პროფესიული
უნარების
სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

საქართველო, თბილისი, 2022

მათემატიკური წიგნიერება

თემატური ბლოკი: ალგებრული გამოსახულება, განტოლება, უტოლობა

1 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 1. ალგებრული გამოსახულება

1.1 ალგებრული გამოსახულება

1.2. მრავალწევრი (ალგებრული გამოსახულება), მსგავსი წევრების შეერთება

1.3. ალგებრული წილადი

1.4. ერთწევრის ჯამზე გამრავლება

1.4.1 გეომეტრიული მოდელები ალგებრაში

1.5. ორწევრის ორწევრზე გამრავლება

1.6. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

1.7. კვადრატული სამწევრი

2 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 2. განტოლება, უტოლობა

2.1. განტოლება, უტოლობა, ფორმულა

2.2. უტოლობა

3 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 3. ფუნქცია, გრაფიკი, წრფივი ფუნქცია

3.1. საკოორდინატო სიბრტყე, კოორდინატი

3.2. გრაფიკი

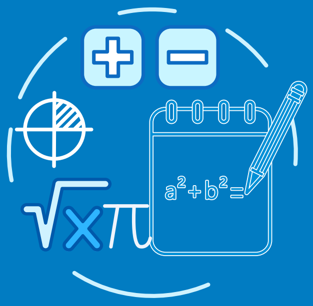
თავი II

ალგებრა და კანონზომიერება

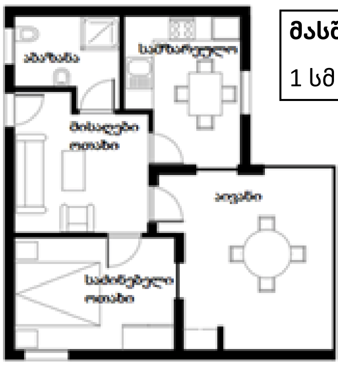
თანამედროვე სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალ ინჟინრებსა და მეცნიერებს, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკაში ძლიერი საფუძველი უნდა ჰქონდეთ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რომლებიც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველია, რომელიც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

I. დავალების წარდგენა



კომპლექსური დავალება



მასშტაბი:
1 სმ წარმოადგენს 1 მ-ს

ნახაზი აღებულია PISA-ს 2013 წლის ტესტის ნიმუშებიდან.

ბინის ფართობის დადგენა

რეალურ ცხოვრებაში ხშირად გვიწევს მართკუთხედების, კვადრატების თუ სხვა გეომეტრიული ობიექტების გამოყენება ეზოების, ნაკვეთების, მოედნების თუ ბინის შიდა სივრცის დასაგეგმად. სხვადასხვა კომპიუტერული პროგრამა კი გვეხმარება სასურველი გეგმის აგებასა და ზომების დადგენაში.

საინტერესოა შეიძლება თუ არა სხვადასხვა მართკუთხედისგან დაგეგმარებული ოთახის/ნაკვეთის ფართობის გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულის დაწერა თუ არ ვიცით რომელიმე გვერდი ან გვერდები? როგორ უნდა მოვიქცეთ უცნობი გვერდის ჩასაწერად?

იმისათვის, რომ გავიგოთ როგორ აღინიშნება უცნობი ცვლადი და როგორ დგინდება რეალური სიტუაციის აღმწერი ფორმულა, შევასრულოთ მოცემული დავალება:

თქვენი დავალება

დაადგინეთ ნახაზ 1-ზე მოცემული ბინის საერთო ფართობი სხვადასხვა გზით.

ბინის საერთო ფართობის (აივნის ჩათვლით) დადგენა შესაძლებელია სხვადასხვა გზით. ერთ-ერთი გზა არის თითოეული ოთახის ფართობის გამოთვლა და შეკრება, თუმცა არსებობს ბინის საერთო ფართობის გამოთვლის უფრო ეფექტური და მოკლე გზები.

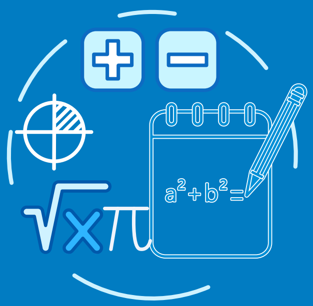
აღნიშნული ბინის გეგმიდან გამომდინარე, მთლიანი ფართობის გამოთვლისთვის საკმარისია გამოვიყენოთ მისი 4 გვერდის სიგრძე.

ნაშრომის შესრულების პროცესში გაეცანით შემდეგ პუნქტებს:

1. მონიშნეთ ნახაზზე ოთხი გვერდი, რომლებიც ბინის მთლიანი ფართობის გამოსათვლელად საჭიროა. მითითება: ფართობის გამოთვლა 4 გვერდის შერჩევით 9 სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი. ეცადეთ, შეასრულოთ რაც შეიძლება მეტი ხერხით.

გაგრძელება

I. დავალების წარდგენა



ბინის ფართობის დადგენა

კომპლექსური დავალება

თქვენი დავალება

2. შეადგინეთ მსგავსი დავალება. დახაზეთ ბინის გეგმა და ეცადეთ, გამოთვალოთ ფართობი გვერდების ოპტიმალური რაოდენობით. ბინის გეგმის შედგენა, ასევე, შეგიძლიათ კომპიუტერული პროგრამა [Geogebra](#)-ს გამოყენებით.
3. დაადგინეთ როგორ გვეხმარება გეომეტრიული მოდელები ალგებრაში შემოკლებული ფორმულების ვიზუალურ წარმოდგენაში; მოიყვანეთ კონკრეტული ნიმუშები.

ნაშრომი წარმოადგინეთ თქვენთვის მისაღები ფორმით: წარმოადგინეთ ნახაზით ან კომპიუტერული პროგრამით, თან დაურთეთ შესრულებული ბინის გეგმა, ან მაკეტი, ასევე გამოთვლის ფურცელი.

ნაშრომის პრეზენტაციისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:

I. როგორ შეიძლება უცნობი რაოდენობის, ან ცვლადი სიდიდის წარმოდგენა? მოიყვანეთ ნებისმიერი 2 მაგალითი.

II. როგორ შეიძლება რეალური მოვლენის მოდელირება ცვლადის, ალგებრული გამოსახულების მეშვეობით?

III. როგორ გვეხმარება გეომეტრიული მოდელები შემოკლებული გამრავლების ფორმულების თვალსაჩინო წარმოდგენაში?

IV. რა კანონზომიერება აღმოაჩინეთ ორწევრის ორწევრზე გამრავლების შედეგად? როგორ ხდება ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად და პირიქით, ჯამის წარმოდგენა ნამრავლად? მოიყვანეთ მაგალითი.

თემა 1. ალგებრული გამოსახულება

1.1. ალგებრული გამოსახულება

განვიხილოთ ორი სიტუაცია:

სიტუაცია 1.

რიცხვითი გამოსახულების შედგენა

კინოთეატრში ადგილების რაოდენობის დადგენა

კინოთეატრში არის 21 რიგი. პირველ 20 რიგში არის 30-30 ადგილი და ბოლო რიგში 40. რამდენი ადგილია კინოთეატრში?

დავწეროთ გამოსახულება, რომელიც მოცემულ პირობას შეესაბამება:

$$20 \cdot 30 + 40$$

სიტუაცია 2.

ცვლადის შემცველი გამოსახულების შედგენა

- *როგორ არის შესაძლებელი უცნობი რაოდენობის აღნიშვნა?*

კინოთეატრში 21 რიგია. პირველ 20 რიგში ადგილების ერთი და იგივე რაოდენობაა, ხოლო ბოლო რიგში – 50 ადგილი. სულ რამდენი ადგილია კინოთეატრში? დაწერეთ ადგილების რაოდენობის დასადგენი გამოსახულება.

ჩავწეროთ სიტუაციის შესაბამისი გამოსახულება

სიტუაცია 2-ის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

ტერმინები:

უცნობი, ცვლადი, მუდმივი, ალგებრული გამოსახულება

$$20 \cdot x + 50$$

კოეფიციენტი

მუდმივი

უცნობი (ცვლადი)

ალგებრაში **უცნობი** რიცხვის ნაცვლად ხშირად შემოაქვთ ლათინური ასოები. უცნობი შეიძლება იცვლებოდეს და იღებდეს სხვადასხვა დასაშვებ მნიშვნელობას, ამიტომ მას **ცვლადი** ეწოდება.

პირველ 20 რიგში არ ვიცით რიგში ადგილების რაოდენობა. ვთქვათ, პირველი ოცი რიგიდან თითოეულში არის x ადგილი. შესაბამისად, პირველ 20 რიგში იქნება $20 \cdot x$ ადგილი, რომელსაც ემატება ბოლო რიგის 50 ადგილი. მივიღებთ უცნობის შემცველ გამოსახულებას $20 \cdot x + 50$, რომელიც აღნიშნავს კინოთეატრში ადგილების რაოდენობას.

რიცხვს, რომელზეც ცვლადი მრავლდება, **კოეფიციენტი** ეწოდება.

რიცხვს, რომელიც ცვლადიან წევრს ემატება ან აკლდება და არ იცვლება, **მუდმივი (კონსტანტა)** ეწოდება.

ალგებრული გამოსახულება ანუ ასოითი გამოსახულება ეწოდება გამოსახულებას, რომელიც შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ: რიცხვებს, არითმეტიკულ მოქმედებებს (+, –, ·, :,), წილადის ხაზს, ახარისხებას, ფრჩხილებს, ასოებს.

ალგებრული გამოსახულების წევრები

გამოსახულებაში პლუს ან მინუს ნიშნით დაკავშირებულ ნაწილებს **ალგებრული გამოსახულების წევრები** ეწოდებათ.

ერთწევრი

რამდენიმე თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული არის რიცხვი ან ცვლადის ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით, ერთწევრი ეწოდება.

სტანდარტული ერთწევრი

ერთწევრს, რომლის პირველი მამრავლი წარმოადგენს რიცხვს, ხოლო ყველა სხვა თანამამრავლი განსხვავებული ცვლადების ხარისხებია, **სტანდარტული ერთწევრი** ეწოდება.

$20 \cdot x + 50$ გამოსახულების წევრებია

$20 \cdot x$ და 50

ერთწევრებია:

$5x^2$; $5x^2b$; $7a^3b^2$ და ა.შ.

ასევე ერთწევრებია:

$$7a^3 \cdot 2b^2; \quad 5x^2 \cdot 8$$

ზემოთ მოცემული მაგალითებიდან **სტანდარტული ერთწევრებია:**

$5x2$; $5x^2b$; $7a^3b^2$

ნაცვლად ერთწევრისა $7a^3 \cdot 2b^2$,

თუ ჩავწერთ, რომ

$7a^3 \cdot 2b^2 = 14a^3b^2$

მივიღებთ სტანდარტულ ერთწევრს.

მინიშნება: (იხილეთ ნიმუში 1)

დაიმახსოვრეთ:

- ალგებრული გამოსახულება არც ტოლობის და არც უტოლობის ნიშანს არ შეიცავს.
- ჩანაწერი $a \cdot b$ იგივეა, რაც ab;

$$5 \cdot x^2 \cdot b = 5x^2b,$$

მინიშნება: გამრავლების ნიშანს არ ვწერთ, მაგრამ ვგულისხმობთ.

ერთწევრების გამრავლება და გაყოფა

ხარისხის შესწავლისას ვისწავლეთ ტოლფუძიანი ხარისხების გამრავლება-გაყოფა. ერთწევრის ერთწევრზე გამრავლებისა და გაყოფისას ჩვენ გვჭირდება ხარისხის თვისებების ცოდნა და გამოყენება. განვიხილოთ მაგალითები:

ნიმუში 1 – ერთწევრების გამრავლება და გაყოფა

ერთწევრის ერთწევრზე გამრავლება	
ა) $5x \cdot 7x^2 = \mathbf{5 \cdot 7} \cdot x \cdot x^2 = 35x^3$ ბ) $-4xy^3 \cdot 2x^2 y^4 =$ $\mathbf{-4 \cdot 2} \cdot x \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y^4 = = -8x^3 \cdot y^7$	ერთწევრის ერთწევრზე გამრავლებისას კოეფიციენტი კოეფიციენტზე მრავლდება, ხოლო ცვლადი ცვლადზე.
ერთწევრის ერთწევრზე გაყოფა გ) $40x^2 : 5x = \frac{40x^2}{5x} = 8x$ დ) $-\frac{2y^2}{3} : \frac{4y^3}{9} = -\frac{2y^2}{3} \cdot \frac{9}{4y^3} = -\frac{3}{2y}$	ერთწევრის ერთწევრზე გაყოფისას კოეფიციენტი კოეფიციენტზე იყოფა, ხოლო ცვლადი ცვლადზე. წილადების გამრავლება და გაყოფის წესები ვრცელდება ალგებრულ წილადებზეც.

1.2. მრავალწევრი (ალგებრული გამოსახულება), მსგავსი წევრების შეერთება

როდესაც მაღაზიაში თაროზე სხვადასხვა ტიპის საქონელია განთავსებული და თანამშრომელს სურს მათი აღრიცხვა, იგი პროდუქტებს ახარისხებს გარკვეული ნიშნით. მაგალითად, 10 პაკეტი წიწიბურა, 5 პაკეტი შაქარი და ა.შ. აღრიცხვისას მსგავს პროდუქტებს აჯგუფებენ.

ანალოგიურად, ალგებრულ გამოსახულებაშიც შესაძლებელია მსგავსი წევრების დაჯგუფება. თუ გამოსახულებაში ორ წევრს ერთნაირი ცვლადები აქვს ერთსა და იმავე ხარისხში, მაშინ მათ **მსგავსი წევრები** ეწოდებათ; თუკი – განსხვავებული ცვლადები, მაშინ – არამსგავსი.

მსგავსი წევრები	$5x$; $9x$; $11x$	$3x^2$; $7x^2$;	$4xy$; $10xy$	14; 18
არამსგავსი წევრები	$5x$; $7y$; $11z$	$3x^2$; $7y^2$	$4xy$; $10\,xz$	14;$18x$

ასევე არამსგავსი წევრებია: $9c^4$ და $9c^3$.

დაიმახსოვრეთ: $a = 1 \cdot a = 1a$; $b = 1 \cdot b = 1b$; $-b = -1 \cdot b$

სხვადასხვა ალგებრულ გამოსახულებას სხვადასხვა სახელწოდება აქვს, მასში შემავალი წევრების უმაღლესი ხარისხის ან გამოსახულებაში შემავალი წევრების რაოდენობიდან გამომდინარე. ქვემოთ მოცემულ ცხრილში იხილეთ ალგებრული გამოსახულების დასახელებები მასში შემავალი წევრების ხარისხის ან წევრების რაოდენობიდან გამომდინარე.

ალგებრული გამოსახულება	დასახელება	ხარისხი
$5x^2$	ერთწევრი	კვადრატული
$4x - 2$	ორწევრი	წრფივი
$4x^2 - 4x + 6$	სამწევრი	მეორე ხარისხის
$5x^5 - 4x^4 - 8x + 10$	ოთხწევრი	მეხუთე ხარისხის
$x^7 - 4x^4 - 8x + 10$	ოთხწევრი	მეშვიდე ხარისხის

დაიმახსოვრეთ:

- რამდენიმე ერთწევრის ჯამს ეწოდება **მრავალწევრი**.
- მრავალწევრს, რომლის თითოეული წევრი ჩაწერილია სტანდარტული სახით და მსგავსი წევრები შეკრებილია, **სტანდარტული მრავალწევრი** ეწოდება.

თითოეული ზემოთ მოცემული ალგებრული გამოსახულება წარმოადგენს მრავალწევრს.

დასახელებისას შესაძლებელია ასევე გავაერთიანოთ წევრების რაოდენობა და უმაღლესი ხარისხი. მოცემულ ალგებრულ გამოსახულებას ასევე ეწოდება $4x^2 - 4x + 6$ **კვადრატული სამწევრი** (წარმოდგენილია სტანდარტული მრავალწევრის ფორმით)

ზოგადად, $ax^2 + bx + c$ ტიპის გამოსახულებს, სადაც $a \neq 0$, **კვადრატული სამწევრი** ეწოდება.

მრავალწევრის ხარისხი – ესაა მასში შემავალ წევრებს შორის უმაღლესი ხარისხი.

მაგალითად, თუ მოცემულია x^4y ალგებრული გამოსახულება. ვამბობთ, რომ მოცემულია მეხუთე ხარისხის ერთწევრი. რატომ მეხუთე? იმიტომ, რომ როდესაც ერთწევრს წარმოვადგენთ ნამრავლის სახით $x^4y = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$, თანამამრავლებად წარმოდგენილია 5 უცნობი მამრავლი. შესაბამისად x^4y ალგებრული გამოსახულება არის მეხუთე ხარისხის.

დაიმახსოვრეთ: $x^4\,y \neq x^{4+1}y \neq (xy)^5$

მრავალწევრში წევრების დალაგება ხდება უდიდესი ხარისხიდან უმცირეს ხარისხამდე.

ნიმუში 2

ქვემოთ მოცემული ალგებრული გამოსახულება წარმოადგინეთ სტანდარტული მრავალწევრის ფორმით

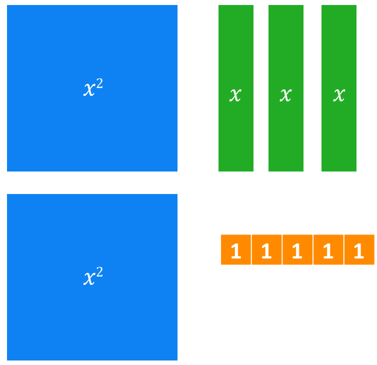
$5x^2 - 8 - 4x^3 + 10x =$ $-4x^3 + 5x^2 + 10x - 8$ -8 მუდმივი წევრია, ზოგადად: $-8 = -8 \cdot x^0 = -8 \cdot 1 = -8$	წევრების დალაგებით მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც წარმოდგენილია სტანდარტული მრავალწევრის ფორმით

მსგავსი წევრების შეერთება მრავალწევრში

ნიმუში 3 – მრავალწევრის ვიზუალური (სქემატური) წარმოდგენა

ა) მარჯვნივ წარმოდგენილია კვადრატული სამწევრის ვიზუალური მოდელი

$2x^2 + 3x + 5$



მოცემულია დიდი ლურჯი კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა x სმ, ხოლო ფართობია x^2 სმ^2, ასევე მოცემულია მწვანე მართკუთხედი, რომლის სიგრძე კვადრატის გვერდის ტოლია, ხოლო სიგანე ერთი ერთეულია (ფართობით $1 \cdot x = x$სმ^2) და მოცემულია პატარა კვადრატები, რომელთა გვერდის სიგრძე 1 ერთეულია (ფართობით 1სმ^2).

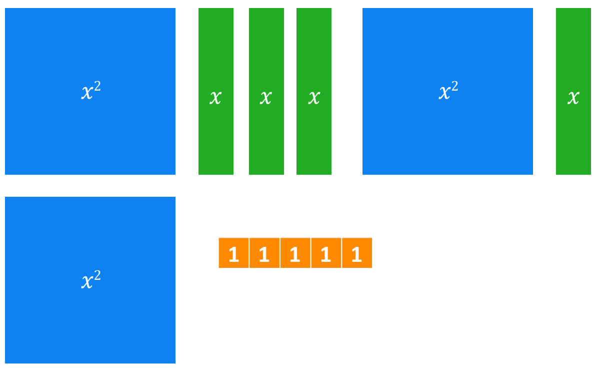
სულ, სქემაზე მოცემული ფიგურების ფართობი იქნება $2x^2 + 3x + 5$

ბ) შევაერთოთ მსგავსი წევრები

$2x^2 + 3x + 5 + x^2 + x =$

$3x^2 + 4x + 5$

მსგავსი წევრების შეერთება, ვიზუალური მოდელი



ა) $3x + 8y + 2x - 5y =$

$3x + 2x + 8y - 5y =$

$x(3+2) + y(8-5) =$

$5x + 3y$

როდესაც ალგებრულ გამოსახულებაში ერთ-ერთ წევრს უარყოფითი ნიშანი აქვს, ოპერაციებიც ამის შესაბამისად სრულდება.

ალგებრულ გამოსახულების მნიშვნელობის დადგენა, ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობისთვის

ალგებრაში სხვადასხვა დავალებების, ამოცანების ამოხსნისას საჭიროა ალგებრული გამოსახულების (ცვლადის შემცველი გამოსახულების) მნიშვნელობის მოძებნა, როდესაც ცნობილია ცვლადის რაიმე მნიშვნელობა. ასეთ შემთხვევაში, ცვლადების (იგივე უცნობის) ნაცვლად უნდა ჩავსვათ ცვლადის მოცემული რიცხვითი მნიშვნელობა და გამოვთვალოთ მიღებული რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა.

ნიმუში 4 – მრავალწევრის ვიზუალური (სქემატური) წარმოდგენა

იპოვეთ მოცემული ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მითითებული მნიშვნელობისთვის:

ა) $4x^2 - 8x$, თუ $x = -3$; ან $x = 5$

ბ) $-2a^2 - 6ab + b^3$, თუ $a = -1$, $b = 4$

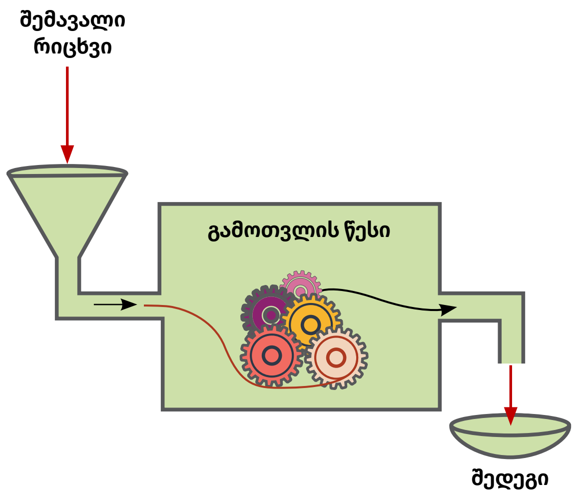
ა) იპოვეთ $4x^2 - 8x$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $x = -3$ ან $x = 5$.

ვთქვათ, მოცემულია გამომთვლელი მოწყობილობა, რომელიც მასში შემავალ რიცხვზე მოქმედებს გარკვეული წესით.

შემავალი რიცხვი	გამოთვლის წესი	შედეგი
x	$x^2 - 8x$	
-3	$(-3)^2 - 8(-3) =$ $9 + 24 = 33$	33
5	$5^2 - 8 \cdot 5 =$ $25 - 40 = -15$	-15

x უცნობის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის ალგებრული გამოსახულება მიიღებს შესაბამის რიცხვით მნიშვნელობას.

წარმოვიდგინოთ სიტუაცია ვიზუალურად:



ბ) ვიპოვოთ $-2a^2 - 6ab + b^3$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a = -1$ და $b = 4$.

$$-2a^2 - 6ab + b^3 = -2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) \cdot 4 + 4^3 = -2 + 24 + 64 = 86$$

1.3. ალგებრული წილადი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ალგებრული გამოსახულება შეიცავს ცვლადს. განვიხილოთ რამდენიმე დამაზუსტებელი ტერმინი.

<table>
<tr>
<td>

$\frac{A}{B}$ სახის წილადს, რომლის მრიცხველი A და მნიშვნელი B წარმოადგენენ ალგებრულ გამოსახულებებს, **ალგებრული წილადი** ეწოდება.

როდესაც მნიშვნელი B არის მხოლოდ რიცხვი (გარდა 0-სა), მაშინ ვამბობთ, რომ მოცემულია **მთელი გამოსახულება.**

</td>
<td>

ალგებრული წილადებია:

$$\frac{5}{x+2};\quad \frac{a-1}{2b+5}$$

მთელი გამოსახულებებია:

$$\frac{x-1}{5};\ 8b:15$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

ზოგადად, ორი ალგებრული გამოსახულების შეფარდებით ვიღებთ წილადურ გამოსახულებას (ალგებრულ წილადს);

როდესაც წილადურ გამოსახულებაში მნიშვნელიც და მრიცხველშიც მრავალწევრებია, ვამბობთ, რომ მოცემულია რაციონალური ალგებრული წილადი.

</td>
</tr>
</table>

ალგებრულ წილადს შეიძლება აზრი არ ჰქონდეს ცვლადის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის. მაგალითად, თუ $\frac{5}{x+2}$ ალგებრულ წილადში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ –2-ს, მაშინ, მივიღებთ შეფარდებას $\frac{5}{0}$, რომელსაც აზრი არ აქვს. მაშასადამე, $x = -2$ მნიშვნელობისთვის მოცემულ ალგებრულ წილადს აზრი არ ექნება, ხოლო ცვლადის ყველა სხვა მნიშვნელობისთვის, გარდა –2-სა, ალგებრულ წილადს აქვს აზრი.

ზოგადად, იმისათვის რომ დავადგინოთ ცვლადის რომელი მნიშვნელობისთვის არ აქვს აზრი $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ სახის ალგებრულ წილადს, საჭიროა, ვიპოვოთ ცვლადის (ან ცვლადების) ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც მნიშვნელი B ნულის ტოლია.

ცვლადების იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც ალგებრულ გამოსახულებას აზრი აქვს, ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობები ეწოდება. ყველა ასეთ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, **გამოსახულების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე** ეწოდება.

ნიმუში 1 – ალგებრული გამოსახულებების გამარტივება

ა) $\frac{5a}{6}+\frac{7a}{9}=\frac{15a}{18}+\frac{14a}{18}=\frac{15a+14a}{18}=\frac{29a}{18}=$ $=1\frac{11a}{18}$	როგორც ჩვეულებრივი წილადების შეკრები-სას, ჯერ ვიპოვოთ მნიშვნელების უ.ს.ჯ. და შემდეგ შევკრიბოთ
ბ) $\frac{3a}{10}-\frac{2b}{15}=\frac{9a}{30}-\frac{4b}{30}=\frac{9a-4b}{30}$	ჯერ გავაერთმნიშვნელიანოთ, შემდეგ გამო-ვაკლოთ
გ) $\frac{5}{6a}+\frac{7b}{9a^2}=\frac{5\cdot 3a}{6a\cdot 3a}+\frac{7b\cdot 2}{9a^2\cdot 2}=\frac{15a+14b}{18a^2}$	მნიშვნელების უ.ს.ჯ. = $18a^2$

ნიმუში 2

იპოვეთ ცვლადის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც რაციონალურ გამოსახულებას არ აქვს აზრი:

ა) $\frac{3x-y}{x-5}$	ა) უნდა ვიპოვოთ ცვლადის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მნიშვ-ნელი გახდება ნული, ანუ $x-5=0$, ე.ი. $x=5$.
ბ) $\frac{a^2b+3b-1}{a(b+4)}$	ბ) მნიშვნელი გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ განტოლებას $a(b+4)=0$, $a=0$ ან $b+4=0$, $b=-4$. როდესაც, $a=0$ ან, $b=-4$-ს, გამოსახულებას აზრი არ აქვს.

სავარჯიშოები

1. გაამარტივეთ გამოსახულება (შეაერთეთ მსგავსი წევრები):

ა) $8y-4y$; დ) $8c^3+4c^3$; ზ) $7t+5t-20t$;
ბ) $-7x+5x$; ე) $-4x^2+6x^2$; თ) $-5k^4+8k^4$;
გ) $-3b-9b$; ვ) $9m^5-13m^5$; ი) $-12y+2y+10y$.

2. შეაერთეთ მსგავსი წევრები:

ა) $-7y-5y-4$; დ) $7xy-15xy-2$; ზ) $-4ab+6b^2+3ab$; კ) $4ab-4a+5ab+12b$;
ბ) $-14x+8x-2$; ე) $15a+6+8a-12$; თ) $10m+20-7m-9$; ლ) $-x^2-4x+x^2+x+2$;
გ) $-4y+4y+3$; ვ) $-20a-14+11a-6$; ი) $18x^2-4x-20x^2+12x$; მ) $8ab-4b-15ab-2b$.

3. შეასრულეთ მოქმედებები ალგებრულ წილადებზე:

ა) $\frac{5a}{12}+\frac{7a}{8}$; დ) $\frac{5y}{9}-\frac{5y}{6}$; ზ) $4+1\frac{a}{6}+2\frac{a}{4}$; კ) $\frac{5}{2a}+\frac{3}{4a^2}$;
ბ) $\frac{a}{6}+\frac{4b}{9}$; ე) $2+\frac{a}{4}-\frac{a}{2}$; თ) $4b+\frac{b}{6}-\frac{b}{8}$; ლ) $\frac{-2y^2}{3}-\frac{-5y^2}{6}+\frac{x^2}{9}$;
გ) $\frac{3x}{5}-\frac{4}{15}$; ვ) $2+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}$; ი) $\frac{3}{a}-4\frac{1}{3a^2}$; მ) $\frac{xy}{5}-\frac{3xy}{10}-\frac{7xy}{15}$.

4. შეასრულეთ ერთწევრის ერთწევრზე გამრავლება:

ა) $2x\cdot(-3y)$; დ) $-4k\cdot 5k$; ზ) $3ny^2\cdot(-2yn)$; კ) $-3x^3y^2\cdot 4y^4x$
ბ) $5y^2\cdot 3y$; ე) $-3x^2y\cdot(-xy)$; თ) $6an\cdot 5xn$; ლ) $-a^2m^3\cdot(-6a^2m^3)$;
გ) $-2x^2\cdot(-3x^4)$; ვ) $-5x^2m\cdot 4mx$; ი) $5a^2b^3\cdot 2a^4b^2$; მ) $4x^2t^2\cdot 5x^3b^3$.

5. შეასრულეთ ერთწევრის ერთწევრზე გაყოფა:

ა) $24a^2:(-6a)$; დ) $-40x^3:(-5x^2)$; ზ) $6x^3n:(-2n)$; კ) $-18x^2y^4:(-3xy^3)$;
ბ) $20y^4:4y^2$; ე) $8ab:4ab$; თ) $-30xy^4:10xy^2$; ლ) $-9k^3x^3:3kx^3$;
გ) $-8x3:2x$; ვ) $-12am^2:(-3am)$; ი) $15a^4b:(-5a^3b)$; მ) $20y^2t^4:5yt^3$.

6. შეასრულეთ გამრავლება-გაყოფის ოპერაციები ალგებრულ წილადებზე:

ა) $\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{5}$; დ) $\frac{ay}{5}\cdot\frac{a}{b}$; ზ) $\frac{a}{4}:\frac{3a}{8}$; კ) $\frac{3m}{5n}:\frac{-2m}{n}$;
ბ) $\frac{-4x}{9}\cdot\frac{6}{5x}$; ე) $\frac{9x^2}{10t}\cdot\frac{5t}{6x}$; თ) $\frac{-3b}{10}:\frac{-9b}{5}$; ლ) $\frac{5y^2}{-7t}:\frac{10y^2}{21}$;
გ) $\frac{b}{4}\cdot\frac{-2a}{3}$; ვ) $\frac{-4m}{9n}\cdot\frac{-3n}{2m}$; ი) $\frac{2b^2}{10}:2b$; მ) $\frac{4a^3}{9b}:\frac{2a^2}{15b^3}$.

7. იპოვეთ შემდეგი ერთწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი (უ.ს.გ.):

ა) $10x^2$ და $5x$; დ) $24x^2y$ და $60x^2$; ზ) $12a^4$ და $8a$;
ბ) $20y^3$ და $12y^4$; ე) $9ab$ და $6ab$; თ) x^2y და xy^2;
გ) $12x^2$ და $18x^3$; ვ) $21my$ და $14y^2$; ი) $5a^2y$ და $10xa^3$.

სავარჯიშოები

8. იპოვეთ მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მითითებული მნიშვნელობისთვის:

ა) $3x + 2y$, თუ $x = 1$, $y = -2$;

ბ) $-2ac + 5c$, თუ $a = -3$, $c = 4$;

გ) $4n^2 - 6n$, თუ $n = 3$;

დ) $-5m^3 + 2m^2 - 3$, თუ $m = 2$;

ე) $6 - 2y^2x + 3xy - x^2$, თუ $x = 1{,}5$, $y = 2{,}5$;

ვ) $\frac{5a-3}{4}$, თუ $a = 2$;

ზ) $\frac{y^2+2x}{y-x} - 4y + x$, თუ $x = 2$, $y = 1$;

თ) $\frac{2a^2-7}{b+1} - \frac{a^3-4}{b-3}$, თუ $a = 2$, $b = 4$.

9. იპოვეთ ცვლადის მნიშვნელობა/მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ალგებრულ წილადს არ აქვს აზრი:

ა) $\frac{-2a+1}{3}$; დ) $\frac{5y^2}{y}$; ზ) $\frac{x-8}{x-8}$; კ) $\frac{5t+11}{t(t-3)}$;

ბ) $3n^2 + 4n$; ე) $\frac{t+7}{t-5}$; თ) $\frac{b+1}{b^2+15}$; ლ) $\frac{7y+1}{5y-15}$;

გ) $\frac{x-5}{x}$; ვ) $\frac{3y+10}{4y+8}$; ი) $\frac{1}{3x-7}$; მ) $\frac{b^2+2}{2b+6}$.

10. შეასრულეთ გამრავლება-გაყოფის ოპერაციები ალგებრულ წილადებზე:

ა) $\frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{5}$; დ) $\frac{ay}{5} \cdot \frac{a}{b}$; ზ) $\frac{a}{4} : \frac{3a}{8}$; კ) $\frac{3m}{5n} : \frac{-2m}{n}$;

ბ) $\frac{-4x}{9} \cdot \frac{6}{5x}$; ე) $\frac{9x^2}{10t} \cdot \frac{5t}{6x}$; თ) $\frac{3b}{10} : \frac{9b}{5}$; ლ) $\frac{5y^2}{-7t} : \frac{10y^2}{21}$;

გ) $\frac{b}{4} \cdot \frac{-2a}{3}$; ვ) $\frac{-4m}{9n} \cdot \frac{-3n}{2m}$; ი) $\frac{2b^2}{5} : 2b$; მ) $\frac{4a^3}{9b} : \frac{2a^2}{15b^3}$.

11. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\frac{a}{3} + \frac{a}{5}$; დ) $\frac{2}{5y} + \frac{1}{10y}$; ზ) $\frac{5+x}{x+1} - \frac{1-x}{x+1}$; კ) $\frac{3}{2a} + \frac{1}{a^2}$;

ბ) $\frac{x}{9} + \frac{1}{3x}$; ე) $\frac{9}{x+2} + \frac{5}{x+2}$; თ) $\frac{3+x}{10-x} - \frac{3}{10-x}$; ლ) $\frac{5}{4m} + \frac{5}{8m}$;

გ) $\frac{b}{4} + \frac{a}{3}$; ვ) $\frac{1+5n}{n-1} - \frac{3n}{n-1}$; ი) $\frac{3}{a} + \frac{1}{a^2}$; მ) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab}$.

12. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 2სმ-ით მეტია, ჩაწერეთ მართკუთხედის პერიმეტრის გამოსათვლელი გამოსახულება.

13. მართკუთხედის სიგანე სიგრძეზე 4სმ-ით ნაკლებია, ჩაწერეთ მართკუთხედის პერიმეტრის გამოსათვლელი გამოსახულება.

14. მარიამს x წიგნი აქვს, გიორგის 4-ჯერ მეტი ვიდრე მარიამს, ხოლო დემნას კი 7-ით ნაკლები, ვიდრე გიორგის. შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, სულ რამდენი წიგნი აქვს სამივეს?

სავარჯიშოები

15. მართკუთხედის სიგანეა y სმ, ხოლო სიგრძე 5-ით მეტი, ვიდრე სიგანე. შეადგინეთ მართკუთხედის პერიმეტრის გამოსათვლელი გამოსახულება.

16. მაღაზიამ ერთ დღეს გაყიდა რაღაც რაოდენობის კარტოფილი. მეორე დღეს გაყიდა 20 კგ-ით მეტი, ვიდრე პირველ დღეს, ხოლო მესამე დღეს გაყიდა 7 კგ-ით ნაკლები, ვიდრე მეორე დღეს. შემოიტანეთ შესაბამისი ცვლადი და შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, სულ რამდენი კილოგრამი კარტოფილი გაუყიდია მაღაზიას სამ დღეში.

17. კინოთეატრში მოზარდის ბილეთის ფასი 2 ლარით იაფია, ვიდრე უფროსის. საბამ იყიდა 12 ბილეთი მოსწავლეებისათვის და 3 ბილეთი მასწავლებლებისათვის. შემოიტანეთ შესაბამისი ცვლადი და შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, სულ რამდენი ლარი გადაუხდია საბას ბილეთებში.

18. სამკუთხედის ერთი გვერდი სამჯერ მეტია მეორეზე, ხოლო მესამე გვერდი 20 სმ-ით ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე. შემოიტანეთ შესაბამისი ცვლადი და შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, რას უდრის სამკუთხედის პერიმეტრი.

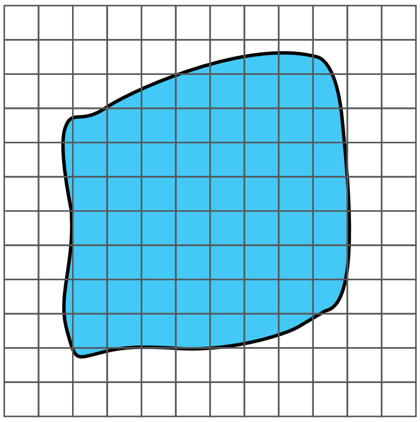
19. ოსტატი ერთ დღეში აკეთებს x რაოდენობის დეტალს, ხოლო შეგირდი ერთ დღეში აკეთებს y რაოდენობის დეტალს. ოსტატმა იმუშავა 5 დღე, ხოლო შეგირდმა 3 დღე. შეადგინეთ გამოსახულება,რომელიც გვიჩვენებს, სულ რამდენი დეტალი დაუმზადებია ორივეს.

20. ანანომ იყიდა 8 რვეული და 5 კალამი. შემოიტანეთ შესაბამისი ცვლადები და შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, სულ რა თანხა გადაუხდია ანანოს რვეულებსა და კალმებში.

21. დისკოთეკაზე შესვლა ღირს 15 ლარი. დემეტრემ დისკოთეკაზე მიირთვა 3 ნაყინი და 2 კოქტეილი. შემოიტანეთ შესაბამისი ცვლადები და შეადგინეთ გამოსახულება, რომელიც გვიჩვენებს, სულ რა თანხა დაეხარჯა დემეტრეს დისკოთეკაზე.

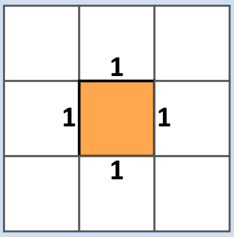
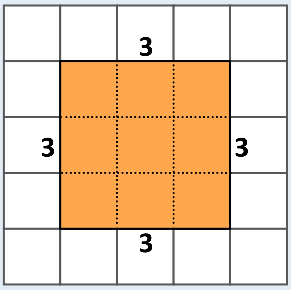
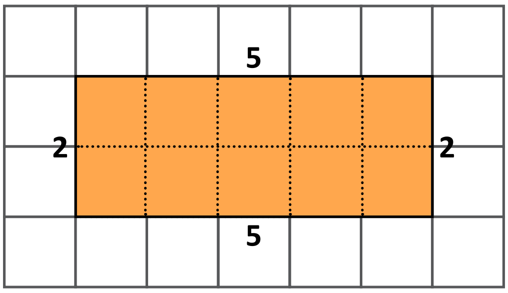
1.4. ერთნევრის ჯამზე გამრავლება

გავიხსენოთ, რომ ფართობი არის სიბრტყის ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია მრუდით ან ტეხილი ხაზით.



ფართობის საზომ ერთეულად ვიღებთ კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 ერთეული. ფართობი იზომება კვადრატული ერთეულებით, მაგალითად: სმ^2, მ^2 და ა.შ.

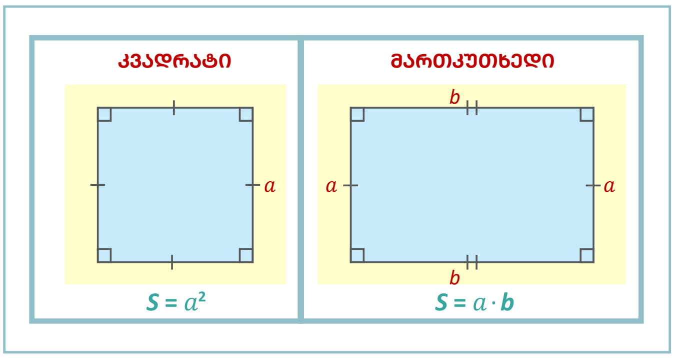
დავუშვათ, რომ ერთი უჯრის გვერდის სიგრძე შეესაბამება 1 სმ-ს და მისი ფართობი აღვნიშნოთ S-ით, ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან მივიღებთ:

კვადრატი	კვადრატი	მართკუთხედი
		
$S = 1$ სმ^2	$S = 3 \cdot 3 = 9$ სმ^2	მოცემულია ორი სტრიქონი, თითო სტრიქონში 5 კვადრატია, შესაბამისად ფართობი უდრის: $S = 2 \cdot 5 = 10$ სმ^2

ფართობის თვისებები:

- ყოველ ბრტყელ ფიგურას აქვს გარკვეული ფართობი;
- ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ;
- თუ ფიგურას ორ ნაწილად გავყოფთ, მაშინ ამ ნაწილების ფართობთა ჯამი მოცემული ფიგურის ფართობის ტოლია.

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ გამოითვლება მართკუთხედის და კვადრატის ფართობი.



1.4.1 გეომეტრიული მოდელები ალგებრაში

ალგებრაში გეომეტრიული მოდელები გვეხმარება ფორმულის გამოყვანასა (დამტკიცებასა) და ვიზუალურ წარმოდგენაში.

ერთწევრის ორწევრზე გამრავლება

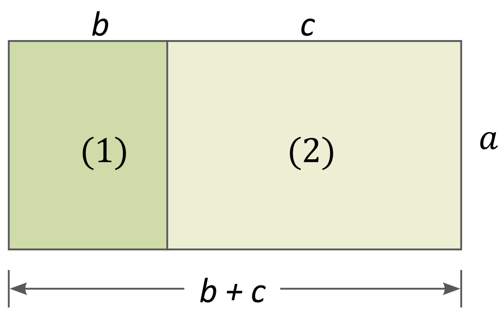
ალგებრაში გამარტივებებისათვის ხშირად გვჭირდება ერთწევრის ერთწევრზე ან მრავალწევრზე გამრავლება.

განრიგებადობის თვისების თანახმად, ვიცით, რომ:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$a(b-c)=ab-ac$$

განრიგებადობის თვისება



გეომეტრიული მოდელით ადვილია მოცემული თვისების დასაბუთება და ვიზუალური წარმოდგენა:

$$S=S_1+S_1$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

დასაბუთება:

როგორც ვიცით, მართკუთხედის ფართობი მისი შემადგენელი ნაწილის ფართობთა ჯამის ტოლია.

ნიმუში 1 – ერთწევრის ორწევრზე ან მრავალწევრზე გამრავლება

ა) $5x(3x+4)=5x\cdot 3x+5x\cdot 4=15x^2+20x$	დ) $5(2a+b)-3(a-2b)=10a+5b-3a+6b=7a+11a$
ბ) $x(3x^2-7)=x\cdot 3x^2+x\cdot(-7)=3x^3-7x$	**მითითება:** ყოველთვის მიაქციეთ ყურადღება უარყოფით რიცხვზე გამრავლებას
გ) $-5(3x-4)=-5\cdot 3x-5\cdot(-4)=-15x+20$	

ნიმუში 2 – მრავალწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ა) $20x-15y$ $20x=2\cdot 2\cdot 5\cdot x$ $15y=3\cdot 5\cdot y$ $20x-15y=4\cdot 5\cdot x-3\cdot 5\cdot y=5(4x-3y)$	ვიპოვოთ ერთწევრების უ.ს.გ. უ.ს.გ.= 5 განრიგებადობის თვისების თანახმად: $ab-ac=a(b-c)$
ბ) $15x^2-10x^3$ $15x^2=3\cdot 5\cdot x\cdot x$ $10x^3=2\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot x$ $15x^2-10x^3=3\cdot 5x^2-2x\cdot 5x^2=5x^2(3-2x)$	უ.ს.გ. = $5x^2$
გ) $-15b-10a$ = შეგვიძლია ფრჩხილს გარეთ გავიტანოთ, ასევე –5 $=-5(3b+2a)$	

დაიმახსოვრეთ:

1) $-(a-b)=-1(a-b)=$ $-a+b=b-a$	2) $(a-b)=-1(b-a)$

ნიმუში 3 – ალგებრული გამოსახულებების გამარტივება

$\frac{5}{a}+\frac{a}{a+2}=\frac{5}{a}\cdot\frac{a+2}{a+2}+\frac{a}{a+2}\cdot\frac{a}{a}=$ $\frac{5(a+2)}{a(a+2)}+\frac{a\cdot a}{a(a+2)}=\frac{5(a+2)+a^2}{a(a+2)}=\frac{5a+10+a^2}{a(a+2)}$	როგორც ჩვეულებრივი წილადების შეკრებისას, ჯერ ვიპოვოთ მნიშვნელების უ.ს.ჯ. და შემდეგ შევკრიბოთ. მნიშვნელების უ.ს.ჯ. $= a(a+2)$ განრიგებადობის თვისების გამოყენებით, გავამარტივოთ ალგებრული წილადის მრიცხველი.
ბ) ალგებრული წილადების შეკვეცა წარმოვადგინოთ ალგებრული წილადის მნიშვნელი და მრიცხველი ნამრავლად, შემდეგ შევკვეცოთ. $\frac{a+2}{4a+8}=\frac{a+2}{4(a+2)}=\frac{1}{4}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყავით $(a+2)$-ზე.	გ) ალგებრული წილადების შეკვეცა $\frac{a^2-5a}{5-a}=\frac{a(a-5)}{-(a-5)}=-a$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყავით $(a-5)$-ზე; მრიცხველზე დარჩება a, ხოლო მნიშვნელში -1;

ნიმუში 4

იპოვეთ ცვლადის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც რაციონალურ გამოსახულებას არ აქვს აზრი:

ა) $3-\frac{2x}{x^2+2}$	წილადის მნიშვნელია x^2+2, რომელიც ნული არ ხდება x ცვლადის არც-ერთი მნიშვნელობისთვის, ამიტომ გამოსახულების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე იქნება $x\in R$
ბ) $\frac{5a+2}{3a-12}$	ჯერ ვიპოვოთ ცვლადის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ალგებრულ წილადს არ აქვს აზრი. გავუტოლოთ მნიშვნელი 0-ს. $3a-12=0$, ე.ი. $a=4$ მაშასადამე, გამოსახულებას არ აქვს აზრი, როდესაც $a=4$-ს.
გ) $\frac{a+2}{5a+10}=\frac{a+2}{5(a+2)}$	მიუხედავად იმისა, რომ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი იკვეცება მამრავლზე $a+2$, საწყისი გამოსახულება აზრს დაკარგავს როდესაც $a=-2$-ს

დაიმახსოვრეთ:

1) $a-b=-1(-a+b)=-(b-a)$	2) $-(a-b)=-1(a-b)=b-a$

სავარჯიშოები

1. გახსენით ფრჩხილი განრიგებადობის თვისების გამოყენებით:

ა) $-5(x+2)$; ბ) $2(3m-n)$; გ) $-(2x-y)$; დ) $-4(2x-4y)$; ე) $3x(2x+4)$; ვ) $-2a(5a+3b)$; ზ) $2x(7x-3x^2)$; თ) $6n(n-4)$; ი) $-3n^2(n-2)$; კ) $-4x^2(x^2+5x)$; ლ) $4n^3(n^2+2m)$; მ) $2xy(x-3y)$.

2. წერტილების ნაცვლად ჩაწერეთ შესაბამისი ერთწევრები:

ა) $10a-15=5(\ldots - \ldots)$;
ბ) $8m-12n=4(\ldots - \ldots)$;
გ) $-6x^2+9y=3(\ldots + \ldots)$;
დ) $-12n^2-15n=-3n(\ldots + \ldots)$;
ე) $4m^3-6m^2=2m^2(\ldots - \ldots)$;
ვ) $3x^2y-12xy=3xy(\ldots - \ldots)$;
ზ) $5a^2+15ay=5a(\ldots + \ldots)$;
თ) $-16a^3b^2+10a^2b=-2a^2b(\ldots - \ldots)$;
ი) $4x^2+6x-8=4(\ldots + \ldots - \ldots)$;
კ) $9a^3-3a^2-6ax=3a(\ldots - \ldots - \ldots)$.

3. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

ა) $25a+15b$; ბ) $-12a-24$; გ) $21x^2+35x$; დ) $-32a+8b$; ე) $14x^2+21xy$; ვ) $24b-40b^2$; ზ) $-40x^2+30x$; თ) $-18ab-9b^2$; ი) $24a^2x-60ax$; კ) $15m^2y+18my^2$; ლ) $-24x^2a^2-30ax$; მ) $6n^2-15n-18$.

4. გახსენით ფრჩხილები და შეაერთეთ მსგავსი წევრები:

ა) $12+5(x-2)$; ბ) $3(2x-5)+4x$; გ) $4-3(x+4)$; დ) $12x+5x(3-4x)$; ე) $-15x-3x(4+x)$; ვ) $4m(m-5)-3m^2+2$; ზ) $6x(x^2-2x)+10x^2-x$; თ) $-7a^2(a-b)+5a^3+a^2b$; ი) $3(2a+3b)+4(a-4b)$; კ) $2(5x-4y)-3(2y-6x)$; ლ) $4x(x+6)-2(x^2-3)$; მ) $4(0.5a-b)-2(3a-5b)$.

5. წერტილების ნაცვლად ჩაწერეთ შესაბამისი ერთწევრები ისე, რომ მიიღოთ სამართლიანი ტოლობა:

ა) $5x+7+\ldots+\ldots=4(2x+3)$;
ბ) $9a-11+\ldots-\ldots=6(a-4)$;
გ) $12m+9n+\ldots+\ldots=6(3m+2n)$;
დ) $-6y+5x-\ldots+\ldots=-3(5y-4x)$;
ე) $7m^2+6m+\ldots+\ldots=3m(3m+5)$;
ვ) $-12x^2+8x-\ldots+\ldots=-3x(5x-2)$;
ზ) $4n^2y+9n+\ldots+\ldots=6n(ny+2)$;
თ) $5a^2b-6ab^2+\ldots-\ldots=4ab(3a-4b)$.

6. შეკვეცეთ წილადი:

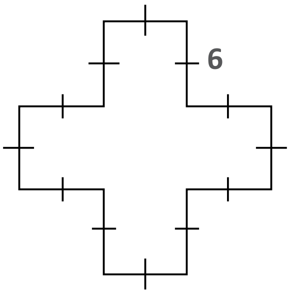
ა) $\frac{6(x+5)}{6}$; ბ) $\frac{3(x-7)}{9}$; გ) $\frac{14(m+9)}{7}$; დ) $\frac{2(a+1)}{8}$; ე) $\frac{15}{5(n+2)}$; ვ) $\frac{4}{12(1-b)}$; ზ) $\frac{5(x-3)}{10(x-3)}$; თ) $\frac{x+4}{6(x+4)}$; ი) $\frac{3(x-7)}{x(x-7)}$.

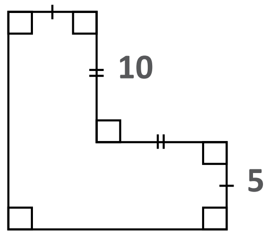
7. გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

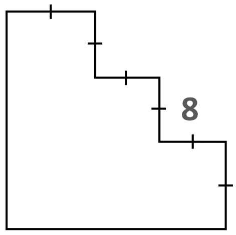
ა) $2(x+3)-5(2x-1)+4$, თუ $x=3$;
ბ) $2-y^2+y(2y-6)+3y+5$, თუ $y=-2$;
გ) $(4m+3)\cdot 2m-5m^2-4$, თუ $m=5{,}3$;
დ) $(2x-4y)\cdot 6+3(2y-x)$, თუ $x=2$, $y=-1$.

სავარჯიშოები

8. გამოთვალეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურების ფართობები (ერთნაირი ჯოხებით მონიშნულია ტოლი გვერდები).







9. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\frac{n}{n-1}+\frac{3}{n}$; დ) $\frac{2}{n}-\frac{n+2}{n-4}$; ზ) $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{1-x}$; კ) $\frac{3}{2a}+\frac{a-3}{2a^2}$;

ბ) $\frac{m}{m+1}+\frac{3m}{2}$; ე) $\frac{9x^2}{x+2}-\frac{9x}{2}$; თ) $\frac{3}{10+x}+\frac{1}{10-x}$; ლ) $\frac{5x-1}{6x^2}+\frac{5}{9x}$;

გ) $\frac{n}{n+1}+\frac{3}{n+2}$; ვ) $\frac{1}{n-1}-\frac{3}{5n}$; ი) $\frac{6x+2}{x^2}-\frac{6}{x}$; მ) $\frac{1+a}{a^2}-\frac{b-1}{ab}$.

10. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\frac{a^2+5a}{5-a}$; დ) $\frac{2b^2+4b}{2b}$; ზ) $\frac{12b^2+6b}{1+2b}$; კ) $\frac{4b^2}{15a}\cdot\frac{10a^2}{2b^2}$;

ბ) $\frac{b^2+3b}{b}$; ე) $\frac{5a^2+5a}{a+1}$; თ) $\frac{2b^2-4b}{2-b}$; ლ) $\frac{4b^2}{a+3}\cdot\frac{a+3}{2b}$;

გ) $\frac{b^2+3b}{3+b}$; ვ) $\frac{4a^2-a}{8a-2}$; ი) $\frac{2n^2}{5}\cdot\frac{5}{2b}$; მ) $\frac{a+3}{a}\cdot\frac{10a^2}{5a+15}$.

11. იპოვეთ ცვლადის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ალგებრულ წილადს არ აქვს აზრი:

ა) $2x^2+5x-1$; დ) $\frac{x-2}{x^2+9}$; ზ) $\frac{2}{m^2-4m}$; კ) $\frac{t-4}{7t(t-6)}$;

ბ) $\frac{b+1}{b}$; ე) $\frac{t}{t-7}$; თ) $\frac{x-2}{5x-10}$; ლ) $\frac{2y^2+7}{y}+\frac{y-8}{y+5}$;

გ) $\frac{y-15}{y}$; ვ) $\frac{y}{y^2-3y}$; ი) $\frac{a+3}{a(a+2)}$; მ) $\frac{2}{a-9}+\frac{a^3}{a+9}$.

1.5. ორწევრის ორწევრზე გამრავლება

საკვანძო კითხვა:

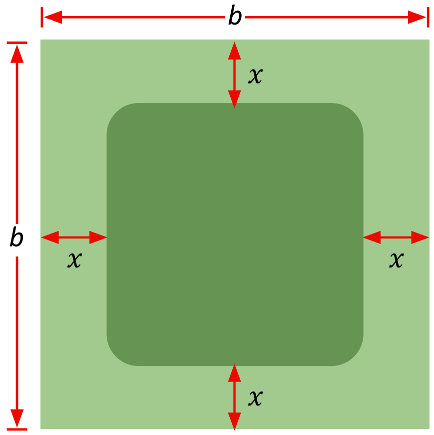
გეგმაზე მოცემულია კვადრატის ფორმის ბაღი, რომლის შუაგულში არის მეტად გამწვანებული ადგილი ყვავილნარისთვის და მის გარშემო სავალი ნაწილი ბავშვებისთვის.

საკვანძო კითხვა:

- როგორ არის შესაძლებელი ბავშვებისთვის გამოყოფილი ფეხით სავალი ნაწილის ფართობის გამოთვლა?
- როგორ არის შესაძლებელი ბაღის შუაგულში გამწვანებული ტერიტორიის ფართობის გამოთვლა?

ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე:

1. შეადგინეთ ყვავილნარისთვის განკუთვნილი არის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება;
2. შეადგინეთ ფეხით სავალი ნაწილისთვის განკუთვნილი ტერიტორიის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება;
3. გამოითვალეთ ფართობი ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის.

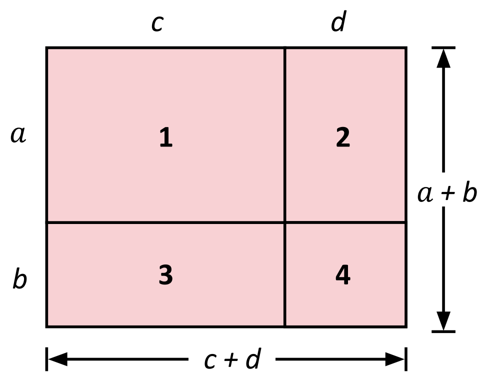


პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული დავალების შესრულებამდე, განვიხილოთ როგორ არის შესაძლებელი სიტუაციის ფორმულირება, როგორ გვეხმარება გეომეტრიული მოდელები ალგებრაში ფორმულების გამოყვანასა და ვიზუალურ წარმოდგენაში.

ორწევრის ორწევრზე გამრავლება

თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ მართკუთხედი, რომლის თითოეული გვერდი გაყოფილია ორ ნაწილად. როგორც ვიცით, მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით სიგრძე×სიგანეზე, მეორენაირად მართკუთხედის ფართობი მისი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია.

$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) =$
$= ac + ad + bc + bd$



$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$
$S_1 = ac; \quad S_2 = ad$
$S_3 = bc; \quad S_4 = bd$

ნამრავლის ჯამად წარმოდგენის მეთოდს **ფოილის** მეთოდი ეწოდება.

I-წევრი I-ზე; I-წევრი II-წევრზე

II-წევრი I-ზე; II-წევრი I-წევრზე

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

First Outer Inner Last

ამრიგად, მივიღეთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულა, პროცესის ვიზუალური წარმოდგენით.

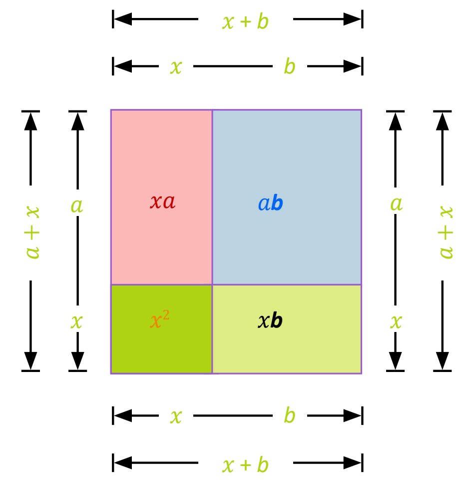
ნიმუში 1

განვიხილოთ შემთხვევა:

კვადრატის გვერდის სიგრძეა x. კვადრატის ერთი გვერდი a ერთეულით, ხოლო მეორე b ერთეულით გავადიდოთ და ჩავწეროთ რისი ტოლი იქნება ფართობი: $(x+a)(x+b)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab =$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$



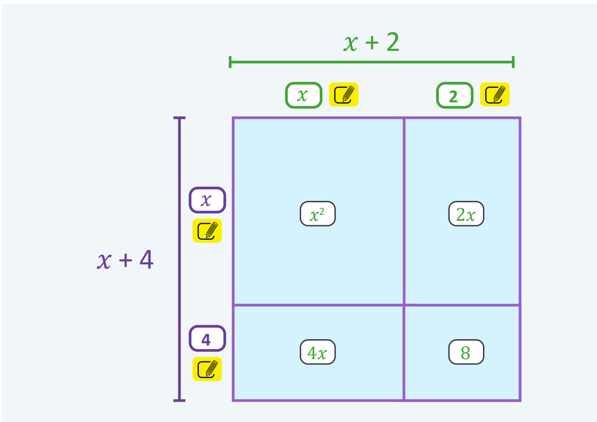
ნიმუში 2 – ორწევრის ორწევრზე გამრავლება, ვიზუალური მოდელი

ა) $(x+4)(x+2) =$

$x^2 + 2x + 4x + 8 =$

$x^2 + 6x + 8$

მივიღეთ კვადრატული სამწევრი, ნამრავლი წარმოვადგინეთ ჯამის სახით



ბ) $(x+2y)(5x-3y) = x \cdot 5x + x \cdot (-3y) + 2y \cdot 5x + 2y \cdot (-3y) = 5x2 - 3xy + 10xy - 6y^2 = 5x^2 + 7xy - 6y^2$

სიმულაცია PHET	მსგავსი ვიზუალური მოდელები შეგიძლიათ გააკეთოთ მოცემულ ბმულზე: Phet.Colorado.Edu

ნიმუში 3 – ორწევრის ორწევრზე გამრავლება დიაგრამით (ცხრილის დახმარებით)

წარმოვადგინოთ ნამრავლი ჯამად (აღნიშნულ ოპერაციას, ასევე ფრჩხილების გახსნა ეწოდება):

$(x-2)(x+3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$

	x	3
x	x^2	$3x$
-2	$-2x$	-6

$x^2 + x - 6$

იხილეთ ტელეგაკვეთილები

ალგებრული გამოსახულების გამარტივება, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

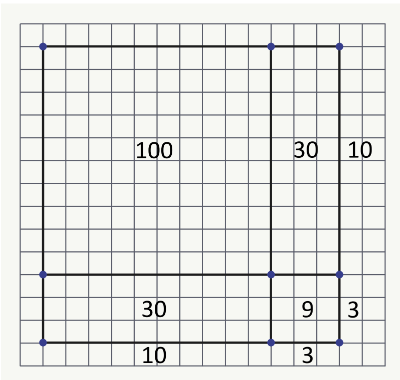
ვიზუალიზაცია

1.6. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

განვიხილოთ ორი ტოლი ორწევრის ერთმანეთზე გამრავლება.

როგორც ვიცით, რომ კვადრატის ფართობი გვერდის სიგრძის კვადრატის ტოლია. მეორე ნაირად, კვადრატის ფართობი 4 მართკუთხედის ფართობის ჯამის ტოლი იქნება. ნახაზიდან გამომდინარე დავწეროთ ტოლობა:

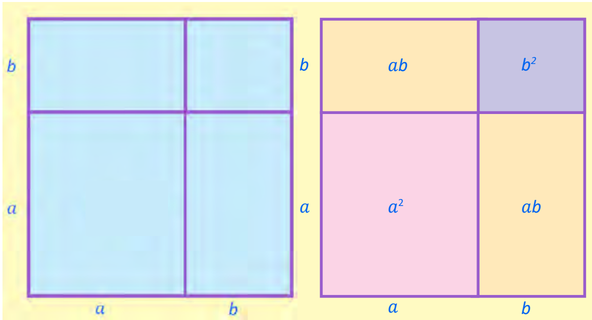
$$(10+3)^2 = 10^2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 3^2 =$$
$$= 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 3^2 = 100 + 60 + 9 = 169$$
$$(10+3)^2 = 13 \cdot 13 = 169$$



თუ რიცხვების ნაცვლად ჩავსვამთ ცვლადებს, მივიღებთ:

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 =$
$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

გამოკლების შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგს:

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 =$

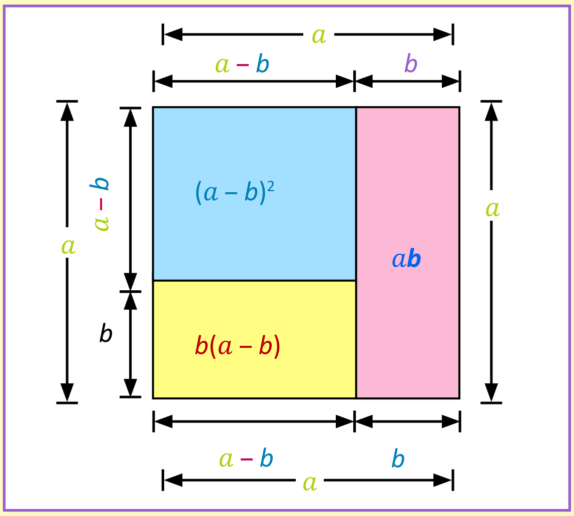
$$= \boldsymbol{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

ვიზუალური მოდელები

ვიზუალური მოდელის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ

$$(a-b)^2 = \boldsymbol{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a და ორივე გვერდი შევამციროთ b ერთეულით, ვიპოვოთ რისი ტოლი იქნება დარჩენილი კვადრატის ფართობი $(a-b)^2$



რადგანაც მთლიანი კვადრატის ფართობი მისი შემადგენელი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია:

$$a^2 = (a-b)^2 + ab + b(a-b) =$$

$$a^2 = (a-b)^2 + ab + ba - b^2 =$$

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 =$$

იხილეთ ფორმულის გამოყვანა

მოცემული ტოლობიდან მივიღებთ, რომ:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ორი a და b რიცხვის ჯამის მათსავე სხვაობის გამრავლებით მივიღებთ შემდეგს:

3. $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = \boldsymbol{a^2 - b^2}$

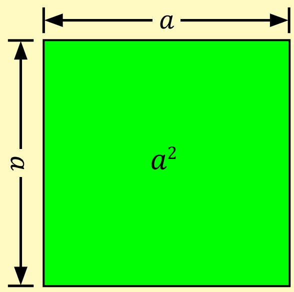
ვიზუალური მოდელის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ

$$(a+b)(a-b) = \boldsymbol{a^2 - b^2}$$

ნაბიჯი 1:

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a და ფართობი $\boldsymbol{a^2}$.

ნაბიჯი 1:



ნაბიჯი 2:

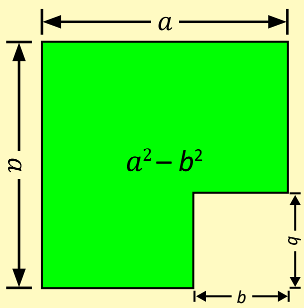
მის ორ მოსაზღვრე გვერდზე გადავზომოთ $\boldsymbol{b}$ სიგრძის მონაკვეთი და მთლიან კვადრატს ჩამოვაჭრათ კვადრატი, რომლის ფართობია $\boldsymbol{b^2}$;

თუ მთლიან კვადრატს ჩამოვაჭრით მცირე კვადრატს, დარჩენილი არის ფართობი იქნება:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2};$$

ნაბიჯი 2:

იხ.ვიდეო



ნაბიჯი 3:

დარჩენილი არე დავანაწევროთ, წარმოვადგინოთ ორ მართკუთხედად. თუ ნახაზს დავაკვირდებით, დავინახავთ, რომ პირველი მართკუთხედის სიგანე ტოლია მეორე მართკუთხედის სიგრძის და უდრის $(a-b)$-ს.

ნაბიჯი 4:

ქვედა მართკუთხედი მოვაბრუნოთ 90^0-იანი კუთხით და პარალელური გადატანით პირველი მართკუთხედის გვერდით განვათავსოთ.

რადგან ორივე მართკუთხედს ერთი გვერდი ტოლი სიგრძის აქვთ, მივიღებთ ერთ მთლიან მართკუთხედს, რომლის გვერდების სიგრძეებია:

$$(a+b) \text{ და } (a-b)$$

შესაბამისად, მიღებული მართკუთხედის ფართობია:

$$(a+b)(a-b)$$

ნაბიჯი 5:

ერთი და იმავე არის ფართობი გამოვთვალეთ ორი გამოსახულებით, შესაბამისად ეს გამოსახულებები ტოლია:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

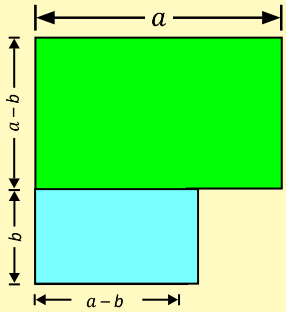
აღნიშნულ ფორმულებს შემოკლებული გამრავლების ფორმულები ეწოდება	
1. $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$	2. $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	4. $(a-b)(a+b)=(a+b)(a-b)$

ჩვენ უკვე გავეცანით ორწევრის ორწევრზე გამრავლებას, შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს. ვნახეთ, რომ ორწევრის ორწევრზე გამრავლებით ვიღებთ: ან ორი წევრისგან შემდგარ გამოსახულებას, ან სამი წევრისგან შემდგარ გამოსახულებას, ან ოთხი წევრისგან შემდგარ გამოსახულებას. ალგებრული გამოსახულებების გამარტივებების დროს ხშირად გვჭირდება როგორც ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად, ასევე პირიქით, ჯამის წარმოდგენა ნამრავლად.

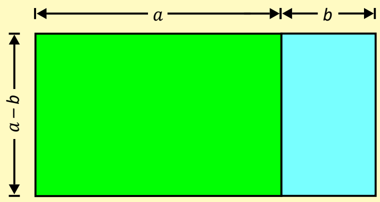
გაეცანით ნიმუშებს.

გაგრძელება

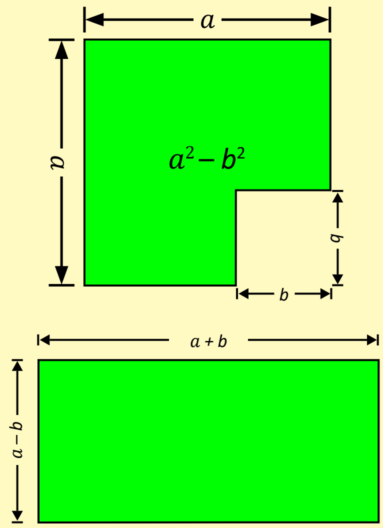
ნაბიჯი 3:



ნაბიჯი 4:



ნაბიჯი 5:



ნიმუში 1 – ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით

ა) $(a+5)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 + 10a + 25$

I წევრის კვადრატი

II წევრის კვადრატი

გაორკეცებული ნამრავლი I წევრის II – წევრზე

ბ) $(5a-3b)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 - 30ab + 9b^2$

გ) $(a-5)(a+5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$

დ) $(2a+7b)(2a-7b) = (2a)^2 - (7b)^2 = 4a^2 - 49b^2$

ნიმუში 2 – ორწევრის წარმოდგენა ნამრავლის სახით

$a^2 + b^2$ ნამრავლად არ იშლება

ნამრავლად წარმოდგენა შემოკლებული გამრავლების ფორმულის გამოყენებით:

ა) $a^2 - 36 = a^2 - 6^2 = (a-6)(a+6)$

ბ) $9x^2 - 100 = (3x)^2 - 10^2 = (3x-10)(3x+10)$

ნამრავლად წარმოდგენა, მამრავლის ფრჩხილს გარეთ გატანით:

გ) $6a^2 - 36a = 6a(a-6)$

ნიმუში 3 – სამწევრის წარმოდგენა ნამრავლის სახით, შემოკლებული გამრავლების ფორმულის გამოყენებით

ა) $a^2 + 10a + 25 =$

$a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2 =$

$(a+5)^2$

დავადგინოთ თუ არსებობს კანონზომიერება სამწევრის წევრებს შორის.

რა რიცხვი უნდა ჩავსვათ გამოტოვებულ ადგილას, რომ მივიღოთ სწორი ტოლობა:

ბ) $4a^2 - 12a + \ldots = (2a - \ldots)^2$

$(2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = (2a-3)^2$

I წევრი $(2a)$–ს კვადრატია, დავშალოთ შუა წევრი ნამრავლად, რომ დავადგინოთ რა შეიძლება იყოს II წევრი .

ნიმუში 4 – გამოიანგარიშეთ მარტივად შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:

ა) $97^2 - 96^2 = (97 - 96)(97 + 96) = 193$

ბ) $182^2 + 2 \cdot 182 \cdot 18 + 18^2 = (182 + 18)^2 = 200^2 = 40000$

ნიმუში 5 – გამოიანგარიშეთ მარტივად შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით:

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული იყო ამოცანა, ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე ვიპოვოთ ბაღის შუაგულში გამწვანებული ტერიტორიის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა

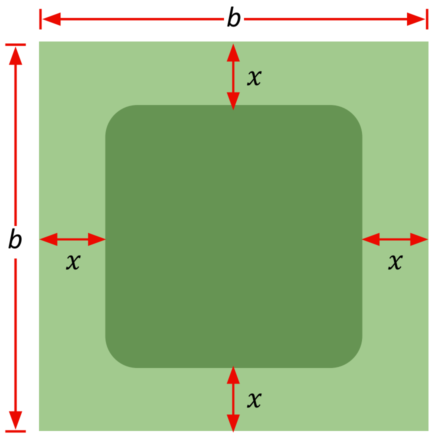
ბაღის შუაგულში მოცემულ გამწვანებულ ტერიტორიას აქვს კვადრატის ფორმა, რომლის გვერდი მიიღება დიდი კვადრატის გვერდს გამოკლებული 2-ჯერ x სიგრძე, ანუ $(b - 2x)$.

გამომდინარე აქედან, კვადრატის ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$S = (b - 2x)^2$

თუ გამოსახულებაში გავხსნით ფრჩხილს მივიღებთ, რომ

$S = (b - 2x)^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot 2x + (2x)^2 = b^2 - 4bx + 4x^2$



სავარჯიშოები

1. წარმოადგინეთ ჯამის სახით:

ა) $(y + 1)(y + 2)$; დ) $(b + 6)(b - 4)$; ზ) $(n - 7)(n + 2)$; კ) $(x + 4)(x + 7)$;
ბ) $(x + 4)(x + 3)$; ე) $(x + 5)(x - 3)$; თ) $(t + 9)(t - 1)$; ლ) $(b - 9)(b - 3)$;
გ) $(a - 5)(a + 7)$; ვ) $(a - 2)(a - 1)$; ი) $(a - 1)(a + 8)$; მ) $(k + 7)(k - 4)$.

2. წარმოადგინეთ ჯამის სახით:

ა) $(2y + 3)(3y - 4)$; დ) $(5b + 7)(2b + 1)$; ზ) $(1 - 4n)(3 + 2n)$; კ) $(5k^2 + 2k)(3k^2 - 2)$;
ბ) $(4m - 5)(m + 2)$; ე) $(6a - 4)(3a + 1)$; თ) $(5 + 3t)(6 - 7t)$; ლ) $(ab + 3)(3a - a^2b)$;
გ) $(3a - 7)(5a - 3)$; ვ) $(4k + 5)(6k - 2)$; ი) $(2x^2 - 3x)(4x - 1)$; მ) $(4x - 2y^2)(y^2 + 3)$.

3. გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

ა) $(x - 1)(2x + 4) - 3$, თუ $x = 2$;
ბ) $(2 + 3y)(5y - 6) - 9y + 7$, თუ $y = -3$;
გ) $5b^2 + (2b - 4)(3 + b) - 1$, თუ $b = 2.5$;
დ) $(4m + 3) \cdot (2 - 3m) - 5m^2 - 4$, თუ $m = 5$.

4. ისარგებლეთ ფორმულით $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ და წარმოადგინეთ ნამრავლი ჯამის სახით:

ა) $(a + 3)(a - 3)$; დ) $(2a + 5)(2a - 5)$; ზ) $(n^2 - 4)(n + 4)$; კ) $(3m^2 + 2y)(3m^2 - 2y)$;
ბ) $(x - 7)(x + 7)$; ე) $(3y - x)(3y + x)$; თ) $(x - 5y)(x + 5y)$; ლ) $(ab - 2c)(ab + 2c)$;
გ) $(m + n)(m - n)$; ვ) $(4k + 7m)(2m - 3k)$; ი) $(y^2 + 5k)(y^2 - 5k)$; მ) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.

5. ისარგებლეთ ფორმულით $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$ და წარმოადგინეთ ნამრავლი ჯამის სახით:

ა) $(a + 4)^2$; დ) $(3y - 2)^2$; ზ) $(5 + k^2)^2$; კ) $(5m + 2t)^2$;
ბ) $(b - 6)^2$; ე) $(m + 3b)^2$; თ) $(3y^2 - 2)^2$; ლ) $(2k^2 - 3b)^2$;
გ) $(2x + 1)^2$; ვ) $(3a - 5)^2$; ი) $(3a - 4x)^2$; მ) $(x^2 + y^2)^2$.

6. ისარგებლეთ ფორმულით $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ და წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

ა) $x^2 - 4$; დ) $9y^2 - 16$; ზ) $400 - 25m^2$; კ) $4m^2 - 9n^2$;
ბ) $m^2 - 36$; ე) $m^2 - 9b^2$; თ) $4a^2 - 25b^2$; ლ) $x^2 - 64$;
გ) $b^2 - 81$; ვ) $9x^2 - 49a^2$; ი) $100a^2 - 81b^2$; მ) $16y^2 - 81$.

7. ისარგებლეთ ფორმულით $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$ და წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

ა) $a^2 - 4a + 4$; დ) $x^2 - 18x + 81$; ზ) $25 - 20b + 4b^2$; კ) $9a^2 - 12ab + 4b^2$;
ბ) $x^2 + 2x + 1$; ე) $4y^2 - 20y + 25$; თ) $16 + 24a^2 + 9a^2$; ლ) $4m^2 + 20km + 25k^2$;
გ) $b^2 + 8b + 16$; ვ) $9k^2 + 12k + 4$; ი) x^2 $- 2xy + y$^2; მ) $c4 + 10c^2 + 25$.

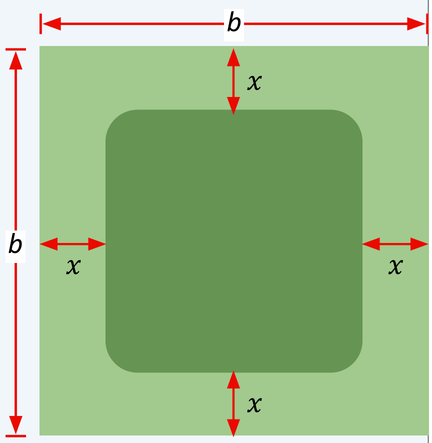
8. გაამარტივეთ გამოსახულება და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა:

ა) $(x + 2)^2 - 3x + 1$, თუ $x = 3$;
ბ) $(3 - 2t)^2 + 7t - 9$, თუ $t = -2$;
გ) $-4b^2 + (3b - 2a)^2 + 7ab + 5$, თუ $a = 1$, $b = 4$.

სავარჯიშოები

9. დავუბრუნდეთ გაკვეთილის დასაწყისში მოცემულ ამოცანას

გეგმაზე მოცემულია კვადრატის ფორმის ბაღი, რომლის შუაგულში არის მეტად გამწვანებული ადგილი ყვავილნარისთვის და მის გარშემო სავალი ნაწილი ბავშვებისთვის.



ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე:

1. შეადგინეთ ყვავილნარისთვის განკუთვნილი ტერიტორიის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება;
2. შეადგინეთ ფეხით სავალი ნაწილისთვის განკუთვნილი ტერიტორიის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება;
3. გამოითვალეთ ორივე ნაწილის ფართობი ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. მაგ., როდესაც:

   ა) $b = 10$ და $x = 2$

   ბ) $b = 18$ და $x = 2.5$
4. **წარმოადგინეთ არგუმენტები:**

   ა) შეიძლება თუ არა ცვლადებს მივანიჭოთ შემდეგი მნიშვნელობები $b = 20$ და $x = 11$;

   ბ) რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს x ცვლადმა? რაზეა დამოკიდებული?

10. **გამოწვევა:** შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები ისე, რომ მიიღოთ სრული კვადრატი

ა) $b^2 + 4ab + \ldots = (\ldots + 2b)^2$;

ბ) $a^2 - 14a + \ldots = (\ldots - 7)^2$;

გ) $9x^2 - 12x + \ldots = (3x - \ldots)^2$;

დ) $36m^2 - 12mn + \ldots = (6m + \ldots)^2$;

ე) $a^2 + 6a + \ldots = (\ldots + \ldots)^2$;

ვ) $b^2 + 16b + \ldots = (\ldots + \ldots)^2$;

ზ) $25y^2 - 10y + \ldots = (\ldots - \ldots)^2$;

თ) $16k^2 - 24km + \ldots = (\ldots - \ldots)^2$.

სავარჯიშოები

11. შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები ისე, რომ მიიღოთ სრული კვადრატი:

ა) $b^2 + \ldots + 9a^2 = (\ldots + 3a)^2$;

ბ) $x2 - \ldots + 16 = (\ldots - 4)^2$;

გ) $4m^2 + \ldots + 25n^2 = (2m + \ldots)^2$;

დ) $36y^2 - \ldots + a^2 = (6y - \ldots)^2$;

ე) $a^2 + \ldots + 4k^2 = (\ldots + \ldots)^2$;

ვ) $9b^2 + \ldots + 16x^2 = (\ldots + \ldots)^2$;

ზ) $25y^2 - \ldots + 36b^2 = (\ldots - \ldots)^2$;

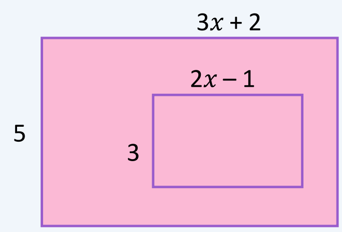
თ) $4k^2 - \ldots + 9n^2 = (\ldots - \ldots)^2$.

შეცდომის ანალიზი!

12. ა) მოსწავლემ $x^2 + 25$ ნამრავლის სახით წარმოადგინა შემდეგნაირად: $x^2 + 25 = (x + 5)(x + 5)$. რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი;

ბ) მოსწავლემ დავალების შესრულებისას $x^2 + 4$ ნამრავლის სახით წარმოადგინა შემდეგნაირად: $x^2 + 4 = (x + 2)(x - 2)$, რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? დაასაბუთეთ თქვენი პასუხი.

13. დიდი მართკუთხედის გვერდებია 5 სმ და $3x + 2$ სმ, ხოლო პატარა მართკუთხედის გვერდებია 3 სმ და $2x$-1 სმ. შეადგინეთ და გაამარტივეთ შესაბამისი გამოსახულება, რომლის მეშვეობითაც გამოითვლით:

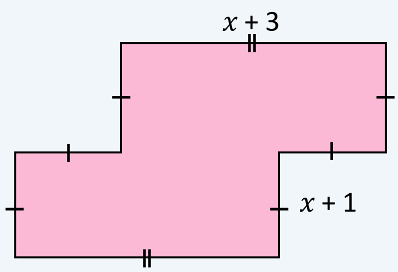


ა) რამდენი სანტიმეტრითაა მეტი დიდი მართკუთხედის პერიმეტრი პატარა მართკუთხედის პერიმეტრზე?

ბ) დიდი მართკუთხედიდან ამოჭრეს პატარა მართკუთხედი. რა იქნება დარჩენილი ნაწილის ფართობი?

14. ჩაწერეთ მოცემული ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება:

მითითება: ერთნაირი ხაზებით მონიშნული მონაკვეთები (გვერდები) ტოლია.



სავარჯიშოები

15. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

ა) $25b^2 - 4a^2$;
ბ) $100a^2 - 81b^2$;
გ) $8m^2 - 18n^2$;
დ) $x^4 - 64$;
ე) $4x^2 + 20xy + 25y^2$;
ვ) $9a^2 - 12ab + 4b^2$;
ზ) $4x^2 + 20xy + 25y^2$;
თ) $x^4 + 10x^2 + 25$.

16. შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით გამოიანგარიშეთ მარტივად:

ა) $51^2 - 49^2$;
ბ) $97^2 - 96^2$;
გ) $102^2 - 98^2$;
დ) $197^2 - 97^2$;
ე) $205^2 - 5^2$;
ვ) $58^2 - 42^2$.

17. შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით გამოიანგარიშეთ მარტივად:

ა) $55^2 + 2 \cdot 55 \cdot 45 + 45^2$;
დ) $101^2 + 2 \cdot 101 \cdot 99 + 99^2$;
ბ) $67^2 + 2 \cdot 67 \cdot 33 + 33^2$;
ე) $540^2 + 2 \cdot 540 \cdot 60 + 60^2$;
გ) $101^2 - 2 \cdot 101 + 1$;
ვ) $342^2 - 2 \cdot 342 \cdot 42 + 42$.

1.7. კვადრატული სამწევრი

რეალურ ცხოვრებაში ხშირად გვიწევს ბინის, სახლის ფართობის, ზედაპირის ფართობის გამოთვლა. გამოთვლებისას მოსახერხებელია სიტუაციის ფორმულირება, მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა, რისთვისაც გვჭირდება მოქმედებები ცვლადებზე.

? საკვანძო კითხვა:

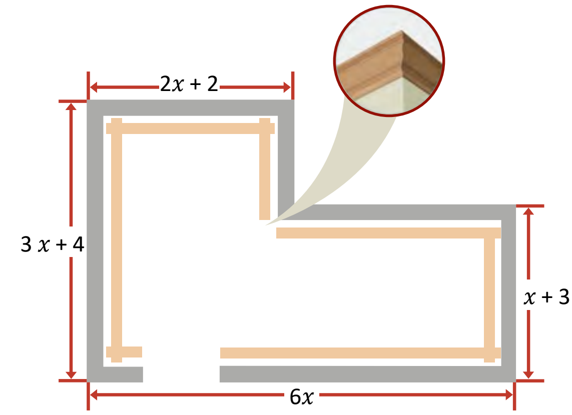
- *როგორ არის შესაძლებელი ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულების შედგენა?*

კვადრატული სამწევრი

$ax^2 + bx + c$ ტიპის გამოსახულებს, სადაც $a \neq 0$, **კვადრატული სამწევრი** ეწოდება.

კვადრატული სამწევრი შედგება 3 წევრისაგან. x – წარმოადგენს ცვლადს, ხოლო a, b და c რიცხვებია. ამასთან a, b-ს ეწოდება კოეფიციენტები,ხოლო c-ს ეწოდება მუდმივი.

განვიხილოთ კვადრატული სამწევრი, $ax^2 + bx + c$ და მისი კერძო შემთხვევა, როდესაც $a = 1$. იმისათვის, რომ ამ ტიპის კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად, უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი უდრის c მუდმივს, ხოლო ჯამი – მეორე წევრის b კოეფიციენტს. (მოცემული მეთოდის გამოყენება მარტივია, როდესაც საძიებელი ორი რიცხვი მთელი რიცხვებია. სხვა შემთხვევაში, ასეთი რიცხვების მოძებნა შედარებით რთულია).



ნიმუში 1 – ჩვენ უკვე განვიხილეთ ორწევრის ორწევრზე გამრავლება და ვნახეთ შესაბამისი გეომეტრიული მოდელი:

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

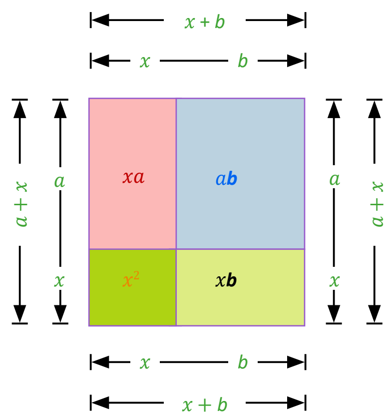
ქვემოთ მოცემულ მაგალითში ნაჩვენებია ჯამის წარმოდგენა ნამრავლად და ნაჩვენებია კავშირი, თუ როგორ არის შესაძლებელი დავადგინოთ, შეიძლება თუ არა ჯამი წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით.

ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად

$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab =$

ნამრავლის წარმოდგენა ნამრავლად

$= x^2 + (a + b)x + ab$



ნიმუში 2

- ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი წარმოადგენს 10-ს, ხოლო ჯამი 7-ია.

მოსინჯვის გზით ვეცადოთ, მოვძებნოთ საჭირო ორი რიცხვი.

წარმოვადგინოთ 10 ორი რიცხვის ნამრავლად და შემდეგ ამოვარჩიოთ ის წყვილი, რომელთა ჯამი 7-ის ტოლია.

ნამრავლი (თანამამრავლები)	ჯამი
$1 \cdot 10 = 10$	$1 + 10 \neq 7$
$(-1) \cdot (-10) = 10$	$(-1) + (-10) \neq 7$
$2 \cdot 5 = 10$	$2 + 5 = 7$
$(-2) \cdot (-5) = 10$	$(-2) + (-5) \neq 7$

მარცხნივ, ცხრილით მოცემული ნიმუშიდან ვხედავთ, რომ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია 10 და ჯამი 7, არის 2 და 5.

ნიმუში 3 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ა) ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად

$(x + 5)(x + 2) = x^2 + 2x + 5x + 2 \cdot 5 =$

$= x^2 + x(2 + 5) + 2 \cdot 5 = x^2 + 7x + 10$

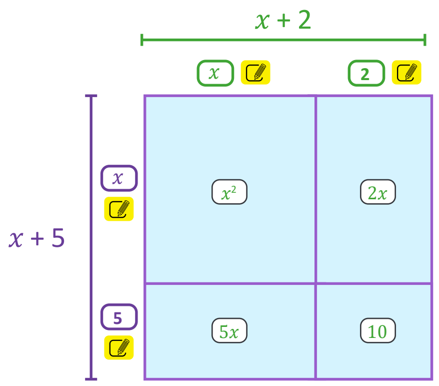
მივიღეთ კვადრატული სამწევრი

$x^2 + 7x + 10$

შემოწმებით დავინახავთ, რომ:

ნამრავლი	ჯამი
$2 \cdot 5 = 10$	$2 + 5 = 7$

იხილეთ ვიზუალური მოდელი:



ბ) წარმოვადგინოთ მოცემული კვადრატული სამწევრი ნამრავლად:

$x^2 - 3x - 10 =$

მეორე წევრია $-3x$, მუდმივი -10

მუდმივი უნდა წარმოვადგინოთ ისეთი 2 რიცხვის ნამრავლად, რომელთა ჯამი მეორე წევრის კოეფიციენტის (–3-ის) ტოლი იქნება.

ნამრავლი	ჯამი
$-10 = 2 \cdot (-5)$ $-10 = -2 \cdot 5$ $-10 = -1 \cdot 10$ $-10 = 1 \cdot (-10)$	შემოწმებით მივიღებთ, რომ $-3 = 2 + (-5)$

ავარჩიეთ რიცხვთა წყვილი 2 და (–5)

$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$

დასაბუთება:

$x^2 - 3x - 10 = x^2 + 2x - 5x - 10 = x(x + 2) - 5(x + 2) =$

$= (x + 2)(x - 5)$

ტელეგაკვეთილი:	ნაწილი 1: ალგებრული წილადი; ნაწილი 2 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად დაშლა

ნიმუში 4 – ალგებრული გამოსახულების ნამრავლად წარმოდგენა

ა) $x^2 - 18x + 81 =$

ნამრავლი	ჯამი
მუდმივი წევრია 81 $81 = 9 \cdot 9$ $81 = (-9) \cdot (-9)$	მეორე წევრია $-18x$ $(-9) + (-9) = -18$

რეკომენდაციაა, ჯერ მუდმივი წარმოვადგინოთ ნამრავლად, შემდეგ წყვილებიდან ამოვარჩიოთ ის, რომელთა ჯამი მორე კოეფიციენტის ტოლია.

$$x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$$

მინიშნება: აღნიშნული წესი ამარტივებს შემოკლებული გამრავლების წესის გამოყენებას ასეთი გარდაქმნების დროს.

ბ) ოთხწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

$ax^2 + x(a+2) + 2=$

$$\underbrace{ax^2 + ax} + \underbrace{2x + 2}$$
$$= x(x+1) + 2(x+1) =$$
$$= (x+1)(ax+2)$$

ნიმუში 5

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$$

იმისათვის, რომ გავამარტივოთ წილადური გამოსახულება, საჭიროა ჯერ მნიშვნელი და მრიცხველი წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით, ხოლო შემდეგ, თუ შესაძლებელი იქნება, შევკვეცოთ.

მინიშნება: კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენის სხვა ნიმუშები განხილული იქნება მოგვიანებით.

ყველა განხილული გარდაქმნა გვიადვილებს ალგებრული გამოსახულებების გამარტივებას, ასევე ფორმულებთან მუშაობას.

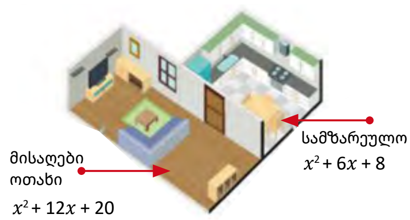
ნიმუში 6

გაკვეთილის დასაწყისში მოცემულია ორი ამოცანა, განვიხილოთ ერთ-ერთი.

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

1. დაადგინეთ ოთახის თითოეული გვერდის სიგრძის გამოსათვლელი გამოსახულებები;
2. შეადგინეთ ბინის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება; მოიყვანეთ ორი ან სამი სხვადასხვა მეთოდი.

როგორც ნახაზზე ვხედავთ, $x^2 + 12x + 20$, ხოლო სამზარეულოს ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულებაა $x^2 + 6x + 8$



$x^2 + 12x + 20$

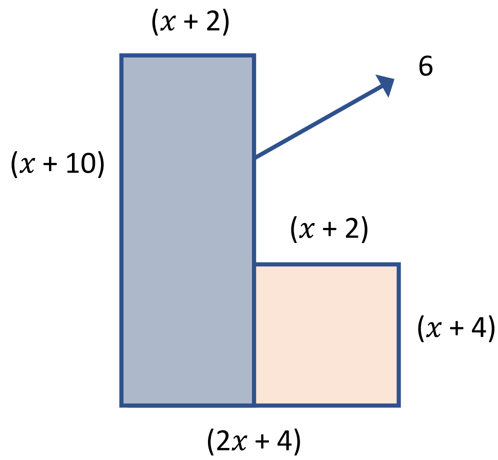
$x^2 + 6x + 8$

1. წარმოვადგინოთ აღნიშნული კვადრატული სამწევრები ნამრავლის სახით:

$$x^2 + 12x + 20 = (x + 2)(x + 10)$$

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

ავაგოთ ოთახის გეგმის შესაბამისი ნახაზი და მივუსადაგოთ გვერდებს მათი სიგრძის გამოსათვლელი გამოსახულებები.



2. დიაგრამაზე მოცემული ოთახის ფართობი შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად:

მეთოდი 1:

$x^2 + 12x + 20 + x^2 + 6x + 8 =$

$2x^2 + 18x + 28$

მეთოდი 2:

$(x + 10)(x + 2) + (x + 4)(x + 2) =$

მამრავლის გატანით ფრჩხილს გარეთ მივიღებთ

$(x + 2)(x + 10 + x + 4) = (x + 2)(2x + 14)$

მეთოდი 3:

$(x + 10)(2x + 4) – 6(x + 2)$

სამივე მეთოდით და გამოსახულებით შესაძლებელია ერთი და იმავე ოთახის ფართობის გამოთვლა.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია ნიმუში $x^2 + (a + b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$, მისი დახმარებით მოცემული ჯამი წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

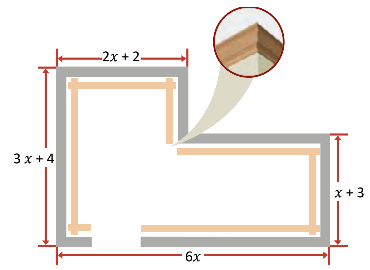
ა) $x^2 + 3x + 2$;	ე) $x^2 - x - 56$;	ი) $x^2 + 15x + 44$;	ნ) $x^2 + 7x + 10$;
ბ) $x^2 + 3x - 10$;	ვ) $x^2 + 5x + 6$;	კ) $x^2 - 18x + 81$;	ო) $x^2 + x - 42$;
გ) $x^2 - 14x + 49$;	ზ) $x^2 + 4x - 21$;	ლ) $x^2 - x - 6$;	პ) $x^2 - 4x - 32$.
დ) $x^2 - 11x + 24$;	თ) $x^2 + 3x - 28$;	მ) $x^2 + 8x + 16$;	

2. შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით შეკვეცეთ წილადი:

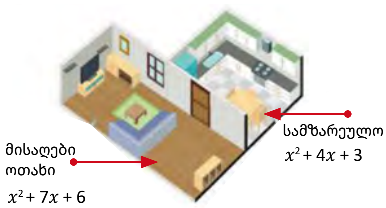
ა) $\dfrac{5x + 10}{x^2 - 4}$;	ე) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$;	ი) $\dfrac{3x^2 + 6x}{4 - x^2}$;	ნ) $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4}$;
ბ) $\dfrac{x2 - 9}{2x - 6}$;	ვ) $\dfrac{x^2 + 16}{x^2 - 4x}$;	კ) $\dfrac{7x^2 + 7y^2}{14xy - 14y^2}$;	ო) $\dfrac{3x^2 + 9x}{x^2 + 7x + 12}$;
გ) $\dfrac{m + n}{m^2 - n^2}$;	ზ) $\dfrac{2a^2 + 2b^2}{b - a}$;	ლ) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$;	პ) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 4}$.
დ) $\dfrac{x^2 - 4}{4 - x^2}$;	თ) $\dfrac{4d^2 + 8d}{d^2 - 2}$;	მ) $\dfrac{5x^2 + 10x}{x^2 + 4x + 4}$;	

3. გაკვეთილის დასაწყისში მოცემული იყო ორი ნახაზი, იპოვეთ თითოეულის ფართობი.

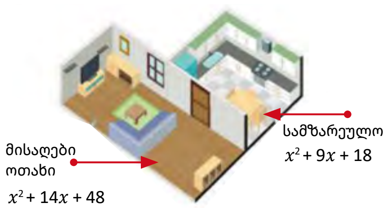
1. ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე შეადგინეთ ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება. წარმოადგინეთ გამოსახულება ორი სხვადასხვა გზით.



2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:
   - დაადგინეთ ოთახის თითოეული გვერდის სიგრძის გამოსათვლელი გამოსახულება;
   - შეადგინეთ ბინის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება; მოიყვანეთ ორი ან სამი სხვადასხვა მეთოდი;



3. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:
   - დაადგინეთ ოთახის თითოეული გვერდის სიგრძის გამოსათვლელი გამოსახულება;
   - შეადგინეთ ბინის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება; მოიყვანეთ ორი ან სამი სხვადასხვა მეთოდი;



სავარჯიშოები

4. გამოიყენეთ წესი და წარმოადგინეთ კვადრატული სამწევრი ნამრავლად.

მითითება: ვიცით, რომ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

ა) $x^2 + 3x + 2$; ე) $x^2 - x - 56$; ი) $x^2 + 8x + 16$; ნ) $x^2 + x - 42$;
ბ) $x^2 + 3x - 10$; ვ) $x^2 + 5x + 6$; კ) $x^2 + 3x - 28$; ო) $x^2 - 18x + 81$;
გ) $x^2 - 14x + 49$; ზ) $x^2 - x - 6$; ლ) $x^2 + 7x + 10$; პ) $x^2 - 4x - 32$.
დ) $x^2 - 11x + 24$; თ) $x^2 + 4x - 21$; მ) $x^2 + 15x + 44$;

5. გაამარტივეთ მოცემული წილადები:

ა) $\frac{3(x+2)}{3}$; დ) $\frac{4(x+1)}{2}$; ზ) $\frac{7(b+2)}{14}$;
ბ) $\frac{2(n+5)}{12}$; ე) $\frac{10}{5(x+2)}$; თ) $\frac{15}{5(3-a)}$;
გ) $\frac{6(x+2)}{(x+2)}$; ვ) $\frac{x-4}{2(x-4)}$; ი) $\frac{2(x+2)}{x(x+2)}$.

6. გაამარტივეთ მოცემული ალგებრული წილადები:

ა) $\frac{m^2-n^2}{(n-m)}$; დ) $\frac{3x+6}{(4-x^2)}$; ზ) $\frac{x^2-4}{4-x^2}$;
ბ) $\frac{5x^2-5y^2}{10xy+10y^2}$; ე) $\frac{4x+8x}{(x^2-4)}$; თ) $\frac{3x^2+6x}{4-x^2}$;
გ) $\frac{2d^2-2a^2}{a^2+ad}$; ვ) $\frac{16-x^2}{x^2-4x}$; ი) $\frac{9x^2-16y^2}{3x^2+4xy}$.

7. გაამარტივეთ მოცემული ალგებრული წილადები (წარმოადგინეთ მრიცხველი და მნიშვნელი ნამრავლად, შემდეგ შეკვეცეთ):

ა) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$; გ) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$; ე) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-4x}$;
ბ) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+4}$; დ) $\frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$; ვ) $\frac{x^2+7x+12}{2x^2+6x}$.

მეტი სავარჯიშო იხილეთ შემდეგ ბმულებზე:	
EL.GE	el.ge – ალგებრული გამოსახულებები
ტელესკოლა	ალგებრული გამოსახულების გამარტივება, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები ვიზუალიზაცია ნაწილი 1: ალგებრული წილადი; ნაწილი 2 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად დაშლა

ტესტი

1. მოცემული ალგებრული გამოსახულებები გაანაწილეთ ცხრილის შესაბამის სვეტში:

$\frac{1}{a}$; $9x^2 - 6xy + y^2$; $\frac{1}{3}$; x^3y; $4x^3y^4 + 6x^2y^6$; $\frac{x^3+1}{2y}$; $a^2 - 16$; $-8a^2b^3$.

ერთწევრი	მრავალწევრი	ალგებრული წილადი

2. ჩაწერეთ ერთწევრი სტანდარტული სახით და მიუთითეთ მისი ხარისხი და კოეფიციენტი:

ა) $0{,}2 \cdot 3a^2b^3 =$ **ხარისხი** ☐ **კოეფიციენტი** ☐

ბ) $-4xx^2 =$ **ხარისხი** ☐ **კოეფიციენტი** ☐

3. იპოვეთ გამოსახულების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე:

კიდევ სცადეთ

ა) $4x^3 - 5$; **ბ)** $\frac{a+4}{2a-4}$.

4. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $-1{,}5a + 7 =$ **თუ** $a = 6$; **ბ)** $4xy^2 - x^2y =$ **თუ** $x = 2, y=3$.

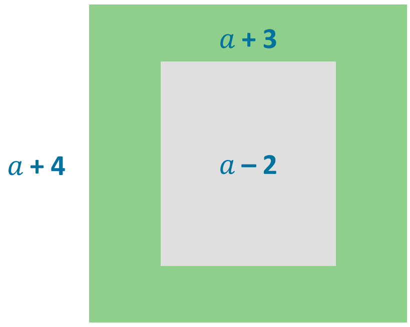
5. თეატრში რიგების რაოდენობაა n, რიგში ადგილების რაოდენობა კი 7-ით ნაკლებია.
თეატრში ადგილების რაოდენობის გამოსათვლელად შეადგინეთ გამოსახულება და გაამარტივეთ.

6. შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები:

ა) $5x^2y - 15 \ldots = 3xy\,(\ldots - 5\,)$;

ბ) $12a^3 - \ldots + 9ax = 3a\,(\,\ldots - 2ax + \ldots\,)$.

7. სურათის ჩარჩოს კვადრატის ფორმა აქვს. ნახაზზე მითითებული მონაცემების მიხედვით შეადგინეთ მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა და გაამარტივეთ.



8. გამოითვალეთ მარტივად:

$49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 21 + 21^2 =$

9. შეკვეცეთ წილადი:

ა) $\dfrac{5b^2a + 2}{15ab^3 + 6b}$; **ბ)** $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8}$.

სავარჯიშოები

ალგებრული გამოსახულება

1. შეასრულეთ მოქმედებები:

ა) 481.92 : 12 – 20.16;

ბ) 6.05 · (53.8 + 50.2);

გ) 1.08 · 30.5 – 9,72 : 2,4;

დ) 44.69 + 0.5 · 25.5 : 3.75;

ე) $12\frac{3}{8} - 5\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}$;

ვ) $1\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} : 2\frac{4}{5}$;

ზ) $3\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + 6\frac{4}{9} : 2$;

თ) $\frac{2}{3} - \frac{8}{23} \cdot (\frac{3}{4} + 1\frac{1}{6})$.

2. იპოვეთ რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $(6\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}) \cdot 2.5 - 4\frac{1}{3} : 0.65$;

ბ) $3{,}075 : 1.5 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{25} + 3.26)$.

3. ჩაწერეთ გამოსახულების სახით:

ა) 15-ისა და 37-ის ჯამი;

ბ) –12.1-ისა და 3.2-ის სხვაობა;

გ) 0.9-ისა და 3-ის განაყოფი;

დ) 0.8-ისა და 0.4-ის ჯამისა და სხვაობის ნამრავლი.

4. შეადგინეთ ამოცანის ამოსახსნელი გამოსახულება: ერთი მუშა საათში 6 დეტალს ამზადებს, მეორე – 4 დეტალს. რამდენ დეტალს დაამზადებენ ისინი 5 საათში?

5. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მითითებული მნიშვნელობისთვის:

ა) $2x + 11$, თუ $x = 7$;

ბ) $a^2 - a$, თუ $a = -3$;

გ) $y(y-1)$, თუ $y = 2{,}1$;

დ) $5.5 - \frac{5}{6}\left(b - \frac{1}{5}\right)$, თუ $b = 2$.

6. შეავსეთ ცხრილი:

x	–2	0,5			$2\frac{1}{3}$	3,1
$3x-4$			–1	5		

7. იპოვეთ ცხრილში მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობები და ჩაწერეთ ისინი ცხრილის შესაბამის უჯრაში:

y	–3	–2	–1	0	2	3	4	5
$10-2y$			–1	5				
$10+2y$								

***დააკვირდით მიღებულ შედეგებს და უპასუხეთ კითხვებს:**

კიდევ სცადეთ

ა) ცვლადის რომელი მნიშვნელობისთვისაა ტოლი მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობები?

ბ) რა კანონზომიერებას ამჩნევთ?

სავარჯიშოები

8. იპოვეთ 10b-3c გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:

ა) $b = \frac{2}{5}, c = \frac{2}{3}$; ბ) $b = 0{,}2$, $c = -1{,}4$.

9. გამოთვალეთ $\frac{1}{2}x + y$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ:

ა) $x = 2{,}4$; $y = 0{,}8$; გ) $x = 4{,}8$; $y = -2{,}1$;

ბ) $x = -3{,}6$; $y = 5$; დ) $x = -4{,}4$; $y = -3$.

10. x-ისა და y-ის რაღაც მნიშვნელობებისათვის x-y გამოსახულების მნიშვნელობაა 0,3. რა მნიშვნელობას იღებს x-ისა და y-ის იმავე მნიშვნელობებისათვის გამოსახულება:

ა) $y - x$; ბ) $\frac{1}{x-y}$.

11. შეავსეთ a-2b გამოსახულების მნიშვნელობათა ცხრილი:

a	5	–2	0	4	1	6	4	5
b	–3	3	7	0	–1	4		
$a - 2b$								

12. ჩაწერეთ გამოსახულების სახით:

კიდევ სცადეთ

ა) b და c რიცხვების ჯამი; გ) x რიცხვის კვადრატი;

ბ) a და b რიცხვების სხვაობა; დ) y რიცხვის კუბი;

ე) ჯამი x რიცხვისა და a და b რიცხვების ნამრავლისა;

ვ) სხვაობა m რიცხვისა და x და y რიცხვების შეფარდებისა;

ზ) a და b რიცხვების ჯამისა და c რიცხვის ნამრავლი;

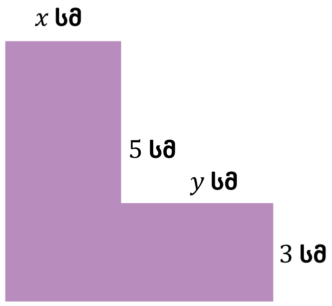
თ) ნამრავლი a რიცხვისა x და y რიცხვების ჯამზე.

13. თეამ იყიდა 15 რვეული, რომელთაგან თითოეულის ფასია 0,75 ლარი, და აგრეთვე 18 ლარის კალმები და ფანქრები. რამდენი ლარი დახარჯა თეამ ამ ნივთების შესაძენად?

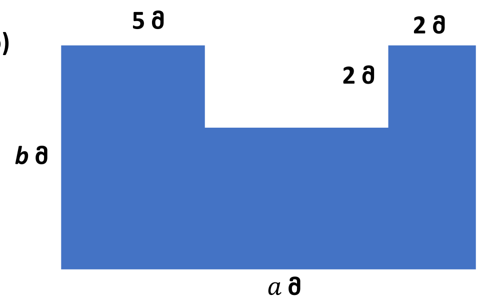
14. მშენებლობაზე სულ 8 ბრიგადა მუშაობდა. პირველი 5 ბრიგადიდან თითოეულში a მუშა იყო, დანარჩენი 3 ბრიგადიდან თითოეულში b მუშა. სულ რამდენი მუშა მუშაობდა მშენებლობაზე?

15. შეადგინეთ გამოსახულება ნახაზზე გამოსახული თითოეული ფიგურის ფართობის გამოსათვლელად.

ა)

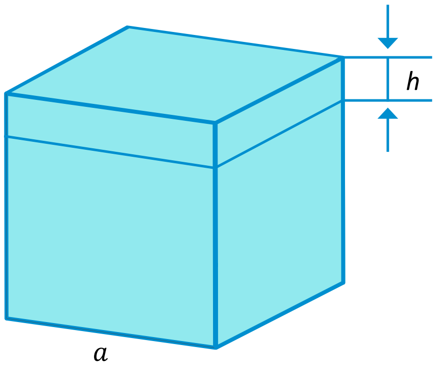


ბ)



სავარჯიშოები

16. კუბის წიბო a მ-ს უდრის. ამ კუბს ჩამოაჭრეს მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის სიმაღლეა h მ. იპოვეთ დარჩენილი ნაწილის მოცულობა.



17. არის თუ არა ერთწევრი შემდეგი გამოსახულება:

ა) $3,4x^2y$; დ) $x^2 + x$; ზ) $a - b$; კ) k^{10};

ბ) $-0,7xy^3$; ე) x^2x; თ) $2(x + y)^2$; ლ) $-m$;

გ) $a(-8)$; ვ) $-\frac{3}{4}m^3nm^2$; ი) $-0,3xy^4$; მ) $\frac{2}{a}$.

18. მოცემული ერთწევრი ჩაწერეთ სტანდარტული სახით და დაასახელეთ მისი კოეფიციენტი:

ა) $3x^2x$; გ) $2ab(-1,5)b$; ე) x^2xy; ზ) $-yy$;

ბ) $1,2abc \cdot 5a$; დ) $6m^2\,(-2m)$ ვ) $-\frac{3}{5}m^3n \cdot 3,5n^2$; თ) $3\frac{1}{2}\,a^2x\left(-\frac{2}{7}\right)a^3x^4$.

19. დაიყვანეთ შემდეგი ერთწევრი სტანდარტულ სახეზე:

ა) $9yy^2y$; გ) $-7ab(-0,2)b^3$; ე) $1\frac{3}{7}\,x^4c \cdot 7xc^2 \cdot 0,3x$;

ბ) $0,15pq \cdot 4pq^3$; დ) $10m^2n^2\,(-1,3m^3)$ ვ) $-2z^3(-\frac{1}{2})z^2(-3)z^5$.

20. იპოვეთ ერთწევრის მნიშვნელობა:

ა) $5x^3$, თუ $x = 0,5$; ე) $12p^3q$, თუ $p = 0,3$, $q = \frac{1}{6}$;

ბ) $-0,125y^4$, თუ $y = -2$; ვ) $-9x^5y^2$, თუ $x = -1$, $y = \frac{1}{3}$;

გ) $12x^3$, თუ $x = -\frac{1}{3}$; ზ) $-\frac{1}{27}\,b^2c^2$, თუ $b = \frac{1}{3}$, $c = 4\frac{1}{2}$;

დ) $-0,5m^3$, თუ $m = 6$; თ) $3a^2x^2z$, თუ $p = 0,3$, $q = \frac{1}{6}$.

21. შეავსეთ ცხრილი ნიმუშის მიხედვით

ნიმუში:

$-2x^2y^4$	
კოეფიციენტი	**ხარისხი**
-2	6

$5x^4y^3$		$\frac{1}{2}abc$		$0,6m^3nk^2$	
კოეფიციენტი	**ხარისხი**	**კოეფიციენტი**	**ხარისხი**	**კოეფიციენტი**	**ხარისხი**

კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები

22. შეასრულეთ გამრავლება:

ა) $4x \cdot 7y$; გ) $\frac{4}{9}ab^2 \cdot \frac{3}{2}ab$; ე) $-0{,}6a^4b \cdot (-10ab^7)$;

ბ) $-8x \cdot 5x^3$; დ) $x^2y^4 \cdot (-6xy^3)$; ვ) $-\frac{1}{5}m^2n^4 \cdot 3m^5n^2$.

23. გაამრავლეთ ერთწევრები:

ა) $11x^2y$ და $0{,}3x^2y^2$; გ) $4xy, -x^2$ და $-y^3$;

ბ) a^5b და $-ab^3c$; დ) $a^2x^5b, -0{,}6axb^2$ და $0{,}6a^2b^3$.

24. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $-0{,}8m^2 \cdot (-0{,}5m^5n^7)$; გ) $1\frac{1}{6}cd \cdot (-\frac{6}{7}c^9d^7)$; ე) $ab \cdot (-ab^2) \cdot ab^3$;

ბ) $0{,}3y^2 \cdot \frac{1}{3}x^4y^6$; დ) $x^2y^4 \cdot (-6xy^3)$; ვ) $mn \cdot (-m^5n^3) \cdot (-m^3n^8)$.

25. წარმოადგინეთ რამდენიმე ხერხით ერთწევრი $6a^2b^3$ ორი სტანდარტული სახის ერთწევრის ნამრავლის სახით.

26. შეასრულეთ ახარისხება:

ა) $(3x^2)^3$; გ) $(-2a^4b^2)^3$; ე) $(-a^2bc^3)^5$;

ბ) $(4m)^2$; დ) $(-3x^2y)^4$; ვ) $(-a^3b^2c)^2$.

27. წარმოადგინეთ სტანდარტული ერთწევრის სახით:

ა) $(2m^3)^4$; გ) $(-0{,}5p^3q^2)^3$; ე) $(-xy^4b^2)^4$;

ბ) $(3a)^2$; დ) $(-3xy^4)^4$; ვ) $(-x^2b^3z)^5$.

28. წარმოადგინეთ მოცემული გამოსახულება ერთწევრის კვადრატრატის სახით:

ა) $81x^4$; ბ) $121a^6$ გ) $0{,}09y^{12}$; დ) $\frac{4}{9}b^6$.

29. წარმოადგინეთ მოცემული გამოსახულება ერთწევრის კუბის სახით:

ა) $64x^9$; ბ) $0{,}001y^{12}$ გ) $-0{,}008b^{12}$; დ) $-\frac{8}{125}a^{15}$.

30. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $(xy)^2 \cdot (-3x4y^2)$; გ) $(0{,}2m^2n)^3 \cdot (1000m^4n^7)$; ე) $(-x^2y)^3 \cdot (-x^4y^2)$;

ბ)$0{,}5a^2b^3 \cdot (-2b)^6$; დ) $-7c^8 \cdot (-0{,}4c^3)^2$; ვ) $0{,}2a^2b^3) \cdot (-5a^3b)^2$.

31. შემდეგი გამოსახულება სტანდარტული სახის ერთწევრად გარდაქმენით:

ა) $(-0{,}2b^6)^2 \cdot 5b$; ე) $(2ab)^4 \cdot (-7a^7b)$;

ბ) $-0{,}01a^4 \cdot (-10a^5)^3$; ვ) $-0{,}6x^7y^7 \cdot (0{,}5xy^2)^2$;

გ) $\frac{9}{16}p^7 \cdot (-1\frac{1}{3}p^4)^3$; ზ) $10p^4q^4 \cdot (0{,}1pq)^3$;

დ) $(3\frac{1}{3}a^2)^3 \cdot 81a^4$; თ) $(-3a^7b^2)^4 \cdot \frac{1}{27}ab$.

სავარჯიშოები

32. შეასრულეთ გაყოფა:

ა) $3x^3 : x$; გ) $9x^4 : (3x)$; ე) $-10x^4 : (-2x^3)$; ზ) $a^3 : (0{,}1a^2)$;

ბ) $4b^2 : b$; დ) $-4b^5 : (2b)$; ვ) $-12y^7 : (-4y^3)$; თ) $b^4 : (-\frac{1}{3}b^3)$.

33. შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $3x^2 : (-0{,}1x^2)$; გ) $-6x^5 : (-\frac{1}{3}x^3)$; ე) $-10x^4y : (-2x^2y)$; ზ) $\frac{1}{2}a^4b^3(-\frac{1}{2}a^2b)$;

ბ) $4b^2 : (-0{,}5b^2)$; დ) $-4b^5 : (-\frac{1}{2}b^4)$; ვ) $-8y^5x(-4y^3x)$; თ) $2b^4 : (-\frac{1}{3}b^3)$.

34. შეასრულეთ გაყოფა და შეამოწმეთ გამრავლებით (იხ. ნიმუში):

ნიმუში

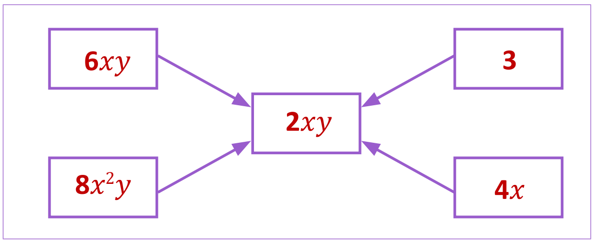
$-0{,}5a^3b^5c^4 : (-0{,}1a^2bc^4) = 5ab^4$
შემოწმება: $5ab^4 \cdot (-0{,}1a2bc^4) = -0{,}5a^3b^5c^4$

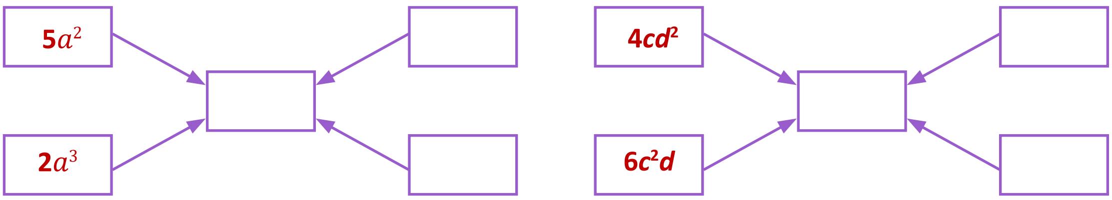
ა) $\frac{3}{4}x^3m^2n(-1\frac{1}{3}xm)$; გ) $-0{,}1x^4a^3b^3 : (-10x^3a^3b^2)$;

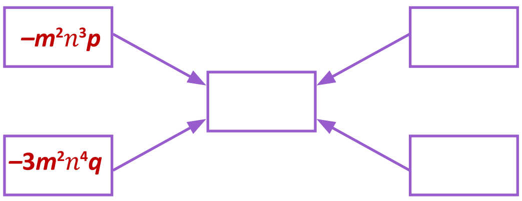
ბ) $\frac{3}{5}a^4b^3c : (1\frac{2}{3}a^2b)$; დ) $-0{,}2m^5n^4p^4 : (-10m^2n^4p^4)$.

35. მოცემული ერთწევრების წყვილისთვის იპოვეთ უდიდესი საერთო გამყოფი, შეასრულეთ გაყოფა და შეავსეთ სქემა (იხ. ნიმუში)

ნიმუში







კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები

36. შეკრიბეთ მსგავსი წევრები:

ა) $2x + 4x$; გ) $-y^3 + 4y^3$; ე) $a^2b^2 - 0{,}2a^2b^2$;

ბ) $0{,}3x^2 - 4x^2$; დ) $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ab$; ვ) $-\frac{2}{3}m^2n^3 - 2m^2n^3$.

37. შეაერთეთ მრავალწევრში მსგავსი წევრები:

ა) $-a^4 + 2a^3 - 4a^4 + 2a^2 - 3a^2$; გ) $10x^2y - 5xy^2 - 2x^2y + x^2y - 3xy^2$;

ბ) $1 + 2y^6 - 4y^3 - 6y^6 + 4y^3 - y^5 - 9$; დ) $3ab^3 + 6a^2b^2 - ab^3 - 2a^2b^2 - 4a^2b^2 + 7$.

38. წარმოადგინეთ მრავალწევრი სტანდარტული სახით:

ა) $-8p^4 + 12p^3 + 4p^4 - 8p^2 + 3p^2$; გ) $3x \cdot x4 + 3xx^2 - 5x^2x^3 - 5x^2 \cdot x$;

ბ) $2a \cdot a^2 + a^2 - 3a^2 + a^3 - a$; დ) $3a \cdot 4b^2 - 0{,}8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1$.

39. იპოვეთ მრავალწევრის მნიშვნელობა:

ა) $5x^6 - 3x^2 + 7 - 2x^6 - 3x^6 + 4x^2$, თუ $x = -10$;

ბ) $4a^2b - ab^2 - 3a^2b + ab^2 - ab + 6$, თუ $a = -3$, $b = 2$;

გ) $6a^3 - a10 + 4a^3 + a10 - 8a^3 + a$, თუ $x = -3$;

დ) $4a^6y^3 - 3x^6y^3 + 2x^2y^2 - x^6y^3 - x^2y^2 + y$, თუ $x = 2$, $y = -1$.

40. ჩაწერეთ მრავალწევრის სახით რიცხვი, რომელიც შედგება:

ა) x ათეულისაგან და y ერთეულისაგან;

ბ) a ათეულისაგან და b ერთეულისაგან;

გ) a ასეულისაგან, b ათეულისაგან და c ერთეულისაგან;

დ) x ასეულისაგან, y ათეულისაგან და x ერთეულისაგან.

41. ჩაწერეთ მრავალწევრი ცვლადის ხარისხების კლების მიხედვით:

ა) $17a^4 - 8a^5 + 3a - a3 - 1$; გ) $x4 - 5 - x^3 + 12x$;

ბ) $35 - c^6 + 5c^2 - c^4$; დ) $2y + y^3 - y^2 + 1$.

42. შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $(1 + 3a) + (a^2 - 2a)$; დ) $(b^2 - b + 7) - (b^2 + b + 8)$;

ბ) $(2x^2 + 3x) + (-x + 4)$; ე) $(8n^3 - 3n^2) - (7 + 8n^3 - 2n^2)$;

გ) $(y^2 - 5y) + (5y - 2y^2)$; ვ) $(a^2 + 5a + 4) - (a^2 + 5a - 4)$.

43. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $18x^2 - (8x - 5 + 18x^2)$; გ) $(b^2 + b - 1) - (b^2 - b + 1)$;

ბ) $-12c^2 + 5c + (c + 11c^2)$; დ) $(9 - 2y^3) - (3y^3 - y^2 - 9)$.

სავარჯიშოები

44. ა) შეასრულეთ მრავალწევრების შეკრება $4x^3 - 5x - 7$ და $x3 - 8x$ და გაამარტივეთ;
ბ) შეასრულეთ მრავალწევრების გამოკლება $5y^2 - 10$ და $7y^2 - y + 3$ და გაამარტივეთ.

45. მოცემულია ორი მრავალწევრი $2a^3 - 5a^2 + 3a - 1$ და $a^3 + 5a^2 - 3a - 2$. შეასრულეთ მოქმედება და გაამარტივეთ:

ა) ამ მრავალწევრების ჯამი;

ბ) პირველი და მეორე მრავალწევრის სხვაობა;

გ) მეორე და პირველი მრავალწევრის სხვაობა.

46. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $(a^2 - 0{,}45a + 1{,}2) + (0{,}8a^2 - 1{,}2a) - (1{,}6a^2 - 2a)$;

ბ) $(y^2 - 1{,}75y - 3{,}2) - (0{,}3y^2 + 4) - (2y - 7{,}2)$;

გ) $6xy - 2x^2 - (3xy + 4x^2 + 1) - xy - 2x^2 - 1$;

დ) $-(2ab^2 - ab + b) + 3ab^2 - 4b - (5ab - ab^2)$.

47. მოცემულია $A = 2{,}5m^2 - 3mn + 1{,}5n^2$, $B = -0{,}5m^2 + mn - 1{,}5n^2$ და $C = m^2 + 2mn$ მრავალწევრები. იპოვეთ $A + B - C$.

48. იპოვეთ A მრავალწევრის მნიშვნელობა, რომ მიიღოთ ჭეშმარიტი ტოლობა:

ა) $A + (2x^2y + xy) = x^2y - xy$;

ბ) $A - (3x^2 - 2y^2 + 2z^2) = -x^2 + 3y^2$;

გ) $(15m^3 + n^2 - m) + A = 10m^3 - 2n^2 + m$.

49. მოსწავლეებს შესთავაზეს შემდეგი დავალება: „იპოვეთ $(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $a = -0{,}25$, $b = 0{,}32$“, ერთ-ერთმა მოსწავლემ თქვა, რომ ამოცანა ზედმეტ მონაცემს შეიცავს. მართალია თუ არა ის?

III. დავალების წარდგენა

STEM

• მეცნიერება • ტექნოლოგია • ინჟინერია • მათემატიკა

საკვლევი კითხვა:

იცით თუ არა, როგორ დაადგინეს დედამიწის მასა? როგორ ხდება რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა და მნიშვნელოვანი პრობლემების გადაჭრა?

კომპლექსური დავალება 1

ისააკ ნიუტონი

დღეისათვის ერთ-ერთ უდიდეს მოაზროვნედ ყველა ერთხმად აღიარებს ისააკ ნიუტონს, რომელიც იყო მათემატიკოსი, ასტრონომი, გამომგონებელი, ფილოსოფოსი, ერთ-ერთი ყველაზე გავლენიანი მეცნიერი მსოფლიო ისტორიაში.

საკვანძო კითხვა:

გსმენიათ თუ არა ნიუტონის კანონებზე, მსოფლიო მიზიდულობის ძალაზე? იცით თუ არა როგორ დაადგინეს დედამიწის მასა? როგორ ხდება რეალური სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

თქვენი დავალება

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის ფორმით.

ნაშრომის წარდგენისას ხაზგასმით ისაუბრეთ:

I. როგორ ხდება უცნობი სიდიდის წარმოდგენა?

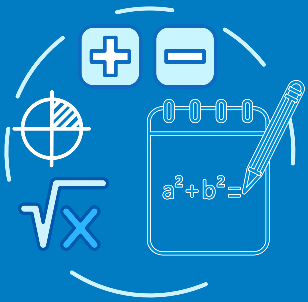
II. როგორ შეიძლება ალგებრული გამოსახულებების, განტოლებების გამოყენება რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელების წარმოსადგენად? რას წარმოადგენს ფორმულა?

III. რა ტიპის დამოკიდებულებები გამოიკვლია ნიუტონმა თავისი კანონებით? ისაუბრეთ ნიუტონის მეორე კანონზე, მსოფლიო მიზიდულობის კანონზე და იმსჯელეთ, როგორ გვეხმარება მათემატიკა სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენაში?

IV. რამდენად მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ დედამიწის მასა?

V. რატომ არის მნიშვნელოვანი რეალური მოვლენის კვლევა, მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების დამყარება და ფორმულირება?

III. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

როდესაც A ქალაქიდან მიფრინავთ B ქალაქში და უკან, B ქალაქიდან A ქალაქში, თუ საფრენი მანძილი დიდია, ფრენის დრო განსხვავდება ერთმანეთისგან.

მაგალითად, როდესაც ლონდონიდან მიფრინავს თვითმფრინავი ნიუ იორკში პირდაპირი რეისით, მას სჭირდება 8სთ და 10 წთ, ხოლო უკანა გზაზე 7 სთ.

საკვლევი კითხვა:

როგორ შეიძლება ახდენდეს გავლენას დედამიწის თავის ღერძის მიმართ ბრუნვა ერთი ქვეყნიდან მეორეში ჩაფრენის და გამოფრენის დროზე? როგორ შეიძლება ახდენდნენ გავლენას მდინარის დინების სიჩქარე გემის მოძრაობის სიჩქარეზე?

კომპლექსური დავალება 2

თქვენი დავალება

გამოიკვლიეთ:

1. რატომ შეიძლება იყოს ერთი ქალაქიდან მეორეში ჩაფრენის და უკან გამოფრენის დრო განსხვავებული?
2. რატომ ხდება, რომ როდესაც გემი მიცურავს დინების მიმართულებით ერთი პუნქტიდან მეორე პუნქტში უფრო ნაკლები დრო სჭირდება ჩასვლისთვის, ვიდრე პირიქით, როდესაც იმავე გზას გადის, მაგრამ მოძრაობს დინების მიმართულების საპირისპიროდ?
3. თუ ორ პუნქტს შორის მანძილი S კმ-ია, გემის საკუთარი სიჩქარეა v კმ/სთ, ხოლო დინების სიჩქარე v_0 კმ/სთ. ჩაწერეთ გამოსახულება, რომელიც აღწერს რა დროში ჩავა ერთი პუნქტიდან მეორე პუნქტში გემი თუ იმოძრავებს დინების მიმართულებით და რა დროში ჩავა, თუ იმოძრავებს დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით. რა დრო დასჭირდება სულ გემს იმისათვის, რომ ჩავიდეს და უკან დაბრუნდეს? (წარმოადგინეთ გამოსახულება)
4. შექმენით მსგავსი დავალება, განიხილეთ თვითმფრინავის მოძრაობა ერთი ქალაქიდან მეორეში და უკან დაბრუნება, გაავლეთ პარალელი მდინარეში გემით მოძრაობასთან და იმსჯელეთ, დინების მიმართულების მსგავსად, რა ახდენს გავლენას თვითმფრინავის ჩასვლის დროზე?

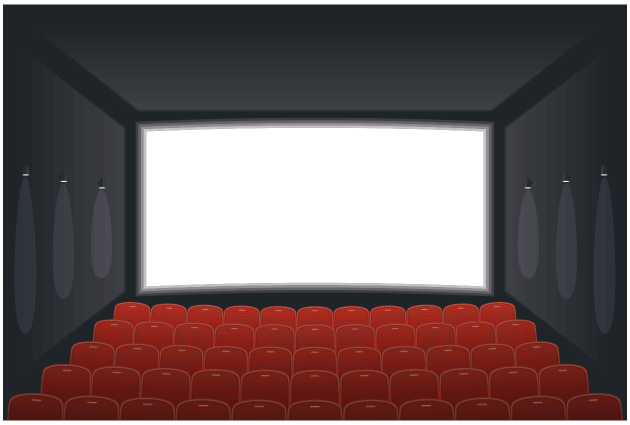
საკითხის შესწავლის პროცესში, განიხილეთ ორი კონკრეტული მაგალითი თითოეული სიტუაციისთვის, დაარგანიზეთ შედეგები თქვენთვის მისაღები ფორმით.

კვლევის შედეგების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ ხდება რეალური სიტუაციის აღწერა და წარმოდგენა მათემატიკური სიმბოლოების გამოყენებით?
- როგორ არის შესაძლებელი ალგებრული გამოსახულებების, განტოლებების გამოყენება რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელების წარმოსადგენად? რას წარმოადგენს ფორმულა?
- რამდენად მნიშვნელოვანი იმის ცოდნა, თუ რა გავლენას ახდენს მდინარის (ზღვის, ოკეანის) დინების სიჩქარე მოძრაობაზე მდინარეში (ზღვაში, ოკეანეში)?
- რატომ არის მნიშვნელოვანი გავითვალისწინოთ დედამიწის ღერძის გარშემო ბრუნვის სიჩქარე, როცა ვმოგზაურობთ თვითმფრინავით?
- რატომ არის მნიშვნელოვანი რეალური მოვლენის კვლევა, მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების დამყარება და ფორმულირება? როგორ მოახდინეთ თითოეული სიტუაციის ფორმულირება? აღწერეთ პროცესი.

2.1. განტოლება, უტოლობა, ფორმულა

- **გავიხსენოთ ამოცანა, რომელიც განხილული იყო პარაგრაფში 1.1. ალგებრული გამოსახულება.**



კინოთეატრში 21 რიგია. პირველ 20 რიგში ადგილების ერთი და იგივე რაოდენობაა, ხოლო ბოლო რიგში – 50 ადგილი. სულ რამდენი ადგილია?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირების შედეგად მივიღეთ გამოსახულება $20 \cdot x + 50$, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ სულ რამდენი ადგილია კინოთეატრში. სადაც x აღნიშნავს ერთ რიგში ადგილების რაოდენობას.

როგორც ვხედავთ, კინოთეატრში ადგილების რაოდენობა დამოკიდებულია რიგში ადგილების რაოდენობაზე.

დავსვათ ორი კითხვა:

კითხვა 1. რამდენი ადგილია თითოეულ რიგში, თუ ვიცით რომ კინოთეატრში სულ არის 450 ადგილი?

კითხვა 2. რამდენი ადგილი შეიძლება იყოს თითოეულ რიგში, თუ ვიცით რომ კინოთეატრში არის 350 ადგილზე მეტი და 510-ზე ნაკლები?

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ჯერ ვუპასუხოთ პირველ კითხვას, შემდეგ კი მეორე კითხვას.

კითხვა 1: რამდენი ადგილია თითოეულ რიგში, თუ ვიცით რომ კინოთეატრში სულ არის 450 ადგილი?

მსჯელობა:

ვიცით, რომ უცნობის შემცველი გამოსახულება $20 \cdot x + 50$ აღნიშნავს კინოთეატრში ადგილების რაოდენობას. გვინდა დავადგინოთ x-ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება კინოთეატრში 450 ადგილი.

პირობიდან გამომდინარე, გავუტოლოთ $20 \cdot x + 50$ ალგებრული გამოსახულება 450-ს და მივიღებთ განტოლებას:

$20 \cdot x + 50 = 450$

განტოლების ამოხსნა:

განტოლების ამოხსნისას გამოვიყენოთ ტოლობის თვისებები

$20 \cdot x + 50 = 450$

$-50 \quad -50$ ⇨ ტოლობის ორივე მხარეს ვაკლებთ 50-ს

$20 \cdot x = 450 - 50$

$20 \cdot x = 400$ ⇨ ტოლობის ორივე მხარეს ვყოფთ 20-ზე

$:20 \quad :20$

$x = 400 : 20$

$x = 20$

გაგრძელება

■ **მსჯელობა:**

მითითება:

მოცემულ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს ერთი ასოითი გამოსახულების (იგივე ალგებრული გამოსახულების) და რიცხვის ტოლობა, მივიღეთ განტოლება.

■ **განტოლების ამოხსნა:**

მივიღეთ, რომ თუ კინოთეატრის თითოეულ რიგში იქნება 20 ადგილი, მაშინ კინოთეატრში სულ იქნება 450 ადგილი.

რას ეწოდება განტოლება?

გამოსახულება, რომელიც შეიცავს რიცხვებს, არითმეტიკულ მოქმედებებს, ცვლადს და ტოლობის ნიშანს „=“, **განტოლება** ეწოდება.

უფრო ზუსტად:

განტოლება ესაა ორი ასოითი გამოსახულების ტოლობა ან ასოითი გამოსახულებისა და რიცხვითი გამოსახულების ტოლობა, რომელიც ერთ, ორ ან რამდენიმე უცნობს ანუ ცვლადს შეიცავს.

იმის მიხდვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, ის შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ.

ერთცვლადიანი განტოლებების ნიმუშებია:

$5 \cdot x = 15$

$3 \cdot (x - 2) = 45$

$7 \cdot x + 2 = 4 \cdot (x - 5)$

$7x^2 - 5x = 4$ და ა.შ.

ორცვლადიანი განტოლების ნიმუშებია:

$7 \cdot x + 2 \cdot y = 8$

$4x^2 - 2y = 2x$ და ა.შ.

მინიშნება: $7 \cdot x = 7x$

განტოლების ამონახსნი არის რიცხვი, რომელიც განტოლებას აკმაყოფილებს.

სხვა სიტყვებით: ცვლადის ნაცვლად, განტოლების ამონახსნის ჩასმის დროს, განტოლება გადაიქცევა რიცხვით ტოლობად (განტოლების ამონახსნს ვუწოდებთ ასევე განტოლების ფესვს).

ტოლფასი ეწოდებათ განტოლებებს, რომელთა ამონახსნთა სიმრავლე ერთმანეთის ტოლია.

როგორ ვიპოვოთ განტოლების ამონახსნი?

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ განტოლების ამონახსნი, ჩვენ უნდა მოვახდინოთ ცვლადის „იზოლირება“. ამისათვის საჭიროა, არითმეტიკულ მოქმედებათა თანმიმდევრობისა და ტოლობის ალგებრული თვისებების დაცვა.

დაიმახსოვრეთ, განტოლების ამოხსნისას თითოეული ოპერაცია სრულდება ტოლობის თვისებათა დაცვით. ასევე, როდესაც გვსურს, ფორმულაში რომელიმე ცვლადი სხვა ცვლადით გამოვსახოთ, აუცილებელია ტოლობის თვისებათა დაცვა.

ნიმუში 1

ამოვხსნათ განტოლებები განრიგებადობის და ტოლობის თვისებების გამოყენებით

ა) ცვლადები განტოლების ორივე მხარეს.	ბ) წილადის შემცველი განტოლების ამოხსნა
$4(2x+1)=12-2x$ $8x+4=12-2x$ $-4=-4$ ⇨ ტოლობის ორივე მხარეს ვაკლებთ $8x=12-2x-4$ $8x=8-2x$ $+2x=+2x$ გადავიტანოთ $-2x$ ტოლობის მარცხენა მხარეს – ეს ნიშნავს, რომ ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლოთ $-2x$, ანუ მივუმატოთ $2x$ $10x=8$ $x=0.8$	$\frac{3a}{4}-\frac{2a}{5}=\frac{7}{10}$ გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე მნიშვნელების უ.ს.ჯ.-ზე, 20-ზე $20\cdot\left(\frac{3a}{4}-\frac{2a}{5}\right)=\frac{7}{10}\cdot 20$ $20\cdot\frac{3a}{4}-20\cdot\frac{2a}{5}=\frac{7}{10}\cdot 20$ $15a-8a=14$ $7a=14$ $a=2$

წრფივი განტოლება

$ax+b=0$ ტიპის განტოლებას, სადაც x ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები, **წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება** ეწოდება.

მოცემულია წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება:

$ax+b=0$

თუ $a\neq 0$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი (ერთი ფესვი) და $x=-\frac{b}{a}$-ს.

ცვლადი ტოლობის ორივე მხარეს:

გამოვიყენოთ გადანაცვლებადობის და ტოლობის თვისებები და ამოვხსნათ განტოლება

$-4(x-3)=8x-2$

$-4x+12=8x-2$

$-4x-8x=-12-2$

$-12x=-14$

$x=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$

თუ $a=0$ და $b\neq 0$, მაშინ ვიღებთ

$0x+b=0$

განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან $b=0$ ტოლობა მცდარია საწყისი პირობის გამო ($b\neq 0$).

