პროფესიული უნარების სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ლოგიკა და გეომეტრია

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

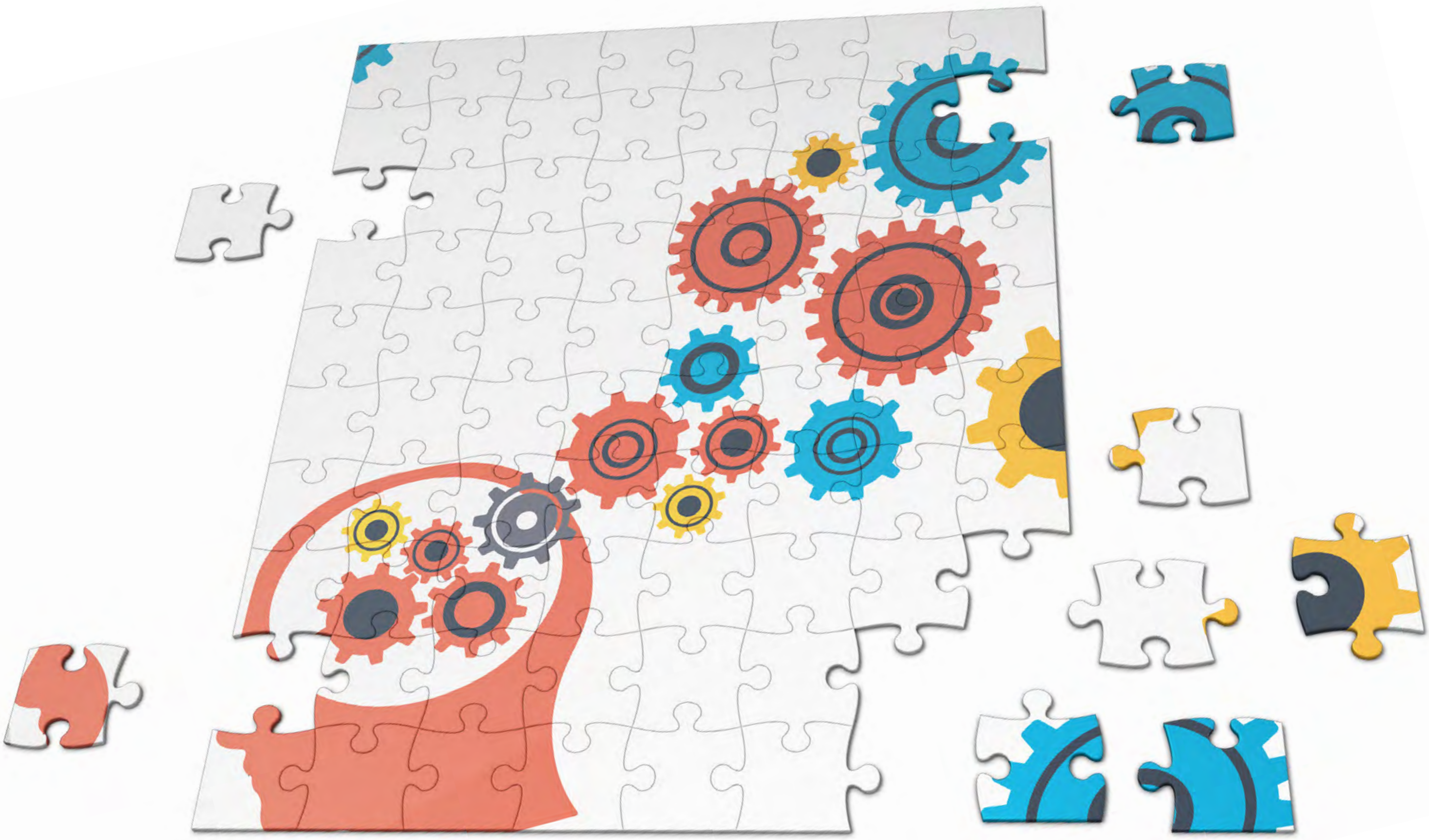
Swiss Agency for Development
and Cooperation SDC

პროფესიული
უნარების
სააგენტო

UN
DP

საქართველო, თბილისი, 2022

მათემატიკური წიგნიერება



თავი III

— ფორმალური ლოგიკის საწყისები

თანამედროვე, სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალი ინჟინრები და მეცნიერები, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკას კარგად უნდა ფლობდნენ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რომლებიც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველიცაა, რომელიც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

მათემატიკური წიგნიერება

თემატური ბლოკი: ფორმალური ლოგიკის საწყისები

1 თემა — კომპლექსური დავალება

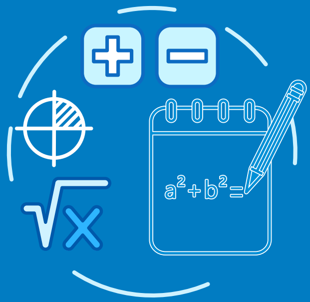
მინიშნება: *მოცემულია ორი კომპლექსური დავალება ამოსარჩევად*

ქვეთემა 1. ლოგიკის საწყისები, ლოგიკური ოპერაციები, გამონათქვამი

თემატური ბლოკი: გეომეტრიული ფიგურები და ზომები

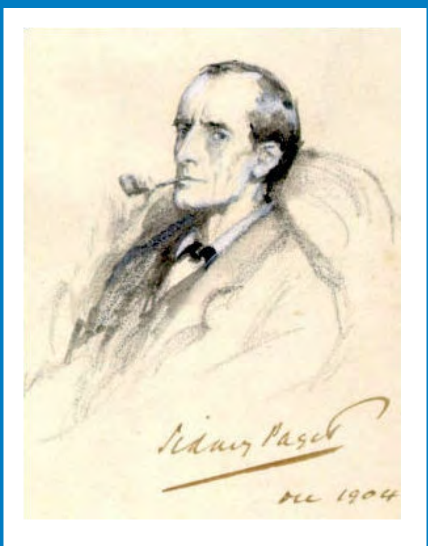
თემატური ბლოკი: ანალიზური გეომეტრია, გარდაქმნები

I. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

თქვენ, ალბათ, გსმენიათ დეტექტივ შერლოკ ჰოლმსის შესახებ, რომელზეც უამრავი ფილმი თუ სატელევიზიო სერიალია გადაღებული, წაგიკითხავთ არტურ კონან დოილის ნაწარმოები. შერლოკ ჰოლმსი გამოძიების პროცესში მოპოვებულ ფაქტებს ერთმანეთთან აკავშირებდა და საუცხოო მსჯელობის უნარით ხსნიდა საქმეს, გამოძიების პროცესში იყენებდა დედუქციურ მსჯელობას.



კომპლექსური დავალება

საკვანძო კითხვა:

- *როდესაც რაიმე დანაშაული ხდება, როგორ შეიძლება დედუქციური მსჯელობით საქმის გახსნა?*
- *რა განსხვავებაა ინდუქციურ და დედუქციურ მსჯელობებს შორის?*

თქვენი დავალება

I. **ქვემოთ მოცემულია ფაქტები, რომელთა დახმარებით გამოძიებამ უნდა გახსნას საქმე;** დავეხმაროთ ჰერლოკ შოლმსს და ლოგიკური მსჯელობის გზით დავავიწროვოთ სავარაუდო ეჭვმიტანილთა წრე ან სულაც ცალსახად გავხსნათ მკვლელობა, თუკი ეს შესაძლებელია.

ჰაზელტონების საგვარეულო სასახლეში ტრაგიკული ამბავი მოხდა – მოკლულია ლორდი ჰაზელტონი! მკვლელობის გამოსაძიებლად მოიწვიეს ცნობილი დეტექტივი ჰერლოკ ჰოლმსი. ჰერლოკ ჰოლმსმა მოწმეების გამოკითხვისა და სამხილების შეგროვების შემდეგ ასეთი ფაქტობრივი მოცემულობა მიიღო:

ფაქტი 1. ლორდი ჰაზელტონი ან თავში შანდლის ჩარტყმისგან გარდაიცვალა, ან დარიშხანით იქნა მოწამლული.

ფაქტი 2. მკვლელობისას სასადილო ოთახში ლედი ჰაზელტონი ან მოახლე სარა იმყოფებოდა.

ფაქტი 3. თუ მზარეული მკვლელობისას სამზარეულოში იყო, მაშინ ლორდი მისმა კამერდინერმა მოკლა დარიშხანის სასიკვდილო დოზით.

ფაქტი 4. თუ ლედი ჰაზელტონი მკვლელობის დროს სასადილოში იყო, მაშინ ლორდი მეეტლემ მოკლა.

ფაქტი 5. თუ მზარეული მკვლელობისას სამზარეულოში არ იყო, მაშინ ამ დროს სასადილო ოთახში სარაც არ იმყოფებოდა.

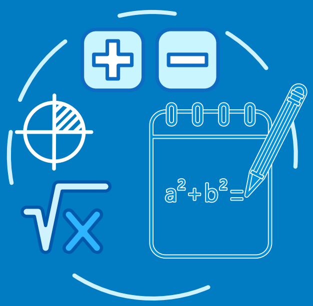
ფაქტი 6. თუ სარა მკვლელობისას სასადილო ოთახში იყო, მაშინ ლორდი ჰაზელტონი მებაღემ მოკლა.

ფაქტი 7. ექსპერტიზამ აჩვენა, რომ ლორდი ჰაზელტონი დარიშხანით არ მოწამლულა.

გაგრძელება

I. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება



თქვენი დავალება

II. შექმენით მსგავსი დავალება, ასევე შეგიძლიათ, მოიძიოთ წიგნში ან ინტერნეტით მსგავსი დავალება და წარუდგინოთ მეგობრებს

ნაშრომი წარმოადგინეთ პრეზენტაციის მეშვეობით

ნაშრომის წარდგენისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:

- რამდენად მნიშვნელოვანია ლოგიკური მსჯელობა ყოველდღიურ ცხოვრებაში?
- რა განსხვავებაა ინდუქციურ და დედუქციურ მსჯელობებს შორის?
- რამდენად მნიშვნელოვანია მსჯელობის დროს ლოგიკური კავშირების („ან“, „და“, „თუ მაშინ“, „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“) სწორად გამოყენება? რა განსხვავებაა „ან“ და „და“ კავშირებს შორის?

დამატებითი ამოცანა

XIX საუკუნეში აინშტაინმა შეადგინა ლოგიკური ამოცანა და ფიქრობდა, რომ მხოლოდ, 2%-ს თუ შეეძლო ფაქტების სწორად დალაგება და ამოხსნა, საბედნიეროდ, მოსახლეობის უფრო დიდ ნაწილს შეუძლია მისი ამოხსნა.

სცადეთ და მიიღეთ გამოწვევა აინშტაინისგან და ამოხსენით ამოცანა:

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:	ერთ ქუჩაზე დგას ხუთი სხვადასხვა ფერის სახლი. თითოეულ სახლში სხვადასხვა ეროვნების ადამიანები ცხოვრობენ. ხუთივე განსხვავებულ სასმელს სვამს, ეწევა განსხვავებულ სიგარეტს და ჰყავს სხვადასხვა ცხოველი. ▪ **კითხვა:** *რა ეროვნების ადამიანს ჰყავს თევზი?*

დამატებითი ინფორმაცია

- ბრიტანელი ცხოვრობს წითელ სახლში.
- შვედს ჰყავს ძაღლები.
- დანიელის საყვარელი სასმელია ჩაი.
- მწვანე სახლი თეთრი სახლის მარცხნივ დგას.
- მწვანე სახლის პატრონს უყვარს ყავა.
- ადამიანს, რომელიც ეწევა Pall Mall-ს, ჰყავს ფრინველები.
- ყვითელი სახლის პატრონი ეწევა Dunhill-ს.
- ადამიანს, რომელიც შუაში მდებარე სახლში ცხოვრობს, უყვარს რძე.
- ნორვეგიელი ცხოვრობს პირველ სახლში.
- ადამიანი რომელიც ეწევა blend-ს, ცხოვრობს იმ ადამიანის გვერდით, რომელსაც კატები ჰყავს.
- ადამიანი, რომელსაც ცხენები ჰყავს, ცხოვრობს იმ ადამიანის გვერდით, რომელიც ეწევა Dunhill-ს.
- ადამიანს, რომელიც ეწევა Blue Master-ს, უყვარს ლუდი.
- გერმანელი ეწევა Prince-ს.
- ნორვეგიელის სახლი ლურჯი სახლის გვერდით მდებარეობს.
- ადამიანს, რომელიც ეწევა Blend-ს, ჰყავს მეზობელი, რომელსაც უყვარს წყალი.

თავი 1. ლოგიკის საწყისები, ლოგიკური ოპერაციები, გამონათქვამი

1.1.რა არის ლოგიკა?

მსოფლიოში დღეისათვის ყველაზე უფრო გავრცელებული მიახლოებითი განსაზღვრის თანახმად, ლოგიკა წარმოადგენს მეცნიერებას სწორად აზროვნების ფორმებისა და კანონების შესახებ. ლოგიკას, როგორც მეცნიერებას, საფუძველი ჩაეყარა ძვ.წ-აღ. IV საუკუნეში ბერძენი ფილოსოფოსის არისტოტელეს ნაშრომებში. დღემდე ლოგიკის განვითარებას ოთხ ძირითად ეტაპად ყოფენ:

1. გვიანდელი ანტიკური ხანა და ადრეული შუა საუკუნეები – ამ პერიოდში ლოგიკა ქრისტიანული სულისკვეთებით გადამუშავდა და განათლების აუცილებელ კომპონენტად ითვლებოდა.
2. გვიანდელი შუა საუკუნეები (XIII-XV სს.) – ამ პერიოდში ლოგიკის მრავალი ელემენტარული კანონი აღმოაჩინეს.
3. აღორძინების ეპოქა და ახალი დრო (XVI-XVII სს) – ლოგიკის განვითარების ეს მონაკვეთი დაკავშირებულია გალილეის, დეკარტისა* და ლაიბნიცის სახელებთან.
4. XIX საუკუნიდან დღემდე – ეს არის ე.წ. სიმბოლური ლოგიკის ეპოქა, რომელსაც საფუძველი ინგლისელი მეცნიერის ჯ. ბულის* შრომებში ჩაეყარა. ამ პერიოდში ლოგიკას მათემატიკურად მიუდგნენ და იგი ჩამოყალიბდა, როგორც მათემატიკის ერთ-ერთი ნაწილი.

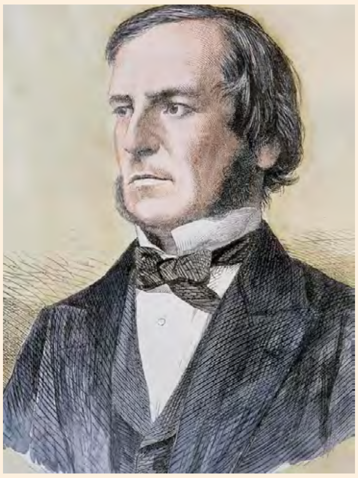
მეცნიერების ნებისმიერი დარგის ხერხემალს დასაბუთება წარმოადგენს. მწყობრი და გამართული მსჯელობის გარეშე მეცნიერება წარმოუდგენელია. შესაბამისად, ყოველი მეცნიერების საფუძვლად ლოგიკა იგულისხმება. განსაკუთრებით თვალსაჩინოა ლოგიკის კავშირი ფილოსოფიასთან, მათემატიკასთან, კომპიუტერულ მეცნიერებებსა და ენათმეცნიერებასთან. ლოგიკა მართებულ მსჯელობას, ზუსტ აზროვნებას

***რენე დეკარტი (1596-1650)**

ფრანგი ფილოსოფოსი და მეცნიერი. მისი შემოქმედება უაღრესად მრავალმხრივია. ის იყო ახალი დროის ერთ-ერთი უდიდესი ფილოსოფოსი, ანალიზური გეომეტრიის შემქმნელი, მასვე ეკუთვნის მნიშვნელოვანი შრომები მექანიკაში, ოპტიკაში, კოსმოგონიასა და ფიზიოლოგიაში. მან პირველმა შემოიტანა ცვლადი სიდიდისა და ფუნქციის ცნებები. ანალიზურ გეომეტრიაში მისი ძირითადი მიღწევაა კოორდინატთა სისტემის შემოღება. დეკარტმა მნიშვნელოვნად გააუმჯობესა მათემატიკური აღნიშვნების არსებული სისტემა.

შეისწავლის. მსჯელობისას დაშვებებიდან ნაბიჯ-ნაბიჯ მივდივართ დასკვნებამდე. თითოეული ასეთი ნაბიჯი, თუ ის სწორადაა გადადგმული, გარკვეულ კანონზომიერებას ეფუძნება. ასეთ კანონზომიერებათა აღმოჩენა, აღრიცხვა და შესწავლა არის ლოგიკის ერთ-ერთი მთავარი ამოცანა.

ლოგიკა, მეცნიერების ის დარგია, რომელიც ყოველ ჩვენგანს ყოველდღიურად სჭირდება და ხშირად იყენებს კიდეც მის კანონებს ისე, რომ შეიძლება წარმოდგენაც არ ჰქონდეს ამ კანონების არსებობაზე. მაგალითად, თითოეული ჩვენგანი ყოველდღიურად იღებს რაიმე გადაწყვეტილებას, კარგად თუ ცუდად აფასებს გარშემომყოფთა ქცევას, სადავო საკითხებში ცდილობს, გაარჩიოს მტყუანი და მართალი და ა.შ. თქვენ მიერ გამოტანილ ყოველ დასკვნას საფუძვლად უდევს რაიმე მოსაზრება და სწორედ ამ მოსაზრებათა ანალიზის ხარჯზე ხდება დასკვნის გაკეთება, ანუ ჩვენ ყოველდღიურად ვმოქმედებთ იმ ლოგიკის საფუძველზე, რომელიც გაგვაჩნია. ლოგიკა მთელი თავისი ბრწყინვალებითა და შესაძლებლობებით სწორედ ცხოვრებისეული სიტუაციების ანალიზისას ჩანს.



***ჯორჯ ბული (1815-1864)**

ინგლისელი ლოგიკოსი და მათემატიკოსი, სიმბოლური ლოგიკის ფუძემდებელი. მისი კვლევის ძირითადი სფერო იყო ლოგიკა, ალბათობის თეორია, მათემატიკური ანალიზი. შემოიღო ლოგიკური ოპერაციები, პირველმა შექმნა სიმბოლური ლოგიკის სისტემა, რომელსაც შემდგომში ლოგიკის ალგებრა უწოდა. ბულის სახელს ატარებს აბსტრაქტული ალგებრული თეორია – ბულის ალგებრა.

1.2. ინდუქციური მსჯელობა

კვლევა და მიზნები

თუ წრეწირზე დასმულ წერტილებს შევაერთებთ მონაკვეთებით, მივიღებთ წრის დაყოფას მის შემადგენელ ნაწილებად.

მაგალითად: →

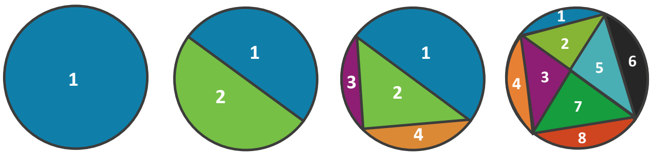
მოცემული ცხრილის დახმარებით აღმოაჩინე კანონზომიერება

მიმართების დადგენა. შენ მიერ აღმოჩენილი კანონზომიერების გამოყენებით ივარაუდე, რამდენი ფიგურა მიიღება, თუ წრეწირზე 5 წერტილს დავსვამთ? 6 წერტილს? ამის შემდეგ შეასრულე შესაბამისი ნახაზი შენი ვარაუდის შესამოწმებლად. სწორი აღმოჩნდა შენი ვარაუდი?

იმისათვის, რომ განვავრცოთ კანონზომიერება, უნდა ვიმსჯელოთ; მათემატიკაში არსებობს სხვადასხვა ტიპის მსჯელობები.

ჩვენ დავაკვირდით მოცემულ ნიმუშს, აღმოვაჩინეთ კანონზომიერება და დასკვნამდე მივედით მასზე დაყრდნობით.

ინდუქციური მსჯელობა არის მსჯელობის იმგვარი ფორმა, როდესაც დასკვნამდე მივდივართ კონკრეტულ შემთხვევებში აღმოჩენილი კანონზომიერების საფუძველზე. ინდუქციური მსჯელობის დროს კონკრეტული დასკვნა ეფუძნება წინარე შემთხვევებში აღმოჩენილ კანონზომიერებას. კონკრეტული შემთხვევების ანალიზიდან ვახდენთ განზოგადებას, **ვადგენთ მის ჭეშმარიტებას** და ასეთი წესით მივდივართ დასკვნამდე.



წერტილების რაოდენობა წრეწირზე	წრის ნაწილების რაოდენობა
1 წერტილი	1 ნაწილი
2 წერტილი	2 ნაწილი
3 წერტილი	4 ნაწილი
4 წერტილი	8 ნაწილი

? **საკვანძო კითხვა:** როგორ შეიცვლება წრის შემადგენელი ფიგურების რაოდენობა, თუ წრეწირზე დამატებით წერტილს (წერტილებს) დავსვამთ?

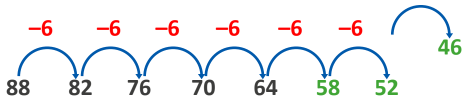
როგორ შეგიძლია გამოიყენო ინდუქციური მსჯელობა ქვემოთ მოცემულ მიმდევრობაში მომდევნო წევრის განსასაზღვრად?

ნიმუში 1

მოცემულ მიმდევრობაში 88, 82, 76, 70, 64, ... აღმოაჩინე კანონზომიერება და იპოვე შემდეგი 3 წევრი

ჩვენ ვხედავთ, მეორე წევრიდან დაწყებული, ყოველი წევრის სხვაობა წინა წევრთან გვაძლევს – 6-ს;

82 – 88 = -6;   76 – 82 = –6 შესაბამისად, ჩვენ შეგვიძლია, მოცემული კანონზომიერება განვაზოგადოთ და მასზე დაყრდნობით ვივარაუდოთ, რომ შემდეგი სამი წევრი იქნება 58, 52, 46.



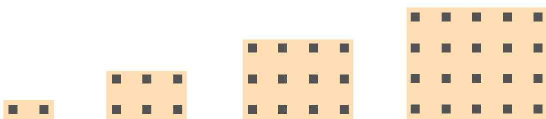
სცადე დამოუკიდებლად!

იპოვე შემდეგი მიმდევრობის მომდევნო ორი წევრი:

(ა) 800, 400, 200, 100, ...   (ბ) 18, 24, 32, 42, ...   (გ) 3, 5, 9, 15, 23

ნიმუში 2 – გამოიყენე ინდუქციური მსჯელობა ვარაუდის გასაკეთებლად.

ვარაუდი არის დაუმტკიცებელი დებულება ან წესი, რომელიც ინდუქციური მსჯელობითაა მიღებული. ქვემოთ მოცემულ დიაგრამაზე დაყრდნობით გამოთქვით ვარაუდი, რისი ტოლი იქნება ამ მიმდევრობის n-ური წევრი?

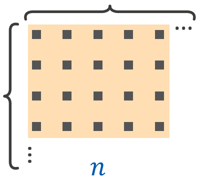


წევრის ნომერი	1	2	3	4
წერტილების რაოდენობა	2	6	12	20

სვეტების რაოდენობა ერთით აღემატება რიგით ნომერს.

სტრიქონების რაოდენობა ემთხვევა რიგით ნომერს.

განაზოგადე მოცემული კანონზომიერება და დაწერე ალგებრული გამოსახულება n-ური წევრის ფორმულის მისაღებად.

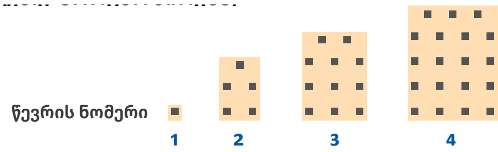


წერტილების **საერთო** რაოდენობა ტოლია სვეტების და სტრიქონების რაოდენობების ნამრავლის.

ვარაუდი: წერტილთა მიმდევრობის n-ური წევრი შეიცავს $n(n+1)$ ანუ $n^2 + n$ წერტილს.

სცადე დამოუკიდებლად!

2. ა. რამდენ წერტილს შეიცავს ქვემოთ ნახატზე მოცემული დიაგრამის მეხუთე და მეექვსე წევრები?



ვარაუდი ბ. რა ვარაუდი შეგიძლია გამოთქვა მოცემული მიმდევრობის n-ურ წევრში შემავალი წერტილების რაოდენობაზე?

ცხრილით მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე გამოთქვი ვარაუდი და გააკეთე პროგნოზირება

ნიმუში 3

მოცემული ცხრილის მიხედვით, რამდენი რეზიდენტი შეიძლება იყოს ხმის მიმცემი ქალაქის საბჭოს რიგით მე-7 არჩევნებზე?

წელი	სულ რეზიდენტები	ხმის მიმცემები
1	3511	386
2	3790	414
3	4085	451
4	4907	544
5	5562	623
6	7014	767
7	7786	?

- **კანონზომიერების ფორმულირება, ვარაუდის გამოთქმა:** მოძებნე კანონზომიერება და შეადარე $\frac{\text{ხმის მიმცემთა რაოდ.}}{\text{რეზიდენტების რაოდ.}}$ თანაფარდობის მნიშვნელობები ყოველ წელს. შემდეგ აღმოჩენილი კანონზომიერება გამოიყენე მე-7 წლის არჩევნების შესახებ ვარაუდის გამოსათქმელად.

- **ვარაუდის შემოწმება:**

$\frac{386}{3.511} \approx 0.110$ $\frac{414}{3.790} \approx 0.109$

$\frac{451}{4.085} \approx 0.110$ $\frac{544}{4.907} \approx 0.111$

$\frac{623}{5.562} \approx 0.112$ $\frac{767}{7.014} \approx 0.109$

ყოველ წელს ხმის მიმცემთა რაოდენობა არის რეზიდენტების მთელი რაოდენობის დაახლოებით 11%.

ეს კანონზომიერება გამოიყენე მე-7 წლის არჩევნების შესახებ ვარაუდის გამოსათქმელად:

$$7786 \cdot 0.11 = 856.46$$

- **ინტერპრეტირება, ანუ სავარაუდო პროგნოზირება** დაახლოებით 856 ხმის მიმცემია მოსალოდნელი საბჭოს მე-7 არჩევნებზე

სცადე დამოუკიდებლად!

ცხრილში მოცემულ ინფორმაციაზე დაყრდნობით, რამდენი წევრი იქნება ჭადრაკის კლუბში მეხუთე წელს?

წელი	1	2	3	4	5
კლუბის წევრი	10	13	17	22	?

რაღაც ინფორმაციაზე დაყრდნობით მოვძებნეთ რაღაც კანონზომიერება და გამოვთქვით ვარაუდი, მაგრამ ლოგიკურად ისმის კითხვა, როგორია ჩვენი ვარაუდი? ჩვენი ვარაუდი ჭეშმარიტია თუ მცდარი?

ნიმუში 4

საკვანძო კითხვა: გამოთქმული ვარაუდი მცდარია თუ ჭეშმარიტი? როგორ ვაჩვენოთ, რომ გამოთქმული მოსაზრება მცდარი ან ჭეშმარიტია?

განვიხილოთ მსჯელობის კონკრეტული ნიმუში:

ნიკამ მარტივი და შედგენილი რიცხვების შესწავლის დროს გამოთქვა ვარაუდი, რომ ყველა მარტივი რიცხვი კენტია. ანამ თქვა, რომ ნიკა ცდება.

იმსჯელეთ:

შენი აზრით რომელია მართალი?

ანამ საკუთარი მოსაზრების დასამტკიცებლად დაასახელა ლუწი მარტივი რიცხვი: 2

იმსჯელეთ:

ანას მოყვანილი მაგალითი საკმარისია ნიკას ვარაუდის მცდარობის საჩვენებლად? რატომ?

ცხადია, რომ ანას მიერ მოყვანილმა მაგალითმა აჩვენა, რომ ნიკას მოსაზრება იყო მცდარი, რადგან ნიკას მოსაზრება ეხებოდა ყველა მარტივ რიცხვს და მარტივმა რიცხვმა „2“ ეს მოსაზრება არ დააკმაყოფილა.

არსებობს გამოთქმული მოსაზრების დასაბუთების ან უარყოფის სხვადასხვა მეთოდები, ჩვენ განვიხილავთ მათგან რამდენიმეს.

კონტრმაგალითი არის ისეთი მაგალითი, რომელიც აჩვენებს, რომ მოცემული დებულება მცდარია.

იმსჯელეთ:

რატომ აჩვენებს კონტრმაგალითი, რომ ვარაუდი მცდარია?

კონცეპტუალური გაგება

ნიმუში 5

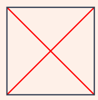
იპოვე კონტრმაგალითი იმის საჩვენებლად, რომ ვარაუდი მცდარია

ვარაუდი: მრავალკუთხედს აქვს გვერდების რაოდენობაზე ორით ნაკლები დიაგონალი.

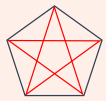
კონტრმაგალითის საპოვნელად, საჭიროა იპოვო ისეთი მრავალკუთხედი, რომლის დიაგონალების რაოდენობა არ არის ორით ნაკლები მისივე გვერდების რაოდენობაზე.

არგუმენტის აგება

თუ ვარაუდი ჭეშმარიტია, ის უნდა იყოს სწორი ნებისმიერი შემთხვევისთვის. მაგრამ თუ ერთი კონტრმაგალითი მაინც არსებობს, ე.ი. ვარაუდი მცდარია.



4 გვერდი
2 დიაგონ.



5 გვერდი
5 დიაგონალ.

შენ გჭირდება მხოლოდ ერთი კონტრმაგალითის მოყვანა, რათა ვარაუდის მცდარობა დაადასტურო. კონტრმაგალითი არსებობს, ე.ი. ვარაუდი მცდარია.

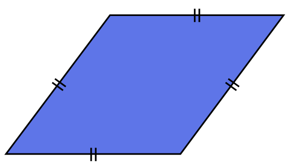
ნიმუში 6

ვარაუდის შემოწმება.

ყოველი ვარაუდის გამოთქმისას, შეამოწმე იგი კიდევ რამდენიმე მაგალითისთვის ან მოძებნე კონტრმაგალითი მის უკუსაგდებად.

ა. მრავალკუთხედი, რომელსაც ოთხივე გვერდი ტოლი აქვს, კვადრატია.

კვადრატს ოთხივე გვერდი ტოლი აქვს და ოთხივე კუთხე მართი.



მოიფიქრე: შესაძლებელია ავაგოთ მრავალკუთხედი ოთხივე ტოლი გვერდით, მაგრამ განსხვავებული ზომის კუთხეებით?

ამ რომბს ოთხივე გვერდი ტოლი აქვს, მაგრამ კუთხეები განსხვავებული ზომის

რომბი არის მოყვანილი მოსაზრების კონტრმაგალითი, ანუ მოსაზრება მცდარია. კონტრმაგალითი არსებობს, ე.ი. მოცემული ვარაუდი მცდარია.

ნიმუში 7

ბ. თუ რიცხვი 9-ის ჯერადია, მაშინ მისი ციფრთა ჯამიც 9-ის ჯერადია.

ამ ვარაუდის შესამოწმებლად მოვიყვანოთ რამდენიმე რიცხვი, რომლებიც 9-ზე იყოფა და ვიპოვოთ თითოეული მათგანის ციფრთა ჯამი.

9-ის ჯერადები	ციფრთა ჯამი
$9 \cdot 12 = 108$	$1 + 0 + 8 = 9$
$9 \cdot 313 = 2.817$	$2 + 8 + 1 + 7 = 18$
$9 \cdot 1.105 = 9.945$	$9 + 9 + 4 + 5 = 27$

ჯამები 9,18 და 27 არის 9-ის ჯერადები

ვარაუდი ჭეშმარიტია სამი სხვადასხვა შემთხვევისთვის.

გაითვალისწინე, თუ კონტრმაგალითი არსებობს ე.ი. ვარაუდი მცდარია. თუმცა ჭეშმარიტების დასადგენად კონტრმაგალითის ვერ მოძებნა საკმარისი არ არის!

ინდუქციური მსჯელობის შეჯამება:

ინდუქციური მსჯელობის დიაგრამა:

შედეგები

- კანონზომიერებებზე დაკვირვებას მივყავართ ვარაუდამდე;
- იყენებს სპეციფიკურ მაგალითებს განზოგადებისთვის;
- კონტრმაგალითზე დაყრდნობით აჩვენებს, რომ ვარაუდი მცდარია.

კანონზომიერება

$0^2 + 0 + 11 = 11$
$1^2 + 1 + 11 = 13$
$2^2 + 2 + 11 = 17$
$3^2 + 3 + 11 = 23$
$4^2 + 4 + 11 = 31$

განზოგადება

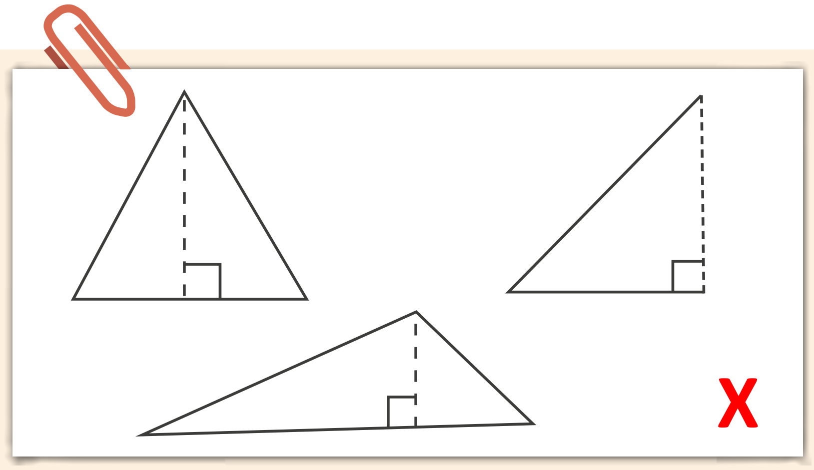
თუ მიმდევრობას იგივე წესით გავაგრძელებთ, ყოველი მომდევნო წევრი მარტივი რიცხვი იქნება

ვარაუდი

თუ n მთელი რიცხვია, მაშინ $n^2 + n + 11$ მარტივია

კონტრმაგალითი

თუ $n = 11$, $11^2 + 11 + 11 = 143$, რომელიც იყოფა 11-ზე, ე.ი. ჯამი ყოველთვის არ არის მარტივი.



როგორ გესმით?

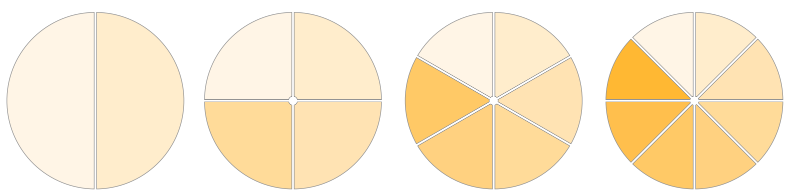
1. **მთავარი შეკითხვა:** როგორ შეიძლება ინდუქციური მსჯელობის გამოყენება მათემატიკური მიმართებების აღმოსაჩენად?
2. **შეცდომის გაანალიზება:** სტეფანემ დახატა შემდეგი დიაგრამა და შემდეგ ივარაუდა: „სიმაღლე ყოველთვის მოქცეულია სამკუთხედის შიგნით ან ემთხვევა მის ერთ-ერთ გვერდს“. რა შეცდომა დაუშვა სტეფანემ?
3. **ტერმინოლოგია:** რა სახის დებულებების მიღება შეიძლება ინდუქციური მსჯელობის შედეგად?

იცით თუ არა როგორ?

4. რა შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის შემდეგი სამი წევრი?

4,11,18,25, ...

5. რა ვარაუდის გამოთქმა შეიძლია n-ცალი განსხვავებული დიამეტრის მიერ წარმოქმნილი წრის ნაწილების რაოდენობაზე?



1 2 3 4

1.3. პირობითი გამონათქვამები

მარტივი და რთული გამონათქვამები, უარყოფა

დაფიქრდით, ჩამოაყალიბეთ და ჩაწერეთ თქვენი მოსაზრება და არგუმენტები.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ვსაუბრობთ, სხვადასხვა აზრს გადმოვცემთ წინადადებებით, წინადადებებს ვაკავშირებთ სხვადასხვა კავშირით „და“, „ან. „ მაშინ“, „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“, „ანდა“ და ა.შ. აღნიშნული კავშირებიდან გამომდინარე აზრი ან გასაგებია ან გაუგებარი, წინადადებები ან გამართულია ან გაუმართავი, მსჯელობის და დასაბუთების პროცესი ან სწორია, ან არასწორია.

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ლოგიკა წარმოადგენს მეცნიერებას სწორად აზროვნების ფორმებისა და კანონების შესახებ. მას თავისი სპეციალური მათემატიკური აპარატი გააჩნია.

მოცემულ თავში გავეცნობით ლოგიკის საწყისებს, ასევე შევიტყობთ, თუ რა ფორმებსა და კანონებზეა საუბარი.

როგორც ხედავთ, ყველა წინადადების მიმართ ვერ დავსვამთ კითხვას მცდარია იგი თუ ჭეშმარიტი.

გამონათქვამს წარმოადგენს ნებისმიერი წინადადება, რომელიც ლოგიკურად ამოხსნადია, ე.ი. ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი.

იმსჯელეთ: ამბობენ, რომ მათემატიკა, განსაკუთრებით გეომეტრია ავითარებს ლოგიკას; გიფიქრიათ რატომ? მოიყვანეთ ერთი ან ორი არგუმენტი, თუ ეთანმხებით აღნიშნულ მოსაზრებას, თუ არ ეთანხმებით, მოიყვანეთ შესაბამისი არგუმენტები.

დააკვირდით მსჯელობისას თქვენს გამოყენებულ წინადადებებს, გამოიყენეთ თუ არა მსგავსი კავშირები.

განიხილეთ მოცემული წინადადებები და ჩაწერეთ ისინი ცხრილის შესაბამის სვეტში

- მთვარე დედამიწის თანამგზავრია
- 4 ნაკლებია 9-ზე
- გიორგი, თუ შეიძლება კალამი მომაწოდე!
- ხვალ როგორი ამინდია?
- ყველა მართკუთხა სამკუთხედი ტოლფერდაა

კიდევ სცადეთ

ჭეშმარიტი	მცდარი	არც მცდარია, არც ჭეშმარიტი

ჩვენ უკვე გავავლეთ ანალოგია ქართულთან, ახლა გავავლოთ ანალოგია ალგებრასთან. ალგებრაში გვაქვს რიცხვითი გამოსახულებები, რომელთაც შეესაბამება რიცხვითი მნიშვნელობები; ლოგიკაში გვაქვს წინადადებები, რომლებიც ან მცდარია, ან ჭეშმარიტი; შესაბამისად გვაქვს ორი რიცხვი, 1 და 0; ჭეშმარიტ წინადადებას ვანიჭებთ 1-იანს, მცდარს – 0-იანს.

თხრობით წინადადებას, რომელიც ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში ცალსახად დახასიათებადია ტერმინებით „ჭეშმარიტია" ან „არ არის ჭეშმარიტი" (მცდარია), გამონათქვამი ეწოდება.

მარტივი გამონათქვამი

მარტივი წინადადება კავშირების გარეშე

რენე დეკარტი ცნობილი მათემატიკოსია

რთული გამონათქვამი

კავშირებით (ლოგიკური ოპერაციებით) შეერთებული მარტივი გამონათქვამები

კვადრატის დიაგონალები მართობულია და ტოლი

ნიმუში 1 – გავავლოთ პარალელი

ჩვენ ვთქვით, რომ ყოველი რიცხვითი გამოსახულების მნიშნელობა არის რიცხვი; ასევე, ლოგიკური გამონათქვამი არის ჭეშმარიტი ან მცდარი ე.ი შეესაბამება რიცხვი ან 1 ან 0 .

ა) მოცემულია რიცხვითი გამოსახულება $2 \cdot 4 - 5 \rightarrow 3$

ბ) ქვემოთ მოცემული წინადადებებიდან, რომელია ჭეშმარიტი, რომელი მცდარი და რომელი არ არის ლოგიკური გამონათქვამი?

1. ყველა ადამიანს აქვს დაბადების წელი (A) → **1**
2. ადამიანის სისხლი წითელი შეფერილობისაა (B) → **1**
3. როდის გაქვს დაბადების დღე? (C) → **არ არის გამონათქვამი**
4. ადამიანი მთვარეზე იბადება (D) → **0**

ზემოთ მოცემული ოთხი გამონათქვამიდან მესამე არ არის ლოგიკური გამონათქვამი, რადგან კითხვითია და მას არ გააჩნია კონკრეტული ჭეშმარიტი ან მცდარი მნიშვნელობა. დანარჩენი წინადადებები მარტივი გამონათქვამებია, რომლებსაც აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით, მაგ.: A,B,C, D. **ზემოთ მოცემული მაგალითებიდან, C არ არის ლოგიკური წინადადება, დანარჩენი წინადადებებიდან A და B ჭეშმარიტია, ხოლო D წინადადება მცდარია.**

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მარტივი გამონათქვამები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით (ასევე, ლოგიკური ცვლადების აღსანიშნავად გამოიყენება დიდი ლათინაური ასოები, რასაც მოგვიანებით გაეცნობით).

მარტივი გამონათქვამები შეიძლება ერთმანეთთან დავაკავშიროთ ლოგიკური ოპერაციებით და მივიღოთ ე.წ. რთული გამონათქვამები. მარტივი გამონათქვამების ლათინური ასოებით აღნიშვნა და ლოგიკურ ოპერაციათა ნიშნების გამოყენება საშუალებას იძლევა სქემატურად გამოვსახოთ ყოველი შედგენილი თხრობითი წინადადება.

1.3.1 ლოგიკური ოპერაციები

უარყოფა („არა“)

განვიხილოთ ერთწევრიანი ლოგიკური ოპერაცია

უარყოფა, ანუ როგორც მოკლედ ამბობენ ხოლმე „არა“. მაგალითად, ყოველდღიურ საუბარში ჩვენ ხშირად ვამბობთ, არ არის სწორი, და ვასაბუთებთ ამ პოზიციას. ანალოგიურად, მათემატიკაში ჩვენ შეგვიძლია უარყოფა „არა“ აღვნიშნოთ სიმბოლოთი. მაგალითად, თუ რაიმე წინადადება არის X, მაშინ მისი უარყოფა აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{X}$. იკითხება როგორც, X-ის უარყოფა.

ნიმუში 2 — განვიხილოთ მაგალითები

A:	$\bar{A}$:
ყველა ადამიანს აქვს დაბადების დღე	ზოგიერთ ადამიანს არ აქვს დაბადების დღე
სისხლი არის წითელი	სისხლი არ არის წითელი
ადამიანი იბადება მთვარეზე	ადამიანი მთვარეზე არ იბადება

ცხადია, რომ ჭეშმარიტი გამონათქვამების უარყოფები მცდარია. მცდარია, რომ ზოგიერთ ადამიანს არ აქვს დაბადების დღე, ან სისხლი არ არის წითელი; მაგრამ ბოლო გამონათქვამის უარყოფა არის ჭეშმარიტი (სწორი); ადამიანი მთვარეზე არ იბადება. გავიხსენოთ რომ A და B გამონათქვამების მნიშვნელობა იყო ჭეშმარიტი (შემოკლებით „ჭ“), ხოლო C-სი მცდარი (შემოკლებით „მ“).

ჭეშმარიტ გამონათქვამებს გვერდით ვუწერთ ასობგერას „ჭ“, ხოლო მცდარს „მ“

ზოგიერთ ადამიანს არ აქვს დაბადების დღე (მ)

სისხლი არ არის წითელი. (მ)

ადამიანი მთვარეზე არ იბადება (ჭ)

ნიმუში 3 – განვიხილოთ წინადადებები

A: ხვალ ქართულში მივიღებ 10 ქულას;

როგორ ფიქრობ? რომელია A გამონათქვამის უარყოფა?

B: ხვალ მხოლოდ ქიმიაში მივიღებ 10 ქულას;
C: ხვალ ქართულში მივიღებ 9 ქულას;
D: ქართულში ზეგ მივიღებ 10 ქულას;
E: ხვალ ქართულში 10 ქულას არ მივიღებ.

გაგრძელება

დაფიქრდი:

თუ A – ჭეშმარიტია	B – მცდარია
	C – მცდარია
	D – მცდარია ან ჭეშმარიტი
	E – მცდარია

თუ A – მცდარია	B – მცდარია ან ჭეშმარიტი
	C – მცდარია ან ჭეშმარიტი
	D – მცდარია ან ჭეშმარიტი
	E – ჭეშმარიტი

როგორც ხედავთ, მხოლოდ A და E გამონათქვამებია ისეთი, რომ როცა ერთი ჭეშმარიტია, მეორე აუცილებლად მცდარია. სწორედ ასეთი გამონათქვამებია ერთმანეთის საწინააღმდეგო გამონათქვამები.

ე.ი. A: ხვალ ქართულში მივიღებ 10 ქულას;

$\overline{A}$: ხვალ ქართულში 10 ქულას არ მივიღებ;

თხრობით წინადადებას, რომელიც ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში ცალსახად ხასიათდება ტერმინებით „ჭეშმარიტია“ ან „არ არის ჭეშმარიტი“ (მცდარია), გამონათქვამი ეწოდება.

თუ წინადადება ჭეშმარიტია, მისი უარყოფა მცდარია და პირიქით, ყოველივე ზემოთ თქმულის საფუძველზე შეიძლება შევადგინოთ ე.წ. ჭეშმარიტებათა ცხრილი უარყოფის ოპერაციისთვის:

A	$\overline{A}$
ჭ	მ
მ	ჭ

ცხრილის დახმარებით ადვილად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ უარყოფის ოპერაციის მოქმედების წესი: გამონათქვამი $\overline{A}$ არის ჭეშმარიტი, როცა A მცდარია და არის მცდარი როცა A ჭეშმარიტია.

განვიხილოთ გამონათქვამი:

A: სისხლი წითელი ფერისაა; მისი უარყოფა B = $\overline{A}$: სისხლი არ არის წითელი

ახლა განვიხილოთ $\overline{B}$: არ არის სწორი, რომ სისხლი არ არის წითელი.

გააკეთეთ დასკვნა ე.წ. ჭეშმარიტებათა ცხრილზე დაკვირვებით

A	B = $\overline{A}$	$\overline{B}$
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	მ

გააკეთეთ დასკვნა ე.წ. ჭეშმარიტებათა ცხრილზე დაკვირვებით

A გამონათქვამის უარყოფის უარყოფას იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც A გამონათქვამს.

მოცემული გამონათქვამის საწინააღმდეგო (უარყოფის) გამონათქვამის ჩაწერაში დაგეხმარებათ ცხრილი.

A	$\overline{A}$
არის	არ არის
არ არის	არის
არსებობს	არ არსებობს
ყველა	ზოგიერთი
ზოგიერთი	არცერთი
არცერთი	ზოგიერთი

ნიმუში: A: ყველა სპორტსმენი ძლიერია

$\overline{A}$: ზოგიერთი სპორტსმენი არ არის ძლიერი

ლოგიკური გამრავლება (კონიუნქცია)

უარყოფისაგან განსხვავებით ლოგიკური გამრავლება, ანუ კონიუნქცია ორწევრიან ოპერაციას წარმოადგენს, ე.ი. იმისათვის, რომ ამ ოპერაციით ვისარგებლოთ, საჭიროა გვქონდეს ორი გამონათქვამი მაინც (A და B), რომლებიც ერთ წინადადებაში „და“ კავშირით არიან შეერთებული. მაგ: მზე ათბობს დედამიწას და მთვარე არ ათბობს მიწას.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები და ჩავწეროთ ბოლო ლოგიკური გამონათქვამი.

A: მზე ათბობს დედამიწას

B: მთვარე არ ათბობს მიწას.

შემოღებული აღნიშვნებისა და კონიუნქციის ნიშნის გამოყენებით მოყვანილი წინადადება შემდეგნაირად ჩაიწერება: A∧B (იკითხება: „როგორც A, ისე B“. ხოლო შემოკლებით: A და B). A ∧ B გამონათქვამს ეწოდება A და B გამონათქვამების კონიუნქცია.

გამოვიყენოთ კიდევ რამდენიმე გამონათქვამი და მათი დახმარებით შევადგინოთ კონიუნქციის ჭეშმარიტებათა ცხრილი.

C: ყველა ძაღლი ორფეხაა.

D: ვეფხვი შინაური ფრინველია.

არცერთ თქვენგანს ეჭვი არ ეპარება, რომ A და B გამონათქვამები ჭეშმარიტია, ხოლო C და D გამონათქვამები – მცდარი. კონიუნქციების საშუალებით შევადგინოთ რამდენიმე ახალი გამონათქვამი:

A ∧ B: მზე ათბობს დედამიწას და მთვარე არ ათბობს მიწას.
A ∧ C: მზე ათბობს დედამიწას და ყველა ძაღლი ორფეხაა.

ამ ორი გამონათქვამიდან პირველი ჭეშმარიტია, ხოლო მეორე – მცდარი. წინადადებები ისეა შედგენილი, რომ ყველა ჩვენგანისათვის ცხადია შედგენილი გამონათქვამების მცდარობა და ჭეშმარიტება.

ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მცდარია შემდეგი გამონათქვამებიც:

C ∧ A: ვეფხვი შინაური ფრინველია და მზე ათბობს დედამიწას.
C ∧ D: ყველა ძაღლი ორფეხაა და ვეფხვი შინაური ფრინველია.

როგორც მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, კონიუნქცია ჭეშმარიტია იმ შემთხვევაში, როცა ორივე გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ყველა სხვა შემთხვევაში კონიუნქციის მნიშვნელობა მცდარია. ამრიგად,

კონიუნქციისათვის ჭეშმარიტებათა ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

X	Y	X ∧ Y
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ
მ	მ	მ

არსებობს მარტივი ხერხი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ორი (X და Y) გამონათქვამი კონიუნქციის მნიშვნელობა. თუ X გამონათქვამის მნიშვნელობა არის მცდარი, აღვნიშნოთ იგი 0-ით, ხოლო თუ ჭეშმარიტია 1-ით. ანალოგიურად მოვიქცეთ Y გამონათქვამის მიმართაც X ∧ Y მნიშვნელობის საპოვნელად მოვახდინოთ ჩვეულებრივი გამრავლება. მაგ:

A ∧ B = 1 × 1 = 1 და მაშასადამე, A ∧ B ჭეშმარიტია, C ∧ B = 1 × 0 = 0 და აქედან გამომდინარე, C ∧ B მცდარია. სწორედ ასეთი წესის არსებობის გამო უწოდებენ კონიუნქციას ლოგიკურ გამრავლებას. ამ აღნიშვნებში ზემოთმოყვანილი ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

		Y	
	X ∧ Y	1	0
X	1	1	0
	0	0	0

ლოგიკური შეკრება (დიზიუნქცია)

ახლა განვიხილოთ ლოგიკური შეკრება, ანუ დიზიუნქცია. ამ შემთხვევაში ორი გამონათქვამი (A და B) ერთ წინადადებაში „ან" კავშირით არიან შეერთებული. მაგ: მზე ათბობს დედამიწას, ან მთვარე არ ათბობს მიწას. ანალოგიურად შემოვიღოთ აღნიშვნები:

A: მზე ათბობს დედამიწას

B: მთვარე არ ათბობს მიწას.

შემოღებული აღნიშვნებისა და დიზიუნქციის ნიშნის გამოყენებით მოყვანილი წინადადება შემდეგნაირად ჩაიწერება: A ∨ B (იკითხება: „შეიძლება A, ან შეიძლება B". ხოლო შემოკლებით: A ან B. ე.ი. A ∨ B გამონათქვამს ეწოდება A და B გამონათქვამების **დიზიუნქცია**.

ისევ განვიხილოთ კონიუნქციის დროს გამოყენებული გამონათქვამები და მათი დახმარებით შევადგინოთ გამონათქვამთა დიზიუნქციის მნიშვნელობის ჭეშმარიტებათა ცხრილი.

მაგ. A: მზე ათბობს დედამიწას

B: მთვარე არ ათბობს მიწას.

C: ყველა ძაღლი ორფეხაა.

D: ვეფხვი შინაური ფრინველია.

ცხადია, რომ A ან B გამონათქვამები ჭეშმარიტია, ხოლო C ან D გამონათქვამები – მცდარი. დიზიუნქციის საშუალებით შევადგინოთ რამდენიმე ახალი გამონათქვამი:

A V B: მზე ათბობს დედამიწას, ან მთვარე არ ათბობს მიწას.

A V C: მზე ათბობს დედამიწას, ან ყველა ძაღლი ორფეხაა.

D V B: ვეფხვი შინაური ფრინველია, ან მთვარე არ ათბობს მიწას.

პირველ გამონათქვამში ორივე შემადგენელი გამონათქვამი ჭეშმარიტია, ამიტომ ცხადია, რომ ჭეშმარიტია. დანარჩენ ორ გამონათქვამში ერთ-ერთი გამონათქვამი არის ჭეშმარიტი, ამიტომ „ან“ კავშირის გამო ეს გამონათქვამებიც იქნება ჭეშმარიტი. მაშასადამე, დიზიუნქციის შემთხვევაში, თუ ერთი გამონათქვამი მაინც არის ჭეშმარიტი, მაშინ მთლიანი გამონათქვამიც იქნება ჭეშმარიტი.

ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მცდარია შემდეგი გამონათქვამიც:

CVD: ყველა ძაღლი ორფეხაა, ან ვეფხვი შინაური ფრინველია.

ამრიგად, ჭეშმარიტებათა ცხრილს დიზიუნქციისათვის აქვს შემდეგი სახე:

X	Y	XVY
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ

ცხადია, თუ გამოვიყენებთ რიცხვებს 1 და 0, მაშინ A V D = 1 + 0 = 1 და მაშასადამე, A V D ჭეშმარიტია, C V D = 0 + 0 = 0 და აქედან გამომდინარე C V D მცდარია. სწორედ ასეთი წესის არსებობის გამო უწოდებენ დიზიუნქციას ლოგიკურ შეკრებას. ამ აღნიშვნებში ზემოთმოყვანილი ცხრილი მიიღებს შემდეგ სახეს:

X	Y	XVY
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.4. პირობის შემცველი წინადადებები

პირობის შემცველი წინადადებები

ლოგიკური მსჯელობის, დასაბუთების და დამტკიცებების დროს ვიყენებთ პირობის შემცველ წინადადებებს, რომლებიც შედგება ორი ნაწილისაგან.

ჰიპოთეზა	ჰიპოთეზა იწყება **„თუ წინადადებით“**
დასკვნა	დასკვნა გრძელდება **„მაშინ წინადადებით“,** ან იგულისხმება კავშირი „მაშინ“.

„თუ-მაშინ“ გამონათქვამები მოიცავენ მიზეზს და შედეგს.

პირობითი „თუ-მაშინ“ გამონათქვამი არის წინადადება, რომელიც შეიცავს ჰიპოთეზას, რომელიც მოცემულია მის პირველ ნაწილში და მოსდევს კავშირ „**თუ**“-ს, დასკვნას, რომელიც მოცემულია მის მეორე ნაწილში და მოსდევს კავშირ „**მაშინ**“-ს.

„თუ-მაშინ“ წესით დაკავშირებული წინადადებები ხშირად გვხვდება ლიტერატურასა თუ ყოველდღიურ საუბრებში. განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პროგრამირებაში, ალგორითმის კომპიუტერისთვის სწორად ჩაწერის დროს.

„თუ გსურს ღირსეულს მიაყენო ჩრდილი, მაშინ უღირსის ქებას უნდა მიჰყო ხელი."

კონსტანტინე გამსახურდია

„თუ მუდამ სიმართლეს ამბობთ, მაშინ აღარ მოგიწევთ რაიმეს დამახსოვრება“.

მარკ ტვენი

ნიმუში 1 – ჩავწეროთ წინადადება, „თუ – მაშინ“ წესით.

წყალი დუღს **100°**

თუ წყალს გავაცხელებთ **100°**-ზე, მაშინ ის ადუღდება

თუ	მაშინ
თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო (A)	მაშინ დღეს პარასკევია (B)
თუ დღეს პარასკევია (B)	**მაშინ ხვალ შაბათია (C)**
მაშასადამე, ტრანზიტულობის თვისებით„თუ A, მაშინ C“.	თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო, ხვალ შაბათია.

„თუ-მაშინ" წინადადება შეიძლება ჩავწეროთ მათემატიკური აღნიშვნებით. ჩვენ ვიცით, რომ ლოგიკური წინადადება შეიძლება აღვნიშნოთ დიდი ლათინური ასო-ბგერით. ჰიპოთეზის წინადადება აღვნიშნოთ სიმბოლოთი ***A***, ხოლო დასკვნის წინადადება აღვნიშნოთ სიმბოლოთი ***B***. „თუ – მაშინ" წინადადება ნიშნავს, რომ რაღაც პროცესს მოჰყვება გარკვეული შედეგი, ანუ რაღაც პროცესი იწვევს შედეგს, ამას მოკლედ, მათემატიკურად ვწერთ შემდეგნაირად ***A* → *B***, რაც ნიშნავს **„თუ *A*, მაშინ *B*"**, სადაც ***A*** წარმოადგენს ჰიპოთეზას, ხოლო ***B*** დასკვნას.

ნიმუში 2 – განვიხილოთ „თუ – მაშინ" წინადადებები

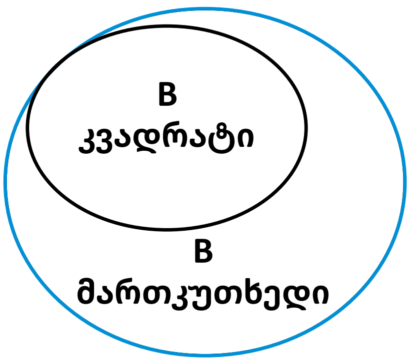
საილუსტრაციოდ, იხილეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი:

ჰიპოთეზა A	**გამომდინარეობის ნიშანი →**	**დასკვნა B**
ჰიპოთეზა, ვარაუდი იწყება **„თუ წინადადებით"**	⇨ → ისარი ნიშნავს, „გამომდინარეობს"	დასკვნა გრძელდება **„მაშინ წინადადებით"**, ან იგულისხმება კავშირი „მაშინ".
თუ წყალს გავაცხელებთ 100°-ზე	ე.ი, რაღაც პროცესი იწვევს სხვა პროცესს და ვადგენთ მიზეზ-შედეგობრივ კავშირს	**მაშინ ის ადუღდება**
თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო	→	მაშინ დღეს პარასკევია
თუ დღეს პარასკევია	→	მაშინ ხვალ შაბათი იქნება
აღნიშნულს ეწოდება ტრანზიტულობის თვისება; ტრანზიტულობის თვისებით „თუ A, მაშინ C".		

ხშირად, ლოგიკაში, საილუსტრაციოდ გამოიყენება ვენის დიაგრამები.

დიაგრამაზე ვხედავთ, რომ შემდეგი წინადადება ჭეშმარიტია: „**თუ კვადრატია, მაშინ მართკუთხედია**".

ამ ტიპის წინადადებას, რომელიც იყენებს კონსტრუქციას „თუ ... მაშინ" ეწოდება **პირობითი** წინადადება (დებულება). ასეთი წინადადება გულისხმობს, რომ თუ პირველი ნაწილი ჭეშმარიტია, მაშინ მეორე ნაწილიც ჭეშმარიტია.



B ⇨ A

ნიმუში 3

განვიხილოთ „თუ – მაშინ“ წინადადებები და ავაგოთ არგუმენტები.

თითოეული მაგალითისათვის განვსაზღვროთ, არის თუ არა დასკვნა ჭეშმარიტი მოცემული ჰიპოთეზიდან გამომდინარე. თუ რომელიმე სწორია, მაშინ მოიყვანეთ მაგალითი, რომ განამტკიცოთ აღნიშნული, თუ არასწორია – მაშინ დაასაბუთეთ

ვარაუდი (მიზეზი) A	→	დასკვნა (შედეგი) B
თუ x და y მთელი რიცხვებია	→	მაშინ მათი სხვაობა $x-y$ ასევე მთელი რიცხვია.
თუ წყალს გავაცხელებთ	→	მაშინ ის ადუღდება
თუ სამკუთხედის კუთხე მართია	→	მაშინ ის მართკუთხა სამკუთხედია
თუ შენი საყვარელი ფერია ლურჯი	→	მაშინ შენ კარგად წერა შეგიძლია

პირველი სამი ნიმუშისთვის დავწერთ, რომ ***A* გამონათქვამიდან გამომდინარეობს *B* გამონათქვამი.**

ბოლო წინადადებაში არ არის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი; ადამიანს კარგად წერა შეუძლია თუ არა, არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ფერი მოსწონს მას.

ბ. მოიფიქრე და დაწერე რამდენიმე „თუ-მაშინ“ გამონათქვამი შენ თვითონ. ორი მათგანი იყოს ისეთი, რომელიც ყოველთვის ჭეშმარიტია, ხოლო ორი მათგანი ისეთი, რომელიც არაა აუცილებლად ჭეშმარიტი.

ნიმუში 4

მოცემული წინადადება გადაწერე პირობითი გამონათქვამის ფორმით:

„ხმის მიცემა შეუძლია არანაკლებ 18 წლის ადამიანს“.

ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი და მოვახდინოთ პერიფრაზირება, დავწეროთ პირობითი გამონათქვამის ფორმით, დავადგინოთ, რომელია მიზეზი და რომელი შედეგი.

დასკვნა გვაჩვენებს შედეგს

წინამძღვარი გვაძლევს წინაპირობას

ხმის მიცემა შეუძლია არანაკლებ 18 წლის ადამიანს.

პირობითი ფორმა: თუ 18 წლის ხარ, მაშინ შეგიძლია ხმის მიცემა.

ნიმუში 1

იპოვე პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა.

გამონათქვამს აქვს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა, ანუ გამონათქვამი შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ან მცდარი; ჭეშმარიტს აღვნიშნავთ ასობგერით „ჭ“ ან სიმბოლოთი „1“, ხოლო მცდარს აღვნიშნავთ ასობგერით „მ“ ან სიმბოლოთი „0“. **ჭეშმარიტობის ცხრილი** აერთიანებს ორი ან მეტი გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო კომბინაციას.

საწყის გამონათქვამს (ვარაუდს, ჰიპოთეზას), წინამძღვარი ეწოდება.

მცდარი ჰიპოთეზის მქონე პირობით გამონათქვამს, მიუხედავად დასკვნისა, აქვს ყოველთვის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა.

წანამძღვარი A	**დასკვნა** B	**პირობითი გამონათქვამი** A → B
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ

ჭეშმარიტი ჰიპოთეზის და მცდარი დასკვნის მქონე პირობით გამონათქვამს აქვს მცდარი მნიშვნელობა.

1. თუ საწყისი გამონათქვამი ჭეშმარიტია და დასკვნაც ჭეშმარიტია, ე.ი. მთლიანი პირობითი გამონათქვამი(წინადადება) ჭეშმარიტია;
2. თუ საწყისი გამონათქვამი ჭეშმარიტია და დასკვნა მცდარი, ე.ი. მთლიანი პირობითი გამონათქვამი(წინადადება) მცდარია;
3. თუ საწყისი გამონათქვამი მცდარია და დასკვნა ჭეშმარიტი, ე.ი. პირობითი მთლიანი გამონათქვამი(წინადადება) ჭეშმარიტია;
4. თუ საწყისი გამონათქვამი მცდარია და დასკვნაც მცდარია, ე.ი პირობითი მთლიანი გამონათქვამი (წინადადება)ჭეშმარიტია.

მითითება:

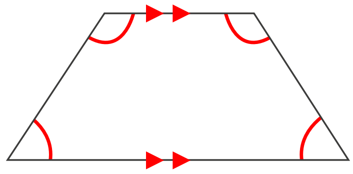
მეოთხე დასკვნა ყოველთვის იწვევს გაურკვევლობას სტუდენტებში (**ყურადღება მიაქციეთ ერთ გარემოებას: თუ ვარაუდი არასწორია და დასკვნაც არასწორია, ე.ი. არასწორი მიზეზიდან გაკეთდა არასწორი დასკვნა).**

- ***როგორ შეგიძლია დაადგინო თითოეული პირობითი გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა?***

ა. თუ რიცხვი ლუწია, მაშინ ის იყოფა 2-ზე.	ლუწი რიცხვი, მისი განმარტებიდან გამომდინარე, ყოველთვის იყოფა 2-ზე. ე.ი. რადგან ჰიპოთეზა სწორია, ამიტომ დასკვნა ყოველთვის სწორია. ეს პირობითი გამონათქვამი ჭეშმარიტია.
ბ. თუ ოთხკუთხედს გააჩნია ტოლ კუთხეთა ორი წყვილი, მაშინ ის პარალელოგრამია.	დავუშვათ, მოცემული ჰიპოთეზა, „ოთხკუთხედი, რომელსაც აქვს ტოლ კუთხეთა ორი წყვილი“, სწორია. იმის გადასაწყვეტად, თუ რომელი დასკვნაა სწორი, უნდა განვსაზღვროთ, ასეთი ოთხკუთხედი მართლა იქნება თუ არა პარალელოგრამი.

ბ. თუ ოთხკუთხედს გააჩნია ტოლ კუთხეთა ორი წყვილი, მაშინ ის პარალელოგრამია.

ტოლფერდა ტრაპეციას ორ-ორი კუთხე ტოლი აქვს, მაგრამ პარალელოგრამი არაა. ე.ი. დასკვნა მცდარია.



ამ მაგალითში წანამძღვარი სწორია, ხოლო დასკვნა მცდარი. ე.ი. გამონათქვამი მცდარია

ლოგიკის გამოყენება პროგრამირებაში

კომპიუტერული პროგრამირება დიდ ყურადღებას უთმობს ლოგიკას. ძალიან ხშირია „თუ/მაშინ“ პირობითი წინადადებების გამოყენება კომპიუტერული კოდის დაწერისას. ქვემოთ მოცემულია მარტივი პროგრამის კოდის მაგალითი. უპასუხეთ ქვემოთ მოცემულ კითხვებს კოდზე დაკვირვებით (ვინც ვერ ერკვევა პროგრამირებაში: ეს მოკლე პროგრამა ითხოვს 2 A და B მნიშვნელობის შეყვანას. შემდეგ პროგრამა ითვლის (A^2–B)-ის მნიშვნელობას. თუ მისი მნიშვნელობა არის 0-ზე მეტი, გამოჩნდება "true" თუ არა, გამოჩნდება "false".)

Input A

Input B

If A² – B > 0

Then display {"True"}

Else display {"False"}

ა) რას გამოიტანს პროგრამა ეკრანზე, თუ შევიყვანთ მნიშვნელობებს A = 9 და B = 50 ?

ბ) რას გამოიტანს პროგრამა ეკრანზე, თუ შევიყვანთ მნიშვნელობებს A = 5 და B = 25 ?

განვიხილოთ პირობითობასთან დაკავშირებული სხვადასხვა გამონათქვამები

შებრუნებული წინადადებები (დებულებები)

კიდევ ერთი ტერმინი, რომელიც გამოიყენება მათემატიკასა და ლოგიკაში, არის შებრუნებული წინადადება. **შებრუნებული არის წინადადება,** რომელიც მიიღება ჰიპოთეზის და დასკვნის გადანაცვლებით.

მაგალითად, წინადადება: **თუ** მანქანა არის მუსტანგი, **მაშინ** ის არის ფორდიც.

წინადადება შებრუნებულია: **თუ** მანქანა არის ფორდი, **მაშინ** ის არის მუსტანგიც.

მოცემულ მაგალითში, პირველი წინადადება ყოველთვის მართალია. თუმცა, შებრუნებული წინადადება არაა სამართლიანი, არსებობს მანქანების მრავალი მოდელი, რომელიც არის ფორდი, მაგრამ არ არის მუსტანგი.

ზოგადად, პირობითი წინადადების შებრუნებული წინადადება შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ან მცდარი. მოცემულ მაგალითში შებრუნებული წინადადება მცდარია.

განვიხილოთ ცხრილი, სადაც მოცემულია სხვადასხვა პირობითი გამონათქვამი

განმარტება	აღნიშვნა	აღნიშვნა სიტყვებით
პირობით გამონათქვამს აქვს წანამძღვარი (იგივე ჰიპოთეზა) და დასკვნა.	$A \rightarrow B$	თუ A, მაშინ B.
პირობითი გამონათქვამის შებრუნებულ გამონათქვამში წანამძღვარი და დასკვნა ცვლიან ადგილებს.	$B \rightarrow A$	თუ B, მაშინ A.
გამონათქვამის უარყოფას აქვს მოცემული გამონათქვამის საწინააღმდეგო მნიშვნელობა.	$\overline{A}$	არა A.
პირობითი გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამი მიიღება მისი წანამძღვარისა და დასკვნის მათივე საწინააღმდეგო მნიშვნელობებით ჩანაცვლებისას.	$\overline{A} \rightarrow \overline{B}$	თუ არა A, მაშინ არა B.
მოცემული პირობითი გამონათქვამის კონტრაპოზიციური გამონათქვამი მიიღება მისი წანამძღვარის და დასკვნის უარყოფით და ადგილების გაცვლით.	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$	თუ არა B, მაშინ არა A.

მინიშნება:
სხვადასხვა ლიტერატურაში უარყოფის აღნიშვნა აღინიშნება სხვადასხვანაირად;
$\overline{A}$ ან $\neg A$;

ნიმუში 2

დაწერე და დაადგინე პირობითი გამონათქვამის საწინააღმდეგო გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა.

„თუ შენ საყვირზე უკრავ, მაშინ შენ უკრავ ჩასაბერ (სასულე) ინსტრუმენტზე“.

A: შენ უკრავ საყვირზე.

B: შენ უკრავ სასულე ინსტრუმენტზე.

თუ შენ უკრავ ჩასაბერ ინსტრუმენტზე, მაშინ შენ უკრავ საყვირზე

თუ შენ უკრავ ჩასაბერ ინსტრუმენტზე, მაშინ ეს ჩასაბერი ინსტრუმენტი შეიძლება იყოს არა აუცილებლად საყვირი. ე.ი. ეს შებრუნებული პირობითი გამონათქვამი **მცდარია.**

სცადე დამოუკიდებლად!

დაწერე და განსაზღვრე პირობითი გამონათქვამის შებრუნებული გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა.

ა. თუ მრავალკუთხედი ოთხკუთხედია, მაშინ მას 4 გვერდი აქვს;

ბ. ორი კუთხე მოსაზღვრეა, მაშინ მათი ჯამი 90^0-ია.

ნიმუში 3

დაწერე და განსაზღვრე პირობითი გამონათქვამის საწინააღმდეგო და კონტრაპოზიციური გამონათქვამების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები.

თუ ორი მთელი რიცხვიდან ორივე ლუწია, მაშინ მათი ჯამიც ლუწია.

A: ორივე მთელი რიცხვი ლუწია

B: ამ რიცხვების ჯამი ლუწია

¬A: ორივე მთელი რიცხვი არაა ლუწი

¬B: ამ რიცხვების ჯამი არაა ლუწი

საწინააღმდეგო: $\neg A \rightarrow \neg B$ თუ ორივე მთელი რიცხვი არაა ლუწი, მაშინ მათი ჯამიც არაა ლუწი.

ეს საწინააღმდეგო გამონათქვამი მცდარია, რადგან 3 + 5 = 8 მაგალითში არც ერთი რიცხვი არაა ლუწი, მაგრამ ჯამი მაინც ლუწია.

კონტრაპოზიციური: $\neg B \rightarrow \neg A$ თუ ორი მთელი რიცხვის ჯამი არაა ლუწი, მაშინ ორივე მათგანი არაა ლუწი.

ეს კონტრაპოზიციური გამონათქვამი სწორია, რადგან არ არსებობს კონტრმაგალითი:

1 + 6 = 7; 2 + 5 = 7; 3 + 4 = 7.

ეკვივალენტური გამონათქვამები (იგივე ეკვივალენტურობა)

ორ გამონათქვამზე ვამბობთ რომ ეკვივალენტურია, თუ ჭეშმარიტია ერთდროულად $A \to B$ და $B \to A$. მათი კომბინაცია იწერება ასე: $A \leftrightarrow B$ (იკითხება A მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ B) ეკვივალენცია მაშინ არის ჭეშმარიტი, როცა A და B გამონათქვამებს აქვთ ერთნაირი ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები:

ჭ = ჭეშმარიტი

მ = მცდარი

წანამძღვარი	დასკვნა	$A \to B$	$B \to A$	პირობითი გამონათქვამი $A \leftrightarrow B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	მ
მ	მ	ჭ	ჭ	ჭ

- *როგორ დავადგინოთ ორი გამონათქვამის ექვივალენტურობა? ამაში დაგვეხმარება ჭეშმარიტებათა ცხრილი*

მაგალითი: აჩვენეთ, რომ $\overline{(A \to B)} \leftrightarrow A \wedge \overline{B}$. ჭეშმარიტებათა ცხრილით ამაში ადვილად დარწმუნდებით

ნიმუში 4

იპოვე ეკვივალენტურ წინადადებაში მოცემული პირობითი გამონათქვამი. რომელი ორი პირობითი გამონათქვამი გამომდინარეობს მოცემული ეკვივალენციიდან?

„სამკუთხედი ტოლგვერდაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი სამივე გვერდი ტოლია“.

A: სამკუთხედი ტოლგვერდაა;

B: სამკუთხედს ყველა გვერდი ტოლი აქვს;

ამის შემდეგ დაწერე ორი პირობითი გამონათქვამი:

$A \to B$: თუ სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მაშინ მისი ყველა გვერდი ტოლია;

$B \to A$: თუ სამკუთხედის ყველა გვერდი ტოლია, მაშინ ის ტოლგვერდაა.

სცადე დამოუკიდებლად!

რომელი ორი პირობითი გამონათქვამი გამომდინარეობს შემდეგი ეკვივალენციიდან?

„ორი რიცხვის ნამრავლი უარყოფითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ საპირისპირო ნიშნები აქვთ“.

შეჯამება:

გამონათქვამი	პირობითი	შებრუნებული	საწინააღ-მდეგო	კონტრაპოზი-ციური	ეკვივალენცია
სიმბოლო	$p \to q$	$q \to p$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$	$q \leftrightarrow p$
სიტყვებით	თუ p, მაშინ q.	თუ q, მაშინ p.	თუ არა p, მა-შინ არა q.	თუ არა q, მა-შინ არა p.	p მაშინ და მხოლოდ მა-შინ როცა q.

ტრანზიტულობის თვისება

განვიხილოთ ტრანზიტულობის თვისება და ვისწავლოთ, როგორ ვრცელდება ის პირობით წინადადებებზე.

მოცემულია: „თუ A მაშინ B“ და „თუ B მაშინ C“.

ტრანზიტულობის თვისების გამოყენებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ „თუ A, მაშინ C“.

ნიმუში 5

მაგალითად:

„თუ გუშინ იყო ხუთშაბათი, მაშინ დღეს არის პარასკევი“ და „თუ დღეს პარასკევია, მაშინ ხვალ არის შაბათი“.

ამ ორი წინადადებიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ „თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო, ხვალ შაბათია“.

თუ	მაშინ
თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო (A)	მაშინ დღეს პარასკევია (B)
თუ დღეს პარასკევია (B)	მაშინ ხვალ შაბათია (C)
მაშასადამე ტრანზი-ტულობის თვისებით „თუ A მაშინ C“.	თუ გუშინ ხუთშაბათი იყო, ხვალ შაბათია.

სავარჯიშოები

1. როგორი წინადადებების ჩასაწერად ვიყენებთ სიმბოლოებს „A“, „B“ და „⇨“?

2. რომელი ორი სიტყვა უნდა გამოვიყენოთ წინადადებაში,რომ იგი წარმოვადგინოთ პირობითი წინადადების ფორმით?

3. გამოიყენეთ შემდეგი წინადადება: „ყველა ადამიანი, ვინც ცხოვრობს ნიუ იორკში, ცხოვრობს შეერთებულ შტატებშიც.

- გადაწერეთ ეს წინადადება პირობითი წინადადების ფორმით;
- რომელია ჰიპოთეზა (წანამძღვარი) და რომელი დასკვნა?
- ააგეთ შესაბამისი ვენის დიაგრამა;
- გადაწერეთ პირობითი წინადადება ასოების და სიმბოლოების გამოყენებით. (A, B და ⇒)

4. გამოიყენეთ ქვემოთ მოცემული დებულებები და თითოეული წინადადება:

- დაწერეთ, რომელია ჰიპოთეზა (წანამძღვარი) და რომელი დასკვნა?
- ააგეთ შესაბამისი ვენის დიაგრამა;
- გადაწერეთ პირობითი წინადადება სიმბოლოების გამოყენებით. (A, B და ⇒)
- ჩამოაყალიბე მოცემული პირობითი წინადადების შებრუნებული წინადადება და იმსჯელეთ თითოეული წინადადების ჭეშმარიტობაზე

ა) „თუ ძაღლები ყეფენ, მაშინ მათი პატრონები ნერვიულობენ“;
ბ) თუ ოთხფეხა შინაური ცხოველი არის ნაგაზი, მაშინ ის ძაღლია;
გ) თუ ცხოველი მტაცებელია, მაშინ ის ოთხფეხია;
დ) თუ ცხოველი ძაღლია, მაშინ ის ოთხფეხია;
ე) თუ მტრედია, მაშინ ფრინველია;
ვ) თუ ფრინველია, მაშინ დაფრინავს (მოიყვანეთ შებრუნებული წინადადება და კონტრმაგალითი, თუ დებულება ან მისი საწინააღმდეგო დებულება არ არის ჭეშმარიტი);
ზ) თუ ფრინველია, მაშინ მტაცებელი არ იქნება.

5. ჩამოწერეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობითი წინადადებების შებრუნებული წინადადებები და შემდეგ დაადგინეთ, ჭეშმარიტია თუ მცდარი.

ა) თუ თბილისში თოვს, მაშინ ბათუმშიც თოვს;
ბ) თუ ორი კუთხე მოსაზღვრეა, მაშინ მათი ჯამი არის 180 გრადუსი;
გ) თუ სამკუთხედს აქვს 2 თანაბარი სიგრძის გვერდი, მაშინ ის არის ტოლფერდა სამკუთხედი;
დ) თუ მრავალკუთხედი ოთხკუთხედია, მაშინ მას 4 გვერდი აქვს;
ე) თუ ფიგურა კვადრატია, მაშინ ის პარალელოგრამია;
ვ) თუ ფიგურა სამკუთხედია, მაშინ ის მრავალკუთხედია;
ზ) თუ ფიგურა არის წრე, მაშინ ის ბრტყელი ფიგურაა;
თ) თუ ფიგურა არის პარალელოგრამი, მაშინ ის მართკუთხედია;
ი) თუ შენ საყვირზე უკრავ, მაშინ შენ უკრავ ჩასაბერ ინსტრუმენტზე;
კ) თუ სამკუთხედს ყველა გვერდი ტოლი აქვს, მაშინ ის ტოლგვერდაა.

6. რა სახის დასკვნის გაკეთება შეიძლება შემდეგი ინფორმაციით?

„თუ ქეთის სურს ამერიკაში გამგზავრება, მაშინ მან უნდა აიღოს პასპორტი“

- ქეთი ამჟამად ნიუ იორკშია.

7. გადაანაწილეთ ქვემოთ მოცემული 3 წინადადება ლოგიკური ჯაჭვის შესაქმნელად.

A: თუ ცივა, შეიძლება მოთოვოს.

B: თუ ზამთარია, მაშინ ცივა.

C: თუ დღეები მოკლეა, მაშინ ზამთარია.

8. შეავსეთ ჭეშმარიტების ცხრილი

A	B	$A \to B$	$A \vee B$	$\bar{A} \vee B$	$A \vee \bar{B}$
ჭ	ჭ				
მ	ჭ				
ჭ	მ				
მ	მ				

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge B$	$A \wedge \bar{B}$
ჭ	ჭ				
მ	ჭ				
ჭ	მ				
მ	მ				

დავუშვათ A და B შეესაბამება შემდეგ გამონათქვამებს.

კიდევ სცადეთ

A = ყველა პარალელოგრამი ოთხკუთხედია

B = ყველა კვადრატი მართკუთხედია

ცხრილიდან გამომდინარე წაიკითხეთ თითოეული წინადადება და შეამოწმეთ მართებულობა.

1.5. დედუქციური მსჯელობა

კრიტიკული კითხვა და ახსნა

60 ბანქოსგან შემდგარი დასტა დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად, თითოეულ ნაწილზე დახატულია სამკუთხედები, წრეები, კვადრატები და ხუთკუთხედები და გადანომრილია 1-დან 15-ის ჩათვლით.

მასწავლებელი ირჩევს ხუთ ბანქოს და მათგან აჩვენებს მხოლოდ ოთხს. ისეუბნება მოსწავლეებს, რომ ოთხივე ნაჩვენებ ბანქოზე ერთნაირი ფიგურებია გამოსახული. ამის მიხედვით რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება მახუთე ბანქოზე?

ლევანი ასკვნის: „მეხუთე ბანქოზე აწერია 11“.

მარიამი ასკვნის: „მეხუთე ბანქოზე ახატია წრე“.

ა. აღწერე, როგორ შეიძლებოდა თითოეული მოსწავლე მისულიყო ამ დასკვნამდე? არის მათი დასკვნები სწორი?

ბ. სხვა რა შესაძლებლობები არსებობს მეხუთე ბანქოსთვის? რა პირობა შეიძლება დაამატოს მასწავლებელმა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის შესამცირებლად?

ნიმუში 5

განსაზღვრე არის თუ არა გამონათქვამი ჭეშმარიტი?

მოცემულია, პირობითი გამონათქვამი და ვიცით, რომ დასკვნა არის ჭეშმარიტი; შეგვიძლია დავადგინოთ „ჰიპოთეზა“ იყო თუ არა ჭეშმარიტი?

დედუქციური მსჯელობა არის ისეთი მსჯელობის პროცესი, რომელიც ლოგიკური დასკვნის გამოსატანად იყენებს წინასწარ მოცემულ ფაქტებს. დასკვნა მართებულია, თუ ის ლოგიკურად გამომდინარეობს წინაპირობიდან, ჭეშმარიტად მიჩნეულ დებულებიდან.

