ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი

ზოგადი მათემატიკის კათედრა

ლევან კაკაბაძე

ლექციების კურსი უმაღლეს მათემატიკაში

მეორე გამოცემა

საგამომცემლო ფირმა „სიახლე"

თბილისი - 2002

ლ. კაკაბაძე. ლექციების კურსი უმაღლეს მათემატიკაში. თბილისი, საგამომცემლო ფირმა „სიახლე", 2002 — 260 გვ.

წიგნში წარმოდგენილი ლექციების კურსი იკითხება ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. მასში მკითხველი გაეცნობა სიმრავლეთა თეორიის, ანალიზური გეომეტრიის, მატრიცების ალგებრისა და მათემატიკური ანალიზის ძირითად ცნებებსა და თეორემებს.

ლექციების კურსი გათვალისწინებულია ძირითადად ეკონომიკური სპეციალობების სტუდენტებისათვის.

მეცნიერ-რედაქტორი: ლერი გოგოლაძე — ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ISBN99928-811-9-4

თავი 1

სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

მათემატიკაში ზოგიერთ ცნებას განმარტების გარეშე იღებენ. ასეთ ცნებებს მათემატიკოსები საწყის ცნებებს უწოდებენ. სიმრავლე საწყისი ცნებაა. სიმრავლეში იგულისხმება ნებისმიერ საგანთა ერთობლიობა. საგნებს, რომლებისგანაც სიმრავლე შედგება, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. ალგებრაში ძირითადად აინტერესებთ რიცხვების სიმრავლეები, ხოლო გეომეტრიაში – წერტილების ანუ ფიგურები. ჩვენ სწორედ ასეთ სიმრავლეებთან გვექნება საქმე.

1. სიმრავლე

A. აღნიშვნები

1. სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ჩაიწერება ფიგურული ფრჩხილების საშუალებით:

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

2. თუ ელემენტი a ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ წერენ: $a \in A$, წინააღმდეგ შემთხვევაში: $a \notin A$.

3. მათემატიკოსები განიხილავენ სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს შეიცავს. მას უწოდებენ ცარიელ სიმრავლეს და აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი.

PR.[1] მოცემულია $A=\{1, \{2\}\}$. ჭეშმარიტია თუ არა:

1) $1 \in A$. 2) $2 \in A$. 3) $\{2\} \in A$.

პასუხი. 1) კი. 2) არა. 3) კი.

---

[1] წიგნს აქვს კონსპექტის სახე. მასში გამოყენებულია აღნიშვნები: **PR** — სავარჯიშო, **DER** — განსაზღვრება, **REM** — შენიშვნა, **EX** — მაგალითი. „■" სიმბოლოთი გამოყოფილია თეორემის დამტკიცება.

B. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

ნატურალური რიცხვი საწყისი ცნებაა. ნატურალური რიცხვები თვლის შედეგად მიღებული რიცხვებია. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება N-ით:

$$N=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

ყოველი ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ნატურალური რიცხვია, მაგრამ სხვაობა შეიძლება არ იყოს ნატურალური: $3-3 \notin N$, $1-5 \notin N$.

ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობის გამოსათვლელად საჭირო გახდა ახალი რიცხვების შემოტანა. ასე გაჩნდა მთელი რიცხვები.

C. მთელ რიცხვთა სიმრავლე

DEF. დადებით და უარყოფით ნატურალურ რიცხვებს, აგრეთვე ნულს მთელი რიცხვები ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Z-ით:

$$Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

* ნული თავდაპირველად შემოვიდა როგორც ციფრი. იგი გამოიყენებოდა დიდი რიცხვების ჩასაწერად. ნულის გამოყენება პირველად დაიწყეს ინდოეთში. ინდოელი კომერსანტები იყენებდნენ უარყოფით რიცხვებსაც. მინუსის ნაცვლად ისინი ხმარობდნენ სიტყვას: „ვალი": -$100 = ვალი $100. *

ნებისმიერი ორი მთელი რიცხვის ჯამი ან სხვაობა მთელი რიცხვია, მაგრამ შეფარდება შეიძლება არ იყოს მთელი: $1/2 \notin Z$, $7/3 \notin Z$. საჭირო გახდა ახალი რიცხვების შემოტანა. ასე გაჩნდა წილადები.

D. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

DEF. რიცხვს, რომლის წარმოდგენა შეიძლება m/n სახით, სადაც m მთელი რიცხვია, ხოლო n – ნატურალური, წილადი ეწოდება. წილადებს მათემატიკოსები სხვაგვარად რაციონალურ რიცხვებს უწოდებენ (ratio – შეფარდება).

წილადების სიმრავლეს აღნიშნავენ Q ასოთი:

$$Q=\{m/n \mid m \in Z \text{ და } n \in N\}.$$

ეს ჩანაწერი იკითხება ასე: Q არის ყველა m/n სახის გამოსახულებების სიმრავლე, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$.

PR. ჭეშმარიტია თუ მცდარი:

1) ნებისმიერი მთელი რიცხვი რაციონალურია.

2) $7/-3 \in Q$. 3) $2/0 \in Q$.

პასუხი: 1) კი. 2) კი. 3) არა.

რაციონალურ რიცხვებზე შეიძლება ჩატარდეს ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. ამ მოქმედებების შედეგად მიიღება ისევ რაციონალური რიცხვები.

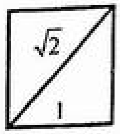
* თავდაპირველად მათემატიკოსები თვლიდნენ, რომ წილადები სრულიად საკმარისია ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის გადასაწყვეტად. უფრო მეტიც, აღმოჩნდა, რომ წილადების საშუალებით აღიწერება ბევრი ისეთი რამ, რაც ძალიან შორს არის მათემატიკისაგან. ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში იცოდნენ, რომ ოქტავის შემადგენელი ნოტების (სიხშირეების) შეფარდება არის 1/2, ხოლო ტერციის – 5/6. გაჩნდა შეხედულება, რომ წილადების საშუალებით შეიძლება აიხსნას ბუნების ნებისმიერი მოვლენა. ეს ზოგადი ფილოსოფიური შეხედულება წარმოიშვა ანტიკურ საბერძნეთში, კერძოდ, სკოლაში, რომლის ხელმძღვანელი იყო პითაგორა. მისი სახელი შემორჩა გეომეტრიის ერთ-ერთ ულამაზეს თეორემას, თუმცა ეს თეორემა ცნობილი იყო უფრო ადრე ძველ ბაბილონში.

პითაგორა გარკვეული პერიოდი იმყოფებოდა ბაბილონში, ისევე როგორც ეგვიპტეში, სადაც მან მიიღო განათლება. პითაგორა არა მარტო დიდი მათემატიკოსი იყო, არამედ გამოჩენილი სპორტსმენიც. იგი გახდა ოლიმპიური ჩემპიონი კრივში.

პითაგორას სკოლა გამოირჩეოდა მკაცრი დისციპლინით. არც ერთი ახალი აღმოჩენა არ გადიოდა სკოლის კედლების გარეთ. სკოლაში ასწავლიდნენ: არითმეტიკას, გეომეტრიას, ასტრონომიას და მუსიკას. სწავლის უფლება ჰქონდათ მხოლოდ სკოლის წევრებს. პითაგორელთა ეს ტრადიცია დაირღვა მას შემდეგ, როდესაც ერთ-ერთმა მათგანმა დაკარგა სკოლის საერთო თანხა. იმისათვის, რომ აენაზღაურებინათ დანაკარგი, პითაგორელები იძულებულნი გახდნენ გაეყიდათ თავიანთი ცოდნა. მათ დაიწყეს უცხო პირების მომზადება გეომეტრიაში.

სრულიად მოულოდნელად აღმოჩნდა, რომ წილადებს გააჩნიათ ერთი დიდი ნაკლი. წილადების საშუალებით არ იზომება ნებისმიერად

აღებული მონაკვეთის სიგრძე. ასეთი მონაკვეთია მაგალითად კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდი ერთის ტოლია. პითაგორას თეორემის თანახმად დიაგონალის სიგრძეა $\sqrt{2}$. ℨ



თეორემა. $\sqrt{2}$ არ არის წილადი.

■1. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\sqrt{2}$ წილადია: $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$.

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ m და n რიცხვებს არ გააჩნიათ საერთო თანამამრავლი (თუ გააჩნიათ შევკვეცოთ).

2. ავიყვანოთ ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში:

$$2=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow 2n^2=m^2\Rightarrow m^2 \text{ - ლუწია} \Rightarrow m-\text{ლუწია}\Rightarrow m=2k,$$

$$k\in N\Rightarrow 2n^2=(2k)^2 \Rightarrow n^2=2k^2\Rightarrow n^2-\text{ლუწია}\Rightarrow n-\text{ლუწია}.$$

3. მივიღეთ, რომ m და n ლუწი რიცხვებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მათი საერთო თანამამრავლია 2, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. ■

ის, რომ $\sqrt{2}$ არ არის წილადი, დაამტკიცეს თვითონ პითაგორელებმა. ამის შემდეგ მათმა თეორიამ იმის შესახებ, რომ ყველაფერი არის რიცხვი, სრული კრახი განიცადა.*

იმისთვის, რომ გაიზომოს ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი, საჭირო გახდა ახალი რიცხვების შემოტანა.

DEF. რიცხვს, რომელიც არ არის წილადი, ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.

EX. ირაციონალური რიცხვებია: $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2}+\sqrt{5},\pi\dots$.

E. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვებს ნამდვილ რიცხვებს უწოდებენ. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება **R**-ით.

(* ნამდვილი რიცხვი საკმაოდ რთული ობიექტია. ამაზე მეტყველებს თუნდაც ის ფაქტი, რომ იმის გაგებას, თუ რა არის ნამდვილი რიცხვი, მათემატიკოსებმა მოანდომეს საკმაოდ დიდი დრო – ანტიკური ხანიდან მეოცე საუკუნემდე.*)

ყოველი ნამდვილი რიცხვი ჩაიწერება ათწილადის სახით. კერძოდ:

1. რაციონალური რიცხვი გამოისახება სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის საშუალებით.

2. ირაციონალური რიცხვი გამოისახება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის საშუალებით.

EX. $\frac{1}{5}=0.2,\ \frac{7}{3}=2.333\dots\ \sqrt{2}=1.414213\dots\ \pi=3.14\dots$

PR. ჭეშმარიტია თუ არა $0.1010010001\ldots\in \mathbf{Q}$?

მოდული

DEF. a რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა) აღინიშნება $|a|$ სიმბოლოთი და განიმარტება ტოლობით:

$$|a|=\begin{cases}-a, \text{როცა } a<0,\\ 0, \text{როცა } a=0,\\ a, \text{როცა } a>0.\end{cases}$$

EX. $|5|=5,\ |-1.4|=1.4,\ |0|=0.$

მოდულის ძირითადი თვისებები

1. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

2. $|a+b|\le|a|+|b|$.

■ გამოვიყენოთ ტოლფასი გარდაქმნები:

$$|a+b|\le|a|+|b|\Leftrightarrow(|a+b|)^2\le(|a|+|b|)^2\Leftrightarrow(a+b)^2\le|a|^2+$$

$$+2|a|\cdot|b|+|b|^2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le a^2+2|ab|+b^2\Leftrightarrow ab\le|ab|.$$

მივიღეთ ჭეშმარიტი უტოლობა. ■

REM. 1. ამ უტოლობას სამკუთხედის უტოლობას უწოდებენ: სამკუთხედის უტოლობა მხოლოდ მაშინ გადაიქცევა ტოლობად, როდესაც a და b რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშნები.

რიცხვითი ღერძი

DEF. 1. წრფეს, რომელზეც არჩეულია ორი წერტილი, რიცხვითი ღერძი ეწოდება.

2. ამ ორი წერტილიდან ერთ-ერთს ეწოდება სათავე (იგი აღინიშნება 0-ით), ხოლო მეორეს – ერთიანი (აღინიშნება 1-ით).

3. მიმართულება 0-დან 1-საკენ არის დადებითი, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულება არის უარყოფითი.

4. მონაკვეთს, რომლის ბოლოებია 0 და 1, ერთეული ეწოდება.

(* ნამდვილი რიცხვები სრულიად საკმარისია ყველა არითმეტიკული მოქმედების შესასრულებლად. მიუხედავად ამისა მათემატიკოსებმა მაინც აღმოუჩინეს ნამდვილ რიცხვებს ნაკლი. კერძოდ, ის, რომ ნამდვილი რიცხვის კვადრატი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. სწორედ ეს გახდა ახალი რიცხვების შემოტანის მიზეზი. ამ რიცხვებს, რომელთაც კომპლექსური რიცხვები ეწოდებათ, განვიხილავთ III თავში. *)

რიცხვითი შუალედები

ჩვენ ხშირად გვექნება საქმე ნამდვილ რიცხვთა სპეციალურ ქვესიმრავლეებთან, რომელთაც რიცხვითი შუალედები ეწოდებათ. ძირითადად გამოვიყენებთ შემდეგი ტიპის შუალედებს:

$$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$$

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

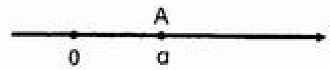
$$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$$

DEF. $[a, b]$ შუალედს ეწოდება მონაკვეთი (ანუ სეგმენტი), ხოლო (a,b) შუალედს -ინტერვალი.

წერტილის კოორდინატი რიცხვით ღერძზე

ნამდვილი რიცხვების საშუალებით შეიძლება გაიზომოს ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი. ეს არის ნამდვილი რიცხვების ძირითადი თვისება. ეს თვისება საშუალებას იძლევა ყველა ნამდვილი რიცხვი განვალაგოთ რიცხვით ღერძზე, ეს ხდება შემდეგნაირად.

ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი a, განვიხილოთ მოდული $|a|$. რიცხვით ღერძზე არის ორი წერტილი, რომელიც სათავიდან დაშორებულია $|a|$ მანძილით. ამ ორი წერტილიდან ავირჩიოთ მარჯვენა, თუ $a>0$ და მარცხენა, თუ $a<0$. მიღებული წერტილი აღვნიშნოთ A-თი. a რიცხვი მოვათავსოთ A წერტილში.



DEF. a რიცხვს ეწოდება A წერტილის კოორდინატი.

თუ აღნიშნული წესით ნამდვილ რიცხვებს განვალაგებთ რიცხვით ღერძზე, აღმოჩნდება, რომ ნამდვილი რიცხვები მთლიანად შეავსებენ რიცხვით ღერძს.

R-ის გეომეტრიული შინაარსი

1. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არის წრფე.
2. ნამდვილი რიცხვი არის წერტილი წრფეზე.

REM. ვინაიდან ნამდვილი რიცხვი სხვა არაფერია, თუ არა წერტილი, a რიცხვს ხშირად a წერტილს უწოდებენ.

PR. იპოვეთ მანძილი:

1) –3 და 5 წერტილებს შორის.

2) a და b წერტილებს შორის.

პასუხი: 1) 8, 2) $|a-b|$.

2. ოპერაციები სიმრავლეებზე

A. სიმრავლეთა ტოლობა

DEF. 1. ორ სიმრავლეს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი ერთი და იგივე ელემენტებისაგან შედგებიან.

2. თუ A და B სიმრავლეები ტოლია, მაშინ წერენ:

$$A=B.$$

EX. $\{-1, 2, 15\}=\{2, -1, \sqrt{225}\}$.

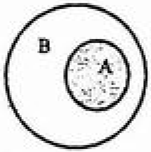
PR. ჭეშმარიტია თუ არა: $\{3, 5\}=\{3, \{5\}\}$?

პასუხი: არა.

B. ქვესიმრავლე

DEF. 1. A სიმრავლეს ეწოდება B-ს ქვესიმრავლე, თუ A–ს ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს.

2. თუ A სიმრავლე არის B–ს ქვესიმრავლე, მაშინ წერენ:



$A\subset B$.

ხშირად სიმრავლეებს გამოსახავენ გეომეტრიული ფიგურების საშუალებით. ასეთ ნახატებს დიაგრამებს უწოდენ.

EX. 1. $\{1, 2\}\subset\{-3, 2, 10, 1\}$.

2 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

* ქვესიმრავლე სხვაგვარადაც შეიძლება განიმარტოს.

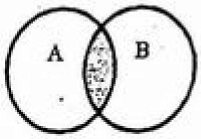
DEF. A სიმრავლე არის B–ს ქვესიმრავლე, თუ A არ შეიცავს არცერთ ისეთ ელემენტს, რომელიც არ ეკუთვნის B–ს.

თეორემა. ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა: $\varnothing \subset A$.

PR. დაამტკიცეთ თეორემა. *

C. სიმრავლეთა თანაკვეთა

DEF. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის A და B სიმრავლეებს ერთდროულად.



$A\cap B = \{x \mid x\in A$ და $x\in B\}$.

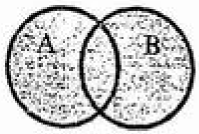
EX. 1. $[-2, 5]\cap[1, 23]=[1, 5]$.

2. $\{-2, 5\}\cap\{1, 23\}=\varnothing$.

REM. ბოლო მაგალითი გვიჩვენებს, რომ არსებობს სიმრავლეები, რომელთაც საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ. ცარიელი სიმრავლე მათემატიკოსებმა შემოიტანეს იმ მიზნით, რომ ასეთ სიმრავლეებზე შესაძლებელი იყოს თანაკვეთის ოპერაციის შესრულება.

D. სიმრავლეთა გაერთიანება

DEF. A და B სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის A ან B სიმრავლეს:

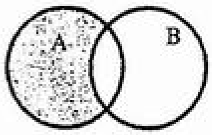


$A\cup B= \{x \mid x\in A$ ან $x\in B\}$.

EX. 1. $[-2, 5]\cup[1, 23]=[-2, 23]$.

E. სიმრავლეთა სხვაობა

DEF. A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის A–ს და არ ეკუთვნის B–ს:



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

EX. 1. $[-2, 5] \setminus [1, 23] = [-2, 1)$.

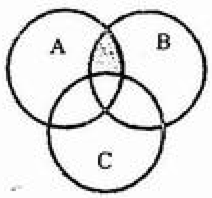
2. $\{-2, 5\} \setminus \{-2, 5, 19\} = \varnothing$.

3. $\{-1, 5\} \setminus \{1, 7\} = \{-1, 5\}$.

$\cap$, $\cup$, $\setminus$ ოპერაციების ძირითადი თვისებები

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup \varnothing = A$.
3. $A \setminus \varnothing = A$.
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

REM. ბოლო სამი თვისების შესამოწმებლად შეიძლება გამოიყენოთ დიაგრამები. დიაგრამიდან ჩანს, რომ მეექვსე ტოლობის ორივე მხარე იძლევა ერთი და იგივე ფიგურას.



F. ეკვივალენტური სიმრავლეები

ვთქვათ A და B რაიმე სიმრავლეებია.

DEF. 1. A და B სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობა ტოლია, თუ ამ ორ სიმრავლეს შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

2. შესაბამისობას ეწოდება ურთიერთცალსახა, როცა ერთი სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლის მხოლოდ ერთი ელემენტი და პირიქით.

REM. 1. სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტების რაოდენობა ტოლია, მათემატიკოსები ეკვივალენტურს უწოდებენ.

2. თუ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია მაშინ წერენ: $A \sim B$.

EX. $\{1, 2\} \sim$ (თბილისი, ქუთაისი).

■ შესაბამისობა მყარდება შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \updownarrow & \updownarrow \\ \text{თბილისი} & \text{ქუთაისი}. \end{array}$$

ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ■

2. ლუწი რიცხვების რაოდენობა უდრის ყველა ნატურალური რიცხვის რაოდენობას.

■ შესაბამისობა მყარდება შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ■

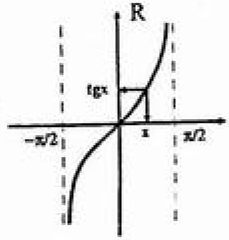
REM. მივიღეთ, ლუწი რიცხვი „იმდენია", რამდენიც ნატურალური. ეს ფაქტი ცოტა არ იყოს უცნაურია. ნატურალური რიცხვები შედგება ლუწი და კენტი რიცხვებისაგან. გამოდის, რომ კენტი რიცხვების გადაყრის შემდეგ ნატურალური რიცხვების საერთო რაოდენობა არ იცვლება. ასეთი კურიოზები მხოლოდ უსასრულო სიმრავლეებისთვის არის დამახასიათებელი.

PR. აჩვენეთ, რომ კენტი და ნატურალური რიცხვების რაოდენობა ტოლია.

3. $(-\pi/2, \pi/2)$ ინტერვალში იმდენი წერტილია, რამდენიც მთელ რიცხვით ღერძში:

$$(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbf{R}.$$

■ შესაბამისობა მოიცემა ფორმულით:



$$(-\pi/2, \pi/2) \ni x \leftrightarrow \mathrm{tg}x \in R \,.$$ ■

REM. როგორც ვხედავთ, წრფიდან სხივების ამოგდება არ ცვლის წერტილების საერთო რაოდენობას.

(* ნატურალური რიცხვები არიან რაციონალური რიცხვების ნაწილი (ქვესიმრავლე). მიუხედავად ამისა, რაციონალური რიცხვები იმდენია, რამდენიც ნატურალური: $Q \sim N$.

რაც შეეხება ირაციონალურ რიცხვებს, მათი რაოდენობა აღმოჩნდა გაცილებით „მეტი". საოცარია, რომ თავდაპირველად რიცხვით ღერძზე შენიშნეს რაციონალური წერტილები, ხოლო უფრო მეტი რაოდენობის ადგილები, რომელშიც განლაგებული იყვნენ ირაციონალური რიცხვები, შეუმჩნეველი დარჩა. *)

3. კომბინატორიკის ელემენტები

A. გადანაცვლება

კომბინატორიკაში განიხილავენ მხოლოდ სასრულ სიმრავლეებს და მათ ქვესიმრავლეებს.

DEF. სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ ამ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა სასრულია.

DEF. 1. დალაგებულ სიმრავლეს გადანაცვლება ეწოდება.

2. გადანაცვლება, რომლის ელემენტებია: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

DEF. ორ გადანაცვლებას ეწოდება ტოლი თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n .$$

REM. განსხვავება სიმრავლეს და გადანაცვლებას შორის ის არის, რომ მათთვის სხვადასხვაგვარადაა განმარტებული ტოლობა.

EX.
$$\{1, 2\} = \{2, 1\},$$
$$(1, 2) \neq (2, 1).$$

DEF. n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა გადანაცვლების რაოდენობა აღინიშნება P_n სიმბოლოთი.

EX. $\{1, 2, 3\}$ სიმრავლის ყველა გადანაცვლებაა:

$$(1, 2, 3),\ (2, 1, 3),\ (3, 1, 2),$$
$$(1, 3, 2),\ (2, 3, 1),\ (3, 2, 1).$$

გადანაცვლებათა რაოდენობაა: $P_3 = 6$.

DEF. n რიცხვის ფაქტორიალი ეწოდება რიცხვს:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ n.$$

თეორემა.

$$\boxed{P_n = n!}$$

■ ვთქვათ, მოცემულია რაიმე n ელემენტიანი სიმრავლე.

1) გადანაცვლების პირველი ელემენტი შეიძლება ავირჩიოთ n გზით.

2) როცა პირველი ელემენტი არჩეულია, გადანაცვლების მეორე ელემენტის არჩევა შეიძლება n−1 გზით.

. . . .

n) როცა პირველი n−1 ელემენტი არჩეულია, გადანაცვლების ბოლო ელემენტის არჩევა შეიძლება ერთადერთი გზით.

ყველა გადანაცვლების რაოდენობა იქნება მათი ნამრავლი:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ \ldots 1 = n!\,.$$ ■

B. წყობა

DEF. სიმრავლის დალაგებულ ქვესიმრავლეს წყობა ეწოდება.

DEF. n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k ელემენტიანი წყობის რაოდენობა აღინიშნება A_n^k სიმბოლოთი. ცხადია, $0 \le k \le n$.

EX. $\{1, 2, 3\}$ სიმრავლის ყველა 2 ელემენტიანი წყობაა:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3),$$
$$(2, 1), (3, 1), (3, 2).$$

წყობათა რაოდენობაა: $A_3^2 = 6$.

თეორემა. $\boxed{A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).}$

■ განვიხილოთ რაიმე n ელემენტიანი სიმრავლე.

1) წყობის პირველი ელემენტი შეიძლება ავირჩიოთ n გზით.

2) როცა პირველი ელემენტი არჩეულია, წყობის მეორე ელემენტის არჩევა შეიძლება $n-1$ გზით.

. . . .

k) როცა პირველი $k-1$ ელემენტი არჩეულია, წყობის ბოლო ელემენტის არჩევა შეიძლება $(n-k+1)$ გზით.

ყველა წყობის რაოდენობა იქნება მათი ნამრავლი:

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1). \quad ■$$

C. ჯუფდება

DEF. კომბინატორიკაში ქვესიმრავლეს ჯუფთებას უწოდებენ.

DEF. n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა k ელემენტიანი ჯუფთების რაოდენობა აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი. ცხადია $0 \le k \le n$.

EX. $\{1, 2, 3\}$ სიმრავლის ყველა ორ ელემენტიანი ჯუფთებაა: $\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$. ჯუფთებათა რაოდენობაა: $C_3^2 = 3$.

თეორემა. $\boxed{C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.}$

■ განვიხილოთ რაიმე n ელემენტიანი სიმრავლე.

1. ნებისმიერი წყობა მიიღება ჯუფთების გადანაცვლებით.

2. k ელემენტიანი ჯუფთების არჩევა შეიძლება C_n^k გზით.

3. k ელემენტიანი ჯუფთების გადანაცვლება შეიძლება $k!$ გზით.

ყველა წყობის რაოდენობა იქნება მათი ნამრავლი:

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$

აქედან ვღებულობთ:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \quad ■$$

D. პასკალის სამკუთხედი

DEF. პასკალის სამკუთხედი არის რიცხვთა სამკუთხა ცხრილი, რომლის ყველა კიდურა წევრი ერთის ტოლია, ხოლო ნებისმიერი სხვა წევრი უდრის ზედა ორი მეზობელი წევრის ჯამს:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

. . . .

* ასეთ ცხრილს, ჯერ კიდევ, ძველ ინდოეთში იყენებდნენ. XVI საუკუნეში იგი ხელახლა აღმოაჩინა შტიფელმა. მიუხედავად ამისა ცხრილს პასკალის სახელი შემორჩა. *

თეორემა. C_n^k რიცხვები ადგენენ პასკალის სამკუთხედს:

$$\begin{matrix} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

. . . .

■ 1. $C_n^0 = 1$. მართლაც, 0 ელემენტიანი ჯუფთება არის $\varnothing$. ასეთი სიმრავლე ერთადერთია.

2. $C_n^n = \dfrac{n(n-1)\dots 1}{n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1.$

3. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$

შევამოწმოთ ეს ტოლობა:

$$\frac{(n+1)\cdot n \dots (n-k+1)}{1\cdot 2 \dots k\cdot(k+1)} = \frac{n \dots (n-k+1)}{1\cdot 2 \dots k} + \frac{n \dots (n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2 \dots k\cdot(k+1)}$$

შკვეცის შემდეგ ვღებულობთ:

$$\frac{n+1}{k+1} = 1 + \frac{n-k}{k+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{k+1} = \frac{k+1+n-k}{k+1} \Leftrightarrow 1 = 1. \quad ■$$

PR. აჩვენეთ, რომ $C_n^k = C_n^{n-k}$.

E. ნიუტონის ბინომი

DEF. $(1+x)^n$ გამოსახულებას ნიუტონის ბინომი ეწოდება.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= 1 \\ (1+x)^1 &= 1 + x \\ (1+x)^2 &= 1 + 2x + 1x^2 \\ (1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3 \end{aligned}$$

. . . .

შეიძლება თუ არა, რომ ანალოგიური ფორმულა და-იწეროს ნებისმიერი მაჩვენებლისათვის. თურმე ასეთი ფორმულა არსებობს.

თეორემა.

$$\boxed{(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.}$$

■ ზემოთ მოყვანილი ტოლობების მარჯვენა მხარეში წავშალოთ + და X თავისი ხარისხებით. მივიღებთ პასკალის სამკუთხედს.

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= \quad\quad 1 \\ (1+x)^1 &= \quad 1 \quad 1 \\ (1+x)^2 &= \; 1 \quad 2 \quad 1 \\ (1+x)^3 &= 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{aligned}$$

. . . .

პასკალის სამკუთხედში რიგი, რომლის ნომერია n, შედგება რიცხვებისაგან: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$.

ამ რიგის შესაბამისი გამოსახულება იქნება:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad ■$$

EX. $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$.

REM. ვინაიდან C_n^k რიცხვები ბინომის ფორმულაში წარმოადგენენ x^k წევრების კოეფიციენტებს, მათ ხში-რად ბინომიალურ კოეფიციენტებსაც უწოდებენ.

PR. 1) გამოთვალეთ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

2) იპოვეთ n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობა.

პასუხი: 1) 2^n. 2) 2^n.

REM. ხშირად ნიუტონის ბინომს უწოდებენ უფრო ზოგად გამოსახულებას:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

PR. დაამტკიცეთ ეს ფორმულა.

(* ბინომის ფორმულა, რა თქმა უნდა, ცნობილი იყო ნიუტონამდე.[1] ნიუტონის დამსახურება ის არის, რომ მან ეს ფორმულა ჩაწერა უსასრულო ჯამის სახით)

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots =$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

ამ გამოსახულებაში ყველა წევრი დაწყებული $n+2$-დან ნულის ტოლია (რატომ?). ასე რომ, სინამდვილეში შეკრებაში მონაწილეობს პირველი $n+1$ წევრი. (მიღებული ფორმულის უპირატესობა ის არის, რომ იგი სამართლიანია არა მხოლოდ ნატურალური, არამედ ნებისმიერი n რიცხვისათვის.

ნიუტონმა შენიშნა, რომ ბინომის გარდა უსასრულო ჯამებად იშლება სინუსი, ლოგარითმი და სხვა კარგი ფუნქციები. იმის გაგებას, თუ რა არის უსასრულო ჯამი, დასჭირდა მთელი თეორიის შექმნა. ამ თეორიას დღეს მათემატიკური ანალიზი ჰქვია. მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ფუძემდებელი ნიუტონია.

თავისი ძირითადი რეზულტატები ნიუტონმა სტუდენტობის პერიოდში მიიღო. უკვე 37 წლის ასაკში ნიუტონი თვლიდა, რომ იგი საკმაოდ ხნიერია იმისათვის, რომ იფიქროს მათემატიკის ან ფიზიკის ამოცანებზე. ამ პერიოდში ნიუტონი გატაცებული იყო ალქიმიით. ოქროს მიღებას მან გაცილებით მეტი ძალ-ღონე შეალია, ვიდრე ფიზიკას და მათემატიკას, მაგრამ უშედეგოდ.

ნიუტონს აინტერესებდა თეოლოგიაც. თეოლოგებს სჭირდებოდათ ქრონოლოგიის ცოდნა. აქაც იყო პრობლემები. მაგალითად, 2348 წლიან პერიოდში, რომელიც ბიბლიაში გამოყოფილია ნოეს პერიოდიდან ქრისტეს დაბადებამდე, ვერაფრით ვერ თავსდებოდა ეგვიპტის ყველა ფარაონი და

დინასტია. თვითონ ნიუტონი ფარული ერეტიკოსი იყო. იგი არ გამორიცხავდა, რომ ღმერთს ქრისტეს გარდა კიდევ ჰყავდა შვილები. ერთ-ერთ მათგანად ნიუტონი, როგორც ჩანს, საკუთარ თავსაც თვლიდა. სხვათა შორის ნიუტონი 25 დეკემბერს არის დაბადებული.

ნიუტონის დაბადების წელია 1642. ამავე წელს გარდაიცვალა გალილეი. მიუხედავად იმისა, რომ ნიუტონი დღენაკლული დაიბადა და მის გადარჩენას არავინ ელოდა, მან 85 წელი იცოცხლა. სიცოცხლეშივე ნიუტონმა უდიდესი აღიარება პოვა. იგი იყო კემბრიჯის უნივერსიტეტის კათედრის გამგე. ეს პოსტი დღესაც უაღრესად პრესტიჟულია ინგლისში. ნიუტონი კითხულობდა ლექციებს არითმეტიკაში, გეოგრაფიასა და ასტრონომიაში. ლექციებს საკმაოდ ცოტა სტუდენტი ესწრებოდა, ზოგჯერ – არავინ, შესაძლოა იმიტომ, რომ ნიუტონის ლექციები გამოირჩეოდნენ გაუგებრობით.

ნიუტონმა ინგლისში განახორციელა ის, რასაც დღეს ჩვენს ქვეყანაში საბაზრო ეკონომიკის რეფორმას უწოდებენ. ნიუტონი დაინიშნა ხაზინის მმართველად და მან წარმატებით გაატარა ფულის რეფორმა, და ეს მაშინ, როდესაც ქვეყანა იმყოფებოდა ძალიან მძიმე ეკონომიურ მდგომარეობაში, რაც სამოქალაქო ომებისა და რევოლუციების შედეგი იყო.

ნიუტონი იყო სამეფო საზოგადოების (მეცნიერებათა აკადემიის) პრეზიდენტი. ეს პოსტი მას ეკავა სიცოცხლის ბოლომდე. ნიუტონი არჩეული იყო პარლამენტშიც. პარლამენტის მუშაობაში ნიუტონი დიდად არ იკლავდა თავს. ამბობენ, რომ ნიუტონი მხოლოდ ერთხელ გამოვიდა პარლამენტის სხდომაზე, ისიც საკმაოდ მოკლე სიტყვით: მან მოითხოვა მიეხურათ ფანჯარა. *)

4. გამოყენება

სტუდენტებისათვის ალბათ საინტერესოა:

A. როდის ჯობია საგამოცდო ბილეთის აღება, გამოცდის დასაწყისში თუ ბოლოში?

ამ კითხვას შეიძლება გაეცეს სავსებით დასაბუთებული პასუხი. ძნელად თუ წარმოიდგენს ვინმე, რომ ამისთვის საჭიროა სიმრავლეები. ჩვენ მოვიყვანთ ამ ამოცანის მარტივ მათემატიკურ ფორმულირებას. მანამდე კი ერთი ძალიან საჭირო ცნების შესახებ.

---

2) აქ მოყვანილი ისტორიული ფაქტები აღებულია ვ. არნოლდის ლექციიდან, რომელიც მან 1986 წელს წაიკითხა მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. ეს შესანიშნავი ლექცია შემდგომში გამოიცა ბროშურის სახით: „Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук". გამოყენებულია აგრეთვე წიგნი: Carl B. Boyer: „A history of mathematics".

ალბათობა

DEF. თუ რაიმე მოვლენა n შესაძლებლობიდან ხდება m-ჯერ, მაშინ ამბობენ, რომ ამ მოვლენის ალბათობაა:

$$\boxed{P = \frac{m}{n}.}$$

REM. 1. ალბათობა ყოველთვის მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის:

$$0 \le P \le 1.$$

■ $0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le \frac{m}{n} \le 1.$ ■

PR. 20 კაციანი ჯგუფი გამოცდას აბარებს მათემატიკაში. გამოცდისათვის შედგენილია 20 ბილეთი, რომელთაგან მეცამეტე ბილეთი საკმაოდ რთულია. სტუდენტები რიგის მიხედვით იღებენ ბილეთებს.

1. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ პირველი (ბოლო) სტუდენტი აიღებს მეცამეტე ბილეთს?

2. როდის ჯობია გამოცდაზე გასვლა: დასაწყისში თუ ბოლოში?

■ 1) ვთქვათ $n_1, n_2, \dots, n_{20}$ რიცხვები არიან შესაბამისად პირველი, მეორე,... მეოცე სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომრები. განვიხილოთ გადანაცვლება $(n_1, n_2, \dots, n_{20})$. ყველა ასეთი გადანაცვლების რაოდენობაა: $n=20!$.

2) იმ შემთხვევას, როდესაც „ცუდ ბილეთს" იღებს პირველი სტუდენტი, აღწერს გადანაცვლება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$(13, n_2, \dots, n_{20}).$$

ყველა ასეთი გადანაცვლების რაოდენობაა: $m_1=19!$.

3) იმ შემთხვევას, როდესაც „ცუდ ბილეთს" იღებს ბოლო სტუდენტი, აღწერს გადანაცვლება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$(n_1, n_2, \dots, 13).$$

ყველა ასეთი გადანაცვლების რაოდენობაა: $m_2=19!$.

პასუხი: ორივე შემთხვევაში ალბათობა ერთნაირია და უდრის $p=19!/20!=1/20=0.05$.

REM. ცუდი ბილეთის შეხვედრის თვალსაზრისით არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, როდის გახვალთ გამოცდაზე. (ძნელი წარმოსადგენია, როგორ ჩატარდებოდა გამოცდები, ეს რომ ასე არ იყოს).

PR. სატელევიზიო გადაცემა „ნაღდი შოუ" ატარებს თამაშს: 36 რიცხვიდან შეგიძლიათ ამოირჩიოთ 6. მოგებულია ის, ვინც 4 რიცხვს მაინც გამოიცნობს. რას უდრის მოგების ალბათობა?

B. შეიძლება თუ არა ფულის გაყოფა სამართლიანად

ჩვენ მოვიყვანთ ერთი მეტად საინტერესო ამოცანის მარტივ ვარიანტს. ამ ამოცანაზე მათემატიკოსები დიდხანს ფიქრობდნენ. როდესაც ნაპოვნი იქნა სწორი პასუხი, მათემატიკოსები მივიდნენ იმ დასკვნამდე, რომ დაიბადა ახალი მეცნიერება – ალბათობის თეორია. ეს მოხდა პარიზში 1654 წელს.

PR. ნარდის ფედერაციამ ფინალური მატჩისათვის დააწესა პრიზი $8000. მატჩი გრძელდება 6 მოგებამდე. როდესაც ანგარიში იყო 5:3, მატჩი ობიექტური მიზეზების გამო შეწყდა. როგორ უნდა განაწილდეს პრიზი სამართლიანად?

■ 1. თანხის განაწილება უნდა მოხდეს იმის მიხედვით, თუ რამდენია თითოეული მოთამაშისათვის მოგების ალბათობა.

2. მატჩის დასამთავრებლად არა უმეტეს 3 პარტიის ჩატარებაა საჭირო.

3. თითოეული პარტიის შედეგი ორია: მოგება ან წაგება. სამი პარტიის შესაძლო შედეგების რაოდენობა იქნება: 2.2.2=8.

4. აქედან მეორე მოთამაშე იგებს მხოლოდ ერთ შემთხვევაში (როდესაც მოიგებს სამივე პარტიას). დანარჩენ შვიდ შემთხვევაში იგებს პირველი.

5. პირველი მოთამაშის მოგების ალბათობაა 7/8, მეორესი – 1/8..

პასუხი: პირველ მოთამაშეს ეკუთვნის. $ 8000.7/8=$7000,
ხოლო მეორეს - $ 8000.1/8=$1000. ■

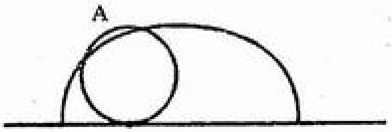
* ეს ამოხსნა ეკუთვნის პასკალს. პასკალისაგან დამოუკიდებლად სწორი პასუხი მიიღო ფერმამ.(პასკალი ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი

პიროვნებაა კაცობრიობის ისტორიაში. მას ეკუთვნის არა მხოლოდ ულამაზესი გეომეტრიული თეორემები, არამედ ლიტერატურული და ფილოსოფიური ნაშრომებიც. პასკალმა გამოიგონა გამომთვლელი მანქანა, რომელიც მოქმედებებს ასრულებდა ხუთნიშნა რიცხვებზე. დაამტკიცა, რომ ჰაერს გააჩნია ისეთივე წნევა, როგორც სითხეებს, შექმნა ბარომეტრი.

25 წლის ასაკში პასკალი ექცევა იენისტური რელიგიური მიმდინარეობის ქვეშ. იგი სახლდება მონასტერში და იწყებს ასკეტურ ცხოვრებას. ამ რელიგიური მიმდინარეობის ერთ–ერთი დებულების მიხედვით ამოცანებზე ფიქრი ცოდვად ითვლება და წარმოადგენს ბევრი უბედურების მიზეზს (ამ დებულებას ალბათ დღესაც ბევრი სტუდენტი იზიარებს). ამ პერიოდში პასკალი Lois de Montalte–ის ფსევდონიმით წერს ცნობილ „წერილებს“, რომელიც იეზუიტების წინააღმდეგ იყო მიმართული.

მალე პასკალი კვლავ უბრუნდება მათემატიკას. ეს მოხდა სრულიად შემთხვევით. ერთხელ პასკალს ძალიან ასტკივდა კბილი. ყურადღების გადატანის მიზნით მან დაიწყო ამოცანაზე ფიქრი. მოულოდნელად კბილის ტკივილმა იკლო. პასკალმა გააკეთა დასკვნა: ღმერთი მანიშნებს ისევ დაუბრუნდი მათემატიკასო.

DEF. ციკლოიდა ეწოდება წირს, რომელსაც შემოხაზავს წრეწირის ფიქსირებული წერტილი, როდესაც წრეწირი სრიალის გარეშე გორავს წრფეზე.



1658 წელს პასკალის ინიციატივით ეწყობა კონკურსი, რომელშიც მონაწილეობას ღებულობენ გამოჩენილი მათემატიკოსები. დასმული იყო 6 ამოცანა ციკლოიდას შესახებ. კონკურში ყველაზე დიდ წარმატებას მიაღწია ჰოლანდიელმა მათემატიკოსმა ქრისტიან ჰიუგენსმა. მან ამოხსნა 4 ამოცანა. საუკეთესოდ აღიარებული იქნა ვინმე Amos Dettonvile–ის ნაშრომი. ეს გვარი იგივე ასოებისაგან შედგება, რაც "წერილების" ავტორის ფსევდონიმი. საუკეთესო ნაშრომის ავტორი ბლეზ პასკალი აღმოჩნდა.*

II თავი

ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

ანალიზური გეომეტრიის შექმნის შესახებ ისტორიკოსებს საერთო აზრი არ გააჩნიათ. ერთი ნაწილი ფიქრობს, რომ იგი შეიქმნა საფრანგეთში და მისი ავტორები არიან პიერ ფერმა და რენე დეკარტი. დეკარტი პირველ რიგში იყო ფილოსოფოსი. მან ანალიზური გეომეტრიის გარდა მოიგონა შემეცნების ერთი ზოგადი წესი: რთული საკითხის განხილვა უნდა დაიწყოს მარტივით. გეომეტრიაში ყველაზე მარტივი ცნებაა წრფე. ჩვენ დავარღვევთ დეკარტის ამ წესს და ანალიზური გეომეტრიის შესწავლას დავიწყებთ არა წრფით, არამედ ვექტორით.

1. ვექტორი

A. ვექტორის ცნება

DEF. 1. მიმართულ მონაკვეთს ვექტორი ეწოდება.

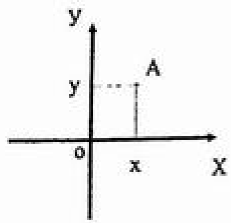
2. ვექტორი, რომლის საწყისი წერტილია A და ბოლო B აღინიშნება $\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი. ხშირად იყენებენ ლათინური ანბანის მცირე ასოებსაც: $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}$.

ვექტორის კორდინატები სიბრტყეზე

DEF. 1. მართკუთხა კორდინატთა სისტემა ეწოდება ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ რიცხვით ღერძს, რომელთაც აქვთ საერთო სათავე.

2. სათავეს აღნიშნავენ O ასოთი. ჰორიზონტალურ ღერძს აღნიშავენ X–ით, ხოლო ვერტიკალურს Y–ით.

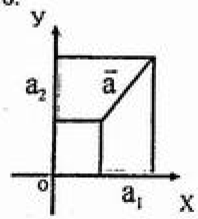
3. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი წერტილი. ამ წერტილიდან კოორდინატთა ღერძებზე დავუშვათ მართობები. მივიღებთ x და y წერტილებს (რიცხვებს). მათ ეწოდებათ წერტილის კოორდინატები. კერძოდ, x–ს ეწოდება აბსცისა, ხოლო y–ს ორდინატა.



4. ჩანაწერი $A(x,y)$ იკითხება ასე: A წერტილის კოორდინატებია x და y.

ვთქვათ $A(x_1,y_1)$ და $B(x_2,y_2)$.

DEF. 1. $\vec{AB}$ ვექტორის კოორდინატები ეწოდება რიცხვებს:



$$a_1=x_2-x_1,$$
$$a_2=y_2-y_1.$$

2. თუ $\bar{a}$ ვექტორის კოორდინატებია a_1 და a_2 მაშინ, წერენ: $\bar{a}=(a_1,a_2)$.

B. ვექტორის სიგრძე

DEF. 1. ვექტორიის ბოლოებს შორის მანძილს, ვექტორის სიგრძე ეწოდება.

2. $\bar{a}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება $|\bar{a}|$ სიმბოლოთი.

DEF. 1. ვექტორს, რომლის სიგრძე ნულის ტოლია,, ეწოდება ნულოვანი ვექტორი.

2. ნულოვან ვექტორს აღნიშნავენ $\bar{0}$ სიმბოლოთი:

$$\bar{0}=(0,0).$$

ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით

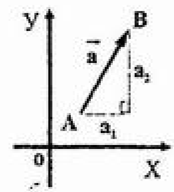
ვთქვათ, ცნობილია ვექტორის კოორდინატები:

$$\vec{a}=(a_1,a_2).$$

თეორემა. ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,.}$$

■ გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა:



$$AB^2=a_1^2+a_2^2 \Rightarrow$$
$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$ ■

C. ვექტორების ტოლობა

ვთქვათ მოცემულია ორი ვექტორი:

$$\bar{a}=(a_1,a_2) \text{ და } \vec{b}=(b_1,b_2).$$

DEF. 1. ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთნაირი სიგრძე და მიმართულება.

2. თუ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები ტოლია, მაშინ წერენ:

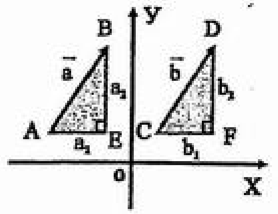
$$\bar{a}=\bar{b}.$$

REM. პარალერული გადატანით ვექტორი არ იცვლება.

თეორემა. ტოლი ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად ტოლია:

$$\bar{a}=\bar{b} \Leftrightarrow a_1=b_1 \text{ და } a_2=b_2\,.$$

■ დამტკიცება ანალოგიურია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ვექტორები მიმართულია ჩრდილო-აღმოსავლეთით. ასეთი ვექტორების კოორდინატები დადებითია.