ამ შემთხვევაში ვწერთ, რომ $x\in\emptyset$

$-5(x-3)=-5x$

$-5x+15=-5x$

$-5x+5x=-15$

$0x=-15$

$x\in\emptyset$

გაგრძელება

თუ $a = 0$ და $b = 0$, მაშინ განტოლების ამო-ნახსნი შეიძლება იყოს ნებისმიერი რიცხვი. განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი (უამრავი ფესვი); $0x = 0$ $x \in R$	$-5(x-3)+4=-5x+19$ $-5x+15+4=-5x+19$ $-5x+5x=-19+19$ $0x=0$ $x \in R$

ნულის თვისებების გამოყენება განტოლების ამოხსნისას

ნიმუში 2 – ნამრავლის ნულთან ტოლობა

განტოლების ამოხსნა ნულის თვისებით

$(x-2)(x+3)=0$ ჩვენ ვიცით, რომ ნამრავლი მაშინ არის ნულის ტოლი, როცა ერთ-ერთი თანამამ-რავლია ნული. $a \cdot b = 0$ ნიშნავს, რომ $a = 0$ ან $b = 0$ $(x-2)(x+3)=0$ $x-2=0$ ან $x+3=0$ $x=2$ ან $x=-3$	**შემოწმება** $x = 2$. ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 2 და მივიღებთ: $(2-2)(2+3)=0 \cdot 5=0$ $x=-3$. ჩავსვათ x-ის ნაცვლად -3 და მივიღებთ: $(-3-2)(-3+3)=(-5)\cdot 0=0$ ე.ი. განტოლების ამონახსნებია 2 და -3

ნიმუში 3

დავადგინოთ ტოლფასია თუ არა განტოლებები

$(2x-8)(5x+20)=0$ და $(-4x+16)(x-1)=0$

$(2x-8)(5x+20)=0$ ნულის თვისების გამოყენებით $2x-8=0$ ან $5x+20=0$ $2x=8$ $\quad$ $5x=-20$ $x=4$ $\quad$ $x=-4$	$(-4x+16)(x-1)=0$ ნულის თვისების გამოყენებით $-4x+16=0$ ან $x-1=0$ $x=4$ $\quad$ $x=1$
მოცემული განტოლებები არ არის ტოლფასი განტოლებები, რადგან მათ არ აქვთ ყველა საე-რთო ამონახსნი (ფესვი), ერთი ფესვი აქვთ საერთო, თუმცა არა ორივე.	

სავარჯიშოები

1. შეამოწმეთ, არის თუ არა ცვლადის მითითებული მნიშვნელობა მოცემული განტოლების ამონახსნი.

ა) $3x + 4 = 8$ განტოლების ამონახსნია $x = 1$;

ბ) $-4y + 7 = 19$ განტოლების ამონახსნია $y = -3$;

გ) $2(5c - 6) + 10 = c + 16$ განტოლების ამონახსნია $c = -2$;

დ) $-5,2\ (3a + 4) + 11,5 = -5,6a + 10,7$ განტოლების ამონახსნია $a = 2$;

ე) $\frac{5x+6}{4} - 2 = x + 1$ განტოლების ამონახსნია $x = 4$;

ვ) $\frac{-3y-4}{4} - \frac{2y+1}{3} = -2y + 3$ განტოლების ამონახსნია $y = -3$.

2. ამოხსენით წრფივი განტოლებები:

ა) $0.1y + 12 = 35$;
ბ) $0.4x - 11 = 5$;
გ) $9 - 0.3b = 3$;
დ) $14 + 5a = -1$;
ე) $-3x + 4 = -5$;
ვ) $-5a - 12 = 3$;
ზ) $3(y + 4) = 18$;
თ) $2(3t - 5) = 14$;
ი) $4(3a - 2) = 52$;
კ) $6(3x + 5) = 39$;
ლ) $-5(2b + 3) = 24$;
მ) $-6(5 - 3k) = 15$.

3. ამოხსენით განტოლებები, რომლებშიც ტოლობის ორივე მხარეს არის ცვლადები:

ა) $4y - 12 = 6y + 20$
ბ) $16 - 12a - 8a = -9 + 5a$;
გ) $10 + 8c + 15 = -2c - 40$;
დ) $-4(3 - 2x) = 4x - 12$;
ე) $4 - 2(x - 6) = -8 + 2x$;
ვ) $5(2m + 1) = 2(6m - 8)$;
ზ) $2(27 + 4x) + 7x = 21$;
თ) $3(2y + 3) - 4 = -3 + 4y - 4$;
ი) $1.4 - 1.6(y + 5) = 4.6 + 1.6y$;
კ) $-2(5 - 4a) + 5 = 3(a - 4.5)$;
ლ) $2(5m + 1) + 4 = 4(2m + 2) - 8$;
მ) $5 - 2k = 2(k + 1) - 3(1 - k)$;
ნ) $4(b - 1) - 3(2 - b) = 5 - 3b$;
ო) $3(6x - 7) - 15x = 2(x + 9)$.

4. განტოლებების ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ რატომ იქნება $\frac{y}{1.48} = 6$ განტოლების ამონახსნი 6-ზე მეტი? (პასუხი დაასაბუთეთ).

5. განტოლებების ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ რატომ იქნება $\frac{x}{3.25} = 2,17$ განტოლების ამონახსნი მეტი $\frac{x}{2.53} = 1,82$ განტოლების ამონახსნზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

6. ანის ყოველკვირეული ანაზღაურება (P) დამოკიდებულია გაყიდვების რაოდენობაზე (S) და გამოითვლება ფორმულით: $P = 20 \cdot (3 \cdot S + 4)$

ა) გამოთვალეთ ანის ანაზღაურება იმ შემთხვევაში, როდესაც ანი ვერ გაყიდის ვერაფერს;

ბ) გამოთვალეთ ანის ანაზღაურება, თუ მისი გაყიდვები 10-ის ტოლია;

გ) თუ ანიმ გამოიმუშავა 500 ლარი ერთ კვირაში, მაშინ რისი ტოლია ანის გაყიდვები?

სავარჯიშოები

7. ამოხსენით წილადის შემცველი წრფივი განტოლებები:

ა) $\frac{3a}{5} - 4 = 2$; გ) $\frac{2}{4}x - \frac{1}{6}x = 10$; ე) $\frac{a-4}{5} + \frac{a-1}{2} = 2$; ზ) $\frac{a+4}{2a-1} = \frac{1}{2}$; ი) $\frac{4}{5} = \frac{x-1}{x+1}$;

ბ) $\frac{1}{4}x + 10 = \frac{2}{3}x$; დ) $\frac{a}{6} + \frac{a}{9} = \frac{a-1}{2}$; ვ) $\frac{4a-4}{5} + \frac{2a+3}{2}$; თ) $\frac{a+4}{2a-1} = \frac{1}{2}$; კ) $\frac{x-1}{x+5} = -\frac{1}{2}$.

8. ამოხსენით განტოლებები ნულის თვისების გამოყენებით:

მინიშნება:

$(x+3)(x-2)=0$ $(x+3)=0$ ან $(x-2)=0$ $x=-3$ ან $x=2$ **შემოწმება:** *განვიხილოთ ორივე ამონახსნი*	**ნულის თვისება:** ნამრავლი უდრის ნულს, თუ ერთ-ერთი თანამამ-რავლი ნულის ტოლია.

$x=-3$	$x=2$
$(-3+3)(-3-2)=0$	$(2+3)(2-2)=0$
$0\cdot(-5)=0$	$5\cdot 0=0$

ა) $(x+3)(x-2)=0$;
ბ) $(y-6)(y-8)=0$;
გ) $(3b-9)(4b+12)=0$;
დ) $(3m+6)(2m-8)=0$;
ე) $(5k-0.5)(2k+1.8)=0$;
ვ) $(3a+6)(5a-25)=0$;
ზ) $(0.2x-6)(0.5x+8)=0$;
თ) $(2n-10)(n+2)=0$;
ი) $(3-2y)(3{,}2+1.6y)=0$;
კ) $(9+4a)(4a-10)=0$.

9. დაადგინეთ ტოლფასია თუ არა შემდეგი განტოლებები:

ა) $\frac{3a}{4} - \frac{2a}{5} = \frac{7}{10}$ და $5a+8=7a+4$;
ბ) $\frac{y}{4} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{2}$ და $4(y-1)=-12$;
გ) $\frac{3x}{5} - \frac{x}{6} = 3$ და $7(x-1)=9(x+1)-31$;
დ) $x(x+3)=0$ და $x+3=0$.

10. დაადგინეთ ტოლფასია თუ არა შემდეგი განტოლებები:

ა) $x(5x-1)=0$ და $x(1-5x)=0$;
ბ) $(x-3)(x-8)=0$ და $(3x-9)(2x-16)=0$;
გ) $(x+5)(x-5)=0$ და $(2x-10)(x+1)=0$;
დ) $(2x-1)(2x+1)=0$ და $(x-2)(x+0.5)=0$;
ე) $(0.4x-2)(x-1)=0$ და $(0.2x-1)(1-x)=0$.

სავარჯიშოები

11. დაასახელეთ a და b პარამეტრების რამდენიმე წყვილი (სამი მაინც) ისეთი, რომ $3(bx - 8) = a$ განტოლების ამონახსნი იყოს $x = 2$.

12. a-ს რა მნიშვნელობისთვის არ ექნება განტოლებებს ამონახსნი? პასუხი დაასაბუთეთ.

ა) $ax - 5 = a$; გ) $-2(x-a)=8-ax$;

ბ) $ax - 4x = 1$; დ) $5(x + a) = a^2 - 4$.

13. **იპოვეთ შეცდომა:** მოცემულია განტოლება $ax - 3a = a^2 - 9$, მოსწავლემ მოცემული განტოლების პასუხად დაწერა, რომ განტოლებას ამონახსნი აქვს a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? პასუხი გააანალიზეთ.

14. **იპოვეთ შეცდომა:** მოცემულია განტოლება $ax + 4a = a^2 + 8a + 16$, მოსწავლემ მოცემული განტოლების პასუხად დაწერა, რომ განტოლებას ამონახსნი აქვს a-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? პასუხი გააანალიზეთ.

ფორმულა (STEAM-კავშირი მეცნიერების მოდულთან)

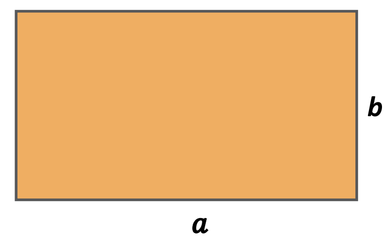
ფორმულა არის ორი ასოითი გამოსახულების ტოლობა, რომელიც მოკლედ ჩამოყალიბებული წესია. უმეტესად, ფორმულით წარმოვადგენთ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებს.

ჩვენ უკვე ვიცით ფართობის, მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულები, ასევე ფორმულები ფიზიკის და ქიმიის კურსიდან. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში ფორმულა გვიჩვენებს სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებს.

მართკუთხედი

მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია. ფართობი (**S**) გამოითვლება ფორმულით:

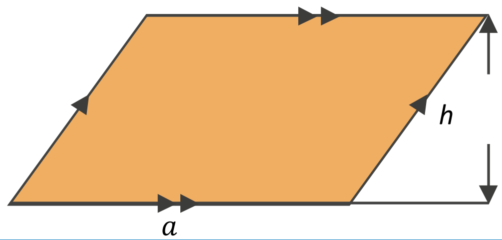
$$S = ab$$



პარალელოგრამი

პარალელოგრამის ფართობი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. პარალელოგრამის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

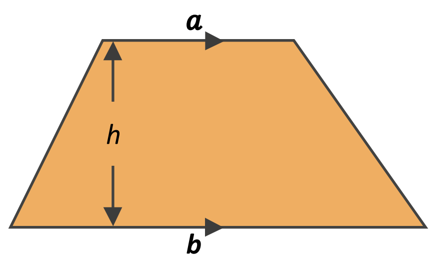
$$S = ah$$



ტრაპეცია

ტრაპეციის ფართობი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



პარალელოგრამი

ჩვენ შეგვიძლია ფორმულაში ერთი უცნობი გამოვსახოთ მეორე უცნობით. მაგალითად, თუ ვიცით პარალელოგრამის გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლის რიცხვითი მნიშვნელობები, დავადგენთ ფართობს. თუ ვიცით ფართობი და გვერდი, ვიპოვით გვერდზე დაშვებული სიმაღლის მნიშვნელობას.

ნიმუში 1

ა) პარალელოგრამის ფართობი 20 სმ^2-ია. იპოვეთ გვერდის სიგრძე, თუ ვიცით რომ მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე 2.5 სმ-ია.

ბ) ტრაპეციის ფართობი 40 სმ^2-ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ ვიცით, რომ ფუძეების სიგრძეებია 4 სმ და 12 სმ.

ა) მოცემულია პალალელოგრამის ფართობი $S = 20$ სმ^2, სიმაღლე $h = 2.5$ სმ. $S = ah$ მოცემული ფორულიდან $a = \frac{s}{h} = \frac{20}{2.5} = \frac{200}{25} = 8$ სმ	ბ) მოცემულია ტრაპეციის ფართობი $S = 40$ სმ^2, $a = 4$ სმ, $b = 12$ სმ $S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$ ჩავსვათ ფორმულაში რაც ვიცით $40 = \frac{(4+12)}{2} \cdot h$ მივიღეთ განტოლება $40 = 8 \cdot h$ $h = 40 : 8 = 5$ სმ

მინიშნება: მაგალითი/ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას სხვადასხვა ხერხით:

- შეგვიძლია ჯერ საძიებელი ცვლადი გამოვსახოთ და მიღებულ გამოსახულებაში ჩავსვათ ის ინფორმაცია, რაც მოცემულია (პირველი ამოცანის მსგავსად);
- ან ჩავსვათ ფორმულაში ის, რაც ვიცით და ვიპოვოთ უცნობი (მეორე ამოცანის მსგავსად).

წრფივი განტოლება

ფორმულებთან მუშაობის, გამარტივებების და გამოთვლების დროს მნიშვნელოვანია ერთი ცვლადის მეორე ცვლადით წარმოდგენა.

ნიმუში 2

მოცემულია ორი მაგალითი, თითოეულ შემთხვევაში ამოვხსნათ x-**ის** მიმართ.

ა) მოცემულია განტოლება ორი ცვლადით $9y + 3x = 12;$ გამოვსახოთ x ცვლადი y ცვლადით: $9y + 3x = 12;$ გამოვაკლოთ განტოლების ორივე მხარეს $9y$, შემდეგ გავყოთ 3-ზე $9y - 9y + 3x = 12 - 9y$ $3x = 12 - 9y$ $\frac{3x}{3} = \frac{12 - 9y}{3}$ $x = \frac{12}{3} - \frac{9y}{3} = 4 - 3y$	ბ) მოცემულია ფორმულა $T = \frac{a}{\sqrt{x}}$; გამოვსახოთ x სხვა ცვლადებით: $T = \frac{a}{\sqrt{x}}$ გაგრძელება

მინიშნება:

განტოლებას, რომელიც ორ ცვლადს შეიცავს,ორცვლადიანი განტოლება ეწოდება.

$9y + 3x = 12$, ორცვლადიანი განტოლებაა; ჩვენ x-ცვლადი გამოვსახეთ (წარმოვადგინეთ) y-ცვლადით:

თუ $y = 1$, *მაშინ* $x = 4 - 3 = 1$;

თუ $y = 2$, მაშინ $x = 4 - 6 = -2$; და ა.შ.

განტოლებას ექნება უამრავი ამონახსნთა წყვილი; ორუცნობიან განტოლებებს დამატებით განვიხილავთ მოგვიანებით.

ნიმუში 3 – STEM – კავშირი ფიზიკასთან

განვიხილოთ ორი ფორმულა ფიზიკის კურსიდან

ა) მოცემულია $S = \frac{1}{2}gt^2$ სადაც $t > 0$, მოცემული ფორმულიდან გამოვსახოთ t $S = \frac{1}{2}gt^2$ გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე 2-ზე: $gt^2 = 2s$ გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე g-ზე: $t^2 = \frac{2s}{g}$ $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ რადგან $t > 0$	ბ) მოცემულია ფორმულა $T^2 = \frac{a}{\sqrt{x}}$ გამოვსახოთ x სხვა ცვლადებით: ავიყვანოთ ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში $T^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2$ $T^2 = \frac{a^2}{x}$ $T^2x = a^2$ $x = \frac{a^2}{T^2}$

STEAM-ინტეგრირება მეცნიერების მოდულთან

ალგებრული გამოსახულებების გამარტივების წესების, ტოლობის თვისებების ცოდნა საჭიროა მათემატიკაში, ასევე საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, განსაკუთრებით ფორმულებთან მუშაობისას და ამოცანების ამოხსნის დროს. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი ფიზიკის კურსიდან.

ნიუტონის მეორე კანონი

ნიმუში 4 – ფორმულა ფიზიკის კურსიდან

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ $F = ma$

ნიუტონმა მეორე კანონი ჩამოაყალიბა შემდეგნაირად:

$a = \frac{F}{m}$, სადაც F-სხეულზე მოქმედი ძალაა, m სხეულის მასა, a აჩქარება.

მოცემული ფორმულიდან შეგვიძლია გამოვსახოთ სხვადასხვა ცვლადი (სიდიდე), გამომდინარე იქიდან, თუ რა იქნება ცნობილი.

გამოთვლებისთვის, შეგვიძლია დავწეროთ

$F = ma$ ან $a = \frac{F}{m}$ ან $m = \frac{F}{a}$

სხეულის აჩქარება მასზე მოქმედი ძალის პირდაპირპროპორციულია და სხეულის მასის უკუპროპორციულია. რას ნიშნავს ეს?

თუ სხეულზე მოქმედი ძალა გაიზრდება 2-ჯერ, მაშინ აჩქარებაც გაიზრდება ორჯერ; ხოლო თუკი მასა გაიზრდება 2-ჯერ, მაშინ აჩქარება შემცირდება ორჯერ.

⇨ უფრო მეტი ნიუტონის მეორე კანონზე იხილეთ შემდეგ ვიდეოში:
www.youtube.com

ნიმუში 5 – ფორმულა ფიზიკის კურსიდან

მსოფლიო მიზიდულობის კანონი

იხილეთ დიაგრამა

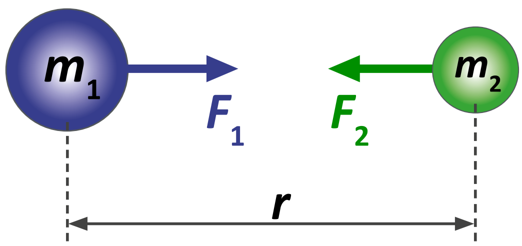
ნიუტონმა მსოფლიო მიზიდულობის კანონის ფორმულირება მოახდინა შემდეგნაირად:

$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

მსოფლიო მიზიდულობის კანონი აღწერს გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას სხეულებს შორის; ორ სხეულს შორის მოქმედი ძალა ამ სხეულების მასების პირდაპირპროპორციულია და მათ შორის მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია.

ფორმულით ჩანს სიდიდეებს შორის კავშირი (დამოკიდებულება).

F – მიზიდულობის ძალაა
m_1 და m_2 – ურთიერთქმედ სხეულთა მასები
r – სხეულებს შორის მანძილი
G – გრავიტაციული მუდმივა
$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$ მ³/კგ · წმ



$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

აღნიშნულ ფორმულას წერენ ასევე შემდეგნაირად:

$F = G\frac{M \cdot m}{R^2}$

M-დიდი სხეულის მასაა,

m-პატარა სხეულის მასაა

მათემატიკის მნიშვნელობა ფიზიკაში

ერთი სიდიდის მეორე სიდიდით გამოსახვა

ა) როგორ არის შესაძლებელია, ორ სხეულს შორის მანძილის დადგენა? გამოვსახოთ r სხვა ცვლადებით

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_1}{r^2}$$

ჩვენ შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ r^2-ზე, მივიღებთ

$$r^2 \cdot F = G\frac{m_1 \cdot m_1}{r^2} \cdot r^2$$

$$r^2 \cdot F = G \cdot m_1 \cdot m_2$$

ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ F-ზე:

$$r^2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_1}{F}$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot m_1 \cdot m_1}{F}}$$

მანძილი ვერ იქნება უარყოფითი, ამიტომ ვიღებთ დადებით ფესვს.

ბ) როგორ არის შესაძლებელი ერთ-ერთი სხეულის მასის დადგენა, თუ ვიცით ორ სხეულს შორის მოქმედი ძალა 20 ნიუტონია, ერთ-ერთი სხეულის მასა 100 კგ, მანძილი მათ შორის 5 მეტრი.

მოცემულია: $F = 20$ ნ, $r = 5$ მ,

$m_1 = 100$ კგ, ვეძებთ m_2-?

$$r^2 \cdot F = G\frac{m_1 \cdot m_1}{r^2} \cdot r^2$$

$$r^2 \cdot F = G \cdot m_1 \cdot m_2$$

$$m_2 = \frac{r^2 \cdot F}{m_2}$$

$$m_2 \approx \frac{25 \cdot 20}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 100} \approx \frac{5}{6.67 \cdot 10^{-11}} \approx 0.75 \cdot 10^{11} \approx 7.5 \cdot 10^{10} \text{კგ}$$

მეტი მსოფლიო მიზიდულობის კანონზე მოისმინეთ შემდეგ ვიდეოში:

[ნიუტონის კანონები, მსოფლიო მიზიდულობის ძალა, სიმულაცია (თემას ეხება 6:30-მდე)]

[მსოფლიო მიზიდულობის ძალა]

სავარჯიშოები

კავშირი გეომეტრიასთან

1. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდი და პერიმეტრი, თუ მასზე დაშვებული სიმაღლე 8 სმ-ია, ხოლო ფართობი 4.2 სმ^2.

2. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდი და პერიმეტრი, თუ მასზე დაშვებული სიმაღლე 2.4 სმ-ია, ხოლო ფართობი 6 სმ^2.

3. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 6,2 სმ-ია, ხოლო ერთი გვერდი 1.8 სმ.

4. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 6,2 სმ-ია, ხოლო ერთი გვერდი 1.8 სმ.

5. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეებია 2.5 სმ და 3.7 სმ, იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ ფართობი 6.2 სმ^2-ია.

6. ქვემოთ მოცემულია ფორმულები და ინფორმაცია, იპოვეთ საძიებელი უცნობის მნიშვნელობა.

ა) მოცემულია ფორმულა: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. იპოვეთ a, თუ $S = 10$, $h = 5$, $b = 2$;

ბ) მოცემულია ფორმულა: $M = a\,(x + y)$. იპოვეთ y, თუ $M = 0.5$, $a = 2$, $x = 0.4$;

გ) მოცემულია ფორმულა: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. იპოვეთ h, თუ $S = 20$, $a = 4$, $b = 8$;

დ) მოცემულია ფორმულა: $F = 32 + \frac{9}{5}C$. იპოვეთ C, თუ $F = 8$.

ე) მოცემულია ფორმულა: $c^2 = a^2 + b^2$. იპოვეთ a, თუ $c = 17$, $b = 15$;

ვ) მოცემულია ფორმულა: $c^2 = a^2 + b^2$. იპოვეთ c, თუ $a = 8$, $b = 6$;

ზ) მოცემულია ფორმულა: $c^2 = a^2 + b^2$. იპოვეთ c, თუ $a = 9$, $b = 2$;

თ) მოცემულია ფორმულა: $A = \frac{1}{2} b\,h$. იპოვეთ b, თუ $A = 9$, $h = 6$;

ი) მოცემულია ფორმულა: $E = \frac{1}{2} mv^2$. იპოვეთ m, თუ $E = 16$, $v = 4$.

კ) მოცემულია ფორმულა: $E = \frac{1}{2} mv^2$. იპოვეთ v, თუ $E = 250$, $v = 5$.

7. ამოხსენით განტოლება y-ის მიმართ (გამოსახეთ y ცვლადი x ცვლადით):

ა) $2x + y = 16$; გ) $5x - 4y = 20$; ე) $6x + y = 15$; ზ) $7x - y = 7$;
ბ) $4x + 2y = 10$; დ) $6x + 3y = 24$; ვ) $9x - 2y = 10$; თ) $-3x + y = -15$.

8. ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ (გამოსახეთ x ცვლადი y ცვლადით):

ა) $2x + y = 16$; გ) $5x - 4y = 20$; ე) $6x + y = 15$; ზ) $7x - y = 7$;
ბ) $4x + 2y = 10$; დ) $6x + 3y = 24$; ვ) $9x - 2y = 10$; თ) $-3x + y = -15$.

სავარჯიშოები

9. **გამოწვევა:** ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ

ა) $p + x = 1$; გ) $ax + ay = ab$; ე) $p + qx = 2$; ზ) $x + 2y = d$; ი) $2 + ax = s$;
ბ) $3x + 6a = 3d$; დ) $y = kx + c$; ვ) $xy = 2z$; თ) $x - 3y = b$; კ) $-12 = a + bx$.

10. **გამოწვევა:** ამოხსენით განტოლება y – ის მიმართ

ა) $\mathrm{k}x+y + c$; გ) $a - by + \mathrm{n}$; ე) $n - 2y + 5$;
ბ) $a + 3y + \mathrm{t}$; დ) $\mathrm{c} - y + p$; ვ) $4 + a - \mathrm{n}y$.

11. გამოსახეთ:

ა) a ფორმულიდან: $F = ma$; დ) r ფორმულიდან: $C = 2\pi r$;
ბ) d ფორმულიდან: $V = ldh$; ე) K ფორმულიდან: $A = \frac{b}{k}$;
გ) h ფორმულიდან: $A = \frac{bh}{2}$; ვ) T ფორმულიდან: $I = \frac{PTR}{100}$.

12. გამოსახეთ:

ა) r ფორმულიდან: $A = \pi r^2$; დ) r ფორმულიდან: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$;
ბ) x ტოლობიდან $y = 2x^2 - 5$; ე) x ტოლობიდან: $N = \frac{x^2}{b}$;
გ) n ტოლობიდან $D = \frac{n}{m^2}$; ვ) Q ტოლობიდან: $P^2 = Q^2 + R^2$.

13. განტოლებების ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ რატომ იქნება $\frac{y}{1.48} = 6$ განტოლების ამონახსნი 6-ზე მეტი? პასუხი დაასაბუთეთ.

14. განტოლებების ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ რატომ იქნება $x : 3.25 = 2{,}17$ განტოლების ამონახ-სნი მეტი $x : 2.53 = 1{,}82$ განტოლების ამონახსნზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

15. ანის ყოველკვირეული ანაზღაურება (P) დამოკიდებულია გაყიდვების რაოდენობაზე (S) და გამოითვლება ფორმულით: $P = 20 \cdot (3 \cdot S + 4)$

ა) გამოთვალეთ ანის ანაზღაურება იმ შემთხვევაში, როდესაც ანი ვერ გაყიდის ვერაფერს;
ბ) გამოთვალეთ ანის ანაზღაურება, თუ მისი გაყიდვები 10-ის ტოლია;
გ) თუ ანიმ გამოიმუშავა 500 ლარი ერთ კვირაში, მაშინ რისი ტოლია ანის გაყიდვები?

2.2. უტოლობა

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას იხ. გვერდი 56 **და გავიხსენოთ კითხვა 2:**

რამდენი ადგილია თითოეულ რიგში, თუ ვიცით რომ კინოთეატრში არის 350 ადგილზე მეტი და 510-ზე ნაკლები?

მსჯელობა:

ჩვენ ვიცით, რომ უცნობის შემცველი გამოსახულება $20 \cdot x + 50$ აღნიშნავს კინოთეატრში ადგილების რაოდენობას. გვინდა დავადგინოთ x-ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება კინოთეატრში ადგილების რაოდენობა მეტი 350-ზე და ნაკლები 510-ზე.

უტოლობის შედგენა:

პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$20 \cdot x + 50 > 350$ და

$20 \cdot x + 50 < 510$

ორი უტოლობის გაერთიანებით შეგვიძლია ჩავწეროთ ორმაგი უტოლობა:

$350 < 20 \cdot x + 50 < 510$

უტოლობა გვიჩვენებს, რომ ორი ალგებრული ან რიცხვითი და ალგებრული გამოსახულება შეიძლება არ იყოს ტოლი. უტოლობის ჩაწერა და შედარება ხდება შემდეგი სიმბოლოების გამოყენებით

სიმბოლო	<	>	≤	≥	≠
სიტყვიერად	ნაკლებობა	მეტობა	ნაკლებია ან ტოლია	მეტია ან ტოლია	არ უდრის

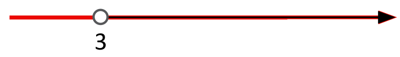
ყოველი ორი a და b რიცხვისთვის სრულდება მხოლოდ რომელიმე ერთი შესაძლებლობა:

$a = b$ **(1)** **ან** $a > b$ **(2)** **ან** $a < b$ **(3).**

მოცემული პირობებიდან თუ სრულდება (1) პირობა ვიტყვით, რომ მოცემულია ტოლობა. თუ სრულდება (2) ან (3) შესაძლებლობიდან რომელიმე, ვიტყვით, რომ მოცემულია უტოლობა.

თუ უტოლობაში გამოყენებულია **>** ან **<** ნიშნები, მაშინ მოცემულ უტოლობას **მკაცრი უტოლობა** ეწოდება. თუ გამოყენებულია **≥** ან **≤** ნიშნები, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია არამკაცრი უტოლობა. $\boldsymbol{a \le b}$ ნიშნავს, რომ ან $\boldsymbol{a < b}$ ან $\boldsymbol{a = b}$. ანალოგიურად $\boldsymbol{a \ge b}$ ნიშნავს, რომ ან $\boldsymbol{a > b}$ ან $\boldsymbol{a = b}$.

უტოლობის წარმოდგენა შესაძლებელია, როგორც სიტყვიერად, ასევე რიცხვითი ღერძის მეშვეობით (გრაფიკულად) და შესაბამისი აღნიშვნებით.

სიტყვიერად	ალგებრულად (სიმრავლური აღნიშვნა)	გრაფიკულად
უცნობი მეტია 3-ზე	$x > 3$ ან $x \in (3; +\infty)$	 მკაცრი უტოლობა, 3 არ ეკუთვნის უტოლობას, შესაბამისად რიცხვით ღერძზე მონიშნულია გასაფერადებელი წრით
უცნობი მეტია ან ტოლი 3-ზე	$x \geq 3$ ან $x \in [3; +\infty)$ არამკაცრი უტოლობის დროს, ფრჩხილი დახურულია, ნიშნავს რომ 3 ეკუთვნის უტოლობის ამონახსნს	 არამკაცრი უტოლობა, 3 ეკუთვნის უტოლობას, შესაბამისად რიცხვით ღერძზე მონიშნულია გაუფერადებელი წრით
უცნობი ნაკლებია – 1-ზე	$x < -3$ ან $x \in (-\infty; -1)$	
უცნობი ნაკლებია – ან ტოლია – 1-ზე	$x \leq -1$ ან $x \in (-\infty; -1]$	
უცნობი მეტია ან ტოლი – 1-ზე და ნაკლები 3-ზე	$-1 \leq x < 3$ ან $x \in [-1; 3)$	
უცნობი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი	$x \in R$ $x \in (-\infty; +\infty)$	

სიტყვიერად	ალგებრულად
თუ უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ნებისმიერ რიცხვს, უტოლობა არ შეიცვლება.	როცა $a > b$; $a + c > b + c$ როცა $a > b$; $a - c > b - c$ სადაც a, b, c ნებისმიერი რიცხვებია
თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ დადებით რიცხვზე, უტოლობის ნიშანი არ შეიცვლება	როცა $a > b$; და $c > 0$; $ac > bc$ როცა $a > b$; და $c > 0$; $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ $c \neq 0$
თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ უარყოფით რიცხვზე, მაშინ უტოლობის ნიშანი შეიცვლება საპირისპირო ნიშნით	როცა $a > b$; და $c < 0$; $ac < bc$ როცა $a > b$; და $c < 0$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ $c \neq 0$

უტოლობის ძირითადი თვისებები

სიტყვიერად	ალგებრულად
ერთნაირნიშნიანი ორი უტოლობის წევრების შეკრების შემთხვევაში უტოლობა ისევ სამართლიანი იქნება.	თუ $a > b$ და $c > d$, მაშინ $a + c > b + d$ მაგ.: თუ $8 > 2$ და $5 > 1$, მაშინ $8 + 5 > 2 + 1$
ტრანზიტულობის თვისება	თუ $a > b$ და $b > c$, მაშინ $a > c$
გამრავლების თვისება	თუ a,b,c და d დადებითი რიცხვებია და $a > c$ და $b > d$, მაშინ $ab > cd$

ნიმუში 1

ამოვხსნათ უტოლობები და დავუბრუნდეთ შესავალი ამოცანის მეორე კითხვას:

ა) ამოვხსნათ უტოლობა:

$$\frac{1}{5}x + 3\frac{1}{4} < \frac{3}{3}x + 5$$

გავამრავლოთ ყველა წევრი უ.ს.ჯ. (5; 4) = 20

$$\frac{1}{5}x \cdot 20 + 3\frac{1}{4} \cdot 20 < \frac{3}{5}x \cdot 20 + 5 \cdot 20$$

$4x + 65 < 12x + 100$

$-8x < 35$

$x > -\frac{35}{8}$ (უტოლობის ნიშანი შეიცვალა)

$x \in (-\frac{35}{8}; +\infty)$

ბ) განვიხილოთ შესავალი ამოცანა:

ვიცით, რომ

$$350 < 20 \cdot x + 50 < 510$$

$$-50 \qquad -50 \quad -50$$

გამოვაკლოთ უტოლობის ყველა მხარეს 50

$$300 < 20 \cdot x < 460$$

გავყოთ უტოლობის ყველა მხარე 20-ზე

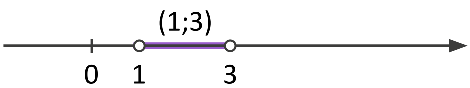
$$15 < x < 23$$

პასუხი: იმისათვის, რომ კინოთეატრში იყოს 350-ზე მეტი და 510-ზე ნაკლები ადგილი, თითოეულ რიგში უნდა იყოს 15-ზე მეტი და 23-ზე ნაკლები ადგილი.

ნიმუში 2

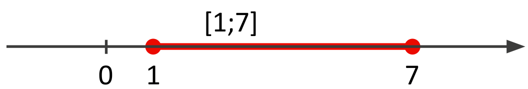
ჩაწერეთ დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციის შესაბამისი უტოლობა:

ა)



$1 < x < 3$

ბ)

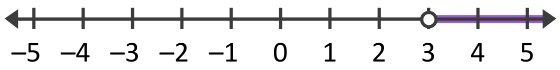


$1 \leq x \leq 7$

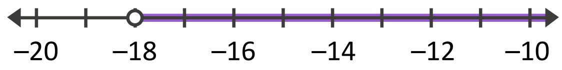
სავარჯიშოები

1. ჩაწერეთ რიცხვითი უტოლობის სახით, რიცხვითი ღერძით მოცემული ინფორმაცია:

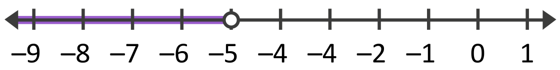
ა)



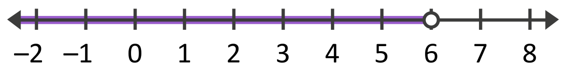
გ)



ბ)



დ)



2. გადაიტანეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე რიცხვით სხივზე (იმუშავეთ რვეულში).

ა) $x \le 4$; გ) $x > 8$; ე) $x < -2$; თ) $x \ge -10$;

ბ) $x \le -5$; დ) $x \ge 9$; ვ) $x < 9$; ი) $x < -2$.

3. **კრიტიკული აზროვნება:** წარმოადგინეთ რიცხვით სხივზე შემდეგი უტოლობების ამონახსნები:

ა) $12 > x$; ბ) $-7 > x$; გ) $-5 < x$.

4. მოცემულია რიცხვითი უტოლობები:

ა) $5 > \sqrt{2}$; ბ) $-1{,}3 < -2{,}5$; გ) $-4{,}3 < -2$; დ) $0 > 5$; ე) $9 \le 9$.

ამოწერეთ რომელია ამ უტოლობებიდან ჭეშმარიტი?

5. მოცემულია რიცხვითი უტოლობები:

ა) $-7 > -10$; ბ) $-10{,}5 \ge -10{,}5$; გ) $2{,}3 < -9$; დ) $0 > -5{,}6$; ე) $-\sqrt{2} > 0$.

ამოწერეთ რომელია მოცემული უტოლობებიდან მცდარი?

6. მოცემული უტოლობის ამონახსნები გამოსახეთ რიცხვით წრფეზე და ჩაწერეთ შესაბამისი რიცხვითი ინტერვალები:

ა) $x > 3$; გ) $x < 0$; ე) $41 \le a \le 42$; ზ) $5{,}6 \le b \le 5{,}7$;

ბ) $x \ge -2{,}5$; დ) $x \le \frac{1}{3}$; ვ) $7{,}2 \le a \le 7{,}3$; თ) $9{,}4 \le h \le 9{,}5$.

7. ამოხსენით უტოლობები და გამოსახეთ პასუხები რიცხვით ღერძზე:

ა) $8 - 2x \ge -6$; ე) $-3(x + 5) \ge 5$; ი) $\frac{x}{3} - 1 > 4$; ნ) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > 4$;

ბ) $-3x + 7 > -7$; ვ $-5(3x - 1) < 12$; კ) $\frac{3x}{5} - 2 \ge 5$; ო) $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} \le \frac{1}{2}$.

გ) $6x - 4 \le 8$; ზ) $2(-4x + 5) < -22$; ლ) $\frac{x-1}{4} + 1 > 0$;

დ) $2(x - 2) > -8$; თ) $4(8 - 3x) + 3 < 13$; მ) $\frac{3x-5}{4} - 2 > -3$;

სავარჯიშოები

8. ჩაწერეთ უტოლობა, რომელიც აღწერს ამოცანას: ექსკურსიაზე წასასვლელად უნდა შეგროვდეს არანაკლებ 20 მოსწავლე. ჯერ-ჯერობით 4-მა მოსწავლემ გამოთქვა სურვილი ექსკურსიაზე წასვლის. რამდენი მოსწავლე უნდა დაემატოს, რომ წავიდნენ?

9. სატრანსპორტო კომპანია ექსკურსიის ხარჯებს ითვლის შემდეგი ფორმულით: $C = \frac{11n}{2}$, სადაც C – ხარჯი გამოსახული ლარებში, ხოლო n – მგზავრების რაოდენობა. კომპანიას შეუძლია მოემსახუროს არანაკლებ 20 და არაუმეტეს 40 მგზავრს.

ა) იპოვეთ კომპანიის მინიმალური ხარჯი;

ბ) იპოვეთ კომპანიის მაქსიმალური ხარჯი;

გ) თქვენი აზრით, რატომ აქვს სატრანსპორტო კომპანიას მოთხოვნა, რომ მგზავრების მინიმალური ოდენობა იყოს 20?

დ) რამდენ მგზავრს მოემსახურა ექსკურსიაზე კომპანია, თუ ხარჯი 143 ლარია?

10. **ამოცანა ბიზნესიდან:** იამ და ელენემ გადაწყვიტეს დაიწყონ პატარა ბიზნესი, გააკეთონ და გაყიდონ საყურეები. მათ ბიზნესის დასაწყებად აქვს 540 ლარი. თითო საყურის გაკეთება უჯდებათ 5 ლარი და ყიდიან 9 ლარად. სულ მცირე რამდენი საყურე უნდა გააკეთონ და გაყიდონ, რომ არ დარჩნენ წაგებაზე? (წაგება ბიზნესში: როდესაც ბიზნესში თანხას ჩადებ და ვერ შეძლებ ისე აწარმოო, რომ დაგრჩეს იგივე თანხა ან მეტი).

11. $-4 \le x < 0$ ორმაგი უტოლობის შესაბამისი რიცხვითი ინტერვალია:

1) $(-4; \infty)$; 2) $[-4; 0]$; 3) $(-4; 0]$; 4) $[-4; 0)$.

12. თუ $a > b$ უტოლობის ორივე მხარის c რიცხვზე გამრავლებით მივიღებთ $ac > bc$ უტოლობას, მაშინ მოცემული უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $c \ge 0$; 2) $c > 0$; 3) $c < 0$; 4) $c \le 0$.

13. თუ $m > n$ უტოლობის ორივე მხარის k რიცხვზე გამრავლებით მივიღებთ $mk < nk$ უტოლობას, მაშინ მოცემული უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $k > 0$; 2) $k \ge 0$; 3) $k < 0$; 4) $k \le 0$.

14. თუ $a > 5{,}5$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $4a > 20$; 2) $4a > 22$; 3) $4a \ge 22$; 4) $4a < 22$.

15. თუ $x \le 2{,}5$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $3x \le 0$; 2) $4x < 0$; 3) $3x < 7{,}5$; 4) $3x \le 7{,}5$.

16. თუ $m > 2{,}5$ და $n < 0{,}5$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $m - n > 2$; 2) $m - n \ge 0$; 3) $m - n < 2$; 4) $m - n \le 12$.

17. თუ $a \le 3{,}4$ და $b \ge -2{,}5$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

1) $5a - 2b > 22$; 2) $5a - 2b \ge 24$; 3) $5a - 2b < 20$; 4) $5a - 2b \le 22$.

18. თუ $2 < x < 5$ და $1 < y < 4$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია:

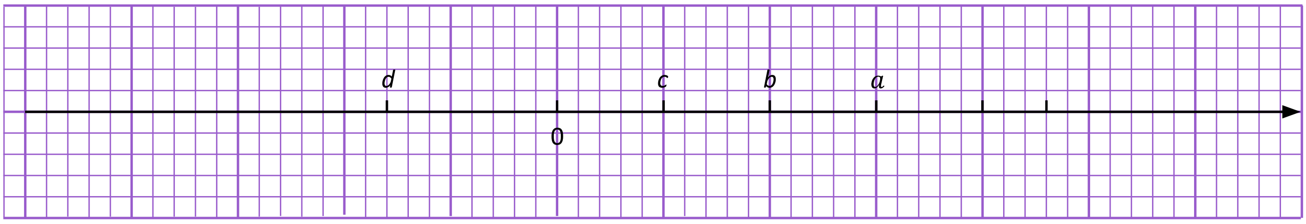
ა) $5 < x + y < 7$; ბ) $6 < x + y < 9$; გ) $3 < x + y < 9$; დ) $7 < x + y < 9$.

სავარჯიშოები

19. **გამოწვევა:** თუ $-3 < x < -1$ და $3 < y < 5$, დაწერეთ რა ინტერვალში მიიღებს მნიშვნელობას ა) $2x + 3y$? ბ) $2x + y$?

20. **გამოწვევა:** თუ $x \le 1{,}2$ და $y \le 5$, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან ჭეშმარიტია
1) $5x + 2y \ge 18$; 2) $5x + 2y > 16$; 3) $5x + 2y \le 16$; 4) $5x + 2y < 10$.

21. საკოორდინატო წრფეზე გამოსახული a, b, c და d რიცხვების მიხედვით შეადარეთ:



ა) $a - b$ და 0; ბ) $b - d$ და 0; გ) $c - d$ და c-b; დ) $b - c$ და $a - d$.

22. ცნობილია, რომ $x > 4{,}5$ და $y > 15{,}8$. იპოვეთ $3x + 4y$ გამოსახულების უმცირესი შესაძლო მთელი მნიშვნელობა.

23. ცნობილია, რომ $a <$ b. *-ის ნაცვლად ჩასვით ტოლობის ან უტოლობის ნიშანი ისე, რომ მიიღოთ ჭეშმარიტი ჩანაწერი:
ა) $a - 3{,}6$ * b $- 3{,}6$; ბ) $bx(-2)$ * $ax(-2)$; გ) $a + 25$ * $b + 25$.

24. ამოხსენით უტოლობები და გამოსახეთ პასუხები რიცხვით ღერძზე.

მითითება: უტოლობის ამოხსნის წესი ისეთივეა, როგორიც განტოლების, არ დაგავიწყდეთ, უარყოფით რიცხვზე გამრავლება – გაყოფის დროს უტოლობის ნიშანი იცვლება.

ა) $3x \ge 15$;	ვ) $x + 1 \ge 4$;
ბ) $-4y \ge -16$;	ზ) $n + 3 \le -5$;
გ) $6k \le 18$;	თ) $-2b + 5 < -4$;
დ) $-3m < 9$;	ი) $3y + 5 > -2$;
ე) $4a < -2$;	კ) $-5k - 8 < 18$.

25. წყალი იყინება 0°C-ზე, წყალი დუღილს და აორთქლებას იწყებს 100°C-ზე. წარმოადგინეთ უტოლობის სახით, რა ტემპერატურიდან რა ტემპერატურამდე გადადის წყალი მყარი მდგომარეობიდან აორთქლებამდე?

სავარჯიშოები

26. ამოხსენით უტოლობები და გამოსახეთ პასუხები რიცხვით ღერძზე:

ა) $2(3{,}5x-2{,}4)-2(x+1)\le 4(2{,}5x+0{,}5)$;

ბ) $-2(2{,}4-x)+4(3{,}2-x)>8-2x$;

გ) $\frac{4x}{5}+\frac{x}{2}<\frac{1}{5}+\frac{3x-1}{2}$;

დ) $\frac{x-3}{2}+\frac{5-x}{3}>\frac{2x-1}{4}$.

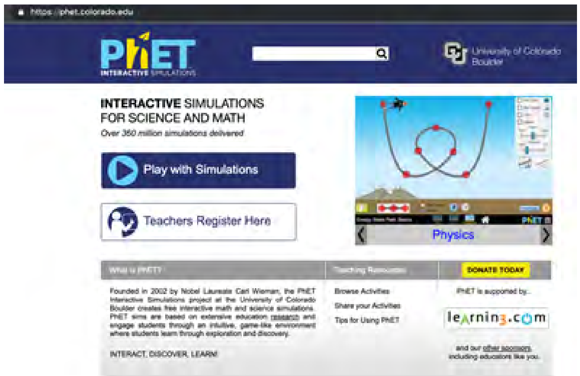
27. **პასუხის დასაბუთება:** მე-10 კლასმა მათემატიკის კვირეულისათვის გადაწყვიტა შეეკვეთა ერთნაირი მაისურები. მაისურების მბეჭდავი კომპანიის შეთავაზება არის შემდეგი: თითო მაისური ჯდება 25 ლარი, მაგრამ თუ შეუკვეთავდნენ მინიმუმ 40 მაისურს, 25 ლარის ნაცვლად თითოში გადაიხდიდნენ 20 ლარს, ხოლო თუ შეუკვეთავდნენ 100 მაისურს, მაშინ 25 ლარის ნაცვლად გადაიხდიდნენ 15 ლარს. კლასში 18 მოსწავლეა. მინიმუმ რამდენი მოსწავლის დამატება მოუწევთ, რომ ისარგებლონ მინიმალური ფასდაკლებით? მინიმუმ რამდენი მოსწავლის დამატება მოუწევთ, რომ ისარგებლონ მაქსიმალური ფასდაკლებით? ორივე შემთხვევა ჩაწერეთ როგორც უტოლობა და იმსჯელეთ.

MATH LAB – ტექნოლოგიების გამოყენებით ტოლობის გაწონასწორება

ნაბიჯი 1:

კომპიუტერის მეშვეობით შედით საიტზე:
www.phet.colorado.edu

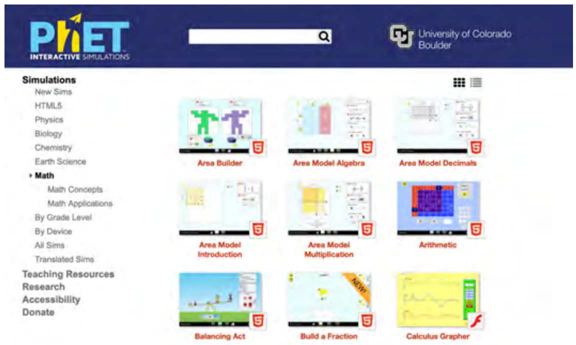
ამოირჩიეთ *Simulations* ➞ *Math*



ნაბიჯი 2.

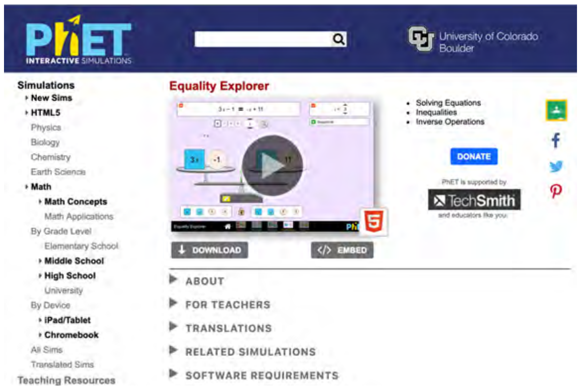
გამოჩნდება ჩამონათვალი სხვადასხვა სიმულაციების, ამოირჩიეთ Equality Explorer

მითითება: შეგიძლიათ გაეცნოთ სხვა სიმულაციებს, რომლებიც დაგეხმარებათ უკეთ გაიაზროთ და წარმოიდგინოთ საკითხები.



ნაბიჯი 3.

გახსენით ფანჯარა, გამოჩნდება ორი სასწორი. მოცემული აპლიკაციის დახმარებით შეძლებთ განტოლებისა და უტოლობების შედგენას, ტოლობის გაწონასწორებას და საკითხის უკეთ გაგებას.



www.phet.colorado.edu

მოდული, მოდულის შემცველი განტოლება

სიდნეიში არის ჰარბორის ხიდი, რომლის სიგრძე 1149 მეტრია. ტემპერატურის ცვლილებისას ხიდის სიგრძე იცვლება 420 მილიმეტრით: ხან ფართოვდება, ხან იკუმშება.

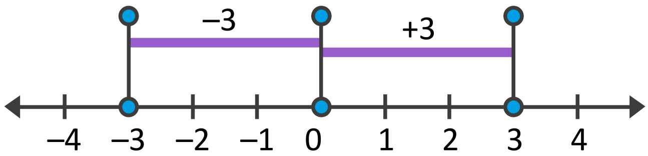
რის გამო და როგორ ფართოვდება ან იკუმშება, ეს ფიზიკის საქმეა. სითბოში სხეული ფართოვდება, სიცივეში კი იკუმშება. ჩვენი მიზანია, შევძლოთ პროცესის აღწერა მათემატიკურად.

გავიხსენოთ, რომ რიცხვის მოდული ეწოდება რიცხვით ღერძზე მანძილს სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე. მაგალითად,

$|-3| = 3$; $|3| = 3$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, მოდული გვაძლევს ინფორმაციას რიცხვით ღერძზე მდებარე რიცხვის კოორდინატის სათავიდან დაშორების შესახებ, ხოლო მიმართულება მოდულს არ აინტერესებს.

ჰარბორის ხიდი სიდნეიში



ნაწილი 1: მოდულის განმარტება ალგებრულად

ნებისმიერი რიცხვისათვის, მოდული განიმარტება შემდეგნაირად:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ თუ } x \geq 0 \\ -x; \text{ თუ } x \leq 0 \end{cases}$$

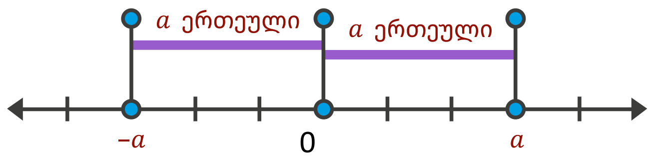
მაგალითად:

$|3| = 3$ რადგან მოდულის ქვეშ რიცხვი დადებითია.

$|-3| = -(-3) = 3$ რადგან მოდულის ნიშნის ქვეშ რიცხვი უარყოფითია, ვიღებთ მის მოპირდაპირე მნიშვნელობას, განმარტების თანახმად.

დაიმახსოვრეთ: მოდულის ქვეშ შეიძლება იყოს უარყოფითი რიცხვი, მაგრამ მნიშვნელობა ყოველთვის დადებითი იქნება. მოდულის მნიშვნელობა ვერ იქნება უარყოფითი.

ნაწილი 2: მოდულის შემცველი განტოლების ზოგადი სახე: $|x| = a$

ცნება, სიტყვიერი აღწერა	ალგებრულად
$\lvert x \rvert = a$ განტოლებაში მოდული სვამს კითხვას: რა რიცხვი უნდა ჩაისვას x-ის ნაცვლად, რომ მნიშვნელობა მივიღოთ a? **პასუხი იქნება:** თავად რიცხვი a ან მისი მოპირდაპირე რიცხვი $-a$	$\lvert x \rvert = 3$ $x = 3$ ან $x = -3$
გრაფიკულად:  	$\lvert x \rvert = a$ $x = a$ ან $x = -a$

ა) $|x + 5| = 8$

მოდულის წესის მიხედვით

$x + 5 = 8$ ან $x + 5 = -8$

$x = 8 - 5$ x

$= -8 - 5$

$x = 3$ $x = -13$

შემოწმება:

$|3 + 5| = 8$ $|-13 + 5| = 8$

$|8| = 8$ $|8| = 8$

ბ) $2|x - 5| - 9 = 31$

ჯერ უნდა მოვძებნოთ მოდული და შემდეგ x

$2|x - 5| - 9 = 31$

$+9 = +9$

$2|x - 5| = 40$

$\div 2 = \div 2$

$|x - 5| = 20$

$x - 5 = 20$ ან $x - 5 = -20$

$x = 25$ $x = -15$

გ) $|x + 4| = -7$

მოდული არასდროს იქნება უარყოფითი

$x \in \varnothing$

განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

ნიმუში 1

გაკვეთილის შესავალში აღწერილი იყო ამოცანა სიდნეის ხიდის შესახებ. ამ ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელია მოდულიანი განტოლება:

$|x - 1149| = 0.42$ 420 მმ = 0.42 მ

$x - 1149 = 0.42$ ან $x - 1149 = -0.42$

$x = 1149.42$ ან $x - 1148.58$

!! ყურადღება მიაქციეთ

რადგან ხიდი ან ფართოვდება ან იკუმშება, ე.ი. რეალურ სიგრძეს ან ემატება 0.42 ან აკლდება 0.42, რაც მოდულით გამოისახება შემდეგნაირად $|x - 1149| = 0.42$

სავარჯიშოები

1. რიცხვთა ღერძის დახმარებით ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

ა) მოძებნეთ ყველა ისეთი x რიცხვი, რომელიც K (0) წერტილიდან 5 ერთეულითაა დაშორებული;

ბ) მოძებნეთ ყველა ისეთი x რიცხვი, რომელიც B (2) წერტილიდან 7 ერთეულითაა დაშორებული;

გ) მოძებნეთ $20-|x-3|$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა და დაასახელეთ ის x რიცხვი, რომლის დროსაც მიიღწევა ეს უდიდესი მნიშვნელობა;

დ) მოძებნეთ $15+|4-y|$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა და დაასახელეთ ის y რიცხვი, რომლის დროსაც მიიღწევა ეს უმცირესი მნიშვნელობა.

2. ამოხსენით წრფივი განტოლებები:

ა) $|x+2|=0$;
ბ) $|x-3|=4$;
გ) $|x-1|=-3$;
დ) $|x-3|+2=2{,}5$;
ე) $|x+5|-2.5=4.5$;
ვ) $2|5x|-2.5=2.5$;
ზ) $4|3x|+2.5=5.5$;
თ) $|4x+1|=15$;
ი) $|2x-1|=2.4$;
კ) $|3-2x|=6$;
ლ) $4|x+1|=12$;
მ) $5|3-x|=15$;
ნ) $3|3+5x|=1.5$;
ო) $3|2x-3|-2=4$;
პ) $-2|x-3|+2=2.5$.

შეცდომის ანალიზი!

3. მოსწავლემ ახალი საკითხის შესწავლის დროს დაწერა, რომ $|x+7|=|x|+7$. მოიყვანეთ ერთი მაგალითი მაინც, რომლითაც მოსწავლეს დაუსაბუთებთ, რატომ არის აღნიშნული ტოლობა მცდარი.

ამოცანების ამოხსნა ცვლადის შემოტანით

საკითხის მათემატიკური მოდელირება

ყოველდღიურ ცხოვრებაში და საქმიანობაში სხვადასხვა სფეროს წარმომადგენლებს სჭირდებათ საკითხის ფორმულირება, აღწერა.

ფიზიკაში დაკვირვებების შემდეგ აუცილებელია პროცესის აღწერა, ცვლადების შემოტანა და ტოლობის ჩაწერა.

ასევე, ფინანსურ სექტორში, როდესაც ბანკისგან სესხს ვიღებთ ან ანაბარზე შეგვაქვს თანხა, ხდება საკითხის მათემატიკური ფორმულირება, პროცენტის დარიცხვა და ა.შ.

ნიმუში 1 – მათემატიკური მოდელირების და ჩანაწერის გეგმა

ქეთის ჰქონდა ნინიზე 2 ჯერ მეტი თანხა ანაბარზე. მას შემდეგ რაც მან 1000 ლარი სწავლის საფასური გადაიხადა და დარჩენილი თანხის მესამედი დედას მისცა, მას დარჩა იმდენი, რამდენიც ჰქონდა ნინოს. იპოვეთ რამდენი ლარი ჰქონდა თითოეულს?

ნაბიჯი 1:

გაიაზრეთ პირობა და ამოწერეთ მნიშვნელოვანი ინფორმაცია:

ქეთის აქვს ნინიზე 2 ჯერ მეტი;

ქეთიმ გადაიხადა $\longrightarrow$ 1000 ლარი;

ქეთიმ დედას მისცა დარჩენილი თანხის მესამედი;

თანხის მესამედის დედისთვის მიცემის შემდეგ, მას საბოლოოდ დარჩებოდა დარჩენილის $\frac{2}{3}$

გაფრთხილება:

სტუდენტები ხშირად შეცდომას უშვებენ ბოლო ოპერაციის გააზრებაზე.

ნაბიჯი 2:

შევადგინოთ გეგმა – აღვწეროთ სიტუაცია მათემატიკურად, შემოვიღოთ ცვლადები.

ქეთის ვადარებთ ნინის, რომლის თანხაც უცნობია.

ვთქვათ ნინის აქვს $\longrightarrow$ x ლარი

მაშინ ქეთის ექნება $\longrightarrow$ $2x$ ლარი

ქეთიმ დახარჯა 1000 ლარი, დარჩა $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $(2x - 1000)$

დედას მისცა დარჩენილის მესამედი $\frac{2x - 1000}{3}$

საბოლოოდ დარჩა $\longrightarrow$ $\frac{2(2x - 1000)}{3}$

ქეთის საბოლოოდ დარჩენილი თანხა ნინის თანხის ტოლია, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{2(2x - 1000)}{3} = x$$

ამოხსნის შედეგად მივიღებთ: $x = 2000$

პასუხი: ქეთის ჰქონდა 4000 ლარი, ხოლო ნინის 2000 ლარი.

ნიმუში 2 – მათემატიკური მოდელირება, ცვლადის შემოტანა

ადამიანის მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე შეიძლება იყოს 220 ძგერა წუთში.

ყველა ასაკს თავისი მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე შეესაბამება. იგი გამოითვლება შემდეგი წესით: ასაკს მიმატებული გულისცემის სიხშირე უდრის 220.

რა შეიძლება იყოს 12 წლის მოზარდის მაქსიმალური გულისცემა?

შენიშვნა: *მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე არ ნიშნავს იმას, რომ მოზარდს ან ზრდასრულს ჩვეულებრივ მდგომარეობაში შეიძლება ჰქონდეს ეს სიხშირე.*

ნაბიჯი 1:

ამოვწეროთ მნიშვნელოვანი ინფორმაცია:

ასაკს დამატებული მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე უდრის 220-ს. ყველა ასაკს თავისი მაქსიმალური ნიშნულები აქვს.

ნაბიჯი 2:

ცვლადის შემოტანა, საკითხის მოდელირება.

ვთქვათ 12 წლის მოზარდის მაქსიმალური გულისცემის სიხშირეა x, შევადგინოთ განტოლება: $x + 12 = 220$

ნაბიჯი 3:

ამოვხსნათ განტოლება

$x + 12 = 220$

$x = 208$

ე.ი. 12 წლის მოზარდის მაქსიმალური გულისცემის სიხშირე შეიძლება იყოს 208.

ნაბიჯი 4:

დაუბრუნდით საკითხს და გადაამოწმეთ.

სავარჯიშოები

1. უცნობი რიცხვი ჯერ გააორკეცეს, შემდეგ დაუმატეს 8 და მიიღეს 32. ჩაწერეთ შესაბამისი განტოლება და იპოვეთ უცნობი რიცხვი.

2. უცნობისა და 4-ის ჯამი გაამრავლეს 7-ზე და მიიღეს 42. იპოვეთ უცნობის მნიშვნელობა.

3. 5-ისა და უცნობის სხვაობა გაამრავლეს 4-ზე და მიიღეს 84. იპოვეთ უცნობის მნიშვნელობა.

4. უცნობი რიცხვი ჯერ შეამცირეს 5-ით, ხოლო შემდეგ მიღებული რიცხვი გაასამკეცეს. საბოლოოდ მიღებულ რიცხვს გამოაკლეს 4 და მიიღეს 11. ჩაწერეთ შესაბამისი განტოლება და იპოვეთ უცნობი რიცხვი.

5. ორი რიცხვის ჯამი 120-ია, ერთ-ერთი მეორეზე 24-ით მეტია, იპოვეთ ეს რიცხვები.

6. ორი რიცხვის სხვაობა 94-ია, ერთ-ერთი მეორეზე 12-ით ნაკლებია, იპოვეთ ეს რიცხვები.

7. ორი რიცხვის სხვაობა 4.2-ია, ერთ-ერთი მეორეზე 6-ჯერ მეტია, იპოვეთ ეს რიცხვები.

8. ნოდომ გადაწყვიტა საცურაოდ აუზზე სიარული და გაარკვია, რომ ერთჯერადი სავალდებულო გადასახადის 40 ლარის შემდეგ ყოველ ვიზიტზე უნდა გადაიხადოს 8 ლარი. რამდენი ვიზიტისთვის ეყოფა ნოდოს 200 ლარი? შეადგინეთ განტოლება.

მითითება: **ნაბიჯი 1:** ამოწერეთ მნიშვნელოვანი ინფორმაცია. **ნაბიჯი 2:** შემოიტანეთ ცვლადი.	ვთქვათ ნოდომ შეიძლება ისარგებლოს აუზით x-ჯერ. აუზზე x-ჯერ შესვლაში იგი გადაიხდის 8 x ლარს, ...

9. მას შემდეგ, რაც ლილეს ხელფასი გაიზარდა 15%-ით, მან აიღო 920 ლარი. რა იყო ლილეს ხელფასი გაზრდამდე?

10. 25 %-იანი ფასდაკლების შემდეგ ქურთუკის ღირებულება არის 200 ლარი. რა ღირდა ქურთუკი ფასდაკლებამდე?

11. რიცხვი შეამცირეს ჯერ 10%-ით, შემდეგ გაზარდეს 20%-ით და მიიღეს 54. რა რიცხვი აიღეს თავდაპირველად?

12. რიცხვი ჯერ გაზარდეს 2-ჯერ, შემდეგ შეამცირეს 25%-ით და მიიღეს 90. იპოვეთ რიცხვი.

13. რიცხვი ჯერ გაზარდეს 20%-ით, შემდეგ დამატებით 10%-ით და მიიღეს 66. იპოვეთ რიცხვი.

14. სამი მომდევნო რიცხვის ჯამი 93-ია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

15. სამი მომდევნო ლუწი რიცხვის ჯამი 102-ია. იპოვეთ უდიდესი რიცხვი.

სავარჯიშოები

16. ცნობილია, რომ პირველი რიცხვი 14-ით მეტია მეორეზე, ხოლო მესამე რიცხვი 9-ით ნაკლებია პირველზე. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ მათი ჯამია 79.

17. ცნობილია, რომ პირველი რიცხვი 2-ჯერ მეტია მეორეზე, ხოლო მესამე რიცხვი 3-ით მეტია პირველი და მეორე რიცხვების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ მათი ჯამია 45.

18. ორ კალათაში ერთად 96 ცალი ვაშლია. თუ პირველი კალათიდან მეორეში გადავდებთ 7 ვაშლს, მაშინ პირველში დარჩება ორჯერ მეტი ვაშლი, ვიდრე მეორეში. რამდენი ვაშლი იყო თითოეულ კალათაში თავდაპირველად?

19. კახა რვა წლითაა დიდი მარიზე. ორი წლის შემდეგ კახა სამჯერ დიდი იქნება მარიზე. რამდენი წლისები არიან ახლა კახა და მარი ?

20. წილადის მრიცხველი მნიშვნელზე 4-ით ნაკლებია, თუ წილადის მრიცხველს გავზრდით 4-ით, ხოლო მნიშვნელს გავზრდით 5-ით, მივიღებთ 0.5-ს. იპოვეთ წილადი.

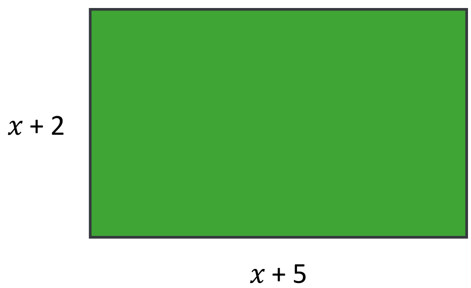
21. წილადის მრიცხველი მნიშვნელზე 5-ით მეტია. თუ წილადის მრიცხველს შევამცირებთ 3-ით, ხოლო მნიშვნელს გავზრდით 8-ით, მივიღებთ 0.4-ს. იპოვეთ წილადი.

22. **სიტუაციის ანალიზი:** თორნიკეს ხელფასი ჯერ შეამცირეს 30%-ით, შემდეგ გაზარდეს 40%-ით, რა იყო თორნიკეს ხელფასი თავდაპირველად, თუ შემცირებისა და გაზრდის მერე გახდა 1090 ლარი. შეადარეთ საბოლოო ხელფასი საწყისს და ჩაწერეთ საბოლოო ხელფასი საწყისზე მეტია თუ ნაკლები?

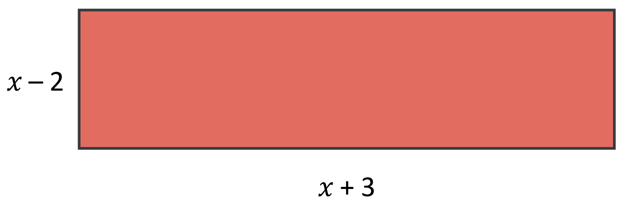
რთული ამოცანა:

23. მოცემულია მართკუთხედი, რომლის პერიმეტრი 94 სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები და ფართობი.

ა)



ბ)



რთული ამოცანა:

24. ქეთიმ და ლანამ გადაწყვიტეს იოგაზე სიარული. სავარჯიშო დარბაზს აქვს შემდეგი პირობები: თუ გახდები იოგის მოყვარულთა კლუბის წევრი, იხდი საწევრო გადასახადს 100 ლარს და შემდეგ ყოველი ვარჯიში ღირს 10 ლარი. თუ არ გახდები კლუბის წევრი, მაშინ არ გადაიხდი ერთჯერად გადასახადს, მაგრამ ყოველი ვარჯიშის ღირებულება იქნება 15 ლარი. ლანა გაწევრიანდა კლუბში, ქეთი არა. რამდენი ვარჯიშის შემდეგ ექნებათ მათ გადახდილი ერთი და იგივე თანხა? ჩაწერეთ განტოლება.

საკარჯიშოები

25. შეადგინეთ ამოცანა, რომლის ამოხსნასაც შეძლებთ ცვლადის შემოტანით.

ტესტი განმავითარებელი შეფასებისთვის

1. **იპოვეთ უცნობი:**

   $-4(x + 8) - 5 = 51$

2. **იპოვეთ უცნობი:**

   $-5(x - 2) = -3x - 26$

3. **ამოხსენით განტოლება:**

   $-0.5(4x - 8) + 3(x - 1) = 8 - x$

4. **იპოვეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:**

   $4(x - 3) + 12 < 20$

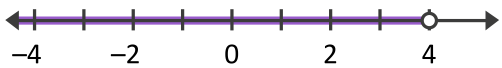
5. **იპოვეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:**

   $-x + 2 > 4$

6. **იპოვეთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:**

   $12(x - 4) + 42 < 78$

7. რომელი უტოლობის პასუხია მოცემული რიცხვით ღერძზე?



ა) $3x + 1 - 2x > 25$ გ) $6(x - 2) + 3 < 15$

ბ) $2x + 6 - x > 10$ დ) $6(x - 2) + 3 > 15$

8. გადაიტანეთ უტოლობის ამონახსნი რიცხვით ღერძზე:

   $4x - 8 < 2x + 6$ 

9. ამოხსენით უტოლობა:

   ა) $|x - 3| > 5$ ბ) $|x - 1| + 5 < 2$

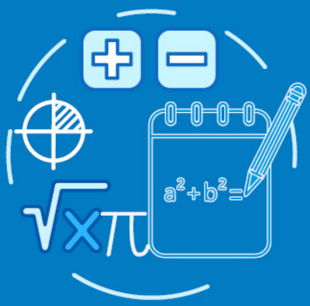
10. ჩაწერეთ განტოლება და ამოხსენით:

    უცნობი რიცხვისა და 2,5-ის სხვაობა გაამრავლეს 4-ზე და მიიღეს 12. იპოვეთ უცნობი რიცხვი.

11. ორი მომდევნო მთელი რიცხვის ჯამია 55. ჩაწერეთ შესაბამისი განტოლება და იპოვეთ ეს რიცხვები.

12. **ბონუს ამოცანა:** ანამარიას ხელფასი გაიზარდა 20 %-ით და თვის ბოლოს მან აიღო 1440 ლარი. რამდენი იყო ანამარიას ხელფასი მომატებამდე?

IV. დავალების წარდგენა

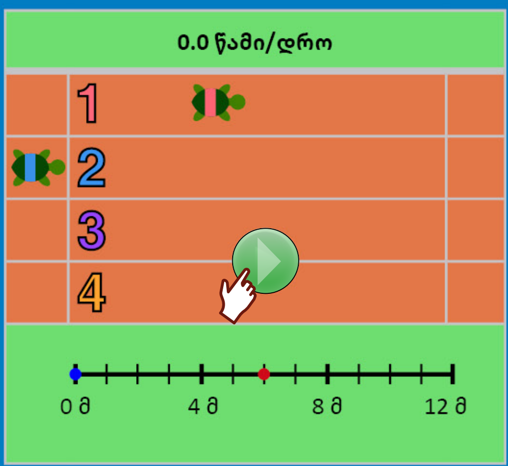


კომპლექსური დავალება

მარათონი – მოძრაობის აღწერა

დავალების და ახალი სასწავლო ერთეულის დაწყებამდე, დაფიქრდით და უპასუხეთ კითხვებს: – როგორ ფიქრობთ, რაზეა დამოკიდებული მოძრაობა? რა იწვევს მოძრაობას? – გამოთქვით ვარაუდი, ან ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზა: შეიძლება თუ არა მოძრაობის აღმწერი რაიმე ფორმულის, განტოლების ჩაწერა? – რას აქცევთ მოძრაობისას ყურადღებას, რა შეიძლება იყოს მოძრაობის აღმწერი ცვლადები?

დავალების შესრულებისას ჩვენ განვიხილავთ მოძრაობას სარბენ ბილიკზე, მარათონს. იმისათვის რომ დავალება მეტად აღქმადი და სახალისო იყოს, განვიხილოთ მორბენალი რამოდენიმე კუს შემთხვევა. დავალება იხილეთ ➡ **ბმულზე**



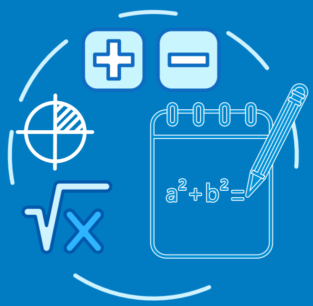
თქვენი დავალება

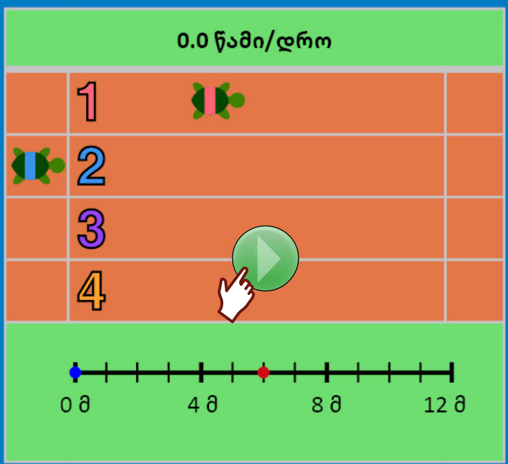
ჩვენ განვიხილავთ მოძრაობას სარბენ ბილიკზე, მარათონს. იმისათვის, რომ დავალება მეტად აღქმადი და სახალისო იყოს, განვიხილოთ მორბენალი რამოდენიმე კუს შემთხვევა. იხილეთ დავალება ბმულზე:

- უყურეთ სარბენ ბილიკზე მორბენალ რამდენიმე კუს და უპასუხეთ დავალებაში მოცემულ კითხვებს თანმიმდევრულად:
- ამოიწერეთ ინფორმაცია რა დროში რამდენ მეტრს გარბის თითოეული კუ.
- ინფორმაცია გამოსახეთ ცხრილით და აღწერეთ სიტუაცია ფორმულით; გააანალიზეთ როგორ არის დაკავშირებული განვლილი მანძილი დროსთან. (დავუშვათ თითოეული კუ მოძრაობს თანაბრად).
- წარმოდგინეთ მონაცემები საკოორდინატო სიბრტყეზე, გამოიკვლიეთ რისი ფორმა აქვს გრაფიკს.
- შეადარეთ თითოეული კუს სიჩქარე როგორც გრაფიკზე წარმოდგენილი ინფორმაციით, ასევე ფორმულით.

ასევე გაეცანით დამხმარე ვიდეო გაკვეთილებს,დამხმარე სასწავლო რესურსებს:

www.math.ge





კომპლექსური დავალება

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, ან შექმენით მსგავსი დავალება:

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

I. როგორ შეიძლება მოძრაობის აღწერა? როგორ შეიძლება მოძრაობის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

II. როგორ ააგეთ კუს მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი? რომელი სიდიდე შეუსაბამეთ Ox ღერძს და რა Oy ღერძს? რომელია დამოუკიდებელი და რომელი დამოკიდებული ცვლადი?

III. თუ ორი კუს მოძრაობას აღვწერთ გრაფიკებით, როგორ შეგვიძლია დავადგინოთ რომელი კუ მოძრაობდა უფრო სწრაფად? პასუხი დაასაბუთეთ.

IV. თუ ერთმა კუმ დაიწყო მოძრაობა მეორე კუზე ადრე, რის მიხედვით შეგიძლიათ დაადგინოთ რა დროის შემდეგ შეძლებს დაწევას? რა უნდა გააკეთოს მეორე კუმ რომ დაეწიოს?

V. რეალურ ცხოვრებაში რა ტიპის მოძრაობის აღწერა შეგიძლიათ?

თემა 3. ფუნქცია, გრაფიკი, წრფივი ფუნქცია

ეს საინტერესოა!

აშშ-ს გლობალური სანავიგაციო სატელიტური სისტემა, რომელიც შედგება 28-32 სატელიტისაგან, გამოიყენება ადგილმდებარეობის განსაზღვრისათვის. მუშაობს ნებისმიერ ამინდში და მსოფლიოს ნებისმიერი ადგილის შესახებ შეუძლია ინფორმაციის მოწოდება.

სატელიტებიდან მოწოდებული ინფორმაციით დგება ქალაქის გეგმა.

3.1. საკოორდინატო სიბრტყე, კოორდინატი

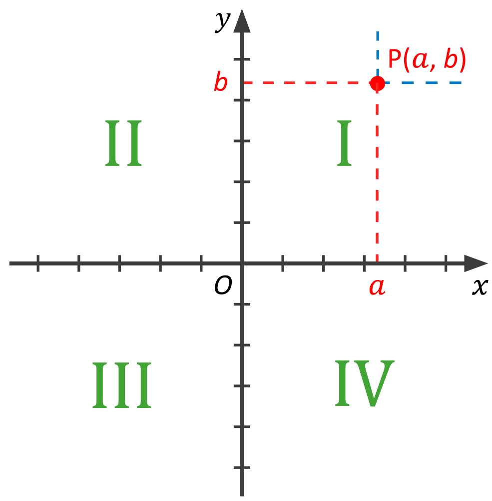
ყველას გვინახავს კომპასი და მასზე აღნიშნული მიმართულებები, ჩრდილოეთი, სამხრეთი, აღმოსავლეთი, დასავლეთი.

ვიცით, კახეთი აღმოსავლეთ საქართველოს ნაწილია, დასავლეთით არის იმერეთი, ჩრდილოეთით სვანეთი და ა.შ.

მოვახდინოთ კომპასისა და გეოგრაფიის მათემატიკური მოდელირება. უფრო გასაგებად რომ აღვწეროთ მათემატიკურად, დაგვჭირდებაა **საკოორდინატო სიბრტყე.**

ტერმინები

- **საკოორდინატო სიბრტყე –** შედგება ორი მართი კუთხით გადაკვეთილი წრფისაგან, რომელიც სიბრტყეს 4 ნაწილად ყოფენ, თითოეულ ნაწილს ჰქვია **მეოთხედი**.
- ორ წრფეს – **ღერძები**.
- ჰორიზონტალურ წრფეს ჰქვია – **Ox ღერძი.**
- ვერტიკალურ წრფეს – **Oy ღერძი.**
- წრფეების გადაკვეთის წერტილს კი **სათავე**.



სიბრტყეზე მოცემულია A წერტილი კოორდინატებით (a,b)

- სათავიდან Ox ღერძის მიმართულებით მარჯვნივ აღინიშნება დადებითი რიცხვით.
- სათავიდან Ox ღერძის მიმართულებით მარცხნივ აღინიშნება უარყოფითი რიცხვით.
- სათავიდან Oy ღერძის ზემოთ – დადებითი რიცხვით.
- სათავიდან Oy ღერძის ქვემოთ უარყოფითი რიცხვით.
- წერტილისთვის სიბრტყეზე გვჭირდება ორი მონაცემი, ერთი – Ox ღერძისთვის, მეორე Oy ღერძისთვის. ე.ი გვჭირდება $(x;y)$ წყვილი ინფორმაცია
- **მოკლედ ამბობენ** $(x;y)$ –**კოორდინატები** ან $(x;y)$
- **წყვილი სათავე აღინიშნება წერტილით** (0; 0)

ნიმუში 1 – დაადგინეთ წერტილის კოორდინატები და შესაბამისი მეოთხედები:

$U(-1; 1)$ – II მეოთხედი

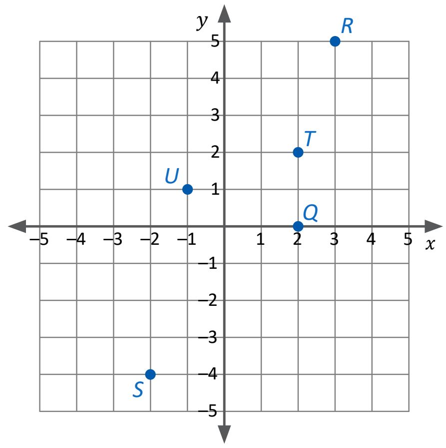
$S(-2; -4)$ – III მეოთხედი

$R(3; 5)$ – I მეოთხედი

$T(2; 2)$ – I მეოთხედი

$Q(2; 0)$ – x ღერძი

თუ წერტილი მდებარეობს x ღერძზე, მისი y კოორდინატი 0-ია და წერტილის კოორდინატი ჩაიწერება როგორც $(x;0)$. თუ წერტილი მდებარეობს y ღერძზე, მისი x კოორდინატი 0-ია და წერტილის კოორდინატი ჩაიწერება როგორც $(0; y)$



თუ ორი წერტილი $(x_1;\ y_1)$ $(x_2; y_2)$, მდებარეობს y ღერძის პარალელურ წრფეზე, მაშინ მათ შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $|y_2 - y_1|$

თუ ორი წერტილი $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$, მდებარეობს x ღერძის პარალელურ წრფეზე, მაშინ მათ შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $|y_2 - y_1|$

ნიმუში 2 – მანძილი ორ წერტილს შორის

S,U წეტილები x ღერძის პარალელურ წრფეზეა

$U(-1; 1)$, $S(-4; 1)$

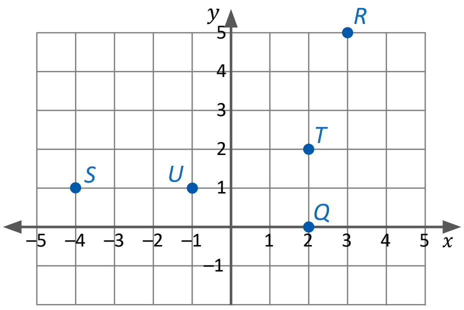
$SU = |-4-(-1)|=|-3|=3$

$T; Q$ წერტილები y ღერძის პარალელურ წრფეზე

$T(2; 2)$, $Q(2; 0)$

$TQ = |\ 0-2|$ ან $|2-0|=2$

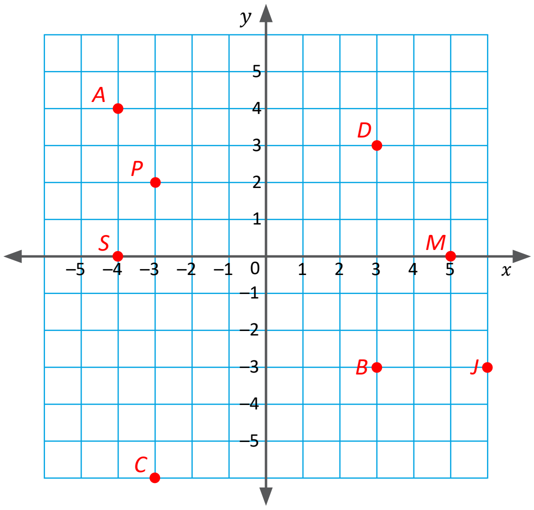
რადგან მონაკვეთის სიგრძე დადებითი რიცხვია, ვპოულობთ კოორდინატების სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას (მოდულს).



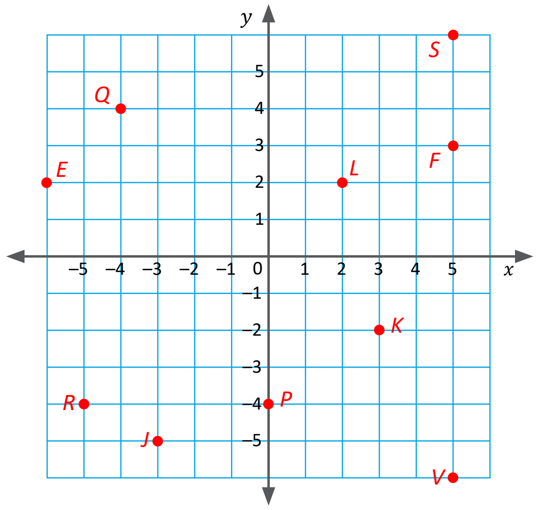
სავარჯიშოები

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე მონიშნეთ შემდეგი წერტილები:
A(3; 5); B(–1; 3); C(0.4); D(–2; –5).

2. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ თითოეული წერტილის კოორდინატები:



3. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ თითოეული წერტილის კოორდინატები:



4. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი ა) A(5;2) და ბ) B(–3;2)

I. იპოვეთ მანძილი ამ ორ წერტილს შორის

II. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ ორ წერტილზე?

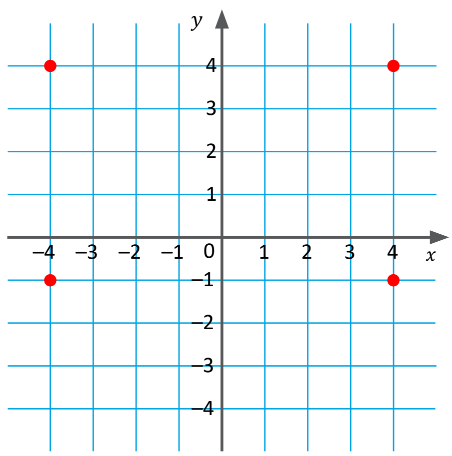
5. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი M(5; 4) N(5:–3)

I. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის

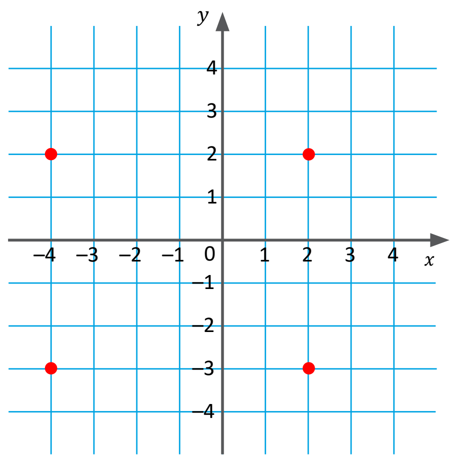
II. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ ორ წერტილზე?

დაფიქრდით: თუ ორ წერტილს ერთნაირი X კოორდინატი აქვს და სხვადასხვა Y კოორდინატი, როგორი მდებარეობა აქვთ სიბრტყეზე ამ წერტილებს და დამატებით რისი თქმა შეგიძლიათ?

6. შეაერთეთ მოცემული 4 წერტილი და გამოიანგარიშეთ ფიგურის პერიმეტრი:



7. შეაერთეთ მოცემული 4 წერტილი და გამოიანგარიშეთ ფიგურის პერიმეტრი.



სავარჯიშოები

8. დახაზეთ სამკუთხედი, რომლის წვეროს კოორდინატები იქნება: T(–4;3); K(-2;–1) L(4;5) მოიფიქრეთ ამოცანა სადაც შეძლებთ კომპასის და საკოორდინატო სიბრტყის გამოყენებას.

9. იპოვეთ მანძილი შემდეგ ორ წერტილს შორის:

ა) M(–5;4) N(–10;4); ბ) A(4;–7) B (–8;-7);

გ) T(0;–3) K(0;5); დ) M(-5;–6) N(7;–6).

10. იპოვეთ წერტილი, (8;–4) წერტილიდან 5 ერთეულით მარჯვნივ და 4 ერთეულის ზემოთ.

11. იპოვეთ წერტილი, (–5.5; –2.5) წერტილიდან 3 ერთეულით მარცხნივ და 2 ერთეულით დაბლა.

12. სიბრტყეზე წერტილი გადაადგილდა 5 ერთეულით მარცხნივ, 4 ერთეულით ზემოთ და მისი კოორდინატებია (–7; 6). რა იყო წერტილის კოორდინატი გადაადგილებამდე?

13. სიბრტყეზე წერტილი გადაადგილდა 6 ერთეულით მარჯვნივ, 3 ერთეულით დაბლა და მისი კოორდინატებია (–5.5 ; 6.5). რა იყო წერტილის კოორდინატი გადაადგილებამდე?

14. ორ წერტილს შორს მანძილი სიბრტყეზე 10 ერთეულია, იპოვეთ მეორე წერტილის კოორდინატები, თუ პირველი წერტილის კოორდინატებია (7;3) და ვიცით, რომ ეს ორი წერტილი მდებარეობს x ღერძის პარალელურ წრფეზე. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

15. ორ წერტილს შორის მანძილი 8 ერთეულია, იპოვეთ მეორე წერტილის კოორდინატები, თუ ვიცით პირველი წერტილის კოორდინატებია (–2.5;–1.5) და ორივე მდებარეობს y ღერძის პარალელურ წრფეზე. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

გამოწვევა:

16. მოცემულია შემდეგი წერტილები A(–2; –4),B(5; –4), C(5; 3), D(–2; 3), გადაიტანეთ წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე, შეაერთეთ და იპოვეთ მიღებული ფიგურის პერიმეტრი.

17. **იმსჯელეთ:** რატომ არის სათავის კოორდინატები (0; 0)-ის ტოლი?

18. **იპოვეთ შეცდომა:** სტუდენტს უნდოდა სიბრტყეზე მოეძებნა წერტილი (–5; 3), რისთვისაც მან სათავიდან გადაზომა 5 ერთეული მარჯვნივ და 3 ერთეული ზემოთ. რა შეცდომა დაუშვა სტუდენტმა?

რეალური სიტუაციის მოდელირება:

19. **შეადგინეთ გეგმა.** ერთი და იმავე ადგილიდან, ველოსიპედებით სხვადასხვა მიმართულებით გავიდნენ ქეთი, ლანა და ირაკლი. ქეთიმ გაიარა აღმოსავლეთის მიმართულებით 5კმ, შემდეგ სამხრეთის მიმართულებით 4 კმ. ლანამ – დასავლეთის მიმართულებით 6 კმ, სამხრეთის მიმართულებით – 4 კმ. ირაკლიმ ჯერ ჩრდილოეთის მიმართულებით – 7კმ, აღმოსავლეთის მიმართულებით – 3 კმ.

ა) იპოვეთ თითოეული მეგობრის კოორდინატი სიბრტყეზე

ბ) შეგიძლიათ იპოვოთ მანძილი რომელიმე ორ მეგობარს შორის?

3.2. გრაფიკი

ციფრული მედია, სატელევიზიო საშუალებები, გაზეთები და ტელეგადაცემები ინფორმაციის გადმოსაცემად ხშირად იყენებენ გრაფიკებს, ცხრილებს, დიაგრამებს.

როდესაც ორ სიდიდეს შორის არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი დამოკიდებულება, ან ორი სიდიდე დაკავშირებულია ერთმანეთთან, აღნიშნული დამოკიდებულება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რამდენიმე სახით: სიტყვიერად, ცხრილის სახით, ანალიზურად (ფორმულა) ან გრაფიკის მეშვეობით.

საკვანძო კითხვა:

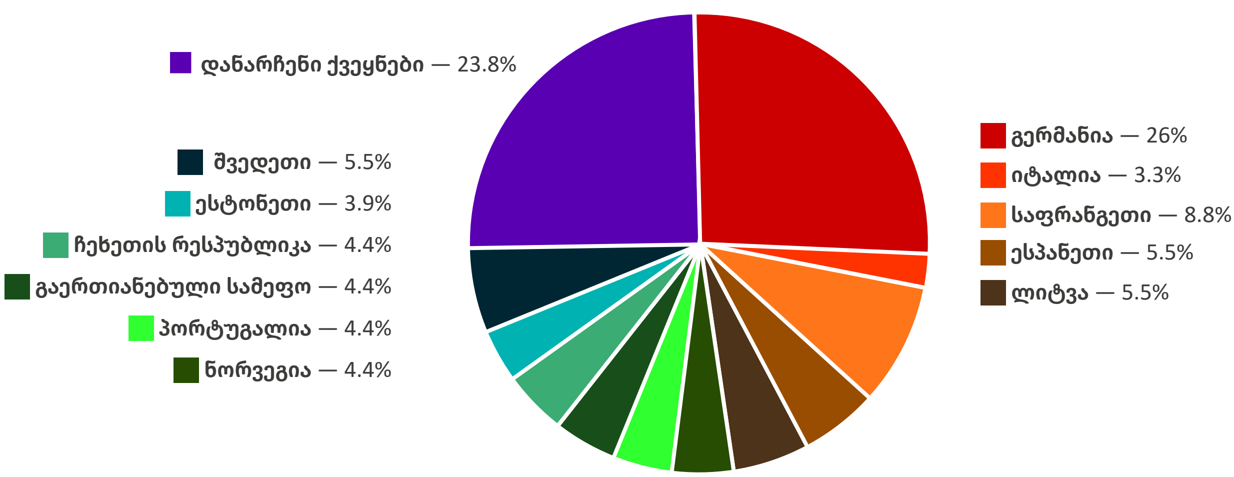
- *რა არის გრაფიკი? დიაგრამა?*

დიაგრამა წარმოადგენს სქემას, ნახაზს, ნახატს, რომლითაც მოცემულია გარკვეული ინფორმაცია.

გრაფიკი დიაგრამის ერთ-ერთი ფორმაა, რომელიც გვიჩვენებს ორ სხვადასხვა სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულებას. არსებობს სხვადასხვა ფორმის დიაგრამები და გრაფიკები.

ქვემოთ მოცემული წრიული დიაგრამა, გვაჩვენებს 2020/2021 სასწავლო წელს საზღვარგარეთ სასწავლებლად გაგზავნილი სტუდენტების რაოდენობას ქვეყნების მიხედვით.

საზღვარგარეთ სასწავლებლად გაგზავნილი სტუდენტები ქვეყნების მიხედვით (%), 2020/2021 სასწავლო წლის დასაწყისისთვის



თქვენი აზრით, წრიული დიაგრამის მიხედვით, რომელ ქვეყანაში გაგზავნეს ყველაზე მეტი სტუდენტი სასწავლებლად?

როგორ აიგო დიაგრამა?

100 % შეესაბამება საზღვარგარეთ წასული მოსწავლეების სრულ რაოდენობას. დაანგარიშებულია თითოეულ ქვეყანაში წასული მოსწავლეები საერთო მოსწავლეების რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ; წრე შეესაბამება 100%-ს, აღნიშნული მონაცემები გადატანილია წრეზე. ინფორმაცია აღებულია საქართველოს სტატისტიკის ეროვნული სააგენტოს ვებ-გვერდიდან Juniors.Geostat.Ge

ინფორმაციასა და სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოსადგენად სიტუაციიდან გამომდინარე იყენებენ სხვადასხვა ტიპის გრაფიკებს და დიაგრამებს. გავეცნოთ რამდენიმე მათგანს და ვიმსჯელოთ გრაფიკის აგების გზებზე.

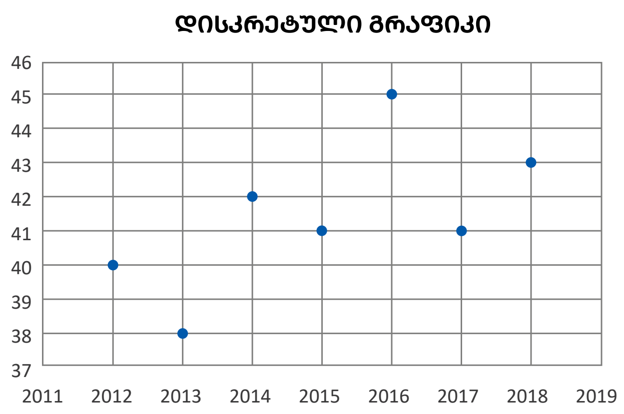
ნიმუში 1 – დისკრეტული გრაფიკი

2018 წლის ზაფხულში საქართველოში დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა – 43°C, როგორც ვიცით 2016 წლის ზაფხული უფრო ცხელი იყო.

ქვემოთ, ცხრილში მოცემულია ინფორმაცია, საქართველოში 7 წლის ყველაზე ცხელი დღეების შესახებ. ცხრილის ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია წლები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე კი წლის შესაბამისი მაქსიმალური ტემპერატურა.

წელი	ტემპერატურა
2012	40
2013	38
2014	42
2015	41
2016	45
2017	41
2018	43

დავაწყვილოთ მონაცემები (წელი; ტემპერატურა), საკოორდინატო სიბრტყეზე x-ღერძზე გადავზომოთ წლები, y ღერძზე კი ტემპერატურა. შემდეგ ჩვენ მიერ დაწყვილებულ ინფორმაციას შევუსაბამოთ წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე.



ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (წელი, ტემპერატურა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ დისკრეტული – წყვეტილი გრაფიკი.

ნიმუში 2 – უწყვეტი გრაფიკი

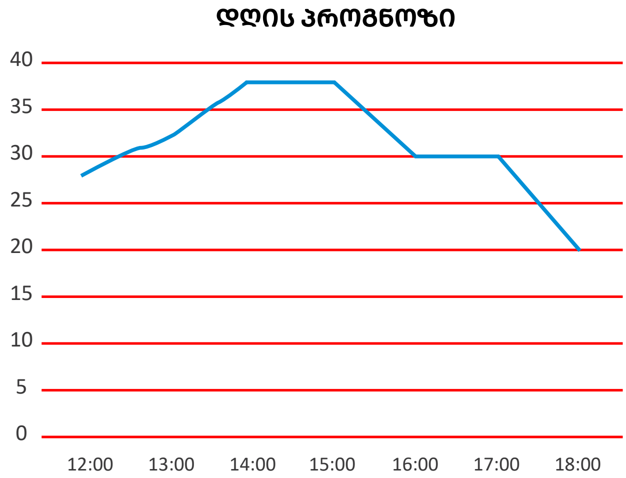
მობილურის აპლიკაციით ჩვენ შეგვიძლია ამინდის ყოველდღიური ან ყოველკვირეული პროგნოზის შემოწმება, ასევე შეგვიძლია საათობრივი პროგნოზის ნახვა.

განვიხილოთ დღის პროგნოზი:

საათი	ტემპერატურა
12:00	28
13:00	32
14:00	38
15:00	38
16:00	30
17:00	30
18:00	20

გვაქვს ორი სხვადასხვა ტიპის ინფორმაცია, საათები და თითოეული საათისთვის შესაბამისი ტემპერატურა:

(სთ ; ტემპერატურა)



თუ ჩავთვლით რომ ტემპერატურა თანაბრად იზრდებოდა, შეგვიძლია შევაერთოთ წერტილები სიბრტყეზე და ვივარაუდოთ 12:00-დან 13:00 სთ-მდე შუალედში რა იქნებოდა ტემპერატურა ყოველი წუთისთვის.

გრაფიკის მიხედვით ვხედავთ, რომ დღის განმავლობაში ტემპერატურა იზრდებოდა, 14:00 დან 15:00-მდე და ტემპერატურა იყო მუდმივი. 15:00-დან დაიწყო კლება, 16:00-დან 17:00 სთ-მდე ისევ მუდმივი იყო, 17:00-დან კი დაიწყო კლება. შუადღისას დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა, დაახლოებით 38 გრადუსი.

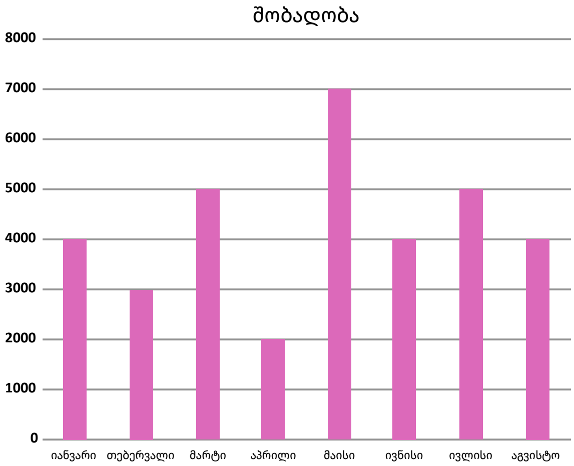
ნიმუში 3 – დიაგრამა (სვეტოვანი დიაგრამა)

ცხრილით მოცემული ინფორმაცია, გვიჩვენებს თუ რამდენი ახალშობილი დაიბადა თვეების მიხედვით.

თვე	შობადობა
იანვ	4000
თებ	3000
მარტი	5000
აპრ	2000
მაისი	7000
ინვ	3000
ივლ	5000
აგვ	4000

იმისათვის, რომ ინფორმაცია მეტად თვალსაჩინოდ იყოს მოწოდებული, ინფორმაცია წარმოვადგინოთ დიაგრამის მეშვეობით. კერძოს, სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით.

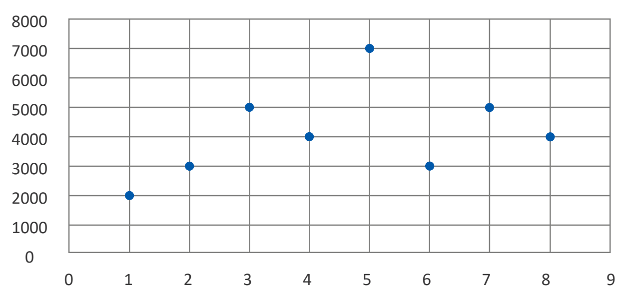
ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავიტანოთ თვეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადავიტანოთ რაოდენობები (ერთეულოვან მონაკვეთად ავიღოთ 1000).



ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (თვე, შობადობა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ **გრაფიკი**, გრაფიკის ფორმას ეწოდება **დიაგრამა** (სვეტოვანი დიაგრამა)

აღნიშნული სიტუაცია შეიძლება აღვწეროთ ასევე დისკრეტული გრაფიკით

დისკრეტული გრაფიკი



როგორც ხედავთ, გრაფიკებით და დიაგრამებით შესაძლებელია ინფორმაციის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა. ამისათვის საჭიროა ინფორმაციაში გამოვყოთ მონაცემები, დავადგინოთ მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი, შემდეგ ავაგოთ გრაფიკები ან დიაგრამები.

სადისკუსიო კითხვები:

- მოცემულ დიაგრამებზე რატომ არ შეესაბამება სათავეს ყოველთვის წერტილი (0;0)?
- რატომ არის შესაძლებელი საკოორდინატო სიბრტყეზე საკოორდინატო ღერძებზე სხვადასხვა მასშტაბით ერთეულოვანი მონაკვეთის გადაზომვა?

სავარჯიშოები

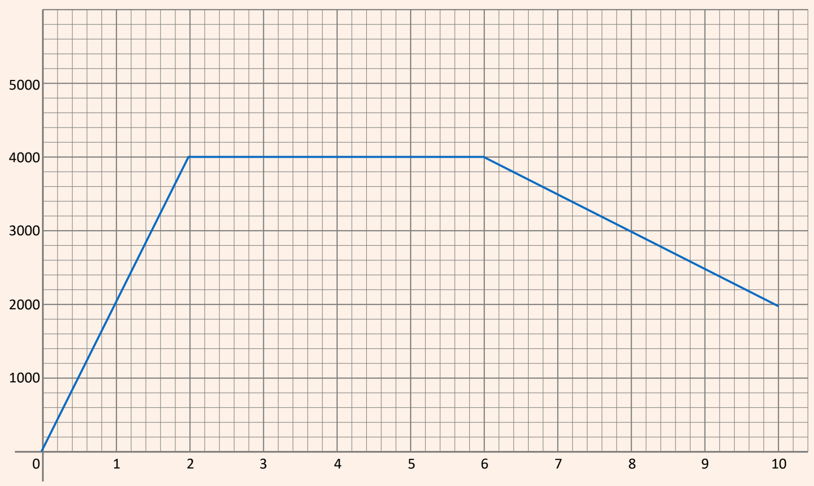
1. დღის 10:00 საათიდან 12:00 საათამდე ტემპერატურა გაიზარდა 20-გრადუსიდან 25 გრადუსამდე, 12:00 საათიდან 14:00 საათამდე 25-დან 30 გრადუსამდე, შემდეგ 3 სთ ტემპერატურა იყო იგივე. გრაფიკზე აღწერეთ მოცემული სიტუაცია.

2. გიორგი გავიდა სახლიდან და 3 სთ-ში გაიარა 5 კმ, შემდეგ გაჩერდა და ისვენებდა 2სთ. დასვენების შემდეგ განაგრძო გზა და გაიარა 4 კმ. დახატეთ გრაფიკი რომელიც აღწერს სიტუაციას.

3. ერთი მანქანა მოძრაობდა და ყოველ წთ-ში გადიოდა 2 კმ-ს, მეორე ყოველ წთ-ში 4 კმ-ს. დახაზეთ ორივე მანქანის მოძრაობის გრაფიკი ერთ სიბრტყეზე.

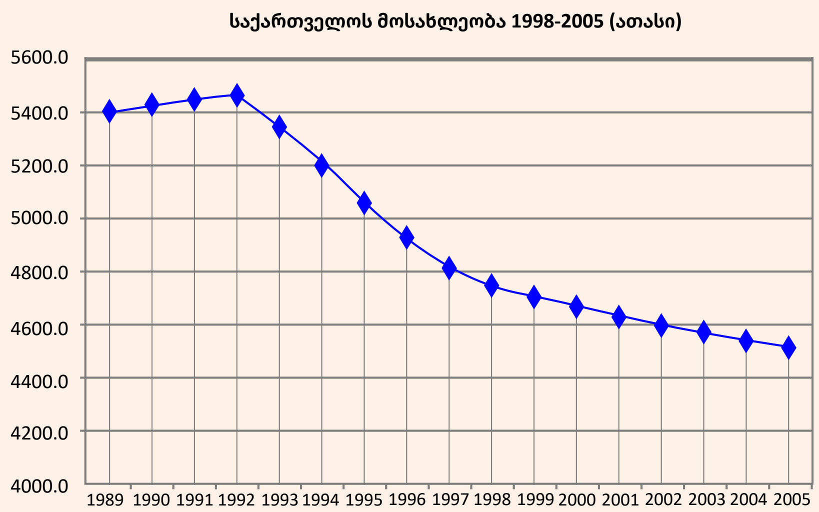
4. ნახაზზე მოცემულია სახლიდან გასული ადამიანის სახლიდან მისი დაშორების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია საათები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე მეტრები.

- იპოვეთ სიჩქარე გზის თითოეულ უბანზე;
- დროის რა მონაკვეთში იყო მანქანა გაჩერებული? დაასაბუთეთ.



5. მოცემულია საქართველოს დემოგრაფიული მდგომარეობის აღმწერი გრაფიკი. ამ გრაფიკის მიხედვით გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

- რომელ წლებში იზრდებოდა საქართველოს მოსახლეობა და რამდენით? (დაახლოებით)
- რომელი წლიდან დაიწყო მოსახლეობის რაოდენობამ კლება?
- რამდენი ადამიანი ცხოვრობდა საქართველოში 1989 წელს? 1997 წელს? 2002 წელს?
- რომელ წელს იყო საქართველოს მოსახლეობა ყველაზე მეტი? ყველაზე ნაკლები? რამდენი იყო მოსახლეობა ამ წლებში?



სავარჯიშოები

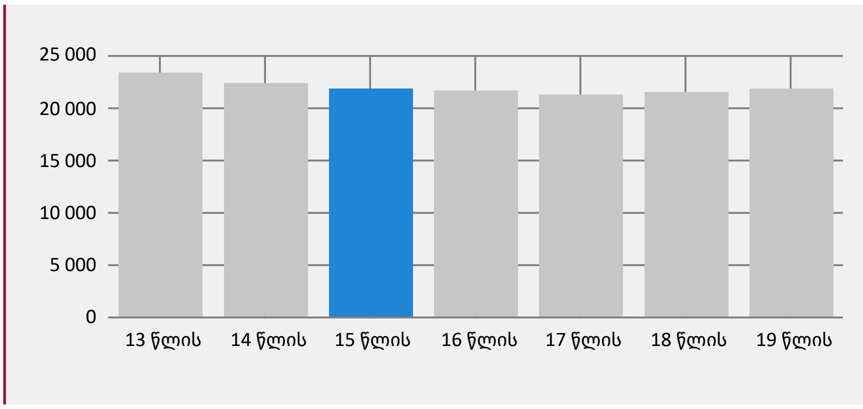
7. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 13 წლიდან 19 წლამდე რამდენი ბიჭი ცხოვრობს საქარ-თველოში. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხე კითხვებს:

ა) მიახლოებით რამდენი 15 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

ბ) მიახლოებით რამდენი 17 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

გ) სულ რამდენი 13 წლიდან 19 წლამდე ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

ინფორმაცია აღებულია ვებ-გვერდიდან www.juniors.geostat.ge



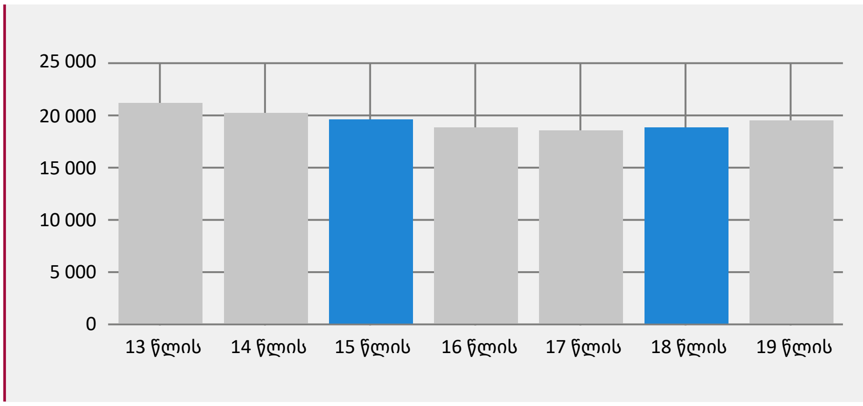
8. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 13 წლიდან 19 წლამდე რამდენი გოგო ცხოვრობს საქარ-თველოში. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხე კითხვებს:

ა) მიახლოებით რამდენი 18 წლის გოგო ცხოვრობს საქართველოში?

ბ) მიახლოებით რამდენი 14 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

გ) სულ რამდენი 13 წლიდან 19 წლამდე გოგო ცხოვრობს საქართველოში?

ინფორმაცია აღებულია ვებ-გვერდიდან www.juniors.geostat.ge



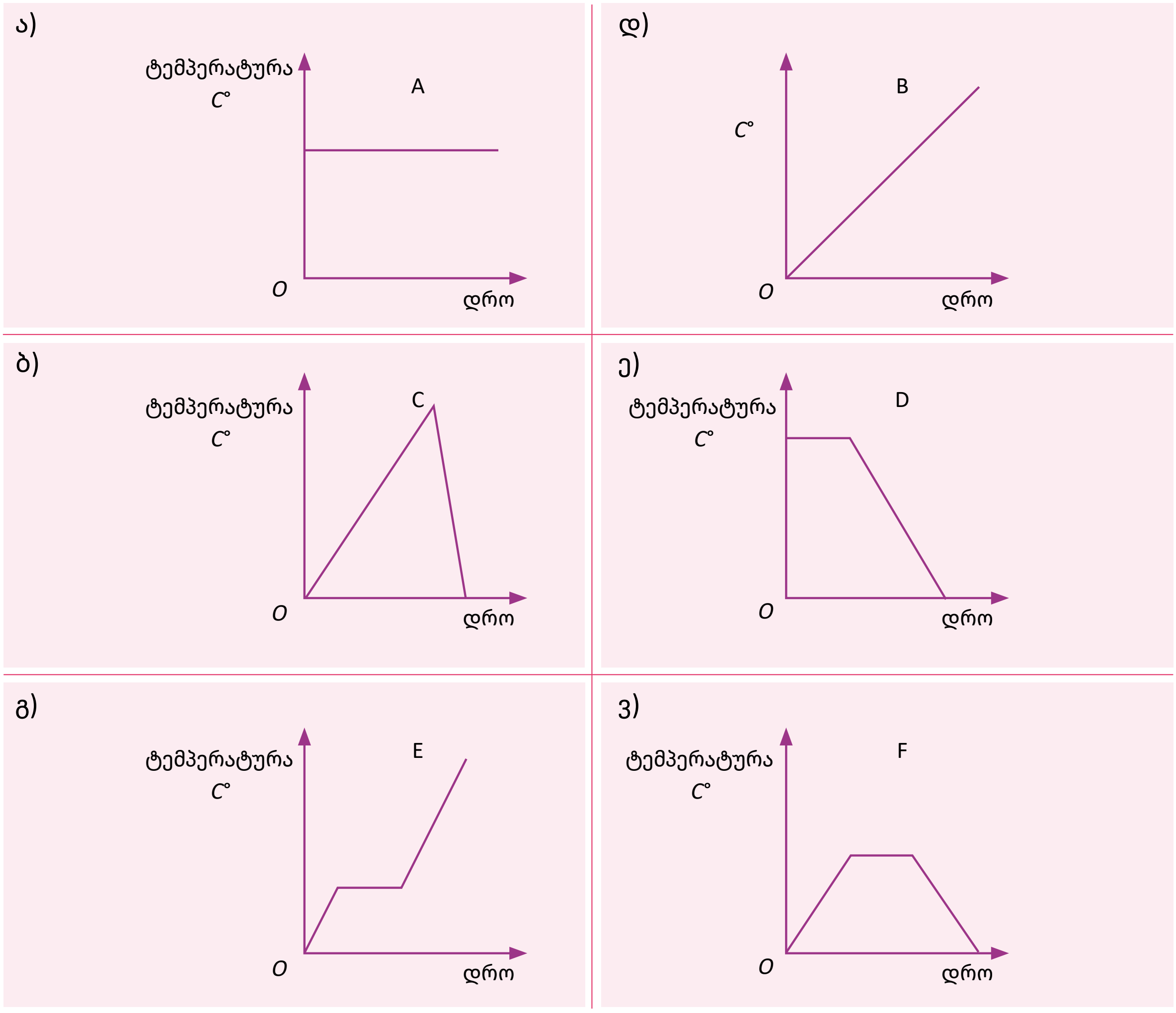
9. მე-7 და მე-8 დავალებებიდან გამომდინარე შეადარეთ:

ა) 14 წლის ასაკის ბიჭი უფრო მეტი ცხოვრობს საქართველოში თუ გოგო?

ბ) 18 წლის ასაკის გოგო უფრო მეტი ცხოვრობს საქართველოში თუ ბიჭი?

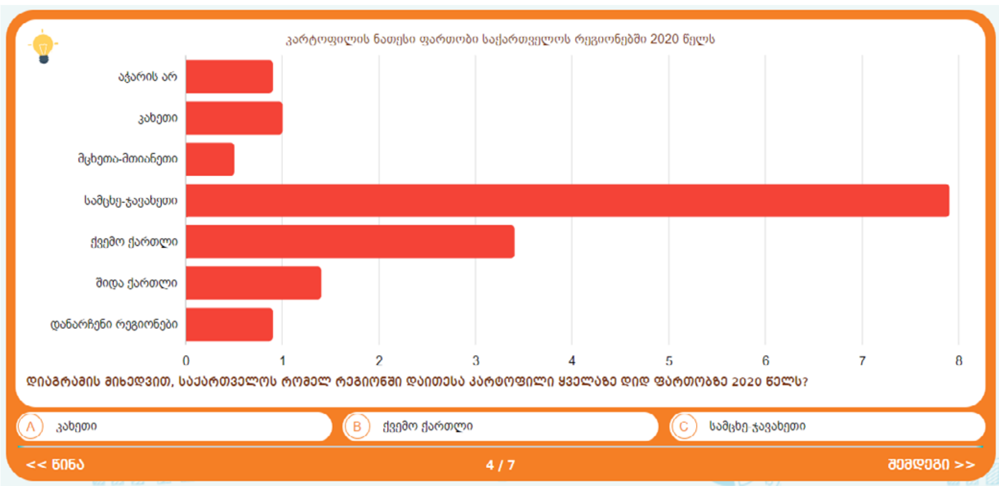
10. გრაფიკით მოცემულია ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულება. აღწერეთ თითოეული გრა-ფიკი (საჭიროების შემთხვევაში შემოიტანეთ დამატებითი ინფორმაცია).

სავარჯიშოები



11. კავშირი სტატისტიკასთან – ინტერაქტიული დავალება

შედით საიტზე www.juniors.geostat.ge და უპასუხეთ კითხვებს:



3.3. სიმრავლე, მოქმედებები სიმრავლეზე

სიმრავლე არის სიმბოლოების, საგნების, ობიექტების ერთობლიობა. სიმრავლე შეიძლება იყოს: ადამიანების, საგნების, ობიექტების, ცხოველების, კომპანიების და ა.შ.

სიმრავლე შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო.

საგნებს, ობიექტებს, სიმბოლოებს, რომელთა ერთობლიობაცაა სიმრავლე, **სიმრავლის ელემენტები** ეწოდება.

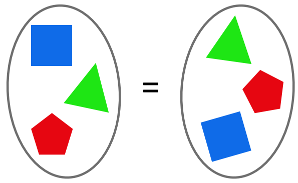
სიმრავლის აღნიშვნა	■ სიმრავლე აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: A, B, C... ■ სიმრავლის ელემენტებს ვწერთ ფიგურულ ფრჩხილებში { } ■ სიმრავლე შეიძლება იყოს მოცემული სიტყვიერად	მაგალითად, A არის ერთნიშნა დადებითი რიცხვების სიმრავლე A = {ერთნიშნა დადებითი რიცხვების სიმრავლე} A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}
სიმბოლოების მნიშვნელობები	$\in$ – „ეკუთვნის“ $\notin$ – „არ ეკუთვნის“ n(A) – რამდენი ელემენტია სიმრავლეში	■ 1$\in$ A – ნიშნავს, 1 არის A სიმრავლის ელემენტი ■ 15 $\notin$ A – ნიშნავს, 15 არ არის A სიმრავლის ელემენტი ■ n(A) = 9, A სიმრავლეში 9 ელემენტია
ცარიელი სიმრავლე	■ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არცერთ ელემენტს, **ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება.	$\varnothing$ – ცარიელი სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო
უნივერსალური სიმრავლე	■ უნივერსალური სიმრავლე არის ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს განხილულ შემთხვევაში ყველა მოცემულ სიმრავლეს.	U – უნივერსალური სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო.

ტოლი სიმრავლეები

■ სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი ზუსტად ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგება.

ტოლი სიმრავლეები

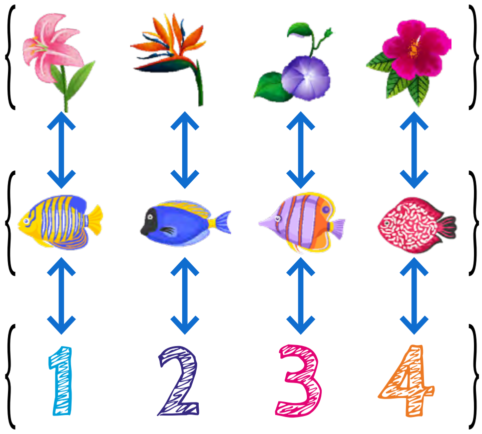
A = {1,2,3,4} და B = {1,2,3,4}   A = B



ბიექცია

■ თუ ორ სიმრავლეში შეგვიძლია დავაწყვილოთ ელემენტები ისე, რომ არცერთი ელემენტი არ დარჩეს შესაბამისი წყვილის გარეშე, ვიტყვით, რომ ასეთ დაწყვილებას ჰქვია **ბიექცია**.

სიმრავლიდან ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი მეორე სიმრავლიდან.



სავარჯიშოები

1. გამოიყენეთ სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლოები და ჩაწერეთ შემდეგი სიმრავლეები:

ა) A არის 20-ზე ნაკლები ლუწი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე;
ბ) B არის ნატურალური კენტი რიცხვების სიმრავლე 10-დან 24-მდე;
გ) C არის 40-ზე ნაკლები 5-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე;
დ) D არის 35-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების სიმრავლე;
ე) E არის 90-ზე ნაკლები 8-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე;
ვ) F არის 70-ზე ნაკლები იმ რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც 6-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევენ 3-ს;
ზ) G არის 30-ზე მეტი და 90-ზე ნაკლები იმ რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც 3-ზე და 4-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევენ 2-ს;
თ) H არის წესიერი წილადების სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელია 9;
ი) M არის $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლები და $\frac{1}{3}$-ზე მეტი იმ წილადების სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელია 60;
კ) T არის 10-ზე მეტი ერთნიშნა რიცხვების სიმრავლე.

2. იპოვეთ თითოეული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა:
ა) n**(A)**; ბ) n**(B)**; გ) n**(C)**; დ) n**(D)**; ე) n**(E)**; ვ) n**(F)**; ზ) n**(G)**; თ) n**(H)**; ი) n**(M)**; კ) n**(T)**.

სავარჯიშოები

3. მოცემულია სიმრავლე A = {2; 4; 5; 6; 10; 12; 14; 18; 22; 26; 28}. შესაბამისი სიმბოლოების გამოყენებით ჩაწერეთ:

ა) 5 ეკუთვნის A სიმრავლეს;

ბ) 14 ეკუთვნის A სიმრავლეს;

გ) 23 არ ეკუთვნის A სიმრავლეს;

დ) 17 არ ეკუთვნის A სიმრავლეს;

ე) სიმრავლე B = {5; 6; 12; 14} არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

გ) სიმრავლე C = {4; 10; 22; 26; 28} არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

დ) სიმრავლე D = {2; 9; 18; 22; 29} არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

ე) სიმრავლე E = {2; 9; 18; 22; 29} არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე.

4. მოცემულია M = {5;10;15;20;25; 30; 35; 40} და N = {10; 20; 30; 40; 50} ორი სიმრავლე. ქვემოთ მოცემული ჩანაწერებიდან რომელია სწორი და რომელი არასწორი?

ა) $5 \in N$;	დ) $40 \notin N$;	ზ) $25 \in M$;	კ) $45 \in M \cap N$;
ბ) $20 \notin N$;	ე) $25 \in N$;	თ) $50 \notin M$;	ლ) $30 \in M \cup N$;
გ) $15 \in M$;	ვ) $35 \notin N$;	ი) $35 \notin M \cap N$;	მ) $20 \notin M \cup N$.

5. მოცემულია სიმრავლეები M = {3; 5; 11} და N = {12; 16; 24; 28}. დაწერეთ თითოეული სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე.

6. იპოვეთ $A \cup B$; $n(A \cup B)$ და $A \cap B$, $n(A \cap B)$, თუ მოცემულია, რომ

ა) A = {1; 4; 9; 15} და B = {1; 5; 9; 13; 17} ;

ბ) A = {4; 7; 11; 16; 22} და B = {11; 22; 33; 44} ;

გ) A = {14; 16; 19; 21; 24; 30} და B = {12; 16; 19; 20; 24};

დ) A = {–12; –5; 0; 1; 7} და B = {–15;–5; 0; 5; 10};

ე) A = {a; b; c; d; e} და B = {b; d; e; k};

ვ) A = {c; e; h; k; 9; 17} და B = {e; f; h; 5; 9; 14; 19}.

3.4. ფუნქცია

გაკვეთილზე კლასში მოსწავლეები სხედან კონკრეტულ მაგიდასთან. კლასში არის მოსწავლეების სიმრავლე და მაგიდების სიმრავლე, როდესაც მოსწავლეებს აქვთ თავიანთი ადგილები, ე.ი. ყოველი მაგიდა დაკავშირებულია კონკრეტულ მოსწავლესთან, ყოველ მოსწავლეს შეესაბამება კონკრეტული მაგიდა.

განვიხილოთ მაგალითები და უფრო დეტალურად გავიგოთ რას ნიშნავს შესაბამისობა მათემატიკაში და როგორ არის შესაძლებელი მათი წარმოდგენა.

ინფორმაციის წარმოდგენა ცხრილით

თვე	შობადობა
იანვარი	4000
თებერვალი	3000
მარტი	5000
აპრილი	2000
მაისი	7000
ივნისი	3000
ივლისი	5000
აგვისტო	4000

ჩვენ შეგვიძლია დავაწყვილოთ ინფორმაცია და წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

(იანვარი; 4000), (თებერვალი; 3000)
(მარტი; 5000), (აპრილი; 2000)
(მაისი; 7000), (ივნისი; 3000)
(ივლისი; 5000), (აგვისტო; 4000)

ზემოთ მოცემული მაგალითიდან გამომდინარე, დავუშვათ მოცემულია ორი სიმრავლე, ერთი სიმრავლის ელემენტები წარმოადგენენ თვეებს, ხოლო მეორე სიმრავლის ელემენტები რიცხვებს, უფრო კონკრეტულად

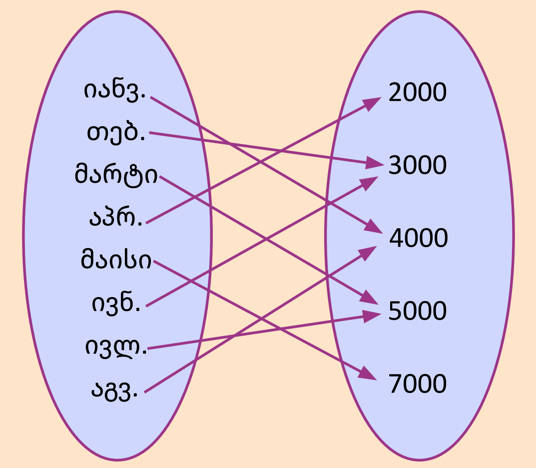
A = {იანვარი, თებერვალი, მარტი, აპრილი ,მაისი, ივნისი, ივლისი, აგვისტო}

B = {2000, 3000, 4000, 5000, 7000}

როგორც ვნახეთ, A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთი ელემენტი B სიმრავლიდან, ვიტყვით, რომ A და B სიმრავლეებს შორის დამყარდა შესაბამისობა.

აღნიშნული შესაბამისობა შეიძლება წარმოვადგინოთ, სხვა ფორმით:

A სიმრავლე	B სიმრავლე



ვიტყვით, რომ A სიმრავლე ავსახეთ B სიმრავლეში.

A და B სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს მიმართება (A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ელემენტი)

თუ გავაანალიზებთ:

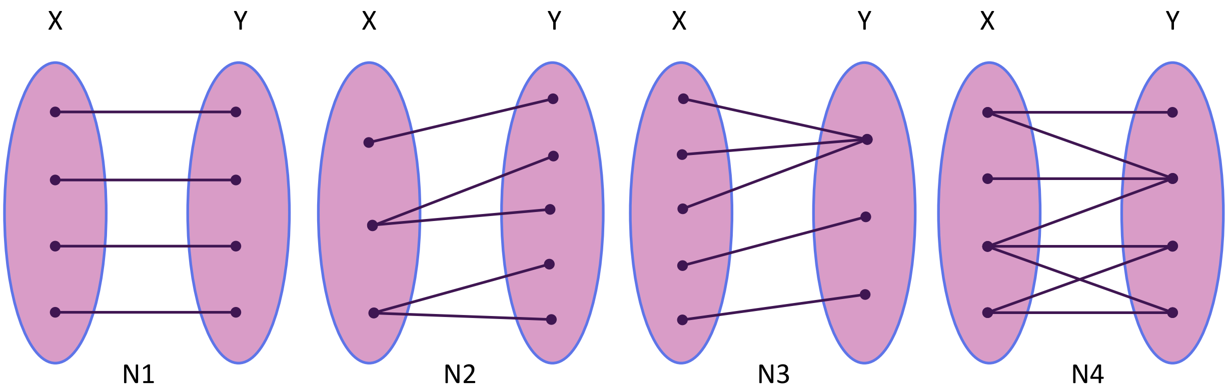
$n(A) = 8$ (A სიმრავლეში 8 ელემენტია)

$n(B) = 5$ (B სიმრავლეში 5 ელემენტია)

მაგ., 3000 შეესაბამება ორ თვეს, ისევე, როგორც 4000 და 5000.

ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა ტიპის მიმართებები (ელემენტებს შორის შესაბამისობები), განვიხილოთ 4 დიაგრამა.

მოცემულია ორი X და Y სიმრავლეები



N1 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი Y სიმრავლიდან.

N2 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის ერთ ელემენტს შეიძლება შეესაბამებოდეს Y სიმრავლიდან 1 ან 2 ელემენტი.

N3 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის სამ ელემენტს შეიძლება შეესაბამებოდეს Y სიმრავლიდან ერთი ელემენტი.

N4 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა ტიპის შესაბამისობები.

საკვანძო კითხვა: შეიძლება თუ არა, რომ თითოეულ დიაგრამას (შესაბამისობის ტიპს) ჰქონდეს სახელი?

ორი X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, ფუნქცია ეწოდება. **ფუნქცია** შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით;

N1 და N3 დიაგრამებით მოცემული შესაბამისობების გათვალისწინებით ვიტყვით, რომ N1 და N4 დიაგრამებით მოცემულია ფუნქცია.

X სიმრავლეს, ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება

Y სიმრავლეს – ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე

ფუნქცია მნიშვნელოვანი ცნებაა მათემატიკაში და მისი წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით: სიტყვიერად, ცხრილით, ფორმულით (ანალიზურად), დიაგრამით, ნახაზით, ნახატით.

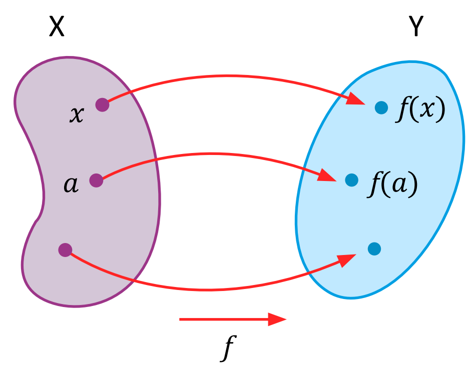
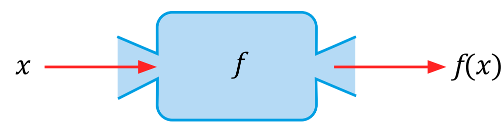
ფუნქცია, ფუნქციის აღნიშვნა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ფუნქცია ხშირად მოცემულია გარკვეული წესით;

როდესაც ორი X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის დგინდება შესაბამისობა f-წესით, ისე, რომ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, ვამბობთ, რომ მოცემულია ფუნქცია f-წესით, ვწერთ $y = f(x)$; სადაც $x \in X$ სიმრავლე წარმოადგენს განსაზღვრის არეს, ხოლო $y \in Y$ სიმრავლე წარმოადგენს მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

Y-სიმრავლის ელემენტები დამოკიდებულია X-სიმრავლის შესაბამის ელემენტებზე; ნებისმიერ ელემენტს X სიმრავლიდან ეწოდება **დამოუკიდებელი** ცვლადი, ხოლო Y სიმრავლიდან შესაბამის ელემენტს – **დამოკიდებული ცვლადი.**

▶ დიაგრამაზე მოცემულია f ფუნქცია

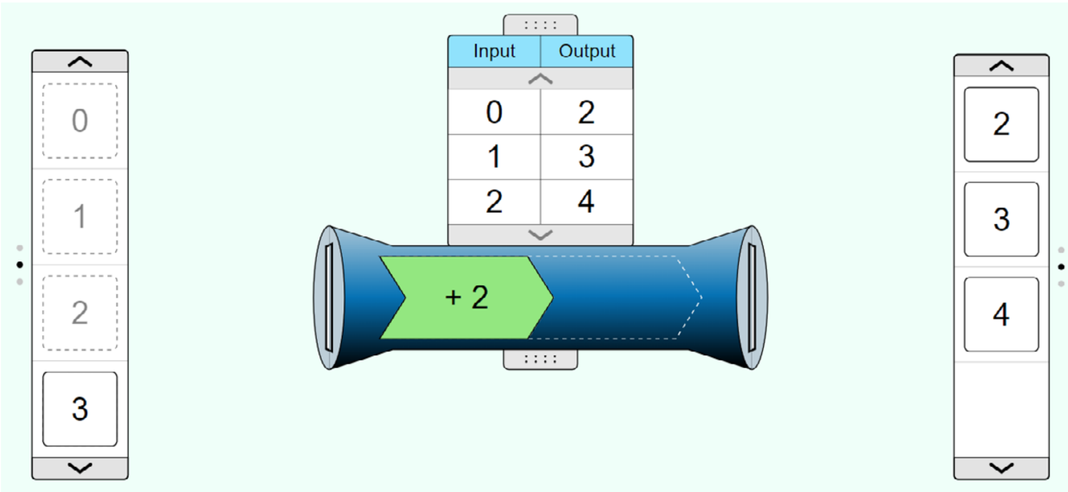
	 მოკლედ ვწერთ შემდეგნაირად: $f: X \to Y$ $y = f(x)$
X-სიმრავლის ყოველ x ელემენტზე, მოქმედებს f-წესი, რის შედეგადაც ვიღებთ შესაბამის y-ს	ვამბობთ, რომ მოხდა X-სიმრავლის ასახვა Y-სიმრავლეში

მითითება: ზოგადად განსაზღვრის არეს აღნიშნავენ სიმბოლოთი D, ხოლო მნიშვნელობათა არეს სიმბოლოთი E.

ნიმუში 1 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

იმისათვის, რომ მეტად აღქმადი იყოს ფუნქცია, ის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია, როგორც გარკვეული მილი, ან დანადგარი, რომელიც მასში შემავალ ობიექტებზე გარკვეული წესით მოქმედებს (დიაგრამაზე მოცემულია წესი).

განვიხილოთ რიცხვითი ფუნქცია, დიაგრამიდან გამომდინარე მოცემულია წესი: განსაზღვრის არიდან აღებულ ნებისმიერ რიცხვს ემატება 2 და შეესაბამება 2-ით მეტი რიცხვი.



ყოველ ელემენტზე განსაზღვრის არიდან მოქმედებს f-წესი, რის შედეგადაც ვიღებთ შესაბამის y-ს, ვიღებთ $(x;y)$ – წერტილთა წყვილს.

ვწერთ $y = x + 2$ ან $f(x) = x + 2$;

როდესაც $x = 2$, ვიღებთ $f(2) = 2 + 2 = 4$;

y-ის მნიშვნელობა დამოკიდებულია x-ის მნიშვნელობაზე; ფუნქციით მოცემულია ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულება

იხილეთ სხვა ნიმუშები ბმულზე: www.phet.colorado.edu

საკვანძო კითხვა: როგორ დავადგინოთ არის თუ არა ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის წარმოდგენილი შესაბამისობა ფუნქცია?

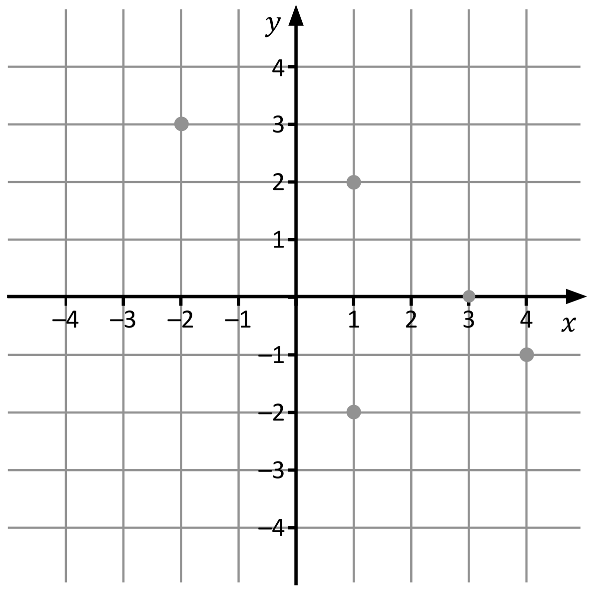
ნიმუში 2 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

ორ X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სხვადასხვა ფორმით: ცხრილით, წერტილთა წყვილებით ($x;y$), წერტილებით საკოორდინატო სიბრტყეზე, გრაფიკით.

- *როგორ დავადგინოთ არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?*

x	y
–2	3
1	2
2	–2
3	0
4	–1

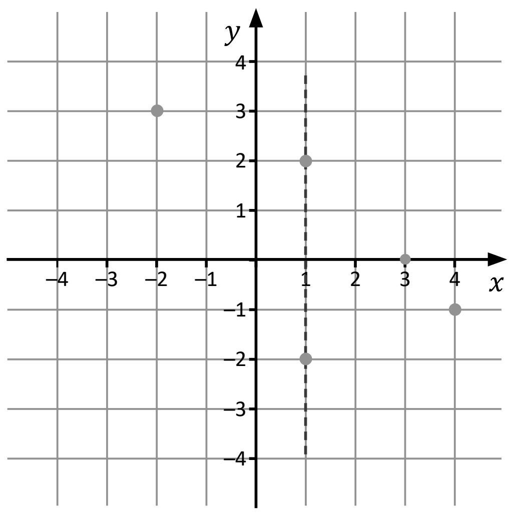
(–2; 3) (1; 2) (1; –2)
(3; 0) (4; –1)



განვიხილოთ ცხრილი:

- ცხრილით ნაჩვენებია, რომ X სიმრავლიდან ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან გარკვეული ელემენტი;
- ცხრილში მოცემული ინფორმაცია დაორგანიზებულია და წარმოდგენილია, როგორც წერტილთა წყვილი;
- ინფორმაცია ასახულია (გადატანილი) საკოორდინატო სიბრტყეზე, რომელიც მეტად თვალსაჩინოა.

ფუნქციის განმარტების თანახმად, X სიმრავლიდან ერთ ელემენტს არ შეიძლება შეესაბამებოდეს ორი სხვადასხვა ელემენტი Y სიმრავლიდან. გრაფიკიდან მარტივად დასადგენია, რომ თუ რომელიმე ვერტიკალურ წრფეზე მდებარეობს შესაბამისობის ორი ან მეტი წერტილი, მაშინ ეს შესაბამისობა არაა ფუნქცია. ე.ი. მოცემული შესაბამისობა არ არის ფუნქცია.

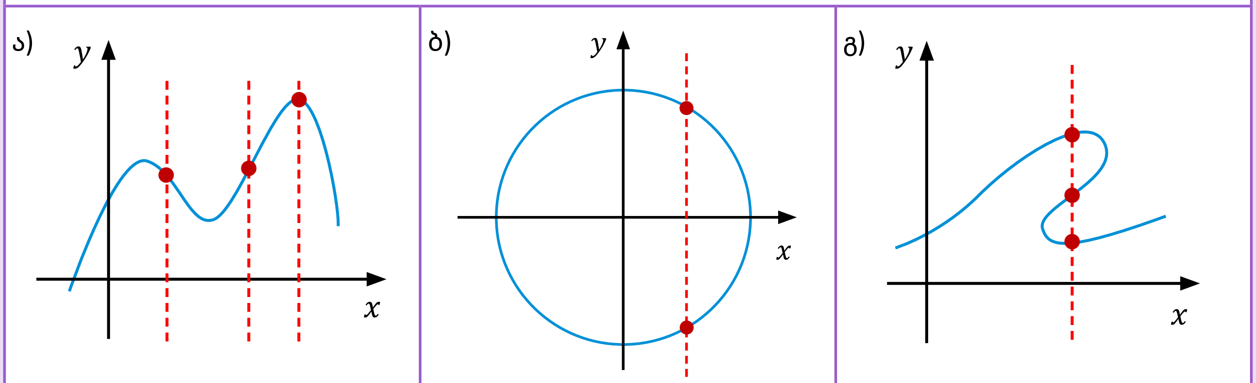


ნიმუში 3 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

საკვანძო კითხვა: როდესაც შესაბამისობა მოცემულია გრაფიკით, როგორ დავადგინოთ არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?

ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის მაგალითები

თუ გრაფიკს ვერტიკალურად დახაზული წრფე მხოლოდ ერთ წერტილში კვეთს, ვამბობთ, რომ მოცემულია ფუნქცია. თუ კვეთს ერთზე მეტ წერტილში, მაშინ არ არის ფუნქცია (თუ წრფე კვეთს ორ წერტილში, ე.ი. x-ცვლადის ერთი მნიშვნელობისთვის გვაქვს y-ცვლადის ორი მნიშვნელობა); აღნიშნულ მეთოდს ვერტიკალური წრფის ტესტი ეწოდება.