დედუქციური მსჯელობა არის ისეთი მსჯელობის პროცესი, რომელიც ლოგიკური დასკვნის გამოსატანად იყენებს წინასწარ მოცემულ ფაქტებს.

ყველა ადამიანი მოკვდავია	ჰიპოთეზა
სოკრატე კაცია	ფაქტი
სოკრატე მოკვდავია	დედუქციური მსჯელობის შედეგი

განვიხილოთ მართებულობის ცხრილი

ე.ი. როცა გვაქვს $A \to B$ და B ჭეშმარიტია, მაშინ A შეიძლება იყოს მცდარიც და ჭეშმარიტიც. ზუსტად შეუძლებელია იმის განსაზღვრა, არის თუ არა წანამძღვარი ჭეშმარიტი.

წანამძღვარი A	დასკვნა B	პირობითი გამონათქვამი $A \to B$
ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ

როდესაც პირობითი გამონათქვამი $A \to B$ ჭეშმარიტია, და დასკვნაც არის ჭეშმარიტი, „ჰიპოთეზა“ შეიძლება იყოს ჭეშმარიტი ან მცდარი, რომელსაც ვერ დავადგენთ.

სცადე დამოუკიდებლად!

- *ცნობილია, რომ პირობითი გამონათქვამი და მისი წანამძღვარი ჭეშმარიტია. შეგიძლია თუ არა დაასკვნა, რომ დასკვნა ჭეშმარიტია?*

განმარტება – ობიექტურობის კანონი **(law of detachment)**: თუ პირობითი გამონათქვამი და მისი ჰიპოთეზა (წანამძღვარი) სწორია, მაშინ **დასკვნაც** სწორია.

ნიმუში 6

შეამოწმე ობიექტურობის კანონი შესაბამისი ლოგიკური დასკვნების საშუალებით.

დავუშვათ, რომ მოცემულ ინფორმაციათა თითოეული ერთობლიობა სწორია.

ა. თუ ტესტში ანა დააგროვებს 85 ქულას ან მეტს, მაშინ ის დაიმსახურებს შეფასებას (A). ანამ 89 ქულა აიღო ტესტში. რა დასკვნის გამოტანა შეგიძლია აქედან?

შემოვიტანოთ ლოგიკური წინადადებების აღნიშვნები: p: ანა ტესტში აგროვებს 85 ან მეტ ქულას. q: ის დაიმსახურებს შეფასებას (A).

ობიექტურობის კანონის შესამოწმებლად საჭიროა, დავადგინოთ $p \to q$ და p გამონათქვამების ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები.

$p \to q$: თუ ტესტში ანა დააგროვებს 85 ან მეტ ქულას, მაშინ ის საბოლოო შეფასებად დაიმსახურებს (A)-ს. (ეს პირობითი გამონათქვამი სწორია)

p: ანა ტესტში აგროვებს 85 ან მეტ ქულას.

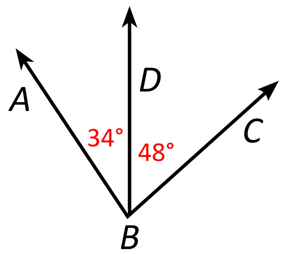
(ეს წანამძღვარი სწორია, რადგან ანამ დააგროვა 89 ქულა და 89 > 85)

ე.ი. შესრულებულია ობიექტურობის კანონის პირობები, ამიტომაც დასკვნა q სწორია.

შეგიძლია დაასკვნა, რომ ანას საბოლოო შეფასება იქნება (A).

ნიმუში 7

თუ *D* წერტილი ∠*ABC* კუთხის შიგნითაა, მაშინ ∠*ABC* = ∠*ABD* + ∠*DBC*. რა შეგიძლია ლოგიკურად დაასკვნა ∠*ABC*-ს შესახებ?



განსაზღვრე $p \rightarrow q$ და p-ს ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები:

$p \rightarrow q$: თუ D წერტილი ∠*ABC* კუთხის შიგნითაა, მაშინ ∠*ABC* = ∠*ABD* + ∠*DBC*.

(ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია არაგადამფარავ კუთხეთა მიმატების აქსიომის თანახმად)

p: *D* წერტილი ∠*ABC* კუთხის შიგა წერტილია.

(ეს წანამძღვარი ჭეშმარიტია)

ე.ი. ობიექტურობის კანონის ძალით, შეგიძლია დაასკვნა, რომ q დასკვნა ჭეშმარიტია.

∠*ABC* = ∠*ABD* + ∠*DBC*. ე.ი. ∠*ABC* = $34^0 + 48^0 = 82^0$.

სცადე დამოუკიდებლად!

დავუშვათ, რომ მოცემული ინფორმაცია სწორია.

„თუ შეჯიბრს 30 წუთზე მალე დაასრულებ, მაშინ პრიზს მოიგებ“. შეჯიბრი დაასრულე 26 წუთში. რა შეგიძლია დაასკვნა ლოგიკურად?

მათემატიკის მოყვარულთათვის *

დედუქციური მსჯელობის ერთ-ერთი მეთოდი არის სილოგიზმის მეთოდი: როდესაც გვაქვს ორი წინა პირობა, 1) ძირითადი ანუ ზოგადი; 2) უმნიშვნელო ანუ მცირე პირობა და ძირითადი პირობის გათვალისწინებით, უმნიშვნელო პირობის შესახებ ვაკეთებთ დასკვნას.

სილოგიზმის მაგალითია: თუ, მხოლოდ ძუძუმწოვრები იკვებებიან რძით და კენგურუ ძუძუმწოვარია, მაშინ კენგურუ იკვებება რძით.

ნიმუში 8 — მათემატიკის მოყვარულთათვის

თუ D წერტილი $\angle ABC$ კუთხის შიგნითაა, მაშინ $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$. რა შეგიძლია ლოგიკურად დაასკვნა $\angle ABC$-ს შესახებ?

$q \to r$: „თუ კოტე უკრავს ჩასაბერ ინსტრუმენტზე, მაშინ იგი არის მარშის ბენდის წევრი“.

როგორც ვხედავთ, ნამდვილად, პირველი გამონათქვამის დასკვნა და მეორე გამონათქვამის წანამძღვარი ერთნაირია.

დასკვნა: $p \to r$: „თუ კოტე უკრავს საყვირზე, მაშინ იგი არის მარშის ბენდის წევრი”.

ბ) თუ A,B და C წერტილები ერთ წრფეზე ძევს და B წერტილი A და B წერტილებს შორისაა, მაშინ ($\overrightarrow{BA}$) და ($\overrightarrow{BC}$) ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართულია. თუ ($\overrightarrow{BA}$) და ($\overrightarrow{BC}$) ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართულია, მაშინ $AB + BC = AC$. რა შეგიძლია დაასკვნა?

სილოგიზმის კანონის გამოსაყენებლად, განსაზღვრე, არის თუ არა ერთი გამონათქვამის დასკვნა მეორესთვის წანამძღვარი.

$p \to q$: თუ A,B და C წერტილები ერთ წრფეზე ძევს და B წერტილი A და B წერტილებს შორისაა, მაშინ ($\overrightarrow{BA}$) და ($\overrightarrow{BC}$) ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართულია.

$q \to r$: თუ ($\overrightarrow{BA}$) და ($\overrightarrow{BC}$) ვექტორები საწინააღმდეგოდ მიმართულია, მაშინ $AB + BC = AC$.

როგორც ვხედავთ, ნამდვილად, პირველი გამონათქვამის დასკვნა და მეორე გამონათქვამის წანამძღვარი ერთნაირია.

დასკვნა: $p \to r$ – თუ A,B და C წერტილები ერთ წრფეზე ძევს და B წერტილი A და B წერტილებს შორისაა, მაშინ $AB + BC = AC$.

სცადე დამოუკიდებლად!

დავუშვათ, რომ მოცემულ ინფორმაციათა თითოეული ერთობლიობა სწორია. გამოიყენე სილოგიზმის კანონი დასკვნის გამოსატანად.

ა. თუ მთელი რიცხვი იყოფა 6-ზე, მაშინ ის იყოფა 2-ზე. თუ მთელი რიცხვი იყოფა 2-ზე, მაშინ იგი ლუწია.

ბ. თუ არდადეგებია, მაშინ შენ არ ხარ სკოლაში წასასვლელი. თუ სამუშაო დღეა, მაშინ არდადეგებია.

ნიმუში 8

მათემატიკის მოყვარულებისთვის. შეამოწმე ობიექტურობის და სილოგიზმის კანონები დასკვნის გამოსატანად.

რა დასკვნის გამოტანა შეგიძლია მოცემული გამონათქვამებიდან?

„თუ შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა, მაშინ შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე. თუ შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე, მაშინ შენ იმყოფები მთა ევერესტზე. შენ მიცოცავ მთაზე 29000 ფუტის სიმაღლეზე ზღვის დონიდან“.

დაადგინე, რომლებია პირობითი ამონათქვამები და გამოიყენე ლოგიკის კანონები დასკვნის გამოსატანად.

$p \to q$: თუ შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა, მაშინ შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე.

(ეს პირობითი გამონათქვამი სწორია)

p: შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა.

(p ჭეშმარიტია, რადგან $29000 > 285000$)

ე.ი. ობიექტურობის კანონის თანახმად q ჭეშმარიტია.

დასკვნა: შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე.

გამოიყენე სილოგიზმის კანონი

$p \to q$: თუ შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა, მაშინ შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე.

(ეს პირობითი გამონათქვამი სწორია)

$q \to r$: თუ შენ ხარ დედამიწაზე ყველაზე მაღალ მთაზე, მაშინ შენ იმყოფები მთა ევერესტზე.

(ეს პირობითი გამონათქვამი სწორია)

სილოგიზმის კანონის თანახმად $q \to r$ ჭეშმარიტია:

„თუ შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა, მაშინ შენ იმყოფები მთა ევერესტზე“.

გამოიყენე სილოგიზმის და ობიექტურობის კანონები

$q \to r$: „თუ შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა, მაშინ შენ იმყოფები მთა ევერესტზე“.

(ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია

p: შენ მიცოცავ მთაზე ზღვის დონიდან 28500 ფუტზე ან უფრო მაღლა.

(p ჭეშმარიტია, რადგან $29000 > 285000$)

ობიექტურობის კანონის ძალით დასკვნა r ჭეშმარიტია: „შენ იმყოფები მთა ევერესტზე“.

1.6. დამტკიცება

მსჯელობა გეომეტრიაში

გეომეტრია მოიცავს ცნებებს, განმარტებებს, აქსიომებს, თეორემებს. დავიწყოთ საბაზისო სიტყვებით.

გეომეტრიაში განსაზღვრების მეშვეობით განიმარტება ობიექტები.

მათემატიკაში აქსიომა, იგივე პოსტულატი, არის დებულება, რომელიც დამტკიცების გარეშე მიიჩნევა ჭეშმარიტად. მიუხედავად ამისა, აქსიომები შეიძლება იყოს ლოგიკური და პირდაპირ მოცემული. ლოგიკური აქსიომები ჩამოყალიბებულია ლოგიკაზე დაფუძნებით და ხშირად მოცემული სიმბოლოების მეშვეობით.

ძველმა ბერძენმა მათემატიკოსმა ევკლიდემ, რომელსაც გეომეტრიის მამად მიიჩნევენ, ჩამოაყალიბა რამდენიმე აქსიომა. აქედან ერთ-ერთია შემდეგი:

აქსიომა: თუ ორი სიდიდე ცალ-ცალკე მესამე სიდიდის ტოლია, მაშინ ისინიც ტოლია.

ეს აქსიომა შეიძლება ეხებოდეს როგორც რიცხვებს, ასევე გეომეტრიულ ფიგურებს და ის ლოგიკური ხასიათისაა.

თეორემა

თეორემა არის დებულება, რომელიც საჭიროებს დამტკიცებას, რათა მივიჩნიოთ ჭეშმარიტად.

იმისათვის, რომ თეორემა მივიჩნიოთ ჭეშმარიტად უნდა დამტკიცდეს აქსიომებითა და სხვა თეორემების საშუალებით.

საინტერესოა თუ **როგორ მტკიცდება თეორემა.** რამდენი მტკიცე ფაქტია საჭირო იმისათვის, რომ მართებულად მივიჩნიოთ? განვიხილოთ პროცესი, თუ როგორ ხდება თეორემის დამტკიცება.

დამტკიცება

დამტკიცებას ვუწოდებთ წინადადებების თანამიმდევრობით აგებულ ისეთ მსჯელობას, რომელშიც ყოველი შემდეგი წინადადება ლოგიკურად გამომდინარეობს წინა წინადადებებიდან. დამტკიცება ჯაჭვითაა – მისი შემდეგი რგოლები წინა რგოლებს ებმის. დამტკიცებაში საწყისი დებულებებიდან – დაშვებებიდან – ნაბიჯ-ნაბიჯ მივდივართ საბოლოო დებულებამდე – დასკვნამდე. დამტკიცების ამ ელემენტებისთვის

*ევკლიდე (ძვ.წ 287)

მაგალითად: ვიცით, რომ $1 + 4 = 5$ და $2 + 3 = 5$ ჩვენთვის ცხადია, რომ $2 + 3 = 1 + 4$

არითმეტიკიდან ვიცით, მარტივი აქსიომა, რომელსაც ლოგიკური დასაბუთება არ სჭირდება, მაგალითად:

$$a + b = b + a$$

ლოგიკა მთელი თავისი ბრწყინვალებითა და შესაძლებლობებით სწორედ ცხოვრებისეული სიტუაციების ანალიზისას ჩანს.

მალე საგანგებო ტერმინებს შემოვიღებთ, თუმცა მანამდე ორიოდე სიტყვა ვთქვათ საერთოდ ტერმინოლოგიური აპარატისა და ენის მკაცრი წესების საჭიროების შესახებ.

- ***როგორ გავიგოთ დებულება ჭეშმარიტია თუ მცდარი?***

ლოგიკური მსჯელობის, დასაბუთების და დამტკიცებების დროს ვიყენებთ პირობის შემცველ წინადადებებს, რომლებიც შედგება ორი ნაწილისაგან.

დამტკიცება არის არგუმენტი იმისა, რომ რაღაც მართალია. მათემატიკაში ჩვენ ვიყენებთ მოცემულ ინფორმაციას, აქსიომებს და შემდეგ ლოგიკის გამოყენებით მივდივართ დასკვნამდე.

მათემატიკაში არსებობს **დამტკიცების** სხვადასხვა ხერხები. მაგალითად, არსებობს **ფორმალური დამტკიცება,** სადაც დასამტკიცებლად საჭირო თითოეული საფეხური იყენებს აქსიომას ან უკვე არსებულ დასაბუთებულ მოსაზრებას, როგორც არგუმენტს, ისეთი დასკვნის გამოსატანად, რომელიც მათემატიკურად გამართლებული იქნება.

განვიხილოთ დამტკიცების მარტივი მაგალითი.

ჩვენ უკვე მრავალჯერ განვიხილეთ როგორ ვიყენებთ ტოლობის თვისებებს განტოლების ამოხსნის დროს. დაამტკიცეთ, რომ მოცემულ განტოლებაში $4x + 5 = 21$, $x = 4$. დამტკიცების პროცესის ორგანიზებისთვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ ორსვეტიანი ცხრილი.

დამტკიცების დროს იყენებენ ორსვეტიან დიაგრამებს, სადაც პირველ სვეტში მოცემულია გამონათქვამები, მეორე სვეტში კი დასაბუთებები.

ზემოთ მოყვანილია არგუმენტები, რატომ არის $4x + 5 = 21$ განტოლების ამონახსნი 4-ის ტოლი.

დამტკიცების პროცესი იყოფა საფეხურებად და თითოეულ საფეხურზე ვასახელებთ კონკრეტულ მიზეზს, თუ რატომ არის ჩვენ მიერ შესრულებული მათემატიკური მოქმედება ჭეშმარიტი. დამტკიცება პროცესის დასასრულია.

ზემოთმოცემული მაგალითი, არის ფორმალური დამტკიცების ტიპური ფორმატი.

გეომეტრიაში რაიმე დებულების დამტკიცება ნამდვილი გამოწვევაა, იმიტომ, რომ იგი გვაიძულებს უფრო საფუძვლიანად გავიაზროთ თითოეული ნაბიჯი. ზემოთ განხილული ფორმალური დამტკიცების მაგალითი მარტივი ალგებრითაა შესრულებული, თუმცა გეომეტრიისთვის ყველა ეს ბიჯი რაღაც ახალი მოსაზრებაა.

ამ თავში მოცემულ პოსტულატებს ხშირად გამოვიყენებთ დამტკიცებებისას.

დამტკიცება

ერთ-ერთი რასაც მათემატიკა ეფუძნება არის დედუქციური მსჯელობა. რაც ნიშნავს, რომ ახალი დებულება – თეორია დაფუძნებულია აქსიომაზე, უკვე ჭეშმარიტად მიჩნეულ დებულებაზე ან წინა დამტკიცებულ თეორემებზე.

დამტკიცება, როგორც პროცესი, არსებული ცოდნისა და არგუმენტების თანმიმდევრულად და ლოგიკურად წარმოდგენაა ისე, რომ ადამიანი დაარწმუნოს არსებული თეორემის ჭეშმარიტებაში. დამტკიცების პროცესს **ლოგიკური მსჯელობა** ეწოდება.

მათემატიკაში სასამართლოსგან განსხვავებით, საფუძვლიანი ვარაუდი მიუღებელია, ყოველი ნაბიჯი უნდა იყოს დასაბუთებული და განმტკიცებული წინა თეორემით ან აქსიომით.

გამონათქვამი/ ვარაუდი	**დასაბუთება**
$4x + 5 = 21$	მოცემულობა
$4x = 16$	ჩვენ შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ ერთი და იგივე რიცხვი
$x = 4$	ჩვენ შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ 0-ის არატოლ ერთი და იმავე რიცხვზე.

მაგალითი 1: არაპირდაპირი დამტკიცება

არაპირდაპირი დამტკიცება, ბუნებრივია, ნაკლებ ფორმალურია, ვიდრე ფორმალური დამტკიცება. არაფორმალური დამტკიცება უბრალოდ უფრო მარტივად გვაძლევს უდავო მტკიცებულებას, რომ ჩვენი ვარაუდი მართებულია, ფორმალურად ნაბიჯ-ნაბიჯ მტკიცების გარეშე.

მაგალითად, გამოიყენეთ არაპირდაპირი მეთოდი და დაამტკიცეთ, რომ „თუ ნებისმიერ რიცხვს გავამრავლებთ 2-ზე და დავამატებთ 1-ს, მივიღებთ კენტ რიცხვს“ (სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ: დაამტკიცეთ, რომ $2n+1$ კენტია, n ნებისმიერი დადებითი მთელი რიცხვია“).

დავიწყოთ იქედან, რომ n ნებისმიერი მთელი რიცხვია. როცა ამ რიცხვს 2-ზე გავამრავლებთ მივიღებთ ლუწ რიცხვს, (აქ ჩვენ ვჩერდებით და ვეკითხებით საკუთარ თავს, „რატომ“?)

ლუწი რიცხვი არის რიცხვი, რომელიც ორზე იყოფა. ასე რომ ნებისმიერი რიცხვი რომელიც შეიძლება დაიწეროს როგორც $2n$, არის 2-ის ჯერადი, ე.ი. ლუწი.

რადგან ჩვენ გააზრებულად ვიცით უკვე, რომ ლუწი და კენტი რიცხვები ერთმანეთის მონაცვლეობით დგანან, ე.ი. ადვილად შევამჩნევთ, რომ თუ ნებისმიერ რიცხვს გავამრავლებთ 2-ზე და დავამატებთ 1-ს, მივიღებთ კენტ რიცხვს“.

თუ ჩვენ გვინდა კიდევ უფრო გავაძლიეროთ ჩვენი არგუმენტი, გავაგრძელოთ მტკიცება. ორზე გაყოფით შევამოწმებთ ლუწია რიცხვი თუ არა. თუ მიღებულ რიცხვს 2-ზე გავყოფთ, მივიღებთ არამთელ რიცხვს.

მაშასადამე $2n + 1$ მნიშვნელობა უნდა იყოს კენტი, რადგან იგი არ იყოფა ორზე უნაშთოდ.

გეომეტრიული მტკიცებულების წერისას ვიყენებთ დედუქციურ მსჯელობას ლოგიკური ნაბიჯების ჯაჭვის შესაქმნელად; დიაგრამაზე მოცემულია ის ნაბიჯები, რომლებიც საჭიროა ვარაუდის გამოთქმიდან, ჰიპოთეზიდან – დასკვნის გაკეთებამდე, ჰიპოთეზის დამტკიცებამდე

ჰიპოტეზა →
- განმარტებები
- აქსიომები
- თვისებები
- თეორემები

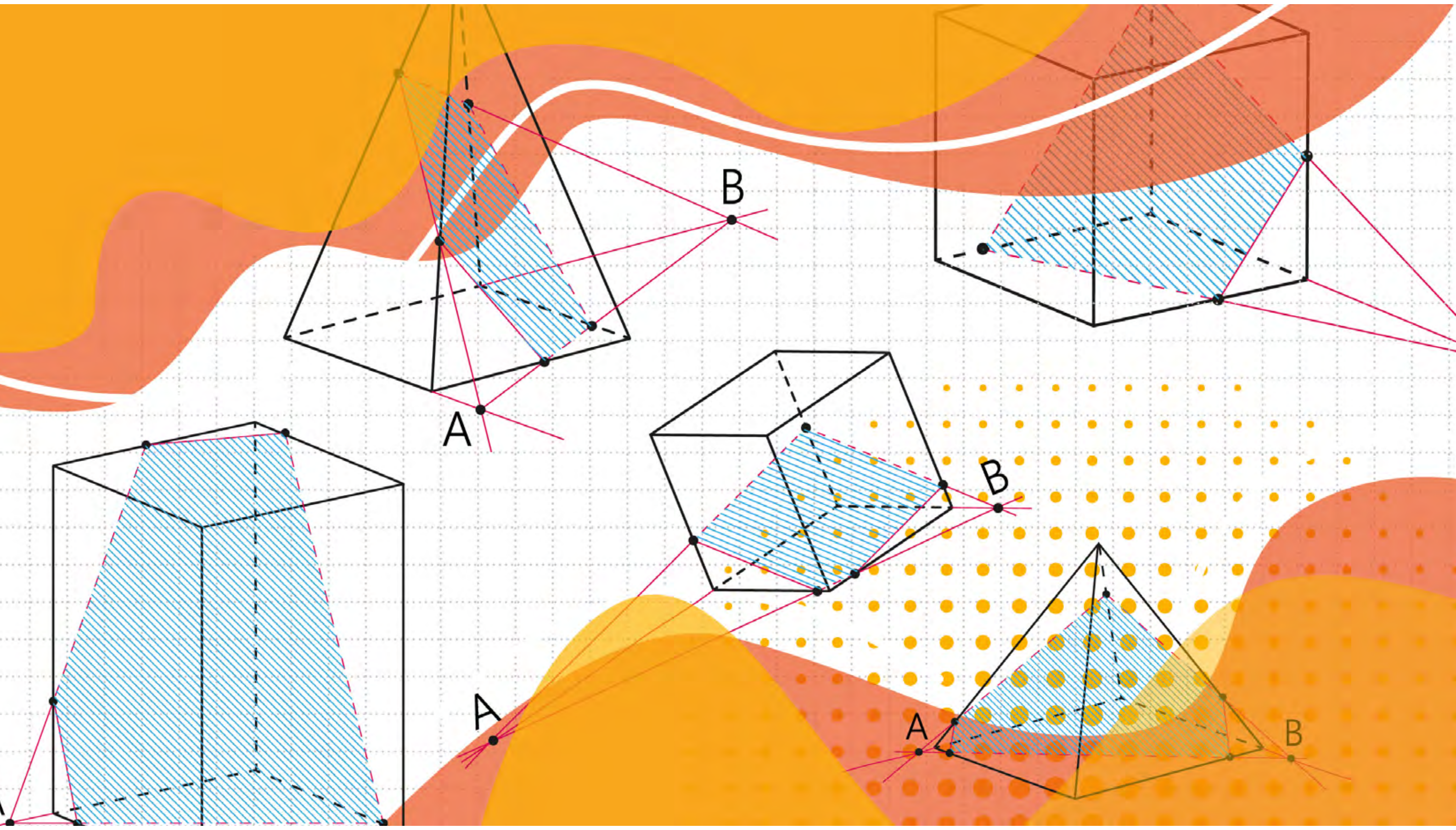
← **დასკვნა**

▶ შემდეგ თავში გაეცნობით დამტკიცებებს გეომეტრიაში.

ეს არის არაპირდაპირი (არაფორმალური) დამტკიცების მაგალითი. და იგი ზუსტად როგორც ჟღერს, არაფორმალურია. ეს არ არის სრულყოფილი მათემატიკური არგუმენტი, უფრო მეტად საერთო წარმოდგენაში გვიმტკიცებს რაღაცის სიზუსტეს. უნდა აღინიშნოს, რომ ასეთ დამტკიცებებში უფრო მეტი სივრცეა კრეატიულობისათვის. მათემატიკური ამოცანის მსგავსად აქ შეიძლება იყოს არაერთი გზა სწორ დასკვნამდე, ასე რომ, შესაძლებელია აქ ვიყოთ მათემატიკურად უფრო შემოქმედებითები.

ალგებრის ან გეომეტრიის კურსიდან მოიყვანეთ მაგალითები, რომელთა დამტკიცებაც შეგიძლიათ.

მათემატიკური წიგნიერება



თავი IV

გეომეტრია და ზომები

თანამედროვე, სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალი ინჟინრები და მეცნიერები, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკას კარგად უნდა ფლობდნენ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რომლებიც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველიცაა, რომელიც პრობლემასა და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

კომპლექსური დავალება

საინფორმაციო საშუალებების მეშვეობით, ალბათ, გსმენიათ პენტაგონის შესახებ.

ამერიკაში თავდაცვის სამინისტროს პენტაგონი ჰქვია. შენობას **ხუთკუთხედის** ფორმა აქვს. ხუთკუთხედს ბერძნულად ეწოდება **პენტაგონი**, აქედან გამომდინარეა თავდაცვის სამინისტროს სახელწოდებაც.

თანამედროვეობის ერთ-ერთი უდიდესი არქიტექტორი ზაჰა ჰადიდი მუდმივად იყენებდა გეომეტრიულ ფიგურებს არქიტექტურასა და დიზაინში. მან სხვა სიმაღლეზე აიყვანა არქიტექტურა. ზაჰა დაპროექტების დროს იყენებდა სხვადასხვა ზომის ისეთ კუთხეებს, რასაც ადრე არ იყენებდნენ.

„რატომ გამოვიყენო ერთი და იგივე კუთხე, როდესაც არსებობს 360°“ – ამბობდა ზაჰა.

ზაჰა ჰადიდის კვლევითი ცენტრი

თანამედროვე არქიტექტურაში გამოიყენება პარამეტრული დიზაინი, რომელიც ადგენს კავშირს, რამდენად და როგორ შეიძლება განხორციელდეს ესა თუ ის დიზაინი.

სიტყვა პარამეტრი მოდის „მათემატიკიდან“, ცვლადის შემოტანით იწერება ალგორითმი, რომლითაც დგინდება, განხორციელებადია თუ არა ესა თუ ის დიზაინი.

გაგრძელება

I. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება

საკვანძო კითხვა:

- *რა როლი აქვს გეომეტრიას, გეომეტრიულ მოდელებს არქიტექტურასა და დიზაინში? როგორ განვითარდა შენობების არქიტექტურა საუკუნეების განმავლობაში?*

თქვენი დავალება

1. მოიძიეთ ინფორმაცია მრავალკუთხედებსა და კუთხეებზე;
2. გამოიკვლიეთ კუთხეები მრავალკუთხედებში და სცადეთ დაადგინოთ კანონზომიერება, როგორ არის დამოკიდებული მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობაზე (კვლევის წარმოებაში დაგეხმარებათ დანართი 1, დანართი 2);
3. მას შემდეგ, რაც დაადგენთ კავშირს, დაფიქრდით, აღნიშნული წესი მართებულია ამოზნექილ მრავალკუთხედებში, თუ ნებისმიერ, არაამოზნექილ მრავალკუთხედებშიც?
4. საკლასიფიკაციო სქემების მეშვეობით წარმოადგინეთ კუთხეების, მრავალკუთხედების, სამკუთხედების კლასიფიკაცია.
5. შეისწავლეთ სხვადასხვა წესიერი მრავალკუთხედების სახელწოდებები და დაფიქრდით, იქნებ თქვენც შეგიძლიათ რაიმე შენობის ორიგინალური დიზაინის მოფიქრება?
6. გამოიკვლიეთ თქვენთვის სხვადასხვა საინტერესო შენობა და გააანალიზეთ, რომელი გეომეტრიული მოდელი გამოიყენა არქიტექტორმა აღნიშნული შენობის დიზაინის შექმნაში?

თქვენი დავალება

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის ან პრეზენტაციის სახით; შეგიძლიათ მოამზადოთ ორივე: რეფერატი კვლევითი ნაწილისთვის, ხოლო პრეზენტაცია იმისათვის, რომ წარადგინოთ სხვა-დასხვა არქიტექტორის ნაშრომები.

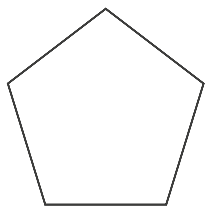
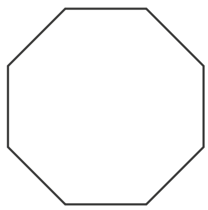
პრეზენტაციის დროს ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:

I. რა როლი აქვს გეომეტრიულ მოდელებს ხელოვნებაში, არქიტექტურასა და დიზაინში? წარმო-ადგინეთ რამდენიმე ნამუშევარი და თქვენი დაგროვებული ცოდნის საფუძველზე აღწერეთ ნაშრომი გეომეტრიული ცნებების გამოყენებით;

II. რა ტიპის კანონზომიერება გამოიკვლიეთ ამოზნექილ მრავალკუთხედებში? როგორ არის დამოკი-დებული მრავალკუთხედის შიდა კუთხეების ჯამი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობაზე?

III. გააანალიზეთ თქვენი შექმნილი ფიგურათა საკლასიფიკაციო სქემები და აღწერეთ თითოეული სქემა. როგორ შეიძლება აღწერის დროს პირობის შემცველი წინადადებების გამოყენება?

დანართი 1

წესიერი პენტაგონი	წესიერი ოქტაგონი	მრავალკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით:
		(see table below)

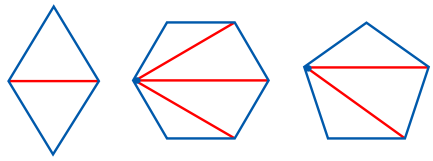
გვერდების რაოდენობა	სახელი
3	სამკუთხედი
4	ოთხკუთხედი
5	პენტაგონი
6	ექვსკუთხედი
8	ოქტაგონი
10	დეკაგონი
12	დოდეკაგონი
n	n-კუთხედი

ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360°-ია.

დანართი 2

კვლევა:

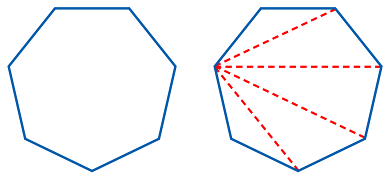
იპოვეთ ხუთკუთხედის, ექვსკუთხედის, შვიდკუთხედის შიგა კუთხების ჯამი.



ქვემოთ მოცემული ცხრილის მიხედვით, დაადგინეთ კანონზომიერება გვერდების რაოდენობასა და შიგა კუთხეების ჯამს შორის.

გვერდების რაოდენობა	რამდენი სამკუთხედი შედგა?	შიგა კუთხეების ჯამი
3	1	180
4		180 · ■ = ■
5		180 · ■ = ■

გვერდების რაოდენობა	რამდენი სამკუთხედი შედგა?	შიგა კუთხეების ჯამი
6		180 · ■ = ■
7		180 · ■ = ■
n		180 · ■ = ■



კვლევის შედეგების მიხედვით, დაადგინეთ:

- რის ტოლი იქნება წესიერი ხუთკუთხედის (პენტაგონის) თითოეული კუთხე?
- რის ტოლი იქნება წესიერი ოქტაგონის თითოეული კუთხე?
- თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 120°-ია, მაშინ რამდენი კუთხე აქვს მოცემულ n-კუთხედს?
- თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 135°-ია, მაშინ რამდენი კუთხე აქვს მოცემულ n-კუთხედს?

თავი 1. გეომეტრიის ძირითადი ცნებები, ბრტყელი ფიგურები და კუთხეები

1.1. გეომეტრიის ძირითადი ცნებები

წერტილი, წრფე, სიბრტყე გეომეტრიის საწყისი და მნიშვნელოვანი ცნებებია, რომელთა გამოყენებით შემდეგში სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა აიგება.

თანამედროვე მხატვრობაში ხშირად იყენებენ სხვადასხვა გეომეტრიულ ფიგურას. მაგალითად, მხატვარ აუგუსტ ჰერბინს აქვს შექმნილი ნახატების მთელი სერია, რომელსაც, რომელთაც უწოდა „გეომეტრიული აბსტრაქციები". ნახატების შექმნისას მან გამოიყენა მონაკვეთი, სიბრტყე და სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა.

სურათი 1.1. *აუგუსტ ჰერბინი*

წერტილს – არ გააჩნია განზომილებები. წერტილის ყველა ზომა (სიგრძე, სიგანე) ნულის ტოლია. წერტილის აღნიშვნა პირობითია, ხოლო ნამდვილი წერტილის დაწერა შეუძლებელია, ის გონებაში უნდა წარმოვიდგინოთ.

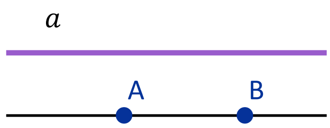
A წერტილი

წერტილი აღინიშნება დიდი ლათინური ასოთი: **A, B, C** და ა.შ.

წრფე – გააჩნია ერთი გან ზომილება, მისი სიგანე ნულის ტოლია, სიგრძე კი უსასრულოა. მასზე წარმოდგენას გვაძლევს უსასრულო სწორი ხაზი. ისევე როგორც წერტილის, წრფის აღნიშვნაც პირობითია.

ხანდახან წრფის ბოლოებში მოცემულია ისრები, რაც იმის მანიშნებელია, რომ წრფე გრძელდება ორივე მიმართულებით უსასრულოდ.

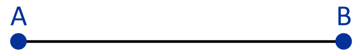
a წრფე



წრფე აღინიშნება პატარა ლათინური ასოებით (მაგ. *a* წრფე), ან წრფეზე მონიშნული ორი წერტილით (მაგ. **AB** წრფე).

მონაკვეთი – წრფის ნაწილი, რომელსაც აქვს დასაწყისი და დასასრული.

ხშირად მონაკვეთს გამსხვილებული ბოლოებით ხაზავენ. მაგრამ ეს პირობითი აღნიშვნაა. სინამდვილეში მონაკვეთის ბოლო წერტილი ისეთივე წერტილია, როგორიცაა ნებისმიერი შიგა წერტილი.

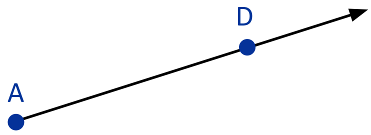


AB მონაკვეთი

AB მონაკვეთი.

ჩაიწერება საწყისი და ბოლო წერტილებით.

სხივი – წრფის ნაწილი, რომელსაც აქვს საწყისი წერტილი და არ აქვს დასასრული. გრძელდება ერთი მიმართულებით, შემოუსაზღვრელად.



AD სხივი

AD სხივი.

ჩაიწერება ორი დიდი ლათინური ასოთი.

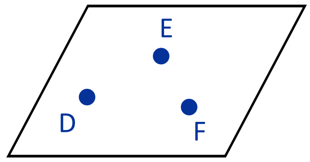
პირველად იწერება საწყისი წერტილი, ხოლო მეორე წერტილი შეიძლება იყოს სხივზე აღებული ნებისმიერი წერტილი.

ურთიერთდამატებითი სხივები ეწოდებათ – ორ სხივს, თუ მათ საერთო სათავე აქვთ, მდებარეობენ ერთ წრფეზე და აქვთ სხვადასხვა მიმართულება

AE და AD ურთიერთდამატებითი სხივებია

AE და **AD** სხივებს აქვთ საერთო სათავე და მდებარეობენ ერთ წრფეზე.

სიბრტყე – ბრტყელი ზედაპირი, რომელსაც არ აქვს სისქე, აქვს ორი განზომილება და ყველა მიმართულებით გრძელდება უსასრულოდ.



DEF სიბრტყე ან „α“ სიბრტყე

DEF სიბრტყე ან α სიბრტყე.

სიბრტყე აღინიშნება მასზე მონიშნული ნებისმიერი 3 წერტილით, რომლებიც არ მდებარეობს ერთ წრფეზე ან ერთი პატარა ბერძნული ასო-ბგერით.

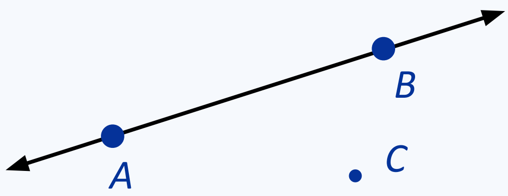
სიბრტყის გეომეტრიის ანუ პლანიმეტრიის აქსიომები

აქსიომა 1: თითოეული წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც მდებარეობს წრფეზე და არსებობს წერტილები, რომლებიც არ მდებარეობს წრფეზე.

„A ∈ a; B ∈ a; C ∉ a“

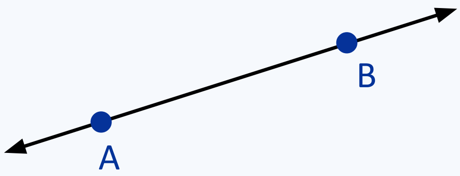
„∈“ სიმბოლო ნიშნავს „ეკუთვნის“

„∉“ სიმბოლო ნიშნავს „არ ეკუთვნის“



აქსიომა 2: ყოველ ორ წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე.

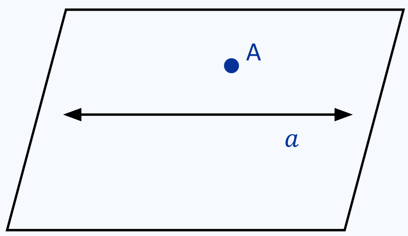
a წრფე ან AB წრფე



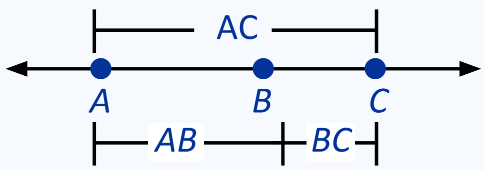
აქსიომა 3: ყოველი წრფე სიბრტყეს ორ ნახევარსიბრტყედ ჰყოფს.

წრფეს ეწოდება ნახევარსიბრტყის საზღვარი.

ნახევარსიბრტყე აღინიშნება შემდეგნაირად (a; A) .



აქსიომა 4: მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთის სიგრძეთა ჯამს, რომლითაც იგი იყოფა ნებისმიერი წერტილით.



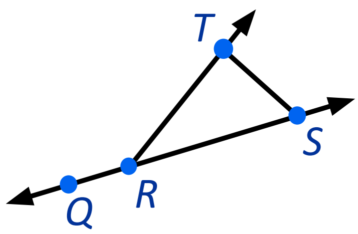
ნიმუში 1 – მონაკვეთი, სხივი

აღწერეთ, რამდენ მონაკვეთს, წრფეს და სხივს ხედავთ ნახაზზე:

ა) მონაკვეთები: RT, TS, RS, RQ, SQ.

ბ) წრფე: QS წრფე.

გ) სხივები: RT, RS, RQ სხივი



ნიმუში 2

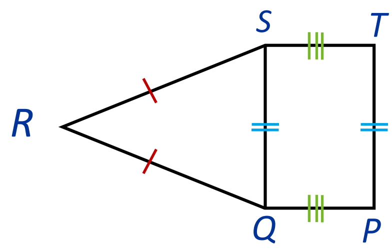
მონიშნეთ ნახაზზე ტოლი მონაკვეთები:

RQ = RS

QS = PT

ST = QP

ტოლი მონაკვეთების მოსანიშნად იყენებენ პატარა „ჯოხებს". ერთი ჯოხით აღინიშნება ერთი სიგრძის მონაკვეთები, ორი ტოლი ჯოხით სხვა სიგრძის მქონე ტოლი მონაკვეთები და ა.შ.



ნიმუში 3

C წერტილით BD მონაკვეთი იყოფა ორ ნაწილად. იპოვეთ x, BC, CD და BD მონაკვეთების სიგრძეები.

ჩვენ ვიცით, რომ BC + CD = BD

შევადგინოთ განტოლება აქსიომა 4-ის თანახმად:

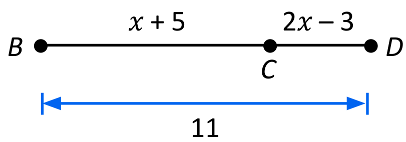
$$x + 5 + 2x - 3 = 11$$

$$3x + 2 = 11$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

BC = 8; CD = 2 · 3 − 3 = 3; BD = 11



სავარჯიშოები

1. გადახაზეთ ნახაზი რვეულში და ჩამოწერეთ, რამდენ მონაკვეთს, წერტილს, სხივს, წრფეს, ნახევარსიბრტყეს და სიბრტყეს ხედავთ ნახაზზე:

ა) მონაკვეთები: ____________________

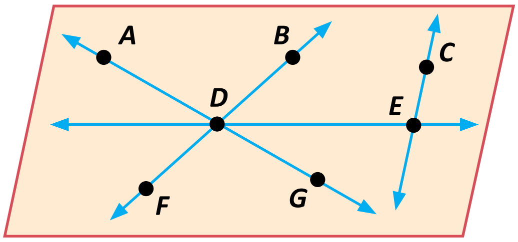
ბ) სხივები : ____________________

გ) წრფე: ____________________

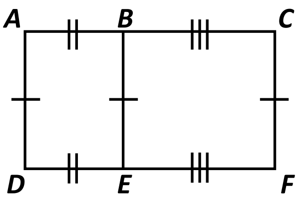
დ) წერტილები: ____________________

ე) სიბრტყე: ____________________

ვ) ნახევარსიბრტყე: ____________________

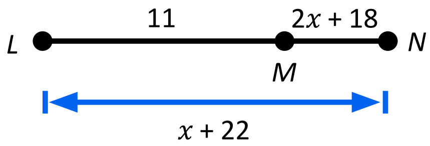


2. მოცემული ნახაზი გადახაზეთ რვეულში და ამოწერეთ ტოლი მონაკვეთები.

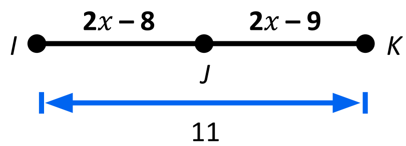


3. იპოვეთ x და თითოეული მონაკვეთის სიგრძე.

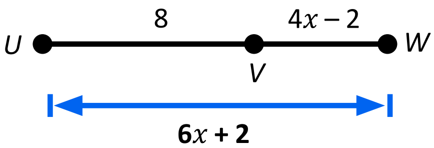
ა)



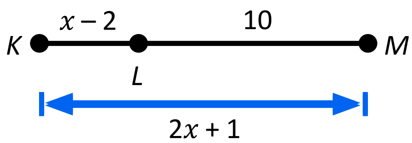
დ)



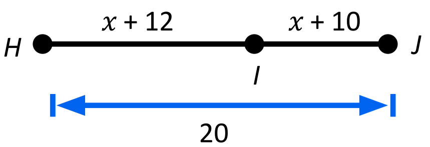
ბ)



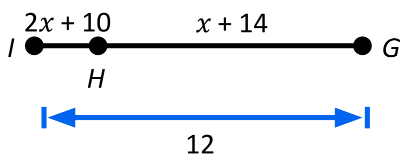
ე)



გ)

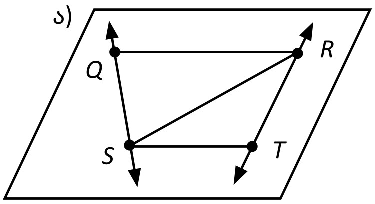


ვ)

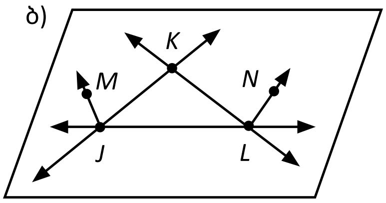


4. მოცემული ნახაზის მიხედვით რვეულში ჩამოწერეთ, რა ფიგურებს ხედავთ ნახაზზე:

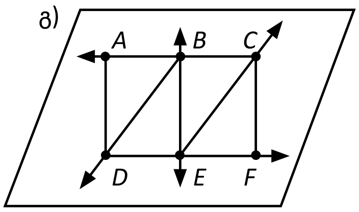
ა)



ბ)



გ)



სავარჯიშოები

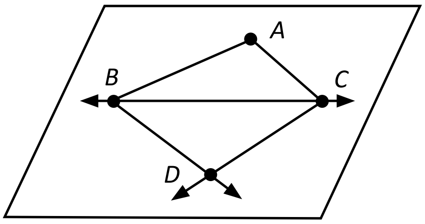
5. ჩაწერეთ ნახაზზე მოცემული:

ა) სიბრტყე;

ბ) ნახევარსიბრტყეები;

გ) რომელი წერტილი;

რომელ ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის?



6. კრიტიკული აზროვნება:

შეიძლება თუ არა ორ სხვადასხვა მონაკვეთს ჰქონდეს:

ა) ერთი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ პასუხი ნახაზით.

ბ) ორი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ ნახაზით .

7. კრიტიკული აზროვნება:

შეიძლება თუ არა ორ სხვადასხვა სხივს ჰქონდეს:

ა) ერთი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ პასუხი ნახაზით.

ბ) ორი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ ნახაზით.

გამოწვევა:

8. დაადგინეთ, მდებარეობს თუ არა A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე,

ა) თუ $AB = 9$; $BC = 5$; $AC = 4$. პასუხი დაასაბუთეთ.

ბ) თუ $AB = 8$; $BC = 4$; $AC = 6$. პასუხი დაასაბუთეთ.

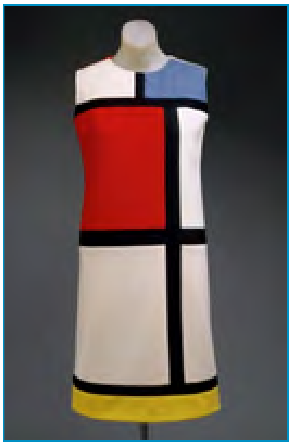
საინტერესო ინფორმაცია

მათემატიკა, მხატვრობა, მოდა

მხატვარი პიტ მონდრიანი თავის ნახატებს ქმნიდა გეომეტრიული ფიგურებით, რომლებსაც კომპოზიციებს უწოდებდა.

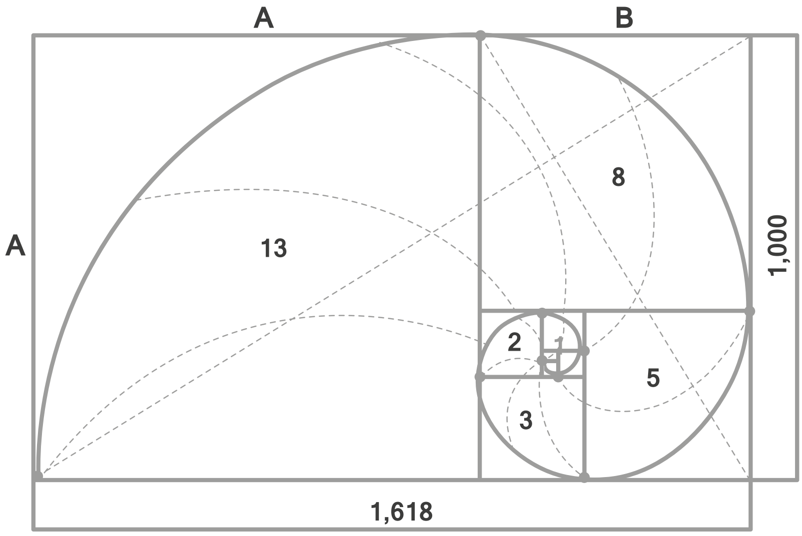
1960-იან წლებში, ცნობილმა დიზაინერმა ივ სენ ლორენმა (YSL) გამოიყენა მონდრიანის ნახატები და შექმნა ისტორიული კაბების კოლექცია, რომელმაც მოდის ინდუსტრიაში ახალბედა დიზაინერს სახელი გაუთქვა და დღემდე მისი შექმნილი კოლექცია ერთ-ერთ ყველაზე ნოვატორულ და წარმატებულ კოლექციად ითვლება.

მათ, ვისაც აინტერესებს მოდა, მხატვრობა ან უბრალოდ ექნება სურვილი, კარგი იქნება, თუ თავისუფალ დროს შექმნით რამე ნახატს გეომეტრიული ფიგურებით და ეცდებით გადაიტანოთ იგი რაიმე სამოსზე.



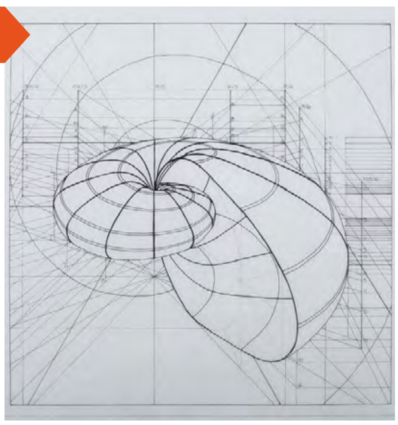
სურათი 1.2. *ივ სენ ლორენის კაბა*

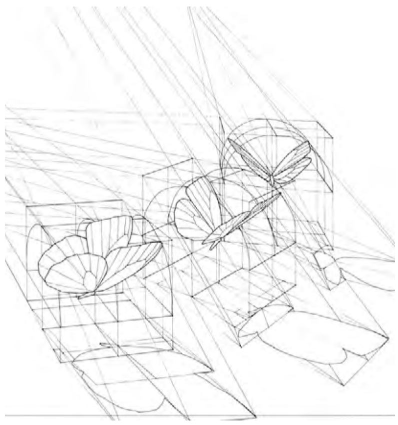
მხატვრობა, მათემატიკა, ოქროს კვეთა – თანამედროვე მხატვარმა რაფაელ არანუჯომ, ოქროს კვეთის მეშვეობით შექმნა ნახატების კრებული სახელწოდებით "ოქროს კვეთა – გასაფერადებელი წიგნი". თითოეული ნახატის შექმნისას დაცულია ოქროს კვეთის პროპორციები და ხელოვნების მოყვარულებს შესთავაზა, თავად გაეფერადებინათ ნახატი.



$$\frac{A+B}{A} = \frac{B}{A} = 1.618$$

გააფერადეთ ქვემოთ მოცემული ნახატები სურვილისამებრ.





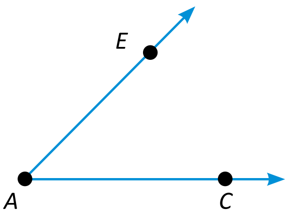
1.2.კუთხეების კლასიფიკაცია

კუბიზმი მიმდინარეობაა ხელოვნებაში, რომელიც მე-20 საუკუნის დასაწყისში დაიწყო. კუბიზმის ყველაზე ცნობილი მიმდევარი იყო ესპანელი მხატვარი და სკულპტორი პაბლო პიკასო. კუბისტურ მიმდინარეობაში ობიექტი დაშლილია, გაანალიზებული და შემდეგ აწყობილია აბსტრაქტულ ფორმაში. ხელოვანი ობიექტს აღწერს არა ერთი, არამედ მრავალი სხვადასხვა კუთხით. ამისათვის ის იყენებს მახვილ, ბლაგვ, მართ კუთხეებს.

სურათი 1.3. *პიკასო, „მოდელიანი"*

კუთხეების გააზრება და ცოდნა ძალიან მნიშვნელოვანია სხვადასხვა დარგში.

კუთხე შედგება ორი საერთო სათავის მქონე სხივისაგან და მათ შორის მდებარე სიბრტყის ნაწილისაგან.

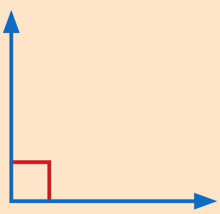
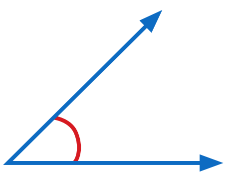
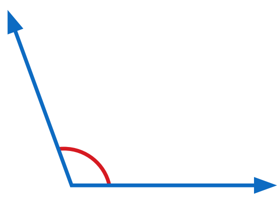


საერთო სათავეს კუთხის **წვერო** ეწოდება, ხოლო სხივებს – კუთხის **გვერდები**.

- კუთხე იზომება გრადუსებში – სიმბოლოთი (°).
- კუთხის ჩაწერა შესაძლებელია ორნაირად: ან მხოლოდ წვეროს მეშვეობით „∠A", ან წვეროსა და კუთხის სხვადასხვა გვერდზე მდებარე ორი წერტილით: „∠EAC" ან "∠CAE". ამასთან, წვეროს შესაბამისი წერტილი უნდა დაიწეროს დანარჩენ ორ წერტილს შორის.

აქსიომა 5: ყოველი სხივიდან მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ მოცემული სიდიდის 180°-ზე ნაკლები ერთადერთი კუთხე.

კუთხეების კლასიფიკაცია

მართი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა 90°-ია.	**მახვილი კუთხე** ეწოდება კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა 0°-ზე მეტი და 90°-ზე ნაკლებია	**ბლაგვი კუთხე** ეწოდება კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა 90°-ზე მეტი და 180°-ზე ნაკლებია.	**გაშლილი კუთხე** ეწოდება კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა 180°-ია.
			

ტრანსპორტირი კუთხის გასაზომი ხელსაწყოა.

■ *როგორ გავზომოთ გაშლილზე ნაკლები კუთხე?*

- ტრანსპორტირის სათავეს ვამთხვევთ კუთხის წვეროს.
- კუთხის ერთი გვერდი უნდა გავასწოროთ ტრანსპორტირის ნულოვან მონაკვეთზე.
- კუთხის მეორე გვერდი გვიჩვენებს კუთხის გრადუსულ ზომას.

ბისექტრისა. სხივს, რომლის სათავეა კუთხის წვერო და კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ჰყოფს, **ბისექტრისა** ეწოდება.

BD – ბისექტრისაა

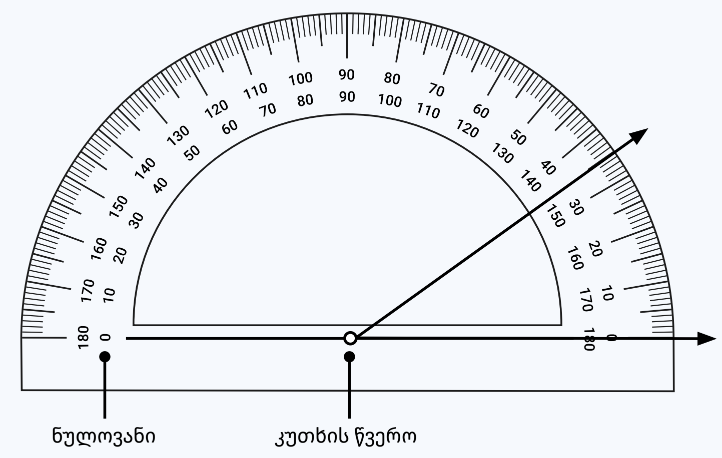
$\angle ABD = \angle DBC$

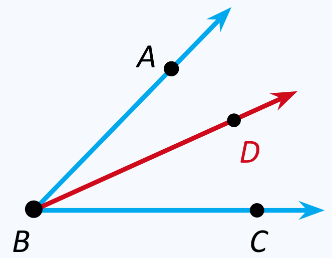
მოსაზღვრე კუთხეები

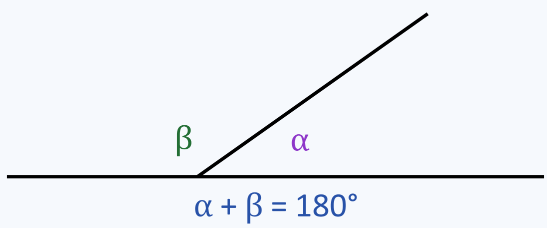
თუ ორ კუთხეს ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო ორი გვერდი დამატებითი სხივებია, მაშინ მათ მოსაზღვრე კუთხეები ეწოდებათ.

მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

კუთხეები ასევე აღინიშნება ბერძნული ასო-ბგერებით: α, β, γ





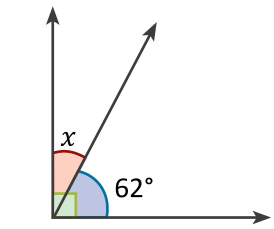


ნიმუში 1 – ვიპოვოთ კუთხის გრადუსული ზომა.

მოცემულია მართი კუთხე, რომელიც სხივით გაყოფილია ორ კუთხედ. ვიცით, რომ ერთ-ერთი 62°-ია, ვიპოვოთ მეორე.

$$x + 62° = 90°$$

$$x = 28°$$



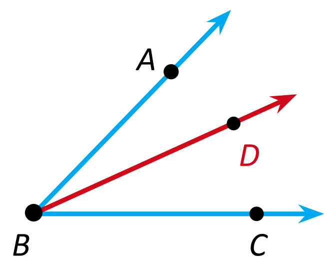
ნიმუში 2

მოცემულია ∠ABC = 56° და გავლებულია მისი BD ბისექტრისა. იპოვეთ მიღებული ∠ABD და ∠DBC კუთხეების გრადუსული ზომები.

რადგან ბისექტრისა კუთხეს ჰყოფს შუაზე, ამიტომ:

$$\angle ABD = \angle DBC = \frac{\angle ABC}{2}, \quad \text{ე.ი.}$$

$$\angle ABD = \angle DBC = \frac{56°}{2} = 28°$$



ნიმუში 3

მოცემული ნახაზის მიხედვით იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეების გრადუსული ზომები.

რადგან მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია, ამიტომ შევადგენთ განტოლებას:

$$3x + 12° + 2x + 18° = 180°$$

$$5x + 30° = 180°$$

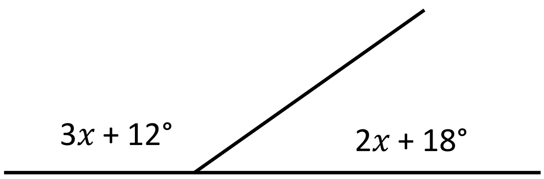
$$5x = 150°$$

$$x = 30°$$

ცხადია: $3x + 12° = 3 \cdot 30° + 12° = 102°$ და

$$2x + 18° = 2 \cdot 30° + 18° = 78°.$$

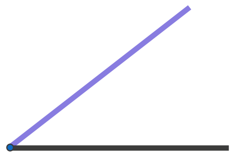
პასუხი: მოსაზღვრე კუთხეებია: 102° და 78°.



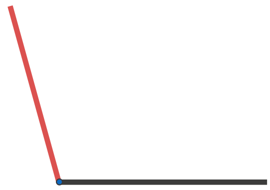
სავარჯიშოები

1. ტრანსპორტირის მეშვეობით გაზომეთ მოცემული კუთხეები. აღწერეთ კუთხე: მახვილია, ბლაგ-ვი, მართი თუ გაშლილი.

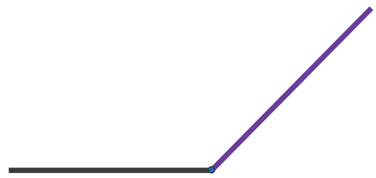
ა)



ბ)

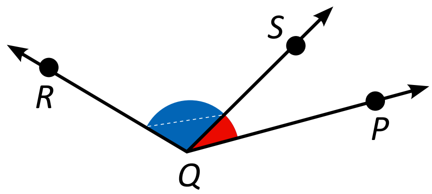


გ)



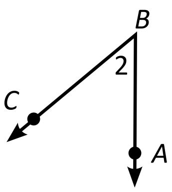
2. დაწერეთ, რომელ კუთხეებს ხედავთ ნახაზზე.

თუ წითელი ფერით აღნიშნული კუთხე 25°-ია, ხოლო ლურჯი ფერით აღნიშნული კუთხე 35°, რისი ტოლი იქნება დიდი კუთხე?

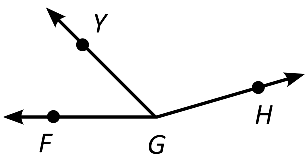


3. ჩაწერეთ კუთხეები სხვადასხვა გზით:

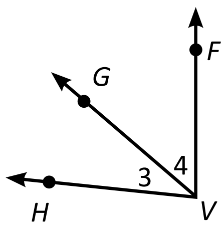
ა)



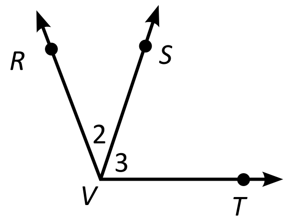
ბ)



გ)

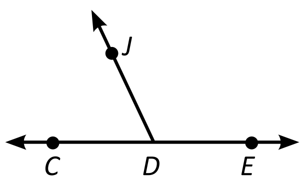


დ)

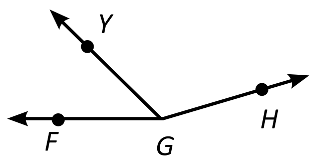


4. მოცემული ინფორმაციის გამოყენებით იპოვეთ უცნობი კუთხე:

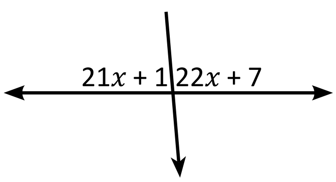
ა) თუ „∠EDJ = 125°“ , იპოვეთ „∠CDJ“



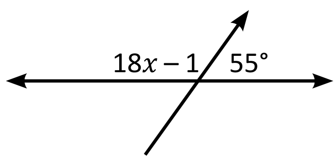
ბ) თუ „∠FGH = 165°“ და „∠YGH = 112°“ იპოვეთ „∠FGY“



გ) იპოვეთ x



დ) იპოვეთ x



5. ბლაგვი კუთხის სიდიდეა 128°. რა ნაწილებად გაყოფს ამ კუთხეს მისი ბისექტრისა.

სავარჯიშოები

6. კუთხის ბისექტრისა კუთხის გვერდთან ადგენს 40°-იან კუთხეს, იპოვეთ ეს კუთხე.

7. MNK მართი კუთხის N წვეროდან გავლებული NF სხივი კუთხეს ჰყოფს ორ ნაწილად, რომლებიც ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5. იპოვეთ NF სხივით მიღებული კუთხეები.

8. მოსაზღვრე კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:1. იპოვეთ ეს კუთხეები.

9. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთი 20°-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

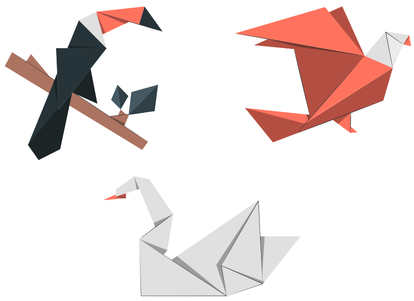
10. რას უდრის კუთხე, თუ იგი თავის მოსაზღვრე კუთხეზე 36°-ით ნაკლებია.

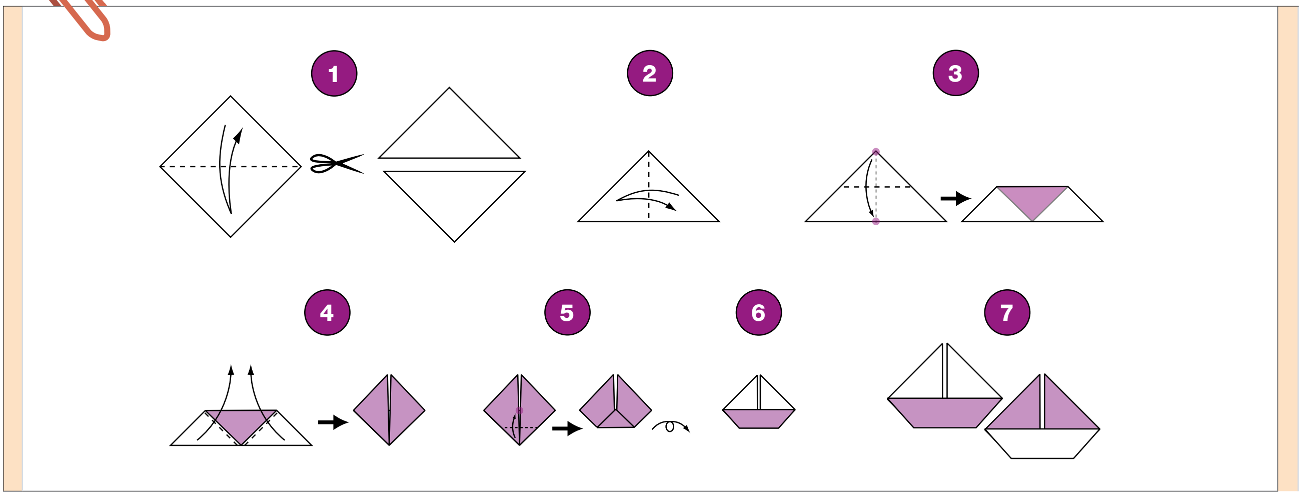
11. ∠ABC=145° B წვეროდან გავლებული BD სხივი კუთხეს ჰყოფს ორ ნაწილად, რომლებიც ისე შეე-ფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ კუთხეები.

12. ABD კუთხის B წვეროდან გავლებული BM სხივი კუთხეს ჰყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთი 32°-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ BM სხივით მიღებული კუთხეები, თუ ∠ABD =164° .

საინტერესო ინფორმაცია

ორიგამი ქაღალდისგან სხვადასხვა ფიგურების კეთების ტრადიციული იაპონური ხელოვნებაა. მარჯვნივ მოცემულია ქაღალდისაგან შექმნილი სხვადასხვა ფრინველის მოდელი – როგორ უნდა აიგოს მტრედი. ეცადეთ, ფურცლისაგან გააკეთოთ მტრედი და დააკვირდით, რომელი კუთხეების ჯამია 180°. **ინტერნეტის მეშვეობით** შედით საიტზე და ააგეთ სხვადასხვა სხეული.



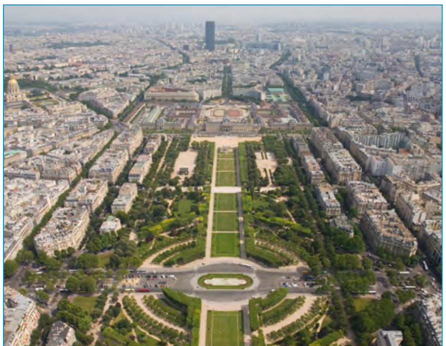


1.3. წრფეების ურთიერთმდებარეობა ვერტიკალური კუთხეები

ქალაქში სიარულისას ჩვენ ვხედავთ, რომ ქუჩები დაგეგმარებულია სხვადასხვა მიმართულებით. ზოგი ქუჩა კვეთს ერთმანეთს, ზოგი – არა, და ვამბობთ, რომ ისინი პარალელურია.

წრფეები კლასიფიცირდება ერთმანეთის მიმართ განლაგებით.

თუ ორ წრფეს აქვს საერთო წერტილი, ვამბობთ, რომ **წრფეები იკვეთება**, საერთო წერტილს კი **გადაკვეთის წერტილი** ეწოდება.

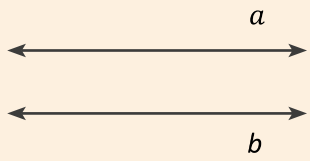


სურათი 1.4. *მარსის ველი – საზოგადოებრივი პარკი.*

პარალელური წრფეები

როდესაც ორი წრფე მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე და არ კვეთს ერთმანეთს, მაშინ მათ **პარალელური წრფეები** ეწოდება. პარალელურობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$a \parallel b$

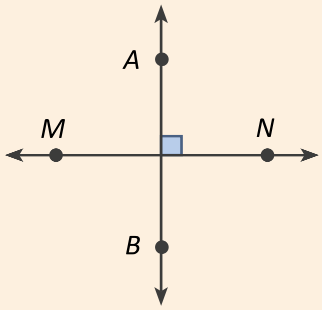


მართობული წრფეები

როდესაც ორი წრფე გადაიკვეთება და გადაკვეთით შეადგენენ მართ კუთხეს, მაშინ მათ **მართობული** (მეორენაირად – პერპენდიკულარული) **წრფეები** ეწოდება.

მართობულობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$AB \perp MN$

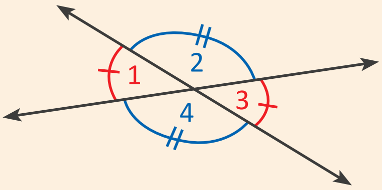


ვერტიკალური კუთხეები

ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული 4 კუთხიდან, წყვილად მოპირდაპირეებს, ვერტიკალური კუთხეები ეწოდება.

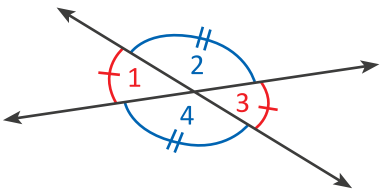
$\angle 1$ და $\angle 3$ – ვერტიკალური კუთხეებია

$\angle 2$ და $\angle 4$ ვერტიკალური კუთხეებია



თეორემა 4.1

ვერტიკალური კუთხეები ტოლია



$\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$

დამტკიცება

რადგან $\angle 1$ და $\angle 2$ მოსაზღვრე კუთხეებია

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

ასევე ვიცით, რომ $\angle 1$ და $\angle 4$ მოსაზღვრე კუთხეებია.

$\angle 1 + \angle 4 = 180°$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$\angle 2 = \angle 4$

რ.დ.გ.

(რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)

გაგრძელება

თეორემა 4.2

ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება ოთხი კუთხე, რომლთა ჯამი 360°-ია.

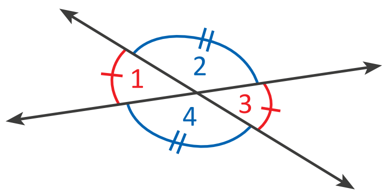
$$\angle 1 + \angle 2 = 180°$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 180°.$$

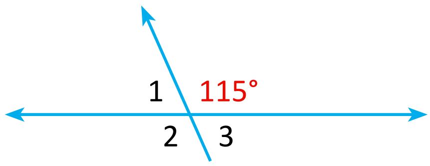
მაშასადამე

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$$

360°-ის ტოლ კუთხეს წრიული, სრული კუთხე ეწოდება.



ნიმუში 1

მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე 115°-ია იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები: $\angle 1 + 115° = 180°$ $\angle 1 = 180° - 115°$ $\angle 1 = 65°$ $\angle 1 = \angle 3 = 65°$ ვერტიკალური კუთხეები ტოლია $\angle 2 = \angle 4 = 115°$	

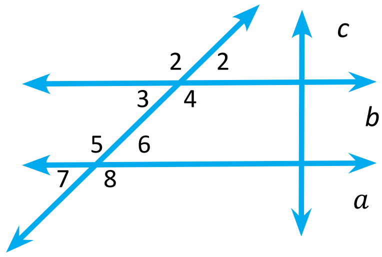
დაიმახსოვრეთ,

ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

სავარჯიშოები

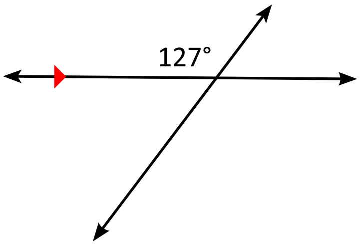
1. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ:

ა) წრფეები, რომლებიც შეიძლება იყოს პარალელური;
ბ) წრფეები, რომლებიც შეიძლება იყოს მართობული;
გ) ვერტიკალური კუთხეები.

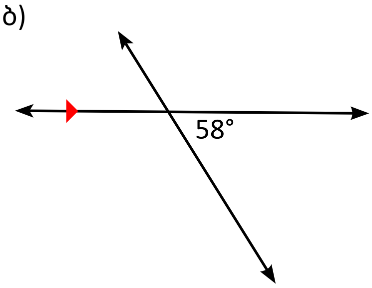


2. მოცემული კუთხის მიხედვით, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები:

ა)



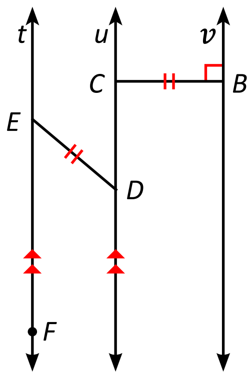
ბ)



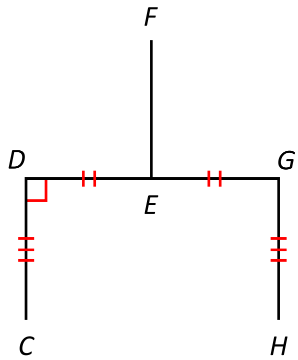
3. ნახაზის მიხედვით, ჩაწერეთ:

- პარალელურ წრფეთა წყვილები;
- მართობულ წრფეთა წყვილები;
- ტოლი მონაკვეთები.

ა)

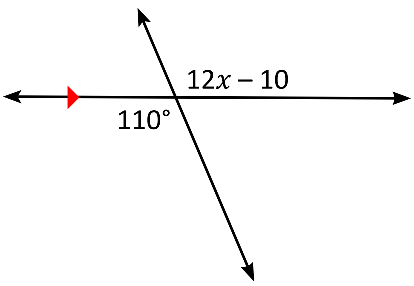


ბ)

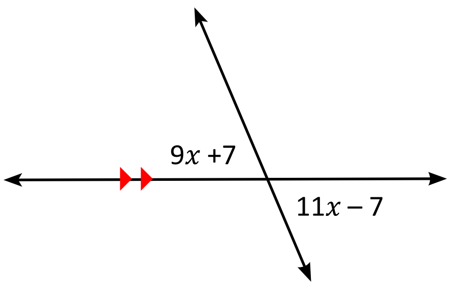


4. კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x, ასევე თითო-ეული კუთხის გრადუსული ზომა.

ა)



ბ)



სავარჯიშოები

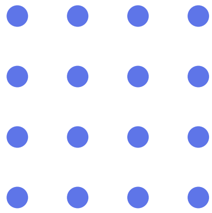
5. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{5}$-ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.

6. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 70°-ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.

7. **სტრატეგიები:**

შეარჩიეთ სათანადო სტრატეგიები, შეაერთეთ ყოველი 4 წერტილი ნებისმიერი მიმართულებით.

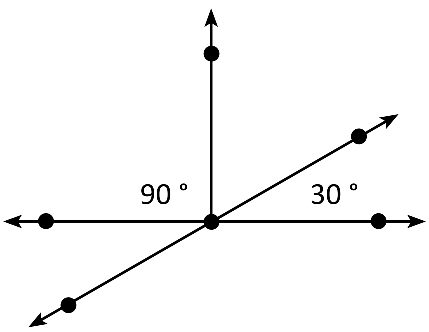
- სულ რამდენი წრფე გაივლება?



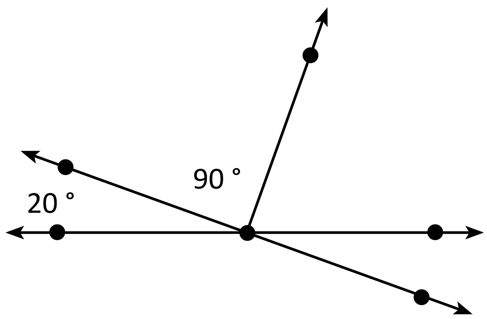
გამოწვევა:

8. დააწერეთ წერტილებს ასოები, ჩაწერეთ მიღებული კუთხეები და იპოვეთ თითოეულის გრადუსული ზომა.

ა)



ბ)



1.4.ᲞᲐᲠᲐᲚᲔᲚᲣᲠᲘ ᲬᲠᲤᲔᲔᲑᲘᲗ ᲓᲐ ᲛᲙᲕᲔᲗᲘᲗ ᲛᲘᲦᲔᲑᲣᲚᲘ ᲙᲣᲗᲮᲔᲔᲑᲘ

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიიღება რვა კუთხე, რომლებიც კიდევ წყვილ-წყვილად კლასიფიცირდება.

როგორც ვიცით:

ვერტიკალური კუთხეები

$\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 3$;

$\angle 5 = \angle 8$; $\angle 6 = \angle 7$

შიგაჯვარედინი კუთხეები

$\angle 3$ და $\angle 6$

$\angle 4$ და $\angle 5$

შიგაცალმხრივი კუთხეები

$\angle 4$ და $\angle 6$

$\angle 3$ და $\angle 5$

გარეჯვარედინი კუთხეები

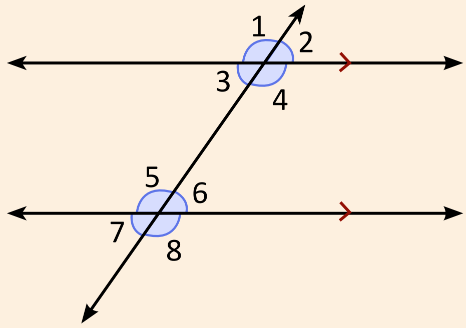
$\angle 1$ და $\angle 8$

$\angle 2$ და $\angle 7$

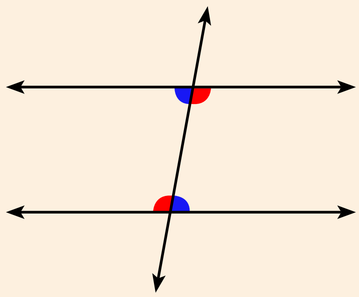
გარეცალმხრივი კუთხეები

$\angle 1$ და $\angle 7$

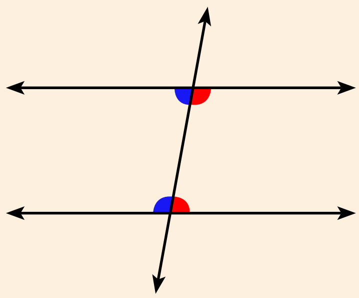
$\angle 2$ და $\angle 8$



ᲨᲘᲒᲐ ᲯᲕᲐᲠᲔᲓᲘᲜᲐᲓ ᲛᲓᲔᲑᲐᲠᲔ ᲙᲣᲗᲮᲔᲔᲑᲘ



ᲨᲘᲒᲐᲪᲐᲚᲛᲮᲠᲘᲕᲐᲓ ᲛᲓᲔᲑᲐᲠᲔ ᲙᲣᲗᲮᲔᲔᲑᲘ



ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲔᲑᲘ:

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 4.1:

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 4.2:

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

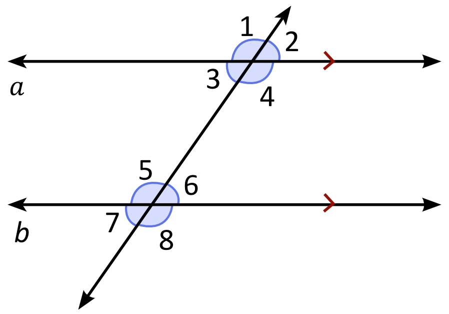
თეორემა 4.3:

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.

შიგა ჯვარედინი კუთხეები

$\angle 3 = \angle 6$

$\angle 4 = \angle 5$



დამტკიცება:

რადგან წრფეები პარალელურია, *a* წრფის პარალელური გადატანის შემთხვევაში ის დაემთხვევა *b* წრფეს.

აქსიომა 5: ყოველი სხივიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები ერთადერთი კუთხე.

აქსიომიდან გამომდინარე:
$\angle 1 = \angle 5$

თავის მხრივ
$\angle 1 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 8$

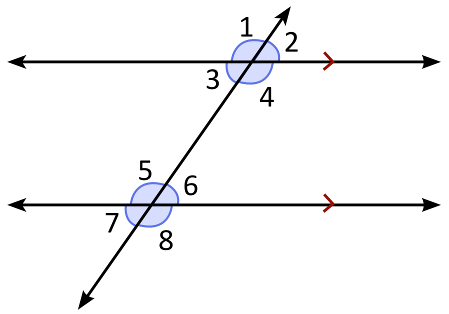
ე.ი. $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$

რ.დ.გ.

(რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)

თეორემა 4.4:

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი არის 180°, ან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.



$\angle 4 + \angle 6 = 180°$

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$

დამტკიცება:

ჩვენ ვიცით, რომ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$

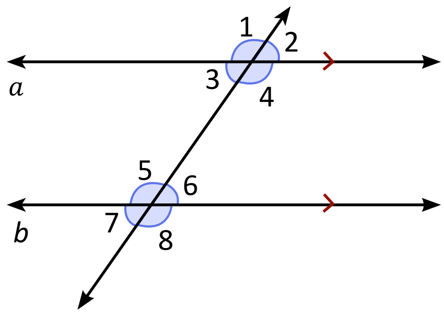
4.2 თეორემის თანახმად $\angle 3 = \angle 6$

მოცემული ორი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

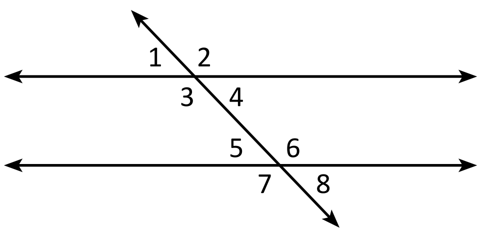
$\angle 4 + \angle 6 = 180°$

რ.დ.გ.

მითითება: ასევე სამართლიანია მოცემული თეორემების შებრუნებული თეორემებიც. თუ ორი წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით და შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია

პარალელური წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხეების თვისებები:		▪ ვერტიკალური კუთხეები ტოლია. ▪ შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია ▪ შიგაცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180°-ია $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$ $\angle 2 = \angle 3 = \angle 6 = \angle 7$
სასურველია, გაეცნოთ თეორემებს და თეორემების დამტკიცებას. ასევე მართებულია თავში მოცემული თეორემის შებრუნებული თეორემაც.		

