრული პროფესორის საშუალო ხელფასი მეტია 42000 ლარზე, თუ პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 5230 ლარი.

ამოხსნა. ვინაიდან შერჩევის მოცულობა $n \geq 30$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს დაახლოებით ნორმალურ პოპულაციასთან $N(a, 5230^2)$. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : a \leq 42000$ და $H_1 : a > 42000$. ვი-

ნაიდან, $\alpha = 0.05$ და კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება $z_\alpha = 1.65$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$z = \frac{\overline{x} - E\xi}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{43260 - 42000}{5230/\sqrt{30}} = 1.32 .$$

რადგანაც $1.32 < 1.65$ (ანუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში), ამიტომ არა გვაქვს საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის.

მაგალითი 2. მკვლევრის აზრით სპორტული ფეხსაცმლის საშუალო ფასი ნაკლებია 80 ლარზე. მან კატალოგებიდან შემთხვევით შეარჩია 36 წყვილი სპორტული ფეხსაცმელი და ამოწერა შესაბამისი ფასები:

60	70	75	55	80	55	50	40	80
70	50	95	120	65	80	85	85	45
75	60	90	90	60	95	110	85	45
90	70	70	90	75	85	80	60	110

არის თუ არა საკმარისი საფუძველი, რომ 0.1 მნიშვნელოვნების დონით გავიზიაროთ მკვლევრის აზრი?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: E\xi \ge 80$, $H_1: E\xi < 80$. რადგანაც, $\alpha = 0.1$ და კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება $-z_\alpha = -1.28$. პირობაში მოყვანილი ნედლი მონაცემების მიხედვით გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, გვაქვს: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 75$ და $s^{'} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 19.2$. შესაბამისად, კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\overline{x} - E\xi}{s^{'}/\sqrt{n}} = \frac{75 - 80}{19.2/\sqrt{36}} = -1.56 .$$

ვინაიდან კრიტერიუმის მნიშვნელობა ვარდება კრიტიკულ არეში, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ. შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, რომ გავიზიაროთ მკვლევრის მოსაზრება.

მაგალითი 3. ჯანდაცვის სამინისტროს ანგარიშის მიხედვით ინსულტის მკურნალობის საშუალო ღირებულება შეადგენს 24672 ლარს. იმის გასარკვევად, კონკრეტულ საავადმყოფოში ინსულტის მკურნალობის საშუალო ღირებულება არის თუ არ განსხვავებული, მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია ამ საავადმყოფოში ინსულტის მკურნალობის 35 შემთხვევა და მკურნალობის საშუალო ღირებულება გამოვიდა 25226 ლარი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 3251 ლარი. შეუძლია თუ არა მკვლევარს 0.01 მნიშვნელოვნების დონით ამტკიცოს, რომ ამ ჰოსპიტალში ინსულტის მკურნალობის ღირებულება განსხვავებულია 24672 ლარისაგან?

ამოხსნა. $H_0: E\xi = 24672$, $H_1: E\xi \ne 24672$. კრიტიკული მნიშვნელობებია: 2.58 და -2.58. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\overline{x} - E\xi}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{25226 - 24672}{3251/\sqrt{35}} = 1.01 .$$

რამდენადაც $1.01 < 2.58$ (ანუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში), ამიტომ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი იმისა, რომ კონკრეტულ საავადმყოფოში მკურნალობის ღირებულება განსხვავებულია.

მაგალითი 4. მკვლევარს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ მაშველების საშუალო ასაკი 24 წელზე მეტია. მან შემთხვევით შეარჩია 36 მაშველი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ასაკი იყო 24.7 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 2 წელი. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ჰიპოთეზის მისაღებად $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით? იპოვეთ P-მნიშვნელობა.

ამოხსნა. $H_0: E\xi \le 24$, $H_1: E\xi > 24$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z=\frac{24.7-24}{2/\sqrt{36}}=2.1.$$

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა: $P=1-\Phi(z)=1-0.9821=0.0179$. ვინაიდან $P\le\alpha$, ამიტომ H_0 უნდა უკუვაგდოთ, ანუ საკმარისი საფუძველი არსებობს იმისა, რომ მაშველის საშუალო ასაკი მეტია 24 წელზე.

შევნიშნავთ, რომ თუ $\alpha=0.01$, მაშინ არ გვექნებოდა H_0-ის უარყოფის საფუძველი.

მაგალითი 5. დაკვირვებების რა მინიმალური რაოდენობაა საჭირო იმისათვის, რომ მიღწეულ იქნეს 0.05-ის ტოლი მნიშვნელოვნების დონე და 0.9-ის ტოლი სიმძლავრე $\xi\cong N(\cdot,49)$ ნორმალური პოპულაციის საშუალოს შესახებ ძირითადი $H_0:E\xi=8$ ჰიპოთეზის შემოწმებისას $H_1:E\xi=11$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\alpha=0.05$; $\beta=1-0.9=0.1$; $a_0=8$; $a_1=11$; $\sigma^2=49$. ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $z_\alpha=1.64$ და $z_\beta=1.29$. ამიტომ შესაბამისი ფორმულის ძალით $n^\bullet=48$.