ა) ფუნქცია

ბ) არ არის ფუნქცია

გ) არ არის ფუნქცია

სიტყვიერად: ფუნქცია გვიჩვენებს ორ X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის ისეთ შესაბამისობას, როდესაც ყოველ x ელემენტს (ცვლადს) X სიმრავლიდან, შეესაბამება ერთი y ელემენტი (ცვლადი) Y სიმრავლიდან. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით;

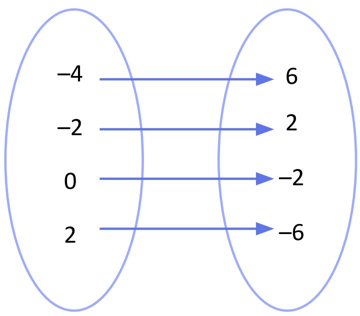
ცხრილით

x	y
–4	6
–2	2
0	–2
2	–6

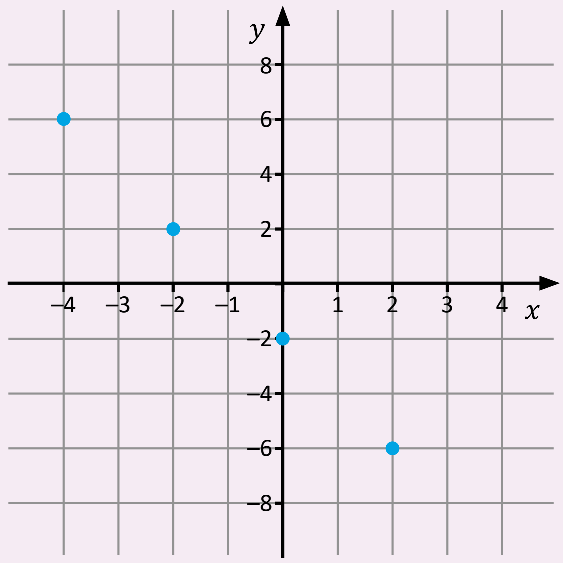
განსაზღვრის არე: {–4,–2, 0, 2}

მნიშვნელობათა სიმრავლე: {6, 2, –2, –6}

დიაგრამით



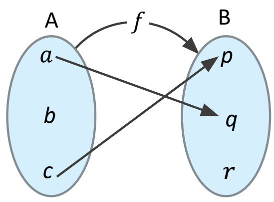
გაგრძელება

წერტილთა წყვილით	**გრაფიკით**
(–4; 6), (–2; 2), (0; –2), (2; –6)	

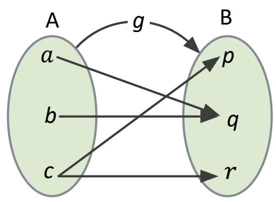
სავარჯიშოები

1. დაადგინეთ, ქვემოთ წარმოდგენილი დიაგრამებიდან რომელზეა მოცემული ფუნქცია? დიაგრამებიდან ამოწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

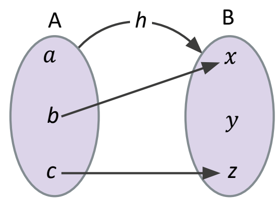
ა)



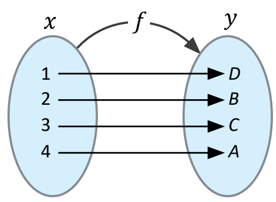
ბ)



გ)

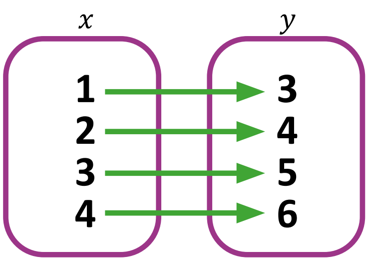
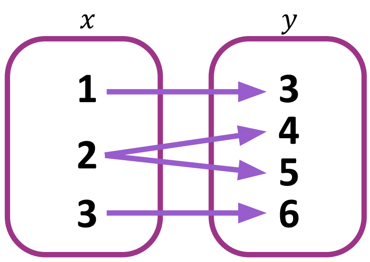


დ)



2. მოცემულია ორი რიცხვითი სიმრავლე X და Y

ა) ამოწერე თითოეული სიმრავლის ელემენტები;
ბ) ამოწერე დაკავშირებული (x,y) წყვილი;
გ) იმსჯელე, რომელი წარმოადგენს ფუნქციას და რომელი არა.

I ნიმუში	II ნიმუში
	

სავარჯიშოები

3. მოცემული წერტილთა წყვილები დაალაგეთ დიაგრამებით, ასევე გადაიტანეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და დაადგინეთ, რომელი შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას. ამოწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

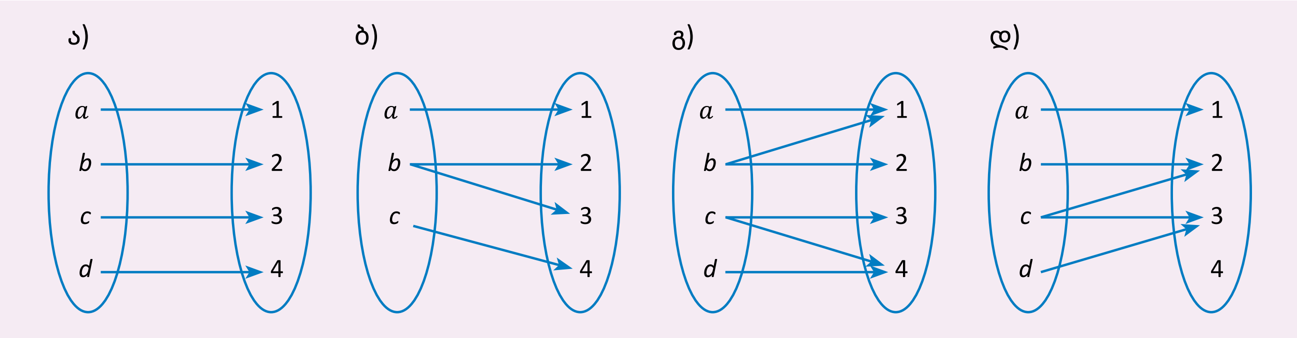
ა) (2; 7); (–1; –5); (-3 ; 6); (–1; 8); (4; 6); (0; –5);

ბ) (1; 4) ; (0; –3); (2; 9); (1; –3) ; (–1; 9); (0; 8);

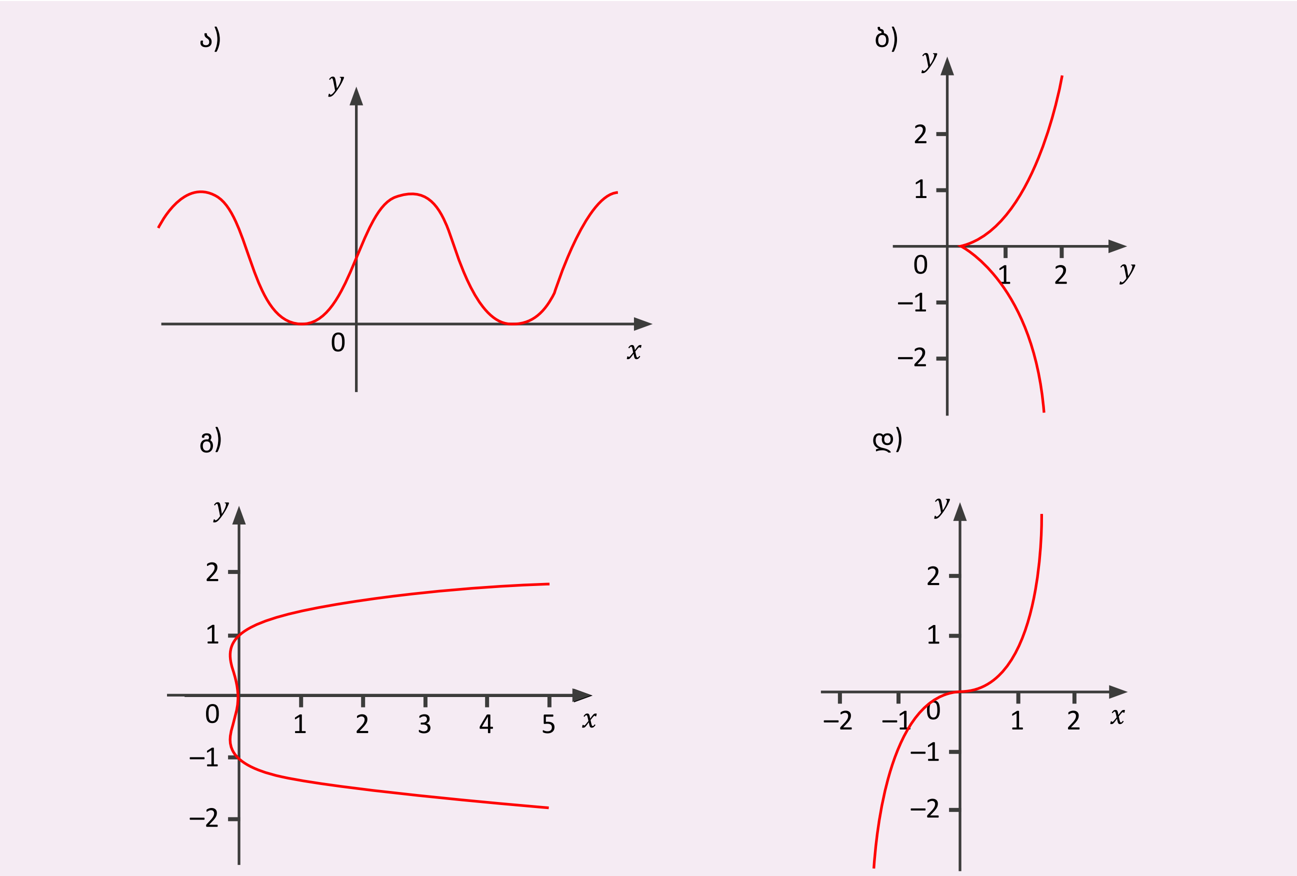
გ) (–3; 1,5) ; (–2 ; –6); (4; 0); (3; 1,5); (–2; 0); (1; 7);

დ) (4; –8) ; (1,3; –7); (4 ; 6,5); (–5 ; 9) ; (1,3; –6); (0; –3); (4; 6,5) ; (–2; 0).

4. ქვემოთ მოცემული დიაგრამებიდან რომელი წარმოადგენს ფუნქციას? პასუხი დაასაბუთეთ.



5. ვერტიკალური წრფის ტესტით შეამოწმეთ, რომელი გრაფიკით არის მოცემული ფუნქცია:



სავარჯიშოები

6. მთასვლელთა ჯგუფი გაემართა ძირითადი ბანაკიდან მწვერვალის დასალაშქრად. ჯგუფის ხელმძღვანელი ყოველ ორ საათში ინიშნავდა ბანაკიდან მათ დაშორებას სიმაღლის მიხედვით. ცხრილში მოცემულია პირველ 12 საათში ჩანიშნული მონაცემები.

დრო (სთ)	2	4	6	8	10	12
სიმაღლე (მეტრი)	60	100	130	180	210	210

თქვენი დავალება:

ა) ჩამოწერეთ შესაბამისობის წყვილები და გამოსახეთ ისინი საკოორდინატო სიბრტყეზე;

ბ) მიღებული წერტილები შეაერთეთ მონაკვეთებით და მიიღეთ ფუნქციის გრაფიკი;

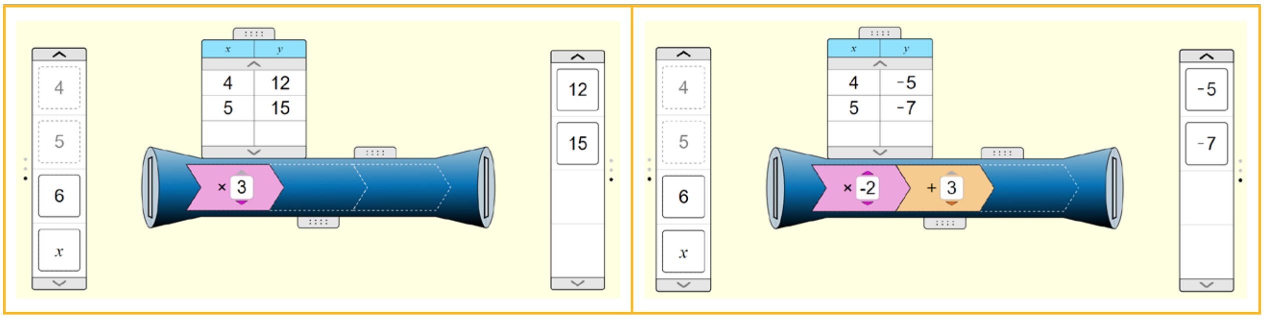
გ) გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ დაახლოებით რა სიმაღლეზე იქნებოდა ჯგუფი ბანაკიდან 5 სთ-ზე? 9 სთ-ზე? 11 სთ-ზე?

7. მოცემულია ფუნქცია თვალსაჩინო ნიმუშით:

I. დაადგინეთ რა წესი მოქმედებს თითოეულ რიცხვზე;

II. ჩაწერეთ შესაბამისი გამოსახულება;

III. იპოვეთ $f(2)$; $f(6)$; $f(-2)$; $f(-5)$.



8. შედით ვებ-გვერდზე Phet.colorado.edu ფუნქციები, შეადგინეთ მე-7 დავალების მსგავსი დავალებები და შეასრულეთ.

3.5. ფუნქციის მოცემის ხერხები, წრფივი ფუნქცია

3.5.1 სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა სიტყვიერად, ცხრილით, ანალიზურად (ფორმულით), გრაფიკულად.

კონკრეტული მაგალითის ნიმუშზე განვიხილოთ, თუ როგორ ხდება ინფორმაციის წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით. ასევე, განვიხილოთ რას ნიშნავს სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება (სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულება).

განვიხილოთ მოძრაობის აღწერა

წინარე მასალის გამეორება

ვიცით, რომ ორ ცვლადს შორის დამოკიდებულებას, როდესაც ერთი ცვლადის რამდენიმე-ჯერ გაზრდით (ან შემცირებით) მეორე ცვლადიც იმდენჯერ იზრდება (ან მცირდება), **პირდა-პირპროპორციული დამოკიდებულება** ეწოდება.

პირდაპირპროპორციის დროს მუდმივია ორი შესაბამისი ცვლადის შეფარდება.

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა შესაძლებელია:

1. სიტყვიერად;
2. ცხრილის მეშვეობით;
3. ანალიზურად (ფორმულით, განტოლებით);
4. გრაფიკის მეშვეობით.

▶ **განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა:**

დავუშვათ ვიცით, რომ მანქანა მოძრაობს 120 კმ/სთ სიჩქარით, როგორ შეიძლება მოცემული სიტუაციის აღწერა სხვადასხვა მეთოდით.

1. **სიტყვიერი აღწერა:** მანქანა მოძრაობს თანაბრად და ყოველ ერთ საათში გადის 120 კმ-ს.

2. დავაორგანიზოთ **ინფორმაცია ცხრილის** მეშვეობით.

დრო (სთ)	1	2	5	10
გავლილი გზა (კმ)	120	240	600	1200

3. **სიტუაციის ფორმულირება (მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა)**

ზემოთ მოცემული მაგალითიდან გამომდინარე, დახარჯულ დროსა და, შესაბამისად, გავლილ მანძილს შორის დამოკიდებულება პირველში აღწერილია სიტყვიერად, ხოლო მეორეში ინფორმაცია დაორგანიზებულია ცხრილში.

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ სიჩქარე გვიჩვენებს განვლილი მანძილის შეფარდებას შესაბამის დახარჯულ დროსთან. მოკლედ, თანაბარი მოძრაობის დროს სიჩქარე გვიჩვენებს, თუ რამდენ მანძილს გადის მანქანა დროის ერთეულში.

გაგრძელება

დროის 5-ჯერ გაზრდით, გავლილი მანძილი 5-ჯერ გაიზარდა.

ცხრილიდან ჩანს, რომ მანძილისა და დროის ფარდობა $\frac{\text{გავლილი მანძილი}}{\text{დრო}}$ მუდმივია, ე.ი. სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია.

ვიცით, რომ
გავლილი მანძილი = სიჩქარე · დროზე

მოვახდინოთ **სიტუაციის ფორმულირება:**
ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ

- გავლილი მანძილი აღინიშნება სიმბოლოთი – S
- სიჩქარე აღინიშნება სიმბოლოთი – v
- დრო აღინიშნება სიმბოლოთი – *t*

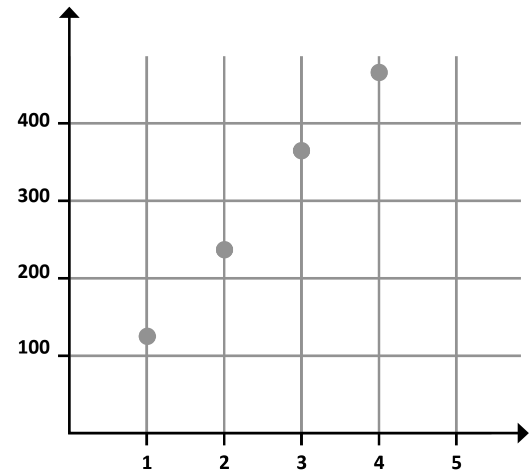
$$S = v \cdot t$$

მინიშნება: სიტუაციის ფორმულირებისას, მათემატიკური მოდელის ჩასაწერად მათემატიკაში ვიყენებთ სიმბოლოებს (უმეტესად ლათინურ ასო-ბგერებს).

4. სიტუაციის გრაფიკული წარმოდგენა

მანქანა ყოველ ერთ საათში გადის 120 კმ-ს.

დრო (სთ)	გავლილი მანძილი (კმ)	(დრო; გავლილი მანძილი) (კოორდინატი)
1	120	(1 ; 120)
2	240	(2 ; 240)
3	360	(3 ; 360)
4	480	(4 ; 480)



გრაფიკის აგება

გადავიტანოთ მონაცემები (დრო, გავლილი მანძილი) საკოორდინატო სიბრტყეზე. x ღერძს შევუსაბამოთ დრო, ხოლო y ღერძს გავლილი მანძილი. ვიცით, რომ:

- გავლილი მანძილი = სიჩქარე · დროზე
- სიჩქარე 120 კმ/სთ მუდმივია

გავლილი მანძილი = 120 · დროზე

აღნიშნული დამოკიდებულება ცვლადებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$S = 120 \cdot t$$

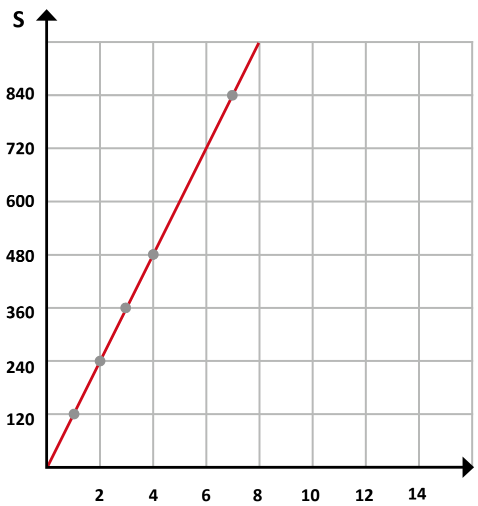
თუ ზემოთმოყვანილ გამოსახულებას ჩავწერთ x-ის და y-ის მეშვეობით მივიღებთ:

$$y = 120 \cdot x$$

მივიღეთ ორცვლადიანი განტოლება

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების ზოგადი სახეა $y = k \cdot x$,

- სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია და იგი მუდმივია.



გაგრძელება

წრფივი თანაბარი მოძრაობის დროს k-შეესაბამება სიჩქარეს, რომელიც არ იცვლება.	მას შემდეგ, რაც საკოორდინატო სიბრტყეზე გადავიტანთ წყვილებს (დრო, გავლილი მანძილი), დავინახავთ, რომ ყველა წერტილი მდებარეობს ერთ წრფეზე. შესაბამისად ვიტყვით, რომ **პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი არის წრფე.**

თუ წრფეზე ავიღებთ ნებისმიერ წერტილს და შევამოწმებთ ის დააკმაყოფილებს ფორმულას.

- რას ნიშნავს გრაფიკიდან აღებული წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს ფორმულას? მაგალითად განვიხილოთ წერტილი (7; 840), რომელიც მდებარეობს გრაფიკზე. ჩავსვათ მოცემული მონაცემები ფორმულაში

$$S = 120 \cdot t$$

$$120 \cdot 7 = 840$$

ე.ი. წრფიდან აღებული ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს ფორმულას.

საკვანძო კითხვა:

- *რას ნიშნავს, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი არის ყოველთვის წრფე?*

ორი X და Y სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს (x ელემენტს) შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი (y ელემენტი), **ფუნქცია** ეწოდება.

ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს: სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ფორმულით/განტოლებით, გრაფიკის მეშვეობით.

$y = k \cdot x$ ფორმულით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება. პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევაა. ვამბობთ, y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.

მინიშნება: წრფივი ფუნქციისთვის k მუდმივს ეწოდება დახრილობა ან კუთხური კოეფიციენტი.

X სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.
Y სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ნებისმიერ x ელემენტს X-სიმრავლიდან დამოუკიდებელი ცვლადი ეწოდება; ხოლო ნებისმიერ y ელემენტს Y-სიმრავლიდან – დამოკიდებული ცვლადი.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითიდან გამომდინარე, როდესაც მანქანა მოძრაობს თანაბრად, გავლილ მანძილსა და დახარჯულ დროს შორის არსებობს ფუნქციური დამოკიდებულება.

- ერთმანეთთან დაკავშირებულია ორი სიმრავლის ელემენტები, დრო და გავლილი მანძილი, ვიცით, რომ სიჩქარე მუდმივი სიდიდეა.
- დროის ცვლილებით იცვლება გავლილი მანძილიც, დრო და გზა ცვლადი სიდიდეებია.
- დრო, მოცემულ სიტუაციაში, წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო გავლილი მანძილი დროზე დამოკიდებულ ცვლადს.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია, არის წრფივი ფუნქციის კერძო სახე

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება წრფივი ფუნქციის ერთ-ერთი გამოვლენაა, კერძო შემთხვევა, რომელზეც უფრო დეტალურად ვისაუბრებთ შემდეგ პარაგრაფში.

საკვანძო კითხვა: რატომ ეწოდება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება?

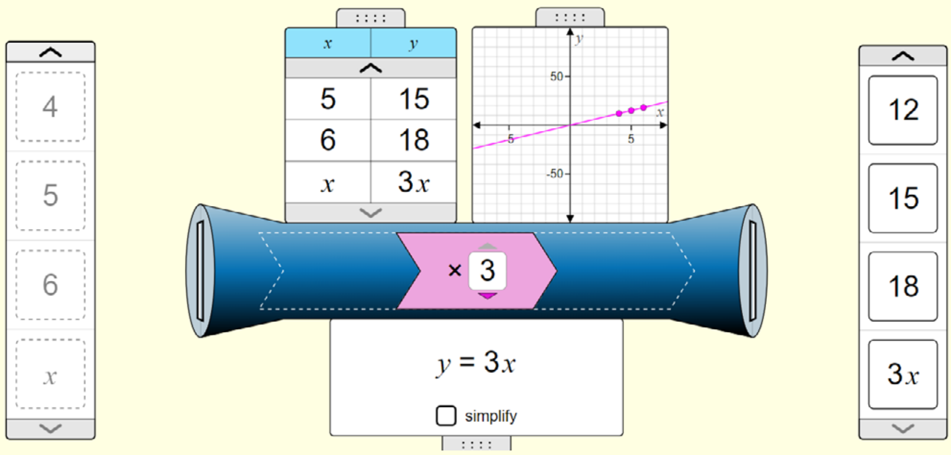
ნიმუში 1

როგორც ვიცით, რომ ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს დამოკიდებულება, რომლის წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით.

განვიხილოთ ორი სიმრავლე, რომელთა ელემენტებს წარმოადგენენ რიცხვები.

განვიხილოთ შემთხვევა, ვხედავთ, რომ ყოველი ელემენტი განსაზღვრის არიდან მრავლდება 3-ზე და შეესაბამება მასზე 3-ჯერ მეტი ელემენტი.

$y = 3x$ ან $f(x) = 3x$



იხილეთ სხვა ნიმუშები ბმულზე: Phet.Colorado.Edu

ნიმუში 2 – კავშირი რეალურ სიტუაციასთან

მოსწავლე აკეთებს დანაზოგს და მას ბანკში მოსწავლის ანგარიშზე ყოველ თვე შეაქვს 20 ლარი, რამდენი ლარი ექნება მოსწავლეს 2,3,4 თვის შემდეგ?

დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა, ასევე წარმოადგინეთ სიტუაცია გრაფიკულად.

საკითხის გააზრება: როგორც ვხედავთ, თვეების გასვლის შემდეგ ანაბარზე თანხა იზრდება, თვესა და ანაბარზე დაგროვებულ თანხას შორის არსებობს დამოკიდებულება.

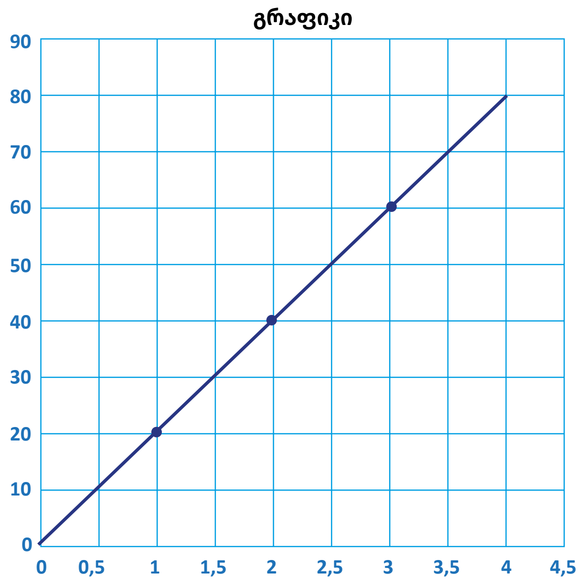
თვე	თანხა ანაბარზე
1	$1 \cdot 20 = 20$
2	$2 \cdot 20 = 40$
3	$3 \cdot 20 = 60$
4	$4 \cdot 20 = 80$

გადავიტანოთ მონაცემები (თვე, თანხა ანაბარზე) საკოორდინატო სიბრტყეზე. დავინახავთ:

- დაგროვებული თანხა = ყოველთვიურ შენატანი · თვეების რაოდენობაზე
- ყოველ თვე მოსწავლე ზოგავს 20 ლარს
- დაგროვებული თანხა = 20 · თვეების რაოდენობაზე

  $y = 20 \cdot x$, იგივე $y = 20x$
- იტყვიან, რომ თვეებსა და ანაბარზე შეგროვებულ თანხას შორის არის **პირდაპირპროპორციული** დამოკიდებულება.

k – მუდმივია



(0;0) გვიჩვენებს, რომ ანაბრის გახსნის დროს მოსწავლეს ანგარიშზე თანხა არ ჰქონდა.

მინიშნება: გამომდინარე იქიდან, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებების გრაფიკი არის წრფე, ხშირად პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება ეწოდება.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი ყოველთვის გადის სათავეზე.

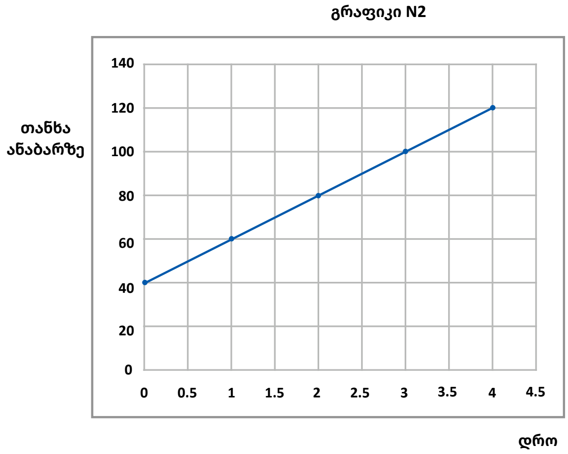
საკითხის განზოგადება:

წარმოვიდგინოთ სიტუაცია, მოსწავლეს თანხის შეგროვებამდე ანაბარზე ჰქონდა თანხა 40 ლარის ოდენობით. ყოველ თვე ის ამატებდა 20 ლარს.

რით განსხვავდება აღნიშნული სიტუაცია წინა სიტუაციისგან?

გაგრძელება

თვე	შეტანილი თანხა	თანხა ანაბარზე
1	$1 \cdot 20 = 20$	$1 \cdot 20 + \mathbf{40} = 60$
2	$2 \cdot 20 = 40$	$2 \cdot 20 + \mathbf{40} = 80$
3	$3 \cdot 20 = 60$	$3 \cdot 20 + \mathbf{40} = 100$
4	$4 \cdot 20 = 80$	$4 \cdot 20 + \mathbf{40} = 120$
....		
x	$x \cdot 20$	$x \cdot 20 + \mathbf{40}$



თუ შევადარებთ ინფორმაციას, პირველ შემთხვევაში სიდიდეებს შორის არსებობს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, მეორე შემთხვევაში აღარ, იმიტომ რომ y-ის შეფარდება x-თან მუდმივი აღარაა.

$$\frac{60}{1} \neq \frac{80}{2} \neq \frac{100}{3}$$

მოვახდინოთ ახალი სიტუაციის ფორმულირება:

როგორც ვხედავთ წინა სიტუაციიდან განსხვავებით აქ დასაწყისში ანაბარზე იყო 40 ლარი.

თუ ანაბარზე დაგროვებული თანხას აღვნიშნავთ y-ით, x თვის შემდეგ ანაბარზე იქნება:

$y = 20 \cdot x + 40$

$y = 20 \cdot x + 40$ მოცემულ ჩანაწერი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას

მინიშნება: დეტალურად წრფივ ფუნქციებზე ვისაუბრებთ შემდეგ პარაგრაფში.

გამომდინარე იქიდან, რომ ანაბარზე თანხის დაგროვებამდე მოსწავლეს ჰქონდა 40 ლარი, გრაფიკის საწყისი წერტილია (0;40).

ისევე როგორც წინა შემთხვევაში მოცემული სიტუაციის გრაფიკიც წარმოადგენს წრფეს, რომელიც არ გადის სათავეზე; ორივე შემთხვევაში y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.

მოცემულია წრფივი დამოკიდებულება, აღნიშნულ წრფივ დამოკიდებულებას წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

მოცემულ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არე არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეა, რადგან თვეები ვერ იქნება უარყოფითი.

მნიშვნელობათა სიმრავლე, პირველ შემთხვევაში არის არაუარყოფითი რიცხვები, ხოლო მეორე შემთხვევაში $y \geq 40$.

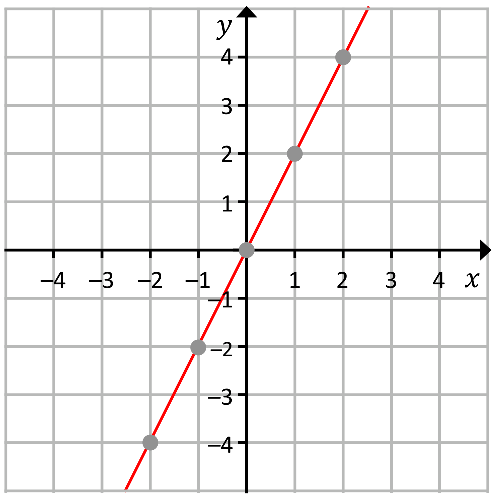
!! ყურადღება მიაქციეთ: პირდაპირპროპორციულობის გრაფიკი არის წრფე, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია არის წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევა.

ნიმუში 3 – პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია

განვიხილოთ $y = 2x$ და $y = -2x$ წრფივი დამოკიდებულება

ა) $y = 2x$

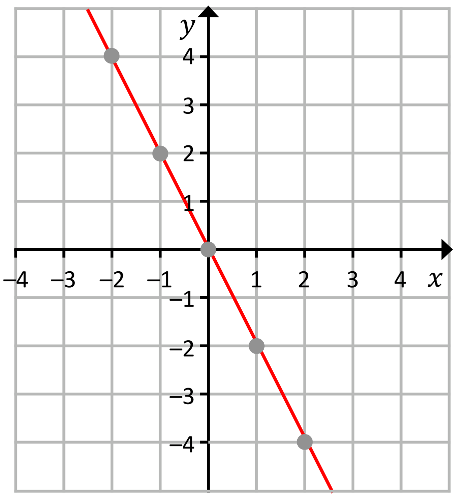
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4



$y = kx$ ფუნქციის გრაფიკია წრფე, როდესაც $k > 0$-ზე წრფე გადის სათავეზე და მდებარეობს I და III მეოთხედებში

ბ) $y = -2x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2	-4



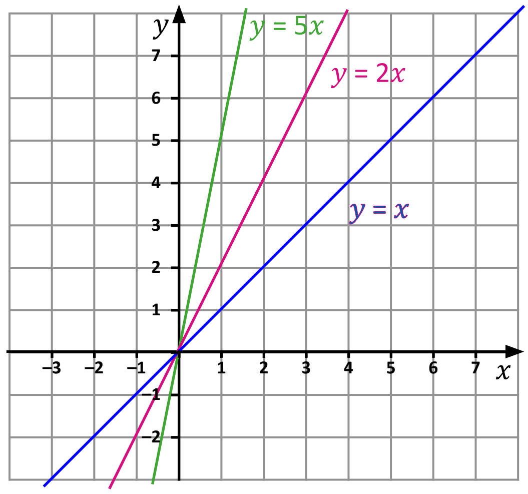
$y = kx$ ფუნქციის გრაფიკია წრფე, როდესაც $k < 0$-ზე წრფე გადის სათავეზე და მდებარეობს II და IV მეოთხედებში

გარდაქმნები

ავაგოთ $y = x$; $y = 2x$; $y = 5x$ პირდაპირპროპორციული ფუნქციის გრაფიკები და გამოვიკვლიოთ, რა გავლენა აქვს k-ს ცვლილებას გრაფიკზე

დიაგრამაზე ვხედავთ სამივე ფუქნციის გრაფიკს

x	$y = x$	$y = 2x$	$y = 5x$
0	0	0	0
1	1	2	5
2	2	4	10



აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება და განვიხილოთ თითოეული ფუნქციის მონაცემები ცალ-ცალკე

შემთხვევა 1: $y = x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

+1 +1 +1

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 1-ით ზრდას

შემთხვევა 2: $y = 2x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

+2 +2 +2

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 2-ით ზრდას

შემთხვევა 3: $y = 5x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	5	10	15

+5 +5 +5

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 5-ით ზრდას

როგორც ვხედავთ, k გავლენას ახდენს y-ის ცვლილებაზე.

ასევე, k გავლენას ახდენს გრაფიკის დახრის კუთხეზე Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

როდესაც k>0-ზე, რაც უფრო იზრდება k კოეფიციენტი, კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის იზრდება.

3.5.2 პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება – თეორიული ნაწილი

ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ როდესაც ორ სიდიდეს შორის არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, აღნიშნული დამოკიდებულების წარმოდგენა შესაძლებელია სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ანალიზურად (ფორმულით, განტოლებით) და გრაფიკულად.

- $y = k \cdot x$ პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება, სადაც k-მუდმივია და ეწოდება პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი;
- როდესაც რეალურ პროცესებს აღვწერთ და ვაკეთებთ მათემატიკურ ფორმულირებას (ვწერთ ფორმულას), x და y ცვლადები შეესაბამება სხვადასხვა სიდიდეს დამოკიდებულებას ეწოდება წრფივი დამოკიდებულება (ცვლად სიდიდეებს, რომლებიც დამოკიდებულია ერთმანეთზე), ხოლო k – რიცხვია;
- გამომდინარე იქიდან, რომ y ცვლადის მნიშვნელობა დამოკიდებულია x ცვლადის მნიშვნელობაზე, x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო, y-ს ეწოდება დამოკიდებული ცვლადი. k-ს მუდმივი (ხშირად სამეცნიერო საგნებში, k-ს ეწოდება პარამეტრი, კონტროლირებადი პარამეტრი).
- მათემატიკაში k-გვიჩვენებს ასევე რამდენადაა დახრილი წრფე x ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ამიტომ მას ეწოდება დახრილობა, ასევე კუთხური კოეფიციენტი. იმისათვის, რომ უკეთ გავიაზროთ k-ს მნიშვნელობა შემდეგ პარაგრაფებში განვიხილავთ მაგალითებს.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას:

- თუ $k > 0$-ზე, წრფე გადის I და III მეოთხედებში.
- ხოლო თუ $k < 0$-ზე წრფე გადის II და IV მეოთხედებში.
- ორივე შემთხვევაში წრფე გადის სათავეზე.
- რადგან გეომეტრიიდან ვიცით, რომ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფის გავლება შეიძლება, გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ 2 წერტილის კოორდინატი.

ნიმუში 4 – პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების დადგენა

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რითაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ არის თუ არა ცვლადებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.

ა)

x	2	4	6	8
y	5	10	15	20

ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას ცვლადებს შორის ფარდობა უნდა იყოს მუდმივი.

$$k = \frac{y}{x}$$

მინიშნება: გამომდინარე იქიდან, რომ როდესაც $x = 0$, მაშინ $y = 0$, აღნიშნულ წყვილს ზოგადად გამოსახულებაში არ ვსვამთ.

შევამოწმოთ:

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = 2.5$$

k =2.5 – ე.ი. ცვლადებს შორის დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია.

ბ)

x	2	3	4	5
y	10	15	25	30

ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას ცვლადებს შორის ფარდობა უნდა იყოს მუდმივი.

$$k = \frac{y}{x}$$

$$\frac{10}{2} = \frac{15}{3} \neq \frac{25}{4} \neq \frac{30}{5}$$

K არ არის მუდმივი

ე.ი. ცვლადებს შორის დამოკიდებულება არ არის პირდაპირპროპორციული.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია მაგალითები, შეამოწმეთ რომელი წარმოადგენს პირდაპირპროპორციულ (წრფივ) დამოკიდებულებას და იპოვეთ k პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ა)

x	3	5	7
y	27	45	63

ბ)

x	−2	−4	−8
y	8	−16	32

გ)

წონა	10	12	15
ფასი	30	36	60

დ)

x	2	8	10
y	9	36	45

ე)

x	0	5	10
y	5	10	15

ვ)

x	−3	−5	−10
y	−4.5	−7.5	−15

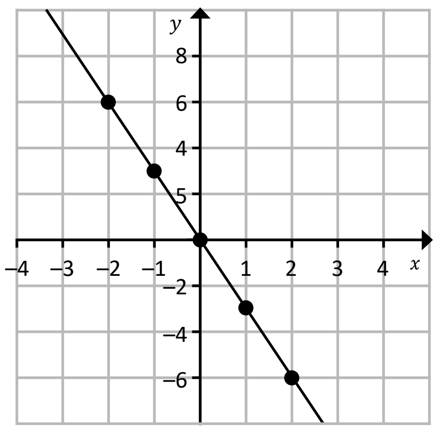
2. ააგეთ შემდეგი წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი:

ა) $y = 3x$; ბ) $y = 5x$; გ) $y = -2.5x$.

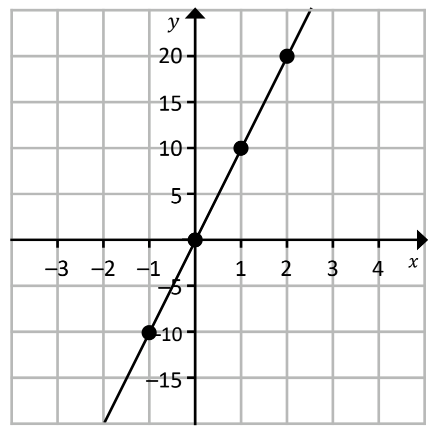
3. ააგეთ შემდეგი პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი $y = -4x$.

4. მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე იპოვეთ K პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ა)



ბ)



5. დაწერეთ წრფივი დამოკიდებულების ფორმულა Y = KX, თუ ვიცით, რომ მოცემულ დამოკიდებულებას ეკუთვნის შემდეგი რიცხვთა წყვილი **მინიშნება:** იპოვეთ k თითოეული წერტილისთვის.

ა) (4;12); ბ) (-5;10); გ) (4; 2); დ) (-4;-30).

6. ააგეთ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი, თუ ვიცით, რომ პირდაპირპორპორციულობის კოეფიციენტი უდრის:

ა) −4; ბ) −6; გ) 3.5; დ) −1.5.

7. თუ y პირდაპირპროპორციულადაა დამოკიდებული x ცვლადზე და ვიცით, რომ $y = 12$, მაშინ, როცა $x = 5$. რა იქნება y, როცა $x = 2.5$?

8. რამდენჯერ გაიზრდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგრძეს გავზრდით: ა) 8-ჯერ? ბ) 10-ჯერ? გ) 2.5-ჯერ? დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და პასუხი დაასაბუთეთ.

9. რამდენჯერ შემცირდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგანეს შევამცირებთ ა) 2-ჯერ? ბ) 4.5-ჯერ? გ) 3-ჯერ? დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და პასუხი დაასაბუთეთ.

10. STEM **კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან.** გახსენით ბმული და გაეცით პასუხი DESMOS – მარათონი პირველიდან მე-7 გვერდის ჩათვლით მოცემულ კითხვებს.

11. **ფინანსური ამოცანა:** ქეთიმ გადაწყვიტა გაეკეთებინა დანაზოგი, ის ყოველთვე ანაბარზე ინახავდა 25 ლარს. რა თანხა ექნება ანაბრაზე ქეთის 8 წლის, 12 წლის, 16 წლის შემდეგ?

ა) დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება;

ბ) წარმოადგინეთ სიტუაციის შესაბამისი გრაფიკი.

რთული ნიმუში:

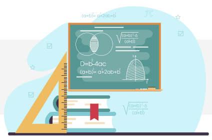
12. **ფინანსური ამოცანა** გენოს ანაბარზე ჰქონდა 200 ლარი, ის ყოველთვე ანაბრიდან ხარჯავდა 20 ლარს.

ა) ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება;

ბ) წარმოადგინეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გრაფიკი.

რთული ნიმუში:

13. **აღმოაჩინე შეცდომა:** ზურამ გადაწყვიტა ანაბარზე თანხის დაგროვება, დანაზოგის გაკეთებამდე მას ანაბარზე ჰქონდა 160 ლარი, ის ყოველთვე ანაბარზე ამატებდა 30 ლარს. იმისათვის, რომ სცოდნოდა თუ რამდენი ლარი ექნებოდა ყოველთვე ანგარიშზე, ზურამ გადაწყვიტა მოცემული სიტუაციის ფორმულირება და დაწერა გამოსახულება: $y = 160 \cdot x + 20$, სადაც y-ით აღნიშნა ანაბარზე დადებული თანხის რაოდენობა, x-ით თვეების რაოდენობა. რა შეცდომა დაუშვა ზურამ? დაეხმარეთ ზურას ჩაწეროს სწორი გამოსახულება და ააგოს შესაბამისი გრაფიკი.



კვლევითი აქტივობა: MATH Lab

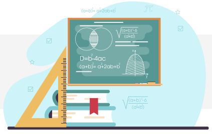
14. შედით ვებ-გვერდზე GEOGEBRA, ამოირჩიეთ, Start Calculator. გამოჩნდება ველი, სადაც შეძლებთ აკრიფოთ $y = x$ წრფივი დამოკიდებულება, გრაფიკული კალკულატორი ააგებს გრაფიკს.

მოცემული ვებ-გვერდის დახმარებით ააგეთ:

ა) $y = 2x$; $y = 3x$; $y = 5x$ გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

ბ) $y = 0.1x$; $y = 0.5x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

სავარჯიშოები



■ კვლევითი აქტივობა: MATH Lab

15. შედით ვებ-გვერდზე GEOGEBRA, ამოირჩიეთ, Start Calculator. გამოჩნდება ველი სადაც შეძლებთ ააგოთ $y = -x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი. მოცემული ვებ-გვერდის დახმარებით ააგეთ:

ა) $y = -2x$; $y = -3x$; $y = -5x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.	ბ) $y = -0.2x$; $y = -0.9x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

16. **კრიტიკული აზროვნება:** თუ პირდაპირპროფორციულ დამოკიდებულებაში x ის მნიშვნელობას გავზრდით 5-ჯერ, რამდენჯერ გაიზრდება y-ს მნიშვნელობა? დაასაბუთეთ პასუხი.

17. **გამოწვევა:** თუ გრაფიკი არის წრფე მაგრამ არ გადის სათავეზე, რატომ არ იქნება დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციული?

3.6. დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

საკვანძო კითხვა: რატომ ეწოდება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება?

ჩვენთვის ცნობილი, იტალიაში მდებარე პიზის კოშკი ვერტიკალური მდგომარეობიდან გადახრილია და უამრავი ტურისტის თუ არქიტექტორის შესწავლის საგანია საუკუნეების განმავლობაში.

დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი, ზომავს რამდენად დახრილია ესა თუ ის ობიექტი ზედაპირთან მიმართებით.

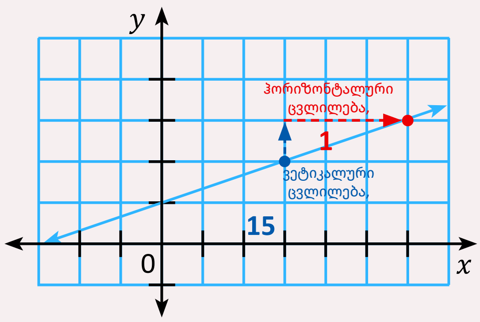
დახრილობა გვიჩვენებს ვერტიკალური ცვლილების ფარდობას ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან.

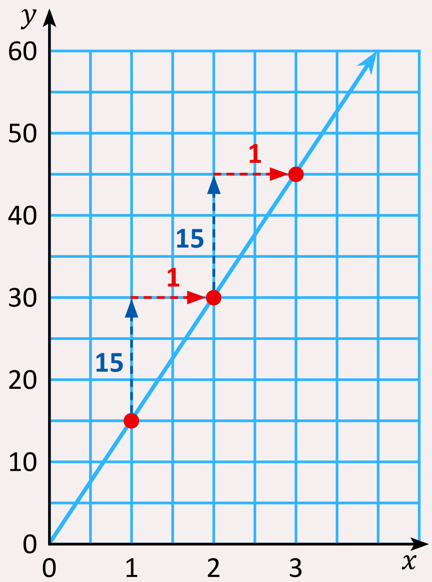
თუ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ნებისმიერი წრფე, მაშინ შეგვიძლია დავადგინოთ რამდენად დახრილია ეს წრფე. ამისათვის საჭიროა წრფეზე მოვნიშნოთ ორი წერტილი, დავადგინოთ შესაბამისი ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ცვლილება, ხოლო შემდეგ ვერტიკალური ცვლილება შევაფარდოთ ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან, ე.ი.

$$k=\frac{\text{ვერტიკალური ცვლილება}}{\text{ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან}}$$

$$k=\frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

ნებისმიერი წრფის შემთხვევაში k-ს ეწოდება დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი.





$$k=\frac{15}{1}=15$$

არსებითად გასააზრებელი:

k – კოეფიციენტი გვიჩვენებს, x – ცვლადის ერთით გაზრდით, რამდენით იზრდება (ან მცირდება) y ცვლადი.

კუთხური კოეფიციენტი გვიჩვენებს ასევე ერთეულოვან ცვლილებას.

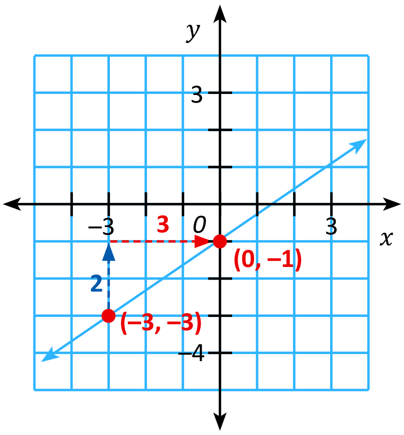
ნიმუში 1 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა) ჩვენ ვიცით, რომ

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში

$$k = \frac{2}{3}$$

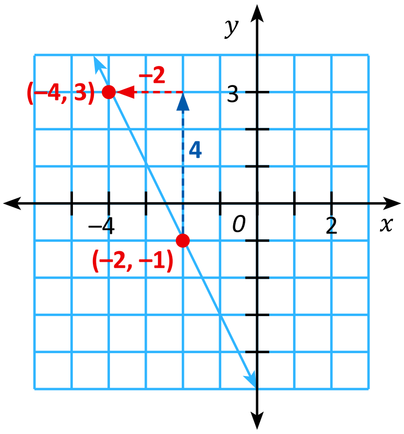


ბ) ჩვენ ვიცით, რომ

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში

$$k = \frac{4}{-2} = -2$$



იმისათვის რომ ვიპოვოთ დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი k, საკმარისია ვიცოდეთ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი ორი წერტილის კოორდინატი, $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$ შემდეგ

$$k = \frac{\text{ვერტიკალური ცვლილება}}{\text{ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან}}$$

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ნიმუში 2 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა

ა) ვიცით, რომ

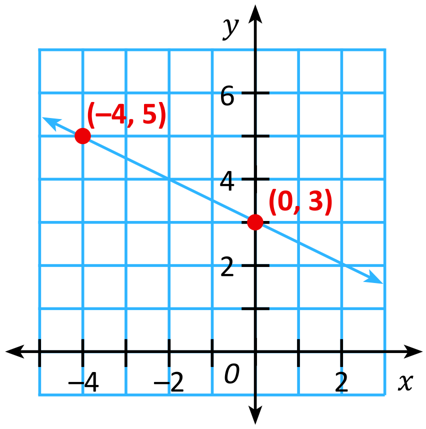
$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

თუ სიბრტყეზე მოცემულია წრფე და ავიღებთ ნებისმიერ ორ წერტილს კოორდინატებით $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში ავიღოთ ორი წერტილი, (0 ; 3) და (-4 ; 5), მაშინ მივიღებთ, რომ

$$k = \frac{5-3}{-4-0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$



ნიმუში 3 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა

ა) ვიცით, რომ

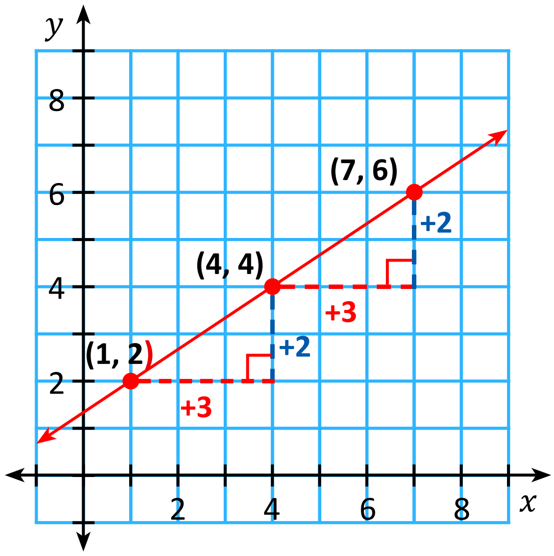
$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

თუ სიბრტყეზე მოცემულია წრფე, და ამ წრფიდან ავიღებთ ნებისმიერ ორ წერტილს კოორდინატებით $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$ დახრილობა გამოითვლება ფორმულით;

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში ავიღოთ ორი წერტილი, (1; 2) და (4; 4), მაშინ მივიღებთ, რომ

$$k = \frac{2}{3}$$



ნიმუში 4

როგორც ვიცით, რომ ფუნქცია შეიძლება იყოს მოცემული, როგორც გრაფიკის მეშვეობით, ასევე განტოლებით.
როგორ ვიპოვოთ დახრილობა სხვადასხვა ფორმით მოცემული წრფის განტოლებიდან?

შეგახსენებთ, რომ როდესაც განტოლება შეიცავს ორ ცვლადს, რომელთა უმაღლესი ხარისხია ერთი, განტოლებას ეწოდება ორცვლადიანი წრფივი განტოლება.

ა) განვიხილოთ ტოლობა, რომელიც შეიცავს ორ ცვლადს: $4x + 2y = 0$;
წარმოვადგინოთ y ცვლადი, x-ის მეშვეობით (ეკვივალენტური ფორმით)

$$4x + 2y = 0$$

$$2y = -4x$$

$$y = -2x$$

$y = -2x$ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა.
$y = -2x$ და $4x + 2y = 0$ ეკვივალენტური გამოსახულებებია, ე.ი. მოცემული განტოლება შეესაბამება პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებას.

ბ) სიბრტყეზე მოცემულია წრფე, დაადგინეთ მოცემული წრფე შეესაბამება თუ არა პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას?

პასუხი: ჩვენ ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციულობის ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე, რომელიც გადის სათავეზე, რადგან მოცემული წრფე არ გადის სათავეზე, შესაბამისად, აღნიშნული წრფე არ შეესაბამება პირდაპიპროპოციულ დამოკიდებულებას. თუმცა არის წრფივი ფუნქცია.

y და x ცვლადებს შორის არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.
$k = -2$, რომელიც შეესაბამება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას (ასევე გვიჩვენებს დახრილობას).

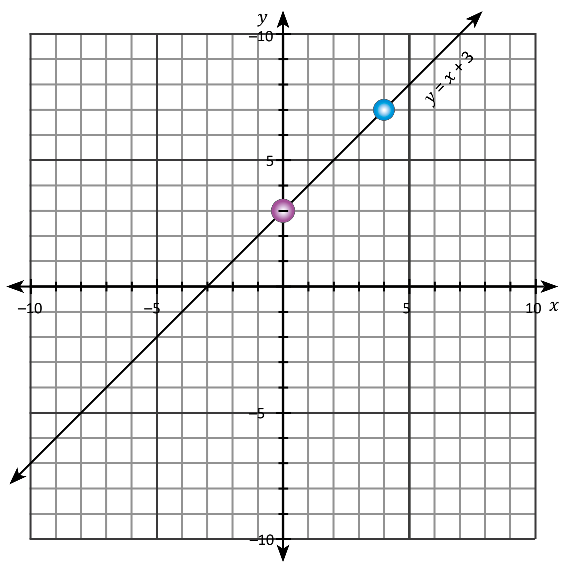
ბ) განვიხილოთ გამოსახულება

$$4x + 2y = 8$$

$$2y = -4x + 8$$

$$y = -2x + 4$$

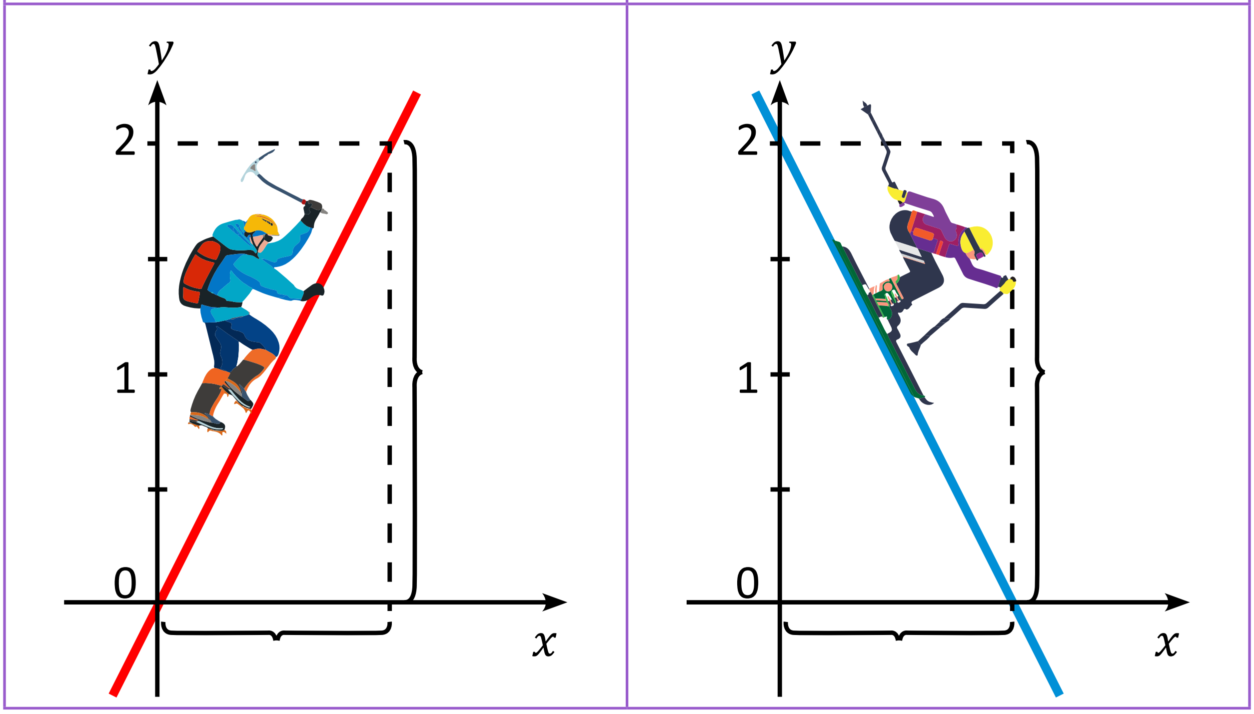
მოცემულ გამოსახულებაში $k = -2$, აღნიშნული გამოსახულება არ არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, (თუმცა წრფივი ფუნქციაა).



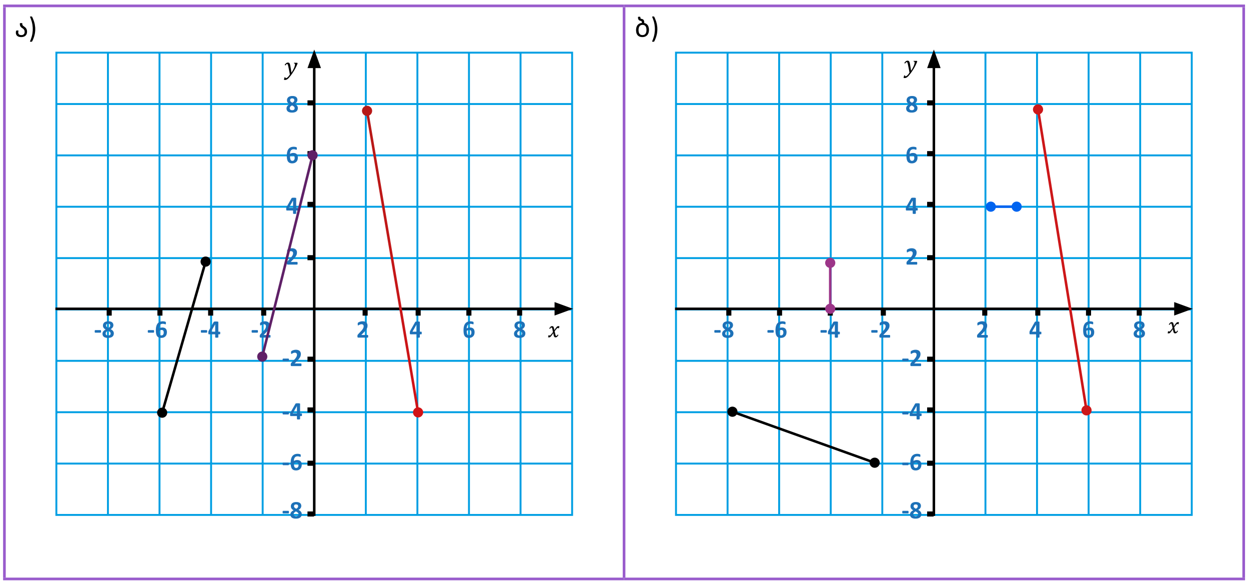
სავარჯიშოები

1. მოცემული ნახატის მიხედვით, იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი), იმსჯელეთ რა შემთხვევაშია კუთხური კოეფიციენტი დადებითი და რა შემთხვევაში უარყოფითი? რას გვიჩვენებს კუთხური კოეფიციენტის ნიშანი?

ნახაზი 1	ნახაზი 2

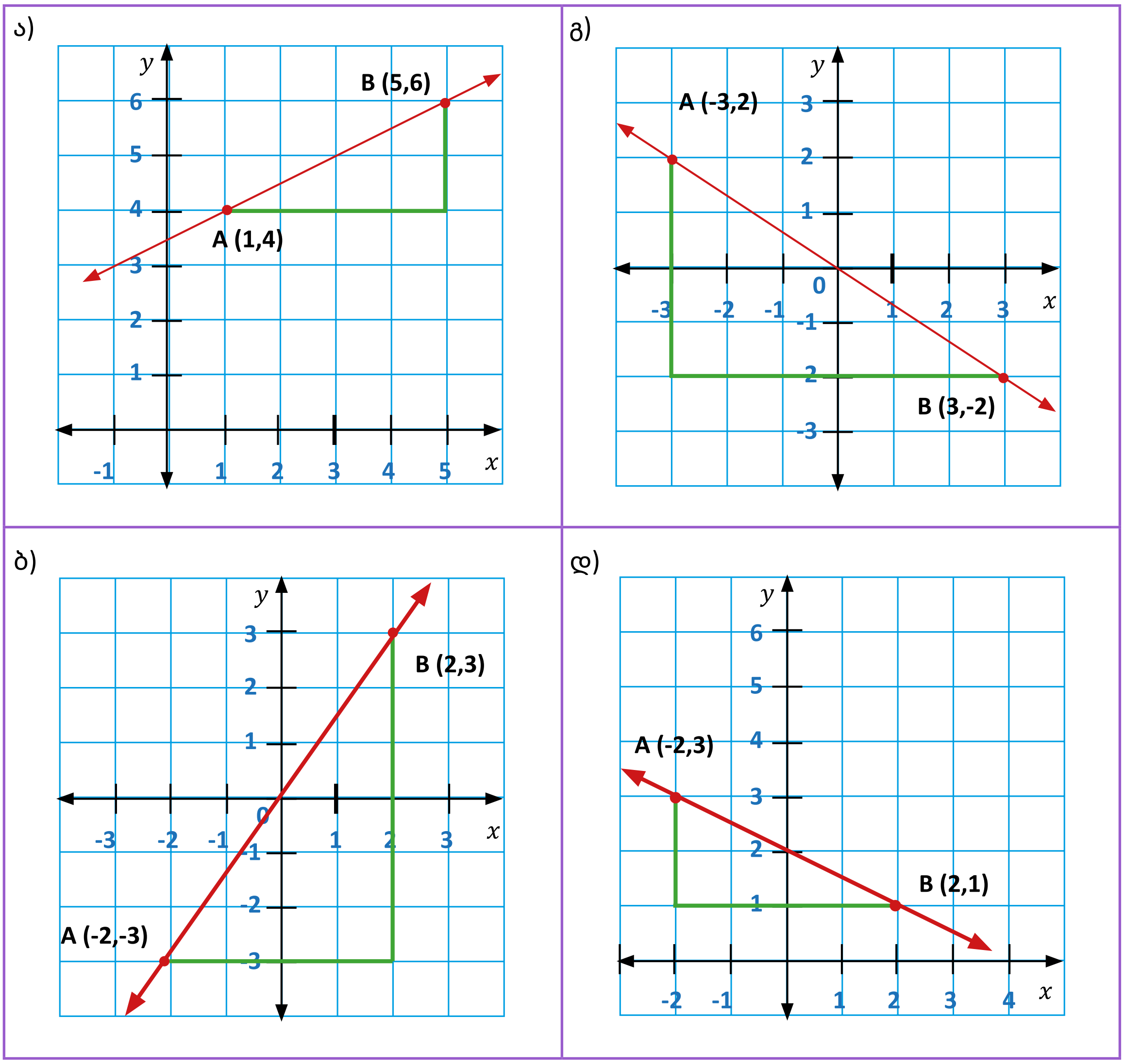


2. იპოვეთ მოცემული მონაკვეთების დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)



სავარჯიშოები

3. ქვემოთ მოცემული ნახაზებიდან გამომდინარე იპოვეთ თითოეული წრფის დახრილობა და ჩაწერეთ შესაბამისი განტოლება.



4. **დაფიქრდი და დაასაბუთე:** რა შემთხვევაშია დახრილობა დადებითი და რა შემთხვევაში უარყოფითი? მოუყვანეთ რამდენიმე მაგალითი.

5. იპოვეთ კუთხური კოეფიციენტი (დახრილობა), თუ ვიცით რომ წრფე გადის შემდეგ ორ წერტილზე:

ა) (2; 5) და (4; 10);
ბ) (–5; 6) და (10; 6);
გ) (–1;4) და (1;12);
დ) (4; 3) და (4;10);
ე) (–2; –4) და (–6; –10);
ვ) (0; 3) და (–1; 6);
ზ) (1,5; 10) და (5,5; 12);
თ) (–5; 0) და (2,5; 7,5);
ი) (0; 0) და (3; –1).

სავარჯიშოები

6. დაადგინეთ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

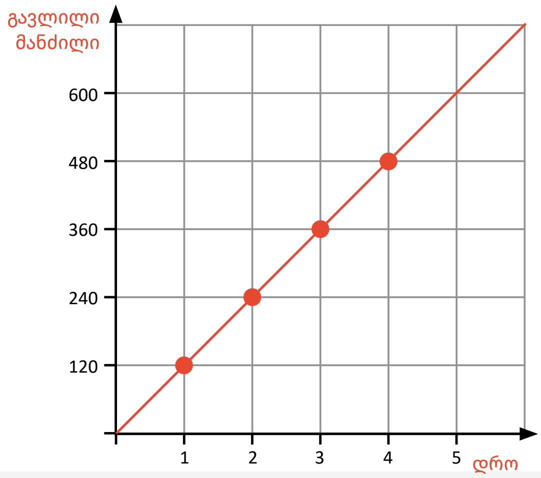
ა) $3x - y = 0$; გ) $5x + 2y = 0$; ე) $7y - 3x = 0$;
ბ) $-4x - y = 0$; დ) $2{,}5x - 5y = 0$; ვ) $-1{,}3x + 4{,}2y = 0$.

7. დაადგინეთ წრფივი დამოკიდებულების კუთხური კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

ა) $4x + 8y = 1$; გ) $-2x + 8y = 12$; ე) $-4x - y = 2$;
ბ) $5x - 2y = 7$; დ) $3x - 7y = -2$; ვ) $-1{,}5x - 6y = -10$.

8. გრაფიკზე მოცემულია ინფორმაცია:

- იპოვეთ მანქანის სიჩქარე;
- ჩაწერეთ შესაბამისი გამოსახულება;
- რას შეესაბამება კუთხური კოეფიციენტი?



9. დაადგინეთ, რომელია პირდაპირპროპროციული დამოკიდებულება, იპოვეთ პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

ა) $3x - y = 0$; გ) $5x + 2y = 0$; ე) $7y - 3x = 0$;
ბ) $4x + 8y = 1$; დ) $-2x + 8y = 12$; ვ) $-4x - y = 2$.

ჯგუფური სამუშაო

10. მანქანა 1 წმ-ში გადის 6 მეტრს, ავტობუსი 4 მეტრს.

- დაწერეთ ტოლობა, რომელიც აღწერს მანქანის გადაადგილების დამოკიდებულებას დროზე. x-ით აღნიშნეთ დრო, y-ით განვლილი გზა.
- დაწერეთ ტოლობა, რომელიც აღწერს ავტობუსის გადაადგილების დამოკიდებულებას დროზე. x-ით აღნიშნეთ დრო, y-ით განვლილი გზა.
- ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ ორივე გრაფიკი და შეადარეთ.

3.7. წრფივი ფუნქცია

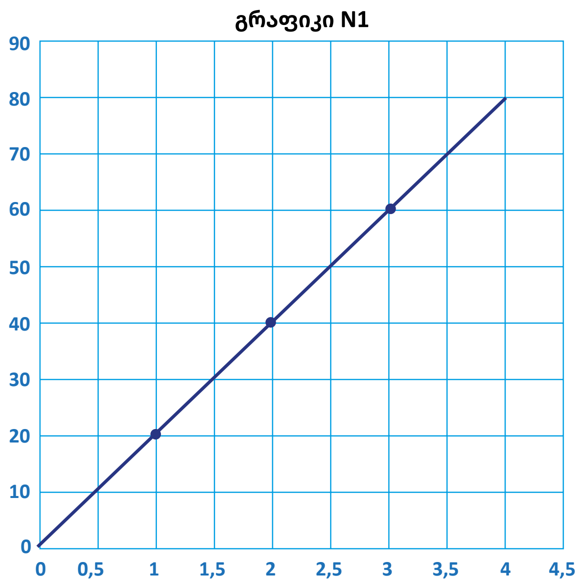
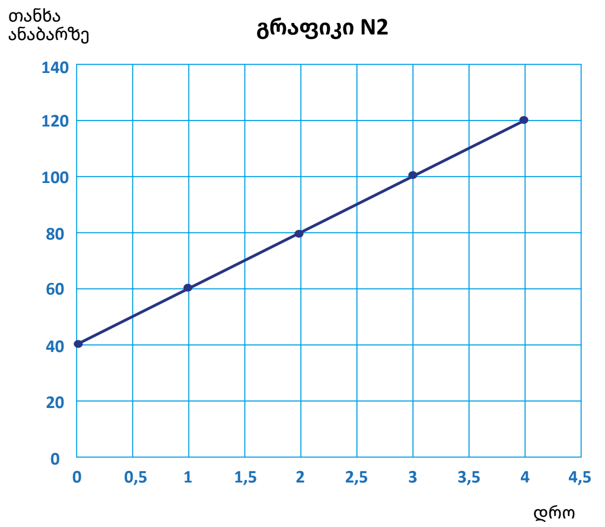
საკვანძო კითხვა:

- *შესაძლებელია თუ არა ანაბარზე თანხის დადების და სარგებლის დარიცხვის ვიზუალური წარმოდგენა?*

ნიმუში 1 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

წინა პარაგრაფში განხილული იყო ორი შემთხვევა. ერთ შემთხვევაში მოსწავლემ გახსნა ანაბარი და ანაბარზე ყოველთვე დებდა 20 ლარს; მეორე შემთხვევაში მოსწავლეს ჰქონდა ანგარიშზე დანაზოგი 40 ლარის ოდენობით და ყოველთვე ანაბარზე დებდა 20-ლარს.

ჩვენ ავაგეთ ორივე შემთხვევის გრაფიკი და ჩავწერეთ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი (ფორმულა/განტოლება).

შემთხვევა 1:	შემთხვევა 2:
	
$y = 20 \cdot x$	$y = 20 \cdot x + 40$

x – შეესაბამება თვეების რაოდენობას;
y – შეესაბამება ანგარიშზე არსებულ თანხას;
20 – ყოველთვიურ შენატანს, რომელიც არ იცვლება, მუდმივია;
40 – კი არის პირველადი მონაცემი, რა თანხა იყო ანგარიშზე.

გაგრძელება

მოცემულ ნიმუშში, მოცემულია წესი, რა წესითაც y დამოკიდებულია x-ზე.

$$y = 20 \cdot x + 40$$

დამოკიდებული ცვლადი — დამოუკიდებელი ცვლადი

- **განსაზღვის არე** – რიცხვები, რომელიც შეიძლება ჩავსვათ x-ის ნაცვლად, არაუარყოფითი რიცხვებია (0 და დადებითი რიცხვები);
- **მნიშვნელობათა სიმრავლე** – რიცხვები რომელიც შეესაბამება y-ს, პირველ მაგალითში იწყება 0-დან, ხოლო მეორე მაგალითში 40-დან.

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში გრაფიკი წრფეა.

ორი X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს განსაზღვრის არიდან (x ელემენტს) შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი (y ელემენტი) მნიშვნელობათა არიდან, **ფუნქცია** ეწოდება.

X-სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება,
Y-სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ნებისმიერ x ელემენტს X-სიმრავლიდან დამოუკიდებელი ცვლადი ეწოდება; ხოლო ნებისმიერ y ელემენტს Y-სიმრავლიდან დამოკიდებული ცვლადი.

$$y = kx + b$$

აღნიშნული წესით მოცემულ ფუნქციას, სადაც k და b ნამდვილი რიცხვებია, **წრფივი ფუნქცია** ეწოდება. ვამბობთ, რომ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით/განტოლებით. ფუნქციის მოცემის აღნიშნულ ხერხს ეწოდება ანალიზური ხერხი;

- k-ს ეწოდება დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი), ხოლო b – გვიჩვენებს y ღერძთან გადაკვეთის წერტილს (0; b)
- წრფივი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ვწერთ $x \in R$
- წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ვწერთ $y \in R$

მინიშნება: განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე ზუსტდება, როდესაც ხდება რეალური მოვლენის აღწერა ან ამოცანის პირობიდან გამომდინარე.

$$y = kx$$

$y = kx + b$ წრფივ ფუნქციაში, როდესაც $b = 0$-ს ვიღებთ $y = kx$ ფუნქციას, ვიტყვით, რომ $y = kx$ წარმოადგენს $y = kx + b$ ფუნქციის კერძო შემთხვევას.

$$y = b$$

$y = kx + b$ წრფივ ფუნქციაში, თუ $k = 0$, ვიღებთ $y = b$ მუდმივ ფუნქციას.

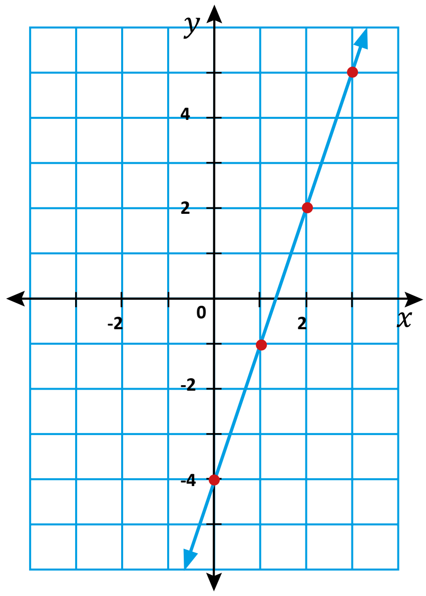
ნიმუში 2 – ავაგოთ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი

ა) ავაგოთ მოცემული წრფივი ფუნქციის გრაფიკი $y = 3x - 4$

დამოუკიდებელი ცვლადი	გამოთვლის პროცესი	დამოკიდებული ცვლადი	წერტილთა წყვილები
x	$3x - 4$	y	$(x; y)$
0	$3 \cdot 0 - 4$	-4	$(0; -4)$
1	$3 \cdot 1 - 4$	-1	$(1; -1)$
2	$3 \cdot 2 - 4$	2	$(2; 2)$
3	$3 \cdot 3 - 4$	5	$(3; 5)$

დავაჯგუფოთ მონაცემები და გადავიტანოთ საკოორ-დინატო სიბრტყეზე $(0; -4)$, $(1; -1)$, $(2; 2)$, $(3; 5)$

$y = 3x - 4$ ფუნქციის გრაფიკი წრფეა, ყველა წერტილის გადატანით და შეერთებით მიიღება წრფე, მოცემულ წრფეზე მდებარეობს ყველა რიცხვითი წყვილი რომე-ლიც აკმაყოფილებს ფუნქციის გამოსახულებას.



$y = kx + b$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას ორცვლადიან წრფივ განტოლებასაც ეძახიან

ბ) აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება

დავაკვირდებით $y = 3x - 4$ ფუნქციის წყვილებს

+1 +1 +1

x	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**-4**	**-1**	**2**	**5**

+3 +3 +3

როდესაც ცხრილით მოცემულია ინფორმა-ცია თუ დამოუკიდებელი ცვლადის ერთი და იგივე რიცხვით ზრდა იწვევს დამოკიდებული ცვლადის ერთი და იგივე რიცხვით ზრდას, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ რომ მოცემულია **წრფივი ფუნქცია.**

ცხრილზე დაკვირვებით ვხედავთ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის (x-ცვლადის) ერთით გაზრდა, იწვევს y ცვლადის 3-ით გაზრდას.

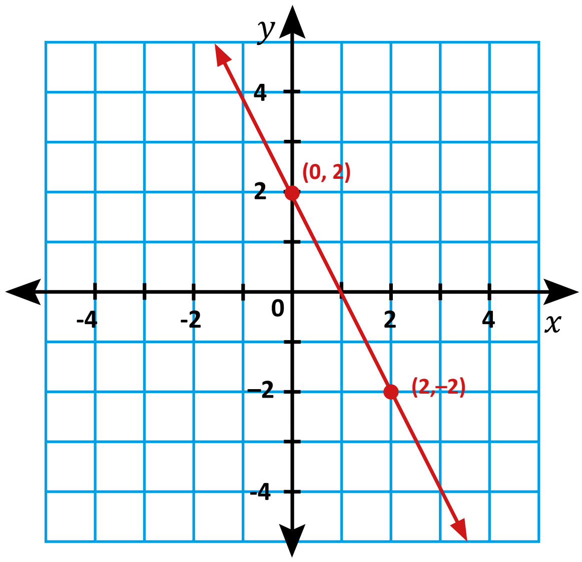
ვიცით, რომ $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ რადგან x ერთით იც-ვლება და y ცვლადი 3-ით, ე.ი. $k = 3$;

$x = 0$-თვის მიღებული y-ის მნიშვნელობა, შეესაბამება b-ს. ცხრილით შეგვიძლია დავადგინოთ რომ

$$b = -4$$

ნიმუში 3 – როგორ არის შესაძლებელი გრაფიკიდან წრფივი ფუნქციის ჩაწერა

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, დაწერეთ შესაბამისი წრფივი ფუნქცია.



ამოხსნა:

ჩვენ ვიცით, რომ წრფივი ფუნქციის ზოგადი ფორმაა $y = kx + b$,

როგორც ვიცით, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

***k*-ს საპოვნელად გვჭირდება** ორი წერტილის კოორდინატების ცოდნა. გრაფიკზე, მოცემულია წერტილები (0; 2), (2; –2)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$$

როგორ ვიპოვოთ b?

b გვიჩვენებს, რა წერტილში კვეთს წრფე *y* ღერძს. გრაფიკიდან ჩანს, რომ წრფე *y* ღერძს კვეთს წერტილში (0; 2), ე.ი. $b = 2$

მოცემული წრფის განტოლებაა

$y = -2x + 2$

ნიმუში 4 – აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება

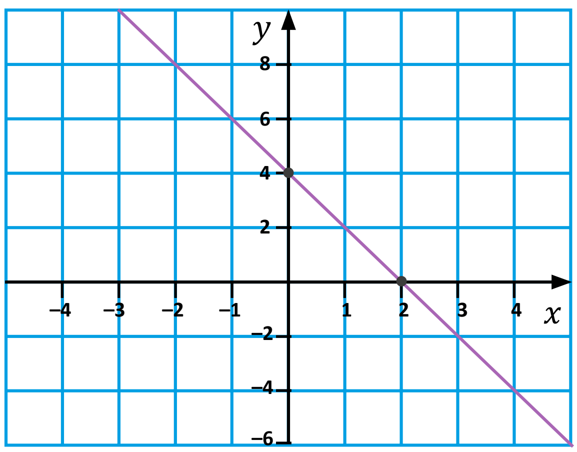
ცხრილით მოცემულია შესაბამისობა ორ სიმრავლეს შორის, რომელიც წარმოადგენს ფუნქციას.

თუ დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ *x* ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით (2-ით) გაზრდა იწვევს *y* ცვლადის 4-ით შემცირებას.

x	y
-2	8
0	4
2	0
4	-4

+2 +2 +2 -4 -4 -4

თუ გადავიტანთ წერტილთა წყვილებს საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთებთ, მივიღებთ წრფეს, რომლის განტოლებაა $y = -2x + 4$



გაგრძელება

გამოდის, რომ მუდმივია

$$\frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

ნებისმიერი ორი წერტილისთვის

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-2$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, y წრფივად არის დამოკიდებული x-ზე.

დასკვნა:

როდესაც სიდიდეებს შორის მოცემულია შესაბამისობა ცხრილით, თუ x ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით გაზრდა (ან შემცირება) იწვევს y ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით ცვლილებას, მაშინ ვიტყვით, რომ ცხრილით მოცემული ინფორმაციით, **ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება.**

ნიმუში 5 – ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები

მოცემულია $y=-x+2$ წრფივი ფუნქცია, ვიპოვოთ x და y ღერძებთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

მსჯელობა:

ვიცით, რომ წრფივი ფუნქციის განტოლებაში b გვიჩვენებს თუ რა წერტილში კვეთს გრაფიკი y-ღერძს,

განტოლებიდან ჩანს, რომ $b=2$, ე.ი. წრფის y-ღერძის კვეთის წერტილია (0; 2);

ზოგადად, უნდა შევავსოთ ცხრილი:

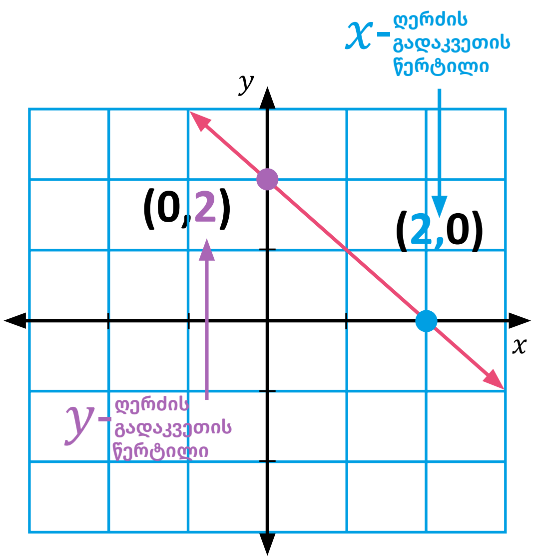
x	y
0	
	0

x-ცვლადის ნაცვლად ჩავსვათ 0-ვიპოვით y ღერძის კვეთის წერტილი (0; 2); შემდეგ y ცვლადის ნაცვლად ჩავსვათ 0 და ვიპოვით x ღერძის კვეთის წერტილს (2; 0)

$$0=-x+2$$
$$x=2$$

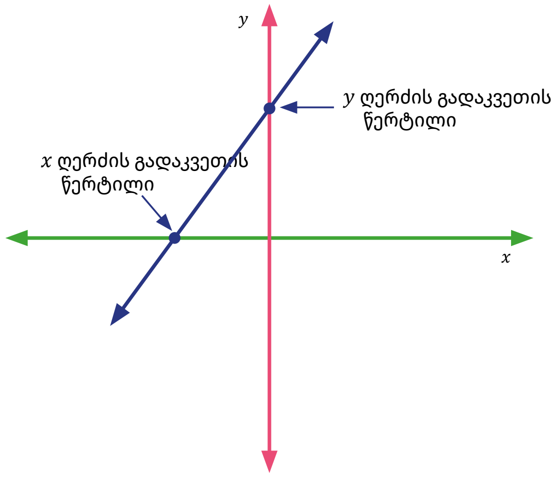
თუ გადავიტანთ წერტილთა წყვილებს საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთებთ მივიღებთ წრფეს, რომლის განტოლებაა

$y=-x+2$

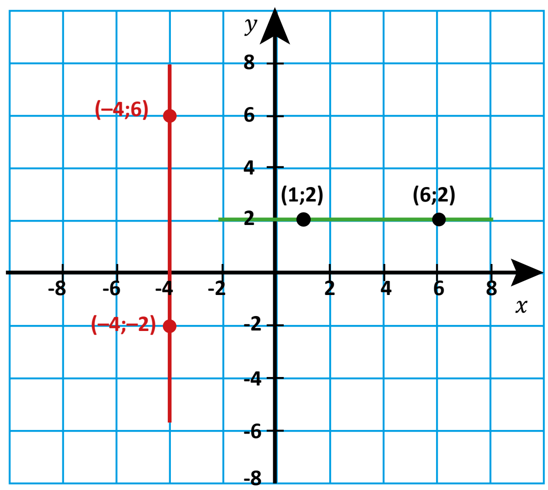


როდესაც გრაფიკი კვეთს x-ღერძს, გადაკვეთის წერტილის y კოორდინატი არის 0. როდესაც გრაფიკი კვეთს y-ღერძს, გადაკვეთის წერტილის x კოორდინატი არის 0.

წრფის ასაგებად საკმარისია წრფეზე მდებარე 2 წერტილის კოორდინატის პოვნა.



ნიმუში 6 – ღერძების პარალელური წრფეების დახრილობა



განვიხილოთ **მწვანე წრფე**, რომელზეც მდებარეობს ორი წერტილი (1;2) და (6;2)

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-2}{6-1}=0$$

x ღერძის პარალელური წრფის დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი) 0-ის ტოლია.

განვიხილოთ **წითელი წრფე**, რომელზეც მდებარეობს ორი წერტილი (–4;–2) და (–4;6)

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-(-2)}{-4-(-4)}=\frac{8}{0}$$

ჩვენ ვიცით, რომ 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება, შესაბამისად y ღერძის პარალელური წრფის დახრილობა განუსაზღვრელია (წრფე მართობულია Ox ღერძის).

შეჯამება:

წრფივი ფუნქცია შეიძლება იყოს მოცემული სიტყვიერად, აღწერით, ცხრილით გრაფიკულად, ანალიზურად (განტოლების სახით)

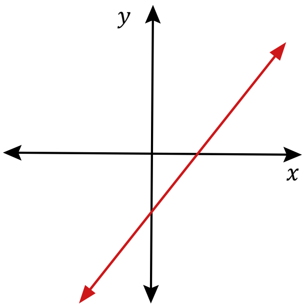
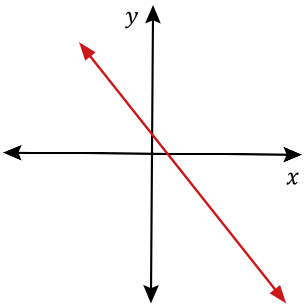
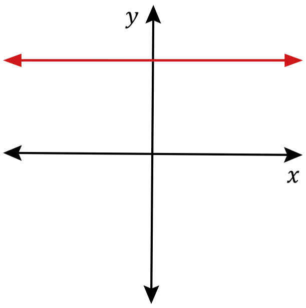
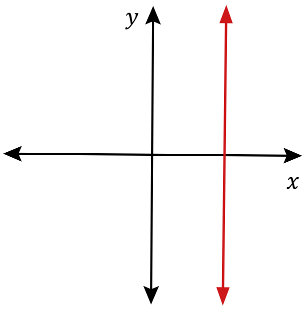
$$y = kx + b$$

დახრილობა

მუდმივი
(y ღერძთან გადაკვეთის წერტილი)

წრფე x-ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატია $\left(\frac{-b}{k};0\right)$

წრფე y-ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატია $(0;b)$

როდესაც დახრილობა დადებითია $K > 0$	როდესაც დახრილობა უარყოფითია $K < 0$	როდესაც $K = 0$	ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა როცა $x = a$ წრფე გადის წერტილზე კოორდინატით $(a;0)$
			
კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის მახვილია	კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის ბლაგვია	წრფე Ox ღერძის პარალელურია	წრფე არის Oy ღერძის პარალელური, Ox ღერძის მართობული

სავარჯიშოები

1. მოცემულია ფუნქცია და ცხრილი. გადაიხაზეთ რვეულში ცხრილი და შესაბამისი ფუნქციიდან გამომდინარე შეავსეთ:

ა) $y = -4x$

x	0	1	2
y			

ბ) $y = 2x + 4$

x	0	1	2
y			

გ) $y = -3x + 1$

x	2	5	8
y			

დ) $y = -2x + 8$

x		0		5
y	–2		6	

ე) $y = 20 - 5x$

x	0	4	8	
y				–60

ვ) $y = -4x + 10$

x	–4	–2	0	2
y				

2. ააგეთ ქვემოთ მოცემული წრფივი ფუნქციის გრაფიკები:

კიდევ სცადეთ

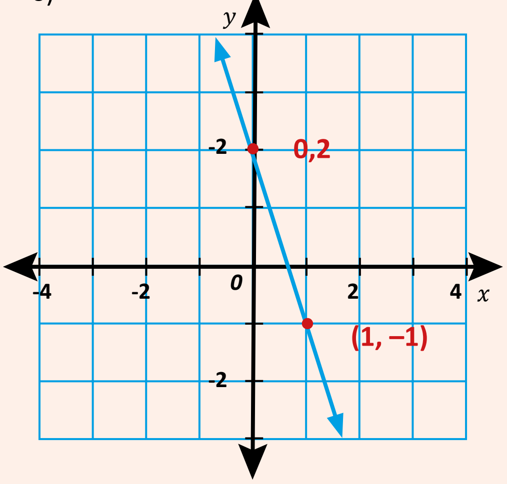
ა) $y = 2x + 3$; ბ) $y = 5x - 2$ გ) $y = -3x - 1$ დ) $y = -4x + 3$

3. დაწერეთ ფუნქცია თუ ვიცით:

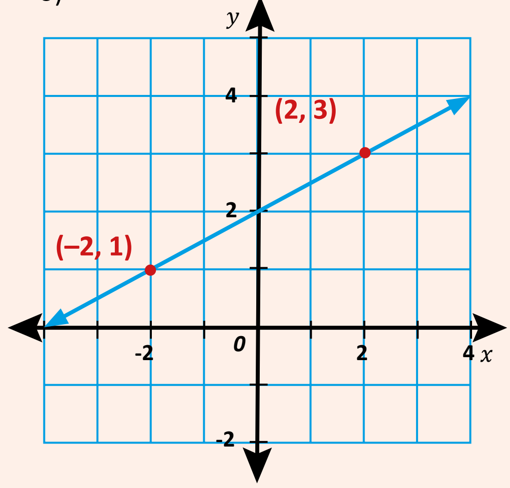
ა) კუთხური კოეფიციენტი = 4; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 3;
ბ) კუთხური კოეფიციენტი = 5; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია –10;
გ) კუთხური კოეფიციენტი = –3.5; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია –2;
დ) კუთხური კოეფიციენტი = 0; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 5;
ე) კუთხური კოეფიციენტი = –1; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 0.

4. ჩაწერეთ მოცემული გრაფიკების შესაბამისი განტოლებები:

ა)

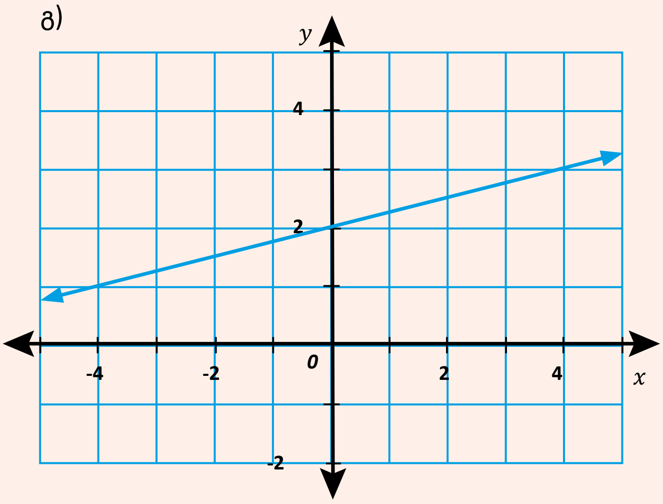


ბ)

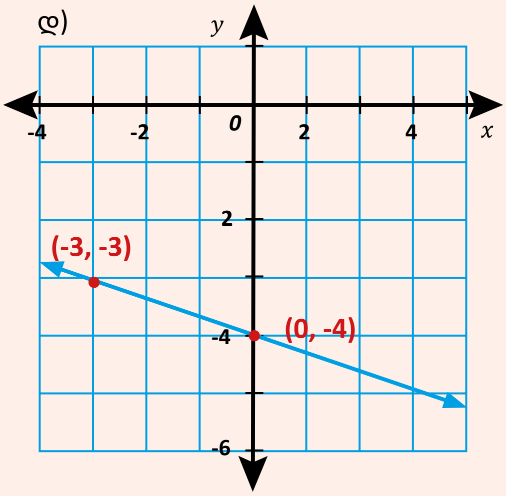


სავარჯიშოები

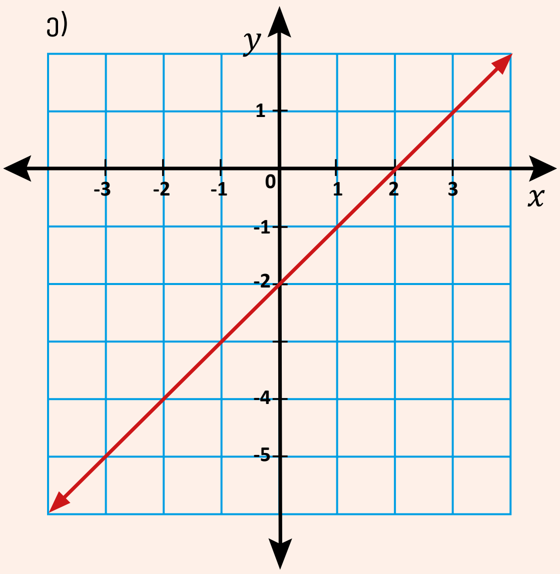
გ)



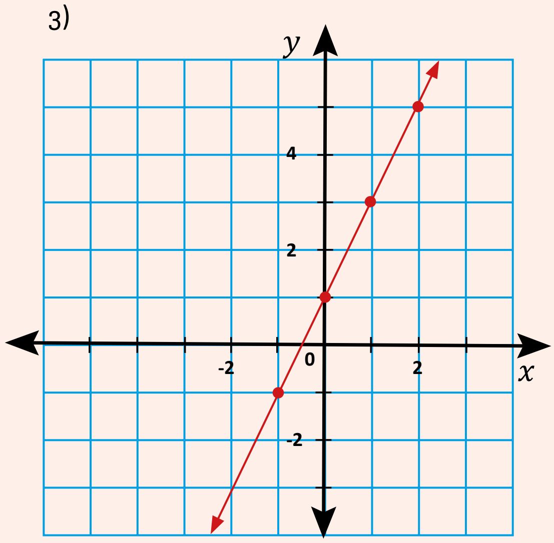
დ)



ე)



ვ)



5. შეამოწმეთ ეკუთვნის თუ არა $y = 2x + 6$ ფუნქციას შემდეგი წერტილი:

ა) (–4;20); ბ) (2;10); გ) (–2;–2); დ) (–2;2); პასუხი დაასაბუთეთ

6. შეამოწმეთ ეკუთვნის თუ არა $y = -4x + 2$ ფუნქციას შემდეგი წერტილი:

ა) (0;2); ბ) (–2;4); გ) (2;6); დ) (–6;22); პასუხი დაასაბუთეთ

7. იპოვეთ ფუნქციის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და შემდეგ ააგეთ გრაფიკი, თუ მოცემულია:

ა) $y = 2x - 4$; ბ) $y = -5x - 10$; გ) $y = -x + 4$; დ) $y = -2x + 1$.

სავარჯიშოები

8. მოცემული ფუნქციის გრაფიკებიდან გამომდინარე შეავსეთ შესაბამისი წრფის ცხრილი.

წრფე A

ა)

x	−3	−2	0	1
y				

წრფე B

დ)

x	−4	−2	0	2
y				

წრფე C

ა)

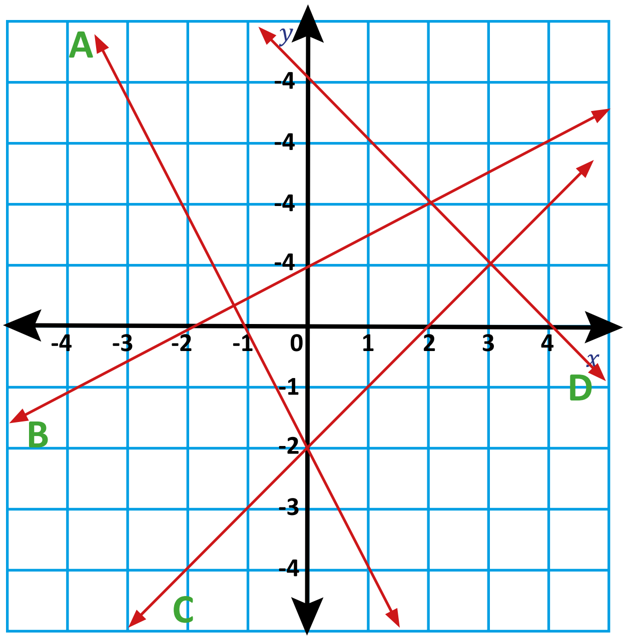
x	−2	−1	2	3
y				

წრფე D

კიდევ სცადეთ

დ)

x	−1	0	2	4
y				

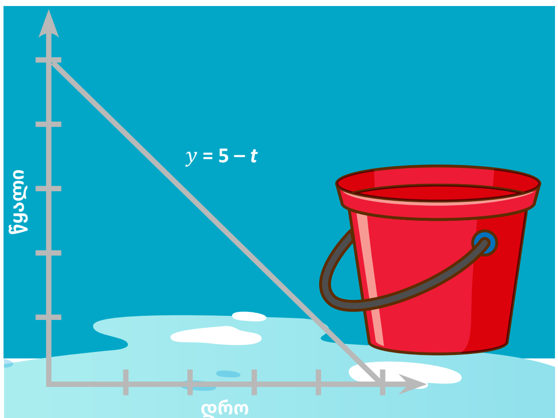


9. მოიფიქრეთ ამოცანა, რომელიც შეიძლება შეესაბამებოდეს დიაგრამაზე მოცემულ სიტუაციას.

იმსჯელეთ

ა) რა სიდიდეებია გადაზომილი X და Y ღერძებზე

ბ) რას შეიძლება გვეუბნებოდეს სიტუაციის აღმწერი განტოლება



10. ლანამ დაიწყო აუზზე სიარული, სადაც ერთჯერადი საწევრო გადასახადი იყო 50 ლარი, ყოველ შესვლაზე გადასახდელი თანხა კი 15 ლარი.

- მწარმოადგინეთ მოცემული სიტუაცია მათემატიკური მოდელით (დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას).
- 17 ვიზიტის შემდეგ სულ რამდენი თანხა ექნება გადახდილი?
- თუ ლანას აქვს სულ 380 ლარი აქვს ცურვისთვის განკუთვნილი, რამდენ გაკვეთილზე შეძლებს დასწრებას?

სავარჯიშოები

11. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების ღერძებთან გადაკვეთის წერტილი კოორდინატები:

ა) $y = 12x + 6$; გ) $y = -5x + 12$;

ბ) $y = 4x - 12$; დ) $y = -2.5x + 7.5$.

12. **გამოწვევა:** ააგეთ შემდეგი წრფივი ფუნქციის გრაფიკი $2.5x + 4y = 10$.

13. STEM **კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან.** გახსენით ბმული DESMOS — მარათონი და შეასრულეთ მე-8, მე-9, მე-10 და მე-11 დავალებები.

14. **გამოწვევა:** ბიზნესის დაწყების წინ მეწარმეს ჰქონდა 2 მილიონი ლარი, ყოველთვიური ხარჯი შეადგენს 30 000 ლარს.

- შემოიტანეთ აღნიშვნები;
- შეადგინეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება);
- გამოიანგარიშეთ, რამდენი თვე ეყოფა თანხა გადასახადების დაფარვაში?

15. სტუდენტმა იყიდა კომპიუტერი, რომელშიც გადაიხადა 5000 ლარი. დავუშვათ, რომ ყოველთვე კომპიუტერის ფასი იკლებს საწყისი ფასის 5%-ით (ყოველ წელს ფასის კლებას ეწოდება ცვეთის დარიცხვა).

- წარმოადგინეთ აღნიშნული ამოცანა მათემატიკური მოდელით, დაწერეთ განტოლება, რომელიც გვიჩვენებს ფასის დამოკიდებულებას წლებზე.
- რა იქნება კომპიუტერის ფასი 3 წლის მერე?
- რამდენიმე წლის მერე სტუდენტმა კომპიუტერი გაყიდა 3500 ლარად, რამდენი წელი ჰქონდა კომპიუტერი?

16. იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც შემდეგ ორ წერტილზე გადის:

ა) (1;4) და (2;6); გ) (0;-2) და (2;6); ე) (8;10) და (-2;10);

ბ) (-2 ; 8) და (2; 10); დ) (2 ; -4) და (2; 10); ვ) (-3 ; 10) და (3; 4).

მითითება: ჯერ იპოვეთ დახრის კოეფიციენტი k, შემდეგ b.

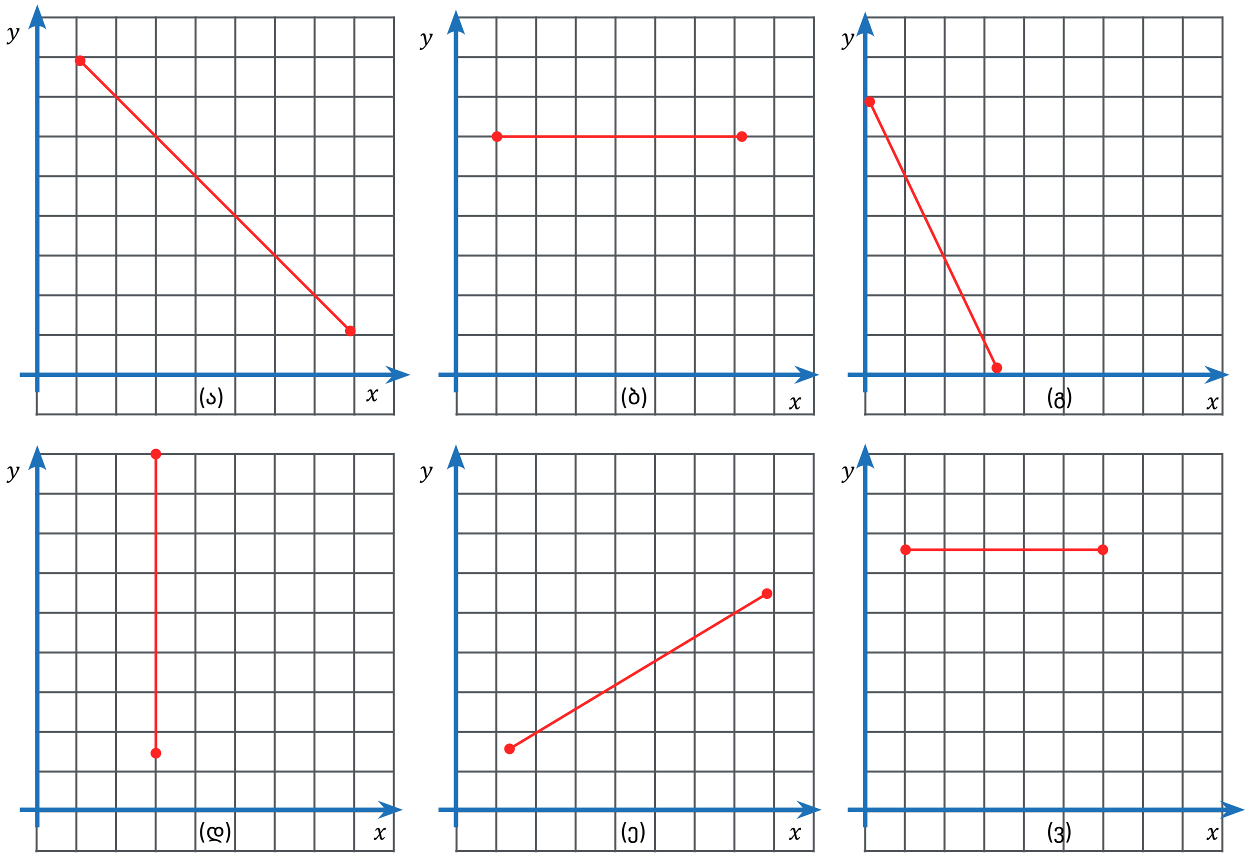
17. გამოსახეთ y x-ის მეშვეობით, ჩაწერეთ თითოეული განტოლება $y = kx + b$ ფორმით და ააგეთ გრაფიკი:

ა) $6x + 2y = 10$; გ) $-2x + 4y = 12$; ე) $9x - 3y = 12$;

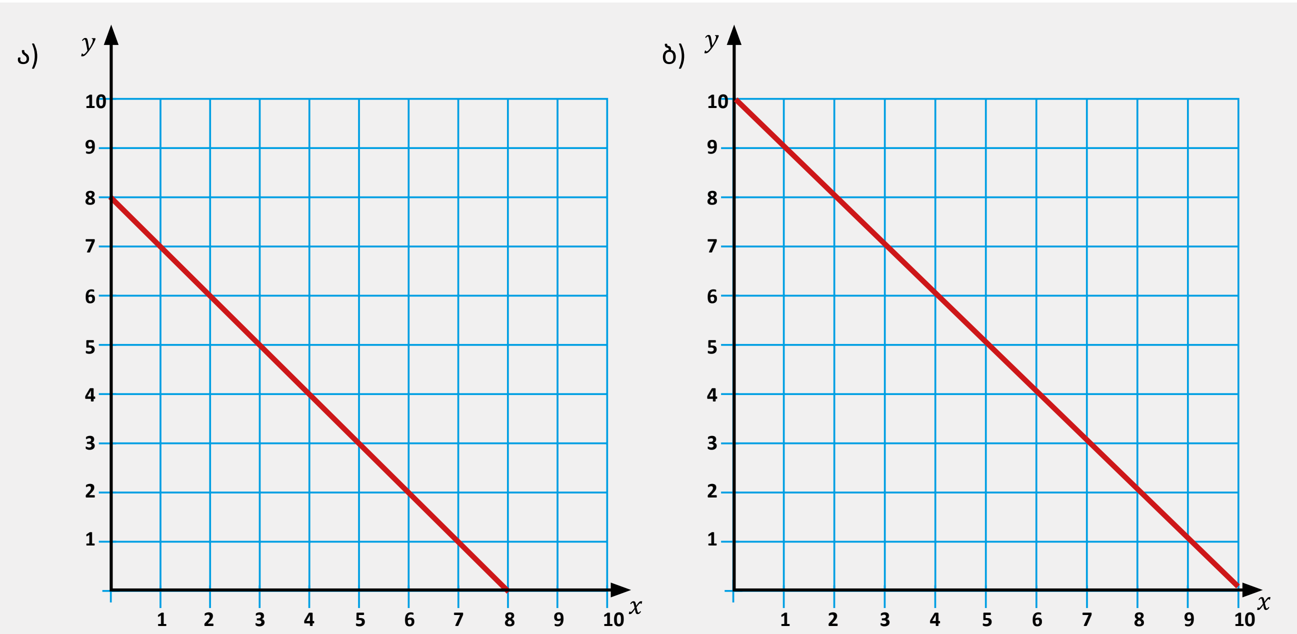
ბ) $5y + y = -4$; დ) $15x - 10y = 25$; ვ) $-5x + 2y = 14$.

18. გრაფიკებიდან გამომდინარე განსაზღვრეთ დახრილობა დადებითია, უარყოფითი, 0-ის ტოლი თუ განუსაზღვრელი?

სავარჯიშოები



19. ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე დაწერეთ თითოეული წრფივი ფუნქციის შესაბამისი განტოლება:



სავარჯიშოები

წრფივი ფუნქციის შესაბამისი განტოლების დაწერის შემდეგ აღწერეთ პროცესი. რომელი წერტილები გამოიყენეთ განტოლების ჩასაწერად?

20. ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან რომელია $y = 3x + 1$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება?
მითითება: ორი წრფე პარალელურია, თუ მათი კუთხური კოეფიციენტები ტოლია.
ა) $y = -3x + 4$; ბ) $y = 3x - 4$; გ) $y = 5x$; დ) $y = x - 1$.

21. ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან რომელია $y = -2x - 5$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება?
მითითება: ორი წრფე პარალელურია, თუ მათი კუთხური კოეფიციენტები ტოლია:
ა) $y = -2x + 4$; ბ) $y = -3x$; გ) $y = 0{,}5x$; დ) $y = -0{,}5x - 2$.

22. გაითვალისწინეთ ორი წრფის პარალელურობის პირობა და ამოხსენით მოცემული ამოცანები:
ა) დაწერეთ $y = 4x - 3$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;5);
ბ) დაწერეთ $y = 5x$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;–3);
გ) დაწერეთ $y = -3x - 1$ წრფის პარალელური განტოლება თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;2);
დ) დაწერეთ $y = 5x + 2$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, რომელიც გადის (2:0) წერტილზე.

რეალური პროცესის მათემატიკური მოდელირება:

23. ორმა მოსწავლემ გადაწყვიტა ცურვაზე სიარული და ამისათვის:

I. პირველი მოსწავლე თითოეულ გაკვეთილში იხდის 7 ლარს.
II. მეორე მოსწავლემ გადაიხადა საცურაო აუზის საწევრო ერთჯერადი გადასახადი 10 ლარი, ხოლო შემდეგ ყოველ გაკვეთილში იხდის 5 ლარს.

- წარმოადგინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელი (დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას);
- ააგეთ მიღებული ფუნქციების გრაფიკები ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე;
- დაადგინეთ რამდენი ლარი ექნება დახარჯული თითოეულ მოსწავლეს 5 დღის შემდეგ? 9 დღის შემდეგ?
- გააკეთეთ მიღებული შედეგების ანალიზი და გამოიტანეთ შესაბამისი დასკვნები.

24. **იპოვეთ შეცდომა:** მოსწავლეს უნდოდა დაეწერა წრფის განტოლება, მან წრფიდან შეარჩია ორი წერტილი (2; –4) და (4; 10); k დახრილობის საპოვნელად დაწერა, რომ $k = \frac{4-2}{10-(-4)}$; რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? დაეხმარეთ მოსწავლეს დაწეროს მოცემული წრფის განტოლება.

3.8. წრფივი ფუნქცია, გარდაქმნები

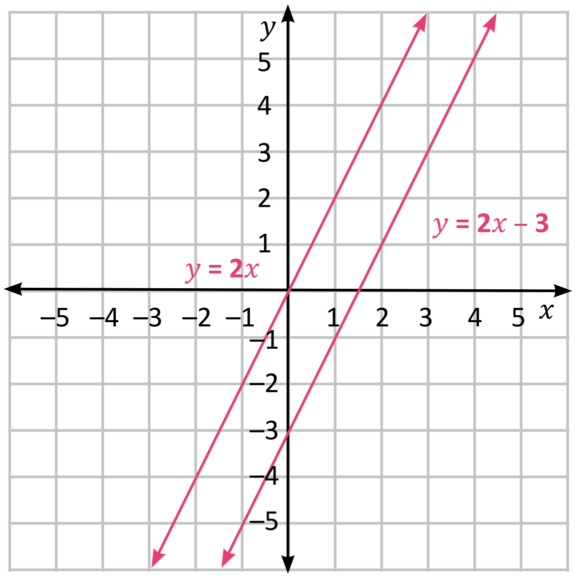
კვლევა

ნიმუში 1

ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ორი წრფივი ფუნქცია, რომელთა განტოლებებია $y = 2x$ და $y = 2x - 3$

დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ცხრილით:

x	$y = 2x$	$y = 2x - 3$
−2	−4	−7
−1	−2	−5
0	0	−3
1	2	−1
2	4	1

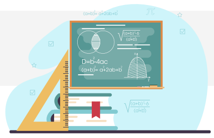


თუ მოცემულია ორი წრფივი ფუნქციის განტოლება:

$y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$

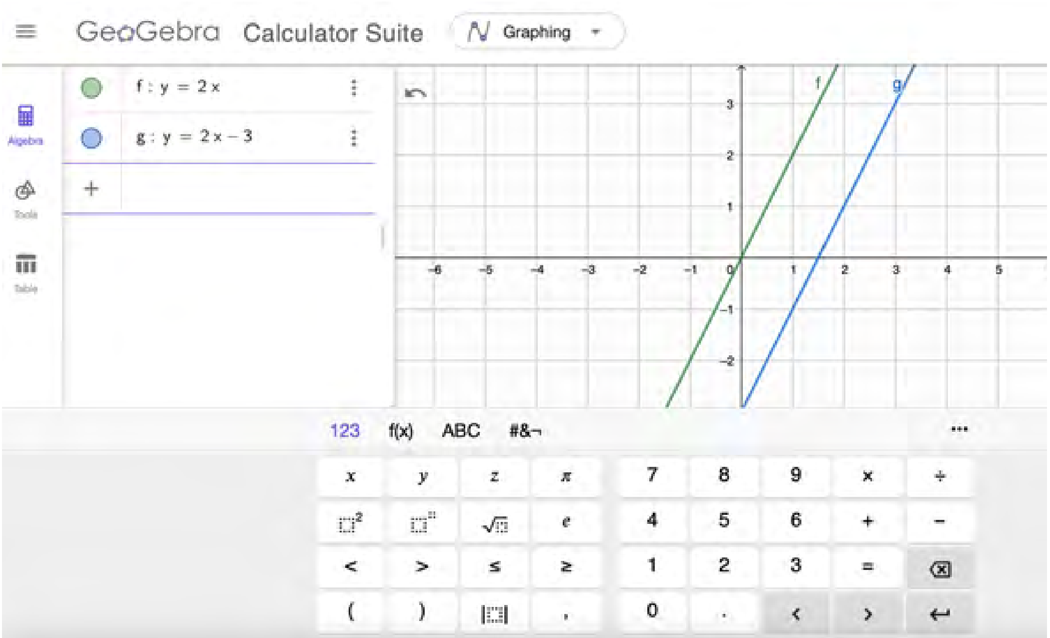
სადაც კუთხური კოეფიციენტები ტოლია $k_1 = k_2$ და b განსხვავებულია, მაშინ წრფეები პარალელურია.

ჩვენს შემთხვევაში, კუთხური კოეფიციენტები ტოლია, $k_1 = k_2 = 2$, b განსხვავებულია. ვიტყვით, რომ $y = 2x - 3$ მიიღება $y = 2x$ წრფის პარალელური გადატანით 3-ერთეულით ქვევით.



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- კომპიუტერის მეშვეობით შედით საიტზე ან მობილურის მეშვეობით გადმოწერეთ აპლიკაცია Geogebra (გეოგებრა).
- www.geogebra.org საიტზე შესვლის შემდეგ, გრაფიკების ასაგებად აირჩიეთ Start Graphing გამოჩნდება საკოორდინატო სიბრტყე და პატარა ფანჯარა, რომლის გადართვაც შესაძლებელია სამ სხვადასხვა რეჟიმზე.
- საიტის მეშვეობით შეგიძლიათ ააგოთ სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა. ვიზუალიზაცია დაგეხმარებათ საკითხის უკეთესად გაგებასა და აღქმაში.



მარცხნივ მდებარე ფანჯრის რეჟიმები:

- პირველ რეჟიმზე ჩანს იმ წერტილის კოორდინატები, რომლებსაც მოვნიშნავთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. (ასევე პირველი რეჟიმის ჩართვისას შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმულა, რომლის მიხედვითაც საკოორდინატო სიბრტყეზე პირდაპირ აგვიგებს პროგრამა გრაფიკს.)
- მეორე რეჟიმი გვაძლევს საშუალებას, ავირჩიოთ გეომეტრიის საბაზისო ელემენტები: წერტილი, წრფე, მონაკვეთი, სხივი და ავაგოთ ფიგურა.
- მესამე რეჟიმში ჩანს ცხრილები, რომელსაც მაღალ კლასებში გავეცნობით.

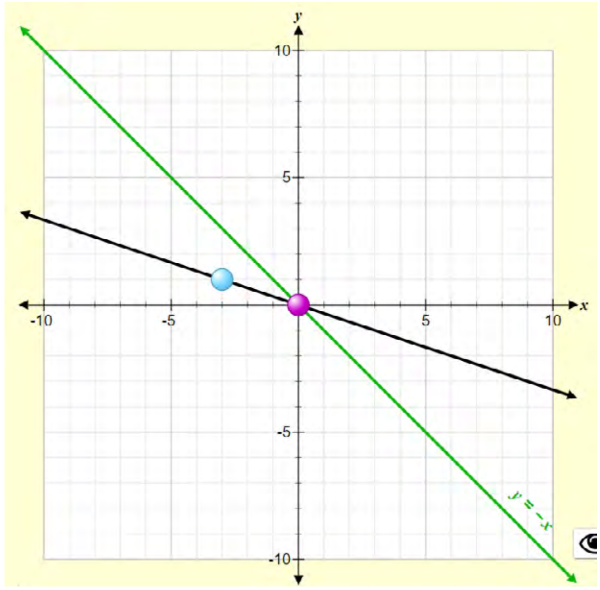
შედით საიტზე Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ სხვადასხვა წრფივი ფუნქციის გრაფიკი და გამოიკვლიეთ წრფივი ფუნქციები.

ნიმუში 2

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = -1 \cdot x$ და $y = -\frac{1}{3} \cdot x$

$y = -x$	
x	y
0	**0**
1	**–1**

$y = -\frac{1}{3} \cdot x$	
x	y
0	0
1	$-\frac{1}{3}$



Phet.Colorado.edu

ბოლო ორი ნიმუშიდან გამომდინარე ვხედავთ, რომ

- როდესაც $k > 0$-ზე, რაც უფრო დიდია k-კოეფიციენტი, კუთხე წრფესა და x ღერძის დადებით მიმართულებასთან იზრდება;
- როდესაც $k < 0$-ზე, რაც უფრო დიდია k-კოეფიციენტის მოდული, კუთხე წრფესა და x ღერძის უარყოფით მიმართულებასთან იზრდება;
- გამომდინარე იქიდან, რომ k გვიჩვენებს რამდენადაა დახრილი წრფე x ღერძთან, k-ს ასევე ეწოდება დახრილობა, ან კუთხური კოეფიციენტი.

სავარჯიშოები

1. დახაზეთ, y =-7x, $y = -4x$, $y = -2x$ ფუნქციის გრაფიკები და დაადგინეთ, როგორ მოქმედებს კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება გრაფიკზე?

2. დახაზეთ, $y = x$, $y = 4x$, $y = 6x$ ფუნქციის გრაფიკები და დაადგინეთ, როგორ მოქმედებს კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება გრაფიკზე?

3. **ტექნოლოგიები:** შედით საიტზე Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ $y = -2x$ $y = -2x + 2$, $y = -2x - 2$, $y = -2x - 6$ წრფეების გრაფიკები და იმსჯელეთ მათზე.

4. როგორც ხედავთ, ყველა ფუნქციას კუთხური კოეფიციენტები ტოლი აქვთ, გამოიკვლიეთ რას იწვევს b-ს ცვლილება?

5. **ტექნოლოგიები:** შედით საიტზე Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ $y = 3x$ $y = 3x + 1$, $y = 3x + 5$, $y = 3x - 4$ წრფეების გრაფიკები და იმსჯელეთ მათზე.

6. რომელია $y = 3x + 1$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება? ამოიწერეთ ყველა შესაძლო სწორი პასუხი:

ა) $y = 3x - 4$; ბ) $y = -3x + 1$; გ) $y = x + 3$; დ) $y = 3x + 5$.

7. დაწერეთ $y = 4x - 3$, წრფის პარალელური წრფის განტოლება თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;5).

8. დაწერეთ $y = 5x$, წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;–3).

9. დაწერეთ $y = 0.4x$ წრფის პარალელური წრფეების განტოლება, რომლებიც გადის (10;10) წერტილზე.

კვლევა

10. რომელია $y = 2x + 1$ ის პარალელური წრფის განტოლება?

ა) $y = 4x + 1$; ბ) $y = -2x$; გ) $y = \frac{1}{2}x + 1$; დ) $y = 2x - 5$.

11. დაწერეთ $y = 5x - 1$ წრფის პარალელური განტოლება რომელიც Y ღერძს კვეთს წერტილში (0;3).

12. დაწერეთ $y = 5x + 2$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება რომელიც გადის (2:0) წერტილზე.

13. დაწერეთ $y = -4x + 6$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, რომელიც გადის (5; 0) წერტილზე.

3.9. გავლილი გზა, დრო, გადაადგილება – მოძრაობის აღწერა

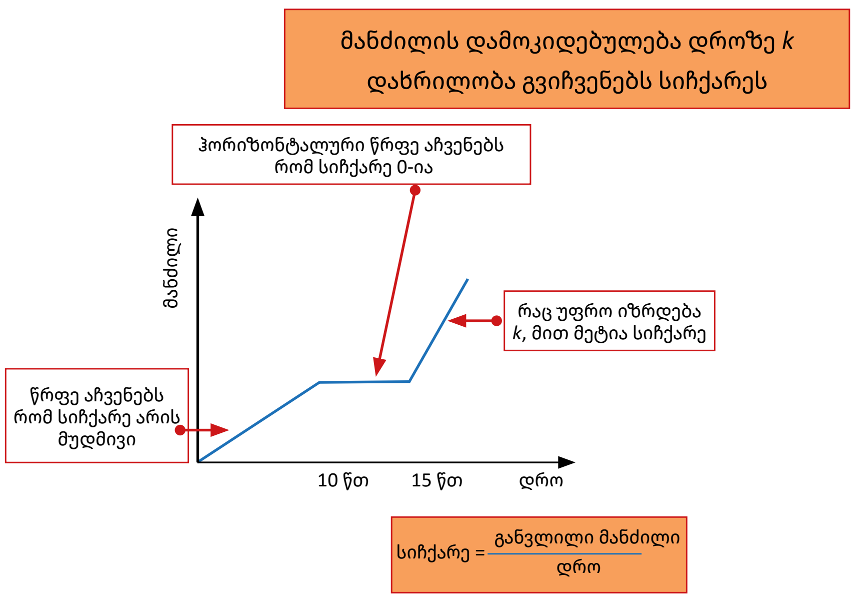
განვიხილოთ სიტუაცია: სტუდენტი დილით გაემართა პროფესიული კოლეჯისკენ, პირველი 10 წუთის განმავლობაში მან იარა ფეხით 1 კმ და მივიდა გაჩერებამდე, სადაც 8 წუთის განმავლობაში ელოდებოდა ტრანსპორტს, ტრანსპორტის მოსვლის შემდეგ კი ჩაჯდა მასში და გაემგზავრა კოლეჯში.

საკვანძო კითხვა: როგორ არის შესაძლებელი მოძრაობის აღმწერი გრაფიკის წარმოდგენა?

ნიმუში 1

განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყე, x ღერძს შევუსაბამოთ დრო, ხოლო y ღერძს გავლილი მანძილი (გზა); რადგანაც არ ვიცით სიჩქარე ავაგოთ მიახლოებითი გრაფიკი:

- სათავეს, მოძრაობის ათვლის წერტილს (0;0)-ს შევუსაბამოთ სტუდენტის სახლის მდებარეობა.
- პირველი 10 წუთში სტუდენტმა გაიარა 1კმ, გრაფიკზე პირველი წრფის მონაკვეთი შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას.
- გაჩერებაზე მისვლის შემდეგ სტუდენტი 8 წუთის განმავლობაში ელოდებოდა ტრანსპორტს, გრაფიკზე მეორე მონაკვეთი, რომელიც x ღერძის პარალელურია, შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას, დრო გადიოდა თუმცა სტუდენტს მეტი მანძილი არ გაუვლია. სიჩქარე იყო 0 კმ/წთ.
- 8 წუთის შემდეგ სტუდენტი ჩაჯდა ტრანსპორტში და ისევ გააგრძელა პროფესიული კოლეჯისკენ სვლა, მესამე წრფის ნაწილი შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას.



საკვანძო კითხვა:

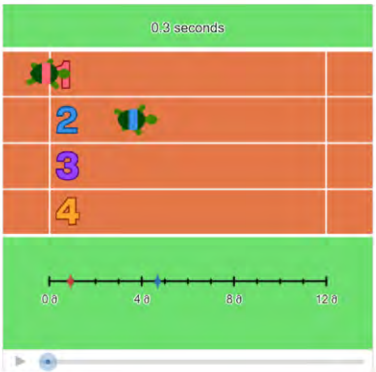
- *შეიძლება თუ არა გრაფიკიდან გამომდინარე დავადგინოთ როდის მოძრაობდა სტუდენტი უფრო დიდი სიჩქარით?*

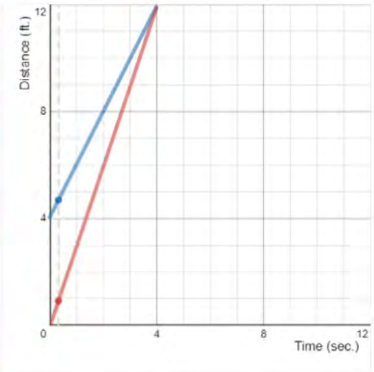
ნიმუში 2

წარმოვიდგინოთ ორი კუს მარათონი

ვიცით, რომ რბოლის დაწყებამდე ერთი კუ 4 მეტრით იყო იყო დაშორებული სასტარტო ხაზს. რბოლის დაწყებიდან 4 წამის შემდეგ ორივე მისული იყო „ფინიშის ხაზამდე“

DESMOS – მარათონი.





- რა მოხდება თუ მოძრაობა დაიწყება არა ათვლის სათავიდან?

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ წითელი წრფე აღწერს წითელი კუს მოძრაობას, ხოლო ლურჯი წრფე – ლურჯის კუს მოძრაობას.

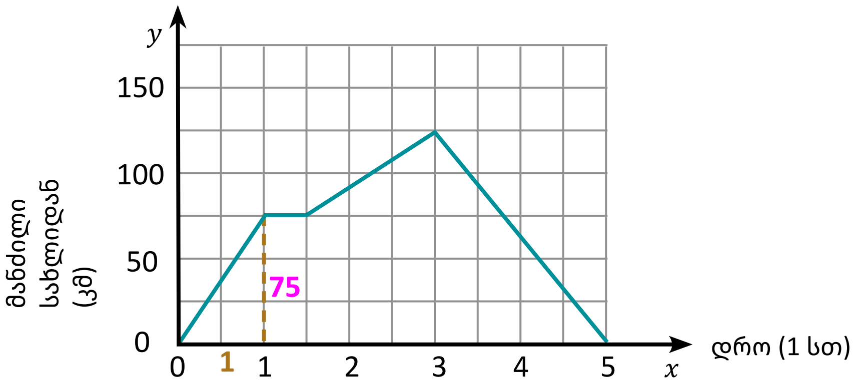
წითელი კუს მოძრაობის შესაბამისი განტოლებაა: $y = 3x$

ვხედავთ, რომ 4 წამში გაიარა 12 სმ, შესაბამისად სიჩქარეა 3 მ/წმ

ლურჯმა კუმ 4 წამში გაიარა 8 მ (საწყისი წერტილი იყო (0;4), ხოლო საბოლოო (4;12); შესაბამისად, ლურჯი კუს სიჩქარეა – 2 მ/წმ; ხოლო მოძრაობის აღმწერი განტოლებაა $y = 2x + 4$

სავარჯიშოები

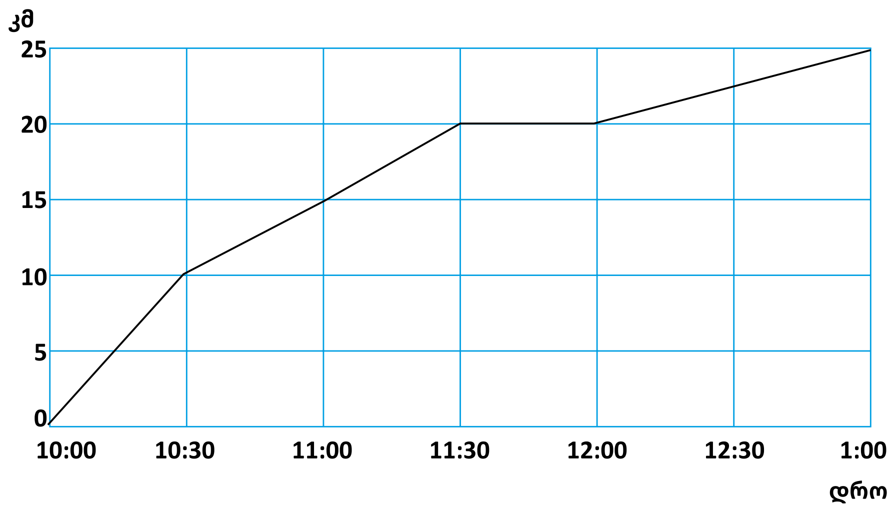
1. აღწერეთ გრაფიკით მოცემული მოძრაობა, დაადგინეთ სიჩქარე მოძრაობის თითოეულ მონაკვეთზე.



საკვანძო კითხვა:

შეიძლება თუ არა გრაფიკიდან გამომდინარე დავადგინოთ როდის მოძრაობდა მანქანა უფრო დიდი სიჩქარით? რას გვიჩვენებს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

2. მოცემულია მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი. აღწერეთ რას გვიჩვენებს გრაფიკი.



- განსაზღვრეთ რომელია დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ცვლადები?
- როგორ არის დაკავშირებული X და Y ღერძზე მოცემული ინფორმაცია?
- რა წესით არის ინფორმაცია მოცემული? რა წესით შეიძლება იყოს ინფორმაცია მოცემული?

3. გრაფიკიდან გამომდინარე გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

ა) სულ რამდენი კილომეტრი გაიარეს მეგობრებმა?

ბ) რამდენი საათი იმოძრავეს მეგობრებმა?

გ) გრაფიკის მიხედვით რას აკეთებდნენ მეგობრები 11:30-12:00 დროის ინტერვალში?

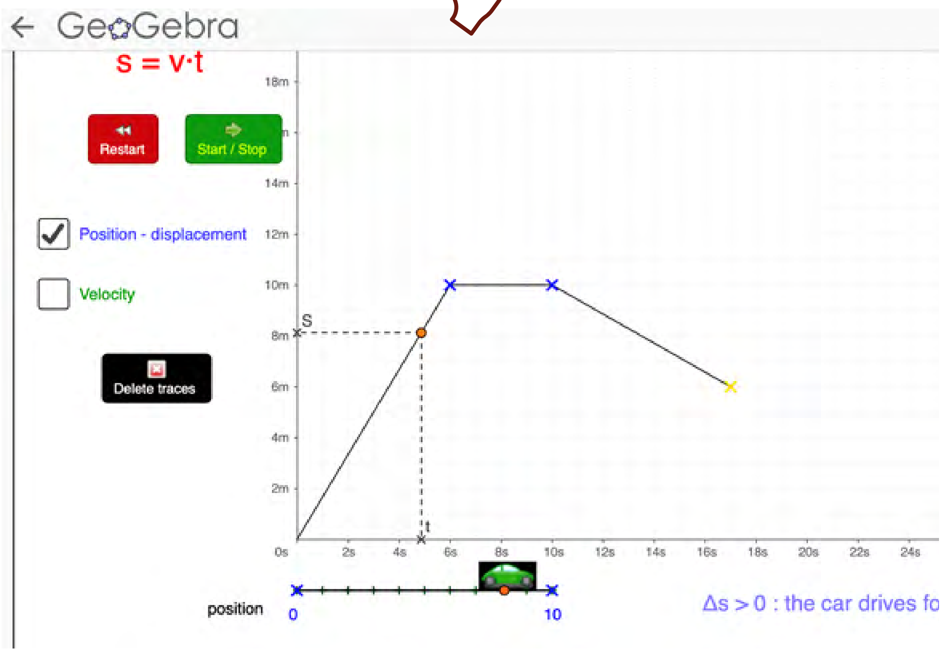
სავარჯიშოები

დ) ახსენით, დროის რა ინტერვალებში შეგიძლიათ სიჩქარის დაანგარიშება?
ე) გამოიანგარიშეთ სიჩქარე თითოეული ბიჯისთვის;
ვ) რა სიჩქარით იმოძრავეს მეგობრებმა 12:30 დან 1:00-მდე?
ზ) დროის რა ინტერვალში იარეს მაქსიმალური სიჩქარით?

STEM – დავალება

4. მოცემულია მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი; აღწერეთ რას გვიჩვენებს გრაფიკი.
ა) აღწერეთ რა ხდება მანქანის მოძრაობის დაწყებიდან პირველი 6 წამი;
ბ) აღწერეთ რა ხდება 6 წმ-დან 10 წმ-მდე დროის შუალედში;
გ) აღწერეთ რა ხდება მე-10 წამიდან მე-17 წამის ჩათვლით.
გამოთვალეთ სიჩქარე დროის თითოეული ინტერვალისთვის.

ტექნოლოგიების გამოყენება [მოძრაობის გრაფიკი](#)



5. STEM [კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან.](#) გახსენით ბმული [DESMOS – მარათონი](#) და შეასრულეთ მე-12 და მე-13 დავალებები.

STEM ინტეგრირება ინგლისურთან

6. ტექნოლოგიების გამოყენება [მოძრაობის გრაფიკი](#) მოცემულია ორი მანქანის რბოლა. სიმულაციაში შესაძლებელია მანქანების სიჩქარეების ცვლილება, ასევე საწყისი პოზიციის ცვლილება.

გახსენით სიმულაცია:

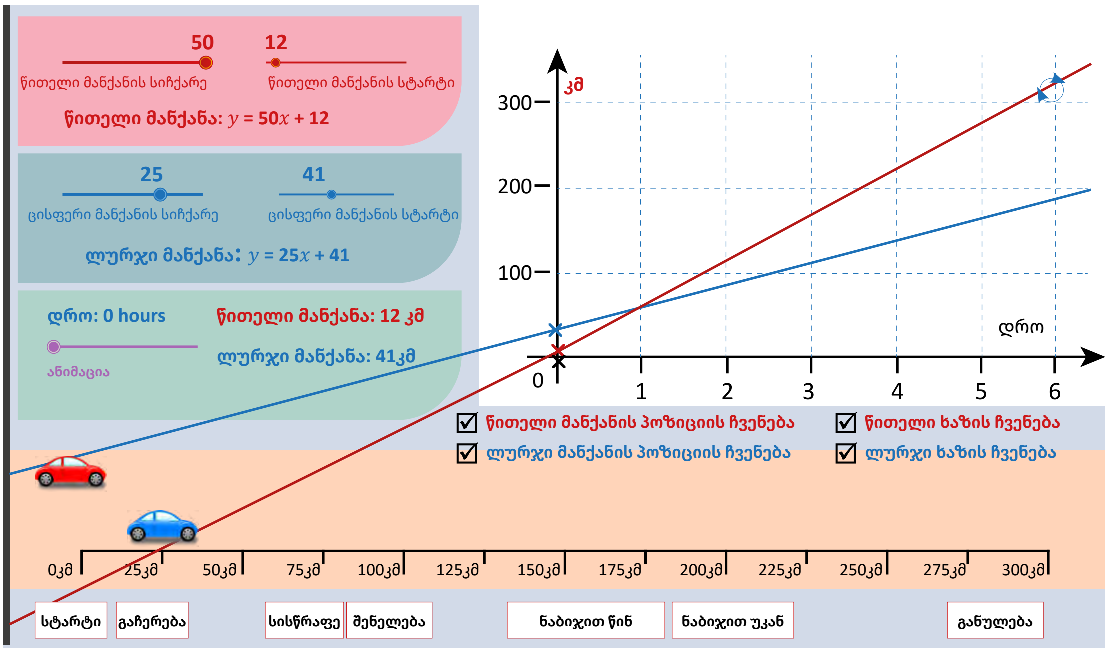
ა) დააყენეთ თქვენთვის სასურველი პარამეტრები და აღწერეთ თითოეული მანქანის მოძრაობისთვის, რას ნიშნავს თქვენ მიერ მინიჭებული პარამეტრები;

ბ) შეადარეთ მანქანების სიჩქარეები და დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეწევა ერთი მანქანა მეორეს;

გ) აღწერეთ მოძრაობის შესაბამისი გრაფიკები.

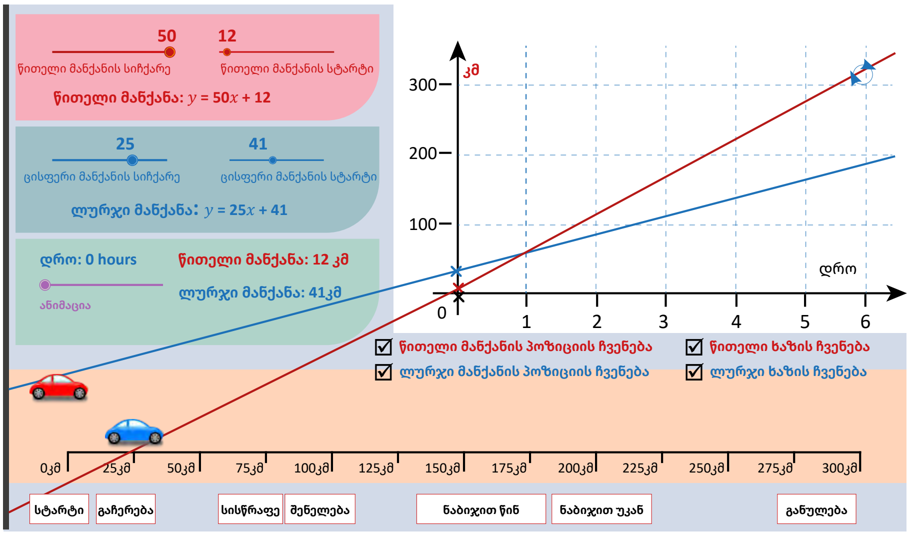
მოძრაობის გრაფიკი

მანქანების შეჯიბრი



3.10. ფუნქცია და განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ ორი მანქანის მოძრაობა



ორ A და B ქალაქს შორის მანძილი 288 კმ-ია, B ქალაქის მიმართულებით გაემგზავრა ორი მგზავრი, ერთი ველოსიპედით, მეორე მოტოციკლით; აქედან ვიცით, რომ ველოსიპედისტი ქალაქთან 40 კმ-ით უფრო ახლოს იყო, ვიდრე მოტოციკლეტისტი, თუმცა მოძრაობა დაიწყეს ერთი და იმავე დროს.

- რა დროში დაეწევა მოტოციკლისტი ველოსიპედისტს, თუ ვიცით, რომ ველოსიპედისტი მოძრაობდა 8 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო მოტოციკლეტისტი 24 კმ/სთ სიჩქარით?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება:

ათვლის სათავედ ავიღოთ მოტოციკლეტისტის ადგილსამყოფელი.

რადგან ველოსიპედისტის სიჩქარე 8 კმ/სთ-ია და ის B ქალაქთან 40 კმ-ით ახლოს იმყოფება, ვიდრე მოტოციკლეტისტი, მისი მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$y = 8x + 40$ **(1)** სადაც x შეესაბამება დროს, ხოლო y გავლილ მანძილს.

რადგან მოტოციკლეტისტის მოძრაობის დაწყების ადგილი არის ათვლის სათავედ მიღებული და მისი სიჩქარეა 24 კმ/სთ, მისი მოძრაობის აღმწერი განტოლება იქნება

$y = 24x$ **(2)**

მიღებულ **(1)** და **(2)** განტოლებას ერთად **წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა** ეწოდება. ხოლო ამ განტოლებათა საერთო ამონახსნს-წრფივ ორცვლადიან **განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.**

(1) და **(2)** განტოლებებით შექმნილი განტოლებათა სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

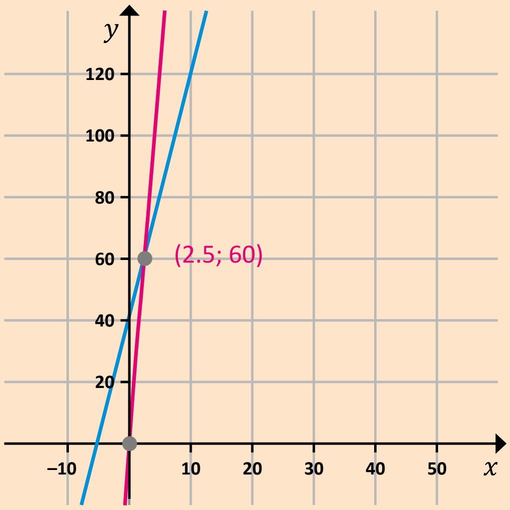
ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა, ნიშნავს ვიპოვოთ ის $(x;y)$ წყვილი, რომელიც ორივე განტოლებას დააკმაყოფილებს.