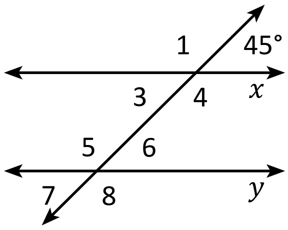
ნიმუში 1

იპოვეთ ორი პარალელური წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები, თუ $\angle 5 = 80°$. 	მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია. $\angle 6 + 80° = 180°$ $\angle 6 = 100°$ $\angle 5 = \angle 8 = 80°$ $\angle 6 = \angle 7 = 100°$ **ვერტიკალური კუთხეები ტოლია** $\angle 5 = \angle 4 = 80°$ $\angle 3 = \angle 6 = 100°$ რადგან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია. $\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = 80°$ $\angle 2 = \angle 3 = \angle 6 = \angle 7 = 100°$

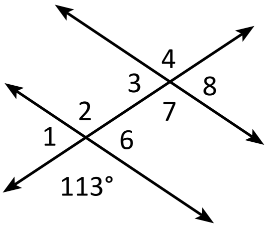
სავარჯიშოები

1. x და y წრფეები პარალელურია $x \parallel y$ და მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული 8 კუთხიდან ვიცით ერთ-ერთი, იპოვეთ დანარჩენი შვიდი კუთხე.

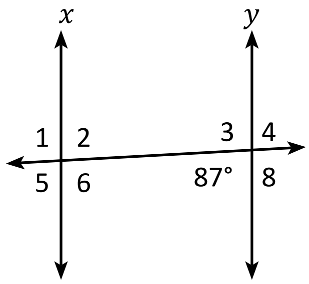
ა)



ბ)

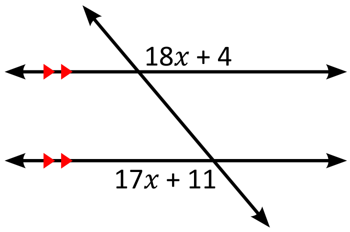


გ)

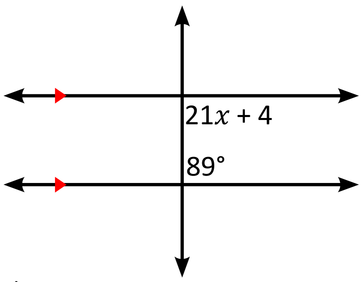


2. კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x, ასევე თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა.

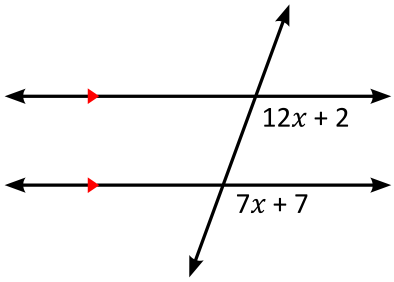
ა)



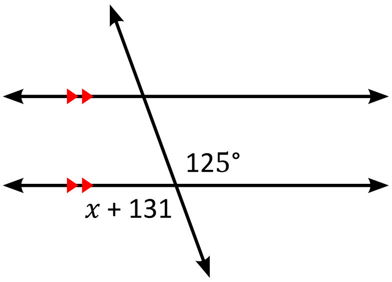
ბ)



გ)



დ)



3. ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით ისე, რომ ერთ-ერთი კუთხე 42° -ია, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

4. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი შიგაჯვარედინი კუთხის ჯამი არის 60°. იპოვეთ მიღებული რვავე კუთხე.

5. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი შიგაცალმხრივი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:13, იპოვეთ მიღებული რვავე კუთხე.

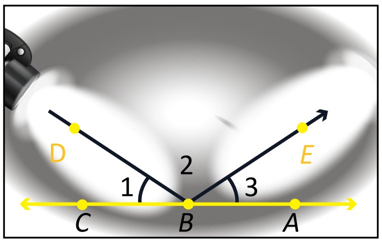
6. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული ორი შიგაცალმხრივი კუთხეებიდან ერთი 28°-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ მიღებული რვავე კუთხე.

სავარჯიშოები

ეს საინტერესოა!

7. კუთხეები ოპტიკაში, ფიზიკა.

ოპტიკა შეისწავლის სინათლის თვისებებს.



გეომეტრიულ ოპტიკაში ძალიან დიდი ადგილი უჭირავს სინათლის ზედაპირზე დაცემისა და გარდატეხის კუთხეების შესწავლას.

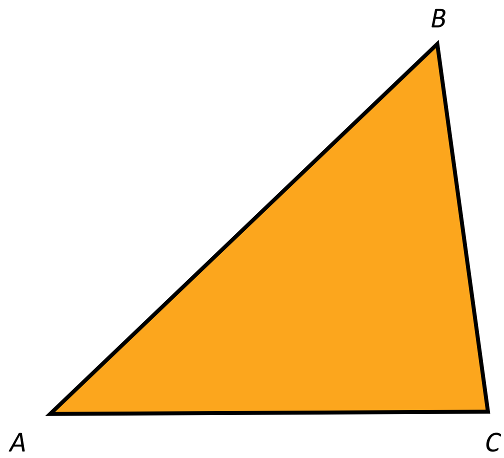
1.5. სამკუთხედი, კუთხეები სამკუთხედში

სამკუთხედი არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელიც შედგება სამი ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილის, მათი მიმდევრობით შემაერთებელი სამი მონაკვეთის და ამ მონაკვეთებით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილით.

სამ წერტილს ეწოდება სამკუთხედის წვეროები, ხოლო მონაკვეთებს – სამკუთხედის გვერდები.

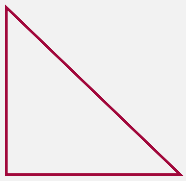
სიმბოლო Δ-ით აღვნიშნავთ სამკუთხედს.

მოცემულია ΔABC.



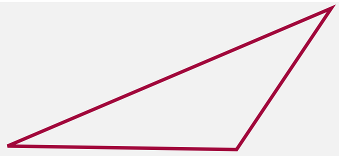
სამკუთხედების კლასიფიკაცია

მართკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ერთი-ერთი კუთხე 90°-ია.



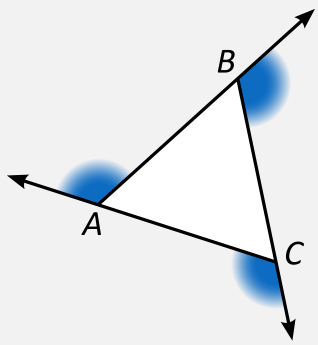
მახვილკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის სამივე კუთხე 90°- ზე ნაკლებია.

ბლაგვკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე 90°-ზე მეტი და 180°- ზე ნაკლებია.



სამხუთხედის გარე კუთხე

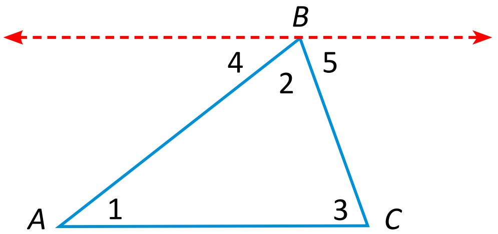
გარე კუთხე ეწოდება სამკუთხედის კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს.



თეორემა 4.5

სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° - ია.

მოცემულია: ΔABC
დავამტკიცოთ, რომ
„$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$



დამტკიცება

B წერტილზე გავავლოთ AC მონაკვეთის პარალელური წრფე.

პარალელური წრფეების თვისებების თანახმად,მივიღებთ:

$\angle 1 = \angle 4$ **შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია**
$\angle 3 = \angle 5$

რადგან:

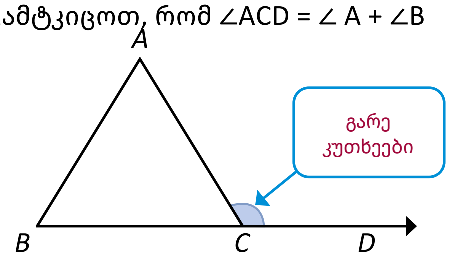
$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$
ე.ი. "$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

რ.დ.გ.

თეორემა 4.6:

სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზ-ღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.

მოცემულია: ΔABC
დავამტკიცოთ, რომ $\angle ACD = \angle A + \angle B$



დამტკიცება:

ვიცით, რომ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია

$\angle ACB + \angle ACD = 180°$ **(1)**

სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამიც 180°-ია.

$\angle ACB + \angle A + \angle B = 180°$ **(2)**

(1) და **(2)** ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ
$\angle ACD = \angle A + \angle B$
რ.დ.გ.

დაიმახსოვრეთ,

- სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია.
- სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამის ტოლია.

ნიმუში 1 – სამკუთხედის შიგა კუთხეების პოვნა.

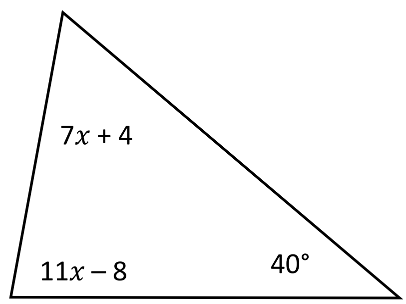
ა) იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი კუთხეები.

როგორც ვიცით, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია, აქედან გამომდინარე,

$7x + 4 + 11x - 8 + 40 = 180°$
$18x + 36 = 180$
$18x = 180 - 36$
$18x = 144$
$x = 8$

$7x + 4 = 7 \cdot 8 + 4 = 60°$

$11x - 8 = 11 \cdot 8 - 8 = 80°$



ნიმუში 2 – სამკუთხედის შიგა კუთხეების პოვნა.

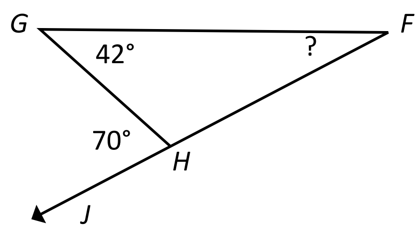
სამკუთხედის გარე კუთხით შიგა კუთხის პოვნა

ა) იპოვეთ ∠F

სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე შიგა კუთხეების ჯამის ტოლია, ე.ი. ∠JHG = ∠G + ∠F

$$70° = 42° + x$$
$$x = 70° – 42°$$
$$x = 28°$$

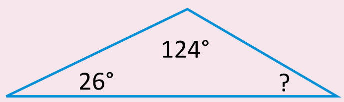
ე.ი. ∠F=28°



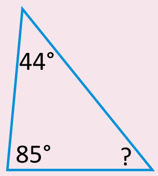
სავარჯიშოები

1. გადაიხაზეთ ნახაზი რვეულში და იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი შიგა კუთხეები.

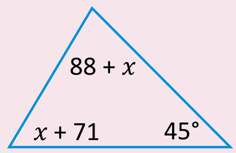
ა)



ბ)

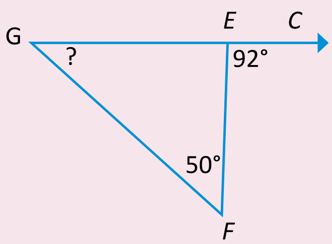


გ)

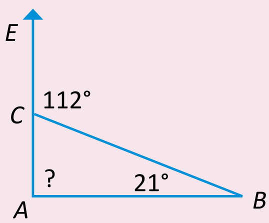


2. იპოვეთ x და უცნობი კუთხეები (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში).

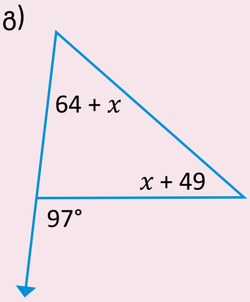
ა)



ბ)

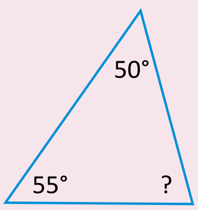


გ)

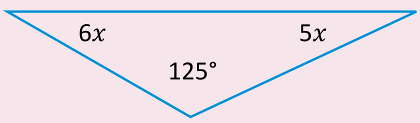


3. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები: (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში).

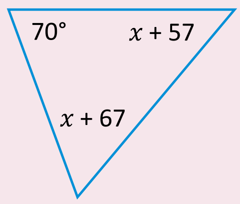
ა)



ბ)



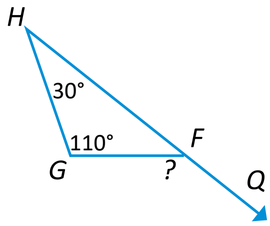
გ)



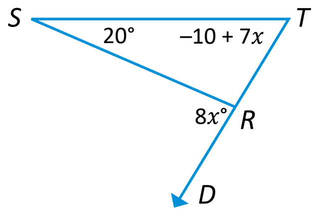
სავარჯიშოები

4. იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი კუთხეები და გარე კუთხე.

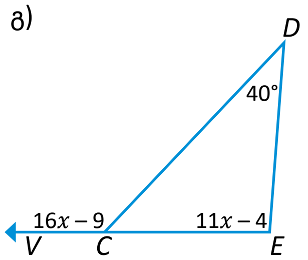
ა)



ბ)



გ)



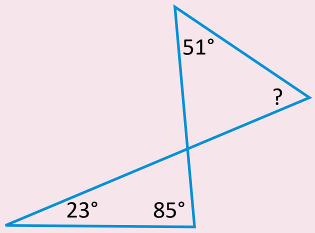
5. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც:

ა) 1:2:2; ბ) 3:3:4; გ) 1:2:3; დ) 1:1:2.

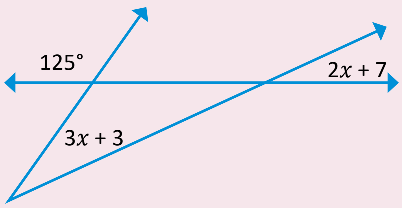
იპოვეთ კუთხეები ცალ-ცალკე და დაახასიათეთ თითოეული შემთხვევა. როგორია თითოეული სამკუთხედი კუთხეების მიხედვით?

6. იპოვეთ იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი კუთხეები (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში).

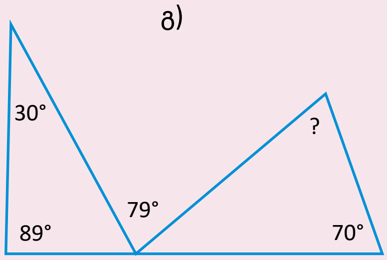
ა)



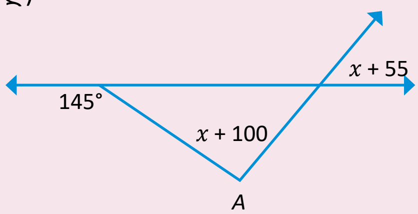
ბ)



გ)



დ)



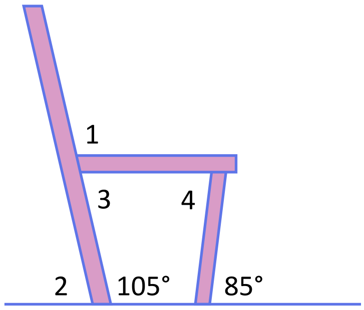
7. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხეა 50°. იპოვე სამკუთხედის მეორე მახვილი კუთხე.

გამოწვევა:

8. დაასაბუთეთ, რას უდრის სამკუთხედის სამივე გარე კუთხის ჯამი.

სავარჯიშოები

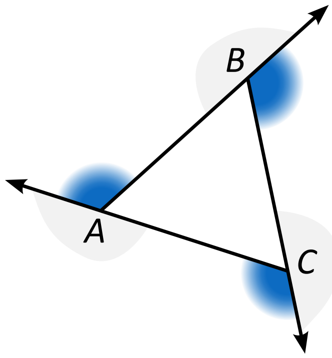
9. სკამის დასაჯდომი სიბრტყე იატაკის პარალელურია. ნახაზის მიხედვით, იპოვეთ კუთხეები.



გამოწვევა:

10. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2:3:4. იპოვეთ მოცემული სამკუთხდის გარე კუთხეები.

მინიშნება: თითო კუთხეს აქვს ორი გარე კუთხე, აიღეთ თითო წვეროსთან თითო გარე კუთხე.



1.6. კუთხეები სხვადასხვა სამკუთხედებში

კუთხეების მნიშვნელობა ძალიან დიდია არქიტექტურაში.

ლუვრის ეზოში არის პირამიდა, რომელსაც წინიდან თუ შევხედავთ, წახნაგი სამკუთხედი აქვს, რომელსაც გვერდები ტოლი აქვს. ასევე ეზოს დიზაინს თუ დავაკვირდებით დავინახავთ მახვილკუთხა სამკუთხედებს.

დავადგინოთ, არის თუ არა კავშირი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

სურათი 1.5. *ლუვრის ეზო*

კუთხეები ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედებში

ტოლფერდა ეწოდება სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი ტოლი აქვს.

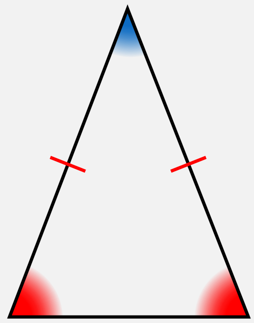
ტოლ გვერდებს **ფერდები** ეწოდება, მესამეს **ფუძე**

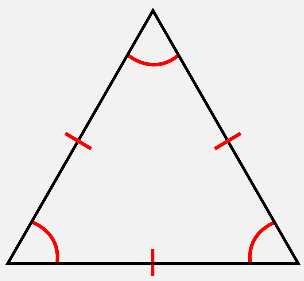
თეორემა:

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ტოლგვერდა ეწოდება სამკუთხედს, რომელსაც სამივე გვერდი ტოლი აქვთ.

ტოლგვერდა სამკუთხედში სამივე კუთხე ტოლია და უდრის 60° -ს.



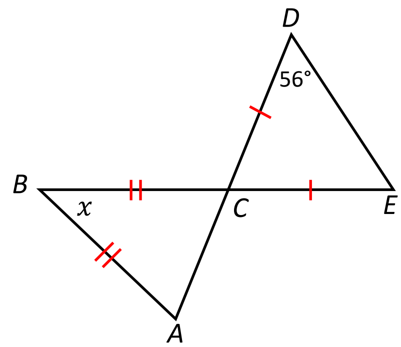


დაიმახსოვრეთ,

სამკუთხედები არის კუთხეების მიხედვით: **მართკუთხა, მახვილკუთხა, ბლაგვკუთხა.**

გვერდების მიხედვით: **ტოლფერდა, ტოლგვერდა, სხვადასხვაგვერდა.**

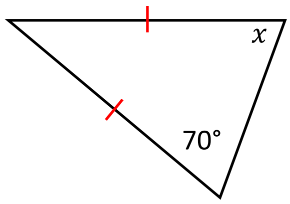
ნიმუში 1 – იპოვეთ x.

ა) ΔCDE ტოლფერდაა, რადგან ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია: $\angle D = \angle E = 56°$ $\angle DCE = 180° - 56° - 56° = 68°$	
ბ) ΔABC ტოლფერდაა, რადგან ვერტიკალური კუთხეები ტოლია: $\angle DCE = \angle BCA = 68°$ რადგან ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია. $\angle BCA = \angle A = 68°$ $\angle B = 180° - 68° - 68° = 44°$	

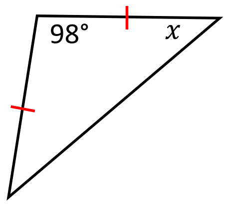
სავარჯიშოები

1. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში, დააწერეთ სამკუთხედის წვეროებს ასოები, ჩაწერეთ ტოლი გვერდები და იპოვეთ უცნობი კუთხე. (იგულისხმება, რომ კუთხეები იზომება გრადუსებით).

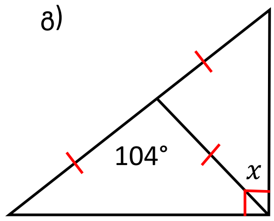
ა)



ბ)



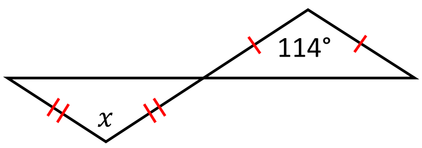
გ)



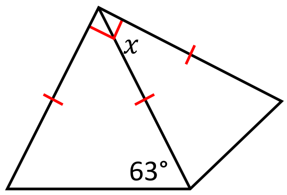
2. იპოვეთ x:

- დააწერეთ სამკუთხედის წვეროებს ასოები
- ამოწერეთ ტოლი გვერდები
- იპოვეთ სამკუთხედების ყველა კუთხე.

ა)



ბ)



3. **დაასაბუთეთ:** სამკუთხედის წვეროებია A, B, C. ვიცით, რომ AC⊥CB და AC = CB. ააგეთ სამკუთხედი და იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4. **დაასაბუთეთ:** რატომ არის ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა კუთხე 60°-ის ტოლი?

5. სამკუთხედის კუთხეებია 48° და 72°. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გარე კუთხის ზომა.

6. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე ორი კუთხის ჯამია 130°. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

7. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 15°-ით მეტია სამკუთხედის სხვა კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

8. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე ისე შეეფარდება სამკუთხედის სხვა კუთხეს, როგორც 5:8. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

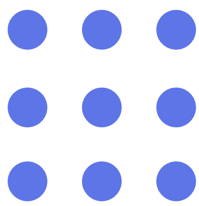
9. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხის გარე კუთხეა 110°. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

10. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხის გარე კუთხეა 36°. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

11. ვიზუალიზაცია:

ა) რამდენი ტოლფერდა სამკუთხედის მიღება შეიძლება წერტილების შეერთებით სხვადასხვა გზით?

ბ) რამდენი სხვადასხვა სამკუთხედის მიღება შეიძლება?



სავარჯიშოები

აქტივობა:

ნახაზზე მოცემულია მხატვარ აუგუსტ ჰერბინის ესკიზი. ის სიბრტყე-ზე ხატავდა გეომეტრიულ ფიგურებს და შემდეგ აფერადებდა.

მან შექმნა გეომეტრიული ნამუშევრების სერია „**გეომეტრიული აბსტრაქციები**":

ა) დაწერეთ, რომელ ფიგურებს ცნობთ?

ბ) გადაიხაზეთ ნახაზი ან ფურცელზე დახაზეთ ის გეომეტრიული ფიგურები, რომლებიც იცით და გააფერადეთ.

გ) ააგეთ კომპიუტერულ პროგრამაში PAINT– გეომეტრიული ფიგუ-რები და გემოვნებისამებრ ჩაასხით ფერები.

დ) შედით ვებ-გვერდზე 🔗 *Geogebra* და ააგეთ სხვადასხვა გეომე-ტრიული ობიექტის ნახაზები, დაწერეთ ობიექტების თვისებები.

12. ააგეთ ვენის დიაგრამა და წარმოადგინეთ სამკუთხედების კლასიფიკაცია.

13. დაწერეთ სამკუთხედებთან დაკავშირებული პირობის შემცველი წინადადებები, მაგალითად, თუ სამკუთხედს ტოლი გვერდები აქვს, მაშინ ის ტოლგვერდაა.

1.7.კუთხეები მრავალკუთხედში

ამერიკის შეერთებულ შტატებში ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი შენობაა პენტაგონი, რომლის სახელწოდებაც ნიშნავს **ხუთკუთხედს**.

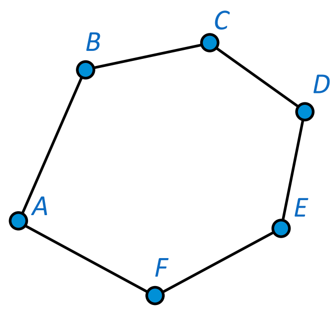
შენობას აქვს მრავალკუთხედის ფორმა, შედგება **ხუთი წვეროსაგან და ხუთი გვერდისაგან.**

სურათი 1.6. *პენტაგონის შენობა*

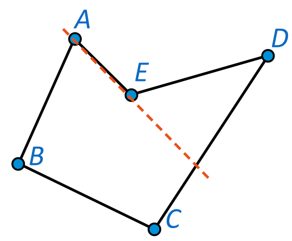
მრავალკუთხედი არის შეკრული ბრტყელი ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია სამი ან მეტი მონაკვეთისაგან. ამ მონაკვეთებს მრავალკუთხედის გვერდები ეწოდება. მრავალკუთხედის გვერდები ერთმანეთს არ კვეთს.

ამოზნექილი მრავალკუთხედი ეწოდება ისეთ მრავალკუთხედს, რომელიც მისი ნებისმიერი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს.

ამოზნექილი მრავალკუთხედის ნებისმიერ გვერდზე გავლებული წრფე სხვა გვერდს არ უნდა კვეთდეს.



არაამოზნექილი მრავალკუთხედი ეწოდება ისეთ მრავალკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფე სხვა გვერდს კვეთს.

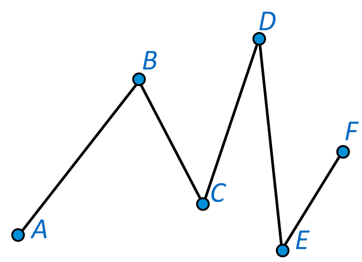


ტეხილი შედგება წერტილებისაგან და მათი მიმდევრობით შემაერთებელი მონაკვეთებისაგან.

ტეხილი ჩაიწერება წვეროებზე მოცემული ლათინური ასოებით: ABCDEF

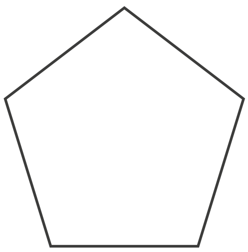
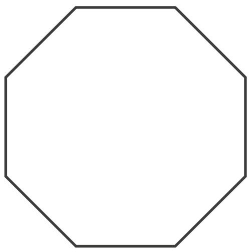
ტეხილი შეიძლება იყოს გახსნილი და შეკრული.

შეკრული ეწოდება ტეხილს, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილი ემთხვევა. მაგ.: მრავალკუთხედის საზღვარი შეკრული ტეხილია.



ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია, **წესიერი** მრავალკუთხედი ეწოდება.

მრავალკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით:

წესიერი პენტაგონი	წესიერი ოქტაგონი	მრავალკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით:
		(იხ. ცხრილი ქვემოთ)

გვერდების რაოდენობა	სახელი
3	სამკუთხედი
4	ოთხკუთხედი
5	პენტაგონი
6	ექვსკუთხედი
8	ოქტაგონი
10	დეკაგონი
12	დოდეკაგონი
n	n-კუთხედი

ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360°-ია.

თეორემა:

ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360°-ია.

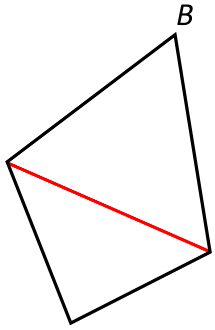
მოცემულობა:

მოცემულია: ABCD ოთხკუთხედი

დავამტკიცოთ, რომ

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

ერთ წრფეზე არამდებარე ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს დიაგონალი ეწოდება. AC დიაგონალია.



დამტკიცება

ABCD ოთხკუთხედი AC დიაგონალით გაყოფილია ორ სამკუთხედად,

თითოეულის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია.

ΔABC-ში ვიცით, რომ

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA = 180°$ **(1)**

ΔADC-ში ვიცით,რომ

$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180°$ **(2)**

ორი ტოლობის შეკრებით მივიღებთ:

$\angle CAB + \angle B + \angle BCA + \angle CAD + \angle D + \angle DCA =$
$= 180° + 180°$

$\angle CAB + \angle CAD = \angle A$

$\angle BCA + \angle DCA = \angle C$

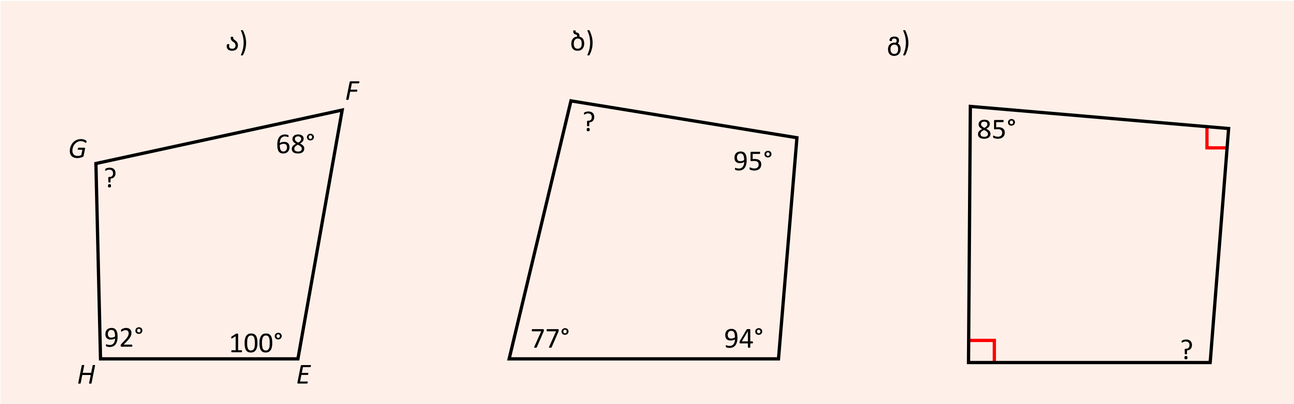
შევიტანოთ ტოლობაში აღნიშნული ინფორმაცია და მივიღებთ,რომ:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

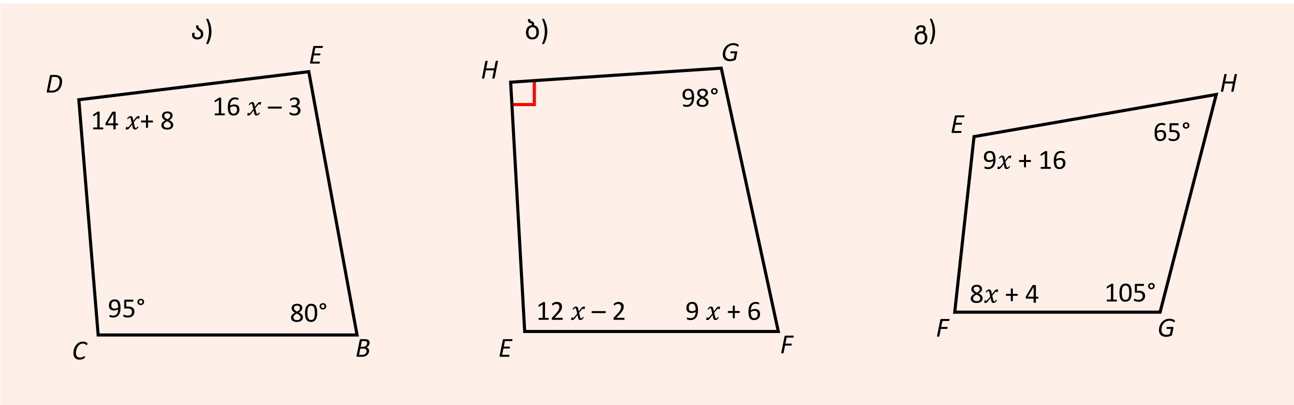
 რ.დ.გ.

სავარჯიშოები

1. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ ოთხკუთხედის უცნობი კუთხეები:

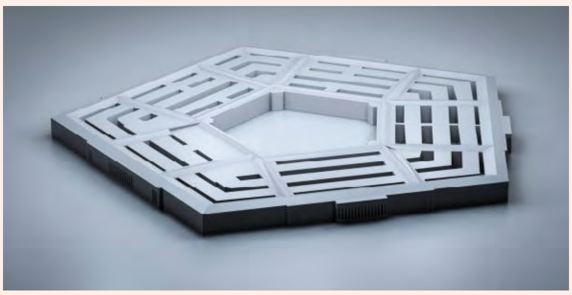


2. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x:

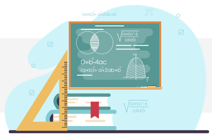


3. **იმსჯელეთ:** აღწერეთ პენტაგონის შენობის არქიტექტურა.

- როგორ დააპროექტა არქიტექტორმა შენობა? როგორი წრფეები გამოიყენა გეგმის შედგენისას?
- ხედავთ თუ არა პარალელურ შენობებს?
- რომელი შენობებია მართობული?



სავარჯიშოები

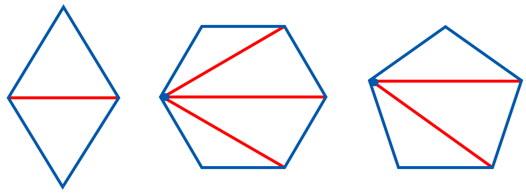


პროექტი, მათემატიკური LAB

ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი გამოითვლება ფორმულით $180^0 \cdot (n\text{-}2)$, სადაც n – მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობაა.

კვლევა:

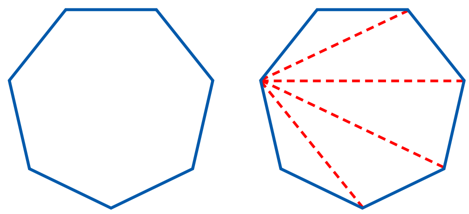
იპოვეთ ხუთკუთხედის, ექვსკუთხედის, შვიდკუთხედის შიგა კუთხების ჯამი.



ქვემოთ მოცემული ცხრილის მიხედვით, დაადგინეთ კანონზომიერება გვერდების რაოდენობასა და შიგა კუთხეების ჯამს შორის.

გვერდების რაოდენობა	რამდენი სამკუთხედი შედგა?	შიგა კუთხეების ჯამი
3	1	180
4		180 · ■ = ■
5		180 · ■ = ■

გვერდების რაოდენობა	რამდენი სამკუთხედი შედგა?	შიგა კუთხეების ჯამი
6		180 · ■ = ■
7		180 · ■ = ■
n		180 · ■ = ■



კიდევ სცადეთ

კვლევის შედეგების მიხედვით, დაადგინეთ:

- რის ტოლი იქნება წესიერი ხუთკუთხედის (პენტაგონის) თითოეული კუთხე?
- რის ტოლი იქნება წესიერი ოქტაგონის თითოეული კუთხე?
- თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 120°-ია, მაშინ რამდენი კუთხე აქვს მოცემულ n-კუთხედს?
- თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 135°-ია, მაშინ რამდენი კუთხე აქვს მოცემულ n-კუთხედს?

1.8. წრე, წრის ნაწილები, ცენტრალური კუთხე

ფოტოზე აღბეჭდილია „ეშმაკის ბორბალი“, რომელიც მდებარეობს ბათუმში. სურათიდან კარგად ჩანს, რომ „ეშმაკის ბორბალს" აქვს წრის ფორმა.

თუ კარგად დავაკვირდებით, დავინახავთ, რომ ბორბლის გარშემოწერილობა (რომელზედაც სკამებია დამაგრებული) თანაბრად არის დაშორებული ცენტრისაგან, რის გამოც ბორბალი გაწონასწორებულია.

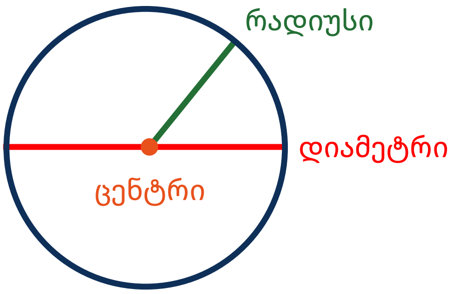
წრეწირი ეწოდება სიბრტყეზე მოცემული წერტილიდან თანაბრად დაშორებულ წერტილთა ერთობლიობას.

- მოცემულ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება.
- მონაკვეთს ცენტრიდან წრეწირის წერტილამდე – რადიუსი.
- წრეწირით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს წრე ეწოდება

რადიუსი აღინიშნება ლათინური ასოებით: R ან r

- წრეწირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს, რომელიც გადის ცენტრზე, დიამეტრი ეწოდება.

სურათი 1.7. *ეშმაკის ბორბალი*

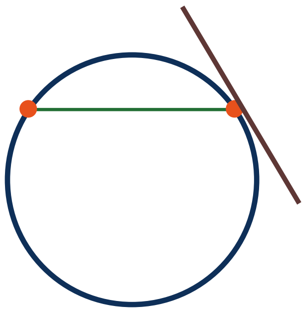


ქორდა წრეწირის ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთია.

დიამეტრიც უდიდესი ქორდაა და მისი სიგრძე ორი რადიუსის სიგრძის ტოლია.

$d = 2r$.

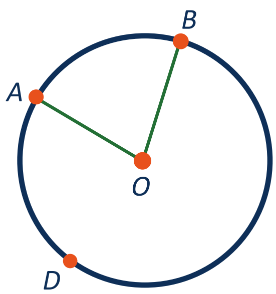
მხები ეწოდება წრფეს, რომელსაც წრესთან ერთი საერთო წერტილი აქვს.

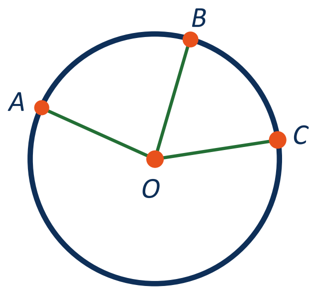
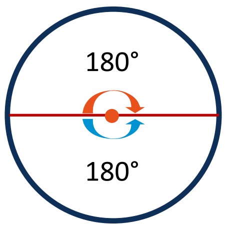


ცენტრალური კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის წვეროც წრის ცენტრს ემთხვევა.

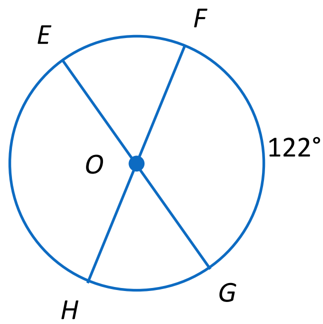
რკალი წრეწირის ორი წერტილის შემაერთებელი წირია და აღინიშნება $\overset{\frown}{AB}$.

ნახაზზე მოცემული $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ რკალები



წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა, მასზე დაყრდნობილი ცენტრალური კუთხის ზომის ტოლია, $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$ ორი რკალი ტოლია, თუ მათი შესაბამისი ცენტრალური კუთხეები ტოლია. **სექტორი** ცენტრალური კუთხის გვერდებს შორის მოქცეული წრის ნაწილია.	 თუ $\angle AOB = \angle BOC$, მაშინ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$
დიამეტრით წრე იყოფა ორ ნახევარწრედ. **წრიული კუთხე (სრული კუთხე) 360°-ია.**	

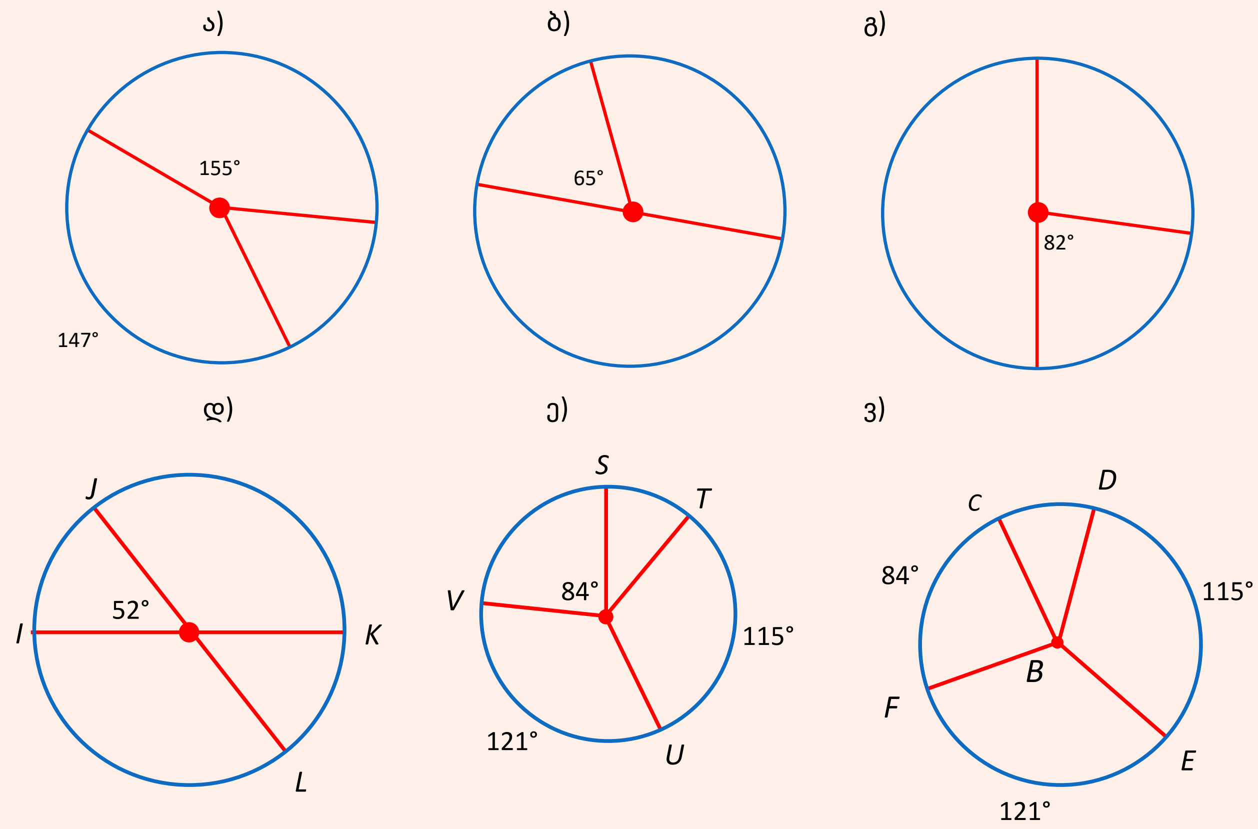
ნიმუში 1 – ცენტრალური კუთხეების და რკალის გრადუსული ზომის პოვნა

იპოვეთ თითოეული რკალის და შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა. $\angle FOG = \overset{\frown}{FG} = 122°$ $\angle FOG = \angle EOH = 122°$ ვერტიკალური კუთხეებია $\angle EOF = 180° - \angle FOG = 180° - 122° = 58°$ $\angle EOF = \angle GOH$	

ტერმინები:	
წრე	რადიუსი
ცენტრალური კუთხე	წრეწირი
დიამეტრი	რკალი

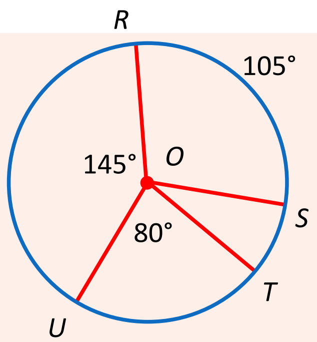
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ თითოეული ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.



2. მოცემული ნახაზის მიხედვით, უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

ა) იპოვეთ თითოეული ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.
ბ) დაწერეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.

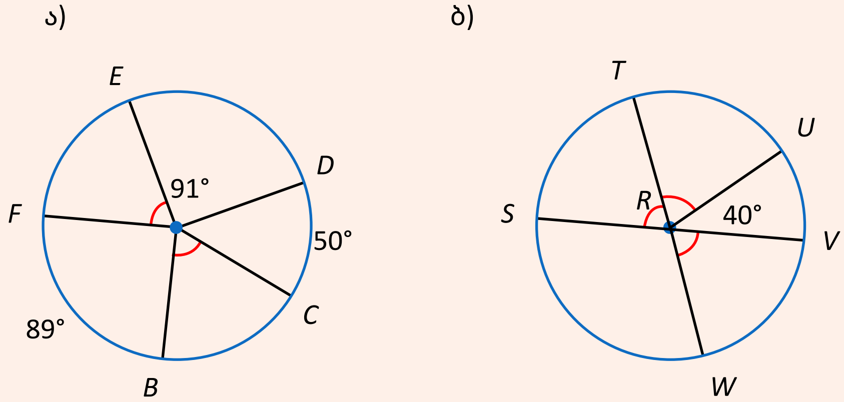


3. წრეწირი მასზე მდებარე A,B ,C წერტილებით იყოფა 3 რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც – 3:4:5. იპოვეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.

სავარჯიშოები

გამოწვევა:

4. იპოვეთ წრის უცნობი ცენტრალური კუთხეები და რკალის გრადუსული ზომები.



5. წრეწირი მასზე მდებარე A,B ,C წერტილებით იყოფა 3 რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც – 9:7:2. ააგეთ, რაც შეიძლება ზუსტი ნახაზი და იპოვეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.

6. **რეალური აპლიკაცია:**

ა) დაითვალეთ, სულ რამდენ სექტორად არის დაყოფილი ეშმაკის ბორბალი.

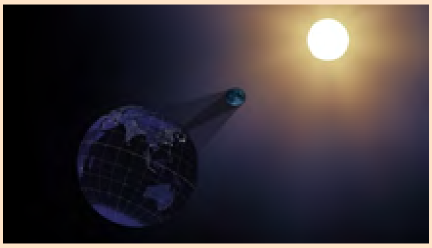
ბ) რა იქნება თითოეული სექტორის ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა?

7. **? სახალისო კითხვა:**

ბ) თუ პიცას დავყოფთ 8 ტოლ ნაჭრად, რა იქნება ერთი სექტორის (ნაჭრის) შესაბამისი ცენტრალური კუთხე?

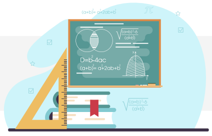
ეს საინტერესოა!

ჩვენ ვიცით, წრის გრადუსული ზომა არის 360°. ერთ-ერთი თეორიის თანახმად, წრის გრადუსულ ზომად მიჩნეულია 360° იმიტომ, რომ მოცემული რიცხვი ახლოს არის წელიწადში დღეების რაოდენობასთან. უძველესი ასტრონომები თვლიდნენ, რომ მზე თავის ორბიტაზე გადაადგილებას 360 დღეს ანდომებდა. ისინი თვლიდნენ, რომ მზე ყოველდღე ბრუნდავდა 1°-ით.



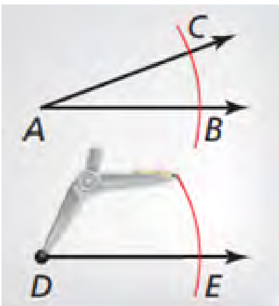
სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო



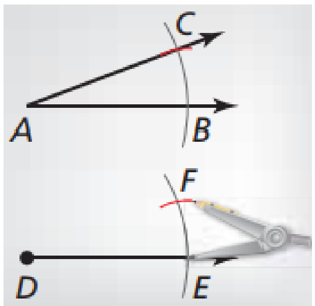
LAB მათემატიკური კვლევა

როგორ ავაგოთ კუთხის ტოლი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით? დახაზეთ ნებისმიერი მახვილი ან ბლაგვი კუთხე და ააგეთ მოცემული კუთხის ტოლი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით.



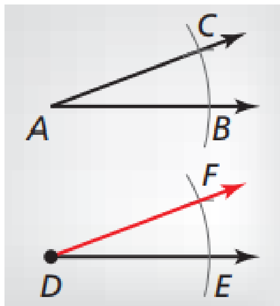
ნაბიჯი 1:

გავავლოთ სხივი და ფარგლის მეშვეობით სხივის სათავიდან მოვხაზოთ რკალი



ნაბიჯი 2:

ფარგლის მეშვეობით გავზომოთ B და C წერტილებს შორის მანძილი და E წერტილიდან მოვხაზოთ BC რადიუსის ტოლი რკალი



ნაბიჯი 3:

შევაერთოთ A წერტილი რკალების გადაკვეთის წერტილთან.

სავარჯიშოები

თავის შემაჯამებელი კითხვები

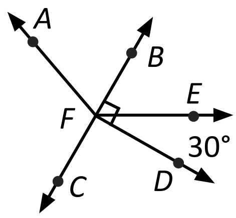
ტესტისთვის მზადება:

1. მოცემული ნახაზის მიხედვით, გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

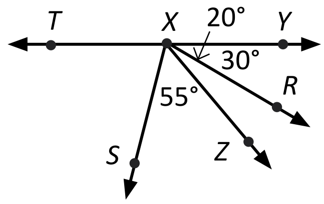
ამოწერეთ:

ა) მახვილი კუთხეები
ბ) ბლაგვი კუთხეები
გ) მართი კუთხეები
დ) რას უდრის ∠EFB ∠EFC?
ე) რომელია მოსაზღვრე კუთხეები?

ნახაზი 1:

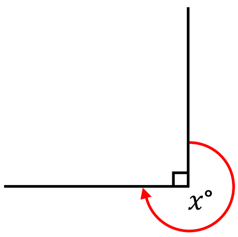


ნახაზი 2.

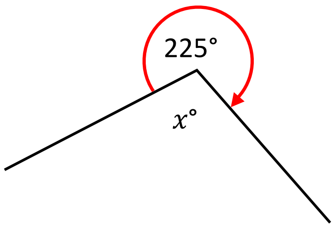


2. გაიხსენეთ, რას ეწოდება სრული კუთხე და იპოვეთ $x°$.

ა)

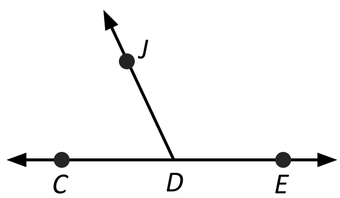


ბ)



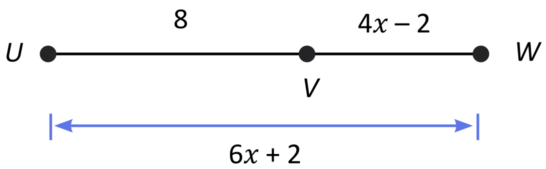
3. იპოვეთ:

ა) ∠JDC, თუ ∠JDE = 115°
ბ) ∠JDE, თუ ∠JDC = 62°
გ) თითოეული კუთხე თუ ∠JDC : ∠JDE = 4 : 5

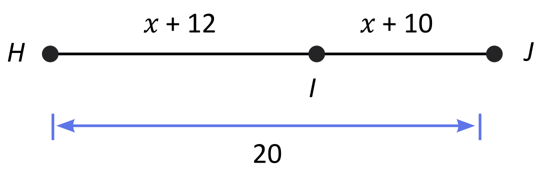


4. იპოვეთ თითოეული მონაკვეთის სიგრძე.

ა)



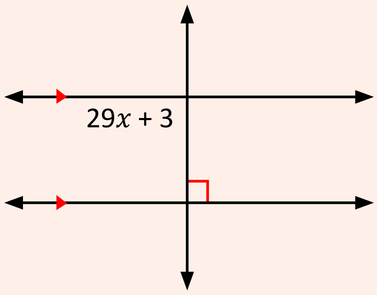
ბ)



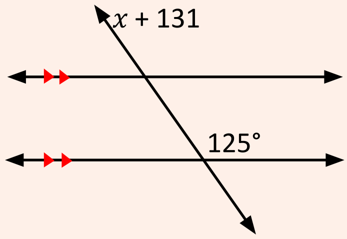
სავარჯიშოები

4. მოცემული ნახაზების მიხედვით იპოვეთ x

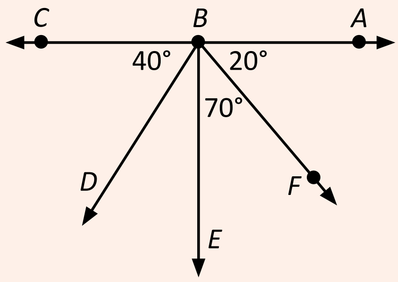
ა)



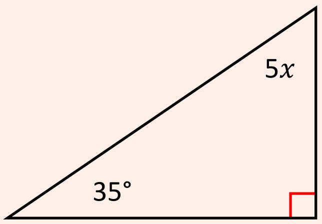
ბ)



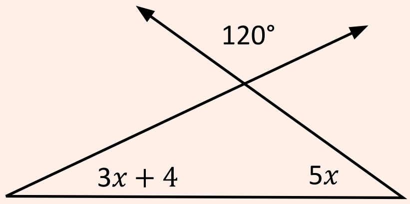
გ)



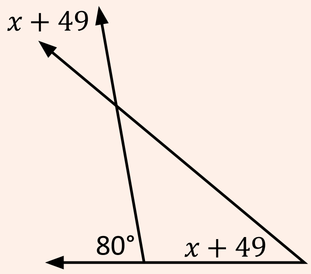
დ)



ე)

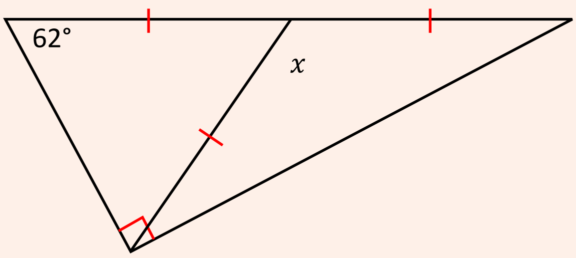


ვ)

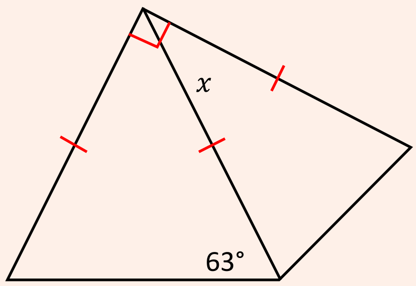


5. რთული ამოცანები:

ზ)



თ)



6. **ააგეთ ნახაზები და ამოხსენით ამოცანები:**

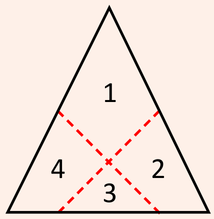
   1. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AB = 12 სმ, BC = 18 სმ. იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.
   2. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AC = 9.5 სმ, BC = 4 სმ. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა, წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.
   3. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AB : BC = 3 : 8 იპოვეთ თითოეული მონაკვეთის სიგრძე, თუ AC = 4.4 სმ. განიხილეთ ორი შემთხვევა წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.
   4. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AC : CB = 5 : 7. იპოვეთ თითოეული მონაკვეთის სიგრძე, თუ AB = 36 სმ. განიხილეთ ორი შემთხვევა წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.

სავარჯიშოები

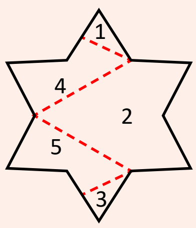
5. დაადგინეთ, მდებარეობს თუ არა A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე, თუ AB = 4 სმ, BC = 9 სმ, AC = 20 სმ. დაასაბუთეთ პასუხი.
6. $\angle AOC = 80°$ $\angle COB = 30°$ იპოვეთ $\angle AOB$-ს გრადუსული ზომა, განიხილეთ ყველა შესაძლო ვარიანტი.
7. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 80°-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
8. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებულ 3 კუთხის ჯამი 300°-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
9. მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{3}$ -ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
10. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{2}$ -ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
11. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 35°-ია. იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
12. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე 80°-ია. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე კუთხე.
13. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 50°-ია, იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები. დაასაბუთეთ, რომელი გარე კუთხე უნდა ავიღოთ?
14. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2, იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

სახალისო ამოცანები

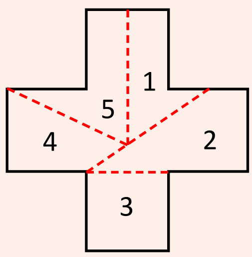
ა) დაკეცეთ ტოლგვერდა სამკუთხედი ისე, რომ მიიღოთ კვადრატი.



ბ) დაკეცეთ ვარსკვლავის ფორმის ფიგურა ისე, რომ მიიღოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი.



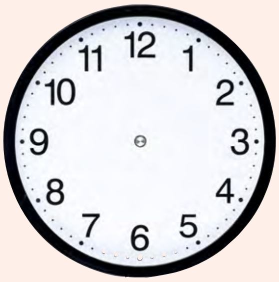
გ) დაკეცეთ ფიგურა ისე, რომ მიიღოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი.



სავარჯიშოები

დ) მოცემულია საათი:

- იპოვეთ კუთხე საათის დიდ და პატარა ისრებს შორის, როდესაც 1:00 სთ-ია.
- იპოვეთ კუთხე საათის დიდ და პატარა ისრებს შორის, როდესაც 12:24 სთ-ია.



ჯგუფური აქტივობა

1770 წელს მათემატიკოსმა ლაგრანჟმა ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა თეორემა, რომელსაც „ოთხი კვადრატის თეორემა" ეწოდება.

თეორემა:

ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ, როგორც ოთხი რიცხვის კვადრატის ჯამი.

მაგალითად:

$35 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$

$11 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$

I. დაიყავით წყვილებად და შემდეგი ოთხი რიცხვიდან:

ა) 17 ბ) 30 გ) 43 დ) 103

თითეოული წარმოადგინეთ ოთხი რიცხვის კვადრატის სახით.

ლაგრანჟი

ნებისმიერი ნატურალური n

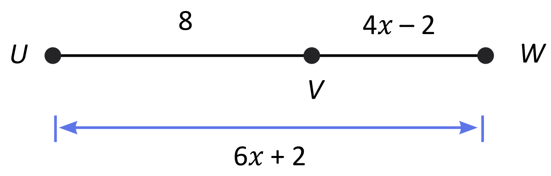
$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

II. დაწერეთ რაიმე ორნიშნა რიცხვი და წარმოადგინეთ იგი ოთხი რიცხვის კვადრატის ჯამის სახით.

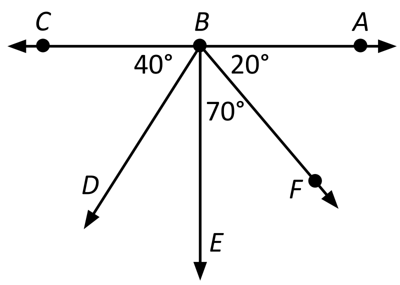
საავარჯიშოები

ტესტის ნიმუში:

1. იპოვეთ უცნობი გვერდი:



2. იპოვეთ უცნობი კუთხე:



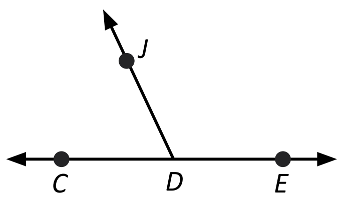
3. იპოვეთ:

ა) ∠JDC, თუ ∠JDE = 115°

ბ) ∠JDE, თუ ∠JDC = 62°

გ) თითოეული კუთხე თუ

∠JDC : ∠JDE = 4 : 5

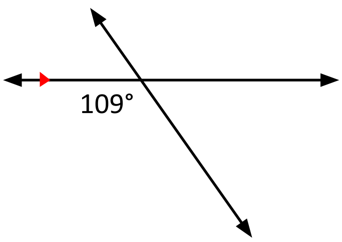


4. წრფეზე მდებარეობს A,B,C წერტილები ისე, რომ AB = 12 სმ, BC = 14სმ. იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა, წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.

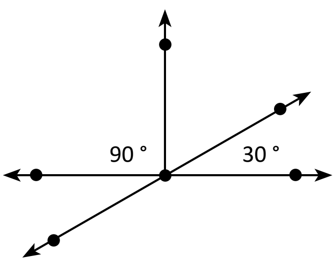
5. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებულ 3 კუთხის ჯამი 210°-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.

6. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან ერთი-ერთი 109°-ია,

იპოვეთ დანარჩენი სამი კუთხე.



7. იპოვეთ უცნობი კუთხეები:



თეორემები

1. თუ ორი წრფე იკვეთება, მაშინ მათ აქვთ გადაკვეთის (საერთო) ერთადერთი წერტილი.

2. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

3. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.

4. ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

აქსიომები (პოსტულატები)

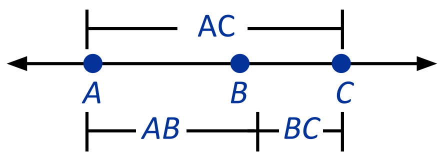
1. ყოველი წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ამ წრფეს და წერტილები, რომლებიც არ ეკუთვნის წრფეს.

2. ყოველ ორ წერტილზე გადის წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი

3. წრფეზე მდებარე სამი წერტილიდან მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

მონაკვეთის სიგრძე ყოველთვის დადებითია.

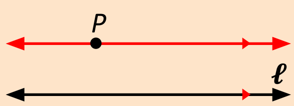
4. მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთის სიგრძეთა ჯამს, რომლითაც იგი იყოფა ნებისმიერი წერტილით.



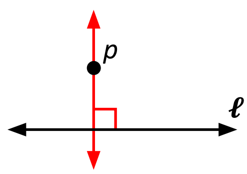
5. ყოველ კუთხეს დადებითი გრადუსული ზომა აქვს. გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომა 180°-ია.

6. ყოველი სხივიდან, მოცემულ ნახევარ-სიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები, მოცემული სიდიდის კუთხე და მასთან მხოლოდ ერთი.

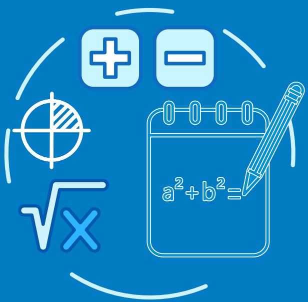
7. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს წრფის პარალელური წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.



8. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს წრფის მართობული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.



დავალების წარდგენა



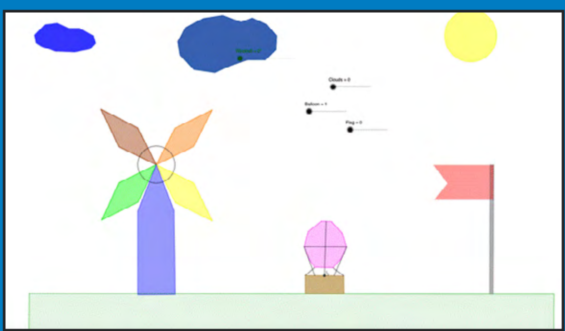
ტელეფონები და კომპიუტერები ჩვენი ყოველდღიური ცხოვრების განუყოფელ ნაწილად იქცა. ბევრ ახალგაზრდას და ზრდასრულს უყვარს ფოტოების გადაღება და დამუშავება.

მობილურებში, ალბათ, გინახავთ სპეციალური აპლიკაციები, რომლებიც ფოტოს გადიდების და დაპატარავების შესაძლებლობას იძლევა, ასევე, სხვადასხვა მიმართულებით მობრუნების შესაძლებლობას.

აღნიშნულ ქმედებებს მათემატიკაში **გარდაქმნები** ეწოდება.

როდესაც პროგრამისტები ქმნიან სპეციალურ აპლიკაციებს, ისინი იყენებენ შესაბამის ცოდნას მათემატიკიდან.

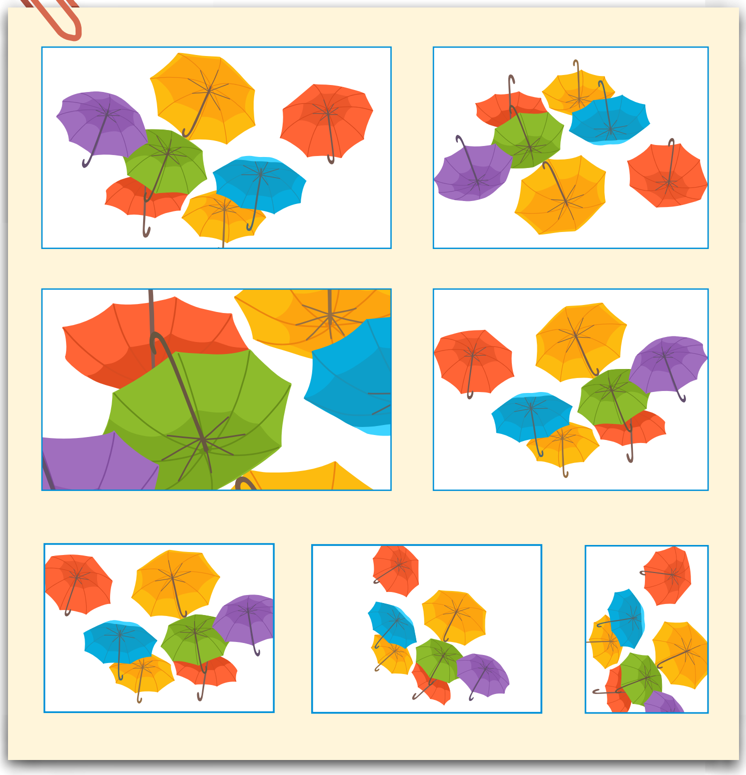
მითითება: რეკომენდებულია მოცემული პარაგრაფის სწავლების ჯგუფური სამუშაოს ორგანიზება საკლასო ოთახში/აუდიტორიაში.



Geogebra სიმულაცია

კომპლექსური დავალება

გარდაქმნებთან დაკავშირებული კომპლექსური დავალება



თქვენი დავალება

შედით ვებ-გვერდზე www.geogebra.org და ახსენით თითოეული გარდაქმნა; შექმენით მსგავსი სიმულაცია, მაკეტი ან თამაში

დავალების წარდგენისას ისაუბრეთ:

- როგორ დაგეხმარათ გარდაქმნების ცოდნა ყოველდღიურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენების მათემატიკურ მოდელებთან დაკავშირებაში?
- რა ტიპის კანონზომიერებას ხედავთ თითოეული გარდაქმნის დროს?
- ისაუბრეთ გარდაქმნების მნიშვნელობაზე გეომეტრიაში თეორემების დამტკიცების დროს; რომელი თეორემის დამტკიცებისას გამოიყენება გარდაქმნები?

თავი 2. გარდაქმნები, სამკუთხედების ტოლობა და მსგავსება

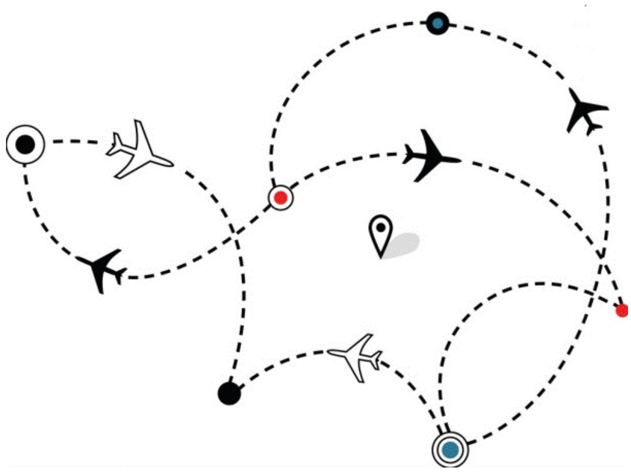
2.1.პარალელური გადატანა

სივრცეში გადაადგილებისას, თვითმფრინავის ყველა წერტილი ერთდროულად გადაადგილდება.

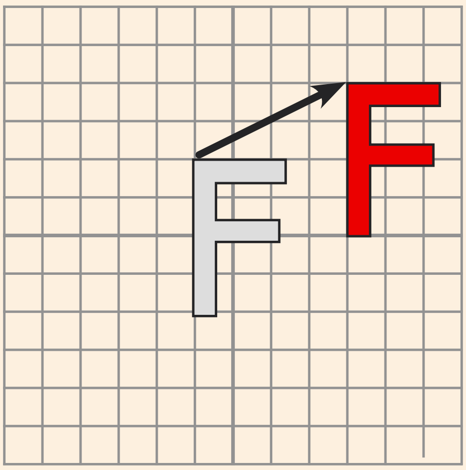
ნახაზზე ვხედავთ, რომ თვითმფრინავი შეიძლება მოძრაობდეს სხვადასხვა წესით.

გარდაქმნა ეწოდება ობიექტის პოზიციის ან ფორმის ცვლილებას.

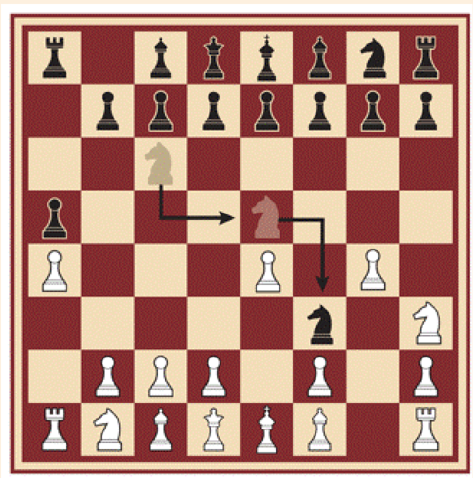
გარდაქმნის სახეებია: პარალელური გადატანა, ღერძული სიმეტრია, მობრუნება, არეკვლა. განვიხილოთ პარალელური გადატანა.



პარალელური გადატანის დროს ფიგურის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ ერთნაირად.



შეიძლება მოძრაობდეს მარჯვნივ, მარცხნივ, დაბლა და მაღლა, ან სხვა მიმართულებით, მაგრამ ობიექტის ყოველი წერტილი უნდა მოძრაობდეს ერთდროულად და ერთი მიმართულებით.



დავუშვათ, პარალელური გადატანა ხდება საკოორდინატო სიბრტყეზე, დავადგინოთ ამ პარალელური გადატანის დროს როგორ იცვლება წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები:

წერტილის მოძრაობის ტიპი:	კოორდინატებში გამოსახვა, როგორც:
▪ a – ერთეულით მოძრაობა მარჯვნივ	$(x; y) \to (x + a; y)$
▪ a – ერთეულით მოძრაობა მარცხნივ	$(x; y) \to (x - a; y)$
▪ b – ერთეულით მოძრაობა ზევით	$(x; y) \to (x; y + b)$
▪ B – ერთეულით მოძრაობა ქვევით	$(x; y) \to (x; y - b)$

კავშირი სამკუთხედების ტოლობის ნიშნებთან

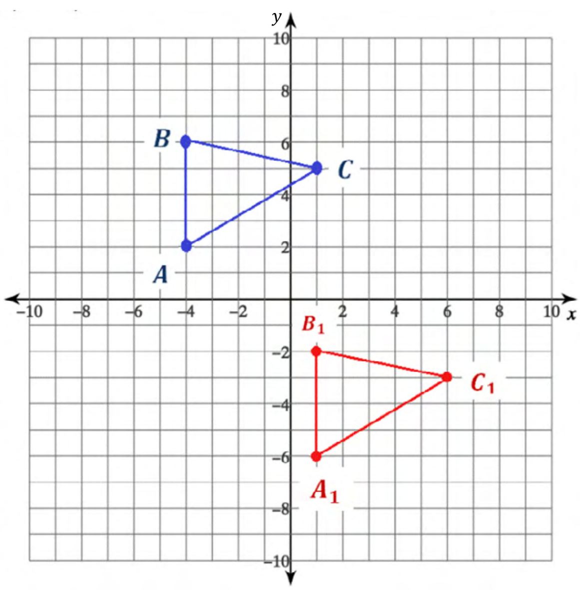
ნიმუში 1 – მონაკვეთი, სხივი

მოცემული ΔABC გადაიტანეთ პარალელურად 8 ერთეულით დაბლა და 5 ერთეულით მარჯვნივ.

მოცემული სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია:
A(–4; 2); B(–4 ;6); C(1;5)

შევცვალოთ წერტილის კოორდინატები წესის მიხედვით:

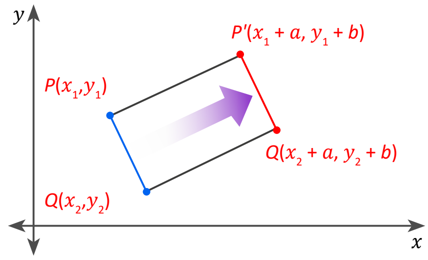
8 ერთეულით დაბლა 5 ერთეულით მარჯვნივ	ახალი წერტილი
A (–4; 2) → (–4 + 5; 2 – 8) B (–4; 6) → (–4 + 5; 6 – 8) C (1; 5) → (1 + 5; 5 – 8)	A_1 (1; –6) B_1 (1; –2) C_1 (6; –3)



პარალელური გადატანის დროს ABC სამკუთხედი ავსახეთ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედში, ABC-ს ეწოდება ***წინა-სახე***, $A_1\ B_1\ C_1$ სამკუთხედს ***სახე***.

პარალელური გადატანის დროს ფიგურის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ.

შესაბამისად, PQ მონაკვეთის ყოველი წერტილი აისახა $P_1 Q_1$ მონაკვეთში.



ღერძული სიმეტრია

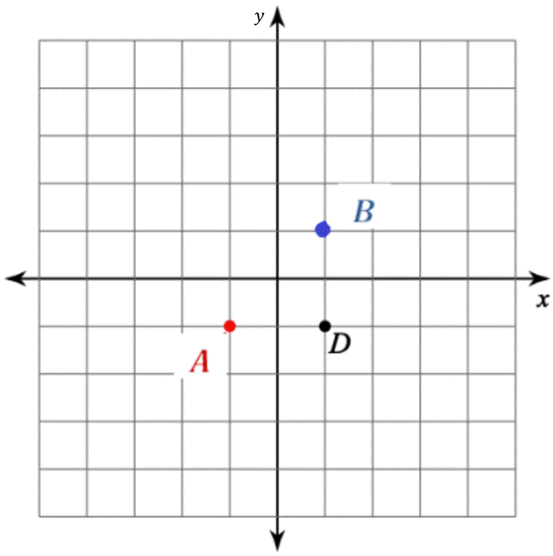
ობიექტი სივრცესა და სიბრტყეზე შეიძლება გადაადგილდებოდეს სხვადასხვა წესით.

ღერძული სიმეტრია ასახავს ობიექტს რაიმე წრფის, ანუ სიმეტრიის ღერძის მიმართ. ღერძულ სიმეტრიას, ხშირად, არეკვლასაც ეძახიან.

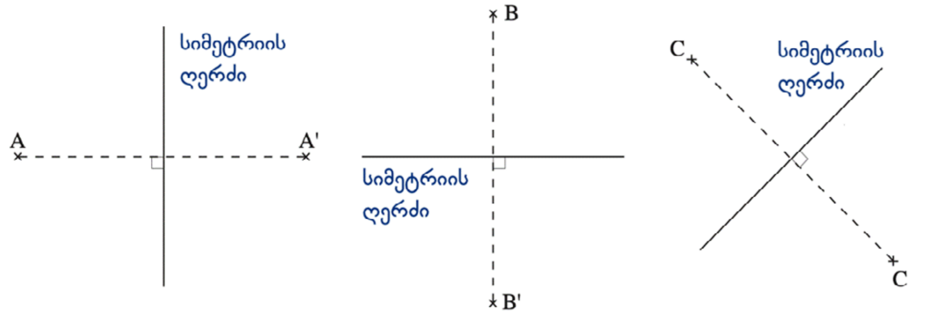
სიმეტრია ბერძნული სიტყვაა და პროპორციულობას, ნაწილების განლაგების ერთნაირობას ნიშნავს.

ორ წერტილს ეწოდება x ღერძის მიმართ სიმეტრიული, თუ ისინი x ღერძიდან თანაბრად დაშორებულია და მათი შემაერთებელი მონაკვეთი x-ის მართობულია.

ორ წერტილს ეწოდება y ღერძის მიმართ სიმეტრიული, თუ ისინი y ღერძიდან თანაბრად დაშორებულია და მათი შემაერთებელი მონაკვეთი y-ის მართობულია.
B და D წერტილები x ღერძის მიმართ სიმეტრიულია.
A და D წერტილები y ღერძის მიმართ სიმეტრიულია.



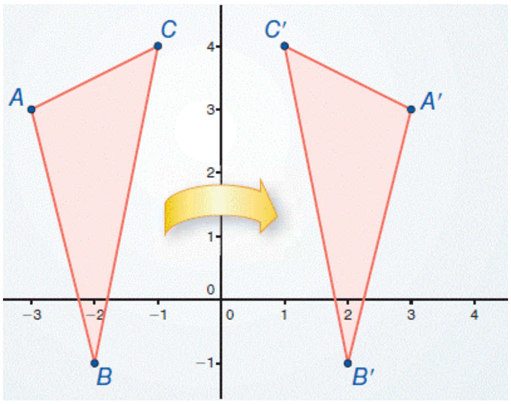
x და y ღერძის მიმართ სიმეტრიული ასახვა	კოორდინატებში გამოისახება, როგორც:
▪ როდესაც წერტილი x – ღერძის მიმართ სიმეტრიულია, იცვლება მისი y კოორდინატი მოპირდაპირე ნიშნით	$(x; y) \rightarrow (x; -y)$
▪ როდესაც წერტილი y – ღერძის მიმართ სიმეტრიულია, იცვლება მისი x კოორდინატი მოპირდაპირე ნიშნით	$(x; y) \rightarrow (-x; y)$

შესაძლებელია ობიექტი ასახული იყოს სხვა ღერძის მიმართ	

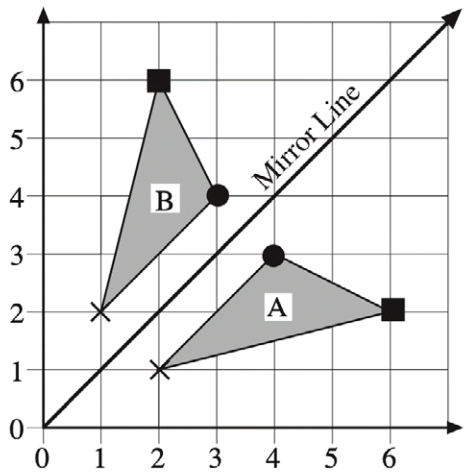
ღერძული სიმეტრიის დროს ობიექტი აისახება სიმეტრიის ღერძის მიმართ.

ასევე, შესაძლებელია, რომ x ან y ღერძები თავად წარმოადგენდნენ სიმეტრიის ღერძებს.

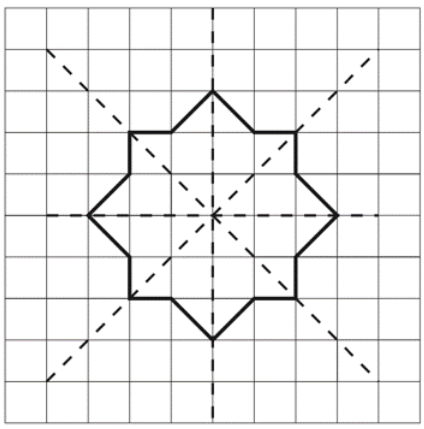
შესაძლებელია, ობიექტი იყოს ასახული სხვა ღერძის მიმართ.



მოცემული ნიმუშის მიხედვით, A ფიგურა აისახა B ფიგურაში $y = x$ წრფის მიმართ



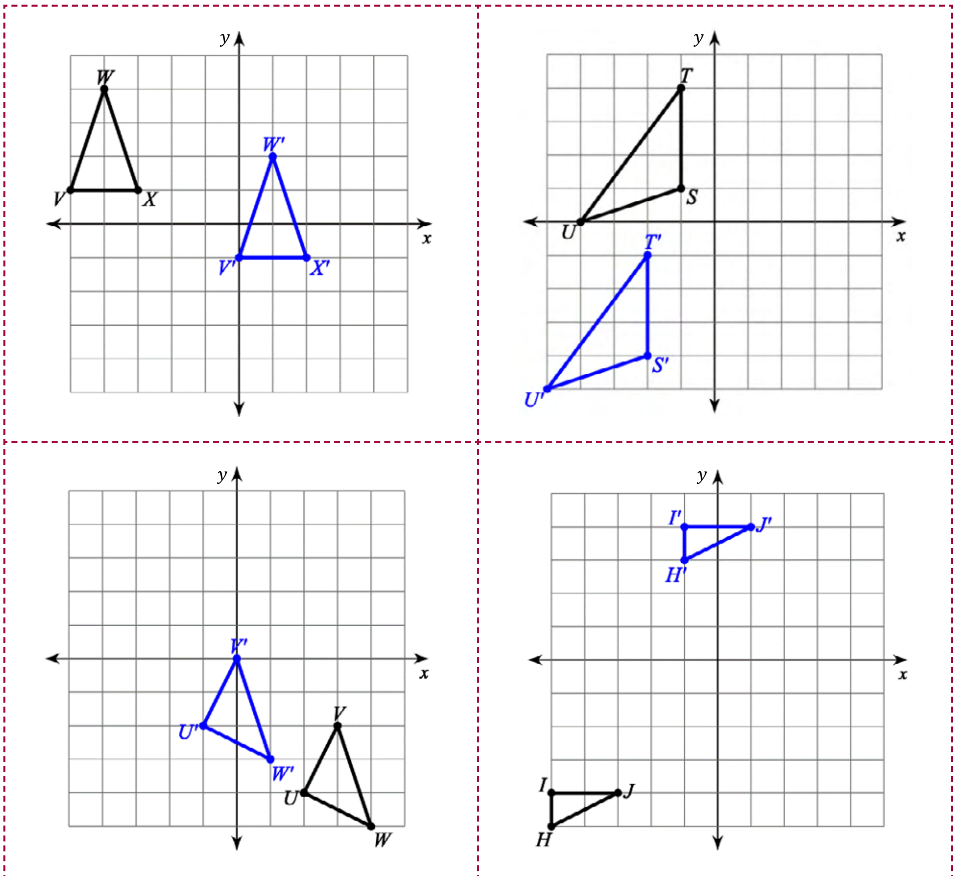
მოცემული ნიმუშის მიხედვით, ფიგურას აქვს 4 სიმეტრიის ღერძი.



სავარჯიშოები

1. დაწერეთ, რა წესით მოხდა მოცემული სამკუთხედების პარალელური გადატანა?

- დაასახელეთ რომელია სახე და რომელი წინასახე;
- შეიცვალა თუ არა სამკუთხედმა ზომა? ფორმა?



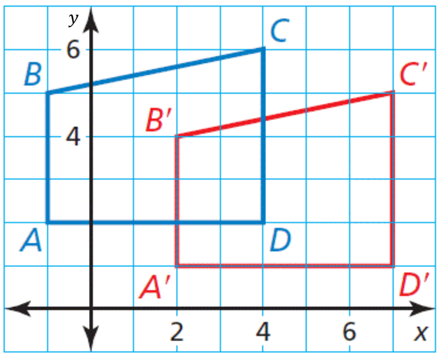
2. აღწერეთ პარალელური გადატანის წესი:

ა) $A(-1;2) \to A_1(4; -2)$; გ) $C(3; 4) \to C_1(-4; 5)$;

ბ) $B(8; -2) \to B_1(1; -5)$; დ) $D(-2; -1) \to B_1(-6; -3)$.