$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow AB=CD$ და

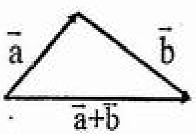
$\angle A=\angle C \Leftrightarrow ABE=CDF$

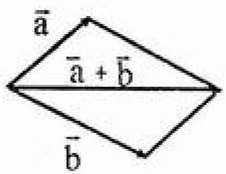
$\Leftrightarrow a_1=b_1$ და $a_2=b_2$. ■

D. ვექტორების შეკრება

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები.

DEF. $\vec{b}$ ვექტორი პარალელურად გადავიტანოთ $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოში. $\vec{a}+\vec{b}$ არის ვექტორი, რომელიც $\vec{a}$ ვექტორის დასაწყისს აერთებს $\vec{b}$ ვექტორის ბოლოს.





PR. $\vec{b}$ ვექტორი პარალელურად გადავიტანოთ $\vec{a}$ ვექტორის დასაწყისში. ამ ორ ვექტორზე ავაგოთ პარალელოგრამი. მოცემული ვექტორების დასაწყისიდან გამოსული დიაგონალი არის $\vec{a}+\vec{b}$. დაამტკიცეთ.

ვექტორების ჯამის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით

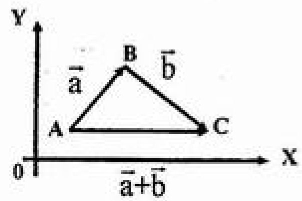
ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი:

$$\vec{a}=(a_1,a_2) \text{ და } \vec{b}=(b_1,b_2).$$

თეორემა. ვექტორების შეკრების დროს მათი შესაბამისი კოორდინატები იკრიბება:

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\, a_2+b_2).}$$

■ ვთქვათ, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ და $C(x_3,y_3)$.



მაშინ
$$+\begin{array}{r} x_3-x_2=b_1 \\ x_2-x_1=a_1 \\ \hline x_3-x_1=a_1+b_1 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} y_3-y_2=b_2 \\ y_2-y_1=a_2 \\ \hline y_3-y_1=a_2+b_2 \end{array}$$

ამიტომ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}=(x_3-x_1,\, y_3-y_1)=(a_1+b_1,\, a_2+b_2)$. ■

E. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

DEF. 1. $\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე გამრავლების დროს ვექტორის სიგრძე მრავლდება $|\lambda|$-ზე, ხოლო ვექტორის მიმართულება რჩება იგივე, თუ $\lambda>0$ და იცვლება საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $\lambda<0$.

2. $\vec{a}$ ვექტორის ნამრავლი λ რიცხვზე აღინიშნება $\lambda\vec{a}$ სიმბოლოთი.

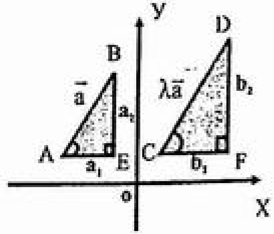
ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით

ვთქვათ $\vec{a}=(a_1,a_2)$ და λ არის რიცხვი.

თეორემა. ვექტორის რიცხვზე გამრავლების დროს ვექტორის ორივე კოორდინატი მრავლდება ამ რიცხვზე:

$$\boxed{\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\, \lambda a_2).}$$

■ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\vec{a}$ ვექტორი მიმართულია ჩრდილო-აღმოსავლეთით და $\lambda>0$. ვთქვათ $\vec{b}=(b_1,b_2)$. მაშინ ABE~CDF, მსგავსების კოეფიციენტია λ. ამიტომ $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$. ■



შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ძირითადი თვისებები

1. გადანაცვლებადობის კანონი:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2. ჯუფდებადობის კანონი:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

3. განრიგებადობის კანონი

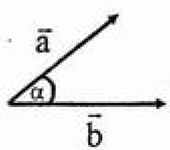
$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}, \quad \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

REM. ოთხივე ტოლობა ადვილად მოწმდება კოორდინატების საშუალებით. მაგალითად,

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=(b_1+a_1,b_2+a_2)=\vec{b}+\vec{a}.$$

F. სკალარული ნამრავლი

DEF. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი, რომელიც ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

სკალარული ნამრავლის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით.

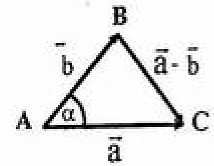
მოცემულია ორი ვექტორი და ცნობილია მათი კოორდინატები:

$$\vec{a}=(a_1,a_2) \quad \text{და} \quad \vec{b}=(b_1,b_2).$$

თეორემა.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.}$$

■ განვიხილოთ ABC სამკუთხედი.



$$\left.\begin{aligned}\vec{a}&=(a_1,a_2)\\ \vec{b}&=(b_1,b_2)\\ \vec{a}-\vec{b}&=(a_1-b_1,a_2-b_2)\end{aligned}\right|\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}AC^2&=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2\\ AB^2&=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2\\ BC^2&=|\vec{a}-\vec{b}|^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\end{aligned}\right|\Rightarrow$$

$$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos\alpha\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=\\ &=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\end{aligned}\right|\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2=\\ &=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\end{aligned}\right|\Rightarrow$$

■

$$a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

PR. ვთქვათ $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{i}=(1,0)$ და $\vec{j}=(0,1)$.

1. ააგეთ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორები.

2. გამოთვალეთ ა) $\vec{a} \cdot \vec{i}$, ბ) $\vec{a} \cdot \vec{j}$.

პასუხი: ა) a_1.   ბ) a_2.

სკალარული ნამრავლის თვისებები

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, როცა $\vec{a} \neq 0$.

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

■ ყველა ეს თვისება ადვილად მოწმდება კოორდინატების საშუალებით.

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 > 0$, როცა ორივე კოორდინატი ნულს არ უდრის ერთდროულად.

PR. დაამტკიცეთ დანარჩენი თვისებები. ■

ორი ვექტორის პერპენდიკულარობის პირობა

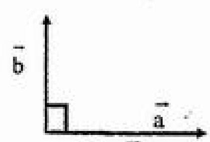
მოცემულია ორი ვექტორი და ცნობილია მათი კოორდინატები: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ და $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

თეორემა.

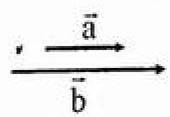
$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0.}$$

■ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \alpha = 90^0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$ ■



$\vec{a} \perp \vec{b}$



$\vec{a} \parallel \vec{b}$

ორი ვექტორის პარალელობის პირობა

მოცემულია ორი ვექტორი და ცნობილია მათი კოორდინატები:

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ და } \vec{b} = (b_1, b_2).$$

თეორემა.

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$$

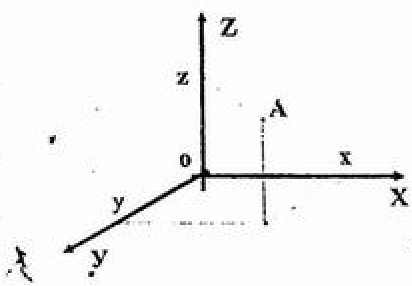
■ ორი ვექტორის პარალელობა ნიშნავს, რომ ერთი მათგანი მიიღება მეორისაგან გარკვეულ λ რიცხვზე გამრავლებით. ცხადია, $|\lambda|$ არის ვექტორების სიგრძეების შეფარდება; λ დადებითია, თუ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, და უარყოფითია, როდესაც ვექტორებს აქვთ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულება. ამიტომ

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_1}.$$ ■

G. ვექტორის კოორდინატები სივრცეში

სივრცეში ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ეს არის სამი ურთიერთმართობული ღერძი, რომელთაც აქვთ საერთო სათავე. სივრცეში ნებისმიერ წერტილს აქვს სამი კოორდინატი: A(x, y, z).

1. x არის A წერტილის გეგმილი OX ღერძზე,
2. y არის A წერტილის გეგმილი OY ღერძზე,
3. z არის A წერტილის გეგმილი OZ ღერძზე.



DEF. 1. ვთქვათ, $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$.

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები ეწოდება რიცხვებს:

$$a_1 = x_2 - x_1,\quad a_2 = y_2 - y_1 \text{ და } a_3 = z_2 - z_1.$$

2. თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია a_1, a_2 და a_3, მაშინ წერენ: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

PR. 1. დაწერეთ კოორდინატების საშუალებით ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.

პასუხი: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

2. დაწერეთ კოორდინატების საშუალებით ორი ვექტორის ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

პასუხი: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

3. დაწერეთ კოორდინატების საშუალებით ვექტორის რიცხვზე გამრავლების გამოსათვლელი ფორმულა.

პასუხი: $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

4. დაწერეთ კოორდინატების საშუალებით ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის გამოსათვლელი ფორმულა.

პასუხი: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

2. წრფე

A. რა არის წირის განტოლება

დავაფიქსიროთ OXY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ტოლობა, რომელიც შეიცავს x და y ცვლადებს: $F(x,y)=0$. განვიხილოთ სიბრტყის ყველა ის წერტილი $M(x,y)$, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ განტოლებას; აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე Γ-თი:

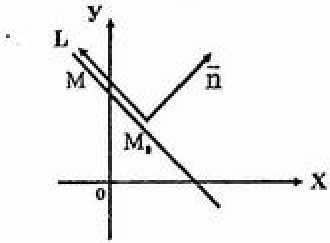
$$\Gamma = \{M(x,y) \mid F(x,y)=0\}.$$

DEF. $F(x,)=0$ გამოსახულებას უწოდებენ Γ-ს განტოლებას.

B. წრფის ზოგადი სახის განტოლება

ავიღოთ ნებისმიერი L წრფე. ჩვენი მიზანია დავწეროთ L წრფის განტოლება.

1. L წრფეზე დავაფიქსიროთ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილი.
2. ავიღოთ ნებისმიერი $\vec{n} = (A, B)$ ვექტორი, რომელიც L წრფის პერპენდიკულარულია.



DEF. წრფის პერპენდიკულარულ ვექტორს ნორმალი ეწოდება.

3. ვთქვათ, $M(x,y)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია.
4. განვიხილოთ $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0)$ ვექტორი.
5. გვაქვს

$$M(x,y) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$Ax+By-Ax_0-By_0=0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $C=-Ax_0-By_0$.

მივიღებთ განტოლებას:

$$\boxed{Ax+By+C=0.}$$

DEF. ამ განტოლებას ეწოდება წრფის ზოგადი სახის განტოლება.

REM. ზოგადი სახის განტოლებაში A, B და C არიან რიცხვები, ხოლო x და y ცვლადები.

A, B და C რიცხვების გეომეტრიული შინაარსი.

1. A და B რიცხვები განსაზღვრავენ წრფის მიმართულებას.

■ $\vec{n}=(A,B)$ ვექტორი არის წრფის ნორმალი:

$$\vec{n}=(A,B)\perp L. \quad ■$$

A და B რიცხვები ერთდროულად არ შეიძლება გახდნენ ნულის ტოლი, ვინაიდან $\vec{n}\neq 0$. ეს პირობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$A^2+B^2\neq 0.$$

2. C რიცხვს თავისუფალ წევრს უწოდებენ. თუ A და B რიცხვები დაფიქსირებულია, მაშინ C რიცხვის ცვლილება გამოიწვევს წრფის პარალელურ გადაადგილებას.

3. წრფის განტოლება არის ორი ერთწევრის ჯამი. ორივე მათგანი პირველი ხარისხისაა. წირს, რომლის განტოლება პირველი ხარისხისაა, პირველი რიგის წირი ეწოდება. წრფე პირველი რიგის წირია.

PR. ააგეთ წრფე:

1) $x-1=0$. 2) $y+2=0$. 3) $2x-y=0$. 4) $2x-y+2=0$.

C. წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით

ვთქვათ, მოცემულია წრფე და მისი ზოგადი სახის განტოლება:

$$Ax+By+C=0.$$

ჩავთვალოთ, რომ $B\neq 0$. განტოლებიდან გამოვსახოთ y, მივიღებთ:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$k=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}.$$

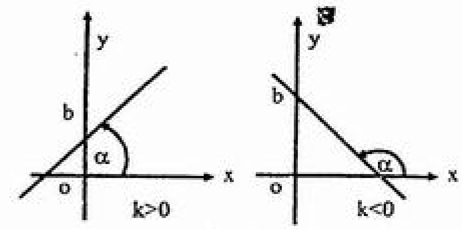
მივიღებთ განტოლებას:

$$\boxed{y=kx+b.}$$

DEF. ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით.

k და b რიცხვების გეომეტრიული შინაარსი

1. k რიცხვს ეწოდება კუთხური კოეფიციენტი. k არის იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც L წრფე ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან.



თეორემა.

$$\boxed{k=tg\alpha.}$$

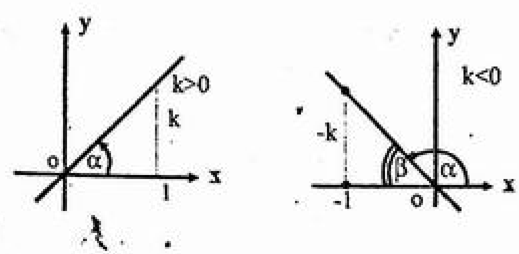
■ წრფის მიმართულება არ არის დამოკიდებული თავისუფალ წევრზე, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $b=0$. მივიღებთ: $y=kx$. ეს წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) ვთქვათ $k>0$. როცა $x=1$, მაშინ $y=k\cdot 1=k$. ამიტომ

$$tg\alpha=k/1=k.$$

2) ვთქვათ, $k<0$. როცა $x=-1$, მაშინ $y=k\cdot(-1)=-k>0$. ამიტომ

$$tg\alpha=tg(180-\beta)=-tg(\beta)=-(-k)/1=k. \quad ■$$



2. b არის L წრფის გადაკვეთის წერტილი OY ღერძთან.

■ როცა $x=0$, მაშინ $y=k \cdot 0+b=b$. ■

3. ანალიზური გეომეტრიის ზოგიერთი ამოცანა

A. მანძილი ორ წერტილს შორის

ცნობილია: $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$.

გამოთვალეთ: AB.

პასუხი: $\boxed{AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$

■ განვიხილოთ ვექტორი: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$.

AB მანძილი არის $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე:

$$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad ■$$

B. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული შეფარდებით

მოცემულია: 1. $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$.

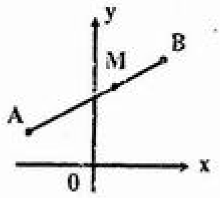
2. M წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს შეფარდებით:

$$AM/MB=\lambda.$$

გამოთვალეთ: $M(x,y)$.

პასუხი:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.}$$



■ განვიხილოთ ვექტორები:

$\overrightarrow{AM}=(x-x_1, y-y_1)$, $\overrightarrow{MB}=(x_2-x, y_2-y)$.

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-x_1=\lambda(x_2-x) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y)\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+\lambda x=x_1+\lambda x_2 \\ y+\lambda y=y_1+\lambda y_2\end{matrix}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

PR. ცნობილია $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$. იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები.

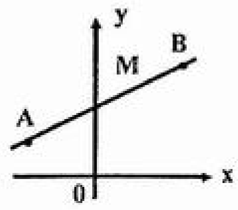
პასუხი: $x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$. ■

C. ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

ცნობილია: $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$.

იპოვეთ: AB წრფის განტოლება.

პასუხი: $$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \quad (1)$$



■ 1. (1) არის პირველი ხარისხის განტოლება, ამიტომ იგი წრფის განტოლებაა; აღვნიშნოთ ეს წრფე L-ით.

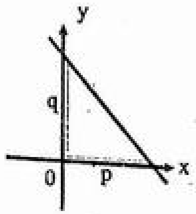
2. ჩავსვათ განტოლებაში $x=x_1$, $y=y_1$, მივიღებთ: $0=0$ ე.ი. L წრფე გადის A წერტილზე.

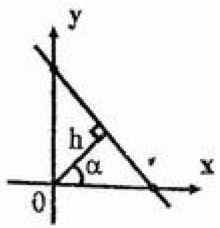
3. ჩავსვათ განტოლებაში $x=x_2$, $y=y_2$, მივიღებთ: $1=1$ ე.ი. L წრფე გადის B წერტილზე.

4. ორ წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე. ამიტომ (1) არის საძიებელი წრფის განტოლება. ■

PR. 1) ცნობილია, $A(p, 0)$ და $B(0, q)$. იპოვეთ წრფის განტოლება.

პასუხი: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.





2) ცნობილია, რომ L წრფეზე სათავიდან დაშვებული მართობი OX

ღერძთან ადგენს α კუთხეს და მართობის სიგრძეა h. იპოვეთ წრფის განტოლება.

პასუხი: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-h=0$.

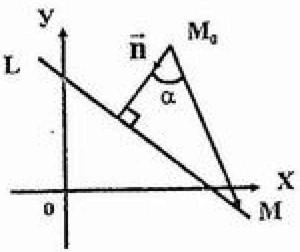
D. მანძილი წერტილიდან წრფემდე

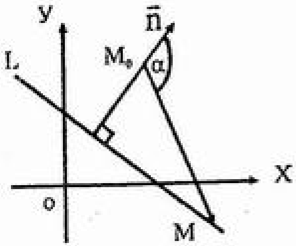
ცნობილია: L წრფის განტოლება $Ax+By+C=0$ და $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის კოორდინატები.

გამოთვალეთ: d მანძილი M_0 წერტილიდან L წრფემდე.

პასუხი: $$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

■ L წრფეზე ავირჩიოთ ნებისმიერი წერტილი $M(x,y)$. განვიხილოთ ვექტორი $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ და ნორმალი $\vec{n}=(A,B)$. ვთქვათ α არის კუთხე ამ ორ ვექტორს შორის, მაშინ





$d=|\overrightarrow{M_0M}|\cdot|\cos\alpha|$. ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $|\vec{n}|$-ზე:

$$d\cdot|\vec{n}|=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{M_0M}|\cdot|\cos\alpha|=|\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}|=$$

$$=|A(x-x_0)+B(y-y_0)|=|Ax+By-Ax_0-By_0|.$$

M წერტილი მდებარეობს წრფეზე, ამიტომ ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ L წრფის განტოლებას:

$$Ax+By+C=0 \rightarrow Ax+By=-C.$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულება ზედა ტოლობაში. მივიღებთ

$$d|\vec{n}|=|-C-Ax_0-By_0| \Rightarrow d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$ ■

E. კუთხე ორ წრფეს შორის

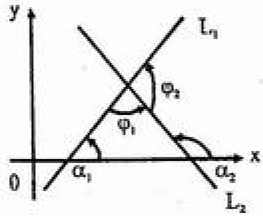
ცნობილია: L_1 წრფის განტოლება: $y=k_1x+b_1$,

L_2 წრფის განტოლება: $y=k_2x+b_2$.

გამოთვალეთ: φ კუთხე ამ ორ წრფეს შორის:

პასუხი: $$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

■ სამკუთხედის გარე კუთხე უდრის შიგა არამოსაზღვრე კუთხეების ჯამს:



$$\varphi_1=\alpha_2-\alpha_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

$$\varphi_2=\pi-\varphi_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_2=-\operatorname{tg}\varphi_1=$$

$$=-\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

ორ წრფეს შორის კუთხედ მიღებულია უმცირესი φ_1 და φ_2 კუთხეებს შორის. ამიტომ

$$\varphi=\min(\varphi_1,\varphi_2) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$ ■

F. ორი წრფის პერპენდიკულარობისა და პარალელობის პირობა

მოცემულია ორი წრფე:

L_1 წრფის განტოლებაა: $A_1x+B_1y+C_1=0$,

L_2 წრფის განტოლებაა: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

თეორემა 1. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

$$2.\ L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

■ ორი წრფე ურთიერთპერპენდიკულარულია (პარალელურია), როდესაც ურთიერთპერპენდიკულარულია (პარალელურია) მათი ნორმალები:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

$$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \| \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=0.$$ ■

PR. ვთქვათ, L_1 წრფის განტოლებაა: $y=k_1x+b_1$,
L_2 წრფის განტოლება: $y=k_2x+b_2$.

დაამტკიცეთ: 1. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

2. $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$.

4. მეორე რიგის წირები

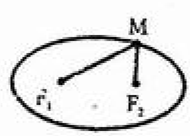
A. ელიფსი

ვთქვათ, F_1 და F_2 ფიქსირებული წერტილებია სიბრტყეზე, ხოლო a არის დადებითი რიცხვი.

DEF. ელიფსი ეწოდება წირს, რომლის ნებისმიერი წერტილიდან F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და უდრის $2a$–ს.

ელიფსი არის სიმრავლე:

$$E=\{M|\ MF_1+MF_2=2a\}.$$



DEF. F_1 და F_2 წერტილებს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება.

ელიფსის კანონიკური განტოლება

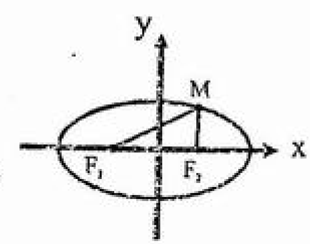
ვთქვათ ცნობილია a რიცხვი და ფოკუსების კოორდინატები $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$; ცხადია $a>c$.

თეორემა. ელიფსის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,} \qquad b^2=a^2-c^2.$$

■ ვთქვათ, $M(x,y)$ ნებისმიერი წერტილია. მაშინ

$$M(x,y)\in E \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$



გადავიტანოთ ერთი შესაკრები მარჯვენა მხარეს და ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2 \Leftrightarrow$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში:

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

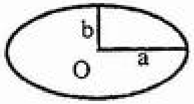
შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $b^2 = a^2 - c^2$. მივიღებთ:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad ■$$

a, b და c რიცხვების გეომეტრიული შინაარსი

1. a არის ელიფსის დიდი რადიუსი.

■ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილში y=0:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a. ■$$

2. b არის ელიფსის მცირე რადიუსი.

■ OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილში x=0:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b. \quad ■$$

3. c რიცხვს ეწოდება ფოკალური მანძილი. ეს ის მანძილია, რომლითაც ელიფსის ფოკუსები დაშორებულია ცენტრიდან.

ექსცენტრისიტეტი

DEF. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება რიცხვს:

$$e = c/a.$$

ექსცენტრისიტეტი გვიჩვენებს, რამდენად არის გაჭიმული ელიფსი.

თეორემა. $0<e<1$.

$$■ \quad a>c \Rightarrow e = \frac{c}{a} < 1. \quad ■$$

REM. თუ $e\approx 0$, მაშინ ელიფსი ძალიან გავს წრეწირს.

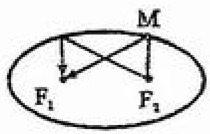
$$■ \quad e\approx 0 \Leftrightarrow c\approx 0 \Leftrightarrow a\approx b. \quad ■$$

რაც უფრო დიდია ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო გაჭიმულია ელიფსი.

REM. ჩვენ გამოვიყვანეთ კანონიკური განტოლება. ეს ისეთი განტოლებაა, რომელიც ჩაწერილია სპეციალურ კოორდინატთა სისტემაში, სადაც OX ღერძი გადის ფოკუსებზე, ხოლო სათავე ემთხვევა ელიფსის ცენტრს.

ელიფსის ოპტიკური თვისება

ერთი ფოკუსიდან ნებისმიერი მიმართულებით გამოსული სხივი ელიფსის ზედაპირიდან არეკვლის შემდეგ გაივლის მეორე ფოკუსში.



სწორედ ამიტომ უწოდებენ F_1 და F_2 წერტილებს ფოკუსებს.

(* ელიფსის ოპტიკურ თვისებას იყენებდნენ არქიტექტურაში. XVI საუკუნის ზოგიერთ ნაგებობას აქვს ელიფსური ფორმის დარბაზი. ასეთ შენობას გააჩნდა ერთი საინტერესო თვისება: ერთ ფოკუსში მყოფი ადამიანის ლაპარაკი ძალიან კარგად ისმოდა მეორე ფოკუსში. ელიფსური ფორმა გვხვდება ყოველდღიურ ცხოვრებაში. ბორბლის კონტური, თუ მას გვერდიდან შევხედავთ, ელიფსია. საკმარისია წყლიანი ჭიქა ოდნავ გადაიხაროს, რომ წყლის ზედაპირი მიიღებს ელიფსის ფორმას. მთავარი მაინც ის არის, რომ ელიფსი არის ის ტრაექტორია, რომელზეც მოძრაობენ პლანეტები.

პლანეტების მოძრაობა ყოველთვის წარმოადგენდა დიდ საიდუმლოებას. იმათ, ვისაც შეეძლო ამ საიდუმლოების ახსნა, განსაკუთრებული ადგილი ეკავათ საზოგადოებაში. ასე იყო მაგალითად, ძველ ეგვიპტეში. პლანეტების შესახებ ლაპარაკი შეეძლოთ მხოლოთ ქურუმებს, ისინი წინასწარმეტყველებდნენ წელიწადის დაწყებას, ნიშნავდნენ დღესასწაულებს, ადგენდნენ კალენდარს.

სამყაროს მეტ-ნაკლებად მეცნიერული მოდელი პირველად ჩამოყალიბდა ალექსანდრიაში (II ს.). მისი ავტორი იყო კლავდიუს პტოლემეოსი,

ამ სისტემის მიხედვით სამყაროს ცენტრი ეკავა დედამიწას, ხოლო მის გარშემო მოძრაობდნენ დანარჩენი პლანეტები, მათ შორის იყო მზეც. ეს სისტემა გეოცენტრული სისტემის სახელით მოინათლა, რომელმაც საკმაოდ დიდხანს, დაახლოებით თხუთმეტი საუკუნე, იარსება. ამის მიზეზი ალბათ ის იყო, რომ ამ სისტემას მხარი დაუჭირა ეკლესიამ.

XVI საუკუნეში ნიკოლო კოპერნიკი მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ პლანეტების მოძრაობა, რომელიც აღწერილია გეოცენტრულ სისტემაში, ძალიან რთულია. მისი აზრით სამყარო უფრო მარტივად უნდა ყოფილიყო მოწყობილი. ამ მიზნით მან ადგილები შეუცვალა დედამიწას და მზეს. ასე გაჩნდა ჰელიოცენტრული სისტემა. სხვათაშორის, აზრი იმის შესახებ, რომ დედამიწა ბრუნავს მზის გარშემო, გამოითქვა ჯერ კიდევ ძველი წელთაღრიცხვის III საუკუნეში. იგი ეკუთნოდა არისტაქეს.

ჰელიოცენტრულ სისტემას ეკლესიამ სასტიკი ბრძოლა გამოუცხადა. ეკლესია ვერ ეგუებოდა იმ აზრს, რომ დედამიწას, რომელიც ღმერთის მიერ იყო შექმნილი, არ ეკავა გამორჩეული ადგილი სამყაროში, კერძოდ, მისი ცენტრი. ჰელიოცენტრულ სისტემას მხარი დაუჭირა გალილეიმ, ამის გამო 1633 წელს იგი წარსდგა ინკვიზიციის წინაშე. 70 წლის გალილეი, რომელსაც წამება ემუქრებოდა, იძულებული გახდა უარი ეთქვა თავის შეხედულებებზე. ვატიკანმა მხოლოდ მეოცე საუკუნის ბოლოს მოახერხა გალილეის რეაბილიტაცია.

რაოდენ საოცარიც არ უნდა იყოს, ფაქტია, რომ ეკლესია ხელს უშლიდა იმას, რაშიც პირველ რიგში თავად იყო დაინტერესებული. თეოლოგებისათვის აუცილებელი იყო ქრონოლოგიის ცოდნა. თარიღების დადგენას ესაჭიროებოდა პლანეტების ზუსტი მოძრაობის აღწერა. ეს მოითხოვდა პლანეტების მოძრაობაზე ხანგრძლივ დაკვირვებას. ასეთ დაკვირვებას იმ დროისათვის შედარებით წარმატებით აწარმოებდა დანიელი ასტრონომი ტიჰო ბრაგე. იგი იყო ჩეხეთის სამეფო კარის ასტრონომი. ბრაგეს გარდაცვალების შემდეგ ამ პოსტს იკავებს იოჰან კეპლერი, ეროვნებით გერმანელი. კეპლერის ხელში აღმოჩნდება ბრაგეს 25-წლიანი დაკვირვების შედეგები. ამ დაკვირვებების საფუძველზე 1605 წელს კეპლერი ადგენს, რომ პლანეტები მოძრაობენ არა წრეწირებზე, არამედ ელიფსებზე, რომელთა ფოკუსში იმყოფება მზე. ამ ფაქტის დადგენა არ იყო ადვილი. საქმე ისაა, რომ პლანეტის მოძრაობის ტრაექტორია ძალიან გავს წრეწირს. ამ ტრაექტორიის ექსცენტრიტეტი მცირე რიცხვია, მაგალითად დედამიწისათვის $e=0.02$. გაჭიმულ ტრაექტორიებზე მოძრაობენ კომეტები, ასეთი ტრაექტორიის ექსცენტრისიტეტი ახლოს არის ერთიანთან.

რატომ მოძრაობენ პლანეტები ელიფსებზე და არა რომელიმე სხვა წირებზე? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა შესაძლებელი გახდა მას შემდეგ, როდესაც აღმოჩენილი იქნა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ამ კანონის შინაარსი ისაა; რომ მიზიდულობის ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია. ეს ფაქტი დაადგინა რობერტ ჰუკმა, და არა ნიუტონმა, როგორც ამას ბევრ წიგნებში წერენ.

ნიუტონს სრულიად სხვა დამსახურება მიუძღვის. მან წმინდა მათემატიკური მეთოდებით დაამტკიცა, რომ თუ მიზიდულობის ძალა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია, მაშინ პლანეტის მოძრაობის ტრაექტორია იქნება ელიფსი. ამისთვის ნიუტონმა ჩამოაყალიბა მექანიკის სამი კანონი, რომლებიც დღეს მის სახელს ატარებს, თუმცა არც ერთი მათგანი ნიუტონს არ ეკუთვნის. პირველი კანონი ფაქტობრივად დაადგინა გალილეიმ, მეორე — ჰიუგენსმა, ხოლო მესამე — ჰუკმა.

ჰუკის სახელი დღეისათვის შემორჩა მხოლოდ ერთ კანონს — ეს არის ზამბარის დრეკადობის კანონი. ეს მაშინ, როდესაც ჰუკს ეკუთვნის უამრავი აღმოჩენა. ჰუკმა აღმოაჩინა ის, რასაც დღეს ბოილ-მარიოტის კანონს ეძახიან. მან გააუმჯობესა მიკროსკოპი და პირველმა დაადგინა, რომ მცენარეები უჯრედებისაგან შედგებიან. იგი მიკროსკოპში აკვირდებოდა სხვადასხვა საგნებს და აკეთებდა მათ ჩანახატებს. ასე გაჩნდა მიკროგრაფია.. როგორც ჩანს, ჰუკი დაჯილდოვებული იყო მხატვრული ნიჭით. მას შესთავაზეს ლონდონის დაპროექტება, რომლის დიდი ნაწილი 1666 წელს დიდი ხანძრის დროს დაიწვა. ჰუკმა მართლაც შეადგინა ასეთი პროექტი. ამ პროექტის მიხედვით ლონდონის ქუჩებს ერთმანეთი უნდა გადაეკვეთათ მართი კუთხით. ეს იდეა არ იქნა მიღებული, მაგრამ იგი გამოიყენეს უფრო მოგვიანებით, ნიუ-იორკის მშენებლობის დროს.

ჰუკს ეკავა კურატორის თანამდებობა ინგლისის სამეფო საზოგადოებაში. კურატორის მოვალეობაში შედიოდა ყოველ პარასკევს ახალი აღმოჩენის შესახებ მოხსენებით გამოსვლა. მას უნდა ჰქონოდა ინფორმაცია ყველა მნიშვნელოვანი აღმოჩენის შესახებ, შეემოწმებინა ისინი და დაერწმუნებია საზოგადოება მათ სისწორეში. ახალი აღმოჩენების ძიებაში ჰუკმა, რალა თქმა უნდა, ბევრი საკუთარი აღმოჩენაც გააკეთა. მან შენიშნა, მაგალითად, ფერადი რგოლები, რომლებიც საპნის აპკზე წარმოიშვებიან. ამ რგოლებს დღეს ნიუტონის რგოლებს უწოდებენ. ასეთი რგოლების არსებობას ჰუკი ხსნიდა იმით, რომ სინათლე არის ტალღა. ნიუტონი არ იზიარებდა ამ შეხედულებას. იგი თვლიდა, რომ სინათლე შედგება ნაწილაკებისაგან. მიუხედავად ამისა სწორედ ნიუტონმა გაზომა პირველად ტალღის სიგრძე.

სინათლის შესახებ სხვადასხვა შეხედულების გამო ჰუკსა და ნიუტონს შორის ურთიერთობა ძალიან დაიძაბა. იგი იმდენად გამწვავდა, რომ ნიუტონმა თავისი წიგნის ხელნაწერებში მსოფლიო მიზიდულობის კანონთან დაკავშირებით არც კი მოიხსენია ჰუკი. აქ ლაპარაკია ნიუტონის ცნობილ წიგნზე „ნატურფილოსოფიის მათემატიკური საფუძვლები", რო-

მელიც ნიუტონმა დაწერა ცნობილი ასტრონომის ჰალეის თხოვნით და გამოაქვეყნა მისივე სახსრებით, თუმცა ხელმოკლეობას ნიუტონი მაინცდამაინც არ უჩიოდა. ეს ის ჰალეი არის, რომელმაც იწინასწარმეტყველა თავისი სახელობის კომეტის დაბრუნება და რომელიც მართლაც დაბრუნდა 1986 წელს. ჰალეის ჩარევით ნიუტონმა გამოასწორა თავისი შეცდომა ჰუკთან მიმართებაში, მაგრამ ამან მაინც ვერ უშველა მათი ურთიერთობის გაუმჯობესებას. ჰუკის გარდაცვალების შემდეგ ნიუტონმა სამეფო საზოგადოებაში არ დატოვა ჰუკის არც ერთი პორტრეტი. აღმოჩნდა, რომ ჰუკს სხვა პორტრეტი არ გააჩნდა.*)

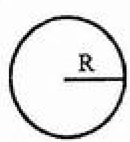
B. წრეწირი

ვთქვათ, O არის სიბრტყის ფიქსირებული წერტილი, ხოლო R – დადებითი რიცხვი.

DEF. წრეწირი ეწოდება წირს, რომლის ნებისმიერი წერტილი დაშორებულია O წერტილიდან R მანძილით.

ამრიგად, წრეწირი არის სიმრავლე:

$$C=\{M| MO=R\}.$$



DEF. O წერტილს ეწოდება წრეწირის ცენტრი, ხოლო R რიცხვს – რადიუსი.

წრეწირის კანონიკური განტოლება

REM. 1. წრეწირი არის ელიფსი, რომლის ფოკუსები ერთმანეთს ემთხვევა: $F_1=F_2$.

2. წრეწირი არის ელიფსი, რომლის დიდი და მცირე რადიუსები ერთმანეთის ტოლია.

■ $F_1=F_2 \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow a^2-b^2=0 \Leftrightarrow a=b$. ■

3. წრეწირი არის ელიფსი, რომლის ექსცენტრისიტეტი ნულის ტოლია.

■ $e=0 \Leftrightarrow c/a=0 \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow F_1=F_2$. ■

ვთქვათ, წრეწირის ცენტრი მდებარეობს O წერტილში და მისი რადიუსია R.

თეორემა. წრეწირის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\boxed{x^2+y^2=R^2}$$

DEF. ამ განტოლებას წრეწირის კანონიკური განტოლება ეწოდება.

■ ელიფსის კანონიკურ განტოლებაში ჩავსვათ $a=b=R$.

მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=R^2. \ ■$$

PR. ვთქვათ, წრეწირის ცენტრის კოორდინატებია $O(a,b)$, რადიუსი R. დაწერეთ წრეწირის განტოლება.

პასუხი: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

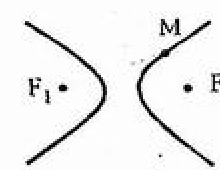
C. ჰიპერბოლა

ვთქვათ F_1 და F_2 ფიქსირებული წერტილებია სიბრტყეზე, ხოლო a არის დადებითი რიცხვი.

DEF. ჰიპერბოლა ეწოდება წირს, რომლის ნებისმიერი წერტილის F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივი სიდიდეა და უდრის 2a-ს.

ჰიპერბოლა არის სიმრავლეს:

$$H=\{M| |MF_2-MF_1|=2a\}.$$



DEF. F_1 და F_2 წერტილებს ჰიპერბოლის ფოკუსები ეწოდება.

ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება

ვთქვათ, ცნობილია a რიცხვი და ფოკუსების კოორდინატები $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$; ცხადია, $a<c$.

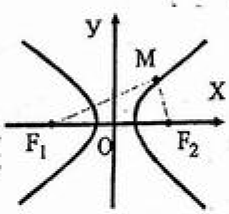
თეორემა. ჰიპერბოლის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad b^2=c^2-a^2.$$

■ ვთქვათ, M(x,y) ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$M(x,y)\in H \Leftrightarrow |MF_1-MF_2|=2a \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$



გადავიტანოთ ერთი შესაკრები მარჯვენა მხარეს და ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2xc+c^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2 \Leftrightarrow$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში:

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \;\Leftrightarrow\; (c^2-a^2)x^2-a^2y=a^2(c^2-a^2).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $b^2=c^2-a^2$. მივიღებთ:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \quad ■$$

a, b და c რიცხვების გეომეტრიული შინაარსი

1. a არის მანძილი, რომლითაც ჰიპერბოლის წვეროები დაშორებულია კოორდინატთა სათავიდან.

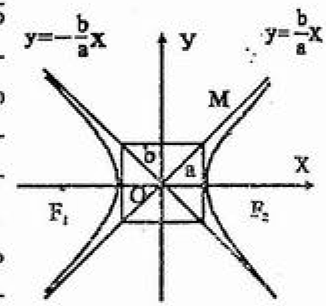
■ განტოლებაში ჩავსვათ y=0. a რიცხვს ჰიპერბოლის ნამდვილი რადიუსი ეწოდება. ■

2. ჰიპერბოლას აქვს ორი ასიმპტოტი.

DEF. ასიმპტოტი ეწოდება წრფეს, რომელსაც ჰიპერბოლის შტოები უახლოვდება უსასრულობაში.

ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

3. ჰიპერბოლის წვეროებიდან აღვმართოთ მართობები ასიმპტოტების გადაკვეთამდე. მიღებული წერტილები შევაერთოთ. მივიღებთ მართკუთხედს. მართკუთხედის ვერტიკალური გვერდია 2b.



4. c რიცხვი გვიჩვენებს რა მანძილითაა დაშორებული ჰიპერბოლის ფოკუსები ცენტრიდან.

ექსცენტრისიტეტი

DEF. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი ეწოდება რიცხვს: e=c/a.

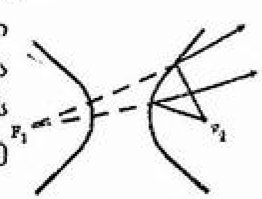
თეორემა. $e>1$.

■ ნახაზიდან ჩანს: $c>a \Leftrightarrow e=c/a>1$. ■

REM. თუ $e\approx 1$, მაშინ ჰიპერბოლის შტოები ახლოს არიან OX ღერძთან. როცა $e>>1$ (ე. ი. e საკმაოდ დიდია), შტოები ახლოს არიან OY ღერძთან.

ჰიპერბოლის ოპტიკური თვისება

ერთი ფოკუსიდან გამოსული სხივი ჰიპერბოლის ზედაპირიდან აირეკლება ისე, რომ მისი გაგრძელება გავრცელების საპირისპირო მხარეს გაივლის მეორე ფოკუსში.



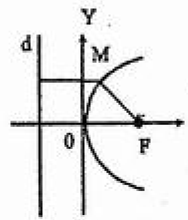
D. პარაბოლა

სიბრტყეზე დაფიქსირებულია d წრფე და F წერტილი.

DEF. პარაბოლა ეწოდება წირს, რომლის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადა დაშორებული წრფიდან და წერტილიდან.

პარაბოლა არის სიმრავლე:

$$P=\{M \mid MF=\rho(M,d)\}.$$



$\rho(M,d)$ არის მანძილი M წერტილიდან d წრფემდე.
d წრფეს ეწოდება დირექტრისა.
F წერტილს ეწოდება ფოკუსი.

პარაბოლის კანონიკური განტოლება

თეორემა. ვთქვათ, ფოკუსის კოორდინტებია $F(p/2, 0)$ და დირექტრისის განტოლებაა $x=-p/2$. მაშინ პარაბოლის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\boxed{y^2=2px.}$$

■ ავიღოთ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი $M(x,y)$, მაშინ

$$(x,y)\in P \Leftrightarrow MF=\rho(M,d)\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=x+p/2\Leftrightarrow$$
$$(x-p/2)^2+y^2=(x+p/2)^2\Leftrightarrow,$$
$$x^2-px+p^2/4+y^2=x^2+px+p^2/4\Leftrightarrow$$
$$y^2=2px. \qquad \blacksquare$$

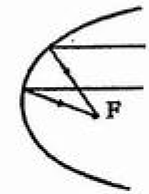
PR. პარაბოლის განტოლებაა $y=x^2$.

1) არის თუ არა ეს განტოლება კანონიკური?

2) იპოვეთ ფოკუსი და დირექტრისა.

პასუხი: 1) არა 2) $F(0, 1/4)$, $y=-1/4$.

პარაბოლის ოპტიკური თვისება



პარაბოლის ღერძის პარალელური სხივები პარაბოლის ზედაპირიდან არეკვლის შემდეგ იკრიბება ფოკუსში.

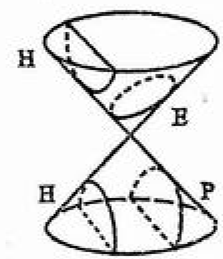
* პარაბოლის ეს თვისება გამოიყენება სპეციალური ტიპის ანტენებში, რომელთაც პარაბოლური ანტენები ეწოდბათ. ასეთ ანტენებში სიგნალის მიღება ხდება კოსმოსური თანამგზავრიდან.

ამ სიგნალის ინტესივობა საკმაოდ მცირეა. ინტესივობა ეს არის ფართობის ერთეულზე მიღებული ენერგია. პარაბოლური ანტენა შედგება პარაბოლური ფორმის ჯამისაგან და მცირე ფირფიტისაგან, რომელიც ანტენის ფოკუსშია მოთავსებული. სწორედ ამ ფირფიტაზე ხდება იმ ენერგიის ფოკუსირება, რომელიც ეცემა ჯამის ზედაპირზე. ასე ხდება მიღებული სიგნალის ინტესივობის ზრდა. ინტესივობა იზრდება იმდენჯერ, რამდენჯერაც ჯამის ფართობი მეტია ფირფიტის ფართობზე. *

ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა ერთი შეხედვით განსხვავებული ფორმის წირებია. მიუხედავად ამისა, მათ შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი.

კონიკური კვეთები

ავიღოთ უსასრულო ვერტიკალური კონუსები და სიბრტყე:



DEF. ვერტიკალური კონუსის თანაკვეთას სიბრტყესთან კონიკური კვეთა ეწოდება.

1. კონიკური კვეთა, რომელიც ჩაკეტილი წირია, არის ელიფსი.

2. კონიკური კვეთა არის პარაბოლა, როდესაც სიბრტყე კონუსის მსახველის პარალელურია და არ ეხება მას.

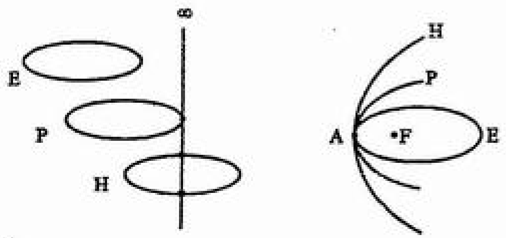
3. კონიკური კვეთა არის ჰიპერბოლა, თუ სიბრტყე კვეთს ორივე კონუსის ზედაპირს ერთდროულად.

ამრიგად, ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა არიან კონიკური კვეთები.

* ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა სინამდვილეში ერთი და იგივე წირია, ამ წირს ოვალი ეწოდება.

ავიღოთ ნებისმიერი წრფე. დავუმატოთ მას უსასრულო წერტილი. ეს ის წერტილია, რომელშიც წრფის ორივე ბოლო იკვრება. ყველა წრფეს დავუმატოთ თავისი უსასრულო წერტილი. დამატებული უსასრულო წერტილები ადგენენ წრფეს. ეს წრფე ალვნიშნოთ ∞ სიმბოლოთი.

1. თუ ოვალი არ კვეთს ∞ წრფეს, მაშინ იგი ელიფსია.
2. თუ ოვალი ეხება ∞ წრფეს, მაშინ იგი პარაბოლაა.
3. თუ ოვალი კვეთს ∞ წრფეს, მაშინ იგი ჰიპერბოლაა. *



რას ნიშნავს სიტყვები: პარაბოლა, ელიფსი და ჰიპერბოლა?

სიბრტყეზე დავაფიქსიროთ A და F წერტილები.

1. არსებობს მხოლოდ ერთი პარაბოლა, რომლის წვეროა A და ფოკუსი F. სიტყვა პარაბოლა ნიშნავს ზუსტს.

2. ყველა ელიფსი, რომლის წვეროა A და ფოკუსი F, მდებარეობს პარაბოლის შიგნით. სიტყვა ელიფსი ნიშნავს დანაკლისს.

3. ყველა ჰიპერბოლა, რომლის წვეროა A და ფოკუსი F, მოიცავს პარაბოლას. სიტყვა ჰიპერბოლა ნიშნავს გადამეტებას. სწორედ ამ შინაარსით იხმარება იგი ლიტერატურაში.

E. როგორ იყენებენ ეკონომისტები ანალიზურ გეომეტრიას

ეკონომიკის მთავარი ამოცანა არის შემდეგი: როგორ უნდა განაწილდეს გარკვეული რაოდენობის რესურსი, რომ მივიღოთ მაქსიმალური ეფექტი.

განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანა:

PR. ფირმა ამზადებს A და B ტიპის პროდუქციას.

1. A პროდუქცია ღირს \$200, ხოლო B – \$100.
2. ფირმას შეუძლია გამოუშვას მაქსიმუმ 100 ცალი A პროდუქცია ან 300 ცალი B პროდუქცია.
3. ფირმას შეუძლია შეამოწმოს 150 ცალი ნებისმიერი ტიპის პროდუქცია.

რა რაოდენობის A და B ტიპის პროდუქცია უნდა გამოუშვას ფირმამ, რომ მიიღოს მაქსიმალური მოგება?

ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა მათემატიკურ ენაზე:

ვთქვათ, x არის A პროდუქციის რაოდენობა, y არის B პროდუქციის რაოდენობა.

1. ცხადია, $x \geq 0$ და $y \geq 0$.
2. გამოშვებული პროდუქციის ფასია:

$$b=200x+100y.$$

3. ერთი ცალი A ტიპის პროდუქციის ნაცვლად ფირმამ შეიძლება გამოუშვას 3 ცალი B ტიპის პროდუქცია. თუ ფირმამ გამოუშვა x ცალი A ტიპის პროდუქცია, მაშინ მას შეუძლია გამოუშვას $100-x$ ცალი იგივე პროდუქცია, ან $3(100-x)$ ცალი B ტიპის პროდუქცია. ამიტომ

$$y \leq 3(100-x) \Leftrightarrow 3x+y \leq 300.$$

4. ფირმას შეუძლია შეამოწმოს 150 ცალი ნებისმიერი ტიპის პროდუქცია:

$$x+y \leq 150.$$

მივიღეთ შემდეგი ამოცანა:

PR. იპოვეთ (x,y) წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს:

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ 3x+y\leq 300,\ x+y\leq 150$$

და რომლისთვისაც გამოსახულება

$$b=200x+100y$$

ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

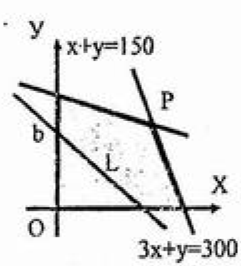
■ ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას:

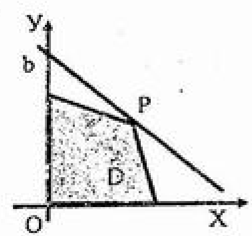
1. $x\geq 0$, არის მარჯვენა ნახევარსიბრტყე.

2. $y\geq 0$, არის ზედა ნახევარსიბრტყე.

3. $3x+y\leq 300$, არის ნახევარსიბრტყე, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $3x+y=300$ წრფით.

4. $x+y\leq 150$ არის ნახევარსიბრტყე, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $x+y=150$ წრფით.





ამ ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთაა ოთკუთხედი. აღვნიშნოთ იგი D ასოთი. ყველა ის წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$b=200x+100y \Leftrightarrow y=-2x+b/100,$$

არის წრფე. აღვნიშნოთ ეს წრფე L–ით. b-ს ცვლილება იწვევს L წრფის პა· ლელურ გადაადგილებას.

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ უდიდესი b, რომლისთვისაც L წრფე ეხება D ოთხკუთხედს. ცხადია b უდიდესია, როცა L წრფე გადის P წერტილზე. P წერტილი მდებარეობს $3x+y=300$ და $x+y=150$ წრფეებზე. P წერტილის კოორდინატები გამოითვლება სისტემიდან:

$$\begin{cases} 3x+y=300 \\ x+y=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=75 \\ y=75. \end{cases}$$ ■

პასუხი: $x=y=75$.

III თავი

მატრიცების ალგებრა

მათემატიკოსები ალგებრას უწოდებენ ნებისმიერ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებზეც შესაძლებელია გარკვეული მოქმედებების შესრულება. ალგებრა, რომელიც ისწავლება საშუალო სკოლის კურსში, არის ნამდვილი რიცხვების ალგებრა. პირველ თავში ჩვენ გავეცანით სიმრავლეების ალგებრას, მას ზოგჯერ ბულის ალგებრასაც უწოდებენ. ანალიზური გეომეტრიაც ფაქტობრივად ვექტორების ალგებრაა.

ქვემოთ ჩვენ გავეცნობით მატრიცების ალგებრას. სიტყვა მატრიცა ნიშნავს ცხრილს. აღმოჩნდა, რომ ცხრილებზე შეიძლება ისეთივე ოპერაციების ჩატარება, როგორიც რიცხვებზე. შეიძლება ცხრილების შეკრება, გამრავლება და გაყოფა. რიცხვებისაგან განსხვავებით ცხრილებს აქვთ ერთი თავისებურება: მათთვის საზოგადოდ არ სრულდება გადანაცვლებადობის კანონი.

1. მატრიცა

A. მატრიცის ცნება

DEF. რიცხვების მართკუთხა ცხრილს მატრიცა ეწოდება.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ზოგჯერ იყენებენ უფრო მოკლე აღნიშვნას: $A=(a_{ij})_{m,n}$.

DEF. 1. a_{ij} არის მატრიცის ის ელემენტი, რომლის სტრიქონის ნომერია i და სვეტის ნომერი j.

2. m რიცხვი არის მატრიცის სტრიქონების რაოდენობა. მას ზოგჯერ მატრიცის სიმაღლეს უწოდებენ.

n რიცხვი არის მატრიცის სვეტების რაოდენობა. მას ზოგჯერ მატრიცის სიგრძეს უწოდებენ.

3. mxn გამოსახულება არის მატრიცის განზომილება.

EX. მოცემულია მატრიცა: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 16 \end{pmatrix}$.

ამ მატრიცაში

$a_{11}=1,\ a_{12}=-2,\ a_{13}=0,$
$a_{21}=-5,\ a_{22}=3,\ a_{23}=16.$

მატრიცის განზომილებაა 2x3.

DEF. ორ მატრიცას ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

B. კვადრატული მატრიცა

DEF. მატრიცას, რომლის სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა ტოლია, კვადრატული ეწოდება:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEF. კვადრატული მატრიცის ლემენტებს:
$a_{11},\ a_{22}\ .\ .\ .\ ,\ a_{nn}$
მატრიცის დიაგონალი ეწოდება.

EX. მოცემულია მატრიცა: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A მატრიცის დიაგონალია 1, 0, 1.

DEF. კვადრატულ მატრიცას, რომლის დიაგონალი ერთიანებისგან შედგება, ხოლო ყველა სხვა ელემენტი ნულის ტოლია, ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

DEF. მატრიცას ეწოდება ნულოვანი, თუ მისი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

ერთეულოვანი და ნულოვანი მატრიცები ისეთივე როლს თამაშობენ მატრიცების ალგებრაში, როგორსაც 1 და 0 რიცხვებში.

2. მოქმედებები მატრიცებზე

A. შეუღლება

DEF. 1. შეუღლების დროს მატრიცის სტრიქონები გადაიქცევა სვეტებად, ხოლო სვეტები – სტრიქონებად.

2. A მატრიცის შეუღლებულს აღნიშნავენ A^* სიმბოლოთი:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

REM. შეუღლებულ მატრიცას ხშირად უწოდებენ ტრანსპონირებულს. ზოგჯერ ვარსკვლავის ნაცვლად იყენებენ აღნიშვნებს: A^t, A^T.

EX. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 16 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

B. მატრიცების შეკრება

მატრიცების შეკრება შეიძლება იმ შემთხვევაში, როდესაც მათ ერთნაირი განზომილება აქვთ. ვთქვათ,

$$A=(a_{ij})_{m,n}\ ,\ B=(b_{ij})_{m,n}.$$

DEF. მატრიცების შეკრების დროს მათი შესაბამისი ელემენტები იკრიბება:

$$\boxed{A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m,n}.}$$

EX. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

ძირითადი თვისებები

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

C. მატრიცის რიცხვზე გამრავლება

მოცემულია $A=(a_{ij})_{m,n}$ მატრიცა და α რიცხვი.

DEF. მატრიცის რიცხვზე გამრავლების დროს მატრიცის ყველა ელემენტი მრავლდება ამ რიცხვზე:

$$\boxed{\alpha A=(\alpha a_{ij})_{m,n}.}$$

EX. $$(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

DEF. $(-1)\cdot A$ მატრიცა აღინიშნება სიმბოლოთი $-A$. მას ეწოდება A-ს მოპირდაპირე მატრიცა.

ძირითადი თვისებები

1. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$.

2. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$.

D. მატრიცების ნამრავლი

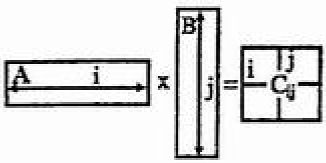
A მატრიცის გამრავლება B მატრიცაზე მხოლოდ იმ შემთხვევაში შეიძლება, როდესაც A მატრიცის სიგრძე უდრის B მატრიცის სიმაღლეს. ვთქვათ,

$$A=(A_{ij})_{m,k}\ B=(b_{ij})_{k,n}.$$

ავიღოთ A მატრიცის i სტრიქონი და B მატრიცის j სვეტი. შესაბამისი ელემენტები გადავამრავლოთ და მიღებული რიცხვები შევკრიბოთ:

$$c_{ij}\doteq c_{i1}c_{1j}+c_{i2}c_{2j}+\ \ldots+c_{ik}c_{kj}.$$

cij რიცხვებისაგან შევადგინოთ C მატრიცა. C მატრიცას ეწოდება A და B მატრიცების ნამრავლი.



REM. თუ A მატრიცის განზომილებაა mxk და B მატრიცის განზომილებაა kxn, მაშინ C=AB მატრიცის განზომილება იქნება mxn.

EX. გამოთვალეთ

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=C.$$

ამოხსნა:

$c_{11}=1\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot0=3,\quad c_{12}=1\cdot0+2\cdot1+3\cdot3=11,$
$c_{21}=(-1)\cdot(-1)+0\cdot2+1\cdot0=1,\quad c_{22}=(-1)\cdot0+0\cdot1+1\cdot3=3.$

პასუხი: $C=\begin{pmatrix}3 & 11\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$

ძირითადი თვისებები

1. (AB)C=A(BC).

2. AB≠BA. კომუტაციის კანონი საზოგადოდ არ სრულდება.

EX. ვთქვათ, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

მაშინ $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=BA.$

როგორც ვხედავთ, გარკვეული ზომის მატრიცები შეიძლება შევკრიბოთ და გავამრავლოთ ერთმანეთზე. იმისათვის, რომ განვმარტოთ გაყოფის ოპერაცია, საჭიროა ახალი ცნება. ეს არის დეტერმინანტი. დეტერმინანტი განისაზღვრება მხოლოდ კვადრატული მატრიცებისათვის. ქვემოთ ჩვენ მხოლოდ ასეთ მატრიცებთან გვექნება საქმე.

3. დეტერმინანტი

A. მეორე რიგის მატრიცა

DEF. მეორე რიგის მატრიცა ეს არის 2x2 განზომილების კვადრატული მატრიცა.

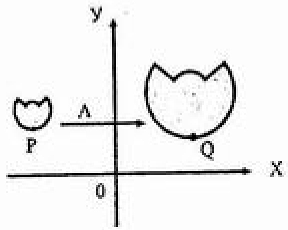
მეორე რიგის მატრიცა შედგება ოთხი რიცხვისაგან:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

მეორე რიგის მატრიცის გეომეტრიული შინაარსი

სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $P(x,y)$. ამ წერტილის კოორდინატები ჩავწეროთ სვეტში. A მატრიცა გავამრავლოთ ამ სვეტზე. მივიღებთ ახალ სვეტს:

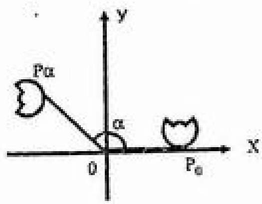
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{matrix}.$$



სიბრტყეზე აღვნიშნოთ წერტილი $Q(u,v)$. A მატრიცა არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომელიც $P(x,y)$ წერტილს გადაიყვანს $Q(u,v)$ წერტილში.

DEF. სიბრტყის გარდაქმნას, რომელიც მოიცემა მატრიცით, წრფივი გარდაქმნა ეწოდება.

EX. 1. მოცემულია მატრიცა:



$$R^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არის α კუთხით მობრუნება.

■ ავიღოთ $P_0(1,0)$ წერტილი. მაშინ

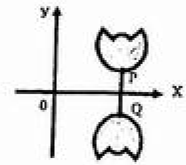
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u = \cos\alpha \\ v = \sin\alpha \end{matrix}$$

მივიღეთ $P_{\alpha}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ წერტილი. P_{α} წერტილი მიიღება P_0 წერტილისაგან α კუთხით მობრუნებით. ■

PR. რა გარდაქმნაა მატრიცა: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$.

პასუხი: π კუთხით მობრუნება. ასეთ გარდაქმნას ცენტრული სიმეტრია ეწოდება.

2. მოცემულია მატრიცა:



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

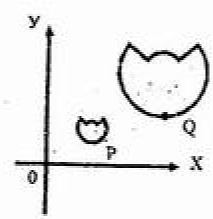
ეს არის ღერძული სიმეტრია OX ღერძის მიმართ.

■ ავიღოთ ნებისმიერი $P(x,y)$ წერტილი. მაშინ

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u = x \\ v = -y \end{matrix}.$$

(x, y) და $(x, -y)$ წერტილები სიმეტრიულია, OX ღერძის მიმართ. ■

3. მოცემულია მატრიცა



$$H^{k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

ეს მატრიცა არის ჰომოთეტია, რომლის ცენტრია 0, ხოლო კოეფიციენტი k.

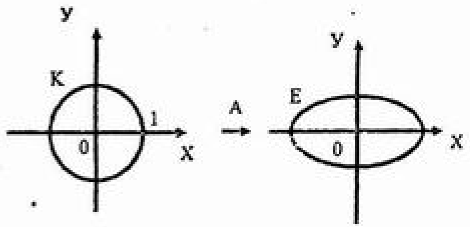
■ ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $P(x, y)$. მაშინ

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}u=kx\\v=ky\end{matrix}$$

მივიღეთ წერტილი $Q(kx, ky)$, რომელიც მიიღება P წერტილისაგან ჰომოთეტიის შედეგად. ჰომოთეტიის კოეფიციენტია k. ■

4. ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი K: $x^2+y^2=1$.

მოცემულია მატრიცა $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$.



ეს მატრიცა ერთეულოვან წრეწირს გადაიყვანს ელიფსში.

■ ავიღოთ წრეწირის ნებისმიერი წერტილი $M(x, y)$. მაშინ

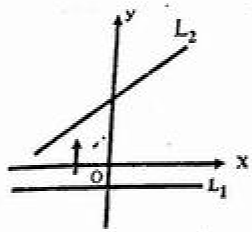
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}u=ax\\v=by\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=u/a\\y=v/b\end{matrix}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები წრეწირის განტოლებაში

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1.$$

მივიღეთ ელიფსის განტოლება. ■

REM. წრფივ გარდაქმნას აქვს ერთი მნიშვნელოვანი თვისება:



ნებისმიერი წრფე გადადის ისევ წრფეში.

■ წრფის განტოლება პირველი ხარისხისაა. წრფივი გარდაქმნის დროს პირველი ხარისხის განტოლება ისევ პირველი ხარისხის განტოლებად რჩება. ■

PR. მოცემულია მატრიცა: $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. ავიღოთ $x=1$ წრფე. რომელ წრფეში გადავა იგი A მატრიცის მოქმედებით?

პასუხი: $y=1$.

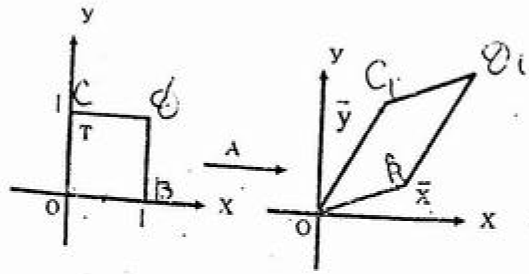
5. T არის ერთეულოვანი კვადრატი. კვადრატის წვეროებია: $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(1, 1)$.

მოცემულია ნებისმიერი მატრიცა:

5)

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

A მატრიცა T კვადრატს გადაიყვანს პარალელოგრამში. ეს პარალელოგრამი აგებულია $\bar{x}=(a,c)$ და $\bar{y}=(b,d)$ ვექტორებზე.



■ A მატრიცის მოქმედებით: 0 წერტილი რჩება ადგილზე:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

$B(1,0)$ წერტილი გადადის $B_1(a,c)$ წერტილში:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix},$$

$C(0,1)$ წერტილი გადადის $C_1(b,d)$ წერტილში:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix},$$

$D(1,1)$ წერტილი გადადის $D_1(a+b,c+d)$ წერტილში:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\ c+d\end{pmatrix},$$

A მატრიცას მონაკვეთი გადაჰყავს მონაკვეთში. $OB_1C_1D_1$ არის პარალელოგრამი. იგი აგებულია $\vec{x}=(a,c)$ და $\vec{y}=(b,d)$ ვექტორებზე. ■

PR. დაწერეთ მატრიცა, რომელიც ერთეულოვან კვადრატს გადაიყვანს პარალელოგრამში, რომელიც აგებულია $\vec{x}=(-1,5)$ და $\vec{y}=(2,1996)$ ვექტორებზე.

B. მეორე რიგის დეტერმინანტი

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

DEF. A მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება რიცხვს:

$$\boxed{\det A=ad-bc.}$$

REM. დეტერმინანტს ხშირად აღნიშნავენ სიმბოლოთი:

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

DEF. მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტს მეორე რიგის დეტერმინანტი ეწოდება.

EX. $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 2-3\cdot 0=-2.$

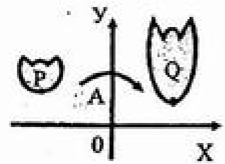
REM. მეორე რიგის მატრიცა არის ცხრილი, ხოლო მეორე რიგის დეტერმინანტი არის რიცხვი.

მეორე რიგის დეტერმინანტის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

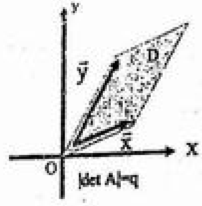
სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი ფიგურა. A მატრიცა ამ ფიგურას გადაიყვანს ახალ ფიგურაში. ვთქვათ, თავდაპირველად აღებული ფიგურის ფართობია p, ხოლო ახალი ფიგურის ფართობი – q, მაშინ



$$\boxed{|\det A|=q/p.}$$

დეტერმინანტის მოდული გვიჩვენებს, რამდენჯერ იცვლება ნებისმიერი ფიგურის ფართობი წრფივი გარდაქმნის დროს.

მატრიცის სვეტებისაგან შევადგინოთ ვექტორები:



$$\vec{x}=(a,c) \text{ და } \vec{y}=(b,d).$$

ამ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელოგრამი D.

თეორემა. A მატრიცის დეტერმინანტის მოდული არის D პარალელოგრამის ფართობი.

■ ერთეულოვანი T კვადრატის ფართობია p=1. A მატრიცა ერთეულოვან კვადრატს გადაიყვანს D პარალელოგრამში. ვთქვათ, პარალელოგრამის ფართობია q, მივიღებთ |detA|=q/p=q/1=q. ■

EX. 1. α კუთხით მობრუნება არ ცვლის ფიგურის ფართობს.

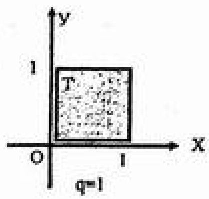
■ $$\det R^{\alpha}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$ ■

2. ჰომოთეტია ფართობს ცვლის k^2 – ჯერ.

■ $$\det H^{k}=\begin{vmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{vmatrix}=k\cdot k-0\cdot 0=k^2.$$ ■

C. დეტერმინანტის თვისებები

1. ერთეულოვანი მატრიცის დეტერმინანტი უდრის ერთს: |E|=1.



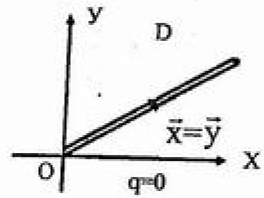
■ $$|E|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=1.$$ ■

2. მატრიცის ნებისმიერი ორი სვეტის გადანაცვლებით დეტერმინანტი იცვლის ნიშანს:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix}.$$

■ $$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc=-(bc-ad)=-\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix}.$$ ■

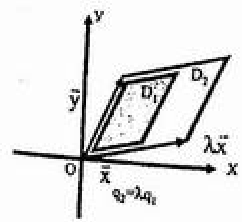
3. თუ მატრიცის რომელიმე ორი სვეტი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს:



$$\begin{vmatrix}a & a\\ c & c\end{vmatrix}=0.$$

■ $$\begin{vmatrix}a & a\\ c & c\end{vmatrix}=ac-ac=0.$$ ■

4. თუ მატრიცის რომელიმე სვეტი შეიცავს საერთო თანამამრავლს, მაშინ იგი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ:



$$\begin{vmatrix}\lambda a & b\\ \lambda c & d\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}.$$

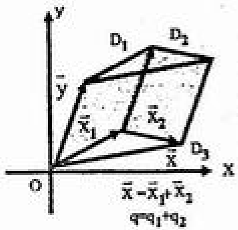
■ $$\begin{vmatrix}\lambda a & b\\ \lambda c & d\end{vmatrix}=\lambda ad-\lambda cb=\lambda(ad-cb)=\lambda\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}.$$ ■

5. თუ მატრიცის რომელიმე სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტი უდრის ნულს:

$$\begin{vmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\ b & 0\end{vmatrix}=0.$$

■ ამ შემთხვევაში $\lambda=0$. ■

6. თუ მატრიცის რომელიმე სვეტი უდრის ორი სვეტის ჯამს, მაშინ დეტერმინანტი იშლება ორი დეტერმინანტის ჯამად:



$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}.$$

■ $$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{vmatrix} = (a_1+a_2)d - (c_1+c_2)b =$$

$$= (a_1d - c_1b) + (a_2d - c_2b) = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}.$$ ■

7. თუ მატრიცის რომელიმე სტრიქონს დავუმატებთ სხვა სტრიქონს, გამრავლებულს რაიმე რიცხვზე, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix}.$$

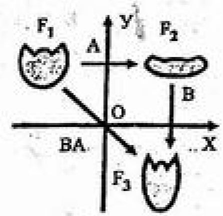
■ $$\begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$ ■

8. ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის დეტერმინანტების ნამრავლს:

$$|B \cdot A| = |A| \cdot |B|.$$

■ ვიგულისხმოთ, რომ ორივე დეტერმინანტი დადებითია. ავიღოთ ნებისმიერი F_1 ფიგურა. ვთქვათ, ამ ფიგურის ფართობია p_1. A მატრიცა F_1 ფიგურას გადაიყვანს F_2 ფიგურაში. ვთქვათ, ამ ფიგურის ფართობია p_2, მაშინ $|A|=p_2/p_1$.

B მატრიცა F_2 ფიგურას გადაიყვანს F_3 ფიგურაში. ვთქვათ, ამ ფიგურის ფართობია p_3, მაშინ $|B|=p_3/p_2$. BA მატრიცა F_1 ფიგურას პირდაპირ გადაიყვანს F_3 ფიგურაში:



$$|BA| = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = |B| \cdot |A| \cdot$$ ■

9. მატრიცის შეუღლებით დეტერმინანტი არ იცვლება:

$$|A^*| = |A|.$$

■ $$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |A^*|.$$ ■

10. მატრიცის ყველა თვისება, რომელიც სამართლიანია სვეტებისითვის, სამართლიანია აგრეთვე სტრიქონებისთვისაც.

■ მატრიცის ტრანსპონირებით დეტერმინანტი არ იცვლება. ტრანსპონირების დროს სვეტები გადაიქცევა სტრიქონებად. ■

REM. 2–6 თვისებებში სიტყვა „სვეტი“ შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „სტრიქონი“.

D. ელიფსის ფართობი

მოცემულია ელიფსი, ელიფსის რადიუსებია a და b.

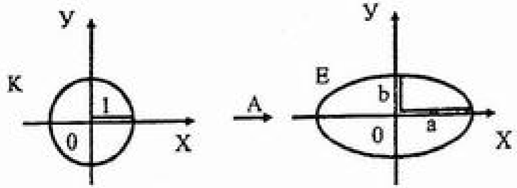
თეორემა. ელიფსის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{S = \pi ab.}$$

■ ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი K. წრეწირის ფართობია: $p=\pi\cdot 1^2=\pi$. მატრიცა $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ წრეწირს გადაიყვანს ელიფსში.

ამიტომ

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}=\frac{S}{\pi}\Leftrightarrow ab=\frac{S}{\pi}\Leftrightarrow S=\pi ab.\ ■$$



E. სამკუთხედის ფართობი

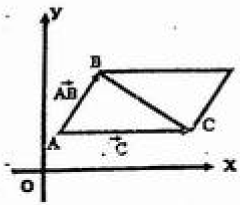
მოცემულია სამკუთხედი ABC. ცნობილია სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები:

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3).$$

თეორემა (ლაგრანჟი). სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\left|\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}\right|.$$

■ განვიხილოთ ვექტორები: $\vec{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ და $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1)$. ამ ორ ვექტორზე ავაგოთ პარალელოგრამი, პარალელოგრამის ფართობია:



$$Q=\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}\right|$$

სამკუთხედის ფართობი არის პარალელოგრამის ფართობის ნახევარი: $S=Q/2$. ■

F. n რიგის დეტერმინანტის ცნება

ვთქვათ, X არის nxn განზომილების ყველა მატრიცის სიმრავლე.

DEF. X სიმრავლეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას, რომელსაც გააჩნია 1-10 თვისება, n რიგის დეტერმინანტი ეწოდება.

n რიგის დეტერმინანტისთვის სრულდება ყველა ის 10 თვისება, რომელიც აქვს მეორე რიგის დეტერმინანტს.

* ამ თვისებების დამტკიცება საჭირო არ არის, ვინაიდან იგი ჩადებულია განმარტებაში. მათემატიკოსები ხშირად მიმართავენ ასეთ გზას, რომელსაც თავიდან უნდათ აიცილონ გრძელი და უინტერესო დამტკიცებები. ისინი თეორემას გადააქცევენ ხოლმე განმარტებებად. უნდა ითქვას, რომ დეტერმინანტის განმარტებაში საკმარისია შესრულდეს მხოლოდ 1, 2, 4, და 6 თვისებები: დანარჩენი ექვსი თვისება არის ამ ოთხი თვისების შედეგი. *

n რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა ხდება შემდეგი წესით. იგი დაიყვანება n–1 რიგის დეტერმინანტის გამოთვლაზე. ეს უკანასკნელი გამოითვლება n–2 რიგის დეტერმინანტის საშუალებით და ა. შ. ასე მივალთ მეორე რიგის დეტერმინანტამდე. მეორე რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა ცნობილია. ამ პროცესის განხორციელებას სჭირდება ახალი ცნება. ეს არის ალგებრული დამატება.

G. ალგებრული დამატება

ვთქვათ, მოცემულია nxn განზომილების მატრიცა A. ავიღოთ მატრიცის ელემენტი a_{ij}. ამოვშალოთ მატრიცის i სტრიქონი და j სვეტი. მიღებული მატრიცის დეტერმინანტი ავღნიშნოთ M_{ij}–ით.

DEF. M_{ij} რიცხვს ეწოდება a_{ij} ელემენტის მინორი.

M_{ij} მინორი დავტოვოთ უცვლელად, თუ $i+j$ ლუწია და შევუცვალოთ ნიშანი, თუ $i+j$ კენტია. მიღებული რიცხვი აღვნიშნოთ A_{ij} –ით:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

DEF. A_{ij} რიცხვს ეწოდება a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება.

EX. მოცემულია მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

ავიღოთ ელემენტი $a_{23}=5$. ამ ელემენტის მინორი იქნება:

$$M_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)\cdot 0-2\cdot 1=-2.$$

ინდექსების ჯამი $i+j=2+3=5$ კენტია, ამიტომ

$$A_{23}=-M_{23}=2.$$

ალგებრული დამატების ძირითადი თვისება

1. თუ მატრიცის ნებისმიერი სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ თავისსავე ალგებრულ დამატებებზე და შევკრიბავთ, მივიღებთ მატრიცის დეტერმინანტს:

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}=|A|.$$

ალგებრული დამატება არის ერთით ნაკლები რიგის დეტერმინანტი. სწორედ ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას n რიგის დეტერმინანტი გამოვთვალოთ $n-1$ რიგის დეტერმინანტის საშუალებით.

2. თუ მატრიცის რომელიმე სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ სხვა რომელიმე სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და შევკრიბავთ მივიღებთ ნულს.

■ ვთქვათ i სვეტის ელემენტებს ვამრავლებთ j სვეტის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე და ვკრიბავთ. პირველი თვისების თანახმად, მივიღებთ ისეთი მატრიცის დეტერმინანტს, რომელსაც j სვეტის ელემენტების მაგივრად i სვეტის ელემენტები აქვს. ამ მატრიცის ორი სვეტი ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ ეს დეტერმინანტი ნულია. ■

პირველი და მეორე თვისება ჩავწეროთ ერთი ფორმულით:

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & \text{როცა } i=j\\ 0, & \text{როცა } i\neq j\end{cases}.$$

REM. ორივე თვისებაში სიტყვა „სვეტი“ შეიძლება შეიცვალოს სიტყვით „სტრიქონი“.

I. მესამე რიგის დეტერმინანტი

მოცემულია 3x3 განზომილების მატრიცა. იგი შედგება ცხრა რიცხვისაგან:

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}.$$

ავიღოთ პირველი სვეტი: $j=1$. გვაქვს

$$a_{11}=a_1,\ A_{11}=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=b_2c_3-b_3c_2,$$

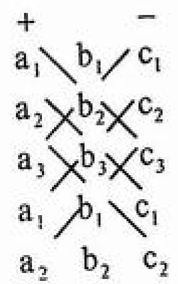
$$a_{21}=a_2,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}=-(b_1c_3-b_3c_1),$$

$$a_{31}=a_3,\ A_{31}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=b_1c_2-b_2c_1.$$

მივიღებთ:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-$$
$$-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

REM. მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება უფრო მარტივი წესით. მატრიცის ელემენტებს ფორმალურად მივუწეროთ პირველი ორი სტრიქონი:



მივიღებთ 6 სამეულს. თითოეული სამეულის ელემენტები გადავამრავლოთ. განვიხილოთ ჯამი, რომელშიც სამეულების ნამრავლი აღებულია იმ ნიშნით, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. მივიღებთ დეტერმინანტს:

$$|A|=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

EX. მოცემულია მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტი იქნება:

$$|A|=1\cdot3\cdot1+0\cdot0\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot1-(-1)\cdot3\cdot(-2)-1\cdot0\cdot1-1\cdot2\cdot0=-7.$$

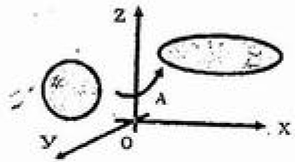
მესამე რიგის დეტერმინანტის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, მოცემულია მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

მესამე რიგის მატრიცა არის სივრცის წრფივი გარდაქმნა.

მესამე რიგის დეტერმინანტის მოდული გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ იცვლება ნებისმიერი ფიგურის მოცულობა ამ გარდაქმნის დროს:



$$|\det A|=U/V.$$

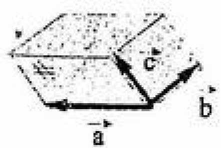
მატრიცის სვეტებისაგან შევადგინოთ ვექტორები:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3).$$

ამ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელეპიპედი D.

თეორემა. დეტერმინანტის მოდული არის D პარალელეპიპედის მოცულობა:

$$|\det A|=V.$$



PR. დაამტკიცეთ თეორემა.

J. ვექტორების შერეული ნამრავლი

ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია სამი ვექტორი:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3).$$

DEF. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ეწოდება რიცხვს:

$$<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

გეომეტრიული შინაარსი

სამი ვექტორის შერეული ნამრავლის მოდული არის ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა:

$$|<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>|=V.$$

ძირითადი თვისებები

1. $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>=-<\vec{b},\vec{a},\vec{c}>=-<\vec{a},\vec{c},\vec{b}>.$

■ ეს არის დეტერმინანტის 2 თვისება. ■

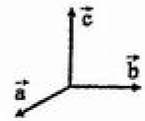
2. $<\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}>=\lambda<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>.$

■ ეს არის დეტერმინანტის 4 თვისება. ■

3. $<\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}>=<\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}>+<\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}>.$

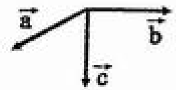
■ ეს არის დეტერმინანტის 6 თვისება. ■

DEF. 1. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს ეწოდებათ დადებითად ორიენტირებული, თუ მათი შერეული ნამრავლი დადებითია:



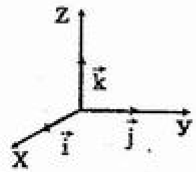
$$<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>>0.$$

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{C}$ ვექტორებს ეწოდებათ უარყოფითად ორიენტირებული, თუ მათი შერეული ნამრავლი უარყოფითია:



$$<\vec{a},\vec{b},\vec{c}><0.$$

EX. განვიხილოთ ერთეულოვანი ვექტორები:



$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1).$$

მათ აქვთ საკოორდინატო ღერძების მიმართულება. $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორებს აქვთ დადებითი ორიენტაცია.

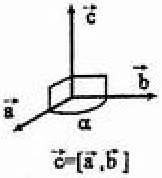
■ ამ ვექტორების შერეული ნამრავლი არის ერთეულოვანი მატრიცის დეტერმინანტი:

$$<\vec{i},\vec{j},\vec{k}>=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=|E|=1>0.$$ ■

K. ვექტორული ნამრავლი

ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$. $\vec{c}$ ვექტორი ავაგოთ შემდეგი წესით:

1. $\vec{c}$ ვექტორის სიგრძე იყოს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლი:



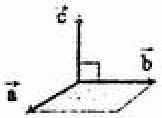
$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha.$$

2. $\vec{c}$ ვექტორს ჰქონდეს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების პერპენდიკულარული მიმართულება. ასეთი მიმართულება არის ორი. ამ ორიდან ავიღოთ ის მიმართულება, რომელიც $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს ანიჭებს დადებით ორიენტაციას.

DEF. $\vec{c}$ ვექტორს ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი: $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$.

გეომეტრიული შინაარსი

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელოგრამი. ვექტორული ნამრავლის სიგრძე არის ამ პარალელოგრამის ფართობი:



$$|[\vec{a},\vec{b}]|=S.$$

ძირითადი თვისებები

1. $[\vec{a},\vec{a}]=0.$

2. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}].$

■ ამ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი სიგრძე და სხვადასხვა მიმართულება. ■

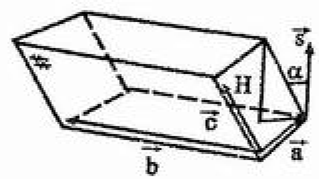
3. $[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}]=[\vec{a}_1,\vec{b}]+[\vec{a}_2,\vec{b}].$

ავიღოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. ვიპოვოთ ვექტორული ნამრავლი $[\vec{a},\vec{b}]$. მივიღებთ ვექტორს. ეს ვექტორი სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{c}$ ვექტორზე. მივიღებთ რიცხვს. თურმე ეს რიცხვი იგივეა, რაც $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი.

თეორემა.

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>.}$$

■ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელეპიპედი. ვთქვათ, პარალელეპიპედის მოცულობაა V. ვექტორი $\vec{s}=[\vec{a},\vec{b}]$ ფუძის პერპენდიკულარულია. ვთქვათ, α არის კუთხე $\vec{s}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს შორის. ვიგულისხმოთ, $<\vec{a},\vec{b},\vec{c}>>0$, მაშინ α კუთხე მახვილია. ამიტომ



$$[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=|\underbrace{[\vec{a},\vec{b}]}_{\substack{\parallel\\ S}}|\underbrace{|\vec{c}|\cos\alpha}_{\substack{\parallel\\ H}}=SH=V=<\vec{a},\vec{b},\vec{c},>. \quad ■$$

ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები

ვთქვათ, $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$. განვიხილოთ ამ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი:

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}].$$

თეორემა. ვექტორული ნამრავლის კოორდინატებია:

$$c_1=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix},\quad c_2=-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix},\quad c_3=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}.$$

■ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ვექტორის კოორდინატები, ეს ვექტორი სკალარულად უნდა გავამრავლოთ

$$\bar{i}=(1,0,0),\quad \bar{j}=(0,1,0),\quad \bar{k}=(0,0,1)$$

ვექტორებზე. ამიტომ

$$c_1=\bar{c}\cdot\bar{i}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]\bar{i}=<\bar{a},\bar{b},\bar{i}>=\begin{vmatrix}a_1&b_1&1\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix},$$

$$c_2=\bar{c}\cdot\bar{j}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]\bar{j}=<\bar{a},\bar{b},\bar{j}>=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&1\\a_3&b_3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix},$$

$$c_3=\bar{c}\cdot\bar{k}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]\bar{k}=<\bar{a},\bar{b},\bar{k}>=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}.$$ ■

L. შებრუნებული მატრიცა

a რიცხვის შებრუნებული არის ისეთი რიცხვი, რომლის ნამრავლი a რიცხვზე იძლევა ერთს. a რიცხვის შებრუნებული აღინიშნება a^{-1}-ით.

ანალოგიურად განიმარტება შებრუნებული მატრიცაც.

DEF. A მატრიცის შებრუნებული ეწოდება ისეთ მატრიცას, რომლის ნამრავლი A მატრიცაზე იძლევა ერთეულოვან მატრიცას.

A მატრიცის შებრუნებული აღინიშნება A^{-1} –ით:

$$A^{-1}\cdot A=E.$$

არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომელსაც არა აქვს შებრუნებული. ეს რიცხვია 0. რიცხვებისაგან განსხვავებით არსებობს უამრავი მატრიცა, რომელთაც არ აქვთ შებრუნებული. ეს ისეთი მატრიცებია, რომელთა დეტერმინანტი უდრის ნულს.

თეორემა. თუ $|A|=0$, მაშინ A^{-1} არ არსებობს.

■ დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ A^{-1} არსებობს. მაშინ

$$A^{-1}\cdot A=E\Rightarrow\left|A^{-1}\right|\cdot\underbrace{|A|}_{0}=\underbrace{|E|}_{1}\Rightarrow 0=1.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. ■

ყველა სხვა მატრიცას აქვს შებრუნებული მატრიცა.

თეორემა. თუ $|A|\neq 0$, მაშინ A^{-1} არსებობს და გამოითვლება ფორმულით:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}^{*}.$$

■ გვაქვს

$$A^{-1}A=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}=(c_{ij}).$$

გამოვთვალოთ c_{ij} ელემენტები:

$$c_{ij}=\frac{1}{|A|}\left(A_{1i},A_{2i},\ldots A_{ni}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\ldots\\a_{nj}\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\left(a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\ldots+a_{nj}A_{ni}\right)=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{cases}|A|, & \text{როცა } i=j\\ 0, & \text{როცა } i\neq j\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{როცა } i=j,\\ 0, & \text{როცა } i\neq j.\end{cases}$$

მივიღეთ: $c_{11}=c_{22}=\ldots=c_{nn}=1$. ყველა სხვა დანარჩენი ელემენტი უდრის ნულს. ■

M. მატრიცების შეფარდება

a რიცხვის შეფარდება b რიცხვთან შეიძლება ჩაიწეროს ასე: $a/b=ab^{-1}$. ანალოგიურად განიმარტება მატრიცების შეფარდება.

DEF. ვთქვათ, $\det B\neq 0$. A მატრიცის შეფარდება B მატრიცასთან ეწოდება AB^{-1} მატრიცას.

EX. მოცემულია: $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$.

1. $|B|=1\cdot 2-0\cdot 1=2$.

$B_{11}=2,\ B_{12}=0,\ B_{21}=-1,\ B_{22}=1.$

2. $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}$.

3. A მატრიცის შეფარდება B-სთან იქნება:

$$A/B=AB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & -1/2\end{pmatrix}.$$

REM. მიუხედავად მსგავსებისა მატრიცების შეფარდება განსხვავდება რიცხვების შეფარდებისაგან. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ მატრიცებისთვის საზოგადოდ არ სრულდება გადანაცვლებადობის კანონი: თუ $C=AB^{-1}$, მაშინ $CB=A$, მაგრამ $BC\neq A$.

N. წრფივ განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ n უცნობიანი n განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}.$$

DEF. 1. a_{ij} რიცხვებს ეწოდებათ სისტემის კოეფიციენტები.
2. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვებს ეწოდებათ თავისუფალი წევრები.
3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს ეწოდებათ უცნობები.

DEF. სისტემის ამონახსნი ეწოდება უცნობების ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც სისტემის ყველა განტოლებას აკმაყოფილებენ ერთდროულად.

სისტემის ჩაწერა მატრიცული ფორმით

1. a_{ij} რიცხვების საშუალებით შევადგინოთ მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

2. უცნობებისგან და თავისუფალი წევრებისაგან შევადგინოთ სვეტები:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

მაშინ სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b.$$

სისტემის ამოხსნა

განტოლება $Ax=b$ იხსნება ზუსტად ისე, როგორც ეს ხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც A და b არიან რიცხვები.

თეორემა. თუ $|A|\neq 0$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x=A^{-1}b.$$

■ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ A^{-1}-ზე:

$Ax=b \Leftrightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}b \Leftrightarrow Ex=A^{-1}b \Leftrightarrow x=A^{-1}b.$ ■

კრამერის ფორმულები

სისტემის ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს ცხადი სახით. ამ ფორმულებს უწოდებენ კრამერის ფორმულებს. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

1. $\Delta=|A|$. Δ რიცხვს სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ეწოდება.

2. $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – რიცხვებს ეწოდებათ დამხმარე დეტერმინანტები. Δ_j რიცხვის გამოსათვლელად A მატრიცაში j სვეტი უნდა შევცვალოთ თავისუფალი წევრებით და გამოვთვალოთ დეტერმინანტი.

თეორემა. (მაკლორენი)

თუ $\Delta\neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}.$$

$$x = A^{-1}b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

....

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn}) = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \blacksquare$$

* სისტემის ამოხსნის ფორმულები კრამერის ფორმულების სახელწოდებითაა ცნობილი, მაგრამ სინამდვილეში იგი ეკუთვნის მაკლორენს.

კოლინ მაკლორენი დაიბადა შოტლანდიაში. თერთმეტი წლის ასაკში გახდა უნივერსიტეტის სტუდენტი. ცხრამეტი წლის ასაკში უკვე იყო უნივერსიტეტის პროფესორი. მაკლორენმა განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ფორმულები იცოდა და გამოაქვეყნა კიდევაც კრამერზე ადრე. ამ უსამართლობის კომპენსაცია მოხდა შემდეგნაირად. მაკლორენის სახელი დარქვეს ფორმულას, რომელიც მასზე ადრე აღმოაჩინა სტირლინგმა. ამ ფორმულას ჩვენ ქვემოთ გავეცნობით.*

EX. ამოხსენით სისტემა: $\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \end{cases}$

1. გამოვთვალოთ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot3\,(-2)+2\cdot1\cdot1+(-1)(-2)(-1)-$$

$$-1\cdot3\,(-1)-(-1)\,1\cdot1-(-2)(-2)2 = -10$$

2. გამოვთვალოთ დამხმარე დეტერმინანტები:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\,3\,(-2)+4\cdot1\cdot1+3\,(-2)(-1)-$$

$$-1\cdot3\cdot3-(-1)\,1\,(-3)-(-2)(-2)4=0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot4\,(-2)+2\cdot3\cdot1+(-1)(-3)(-1)-$$

$$-1\cdot4\,(-1)-(-1)3\cdot1-(-2)(-3)2=-10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot3+2\cdot1\,(-3)+(-1)(-2)4-$$

$$-(-3)3\,(-1)-4\cdot1\cdot1-3(-2)2=10.$$

3. სისტემის ამონახსნია: $x=\Delta_1/\Delta=0/-10=0$, $y=\Delta_2/\Delta=-10/-10=1$ $z=\Delta_3/\Delta=10/-10=-1$.

პასუხი: $x=0$, $y=1$, $z=-1$.

O. საშიშია თუ არა ყოველთვის თავისუფალი ფასები

განვიხილოთ ფასების წარმოქმნის ერთი მოდელი, რომელიც ეკუთვნის ბოარსკის.

ავიღოთ ორი საწარმო: მეტალურგიული ქარხანა, რომელიც უშვებს ფოლადს და ქვანახშირის შახტი. ვთქვათ, 1 ტ. ფოლადის წარმოებისათვის იხარჯება 2 ტ. ქვანახშირი და 20 $-ის ელექტროენერგია, ხოლო 1 ტონა ქვანახშირის მოპოვებისათვის-0.06 ტ.ფოლადი და 2 $-ის ელექტროენერგია.ამასთან, პირველ შემთხვევაში მომსახურე პერსონალზე იხარჯება 320 $, ხოლო მეორე შემთხვევაში -48 $.

ვთქვათ, p და u არიან შესაბამისად ფოლადისა და ქვანახშირის შესასყიდი ფასები. გეგმიანი ეკონომიკის პირობებში ამ ფასებს ადგენს ცენტრალური საგეგმო კომიტეტი. 1ტ. ფოლადის თვითღირებულება იქნება 2u+340, ხოლო 1 ტონა ქვანახშირის - 0.06p+50.

სოციალისტურ ეკონომიკაში ფასი განისაზღვრება ღირებულებით. ცენტრალური საგეგმო კომიტეტი ფასებს ადგენს ისეთნაირად, რომ შესრულდეს ტოლობები:

$$p=2u+340,$$

$$u=0.06p+50.$$

სისტემიდან ვღებულობთ $p=500$, $u=80$.

ვთქვათ, საწარმოს მიეცა თავისუფალი ფასების დაწესების უფლება. მაგალითად,

$$p_1=200,$$
$$u_1=100.$$

გამოშვებული პროდუქციის ღირებულება იქნება:

$$p_2=2u_1+340=540,$$

$$u_2=0.06p_1+50=62.$$

შემდგომში სწორედ ამ ფასებში ხდება ურთიერთგაცვლა. მეორე ეტაპზე თვითღირებულება იქნება

$$p_3=2u_2+340=464,$$

$$u_3=0.06p_2+50=82.4.$$

მივიღეთ თავისუფალი ფასების მიმდევრობა:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_3 \\ u_3 \end{pmatrix}\ldots.$$

მიმდევრობის წევრები უახლოვდება წყვილს:

$$\begin{pmatrix} p=500 \\ u=80 \end{pmatrix}.$$

რიცხვს, რომელსაც უახლოვდება მიმდევრობა, მათემატიკოსები ზღვარს უწოდებენ.

ბორსკის მოდელში გეგმიანი და თავისუფალი ფასწარმოქმნის მექანიზმი იძლევა ერთნაირ შედეგს. რა თქმა უნდა, ეს ყოველთვის ასე არ არის. ჩვენ ქვემოთ გავარკვევთ, თუ რა არის ამ უცნაური ფაქტის მიზეზი. მანამდე კი გასარკვევია, რა არის მიმდევრობა და მისი ზღვარი. სწორედ ამას სწავლობს მათემატიკური ანალიზი.