ამოცანები

1. ისარგებლეთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ცხრილით და იპოვეთ კრიტიკული მნიშვნელობა (ან მნიშვნელობები) როცა: ა) $\alpha=0.01$, კრიტ. ორმხრივია; ბ) $\alpha=0.05$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; გ) $\alpha=0.05$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; დ) $\alpha=0.1$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; ე) $\alpha=0.05$, კრიტ. ორმხრივია; ვ) $\alpha=0.04$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; ზ) $\alpha=0.01$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; თ) $\alpha=0.1$, კრიტ. ორმხრივია; ი) $\alpha=0.02$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; კ) $\alpha=0.02$, კრიტ. ორმხრივია.
2. ჩამოაყალიბეთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები შემდეგი წინადადებებისათვის: ა) ავტობუსის მძღოლების საშუალო ასაკი 39 წელია; ბ) ექიმის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 25000 ლარს; გ) ტელეწამყვანის საშუალო ასაკი 25 წელზე მეტია; დ) მორბენალის საშუალო გულისცემა ნაკლებია 85 დარტყმაზე წუთში; ე) სტუდენტის საშუალო ქულა სტატისტიკაში ნაკლებია 56-ზე; ვ) აქციის საშუალო ფასი 250 ლარზე მეტია; ზ) მამაკაცის საშუალო პენსია აღემატება 75 ლარს თვეში; თ) 1000 გრამიან ბრინჯის ფუთაში დევს სულ ცოტა 950 გრამი ბრინჯი.
3. მკვლევარი ფიქრობს, რომ სოფლის საშუალო ბიუჯეტი შეადგენს 25000 ლარს. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ მკვლევრის მოსაზრება, თუ შემთხვევით შერჩეული 40 სოფლის ბიუჯეტი ათასობით ლარებში შემდეგია:

16.7	17.6	26.5	6.3	16.5	11.9	23.7	14.3	94	4.7
11.6	26.5	5.6	58.6	3.2	14.2	3.5	10.9	11.8	15.2
30.1	19.7	11.7	38.8	36.3	4.8	7.9	14.2	18	24.5
69.2	8.5	19.2	5	15.3	41	27.1	10.3	3.7	13.6

4. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით დედაქალაქში სასტუმროს ერთი ნომრის საშუალო ღირებულება შეადგენს 69.21 ლარს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია სასტუმროს 30 ნომერი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ღირებულებაა 68.43 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3.72 ლარი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა?
5. ქარხნის მენეჯერის აზრით მუშების საშუალო საათობრივი ანაზღაურება 9.78 ლარზე ნაკლებია. შემთხვევით შერჩეული 18 მუშის საშუალო საათობრივი ხელფასი აღმოჩნდა 9.6 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 1.42 ლარი. ჩათვალეთ, რომ ხელფასი ნორმალურადაა განაწილებული. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ მენეჯერის მოსაზრება?

6. მკვლევრის შეფასებით დიდი ბიზნესის საშუალო შემოსავალი 24 მილიონზე მეტია. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ მკვლევრის შეფასება, თუ შემთხვევით შერჩეული 50 კომპანიის შემოსავლები (გაზომილი მილიონებში) შემდეგია:

178	122	91	44	35	61	56	46	20	32
30	28	28	20	27	29	16	16	19	15
41	38	36	15	25	31	30	19	19	19
24	16	15	15	19	25	25	18	14	15
24	23	17	17	22	22	21	20	17	20

7. გაყინული კერძის მწარმოებელი ფირმის დირექტორი აცხადებს, რომ კერძის საშუალო კალორიულობა არის 800, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 25. მკვლევარმა შეამოწმა 12 კერძი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო კალორიულობა იყო 873. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით უარვყოთ დირექტორის მტკიცებულობა? ჩავთვალოთ, რომ კალორიულობა კერძში განაწილებულია ნორმალურად.

8. სამგზავრო თვითმფრინავების საშუალო ასაკი შეადგენს 14 წელს. დიდი ავიაკომპანიის შემთხვევით შერჩეული 36 თვითმფრინავის საშუალო ასაკი აღმოჩნდა 11.8 წ. , ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2.7 წ. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ამ კომპანიის თვითმფრინავების საშუალო ასაკი ნაკლებია ვიდრე პოპულაციის საშუალო?

9. დიეტოლოგის განცხადებით მისი დიეტით პაციენტები 20 კვირის მანძილზე საშუალოდ იკლებენ 24 ფუნტს. შესაბამისი სტანდარტული გადახრაა 5 ფუნტი. დიეტოლოგს სურს მიიღოს უკეთესი შედეგი და ამცირებს მარილის მოხმარებას. ახალი მეთოდის გამოყენებით 40 შემთხვევით შერჩეული პაციენტი 20 კვირაში საშუალოდ იკლებს 16.3 ფუნტს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა ითქვას, რომ დიეტა შეიცვალა?

10. სტატისტიკოსის მტკიცებით ლატარეის მყიდველი ადამიანების საშუალო ასაკი არის 70 წელი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ეს მტკიცებულება, თუ შემთხვევით შერჩეული ლატარეის ბილეთების მყიდველი 30 ადამიანის ასაკის მონაცემებია:

49	80	24	61	79	68	63	72	46	65
76	71	90	56	70	71	71	67	52	82
74	39	49	69	22	56	70	74	62	45

11. გამოკითხვის თანახმად 55 წელზე მეტი ასაკის ქალები დღეში საშუალოდ ხარჯავენ 1660 კალორიას. იმის შესამოწმებლად, ჯანდაცვის სფეროში მომუშავე ქალები ხარჯავენ თუ არა იმავე რაოდენობის კალორიას, შემთხვევით შერჩეულ იქნა ჯანდაცვის სფეროში მომუშავე 55 წ. მეტი ასაკის 43 ქალი და აღმოჩნდა, რომ მათ მიერ დღეში დახარჯული კალორიების საშუალოა 1446, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 56 კალ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ ჯანდაცვის სფეროში დასაქმებული ქალების მიერ დახარჯული კალორიების საშუალო განსხვავდება პოპულაციის საშუალოსაგან?

12. ფირმის მენეჯერის მტკიცებით განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობაა 36 თვე. სტანდარტული გადახრა შეადგენს 8 თვეს. შემთხვევით შერჩეული 50 განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 32 თვე. შეიძლება თუ არა ამ მტკიცების უარყოფა $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით?

13. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქში სახლების საშუალო გასაყიდი ფასია 60000 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ აგენტის მტკიცება, თუ დედაქალაქში შემთხვევით შერჩეული 36 გაყიდული სახლის ფასებია (ათასობით ლარებში):

9.5	54	99	94	80	29	121.5	184.75	15
164.45	6	13	188.4	121	308	42	7.5	32.9
126.9	25.225	95	92	38	60	211	15	28

53.5	27	21	76	85	25.225	40	97	284

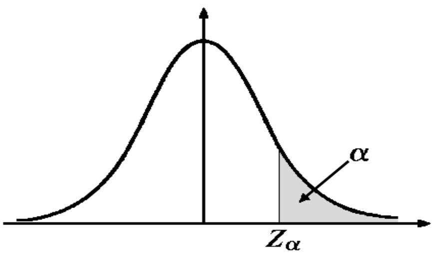
14. პაციენტების გარკვეული ჯგუფის სისხლში ქოლესტერინის საშუალო დონე შეადგენს არანაკლებ 240 მილიგრამს, ხოლო სტანდარტული გადახრაა 18 მილიგრამი. შემთხვევით შერჩეულ 40 პაციენტს მისცეს ახალი პრეპარატი, რომელიც განკუთვნილია სისხლში ქოლესტერინის დონის დასაწევად. ამ პრეპარატის მიღების შემდეგ აღნიშნული პაციენტების სისხლში ქოლესტერინის საშუალო დონე აღმოჩნდა 229 მილიგრამი. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი განვაცხადოთ, რომ ახალი პრეპარატი ამცირებს ქოლესტერინის დონეს?

სტატისტიკური ცხრილები

პუასონის განაწილების ცხრილები ($P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$)

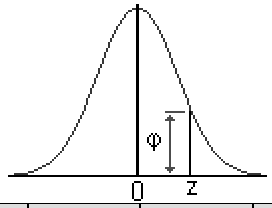
	λ=1.0	λ=1.5	λ=2.0	λ=2.5	λ=3.0	λ=3.5	λ=4.0	λ=4.5	λ=5.0
p(0)	**0.3679**	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
p(1)	**0.3679**	**0.3347**	**0.2707**	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337
p(2)	0.1839	0.2510	**0.2707**	**0.2565**	**0.2240**	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842
p(3)	0.0613	0.1255	0.1804	0.2138	**0.2240**	**0.2158**	**0.1954**	0.1687	0.1404
p(4)	0.0153	0.0471	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	**0.1954**	**0.1898**	**0.1755**
p(5)	0.0031	0.0141	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	**0.1755**
p(6)	0.0005	0.0035	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462
p(7)	0.0001	0.0008	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044
p(8)		0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653
p(9)			0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363
p(10)				0.0002	0.0008	0.0023	0.0053	0.0104	0.0181
p(11)					0.0002	0.0007	0.0019	0.0043	0.0082
p(12)					0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0034
p(13)						0.0001	0.0002	0.0006	0.0013
p(14)							0.0001	0.0002	0.0005
p(15)								0.0001	0.0002

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები (z_α)



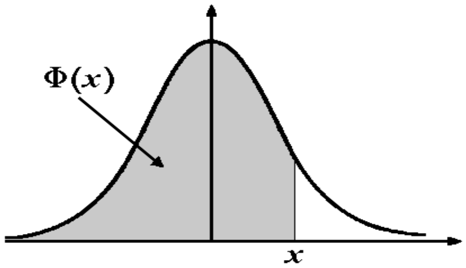
α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.64	1.96	2.24	2.33	2.57	2.81	3.08

$N(0.1)$-ის სიმკვრივის ($\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2}$) მნიშვნელობები

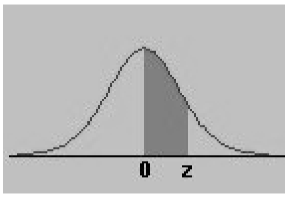


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.398942	.398922	.398862	.398763	.398623	.398444	.398225	.397966	.397668	.397330
0.1	.396953	.396536	.396080	.395585	.395052	.394479	.393868	.393219	.392531	.391806
0.2	.391043	.390242	.389404	.388529	.387617	.386668	.385683	.384663	.383606	.382515
0.3	.381388	.380226	.379031	.377801	.376537	.375240	.373911	.372548	.371154	.369728
0.4	.368270	.366782	.365263	.363714	.362135	.360527	.358890	.357225	.355533	.353812
0.5	.352065	.350292	.348493	.346668	.344818	.342944	.341046	.339124	.337180	.335213
0.6	.333225	.331215	.329184	.327133	.325062	.322972	.320864	.318737	.316593	.314432
0.7	.312254	.310060	.307851	.305627	.303389	.301137	.298872	.296595	.294305	.292004
0.8	.289692	.287369	.285036	.282694	.280344	.277985	.275618	.273244	.270864	.268477
0.9	.266085	.263688	.261286	.258881	.256471	.254059	.251644	.249228	.246809	.244390
z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.0	.241971	.239551	.237132	.234714	.232297	.229882	.227470	.225060	.222653	.220251
1.1	.217852	.215458	.213069	.210686	.208308	.205936	.203571	.201214	.198863	.196520
1.2	.194186	.191860	.189543	.187235	.184937	.182649	.180371	.178104	.175847	.173602
1.3	.171369	.169147	.166937	.164740	.162555	.160383	.158225	.156080	.153948	.151831
1.4	.149727	.147639	.145564	.143505	.141460	.139431	.137417	.135418	.133435	.131468
1.5	.129518	.127583	.125665	.123763	.121878	.120009	.118157	.116323	.114505	.112704
1.6	.110921	.109155	.107406	.105675	.103961	.102265	.100586	.098925	.097282	.095657
1.7	.094049	.092459	.090887	.089333	.087796	.086277	.084776	.083293	.081828	.080380
1.8	.078950	.077538	.076143	.074766	.073407	.072065	.070740	.069433	.068144	.066871
1.9	.065616	.064378	.063157	.061952	.060765	.059595	.058441	.057304	.056183	.055079
z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2.0	.053991	.052919	.051864	.050824	.049800	.048792	.047800	.046823	.045861	.044915
2.1	.043984	.043067	.042166	.041280	.040408	.039550	.038707	.037878	.037063	.036262
2.2	.035475	.034701	.033941	.033194	.032460	.031740	.031032	.030337	.029655	.028985
2.3	.028327	.027682	.027048	.026426	.025817	.025218	.024631	.024056	.023491	.022937
2.4	.022395	.021862	.021341	.020829	.020328	.019837	.019356	.018885	.018423	.017971
2.5	.017528	.017095	.016670	.016254	.015848	.015449	.015060	.014678	.014305	.013940
2.6	.013583	.013234	.012892	.012558	.012232	.011912	.011600	.011295	.010997	.010706
2.7	.010421	.010143	3z98712	3z96058	3z93466	3z90936	3z88465	3z86052	3z83697	3z81398
2.8	3z79155	3z76965	3z74829	3z72744	3z70711	3z68728	3z66793	3z64907	3z63067	3z61274
2.9	3z59525	3z57821	3z56160	3z54541	3z52963	3z51426	3z49929	3z48470	3z47050	3z45666