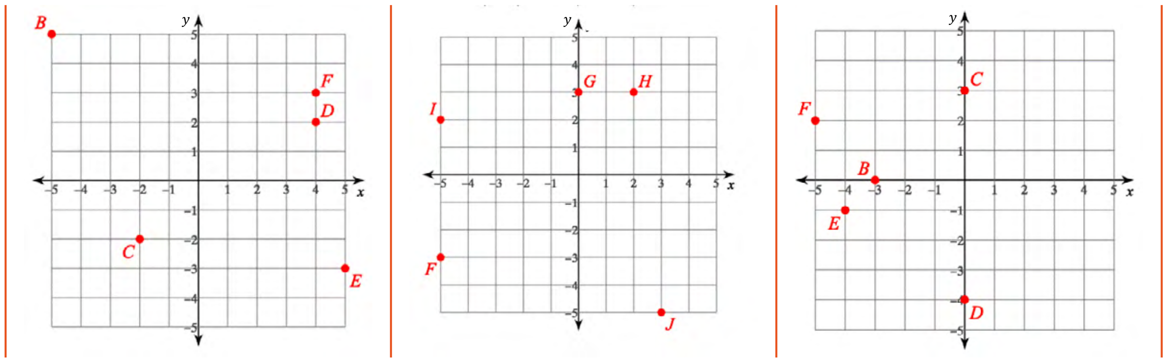
3. **იმსჯელეთ:**

$ABCD$ აისახა $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ ოთხკუთხედში, აღწერეთ პარალელური გადატანის წესი და ჩაწერეთ მოკლედ.

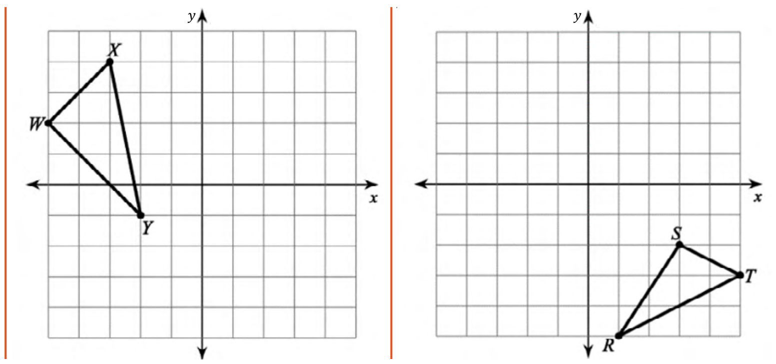


სავარჯიშოები

4. იპოვეთ შემდეგი წერტილების სიმეტრიული წერტილები x და y ღერძების მიმართ.



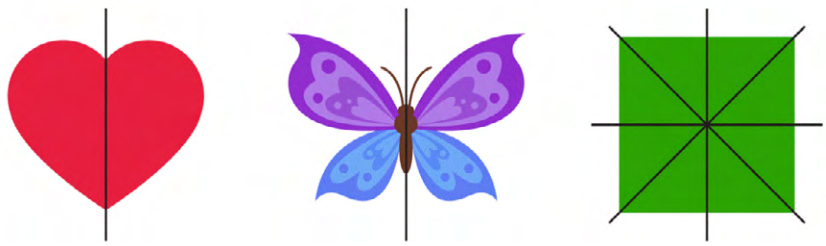
5. ააგეთ მოცემული სამკუთხედის სიმეტრიული ჯერ X ღერძის, ხოლო შემდეგ – Y ღერძის მიმართ. გადაიხაზეთ მოცემული ნახაზი და იმუშავეთ რვეულში.



შეცდომის ანალიზი!

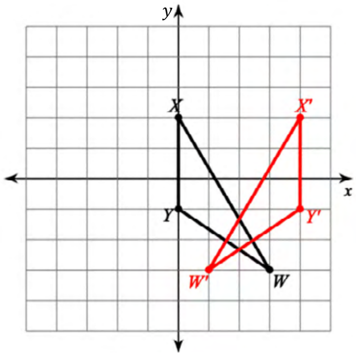
6. მოსწავლემ აგების გარეშე დაწერა ΔABC-ს Y ღერძის მიმართ სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები. რა შეცდომა დაუშვა მან, თუ სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია A(–4;2), B(–4;6), C(1;5), ხოლო მისი ვარაუდით Y ღერძის მიმართ სიმეტრიულის კოორდინატებია: (4;–2), (4;–6), (–1;–5)?

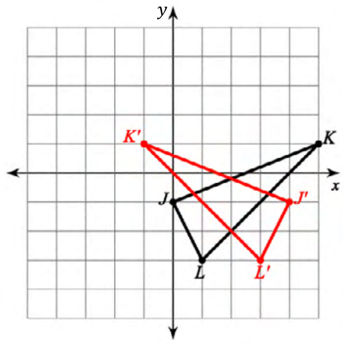
7. რას ნიშნავს სიმეტრიის ღერძი? რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს თითოეულ ობიექტს? იმსჯელე თითოეულზე.



სავარჯიშოები

8. **გამოწვევა:** მოცემული ნახაზის მიხედვით, ააგეთ წრფე, რომლის მიმართაც შეიძლება იყოს ფიგურა სიმეტრიული (იმუშავეთ რვეულში).



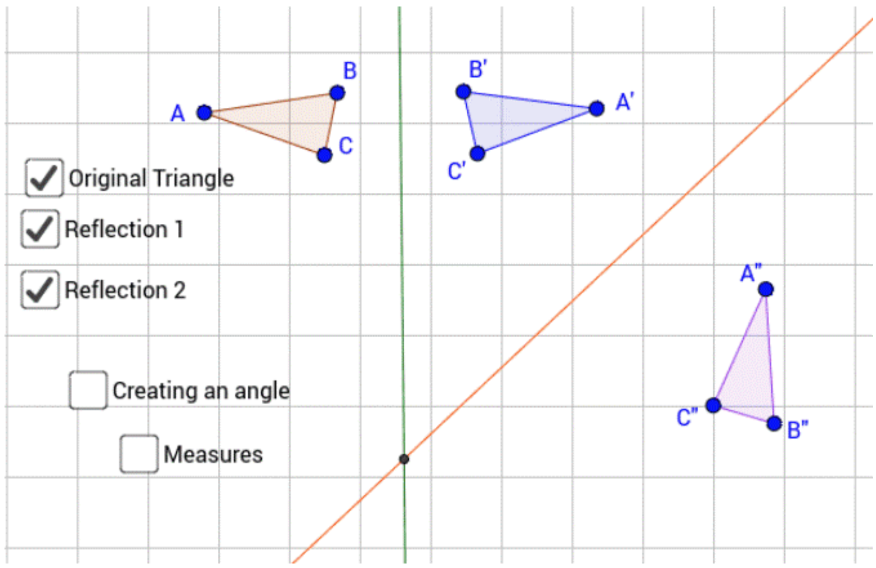


MATH Lab

9. Math Lab შედით საიტზე www.geogebra.org/calculator

დახაზეთ თქვენთვის სასურველი ფიგურა
- ააგეთ მოცემული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურა ღერძების მიმართ;
- გადაიტანეთ პარალელურად ფიგურა და აღწერეთ წესი.

იხილეთ ნიმუში



2.2. სამკუთხედების ტოლობა

სამკუთხედების ტოლობის ნიშნების დასაბუთება გარდაქმნებით

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად გვინახავს ორი ერთნაირი მანქანა თუ საგანი.

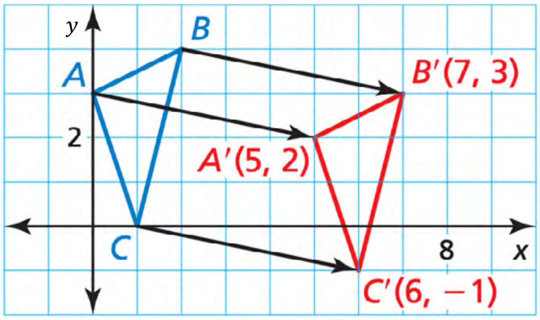
- *რას ნიშნავს ორი ტოლი ფიგურა?*

ფიგურებს ეწოდებათ ტოლი, თუ პარალელური გადატანით ერთი მათგანი აისახება მეორეში;

ნახ.1 და ნახ.2-ით მოცემული ფიგურები ტოლია;

რადგან ლურჯი ფერით მოცემული ფიგურა არის წინასახე(pre-image), ხოლო წითელი ფერით მოცემული ფიგურა სახე (image);

ვამბობთ, რომ პარალელური გადატანით ერთი ფიგურა აისახა მეორეში.



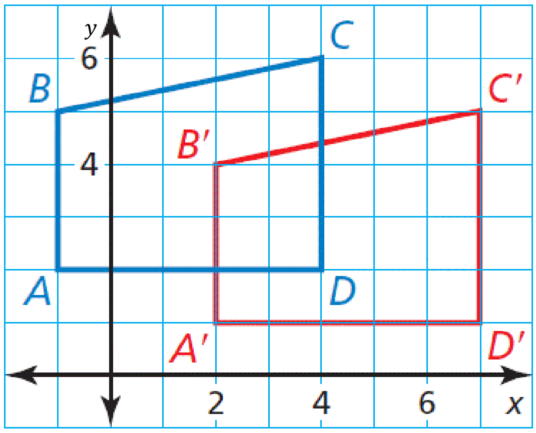
ნახატი 1

საკვანძო კითხვა: რას ნიშნავს, რომ ორი სამკუთხედი ტოლია?

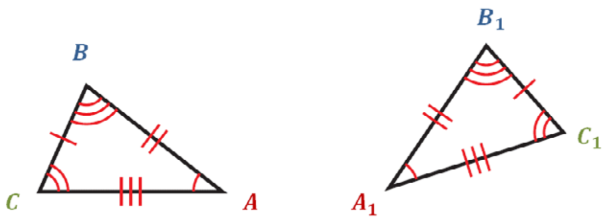
ორ სამკუთხედზე ვიტყვით ტოლია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები და შესაბამისი კუთხეები ერთმანეთის ტოლია. ეს ტოლობის აუცილებელი პირობაა.

ორი მრავალკუთხედი ტოლია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები და კუთხეები ტოლია.

მითითება: შესაბამისი ნიშნავს, რომ დიდი გვერდი დიდი გვერდის ტოლია, მცირე-მცირის და ა.შ.



ნახატი 2

მოცემული სამკუთხედები ტოლია: $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$	შესაბამისი კუთხეები ტოლია	შესაბამისი გვერდები ტოლია
	$\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = C_1$	$AB = A_1 B_1$ $AC = A_1 C_1$ $BC = B_1 C_1$

ჩვენ განვიხილეთ ფიგურათა გარდაქმნები სიბრტყეზე: ვისაუბრეთ პარალელურ გადატანასა და სიმეტრიაზე; დავასაბუთოთ სამკუთხედების ტოლობა კოორდინატებით.

ნიმუში 1 – კომპოზიცია

განვიხილოთ სამკუთხედი ΔABC

- გადავიტანოთ პარალელურად ΔABC და ავსახოთ სამკუთხედში $\Delta A_1 B_1 C_1$
- ავაგოთ სამკუთხედი $\Delta A_1 B_1 C_1$-ის სიმეტრიული Ox ღერძის მიმართ

განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე სამკუთხედი ΔABC, რომლის წვეროს კოორდინატებია A(3; 2); B(6;3); C(7;1)

ა) გადაიტანეთ მოცემული სამკუთხედი პარალელურად Ox ღერძის გასწვრივ 12 ერთეულით მარცხნივ;

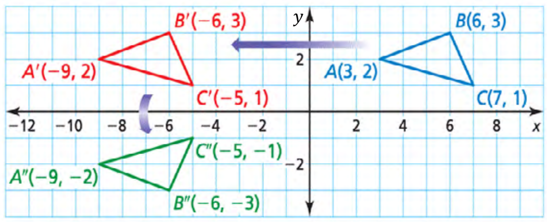
ბ) ააგეთ მიღებული სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედი Ox ღერძის მიმართ.

ა) ΔABC პარალელური გადატანით Ox ღერძის გასწვრივ მარცხნივ 12 ერთეულით შედეგად, მოხდა სამკუთხედის ყოველი წერტილის ასახვა $\Delta A_1 B_1 C_1$; პარალელური გადატანის შედეგად მოხდება ΔABC-ის ყოველი წერტილის ასახვა $\Delta_1 B_1 C_1$-ში შემდეგი წესით:

$(x; y) \to (x-12; y)$

გამომდინარე იქიდან, რომ პარალელური გადატანის დროს არ იცვლება ფორმა და ზომა, მივიღებთ, რომ

$\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$



ბ) ავაგოთ $\Delta A_1 B_1 C_1$-ის სიმეტრიული Ox ღერძის მიმართ.

სიმეტრიული ფიგურის აგებისას, $\Delta A_1 B_1 C_1$-ის ყოველი წერტილი აისახება $\Delta A_2 B_2 C_2$-ში შემდეგი წესით:

$(x;y) \to (x; -y)$

გამომდინარე იქიდან, რომ აღნიშნული გარდაქმნის დროს არ იცვლება ფორმა და ზომა, მივიღებთ, რომ:

$\Delta A_1 B_1 C_1 = \Delta A_2 B_2 C_2$

როგორც ვხედავთ, პარალელური გადატანის ან ღერძის მიმართ სიმეტრიის დროს, ერთი ფიგურა აისახება მეორე, მის ტოლ ფიგურაში.

აღნიშნული თვისება გვეხმარება დავასაბუთოთ **სამკუთხედის ტოლობის ნიშნები.**

იმისათვის, რომ მოცემული ორი სამკუთხედის ტოლობაში დავრწმუნდეთ, არ არის აუცილებელი სამკუთხედების სამივე გვერდისა და სამივე კუთხის შედარება.

არსებობს სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები, რომელთა შემოწმებითაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სამკუთხედები ტოლია. ანუ, ჩვენ შეგვიძლია მინიმალური პირობების შემოწმებით დავასკვნათ, რომ სამკუთხედები ტოლია.

▶ განვიხილოთ აღნიშნული ნიშნები [ტელესკოლა – სამკუთხედები, მასალის შეჯამება]

სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები

სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშანი: (მოკლედ „გკგ“ – გვერდი კუთხე გვერდი)

თეორემა 1:

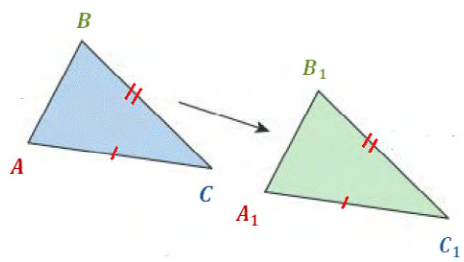
თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

თუ $AC = A_1C_1$

$BC = B_1C_1$

$\angle C = \angle C_1$

მაშინ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



სამკუთხედების ტოლობის II ნიშანი (მოკლედ „კგკ“ – კუთხე გვერდი კუთხე)

თეორემა 2:

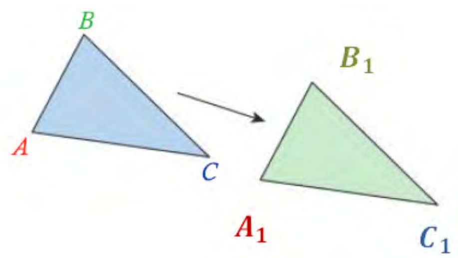
ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ერთი სამკუთხედის გვერდი და მასთან მიმდებარე ორი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის გვერდის და მასთან მიმდებარე ორი კუთხის.

თუ $AC = A_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle C = \angle C_1$

მაშინ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



სამკუთხედის ტოლობის მესამე ნიშანი. (მოკლედ „გგგ“ – გვერდი, გვერდი, გვერდი)

თეორემა 3:

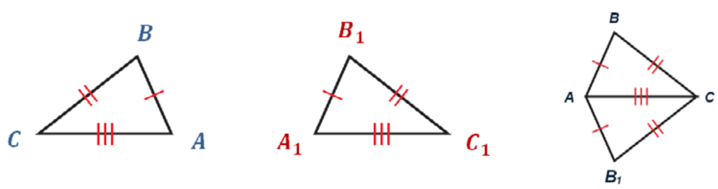
ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ერთი სამკუთხედის სამივე გვერდი შესაბამისად მეორე სამკუთხედის სამივე გვერდის ტოლია.

თუ $AB = A_1B_1$

$AC = A_1C_1$

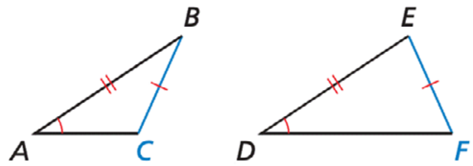
$BC = B_1C_1$

მაშინ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



ნიმუში 2

შევაფასოთ, არის თუ არა საკმარისი რომელიმე ორი გვერდისა და ერთი კუთხის ტოლობა ორი სამკუთხედის ტოლობის დასადგენად.

განვიხილოთ $\Delta ABC = \Delta DEF$ როგორც ვხედავთ, სამკუთხედებს ორი გვერდი ტოლი აქვს $AB = DE$ და $BC = EF$ ასევე $\angle A = \angle D$ გამომდინარე იქიდან, რომ კუთხე არ არის ტოლ გვერდებს შორის, ჩვენ ვერ დავასკვნით სამკუთხედების ტოლობას.	 მოცემული პირობები არ არის საკმარისი სამკუთხედების ტოლობის დასადგენად.

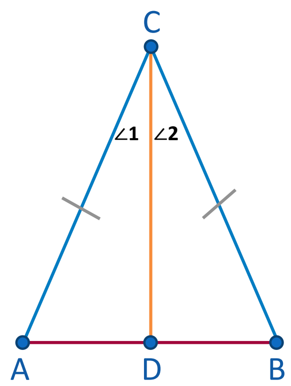
სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები და ლოგიკა

აღნიშნული თეორემა დაგეხმარებათ სამომავლოდ ბევრი საინტერესო ამოცანის ამოხსნაში

თეორემა :

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა ერთი და იგივე მონაკვეთია.

ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.



1. $\triangle ABC$ – ტოლფერდა სამკუთხედი $AC = BC$	1. მოცემულობა
2. $\angle 1 = \angle 2$	2. რადგან CD ბისექტრისაა
3. $\Delta ACD = \Delta BCD$ $AC = CB; \angle 1 = \angle 2$ CD – საერთოა	3. სამკუთხედების ტოლობის I ნიშნით
4. $AD = BD; \angle A = \angle B;$ $\angle ADC = \angle BDC = 90°$	4. ტოლობიდან გამომდინარეობს

დასკვნა: $\angle A = \angle B$; $AD = BD$; $\angle ADC = \angle BDC = 90$ ე.ი.
CD არის ბისექტრისა, მედიანა და სიმაღლე

მითითება: აღნიშნული თეორემის დასაბუთება შეიძლება, ასევე, სხვა გზით; იფიქრეთ და მოიყვანეთ დასაბუთების სხვა გზა.

- მსჯელობა დაიწყეთ მედიანით და შემდეგ დაასაბუთეთ თეორემის ჭეშმარიტება
- მსჯელობა დაიწყეთ სიმაღლით და შემდეგ დაასაბუთეთ თეორემის ჭეშმარიტება

მათემატიკის მოყვარულთათვის* იხილეთ დამტკიცებები

სამკუთხედების ტოლობის **პირველი ნიშანი: (გკგ-გვერდი კუთხე გვერდი)**

ტელესკოლა – სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშანი, დასაბუთება

თეორემა 1:

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

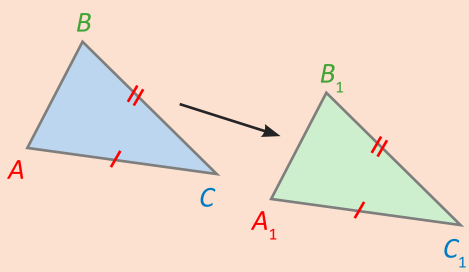
მოცემულია: ΔABC და $\Delta A_1B_1C_1$

$AC = A_1C_1$

$BC = B_1C_1$

$\angle C = \angle C_1$

უ.დ. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



დამტკიცება:

უკვე შესწავლილი აქსიომის თანახმად ვიცით, რომ: **ყოველი სხივიდან ერთ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები ერთი კუთხე.**

წარმოვიდგინოთ, რომ AC და A_1C_1 პარალელურ წრფეებზეა (გადავიტანოთ პარალელური გადატანის წესით). ვიცით, რომ $\angle C = \angle C_1$ და $AC = A_1C_1$, შესწავლილი აქსიომის თანახმად, რადგან ერთ ნახევარსიბრტყეში ერთადერთი ტოლი კუთხის არსებობაა შესაძლებელი, ამიტომ $BC \parallel B_1C_1$ და რადგან $BC = B_1C_1$, შესაბამისად $AB \parallel A_1B_1$.

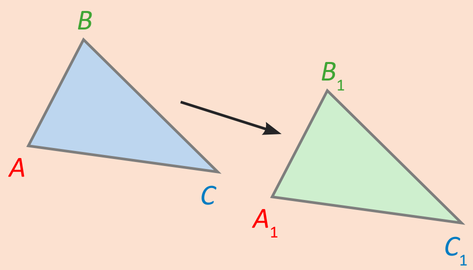
იმავე აქსიომის თანახმად კუთხეებიც ტოლი უნდა იყოს $\angle A = \angle A_1$ და $\angle B = \angle B_1$ და სამკუთხედები დაემთხვევა ერთმანეთს, ე.ი. სამკუთხედების მესამე გვერდებიც ტოლი იქნება. საბოლოოდ, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

რ.დ.გ.

მითითება: სამკუთხედის ტოლობის პირველ ნიშანს მოკლედ იმახსოვრებენ როგორც: გკგ-გვერდი კუთხე (ორ გვერდს შორის მდებარე) გვერდი.

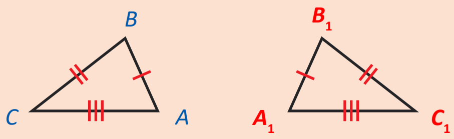
სამკუთხედების ტოლობის II ნიშანი (კგკ-კუთხე გვერდი კუთხე)

ტელესკოლა- სამკუთხედების II და III ნიშანი, დასაბუთება

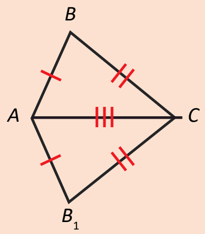
თეორემა 2: ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ერთი სამკუთხედის გვერდი და მასთან მიმდებარე ორი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის გვერდის და მასთან მიმდებარე ორი კუთხის.	**დამტკიცება:**
მოცემულია: ΔABC და $\Delta A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ უ.დ. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ 	უკვე შესწავლილი აქსიომის თანახმად ვიცით, რომ: ყოველი სხივიდან ერთ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები ერთი კუთხე. წარმოვიდგინოთ, რომ AC და A_1C_1 პარალელურ წრფეებზეა. ვიცით, რომ $\angle C = \angle C_1$ და $\angle A = \angle A_1$, რადგან ერთ ნახევარსიბრტყეში ერთადერთი ტოლი კუთხის არსებობაა შესაძლებელი, ამიტომ $BC \parallel B_1C_1$ და შესაბამისად $AB \parallel A_1B_1$. შესაბამისად, $\angle B = \angle B_1$ და სამკუთხედები დაემთხვევა ერთმანეთს, ე.ი. მესამე მონაკვეთიც ტოლი იქნება. ვისარგებლოთ პარალელური გადატანის წესით და თუ სამკუთხედს გადავიტანთ პარალელურად, დავინახავთ, რომ: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ **რ.დ.გ.**

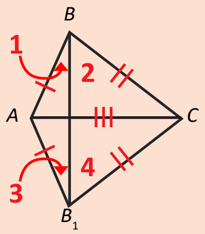
სამკუთხედის ტოლობის მესამე ნიშანი. (გგგ-გვერდი, გვერდი, გვერდი)

თეორემა 3: ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ერთი სამკუთხედის სამივე გვერდი შესაბამისად მეორე სამკუთხედის სამივე გვერდის ტოლია.	**დამტკიცება:**
მოცემულია: ΔABC და $\Delta A_1B_1C_1$ $AB = A_1C_1$ $AC = A_1C_1$ $BC = B_1C_1$ უ.დ. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$	დამტკიცებისათვის, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გარდაქმნები: მობრუნება, პარალელური გადატანა. თავდაპირველი სამკუთხედები გადავიტანოთ ისე, რომ მათ ერთი ტოლი გვერდი საერთო ჰქონდეთ. AC-ს შევუსაბამოთ A_1C_1 (*იხილეთ ნახ 2*), B წვერო არის (CA, B) ნახევარსიბრტყეში, ხოლო B_1 მეორე ნახევარსიბრტყეში. მივიღეთ ორი სამკუთხედი ΔABC და ΔAB_1C. თუ დავამტკიცებთ, რომ $\angle B = \angle B_1$, მაშინ თავდაპირველი სამკუთხედების



ნახ. 1.
ნახაზები დამტკიცებისთვის





ნახ. 2. ნახ. 3

ტოლობა დამტკიცდება სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით.

შევაერთოთ, B და $B1$ წერტილები და მივიღებთ ორ ტოლფერდა ΔABB_1 და ΔBB_1C სამკუთხედებს, $AB = AB_1$ და $BC = B_1C$-ს. (*იხილეთ ნახ. 3*).

ჩვენ ვიცით, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია, ე.ი.

$\Delta ABB1$-ის $\angle 1 = \angle 3$

და ΔBB_1C-ის $\angle 2 = \angle 4$.

აღნიშნული ტოლობების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$\angle B = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = \angle B_1$,

ანუ $\angle B = \angle B_1$.

ამგვარად, ΔABC და ΔAB_1C-ის

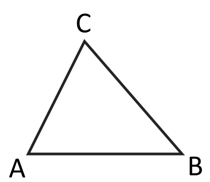
$AB = AB_1$, $BC = B_1C$, $\angle B = \angle B_1$, ე.ი. სამკუთხედები ტოლია, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით.

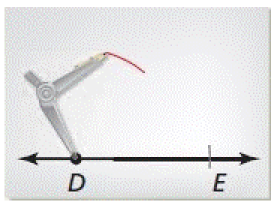
ამრიგად $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

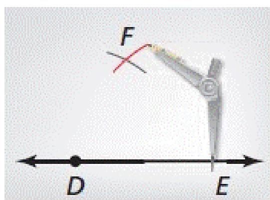
რ. დ. გ.

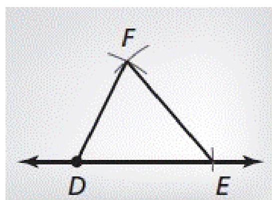
MATH Lab – ლაბორატორიული სამუშაო მათემატიკაში.

მოცემული სამკუთხედის ტოლი სამკუთხედის აგება ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით.









ავაგოთ მოცემული ABC სამკუთხედის ტოლი სამკუთხედი.

ნაბიჯი 1

– წრფეზე გადაზომეთ AB მონაკვეთის სიგრძის ტოლი ნებისმიერი მონაკვეთი, ვთქვათ, DE. ერთ-ერთი ბოლოდან მოხაზეთ AC რადიუსის ტოლი რკალი.

ნაბიჯი 2

– მონაკვეთის მეორე ბოლოდან მოხაზეთ BC რადიუსის ტოლი რკალი.

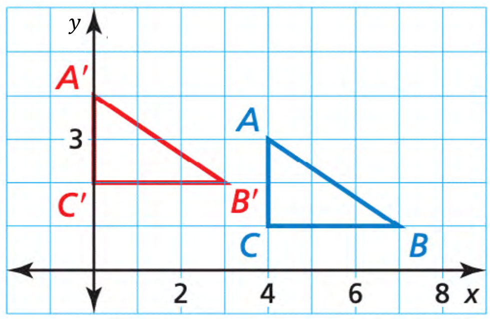
ნაბიჯი 3

– მონიშნეთ რკალების გადაკვეთის წერტილი და შეაერთეთ მოცემული მონაკვეთის ბოლოებთან.

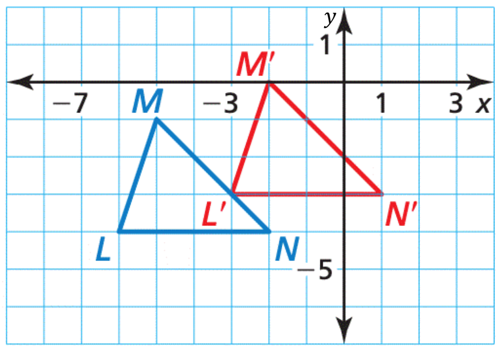
სავარჯიშოები

1. აღწერეთ ნახაზზე მოცემული თითოეული გარდაქმნა და დაასაბუთეთ ტოლია თუ არა ფიგურები. ახსენით, რომელია წინასახე და რომელი სახე?

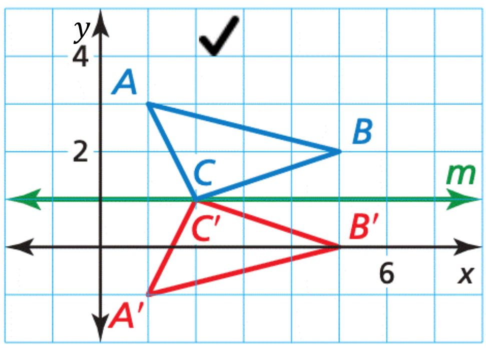
ა)



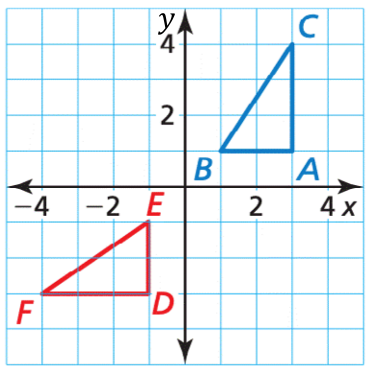
გ)



ბ)

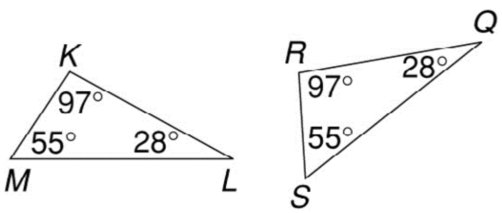


დ)

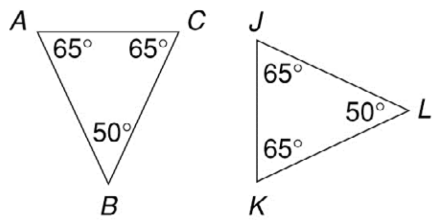


2. მოცემული სამკუთხედები ტოლია. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ შესაბამისი ტოლი გვერდები და ტოლი კუთხეები:

ა)



გ)

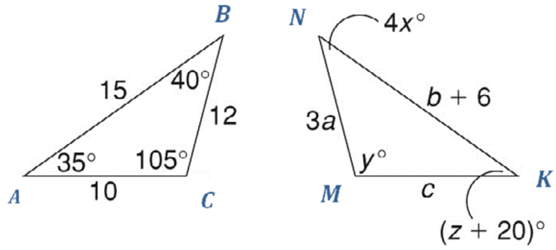


3. მოცემული ორი სამკუთხედი ტოლია, იპოვეთ უცნობი x, y, z, a, b, c, თუ ვიცით, რომ შემდეგი კუთხეები ერთმანეთის შესაბამისი და ტოლი:

$\angle A = \angle K$

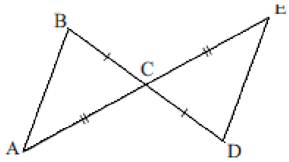
$\angle B = \angle N$

$\angle C = \angle M$

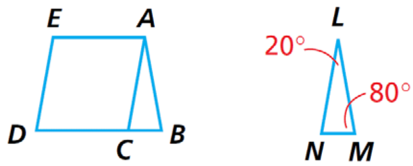


მითითება: ჯერ დაადგინეთ შესაბამისი გვერდები.

4. მოცემული ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ, არის თუ არა ΔABC ΔCDE-ის ტოლი? პასუხი დაასაბუთეთ.

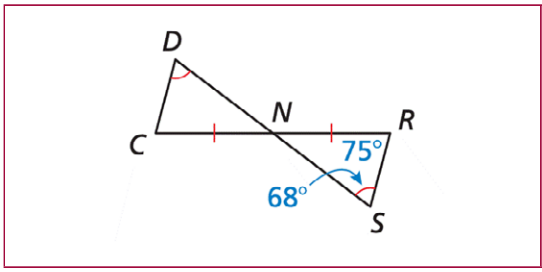


5. ვიცით, რომ $\Delta ACB = \Delta LNM$-ს.
ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის გათვალისწინებით რას უდრის $\angle ACD$?

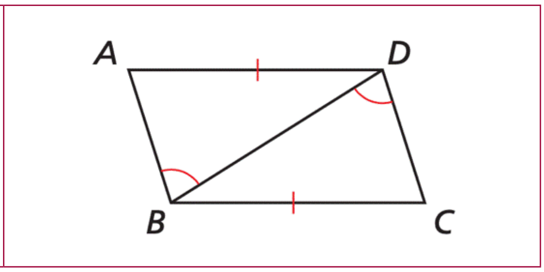


6. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე დაადგინეთ ტოლია თუ არა სამკუთხედები, პასუხი დაასაბუთეთ.

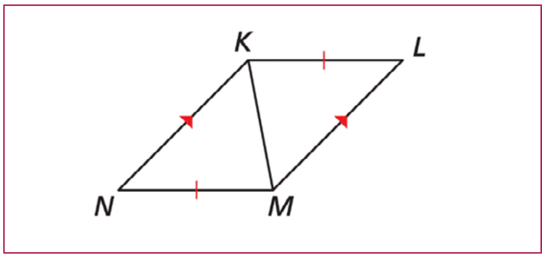
ა) ΔNCD, ΔNRS



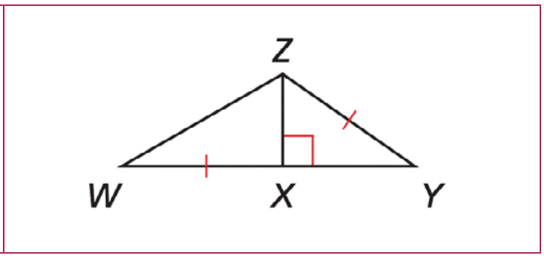
გ) ΔABD, ΔCDB



ბ) ΔKLM, ΔMNK



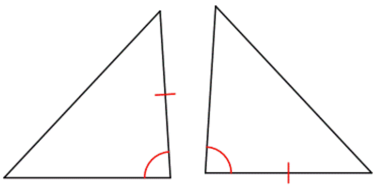
დ) ΔYXZ, ΔWXZ



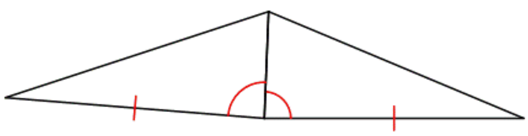
7. **იპოვეთ შეცდომა:**

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე მოსწავლემ დაასკვნა, რომ ორივე შემთხვევაში მოცემულია ტოლი სამკუთხედები; დაეხმარეთ მოსწავლეს სწორი დასკვნის გაკეთებაში. დაადგინეთ რომელ ნახაზზეა მოცემული ტოლი სამკუთხედები და დაასაბუთეთ მოსაზრება.

I.

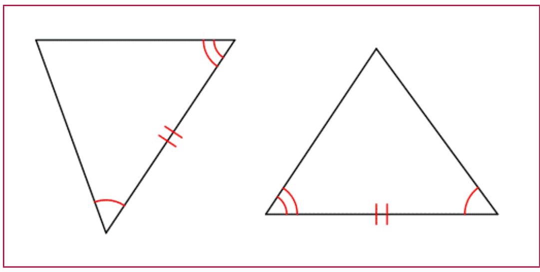


II.

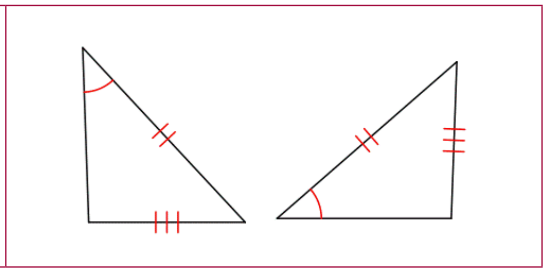


8. ნახაზზე მოცემულ სამკუთხედებს დააწერეთ ასოები და დაასაბუთეთ, არის თუ არა საკმარისი ინფორმაცია სამკუთხედების ტოლობის დასადგენად. თუ საკმარისია, რომელი ნიშნის მიხედვით დაადგენთ ტოლობას?

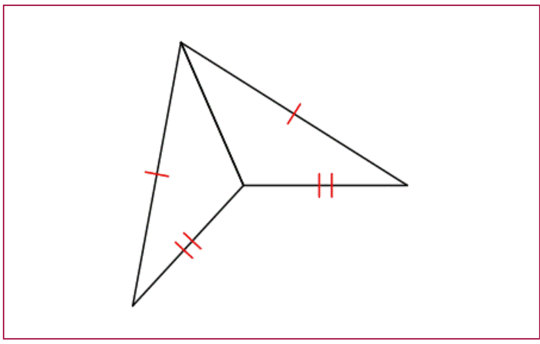
ა)



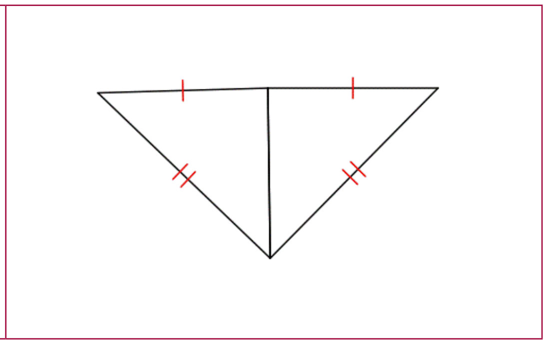
ბ)



გ)

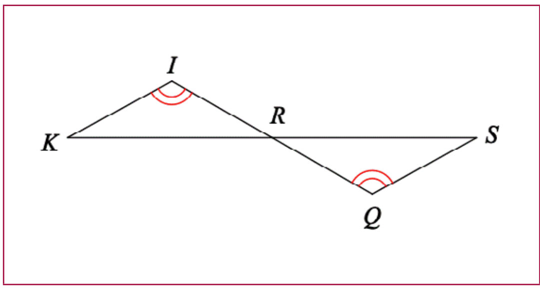


დ)

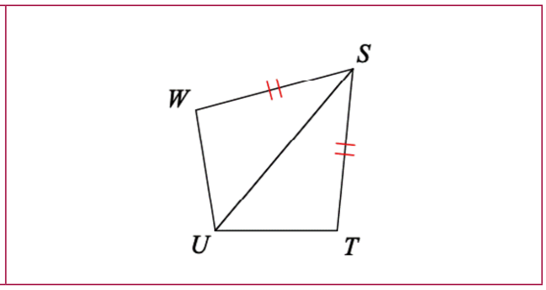


9. მოცემულ ამოცანას აკლია პირობა. რა მინიმალური ინფორმაციის დამატებაა საჭირო იმისათვის, რომ დამტკიცდეს სამკუთხედების ტოლობა.

ა)

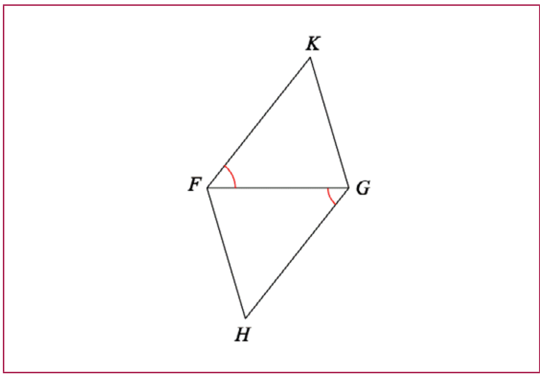


ბ)

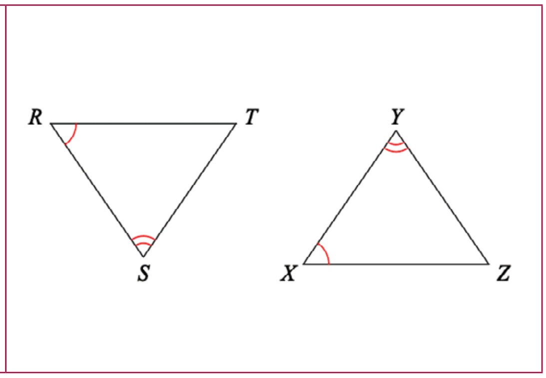


10. მოცემულ ამოცანას აკლია პირობა. რა მინიმალური ინფორმაციის დამატებაა საჭირო იმისათვის, რომ დამტკიცდეს სამკუთხედების ტოლობა.

ა)



ბ)

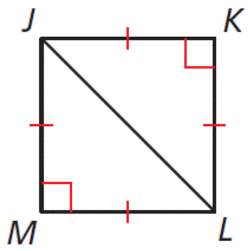


11. მოცემული ნახაზის მიხედვით ორი მეგობარი ამტკიცებს ორი ΔJML, ΔJKL სამკუთხედის ტოლობას სხვადასხვა ნიშნით.

ერთი ამბობს, რომ $\Delta JML=\Delta JKL$, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით.

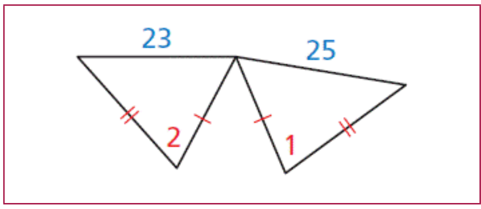
მეორე ამბობს, რომ $\Delta JML=\Delta JKL$, სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით.

დაასაბუთეთ, რომელია მართალი და თუ ორივე, რატომ?

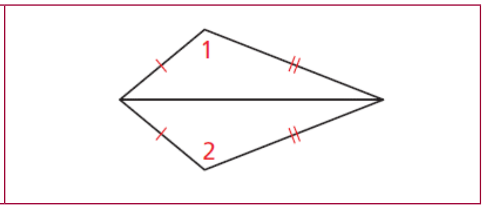


12. მოცემული ნახაზების მიხედვით შეადარეთ $\angle 1$ და $\angle 2$.

ა) $\angle 1$ _____ $\angle 2$



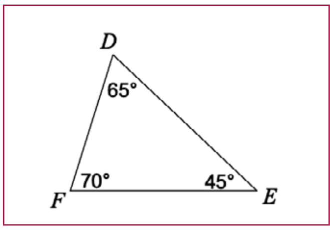
ბ) $\angle 1$ _____ $\angle 2$



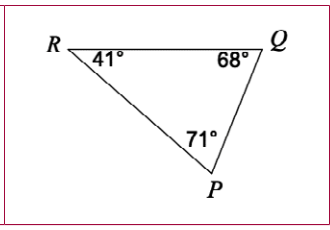
13. მოცემული ინფორმაციის საფუძველზე ჩაწერეთ სამკუთხედების გვერდები ზრდის მიხედვით

მითითება: გაიხსენეთ, რომ სამკუთხედში უდიდესი კუთხის წინ უდიდესი გვერდია, უმცი- რესი კუთხის წინ კი – უმცირესი გვერდი.

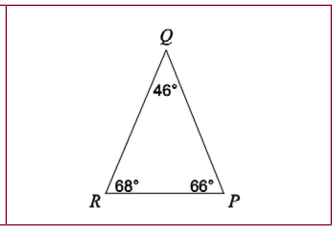
ა)



ბ)

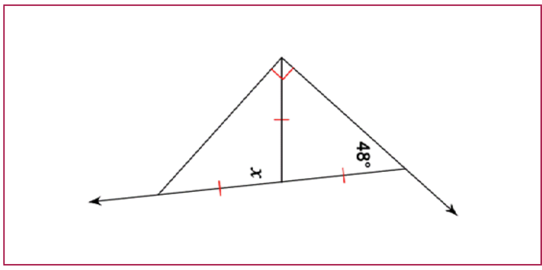


გ)

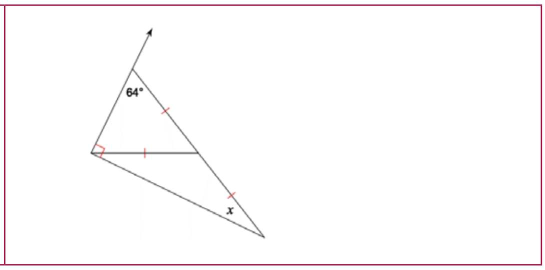


14. **გამოწვევა:** ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის გათვალისწინებით იპოვეთ x.

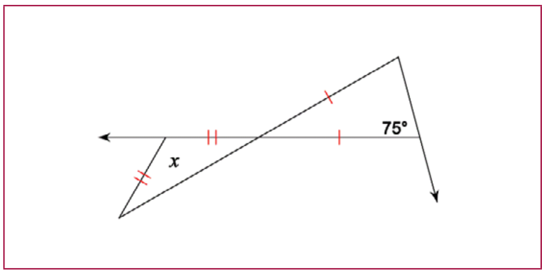
ა)



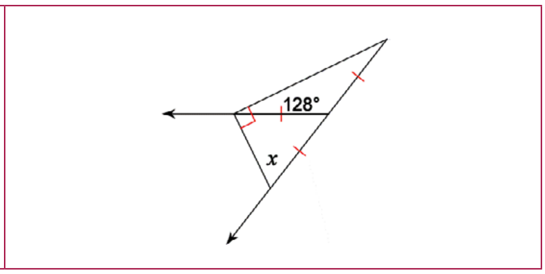
ბ)



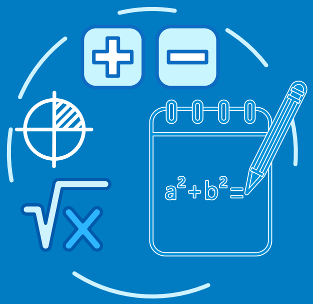
გ)



დ)



დავალების წარდგენა



ჰომოთეტია

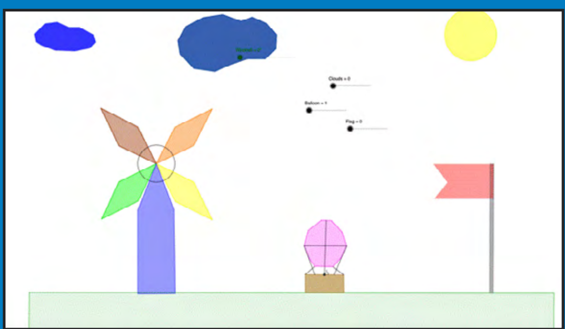
ტელეფონები და კომპიუტერები ჩვენი ყოველდღიური ცხოვრების განუყოფელ ნაწილად იქცა. ბევრ ახალგაზრდას და ზრდასრულს უყვარს ფოტოების გადაღება და დამუშავება.

მობილურებში ალბათ გინახავთ სპეციალური აპლიკაციები, რომლებიც ფოტოს გადიდების და დაპატარავების შესაძლებლობას იძლევა, ასევე სხვადასხვა მიმართულებით მობრუნების შესაძლებლობას.

აღნიშნულ ქმედებებს მათემატიკაში **გარდაქმნები** ეწოდება.

როდესაც პროგრამისტები ქმნიან სპეციალურ აპლიკაციებს, ისინი იყენებენ შესაბამის ცოდნას მათემატიკიდან.

მითითება: რეკომენდებულია მოცემული პარაგრაფის სწავლება, ჯგუფური სამუშაოს ორგანიზება საკლასო ოთახში/აუდიტორიაში.



Geogebra სიმულაცია

კომპლექსური დავალება

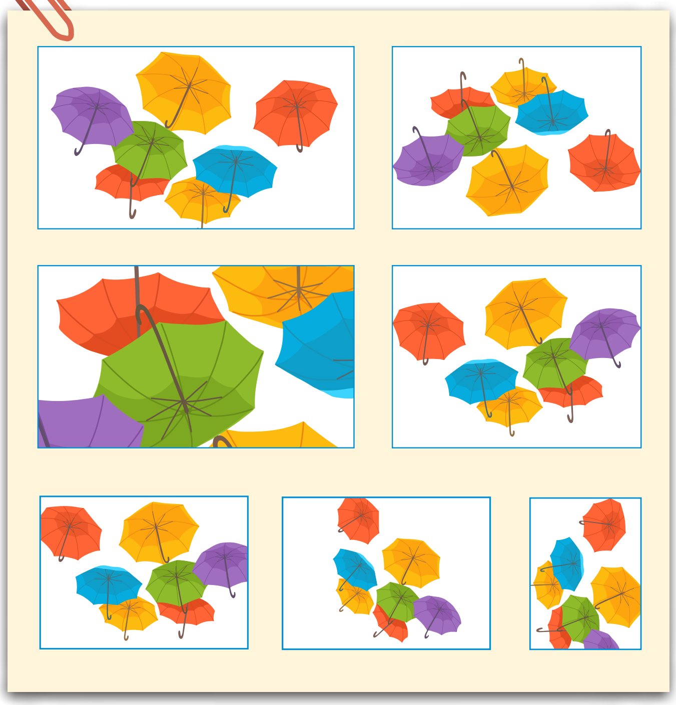
გარდაქმნებისთვის შემაჯამებელი კომპლექსური დავალება

თქვენი დავალება

შედით ვებ-გვერდზე www.geogebra.org და ახსენით თითოეული გარდაქმნა; შექმენით მსგავსი სიმულაცია, მაკეტი ან თამაში

დავალების წარდგენისას ისაუბრეთ:

- როგორ დაგეხმარათ გარდაქმნების ცოდნა ყოველდღიურ ცხოვრებაში მიმდინარე მოვლენების მათემატიკურ მოდელებთან დაკავშირებაში?
- რა ტიპის კანონზომიერებას ხედავთ თითოეული გარდაქმნის დროს?



ტელეგაკვეთილი — ჰომოთეტია (უყურეთ 9წთ-მდე)

როდესაც ფიგურის ზომებს ვადიდებთ ან ვამცირებთ ერთი და იგივე რიცხვჯერ, ვამბობთ, რომ ფიგურა გარდაიქმნა სხვა ფიგურად, აღნიშნულ გარდაქმნას ეწოდება **ჰომოთეტია**; მოცემული გარდაქმნით ვიღებთ ახალ ფიგურას, რომელიც საწყისი ფიგურის მსგავსია.

2.3. ჰომოთეტია, მობრუნება

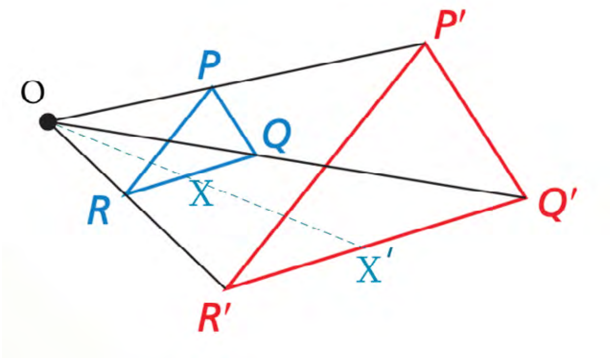
ვთქვათ, მოცემულია ΔPQR და O ფიქსირებული წერტილი, ფიგურის ნებისმიერ წერტილზე, ვთქვათ P წერტილზე, გავავლოთ OP სხივი და მასზე O წერტილიდან გადავდოთ OP' ისე, რომ $OP' = k \cdot OP$, სადაც k – დადებითი რიცხვია.

გარდაქმნის ისეთ ფორმას, როდესაც ფიგურა არის გაზრდილი ან შემცირებული რაიმე წერტილის მიმართ, ეწოდება ჰომოთეტია წერტილის მიმართ. წერტილს ეწოდება ჰომოთეტიის ცენტრი, ხოლო რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს რამდენჯერ მოხდა გაზრდა ან შემცირება, ჰომოთეტიის კოეფიციენტი

გარდაქმნა, რომლის დროსაც სიბრტყის ნებისმიერ P წერტილს შეესაბამება ისეთი წერტილი, რომ $OP' = k \cdot OP$ ეწოდება ჰომოთეტია O ცენტრით და k კოეფიციენტით.

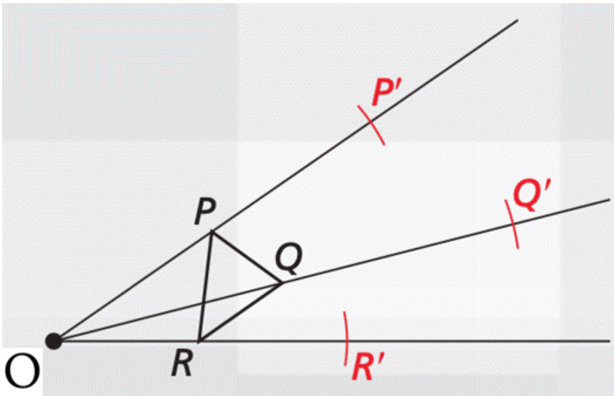
ჰომოთეტიის ფორმალური განმარტება არის შემდეგნაირი:

ფიგურის (ჩვენ შემთხვევაში ΔPQR-ის) ისეთ გარდაქმნას სხვა ფიგურად ($\Delta P'Q'R'$), როდესაც მისი ყოველი X წერტილი გადადის ისეთ X' წერტილში, რომ დაცულია პირობა $OX' = k \cdot OX$, სადაც $k > 0$, ეწოდება ჰომოთეტია O ცენტრის მიმართ.

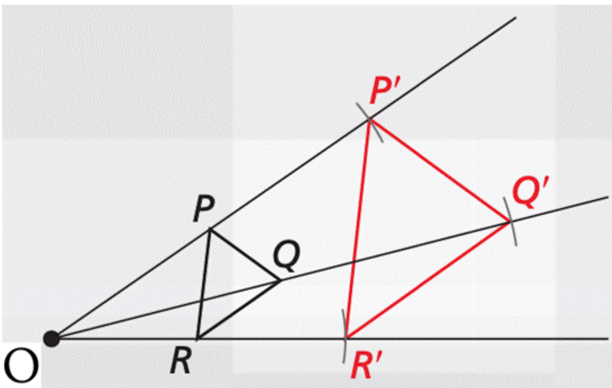


აგება

ნაბიჯი 1



ნაბიჯი 2



$OP' = k \cdot OP$

$OQ' = k \cdot OQ$

$OR' = k \cdot OR$

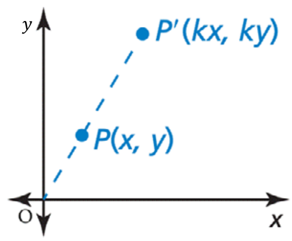
ნიმუში 1

განვიხილოთ ჰომოთეტია საკოორდინატო სიბრტყის სათავის მიმართ და განვსაზღვროთ, როგორ იცვლება წერტილის კოორდინატები ასეთი ჰომოთეტიის დროს.

ა) მოცემულია წერტილი $P(x,y)$ (*სურათი 1*).

შევაერთოთ P წერტილი სათავესთან და გავავლოთ OP სხივი. ამ სხივზე გადავდოთ OP' მონაკვეთი ისე, რომ $OP' = k \cdot OP$, სადაც k – დადებითი რიცხვია; P' წერტილის კოორდინატები იქნება – $P'(kx;ky)$

ა)



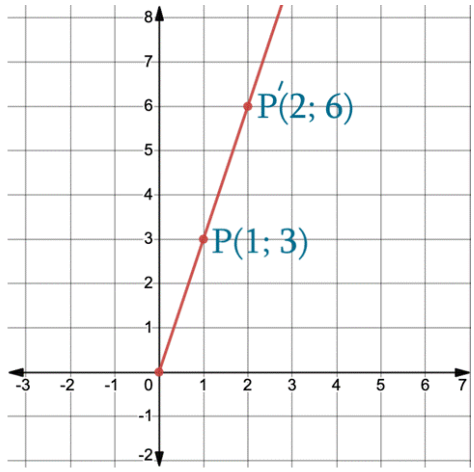
სურათი 1

ბ) სურ. 2-ზე მოცემული ჰომოთეტიით P წერტილი გადავიდა P' წერტილში; იპოვეთ P' წერტილის კოორდინატები, თუ მოცემულია $P(1;3)$ და ჰომოთეტიის კოეფიციენტია $k = 2$

$P(1;3)$ – წინასახეა; $P'(2;6)$ – სახეა;

ჰომოთეტიით P – წერტილი აისახა P'– წერტილში.

ბ)

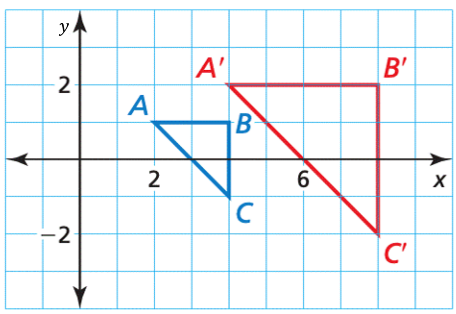


სურათი 2

გ) ჰომოთეტიით სამკუთხედი ΔABC – გადადის სამკუთხედ $\Delta A'B'C'$-ში, ჰომოთეტიის კოეფიციენტია $k = 2$

$$(x, y) \to (2x, 2y)$$
$$A(2, 1) \to A'(4, 2)$$
$$B(4, 1) \to B'(8, 2)$$
$$C(4, -1) \to C'(8, -2)$$

გ)



სურათი 3

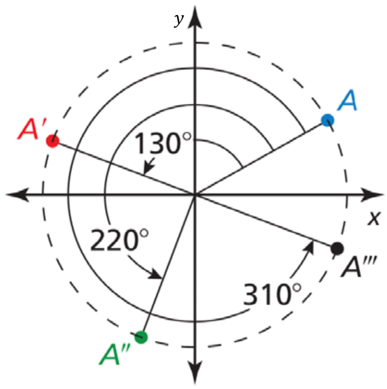
მობრუნება

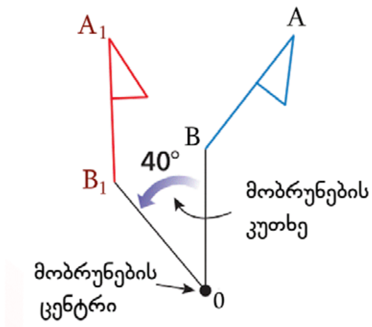
ტელეგაკვეთილი — მობრუნება

მობრუნება O წერტილის მიმართ (მოცემული მიმართულებით) α კუთხით არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც *O* წერტილი უძრავად რჩება, ხოლო სხვა ნებისმიერი *A* წერტილი გადადით ისეთ *A'* წერტილში, რომ $OA = OA'$ და $\angle AOA' = \alpha$.

ფიგურის მობრუნება არის სიბრტყის ისეთი გარდაქმნა, რომლის დროსაც ფიგურა არის მობრუნებული ფიქსირებული წერტილის მიმართ რაღაც კუთხით. ფიქსირებულ წერტილს ეწოდება მობრუნების ცენტრი, ხოლო კუთხეს – მობრუნების კუთხე.

მოცემულ ნახაზზე *AB* მონაკვეთი არის მობრუნებული O-ცენტრის მიმართ 40°-იანი კუთხით, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით; *AB* მონაკვეთის ყოველი წერტილი აისახა A_1B_1 მონაკვეთში.



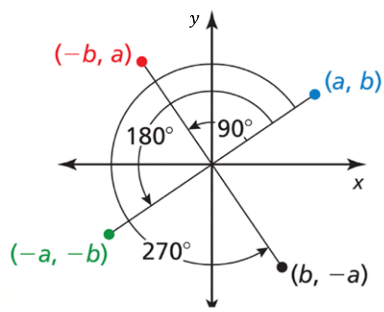


ნიმუში 2

განვიხილოთ როგორ იცვლება წერტილის კოორდინატები, როცა მას სათავის მიმართ ვაბრუნებთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90°-იანი, 180°-იანი, 270°-იანი, 360°-იანი კუთხით.

ა) თუ წერტილის კოორდინატია (a,b), მაშინ 90°-იანი კუთხით მობრუნებისას მისი კოორდინატი გახდება $(-b,a)$; ვიტყვით, რომ (a,b) წერტილი აისახა $(-b,a)$ წერტილში;

ბ) თუ წერტილის კოორდინატია (a,b), მაშინ 180°-იანი კუთხით მობრუნებისას ის აისახება წერტილში $(-a,-b)$

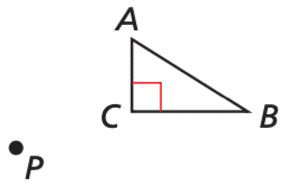


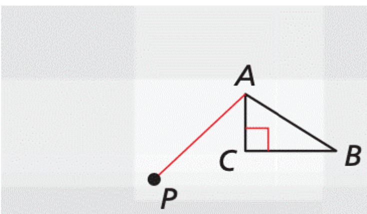
ყურადღება მიაქციეთ, როგორ იცვლება წერტილის კოორდინატები კონკრეტული კუთხით მობრუნებისას (რა წერტილში ხდება ასახვა)

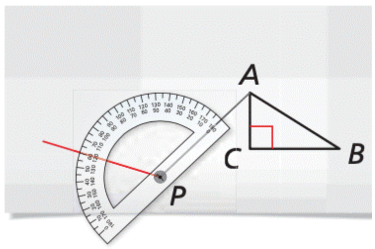
<table>
<tr>
<td>
გ) თუ წერტილის კოორდინატია (a,b), მაშინ 270°-იანი კუთხით მობრუნებისას ის აისახება წერტილში $(b,-a)$

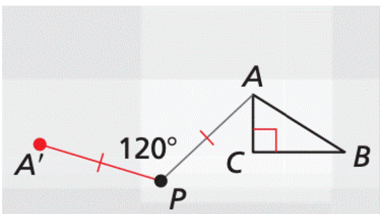
დ) თუ წერტილის კოორდინატია (a,b), მაშინ 360°-იანი კუთხით მობრუნებისას ის აისახება წერტილში (a,b), დაემთხვევა საწყის წერტილს.
</td>
<td>
90°-ით მობრუნება
$(a,b) \rightarrow (-b,a)$
180°-ით მობრუნება
$(a,b) \rightarrow (-a,-b)$
270°-ით მობრუნება
$(a,b) \rightarrow (b,-a)$
360°-ით მობრუნება
$(a,b) \rightarrow (a,b)$
</td>
</tr>
</table>

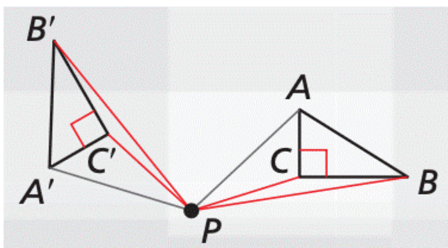
ნიმუში 3 – აგება

<table>
<tr>
<td>
მოვაბრუნოთ ΔABC – სამკუთხედი P წერტილის მიმართ 120°-იანი კუთხით:
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
ნაბიჯი 1:
შევაერთოთ მობრუნების ცენტრი A წერტილთან


</td>
<td>
ნაბიჯი 2:
ტრანსპორტირის ცენტრი დავამთხვიოთ P წერტილს, გადავზომოთ 120°-იანი კუთხე ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები


</td>
</tr>
<tr>
<td>
ნაბიჯი 3:
∠P კუთხის გვერდზე გადავზომოთ PA მონაკვეთის ტოლი PA' მონაკვეთი


</td>
<td>
ნაბიჯი 4:
გავიმეოროთ 1-3 ნაბიჯი B და C წვეროებისთვის


</td>
</tr>
</table>

ნიმუში 4

სიბრტყეზე მოცემულია RSTU ოთხკუთხედი, მოვაბრუნოთ ოთხკუთხედი სათავის მიმართ 270°-იანი კუთხით.

ჩვენ ვიცით, რომ თუ წერტილის კოორდინატია (a,b), მაშინ 270°-იანი კუთხით მობრუნებისას ის აისახება წერტილში (b,$-a$).

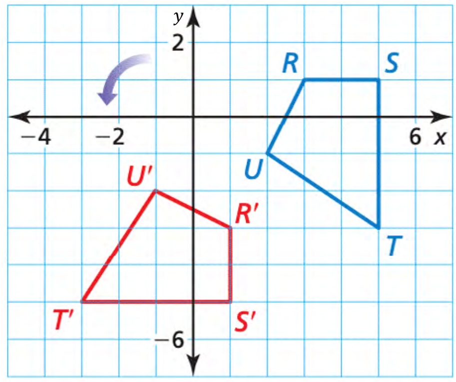
დავწეროთ ჯერ რა წერტილებში აისახება ოთხკუთხედის წვეროები; შემდეგ მოვნიშნოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთოთ.

$$R(3, 1) \to R'(1, -3)$$

$$S(5, 1) \to S'(1, -5)$$

$$T(5, -3) \to T'(-3, -5)$$

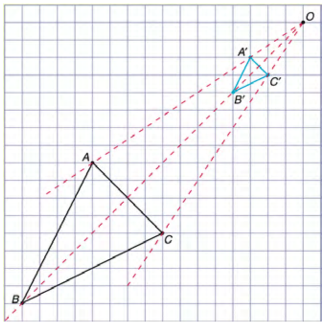
$$U(2, -1) \to U'(-1, -2)$$



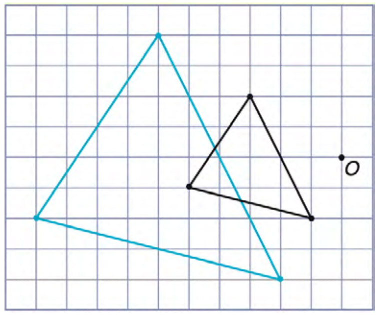
სავარჯიშოები

1. მოცემულია ჰომოთეტია O ცენტრის და *k* ჰომოთეტიის კოეფიციენტით, ნახაზიდან გამომდინარე იპოვეთ *k*.

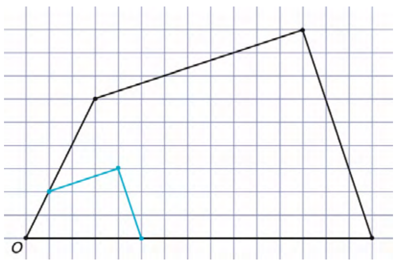
ა)



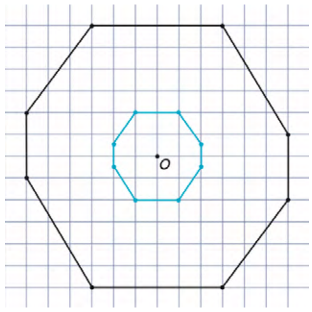
გ)



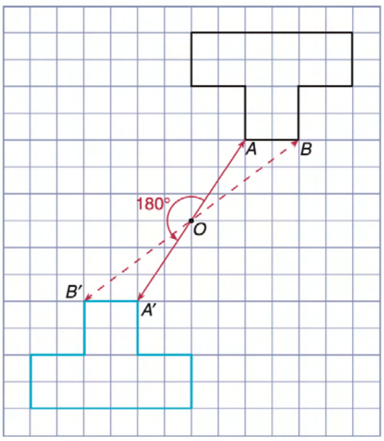
ბ)

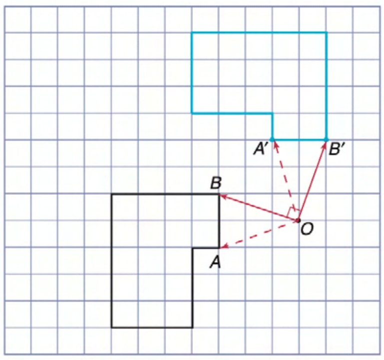


დ)



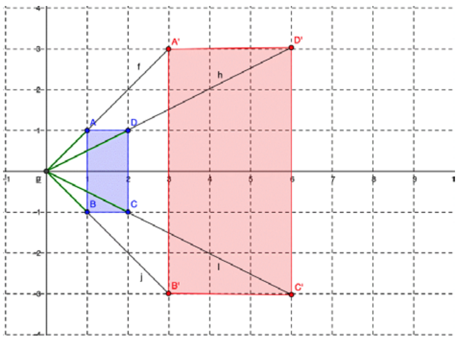
2. აღწერეთ თითოეული ფიგურის მობრუნება





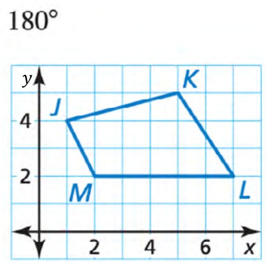
სავარჯიშოები

3. გახსენით Geogebra-ზე მოცემული აქტივობა, იპოვეთ პროპორციულობის კოეფიციენტი; ასევე ახსენით, როგორ შეიცვალა კოორდინატები გარდაქმნის დროს.

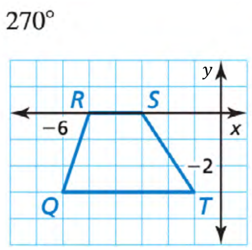


4. გადაიხაზეთ ფიგურები რვეულში და შემდეგ მოაბრუნეთ ნახაზზე მითითებული კუთხით:

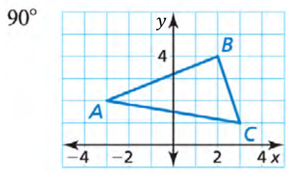
ა)



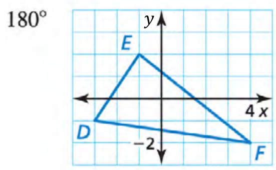
ბ)



გ)



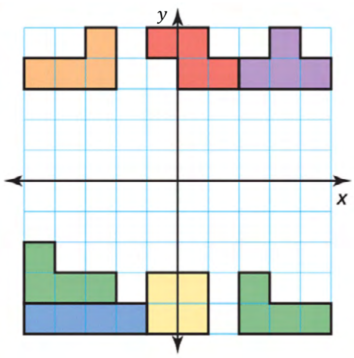
დ)



ჯგუფური სამუშაო

5. თქვენ, ალბათ, გითამაშიათ თამაში, სადაც გიწევდათ სხვადასხვა ფიგურის ისე დალაგება, რომ არ დარჩენილიყო ცარიელი ადგილი.

- აღწერეთ გარდაქმნა, რომლის მიხედვით თითოეულ ფიგურას ჩასვამდით გარკვეულ ადგილას; შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი.
- შექმენით თამაში ან მოიფიქრეთ რაიმე თამაშის იდეა.



6. უჯრებიან რვეულში დახაზეთ რაიმე ფიგურა და მოაბრუნეთ:

ა) 90°-ით; ბ) 180°-ით; გ) 270°-ით; დ) 360°-ით.

II. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება მსგავსებისთვის

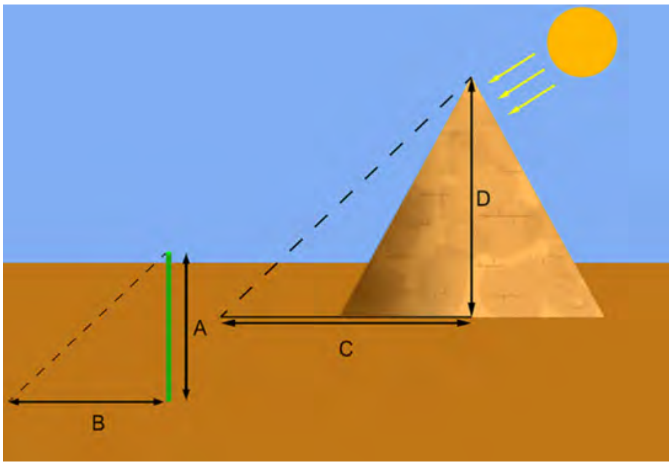
იცით თუ არა,

- როგორ დაადგინეს პირამიდების სიმაღლე ძველად ეგვიპტეში?
- იმ დროის მათემატიკოსებმა მოიფიქრეს მოსახერხებელი გეგმა. მათ ერთი ერთეულის მქონე სიგრძის ჯოხით და მზის სხივების დახმარებით შეძლეს მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომელიც პირამიდის სიმაღლის დადგენაში დაეხმარათ.

შენიშვნა: იმ დროს ჯოხის სიგრძე იზომებოდა მათი ერთეულით.

თანამედროვე ხელსაწყოებით გაზომვის შემდეგ დადგინდა, რომ ეგვიპტელებს საკმაოდ მაღალი სიზუსტით ჰქონდათ დადგენილი პირამიდის სიმაღლე.

იხ. სიმულაცია: geogebra.org



საკვანძო კითხვა:

- *როგორ შეიძლება მაღალი შენობის სიმაღლის დადგენა მათემატიკური მეთოდებისა და მოდელების გამოყენებით?*

თქვენი დავალება

1. მოიძიოთ ინფორმაცია თუ როგორ დაადგინეს ძველად ეგვიპტეში პირამიდების სიმაღლე იმ დროის მეცნიერებმა.
2. დაადგინოთ, როგორ შეიძლება მსგავსების მეშვეობის მაღალი ობიექტის სიმაღლის დადგენა.

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება მსგავსებისთვის

თქვენი დავალება

3. გამოთვალოთ რომელიმე ობიექტის სიმაღლე ორი სხვადასხვა მეთოდის მეშვეობით და შეადაროთ სიზუსტე.
4. შეადგინოთ გეგმა, რომელიც აღწერს, როგორ შეიძლება მაღალი ობიექტის სიმაღლის გაზომვა ჩრდილის და სარკის მეთოდით.

ნაშრომი წარმოადინეთ რეფერატის სახით, რომელშიც წარმოდგენილი იქნება როგორც ნახაზები, ასევე გაზომვების შედეგები (ანგარიშის ფურცელი).

ნაშრომის წარდგენისას ხაზგასმით წარმოაჩინეთ:

- რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის? ახსენით როგორ დაადგინეთ კავშირები.
- როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?
- თქვენი აზრით, რატომ იყო მეცნიერებისთვის საინტერესო პირამიდების სიმაღლის გაზომვა? ზოგადად, რატომ არის საინტერესო სხვადასხვა ობიექტის სიმაღლის დადგენა? თქვენ რომელი ობიექტის სიმაღლის დადგენა გაინტერესებთ და რატომ?

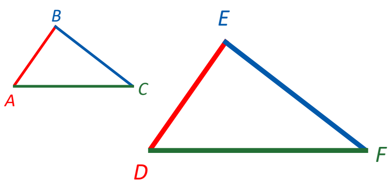
2.4. სამკუთხედების მსგავსება

ორ სამკუთხედს ეწოდება მსგავსი, თუ ერთი სამკუთხედის სამივე კუთხე მეორე სამკუთხედის სამივე კუთხის ტოლია და შესაბამისი გვერდები პროპორციულია.

🔗 ტელეგაკვეთილი – სამკუთხედების მსგავსება

🔗 ტელესკოლა – მსგავსების გარდაქმნა (მე-10 წუთიდან განხილულია საინტერესო ამოცანები)

მსგავსი სამკუთხედები



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

შესაბამისი კუთხეები ტოლია

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$

შესაბამისი გვერდები პროპორციულია

$\frac{DE}{AB} = k \qquad DE = AB \cdot k$

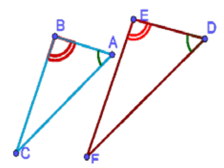
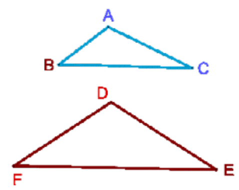
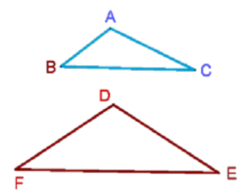
$\frac{EF}{BC} = k \qquad EF = BC \cdot k$

$\frac{DF}{AC} = k \qquad DF = AC \cdot k$

k-მსგავსების კოეფიციენტია

ჩვენ უკვე განვიხილეთ სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები, ვიცით, რომ იმისათვის, რომ დავადგინოთ ტოლია თუ არა სამკუთხედები, არ არის აუცილებელია შევამოწმოთ სამივე კუთხის და გვერდის ტოლობა.

სამკუთხედების მსგავსების შემთხვევაშიც არის მინიმალური პირობები, რომლის დაკმაყოფილების შემდეგაც ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ სამკუთხედები მსგავსია.

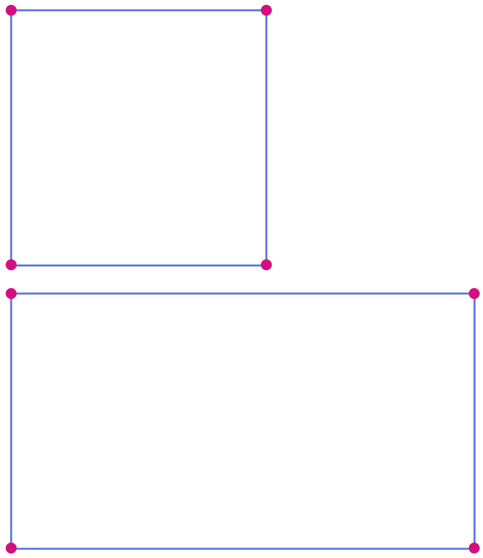
მსგავსების I ნიშანი	**მსგავსების II ნიშანი**	**მსგავსების III ნიშანი**
		
თუ $\angle A = \angle D$ $\angle B = \angle E$ მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	თუ $DF = k \cdot AB$ $DE = k \cdot AC$ $\angle A = \angle D$ მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	თუ $DF = k \cdot AB$ $DE = k \cdot AC$ $EF = k \cdot CB$ მაშინ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, მაშინ სამკუთხედები მსგავსია.	თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის პროპორციულია და ამ გვერდებით შექმნილი კუთხეები ტოლია, მაშინ სამკუთხედები მსგავსია.	თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები მეორე სამკუთხედის გვერდების პროპორციულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

საკვანძო კითხვა:

- *არსებობს თუ არა ოთხკუთხედების მსგავსების ნიშნები? შეიძლება თუ არა კუთხეების ტოლობა საკმარისი იყოს იმისათვის, რომ დავასაბუთოთ ოთხკუთხედების მსგავსება?*

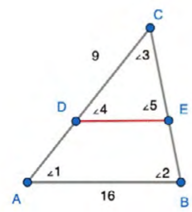
- განვიხილოთ *ABCD* კვადრატი და *EFGH* მართკუთხედი.
- ორივე ოთხკუთხედის კუთხეები ტოლია და უდრის 90°-ს, თუმცა გვერდები არ არის პროპორციული.
- კვადრატის ყველა გვერდი ტოლია, მართკუთხედის შემთხვევაში კი მხოლოდ მოპირდაპირე გვერდებია ტოლი.

დასკვნა: კუთხეების ტოლობა არაა საკმარისი ოთხკუთხედების მსგავსების დასადგენად.



ნიმუში 1 — სამკუთხედების მსგავსება

მოცემულია ΔABC, $DE \parallel AB$, იპოვეთ DE, თუ ვიცით, რომ $AB = 16$ სმ, $DC = 9$სმ, $AC = 15$სმ

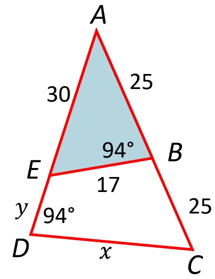


დავაორგანიზოთ ჩანაწერი ორსვეტიანი ცხრილით, ერთში წარვმართოთ დასაბუთების პროცესი, მეორეში დავწეროთ, რის საფუძველზე მივიღეთ გადაწყვეტილება.

დასაბუთება	**მიზეზი/საფუძველი**
ΔABC; $AB = 16$ სმ, $DC = 9$სმ, $AC = 15$სმ $DE \parallel AB$,	**1.** მოცემულობა
$\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 5$;	**2.** რადგან $DE \parallel AB$, AC და CB მკვეთებია
$\Delta ABC \sim \Delta DEC$	**3.** სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნით
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$; $\frac{16}{x} = \frac{15}{9}$ $15 \cdot x = 9 \cdot 16$ $x = 9{,}6$ სმ	**4.** მსგავს სამკუთხედებში გვერდები პროპორციულია **პასუხი**: $DE = 9{,}6$ სმ

ნიმუში 2 — სამკუთხედების მსგავსება

მოცემულია ΔACD, ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის გათვალისწინებით, იპოვეთ x და y



დავაორგანიზოთ ჩანაწერი ორსვეტიანი ცხრილით, ერთში წარვმართოთ დასაბუთების პროცესი, მეორეში დავწეროთ, რის საფუძველზე მივიღეთ გადაწყვეტილება

წინადადება/შედეგი	**მიზეზი**
1. ΔACD $AC = 50,\ AB = 25,\ AE = 30,\ EB = 17$ $\angle ABE = 94°,\ \angle ADC = 94°,$	**1.** მოცემულობა
2. $\Delta ABC \sim \Delta DEC$	**2.** მსგავსების პირველი ნიშნით
3. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE};\quad \frac{30+y}{25} = \frac{50}{30}$ $3 \cdot (30 + y) = 5 \cdot 25$ $3 \cdot y = 35$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE};$ $y = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{AC}{AE} = \frac{DC}{EB};\quad \frac{50}{30} = \frac{x}{17}\quad x = 28\frac{1}{3}$	**3-4.** უცნობი გვერდის საპოვნელად დავწეროთ პროპორცია **პასუხი**: $y = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}\qquad x = 28\frac{1}{3}$

ნიმუში 3 — სამკუთხედების მსგავსება

როგორ დაადგინეს ეგვიპტეში პირამიდების სიმაღლე? (მოიძიეთ შესაბამისი ინფორმაცია).

სიმაღლის დადგენის ერთ-ერთი მეთოდია: პირამიდის წინ, მიწაში ვერტიკალურად ჩავამაგროთ რაიმე ჯოხი ისე, რომ შესაძლებელი იყოს მზის სხივის მიერ წარმოქმნილი ჯოხის ჩრდილის გაზომვა. ასევე, შესაძლებელი იყოს გაიზომოს პირამიდის ჩრდილი. მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შედგენის შემდეგ დავინახავთ, რომ მივიღებთ ორ მსგავს სამკუთხედს. თუ გვეცოდინება ჯოხის სიგრძე და პირამიდის ჩრდილის სიგრძეები, მაშინ შევძლებთ დავადგინოთ პირამიდის სიმაღლე.