4. კომპლექსური რიცხვები

(კომპლექსური რიცხვების შემოტანა დაკავშირებულია იმასთან, რომ კვადრატულ განტოლებას, რომლის დისკრიმინანტი უარყოფითია, არ აქვს ნამდვილი ამონახსნი. ნამდვილი რიცხვები შეადგენენ წრფეს. აღმოჩნდა, რომ ალგებრული განტოლების ფესვები საზოგადოდ მდებარეობენ არა წრფეზე, არამედ სიბრტყეზე. სწორედ ეს სიბრტყეა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე. კომპლექსური რიცხვი უფრო ინსტრუმენტია (ისევე როგორც განზოგადებული ფუნქციები), ვიდრე შინაარსიანი ობიექტი. მიუხედავად ამისა მათემატიკოსებმა მაინც იპოვეს სიდიდე, რომელიც იზომება კომპლექსური რიცხვის საშუალებით. ეს არის წინაღობა.)

A. რა არის კომპლექსური რიცხვი

DEF. კომპლექსური რიცხვი ეწოდება $a+ib$ სახის გამოსახულებას, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია.

DEF. ვთქვათ, მოცემულია კომპლექსური რიცხვი:

$$z=a+ib.$$

1. a რიცხვს ეწოდება ნამდვილი ნაწილი.
2. b რიცხვს ეწოდება წარმოსახვითი ნაწილი.
3. i სიმბოლოს ეწოდება წარმოსახვითი ერთეული.

EX. კომპლექსური რიცხვებია: $1+2i$, $-3+(-6)i$, $2+i$.

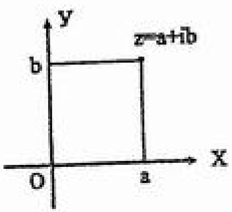
REM. კომპლექსური რიცხვები შეიძლება სხვაგვარადაც განიმარტოს. ზოგჯერ კომპლექსურ რიცხვს განმარტავენ როგორც (a,b) წყვილს ან მატრიცას: $z=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

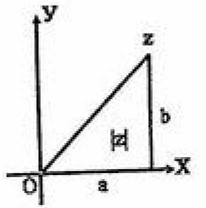
EX. აჩვენეთ: 1) $i=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 2) $i^2=-1$.

კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული შინაარსი

1. $z=a+ib$ კომპლექსური რიცხვი არის სიბრტყის ის წერტილი, რომლის კოორდინატებია (a,b).

2. კომპლექსური რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება C ასოთი. C არის სიბრტყე.





B. კომპლექსური რიცხვის ჩაწერა ტრიგონომეტრიული ფორმით

აღვნიშნოთ სიბრტყეზე $z=a+ib$ კომპლექსური რიცხვი. z წერტილი შევაერთოთ კოორდინატთა სათავესთან.

DEF. მანძილს, რომლითაც z წერტილი დაშორებულია სათავიდან, ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული. მოდულს აღნიშნავენ $|z|$ სიმბოლოთი:

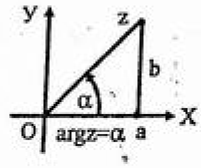
$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

DEF. 1. კუთხეს, რომელსაც OZ წრფე ადგენს OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან, კომპლექსური რიცხვის მთავარი არგუმენტი ეწოდება. იგი აღინიშნება სიმბოლოთი: argz.

2. კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი არის ნებისმიერი კუთხე, რომელიც მთავარი არგუმენტისაგან მიიღება $2\pi k$-ს დამატებით. არგუმენტს აღნიშნავენ სიმბოლოთი:

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2\pi k,\quad k\in Z.$$

REM. კომპლექსური რიცხვის არგუმენ
გამოითვლება სისტემიდან:



$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{r},\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$$

ცნობილია: კომპლექსური რიცხვის მოდული $|z|=$ და კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი $\arg z=\alpha$.
იპოვეთ: z კომპლექსური რიცხვი.

პასუხი: $\boxed{z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).}$

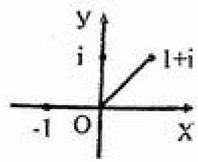
DEF. ამ ფორმულას კომპლექსური რიცხვის ტრი
გონომეტრიული ფორმა ეწოდება.

■ გვაქვს

$$\left.\begin{matrix}a=r\cos\alpha\\ b=r\sin\alpha\end{matrix}\right| \Rightarrow z=a+ib=r(\cos\alpha+i\sin\alpha).\ ■$$

EX. 1. $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$r=\sqrt{2}$, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$.



2. $z=-1=-1+i0=\cos\pi+i\sin\pi$,
$r=1$, $\arg z=\pi$.

3. $z=i=0+i1=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$r=1$, $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$

C. შეუღლება

DEF. z=a+ib რიცხვის შეუღლებული ეწოდება რიცხვს:

$$\bar{z} = a - ib.$$

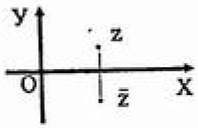
შეუღლების დროს z წერტილი გადადის OX ღერძის მიმართ სიმეტრიულ წერტილში.

Ex 1. $\overline{1+i} = 1 - i$.

2. $\bar{1} = 1 + i\cdot 0 = 1 - i\cdot 0 = 1$.

3. $\bar{i} = 0 + i\cdot 1 = 0 - i\cdot 1 = -i$.

4. $\bar{\bar{z}} = z$.



D. შეკრება

DEF. კომპლექსური რიცხვების შეკრება ხდება შემდეგი წესით: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$.

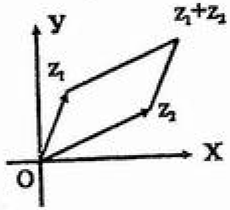
DEF. ითვლება, რომ $0+ib=ib$.

შეკრების გეომეტრიული წესი

სიბრტყეზე აღვნიშნოთ კომპლექსური რიცხვები:

$$z_1=a_1+ib_1,\ z_2=a_2+ib_2.$$

z_1, z_2 და 0 წერტილებზე ავაგოთ პარალელოგრამი. პარალელოგრამის მეოთხე წვერო იქნება z_1+z_2.



EX. $(1-3i)+(-1+2i)=-i$.

E. გამრავლება

DEF. კომპლექსური რიცხვების გამრავლება ხდება შემდეგი წესით:

1. $i^2=-1$.

2. $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ia_1b_2+ia_2b_1+i^2b_1b_2=$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

EX. $(1-3i)(-1+2i)=1\cdot(-1)+i(-3)(-1)+i\cdot 1\cdot 2+i^2(-3)\cdot 2=-1+3i+2i+6=5+5i.$

DEF. ითვლება, რომ $i\cdot 0=0$.

REM. 1. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი ამავე დროს არის კომპლექსური. ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ასე: $a=a+i\cdot 0$.

2. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არის კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე: **R⊂C.**

გამრავლების გეომეტრიული წესი

კომპლექსური რიცხვები ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1),\quad z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2).$$

გვექნება:

$$z_1z_2=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=$$
$$r_1r_2[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2)+i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_2\sin\alpha_1)]=$$
$$=r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)).$$

კომპლექსური რიცხვების გადამრავლების დროს მათი მოდულები ერთმანეთზე მრავლდება, ხოლო არგუმენტები იკრიბება:

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

მეორე ტოლობა იკითხება შემდეგნაირად: თუ z_1 რიცხვის არგუმენტს დავუმატებთ z_2 რიცხვის არგუმენტს, მივიღებთ მათი ნამრავლის არგუმენტს.

PR. აჩვენეთ, რომ $z\bar{z}=|z|^2$.

F. გაყოფა

კომპლქსური რიცხვების გაყოფის დროს მნიშვნელში უნდა მოისპოს წარმოსახვითი (i-ს შემცველი) წევრი. ამისათვის მნიშვნელი მრავლდება თავის შეუღლებულზე:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-i(a_1b_2-a_2b_1)}{a_2^2+b_2^2}.$$

EX. $\frac{2+4i}{1-i}=\frac{(2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-4+i(2+4)}{1+1}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i.$

გაყოფის გეომეტრიული წესი

კომპლექსური რიცხვების შეფარდების მოდული არის მოდულების შეფარდება, ხოლო შეფარდების არგუმენტი – არგუმენტების სხვაობა:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

G. ხარისხში აყვანა

კომპლექსური რიცხვი ჩავწეროთ ტრიგომეტრიული ფორმით: $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. მაშინ

$$z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

■ $|z^n|=|z||z|\dots|z|=|z|^n=r^n$,
$\operatorname{Arg}z^n=\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}z+\dots+\operatorname{Arg}z=n\operatorname{Arg}z.$ ■

EX. $(1+i)^4=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=$

$$=\sqrt{2}^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right)=4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4.$$

H. ფესვის ამოღება

ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრ ლი ფორმით: $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

თეორემა. n-ური ხარისხის ფესვი z რიცხვ არის ზუსტად n ცალი. ეს რიცხვებია:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right),\quad k=1,2,3,\dots,n.$$

■ ვთქვათ, ζ არის რომელიმე ფესვი. ჩავწეროთ ტრიგონომ რიული ფორმით: $\zeta=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$. მაშინ

$$\zeta^n=\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\rho^n=r\\ \cos n\phi=\cos\alpha\\ \sin n\phi=\sin\alpha\end{array}\right.$$

$(\cos n\phi,\ \sin n\phi)$ და $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ წყვილები იძლევა ერთი იგივე წერტილს ერთეულოვან წრეწირზე. ამიტომ კუთხეები $n\phi$ და ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან $2\pi k$-თი, სადაც k ნებისმიერი მთე რიცხვია. ამიტომ

$$\rho=\sqrt[n]{r},$$

$$n\varphi-\alpha=2\pi k\Rightarrow\varphi=\frac{\alpha+2\pi k}{n}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები ζ-ს ფორმულაში:

$$\zeta=z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right).$$

ამოვწეროთ ფესვები, როცა $k=1,\dots,n$:

$$z_1,z_2,\dots,z_n.$$

k-ს ნებისმიერი სხვა მთელი მნიშვნელობა ახალს არაფერს იძლევა; z_k აუცილებლად დაემთხვევა რომელიმეს ზემოთ ამოწერილი რიცხვებიდან. მაგალითად: $z_{n+1}=z_1,\ z_{n+2}=z_2,\dots$ (შეამოწმეთ).

ამის მიზეზი ის არის, რომ კოსინუსი და სინუსი პერიოდული ფუნქციებია. პერიოდია 2π. ■

EX. 1. ამოხსენით განტოლება: $z^2+1=0$.

■ განტოლებიდან ვღებულობთ: $z=\sqrt{-1}$.

ჩავწეროთ -1 ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi,\quad r=1,\ \alpha=\pi.$$

ფესვის ხარისხის მაჩვენებელია: $n=2$. განვიხილოთ შემთხვევები:

1. $k=1,\quad z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}=-i.$

2. $k=2.\quad z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{2}=i.$

პასუხი: $z=\pm i$.

2. ამოხსენით განტოლება: $z^3-1=0$.

განტოლებიდან ვღებულობთ: $z=\sqrt[3]{1}$.

ჩავწეროთ 1 ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$1=\cos 0+i\sin 0,\quad r=1,\quad \alpha=0.$$

ფესვის ხარისხის მაჩვენებელია: $n=3$. განვიხილოთ შემთხვევები:

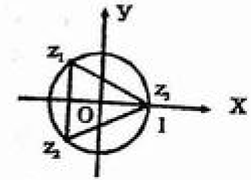
1. $k=1,\quad z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2. $k=2,\quad z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. $k=3,\quad z_3=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=1.$

პასუხი: $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=1,$

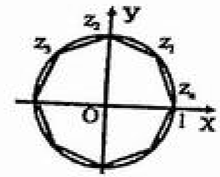
ეს წერტილები წარმოადგენენ წესიერი სამკუთხედის წვეროებს, რომელიც ჩახაზულია ერთეულოვან წრეწირში.



PR. ამოხსენით განტოლება: $z^4-1=0$.

პასუხი: $z_{1,3}=\pm 1,\ z_{2,4}=\pm i$. ფესვები წარმოადგენენ ერთეულოვან წრეწირში ჩახაზული კვადრატის წვეროებს.

REM. 1. ანალოგიურად, $z^n-1=0$ განტოლების ფესვები წარმოადგენენ ერთეულოვან წრეწირში ჩახაზული წესიერი n–კუთხედის წვეროებს.

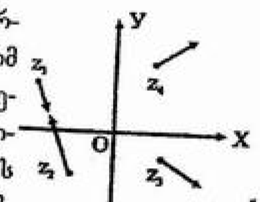


2. განვიხილოთ ზოგადი სახის ალგებრული განტოლება:

$$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0.$$

1. $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ არიან რიცხვები. მათ ეწოდებათ კოეფიციენტები.
2. n რიცხვს ეწოდება განტოლების ხარისხი.
3. z არის უცნობი.
4. z–ის მნიშვნელობას, რომლისთვისაც განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ ტოლობად, განტოლების ამონახსნი (ან ფესვი) ეწოდება.

განტოლების ფესვებს გააჩნიათ ერთი საინტერესო თვისება. აღმოჩნდა, რომ განტოლების კოეფიციენტების ცვლილება იწვევს ფესვების მხოლოდ გადაადგილებას; ეს იმას ნიშნავს, რომ ასეთ დროს არ ხდება ფესვების რაოდენობის ცვლილება, თუმცა, შესაძლებელია, რომ ფესვები შეეჯახონ ერთმანეთს. ფესვებს, რომლებიც რამდენიმე ფესვის შეჯახების შედეგად მიიღება, ჯერადი ფესვები ეწოდება. აქედან გამომდინარეობს. ძალიან მნიშვნელოვანი რეზულტატი.



ალგებრის ძირითადი თეორემა

n ხარისხის ალგებრულ განტოლებას აქვს ზუსტად n ფესვი (ჯერადობის გათვალისწინებით).

■ განტოლების ბოლო კოეფიციენტი შევცვალოთ −1-ით, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი შევამციროთ ნულამდე, მივიღებთ განტოლებას: $z^n-1=0$. ამ განტოლებას აქვს ზუსტად n ფესვი. ამ ფესვების გადაადგილებით მიიღება ზოგადი განტოლების ფესვები ე.ი. მათი რაოდენობა არის n. ■

(* ალგებრის ძირითად თეორემას ხშირად გაუსის თეორემასაც უწოდებენ. მხოლოდ საფრანგეთში უწოდებენ მას დალამბერის თეორემას. ეს თეორემა პირველად მართლაც დალამბერმა ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა კიდეც.

გაუსმა ეს დამტკიცება არ მიიჩნია სრულყოფილად, და თავის სადოქტორო დისერტაციაში მოიყვანა „ახალი დამტკიცება". სწორედ ასე უწოდა მან დისერტაციას, რითაც ხაზი გაუსვა იმას, რომ იგი ამ თეორემის ავტორობაზე არ აცხადებდა პრეტენზიას. შემდგომში გაუსმა მოიგონა კიდევ სამი დამტკიცება. უნდა აღინიშნოს, რომ არც გაუსის დამტკიცებები იყო აბსოლუტურად მკაცრი, და საერთოდ, ასეთი დამტკიცება არც შეიძლება იმ დროისათვის ყოფილიყო, ვინაიდან მაშინ (ლაპარაკია XIX საუკუნის პირველ ნახევარზე) ჯერ კიდევ არ იცოდნენ, რა არის ნამდვილი რიცხვი.

ალგებრის ძირითადი თეორემა არ სრულდება ნამდვილი ფესვებისათვის.) ეს კარგად ჩანს მარტივ მაგალითზე.

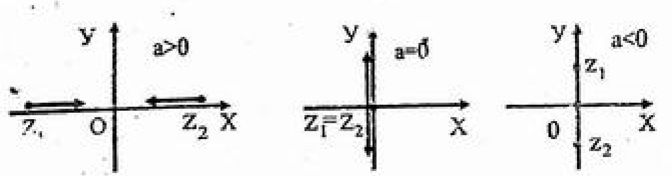
EX. განვიხილოთ კვადრატული განტოლება: $z^2-a=0$.

ნ. განტოლების ხარისხია $n=2$.

1. როცა $a>0$ განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი ფესვი.

$$z_1=-\sqrt{a},\ z_2=\sqrt{a}.$$

2. როცა a რიცხვი უახლოვდება ნულს, ეს ორი ფესვი ნამდვილ ღერძზე უახლოვდება ერთმანეთს. როგორც კი a გახდება ნულის ტოლი, z_1 და z_2 ფესვები შეეჯახება ერთმანეთს. $z=0$ იქნება ჯერადი ფესვი. ფესვის ჯერადობაა 2.



3. როდესაც a რიცხვი გასცდება ნულს და გახდება უარყოფითი, ნამდვილ ღერძზე გაქრება განტოლების ფესვები. სინამდვილეში შეჯახების შემდეგ z_1 და z_2 ფესვები გადიან კომპლექსურ სიბრტყეში.

რომისათვის რომ ეს ფესვები არ დაკარგულიყო, შემოიტანეს კომპლექსური რიცხვები.

ალგებრის ძირითად თეორემაში საუბარია ფესვების არსებობის შესახებ, მაგრამ არაფერია ნათქვამი, შეიძლება თუ არა მათი პოვნა. ფესვების პოვნას მათემატიკოსები განტოლების ამოხსნას უწოდებენ.

ყველაზე ადვილია პირველი ხარისხის განტოლების ამოხსნა. პირველი ხარისხის განტოლებაა: $x+b=0$. ფესვი მოიცემა ფორმულით: $x=-b$.

მეორე ხარისხის განტოლება ეს არის კვადრატული განტოლება $x^2+px+q=0$. ამ განტოლებას აქვს ორი ფესვი, რომლებიც მოიცემა ფორმულით: $x_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$.

კვადრატული განტოლების ამოხსნა იცოდნენ ჯერ კიდევ ძველ ბაბილონში. მესამე ხარისხის, ანუ კუბური განტოლების ამოხსნას კი მალიან დიდი დრო დასჭირდა. ფესვების ფორმულა იპოვეს მხოლოდ XI საუკუნეში. ეს მოხდა იტალიაში.

ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ფესვების ფორმულა იცოდა სციპიონ დელ ფერომ. ეს ფორმულა მან გააცნო თავის მოსწავლეს და ამავე დროს თავის სიძეს – ანტონიო ფიორეს. ამ უკანასკნელმა მათემატიკურ ტურნირში გამოიწვია ნიკოლო ტარტალია. ტარტალია ზედმეტი სახელი იყო. მშობლიური ქალაქის ოკუპაციის დროს ტარტალია ყბაში დაჭრეს და ამის შემდეგ უჭირდა გამართული ლაპარაკი, ამიტომ შეარქვეს მას ეს სახელი. ტურნირის დაწყებამდე რამდენიმე დღით ადრე ტარტალიამ იპოვა კუბური განტოლებას ფესვების ზოგადი ფორმულა. ტურნირის დროს ტარტალიამ ორ საათში ამოხსნა შეთავაზებული ოცდაათივე განტოლება, მისმა მეტოქემ კი – ვერც ერთი. ფიორეს მოუწია ოცდაათი ცისანი ვახშამის გაშლა. ასეთი იყო ამ ტურნირის პირობა. ტარტალიამ ამ თავისი ფორმულა გააცნო მხოლოდ ერთ ადამიანს, ეს იყო ჯეროლამო კარდანო. ამ უკანასკნელმა დაარღვია შეთანხმების პირობა და ეს ფორმულა გამოაქვეყნა თავის წიგნში. დღეს კუბური განტოლების ფორმულას კარდანოს ფორმულას უწოდებენ.

უნდა ითქვას, რომ კარდანო საკმაოდ ცნობილი პიროვნება იყო იტალიაში. განათლებით იგი იყო ექიმი. გატაცებული იყო ჰოროსკოპების შედგენით. ამ ჰოროსკოპის მიხედვით მან გამოთვალა თავისი სიკვდილის დღე. კარდანომ მართლაც იცოცხლა ამ დღემდე და როდესაც დარწმუნდა, რომ მის სიცოცხლეს საფრთხე არ ემუქრებოდა, თავი მოიკლა. ასე მოახერხა კარდანომ თავისი ჰოროსკოპის გადარჩენა.

მეოთხე ხარისხის განტოლების ამოხსნის მეთოდი იპოვა კარდანოს მოსწავლემ, ეს იყო ლუიჯი ფერარი. ამის შემდეგ ბევრი მათემატიკოსი ცდილობდა მეხუთე ხარისხის განტოლების ამოხსნას, მაგრამ უშედეგოდ. ამის მიზეზი მხოლოდ XIX საუკუნეში გაირკვა. ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა ნილს აბელმა აჩვენა, რომ ასეთი ფორმულა უბრალოდ არ არსებობს. ასევე არ არსებობს მეხუთეზე მეტი ხარისხის განტოლების ფესვების ზოგადი ფორმულა.

რა თქმა უნდა, მაღალი ხარისხის უამრავი კონკრეტული განტოლება არსებობს, რომელთათვისაც შეიძლება ფესვების ფორმულის დაწერა. 1811 წელს ევარესტ გალუამ იპოვა კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი კონკრეტული განტოლებისთვის, რომლის ხარისხი მეტია ხუთზე, დადგინდეს, შეიძლება თუ არა ფესვების ფორმულის დაწერა. გალუა მათემატიკის გარდა გატაცებული იყო პოლიტიკითაც. პოლიტიკური ცხოვრება იმ დროისათვის საფრანგეთში მართლაც საინტერესო იყო. ქვეყანა მოცული იყო გადატრიალებებით და რევოლუციებით. გალუა მგზნებარე რესპუბლიკელი იყო, რაც მისთვის საბედისწერო აღმოჩნდა. ოცი წლის ასაკში გალუა მოკლეს დუელში.*)

IV თავი

მათემატიკური ანალიზის ელემენტები

(მათემატიკური ანალიზი ფაქტიურად დაიწყო ნიუტონის შრომებიდან, რომლებიც მან გამოაქვეყნა წიგნში “ნატურფილოსოფიის მათემატიკური საფუძვლები“. ნატურფილოსოფიას იმ დროისათვის უწოდებდნენ ფიზიკას. ეს წიგნი გამოქვეყნდა ერთადერთი მიზნით: წმინდა მათემატიკური გზით გამოეკვლიათ პლანეტების მოძრაობა მიზიდულობის ველში . მოძრაობას შემდგომში მათემატიკოსებმა დაარქვეს ფუნქცია. სწორედ ფუნქციის ანალიზი იგულისხმება მათემატიკურ ანალიზში.)

1. ფუნქცია

A. ფუნქციის ცნება

ფუნქცია არის დამოკიდებულება ორ სიდიდეს შორის. თუ y დამოკიდებულია x-ზე, მაშინ ამბობენ, რომ y არის x-ის ფუნქცია.

EX. 1. მსოფლიო მიზიდულობის ძალა დამოკიდებულია r მანძილზე:

$$F=k/r^2,\ k \text{ რაღაც რიცხვია.}$$

ეს ფუნქცია იპოვა რობერტ ჰუკმა.

2. ინფლაციის ტემპი დამოკიდებულია უმუშევრობის დონეზე:

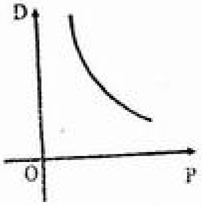
უმუშევრობა (%)	5	6	7	9.5	10
ინფლაცია (%)	13	8	6.5	4	6.5

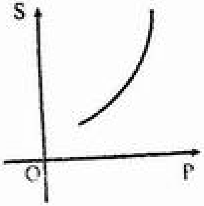
ეს დამოკიდებულება დაადგინა ფილიპსმა. ცხრილში მოყვანილია მონაცემები, რომელიც ახასიათებდა აშშ-ის

ეკონომიკას 80-იან წლებში.

3. მოთხოვნა D დამოკიდებულია P ფასზე. რაც უფრო დიდია ფასი, მით უფრო ნაკლებია მოთხოვნა. ეს იმდენად მნიშვნელოვანი ფუნქციაა, რომ ეკონომისტებმა მას მოთხოვნის კანონი დაარქვეს.

მოთხოვნის გარდა P ფასზე დამოკიდებულია S მიწოდება. რაც უფრო დიდია ფასი, მით უფრო დიდია მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა. ეკონომისტები ამ ფუნქციას მიწოდების კანონს უწოდებენ.





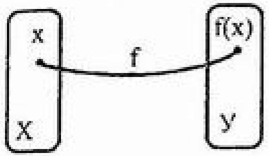
4. ინდივიდის სიმძლავრე დამოკიდებულია ინდივიდის L ზომაზე. ბიოლოგიაში ცნობილია ეს დამოკიდებულება:

$$W=kL^2. \quad k \text{ რაღაც რიცხვია.}$$

* ეს ფაქტი ცოტა არ იყოს უცნაურია. ერთი შეხედვით სიმძლავრე [illegible] სხეულის მოცულობის პროპორციული უნდა იყოს, მაგრამ [illegible] ენერგიის მხოლოდ 25%, [illegible] 75% გარდაიქმნება სითბოდ, ხოლო სითბოს გადაცემა [illegible] ფართობის ანუ L^2-ის პროპორციული.

საინტერესოა, რომ ინდივიდის ზომაზე აღარ არის დამოკიდებული სიჩქარე, რომელიც მას სწორ გზაზე შეუძლია განავითაროს. მართლაც, [illegible] წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია სიჩქარის კვადრატის და [illegible] ე. ი. L^2-ის. ამ წინააღმდეგობის გადალახვაზე იხარჯება სიმძლავრე $W=av^2L^2v$, a რაღაც რიცხვია. ტოლობიდან [illegible] $av^2L^2v=kL^2$, ამიტომ $v^3=k/a$ და v არ არის დამოკიდებული L-ზე. *

DEF. 1. X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, რომელსაც X სიმრავლის ნებისმიერ ელემენტს შეუსაბამებს Y სიმრავლის მხოლოდ ერთ ელემენტს, ფუნქცია ეწოდება.



2. თუ f არის ფუნქცია X და Y სიმრავლეებს შორის, მაშინ წერენ:

$$y=f(x), \quad x \in X.$$

3. X სიმრავლეს ეწოდება განსაზღვრის არე.

4. x ცვლადს, რომელიც აღნიშნავს განსაზღვრის არის ნებისმიერ ელემენტს, არგუმენტი ეწოდება.

x-ის შესაბამისი წერტილი აღინიშნება f(x) სიმბოლოთი. მას ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში.

EX. 1. ფუნქცია, რომელიც აღწერს მიზიდულობის კანონს, მოცემულია ფორმულით:

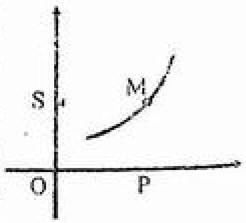
$$F=k/r^2, \quad r \in (0,+\infty).$$

განსაზღვრის არეა სიმრავლე: $X=(0,+\infty)$.

2. ფილიპსის დამოკიდებულება მოცემულია ცხრილით, განსაზღვრის არეა სიმრავლე: $X=\{5,\ 6,\ 7,\ 9.5,\ 10\}$

$f(5)=13,\ f(6)=8,\ f(7)=6.5,\ f(9.5)=4,\ f(10)=6.5.$

3. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემული არიან გრაფიკულად. მათი განსაზღვრის არეა დადებითი ნახევარღერძი. P წერტილის შესაბამისი წერტილი აიგება შემდეგი წესით. P წერტილში გავავლოთ ვერტიკალური წრფე. ეს წრფე გრაფიკს გადაკვეთს M წერტილში. შემდეგ M წერტილზე გავავლოთ ჰორიზონტალური წრფე. ეს წრფე ორდინატთა ღერძს გადაკვეთს S წერტილში. მიღებული წერტილი არის P-ს შესაბამისი წერტილი.

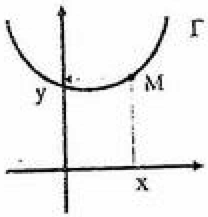


B. ფუნქციის გრაფიკი

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ფუნქციებს, რომლებიც რიცხვით სიმრავლეებზე არიან განსაზღვრული და ღებულობენ რიცხვით მნიშვნელობებს. ასეთ ფუნქციებს რიცხვითი ფუნქციები ეწოდებათ.

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქცია. ავიღოთ არგუმენტის რაიმე მნიშვნელობა x. ვიპოვოთ შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობა $y=f(x)$. შევადგინოთ წყვილი (x,y). სიბრტყეზე ავიღოთ M წერტილი, რომლის კოორდინატებია (x,y). როდესაც x გაირბენს მთელ განსაზღვრის არეს, ყველა ასეთი წერტილების სიმრავლე იძლევა გარკვეულ „წირს". ეს წირი არის ფუნქციის გრაფიკი.

DEF. $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი არის სიმრავლე:



$$\Gamma=\{M(x,y) \mid y=f(x),\ x\in X\}.$$

ფუნქციის გეომეტრიული შინაარსი

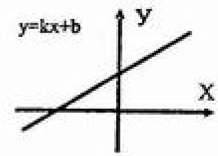
$\boxed{\text{ფუნქცია არის გრაფიკი.}}$

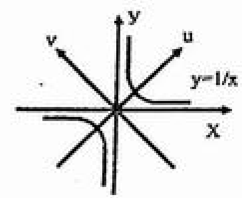
PR. დაწერეთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის განტოლება.

პასუხი: $y-f(x)=0$.

EX. 1. $y=kx+b$ ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე.

■ $y=kx+b$ არის წრფის განტოლება. ■





2. $y=1/x$ ფუნქციის გრაფიკია ჰიპერბოლა.

■ კოორდინატთა სისტემა მობრუნებით 45^0-ით. ავიღოთ გრაფიკის ნებისმიერი წერტილი M. ვთქვათ, ძველ კოორდინატთა სისტემაში M წერტილის კოორდინატებია (x,y), ხოლო ახალში – (u,v). 45^0–ით მობრუნება არის მატრიცა:

$$R^{45^0}=\begin{pmatrix}\cos45^0 & -\sin45^0\\ \sin45^0 & \cos45^0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ამიტომ

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v)\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\end{array}$$

ჩავსვათ x და y–ის მნიშვნელობები ფუნქციაში, მივიღებთ:

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow xy=1\Rightarrow \frac{1}{2}(u^2-v^2)=1\Rightarrow \frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}=1.$$

ეს ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლებაა $a=b=\sqrt{2}$. ■

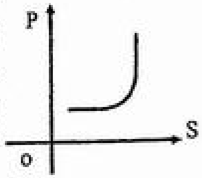
PR. აჩვენეთ, რომ $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკია პარაბოლა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: კოორდინატთა სისტემა მოაბრუნეთ 90^0–ით.

ფუნქციის გრაფიკს აქვს ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება. ნებისმიერი ვერტიკალური წრფე გრაფიკს კვეთს არაუმეტეს ერთ წერტილში. თუ რაიმე წირს ეს თვისება არ გააჩნია, მაშინ იგი არ წარმოადგენს გრაფიკს.

ეკონომიკაში ზოგიერთი დამოკიდებულება გამოისახება ისეთი წირების საშუალებით, რომლებიც არ წარმოადგენენ გრაფიკებს. ასეთია, მაგალითად, ერთობლივი მიწოდების წირი. იგი შედგება სამი ნაწილისაგან.

1. ჰორიზონტალური მონაკვეთი აღწერს ეკონომიკას, რომელიც იმყოფება ღრმა კრიზისში. ასეთ დროს არსებული თავისუფალი რესურსების გამოყენება იწვევს პროდუქციის მოცულობის ზრდას, რაც გავლენას არ ახდენს ფასების ცვლილებაზე.



2. შუა მონაკვეთი შეესაბამება ისეთ მდგომარეობას, როდესაც წარმოების ზრდა იწვევს ხარჯების გაზრდას, რაც, თავის მხრივ, იწვევს პროდუქციაზე ფასების აწევას.

3. ვერტიკალური მონაკვეთი აღწერს მდგომარეობას, როდესაც ეკონომიკა მუშაობს სრული დატვირთვით. წარმოების ზრდა უკვე შეუძლებელია. ასეთ დროს ფასების აწევის მიზეზი არის მოთხოვნის ზრდა.

სწორედ ვერტიკალური მონაკვეთის გამო არ არის მიწოდების წირი გრაფიკი. ჰორიზონტალურ მონაკვეთს ეკონომისტები კეინზის მონაკვეთს უწოდებენ.

* ეს სახელწოდება დაკავშირებულია ჯონ კეინზთან. იგი ითვლება მაკროეკონომიკის ფუძემდებლად. თავდაპირველად კეინზი გატაცებული იყო მათემატიკით, კერძოდ, ალბათობის თეორიით. შემდეგ მუშაობდა ეკონომიკის პრობლემებზე. კეინზი მარტო ეკონომისტი არ იყო. იგი გამოირჩეოდა საოცარი მრავალმხრივობით: იყო ბრიტანელთა მთავარი სახელმწიფო წარმომადგენელი პარიზის სამშვიდობო კონფერენციაზე, იყო ინგლისის ბანკის დირექტორთა საბჭოს წევრი, იყო მუსიკისა და ხელოვნების ხელშემწყობი ფონდის დირექტორი, ხელმძღვანელობდა სხვადასხვა ეკონომიკური ჟურნალების გამოცემას, იყო საინვესტიციო კომპანიის მმართველი, კემბრიჯში ააშენა თეატრი. კეინზი თამაშობდა საფონდო ბირჟაზე; აქ მან ორი მილიონი დოლარი მოიგო.*

2. მიმდევრობის ზღვარი

A. მიმდევრობა

მიმდევრობა იგივე ფუნქციაა, რომლის არგუმენტიც ღებულობს მხოლოდ ნატურალურ მნიშვნელობებს.

DEF. ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, მიმდევრობა ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია მიმდევრობა:

$$y=f(x), \quad x\in \mathbf{N}.$$

განვიხილოთ ფუნქციის მნიშვნელობები:

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2), \dots ,\ a_n=f(n), \dots$$

DEF. 1. a_1 რიცხვს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი.

a_2 რიცხვს ეწოდება მიმდევრობის მეორე წევრი.

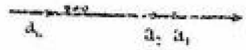
. . . .

a_n რიცხვს ეწოდება მიმდევრობის n–ური ან ზოგადი წევრი.

2. ფუნქციისგან განსხვავებით მიმდევრობას აღნიშნავენ სიმბოლოთი:

$(a_1, a_2, \dots , a_n, \dots)$ ან უბრალოდ (a_n)–ით.

REM. გეომეტრიულად მიმდევრობას გამოსახავენ წერტილების საშუალებით რიცხვით წრფეზე (და არა სიბრტყეზე, როგორც ეს ფუნქციების შემთხვევაში).



EX. 1. ვთქვათ, $a_n = 1/n$. ამ მიმდევრობის წევრებია:

$$(1/n) = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)$$

2. $a_n=q^{n-1}$ მიმდევრობა არის გეომეტრიული პროგრესია:

$$(q^{n-1})=(1, q, q^2, \dots , q^{n-1}, \dots).$$

3. მიმდევრობის პირველი ორი წევრი ერთიანებია, ხოლო ნებისმიერი სხვა წევრი უდრის წინა ორი წევრის ჯამს:

$$u_1=u_2=1,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

მიმდევრობის წევრებია:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$$

DEF. ამ მიმდევრობის წევრებს ფიბონაჩის რიცხვები ეწოდებათ.

(* ფიბონაჩი იტალიელი კომერსანტის ფსევდონიმია. აღმოსავლეთში მოგზაურობის დროს შეისწავლა მათემატიკა. შემდეგ იტალიაში გამოაქვეყნა წიგნი. ამ წიგნმა დიდად შეუწყო ხელი შუა საუკუნეების ევროპაში ინდო-არაბული ციფრების გავრცელებას. ეს ის ციფრებია, რომლებსაც დღეს ვიყენებთ რიცხვების ჩაწერის დროს: 0, 1, 2, ... 9. ასეთი ციფრების გამოყენება პირველად კომერსანტებმა დაიწყეს (და არა მათემატიკოსებმა). კომერსანტებს, რომლებიც ვაჭრობდნენ სხვადასხვა ქვეყნებში, ესაჭიროებოდათ ფულის გადაცვლა. ეს მოითხოვდა რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების ჩატარებას. კომერსანტებმა შენიშნეს, რომ ასეთი მოქმედებების ჩატარება გაცილებით ადვილია ახალ სისტემაში. კომერსანტებისაგან განსხვავებით მათემატიკოსებმა დიდი წვალების შემდეგ დაიწყეს ახალი ციფრების გამოყენება.)

აღმოჩნდა, რომ ფიბონაჩის მიმდევრობა არის ორი გეომეტრიული პროგრესიის სხვაობა:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(g^n-\left(-1/g\right)^n\right), \quad g=(1+\sqrt{5}):2.$$

(ფიბონაჩის რიცხვებს აქვს ბევრი საინტერესო თვისება. სრულიად მოულოდნელად ეს რიცხვები გამოყენებული იქნა პოეზიაში, არქიტექტურაში და მუსიკაში.

1. ფიბონაჩის რიცხვებს, როგორც ჩანს იცნობდა შოთა რუსთაველიც. ამას ადასტურებს „ვეფხისტყაოსნის" ბევრი სტროფი. მაგალითად:

$$\underbrace{\text{„დღეს არა,}}_{3}\ \underbrace{\text{ხვალე მოვკვდები,}}_{5}\ \underbrace{\text{სოფელი ასრე მქმნელია".}}_{8}$$

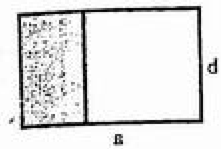
ამ სტროფში მარცვლების რაოდენობები ადგენენ ფიბონაჩის მიმდევრობას.)

2. ვთქვათ, მოცემულია a და b (a>b) სიგრძის ორი მონაკვეთი.

DEF. ეს ორი მონაკვეთი ადგენს ოქროს კვეთას, თუ $a^2-b^2=ab$.

PR. 1. იპოვეთ a/b.

პასუხი: $a/b=g$. ეს რიცხვი არის $x^2-x-1=0$ განტოლების ფესვი.



2. განვიხილოთ მართკუთხედი, რომლის გვერდები ადგენენ ოქროს კვეთას. ამ მართკუთხედს ჩამოვაჭრათ მცირე გვერდზე აგებული კვადრატი. აჩვენეთ, რომ მიღებული მართკუთხედი არის თავიდან მოცემული მართკუთხედის მსგავსი (ე. ი. მისი გვერდებიც ადგენენ ოქროს კვეთას).

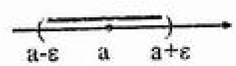
(მართკუთხედი, რომლის გვერდები ადგენენ ოქროს კვეთას, ყველაზე „ლამაზი" მართკუთხედია სხვა მართკუთხედებს შორის. ფსიქოლოგიური ტესტირების დროს გამოკითხულთა უმრავლესობამ უპირატესობა სწორედ ასეთ მართკუთხედს მიანიჭა. ოქროს კვეთის პროპორცია გარკვეულ ესთეთიკურ სიამოვნებას ანიჭებს ადამიანს. მართალია, ეს ფაქტი ექსპერიმენტულად დადგინდა ჩვენი საუკუნის 80-იან წლებში, მაგრამ იგი ცნობილი იყო გაცილებით ადრე. ოქროს კვეთის პროპორციას იყენებდნენ აღორძინების ხანის მხატვრობაში და არქიტექტურაში.*)

B. მიმდევრობის ზღვრის ცნება

a რიცხვი არის (a_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ამ მიმდევრობის წევრები „უახლოვდებიან" a რიცხვს. მათემატიკოსები დიდხანს ფიქრობდნენ, როგორ ჩამოეყალიბებინათ ეს აზრი მკაცრ მათემატიკურ ტერმინებში. საბოლოოდ მათ მოიგონეს საკმაოდ უცნაური განმარტება. ამ განმარტებაში მთავარი ადგილი უჭირავს მიდამოს ცნებას.

DEF. a წერტილის მიდამო ეწოდება ნებისმიერ ინტერვალს, რომლის ცენტრშიც იმყოფება a წერტილი.

ცხადია a წერტილის მიდამო შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:



$$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon).$$

PR. 1. აჩვენეთ, რომ

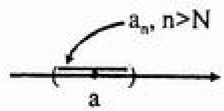
$$a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\Leftrightarrow|a_n-a|<\varepsilon.$$

■ $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow |a_n-a|<\varepsilon.$ ■

2. დაწყებული რომელი ნომრიდან მოხვდება $1/n$ მიმდევრობის წევრები (-0.1, 0.1) მიდამოში?

პასუხი: მეთერთმეტე წევრიდან.

DEF. 1. a რიცხვს ეწოდება (a_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ a წერტილის ნებისმიერ მიდამოში მოხვდება მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან.

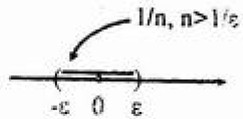


2. თუ (a_n) მიმდევრობის ზღვარი არის a რიცხვი, მაშინ წერენ:

$$\lim a_n = a \quad \text{ან} \quad a_n \to a.$$

EX. 1. $1/n$ მიმდევრობა უახლოვდება 0-ს: $1/n \to 0$.

■ ავიღოთ $a=0$ წერტილის ნებისმიერი მიდამო $(-\varepsilon, \varepsilon)$. ვნახოთ, რომელი წევრები მოხვდება ამ მიდამოში.



$$\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

მიდამოში მოხვდება ის წევრები, რომელთა ნომრები მეტია $1/\varepsilon$-ზე. ■

REM. მოყვანილი მსჯელობა არ არის აბსოლუტურად მკაცრი. ამ მსჯელობაში გამოიყენება ძალიან მნიშვნელოვანი ფაქტი. ეს არის *არქიმედეს პრინციპი:* როგორიც არ უნდა იყოს ნამდვილი რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება მასზე მეტი მთელი რიცხვი.

მიუხედავად თავისი სიმარტივისა, არქიმედეს პრინციპი ფუნდამენტურ როლს თამაშობს ანალიზში. მასში ჩადებულია ნამდვილი რიცხვების მეტად მნიშვნელოვანი თვისება, რომლის შესახებაც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

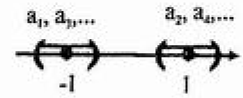
არსებობს მიმდევრობის ზღვრის კიდევ ერთი, ძალიან კარგი განმარტება.

DEF. a რიცხვს ეწოდება (a_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ a წერტილის ნებისმიერი მიდამოს გარეთ დარჩება მიმდევრობის წევრთა სასრული რაოდენობა.

PR. 1. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობის სასრული რაოდენობის წევრის შეცვლით მიმდევრობის ზღვარი არ იცვლება.

2. დაამტკიცეთ: $\lim a_{n+1} = \lim a_n$.

EX. განვიხილოთ მიმდევრობა



$$(-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \ldots).$$

ამ მიმდევრობას არ აქვს ზღვარი.

■ 1. ვაჩვენოთ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარი არ შეიძლება იყოს რიცხვი 1.

ავირჩიოთ 1-ის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს −1 წერტილს, მაგალითად $(0.5, 1.5)$. ამ მიდამოში მოხვდება მიმდევრობის ყველა ლუწნომრიანი წევრი, ხოლო ყველა კენტნომრიანი წევრი დარჩება გარეთ, მათი რაოდენობა უსასრულოა. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობის ზღვარი არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი სხვა რიცხვი. ■

როგორც ვხედავთ, ზოგ მიმდევრობას აქვს ზღვარი, ხოლო ზოგს – არა. მათემატიკოსებმა შემოიღეს ტერმინები, რომლებიც განასხვავებენ ასეთ მიმდევრობებს.

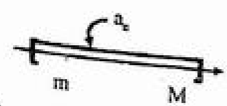
DEF. 1. მიმდევრობას ეწოდება კრებადი, თუ მას აქვს ზღვარი.

2. მიმდევრობას ეწოდება განშლადი, თუ მას არ აქვს ზღვარი.

C. უწყვეტობის პრინციპი

ვთქვათ, მოცემულია (a_n) მიმდევრობა.

DEF. 1. მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ მისი ყველა წევრი მოთავსებულია რომელიღაც მონაკვეთში:



$\forall n: a_n \in [m, M]$ ან $(m \le a_n \le M)$.

2. m რიცხვს ეწოდება მიმდევრობის ქვედა საზღვარი.
3. M რიცხვს ეწოდება მიმდევრობის ზედა საზღვარი.

EX. 1. გეომეტრიული პროგრესია q^n შემოსაზღვრულია, როცა მნიშვნელი $-1 \le q \le 1$ ($\Leftrightarrow |q| \le 1$). ამ შემთხვევაში: $-1 \le q^n \le 1$.

2. ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა (n) არ არის შემოსაზღვრული. ამ მიმდევრობას გააჩნია ქვედა საზღვარი $m=1$ და არ გააჩნია ზედა საზღვარი.

■ როგორიც არ უნდა იყოს M რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება მასზე მეტი ნატურალური რიცხვი n. ეს არის არქიმედეს პრინციპის შინაარსი. ■

DEF. 1. მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრი მეტია წინაზე:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

2. მიმდევრობას ეწოდება კლებადი, თუ მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრი ნაკლებია წინაზე:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

3. მიმდევრობას ეწოდება მონოტონური, თუ იგი ან ზრდადია ან კლებადი.

EX. განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია (q^n).

1. როცა $0<q<1$, პროგრესია კლებადია: $q^n > q^{n+1}$.

2. როცა $-1<q<0$, პროგრესიის კენტნომრიანი წევრებისაგან შედგენილი მიმდევრობა ზრდადია, ხოლო ლუწნომრიანი წევრებისაგან – კლებადი.

უწყვეტობის პრინციპი

> მონოტონური და შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

REM. უწყვეტობის პრინციპის დამტკიცება მოითხოვს იმის ცოდნას, თუ რა არის ნამდვილი რიცხვი. ჩვენ ეს არ ვიცით, ამიტომ მას ვღებულობთ აქსიომის სახით

(პრინციპი და აქსიომა სინონიმებია). ასეთი დაშვება მართლაც შესაძლებელია, ვინაიდან უწყვეტობის პრინციპი გამოხატავს ნამდვილი რიცხვების ერთ–ერთ ფუნდამენტურ თვისებას, კერძოდ იმას, რომ რიცხვით წრფეზე აღარ არის თავისუფალი ადგილები. ასეთ დროს ამბობენ, რომ რიცხვითი ღერძი უწყვეტია.

უწყვეტობის პრინციპის გეომეტრიული შინაარსი

> რიცხვითი ღერძი არის უწყვეტი. იგი მთლიანად შევსებულია ნამდვილი რიცხვებით.