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა სხვადასხვა მეთოდით:

მეთოდი 1:

განტოლების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი

ვხედავთ, რომ გავლილი მანძილი დროის ფუნქციაა. ავაგოთ თითოეული ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილი.



გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს წერტილში (2.5; 60); გამოდის, რომ მოტოციკლეტისტი ველოსიპედს დაეწევა 2.5 სთ-ის შემდეგ, რა დროისთვისაც მოტოციკლეტისტს გავლილი ექნება 60 კმ, ხოლო ველოსიპედისტს – 20 კმ, რადგან მან 40 კმ-ით ნაკლები იარა.

დაასაბუთეთ, რომ:

პირველი ფუნქციის შემთხვევაში $0 \le x \le 31$;

მეორე ფუნქციის შემთხვევაში $0 \le x \le 12$;

დავუშვათ, რომ ქალაქში ჩასვლის დროს ასრულებენ მოძრაობას.

მეთოდი 2

განტოლების ამოხსნის ჩასმის მეთოდი

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან y-ის მნიშვნელობა, რომელიც x-ითაა გამოსახული, ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში y-ის ნაცვლად; მივიღებთ წრფივ ერთუცნობიან განტოლებას:

$8x + 40 = 24x$ იგივე

$24x = 8x + 40$

$24x - 8x = 40$

$16x = 40$

$x = 2.5$

მას შემდეგ, რაც დავადგინეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ x-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის პირველ ან მეორე განტოლებაში x-ის ნაცვლად, მივიღებთ: $y = 60$.

შემოწმება:

განტოლება **(1)**

$8 \cdot 2.5 + 40 = 20 + 40 = 60$

განტოლება **(2)**

$2.5 \cdot 24 = 60$

მეთოდი 3:

განტოლების ამოხსნა შეკრების გზით

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

როგორც ვიცით, რომ ტოლობის ძირითადი თვისების თანახმად შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ ერთი და იგივე რიცხვი. შეგვიძლია შევკრიბოთ ორი განტოლება; განტოლების ორივე მხარეს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ შესაბამისად მეორე განტოლება. (რადგან გვაქვს ტოლობა) მივიღებთ, რომ:

$y - y = 8x + 40 - 24x$

$0 = 40 - 16x$

$x = 2.5$; 2.5-ის ჩასმით x-ის ნაცვლად მივიღებთ, $y = 60$.

სავარჯიშოები

1. ჩამოთვლილთაგან რომელია წრფივი ორუცნობიანი განტოლება/განტოლებები?

ა) $3x + 5 = 2x - 7$; ბ) $3x - 5y = 3$; გ) $x - y = 8$; დ) $3x + y = y - 5$.

2. დაადგინეთ, არის თუ არა ცვლადების მოცემული წყვილი ერთდროულად ორივე განტოლების ამონახსნი:

ა) $x = 5$; $y = 2$;
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

გ) $x = 5$; $y = 4$
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

ბ) $x = 5$; $y = -3$
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

დ) $x = 4$; $y = -1$
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

3. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გრაფიკული ხერხით (შეგიძლიათ, გამოიყენოთ Desmos პროგრამა); შეადგინეთ მსგავსი 8 წრფივ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით გრაფიკულად:

ა) $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = -5x - 1 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

4. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჩასმის ხერხით; შეადგინეთ 6 მსგავსი სისტემა და ამოხსენით:

ა) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -x - 9 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} b = -a + 12 \\ a = 4b \end{cases}$

5. რა განტოლება მიიღება სისტემაში შემავალი ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად? ამოხსენით განტოლებათა სისტემა შეკრების ხერხით. შეადგინეთ 6 მსგავსი სისტემა და ამოხსენით:

ა) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

6. **გამოწვევა:** მოცემულია ორი განტოლება:

$y = 4x - 8$ (1)

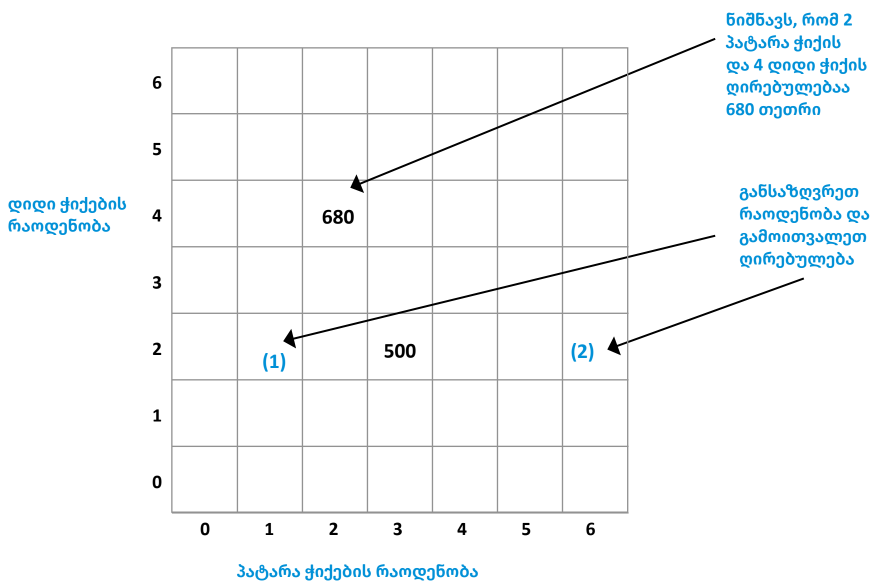
$y = -2x + 4$ (2),

გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და დაასახელეთ რიცხვთა ისეთი წყვილი, რომელიც წარმოადგენს:

ა) (1) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს;
ბ) (2) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს;
გ) არ წარმოადგენს არც (1) და არც (2) განტოლების ამონახსნს;
დ) წარმოადგენს ორივე განტოლების ამონახსნს.

სავარჯიშოები

7. აღნიშნულ დიაგრამაზე თითოეული უჯრა შეესაბამება ფასს თეთრებში, კერძოდ, რა ჯდება სხვა-დასხვა რაოდენობით პატარა ჭიქით შეკვეთილი ყავა და დიდი ჭიქით შეკვეთილი ყავა.



ა) შესაძლებელია თუ არა დავადგინოთ (1) რა თანხა შეესაბამება ისრით მითითებულ უჯრას? (2) ისრით მითითებულ უჯრას?

ბ) ახსენით თქვენი მოსაზრება. აღწერეთ მოცემული დიაგრამა და ახსენით რას შეესაბამება დიაგრამაზე რიცხვი 500.

გ) დიაგრამაზე მოცემული ცვლადების მეშვეობით, შეადგინეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი/განტოლება, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელი იქნება ვიპოვოთ სხვადასხვა კომბინაციისთვის რა ექნება გადასახდელი მომხმარებელს?

3.11. უკუპროპორციულობა, არაწრფივი ფუნქციის გრაფიკი

თავის დასაწყისში ვისაუბრეთ პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაზე; ამჯერად გავიხსენოთ, რომ ორ სიდიდეს ეწოდება უკუპროპორციული დამოკიდებულება. თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორე სიდიდის შემცირებას (გაზრდას) იმავე რიცხვჯერ.

ნიმუში 1

თბილისიდან ბათუმამდე გზა მიახლოებით 360 კმ-ია. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რამდენ სთ-ში დაფარავს მანქანა ორ ქალაქს შორის მანძილს სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევაში.

სიჩქარე (კმ/სთ)	30	45	60	90
დრო (სთ)	12	8	6	4

თუ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების დროს ორი სიდიდის შეფარდებაა მუდმივი, **უკუპროპორციული დამოკიდებულების დროს მუდმივია ორი სიდიდის ნამრავლი.**

მოცემულ შემთხვევაში მუდმივია განვლილი გზა $s = vt$;

$360 = 30 \cdot 12 = 45 \cdot 8 = 60 \cdot 6 = 90 \cdot 4$

მოცემული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $t = \frac{s}{v}$ (1) ან $v = \frac{s}{t}$ (2)

რადგან მოცემულ შემთხვევაში s მუდმივია, გამოდის რომ ცვლადი სიდიდეებია v და t

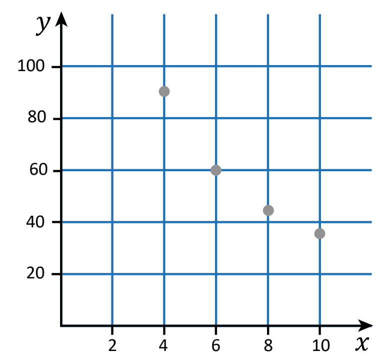
პირველ შემთხვევაში, თბილისიდან ბათუმში ჩასვლის დრო დამოკიდებულია სიჩქარეზე, ანუ მანქანის მოძრაობის სიჩქარის ცოდნით შევძლებთ გავიგოთ თუ რა დროში ჩავა ის დანიშნულების ადგილას.

მეორე შემთხვევაში, პირიქით, სიჩქარე დამოკიდებულია დროზე, იქიდან გამომდინარე, თუ რა დროში სურს მძღოლს დანიშნულების ადგილას ჩასვლა, შეუძლია მოძრაობის სიჩქარის ცვლილება.

მითითება: რაც არ უნდა სწრაფად სურდეს მძღოლს ჩასვლა, აუცილებელია რომ არ დაარღვიოს მოძრაობის წესები მაგისტრალზე ან ქალაქში სიარულის დროს და არ გადააჭარბოს დასაშვებ სიჩქარეს.

განვიხილოთ სიტუაცია

სიჩქარე (კმ/სთ)	30	45	60	90
დრო (სთ)	12	8	6	4



როგორც ვხედავთ, წერტილები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე

გაგრძელება

დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია

x	y
4	90
6	60
8	45
10	36

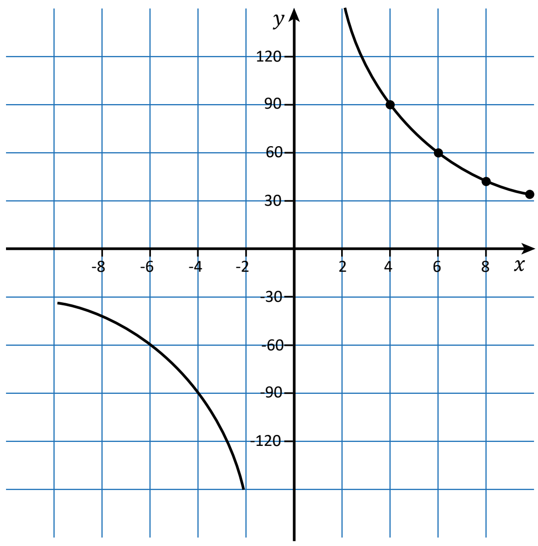
(12; 30), (8;45), (6; 90), (4;90)

X ღერძს შევუსაბამოთ დრო, Y ღერძს სიჩქარე, გადავიტანოთ წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთოთ.

თუ ჩვენ ავაგებთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $y = \frac{360}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს, მივიღებთ წირს, რომელსაც ეწოდება ჰიპერბოლა. როგორც ვხედავთ $x \neq 0$-ის შესაბამისად, ფუნქციას არ აქვს მნიშვნელობა $x = 0$-ისთვის.

ჩვენ მიერ განხილულ სიტუაციაში x იყო დადებითი, შესაბამისად გრაფიკი იყო მხოლოდ პირველ მეოთხედში; x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვის გრაფიკი იქნება მესამე მეოთხედში.

x	y
4	90
6	60
8	45
10	36



$y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი	$y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც x-დამოუკიდებელი ცვლადია, k – ნულის არატოლი რიცხვი, უკუპროპორციულობა ეწოდება	უკუპროპორციულობის განსაზღვრის არეა ნებისმიერი რიცხვი 0-ის გარდა, რადგან x = 0-თვის, $\frac{k}{x}$ გამოსახულებას აზრი არ აქვს.
უკუპროპორციულობის ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ნებისმიერი რიცხვი 0-ის გარდა, რადგან $k \neq 0$ და $\frac{k}{x}$ გამოსახულება ვერ გახდება 0-ის ტოლი x ცვლადის ვერცერთი მნიშვნელობისთვის.		

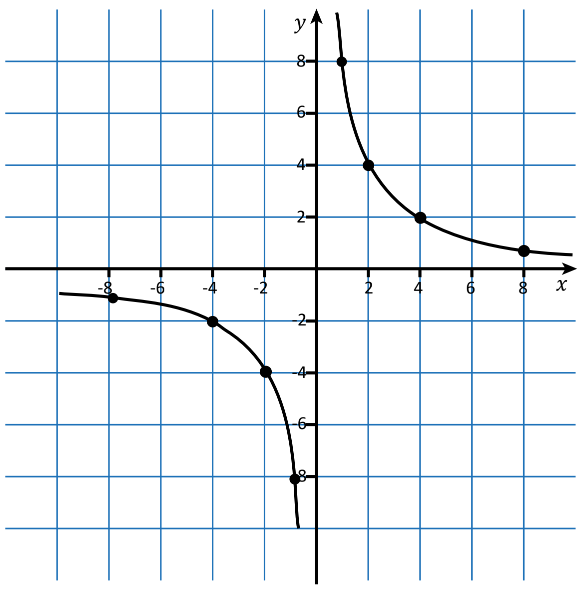
ნიმუში 2

ვთქვათ მოცემულია $y = \frac{8}{x}$, ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

x	y
1	8
2	4
4	2
8	1

x	y
−1	−8
−2	−4
−4	−2
−8	−1

$y = \frac{8}{x}$



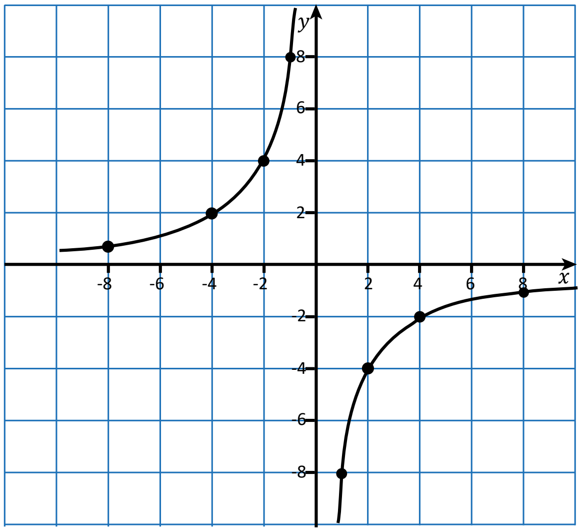
ნიმუში 3

ვთქვათ მოცემულია $y = -\frac{8}{x}$, ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი;

x	y
1	−8
2	−4
4	−2
8	−1

x	y
−1	8
−2	4
−4	2
−8	1

$y = -\frac{8}{x}$



განვიხილოთ $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციული ფუნქცია, სადაც $x \neq 0$

- როდესაც $k > 0$, ფუნქციის გრაფიკები მოთავსებულია პირველ და მესამე მეოთხედებში
- როდესაც $k < 0$, ფუნქციის გრაფიკები მოთავსებულია მეორე და მეოთხე მეოთხედებში

უკუპროპორციულობის გრაფიკი შედგება ორი წირისგან (შტოსგან), რომელსაც **ჰიპერბოლა** ეწოდება.

ნიმუში 3

სტუდენტს აქვს 1000 ლარი და მას სურს თანხის გადანაწილება დღეებზე. მას სურს დაადგინოს დღიური ხარჯის გათვალისწინებით, რამდენი დღე შეიძლება ეყოს თანხა. ცხრილით მოცემულია კავშირი დღიურ დანახარჯსა და დროს (დღეებს) შორის (ჩავთვალოთ სტუდენტმა ყოველდღე ერთი და იმავე რაოდენობის თანხა უნდა დახარჯოს).

დღიური დანახარჯი	1000	500	250	100	50
დრო (დღეები)	1	2	4	10	20

რამდენჯერაც მცირდება დღიური დანახარჯი, იმდენჯერ იზრდება დღეების რაოდენობა.

ცხრილის მიხედვით ვხედავთ

დღიური ხარჯი · დღეების რაოდენობაზე არ იცვლება, თანხა მუდმივია

$1000 \cdot 1 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 100 \cdot 10 = 50 \cdot 20 = 1000$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დღიურ დანახარჯსა და დღეების რაოდენობას შორის არის უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

სავარჯიშოები

1. შეადარეთ პირდაპირპროპორციულობისა და უკუპროპორციულობის დამოკიდებულებები:

ა) იმსჯელეთ, რას ნიშნავს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება;

ბ) იმსჯელეთ, რას ნიშნავს უკუპროპორციული დამოკიდებულება;

გ) შეადარეთ პირდაპირპროპორციულობის და უკუპროპორციულობის გრაფიკები, რისი თქმა შეგიძლიათ? რომელ მეოთხედებში გადის გრაფიკი როცა $k > 0$, $k < 0$?

2. მოცემულია უკუპროპორციულობა შემდეგი ფორმულით $y = \frac{12}{x}$

ა) იპოვეთ y-ის მნიშვნელობა, x-ის შემდეგი მნიშვნელობისთვის;

x	1	2	3	4	6
y					

x	–1	–2	–3	–4	–6
y					

კიდევ სცადეთ

ბ) გადაიტანეთ შესაბამისი ინფორმაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე და ააგეთ გრაფიკი;

გ) გაანალიზეთ ცხრილით და გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის ზრდასთან ერთად?

დ) გაანალიზეთ გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის კლებასთან ერთად?

3. მოცემულია უკუპროპორციულობა შემდეგი ფორმულით $y = -\frac{24}{x}$

ა) იპოვეთ y-ის მნიშვნელობა, x-ის შემდეგი მნიშვნელობისთვის;

x	1	2	4	6	8
y					

x	–1	–2	–4	–6	–8
y					

კიდევ სცადეთ

ბ) გაიდატანეთ შესაბამისი ინფორმაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე და ააგეთ გრაფიკი;

გ) გაანალიზეთ ცხრილით და გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის ზრდასთან ერთად?

დ) გაანალიზეთ გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის კლებასთან ერთად?

4. მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = ab$, სადაც S-არის ფართობი, a-მართკუთხედის სიგრძე, b-მართკუთხედის სიგანე.

ა) რამდენჯერ გაიზრდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგრძეს გავზრდით 4-ჯერ, 8-ჯერ, 10-ჯერ? როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი სიგრძეზე?

ბ) რა მოხდება თუ მართკუთხედის სიგანეს შევამცირებთ 2-ჯერ, 5-ჯერ? როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი სიგანეზე?

სავარჯიშოები

გ) დავუშვათ გვინდა, რომ მართკუთხედის ფართობი იყოს მუდმივი, 40 სმ^2, ცხრილის მიხედვით, იპოვეთ სიგრძის კონკრეტული მნიშვნელობისთვის, რა შეიძლება იყოს სიგანე?

სიგრძე (a სმ)	2	4		10	
სიგანე (b სმ)			5		2
ფართობი	40	40	40	40	40

კიდევ სცადეთ

ცხრილიდან გამომდინარე დაწერეთ უკუპროპორციულობა და იმსჯელეთ:

რას შეუსაბამებდით x-ს? y-ს? k-ს?

5. ააგეთ შემდეგი უკუპროპორციულობის გრაფიკი:

ა) $y = -\frac{1}{x}$; ბ) $y = \frac{1}{x}$; გ) $y = -\frac{2}{x}$; დ) $y = \frac{4}{x}$.

6. ჩაწერეთ უკუპროპორციულობა ფორმულით, თუ ვიცით, რომ უკუპროპორციულობის გრაფიკს ეკუთვნის შემდეგი წერტილი:

ა) $A(-2{,}4)$; ბ) $B(3{,}-9)$; გ) $C(-25{,}-0.2)$; დ) $D(0.4{,}12)$.

7. დადებითია თუ არა k კოეფიციენტი თუ ვიცით, რომ

ა) $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციულობის გრაფიკი მეორე და მეოთხე მეოთხედშია?

ბ) $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციულობის გრაფიკი პირველ და მესამე მეოთხედშია?

8. A-დან B ქალაქამდე მანძილი 200 კმ-ია

I. რა დრო დასჭირდება A-დან B-მდე მანძილის გავლას თუ მანქანა ივლის 20 კმ/სთ სიჩქარით? 40 კმ/სთ სიჩქარით? 80 კმ/სთ სიჩქარით?

ახსენით რაზეა დამოკიდებული ერთი ქალაქიდან მეორეში ჩასვლის დრო. ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

II. რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს მანქანამ იმისათვის, რომ A-დან B-მდე მანძილის გავლას მოანდომოს 8 საათი? 10 საათი? 20 საათი?

ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

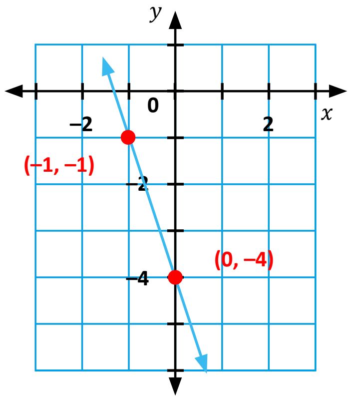
სავარჯიშოები

ქვიზი წრფივი ფუნქციისთვის

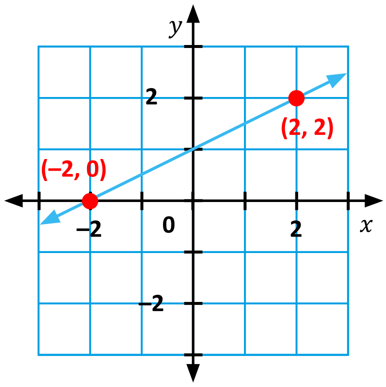
1. კახას ბანკში ანაბარზე ჰქონდა 200 ლარი, ის ყოველთვე ანაბრიდან ხარჯავდა 20 ლარს. ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება.

2. თითოეული ფუნქციისთვის იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა)



ბ)



3. იპოვეთ წრფივი ფუნქციის დახრილობა, თუ ვიცით რომ წრფე გადის შემდეგ ორ წერტილზე:

ა) (2; 5) და (4; 10);   ბ) (–1;4) და (1;12);

4. არის თუ არა შემდეგი დამოკიდებულებები პირდაპირპროპორციულობა და თუ არის, იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა) $5y = 10x$ ბ) $y - 3 = x$ გ) $-7x = y$ დ) $x + y = 4$

5. მეტროს ერთჯერადი ბარათი, რომელზეც თანხა არის დასარიცხი ჯდება 5 ლარი. მეტროთი თითოეული მგზავრობა ჯდება 1 ლარი.

- წარმოადგინე მოცემული სიტუაცია მათემატიკური მოდელით (დაწერე ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას);
- თამუნამ შეიძინა მეტროს ერთჯერადი ბარათი და მეტროთი ისარგებლა 50-ჯერ. რა იყო მისი ხარჯი?

6. დაწერე წრფივი ფუნქციის განტოლება, თუ ვიცით, რომ მისი კუთხური კოეფიციენტია 3, ხოლო Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია –2.

7. იპოვეთ $y = 3x - 6$ ფუნქციის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები;

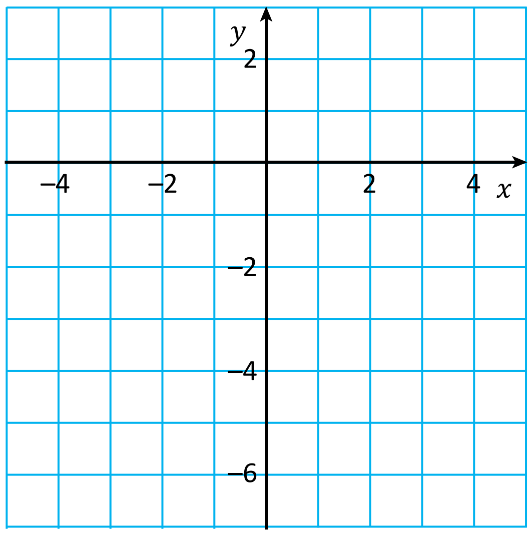
8. დაწერეთ (–2; 5) და (1; –4) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

9. ააგეთ მოცემული $y = -2{,}5x + 2$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი.

10. საბამ სახლიდან ტბამდე გაიარა 4 კმ, ამის შემდეგ შეისვენა 30 წთ და დაბრუნდა სახლში. დახაზეთ საბას გადაადგილების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გამოიყენეთ გრაფიკი იმისათვის, რომ გაარკვიოთ საბას მიერ გავლილი მთლიანი მანძილი.

11. ქვემოთ მოცემულია ცხრილი. ცხრილის მიხედვით დაადგინეთ ფუნქცია წრფივია თუ არა, დაწერეთ შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ გრაფიკი.

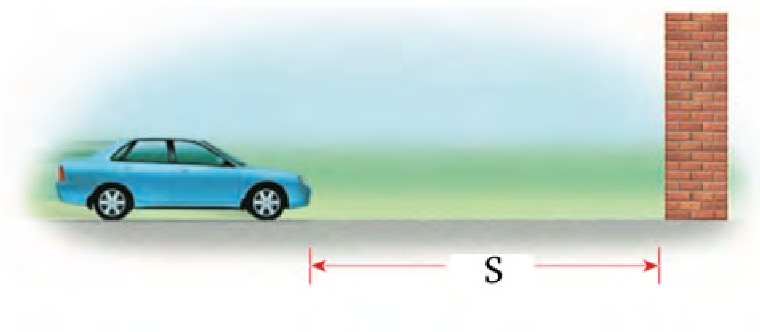
x	–4	–2	0	2	4
y	1	0	–1	–2	–3



V. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება

სამუხრუჭე მანძილი



იცით თუ არა,

ავტომობილის მოძრაობის დროს ხშირია ისეთი შემთხვევა, როცა საჭიროა სწრაფად დამუხრუჭება, საავარიო სიტუაციის თავიდან არიდების მიზნით. მომხდარი ავტოსაგზაო შემთხვევის დროს კი გზის ზედაპირზე საბურავების ნაკვალევის მიხედვით ექსპერტიზით დგინდება რა სიჩქარით მოძრაობდა მძღოლი, დაარღვია თუ არა მან საგზაო მოძრაობის წესები და ა.შ.

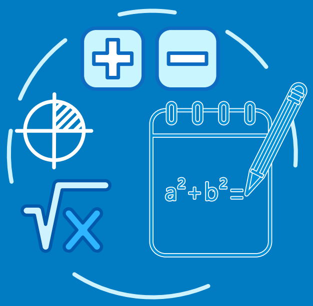
ფიზიკის კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია მანქანის სამუხრუჭე სისტემის ამუშავებიდან სრულ გაჩერებამდე მანძილის (სამუხრუჭე მანძილი) გამოსათვლელი ფორმულა $S=\dfrac{v^2}{\mu g}$ (1), სადაც v სიჩქარეა დამუხრუჭების დაწყების მომენტში, μ – მანქანის საბურავის გზის ზედაპირზე მოჭიდების კოეფიციენტია, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.

სრული გასაჩერებელი მანძილი კი უდრის მძღოლის მიერ რეაქციის დროს (დრო მძღოლის მიერ დაბრკოლების შემჩნევიდან სამუხრუჭე სისტემის ამუშავებამდე). შესაბამისად, გავლილი მანძილისა და სამუხრუჭე მანძილების ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=vt+\frac{v^2}{\mu g}\ (2)$$

მათემატიკა გვეხმარება რეალური მოვლენების მოდელირებასა და შესწავლაში, ხოლო როგორ არის შესაძლებელი ფორმულის შედგენა, ვისწავლით მოგვიანებით. ამ ეტაპზე მნიშვნელოვანია განვიხილოთ სხვადასხვა სიტუაციები და გავიგოთ, როგორ არის შესაძლებელი განტოლებების ამოხსნის ცოდნით გავარკვიოთ რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა საგზაო შემთხვევამდე ან საწყისი მონაცემების ცოდნით როგორ შეიძლება დავადგინოთ სამუხრუჭე მანძილი.

გაგრძელება



კომპლექსური დავალება

საკვანძო კითხვა:

- საგზაო შემთხვევის შემდეგ, როგორ არის შესაძლებელი დავადგინოთ გადააჭარბა თუ არა მანქანამ სიჩქარეს? რომელი მათემატიკური მოდელი გვეხმარება აღნიშნული ტიპის პრობლემების გადაჭრაში?

თქვენი დავალება

გამოიკვლიოთ და დაადგინოთ მანქანის სამუხრუჭე მანძილი სხვადასხვა სიჩქარით და სხვადასხვა ტიპის გზაზე მოძრაობის პირობებში.

ქვემოთ მოცემულია ცხრილი, თუ რას უდრის სხვადასხვა ზედაპირზე მოჭიდების კოეფიციენტი:

გზის ზედაპირის ტიპი	მოჭიდების კოეფიციენტი	
	მშრალ ზედაპირზე	სველ ზედაპირზე
საფარიანი	0,8	0,4
ღორღი	0,7	0,4
გრუნტი	0,6	0,3
მოყინული	0,1	---

1. გამოთვალეთ რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი მშრალ საფარიან გზაზე, თუ სამუხრუჭე მანძილია 240 მ და მძღოლმა აამუშავა სამუხრუჭე სისტემა, საფრთხის დანახვიდან 1 წამის შემდეგ? (ჩათვალეთ $g = 10 \frac{მ}{წმ^2}$)
2. ღორღიან სველ გზაზე მიმავალმა მძღოლმა შენიშნა საფრთხე, 2 წმ-ის შემდეგ სამუხრუჭე სისტემა ამუშავდა და ავტომობილი გაჩერდა 140 მეტრში. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი?
3. მეგობრებთან და აუცილებლად ზრდასრულის დახმარებით ჩაატარეთ ექსპერიმენტი: ამისათვის დაგჭირდებათ ველოსიპედი, წამზომი, სიგრძის საზომი და სხვადასხვა ზედაპირის მქონე გზა.

   აირჩიეთ უსაფრთხო გზის ნაწილი, ველოსიპედზე თანაბარი სიჩქარის აკრეფის შემდეგ წინა-

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება

შენი დავალება

სწარ გამზადებულ ნიშნულთან დაიწყეთ დამუხრუჭება, გაზომეთ მანძილი ნიშნულიდან სრულ გაჩერებამდე. გამოითვალეთ სიჩქარე. ეს გაიმეორეთ სამჯერ სხვადასხვა სიჩქარით ერთსა და იმავე გზაზე, შემდეგ მეორე გზაზე. აუცილებლად დაიცავით უსაფრთხოების ზომები. მონაცემები შეიტანეთ ცხრილში და შეამოწმეთ დამოკიდებულება სიჩქარესა და სამუხრუჭე მანძილს შორის. ასევე, დამოკიდებულება სხვადასხვა ზედაპირსა და სამუხრუჭე მანძილს შორის ერთი და იმავე სიჩქარის შემთხვევაში.

4. გაეცანით მოძრაობის წესებს, გამოიკვლიეთ გათვალისწინებულია თუ არა სიჩქარის შეზღუდვები სხვადასხვა ზედაპირიან გზებზე. კიდევ რას ითვალისწინებს საგზაო მოძრაობის წესები?

5. თქვენ მიერ მოძიებული შედეგების ანალიზის შედეგად, შეიმუშავეთ რეკომენდაციები ურჩი მძღოლებისათვის, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია მოძრაობის წესების დაცვა. დაამზადეთ საინფორმაციო ბუკლეტი და გაავრცელეთ სასკოლო საზოგადოებაში.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, რომელშიც იქნება ინფორმაცია ზემოთ მოცემულ თითოეულ პუნქტზე.

ნაშრომის პრეზენტაციისას ხაზგასმით უპასუხეთ კითხვებს:

I. რამდენად მნიშვნელოვანია რეალური პროცესის მათემატიკური მოდელის შექმნა? მსჯელობისას ისაუბრეთ სამუხრუჭე მანძილის გამოსათვლელ ფორმულაზე.

II. გააანალიზეთ თქვენ მიერ შეგროვებული მონაცემები, თუ აღმოაჩინეთ რაიმე კანონზომიერება?

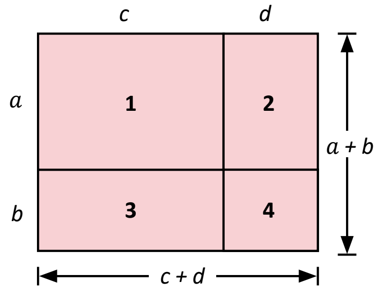
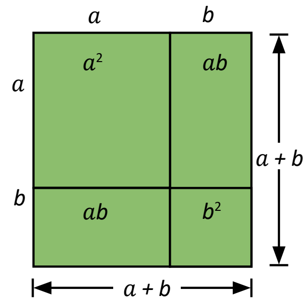
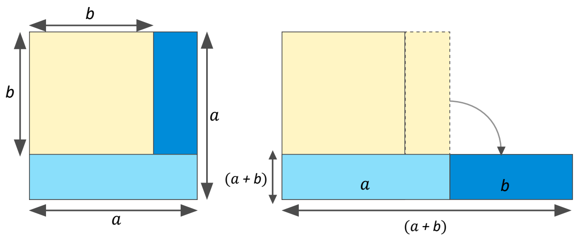
III. თუ საგზაო ინსპექტორმა იცის სამუხრუჭე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა, ასევე გზის მოჭიდების კოეფიციენტი (ხახუნის კოეფიციენტი), როგორ შეუძლია დაადგინოს რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა? რა შემთხვევაში შეუძლია ისაუბროს სიჩქარის გადაჭარბებაზე?

თემა 4. კვადრატული მოდელები

წინარე მასალის გამეორება

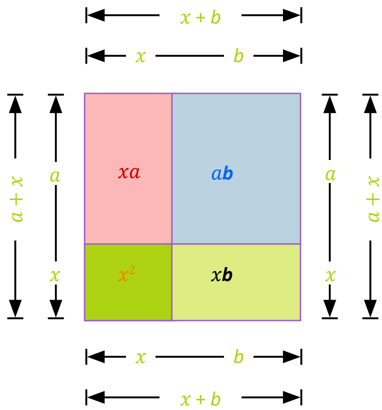
შემოკლებული გამრავლების ფორმულები და ცნებები:

წინა პარაგრაფებში გავეცანით ორწევრის ორწევრზე გამრავლებას, ნამრავლის წარმოდგენას ჯამის სახით; ასევე შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს

<table>
<tr>
<td>1. $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) =$
$= ac + ad + bc + bd$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
3. $(a - \underline{b})^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + \underline{b}^2$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>5.

ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად

$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab =$

ჯამის წარმოდგენა ნამრავლად
$= x^2 + (a + b)x + ab =$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

4.1. კვადრატული სამწევრი

საკვანძო კითხვა: გიფიქრიათ თუ არა, როგორ არის შესაძლებელი ალგებრული გამოსახულებებით რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა?

$ax^2 + bx + c$ ალგებრულ გამოსახულებას, როდესაც $a \neq 0$-ს კვადრატული სამწევრი ეწოდება.

კვადრატული სამწევრი შედგება 3 წევრისაგან, x-წარმოადგენს ცვლადს, ხოლო a,b და c რიცხვებია, a-ს და b-ს უწოდებენ კოეფიციენტებს, ხოლო c-ს თავისუფალ წევრს.

ჩვენ ვიცით, რომ როდესაც $a = 1$ არსებობს მეთოდი, რომლის მიხედვით შესაძლებელია კვადრატული სამწევრის ნამრავლად დაშლა, იმ შემთხვევაში, როდესაც მარტივად არის შესაძლებელი ვიპოვოთ ის ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი უდრის თავისუფალ წევრს, ხოლო ჯამი – მეორე კოეფიციენტს.

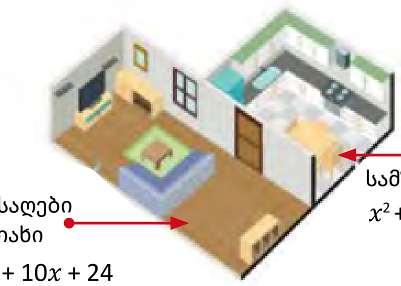
კვადრატული სამწევრის მნიშვნელობის პოვნა

ნახაზზე მოცემულია ბინის გეგმა. გეგმის მიხედვით ვხედავთ, რომ მისაღები ოთახის ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით –

$x^2 + 10x + 24$, ხოლო სამზარეულოს ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით –

$x^2 + 7x + 12$.

რა იქნება ბინის ფართობი, თუ ვიცით რომ $x = 1$? $x = 10$?



მოცემულია ორი კვადრატული სამწევრი, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადის x-ის მნიშვნელობაზე.

ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება	ფართობი ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობისთვის $x = 1$	$x = 10$
$x^2 + 10x + 24$	$1^2 + 10 \cdot 1 + 24 = 1 + 10 + 24 = 25$	$10^2 + 10 \cdot 10 + 24 =$ $100 + 100 + 24 = 224$
$x^2 + 7x + 12$	$1^2 + 7 \cdot 1 + 12 =$ $1 + 7 + 12 = 20$	$10^2 + 7 \cdot 10 + 12 =$ $100 + 70 + 12 = 182$

როგორც ვხედავთ ფართობი დამოკიდებულია x-ის მნიშვნელობაზე.

კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ნიმუში 1 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ა) $x^2 + 10x + 24 = (x + ...)(x + ...)$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია 24 და ჯამი 10:

ნამრავლი	ჯამი
$1 \cdot 24 = 24.$	$1 + 24 = 25 \neq 10$
$2 \cdot 12 = 24$	$2 + 12 = 14 \neq 10$
$4 \cdot 6 = 24$	$4 + 6 = 10$

იმისათვის, რომ კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად შევარჩიეთ ორი რიცხვი 4 და 6

$x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

დასაბუთება: $x^2 + 10x + 24 = x^2 + 4x + 6x + 24 =$

$= x(x + 4) + 6(x + 4) = (x + 4)(x + 6)$

ბ) $x^2 + 7x + 12 = (x + ...)(x + ...)$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია 12 და ჯამი 7:

ნამრავლი	ჯამი
$1 \cdot 12 = 12.$	$1 + 12 = 13 \neq 7$
$2 \cdot 6 = 12$	$2 + 6 = 8 \neq 7$
$3 \cdot 4 = 12$	$3 + 4 = 7$

იმისათვის, რომ კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად შევარჩიეთ ორი რიცხვი 3 და 4

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

დასაბუთება: $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 =$

$x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$

როგორც ვხედავთ:

მისაღები ოთახის ფართობი $= x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

სამზარეულოს ფართობი $= x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

საკვანძო კითხვა: როგორ ფიქრობთ, რომელი თანამამრავლი შეესაბამება რომელ გვერდს? ჩაწერეთ ბინის გვერდები ცვლადებით.

ნიმუში 2 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

წარმოვადგინოთ მოცემული კვადრატული სამწევრი ნამრავლად:

$x^2 - 3x - 10 =$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია „–10“ და ჯამი „–3“,

ავარჩიეთ რიცხვის წყვილი 2 და (–5)

$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$

დასაბუთება:

$x^2 - 3x - 10 = x^2 + 2x - 5x - 10 =$

$= x(x + 2) - 5(x + 2) = (x + 2)(x - 5)$

მითითებები

ეცადეთ გონებაში იპოვოთ რიცხვთა წყვილი, აღნიშნული ალგორითმით

ნამრავლი	ჯამი
$-1 \cdot 10 = -10.$	$-1 + 10 \neq -3$
$1 \cdot (-10) = -10$	$1 + (-10) \neq -3$
$-2 \cdot 5 = -10$	$-2 + 5 \neq -3$
$2 \cdot (-5) = -10$	$-5 + 2 = -3$

კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ნიმუში 3

ჩვენ ვიცით, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები; თუ კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენით მივიღებთ ორწევრის კვადრატს, ვამბობთ, რომ მივიღეთ სრული კვადრატი

ა) $x^2 - 14x + 49 =$

ნამრავლი	ჯამი
$7 \cdot 7 = 49$ $(-7) \cdot (-7) = 49$	$7 + 7 = 14$ $(-7) + (-7) = -14$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

ბ) განვიხილოთ კვადრატული სამწევრი, როდესაც $a \neq 0$;

$$4x^2 - 12x + 9 =$$

$$2x \cdot 2x \qquad 3 \cdot 3$$

$$2 \cdot (2x \cdot 3)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა

ალგებრული გამოსახულებების გამარტივებისთვის საჭიროა სხვადასხვა მანიპულაციის ცოდნა. გავეცნოთ გარდაქმნას, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, აღნიშნული ხერხის გამოყენებით მარტივად დაეუფლებით კვადრატული განტოლების ამოხსნის ხერხებს.

ნიმუში 4

$x^2 - 18x + 2 =$

ვიცით, რომ

$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$x^2 - 2 \cdot 9x + 2 =$$

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot 9x + 81}_{(x-9)^2} \underbrace{- 81 + 2}_{-79}$$

პირველი სამი წევრის დაჯგუფებით მივიღეთ სრული კვადრატი, გამოდის რომ:

$x^2 - 18x + 2 = (x - 9)^2 - 79$

აღნიშნულ გარდაქმნას ეწოდება სრული კვადრატის გამოყოფა.

ნიმუში 5

შედარებით რთული ნიმუში

$$2x^2 - 20x + 2 =$$

გავიტანოთ მამრავლი ფრჩხილს გარეთ:

$$2(x^2 - 10x + 1) =$$

ფრჩხილებში მოცემული სამწევრიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$2(x^2 - 2 \cdot 5x + 1) =$$

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot 5x + 25}_{(x-5)^2} \underbrace{- 25 + 1}_{-24}$$

$$2((x - 5)^2 - 24) = 2(x - 5)^2 - 48$$

ნიმუში 6 – კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, ვიზუალური წარმოდგენა

$x^2 + 6x + 2 =$

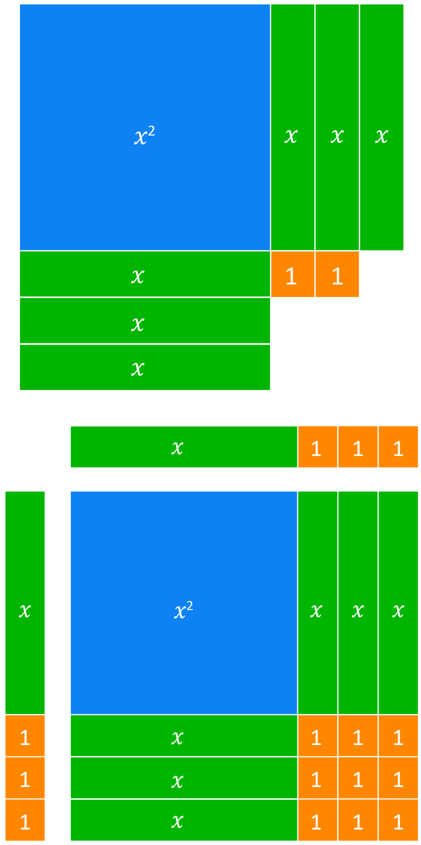
ვიცით, რომ

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

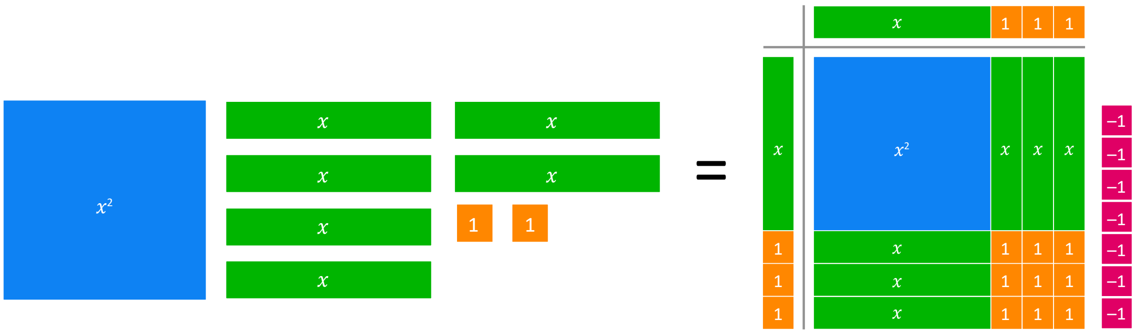
$x^2 + 2 \cdot 3x + 2 =$

$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 2$

$(x + 3)^2 \qquad -7$



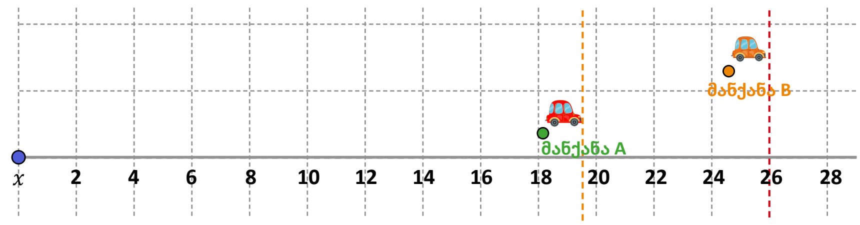
$x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$



ნიმუში 7

თბილისიდან ბათუმის მიმართულებით, გაემგზავრა ჯერ სატვირთო, ერთი საათის შემდეგ კი მსუბუქი ავტომობილი. ქალაქებს შორის მანძილი 360 კმ-ია. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარე 2-ჯერ მეტია სატვირთო ავტომობილის სიჩქარეზე, რის გამოც ის 2 საათით ადრე ჩავიდა ბათუმში.

წარმოვიდგინოთ სიტუაცია



🔗 იხილეთ სიმულაცია, ასევე გრაფიკი

აღნიშნულ სიმულაციაში შეგიძლიათ პარამეტრების შეცვლა და სიტუაციის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა; ჩათვალეთ, საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთი ერთეული უდრის 10 კმ-ს.

მსჯელობა:

დავუშვათ A მანქანის სიჩქარეა x კმ/სთ, მაშინ B მანქანის სიჩქარე იქნება – $2x$ კმ/სთ;

360-ის გავლას A მანქანა მოანდომებდა $\frac{360}{x}$ სთ-ს;

360-ის გავლას B მანქანა მოანდომებდა $\frac{360}{2x}$ სთ-ს;

ვიცით, რომ B მანქანა გავიდა 1 საათით გვიან, თუმცა ჩავიდა 2 საათით ადრე, ე.ი. B მანქანამ იარა 3 სთ-ით ნაკლები, ვიდრე A მანქანამ;

სიტუაციის მათემატიკური მოდელის (განტოლების) შესადგენად გამოვიყენოთ აღნიშნული პირობა და მივიღებთ:

A მანქანის მიერ დახარჯულ დროს – **B მანქანის** მანქანის მიერ დახარჯული დრო = 3 სთ

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{2x} = 3$$

მივიღეთ რაციონალური განტოლება, განტოლების ამოხსნით ვიპოვით სიჩქარეს:

$$\frac{360}{x} - \frac{180}{x} = 3$$

$$\frac{180}{x} = 3$$

$x = 60$ კმ/სთ

A მანქანის სიჩქარე არის 60 კმ/სთ;
B მანქანის სიჩქარე არის 120 კმ/სთ.

სავარჯიშოები

ამოცანები სიჩქარეებზე, ნაწილებზე

1. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 435 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტომობილი გამოვიდა. რა დროში შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს, თუ მათი სიჩქარეებია 75 კმ/სთ და 85 კმ/სთ?

2. A და B ქალაქს შორის მანძილი 450 კმ-ია. A-დან B-ს მიმართულებით გამოვიდა პირველი ავტომობილი 60 კმ/სთ სიჩქარით. ერთი საათის შემდეგ მისი შემხვედრი მიმართულებით B ქალაქიდან გამოემგზავრა მეორე ავტომობილი 70 კმ/სთ სიჩქარით. A პუნქტიდან რა მანძილზე შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს?

3. ერთი პუნქტიდან ერთი და იმავე მიმართულებით გამოვიდა ორი ქვეითი. ერთის სიჩქარე 1 კმ/სთ -ით მეტია მეორეს სიჩქარეზე. რამდენი წუთის შემდეგ იქნება მათ შორის 500 მ?

4. მოტორიანმა ნავმა, რომლის საკუთარი სიჩქარეა 40 კმ/სთ, მდინარის დინების მიმართულებით 3 სთ-ში გაიარა 126 კმ. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე.

5. ერთ მუშას შეკვეთის შესრულება შეუძლია 12 საათში, მეორეს კი – 20 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს სამუშაოს ორივე მუშა თუ ერთად იმუშავებენ?

6. ორი მილით ერთდროულად აუზის ავსებას სჭირდება 4 საათი. მარტო პირველი მილით აუზის ავსებას სჭირდება 6 საათი. რამდენი საათი დასჭირდება მარტო მეორე მილს აუზის ასავსებად?

7. დათო და ლუკა მუშაობენ ერთნაირ ტესტზე. დათოს საათში შეუძლია პასუხი გასცეს ტესტის 18 კითხვას, ლუკას კი – 36 კითხვას. ბიჭებმა ერთდროულად დაიწყეს მუშაობა. რამდენი კითხვა იყო ტესტში, თუ ლუკამ 60 წუთით ადრე დაასრულა ტესტზე მუშაობა?

რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელირება/ამოცანები განტოლების შედგენით

8. მოტორიანი ნავი 2 საათი მოძრაობდა ტბაზე და 3 საათი მდინარის დინების მიმართულებით, რომლის სიჩქარეა 2 კმ/სთ. მან სულ გაიარა 81 კმ. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე.

ამოცანა ამოვხსნათ განტოლების შედგენით.

ნიმუში: გავიაროთ ნაბიჯ-ნაბიჯ ამოხსნის ალგორითმი

	მსჯელობა ანალიზი ამოცანის პირობის მიხედვით	**მოქმედება**
ნაბიჯი 1:	ნავის საკუთარი სიჩქარე უცნობია	ნავის საკუთარი სიჩქარე აღვნიშნოთ x კმ/სთ-ით
ნაბიჯი 2:	ტბაზე ნავი მოძრაობდა 2 სთ. გამოვიყენოთ მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა $S = V \cdot t$ და ვიპოვოთ ნავის მიერ ტბაზე გავლილი მანძილი	$S_1 = 2x$ კმ-ტბაზე 2 საათში გავლილი მანძილი

სავარჯიშოები

ნაბიჯი 3:	ნავი 3 სთ მოძრაობდა მდინარის დინების მიმართულებით სიჩქარე დინების მიმართულებით $V_{მიმ} = V_{საკ} + V_{დინ}$	$2V_{მიმ} = x + 2$ კმ/სთ $S_2 = 3(x + 2)$ კმ – დინების მიმართულებით 3 საათში გავლილი მანძილი
ნაბიჯი 4	ამოცანის პირობის თანახმად ნავმა სულ გაიარა 81 კმ → $S_1 + S_2 = 81$	შევადგინოთ განტოლება $2x + 3(x + 2) = 81$
ნაბიჯი 5	ამოვხსნათ განტოლება მოტორიანი ნავის საკუთარი სიჩქარე →	$2x + 3x + 6 = 81$ $5x = 81 - 6$ $5x = 75$ $x = 75 : 5$ $x = 15\,\frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$

9. ავტომობილმა 3 საათში გაიარა 15 კმ-ით მეტი ვიდრე მოტოციკლეტმა 2,5 საათში. იპოვეთ ავტომობილის და მოტოციკლეტის სიჩქარე, თუ მოტოციკლეტის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია ავტომობილის სიჩქარეზე.

10. ოსტატი საათში ამზადებს 12 დეტალით მეტს შეგირდთან შედარებით. ოსტატმა იმუშავა 2 საათი და დაამზადა 2-ჯერ მეტი დეტალი, ვიდრე შეგირდმა 5 საათში. რამდენ დეტალს ამზადებს ოსტატი საათში?

11. კატერი მდინარის დინების მიმართულებით 7 სთ-ში იმავე მანძილს გადის, რასაც მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 8 საათში. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე, თუ კატერის საკუთარი სიჩქარეა 30 კმ/სთ.

12. ორი ავტომანქანა მოძრაობს გზაზე ერთნაირი სიჩქარით. თუ პირველი ავტომანქანა გაზრდის სიჩქარეს 10 კმ/სთ-ით, მეორე კი 10 კმ/სთ-ით შეამცირებს, მაშინ პირველი 3 საათში გაივლის იმავე მანძილს, რასაც მეორე 2 საათში. რა სიჩქარით მოძრაობენ ავტომანქანები?

13. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 1020 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი მატარებელი დაიძრა, ამასთან ერთის სიჩქარე 10 კმ/სთ-ით მეტია მეორე მატარებლის სიჩქარეზე. მოძრაობის დაწყებიდან 5 საათის შემდეგ ისინი ჯერ ვერ შეხვდნენ ერთმანეთს და მათ შორის დარჩენილი იყო 170 კმ. იპოვეთ მატარებლების სიჩქარე.

14. სპორტსმენმა ვარჯიშის შედეგად სირბილის საშუალო სიჩქარე 250 მ/წმ-დან 300 მ/წმ-მდე გაზარდა. შედეგად მან დისტანციის გავლის დრო 1 წუთით გააუმჯობესა. რა სიგრძის არის სირბილის დისტანცია?

15. ტურისტების ჯგუფი ბანაკიდან ჩანჩქერამდე მიდიოდა 5 კმ/სთ სიჩქარით. ბანაკში დაბრუნებისას კი მოძრაობდნენ 4 კმ/სთ სიჩქარით და უკანა გზას მოანდომეს 30 წუთით მეტი დრო. იპოვეთ რა მანძილია ტურისტების ბანაკიდან ჩანჩქერამდე.

სავარჯიშოები

16. რა რიცხვები უნდა ჩავსვათ გამოტოვებულ ადგილას, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი?

ა) $x^2 + 10x\ + \ldots^2 = (x\ + \ldots)^2$;
ბ) $x^2 + 14x\ + \ldots^2 = (x\ + \ldots)^2$;
გ) $x^2 - 4x\ + \ldots^2 = (x - \ldots)^2$;
დ) $x^2 + 12x\ + \ldots^2 = (x\ + \ldots)^2$;
ე) $x^2\ + 16x\ + \ldots^2\ = (x\ + \ldots)^2$;
ვ) $x\ 2 - 9x\ + \ldots^2 = (x - \ldots)^2$;
ზ) $x^2 - 15x\ + \ldots^2 = (x - \ldots)^2$;
თ) $x^2 + x\ + \ldots^2 = (x\ + \ldots)^2$;
ი) $x^2 + \frac{3}{5}\ x\ + \ldots^2 = (x\ + \ldots)^2$;
კ) $x^2 - \frac{9}{4}x\ + \ldots^2 = (x - \ldots)^2$.

17. წარმოადგინეთ ნამრავლად

ა) $8x + 40$;
ბ) $4x + 36x^2$;
გ) $8x^2 - 64$;
დ) $4x^2 - 100$;
ე) $x^2 + 14x + 49$;
ვ) $x^2 + 9x + 14$;
ზ) $x^2 - 14x + 45$;
თ) $x^2 + 19x - 20$;
ი) $x^3 - x^2$;
კ) $x^2 - 49$;
ლ) $x^2 + 7x - 8$;
მ) $x^2 - 9x - 36$.

18. შეკვეცეთ წილადი:

ა) $\frac{14ab}{21a^2}$;
ბ) $\frac{a^2 - 25}{3a + 15}$;
გ) $\frac{5x^2y^3}{10x^2y^2}$;
დ) $\frac{4x - 12y}{x^2 - 9y^2}$;
ე) $\frac{56x^4y^3}{24x^2y^5}$;
ვ) $\frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

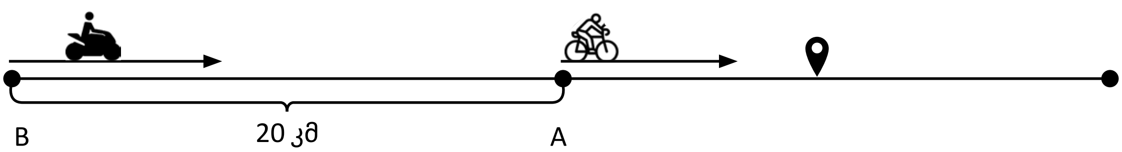
19. შეასრულეთ გამრავლება (გაყოფა):

ა) $\frac{x^2 - 3x}{3y^3} \cdot \frac{6y^2}{5x}$;
ბ) $\frac{a^2 + 2a}{5a} \cdot \frac{5 + 5a}{10 + 5a}$;
გ) $\frac{a^2 + a^3}{12b^2} : \frac{5 + 5a}{5b^3}$.

20. **გამოწვევა:** გაამარტივეთ გამოსახულება

ა) $\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$;
ბ) $\frac{5x^2}{1 - x^2} : \left(1 - \frac{1}{1 - x}\right)$;
გ) $\frac{p - q}{p} - \frac{7q}{p^2} \cdot \frac{p^2 - pq}{7q}$.

21. A და B პუნქტებიდან, ერთდროულად ერთი და იმავე მიმართულებით, მოძრაობა დაიწყეს ველოსიპედისტმა და მოტოციკლეტისტმა. A პუნქტიდან 10 კმ მანძილზე მოტოციკლეტისტი დაეწია ველოსიპედისტს. (იხ. ნახ 1) იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მოტოციკლეტისტის მოძრაობის სიჩქარე 18 კმ/სთ-ით მეტია ველოსიპედისტის სიჩქარეზე.



ნახატი 1

22. ფერმერს ყოველ დღე 80 ჰექტარი მიწის ნაკვეთი უნდა მოეხნა, რათა სამუშაო დაესრულებინა დაგეგმილ ვადაში. თუმცა მან შეძლო დღეში 10 ჰექტრით მეტი მიწა დაემუშავებინა, ამიტომ ვადაზე 1 დღით ადრე მას მოსახნავი დარჩა 30 ჰექტარი მიწა. რამდენი ჰექტარი მიწა ჰქონდა მოსახნავი ფერმერს?

სავარჯიშოები

ჯგუფური აქტივობა

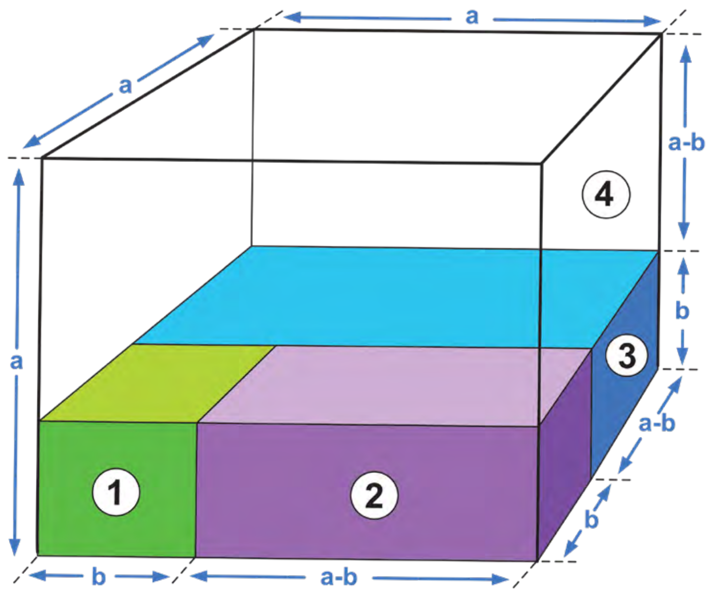
საკვლევი კითხვა:

დაადგინეთ როგორ არის შესაძლებელი $a^3 - b^3$ გამოსახულების ნამრავლად წარმოდგენა?

23. მოცემულია კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა a სმ, მასში მოთავსებულია პატარა კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა b სმ.

24. როგორც ხედავთ, სურათზე, მოცემული მთლიანი კუბის მოცულობა 4 ნაწილად არის დაყოფილი.

25. იპოვეთ თითოეული მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.



ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე შეავსეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი, იპოვეთ თითოეული ნაწილის მოცულობა. შემდეგ დაადგინეთ რას უდრის $a^3 - b^3$

ნაწილი 1-ის მოცულობა	ნაწილი 2-ის მოცულობა	ნაწილი 3-ის მოცულობა	ნაწილი 4-ის მოცულობა
	$(a-b) \cdot b \cdot b$		

კიდევ სცადეთ

კვადრატული განტოლება

ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 76 მ^2-ის ტოლია, როგორ ვიპოვოთ ოთახის გვერდების სიგრძეები?

შეადგინეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.

$x^2 + 12x + 24$

$x^2 + 6x + 8$

ვიცით, რომ ერთი ოთახის ფართობია $x^2 + 12x + 24$, ხოლო მეორე ოთახის $x^2 + 6x + 8$, რადგან ბინის სრული ფართობი 76 მ^2-ია, მივიღებთ განტოლებას

$$x^2 + 12x + 24 + x^2 + 6x + 8 = 76$$

მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ, რომ

$$2x^2 + 18x + 32 = 76$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება კვადრატული განტოლება.

- *როგორ ვიპოვოთ კვადრატული განტოლების ამონახსნები?*

	კვადრატული განტოლება	
$ax^2 + bx + c = 0$ ტიპის განტოლებას, სადაც a,b,c ნამდვილი რიცხვებია, სადაც $a \neq 0$, ხოლო x არის ცვლადი, კვადრატული განტოლება ეწოდება.	a-ს ეწოდება განტოლების პირველი კოეფიციენტი, b-ს მეორე კოეფიციენტი, ხოლო c-ს თავისუფალი წევრი $ax^2 + bx + c = 0$ – ფორმით მოცემულ განტოლებას, კვადრატული განტოლების სტანდარტული ფორმა ეწოდება. თუ $a = 1$-ს, მიღებულ $x^2 + bx + c = 0$ განტოლებას, ეწოდება დაყვანილი კვადრატული განტოლება ან კვადრატული განტოლების კერძო შემთხვევა.	**განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის კვადრატული განტოლება:** ჩვენ უკვე ვიცნობთ სხვადასხვა ტიპის კვადრატულ განტოლებებს, მაგალითად: $x^2 - 9 = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; $(2x - 1)^2 = 9$; $(x - 1)(x + 2) = 0$ და სხვა; დავუკავშიროთ აღნიშნული კვადრატული განტოლებები სტანდარტულ ფორმასთან.

დაიმახსოვრეთ, როდესაც კვადრატულ განტოლებას წარმოვადგენთ სტანდარტული ფორმით, ტოლობის მარჯვენა მხარეს უნდა გვქონდეს 0.

ნიმუში 1 — კვადრატული განტოლებების კავშირი სტანდარტულ ფორმასთან

კვადრატული განტოლება	კავშირი სტანდარტულ ფორმასთან $ax^2 + bx + c = 0$	a, b, c-ს მნიშვნელობები
$x^2 - 9 = 0$	$1 \cdot x^2 + 0x - 9 = 0$	$a = 1; \quad b = 0; \quad c = -9$
$2x^2 = 9$	$2x^2 - 9 = 0$ $2x^2 + 0x - 9 = 0$	$a = 2; b = 0; c = -9$
$2x^2 = 9x$	$2x^2 - 9x = 0$ $2x^2 - 9x + 0 = 0$	$a = 2; b = -9; c = 0$
$(x - 1)^2 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$a = 1; b = -2; c = 1$
$(3x + 1)^2 = 25$	$9x^2 + 6x + 1 = 25$ $9x^2 + 6x - 24 = 0$	$a = 9; b = 6; c = -24$
$(x - 1)(x + 2) = 0$	$x^2 + x - 2 = 0$	$a = 1; b = 1; c = -2$

ნიმუში 2 – განვიხილოთ კვადრატული განტოლებების სხვადასხვა ნიმუშები

ა) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი (ფესვი)

შემოწმება

$3^2 = 9 \qquad (-3)^2 = 9$

ბ) $(x - 2)^2 - 9 = 0$ იგივეა, რაც

$(x - 2)^2 = 9$

ამ შემთხვევაში ხარისხის ფუძე არის $(x - 2)$, შესაბამისად

$x - 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

მივიღებთ, ორ წრფივ განტოლებას:

$x - 2 = 3 \qquad x - 2 = -3$

$x = 5 \qquad x = -1$

გამოდის, რომ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი, ფესვი

$x_1 = 5$ და $x_2 = -1$

შემოწმება:

$(5 - 2)^2 - 9 = 3^2 - 9 = 0$

$(-1 - 2)^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = 0$

თუ $x^2 = k$ მაშინ $\begin{cases} x = \pm\sqrt{k}, \text{ როდესაც } k > 0 \\ x = 0, \text{ როდესაც } k = 0 \\ x = \emptyset, \text{ როდესაც } k < 0 \end{cases}$ არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში

ნულის თვისება/კვადრატული განტოლების ამოხსნა ნამრავლად წარმოდგენით

როგორც ვიცით, რომ ნამრავლი მაშინ არის 0-ის ტოლი, როდესაც ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც უდრის 0-ს.
თუ ვიცით, რომ $m \cdot n = 0$-ს, ე.ი ან $m = 0$ ან $n = 0$

ნიმუში 3 — განვიხილოთ კვადრატული განტოლებების სხვადასხვა ნიმუში

ა) $(x-1)(x+2)=0$ გამოვიყენოთ 0-ის წესი $(x-1)=0$ ან $(x+2)=0$ $x=1$ ან $x=-2$ $x_1=1$ $x_2=-2$	ბ) $2x^2=9x$ გავუტოლოთ მარჯვენა მხარე 0-ს $2x^2-9x=0$ წარმოვადგინოთ, ნამრავლის სახით $x\cdot(2x-9)=0$ $x=0$ ან $2x-9=0$ $x=4.5$ $x_1=0;$ $x_2=4.5$	გ) $x^2-5x+6=0$ როცა $a=1$, თუ კვადრატული სამწევრი წარმოდგენა შესაძლებელია ნამრავლის სახით, წარმოვადგინოთ ნამრავლად: $x^2-5x+6=0$ $(x-2)(x-3)=0$ $(x-2)=0$ ან $(x-3)=0$ $x=2$ ან $x=3$ $x_1=2$ $x_2=3$
შემოწმება: როცა $x_1=1$ მივიღებთ, რომ $(1-1)(1+2)=0\cdot3=0$ როცა $x_2=-2$ მივიღებთ, რომ $(-2-1)(-2+2)=-3\cdot0=0$	**შემოწმება:** როცა $x_1=0$ მივიღებთ $2\cdot0^2=9\cdot0$ $0=0$ როცა $x_2=0$, მივიღებთ $2\cdot4.5^2=9\cdot4.5$ $40.5=40.5$	**შემოწმება:** როცა $x_1=2$ მივიღებთ $2^2-5\cdot2+6=0$ $4-10+6=0$ როცა $x_2=3$, მივიღებთ $3^2-5\cdot3+6=0$ $9-15+6=0$ შემოწმების დროს შეგვიძლია ვისარგებლოთ ასევე ნამრავლად წარმოდგენილი ფორმით

4.2. კვადრატული განტოლების ამოხსნის პროცედურა

როდესაც მოცემულია კვადრატული განტოლება, მის ამოსახსნელად დაიცავით შემდეგი ნაბიჯები:

ნაბიჯი 1:

საჭიროების შემთხვევაში მარჯვენა მხარე გაუტოლეთ ნულს (ტოლობის თვისებების გამოყენებით განათავსეთ წევრები ტოლობის ერთ მხარეს).

ნაბიჯი 2:

თუ შესაძლებელია მიღებული გამოსახულების ნამრავლად წარმოდგენა, წარმოადგინეთ ნამრავლად.

ნაბიჯი 3:

ნულის თვისების გამოყენებით ამოხსენით განტოლება.

ნაბიჯი 4:

შეამოწმეთ განტოლების ფესვები.

სიტუაციის მოდელირება კვადრატული განტოლებით

ნიმუში 4

განვიხილოთ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანა და დავადგინოთ თითოეული ოთახის ფართობი, ასევე გვერდების სიგრძეები:

ჩვენ ვიცით, რომ ბინის სრული ფართობი შეადგენს 76 მ²-ს და ჩავწერეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$2x^2 + 18x + 32 = 76$

ამოვხსნათ განტოლება:

$2x^2 + 18x + 32 - 76 = 0$

$2x^2 + 18x - 44 = 0$

$2(x^2 + 9x - 22) = 0$

ჩვენ ვიცით, რომ ნამრავლი მაშინ არის 0-ის ტოლი, როდესაც ერთ-ერთი თანამამრავლია 0, ვიცით, რომ $2 \neq 0$-ს, შესაბამისად, მივიღებთ

$x^2 + 9x - 22 = 0$ (ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია – 22, ჯამი 9);

$-2 + 11 = 9$ $(-2) \cdot 11 = -22$

გაგრძელება

ტოლობის მარცხენა მხარეს მოცემული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად:

$(x-2)(x+11)=0$

$(x-2)=0$ ან $(x+11)=0$

$x=2$ ან $x=11$

$x_1=2$ ან $x_2=-11$

მივიღეთ ორი ამონახსნი (ფესვი), გამომდინარე იქიდან, რომ ოთახის გვერდის სიგრძე ვერ იქნება უარყოფითი რიცხვი, გამოდის, რომ ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს ერთი ფესვი: $x_1=2$

დავადგინოთ თითოეული ოთახის ფართობი:

ა) მისაღები ოთახის ფართობი იქნება

$x^2+12x+24=2^2+12\cdot 2+24=4+24+24=52$ მ^2

ბ) სამზარეულოს ფართობი იქნება:

$x^2+6x+8=2^2+6\cdot 2+8=4+12+8=24$ მ^2

ან სამზარეულოს ფართობი შეგვიძლია ვიპოვოთ, თუ სრულ ფართობს გამოვაკლებთ მისაღები ოთხის ფართობს: 76 მ^2 – 52 მ^2 = 24 მ^2

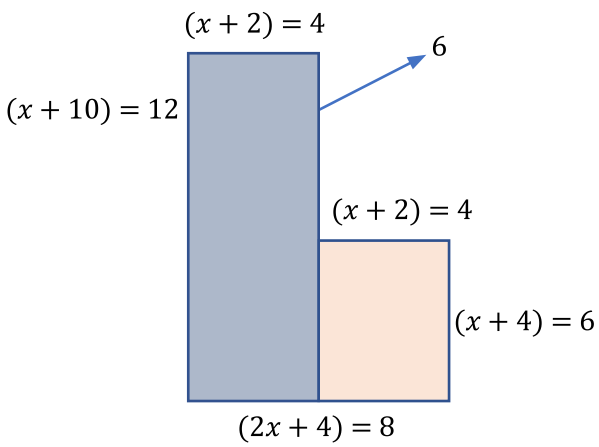
დავადგინოთ ოთახის თითოეული გვერდის სიგრძე:

თითოეული ოთახის ფართობის გამოსათვლელი კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით, მივიღებთ:

$x^2+12x+24=(x+2)(x+10)$

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

შევუსაბამოთ აღნიშნული ინფორმაცია ნახაზს, ჩავსვათ x-ის მნიშვნელობა და დავადგენთ თითოეული გვერდის სიგრძეს.



ნიმუში 5 – ამოცანის ამოხსნა ცვლადის შემოტანით

იპოვეთ ორი რიცხვი, თუ ვიცით, რომ ერთი მეორეზე 5-ით მეტია და მათი ნამრავლი უდრის 84-ს.

მსჯელობა:

ვთქვათ, ერთი რიცხვია – x,

მაშინ, მეორე რიცხვი იქნება – $(x + 5)$

რადგან ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ვიცით, რომ მათი ნამრავლი უდრის 84-ს, მივიღებთ განტოლებას:

$x(x + 5) = 84$

$x^2 + 5x - 84 = 0$

როდესაც კვადრატული სამწევრის პირველი კოეფიციენტი $a = 1$-ს, კვადრატული სამწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ ნამრავლად შემდეგი წესით:

$x^2 + 5x - 84$ (ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია – 84, ჯამი 5);

$-7 + 12 = 5$ $\quad$ $(-7) \cdot 12 = -84$

რადგან კვადრატული სამწევრის წარმოდგენა შესაძლებელია ნამრავლად, კვადრატულ განტოლებაში ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ნამრავლად და ამოვხსნათ ნულის თვისებით:

$(x - 7)(x + 12) = 0$

$(x - 7) = 0$ ან $(x + 12) = 0$

$x = 7$ ან $x = -12$

თუ ერთი რიცხვი არის 7, მაშინ მასზე 5-ით მეტი იქნება 12;
ხოლო თუ ჩვენ მიერ აღებული რიცხვი არის –12, მაშინ მასზე მეტი იქნება $-12 + 5 = -7$;
შესაბამისად, ამოცანას აკმაყოფილებს რიცხვთა ორი წყვილი:

5 და 12; ასევე –12 და –7

სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემულია კვადრატული განტოლებები, დააკავშირეთ თითოეული განტოლება სტანდარტულ ფორმასთან. ამოწერეთ თითოეული შემთხვევისთვის a, b, c–ს მნიშვნელობები:

მინიშნება: იხილეთ **ნიმუში 1**

ა) $x^2 - 5x + 1 = 0$; დ) $(x - 6)^2 = 0$; ზ) $-x^2 + 5x + 3 = 0$;
ბ)$2x2 + 3x = 0$; ე) $(2x + 3)^2 = 0$; თ)$(x - 5)(x + 1) = 0$;
გ) $-2x2 = 5$; ვ) $(x + 1)^2 = 5$; ი) $x(x + 7) = 0$.

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x^2 = 100$; დ) $8x^2 = 16$; ზ) $4 - 2x^2 = 12$; კ) $12x^2 = 0$;
ბ) $8x^2 = 72$; ე) $4x^2 = 100$; თ) $x^2 - 3 = 0$; ლ) $4x^2 + 2 = 10$;
გ) $3x^2 - 3 = 26$; ვ) $3x^2 = -45$; ი) $4x^2 = 32$; მ) $5x^2 + 10 = 0$.

3. ამოხსნებით განტოლებები:

ა) $(x + 1)^2 = 9$; დ) $(x - 2)^2 = 5$; ზ) $(2x + 5)^2 = 0$;
ბ) $(x + 4)^2 = 16$; ე) $(2x - 7)^2 = -16$; თ) $(3x + 1)^2 = 4$;
გ) $(x - 2)^2 = -1$ ვ) $(x - 5)^2 = 0$; ი) $\frac{1}{3}(2x + 3)^2 = 2$.

4. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x(x - 5) = 0$; ე) $-2(x + 1) = 0$; ი) $-6(x - 2)(3x + 1) = 0$;
ბ) $2(x + 3) = 0$; ვ) $4(x + 6)(2x - 3) = 0$; კ) $x^2 = 0$;
გ) $(2x + 1)(x - 3) = 0$; ზ) $(2x + 1)(2x - 1) = 0$; ლ) $4(5 - x)^2 = 0$;
დ) $3(4 - x) = 0$; თ) $11(x + 3)(x - 5) = 0$; მ) $-3(3x - 6)^2 = 0$.

5. ამოხსნებით განტოლებები ნულის თვისების გამოყენებით/ნამრავლად წარმოდგენის წესით:

ა) $(x + 2)^2 = 0$; დ) $x^2 + 5x + 6 = 0$ ზ) $x^2 + 9x + 14 = 0$; კ) $x^2 + 4x = 12$;
ბ) $x^2 + 3x + 2 = 0$; ე) $x^2 - 5x + 6 = 0$; თ) $x^2 + 11x = -30$; ლ) $x^2 = 11x - 24$;
გ) $x^2 - 3x + 2 = 0$; ვ) $x^2 + 7x + 6 = 0$; ი) $x^2 + 2x = 15$; მ) $x^2 = 14x - 49$.

6. ამოხსენით კვადრატული განტოლება ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდით:

ა) $x^2 + 9x + 20 = 0$; დ) $x^2 + x = 12$; ზ) $x^2 = x + 6$; კ) $10 - 3x = x^2$;
ბ) $x^2 + 11x + 28 = 0$; ე) $x^2 + 6 = 5x$; თ) $x^2 = 7x + 60$; ლ) $x^2 + 12 = 7x$;
გ) $x^2 + 2x = 8$; ვ) $x^2 + 4 = 4x$; ი) $x^2 = 3x + 70$; მ) $9x + 36 = x^2$.

7. იპოვეთ რიცხვი, თუ ამ რიცხვისა და მისი კვადრატის ჯამია 110 .

8. რიცხვისა და 4-ით გაზრდილი ამ რიცხვის ნამრავლია 32. იპოვეთ ამ რიცხვის ორი შესაძლო მნიშვნელობა.

9. თუ რიცხვის კვადრატს გამოვაკლებთ 24-ს, მივიღებთ აღებულ რიცხვზე 5-ჯერ მეტ რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

10. მართკუთხედის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია მის სიგანეზე. იპოვეთ სიგანე, თუ მართკუთხედის ფართობი 96 სმ^2-ია.

მინიშნება: $-96 = -8 \cdot 12$ ასევე $-96 = 8 \cdot (-12)$

11. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 2-ით მეტია, იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი 80 სმ^2-ია.

სავარჯიშოები

12. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 5-ით მეტია, იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი 84 სმ^2-ია.

13. სამკუთხედის გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 2-ით მეტია, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის ფართობი 12 სმ^2-ია.

მითითება: სამკუთხედის ფართობი გვერდის და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევარს უდრის.

14. სამკუთხედის გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 5-ით ნაკლებია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის ფართობი 18 სმ^2-ია.

მითითება: სამკუთხედის ფართობი გვერდის და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევარს უდრის.

15. **გამოწვევა:** მართკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია, ფართობი 35 სმ^2-ია. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.

16. **გამოწვევა:** მართკუთხედის პერიმეტრი 32 სმ-ია, ფართობი 55 სმ^2-ია. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.

17. **გამოწვევა:** მართკუთხა ფორმის ბაღი შემოღობილია 60 მ სიგრძის ღობით. ბაღის ფართობია 216 მ^2. იპოვეთ შემოღობილი ბაღის განზომილებები.

18. მართკუთხა ფორმის ეზო შემოღობილია 80 მ სიგრძის ღობით. ეზოს ფართობია 300 მ^2. იპოვეთ შემოღობილი ეზოს განზომილებები.

19. **გამოწვევა:** მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლისაგან, რომლის სიგრძე და სიგანე შესაბამისად 20 სმ და 16 სმ-ია, თავღია ყუთი დაამზადეს ისე, რომ ამ ფურცლის კუთხეებში ამოჭრილია ტოლი კვადრატები და დარჩენილი ნაპირები გადაკეცილია. ყუთის ფუძის ფართობია 140 სმ^2. რა ზომისაა ამოჭრილი კვადრატების გვერდი? რა იქნება მიღებული ფიგურის მოცულობა?

20. მართკუთხა ფორმის საცურაო აუზი, რომლის სიგრძე 10 მ და სიგანე 8 მ-ია, ერთნაირი სიგანის ბილიკითაა შემოვლებული. ბილიკის ფართობი საცურაო აუზის ფართობის $\frac{1}{2}$-ია.

- აჩვენეთ რომ თუ ბილიკის სიგანეა x მ, მაშინ ბილიკის ფართობი გამოითვლება $4x^2 + 36x$ მ^2 გამოსახულებით;
- შემდეგ აჩვენეთ, რომ $4x^2 + 36x - 40 = 0$;
- იპოვეთ ბილიკის სიგანე.

21. ფერმერს სურს ბოსტანს, რომელსაც მართკუთხედის ფორმა აქვს, შემოავლოს ახალი ღობე. რა სიგრძის იქნება ღობე, თუ ცნობილია რომ ბოსტნის ერთი გვერდი 10 მ-ით მეტია მეორეზე და მისი ფართობია 600 მ^2.

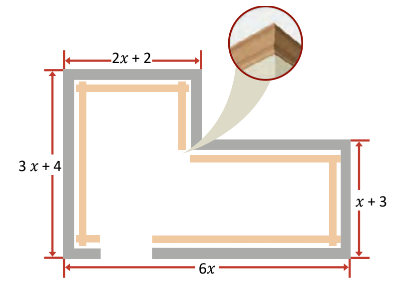
სავარჯიშოები

22. მუყაოს ფურცელს, რომელსაც კვადრატის ფორმა ჰქონდა, ჩამოაჭრეს 2 სმ სიგანის ზოლი. იპოვეთ ფურცლის თავდაპირველი ზომა, თუ დარჩენილი ნაწილის ფართობი 80 სმ^2-ის ტოლია.

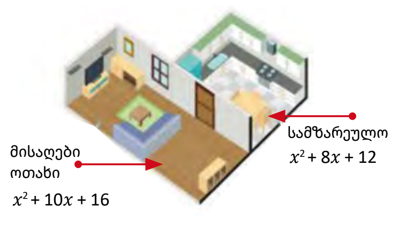
23. მართკუთხედის ფორმის ფიცრის ფართობი ტოლია 10 500 სმ^2. ფიცარი გაჭრეს ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთს კვადრატის ფორმა აქვს, მეორეს – მართკუთხედის. იპოვეთ მიღებული კვადრატის გვერდი, თუ ჩამოჭრილი მართკუთხედის სიგრძეა 80 სმ.

24.

ა) ნახაზზე მოცემული ფიგურის პერიმეტრი 120 სმ-ია, იპოვეთ გვერდების სიგრძეები და ფიგურის ფართობი.



ბ) ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 72 მ^2-ის ტოლია. იპოვეთ ოთახების გვერდების სიგრძეები, ასევე დაადგინეთ თითოეული ოთახის ფართობი.



$x^2 + 10x + 16$ $x^2 + 8x + 12$

გ) ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 200 მ^2-ის ტოლია. იპოვეთ ოთახების გვერდების სიგრძეები, ასევე დაადგინეთ თითოეული ოთახის ფართობი.

$x^2 + 14x + 48$ $x^2 + 10x + 24$

25. **წინარე მასალის გამეორება** რა რიცხვი უნდა ჩავსვათ *-ის ნაცვლად, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი?

ა) $x^2 + 14x + * = (x + 7)^2$	დ) $x^2 + 14x + * = (x + *)^2$
ბ) $x^2 - 8x + * = (x - 4)^2$	ე) $x^2 - 4x + * = (x - *)^2$
გ) $x^2 + 2x + * = (x + *)^2$	ვ) $x^2 - 5x + * = (x - *)^2$

26. **წინარე მასალის გამეორება** გაიხსენეთ რას ეწოდება ტოლფასი განტოლებები? მოიყვანეთ ტოლფასი განტოლებების ნიმუშები.

4.3. კვადრატული განტოლების ამოხსნა სრულ კვადრატამდე შევსებით

ჩვენ უკვე ვისწავლეთ, როგორ ხდება გარდაქმნებით ალგებრულ გამოსახულებაში სრული კვადრატის გამოყოფა.

ნიმუში 1 – კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, ვიზუალური წარმოდგენა

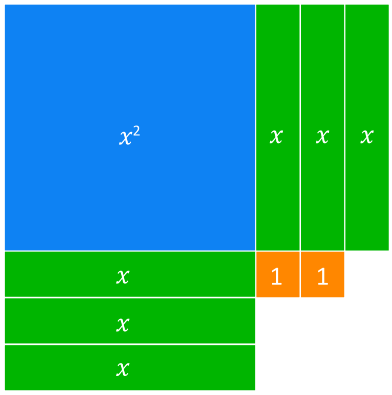
$x^2 + 6x + 2 =$

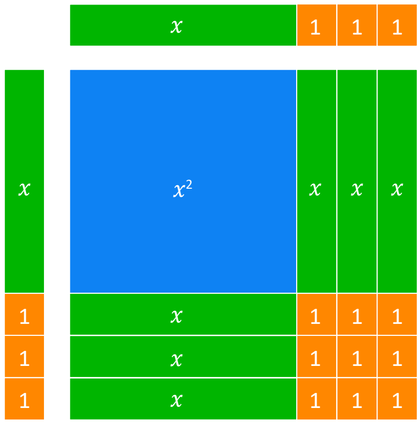
ვიცით, რომ

$(a + b)^2 = \mathbf{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$

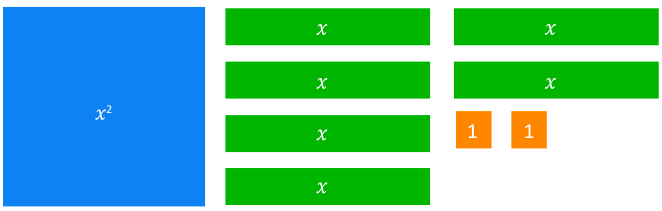
$x^2 + 2 \cdot 3x + 2 =$

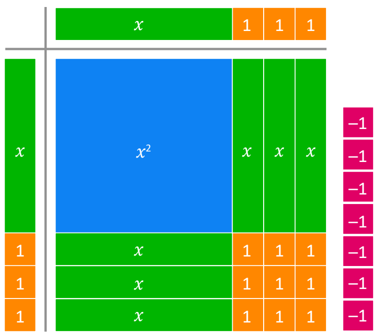
$\underbrace{x^2 + 2 \cdot 3x + 9}_{(x + 3)^2} \underbrace{- 9 + 2}_{-7}$





$x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$





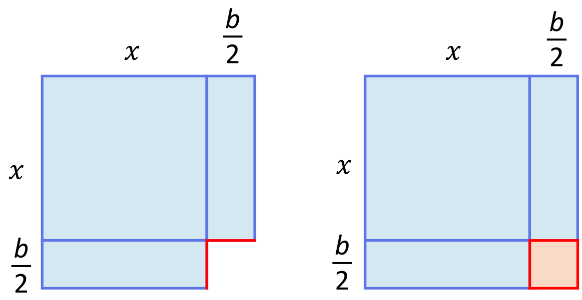
მათემატიკის მოყვარულთათვის

განვიხილოთ ზოგადი ფორმა

ნახაზზე მოცემულია ფიგურა:

ა) დავადგინოთ მოცემული ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x = x^2 + bx$$



თუ ნახაზზე მოცემულ ფიგურას შევავსებთ კვადრატამდე, მაშინ მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

საწყის გამოსახულებაზე $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ წევრის დამატებით შესაძლებელი გახდა სამწევრის სრულ კვადრატამდე შევსება და შესაბამისი გამოსახულების ჩაწერა; გამოსახულებას ვუმატებთ და ვაკლებთ ერთი და იმავე $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ წევრს, რადგან საწყისი გამოსახულება და საბოლოო იყოს ერთმანეთის ტოლი. აღნიშნულ პროცესს ეწოდება ალგებრული გამოსახულების გარდაქმნა.

საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება აღნიშნული გარდაქმნის გამოყენება კვადრატული განტოლების ამოხსნაში?

ჩვენ განვიხილეთ კვადრატული განტოლების ამოხსნა სხვადასხვა გზით, მათ შორის ნულის თვისებით. ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ჩვენთვის ცნობილი ალგორითმით კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა. სწავლების პროცესში შეგხვდებათ განტოლებები, რომლის წარმოდგენა ნამრავლად რთული იქნება; მაგალითად: $x^2 + 5x - 1 = 0$; $x^2 + 6x - 3 = 0$; $2x^2 + 6x - 9 = 0$;
მსგავსი განტოლებების ამოხსნისთვის შემუშავებულია სხვა ალგორითმები, რომელსაც გავეცნობით ქვემოთ.
განვიხილოთ კვადრატული განტოლების ამოხსნის ახალი მეთოდი: **კვადრატული განტოლების ამოხსნა სრულ კვადრატამდე შევსებით.**

გაგრძელება

ნაბიჯი 1:

ვიცით, როგორ ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x+3)^2-12=0$$

$$(x+3)^2=12$$

$$(x+3)=\pm\sqrt{12}$$

$$(x+3)=\sqrt{12} \quad \text{ან} \quad (x+3)=-\sqrt{12}$$

$$x=-3+\sqrt{12} \quad \text{ან} \quad x=-3-\sqrt{12}$$

$$x_1=-3+2\sqrt{3}; \quad x_2=-3-2\sqrt{3}$$

შეგახსენებთ, რომ:

$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$

მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ირაციონალური ფესვი.

ნაბიჯი 2:

განვიხილოთ იგივე $(x+3)^2=12$ განტოლება: მოცემულ განტოლებაში გავხსნათ ფრჩხილი და ჩავწეროთ განტოლება სტანდარტული ფორმით:

$$(x+3)^2=12$$

$$x^2+6x+9=12$$

$$x^2+6x+9-12=0$$

$$x^2+6x-3=0$$

ზეპირად გაგვიჭირდება ვნახოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი –3-ია, ხოლო ჯამი 6.

მაგრამ თუ წავალთ **შებრუნებული გზით** და სტანდარტული ფორმიდან გამოვყოფთ სრულ კვადრატს, მაშინ მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამოხსნა უკვე შეგვიძლია.

საკვანძო კითხვა: როგორ გამოვყოთ კვადრატული განტოლების სტანდარტული ფორმიდან სრული კვადრატი?

ნაბიჯ-ნაბიჯ გარდაქმნებით სტანდარტული ფორმიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი.	მოცემულია განტოლება: $x^2+6x-3=0$ $x^2+6x=3$ დავუმატოთ ტოლობის ორივე მხარეს $3^2=9$ $x^2+2\cdot 3x+3^2=3+3^2$ $(x+3)^2=12$

ნიმუში 2 – განვიხილოთ შედარებით რთული ნიმუშები

ა) $x^2+5x-1=0$ $x^2+5x=1$ $2\cdot\frac{5}{2}=2\cdot 2.5$ რა რიცხვი უნდა მივუმატოთ x^2+5x-ს, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი? $x^2+2\cdot 2.5x+2.5^2=1+2.5^2$ $(x+2.5)^2=7.25$	ა) $2x^2+6x-9=0$ მოცემულ შემთხვევაში $a=2, b=6, c=-9$ გავიტანოთ 2 ფრჩხილს გარეთ, მივიღებთ $2(x^2+3x-4.5)=0$ რადგან $2\neq 0$,მაშინ $x^2+3x-4.5=0$

გაგრძელება

$x + 2.5 = \pm\sqrt{7.25}$ $x + 2.5 = \sqrt{7.25}$ ან $x + 2.5 = -\sqrt{7.25}$ $x = -2.5 + \sqrt{7.25}$ ან $x = -2.5 - \sqrt{7.25}$ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი (ფესვი) $x_1 = -2.5 + \sqrt{7.25}$ $x_2 = -2.5 - \sqrt{7.25}$	მივიღეთ საწყისი განტოლების ტოლფასი განტოლება, რომელსაც ამოვხსნით სრულ კვადრატამდე შევსების მეთოდით: $x^2 + 3x = 4.5$ $x^2 + 2 \cdot 1.5x + 1.5^2 = 4.5 + 1.5^2$ $(x + 1.5)^2 = 6.75$ $x + 1.5 = \pm\sqrt{6.75}$ $x + 1.5 = \sqrt{6.75}$ ან $x + 1.5 = -\sqrt{6.75}$ $x = -1.5 + \sqrt{6.75}$ ან $x = -1.5 - \sqrt{6.75}$ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი $x_1 = -1.5 + 1.5\sqrt{3}$ $x^2 = -1.5 - 1.5\sqrt{3}$ **მითითება:** $\sqrt{6.75} = \sqrt{2.25 \cdot 3} = 1.5\sqrt{3}$

STEAM-კავშირი ინტეგრირებულ მოდულთან

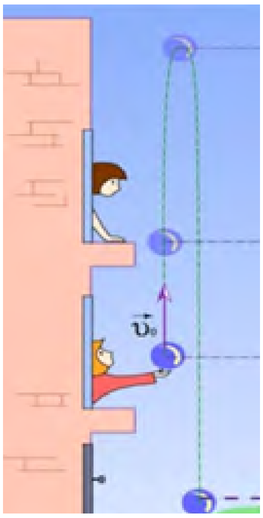
• მეცნიერება • ტექნოლოგია • ინჟინერია • მათემატიკა

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ არ გავითვალისწინებთ ჰაერის წინააღმდეგობას, ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის სიმაღლე დამოკიდებულია დროზე (t-ზე) და გამოითვლება ფორმულით:

$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_o$, სადაც h_o- სხეულის მდებარეობის საწყისი სიმაღლეა, v_0-საწყისი სიჩქარე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, რომელიც $g \approx 9.8\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$, ჩვენ შემთხვევაში დავამრგვალოთ ერთეულამდე სიზუსტით და ჩავთვალოთ, რომ $g \approx 10\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$

ნიმუში 3

სხეული 2 მ სიმაღლიდან აისროლეს ვერტიკალურად ზემოთ 50 მ/წმ საწყისი სიჩქარით. რამდენ წამში აღმოჩნდება ის 82 მ სიმაღლეზე?



ამოცანის პირობის თანახმად $h_o = 2$ მ $\quad v_0 = 50$ მ/წმ

$h = 82$ მ. თავისუფალი ვარდნის აჩქარება $g \approx 10\ \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$; ჩავსვათ მონაცემები ფორმულაში: $82 = 2 + 50t - 5t^2$

$5t^2 - 50t + 80 = 0$ (განტოლების ორივე მხარე გავყოთ 5-ზე)

$t^2 - 10t + 16 = 0$ (გამოვყოთ სრული კვადრატი)

$$t^2 - 2 \cdot 5t + 25 = -16 + 25$$

$$(t-5)^2 = 9$$

$t - 5 = 3$ $\qquad$ $t - 5 = -3$

$t = 8$(წმ) $\qquad$ $t = 2$(წმ)

დაფიქრდი და უპასუხე კითხვებს:

- როგორ არის შესაძლებელი, რომ სხეული ერთი და იმავე სიმაღლეზე იყოს როგორც 2 წმ-ის ისე 8 წმ-ის შემდეგ?
- შეგიძლია განსაზღვრო სხეული მაქსიმალურ სიმაღლეს რამდენ წამში მიაღწევს?
- რა მაქსიმალურ სიმაღლეს მიაღწევს სხეული?

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით კვადრატული განტოლებები:

ა) $(2x-3)^2=16$;   დ) $(3x+5)^2=0$;   ზ) $(2x-4)^2=12$;

ბ) $(1-2x)^2=2\frac{1}{4}$;   ე) $(5x-2)^2=40$;   თ) $x(x-4)=0$;

გ) $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2=6\frac{1}{4}$;   ვ) $\left(x+\frac{2}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$;   ი) $\left(x-\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{9}$.

2. ამოხსენით განტოლება, აგრეთვე დაამრგვალეთ პასუხი მეასედამდე:

ა) $x^2+x-3=0$;   თ) $x^2+11x+5=0$;   პ) $x^2+3x=5$;

ბ) $x^2+10x-5=0$;   ი) $x^2+4x+1=0$;   ჟ) $x^2+9x+3=0$;

გ) $x^2+2x-4=0$;   კ) $x^2-12x+1=0$;   რ) $x^2+5x=-2$;

დ) $2x^2+x-12=0$;   ლ) $x^2+7x=3$;   ს) $x^2+9x+3=0$;

ე) $x^2-5x+1=0$;   მ) $x^2-11x=-5$;   ტ) $2x^2-8x+1=0$;

ვ) $x^2+3x+2=0$;   ნ) $x^2+3x-5=0$;   უ) $x^2-4x-2=0$;

ზ) $x^2-5x+4=0$;   ო) $x^2+5x+4=0$;   ფ) $x^2+2x+1=0$.

STEM დავალებები

3.

დავუშვათ ბურთს ვისვრით 15 მ/წმ სიჩქარით 120 მეტრის სიმაღლის კორპუსის სახურავიდან ნახაზზე მოცემული მიმართულებით. t დროის შემდეგ ბურთი დაშორებული იქნება მიწიდან h სიმაღლით, დროის სიმაღლეზე დამოკიდებულება მოცემულია შემდეგი ფორმულით:

$h=128+16t-5t^2$

ა) რამდენი წამის შემდეგ იქნება ბურთი მიწიდან 30 მეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე იქნება ბურთი მიწიდან 2 მეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე დაეცემა ბურთი დედამიწაზე?

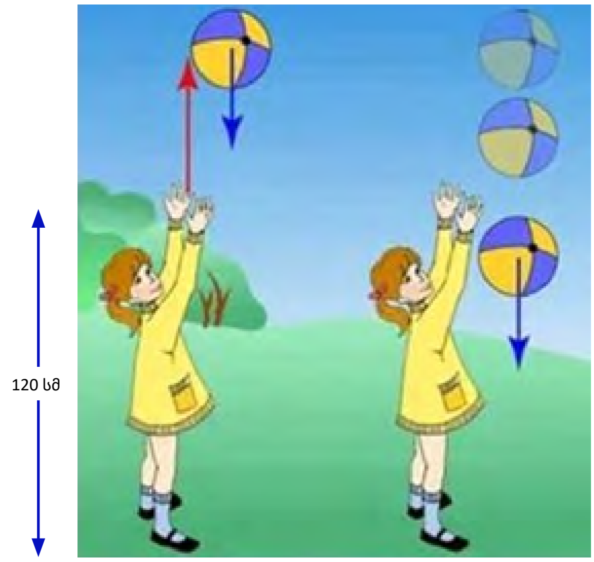
სავარჯიშოები

4.

მარინა თამაშობდა ბურთით. აისროლა ბურთი ზემოთ 10 მ/წმ სიჩქარით, ვერ დაიჭირა და დაუვარდა მიწაზე. ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის სიმაღლის გამოსათვლელი ფორმულით $h = h_o + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ დაწერე t წამის შემდეგ მარინას ბურთის სიმაღლის გამოსათვლელი ფორმულა და იპოვე:

ა) რამდენი წამის მერე იქნება ბურთი მიწიდან 150 სანტიმეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე დაეცემა ბურთი დედამიწაზე?

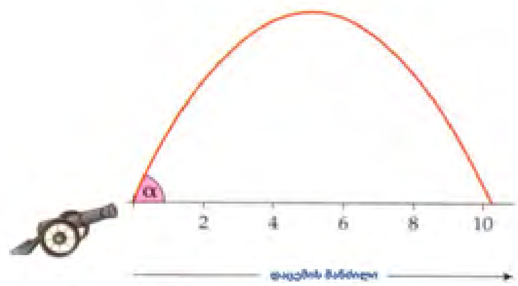


5.

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ როდესაც კუთხით გავისვრით, სხეულის გასროლის ადგილიდან დაშორება გამოითვლება ფორმულით:

$$D = \frac{v^2 \cdot sin2\alpha}{g}$$

სადაც D (distance) – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v არის სხეულის საწყისი სიჩქარე, α – გასროლის კუთხე, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.



ა) იპოვეთ სად დაეცემა სხეული, თუ გასროლის სიჩქარე იყო 20 მ/წმ, ხოლო გასროლის კუთხე 15° (შეგახსენებთ $sin2 \cdot 15 = sin30° = \frac{1}{2}$)

ბ) თუ ვიცით, რომ სხეული გასროლის შემდეგ დაეცა 24 მეტრის მოშორებით, დაადგინეთ რა სიჩქარით იყო გასროლილი? თუ გასროლის კუთხე იყო 15° (შეგახსენებთ $sin2 \cdot 15 = sin30° = \frac{1}{2}$).

სავარჯიშოები

6.

მატარებელმა, რომლის სიჩქარე იყო 20 მ/წმ, დაიწყო მოძრაობა თანაბარი 8 მ/წმ^2 აჩქარებით. დაწერეთ თანაბარაჩქარებული მოძრაობის დროს გავლილი მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა. იპოვეთ თანაბარაჩქარებული მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წამში გაივლის მატარებელი 3000 მ-ს.

(გამოიყენეთ ფიზიკის კურსიდან ცნობილი ფორმულა $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, სადაც v_0 საწყისი სიჩქარეა, a აჩქარება).

7. **გამოწვევა:** გაამარტივეთ გამოსახულებები

I შეკვეცე წილადი:

ა) $\dfrac{a^2-36}{a^2-12a+36}$; გ) $\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-6x}$; ე) $\dfrac{m^2+8m+16}{3mn^2+12n}$;

ბ) $\dfrac{n^2+6n-27}{n^2-81}$; დ) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-2x-8}$; ვ) $\dfrac{y^2-8y+15}{y^2+2x-35}$.

II შეასრულე გამრავლება (გაყოფა):

ა) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-3x}\cdot\dfrac{2x-6}{5x^2-5xy}$; გ) $\dfrac{m^2+10m+25}{2m-8}\cdot\dfrac{m^2-16}{5m+10}$; ე) $\dfrac{9x^2-25y^2}{x^2-12x+36}\cdot\dfrac{x^2-4x-12}{15x^2-25xy}$;

ბ) $\dfrac{2a^3-a^2b}{27b^2}:\dfrac{2a-b}{9b^3}$; დ) $\dfrac{2ab^3}{6-6a}:\dfrac{a^3b^3}{a^2-2a+1}$; ვ) $\dfrac{4m^2-25}{m^2+3m-28}:\dfrac{2m+5}{4m^2-16m}$.

III შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $\dfrac{4m}{m-n}+\dfrac{4n}{n-m}$; გ) $\dfrac{4x+3}{6x}+\dfrac{x-2}{6x}$; ე) $3x\dfrac{4-9x^2}{3x}$; ზ) $\dfrac{a^2}{x^2-ax}-\dfrac{x}{x-a}$;

ბ) $\dfrac{7a}{a^2-9}-\dfrac{6a-3}{a^2-9}$; დ) $\dfrac{p-2q}{pq^2}-\dfrac{2q-p}{p^2q}$; ვ) $\dfrac{2y^2-1}{y}-y+5$; თ) $\dfrac{2}{m^2+mn}+\dfrac{2}{mn+n^2}$.

8. **გამოწვევა:** გაამარტივეთ:

ა) $\dfrac{2x+y}{2x^2-xy}-\dfrac{16x}{4x^2-y^2}-\dfrac{2x-y}{2x^2+xy}$; გ) $\dfrac{x^2-9x-22}{5x^3-20x}\cdot\dfrac{-x^2+4x-4}{3x^2-33x}$;

ბ) $(9a^2-4b^2):\dfrac{9a^2+12ab+4b^2}{2}$; დ) $\left(\dfrac{5a^2-15ab}{a^2-9b^2}-\dfrac{3ab+9b^2}{a^2+6ab+9b^2}\right):\left(\dfrac{5}{b}-\dfrac{3}{a}\right)$.

4.4.კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტის მეშვეობით

ეს საინტერესოა!

ფრანცის ვიეტა იყო მე-16 საუკუნის ფრანგი პოლიტიკოსი, რომელმაც წარმატებული პოლიტიკური კარიერის შემდეგ მათემატიკოსად გააგრძელა მოღვაწეობა და გახდა ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი. ვიეტამ სხვა რიგის განზოგადებები შემოიტანა ალგებრაში, ის იყო პირველი, რომელმაც წარმოადგინა კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა: $ax^2 + bx + c = 0$, სადაც a,b,c ნამდვილი რიცხვებია $a \neq 0$, ხოლო x ცვლადი.

ვიეტამდე კვადრატული განტოლებები იწერებოდა მხოლოდ რიცხვებით, მაგალითად:

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ ან $-x^2 + 8x + 4 = 0$ და იხსნებოდა უმეტესად სრულ კვადრატამდე შევსებით.

$ax^2 + bx + c = 0$ – ჩანაწერით, გამომდინარე იქიდან თუ რა იქნება a,b,c, სადაც $a \neq 0$, იგულისხმება ყველა შესაძლო კვადრატული განტოლება. ამიტომ აღნიშნულ ჩანაწერს კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა ეწოდებ.

მას შემდეგ, რაც ვიეტამ წარმოადგინა კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა, $ax^2 + bx + c = 0$, შესაძლებელი გახდა კვადრატული განტოლების ამოხსნის ალგორითმის შემუშავება.

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ შეიძლება სრული კვადრატის შევსების მეთოდით განტოლების ამოხსნა. ასევე, როგორ დავადგინოთ აღნიშნული მეთოდის გამოყენებით ნებისმიერი კვადრატული განტოლების ფესვების საპოვნელი ალგორითმი.

იმისათვის, რომ პროცესი იყოს მეტად აღქმადი, ნაცნობ მაგალითზე განვიხილოთ პროცედურები ნაბიჯ-ნაბიჯ, პარალელურად კი ზოგად ცვლადებში.

მინიშნება: აღნიშნული აქტივობა არ არის სავალდებულოდ სასწავლი.

მათემატიკის მოყვარულთათვის:

	კონკრეტული კვადრატული განტოლება	კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტით
	$2x^2+12x-6=0$ $2(x^2+6x-3)=0$ $x^2+6x-3=0$ $x^2+6x=3$ $x^2+2\cdot 3x+3^2=3+3^2$ $(x+3)^2=12$ $x+3=\pm\sqrt{12}$ $x=-3\pm 2\sqrt{3}$	$ax^2+bx+c=0$ სადაც, $a\neq 0$ $a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

შეჯამება, კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტის მეშვეობით:

როდესაც მოცემულია ნებისმიერი კვადრატული განტოლება,

$ax^2+bx+c=0$ სადაც, $a\neq 0$

ვიპოვოთ $D=b^2-4ac$

აღნიშნულ გამოსახულებას ეწოდება დისკრიმინანტი.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};$$

როგორც დავინახეთ, კოეფიციენტების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, დისკრიმინანტით ადვილდება ფესვების პოვნა.

განვიხილოთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეგვიძლია ვიმუშაოთ კვადრატულ განტოლებებთან:

ნაბიჯი 1:

მოცემულია $ax^2+bx+c=0$ სადაც, $a\neq 0$

ნაბიჯი 2:

ვიპოვოთ დისკრიმინანტი, $D=b^2-4ac$

ნაბიჯი 3:

გამომდინარე იქიდან თუ რა ნიშანი აქვს დისკრიმინანტს, განტოლებას აქვს ან ერთი ფესვი, ან ორი, ან არ აქვს ფესვი.

$D=b^2-4ac$, თუ $\begin{cases} D>0, \text{მაშინ განტოლებას აქვს ორი ფესვი} \\ D=0, \text{მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი} \\ D<0, \text{მაშინ განტოლებას არ აქვს ფესვი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში} \end{cases}$

გაგრძელება

ნაბიჯი 4:

დისკრიმინანტის გამოთვლის შემდეგ, განტოლების ამონახსნები (ფესვები) გამოითვლება ფორმულით:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$;

მინიშნება: როდესაც D = 0, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

ნიმუში 1 – ვიპოვოთ კვადრატული განტოლებების ფესვები დისკრიმინანტის მეთოდით

ა) $5x^2 - 2x + 8 = 0$ $a = 5, b = -2,\ c = 8$ $D = b^2 - 4ac$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 4 - 120 = -116$ რადგან $D < 0$-ზე, ე.ი. განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.	ბ) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ $a = -2, b = 3, c = 2$ $D = b^2 - 4ac$ $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 9 + 16 = 25$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3-5}{-4} = 2$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3+5}{-4} = \frac{1}{2}$

ნიმუში 2 – იპოვეთ რაციონალური განტოლების ამონახსნები

ალგებრულ გამოსახულებას, როდესაც ცვლადი არის მნიშვნელში, რაციონალური განტოლება ეწოდება.

მოცემულია განტოლება: $\frac{2x-4}{x-2} = \frac{1}{x}$ → პროპორციის ძირითადი თვისების თანახმად ვიცით, რომ პროპორციაში ჯვარედინი წევრების ნამრავლი ტოლია.

$x(2x-4) = x-2$;   სადაც $x \neq 0$; $x \neq 2$;

$2x^2 - 4x = x - 2$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$x_1 = 2$ და $x_2 = 0.5$

$x = 6$

მივიღეთ ორი ფესვი, $x_1 = 2$ და $x_2 = 0.5$. რადგან $x \neq 2$, ამიტომ $x_1 = 2$ ვერ იქნება განტოლების ფესვი, შესაბამისად, განტოლების ამონახსნი (ფესვი) არის არის $x = 0.5$

დაიმახსოვრეთ, როდესაც მოცემულია $-x^2 + bx + c = 0$, იგულისხმება, რომ $a = -1$-ს

ვიეტას თეორემა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ვიეტამ კვადრატული განტოლება ჩაწერა ზოგადი ფორმით.

განვიხილეთ, $x^2 + bx + c = 0$ ტიპის განტოლებები და გავეცანით, როგორ არის შესაძლებელი კვადრატული განტოლების ამოხსნა ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდით.

ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდი ნათლად ასახავს, რა შეიძლება იყოს განტოლების ფესვები: **განვიხილოთ ორი ვარიანტი**

კონკრეტული შემთხვევა

ა) განვიხილოთ განტოლება
$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ვიპოვოთ, ორი რიცხვი რომელთა ნამრავლი წარმოადგენს 6, ხოლო ჯამი –5.

ნამრავლი	ჯამი
$2 \cdot 3 = 6$	$2 + 3 = 5 \neq -5$
$(-2) \cdot (-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$

შევარჩიოთ წყვილები (–2) და (–3)

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$(x - 2) = 0$ ან $(x - 3) = 0$

$x = 2$ ან $x = 3$

$x_1 = 2$ $\quad x_2 = 3$

თუ დავაკვირდებით, განტოლების ფესვები, შერჩეული წყვილის მოპირდაპირე რიცხვებია.

!! ყურადღება მიაქციეთ:

ფესვების ნამრავლი თავისუფალი წევრის, 6-ის ტოლია, ხოლო ფესვების ჯამი 2 + 3 = 5 მეორე კოეფიციენტის მოპირდაპირე რიცხვია.

ზოგადი შემთხვევა, ვიეტას თეორემა

ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები, თუ $D > 0$, გამოითვლება ფორმულით:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

გამოვიკვლიოთ რას მივიღებთ, თუ

1. მივუმატებთ ერთმანეთს ფესვებს:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

2. გავამრავლებთ ერთმანეთზე ფესვებს:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} =$$

$$-\frac{(b + \sqrt{D}) \cdot (-b + \sqrt{D})}{4a^2} =$$

$$-\frac{D - b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 + 4ac - b^2}{4a^2} =$$

$$= -\frac{-4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ვიეტას თეორემით ცხადი გახდა, რომ ფესვები დაკავშირებულია კოეფიციენტებთან.

ვიეტას თეორემა:

კვადრატულ განტოლებაში $ax^2 + bx + c = 0$, სადაც $a \neq 0$ განტოლების ფესვები x_1 და x_2 აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

მიაქციეთ ყურადღება შემდეგ გარდაქმნას:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

ნიმუში 3 – შეადგინეთ კვადრატული განტოლება რომლის ფესვები იქნება –3 და 5

უნდა ვიპოვოთ განტოლება, რომლის ფესვები იქნება:

$x_1 = -3;\quad x_2 = 5$

ჩვენ ვიცით, რომ

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

ვიეტას თეორემის თანახმად: $\begin{cases} -3 + 5 = -\frac{b}{a} \\ (-3)\cdot 5 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = 2 \\ \frac{c}{a} = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -2 \\ \frac{c}{a} = -15 \end{cases}$

მივიღეთ, რომ $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - 2x - 15) = 0$

ამოცანაში არ არის დამატებითი პირობა, რომ გავიგოთ რა შეიძლება იყოს a

თუ ჩავთვლით, რომ a = 1-ს, მივიღებთ განტოლებას $x^2 - 2x - 15 = 0$

თუ ჩავთვლით, რომ a = 2-ს, მივიღებთ განტოლებას $2x^2 - 4x - 30 = 0$

თუ ჩავთვლით, რომ a = –3-ს, მივიღებთ განტოლებას $-3x^2 + 6x + 45 = 0$ და ა.შ.

ნებისმიერი მიღებული განტოლების ფესვები იქნება x_1 **= –3;** x_2 **= 5**

a-ს ცვლილებით, მივიღებთ ტოლფას განტოლებებს (განტოლებებს, რომლებსაც ერთი და იგივე ამონახსნი აქვთ).

პ.ს. როდესაც მასწავლებლები ვადგენთ განტოლებებს, ვიყენებთ აღნიშნულ ალგორითმს.

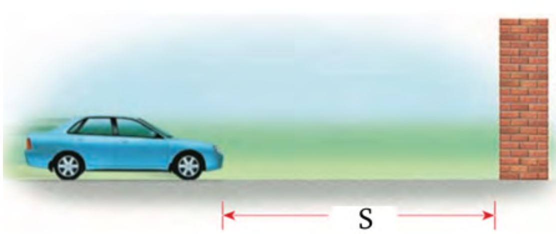
STEAM-კავშირი ინტეგრირებულ მოდულთან

ნიმუში 4

v სიჩქარით მოძრავი მსუბუქი მანქანისთვის გზის გარკვეულ ტიპზე სამუხრუჭო S მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $S = \frac{v^2}{20} + v$ მანქანას სამუხრუჭო მანძილად აქვს 240 მეტრი, რა სიჩქარით უნდა მოძრაობდეს მანქანა, რომ მან დამუხრუჭება მოასწროს?

ამოცანის ამოხსნის შემდეგ უპასუხეთ შემდეგ კითხვას:

- დაადგინეთ რა იქნება სამუხრუჭე მანძილი, თუ მანქანა მოძრაობს 10 მ/წმ ს იჩქარით?



გაგრძელება

მსჯელობა:

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ გავლილი გზა დამოკიდებულია სიჩქარესა და დროზე; მოცემულ შემთხვევაში, გარკვეული წონის მსუბუქი მანქანის სამუხრუჭე მანძილი დამოკიდებულია მის სიჩქარეზე.

თუ $S = 240$ მ-ს, მაშინ $S = \frac{v^2}{20} + v$;

$\frac{v^2}{20} + v = 240$,

$v^2 + 20v - 4800 = 0$

$(v - 60)(v + 80) = 0$

$v_1 = 60$ მ/წმ ან $v_2 = -80$ მ/წმ

მინიშნება: სიჩქარე ვექტორული სიდიდეა და ის შეიძლება იყოს უარყოფითი, იმის გათვალისწინებით, თუ საით არის მიმართული; უფრო დეტალურად აღნიშნული საკითხის გასააზრებლად მიმართეთ ფიზიკის მასწავლებელს, რომელიც დეტალურად აგიხსნით რომელი პასუხი შეიძლება მივიჩნიოთ სწორად.

დამატებითი ამოცანის ამოხსნა:

ა) ვიპოვოთ სამუხრუჭე მანძილი, თუ ვიცით სიჩქარე $v = 10$ მ/წმ

მაშინ $S = \frac{10^2}{20} + 10$, $S = \frac{100}{20} + 10 = 15$ (მ)

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; დ) $2x^2 + 17x - 9 = 0$; ზ) $5x^2 - 13x - 6 = 0$;
ბ) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; ე) $3x^2 + 2x = 8$; თ) $-2x^2 + 7x - 5 = 0$;
გ) $x^2 + 4 = -5x$; ვ) $2x^2 + 5 = 11x$; ი) $-x^2 + 8x + 9 = 0$.

2. იპოვეთ ცვლადი ალგებრული გამოსახულების დახმარებით:

ა) $\frac{x}{3} = \frac{2}{x}$; დ) $\frac{4}{x} = \frac{x}{2}$; ზ) $\frac{x}{5} = \frac{2}{x}$;
ბ) $\frac{x-1}{4} = \frac{3}{x}$; ე) $\frac{x-1}{x} = \frac{x+11}{5}$; თ) $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{x}$;
გ) $\frac{2x}{3x+1} = \frac{1}{x+2}$; ვ) $\frac{2x+1}{x} = 3x$; ი) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{2}$.

საუკეთესო მეთოდის ამორჩევა განტოლების ამოხსნის დროს

ჯგუფური სამუშაო: ამოხსენით განტოლებები, ამოხსნის დროს შეარჩიეთ ამოხსნისთვის საუკეთესო მეთოდი. შეგიძლიათ ერთი და იგივე განტოლება ამოხსნათ სხვადასხვა მეთოდით, შემდეგ კი იმსჯელეთ რომელი მეთოდი იყო მეტად ხელსაყრელი ან მოსახერხებელი და რატომ.

3. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; დ) $2x^2 + 17x - 9 = 0$; ზ) $5x^2 - 13x - 6 = 0$;
ბ) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; ე) $3x^2 + 2x = 8$; თ) $-2x^2 + 7x - 5 = 0$;
გ) $x^2 + 4 = -5x$; ვ) $2x^2 + 5 = 11x$; ი) $-x^2 + 8x + 9 = 0$.

4. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x^2 + x - 12 = 0$; თ) $x^2 - 49 = 0$; პ) $x^2 - 14x + 40 = 0$;
ბ) $x^2 - 2x - 15 = 0$; ი) $9x^2 - 64 = 0$; ჟ) $2x^2 + 7x + 3 = 0$;
გ) $x^2 + 4x - 12 = 0$; კ) $x^2 - 8x + 16 = 0$; რ) $2x^2 + 5x - 12 = 0$;
დ) $x^2 + 6x = 0$; ლ) $x^2 + 10x + 25 = 0$; ს) $3x^2 - 7x + 4 = 0$;
ე) $3x^2 - 4x = 0$; მ) $x^2 - 3x - 18 = 0$; ტ) $4x^2 + x - 3 = 0$;
ვ) $4x^2 - 9x = 0$; ნ) $x^2 - 11x + 28 = 0$; უ) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
ზ) $x^2 - 9 = 0$; ო) $x^2 + x - 30 = 0$; ფ) $2x^2 - 19x + 35 = 0$.

5. ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი არის 260. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ ერთი მათგანი 7-ით მეტია მეორეზე.

6. იპოვეთ იმ მართკუთხედის პერიმეტრი, რომლის სიგრძე 3-ით მეტია სიგანეზე და ფართობია 154 სმ^2.

სავარჯიშოები

7. მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთის ფართობი, რომლის ერთი გვერდი 20 მეტრით მეტია მეორეზე, ტოლია 1 500 $მ^2$-ის. რა სიგრძის ღობე დასჭირდება მას შემოსავლებად.

8. მართკუთხედის პერიმეტრი არის 54 სმ, ფართობი კი – 180 $სმ^2$. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

9. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 165-ით მეტია ამავე რიცხვების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

10. თეატრში რიგში ადგილების რაოდენობა 12-ით მეტია რიგების რაოდენობაზე. იპოვეთ რიგების რაოდენობა, თუ სულ თეატრში 640 ადგილია.

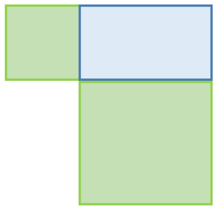
11. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამის კვადრატი 312-ით მეტია მათსავე კვადრატების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.

12. იპოვეთ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვი, თუ მათი კვადრატების ჯამი არის 869.

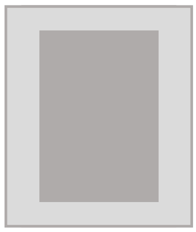
13. ჭადრაკის ტურნირში სულ გათამაშდა 45 პარტია. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში, თუ ცნობილია რომ ყველა მონაწილე შეხვდა თითოეულ მოთამაშეს ერთხელ.

14. მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლიდან, რომლის სიგრძე 1.5-ჯერ მეტია სიგანეზე, შეიძლება დამზადდეს 6 080 $სმ^3$ მოცულობის ღია კოლოფი. ამისათვის კუთხეებიდან უნდა ამოიჭრას 8 სმ სიგრძის კვადრატები. იპოვეთ მუყაოს ფურცლის ზომები.

15. მართკუთხედის პერიმეტრია 28 სმ, მის ორ მეზობელ გვერდზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამი კი უდრის 116 $სმ^2$-ს. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.



16. ფოტოსურათი ზომით 9×16 სმ დააწებეს მუყაოს ფურცელზე ისე, რომ გამოვიდა ერთნაირი სიგანის ჩარჩო. იპოვეთ ჩარჩოს სიგანე, თუ ფოტოსურათის და ჩარჩოს ფართობი ერთად არის 330 $სმ^2$.



17. ყუთის ძირს მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის სიგანე 2-ჯერ ნაკლებია სიგრძეზე. ყუთის სიმაღლეა 0.5 მ. იპოვეთ ყუთის მოცულობა, თუ მისი ძირის ფართობი 1.08 $მ^2$-ით ნაკლებია გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამზე.

4.5. რაციონალური და ირაციონალური განტოლებები

***მათემატიკის მოყვარულთათვის**

ჩვენ ვიცით სხვადასხვა ტიპის განტოლებები:

1. წრფივი განტოლება $ax + b = c$, სადაც x-ცვლადია;
2. კვადრატული განტოლება: $ax^2 + bx + c = 0$;
3. წილადის შემცველი განტოლება, რაციონალური განტოლება;
4. ირაციონალური განტოლება;
5. მოგვიანებით გაეცნობით, მაჩვენებლიან, ლოგარითმული და ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს.

ხშირად მათემატიკაში რეალური პროცესის მოდელირებას ვახდენთ განტოლებების მეშვეობით, ამიტომ აუცილებელია სხვადასხვა ტიპის განტოლებების ამოხსნის ალგორითმის ცოდნა.

ნიმუში 1 – რაციონალური განტოლება

განტოლება, რომელიც ცვლადს შეიცავს მნიშვნელში, რაციონალური, იგივე წილადური განტოლება ეწოდება.

ა) განვიხილოთ განტოლება $\frac{2}{x} + \frac{14}{x+5} = 3$

გავაერთმნიშვნელიანოთ

$$\frac{2(x+5) + 14x}{x(x+5)} = 3$$

$$\frac{2x + 10 + 14x}{x(x+5)} = 3$$

$$\frac{16x + 10}{x(x+5)} = 3$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $x(x + 5)$-ზე და აღვნიშნოთ, რომ $x \neq 0$; $x \neq -5$

$$16x + 10 = 3x(x + 5)$$

ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$16x + 10 = 3x^2 + 15x$$

$$3x^2 + 15x = 16x + 10$$

$$3x^2 + 15x - 16x - 10 = 0$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = -10$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{6} = \frac{1 - 11}{6} = \frac{-10}{6} = -1\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{6} = \frac{1 + 11}{6} = 2$$

ჩვენ ვიცით, რომ $x \neq 0$; $x \neq -5$ მიღებული ფესვები აკმაყოფილებს პირობას, შესაბამისად, განტოლების ფესვებია $-1\frac{2}{3}$ და 2

ნიმუში 2 – ირაციონალური განტოლება

განტოლება, რომელიც ცვლადს შეიცავს ფესვის ნიშნის ქვეშ, ირაციონალური განტოლება ეწოდება

ბ) $\sqrt{x+3} = x + 1$

ავიყვანოთ განტოლების ორივე მხარე კვადრატში, გავითვალისწინოთ, რომ იმისათვის, რათა ფესქვეშ გამოსახულებამ იარსებოს, ის უნდა იყოს მეტი ან ტოლი 0-ზე

$$x + 3 \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x + 1)^2$$

$$x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x + 3 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$-(x^2 + x - 2) = 0$$

$$-1 \neq 0 \text{ შესაბამისად } x^2 + x - 2 = 0$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -2$$

$$D = b^2 - 4ac = 12 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

შემოწმება:

$$x_1 = -2$$

$$\sqrt{-2+3} \neq -2 + 1$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ, არითმეტიკულ კვადრატულს ფესვს

$$x_2 = 1$$

$$\sqrt{1+3} = 1 + 1$$

$$2 = 2$$

ე.ი. განტოლების ფესვია $x = 1$

ნიმუში 3

მოტორიანმა ნავმა 25 კმ გაიარა მდინარის დინების მიმართულებით და 12 კმ დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით და მთელ გზას მოანდომა 3 საათი. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე, თუ დინების სიჩქარეა 3 კმ/სთ.

ამოცანის პირობის თანახმად უცნობი სიდიდეა ნავის საკუთარი სიჩქარე, აღვნიშნოთ ის ცვლადით

$$v_{საკ} = x \text{ კმ/სთ}$$

	v	S	t
დინების მიმართულება	$x+3$	25	$\frac{25}{x+3}$
საწინააღმდეგო მიმართულება	$x-3$	12	$\frac{12}{x-3}$

შევადგინოთ განტოლება: $\frac{25}{x+3} + \frac{12}{x-3} = 3$

გავაერთმნიშვნელიანოთ $\frac{25(x-3)+12(x+3)}{(x-3)(x+3)} = 3$

$$\frac{37x-39}{(x-3)(x+3)} = 3$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-3)(x+3)$-ზე და აღვნიშნოთ, რომ $x \neq 3$; $x \neq -3$

$$37x - 39 = 3x^2 - 27$$

$$3x^2 - 27 = 37x - 39$$

$$3x^2 - 37x + 12 = 0$$

$$D = 37^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 1225 = 35^2$$

$$x_1 = \frac{37+35}{6} = 12 \quad x_2 = \frac{37-35}{6} = \frac{1}{3}$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ნავის საკუთარი სიჩქარე ვერ იქნება $\frac{1}{3}$, რადგან ის დინების სიჩქარეზე ნაკლებია.

მაშინ ამოცანის პასუხია $v_{საკ} = 12$ კმ/სთ

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით რაციონალური განტოლება:

ა) $\frac{x^2}{x+4}=\frac{2x}{x+4}$; დ) $\frac{10}{2x-3}=x-1$; ზ) $\frac{3a+1}{a+2}-\frac{a-1}{a-2}=1$;

ბ) $\frac{x^2+6x}{x-3}=\frac{5}{4-x}$; ე) $\frac{x}{2x+6}=\frac{x-1}{x+1}$; თ) $\frac{3}{y}+\frac{4}{y-1}=\frac{5-y}{y^2-y}$;

გ) $\frac{8x-5}{x}=\frac{9x}{x+2}$; ვ) $\frac{2x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x-3}=5$; ი) $\frac{3x-2}{x}-\frac{1}{x-2}=\frac{3x+4}{x^2-2x}$.

2. ამოხსენით რაციონალური განტოლება:

ა) $\frac{x^2+4x}{3x+2}=\frac{x+1}{3}$; დ) $\frac{y^2-2y}{3y+3}=\frac{y-2}{3}$; ზ) $\frac{2y-1}{y-2}-\frac{2y+4}{y+2}=3$; კ) $\frac{3}{x}-\frac{2x+1}{x+2}=\frac{6}{x^2+2x}$;

ბ) $\frac{y^2-13y+36}{y-9}=2$; ე) $\frac{x-6}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=2$; თ) $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{x+1}=2$; ლ) $\frac{y-7}{5-y}-\frac{1}{y}=\frac{5}{y^2-5y}$;

გ) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$; ვ) $\frac{3a+2}{a+1}+\frac{a+1}{a-2}=4$; ი) $\frac{3a+4}{a+1}-2=\frac{2a+3}{2a+1}$; მ) $\frac{5x-3}{x-1}+3=\frac{x+8}{2x-3}$.

3. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება:

ა) $\sqrt{6x-4}=3$; დ) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x+7}$; ზ) $\sqrt{3x+13}=x+3$;

ბ) $\sqrt{x^2-7x-9}=3$; ე) $\sqrt{x^2-3x-18}=\sqrt{x+6}$; თ) $\sqrt{3x^2-25x+74}=x-8$;

გ) $\sqrt{11x-18}=x$; ვ) $\sqrt{x-3}=x-5$; ი) $\sqrt{4-x^2-6x}=x+4$.

4. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება:

ა) $\sqrt{5x+1}=x+1$; დ) $\sqrt{(2x+3)(x+1)}=x+3$; ზ) $\sqrt{x^2-4x+3}-2=x-3$;

ბ) $\sqrt{x^2-6x+9}=x-2$; ე) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$; თ) $\sqrt{3x-5}+2x=x+6$;

გ) $\sqrt{16x^2-8x+1}=9$; ვ) $\sqrt{2x^2-5x+1}=\sqrt{x+1}$; ი) $\sqrt{4+2x}-3x=-x+2$.

5. ერთი ქალაქიდან მეორეში, მათ შორის მანძილია 175 კმ, ერთდროულად ორი ავტომობილი გამოვიდა. ერთის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია მეორეზე, ამიტომ ის დანიშნულების ადგილზე 1 საათით ადრე ჩავიდა. იპოვეთ ავტომობილების სიჩქარე.

6. ერთმა ველოსიპედისტმა 20 კმ გავლას მოანდომა 20 წუთით ნაკლები დრო, ვიდრე მეორე ველოსიპედისტმა. იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი მათგანი მოძრაობდა 2 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით მეორესთან შედარებით.

7. ტურისტმა ნავით 6 კმ გაცურა მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით და 15 კმ ტბაზე. მან ამ მოგზაურობას მოანდომა 4 საათი. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 2 კმ/სთ.

8. შეგირდი სამუშაოს შესრულებას ანდომებს 5 საათით მეტს ოსტატთან შედარებით. რა დროს ანდომებს თითოეული მათგანი დავალების შესრულებას, თუ ორივე ერთად ამ დავალებას ასრულებს 6 საათში?

9. **გამოწვევა:** ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის 360 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობდა ორი ავტომობილი. პირველი გამოვიდა ქალაქიდან 1 საათით გვიან მეორეზე, 4 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია რომ ისინი შუა გზაზე შეხვდნენ ერთმანეთს.

სავარჯიშოები

ტესტის ნიმუში:

1. ამოხსენით მოცემული კვადრატული განტოლებები:

ა) $(x-4)^2-9=0$; ბ) $25x^2-20x=0$; გ) $x^2+7x+10=0$.

2. ამოხსენით განტოლება სრულ კვადრატამდე შევსებით: $x^2+8x+3=0$;

3. ამოხსენით განტოლება: $x^2+2x-8=0$;

4. როგორ დაიშლება $3x^2-9x+6$ კვადრატული სამწევრი მამრავლებად, თუ მისი ფესვებია 2 და 1?

5. შეკვეცე წილადი: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$;

6. 2 400 $м^2$ მიწის მართკუთხა ნაკვეთს შემოვლებული აქვს მესერი, რომლის სიგრძე 200 მ-ს უდრის. იპოვეთ ამ ნაკვეთის სიგრძე და სიგანე.

7. თბილისიდან სანდროს აგარაკამდე 360 კმ-ია. სანდრო ჩავიდა თბილისიდან აგარაკზე, იქ 12 სთ გაჩერდა და უკან დაბრუნდა. აგარაკიდან თბილისისკენ მგზავრობისას მან სიჩქარე 18 კმ/სთ-ით გაზარდა და მთელ ამ მოგზაურობაზე 21 სთ დახარჯა. იპოვეთ სიჩქარე, რომლითაც მოძრაობდა სანდრო თბილისიდან აგარაკამდე.

8. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება: $\sqrt{7x-10}=x$;

9. ამოხსენით რაციონალური განტოლება: $\dfrac{x}{2x+6}-\dfrac{x-1}{x+1}=0$.

კომპლექსური დავალება

სიტუაცია ეკონომიკიდან

იცით თუ არა, რომ

თანამედროვე ეკონომიკური ბაზრის ერთერთი მთავარი პრობლემა არის წარმოებული პროდუქციის ბაზრისთვის მიწოდება და ამ პროდუქციაზე ბაზრის მოთხოვნა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პროდუქცია ბაზრისთვის უნდა იყოს მოთხოვნადი და ბაზარს ეს პროდუქცია ისე უნდა მიეწოდოს, რომ მისი მოთხოვნა დააკმაყოფილოს.

ცხადია, ამ პრობლემის მოსაგვარებლად მრავალი ეკონომიკური საკითხი უნდა იქნეს გათვალისწინებული, თუმცა მთავარი მაინც წარმოებული პროდუქციის ფასია. რა ფასად მიაწოდებს მწარმოებელი პროდუქციას ბაზარს და რა ფასის გადახდა შეუძლია ბაზარს ამ პროდუქტში. ფასის განსაზღვრა სხვა მაჩვენებლებზეცაა დამოკიდებული: ნედლეულის ფასზე, მუშების ხელფასზე, ტრანსპორტირებაზე და სხვა მრავალი.

განვიხილოთ ბაზრის მიწოდება-მოთხოვნის პრობლემის ყველაზე მარტივი შემთხვევა, როცა ფასი არის დამოკიდებული მხოლოდ პროდუქციის რაოდენობაზე. ცხადია, მწარმოებლისთვის (პროდუქციის მიმწოდებლისთვის) ბაზრისთვის (პროდუქციაზე მომთხოვნისთვის) ეს დამოკიდებულებები განსხვავებული იქნება. ორივესთვის ფასის დამოკიდებულება პროდუქციის რაოდენობაზე გამოვსახოთ წრფივი დამოკიდებულების ფორმით.

პროდუქციის ფასი აღვნიშნოთ x სიმბოლოთი, ხოლო პროდუქციის რაოდენობა აღვნიშნოთ y სიმბოლოთი. საინტერესოა მოთხოვნა-მიწოდების ის შემთხვევა, როცა მოთხოვნის და მიწოდების დამოკიდებულებას აკმაყოფილებს ერთი და იგივე რაღაც x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა. ამ შემთხვევას **უწოდებენ ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობას.**

განვიხილოთ სიტუაცია: ერთ-ერთი ბაზრისთვის, კონკრეტულ პროდუქციაზე ეკონომისტებმა დაადგინეს პროდუქციის მოთხოვნის ფასის რაოდენობაზე დამოკიდებულების შემდეგი ტოლობა:

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება

$$2x + 5y = 90, \quad (1)$$

ხოლო მიწოდებისთვის ფასის რაოდენობაზე დამოკიდებულების ტოლობაა:

$$8x - ky = m \quad (2)$$

თქვენი დავალება

1. შეარჩიეთ k და m დადებითი რიცხვები ნებისმიერად და მოძებნეთ მიწოდების (2) ტოლობიდან შესაბამისი x ფასი და y რაოდენობა (სულ მცირე სამი ვარიანტი.
2. გამოიკვლიეთ რას ნიშნავს ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობა და როგორ უნდა დადგინდეს ამ შემთხვევაში x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.
3. 1-ელ დავალებაში შერჩეული k და m დადებითი რიცხვების შემთხვევაში, დაადგინეთ ამ ბაზრის წონასწორობის x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.
4. მე-3 დავალება შეასრულეთ რამდენიმე სხვადასხვა მეთოდით და წარმოადგინეთ თითოეული მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება.
5. შეარჩიეთ სხვა k და m დადებითი რიცხვები ისე, რომ, ამ შემთხვევაში, არ არსებობდეს ბაზრის წონასწორობის x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.

დავალება წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, სადაც წარმოდგენილი იქნება ყველა გამოთვლა

დავალების პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

I. რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?

II. როგორ დაგეხმარათ პრობლემის გადაჭრაში თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამები?

III. სხვა რა ტიპის ამოცანებში შეიძლება გამოვიყენოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა?

IV. როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?

VII. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება

სიტუაცია ბიზნესიდან

იცით თუ არა, რომ

ხშირად ქვეყანაში ორი ან მეტი კომპანიაა, რომელიც სხვადასხვა სატელეფონო მომსახურებას, მომსახურების პაკეტს და ფასს სთავაზობს მომხმარებელს.

იმისათვის, რომ მომხმარებელმა მიიღოს მომსახურება საჭიროა წინასწარ გამოიკვლიოს რომელი კომპანია იქნება მისთვის მეტად სარგებლიანი.

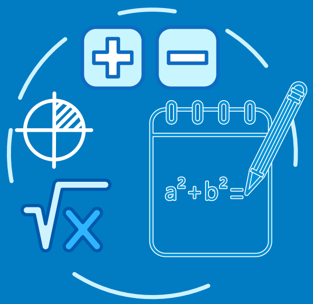
საკვანძო კითხვა:

- როგორ არის შესაძლებელი მათემატიკური მოდელების დახმარებით ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება?

ყოველდღიურ ცხოვრებაში სხვადასხვა კომპანია სარეკლამო კამპანიებით გვთავაზობს სხვადასხვა პირობებს, რათა მეტი მომხმარებელი მიიზიდონ და კონკურენცია გაუწიონ სხვა კოპანიებს. არჩევანის გაკეთებამდე, სასურველია მომხმარებლებმა გააანალიზონ სხვადასხვა კომპანიის პირობები და მიიღონ მათთვის მომგებიანი გადაწყვეტილებები. სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება და გამოთვლები გვეხმარება გრძელვადიან პერიოდში ჩვენთვის მისაღები გადაწყვეტილებების მიღებაში.

განვიხილოთ სიტუაცია: ორი სატელეფონი კომპანია მომხმარებლებს სთავაზობს საატელეფონო მომსახურების სხვადასხვა პირობებს. კომპანია A-ს შეთავაზებიდან გამომდინარე: თუ 12 წუთი ისაუბრებთ საზღვარგარეთ, მაშინ უნდა გადაიხადოთ 31 ლარი, ხოლო თუ 30 წუთი ისაუბრებთ მაშინ 40 ლარი;

გაგრძელება



კომპლექსური დავალება

კომპანია B-ს შეთავაზებით, სააბონენტო მომსახურების გადასახადი ყოველთვე შეადგენს 30 ლარს, რის შემდეგ წუთის ღირებულებაა 30 თეთრი.

თქვენი დავალება

1. შექმნათ მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს თითოეული კომპანიის საგადასახადო პოლიტიკას.

2. გააანალიზოთ სიტუაცია A და სიტუაცია B და მისცეთ რჩევა მეგობარს, რა შემთხვევაში რომელი კომპანიის მომსახურებით სარგებლობა იქნება უმჯობესი.

3. მოიძიოთ სხვადასხვა მაგალითები დაკავშირებული ფინანსებთან, სპორტთან, ყოველდღიურ ცხოვრებასთან, რომლის მეშვეობით დაასაბუთებთ წრფივი სისტემების ცოდნის მნიშვნელობას.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით.

დავალების პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

I. რომელი მათემატიკური მოდელით აღწერეთ სატელეკომუნიკაციო კომპანიების მიერ შეთავაზებული პირობები?

II. რა კანონზომიერება აღმოაჩინეთ თითოეული კომპანიის შეთავაზებების გათვალისწინებით? აღწერეთ სიტყვიერად თითოეული კომპანიის შეთავაზება და წესი.

III. რა შემთხვევაშია მომგებიანი კომპანია A-ს შეთავაზება და რა შემთხვევაში კომპანია B-ს შეთავაზება?

IV. რამდენი წუთი უნდა ისაუბროს თვეში მომხმარებელმა, რომ ორივე კომპანიის შეთავაზებიდან გამომდინარე იხდიდეს ერთი და იმავე თანხას?

V. რომელი სფეროდან შეგიძლიათ მაგალითის მოყვანა, წრფივი სისტემების ცოდნის მნიშვნელობის დასასაბუთებლად?

5.1. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი ამონახსნები

წრფივი ორცვლადიანი განტოლება

შესავალი ამოცანა

მოძრაობის დაწყებიდან 2 საათში ავტომობილმა შეცვალა სიჩქარე და კიდევ იმოძრავა 5 საათი, რათა მისულიყო დანიშნულების ადგილამდე, შვიდი საათის განმავლობაში ავტომობილმა სულ 470 კმ გაიარა. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი დროის ცალკეულ მონაკვეთში?

ამოხსნა:

შევადგინოთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი: ვთქვათ, პირველი 2 საათის განმავლობაში მანქანა მოძრაობდა x კმ/სთ სიჩქარით, შემდეგი დროის განმავლობაში კი y კმ/სთ სიჩქარით.