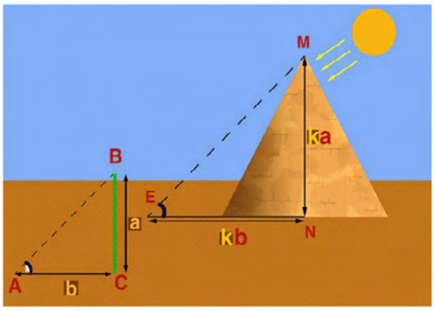
გაგრძელება

აღნიშნული პროცედურით შესაძლებელია ნებისმიერი მაღალი შენობის სიმაღლის დადგენა.

მითითება: უყურეთ ტელეგაკვეთილს და გაეცანით სხვადასხვა საინტერესო მეთოდს.

ტელეგაკვეთილი – კომპლექსურ დავალებასთან დაკავშირებული ტელეგაკვეთილი 1 5:30-იდან, ტელეგაკვეთილი 2 – საინტერესო მაგალითები.

ნაბიჯი 1:



შევადგინოთ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი და განვიხილოთ სამკუთხედები: ΔABC და ΔEMN

სამკუთხედები მსგავსია, სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნით.

$$\Delta ABC \sim \Delta EMN$$

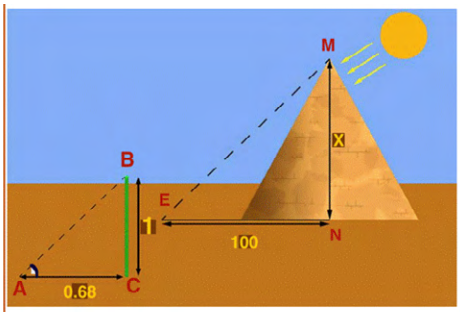
$\angle C = \angle N = 90°$

$\angle A = \angle E$

შედეგად:

$$\frac{MN}{EN} = \frac{BC}{AC}$$

ნაბიჯი 2.



პირამიდის წინ დადგეს 1 მეტრის სიგრძის ჯოხი, რომლის ჩრდილი იყო 0.68 მეტრი, ხოლო პირამიდის ჩრდილი 100 მეტრი; იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

ამოხსნა

$$\Delta ABC \sim \Delta EMN$$

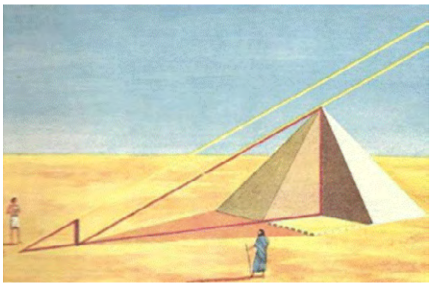
$BC = 1$ მ $AC \approx 0,68$ მ $EN \approx 100$ მ

$$\frac{x}{1} = \frac{100}{0.68}$$

$x \approx 147$ მ

რადგან პირამიდას ფუძეში ჰქონდა ბრტყელი ფიგურა,

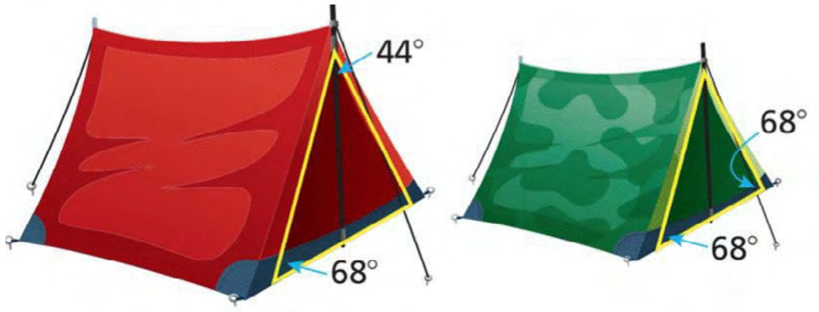
EN = პირამიდის ჩრდილს + მანძილი ცენტრიდან პირამიდის ჩრდილის დაწყებამდე



იხ. სიმულაცია: geogebra.org

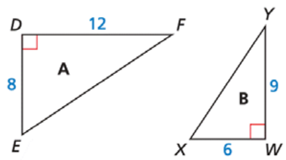
სავარჯიშოები

1. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე დაადგინეთ კარვები მსგავსია თუ არა.

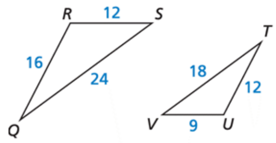


2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე ამოწერეთ ორი სამკუთხედი და დაასაბუთეთ, სამკუთხედების მსგავსების რომელი ნიშნით არიან მსგავსი?

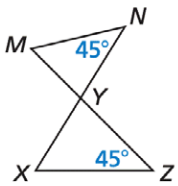
ა)



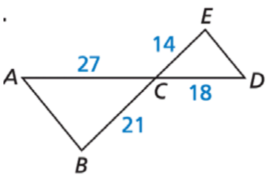
ბ)



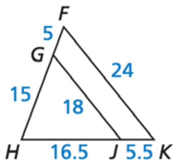
გ)



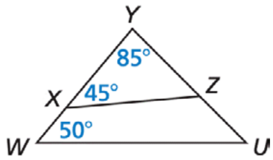
დ)



ე)

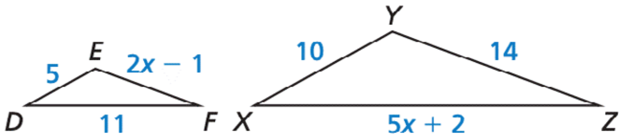


ვ)

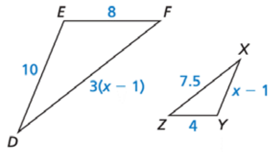


3. $\Delta DEF \sim \Delta XYZ$, ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდების სიგრძეები.

ა)

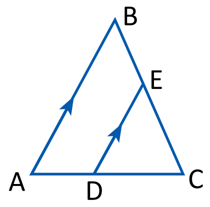


ბ)

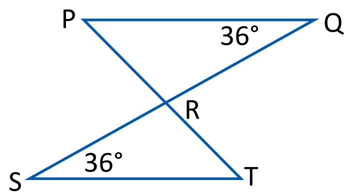


სავარჯიშოები

4. მოცემულია ΔABC, $AB \parallel DE$, ა) დაასაბუთეთ, რომ $\Delta ABC \sim \Delta DCE$;
ბ) თუ $AC = 45, DE = 30, BC = 42, DC = 20$, იპოვეთ AB და EC.

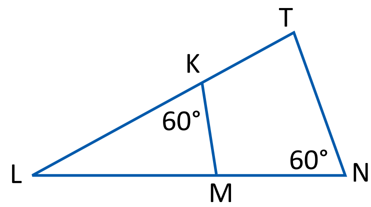


5. დაასაბუთეთ, რომ სამკუთხედები ΔPQR და ΔTSR მსგავსია. ა) თუ $PQ = 30$; $ST = 20$; $PR = 24$; $RS = 18$, იპოვეთ დანარჩენი გვერდები

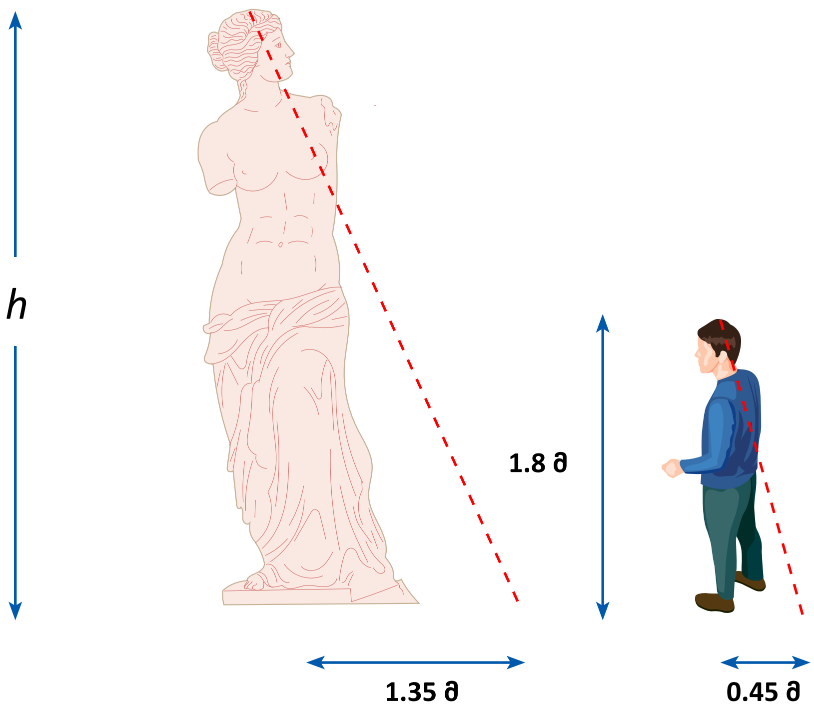


6. მოცემულია ორი მსგავსი სამკუთხედი $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, ΔABC-ის გვერდების სიგრძეებია 2,5 სმ, 4 სმ, და 5 სმ. ΔDEF-ის უმცირესი გვერდი 7.5-სმ-ია, იპოვეთ ΔDEF-ის ყველა გვერდი.

7. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე არის თუ არა ΔLKM და ΔLNT მსგავსები? პასუხი დაასაბუთეთ.

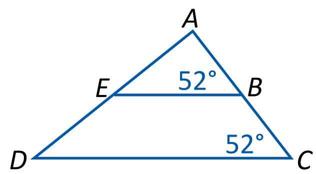


8. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ ძეგლის სიმაღლე



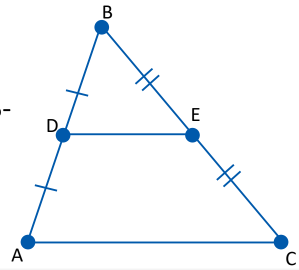
სავარჯიშოები

9. დაასაბუთეთ, რომ თუ სამკუთხედში გავავლებთ ერთი გვერდის პარალელურ წრფეს, სამკუთხედში მივიღებთ მის მსგავსს მცირე სამკუთხედს; ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე EB ∥ CD; დაასაბუთეთ, რომ $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.



10. თუ სამკუთხედის ორი გვერდის შუაწერტილებს შევაერთებთ, მივიღებთ მონაკვეთს, რომელსაც სამკუთხედის შუახაზი ეწოდება.

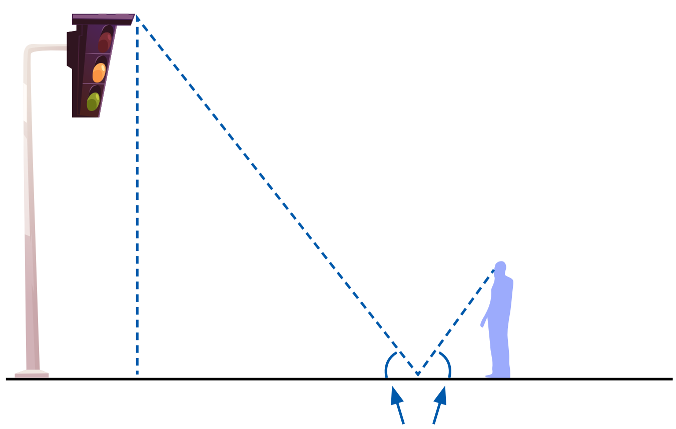
დაასაბუთეთ, რომ სამკუთხედის შუახაზი მოპირდაპირე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს უდრის.
დაასაბუთეთ, რომ DE∥AC, $DE = \frac{AC}{2}$



ჯგუფური სამუშაო

11. ჩვენ უკვე გავეცანით, როგორ შეიძლება დავადგინოთ ობიექტის სიმაღლე ჩრდილის მეთოდით.

გავეცნოთ ახალ მეთოდს, სარკის მეთოდი.



ობიექტსა და თქვენ შორის მოათავსებ სარკეს ისე, რომ სარკეში ჩანდეს ობიექტის უმაღლესი წერტილი. ისე როგორც ნახ. 1-ზეა აღწერილი.
გაზომეთ მანძილი თქვენიდან სარკემდე და ობიექტიდან სარკემდე; ასევე დაადგინეთ თქვენი სიმაღლე; აღნიშნული ინფორმაცია საკმარისია იმისათვის, რომ დაადგინოთ ობიექტის სიმაღლე.

I. ახსენით, რატომ არის სარკის მეთოდი სწორი? რომელ მსგავს სამკუთხედებს იღებთ?

II. მეგობრებთან ერთად გაზომეთ თქვენი სკოლის სიმაღლე ჩრდილის მეთოდით და სარკის მეთოდით; შეადგინეთ ორივე მეთოდისთვის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი (ნახაზები), შეასრულეთ გამოთვლები და შეადარეთ გამოთვლის შედეგები.

III. ახსენით, აღნიშნული დავალების შესრულებაში რისი ცოდნა დაგჭირდათ მათემატიკიდან.

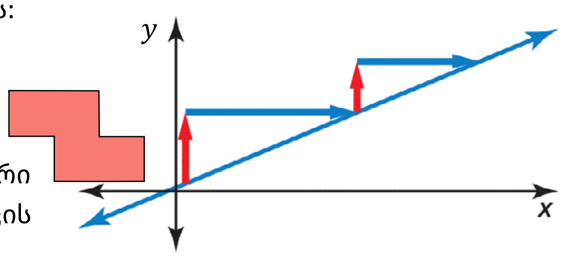
IV. მოიყვანეთ რაიმე სხვა მეთოდი, რომლითაც დაადგენდით სკოლის შენობის სიმაღლეს.

სავარჯიშოები

12. გამოწვევა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

კავშირი ალგებრასა და ანალიზურ გეომეტრიასთან.

მსგავსების დახმარებით აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ორი წერტილის კოორდინატები საკმარისია წრფის დახრილობის საპოვნელად.

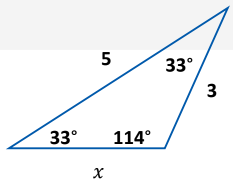


მითითება: ქვემოთ იხილეთ ნახაზი, საჭიროების შემთხვევაში შემოიტანეთ აღნიშვნები.

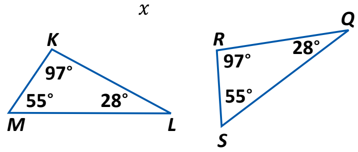
დამატებითი სავარჯიშოები

ქვიზის ნიმუში:

1. იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდი. **(1 ქულა)**



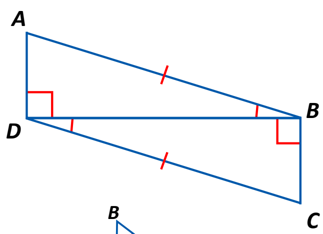
2. თუ მოცემული ორი სამკუთხედი ტოლია, ამოწერეთ ტოლი გვერდები. (1 ქულა)



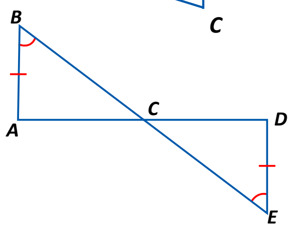
3. შეიძლება თუ არა სამკუთხედების გვერდების სიგრძეები იყოს: 12 სმ; 7 სმ; 4 სმ? პასუხი დაასაბუთეთ. (2 ქულა).

4. ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:3, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ პერიმეტრი 6.4 სმ-ია. (2 ქულა)

5. მოცემული ნახაზის მიხედვით დაასაბუთეთ სამკუთხედების ტოლობის რომელი ნიშნით არიან ტოლი ΔADB და ΔDBC. (2 ქულა)



6. მოცემული ნახაზის მიხედვით დაასაბუთეთ სამკუთხედები ტოლობის რომელი ნიშნით არიან ტოლი ΔABC და ΔCDE. **(2 ქულა)**



სავარჯიშოები

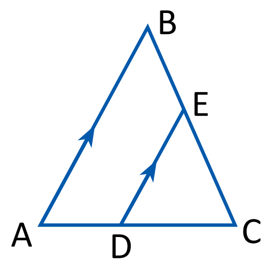
ქვიზის ნიმუში:

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე პარალელური გადატანა ყოველ წერტილს გადაიტანს 6 ერთეულით ქვევით და 4 ერთეულით მარცხნივ. ამ პარალელური გადატანით რომელ წერტილებში გადავა წერტილები: M(7; –2) და C(–4; 5)?

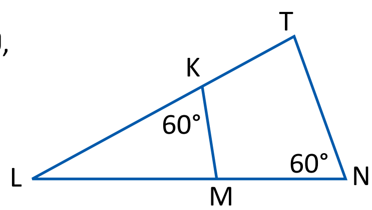
2. A წერტილის სიმეტრიული X ღერძის მიმართ არის A_1 წერტილი, ხოლო Y ღერძის მიმართ A_2 წერტილი. იპოვეთ A_1 და A_2 წერტილების კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია A(–3; 5).

3. მოცემულია ჰომოთეტია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში O და ჰომოთეტიის კოეფიციენტით k = 2,5. იპოვეთ ΔABC სამკუთხედის ჰომოთეტიური $\Delta A_1B_1C_1$ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები, თუ ΔABC სამკუთხედის წვეროს კოორდინატებია: A(2; 3); B(1;–4) და C(–2; –1).

4. MN მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატებია: M(5; –2) და N(3; 4). MN მონაკვეთი სათავის მიმართ 270°-ით მობრუნების შედეგად აისახება FK მონაკვეთში. იპოვეთ MN მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატები.

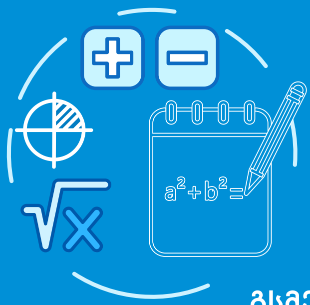


5. ნახაზზე მოცემულ ABC სამკუთხედში AB||DE. იპოვეთ ΔDCE-ს პერიმეტრი, თუ ცნობილია: AB = 12 სმ, AC = 10 სმ, DC = 6 სმ და BE = 3 სმ.



6. ნახაზზე მოცემული სამკუთხედებისთვის ცნობილია, რომ LT = 18 სმ, LM = 15 სმ და KM = 9 სმ. იპოვეთ TN გვერდის სიგრძე.

III. დავალების წარდგენა



გსმენიათ, თუ არა

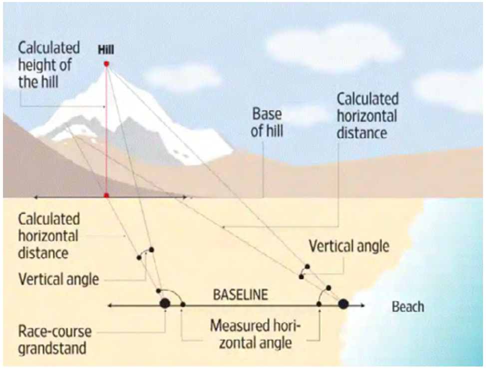
დიდ ტრიგონომეტრიულ კვლევაზე, რომელიც მიმდინარეობდა 1802 წლიდან 1871 წლამდე?

კვლევის მიზანი იყო ინდოეთში სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვა. სამეცნიერო ექსპედიციას ხელმძღვანელობდა ჯორჯ ევერესტი, გუნდმა სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვის შედეგად დაადგინა, რომელი იყო უმაღლესი მწვერვალი, რომელსაც მოგვიანებით ექსპედიციის ხელმძღვანელის პატივსაცემად **ევერესტი** ეწოდა.

კომპლექსური დავალება

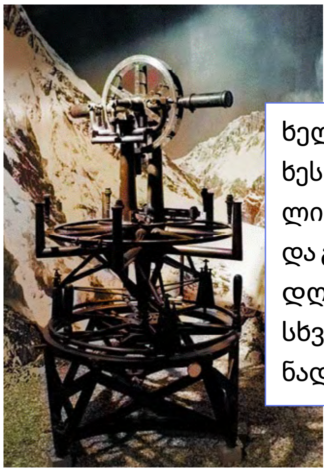
რეკომენდაცია: აღნიშნული კომპლექსური დავალება ეხება მთლიან ქვეთემას.

ბრტყელი ფიგურები და ტრიგონომეტრია

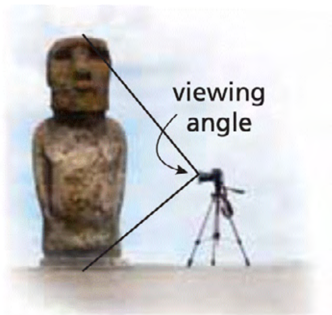


ნახაზი 1

ქვემოთ ნახაზ 1-ზე მოცემულია თუ რა მათემატიკური მოდელი შექმნეს მეცნიერებმა სიმაღლის დასადგენად. იქიდან გამომდინარე, რომ ადგილი მიუვალი იყო და არ იყო ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, მეცნიერებს დასჭირდათ სხვადასხვა მანძილის და კუთხის გაზომვა და ერთმანეთთან დაკავშირება.



ხელსაწყოს, რომლითაც კუთხეს ზომავდნენ, ერქვა თეოდოლიტი, რომლის თანამედროვე და გაუმჯობესებულ მოდელებს დღემდე იყენებენ სივრცეში სხვადასხვა კუთხის დასადგენად.

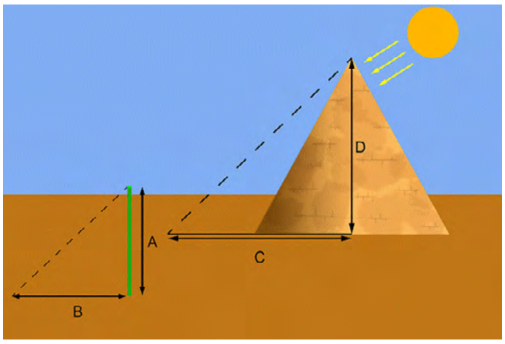


გაგრძელება

III. დავალების წარდგენა

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ დაადგინეს ძველად ეგვიპტეში პირამიდის სიმაღლე. მათ მოიფიქრეს ძალიან მოსახერხებელი გეგმა, 1 ერთეულის მქონდე სიგრძის ჯოხით და მზის სხივების დახმარებით შეძლეს მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომელიც პირამიდის სიმაღლის დადგენაში დაეხმარათ.

შენიშვნა: იმ დროს ჯოხის სიგრძე იზომებოდა მათი ერთეულით.



თანამედროვე გაზომვითი ხელსაწყოებით გაზომვის შემდეგ დადგინდა, რომ ეგვიპტელებს საკმაოდ მაღალი სიზუსტით ჰქონდათ დადგენილი პირამიდის სიმაღლე.

შეგახსენებთ, რომ მათ გაზომვებში ასევე დასჭირდათ სამკუთხედების მსგავსების თვისებების ცოდნა.

კომპლექსური დავალება

ბრტყელი ფიგურები და ტრიგონომეტრია

პირამიდა იდგა მეტნაკლებად სწორ ზედაპირზე და ევერესტთან შედარებით უფრო მოსახერხებელი იყო მისი სიმაღლის დადგენა სამკუთხედების მსგავსებით.

ევერესტი მიუვალი მწვერვალია, იქ ძალიან ძნელი იქნებოდა ენახათ ჰორიზონტალური ზედაპირი და იგივე მეთოდის გამოყენებით გაეზომათ მთის სიმაღლე. ამიტომ მეცნიერებმა მიმართეს სხვა ცოდნას, მათ გამოიყენეს ცოდნა ტრიგონომეტრიიდან.

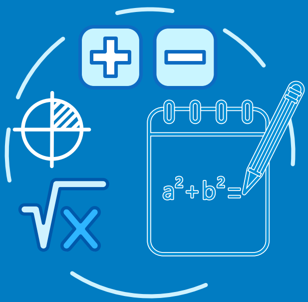
თქვენი დავალება

1. დაადგინოთ, როგორ შეიძლება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით ობიექტის სიმაღლის დადგენა.
2. როგორ შეიძლება კუთხის ზომის დადგენა თეოდოლიტის მეშვეობით, ასევე გამოიკვლიოთ კუთხის საზომი სხვადასხვა ხელსაწყო და მეთოდი.
3. გამოთვალოთ რომელიმე ობიექტის სიმაღლე, როგორც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით, ასევე მსგავსებით და შეადაროთ სიზუსტე.
4. შეადგინოთ გეგმა, რომელიც აღწერს, როგორ გაზომეს მეცნიერება ევერესტის სიმაღლე და აწარმოოთ შესაბამისი გამოთვლები.

დავალება წარმოადინეთ რეფერატის სახით, რომელშიც წარმოდგენილი იქნება როგორც ნახაზები, ასევე, ანგარიშის ფურცელი.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის, ახსენით როგორ დაადგინეთ კავშირები.
- როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?
- თქვენი აზრით, რატომ იყო მეცნიერებისთვის საინტერესო უმაღლესი მწვერვალის დადგენა? თქვენ თუ გაქვთ ინტერესი რაიმე გამოიკვლიოთ?

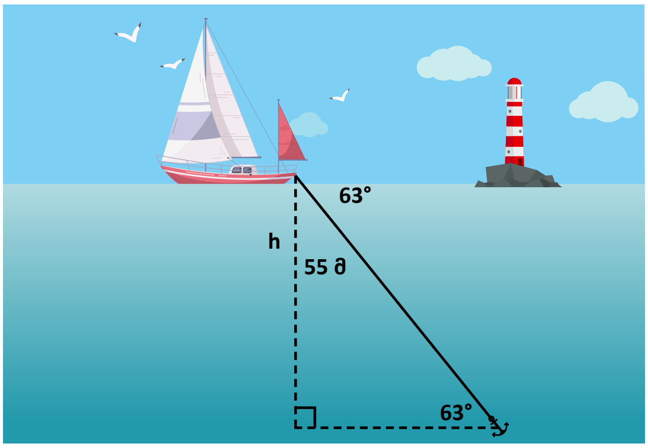


კომპლექსური დავალება

რეკომენდაცია: აღნიშნული კომპლექსური დავალება ეხება ქვეთემის ნაწილს, მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრია

საკვანძო კითხვა:

უძველესი დროიდან ადამიანები იკვლევდნენ სხვა-დასხვა ფიგურას და მათ ელემენტებს შორის დამო-კიდებულებებს, რადგან მიხვდნენ, რომ აღნიშნული ცოდნა დაეხმარებოდათ სხვადასხვა პრობლემის გადაჭრაში.



თქვენი დავალება

1. შეისწავლეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები;
2. მოიძიეთ საინტერესო მაგალითები, სად შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში;
3. გამოიკვლიეთ, როგორ ადგენდნენ ტბის ან მდინარის სიღრმეს ტექნოლოგიების განვითარებამდე ადა-მიანები? შექმენით მათემატიკური მოდელი
4. დაფიქრდით, კიდევ რაში შეიძლება აღნიშნული ცოდნის გამოყენება?
5. გამოიკვლიეთ, თანამედროვეობაში რა საშუალებე-ბით ადგენენ ზღვის ან ოკეანის სიღრმეს.

   (დაადგინეთ, რისი ცოდნაა საჭირო).

გაგრძელება

კომპლექსური დავალება

შენი დავალება

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

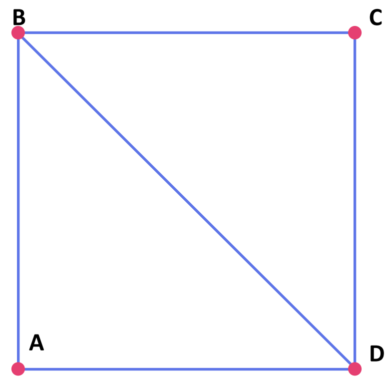
- როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები ერთმანეთზე?
- რა ტიპის დამოკიდებულება არსებობს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის?
- რომელი მათემატიკური მოდელის გამოყენება შეიძლება მიუვალი ადგილის გაზომვების დროს? მაგალითად, სიღრმის ან სიმაღლის დასადგენად? როგორ შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით აღნიშნული პრობლემის გადაჭრა? მოიყვანეთ კონკრეტული მაგალითი.
- როგორ ფიქრობთ, სად შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში?
- თუ იცით, რა საშუალებებით ხდება თანამედროვეობაში სიღრმის დადგენა?

3.1. მართკუთხა სამკუთხედი და პითაგორას თეორემა

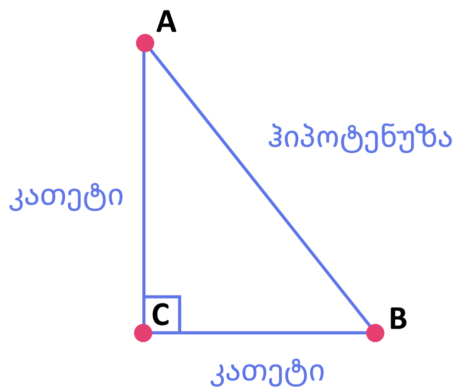
საკვანძო კითხვა:

- *როგორ შეიძლება კვადრატის ან მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძის დადგენა?*

მოცემულია $ABCD$ კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a, BD დიაგონალია, როგორ დავადგინოთ დიაგონალის სიგრძე?



მართკუთხა სამკუთხედში ურთიერთმართობულ გვერდებს ეწოდებათ კათეტები, ხოლო მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს – ჰიპოტენუზა.



ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის არსებობს კავშირი, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

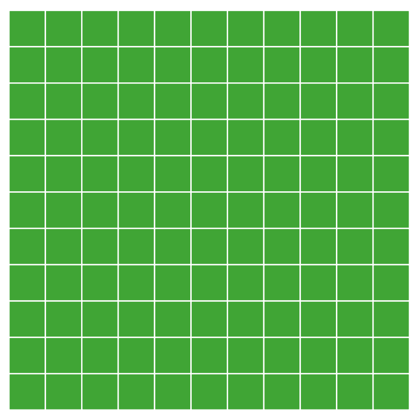
▶ **აღნიშნულის დასამტკიცებლად გავიხსენოთ, რას უდრის ზოგიერთი ფიგურის ფართობი:**

წინარე მასალის გამეორება

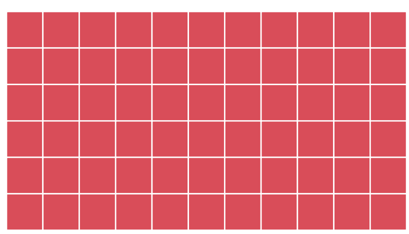
მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a, მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = a^2$;

ასევე, მოცემულია მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია

a და b. მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = a \cdot b$;



$S = a^2$

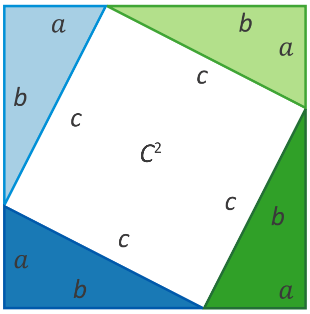


$S = a \cdot b$

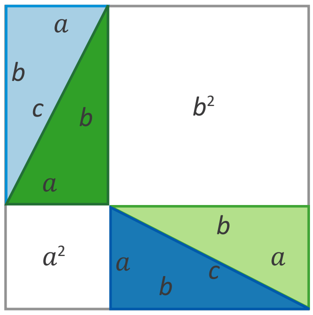
3.1.1 პითაგორას თეორემა

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის წვეროებში განთავსებულია 4 ცალი მართკუთხა სამკუთხედი, რომელთა გვერდების სიგრძეებია a,b და c (ისე, როგორც ნახაზზეა მოცემული);

კვადრატის თითოეული გვერდის სიგრძეა $a + b$; ხოლო ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით $S = (a + b)^2$; შუა ნაწილში დარჩენილი ცარიელი კვადრატის ფართობია $s = c^2$.



ნახაზი 1

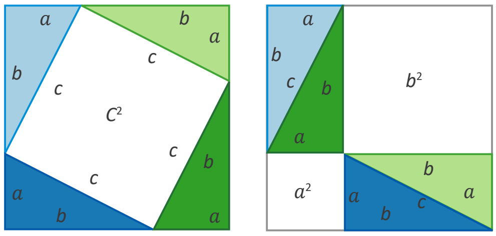


ნახაზი 2

პითაგორას თეორემა მსჯელობის ხაზი:

ნახ.1-ზე მოცემული მართკუთხა სამკუთხედები პარალელურად გადავიტანოთ ისე, როგორც ნახ. 2-ზეა ნაჩვენები.

იხილეთ სიმულაცია



$C^2 = a^2 + b^2$

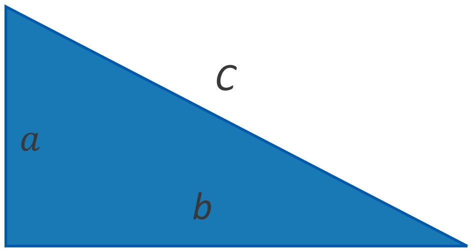
მივიღებთ ორ მართკუთხედს და ორ კვადრატს; ნახ. 3-დან ნათლად ჩანს, რომ სამკუთხედების პარალელური გადატანის შემდეგ თავდაპირველი დიდი თეთრი კვადრატი გაიყო ორ კვადრატად, რომელთა ფართობებია a^2 და b^2. ე.ი. მივიღეთ, რომ

$c^2 = a^2 + b^2$

პითაგორას თეორემა

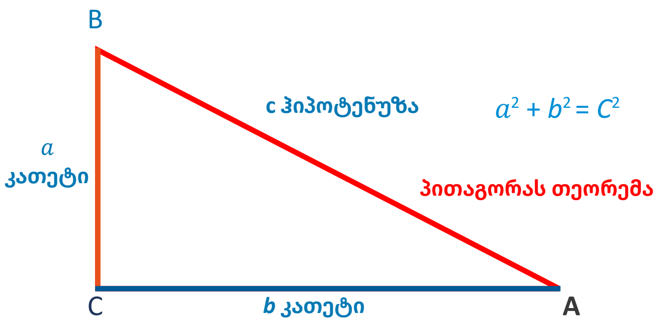
განვიხილოთ ნახაზ 1-ზე მოცემული ნებისმიერი მართკუთხა სამკუთხედი;

ამ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია a და b, ხოლო ჰიპოტენუზის სიგრძე – c; დავუკავშიროთ ჩვენ მიერ ჩაწერილი ფორმულა აღნიშნულ სამკუთხედთან და მივიღებთ, რომ



მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების კვადრატების ჯამი, ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია, აღნიშნულს პითაგორას თეორემა ეწოდება. $c^2 = a^2 + b^2$;

პითაგორას თეორემა გვაჩვენებს კანონზომიერებას ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის.



მინიშნება: A, B, C წვეროების მოპირდაპირე გვერდებს აღვნიშნავთ შესაბამისი პატარა ლათინური ასოებით.

ნიმუში 1

მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი კათეტის სიგრძეა 5 სმ, ჰიპოტენუზის 13 სმ, იპოვეთ მეორე კათეტის სიგრძე

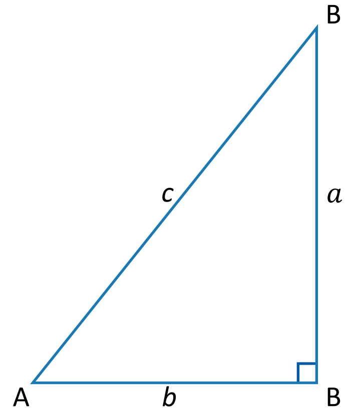
მოცემულია:

$c = 13$ სმ, $b = 5$ სმ იპოვეთ a

ვიცით, რომ $a^2 + b^2 = c^2$

$$a^2 + 5^2 = 13^2$$
$$a^2 + 25 = 169$$
$$a^2 = 169 - 25$$
$$a^2 = 144$$
$$a = \pm 12$$

გამომდინარე იქიდან, რომ სამკუთხედის გვერდი ვერ იქნება უარყოფითი რიცხვი, მეორე კათეტის სიგრძეა 12 სმ.



განვიხილოთ პითაგორას თეორემასთან დაკავშირებული საინტერესო ფაქტები.
ჩვენ ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი გვერდის წინ დიდი კუთხეა, ხოლო მცირე გვერდის წინ მცირე კუთხე.

ნიმუში 2 – პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა

რიცხვების სამეულს, რომელიც $c^2 = a^2 + b^2$ ტოლობას აკმაყოფილებს, პითაგორას რიცხვებს უწოდებენ.

აღნიშნული თეორემიდან გამომდინარე დაადგინეთ მართკუთხაა თუ არა სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია ა) 3, 5, 4 ბ) 4, 5, 6

ა) **მსჯელობა:** დავუშვათ სამკუთხედის გვერდებია $a = 3$, $b = 4$ და $c = 5$

ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი კუთხის წინ დიდი გვერდია; თუ აღნიშნული სამეული წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს, მაშინ ჰიპოტენუზა უნდა შეესაბამებოდეს დიდ გვერდს, ანუ

$c = 5$, ხოლო მცირე გვერდები კათეტებს, ე.ი. $a = 3$ და $b = 4$.

პითაგორას თეორემის თანახმად:

$c^2 = a^2 + b^2$

შევამოწმოთ პირობა:

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

აღნიშნული გვერდები წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს.

ბ) **მსჯელობა:** დავუშვათ სამკუთხედის გვერდებია $a = 4$,$b = 5$ და $c = 6$

ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი კუთხის წინ დიდი გვერდია; თუ აღნიშნული სამეული წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს, მაშინ ჰიპოტენუზა უნდა შეესაბამებოდეს დიდ გვერდს, ანუ

$c = 6$, ხოლო მცირე გვერდები კათეტებს, ე.ი. $a = 4$ და $b = 5$.

პითაგორას თეორემის თანახმად:

$c^2 = a^2 + b^2$

შევამოწმოთ პირობა:

$6^2 = 4^2 + 5^2$

$36 \neq 16 + 25$

აღნიშნული გვერდები არ წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს.

3.1.2 პითაგორას თეორემის გამოყენება

პითაგორას თეორემით შესაძლებელია სიბრტყეზე ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილის პოვნა, თუ ვიცით აღნიშნული წერტილების კოორდინატები.
დავუშვათ სიბრტყეზე მოცემულია ორი A(x_1, y_1) და B(x_2, y_2) წერტილი და გვინდა ვიპოვოთ მანძილი მათ შორის, ანუ გამოვთვალოთ *AB* მონაკვეთის სიგრძე.

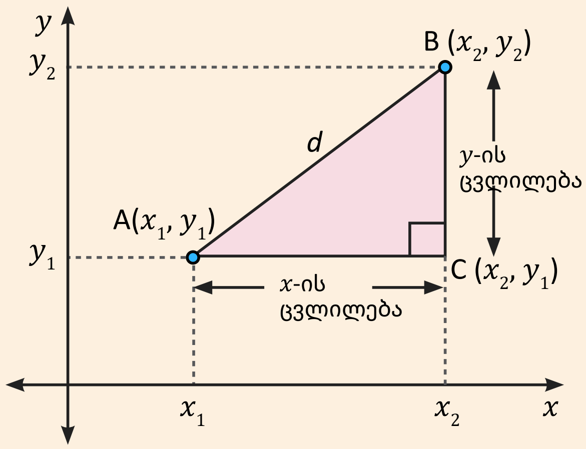
განვიხილოთ ΔABC;

$AC = x_2 - x_1$, ხოლო $BC = y_2 - y_1$
პითაგორას თეორემის თანახმად ვიცით, რომ
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ ამ ფორმულაში *AC* და *BC*-ს მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

მინიშნება: *ზოგადად, გამომდინარე იქიდან, რომ სიგრძე დადებითია აღვნიშნავთ შემდეგნაირად |AB|*



ნიმუში 3

სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი A(–3 ,4) და B(1,9); იპოვეთ მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის:

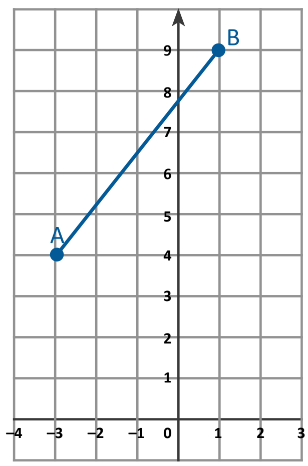
მოცემულია A(–3, 4) და B(1, 9)

$|AC| = x_2 - x_1 = (1-(-3)) = 4$,

ხოლო

$|BC| = y_2 - y_1 = (9 - 4) = 5$

$|AB| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

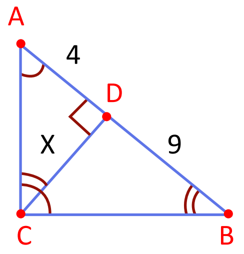
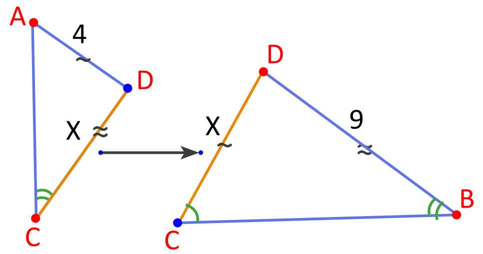


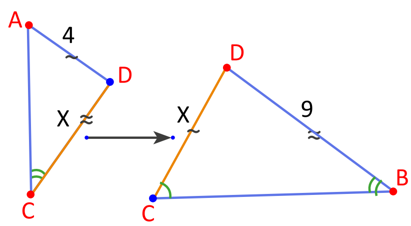
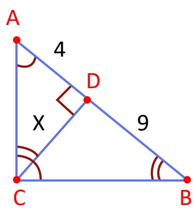
ნიმუში 4

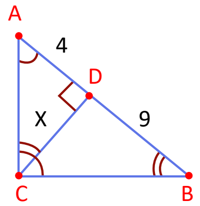
მათემატიკის მოყვარულთათვის* მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ჰიპოტენუზას ჰყოფს ორ ნაწილად, რომელთა სიგრძეებია 4 სმ და 9 სმ; იპოვეთ სიმაღლე და მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები.

კვლევა

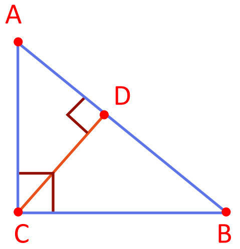
ამოცანის ამოხსნამდე გამოვიკვლიოთ რა ხდება, როდესაც მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე ვუშვებთ სიმაღლეს. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე სამკუთხედს ყოფს ორ მართკუთხა სამკუთხედად.

მოცემულია ΔACB, $AB \perp CD$	
 *ნახაზი 1*	 *ნახაზი 2* იმისათვის, რომ მსგავსება მეტად აღქმადი იყოს ცალ-ცალკე დავხაზოთ მიღებული ორი მართკუთხა სამკუთხედი.

წინადადება	არგუმენტი
1. $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ რადგან ΔACB-დან $\angle A = 90^0 - \angle B$, ხოლო ΔCBD-ში $\angle DCB = 90^0 - \angle B$.	**1.** მსგავსების პირველი ნიშნით 
2. $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ $CD^2 = AD \cdot BD$ $x^2 = 4 \cdot 9$ $x = 6$	**2.** რადგან მსგავს სამკუთხედებში გვერდები პროპორციულია
3. ΔACD $AD^2 + CD^2 = AC^2$ $4^2 + 6^2 = AC^2$ $52 = AC^2$ $AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$	**3.** პითაგორას თეორემის თანახმად 

4. ΔCBD $CD^2 + DB^2 = CB^2$ $6^2 + 9^2 = BC^2$ $117 = BC^2$ $BC = \sqrt{117}$	**4.** პითაგორას თეორემის თანახმად 

დაიმახსოვრეთ,



$CD^2 = AD \cdot BD$ (1)

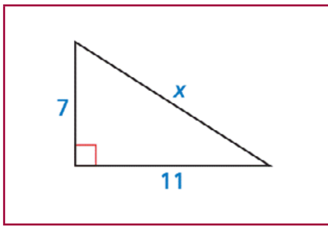
$AC^2 = AD \cdot AB$ (2)

$BC^2 = BD \cdot AB$ (3)

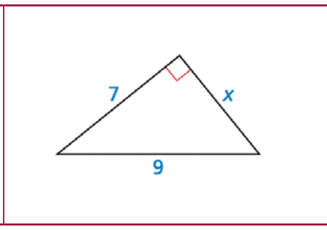
სავარჯიშოები

1. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდის სიგრძე.

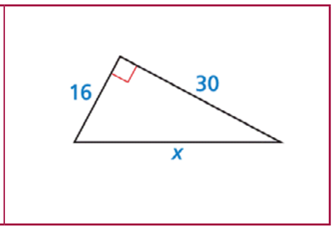
ა)



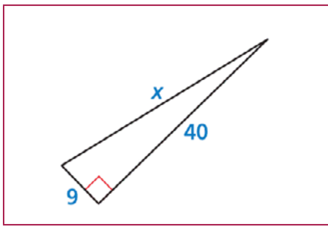
ბ)



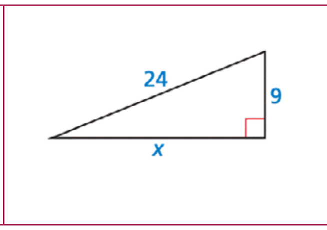
გ)



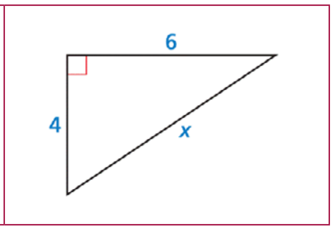
დ)



ე)



ვ)



ჯგუფური სამუშაო ■ კვლევითი აქტივობა

2. პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა:

■ თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა. უდიდესი გვერდია ჰიპოტენუზა.	შედეგი **I.** თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი,დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე ნაკლებია, მაშინ ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა. **II.** თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე მეტია, მაშინ ეს სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

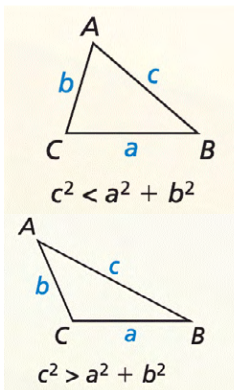
ლოგიკის სავარჯიშო

I. პითაგორას თეორემის შედეგი 1:

თუ სამკუთხედში უდიდეს გვერდს c-თი აღვნიშნავთ, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდს კი a და b სიმბოლოებით და სამკუთხედში სრულდება პირობა:

$c^2 < a^2 + b^2$, იგივე ($a^2 + b^2 > c^2$), მაშინ ΔABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა

$c^2 > a^2 + b^2$, იგივე ($a^2 + b^2 < c^2$), მაშინ ΔABC სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა



სავარჯიშოები

MATH Lab

შეამოწმეთ აღნიშნული თეორემის სისწორე ტექნოლოგიების გამოყენებით.

რეკომენდაცია:

მეთოდი 1:

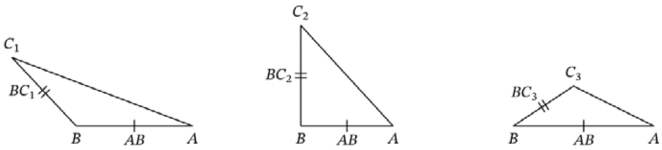
შედით საიტზე Geogebra – კვლევითი აქტივობა, ააგეთ სხვადასხვა ზომის სამკუთხედები, ამოიწერეთ გვერდების სიგრძეები და შეამოწმეთ მოცემული თეორემის სისწორე.

მეთოდი 2:

აიღეთ ორი მონაკვეთი, სიგრძეებით x სმ და y სმ

- ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტების სიგრძეები აღნიშნული მონაკვეთის სიგრძეების ტოლია, იპოვეთ ჰიპოტენუზა.
- ააგეთ ბლაგვკუთხა სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძე მოცემული მონაკვეთების ტოლია (x სმ და y სმ-ის), ააგეთ სამკუთხედი და შეამოწმეთ თეორემის სისწორე.
- ააგეთ მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძე მოცემული მონაკვეთების ტოლია (x სმ და y სმ-ის), ააგეთ სამკუთხედი და შეამოწმეთ თეორემის სისწორე.

იხილეთ ნახაზების ნიმუში

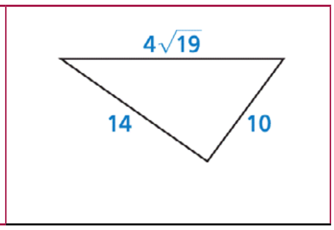


3. ქვემოთ მოცემული სამკუთხედებიდან დაადგინეთ, რომელია მართკუთხა სამკუთხედი

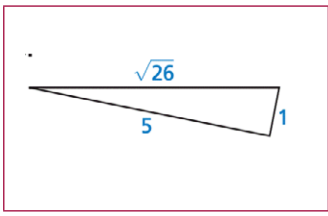
ა)

65
97

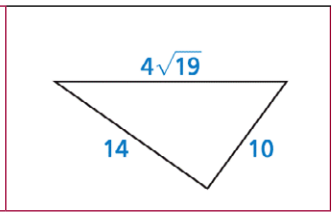
ბ)



გ)



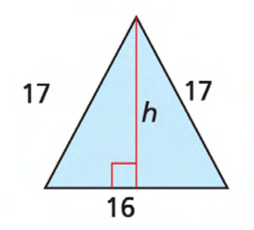
დ)



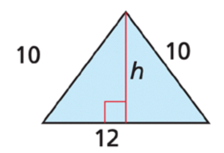
სავარჯიშოები

4. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლის სიგრძე.

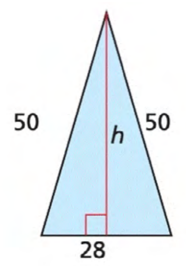
ა)



ბ)



გ)

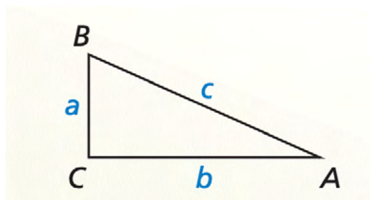


მინიშნება: ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის მიმართ გავლებული მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა ერთი და იგივე მონაკვეთია.

■ ჯგუფური სამუშაო ■ მოიყვანეთ არგუმენტი

ლოგიკის სავარჯიშო

5. დაასაბუთეთ, რომ თუ a,b,c მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია, მაშინ ka, kb, kc ასევე იქნებიან მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.



$c^2 = a^2 + b^2$

განიხილეთ კონკრეტული ნიმუშების მაგალითზე:

ვიცით, რომ მონაკვეთებისგან, რომლის სიგრძეებია 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ შეიძლება მართკუთხა სამკუთხედის აგება

დაასაბუთეთ, რომ ქვემოთ მოცემული სამეულებიც მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებს წარმოადგენენ

ა) 6 სმ, 8 სმ, 10 სმ
ბ) 9 სმ, 12 სმ, 15 სმ
გ) $3k$, $4k$, $5k$

!! ყურადღება მიაქციეთ:

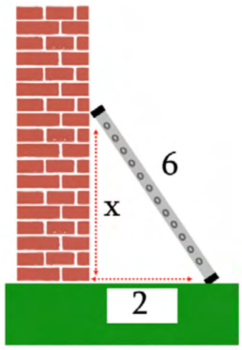
3, 4, 5	**5, 12, 13**	**8, 15, 17**	**7, 24, 25**
6, 8, 10	10, 24, 26	16, 30, 34	14, 48, 50
9, 12, 15	15, 36, 39	24, 45, 51	21, 72, 75
$3k$, $4k$,$5k$	$5k$, $12k$,$13k$	$8k$, $15k$,$17k$	$7k$, $24k$,$25k$

სავარჯიშოები

6. ნახაზზე მოცემული მონაცემების საფუძველზე, იპოვეთ x.

ა) გაასიტყვეთ ამოცანა

ბ) შეადგინეთ მსგავსი ამოცანა



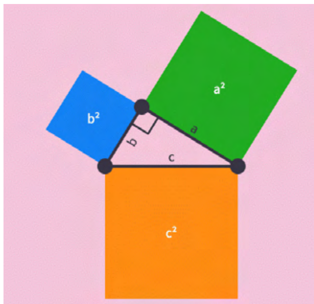
7. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი, იპოვეთ მანძილი აღნიშნულ ორ წერტილს შორის:

ა) A(0,4) და B(1,3); გ) A(–1, –2) და B(1,7); ე) A(4,0) და B(–4,2);

ბ) A(1,2) და B(4,6); დ) A(2,0) და B(0,6); ვ) A(–1,2) და B(–4,6).

8. პითაგორას თეორემა შესაძლებელია დამტკიცდეს სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებით, ქვემოთ მოცემულია დიაგრამა, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია პითაგორას თეორემის დასაბუთება.

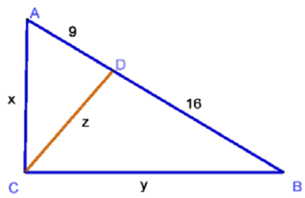
გააანალიზეთ დიაგრამაზე მოცემული სიტუაცია და ახსენით აღნიშნული მეთოდით, როგორ მტკიცდება პითაგორას თეორემის სისწორე.



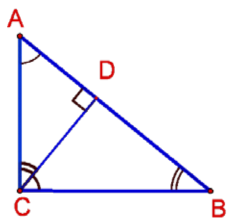
9. მათემატიკის მოყვარულთათვის*

ნახაზზე მოცემულია ΔACB, CD ⊥ AB

ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



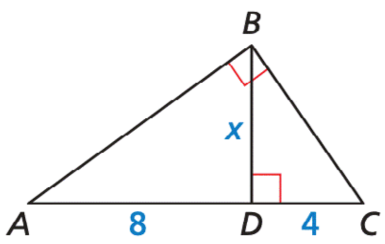
1. ΔABC მართკუთხა სამკუთხედია,
   AB = 25 სმ; BC = 20 სმ, CD = ?
2. ΔABC მართკუთხა სამკუთხედია,
   AD = 4სმ; DB = 12 სმ, AC = ?
3. ΔABC მართკუთხა სამკუთხედია,
   AB = 25 სმ; CB = 16 სმ, BD = ?



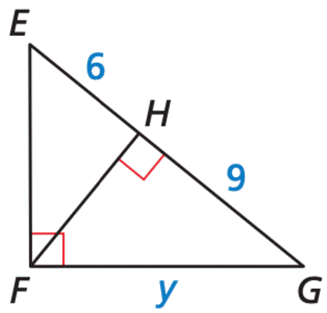
სავარჯიშოები

10. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის თანახმად,

ა) იპოვეთ x



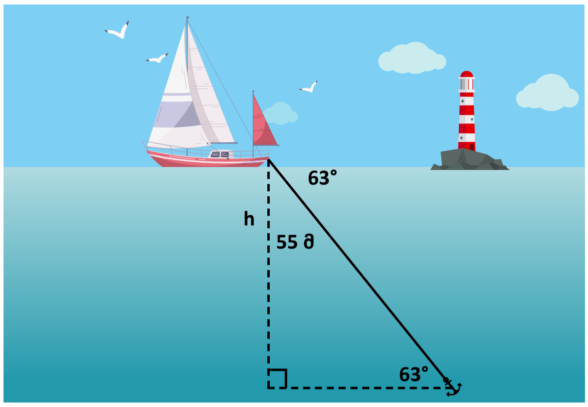
ბ) იპოვეთ y



3.2. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

საკვანძო კითხვა:

- *თქვენი აზრით, როდესაც ადრე მდინარეებში ან ტბებში შედიოდნენ მეთევზეები ნავებით ან ტივით, როგორ შეიძლებოდა მდინარის ან ტბის სიღრმის დადგენა?*



უძველესი დროიდან ადამიანები იკვლევდნენ სხვადასხვა ფიგურას და მათ ელემენტებს შორის დამოკიდებულებებს, რადგან გარკვეული დამოკიდებულებების დადგენა ეხმარებოდათ იმ დროისთვის მნიშვნელოვანი პრობლემის გადაჭრაში.

ტრიგონომეტრია მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ნაწილია, **ტრიგონომეტრია სწავლობს დამოკიდებულებას სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.**

(Triangle – სამკუთხედი, Metron – გაზომვა)

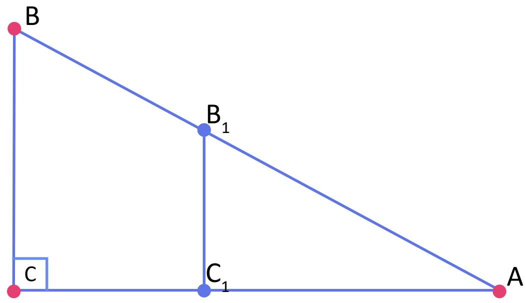
სიტყვა ტრიგონომეტრია დაკავშირებულია სამკუთხედთან და გაზომვებთან.

კვლევა

განვიხილოთ მართკუთხა ΔABC, რომლის $\angle C=90°$,

გავავლოთ BC გვერდის პარალელური B_1C_1 გვერდი.

$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, სამკუთხედები მსგავსია რადგან შესაბამისი სამივე კუთხე ტოლი აქვთ.



მსგავსებიდან გამომდინარე დავწეროთ შემდეგი თანაფარდობები:

I.	II.	III.
$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{AB_1}=k$	$\frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1}$	$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{AC_1}$
პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ
$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}$

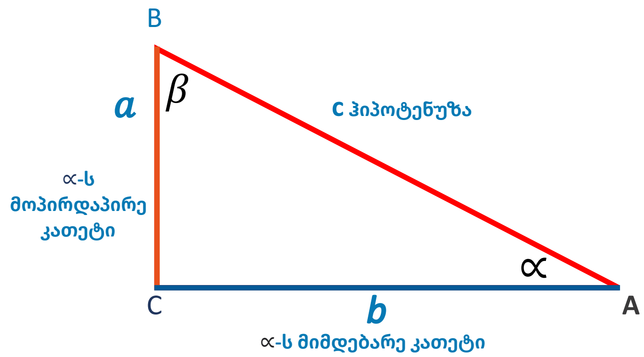
თუ ზემოთ მოცემულ ტოლობებს გავაანალიზებთ, დავინახავთ, რომ თუ ორ მართკუთხა სამკუთხედს ტოლი კუთხეები აქვთ (თუ სამკუთხედები მსგავსია), მაშინ ამ ორ სამკუთხედს მახვილი კუთხისთვის ტოლი ექნებათ:

$\dfrac{\text{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი}}{\text{ჰიპოტენუზასთან}}$	**(ეწოდება კუთხის სინუსი)**
$\dfrac{\text{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი}}{\text{ჰიპოტენუზასთან}}$	**(ეწოდება კუთხის კოსინუსი)**
$\dfrac{\text{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი}}{\text{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტთან}}$	**(ეწოდება კუთხის ტანგენსი)**
$\dfrac{\text{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი}}{\text{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტთან}}$	**(ეწოდება კუთხის კოტანგენსი)**
შენიშვნა: *ბოლო შეფარდების ჩვენება შეიძლება პირველი სამის მსგავსად.*	***აღნიშნული თანაფარდობებისთვის მათემატიკაში არის სპეციალური სახელები და აღნიშვნები.***

3.2.1 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

$sin\alpha = \dfrac{a}{c};$	$sin\beta = \dfrac{b}{c};$
$cos\alpha = \dfrac{b}{c};$	$cos\beta = \dfrac{a}{c};$
$tg\alpha = \dfrac{a}{b};$	$tg\beta = \dfrac{b}{a};$
$ctg\alpha = \dfrac{b}{a};$	$ctg\beta = \dfrac{a}{b};$



მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის სინუსი. **აღინიშნება**: $sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის კოსინუსი. **აღინიშნება**: $cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას მიმდებარე კათეტთან ეწოდება კუთხის ტანგენსი, **აღინიშნება**: $tg\alpha = \dfrac{a}{b}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას მოპირდაპირე კათეტთან ეწოდება კუთხის კოტანგენსი, **აღინიშნება**: $ctg\alpha = \dfrac{b}{a}$

შენიშვნა: *ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ტანგენსი და კოტანგენსი აღინიშნება შემდეგნაირად* $tg\alpha = tan\alpha;\ ctg\alpha = cot\alpha$

3.2.2 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები გამოთვლა ტექნოლოგიების გამოყენებით

? საკვანძო კითხვა:

- *როგორ დავადგინოთ, კუთხის თითოეული გრადუსისთვის რას უდრის: სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი?*
- *როგორ დავადგინოთ კუთხის მნიშვნელობა, თუ ვიცით კუთხის sinα,cosα, tgα, ctgα-ის მნიშვნელობა?*

მეთოდი 1:

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

გააქტიურეთ ღილაკი *Func*, ამოირჩიეთ რომელი კუთხის სინუსის, კოსინუსის ან ტანგესის მოძებნა გინდათ (მიაქციეთ ყურადღება, კუთხე იზომება გრადუსებით ან რადიანებით); კალკულატორი გაჩვენებთ თითოეული კუთხისთვის რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα;*

მაგ., *cos*25°≈ 0.906

? საკვანძო კითხვა:

1. *sinα, cosα, tgα, ctgα-ს ასევე ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?*

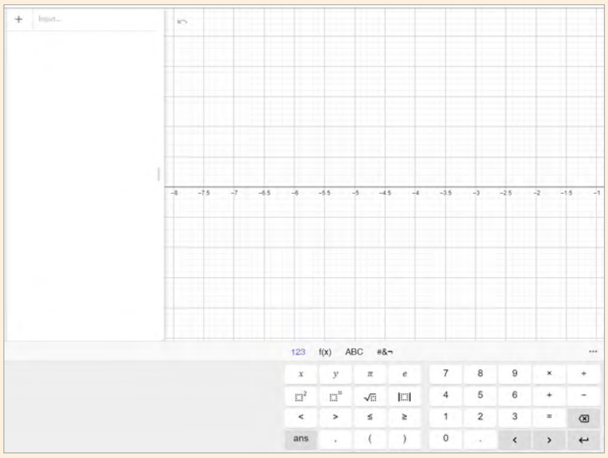
დადგენილია, რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα* – კუთხის თითოეული მნიშვნელობისთვის. ცხრილით, მოცემულია ის მნიშვნელობები, როდესაც კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*-ის წარმოდგენა შეიძლება მოხერხებული ფორმით.

შეგახსენებთ, კუთხე შეიძლება გავზომოთ როგორც გრადუსებით, ასევე რადიანებით.

180° გრადუსს შეესაბამება *π* რადიანი; პროპორციის გამოყენებით მარტივად დავადგენთ შემდეგ კავშირს:

Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე

Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



გრადუსების და რადიანების შესაბამისობის ცხრილი

რადიანი	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
გრადუსი	0	30	45	60	90
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	განსაზღვრული არ არის

გრადუსი	რადიანი
180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
360°	2π

- გამომდინარე იქიდან, რომ სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი კუთხის კონკრეტულ გრადუსულ ზომას შეუსაბამებენ რიცხვს, ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ გრაფიკებს შევისწავლით მოგვიანებით.

შებრუნებული ფუნქციები

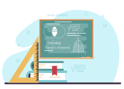
- *როგორ ვიპოვოთ კუთხე, თუ ვიცით კუთხის სინუსი, კოსინუსი ან ტანგენსი?*

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შებრუნებული ფუნქციები გვეხმარება, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი კოსინუსი ან ტანგენსი არის კონკრეტული რიცხვი.

$$sin^{-1}\left(\frac{BC}{AB}\right) = \angle A$$

$$cos^{-1}\left(\frac{AC}{AB}\right) = \angle A$$

$$tg^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right) = \angle A$$

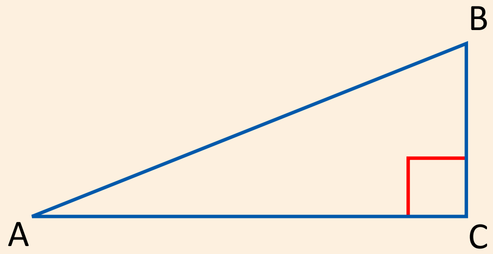


MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

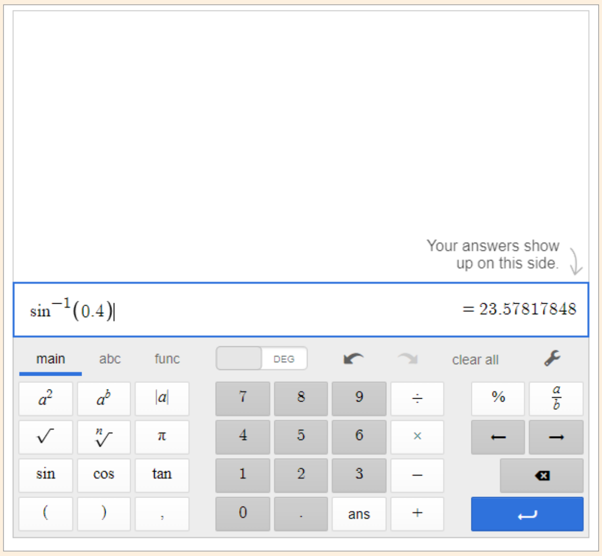
შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

შებრუნებული ფუნქცია:

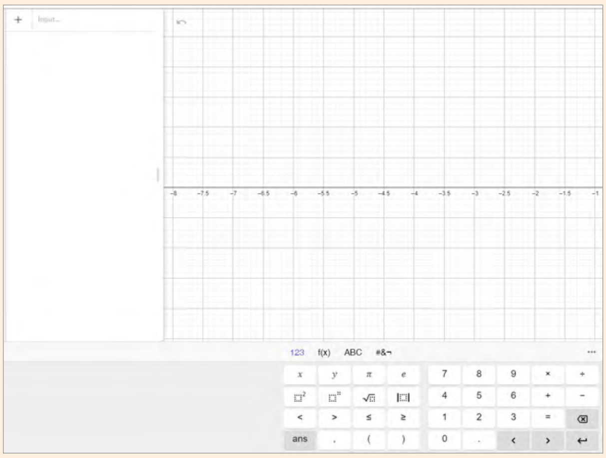
თუ ვიცით კუთხის სინუსი და გვსურს, დავადგინოთ (ვიპოვოთ) ის კუთხე, რომელზეც ფუნქცია იღებს მნიშვნელობას, ვიქცევით შემდეგნაირად:



Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ვირჩევთ sin^{-1} ფუნქციას, ვწერთ რიცხვით მნიშვნელობას და ვპოულობთ კუთხეს.

დაიმახსოვრეთ, $sin^{-1} \neq \frac{1}{sin\alpha}$

sin^{-1} (0.1) – ნიშნავს, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი არის 0.1;

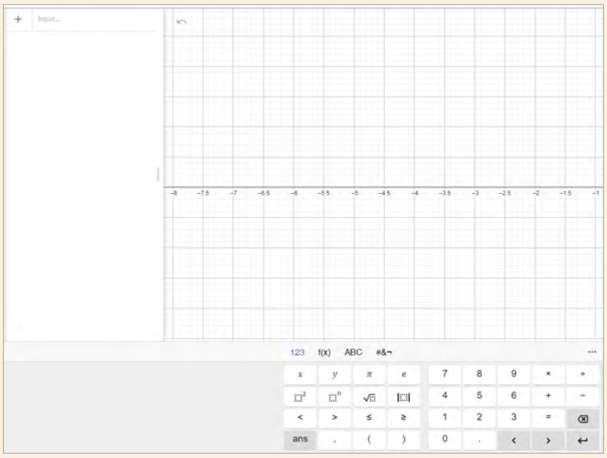
ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ cos^{-1} (0.1); tg^{-1} (0.1); ctg^{-1} (0.1)

გამომდინარე იქიდან, რომ კათეტი ყოველთვის ნაკლებია ჰიპტენუზაზე,

კუთხის სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობა ნაკლებია ან ტოლი 1-ის.

უფრო მეტს სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობებზე ვისწავლით მოგვიანებით.

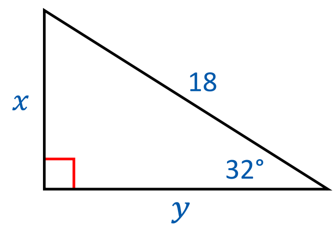
Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ნიმუში 1

- *როგორ გვეხმარება ტრიგინომეტრიული ფუნქციები სამკუთხედში უცნობი გვერდის პოვნაში?*

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



ვიპოვოთ x

ვიცით, რომ $sin32° = \frac{x}{18}$;

$x = 18 \cdot sin32°$ (1)

გრაფიკული კალკულატორით Desmos Calculator დავადგინოთ, რას უდრის sin32°≈0.53, შევიტანოთ მნიშნელობა (1) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $x = 18 \cdot sin32° \approx 18 \cdot 0.53 \approx 9.54$

ვიპოვოთ y

$cos32° = \frac{y}{18}$;

$y = 18 \cdot cos32°$ (2)

გრაფიკული კალკულატორით Desmos Calculator დავადგინოთ, რას უდრის cos32°≈0.85, შევიტანოთ მნიშნელობა (2) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $y = 18 \cdot cos32° \approx 18 \cdot 0.85 \approx 15.3$

რეკომენდაცია: y-ის გამოთვლა შეგვიძლია, როგორც პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ასევე, $cos32°$-ის მეშვეობით.

3.2.3 მნიშვნელოვანი მართკუთხა სამკუთხედები

ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ვადგენთ, რომ

მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის წინ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია; ხოლო მიმდებარე კათეტი უდრის მოპირდაპირე კათეტი გამრავლებული $\sqrt{3}$-ზე.

დასაბუთება:

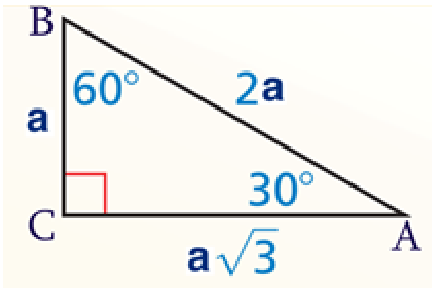
$\sin 30° = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{AB}$; $AB = 2a$

მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში, ჰიპოტენუზის სიგრძე უდრის კათეტის სიგრძე გამრავლებული $\sqrt{2}$ -ზე.

თუ ტოლ კათეტებს აღვნიშნავთ a-თი, ხოლო ჰიპოტენუზას c-თი,

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2} = 2\sqrt{a}$$



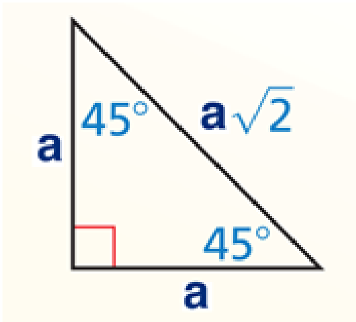
პითაგორას თეორემის თანახმად,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

$AC \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$AC = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$



ლოგიკის სავარჯიშო

მათემატიკის მოყვარულთათვის: რატომ არის sin 30° = $\frac{1}{2}$?

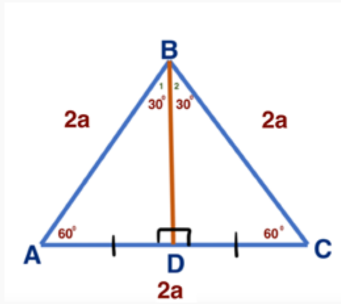
განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $2a$; ტოლგვერდა სამკუთხედში ნებისმიერ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, ბისექტრისა და მედიანა ერთი და იგივე მონაკვეთია;

განვიხილოთ ΔADB, იგი მართკუთხაა, რადგან გავლებულია BD სიმაღლე.

იგივე BD სიმაღლე იქნება $\angle B$-ს ბისექტრისა, შესაბამისად, $\angle ABD = 30°$

$\sin 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

რ.დ.გ. (რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)



კვლევითი აქტივობა:

მოცემული სამკუთხედიდან იპოვეთ:

$\sin 30°$, $\cos 30°$;
$\sin 60°$, $\cos 60°$;
$tg 30°$, $ctg 30°$;
$tg 60°$, $ctg 60°$;

მინიშნება: ტექნოლოგიების განვითარებამდე აღნიშნული და გაცილებით მეტი ფორმულების ცოდნა იყო არსებითად მნიშვნელოვანი იმისათვის, რომ მეცნიერებს ზუსტი გამოთვლები ეწარმოებინათ.

საინტერესი ისტორიული ფაქტები

კომპიუტერის გამოგონებამდე – მოცემული ფოტო გადაღებულია ნასას (NASA) კვლევით დეპარტამენტში 1957 წელს. ფოტოზე ჩანს, რამდენი მეცნიერი აწარმოებდა გამოთვლით სამუშაოებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო კოსმოსში გაშვებულ რაკეტასთან. წამყვანი მეცნიერები (მათემატიკოსები და ფიზიკოსები) დაფებს ავსებდნენ ანგარიშის დროს. იმ ეპოქაში აუცილებელი იყო, ყველა ფორმულა სცოდნოდა მეცნიერს და გაწაფული ყოფილიყო გამარტივებებსა და გამოთვლების შესრულებაში.

წყარო NASA The National Aeronautics and Space Administration

თანამედროვეობაში აღნიშნული გამოთვლებს კომპიუტერი მაღალი სიზუსტით, წამებში ასრულებს. ტექნოლოგიურ ერაში კომპიუტერი გამოთვლების შესრულებაში უდიდეს სამსახურს უწევს მეცნიერებს, ამიტომ სწავლებაში უმნიშვნელოვანესია გვესმოდეს, როგორ ხდება კავშირების დამყარება ფიგურის ელემენტებს შორის, ასევე, სხვადასხვა ცნებებსა და კონცეფციებს შორის როგორ შეიძლება ახალი კანონზომიერების აღმოჩენა და შემდეგ ცოდნის გამოყენება, როგორც ყოველდღიურობაში, ასევე მეცნიერების სხვადასხვა დარგში.

მოგვიანებით ისწავლით, როგორ ხდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით ტალღური მოვლენების მოდელირება.

რუბრიკა

ქალები მეცნიერებაში

მარგარეთ ჰამილტონმა აპოლოს კოსმოსში გასაფრენად საჭირო ალგორითმი შეიმუშავა და დაწერა კოდი, რომლის მეშვეობითაც პირველად გადაუღეს ფოტო შავ ხვრელს.

მარგარეთ ჰამილოტნი იყო პირველი ქალი, რომელიც MIT-ში პროგრამირების კათედრას ხელმძღვანელობდა.

„ნუ გეშინიათ დასვათ კითხვები, კითხვების არდასმა და საერთოდ, კითხვების გარეშე ყოფნა, არის ყველაზე სულელური კითხვა“ – მარგარეტ ჰამილტონი.

მოიძიეთ სხვა საინტერესო ინფორმაცია მარგარეტ ჰამილტონზე.

მარგარეტ ჰამილტონი, 1969 წელი, აპოლონის მისია, მის მიერ შემუშავებულ ალგორითმთან (დაწერილ კოდთან).

სავარჯიშოები

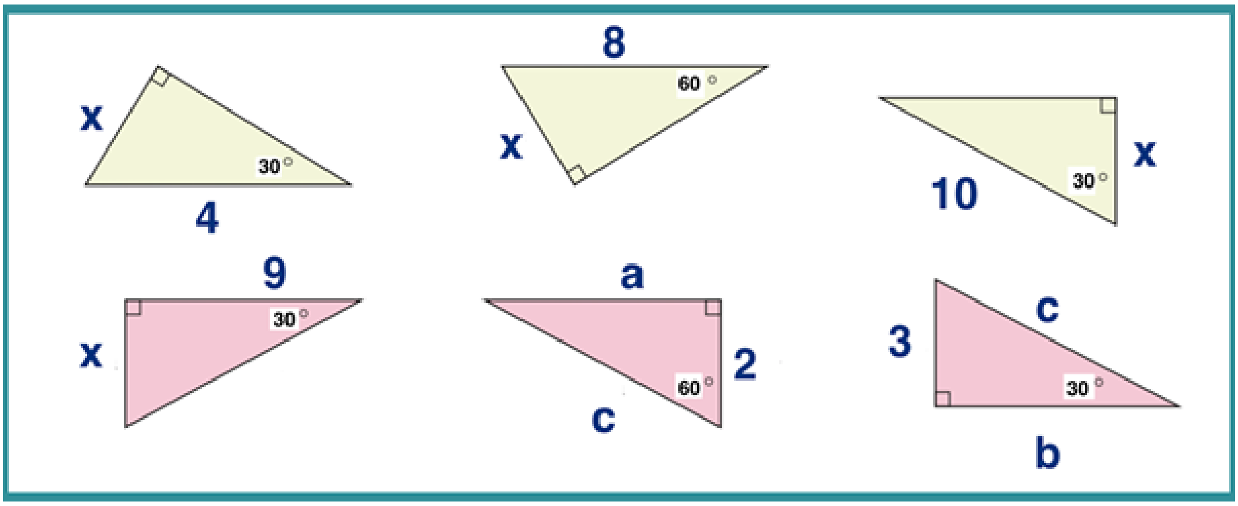
1. შედით საიტზე 🔗 Desmos Calculator ან [(Geogeba – Calculator)](Geogeba – Calculator).
იპოვეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*

ა) $\alpha = 0°$	ე) $\alpha = 20°$
ბ) $\alpha = 90°$	ვ) $\alpha = 40°$
გ) $\alpha = 30°$	ზ) $\alpha = 25°$
დ) $\alpha = 60°$	თ) $\alpha = 180°$

2. იპოვეთ კუთხის მნიშვნელობა თუ ვიცით, რომ

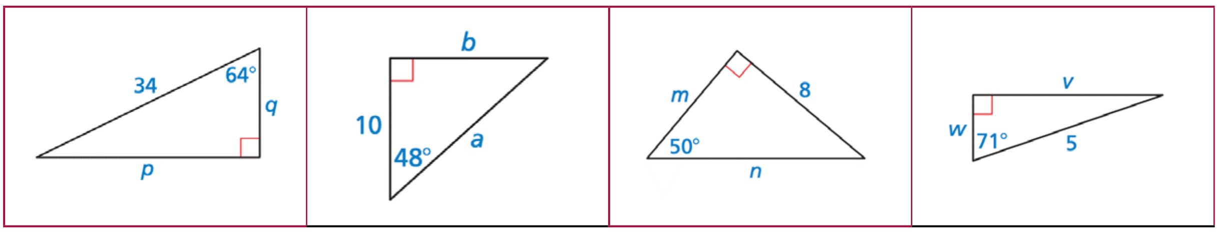
ა) $sin\alpha = 0.5$	ე) $tg\alpha = 1$
ბ) $sin\alpha \approx 0.8$	ვ) $ct\alpha \approx 0.5$
გ) $cos\alpha \approx 0.5$	ზ) $tg\alpha \approx 1.5$
დ) $cos\alpha \approx 0.7$	თ) $ctg\alpha = 1$

3. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



4. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები

ა) ბ) გ) დ)



5. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 1 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

სავარჯიშოები

6. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 1 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

7. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 8 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

8. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 60°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 6 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

9. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 4 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

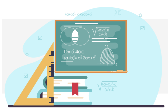
10. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის სიგრძე $12\sqrt{2}$ სმ-ია, იპოვეთ კათეტების სიგრძეები.

11. ტოლფერდა სამკუთხედში კუთხე 120°-ია, ფერდი 10 სმ, იპოვეთ ფუძის სიგრძე და ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

12. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 4.2სმ, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

13. ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა 5.4 სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

14. **გამოწვევა:**ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა a სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე. (დააკავშირეთ სიმაღლე a-სთან).

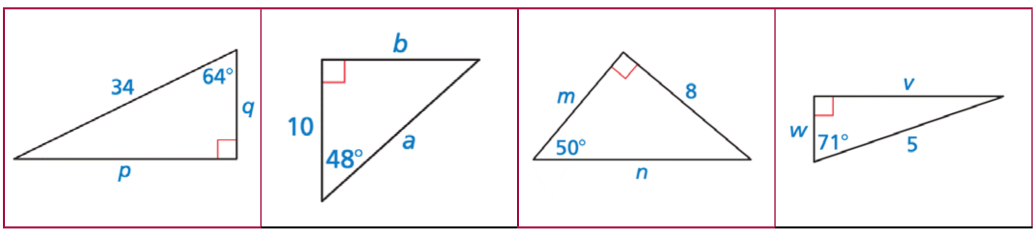


MATH Lab

15. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი მახვილი კუთხეების გრადუსული ზომები;

ტექნოლოგიების გამოყენება

ა)　　　ბ)　　　გ)　　　დ)



16. **არგუმენტირებული მსჯელობა:** გამოთქვით ვარაუდი, რატომ ვერ იქნება კუთხის კოსინუსი ან სინუსი 1-ზე მეტი და რატომ შეიძლება, კუთხის ტანგენსი იყოს 1-ზე მეტი. მოიყვანეთ არგუმენტი.

17. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 60°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

სავარჯიშოები

18. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 18სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 30°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

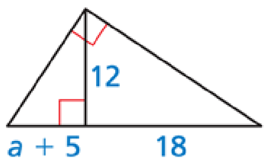
19. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 8 სმ-ია, მის წინ მდებარე კუთხე კი 60°-ია; იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

20. მართკუთხედის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

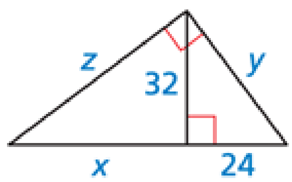
21. მართკუთხედის პერიმეტრი 72 სმ-ია. გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:5. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

22. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე

ა) იპოვეთ a



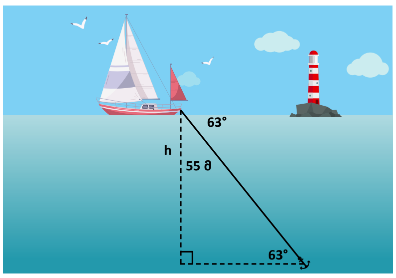
ბ) იპოვეთ x, y, z



23. განვიხილოთ გაკვეთილის დასაწყისში მოცემული ამოცანა.

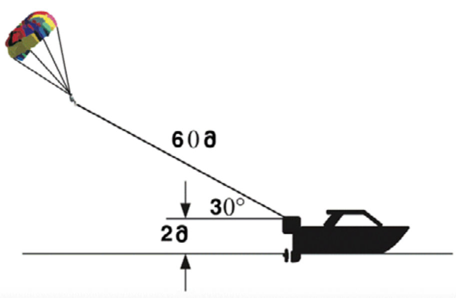
სათევზაოდ გასულმა მეთევზემ ჩააგდო ღუზა, რომლის სიგრძე 55 მ-ია;

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ტბის სიღრმე.