უწყვეტობის პრინციპში ლაპარაკია მხოლოდ ზღვრის არსებობის შესახებ და არაფერია ნათქვამი, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ იგი. მარტო იმის ცოდნა, რომ ზღვარი არსებობს, ზოგჯერ სრულიად საკმარისია იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ზღვრის ზუსტი მნიშვნელობა.

EX. 1. $\lim q^n = 0$, როცა $|q|<1$.

■ 1.) ვთქვათ, $0<q<1$. მაშინ პროგრესია კლებადია და შემოსაზღვრული. უწყვეტობის პრინციპის თანახმად იგი კრებადია. ვთქვათ, პროგრესიის ზღვარია a. მაშინ

$$q^{n+1} = qq^n \Leftrightarrow \underbrace{a_{n+1}}_{\downarrow \atop a} = q\underbrace{a_n}_{\downarrow \atop a} \Rightarrow a = qa \Rightarrow a = 0.$$

2) ვთქვათ, $q=0$. მაშინ პროგრესიის ყველა წევრი ნულია. ამიტომ ზღვარი $a=0$.

3) ვთქვათ, $-1<q<0$. მაშინ მიმდევრობის კენტნომრიანი წევრები ადგენენ ზრდად მიმდევრობას, რომელიც უახლოვდება ნულს და ლუწნომრიანი წევრები - კლებად მიმდევრობას, რომელიც ასევე უახლოვდება ნულს. ■

2. $\lim 1/n = 0$.

■ (მკაცრი დამტკიცება).

$(1/n)$ მიმდევრობა კლებადია და შემოსაზღვრული:

$$1/n \in [0,1].$$

უწყვეტობის პრინციპის თანახმად ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ, ზღვარია a რიცხვი. მაშინ

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{n} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{1}{a_n} \\ n+1 = \dfrac{1}{a_{n+1}} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{a_n} + 1 = \frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1}(1+a_n) = a_n.$$

გადავიდეთ ამ ტოლობაში ზღვარზე:

$$a(1+a) = a \Rightarrow a = 0. \ ■$$

D. ზღვრის ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, (a_n) და (b_n) მიმდევრობები კრებადია:

$$\lim a_n = a, \ \lim b_n = b.$$

ზღვარზე გადასვლა ტოლობაში

თეორემა. $a_n = b_n \Leftrightarrow \lim a_n = \lim b_n$.

■ უშუალოდ გამომდინარეობს ზღვრის განმარტებიდან. ■

თეორემის შინაარსი ის არის, რომ თუ ტოლობა სამართლიანია მიმდევრობებისთვის, მაშინ იგი სამართლიანი იქნება მათი ზღვრებისთვისაც. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ტოლობაში შეიძლება ზღვარზე გადასვლა.

PR. შეიძლება თუ არა ტოლობაში ზღვრის ნიშნის მოხსნა:

$$\lim a_n = \lim b_n \Rightarrow a_n = b_n ?$$

პასუხი: არა.

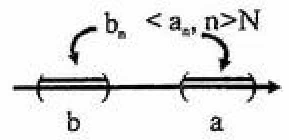
EX. $\lim \dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{1}{n^2} = 0$, მაგრამ $\dfrac{1}{n} \neq \dfrac{1}{n^2}$.

ზღვარზე გადასვლა უტოლობაში

თეორემა. $a_n < b_n \Rightarrow \lim a_n \le \lim b_n$.

■ დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $a > b$. ავირჩიოთ a და b წერტილების მიდამოები ისე, რომ ისინი არ კვეთდნენ ერთმანეთს.

a_n მიმდევრობის ყველა ის წევრი, რომელიც მოხვდება a წერტილის მიდამოში, მეტი იქნება b_n მიმდევრობის იმ წევრებზე, რომლებიც მოხვდებიან b წერტილის მიდამოში. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. ■



თეორემის შინაარსი ის არის, რომ თუ უტოლობა სამართლიანია მიმდევრობებისათვის, მაშინ იგი სამართლიანი იქნება მათი ზღვრებისთვისაც. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ უტოლობაში შეიძლება ზღვარზე გადასვლა.

PR. 1. შეიძლება თუ არა უტოლობაში ზღვრის ნიშნის მოხსნა?

პასუხი: კი, ოღონდ მიღებული უტოლობა სამართლიანია არა ყველი n-თვის, არამედ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან:

$$\lim b_n < \lim a_n \Rightarrow b_n < a_n, \quad n > N.$$

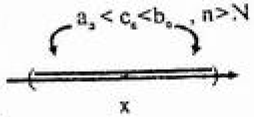
■ იხ. წინა თეორემის დამტკიცება. სწორედ ეს ფაქტია იქ დამტკიცებული. ■

2. აჩვენეთ, რომ მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ზღვარი.

თეორემა. ვთქვათ, $a_n \le c_n \le b_n$. თუ უტოლობის კიდურა წევრები უახლოვდებიან ერთსა და იმავე რიცხვს, მაშინ ამავე რიცხვს უახლოვდება უტოლობის შუა წევრიც:

$$\underbrace{a_n}_{\downarrow \atop x} \le c_n \le \underbrace{b_n}_{\downarrow \atop x} \Rightarrow c_n \to x.$$

■ ავიღოთ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო. ამ მიდამოში მოხვდება (a_n) და (b_n) მიმდევრობების ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან. მაშინ ამ მიდამოში მოხვდება (c_n) მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყებული ამავე ნომრიდან. ■



PR. დადებით d რიცხვს ეწოდება უსასრულოდ მცირე, თუ იგი ყველა ნამდვილ რიცხვზე ნაკლებია. არსებობს თუ არა უსასრულოდ მცირე რიცხვი?

პასუხი: არა.

■ ვთქვათ, არსებობს. მაშინ

$$\begin{array}{ccc} 0 < & d & < 1/n \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \Rightarrow d = 0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. ■

*) ის, რომ უსასრულოდ მცირე რიცხვი არ არსებობს, არის არქიმედეს პრინციპის შედეგი. სამოციან წლებში შეიქმნა თეორია, სადაც არ სრულდება არქიმედეს პრინციპი. ამ თეორიას მათემატიკოსებმა არასტანდარტული ანალიზი დაარქვეს. არასტანდარტულ ანალიზში რიცხვითი წრფე ნამდვილი რიცხვების გარდა შეიცავს უსასრულოდ მცირე რიცხვებს. არასტანდარტული ანალიზი ეგზოტიკური თეორიაა და რაიმე პრაქტიკული გამოყენება მას ჯერ-ჯერობით არ აქვს (თუ არ ჩავთვლით მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთ განტოლებას, რომელთა შესწავლა შესაძლებელი გახდა არასტანდარტული ანალიზის გამოყენებით). არასტანდარტული ანალიზის ერთადერთი უპირატესობა ის არის, რომ მისი მეშვეობით ძალიან მარტივად მტკიცდება სტანდარტული ანალიზის ბევრი თეორემა. *)

ზღვარზე გადასვლა და არითმეტიკული ოპერაციები

ვთქვათ, $a_n \to a$ და $b_n \to b$.

თეორემა. 1. ჯამის ზღვარი უდრის ზღვრების ჯამს:

$$a_n + b_n \to a + b.$$

2. ნამრავლის ზღვარი უდრის ზღვრების ნამრავლს:

$$a_n b_n \to ab.$$

3. შეფარდების ზღვარი უდრის ზღვრების შეფარდებას, თუ მნიშვნელი არ უდრის ნულს:

$$a_n/b_n \to a/b, \quad b_n \neq 0, \quad b \neq 0.$$

EX.

$$\lim \frac{n^3 - 2n + 1}{n^3 + 3n^2 + 1} = \lim \frac{n^3 (1 - 2/n^2 + 1/n^3)}{n^3 (1 + 3/n + 1/n^3)} =$$

$$\frac{1 - 2\lim(1/n^2) + \lim(1/n^3)}{1 + 3\lim(1/n^2) + \lim(1/n^3)} = \frac{1 - 2\cdot 0 + 0}{1 + 3\cdot 0 + 0} = 1.$$

E. განუზღვრელობა. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა

ვთქვათ, მოცემულია (a_n) მიმდევრობა.

DEF. მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე, თუ იგი უახლოვდება ნულს:

$$a_n \to 0.$$

EX. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობები:

1. $a_n = 1/n \to 0.$

2. $b_n = A/n \to 0.$

3. $d_n = (-1)^n/n \to 0.$

ვთქვათ, (x_n) და (y_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია:

$$x_n \to 0, \quad y_n \to 0.$$

თეორემა. 1. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობების ჯამი უსასრულოდ მცირეა:

$$x_n + y_n \to 0.$$

2. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობების ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა:

$$x_n y_n \to 0.$$

■ 1. $x_n + y_n \to 0 + 0 = 0.$

2. $x_n y_n \to 0 \cdot 0 = 0.$ ■

უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა

DEF. 1. (x_n) მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი, თუ მისი შებრუნებული $(1/x_n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა.

2. თუ (x_n) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა, მაშინ წერენ:

$$x_n \to \infty.$$

EX. 1. $x_n = n \to \infty.$

■ $1/x_n = 1/n \to 0.$ ■

2. $z_n = An \to \infty.$

3. $u_n = (-1)^n n \to \infty.$

PR. 1. აჩვენეთ, რომ ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის ნამრავლი უსასრულოდ დიდია.

2. არის თუ არა ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის ჯამი უსასრულოდ დიდი?

პასუხი: საზოგადოდ არა.

EX. $n - n = 0.$

$\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა

ვთქვათ, (a_n) და (b_n) უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია. განვიხილოთ მათი შეფარდება: $\frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

შეფარდების ზღვარი შეიძლება იყოს წინასწარ აღებული ნებისმიერი რიცხვი ან საერთოდ არ არსებობდეს.

EX. 1. $\frac{b_n}{a_n} = \frac{A/n}{1/n} = A \to A.$

2. $\frac{d_n}{a_n} = \frac{(-1)^n}{1/n} = (-1)^n.$ ეს მიმდევრობა განშლადია.

DEF. უსასრულოდ მცირე მიმდევრობების შეფარდების ზღვარს $\frac{0}{0}$ ტიპის განუზღვრელობა ეწოდება.

$\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა.

PR. 1. მოიყვანეთ ისეთი ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის მაგალითი, რომ მათი შეფარდების ზღვარი იყოს წინასწარ აღებული ნებისმიერი A რიცხვი.

2. მოიყვანეთ ისეთი ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის მაგალითი, რომ მათი შეფარდების ზღვარი არ არსებობდეს.

მითითება: გამოიყენეთ მაგალითში მოყვანილი მიმდევრობები.

DEF. უსასრულოდ დიდი მიმდევრობების შეფარდების ზღვარს $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა ეწოდება.

3. ფუნქციის ზღვარი

A. ფუნქციის ზღვრის ცნება

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია (a,b) ინტერვალზე. ვთქვათ, $c \in (a,b)$.

ვთქვათ, x წერტილი უახლოვდება c-ს. თუ ასეთ დროს y უახლოვდება რაიმე A წერტილს, მაშინ ამბობენ, რომ A არის $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში.

მათემატიკურ ენაზე ეს განმარტება შეიძლება გაფორმდეს, მაგალითად, ასე:

DEF. A რიცხვს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში, თუ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, სადაც

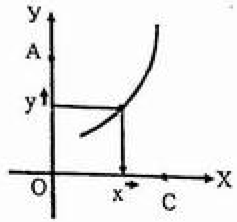
1) $x_n \in (a,b)$,

2) $x_n \neq c$,

3) $x_n \to c$,

მიმდევრობა

$$y_n = f(x_n) \to A.$$



REM. 1. პირველი პირობა მოითხოვება იმიტომ, რომ არსებობდეს $y_n = f(x_n)$.

2. მეორე პირობა ნიშნავს იმას, რომ ფუნქციის ზღვარი არ არის დამოკიდებული c წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობაზე. უფრო მეტიც, ფუნქცია შეიძლება არც იყოს განსაზღვრული ამ წერტილში. ფუნქციის ზღვარი დამოკიდებულია ფუნქციის ყოფაქცევაზე c წერტილის მახლობლად (და არა თვითონ c წერტილში).

3. მესამე პირობა ნიშნავს, რომ (x_n) მიმდევრობა უახლოვდება c წერტილს.

DEF. თუ A რიცხვი არის $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი c წერტილში, მაშინ წერენ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = A \quad \text{ან} \quad f(x)\to A,\ x\to c.$$

EX. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

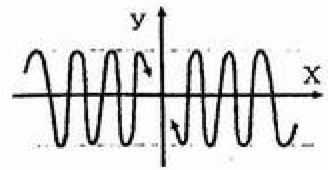
■ ავიღოთ ნებისმიერი მიმდევრობა $x_n\to 1$. მაშინ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=\lim(x_n+1)=\lim x_n+1=1+1=2.$$

ფუნქცია განსაზღვრული არ არის c=1 წერტილში. მიუხედავად ამისა ზღვარი მაინც არსებობს და უდრის 2-ს. ■

2. $y=\sin\frac{1}{x}$ ფუნქციას არ აქვს ზღვარი c=0 წერტილში.

■ განვიხილოთ მიმდევრობა:



$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\to 0.$$

ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები ადგენენ მიმდევრობას:

$$y_n=\sin(\pi/2+n\pi)=(-1)^n,$$

$$(y_n)=(-1,1,-1,\ldots,).$$

ეს მიმდევრობა განშლადია. ■

DEF. 1. ფუნქციის ზღვრის განმარტებაში 2) პირობა შევცვალოთ უტოლობით $x_n>c$.

მაშინ A რიცხვს უწოდებენ მარჯვენა ზღვარს და წერენ:

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)=A.$$

2. ფუნქციის ზღვრის განმარტებაში 2) პირობა შევცვალოთ უტოლობით $x_n<c$.

მაშინ A რიცხვს უწოდებენ მარცხენა ზღვარს და წერენ:

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)=A.$$

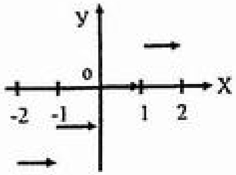
EX. 1. ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება მოცემულ რიცხვს. x-ის მთელი ნაწილი აღინიშნება [x]-ით:

$$[-2.5]=-3,\ [1]=1,\ [1.6]=1.$$

2. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=[x], \quad x\in(-\infty, \infty).$$

$c=0$ წერტილში ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი იქნება:



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f[x]=0\cdot$$

■ ავიღოთ ნებისმიერი მიმდევრობა (x_n), რომელიც მარჯვნიდან უახლოვდება ნულს. მაშინ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან

$$[x_n]=0\to 0. \quad ■$$

PR. იპოვეთ $y=[x]$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი $c=0$ წერტილში.

პასუხი: -1.

B. ფუნქციის ზღვრის ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია:

$$y=f(x) \quad \text{და} \quad y=g(x), \quad x\in(a,b).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $c\in(a,b)$ და

$$\lim_{x\to c} f(x)=A, \quad \lim_{x\to c} g(x)=B.$$

ზღვარზე გადასვლა ტოლობაში

თეორემა. $f(x)=g(x) \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)$

■ ავიღოთ ნებისმიერი მიმდევრობა $(x_n)\to c$.
გადავიდეთ ტოლობაში ზღვარზე:

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & = & g(x_n). \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & = & B \end{array} \quad ■$$

თეორემის შინაარსი ის არის, რომ თუ ტოლობა სამართლიანია ფუნქციებისთვის, მაშინ იგი სამართლიანია ზღვრებისთვისაც.

ზღვარზე გადასვლა უტოლობაში

თეორემა. $f(x)<g(x) \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)\le \lim_{x\to c} g(x)\cdot$

■ ავიღოთ ნებისმიერი მიმდევრობა $(x_n)\to c$. გადავიდეთ უტოლობაში ზღვარზე:

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & \le & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \le & B \end{array} . \quad ■$$

თეორემის შინაარსი ის არის, რომ თუ უტოლობა სამართლიანია ფუნქციებისთვის, მაშინ იგი სამართლიანი იქნება მათი ზღვრებისთვისაც. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ უტოლობაში შეიძლება ზღვარზე გადასვლა.

PR. 1. შეიძლება თუ არა უტოლობაში ზღვრის ნიშნის მოხსნა?

პასუხი: კი, ოღონდ მიღებული უტოლობა სამართლიანია არა მთელ განსაზღვრის არეზე, არამედ c წერტილის მიდამოში:

$$\lim_{x\to c} f(x)<\lim_{x\to c} g(x) \Rightarrow f(x)<g(x), \quad x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

■ დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი მიმდევრობა $x_n\to c$, რომ

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & > & g(x_n). \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \ge & B \end{array}$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. ■

თეორემა. ვთქვათ,

$$f(x)\le g(x)\le h(x).$$

თუ უტოლობის კიდურა წევრები უახლოვდებიან ერთსა და იმავე რიცხვს, მაშინ ამავე რიცხვს უახლოვდება უტოლობის შუა წევრიც:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ A}}{f(x)} \le g(x) \le \underset{\substack{\downarrow\\ A}}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x\to c} g(x) = A. \quad ■$$

PR. დაამტკიცეთ თეორემა.

ზღვარზე გადასვლა და არითმეტიკული ოპერაციები

ვთქვათ, $f(x)\to A$ და $g(x)\to B$, $x\to c$.

თეორემა. 1. ჯამის ზღვარი უდრის ზღვრების ჯამს:

$$f(x)+g(x)\to A+B.$$

2. ნამრავლის ზღვარი უდრის ზღვრების ნამრავლს:

$$f(x)g(x)\to AB.$$

3. შეფარდების ზღვარი უდრის ზღვრების შეფარდებას, თუ მნიშვნელი არ უდრის ნულს:

$$f(x)/g(x)\to A/B, \qquad g(x)\neq 0,\ B\neq 0.$$

■ 1. ავიღოთ ნებისმიერი მიმდევრობა $x_n \to c$. მაშინ

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\big(f(x_n)+g(x_n)\big)=A+B.$$

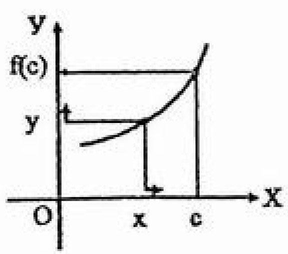
ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ორი ტოლობაც. ■

4. უწყვეტი ფუნქცია

A. უწყვეტი ფუნქციის ცნება

განვიხილოთ ფუნქცია $y=f(x)$, $x\in(a,b)$. ვთქვათ $c\in(a,b)$.

DEF. 1. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი c წერტილში, თუ ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას:



$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(c).} \qquad (1)$$

2. ფუნქცია უწყვეტია რაიმე სიმრავლეზე, თუ იგი უწყვეტია ამ სიმრავლის ნებისმიერ წერტილში.

REM. (1) ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(\lim_{x\to c} x).$$

ფუნქციის უწყვეტობა ნიშნავს, რომ lim-ის შეტანა შეიძლება ფუნქციის ნიშნის შიგნით.

უწყვეტი ფუნქციის გეომეტრიული დახასიათება

უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტი წირია.

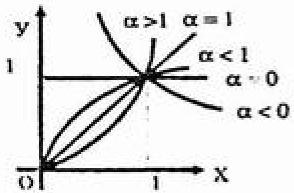
უწყვეტი ფუნქციის მაგალითებია ელემენტარული ფუნქციები.

B. ელემენტარული ფუნქციები

ელემენტარულს უწოდებენ ფუნქციებს, რომლებიც ისწავლება საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში.

ელემენტარული ფუნქციებია:

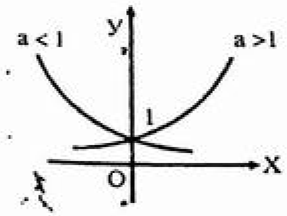
1. ხარისხოვანი ფუნქცია



$$y=x^{\alpha}, \quad x>0.$$

მაჩვენებელი ნებისმიერი რიცხვია: $\alpha\in R$.

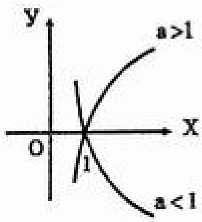
2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია



$$y=a^{x}, \quad x>0.$$

მოითხოვება, რომ მაჩვენებლიანი ფუნქციის ფუძე $a>0$ და $a\neq 1$.

3. ლოგარითმული ფუნქცია

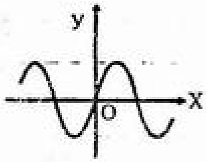


$y=\log_a x,\ x>0.$

მოითხოვება, რომ ფუძე $a>0$ და $a\neq 1$. ლოგარითმული ფუნქცია მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა.

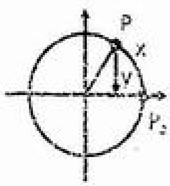
4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. სინუსი



$y=\sin x,\ x\in R.$

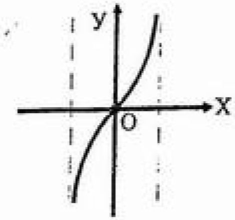
ერთეულოვან წრეწირზე ავიღოთ $P_0(1.0)$ წერტილი. ამ წერტილიდან წრეწირზე გადავზომოთ x სიგრძის რკალი. რკალის მეორე ბოლო აღვნიშნოთ P-თი. ვიცით, P წერტილის ორდინატაა [illegible] ცვლილებებს, [illegible] გამოვსახოთ x რკალის საშუალებით. [illegible] დარწმუნდნენ, რომ მხოლოდ არითმეტიკული მოქმედებების საშუალებით შეუძლებელია, ისევე მარტივი გამოსავალი - y რიცხვს დაარქვეს x რიცხვის სინუსი და შემოიტანეს აღნიშვნა: $y=\sin x$.



2. კოსინუსი

ფუნქცია $y=\cos x,\ x\in R$, წანაცვლებული არგუმენტის სინუსია: $\cos x=\sin(\pi/2-x)$. კოსინუსის გრაფიკი მიიღება სინუსის გრაფიკის პარალელური გადატანით. გადატანა უნდა მოხდეს OX ღერძის გასწვრივ მარცხნივ $\pi/2$ ერთეულით.

3. ტანგენსი



$y=\mathrm{tg}x,\quad x\neq\pi/2+\pi k,\quad k\in Z.$

ტანგენსი განიმარტება, როგორც სინუსის შეფარდება კოსინუსთან:

$$\mathrm{tg}x=\sin x/\cos x.$$

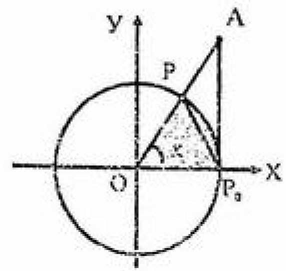
PR. 1. მოცემულია ერთეულოვანი წრეწირი. აჩვენეთ:

1) $(1/2)\sin x$ არის OPP_0 სამკუთხედის ფართობი;

2) $(1/2)x$ არის OPP_0 სექტორის ფართობი;

3) $(1/2)\mathrm{tg}x$ არის OP_0A სამკუთხედის ფართობი.

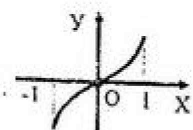
2. მივიღებთ უტოლობას:



$\sin x<x<\mathrm{tg}\,x,\quad 0<x<\pi/2.$

5. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

1. არკსინუსი



$y=\arcsin x,\quad x\in(-1.1).$

არკსინუსი არის სინუსის შექცეული ფუნქცია. სი-

ნუსის შექცეული გააჩნია, მაგალითად $(-\pi/2,\pi/2)$ ინტერვალზე.

2. არკკოსინუსი

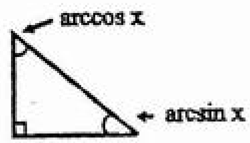
$$y=\arccos x, \quad x\in(-1,1).$$

არკკოსინუსი არ წარმოადგენს რაიმე ახალ ფუნქციას. არკკოსინუსი მინუს ნიშნით აღებული არკსინუსისაგან განსხვავდება მუდმივით.

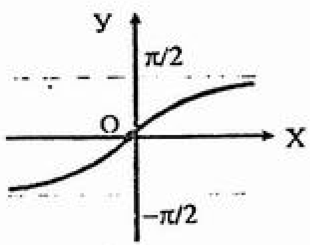
თეორემა.

$$\arcsin x+\arccos x=\pi/2.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს სრულიად მარტივ ფაქტს. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამი 90^0–ის ტოლია.



3. არკტანგენსი



$$y=\operatorname{arctg}x, \quad x\in\mathbf{R}.$$

არკტანგენსი ტანგენსის შექცეული ფუნქციაა $(-\pi/2,\ \pi/2)$ ინტერვალზე.

თეორემა. ყველა ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია განსაზღვრის არეზე.

■ ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკები უწყვეტი წირებია განსაზღვრის არეზე. ■

REM. შემდგომში ჩვენ ვნახავთ, რომ ელემენტარული ფუნქციები არა მარტო უწყვეტია, არამედ მათ გააჩნიათ გაცილებით კარგი თვისება. კერძოდ, ელემენტარული ფუნქციების გამოსახვა შეიძლება ფორმულებით, რომლებშიც არგუმენტზე მხოლოდ ორი არითმეტიკული მოქმედება სრულდება. ეს ფორმულები ჩვეულებრივი ფორმულებისაგან იმით განსხვავდებიან, რომ მათში მონაწილეობს შესაკრებთა არა სასრული, არამედ უსასრულო რაოდენობა. ასეთ ფორმულებს მწკრივები ეწოდებათ, ხოლო თვითონ ფუნქციებს – ანალიზური ფუნქციები.

C. წყვეტის წერტილები

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in(a,b).$$

ვთქვათ, $c\in(a,b)$.

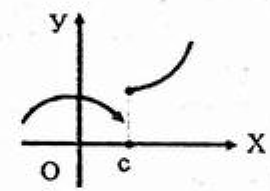
DEF. c წერტილს ეწოდება წყვეტის წერტილი, თუ ფუნქცია არ არის უწყვეტი c წერტილში.

განვიხილოთ მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები:

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x),$$

აგრეთვე ფუნქციის მნიშვნელობა $f(c)$.

DEF. თუ ამ სამი რიცხვიდან რომელიმე ორი განსხვავდება ერთმანეთისაგან, მაშინ c–ს ეწოდება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.



EX. ვთქვათ,

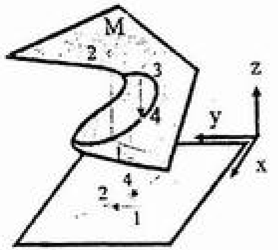
$$y=[x], \quad x\in\mathbf{R}.$$

$c=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

■ მარჯვენა ზღვარია 0, ხოლო მარცხენა ზღვარია −1. ■

(* ფუნქციები, რომლებსაც გააჩნიათ პირველი გვარის წყვეტის წერტილები, აღწერენ პროცესებს, რომლებშიც ადგილი აქვს ნახტომისებურ ცვლილებებს. მათემატიკოსები პირველი გვარის წყვეტის წერტილებს კატასტროფებს უწოდებენ. თეორია, რომელიც ასეთ წერტილებს შეისწავლის, შეიქმნა სამოცდაათიან წლებში. მას კატასტროფების თეორია უწოდეს. ზოგიერთი მეცნიერი თვლის, რომ კატასტროფების თეორია გაცილებით უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე კლასიკური ანალიზი. მაშინ, როდესაც მათემატიკური ანალიზი სწავლობს უწყვეტ (და გლუვ) ფუნქციებს, ახალი თეორია იძლევა ყველა ნახტომისებური ცვლილების შესწავლის უნივერსალურ მეთოდს. კატასტროფების თეორიის გამოყენება დაიწყეს სრულიად განსხვავებულ დარგებში: ემბრიოლოგიაში, ლინგვისტიკაში, ეკონომიკაში, ექსპერიმენტულ ფსიქოლოგიაში, სოციოლოგიაში.)

აი, როგორ აღწერს კატასტროფების თეორია მეცნიერის შემოქმედებას. მეცნიერი ხასიათდება სამი პარამეტრით:



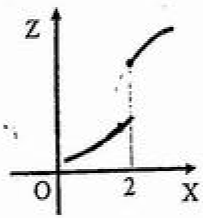
x=ცოდნა, y=გატაცება, z=მიღწევა.

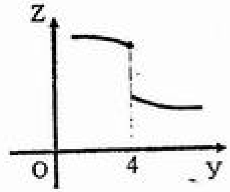
განვიხილოთ სამეული (x, y, z). სივრცეში ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა. მაშინ ასეთი სამეული სივრცეში იძლევა გარკვეულ M წერტილს. თუ სამეულის თითოეული კოორდინატი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად იცვლება და ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას, მაშინ M წერტილი გაირბენს მთელ სივრცეს. როდესაც კოორდინატებს შორის არსებობს გარკვეული კავშირი, მაშინ M წერტილი იმოძრავებს არა ნებისმიერად, არამედ რაღაც ზედაპირზე. კატასტროფების თეორიის თანახმად ასეთ ზედაპირებს „ზოგად" შემთხვევაში აქვს სპეციალური სახე.

განვიხილოთ ამ ზედაპირის გეგმილი ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. ამ სიბრტყეზე კოორდინატებია (x,y). ზედაპირის ყველა ის წერტილი, რომელშიც მხები ვერტიკალურია, ადგენს წირს. ამ წირს დისკრიმინანტა ეწოდება. ნახაზიდან ჩანს:

1. თუ მეცნიერებით გატაცება დიდი არა არის, მაშინ, ცოდნის ზრდასთან ერთად მიღწევებიც საკმაოდ ნელა იზრდება.

2. როდესაც გატაცება დიდია, თვისებრივად სხვა მოვლენასთან გვაქვს საქმე. ამ შემთხვევაში ცოდნის დაგროვებამ შეიძლება გამოიწვიოს მეცნიერული მიღწევის ნახტომისებური ზრდა. ასეთი თვისება გენიოსებს ახასიათებთ. M წერტილი „გენიოსების" არეში მოხვდება, თუ (x, y) იმოძრავებს 1 წირის გასწვრივ, ამ წირზე გავავლოთ ვერტიკალური სიბრტყე. ეს სიბრტყე გადაკვეთს ზედაპირს. მიღებული წირი აღწერს z-ის დამოკიდებულებას x–ზე. ამ დამოკიდებულების გრაფიკს აქვს პირველი გვარის წყვეტა.

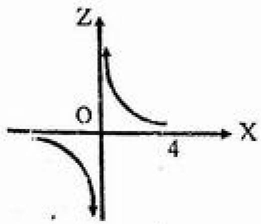




3. მეორეს მხრივ, თუ გატაცებას თან არ სდევს ცოდნის ზრდა, ამან შეიძლება „კატასტროფა" გამოიწვიოს. ასეთ დროს მიღწევების რიცხვი მკვეთრად მცირდება. ასეთი მდგომარეობა ალბათ მანიაკებისათვის არის დამახასიათებელი. M წერტილი მოხვდება „მანიაკების" არეში, თუ (x,y) იცვლება 3 წირის გასწვრივ, ამ წირზე გავავლოთ ვერტიკალური სიბრტყე. ეს სიბრტყე გადაკვეთავს ზედაპირს. მიღებული წირი აღწერს z-ის დამოკიდებულებას y–ზე. ამ დამოკიდებულების გრაფიკს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტა.*

DEF. c წერტილს ეწოდება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ ფუნქციის მარჯვენა ან მარცხენა ზღვარი არ არსებობს.

EX. ფუნქცია



$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

განიცდის წყვეტას c=0 წერტილში. ეს წერტილი არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. ამ შემთხვევაში არ არსებობს როგორც მარჯვენა ასევე მარცხენა ზღვარი.

D. უწყვეტი ფუნქციის ძირითადი თვისებები

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in X.$$

განვიხილოთ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა, როდესაც არგუმენტი „გაირბენს" მთელ განსაზღვრის არეს:

$$E=\{f(x)|\ x\in X\}.$$

DEF. 1. ვთქვათ, E სიმრავლის უდიდესი ელემენტია $M=f(c)$. M რიცხვს ეწოდება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

$$\forall x\in[a,b]:\ f(x)\le M.$$

2. ვთქვათ, E სიმრავლის უმცირესი ელემენტია $m=f(c)$. m რიცხვს ეწოდება ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

$$\forall x\in[a,b]:\ m\le f(x).$$

PR. იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, როცა

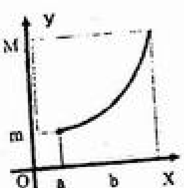
1) $y=[x]$. 2) $y=\sin x$.

პასუხი: 1) Z. 2) $[-1,1]$.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება იყოს სრულიად სხვადასხვა სახის სიმრავლე. მაგრამ თუ ფუნქცია უწყვეტია და განსაზღვრულია მონაკვეთზე, მაშინ მნიშვნელობათა სიმრავლე აუცილებლად იქნება მონაკვეთი. ეს არის

უწყვეტი ფუნქციის ძირითადი თვისება

თეორემა. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ მონაკვეთზე. მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის ასევე მონაკვეთი $[m, M]$.



REM. თეორემა მოგვყავს დამტკიცების გარეშე, ვინაიდან იგი წმინდა ტექნიკური ხასიათისაა და საინტერესოა მხოლოდ მათემატიკოსებისათვის. დავკმაყოფილდებით მხოლოდ იმის აღნიშვნით, რომ ძირითადი ფაქტი, საიდანაც თეორემა გამომდინარეობს, არის „უწყვეტობის პრინციპი".

უწყვეტი ფუნქციის ძირითადი თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი რეზულტატები.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ მონაკვეთზე.

თეორემა. უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მონაკვეთზე, ღებულობს უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს.

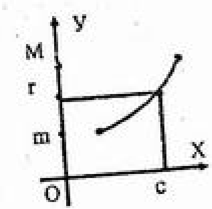
■ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[m,M]$. M უდიდესი მნიშვნელობაა, ხოლო m – უმცირესი. ■

თეორემა. უწყვეტი ფუნქცია ღებულობს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის.

■ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[m,M]$. ეს სიმრავლე მოიცავს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის. ■

გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, r არის ნებისმიერი წერტილი, რომელიც მოთავსებულია უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის. მაშინ r წერტილზე გამავალი ნებისმიერი ჰორიზონტალური წრფე გადაკვეთს ფუნქციის გრაფიკს.



თეორემა. ვთქვათ, $[a, b]$ მონაკვეთის ბოლოებზე ფუნქცია ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნ

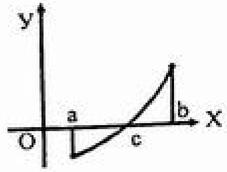
$$f(a)<0,\ f(b)>0$$ (ან პირიქით).

მაშინ [a,b] ინტერვალის რომელიღაც წერტილში ფუნქცია გახდება ნულის ტოლი:

$$\exists c \in (a,b):\ f(c)=0.$$

გეომეტრიული შინაარსი

OX ღერძი კოორდინატთა სიბრტყეს ყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. თუ უწყვეტი ფუნქციის ბოლოები მდებარეობენ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში, მაშინ OX ღერძი აუცილებლად გადაკვეთს ფუნქციის გრაფიკს.



■ 1. ფუნქციის ერთ-ერთი მნიშვნელობა დადებითია, ამიტომ დადებითია ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაც: $M>0$.

2. ფუნქციის ერთ-ერთი მნიშვნელობა უარყოფითია, ამიტომ უარყოფითია ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაც: $m<0$.

3. მივიღეთ $O\in[m,M]$.

4. O წერტილზე გამავალი ჰორიზონტალური წრფე არის OX ღერძი. ეს წრფე გადაკვეთს გრაფიკს. გადაკვეთის წერტილია საძიებელი c წერტილი: $f(c)=0$. ■

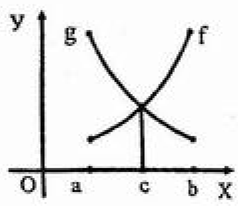
ვთქვათ, მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია

$$y=f(x) \text{ და } y=g(x),\ x\in[a,b].$$

თეორემა. განსაზღვრის არის ბოლოებზე ფუნქციის მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$f(a)<g(a) \text{ და } f(b)>g(b).$$

მაშინ ფუნქციის გრაფიკები გადაკვეთენ ერთმანეთს.



■ განვიხილოთ სხვაობა:

$$r(x)=f(x)-g(x).$$

ეს ფუნქცია [a,b] მონაკვეთის ბოლოებზე ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს:

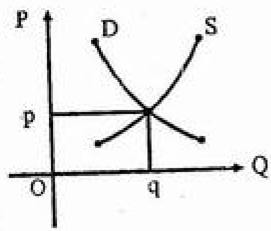
$$r(a)=f(a)-g(a)<0,$$
$$r(b)=f(b)-g(b)>0.$$

მაშინ მოიძებნება c წერტილი, სადაც

$$r(c)=0 \Leftrightarrow f(c)-g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=g(c).$$

c წერტილში გრაფიკები კვეთენ ერთმანეთს. ■

EX. კოორდინატთა სიბრტყეზე დავხაზოთ მიწოდებისა და მოთხოვნის წირები. ისინი განლაგებულია ისე, როგორც ეს თეორემაშია აღწერილი. ეკონომისტები თვლიან, რომ ეს გრაფიკები უწყვეტია, ამიტომ მათ გააჩნიათ გადაკვეთის წერტილი. ამ წერტილს წონასწორობის წერტილს უწოდებენ. ეს წერტილი იძლევა სწორედ იმ ფასს, რომელიც რეალურად ექნება საქონელს ბაზარზე. ეს არის ეკონომიკის ძირითადი დებულება. ამ დებულების შინაარსი ის არის, რომ საქონლის ფასს განსაზღვრავს მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები და არა ღირებულება, როგორც ამას მარქსისტული ეკონომიკის მიმდევრები თვლიდნენ. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ წონასწორობის წერტილის არსებობა, რაც ეკონომისტებისთვის არავითარ ეჭვს არ იწვევს, განპირობებულია ნამდვილი რიცხვების ფუნდამენტური თვისებით; ეს თვისება „უწყვეტობის პრინციპია“. ■



ვთქვათ, მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ y=g(x),\ x\in[a,b].$$

თეორემა. 1. უწყვეტი ფუნქციების ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა.

2. უწყვეტი ფუნქციების ნამრავლი უწყვეტი ფუნქციაა.

3. უწყვეტი ფუნქციების შეფარდება უწყვეტი ფუნქციაა, თუ მნიშვნელი არ უდრის ნულს.

■ 1. ვთქვათ, $c\in(a,b)$, მაშინ

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)=f(c)+g(c).$$

ანალოგიურად მოწმდება დანარჩენი ორი დებულება. ■

რთული ფუნქცია

არითმეტიკული ოპერაციების გარდა ფუნქციებზე შეიძლება შესრულდეს კიდევ ერთი ოპერაცია. ეს არის კომპოზიცია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in\mathbf{R} \text{ და } x=g(t),\ t\in(a,b).$$

პირველ ფორმულაში x-ის მაგივრად ჩავსვათ $g(t)$. მივიღებთ ახალ ფუნქციას:

$$y=f(g(t)),\ t\in(a,b).$$

იგი გვიჩვენებს y-ის დამოკიდებულებას არა x-ზე, არამედ უშუალოდ t-ზე.

DEF. $y=f(g(t))$ ფუნქციას ეწოდება რთული ფუნქცია, ან $y=f(x)$ და $x=g(t)$ ფუნქციების კომპოზიცია.

g ფუნქცია t რიცხვს შეუსაბამებს x რიცხვს, f ფუნქცია x რიცხვს შეუსაბამებს y რიცხვს, მათი კომპოზიცია t რიცხვს პირდაპირ შეუსაბამებს y რიცხვს.

EX. ვთქვათ, $y=1-x^2$, $x\in\mathbf{R}$, $x=\cos t$, $t\in(a,b)$.

შევიტანოთ x-ის მნიშვნელობა პირველ ფორმულაში. მივიღებთ რთულ ფუნქციას: $y=1-\cos^2 t=\sin^2 t$.

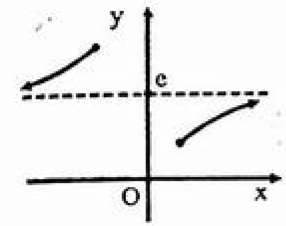
თეორემა. უწყვეტი ფუნქციების კომპოზიცია უწყვეტი ფუნქციაა.

■ ვთქვათ, $c\in(a,b)$ მაშინ:

$$\lim_{t\to c}f(g(t))=f(\lim_{t\to c}g(t))=f(g(c)).\ ■$$

D. e რიცხვი

განვიხილოთ ფუნქცია:



$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\qquad x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$$

ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. იგი შედგება ორი შტოსაგან.

თეორემა. გრაფიკის ორივე შტო უახლოვდება ერთსა და იმავე ჰორიზონტალურ წრფეს.

■ 1. გრაფიკის თითოეული შტო უწყვეტია.

2. ფუნქცია შემოსაზღვრულია: $y\in[2,4]$.

3. გრაფიკის მარჯვენა შტო ზრდადია. უწყვეტობის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ მარჯვენა შტოს უსასრულობაში აქვს ზღვარი. ეს ზღვარი აღინიშნება e ასოთი:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

4. გრაფიკის მარცხენა შტო კლებადია. უწყვეტობის პრინციპიდან გამომდიეარეობს, რომ მარცხენა შტოს უსასრულობაში აქვს ზღვარი. ვაჩვენოთ, რომ ეს ზღვარი არის ისევ e რიცხვი.

მართლაც, შემოვიტანოთ აღნიშვნა $x=-t-1$. მაშინ $t=-x-1$ და $t\to+\infty$, როცა $x\to-\infty$. ამიტომ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^t\underbrace{\left(\frac{t+1}{t}\right)}_{\downarrow\,1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

■

DEF. e რიცხვი არის ის წერტილი, რომელსაც $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ფუნქცია უახლოვდება უსასრულობაში:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

PR. დაამტკიცეთ:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

■ ავიღოთ მიმდევრობა $x_n=n$ და გამოვიყენოთ ფუნქციის ზღვრის განმარტება. ■

e ირაციონალური რიცხვია და წარმოადგენს უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს: $e=2.71828182845\ldots$

(* e რიცხვის აღმოჩენა დაკავშირებული იყო არითმეტიკულ გამოთვლებთან.

XVII საუკუნეში აქტუალური იყო პლანეტების მოძრაობის აღწერა. ეს მოითხოვდა ზუსტ გამოთვლებს. ასეთი გამოთვლების ჩატარება რიცხვებზე, რომლებიც შეიცავენ ბევრ ციფრებს, არც ისე იოლი იყო. ცხადია, ორი რიცხვის შეკრება უფრო ადვილია ვიდრე გამრავლება. ამიტომ მათემატიკოსები ცდილობდნენ ნამრავლი გამოესახათ ჯამის საშუალებით. საჭირო ფორმულები იპოვეს ტრიგონომეტრიაში. ეს არის ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის ფორმულები. შემდეგში იპოვეს უფრო მარტივი ფორმულა: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

იმისათვის, რომ A რიცხვი გამრავლდეს B რიცხვზე, საკმარისია მათი წარმოდგენა ხარისხების სახით: $A=a^x$ და $B=a^y$, შემდეგ x და y რიცხვების შეკრება და a^{x+y} ხარისხის გამოთვლა. ხარისხის მაჩვენებლის პოვნა ნიშნავს რიცხვის ლოგარითმის პოვნას. ამას ესაჭიროებოდა ლოგარითმული ცხრილის შედგენა. ლოგარითმული ცხრილი სხვა არაფერია, თუ არა $y=a^x$ ფუნქციის მოცემა ცხრილის სახით. საჭირო იყო a ფუძის არჩევა. ასეთი ფუძე აირჩია ჯონ ნეპერმა.

ნეპერი იყო შოტლანდიელი ლორდი. მონაწილეობდა შოტლანდიის მეფის ჯეიმს VI-ის დელეგაციაში, რომელიც დანიაში გაემგზავრა თავის საცოლესთან შესახვედრად. უამინდობის გამო დელეგაციას შეჩერება მოუხდა სანაპიროსთან, სადაც იმყოფებოდა ტიხო ბრაგეს ობსერვატორია. სწორედ აქ გაეცნო ნეპერი ბრაგეს ასტრონომიულ გამოთვლებს. ნეპერმა გადაწყვიტა ამ გამოთვლების გამარტივება.)

ნეპერმა აიღო რიცხვი, რომელიც ახლოს არის ერთიანთან, მაგალითად,

$$1.0000001 = 1+\frac{1}{10^7}.$$

იგი ხელმძღვანელობდა იმ მოსაზრებით, რომ ასეთი რიცხვის ხარისხები დიდად არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, როდესაც ხარისხის მაჩვენებელი ღებულობს, მაგალითად, ნატურალურ მნიშვნელობებს. ამის შემდეგ იგი იყენებდა წარმოდგენას:

$$A=\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^x=\left(\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

ათის ხარისხზე გაყოფა ნიშნავს ათწილადში მძიმის გადმოტანას. კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი გამოსახულება დაახლოებით უდრის e რიცხვს.

ლოგარითმს, რომლის ფუძე ნეპერის რიცხვია, ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება და აღინიშნება სიმბოლოთი ln.

(გამოირკვა, რომ e რიცხვის შესახებ ნეპერზე ადრე იცოდა შვეიცარიელმა მათემატიკოსმა ჯოზეფ ბიურგმა, მაგრამ მან თავისი ნაშრომი გამოაქვეყნა ნეპერზე გვიან, ამიტომ e რიცხვს ნეპერის სახელი შემორჩა.*)

F. ეკვივალენტური ფუნქციები

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in(a,b).$$

დავაფიქსიროთ რაიმე წერტილი $c\in(a,b)$.

DEF. ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე რაიმე წერტილში, თუ ამ წერტილში ზღვარი უდრის ნულს:

$$f(x)\to 0,\quad x\to c.$$

EX. უსასრულოდ მცირე ფუნქციები:

1. $\sin x\to 0,\quad x\to 0$

2. $\ln(1+x)\to 0, \quad x\to 0.$

3. $e^x-1\to 0, \ x\to 0.$

ვთქვათ, $y=f(x)$ და $y=g(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია c წერტილში.

DEF. 1. უსასრულოდ მცირე ფუნქციებს ეწოდებათ ეკვივალენტური რაიმე წერტილში, თუ ამ წერტილში მათი შეფარდების ზღვარია 1:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

2. ამ შემთხვევაში წერენ: $f(x)\sim g(x), \quad x\to c.$

გეომეტრიული შინაარსი

ელემენტარული ფუნქციების ეკვივალენტურობა ნიშნავს, რომ მათი გრაფიკები ერთმანეთს ეხება c წერტილში.