სულ ავტომობილმა გაიარა $2x + 5y$, რაც უდრის 470 კმ-ს. ამოცანის პირობის შესაბამისად მივიღებთ ორუცნობიან განტოლებას:

$$2x + 5y = 470 \quad (1)$$

(1) განტოლებიდან y ცვლადის გამოსახვის შედეგად ვღებულობთ წრფივ ფუნქციას $y = -0{,}4x + 94$, ამიტომ (1) სახის განტოლებას წრფივ ორცვლადიან განტოლებას უწოდებენ

? საკვანძო კითხვა: შესაძლებელია თუ არა ავტომობილის სიჩქარის დადგენა დროის ორივე მონაკვეთისთვის ცალ-ცალკე?

ცნება: წრფივი ორუცნობიანი განტოლება	განტოლებას, რომელიც შეიცავს ორ უცნობს და აქვს $ax + by = c$ სახე, სადაც x და y ცვლადებია, ხოლო a, b $(a \neq 0, b \neq 0)$ და c – ნებისმიერი რიცხვები, **წრფივი ორუცნობიანი განტოლება** ეწოდება.

ნიმუში 1

წრფივი ორუცნობიანი განტოლების მაგალითებია:

$2x + 5y = 35$ $\quad x - 3y = 18$ $\quad \frac{1}{2}x + 0{,}5y = 13{,}2$

წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნი	
ცნება: განტოლების ამონახსნი	რიცხვთა ისეთ $(x;y)$ წყვილს, რომელთა განტოლებაში ჩასმით ჭეშმარიტი ტოლობა მიიღება, წრფივი ორუცნობიანი **განტოლების ამონახსნი** ეწოდება; განტოლების ამონახსნთა ყველა წყვილს კი – წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე.

ნიმუში 2 — შესავალი ამოცანის განხილვა

ნაბიჯი 1

დავუბრუნდეთ ამოცანას ავტომობილის მოძრაობაზე. თუ კარგად დავაკვირდებით, შერჩევის ხერხით შესაძლებელია დავადგინოთ, რა სიჩქარით შეიძლება ემოძრავა ავტომობილს გზის პირველ და მეორე ნაწილზე.

I ვარიანტი

წარმოვადგინოთ y ცვლადი x-ით

$$\mathbf{2x + 5y = 470}$$
$$5y = -2x + 470$$
$$y = \frac{(-2x + 470)}{5} = -\frac{2x}{5} + \frac{470}{5}$$
$$y = -0.4x + 94 \ \mathbf{(2)}$$

II ვარიანტი

წარმოვადგინოთ x ცვლადი y-ით

$$\mathbf{2x + 5y = 470}$$
$$2x = -5y + 470$$
$$x = \frac{(-5y + 470)}{2} = -\frac{5y}{2} + \frac{470}{2}$$
$$x = -2.5y + 235 \ \mathbf{(3)}$$

განვიხილოთ (2) განტოლება: $y = -0.4x + 94$, ჩავსვათ x-ის ნაცვლად სხვადასხვა რიცხვები და გამოვიანგარიშოთ, რისი ტოლი შეიძლება იყოს შესაბამისი y ცვლადი, რათა x და y ცვლადის ორივე მნიშვნელობამ ერთდროულად დააკმაყოფილოს ტოლობა.

$y = -0.4x + 94$		განტოლების ამონახსნი სიტყვიერად	განტოლების ამონახსნი
x კმ/სთ	y კმ/სთ	მანქანის სიჩქარე	$(x; y)$
1 კმ/სთ	$y = -0.4 \cdot 1 + 94 = 93.6$ კმ/სთ	1 კმ/სთ და 93.6 კმ/სთ	(1; 93.6)
2 კმ/სთ	$y = -0.4 \cdot 2 + 94 = 93.2$ კმ/სთ	2 კმ/სთ და 93.2 კმ/სთ	(2; 93.2)
და ა.შ.	......	....	......
10 კმ/სთ	$y = -0.4 \cdot 10 + 94 = 90$ კმ/სთ	10 კმ/სთ და 90 კმ/სთ	(10; 90)
20 კმ/სთ	$y = -0.4 \cdot 20 + 94 = 86$ კმ/სთ	20 კმ/სთ და 86 კმ/სთ	(20; 86)
60 კმ/სთ	$y = -0.4 \cdot 60 + 94 = 70$ კმ/სთ	60 კმ/სთ და 70 კმ/სთ	(60; 70)

გაგრძელება

თუ (1) განტოლებაში ჩავსვამთ (x; y) წყვილის ნებისმიერ მნიშვნელობას ცხრილიდან, ტოლობა იქნება ჭეშმარიტი. მაგალითად, შევამოწმოთ ერთ-ერთი წყვილი (60;70) და ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

(1) განტოლებაა: $2x + 5y = 470$

შემოწმება: $2 \cdot 60 + 5 \cdot 70 = 470$

აღნიშნული ტოლობა არის ჭეშმარიტი, ე.ი. მანქანას შეიძლება ჯერ ემოძრავა 2 სთ-ის განმავლობაში 60 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო შემდეგი 5 სთ-ის განმავლობაში – 70 კმ/სთ სიჩქარით.

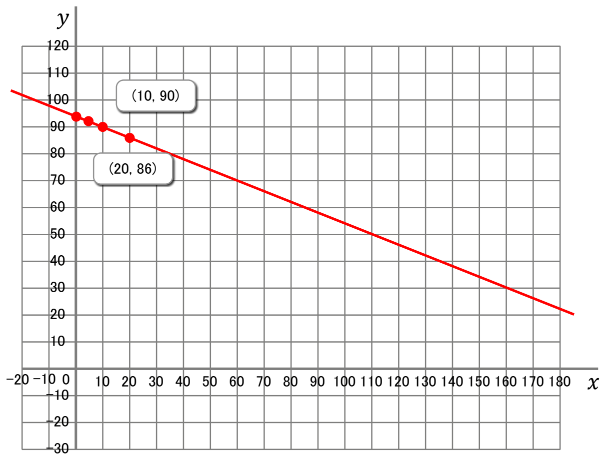
მინიშნება: მიაქციეთ ყურადღება – როგორც ხედავთ, თუ გზაზე არ იქნებოდა სიჩქარის შეზღუდვა, მანქანას შეეძლო ემოძრავა სხვადასხვა სიჩქარით და ყველა შესაძლო კომბინაცია იქნებოდა განტოლების ამონახსნი.

თუ გზაზე იქნებოდა სიჩქარის შეზღუდვა, მაგალითად: **მანქანას შეუძლია იმოძრაოს არაუმეტეს 90 კმ/სთ სიჩქარისა,** მაშინ ამოცანის პირობას დააკმაყოფილებდა მხოლოდ ის წყვილები, სადაც x და y ცვლადების მნიშვნელობები იქნებოდა 90-ზე ნაკლები;

საკვანძო კითხვა: შესაძლებელია თუ არა ავტომობილის სიჩქარე იყოს უარყოფითი?

ნაბიჯი 2 – წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნების გრაფიკული წარმოდგენა

$y = -0.4x + 94$		
x	y	$(x;y)$
1	93.6	(1;93.6)
10	90	(10; 90)
20	86	(20; 86)
60	70	(60; 70)



ნახაზი 1

ამონახსნთა ყველა წყვილი წარმოადგენს ნახ.1-ზე მოცემულ წრფეს, რაც არის წრფივი ორუცნობიანი განტოლების გრაფიკული გამოსახვა, თუმცა, კონტექსტიდან გამომდინარე, წრფის ყველა წერტილი ვერ იქნება ამოცანის ამონახსნი.

ნიმუში 3 – ტოლფასი განტოლებები

როგორც ზემოთ დავინახეთ, $2x + 5y = 470$ განტოლება გარდაქმნის შედეგად შეიძლება ჩაიწეროს ორი სხვა ფორმითაც

I ვარიანტი	II ვარიანტი
წარმოვადგინოთ y ცვლადი x-ით $5y - 2x + 470$ ტოლობის ორივე მხარის 5-ზე გაყოფით მივი-ღებთ: $y = -0.4x + 94$	**წარმოვადგინოთ** x ცვლადი y-ით $2x = -5y + 470$ ტოლობის ორივე მხარის 2-ზე გაყოფით მივიღებთ: $x = -2.5y + 235$
აღნიშნულ განტოლებებს ერთნაირი ამონახსნთა სიმრავლე აქვს.	
ცნება: ტოლფასი განტოლება	განტოლებებს, რომელთაც ერთნაირი ამონახსნთა სიმრავლე აქვთ, **ტოლფასი განტოლებები** ეწოდება.

სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო

1. დაადგინეთ, (80; 20) და (40; 78) წყვილებიდან რომელია ამოცანის ამონახსნი. შეამოწმეთ, შერჩეული წყვილი დააკმაყოფილებს განტოლების ჩანაწერის მეორე ვარიანტს?

2. ჩამოთვლილთაგან რომელია წრფივი ორუცნობიანი განტოლება?
ა) $3x + 5 = -4x - 2$; ბ) $3x + 5y = 12$; გ) $5y + 2y^2 = y + 18$;
დ) $y^2 - y = 8$; ე) $3x + y = y - 5$; ვ) $3x - 4y = -5$.

3. შეარჩიეთ $4x - 3y = 9$ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნი (ამონახსნები).
ა) $(-2; 1)$; ბ) $(1; 3)$; გ) $(3; 1)$; დ) $(2; 0)$.

4. შეარჩიეთ განტოლება, რომლის ამონახსნია $(-1;2)$:
ა) $3x + y = 3$; ბ) $2x - y = -4$; გ) $5x + 2y = 9$; დ) $2x + y = 0$.

5. ჩამოთვლილთაგან რომელია $20x + 10y = 30$ განტოლების ტოლფასი განტოლება/განტოლებები? პასუხი დაასაბუთეთ.
ა) $2x + 3y = 30$; ბ) $2x + y = 3$; გ) $4x + 2y = 6$; დ) $10x = -5x + 15$.

6. შეადგინეთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლება:
ა) x და y ცვლადების გამოყენებით; ბ) a და b ცვლადების გამოყენებით.

7. იპოვეთ $3x - 2y = 11$ განტოლების ამონახსნი, თუ ცნობილია, რომ $x = -4$.

8. იპოვეთ $5x - 2y = 2$ განტოლების ამონახსნი, თუ ცნობილია, რომ x ორჯერ ნაკლებია y-ზე.

9. იპოვეთ $x + y = 15$ განტოლების რაიმე სამი ამონახსნი.

10. დაასახელეთ $3x - y = 18$ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა რამდენიმე წყვილი.

11. შეადგინეთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, რომლის ამონახსნია $(5; -2)$ რიცხვთა წყვილი.

12. გამოიყენეთ ტოლობის თვისებები და დაწერეთ $5x + 2y = 28$ განტოლების ტოლფასი განტოლება.

13. მასალის გამეორება: დაადგინეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მოცემული წერტილი მოცემულ განტოლებას (მდებარეობს თუ არა წერტილი მოცემული განტოლების შესაბამისი წრფის გრაფიკზე).
ა) $(2; 5)$ $y = 4x - 3$; ბ) $(-4; 2)$ $y = -x - 3$; გ) $(4; -1)$ $y = -2x + 7$;
დ) $(3; -1)$ $y = 2x - 7$; ე) $(-1; 7)$ $y = -2x + 5$; ვ) $(1; 6)$ $y = -3x + 5$.

14. ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან გამოსახეთ x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით:
ა) $x + 2y = 24$; ბ) $-2x + 4y = 30$.

15. ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან გამოსახეთ y ცვლადი x-ის საშუალებით:
ა) $6x + 3y = 18$; ბ) $2x - 5y = 8$.

სავარჯიშოები

წინარე მასალის გამეორება

16. 4 ტ ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული დანახარჯია 1 600 ლარია, ხოლო 20 ტონა ყურძნის მოყვანისთვის – 3 800 ლარი.

ა) იპოვეთ ფიქსირებული დანახარჯი და 1 ტ ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული ცვლადი დანახარჯი;

ბ) ააგეთ დანახარჯების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

გ) გამოთვალეთ 60 ტონა ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული დანახარჯი.

17. თუ საწარმო გამოუშვებს და გაყიდის 400 ცალ ტელევიზორს, მაშინ მისი შემოსავალი იქნება 60 000 ლარი:

ა) გამოთვალეთ ტელევიზორის საცალო ფასი;

ბ) ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი;

გ) გამოთვალეთ საწარმოს მიერ მიღებული შემოსავალი, თუ გამოშვებული და გაყიდული არის 300 ცალი ტელევიზორი.

18. ორი სატელეფონი კომპანია მომხმარებლებს სთავაზობს საატელეფონო მომსახურების სხვა-დასხვა პირობებს. კომპანია A-ს შეთავაზებიდან გამომდინარე: თუ 4 წუთი ისაუბრებთ საზღვარ-გარეთ, მაშინ უნდა გადაიხადოთ 12 ლარი, ხოლო თუ 8 წუთი ისაუბრებთ მაშინ 18 ლარი

ა) გამოთვალეთ რამდენია წუთის ღირებულება?

ბ) რამდენი უნდა გადაიხადოს მომხმარებელმა თუ ისაუბრებს 32 წუთი? 80წუთი?

5.2. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი ამონახსნები

ამოცანა

ელენეს მხოლოდ 20-თეთრიანი მონეტები აქვს, დაჩის კი მხოლოდ 50-თეთრიანი მონეტები. მონეტების საერთო რაოდენობაა 15. ელენეს და დაჩის ერთად 6 ლარი აქვთ. რამდენი მონეტა აქვთ ელენეს და დაჩის ცალ-ცალკე?

ამოხსნა:

თუ 20-თეთრიანი მონეტების რაოდენობას x-ით აღვნიშნავთ, 50-თეთრიანი მონეტების რაოდენობას კი y-ით, ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ ორ განტოლებას: $x + y = 15$ (1) და $20x + 50y = 600$ (2)

(1) და (2) განტოლებებით შექმნილი განტოლებათა სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 600 \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

50 თეთრის ნომინალის მონეტა

20 თეთრის ნომინალის მონეტა

ცნება:

წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა და მისი ამონახსნი.

მიღებულ (1) და (2) განტოლებას ერთად **წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა** ეწოდება. ხოლო ამ განტოლებათა საერთო ამონახსნს – წრფივი ორცვლადიანი **განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.**

ნიმუში 1

განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 600 \end{cases}$ ამოვხსნათ შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით

x	y	$x + y$	$20x + 50y$
10	5	15	450
9	6	15	480
7	8	15	540
6	9	15	570
5	10	15	600

როგორც ცხრილიდან ჩანს, განტოლებათა სისტემის ამონახსნი არის რიცხვთა წყვილი (5; 10), რადგანაც ამ განტოლებათა სისტემაში შემავალ ორივე განტოლებას ეს რიცხვები ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს, მართლაც: $5 + 10 = 15$ და $20 \cdot 5 + 50 \cdot 10 = 600$

პასუხი: ელენეს აქვს 5 ოცთეთრიანი მონეტა, დაჩის კი 10 50-თეთრიანი მონეტა.

ნიმუში 2

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით

ვიპოვოთ ამ ორი განტოლების საერთო ამონახსნი, რაც ასევე განტოლებათა სისტემის ამონახსნიც იქნება.

პასუხი:

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

x	y	$x + y$	$x - 2y$
0	4	4	−8
1	3	4	−5
2	2	4	−2
3	1	4	1
4	0	4	3

როგორც ვხედავთ, შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით შევძელით, გვეპოვა ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები: $x = 2$ და $y = 2$, რომლებიც სისტემაში შემავალ ორივე განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად. სწორედ ეს წყვილი (ცხრილში გაფერადებულია შესაბამისი სტრიქონი) არის მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

სავარჯიშოები

1. ცხრილის გამოყენებით და შერჩევის ხერხით იპოვეთ მთელი რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ მოცემულ ორ განტოლებას:

ა) $x + y = 4$
$3x + 5y = 14$

ბ) $x + y = 11$
$4x + 3y = 40$

გ) $y = x + 2$
$9x - 4y = 7$

დ) $y = 6 + x$
$8x - 3y = -3$

2. დაადგინეთ, არის თუ არა ცვლადების მოცემული წყვილი ერთდროულად ორივე განტოლების ამონახსნი:

ა) $x = 5;\ y = 2$
$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

გ) $x = 5;\ y = 4$
$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

ბ) $a = 5;\ b = -3$
$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 8 \end{cases}$

დ) $a = 4;\ b = -1$
$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$

3. შერჩევის ხერხით, იპოვეთ ორივე განტოლებისთვის საერთო მთელი ამონახსნი:

ა) $x + y = 4$
$2x - y = 5$

ბ) $x + y = 6$
$2x + y = 10$

გ) $a - b = 1$
$2a + 3b = 2$

დ) $p - q = 3$
$5p + 2q = 29$

5.3. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი

საკვანძო კითხვა: როგორი ურთიერთმდებარეობა შეიძლება ჰქონდეს სიბრტყეზე ორ წრფეს?

§5.1-ში ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნები განლაგდება წრფეზე და წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე გრაფიკულად წარმოადგენს წრფეს

ნიმუში 1

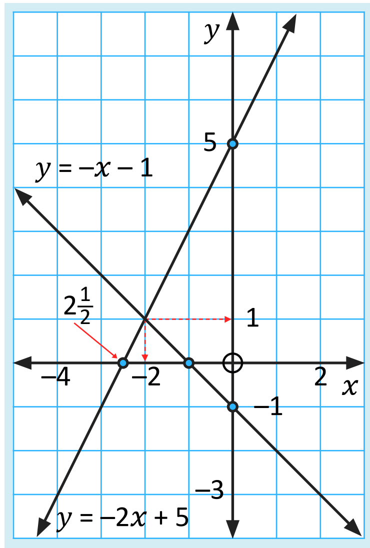
განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

ამოვხსნათ

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

ჩავწეროთ თითოეული განტოლების ტოლფასი განტოლება, გამოვსახოთ y ცვლადი x-ით, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$



შეგვიძლია ავაგოთ სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების შესაბამისი წრფე. როგორც ვიცით, წრფის ასაგებად საკმარისია 2 წერტილი. სიმარტივისთვის ხშირად პოულობენ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს. წერტილების შერჩევის პროცესი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით:

$y = -x - 1$		
x	y	$(x; y)$
0	–1	(0; –1)
–1	0	(–1; 0)

$y = 2x + 5$		
x	y	$(x; y)$
0	5	(0; 5)
–2.5	0	(2.5; 0)

მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები (ანუ, წერტილი, რომელიც ორივე განტოლების შესაბამის გრაფიკს ეკუთვნის) წარმოადგენს **მოცემული სისტემის ამონახსნს**.

როგორც ვხედავთ, სიბრტყეზე ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს წერტილში კოორდინატებით (–2;1). ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წერტილი ერთდროულად აკმაყოფილებს ორივე წრფის შესაბამის განტოლებას.

გაგრძელება

შემოწმება: მოცემულია ორი წრფივი ფუნქცია $y = -x - 1$ და $y = 2x + 5$

წერტილი $(-2; 1)$ ეკუთვნის ორივე წრფეს, რადგანაც წერტილის კოორდინატების ჩასმით, მივიღეთ სწორი ტოლობა:

$y = -x - 1$ $\qquad$ $y = 2x + 5$

$1 = -(-2) - 1$ $\qquad$ $1 = 2(-2) + 5$

აღნიშნული მეთოდით განტოლებათა სისტემის ამონახსნის პოვნას ეწოდება განტოლებათა სისტემის ამოხსნის **გრაფიკული მეთოდი/ხერხი.**

ნიმუში 2

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

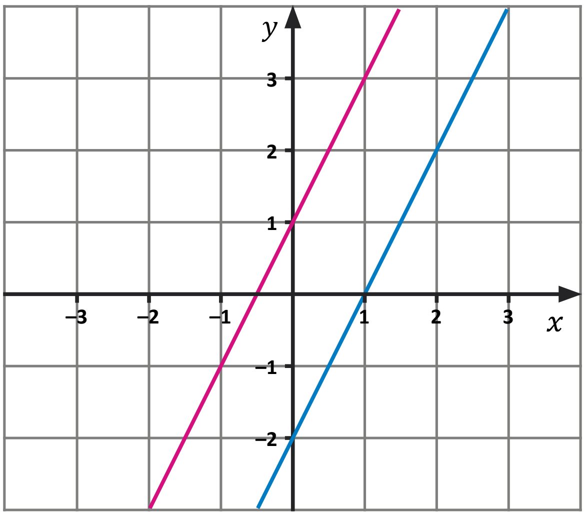
ამოვხსნათ

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემა გრაფიკულად, ამისთვის ვიპოვოთ აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები ორივე წრფისთვის ცალ-ცალკე:

$y = 2x + 1$		
x	y	$(x; y)$
0	1	$(0; 1)$
$-\frac{1}{2}$	0	$(-\frac{1}{2}; 0)$

$y = 2x - 2$		
x	y	$(x; y)$
0	-2	$(0; -2)$
1	0	$(1; 0)$



როგორც ნახაზიდან ჩანს, წრფეები პარალელურია და მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს.

როდის არ აქვს განტოლებათა სისტემას ამონახსნი?

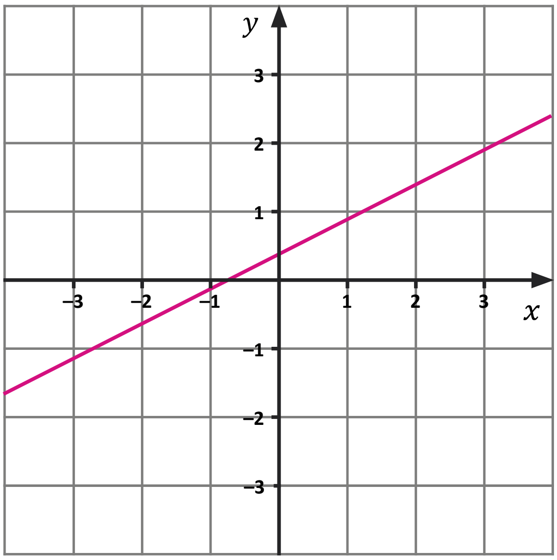
სისტემაში შემავალ განტოლებებს თუ დავაკვირდებით, მივხვდებით, რომ თუ განტოლებების შესაბამის წრფივ ფუნქციებს ერთნაირი საკუთხო კოეფიციენტი (ანუ დახრის კუთხე) აქვთ, ისინი არ იკვეთებიან, ანუ, განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს.

ნიმუში 3

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

ამოვხსნათ

$$\begin{cases} y = 0.5x + \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{0.2}{0.5} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0.5x + \frac{2}{5} \\ y = 0.5x + \frac{2}{5} \end{cases}$$



სისტემაში შემავალი ორი განტოლების შესაბამისი ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს; ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი სისტემაში შემავალი ორივე განტოლების შესაბამისი გრაფიკის წერტილია.

ნიმუში 4

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

საბაზრო წონასწორობის წრფივი მოდელი – თუ რაიმე პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ მაღალია, მაშინ მომხმარებლები მას ნაკლები რაოდენობით იყიდიან. თუ პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ დაბალი იქნება, მაშინ მომწოდებელმა აღნიშნული პროდუქცია შეიძლება არც კი გაყიდოს. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში პროდუქციის საცალო ფასს აქვს ტენდენცია-დააკმაყოფილოს, როგორც მიმწოდებლის, ასევე მომხმარებლის ინტერესები, ე.ი. საცალო ფასი უნდა იყოს ისეთი, რომ მიმწოდებელს სურდეს ამ პროდუქციის გაყიდვა და მყიდველს კი შეეძლოს მისი ყიდვა. ასეთ მდგომარეობას ადგილი ექნება მაშინ, როცა ბაზარზე მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა გაუტოლდება ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის რაოდენობას, ე.ი. როცა მოთხოვნისა და მიწოდების გრაფიკები ერთმანეთს გადაკვეთს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა.

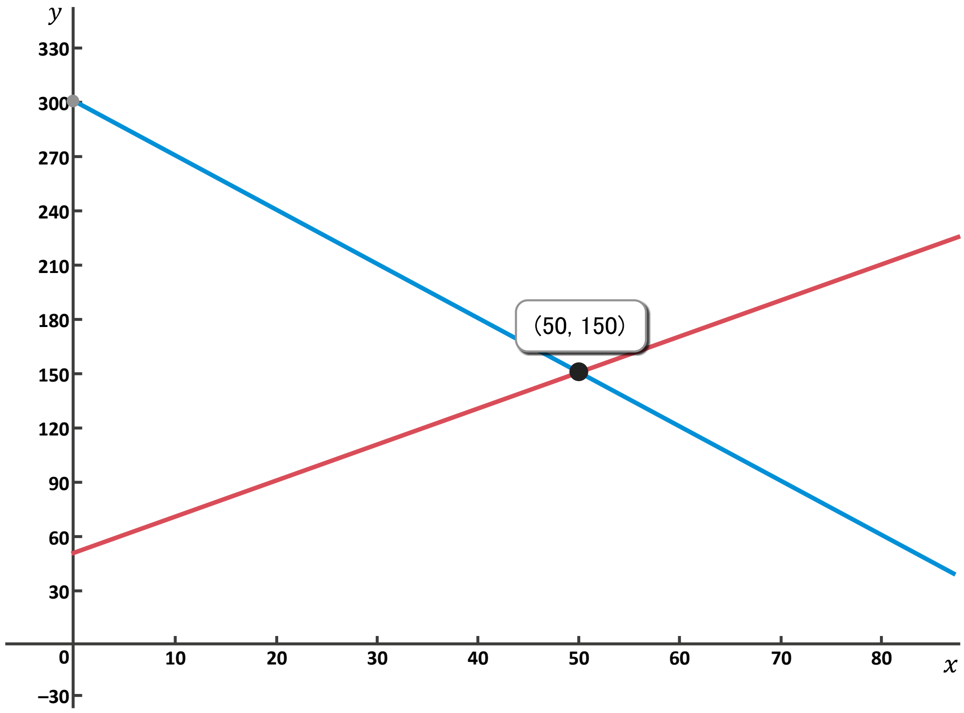
მაგალითი: პროდუქციაზე მოთხოვნის ფუნქციაა $y=-3x+300$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $y=2x+50$, პროდუქციის რა რაოდენობისთვის გაუტოლდება ერთმანეთს მოთხოვნისა და მიწოდების ფასები? ვიპოვოთ აღნიშნული ფასი.

გაგრძელება

ამოხსნა: $-3x + 300 = 2x+50 \Rightarrow x = 50$, ხოლო $p\,(50) = 150$

ე.ი. თუ ბაზარზე გამოტანილი იქნება 50 ცალი აღნიშნული პროდუქცია, იგი მთლიანად გაიყიდება და შესაბამისი საცალო ფასი იქნება 150 ლარი.

(50; 150) წერტილს უწოდებენ საბაზრო წონასწორობის წერტილს, p =150 ლარს კი – წონასწორულ საბაზრო ფასს.



საზოგადოდ, (x_0; y_0) წერტილს, რომელშიც მოთხოვნისა და მიწოდების გრაფიკების ფუნქციების გრაფიკები გადაიკვეთება, ეწოდება საბაზრო წონასწორობის წერტილი, ხოლო y_0-ს წონასწორული საბაზრო ფასი.

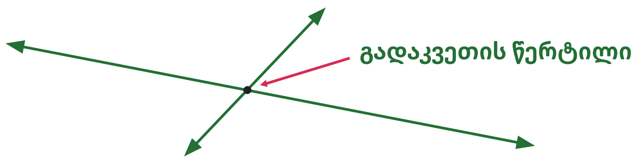
!! ყურადღება მიაქციეთ და გაიაზრეთ

წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს ან ერთი ამონახსნი, ან არცერთი, ან უამრავი ამონახსნი:

როდესაც განტოლებათა სისტემაში განტოლებები მოცემულია კუთხური კოეფიციენტით:

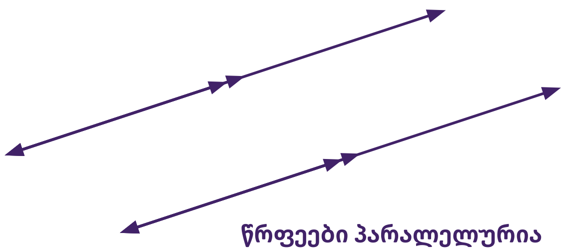
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

1. $k_1 \neq k_2$, წრფეები კვეთს ერთმანეთს და სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

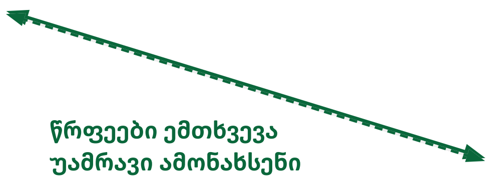


2. თუ $k_1 = k_2$, და $b_1 \neq b_2$ მაშინ წრფეები პარალელურია და სისტემას ამონახსნი არ აქვს;

   ჩვენ ვიცით, რომ როდესაც ორ წრფეს ერთნაირი კუთხური კოეფიციენტი/დახრილობა აქვთ, მაშინ ისინი პარალელურია



3. თუ $k_1 = k_2$ და $b_1 = b_2$, მაშინ წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა და სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი



დამატებითი ინფორმაცია მათემატიკის მოყვარულთათვის*

თუ განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ სახით, მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების შესახებ სამართლიანია მსჯელობა:

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები არ არის პროპორციული:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს **ერთადერთი ამონახსნი,** რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **ერთ წერტილში იკვეთებიან.**

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები პროპორციულია, მაგრამ თავისუფალი წევრები არ არის მათი პროპორციული:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას **არა აქვს ამონახსნი,** რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **პარალელურია**.

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები პროპორციულია:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

მაშინ სისტემას აქვს **უამრავი ამონახსნი,** რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **ერთმანეთს ემთხვევა.**

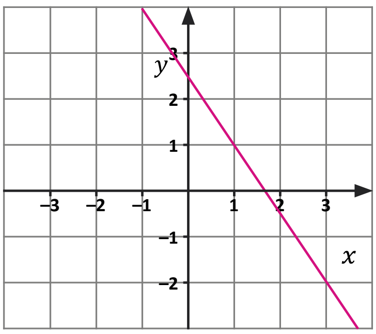
სავარჯიშოები

1. რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებათა სისტემას:

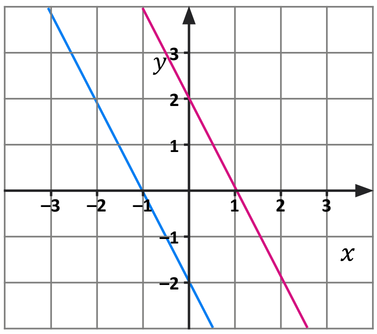
ა) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \\ y = 0.2x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

2. ნახაზის მიხედვით დაადგინე, რამდენი ამონახსნი აქვს წრფივ განტოლებათა სისტემას? რატომ?

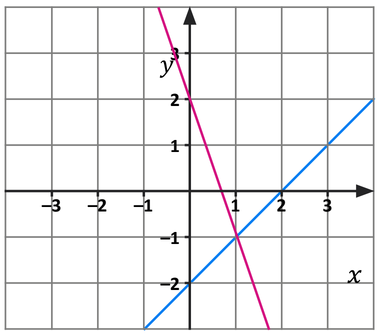
ა) ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა:



ბ) ორი წრფე პარალელურია



გ) ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს:



3. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გრაფიკული ხერხით (შეგიძლიათ, გამოიყენოთ Desmos პროგრამა):

ა) $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = -5x - 1 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

4. განტოლებათა სისტემების ამოუხსნელად გაარკვიეთ, რამდენი ამონახსნი აქვს მოცემულ განტოლებათა სისტემას

ა) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -2x - 5y = -7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 6x + 10y = 5 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

5. მოცემულია ორუცნობიანი წრფივი განტოლება: 5x-2y=11; დაწერეთ ისეთი ორუცნობიანი განტოლება, რომ მოცემულ განტოლებასთან ერთად მიღებულ განტოლებათა სისტემას:

ა) არ ჰქონდეს ამონახსნი; ბ) ჰქონდეს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა; გ) ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი.

6. მოცემულია ორი განტოლება:

$3x + 5y = 13$ (1) $5x - 4y = 10$ (2),

გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და დაასახელეთ რიცხვთა ისეთი წყვილი, რომელიც წარმოადგენს:

სავარჯიშოები

ა) (1) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს;

ბ) (2) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს;

გ) არ წარმოადგენს არც (1) და არც (2) განტოლების ამონახსნს;

დ) წარმოადგენს ორივე განტოლების ამონახსნს.

7. გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და იპოვე სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

ა) $\begin{cases} y = x \\ y = -2 + 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 5 - x \end{cases}$ ე) $\begin{cases} y = 2 - 3x \\ y = x - 2 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

8. კაფე-ბარში გარკვეული რაოდენობის ოთხადგილიანი და სამადგილიანი მაგიდებია განლაგებული, სულ 10 მაგიდა. რამდენი სამადგილიანი და რამდენი ოთხადგილიანი მაგიდაა კაფე-ბარში, თუ სულ ადგილების რაოდენობა 33-ს შეადგენს. შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით გრაფიკული ხერხით.

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

9. **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი და დაასახელეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სამი წყვილი:

ა) $\begin{cases} ax + 10y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 6x + 10y = 5 \\ 3x + 5y = a \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 60x + ay = 15 \\ 12x - 4y = 3 \end{cases}$

10. **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას არ აქვს ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 6x + ay = 15 \\ 12x - 14y = 4 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ ax + 15y = 3 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} -39x - 12y = a \\ 13x + 4y = 3 \end{cases}$

11. **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ ax + 21y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 6x + ay = 15 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 5x + 15y = 15 \\ 13x - 8y = a \end{cases}$

5.4. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით

ამოცანა

ხატიამ და სანდრომ მარკეტში ტკბილეულის ყიდვა გადაწყვიტეს. ხატიამ იყიდა ორი შოკოლადის ფილა და ერთი ხუთლარიანი წვენი. სანდრომ კი სამი ისეთივე შოკოლადის ფილა და ორი ლარნახევრიანი ორცხობილა შეიძინა, რაშიც მან გადაიხადა იგივე თანხა რამდენიც ხატიამ. რა ღირს ერთი ფილა შოკოლადი? რამდენი ლარი გადაიხადა თითოეულმა?

ამოხსნა:

თუ ხატიას მიერ ნაყიდ პროდუქტში გადახდილ თანხას y-ით აღვნიშნავთ, ხოლო ერთი შოკოლადის ფილის ღირებულებას x-ით, მაშინ ხატიას გადახდილი თანხისთვის მივიღებთ წრფივ ორუცნობიან განტოლებას:

$$y = 2x + 5 \ (1)$$

სანდროს მიერ გადახდილი თანხისთვის მივიღებთ:

$$y = 3x + 3 \ (2)$$

ამოცანის ამოხსნა იხილეთ **ნიმუში 1-ში** ⤵️

ნიმუში 1 – ტოლფასი განტოლებათა სისტემები

(1) და (2) ერთად გვაძლევს წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$$

უკვე ვიცით წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი, ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის **ჩასმის ხერხი.** ამისათვის სისტემის პირველი განტოლებიდან y-ის მნიშვნელობა, რომელიც x-ითაა გამოსახული, ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში y-ის ნაცვლად, მივიღებთ წრფივ ერთუცნობიან განტოლებას:

$$2x + 5 = 3x + 3,$$
$$2x + 5 - 5 = 3x + 3 - 5,$$
$$2x = 3x - 2,$$
$$2x - 3x = 3x - 2 - 3x,$$
$$-x = -2,$$
$$x = 2$$

თუ x-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის პირველ განტოლებაში x-ის ნაცვლად, მივიღებთ: $y = 9$.

მაშასადამე, შოკოლადის ფილა ღირს 2 ლარი, ხოლო ხატიას და სანდრო მიერ ტკბილეულში გადახდილი თანხა ცალ-ცალკე შეადგენს 9 ლარს.

პასუხი: (2; 9)

ცნება: ტოლფასი განტოლებათა სისტემა	თუ სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან განვსაზღვრავთ (გამოვსახავთ) რომელიმე უცნობს და მიღებულ მნიშვნელობას მეორე განტოლებაში ჩავსვამთ შესაბამისი უცნობის ნაცვლად, მივიღებთ მოცემულ განტოლებათა სისტემის **ტოლფას განტოლებათა სისტემას**. ტოლფასობის აღსანიშნავად ვიყენებთ ⇔სიმბოლოს.

თუ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებიდან არცერთი ცვლადი არაა გამოსახული მეორე ცვლადით, მაშინ ერთ-ერთი ცვლადი (რომლის გამოსახვაც უფრო მოსახერხებელია) გამოვსახოთ მეორე ცვლადის საშუალებით და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში. განვიხილოთ მაგალითი: ⤵️

ნიმუში 2 – ტოლფასი განტოლებათა სისტემები

$\begin{cases} y + x = 10 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$ ⇔ დავწეროთ მოცემული განტოლებათა სისტემის ტოლფასი

განტოლებათა სისტემა, სადაც პირველ განტოლებაში ერთ-ერთი ცვლადი y გამოსახულია მეორე x ცვლადით

$\begin{cases} y + x = 10 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$ ⇔ ჩავსვათ მეორე განტოლებაში y-ის ნაცვლად

$\begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + 5(10 - x) = 32 \end{cases}$ ⇔ მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას, რომლის გამარტივების შედეგად ვიპოვით x-ს:

$\begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + 50 - 5x = 32 \end{cases}$

ამ ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსნია: $x = 6$, ცვლადის ეს მნიშვნელობა უნდა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში და მივიღებთ: $y = 4$

პასუხი: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

ზოგჯერ განტოლებათა სისტემაში შემავალი ორივე ცვლადი 1-სგან, ან −1 სგან განსხვავებულ კოეფიციენტს შეიცავს და ერთი ცვლადის გამოსახვა მეორე ცვლადით, წინა მაგალითისგან განსხვავებით, შედარებით უფრო რთულია. ასეთ შემთხვევაში უმჯობესია, ჯერ რომელიმე ცვლადის კოეფიციენტი გავხადოთ 1-ის ან −1-ის ტოლი და შემდეგ გავაგრძელოთ ისე, როგორც ეს წინა ნიმუშშია მოცემული. განვიხილოთ მაგალითი: ⤵️

ნიმუში 3

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან გამოვსახოთ x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით, ამისათვის ჯერ განტოლების ყველა წევრი გავყოთ 2-ზე და შემდეგ გამოვსახოთ:

$x + 1{,}5y = 10{,}5$

$x = 10{,}5 - 1{,}5y$ (1)

მიღებული x ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას:

$3(10{,}5 - 1{,}5y) - 4y = -11$

საიდანაც: $y = 5$

მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$x = 10{,}5 - 1{,}5 \cdot 5$

$x = 3$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ეს გზა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1.5y = 10.5 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ 3(10.5 - 1.5y) - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ 31.5 - 4.5y - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ 31.5 - 8.5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ 31.5 - 8.5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10.5 - 1.5y \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10.5 - 1.5.5 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

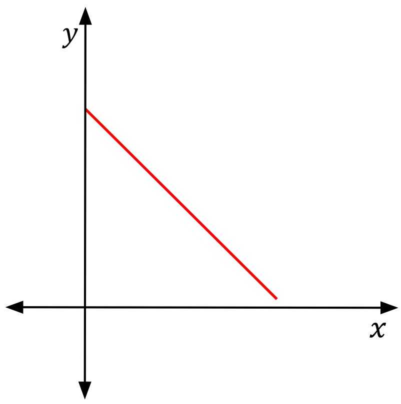
პასუხი: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

ნიმუში 4 – კომპლექსურ დავალებასთან დაკავშირებული ნიმუშის განხილვა

თეორია:

მოთხოვნის წრფივი მოდელი – დავუშვათ საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ოდენობა საკმაოდ დიდია. ასეთ შემთხვევაში პროდუქცია „კარგად გაიყიდება“, თუ მისი საცალო ფასი შედარებით დაბალი იქნება. რაც უფრო მეტი პროდუქცია იქნება გამოტანილი ბაზარზე, მით ნაკლები იქნება მისი ფასი, ე.ი. პროდუქციის საცალო ფასი დამოკიდებულია ამ პროდუქციის რაოდენობაზე. დავუშვათ, ეს დამოკიდებულება არის წრფივი, ე.ი. აქვს შემდეგი სახე $y = kx + b$, სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა. x-ის ზრდასთან ერთად საცალო ფასი y მცირდება, ამიტომ $k < 0$ და აღნიშნული ფუნქცია კლებადია.

$y = kx + b$ განტოლებას, სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა, y – კი საცალო ფასი, ეწოდება მოთხოვნის განტოლება



მაგალითი: თუ პროდუქციის საცალო ფასია 10 ლარი, მაშინ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 1000, ხოლო თუ საცალო ფასია 8 ლარი, გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 2000. ააგეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი.

ამოხსნა: მოთხოვნის განტოლებაა $y = kx + b$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ამ განტოლებას აკმაყოფილებს რიცხვთა ორი წყვილი: (1 000; 10) და (2 000; 8), ე.ი. შევადგენთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 10 = 1\,000k + b \\ 8 = 2\,000k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{8 - 10}{2\,000 - 1\,000} \\ b = 10 - 1\,000k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} k = -0.002 \\ b = 12 \end{matrix}$$

ე.ი. მოთხოვნის განტოლებაა $y = -0{,}002x + 12$

ნიმუში 5

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x + 1.5y = 10.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x = 10.5 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(10.5 - 1.5y) + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 21 - 3y + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases}$$

აღნიშნულ განტოლებათა სისტემას აქვს **უამრავი ამონახსნი.**

ნიმუში 6

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x + 1.5y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(12 - 1.5y) + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 24 - 3y + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases}$$

მივიღეთ მცდარი ტოლობა, ამიტომ აღნიშნულ განტოლებათა სისტემას **ამონახსნი არ აქვს.**

მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. პირველი განტოლებიდან გამოსახე y ცვლადი x ცვლადის საშუალებით:

$$\begin{cases} y + 2x = 15 \\ 2y - 3x = 9 \end{cases}$$

ჩასვი მეორე განტოლებაში y ცვლადის მაგივრად, ამოხსენი მიღებული ერთცვლადიანი განტოლება. მიღებული x ცვლადის მნიშვნელობა ჩასვი პირველ განტოლებაში x ცვლადის ნაცვლად და იპოვე y ცვლადი. მიღებული წყვილი იქნება განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

2. პირველი განტოლებიდან გამოსახე x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით და ისარგებლე წინა დავალების ინსტრუქციით:

$$\begin{cases} x - y = 13 \\ 2x - 5y = 61 \end{cases}$$

3. გამოსახე რომელიმე ცვლადი მეორე ცვლადის საშუალებით და ისარგებლე პირველი დავალების ინსტრუქციით:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ 3x - 5y = 55 \end{cases}$$

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჩასმის ხერხით:

ა) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = -x - 6 \end{cases}$ თ) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x - 6 \end{cases}$ ი) $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ y = -10 - 6x \end{cases}$

2. გამოიყენე ჩასმის ხერხი და ამოხსენი განტოლებათა სისტემა:

ა) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y + 4x = 6 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x = 2y - 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ y = 3 - 4x \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} y = 3y + 12 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2x - 5y = 27 \end{cases}$ თ) $\begin{cases} x = 4y - 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ ი) $\begin{cases} y = 5x + 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

3. გამოიყენე ჩასმის ხერხი და გრაფიკის აუგებლად იპოვე შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილი:

ა) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 2 - x \\ y + 2x = -1 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 7y + 3x = -10 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y + 3x = 7 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$

5.5. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეკრების ხერხით

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შეკ-რების ხერხი გულისხმობს შემდეგს:

განტოლებათა სისტემაში შემავალ ერთ-ერთ განტო-ლებას ვტოვებთ უცვლელად, ხოლო მეორე განტო-ლების ნაცვლად ვწერთ სისტემაში შემავალი ორივე განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მიღე-ბულ განტოლებას. ასე მიღებული განტოლებათა სისტემა იქნება საწყისი სისტემის ტოლფასი. ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრება კი მაშინ მიგვი-ყვანს სისტემის გამარტივებამდე, თუ შეკრების შედე-გად ორი ცვლადიდან ერთ-ერთი ცვლადი გაქრება (გაბათილდება). ეს კი მაშინაა შესაძლებელი, თუ განტოლებებში ერთ-ერთი ცვლადის კოეფიციენტები მოდულით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას:

თუ მოცემულ განტოლებათა სისტემის პირველ განტოლებას უცვლელად გადავიტანთ, ხოლო მეორე განტოლებას შევცვლით ამ ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრებით მიღებული განტოლებით, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას განტო-ლებათა სისტემას. მიღებულ მეორე განტოლებაში y ცვლადი გაქრება (გაბათილდება) და შეგვიძლია ვიპოვოთ x ცვლადის მნიშვნელობა. თუ x-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში x ცვლადის ნაცვლად, ვიპოვით y ცვლადსაც

ნიმუში 1

$$\begin{cases} x-y=3 \\ -2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ -x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ -x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-y=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

პასუხი: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

ნიმუში 2

იმ შემთხვევაში, თუ განტოლებათა სისტემაში შემავალი არცერთი ცვლადის კოეფიციენტი არ არის მოდულით ტოლი და ნიშნით საწინააღმდეგო, როგორც ეს პირველ ნიმუშში გვქონდა, მაშინ განტოლების თვისებების გამოყენებით, სისტემა შეგვიძლია მივიყვანოთ სასურველ კოეფიციენტამდე. განვიხილოთ მაგალითი:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 5x - y = 27 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right|$$

(პირველი განტოლება უცვლელად გადავიტანოთ, ხოლო მეორე განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე, რათა y ცვლადის კოეფიციენტები გახდეს მოდულით ტოლი და ნიშნით საწინააღმდეგო)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 10x - 2y = 54 \end{cases}$$

(პირველი განტოლება გადავიტანოთ ისევ უცვლელად, მეორე განტოლების ნაცვლად კი დავწეროთ ამ ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მიღებული განტოლება, ამით მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, სადაც ერთი ცვლადი შეკრების დროს გაბათილდა)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 13x = 52 \end{cases}$$

(მიღებული ერთცვლადიანი განტოლების x ამონახსნი ჩავსვათ პირველ განტოლებაში და ვიპოვოთ მეორე ცვლადი – y)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4 + 2y = -2 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -14 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ x = 4 \end{cases}$$

პასუხი: $\begin{cases} y = -7 \\ x = 4 \end{cases}$

მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. რა განტოლებას მივიღებთ, თუ მის ორივე მხარეს

ა) $2x - 3y = 5$ გავამრავლებთ 2-ზე;

ბ) $2x + 5y = 1$ გავამრავლებთ 4-ზე;

გ) $5x - y = 2$ გავამრავლებთ 5-ზე;

დ) $x + 3y = 7$ გავამრავლებთ -3-ზე;

ე) $3x - 2y = 8$ გავამრავლებთ -2-ზე;

ვ) $-2x + 5y = -1$ გავამრავლებთ -1-ზე.

სავარჯიშოები

1. რა განტოლება მიიღება სისტემაში შემავალი ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად?

ა) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} 5x - y = 6 \\ -5x + 3y = -8 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} -8x + 2y = 11 \\ 8x - 3y = -7 \end{cases}$

2. გამოიყენეთ შეკრების ხერხი და იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ -x + y = 7 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 5x + 2y = -19 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 7x - y = 50 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -12 \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} 4x + y = 19 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ თ) $\begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 3x - 5y = -49 \end{cases}$ ი) $\begin{cases} 6x + 5y = -2 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$

კ) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ -x + 5y = -3 \end{cases}$ ლ) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 8 + 7y = 12 \end{cases}$ მ) $\begin{cases} 3x + 7y = 47 \\ 7x + 3y = 43 \end{cases}$

ნ) $\begin{cases} 2x + 7y = -51 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ ო) $\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x - y = 23 \end{cases}$ პ) $\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 5x - 7y = 34 \end{cases}$

5.6. ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემის გამოყენებით

ამ პარაგრაფში განვიხილოთ სიტუაციური ამოცანები, მოვახდინოთ მათი მათემატიკური მოდელირება ორი უცნობის გამოყენებით და გადავჭრათ პრობლემა.

ნიმუში 1

ამოცანა: ორი რიცხვის ჯამია 30, ხოლო სხვაობა 5-ის ტოლი. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამოხსნა: უცნობი ორი რიცხვი აღვნიშნოთ x-ით და y-ით. ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

გამოვიყენოთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შეკრების ხერხი.

მივიღებთ განტოლებას:

$$2x = 35$$

$$x = 17.5$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობა სისტემის რომელიმე განტოლებაში:

$17.5 + x = 30$

$y = 12.5$

შემოწმება: $17.5 + 12.5 = 30$

$17.5 - 12.5 = 5$

ორივე განტოლება გადაიქცა ჭეშმარიტ ტოლობად.

პასუხი: ეს რიცხვებია **12.5** და **17.5.**

სავარჯიშოები

1. ორი რიცხვის ჯამია 200 და სხვაობა 37. იპოვეთ ეს რიცხვები.

2. ერთი რიცხვი მეორეზე 84-ით მეტია, ამ რიცხვების ჯამი კი 278-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

3. ერთი რიცხვი მეორეზე 11-ით მეტია, მათი ჯამი კი 5-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

4. ორი რიცხვიდან ერთი მეორეზე ოთხჯერ მეტია. მათი ჯამი 85-ს შეადგენს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

5. საფულეში დევს ოცთეთრიანი და 50-თეთრიანი მონეტები, სულ 13 ცალი, საფულეში 4,1 ლარია. იპოვე რამდენი 20-თეთრიანი და რამდენი 50-თეთრიანი დევს საფულეში.

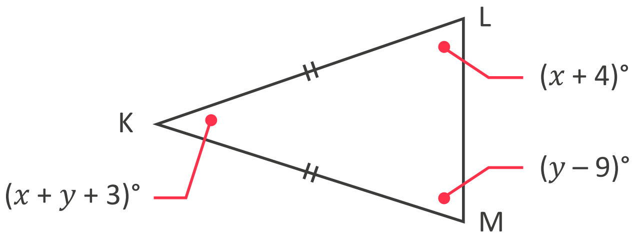
6. დაჩიმ იყიდა 3 ბურთი და 2 სათამაშო მანქანა, რაშიც გადაიხადა 34,5 ლარი, ელენემ კი ისეთივე 2 ბურთსა და 5 მანქანაში გადაიხადა 56 ლარი. რა ღირს თითოეული ნივთი ცალცალკე?

7. ოთხი ზრდასრული და ხუთი ბავშვისთვის თეატრის ბილეთებში გადაიხადეს 42 ლარი, ხოლო ორი ზრდასრული და სამი ბავშვისთვის – 23 ლარი. იპოვეთ თეატრის ბილეთის ფასი ზრდასრულისთვის და ბავშვისთვის ცალ-ცალკე.

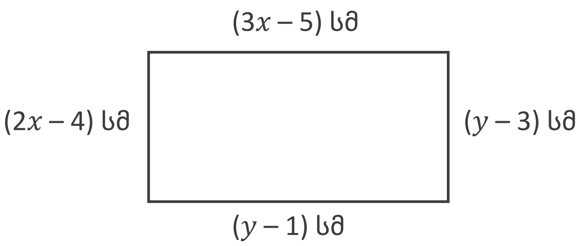
8. ეზოში მხოლოდ ძაღლები და ბატებია. მათი თავების რაოდენობაა 35, ხოლო ფეხების რაოდენობა 98. იპოვეთ რამდენი ძაღლი და რამდენი ბატია ეზოში.

9. რძე იყიდება ერთლიტრიანი და ორლიტრიანი მუყაოს კოლოფებით. დღეს მარკეტში გაიყიდა 97 კოლოფი რძე, რამაც შეადგინა 120 ლიტრი. რამდენი ერთლიტრიანი და რამდენი ორლიტრიანი პაკეტით გაყიდულა რძე მარკეტიდან?

10. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედი, ნახაზის მიხედვით იპოვეთ K კუთხის ზომა.



11. ნახაზზე მართკუთხედია გამოსახული. იპოვეთ მისი გვერდები



სავარჯიშოები

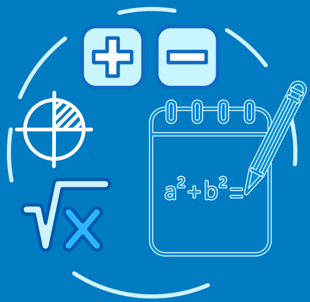
რთული ნიმუშები:

12. თორმეტი წლის წინ ილია მარიამზე ხუთჯერ უფროსი იყო. რვა წლის შემდეგ მარიამი, იმდენი წლის გახდება, რამდენი წლისაცაა ილია ახლა. იპოვეთ რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი ახლა.

13. 9 წლის წინ დედა შვილზე სამჯერ უფროსი იყო. რვა წლის შემდეგ მათი ასაკთა ჯამი იქნება 78. რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი დღეს?

14. დემნას და ნინოს ყოველთვიური ხელფასის თანაფარდობაა 2:1. მათი ხარჯების თანაფარდობა კი 9:4. თითოეულის ყოველთვიური დანაზოგი შეადგენს 100 ლარს. იპოვეთ თითოეულის ყოველთვიური ხელფასის ოდენობა.

VIII. დავალების წარდგენა



კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა ძალიან მნიშვნელოვანია სხვადასხვა ყოფით სიტუაციაში.

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ არის შესაძლებელი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება?*

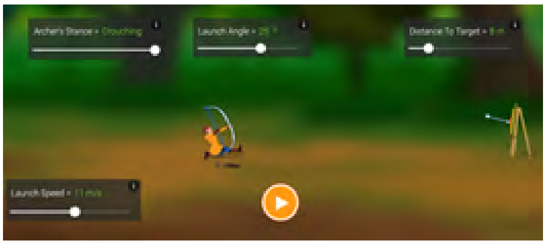
კომპლექსური დავალება

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა

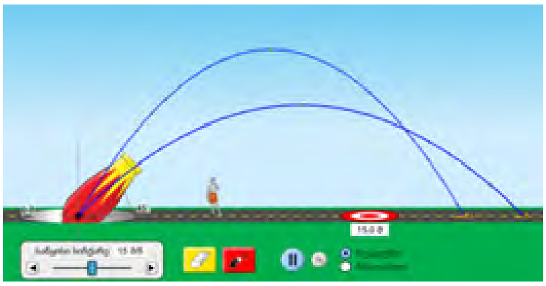
თქვენი დავალება

წარმოიდგინეთ, რომ ხართ ახალგაზრდა მეცნიერთა კლუბის წევრი და გევალებათ გამოიკვლიოთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა.

კერძოდ, შესასწავლია:



- დაადგინოთ გასროლის ადგილიდან რა მანძილის მოშორებით დავარდება კონკრეტული კუთხით გასროლილი სხეული.



- როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე?
- რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

იმისათვის, რომ გამოიკვლიოთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა, შედით საიტზე 🔗 [Phet.Colorado.Edu] ან [Ck12 – მიზანში სროლა] და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე და ა.შ.) და დაადგინეთ, როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე.

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება

თუ აირჩევთ მეისრის სიმულაციას:

- დააყენეთ პარამეტრები ისე, რომ ისარი მოხვდეს მიზანში.
- თქვენ მიერ დაყენებული პარამეტრები დაორგანიზეთ ცხრილში.
- დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება). დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

მითითება: ჯერ დააფიქსირეთ კუთხე, ცვალეთ სიჩქარე და გამოიკვლიეთ, შემდეგ დააფიქსირეთ სიჩქარე, ცვალეთ კუთხე და გამოიკვლიეთ.
თუ აირჩევთ ზარბაზნის სიმულაციას

კვლევის შედეგად შეგროვებული მონაცემები დაორგანიზეთ ცხრილში:

ვარიანტი 1

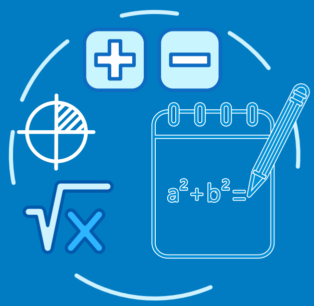
კიდევ სცადეთ

	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)	დამატებითი ინფორმაცია
ცდა 1	15^0	4 მ/წმ				
ცდა 2	15^0	8 მ/წმ				
ცდა 3	15^0	16 მ/წმ				

ვარიანტი 2 – თავად ჩაატარეთ ექსპერიმენტი და შეიტანეთ თქვენთვის სასურველი მონაცემები

	გასროლილი კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)	დამატებითი ინფორმაცია
ცდა 1						
ცდა 2						
ცდა 3						
ცდა 4 და ა.შ.						

VIII. დავალების წარდგენა



კომპლექსური დავალება

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, თან დაურთეთ ცდის შედეგები და ფოტო მასალა.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

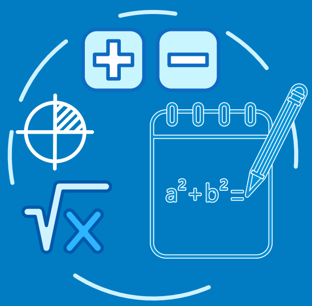
I. აღწერეთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია, გრაფიკი და დაასახელეთ რომელ სიდიდეებს შორის დამყარდა დამოკიდებულება?

II. ფორმულის წარმოდგენისას რომელ სიდიდეს შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადი და რომელს დამოკიდებული? რა ტიპის დამოკიდებულება დამყარდა ცვლადებს შორის? რომელი ფუნქციით არის შესაძლებელი აღნიშნული დამოკიდებულების წარმოდგენა?

III. მოცემულობიდან გამომდინარე რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი მოძრაობის ტრაექტორიის აღწერა/მოდელირება ფორმულით? რომელი ფორმით წარმოდგენაა უმჯობესი? წარმოადგინეთ თითოეული ფორმა და იმსჯელეთ, რომელი ფორმულირება არის მეტად მარტივი მოცემული სიტუაციისთვის.

IV. დააკავშირეთ თქვენს ხელთ არსებული ინფორმაცია რეალურ კონტექსტს, რას შეესაბამება დამოკიდებული ცვლადი, რას დამოუკიდებელი? რომელ სიდიდეებს შორის არის შესაძლებელი დამოკიდებულების გარკვევა? შეგიძლიათ იმსჯელოთ, სტანდარტული ფორმით წარმოდგენის შემთხვევაში, რას შეესაბამება b და c პარამეტრები?

V. როგორ დაგეხმარათ ტექნოლოგიები დავალების შესრულებაში? რომელი აპლიკაცია და სიმულაცია გამოიყენეთ და როგორ?



კომპლექსური დავალება

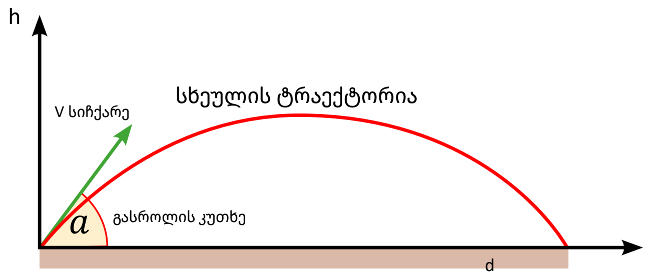
ინტეგრირება ფიზიკასთან:

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ როდესაც სხეულს ვისვრით ჰორიზონტისადმი კუთხით, სხეულის მოძრაობა აღიწერება განტოლებით:

$$h(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_ot+h_o \qquad \text{(I ფორმულა)}$$

$$v(t)=v_o+gt \qquad \text{(II ფორმულა)}$$

$$d=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} \qquad \text{(III ფორმულა)}$$



I ფორმულის შემთხვევაში:

h_o– სხეულის საწყისი სიმაღლეა, v_o– საწყისი ვერტიკალური სიჩქარე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ფორმულით ვხედავთ, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია დავადგინოთ, თუ რა სიმაღლეზეა სხეული მიწიდან, სხეულის მდებარეობა დამოკიდებულია დროზე კვადრატულად. მოცემულია კვადრატული ფუნქცია.

II ფორმულის შემთხვევაში:

d (distance) – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v_0 ბურთის მოძრაობის საწყისი სიჩქარე, α გასროლის კუთხე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. $g \approx 9.8$ მ/წმ^2 (ამოცანებში დავამრგვალოთ $g \approx 10$ მ/წმ^2-მდე). ამ ფორმულაში სხეულის მოძრაობის სიჩქარე დამოკიდებულია აჩქარებაზე წრფივად.

ზემოთ მოცემული ფორმულებით ვხედავთ, რომ კვადრატული ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა ფორმით. მიმდინარე პარაგრაფში განვიხილავთ კვარატული ფუნქციის წარმოდგენის სტანდარტულ ფორმას.

6.1. ფუნქცია

საკვანძო კითხვა: როგორ არის შესაძლებელი სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა?

ნიმუში 1

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის გვერდია x და ფართობი S. ვიცით, რომ $S = x^2$

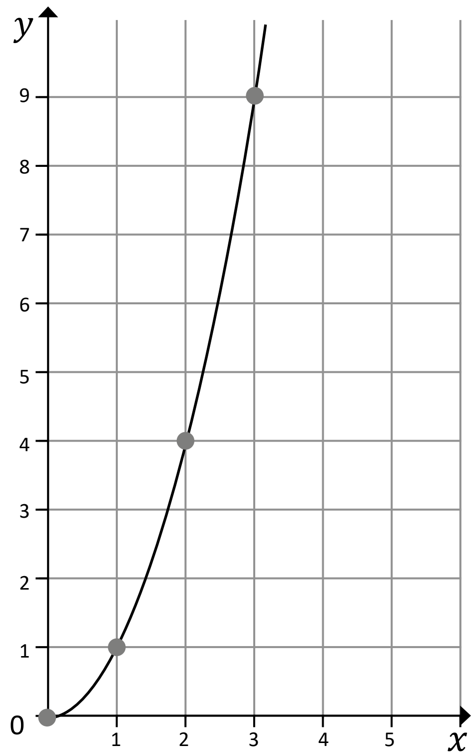
$S = x^2$

x	1	2	3	4
S	1	4	9	16

როგორც ვხედავთ, კვადრატის ფართობი დამოკიდებულია კვადრატის გვერდის სიგრძეზე.

დავაწყვილოთ ინფორმაცია შემდეგი სახით:
(გვერდი, ფართობი)
↓
(1;1) (2;4) (3;9) (4;16)

საკოორდინატო სიბრტყეზე, X ღერძს შევუსაბამოთ კვადრატის გვერდი, Y ღერძს – ფართობი, ცხრილით მოცემული ინფორმაცია გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე:



ნიმუში 2

განვიხილოთ კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა x და მოცულობა V. ვიცით, რომ $V = x^3$

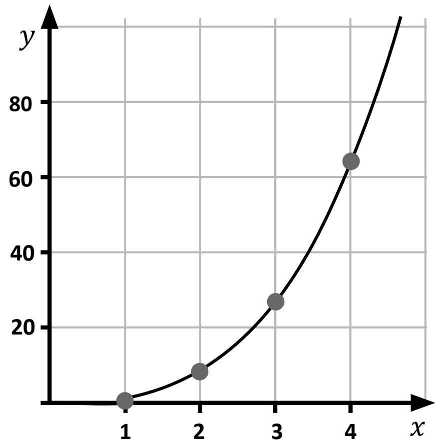
$V = x^3$

x	1	2	3	4
V	1	8	27	64

როგორც ვხედავთ, კუბის მოცულობა დამოკიდებულია კუბის გვერდის სიგრძეზე.

დავაწყვილოთ ინფორმაცია შემდეგი სახით:
(გვერდი, ფართობი)
↓
(1;1) (2;8) (3;27) (4;64)

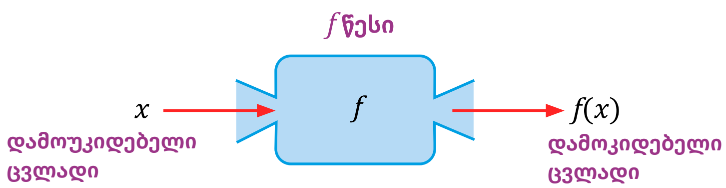
საკოორდინატო სიბრტყეზე X ღერძს შევუსაბამოთ გვერდი, Y ღერძს – მოცულობა და ცხრილში მოცემული ინფორმაცია გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.



გამომდინარე იქიდან, რომ როგორც კვადრატის გვერდის სიგრძე და ფართობი, ისე კუბის გვერდი და მოცულობა ვერ იქნება უარყოფითი, ამიტომ x-ის ნაცვლად განვიხილეთ მხოლოდ მისი დადებითი მნიშვნელობები და შესაბამისად, მივიღეთ y-ცვლადის დადებითი მნიშვნელობები.

ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება წარმოდგენილია **სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ფორმულით და გრაფიკის მეშვეობით.** ვხედავთ, რომ X-ის ყოველ მნიშნელობას შეესაბამება Y-ის ერთადერთი მნიშვნელობა, მაშასადამე, მოცემულ მაგალითებში გვაქვს სიდიდეებს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება. ასევე, განსაზღვრულია წესი, რომლის მეშვეობითაც X-ს შეესაბამება Y-ს: პირველ შემთხვევაში, x ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება მისი კვადრატი, მეორე შემთხვევაში, მისი კუბი.

როგორც უკვე ვიცით, ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობას, როდესაც ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს, შეესაბამება მეორე სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, **ფუნქცია** ეწოდება. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით.



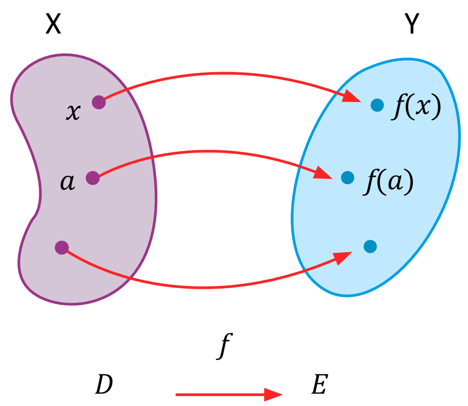
$y = f(x)$

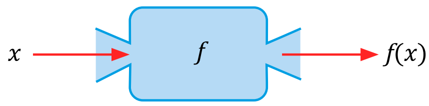
- სიმრავლეს, საიდანაც იღებს x მნიშვნელობებს, ეწოდება განსაზღვრის არე და აღინიშნება სიმბოლოთი D. (ხშირად ვწერთ $D(f)$).
- x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის y იღებს გარკვეულ ერთადერთ მნიშვნელობას. ყველა მიღებული y მნიშვნელობებით ვიღებთ y-ის მნიშვნელობების სიმრავლეს, შესაბამისად, აღნიშნულ სიმრავლეს ეწოდება მნიშვნელობათა სიმრავლე და აღინიშნება სიმბოლოთი E. (ხშირად ვწერთ $E(f)$).

- წესს, რომელიც მოქმედებს x-ზე, ეწოდება f-წესი.
- მოცემულია ფუნქცია, ნიშნავს მოცემულია განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა არე და წესი, რომელიც მოქმედებს ყოველ ელემენტზე განსაზღვრის არიდან.

მოცემულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა D, ეწოდება y-ცვლადის x ცვლადზე ისეთ დამოკიდებულებას, როდესაც ყოველ x რიცხვს განსაზღვრის არიდან (D სიმრავლიდან), შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი მნიშვნელობათა სიმრავლიდან (E-სიმრავლიდან)





ვწერთ შემდეგნაირად:

$$y = f(x)$$

x რიცხვის შესაბამის y-ს ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $f(x)$

x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი (ან არგუმენტი)
y-ს ეწოდება დამოკიდებული ცვლადი

მითითება: ვამბობთ, რომ მოხდა D-სიმრავლის ასახვა E-სიმრავლეში; აღნიშნულს ჩავწერთ, როგორც $f: D \to E$

ფუნქციის გრაფიკი

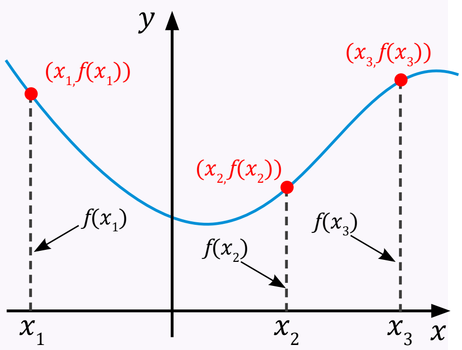
f-ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყის $(x; y)$ წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $y = f(x)$ და x – იღებს ყველა მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან.

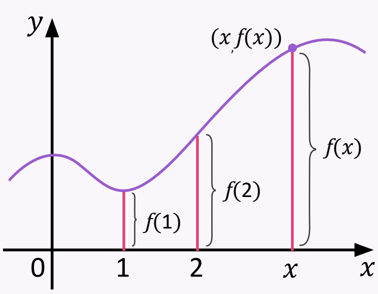
$(x_1, f(x_1))$ – სადაც, x_1 არის განსაზღვრის არიდან აღებული რიცხვი, რომელსაც შეესაბამება y_1. იქიდან გამომდინარე, რომ y_1-ის გამოთვლა ხდება f წესით, ვწერთ $f(x_1)$.

$f(x_1)$ იგივეა რაც y_1

მაგალითად, თუ
$x_1 = 1$ ვიღებთ $f(x_1) = f(1)$
$x_2 = 2$ ვიღებთ $f(x_2) = f(2)$
ნებისმიერი x-სთვის განსაზღვრის არიდან ვწერთ $f(x)$
$y = f(x)$

გრაფიკზე მოცემულია 3 რომელიღაც რიცხვი განსაზღვრის არიდან და მათი შესაბამისი y-ები მნიშვნელობათა სიმრავლიდან, გრაფიკის ამ სამი წერტილის კოორდინატებია: $(x_1, f(x_1))$; $(x_2, f(x_2))$; $(x_3, f(x_3))$.





ნიმუში 1-ის გაგრძელება

იმისათვის, რომ ჩანაწერი გახდეს ცხადი, ჩავწეროთ პირველი ნიმუში აღნიშნული წესით.

ვიცით, რომ $S = x^2$, რა დადებითი რიცხვიც არ უნდა ჩავსვათ x-ის ნაცვლად, მას შეესაბამება მისი კვადრატი. შესაბამისად, ვამბობთ, რომ x-ზე მოქმედებს f კვადრატული წესი.

$$f(x) = x^2$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

$x = 1 \quad f(1) = 1^2 = 1$

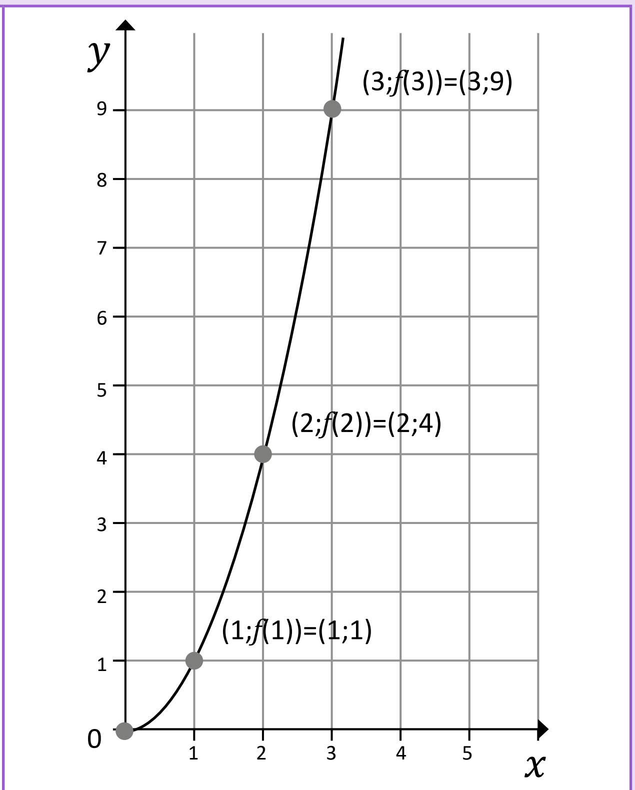
$x = 2 \quad f(2) = 2^2 = 4$

$x = 3 \quad f(3) = 3^2 = 9$

$x = 4 \quad f(4) = 4^2 = 16$

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ – მნიშვნელობები შეესაბამება y-ს, მათ აღვნიშნავთ y-ღერძზე, ამიტომ სიმარტივისთვის ვიყენებთ აღნიშვნას – $(x;y)$

თუმცა იცოდეთ, რომ $(x;y)$, იგივეა რაც $(x;f(x))$



გრაფიკზე ყოველი x-თვის, განსაზღვრულია ფუნქციის შესაბამისი $y = f(x)$ მნიშვნელობა

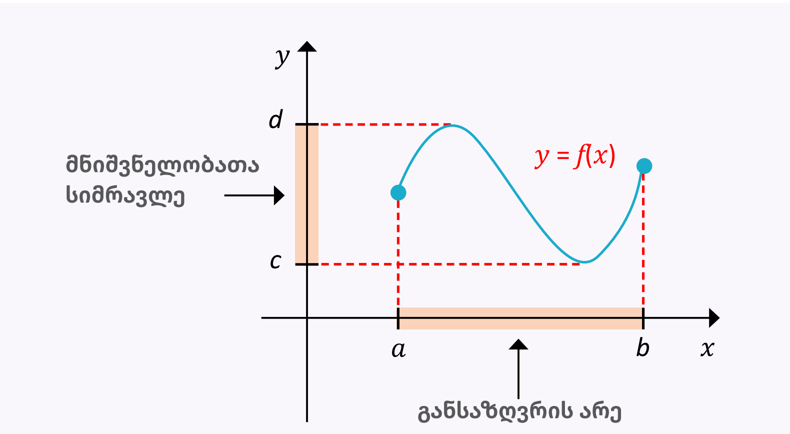
განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

ხშირად ფუნქცია გამოისახება გრაფიკულად. გრაფიკის მიხედვით მარტივია $(x; y)$ წყვილის დადგენა, ასევე, განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის გარკვევა.

ნახაზზე მოცემულია გარკვეული $f(x)$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $D(f)=[a;b]$

ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $E(f) = [c;d]$

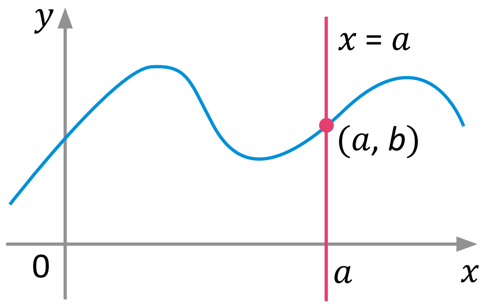
მითითება: $D(f)$ – აღნიშნავს f ფუნქციის განსაზღვრის არეს.
$E(f)$-აღნიშნავს f-ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს.



წინარე მასალის გამეორება

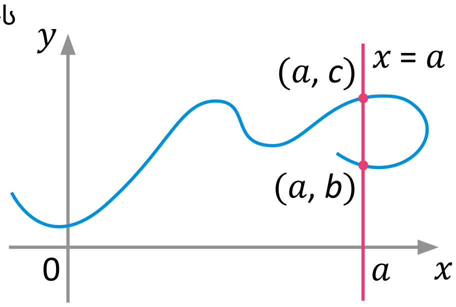
გავიხსენოთ როგორ ხდება გრაფიკის მეშვეობით ფუნქციის ამოცნობა

ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი – ყოველი ვერტიკალური წრფე გრაფიკს კვეთს ერთადერთ წერტილში



ქვემოთ არ არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკი – გავლებული ვერტიკალური წრფე გრაფიკს კვეთს ერთზე მეტ წერტილში (მოცემულ შემთხვევაში ორ წერტილში)

როცა $x = a$, y იღებს ორ მნიშვნელობას – c-ს და b-ს



ნიმუში 1-ის გაგრძელება

პირველ ნიმუშში **განსაზღვრის არეა** $D(f) = [0; +\infty)$ თუ დავუშვებთ, რომ კვადრატის გვერდია 0, ფართობიც იქნება 0.

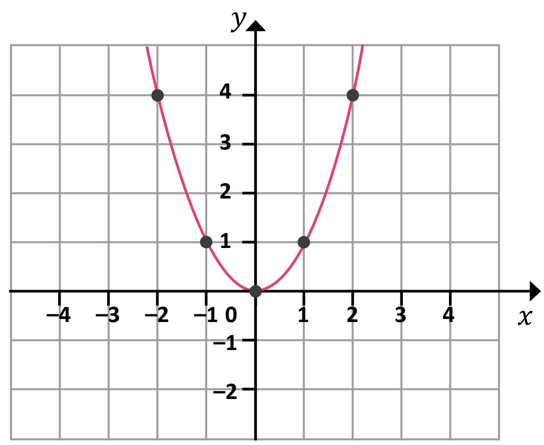
მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [0; +\infty)$

განვიხილოთ ფუნქცია

$f(x) = x^2$ როდესაც $D(f) = (-\infty; \infty)$)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



მოცემულ გრაფიკს ჰქვია პარაბოლა.

ფუნქციას – კვადრატული ფუნქცია

$D(f) = (-\infty; \infty)$)

$E(f) = [0; +\infty)$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს 0-დან $+\infty$-მდე

ნიმუში 2-ის გაგრძელება

მეორე ნიმუშში **განსაზღვრის არეა** $D(f) = [0; +\infty)$ თუ დავუშვებთ, რომ კუბის გვერდია 0, მოცულობაც იქნება 0.

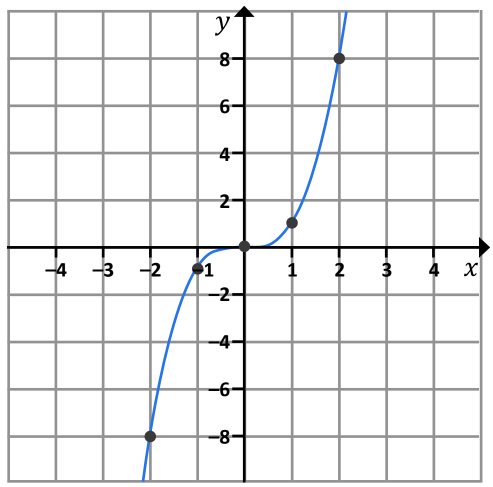
მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [0; +\infty)$

განვიხილოთ ფუნქცია

$f(x) = x^3$ როდესაც $D(f) = (-\infty; +\infty)$

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–8	–1	0	1	8



მოცემულ ფუნქციას ჰქვია – კუბური ფუნქცია

$D(f) = [-\infty; +\infty)$

$E(f) = [0; +\infty)$

მინიშნება: როდესაც მოცემულია რიცხვითი ფუნქცია, მაშინ მასთან ერთად მოცემული უნდა იყოს განსაზღვრის არეც (თუ განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და ფუნქცია რაიმე ფორმულითაა მოცემული, ხშირად ამოცანის პირობა მოითხოვს, რომ დაადგინოთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე).

ნიმუში 3

მოცემულია ფუნქცია ფორმულით:

$f(x) = 5x^3 - 4x$,

იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები, როდესაც $x = -2; 0; 1$

$x = -2$ $\quad f(-2) = 5 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -40 + 8 = -32$

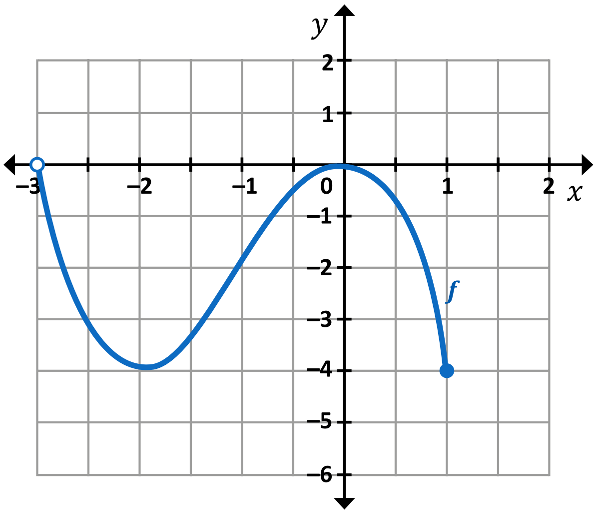
$x = 0$ $\quad f(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$

$x = 1$ $\quad f(1) = 5 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = 1$

მივიღეთ $(-2; -32)$, $(0;0)$, $(1;1)$

ნიმუში 4

იპოვეთ f-ფუნქციის მაქსიმალური განსაზღვის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ $-3 < x \leq 1$ ე.ი. $D(f) = (-3;\ 1]$

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ $-4 \leq y \leq 0$ ე.ი. $E(f) = [-4;\ 0]$

კანონზომიერების კვლევა და მოდელირება:	
როგორც ვისწავლეთ, რომ ფუნქციის წარმოდგენა შესაძლებელია:	■ ცხრილის მეშვეობით ■ ანალიზურად (განტოლებით, ფორმულით) ■ გრაფიკულად ■ სიტყვიერად
გავიხსენოთ, როგორ ხდება ცხრილის მეშვეობით დადგენა და რა ტიპის დამოკიდებულებაა ცვლადებს შორის	

გაგრძელება

წრფივი დამოკიდებულება	კვადრატული დამოკიდებულება

წრფივი დამოკიდებულება

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია:

+5 +5 +5

x	0	5	10	15
y	50	40	30	20

−10 −10 −10

- ცხრილში ვხედავთ, რომ x ცვლადის 5-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 10-ით შემცირებას; ე.ი. y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.
- შემდეგი ნაბიჯია ფორმულირება.
- ვიცით, რომ წრფივი ფუნქცია მიიღება ფორმულით:

$$y = kx + b$$

სადაც k – დახრილობაა; b კი Oy ღერძთან კვეთის წერტილი:

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}} =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10}{5} = -2$$

პროცედურა: თუ ვიცით, ნებისმიერი ორი წერტილი ვიპოვით k-ს.

ცხრილიდან მარტივად დავინახავთ, რომ როცა $x = 0$, $y = 50$

განხილული ფუნქცია ფორმულით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$y = -2x + 50$

კვადრატული დამოკიდებულება

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია:

1 1 1 1

x	−2	−1	0	1	2
y	13	4	1	4	13

−9 −3 3 9

6 6 6

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

−5 −3 −1 1 3 5

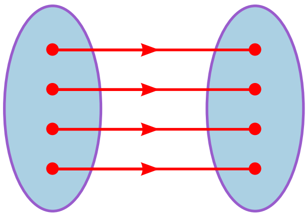
2 2 2 2 2

- ცხრილში ვხედავთ, რომ x ცვლადის 1-ით ზრდა, არ იწვევს y ცვლადის თანაბარ ცვლილებას, როცა განხილულია პირველი მონაცემები. თუმცა, თუ ჩავწერთ ცვლილებას და შემდეგ განვიხილავთ მათ ცლილებას დავინახავთ, რომ ტოლია.
- როდესაც მეორე ცვლილება არის ტოლი ვამბობთ, რომ y დამოკიდებულია x-ზე კვადრატულად.
- **პროცედურა:** მოცემულ თავში გაეცნობით, როგორ არის შესაძლებელი კვადატული დამოკიდებულების წარმოდგენა: ფორმულით, გრაფიკით და რა ტიპის რეალური მოვლენების აღწერისას გვჭირდება.

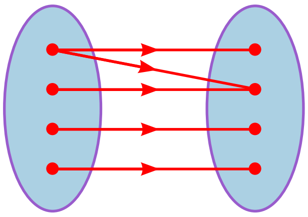
სავარჯიშოები

1. ქვემოთ დიაგრამით მოცემულია სხვადასხვა სიმრავლეს შორის მიმართებები. რომელი დიაგრამით არის მოცემული ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

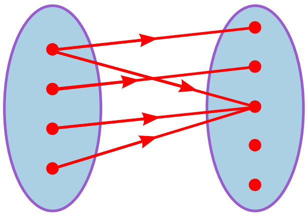
ა)



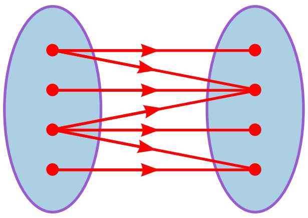
ბ)



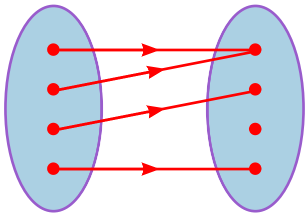
გ)



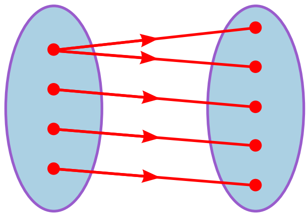
დ)



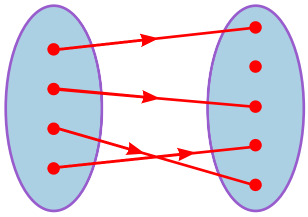
ე)



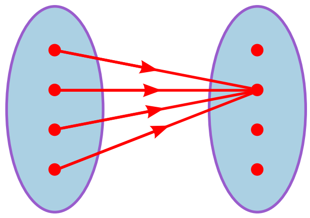
ვ)



ზ)



თ)



2. ქვემოთ მოცემულ შემთხვევებში, ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე შეავსეთ დიაგრამა და გამოიკვლიეთ:

ა) როგორ არის დამოკიდებული პერიმეტრი მართკუთხედის სიგრძეზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

ბ) როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეზე? არის თუ ეს არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

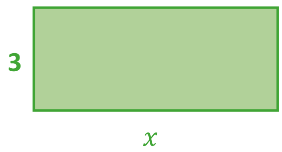
გ) როგორ არის დამოკიდებული წრეწირის სიგრძე წრის რადიუსზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

დ) როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა სიმაღლეზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

შენიშვნა: დავუშვათ, იცვლება მხოლოდ ცვლადით აღნიშნული ფიგურის გვერდის სიგრძე.

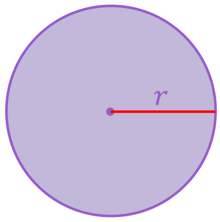
საკარჯიშოები

ა)

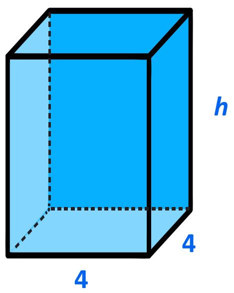


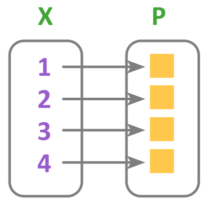
ბ)

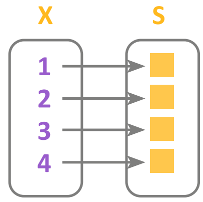
გ)

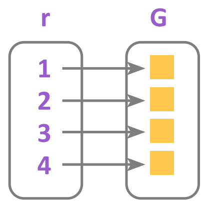


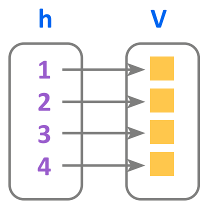
დ)











3. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = 4x - 5$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-8	-4	0	1	5
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

გაიხსენეთ წრფივი ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკი.

4. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = -3x + 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

გაიხსენეთ წრფივი ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკი.

5. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = -3x^2 + 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები

6. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $f(x) = 2x^2 - 4x$.

იპოვეთ: $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$.

დაწერეთ წერტილთა წყვილები, გადაიტანეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და შეაერთეთ. რისი თქმა შეგიძლიათ გრაფიკზე?

7. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = x^2 + 2x$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

8. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = x^3 - 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-2	0	1	2	3
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

9. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x)=2x^3 - 5x$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

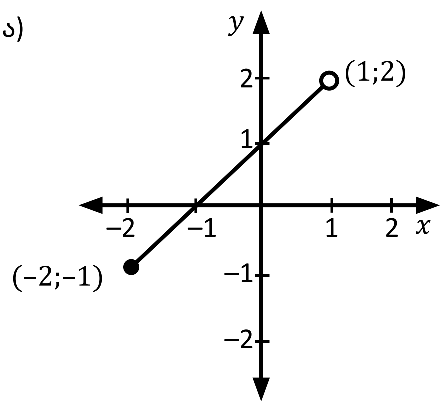
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$					

კიდევ სცადეთ

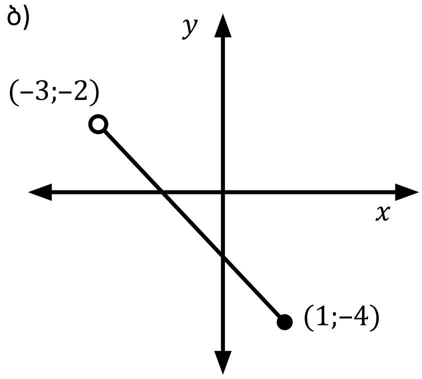
10. მოცემულია ფუნქცია ფორმულით $f(x) = -3x^3 + x - 1$, იპოვეთ $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$;

11. იპოვეთ გრაფიკით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა)

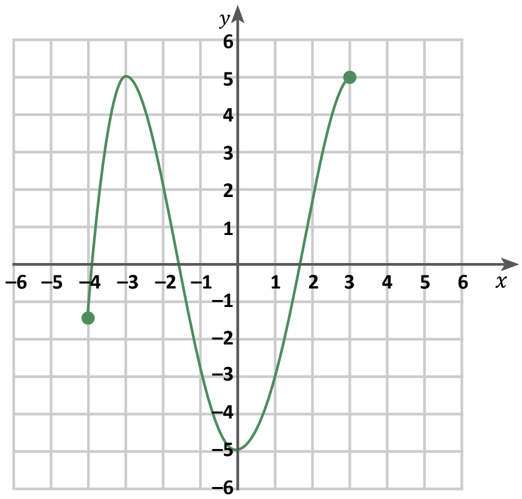


ბ)

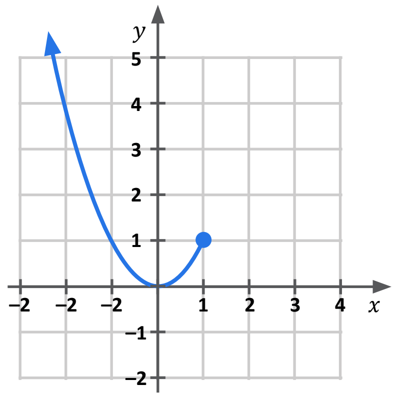


სავარჯიშოები

გ)



დ)



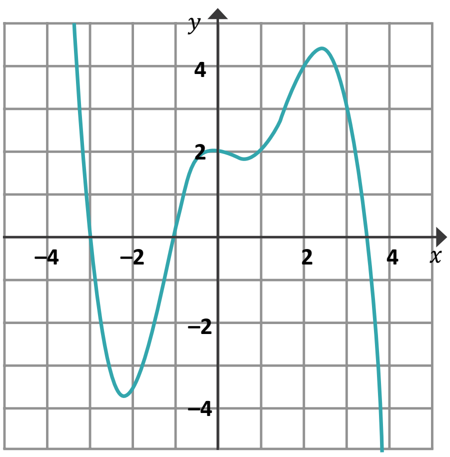
მინიშნება: ისარი მიუთითებს, რომ გრაფიკი გრძელდება

12. ქვემოთ მოცემულია სხვადასხვა ფუნქციის გრაფიკი, თითოეული გრაფიკიდან გამომდინარე იპოვეთ:

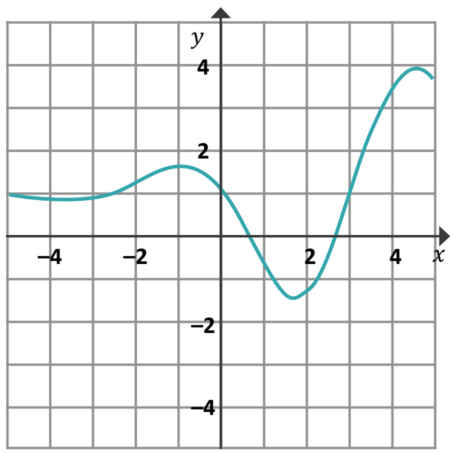
- y-ის მნიშვნელობა როცა $x = -3; -1; 0; 1; 3$
- იპოვეთ x-ის რა მნიშვნელობებისთვის უდრის $y = -3; 0; 1$

პასუხები დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით.

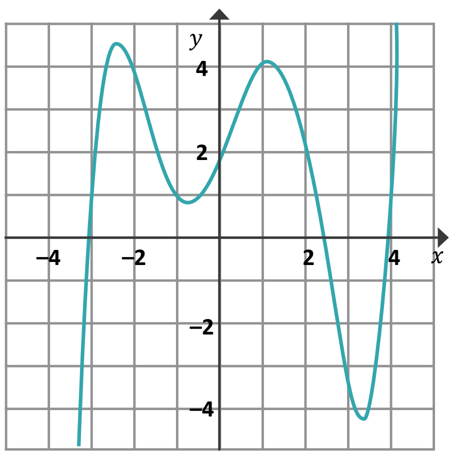
ა)



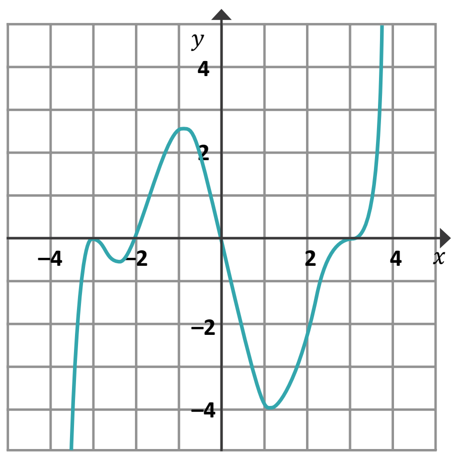
გ)



ბ)



დ)



სავარჯიშოები

13. **გამოწვევა:** კანონზომიერების აღმოჩენა

ცხრილით მოცემულია ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

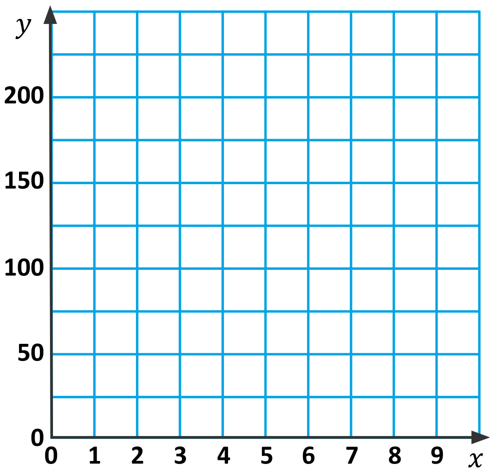
- ამოწერეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.
- გაარკვიეთ დამოკიდებულება წრფივია თუ არა. პასუხი დაასაბუთეთ.
- დაწერეთ ცვლადებს შორის დამოკიდებულების შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ გრაფიკი.

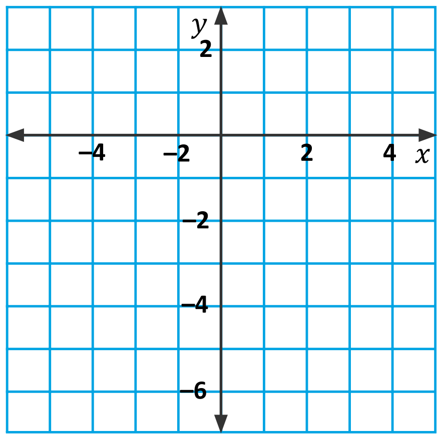
ა)

x	0	2	4	6	8
y	150	125	100	75	50

ბ)

x	–4	–2	0	2	4
y	1	0	–1	–2	–3





14. **გამოწვევა:** კანონზომიერების აღმოჩენა

- ცხრილით მოცემულია სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება.
- დაადგინეთ დამოკიდებულება წრფივია თუ კვადრატული. პასუხი დაასაბუთეთ.

ა)

x	–2	–1	0	1	2
y	14	6	0	–4	–6

ბ)

x	0	1	2	3	4
y	3	1	–5	–15	–29

ა)

x	–2	0	2	4	6
y	8	4	0	–4	–8

ბ)

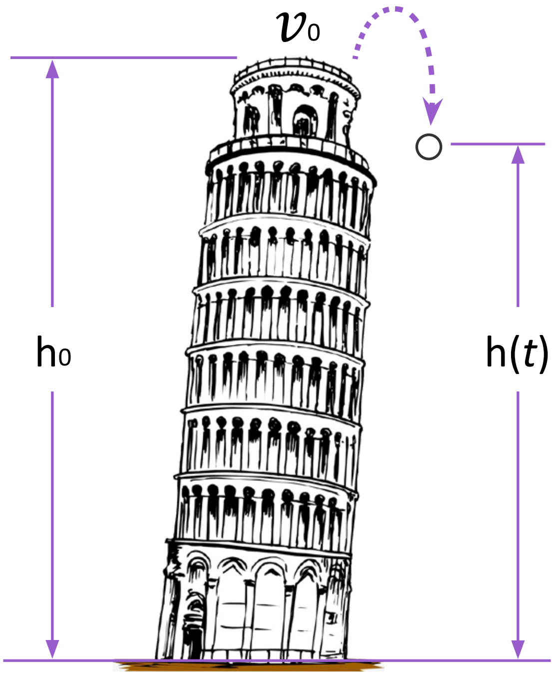
x	0	1	2	3	4
y	1	6	15	28	49

6.2. ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები, კვადრატული ფუნქცია

გარდაქმნა ეწოდება ობიექტის პოზიციის ან ფორმის ცვლილებას.

გარდაქმნის სახეებია: **პარალელური გადატანა, ღერძული სიმეტრია, მობრუნება, ჰომოთეტია, არეკლვა.**

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილავთ ფუნქციების გარდაქმნებს, უფრო კონკრეტულად კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნას.



ობიექტის გასროლისას, ხდება მისი პარალელური გადატანა.

ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია, გარდაქმნები

კვადრატული ფუნქცია, ფუნქციის გარდაქმნები

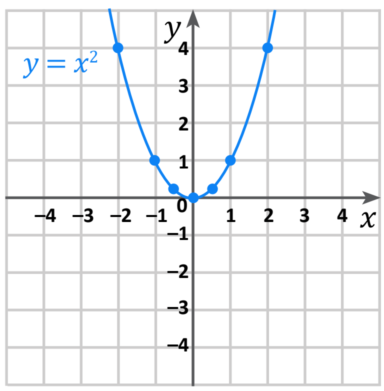
განვიხილოთ გრაფიკის პარალელური გადატანა კოორდინატებში და ფორმულით.

კვადრატული ფუნქციის საწყისი ფორმა $y = ax^2$, სადაც $a \neq 0$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $a > 0$ და $a = 1$, მივიღებთ $y = x^2$

ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი

$a > 0$



- კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება **პარაბოლა.**
- პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი – Oy ღერძი.

გაგრძელება

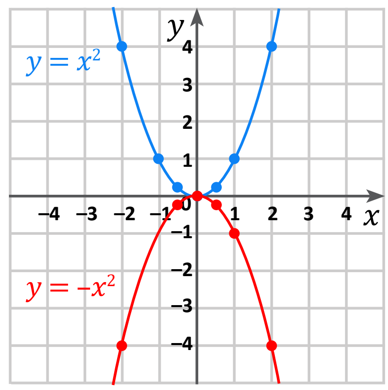
- როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a > 0$, პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ზევით;
- ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(f)=(-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = [0; +\infty)$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს 0-დან $+\infty$-მდე;
- ფუნქციის წვეროს კოორდინატია (0;0).

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც

$a < 0$ და $a = -1$, მივიღებთ $y = -1 \cdot x^2 = -x^2$

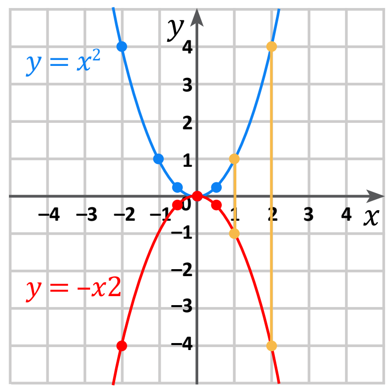
ავაგოთ გრაფიკი

$a > 0$



$a < 0$

მივიღეთ $y = x^2$ გრაფიკის სიმეტრიული გრაფიკი Ox ღერძის გასწვრივ.



როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a > 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით), ხოლო როდესაც $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).

როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ქვევით.

- ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty; 0]$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან 0-მდე;
- პარაბოლას წვეროს კოორდინატია (0;0).

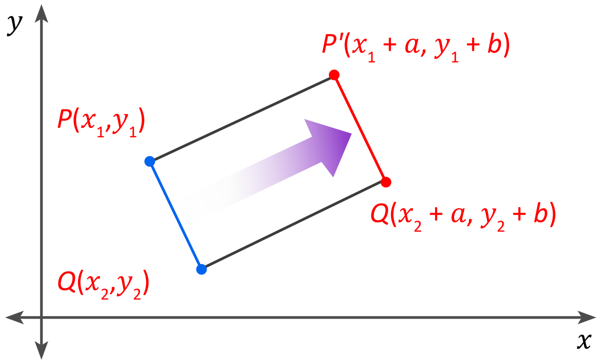
კავშირი ანალიზურ გეომეტრიასთან

გადავიტანოთ პარალელურად PQ მონაკვეთი წრფის გასწვრივ

პარალელური გადატანის დროს, ფიგურის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ.

მოხდა PQ მონაკვეთის ყოველი წერტილის ასახვა $P_1 Q_1$ მონაკვეთში.

მოცემულ შემთხვევაში, მონაკვეთის ყოველი წერტილი პარალელურად გადავიდა a ერთეულით მარჯვნივ და b ერთეულით ზემოთ.



გამომდინარე იქიდან, თუ რა წესით ხდება პარალელური გადატანა, შესაბამისად იცვლება ფიგურის წერტილთა კოორდინატები.

მოქმედებათა თვისებები	
განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის ტიპი:	**კოორდინატებში გამოსახვა:**
a – ერთეულით მოძრაობა მარჯვნივ	$(x; y) \to (x + a; y)$
a – ერთეულით მოძრაობა მარცხნივ	$(x; y) \to (x - a; y)$
b – ერთეულით მოძრაობა ზევით	$(x; y) \to (x; y + b)$
b – ერთეულით მოძრაობა ქვევით	$(x; y) \to (x; y - b)$

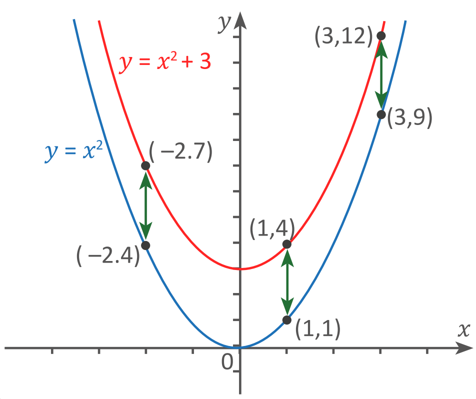
კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნები

მოცემულია საწყისი $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია.

ვწერთ მოცემულია საწყისი ფუნქცია $y = f(x)$.

I. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 3 ერთეული ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით) მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა $y = x^2 + 3$.



ნახაზი 1.

გაგრძელება

ნახ.1-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 3 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით), გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის x კოორდინატი იგივეა, ხოლო y გაიზარდა 3-ერთეულით.

$$(x; y) \rightarrow (x; y+3)$$

ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით a ერთეულით ზევით მივიღეთ $y = x^2 + a$ ფუნქცია.

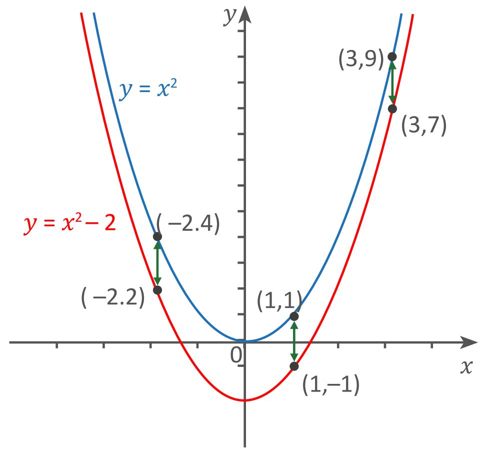
II. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 1 ერთეული ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = x^2 - 1$.

მიღებული გრაფიკის წვეროს კოორდინატია: (0;–1).

გრაფიკის წვერომ გადაინაცვლა 1 ერთეულით ქვემოთ.



ნახაზი 2.

ნახ.2-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 1 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის x კოორდინატი იგივეა, ხოლო y შემცირდა 1-ერთეულით.

$$(x; y) \rightarrow (x; y-1)$$

ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით a ერთეულით დაბლა მივიღეთ $y = x^2 - a$ ფუნქცია.

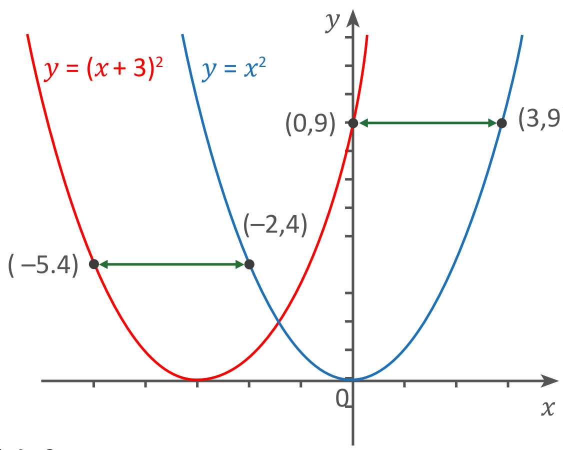
III. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი) წვეროს კოორდინატით (0; 0)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = (x + 3)^2$.

მიღებული პარაბოლას წვეროს კოორდინატია: (–3;0).

გრაფიკის წვერომ გადაინაცვლა 3 ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), თუმცა ფორმულაში იწერება საპირისპირო ნიშანი.



ნახაზი 3.

!! ყურადღება მიაქციეთ: თავდაპირველი ფუნქციის ფორმულა იყო $y = x^2$. Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით 3 ერთეულით მარცხნივ პარალელური გადატანის შემდეგ მივიღეთ $y = (x + 3)^2$ ფუნქცია.

ნახ.3-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 3 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ მარცხნივ გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის y კოორდინატი იგივეა, ხოლო x კოორდინატმა წაინაცვლა მარცხნივ 3 ერთეულით (x-ს გამოაკლდა 3). ყოველმა $(x; y)$ წერტილმა გრაფიკიდან გადაინაცვლა $(x - 3; y)$ – წერტილში

$$(x; y) \to (x - 3; y)$$

მინიშნება: ფორმულაში ვწერთ საპირისპირო ნიშანს

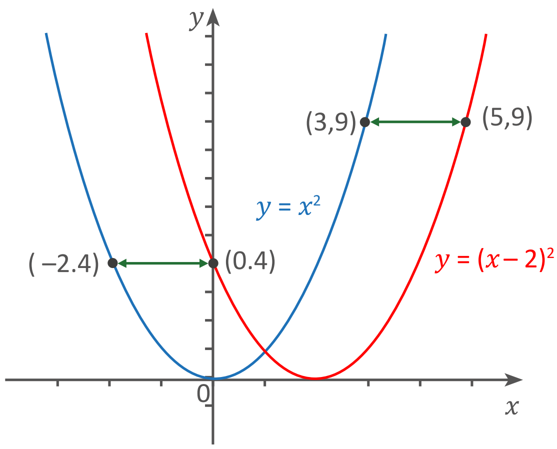
ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით b ერთეულით Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (მარცხნივ) მივიღეთ $y = (x + b)^2$ ფუნქცია;

IV. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით მარჯვნივ (Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = (x - 2)^2$

გრაფიკის წვეროს გადაინაცვლა 2 ერთეულით მარჯვნივ, თუმცა ფორმულაში იწერება საპირისპირო ნიშანი.



ნახაზი 4.

!! ყურადღება მიაქციეთ: თავდაპირველი ფუნქციის ფორმულა იყო $y = x^2$. Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით 2 ერთეულით მარჯვნივ პარალელური გადატანის შემდეგ მივიღეთ $y = (x - 2)^2$ ფუნქცია.

ნახ.4-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 2 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ მარჯვნივ გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის y კოორდინატი იგივეა, ხოლო x კოორდინატმა წაინაცვლა მარჯვნივ 2 ერთეულით (x-ს მიემატა 2). ყოველმა $(x; y)$ წერტილმა გრაფიკიდან გადაინაცვლა $(x + 2; y)$ – წერტილში

$$(x; y) \to (x + 2; y)$$

მინიშნება: ფორმულაში ვწერთ საპირისპირო ნიშანს

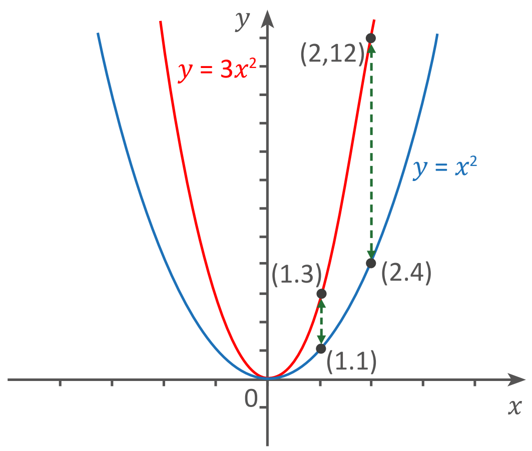
ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით b ერთეულით Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით (მარჯვნივ) მივიღეთ $y = (x - b)^2$ ფუნქცია;

ფუნქციის რიცხვზე გამრავლება – გრაფიკის გარდაქმნა

V. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

ფუნქციის 3-ზე გამრავლებით ვიღებთ წითელ გრაფიკს, რომლის ფორმულაა $y = 3x^2$. აღნიშნული გარდაქმნით ყოველი $(x; y)$ წერტილი აისახა $(x; 3y)$ წერტილში:

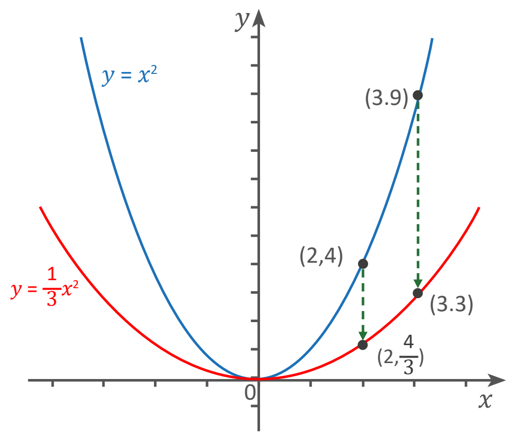
$(x; y) \to (x; 3y)$



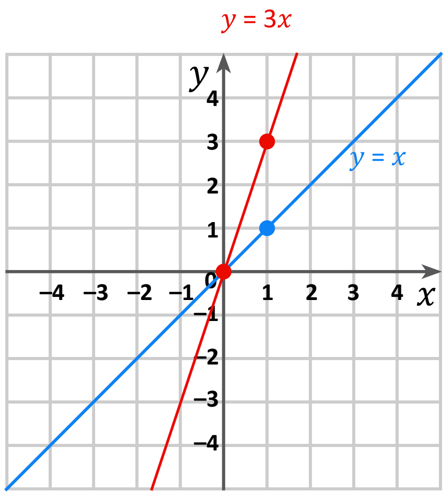
VI. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

ფუნქციის $\frac{1}{3}$-ზე გამრავლებით ვიღებთ წითელ გრაფიკს, რომლის ფორმულაა $y = \frac{1}{3}x^2$. აღნიშნული გარდაქმნით ყოველი $(x; \frac{1}{3}y)$ წერტილი აისახა $(x; y)$ წერტილში:

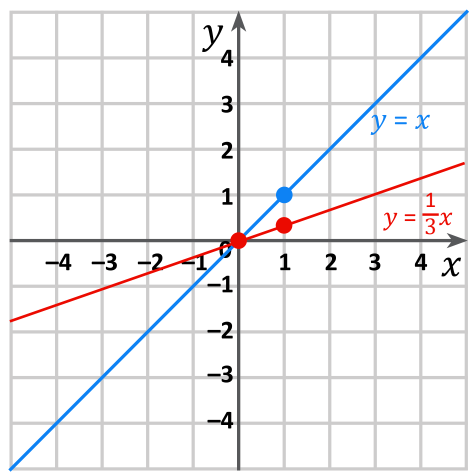
$(x; y) \to (x; \frac{1}{3}y)$



გავავლოთ პარალელი წრფივ ფუნქციასთან:



გავავლოთ პარალელი წრფივ ფუნქციასთან:



$y = x^2$ კვადრატული ფუნქციის გამრავლებით 1-ზე მეტ რიცხვზე ვიღებთ ფუნქციას, რომელიც მეტად „შეკუმშულია“ და უახლოვდება y-ღერძს. $y = x^2$ კვადრატული ფუნქციის გამრავლებით რიცხვზე, რომელიც მოთავსებულია 0-ს და 1-ს შორის, ვიღებთ ფუნქციას, რომლის გრაფიკიც მეტად „ფართოა“.

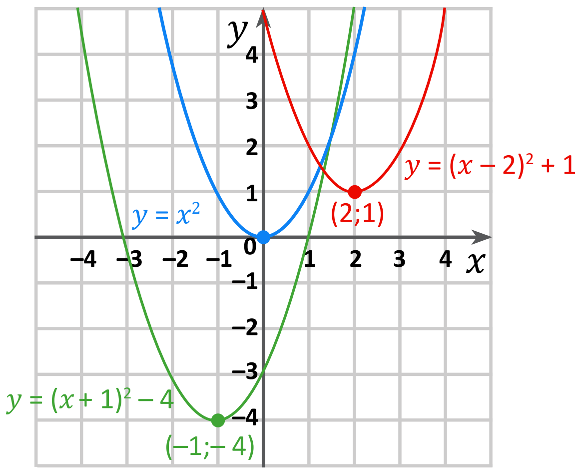
გააანალიზეთ და აღწერეთ მოცემული გრაფიკები და განიხილეთ სხვადასხვა შემთხვევა.

ნიმუში 1

ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა შესაძლებელია რამდენიმე წესის ერთად გამოყენებით

განვიხილოთ:

$y = x^2$ ლურჯი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა (პარალელური გადატანის შედეგად მიღებული ახალი გრაფიკები)



წითელი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება საწყისი კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნით – პარალელური გადატანით 2 ერთეულით მარჯვნივ და 1 ერთეულით ზემოთ. წვეროს კოორდინატით (2; 1) და ფორმულით: $y = (x - 2)^2 + 1$	**მწვანე ფუნქციის გრაფიკი** მიიღება საწყისი კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნით – პარალელური გადატანით 1 ერთეულით მარცხნივ და 4 ერთეულით ქვემოთ. წვეროს კოორდინატით (−1; −4) და ფორმულით: $y = (x + 1)^2 - 4$	როგორც ვხედავთ, კვადრატული ფუნქციის განტოლება დაკავშირებულია წვეროს კოორდინატთან, აღვნიშნოთ წვეროს კოორდინატები (x_0, y_0)-ით. თუ ვიცით წვეროს კოორდინატები და a-კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს რამდენად გაფართოვდა ან „შეიკუმშა“ გრაფიკი, მაშინ შესაბამისი კვადრატული ფუნქციის განტოლება მიიღებს სახეს:
		$y = a(x - x_0)^2 + y_0$

აღნიშნულ ფორმულას ეწოდება კვადრატული ფუნქციის გამოსახვა წვეროს კოორდინატის მეშვეობით.

დაიმახსოვრეთ, ფორმულაში წვეროს x_0 კოორდინატი არის მოპირდაპირე ნიშნით.

ნიმუში 2

როგორ შეიძლება გრაფიკით მოცემული ინფორმაციის მიხედვით, კვადრატული ფუნქციის ფორმულის (განტოლების) ჩაწერა?

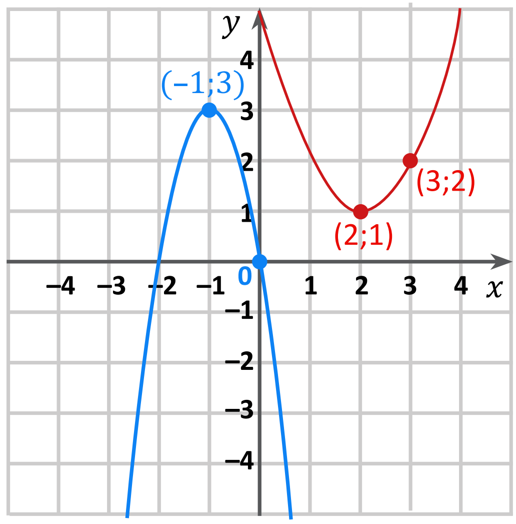
საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი.

ვიცით თითოეულის წვეროს კოორდინატი და დამატებითი ერთი წერტილი.

საკვანძო კითხვა: როგორ ჩავწეროთ მოცემული ფუნქციების შესაბამისი განტოლება?

რადგან მოცემულია წვეროს კოორდინატი, ვიცით, რომ წვეროს კოორდინატის მეშვეობით ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



მსჯელობა

განვიხილოთ წითელი ფუნქციის გრაფიკი. მოცემულია წვეროს კოორდინატი (2;1) და წერტილი (3;2); შევიტანოთ წვეროს კოორდინატები ფუნქციის განტოლებაში და მივიღებთ:

$y = a(x - 2)^2 + 1$

- *როგორ ვიპოვოთ a – კოეფიციენტი?*

როგორც ვიცით, წერტილი (3;2) გრაფიკზეა, შესაბამისად, ის უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას. როდესაც x-ის ნაცვლად განტოლებაში შევიტანთ 3-ს, გამოთვლის შემდეგ უნდა მივიღოთ 2. აღნიშნულის გათვალისწინებით შევადგინოთ განტოლება:

$a(3 - 2)^2 + 1 = 2$

$a = 1$

შესაბამისად მივიღებთ, რომ $y = (x - 2)^2 + 1$

განვიხილოთ ლურჯი ფუნქციის გრაფიკი.

მოცემულია წვეროს კოორდინატი (–1;3) და წერტილი (0; 0) შევიტანოთ წვეროს კოორდინატები ფუნქციის განტოლებაში და მივიღებთ:

$y = a(x + 1)^2 + 3$

რადგან პარაბოლას შტოები არის დაბლა, ვივარაუდოთ, რომ $a < 0$-ზე

რადგან (0; 0) გრაფიკზეა, შევადგინოთ განტოლება

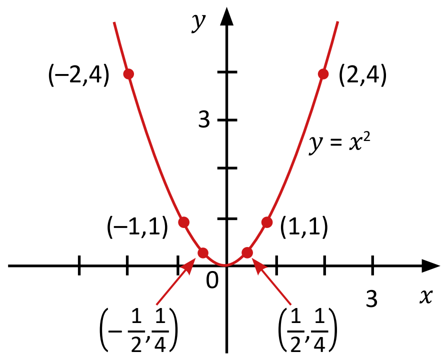
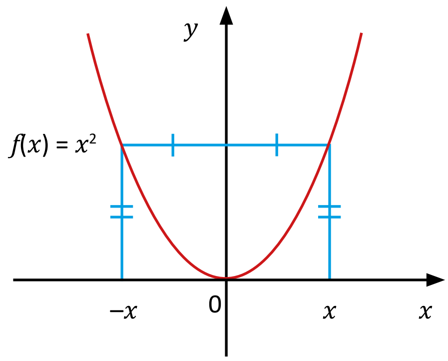
$a(0 + 1)^2 + 3 = 0$

$a = -3$

შესაბამისად, მივიღებთ:

$y = -3(x + 1)^2 + 3$

სიმეტრია, ლუწი ფუნქცია

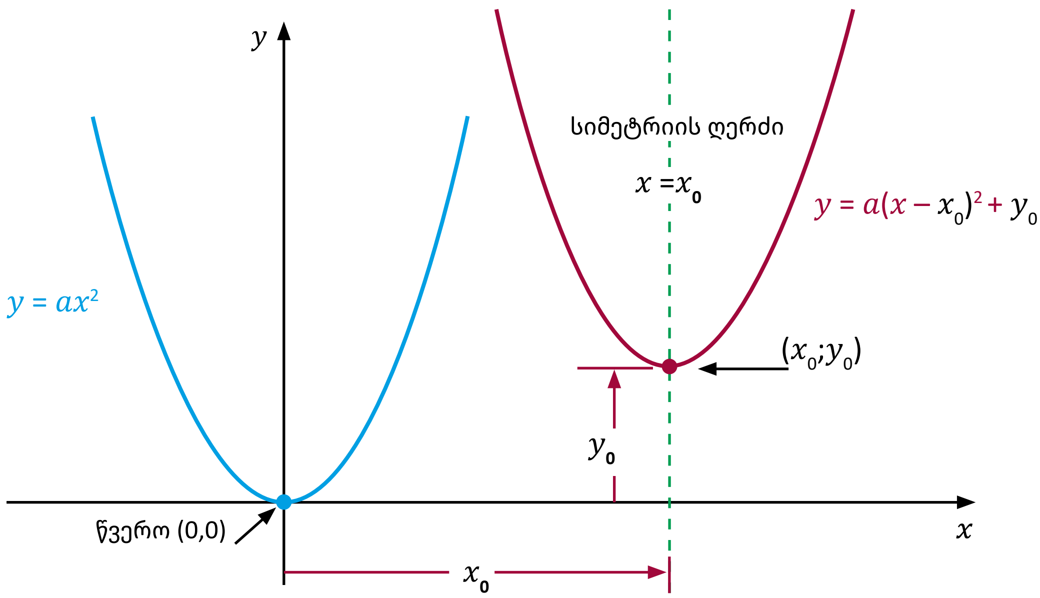
$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძია Oy ღერძი	გრაფიკიდან აღებული ყოველი x და მისი მოპირდაპირე $-x$ წერტილი, თანაბრად არის დაშორებული Oy ღერძიდან
	

თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x) = f(-x)$, ფუნქციას ეწოდება **ლუწი ფუნქცია.**

ლუწი ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძი – Oy ღერძია.

$y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია **ლუწი ფუნქციაა.**

ზოგადად, ნებისმიერ პარაბოლას აქვს სიმეტრიის ღერძი; სიმეტრიის ღერძი პარაბოლის წვეროზე გადის და Oy ღერძის პარალელურია, მისი განტოლებაა: $x = x_0$;



ფუნქციის მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილი

წვეროს კოორდინატი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი წერტილია პარაბოლაზე.

I. როდესაც $a > 0$-ზე $(x_0; y_0)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია, როდესაც $x = x_0$, ფუნქცია (ანუ y) იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

- როცა $a > 0$-ზე

  $D(f) = (-\infty; +\infty)$

  $E(f) = [y_0; +\infty)$

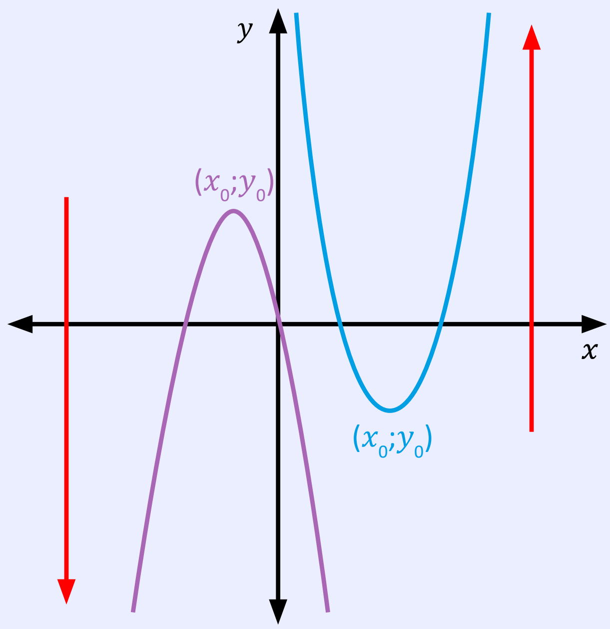
II. როდესაც $a < 0$-ზე

$(x_0; y_0)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია, როდესაც $x = x_0$,ფუნქცია (ანუ y) იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

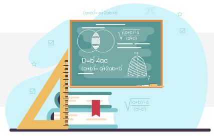
- როცა $a < 0$-ზე

  $D(f) = (-\infty; +\infty)$

  $E(f) = (-\infty; y_0]$



საჯარიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. სახელმძღვანელოში მოცემული ნახაზების უმეტესობა აგებულია მოცემული ვებგვერდების დახმარებით. გრაფიკების ასაგებად არსებობს რამდენიმე კარგი ვებგვერდი. შეისწავლეთ თითოეული, დავალების შესასრულებლად გამოიყენეთ თქვენთვის მეტად მოსახერხებელი ვებგვერდი.

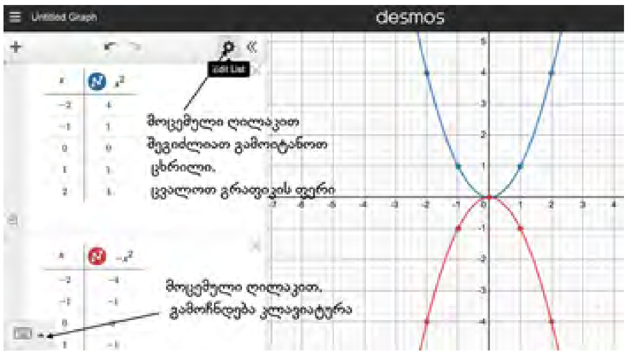
🔗 ტელესკოლა – 14:10 წთ ტექნოლოგიების გამოყენება (განხილულია ვებგვერდი Desmos)

🔗 www.desmos.com/calculator

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, აირჩიეთ Graphing Calculator (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ქვემოთ მოცემულია პანელი, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელია ფორმულის ჩაწერა.

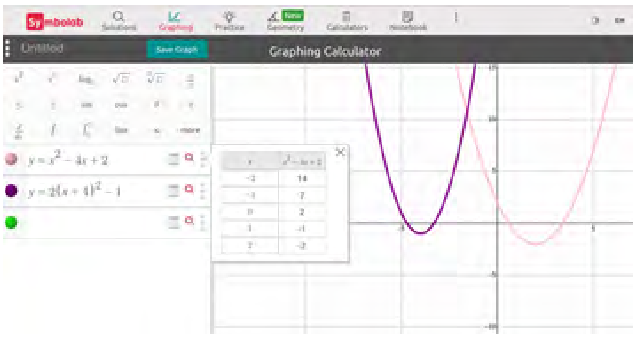


🔗 www.symbolab.com/graphing-calculator

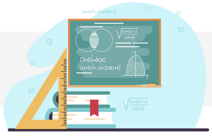
ინსტრუქცია: შედით ვებგვერდზე, აირჩიეთ Graphing (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ჩასაწერი ველის ზემოთ არის პანელი, რომელიც დაგეხმარებათ აკრიფოთ ნებისმიერი ფორმულა. მარჯვნივ არის ცხრილის ნიშანი, რომელიც გაჩვენებთ გრაფიკზე მდებარე წერტილის კოორდინატებს.



სავარჯიშოები



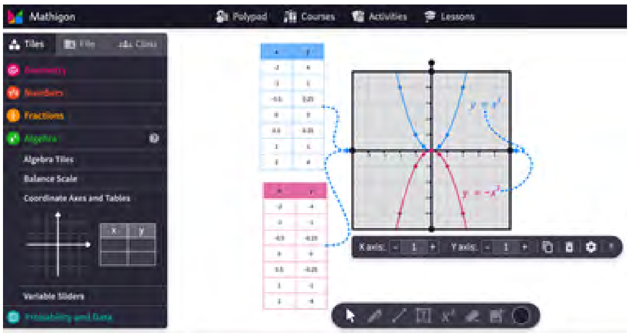
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

🔗 mathigon.org/polypad

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, მარცხენა მხარეს აირჩიეთ Algebra (გამოჩნდება ჩამონათვალი, აირჩიეთ Coordinate Axes and Tables);

შემდეგ მარჯვნივ სამუშაო სივრცეში გადაიტანეთ ცხრილი, ჩაწერეთ წერტილის $(x;y)$ წყვილები, ისრით „მიაერთეთ" ცხრილი საკოორდინატო სიბრტყეზე და მომენტალურად აისახება ინფორმაცია სიბრტყეზე.

შემდეგ დაწერეთ ფორმულა, ისრით „მიაერთეთ" საკოორდინატო სიბრტყეს და აიგება გრაფიკი.



🔗 www.geogebra.org/calculator

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, აირჩიეთ Start Calculator (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

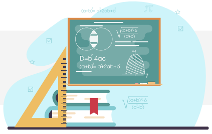
მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ქვემოთ მოცემულია პანელი, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელია ფორმულის ჩაწერა.

ჯგუფური სამუშაო:

2. **ინსტრუქცია:** შედით საიტზე 🔗 Geogebra ან Desmos; ააგეთ გრაფიკები. იმსჯელეთ და აღწერეთ გარდაქმნის წესი ქვემოთ მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის.

სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

მითითება: მას შემდეგ რაც აგებთ გრაფიკს, შეინახეთ თქვენ მიერ შესრულებული ნახაზი, გადაიტანეთ Word-ის ფაილში და თან დაურთეთ აღწერა. ასევე, თითოეული შემთხვევისთვის ამოიწერეთ წვეროს კოორდინატი.

ა) ააგეთ $y = x^2$; $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 4$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ბ) ააგეთ $y = x^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 2)^2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გ) ააგეთ $y = -x^2$; $y = - x^2 + 5$; $y = -x^2 - 5$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

დ) ააგეთ $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 3x^2$; $y = 0.5x^2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ე) ააგეთ $y = x^2$; $y = 2(x - 1)^2$; $y = -2(x - 1)^2$; ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ვ) ააგეთ $y = x2$; $y = (x - 3)^2 + 5$; $y = - (x - 3)^2 + 5$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ზ) ააგეთ $y = x^2$; $y = -2x^2$ $y = - 2(x - 4)^2$; $y = - 2(x - 4)^2 + 1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

3. ააგეთ მოცემული ფუნქციათა გრაფიკები. თითოეულისთვის დაწერეთ წვეროს კოორდინატი, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

მითითება: ჯერ ააგეთ $y =x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, შემდეგ ააგეთ სავარჯიშოში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წვეროს კოორდინატის დახმარებით, თითოეულ შემთხვევაში ახსენით გარდაქმნის წესი. შეასრულეთ სამუშაო რვეულში.

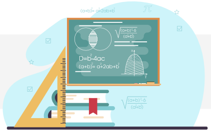
ა) $y = x^2 + 2$; გ) $y = -x^2 + 3$; ე) $y =x^2 + 4$; ზ) $y = -4x^2$;
ბ) $y = 3x^2$; დ) $y = -x^2 + 4$; ვ) $y = -2x^2$; თ) $y = -x^2 - 2$.

4. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები საკოორდინატო სიბრტყეზე.

მითითება: ჯერ ააგეთ $y =x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, შემდეგ ააგეთ სავარჯიშოში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წვეროს კოორდინატის დახმარებით, თითოეულ შემთხვევაში ახსენით გარდაქმნის წესი. შეასრულეთ სამუშაო რვეულში.

გაგრძელება

სავარჯიშოები



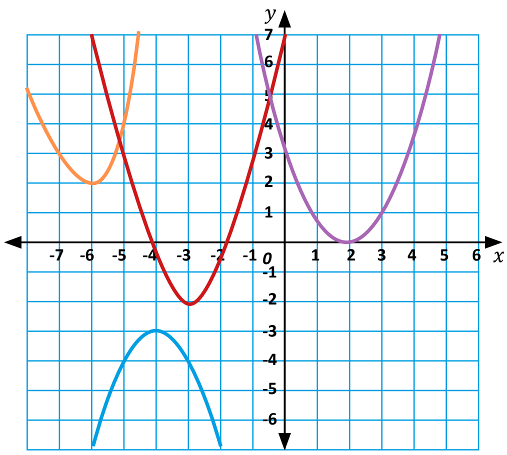
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

ა) $y = (x + 1)^2 + 3$ გ) $y = -(x + 1)^2 + 3$ ე) $y = (x - 2)^2 + 1$ ზ) $y = -(x + 1)^2 - 3$

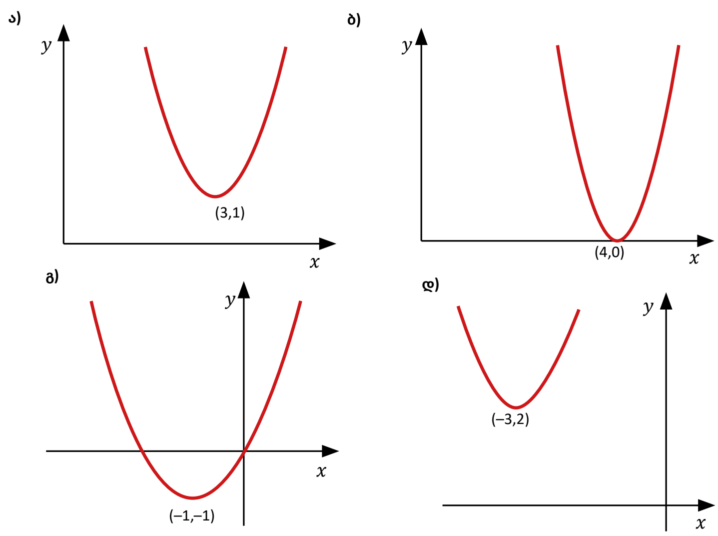
ბ) $y = (x - 1)^2 + 4$ დ) $y = -(x + 2)^2 + 4$ ვ) $y = 2(x - 1)^2 - 3$ თ) $y = -2(x - 3)^2 - 2$

გადაამოწმე შენ მიერ აგებული ფუნქციის გრაფიკების სისწორე რომელიმე **გრაფიკულ კალკულატორით (Desmos ან Geogebra)**

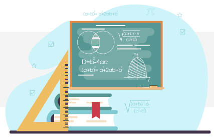
5. ნახაზზე მოცემულია სხვადასხვა კვადრატული ფუნქციის გრაფიკები; ვიცით, რომ a = 1-ს, ან a = –1-ს. დაწერეთ თითოეული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქცია ფორმულის მეშვეობით.



6. ქვემოთ მოცემულია კვადრატული ფუნქციის გრაფიკები, ჩათვალეთ, რომ a = 1 და დაწერეთ თითოეული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის განტოლება.



სავარჯიშოები



■ MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

7. **გამოწვევა:** ააგე პარაბოლა და ჩაწერეთ ფუნქციის შესაბამისი განტოლება თუ ვიცით, რომ:

ა) წვეროს კოორდინატია (3;6) და პარაბოლა y ღერძს კვეთს წერტილში (0;2);

ბ) წვეროს კოორდინატია (–1;–4) და პარაბოლა y ღერძს კვეთს წერტილში (0;3);

გ) წვეროს კოორდინატია (0;5) და გრაფიკზე მდებარეობს A (1; –2) წერტილი;

დ) წვეროს კოორდინატია (2;3) და გრაფიკზე მდებარეობს A (6; 9) წერტილი .

STEM

დავალება

■ ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

გახსენით სიმულაცია – Phet-ქართულად, კუთხით გასროლილი სხეულის ტრაექტორია

8. შედით საიტზე Geogebra ან Desmos და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, გასასროლი ობიექტის სიმაღლე) და დაადგინეთ:.

I. როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე? აღწერეთ სიტყვიერად.

II. რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

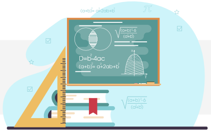
ვარიანტი I

	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1	30°	8 მ/წმ			
ცდა 2	30°	16 მ/წმ			

- სიჩქარის ორჯერ გაზრდის შემდეგ, რამდენჯერ უფრო შორს დაეცა სხეული?
- რა მოხდება თუ გასროლის კუთხე იქნება 90°-ის ტოლი?

კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

ვარიანტი II					
	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1		8 მ/წმ			
ცდა 2		16 მ/წმ			

ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ, ცხრილში დაორგანიზებული მონაცემებიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვას:

კიდევ სცადეთ

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია შემდეგი დამოკიდებულება:

$\frac{v^2 \ sin2\alpha}{g}$ სადაც d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v ბურთის მოძრაობის სიჩქარე, α გასროლის კუთხე, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ცხრილით მოპოვებული ინფორმაციის საფუძველზე შეამოწმეთ ფორმულის სისწორე.

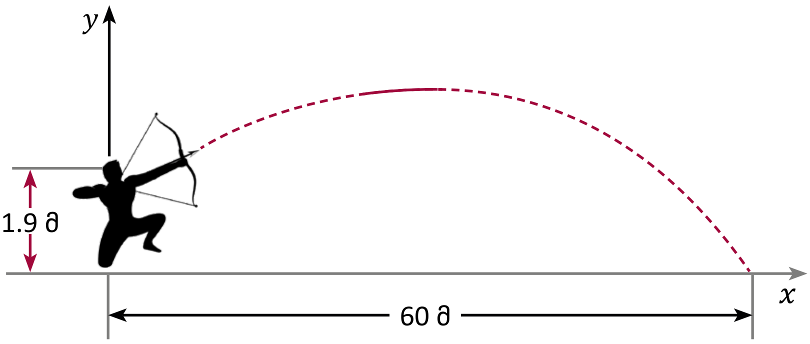
6.3. კვადრატული ფუნქციის სტანდარტული ფორმა

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ როდესაც სხეულს ვისვრით ჰორიზონტისადმი კუთხით, სხეულის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით:

$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$ **(I ფორმულა)**

$v(t) = v_0 + gt$ **(II ფორმულა)**

$d = \frac{v^2 \ sin2\alpha}{g}$ **(III ფორმულა)**



🔗 [ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია]

🔗 [ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია, ვარიანტი 2]

I. ფორმულის შემთხვევაში:

h_0-სხეულის საწყისი სიმაღლეა; v_0-საწყისი ვერტიკალური სიჩქარე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ფორმულით ვხედავთ, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ, თუ მიწიდან რა სიმაღლეზეა სხეული; სხეულის მდებარეობა დამოკიდებულია დროზე კვადრატულად; მოცემულია კვადრატული ფუნქცია.

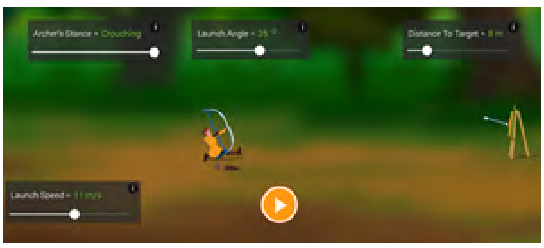
II. II ფორმულის შემთხვევაში:

d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v_0 ბურთის მოძრაობის საწყისი სიჩქარეს, α გასროლილ კუთხეს, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. $g \approx 9.8$ მ /წმ^2 (ჩვენ ამოცანებში დავამრგვალოთ g ≈10მ /წმ^2-მდე). ამ ფორმულაში სხეულის მოძრაობის სიჩქარე დამოკიდებულია აჩქარებაზე წრფივად.