24. ზღვაზე წასულმა ახალგაზრდებმა გადაწყვიტეს მფრინავი ბურთით გასეირნება, მათ მფრინავი ფურთი მიამაგრეს კატერს.

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ რა სიმაღლეზეა მფრინავი ბურთი წყლის ზედაპირიდან?



25. **გამოწვევა: Math Lab** – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

MATH Lab – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

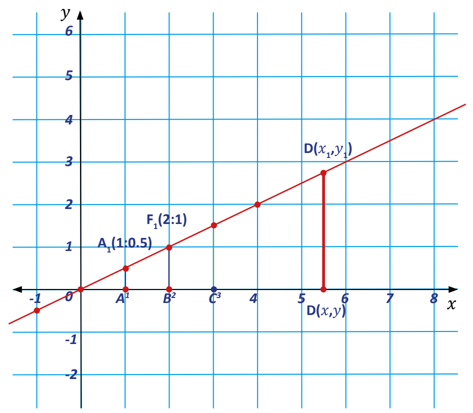
15. როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

ტექნოლოგიების გამოყენება

ჯგუფური სამუშაო – კვლევითი აქტივობა:

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = kx$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი, მონიშნეთ მასზე წერტილები და დაუშვით მართობები Ox ღერძზე. მიიღებთ მსგავსს სამკუთხედებს (დაასაბუთეთ სამკუთხედების მსგავსება)

ΔOAA_1, ΔOBB_1, ΔOCC_1, ΔODD_1,



თითოეული სამკუთხედისთვის იპოვეთ: *sinα; cosα; tgα*

კიდევ სცადეთ

	$\Delta\ OAA_1$	$\Delta\ OBB_1$	$\Delta\ OCC_1$
sinα			
cosα			
tgα			

აქტივობის შემდეგ ნახავთ, რომ თითოეული სამკუთხედისთვის *sinα, cosα, tgα*-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები აქვთ.

მინიშნება: თუ გავაანალიზებთ მოცემულს, მივიღებთ, რომ

$$tg\alpha = \frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB} = \ldots = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$tg\alpha = k$

აღნიშნულიდან გამომდინარე k-ს კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება.

3.3. ტრიგონომეტრიული იგივეობები

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

რადგან მართკუთხა სამკუთხედში $\beta = 90° - \alpha$, ამიტომ მივიღებთ:

$sin\alpha = cos(90° - \alpha)$ $\quad sin30° = cos(90° - 30°) = cos60°$

$cos\alpha = sin(90° - \alpha)$ $\quad cos30° = sin(90° - 30°) = sin60°$

$tg\alpha = ctg(90° - \alpha)$ $\quad tg30° = ctg(90° - 30°) = ctg60°$

$ctg\alpha = tg(90° - \alpha)$ $\quad ctg30° = ctg(90° - 30°) = tg60°$

პითაგორას თეორემის თანახმად, ვიცით, რომ

$a^2 + b^2 = c^2$ გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე c^2-ზე

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

შევცვალოთ თითოეული თანაფარდობა ტრიგონომეტრიული ფუნქციით

$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

აღმოვაჩინეთ ახალი კავშირები და კანონზომიერება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad a = c \cdot sin\alpha$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad b = c \cdot cos\alpha$

შევიტანოთ აღნიშნული ინფორმაცია ტანგენსის და კოტანგენსის ფორმულაში

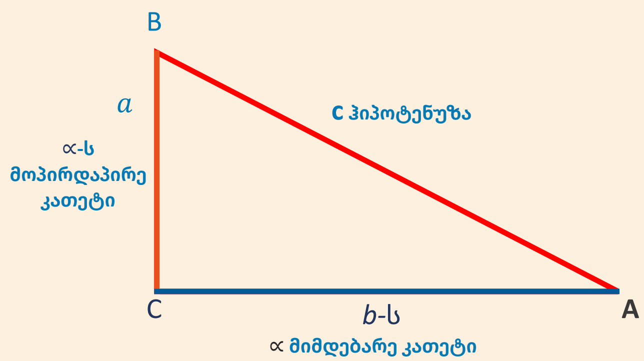
$tg\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad tg\alpha = \frac{c \cdot sin\alpha}{c \cdot cos\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$ctg\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad ctg\alpha = \frac{c \cdot cos\alpha}{c \cdot sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

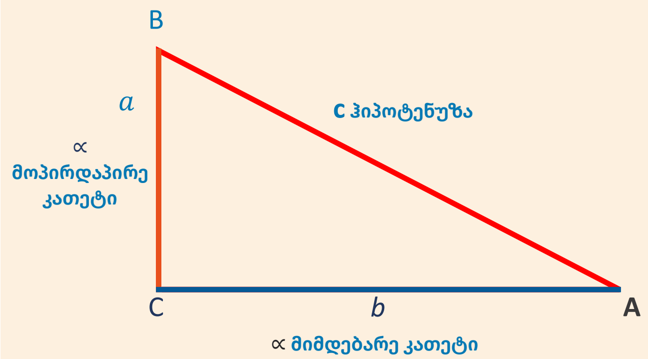
$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

როგორც ხედავთ, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთმანეთთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული



$sin\alpha = \frac{a}{c}$	$sin\beta = \frac{b}{c}$
$cos\alpha = \frac{b}{c}$	$cos\beta = \frac{a}{c}$
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$tg\beta = \frac{b}{a}$
$ctg\alpha = \frac{b}{a}$	$ctg\beta = \frac{a}{b}$



3.3.1 ბლაგვი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი

საკოორდინატო სიბრტყეზე განვიხილოთ წრეწირი, რომლის ცენტრია სათავე, ხოლო რადიუსის სიგრძე უდრის 1-ს; ასეთ წრეწირს ეწოდება – ერთეულოვანი წრეწირი, ხოლო შესაბამის წრეს – ერთეულოვანი წრე.
ერთეულოვან წრეწირზე მოვნიშნოთ $B(x;y)$ წერტილი და Oy ღერძის ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $D(-x;y)$ წერტილი;
შევაერთოთ B წერტილი სათავესთან, დავუშვათ მართობი Ox ღერძზე და განვიხილოთ მართკუთხა ΔOBC, რომლის $\angle BOC = \alpha$;
ანალოგიურად, დავხაზოთ მართკუთხა ΔODE, $\Delta BOC = \Delta ODE$

ΔOBC-ში დავწეროთ α-კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

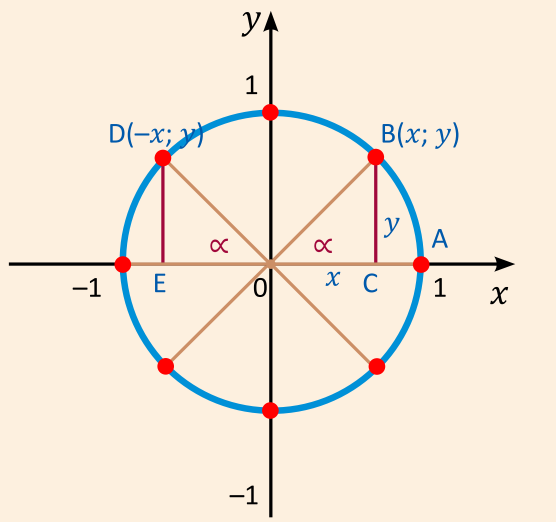
$sin\alpha = \dfrac{BC}{OB}$ (1) $cos\alpha = \dfrac{OC}{OB}$ (2)

რადგან წრე ერთეულოვანია
$OB = R = 1$, ხოლო
$BC = y$; $OC = x$
ჩავსვათ აღნიშნული (1) და (2) ფორმულაში და მივიღებთ, რომ

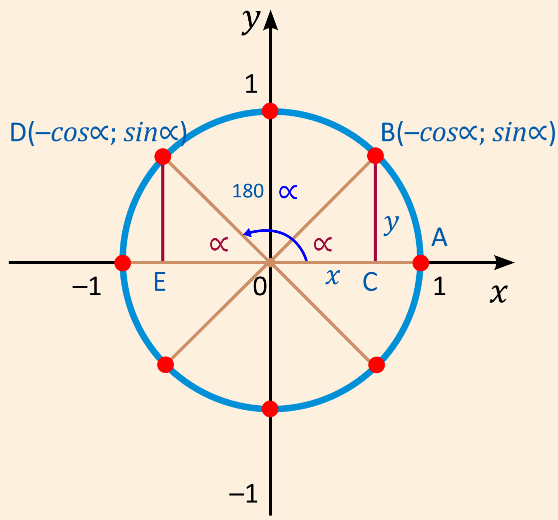
$sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$; $cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს დავინახავთ, რომ ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილის კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხესთან, რომელსაც ქმნის ამ წერტილის საკოორდინატო სისტემის სათავესთან შემაერთებელი მონაკვეთი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ე.ი. B წერტილის კოორდინატებია: $B(cos\alpha; sin\alpha)$

განვიხილოთ $\angle AOD = 180 - \alpha$ ბლაგვი კუთხეა,
D წერტილის კოორდინატი შეესაბამება აღნიშნულ კუთხეს
$D(cos(180-\alpha);\ sin(180-\alpha)\ )$, რადგან D სიმეტრიულია B წერტილის Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ
$D(-cos\,\alpha;\ sin\alpha)$
თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს, მივიღეთ ახალი კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის



$\Delta BOC = \Delta DOE$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით



ნიმუში 1 – ტრიგონომეტრიული იგივეობა

დაყვანის ფორმულა

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ როგორც ვხედავთ, ბლაგვი კუთხის კოსინუსი უარყოფითი რიცხვია.	$\alpha = 30°$; $\cos(180° - 30°) = -\cos30°$ $\cos(150°) = -\cos30°$ $\sin(180° - 30°) = \sin30°$ $\sin150° = \sin30°$
როგორც ხედავთ, ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი ბლაგვი კუთხისთვის, მისი სინუსი და კოსინუსი გამოვთვალოთ შესაბამისი მახვილი კუთხის სინუსით და კოსინუსით.	

ნიმუში 2

- *როგორ ვიპოვოთ ბლაგვი კუთხის კოსინუსი ან სინუსი?*

ვიპოვოთ cos145° და sin145°

Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ $\cos145°$ ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $\cos145° = \cos(180° - 35°) = -\cos35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $\cos145° \approx -0.82$ $\cos35° \approx 0.82$	Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ sin145° ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $\sin145° = \sin(180° - 35°) = \sin35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $\sin145° \approx 0.57$ $\sin35° \approx 0.57$

სავარჯიშოები

1. შეავსეთ ცხრილი და პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე სიზუსტით.

კიდევ სცადეთ

α	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$cos(180^\circ - \alpha)$	$sin(180^\circ - \alpha)$
0°				
15°				
45°				
80°				
90°				
120°				

ბ) შეამოწმეთ თითოეულისთვის სამართლიანია თუ არა იგივეობა: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

2. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი.
ა) 45°; ბ) 50°; გ) 30°; დ) 88°; ე) 60°.

3. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი
ა) 145°; ბ) 133°; გ) 95°; დ) 108°; ე) 154°.

4. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია
ა) $cos30^\circ$; ბ) $cos45^\circ$; გ) $cos65^\circ$; დ) $cos29^\circ$; ე) $cos33^\circ$.

5. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $cos130^\circ$; ბ) $cos125^\circ$; გ) $cos135^\circ$; დ) $cos150^\circ$; ე) $cos120^\circ$.

6. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $sin120^\circ$;ბ) $sin150^\circ$; გ) $sin135^\circ$; დ) $sin110^\circ$; ე) $sin170^\circ$.

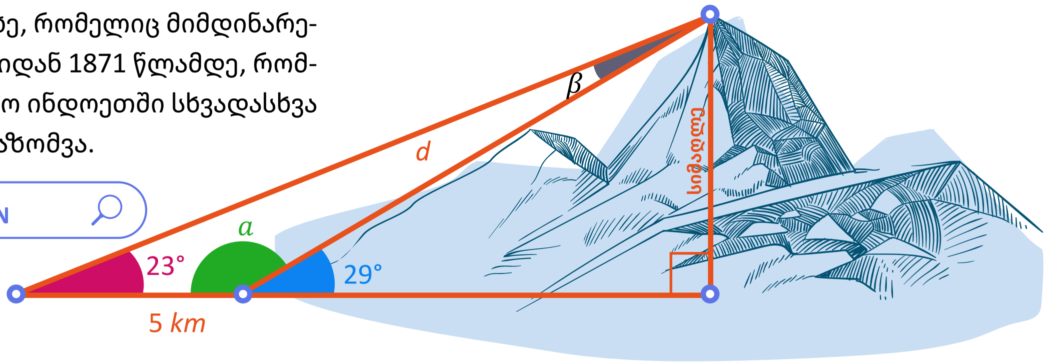
7. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია:
ა) $cos135^\circ$; ბ) $cos150^\circ$; გ) $cos120^\circ$; დ) $cos160^\circ$; ე) $cos110^\circ$.

8. ჩვენ ვნახეთ, რომ $tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$ მოცემული ფორმულიდან გამომდინარე, იპოვეთ
ა) $tg135^\circ$; ბ) $tg150^\circ$; გ) $tg120^\circ$; დ) $tg180^\circ$; ე) $cos90^\circ$.
ბ) დაადგინეთ, როდის არ არის განსაზღვრული ტანგენსი და რატომ?

3.4. სინუსების თეორემა

გსმენიათ თუ არა დიდ ტრიგონომეტრიულ კვლევაზე, რომელიც მიმდინარეობდა 1802 წლიდან 1871 წლამდე, რომლის მიზანი იყო ინდოეთში სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვა.

MATHIGON



ექსპედიციას ხელმძღვანელობდა ჯორჯ ევერესტი, კვლევის შედეგად დადგინდა ყველაზე მაღალი მთის სიმაღლე, რომელსაც ექსპედიციის ხელმძღვანელის პატივსაცემად მისი სახელი ეწოდა. გაზომვითი სამუშაოების შესასრულებლად მეცნიერთა ჯგუფს დასჭირდა ცოდნა ტრიგონომეტრიიდან.

შევისწავლოთ, როგორ არის დაკავშირებული გვერდები და კუთხეები ნებისმიერ სამკუთხედში.

3.4.1 სინუსების თეორემა

განვიხილოთ ΔABC, რომლის გვერდებია a,b,c და კუთხეები α,β,γ.

დავწეროთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა სხვადასხვა გვერდის გამოყენებით. მივიღებთ, რომ $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

განვიხილოთ ტოლობა 1

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე $\frac{1}{2}c$-ზე

$b\sin\alpha=a\sin\beta$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე ab-ზე

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$ (1)

განვიხილოთ ტოლობა 2

$\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე $\frac{1}{2}a$-ზე

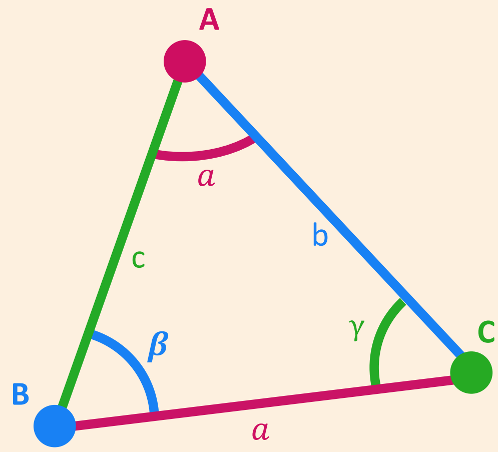
$c\sin\beta=b\sin\gamma$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე bc-ზე

$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$ (2)

გავაერთიანოთ ფორმულები (1) და (2), რის შედეგად მივიღებთ, რომ

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$ აღნიშნული შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, *მივიღეთ სინუსების თეორემა*



ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდი შეფარდებული მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან უდრის მეორე გვერდი შეფარდებული მის მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან და უდრის მესამე გვერდი შეფარდებული მის მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან, ე.ი.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

ნიმუში 1 – სინუსების თეორემის გამოყენება

მოცემულია ΔABC, AB =7 სმ, $\angle A = 55°$, $\angle C = 80°$, იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდები და კუთხე.

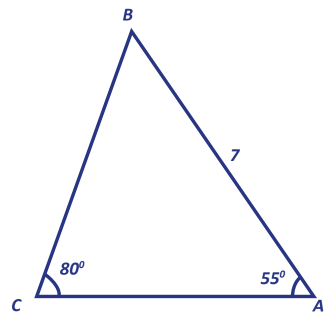
ვიპოვოთ $\angle B$-?

ვიცით, რომ სამკუთხედში შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია;

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C$

$\angle B = 45°$



ვიპოვოთ გვერდი BC.

სინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ სამკუთხედში გვერდისა და მოპირდაპირე კუთხის შეფარდებები ტოლია, ე.ი.

$$\frac{BC}{\sin 55°} = \frac{AB}{\sin 80°}$$

$BC \cdot \sin 80° = AB \cdot \sin 55°$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin 55°}{\sin 80°}$$

🔗 Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით დავადგენთ, რომ

$\sin 55° \approx 0.82$ $\sin 80° \approx 0.98$.

$$BC = \frac{AB \cdot \sin 55°}{\sin 80°} \approx \frac{7 \cdot 0.82}{0.98} \approx 5.86$$

ვიპოვოთ გვერდი AC.

სინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ სამკუთხედში გვერდისა და მოპირდაპირე კუთხის შეფარდებები ტოლია, ე.ი.

$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 80°}$$

$AC \cdot \sin 80° = AB \cdot \sin 45°$

$$AC = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 80°}$$

🔗 Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით დავადგენთ, რომ

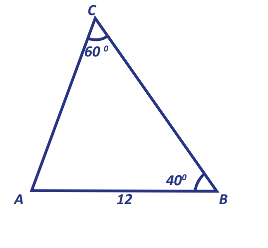
$\sin 45° \approx 0.71$ $\sin 80° \approx 0.98$.

$$AC = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 80°} \approx \frac{7 \cdot 0.71}{0.98} \approx 5.07$$

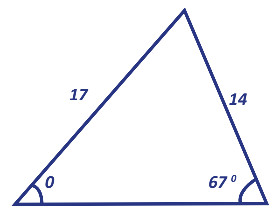
სავარჯიშოები

1. სინუსების თეორემის გამოყენებით იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდები და კუთხეები.

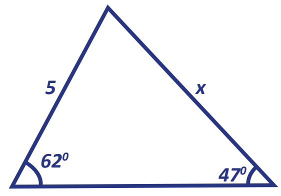
ა)



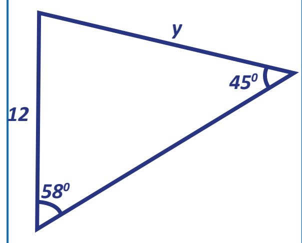
ბ)



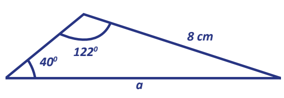
გ)



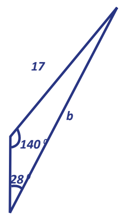
დ)



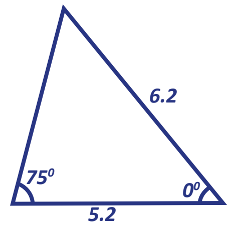
ე)



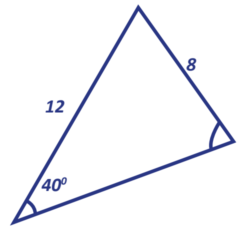
ვ)



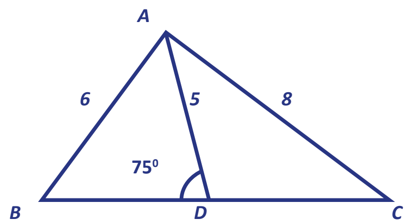
ზ)



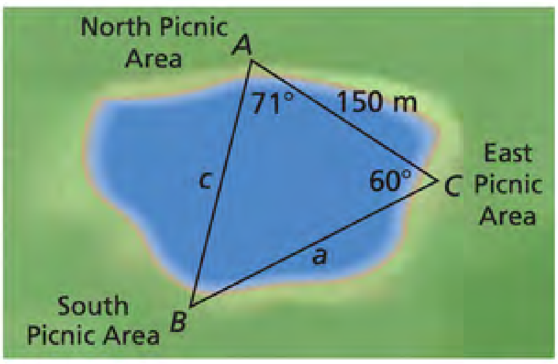
თ)



2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ:

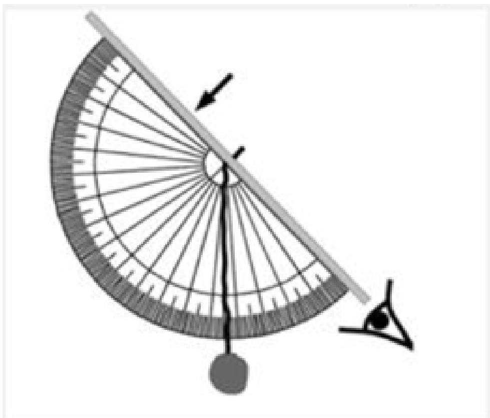
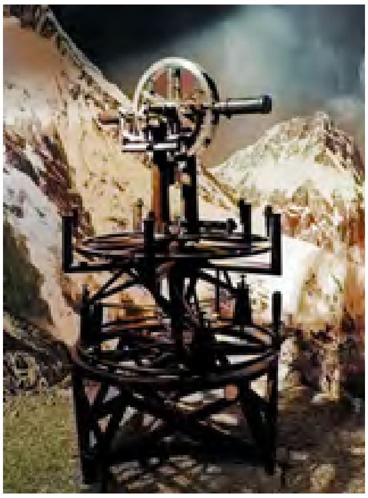
BD, DC და BC მონაკვეთების სიგრძეები	

3. ნახაზზე მონიშნულია ადგილები სადაც შეიძლება „პიკნიკის“ მოწყობა.

იპოვეთ მანძილი საპიკნიკე ლოკაციებს შორის	

სავარჯიშოები

4. თავის დასაწყიში მოცემულ დავალებასთან დაკავშირებული კვლევითი აქტივობა.

გამოიკვლიეთ, როგორ შექმნა მე-10 საუკუნეში სპარსმა მეცნიერმა ალ ბირუნმა სიმაღლის საზომი ხელსაწყო და როგორ ზომავდა იგი მაღალ შენობებს.	
დაადგინეთ, როგორ ხდება ტრანსპორტირის მეშვეობით და „თვალის ზომით“ კუთხის დადგენა	
მოიძიეთ ინფორმაცია თეოდოლიტზე, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია კუთხის გაზომვა სივრცეში	

3.5. კოსინუსების თეორემა

დასაბუთება მათემატიკის მოყვარულთათვის:

განვიხილოთ ΔABC

AB გვერდზე დავუშვათ CD სიმაღლე და შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $AD = x$, $CD = h$, $\angle A = \alpha$

ΔBCD-ში პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ

$a^2 = h^2 + (c - x)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$

ΔADC-ში პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ

$h^2 + x^2 = b^2$

$h^2 = b^2 - x^2$

ჩავსვათ მიღებული შედეგი a^2-ის გამოსახულებაში, გვექნება:

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

ΔACD-ში, ვიცით, რომ

$\cos\angle A = \dfrac{x}{b}$

$x = b\cos\angle A$

ჩავსვათ მიღებული შედეგი a^2–ის ბოლო გამოსახულებაში, გვექნება:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\angle A$

აღნიშნულ წესს, კოსინუსების თეორემა ეწოდება.

კოსინუსების თეორემა: ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული გაორკეცებული ნამრავლი ამ დანარჩენი ორი გვერდისა და მათ შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსის. ე.ი.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\angle A$$

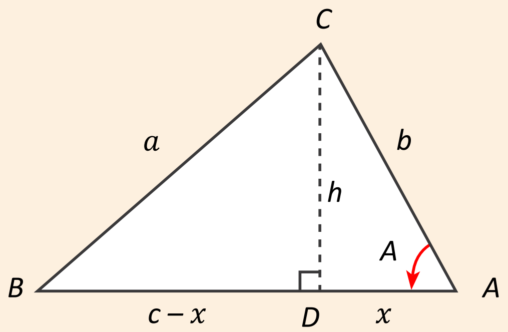
კოსინუსების თეორემა აკავშირებს სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს;

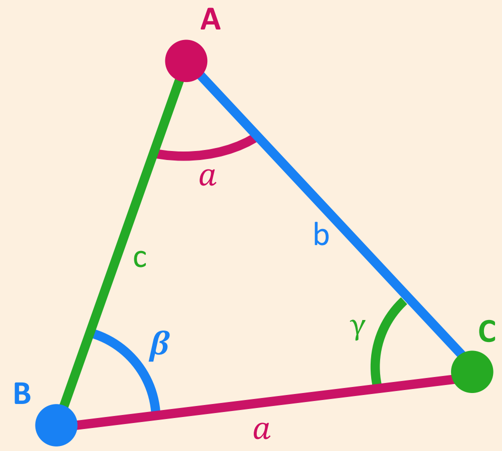
როდესაც ვიცით სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე, კოსინუსების თეორემით ვპოულობთ მესამე გვერდს.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\angle\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\angle\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\angle\gamma$





ნიმუში 1

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის საფუძველზე, იპოვეთ *AB*

კოსინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot cos125°$$
$$AB^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot cos125°$$
$$AB^2 = 41 - 40 \cdot cos125°$$

როგორც ვხედავთ, კუთხე ბლაგვია, შესაბამისად, მისი კოსინუსი უარყოფითია

$$cos125° = cos(180° - 55°) = -cos55°$$

🔗 Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულა-ტორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ $cos125°$ ან $cos55°$

$cos125° = -0.57$

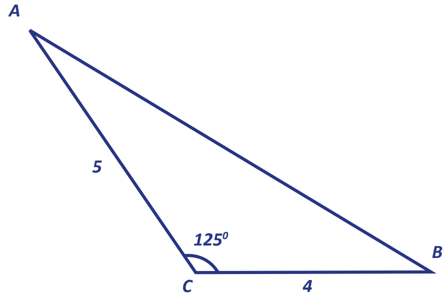
$cos55° = 0.57$

ჩავსვათ მოძებნილი მნიშვნელობა AB^2-ის გამოსახულე-ბაში და მივიღებთ:

$AB^2 = 41 - 40 \cdot (-0.57)$

$AB^2 = 41 + 22.8 = 63.8$

$AB = \sqrt{63.8}$



ნიმუში 2

როგორ ვიპოვოთ კუთხე, თუ ვიცით სამკუთხედის სამივე გვერდი?
ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ∠A-ს მნიშვნელობა.

მსჯელობა

რადგან გვინდა ვიპოვოთ ∠A, დავწეროთ კოსინუსების თეორემა მისი მოპირდაპირე გვერდის გამოყენებით.

კოსინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A$$
$$2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A = AB^2 + AC^2 - BC^2$$
$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

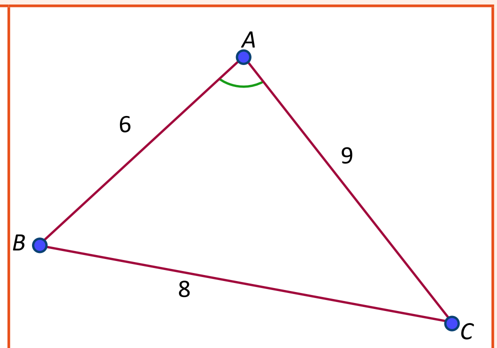
ჩავსვათ ფორმულაში გვერდების მნიშვნელობები და დავადგინოთ, რას უდრის კუთხის კოსინუსი

$$\cos\angle A = \frac{6^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{53}{108} \approx 0.49$$

ვიპოვოთ კუთხე შებრუნებული ფუნქციით

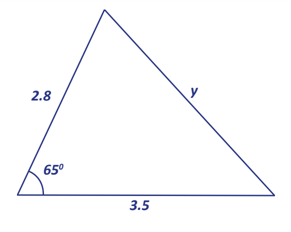
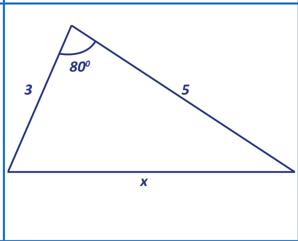
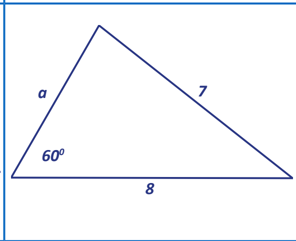
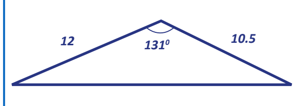
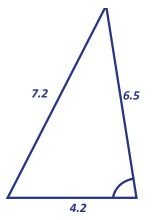
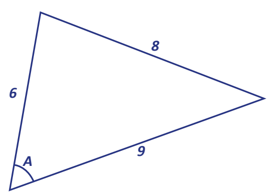
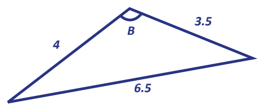
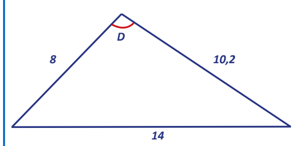
$$\cos^{-1} 0.49 \approx 61°$$

შეხსენება: $\cos^{-1} \alpha \neq \dfrac{1}{cos\alpha}$

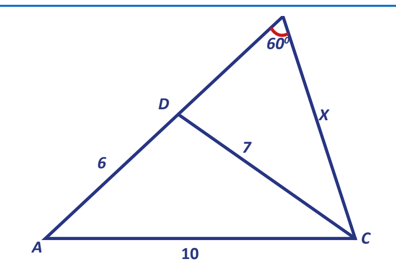


სავარჯიშოები

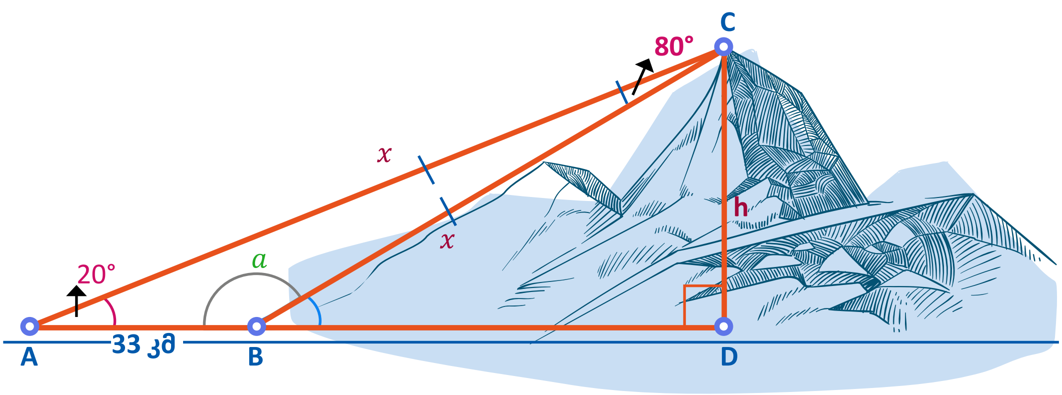
1. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ უცნობი გვერდი ან კუთხე:

ა)	ბ)	გ)	დ)
			
ე)	**ვ)**	**ზ)**	**თ)**
			

2. გამოწვევა:

ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ x	

3. თავის დასაწყისში მოცემული კომპლექსური დავალებისთვის შეასრულეთ გამოთვლები; ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ x და h.

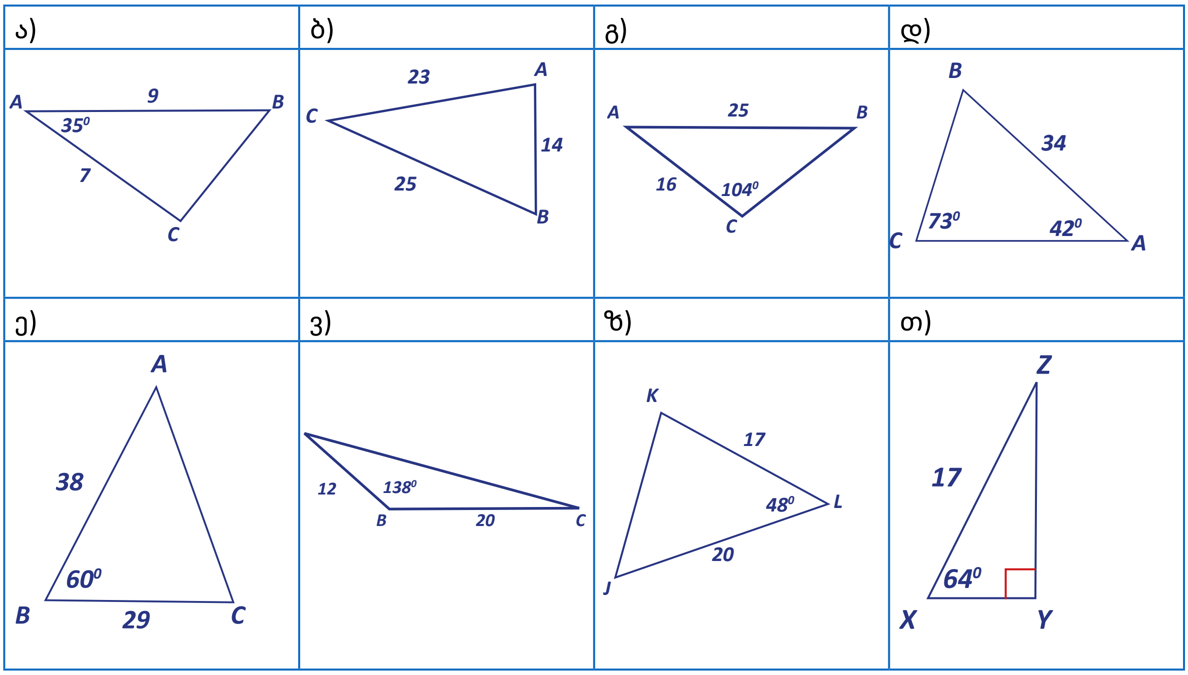


სავარჯიშოები

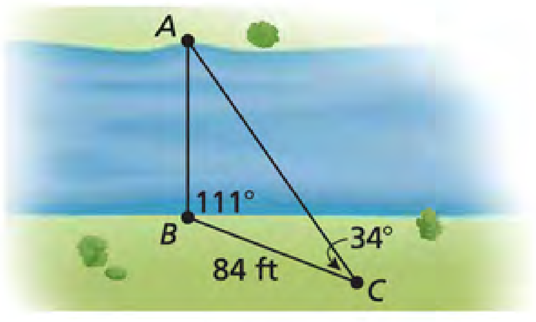
3.6. სინუსების და კოსინუსების თეორემასთან დაკავშირებული დამატებითი ამოცანები

1. ქვემოთ მოცემული ნახაზებიდან გამომდინარე, იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდი (გვერდები) და კუთხე (კუთხეები).

მსჯელობა: გამოიყენეთ სინუსების ან კოსინუსების თეორემა და ახსენით, როდის რომელი თეორემის გამოყენებაა უმჯობესი.



2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ: ა) მდინარის სიგანე; ბ) მანძილი საპიკნიკე ლოკაციებს შორის



3. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:8. იპოვეთ სამკუთხედის მცირე გვერდი, თუ საშუალო გვერდის სიგრძეა $12\sqrt{6}$ მ.

სავარჯიშოები

4. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4:5. იპოვეთ სამკუთხედის მცირე გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მცირე გვერდის სიგრძეა $6\sqrt{2}$ დმ.

5. პარალელოგრამის დიაგონალები ერთ გვერდთან ადგენენ 45^0-იან და 60^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელოგრამის დიდი დიაგონალი, თუ მცირე დიაგონალის სიგრძეა $4\sqrt{2}$ სმ.

6. პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის კუთხის სიდიდეა 45^0, ხოლო დიაგონალების სიგრძეებია 7 სმ და $10\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

7. პარალელოგრამის გვერდებია 8 სმ და $12\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალები, თუ ერთ-ერთი კუთხის სიდიდეა 60^0.

8. რომბის პერიმეტრია 60 სმ, ხოლო მახვილი კუთხის კოსინუსია $\frac{2}{5}$. იპოვეთ რომბის მცირე დიაგონალის სიგრძე.

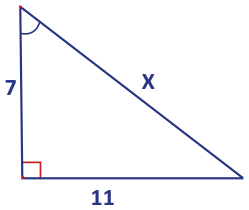
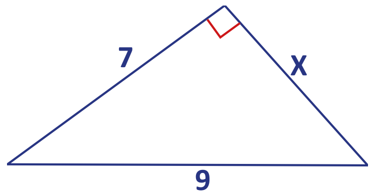
9. MKF სამკუთხედში MF = 12 სმ; MK = 9 სმ და KF = 8 სმ. სამკუთხედის MF გვერდზე აღებულია A წერტილი ისე, რომ AM = 2 სმ. იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე.

10. სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 6 სმ, 5 სმ და 4 სმ. იპოვეთ მცირე გვერდისადმი გავლებული მედიანის სიგრძე.

სავარჯიშოები

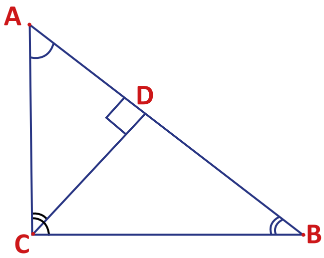
ქვიზი განმავითარებელი შეფასებისთვის

1. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ უცნობი გვერდის სიგრძე.

ა)	ბ)
	

2. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები: A(–2; 5); B(1;0) და C(3;–7). იპოვეთ *ABC* სამკუთხედის პერიმეტრი.

3. მოცემულია მართკუთხა ABC სამკუთხედი, ACB = 90°. CD დაშვებული სიმაღლეა. იპოვეთ *BC* გვერდის სიგრძე, თუ *AD* = 4 სმ და CD = 6 სმ.



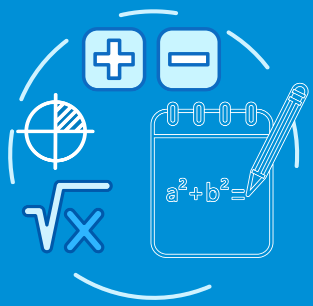
4. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 60°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძეა $5\sqrt{3}$ სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

5. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ხოლო ფუძის სიგრძეა 20 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდი.

6. *ABC* სამკუთხედში *AC* = 12 სმ, ∠*A* = 60° და ∠*B* = 45°. იპოვეთ *BC* გვერდის სიგრძე.

7. *MNF* სამკუთხედში *MN* = 12 სმ, *MF* = 10 სმ და ∠*M*=30°. იპოვეთ *NF* გვერდის სიგრძე.

IV. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა

ნებისმიერი ქალაქის ინფრასტრუქტურის აუცილებელი ნაწილია სხვადასხვა სახის პარკები. საერთაშორისო სტანდარტების შესაბამისი ღია საზოგადოებრივი სივრცეების ხელმისაწვდომობას მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვს მოსახლეობის ჯანმრთელობასა და კეთილდღეობაში.

დააკვირდით, როგორი დაგეგმარება აქვთ პარკებს/გასართობ სკვერებს.

წარმოიდგინეთ, რომ ქალაქის ადმინისტრაციამ გამოყო ფართობი, რომელზეც შეგიძლია გასართობი პარკის, სკვერის (ან ზოოპარკის) აშენება და გამოაცხადა კონკურსი, ვინ უკეთ შეძლებს მოცემულ ფართობზე სკვერის/პარკის მოწყობას. აუცილებელია, პროექტი იყოს ორიგინალური და ფართობის ათვისებისას გამოყენებული იყოს სხვადასხვა გეომეტრიული ობიექტი.

მითითება: დაგეგმარებაში გამოიყენეთ თქვენ მიერ ნასწავლი ყველა ბრტყელი ფიგურა. (აუზისთვის წრე და ა.შ.)

კომპლექსური დავალება

თქვენი დავალება

1. შეადგინოთ პარკის გეგმა და კონცეფცია, როგორი გსურთ იყოს, რა ტიპის აქტივობებისთვის იყოს სივრცეები გამოყოფილი.
2. შემდეგ დაყავით სკვერისთვის გამოყოფილი ფართობი სხვადასხვა ნაწილად. ფართობის დანაწილებისას გამოიყენეთ სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა (მხოლოდ მართკუთხედების გამოყენებით პროექტის პირობებს ვერ დააკმაყოფილებთ), პარკი უნდა იყოს ორიგინალური დიზაინით.
3. აითვისეთ ფართობი მაქსიმალურად ეფექტურად, დაყავით სივრცე სხვადასხვა აქტივობისთვის ისე, რომ პარკი იყოს მაქსიმალურად კეთილმოწყობილი და გაანაწილეთ პარკის ფართობი.
4. დაგეგმარებისას აუცილებელი პირობაა, რომ გათვალისწინებული იყოს ფეხით სავალი და ველოსიპედით სავალი ნაწილი.

ნაშრომის წარმოდგენა შეგიძლიათ დიდი ფორმატზე ნახაზის სახით, ან მაკეტის სახით ან პროგრამა Geogebra-ს გამოყენებით (ან პრეზენტაციის სახით, ნახაზი, რომელიც შესრულებული იქნება Geogebra-ში). ნაშრომს თან უნდა ახლდეს ცხრილი 1-ის მსგავსი ცხრილი, სადაც აღწერილი იქნება მაკეტი და მოცემული იქნება ზომები.

პრეზენტაციაში ნათლად წარმოაჩინეთ:

I. რომელი გეომეტრიული ფიგურები გამოიყენეთ გამოყოფილი ტერიტორიის დაგეგმარებისას? ნაშრომს თან დაურთეთ CONCEPT MAP (ე.წ. კოგნიტიური სქემები – დიაგრამები), რომლის მეშვეობით აჩვენებთ გეომეტრიულ ფიგურათა მიმართებებს. სქემაზე დაწერეთ თითოეული გეომეტრიული ობიექტის თვისებები და განსაზღვრებები.

II. როგორ დაგეხმარათ გეომეტრიული ობიექტების თვისებების ცოდნა მაკეტის აგებაში?

III. წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ მიერ შესრულებული პროექტისთვის გამოყოფილია 1 ჰა მიწის ნაკვეთი. თუ პროექტი განხორციელდა რეალობაში, რა იქნება თითოეული ნაწილის ფართობი? დაარგანიზეთ ინფორმაცია ცხრილში და წარმოადგინეთ ფართობები.

ობიექტის სახელწოდება	გეომეტრიული ფიგურა	ზომები (პერიმეტრი და ფართობი)		
		ნახაზზე	მაკეტზე	რეალურად

ცხრილი 1

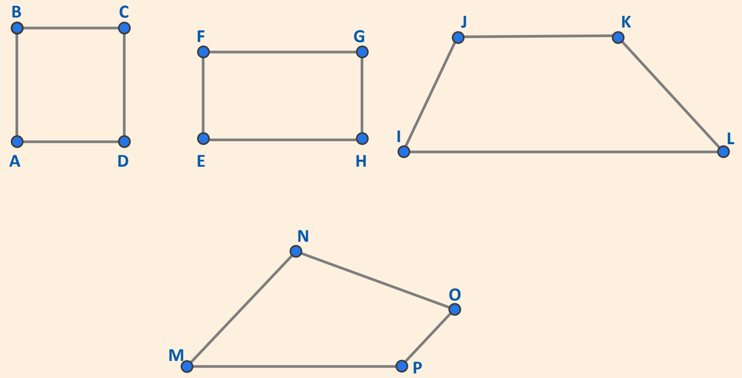
კიდევ სცადეთ

თავი 4. ბრტყელი ფიგურები და ზომები; პერიმეტრი, ფართობი

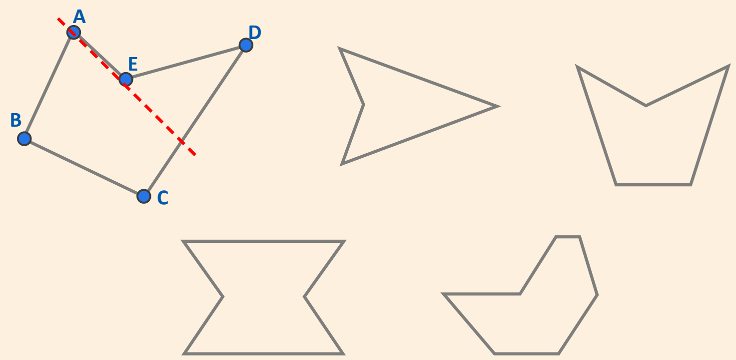
4.1. ბრტყელი ფიგურები, მასალის გამეორება

1. მრავალკუთხედი არის შეკრული ტეხილით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილი, რომელიც შედგება სამი ან მეტი გვერდისაგან. მრავალკუთხედის გვერდები ერთმანეთს არ კვეთს.

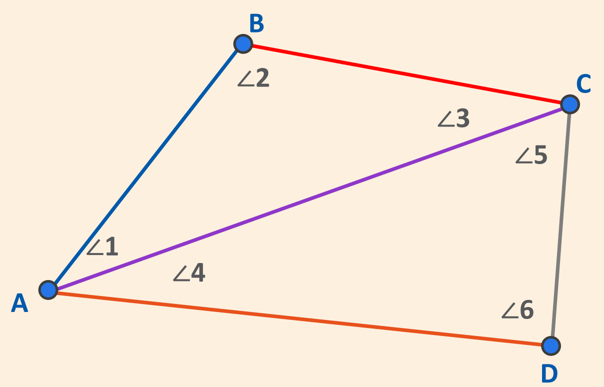
მრავალკუთხედი არის შეკრული ბრტყელი ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია სამი ან მეტი მონაკვეთისაგან. ამ მონაკვეთებს მრავალკუთხედის გვერდები ეწოდება. მრავალკუთხედის გვერდები ერთმანეთს არ კვეთს.



არაამოზნექილი მრავალკუთხედები ეწოდება ისეთ მრავალკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფე სხვა გვერდს კვეთს.



ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360^0-ია.



წინადადების შედგენა	მიზეზი
1. ABCD ამოზნექი- ლი ოთხკუთხედი **2.** გავავლოთ AC დია- გონალი **3.** ΔABC და ΔACD **4.** $<1 + <2 + <3 = 180^0$ **5.** $< 1 + < 2 + < 3 +$ $< 4 + < 5 + < 6 = 360^0$	**1.** მოცემულობა **2.** შევაერთეთ ორი არა ერთ წრფეზე მდებარე წერტილი **3.** განვიხილოთ ორი სამკუთხედი **4.** სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180^0-ია **5.** ტოლობის თვისება

პარალელოგრამი

ამოზნექილ ოთხკუთხედს, რომლის მოპირ-დაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად პარალე-ლურია, ეწოდება პარალელოგრამი

$AB \parallel CD; \qquad BC \parallel AD$

$\angle A + \angle B = 180^0$

$\longrightarrow \angle C = \angle A$

$\angle C + \angle B = 180^0$

$\longrightarrow \angle B = \angle D$

$\angle C + \angle D = 180^0$

$\angle A + \angle D = 180^0$

- პარალელოგრამში ერთ გვერდთან მდე-ბარე კუთხეების ჯამი 180^0-ია.
- პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხე-ები ტოლია.
- პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკ-ვეთის წრტილით შუაზე ყოფს ერთმა-ნეთს.

$\angle A = \angle C; \qquad \angle B = \angle D$

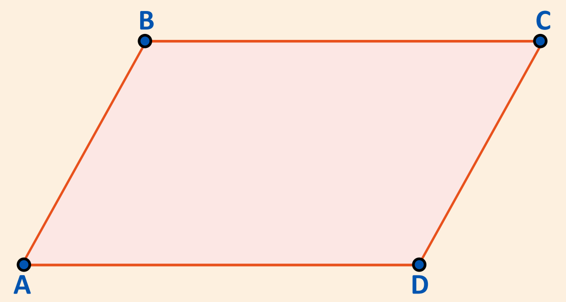
$AB = CD; \qquad BC = AD$

$0A = OC; \qquad BO = OD$

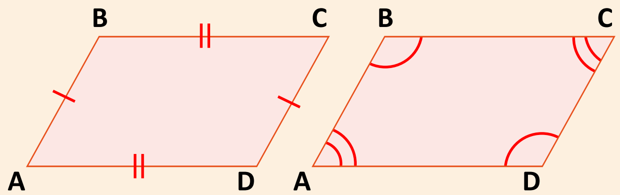
დასკვნა

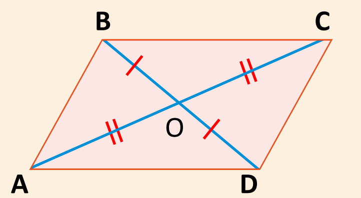
$< 1 + < 2 + < 3 + < 4 + < 5 + < 6 = 360^0$

$< A + < B + < C + < D = 360^0$

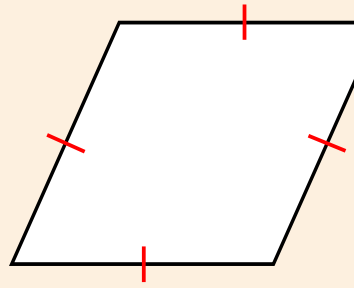


- პარალელოგრამში ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ია
- პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია.



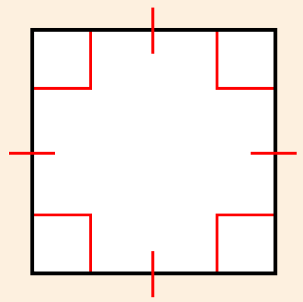


რომბი ეწოდება ისეთ პარალელოგრამს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია.



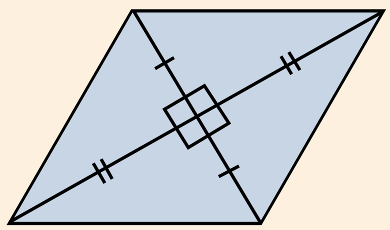
მართკუთხედი ეწოდება, ისეთ პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე ტოლია.

კვადრატი ეწოდება, ისეთ პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე ტოლია და ყველა გვერდი ტოლია.



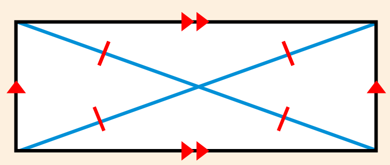
რომბში

- დიაგონალები მართი კუთხით გადაიკვეთება
- დიაგონალები კუთხის ბისექტრისებია



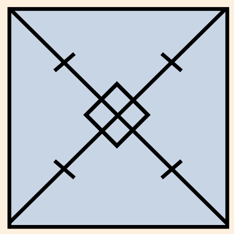
მართკუთხედში

- დიაგონალები ერთმანეთის ტოლია



კვადრატში

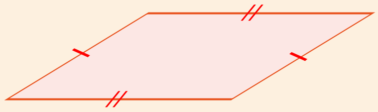
- დიაგონალები ერთმანეთის ტოლია
- დიაგონალები მართი კუთხით გადაიკვეთება
- დიაგონალები კუთხის ბისექტრისებია



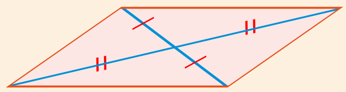
პარალელოგრამობის ნიშნები

თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ე.ი. პარალელოგრამია.

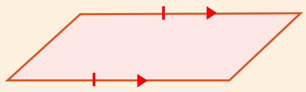
თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთ-ხედი პარალელოგრამია.



თუ ოთხკუთხედში დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთ-ხედი პარალელოგრამია.

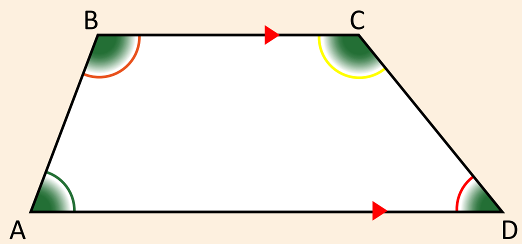


თუ ოთხკუთხედში ერთი წყვილი მოპირდა-პირე გვერდების პარალელური და ტოლია, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელურია.



ტრაპეცია

ოთხკუთხედს რომლის ორი გვერდი პარა-ლელურია, ხოლო დანარჩენი ორი გვერდი არ არის პარალელური **ტრაპეცია** ეწოდება.



BC || AD

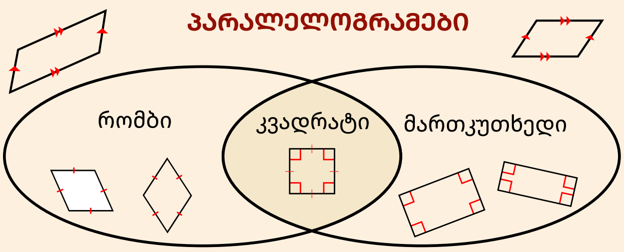
BC-ს და AD-ს **ეწოდება ფუძე**

AB-ს და CD-ს **ფერდები**

$\angle A + \angle B = 180^0$

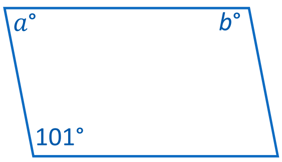
$\angle C + \angle D = 180^0$

პარალელოგრამების კლასიფიკაცია

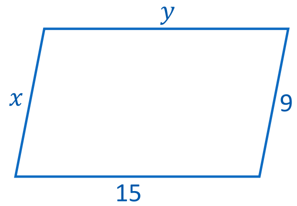


სავარჯიშოები

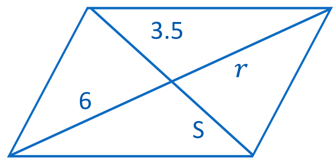
1. მოცემულია პარალელოგრამი, იპოვეთ უცნობები:



2. მოცემულია პარალელოგრამი

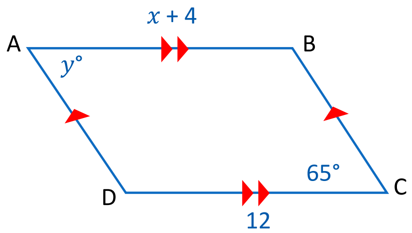


3. მოცემულია პარალელოგრამი, იპოვეთ უცნობები:

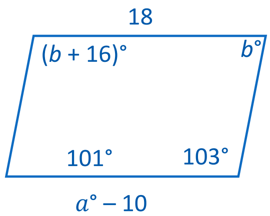


4. იპოვეთ უცნობი, თუ ვიცით, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია

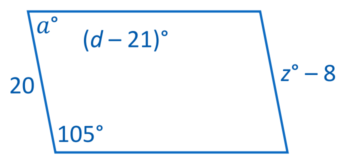
ა)



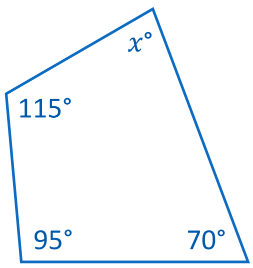
ბ)



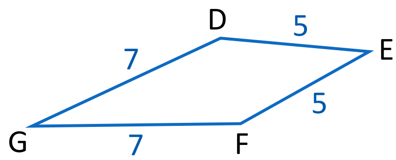
გ)

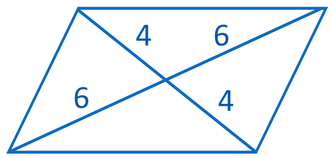


5. იპოვეთ უცნობი კუთხე



6. არის თუ არა მოცემული ოთხკუთხედები პარალელოგრამი? პასუხი დაასაბუთეთ





7. რომბის დიაგონალები 8 სმ და 6 სმ-ია, იპოვეთ რომბის პერიმეტრი	**8.** რომბის ერთ-ერთი კუთხე 120°-ია, პატარა დიაგონალის სიგრძე 8 სმ. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი და დიდი დიაგონალის სიგრძე.
9. მართკუთხედის პერიმეტრი 14 სმ-ია, დიაგონალის სიგრძე 5 სმ-ია. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები	**10.** კვადრატის პერიმეტრი 20 სმ-ია, იპოვეთ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე.
11. ABCDპარალელოგრამისპერიმეტრი70სმ-ია, ΔABD-ს პერიმეტრი 45 სმ, იპოვეთ BD დიაგონალის სიგრძე	**12.** პარალელოგრამის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2:3, იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

4.2. პერიმეტრის და ფართობის ცნება

წარმოვიდგინოთ ორი ნაკვეთი, რომელთაგან ერთს კვადრატის ფორმა აქვს, ხოლო მეორეს ამოზნექილი მრავალკუთხედის, ან ნებისმიერი ფორმის ბრტყელი ფიგურის.

მეწარმეს სურს ორივე ნაკვეთის შემოღობვა და შემდეგ ხორბლის დათესვა.

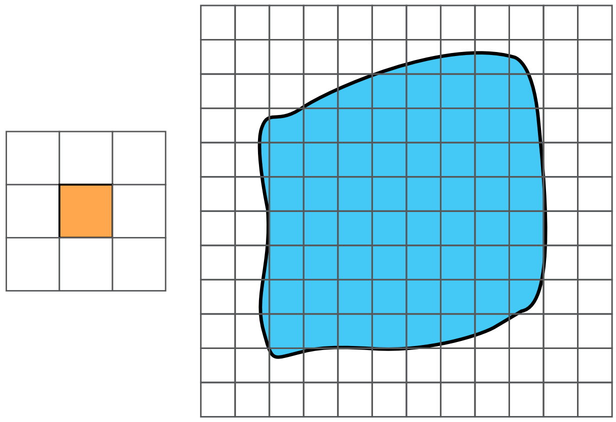
როგორ დავადგინოთ, რამდენი მეტრი სიგრძის შემოსაღობი მასალა უნდა შევიძინოთ მიწის ნაკვეთის შემოსაღობად? ან როგორ გავზომოთ, რა რაოდენობის მოსავალს აიღებს თითოეული ნაკვეთიდან?

პერიმეტრი

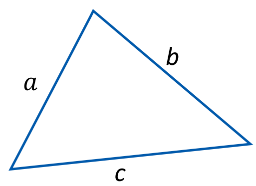
თუ ავიღებთ სიბრტყის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია მრუდით ან ტეხილით, მაშინ **პერიმეტრი** გვიჩვენებს მოცემული საზღვრის, მრუდის ან ტეხილის სიგრძეს.

მრავალკუთხედის **პერიმეტრი** ეწოდება ამ ფიგურის გვერდების სიგრძეთა ჯამს.

პერიმეტრი, უმეტესად აღინიშნება P სიმბოლოს გამოყენებით. პერიმეტრი წრფივი ზომაა და მის გასაზომად ვიყენებთ სიგრძის საზომ ერთეულებს: სმ, მ, და ა.შ. ქვემოთ მოცემულია სხვადასხვა ნაცნობი ფიგურების პერიმეტრის გამოსათვლელი ფორმულა.

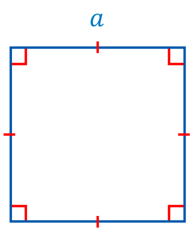


სამკუთხედი



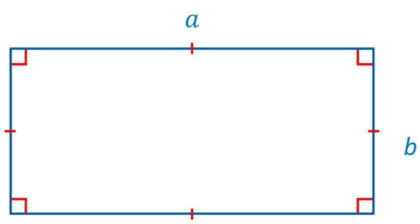
$P = a + b + c$

კვადრატი



$P = 4a$

მართკუთხედი



$P = 2a + 2b = 2(a + b)$

დაიმახსოვრეთ, $a + b = \frac{P}{2}$

ფართობი

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას

დავუშვათ, ორივე ფორმის ნაკვეთზე მეწარმემ თანაბრად დათესა კარტოფილი, პირველ ნაკვეთზე დათესა 100 კგ კარტოფილი, ხოლო მეორე ნაკვეთზე 700 კგ კარტოფილი, ვიტყვით, რომ მეორე ნაკვეთი კვადრატული ფორმის ნაკვეთზე 700 : 100 = 7-ჯერ მეტია; თუ მეორე ნაკვეთზე მეწარმემ დათესა b კგ კარტოფილი, ხოლო კვადრატული ფორმის ნაკვეთზე a კგ კარტოფილი, მაშინ ვიტყვით, რომ მეორე ნაკვეთი კვადრატული ფორმის ნაკვეთზე $b : a = \frac{b}{a}$ -ჯერ მეტია.

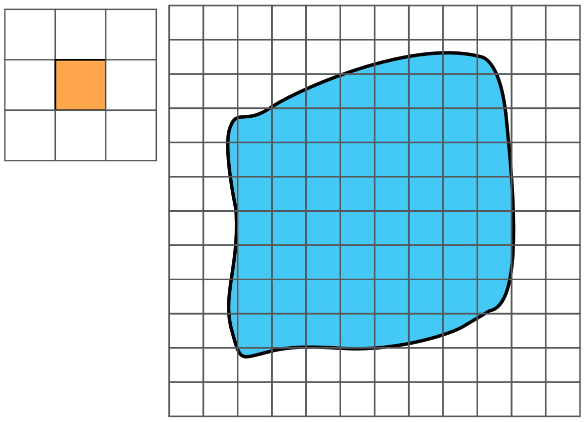
დავუშვათ, პირველი ნაკვეთი, ანუ კვადრატული ფორმის ნაკვეთი, არის საზომი ერთეული. ასეთ შემთხვევაში, რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს რამდენჯერ მეტია მეორე ნაკვეთი პირველზე, ვუწოდოთ, მეორე ნაკვეთის ფართობი. ამ იდეაზე დაყრდნობით, უკვე, შესაძლებელია განვსაზღვროთ ბრტყელი ფიგურის ფართობი, თუმცა მანამდე საჭიროა შემოვიტანოთ ფართობის საზომი ერთეული

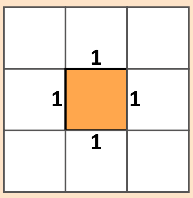
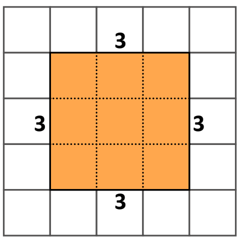
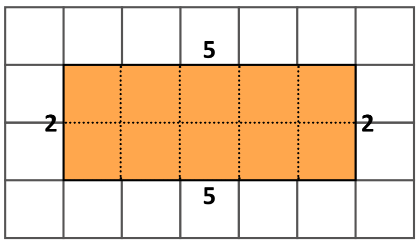
ფართობი არის მრუდით ან ტეხილი ხაზით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილის ზომა, რომელიც გამოთვლილია შესაბამისი საზომი ერთეულებით.

ფართობის საზომ ერთეულად ვიღებთ კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 ერთეული. ფართობი იზომება კვადრატული ერთეულებით, მაგალითად: სმ^2, მ^2 და ა.შ.

დავუშვათ, **რომ ერთი უჯრის გვერდის სიგრძე** შეესაბამება 1 სმ-ს და მისი ფართობი აღვნიშნოთ S-ით, მაშინ ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან მივიღებთ:

განვიხილოთ ერთეულოვანი კვადრატი (რომლის

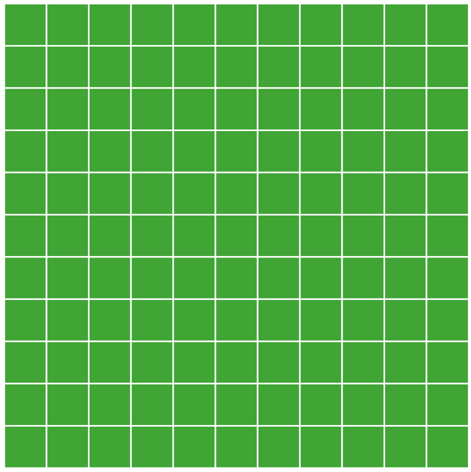


კვადრატი	კვადრატი	მართკუთხედი
		
$S = 1$ სმ^2 $P = 4 \cdot 1 = 4$ სმ	$S = 3 \cdot 3 = 9$ სმ^2 $P = 4 \cdot 3 = 12$ სმ	მოცემულია ორი სტრიქონი, თითო სტრიქონში 5 კვადრატია, შესაბამისად ფართობი უდრის: $S = 2 \cdot 5 = 10$ სმ^2 $P = 2(5 + 2) = 14$ სმ

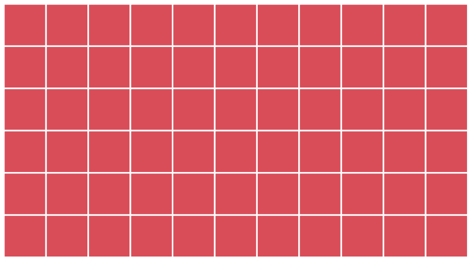
გვერდის სიგრძეა ერთი ერთეული); ასევე, განვიხილოთ კვადრატი რომლის გვერდის სიგრძეა a ერთეული.

მოცემულ კვადრატის გვერდებს გავყოფთ 1 ერთეულის ტოლ მონაკვეთებად, როგორც სიგრძეზე ასევე სიგანეზე. დავინახავთ, რომ მწვანე კვადრატში არის a ცალი სვეტი და a სტრიქონი, მოცემულ კვადრატში ჩვენ შეგვიძლია განვათავსოთ $a \cdot a$ – რაოდენობის ერთეულოვანი კვადრატი. გამოდის, რომ კვადრატის ფართობი $S = a \cdot a = a^2$.

ანალოგიურად, განვიხილოთ მართკუთხედი, რომლის სიგრძე a ერთეულის ტოლია, ხოლო სიგანე b ერთეულის, გვერდებს გავყოფთ 1 ერთეულის ტოლ მონაკვეთებად, დავინახავთ, რომ მართკუთხედის სიგრძეში მოთავსდება a ცალი სვეტი, ხოლო სიგანეში b ცალი სტრიქონი, მართკუთხედში სულ განთავსდება $a \cdot b$ ცალი კვადრატი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მართკუთხედის ფართობი არის $S = a \cdot b$. აღნიშნულ გამოსახულებას მართკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულას ვუწოდებთ.



$S = a^2$



$S = a \cdot b$

მოცემულ გაკვეთილში ჩვენ განვიხილავთ მარტივი ფიგურების ფართობების გამოსათვლელ ფორმულებს. ფიგურას ეწოდება მარტივი თუ იგი სასრული რაოდენობის სამკუთხედებად (სამკუთხა არეებად) შეიძლება დაიყოს. მოცემული ფორმულების გამოყვანისას ჩვენ ჩავთვლით რომ:

ფართობის თვისებები:

- ყოველ ბრტყელ ფიგურას აქვს გარკვეული ფართობი; ყოველ მარტივ ფიგურას აქვს ზომის მოცემული ერთეულით (სმ^2, მ^2 და ა.შ.) განსაზღვრული ფართობი.
- ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ.
- თუ ფიგურას ორ ნაწილად გავყოფთ, მაშინ ამ ნაწილების ფართობთა ჯამი მოცემული ფიგურის ფართობის ტოლია.

თუ ორ ფიგურას ტოლი ფართობები აქვს, ვამბობთ, რომ მოცემულია ტოლდიდი ფიგურები.

მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

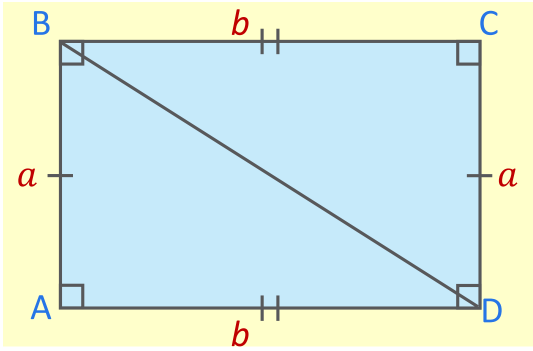
$ABCD$ მართკუთხედში გავლებულია DB დიაგონალი, რომელიც მართკუთხედს ორ ტოლ მართკუთხა სამკუთხედად ყოფს. ΔABD და ΔCBD სამკუთხედებს ორი გვერდი ტოლი აქვთ და მათ შორის მდებარე კუთხე მართია. შესაბამისად სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\Delta ABD = \Delta CBD$-ს

გამოვთვალოთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, გვაქვს:

$\Delta ABD = \Delta CBD$

$S_{\Delta ABD} = \dfrac{S_{\Delta ABCD}}{2} = \dfrac{ab}{2}$

$\boldsymbol{S_{\Delta ABD} = \dfrac{ab}{2}}$

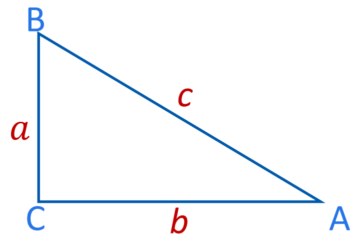


მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი კათეტების ნამრავლის ნახევარს უდრის.

ΔABC – მართკუთხაა

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot CB}{2}$

$\boldsymbol{S_{\Delta ABC} = \dfrac{ab}{2}}$

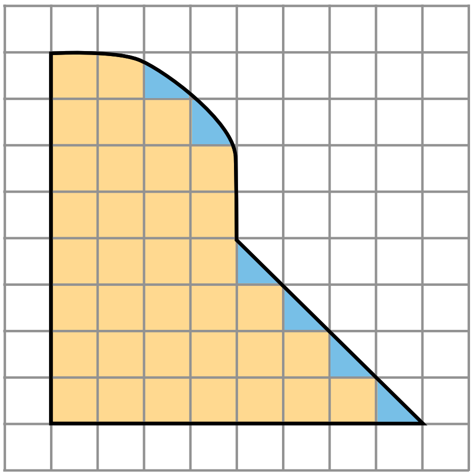


ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურის ფართობი

შედგენილი არის ფიგურა, რომელიც შედგება მარტივი გეომეტრიული ობიექტებისაგან, როგორიც არის კვადრატი, მართკუთხედი და სამკუთხედი.

შედგენილი ან სხვა ნებისმიერი მოცემული ფორმის ფიგურის ფართობის დადგენა შესაძლებელია მარტივი შემადგენელი ფიგურების ფართობის მეშვეობით.

როდესაც მოცემულია ნებისმიერი ფორმის ფიგურა, ჩვენ შეგვიძლია ფიგურა დავყოთ კვადრატის, მართკუთხედის ან სამკუთხედის ფორმის ნაწილებად, რომლებმაც არ უნდა გადაფარონ ერთმანეთი. მთელი ფიგურის ფართობი კი მისი შემადგენელი მარტივი ფიგურების ფართობთა ჯამი იქნება.



თუ ბრტყელ ფიგურის რომელიმე გვერდი შემოსაზღვრულია წირით, ჩვენ შევძლებთ მიახლოებით დავადგინოთ ფართობი, მარტივი ფიგურების მასში მოთავსებით.

ავიღოთ უჯრებიანი ფურცელი, დავადოთ ფიგურას ზემოდან და დავითვალოთ კვადრატების ან მართკუთხა სამკუთხედების რაოდენობა.

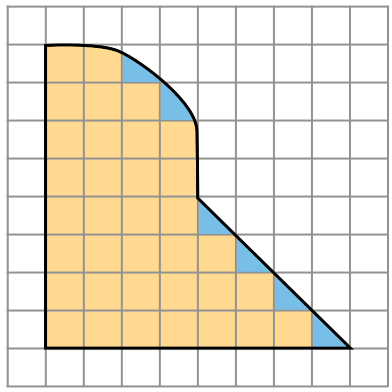
ნიმუში 1 — მიახლოებით დაადგინეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურის ფართობი

როგორც ვხედავთ ფიგურა დახაზულია უჯრებიან ფურცელზე. ჩავთვალოთ, თითოეული უჯრის გვერდის სიგრძეა 1 სმ.

ფიგურაში თავსდება 35 კვადრატი და კიდევ შესაძლებელია მოთავსდეს 6 ცალი კვადრატის ნახევარი (მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ფიგურა). აქედან გამომდინარე, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფიგურის ფართობი მიახლოებით არის:

$$S = 35 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 38$$

$$S \approx 38 \text{ სმ}^2$$



ნიმუში 2 — ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე დაადგინეთ ფიგურის ფართობი

ცხადია, საწყისი ფიგურა გაიყო ორ ფიგურად, მართკუთხედად და მართკუთხა სამკუთხედად.

მართკუთხედის ფართობია:

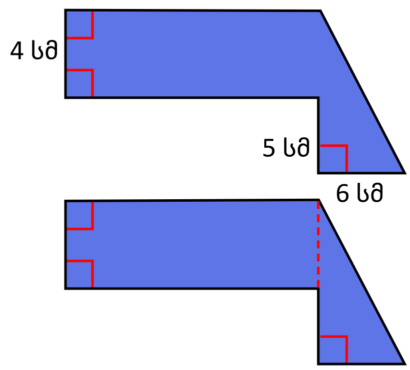
$$S = 20 \cdot 4 = 80$$

მართკუთხა სამკუთხედის ფართობია:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

საწყისი ფიგურის ფართობია:

$$S = 80 + 27 = 107 \text{ სმ}^2$$



ნიმუში 3 — დაადგინეთ ფიგურის ფართობი

ა) იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მართკუთხედის სიგრძეა 7 სმ და პერიმეტრი 20 სმ-ია.

ბ) მართკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია. დაადგინეთ, როგორ შეიძლება ფართობის გამოთვლა, თუ მართკუთხედის სიგრძე x სმ-ია?

ა) ვიცით, რომ მართკუთხედის ორი გვერდის ჯამი უდრის პერიმეტრის ნახევარს, ანუ $20 : 2 = 10$ სმ, ამიტომ

სიგანე $= 10 - 7 = 3$ სმ.

მართკუთხედის ფართობი იქნება: $S = 7 \cdot 3 = 21$ სმ^2

ბ) ვიცით, რომ მართკუთხედის ორი გვერდის ჯამი უდრის პერიმეტრის ნახევარს, ანუ $20 : 2 = 10$ სმ, ამიტომ

სიგანე $= 10 - x$ სმ.

მართკუთხედის ფართობი იქნება:

$S = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$ სმ^2

სავარჯიშოები

1. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 5 სმ და 8 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

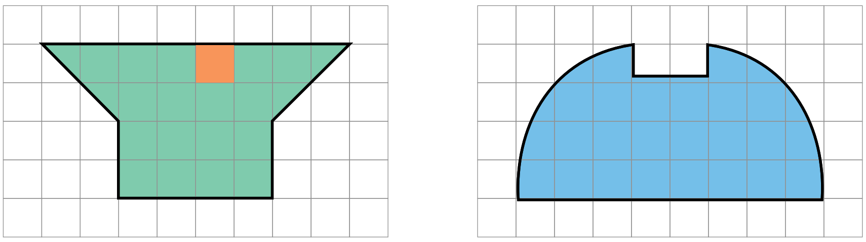
2. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამია 18 სმ, ამასთან ერთი კათეტის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

3. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი 3-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს კათეტები, თუ სამკუთხედის ფართობია 24 სმ^2.

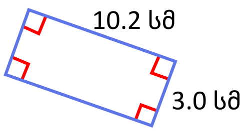
4. მართკუთხედის სიგრძე 2-ჯერ მეტია სიგანეზე. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრია 36 სმ.

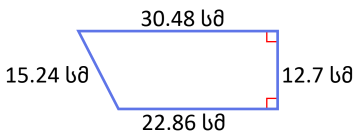
5. მართკუთხედის სიგრძე ისე შეეფარდება სიგანეს, როგორც 3:4. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობია 108 სმ^2.

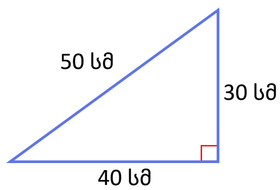
6. დაადგინეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურის ფართობი ზუსტად ან მიახლოებით.

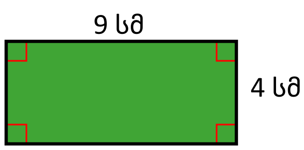


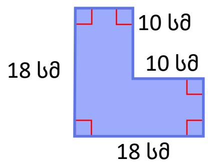
7. გამოთვალეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურების ფართობი და პერიმეტრი.

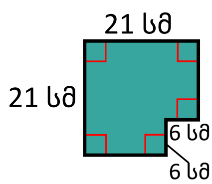




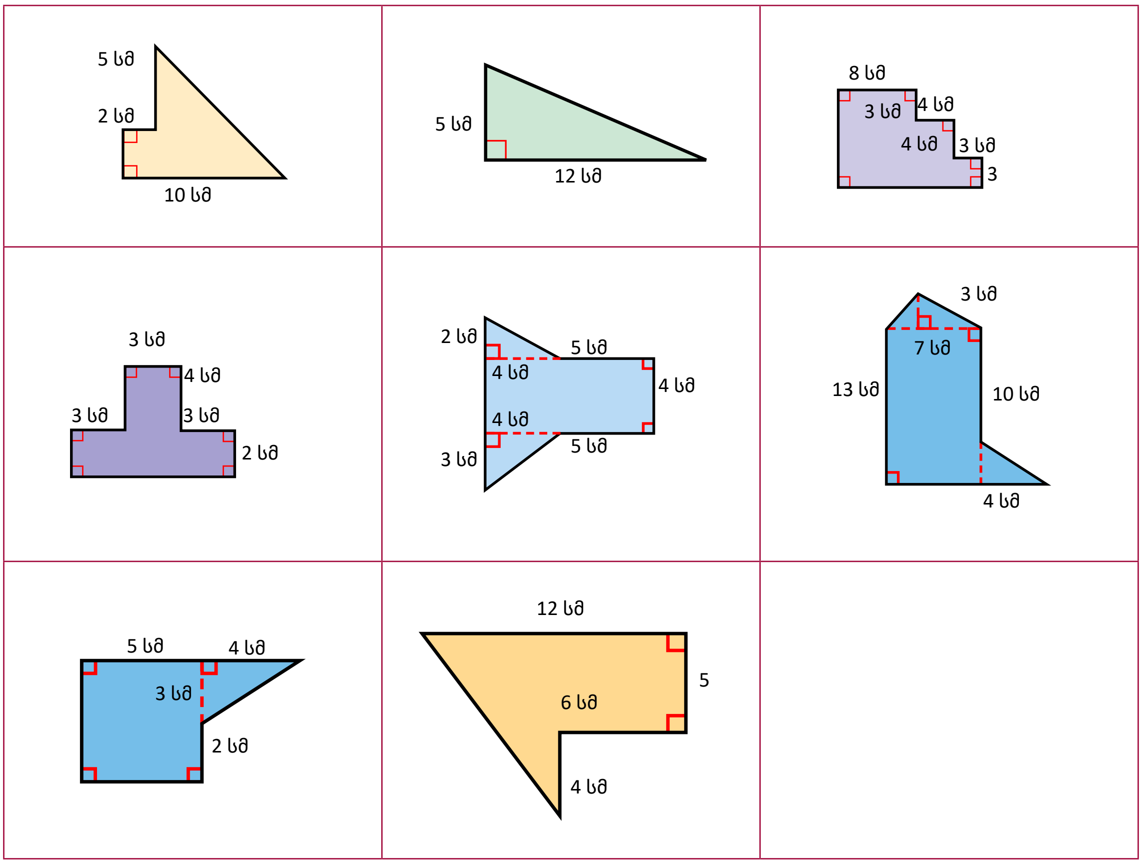








სავარჯიშოები



8. ოთხი კვადრატული მაგიდა, რომელთა გვერდის სიგრძე 1,5 მეტრია, განალაგეს ერთ სიგრძეზე ერთ დიდ მაგიდად. იპოვეთ მიღებული მაგიდის პერიმეტრი.

9. ახსენი, როგორ ვიპოვოთ მართკუთხედის სიგრძე მისი პერიმეტრისა და სიგანის საშუალებით.

10. მიწის ნაკვეთი, რომლის სიგანეა 12 მეტრი, შემოღობილია 100 მეტრი სიგრძის მქონე ღობით. რა სიგრძისაა მიწის ნაკვეთი?

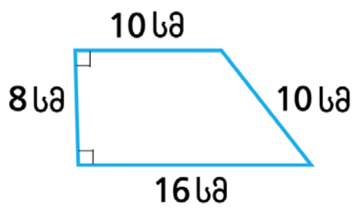
11. **იმსჯელეთ:** როგორ შეიძლება მართკუთხედის სიგრძისა და სიგანის ჯამის პოვნა, თუ ვიცით პერიმეტრი?

12. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძისა და სიგანის ჯამი, თუ მისი პერიმეტრია:

ა) 60 სმ: ბ) 48 სმ; გ) 80 სმ; დ) 124 სმ.

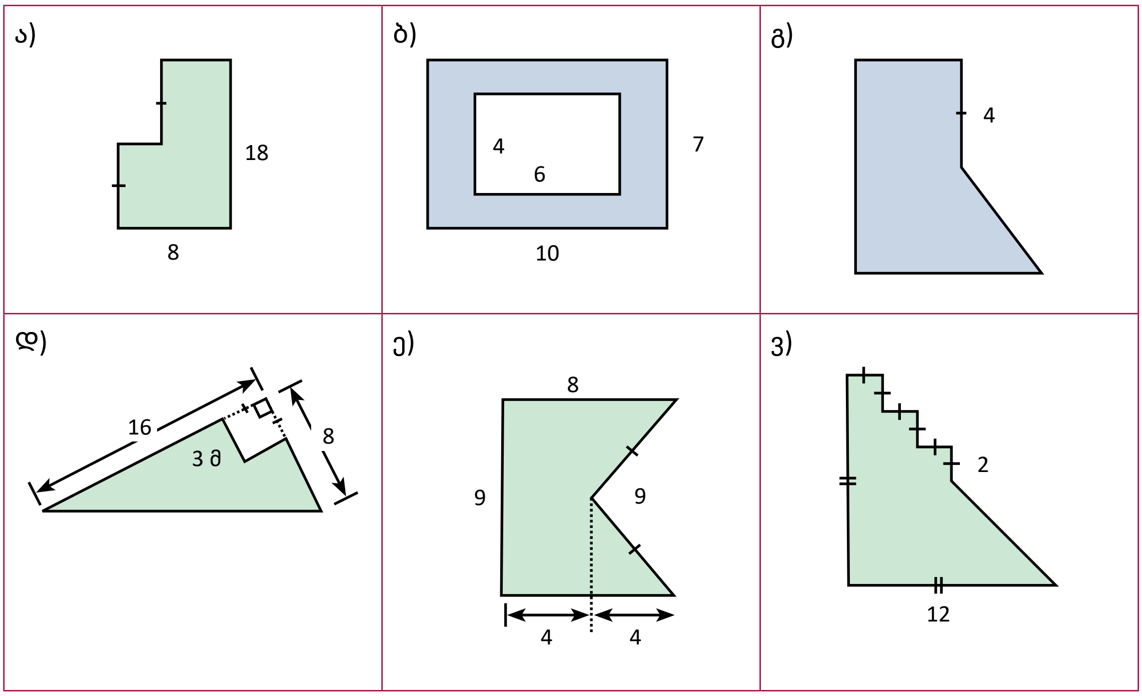
13. ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე, იპოვეთ მოცემული ოთხკუთხედის ფართობი.