თეორემა. $\boxed{\sin x\sim x, \quad x\to 0.}$

■ გამოვიყენოთ უტოლობა

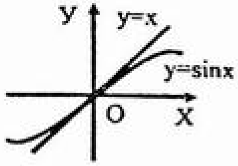
$$\sin x<x<\operatorname{tg} x, \quad x\in(0,\pi/2).$$

უტოლობის ყველა წევრი გავყოთ $\sin x$-ზე:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

უტოლობაში მონაწილეობენ მხოლოდ ლუწი ფუნქციები. ამიტომ იგი სამართლიანია $(-\pi/2, \pi/2)$ ინტერვალზეც. ამ უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $x\to 0$. მივიღებთ:

$$\underset{\substack{\downarrow\\1}}{1}<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\cos x}}\Rightarrow\frac{x}{\sin x}\to 1\Rightarrow \sin x\sim x$$ ■



თეორემის შინაარსი ის არის, რომ $y=\sin x$ გრაფიკი ეხება $y=x$ წრფეს $c=0$ წერტილში. ორივე ფუნქცია ერთნაირი სისწრაფით უახლოვდება ნულს.

თეორემა. $\boxed{\ln(1+x)\sim x, \quad x\to 0.}$

■ შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x=1/t$. როცა $x\to 0$, მაშინ $t\to\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\ln e=1.$$

ზღვრის ნიშნის შეტანა ლოგარითმის შიგნით შეიძლება იმის გამო, რომ ლოგარითმი უწყვეტი ფუნქციაა. ■

თეორემა. $\boxed{e^x-1\sim x, \quad x\to 0.}$

■ $y=e^x-1$ ფუნქციის გრაფიკი არის $y=\ln(1+x)$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული $y=x$ წრფის მიმართ. ამიტომ იგი, ისევე როგორც ლოგარითმის გრაფიკი, ეხება ამ წრფეს.

აი ფორმალური დამტკიცება. შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$y=e^x-1\Leftrightarrow e^x=y+1\Leftrightarrow x=\ln(y+1).$$

როცა $x\to 0$, მაშინ $y\to 0$. ამიტომ

$$\ln(1+y)\sim y, \ \Leftrightarrow\ x\sim e^x-1.$$ ■

თეორემა. $\boxed{(1+x)^h-1\sim hx, \quad x\to 0.}$

■ გამოვიყენოთ წარმოდგენა:

$$(1+x)^h-1=e^{h\ln(1+x)}-1\sim h\ln(1+x)\sim hx.$$ ■

PR. აჩვენეთ:

1) $1-\cos x\sim x^2/2, \quad x\to 0.$

2) $\operatorname{tg}x \sim x, \qquad x \to 0.$

3) $\operatorname{arctg}x \sim x, \qquad x \to 0.$

ეკვივალენტური ფუნქციების გამოყენება

A) ფუნქციის მნიშვნელობის შეცვლა ეკვივალენტური ფუნქციის მნიშვნელობით იძლევა კარგ მიახლოებას.

1) $\sin x \approx x$ მცირე x-თვის.

EX. $\sin 0.02 \approx 0.02$

2) $(1+x)^h \approx 1+hx$ მცირე x-სთვის.

■ მართლაც,

$$(1+x)^h - 1 \approx hx \Rightarrow (1+x)^h \approx 1+hx. \ ■$$

EX. $\sqrt{1.02} = (1+0.02)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.02 = 1.01.$

PR. გამოთვალეთ:

1) $\ln 1.03$ 2) $\cos 0.02$ 3) $\arcsin 0.01$

B) ნამრავლის ზღვრის გამოთვლის დროს თანამამრავლი შეიძლება შევცვალოთ ეკვივალენტური ფუნქციით.

EX. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

REM. ჯამის ზღვრის გამოთვლის დროს არ შეიძლება შესაკრების შეცვლა ეკვივალენტური ფუნქციით.

PR. 1. აჩვენეთ:

$$\sqrt{x^2+x} \sim x, \qquad x \to \infty.$$

2. დაამტკიცეთ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

თუ ამ ზღვრის გამოთვლის დროს პირველ შესაკრებს შევცვლით ეკვივალენტური ფუნქციით, მივიღებთ არასწორ პასუხს:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \neq \lim_{x\to\infty}(x-x) = 0.$$

G. ექსპონენტა

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=e^x, \quad x\in\mathbf{R}.$$

DEF. ამ ფუნქციას ეწოდება ექსპონენტა.

ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი x. ისევე, როგორც e რიცხვი, ექსპონენტაც შეიძლება ჩაიწეროს ზღვრის საშუალებით.

თეორემა. $$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

■ შემოვიტანოთ აღნიშვნა $t=n/x$. ცხადია $t\to\infty$, ვინაიდან $n\to\infty$. მაშინ $n=tx$. მივიღებთ:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{tx}\right)^{tx} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{\downarrow\, e}\right)^x = e^x. \ ■$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ექსპონენტა გამოვთვალოთ არა მარტო ნამდვილი, არამედ კომპლექსური მაჩვენებლისთვისაც.

DEF. ნებისმიერი კომპლექსური მაჩვენებლისთვის ექსპონენტა არის ზღვარი:

$$\boxed{e^z = \lim\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.}$$

ვთქვათ, მოცემულია კომპლექსური რიცხვი:

$$z=x+iy.$$

თუ ცნობილია x და y რიცხვები, მაშინ ექსპონენტა გამოითვლება მარტივი ფორმულით.

თეორემა. $\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\sin y).}$

■ განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$w_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n.$$

w_n რიცხვის მოდული აღვნიშნოთ r_n-ით. კომპლექსური რიცხვის ხარისხში აყვანის დროს მოდული ადის n ხარისხში:

$$r_n=\left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n=\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n.$$

განვიხილოთ მოდულის ლოგარითმი:

$$\ln r_n=\frac{n}{2}\ln\left(1+2\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\sim$$

$$\sim\frac{n}{2}\left(2\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)=x+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{x^2}{2n}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{y^2}{2n}}\to x.$$

მივიღეთ: $r_n=e^{\ln r_n}\to e^x$.

w_n რიცხვის არგუმენტი აღვნიშნოთ α_n-ით. კომპლექსური რიცხვის ხარისხში აყვანის დროს არგუმენტი მრავლდება n-ზე, ამიტომ

$$\alpha_n=n\arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)=n\,\mathrm{arctg}\frac{y/n}{1+x/n}\sim n\frac{y/n}{1+x/n}\to y.$$

ჩავწეროთ w_n რიცხვი ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$w_n=\underset{\substack{\downarrow\\e^x}}{r_n}\left(\cos\underset{\substack{\downarrow\\y}}{\alpha_n}+i\sin\underset{\substack{\downarrow\\y}}{\alpha_n}\right)\to e^x(\cos y+i\sin y).\ ■$$

* ექსპონენტის ფორმულა კომპლექსური მაჩვენებლისათვის ცნობილია ეილერის ფორმულის სახელწოდებით. სინამდვილეში ეს ფორმულა ეკუთვნის კოუტს და მუავრს.*

PR. აჩვენეთ, რომ ექსპონენტა არის პერიოდული ფუნქცია და იპოვეთ პერიოდი.

პასუხი: $2\pi i$.

თეორემა. $\boxed{e^{i\pi}=-1.}$

■ ეილერის ფორმულაში ჩავსვათ $z=i\pi$. ამ შემთხვევაში $x=0$ და $y=\pi$:

$$e^{i\pi}=e^0(\cos\pi+i\sin\pi)=-1.\ ■$$

* ეს ფორმულა გვიჩვენებს საოცარ კავშირს სამ ფუნდამენტურ რიცხვს შორის. ეს რიცხვებია: π, i და e.

ისინი მათემატიკაში შემოვიდნენ სრულიად სხვადასხვა გზით. კერძოდ:

π ასოთი აღნიშნეს ერთეულოვანი წრის ფართობი.
i ასოთი აღნიშნეს რიცხვი, რომლის კვადრატი უდრის მინუს ერთს.
e ასოთი აღნიშნეს გარკვეული მიმდევრობის ზღვარი.

სამივე რიცხვი შემოვიდა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და ვერავინ წარმოიდგენდა, რომ მათ შორის შეიძლება ყოფილიყო ასეთი „ლამაზი“ კავშირი. მაგრამ ეს კავშირი არც ისე საოცარია, როგორც ერთი შეხედვით ჩანს. საქმე ისაა, რომ ლოგარითმების, ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და კომპლექსური რიცხვებისათვის არსებობს ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის ფორმულები:

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y,$$

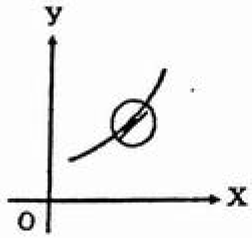
$$2\cos x.\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y),$$

$$\mathrm{Arg}(xy)=\mathrm{Arg}x+\mathrm{Arg}y.$$

სწორედ ეს სამი ტოლობაა იმის მიზეზი, რომ სამართლიანია ეილერის ფორმულა. *

5. წარმოებული

დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე ავიღოთ რაღაც წერტილი. ამ წერტილში გავავლოთ მხები და გარშემო შემოვხაზოთ მცირე რადიუსის წრე. წრეში მოქცეული გრაფიკი მცირედ განსხვავდება მხებისგან. ეს საშუალებას გვაძლევს, ფუნქციის გრაფიკი შევცვალოთ მხებით (რა თქმა უნდა არჩეული წერტილის მახლობლად). სწორედ ეს არის დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი შინაარსი. ზოგიერთი თვისება, რაც სამართლიანია მხებისთვის სამართლიანია თავიდან მოცემული ფუნქციისთვისაც. ასეთი თვისებაა, მაგალითად, ფუნქციის მონოტონურობა. მხებს მათემატიკოსები სხვაგვარად წარმოებულს უწოდებენ.



A. ფუნქციის წარმოებულის ცნება

მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in(a,b).$$

დავაფიქსიროთ წერტილი $c\in(a,b)$.

DEF. $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული c წერტილში ეწოდება რიცხვს:

$$\boxed{f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.}$$

ამ ფორმულაში წილადის მრიცხველს და მნიშვნელს აქვთ სპეციალური სახელები.

DEF. 1. სხვაობას

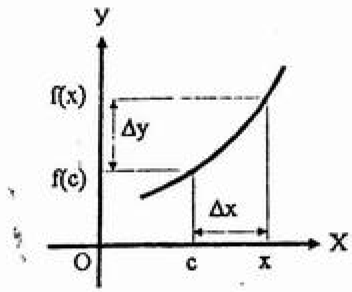
$$x-c=\Delta x$$

ეწოდება არგუმენტის ნაზრდი (ანუ ცვლილება).

2. სხვაობას

$$f(x)-f(c)=\Delta y$$

ეწოდება ფუნქციის ნაზრდი.



REM. 1. ვთქვათ, არგუმენტის საწყისი მნიშვნელობაა c. დავუშვათ, არგუმენტის მნიშვნელობა იცვლება და ხდება x. არგუმენტის ნაზრდი Δx გვიჩვენებს, თუ რამდენით შეიცვალა არგუმენტის მნიშვნელობა.

2. ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობაა $f(c)$. არგუმენტის ცვლილება იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილებას: Δy გვიჩვენებს, რამდენით იცვლება ფუნქციის მნიშვნელობა. Δy დამოკიდებულია c–ზე და Δx–ზე.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $y=x^2$, $x\in R$. ვთქვათ $c=1$, $\Delta x=0.1$.

იპოვეთ: Δy.

■ გამოვთვალოთ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა:

$$x-c=\Delta x \Leftrightarrow x-1=0.1 \Leftrightarrow x=1.1.$$

ფუნქციის ნაზრდი იქნება:

$$\Delta y=f(1.1)-f(1)=1.1^2-1^2=0.21.$$ ■

PR. აჩვენეთ, უწყვეტი ფუნქციის ნაზრდი $\Delta y\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განიმარტოს ასეც:

DEF. წარმოებული ეს არის ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარი, როცა არგუმენტის ნაზრდი უახლოვდება ნულს:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

REM. წარმოებულს აღნიშნავენ სხვადასხვა სიმბოლოებით:

$$\dot{f},\quad Df,\quad \partial f,\quad dy/dx.$$

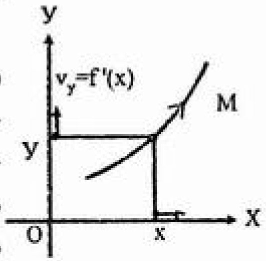
ჩვენ ვისარგებლებთ აღნიშვნით f'. ეს აღნიშვნა ეკუთვნის ლაგრანჟს. სხვათაშორის, მასვე ეკუთვნის სიტყვა წარმოებული.

წარმოებულის შინაარსი

წარმოებული გვიჩვენებს, მოცემულ წერტილში რამდენჯერ უფრო სწრაფად იცვლება ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტთან შედარებით.

შემდგომში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ ფუნქციის ერთ ძალიან სასარგებლო მოდელს.

ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. OX ღერძზე ავიღოთ x წერტილი. მას შეესაბამება $M(x,y)$ წერტილი გრაფიკზე და y წერტილი OY ღერძზე. ვიგულისხმოთ, რომ x ცვლადი არის დრო. მაშინ x იმოძრავებს OX ღერძზე. x-ის მოძრაობის სიჩქარეა 1. შესაბამისად გრაფიკზე იმოძრავებს M წერტილი და OY ღერძზე y წერტილი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ფუნქცია სხვა არაფერია, თუ არა y წერტილის გარკვეული მოძრაობა წრფეზე.



ავიღოთ დროის რაღაც მომენტი c. დროის Δx შუალედში y წერტილი გადაადგილდება Δy-ით. შეფარდება $w=\Delta y/\Delta x$ არის y წერტილის მოძრაობის საშუალო სიჩქარე. როცა დროის შუალედი უახლოვდება 0-ს, საშუალო სიჩქარე უახლოვდება წარმოებულს.

DEF. y წერტილის სიჩქარე c დროის მომენტში არის $f'(c)$.

თუ ფუნქციას განვიხილავთ, როგორც y წერტილის მოძრაობას OY ღერძზე, მაშინ წარმოებული არის y წერტილის მოძრაობის სიჩქარე.

B. მხები

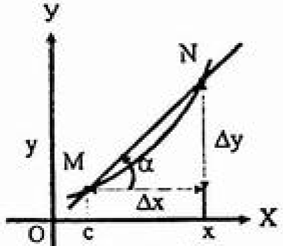
ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x),\quad x\in(a,b).$$

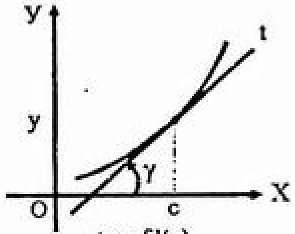
განვიხილოთ ფუნქციის გრაფიკი. OX ღერძზე ავიღოთ c და x წერტილები. გრაფიკზე მათი შესაბამისი წერტილებია M და N. ამ წერტილებზე გავავლოთ წრფე. MN წრფის კუთხური კოეფიციენტია:

$$k=\Delta y/\Delta x.$$

როცა $\Delta x\to 0$, კუთხური კოეფიციენტი უახლოვდება წარმოებულს: $k\to f'(c)$.



$tg\alpha=\Delta y/\Delta x$



$tg\gamma=f'(c)$

DEF. M წერტილზე გამავალ წრფეს, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f'(c)$, ეწოდება მხები.

წარმოებული არის მხების კუთხური კოეფიციენტი.

თეორემა. მხების განტოლებაა:

$$y=f(c)+f'(c)(x-c).$$

■ მხები გადის $M(c,f(c))$ წერტილზე და მისი კუთხური კოეფიციენტია $f'(c)$. ამიტომ მხების განტოლებაა:

$$y-f(c)=f'(c)(x-c).\quad ■$$

PR. მხების პერპენდიკულარულ ვექტორს გრაფიკის ნორმალი ეწოდება.

1) იპოვეთ ნორმალის კოორდინატები.

2) დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის M წერტილზე და რომელიც მხების პერპენდიკულარულია.

პასუხი: 1) $\vec{n}=(f'(c), -1)$. 2) $y=f(c)-[1/f'(c)](x-c)$.

C. გლუვი ფუნქცია

წარმოებული არის ზღვარი, ამიტომ იგი შეიძლება არსებობდეს ან არ არსებობდეს. იმისათვის, რომ ფუნქციას გააჩნდეს წარმოებული, აუცილებელია იგი იყოს უწყვეტი.

თეორემა. თუ ფუნქციას აქვს წარმოებული რაიმე წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ წერტილში.

■ განვიხილოთ სხვაობა:

$$\alpha(x)=\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{f'(c)}-\underbrace{f'(c)}_{f'(c)}\to 0, \quad x\to c.$$

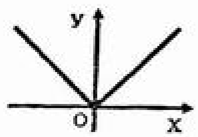
ამ ტოლობიდან გამოვსახოთ $f(x)$. მივიღებთ:

$$f(x)=f(c)+(\underbrace{\alpha(x)}_{0}+f'(c))(\underbrace{x-c}_{0})\to f(c), \quad x\to c.$$

ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას. ■

მხოლოდ უწყვეტობა არ კმარა იმისათვის, რომ ფუნქციას ჰქონდეს წარმოებული.

EX. ფუნქცია



$y=|x|, x\in\mathbf{R},$

უწყვეტია მთელ განსაზღვრის არეზე, მაგრამ $c=0$ წერტილში არ აქვს წარმოებული.

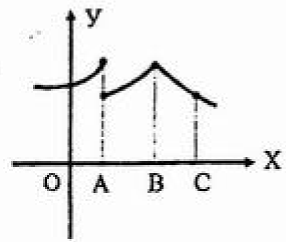
■ განვიხილოთ შეფარდება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x/x=1\to 1, & x>0,\ x\to 0,\\ -x/x=-1\to -1, & x<0,\ x\to 0.\end{cases}$$

ამ შეფარდების მარცხენა ზღვარია −1 და მარჯვენა 1. ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ამიტომ შეფარდებას არ აქვს ზღვარი. ■

დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი. წარმოებული ისეთ წერტილებში არსებობს, სადაც შეიძლება მხების გავლება. $y=|x|$ გრაფიკს $c=0$ წერტილში აქვს „წვეტი". ასეთ წერტილში მხების გავლება არ შეიძლება.

PR. აქვს თუ არა ფუნქციას წარმოებულები A, B და C წერტილებში?



პასუხი: A) არა. B) არა. C) კი.

მაღალი რიგის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია: $y=f(x)$, $x\in(a, b)$.

ინტერვალის ყოველ x წერტილში ვიპოვოთ $f'(x)$. მივიღებთ ახალ ფუნქციას.

DEF. 1. $y=f'(x)$ ფუნქციას ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული.

2. $y=f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

3. $y=f''(x)$ ფუნქციის წარმოებულს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული:

$$f'''(x) = [f''(x)]'.$$

. . . .

n. $y=f^{(n-1)}(x)$ ფუნქციის წარმოებულს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის n რიგის წარმოებული:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'.$$

REM. თუ პირველი რიგის წარმოებული არის y წერტილის სიჩქარე, მეორე რიგის წარმოებული არის y წერტილის აჩქარება. მესამე რიგის წარმოებულს ფიზიკოსებმა არ დაარქვეს რაიმე სახელწოდება და ეს შემთხვევით არ მომხდარა. საქმე ის არის, რომ საზოგადოდ მექანიკური მოძრაობა აღიწერება ნიუტონის მეორე კანონით: $my''=F(t,y,y')$. ამ ფორმულაში y'' არის აჩქარება, m-მასა, F–ძალა. ბუნებაში არსებული ძალები შეიძლება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ t დროზე, y კოორდინატზე და y' სიჩქარეზე. ნიუტონის მეორე კანონი არის განტოლება, რომელშიც არ შედის მეორეზე მაღალი რიგის წარმოებული. აქედან გამომდინარეობს უაღრესად მნიშვნელოვანი ფაქტი. კერძოდ, იმისათვის, რომ აღვწეროთ რაიმე მოძრაობა, საჭიროა ვიცოდეთ საწყისი მდებარეობა და სიჩქარე, მეტი არაფერი. აჩქარება გამოითვლება უკვე განტოლებიდან. თუ რატომ არის სამყარო ასეთნაირად მოწყობილი, ჯერ–ჯერობით უცნობია.

ფუნქციებს, რომლებიც აღწერენ რეალურ პროცესებს, შეიძლება ჰქონდეთ რამოდენიმე იზოლირებული წყვეტის წერტილი ან წერტილი, სადაც წარმოებული არ არსებობს. ასეთ წერტილებს მათემატიკოსები განსაკუთრებულ წერტილებს უწოდებენ. ყველა სხვა წერტილებში არსებობს ნებისმიერი რიგის წარმოებული.

DEF. ფუნქციას, რომელსაც გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმოებული, გლუვი ფუნქცია ეწოდება.

გლუვ ფუნქციებს სწავლობს კლასიკური ანალიზი. ჩვენ შემდგომში მხოლოდ გლუვ ფუნქციებთან გვექნება საქმე.

D. ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი

გლუვი ფუნქციის მაგალითებს წარმოადგენს ელემენტარული ფუნქციები.

1	$y=x^{\alpha}$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
2	$y=a^x$ $y=e^x$	$y'=a^x\ln a$ $y'=e^x$
3	$y=\log_a x$ $y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $y'=\dfrac{1}{x}$
4	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
5	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
6	$y=\mathrm{tg}x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7	$y=\mathrm{ctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$y=\mathrm{arctg}x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
11	$y=\mathrm{arcctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

ამ ფორმულების გამოყვანას შეიძლება გაეცნოთ უმაღლესი მათემატიკის ნებისმიერ სახელმძღვანელოში.

PR. მოცემულია ფუნქცია: $y=A$, $x\in(a,b)$. იგი ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას. აჩვენეთ, რომ მუდმივის წარმოებული არის ნული:

$$(A)'=0.$$

■ f ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება. y არ იცვლის თავის მდებარეობას. ამიტომ მისი სიჩქარე ნებისმიერ მომენტში უდრის ნულს. ■

E. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია გლუვი ფუნქციები:

$$y=f(x),\ x\in\mathbf{R}, \text{ და } x=g(t),\ t\in(a,b).$$

განვიხილოთ რთული ფუნქცია:

$$y=f(g(t)),\ t\in(a,b).$$

თეორემა.

$$\boxed{y'=f'(g(t))g'(t).}$$

■ t-ს ცვლილება Δt-თი იწვევს x-ის ცვლილებას Δx-ით და ეს უკანასკნელი იწვევს y-ის ცვლილებას Δy-ით. დამტკიცებას მოვიყვანთ ისეთი ფუნქციებისათვის, როდესაც $\Delta x\neq 0$, როცა Δt მცირეა და $\Delta t\neq 0$. ამ თვისებით ხასიათდება ანალიზური ფუნქციები და მათ შორის, ყველა ელემენტარული ფუნქცია. მაშინ გვექნება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}\to f'(x)\cdot g'(t),\quad \Delta t\to 0.$$

■

PR. 1. მოცემულია ორი წრფე:

$$y=k_1x+b_1,\ x=k_2t+b_2.$$

აჩვენეთ, რომ ორი წრფის კომპოზიცია არის კვლავ წრფე. იპოვეთ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

პასუხი: k_1k_2.

2. აჩვენეთ, რომ კომპოზიციის მხები არის მხებების კომპოზიცია.

EX. $[(\sin t)^2]'=(x^2)'x'=2x(\sin t)'=2\sin t\cos t=\sin 2t.$

F. შექცეული ფუნქცია

მოცემულია მონოტონური ფუნქცია:

$$y=f(x),\quad x\in(a,b).$$

x და y ცვლადებს შევუცვალოთ ადგილები. მიღებული ტოლობიდან y გამოვსახოთ x-ით:

$$x=f(y)\ \Leftrightarrow\ y=f^{-1}(x).$$

DEF. მიღებულ ფუნქციას ეწოდება შექცეული ფუნქცია.

თუ ფუნქცია x წერტილს შეუსაბამებს y წერტილს, მაშინ მისი შექცეული ფუნქცია y წერტილს შეუსაბამებს x წერტილს.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $y=e^x-1$, $x\in\mathbf{R}$. იპოვეთ შექცეული ფუნქცია.

პასუხი: $y=\ln(1+x)$, $x\in\mathbf{R}$.

■ x და y ცვლადებს შევუცვალოთ ადგილები. მივიღებთ:

$$x=e^y-1\Leftrightarrow \ln(x+1)=y.\ ■$$

PR. აჩვენეთ, რომ $y=kx+b$ წრფის შექცეული არის ისევ წრფე, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $1/k$.

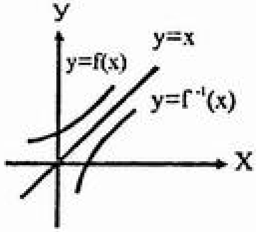
PR. რა იქნება $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია?

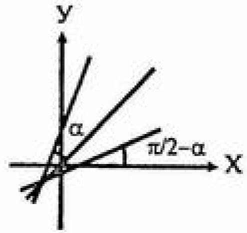
პასუხი: $y=f(x)$ ფუნქცია.

როგორ ავაგოთ შექცეული ფუნქციის გრაფიკი?

თეორემა. ურთიერთშექცეული ფუნქციის გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.

■ იმისათვის, რომ მივიღოთ შექცეული ფუნქციის გრაფიკი საჭიროა OX და OY ღერძებს შევუცვალოთ ადგილები. სწორედ ამას აკეთებს $y=x$ წრფის მიმართ სიმეტრია. ■





PR. მოცემულია წრფე: $y=kx+b$. ააგეთ სიმეტრიული წრფე $y=x$ წრფის მიმართ. იპოვეთ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

პასუხი: $k_1=1/k$.

შექცეული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია გლუვი ფუნქცია

$$y=f(x),\quad x\in(a,b)$$

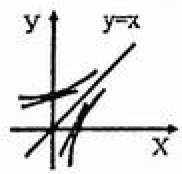
და მისი შექცეული ფუნქციაა

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in(A,B).$$

თეორემა. შექცეული ფუნქცია არის გლუვი და

$$\boxed{\left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f'(y)},\ \text{სადაც } y=f^{-1}(x).}$$

■ შექცეული ფუნქციის გრაფიკი არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიული $y=x$ წრფის მიმართ. შექცეული ფუნქციის გრაფიკზე ავიღოთ (x,y) წერტილი. ამ წერტილის სიმეტრიულია (y,x) წერტილი. ამ წერტილში გავავლოთ მოცემული ფუნქციის მხები. მხების კუთხური კოეფიციენტია $f'(y)$. ამ მხების სიმეტრიული წრფე არის შექცეული ფუნქციის გრაფიკის მხები. სიმეტრიული წრფის კუთხური კოეფიციენტი იქნება:



$$\left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f'(y)}.\quad ■$$

EX. $y=\arccos x\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

■ arccos არის cos-ის შექცეული:

$$y=\arccos x\Leftrightarrow \cos y=x.\quad 0\le y\le\pi.$$

ამიტომ

$$y'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-(\cos y)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

PR. აჩვენეთ, რომ შექცეული ფუნქციის მხები არის მხების შექცეული.

G. წარმოებული და არითმეტიკული მოქმედებები

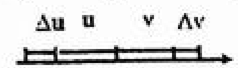
ვთქვათ, მოცემულია გლუვი ფუნქციები:

$$u=f(x),\ v=g(x),\ x\in(a,b).$$

განვიხილოთ ამ ფუნქციების ჯამი: $y=u+v$.

თეორემა. $\boxed{(u+v)'=u'+v'.}$

■ სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ ორივე ფუნქცია დადებითია. განვიხილოთ მონაკვეთი, რომელიც შედგება u და v სიგრძის მონაკვეთებისაგან. u+v არის მთელი მონაკვეთის სიგრძე. არგუმენტის ცვლილება იწვევს ორივე ფუნქციის მნიშვნელობების ცვლილებას. ვთქვათ, პირველი მონაკვეთის სიგრძე შეიცვალა Δu-თი და მეორე მონაკვეთის – Δv-თი. მაშინ მთელი მონაკვეთის სიგრძე შეიცვლება $\Delta u+\Delta v$-თი. ამიტომ



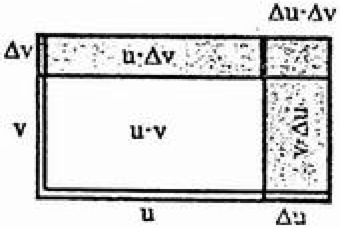
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\underset{\substack{\downarrow\\ u'}}{\frac{\Delta u}{\Delta x}}+\underset{\substack{\downarrow\\ v'}}{\frac{\Delta v}{\Delta x}}\to u'+v',\quad \Delta x\to 0.$$

■

განვიხილოთ ფუნქციების ნამრავლი: $y=uv$.

თეორემა. $\boxed{(uv)'=u'v+uv'.}$

■ სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ ორივე ფუნქცია დადებითია. ავიღოთ მართკუთხედი, რომლის გვერდებია u და v. ნამრავლი uv არის ამ მართკუთხედის ფართობი. არგუმენტის ცვლილება იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობების ცვლილებას. ვთქვათ მართკუთხედის გვერდები შეიცვალა Δu და Δv სიდიდით. მაშინ ფართობის ცვლილება, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები, იქნება:



$$\Delta y=\Delta u v+\Delta v u+\Delta u\Delta v.$$

ამიტომ, როცა $\Delta x\to 0$, გვაქვს:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u v+v\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'}v+u\underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\underbrace{\Delta v}_{0}\to u'v+uv'$$

$\Delta v\to 0$ გამომდინარეობს იქიდან, რომ $v=g(x)$ ფუნქცია გლუვია და ამიტომ უწყვეტი. სწორედ უწყვეტობა ნიშნავს იმას, რომ არგუმენტის მცირე ცვლილება იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის ასევე მცირე ცვლილებას. ■

☾* ნამრავლის წარმოებულის ფორმულას ლეიბნიცის ფორმულას უწოდებენ. სინამდვილეში ეს ფორმულა უფრო ადრე იცოდა ნიუტონმა, ხოლო თვითონ ლეიბნიცი თავდაპირველად არასწორად თვლიდა, რომ ნამრავლის წარმოებული უდრის წარმოებულების ნამრავლს. ამის მიზეზი ალბათ ის იყო, რომ ლეიბნიცი ნებისმიერ საკითხში ეძებდა ზოგად კანონზომიერებას და მსგავსი კანონზომიერება მან შენიშნა ჯამის წარმოებულის ფორმულაში. ლეიბნიცმა შემოიტანა ტერმინი „ფუნქცია“. მასვე ეკუთვნის აღნიშვნები: · – გამრავლება და : – გაყოფა. დიდი წვლილი მიუძღვის ლეიბნიცს ფორმალური ანალიზის ჩამოყალიბებაში. ფორმალიზმი ის მეთოდია, რომელიც საშუალებას გაძლევს, რაიმე ისე გააკეთო, რომ არ იცი რას აკეთებ. რომ არა ფორმალური ანალიზი, მათემატიკოსების რაოდენობა დღეს ბევრად ნაკლები იქნებოდა.

გოტფრიდ ვილჰელმ ლეიბნიცი დაიბადა ლეიპციგში. თხუთმეტი წლის ასაკში შევიდა უნივერსიტეტში და ჩვიდმეტი წლის ასაკში მიიღო ბაკალავრის ხარისხი. სწავლობდა სამართალს, ფილოსოფიას, ისტორიას და მათემატიკას. ოცი წლის ასაკში უკვე მზად ჰქონდა სადოქტორო დისერტაცია სამართალში. შემდეგ ლეიბნიცი იწყებს დიპლომატიურ მოღვაწეობას. 1672 წელს ლეიბნიცი მიავლინეს პარიზში ურთულესი მისიით: როგორმე გადაერჩინა გერმანია საფრანგეთის თავდასხმისაგან. გერმანია იმ დროს დაქუცმაცებული, ხოლო საფრანგეთი გაერთიანებული და ძლიერი სახელმწიფო იყო. ლეიბნიცმა ბრწყინვალედ შეასრულა თავისი მისია. მან მოახერხა და ლუდოვიკო XIV დაარწმუნა იმაში, რომ უმჯობესია გაილაშქროს არა გერმანიაზე, არამედ ეგვიპტეზე. ეს გეგმა, როგორც ჩანს, ფრანგებს მართლაც ჭკუაში დაუჯდათ და იგი მოგვიანებით ნაპოლეონმა განახორციელა.

საფრანგეთში ყოფნის დროს ლეიბნიცი შეხვდა ჰიუგენსს. ჰიუგენსმა ურჩია ლეიბნიცს წაეკითხა პასკალის შრომები. ლეიბნიცი მართლაც გაეცნო პასკალის ხელნაწერებს. ლეიბნიცი მიხვდა, რა ახლოს იყო პასკალი მათემატიკურ ანალიზთან. ის, რაც ვერ მოასწრო პასკალმა, განახორციელა ლეიბნიცმა.

ერთი წლის შემდეგ ლეიბნიცი მოგზაურობს ინგლისში და მალე ხდება სამეფო საზოგადოების წევრი. ეს ვიზიტი შემდგომში ბევრი ჭორის მიზეზი გახდა. ლეიბნიცს დააბრალეს პლაგიატობა. ლაპარაკობდნენ, რომ თითქოს ლეიბნიცს ხელში ჩაუვარდა ნიუტონის ხელნაწერები. თავის მხრივ ლეიბნიცი მათემატიკური ანალიზის ჩამოყალიბებაში საკუთარ თავს ანიჭებდა უპირატესობას, რადგან მან პირველმა გამოაქვეყნა „უსასრულო მცირეთა აღრიცხვა“. ნიუტონის და ლეიბნიცის დაპირისპირებამ მიიღო ისეთი საშინელი ფორმა, რომ ისინი აღარ ერიდებოდნენ ერთმანეთის შეურაცხმყოფელი წერილების გამოქვეყნებას. ამ დაპირისპირებაში მონაწილეობდნენ ნიუტონისა და ლეიბნიცის მოსწავლეებიც ამასთან, გაცილებით მეტი ენთუზიაზმით, ვიდრე მათი მასწავლებლები. საბოლოოდ ნიუტონმა გადაწყვიტა წერტილი დაესვა ამ დავისათვის. მან, როგორც სამეფო საზოგადოების პრეზიდენტმა, შეადგინა კომისია, რომელსაც უნდა გადაეწყვიტა, ვინ იყო მათემატიკური ანალიზის ავტორი. ობიექტურობის მიზნით ნიუტონმა კომისიაში შეიყვანა სხვადასხვა ქვეყნის მათემატიკოსები. კომისიამ სამეფო საზოგადოებას წარუდგინა ანგარიში, რომლის მიხედვითაც უპირატესობა ენიჭებოდა ნიუტონს. ნიუტონის გარდაცვალების შემდეგ გაირკვა, რომ კომისიაში მხოლოდ ორი წევრი იყო უცხოელი და ამ ორიდან მხოლოდ ერთი იყო მათემატიკოსი. მაგრამ რაც მთავარია, კომისიის მიერ წარდგენილი დასკვნა თვით ნიუტონის მიერ ყოფილა შედგენილი*. ☽

განვიხილოთ ორი ფუნქციის შეფარდება: $y=u/v$.

თეორემა. $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.}$$

■ 1. შეფარდება $1/v$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რთული ფუნქცია, ამიტომ

$$[1/v]'=[v^{-1}]'=(-1)v^{-2}v'=-v'/v^2.$$

2. გამოვიყენოთ ნამრავლის წარმოებულის ფორმულა:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(\frac{1}{v}\cdot u\right)'=\left(\frac{1}{v}\right)'u+\frac{1}{v}u'=-\frac{v'}{v^2}u+\frac{u'}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$ ■

H. დიფერენციალი

ვთქვათ, მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

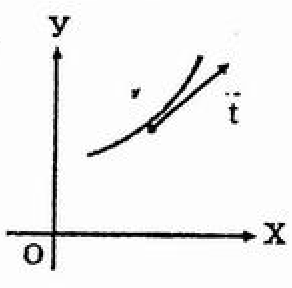
$$y=f(x),\ x\in(a,b).$$

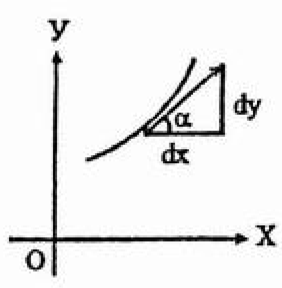
დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე ავიღოთ რაიმე წერტილი $M(x,y)$. ამ წერტილში გავავლოთ მხები. მხებზე ავიღოთ ნებისმიერი ვექტორი $\vec{t}$. განვიხილოთ ამ ვექტორის კოორდინატები. მათთვის მოიგონეს სპეციალური აღნიშვნები:

$$\vec{t}=(dx,dy).$$

DEF. 1. dx კოორდინატს ეწოდება არგუმენტის დიფერენციალი x წერტილში.

2. dy კოორდინატს ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში.





დიფერენციალებს შორის არსებობს კავშირი.

თეორემა. $$\boxed{dy=f'(x)dx.}$$

■ ვექტორის დახრის კუთხის ტანგენსი ჰორიზონტალურ წრფესთან არის $f'(x)$:

$$dy=tg\alpha dx=f'(x)dx.$$ ■

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ფუნქციის დიფერენციალი, საჭიროა ვიცოდეთ ფუნქციის წარმოებული მოცემულ წერტილში და არგუმენტის დიფერენციალი. არგუმენტის დიფერენციალი შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერად. იგი შეიძლება იყოს ნებისმიერი რიცხვი.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, $x=1$, $dx=100$. იპოვეთ dy.

პასუხი: $dy=200$.

■ ფუნქციის წარმოებულია: $f'(x)=2x$. ამიტომ

$$dy=f'(x)dx=2xdx=200.$$ ■

თეორემა. წარმოებული არის დიფერენციალების შეფარდება:

$$\boxed{f'(x)=dy/dx.}$$

დიფერენციალის ძირითადი თვისებები

1. $d(u+v)=du+dv$.
2. $d(uv)=udv+vdu$.
3. $d(u/v)=(vdu-udv)/v^2$.

რა განსხვავებაა ნაზრდსა და დიფერენციალს შორის

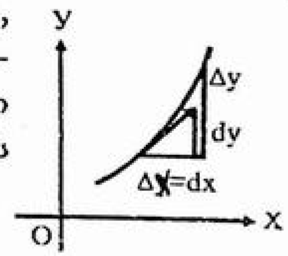
1. არგუმენტის ნაზრდი ნებისმიერი რიცხვია, მაგრამ მასზე მოითხოვება ერთადერთი პირობა: $c+\Delta x$ უნდა ეკუთვნოდეს განსაზღვრის არეს. ასე რომ, არგუმენტის ნაზ-

რდი დაკავშირებულია განსაზღვრის არესთან. რაც შეეხება არგუმენტის დიფერენციალს, იგი შეიძლება იყოს სრულიად ნებისმიერი რიცხვი.

PR. ფუნქცია განსაზღვრულია $(-1,1)$ შუალედზე. ვთქვათ, $c=0$. შეიძლება თუ არა, რომ 1) $\Delta x=10$. 2) $dx=10$.

პასუხი: 1) არა. 2) კი.

2. ვთქვათ, $\Delta x=dx$. მაშინ ფუნქციის დიფერენციალი არის მხების ნაზრდი. მხების ნაზრდი, ცხადია, განსხვავდება ფუნქციის ნაზრდისაგან. ეს განსხვავება მით უფრო მცირეა, რაც უფრო მცირეა არგუმენტის დიფერენციალი:



$$\Delta x = dx \ll 1 \Rightarrow \Delta y \approx dy.$$

■ როდესაც Δx ახლოს არის ნულთან,

$$\Delta y/\Delta x \approx f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy. \blacksquare$$

EX. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია: $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$. ამასთან, $c=1$ და $\Delta x=dx=0.01$. მაშინ

$$\Delta y=(1.01)^2-1^2=0.0201.$$

$$dy=2c\,dx=2\cdot 0.01=0.02.$$

როგორც ვხედავთ $\Delta y \approx dy$.

I. ფუნქციის ექსტრემუმი

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in(a,b).$$

ვთქვათ, $c\in(a,b)$, განვიხილოთ c წერტილის მიდამო:

$$U=(c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

DEF. 1. ვთქვათ, c წერტილის რაიმე მიდამოში $f(c)$ არის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა:

$$\forall x\in U:\ f(x)<f(c),\ (x\neq c).$$

მაშინ c რიცხვს ეწოდება მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო $f(c)$ რიცხვს ეწოდება უბრალოდ მაქსიმუმი.

2. ვთქვათ, c წერტილის რაიმე მიდამოში $f(c)$ არის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა:

$$\forall x\in U:\ f(x)>f(c),\ (x\neq c).$$

მაშინ c რიცხვს ეწოდება მინიმუმის წერტილი, ხოლო $f(c)$ რიცხვს ეწოდება უბრალოდ მინიმუმი.

3. მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილს ეწოდება ექსტრემუმის წერტილი. მაქსიმუმს ან მინიმუმს ეწოდება უბრალოდ ექსტრემუმი.

REM. სიტყვა ექსტრემუმი (extrem) ნიშნავს უკიდურესს.

EX. 1. განვიხილოთ პარაბოლა: $y=x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

$c=0$ წერტილი არის მინიმუმის წერტილი.

2. განვიხილოთ გადმობრუნებული პარაბოლა: $y=-x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

$c=0$ წერტილი არის მაქსიმუმის წერტილი.

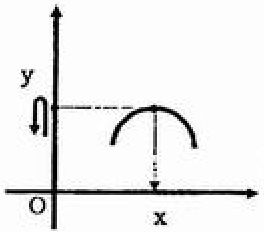
გეომეტრიული შინაარსი

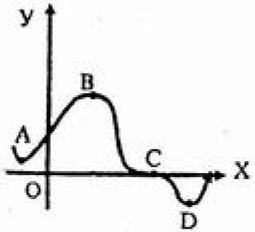
1. მაქსიმუმის მიდამოში ფუნქციის გრაფიკს აქვს „ბორცვის“ ფორმა.

2. მინიმუმის მიდამოში ფუნქციის გრაფიკს აქვს „ორმოს“ ფორმა.

REM. აღმოჩნდა, რომ, თუ $f''(c)\neq 0$, კოორდინატთა ღერძებზე ისეთნაირად შეიძლება კოორდინატების (მასშტაბის) არჩევა, რომ ნებისმიერი გლუვი ფუნქციის გრაფიკი c წერტილის მიდამოში გადაიქცევა პარაბოლად ან გადმობრუნებულ პარაბოლად.

y=f(x) ფუნქცია აღწერს y წერტილის მოძრაობას OY ღერძზე. x არის დრო. ექსტრემუმი ის წერტილია, სადაც y იცვლის მოძრაობის მიმართულებას.





PR. გრაფიკის რომელი წერტილია ექსტრემუმი?

პასუხი: A და D არიან მინიმუმები, ამასთან A წერტილში ფუნქცია არ აღწევს უმცირეს მნიშვნელობას, ხოლო D წერტილში- აღწევს. B არის მაქსიმუმი. C არ არის ექსტრემუმი.

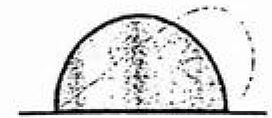
(* ექსტრემუმის პოვნა დაკავშირებულია ბევრ პრაქტიკულ ამოცანასთან. ზოგიერთი ამოცანა დასმულია, ჯერ კიდევ, ანტიკურ ხანაში. ერთ-ერთ ასეთ ამოცანაზეა ლაპარაკი ვირგილიუსის „ენეიდა"-ში.

ფინიკიელი მეფის ქალწული თავის ერთგულ რაზმთან ერთად თავს აღწევს ტირანი ძმის მეთვალყურეობას და ტოვებს მშობლიურ ქალაქს. მათი გემები გაემგზავრნენ ხმელთაშუა ზღვაში და მიუახლოვდნენ აფრიკის ერთ-ერთ სანაპიროს. ამ სანაპიროზე გადაწყვიტეს ფინიკიელებმა დასახლება. ადგილობრივი ნუმიდიელები არც ისე დიდი სიხარულით შეხვდნენ სტუმრებს. ნუმიდიელთა მეფემ ფინიკიელებს ხარის ტყავი მისცა და განუცხადა, რომ იგი თანახმაა სტუმრებს დაუთმოს მიწის ის ნაკვეთი, რომელსაც ისინი ამ ტყავით შემოღობავდნენ. სტუმრები სიამოვნებით დათანხმდნენ ამ პირობას. ფინიკიელებმა ტყავისაგან დაამზადეს საკმაოდ გრძელი თოკი და მეფისათვის სრულიად მოულოდნელად მოიზომეს არც თუ ისე მცირე ფართობის ტერიტორია. ამ ტერიტორიას ნახევარწრეწირის ფორმა ჰქონდა. ასე აშენდა ქალაქი კართაგენი.

სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ ტყავი იყო 2x1 $მ^2$ ზომის მართკუთხედი. სავარაუდოა, რომ იგი დაჭრეს 1 მმ სისქის ზოლებად. ასეთი ზოლებისაგან 2 კმ თოკის დამზადება შეიძლება.

დავუშვათ, ზღვის სანაპირო არის წრფე. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია წრფით და 2 კმ სიგრძის წირით, რომლის ბოლოები მდებარეობენ ამ წრფეზე. ასეთი ფიგურები უამრავია. ყველა ასეთ ფიგურებს შორის უდიდესი ფართობი აქვს ნახევარწრეს.)

PR. გამოთვალეთ ფინიკიელების მიერ შემოღობილი ტერიტორიის ფართობი. *



ექსტრემუმის ძირითადი თვისება

თეორემა (ფერმა). გლუვი ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილში წარმოებული უდრის ნულს:

$$\boxed{f'(c)=0.}$$

■ განვიხილოთ y წერტილის მოძრაობა, რომელიც აღიწერება y=f(x) ფუნქციით. ექსტრემუმის წერტილში y წერტილი იცვლის მოძრაობის მიმართულებას, ამიტომ ამ წერტილში სიჩქარე: $f'(c)=0$.

REM. ეს მსჯელობა შეიძლება გაფორმდეს წმინდა მათემატიკურ ტერმინებში.