$N(0.1)$-ის განაწილების ფუნქციის ($\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$) მნიშვნელობები



x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0.00	0.500	**0.33**	0.629	**0.66**	0.745	**0.99**	0.838	**1.32**	0.906	**1.65**	0.950
0.01	0.503	**0.34**	0.633	**0.67**	0.748	**1.00**	0.841	**1.33**	0.908	**1.66**	0.951
0.02	0.507	**0.35**	0.636	**0.68**	0.751	**1.01**	0.843	**1.34**	0.909	**1.67**	0.952
0.03	0.511	**0.36**	0.640	**0.69**	0.754	**1.02**	0.846	**1.35**	0.911	**1.68**	0.953
0.04	0.515	**0.37**	0.644	**0.70**	0.758	**1.03**	0.848	**1.36**	0.913	**1.69**	0.954
0.05	0.519	**0.38**	0.648	**0.71**	0.761	**1.04**	0.850	**1.37**	0.914	**1.70**	0.955
0.06	0.523	**0.39**	0.651	**0.72**	0.764	**1.05**	0.853	**1.38**	0.916	**1.71**	0.956
0.07	0.527	**0.40**	0.655	**0.73**	0.767	**1.06**	0.855	**1.39**	0.917	**1.72**	0.957
0.08	0.531	**0.41**	0.659	**0.74**	0.770	**1.07**	0.857	**1.40**	0.919	**1.73**	0.958
0.09	0.535	**0.42**	0.662	**0.75**	0.773	**1.08**	0.859	**1.41**	0.920	**1.74**	0.959
0.10	0.539	**0.43**	0.666	**0.76**	0.776	**1.09**	0.862	**1.42**	0.922	**1.75**	0.959
0.11	0.543	**0.44**	0.670	**0.77**	0.779	**1.10**	0.864	**1.43**	0.923	**1.76**	0.960
0.12	0.547	**0.45**	0.673	**0.78**	0.782	**1.11**	0.866	**1.44**	0.925	**1.77**	0.961
0.13	0.551	**0.46**	0.677	**0.79**	0.785	**1.12**	0.868	**1.45**	0.926	**1.78**	0.962
0.14	0.555	**0.47**	0.680	**0.80**	0.788	**1.13**	0.870	**1.46**	0.927	**1.79**	0.963
0.15	0.559	**0.48**	0.684	**0.81**	0.791	**1.14**	0.872	**1.47**	0.929	**1.80**	0.964
0.16	0.563	**0.49**	0.687	**0.82**	0.793	**1.15**	0.874	**1.48**	0.930	**1.81**	0.964
0.17	0.567	**0.50**	0.691	**0.83**	0.796	**1.16**	0.876	**1.49**	0.931	**1.82**	0.965
0.18	0.571	**0.51**	0.694	**0.84**	0.799	**1.17**	0.879	**1.50**	0.933	**1.83**	0.966
0.19	0.575	**0.52**	0.698	**0.85**	0.802	**1.18**	0.881	**1.51**	0.934	**1.84**	0.967
0.20	0.579	**0.53**	0.701	**0.86**	0.805	**1.19**	0.882	**1.52**	0.935	**1.85**	0.967
0.21	0.583	**0.54**	0.705	**0.87**	0.807	**1.20**	0.884	**1.53**	0.936	**1.86**	0.968
0.22	0.587	**0.55**	0.708	**0.88**	0.810	**1.21**	0.886	**1.54**	0.938	**1.87**	0.969
0.23	0.590	**0.56**	0.712	**0.89**	0.813	**1.22**	0.888	**1.55**	0.939	**1.88**	0.969
0.24	0.594	**0.57**	0.715	**0.90**	0.815	**1.23**	0.890	**1.56**	0.940	**1.89**	0.970
0.25	0.598	**0.58**	0.719	**0.91**	0.818	**1.24**	0.892	**1.57**	0.941	**1.90**	0.971
0.26	0.602	**0.59**	0.722	**0.92**	0.821	**1.25**	0.894	**1.58**	0.942	**1.91**	0.971
0.27	0.606	**0.60**	0.725	**0.93**	0.823	**1.26**	0.896	**1.59**	0.944	**1.92**	0.972
0.28	0.610	**0.61**	0.729	**0.94**	0.826	**1.27**	0.897	**1.60**	0.945	**1.93**	0.973
0.29	0.614	**0.62**	0.732	**0.95**	0.828	**1.28**	0.899	**1.61**	0.946	**1.94**	0.973
0.30	0.617	**0.63**	0.735	**0.96**	0.831	**1.29**	0.901	**1.62**	0.947	**1.95**	0.974
0.31	0.621	**0.64**	0.738	**0.97**	0.833	**1.30**	0.903	**1.63**	0.948	**1.96**	0.975
0.32	0.625	**0.65**	0.742	**0.98**	0.836	**1.31**	0.904	**1.64**	0.949	**1.97**	0.975