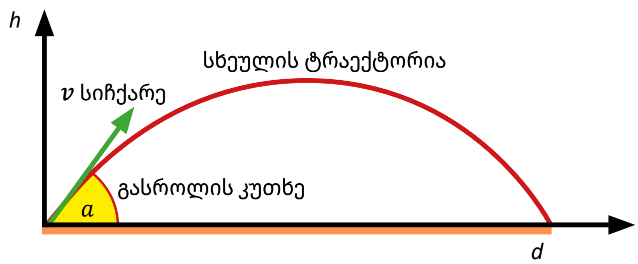
ზემოთ მოცემული ფორმულებით ვხედავთ, რომ კვადრატული ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა ფორმით, მოცემულ გაკვეთილში განვიხილოთ კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის სტანდარტული ფორმა.

!! ყურადღება მიაქციეთ:

როდესაც სხეულს ვისვრით მიწიდან, აღნიშნულ სიტუაციას შეესაბამება ნახ. 1-ზე მოცემული გრაფიკი და მონაცემები. როგორც ვხედავთ, კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის წირი შეესაბამება პარაბოლას.



🔗 [CK12 – სიმულაცია] (დარეგისტრირდით ვებგვერდზე და გახსენით სიმულაცია)



ნახაზი 1

საკვანძო კითხვა: რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენა ფორმულის მეშვეობით?

ნიმუში 1

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განვიხილეთ წინა გაკვეთილში.

ვიცით, რომ წითელი ფერით მოცემული გრაფიკის შესაბამისი განტოლებაა:

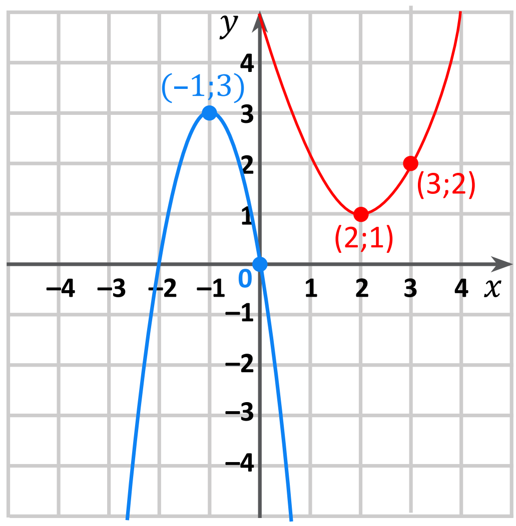
$y = (x - 2)^2 + 1$

ხოლო ლურჯი ფერით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისი განტოლებაა:

$y = -3(x + 1)^2 + 3$

ასევე ვიცით, რომ ორივე წარმოდგენილია წვეროს კოორდინატის ფორმით, ანუ ფორმულით:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



საკვანძო კითხვა: რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენა ფორმულის მეშვეობით?

მსჯელობა:

როგორც წინა თავებში გავეცანით კვადრატულ სამწევრს და კვადრატულ განტოლებას, ვისწავლეთ გამოსახულებების გამარტივებები და წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით.

შემოკლებული გამრავლების ფორმულიდან გამომდინარე ვიცით, რომ

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$; $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

თუ გამოვიყენებთ აღნიშნულ ცოდნას და კვადრატულ ფუნქციაში გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ:

$y = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

$y = -3(x + 1)^2 + 3 = -3(x^2 + 2x + 1) + 3 = -3x^2 - 6x - 3 + 3 = -3x^2 - 6x$

ვიცით, რომ კვადრატული სამწევრის ზოგადი ფორმაა $ax^2 + bx + c$, სადაც a,b,c ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან, $a \neq 0$, ფრჩხილის გახსნის შემდეგ, ორივე ფუნქცია ჩავწერეთ კვადრატული სამწევრის სტანდარტული ფორმის მეშვეობით:

$y = x^2 - 4x + 5$ $a = 1, b = -4, c = 5$	$y = -3x^2 - 6x$ $a = -3, b = -6, c = 0$

როდესაც ფუნქცია მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფორმით, ვამბობთ, რომ მოცემულია კვადრატული ფუნქცია ზოგადი სახით.

ნიმუში 2

ჩაწერე $f(x) = x^2 + 4x + 1$ ფუნქცია $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით (წვეროს კოორდინატის მეშვეობით)
ა) დაადგინე წვეროს კოორდინატები ბ) ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი

მეთოდი 1:

ა) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

გავიხსენოთ კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის წესი:

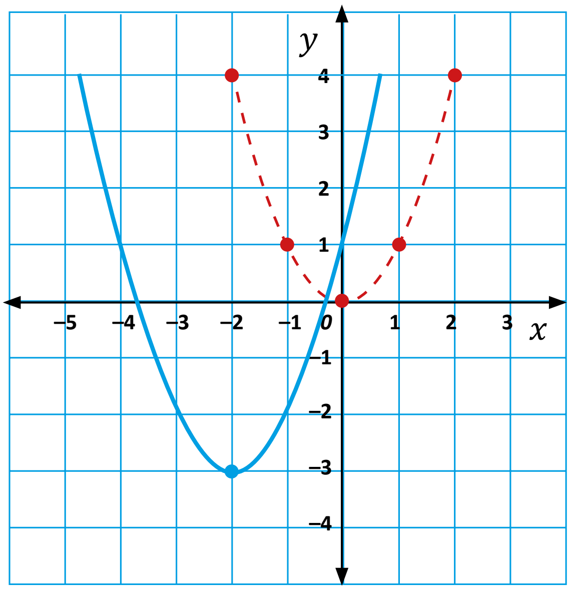
$$x^2 + 4x + 1 =$$

$$x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1 =$$

$$= (x + 2)^2 - 3$$

მივიღეთ, $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $f(x) = x^2$ გრაფიკის 2 ერთეულით მარცხნივ და 3 ერთეულით ქვემოთ პარალელური გადატანით (გადაადგილებით).



მეთოდი 2:

მოცემულია კვადრატული ფუნქცია

ა) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

$$a = 1,\ b = 4,\ c = 1$$

ვიცით, რომ

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წვეროს y_0 კორდინატი, შევიტანოთ მნიშნელობა x_0 ფუნქციაში და ვიპოვოთ შესაბამისი y_0.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 =$$

$$= 4 - 8 + 1 = -3$$

წვეროს კოორდინატია (–2;–3)

$$f(x) = (x + 2)^2 - 3$$

კვადრატული ფუნქციის თვისებები

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქციის სტანდარტული ფორმა

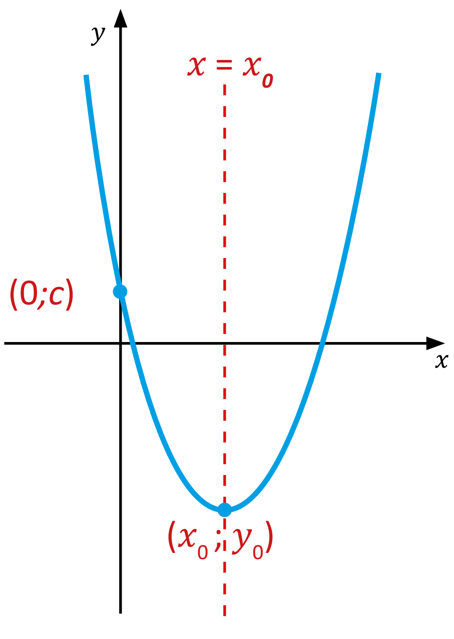
$$y = ax^2 + bx + c \text{ იგივე } f(x) = ax^2 + bx + c$$

ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, ეწოდება კვადრატული ფუნქციის ზოგადი ფორმა.

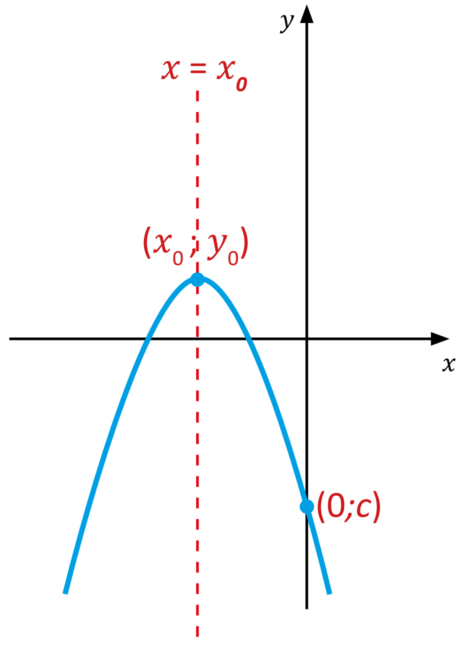
- კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება პარაბოლა
- როცა $a > 0$-ზე პარაბოლას შტოები მიმართულია ზემოთ, როცა $a < 0$-ზე, პარაბოლას შტოები მიმართულია დაბლა
- პარაბოლას წვეროს x-კოორდინატი გამოითვლება ფორმულით

  $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, ხოლო $y_0 = f(x_0)$.

  $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$, სადაც $D = b^2 - 4ac$. y_0-ის დადგენა შეიძლება, როგორც ფორმულით, ასევე ფუნქციაში x_0-ის ჩასმით.
- $x = x_0$ წრფე არის ფუნქციის სიმეტრიის ღერძი.
- $(0; c)$ არის გრაფიკის მიერ Oy ღერძის კვეთის წერტილი.



$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$



$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$

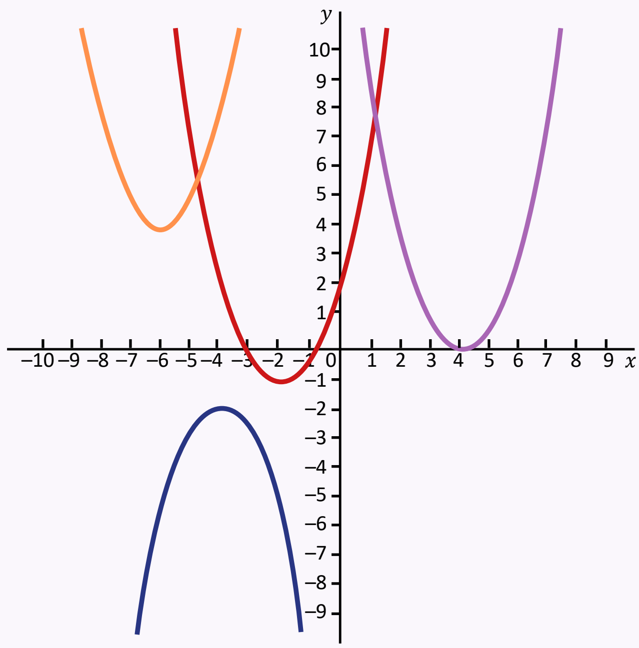
როგორც უკვე ვიცით, რომ პარაბოლას შტოები მიმართულია მაღლა თუ $a > 0$ და დაბლა თუ $a < 0$.

მარჯვნივ მოცემულ ნახაზზე ჩანს, რომ იასამნისფერი გრაფიკი ეხება Ox ღერძს, წითელი კვეთს ორ წერტილში, ხოლო ნარინჯისფერი და ლურჯი არ კვეთს Ox ღერძს.

? საკვანძო კითხვა:

როგორ დავადგინოთ ფუნქციის გრაფიკი კვეთს, ეხება თუ არ კვეთს Ox ღერძს?

სანამ აღნიშნულ კითხვას გავცემთ პასუხს, განვიხილოთ მაგალითი.



პარაბოლას Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები

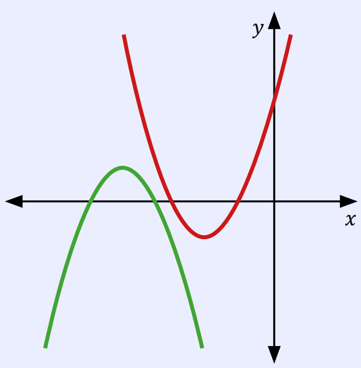
ვიცით, რომ როდესაც გრაფიკი კვეთს Ox ღერძს, გადაკვეთის წერტილის y კოორდინატი არის 0-ის ტოლი. როდესაც $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატულ ფუნქციაში y-ის ნაცვლად შევვაქვს 0, ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას $ax^2 + bx + c = 0$ თუ მოცემულ განტოლებაში:

- $D > 0$, განტოლებას აქვს ორი ფესვი
- $D = 0$, განტოლებას აქვს ერთი ფესვი
- $D < 0$, განტოლებას არ აქვს ფესვი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

ე.ი. როდესაც მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია, მაშინ:

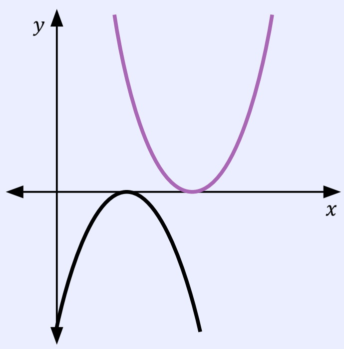
თუ $D = b^2 - 4ac > 0$

პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში:



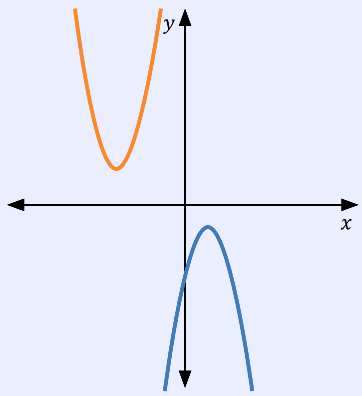
თუ $D = b^2 - 4ac = 0$

პარაბოლა ეხება Ox ღერძს ერთ წერტილში:



თუ $D = b^2 - 4ac < 0$

პარაბოლა არ ეხება Ox ღერძს:

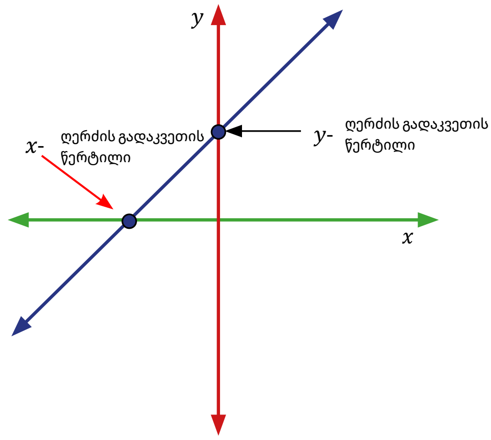


საკვანძო კითხვა: როგორ ვიპოვოთ პარაბოლას ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები?

გავიხსენოთ წრფივი ფუნქცია როდესაც მოცემულია

$y = kx + b$

x	y	
0	b	Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი
$-\dfrac{b}{k}$	0	Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი



როდესაც მოცემულია კვადრატული ფუნქცია

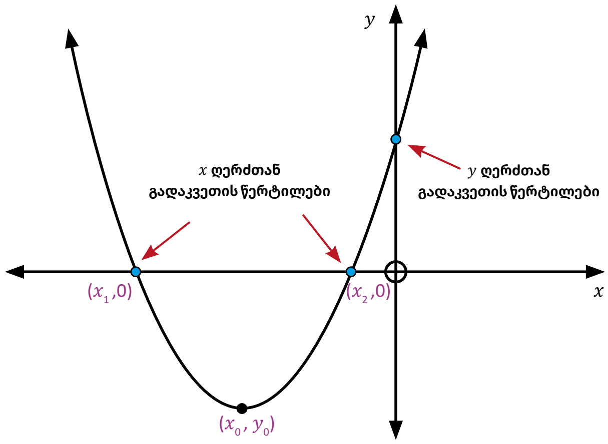
$$y = ax^2 + bx + c$$

x	y	
0	c	Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი
	0	Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

დამოკიდებულია, თუ რას უდრის D

თუ $D = b^2 - 4ac > 0$.

პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში $(x_1; 0)$ და $(x_2; 0)$.



მითითება: ფუნქციის განტოლებაში $x = 0$-ის ჩასმის შემდეგ ვიღებთ Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილს. ფუნქციის განტოლებაში $y = 0$-ის ჩასმის შემდეგ ვადგენთ პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ან ეხება თუ არ ეხება მას.

ნიმუში 4

მოცემულია $y = x^2 - 2x - 3$ ფუნქცია, იპოვე:

ა) ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები

ბ) წვეროს კოორდინატი

გ) განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

ა) $y = x^2 - 2x - 3$

x	y
0	−3
	0

Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

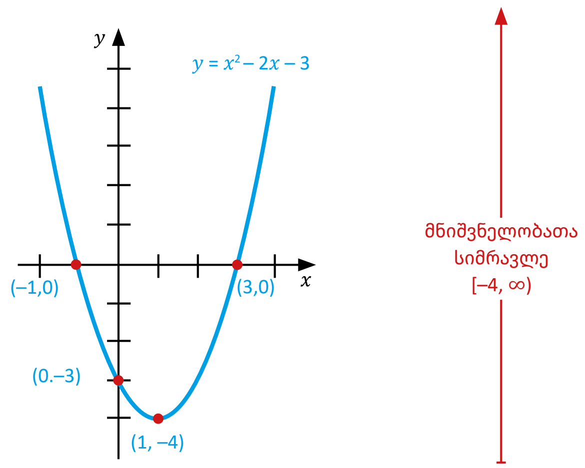
OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ ან } x_2 = -1$$

(−1; 0) და (3; 0);



ბ) წვეროს კოორდინატი

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$

წვეროს კოორდინატია (1; −4).

გ) ფუნქციის განსაზღვრის არეა

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [-4; +\infty)$

ნიმუში 5

შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა (3; −12) და B(−2;4) წერტილები $y = -x^2 - 2x + 3$ ფუნქციის გრაფიკზე

მსჯელობა: როდესაც წერტილი ეკუთვნის გრაფიკს, ნიშნავს, რომ მისი კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციის განტოლებას.

როდესაც $x = 3$

$y = f(3) = -(3)^2 - 2 \cdot 3 + 3 = -1 \cdot 3^2 - 3 = -12$

ე.ი. A(3; −12) წერტილი ეკუთვნის მოცემულ ფუნქციას და მდებარეობს გრაფიკზე.

როდესაც $x = -2$

$y = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = -1 \cdot 2^2 + 4 + 3 = 3$ რომელიც $\neq 4$

ე.ი. B(−2; 4) წერტილი არ ეკუთვნის მოცემულ ფუნქციას და არ მდებარეობს მის გრაფიკზე

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ თითოეული კვადრატული ფუნქციის:

- წვეროს კოორდინატი, სიმეტრიის ღერძი, მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა;
- განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) $y = x^2 + 2x + 1$; დ) $y = -x^2 + 2x + 1$; ზ) $y = x^2 + 4x + 1$;
ბ) $y = -x^2 + 2x + 5$; ე) $y = 3x^2 - 4x - 2$; თ) $y = -x^2 - 3x + 4$;
გ) $y = 2x^2 - 6x + 3$; ვ) $y = -x^2 - x$; ი) $y = 2x^2 + 5$.

2. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

მითითება: იპოვეთ წვეროს კოორდინატი, ასევე ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები (საჭიროებისამებრ, დაამრგვალეთ პასუხები მეათედამდე სიზუსტით)

ა) $y = x^2 + 6x + 9$; დ) $y = -x^2 - 3x + 6$; ზ) $y = 2x^2 + 4x$;
ბ) $y = 4x^2 - 12x + 9$; ე) $y = 6x^2 - 12x - 1$; თ) $y = -x^2 + 4x - 4$;
გ) $y = 3x^2 - 12x + 10$; ვ) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8$; ი) $y = -4x^2 - 24x - 36$.

3. მოცემული კვადრატული ფუნქციის განტოლებები წარმოადგინეთ $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით. ააგეთ თითეულის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზე:

ა) $y = x^2 + 2x + 3$; ბ) $y = x^2 + 5x + 6$;
გ) $y = x^2 + 6x + 5$; დ) $y = -x^2 + 2x - 1$;
ე) $y = x^2 - 2x + 3$; ვ) $y = -x^2 + 4x - 3$;
ზ) $y = x^2 + 3x + 2$; თ) $y = -2x^2 - 8x + 2$.

4. დაადგინეთ, ქვემოთ მოცემული კვადრატული ფუნქცია Ox ღერძს კვეთს, ეხება თუ არ კვეთს?

ა) $y = x^2 + 2x - 6$; ბ) $y = x^2 - 8x + 16$;
გ) $y = x^2 - 4x - 5$; დ) $y = -3 - x^2 - 5x$;
ე) $y = -x^2 + 2x - 7$; ვ) $y = 4x + 1 + x^2$;
ზ) $y = x^2 - 4x + 21$; თ) $y = x^2 - 4x$.

5. ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები, მისი წვეროს კოორდინატების და Oy ღერძის გადაკვეთის წერტილით:

მინიშნება: გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში $(0;y)$.

ა) $y = x^2 + 6x + 2$; გ) $y = -x^2 - 2x + 1$;
ბ) $y = x^2 - 4x + 4$; დ) $y = x^2 + 8x$.

6. კომპანია ქმნის და ყიდის სათამაშო აპლიკაციებს კომპიუტერებისთვის და ტელეფონებისთვის. მონაცემების ანალიზის საფუძველზე დადგინდა, რომ კომპანიის მოგება ყოველდღიურად დამოკიდებულია გაყიდული აპლიკაციების რაოდენობაზე შემდეგი წესით: $M = -2{,}5n^2 + 500n$;

სადაც M-კომპანიის დღიური მოგებაა, ხოლო n-გაყიდული აპლიკაციების რაოდენობა.

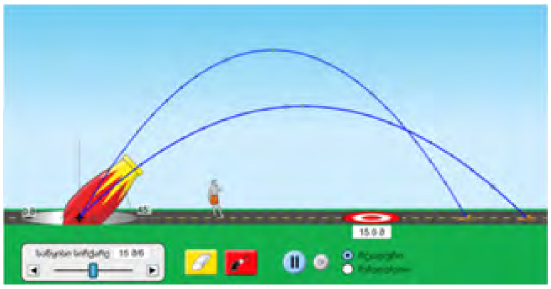
ა) რა იქნება კომპანიის მოგება თუ დღის განმავლობაში გაიყიდება მხოლოდ 10 აპლიკაცია? 20 აპლიკაცია?

სავარჯიშოები

ბ) რამდენი აპლიკაცია უნდა გაყიდოს კომპანიამ, რომ ჰქონდეს მაქსიმალური მოგება?

გ) რა იქნება კომპანიის მოგება თუ გაყიდის 200 აპლიკაციას? დაფიქრდით რატომ შეიძლება დადგეს აღნიშნული შედეგი.

7. ქვემეხიდან გაისროლეს ჭურვი. ჭურვის სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან გამოითვლება ფორმულით $h = 60t - 5t^2$, სადაც t – დრო იზომება წამებში გასროლის მომენტიდან, ხოლო სიმაღლე მეტრებში.



- იპოვეთ რა სიმაღლეზე ავა ჭურვი მიწის ზედაპირიდან, როდესაც
  ა) $t = 0$; ბ) $t = 1$; გ) $t = 3$; დ) $t = 8$.
- იპოვეთ დრო, როდესაც ჭურვი მიწის ზედაპირიდან არის ა) $h = 0$; ბ) $h = 100$; გ) $h = 160$ მეტრ სიმაღლეზე

8. ქვა გაისროლეს ჰაერში. გასროლის მომენტიდან, ქვის სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან დროის ყოველ მომენტში გამოითვლება ფორმულით:

$h = -5t^2 + 30t + 2$, სადაც t – დრო იზომება წამებში გასროლის მომენტიდან, ხოლო სიმაღლე მეტრებში.

ა) იპოვეთ რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე ავა ქვა მიწის ზედაპირიდან?

ბ) იპოვეთ რა სიმაღლეზე ავა ქვა მიწის ზედაპირიდან როცა $t = 3$?

გ) გასროლიდან რა დროში მიაღწია ქვის სიმაღლემ მიწის ზედაპირიდან 27 მ-ს? 42 მ-ს?

დ) ააგეთ t-ზე დამოკიდებულების h ფუნქციის გრაფიკი.

9. მანქანის სიჩქარე, როდესაც ის გადაადგილდება ქალაქის ქუჩებში გამოითვლება ფორმულით: $v(t) = -t^2 + 6t + 40$ კმ/სთ, სადაც $0 \le t \le 10$ წუთია.

- რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა, როცა $t = 0$ წთ?
- რამდენი წუთი გავა სანამ მანქანის სიჩქარე მიაღწევს 45 კმ/სთ სიჩქარეს?
- კიდევ როდის იქნება მანქანის სიჩქარე 45 კმ/სთ?
- რა მაქსიმალური სიჩქარე შეუძლია განავითაროს მანქანამ და რა დროში მოხდება ეს?

10. გიორგი ამზადებს ხის სკამებს და ყიდის ყოველდღიურად. გიორგი აორგანიზებდა ინფორმაციას ცხრილში შემდეგი წესით:

გაყიდული სკამების რაოდენობა (x)		
მოგება (M)		

კიდევ სცადეთ

როდესაც მოახდინა სიტუაციის ფორმულირება დაადგინა, რომ მოგება (M) დამოკიდებულია ყოველდღიურად გაყიდული სკამების რაოდენობაზე (x-ზე) შემდეგი წესით: $M = -10x^2 - 220x - 400$.

გამოითვალეთ გიორგის მოგება, თუ ის დაამზადებს დღეში:

სავარჯიშოები

- ა) 0; ბ) 4; გ) 10 სკამს?
- რას შეიძლება ნიშნავდეს უარყოფითი მოგება?

  მითითება: წარმოებას ახლავს ხარჯი, მაგალითად ხელფასები, გადასახადები იჯარის და ა.შ.)
- რა რაოდენობის სკამი უნდა დაამზადოს ყოველდღე, რომ მაქსიმალური მოგება მიიღოს? რა მოხდება თუ აღნიშნულ რაოდენობაზე მეტს დაამზადებს?
- რამდენი სკამი უნდა დაამზადოს მან, რომ მიიღოს 460 ლარის მოგება?

11. **გამოწვევა:** თითოეული ფუნქციისთვის ცნობილია წვეროს კოორდინატები, იპოვეთ უცნობი კოეფიციენტები, თუ ვიცით რომ:

ა) $y = x^2 + bx + c$, წვეროს კოორდინატია (3;–4);
ბ) $y = -3x^2 + bx + c$, წვეროს კოორდინატია (1;0);
გ) $y = ax^2 + 10x + c$, წვეროს კოორდინატია (–5;–27);
დ) $y = c - ax^2 - 2x$, წვეროს კოორდინატია (–1;3).

STEM

დავალება

ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

გახსენით სიმულაცია –

Phet — ქართულად, კუთხით გასროლილი სხეულის ტრაექტორია

შედით საიტზე და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, გასასროლი ობიექტის სიმაღლე) და დაადგინეთ.

მითითება: მოცემული დავალების შესრულებაში დაგეხმარებათ შემდეგი ინფორმაცია

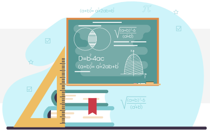
ტელესკოლა — მათემატიკური მოდელირება

I. როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე? აღწერეთ სიტყვიერად.

II. რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

პარამეტრების დაფიქსირების შემდეგ დააორგანიზეთ ექსპერიმენტის შედეგად მოპოვებული მონაცემები ქვემოთ მოცემულ ცხრილში.

სავარჯიშოები



■ MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

სიმულაციაში დააფიქსირეთ კუთხე, სიჩქარე (თუ შეცვლით ზარბაზნის სიმაღლეზე, მაშინ აღნიშნულ ცხრილს დაამატეთ სვეტი)

	გასროლილი კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1					
ცდა 2					
ცდა 3					
ცდა 4 და ა.შ.					

ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ, ცხრილში დაორგანიზებული მონაცემებიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

კიდევ სცადეთ

ა) რა ეწოდება წირს, რომელსაც კუთხით გასროლილი სხეული შემოწერს?

ბ) რომელი მონაცემის/მონაცემების საფუძველზე შეძლებდით აღნიშნული სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნას? (ფუნქციის განტოლების ჩაწერას?) ჩაწერეთ გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის განტოლება სხვადასხვა ფორმით.

გ) მოცემულ სიტუაციაში რომელია დამოუკიდებელი ცვლადი და რომელი დამოკიდებული ცვლადი? რა ტიპის კანონზომიერება შენიშნეთ?

დ) მიღებული შედეგების ანალიზით რა შეგიძლიათ დაასკვნათ დაცემის მანძილის დამოკიდებულებაზე საწყის სიჩქარეზე? გასროლის კუთხეზე?

ე) დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

12. STEM **დავალება – ■ დამოუკიდებელი სამუშაო.**
გახსენით CK12-სიმულაცია (დარეგისტრირდით საიტზე მეილის მეშვეობით და გახსენით სიმულაცია)

შედით საიტზე და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, მეისრის სიმაღლე, მანძილი ნიშნულსა და მეისრეს შორის)

სავარჯიშოები

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- დააყენეთ პარამეტრები ისე, რომ ისარი მოხვდეს მიზანში.
- თქვენ მიერ დაყენებული პარამეტრები დააორგანიზეთ ცხრილში.
- დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება). დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

13. გამოწვევა: ჯგუფური სამუშაო STEM **ინტეგრირებული დავალება:**

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია სიტუაცია, როდესაც მეისრე ისვრის ისარს. ჩვენ ვიცი, რომ:

- ისრის მოძრაობის ტრაექტორია ემთხვევა პარაბოლას გრაფიკს და აღიწერება ფორმულით $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$;
- ისრის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში აღიწერება ფორმულით $v(t)=v_0 + gt$ (ისარი მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად);
- სხეულის დაცემის ადგილი გასროლის ადგილიდან აღიწერება ფორმულით $d = \dfrac{v^2 \ sin2\alpha}{g}$.

ფორმულებში:

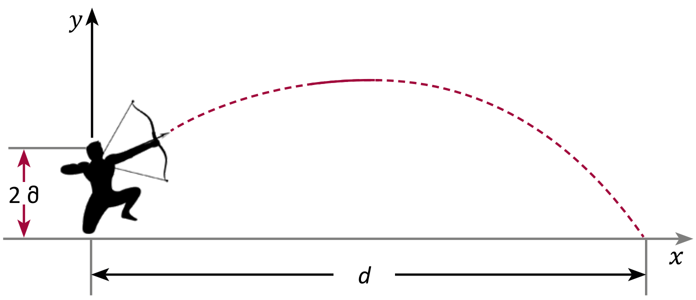
- h_0 შეესაბამება სხეულის საწყის სიმაღლეს; $h(t)$ – სხეულის სიმაღლეს დროის ნებისმიერ მომენტში.
- d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე.
- v ბურთის მოძრაობის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში.
- v_0 – სხეულის მოძრაობის საწყისი სიჩქარე.
- α გასროლილ კუთხეს.
- ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას.

მიღებულია, რომ $g \approx 9.8$ მ/წმ^2 (გამოთვლებში, სიმარტივისთვის, ჩაწერეთ $g \approx 10$ მ/წმ^2)

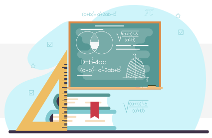
განვიხილოთ ორი სიტუაცია:

სიტუაცია 1.

როდესაც მეისრე ისვრის ჰორიზონტისადმი რაიმე კუთხით, გასროლისას საწყისი სიჩქარეა 20 მ/წმ და ისარი დაშორებულია მიწიდან 2 მეტრით.



სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- ამოცანის პირობასა და ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, ჩასვით მონაცემები ფორმულაში $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t + h_o$ და დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი. გაითვალისწინეთ, რომ $g \approx 10$მ/წმ^2; დაადგინეთ რა დროის შემდეგ მიაღწევს ისარი მაქსიმალური სიმაღლეს; დაადგინეთ, რა იქნება ისრის მაქსიმალური სიმაღლე მიწიდან.
- დაადგინეთ, რამდენად შორს დაეცემა ისარი გასროლის ადგილიდან.
- დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეცემა ისარი მიწაზე.

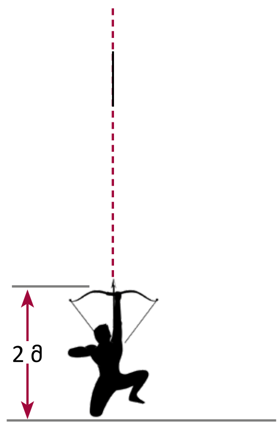
სიტუაცია 2.

მეისრე ისვრის, ვერტიკალურად ზემოთ (ასეთ დროს ჰორიზონტისადმი კუთხე არის 90°). ისრის საწყისი სიჩქარე 30 მ/წმ-ში.

- ამოცანის პირობასა და ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, ჩასვით მონაცემები ფორმულაში:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t + h_o$$

დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი.



- დაადგინეთ, რა იქნება ისრის მაქსიმალური სიმაღლე გასროლის შემდეგ.
- რა დროში მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს.
- რა იქნება სიჩქარე იმ დროს, როდესაც ისარი მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს? (ისარგებლეთ ფორმულით $v(t) = v_o + gt$.
- გასროლიდან რა მანძილზე მოშორებით დაეცემა სხეული.

მითითება: ისარგებლეთ $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ ფორმულით; გაითვალისწინეთ, რომ $\sin 180° = 0$.

- დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეცემა ისარი მიწაზე.

6.4. კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

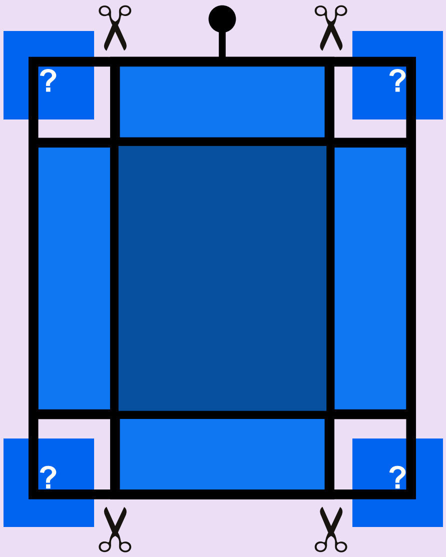
კავშირი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმებს შორის

განვიხილოთ საინტერესო ამოცანა:

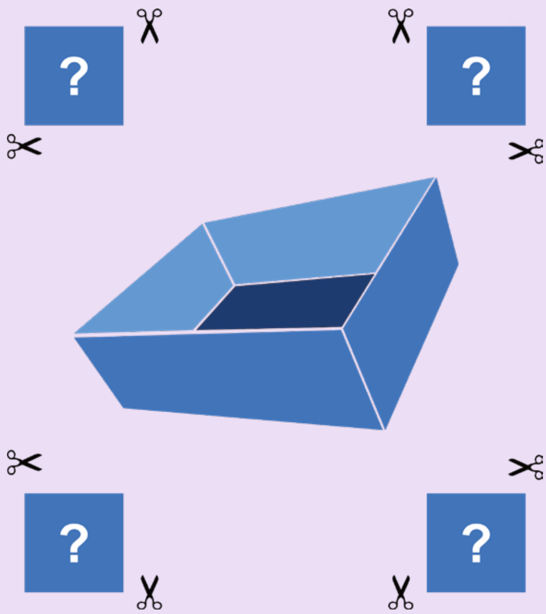
მართკუთხედის ფორმის ქაღალდის სიგრძე და სიგანე შესაბამისად 16 და 12 სმ-ია. (სურ.1)

ქეთის სურს გააკეთოს სასაჩუქრე ყუთი, რომელსაც ექნება მაქსიმალური მოცულობა (სურ.2).

ქეთიმ დაადგინა, რომ ყუთის გასაკეთებლად, თუ მართკუთხედის ფორმის ფირფიტას გვერდებიდან ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს და ისე გააკეთებს ყუთს, მიიღებს შესაძლო მაქსიმალური მოცულობის ყუთს. კვადრატის ნაწილების ჩამოჭრის შემდეგ ქეთის, ასევე, აინტერესებს როგორ გამოითვლება დარჩენილი ფირფიტის ფართობი და მოცულობა, რისთვისაც მან გადაწყვიტა სიტუაციის მათემატიკური მოდელის ჩაწერა.



სურათი 1



სურათი 2

Mathigon აპლიკაცია

– იხილეთ სიტუაციის შესაბამისი სიმულაცია.

შევქმნათ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი

ვიცით, რომ მართკუთხედის სიგრძეა – 16 სმ, ხოლო მართკუთხედის სიგანე –12 სმ,

ვთქვათ, ჩამოჭრილი თითოეული კვადრატის გვერდის სიგრძეა x სმ. მას შემდეგ, რაც ოთხივე წვეროსთან ჩამოეჭრება კვადრატის ფორმის ნაწილი, თითოეული გვერდის სიგრძე იქნება:

სიგრძე – $(16 - 2x)$

სიგანე – $(12 - 2x)$

დარჩენილი მართკუთხედის, ყუთის ძირის, ფართობი იქნება:

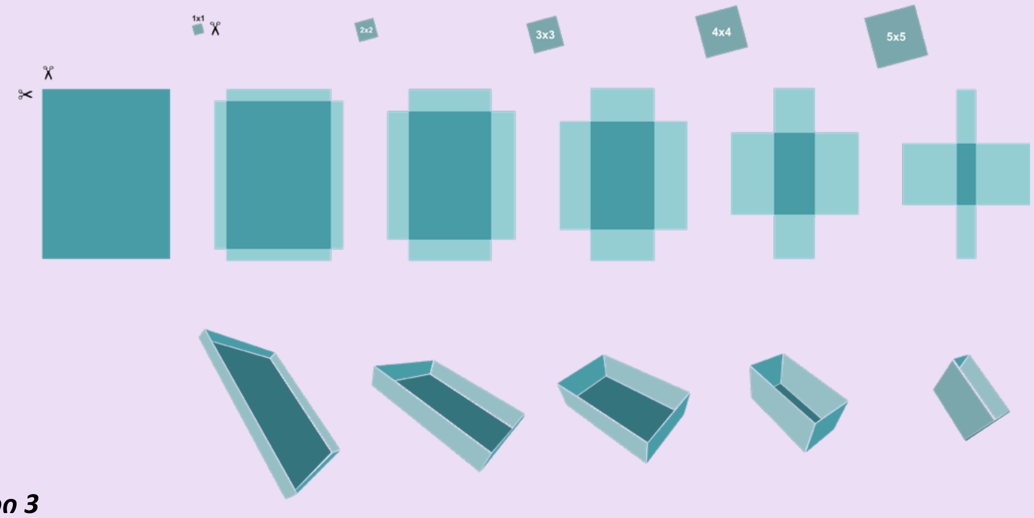
$S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x)$

მიღებული ყუთის სიმაღლე იქნება x სმ და შესაბამისად მოცულობა იქნება:

$V(x) = x(16 - 2x)(12 - 2x)$

როგორც ხედავთ, დარჩენილი ფიგურის, ყუთის ძირის ფართობი და ყუთის მოცულობა დამოკიდებულია ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდის სიგრძეზე. ფართობი დამოკიდებულია კვადრატული წესით, ხოლო მოცულობა კუბური წესით.

სიტუაციის უკეთ გააზრებისთვის, მოვახდინოთ მისი ვიზუალიზაცია. მართკუთხედს ჩამოვაჭრათ კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 სმ, შემდეგ 2 სმ, და ა.შ.



სურათი 3

სურათიდან და ფორმულებიდან ჩანს, რომ დარჩენილი ფიგურის ფართობი იცვლება ჩამოჭრილი კვადრატიდან გამომდინარე, ასევე, იცვლება მიღებული ფიგურის ფორმა და ზომა.

მინიშნება: წყარო [Mathigon – Open box problem]

კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

- ვხედავთ, რომ ფართობის გამოთვლის შემთხვევაში მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომელიც წარმოდგენილია ნამრავლის სახით. ფრჩხილის გახსნის შემდეგ მივიღებთ **სტანდარტულ ფორმას:**

  $S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x) = 192 - 32x - 24x + 4x^2 = 4x^2 - 56x + 192$

- შეგვიძლია, ასევე, წარმოვადგინოთ აღნიშნული დამოკიდებულება წვეროს კოორდინატის სახით:

$S(x) = 4x^2 - 56x + 192$

ვიცით, რომ $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{56}{8} = 7$

$S(x_0) = 4(7)^2 - 56 \cdot 7 + 192 = 196 - 392 + 192 = -4$

წვეროს კოორდინატებია (7;–4)

ფართობი ხდება 0-ის ტოლი, თუ $(16 - 2x)(12 - 2x) = 0$

$$x_1 = 8 \text{ ან } x_2 = 6$$

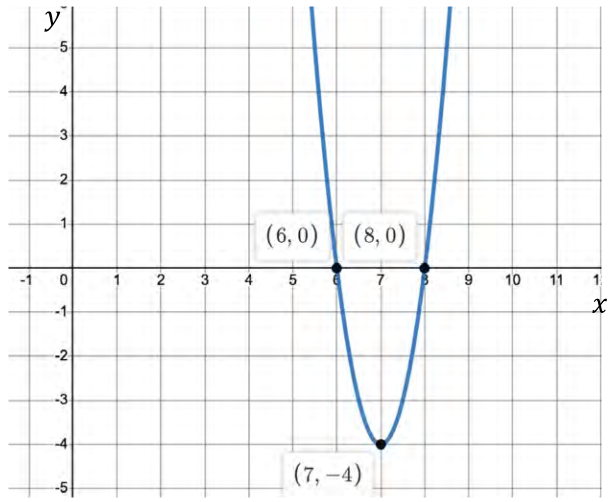
მართკუთხედის სიგანეა 12 სმ, ამიტომ მას ვერ ჩამოვაჭრით კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა 6 სმ ან მეტი, იგი აუცილებლად უნდა იყოს 6 სმ-ზე ნაკლები.

შესაბამისად, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე $D = (0; 6)$.

როგორც დავინახეთ, დარჩენილი ფირფიტის ფართობი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა ზომის კვადრატს ჩამოაჭრიან წვეროებიდან.

Ox ღერძზე გადავზომოთ გვერდის სიგრძე, ხოლო Oy ღერძზე მიღებული ფართობი.

ჩვენ მიერ შედგენილი ფუნქცია, მოცემული იყო ნამრავლის სახით, თუმცა ვიცით, კვადრატული ფუნქციის მოცემის სხვადასხვა გზები, დავამყაროთ კავშირი წარმოდგენის ფორმებს შორის. შეიძლება თუ არა იგივე ფუნქცია ჩავწეროთ სხვა ფორმით?



აღნიშული დამოკიდებულება, კონკრეტულად ფუნქცია, ჩავწერეთ 3 სხვადასხვა განტოლებით:

I. $S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x)$

II. $S(x) = 4x^2 - 56x + 192$

III. $S(x) = 4(x - 7)^2 - 4$

I. **ფორმით** ადვილად ვხედავთ,რომ ფართობი 0-ის ტოლია თუ $x = 8$ ან $x = 6$, თუმცა ვიცით, რომ განსაზღვრის არე $D = (0; 6)$. ვერ ჩამოვაჭრით 6 სმ ან მეტი გვერდის მქონე კვადრატს;

II. **ფორმით** ვადგენთ მარტივად, თუ $x = 0$, საწყისი კვადრატის ფართობია 192;

III. **ფორმით** ვხედავთ წვეროს კოორდინატს, რომელიც მოცემულ კონტექსტში ინფორმაციას არ გვაძლევს იმიტომ, რომ წერტილი განსაზღვრის არეს არ ეკუთვნის.

ჩვენს შემთხვევაში ყველაზე მოსახერხებელი იყო ნამრავლით წარმოდგენა. რეალური პროცესების მოდელირების დროს აუცილებელია შევარჩიოთ ან სიტუაციას შევუსაბამოთ მეტად მოსახერხებელი ფორმულა.

შენიშვნა: ამოცანის ნაწილს, რომელიც დაკავშირებულია მოცულობასთან განვიხილავთ მოგვიანებით.

კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

კვადრატული ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ 3 ფორმულით (განტოლებით):

$y = ax^2 + bx + c$ – სტანდარტული ფორმა

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ – წვეროს კოორდინატით

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ – ნამრავლის სახით წარმოდგენა

ღერძებთან კვეთის წერტილები

როდესაც $x = 0$, ვპოულობთ, რა წერტილში კვეთს პარაბოლა Oy ღერძს

როდესაც $y = 0$, ვადგენთ რა წერტილებში კვეთს, ეხება ან არ კვეთს პარაბოლა Ox ღერძს

წვეროს კოორდინატის დადგენა

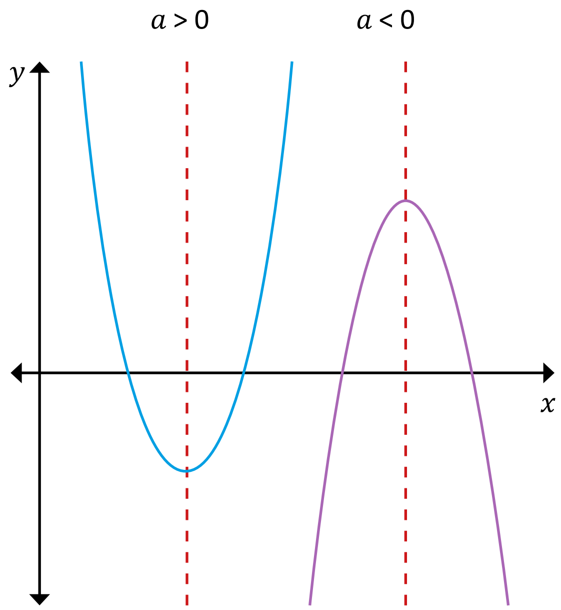
$y = ax^2 + bx + c$

როდესაც მოცემულია სტანდარტული ფორმა, წვეროს კოორდინატის პოვნას შევძლებთ შემდეგი ფორმულით:

$x_0 = \frac{-b}{2a}$; $y_0 = -\frac{D}{4a}$

ასევე, ვიცით, რომ წვეროს კოორდინატზე გავლებული Oy ღერძის პარალელური წრფე წარმოადგენს პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს. შესაბამისად, სიმეტრიის ღერძის განტოლებაა:

$x = x_0$ $x_0 = \frac{-b}{2a}$;



თუ გრაფიკი კვეთს Ox ღერძს, მაშინ წვეროს x კოორდინატი ტოლია:

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

მითითება:

როცა $a > 0$-ზე, $(x_0; y_0)$ – მინიმუმის წერტილია

როცა $a < 0$-ზე, $(x_0; y_0)$ – მაქსიმუმის წერტილია

ნიმუში 1

ა) იპოვეთ განტოლება, რომლის ფესვებია –7 და 5;

ბ) კვადრატული ფუნქცია Ox ღერძს კვეთს წერტილებში –7 და 5, იპოვეთ კვადრატული ფუნქციის განტოლება, თუ ვიცით, რომ $A(3;40)$ წერტილი მდებარეობს აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკზე.

ა) ვიცით, რომ $x_1 = -7$ და $x_2 = 5$

მოცემული ფესვები არის $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ განტოლების ამონახსნები.

ფესვების შეტანით მივიღებთ განტოლებას:

$a(x + 7)(x - 5) = 0$.

რადგან პირობაში არ არის მოცემული არანაირი ინფორმაცია a-ზე, a- შეიძლება იყოს ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი.

მითითება: მიაქციეთ ყურადღება, გამოსახულებაში ფესვებს ვწერთ მოპირდაპირე ნიშნით.

ბ) ვიცით, რომ კვადრატული ფუნქცია კვეთს Ox – ღერძს წერტილებში –7 და 5, ე.ი. აღნიშნულ წერტილებში:

$y = 0$

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ ფუნქციის განტოლება, ვისარგებლოთ ფორმულით:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

ვიცით, რომ $x_1 = -7$ და $x_2 = 5$, ამიტომ

$y = a(x + 7)(x - 5)$

- *როგორ დავადგინოთ რას უდრის a?*

ვიცით, რომ გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი $A(3;40)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x = 3$, $y = 40$.

შევიტანოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ფორმულაში და მივიღებთ:

$40 = a(3 + 7)(3 - 5)$

$40 = -20a$

$a = -2$

მივიღეთ, რომ $y = -2(x + 7)(x - 5)$

თუ გავხსნით ფრჩხილს, მივიღებთ კვადრატული ფუნქციის სტანდარტულ ფორმას

$$y = -2(x_2 - 5x + 7x - 35) =$$
$$= -2x_2 - 4x + 70$$

ნიმუში 2

მოცემული $y = x^2 + 6x + 8$ ფუნქციისთვის

ა) იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ $y = 0$;

ბ) წარმოადგინეთ ფუნქციის განტოლება ნამრავლის ფორმით.

მსჯელობა:

ა) გვაინტერესებს, x-ის რა მნიშვნელობისთვის ხდება შესაბამისი y 0-ის ტოლი. ჩავსვათ y-ის ნაცვლად 0 და ამოვხსნათ მიღებული კვადრატული განტოლება;

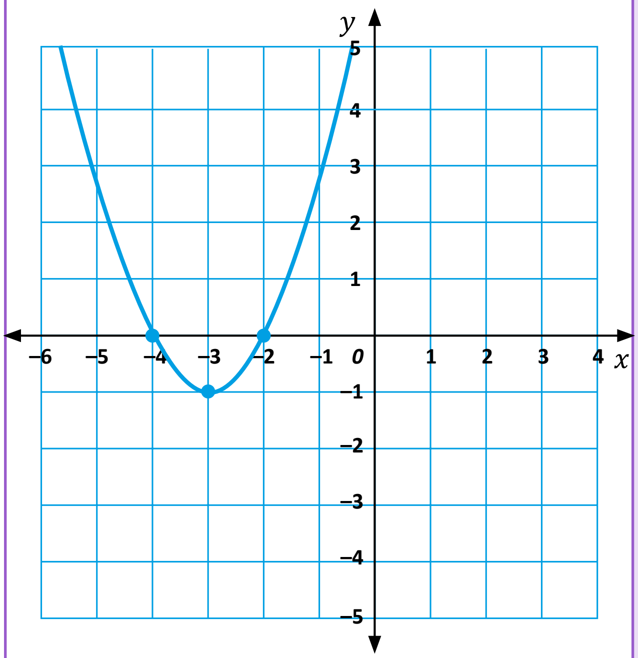
$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$(x + 2)(x + 4) = 0$$
$$x_1 = -2 \text{ ან } x_2 = -4$$

განტოლებას აქვს 2 განსხვავებული ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ გრაფიკი x ღერძს კვეთს ორ წერტილში: (–2; 0) და (–4;0).

!! ყურადღება მიაქციეთ:

ბ) $y = x^2 + 6x + 8$ ნამრავლად წარმოდგება როგორც $y = (x + 2)(x + 4)$

აღნიშნული ფორმით მარტივად ვხედავთ Ox ღერძის გადაკვეთის x კოორდინატს.



ნიმუში 3

მეწარმეს აქვს მასალა, რომლის მეშვეობითაც შეუძლია შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომლის პერიმეტრია 80 მეტრი

- *რა უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ნაკვეთს ჰქონდეს მაქსიმალური ფართობი?* პასუხი დაასაბუთეთ

მსჯელობა:

მეთოდი 1:

ვიცით, რომ მართკუთხედის $P = 80$,

ე.ი. სიგრძე + სიგანე = 40

თუ მათკუთხედის სიგრძეს აღვნიშნავს x-ით, მაშინ სიგანე იქნება $(40 - x)$;

მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

გაგრძელება

$S = x(40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x$

მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა: $D = (0; 40)$.

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება ფართობი მაქსიმალური. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ პარაბოლის მაქსიმუმის წერტილი.

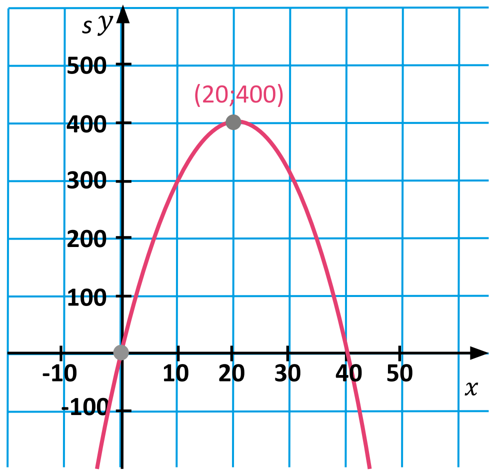
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \cdot (-1)} = 20$$

$$y_0 = -(20)^2 + 40 \cdot 20 = 400$$

როდესაც მართკუთხედის სიგრძე იქნება 20 სმ, მაშინ სიგანე იქნება 40 – 20 = 20 სმ, ხოლო ფართობი იქნება მაქსიმუალური.

ე.ი. მაქსიმალურ ფართობს მივიღებთ, თუ ავაგებთ კვადრატის ფორმის მიწის ნაკვეთს.

მითითება: აღნიშნული ტიპის ამოცანები სასკოლო პროგრამაში გვხვდება მე-4 და მე-5 კლასიდან, მათ მოსწავლეები ხსნიან ცდის (სინჯვის) მეთოდით და მიდიან დასკვნამდე, თუმცა ახლა უკვე შესაძლებელია მათემატიკური ფორმულებით დავასაბუთოთ მიღებული შედეგი.



მეთოდი 2:

გრაფიკული ამოხსნა

მას შემდეგ რაც დავადგენთ, რომ ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$S = x(40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x$

ტექნოლოგიების მეშვეობით კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებით მარტივად დავადგენთ წვეროს კოორდინატს და შესაბამისად, დავწერთ ამოხსნას და დასკვნას.

სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემული ფუნქციისთვის შეასრულე შემდეგი:

- ჩაწერე ფუნქცია $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით.
- ჩაწერე ფუნქცია $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ფორმით.

ა) $y = x^2 + 6x + 8$; გ) $y = x^2 - 8x + 7$; ე) $y = 2x^2 - 8x + 8$;

ბ) $y = x^2 - 4x + 3$; დ) $y = 2x^2 + 5x + 3$; ვ) $y = -x^2 - 2x + 3$.

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის x **ღერძთან** გადაკვეთის წერტილის კოორდინატი:

ა) $y = (x + 1)(x - 4)$; დ) $y = (x + 1)(x - 2)$;

ბ) $y = -(x - 3)(x - 2)$; ე) $y = -2(x + 5)(x - 3)$;

გ) $y = (2x - 8)(x + 1)$; ვ) $y = (3x + 9)(2x - 1)$.

3. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის y **ღერძთან** გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

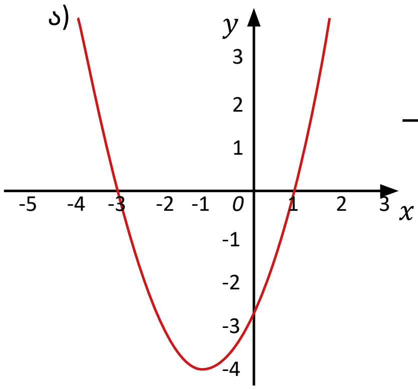
ა) $y = (x + 1)(x - 5)$; დ) $y = -(x + 1)(x - 2)$;

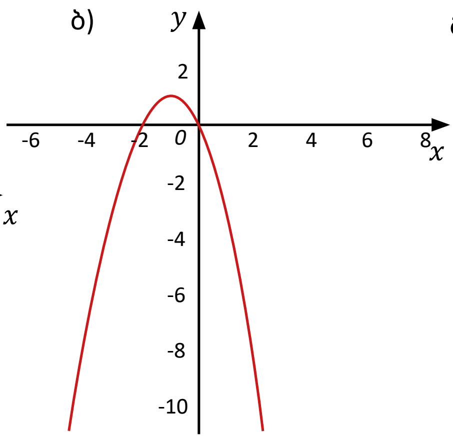
ბ) $y = -(x + 6)(x - 1)$; ე) $y = (x + 6)^2$;

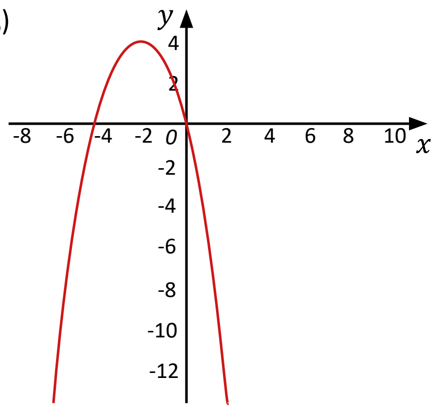
გ) $y = -(2x + 1)(x + 1)$; ვ) $y = (2x - 6)^2$.

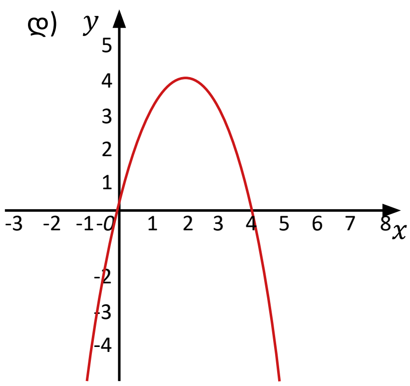
4. ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის გრაფიკები, ნახაზიდან გამომდინარე დაადგინე Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

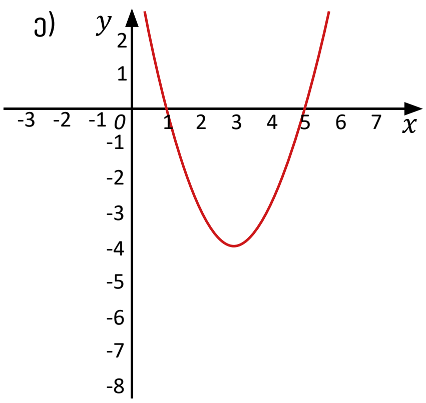
გამოწვევა: ჩაწერეთ თითოეული ფუნქციის განტოლება.

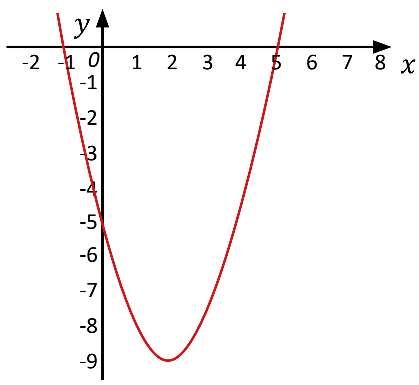
ა)


ბ)


გ)


დ)


ე)


ვ)


სავარჯიშოები

5. $y = 6x^2 - x - 5$ ფუნქციისთვის იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $y = 0$; ბ) $y = -3$.

6. ჩაწერეთ თითოეული ფუნქცია წვეროს კოორდინატის ფორმით:

- დაადგინეთ თითოეულის წვეროს კოორდინატები;
- დაადგინეთ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;
- დაადგინეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;
- ააგეთ გრაფიკები.

ა) $y = x^2 - 4x + 4$; დ) $y = x^2 + 2x + 5$;
ბ) $y = 4x^2 + 6x$; ე) $y = 2x^2 - 4x + 6$;
გ) $y = -2x^2 + 8x + 4$; ვ) $y = x^2 + 3x - 4$.

7. მოცემულია $y = 5x^2 + 6x + 8$. იპოვეთ y – ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $x = 0$; ბ) $x = -1$; გ) $x = -3$.

8. მოცემულია $y = -4x^2 + x + 5$, იპოვეთ y-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $x = 3$ ბ) $x = -2$ გ) $x = -\frac{5}{4}$

9. მოცემულია $y = x^2 + 6x$, იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $y = 0$; ბ) $x = -8$; გ) $y = -10$

10. შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა ეს წერტილები მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე?

ა) ეკუთვნის თუ არა $A(3;-7)$ და $B(-2;4)$ წერტილები $y = -2x^2 + 3x + 2$ ფუნქციას? მდებარეობს თუ არა გრაფიკზე?

ბ) ეკუთვნის თუ არა $A(1;2)$ და $B(2;1)$ წერტილები $y = 7x^2 - 3x - 2$ ფუნქციას? მდებარეობს თუ არა გრაფიკზე?

11. **გამოწვევა:**

ა) $C(2; k)$ წერტილი ძევს $y = 2x^2 - 3x - 2$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ k.

ბ) $D(2; d)$ წერტილი ძევს $y = -9x^2 - x - 2$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ d.

გ) $E(n;37)$ წერტილი ძევს $y = 11x^2 - 3x - 1$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ n.

დ) $F(m; -15)$ წერტილი ძევს $y = -3x^2 - 7x - 5$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ m.

სავარჯიშოები

MATH Lab – ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ამოცანა, აღნიშნულ ამოცანებს ოპტიმიზაციის ამოცანები ეწოდებათ.

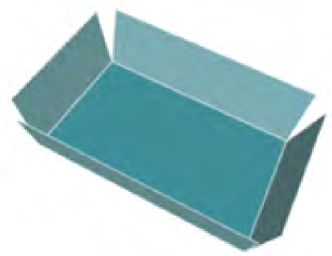
იმისათვის, რომ უფრო აღქმადი და თვალსაჩინო გახდეს ამოცანა, განვიხილოთ შემდეგი სიტუაცია.

სტუდენტს სურს ააგოს პროფესიული კოლეჯის სპორტული ინვენტარის საცავი, რომელსაც ექნება მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა და გამომდინარე იმ რესურსებიდან, რომლებიც აქვს, სურს, რომ ჰქონდეს მაქსიმალური მოცულობა.

დასაწყისისთვის სტუდენტს აქვს 24 მ სიგრძის და 18 მ სიგანის ფოლადის ფირფიტა. მოსწავლემ დაადგინა, რომ თუ გვერდებზე ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს და ისე შეადგენს ყუთის ფორმის საცავს, მიიღებს მაქსიმალურ მოცულობას.

საკვანძო კითხვა:

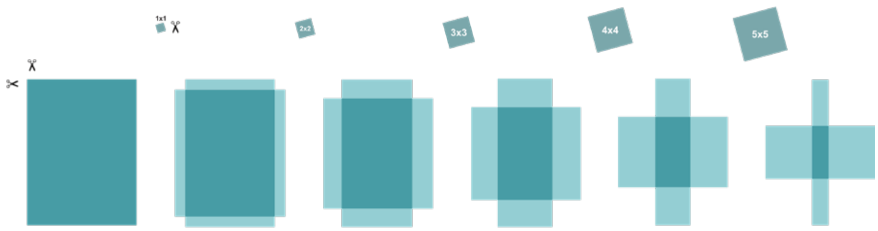
რა ზომის კვადრატები უნდა ჩამოიჭრას ოთხივე კუთხიდან, რომ მისგან დამზადდეს მაქსიმალური ტევადობის თავღია ყუთის ფორმის საცავი?



ინსტრუქცია ამოცანის ამოხსნისთვის:

ჩაატარეთ ცდები: ჩამოაჭერით მართკუთხედს კვადრატები, რომლის გვერდის სიგრძეა: $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$ და ა.შ.

- დააორგანიზეთ ინფორმაცია ცხრილში *(იხილეთ ცხრილი 1)*
- გამოთვალეთ მიღებული ფიგურის ფართობი (ჩამოჭრის შედეგად დარჩენილი ფირფიტის ფართობი იქნება, შედგენილი საცავის ზედაპირის ფართობი).
- თითოეული შემთხვევისთვის გამოთვალეთ რა შეიძლება იყოს ყუთის ფორმის საცავის მოცულობა.



გაგრძელება

სავარჯიშოები

MATH Lab – ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

დაორგანიზეთ ცდების შედეგებით მიღებული ინფორმაცია ცხრილში.

იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია, თუ როგორ არის შესაძლებელი გამოთვლების შესრულება ფასიანი EXCEL-ის მეშვეობით.

ცხრილი 1

x	ჩამოჭრის შემდეგ სიგრძე	ჩამოჭრის შემდეგ სიგანე	სიმაღლე (საცავის სიღრმე)	ფართობი	მოცულობა

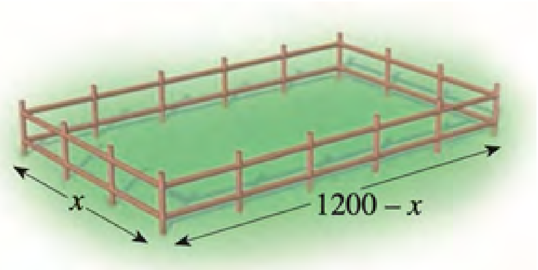
განზოგადება, **სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა განტოლების მეშვეობით.**

კიდევ სცადეთ

- შეადგინეთ ფორმულა, რომლის მეშვეობით შესაძლებელი იქნება დარჩენილი მართკუთხედის ფირფიტის, საცავის ძირის, ფართობის გამოთვლა x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.
- შეადგინეთ მიღებული საცავის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა.

13. **ოპტიმიზაციის ამოცანა:**

მეწარმეს აქვს მასალა, რომლის მეშვეობითაც შეუძლია შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომლის პერიმეტრია 2400 მეტრი.



რა უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ნაკვეთს ჰქონდეს მაქსიმალური ფართობი?

პასუხი დაასაბუთეთ.

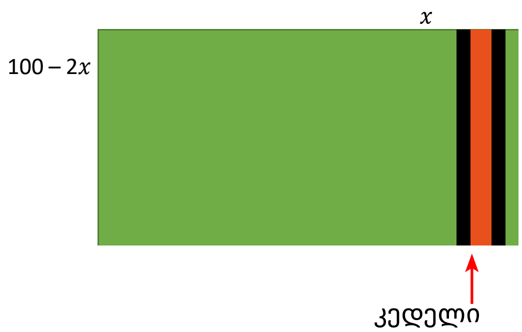
14. **იფიქრე გეგმაზე.** დავუშვათ, რომ თქვენ მუშაობთ კომპანიაში და პროდუქციისთვის ქმნით ყუთს, რომელსაც აქვს მართკუთხედის ფორმის ფუძე 36 სმ პერიმეტრით. ყუთის სიმაღლე უნდა იყოს 4 სმ.

- რა უნდა იყოს ფუძეში მყოფი მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, რომ ფართობი იყოს მაქსიმალური? **მითითება:** შემოიტანეთ აღნიშვნა, დავუშვათ ყუთის გვერდის სიგრძეა x სმ, ჩაწერეთ რა იქნება სიგანე და ფართობი
- მას შემდეგ, რაც დაადგენთ რა ზომების შემთხვევაშია შესაძლებელი მაქსიმალური ფართობის მიღება ფუძეში, რა იქნება ყუთის მოცულობა?

სავარჯიშოები

MATH Lab – **ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის**

15. **ოპტიმიზაციის ამოცანა**: **გამწვანება.** სკოლის ადმინისტრაცია გეგმავს სათამაშო მოედნის აშენებას. მას სურს მართკუთხედის ფორმის სივრცის შემოღობვა არსებული კედლის გამოყენებით. იპოვეთ ყველაზე დიდი ფართობი, რომლის შემოღობვაა შესაძლებელი 100 მეტრი სიგრძის ღობით?



16. ბილიარდის მაგიდის მწარმოებელმა აღმოაჩინა, რომ თვიურად n მაგიდის წარმოების ღირებულება ლარებში დაითვლება $R=2n^2-32n+100$ ფორმულით, სადაც R-არის წარმოების ღირებულება, ხოლო n-არის დამზადებული მაგიდების რაოდენობა.

- რამდენი მაგიდა უნდა დაამზადოს ერთ თვეში, რომ წარმოების ღირებულება მინიმუმამდე დაიყვანოს?
- რა იქნება თითეული მაგიდის მინიმალური ღირებულება?
- რა იქნება ერთი მაგიდის ღირებულება ლარში თუ თვეში დაამზადებს 20 მაგიდას?

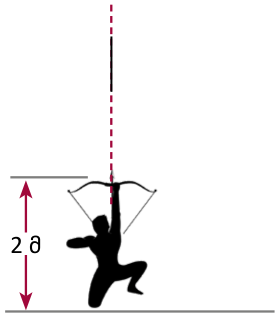
STEM დავალება – **კავშირი ბუნებისმეტყველებასთან:**

17. მეცნიერებმა აღრიცხეს გადაშენების პირას მყოფი ერთ-ერთი სახეობის ფრინველები და დაადგინეს, რომ პოპულაციის ზრდა გამოითვლება ფორმულით: $P=-0.5t^2+130t+1350$, სადაც P-არის ფრინველების პოპულაცია (რაოდენობა), ხოლო t – თვეების რაოდენობა.

თუ არაფერი შეიცვალა და ფრინველებმა დაიწყეს გამრავლება მოცემული წესით:

- რამდენი ფრინველი იყო საწყის ეტაპზე? (მაშინ, როდესაც მეცნიერებმა დაიწყეს ფრინველების აღწერა?)
- რამდენი ფრინველი იქნება 2 თვის შემდეგ? 5 თვის შემდეგ? 10 თვის შემდეგ?
- რამდენი თვის შემდეგ მიაღწევს მაქსიმალურ რაოდენობას ფრინველთა პოპულაცია?
- როდის იქნება ფრინველების რაოდენობა 4800-ის ტოლი?
- რამდენი თვის შემდეგ გახდება 0-ის ტოლი პოპულაცია? (ანუ გადაშენდება პოპულაცია?)

6.5. ფუნქციის ანალიზი. ზრდადობა კლებადობისა და ნიშანმუდმივობის შუალედი



როდესაც კუთხით ხდება სხეულის გასროლა, ვხედავთ, რომ დროის რაღაც მომენტში სხეული ადის ზემოთ, შორდება მიწის ზედაპირს და შემდეგ ჩამოდის ქვემოთ.

საკვანძო კითხვა: როგორ ხდება მოცემული სიტუაციის აღწერა/ჩაწერა მათემატიკურად?

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ტელევიზიებისა თუ სხვადასხვა მედია საშუალების მეშვეობით ვეცნობით ინფორმაციას. ინფორმაცია ხშირად წარმოდგენილია დიაგრამების, ცხრილების მეშვეობით.

გრაფიკით ინფორმაციის წარმოდგენა ერთ-ერთი თვალსაჩინო მეთოდია, რომელიც აადვილებს ინფორმაციის აღქმას და ანალიზს.

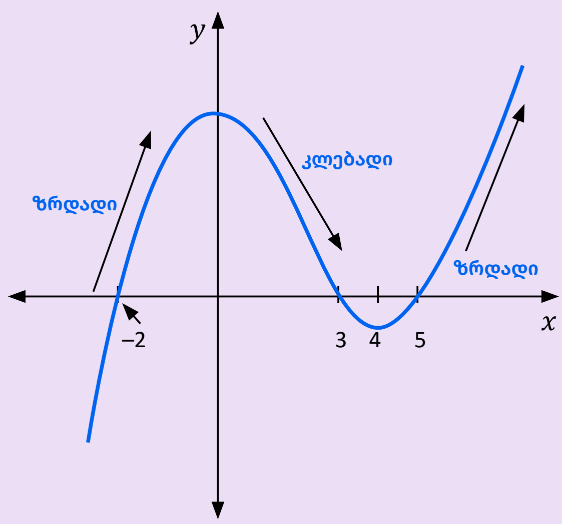
თანამედროვე ცხოვრებაში აუცილებლად უნდა ვიცოდეთ გრაფიკით მოწოდებული სხვადასხვა ინფორმაციის წაკითხვა.

მონაცემთა წყარო: საქსტატი

წყარო Forbes , საქსტატი

გრაფიკით ვხედავთ, რომ 2013 წლიდან 2014 წლამდე იყო ეკონომიკური ზრდა, ხოლო 2019-დან 2020-მდე ეკონომიკური კლება.

შევადაროთ აღმართზე ასვლას და ჩამოსვლას, როდესაც ვუყურებთ გრაფიკს, გარკვეული წერტილიდან „ზემოთ ასვლაზე" ვამბობთ – ზრდადია, ხოლო „ქვემოთ ჩამოსვლაზე" ვამბობთ კლებადია.



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

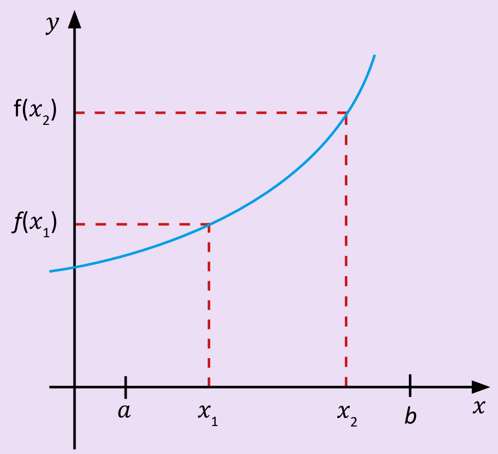
განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე $[a;b]$.

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) > f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია.



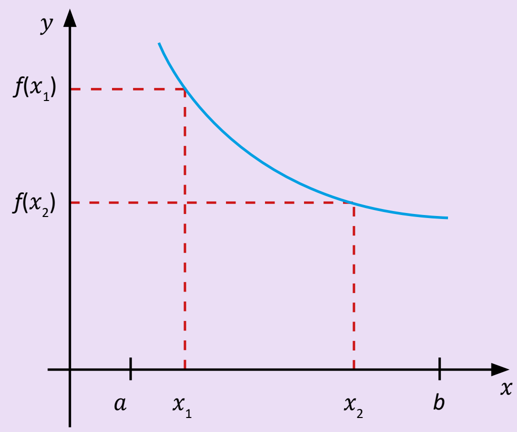
განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე $[a;b]$.

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) < f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე ფუნქცია კლებადია.



განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე

$[a;b]$

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი

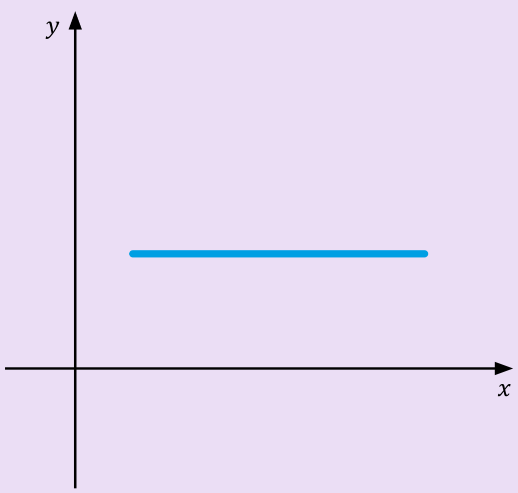
x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) = f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე

ფუნქცია მუდმივია.



ნიმუში 1

მოცემულია ა) $y = x^2 - 2x - 3$ და ბ) $y = -4x^2 + 12x - 9$ ფუნქცია.

დავადგინოთ რომელ ინტერვალზეა ფუნქცია ზრდადი, კლებადი

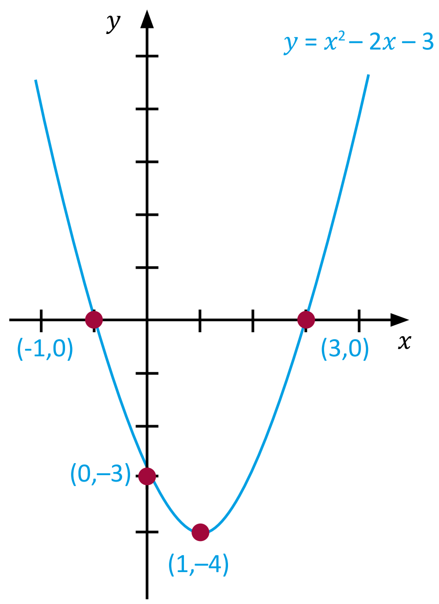
ა) გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ მოცემული ფუნქციის $y = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

წვეროს კოორდინატებია $(1; -4)$.

$(-\infty; 1]$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის კლებადი.

$[1; +\infty)$ ინტერვალზე კი კვადრატული ფუნქცია არის ზრდადი.

$(1; -4)$ – არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.



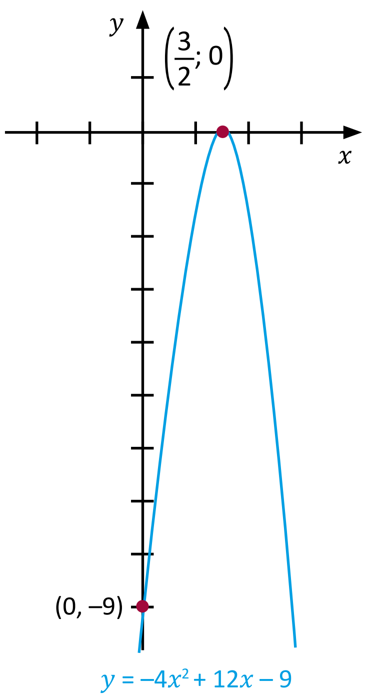
ბ) გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ მოცემული $y = -4x^2 + 12x - 9$ ფუნქციის

წვეროს კოორდინატებია $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის ზრდადი.

$\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის კლებადი.

$\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ – არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.



ნიმუში 2

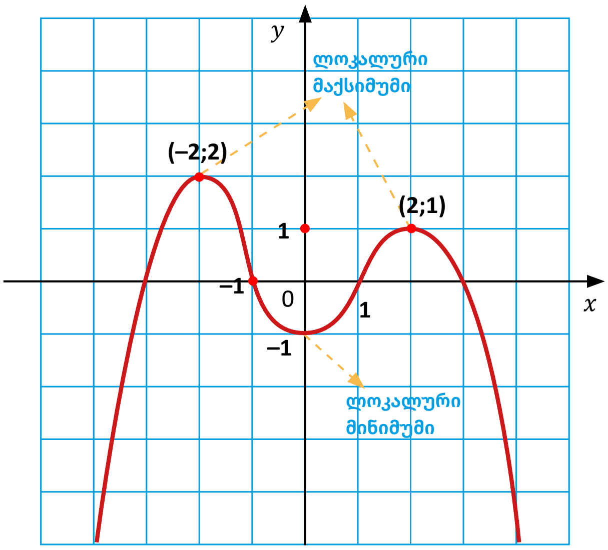
მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ გრაფიკის ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებია:

$(-2;2),(0;-1),(2;1)$

მიღებული x კოორდინატები გვეხმარება განსაზღვრის არეზე მოვნიშნოთ ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები.

ლოკალური მაქსიმუმი ის წერტილია, რომელზეც ფუნქცია ზრდადობას ცვლის კლებადობით. ანალოგიურად, ლოკალური მინიმუმის წერტილი ის წერტილია, რომელზეც ფუნქცია კლებადობას ცვლის ზრდადობით.



როდესაც $x\epsilon(-\infty;-2)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება და y იღებს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან 2-მდე.

როდესაც $x\epsilon(-2;0)$, მაშინ y=f(x) ფუნქცია მცირდება და y იღებს მნიშვნელობებს 2-დან –1-მდე.

როდესაც $x\epsilon(0;2)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება და y იღებს მნიშვნელობებს –1-დან 1-მდე.

როდესაც $x\epsilon(2;+\infty)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება და y იღებს მნიშვნელობებს 1-დან $-\infty$-მდე.

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები განსაზღვრის არეზე, ჯერ ვპოულობთ ინტერვალზე მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილის კოორდინატებს, სადაც ზრდადობა იცვლება კლებადობით. ზოგადად, ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმები ეწოდებათ.

ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ძალიან მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ გრაფიკიდან ინფორმაციის წაკითხვა და ანალიზი.

მოცემულ გრაფიკზე ვხედავთ, რომ გარკვეულ ადგილებში გრაფიკის ნაწილი არის საკოორდინატო სიბრტყის I და II მეოთხედში, ან III, IV მეოთხედებში.

განსაზღვრის არეს გარკვეული ქვესიმრავლისთვის $y > 0$-ზე, ხოლო გარკვეული ქვესიმრავლისთვის $y < 0$-ზე. აღნიშნულ შუალედებს (ინტერვალებს) ეწოდება, ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები.

ქვემოთ განვიხილოთ ნიმუშები, რომელიც დაგვეხმარება ფუნქციის ნიშნის კვლევაში.

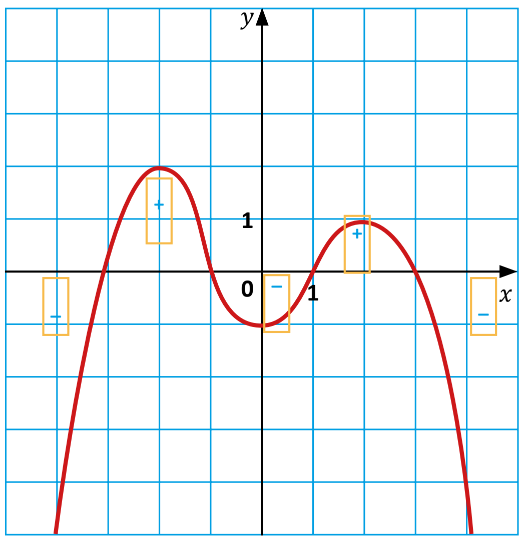
ნიმუში 3

მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

გამომდინარე იქიდან, თუ რომელ მეოთხედშია გრაფიკი განთავსებული, ადგენს ფუნქციის ნიშანს.

როდესაც გრაფიკის ნაწილი განთავსებულია:

- I და II მეოთხედში, მაშინ შესაბამის ინტერვალზე ფუნქცია (y) არის დადებითი;
- III და IV მეოთხედებში, მაშინ შესაბამის ინტერვალზე ფუნქცია (y) არის უარყოფითი.



იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის ნიშანი:

- ვპოულობთ გრაფიკის მიერ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს;
- ვყოფთ Ox ღერძს ინტერვალებად;
- თითოეული ინტერვალისთვის ვადგენთ ფუნქციის შესაბამის ნიშანს.

განვიხილოთ ნიმუშ 3-ში მოცემული გრაფიკი:

- გრაფიკის მიერ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია:

$$(-3;0)\ ,(-1;0)\ ,(1;0),(3;0)$$

- როდესაც $x < -3$, მაშინ x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის ინტერვალიდან $(-\infty;-3)$ ფუნქცია უარყოფითია, ე.ი. y-ის შესაბამისი მნიშვნელობა უარყოფითია;
- როდესაც $-3 < x < -1$, მაშინ ფუნქცია დადებითია;
- როდესაც $-1 < x < 1$, მაშინ ფუნქცია უარყოფითია;
- როდესაც $1 < x < 3$, მაშინ ფუნქცია დადებითია;
- როდესაც $x > 3$, მაშინ ფუნქცია უარყოფითია.

ნიმუში 4

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქცია, როდესაც $a > 0$ –ზე .
დაადგინეთ x-ის რა მიშვნელობისთვის არის $y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი?

x-ის რა მიშვნელობისთვის არის

$y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია დადებითი, ნიშნავს რომ ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი (ანუ x) რომლისთვისაც $y > 0$-ზე.

x-ის რა მიშვნელობისთვის არის

$y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია უარყოფითი, ნიშნავს ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი (ანუ x) რომლისთვისაც $y < 0$-ზე.

ვიპოვოთ გრაფიკის Ox ღერძთან კვეთის წერტილები:

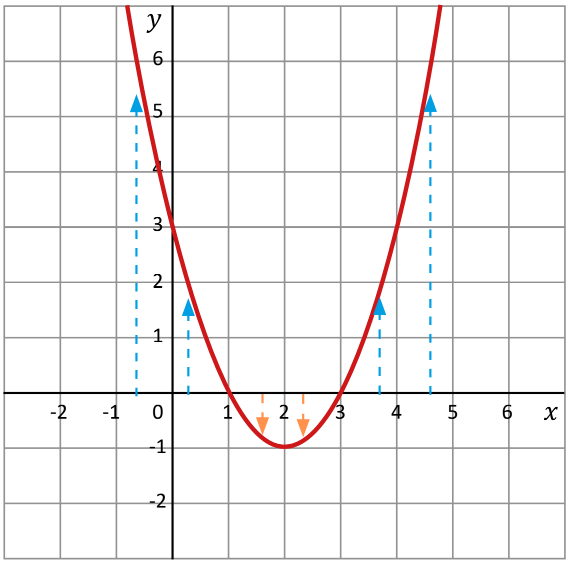
როცა $y = 0$, მაშინ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ან } x_2 = 3$$

Ox ღერძის კვეთის წერტილებია (1;0) (3; 0).

მოვნიშნოთ აღნიშნული წერტილები გრაფიკზე.



ხედავთ, რომ

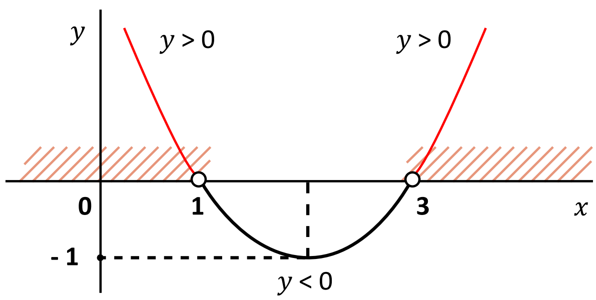
- როდესაც $x < 1$ ან $x > 3$

პარაბოლას შტოები არის I და II მეოთხედში, ე.ი. $y > 0$-ზე.

- როდესაც $1 < x < 3$

პარაბოლას ნაწილი მოთავსებულია IV მეოთხედში, ე.ი. $y < 0$-ზე.

მეტი თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ იგივე ფუნქციის შემდეგი ნახაზი:



ნიმუში 5

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქცია, როდესაც $a < 0$-ზე.
დაადგინეთ x-ის რა მიშვნელობისთვის არის $y = -x^2 + 4x - 3$ ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი?

ვიპოვოთ გრაფიკის Ox ღერძთან კვეთის წერტილები:

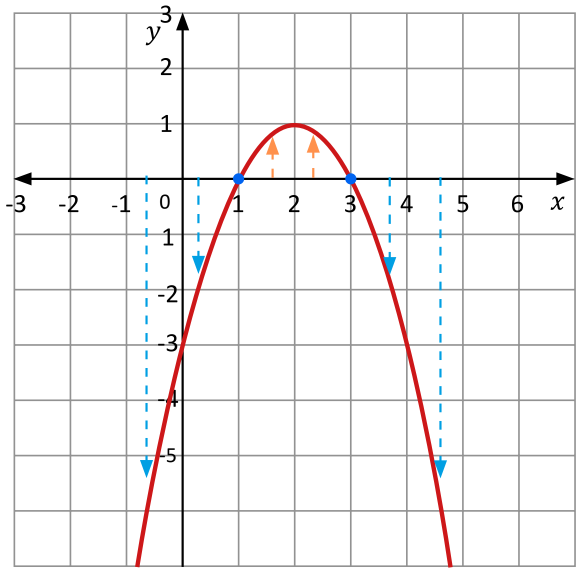
როცა $y = 0$, მაშინ $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$$-(x-1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ან } x_2 = 3$$

Ox ღერძის კვეთის წერტილებია (1;0) (3; 0).

მოვნიშნოთ აღნიშნული წერტილები გრაფიკზე;



ვხედავთ, რომ

- როდესაც $x < 1$ ან $x > 3$

პარაბოლას შტოები არის III და IV მეოთხედში, ანუ $y < 0$-ზე.

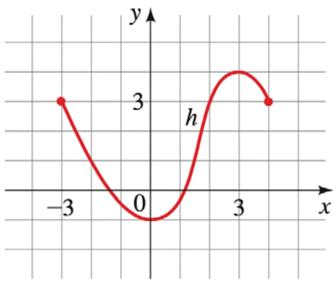
- როდესაც $1 < x < 3$

პარაბოლას ნაწილი მოთავსებულია I მეოთხედში ანუ $y > 0$-ზე.

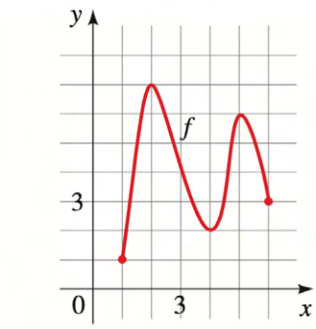
სავარჯიშოები

1. გრაფიკიდან გამომდინარე დაადგინეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

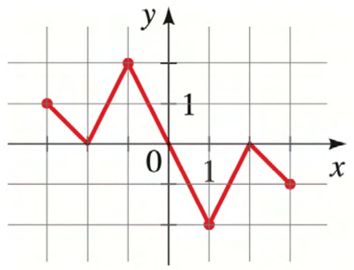
ა)



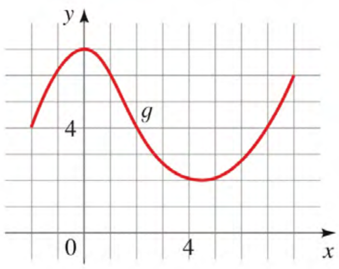
ბ)



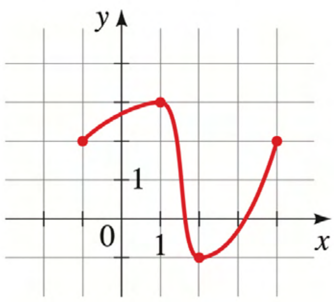
გ)



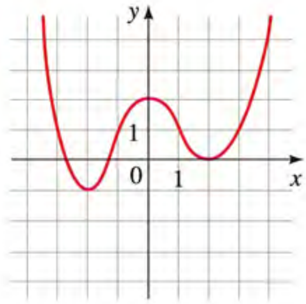
დ)



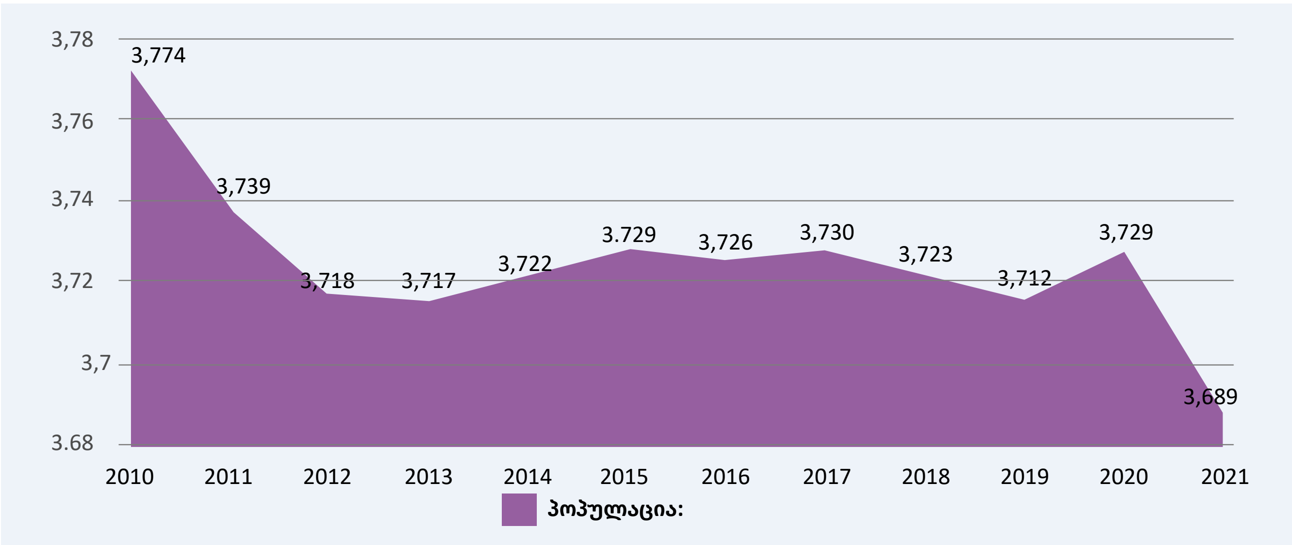
ე)



ვ)



2. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობა 2010-დან 2021 წლის ჩათვლით.



წყარო: www.Ceicdata.com

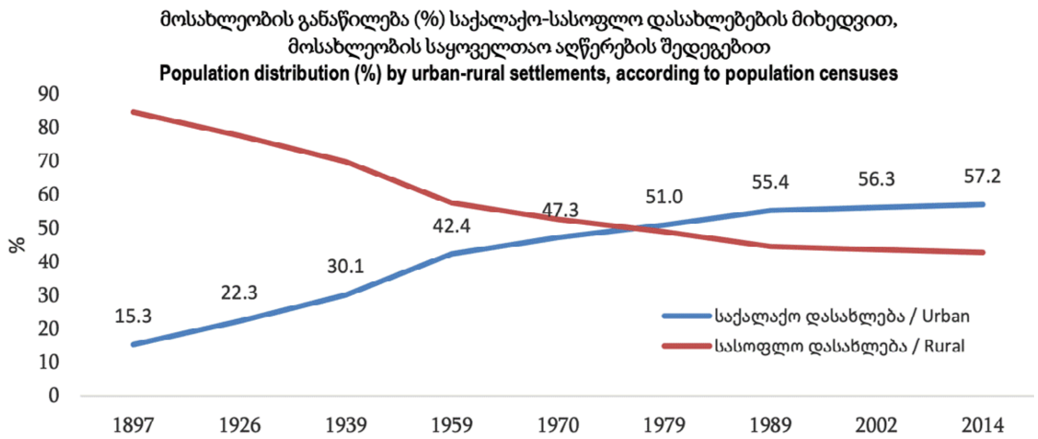
Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო Oy ღერძი მოსახლეობის რაოდენობას მილიონებში.

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- ამოწერეთ რამდენით იზრდებოდა ან მცირდებოდა მოსახლეობა ყოველწლიურად?

სავარჯიშოები

3. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის განაწილება პროცენტულად საქალაქო და სასოფლო დასახლებების მიხედვით 1897 წლიდან 2014 წლამდე საყოველთაო აღწერების შედეგებით.



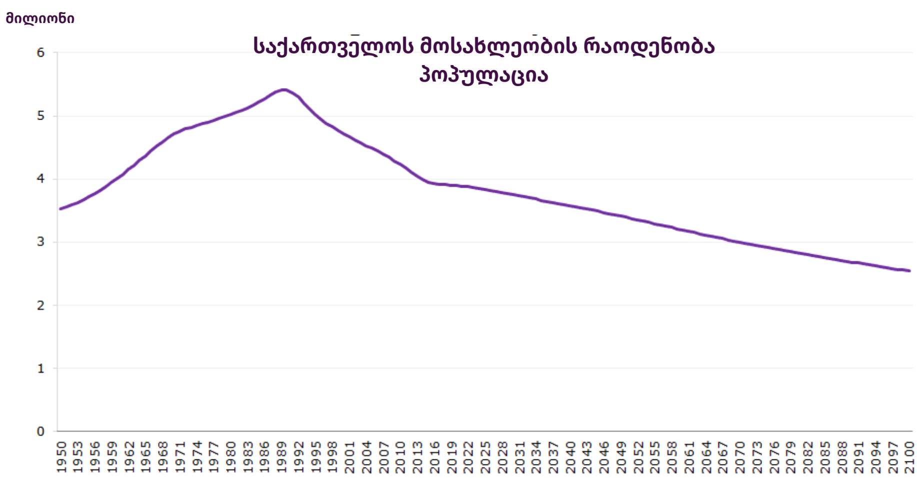
წყარო: [Geostat]

Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო Oy ღერძი პროცენტულ მაჩვენებელს.

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- აღწერეთ დინამიკა;
- რომელ წლებში იყო საქალაქო დასახლების მკვეთრი ზრდა?
- რომელ წლებში იყო სასოფლო დასახლების მკვეთრი კლება?
- რა ხდებოდა 1897 წლიდან 1959 წლამდე?
- რა ხდებოდა 1989 წლიდან 2014 წლამდე?

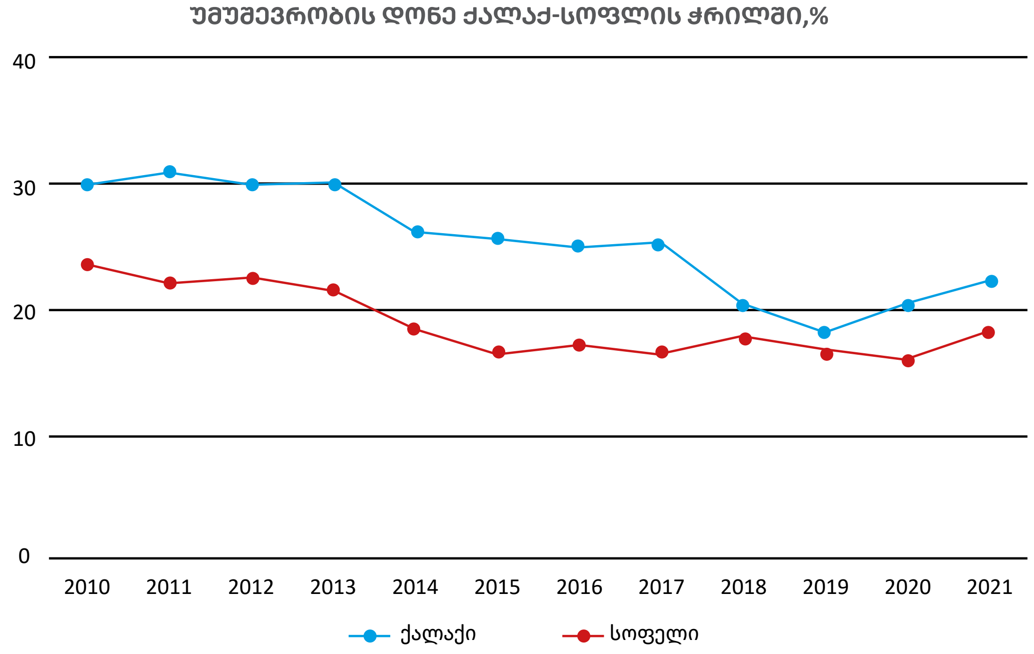
4. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობის დინამიკა 1950 წლიდან 2022 წლამდე და შემდგომ მოცემულია პროგნოზი. რა იქნება საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობა 2100 წლისთვის, თუ იმავე დინამიკით გაგრძელდება კლება?



სავარჯიშოები

წყარო: THEGLOBALGRAPH.COM *Ox* ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო *Oy* ღერძი რაოდენობას მილიონებში.
გრაფიკიდან დაადგინეთ: ▪ რომელ წლებში იზრდებოდა საქართველოს მოსახლეობა და როდის მიაღწია მაქსიმალურ რაოდენობას მე-20 საუკუნეში? დაახლოებით რამდენით გაიზარდა აღნიშნულ პერიოდში? ▪ რომელი წლიდან დაიწყო კლება და დაახლოებით რამდენით შემცირდა მოსახლეობა 2022 წლამდე?

5. განვიხილოთ უმუშევრობის დონის აღმწერი გრაფიკები.

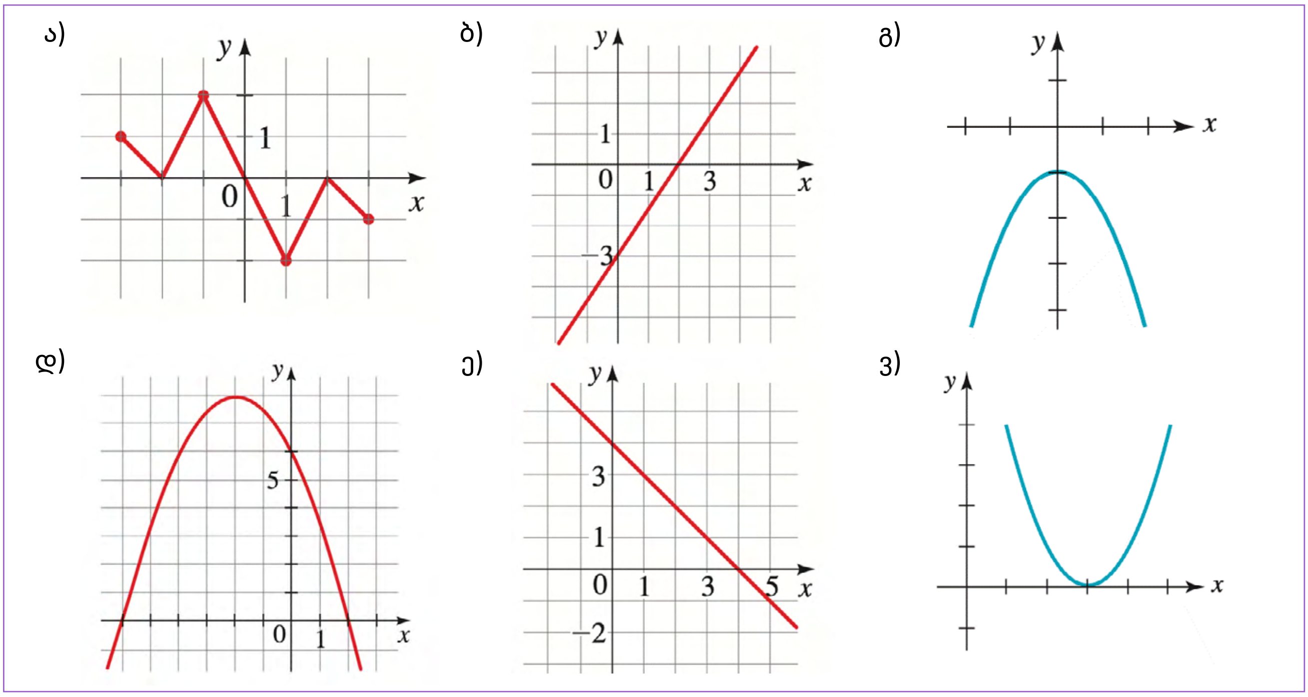


წყარო: GEOSTAT *Ox* ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო *Oy* ღერძი პროცენტულ მაჩვენებელს.
გრაფიკიდან ჩანს, რომ 2017 დან 2019-მდე ქალაქში უმუშევრობის დონე შემცირდა (აღინიშნება კლება). ▪ გააანალიზეთ თითოეული გრაფიკი, იმჯელეთ რომელ წლებში იყო უმუშევრობის დონის ზრდა? კლება? ▪ იფიქრეთ, რა გარემოებებს შეეძლო გამოეწვია უმუშევრობის დონის ზრდა 2019 წლიდან? ▪ მოიძიეთ ინფორმაცია, თუ როგორია დასაქმების ან უმუშევრობის დონე სხვა ქვეყნებში და გააანალიზეთ სიტუაცია.

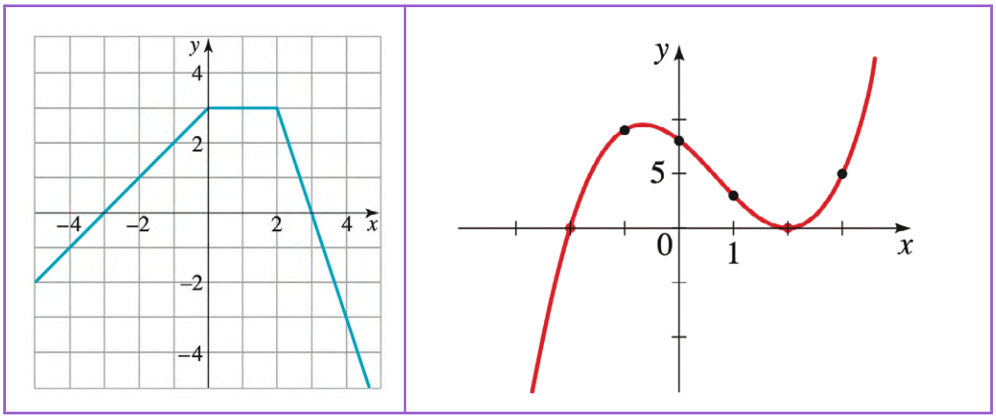
6. ინტერნეტის მეშვეობით მოიძიეთ ინფორმაცია თქვენთვის საინტერესო თემებზე და გააანალიზეთ გრაფიკულად მოცემული ინფორმაცია.

სავარჯიშოები

7. იპოვეთ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები (ამოწერეთ x-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის ფუნქცია დადებითი და როდის უარყოფითი)



8. ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე, დაადგინეთ, როგორც ზდადობისა და კლებადობის შუალედები, ასევე ნიშანმუდმივობის შუალედები.



9. **გამოწვევა:** დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა/კლებადობის და ნიშანმუდმივობის შუალედები:

ა) $y = x^2 + 5x + 4$; დ) $y = (x-5)^2 + 4$;

ბ) $y = -2x^2 + 12x - 4$; ე) $y = -(x+3)^2 - 4$;

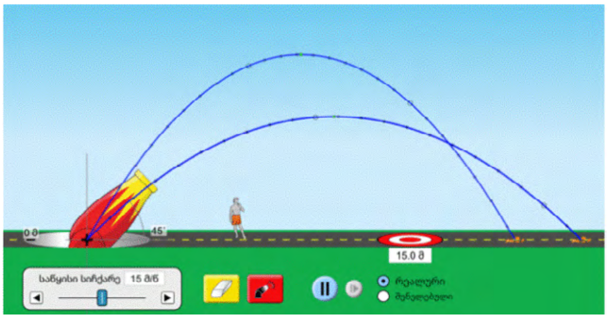
გ) $y = (x-4)(x+3)$; ვ) $y = (2x+10)(x-1)$.

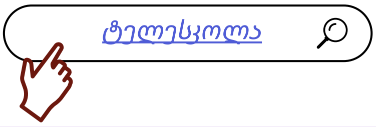
მითითება: გრაფიკები შეგიძლიათ ააგოთ რვეულში, ან ააგეთ ტექნოლოგიების გამოყენებით, შეინახეთ word-ის ფაილში და თითოეულს მიუთითეთ, როგორც ზრდადობა/კლებადობის, ასევე ნიშანმუდმივობის შუალედები და აღწერა.

6.6. კვადრატული უტოლობის ამოხსნა გრაფიკულად

როდესაც კუთხით ხდება სხეულის გასროლა, ჩვენ ვხედავთ რომ დროის რაღაც მომენტში სხეული ადის ზემოთ, შემდეგ კი ჩადის ქვემოთ.

? საკვანძო კითხვა: როგორ ხდება მოცემული სიტუაციის აღწერა მათემატიკურად?





ვიცით, რომ:

$ax + b > 0$ ან $ax + b < 0$ უტოლობებს, სადაც x ცვლადია და a,b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობა ეწოდება.

ნიმუში 1:

- *დავუშვათ* $a > 0$, *განვიხილოთ უტოლობა* $2x + 4 > 0$,

  უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

  $$x > -2$$

- *დავუშვათ* $a < 0$, განვიხილოთ უტოლობა $-2x + 4 > 0$,

  უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

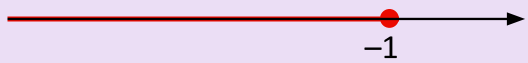
  $-2x > -4$; $x < 2$

  მითითება: როდესაც უტოლობის ორივემხარეს ვყოფთ უარყოფით რიცხვზე, უტოლობის ნიშანი იცვლება.

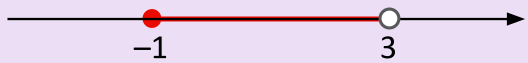
ნიმუშები

უტოლობის ამონახსნის შემდეგ, ამონახსნთა სიმრავლის წარმოდგენა შესაძლებელია რიცხვითი ღერძის მეშვეობით.

- როდესაც $x < -1$, პასუხს წარმოვადგენთ რიცხვით ღერძზე



- როდესაც $-1 \leq x < 3$ პასუხს წარმოვადგენთ რიცხვით ღერძზე



ან ვწერთ $x \in [-1\ ;\ 3)$

-1 ეკუთხვნის სიმრავლეს შესაბამისად სხივზე არის გაფერადებული პატარა წრით, 3 არ ეკუთვნის, შესაბამისად, აღნიშნულია ცარიელი წრით.

კვადრატული უტოლობის კავშირი კვადრატულ ფუნქციასთან

$ax^2 + bx + c > 0$ ან $ax^2 + bx + c < 0$

უტოლობებს, სადაც x ცვლადია და a,b,c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, სადაც $a \neq 0$ კვადრატული უტოლობა ეწოდება. იმისათვის, რომ ამოვხსნათ კვადრატული უტოლობა, აუცილებელია (პროცედურა):

- უტოლობის ყველა წევრი უნდა იყოს ერთ მხარეს, ხოლო მეორე მხარეს 0.
- უნდა წარმოვადგინოთ ნამრავლად უტოლობის ერთ მხარეს მიღებული კვადრატული სამწევრი.
- ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის გამოსახულება 0-ის ტოლი.
- გადავიტანოთ მიღებული ფესვები რიცხვით ღერძზე და დავყოთ იგი ინტერვალებად.
- შევამოწმოთ უტოლობის მარცხენა მხარეს მყოფი გამოსახულების ნიშანი თითოეულ ინტერვალში.

შეხსენება:
იმისათვის, რომ $ax^2 + bx + c$ – სამწევრი, წარმოვადგინოთ ნამრავლად, უნდა ვიპოვოთ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები x_1 და x_2 (თუ ისინი არსებობენ) და სამწევრი დავშალოთ ნამრავლად:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ჩვენ უკვე განვიხილეთ $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია.

- როდესაც გვინდა დავადგინოთ:

x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის ფუნქცია დადებითი, საჭიროა ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი რომლისთვისაც $y > 0$-ზე, ანუ

$ax^2 + bx + c > 0$; ვიღებთ კვადრატულ უტოლობას

- როდესაც გვინდა დავადგინოთ:

x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის ფუნქცია უარყოფითი, საჭიროა ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი რომლისთვისაც $y < 0$-ზე, ანუ

$ax^2 + bx + c < 0$; ვიღებთ კვადრატულ უტოლობას

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ ვიპოვოთ ნიშანმუდმივობის შუალედები კვადრატული ფუნქციის გრაფიკზე.

მას შემდეგ, რაც დავაკავშირეთ კვადრატული უტოლობა კვადრატულ ფუნქციასთან, განვიხილოთ კვადრატული უტოლობის ამოხსნა გრაფიკული მეთოდით.

ნიმუში 1

ვიპოვოთ $x^2 - 4x + 3 > 0$ უტოლობის ამონახსნები:

მეთოდი 1:

გრაფიკული მეთოდი იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $x^2 - 4x + 3 > 0$ უტოლობის ამონახსენი.

უტოლობის ამოხსნისთვის დავიცვათ შემდეგი პროცედურა:

ნაბიჯი 1:

წარმოვადგინოთ, $x^2 - 4x + 3$ გამოსახულება ნამრავლის სახით:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

ნაბიჯი 2:

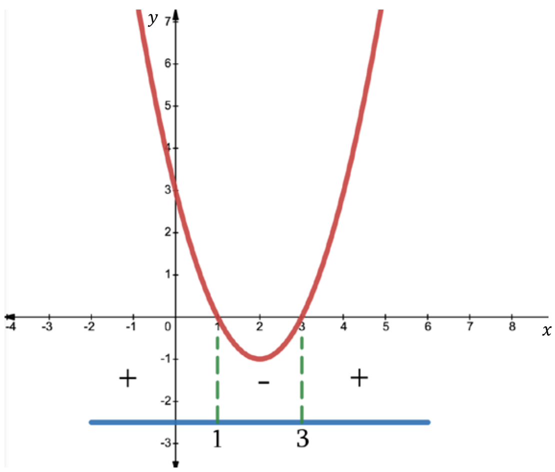
ავაგოთ $y = (x - 1)(x - 3)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ნაბიჯი 3:

გრაფიკის მიხედვით დავადგინოთ, როდის არის $(x - 1)(x - 3) > 0$ და ვიპოვოთ x-ის რა მნიშვნე-ლობისთვის არის $y > 0$.

ნაბიჯი 4:

დავწეროთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.



ნახაზზე ჩანს, რა ინტერვალებად იყოფა Ox ღერძი და რა იქნება თითოეულ ინტერვალზე y-ის ნიშანი.

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

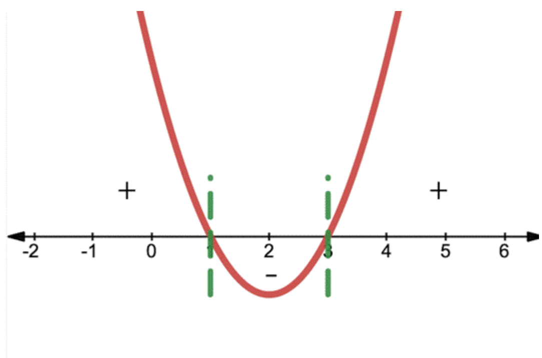
უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < 1 \text{ და } x > 3$$

რეკომენდაცია:

სიმარტივისთვის შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

- დავხაზოთ მხოლოდ Ox ღერძი.
- მოვნიშნოთ ფუნქციის ნულები (კვადრა-ტული სამწევრის ნულები).
- დავყოთ ღერძი ინტერვალებად და დავხაზოთ გრაფიკი.
- Ox ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში $y > 0$ ხოლო ქვედა ნახევარსიბრტყეში $y < 0$.



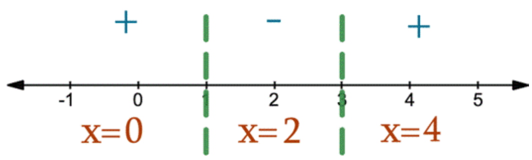
მეთოდი 2:

ინტერვალთა მეთოდი

როდესაც მოცემულია კვადრატული უტოლობა: $x^2 - 4x + 3 > 0$.

წარმოვადგინოთ, სამწევრი ნამრავლის სახით: $(x-1)(x-3) > 0$;

- გადავიტანოთ უტოლობის ნულები რიცხვით ღერძზე და დავყოთ ინტერვალებად;
- შევამოწმოთ უტოლობის მარცხენა მხარეს მყოფი გამოსახულების ნიშანი თითოეულ ინტერვალში, ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ ინტერვალიდან აღებული ნებისმიერი სატესტო რიცხვისთვის.



- თუ $x = 0$, მაშინ $(0-1)(0-3) > 0$
- თუ $x = 2$, მაშინ $(2-1)(2-3) < 0$
- თუ $x = 4$, მაშინ $(4-1)(4-3) > 0$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < 1 \text{ და } x > 3$$

ნიმუში 2

ვიპოვოთ $-2x^2 + 5x + 3 < 0$ უტოლობის ამონახსნები:

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $-2x^2 + 5x + 3 < 0$ უტოლობის ამონახსნი, ავაგოთ $y = -2x^2 + 5x + 3$ ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $y < 0$.

წარმოვადგინოთ, $-2x^2 + 5x + 3$ ნამრავლად და ვიპოვოთ ფუნქციის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

$y = 0$, $\qquad -2x^2 + 5x + 3 = 0$

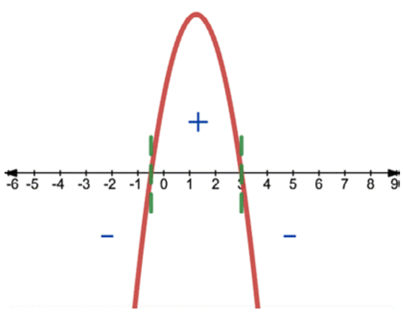
$$D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2 \cdot (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5+7}{2 \cdot (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$-2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

- გადავიტანოთ რიცხვით ღერძზე წერტილები $-\frac{1}{2}$ და 3.
- ავაგოთ $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$ გრაფიკი.



- ვიპოვოთ, როდის არის $y < 0$-ზე:

$$-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) < 0$$

უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < -0.5 \text{ და } x > 3$$

მითითება: განიხილეთ უტოლობის ამოხსნის სხვა მეთოდი და გააანალიზეთ.

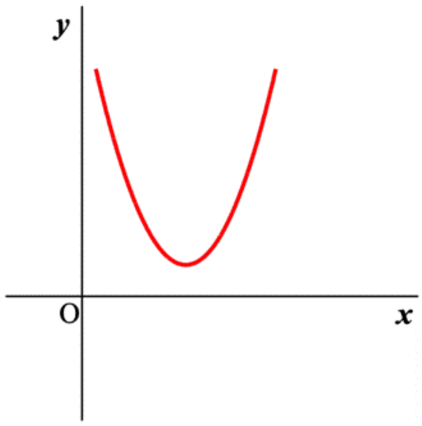
ნიმუში 3

განვიხილოთ სიტუაცია როდესაც $D < 0$:

<table>
<tr>
<td>

ა) როდესაც D < 0 და $a > 0$ პარაბოლა არ კვეთს Ox ღერძს

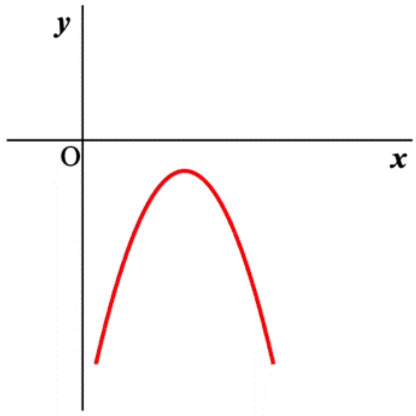
x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის $y > 0$



</td>
<td>

ბ) როდესაც $D < 0$ და $a < 0$ პარაბოლა არ კვეთს Ox ღერძს

x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის $y < 0$

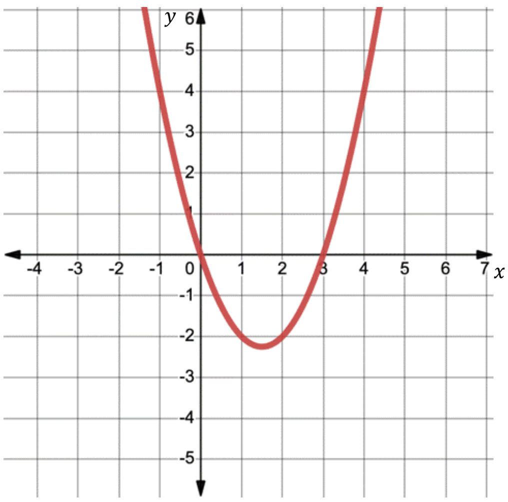


</td>
</tr>
</table>

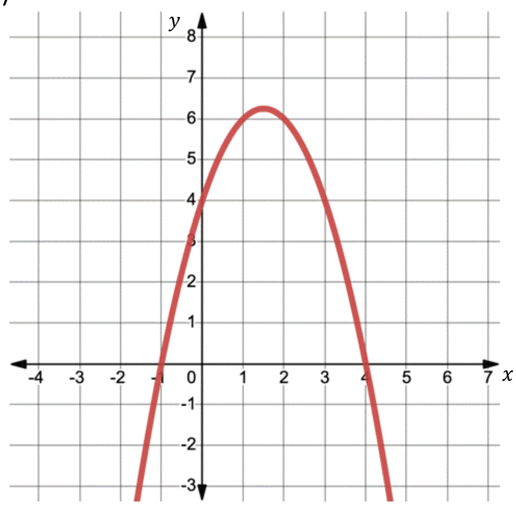
სავარჯიშოები

1. გრაფიკიდან გამომომდინარე დაადგინეთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)$>0-ზე და x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)$<0.

ა)



ბ)



2. ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $(x-4)(x+3)<0$;
ბ) $(4x-8)(x+1)>0$;
გ) $(x+3)(x-4)>0$;
დ) $x^2-8x+16<0$;
ე) $-2x^2-8x>0$;
ვ) $x^2+4x+4<0$;
ზ) $x^2+7x+10<0$;
თ) $x^2-6x+9\geq 0$;
ი) $x^2+x+8>0$.

3. **გამოწვევა:** ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $2x^2+7x+5>0$;
ბ) $-2x^2+7x>5$;
გ) $x^2+2x+1\leq 0$;
დ) $2x^2<8x$;
ე) $-x^2-x>x-8$;
ვ) $-4x^2+3x+1<0$.

წინარე მასალის გამეორება

4. იპოვეთ შემდეგი წრფივი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:

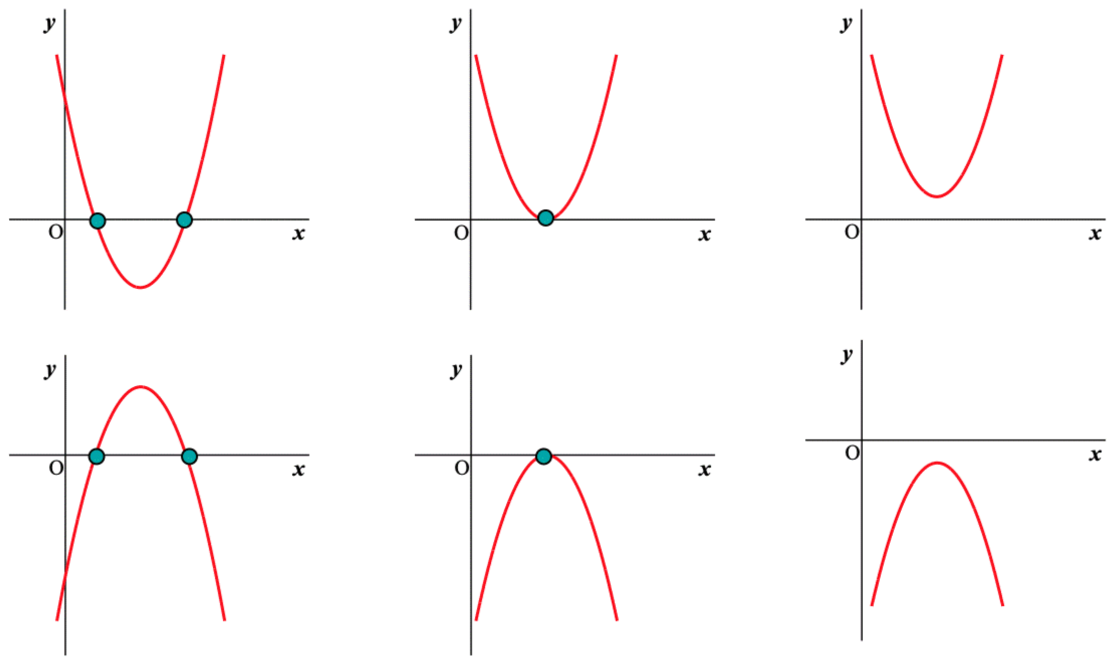
ა) $4x-8>2x$;
ბ) $-5(x-2)>8-2x$;
გ) $-12<2x-4$;
დ) $6(3-2x)<80-20x$.

ცოდნის შეჯამება

$y = ax^2 + bx + c$ იგივე $f(x) = ax^2 + bx + c$

ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, ეწოდება კვადრატული ფუნქცია.

როდესაც $D > 0$ პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში:	როდესაც $D = 0$ პარაბოლა Ox ღერძს ეხება ერთ წერტილში:	როდესაც $D < 0$ პარაბოლა Ox ღერძს არ კვეთს:
$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$

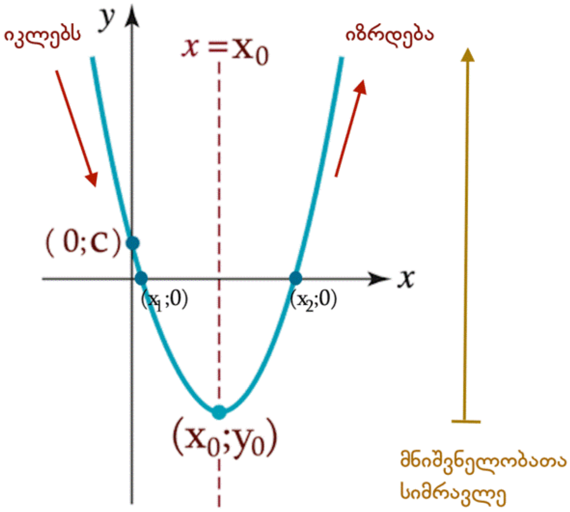
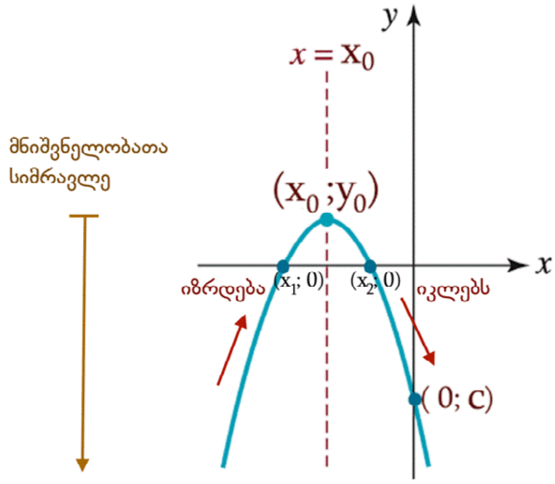


დამატებითი ვიდეო გაკვეთილები ტელესკოლიდან და მასალა EL.ge-დან.	აბიტურიენტების დრო: [წრფივი ფუნქცია] [კვადრატული ფუნქცია] [კვადრატული ფუნქცია – ნაწილი 2] [კვადრატული უტოლობა]

ცოდნის შეჯამება

კვადრატული ფუნქციის განტოლება (ფორმულა) შეიძლება ჩაიწეროს 3 ფორმით:

- $y = ax^2 + bx + c$ სტანდარტული ფორმა.
- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ წვეროს კოორდინატით.
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ნამრავლის სახით (Ox ღერძთან კვეთის წერტილებით).

 $y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$	 $y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$
▪ გრაფიკი – პარაბოლა ▪ $a > 0$ პარაბოლას შტოები მიემართება ზევით ▪ წვეროს კოორდინატი ▪ $x_0 = -\dfrac{b}{2a};\quad y_0 = f(x_0)$ ▪ $x = x_0$-სიმეტრიის ღერძი ▪ $(x;\ 0),(x_2;0),(0;c)$ გრაფიკის მიერ ღერძების კვეთის წერტილების კოორდინატები: ▪ $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ ▪ $E(f) = [y_0;\ +\infty)$ ▪ კლებადობის შუალედი $(-\infty;\ x_0]$ ▪ ზრდადობის შუალედი $[x_0;\ +\infty)$ ▪ როდესაც $x < x_1$ და $x > x_2$, მაშინ $y > 0$ ▪ როდესაც $x_1 < x < x_2$, მაშინ $y < 0$	▪ გრაფიკი – პარაბოლა ▪ $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიემართება ქვევით ▪ წვეროს კოორდინატი ▪ $x_0 = -\dfrac{b}{2a};\quad y_0 = f(x_0)$ ▪ $x = x_0$-სიმეტრიის ღერძი ▪ $(x_1;)\ 0),(x_2;0),(0\ ;c)$ გრაფიკის მიერ ღერძების კვეთის წერტილების კოორდინატები: ▪ $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ ▪ $E(f) = (-\infty;\ y_0]$ ▪ ზრდადობის შუალედი $(-\infty;\ x_0]$ ▪ კლებადობის შუალედი $[x_0;\ +\infty)$ ▪ როდესაც $x < x_1$ და $x > x_2$, მაშინ $y < 0$ ▪ როდესაც $x_1 < x < x_2$, მაშინ $y > 0$

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

განვიხილოთ სხვადასხვა ფუნქცია და მათი გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით ახალ ფუნქციებს, კერძოდ $y = x^2$, $y = x^3$ და დავინახეთ, რომ გამომდინარე იქიდან, როგორ არის დამოკიდებული y ცვლადი x-ზე, გრაფიკის ფორმა იცვლება. ასევე ვიცით, რომ $y = x^2$ და $f(x) = x^2$ ერთი და იგივე ფუნქციებია (სხვადასხვა აღნიშვნებით).

მიმდინარე გაკვეთილში გავეცნოთ $f(x) = x^n$, როდესაც $n = -1; \frac{1}{2}$; 1; 2; 3; 4, ფუნქციებს და მათ გარდაქმნებს.

იხ. გრაფიკები მარჯვენა სვეტში განვიხილოთ ფუნქციების გრაფიკები. გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ იცვლება n, ავაგოთ შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი და დავაკავშიროთ $f(x) = x^n$ ჩანაწერთან.

განვიხილოთ, ასევე $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი.

უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია:

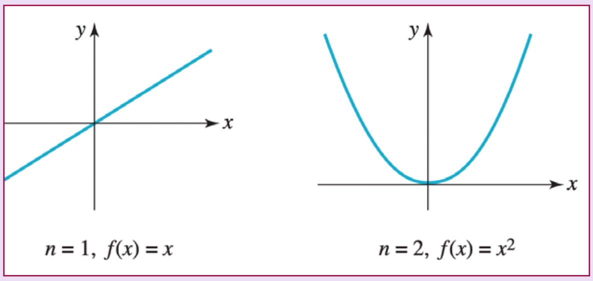
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

განსაზღვრის არის სხვადასხვა ინტერვალზე $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა წესით.

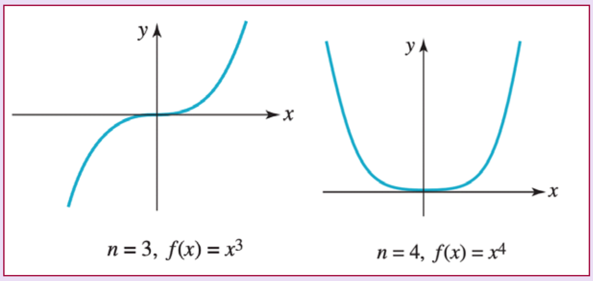
მითითება:

🔗 ტელესკოლა 11:40-დან იხილეთ, როგორ ხდება ასეთი ფუნქციების აგება.

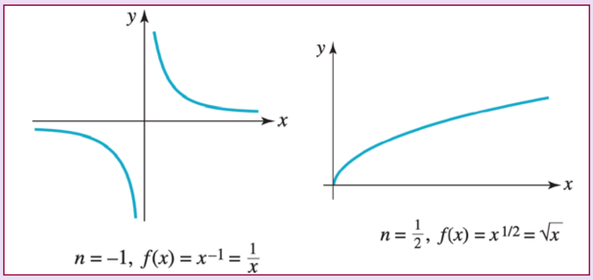
ა) $y = x$ ბ) $y = x^2$



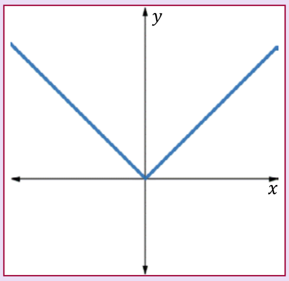
გ) $y = x^3$ დ) $y = x^4$

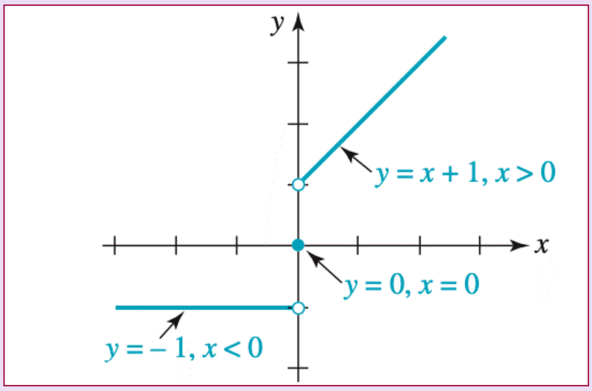


ე) $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ ვ) $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$



მოდულის შემცველი ფუნქცია $y = |x|$





ფუნქციის კვლევა

ჩვენ უკვე გავეცანით კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნებს, ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკზე გარდაქმნების წესი მოქმედებს იმავენაირად.

განვიხილოთ ნებისმიერი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (სურ.1).

ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი:

- გადაიტანეთ გრაფიკი პარალელურად c – ერთეულით Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით (ზემოთ) (იხ.სურათი 2), ან c – ერთეულით ქვემოთ Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (ქვემოთ) (იხ.სურათი 3).
- გადაიტანეთ გრაფიკი პარალელურად c – ერთეულით Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით (მარჯვნივ) (იხ.სურათი 4), ან c – ერთეულით Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (მარცხნივ) (იხ.სურათი 5).

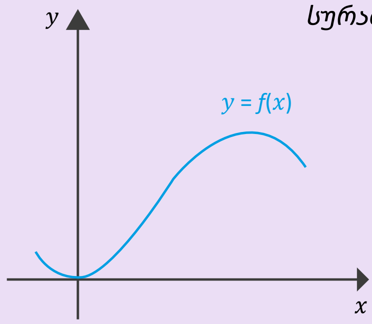
პარალელური გადატანა

$y = f(x) + c$ (სურ.2,3) გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის მიმართულებით ზევით ან ქვევით, თუ $c > 0$, გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება ზევით c-ერთეულით, ხოლო თუ $c < 0$, გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება ქვემოთ c-ერთეულით.

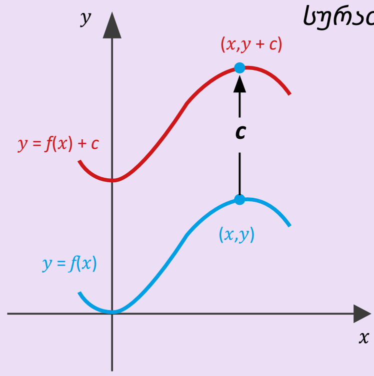
$y = f(x + c)$ (სურ.4,5) გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ გრაფიკის პარალელური გადატანით Ox ღერძის მიმართულებით მარჯვნივ ან მარცხნივ.

თუ $c > 0$ გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება მარცხნივ c-ერთეულით, თუ $c < 0$ გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება მარჯვნივ c-ერთეულით.

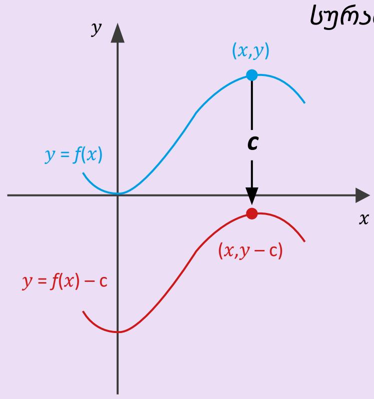
მითითება: წერტილი გადაინაცვლებს შესაბამისად, თუმცა ფორმულაში c ჩაიწერება მოპირდაპირე ნიშნით.



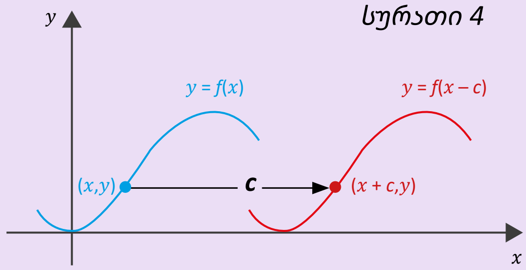
სურათი 1



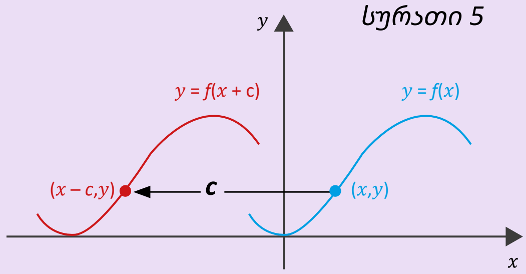
სურათი 2



სურათი 3



სურათი 4



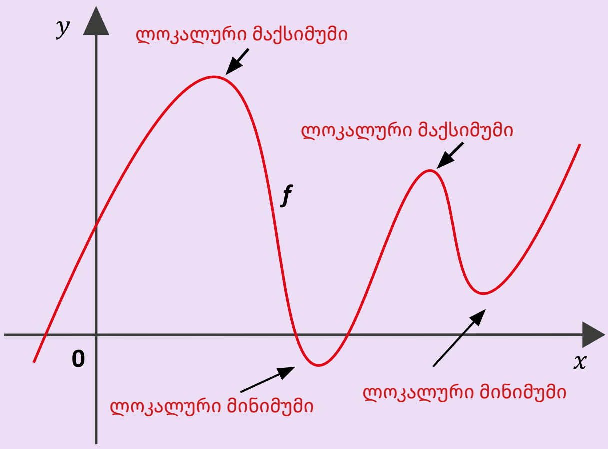
სურათი 5

ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

მითითება:

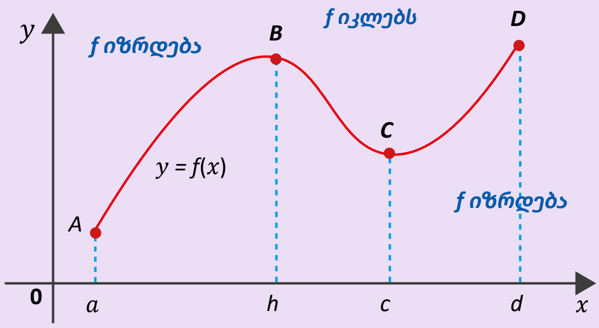
- ამოწერეთ ლოკალური მინიმუმის ან მაქსიმუმის წერტილის კოორდინატები.
- Ox ღერძზე მონიშნეთ ინტერვალები, რომლის მიხედვით შეძლებთ აღწეროთ, რომელ ინტერვალში იზრდება ან იკლებს ფუნქცია.



- როდესაც $x\in(a;b)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება
- როდესაც $x\in$ (b;c), მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება
- როდესაც $x\in$ (c;d), მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება

იგივე შეგვიძლია ჩავწეროთ უტოლობის გამოყენებით:

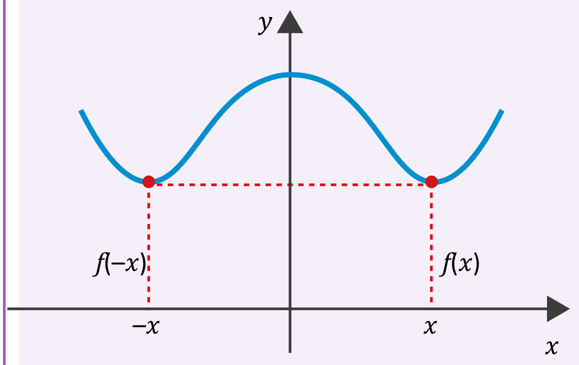
- როდესაც $a < x < b$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება (გრაფიკი მიმართულია ზემოთ)
- როდესაც $b < x < c$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება (გრაფიკი მიმართულია ქვემოთ)
- როდესაც $c < x < d$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება (გრაფიკი მიმართულია ზემოთ)

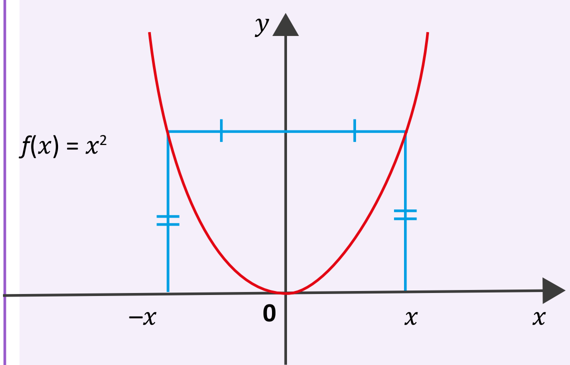


მითითება: ჩაწერეთ თქვენთვის მოსახერხებელი აღნიშვნებით.

ლუწი და კენტი ფუნქციები

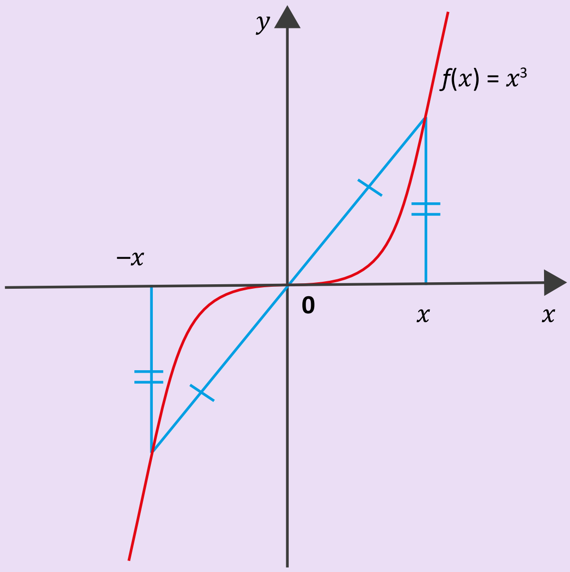
$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძია Oy ღერძი.