მინიშნება: გაყავით ორ ნაწილად, მართკუთხედად და მართკუთხა სამკუთხედად.

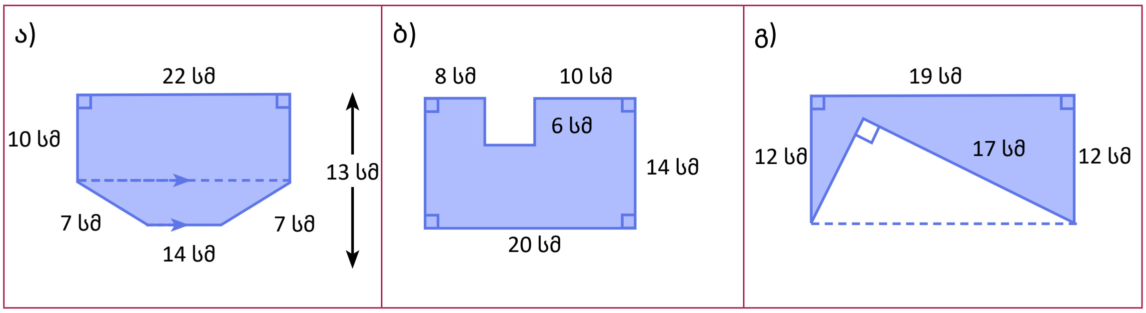


სავარჯიშოები

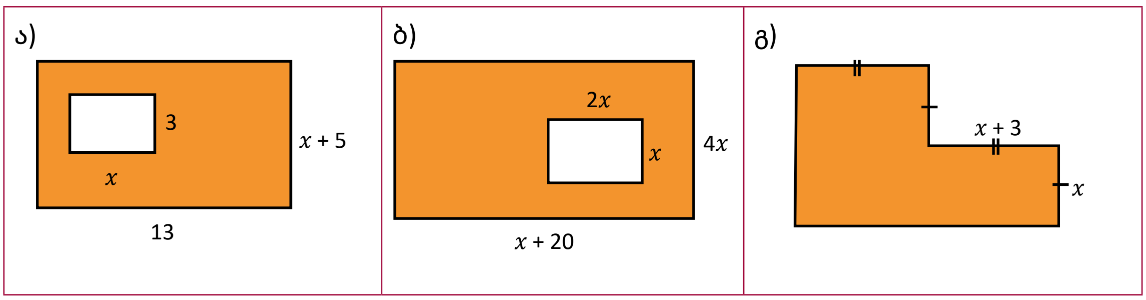
14. ნახაზზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი.



15. ნახაზზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი.



16. ნახაზზე მითითებული ზომების მიხედვით გამოსახეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი x ცვლადის დახმარებით.



17. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ მისი პერიმეტრი 22 სმ-ია, ფართობი კი 30 სმ^2.

18. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ მისი პერიმეტრი 28 სმ-ია, ფართობი კი 48 სმ^2.

სავარჯიშოები

19. კახამ უნდა შეღებოს მართკუთხედის ფორმის კედელი, რომლის სიგრძეა 6 მ, ხოლო სიმაღლე 3,2 მ. რამდენი ქილა საღებავი უნდა შეიძინოს კახამ, თუ ერთი ქილით შეიძლება შეიღებოს 5 $მ^2$ ფართობის ზედაპირი.

20. თედო პაპას აქვს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომლის ზომებია 50 მ და 80 მ. თედო პაპას შვილებმა უყიდეს მისი ნაკვეთის მოსაზღვრე კვადრატის ფორმის ახალი ნაკვეთი, რომელსაც პაპას ნაკვეთთან საერთო ტოლი გვერდი აქვს. იპოვეთ თედო პაპას გაერთიანებული ნაკვეთის ფართობი და შემოსაღობად საჭირო ღობის სიგრძე. იმსჯელეთ, რამდენი სავარაუდო პასუხი არსებობს.

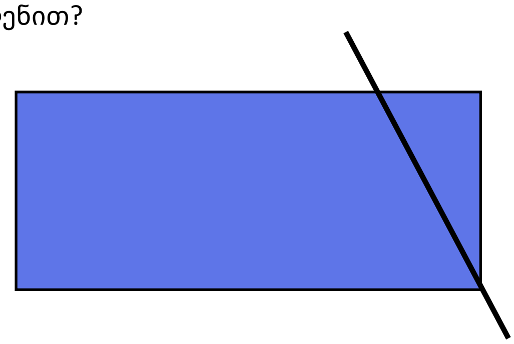
- იპოვეთ კვადრატის გვერდი, თუ მისი ფართობი ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობის, რომლის მეზობელი გვერდები ტოლია 5 სმ და 20 სმ.

21. ოთახის იატაკს მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის გვერდებია 5,5 მ და 6 მ. ის უნდა მოპირკეთდეს მართკუთხედის ფორმის ფილებით, რომლის სიგრძეა 30 სმ, სიგანე კი 5 სმ. რამდენი ასეთი ფილა დასჭირდება ოთახის იატაკის მოპირკეთებას?

15 სმ-იანი კვადრატული ფორმის რამდენი კაფელის ფილაა საჭირო კედლის მოსაპირკეთებლად, თუ მართკუთხედის ფორმის კედლის გვერდები ტოლია 3 მ და 2,7 მ.

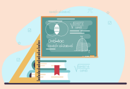
22. ორი მიწის ნაკვეთი შემოღობილია ერთნაირი სიგრძის ღობით. პირველ ნაკვეთს მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის გვერდები ტოლია 220 მ და 160 მ. მეორე მიწის ნაკვეთს კვადრატის ფორმა აქვს. რომელი ნაკვეთის ფართობია მეტი და რამდენით?

23. ადიდებულმა მდინარემ მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთს ჩამოაჭრა ფართობის ნაწილი (როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები). რამდენი პროცენტით შემცირდა მიწის ნაკვეთის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდი შემცირდა 20%-ით?



4.3.პარალელოგრამის ფართობი

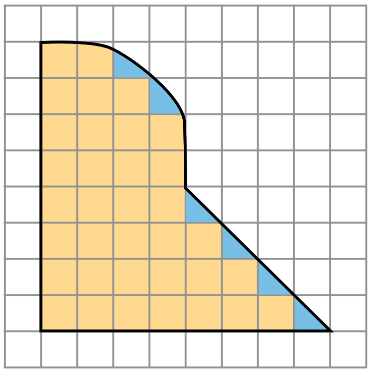
ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ ბრტყელი ფიგურის ფართობი მისი შემადგენელი ნაწილების ფართობების ჯამის ტოლია.

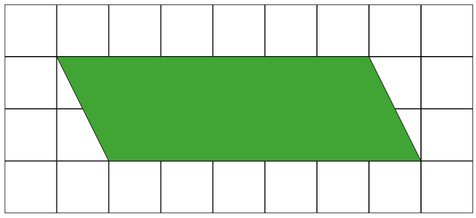


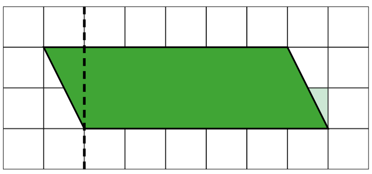
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება და ვიზუალური მოდელი

ტექნოლოგიების დახმარებით, სიმულაციის მეშვეობით, თვალსაჩინოდ ვნახოთ, როგორ შეიძლება პარალელოგრამის ფართობის გამოთვლა:

Mathigon ვიდეო სიმულაცია.

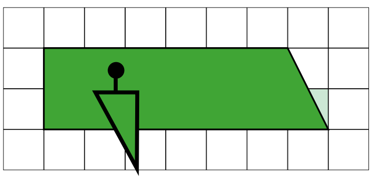






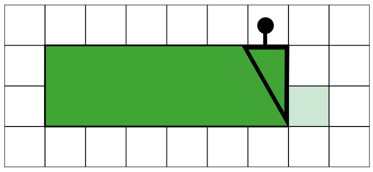
ნაბიჯი 1

ჩამოვაჭრათ სამკუთხედი



ნაბიჯი 2

გადავიტანოთ პარალელურად



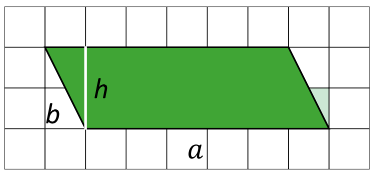
ნაბიჯი 3

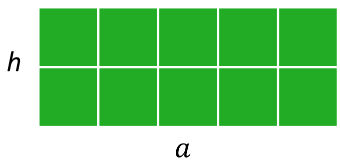
მივადოთ პარალელოგრამს მეორე გვერდზე.
მივიღებთ მართკუთხედს

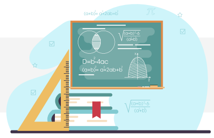
მართკუთხედის ფართობი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია. მართკუთხედის სიგანე პარალელოგრამის გვერდის მართობულია, შესაბამისად ის პარალელოგრამის სიმაღლესაც წარმოადგენს. გამოდის რომ:

$S = ah;$

პარალელოგრამის ფართობი, გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.



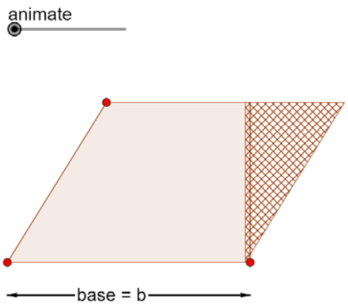




■ MATH Lab – კვლევა

🔗 Geogebra-პარალელოგრამის ფართობი

ჩაატარეთ რამდენიმე ცდა და დააკავშირეთ პარალელოგრამის ფართობი მართკუთხედის ფართობთან.



პარალელოგრამის ფართობი

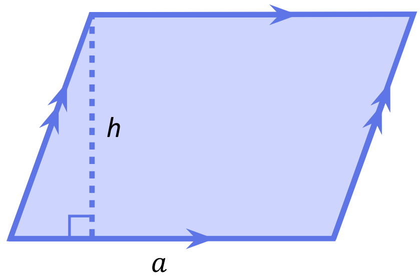
დასაბუთება და პროცესის ფორმულირება

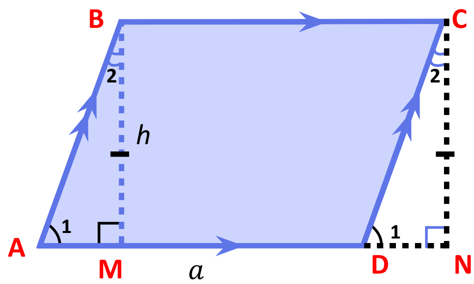
წარმოვიდგინოთ სამი ნაკვეთი, რომელთაგან ერთს პარალელოგრამის ფორმა აქვს, ერთს სამკუთხედის და ერთს რომბის.

სხვადასხვა ნიმუშებითა და სტრატეგიებით გავარკვიოთ, როგორ შეიძლება თითოეული ფიგურის ფართობის გამოთვლა.

განვიხილოთ ***ABCD* პარალელოგრამი**, ***AD*** გვერდზე ***B*** წვეროდან დავუშვათ ***BM* სიმაღლე. მივიღებთ *ABM*** სამკუთხედს. ასევე, *C* წვეროდან დავუშვათ ***CN* სიმაღლე, რომელიც *AD*** გვერდის გაგრძელებას გადაკვეთს ***N* წერტილში და მივიღებთ** $\triangle DCN$.

$\triangle ABM = \triangle DCN$ მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია, სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის მიხედვით





AB = CD	პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია
BM = CN = h	***AD*** გვერდზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია
AM = DN	თუ ორ მართკუთხა სამკუთხედს ორი გვერდი ტოლი აქვს, მაშინ მესამე გვერდიც ტოლი იქნება (პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე).

მივიღეთ, რომ $\triangle ABM = \triangle DCN$ სამკუთხედები ტოლია, ე.ი. მათ ფართობებიც ტოლი ექნებათ.

ჩამოვაჭრათ $\triangle ABM$ სამკუთხედი, პარალელური გადატანით გადავაადგილოთ *AD* გვერდის გასწვრივ და მივადგათ პარალელოგრამის *AB* გვერდის მოპირდაპირე *CD* გვერდს.

$\triangle ABM$ შეავსებს $\triangle DCN$-ს და მივიღებთ ***MBCN*** მართკუთხედს.

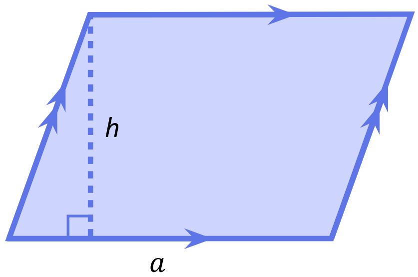
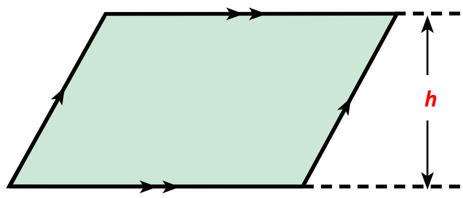
მივიღებთ, რომ $S_{ABCD} = S_{MBCN}$ (S_{ABCD}-სიმბოლოთი აღინიშნება *ABCD* პარალელოგრამის ფართობი, ფიგურის დასახელებას ვწერთ ფართობის სიმბოლოს მარჯვენა ქვედა კუთხეში).

ჩვენ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია

$$S_{ABCD} = S_{MBCN} = BC \cdot BM$$

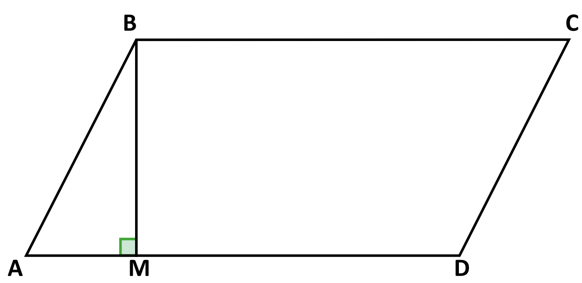
თუ დავაკვირდებით ფორმულას, *ABCD* პარალელოგრამისთვის *BC* გვერდი სიგრძეა, რომლის სიგრძე უდრის *AD* გვერდის სიგრძეს, ხოლო *BM* პარალელოგრამის სიმაღლეა, მივიღეთ, რომ

$$\boldsymbol{S_{ABCD}} = \boldsymbol{AD} \cdot BM = a \cdot h$$

პარალელოგრამის ფართობი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. $S = a \cdot h$		

ნიმუში 1

ABCD პარალელოგრამის ***AD*** გვერდი ***BM*** სიმაღლეზე 3-ჯერ დიდია. იპოვეთ ***AD*** გვერდი, თუ პარალელოგრამის ფართობია 75 სმ^2.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $BM = x$ და $AD = 3x$ პარალელოგრამის ფართობის ფორმულიდან მივიღებთ: $x \cdot 3x = 75$; $3x^2 = 75$; $x^2 = 25$; $x = 5$. საბოლოოდ იქნება: $AD = 3x = 3 \cdot 5 = 15$; $AD = 15$ სმ	

ნიმუში 2

ABCD პარალელოგრამის სიმაღლეების სიგრძეებია ***BM*** = **7** სმ და ***BN*** = **6** სმ, ხოლო მახვილი კუთხე კი – **30°**-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის ფართობი.

ABM მართკუთხა სამკუთხედში **30°**-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ამიტომ

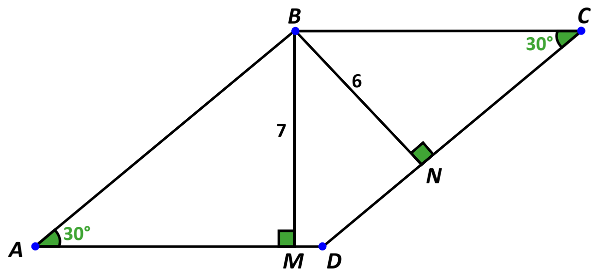
$$AB = 2 \cdot BM = 2 \cdot 7 = 14$$

რადგან პარალელოგრამში მოპირდაპირე გვერდები ტოლია, ამიტომ

$$AB = CD = 14$$

საბოლოოდ, პარალელოგრამის ფართობი იქნება:

$$S = BN \cdot CD = 6 \cdot 14 = 84 \text{ სმ}^2$$



ნიმუში 3

პარალელოგრამის გვერდი და სიმაღლეა შესაბამისად 4 სმ და 9 სმ. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის ტოლდიდი კვადრატის პერიმეტრი.

თავდაპირველად, ვიპოვოთ პარალელოგრამის ფართობი, იგი იქნება $4 \cdot 9 = 36$ სმ^2. იგივე ფართობი ექნება ამ პარალელოგრამის ტოლდიდ კვადრატს (ტოლდიდ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ), ანუ კვადრატის ფართობიც იქნება 36 სმ^2. რადგან კვადრატის ფართობი უდრის გვერდის კვადრატს, ამიტომ ერთი გვერდის სიგრძე იქნება 6 სმ.

საბოლოოდ, კვადრატის პერიმეტრი იქნება:

$$P = 4 \cdot 6 = 24 \text{ სმ}$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდია 10 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 8 სმ.

2. პარალელოგრამის გვერდის სიგრძე 4-ჯერ მეტია მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე. იპოვეთ ეს გვერდი, თუ პარალელოგრამის ფართობია 64 სმ^2.

3. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლეების სიგრძეებია 20 სმ და 16 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი კუთხეა 150° .

4. პარალელოგრამის გვერდებია 8 სმ და 12 სმ, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხე 30°. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

5. პარალელოგრამის ერთი გვერდი 5 სმ-ით დიდია მეორე გვერდზე, ხოლო პარალელოგრამის პერიმეტრია 58 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი პატარა სიმაღლეა 9 სმ.

6. პარალელოგრამის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4 : 5, ხოლო დიდი სიმაღლის სიგრძეა 14 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრია 72 სმ.

7. პარალელოგრამის ფართობია 84 სმ^2, ხოლო დიდი გვერდის შეფარდება მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე არის 7 : 3. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ პატარა გვერდის სიგრძეა 11 სმ.

8. მართკუთხედის გვერდებია 5 სმ და 8 სმ, ხოლო მისი ტოლდიდი პარალელოგრამის გვერდია 10 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

9. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან დაშვებული სიმაღლეები ტოლია 9 სმ და 12 სმ-ის. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ორი გვერდის სხვაობა ტოლია 4 სმ-ის.

10. პარალელოგრამის მცირე სიმაღლე 4 სმ-ის ტოლია და დიდ გვერდს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად, რომელთაგან თითოეული 3 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელოგრამის დიდი სიმაღლე.

4.4. სამკუთხედის ფართობი

საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის დაკავშირება პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულასთან?

ჩვენ ვიცით, რომ ფიგურას ეწოდება მარტივი, თუ იგი სასრული რაოდენობის სამკუთხედებად (სამკუთხა არეებად) შეიძლება დაიყოს.

განვიხილოთ, ***ABCD*** პარალელოგრამი და გავავლოთ ***BD*** დიაგონალი, რომელიც პარალელოგრამს ორ ტოლ სამკუთხედებად, $\triangle ABD$ და $\triangle BCD$ ჰყოფს. $\triangle ABD = \triangle BCD$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით:

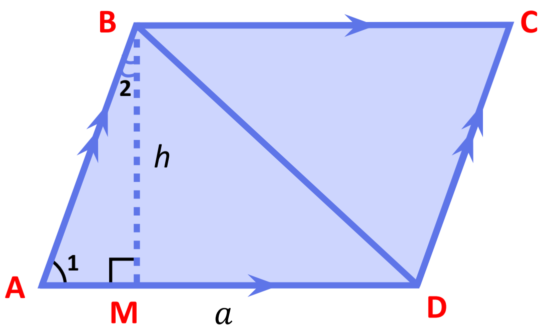
AB = CD; AD = BC	პარალელოგრამში მოპირდაპირე გვერდები ტოლია
BD	გვერდი საერთოა ორივე სამკუთხედისთვის

რადგან სამკუთხედები, ტოლია ე.ი, მათი ფართობებიც ტოლი იქნება, **ABD** და **BCD** ტოლდიდი სამკუთხედებია $S_{ABD} = S_{BCD}$

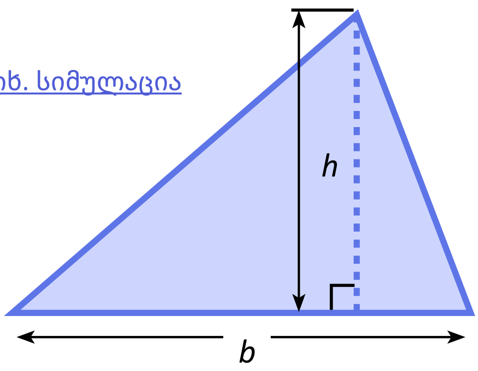
მივიღეთ, რომ პარალელოგრამის ფართობი შედგება ორი ტოლი სამკუთხედისგან, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობის ნახევარია:

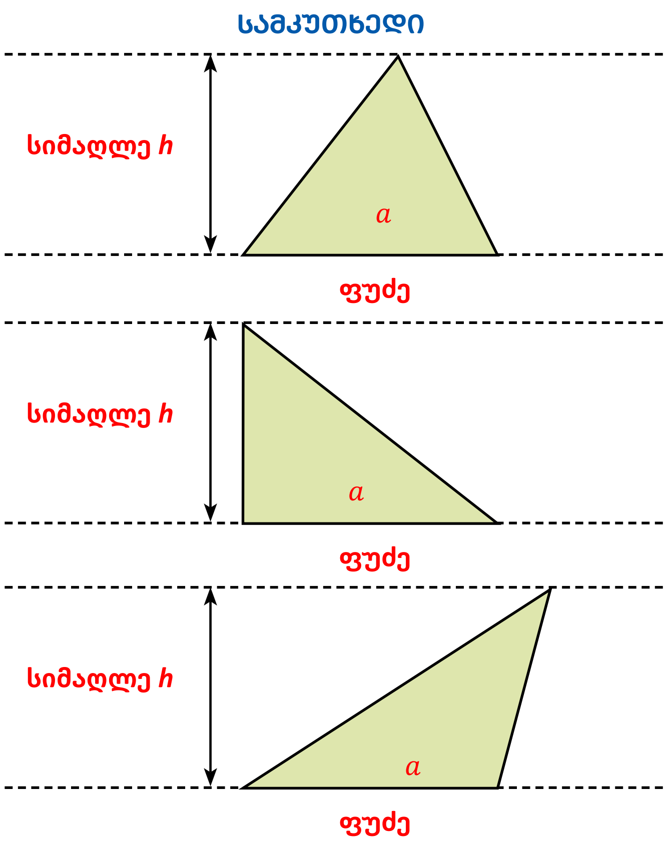
$$S_{\triangle ABD} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah$$

სამკუთხედის ფართობი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

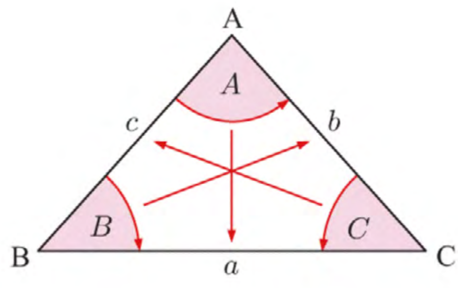
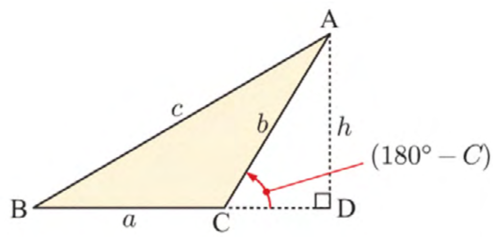


იხ. სიმულაცია



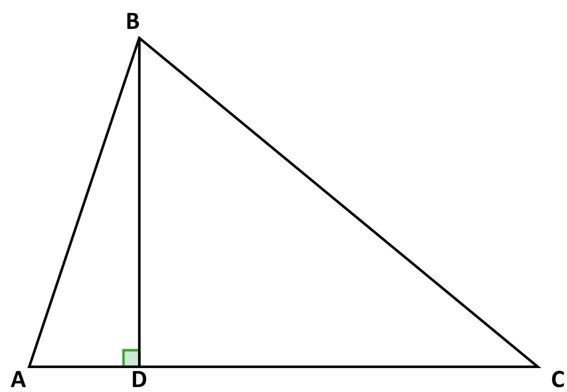


ფართობი $S = \frac{1}{2} a \times h$

!! ყურადღება მიაქციეთ: როგორ ხდება გვერდების აღნიშვნა სამკუთხედში? როდესაც მოცემულია $\triangle ABC$, **A** – წვეროს მოპირდაპირე გვერდი აღინიშნება პატარა a-სიმბოლოს მეშვეობით **B** – წვეროს მოპირდაპირე გვერდი აღინიშნება პატარა b-სიმბოლოს მეშვეობით **C** – წვეროს მოპირდაპირე გვერდი აღინიშნება პატარა c-სიმბოლოს მეშვეობით	
!! ყურადღება მიაქციეთ: როდესაც სამკუთხედი არის ბლაგვკუთხა, მახვილი კუთხიდან დაშვებული სიმაღლე გვერდის გაგრძელებაზე ეშვება, შესაბამისად $S_{\triangle ABC} = \frac{a\boldsymbol{h}}{2} = \frac{\boldsymbol{AD \cdot BC}}{\boldsymbol{2}}$	

ნიმუში 1

ABC სამკუთხედის ***AC*** გვერდი ***BD*** სიმაღლეზე 2-ჯერ დიდია. იპოვეთ ***AC*** გვერდი, თუ სამკუთხედის ფართობია 36 სმ².

შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $BD = x$ და $AC = 2x$ სამკუთხედის ფართობის ფორმულიდან მივიღებთ: $\frac{x \cdot 2x}{2} = 36$; $x^2 = 36$; $x = 6$. საბოლოოდ, იქნება: AC = $2x = 2 \cdot 6 = 12$; AC = 12 სმ	

ნიმუში 2

ABC სამკუთხედში ***AB* = 12** და ***BC* = 15.** იპოვეთ ამ გვერდებზე დაშვებული ***CM*** და ***AN*** სიმაღლეები, თუ ამ სიმაღლეების ჯამი **18 სმ**-ის ტოლია.

ABC სამკუთხედის ფართობი გამოვთვალოთ ორნაირად, *AB* და *BC* გვერდების საშუალებით, მივიღებთ:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot MC}{2}=\frac{BC\cdot AN}{2}$$

$12\cdot MC=15\cdot AN$, აქედან $MC=\frac{5AN}{4}$

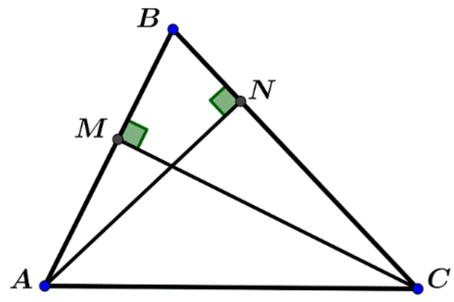
რადგან სიმაღლეების ჯამი უდრის 18 სმ-ს, ამიტომ დავწერთ განტოლებას:

$$MC+AN=18$$

$$\frac{5AN}{4}+AN=18$$

$$\frac{9AN}{4}=18,\quad AN=8.$$

ე.ი. $AN=8$ სმ და $MC=10$ სმ.

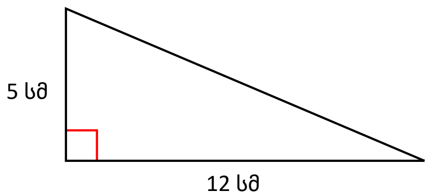


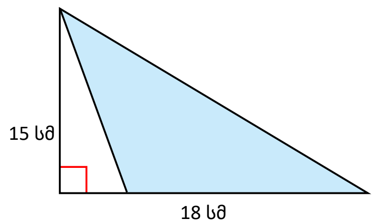
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდია 9 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 5 სმ.

2. სამკუთხედის ფართობია 32 სმ^2, ხოლო ერთი გვერდის სიგრძეა 8 სმ. იპოვეთ ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

3. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული სამკუთხედების ფართობები.





4. სამკუთხედის გვერდის სიგრძე 3-ჯერ მეტია მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე. იპოვეთ ეს გვერდი, თუ სამკუთხედის ფართობია 24 სმ^2.

5. სამკუთხედის ერთი გვერდია 8 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 6 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის მეორე გვერდი, თუ ვიცით, რომ მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე 4 სმ-ია.

6. სამკუთხედის ერთი გვერდია 12 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 5 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის მეორე გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მეორე გვერდის სიგრძე 4სმ-ია.

7. სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა 16 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 9 სმ. ამ სამკუთხედის მეორე გვერდის სიგრძეა 12 სმ. იპოვეთ ამ მეორე გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

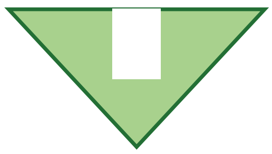
8. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 4:5:7, ხოლო მისი ფართობია 56 სმ^2. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ დიდ გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა 8 სმ.

9. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია 15 სმ და 18 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

10. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტის სიგრძეა 24 სმ, ხოლო ფართობია 64 სმ^2. იპოვეთ მეორე კათეტის სიგრძე.

11. თავის დასაწყისშია მოცემული კომპლექსური დავალება: დავალებისთვის დახაზეთ სკვერის გეგმა. სკვერში გამოყავით ადგილი სკამებისთვის ან რაიმე აქტივობებისთვის, რომელსაც ექნება სამკუთხედის და პარალელოგრამის ფორმა; გამოთვალეთ თქვენ მიერ შედგენილი სამკუთხედების ფართობი.

12. **გამოწვევა:** პარკში პატარებისთვის განკუთვნილ სივრცეს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის კათეტის სიგრძეა 18 მ. ამ სივრცის ცენტრში ჩადგმულია მართკუთხედის ფორმის სასრიალო (იხ. ნახაზი). მისი სიგრძე 9 მ-ია და სიგანე 6 მ. დარჩენილი სივრცე უნდა დაიფაროს რბილი საფარით. რამდენი კვადრატული მეტრი საფარია საჭირო?

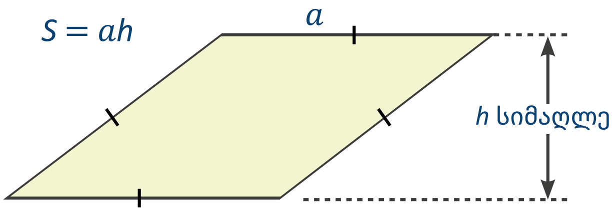


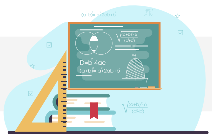
4.5. რომბის ფართობი

რომბი ისეთი პარალელოგრამია, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, შესაბამისად მისი ფართობიც, პარალელოგრამის ფართობის მსგავსად გამოითვლება ფორმულით:

$$S = ah$$

რომბის ფართობი მისი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.





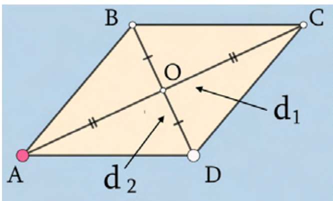
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

განვიხილოთ რომბის ფართობის დადგენის სხვა მეთოდი: შედით ვებ გვერდზე Geogebra, გახსენით აქტივობა რომბის ფართობი.

განვიხილოთ ***ABCD*** რომბი, რომლის დიაგონალებია d_1 **და** d_2. **ვიცით, რომ** რომბში დიაგონალები მართი კუთხით გადაიკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილით შუაზე ყოფენ ერთმანეთს. ვიღებთ 4 ტოლ მართკუთხა სამკუთხედს: $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ და $\triangle AOD$;

იხ. სიმულაცია

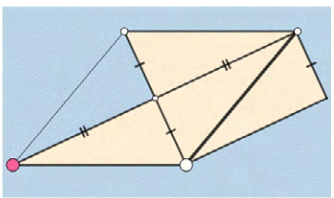
ნაბიჯი 1:

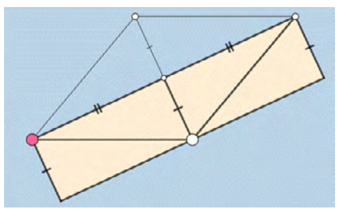


მოცემული სამკუთხედებიდან

$\triangle AOB = \triangle COD = \triangle BOC = \triangle AOD$, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნით (მაგ. $\triangle AOB = \triangle COD$, რადგან $AO = OC$ და $BO = OD$, $\angle AOB = \angle COD = 90°$).

ნაბიჯი 2:





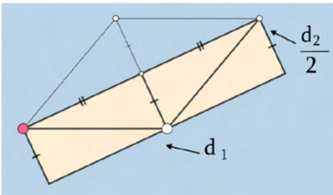
ავიღოთ $\triangle AOB$ და პარალელურად გადავიტანოთ ისე, რომ მივადგათ CD გვერდს, ანალოგიურად **ავიღოთ** $\triangle BOC$, პარალელურად გადავიტანოთ, ისე რომ მივადგათ AD გვერდს.

გაგრძელება

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

ნაბიჯი 3:

ორი სამკუთხედის პარალელური გადატანით მივიღებთ მართკუთხედს, რომლის ერთი გვერდი დიაგონალის სიგრძის ტოლია (d_1), ხოლო მეორე გვერდი მეორე დიაგონალის სიგრძის ნახევარს უდრის $\left(\frac{d_2}{2}\right)$. ჩვენ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია – $S = d_1 \cdot \frac{d_2}{2}$



რადგან მიღებული მართკუთხედის ფართობი, საწყისი რომბის ფართობის ტოლია მივიღებთ, რომ

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

რომბის ფართობი მისი დიაგონალის სიგრძეების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

ნიმუში 1

ABCD რომბში დიაგონალების სიგრძეებია $AC = 12$ სმ და $BD = 16$ სმ. იპოვეთ რომბის ფართობი და გვერდის სიგრძე.

რომბის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, ამიტომ გვექნება:

$S = \frac{12 \cdot 16}{2} = 6 \cdot 16 = 96$ სმ².

ცხადია, რომ $AO = OC = 6$ სმ და

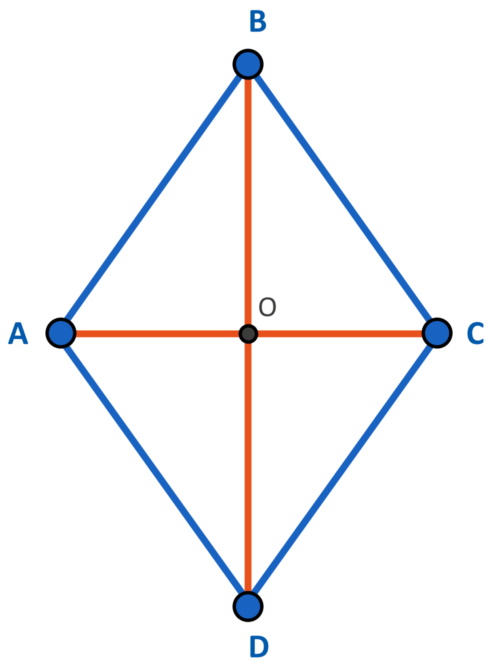
$BO = OD = 8$ სმ. პითაგორას თეორემით მივიღებთ:

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = 6^2 + 8^2$

$AB^2 = 100$, $AB = 10$ სმ.

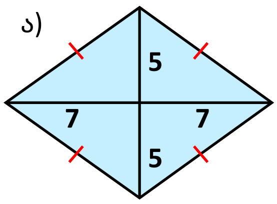
ე.ი. $AB = BC = CD = AD = 10$ სმ.



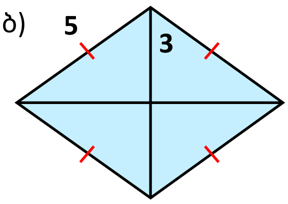
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურების ფართობი.

ა)



ბ)



2. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდია 10 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 7 სმ.

3. რომბის გვერდის სიგრძე 4-ჯერ მეტია მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე. იპოვეთ ეს გვერდი, თუ რომბის ფართობია 36 სმ^2.

4. რომბის გვერდის სიგრძეა 15 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის სიგრძეა 24 სმ. იპოვეთ რომბის ფართობი.

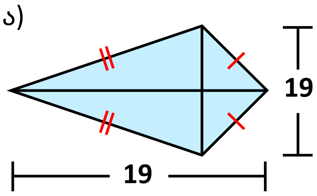
5. რომბის ფართობია 120 სმ^2, ხოლო ერთი დიაგონალის სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ რომბის გვერდის სიგრძე.

6. რომბის გვერდის სიგრძეა 24 სმ, ხოლო ბლაგვი კუთხეა 150°. იპოვეთ რომბის ფართობი.

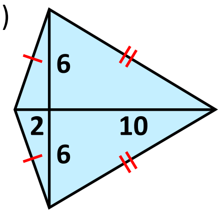
7. რომბის პერიმეტრია 52 სმ. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ ერთ-ერთი დიაგონალის სიგრძეა 10 სმ.

8. იპოვეთ მოცემული ფიგურების ფართობები:

ა)



ბ)



გამოწვევა: შემოიტანეთ აღნიშვნები და დაწერეთ ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება.

9. რომბის გვერდი არის 12 სმ. მისი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2. იპოვეთ რომბის ფართობი.

10. რომბის გვერდების შუაწერტილები შეაერთეს მიმდევრობით. მიღებული ოთხკუთხედის ორი მეზობელი გვერდის სიგრძე არის 8 სმ და 5 სმ. იპოვეთ რომბის ფართობი.

11. თავის დასაწყისშია მოცემული **კომპლექსური დავალება**: დავალებისთვის დახაზეთ სკვერის გეგმა. სკვერში გამოყავით ადგილები სხვადასხვა დანიშულებისთვის, რომლებსაც ექნება რომბის და პარალელოგრამის ფორმა. გამოთვალეთ თქვენ მიერ შედგენილი სამკუთხედების ფართობი.

4.6. ტრაპეციის ფართობი

საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება ტრაპეციის ფართობის გამოსაყვანი ფორმულის დაკავშირება სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულასთან?

ჩვენ ვიცით, რომ ფიგურას ეწოდება მარტივი თუ იგი სასრული რაოდენობის სამკუთხედებად (სამკუთხა არეებად) შეიძლება დაიყოს.

განვიხილოთ, ***ABCD*** ტრაპეცია და გავავლოთ ***BD*** დიაგონალი, რომელიც ტრაპეციას ყოფს ორ სამკუთხედებად, $\triangle ABD$ და $\triangle BCD$.

ტრაპეციის ფართობი მოცემული სამკუთხედების ფართობების ჯამს უდრის.

ჩვენ ვიცით, რომ სამკუთხედის ფართობი გვერდისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}bh$$

ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა

$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$$

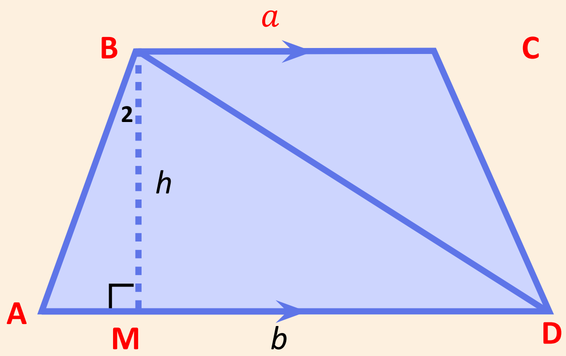
$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}bh; \quad S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}ah$$

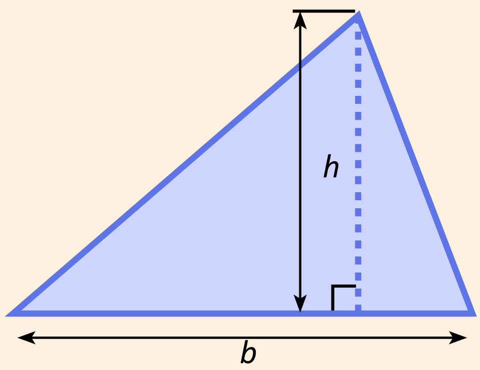
$$S_{\triangle ABCD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h+\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$$

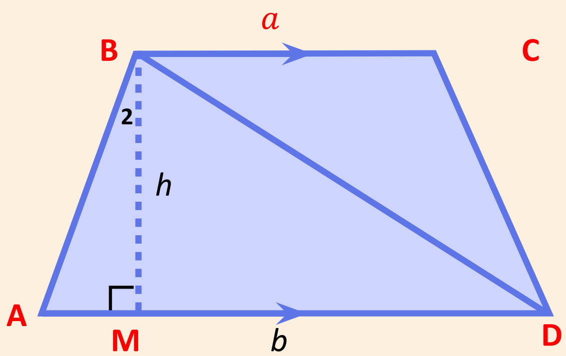
საერთო მამრავლის ფრჩხილს გარეთ

გატანით მივიღებთ,

რომ $S_{\triangle ABCD}=\frac{1}{2}\cdot h(a+b)$;







$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}$$

მოცემულ გამოსახულებას ხშირად ვწერთ სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმით:

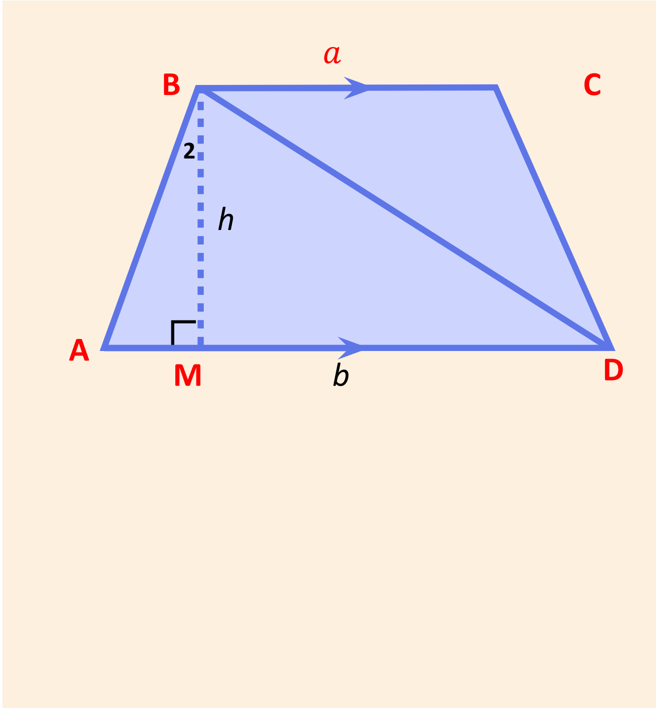
$$S_{\triangle ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \cdot (a+b);$$

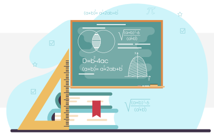
რადგან $\frac{a+b}{2}$ იმავე ფუძეების ნახევარჯამისა და შუახაზის ტოლია. ამბობენ, რომ ტრაპეციის ფართობი შუამონაკვეთისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია

$$S = \text{შუამონაკვეთი} \cdot h$$

ტრაპეციის ფართობი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot h(a+b)$$

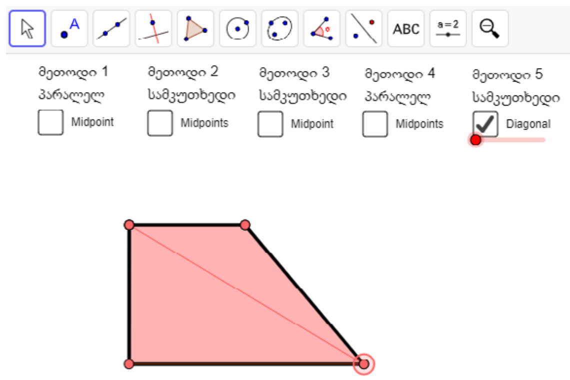




MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

გახსენით აქტივობა
[ტრაპეციის ფართობი.]

მოცემულ ბმულზე თქვენ შეძლებთ ნახოთ, როგორ შეიძლება ტრაპეციის ფართობის გამოთვლა 5 სხვადასხვა გზით, აღნიშნულის ანალიზით მიხვდებით, როგორ შეიძლება ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა.



მითითება: ამოირჩიეთ მეთოდი, სრიალას მეშვეობით გაასრიალეთ წრე სრიალაზე, რომლის მიხედვით გააქტიურდება სიმულაცია. გააანალიზეთ თითოეული შემთხვევა, ამოირჩიეთ, რომელი მეთოდია თქვენთვის მეტად იოლი, შეადარეთ სხვა მეთოდებს და დაასაბუთეთ, თქვენ მიერ არჩეული მეთოდის უპირატესობა და სიმარტივე.

ნიმუში 1

ABCD მართკუთხა ტრაპეციის ***AB, BC, CD*** და ***DA*** გვერდები **4**-ის, **3**-ის, **5**-ისა და **6**-ის პროპორციულია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი, თუ პერიმეტრი **36 სმ**-ის ტოლია.

რადგან ტრაპეციის პერიმეტრია 36 სმ, ამიტომ გვექნება:

$4x + 3x + 5x + 6x = 36, \quad 18x = 36, \quad x = 2.$

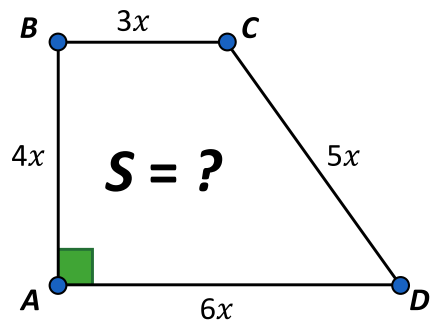
ე.ი. $AB = 8$ სმ, $BC = 6$ სმ, $CD = 10$ სმ და $AD = 12$ სმ.

ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h(a + b)$ ამიტომ გვექნება:

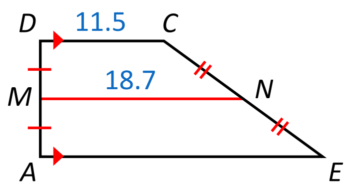
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB(BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 8\,(6 + 12) = 72$ სმ^2.

ე.ი. $S_{ABCD} = 72$ სმ^2

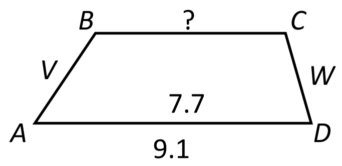


სავარჯიშოები

1. მოცემულია ABCD ტრაპეცია, MN შუახაზია. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის გათვალისწინებით იპოვეთ ტრაპეციის ფუძის სიგრძე.



2. მოცემულია ADCB ტრაპეცია, VW შუახაზია. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის გათვალისწინებით იპოვეთ ტრაპეციის ფუძის სიგრძე.



3. მართკუთხედის გვერდის სიგრძე 8 სმ-ია, დიაგონალის სიგრძე 10 სმ, იპოვეთ ფართობი.

4. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძე 5 სმ-ია, ერთ-ერთი კათეტის სიგრძე 4 სმ, იპოვეთ ფართობი.

5. კვადრატის პერიმეტრი 20 სმ-ია, იპოვეთ ფართობი.

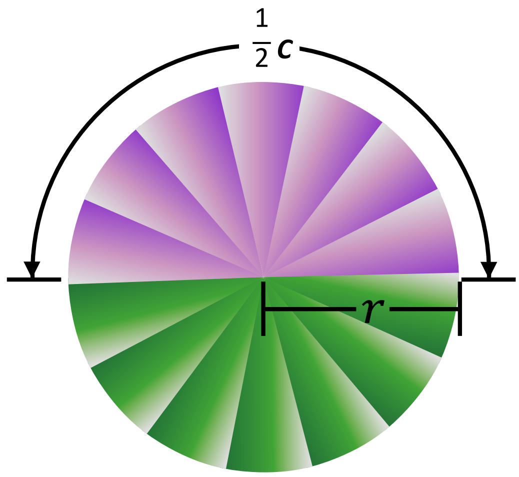
6. მართკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3 ფართობი 24 სმ^2-ია, იპოვეთ მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

4.7. წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი

ჩვენ უკვე განვიხილეთ, როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ მრავალკუთხედის ან სხვა ბრტყელი ფიგურის ფართობი და პერიმეტრი.

განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც ნაკვეთს აქვს წრის ფორმა.

როგორ დავადგინოთ, რამდენი მეტრი სიგრძის შემოსაღობი მასალა უნდა შევიძინოთ წრიული ფორმის მიწის ნაკვეთის შემოსაღობად? ან როგორ გავზომოთ, წრიული ფორმის არის ფართობი?



წრეწირის სიგრძე მისი გარშემოწერილობის სიგრძის ტოლია.

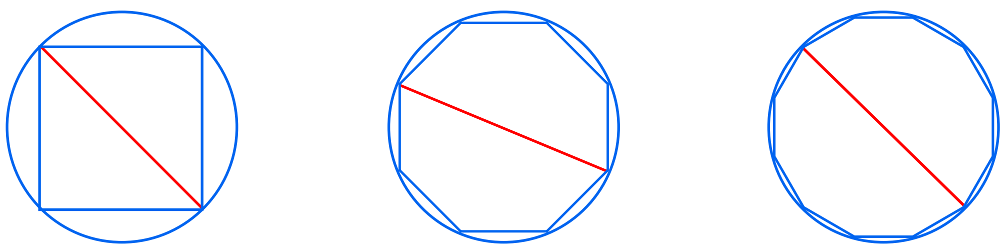
წრიული ფორმის შემთხვევაში, ნაცვლად პერიმეტრისა ვამბობთ წრეწირის სიგრძეს და მის აღსანიშნავად ვიყენებთ სიმბოლო C-ს.

? **საკვანძო კითხვა:** როგორ შეიძლება წრეწირის სიგრძის დადგენა?

წრეწირის სიგრძე

განვიხილოთ წრე და ჩავხაზოთ წესიერი მრავალკუთხედი. ჩავხაზოთ ჯერ კვადრატი, შემდეგ ხუთკუთხედი, ექვსკუთხედი და ვზარდოთ გვერდების რაოდენობა ნებისმიერ n-კუთხედამდე.

შეგახსენებთ, ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომელსაც ტოლი სიგრძის გვერდები და ტოლი სიდიდის კუთხეები აქვს, წესიერი მრავალკუთხედი ეწოდება.



წრეში წესიერი მრავალკუთხედების ჩახაზვის შემდეგ, რაც უფრო ვზრდით გვერდების რაოდენობას, მრავალკუთხედის პერიმეტრი მეტად უახლოვდება წრეწირის სიგრძეს. რაც უფრო მეტად უახლოვდება მრავალკუთხედის პერიმეტრი წრეწირის სიგრძეს, მით უფრო უახლოვდება მრავალკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება წრეწირის სიგრძესთან ერთიანს, ანუ საკმაოდ დიდი n-სთვის მრავალკუთხედის პერიმეტრი და წრეწირის სიგრძე არის მიახლოებით ერთი და იმავე რიცხვის ტოლი.

დადგინდა რომ, ნებისმიერი წრის შემთხვევაში, წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან არის მუდმივი რიცხვი. თუ წრეწირის სიგრძეს აღვნიშნავთ სიმბოლო C-ს მეშვეობით, ხოლო დიამეტრი

სიმბოლო d-ს მეშვეობით, მივიღებთ რომ $\frac{c}{d}$ არის მუდმივი რიცხვი, რომელიც აღინიშნება სიმბოლო π-ს მეშვეობით.

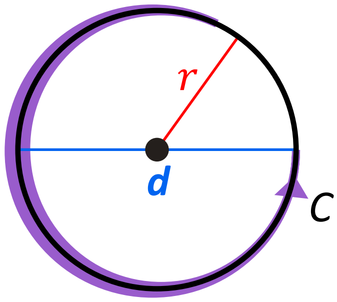
დადგენილია, რომ π-ს მნიშვნელობა მიახლოებით უდრის $\pi \approx 3.14159....$, მოცემული მსჯელობიდან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$\frac{c}{d} = \pi$-ს, საიდანაც მივიღებთ, რომ $C = \pi d$.

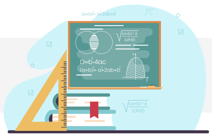
ვიცით, რომ $d = 2r$, სადაც r-წრის რადიუსია. დიამეტრის ნაცვლად ფორმულაში $d = 2r$ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ, რომ $C = 2\pi r$. მივიღეთ, რომ:

წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით $C = \pi d = 2\pi r$

▶ სადაც C-წრეწირის სიგრძეა, d-დიამეტრი (r-რადიუსი), π-მუდმივი, რომლის მნიშვნელობა მიახლოებით უდრის $\pi \approx 3.14159$



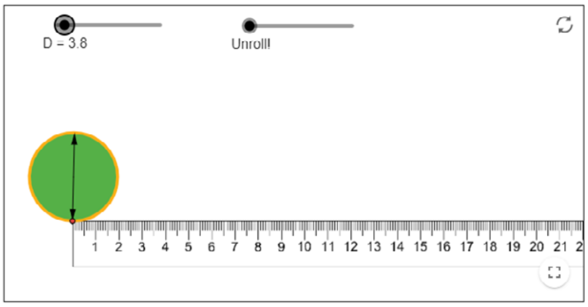
$C = \pi d = 2\pi r$



MATH Lab – კვლევა

გახსენით აქტივობა
🔗 წრეწირის სიგრძის გაზომვა.

მონიშნეთ თქვენთვის სასურველი დიამეტრის სხვადასხვა წრე, გადაადგილეთ სრიალა, გაზომეთ წრეწირის სიგრძე და იპოვეთ შეფარდება $\frac{c}{d}$



კიდევ სცადეთ

ჩაატარეთ რამდენიმე ცდა; დაორგანიზეთ მონაცემები ცხრილში:

ცდის ნომერი N	დიამეტრი (d)	წრეწირის სიგრძე (c)	შეფარდება $\frac{c}{d}$

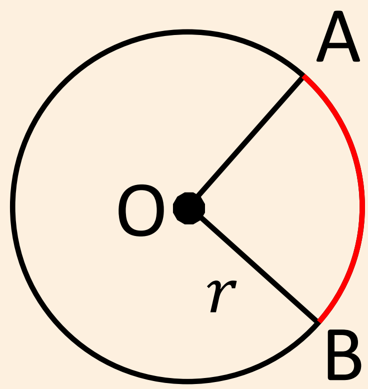
ცხრილში მოგროვებული მონაცემების საფუძველზე, იპოვეთ შეფარდება და შეამოწმეთ ემთხვევა თუ არა π-ს მიახლოებით მნიშვნელობას $\pi \approx 3.14159$ ....

წრის ფართობი

ტერმინები

წრეწირზე ავიღოთ წერტილები A, B და შევაერთოთ ცენტრთან OA, OB რადიუსებით და ($\overset{\frown}{AB}$) რკალით შემოსაზღვრულ წრის არეს **სექტორი** ეწოდება.

$\angle AOB$-ს ცენტრალური კუთხე.



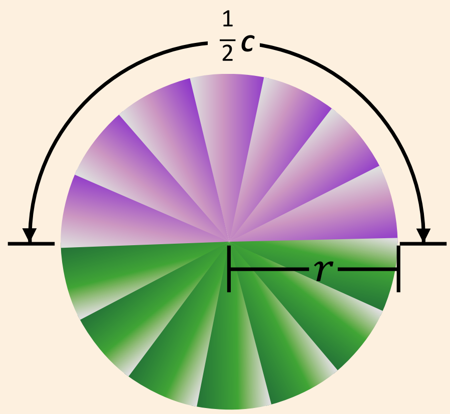
წრის ფართობის დასადგენად, ავიღოთ წრე, ცენტრი O და დავყოთ ტოლ სექტორებად. თუ წრის დაყოფას გავაგრძელებთ ტოლ ნაწილებად და დავყოფთ ბევრ სექტორად, თითოეული სექტორი მიახლოებით იქნება სამკუთხედის ფორმის.

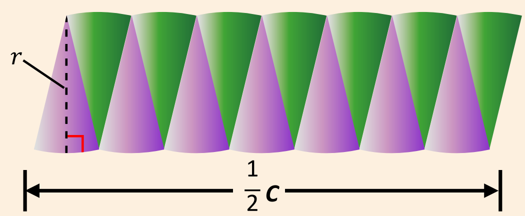
გადავაადგილოთ წრის ნაწილები ისე, როგორც ნახაზზეა მოცემული, მივიღებთ პარალელოგრამს, რომლის სიმაღლე წრის რადიუსის ტოლია (r), ხოლო სიგანე, წრეწირის სიგრძის ნახევარს უდრის ($\frac{1}{2}$c).

ჩვენ ვიცით, რომ პარალელოგრამის ფართობი სიგრძისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. შესაბამისად, მივიღებთ, რომ

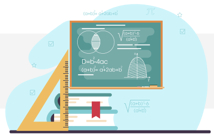
$S = \frac{1}{2}c \cdot r$ როგორც ვიცით, $C = 2\pi r$, ამიტომ ფორმულაში C-ს მნიშვნელობის შეტანით მივიღებთ, რომ

$S = \frac{1}{2}2\pi r \cdot r = \pi r^2$; მივიღეთ, რომ $S = \pi r^2$





მივიღეთ, რომ $S = \pi r^2$

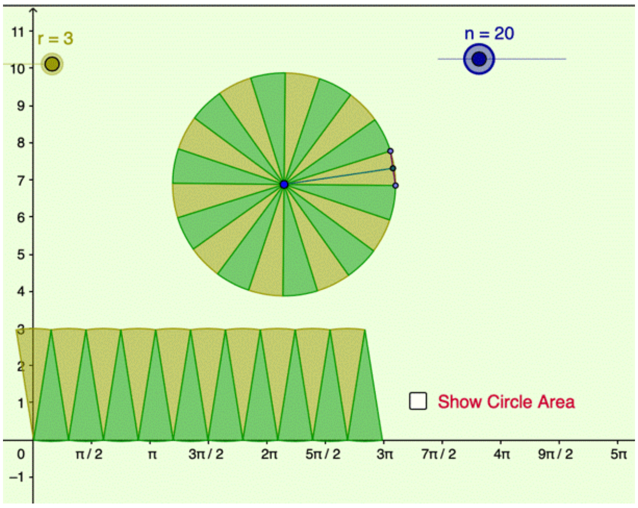


MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

გახსენით აქტივობა

[Geogebra - წრის ფართობი]

გახსენით აქტივობა და სხვადასხვა რადიუსისთვის გამოითვალეთ წრის ფართობი. სიმულაციით შეამოწმეთ პასუხი, ასევე სიმულაციის მეშვეობით გაიაზრეთ, როგორ ხდება წრის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყვანა.



სავარჯიშოები

1. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე და წრის ფართობი, თუ მისი რადიუსის სიგრძეა:
ა) 5 სმ; ბ) 8,5 სმ; გ) $\frac{2}{\pi}$ სმ; დ) 2.5 სმ.

2. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე და წრის ფართობი, თუ მისი დიამეტრის სიგრძეა:
ა) 12 სმ; ბ) 3,4 სმ; გ) 20 სმ; დ) $\frac{7}{2}\pi$ სმ.

3. იპოვეთ წრის რადიუსი, თუ წრეწირის სიგრძეა:
ა) 7π სმ; ბ) $4{,}2\pi$ სმ; გ) 6 სმ; დ) 8,6 სმ.

4. იპოვეთ წრის რადიუსი, თუ წრის ფართობია: ა) 36π სმ^2; ბ) 0.49π სმ^2; გ) π სმ^2; დ) 144π სმ^2.

5. იპოვეთ წრეწირის დიამეტრი, თუ წრეწირის სიგრძეა: ა) 12π სმ; ბ) $4{,}8\pi$ სმ; გ) 6π სმ.

6. წრეწირის სიგრძეა 18π სმ. იპოვეთ ამ წრის ფართობი.

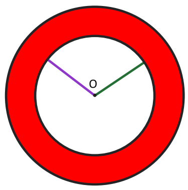
7. წრეწირის სიგრძეა 14π სმ. იპოვეთ ამ წრის ფართობი.

8. წრის ფართობია 25π სმ^2. იპოვეთ ამ წრეწირის სიგრძე.

9. დედამიწის დიამეტრი დაახლოებით 12,7 ათასი კილომეტრია. იპოვეთ დედამიწის ეკვატორის სიგრძე (პასუხი დაამრგვალეთ მთელამდე).

10. მორბენალმა ვარჯიშზე 3-ჯერ შემოურბინა 20 მ რადიუსის მქონე წრიულ მოედანს. რა სიგრძის დისტანცია გაირბინა სპორტსმენმა?

11. იპოვეთ გამუქებული ფიგურის ფართობი თუ დიდი წრის რადიუსია 10 სმ, ხოლო პატარასი – 8 სმ.



12. დურგალს შეუკვეთეს მრგვალი მაგიდა, რომლის ფართობი უნდა ყოფილიყო 2 მ^2. რა სიგრძის უნდა იყოს ამ მაგიდის დიამეტრი?

13. თავის დასაწყისშია მოცემული **კომპლექსური დავალება**: დავალებისთვის დახაზეთ სკვერის გეგმა. სკვერში გამოყავით ადგილები სხვადასხვა დანიშულებისთვის, რომლებსაც ექნება წრის ან/და ტრაპეციის ფორმა. გამოთვალეთ თქვენ მიერ შედგენილი ფიგურების ფართობი.

4.8. ბრტყელი ფიგურების ფართობის დადგენა კუთხის SIN-ით

? საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება ფართობის გამოსათვლელი ახალი ფორმულის მოღება ცოდნათა დაკავშირებით?

მათემატიკაში ცოდნათა დაკავშირებით და გამარტივების ოპერაციების შესრულებით, შესაძლებელია გამოვიყვანოთ ახალი ფორმულა, განვიხილოთ პარალელოგრამის და სამკუთხედის მაგალითზე.

მოცემულია *ABCD* პარალელოგრამი, *BE* სიმაღლეა

$BE \perp AD$, ვიცით, რომ

$S = AD \cdot BE$ (1)

განვიხილოთ ΔABE

$\sin\angle A = \dfrac{BE}{AB}$

$BE = AB \cdot \sin A$ (2)

შევიტანოთ (2) ტოლობა (1) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ

$$S = AD \cdot AB \cdot \sin\angle A$$

მოცემულია ΔABC ,

CD სიმაღლეა

$CD \perp AB$, ვიცით, რომ

$S = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD$ (1)

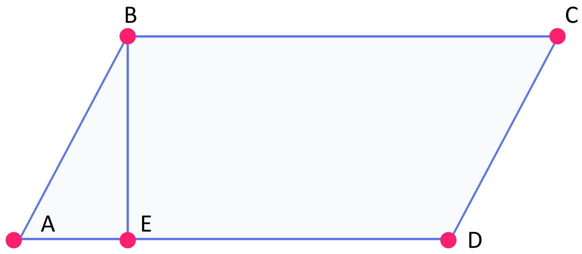
განვიხილოთ ΔACD

$\sin\angle A = \dfrac{CD}{AC}$

$CD = AC \cdot \sin\angle A$ (2)

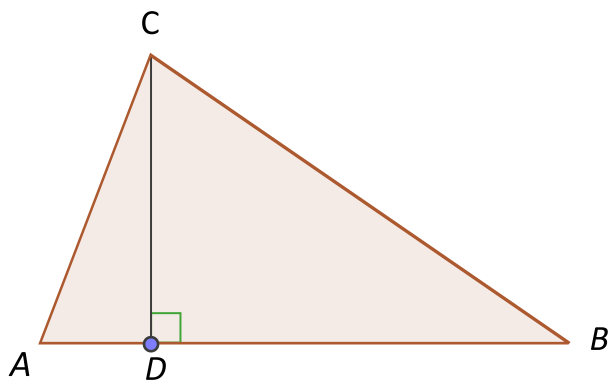
შევიტანოთ (2) ტოლობა (1) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$$



პარალელოგრამის ფართობი, მისი ორი გვერდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია

$$S = AD \cdot AB \cdot \sin\angle A$$



სამკუთხედის ფართობი ორი გვერდის სიგრძისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევარია

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$$

სავარჯიშოები

1. პარალელოგრამის გვერდებია 4 სმ და 8 სმ, ხოლო ბლაგვი კუთხის სიდიდეა 150°. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

2. პარალელოგრამის პერიმეტრი 48 სმ-ია, სიგრძე სიგანეზე 4-სმ-ით მეტია, იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ პარალელოგრამის ერთ-ერთი კუთხის სიდიდე 120°-ია.

3. ტოლფერდა სამკუთხედის გვერებია 6 სმ, 7 სმ, 7 სმ. ერთ-ერთი კუთხე 120°-ია, იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

4. კვადრატის გვერდის სიგრძეა 12 სმ, ხოლო მისი ტოლდიდი პარალელოგრამის ერთი გერდის სიგრძეა 20 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ მახვილი კუთხის სიდიდეა 30°.

5. პარალელოგრამის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 6:9, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60°. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობია 108 სმ^2.

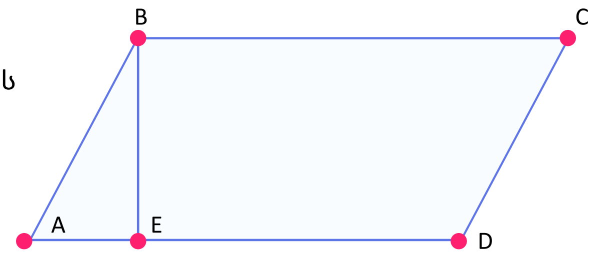
6. იპოვეთ შეცდომა:

სტუდენტმა დაწერა, რომ ABCD პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულაა

$S = AD \cdot AB \cdot \sin\angle AEB$

რა შეცდომა დაუშვა სტუდენტმა?

როგორ არის სწორი და რატომ?



7. **გამოწვევა:** გაკვეთილის დასაწყისში მოყვანილი ნიმუშების მსგავსად გამოიყვანეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ახალი ფორმულა.

იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი თუ ვიცით, რომ მისი გვერდის სიგრძეა

ა) 8 სმ; ბ) 10 სმ; გ) $\sqrt{12}$ სმ.

8. სამკუთხედის ერთი გვერდია 8 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძეა 6 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის მეორე გვერდი, თუ ვიცით, რომ მასზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე 4 სმ-ია.

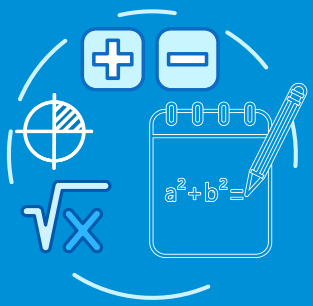
9. მახვილკუთხა სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეა 6 სმ და 10 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 30°. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10. მახვილკუთხა სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეა 5 სმ და 3 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 45°. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

11. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:5. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი, თუ პერიმეტრი 120 სმ-ია, ხოლო მცირე გვერდის წინ მდებარე კუთხე 30°.

12. თავის დასაწყისში მოცემული **კომპლექსური დავალება**: შეძლებისდაგვარად ააგეთ დავალების ნაწილი პროგრამა **Geogebra**-ს მეშვეობით.

V. დავალების წარდგენა



ᲘᲪᲘᲗ ᲗᲣ ᲐᲠᲐ,

როგორც ვიცით, დედამიწა ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო.

NASA-ს მონაცემებით, დედამიწის ეკვატორის გარშემოწერილობა 40 070 კილო მეტრია. თუკი გაითვალისწინებთ, რომ დღე-ღამის ხანგრძლივობა 24 საათია და ეკვატორის სიგრძეს ამ რიცხვზე გაყოფთ, მაშინ მიიღებთ, რომ ეკვატორთან მოძრაობის სიჩქარე 1670 კმ/სთ-ია.

თუმცა, სხვა განედებზე ასე სწრაფად ვერ იმოძრავებთ. მაგალითად, 45 გრადუსიან განედზე მოძრაობის სიჩქარე 1180 კმ/სთ-ია.

ჩვენ ირგვლივ ყოველდღიურ ცხოვრებაში უამრავ ობიექტს ვხედავთ, რომელსაც გეომეტრიული ფიგურის ფორმა აქვს, ხშირად გვიწევს ამ ობიექტების მოცულობის ან ზედაპირის ფართობის გამოთვლა.

www.1tv.ge.ge

ᲙᲝᲛᲞᲚᲔᲥᲡᲣᲠᲘ ᲓᲐᲕᲐᲚᲔᲑᲐ

თქვენი დავალება

1. დაადგინეთ, რა არის დედამიწის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.
2. ინტერნეტის მეშვეობით მოიძიეთ ინფორმაცია თქვენთვის საინტერესო პლანეტაზე და დაადგინეთ მისი ზომები, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა, შეადარეთ დედამიწის ზომებს.
3. ასევე, მოიძიეთ ინფორმაცია პირამიდების შესახებ და დაადგინეთ პირამიდების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.
4. გამოიკვლიეთ, როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან სხვადასხვა სივრცული სხეულის მოცულობები და რატომ არის მნიშვნელოვანი აღნიშნული კავშირების კვლევა.

ნაშრომი წარმოადგინეთ პრეზენტაციის მეშვეობით

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ გვეხმარება გეომეტრიული მოდელები რეალური მოვლენების კვლევაში? როგორ ფიქრობთ, რას აღწერს გეომეტრიული მოდელი?
- რა კანონზომიერება დაინახეთ გეომეტრიული ფიგურების ზომების (მაგალითად, მოცულობების) დაკავშირებისას და რამდენად მნიშვნელოვანია აღნიშნული კავშირების კვლევა?
- რატომ არის მნიშვნელოვანი ფიგურის ზომების დადგენა და როგორ ხდება ფორმულის გამოყვანა? მოიყვანეთ მინიმუმ ერთი მაგალითი.

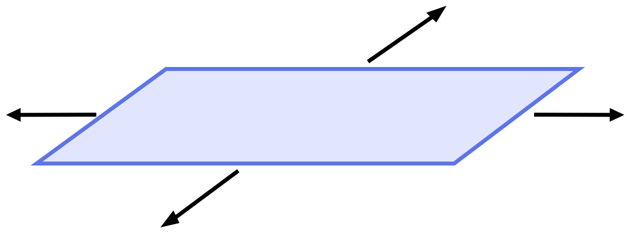
თავი 5. სტერეომეტრიის საწყისები; სივრცული ფიგურები და ზომები

5.1. მიმართებები სივრცეში

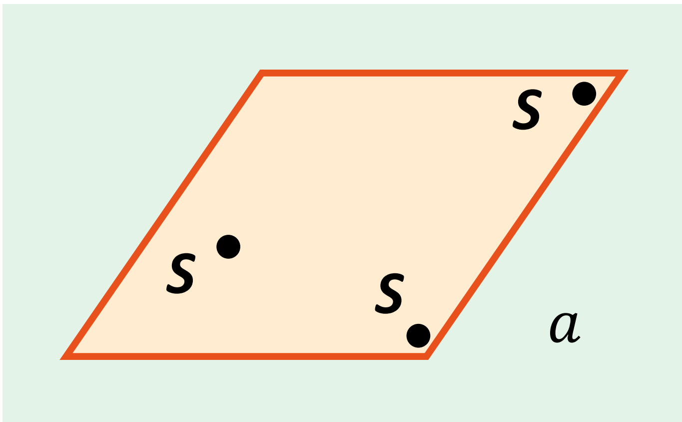
გეომეტრიის ნაწილს, რომელიც სივრცულ ფიგურებს შეისწავლის **სტერეომეტრია** ეწოდება. „სტერეო“ – ბერძნულად სივრცულს ნიშნავს. თავად გეომეტრია ნიშნავს მიწის გაზომვას, Geo – ნიშნავდა Earth-ს დედამიწა, Metron – Measurement-ს გაზომვას.

მოცემული პარაგრაფის მიზანია ძირითადი ცნებების დაუფლება.

სიბრტყის ზუსტი განმარტება არ არსებობს, იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ბრტყელი ზედაპირი, რომელსაც არ აქვს სისქე, აქვს ორი განზომილება და გრძელდება უსასრულოდ.

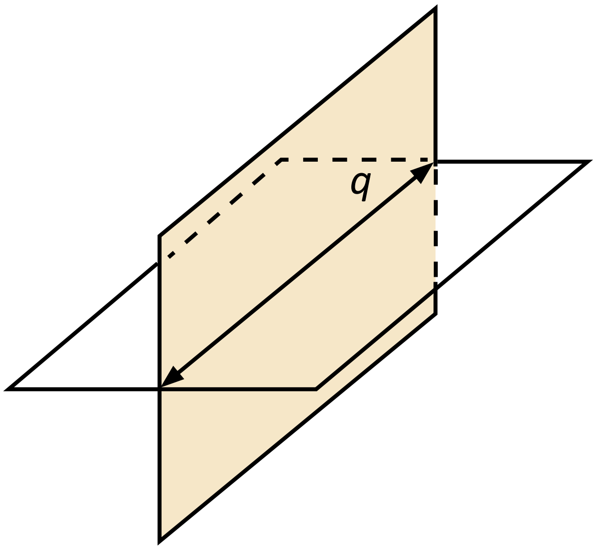


სიბრტყე აღინიშნება მასზე მონიშნული ნებისმიერი 3 წერტილით, რომლებიც არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, ან აღინიშნება ერთი პატარა ბერძნული ასო-ბგერით. ნახაზზე მოცემულია SQR სიბრტყე, ან α სიბრტყე.



ჩვენ ვიცით, ორი წრფე ერთმანეთს წერტილში კვეთს, რომელიც ორივეს ეკუთვნის.

ორი სიბრტყე ერთმანეთს კვეთს წრფეზე, რომელიც ორივე სიბრტყეს ეკუთვნის.

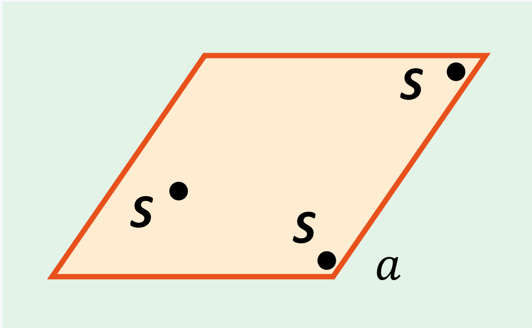


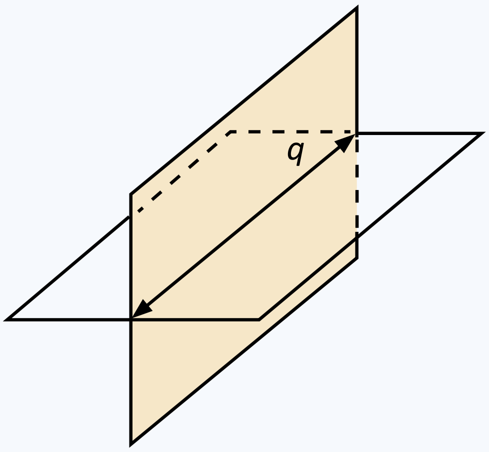
ᲐᲥᲡᲘᲝᲛᲐ 1: ნებისმიერი სიბრტყისთვის არსებობს წერტილები, რომლებიც მდებარეობს მასზე და წერტილები რომელიც არ მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.

ᲐᲥᲡᲘᲝᲛᲐ 2: ნებისმიერ სამ, ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.

ᲐᲥᲡᲘᲝᲛᲐ 3: თუ წრფის ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე ეკუთვნის ამ სიბრტყეს.

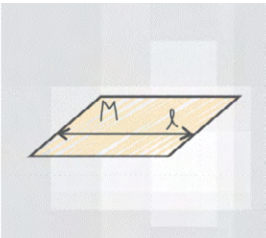
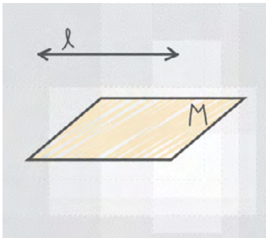
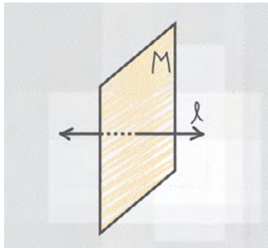
ᲐᲥᲡᲘᲝᲛᲐ 4: თუ ორ სიბრტყეს გააჩნია საერთო წერტილი, ე.ი. მაშინ მათ გააჩნიათ საერთო წრფე, რომელზეც მდებარეობს ამ სიბრტყეთა ყველა საერთო წერტილი.





წრფე და სიბრტყე

წრფე შეიძლება მდებარეობდეს სიბრტყეზე, ეკუთვნოდეს სიბრტყეს, იყოს სიბრტყის პარალელური, ან კვეთდეს ერთ წერტილში.

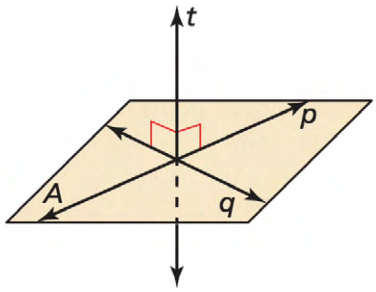
წრფე ეკუთვნის სიბრტყეს	წრფე სიბრტყის პარალელურია	წრფე კვეთს სიბრტყეს
		

წრფეს ეწოდება სიბრტყის პარალელური, თუ მას ამ სიბრტყესთან საერთო წერტილი არ გააჩნია.

- როდის შეგვიძლია ვთქვათ, რომ წრფე არის რომელიმე სიბრტყის პარალელური?

წრფე სიბრტყის მართობულია ნიშნავს, რომ იგი გადაკვეთის წერტილში გავლებული სიბრტყის ნებისმიერი წრფის მართობულია.

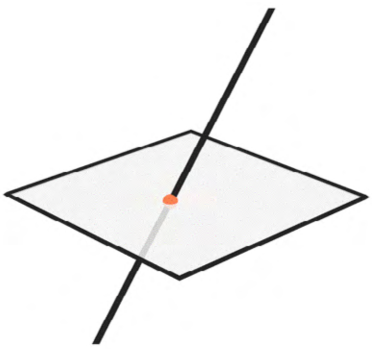
იმისათვის, რომ დავადგინოთ წრფე სიბრტყის მართობულია თუ არა, საკმარისია ვიცოდეთ, რომ წრფე მართობულია გადაკვეთის წერტილზე გავლებული ნებისმიერი ორი წრფის, რომელიც სიბტყეს ეკუთვნის.



მითითება: მოცემულ ნაწილში არ განვიხილავთ დამტკიცებებს.

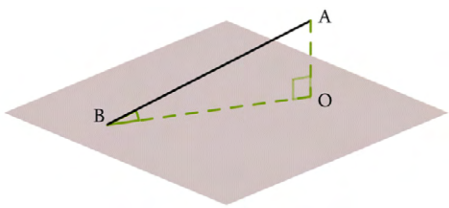
წრფე შეიძლება კვეთდეს სიბრტყეს, არ კვეთდეს სიბრტყეს, კვეთდეს და იყოს მართობული.

თუ წრფე კვეთს სიბრტყეს, თუმცა არ არის სიბრტყის მართობული, ასეთ მკვეთ წრფეს ეწოდება სიბრტყისადმი დახრილი წრფე.



განვსაზღვროთ კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის. ამისათვის ჯერ განვსაზღვროთ წრფის გეგმილი სიბრტყეზე.

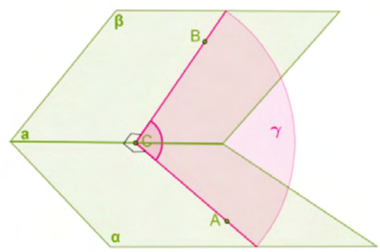
A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავავლოთ წრფე, რომლიც სიბრტყეს კვეთს B წერტილში; A წერტილიდან α სიბრტისადმი გავავლოთ მართობი, რომელიც სიბრტყეს კვეთს O



წერტილში; შევაერთოთ O და B წერტილები ერთმანეთთან, მივიღებთ OB მონაკვეთს, რომელსაც ეწოდება A წერტილზე გავლებული **დახრილი წრფის გეგმილი ამ სიბრტყეზე.**

კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის ეწოდება კუთხეს დახრილსა და ამ სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის (ნახაზზე ∠ABO).

კუთხე ორ სიბრტყეს შორის:



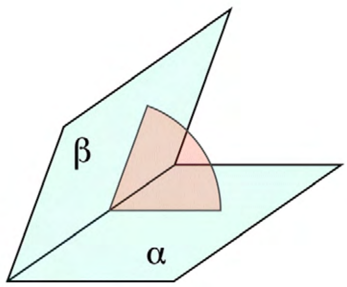
∠ACB არის ორ სიბრტყეს შორის აგებული ხაზოვანი კუთხე.

ორი სიბრტყე არის პარალელური, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს.

თუ ორი სიბრტყე არ არის პარალელური, მაშინ ისინი იკვეთებიან საერთო წრფეზე.

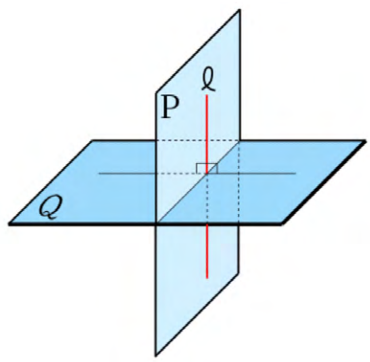
განვსაზღვროთ კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. განვიხილოთ საერთო წრფის რაიმე წერტილი (ვთქვათ C წერტილი) და გავავლოთ ამ საერთო წრფის მართობული წრფეები (AC და BC) თითოეულ მოცემულ სიბრტყეში, მივიღებთ ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეს.

ამ წრფეებს შორის კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. ∠**ACB-ს უწოდებენ ორ სიბრტყეს შორის აგებულ კუთხეს (ხაზოვან კუთხეს).** ცხადია ასეთი ხაზოვანი კუთხეები შეიძლება ავაგოთ საერთო წრფის ნებისმიერ წერტილზე.