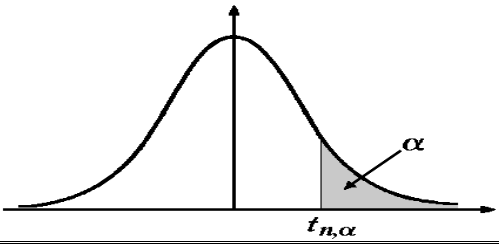


$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ფუნქციის ცხრილები

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

t (სტიუდენტის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($t_{n,\alpha}$)



	α						
n	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385

პასუხები

თავი V

1. ა) $\{7,14,21,28,35,42,49\}$; $\{-3,2\}$; ბ) $\{გ1,...,გ6, ს1,...,ს6\}$; გ) {ჩრდილოეთ ამერიკა, სამხრეთ ამერიკა, ევროპა, აზია, ავსტრალია, ანტარქტიდა}; დ) $\varnothing$.

2. $\{(x,y): x>0, y>0, x^2+y^2 \le 4\}$. **3.** $A=C$.

4. ა)

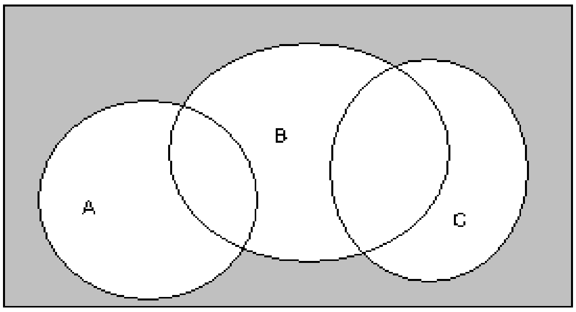
	წითელი					
ყვითელი	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ბ) $A=\{(1,1);(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(2,2)\}$;

გ) $B=\{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\}$;

დ) $C=\{(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6)\}$;

ე)



ვ) $A\cap C=\{(2,1);(2,2)\}$.

5. ა) $\Omega=\{გგ,\ გს,\ ს1,\ ს2,\ ს3,\ ს4,\ ს5,\ ს6\}$; ბ) $A=\{ს1,\ ს2,\ ს3\}$; გ) $\Omega=\varnothing$.

6. ა) $\Omega=\{YYY, YYN, YNY, NYY, YNN, NYN, NNY, NNN\}$;

ბ) $A=\{YY, YNY, NYY, YYY\}$;

გ) მაგალითად: „მეორე დიასახლისი იყენებს ლიმონის შემცველ ჟელეს“.

7. ა) $\{3,4,...,18\}$; ბ) $[0,1]\times[0,1]$; გ) $\{ქ, კ\}\times\{0,1,2,...\}$; დ) $\{(i,j): 1\le i<j\le 10\}$; ე) $[0,20]$. **8.** ა) $(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)$; ბ) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; გ) $A\cup B\cup C$. **9.** ა) B_1; ბ) $\overline{B_1}B_2B_3$; გ) $\cap_{k=1}^{7} B_k$; დ) $B_5B_6\overline{B_7}\cup B_5\overline{B_6}B_7\cup\overline{B_5}B_6B_7$; ე) $B_1B_2B_3\overline{B_4}\,\overline{B_5}\,\overline{B_6}\,\overline{B_7}$.

10. $A=\{(1,5);(5,1);(2,4);(4,2);(3,3);(1,6);(6,1);(2,5);(5,2);(3,4);(4,3);(2,6);(6,2);(3,5);(5,3);(4,4)\}$; $B=\{(1,1);(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(2,2);(1,4);(4,1);(2,3);(3,2);(3,6);(6,3);(4,5);(5,4);(4,6);(6,4);(5,5);(5,6);(6,5)\}$; $C=\{(1,4);(4,1);(2,4);(4,2);(3,4);(4,3);(4,4)\}$; $D=\{(1,2);(2,1);(1,4);(4,1);(2,3);(3,2);(1,6);(6,1);(2,5);(5,2);(3,4);(4,3);(3,6);(6,3);(4,5);(5,4);(5,6);(6,5)\}$; $E=\{(1,5);(5,1);(2,6);(6,2)\}$; თავსებადებია: A და C, A და D, A და E, B და C, B და D, C და D; უთავსებადია: A და B, B და E, C და E, D და E. **13.** კი. **14.** არა. **16.** **ა)** 4/19; ბ) 9/19; გ) 14/19: დ) 15/19. **17.** **ა)** 1/56; ბ) 15/56; გ) 15/28; დ) 5/28. **18.** **ა)** 1/21; ბ) 5/42: გ) 5/6 დ) 10/21. **19.** **ა)** 1/2; ბ) 3/8; გ) 1/8; დ) 1/2. **20.** **ა)** 1/2; ბ) 7/16; გ) 11/16; დ) 15/16. **21.** **ა)** 5/16; ბ) 11/16; გ) 15/16; დ) 1/16. **22.** ა) ტოლია; ბ) ტოლია; გ) 6 ქულა; დ) 8 ქულა; ე) 7 ქულა; ვ) 7 ქულა. **23.** 1/6. **24.** მეტია პირველ შემთხვევაში 1/36-ით. **26.** 9/19; 10/19. **27.** 18/25; 1/100; 14/50; 27/100. **28.** 1/3; 2/15; 8/15; 13/15; 3/5. **29.** 11/221; 10/17; 7/17;

77/102. **30.** 0.51. **31.** $(T-t)^2/T^2$. **32.** 0.6; 1/3. **33.** $(a-2r)^2/a^2$. **34.** $(1+3\ln 2)/8 \approx 0.38$. **35.** ა) 1/2; ბ) 31/72.