გრაფიკიდან აღებული ყოველი x და მისი მოპირდაპირე $-x$ წერტილი თანაბრად არის დაშორებული Oy ღერძიდან.

$y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკი სათავის მიმართ სიმეტრიულია:



- თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x) = f(-x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია;

  ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

- თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(-x) = -f(x)$, ფუნქციას ეწოდება კენტი ფუნქცია.

  კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ.

1. დავადგინოთ $f(x) = x^2 + 2$ ფუნქცია კენტია, ლუწი თუ არცერთი?
   ადვილი შემოწმება: ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 1 და -1
   $f(1) = 1^2 + 2 = 3$; $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ ე.ი. $f(1) = f(-1)$
   ფუნქცია ლუწია
2. დავადგინოთ $f(x) = x^3 - 2x$ ფუნქცია კენტია, ლუწი თუ არცერთი?
   ადვილი შემოწმება: ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 1 და -1
   $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$; $f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 1$
   $f(-1) = -f(1)$ ფუნქცია კენტია

ნიმუში 1

განვიხილოთ უკუპროპორციული ფუნქციის გრაფიკი და მისი გარდაქმნა

ა) განვიხილოთ $y = \frac{1}{x}$ უკუპროპორციულობის ფუნქცია (ნახაზი 1), რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა 0-სა.

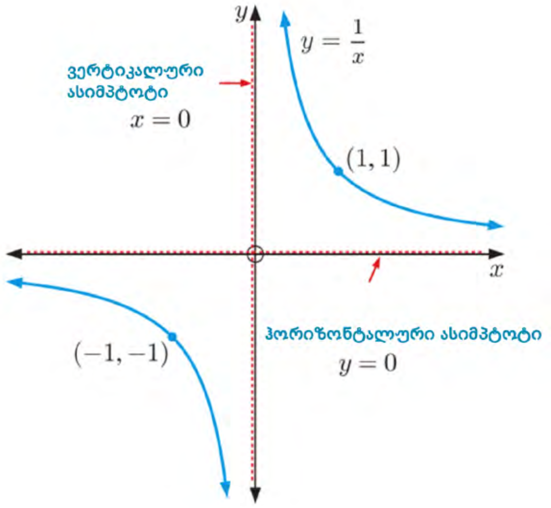
ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

გრაფიკი მდებარეობს I და III მეოთხედებში.

გამომდინარე იქიდან, რომ $x = 0$ – ვის ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, გრაფიკი არ კვეთს Oy ღერძს. ანალოგიურად არ კვეთს ფუნქცია Ox ღერძსაც.

ტელესკოლა 8:40-უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

ნახაზი 1



ბ) ავაგოთ $y = \frac{1}{x-1} + 2$ ფუნქციის გრაფიკი.

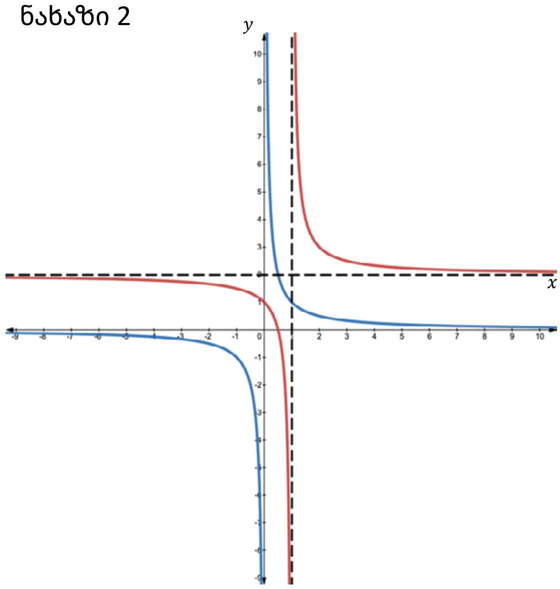
ფუნქციის (ნახაზი 2) განსაზღვრის არეა ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, გარდა 1-სა; $x - 1 \neq 0$.

ე.ი. $x \neq 1$;

მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის გასწვრივ 2 ერთეულით ზევით და შემდეგ Ox ღერძის გასწვრივ 1 ერთეულით მარჯვნივ. შესაბამისად მიიღება, რომ $y \neq 2$.

როგორც ხედავთ ასიმპტოტებია ვერტიკალური $x = 1$ წრფე და ჰორიზონტალური $y = 2$ წრფე.

ნახაზი 2



სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. **ინსტრუქცია:** შედით საიტზე Desmos ან Symbolab. ააგეთ გრაფიკები. იმსჯელეთ და აღწერეთ გარდაქმნის წესი ქვემოთ მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის.

მითითება: მას შემდეგ რაც ააგებთ გრაფიკს, შეინახეთ თქვენ მიერ შესრულებული ნახაზი, გადაიტანეთ Word-ის ფაილში და თან დაურთეთ აღწერა. ასევე თითოეული შემთხვევისთვის ამოიწერეთ წვეროს კოორდინატი.

ა) ააგეთ $y=|x|+1$; $y=|x|+4$; $y=|x|-3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ბ) ააგეთ $y=-|x|$; $y=-|x|+2$; $y=-|x|-1$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გ) ააგეთ $y=|x+3|$; $y=|x-1|$; $y=|x+4|-2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

დ) ააგეთ $y=x^3+3$; $y=x^3+5$; $y=x^3-2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ე) ააგეთ $y=(x-1)^3$; $y=(x-2)^3$; $y=(x+4)^3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ვ) ააგეთ $y=x^3+4$; $y=(x-1)^3+2$; $y=(x+2)^3-4$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ზ) ააგეთ $y=\sqrt{x}+1$; $y=\sqrt{x}+2$; $y=\sqrt{x}-3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

თ) ააგეთ $y=\sqrt{x-1}$; $y=\sqrt{x-1}+1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, უნდა ვიპოვოთ რა რიცხვებისთვის არსებობს ფესქვეშა გამოსახულება, ანუ უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $x-1\geq 0$.

ი) ააგეთ $y=\sqrt{x+5}$; $y=\sqrt{x+5}+2$; $y=\sqrt{x+5}-4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

სავარჯიშოები

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, უნდა ვიპოვოთ რა რიცხვებისთვის არსებობს ფესვქვეშა გამოსახულება, ანუ უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $x + 5 \geq 0$

კ) ააგეთ $y = -x^3 + 1$; $y = -x^3 + 3$; $y = -x^3 - 2$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = -x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ლ) ააგეთ $y = \frac{1}{x} + 1$; $y = \frac{1}{x} + 2$; $y = \frac{1}{x} - 4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

მ) ააგეთ $y = \frac{1}{x+2}$; $y = \frac{1}{x-4}$; $y = \frac{1}{x+5} - 4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ნ) ააგეთ $y = -\frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x-4} + 1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

2. დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქციები:

ა) $f(x) = x^2 - 4$; გ) $f(x) = -2x^2 - 1$; ე) $f(x) = x^3 + 2x$;

ბ) $f(x) = x^2 + 4x$; დ) $f(x) = x^3 + 5$; ვ) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$.

3. დაადგინეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y = \sqrt{x} + 2$; გ) $y = \sqrt{3 - x} + 2$; ე) $y = \frac{1}{x+3} + 1$;

ბ) $y = \sqrt{x+1} - 3$; დ) $y = \frac{1}{x-2}$; ვ) $y = \frac{1}{5x} - 1$.

4. **გამოწვევა:** ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები:

ა)
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

ბ)
$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

მათემატიკის მოყვარულთათვის

მოცემული თავის ფარგლებში ჩვენ ხშირად განვიხილეთ ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებული იყო მაქსიმალური ფართობის ან მოცულობის პოვნასთან.

განვიხილოთ მოცემული ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი.

გავიხსენოთ ამოცანის პირობა

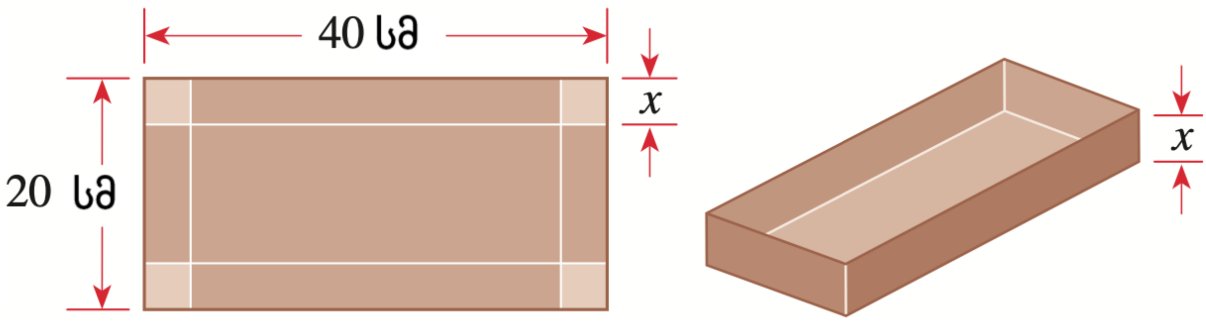
სტუდენტს აქვს მართკუთხედის ფორმის სქელი ფურცელი, რომლის სიგრძე და სიგანე, შესაბამისად, 40 სმ და 20 სმ-ია. მას სურს გააკეთოს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთი, რომელსაც ექნება მაქსიმალური მოცულობა.

სტუდენტმა დაადგინა, რომ თუ გვერდებზე ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს, ასე მიიღებს მაქსიმალური მოცულობის ყუთს.

საკვანძო კითხვა:

რა ზომის კვადრატები უნდა ჩამოჭრას ოთხივე კუთხიდან, რომ მისგან დამზადდეს მაქსიმალური ტევადობის თავღია ყუთის ფორმის საცავი?

იხილეთ სიმულაცია



მსჯელობა:

დავუშვათ, მართკუთხედის ფორმის ფურცელს უნდა ჩამოჭრას x სმ-გვერდის მქონე კვადრატი, რის შემდეგაც მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე გახდება შემდეგი:

მართკუთხედის სიგრძე – $(40 - 2x)$

მართკუთხედის სიგანე – $(20 - 2x)$

მას შემდეგ რაც გავაკეთებთ ყუთს, ყუთის სიმაღლე იქნება x სმ-ის ტოლი, ხოლო ყუთის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$V = 2x(40 - 2x)(20 - 2x) = 8x^3 - 240x^2 + 1600x$

შევიდეთ ვებგვერდზე 🔗 Desmos და ავაგოთ გრაფიკი.

განვიხილოთ ნახ 1:

$y = 2x(40 - 2x)(20 - 2x)$ ფუნქციის აგების შემდეგ მივიღებთ კუბური ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე მოცულობა ვერ იქნება უარყოფითი და მართკუთხედს ვერ ჩამოვაჭრით გვერდს, რომელიც მეტია ან ტოლი 10-ის:

$$20 - 2x > 0$$
$$-2x > -20$$
$$x < 10$$

რადგან გვერდს ვერ ჩამოვაჭრით მასზე დიდ მონაკვეთს. შესაბამისად, ჩვენ მიერ განხილული ფუნქციის განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს (0;10) (დაზუსტება – იხ. ნახაზი 2).

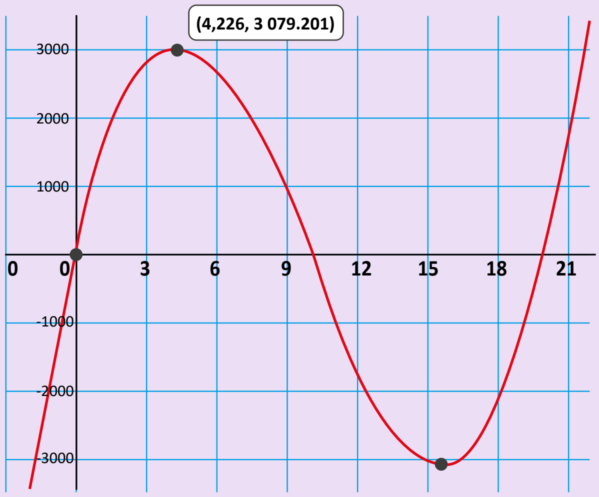
აღნიშნულ გრაფიკზე, ყოველი წერტილის კოორდინატები შეესაბამება ინფორმაციას:

(კვადრატის გვერდი, მოცულობა)

რადგან Ox ღერძს შეესაბამებოდა კვადრატის გვერდის სიგრძე, ხოლო Oy ღერძს მოცულობა.

გრაფიკიდან გამომდინარე, მისი ექსტრემუმის წერტილია (4.226; 3079.201) ე.ი. როდესაც ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდი იქნება დაახლოებით 4.226 სმ-ის ტოლი, მიღებული ყუთის მოცულობა იქნება 3079.201 სმ^3.

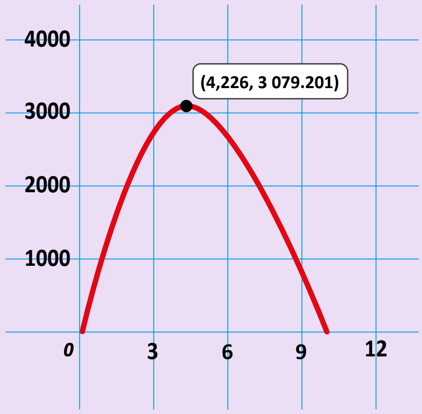
ნახაზი 1



$y = 2x(40 - 2x)(20 - 2x)$, რომლის განსაზღვრის არეა ინტერვალი (0;10)

$0 < x < 10$

ნახაზი 2



კანონზომიერების აღმოჩენა და ფორმულირება*

მათემატიკაში მნიშვნელოვანია კანონზომიერების აღმოჩენა და მისი ფორმულირება, როდესაც მოცემულია ფუნქცია ფორმულით, თანამედროვეობაში ტექნოლოგიების დახმარებით მარტივდება ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკის აგება, რაც ათწლეულების წინ გამოწვევას წარმოადგენდა

როდესაც მეცნიერები აკვირდებიან რაიმე მოვლენას, ისინი აგროვებენ მონაცემებს. მონაცემების ანალიზის დროს უმნიშვნელოვანესია მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების დადგენა. თუ მკვლევრებმა მოახერხეს და შეძლეს კანონზომიერების აღმოჩენა და ფორმულირება, შემდეგ შესაძლებელი ხდება გარკვეული პროგნოზების გაკეთება.

IX. დავალების წარდგენა

იცით თუ არა, რომ

- დღეისათვის ერთ-ერთი პოპულარული ატრაქციონის, სათვალთვალო ბორბლის (ე.წ. ეშმაკის ბორბლის) ანალოგი ჯერ კიდევ VXIII საუკუნეში არსებობდა?

საკვანძო კითხვა:

- შეიძლება თუ არა დავადგინოთ, სათვალთვალო ბორბალზე მოძრაობისას დროის ნებისმიერ მომენტში რა სიმაღლეზე იქნება ობიექტი?

კომპლექსური დავალება 1

მათემატიკის მოყვარულებმა დაადგინეს ერთ-ერთი სათვალთვალო ბორბლის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი. მას შემდეგ, რაც კაბინაში ჩაჯდება ადამიანი, შესაძლებელია დავადგინოთ დროის ნებისმიერ მომენტში მიწიდან რა სიმაღლეზე იქნება მისი კაბინა. სიმაღლის დროზე დამოკიდებულება ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით: $h(t) = 85sin\frac{\pi}{20}\ (t-10) + 90$; სადაც t-შეესაბამება დროს და იზომება წამებში, h შეესაბამება სიმაღლეს და იზომება მეტრებით; გამოდის, რომ სიმაღლე დროის ფუნქციაა.

თქვენი დავალება

1. ააგოთ მოცემული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი; დაადგინოთ მიწიდან მაქსიმუმ რა სიმაღლეზე შეიძლება იყოს ობიექტი;
2. დაადგინოთ, რამდენ ბრუნს გააკეთებს ეშმაკის ბორბალი 180 წამში? 360 წამში?
3. რას გვიჩვენებს ფორმულაში 85? 90?
4. გამოიკვლიოთ, როგორ უნდა დავადგინოთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელით, სად იქნება ობიექტი დროის სხვადასხვა მომენტში? (იხილეთ Geogebra-ზე შექმნილი მოდელი Geogebra 1; Geogebra 2 – ანგარიშის ფურცლით);

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

5. ჩაწეროთ ნებისმიერი სხვა ეშმაკის ბორბლის მოძრაობის აღმწერი ფუნქცია.
6. გამოიკვლიოთ როგორ შეიძლება წრეზე მოძრავი სხეულის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შედგენა

დავალება წარმოადგინეთ პროგრამა Geogebra-ში შექმნილი მოდელის მეშვეობით, ასევე დაურთეთ პასუხები დავალებაში მოცემულ კითხვებზე.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

- რომელი ფუნქციებით არის შესაძლებელი წრეზე მოძრავი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა?
- რას გვიჩვენებს პერიოდი და ამპლიტუდა?
- თუ ვიცით რა სიმაღლეზეა ობიექტი როგორ შეგვიძლია დავადგინოთ რა დრო დასჭირდა აღნიშნულ პოზიციამდე მისვლას?

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება 2

საკვანძო კითხვა:

- რა არის ბგერა და როგორ არის დაკავშირებული იგი მათემატიკასთან?

თქვენი დავალება

1. მოიძიოთ ინფორმაცია თუ როგორ წარმოიქმნება ბგერა.
2. მოცემული რესურსის გამოყენებით (იხ. ბმული) www.academo.org, დაადგინოთ, რომელი მათემატიკური ფუნქციის საშუალებით არის შესაძლებელი ბგერის აღწერა.
3. ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალოთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერების სიხშირე.
4. დაუკავშიროთ ერთმანეთს ბგერის ფიზიკური მახასიათებლები (ხმის სიმაღლე; ტონალობა) და მათი შესაბამისი მათემატიკური ფუნქციის პარამეტრები (ამპლიტუდა, სიხშირე).
5. შეადგინოთ გეგმა, რომელიც აღწერს, როგორ არის შესაძლებელი ბგერის შესწავლა და აღწერა შესაბამისი მათემატიკური მოდელის მიხედვით.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, სადაც წარმოდგენილი იქნება როგორც ნახაზები, ასევე გაზომვების შედეგები (ანგარიშის ფურცელი).

ნაშრომის პრეზენტირებისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- როგორ აისახება პერიოდის, სიხშირის და ამპლიტუდის ცვლილება სიტუაციის აღმწერ მათემატიკურ მოდელში?
- რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ სიხშირესა და პერიოდს შორის, ახსენით როგორ დაადგინეთ კავშირები.
- როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?
- თქვენი აზრით, რატომ არის საინტერესო ბგერის თვისებების შესწავლა? როგორ უსმენდნენ მუსიკას 100, 50, 30, 10 წლის წინ? თქვენი აზრით რა იწვევდა ამ ცვლილებებს?

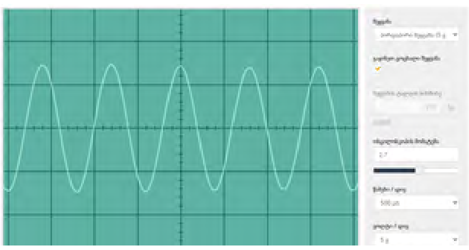
ეს საინტერესოა

- *იცით თუ არა, რომ ბგერის დანახვა შეგვიძლია?*

დიახ, დღეს უკვე ძალიან მარტივია ბგერის ბუნების გამოკვლევა და ბევრი საინტერესო დეტალის გაგება იმაზე, თუ როგორ წარმოიქმნება და ვრცელდება ბგერა, როგორ აღვიქვამთ მუსიკას და ა.შ.

გადადით მოცემულ ბმულზე და სცადეთ თქვენი ხმის დანახვა!

www.academo.org



7.1. ერთეულოვანი წრე

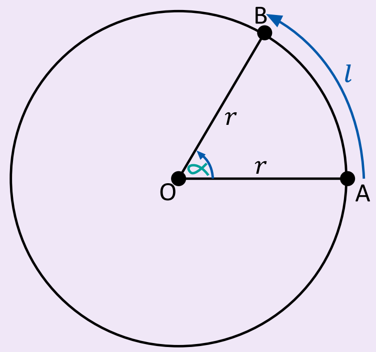
გეომეტრიის ნაწილში ჩვენ უკვე განვიხილეთ ერთეულოვანი წრე. მოცემული თემის ფარგლებში გავიმეოროთ წინარე მასალა და გადავიდეთ ახალ მასალაზე, რომელიც ღრმად გაგვააზრებინებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

როგორც ვიცით, კუთხეს ვზომავთ გრადუსებში და წრეს შეესაბამება 360°.

წრეწირზე მოვნიშნოთ ორი წერტილი A და B, ისე რომ $(\overset{\frown}{AB})$ რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლი იყოს. ავაგოთ კუთხე $\angle AOB$. აღნიშნული წესით აგებულ კუთხეზე ვიტყვით, რომ ცენტრალური კუთხე $\angle AOB = 1$ რადიანს.

განმარტება: იმ ცენტრალური კუთხის სიდიდეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, რადიანი ეწოდება.

180°-ს შეესაბამება π რადიანი.



$l = r$; $\alpha = 1$ რად.

180°-ს შეესაბამება π რადიანი.

1 რადიანი $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

ცხრილში მოცემულია შესაბამისობა რადიანებსა და გრადუსებს შორის

გრადუსი	რადიანი
180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
360°	2π

საკოორდინატო სიბრტყეზე დავხაზოთ წრე ცენტრით სათავეში და რადიუსით 1. მივიღებთ ერთეულოვან წრეს.

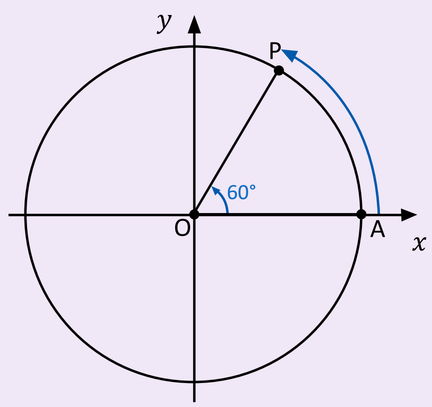
Ox ღერძზე გადავზომოთ OA რადიუსის ტოლი მონაკვეთი, მოვაბრუნოთ OA რადიუსი ისე, რომ Ox ღერძთან მივიღოთ 60°-ის ტოლი კუთხე. ჩვენ შეგვიძლია OA მოვაბრუნოთ, როგორც საათის ისრის, ასევე მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით.

როდესაც ვაგებთ კუთხეს ისე, რომ მობრუნება ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **კუთხე დადებითია** (ნახ.1).

$$\angle AOP = 60°$$

ხოლო როდესაც ვაგებთ კუთხეს ისე, რომ მობრუნება ხდება საათის ისრის მიმართულებით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **კუთხე უარყოფითია** (ნახ.2).

$\angle AOB = -80°$



საკვანძო კითხვა:

- *რა შემთხვევაშია კუთხე 360 გრადუსზე მეტი?*

განვიხილოთ $\angle AOP = 150°$ (ნახ.3)

მოვაბრუნოთ OP სხივი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ისე, რომ შემოხაზოს მთელი წრე 3-ჯერ.

პირველი მობრუნების შემდეგ მივიღებთ კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომაა:

$$150° + 360° = 510°$$

მეორე მობრუნების შემდეგ მივიღებთ:

$$150° + 2 \cdot 360° = 870°$$

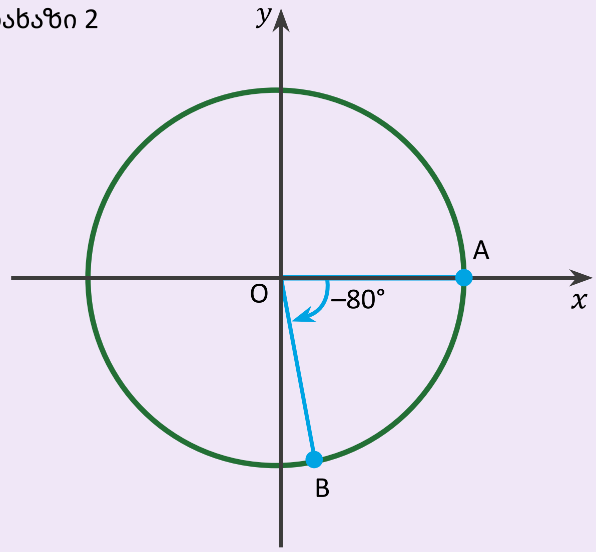
მესამე მობრუნების შემდეგ მივიღებთ:

$$150° + 3 \cdot 360° = 1230°$$

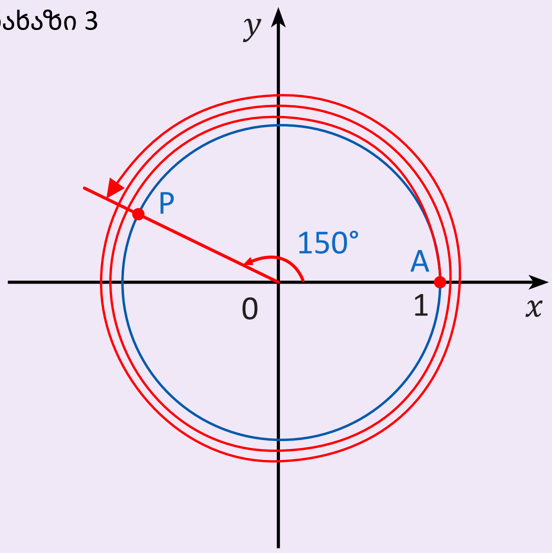
იქიდან გამომდინარე, თუ რამდენჯერ მობრუნდება *OP* სრული კუთხით გარკვეული პოზიციიდან, იმდენჯერ დაემატება 360°.

მინიშნება: შესაძლებელია მობრუნება, როგორც დადებითი მიმართულებით, ასევე საწინააღმდეგო მიმართულებით. საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნების შემთხვევაში კუთხეს აკლდება 360°.

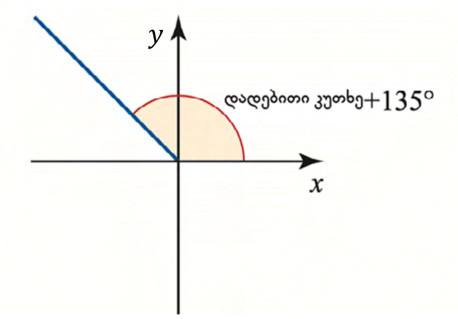
ნახაზი 2

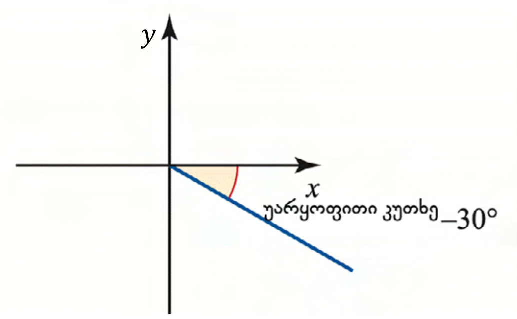


ნახაზი 3



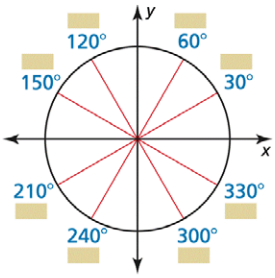
ნიმუში 1 – ააგეთ 135°-ის ტოლი კუთხე და –30°-ის ტოლი კუთხე.





სავარჯიშოები

1. შეუსაბამეთ გრადუსებს რადიანები.

ახსენით, როგორ არის შესაძლებელი გრადუსებზე რადიანების შესაბამისობა	

2. დახაზეთ ერთეულოვანი წრე და მონიშნეთ მასზე წერტილები, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კუთხეს:

ა) 60°	ე) 390°
ბ) 120°	ვ) 720°
გ) 210°	ზ) 810°
დ) 330°	თ) 900°

3. დახაზეთ ერთეულოვანი წრე და მონიშნეთ მასზე წერტილები, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კუთხეს:

ა) –30°	ე) –360°
ბ) –90°	ვ) –720°
გ) –180°	ზ) –810°
დ) –300°	თ) –855°

4. დაუკავშირეთ ქვემოთ მოცემული კუთხეები კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა ნაკლებია ან ტოლი 360°-ის. ახსენით, როგორ დააკავშირეთ.

ა) 450°	ე) –60°
ბ) 500°	ვ) –750°
გ) 1110°	ზ) –120°
დ) 1320°	თ) –270°

7.2.ერთეულოვანი წრე და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

გეომეტრიის ნაწილში **მე-3 თავში იხ. §3.3** განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში და ბლაგვკუთხა სამკუთხედში. გავეცნოთ ნებისმიერი ზომის კუთხის შემთხვევაში რა შეიძლება იყოს კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

ტექნოლოგიების მეშვეობით შეგვიძლია დავადგინოთ ნებისმიერი კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ერთეულოვანი წრე და წრეწირზე I მეოთხედში მოვნიშნოთ B($x;y$) წერტილი; დავაკავშიროთ B წერტილის კოორდინატები შესაბამისი α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან.

ΔOBC-ში დავწეროთ α-კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$sin\alpha = \frac{BC}{OB}$ (1) $cos\alpha = \frac{OC}{OB}$ (2)

რადგან წრე ერთეულოვანია

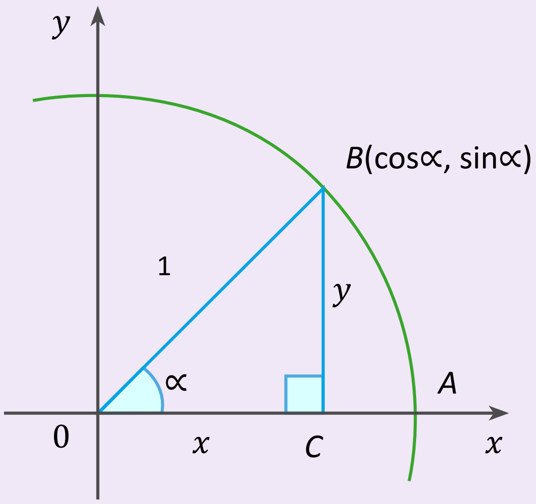
$OB = R = 1$, ხოლო

$BC = y$; $OC = x$

ჩავსვათ აღნიშნული (1) და (2) ფორმულაში და მივიღებთ, რომ

$$sin\alpha = \frac{y}{1} = y; \; cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

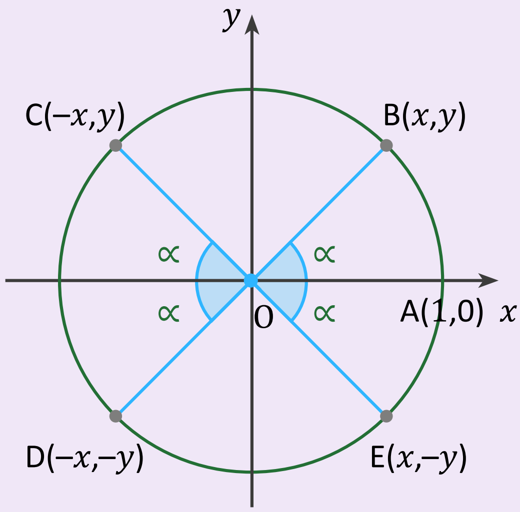
მაშასადამე, B წერტილის კოორდინატები იქნება α კუთხის კოსინუსი და სინუსი: B($cos\alpha; sin\alpha$) .



საკვანძო კითხვა:

როგორ არის შესაძლებელი ბლაგვი კუთხის ან ნებისმიერი კუთხის სინუსის და კოსინუსის გამოთვლა?

ჩვენ შეგვიძლია პირველ მეოთხედში მყოფ წერტილთან დავაკავშიროთ II, III, IV მეოთხედში მყოფი წერტილი, თუ მას ავაგებთ ღერძების მიმართ სიმეტრიით.



თუ B წერტილის კოორდინატებია
$B(cos\alpha; sin\alpha)$, მაშინ
$C(-cos\alpha; sin\alpha)$
$D(-cos\alpha; -sin\alpha)$
$E(cos\alpha; -sin\alpha)$

$\angle AOC = 180° - \alpha$ ბლაგვი კუთხეა
$\angle AOD = 180° + \alpha$ გაშლილ კუთხეზე მეტია
$\angle AOE = 360° - \alpha$ არის მეოთხე მეოთხედში

მოცემულიდან ვხედავთ, რომ
თუ კუთხე მდებარეობს:

I მეოთხედში

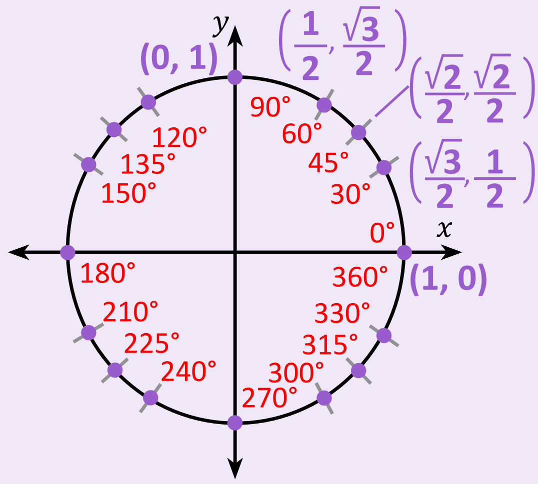
$sin\alpha$ დადებითი რიცხვია
$cos\alpha$ დადებითი რიცხვია

II მეოთხედში

$sin\alpha$ დადებითი რიცხვია
$cos\alpha$ უარყოფითი რიცხვია

მინიშნება: კუთხის სინუსი და კოსინუსი ვერ იქნება 1-ზე მეტი და –1-ზე ნაკლები.

პასუხი დაასაბუთეთ



თუ კუთხე მდებარეობს:

III მეოთხედში

$sin\alpha$ უარყოფითი რიცხვია
$cos\alpha$ უარყოფითი რიცხვია

IV მეოთხედში

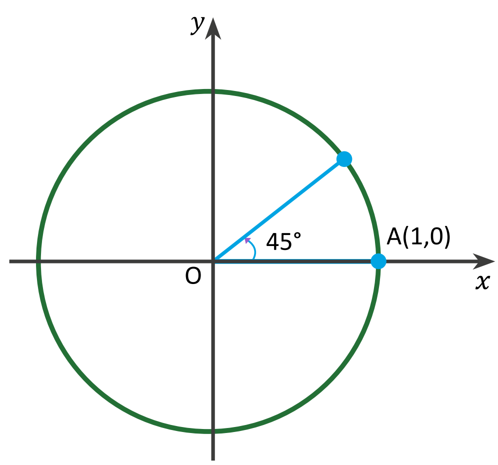
$sin\alpha$ უარყოფითი რიცხვია
$cos\alpha$ დადებითი რიცხვია

აღნიშნული წესიდან გამომდინარე შეგვიძლია წრეწირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატი დავაკავშიროთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან.

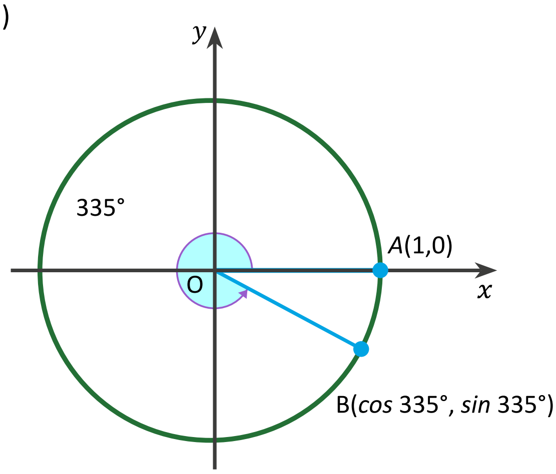
ნიმუში 1

დახაზეთ ერთეულოვანი წრე, წრეწირზე მონიშნეთ წერტილი, რომელიც შეესაბამება ა) 45°-ის ტოლ კუთხეს, ბ) 335°-ის ტოლ კუთხეს. გამოსახეთ წერტილის კოორდინატები ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

ა)



ბ)



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

თანამედროვე ერაში ტექნოლოგიების დახმარებით მარტივად შეიძლება დავად-გინოთ, ნებისმიერი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

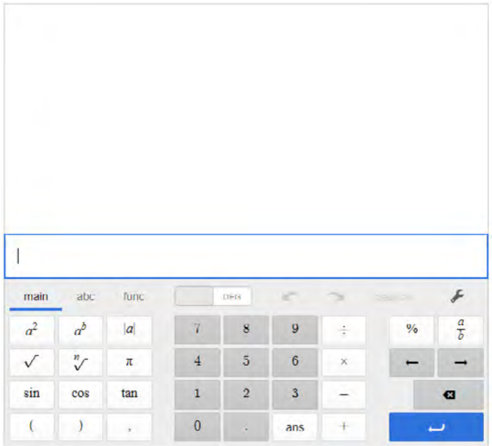
შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

გაააქტიურეთ ღილაკი func (function), ამოირჩიეთ რომელი კუთხის სინუ-სის, კოსინუსის ან ტანგენსის მოძებნა გინდათ (მიაქციეთ ყურადღება, კუთხე იზომება გრადუსებით ან რადიანე-ბით); კალკულატორი გაჩვენებთ თითოეული კუთხისთვის რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα*

$\cos 225° \approx -0.7$

$\sin 330° = -0.5$

Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე

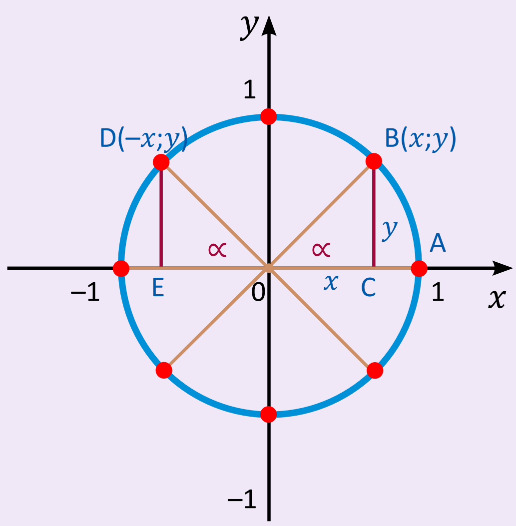


? საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძ-ლება მეორე მეოთხედის წერტილის კოორდინატების დაკავშირება პირველი მეოთხედის წერტილის კოორდინატებ-თან და შესაბამისად, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან?

წრეწირზე მოვნიშნოთ B($x;y$) წერტილი და Oy ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული D($-x;y$) წერტილი.

შევაერთოთ B წერტილი სათავესთან, დავუშვათ მართობი Ox ღერძზე და გან-ვიხილოთ მართკუთხა ΔOBC, რომლის $\angle BOC = \alpha$.

ანალოგიურად დავხაზოთ მართკუთხა ΔODE, $\angle BOC = \angle DOE = \alpha$, რადგან $\Delta OBC = \Delta ODE$.



$\Delta BOC = \Delta ODE$ სამკუთხედის ტოლობის მესამე ნიშნით.

განვიხილოთ $\angle AOD = 180° - \alpha$ ბლაგვი კუთხე.

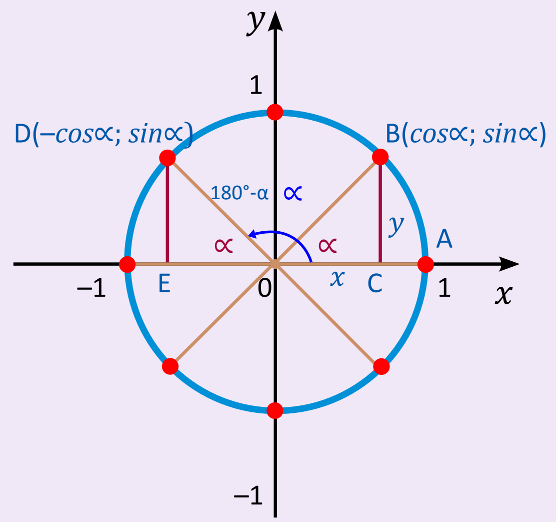
D წერტილის კოორდინატები შეესაბამება აღნიშნული კუთხის კოსინუსს და სინუსს, ე.ი.

$D(\cos(180° - \alpha); \sin(180° - \alpha))$.

რადგან D სიმეტრიულია B წერტილის Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ $D(-\cos\alpha; \sin\alpha)$, მივიღეთ, რომ

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$



თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს, დავინახავთ, რომ ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილის კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხესთან, რომელსაც ქმნის ამ წერტილის კოორდინატთა სათავესთან შემაერთებელი მონაკვეთი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

რადგან $B(x;y)$ მდებარეობს წრეწირზე და სამკუთხედი O, B, C მართკუთხაა პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ $x^2 + y^2 = 1$.

ასევე ვიცით, რომ $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$; $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, შესაბამისად, მივიღეთ, რომ B წერტილის კოორდინატებია, $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$, საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი იგივეობა: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ წერტილი მდებარეობს ერთეულოვან წრეწირზე, მაშინ აღნიშნული წერტილის კოორდინატების კვადრატების ჯამი 1-ია.

ჩვენ უკვე დავადგინეთ კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

სავარჯიშოები

1. დაწერეთ რომელ მეოთხედს შეესაბამება ეკუთვნის თითოეული ფარდობა (კუთხიდან გამომდინარე) და დაადგინეთ მათი ნიშანი.

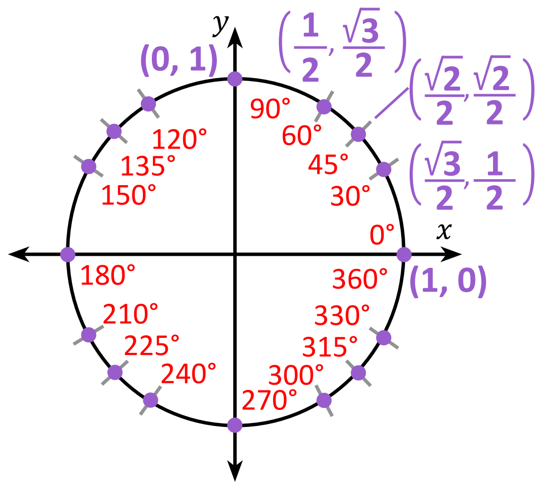
ა) *sin*45°	ვ) *sin* 265°
ბ) *sin*145°	ზ) *sin* 345°
გ) *sin*220°	თ) *sin* (–220°)
დ) *cos*135°	ი) *cos* (–135°)
ე) *cos*3 45°	კ) *cos* (–3 45°)

2. ჯგუფური სამუშაო:

სიმეტრიის გამოყენებით დაწერეთ წრეწირზე მონიშნული თითოეული გრადუსისთვის რა იქნება *sinα; cosα*

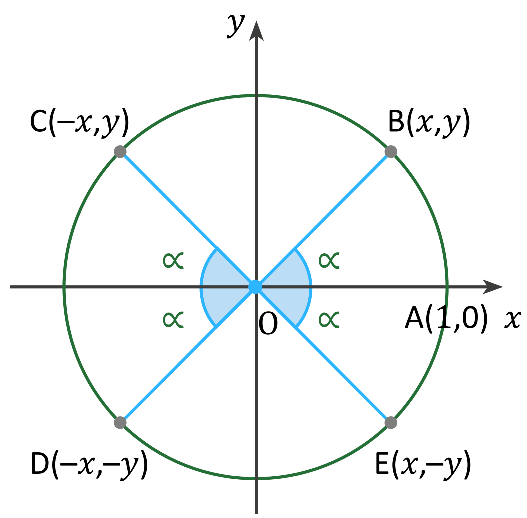
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	და ა.შ.		
sinα	0	$\frac{3}{2}$							
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$							

შეგახსენებთ, წერტილის x კოორდინატი შეესაბამება *cosα*-ს, ხოლო y კოორდინატი შეესაბამება *sinα*-ს.



მინიშნება:

იმისათვის, რომ გაგიადვილდეთ პირველ მეოთხედთან დაკავშირება, ისარგებლეთ დიაგრამით



3. დაწერეთ რომელ მეოთხედს ეკუთვნის თითოეული ტრიგონომეტრიული ფარდობა და მათი ნიშანი?

სავარჯიშოები

ა) *sin* 445°	ვ) *ctg* 60°
ბ) *sin*(–150°)	ზ) *tg* 285°
გ) *sin*(–210°)	თ) *sin* 120°
დ) *cos*435°	ი) *cos* 125°
ე) *tg*145°	კ) *cos*150°

4. **მათემატიკის მოყვარულთათვის ***

ჯგუფური აქტივობა

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ერთეულოვანი წრე და მოვნიშნოთ მასზე წერტილები: *B, C, D, E* ისე, რომ *C* წერტილი არის *B* წერტილის სიმეტრიული *Oy* ღერძის მიმართ; *D* წერტილი არის *C*-ს სიმეტრიული *Ox* ღერძის მიმართ. E არის B-ს სიმეტრიული O*x* ღერძის მიმართ, ასევე D-ს სიმეტრიული O*y* ღერძის მიმართ.

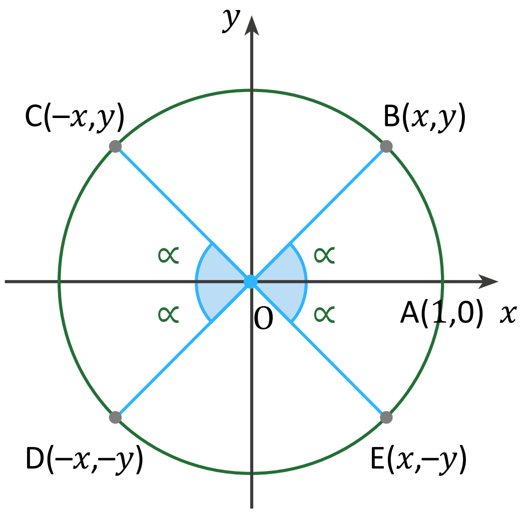
ვხედავთ როგორ იცვლება წერტილის კოორდინატები. ასევე ვხედავთ, რომ თუ თითოეულ წერტილს შევაერთებთ კოორდინატთა სათავესთან, მივიღებთ კუთხეს:

$\angle AOC = 180° - \alpha$

$\angle AOD = 180° + \alpha$

$\angle AOE = 360° - \alpha$

როგორც ვხედავთ, თითოეული კუთხის დაკავშირება შეგვიძლია *α*-სთან და იმ წერტილის კოორდინატთან, რომელსაც *α* შეესაბამება.



დააკავშირეთ, *sinα*-თან

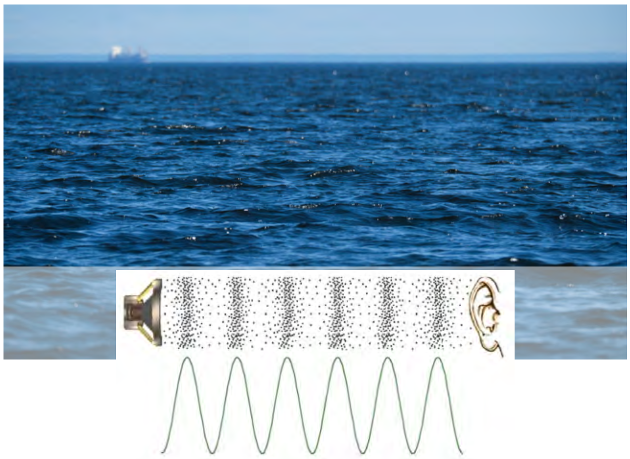
sin (180° – *α*)
sin (180° + *A*)
sin (360° – *α*)
sin (360° + α)

დააკავშირეთ, cosα-თან

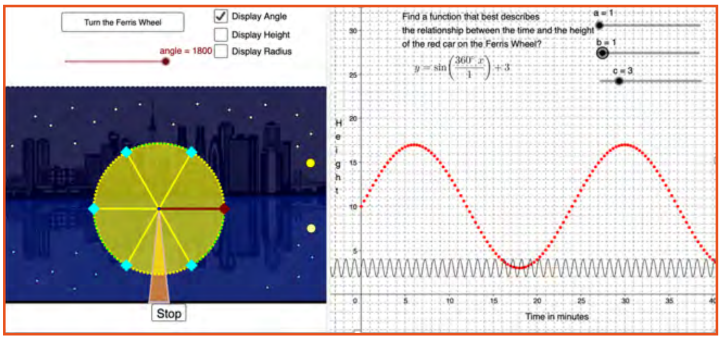
cos (180° – *α*)
cos (180° + *α*)
cos (360° – *α*)
cos (360° + *α*)

7.3. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ვხედავთ სხვადასხვა ტალღურ მოვლენას. ვხედავთ ტალღებს მდინარეებსა თუ ზღვებში. ასევე ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ ბგერა ტალღური მოვლენაა, ის ვრცელდება როგორც ტალღა.



საკვანძო კითხვა: რა სხვადასხვა ხერხით არის შესაძლებელი წრეწირზე მოძრაობის წარმოდგენა?



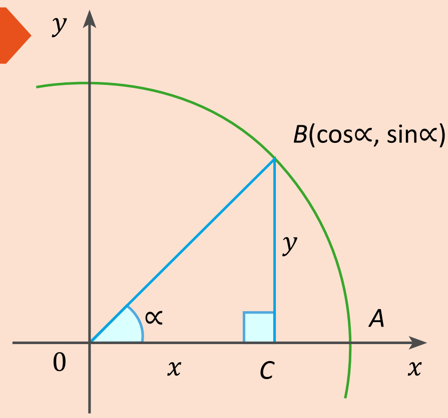
ჩვენ ასევე ვიცით, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში ეშმაკის ბორბალზე მყოფი ადამიანის დაშორება მიწის ზედაპირიდან შეიძლება დავადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მეშვეობით.

აღნიშნული მაგალითების განხილვით ნათელია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით შესაძლებელია სხვადასხვა რეალური მოვლენის აღმწერი მათემატიკური მოდელის შედგენა; გამოვიკვლიოთ როგორ არის აღნიშნული შესაძლებელი.

როგორც ვიცით, ერთეულოვან წრეწირზე აღებული ნებისმიერი B წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები დაკავშირებულია იმ კუთხესთან, რომელსაც ვიღებთ წერტილის კოორდინატთა სათავესთან შემაერთებელ მონაკვეთსა და Ox ღერძის დადებითი მიმართულებას შორის. B წერტილის x კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხის კოსინუსთან, ხოლო y კოორდინატი კუთხის სინუსთან.

ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი წერტილისთვის დავწეროთ კოორდინატები შესაბამისი კუთხის სინუსის და კოსინუსის მეშვეობით.

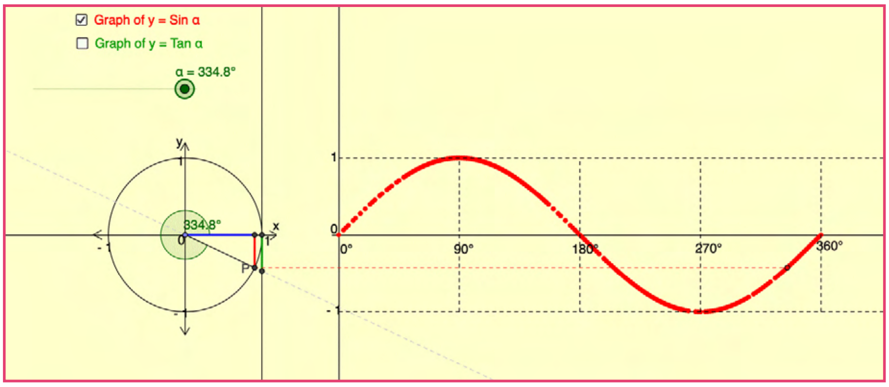
თუ დავაწყვილებთ ინფორმაციას (კუთხე; კუთხის სინუსი) და ავაგებთ გრაფიკს, მას ექნება ტალღის ფორმა. აღნიშნული ფორმის გრაფიკით შესაძლებელია ტალღური მოვლენების მათემატიკური მოდელის შედგენა.



გაგრძელება

გაგრძელება

▶ გახსენით 🔗 სიმულაცია, ამოირჩიეთ y = sinα და გამოიკვლიეთ, როგორ ხდება გრაფიკის აგება.



საკვანძო კითხვა:

- *ტრიგონომეტრიულ თანაფარდობებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიც ეწოდებათ. დაფიქრდით, რატომ ეწოდებათ sinα, cosα, tgα, ctgα-ს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?*

ჩვენ განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში და ბლაგვკუთხა სამკუთხედში; შემდეგ გავეცანით ნებისმიერი ზომის კუთხის შემთხვევაში რა შეიძლება იყოს კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

დავაორგანიზოთ ცხრილში α კუთხის თითოეული მნიშვნელობისთვის რა მნიშვნელობას იღებს *sinα*; დავაწყვილოთ ინფორმაცია (*α; sinα*) და გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.

ტექნოლოგიების მეშვეობით შეგვიძლია მარტივად დავადგინოთ კუთხის სინუსი სხვადასხვა კუთხეებისთვის.

α	*sin α*
–90°	–1
–30°	–0.5
0°	0
30°	0.5
60°	0.8660254
90°	1
120°	0.8660254
150°	0.5
180°	0
270°	–1
360°	0

y = *sinα* ფუნქციის გრაფიკის აგება

საკოორდინატო სიბრტყეზე Ox ღერძს შევუსაბამოთ გრადუსი, ხოლო Oy ღერძს რიცხვები;

დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია შემდეგნაირად (*α,sinα*).

წერტილები კოორდინატებით (α,sinα). გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთოთ თანმიმდევრობით, მივიღებთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც ეწოდება **სინუსოიდა**.

განსაზღვრის არე:
$D(f) = R$

მნიშვნელობათა სიმრავლე:
$E(f) = [-1; 1]$

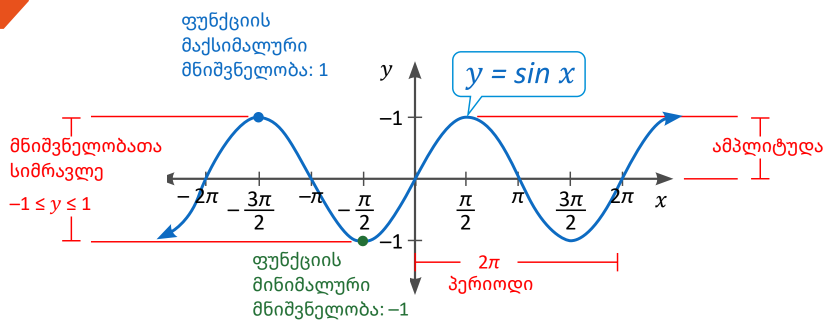
გრაფიკი აგებულია ისე, რომ OX ღერძზე გადაზომილია რადიანები:

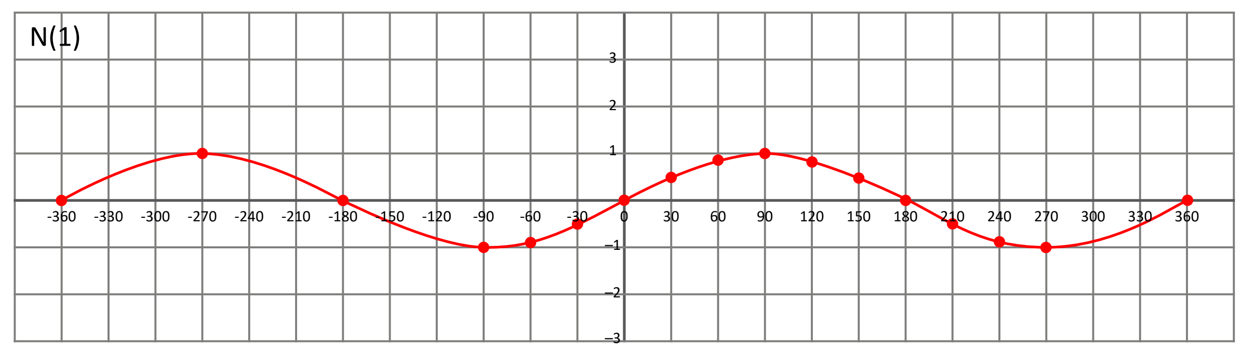
გრაფიკი N1 აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია გრადუსები. მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრის არეა:

$D(f) = [-360°; 360°]$

მნიშვნელობათა სიმრავლე:

$E(f) = [-1;1]$ ⤵️





სინუსიოდა იწყება სათავიდან და ერთი ბრუნი სრულდება ინტერვალზე [0°;360°], ყოველი შემდეგი 360°-ის ტოლ ინტერვალზე მეორდება გრაფიკის ერთი სრული ტალღის შესაბამისი ფორმა, ამიტომ პერიოდია 360°.

ზოგადად,

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°)$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360° \cdot 2)$ და ა.შ.

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360° \cdot k)$, სადაც

$k \in Z$; $k = ... -2; 1; 0; 1; 2; ...$

$\alpha \in [0°; 360°]$

როდესაც მოცემულია

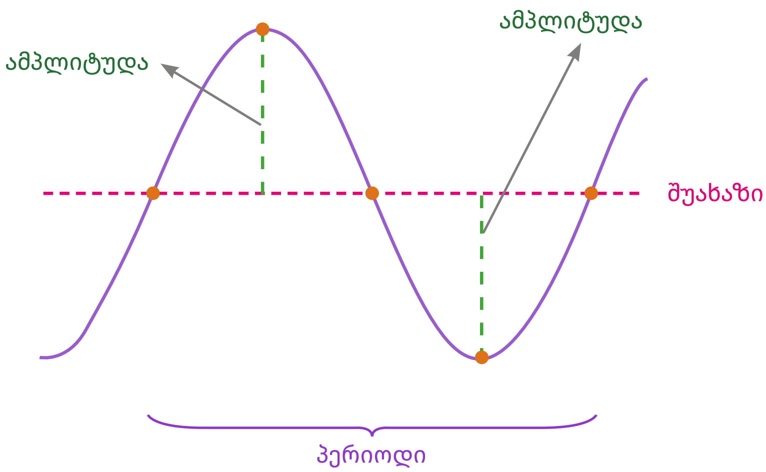
$y = a\sin b(x - x_0) + c$

A – ამპლიტუდა $= |a|$;

T პერიოდი $= \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{360°}{b}$

c გვიჩვენებს სინუსოიდის შუახაზს, ასევე

$E(f) = [-a + c; a + c]$



პერიოდი აღინიშნება სიმბოლოთი T.

$y = \sin\alpha$ ფუნქციის პერიოდია $T = 360°$

ამპლიტუდაა 1

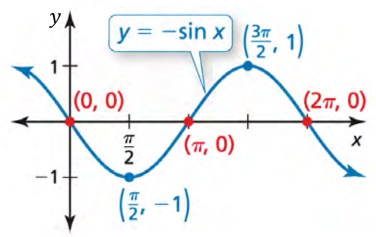
y = sin$x$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით სხვადასხვა ფუნქციის გარდაქმნებს და განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გარდაქმნები;

გარდაქმნა N1:

$y = -\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = \sin x$-ის სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ.



გარდაქმნა N2:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \sin x$

$D(f) = [0\,;360°]$

$E(f) = [-1\,;1]$

$y = \sin x + 2$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით ზემოთ.

$D(f) = [0;360°]$

$E(f) = [1;3]$

$y = \sin x - 3$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით ქვემოთ.

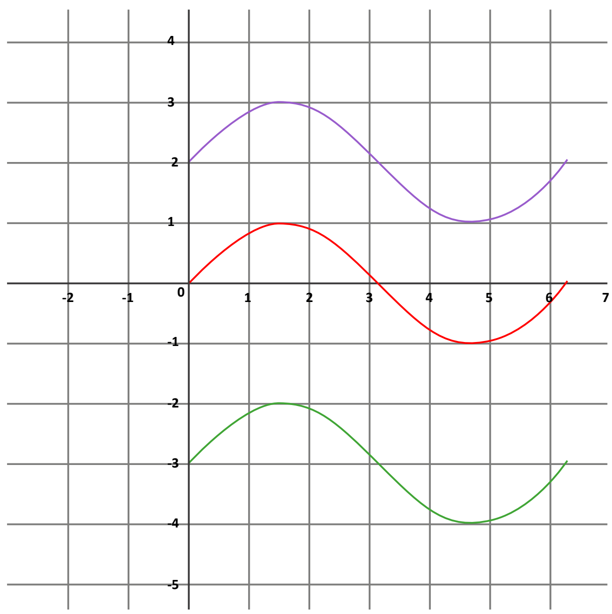
$D(f) = [0;\ 360°]$

$E(f) = [-4;-2]$

ამპლიტუდა $A = 1$

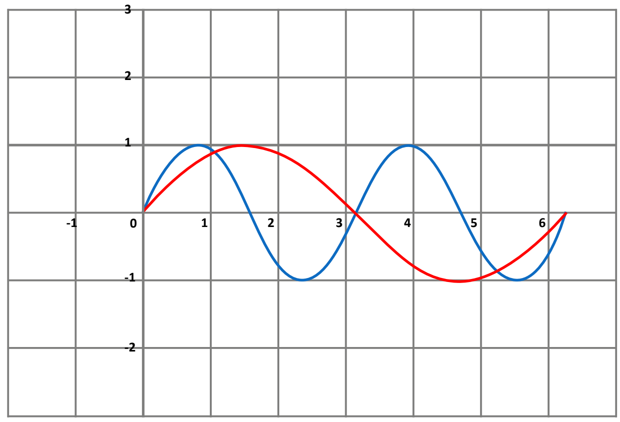
პერიოდი არ შეცვლილა

$T = 360°$



გარდაქმნა N3:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:



$y = \sin x$

$D(f) = [0; 2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$y = \sin 2x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის შეკუმშვით.

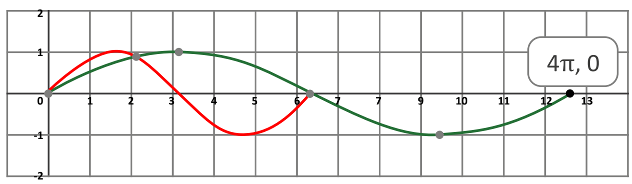
$D(f) = [0; 2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; იგივე $T = 180°$

$A = 1$

$y = \sin 0.5x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის გაფართოებით.



$D(f) = [0; 4\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$; იგივე $T = 720°$

$A = 1$;

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).

როდესაც მოცემულია

$y = \sin bx$ ფუნქცია

პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$T = \frac{2\pi}{b}$

გარდაქმნა N4:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \sin x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$;

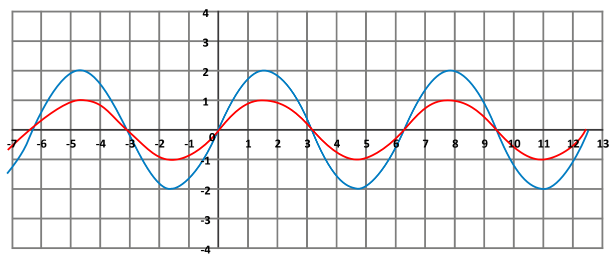
$y = 2\sin x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის Oy ღერძის გასწვრივ გაწელვით

$D(f) = R$

$E(f) = [-2; 2]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 2$



გაგრძელება

გაგრძელება

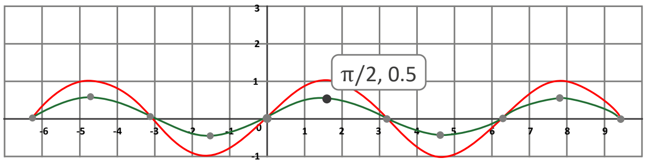
$y = 0.5 \sin x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის Oy ღერძის გასწვრივ შევიწროებით

$D(f) = R$

$E(f) = [-0.5; 0.5]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 0.5$



როდესაც მოცემულია
$y = a \sin x$ **ფუნქცია**

ამპლიტუდა $A = |a|$;
როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა დამოკიდებულია იმაზე თუ რა რიცხვზე მრავლდება ფუნქცია (ანუ y).

გარდაქმნა N5:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \sin x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ იგივე

$y = \sin(x + 60°)$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით მარცხნივ.

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$

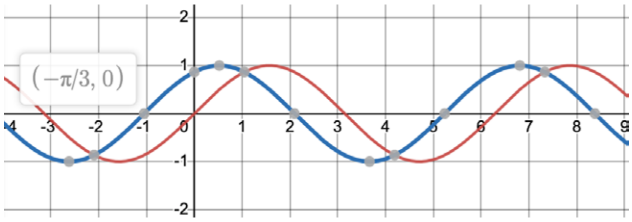
$y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით მარჯვნივ.

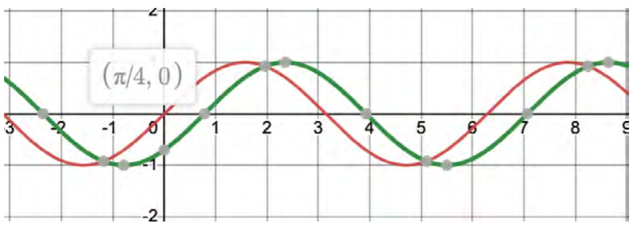
$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

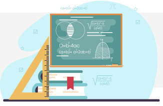
$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$





სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

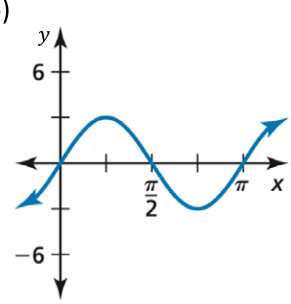
1. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები.

▪ აღწერეთ და გამოიკვლიეთ გარდაქმნები; ▪ თითოეულ შემთხვევაში დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.	ა) $y = sinx$; $y = \sin x + 4$; $y = sinx - 5$; ბ) $y = sinx$; $y = -sinx$; გ) $y = 2sinx$; $y = 2sinx + 1$; $y = 2sinx - 3$; დ) $y = \sin x$; $y = \sin(x + 30°)$; $y = \sin(x - 90°)$; ე) $y = sinx$; $y = \sin 4x$; ვ) $y = sinx$; $y = \sin 0.2x$; ზ) $y = sinx$; $y = -2sinx$; თ) $y = sinx$; $y = -2sinx + 4$; ი) $y = sinx$; $y = 2\sin(x + 90°) + 4$.

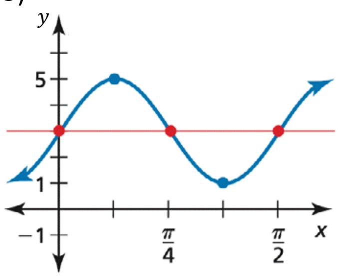
2. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები. თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა);
- რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

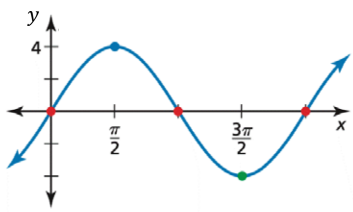
ა)



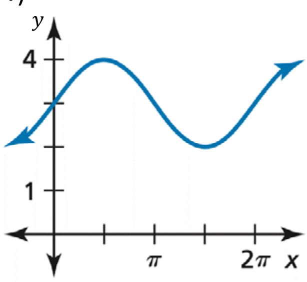
ბ)



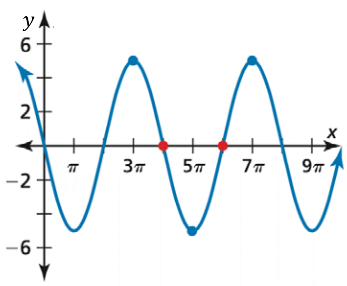
გ)



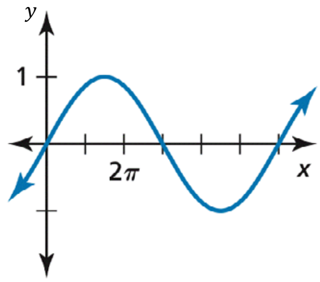
დ)



ე)



ვ)

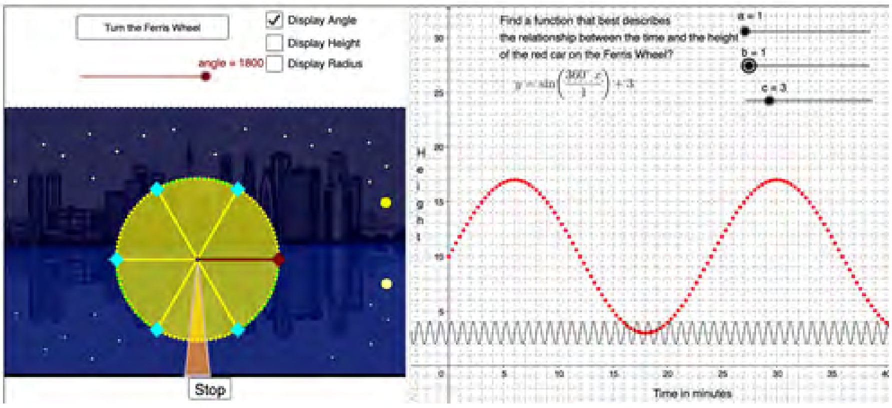


სავარჯიშოები

3. თემის დასაწყისში მოცემულ VII კომპლექსურ დავალებასთან დაკავშირებული ამოცანა:

დავუშვათ, ვართ ეშმაკის ბორბალზე და გვაინტერესებს დავადგინოთ დროის ყოველ მომენტში რა სიმაღლეზე ვართ დაშორებული მიწიდან. გახსენით სიმულაცია, დააყენეთ სხვადასხვა პარამეტრი, გამოიკვლიეთ რა გავლენას ახდენს ეს პარამეტრები თითოეულ გრაფიკზე და რას შეიძლება შეესაბამებოდეს რეალურ სიტუაციაში;
აღნიშნული კვლევა მოამზადეთ საპრეზენტაციოდ.

სიმულაცია



y = *cosα* კოსინუსოიდა

ჩვენ ვიცით, რომ დადგენილია კუთხის კოსინუსი სხვადასხვა კუთხეებისთვის.

α	$\cos\alpha$
–90°	0
–60°	0.5
0°	1
30°	0.8660254
60°	0.5
90°	0
180°	–1
120°	–0.5
150°	0.8660254
180°	–1
270°	0
360°	1

y = *cosα* ფუნქციის გრაფიკის აგება

საკოორდინატო სიბრტყეზე Ox ღერძს შევუსაბამოთ გრადუსი, ხოლო Oy ღერძს რიცხვები.

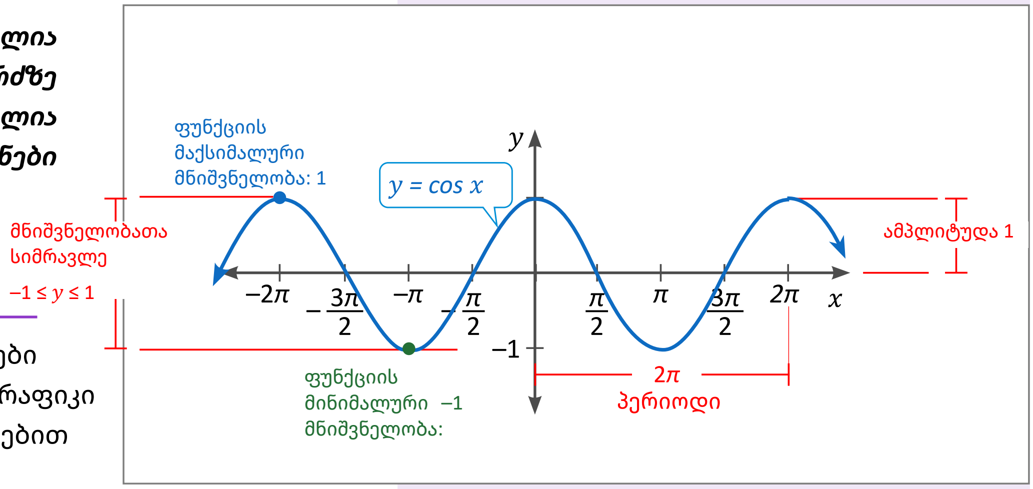
დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია შემდეგნაირად (α,cosα).

გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და მივიღებთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც ეწოდება **კოსინუსოიდა**.

მოცემულ შემთხვევაში
განსაზღვრის არეა:
$D(f) = R$

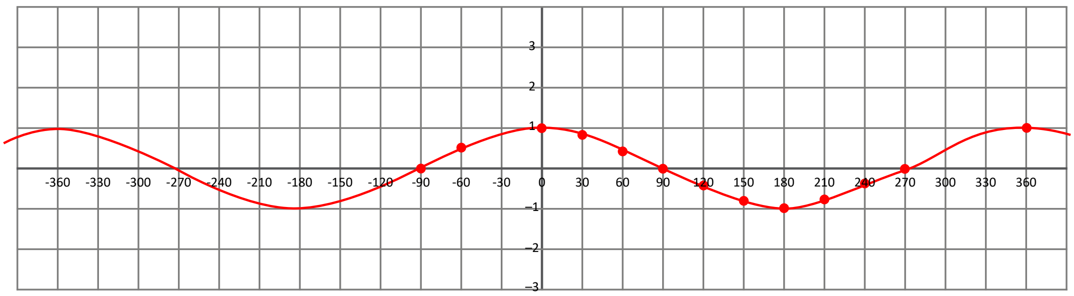
მნიშვნელობათა სიმრავლე:
$E(f) = [-1; 1]$

გრაფიკი აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია რადიანები



შენიშვნა: ისრები გვაჩვენებს, რომ გრაფიკი ორივე მიმართულებით გრძელდება.

გრაფიკი აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია გრადუსები



მითითება: ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემისას აუცილებელია განსაზღვრის არის დაზუსტება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩაითვლება, რომ ფუნქცია მთელ რიცხვთა ღერძზეა განსაზღვრული და გრაფიკი უსასრულოდ გაგრძელდება როგორც მარჯვნივ, ასევე მარცხნივ.

გაგრძელება

როდესაც მოცემულია:

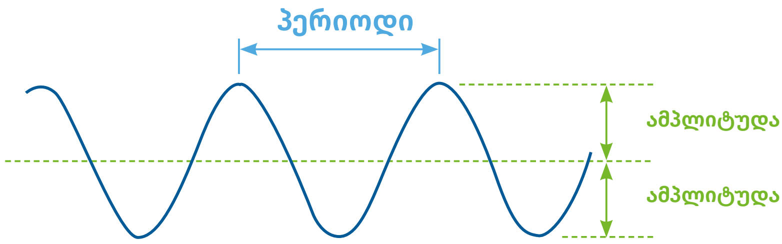
$y = a\cos b(x - x_0) + c$

A – ამპლიტუდა = $|a|$;

T პერიოდი = $\frac{2\pi}{b} = \frac{360°}{b}$

c გვიჩვენებს კოსინუსოიდის შუახაზს.

ხოლო $E(f) = [-a + c; a + c]$.



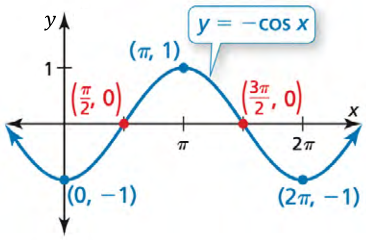
$y = \cos x$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით სხვადასხვა ფუნქციის გარდაქმნებს და განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გარდაქმნები:

გარდაქმნა N1:

$y = -\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = \cos x$-ის სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ.



გარდაქმნა N2:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

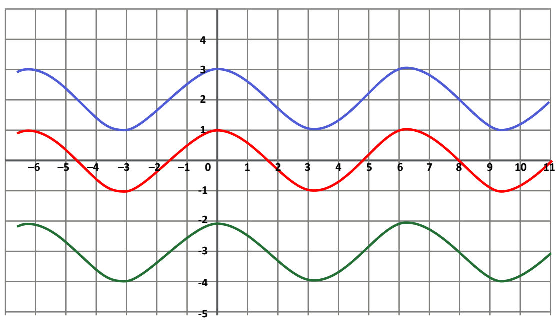
$y = \cos x + 2$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით ზემოთ (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით).

$D(f) = R$

$E(f) = [1; 3]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$



გაგრძელება

გაგრძელება

$y = \cos x - 3$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით ქვემოთ (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).

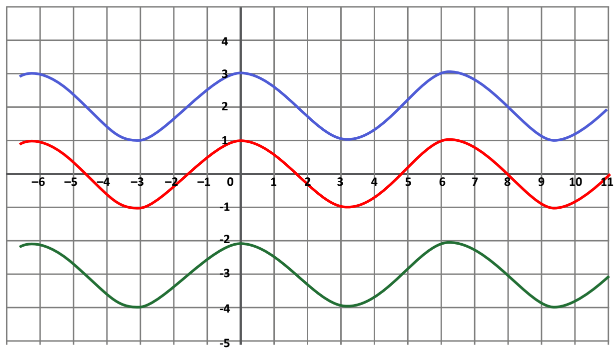
$D(f) = R$

$E(f) = [-4;-2]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).



გარდაქმნა N3:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \cos x$

$D(f) = [0;2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = \cos 2x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის შეკუმშვით.

$D(f) = [0; 2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; იგივე $T = 180°$

$A = 1$;

$y = \cos 0.5x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის გაფართოებით.

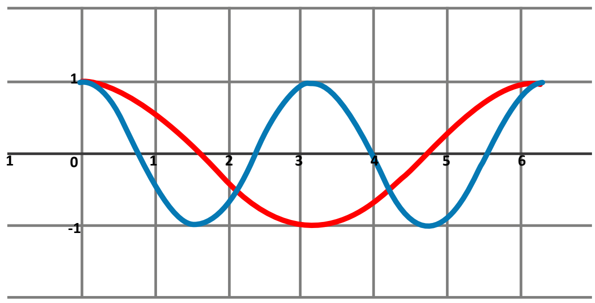
$D(f) = [0; 4\pi]$

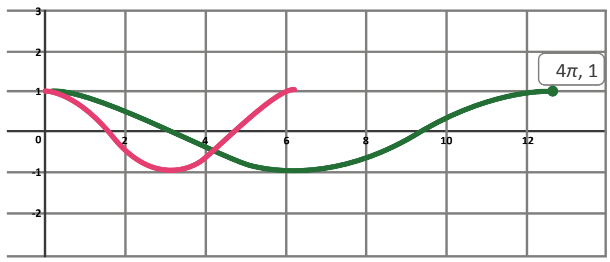
$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$; იგივე $T = 720°$

$A = 1$

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).





როდესაც მოცემულია
$y = \cos bx$ ფუნქცია

პერიოდი გამოითვლება ფორმულით
$T = \frac{2\pi}{b}$

გარდაქმნა N4:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = 2\cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-2; 2]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 2$

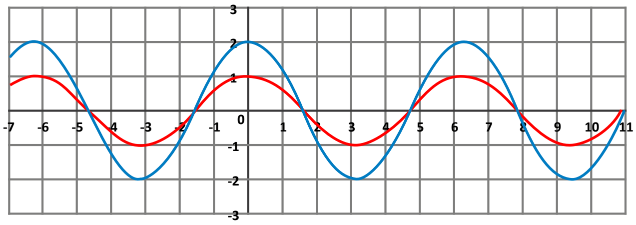
$y = 0.5 \cos x$

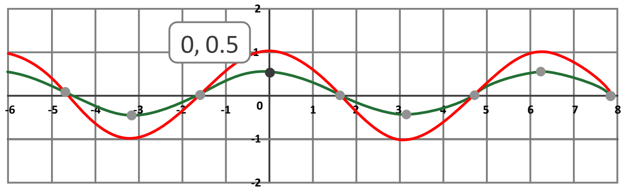
$D(f) = R$

$E(f) = [-0.5; 0.5]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 0.5$





როდესაც მოცემულია:

$y = a \cos x$ ფუნქცია

ამპლიტუდა = $|a|$;

როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება ფუნქცია (ანუ y).

გარდაქმნა N5:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ იგივე

$y = \cos(x - 90°)$, მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მარჯვნივ (Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით).

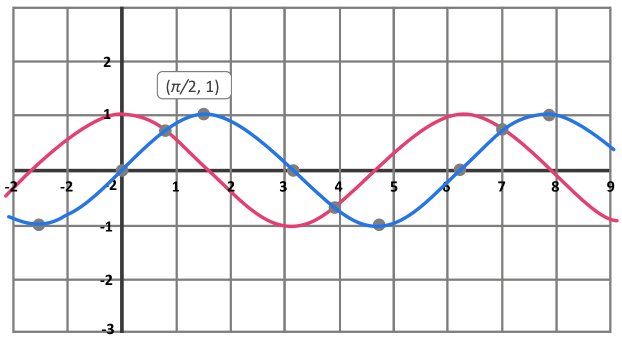
$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$

$y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).



$y = \cos(x - 90°)$ გრაფიკი ემთხვევა $y = \sin x$ გრაფიკს, სინუსოიდა მიიღება კოსინუსოიდას წანაცვლებით მარჯვნივ **90°**-ით ($\frac{\pi}{2}$) ერთეულით.

გაგრძელება

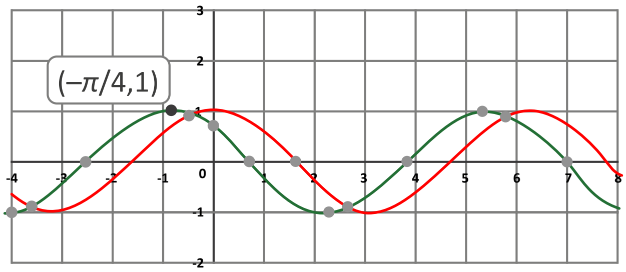
გაგრძელება

$D(f) = R$

$E(f) = [-1;1]$

$T = 2\pi$; იგივე T = 360°

A = 1



სავარჯიშოები

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები.

▪ აღწერეთ და გამოიკვლიეთ გარდაქმნები. ▪ თითოეულ შემთხვევაში დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.	ა) $y = cosx$; $y = cosx + 4$; $y = cosx - 5$; ბ) $y = cosx$; $y = -cosx$; გ) $y = 2cosx$; $y = 2cosx + 1$; $y = 2cosx - 3$; დ) $y = cos\,x$; $y = cos(x + 30°)$; $y = cos(x - 90°)$; ე) $y = cosx$; $y = cos\,4x$; ვ) $y = cosx$; $y = cos\,0.2x$; ზ) $y = cosx$; $y = -2cosx$; თ) $y = cosx$; $y = -2cosx + 4$; ი) $y = cosx$; $y = 2cos\,(x + 90°) + 4$.

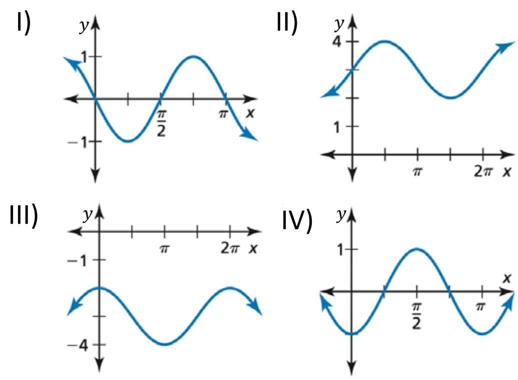
2. შეუსაბამეთ გრაფიკები ფუნქციებს:

ა) $y = 3 + sin\,x$;

ბ) $y = sin\,2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

გ) $y = -3 + cos\,x$;

დ) $y = cos\,2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.



3. როდესაც ადამიანი ისვენებს, მისი წნევა დროში შეიძლება აღიწეროს შემდეგი ფუნქციით:

$$P = 100 - 20 \cdot cos\,\frac{8\pi}{3}t$$

P–შეესაბამება წნევას.

დახაზეთ მოცემული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი; რომლის მეშვეობითაც შეძლებთ აღწეროთ ერთი გულისცემა.

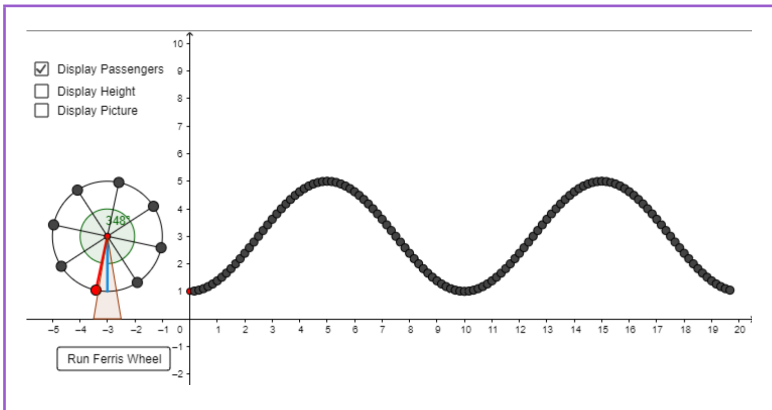
რა შეიძლება იყოს პულსი (გულისცემის რაოდენობა ერთ წუთში)?

სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო

4. პარაგრაფის ახსნის ნაწილში, მეხუთე გარდაქმნით ვნახეთ, რომ სინუსის და კოსინუსის ფუნქციები დაკავშირებულია ერთმანეთთან. განიხილეთ სათვალთვალო ბორბლის სიმულაცია; ცვალეთ პარამეტრები და თითოეული შემთხვევისთვის აღწერეთ სიტუაცია, როგორც სინუსის, ასევე კოსინუსის მეშვეობით.

სიმულაციის გვერდით ცხრილში მოცემულია მონაცემები: დრო და სიმაღლე. იფიქრეთ, რას გვიჩვენებს აღნიშნული ინფორმაცია და რასთან არის დაკავშირებული ფორმულაში?



ჩაწერეთ გრაფიკის შესაბამისი ფორმულა, როგორც სინუსის, ასევე კოსინუსის მეშვეობით.

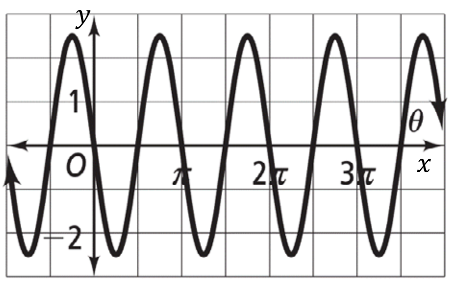
შეინახეთ თქვენი კვლევის შედეგები საპრეზენტაციოდ.

გახსენით სიმულაცია

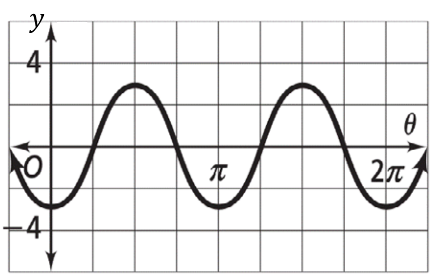
5. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები; თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა).
- დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა)



ბ)

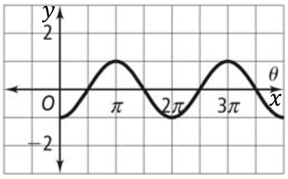


6. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები; თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

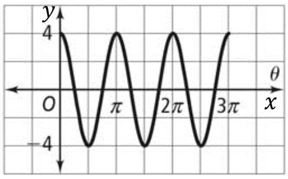
- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა).
- დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

სავარჯიშოები

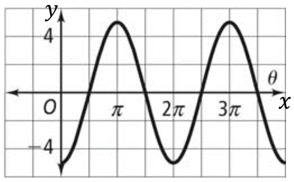
ა)



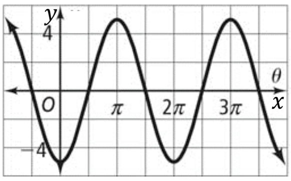
ბ)



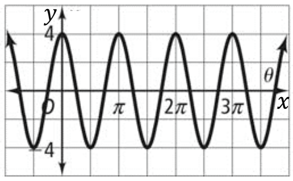
გ)



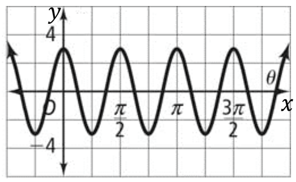
დ)



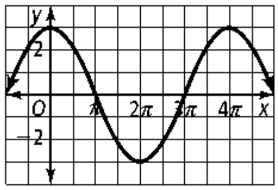
ე)



ვ)



7. **შეცდომის ანალიზი:**

მოცემული ფუნქციის ანალიზის დროს სტუდენტმა დაწერა, რომ ფუნქციის ამპლიტუდა არის –2; ხოლო პერიოდი 180°. დაეხმარეთ სტუდენტს, რომ გამოასწოროს შეცდომა.	

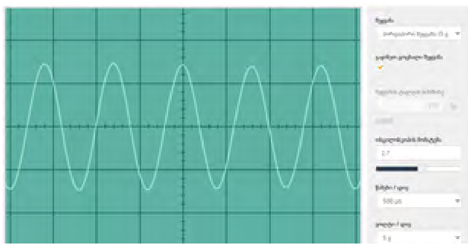
8. **ეს საინტერესოა:** იცით თუ არა, რომ ბგერის დანახვა შეგვიძლია?

დიახ, დღეს უკვე ძალიან მარტივია ბგერის ბუნების გამოკვლევა და ბევრი საინტერესო დეტალის გაგება იმაზე თუ როგორ წარმოიქმნება და ვრცელდება ბგერა, როგორ აღვიქვამთ მუსიკას და ა.შ.

გადადით მოცემულ ბმულზე, ჩართეთ თქვენი საყვარელი მელოდია და სცადეთ მისი დანახვა!
https://academo.org

- ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალეთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერის სიხშირე.
- დააკვირდით მიღებულ გრაფიკს, ეცადეთ მიიღოთ სინუსოიდას ფორმის გრაფიკი. გამოიკვლიეთ გრაფიკის ამპლიტუდა.

  დაუკავშირეთ ერთმანეთს ბგერის ფიზიკური მახასიათებლები მის შესაბამის მათემატიკური ფუნქციის პარამეტრებთან (ამპლიტუდას სიხშირე).



7.4. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნა გრაფიკულად

ვიცით, რომ ერთ-ერთი ეშმაკის ბორბლის (სათვალთვალო ბორბლის) მოძრაობა აღიწერება შემდეგი ფუნქციით:

$h(t) = 85sin\frac{\pi}{20}(t-10) + 90$

როგორ დავადგინოთ, ჩაჯდომიდან რა დროის შემდეგ იქნება ადამიანი მიწის ზედაპირიდან 140 მეტრზე?

ამისათვის საჭიროა ამოვხსნათ განტოლება:

$$85sin\frac{\pi}{20}(t-10) + 90 = 140$$

სიმულაცია

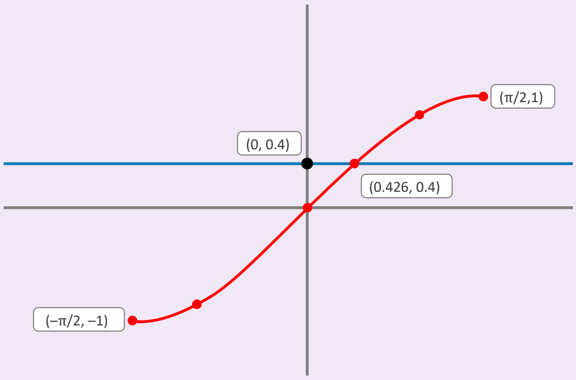
ვთქვათ, f ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი გარკვეულ ინტერვალზე, ხოლო a არის რიცხვი, რომელსაც f ფუნქცია იღებს აღნიშნულ ინტერვალზე. ასეთ შემთხვევაში: $f(x) = a$ განტოლებას აქვს მოცემულ ინტერვალზე ერთი ამონახსნი.

იპოვეთ $sinx = 0.4$ განტოლების ამონახსნი $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, ანუ $-90° \le x \le 90°$ შუალედში.

გვინდა დავადგინოთ x-ის რა მნიშვნელობისთვის იღებს $y = sinx$ ფუნქცია 0.4-ის ტოლ მნიშვნელობას.

ვიცით, რომ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია, შესაბამისად, განსახილველ განტოლებას ექნება ერთი ამონახსნი.



ვხედავთ, რომ წრფე გრაფიკს კვეთს წერტილში (0.426; 0.4); ე.ი. როდესაც კუთხის ზომაა 0.426 რადიანი, მაშინ ფუნქცია იღებს მნიშვნელობას 0.4.

0.426 რადიანს შეესაბამება მიახლოებით 24°.

პროცედურა – როგორ ამოვხსნათ განტოლება გრაფიკულად?

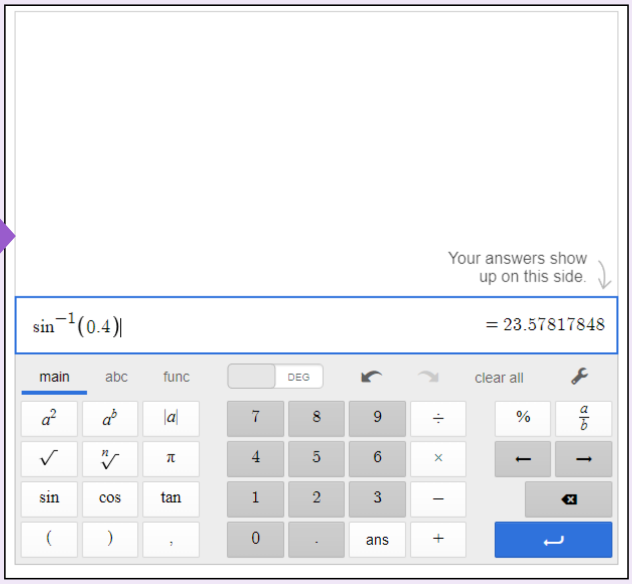
1. შედით ვებ-გვერდზე Desmos;
2. ააგეთ $y = sinx$ ფუნქციის გრაფიკი;
3. ააგეთ $y = 0.4$ წრფის გრაფიკი და ნახეთ რა წერტილში იკვეთებიან გრაფიკები კონკრეტულ ინტერვალზე;
4. ამოწერეთ წერტილის კოორდინატები.

განტოლების ამოხსნა კალკულატორით:

შედით ვებ-გვერდზე:

🔗 www.desmos.com/scientific, ამოირჩიეთ ღილაკი func (Functions), შემდეგ ჩაწერეთ sin^{-1} 0.4

როდესაც გვინდა ვიპოვოთ კუთხე, მაშინ ვწერთ აღნიშვნას $sin^{-1}\ a$. თანამედროვე გრაფიკულ კალკულატორებში დაიწყეს აღნიშნული სიმბოლოს გამოყენება. ზოგადად, $sin^{-1}\ a$ სიმბოლოს ნაცვლად მათემატიკაში ვიყენებთ აღნიშვნას: $arcsin\ a$;



ყურადღება მიაქციეთ შუაში ღილაკს, რომლის მეშვეობითაც პასუხი შეიძლება იყოს წარმოდგენილი რადიანებში ან გრადუსებში.

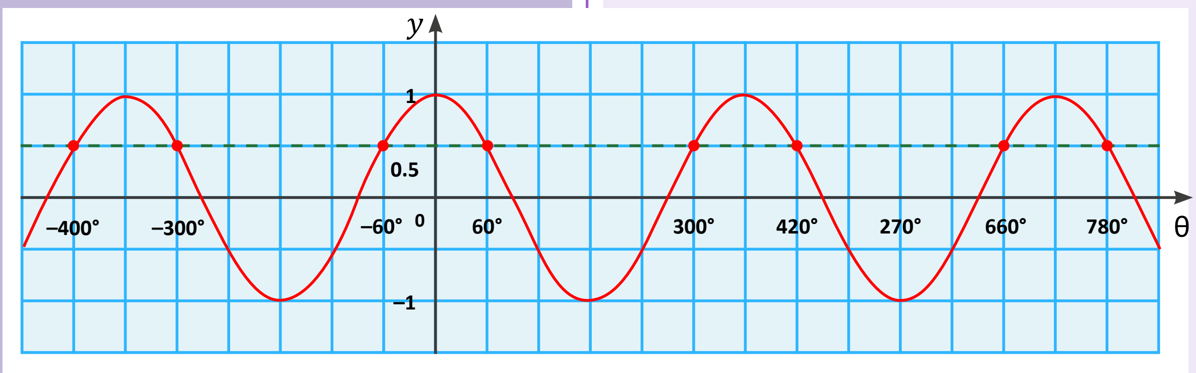
ზემოთ მოცემულ მაგალითში ჩვენ განვიხილეთ კონკრეტული ინტერვალი, როდესაც ფუნქცია იყო ზრდადი. რა მოხდება, თუ გვინდა მთელ განსაზღვრის არეზე ყველა ამონახსნის დაწერა?

იპოვეთ $cos\theta = 0.5$ განტოლების ამონახსნი:

ა) [–180°;180°] ინტერვალზე;
ბ)** სრულ განსაზღვრის არეზე.

როგორ ამოვხსნათ განტოლება გრაფიკულად?

1. შედით ვებ-გვერდზე 🔗 Desmos;
2. ააგეთ $y = cos\theta$ ფუნქციის გრაფიკი;
3. ააგეთ $y = 0.5$ წრფის გრაფიკი და ნახეთ რა წერტილში იკვეთებიან გრაფიკები კონკრეტულ ინტერვალზე;
4. ამოწერეთ წერტილის კოორდინატები.



ა) განვიხილოთ განტოლება

$$cos\theta = 0.5$$
$$\theta = cos^{-1}\ 0.5$$

პასუხი არის $\theta_1 = 60°$ $\theta_2 = –60°$

გაგრძელება

ბ) **მათემატიკის მოყვარულთათვის:**

თუ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე, შესაბამისად წრფე კოსინუსოიდას კვეთს ერთზე მეტ წერტილში; განტოლებას აქვს უსასრულო ამონახსნთა რაოდენობა.

- *როგორ ჩავწეროთ თითოეული?*

ვიცით, რომ [–180°;180°] ინტერვალზე განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი:

$\theta_1 = 60°$ $\theta_2 = -60°$

პასუხი ასევე იქნება ყოველი შემდეგი კუთხე, რომელიც მეტია აღნიშნულ კუთხეებზე 360°-ით ან ნაკლებია 360°-ით.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ წერტილი არის წრეწირზე, მაშინ ყოველი სრული კუთხით მობრუნებისას წერტილი დაუბრუნდება საწყის პოზიციას.

$\theta = \pm 60° + 360°k$, სადაც $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

მათემატიკის მოყვარულთათვის:

როდესაც მოცემულია $\cos x = a$ განტოლება, რომელიც განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე, მაშინ განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$x = \pm\cos^{-1} a + 360°k$, სადაც $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

როდესაც მოცემულია $\sin x = a$, მაშინ განტოლების ამონახსნია:

$x = (-1)^k \sin^{-1} a + 180°k$, სადაც $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

შეგახსენებთ, წიგნებში $\cos^{-1}$-ის ნაცვლად შეხვდებით აღნიშვნას *arccos*, $\sin^{-1}$-ის ნაცვლად კი *arcsin*; ტექნოლოგიების გამოყენების შედეგად დაინერგა აღნიშვნები $\sin^{-1}$ და $\cos^{-1}$;

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [–90°;90°] ინტერვალზე. ამოხსენით გრაფიკული მეთოდით (გრაფიკის და წრფის აგებით) ან კალკულატორის დახმარებით.

ა) $cos\alpha = 1$	ე) $cos\alpha = 0.8$
ბ) $2cos\alpha = 1$	ვ) $cos\alpha = -0.9$
გ) $2sin\alpha = \sqrt{3}$	ზ) $2sin\alpha = -\sqrt{2}$
დ) $-2sin\alpha = \sqrt{3}$	თ) $2sin\alpha = 0.3$

2. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0°; 360°] ინტერვალზე. ამოხსენით თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით.

ა) $cos^2\alpha = 1$	ე) $cos^2\alpha - cos\alpha = 0$
ბ) $cos^2\alpha = 4$	ვ) $sin^2\alpha + sin\alpha = 0$
გ) $4\ sin^2\alpha = 1$	ზ) $2sin\alpha - sin^2\alpha = 0$
დ) $cos^2\alpha = 0.4$	თ) $2sin\alpha - 0.1 = 0$

3. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0; 360°] ინტერვალზე.

ა) $cos\ (\alpha - 90°) = 1$	ე) $sin(2\alpha + 40°) = -1$
ბ) $cos\ (\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	ვ) $cos(\alpha + 20°) = -1$
გ) $sin\ (2\alpha - 30°) = \frac{1}{2}$	ზ) $cos(20° - 4\alpha) = 1$
დ) $sin\ (2\alpha + 90°) = 0$	თ) $cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. ამოხსენით პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანა.

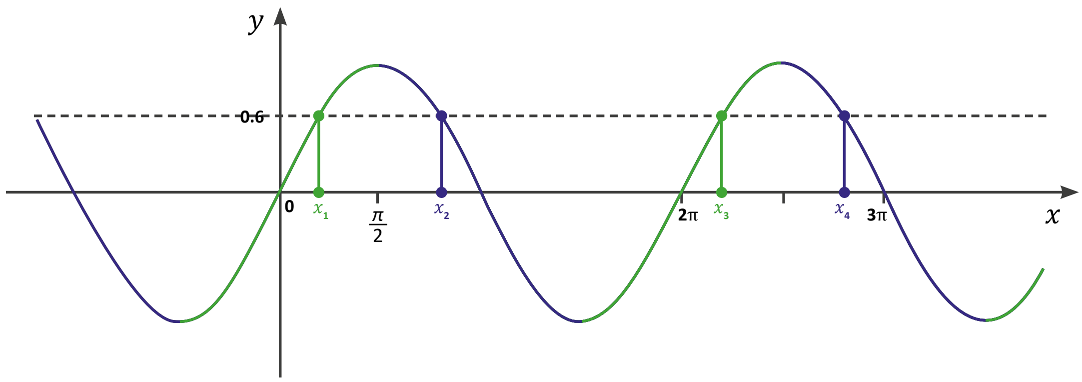
ვიცით, რომ ერთ-ერთი ეშმაკის ბორბლის (სათვალთვალო ბორბლის) მოძრაობა აღიწერება შემდეგი ფუნქციით:

$$h(t) = 85sin\frac{\pi}{20}(t - 10) + 90$$

- *როგორ დავადგინოთ, ჩაჯდომიდან რა დროის შემდეგ იქნება ადამიანი მიწის ზედაპირიდან 140 მეტრზე? 100 მეტრზე?*

სავარჯიშოები

5. $y = sinx$ ფუნქციის გრაფიკი $y = 0.6$ წრფეს კვეთს წერტილებში x_1, x_2, x_3, x_4. იპოვეთ აღნიშნული წერტილების რიცხვითი მნიშვნელობა გრადუსებში.



6. **გამოწვევა:** იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0°; 360°] ინტერ-ვალზე. ამოხსენით თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით.

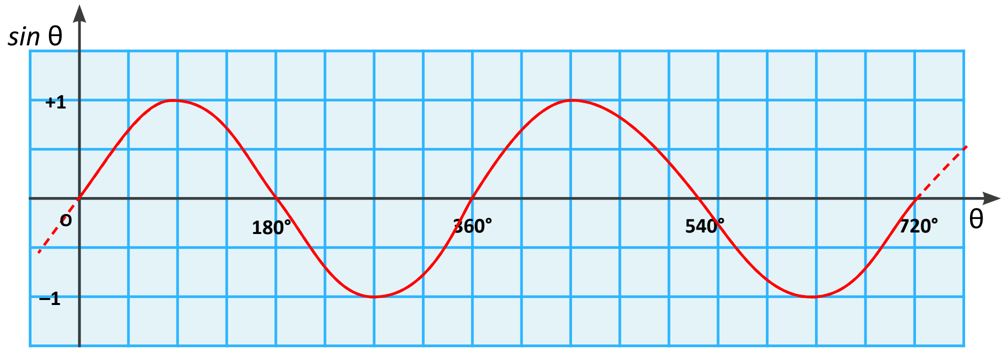
ა) $cos^2\,\alpha - 3cos\alpha + 4 = 0$	გ) $2sin^2\,\alpha + sin\alpha - 1 = 0$
ბ) $cos^2\,\alpha + cos\alpha - 2 = 0$	დ) $sin^2\,\alpha + 5sin\alpha + 6 = 0$

7. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0; 360°] ინტერვალზე.

ა) $2cos\,(\alpha - 90°) = 1$	ე) $2sin(2\alpha + 40°) = -1$
ბ) $3cos\,(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	ვ) $2cos(\alpha + 20°) = -1$
გ) $-1sin\,(2\alpha - 30°) = \frac{1}{2}$	ზ) $-4cos(20° - 4\alpha) = 1$
დ) $4sin\,(2\alpha + 90°) = 0$	თ) $-1cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

პერიოდული ფუნქციები, $y = tgx$ ფუნქცია

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, და ვიცით, რომ $y = sinx$ და $y = cosx$ ფუნქციების პერიოდია 2π.



ეს ნიშნავს იმას, რომ ნებისმიერი x რიცხვისთვის სრულდება პირობა:

$sin(x + 2\pi) = sinx$ და $cos(x + 2\pi) = cosx$

სინუსის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა ყველა იმ წერტილში, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდება $2\pi k$ პერიოდით, სადაც $k = ...\ -2, -1, 0, 1, 2...$

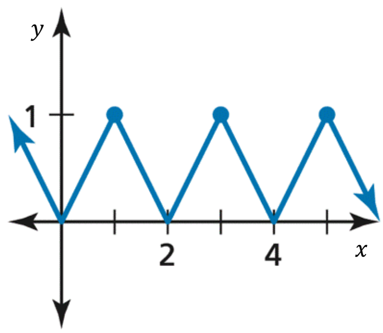
ასევე, კოსინუსის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა ყველა იმ წერტილში, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდება $2\pi k$ პერიოდით, სადაც $k = ...-2, -2, 0, 1, 2\ ...$

განვიხილოთ სხვადასხვა პერიოდული ფუნქციების გრაფიკები:

f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული $T \neq 0$ პერიოდით, თუ ყოველი x-თვის f-ის განსაზღვრის არიდან, $(x + T)$-ც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და ამ ფუნქციის მნიშვნელობები x და $(x + T)$ წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $f(x + T) = f(x)$.

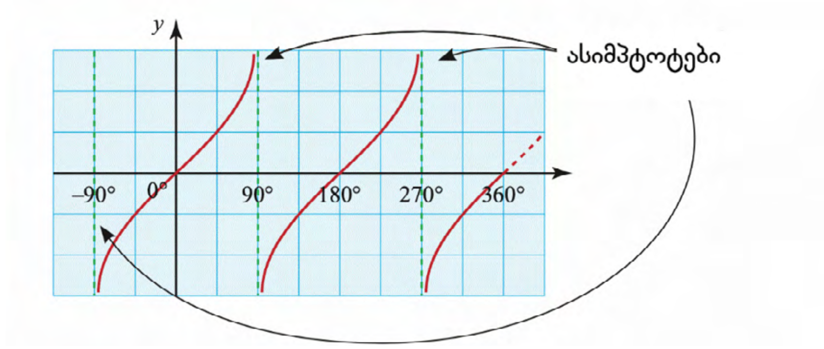
ნიმუში 2 – იპოვეთ ფუნქციის პერიოდი

განვიხილოთ $y = f(x)$ფუნქციის გრაფიკი. აღნიშნული ფუნქციის პერიოდია 2.



ნიმუში 2

გამოვიკვლიოთ $y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ მისი პერიოდი.

<table>
<tr><td>$y = tgx$ ფუნქციის პერიოდია π</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$x = 90° + \pi k$, სადაც $k = \ldots -2, -2, 0, 1, 2\ldots$ მნიშვნელობებზე ფუნქცია განსაზღვრული არაა; შესაბა-მისად, აღნიშნულ წეტილებზე გავლებული Oy ღერძის პარალელური წრფეები წარმოადგენენ $y = tgx$ ფუნქციის ასიმპტოტებს; გრაფიკი არასოდეს გადაკვეთს აღნიშნულ წრფეებს.

ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა რიცხვი გარდა $x = 90° + \pi k$ რიცხვებისა, სადაც:

$k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$

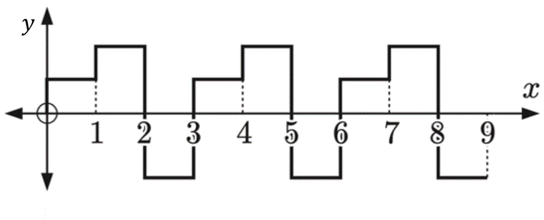
ფუნქციას არ აქვს მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილი.

</td></tr>
</table>

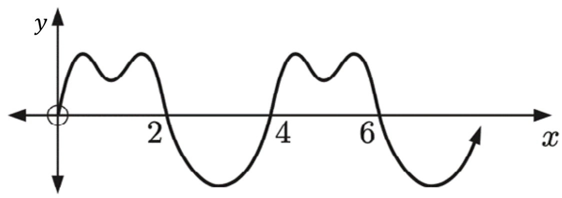
სავარჯიშოები

1. დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციების პერიოდი:

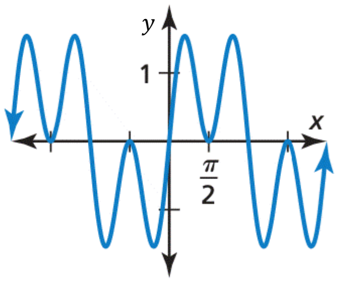
ა)



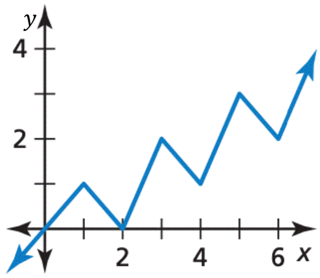
გ)



ბ)



დ)



2. დამოუკიდებლად ააგეთ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკები.

3. **გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციის გარდაქმნები:**

ა) $y = tgx$; $y = tgx + 4$; $y = tgx - 5$;	დ) $y = tgx$; $y = tg4x$;
ბ) $y = tgx$; $y = -tgx$;	ე) $y = tgx$; $y = tg(x - 90°)$; $y = tg(x + 30°)$.
გ) $y = tgx$; $y = 2tgx$;	

4. ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალეთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერის სიხშირე.

დააკვირდით მიღებულ გრაფიკს, ეცადეთ მიიღოთ სინუსოიდას ფორმის გრაფიკი. გამოიკვლიეთ გრაფიკის ამპლიტუდა.

X. დავალების წარდგენა

წრფივი და ექსპონენციური მოდელები

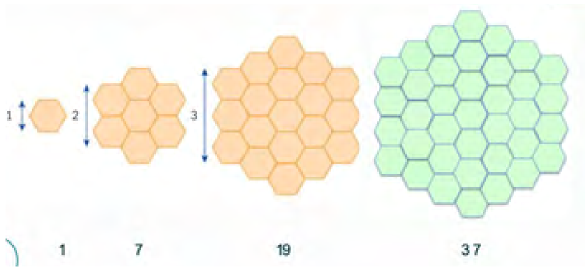
ეს საინტერესოა,

ქეთიმ და მეგობრებმა დაიწყეს შესწავლა, თუ როგორ ამზადებენ ფუტკრები ფიჭას.

ჯგუფმა ინტერნეტში მოიძია ინფორმაცია, რომელშიც მოცემული იყო თუ როგორ აგებდნენ ფუტკრები ფიჭას. დაკვირვების შემდეგ დაინახეს, რომ ფუტკრები ფიჭას აგებენ გარკვეული წესით.

კომპლექსური დავალება 1

ქეთის და მის მეგობრებს დაავალეს მოვლენებში აღმოეჩინათ გარკვეული კანონზომიერება და დაეკავშირებინათ მათემატიკასთან, შეექმნათ სიტუაციის მოდელი, ფორმულირება, გამოეთქვათ ვარაუდები და საკუთარი ვარაუდების შესამოწმებლად შეესრულებინათ გამოთვლითი სამუშაოები.



როცა იწყებს 1 რიგით – ერთი ექვსკუთხედია;

როცა იწყებს 2 რიგით – 7 ექვსკუთხედი;

როცა იწყებს 3 რიგით – 19 ექვსკუთხედი;

როცა იწყებს 4 რიგით – 37 ექვსკუთხედი.

საკვანძო კითხვა:

- *შეიძლება თუ არა რიგის ნომერსა და ფიჭების რაოდენობას შორის კავშირის დადგენა და ამ კავშირის ფორმულირება?*

სიტუაციის მოდელი 1

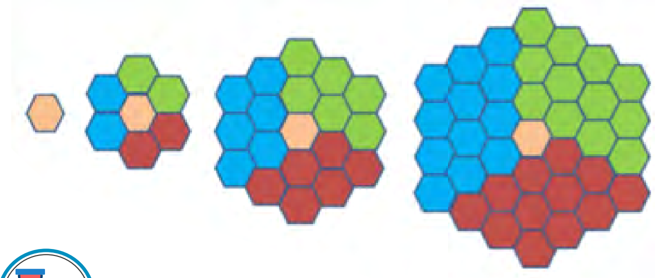
ჯგუფის ერთმა წევრმა შენიშნა, რომ, თუ მოცემულ ექვსკუთხედებს დავაჯგუფებთ გარკვეული წესით, მაშინ შესაძლებელი იქნება მათი ფორმულირება, თუ როგორ არის დამოკიდებული რიგის რაოდენობაზე ექვსკუთხედების რაოდენობა ფიჭაში.

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება 1

სიტუაციის მოდელი 2

ჯგუფის მეორე წევრმა შენიშნა სხვა წესი და გამოთქვა ვარაუდი, რომ თუ მოცემულ ექვსკუთხედებს დავაჯგუფებთ გარკვეული წესით, მაშინ შესაძლებელია მათი დაწერა მეორე ფორმულით: თუ როგორ არის დამოკიდებული რიგის რაოდენობაზე ექვსკუთხედების რაოდენობა ფიჭაში.

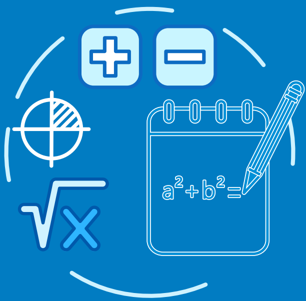


თქვენი დავალება

1. შეისწავლოთ საკითხი და დაადგინოთ, შესაძლებელია თუ არა რიგის ნომერსა და ფიჭაში ექვსკუთხედების რაოდენობას შორის არსებობდეს დამოკიდებულება? როგორი დამოკიდებულება შეიძლება არსებობდეს?
2. რამდენი რიგით უნდა დაეწყო ფუტკარს აგება, რომ მიეღო 1000 ექვსკუთხედი, ან რამდენი ექვსკუთხედი შეიქმნებოდა თუ აგებას დაიწყებდა 14 ექვსკუთხედით? ამის გადამოწმება ექვსკუთხედების ხატვის მოცემული წესით არის რთული, ამიტომ მათ გადაწყვიტეს სიტუაციის ფორმულირება. **მინიშნება:** დავალების შესრულებაში დაგეხმარებათ ტელეგაკვეთილი, უყურეთ მესამე წუთიდან.
3. აღწერეთ კანონზომიერება ცხრილით, სიტყვიერად ან რაიმე ფორმულით.
4. მოიყვანეთ თქვენთვის საინტერესო არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიასთან დაკავშირებული მაგალითი.
5. შედით ვებ გვერდზე Geogebra, სადაც ნახავთ დავალებას. მოცემულია 4 სხვადასხვა ფიგურა; თქვენ შეგიძლიათ ცვალოთ n, ხოლო ფორმულა გიჩვენებთ n-ის ცვლილების შემდეგ რამდენი წერტილი იქნება ფიგურაზე; შეარჩიეთ ნებისმიერი მოდელი, ახსენით რა ტიპის კანონზომიერებაა, სიტყვიერად, ცხრილის და გრაფიკის მეშვეობით.

გაგრძელება

X. დავალების წარდგენა



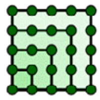
კომპლექსური დავალება 1

თქვენი დავალება

გამოითვალოთ რამდენი წერტილი იქნება ფიგურაზე როდესაც:

$n = 5$? 10? 15? 20?

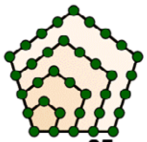
15



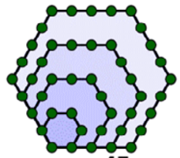
25

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_n = n^2$$



35



45

$$P_n = \frac{3n^2 - n.}{2}$$

$$H_n = n(2n-1)$$

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით

ნაშრომის პრეზენტაციისას ხაზგასმით უპასუხეთ კითხვებს:

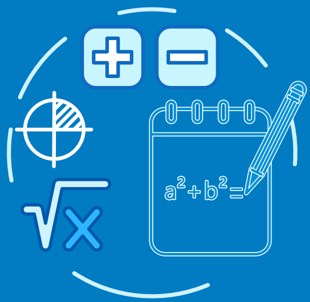
I. რას ეწოდება მიმდევრობა? რიცხვითი მიმდევრობა?

II. როგორ არის შესაძლებელი მიმდევრობაში კანონზომიერების აღმოჩენა და წარმოდგენა?

III. როგორ შეძელით ფიქასთან დაკავშირებული სიტუაციის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა? რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ?

IV. მოიყვანეთ 2 მაგალითი, რომელიც შეიძლება აღიწეროს არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიების მეშვეობით.

V. ახსენით, რა არის მთავარი განსხვავება არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიას შორის?



მოცემული კოპლექსური დავალება ეხება, როგორც არითმეტიკულ და გეომეტრიულ, ასევე მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს.

იცით თუ არა, რომ

ცხოვრების განმავლობაში ადამიანებს უამრავი ფინანსური გადაწყვეტილების მიღება უწევთ, რომელთა დიდი ნაწილიც ფინანსურ ორგანიზაციებთან თანამშრომლობასთანაა დაკავშირებული. გადაწყვეტილება შესაძლოა მასშტაბური იყოს, როგორიცაა, ბინის შეძენა, თანხის დაბანდება, ან ერთი შეხედვით უმნიშვნელოც, მაგალითად, ყოველთვიური კომუნალური გადასახადების გადახდა, ავტომობილის დაზღვევა. თუმცა, დღევანდელ რეალობაში ფინანსური პროდუქტები და ინსტრუმენტები ხშირად იმდენად კომპლექსურია, რომ გადაწყვეტილების მიღება, არც თუ ისე, მარტივია.

კომპლექსური დავალება 2

ფინანსური განათლების მნიშვნელობის გათვალისწინებით ეროვნულმა ბანკმა დაწერა სახელმძღვანელო „ფინანსური განათლება მარტივად“. აღნიშნულ სახელმძღვანელოში დაინტერესებულ პირს შეუძლია ნახოს მნიშვნელოვანი ინფორმაცია.

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ არის შესაძლებელი თანხაზე მოგების რთული პროცენტის დარიცხვის ფორმულირება? როგორ არის შესაძლებელი დავადგინოთ რა დროში გაგვიორმაგდება თანხა? როგორ არის შესაძლებელი გამოვიკვლიოთ, რა პროცენტს უნდა დავთანხმდეთ, რომ თანხა 4 წელში გაორმაგდეს?*

თქვენი დავალება

გამოიკვლიოთ, როგორ არის შესაძლებელი მარტივი და რთული პროცენტით დარიცხვის მათემატიკური მოდელირება და დაეხმაროთ მეგობარს გადაწყვეტილების მიღებაში.

დავუშვათ, თქვენს მეგობარს სურს გააკეთოს ინვესტიცია, საინვესტიციო კომპანია სთავაზობს შემდეგ პირობას:

შეთავაზება 1:

თუ ბიზნესში გააკეთებს 10 000 და 10 000 ლარზე მეტი თანხის ინვესტირებას, მაშინ თანხას დაერიცხება მოგება რთული პროცენტის წესით, 4 %-იანი სარგებლით.

შეთავაზება 2:

თუ ბიზნესში გააკეთებს 100 000 და 100 000 ლარზე მეტი თანხის ინვესტირებას, მაშინ თანხას დაერიცხება მოგება რთული პროცენტის წესით, 2 %-იანი სარგებლით.

შეთავაზება 3:

თუ ბიზნესში გააკეთებს ინვესტირებას 200 000 ლარის ოდენობით, მას დაერიცხება 4%-იანი სარგებელი მარტივი პროცენტის წესით.

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება 2

თქვენი დავალება

დავუშვათ, რომ მეგობარს შეუძლია ნებისმიერ დროს გაწყვიტოს კონტრაქტი და მოითხოვოს თანხა.

დაეხმარეთ მეგობარს გამოთვლების წარმოებაში. დაწერეთ მოცემული შემთხვევის აღმწერი მათემატიკური მოდელი და გრაფიკი; სხვადასხვა სიტუაციებისთვის შეასრულეთ გამოთვლები:

1. რამდენ ლარს აიღებს მეგობარი 5 წლის მერე? 10 წლის მერე? გამოიანგარიშეთ თითოეული შემთხვევისთვის.
2. რამდენი წელი უნდა ჰქონდეს ინვესტირებული ბიზნესში თანხა, რომ მან აიღოს:
   - პირველი შემთხვევისთვის 20 000 ლარი? მეორე შემთხვევისთვის 200 000 ლარი?
3. თუ მეგობარს სურს 10 000 ლარის ინვესტირებით 4 წელიწადში აიღოს 15 000 ლარი, რამდენ პროცენტიანი სარგებელი უნდა იყოს შეთავაზებული? (იგულისხმება დარიცხვის რთული პროცენტი).
4. მესამე შეთავაზებისთვის, რა იქნება სარგებელი 4 წლის შემდეგ? რა დროში გაორმაგდება თანხა?

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით. თან დაურთეთ გამოთვლების ფურცელი.

პრეზენტაციისას ხაზგასმით უპასუხეთ ნაშრომის კითხვებს, ასევე მზად იყავით იმსჯელოთ შემდეგ საკითხებზე:

I. რომელი მათემატიკური მოდელი გამოიყენეთ თითოეული სიტუაციის ფორმულირებისთვის? იმსჯელეთ თითოეულ მათემატიკურ მოდელზე.

II. რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ? რომელია ექსპონენციური მოდელი?

III. კიდევ რისი გაგება არის შესაძლებელი ფორმულის მეშვეობით?

IV. იმსჯელეთ, რამდენად მნიშვნელოვანია სიტუაციის ფორმულირება და ფინანსური გადაწყვეტილების მიღებამდე გამოთვლების შესრულება.

თემა 8. არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესია; წრფივი და ექსპონენციური მოდელები

8.1. მიმდევრობა

გარემომცველ სამყაროში ჩვენ ვადევნებთ თვალს უამრავ ისეთ მოვლენას, რომლებიც რაღაც კანონზომიერებით ხორციელდება.

მაგ. წელიწადის დროების ცვლილება: ზამთარს მოსდევს გაზაფხული, გაზაფხულს – ზაფხული, ზაფხულს – შემოდგომა, ხოლო შემოდგომას – ისევ ზამთარი და ასე შემდეგ უწყვეტად.

ასევე, შეგვიძლია განვიხილოთ დღე-ღამის ცვალებადობა: დღეს მოსდევს ღამე, ღამეს ისევ დღე და ასე დაუსრულებლად.

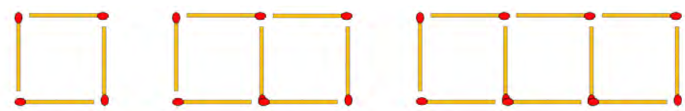
ტელესკოლა – ვიდეო გაკვეთილი

კანონზომიერებები შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ რიცხვით სიმრავლეებშიც, მაგალითად:

- ნატურალურ რიცხვებში 1-ს მოსდევს 2, 2-ს მოსდევს 3, 3-ს მოსდევს 4 და ა. შ., ანუ ყოველი მომდევნო რიცხვი 1-ით მეტია წინაზე და ასე გრძელდება უსასრულოდ.
- ლუწი რიცხვები: 2-ს მოსდევს 4, 4-ს 6 და ა.შ., ყოველი მომდევნო ლუწი რიცხვი 2-ით მეტია წინაზე.

ცხადია, არა მხოლოდ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეებშია შესაძლებელი გარკვეული კანონზომიერების აღმოჩენა.

ნიმუში 1 – ამოვიცნოთ და აღვწეროთ კანონზომიერება



ფიგურა 1 *ფიგურა 2* *ფიგურა 3*

როგორც ვხედავთ,

ფიგურა 1 შედგება 4 ასანთის ღერისგან;

ფიგურა 2 შედგება 7 ასანთის ღერისგან;

ფიგურა 3 შედგება 10 ასანთის ღერისგან.

როგორც ვხედავთ, ყოველ ახალ კონსტრუქციას ემატება 3 ასანთის ღერი შემდეგი წესით:

ჩვენ შეგვიძლია შევიტანოთ აღნიშნული ცხრილში და ვცადოთ ფორმულირება.

ფიგურის ნომერი	1	2	3	4	5
ასანთის ღერების რაოდენობა	4	7	10	13	16

ჩვენ დავაკავშირეთ ფიგურის ნომერი ასანთის ღერების რაოდენობასთან. თუ დავაკვირდებით ცხრილში მოცემულ მონაცემებს, დავინახავთ, რომ ფიგურის ნომრის ერთით ზრდა იწვევს ასანთის ღერების 3-ით ზრდას, აღნიშნული წესი ახასიათებს წრფივ ფუნქციას.

გამომდინარე იქიდან, რომ მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს მხოლოდ ნატურალური რიცხვები, რომელსაც შეესაბამება რიცხვები, რომელიც შეგვიძლია აღვნიშნოთ სიმბოლოებით: a_1,a_2, a_3 და ა.შ.

a_1 – აღნიშნავს პირველ ფიგურაში ასანთის ღერების რაოდენობას;
a_2 – აღნიშნავს მეორე ფიგურაში ასანთის ღერების რაოდენობას;
a_n – აღნიშნავს მე-n ადგილას მდგომ ფიგურაში ასანთის ღერების რაოდენობას.

შეგვიძლია, რომ ზოგადად აღვწეროთ სიტუაცია შემდეგნაირად: (ვაჩვენოთ მიმართება ფიგურის ნომერსა და მასში ასანთის ღერების რაოდენობას შორის).

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{array}$$

რიცხვითი მიმდევრობა არის გარკვეული წესით დალაგებული რიცხვები. მიმდევრობა წარმოადგენს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეს წარმოადგენენ რიცხვები, რომელთაც მიმდევრობის წევრებს ვუწოდებთ.

მიმდევრობას აღნიშნავენ **ინდექსიანი პატარა ლათინური ასოებით:** a_n, $n \in \mathrm{N}$; ან b_n, $n \in \mathrm{N}$; ან x_n, $n \in \mathrm{N}$და ა. შ.

დავუშვათ, მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა a_n, $n \in \mathrm{N}$, მაშინ a_1, a_2, a_3, და ა.შ. არის მიმდევრობის პირველი, მეორე, მესამე და ა.შ. წევრები. ინდექსები 1; 2; 3 და ა. შ. წარმოადგენენ მოცემული წევრის ნომერს, ხოლო მიმდევრობის ზოგადი წევრი ჩაიწერება a_n სახით. როდესაც მოცემულია ფორმულა, შესაძლებელია ვიპოვოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი.

მიმდევრობის წარმოდგენა შესაძლებელია სიტყვიერად, რეკურენტული წესით და ანალიზურად (ფორმულის მეშვეობით).

აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება და წარმოვადგინოთ სიტუაციის აღმწერი **მათემატიკური მოდელი** (წარმოვადგინოთ მიმდევრობა ანალიზური ფორმით).

თუ ვეცდებით განხილული სიტუაციის ფორმულირებას მივიღებთ:

$a_1 = 4$
$a_2 = 7 = 4 + 3 = a_1 + 3$
$a_3 = 10 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3$
$a_4 = 13 = a_3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3$
....
$a_n = 4 + 3(n - 1)$

ამგვარად შევძელით დაგვეკავშირებინა მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი რიგის ნომერთან; აღნიშნული ფორმულიდან გამომდინარე, მარტივად შეგვიძლია ვიპოვოთ a_{100}, a_{201}, ან ნებისმიერი წევრი.

$a_{100} = 4 + 3 \cdot (100 - 1) = 4 + 3 \cdot 99 = 301$

$a_{201} = 4 + 3 \cdot (201 - 1) = 4 + 3 \cdot 200 = 604$

ნიმუში 2

რიცხვითი მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით, სადაც ვხედავთ, რომ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი დამოკიდებულია რიგის n ნომერზე.

ა) $a_n = \dfrac{4}{n} + 2$, სადაც $n \in N$

იპოვე მიმდევრობის პირველი, მეოთხე, მეათე და მეასე წევრები.

ბ) $a_n = 3n - 5$

იპოვეთ მიმდევრობის ის წევრი, რომელიც მეტია 20-ზე.

ა)	ბ)
ა) ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $a_1, a_4, a_{10}, a_{100}$ $a_1 = \dfrac{4}{1} + 2 = 6$ $a_4 = \dfrac{4}{4} + 2 = 3$ $a_{10} = \dfrac{4}{10} + 2 = 2.4$ $a_{100} = \dfrac{4}{100} + 2 = 2.04$ როგორც ვხედავთ, როდესაც მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით, ადვილდება ნებისმიერი წევრის პოვნა.	ბ) რადგან მიმდევრობის წევრი უნდა იყოს 20-ზე მეტი, ამიტომ მივიღებთ უტოლობას: $a_n > 20;$ ე.ი. $3 \cdot n - 5 > 20,$ $3 \cdot n > 25$ $n > 8\dfrac{1}{3}.$ საჭიროა 20-ზე მეტი პირველივე წევრი, რადგან $n > 8\dfrac{1}{3}$, ამიტომ მისი ნომერი იქნება $n = 9$. შესაბამისად, $a_9 = 3 \cdot 9 - 5 = 27 - 5 = 22;$ ე.ი. $a_9 = 22$

ნიმუში 3

ინტერნეტის გადასახადი. სახლის ინტერნეტის ყოველთვიური გადასახდელი თანხა არის 22,5 ლარი, რომელიც აბონენტმა ყოველი თვის 5 რიცხვში უნდა გადაიხადოს. იმ შემთხვევაში, თუ გადასახადს ვერ გადაიხდის აბონენტი, მაშინ ყოველ გადაცილებულ დღეზე ემატება 0,7 ლარი ჯარიმის საკომისიო. საინტერესოა, ვადაგადაცილების შემთხვევაში რამდენი ლარი გვექნება გადასახდელი 7 რიცხვში, 12-ში, 23-ში?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, რომ 6 რიცხვში გადასახდელი გვექნება 22,5 + 0,7 = 23,2 ლარი, 7-ში იქნება 23,2 + 0,7 = 23,9 ლარი და ა.შ. ჩავწეროთ მიღებული მონაცემები ცხრილში:

+1 +1 +1 +1

რიცხვი	6	7	8	9	10	...	
გადასახდელი თანხა	23.3	23.9	24.6	25.3	26		

+0.7 +0.7 +0.7

გაგრძელება

როგორც ხედავთ, გადასახდელ რიცხვსა და თანხას შორის არის წრფივი დამოკიდებულება. როდესაც ერთი ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით ზრდა იწვევს მეორე ცვლადის (დამოკიდებული ცვლადის) მუდმივი რიცხვით ზრდას, ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას ეწოდება წრფივი დამოკიდებულება (გაიხსენეთ წრფივი ფუნქცია).

მიმდევრობის წარმოდგენა სიტყვიერად:

მივიღეთ რიცხვები: 23,2; 23,9; 24,6; 25,3 და ა.შ., მივიღეთ რიცხვთა დალაგებული სიმრავლე, რომელსაც ეწოდება რიცხვითი მიმდევრობა; რიცხვთა აღნიშნული სიმრავლე იწყება 23,2-ით და ყოველი მომდევნო რიცხვი არის წინაზე 0,7-ით მეტი. ცხადია, ეს სიმრავლე უსასრულოდ ვერ გაგრძელდება (ადრე თუ გვიან ინტერნეტს გათიშავენ).

მიმდევრობის წარმოდგენა რეკურენტული წესით:

შეგვიძლია აღნიშნული შემთხვევა აღვწეროთ ისე, რომ ყოველი მომდევნო წევრი დავაკავშიროთ მის წინა წევრთან:

$a_1 = 23.2$; $a_{n+1} = a_n + 0.7$ სადაც $n \geq 1$

a_{n+1} გვიჩვენებს, რა თანხა იქნება გადასახდელი დაგვიანებული დღეების ჩათვლით; თუ არ იქნება დაგვიანება, მაშინ მომხმარებელი იხდის $a_1 = 23.2$.

მიმდევრობის წარმოდგენა ანალიზურად:

წარმოვადგინოთ მიმდევრობა ფორმულის მეშვეობით, როდესაც ყოველი წევრი დამოკიდებულია მიმდევრობაში წევრის ადგილის ნომერზე, n-ზე.

$a_1 = 23.2$

$a_2 = 23.2 + 0.7 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 0.7 = a_1 + 0.7 + 0.7 = a_1 + 2 \cdot 0.7$

$a_4 = a_3 + 0.7 = a_1 + 0.7 + 0.7 + 0.7 = a_1 + 3 \cdot 0.7$

....

$a_n = 23.2 + 0.7(n - 1)$

$a_n = a_1 + 0.7(n - 1)$, $n \geq 1$

მიმდევრობის წარმოდგენა შეიძლება სამი ძირითადი ხერხით:

ნიმუშები:

სიტყვიერად მოცემული მიმდევრობა.

მიმდევრობის ყოველი წევრის მოსაძებნი წესი ჩამოყალიბებულია სიტყვიერად.

ა) მიმდევრობის პირველი წევრია 23,2, ხოლო მეორედან დაწყებული ყოველი წევრი მიიღება წინა წევრზე 0,7-ის დამატებით.

ბ) მიმდევრობის პირველი წევრია 20, ხოლო მეორედან დაწყებული ყოველი წევრი მიიღება წინა წევრის 1,05-ზე გამრავლებით.

გ) მიმდევრობის პირველი წევრია 2, ხოლო მეორედან დაწყებული ყოველი წევრი მიიღება წინა წევრის კვადრატს გამოკლებული 3.

რეკურენტულად მოცემული მიმდევრობა.

მოცემულია მიმდევრობის პირველი რამდენიმე წევრი, ხოლო დანარჩენი წევრების მოსაძებნად მოცემულია ფორმულა, რომლითაც მიმდევრობის მომდევნო წევრი მიიღება მიმდევრობის წინა რამდენიმე წევრის დახმარებით.

ა) a_n, $n \in N$ მიმდევრობაში:

$a_1 = 23{,}2$ და $a_{n+1} = a_n + 0{,}7$, თუ $n \geq 1$

ბ) x_n ; $n \in N$ მიმდევრობაში: $x_1 = 20$ და $x_{n+1} = 1{,}05 \cdot x_n$, თუ $n \geq 1$.

გ) b_n, $n \in N$ მიმდევრობაში: $b_1 = 2$ და $b_{n+1} = (b_n)^2 - 3$, თუ $n \geq 1$.

ანალიზურად მოცემული მიმდევრობა.

მიმდევრობა მოცემულია ზოგადი წევრის გამოსათვლელი ფორმულის სახით, რომლითაც მიმდევრობის ყოველი წევრი მიიღება მისი შესაბამისი ნომრის დახმარებით.

ა) a_n, $n \in N$ მიმდევრობაში:

$a_n = 23.2 + 0.7(n - 1)$, თუ $n \geq 1$

ბ) x_n, $n \in N$ მიმდევრობაში:

$x_n = 20 \cdot (1{,}05)^{n-1}$, თუ $n \geq 1$.

გ) b_n, $n \in N$ მიმდევრობაში:

$b_n = (2n + 1)^2 - 5$, თუ $n \geq 1$.

რიცხვით **მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი**, თუ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი მეტია მის წინა წევრზე.

a_n, $n \in N$ მიმდევრობაში $a_{n+1} > a_n$, თუ $n \geq 1$.

რიცხვით **მიმდევრობას ეწოდება კლებადი**, თუ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი ნაკლებია მის წინა წევრზე.

b_n, $n \in N$ მიმდევრობაში $b_{n+1} < b_n$, თუ $n \geq 1$.

ნიმუში 4 – მათემატიკის მოყვარულთათვის

მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა:

2; 5; 17; 38; 68; ... იპოვეთ მიმდევრობის მომდევნო 3 წევრი.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობა და ვცადოთ კანონზომიერების აღმოჩენა.

დიაგრამა N1

2 5 17 38 68

+3 +12 +21 +30

+9 +9 +9

თუ დავაკვირდებით *დიაგრამა N1-ს*, დავინახავთ, რომ როდესაც მიმდევრობის წევრებს ვაკლებთ ერთმანეთს, სხვაობა არ არის მუდმივი, მაგრამ როდესაც განვიხილავთ სხვაობების სხვაობას ანუ მეორე რიგის წევრებს ვაკლებთ ერთმანეთს ვიღებთ მუდმივ რიცხვს.

იქიდან გამომდინარე, რომ აღმოვაჩინეთ კანონზომიერება, აღნიშნული წესის გამოყენებით ჯერ ვიპოვოთ რა იქნება მომდევნო 3 წევრი მეორე რიგში, შემდეგ აღვადგინოთ მიმდევრობის პირველი მწკრივში მყოფი რიცხვები და ვიპოვოთ საწყისი მიმდევრობის მომდევნო სამი წევრი.

2 5 17 38 68 107 155 212

+3 +12 +21 +30 +39 +48 +57

+9 +9 +9 +9 +9 +9

აღნიშნული შემთხვევის ფორმულირება არის შედარებით რთული, ამიტომ მას არ განვიხილავთ, თუმცა შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ მიმდევრობის ადგილის ნომერს შორის და წევრის რიცხვით მნიშვნელობას შორის არის კვადრატული დამოკიდებულება (რადგან სხვაობების სხვაობაა მუდმივი).

ნიმუში 5 – მათემატიკის მოყვარულთათვის

მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $x_1 = -4$ და $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{x_n}$, $n \geq 1$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის მეორე და მესამე წევრების ჯამი.

რადგან მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით, ამიტომ მიმდევრობის თითოეული წევრი უნდა ვიპოვოთ თანმიმდევრულად.

ჯერ ვიპოვოთ მეორე წევრი $-x_2$, ამისათვის რეკურენტულ ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $n = 1$. მივიღებთ: $x_{1+1} = 1 + \dfrac{1+2}{x_1}$; ე.ი. $x_2 = 1 + \dfrac{3}{-4} = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$, ანუ $x_2 = \dfrac{1}{4}$.

ანალოგიურად ვიპოვოთ მიმდევრობის მესამე წევრი $-x_3$, ამისათვის რეკურენტულ ფორმულაში უნდა ჩავსვათ $n = 2$. მივიღებთ: $x_{2+1} = 1 + \dfrac{2+2}{x_2}$; ე.ი. $x_3 = 1 + \dfrac{4}{\frac{1}{4}} = 1 + 16 = 17$, ანუ $x_3 = 17$.