თუ ორ სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხე უდრის 90°-ს, მაშინ ეს ორი სიბრტყე არის ერთმანეთის მართობული სიბრტყეები.

ნახაზზე P და Q სიბრტყეები მართობული სიბრტყეებია. P სიბრტყეში გავლებული საერთო წრფის მართობული l წრფე არის Q სიბრტყის მართობული წრფე.



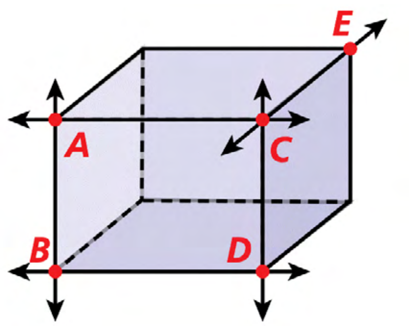
სივრცეში პარალელური, მართობული და აცდენილი წრფეები

თუ ორი წრფე ერთ რომელიმე სიბრტყეში ძევს და ერთმანეთს არ კვეთს, მაშინ მათ პარალელური წრფეები ეწოდებათ.

ორ წრფეზე, რომელზეც სიბრტყე არ გაივლება, აცდენილი წრფეები ეწოდება.

ნახაზზე EC და BD წრფეები აცდენილი წრფეებია, ხოლო AC და BD წრფეები პარალელური წრფეებია.

AB მართობულია BD წრფის.

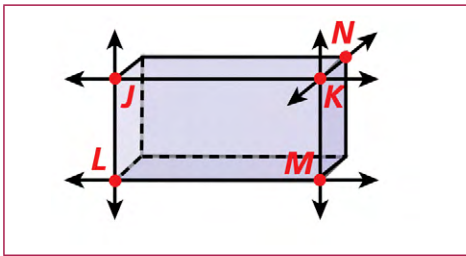


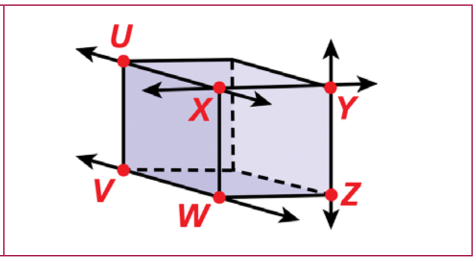
სავარჯიშოები

1. ქვემოთ დიაგრამაზე დაასახელეთ პარალელური წრფეები, მართობული წრფეები და აცდენილი წრფეები (მინიმუმ 2-2 წყვილი);

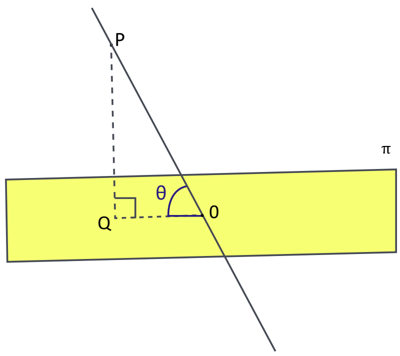
ასევე, დაასახელეთ ორი სიბრტყე, რომლებიც კვეთს და რომელიც არ კვეთს.

ა) ბ)

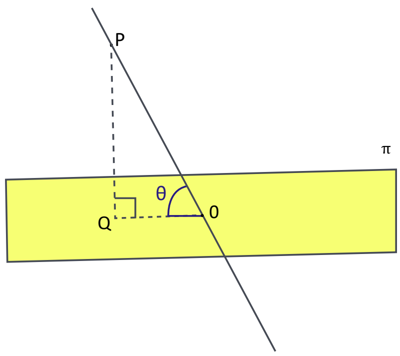




2. სიბრტყის გარეთ აღებული P წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი არის 12 სმ. ამ წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული PO დახრილის სიგრძეა 13 სმ. იპოვეთ PO მონაკვეთის გეგმილი სიბრტყეზე.



3. PO დახრილი სიბრტყესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. მანძილი P წერტილიდან სიბრტყემდე არის 15 სმ. იპოვეთ PO დახრილის სიგრძე.



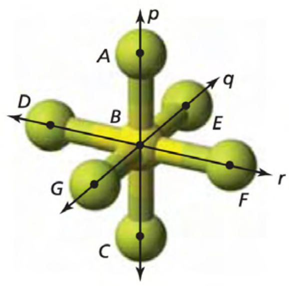
4. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 15 სმ და 20 სმ. მეორე დახრილის გეგმილის სიგრძე სიბრტყეზე არის 16 სმ. იპოვეთ პირველი დახრილის გეგმილის სიგრძე ამ სიბრტყეზე.

5. **გამოწვევა:** ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არის 30^0. ერთ სიბრტყეში აღებული A წერტილიდან მანძილი სიბრტყეების საერთო წრფემდე არის 24 სმ. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე.

სავარჯიშოები

6. **გამოწვევა:** ორი სიბრტყე ჰკვეთს ერთმანეთს. ერთ სიბრტყეში აღებული ორი წერტილიდან მანძილები საერთო გადაკვეთის წრფემდე არის 18 სმ და 14 სმ. მანძილი პირველი წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე არის 9 სმ. იპოვეთ მანძილი მეორე წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე.

7. მარჯვნივ დიაგრამაზე მოცემულია მოლეკულის მოდელი; დააკვირდით მოდელს და იმსჯელეთ.



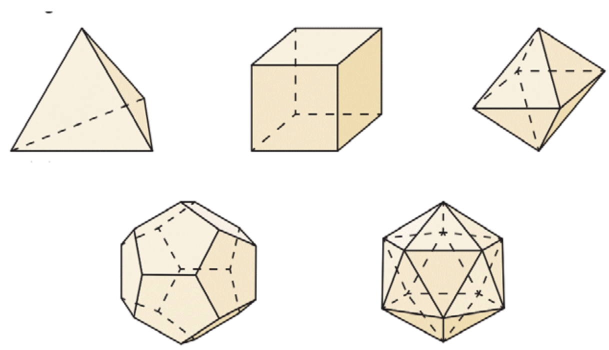
საკვანძო კითხვა:

- *რატომ არის მნიშვნელოვანი სივრცის შესწავლა? სივრცეში გადამკვეთი და პარალელური წრფეების, ან სიბრტყეების შესწავლა?*

5.2. სივრცული ფიგურები. პრიზმა, პირამიდა, ბრუნვითი ფიგურები

თავდაპირველად განვსაზღვროთ რას ეწოდება **მრავალწახნაგა;**

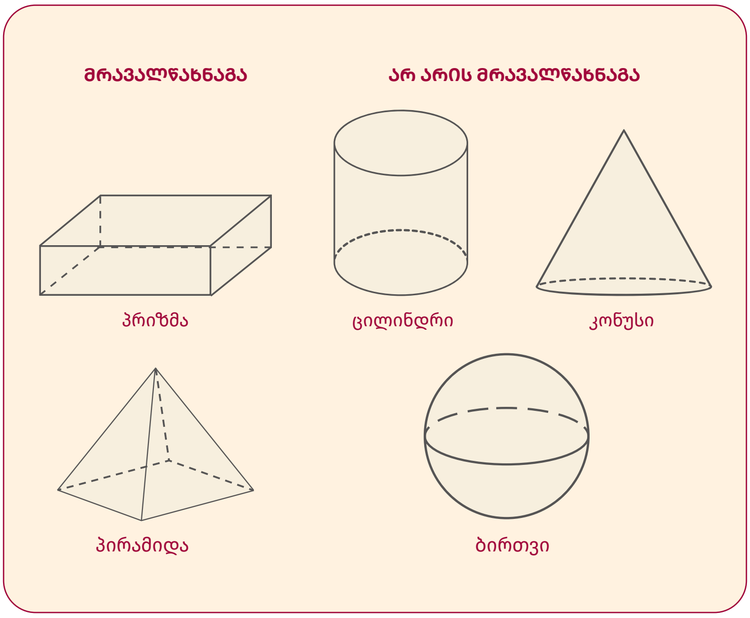
მრავალწახნაგა ეწოდება ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვარულია სასრული რაოდენობის სიბრტყეებით; არის სივრცული ფიგურა, რომლის ყველა წახნაგი (ზედაპირი) წარმოადგენს მრავალკუთხედს. მრავალწახნაგებისთვის ითვლიან ზედაპირის ფართობს, ანუ მისი ყველა წახნაგის ფართობთა ჯამს და მოცულობას, ე.წ. ფიგურის ტევადობას. სივრცული ფიგურებიდან ჩვენ განვიხილავთ ყველასათვის ცნობილ ფიგურებს და შევისწავლით მათ „ელემენტარულ“ თვისებებს.



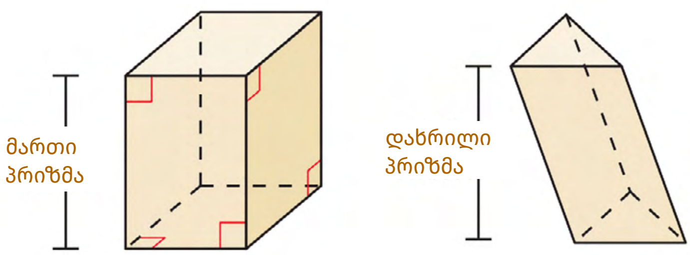
გავიხსენოთ ჩვენთვის ნაცნობი სივრცული ფიგურების დასახელებები:

პრიზმა, მართკუთხა პარალელეპიპედი, კუბი, პირამიდა – მრავალწახნაგებია;

ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი – ბრუნვითი სხეულებია; არ არიან მრავალწახნაგები



პრიზმა ეწოდება მრავალწახნაგას, რომელიც შექმნილია ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული ყველა იმ ურთიერთპარალელური წრფეების მონაკვეთებისაგან, რომლებიც ერთ-ერთ სიბრტყეში მყოფ მრავალკუთხედს კვეთს.



განმარტებიდან გამომდინარე, პრიზმა არის მრავალწახნაგა, რომლის ორი წახნაგი წარმოადგენს ტოლ მრავალკუთხედებს, მოთავსებულებს პარალელურ სიბრტყეებში,

ხოლო დანარჩენი წახნაგები (ე.წ. გვერდითი წახნაგები), წარმოად-გენენ ამ მრავალკუთხედების გვერ-დებზე აგებულ პარალელოგრამებს.

როდესაც წრფეები ორი პარალე-ლური სიბრტყის მიმართ მართო-ბულია მივიღებთ მართ პრიზმას, რომლის გვერდითი წახნაგებიც მართკუთხედებია.

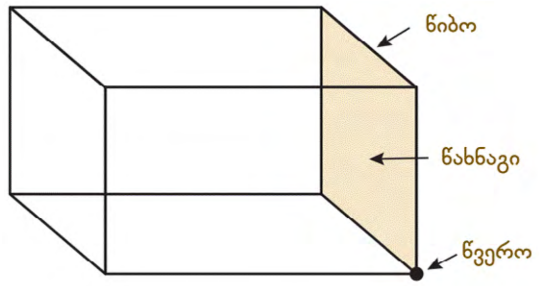
ცხადია, რომ ასეთი პრიზმებიც შეიძ-ლება იყოს მრავალნაირი, ჩვენ პროგრამაში განვიხილავთ მართ პრიზმებს.

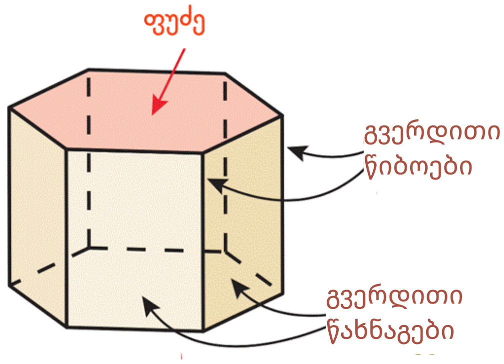
მინიშნება: ორ პარალელურ სიბრტყეში მყოფ მრავალკუთხე-დებს ეწოდება ფუძე;

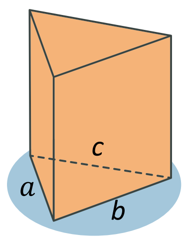
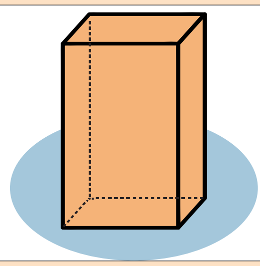
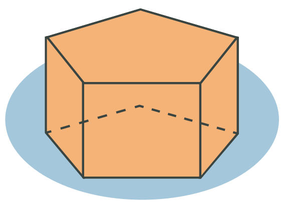
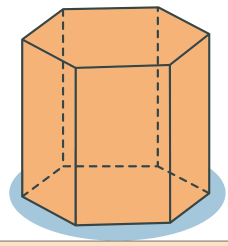
მართი პრიზმის შემთხვევაში, გვერ-დითი წახნაგები მართკუთხედებია.

მართი პრიზმა ეწოდება ისეთ პრიზ-მას, რომლის გვერდითი წახნა-გები არის მართკუთხედები. იმის მიხედვით, თუ როგორი მრავალ-კუთხედია მოთავსებული პრიზმის ფუძეში, პრიზმას ეწოდება შესაბა-მისი სახელი. თუ მართი პრიზმის ფუძეში არის სამკუთხედი, მაშინ მას ეწოდება მართი სამკუთხა პრიზმა. თუ ფუძეშია ოთხკუთხედი, მაშინ მართი ოთხკუთხა პრიზმა და ა.შ.

პრიზმას, რომლის ფუძე პარალე-ლოგრამია **პარალელეპიპედი** ეწო-დება. პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია.

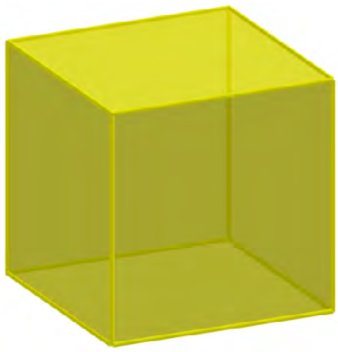




სამკუთხა პრიზმა	ოთხკუთხა პრიზმა
	
ხუთკუთხა პრიზმა	**ექვსკუთხა პრიზმა**
	

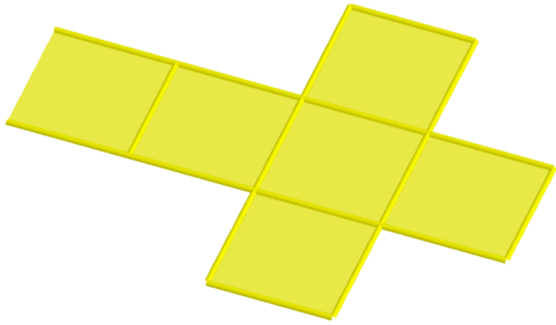
ფიგურა

კუბი ეწოდება ისეთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის სამივე განზომილება ერთმანეთის ტოლია, ანუ კუბის ყველა წახნაგში არის ერთმანეთის ტოლი კვადრატები.



შლილი

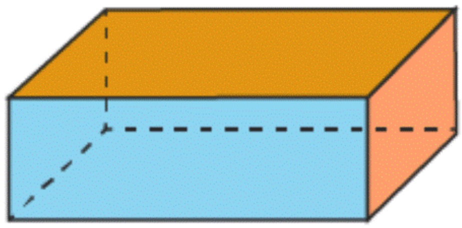
კუბის შლილი



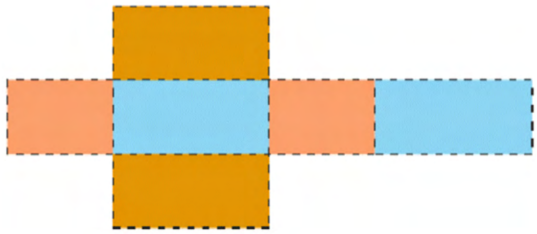
Geogebra -კუბი იხილეთ კუბის 11 სხვადასხვა შლილი

მართკუთხა პარალელეპიპედი

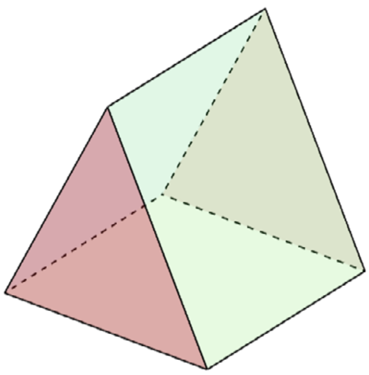
მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის მართკუთხედი, ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები.

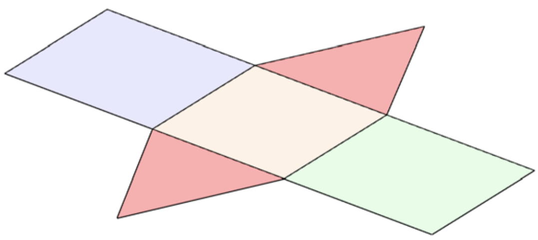


მართი პარალელეპიპედი ეწოდება ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის პარალელოგრამი, ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები.



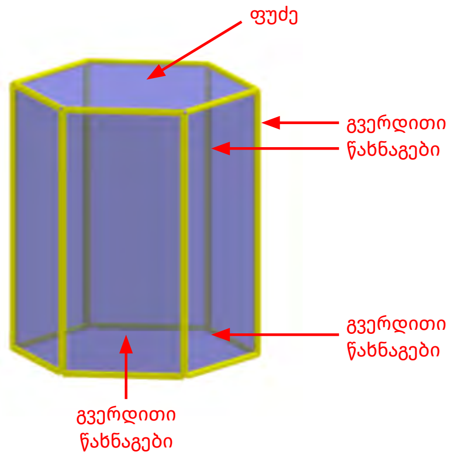
სამკუთხა პრიზმა



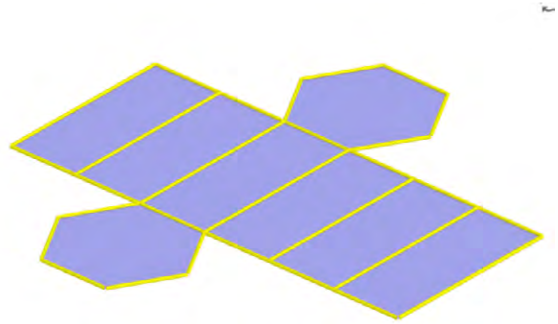


Geogebra სამკუთხა პრიზმა შლილი

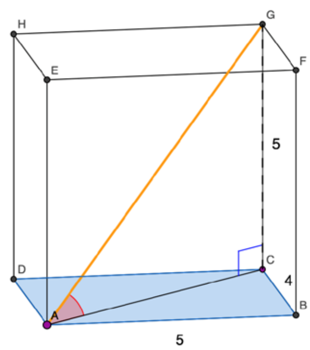
ექვსკუთხა პრიზმა



წესიერი პრიზმა ეწოდება ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის წესიერი მრავალკუთხედი (ან ტოლგვერდა სამკუთხედი, ან კვადრატი, ან წესიერი ხუთკუთხედი, ექვსკუთხედი და სხვა), ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები.



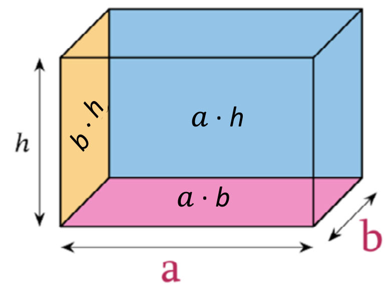
[Geogebra — ექვსკუთხა პრიზმა]

პარალელეპიპედის დიაგონალი	
AG პარალელეპილედის დიაგონალია, ის ერთ სიბრტყეში არამდებარე ორ წვეროს აერთებს. თუ შევაერთებთ, მაგალითად, A და F წერტილებს, მივიღებთ, რომ AF არის გვერდითი წახნაგის AEFB მართკუთხედის დიაგონალი. AG მონაკვეთი ფუძის მიმართ დახრილია. კუთხე AG მონაკვეთსა და ფუძის მიმართ არის ∠GAC	

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

გავარკვიოთ, რას ითვლის პრიზმის ზედაპირის ფართობი. ცხადია, ეს არის პრიზმის ყველა წახნაგზე არსებული ფიგურების ფართობთა ჯამი. თუ განვიხილავთ წახნაგებში არსებულ ფიგურებს ერთად, მაშინ მივიღებთ ე. წ. პრიზმის შლილს.

პრიზმის ზედაპირის ფართობი ეწოდება ფუძის ფართობის და გვერდითი ზედაპირის ფართობთა ჯამს.



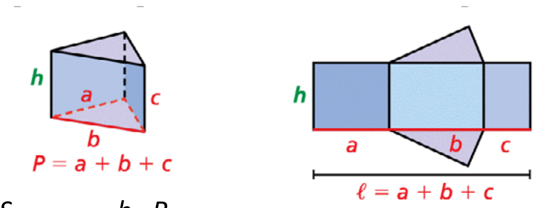
$S_{\text{გვერდითი}} = h \cdot P_{\text{ფუძე}} = 2h(a + b)$

$S_{\text{სრული}} = h \cdot P_{\text{ფუძე}} + 2S_{\text{ფუძის ფართობი}}$

$S_{\text{სრული}} = 2h(a + b) + 2ab$

$S_{\text{სრული}} = 2ah + 2hb + 2ab$

მართი პრიზმის გვერდითა წიბოს **ეწოდება პრიზმის სიმაღლე**. რადგან მართი პრიზმის ერთი გვერდითი წახნაგი არის მართკუთხედი, ამიტომ მისი ფართობი იქნება პრიზმის სიმაღლისა და ფუძის შესაბამისი გვერდის ნამრავლი. თუ ყველა გვერდითი წახნაგის ფართობს შევკრებთ, მაშინ **მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობ**ი იქნება:



$S_{\text{გვერდითი}} = h \cdot P_{\text{ფუძე}}$

$S_{\text{სრული}} = h \cdot P_{\text{ფუძე}} + 2S_{\text{ფუძის ფართობი}}$

გამომდინარე იქიდან, რომ ფუძეებში არის სამკუთხედი, $S_{\text{ფუძის ფართობი}}$ = ფუძეში მყოფი სამკუთხედის ფართობს.

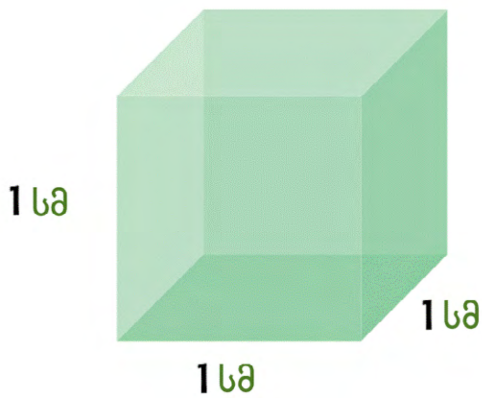
პრიზმის მოცულობა

მოცულობის ერთეული

კუბი ეწოდება ისეთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის სამივე განზომილება ერთმანეთის ტოლია, ანუ კუბის ყველა წახნაგში არის ერთმანეთის ტოლი კვადრატები.

მოცულობის ერთეულია კუბი, რომლის წიბო ერთი ერთეულის ტოლია.

დავუშვათ კუბის წიბოს სიგრძეა 1 სმ, მაშინ მისი მოცულობა იქნება **V = 1 სმ · 1 სმ · 1 სმ = 1 სმ³**



ვთქვათ, კუბის წიბოს სიგრძეა a, მაშინ კუბის ზედაპირის ფართობისა და მოცულობის ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$S_{\text{კუბის ზედაპ.}} = 6 \cdot a^2$

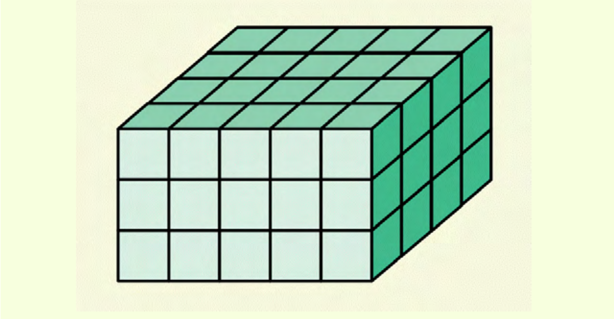
$V_{\text{კუბი}} = a \cdot a \cdot a = a^3$

განვიხილოთ ნახაზზე მოცემული მართკუთხა პრიზმა, რომელიც შედგება კუბებისგან. დავუშვათ კუბის წიბოს სიგრძე 1 სმ-ია;

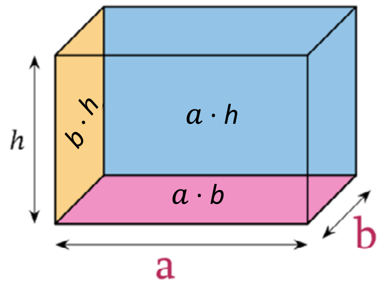
თუ დავითვლით კუბების რაოდენობას მივიღებთ, რომ სულ არის

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ კუბი

მოცემული პრიზმის მოცულობაა 120 სმ^3



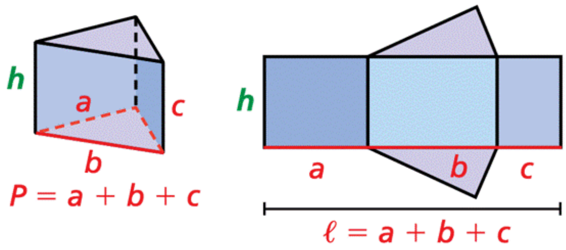
მართი პრიზმის მოცულობა ტოლია ფუძის ფართობისა და პრიზმის სიმაღლის ნამრავლის



$V = S_{ფუძე} \cdot h$

როდესაც ფუძეში არის მართკუთხედი, მივიღებთ ფორმულას

$V = S_{ფუძე} \cdot h = a \cdot b \cdot h$

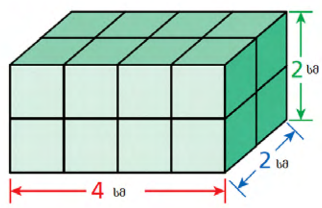


$V = S_{ფუძე} \cdot h$

მინიშნება: როდესაც ითვლით სამკუთხედის ფართობს, სამკუთხედის სიმაღლე და პრიზმის სიმაღლე არ გააიგივოთ.

ნიმუში 1

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის მიხედვით, იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.



4 სმ · 2 სმ · 2 სმ = 16 სმ^3

სიგრძე · სიგანე · სიმაღლე = მოცულობა

ფუძის ფართობი · სიმაღლე = მოცულობა

ე.ი. $V_{პარალელ.} = 16$ სმ^3

ნიმუში 2

მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 7 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობია 382 სმ^2.

დავუშვათ მართკუთხა პარალელეპიპედის სიმაღლის სიგრძეა c სმ, მაშინ ზედაპირის ფართობის ფორმულიდან მივიღებთ:

$$382 = 2 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \cdot c + 2 \cdot 8 \cdot c$$

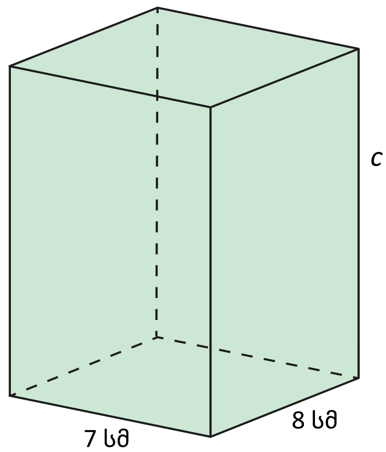
$$382 = 112 + 30 \cdot c$$

$$30 \cdot c = 270; \quad c = 9$$

მაშასადამე, ვიცით პარალელეპიპედის სამივე განზომილება, მაშინ მოცულობა იქნება:

$$V_{\text{პარალელ.}} = a \cdot b \cdot c = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

პასუხი: მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 504 სმ^3.



ნიმუში 3

გადამზიდ კონტეინერს აქვს მართი სამკუთხა პრიზმის ფორმა, რომლის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი. ნახატზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ ამ დახურული კონტეინერის სრული ზედაპირის ფართობი და მისი მოცულობა.

ჯერ ვიპოვოთ პრიზმის ფუძის ფართობი. რადგან სამკუთხედის გვერდია 4 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლეა 3 სმ, ამიტომ:

$$S_{\text{ფუძე}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$$

ხოლო მოცულობა იქნება:

$$V_{\text{პარალელ.}} = 6 \cdot 15 = 90 \text{ სმ}^3.$$

გვერდითი ზედაპირის ფართობის მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ ფუძის პერიმეტრი. რადგან ფუძეში არის ტოლფერდა სამკუთხედი, ამიტომ სამკუთხედის ფერდი იქნება:

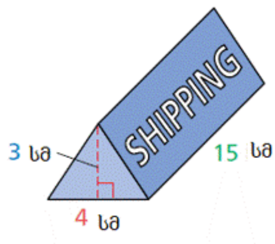
$$\text{ფერდი} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

ფუძის პერიმეტრია: $P_{\text{ფუძე}} = 4 + 2\sqrt{13}$

$$S_{\text{სრული}} = H \cdot P + 2 \cdot S_{\text{ფუძე}} = 15 \cdot (4 + 2\sqrt{13}) + 2 \cdot 6 = 72 + 30\sqrt{13}$$

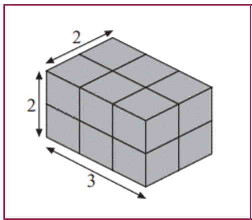
პასუხი: $V_{\text{პარალელ.}} = 90$ სმ^3 და

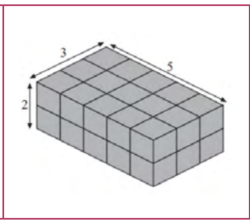
$S_{\text{—(სრული)}} = 72 + 30\sqrt{13}$სმ^2.

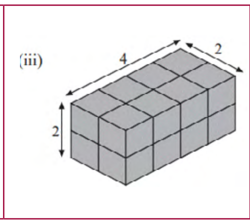


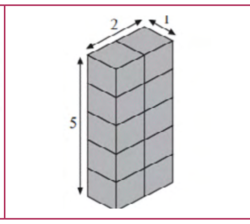
სავარჯიშოები

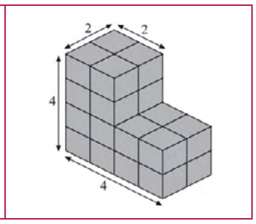
1. ბავშვებმა კუბებისგან ააწყვეს ახალი სხეული. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:

ა) 

ბ) 

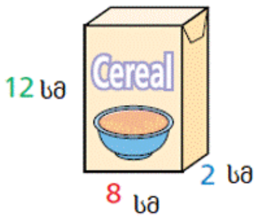
გ) 

დ) 

ე) 

2. ყველასთვის ცნობილია სათამაშო კუბიკი, ე.წ. რუბიკის კუბიკი. მას აქვს კუბის ფორმა. დავუშვათ, კუბის წიბოა 8 სმ. იპოვეთ კუბიკის თითოეული წახნაგის ფართობი, სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

3. ბურღულეულის ყუთს აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა, რომლის ზომებია 12 სმ, 8 სმ და 2 სმ. იპოვეთ რა მაქსიმალური მოცულობის ბურღულეული შეიძლება მოთავსდეს ამ ყუთში.

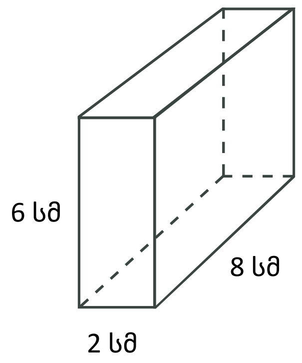


4. სასაჩუქრე ყუთს აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა. ნახატზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ ამ ყუთის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

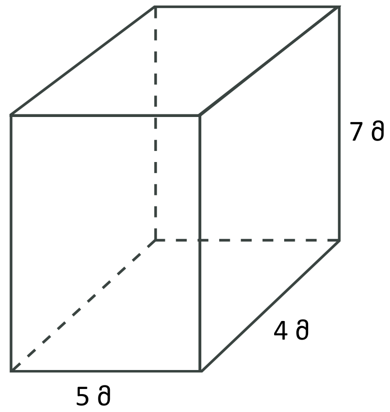
5. ნახაზებზე მოცემული მონაცემების მიხედვით, იპოვეთ მოცემული სხეულის მოცულობა და გვერდითი ზედაპირის ფართობი:

სავარჯიშოები

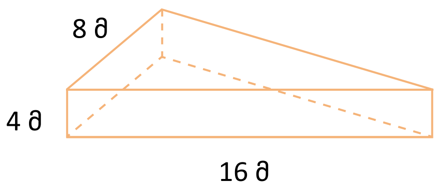
ა)



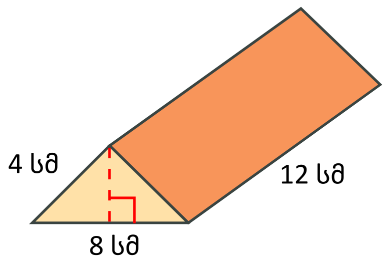
ბ)



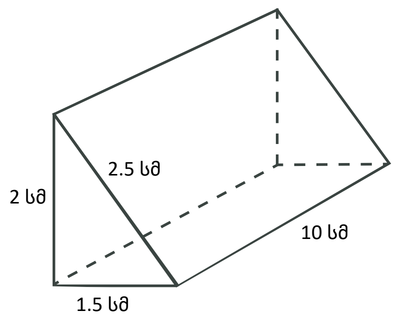
გ)



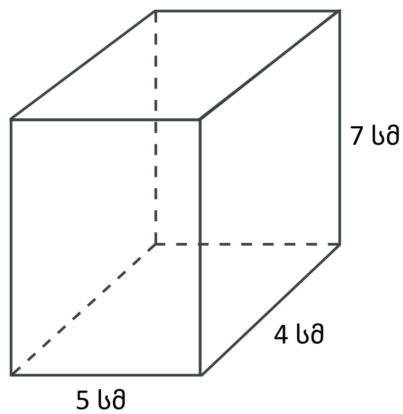
დ)



ე)



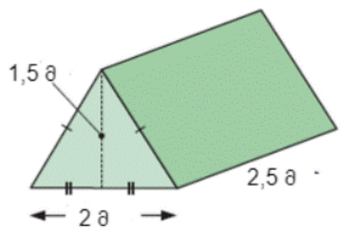
ვ)



6. ბავშვებს ლაშქრობაზე წასაღებად სჭირდებათ სამი კარავი (თითოეულის ზომა მითითებულია ნახაზზე).

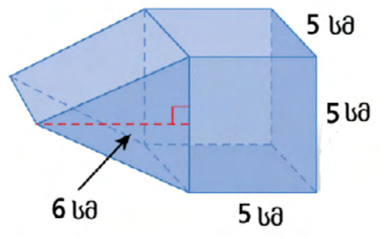
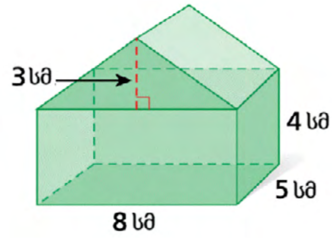
ა) იპოვეთ თითოეული კარვის მოცულობა:

ბ) რამდენი კვადრატული მეტრი ქსოვილი დასჭირდებათ ასეთი კარვების შესაკერად?

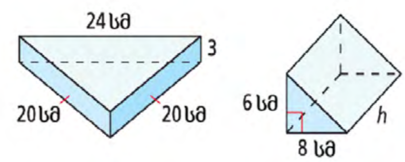


სავარჯიშოები

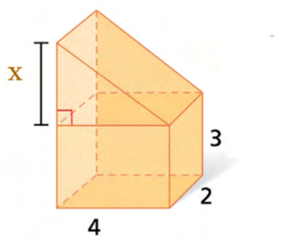
7. იპოვეთ მოცემული ფიგურების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა)	ბ)
	

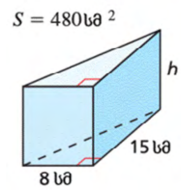
8. ნახაზზე მოცემულია ორი ტოლდიდი ($V_1 = V_2$) სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მეორე პრიზმის სიმაღლე.



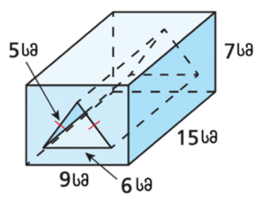
9. ნახაზზე მოცემული ფიგურის ზედაპირის ფართობი 36 სმ^2, იპოვეთ ნახაზზე აღნიშნული სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე და ფიგურის მოცულობა

იპოვეთ ნახაზზე აღნიშნული სამკუთხა პრიზმის უცნობის გვერდის (წიბოს) სიგრძე და ფიგურის მოცულობა	

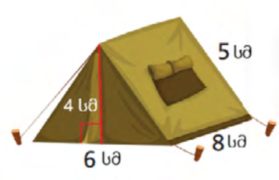
10. ნახაზზე მოცემულია სამკუთხა პრიზმა, რომლის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე, თუ ზედაპირის ფართობი ტოლი არის 480 სმ^2.



11. მართკუთხა პარალელეპიპედიდან ამოჭრეს სამკუთხა პრიზმა, რომლის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.



12. ლაშქრობაში წასულმა მეგობრებმა გაშალეს კარავი, რომლის ზომები მითითებულია ნახატზე. იპოვეთ კარვის მოცულობა და კარვის დამზადებისთვის საჭირო მასალის ფართობი.



სავარჯიშოები

13. ელენემ გადაწყვიტა საკუთარ ეზოში საცურაო აუზის აშენება, რომელსაც ნახატზე ნაჩვენები მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა აქვს. აუზის სიმაღლეა 2 მ, ხოლო ფსკერის ზომებია – 10 მ და 6 მ. მოსაპირკეთებლად ელენემ უნდა შეიძინოს სპეციალური ფილები. იპოვეთ, რა ფართობის ფილა უნდა შეიძინოს ელენემ და განსაზღვრეთ გაკეთებული აუზის ტევადობა.

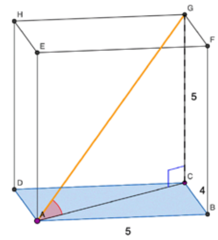
14. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი 240 სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი თუ სიმაღლე 10 სმ-ია; იპოვეთ მოცემული პრიზმის მოცულობა.

15. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი 2.4 სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე თუ ფუძის გვერდის სიგრძე 0.4 სმ-ია.

16. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი $360\sqrt{3}$ სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი თუ სიმაღლე 10 სმ-ია.

17. წესიერ სამკუთხა და ოთხკუთხა პრიზმებს ტოლი სიმაღლეები აქვთ, ფუძეში მყოფი ფიგურის გვერდის სიგრძეც ტოლია; რომლის ზედაპირის ფართობი იქნება მეტი და რამდენით? რომლის მოცულობა იქნება მეტი და რამდენით?

18. **გამოწვევა:** მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი AG პარალელეპილედის დიაგონალია, ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ AG-ს სიგრძე; იპოვეთ ΔACG-ს ფართობი.



19. **გამოწვევა:** მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ:

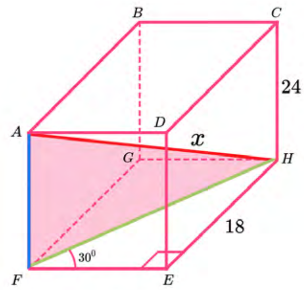
ა) x;

ბ) AH;

გ) ΔAFH-ის ფართობი;

დ) მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი;

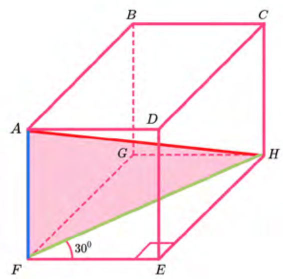
ე) მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.



25. **გამოწვევა: მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი** შეადგინეთ მე-20 ამოცანის მსგავსი ამოცანა, ამოხსენით მეგობრებთან ერთად.

განიხილეთ სხვადასხვა ვარიანტი.

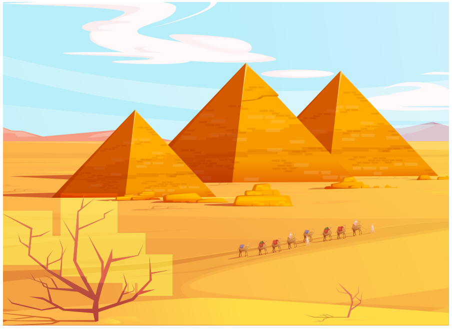
სასურველია ის ინფომაცია შეიტანოთ, რომელიც საკმარისი იქნება ამოცანის ამოხსნისათვის.



5.3. პირამიდა, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

ჩვენ ყველას გვახსოვს ეგვიპტის პირამიდები, რომელთაც გეომეტრიული ფიგურის ფორმა აქვს.

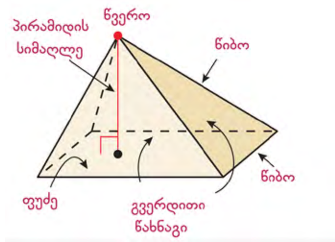
პირამიდა. პირამიდა ეწოდება ისეთ მრავალწახნაგას, რომელსაც ფუძეში აქვს რაღაც ბრტყელი მრავალკუთხედი (სამკუთხედი, ოთხკუთხედი და ა.შ.), ხოლო ყველა დანარჩენი წახნაგი წარმოადგენს ამ მრავალკუთხედის გვერდებზე აგებულ საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებს.

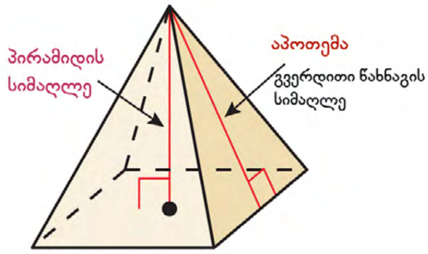


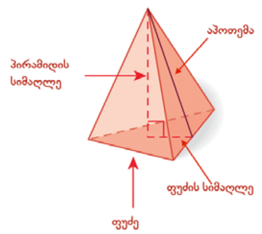
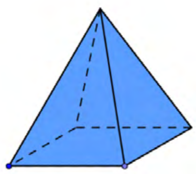
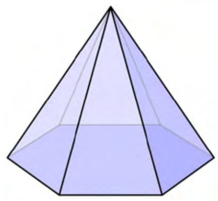
ამ სამკუთხედებს უწოდებენ პირამიდის გვერდითა წახნაგებს, ხოლო საერთო წვეროს ეწოდება **პირამიდის წვერო.** პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყისადმი დაშვებულ მართობს ეწოდება **პირამიდის სიმაღლე.** იმის მიხედვით, თუ როგორი მრავალკუთხედია მოთავსებული პირამიდის ფუძეში, პირამიდას ეწოდება შესაბამისი სახელი. თუ პირამიდის ფუძეში არის სამკუთხედი, მაშინ მას ეწოდება სამკუთხა პირამიდა. თუ ფუძეშია ოთხკუთხედი, მაშინ ოთხკუთხა პირამიდა და ა.შ.

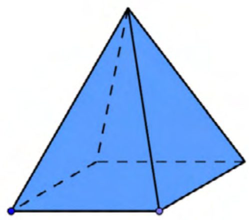
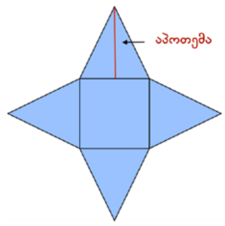
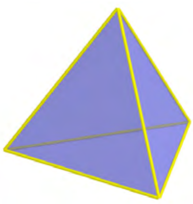
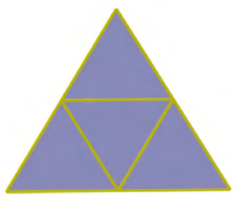
წესიერი პირამიდა, წესიერ პირამიდაში ფუძეში არის წესიერი მრავალკუთხედი, მოცემულ შემთხვევაში, კვადრატი.

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა





სამკუთხა პირამიდა	ოთხკუთხა პირამიდა	ექვსკუთხა პირამიდა
		

ფიგურა	შლილი
	 პირამიდის შლილი
სამკუთხა პირამიდა 	 სამკუთხა პირამიდის შლილი

პირამიდის ფართობი

პირამიდის **გვერდითი ზედაპირის ფართობის** მოსაძებნად საჭიროა ცალ-ცალკე გამოვთვალოთ ყველა გვერდითა წახნაგის ფართობები და შემდეგ ვიპოვოთ მათი ჯამი.

პირამიდის **სრული ზედაპირის ფართობი** ტოლია გვერდითი ზედაპირის ფართობს დამატებული ფუძეში მდებარე ფიგურის ფართობი.

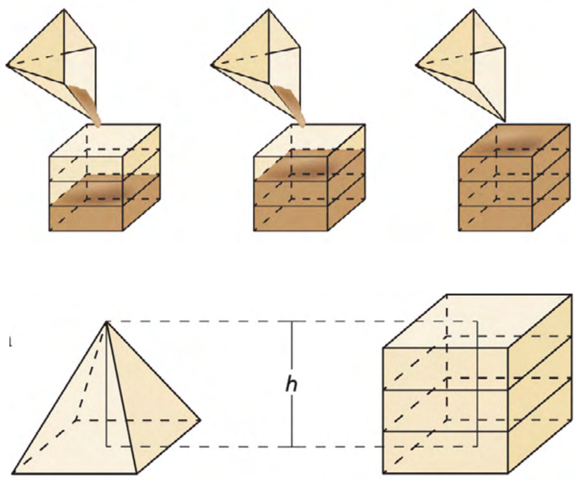
წესიერ სამკუთხა პირამიდაში სიმაღლე გადის ფუძის სიმაღლეების (მედიანების, ბისექტრისების) გადაკვეთის წერტილში. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში სიმაღლე გადის ფუძეში მდებარე კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში.

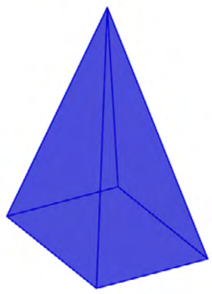
პირამიდის მოცულობა

თუ განვიხილავთ მართ პრიზმას და პირამიდას, რომელთაც ფუძეში ერთი და იმავე ფორმის და ზომის მრავალკუთხედი აქვთ, და მათი სიმაღლეები ტოლია, მაშინ პირამიდის მოცულობა, პრიზმის მოცულობის მესამედია.

$V_{\text{პირამიდა}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{ფუძე}} \cdot h$

ვიზუალიზაცია 1



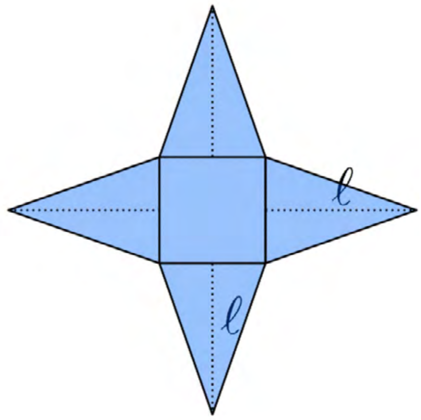


$S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდითი}} + S_{\text{ფუძე}}$

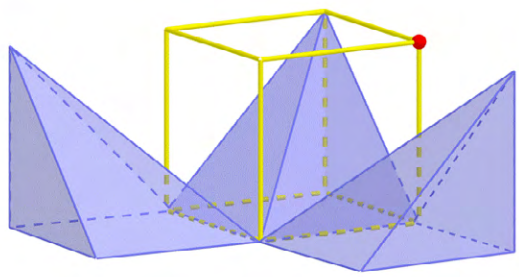
წესიერი პირამიდის ზედაპირის ფართობი

$S_{\text{გვერდითი}} = \frac{1}{2} l \cdot P_{\text{ფუძე}}$

$S_{\text{სრული}} = \frac{1}{2} l \cdot P_{\text{ფუძე}} + S_{\text{ფუძის ფართობი}}$



ვიზუალიზაცია 2



მოცულობა – სიმულაცია

ნიმუში 1

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა 12 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი იქნება:

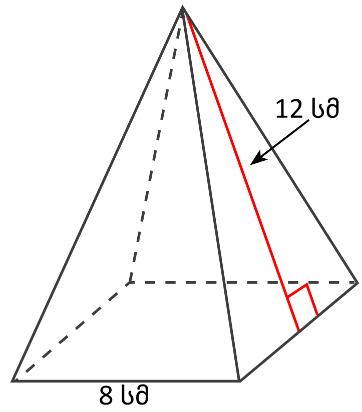
$S_{გვერდითი} = \frac{1}{2} \cdot აპოთემა \cdot P_{ფუძე} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 32 = 192$

ფუძის ფართობი იქნება: $S_{ფუძე} = 8 \cdot 8 = 64$

პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობია:

$S_{სრული} = S_{გვერდითი} + S_{ფუძე} = 192 + 64 = 256$

პასუხი: პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობია 256 სმ^2.



ნიმუში 2

ოთხკუთხა პირამიდის ფუძე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 12 სმ და 18 სმ, ხოლო პირამიდის სიმაღლეა 14 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

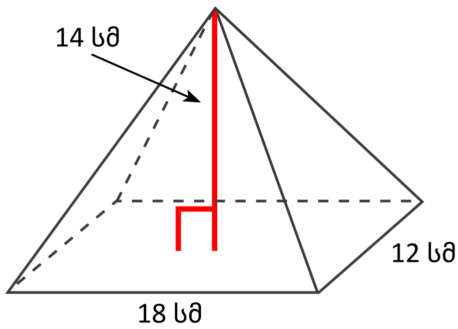
პირამიდის ფუძის ფართობი იქნება:

$$S_{ფუძე} = 12 \cdot 18 = 216$$

პირამიდის მოცულობაა:

$$V_{პირამიდა} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{ფუძე} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot 216 = 1008$$

პასუხი: პირამიდის მოცულობაა 1008 სმ^3.



ნიმუში 3 — მათემატიკის მოყვარულთათვის

წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო აპოთემის სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ამოცანის პირობით $AB = BC = AC = 8$, ე.ი. $BK = 4$ და პითაგორას თეორემით მივიღებთ:

$KC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

O არის სამკუთხედში მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ამიტომ:

$$KO = \frac{1}{3} \cdot KC = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}$$

სამკუთხედ MKO-დან მივიღებთ:

$$MO = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$$

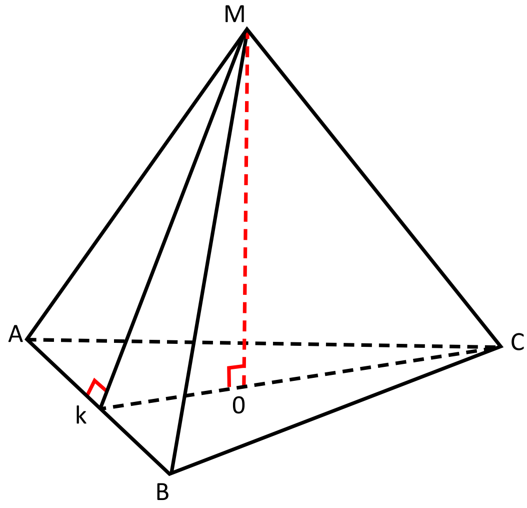
პირამიდის ფუძის ფართობი იქნება:

$$S_{ფუძე} = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 16\sqrt{3}$$

პირამიდის მოცულობაა:

$$V_{პირამიდა} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{ფუძე} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot 16\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$$

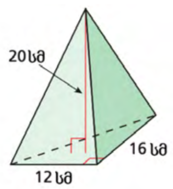
პასუხი: პირამიდის მოცულობაა $\frac{32\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$ სმ^3.



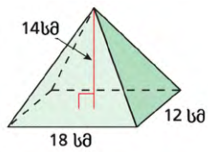
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ მოცემული პირამიდების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

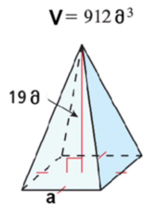
ა)

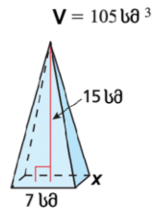


ბ)



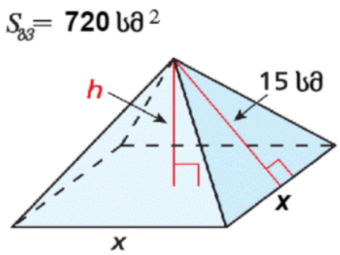
2. ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ პირამიდის ფუძის გვერდი და ზედაპირის ფართობი.



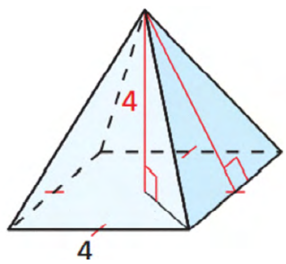


3. **გამოწვევა:** ნახაზზე მოცემულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა.

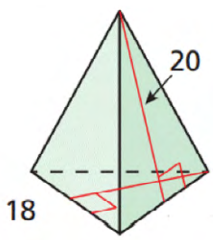
ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე და მისი მოცულობა.



4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ყველა წიბო 4-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

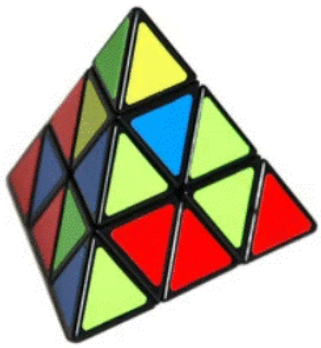


5. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 18 სმ, ხოლო აპოთემაა – 20 სმ. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.



სავარჯიშოები

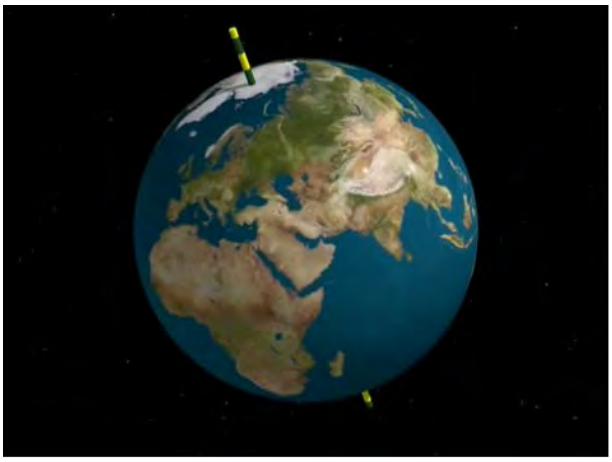
6. ლუვრის მუზეუმის ეზოში დგას შუშისგან გაკეთებული წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფორმის ნაგებობა. ამ პირამიდის სიმაღლეა 22 მ, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძეა 36 მ. იპოვეთ რა ფართობის მინა არის გამოყენებული ამ პირამიდის აგებისთვის. ასევე იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



7. მოზარდებისთვის საყვარელ თავსატეხ სათამაშოს აქვს წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფორმა, რომლის ყველა წიბო ტოლია და უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ ამ პირამიდის ზედაპირის მოცულობა.

5.4. ბრუნვითი ფიგურები, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

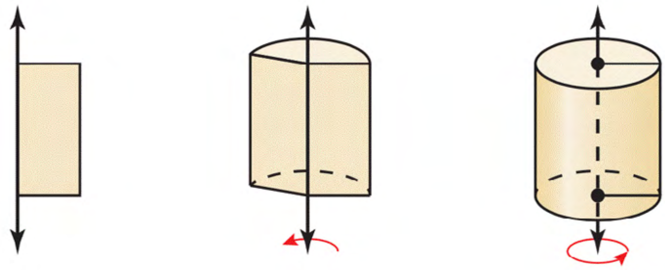
ყველამ ვიცით, რომ დედამიწა რომელზეც ვცხოვრობთ ბრუნავს ღერძის გარშემო.



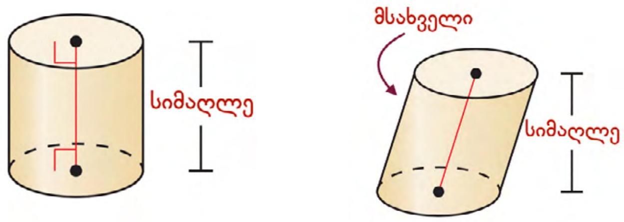
? **საკვანძო კითხვა:** რას ნიშნავს და რას ეწოდება ბრუნვითი სხეულები?

მოცემულ გაკვეთილში განვიხილოთ სივრცული ფიგურები, რომლებიც მიიღებიან ზოგიერთი ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით საკუთარი გვერდის გარშემო.

მართი ცილინდრი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხეული, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი გვერდის, როგორც ღერძის გარშემო



ზოგადად, ცილინდრის ზედაპირი შედგება ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებულ ყველა იმ ურთიერთპარალელური მონაკვეთებისგან, რომლებიც ერთ-ერთ სიბრტყეში მდებარე წრეს კვეთს. მონაკვეთს, რომელიც ერთ ბოლოს აერთებს მეორესთან, **ცილინდრის მსახველი** ეწოდება.



მართი ცილინდრი

დახრილი ცილინდრი

ცილინდრის რადიუსი ეწოდება მის ფუძეში მყოფი წრის რადიუსს.

ცილინდრის ფუძეებს შორის მანძილს ეწოდება **ცილინდრის სიმაღლე.**

კონუსი

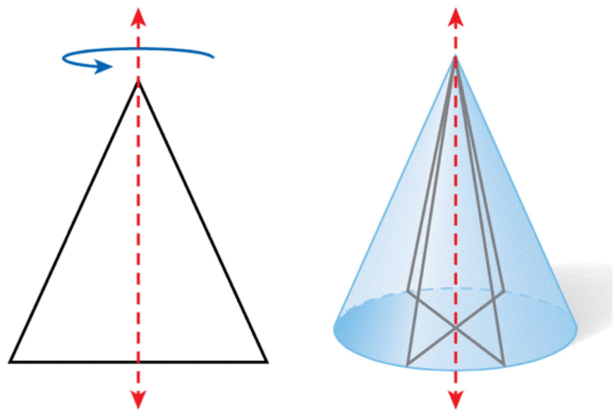
განვიხილოთ ტოლფერდა სამკუთხედი, გავავლოთ სიმაღლე ფუძის მიმართ და მოვაბრუნოთ სამკუთხედი სიმაღლის მიმართ, მივიღებთ **მართ კონუსს.**

სხეულს, შექმნილს ყველა იმ მონაკვეთისაგან, რომელიც მოცემულ წერტილს, კონუსის წვეროს აერთებს, რომელიმე წრის კონუსის ფუძის წერტილებთან, **წრიული კონუსი** ეწოდება; მოცემული წერტილი არ მდებარეობს იმავე სიბრტყეში, რომელშიც არის წრე.

მონაკვეთებს, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილებთან აერთებს, ეწოდება მსახველები.

კონუსს ეწოდება მართი, თუ კონუსის წვეროსა და ფუძის ცენტრის შემაერთებელი წრფე ფუძის სიბრტყის მართობულია.

კონუსი



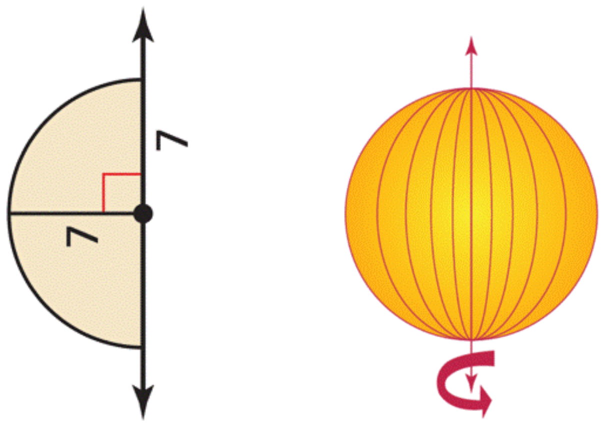
ბირთვი

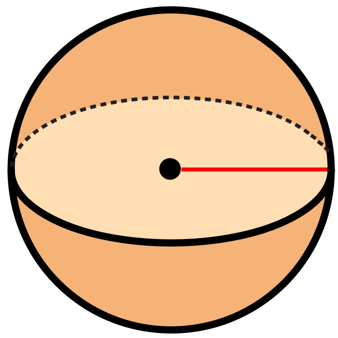
ბირთვი მიიღება ნახევარწრის მობრუნებით დიამეტრის მიმართ, რომელიც მისი ღერძია.

ბირთვი ეწოდება ყველა იმ წერტილისაგან შედგენილ ფიგურას, რომლის დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება;

მოცემულ წერტილს ეწოდება ბირთვის ცენტრი, ხოლო მანძილს – რადიუსი.

ბირთვი





ბირთვის საზღვარს ეწოდება ბირთვის ზედაპირი, ანუ **სფერო.**

მინიშნება: სასკოლო მასალაში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მართ ცილინდრს და მართ კონუსს.

ცილინდრის შლილი, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

ცილინდრი

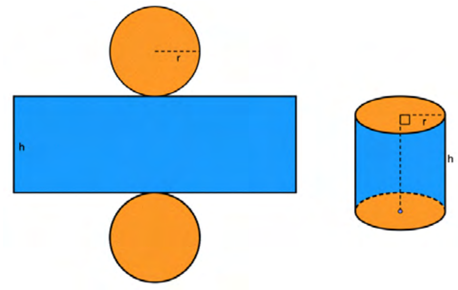
ზედაპირის ფართობი

$$S_{\text{გვერდითი}} = 2\pi r \cdot h$$

$$S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდითი}} + 2S_{\text{ფუძე}}$$

$$S_{\text{სრული}} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$V_{\text{ცილინდრი}} = S_{\text{ფუძე}} \cdot h = \pi r^2 h$$

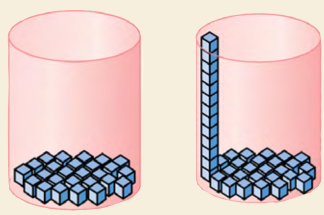


მართკუთხედის სიგრძე ემთხვევა წრეწირის სიგრძეს და $= 2\pi r$; მართკუთხედის მეორე გვერდი კი ცილინდრის სიმაღლეს ემთხვევა.

Geogebra – იხილეთ შლილი

ჩვენ ვიცით, რომ მოცულობის საზომი ერთეულია კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1.

$$V_{\text{ცილინდრი}} = S_{\text{ფუძე}} \cdot h = \pi r^2 h$$



ნიმუში 1

ცილინდრის ფუძის რადიუსია 3 სმ, ხოლო სიმაღლეა 6 სმ. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი იქნება:

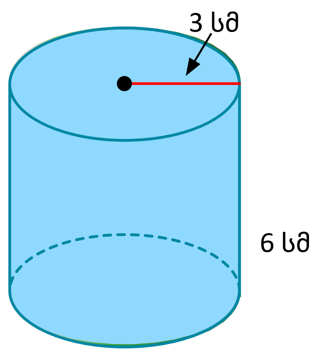
$$S_{\text{სრული}} = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 + 2\pi \cdot 9 =$$

$$= 36\pi + 18\pi = 54\pi$$

ცილინდრის მოცულობაა:

$$V_{\text{ცილინდრი}} = \pi R^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$$

პასუხი: ცილინდრის ზედაპირის ფართობია 54π სმ^2, მოცულობაა 54π სმ^3.



ნიმუში 2

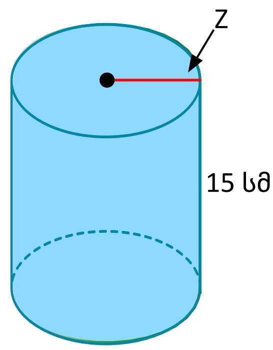
ცილინდრის მოცულობაა 240π სმ^3, ხოლო სიმაღლეა 15 სმ. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის რადიუსი.

კონუსის მოცულობაა:

$$V_{ცილინდრი} = \pi R^2 H = \pi \cdot z^2 \cdot 15 = 240\pi$$

გვექნება: $z^2 = 16$ და $z = 4$

პასუხი: ცილინდრის ფუძის რადიუსია 4 სმ.



კონუსის შლილი, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

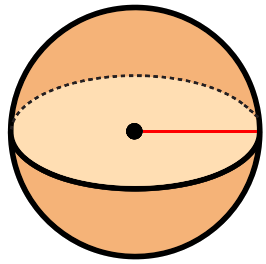
კონუსის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

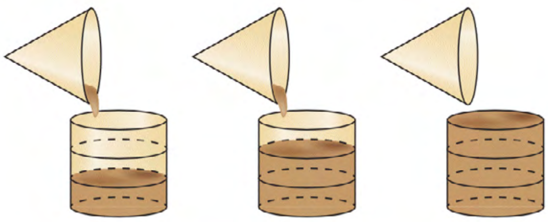
$S_{გვერდითი} = \pi r l$

$S_{სრული} = S_{გვერდითი} + S_{ფუძე} = \pi r l + \pi r^2$

თუ განვიხილავთ მართ ცილინდრს და კონუსს, რომელთაც ფუძეში ერთი და იმავე ზომის წრე აქვთ, და მათი სიმაღლეები ტოლია, მაშინ კონუსის მოცულობა, ცილინდრის მოცულობის მესამედია.

$$V_{კონუსი} = \frac{1}{3} \cdot S_{ფუძე} \cdot h = \frac{1}{3}\, \pi r^2 h$$





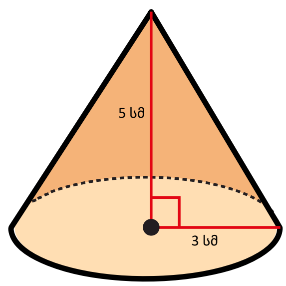
ნიმუში 3

კონუსის ფუძის რადიუსია 3 სმ, ხოლო კონუსის სიმაღლის სიგრძეა 5 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ცილინდრის მოცულობაა:

$$V_{კონუსი} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi$$

პასუხი: კონუსის მოცულობაა 15π სმ^3.



ნიმუში 4

კონუსის ფუძის რადიუსია 10 სმ, ხოლო მსახველის სიგრძეა 26 სმ. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი იქნება:

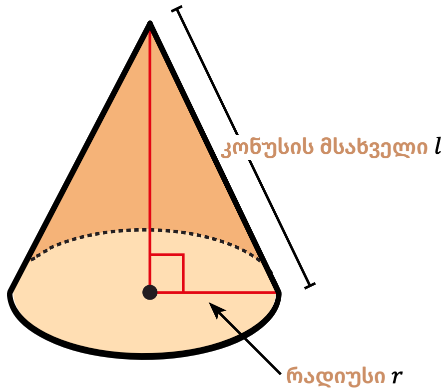
$S_{\text{სრული}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot 10 \cdot 26 + \pi \cdot 100 = 260\pi + 100\,\pi = 360\pi$

კონუსის მოცულობის გამოსათვლელად გვჭირდება კონუსის სიმაღლე, რომელიც იქნება:

$H = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$

$V_{\text{კონუსი}} = \frac{1}{3}\,\pi r^2\,h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 24 = 800\pi$

პასუხი: კონუსის ზედაპირის ფართობია 360π სმ³.



ბირთვის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

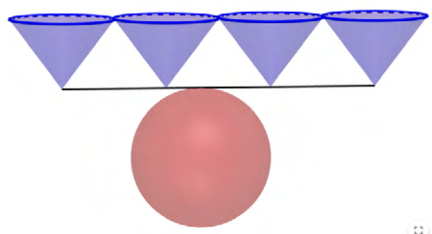
ბირთვის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$S_{\text{ზედაპირი}} = 4\pi r^2$

ჩვენ შეგვიძლია დავაკავშიროთ ბირთვის და კონუსის მოცულობები:

$V_{\text{ბირთვი}} = \frac{4}{3}\,\pi r^3$

საკვლევი აქტივობა: გამოიკვლიეთ რისი ტოლი უნდა იყოს ბირთვის რადიუსი და კონუსის ფუძეში მყოფი წრის რადიუსი? ასევე, სიმაღლე?



ნიმუში 5

ბირთვის ზედაპირის ფართობია 30π მ². იპოვეთ ბირთვის რადიუსი და მოცულობა.

ბირთვის ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულიდან მივიღებთ:

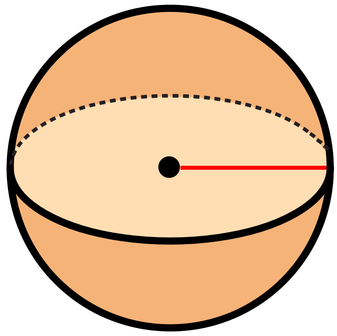
$$S_{\text{ზედაპირი}} = 4\pi r^2 = 30\pi$$

$$r^2 = \frac{30}{4},\ r = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

ბირთვის მოცულობა იქნება:

$$V_{\text{ბირთვი}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{30\sqrt{30}}{8} = 5\sqrt{30}\,\pi$$

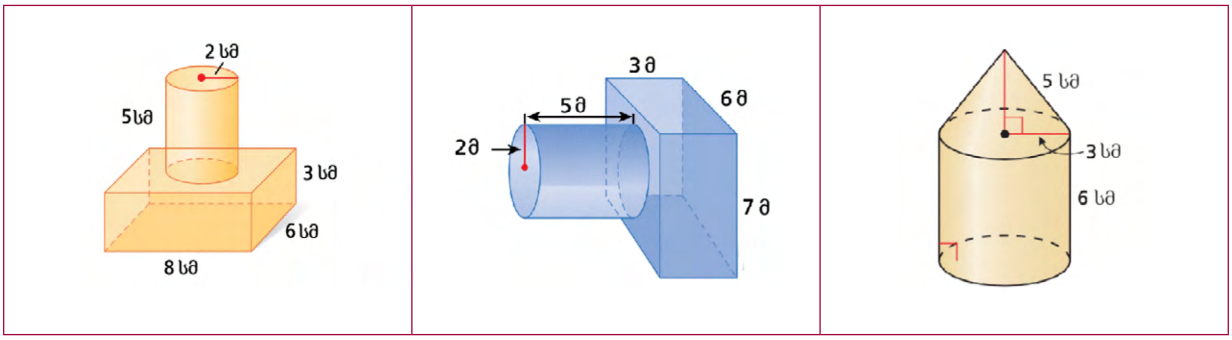
პასუხი: ბირთვის რადიუსია $\frac{\sqrt{30}}{2}$ მ, ხოლო მოცულობაა $5\sqrt{30}\,\pi$ მ³.



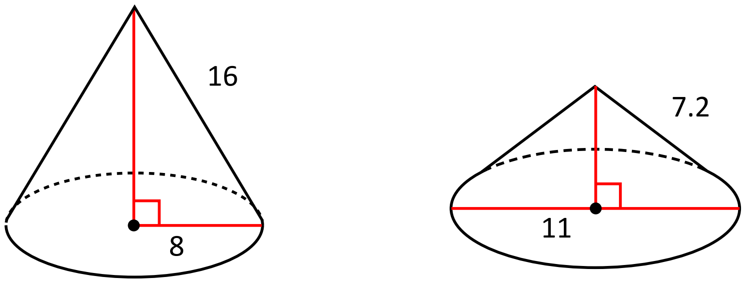
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:

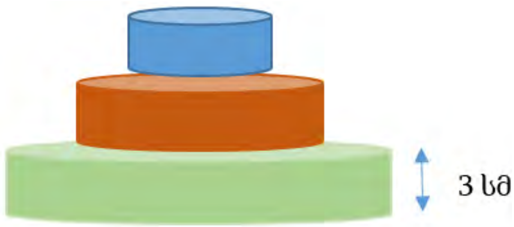
ა) ბ) გ)



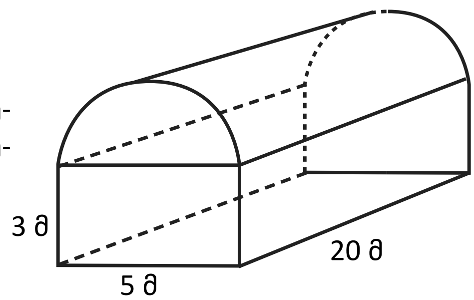
2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ თითოეული კონუსის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:



3. საბავშვო სათამაშო, „პირამიდა“ შედგება სხვადსხვა დიამეტრის და ერთი სიმაღლის მქონე ცილინდრებისაგან. იპოვეთ სათამაშოს მოცულობა თუ ყველაზე დიდი ცილინდრის დიამეტრია 18 სმ, ყოველი მომდევნოსი წინაზე 1,5-ჯერ პატარაა.



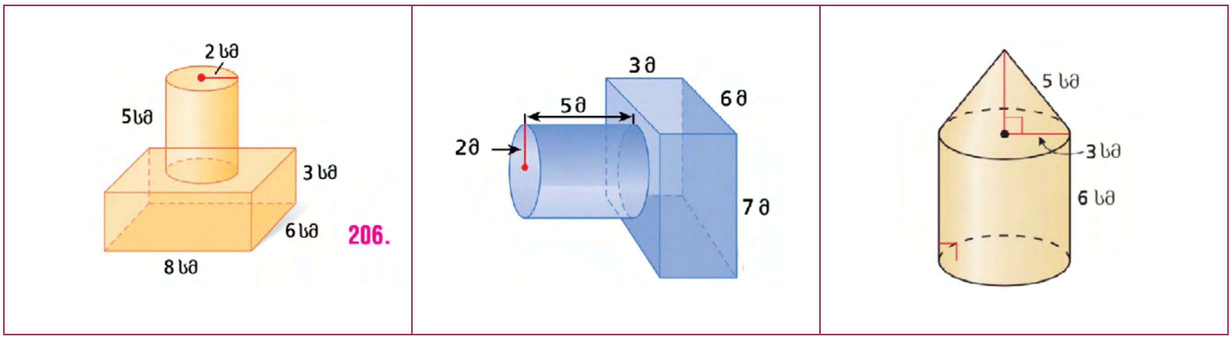
4. მოცემული სხეული შედგება პრიზმისა და მასზე მოთავსებული ნახევარცილინდრისაგან. გამოთვალეთ მისი მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:



5. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ ფიგურების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი

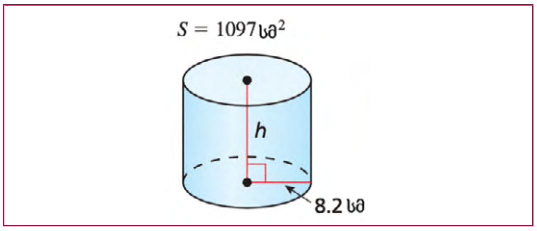
სავარჯიშოები

ა) ბ) გ)

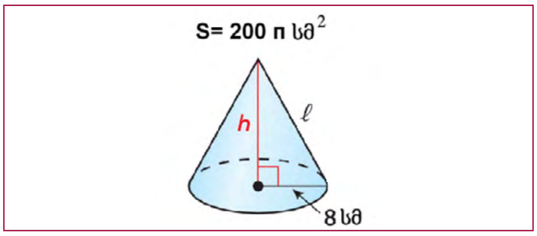


6. იპოვეთ მოცემული ბირთვის მოცულობა და სფეროს ფართობი

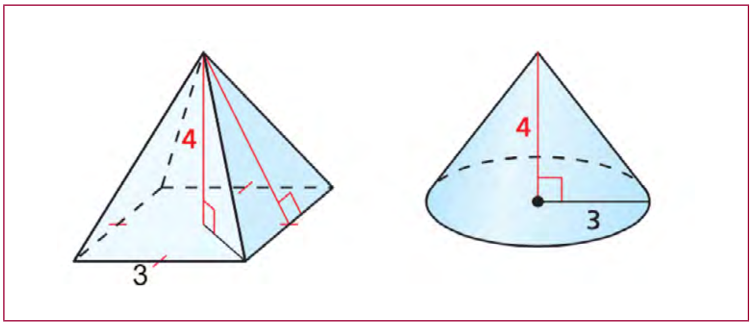
7. ცილინდრის ფუძის რადიუსია 8,2 სმ, ზედაპირის ფართობი კი – 1097 სმ^2-ია. იპოვეთ ცილინდ-რის სიმაღლე.



8. **გამოწვევა:** კონუსის ფუძის რადიუსია 8 სმ, ზედაპირის ფართობი კი – 200π სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე და მსახველი.



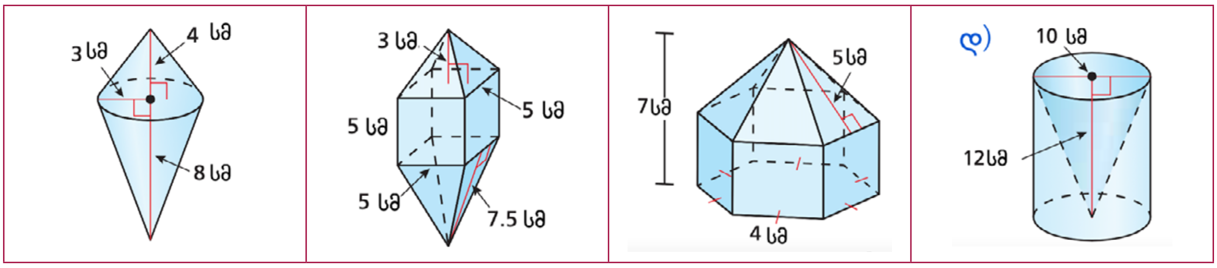
9. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდას და კონუსს ტოლი სიმაღლეები აქვთ. იპოვეთ მათი მოცულობე-ბისა და გვერდითი ზედაპირების შეფარდება $\frac{V_1}{V_2} = ?$ $\frac{S_1}{S_2} = ?$



სავარჯიშოები

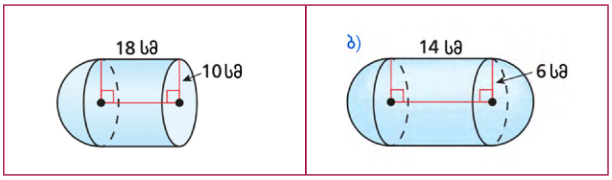
10. **გამოწვევა:** ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ თითოეული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა) ბ) გ) დ)



11. **გამოწვევა:** ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ ფიგურების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა) ბ)



12. კინოთეატრში პოპკორნი იყიდება ცილინდრის ფორმის ყუთებით. ნახაზზე მითითებული ზომების მიხედვით განსაზღვრეთ ამ ყუთის ტევადობა.

13. საცურაო აუზს აქვს ცილინდრის ფორმა, რომლის სიმაღლეა 1.5 მ, ხოლო რადიუსია 3 მ. იპოვეთ რა მოცულობის წყალი დაგვჭირდება აუზის ასავსებად.

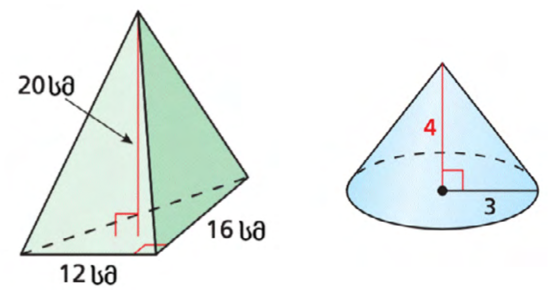
14. დაბადების დღეზე თამუნამ იყიდა სახალისო ქუდი, რომელიც ნახატზეა გამოსახული. ქუდს აქვს კონუსის ფორმა, რომლის სიმაღლეა 30 სმ, ხოლო რადიუსია 8 სმ. იპოვეთ რა ფართობის მასალა არის საჭირო ასეთი 5 ქუდის დასამზადებლად.

15. ტყავის ბურთის დამზადებისას რჩება ნარჩენები, რომელიც არის ბურთის ზედაპირის ფართობის 15%. რა ფართობის ტყავია საჭირო ერთი ბურთის დასამზადებლად, თუ ცნობილია რომ ბურთის რადიუსია 10 სმ.

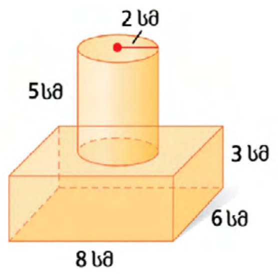
16. კინოთეატრში პოპკორნი იყიდება კონუსის ფორმის ყუთებით. ცნობილია, რომ 1 სმ^3 პოპკორნის წონაა 8 გრ. სურათზე მითითებული ზომების მიხედვით დაადგინეთ სავსე ყუთში მოთავსებული პოპკორნის წონა.

ტესტის ნიმუში:

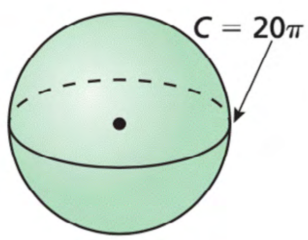
1. იპოვეთ მოცემული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.



2. იპოვეთ მოცემული ფიგურის მოცულობა.



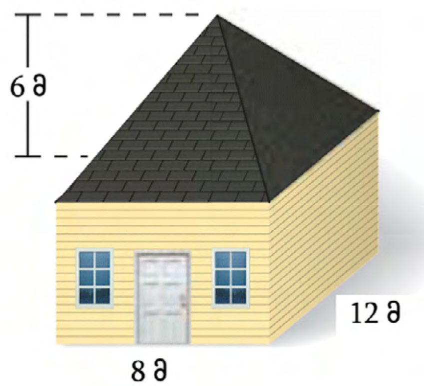
3. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა და სფეროს ფართობი.



4. ნახაზზე მოცემულია სახლის მოდელი:

საჭიროა სახლის მოპირკეთება, რისთვისაც სახლის მფლობელმა უნდა დაადგინოთ: სახლის ზედაპირის ფართობი.

ჩათვალეთ, რომ სახლის გარედან შესაღებად საჭირო საღებავის 1 ქილის ღირებულებაა 25.5 ლარი; 1 ქილა ღებავს 40 მ^2-ს; რამდენი ქილა საღებავი დასჭირდება სახლის მფლობელს? რა დაჯდება სახლის გარედან შეღებვა?



ლოგიკა და გეომეტრია

პირველი არხი, & საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინიტრო. (2020). პირველი არხი ტელესკოლა - YouTube. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv

პირველი არხი. (2018). როგორ და რა სიჩქარით მოძრაობს დედამიწა. 1TV. https://1tv.ge/news/ro-gor-da-ra-sichqarit-modzraobs-dedamiwa/

Desmos. (2023). Desmos.com. https://www.desmos.com/

GeoGebra. (2018). GeoGebra. https://www.geogebra.org

Mathigon. (2022). Mathigon – Textbook of the Future. Mathigon. https://mathigon.org/