ალბათობის ამოცანები კომბინატორიკით

1. 9! = 362880. **2.** $C_{20}^3 = 1140$. **3.** $A_6^4 = 360$. **4.** $A_{20}^3 = 6840$. **5.** $33^5 = 39135393$. **6.** $5^{10} = 9765625$. **7.** $9 \cdot 10^4 \cdot 5 = 450000$. **8.** დიახ, $33^3 = 35937 < 35938$. **9.** $C_9^4 = 126$. **10.** $12!/(6!4!2!) = 13860$. **11.** $A_{10}^2/2 = C_{10}^2 = 45$. **12.** $C_{10}^3 = 120$. **13.** $C_{10}^2 \cdot C_{50}^5 = 95344200$.

14. $9! \cdot (10-2) = 2903040$. **15.** $C_7^3 \cdot C_6^3 \cdot C_{10}^3 = 84000$. **16.** ა) $n \le 6$, ბ) $n \ge 6$.

17. $C_{10}^3 \cdot C_6^2 = 135$. **18.** 96. **19.** 48. **20.** ა) 120, ბ) 72. **21.** 9×8×7×6×5=15120. **22.** 120.

23. $C_9^5 \cdot C_9^3 \cdot C_9^3 \cdot C_9^2 = 32006016$. **24.** ა) 1/2 ; ბ) 3/4. **25.** $\Omega = \{10, 25, 100\}$; 7/10, 1/5, 1/10; 9/10; 3/10. **26.** ა) 1/4; ბ) 11/24; გ) 10/24. **27.** ა) $C_8^3 / C_{64}^3 = 1/744$;

ბ) $C_{32}^3/C_{64}^3 = 5/42$; გ) $8 \times C_8^3/C_{64}^3 = 1/93$; დ) $8 \times 2 \times C_4^3/C_{64}^3 = 1/651$.

28. ა) $1/C_n^j$; ბ) $2/C_n^j$; გ) $(n-j+1)/C_n^j$. **29.** $3(C_{2n}^k - C_n^k)/C_{3n}^k$.

30. mA_n^{k-1}/A_{n+m}^k. **31.** ა) 1/9; ბ) 1/6. **32.** ა) $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1/C_{52}^5 = 33/54145$;

ბ) $C_{13}^5/C_{52}^5 = 33/66640$. **33.** 1/720. **34.** 1/45; 7/45; 1/15. **35.** $C_4^2 \cdot C_{48}^{24}/C_{52}^{26} \approx 0.39$;

$(C_{48}^{26} + C_{48}^{22})/C_{52}^{26} \approx 0.11$; $(C_4^1 \cdot C_{48}^{25} + C_4^3 \cdot C_{48}^{23})/C_{52}^{26} \approx 0.499$. **36.** $365!/[(365-n)! \cdot 365^n]$.

37. ა) $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1/C_{52}^5 = 33/54145$; ბ) $C_{13}^5/C_{52}^5 = 33/66640$.

38. ა) 0.9; ბ) 0.6; გ) 0.5; დ) 0.4. **39.** $A_{30}^5/30^5 \approx 0.7037$.

40. $C_6^6/C_{10}^6 = 1/210$; $C_6^4 \cdot C_4^2/C_{10}^6 = 3/7$; 1-1/210=209/210.

თავი VI

1. ა) 2/3, 0; ბ) 1/2, 1/6; გ) 5/6, 0; დ) 1, 5/9; ე) 5/6, 1/4; ვ) 3/4, 1/3. **2.** ა) 1/3, არა; ბ) 1/6, კი; გ) 1/2, არა; დ) 2/5, არა; ე) 1/6, კი; ვ) 1, არა. **3.** ა) 1/4, 1/4, 1/4, 1/8; ბ) 1/4, 1/4, 1/4, 1/8; გ) 1/8, 1/8, 1/4, 1/16; დ) 1/4, 1/8, 1/8, 1/16. **4.** ა) 1/72; ბ) 1/36; გ) 5/108; დ) 5/72; ე) 7/72; ვ) 25/216; ზ) 1/8. **5.** 0.986. **6.** ა) 0.9; ბ) 0.6; გ) 0.5; დ) 0.4. **7.** ა) 0.0001; ბ) 0.9999; გ) 0.198; დ) 0.1981. **8.** ა) 0.04; ბ) 0.96; გ) 0.42. **9.** ა) 0.35; ბ) 0.875; გ) 0.55. **10.** 0; 1/2; 1. **11.** $p^2 + (1-p)^2$, $p = 1/2$. **12.** ა) $(1/2)^5$; ბ) $(5/9)^5$; გ) $(2/3)^5$. **13.** ა) $(1-1/3)^3 = 8/27$; ბ) $1-8/27 = 19/27$; გ) $3 \times (4/27) + 1/27 = 13/27$; დ) $3 \times (2/27) = 6/27$. **14.** $3 \cdot ((2/3)^5 - (1/3)^5) = 0.38$. **15.** $1-(1-p^2)^2$; $(1-(1-p)^2)^2$. **16.** 4, $1-(5/6)^4 \approx 0.52$. **17.** 3/20; 9/35; 7/12. **18.** 26/27; 9/26. **19.** 0.196; 0.288. **20.** 10 ან 15.