შევკრიბოთ მიღებული წევრები: $x_2 + x_3 = \dfrac{1}{4} + 17 = 17\dfrac{1}{4}$.

სავარჯიშოები

რეკომენდაცია: დავალებებზე მუშაობის დროს ყურადღება მიაქციეთ ნიმუშებში განხილულ მაგალითებს.

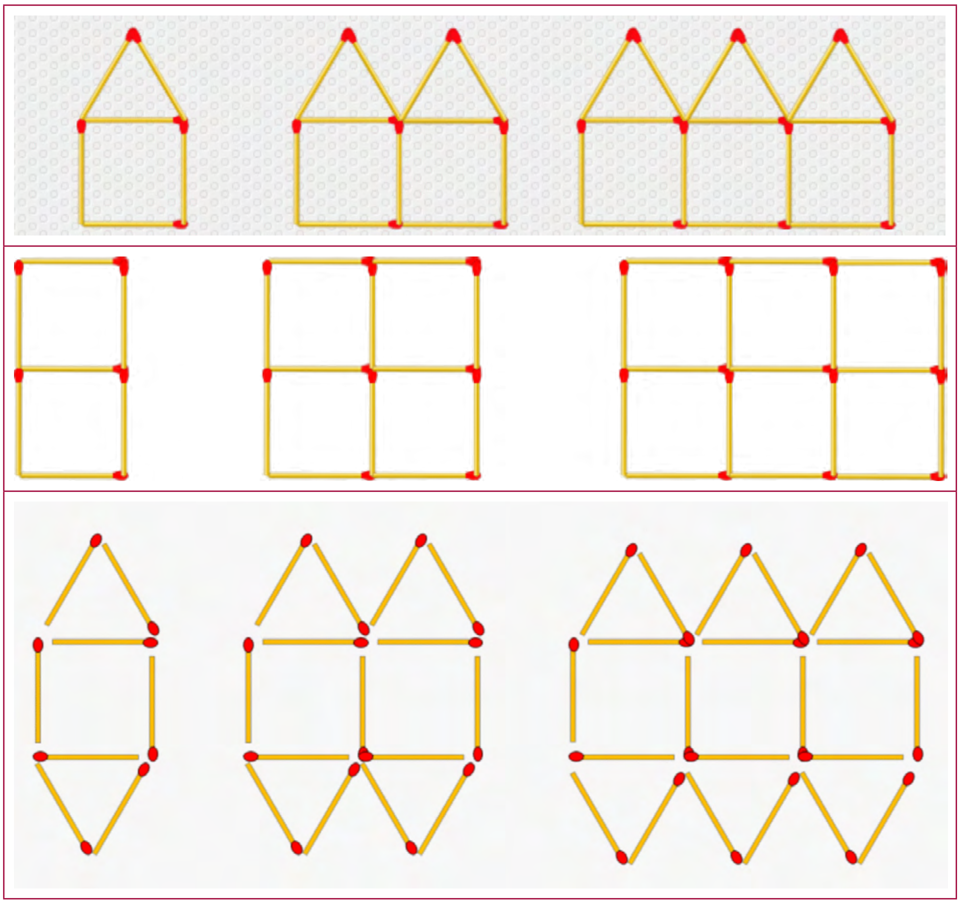
1. **აღმოაჩინეთ კანონზომიერება:** მოცემულია ასანთის ღერებისგან შედგენილი ფიგურების მიმდევრობა.

- აღმოაჩინეთ კანონზომიერება, დაადგინეთ რა წესით ემატება ასანთის ღერები თითოეულ სტრიქონში.
- შეავსეთ ცხრილი.

ფიგურის ნომერი	1	2	3	4	5
ასანთის ღერების რაოდენობა					

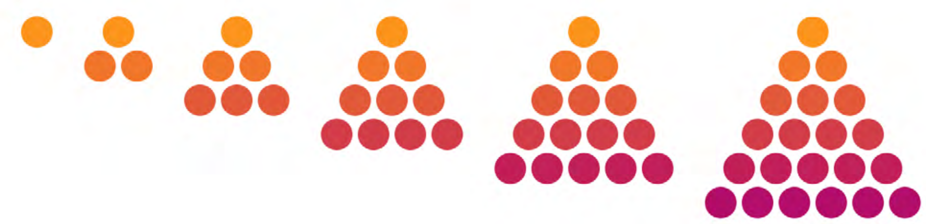
- დაწერეთ შემთხვევის აღმწერი ფორმულა სამივე მიმდევრობაში

კიდევ სცადეთ



სავარჯიშოები

2. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება.



3. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება, აღწერეთ და იპოვეთ მომდევნო 3 წევრი:

ა) 8, 16, 24, 32 ...   გ) 96, 89, 82,75, ...   ე) 1, 4, 16, 64, ...
ბ) 2, 5, 8,11, ...   დ) 480, 240, 120, 60, ...   ვ) 243, 81, 27, 9, ...

ახსენით, როგორ არის მოცემული მიმდევრობა? წარმოადგინეთ მიმდევრობა სხავდასხვა ხერხით.

4. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება და გააგრძელეთ მიმდევრობა 3 წევრით:

ა) 1, 4, 9, 16,...   ბ) 1, 8, 27, 64,...

ახსენით, რა წესით არის მოცემული თითოეული მიმდევრობა? წარმოად-გინეთ მიმდევრობა სხავდასხვა ხერხით.

5. აღმოაჩინეთ კანონზომიერება და გააგრძელეთ მიმდევრობის მომდევნო 3 წევრი:

ა) 4, 6, 10, 16, 24...   ბ) 2, 6, 12, 20, 30...

მინიშნება: მიმდევრობის ადგილის ნომერს შორის და წევრის რიცხვით მნიშვნელობას შორის არის კვადრატული დამოკიდებულება; ფორმულირების გარეშე იპოვეთ მომდევნო 3 წევრი;

6. იპოვეთ კანონზომიერება და გააგრძელეთ მიმდევრობა 2 წევრით:

ა) 95, 91, 87, 83,...   გ) 2, 3, 5, 7, 11,...
ბ) 5, 20, 80, 320,...   დ) 2, 4, 7, 11,...

ახსენით, რა წესით არის მოცემული თითოეული მიმდევრობა? წარმოადგინეთ მიმდევრობა სხავდასხვა ხერხით.

7. იპოვეთ მიმდევრობის შემდეგი სამი წევრი, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

ა) $a_1 = 2$ და $a_{n+1} = a_n + 5$

ბ) $a_1 = 1000$ და $a_{n+1} = \frac{1}{10} a_n$

გ) $a_1 = 1268$ და $a_{n+1} = a_n + 23.9$

ახსენით რა წესით არის მოცემული თითოეული მიმდევრობა?

სავარჯიშოები

8. დაწერეთ a_n მიმდევრობის ზოგადი ფორმულა.

ა) $a_1 = 41$ და $a_{n+1} = a_n + 5$; ბ) $a_1 = 12$ და $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$.

ახსენით, რა წესით არის მოცემული თითოეული მიმდევრობა?

9. ზოგადი ფორმულით მოცემული მიმდევრობებისთვის იპოვეთ მითითებული წევრები:

ა) მიმდევრობაა: $a_n = 2 \cdot n + 1$. იპოვეთ პირველი, მესამე და მერვე წევრები;

ბ) მიმდევრობაა: $a_n = -3 \cdot n - 4$. იპოვეთ მეხუთე, მეოცე და მეასე წევრები;

გ) მიმდევრობაა: $b_n = n^2 - 3$. იპოვეთ b_1 ; b_3 ; b_5 ; b_7 და b_10;

დ) მიმდევრობაა: $b_n = 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 4$. იპოვეთ b_1 ; b_2 ; b_5 ; b_6 და b_8;

ე) მიმდევრობაა: $x_n = 4 \cdot n + \frac{3}{n}$. იპოვეთ x_1 ; x_3 ; x_4 და x_{10};

ვ) მიმდევრობაა: $x_n = (-1)^n \cdot n - 2$. იპოვეთ x_1 ; x_2 ; x_4 ; x_5;

ზ) მიმდევრობაა: $y_n = -2 \cdot n + \frac{3}{n+1}$. იპოვეთ y_1 ; y_2 ; y_5;

თ) მიმდევრობაა: $y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1$. იპოვეთ y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4.

ახსენით, რა წესით არის მოცემული თითოეული მიმდევრობა?

10. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობის რომელიმე წევრი ნულის ტოლი. თუ ასეთი წევრი არსებობს, მაშინ იპოვეთ მისი ნომერი.

ა) მიმდევრობაა: $a_n = 3 \cdot n - 12$;

ბ) მიმდევრობაა: $b_n = -2 \cdot n^2 + 18$;

გ) მიმდევრობაა: $c_n = \frac{21}{n-2} - 7$;

დ)* მიმდევრობაა: $y_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$.

11. მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $y_n = 7 \cdot n - 8$. არის თუ არა ამ მიმდევრობის რომელიმე წევრი ქვემოთ მოცემული რიცხვი. თუ ასეთი წევრი არსებობს, მაშინ იპოვეთ მისი ნომერი.

ა) -1; ბ) 12; გ) 21; დ) 29; ე) 34; ვ) 62.

12. იპოვეთ მოცემული მიმდევრობების პირველი ოთხი წევრის ჯამი:

ა) $a_n = 5 \cdot n - 2$; ბ) $b_n = 2 \cdot n^2 - 3n + 7$; გ) $x_n = \frac{5n}{n+1} + 1$.

13. მოცემულია მიმდევრობა ზოგადი ფორმულით: $a_n = 3 \cdot n - 5$, $n \geq 1$. ამ მიმდევრობისთვის იპოვეთ:

ა) პირველი 5 წევრი;

ბ) 20 – ზე მეტი პირველივე წევრი.

14. მოცემულია მიმდევრობა ზოგადი ფორმულით: $a_n = -2 \cdot n - 6$, $n \geq 1$. ამ მიმდევრობისთვის იპოვეთ:

ა) პირველი 4 წევრი;

ბ) – 30 – ზე ნაკლები პირველივე წევრი.

სავარჯიშოები

15. **გამოწვევა:**

მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $x_n = 1{,}5 \cdot n - 11$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრია უარყოფითი?

16. **გამოწვევა:** მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $y_n = -2{,}5 \cdot n + 19$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრია დადებითი?

17. **გამოწვევა:**

მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $b_n = \frac{18}{n+2} - 3$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრია არაუარყოფითი?

18. **გამოწვევა** **მათემატიკის მოყვარულთათვის**

ა) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $a_n = -5 \cdot n + 23{,}5$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრი აკმაყოფილებს პირობას: $a_n > -20$?

ბ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $x_n = 4 \cdot n - 16{,}8$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრი აკმაყოფილებს პირობას: $x_n < 31$?

გ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $y_n = 3 \cdot n + 7$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრი აკმაყოფილებს პირობას: $22 \le y_n \le 73$?

დ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $b_n = -0{,}5 \cdot n + 12{,}5$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის რამდენი წევრი აკმაყოფილებს პირობას: $2 < b_n \le 11$?

19. ა) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $c_n = \frac{3n}{5} - 6$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უმცირესი მთელი წევრი და მისი ნომერი;

ბ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $x_n = -\frac{2n}{7} + 3$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უდიდესი მთელი წევრი და მისი ნომერი;

გ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $a_n = \frac{5n}{11} - 7$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უმცირესი დადებითი ლუწი წევრი და მისი ნომერი;

დ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $b_n = -\frac{n+3}{8} + 9$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უდიდესი დადებითი კენტი წევრი და მისი ნომერი.

20. ა) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $y_n = 5 - \frac{n}{3}$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უდიდესი მთელი დადებითი და უდიდესი მთელი უარყოფითი წევრები და მათი ნომრები;

ბ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $b_n = \frac{4n}{11} - 9$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უმცირესი მთელი უარყოფითი და უმცირესი მთელი დადებითი წევრები და მათი ნომრები;

გ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $c_n = 6 - \frac{2n}{5}$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უმცირესი მთელი დადებითი და უდიდესი მთელი უარყოფითი წევრების ჯამი;

დ) მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით: $a_n = \frac{3n}{7} - 9$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის უმცირესი მთელი დადებითი და უდიდესი მთელი უარყოფითი წევრების ნამრავლი.

სავარჯიშოები

21. **გამოწვევა** თითოეული მოცემული მიმდევრობებისთვის დაადგინეთ მისი ზრდადობა/კლებადობის საკითხი:

ა) $y_n = -3 \cdot n + 1$;   ბ) $c_n = n^2 - 8n + 7$;   გ) $x_n = \frac{2}{3}n - 5$.

22. **გამოწვევა**

ა) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_3 = 4$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{a_n} + 2$. იპოვეთ a_1 და a_2;

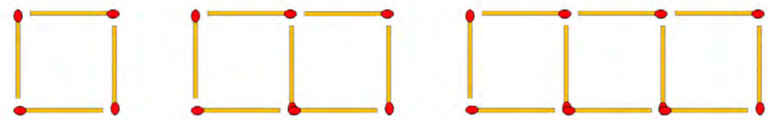
ბ) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_{n+2} = x_{n+1} - 2x_n$. იპოვეთ $x_1 \cdot x_4$;

გ) მიმდევრობაში $b_4 = 3$ და $b_5 = 5$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის მე-8 და მე-9 წევრები, თუ ცნობილია, რომ მიმდევრობის ნებისმიერი სამი მომდევნო წევრის ჯამი ტოლია 15-ის.

23. **გამოწვევა**: მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_3 = 4$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{a_n} + 2$. იპოვეთ a_1 და a_2.

არითმეტიკული პროგრესია

პირველ გაკვეთილში ჩვენ გავეცანით სხვადასხვა მიმდევრობას, განვიხილეთ ასანთის ღერებთან დაკავშირებული ერთი მაგალითი. დავუბრუნდეთ აღნიშნულ მაგალითს.



ასანთის ღერების რაოდენობა, ყოველი ნახაზისთვის არის შემდეგი:

4; 7; 10; 13; 16; 19 ...

მივიღეთ რიცხვითი მიმდევრობა, რომელშიც ყოველი მომდევნო რიცხვი წინა წევრზე არის 3-ით მეტი.

რიცხვით მიმდევრობას, როდესაც ყოველი მომდევნო წევრი წინა წევრზე ერთი და იმავე რიცხვით მეტია ან ნაკლები, ეწოდება არითმეტიკული პროგრესია.

ჩვენ ასევე აღვწერეთ ასანთის ღერებით მოცემული სიტუაცია ცხრილის მეშვეობით და ვცადეთ სიტუაციის ფორმულით მოცემა.

ფიგურის ნომერი	1	2	3	4	5
ასანთის ღერების რაოდენობა					

$a_1 = 4$

$a_2 = 7 = 4 + 3 = a_1 + 3$

$a_3 = 10 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3$

$a_4 = 13 = a_3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3$

....

$a_n = 4 + 3(n - 1)$

რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენით მეტია (ან ნაკლები) ყოველი მომდევნო წევრი წინა წევრზე, ეწოდება სხვაობა და აღინიშნება სიმბოლოთი d.

ჩვენ მიერ ჩაწერილ ფორმულაში $a_1 = 4$, $d = 3$, თუ შევიტანთ აღნიშნულ სიმბოლოებს, მივიღებთ $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იმავე რიცხვის დამატებით, **არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება**. არითმეტიკულ პროგრესიას ძირითადად **აღნიშნავენ** a_n, $n \in N$ მიმდევრობის სახით. რიცხვს, რომელიც ემატება მიმდევრობის წევრს მომდევნო წევრის მისაღებად, ეწოდება **არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა და მას აღნიშნავენ d ასოთი**.

ცხადია, რომ არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი ორი მომდევნო წევრისთვის გვაქვს ტოლობა: $a_{n+1} = a_n + d$ და $a_{n+1} - a_n = d$.

არითმეტიკული პროგრესია

- თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში ყოველი მომდევნო წევრი წინა წევრზე მეტია, ვიტყვით, რომ მიმდევრობა ზრდადია. ზრდადი მიმდევრობების დროს $d > 0$-ზე.
- თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში ყოველი მომდევნო წევრი წინა წევრზე ნაკლებია ვიტყვით, რომ მიმდევრობა კლებადია. კლებადი მიმდევრობების დროს $d < 0$-ზე.

არითმეტიკულ პროგრესიის ზოგადი წევრის ჩასაწერად საკმარისია ვიცოდეთ პროგრესიის პირველი წევრი a_1 და პროგრესიის სხვაობა d.

ნიმუში 1* – ზოგადი ფორმულის გამოყვანა

როდესაც მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა, რომლის წევრები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი შეიძლება აღიწეროს პირველი წევრის a_1, სხვაობის d და მიმდევრობაში მისი პოზიციის (ადგილის n-ის) მეშვეობით.

a_1;

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

....

მარტივად ჩანს, რომ ზოგადი a_n წევრის მოსაძებნი ფორმულა იქნება:

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad \textbf{(1)}$$

(1) ფორმულას არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის (ზოგადი წევრის) გამოსათვლელი ფორმულა ეწოდება. მისგან მარტივად მიიღება არითმეტიკული პროგრესიის d სხვაობის გამოსათვლელი ფორმულა: $d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$.

(1) ფორმულიდან მარტივად ჩანს, რომ, თუ $d > 0$, მიმდევრობის წევრები იზრდება, ანუ მიმდევრობა ზრდადია, ხოლო თუ $d < 0$, მაშინ მიმდევრობა კლებადია.

არითმეტიკული პროგრესიის განმარტების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:
$a_{n+1} - a_n = d$ და $a_n - a_{n-1} = d$, თუ ტოლობების მარცხენა მხარეებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, გვექნება:

$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, საიდანაც მივიღებთ:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geq 2 \qquad \textbf{(2)}$$

(2) ფორმულის მიხედვით, არითმეტიკული პროგრესიის მეორედან დაწყებული ყოველი წევრი მისი წინა და მომდევნო წევრების საშუალო არითმეტიკულის ტოლია.

ფორმულები	$a_n = a_1 + d(n-1)$
	$a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$
	$d = a_n - a_{n-1} \qquad n > 1$

ნიმუში 2 – STEAM დავალება

ასტრონომმა ედვარდ ჰოლმა 1682 წელს ცაზე დაინახა უცნაური მოვლენა, კომეტა, რომელიც ანათებდა და ცაზე მოძრაობდა. მას გაახსენდა, რომ მსგავსი მოვლენა სხვა ასტრონომებმაც შენიშნეს და აღწერეს ჩანაწერებში 1530 და 1606 წელს.

ჰოლიმ გამოთქვა ვარაუდი, თუ ჩანაწერებში აღწერილი და მის მიერ აღმოჩენილი კომეტა ერთი და იგივეა, მაშინ შეეძლოთ გამოეთვალათ, რა პერიოდებში ჩნდებოდა კომეტა ცაზე და შემდეგ დაედგინათ, როდის გამოჩნდებოდა ის მომავალში.

ჰოლმა მოაწესრიგა მონაცემები და დაადგინა, რომ კომეტა ჩნდებოდა 76 წელიწადში ერთხელ, ამიტომ 1682 წლის შემდეგ ის გამოჩნდებოდა 1758 წელს.

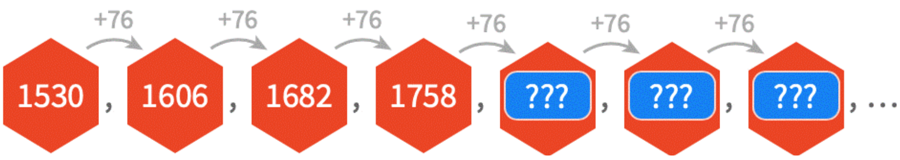
მოგვიანებით აღმოჩნდა, რომ ჰოლი იყო მართალი და კომეტას მის პატივსაცემად ჰოლის კომეტა დაარქვეს. დადგინდა, რომ კომეტა მზის ორბიტაზე ერთი სრული ბრუნის გაკეთებას ანდომებდა 76 წელს;

ა) დაწერეთ ჰოლის აღმოჩენის შემდეგ 3-4 თარიღი, როდესაც კომეტა გამოჩნდებოდა ცაზე.

ბ) ჩაწერეთ ფორმულა, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია დავადგინოთ როდის გამოჩნდება კომეტა

პასუხი:

ა)



პირველი თარიღი როდესაც კომეტა დაფიქსირდა ცაზე არის:

a_1=1530; რადგან კომეტა ყოველ 76 წლის შემდეგ ჩნდება, ამიტომ $d = 76$;

a_2=1606; a_3 = 1682; a_4 = 1758; a_5 = 1834; a_6 = 1910; a_7 = 1986; a_8 = 2062

ბ) ზოგად ფორმულას ექნება სახე:

$a_n = 1530 + 76(n-1)$

სავარჯიშოები

1. არის თუ არა მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია?

ა) 7, 15, 23, 31, 39,... გ) 41, 35, 29, 23, 17,...

ბ) 10, 14, 18, 20, 24,... დ) 6, 1, –6, –11,–16,...

2. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი a_1 და არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა d.

ა) 5, 9, 13, 17, 21, ... გ) 23, 18, 13, 8, 3, ...

ბ) –4, 3, 10, 17, 24, ... დ) –6, –15, –24, –33, ...

3. თითოეული არითმეტიკული პროგრესიისთვის იპოვეთ:

- პირველი წევრი a_1 და პროგრესიის სხვაობა d
- დაწერეთ ზოგადი წევრის ფორმულა
- იპოვეთ მიმდევრობის მე-15 წევრი

ა) 19, 25, 31, 37,... გ) $8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2},...$ ე) 5, –3, –11, –19,...

ბ) 101, 97, 93, 89,... დ) 31, 36, 41, 46,... ვ) $a, a + d, a + 2d, a + 3d,...$

4. მოცემულია მიმდევრობა 6, 17, 28, 39, 50,...

ა) აჩვენეთ, რომ ის არითმეტიკული პროგრესიაა;

ბ) დაწერეთ ზოგადი ფორმულა;

გ) იპოვეთ ორმოცდამეათე წევრი;

დ) იპოვეთ 325-ე წევრი.

5. მოცემულია მიმდევრობა 87, 83, 79, 75, 71,...

ა) აჩვენეთ, რომ ის არითმეტიკული პროგრესიაა;

ბ) დაწერეთ ზოგადი ფორმულა;

გ) იპოვეთ მეორმოცე წევრი;

დ) მიმდევრობის რომელი წევრია –297?

6. **გამოწვევა**: მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით: $a_1 = 3n - 2$

ა) იპოვეთ $a_n - a_{n-1}$ და დაასაბუთეთ, რომ მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა;

ბ) იპოვეთ პროგრესიის a_1 და d;

გ) იპოვეთ პროგრესიის 75-ე წევრი;

დ) იპოვეთ პროგრესიის უდიდესი წევრი, რომელიც ნაკლებია 450-ზე. იპოვეთ ამ წევრის ნომერი.

სავარჯიშოები

7. **გამოწვევა**: მოცემულია არითმეტიკული პროგრესიის ერთმანეთის მომდევნო წევრები, იპოვეთ k

ნიმუში

იპოვეთ k, იმის გათვალისწინებით, რომ $3k + 1$; k; და -3 არითმეტიკული პროგრესიის ერთმანეთის მომდევნო წევრებია. პირობის თანახმად, რადგან ერთმანეთის მომდევნო წევრებია, ამიტომ

$$k - (3k + 1) = -3 - k$$
$$k - 3k - 1 = -3 - k$$
$$-2k - 1 = -3 - k$$
$$-1 + 3 = -k + 2k$$
$$k = 2$$

ა) $32, k, 3$; გ) $k, 2k - 1, 13$; ე) $2k + 7, 3k + 5, 5k - 4$; ზ) $k, k^2, k^2 + 6$;
ბ) $k, 7, 10$; დ) $k, 2k + 1{,}8 - k$; ვ) $2k + 18, -2 - k, 2k + 2$; თ) $5, k, k^2 - 8$.

8. ამფითეატრის პირველ რიგში არის 38 ადგილი, ხოლო ყოველ მომდევნო რიგში წინა რიგთან შედარებით 4-ით მეტი ადგილია. ცნობილია, რომ ამფითეატრის ბოლო რიგში არის 126 ადგილი. სულ რამდენი რიგი და რამდენი ადგილია ამფითეატრში?

9. სხეული განსაზღვრული სიმაღლიდან თავისუფალი ვარდნის დროს პირველ წამში დაახლოებით 4,9 მ-ს, ხოლო ყოველ შემდეგ წამში კი 9,8 მ-ით მეტს გადის, ვიდრე წინა წამში. რა სიმაღლიდან ვარდება სხეული, თუ მისი ვარდნა 15 წამს გრძელდება?

10. გენომ მუშაობა დაიწყო ერთერთ კომპანიაში. კონტრაქტის მიხედვით პირველ თვეში მისი ხელფასი იყო 450 ლარი, ხოლო ყოველ მომდევნო თვეს მას უხდიდნენ 40 ლარით მეტს, ვიდრე წინა თვეში. გენომ კომპანიაში იმუშავა 2 წელიწადი. დაადგინეთ რა იყო მისი ხელფასი მუშაობის ბოლო თვეს და რა თანხა გამოიმუშავა მან მთლიანად?

8.2. არითმეტიკული პროგრესიის ჯამი

კარლ ფრიდრიხ გაუსი (1777-1855) იყო ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკოსი, რომელსაც მოიხსენებდნენ, როგორც „მათემატიკის პრინცი“. გადმოცემით, მან 3 წლის ასაკში მამამისის ბუღალტრულ ჩანაწერებში შეცდომა გამოასწორა. როდესაც გაუსი იყო 8 წლის, მასწავლებელმა მოსწავლეებს დაავალა შეეკრიბათ რიცხვები 1-დან 100-მდე და ეთქვათ ჯამი, გაუსმა ის ძალიან სწრაფად შეკრიბა. თავდაპირველად მასწავლებელს ეგონა, რომ გაუსი ასე სწრაფად ვერ შეძლებდა გამოანგარიშებას, თუმცა მან წარუდგინა ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეასრულა შეკრება და მასწავლებელი საგონებელში ჩააგდო.

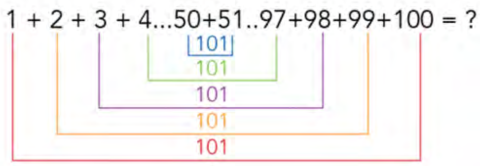
ტელესკოლა – ვიდეო გაკვეთილი
(11 წთ-მდე არითმეტიკული პროგრესია)

გავეცნოთ ალგორითმს, რომელიც არითმეტიკული პროგრესიის ჯამის ფორმულის ახსნაში თვალსაჩინოდ დაგვეხმარება, შემდეგ კი მოვახდინოთ ფორმულირება.

როგორც მოგახსენეთ, მოსწავლეებს დაავალეს შეეკრიბათ რიცხვები 1-დან 100-მდე.

გაუსმა დაინახა, რომ თუ დააწყვილებდა რიცხვებს, ის მიიღებდა 50 წყვილს, ხოლო თუ დააწყვილებდა ქვემოთ მოცემული წესით, ის მიიღებდა 50 ცალ 101-ს.

მეთოდი 1:



შესაბამისად, გაუსმა გაამრავლა 50 101-ზე და მიიღო პასუხი:

$50 \cdot 101 = 5050$

გავაანალიზოთ აღნიშნული მაგალითი. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია, 1,2,3,... 100, სადაც ყოველი წევრი წინაზე 1-ით მეტია; არითმეტიკულ პროგრესიაში ყველა წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{(\text{(პირველ წევრს + ბოლო წევრი)} \cdot \text{წევრების რაოდენობა})}{2}$$

ზოგადად, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

არითმეტიკული პროგრესიის ჯამი აღინიშნება სიმბოლოთი S_n, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, ფორმულით აღიწერება შემდეგნაირად:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \qquad (1)$$

აღნიშნულ ფორმულას ეწოდება არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

როგორც ვიცით, $a_n = a_1 + d(n - 1)$, თუ მოცემულ ფორმულაში a_n-ის ნაცვლად შევიტანთ მის ზოგად ფორმას, მივიღებთ მეორე ფორმულას:

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n - 1)) \cdot n}{2} \qquad (2)$$

მეთოდი 2:

1-დან 100-მდე რიცხვების შეკრების საკითხი ჩვენ შეგვიძლია ამოვხსნათ შემდეგნაირად:

დავწეროთ 1-დან 100-მდე რიცხვების ჯამი; ქვემოთ, მეორე მწკრივად ყოველ წევრს მივუწეროთ 100-დან 1-მდე რიცხვების ჯამი.

შევკრიბოთ შესაბამისი წევრები. მივიღებთ 100 ცალ შესაკრებს, სადაც თითოეული უდრის 101-ს, მათი ჯამი იქნება $100 \cdot 101$. გამომდინარე იქიდან, რომ ორი მწკრივია, ჩვენ კი გვინდა ერთ მწკრივში დაწერილი რიცხვების ჯამის დადგენა, ნამრავლს ვყოფთ 2-ზე; ვიღებთ $\frac{100 \cdot 101}{2}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array} \qquad \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

მითითება: გაუსის მიერ შესრულებული გამოთვლის მეთოდი, და მეორე მეთოდი ცხადყოფს, რამდენად ამარტივებს გამოთვლებს გარკვეული კანონზომიერებების ამოცნობა, ალგორითმის შემუშავება.

ნიმუში 3

მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია, რომლის პირველი წევრი უდრის 42-ს, ხოლო სხვაობა 6-ს; იპოვეთ პროგრესიის პირველი 30 წევრის ჯამი.

მეთოდი 1:

$a_1 = 42$; $d = 6$; $n = 30$

გამოვიყენოთ ჯამის გამოსათვლელი მეორე ფორმულა:

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n - 1)) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 \cdot 42 + 6(30 - 1)) \cdot 30}{2} = 3870$$

მეთოდი 2:

$a_1 = 42$; $d = 6$; $n = 30$

გამოვიყენოთ ჯამის გამოსათვლელი პირველი ფორმულა:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

ჯერ დავადგინოთ, რისი ტოლია a_n

$a_n = a_1 + d(n - 1)$

$a_{30} = 42 + 6(30 - 1) = 216$

შევიტანოთ მნიშვნელობები ფორმულაში და მივიღებთ, რომ:

$$S_{30} = \frac{(42 + 216) \cdot 30}{2} = 3870$$

ნიმუში 4 – ფინანსური წიგნიერება — დანაზოგის გაკეთება

ნინის სურს საოცნებო კომპიუტერის (ნოუთბუქის) ყიდვა, რომლის ფასია 2550 ლარი. მან გადაწყვიტა საკუთარი ხელფასიდან ანაბარზე დააგროვოს თანხა. პირველი ხელფასიდან მან ანაბარზე შეინახა 350 ლარი და გადაწყვიტა, რომ ყოველ მომდევნო თვეს ანაბარზე დადებს წინა თვესთან შედარებით 30 ლარით მეტ თანხას. რამდენი თვის შემდეგ შეძლებს ნინი ნოუთბუქის ყიდვას?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება

შემოვიტანოთ მიმდევრობა.

გამომდინარე იქიდან, რომ ყოველ მომდევნო თვეს უნდა დაემატოს წინა თვესთან შედარებით 30 – ლარით მეტი თანხა, მივიღებთ არითმეტიკულ პროგრესიას:

$a_1 = 350$; $a_2 = 380$; $a_3 = 410$ და ა.შ. $d = 30 \cdot S_n = 2550$

დავწეროთ პროგრესიის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1)) \cdot n}{2}$$

შევიტანოთ ფორმულაში ჩვენთვის ცნობილი ინფორმაცია და ვიპოვოთ n.

$$\frac{(2 \cdot 350 + 30 \cdot (n-1)) \cdot n}{2} = 2550$$

$$(700 + 30n - 30) \cdot n = 5100$$

$$30n^2 + 670n - 5100 = 0$$

$$3n^2 + 67n - 510 = 0$$

$$n = \frac{-67 \pm \sqrt{4489 + 6120}}{6} = \frac{-67 \pm 103}{6}$$

$$n = 6 \quad \text{და} \quad n = \frac{-85}{3}$$

ცხადია, ჩვენვის მისაღებია დადებითი პასუხი, ე.ი. $n = 6$. მაშასადამე, ნინი საჭირო თანხას დააგროვებს 6 თვის შემდეგ.

კითხვა: *როგორ ამოხსნიდით ამოცანას ფორმულის გარეშე?*

მითითება: მოცემულ მაგალითში ფორმულის გამოყენების გარეშეც შესაძლებელი იყო პასუხის გარკვევა, თუმცა ხშირად მოცემულია სიტუაციები, როდესაც ფორმულის გარეშე რთული ხდება ამოცანის ამოხსნა.

ნიმუში 5*

მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია 5, 7, 9, ... არითმეტიკული პროგრესიის რამდენი წევრი უნდა შევკრიბოთ, რომ მივიღოთ 572?

$a_1 = 5$; $d = 2$; $S_n = 572$; $n = ?$

გამოვიყენოთ ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა და შევიტანოთ მნიშვნელობები:

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1)) \cdot n}{2}$$

$$\frac{(2 \cdot 5 + 2(n-1)) \cdot n}{2} = 572$$

მივიღეთ კვადრატული განტოლება

$(2 \cdot 5 + 2(n-1)) \cdot n = 1144$

გავხსნათ ფრჩხილები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები: – >

$(2 \cdot 5 + 2(n-1)) \cdot n = 1144$

$$(8 + 2n) \cdot n = 1144$$

$$2n^2 + 8n - 1144 = 0$$

$$n^2 + 4n - 572 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 2288 = 2304$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{2304}}{2}$$

$$n_1 = 22 \qquad n_2 = -26$$

n – შეიძლება იყოს დადებითი,

$$n = 22; \quad n \neq -26$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის მოცემული წევრების ჯამი.

I) პირდაპირი მიმატებით;

II) ფორმულის $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1)) \cdot n}{2}$ გამოყენებით;

III) ფორმულის $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ გამოყენებით.

ა) 7 + 9+ 11 + 13 + ... 10 წევრის

ბ) $\frac{1}{2} + 3 + 5\frac{1}{2} + 8 + \ldots$ 50 წევრის

გ) 3 + 7 + 11 + 15 + ... 20 წევრის

დ) 100 + 93 + 86 + 79 + ... 40 წევრის

ე) (–31) + (–28) + (–25) + (–22) + ... 15 წევრის

ვ) $50 + 48\frac{1}{2} + 47 + 45\frac{1}{2} + \ldots$ 80 წევრის

2. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია $a_1 = 7$ და $S_2 = 17$

ა) იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა;

ბ) იპოვეთ, n თუ $S_n = 242$.

3. მოცემულია არითმეტიკული პროგრესია 13, 21, 29, 37,... რამდენი წევრია საჭირო იმისთვის, რომ ჯამმა 1000-ს გადააჭარბოს?

4. იპოვეთ არითმეტიკულ პროგრესიაში პირველი 10 წევრის ჯამი, თუ:

$a_1 = 90$, ხოლო $d = -10$?

5. გამოთვალეთ ჯამი 2+ ... + 15 + 16 + 15 + ... + 2

6. გამოთვალეთ ყველა კენტი რიცხვის ჯამი 18-დან 58-მდე.

7. **გამოწვევა**: იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა რაოდენობა, თუ $a_1 = 19$, $a_n = 96$, $S_n = 690$

8. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა რაოდენობა, თუ:

ა) (–2) + (–12) + (–22) + (–32)..., $S_n = -224$

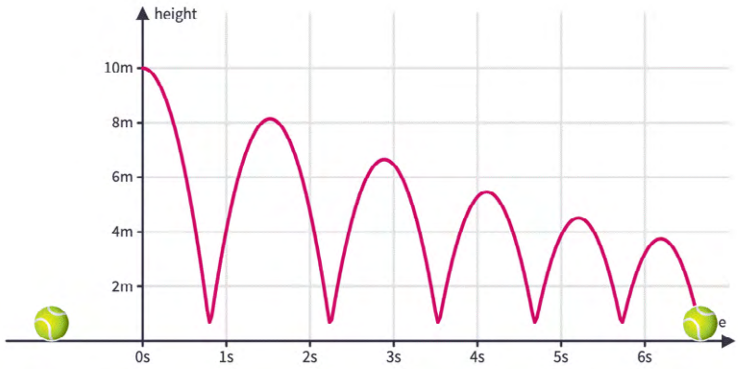
ბ) (–16) + (–26) + (–36) + (–46)..., $S_n = -1818$

9. საფეხბურთო მოედანზე მაყურებლისთვის განკუთვნილია 30 რიგი, ყოველ რიგში 5 ადგილით მეტია, ვიდრე წინაში. 30-ე რიგში არის 175 ადგილი. რამდენი მაყურებელი ეტევა 25-ე რიგსა და 30-ე რიგს შორის?

8.3. გეომეტრიული პროგრესია

როდესაც ბურთს ხელს ვუშვებთ, ყოველი დაცემის შემდეგ ის ადის მაღლა. ერთ-ერთი ექსპერიმენტის შედეგად დადგინდა, რომ ყოველი შემდეგი ასვლის სიმაღლე წინა სიმაღლის 80%-ს შეადგენს.

შევადგინოთ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი.



წყარო: Mathigon

ტელესკოლა (11წთ-დან გეომეტრიული პროგრესია)

დავუშვათ, ბურთის მდებარეობის საწყისი სიმაღლე იყო $h_1 = 10$ მეტრი; ყოველი შემდეგი სიმაღლე არის წინა სიმაღლის 80% ნიშნავს, რომ:

$h_2 = 10 \cdot 0.8 = h_1 \cdot 0.8$

$h_3 = h_2 \cdot 0.8 = h_1 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = h_1 \cdot 0.8^2$

$h_4 = h_3 \cdot 0.8 = h_1 \cdot 0.8^2 \cdot 0.8 = h_1 \cdot 0.8^3$

და ა.შ.

მივიღეთ მიმდევრობა, სადაც ყოველი შემდეგი წევრი მიიღება წინა წევრის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებით

მოცემულ შემთხვევაში რიცხვითი მიმდევრობა კლებადია;

თუ გავაგრძელებთ კანონზომიერებას, ჩვენ შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ h_n-ის გამოთვლა შესაძლებელია $h_n = h_1 \cdot 0.8^{n-1}$ ფორმულით.

რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრისაგან ერთი და იგივე რიცხვზე გამრავლებით, **გეომეტრიული პროგრესია** ეწოდება. გეომეტრიულ პროგრესიას, ძირითადად, **აღნიშნავენ b_n,** $n \in \mathbb{N}$ მიმდევრობის სახით. რიცხვს, რომელზეც მრავლდება მიმდევრობის რომელიმე წევრი მომდევნო წევრის მისაღებად, ეწოდება **გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი და მას აღნიშნავენ q ასოთი.**

- ცხადია, რომ გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი ორი მომდევნო წევრისთვის გვაქვს ტოლობა: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ და $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

- გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის წარმოდგენა შესაძლებელია შემდეგი ფორმულით: $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$; n **= 1,2,3...**
- განმარტებიდან ჩანს, რომ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი $\boldsymbol{q}$ არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, რადგან, თუ $q = 0$, მაშინ მეორე წევრიდან დაწყებული მიმდევრობის ყველა წევრი იქნება ნულის ტოლი და მიმდევრობის განხილვა დაკარგავს აზრს. ანალოგიურად, არ შეიძლება ავიღოთ q = 1-ს, რადგან ამ შემთხვევაში მიმდევრობის ყველა წევრი იქნება ერთმანეთის ტოლი. **მაშასადამე,** $\boldsymbol{q \neq 0}$ **და** $\boldsymbol{q \neq 1}$**.**

ნიმუში 1

განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია 2, 6, 18, 54, ... რომლის მნიშვნელი q = 3-ს და ვცადოთ n-ური წევრის (ზოგადი წევრის) გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა:

2; 6; 18; 54; ... 2; 2 · 3; 2 · 3^2, 2 · 3^3, ... b_1, b_2, b_3, b_4 ... $b_1 \cdot q$, $b_1 \cdot q^2$, $b_1 \cdot q^3$ ... $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა	$b_1 \neq 0$ $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = q;$ $q \neq 0.$

ფორმულის გამოყვანა მათემატიკის მოყვარულთათვის **

ცხადია, რომ არითმეტიკული პროგრესიის ანალოგიურად, გეომეტრიული პროგრესიის მოსაცემად საკმარისია, ვიცოდეთ პროგრესიის პირველი წევრი b_1 და პროგრესიის მნიშვნელი q. დავადგინოთ გეომეტრიული პროგრესიის რამდენიმე ფორმულა. თანმიმდევრულად ჩამოვწეროთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრები.

მივიღებთ:

$\boldsymbol{b_1;}$
$\boldsymbol{b_2 = b_1 \cdot q;}$
$\boldsymbol{b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2;}$
$\boldsymbol{b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3;}$
$\boldsymbol{b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4.}$
....

ჩანს, რომ ზოგადი b_n წევრის მოსაძებნი ფორმულა იქნება:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \qquad \textbf{(1)}$$

გაგრძელება

(1) ფორმულას გეომეტრიული პროგრესიის n-ური წევრის (ზოგადი წევრის) გამოსათვლელი ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულიდან შეგვიძლია დავადგინოთ გეომეტრიული პროგრესიის ზრდადობა/კლებადობის საკითხი. მაგ., თუ $b_1 > 0$ და $q > 1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია ზრდადია, ხოლო თუ $b_1 > 0$ და $0 < q < 1$, მაშინ გეომეტრიული პროგრესია კლებადია.

გეომეტრიული პროგრესიის განმარტების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ და $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, თუ ტოლობების მარცხენა მხარეებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, გვექნება: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, საიდანაც მივიღებთ:

$$(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \qquad n \geq 2 \qquad \textbf{(2)}$$

(2) ფორმულის მიხედვით, გეომეტრიული პროგრესიის მეორე წევრიდან დაწყებული ყოველი წევრის კვადრატი მისი წინა და მომდევნო წევრების ნამრავლის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა. S_n ჯამისთვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \text{ ან } S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad \textbf{(3)}$$

(3) ფორმულებს უწოდებენ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის გამოსათვლელ ფორმულებს.

გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა:	**გეომეტრიული პროგრესიის წევრების ჯამის ფორმულა:**
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad n = 1, 2, 3...$ **(1)** $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ **(2)**	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ **(3)**

ნიმუში 2

მოცემულია გეომეტრიული პროგრესია. იპოვეთ:

ა) b_6, თუ $b_1 = 8$ და $q = \frac{1}{2}$

ბ) ნომერი k, თუ $b_1 = -27$, $q = \frac{1}{3}$ და $b_k = -\frac{1}{9}$

გ)* ნომერი m და ჯამი S_m, თუ $b_2 = 2{,}56$, $q = -0{,}5$ და $b_m = -0{,}32$

გამოვიყენოთ გეომეტრიული პროგრესიის (1) და (3) ფორმულები და ამოვხსნათ ამოცანები:

ა) ჩავსვათ (1) ფორმულაში $n = 6$, მივიღებთ:

$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1}$; $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$; $b_6 = 8 \cdot \frac{1}{32}$ და $b_6 = \frac{1}{4}$.

ბ) ჩავსვათ (1) ფორმულაში n-ის ნაცვლად k, მივიღებთ:

$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$; $-\frac{1}{9} = -27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{243}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$ და $k = 6$.

გ)* ჯერ ვიპოვოთ b_1. ჩავსვათ (1) ფორმულაში $n = 2$, მივიღებთ:

$b_2 = b_1 \cdot q$; $2{,}56 = b_1 \cdot (-0{,}5)$ და $b_1 = -5{,}12$.

ისევ გამოვიყენოთ (1) ფორმულა და ვიპოვოთ ნომერი m, მივიღებთ:

$b_m = b_1 \cdot q^{m-1}$; $-0{,}32 = -5{,}12 \cdot (-0{,}5)^{m-1}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 0{,}0625 = \frac{1}{16}$ და $m = 5$

ახლა გამოვიყენოთ (3) ფორმულა და ვიპოვოთ ნომერი n, გვექნება განტოლება:

$S_5 = \frac{-5{,}12 \cdot ((-0{,}5)^5 - 1)}{-0.5 - 1}$; $S_5 = \frac{-5{,}12 \cdot (-1{,}03125)}{-1.5}$ და $S_5 = -3{,}52$.

მივიღეთ, რომ $m = 5$ და $S_5 = -3{,}52$.

ნიმუში 3 – ფინანსური წიგნიერება

კომპანიამ აგროფერმის შექმნისთვის, სრულად ამუშავებისა და პროდუქციის მიღებისთვის სულ დახარჯა 350 მილიონი ლარი. პროდუქციის გამოშვებიდან პირველ წელს აგროფერმის წმინდა მოგებამ შეადგინა 20 მილიონი ლარი. დავუშვათ, აგროფერმის წმინდა მოგება ყოველ მომდევნო წელს იქნება წინა წელზე 5%-ით მეტი. რამდენი იქნება აგროფერმის წმინდა მოგება პროდუქციის გამოშვებიდან მე-10 წელს? მე-15 წელს? მე-18 წელს? და ა.შ. რამდენი წლის შემდეგ ამოიღებს აგროფერმა საწყის სრულ დანახარჯს?

ვიცით, რომ აგროფერმის წმინდა მოგება პირველ წელს არის 20 მილიონი ლარი. მოგება იზრდება 5%-ით, ნიშნავს რომ 100% + 5%, ე.ი. საწყისი თანხა უნდა გავამრავლოთ $(1 + 0.05) = 1.05$ (გადავიყვანოთ პროცენტები ათწილადებში);

II წელს მოგება იქნება: $20 \cdot (1 + 0{,}05) = 20 \cdot 1{,}05 = 21$ მილიონი ლარი;

III წელს $21 \cdot (1 + 0{,}05) = 21 \cdot 1{,}05 = 20 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 20 \cdot (1{,}05)^2 = 22{,}05$

გაგრძელება

დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ცხრილში და აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება:

წელი	პროცესი	მოგება წლის ბოლოს (ლარი)
1-ლი წელი	20	20
მე-2 წელი	$20 \cdot 1{,}05 = 21$	21
მე-3 წელი	$20 \cdot (1{,}05)^2 = 22{,}05$	22,05
მე-4 წელი	$20 \cdot (1{,}05)^3 = 23{,}1525$	23,1525
მე-5 წელი	$20 \cdot (1{,}05)^4 = 24{,}310125$	24,310125
მე-6 წელი	$20 \cdot (1{,}05)^5 = 25{,}52563125$	25,52563125
....		

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ აღნიშნული წესით, მაშინ მივიღებთ, რომ მე-10 წელს წმინდა მოგება იქნება დაახლოებით 31,026564 მილიონი ლარი და ა.შ. სრულ საწყის დანახარჯს აგროფერმა ამოიღებს დაახლოებით 13 წელიწადში.

უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი *

განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია:

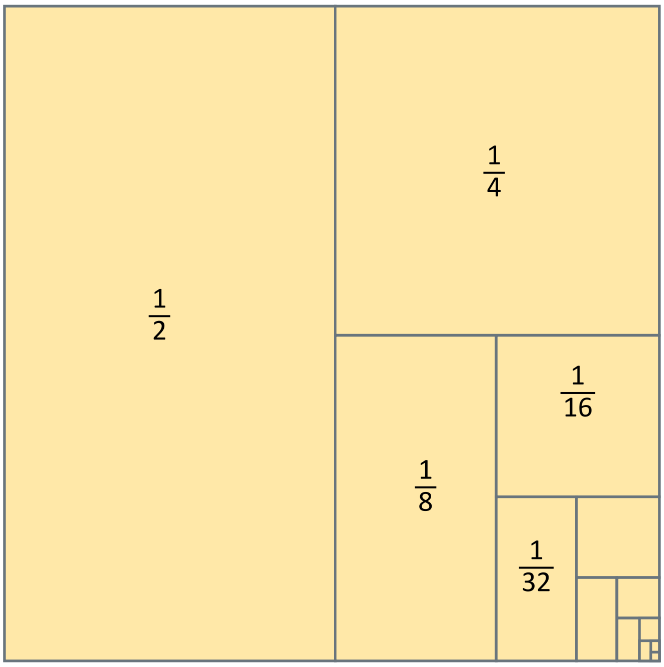
$1; \frac{1}{2}; \ \frac{1}{4}; \ \frac{1}{8} \ .....$

ვხედავთ, რომ $q = \frac{1}{2} < 1$;

მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ კლებადი, როდესაც გეომეტრიულ პროგრესიაში $-1 < q < 1$, პროგრესიას ეწოდება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, რომლის ყველა წევრის ჯამი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

S – აღნიშნავს ყველა წევრის ჯამს.



ნიმუში 4 – მათემატიკის მოყვარულთათვის

$k-1$, $2k$ და $21-k$ არის გეომეტრიული პროგრესიის მომდევნო წევრები, იპოვეთ k.

რადგან გეომეტრიული პროგრესიაა, გვაქვს:

$\frac{2k}{k-1}=\frac{21-k}{2k}$ {მნიშვნელი არის r}

$4k^2=(21-k)(k-1)$

$(5k-7)(k-3)=0$

$k=\frac{7}{5}$ ან 3

შემოწმება: თუ $k=\frac{7}{5}$, მაშინ მიმდევრობის წევრებია: $\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, \frac{98}{5}$ $\{r=7\}$

თუ $k=3$, მაშინ მიმდევრობის წევრებია: 2, 6, 18 $\{r=3\}$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი და ჩაწერეთ ზოგადი წევრის ფორმულა:

ა) 5, 15, 45, 135,..... ბ) 72, 36, 18, 9, ...

გ) 2, –8, 32, –128,..... დ) 6, –2, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{9}$, ...

2. ცნობილია გეომეტრიული პროგრესიის პირველი ორი წევრი, იპოვეთ b და c.

ა) 2, 6, b, c, ... ბ) 10, 5, b, c, ... გ) 12, –6, b, c, ...

3. ქვემოთ მოცემული გეომეტრიული პროგრესიისთვის:

- იპოვეთ პირველი წევრი და მნიშვნელი;
- იპოვეთ ზოგადი წევრის ფორმულა;
- იპოვეთ მე-9 წევრი.

ა) 3, 6, 12, 24,... ბ) 2, 10, 50, ... გ) 512, 256, 128, ...

დ) 1, 3, 9, 27, ... ე) 12, 18, 27, ... ვ) $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; ...

4. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობა 5; 10; 20; 40;... გეომეტრიული პროგრესიაა.

ა) ჩაწერეთ n-ური წევრის ფორმულა;

ბ) იპოვეთ პროგრესიის მე-10 წევრი.

5. ა) აჩვენეთ, რომ მიმდევრობა 12; –6; 3; $-\frac{3}{2}$; ... გეომეტრიული პროგრესიაა.

ბ) იპოვეთ და ჩაწერეთ მე-13 წევრი რაციონალური რიცხვის სახით.

6. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობა 8; –6; 4,5; –3,375;.. გეომეტრიული პროგრესიაა. იპოვეთ პროგრესიის მე-10 წევრი (ჩაწერეთ მე-10 წევრის შესაბამისი გამოსახულება ხარისხის სახით)

7. მოცემულია, $b_1 = 5$, $q = -2$, $n = 7$, იპოვეთ ჯამი.

8. იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა რაოდენობა, თუ:

$b_1 = -2$, $q = 5$, $S_n = -62$.

9. $\frac{5}{8}$-სა და 40 -ს შორის ჩასვით 5 რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია.

10. $-\frac{25}{9}$-სა და $-\frac{27}{125}$-ს შორის ჩასვით 4 რიცხვი ისე, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია.

11. გეომეტრიული პროგრესიის მე-4 და მე-8 წევრების ნამრავლი არის m-ის ტოლი. რისი ტოლია ამ პროგრესიის მე-6 წევრი?

12. მოცემულია (b_n), $n \in N$ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი და მნიშვნელი. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ პროგრესიის მითითებული წევრები.

ა) $b_1 = 3$; $q = 2$. იპოვეთ b_3; b_5; b_8 და b_k;

ბ) $b_1 = -27$; $q = \frac{1}{3}$. იპოვეთ b_2; b_5; b_7 და b_k.

13. მოცემულია (b_n), $n \in$ N გეომეტრიული პროგრესიის ორი წევრი. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ პროგრესიის მნიშვნელი – q და მითითებული წევრები.

ა) $b_1 = 9$; $b_2 = 3$. იპოვეთ q; b_4; b_6; b_8 და b_k;

ბ) $b_1 = -32$; $b_2 = 0,5$. იპოვეთ q; b_5; b_7; b_9 და b_k.

14. მოცემულია (b_n), $n \in \mathrm{N}$ გეომეტრიული პროგრესია. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ პროგრესიის მითითებული სიდიდეები.

ა) $b_1 = 32$; $b_6 = 1$; იპოვეთ q; b_4 და S_5;

ბ) $b_5 = -\frac{16}{27}$; $q = -\frac{2}{3}$; იპოვეთ b_1; b_4 და S_4.

15. იპოვეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, თუ ვიცით, რომ:

ა) $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{4}$;

ა) $b_1 = -1$; $q = \frac{1}{4}$.

16. **გამოწვევა:** $b_{10} = 2^{13}$, $b_{12} = 2^{17}$, იპოვეთ b_1

17. **გამოწვევა:** იპოვეთ წევრთა რაოდენობა, თუ $-4 + 16 - 64 + 256...$, $S_n = 52428$.

18. **გამოწვევა:** ერთ-ერთი კლუბის წევრობისთვის გოგამ უნდა მოიწვიოს კლუბში 3-ჯერ მეტი წევრი, ვიდრე წინა დღეს. რამდენ ახალ წევრს შემატებს იგი კლუბს თვის 30-ე დღეს?

▶ პროგრესიის ჯამი

19. იპოვეთ ჯამი 3 + 6 + 12 + 24 + 48:

ა) პირდაპირი შეკრების მეთოდით; ბ) ფორმულით $S_n = \mathrm{S}_n = \dfrac{b_1 + (q^n - 1)}{q - 1}$.

20. იპოვეთ პროგრესიების ჯამი:

ა) 2 + 6 + 18 + 54 + ... სულ 8 წევრის; ბ) 5 + 10 + 20 + 40 + ... სულ 10 წევრის;

გ) 12 + 6 + 3 + 1.5 + ... სულ 10 წევრის; დ) $\sqrt{7} + 7 + 7\sqrt{7} + 49 + \dots \dots$ სულ 12 წევრის;

ე) $6 - 3 + 1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \dots$ სულ 15 წევრის; ვ) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$ სულ 20 წევრის.

21. გეომეტრიულ პროგრესიაში $S_1 = 3$ და $S_2 = 4$

ა) იპოვეთ პროგრესიის პირველი წევრი; ბ) იპოვეთ მნიშვნელი;

გ) იპოვეთ პროგრესიის მე – 5 წევრი; დ) იპოვეთ S_5.

8.4. ექსპონენციალური, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიის გრაფიკული წარმოდგენა

(წრფივი და ექსპონენციური მოდელების გრაფიკული წარმოდგენა)

ვიცით, რომ თითოეული რიცხვითი მიმდევრობა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს, როგორც ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ან ნატურალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე, იმის მიხედვით, მიმდევრობა შედგება სასრულ წევრთა რაოდენობისგან თუ უსასრულო წევრთა რაოდენობისგან.

გამომდინარე იქიდან, რომ ფუნქცია შეიძლება იყოს წარმოდგენილი გრაფიკულად, შევისწავლოთ, როგორი ფორმა ექნება არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიების გრაფიკს.

ვიცით, რომ

- როდესაც a_n არითმეტიკულ პროგრესიაში $d > 0$-ზე, პროგრესია ზრდადია;
- როდესაც $d < 0$-ზე, პროგრესია კლებადია;
- b_n გეომეტრიულ პროგრესიაში, როდესაც $q > 1$-ზე, პროგრესია ზრდადია; როდესაც $0 < q < 1$-ზე, პროგრესია კლებადია.
- ხოლო, როდესაც $-1 < q < 1$, პროგრესია მიისწრაფვის ნულისკენ

განვიხილოთ თითოეული სიტუაცია გრაფიკულად

🔗 *ვიდეო ინსტრუქცია* როგორ გადავიტანოთ წერტილთა წყვილები Desmos-ის დახმარებით?

მაგალითი 1 შედარებითი ანალიზი

განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია.

1; 3;5;7;9,...

რომლის პირველი წევრია $a_1 = 1$; სხვაობა $d = 2$, ზოგადი წევრის ფორმულა $a_n = 1 + 2(n - 1)$;

n	a_n	
1	1	+2
2	3	+2
3	5	+2
4	7	

n-ის ერთით ზრდა იწვევს a_n-ის ორით გაზრდას.

დავაწყვილოთ (n,a_n), გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. დავინახავთ, რომ წერტილთა წყვილები განლაგებულია წრფეზე; შესაბამისად, არითმეტიკული პროგრესია წრფივი მოდელია.

განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია.

1; 2;4;8;16;32 ...

რომლის პირველი წევრია $b_1 = 1$;

მნიშვნელი $q = 2$; ზოგადი წევრის ფორმულა: $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

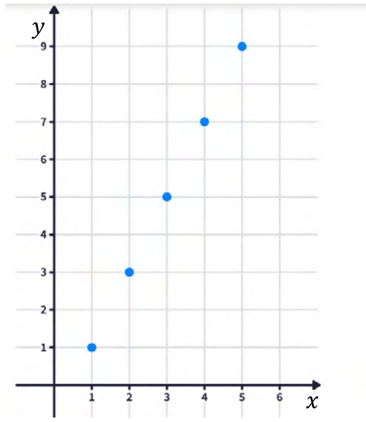
n	2^{n-1}	
1	1	× 2
2	2	×2
3	4	×2
4	8	

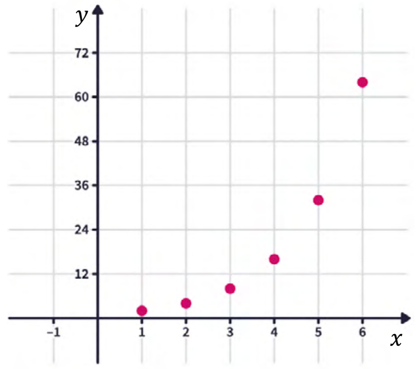
n-ის ერთით ზრდა იწვევს b_n-ის ორჯერ გაზრდას.

დავაწყვილოთ (n,b_n), გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. დავინახავთ, რომ წერტილთა წყვილები არ არის განლაგებული წრფეზე; n-ის ზრდა იწვევს b_n-ის ჯერადობით ზრდას, აღნიშნულ

წრფივი და ექსპონენციური მოდელების გრაფიკული წარმოდგენა

მოდელს ეწოდება ექსპონენციური მოდელი (exponent – ნიშნავს მაჩვენებელს, n-არის ხარისხის მაჩვენებელში).





მაგალითი 2 შედარებითი ანალიზი

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც:

$d < 0$

განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია:

$1;\ -1; -3; -5; -7; \ldots$

რომლის პირველი წევრია:

$a_1 = 1;\ d = -2$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც

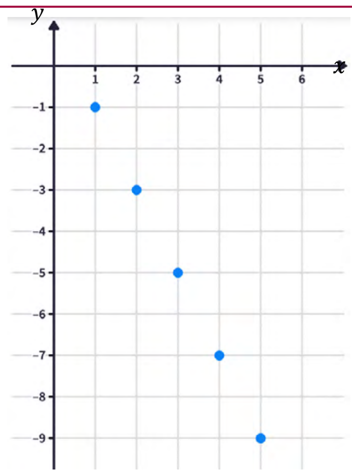
$0 < q < 1$

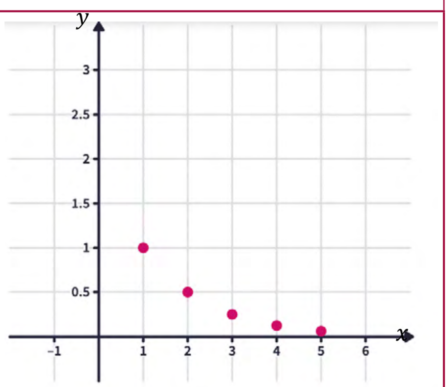
განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ldots$

რომლის პირველი წევრია $b_1 = 1$; $q = \frac{1}{2}$

როგორც ვიცით, პროგრესია კლებადია, n-ის ზრდასთან ერთად b_n-ის მნიშვნელობა უახლოვდება 0-ს, თუმცა არ ხდება 0-ის ტოლი, $b_n \neq 0$. შესაბამისად, წერტილი არ იქნება Ox ღერძზე.



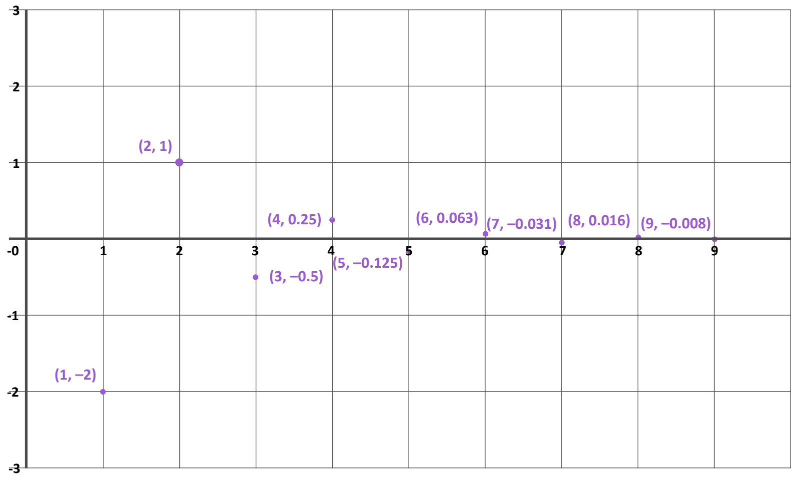


განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც:

$q < 0$

საკვანძო კითხვა:

- *რა ხდება როდესაც მნიშვნელი (q) არის უარყოფითი?*



განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია რომლის პირველი წევრი და მნიშვნელი შესაბამისად უდრის: $b_1 = 4$; $q = -\frac{1}{2}$.

დიაგრამაზე დაწყვილებულია (n, b_n). თუ დააკვირდებით, წერტილის y კოორდინატი, რომელიც შეესაბამება მიმდევრობის წევრს, არ ხდება 0-ის ტოლი, უახლოვდება 0-ს.

- როდესაც ანაბარზე ვდებთ თანხას, თუ დროის ერთი პერიოდის შემდეგ ანაბარს ემატება საწყისი თანხის p%, მაშინ ვამბობთ, რომ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის მეთოდი მარტივია; თანხა ყოველ თვე ანაბარზე იზრდება. შესაბამისად, თუ ამოვწერთ ყოველი თვის ბოლოს რა თანხა იქნება ანგარიშზე, მივიღებთ **არითმეტიკულ პროგრესიას.**

- როდესაც ანაბარზე ვდებთ თანხას, თუ დროის ყოველი პერიოდის შემდეგ ანაბარს ემატება წინა პერიოდის ბოლოს არსებული თანხის p%, ვამბობთ, რომ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის მეთოდი რთულია. შესაბამისად, თუ ამოვწერთ ყოველი თვის ბოლოს რა თანხა იქნება ანგარიშზე, **მივიღებთ გეომეტრიულ პროგრესიას.**

ნიმუში 1 – ფინანსური წიგნიერება

განვიხილოთ სიტუაცია:

მეანაბრე დეპოზიტზე (ანგარიშზე) დებს 1000 ლარს 3 წლით. ბანკი სთავაზობს დარიცხვის როგორც მარტივ, ასევე რთულ მეთოდს, წლიური საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 5%-ს.

ა) შევადგინოთ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი; დავაკავშიროთ წლის ბოლოს დეპოზიტზე არსებული თანხა დარიცხვების რაოდენობასთან.

ბ) დავადგინოთ, რომელი პირობა იქნება მომგებიანი.

გავაანალიზოთ ამოცანა.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

A = 1000 ლ; t =3 წელი; P%=5%;

შეგახსენებთ, რომ 5%-ს შეესაბამება თანხის $\frac{5}{100}$, ანუ 0.05 ნაწილი, ამიტომ:

P% = 5% = 0.05

- როდესაც ანაბარზე ვდებთ თანხას, თუ დროის ერთი პერიოდის შემდეგ ანაბარს ემატება საწყისი თანხის p%, მაშინ ვამბობთ, რომ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის მეთოდი მარტივია; თანხა ყოველ თვე ანაბარზე იზრდება; შესაბამისად, თუ ამოვწერთ ყოველი თვის ბოლოს რა თანხა იქნება ანგარიშზე, მივიღებთ **არითმეტიკულ პროგრესიას**
- როდესაც ანაბარზე ვდებთ თანხას, თუ დროის ყოველი პერიოდის შემდეგ, ანაბარს ემატება წინა პერიოდის ბოლოს არსებული თანხის p%, ვამბობთ, რომ ანაბარზე სარგებლის დარიცხვის მეთოდი რთულია. შესაბამისად, თუ ამოვწერთ ყოველი პერიოდის ბოლოს რა თანხა იქნება ანგარიშზე, მივიღებთ **გეომეტრიულ პროგრესიას**

მარტივი პროცენტი	**რთული პროცენტი**
მარტივი პროცენტის შემთხვევაში ყოველი მომდევნო პერიოდის ბოლოს თანხა იზრდება საწყისი თანხის 5%-ით, რაც შეადგენს 50 ლარს, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას, რომელიც წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას: 1000; 1050; 1100; 1150 და ა.შ. a_1=1000; d = 50; $a_n = a_1 + d(n-1)$ $a_n = 1000 + 50(n-1)$	რთული პროცენტის შემთხვევაში ყოველი მომდევნო პერიოდის ბოლოს ემატება წინა პერიოდის ბოლოს არსებული თანხის 5%; რაც ნიშნავს, რომ ანაბარზე არსებული თანხა მრავლდება 1.05-ზე (ვიცით, რომ გავზარდოთ რიცხვი 5%-ით ნიშნავს, გავამრავლოთ 1.05-ზე); თუ დავწერთ ყოველი პერიოდის ბოლოს არსებულ თანხებს, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას, რომელიც წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას: 1000; 1050; 1102.5; 1157.625 ... $b_1 = 1000$; $q = 1.05$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ $b_n = 1000 \cdot (1.05)^{n-1}$

როდესაც ხდება რთული პროცენტით ზრდა, ამბობენ, რომ არის ექსპონენციური ზრდა, ხოლო, როდესაც ხდება რთული პროცენტით კლება – ამბობენ, რომ მოცემულია ექსპონენციური კლება.

ნიმუში 2 – ფინანსური წიგნიერება

ანაბარზე შეიტანეს 5000 ლარი 4 წლით, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 7%. საპროცენტო სარგებელს ითვლიან რთული პროცენტით.

ა) რა თანხა იქნება ანაბარზე 4 წლის შემდეგ?

ბ) რა იქნება საპროცენტო სარგებელი?

შემოვიტანოთ აღნიშვნა p = P%

$b_4 = b_0 \times (1 + p)^4$

$= 5000 \times (1.07)^4 \quad \{7\% = 0.07\}$

≈ 6553.98

ანაბარზე 4 წლის შემდეგ იქნება 6553.98 ლარი.

ბ) საპროცენტო სარგებელი = 6553.98 – 5000 = 1553.98 ლარი

სავარჯიშოები

1. წარმოადგინეთ არითმეტიკული პროგრესიის შესაბამისი გრაფიკი. ახსენით, რომელ ფუნქციასთან შეგიძლიათ დაკავშირება?

ა) 1; –2; –5; –8; –11;...	გ) 3;6; 9 ...
ბ) 2; 8; 13; 18;...	დ) 0; –5; –10;...

2. წარმოადგინეთ გეომეტრიული პროგრესიის შესაბამისი გრაფიკი. ახსენით, ექსპონენციური ზრდაა თუ კლება? რატომ?

ა) 1; 2; 4; ...	გ) $1;\ \frac{1}{3};\ \ \frac{1}{9};\ \ldots$
ბ) 1; 3; 9; ...	დ) $1;\ -\frac{1}{3};\ \ \frac{1}{9};-\frac{1}{27};\ \ldots$

3. ვენერამ ანაბარზე შეიტანა 7000 ლარი, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 11%. რა თანხას გამოიტანს 5 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტით? რთული პროცენტით? ააგეთ სიტუაციის აღმწერი გრაფიკები.

4. თუ ანაბარზე შევიტანთ 3000 ლარს, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20%, რა ექნება საპროცენტო სარგებელი 3 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტით? რთული პროცენტით? ააგეთ აღნიშნული სიტუაციის აღმწერი გრაფიკები.

5. ანაბარზე შეიტანეს 2000 ლარი 4 წლით, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%.

ა) რა თანხა იქნება ანაბარზე 4 წლის შემდეგ?

ბ) რა იქნება საპროცენტო სარგებელი?

განიხილეთ, როგორც მარტივი პროცენტით დარიცხვის შემთხვევა, ასევე რთული პროცენტით დარიცხვის შემთხვევა.

6. რა იქნება საპროცენტო სარგებელი ვადის ბოლოს, თუ ანაბარზე 4 წლით შევიტანთ 20 000 ლარს, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 8 %.

7. რა იქნება საპროცენტო სარგებელი ვადის ბოლოს, თუ ანაბარზე 3 წლით შევიტანთ 8 000 ლარს, წლიური საპროცენტო განაკვეთია 2.5 %.

8. ? **საკვანძო კითხვა:** დავუშვათ, ანაბარზე შევიტანეთ 2000 ლარი.ვიცით, რომ საპროცენტო განაკვეთია 5%. რა პერიოდის შემდეგ იქნება ანაბარზე 4000 ლარი?

განიხილეთ ორი სიტუაცია, როდესაც დარიცხვა ხდება მარტივი პროცენტით და რთული პროცენტით; რისი თქმა შეგიძლიათ?

ტესტი — მიმდევრობები

საკითხები:

- მიმდევრობა
- არითმეტიკული პროგრესია
- გეომეტრიული პროგრესია

1. აღმოაჩინე კანონზომიერება და იპოვე ქვემოთ მოცემული მიმდევრობების მომდევნო სამი წევრი:

ა) 15; 21; 27; ... ბ) –3; 6; –12; ...

2. მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულაა: $a_n = 2n + 7$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის მეხუთე და მეათე წევრები.

3. ჩაწერეთ 1; 4; 16; 64; ... მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა.

4. არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი $a_1 = 23$, ხოლო პროგრესიის სხვაობა $d = -3$. ჩაწერეთ პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა და იპოვეთ პროგრესიის მეხუთე წევრი.

5. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი $b_1=7$, ხოლო პროგრესიის მნიშვნელი $q = 2$. ჩაწერეთ პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა და იპოვეთ პროგრესიის მეოთხე წევრი.

6. რამდენ საათში გაივლის მგზავრი 60 კილომეტრს, თუ მან პირველ საათში გაიარა 8 კმ და ყოველ შემდეგ საათში გადის 2 კმ-ით მეტს?

7. ვერას სურს ველოსიპედის შეძენა, რომელიც 250 ლარი ღირს. მამა ყოველ კვირას აძლევს გარკვეულ თანხას. შეძლებს თუ არა ვერა საჭირო თანხის შეგროვებას ერთი წლის განმავლობაში თუ მამამ პირველ კვირას მისცა 1 ლარი, მეორე კვირას 2 ლარი, მესამე კვირას 3 ლარი და ა.შ.

8. საბამ შეიძინა ახალი ავტომანქანა 35 000 ლარად. რა ეღირება ავტომანქანა 10 წლის შემდეგ, თუ ავტომანქანის ფასი ყოველწლიურად 5%-ით მცირდება?

9. *როცა მარი ხუთი წლის გახდა, მშობლებმა მის ანაბარზე 1200 ლარი შეიტანეს. რა თანხა იქნება მარის ანგარიშზე თავის მე-20 დაბადების დღეზე, თუ ანაბრის ყოველწლიური სარგებელი 5% -ს შეადგენს? სარგებელს ითვლიან რთული პროცენტით.

10. *სანდრომ გადაწყვიტა საახალწლოდ ფული შემდეგი წესით დაეგროვებინა. ყულაბაში მან 17 დეკემბერს ჩააგდო 2 ლარი და გადაწყვიტა ყოველ შემდეგ დღეს 2-ჯერ მეტი თანხა ჩაეგდო, ვიდრე წინა დღეს. რა თანხის ჩადება მოუწევდა სანდროს 31 დეკემბერს და რა თანხა ექნება საახალწლოდ?

თემა 9. მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

მინიშნება: კომპლექსური დავალება 2

9.1. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

ჩვენ უკვე განვიხილეთ რიცხვითი მიმდევრობები და ვიცით, რომ თითოეული მიმდევრობა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ან ნატურალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე, გამომდინარე იქიდან, მიმდევრობა სასრულია თუ უსასრულო.

🔗 *ვიდეო ინსტრუქცია* როგორ გადავიტანოთ წერტილთა წყვილები Desmos-ის დახმარებით

სიტუაცია 1:

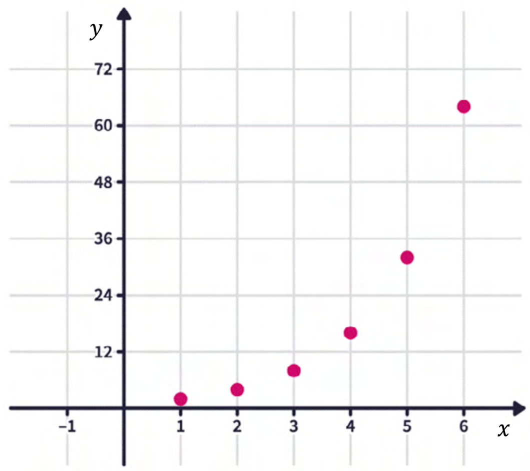
განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია: 1; 2; 4; 8; 16; 32 ... , რომლის პირველი წევრია $b_1 = 1$; მნიშვნელი $q = 2$; ზოგადი წევრის ფორმულა: $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

n	2^{n-1}
1	1
2	2
3	4
4	8

× 2

×2

×2



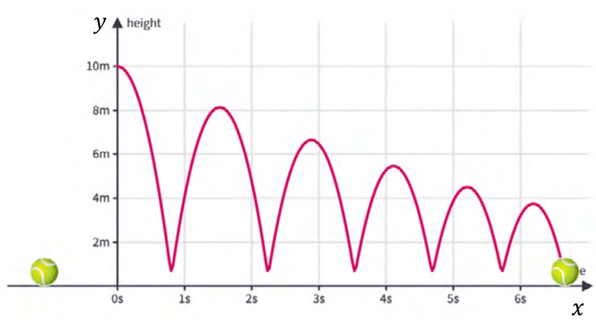
დავაწყვილოთ (n, b_n), გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე; მივიღებთ დისკრეტულ გრაფიკს:

სიტუაცია 2:

ერთ-ერთი ექსპერიმენტის დროს დადგინდა, როდესაც ბურთს ვუშვებთ ხელს, ყოველი შემდეგი ასვლის სიმაღლე, წინა სიმაღლის 80%-ს შეადგენს.

$h_1 = 10$; $q = 0.8$

$h_n = 10 \cdot 0.8^{(n-1)}$



როდესაც ვიხილავთ გეომეტრიულ პროგრესიას, ვხედავთ, რომ ცვლადი არის ხარისხის მაჩვენებლად, ასევე გეომეტრიული პროგრესია შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.

საკვანძო კითხვა: რა ჰქვია ფუნქციას, რომელსაც ცვლადი აქვს ხარისხში და განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა?

$y = a \cdot b^x$ სახის ფუნქციას, სადაც $b > 0$ და $b \neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება.

$D(f) = R$

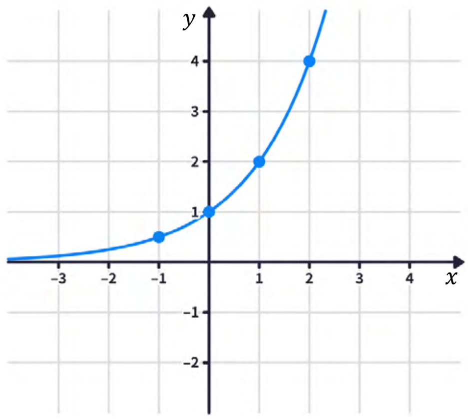
$E(f) = (0; +\infty)$

მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა R სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა არეა $(0; +\infty)$.

ავაგოთ $y = \mathbf{2}^x$ ფუნქციის გრაფიკი

ნახ. 1

x	−1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



ნახაზი 1

$D(f) = R$

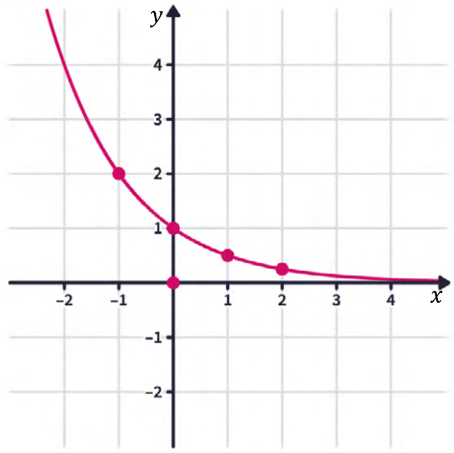
$E(f) = (0; +\infty)$.

გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში $(0; 1)$; Ox ღერძი წარმოადგენს ასიმპტოტას, გრაფიკი არ კვეთს მას.

ავაგოთ $y = \left(\mathbf{\frac{1}{2}}\right)^x$ ფუნქციის გრაფიკი:

ნახ. 2

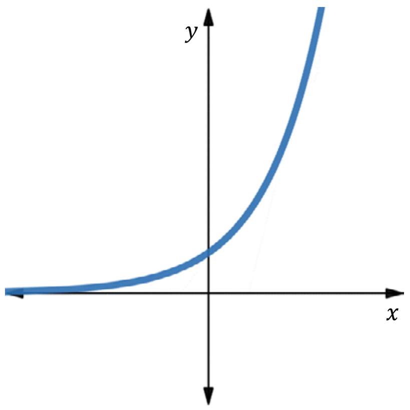
x	−1	0	1	2	3
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



ნახაზი 2

განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკები

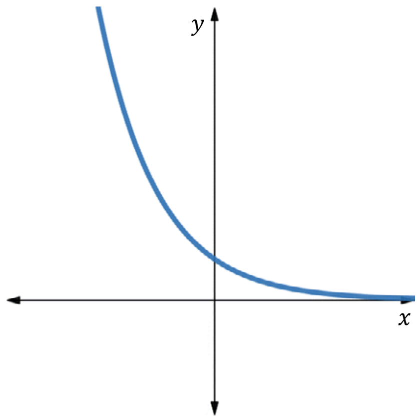
$y = a \cdot b^x$, $a > 0$, $b > 1$



ექსპონენციური ზრდა:
გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში $(0; a)$

ხარისხს ეწოდება ასევე ექსპონენტი (Exponent). გამომდინარე იქიდან, რომ ცვლადი არის ხარისხში, x-ის (იგივე არგუმენტის) გაზრდა იწვევს y-ის მეტად სწრაფ („დიდი ნაბიჯით“) ზრდას, როცა $b > 1$.

$y = a \cdot b^x$, $a > 0$, $0 < b < 1$



ექსპონენციური კლება:
გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში $(0; a)$

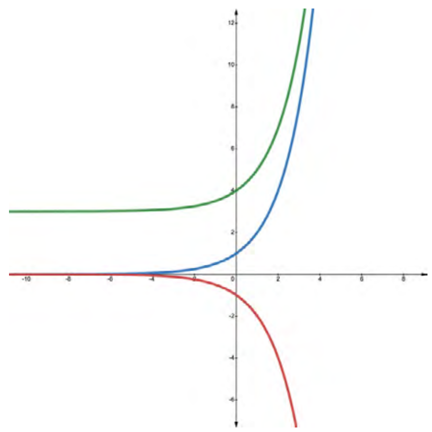
ხარისხს ეწოდება ასევე ექსპონენტი (Exponent). გამომდინარე იქიდან, რომ ცვლადი არის ხარისხში, x-ის (იგივე არგუმენტის) გაზრდა იწვევს y-ის სწრაფ („დიდი ნაბიჯით“) შემცირებას, როცა $0 < b < 1$.

ნიმუში 1 – მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები

განვიხილოთ საწყისი ფუნქცია $y = 2^x$

$y = -1 \cdot 2^x$ ფუნქციის გრაფიკი $y = 2^x$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულია OX ღერძის მიმართ;

$y = 2^x + 3$ ფუნქციის გრაფიკი, მიიღება $y = 2^x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის გასწვრივ 3 ერთეულით დადებითი მიმართულებით.



ექსპონენციური მოდელები რეალურ ცხოვრებაში

დავუშვათ რეალურ ცხოვრებაში, ყოველწლიურად ან დროის გარკვეული პერიოდულობით ხდება რაიმე სიდიდის ზრდა ან კლება ფიქსირებული პროცენტით. ამ შემთხვევაში t წლის (ან t პერიოდის შემდეგ) შემდეგ გაზრდილი ან შემცირებული რაოდენობა შეიძლება გამოვთვალოთ მაჩვენებლიანი განტოლებით.

ექსპონენციური ზრდა (პროცენტით ზრდა)	ექსპონენციური კლება (პროცენტით კლება)
$F(t) = a\cdot(1+p)^t$ a – რიცხვი, რომელიც შეესაბამება საწყის რაოდენობას; t – დრო $p = P\% = \frac{P}{100}$ $p\% = \frac{P}{100}$, გვაჩვენებს რამდენი პროცენტით ხდებოდა ზრდა დროის ერთ პერიოდში (ერთ წელში). $(1+p)$ – ს ეწოდება „ზრდის მაჩვენებელი“ **მინიშნება:** p წარმოადგენს პროცენტის (P) ათწილადურ ჩანაწერს.	$F(t) = a\cdot(1-p)^t$ a – რიცხვი, რომელიც შეესაბამება საწყის რაოდენობას; t – დრო $p = P\% = \frac{P}{100}$ $p\% = \frac{p}{100}$, გვაჩვენებს რამდენი პროცენტით ხდებოდა კლება დროის ერთ პერიოდში (ერთ წელში). $(1-p)$ – ს ეწოდება „კლების მაჩვენებელი“.

ნიმუში 2

გადაშენების პირას მყოფი ჩანთოსანი ცხოველების რაოდენობა 20-ია, თუმცა წარმატებული გამრავლების პროგრამით ყოველწლიურად ცხოველების რაოდენობა იზრდება 25%-ით.

ა) იპოვეთ პოპულაციის მოსალოდნელი რაოდენობა: 20 წლის შემდეგ; 100 წლის შემდეგ.

ბ) გამოთვალეთ რა დროში მიაღწევს ჩანთოსანი ცხოველების რაოდენობა 5 000-ს.

რადგან პოპულაცია ყოველწლიურად იზრდება 25%-ით, ე.ი. გვაქვს ექსპონენციური ზრდა, რომლის ზრდის მაჩვენებელი $(1 + 0.25)$;

ყოველი წლის ბოლოს პოპულაციის რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$F(t) = a\cdot(1+p)^t$, სადაც $a = 20$; $1 + p = 1.25$

ჩავსვათ ჩვენ მიერ მოპოვებული მონაცემები ფორმულაში და მივიღებთ:

$$F(t) = a\cdot(1+p)^t = 20\cdot 1.25^t$$

ა) ვიპოვოთ პოპულაციის რაოდენობა 20 და 100 წლის შემდეგ.

ტექნოლოგიების დახმარებით გამოვთვალოთ:

$F(20)$ – რამდენი ჩანთოსანი იქნება 20 წლის მერე

$F(100)$ – რამდენი ჩანთოსანი იქნება 100 წლის მერე

$F(20) = 20\cdot 1.25^{20} \approx 1735$

$F(100) = 20\cdot 1.25^{100} \approx 9.8\cdot 10^{10}$

გაგრძელება

გამოთვლის მეთოდი ტექნოლო-გიების მეშვეობით:

შევიდეთ ვებ – გვერდზე 🔗 [Desmos], ავირჩიოთ graphing calculator, მარცხენა მხარეს ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ ფუნქციის განტოლება და ავაგოთ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი.

აღნიშნულ განტოლებაში თუ t-ს ნაცვლად შევიტანთ იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც გვინდა ვიპოვოთ F, გრაფიკული კალკულატორი გაგვიადვილებს გამოთვლების პროცესს.

ბ) გამოთვალეთ რა დროში მიაღწევს ჩანთოსანი ცხოველების რაოდენობა 5 000-ს?

ამოვხსნათ განტოლება $F(t) = 5\,000$;

$F(t) = 20 \cdot 1.25^t = 5\,000$

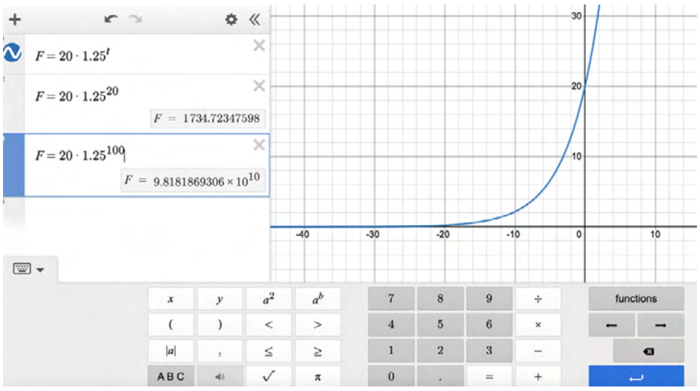
$20 \cdot 1.25^t = 5\,000$

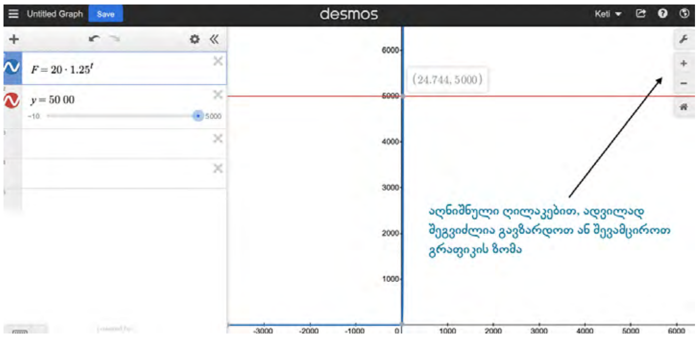
ისეთ განტოლებას, როდესაც ცვლადი არის ხარისხში, ეწოდება მაჩვენებლიანი განტოლება, მაჩვენებლიან განტოლებას დეტალურად განვიხილავთ მოგვიანებით, ახლა ამოვხსნათ განტოლება გრაფიკულად:

სიბრტყეზე გავავლოთ $y = 5\,000$ წრფე და ვიპოვოთ რა წერტილში კვეთს აღნიშნული წრფე გრაფიკს (მივიტანოთ ისარი გადაკვეთის წერტილთან).

$20 \cdot 1.25^t = 5\,000$

$t \approx 25$





ნიმუში 3 – მათემატიკის მოყვარულთათვის*

დავუბრუნდეთ ფინანსური წიგნიერების ნაწილს და განვიხილოთ რთული პროცენტის ფორმულა

მეანაბრე დეპოზიტზე (ანგარიშზე) დებს 1000 ლარს, 3 წლით. ბანკი სთავაზობს დარიცხვის რთულ მეთოდს, წლიური საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 5%-ს.

- მოვახდინოთ შემთხვევის მათემატიკური მოდელირება; დავაკავშიროთ წლის ბოლოს დეპოზიტზე არსებული თანხა, დარიცხვების რაოდენობასთან.

$A = 1000$ ლ; $t = 3$ წელი; $P\% = 5\%$;

შეგახსენებთ, რომ 5%-ს შეესაბამება თანხის $\frac{5}{100}$ ანუ 0.05 ნაწილი, ამიტომ:

$$P\% = 5\% = 0.05$$

F_0-ით აღვნიშნოთ საწყისი თანხა, 1000 ლარი.

F_1-ით აღვნიშნოთ პირველი წლის ბოლოს, 5%-იანი სარგებლის დარიცხვის შემდეგ, რა თანხა იქნება ანგარიშზე?

F_2-ით აღვნიშნოთ მეორე წლის ბოლოს, 5%-იანი სარგებლის დარიცხვის შემდეგ, რა თანხა იქნება ანგარიშზე და ა.შ.

t	რთული პროცენტით დარიცხვის შემთხვევა
1	$F_1 = 1000 + 1000 \cdot 5\% = 1000 + 1000 \cdot 0.05 = 1000\,(1 + 0.05) = 1000 \cdot 1.05$
2	მეორე წლის ბოლოს გაზრდილი თანხის 5 % ემატება ანაბარზე არსებულ თანხას და მეორე წლის ბოლოს იქნება: $F_2 = 1000 \cdot 1.05 + 1000 \cdot 1.05 \cdot 5\% = 1000 \cdot 1.05 + 1000 \cdot 1.05 \cdot 0.05 = 1000 \cdot 1.05\,(1 + 0.05) =$ $= 1000 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 1000 \cdot 1.05^2$
3	მესამე წლის ბოლოს გაზრდილი თანხის 5 % ემატება ანაბარზე არსებულ თანხას და მესამე წლის ბოლოს იქნება: $F_3 = 1000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05^2 \cdot 5\% = 1000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05^2 \cdot 0.05 =$ $= 1000 \cdot 1.05^2 \cdot (1 + 0.05) = 1000 \cdot 1.05^2 \cdot 1.05 = 1000 \cdot 1.05^3$
n	მივიღეთ, რომ $F_3 = 1000 \cdot 1.05^3 = 1000 \cdot (1 + 0.05)^3$, ამიტომ, თუ n – ით აღვნიშნავთ ნებისმიერ წელს, ამ შედეგის განზოგადებით გვექ-ნება: $F_n = 1000 \cdot (1 + 0.05)^n$ თუ დავუშვებთ, რომ ანაბარზე არსებული თანხის რაოდენობა დროის ფუნქციაა, მივიღებთ ფორმულას: $F(t) = 1000 \cdot (1 + 0.05)^t$ აღნიშნული ფორმულით შეგვიძლია დავადგინოთ, დროის ნებისმიერ მომენტში რა თანხა იქნება ანგარიშზე.

გაგრძელება

	რთული პროცენტის შემთხვევაში, როდესაც ხდება თანხის დამატება, ვიღებთ ფორმულას: $$F(t) = A \cdot (1 + P\%)^t$$ თუ ჩავთვლით, რომ $p = P\% = \dfrac{P}{100}$ $$F(t) = A \cdot (1 + p)^t$$ p აღნიშნავს პროცენტის ათწილადურ ჩანაწერს. აღნიშნულ შემთხვევას ეწოდება ექსპონენციური ზრდა.
	რთული პროცენტის შემთხვევაში, როდესაც ხდება თანხის დაკლება, ვიღებთ ფორმულას: $$F(t) = A \cdot (1 - p)^t$$ აღნიშნულ შემთხვევას ეწოდება ექსპონენციური კლება.

ნიმუში 4

ბანკში მეანაბრეს გახსნილი აქვს 27000 ლარიანი ანაბარი წლიური რთული 6% – იანი საპროცენტო დარიცხვით.

იპოვეთ რა თანხა ექნება მეანაბრეს ანგარიშზე 2 წლის შემდეგ? 5 წლის შემდეგ?

რთული საპროცენტო დარიცხვის შემთხვევაში, t წლის შემდეგ, საბოლოო თანხა გამოითვლება ფორმულით: $F(t) = 27000 \cdot (1 + 0{,}06)^t = 27000 \cdot 1{,}06^t$. მივიღებთ:

როცა $t = 2$, მაშინ $F(2) = 27000 \cdot 1{,}06^2 = 27000 \cdot 1{,}1236 = 30337{,}2$.

როცა $t = 5$, მაშინ $F(5) = 27000 \cdot 1{,}06^5 = 27000 \cdot 1{,}33822558 \approx 36132{,}1$.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = 5 \cdot 2^x$. იპოვეთ:

ა) $f(1)$; ბ) $f(-2)$; გ) $f(3)$; დ) $f(0)$.

🔗 Desmos – ის მეშვეობით ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

2. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = -2 \cdot 3^x - 1$. იპოვეთ:

ა) $f(2)$; ბ) $f(-1)$; გ) $f(-3)$; დ) $f(1)$

🔗 Desmos – ის მეშვეობით ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

3. მოცემულია ფუნქცია $g(x) = 2^{x-3}$. იპოვეთ:

ა) $g(3)$; ბ) $g(0)$; გ) $g(5)$; დ) $g(2)$

🔗 Desmos – ის მეშვეობით ააგეთ $g(x) = 2^x$ და $g(x) = 2^{x-3}$ ფუნქციის გრაფიკები და შეადარეთ ერთმანეთს.

4. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$. იპოვეთ:

ა) $f(0)$; ბ) $f(1)$; გ) $f(-1)$; დ) $f(-2)$

5. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები:

ა) $y = 4^x$; გ) $y = 3^x + 2$; ე) $y = 2 \cdot 5^x$;

ბ) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; დ) $y = 2^x - 5$; ვ) $y = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

6. 🔗 Desmos – ის ან სხვა გრაფიკული კალკულატორის მეშვეობით ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები და ახსენით/აღწერეთ გარდაქმნის წესი;

ა) $y = 4^x$; $y = 4^x + 3$; $y = 4^x - 2$; გ) $y = 5^x$; $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$;

ბ) $y = 3^x$; $y = 4 \cdot 3^x$; $y = -1 \cdot 3^x$; დ) $y = -1 \cdot 10^x$; $y = -1 \cdot 10^x + 4$; $y = -1 \cdot 10^x - 5$

7. ბანკში მეანაბრეს გახსნილი აქვს 18000 ლარიანი ანაბარი წლიური რთული 5 %-იანი საპროცენტო დარიცხვით. იპოვეთ რა თანხა ექნება მეანაბრეს ანგარიშზე 3 წლის შემდეგ? 6 წლის შემდეგ?

8. კახამ ბანკში აიღო 23000 ლარი სესხი წლიური რთული 6 %-იანი საპროცენტო დარიცხვით. რამდენი ლარი უნდა გადაუხადოს კახამ ბანკს, თუ სესხს დაფარავს 2 წლის შემდეგ? 4 წლის შემდეგ?

9. ბაქტერიების პოპულაციის t კვირის განმავლობაში ზრდის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით: $P(t) = 30 \cdot 2^{0,2t}$. იპოვეთ:

ა) ბაქტერიების პოპულაციის რაოდენობა საწყის მომენტში

ბ) რამდენი იქნება ბაქტერიების პოპულაცია 10 კვირის შემდეგ? 15 კვირის შემდეგ?

გ) დაწერეთ განტოლება, რომლის მეშვეობით შეიძლება დაადგინოთ რამდენი კვირის შემდეგ გახდება ბაქტერიების პოპულაცია 120.

10. რადიოაქტიური ნივთიერების მასა დროთა განმავლობაში იკლებს. t წლის განმავლობაში ნივთიერების დარჩენილი მასის (გრამებში) გამოსათვლელი ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით: $W(t) = 1,7 \cdot 2^{-0,0067t}$. იპოვეთ:

ა) ნივთიერების მასა საწყის მომენტში;

ბ) რამდენი იქნება ნივთიერების მასა 100 წლის შემდეგ? 250 წლის შემდეგ?

სავარჯიშოები

გ) დაწერეთ განტოლება, რომლის მეშვეობით შეიძლება დაადგინოთ რამდენი წლის შემდეგ გახდება ნივთიერების მასა 1,5 გრამი.

11. ქიმიური რეაქციის სიჩქარე დამოკიდებულია რეაქციაში შემავალი ნივთიერებებზე და გარემოს ტემპერატურაზე. ქიმიური რეაქციის V(t) სიჩქარის t (იზომება °C გრადუსით) ტემპერატურაზე დამოკიდებულების გამოსათვლელი ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით: $V(t)=V_0\cdot 2^{0,04t}$. იპოვეთ:

ა) V_0 , თუ ცნობილია, რომ 25°C ტემპერატურაზე რეაქციის სიჩქარეა 40;

ბ) რამდენი იქნება რეაქციის სიჩქარე 50°C ტემპერატურაზე? 100°C ტემპერატურაზე?

გ) დაწერეთ განტოლება, რომლის მეშვეობით შეიძლება დაადგინოთ, რომელ ტემპერატურაზე იქნება რეაქციის სიჩქარე 60.

12. გადაშენების პირას მყოფი ჩანთოსანი ცხოველების რაოდენობა 178-ია, თუმცა წარმატებული გამრავლების პროგრამით ყოველწლიურად ცხოველების რაოდენობა იზრდება 32%-ით.

ა) იპოვეთ პოპულაციის მოსალოდნელი რაოდენობა: 10 წლის შემდეგ; 25 წლის შემდეგ?

ბ) გამოთვალეთ რა დროში მიაღწევს ჩანთოსანი ცხოველების რაოდენობა 10000-ს?

13. ჭიანჭველების ბუდე იტევს 500 ჭიანჭველას. ჭიანჭველების რაოდენობა ყოველ კვირა 10%-ით იზრდება.

ა) რამდენი ჭიანჭველა იქნება: 10 კვირის შემდეგ; 20 კვირის შემდეგ?

ბ) რამდენი კვირა დასჭირდება ჭიანჭველების საცხოვრებელს, რომ მიაღწიოს 2000 ჭიანჭველას?

14. ცხოველი ერატიკუსი გადაშენების საფრთხის ქვეშაა. 2005 წლიდან მხოლოდ ერთი ჯიში იყო დარჩენილი და 2005 წელს ამ ჯიშიდან 555 ერატიკუსი დარჩა. ცხოველები სტაბილურად მცირდება წელიწადში 4,5%-ით.

ა) რამდენი ერატიკუსი იქნება 2025 წელს?

ბ) რომელ წელს შემცირდება ცხოველების რაოდენობა 50-მდე?

15. ყოველწლიურად ფიზიკოსი ზომავს რადიოაქტივობას. იგი აღმოაჩენს, რომ ის მცირდება ყოველწლიურად 18%-ით. 4 წლის შემდეგ დარჩენილი იყო 1,54 გ:

ა) იპოვეთ რადიაქტიური მასალის საწყისი რაოდენობა.

ბ) კიდევ რამდენი წელი დასჭირდება რადიაქტიური მასალის რაოდენობის შემცირებას 0,2 გ-მდე.

წინარე მასალის გამეორება

- $a^0 = 1,\ a \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ და $\dfrac{1}{a^{-n}}=a^n$, კერძოდ კი $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

სავარჯიშოები

16. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $5^2 \cdot 5^8$; გ) $5^{-3} \cdot 5^4$; ე) $x^6 \cdot x^{-6}$; ზ) $x^3 \cdot x$;

ბ) $a^5 \cdot a^{-2}$; დ) $-x^5 \cdot x^n$; ვ) $y^m \cdot y^2$; თ) $t(-1) \cdot t^2 \cdot t^0$).

17. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\frac{3^6}{3^2}$; გ) $\frac{7^{-1}}{7^{-2}}$; გ) $8^2 : 8^{-2}$ დ) $\frac{x^{15}}{x^{15}}$;

ბ) $\frac{y^9}{y^4}$; დ) $\frac{t^5}{t^6}$; ზ) $\frac{p^8}{p^7}$; თ) $t^m : t$.

18. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $(3^3)^2$; ბ) $(2^4)^5$; გ) $(5^3)^6$; დ) $(t^4)^3$.

19. წარმოადგინეთ მარტივი ფუძის ხარისხის სახით:

ა) 8; დ) 32; ზ) 25^2; კ) $2^n \cdot 4^n$; ნ) $\frac{5^{n+2}}{5^{n-1}}$; ქ) $\frac{4^a}{2b}$;

ბ) 125; ე) 64; თ) $2t \cdot 8$; ლ) $2^n \cdot 2^n$; ო) $(3^4)^{a+1}$; რ) $\frac{8x}{16y}$;

გ) 16; ვ) 27; ი) $3b : 3$; მ) $\frac{9^x}{3}$; პ) $3^x \cdot 3^{4-x}$; ს) $\frac{5^{1+x}}{5^{x-1}}$.

20. გამოთვალეთ:

ა) 7^0; ე) 45^0; ი) 5^3; ნ) 7^2;

ბ) 3^{-1}; ვ) 15^0; კ) 5^{-3}; ო) 7^{-2};

გ) 6^{-1}; ზ) 3^2; ლ) 10^2; პ) 10^3;

დ) 15^0; თ) 3^{-2}; მ) 10^{-5}; ქ) 10^{-3}.

21. გამოთვალეთ:

ა) $(\frac{1}{2})^0$; დ) $2t^0$; ზ) $\frac{5^3}{5^5}$; კ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; ნ) $5^0 - 5^{-1}$;

ბ) $\frac{5^4}{5^4}$; ე) 7^0; თ) $\frac{2^6}{1^{10}}$; ლ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; ო) $3^0 + 3^1 - 3^{-1}$;

გ) $2t^0$; ვ) $3 \cdot 4^0$; ი) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; მ) $2^0 + 2^1$; პ) $\left(\frac{1}{3}\right)-2$).

9.2. მაჩვენებლიანი განტოლება; ლოგარითმი

საკვანძო კითხვა:

დავუშვათ, ანაბარზე შევიტანეთ 2000 ლარი. ვიცით, რომ საპროცენტო განაკვეთია 5% და დარიცხვა ხდება რთული პროცენტით (რთული დარიცხვის მეთოდით) ყოველი წლის ბოლოს.

- *რა პერიოდის შემდეგ იქნება ანაბარზე 4000 ლარი?*

მაგალითი 1:

გავიხსენოთ კვადრატული განტოლება

$x^2 = b$, სადაც $b > 0$

$x = \pm\sqrt{b}$

ვიცით, რომ რიცხვიდან კვადრატული ფესვის ამოღება არის რიცხვის კვადრატში აყვანის შებრუნებული ოპერაცია

მაგალითი 2:

გავიხსენოთ მესამე ხარისხის, კუბური განტოლება:

$x^3 = b$, სადაც $b > 0$

ვიცით, რომ $x = \sqrt[3]{b}$

მაგალითი 3:

მეთოდი 1.

განვიხილოთ განტოლება:

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

ვხედავთ, რომ ფუძეში ორივე გამოსახულებას აქვს 2; რადგან ფუძეები ტოლია, ე.ი. ხარისხის მაჩვენებლები ტოლია $x = 3$

ანაბარზე თანხა იზრდება 5% -ით, ე.ი. გვაქვს ექსპონენციური ზრდა, რომლის ზრდის მაჩვენებელია: $(1 + 0.05)$;

ყოველი წლის ბოლოს ანაბარზე არსებული თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$F(t) = a \cdot (1 + p)^t$, სადაც $a = 2000$; $1 + 0.05 = 1.05$

ჩავსვათ მოპოვებული მონაცემები ფორმულაში და მივიღებთ:

$F(t) = 2\,000 \cdot (1 + 0.05)^t = 2\,000 \cdot 1.05^t$

გვინდა დავადგინოთ: დროის რა პერიოდის შემდეგ გახდება ანაბარზე თანხა 4000 ლარის ტოლი? რა ოპერაციის მეშვეობით არის შესაძლებელი ხარისხის მაჩვენებლის t-ს პოვნა?

$a^x = a^b$ განტოლებას, სადაც x-ცვლადია, $a > 0$, $a \neq 1$ უმარტივესი მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება. როდესაც ფუძეები ტოლია, ხარისხის მაჩვენებლები ტოლია და განტოლების ამონახსნია $x = b$.

- ვიცით, რომ როდესაც $a > 1$-ზე, $y = a^x$ ფუნქცია ზრდადია განსაზღვრის არეზე
- როდესაც $0 < a < 1$ $y = a^x$, ფუნქცია კლებადია განსაზღვრის არეზე

შესაბამისად, $a^x = a^b$ განტოლებას ექნება ერთადერთი ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, რომელიც უდრის b-ს.

მაგალითი 4:

$2^x = 10$

საკვანძო კითხვა: რა ხარისხში უნდა ავიყვანოთ 2, რომ მივიღოთ 10 ?

არის თუ არა ისეთი ოპერაცია, რომელიც დაგვეხმარება ვიპოვოთ ხარისხის ეს მაჩვენებელი?

როდესაც ცვლადი არის ხარისხში, მისი შებრუნებულ ოპერაციას ჰქვია ლოგარითმი, რომლის მეშვეობით შეგვიძია ჩავწეროთ ხარისხი.

$$2^x = 10$$
$$\log_2 10 = x$$

ვამბობთ, ლოგარითმი 2-ის ფუძით 10.

მაგალითად:

$$\log_2 2 = 1$$

მინიშნება: უფრო ზუსტად, ლოგარითმული ფუნქცია მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა; შექცეულ ფუნქციებს მოცემულ საკითხებში არ განვიხილავთ.

ლოგარითმის ცნება

განვიხილოთ განტოლება $a^x = b$, სადაც x არის ცვლადი, ხოლო a და b ნამდვილი რიცხვები, ამასთან $a > 0$ და $a \neq 1$

- *თუ* $b < 0$, მოცემულ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან ნებისმიერი x-ისთვის $a^x > 0$-ზე;
- *თუ* b > 0, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

$a^x = b$ განტოლების ამონახსნს, სადაც $a > 0$ ამასთან $a \neq 1$ და $b > 0$ უწოდებენ b რიცხვის ლოგარითმს a ფუძით.

b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით, ამასთან $a > 0$, $a \neq 1$ ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს , რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b და აღინიშნება სიმბოლოთი $\log_a b$.

$\log_a b = x \longrightarrow a^x = b$ (ორივეს ფუძედ აქვს a);
განმარტებიდან გამომდინარეობს ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა $a^{\log_a b} = b$;
$\log_a (a^x) = x$, $x \in$ R

შევადაროთ ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფორმები

ნიმუში 1

ლოგარითმული ფორმა	მაჩვენებლიანი ფორმა
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

ნიმუში 2

ვიპოვოთ $4 \cdot 3^x = 20$ ტოლობაში უცნობი x

ტოლობიდან მივიღებთ: $3^x = 5$,
საიდანაც ლოგარითმის განმარტებით მივიღებთ: $x = \log_3 5$.

ნიმუში 3 – განვიხილოთ შესავალი ამოცანა და ამოვხსნათ

ვიცით, რომ ყოველი წლის ბოლოს ანაბარზე არსებული თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$F(t) = 2000 \cdot (1 + 0.05)^t =$
$= 2000 \cdot 1.05^t$

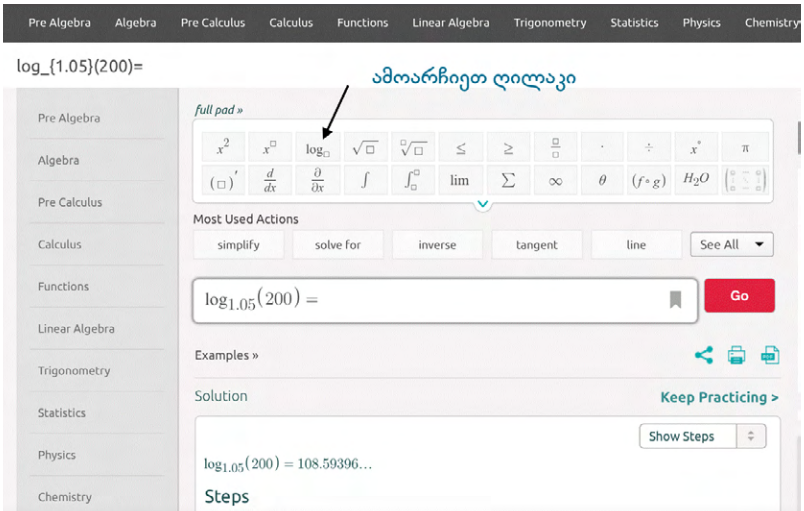
გვინდა, დავადგინოთ დროის რა პერიოდის შემდეგ გახდება ანაბარზე თანხა 4000 ლარის ტოლი?

ამოვხსნათ განტოლება

$$2000 \cdot 1.05^t = 4000$$
$$1.05^t = 2$$
$$t = \log_{1.05} 2 \approx 15$$

ვიპოვოთ რიცხვის მნიშვნელობა გრაფიკული კალკულატორის მეშვეობით

www.symbolab.com



$t = \log_{1.05} 2 \approx 15$

როდესაც შეხვალთ ვებ გვერდზე გაააქტიურეთ ღილაკი Solution

ნიმუში 4 – მათემატიკის მოყვარულთათვის

თუ ჩვენ ვიყიდით სპეციალური ჩამოსხმის ღვინის ერთ ბოთლს 550 ლარად, 5 წლის შემდეგ მისი ღირებულება გახდება 1550 ლარი. რამდენია ჩვენი მოგების წლიური საპროცენტო განაკვეთი? პასუხი ჩავწეროთ მეასედებამდე დამრგვალებული ფორმით:

$$F(t) = A \cdot (1 + p)^t$$

$550 \cdot (1 + p)^5 = 1550$

$(1 + p)^5 = \frac{1550}{550}$ გავყოთ განტოლების ორივე მხარე 550-ზე.

$1 + p = \sqrt[5]{\frac{1550}{550}}$ ამოვიღოთ მე – 5 ხარისხის ფესვი ტოლობის ორივე მხარიდან

$p = \sqrt[5]{\frac{1550}{550}} - 1$ გამოაკლოთ 1 ტოლობის ორივე მხარეს.

$p \approx 0.2303$

გამოიყენეთ კალკულატორი და გამოთვალეთ: $(1550 : 550)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 23.03\%$

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2^x = 16$; დ) $4 \cdot 5^x = 20$; ზ) $6^{2x} = 36$;
ბ) $3^{x-1} = 9$; ე) $2 \cdot 5^{x+2} = 50$; თ) $3 \cdot 2^{3x} = 12$;
გ) $4^{x+1} = 16$ ვ) $9^x = 27$; ი) $6 + 3^{x-1} = 15$.

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $5^x = 125$; დ) $8^x = 16$; ზ) $\left(\frac{1}{16}\right)^r = 1/256$; კ) $\left(\frac{1}{36}\right)^y = \frac{1}{6}$;
ბ) $4^x = 256$; ე) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64$; თ) $3^{x+1} = 243$; ლ) $\left(\frac{1}{3}\right)^y = \frac{1}{27}$;
გ) $16^x = \frac{1}{4}$; ვ) $\left(\frac{1}{25}\right)^x = 5$; ი) $7^x = 49$; მ) $\left(\frac{1}{64}\right)^y = 8$.

3. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2^x = 20$; დ) $4 \cdot 5^x = 4$; ზ) $6^{x+1} = 180$;
ბ) $3^x = 2$; ე) $2 \cdot 5^x = 8$; თ) $3 \cdot 2^x = 21$;
გ) $4^x = 64$ ვ) $9^x = 54$; ი) $6 \cdot 3^x = 30$.

4. გამოწვევა: ამოხსენით განტოლებები:

ა) $3^x = 1$; ე) $\sqrt{5}^x = 25$; ი) $\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{32}$;
ბ) $\pi^x = 1$; ვ) $\sqrt{2}^y\ \sqrt{4}^x = 64$; კ) $\sqrt{7}^x = 49$;
გ) $2^{x^2-5x-10} = 1$ ზ) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^4$; ლ) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+9x} = 1$;
დ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-16x} = 1$; თ) $\left(\frac{9}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{64}$; მ) $\sqrt{3}^y \cdot \sqrt{3}^y = 225$

5. გამოწვევა: ამოხსენით განტოლებები:

ა) $4^{6-x} = 4^{3x-2}$; დ) $\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt{4^{2-x}}$; ზ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x2-2x-5} = 81$;
ბ) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5x-9}$; ე) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; თ) $3^{x^2+x+\frac{1}{2}} = 9\sqrt{3}$;
გ) $2^{x^2-x-2} = 4$; ვ) $3x \cdot 4^x = (12^{x-1})^5$; ი) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

წინარე მასალის გამეორება

6. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $5x^{-2} = 125$; დ) $2^{x-3} = 54$; ზ) $x^{-4} = \frac{1}{16}$;
ბ) $x^{-2} = \frac{1}{81}$; ე) $x^{-3} = -\frac{1}{64}$; თ) $x^3 = -1000$;
გ) $(x-5)^2 = \frac{1}{16}$; ვ) $(2+x)^3 = 8$; ი) $(3-x)^4 = 625$.

7. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $3^x = 27$; გ) $4^x = 64$; ე) $8^x = 16$; ზ) $5 \cdot 6^x = 180$.
ბ) $2^x = 32$ დ) $25^x = 125$; ვ) $9^x = 27$;

9.3. ლოგარითმი, ლოგარითმის თვისებები

მაჩვენებლიანი განტოლების ლოგარითმული ფორმით დაწერისას ან პირიქით ლოგარითმული განტოლების მაჩვენებლიანი ფორმით წარმოდგენისას, უნდა ვიცოდეთ რომ **ლოგარითმის ფუძე** არის იგივე რიცხვი, რაც **ხარისხის ფუძე**.

- $\log_{10} 1000 = 3$ რადგან $10^3 = 1000$
- $\log_2 32 = 5$ რადგან $2^5 = 32$
- $\log_{10} 0.1 = -1$ რადგან $10^{-1} = 0.1$
- $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ რადგან $16^{\frac{1}{2}} = 4$

მაგალითად 10-ის ხარისხების ცხრილს და 10-ის ფუძით ჩაწერილი ლოგარითმების ცხრილს თუ შევხედავთ, დავინახავთ, რომ პირველი სვეტის ხარისხის მაჩვენებლები მეორე სვეტის ლოგარითმის პასუხებია.

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	−1
10^{-2}	−2
10^{-3}	−3
10^{-4}	−4

დავადგინოთ ლოგარითმის რამდენიმე ძირითადი თვისება:

- ლოგარითმის განმარტების მიხედვით, თუ $\log_a b = c$, მაშინ $a^c = b$.
- ბოლო ტოლობაში ჩავსვათ c-ს მნიშვნელობა, მივიღებთ: $a^{\log_a b} = b$; ამ ტოლობას უწოდებენ ძირითად ლოგარითმულ იგივეობას.
- ლოგარითმის განმარტებიდან მივიღებთ: $\log_a 1 = 0$ და $\log_a a = 1$
- გავითვალისწინოთ, რომ:

$$\mathrm{Log}_a (a^x) = x, \quad x \in R$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$

მაგალითად:

$\log_5 1 = 0$ თვისება (1)

$\log_5 5 = 1$ თვისება (2)

$\log_5 5^8 = 8$ თვისება (3)

$5^{\log_5 12} = 12$ თვისება (4)

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ:

ა) $\log_2 16$;   დ) $2 \cdot \log_5 25$;   ზ) $\log_2 32$;
ბ) $\log_3 81$;   ე) $3 \cdot \log_7 49$;   თ) $4 - \log_3 27$;
გ) $\log_6 36$;   ვ) $0,8 \cdot \log_4 64$;   ი) $5 + \log_5 125$.

2. ა) 2-ის ფუძიანი ლოგარითმის სახით ჩაწერეთ რიცხვი 3;
ბ) 2-ის ფუძიანი ლოგარითმის სახით ჩაწერეთ რიცხვი –4;
გ) 5-ის ფუძიანი ლოგარითმის სახით ჩაწერეთ რიცხვი 2;
დ) 3-ის ფუძიანი ლოგარითმის სახით ჩაწერეთ რიცხვი –3.

3. ბანკში მეანაბრეს გახსნილი აქვს 25000 ლარიანი ანაბარი წლიური რთული 7 %-იანი საპროცენტო დარიცხვით. იპოვეთ დაახლოებით რამდენი წლის შემდეგ ექნება მეანაბრეს ბანკში 35600 ლარი? 40300 ლარი?

4. ლიკამ ბანკში აიღო 15000 ლარი სესხი წლიური რთული 8 %-იანი საპროცენტო დარიცხვით. იპოვეთ დაახლოებით რამდენი წლის შემდეგ ექნება ლიკას ბანკისთვის დასაფარი 21700 ლარი? 24500 ლარი?

5. რადიოაქტიური ნივთიერების მასა დროთა განმავლობაში იკლებს. t წლის განმავლობაში ნივთიერების დარჩენილი მასის (გრამებში) გამოსათვლელი ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით: $W(t) = 1,4 \cdot 2^{-0,0058 \cdot t}$. იპოვეთ დაახლოებით რამდენი წლის შემდეგ იქნება ნივთიერების მასა 1,2 გრამი.

6. გამოთვალეთ:

ა) $\log_4 16$;   დ) $2 \cdot \log_5 5$;   ზ) $\log_8 32$;
ბ) $\log_9 81$;   ე) $-2 \cdot \log_7 49$;   თ) $\log_9 81$;
გ) $4 \log_6 1$;   ვ) $20 \cdot \log_{0.5} 4$;   ი) $\log_5 125$.

9.4. ლოგარითმული ფუნქცია

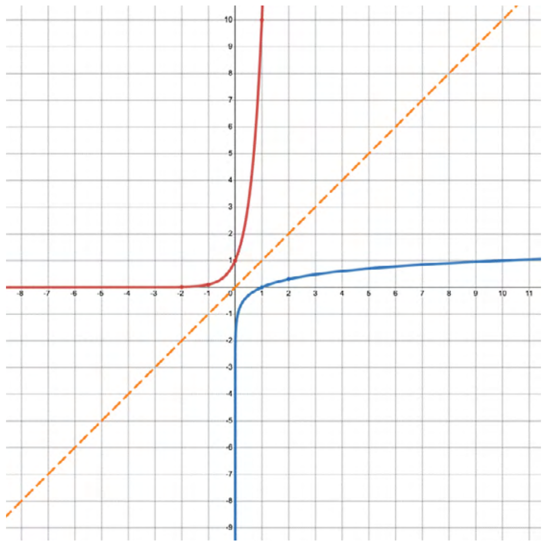
ჩვენ უკვე დავაკავშირეთ ლოგარითმი და ხარისხი ერთმანეთთან, ვნახეთ როგორ არის შესაძლებელი მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნის პოვნა ლოგარითმის დახმარებით.

განვიხილოთ ლოგარითმული ფუნქცია და დავაკავშიროთ მაჩვენებლიან ფუნქციასთან

ავაგოთ $y = 10^x$ ფუნქციის გრაფიკი

ცხრილი 1

x	-1	0	1	2	3
$y = 10^x$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000



ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი და მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი $y = x$ წრფის მიმართ სიმეტრიულები არიან.

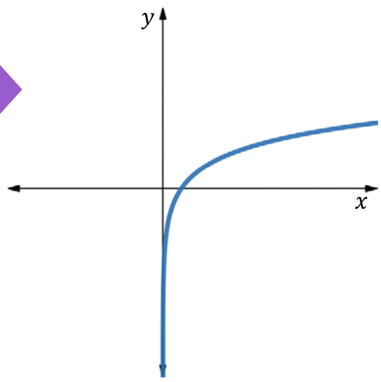
ვიცით, რომ ლოგარითმი შეესაბამება ხარისხს, შესაბამისად პირველი ცხრილის x-ის მნიშვნელობები შევიტანოთ მეორე ცხრილის მეორე სვეტში.

განვიხილოთ ფუნქცია $y = \log_{10} x$

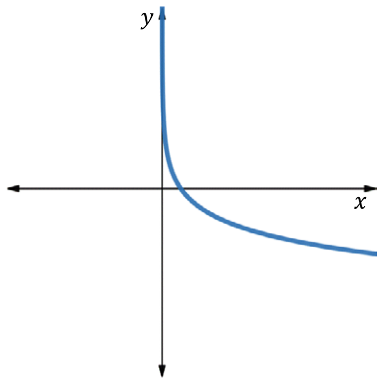
x	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000
$y = \log_{10} x$	-1	0	1	2	3

განვიხილოთ ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკები

$y = \log_a x$ სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$, **ლოგარითმული ფუნქცია** ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in (0; +\infty)$, ხოლო **მნიშვნელობათა არეა R სიმრავლე.**



$y = \log_a x$; $a > 1$



$y = \log_a x$; $0 < a < 1$

ნიმუში 1 – გარდაქმნები

განვიხილოთ საწყისი ფუნქცია:

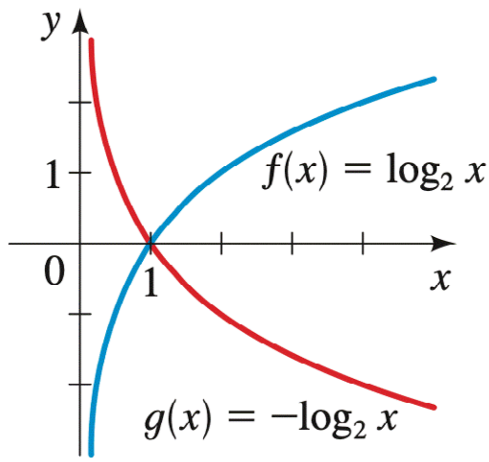
$y = \log_2 x$ და ავაგოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

შემდეგ ავაგოთ $y = -\log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც იქნება:

$y = \log_2 x$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული Ox ღერძის მიმართ.

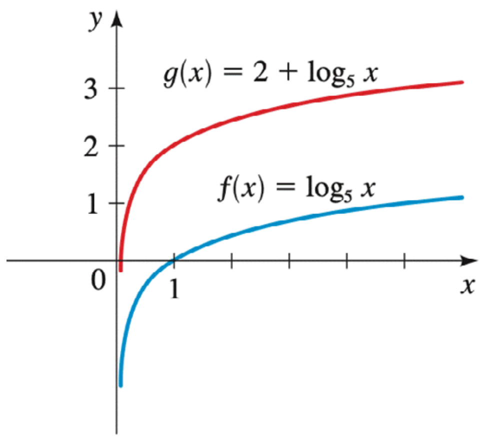
x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	–1
2^{-2}	–2
2^{-3}	–3
2^{-4}	–4

ნახაზი 1



განვიხილოთ $y = \log_5 x + 2$ ფუნქციის გრაფიკი. იგი მიიღება $y = \log_5 x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის გასწვრივ 2 ერთეულით დადებითი მიმართულებით.

ნახაზი 2



სავარჯიშოები

1. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = \log_2 x$. იპოვეთ:

ა) $f(1)$; ბ) $f(4)$; გ) $f(64)$; დ) $f(0.25)$.

2. მოცემულია ფუნქცია $h(x) = \log_3 x + 5$. იპოვეთ:

ა) $h(3)$; ბ) $h(1)$;გ); $h(25)$; დ) $f(0.2)$.

3. მოცემულია ფუნქცია $g(x) = \log_{0,25} (x - 3)$. იპოვეთ:

ა) $g(7)$; ბ) $g(4)$; გ) $g(19)$; დ) $g(11)$.

4. მოცემულია ფუნქცია $Q(x) = 3 \cdot \log_5 (x + 2)$. იპოვეთ:

ა) $Q(3)$; ბ) $Q(-1)$; გ) $Q(23)$; დ) $Q(5)$.

5. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკები:

ა) $y = \log_3 x$; დ) $y = \log_4 x + 2$; ზ) $y=\log_6 (x + 2)$;

ბ) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; ე) $y = \log_5 x - 6$; თ) $y = \log_3 (x - 5)$;

გ) $y=\log_6 x$; ვ) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$; ი) $y = \log_{\frac{3}{5}} (x - 1)$.

6. ამოხსენით მაჩვენებლიანი განტოლებები:

ა) $2^x = 8$; ვ) $8^{2x-3} - 64 = 0$; ლ) $3 \cdot 4^{x-2} = 48$; ჟ) $5 \cdot 3^{2x+5} = 45$;

ბ) $3^x = 27$; ზ) $3^{3x-2} = \frac{1}{81}$; მ) $7 \cdot 3^{2x+1} = 63$; რ) $\frac{3^x}{9} = 3^{-x+6}$;

გ) $5^x = 125$; თ) $5^x = 25\sqrt[7]{5}$; ნ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2x-3}$; ს) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 4^{2x-6} = 0$;

დ) $2^{x-7} = 4$; ი) $10^{2x-5} = 100$; ო) $\frac{3^x}{27} = 81$; ტ) $3^{2x-1} - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x} = 0$;

ე) $6^x = \frac{1}{36}$; კ) $7^{3x+8} = 49$; პ) $\frac{2^x}{8} = \frac{1}{4} \cdot 32$; უ) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 20 \cdot 2^{2x-6} = 0$.

7. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_5 x = 4$; ვ) $2\log_3 x = -4$; ლ) $\log_{\frac{1}{5}} (x - 2) = -2$;

ბ) $\log_6 x = 0$; ზ) $3\log_5 x = -9$; მ) $8 - \log_5 (2x) = 4$;

გ) $\log_3 (3x) = -1$; თ) $5 - \log_3 x = 2$; ნ) $\log_5 \left(\frac{x-2}{3}\right) = 2$;

დ) $2\log_3 x = 6$; ი) $4\log_2 x = 20$; ო) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{5}\right) = -5$;

ე) $\log_2 (3x + 8) = 4$; კ) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ პ) $6 - \log_5 (3x) = 4$.

8. ამოხსენით განტოლებები (როცა ფუძეშია ცვლადი):

ა) $\log_x 64 = 3$; დ) $\log_{(x+2)} 125 = 3$;

ბ) $3\log_{\frac{x}{3}} \frac{27}{8} = 9$; ე) $5\log_{\frac{x}{2}} 8 = 5$;

გ) $5 - \log_x 64 = 3$; ვ) $3 + \log_{x-2} 125 = 6$.

მათემატიკის მოყვარულთათვის *

1. დადებითი რიცხვების ნამრავლის ლოგარითმი თანამამრავლთა ლოგარითმების ჯამის ტოლია: $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$.
2. დადებითი რიცხვების განაყოფის ლოგარითმი ტოლია გასაყოფის ლოგარითმს გამოკლებული გამყოფის ლოგარითმი: $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$.
3. თუ ლოგარითმის ფუძესა და სალოგარითმებელში არის დადებითი რიცხვის ხარისხები, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა: $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \cdot \log_a b$.

ნიმუში 4 – მათემატიკის მოყვარულთათვის

1) გამოთვალეთ ჯამი: $\log_3 5 + \log_3 1{,}8 = \log_3 (5 \cdot 1{,}8) = \log_3 9 = 2$.

2) გამოთვალეთ სხვაობა: $\log_5 50 - \log_5 10 = \log_5(50 : 10) = \log_5 5 = 1$.

3) ჩაწერეთ მოცემული რიცხვი 2-ის ფუძიანი ლოგარითმის სახით:

ა) რიცხვი 4. გვექნება: $4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$.

ბ) რიცხვი –5. გვექნება: $-5 = \log_2 2^{-5} = \log_2 \frac{1}{32}$.

დ) გაამარტივეთ გამოსახულება: $\log_8 625 = \log_{2^3} 5^4 = \frac{4}{3} \cdot \log_2 5$.

1. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $\log_2 6 + \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)$; დ) $\log_2 48 - \log_2 3$; ზ) $\log_2 108 - 3 \cdot \log_2 3$;

ბ) $\log_3 12 + \log_3 \left(\frac{9}{4}\right)$; ე) $\log_7 28 - \log_7 4$; თ) $2 \cdot \log_5 4 + \log_5 3$;

გ) $\log_5 45 + \log_5 \left(\frac{25}{9}\right)$; ვ) $\log_6 18 - \log_6 3$; ი) $3 \cdot \log_7 2 - \log_7 5$.

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_2 (x + 2) - \log_2 (2x - 3) = 0$; გ) $\log_3 3^x = 4$; ე) $\log_2(9^x + 1) = 2$;

ბ) $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2x + 7}\right) = 0$; დ) $\log_{\frac{1}{7}} 7^x = 2$; ვ) $\log_{\frac{1}{3}}(4^x - 5) = -2$.

3. $y = \log_3(x + 5)$ ფუნქციის გრაფიკის აუგებლად დაადგინეთ, გადის თუ არა ეს გრაფიკი წერტილებზე:

A(17; 4); B(4; 2); C(240; 5); D(22; 3); E(235; 6); F(76; 4).

4. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. ჩამოთვლილთაგან რომელი წერტილები ეკუთვნის ამ ფუნქციას?

M(16; –4); N(7; 3); K($\frac{1}{32}$; 5); L(20; 4); P(1; 0); Q(64; 6)

ტესტი განმავითარებელი შეფასებისთვის

1. მოცემულია ფუნქცია $f(x) = 5 \cdot 3x$. იპოვეთ $f(-3)$:

ა) (2; 5) და (4; 10); ბ) (–1;4) და (1;12);

2. მოცემულია ფუნქცია $Q(x) = 6^{-x+2}$. იპოვეთ $Q(4)$;

3. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი: $y = 2^x + 4$;

4. მწყრების პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ზრდის t დროზე (წლები) დამოკიდებულების P(t) ფუნქცია გამოისახება შემდეგი ფორმულით: $P(t) = 12 \cdot 2^t$. იპოვეთ პოპულაციაში მწყრების რაოდენობა 6 წლის შემდეგ?

5. გამოთვალეთ: ა) $3 \cdot \log_3 27$; ბ) $5 + \log_4 32$.

6. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულება: $2 \cdot \log_5 3 + \log_5 4$.

7. ამოხსენით განტოლება: $3 \cdot 5^x = 75$.

8. მოცემულია ფუნქცია $g(x) = \log_2 (x + 6)$. იპოვეთ $g(10)$.

9. ააგეთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი: $y = \log_7 (x - 3)$.

10. მოცემულია ფუნქცია $Q(x) = 3 \cdot \log_2 (x - 8)$. იპოვეთ x არგუმენტის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ფუნქციის მნიშვნელობა ტოლი იქნება 9-ის.

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით მაჩვენებლიანი განტოლებები:

ა) $2^x = 8$;

ბ) $3^x = 27$;

გ) $5^x = 125$;

დ) $2^{x-7} = 4$;

ე) $6^x = \frac{1}{36}$;

ვ) $8^{2x-3} - 64 = 0$;

ზ) $3^{3x-2} = \frac{1}{81}$;

თ) $5^x = 25\sqrt[7]{5}$;

ი) $10^{2x-5} = 100$;

კ) $7^{3x+8} = 49$;

ლ) $3 \cdot 4^{x-2} = 48$;

მ) $7 \cdot 3^{2x+1} = 63$;

ნ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2x-3}$;

ო) $\frac{3^x}{27} = 81$;

პ) $\frac{2^x}{8} = \frac{1}{4} \cdot 32$;

ჟ) $5 \cdot 3^{2x+5} = 45$;

რ) $\frac{3^x}{9} = 3^{-x+6}$;

ს) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 4^{2x-6} = 0$;

ტ) $3^{2x-1} - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x} = 0$;

უ) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 20 \cdot 2^{2x-6} = 0$.

ტესტის ნიმუში:

1. დაადგინე, ეკუთვნის თუ არა $y = {}^{5x+1}$ მაჩვენელიან ფუნქციას წერტილები:

ა) (0;5); ბ) (3;25); გ) (2;5); დ) (1;0); ე) $(-1; \frac{1}{25})$; ვ) (–2;125).

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $2^x = 16$; ბ) $3^{x+2} = \frac{1}{27}$.

3. დავუშვათ, გადაწყვიტე, რომ ბანკში ანაბარზე შეიტანო 10000 ლარი წლიური რთული 5%-იანი საპროცენტო დარიცხვით. ცნობილია, რომ ანაბრის ასაღები თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$F(t) = A \cdot (1 + p)^t$, სადაც $F(t)$ არის გარკვეული პერიოდის შემდეგ გამოსატანი თანხა, A არის საწყისი თანხა, p – საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო t – დრო.

- რა თანხა უნდა აიღო ა) ორი წლის შემდეგ? ბ) სამი წლის შემდეგ?
- სხვა ბანკი გთავაზობს წლიური 7 %-იანი რთული დარიცხვის წესს. ამ შემთხვევაში რამდენს აიღებ ა) ორი წლის შემდეგ? ბ) სამი წლის შემდეგ?
- რამდენი ლარით მეტ მოგებას ნახავ მეორე ბანკის არჩევის შემთხვევაში?

სავარჯიშოები ლოგარითმზე:

1. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_5 x = 4$; ვ) $2\log_3 x = -4$; ლ) $\log_{\frac{1}{5}} (x-2) = -2$; ქ) $\log_3 x - \log_3 5 = 1$;

ბ) $\log_6 x = 0$; ზ) $3\log_5 x = -9$; მ) $8 - \log_5 (2x) = 4$; რ) $3\log_5 (x+5) = 6$;

გ) $\log_3 (3x) = -1$; თ) $5 - \log_3 x = 2$; ნ) $\log_5 \left(\frac{x-2}{3}\right) = 2$; ს) $\log_5 x + 2\log_5 3 = 2$;

დ) $2\log_3 x = 6$; ი) $4\log_2 x = 20$; ო) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{5}\right) = -5$; ტ) $\log_2 x^2 - \log_2 9 = 4$;

ე) $\log_2 (3x+8) = 4$; კ) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ პ) $6 - \log_5 (3x) = 4$; უ) $\log_3 x^2 + \log_3 16 = 2$.

2. ამოხსენით განტოლებები (როცა ფუძეშია ცვლადი):

ა) $\log_x 64 = 3$; დ) $\log_{(x+2)} 125 = 3$; ზ) $\log_x 125 - \log_x 5 = 2$;

ბ) $3\log_{\frac{x}{3}} \frac{27}{8} = 9$; ე) $5\log_{\frac{x}{2}} 8 = 5$; თ) $8 - \log_{2x} 27 = 5$;

გ) $5 - \log_x 64 = 3$; ვ) $3 + \log_{x-2} 125 = 6$; ი) $\log_{(x-1)} 8 + \log_{(x-1)} 16 = 7$.

3. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_2 (x+2) - \log_2 (2x-3) = 0$; გ) $\log_3 3^x = 4$; ე) $\log_2 (9^x + 1) = 2$;

ბ) $\log_{\frac{1}{5}} (3x-5) + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2x+7}\right) = 0$; დ) $\log_{\frac{1}{7}} 7^x = 2$; ვ) $\log_{\frac{1}{3}} (4^x - 5) = -2$.

4. $y = \log_3 (x+5)$ ფუნქციის გრაფიკის აუგებლად დაადგინეთ, გადის თუ არა ეს გრაფიკი წერტილებზე:

A(17; 4); B(4; 2); C(240; 5); D(22; 3); E(235; 6); F(76; 4).

5. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. ჩამოთვლილთაგან რომელი წერტილები ეკუთვნის ამ ფუნქციას?

M(16; –4); N(7; 3); K($\frac{1}{32}$; 5); L(20; 4); P(1; 0); Q(64; 6)

ლოგარითმის ქვიზი:

1. დაადგინე, ეკუთვნის თუ არა $y = \log_5 (x + 2)$ ფუნქციას წერტილები:

A (3; 1); B (5; 2); C (–1; 0); D $\left(\frac{1}{5}; -2\right)$; E (23; 2).

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\log_3 (x - 19) = 4$; ბ) $\log_{\frac{1}{5}}(5x) = -3$.

3. დავუშვათ, ანაბარზე შეიტანე თანხა 5000 ლარის ოდენობით 8%-იანი საპროცენტო განაკვეთით და დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს რთული პროცენტით.

ყოველი წლის ბოლოს ანაბარზე არსებული თანხა გამოითვლება ფორმულით $F(t) = A \cdot (1 + p)^t$, სადაც A არის საწყისი თანხა, p – საპროცენტო განაკვეთი, t – დრო, $F(t)$ – t წლის შემდეგ ანაბარზე მიღებული თანხა.

- რამდენი წლის შემდეგ გახდება ანაბარზე თანხა 7000 ლარის ტოლი? 10000 ლარის ტოლი?
- ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვა რომ ყოფილიყო 10%-იანი საპროცენტო განაკვეთით რთული პროცენტით, რამდენი წლის შემდეგ გახდებოდა თანხა 7000 ლარის ტოლი? 10000 ლარის ტოლი?
- დაახლოებით რამდენი წლის შემდეგ იქნება 10%-იანი საპროცენტო განაკვეთით დარიცხული თანხა 1,2-ჯერ მეტი, ვიდრე 8%-იანი საპროცენტო განაკვეთით დარიცხული თანხა?

ალგებრა

პირველი არხი, & საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინიტრო. (2020). *პირველი არხი ტელესკოლა – YouTube*. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv

საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო. (2020). *მათემატიკა*. El.ge. https://el.ge/articles/project_tasks/4/1

საქართველოს ეროვნული ბანკი. (2019). *ფინანსური განათლება მარტივად*. shorturl.at/doLRY

საქსტატი. (2019). *დემოგრაფიული ვითარება საქართველოში 2018*. https://www.geostat.ge/media/27215/demograpia-2018.pdf

საქსტატი. (2022). *დასაქმება და უმუშევრობა – საქართველოს სტატისტიკის ეროვნული სამსახური*. Www.geostat.ge. https://www.geostat.ge/ka/modules/categories/683/dasakmeba-umushevroba

საქსტატი. (2022). *სტატისტიკა ბავშვებისა და მოზარდებისთვის*. Juniors.geostat.ge. http://juniors.geostat.ge/kid-stat/single-quiz/eduaction

Academo. (2016). *Virtual Oscilloscope*. Academo.org. https://academo.org/demos/virtual-oscilloscope/

CEIC. (2000). *Global Economic Data, Indicators, Charts & Forecasts | CEIC*. Ceicdata.com. https://www.ceicdata.com/en

Ck 12, (2020). CK-12 Foundation. *ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა*. Interactives.ck12.org. https://interactives.ck12.org/simulations/physics/archery/app/index.html?screen=sandbox&lang=ge&referrer=ck12Launcher&backUrl=https://interactives.ck12.org/simulations/physics.html

Desmos. (2023). Desmos.com. https://www.desmos.com/

Forbes Georgia. (2022). *2021 წელს საქართველოს ეკონომიკა 10.6 პროცენტით გაიზარდა • Forbes Georgia*. Forbes Georgia. https://forbes.ge/2021-tsels-saqarthvelos-ekonomika-10-6-protsentith-gaizarda/

GeoGebra. (2018). GeoGebra. https://www.geogebra.org

Mardaleishvili, N (2020). *ნინო მარდალეიშვილი: შემოკლებული გამრავლების ფორმულები*. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=t3xdmahKhdw

Math.ge. (2020). *მთავარი*. Math.ge. https://math.ge

Mathigon. (2022). *Polypad – Virtual Manipulatives*. Mathigon. https://mathigon.org/polypad

Phet.colorado.edu. (2023). Phet.colorado.edu. https://phet.colorado.edu

Symbolab. (2017). Step-by-Step Calculator – Symbolab. Symbolab.com. https://www.symbolab.com/solver

Tsertsvadze, K (2022). Desmos – წერტილთა წყვილების გადატანა. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=txtX42kF9Ps