თავი VII

1. 99.4%. **2.** $0.8 \times 0.05/0.135 = 0.296$. **3.** ა) 1/3; ბ) 1/2. **4.** 0.8227. **5.** ა) 10/11; ბ) 1/2.
6. $0.99 \cdot 0.001/(0.99 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999) = 0.09$. **7.** ა) 0.158; ბ) 0.316; გ) 0.526. **8.** ა) 1/6; ბ) 1/12. **9.** ა) 38/63; ბ) 16/25. **10.** ა) 125/512; ბ) 19/64; გ) 135/512; დ) 45/64. **11.** ა) 0.116; ბ) 0.984; გ) 0.518. **12.** 8/27. **13.** 0.115. **14.** 475. **15.** 4-ჯერ. **16.** 2/9. **17.** 0.92. **18.** ა) $1-(1-p)^{10}$; ბ) $10p(1-p)^9$; გ) $45p^2(1-p)^8$. **19.** 0.24; 0.42; 0.706. **20.** 0.18; 0.58; 0.6. **21.** ა) 267/880; ბ) 33/89; გ) 448/613. **22.** ა) 5/18; ბ) 2/5; გ) 9/13. **23.** 0.52.

თავი VIII

1. ა) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36. **2.** 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36. **3.** 0, 1, 2 – 1/10, 3/5, 3/10. **9.** 1/15, 2/5, 4/5. **11.** 0.2. **25.** 130; 40; 120; 160; 360. **12.** 105; 105; 245. **13.** 12; 31; 34; 18; 5; 0. **14.** 0.468; 103. **15.** 0.2; 0.4. **16.** 0,1, 2, 3, 4 – 0.04, 0.24, 0.44, 0.24, 0.04; 2;

0.8. **17.** 15/8, . ;0.05, . ; 4, 3.6; 46/9, 116/81. **18.** 7/3; 0.745. **19.** 2, 3, 4, 5, 6 – 1/36, 1/9, 5/18, 1/3, 1/4; 10/9. **20.** $E(A)=95000$, $E(B)=115000$; B. **21.** 0.3, 0.51; 5.7, 0.51. **22.** 0.2; 2.8, 1.4. **23.** $a=b=0.15$; 1.7. **24.** 1, 2, 3, 4 – 1/6, 5/36, 25/216, 125/216; 1.172; 0.5177. **25.** 0, 1, 2 – 1/3, 8/15, 2/15; 0.8. **26.** 0, 1, 2, 3 – 11/48, 7/16, 13/48, 1/16; $E\eta=7/6$, $E\xi=7/3$; 13/18. **27.** 2.734. **28.** 3.15. **29.** 10. **30.** 0.938. **31.** k/p. **32.** 2. **33.** ა) 4.79; ბ) 5.24; გ) 10.03. **34.** 2/9. **35.** 1.2; 0.72. **36.** 5/3; 10/9. **37.** 0.48. **38.** $x_1=1$; $x_2=2$; $p_1=0.6$; $p_2=0.4$. **39.** ა) $-a$, b; ბ) $-a-1$, b; გ) $2a-5$, $4b$. **40.** $E\xi=-100$.

თავი IX

1. 1/4; 1/16; 3/16. **2.** 1/9; 8/27; 147/324; 1.75. **3.** 1/15; 11/40. **4.** 3/32; 1/2; 5/32; 5/16; 47/128. **5.** 400; 4/5; 1/3; 1/9; 8/27. **6.** 3; 1/9; 1/8. **7.** 2.38; 2.73; 1.89. **8.** 800. **9.** --; $2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 2; $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. **10.** --; $5-\frac{5}{2}\sqrt{2}$, 0. **11.** 1. **12.** 12; 2/3; $6M^4-8M^3+1=0$. **13.** 9/4, 27/80. **14.** 8/3, 1/18. **15.** --; 8/3, 32/9. **16.** --; 2, 4/5. **17.** --; 15, 75. **18.** 720; --; 584, 19100. **19.** 0; 0.5; 0.5; 0.
20. 0.25 ($Bi(4,0.5):P_4(3)=0.25$). **21.** $\cos x\chi_{(0,\pi/2]}(x)$. **22.** $2\cos 2x\chi_{(0,\pi/4]}(x)$.
23. $F(x)=0, x\le 0; 1-\cos x, 0<x\le \pi/2;$. $1, x>\pi/2$ **24.** $F(x)=0, x\le 1$; $1/2(x^2-x)$, $1<x\le 2$; $1, x>2$.
25. $\frac{1}{6}\chi_{[2,8]}(x)$; $\sqrt{3}$. **26.** 1/3. **27.** $\sqrt{2}/4$. **28.** 3/4. **29.** $\sqrt{2}/4$. **31.** 0.0498. **32.** 0.0033.

თავი X

1. 0.8907; 0.9932; 0.5636; 0.1075; 0.0087; 0.2776; 0.9664; 0.0197; 0.5279; 0.0336; 0.0029; 0.4168. **2.** 0.0366; 0.1203; 0.3405; 0.4394; 0.9557; 0.7816; 0.8561; 0.2088; 0.0320; 0.1186; 0.4472; 0.9500. **3.** 0.4399; 1.1750; 2.0537; 1.0364; 0.2275; 1.1750; 2.3263; 0.7722; -2. 3263; -1.8808; -1.0364; 0. **4.** 0.9332; 0.0062; 0.7734; 0.0401. **5.** 0.9522; 0.0098; 0.7475; 0.0038. **6.** 0.1359; 0.0606; 0.7333; 0.7704; 0.8664. **7.** 0.0668. **8.** 0.1587; 0.0228. **9.** 54.27; 40.31; 52.22; 41.80. **10.** 17.68; 14.65; 12.44; 14.44; 3.29. **11.** 41.6; 29.9; 37.4; 31.7. **12.** 7.78. **13.** 65.0. **14.** 41.5; 8.50. **15.** 9.51; 0.298. **16.** 0.0371; 0.0062; 0.8209. **17.** 0.2094; 0.0086; 0.1788; 0.6405; 105; 4; 89; 320. **18.** 13; 84; 121. **19.** 0.0049; 0.1943; (80, 100). **20.** 1972 სთ. **21.** 0.614; 20.9, 16.3; 17. **22.** 336 მლ. **23.** 0.041 კგ; 0.054. **24.** 47. **25.** 49.1; 13.4. **26.** 25; 0.673.

თავი XI

1. 1, 2, 3, 4 – 1/6, 5/36, 25/216, 125/216; 1.172; 0.5177. **2.** -20.56. **3.** 0, 1, 2 – 1/3, 8/15, 2/15; 0.8. **4.** 0, 1, 2, 3 – 11/48, 7/16, 13/48, 1/16; $E\eta=7/6$, $E\xi=7/3$; 13/18. **8.** ა) $-a$, b; ბ) $-a-1$, b; გ) $2a-5$, $4b$. **9.** $3n/8$; $15n/64$; $3/8$; $15/64n$. **10.** I. **12.** I) 4, II) 4.8; II).

თავი XII

1. 2.58; 2.33; 1.96; 1.65; 1.88. **2.** 32.03; 11.01; (28.1, 35.97); 2.01. **3.** 46.9709; 14.3582; (41.8329, 52.1089). **4.** (77, 87); (75, 89); II, ვინაიდან საიმედოობა უფრო დიდია. **5.** 196; 617.3; (52, 340). **6.** (11.9,13.3); ეს ძალიან მცირე ალბათობის მქონეა, რადგან 30 ბევრჯერ აღემატება 13.3-ს. **7.** (184, 188); (185, 187); II, ვინაიდან 100 > 40. **8.** (18.13, 18.87). **9.** (5.6, 6.2). **10.** 3222.4; 3480.1; (2341.5, 4130.3). **11.** (37, 39); (35, 41); ვინაიდან $8>4$. **12.** (59.5, 62.9). **13.** 106. **14.** 45. **15.** (57.4, 58.6). **16.** 25. **17.** 10. **18.** 5. **19.** 2.898; 2.624; 2.093; 2.074; 1.833. **20.** 563.2; 87.9; (500.4, 626); 62.8. **21.** 81.72; 11.58; (75.96, 87.48). **22.** (15, 17). **23.** (17, 19). **24.** 33.4; 28.7; (21.2, 45.6); მონაცემი 132 არაჩვეულებრივად დიდია („ამოვარდნილი“ – „ოუტლიერ“ მონაცემია) **25.** (8, 9.2). **26.** (11990, 12410). **27.** 58.9; 5.1; (55.5, 62.3). **28.** (8.7, 9.9). **29.** (13, 23). **30.** (17.29, 19.77). **31.** (123, 129). **32.** (109, 121). **33.** (38.4, 44.8). **34.** (7.9, 165.9). **35.** (94, 98). **36.** (58197, 58241).

თავი XIII

1. ± 2.58; 1.65; -1.65; -1.28; ± 1.96; 1.75; -2.33; ± 1.65; 2.05; ± 2.33. 2. $H_0: E\xi = 39$, $H_1: E\xi \neq 39$; $H_0: E\xi = 25000$, $H_1: E\xi \neq 25000$; $H_0: E\xi \leq 25$, $H_1: E\xi > 25$; $H_0: E\xi \geq 85$, $H_1: E\xi < 85$; $H_0: E\xi \geq 56$, $H_1: E\xi < 56$; $H_0: E\xi \leq 250$, $H_1: E\xi > 250$; $H_0: E\xi \leq 75$, $H_1: E\xi > 75$; $H_0: E\xi \geq 950$, $H_1: E\xi < 950$. 3. $H_0: E\xi = 25000$, $H_1: E\xi \neq 25000$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -1.59$; H_0. 4. $H_0: E\xi = 69.21$, $H_1: E\xi \neq 69.21$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -1.15$; H_0. 5. $H_0: E\xi \geq 9.78$, $H_1: E\xi < 9.78$; $C.V. = -1.28$; $T.V. \equiv z = -0.54$; H_0. 6. $H_0: E\xi \leq 24$, $H_1: E\xi > 24$; $C.V. = 1.65$; $T.V. \equiv z = 1.85$; H_1. 7. $H_0: E\xi = 800$, $H_1: E\xi \neq 800$; $C.V. = \pm 2.33$; $T.V. \equiv z = 10.12$; H_1. 8. $H_0: E\xi \geq 14$, $H_1: E\xi < 14$; $C.V. = -2.33$; $T.V. \equiv z = -4.89$; H_1. 9. $H_0: E\xi = 24$, $H_1: E\xi \neq 24$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -9.73$; H_1. 10. $H_0: E\xi = 70$, $H_1: E\xi \neq 70$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -2.59$; H_1. 11. $H_0: E\xi = 1660$, $H_1: E\xi \neq 1660$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -25.06$; H_1. 12. $H_0: E\xi = 36$, $H_1: E\xi \neq 36$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -3.54$; H_1. 13. $H_0: E\xi = 60000$, $H_1: E\xi \neq 60000$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 1.78$; H_0. 14. $H_0: E\xi \geq 240$, $H_1: E\xi < 240$; $C.V. = -2.33$; $T.V. \equiv z = -3.87$; H_1.