დავუშვათ, c არის მინიმუმის წერტილი. ვთქვათ, c წერტილის მიდამოში არგუმენტი შეიცვალა Δx-ით. f(c) არის მინიმუმი. ამიტომ არგუმენტის ნებისმიერი ცვლილება იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის ზრდას. ყოველთვის $\Delta y \ge 0$. ამიტომ

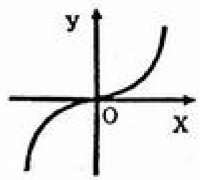
$$\left.\begin{array}{l} \text{როცა } \Delta x>0,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0 \Rightarrow f'(c)\ge 0 \\ \qquad\qquad\quad f'(c)\quad 0 \\ \text{როცა } \Delta x<0,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0 \Rightarrow f'(c)\le 0 \end{array}\right] \Rightarrow f'(c)=0.$$

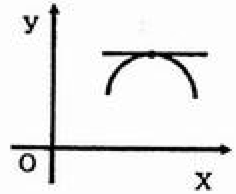
ანალოგიურად განიხილება მაქსიმუმის შემთხვევა. ■

ფერმას თეორემა არის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა. წერტილი, რომელშიც წარმოებული ნულის ტოლია, შეიძლება არ იყოს ექსტრემუმის წერტილი.

1. მართლაც, y წერტილი შეიძლება შეჩერდეს რაღაც მომენტში და იგივე მიმართულებით გააგრძელოს მოძრაობა.

2. ფუნქციას $y=x^3$, $x \in \mathbf{R}$, $c=0$ წერტილში არ აქვს ექსტრემუმი, მაგრამ $f'(c)=3c^2=0$.





გეომეტრიული შინაარსი

ექსტრემუმის წერტილში გრაფიკის მხები ჰორიზონტალურია (OX ღერძის პარალელურია).

REM. ექსტრემუმის წერტილის მიდამოში ფუნქცია შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივად.

■ მცირე მიდამოში გრაფიკი შეიძლება შეიცვალოს თავისი მხებით. ექსტრემუმის შემთხვევაში მხები ჰორიზონტალურია. ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი მუდმივია. ■

(* ექსტრემუმის ძირითადი თვისება პირველად შენიშნა კეპლერმა და საინტერესოა, რომ ეს აღმოჩენა დაკავშირებული იყო ღვინოსთან. იმ წელს, როდესაც კეპლერი დაქორწინდა, ავსტრიაში ყურძნის კარგი მოსავალი მოვიდა და ღვინო საკმაოდ იაფი ღირდა. კეპლერი გაკვირვებული დარჩა, თუ როგორ ზომავდნენ გამყიდველები კასრის მოცულობას. ისინი კასრში ჩაუშვებდნენ სწორ საზომს და ერთი გაზომვით adგენდნენ კასრის მოცულობას. აღმოჩნდა, რომ კასრებს გააჩნდათ ექსტრემალური ფორმა. ყველა იმ კასრებს შორის, რომელთათვისაც საზომი იძლევა ფიქსირებულ მნიშვნელობას, ღვინის კასრებს ჰქონდათ მაქსიმალური მოცულობა. ასეთ დროს საზომის მცირე გადახრა თითქმის არ ახდენს გავლენას ნამდვილ მნიშვნელობაზე.

ფერმამ ექსტრემუმის ძირითადი თვისება დაადგინა მრავალწევრებისთვის. ზოგად შემთხვევაში თეორემა დაამტკიცეს ნიუტონმა და ლეიბნიცმა. ნიუტონმა შემდეგ განიხილა უფრო ზოგადი ფუნქციის ექსტრემუმები. ეს ისეთი ფუნქციებია, რომლებიც განსაზღვრულია არა რიცხვით სიმრავლეებზე, არამედ წირებზე. ასე შეიქმნა ახალი თეორია — „ვარიაციული აღრიცხვა". ამის შემდეგ აღმოჩნდა, რომ ბუნების ბევრი კანონი დაკავშირებულია ექსტრემუმებთან. ბუნებაში რაიმე მოვლენა ისეთნაირად მიმდინარეობს, რომ რაღაც სიდიდე აუცილებლად აღწევს ექსტრემუმს. სწორედ ამიტომ სრულდება, მაგალითად, ენერგიის მუდმივობის კანონი.

თავისუფალი ნაწილაკი მოძრაობს ... უმოკლესი სიგრძის ტრაექტორიას. ასეთი ტრაექტორია არის წრფე, რომელიც აერთებს ამ ორ წერტილს.

სინათლე ირჩევს ისეთ ტრაექტორიას, რომლის გავლასაც იგი ანდომებს მინიმალურ დროს. ერთგვაროვან სივრცეში, მაგალითად, ჰაერში, ეს ტრაექტორია არის წრფე. მაგრამ არაერთგვაროვან გარემოში ტრაექტორია უკვე სხვა წირია. ამის მიზეზი ის არის, რომ ასეთ გარემოში სინათლის სიჩქარე მუდმივი არ არის. სწორედ ამიტომ ხდება, მაგალითად, სინათლის გარდატეხა წყლის ზედაპირზე. *)

J. თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x \in (a,b).$$

თეორემა (როლი). ვთქვათ, გლუვი ფუნქცია რომელიღაც ორ წერტილში ღებულობს ერთნაირ მნიშვნელობებს:

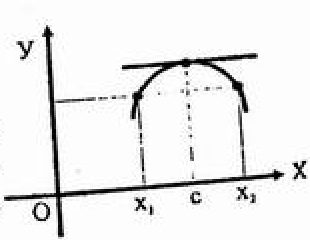
$$f(x_1)=f(x_2).$$

მაშინ ამ ორ წერტილს შორის აუცილებლად მოიძებნება ისეთი წერტილი, რომელშიც წარმოებული იქნება ნული:

$$\exists\, c \in (x_1,x_2):\ f'(c)=0.$$

■ $[x_1,x_2]$ დროის შუალედში y წერტილი ან საერთოდ არ მოძრაობს, ან უბრუნდება საწყის მდგომარეობას. პირველ შემთხვევაში სიჩქარე ნულია აღნიშნული შუალედის ნებისმიერ წერტილში. მეორე შემთხვევაში, დროის რომელიღაც მომენტში y წერტილი აუცილებლად შეიცვლის მოძრაობის მიმართულებას. ამ მომენტში სიჩქარე უდრის ნულს. ■

გეომეტრიული შინაარსი

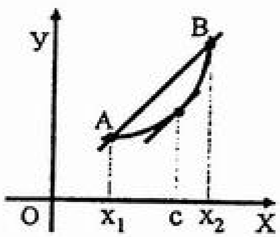


ვთქვათ, გრაფიკის რომელიმე ორი წერტილი იმყოფება ერთ დონეზე, მაშინ გრაფიკს გააჩნია ჰორიზონტალური მხები.

თეორემა (ლაგრანჟი).

$$\boxed{\exists c\in(x_1,x_2):\ f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

■ A და B წერტილებზე გავავლოთ წრფე. ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტია:



$$k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

წრფის განტოლებაა: $y=f(x_1)+k(x-x_1)$.

ამ წრფეს და გრაფიკს აქვს ორი საერთო წერტილი A და B. მათი სხვაობა $g(x)=f(x)-f(x_1)-k(x-x_1)$ x_1 და x_2 წერტილებში გახდება ნული: $g(x_1)=g(x_2)=0$.

სხვაობის წარმოებულია: $g'(x)=f'(x)-k$.

როლის თეორემის თანახმად რომელიღაც C წერტილში წარმოებული უდრის ნულს:

$$\exists\, c\in(x_1,x_2):\ \ g'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-k=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(c)=k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \quad ■$$

REM. ვთქვათ, x არის დრო, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქცია აღწერს წერტილის მოძრაობას OY ღერძზე.

1. $f(x_2)-f(x_1)$ არის y წერტილის გადაადგილება.
2. x_2-x_1 არის დრო, რომლის განმავლობაშიც ხდება ეს გადაადგილება.
3. შეფარდება $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ არის საშუალო სიჩქარე.
4. $f'(c)$ არის სიჩქარე დროის c მომენტში.

ლაგრანჟის თეორემის შინაარსი ის არის, რომ წრფეზე მოძრაობის დროს რაღაც მომენტში ნამდვილი სიჩქარე უდრის საშუალო სიჩქარეს.

გეომეტრიული შინაარსი

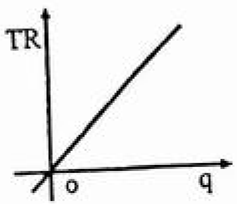
ფუნქციის გრაფიკზე ავიღოთ ორი წერტილი და შევაერთოთ მონაკვეთით. მაშინ არსებობს გრაფიკის ისეთი მხები, რომელიც ამ მონაკვეთის პარალელურია.

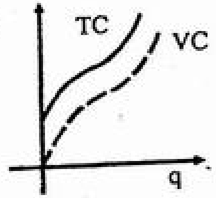
როგორ იყენებენ ეკონომისტები ლაგრანჟის თეორემას

უმთავრესი ამოცანა, რომელიც უნდა გადაწყვიტოს ნებისმიერმა ფირმამ, ეს არის, გამოუშვას თუ არა პროდუქცია და თუ უნდა გამოუშვას, მაშინ რამდენი? სწორედ ამ კითხვაზე იძლევა პასუხს ლაგრანჟის თეორემა.

განვიხილოთ წმინდა კონკურენციის მოდელი. ავიღოთ რომელიმე ფირმა და მის მიერ გამოშვებული პროდუქცია. ჩავთვალოთ, რომ ფირმის მუშაობა განიხილება დროის მოკლე პერიოდში.

წმინდა კონკურენციის დროს ამ პროდუქციის ფასი p არ არის დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის q რაოდენობაზე. ფირმის მთლიანი შემოსავალი TR არის წრფივი ფუნქცია: $TR(q)=pq$.



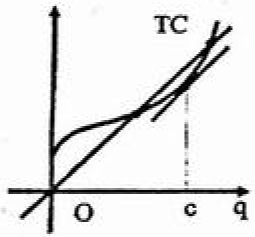


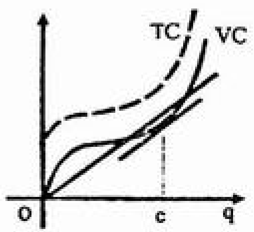
ფირმის მთლიანი ხარჯები არის ფუნქცია, რომელსაც აქვს სპეციალური სახე. მთლიანი ხარჯები არის ცვალებადი და ფიქსირებული ხარჯების ჯამი: $TC=VC+FC$.

ფიქსირებული ხარჯები მუდმივი რიცხვია. იგი არ არის დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე. ეს არის, მაგალითად, შენობის რენტის გადასახადი, ხარჯები, რომლებიც დაკავშირებულია მოწყობილო-

ბების ამორტიზაციასთან და ა. შ. ცვალებადი ხარჯები დამოკიდებულია q–ზე.

ვთქვათ, TR წრფე ორ წერტილში კვეთს TC ფუნქციის გრაფიკს. გრაფიკზე ავიღოთ ის წერტილი, სადაც მხები TR წრფის პარალელურია. ასეთი წერტილი არსებობს ლაგრანჟის თეორემის თანახმად. ეს ის წერტილია, სადაც წრფე მაქსიმალურადაა დაშორებული ხარჯების გრაფიკისაგან. ამ წერტილის აბსცისა აღვნიშნოთ c–თი. ფირმამ უნდა იმუშაოს და გამოუშვას c რაოდენობის პროდუქცია. მაშინ ფირმას ექნება მაქსიმალური მოგება.





PR. ვთქვათ, TR წრფე არ კვეთს TC გრაფიკს. მაგრამ ორ წერტილში კვეთს VC გრაფიკს. იპოვეთ ის წერტილი, რომელშიც ფირმას ექნება მინიმალური მთლიანი დანახარჯები.

პასუხი: წერტილი, სადაც მხები TR წრფის პარალელურია. ასეთი წერტილი არსებობს ლაგრანჟის თეორემის თანახმად. ამ შემთხვევაში ფირმის მუშაობას მაინც აქვს აზრი.

PR. როდის არა აქვს ფირმის მუშაობას აზრი?

პასუხი: როდესაც TR წრფე არ კვეთს VC გრაფიკს.

K. მონოტონური ფუნქცია

მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x), \ x\in(a, b).$$

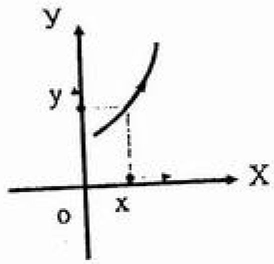
DEF. 1. ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ არგუმენტის ზრდა იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის გაზრდას:

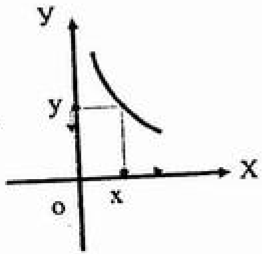
$$\forall x_1, x_2\in(a, b): \ x_1< x_2\Rightarrow (x_1)<f(x_2).$$

2. ფუნქციას ეწოდება კლებადი, თუ არგუმენტის ზრდა იწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის შემცირებას:

$$\forall x_1, x_2\in(a, b): \ x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

3. ფუნქციას ეწოდება მონოტონური, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი.





EX. 1. ფუნქცია $y=1/x$, $x\neq0$, კლებადია $(-\infty, 0)$ და $(0, +\infty)$ შუალედებზე.

PR. არის თუ არა ფუნქცია $y=1/x$ კლებადი განსაზღვრის არეზე?

პასუხი: არა.

2. მიწოდების ფუნქცია ზრდადია. რაც უფრო ძვირად იყიდება საქონელი, მით უფრო მეტი იქნება ამ პროდუქციის მიწოდება ბაზარზე.

3. მოთხოვნის ფუნქცია კლებადია. რაც უფრო ძვირია საქონელი, მით უფრო ნაკლებია მასზედ მოთხოვნა.

მონოტონური ფუნქცია აღწერს y წერტილის მოძრაობას მხოლოდ ერთი მიმართულებით. კერძოდ,

1. თუ y წერტილი მოძრაობს ზევით, მაშინ ფუნქცია ზრდადია.

2. თუ y წერტილი მოძრაობს ქვევით, მაშინ ფუნქცია კლებადია.

თეორემა. 1. თუ ფუნქციის წარმოებული დადებითია რაიმე შუალედზე, მაშინ ფუნქცია ზრდადია ამ შუალედზე.

2. თუ ფუნქციის წარმოებული უარყოფითია რაიმე შუალედზე, მაშინ ფუნქცია კლებადია ამ შუალედზე.

■ 1). y წერტილის სიჩქარე დადებითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი მიმართულია OY ღერძის მიმართულებით. ამიტომ y წერტილი მოძრაობს ზევით.

2). y წერტილის სიჩქარე უარყოფითია. ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი მიმართულია OY ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამიტომ y წერტილი მოძრაობს ქვევით.

REM. ჩვენ მოვიყვანთ წმინდა მათემატიკურ დამტკიცებასაც.

1. ავიღოთ (a, b) შუალედიდან ორი წერტილი: $x_1<x_2$. ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\vee\atop 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{\vee\atop 0}>0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

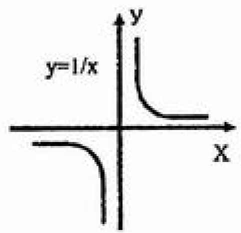
2. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე დებულებაც. ■

PR. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=1/x,\ x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty).$$

ამ ფუნქციის წარმოებულია:

$$y'=-1/x^2.$$



წარმოებული უარყოფითია მთელ განსაზღვრის არეზე, მაგრამ ფუნქცია არ არის კლებადი მთელ განსაზღვრის არეზე. ხომ არ ეწინააღმდეგება ეს მაგალითი დამტკიცებულ თეორემას?

როგორ უნდა გაიყიდოს საქონელი: ძვირად თუ იაფად?

ეს კითხვა მართლაც საინტერესოა, ვინაიდან იაფი საქონელი იყიდება ბევრი, ხოლო ძვირი – ცოტა. ამიტომ გაუგებარია, შემოსული თანხა $m=pq$ რომელ შემთხვევაში იქნება მეტი.

q არის საქონლის რაოდენობა, p არის საქონლის ფასი. გაყიდული საქონლის რაოდენობა დამოკიდებულია ფასზე. ეს დამოკიდებულება მოცემულია მოთხოვნის ფუნქციით: $q=f(p)$.

DEF. $e=-pq'/q$ რიცხვს ეწოდება ელასტიკურობა.

REM. მოთხოვნის ფუნქცია კლებადია, ამიტომ q' წარმოებული უარყოფითი რიცხვია. ასე, რომ თვითონ ელასტიკურობა დადებითია.

თეორემა. 1. თუ $e<1$, მაშინ m ზრდადია.

2. თუ $e>1$, მაშინ m კლებადია.

3. თუ $e=1$, მაშინ m არ იცვლება.

■ გვაქვს $m'=p'q+pq'=q+pq'=q(1+pq'/q)=q(1-e)$, ამიტომ

$e<1 \Rightarrow m'>0 \Rightarrow m$ ზრდადია,

$e>1 \Rightarrow m'<0 \Rightarrow m$ კლებადია,

$e=1 \Rightarrow m'=0 \Rightarrow m$ არ იცვლება. ■

ეს თეორემა პასუხს იძლევა ზემოთ დასმულ კითხვაზე:

1. თუ $e<1$, მაშინ უმჯობესია საქონელზე ფასის მომატება. ეს გამოიწვევს m-ის გაზრდას.

2. თუ $e>1$, მაშინ უმჯობესია საქონელზე ფასის დაკლება. ეს გამოიწვევს m-ის გაზრდას.

3. თუ $e=1$, მაშინ ფასის ცვლილებას არავითარი აზრი არ აქვს. m ასეთ დროს არ იცვლება.

* სწორედ ელასტიკურობას ექცევა ყურადღება, როდესაც ლაპარაკია აქციზის გადასახადის გაზრდაზე. აქციზის გაზრდა იწვევს საქონელზე ფასის გაზრდას. სახელმწიფოში შემოსული თანხა რომ გაიზარდოს, საჭიროა ელასტიკურობა იყოს ერთზე ნაკლები. ერთზე ნაკლები ელასტიკურობა აქვს ლიქიორს, თამბაქოსა და საწვავს. აშშ-ის ადმინისტრაციამ ამიტომ გაზარდა ამ საქონელზე აქციზები 1991 წელს. *

L. ამოზნექილი და ჩაზნექილი ფუნქციები

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in(a, b).$$

DEF. 1. ფუნქციას ეწოდება ამოზნექილი რაიმე შუალედზე, თუ ამ შუალედზე წარმოებული კლებადი ფუნქციაა.

2. ფუნქციას ეწოდება ჩაზნექილი რაიმე შუალედზე, თუ ამ შუალედზე წარმოებული ზრდადი ფუნქციაა.

ფუნქციის ამოზნექილობა ნიშნავს, რომ y წერტილის სიჩქარე მოძრაობის დროს კლებულობს. ეს ისეთი მოძრაობაა, როდესაც აჩქარება უარყოფითია.

ანალოგიურად, ფუნქციის ჩაზნექილობა ნიშნავს, რომ y წერტილის სიჩქარე მატულობს. ეს ისეთი მოძრაობაა, როდესაც აჩქარება დადებითია.

თეორემა. 1. თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული უარყოფითია რაიმე შუალედზე, მაშინ ფუნქცია ამოზნექილია ამ შუალედზე.

2. თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული დადებითია რაიმე შუალედზე, მაშინ ფუნქცია ჩაზნექილია ამ შუალედზე.

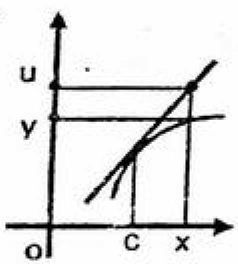
■ y'' არის y წერტილის აჩქარება. ■

გეომეტრიული შინაარსი

ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე ავიღოთ ნებისმიერი c წერტილი. ამ წერტილზე გავავლოთ მხები. მხების განტოლებაა:

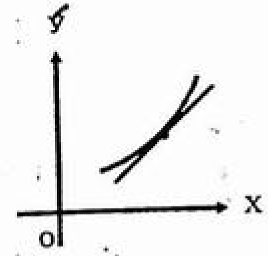
$$u=f(c)+f'(c)(x-c).$$

თეორემა. 1. ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს მხების ქვევით.



$$f(x)<f(c)+f'(c)(x-c),\quad x\neq c.$$

2. ჩაზნექილი ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს მხების ზევით:



$$f(x)>f(c)+f'(c)(x-c),\quad x\neq c.$$

■ 1. ვთქვათ, $x>c$. გამოვიყენოთ ლაგრანჟის თეორემა:

$$f(x)=f(c)+f(x)-f(c)=f(c)+f'(\xi)(x-c),$$

სადაც $c<\xi<x$. ამოზნექილი ფუნქციისათვის წარმოებული კლებადია: $f'(\xi)<f'(c)$. ამიტომ

$$f(x)<f(c)+f'(c)(x-c)=u.$$

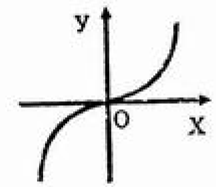
ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა $x<c$. ■

EX. მოცემულია ფუნქცია: $y=x^3$, $x\in \mathbf{R}$.
ფუნქციის წარმოებულია :

$$y'=3x^2.$$

მეორე რიგის წარმოებული იქნება

$$y''=6x.$$

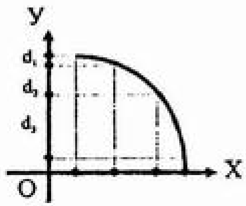


ფუნქცია ამოზნექილია $(-\infty, 0)$ შუალედზე და ჩაზნექილია $(0, +\infty)$ შუალედზე. 0 წერტილი ყოფს ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის შუალედებს.

DEF. წერტილს, რომელიც ყოფს ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედებს, გადაღუნვის წერტილი ეწოდება.

PR. აჩვენეთ, რომ თუ მეორე რიგის წარმოებული c წერტილში იცვლის ნიშანს, მაშინ იგი გადაღუნვის წერტილია.

ამოზნექილ ფუნქციას აქვს ერთი მნიშვნელოვანი თვისება. ვთქვათ, მოცემულია კლებადი და ამოზნექილი ფუნქცია:



$$y=f(x), \quad x\in[a,b].$$

$[a, b]$ შუალედში აღვნიშნოთ წერტილები, რომლებიც ამ შუალედს ყოფენ ერთნაირი სიგრძის მონაკვეთებად. OY ღერძზე აღვნიშნოთ შესაბამისი წერტილები. ეს წერტილები მნიშვნელობათა სიმრავლეს ყოფენ უკვე სხვადასხვა სიგრძის მონაკვეთებად. სიგრძეები ადგენენ მიმდევრობას. აღვნიშნოთ ეს მიმდევრობა (d_k)-თი.

თეორემა. (d_k) მიმდევრობა ზრდადია.

■ დროის ყოველ მომდევნო შუალედში y წერტილის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა უფრო მეტია, ვიდრე წინა შუალედში. დროის შუალედები ტოლია, ამიტომ y წერტილის გადაადგილება d_k ზრდადია.■

ამოზნექილი ფუნქცია და ეკონომიქსი

ეკონომიქსის ძირითადი დებულება არის შემდეგი. ბუნებაში რესურსები არის სასრული, ადამიანის მოთხოვნილება -უსასრულო. საჭიროა რესურსების ისეთი განაწილება, რომ მაქსიმალურად დაკმაყოფილდეს მოთხოვნილება.

წარმოებული პროდუქცია შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად. ერთი არის სამომხმარებლო საქონელი, დავარქვათ ამ ჯგუფს „პიცები“, და მეორე -წარმოების საშუალებები. ამ უკანასკნელს პირობითად დავარქვათ „რობოტები“.

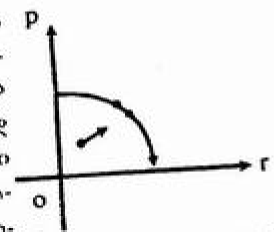
ვთქვათ, ეკონომიკა მუშაობს სრული დატვირთვით. გამოშვებული პროდუქციიდან p არის „პიცების“ რაოდენობა და r „რობოტების“ რაოდენობა. ვინაიდან რესურსები სასრულია p და r არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი, მათ შორის არსებობს დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება მოცემულია გრაფიკით. ამ გრაფიკს საწარმოო შესაძლებლობების გრაფიკი ეწოდება. ეს გრაფიკი გამოხატავს ეკონომიქსის ძირითად კანონს:

სრული დატვირთვით მომუშავე ეკონომიკისთვის „რობოტების“ ყოველი დამატებითი ერთეულის წარმოება საჭიროებს სულ უფრო მეტი რაოდენობის „პიცებზე“ უარის თქმას.

მათემატიკურად ეს ფაქტი ძალიან მარტივად ყალიბდება:

საწარმოო შესაძლებლობის ფუნქცია კლებადია და ამოზნექილი.

* წერტილი, რომელიც მდებარეობს გრაფიკის შიგნით, გამოხატავს მდგომარეობას, როდესაც ეკონომიკა არ მუშაობს სრული დატვირთვით. სწორედ ასეთ მდგომარეობაში იყო აშშ-ის ეკონომიკა მეორე მსოფლიო ომის დასაწყისში. ომმა მოთხოვნილება გაზარდა „რობოტებზე“. ამერიკელებმა მოახერხეს r-ის გაზრდა, ისე, რომ არ შეამცირეს p. (r, p) წერტილი მიუახლოვდა გრაფიკს.



რაც შეეხება ყოფილ საბჭოთა კავშირს, იგი ყოველთვის მუშაობდა სრული დატვირთვით. მეორე მსოფლიო ომის დროს r-ის გაზრდა მოხერხდა p-ს შემცირების ხარჯზე, რამაც დიდ გაჭირვებაში ჩააგდო მოსახლეობა. ანალოგიური მდგომარეობა იყო ამერიკის შეერთებულ შტატებში ვიეტნამის ომის დროს. სამოციანი წლების მეორე ნახევარში ამერიკის ეკონომიკა ახლოს იყო სრულ დასაქმებასთან. ასეთ დროს პრეზიდენტმა ჯონსონმა გადაწყვიტა ერთდროულად გაეზარდა ხარჯები ომის წარმოებისთვის და სიღარიბის დასაძლევად. ეს პროგრამა თავიდანვე განწირული იყო. (r, p) არ შეიძლება მოხვდეს გრაფიკის გარეთ. *

M. ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in(a, b).$$

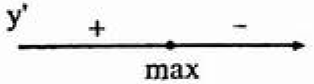
ვთქვათ, წარმოებული რომელიღაც c წერტილში ხდება ნული:

$$f'(c)=0.$$

ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ c არის ექსტრემუმის წერტილი. საჭიროა დამატებითი პირობა. ასეთი პირობაა მაგალითად ის, რომ წარმოებული c წერტილში იცვლის ნიშანს.

თეორემა. ვთქვათ, c წერტილის მიდამოში წარმოებული იცვლის ნიშანს, მაშინ c არის ექსტრემუმის წერტილი. კერძოდ:

1. თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის +-დან −-ზე, მაშინ c არის მაქსიმუმის წერტილი.



2. თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის −-დან +-ზე, მაშინ c არის მინიმუმის წერტილი.

■ 1. განვიხილოთ C წერტილის მიდამო. ამ მიდამოში C წერტილის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, ხოლო მარჯვნივ − კლებადი. ეს იმას ნიშნავს, რომ C არის მაქსიმუმის წერტილი.

PR. დაამტკიცეთ მეორე დებულება. ■

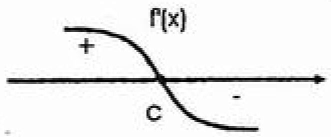
ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება გამოვიკვლიოთ მეორე რიგის წარმოებულის საშუალებით.

თეორემა. ვთქვათ, $f'(c)=0$, მაშინ

1. თუ $f''(c)<0$, c არის მაქსიმუმის წერტილი.

2. თუ $f''(c)>0$, c არის მინიმუმის წერტილი.

■ 1. ვთქვათ, $f''(c)<0$. ფუნქცია უწყვეტია. ამიტომ ეს უტოლობა შესრულდება C წერტილის მიდამოშიც. ეს იმას ნიშნავს, რომ პირველი რიგის წარმოებული კლებადია. C წერტილში იგი ნულია.



ამიტომ C წერტილის მარცხნივ წარმოებული [illegible]
მარჯვნივ − უარყოფითი.

PR. დაამტკიცეთ მეორე დებულება. ■

N. ✓ იტერაცია

ვთქვათ, მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in \mathbf{R}.$$

ავიღოთ რაიმე წერტილი x_1. განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$x_1,\ x_2=f(x_1),\ x_3=f(x_2),\ \dots,x_n=f(x_{n-1}),\ \dots$$

DEF. ასეთ მიმდევრობას ეწოდება იტერაცია.

EX. გეომეტრიული პროგრესია:

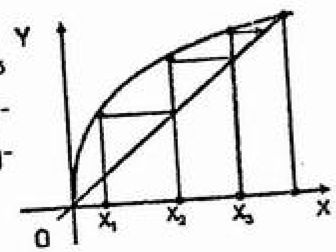
$$(q, q^2, \dots, q^n, \dots)$$

არის იტერაცია. ამ შემთხვევაში

$$f(x)=qx,\ x_1=q.$$

გეომეტრიული შინაარსი

დავხაზოთ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და $y=x$ წრფე. გეომეტრიულად იტერაცია აიგება მარტივი წესით. ეს წესი ნაჩვენებია ნახაზზე.



თეორემა. განვიხილოთ განტოლება:

$$f(x)=x.$$

თუ იტერაცია კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი არის ამ განტოლების ამონახსნი.

■ გადავიდეთ ზღვარზე ტოლობაში:

$$\underset{\downarrow\atop x}{x_n}=f(\underset{\downarrow\atop x}{x_{n-1}})\Rightarrow f(x)=x.$$ ■

იტერაციის კრებადობის საკმარისი პირობა

მოცემულია გლუვი ფუნქცია: $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

თეორემა. ვთქვათ,

$$\forall x\in\mathbf{R}: |f'(x)|<q<1.$$

მაშინ იტერაცია კრებადია.

■ დამტკიცების გზა გამოსახულია ნახაზზე. ამის შემდეგ იტერაციის კრებადობა გამომდინარეობს უწყვეტობის პრინციპიდან. ■

EX. 1. $\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}=2$.

■ განვიხილოთ იტერაცია: $x_1=0$, $x_n=f(x_{n-1})$, სადაც

$$f(x)=\sqrt{2+x},\ x>0.$$

ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემის პირობას:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}<\frac{1}{2\sqrt{2}},\ x>0.$$

ამიტომ იტერაცია კრებადია. ზღვარი გამოითვლება განტოლებიდან:

$$\sqrt{2+x}=x \Rightarrow x=2.$$ ■

EX. 1. ვთქვათ, მოცემულია წრფივი ფუნქცია:

$$f(x)=ax+b.$$

თეორემა. იტერაცია კრებადია, თუ $|a|<1$.

■ ამ შემთხვევაში: $f'(x)=a$. ■

იტერაცია სიბრტყეზე

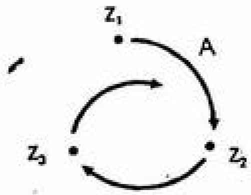
მოცემულია ფუნქცია:

$$F(z)=Az+B,$$

სადაც A, B და z მატრიცებია:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ იტერაცია:



$$z_1,\ z_2=Az_1,\ z_3=Az_2,\ \dots,\ z_n=Az_{n-1}.$$

გეომეტრიული შინაარსი

z_1 წერტილი აღვნიშნოთ სიბრტყეზე. A მატრიცა ამ წერტილს გადაიყვანს z_2 წერტილში. მიღებულ წერტილს A მატრიცა გადაიყვანს z_3 წერტილში და ა. შ. მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას სიბრტყეზე.

ვთქვათ,

$$z_n=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},\qquad z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

DEF. $z_n\to z \Leftrightarrow x_n\to x$ და $y_n\to y$.

თეორემა. განვიხილოთ სისტემა:

$$\begin{cases}ax+by+m=x\\ cx+dy+n=y\end{cases}.$$

თუ იტერაცია კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი არის ამ სისტემის ამონახსნი.

PR. დაამტკიცეთ თეორემა.

განვიხილოთ დეტერმინანტი:

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

ეს არის კვადრატული განტოლება λ-ს მიმართ. ვთქვათ, განტოლების ფესვებია λ_1 და λ_2.

DEF. λ_1 და λ_2 რიცხვებს ეწოდება A მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები.

თეორემა. თუ $|\lambda_1|<1$ და $|\lambda_2|<1$, მაშინ იტერაცია კრებადია.

EX. ბოიარსკის მოდელში

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.06 & 0 \end{pmatrix}.$$

დავწეროთ განტოლება:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0.06 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 0.12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0.12}.$$

ფესვები $|\lambda_{1,2}|<1$, ამიტომ იტერაცია კრებადია. სწორედ ამიტომ უახლოვდება ბოიარსკის მოდელში თავისუფალი ფასები გეგმიურს.

6. ორი ცვლადის ფუნქცია

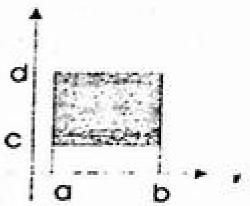
A. რა არის ორი ცვლადის ფუნქცია

თუ z ცვლადი დამოკიდებულია x და y ცვლადებზე, მაშინ ამბობენ, რომ z არის x-ის და y-ის ფუნქცია.

EX. ჰაერის ტემპერატურა T დამოკიდებულია V მოცულობაზე და P წნევაზე: $T=kPV$, k – რაღაც რიცხვია.

ორი ცვლადის ფუნქცია არის ჩვეულებრივი ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა წყვილების სიმრავლე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ინტერვალი: (a,b) და (c,d). განვიხილოთ წყვილების სიმრავლე:



$$D=\{(x, y)|\ x\in(a,b) \text{ და } y\in(c, d)\}.$$

ყველა ეს წყვილი აღვნიშნოთ სიბრტყეზე. მიღებული წერტილები შეადგენენ ღია მართკუთხედს. ეს ისეთი მართკუთხედია, რომელსაც არ ეკუთვნის საზღვარი.

ვთქვათ, f არის რიცხვითი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია D კვადრატზე.

DEF. 1. მაშინ წერენ:

$$z=f(x,y),\ \ x\in(a,b),\ y\in(c, d).$$

2. x და y ცვლადებს ეწოდებათ დამოუკიდებელი ცვლადები ანუ არგუმენტები. z-ს ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობა.

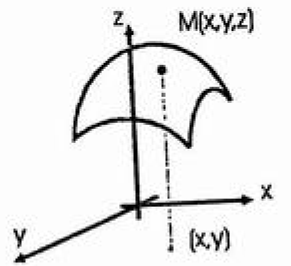
ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია:

$$z=f(x,y),\ \ x\in(a,b),\ y\in(c, d).$$

ეს ფუნქცია (x,y) წერტილს შეუსაბამებს z რიცხვს. განვიხილოთ სამეული (x,y,z). აღვნიშნოთ ეს წერტილი სივრცეში. განვიხილოთ ყველა ასეთი წერტილების სიმრავლე. მივიღებთ რაღაც ზედაპირს.

DEF. გრაფიკი არის სიმრავლე



$$S=\{(x, y, z)|\ z=f(x, y)\}.$$

EX. 1. მოცემულია ფუნქცია:

$$z=x^2+y^2,\ \ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}.$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი არის პარაბოლოიდი. იგი მიიღება $z=x^2$ პარაბოლის ბრუნვის შედეგად ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ.

2. მოცემულია ფუნქცია:

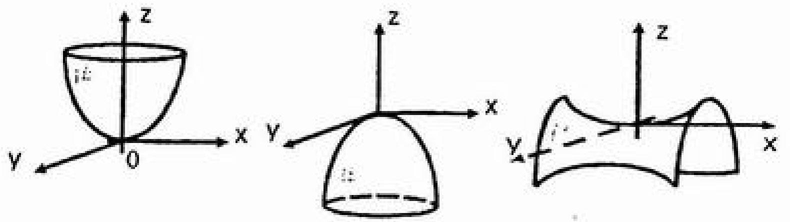
$$z=-x^2-y^2,\ \ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}.$$

გრაფიკი არის გადმობრუნებული პარაბოლოიდი.

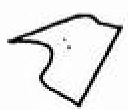
3. მოცემულია ფუნქცია:

$$z=x^2-y^2, \quad x\in \mathbf{R}, \quad y\in \mathbf{R}.$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი არის ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. იგი მიიღება შემდეგნაირად. ავიღოთ $z=x^2$ პარაბოლა. ამ პარაბოლაზე ჩამოვკიდოთ $z=-y^2$ გადმობრუნებული პარაბოლა და წვეროთი ვასრიალოთ პარაბოლის გასწვრივ. მივიღებთ ჰიპორბელურ პარაბოლოიდს. ზედაპირს აქვს უნაგირის ფორმა. ამიტომ ამ ფუნქციას ზოგჯერ უბრალოდ „უნაგირს" უწოდებენ.



REM. ნებისმიერი ზედაპირი არ წარმოადგენს გრაფიკს. გრაფიკი ისეთი ზედაპირია, როდესაც ნებისმიერი ვერტიკალური წრფე ზედაპირს კვეთს არა უმეტეს ერთ წერტილში.



PR. არის თუ არა გრაფიკი „კატასტროფების" ზედაპირი.

პასუხი: არა.

B. კერძო წარმოებული

მოცემულია ფუნქცია:

$$z=f(x,y), \quad x\in(a,b), \quad y\in(c,d).$$

დავაფიქსიროთ y. მივიღებთ ერთი ცვლადის ფუნქციას. ფუნქციის არგუმენტია x. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. მას აღნიშნავენ სპეციალური სიმბოლოთი:

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

დავაფიქსიროთ x. მივიღებთ ერთი ცვლადის ფუნქციას. ფუნქციის არგუმენტია y. გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. მას აღნიშნავენ სპეციალური სიმბოლოთი:

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

DEF. $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ რიცხვებს ეწოდებათ კერძო წარმოებულები.

იმისთვის, რომ გამოვთვალოთ კერძო წარმოებული ერთი ცვლადი უნდა ჩავთვალოთ მუდმივად და გაწარმოება შევასრულოთ მეორე ცვლადით.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $z=x^2-\cos y$, $x\in \mathbf{R}$, $y\in \mathbf{R}$. ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულები იქნება:

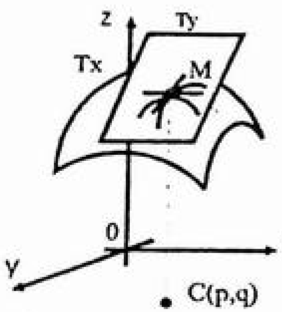
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin y.$$

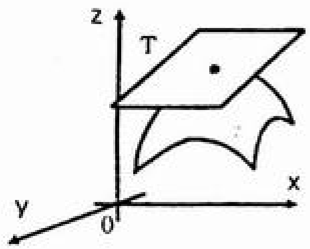
გეომეტრიული შინაარსი

ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე აღვნიშნოთ C(p, q) წერტილის შესაბამისი M წერტილი. M წერტილზე გავავლოთ OX ღერძის პარალელური ვერტიკალური სიბრტყე. ამ სიბრტყის თანაკვეთა გრაფიკთან იქნება გარკვეული წირი. თუ M წერტილი იმოძრავებს ამ წირზე, მაშინ მისი მეორე კოორდინატი იქნება მუდმივი, კერძოდ q. M წერტილზე გავავლოთ წირის მხები T_x. მხების კუთხური კოეფიციენტი იქნება კერძო წარმოებული: $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$.

ზუსტად ასევე, M წერტილზე გავავლოთ OY ღერძის პარალელური ვერტიკალური სიბრტყე. ამ სიბრტყის თანაკვეთა გრაფიკთან იძლევა წირს. თუ M წერტილი იმოძ-

რავებს ამ წირზე, მაშინ მისი პირველი კოორდინატი არ შეიცვლება. კერძოდ იქნება p. M წერტილზე გავავლოთ წირის მხები T_y. მხების კუთხური კოეფიციენტი იქნება კერძო წარმოებული: $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta$.





მხები სიბრტყე

T_x და T_y წრფეებზე გავავლოთ სიბრტყე T.

DEF. T სიბრტყეს ეწოდება გრაფიკის მხები M წერტილში.

გლუვი ფუნქცია

განვიხილოთ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$. თითოეული მათგანი წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციას. განვიხილოთ მიღებული ფუნქციების კერძო წარმოებულები. მათთვის იყენებენ სპეციალურ აღნიშვნებს:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

DEF. ამ რიცხვებს ეწოდებათ $y=f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $z=x^2-\cos y$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებია:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y) = \cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y) = 0.$$

DEF. ფუნქციას ეწოდება გლუვი, თუ მას გააჩნია ნებისმიერი რიგის ყველა კერძო წარმოებული და ყველა ისინი უწყვეტი ფუნქციებია.

შემდგომში ჩვენ მხოლოდ გლუვ ფუნქციებთან გვექნება საქმე.

REM. ორი ცვლადის ფუნქციას ფორმალურად აქვს ოთხი მეორე რიგის წარმოებული, მაგრამ გლუვი ფუნქციებისთვის შერეული წარმოებულები ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

გლუვ ფუნქციას აქვს სამი მეორე რიგის წარმოებული.

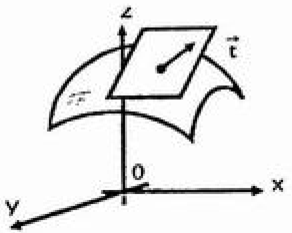
C. ფუნქციის დიფერენციალი

მოცემულია ფუნქცია:

$$z=f(x,y), \; x\in(a,b), \; y\in(c,d).$$

ვთქვათ, $C(p,q)\in D$.

გრაფიკზე ავიღოთ M წერტილი, რომელიც შეესაბამება (p, q) წერტილს და მასზე გავავლოთ T მხები. T სიბრტყეში ავიღოთ ნებისმიერი $\vec{t}$ ვექტორი. ასეთი ვექტორის კოორდინატები აღინიშნება სპეციალური სიმბოლოებით:



$\vec{t}=(dx, dy, dz).$

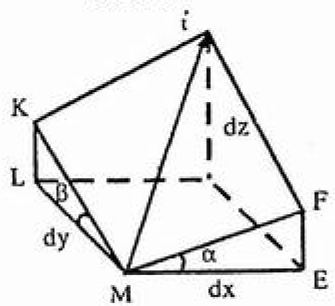
DEF. 1. dx და dy რიცხვებს ეწოდებათ არგუმენტის დიფერენციალები.

2. dz რიცხვს ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი.

არგუმენტის და ფუნქციის დიფერენციალებს შორის არსებობს კავშირი.

თეორემა. $$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.}$$

■ ვიგულისხმოთ, რომ არგუმენტის დიფერენციალები დადებითი რიცხვებია. M წერტილში ავაგოთ ჰორიზონტალური მართკუთხედი, რომლის გვერდებია dx და dy. ეს მართკუთხედი არის მხებ სიბრტყეში მდებარე პარალელოგრამის გეგმილი. ეს პარალელოგრამი OX და OY ღერძებთან ადგენს კუთხეებს, რომელთა ტანგენსებია კერძო წარმოებულები. ამიტომ



$$dz=KL+EF=dx\,tg\alpha+dy\,tg\beta=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \ ■$$

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ფუნქციის დიფერენციალი, საჭიროა ვიცოდეთ კერძო წარმოებულები და არგუმენტების დიფერენციალები. ორივე არგუმენტის დიფერენციალი შეიძლება იყოს სრულიად ნებისმიერი რიცხვი.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $z=x^2-\cos y$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. გამოთვალეთ ფუნქციის დიფერენციალი, თუ $(p,q)=(1,\pi)$ და $dx=0.1$, $dy=1000$.

პასუხი: $dz=0.2$.

■

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xdx+\sin y\,dy=2\cdot1\cdot0.1+\sin\pi\cdot1000=0.2. \ ■$$

დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი

დიფერენციალი არის მხების ნაზრდი.

თუ თითოეული არგუმენტის ნაზრდი და დიფერენციალი ერთნაირი რიცხვებია და ამასთან ისინი ახლოს არიან ნულთან, მაშინ ფუნქციის ნაზრდი დაახლოებით უდრის ფუნქციის დიფერენციალს:

$$\Delta z\approx dz.$$

D. წარმოებული

მოცემულია ფუნქცია:

$$z=f(x,y),\ \ x\in(a,b),\ y\in(c,d).$$

ვთქვათ, $C(p,q)\in D$. კერძო წარმოებულებისაგან შევადგინოთ ვექტორი:

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

DEF. ამ ვექტორს ეწოდება ფუნქციის წარმოებული ანუ გრადიენტი C წერტილში.

EX. მოცემულია ფუნქცია: $z=x^2-\cos y$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. ვთქვათ, $(p,q)=(1,\pi)$. ამ წერტილში ფუნქციის გრადიენტია:

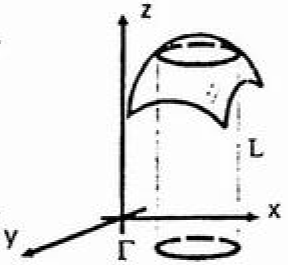
$$\mathrm{grad}f=(2\cdot1,\sin\pi)=(2,0).$$

მუდმივი დონის წირები

ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკზე ავიღოთ C(p,q) წერტილის შესაბამისი M წერტილი. M წერტილზე გავავლოთ ჰორიზონტალური სიბრტყე. ამ სიბრტყის თანაკვეთა გრაფიკთან მოგვცემს გარკვეულ წირს. ამ წირის გეგმილი მუდმივი განსაზღვრის არეში არის მუდმივი დონის წირი. მუდმივი

დონის წირის შესაბამისი წერტილები გრაფიკზე იმყოფებიან ერთნაირ სიმაღლეზე ანუ დონეზე. მათი მესამე კოორდინატი მუდმივია.

ვთქვათ, h ფიქსირებული რიცხვია.



DEF. მუდმივი დონის წირი ეწოდება სიმრავლეს:

$$\Gamma=\{A(x,y)\,|\,f(x,y)=h\}.$$

$f(x,y)=h$ არის მუდმივი დონის წირის განტოლება.

EX. 1. პარაბოლოიდის მუდმივი დონის წირები არიან წრეწირები.

■ პარაბოლოიდი არის $z=x^2+y^2$ ფუნქციის გრაფიკი. $x^2+y^2=h$ არის წრეწირის განტოლება. ■

PR. რა არის „უნაგირის" მუდმივი დონის წირი?

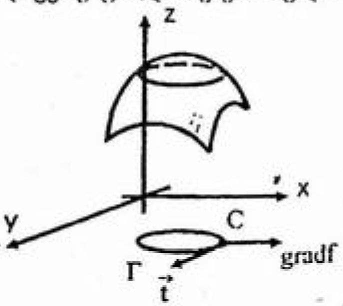
პასუხი: ჰიპერბოლა.

წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, Γ არის მუდმივი დონის წირი, რომელიც გადის $C(p,q)$ წერტილზე.

თეორემა. წარმოებული მუდმივი დონის წირის მართობულია.

■ ავიღოთ $\bar{t}=(dx,dy)$ ვექტორი, რომელიც გამოდის $C(p,q)$ წერტილიდან და ეხება Γ წირს. Γ წირის გასწვრივ ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება, ამიტომ შესაბამისი ფუნქციის დიფერენციალი იქნება ნული:



$$dz=0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{grad}f\cdot\bar{t}=0 \Leftrightarrow \mathrm{grad}f\perp\bar{t}.$$

მხების პერპენდიკულარული ვექტორი არის ნორმალი. ■

E. ექსტრემუმი

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$z=f(x,y),\ x\in(a,b),\ y\in(c,d).$$

ვთქვათ, $C(p,q)\in D$.

DEF. C წერტილის მიდამო ეწოდება ნებისმიერ ღია წრეს, რომლის ცენტრი მდებარეობს C წერტილში.

როდესაც განსაზღვრულია მიდამო, ექსტრემუმი განიმარტება ზუსტად ისე, როგორც ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

DEF. 1. ვთქვათ, $C(p,q)$ წერტილის მიდამოში $f(p,q)$ არის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა. მაშინ C წერტილს ეწოდება მინიმუმის წერტილი, ხოლო $f(p,q)$ რიცხვს უბრალოდ მინიმუმი.

2. ვთქვათ, $C(p,q)$ წერტილის მიდამოში $f(p,q)$ არის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. მაშინ C წერტილს ეწოდება მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო $f(p,q)$ რიცხვს უბრალოდ მაქსიმუმი.

3. მინიმუმის ან მაქსიმუმის წერტილს ექსტრემუმის წერტილი ეწოდება. ექსტრემუმის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა არის ფუნქციის ექსტრემუმი.

EX. 1. პარაბოლოიდის მინიმუმის წერტილია C(0,0).

2 გადმობრუნებული პარაბოლოიდის მაქსიმუმის წერტილია C(0.0).

ორივე შემთხვევაში ესტრემუმია: $f(0,0)=0$.

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის სამართლიანია ფერმას თეორემა. ექსტრემუმის წერტილში მხები ჰორიზონტალურია.

თეორემა. ექსტრემუმის წერტილში გლუვი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(p,q)=\frac{\partial z}{\partial y}(p,q)=0.}$$

■ განვიხილოთ ერთი ცვლადის ფუნქცია $z=f(x,q)$. p არის ამ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი. მაშინ p წერტილში x-ით წარმოებული უდრის ნულს:

$$f'_x(p,q)=\frac{\partial z}{\partial x}(p,q)=0.$$

ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ტოლობა. ■

ფერმას თეორემა არის ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელი პირობა. თუ რაიმე წერტილში წარმოებული ნულია, ეს ჯერ კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.

EX. განვიხილოთ „უნაგირი": $z=x^2-y^2$. $C(0,0)$ წერტილი ცხადია არ არის არც მინიმუმის და არც მაქსიმუმის წერტილი, მაგრამ წარმოებული უდრის ნულს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-2y\end{aligned}\right]\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0.$$

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა

ვთქვათ, $C(p,q)$ წერტილში პირველი რიგის ორივე კერძო წარმოებული ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

$C(p,q)$ წერტილში გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$S=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad R=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad T=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

შევადგინოთ მატრიცა:

$$G=\begin{pmatrix}S & R\\ R & T\end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ განტოლება:

$$\begin{vmatrix}S-\lambda & R\\ R & T-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(S-\lambda)(T-\lambda)-R^2=0\Leftrightarrow\lambda^2-(S+T)\lambda+ST-R^2=0.$$

ამ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი არაუარყოფითია:

$$D=(S+T)^2-4(ST-R^2)=S^2+2ST+T^2-4ST+4R^2=(S-T)^2+4R^2\geq 0.$$

ამიტომ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები λ_1 და λ_2. ამ რიცხვებს G მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები ეწოდებათ.

ვთქვათ, საკუთარი მნიშვნელობები განსხვავებულია.

თეორემა. 1. თუ $\lambda_1>0$ და $\lambda_2>0$, მაშინ $C(p,q)$ არის მინიმუმის წერტილი.

2. თუ $\lambda_1<0$ და $\lambda_2<0$, მაშინ $C(p,q)$ არის მაქსიმუმის წერტილი.

3. თუ λ_1 და λ_2 რიცხვებს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ $C(p,q)$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი.

■ 1. როდესაც საკუთარი მნიშვნელობები დადებითია, ლერძებზე კოორდინატების არჩევა ისეთნაირად შეიძლება, რომ C წერტილის მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი გახდება პარაბოლოიდი. პარაბოლოიდის წვერო არის მინიმუმი.

2. როდესაც საკუთარი მნიშვნელობები უარყოფითია, ღერძებზე კოორდინატების არჩევა ისეთნაირად შეიძლება, რომ C წერტილის მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი გახდება გადმობრუნებული პარაბოლოიდი. ასეთი პარაბოლოიდის წვერო არის მაქსიმუმი.

3. როდესაც საკუთარი მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნისაა, კოორდინატების არჩევა ღერძებზე ისეთნაირად შეიძლება, რომ C წერტილის მიდამოში გრაფიკს ექნება „უნაგირი"-ს ფორმა, რომელსაც არ გააჩნია ექსტრემუმი. ■

ექსტრემუმის დასადგენად არ არის აუცილებელი საკუთარი მნიშვნელობების გამოთვლა, საჭიროა საკუთარი მნიშვნელობების ნიშნების დადგენა. კვადრატული განტოლების ფესვების ნიშნები შეიძლება განისაზღვროს ფესვების პოვნის გარეშე.

თეორემა. 1. ვთქვათ, $ST-R^2 > 0$, მაშინ

a) თუ $S>0$, საკუთარი მნიშვნელობები დადებითია და ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

b) თუ $S<0$, საკუთარი მნიშვნელობები უარყოფითია და ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

2. ვთქვათ, $ST-R^2<0$. მაშინ საკუთარი მნიშვნელობები სხვადასხვა ნიშნისაა და ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი.

■ გამოვიყენოთ ვიეტას თეორემა:

$$\lambda_1\lambda_2=ST-R^2,\ \lambda_1+\lambda_2=S+T.$$

1. გვაქვს

$$ST-R^2>0 \Leftrightarrow ST>R^2\geq 0.$$

S და T რიცხვებს აქვთ ერთნაირი ნიშანი. ერთნაირი ნიშნები აქვთ საკუთარ მნიშვნელობებსაც.

a) თუ $S>0$, მაშინ $T>0$. ამიტომ

$$S+T>0 \Leftrightarrow \lambda_1+\lambda_2=S+T>0.$$

ორი ერთნაირი ნიშნის რიცხვის ჯამი დადებითია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე ეს რიცხვი დადებითია:

$$\lambda_1> 0,\quad \lambda_2> 0. \quad ■$$

PR. დაამტკიცეთ დანარჩენი ორი დებულება.

EX. მოცემულია ფუნქცია:

$$z=x^2-2x+y^2,\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}.$$

იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი.

■ გამოვთვალოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y.$$

გავუტოლოთ ისინი ნულს: $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1,$

$$2y=0 \Leftrightarrow y=0.$$

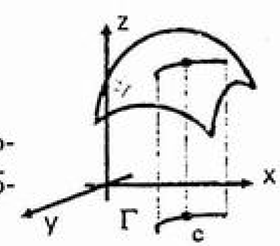
C(1,0) წერტილში გამოვთვალოთ მეორე რიგის სამივე კერძო წარმოებული $S=2$, $T=2$, $R=0$.

გვაქვს $S>0$, $ST-R^2=4>0$. C(1,0) არის მინიმუმის წერტილი. ■

F. პირობითი ექსტრემუმი

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$z=f(x,y),\quad x\in(a,b),\ y\in(c,d).$$



გარდა ამისა, განსაზღვრის არეში მოცემულია გლუვი წირი Γ, რომლის განტოლებაა: $F(x,y)=0$.

ვთქვათ, $C(p,q)\in\Gamma$. ავიღოთ C წერტილის რაიმე მიდამო.

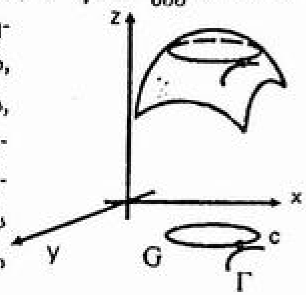
DEF. ვთქვათ, $f(p,q)$ არის ფუნქციის ექსტრემუმი არა მთელ მიდამოში, არამედ Γ წირის იმ ნაწილზე, რომელიც მიდამოშია მოთავსებული. მაშინ C(p,q) წერტილს ეწოდება პირობითი ექსტრემუმის წერტილი, ხოლო f(p,q) რიცხვს – პირობითი ექსტრემუმი.

პირობითი ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა

ვთქვათ, C(p,q) არ არის ექსტრემუმის წერტილი. C(p,q) წერტილზე გავავლოთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის მუდმივი დონის წირი G.

თეორემა. G და Γ წირები ერთმანეთს ეხება C წერტილში.

■ დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, Γ წირი კვეთს G-ს. G წირზე ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას. ამიტომ Γ წირის იმ წერტილებში, რომლებიც მდებარეობენ G-ს ერთ მხარეს, ფუნქციის მნიშვნელობები უფრო მეტი იქნება, ვიდრე Γ წირის იმ წერტილებში, რომლებიც მდებარეობენ G-ს მეორე მხარეს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია C წერტილში ვერ აღწევს ექსტრემუმს Γ წირზე. ■



ორი წირი ერთმანეთს ეხება ნიშნავს, რომ მათი ნორმალები არიან პარალელურები. მუდმივი დონის წირების ნორმალები ფუნქციის გრადიენტებია.

თეორემა (ლაგრანჟი). ვთქვათ, C(p, q) წერტილი არის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი λ, რომ

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}.}$$

■ განვიხილოთ ორივე ფუნქციის გრადიენტი:

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \ \mathrm{grad}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

ორი ვექტორი პარალელურია, თუ მათი კოორდინატები პროპორციულია:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}. \qquad ■$$

DEF. λ რიცხვს ლაგრანჟის მუდმივი ეწოდება.

EX. მოცემულია ფუნქცია:

$$z=x^2+xy+y^2, \ x\in \mathbf{R}, \ y\in \mathbf{R}.$$

ფუნქციას აქვს ორი მაქსიმუმის წერტილი ერთეულოვან წრეწირზე: $x^2+y^2=1$. იპოვეთ ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმი.

■ გამოვთვალოთ ორივე ფუნქციის წარმოებულები:

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)=(2x+y, x+2y),$$

$$\mathrm{grad}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)=(2x, 2y).$$

დავწეროთ ამ ორი ვექტორის პარალელურობის პირობა:

$$\begin{cases}2x+y=\lambda x\\ x+2y=\lambda y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-\lambda)x+y=0\\ x+(2-\lambda)y=0.\end{cases}$$

თუ სისტემის მთავარი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, სისტემის ორივე ამონახსნი იქნება ნულის ტოლი. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან (x,y) წერტილი მდებარეობს წრეწირზე. ამიტომ სისტემის დეტერმინანტი უნდა იყოს ნული:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ან } \lambda=3.$$

ვთქვათ, $\lambda=1$. შევიტანოთ λ-ს მნიშვნელობა რომელიმე განტოლებაში და მიღებულ განტოლებას მივუწეროთ წრეწირის განტოლება. მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases}x+y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 1/\sqrt{2}\\ y=\pm 1/\sqrt{2}.\end{cases}$$

ყველა ამ წერტილში ფუნქცია ღებულობს ერთი და იგივე მნიშვნელობას. ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმია:

$$m=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

PR. აჩვენეთ, რომ $\lambda=3$ მნიშვნელობა იძლევა იგივე ექსტრემუმის წერტილებს. ■

7. ინტეგრალი

ინტეგრება გაწარმოების შებრუნებული ოპერაციაა. გაწარმოებისაგან განსხვავებით ინტეგრალის ალება არც ისე ადვილია. უფრო მეტიც, ზოგიერთი უმარტივესი ფუნქციის ინტეგრალი არც კი გამოისახება "ფორმულით" ისევე როგორც წარმოებული. ინტეგრალიც აღიწერება გეომეტრიულად: თუ წარმოებული გრაფიკის მხებია, ინტეგრალი არის გრაფიკით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.

A. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება

ვთქვათ, მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in(a, b).$$

DEF. 1. $y=F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი (ან პირველადი) (a,b) ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილში:

$$F'(x)=f(x).$$

წარმოებულისაგან განსხვავებით ინტეგრალი არ არის ერთადერთი. თუ ინტეგრალს დავუმატებთ ნებისმიერ მუდმივს, მივიღებთ ისევ ინტეგრალს.

თეორემა. ვთქვათ, $y=F(x)$ ფუნქცია არის $y=f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი (a,b) ინტერვალზე. მაშინ ამავე ფუნქციის ინტეგრალი იქნება ფუნქცია $y=F(x)+C$, სადაც C არის ნებისმიერი მუდმივი.

■ მუდმივის წარმოებული ნულია, ამიტომ

$$(F(x)+C)' = F'(x) + \underbrace{C'}_{0} = F'(x) = f(x). \quad ■$$

ფუნქციის ნებისმიერი ინტეგრალი მიიღება ერთი რომელიმე ინტეგრალისაგან მუდმივის დამატებით.

თეორემა. ვთქვათ, $y=F_1(x)$ და $y=F_2(x)$ ფუნქციები არიან $y=f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალები (a, b) ინტერვალზე. მაშინ ისინი მუდმივით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან:

$$F_1(x)=F_2(x)+C.$$

■ განვიხილოთ ინტეგრალების სხვაობა:

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

სხვაობის წარმოებული უდრის ნულს:

$$F'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილების სიჩქარე ნულია ე. ი. ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება და იგი მუდმივია:

$$F(x) = C \Leftrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x)+C. \quad ■$$

REM. 1. ინტეგრალი არ არის ერთადერთი. იგი განსაზღვრულია მუდმივის სიზუსტით. ამიტომ ინტეგრალს ზოგჯერ განუსაზღვრელ ინტეგრალს უწოდებენ.

2. $y=f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ინტეგრალი აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\int f(x)dx.$$

$f(x)$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია.

$f(x)dx$-ს ეწოდება დიფერენციალური ფორმა.

$f(x)$-ის გვერდით dx-ის მიწერა გაპირობებულია ერთადერთი მოტივით. ასე უფრო მოსახერხებელია ინტეგრალის გამოთვლა.

3. ვთქვათ, $F(x)$ არის რომელიმე კონკრეტული ინტეგრალი. მაშინ

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი

ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი იგივე წარმოებულების ცხრილია, მხოლოდ ჩაწერილი სხვა ფორმით.

$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$

$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{array}\right.$

B. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები

მოცემულია გლუვი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x \in (a, b).$$

თეორემა. 1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)dx.$

$$2. \quad \int f'(x)dx=f(x)+C.$$

■ ყველა ეს თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს ინტეგრალისა და დიფერენციალის განმარტებიდან. ■

PR. იპოვეთ: 1. $d\int f(x)dx$. 2. $\int df(x)$.

პასუხი: 1. $f(x)dx$. 2. $f(x)+C$.

მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad y=g(x), \quad x \in (a, b).$$

თეორემა. 1. ჯამის ინტეგრალი ინტეგრალების ჯამის ტოლია:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. მუდმივის გატანა შესაძლებელია ინტეგრალის ნიშნის გარეთ:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

■ 2. გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე მხარე:

$$\left(\int cf(x)dx\right)' = \left(c\int f(x)dx\right)' \Leftrightarrow$$

$$cf(x) = c\left(\int f(x)dx\right)' \Leftrightarrow cf(x) = cf(x).$$

მივიღეთ, რომ ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეები ერთი და იგივე ფუნქციის ინტეგრალებია. ანალოგიურად მოწმდება პირველი ტოლობა. ■

C. ჩასმის წესი განუსაზღვრელ ინტეგრალში

მოცემულია უწყვეტი ფუნქციები:

$$y=f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \text{ და } x=g(t), \quad t \in (a, b).$$

თეორემა.

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))dg(t) = \int f(g(t))g'(t)dt.}$$

REM. ფორმულის შინაარსი ის არის, რომ x-ის მაგივრად g(t) გამოსახულების შეტანა უნდა მოხდეს არა მარტო ფუნქციაში, არამედ დიფერენციალშიც. სწორედ ამიტომ აქვს ინტეგრალქვეშა ფუნქციას მიწერილი dx.

■ გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე მხარე t-თი:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(g(t))g'(t)dt\right)'_t.$$

მარცხენა მხარე უნდა გავაწარმოოთ, როგორც რთული ფუნქცია:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x (x)' = f(g(t))g'(t) \Leftrightarrow$$

$$f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t) \Leftrightarrow$$

$$f(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$ ■

EX. $\int \sin(t)^2 tdt = \frac{1}{2}\int \sin(t)^2 dt^2 = \frac{1}{2}\int \sin xdx$

$$= -\frac{1}{2}\cos x + C = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + C$$

D. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის

მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=u(x),\ \ y=v(x),\ x\in(a,b).$$

თეორემა. $\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$

■ ავიღოთ ტოლობის ორივე მხარის დიფერენციალი:

$$d\int udv = d(uv - \int vdu) \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu \Leftrightarrow$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

ეს არის ნამრავლის დიფერენციალის ფორმულა. ■

EX. $\int \ln xdx = x\ln x - \int xd\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx =$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

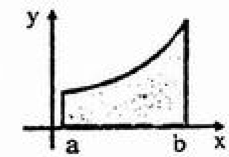
E. ანალიზის ძირითადი თეორემა

მოცემულია უწყვეტი დადებითი ფუნქცია:

$$y=f(x),\ x\in[a,b].$$

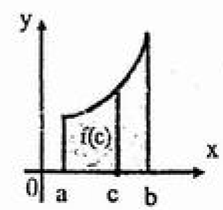
მრუდწირული ტრაპეცია

დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია ფუნქციის გრაფიკით, a და b წერტილებში გამავალი ვერტიკალური წრფეებით და OX ღერძით.



DEF. ასეთ ფიგურას მრუდწირულ ტრაპეციას უწოდებენ. b–a არის [a, b] მონაკვეთის სიგრძე. მას მრუდწირული ტრაპეციის ფუძე ეწოდება.

თეორემა. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი უდრის ფუძის ნამრავლს ფუნქციის რომელიღაც მნიშვნელობაზე:

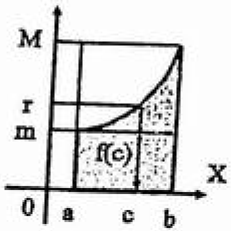


$$\boxed{S=f(c)(b-a),\ \ c\in[a,b].}$$

DEF. f(c) რიცხვს ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა ეწოდება.

■ გრაფიკზე აღვნიშნოთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა M და უმცირესი მნიშვნელობა m. ამ წერტილებზე გავავლოთ ჰორიზონტალური წრფეები. მივიღებთ ორ მართკუთხედს. დიდი მართკუთხედი შეიცავს მრუდწირულ ტრაპეციას, ხოლო მრუდწირული ტრაპეცია შეიცავს მცირე მართკუთხედს. ამიტომ

$$m(b-a) \le S \le M(b-a) \Leftrightarrow m \le \frac{S}{b-a} \le M.$$

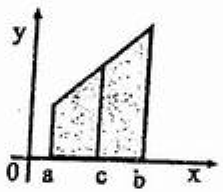


$r=\dfrac{S}{b-a}$ წერტილზე გავატაროთ ჰორიზონტალური წრფე. ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ ეს წრფე გადაკვეთს გრაფიკს:

$$\exists\, c\in[a, b]: r=f(c) \Leftrightarrow \frac{S}{b-a}=f(c) \Leftrightarrow S=f(c)(b-a). \blacksquare$$

PR. ვთქვათ ფუნქცია არის წრფივი

$$y=kx+b, \quad x\in[a, b].$$

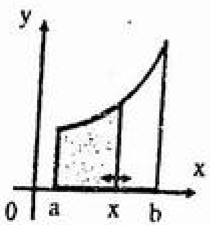


1. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი.
2. რას უდრის ამ შემთხვევაში c.

პასუხი: $c=(a+b)/2$.

c არის საშუალო არითმეტიკული.

განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც მარჯვნიდან შემოსაზღვრულია x წერტილში გამავალი ვერტიკალური წრფით. ცხადია, ეს ფართობი დამოკიდებულია x-ზე. აღვნიშნოთ იგი $S(x)$-ით.



ანალიზის ძირითადი თეორემა (ბაროუ)

$S(x)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი: $S'(x)=f(x)$.

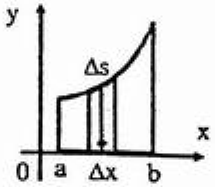
■ განსაზღვრის არეში დავაფიქსიროთ x-ის რაიმე მნიშვნელობა. ვთქვათ, არგუმენტის მნიშვნელობა შეიცვალა Δx-ით. მაშინ ფართობი შეიცვლება ΔS-ით. ΔS არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეა Δx. ამიტომ

$$\Delta S=f(c)\cdot\Delta x, \quad x<c<x+\Delta x.$$

როცა $\Delta x\to 0$, ცხადია $c\to x$.

ამიტომ

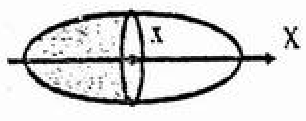
$$S'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{c\to x}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x).$$



* ანალიზის ძირითადი თეორემა ეკუთვნის ისააკ ბაროუს. ბაროუ დაიბადა კემბრიჯში. თავდაპირველად ბაროუ გატაცებული იყო თეოლოგიით. ბაროუ თვლიდა, რომ იმისათვის რომ გახდე ნამდვილი თეოლოგი, საჭიროა ქრონოლოგიის ცოდნა. ქრონოლოგიის ცოდნა მოითხოვდა ასტრონომიის ცოდნას. ისტორიული თარიღების დადგენა შესაძლებელი იყო მხოლოდ პლანეტების მოძრაობის აღწერით. პლანეტებზე დაკვირვებას ესაჭიროებოდა კარგი ტელესკოპი. ტელესკოპი შედგება ლინზებისაგან. საჭირო იყო ლინზების დამზადება. ლინზებზე მუშაობის დროს ბაროუმ იპოვა ლინზების ცნობილი ფორმულა, რომელსაც დღეს სკოლაში ასწავლიან, მაგრამ რატომღაც ბაროუს სახელის გარეშე. ლინზების ფორმულა დაკავშირებულია წირის მხებთან და ნორმალთან. ასე გახდა ბაროუ მათემატიკოსი.

ბაროუ იყო კემბრიჯის უნივერსიტეტის კათედრის გამგე. იგი კითხულობდა ლექციებს გეომეტრიაში, რომელიც შემდეგ გამოიცა წიგნად. ეს წიგნი ხელში ჩაუვარდა ლეიბნიცს. ლეიბნიცი აღნიშნავდა, რომ ეს იყო ერთადერთი წიგნი, რომლისგანაც მან ვერავითარი სარგებლობა ვერ მიიღო. ამის მიზეზი ალბათ ის იყო, რომ ბაროუს წიგნი მხოლოდ ნახატებისაგან შედგებოდა და ძალიან რთული გასარჩევი იყო (ბაროუსაგან განსხვავებით ფრანგ მათემატიკოსთა ჯგუფმა ბურბაკის ფსევდონიმით გამოუშვა თანამედროვე მათემატიკის მთელი ტომები სადაც არცერთი ნახატი არ არის). რაც შეეხება ნიუტონს, მას არ გასჭირვებია ბაროუს ლექციებში გარკვევა. ნიუტონი იყო ბაროუს სტუდენტი და ესწრებოდა ბაროუს ლექციებს. ზოგ შემთხვევაში ნიუტონმა უფრო გაამარტივა და გააუმჯობესა ბაროუს რეზულტატები. ეს რასაკვირველია არ გამოპარვია ბაროუს და მან 27 წლის ნიუტონს თავისი კათედრა დაუთმო. *

PR. სივრცეში მოცემულია ფიგურა. OX ღერძზე ავიღოთ x წერტილი. ამ წერტილში გავავლოთ OX ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყე მიღებული კვეთის ფართობი აღვნიშნოთ $S(x)$-ით. ვთქვათ $V(x)$ არის ფიგურის მოცულობა, რომელიც მარჯვნიდან შემოსაზღვრულია x წერტილში გამავალი კვეთით. აჩვენეთ, რომ $y=V(x)$ ფუნქცია არის $y=S(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი: $V'(x)=S(x)$.



REM. 1. უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება არ ჰქონდეს წარმოებული, მაგრამ ინტეგრალი ყოველთვის აქვს. ეს გამომდინარეობს ბაროუს თეორემიდან.

■ როცა ფუნქცია დადებითია, ინტეგრალი არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. თუ ფუნქცია არ არის დადებითი, დავუმატოთ მას თავისი უდიდესი მნიშვნელობა M. მივიღებთ დადებით ფუნქციას. თუ მიღებული ფუნქციის ინტეგრალია S(x), მაშინ საწყისი ფუნქციის ინტეგრალი იქნება: $y=S(x)-M(x-a)$. ■

2. $y=S(x)$ ფუნქცია არის კონკრეტული ინტეგრალი. კერძოდ ის, რომელიც a წერტილში ხდება ნული: $S(a)=0$.

■ როცა $x=a$, ტრაპეცია გადაიქცევა მონაკვეთად, მონაკვეთის ფართობი ნულია. ■

F. განსაზღვრული ინტეგრალი

მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in[a, b].$$

1. [a.b] მონაკვეთი დავყოთ n ნაწილად. ვთქვათ დაყოფის წერტილებია: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$.

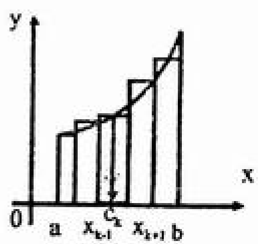
2. ვთქვათ თითოეული დაყოფის მონაკვეთის სიგრძეა:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

ამ რიცხვებს შორის უდიდესი აღვნიშნოთ d–თი.

3. თითოეული დაყოფის მონაკვეთში ავირჩიოთ ნებისმიერი წერტილი:

$$c_k\in[x_{k-1},x_k].$$



4. განვიხილოთ ნამრავლი:

$$f(c_k)\Delta x_k.$$

5. შევადგინოთ ჯამი:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_1^n f(c_k)\Delta x_k.$$

ასეთ ჯამს ეწოდება ინტეგრალური ჯამი.

6. განვიხილოთ ინტეგრალური ჯამების ზღვარი, როცა $d\to 0$:

$$S=\lim_{d\to 0} S_n.$$

DEF. 1. S რიცხვს ეწოდება $y=F(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი [a,b] მონაკვეთზე და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

2. a რიცხვს ეწოდება ინტეგრალის ქვედა საზღვარი, ხოლო b რიცხვს – ინტეგრალის ზედა საზღვარი.

REM. 1. განსაზღვრული ინტეგრალი განიმარტება მაშინაც, როდესაც ქვედა საზღვარი მეტია ზედა საზღვარზე:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx, \quad b<a.$$

2. როდესაც ქვედა და ზედა საზღვარი ტოლია, მაშინ თვლიან, რომ ინტეგრალი უდრის ნულს:

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ $y=F(x)$ არის დადებითი ფუნქცია.

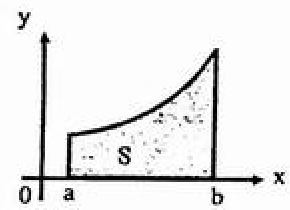
1. $f(c_k)\Delta x_k$ არის მართკუთხედის ფართობი, რომლის ფუძეა Δx_k ხოლო $f(c_k)$ სიმაღლე.

2. ინტეგრალური ჯამი S_n^* არის საფეხურებიანი ფიგურის ფართობი.

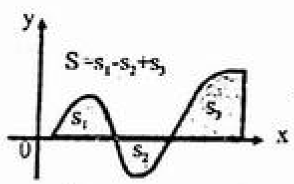
3. ასეთი ფართობის ზღვარი, როდესაც $n\to\infty$, არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი.

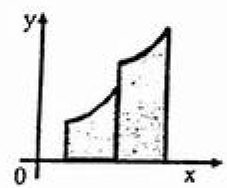
DEF. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი არის განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$



ვთქვათ ფუნქცია ღებულობს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით მნიშვნელობას. მაშინ განსაზღვრული ინტეგრალი იქნება ფართობების ჯამი. ამ ჯამში + ნიშნით აღებულია იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მდებარეობს OX ღერძის ზევით, ხოლო – ნიშნით აღებულია იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მდებარეობს OX ღერძის ქვევით.





REM. 1. განსაზღვრული ინტეგრალი არსებობს ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის. ეს ფაქტი გამომდინარეობს ისევ და ისევ უწყვეტობის პრინციპიდან.

2. განსაზღვული ინტეგრალი შეიძლება განიმარტოს ისეთი ფუნქციებისთვისაც, რომელთაც გააჩნიათ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ასეთი წერტილი ტრაპეციას ყოფს ორ ტრაპეციად. მთელი ტრაპეციის ფართობი იქნება თითოეული ტრაპეციების ფართობების ჯამი.

G. განსაზღვრული ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია

$$y=f(x),\ y=g(x),\ x\in[a, b].$$

თეორემა. 1. ჯამის ინტეგრალი ინტეგრალების ჯამის ტოლია:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

2. მუდმივის გატანა შესაძლებელია ინტეგრალის ნიშნის გარეთ:

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$$

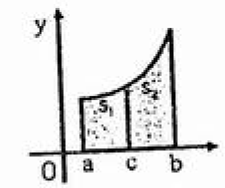
ვთქვათ c წერტილი მდებარეობს a და b წერტილებს შორის.

თეორემა.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

■ დამტკიცება მოვიყვანოთ იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქცია დადებითია. c წერტილში გავავლოთ ვერტიკალური წრფე. ეს წრფე მრუდწირულ ტრაპეციას ყოფს ორ ტრაპეციად. მათი ფართობების ჯამი არის მთელი ტრაპეციის ფართობი:

$$S=S_1+S_2.$$ ■



REM. 1. თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი სამი a, b და c რიცხვებისათვის.

თეორემა.

$$\exists c\in[a, b]: \int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

■ ვთქვათ, ფუნქცია დადებითია. განსაზღვრული ინტეგრალი არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. ეს ფართობი უდრის b−a ფუძის ნამრავლს ფუნქციის რომელიღაც f(c) მნიშვნელობაზე. ■

II. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in[a, b].$$

განვიხილოთ განსაზღვრული ინტეგრალი, რომლის ზედა საზღვარი არის x ცვლადი:

$$\int_a^x f(t)dt, \quad x\in[a, b].$$

ეს ინტეგრალი დამოკიდებულია x-ზე. ამიტომ იგი არის x-ის ფუნქცია. ვთქვათ,

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

თეორემა. ცვლადი ზედა საზღვრიანი განსაზღვრული ინტეგრალი არის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ერთ-ერთი ინტეგრალი:

$$\boxed{S'(x)=f(x).}$$

■ ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია არის დადებითი (თუ არ არის დადებითი, მუდმივის დამატებით გავხადოთ დადებითი). განსაზღვრული ინტეგრალი არის მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი. ანალიზის ძირითადი თეორემის თანახმად მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გრაფიკის პირველადია:

$$S'(x)=f(x). \quad ■$$

ვთქვათ, $y=F(x)$ ფუნქცია არის $y=f(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი ინტეგრალი.

თეორემა.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).}$$

■ განვიხილოთ ფუნქცია:

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

ეს ფუნქცია არის $y=f(x)$ ფუნქციის ერთ-ერთი ინტეგრალი. ამიტომ $S(x)$ მუდმივით განსხვავდება $F(x)$-გან:

$$S(x)=F(x)+C \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt=F(x)+C.$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=a$ და $x=b$ მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)+C, \qquad \int_a^a f(t)dt=F(a)+C.$$

გამოვაკლოთ პირველ ტოლობას მეორე ტოლობა:

$$\int_a^b f(t)dt-\underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{0}=F(b)-F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). ■$$

REM. 1. $F(b)-F(a)$ სხვაობა არის ინტეგრალის ნაზრდი $[a,b]$ მონაკვეთზე. მას აღნიშნავენ სპეციალური სიმბოლოთი:

$$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

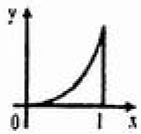
2. განსაზღვრული ინტეგრალი არის განუსაზღვრელი ინტეგრალის ნაზრდი:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

3. ეს ფორმულა ცნობილია ნიუტონ–ლეიბნიცის ფორმულის სახელწოდებით, მაგრამ იგი არ ეკუთვნის არც ნიუტონს და არც ლეიბნიცს. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელი ფორმულა, როგორც ვხედავთ, ბაროუს ფორმულის უშუალო შედეგია.

EX. გამოთვალეთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პარაბოლის მონაკვეთით:

$$y=x^2,\quad x\in[0,1].$$



პასუხი: $S=1/3$.

$$S=\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3-0^3) = \frac{1}{3}.$$

PR. გამოთვალეთ: $\int_a^b df(x)$.

პასუხი: $F(b)-F(a)$.

I. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის

მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=u(x),\quad y=v(x),\quad x\in[a,b].$$

თეორემა.

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.}$$

■ ნამრავლის დიფერენციალის ფორმულაში $udv=d(uv)-vdu$ ავიღოთ ორივე მხრიდან ინტეგრალი. მივიღებთ:

$$\int_a^b udv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b vdu \Leftrightarrow \int_a^b udv = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b vdu \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

EX.

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x d\ln x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = (e\underbrace{\ln e}_{1} - \underbrace{\ln 1}_{0}) - (e-1) = 1$$

J. ჩასმის წესი განსაზღვრულ ინტეგრალში

მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია: $y=f(x)$, $x\in[A,B]$ და გლუვი ფუნქცია: $x=g(t)$, $t\in[a,b]$, რომელსაც $[a,b]$ მონაკვეთის ბოლოები გადაჰყავს $[A,B]$ მონაკვეთის ბოლოებში:

$$g(a)=A,\ g(b)=B.$$

თეორემა.

$$\boxed{\int_A^B f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(g(t))dg(t).}$$

■ ვთქვათ, $y=F(x)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის რომელიღაც ინტეგრალი, მაშინ $y=F(g(t))$ ფუნქცია იქნება $y=f(g(t))g'(t)$ ფუნქციის ინტეგრალი:

$$[F(g(t))]'=f(g(t))g'(t).$$

ამიტომ

$$\int_A^B f(x)dx = F(B)-F(A) = F(g(b))-F(g(a)) = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \quad ■$$

EX. გამოთვალეთ ინტეგრალი:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

პასუხი: $\pi/2$.

■ შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$x=\sin t,\quad t\in[-\pi/2, +\pi/2].$$

ამ შუალედზე სინუსი მონოტონურია. ჩავსვათ იგი ინტეგრალში:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\sin t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\cos t\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2t\,d2t\Big) =$$

$$=\frac{1}{2}\Big(t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0}+\frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$ ■

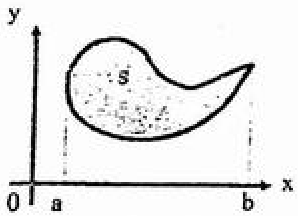
K. ბრტყელი ფიგურის ფართობი

მოცემულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x),\quad y=g(x),\quad x\in[a, b].$$

ვთქვათ,

1. $f(x) \ge g(x)$.
2. $f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b)$.



განვიხილოთ Φ ფიგურა რომელიც შემოსაზღვრულია ფუნქციის გრაფიკებით. ვთქვათ, ფიგურის ფართობია S.

თეორემა. $$\boxed{S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.}$$

■ Φ ფიგურის ფართობი არის მრუდწირული ტრაპეციების ფართობების სხვაობა. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი არის განსაზ-

ღვრული ინტეგრალი:

$$S=\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$ ■

EX. გამოთვალეთ ერთეულოვანი წრის ფართობი.

პასუხი: $S=\pi$.

■ამ შემთხვევაში გვაქვს: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1]$.

მივიღებთ:

$$S=\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2})dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

ეს ინტეგრალი გამოვთვალეთ წინა მაგალითში. მივიღებთ:

$$S=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$ ■

L. გადაადგილების და განვლილი მანძილის ფორმულები

ვთქვათ, y წერტილი მოძრაობს OY ღერძზე $v(x)$ სიჩქარით. x არის დრო, რომელიც იცვლება $[a, b]$ შუალედში.

თეორემა. 1. y წერტილის გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{S=\int_a^b v(x)dx.}$$

2: y წერტილის განვლილი მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{L=\int_a^b |v(x)|dx.}$$

■ 1. ვთქვათ, $f(x)$ არის y წერტილის კოორდინატი OY ღერძზე. $v(x)$ სიჩქარე არის წარმოებული: $f'(x)=v(x)$.

ავილოთ ტოლობის ორივე მხარიდან ინტეგრალი:

$$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b v(x)dx \Leftrightarrow f(b)-f(a)=\int_a^b v(x)dx.$$

$S=f(b)-f(a)$ არის y წერტილის გადაადგილება.

2. განვლილი მანძილი არის გადაადგილება, როცა y წერტილის სიჩქარე არის $|v(x)|$. ამიტომ $L=\int_a^b |v(x)|dx$. ■

M. გრაფიკის სიგრძე

მოცემულია გლუვი ფუნქცია: $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

თეორემა. გრაფიკის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.}$$

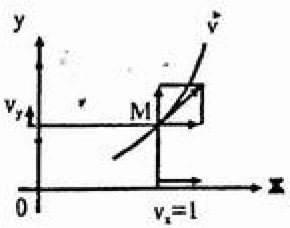
■ გრაფიკზე ავილოთ $M(x,y)$ წერტილი. x იყოს დრო, რომელიც იცვლება $[a,b]$ მონაკვეთზე. დროის ცვლილება იწვევს M წერტილის მოძრაობას გრაფიკზე. განვიხილოთ M წერტილის სიჩქარე: $\vec{v}=(v_x, v_y)$.

1. v_x კოორდინატი არის x-ის სიჩქარე. დროის ცვლილების სიჩქარეა $v_x=1$.

2. v_y კოორდინატი არის y-ის სიჩქარე. ეს არის ფუნქციის წარმოებული: $v_y=f'(x)$.

3. M წერტილის სიჩქარის სიგრძე იქნება:

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}.$$



4. გრაფიკის სიგრძე არის M წერტილის მიერ განვლილი მანძილი:

$$L=\int_a^b |\vec{v}|dx=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \quad ■$$

EX. გამოთვალეთ ერთეულოვანი წრეწირის სიგრძე.

პასუხი: $L=2\pi$.

■ წრეწირი არ არის გრაფიკი. ამიტომ განვიხილოთ ნახევარწრეწირი: $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

განვიხილოთ წარმოებული:

$$y'=\frac{(-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ნახევარწრეწირის სიგრძე უდრის:

$$L/2=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

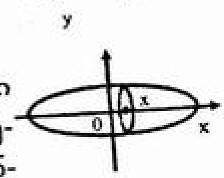
$$=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\pi/2+\pi/2=\pi.$$

წრეწირის სიგრძე იქნება: $L/2=\pi \Rightarrow L=2\pi$. ■

N. ფიგურის მოცულობა

სივრცეში მოცემულია ფიგურა. ცნობილია ფუნქცია:

$$y=S(x),\ x\in[a,b].$$



$S(x)$ არის x წერტილში გამავალი კვეთის ფართობი. აქ ლაპარაკია კვეთებზე, რომლებიც OX ღერძის პერპენდიკულარულია. ვთქვათ, ფიგურის მოცულობაა V.

თეორემა. $$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx.}$$

■ ვთქვათ, $V(x)$ არის ფიგურის მოცულობა, რომელიც მარჯვნიდან შემოსაზღვრულია x წერტილზე გამავალი კვეთით. $y=V(x)$ ფუნქცია არის $y=S(x)$ ფუნქციის ინტეგრალი:

$$V'(x)=S(x).$$

ავიღოთ ტოლობის ორივე მხარიდან ინტეგრალი:

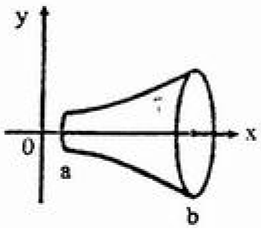
$$\int_a^b V'(x)dx = \int_a^b S(x)dx \Leftrightarrow \underset{\substack{\| \\ V}}{V(b)} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{V(a)} = \int_a^b S(x)dx \Leftrightarrow V = \int_a^b S(x)dx. \blacksquare$$

ბრუნვითი ფიგურის მოცულობა

მოცემულია უწყვეტი ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in[a, b].$$

დავხაზოთ ფუნქციის გრაფიკი. განვიხილოთ ფიგურა, რომელიც მიიღება OX ღერძის გარშემო გრაფიკის ბრუნვის შედეგად. ვთქვათ, ამ ფიგურის მოცულობაა V.



თეორემა. $$\boxed{V=\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.}$$

■ ბრუნვითი ფიგურის კვეთა, რომელიც პერპენდიკულარულია OX ღერძის, არის წრე. ამ წრის რადიუსია: $r=|f(x)|$.

კვეთის ფართობია:

$$S=\pi r^2=\pi[f(x)]^2.$$

ფიგურის მოცულობა იქნება:

$$V=\int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad \blacksquare$$

PR. გამოთვალეთ ერთეულოვანი ბირთვის მოცულობა.

პასუხი: $V=\frac{4}{3}\pi$.

დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება ბუნების კანონები. დიფერენციალური განტოლებაა, მაგალითად, ნიუტონის მეორე კანონი: $y''=F$. დიფერენციალური განტოლება უცნობ ფუნქციასთან ერთად შეიცავს წარმოებულს. ასეთი განტოლების ამოხსნა არც ის ე ადვილი საქმეა. ეს უკანასკნელი ფაქტიურად ნიშნავს ისეთი გარდაქმნის პოვნას, რომელიც განტოლებას დაიყვანს უმარტივეს სახემდე: $y'=0$. ჩვენ მოვიყვანთ ზოგიერთ უმარტივესი ტიპის განტოლებას, როდესაც ეს შესაძლებელია. ისინი აღწერენ ევოლუციურ პროცესებს. პროცესს მათემატიკოსები უწოდებენ ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია დროზე.

A. რა არის დიფერენციალური განტოლება

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება:

$$y'=f(x,y).$$

ამ განტოლებაში x არის დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო y არის უცნობი ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია x-ზე. ეს განტოლება უცნობ ფუნქციასთან ერთად შეიცავს მის წარმოებულს.

DEF. 1. ასეთ განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება.

2. განტოლების ამონახსნი ეწოდება ფუნქციას:

$$y=g(x), \quad x\in(a, b),$$

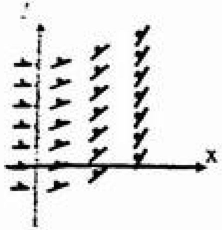
რომელიც x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (a,b) ინტერვალიდან დააკმაყოფილებს განტოლებას:

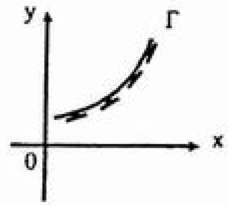
$$g'(x)=f(x, g(x)).$$

გეომეტრიული შინაარსი

სიბრტყეზე ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა. ნებისმიერ (x,y) წერტილში გავავლოთ წრფე, რომლის კუთხური კოეფიციენტია f(x,y). განვიხილოთ ყველა ასეთი წრფეების ერთობლიობა.

DEF. წრფეთა ასეთ ერთობლიობას მიმართულებათა ველი ეწოდება.





ვთქვათ Γ არის წირი, რომელიც თავის ნებისმიერ წერტილში ეხება მიმართულებათა ველიდან აღებულ რომელიღაც წრფეს.

DEF. Γ-ს ეწოდება ინტეგრალური წირი.

თეორემა. ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, როდესაც ამ ფუნქციის გრაფიკი არის ინტეგრალური წირი.

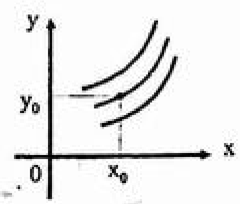
■ წრფე, რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f(x,y)$ ეხება გრაფიკს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის წარმოებული $y'=f(x,y)$. ■

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ნიშნავს ინტეგრალური წირის პოვნას.

REM. მიმართულებათა ველს საზოგადოდ გააჩნია უამრავი ინტეგრალური წირები. ეს იმას ნიშნავს, რომ დიფერენციალურ განტოლებას საზოგადოდ აქვს უამრავი ამონახსნი.

ამონახსნი ერთადერთია, თუ ინტეგრალური წირი გადის მოცემულ (x_0,y_0) წერტილზე. ასეთი ინტეგრალური წირი ერთადერთია. ამ შემთხვევაში ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას:

$$y_0=f(x_0).$$



DEF. ამ ტოლობას დიფერენციალური განტოლების საწყისი პირობა ეწოდება.

მოცემულია დიფერენციალური განტოლება:

$$y'=f(x,y),\ y_0=f(x_0).$$

ვთქვათ, განტოლების მარჯვენა მხარე არის გლუვი ფუნქცია.

თეორემა. $M(x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

REM. ეს არის ძირითადი რეზულტატი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში. იგი ემყარება შემდეგ ფაქტს: M წერტილის მიდამოში კოორდინატების არჩევა ისეთნაირად შეიძლება, რომ მიმართულებათა ველი გახდება ჰორიზონტალური წრფეების ველი. ცხადია, ასეთი ველის ინტეგრალური წირი არის ჰორიზონტალური წრფე. M წერტილზე გადის ერთადერთი ჰორიზონტალური წრფე.

B. დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y' = \frac{u(y)}{v(x)},\ y(x_0)=y_0.$$

ვთქვათ, u და v ნულისაგან განსხვავებული გლუვი ფუნქციებია.

განტოლების ამოხსნა

ფუნქციის წარმოებული არის დიფერენციალების შეფარდება:

$$y' = \frac{u(y)}{v(x)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u(y)}{v(x)} \Leftrightarrow \frac{dy}{u(y)} = \frac{dx}{v(x)}.$$

ავიღოთ ტოლობის ორივე მხარიდან ინტეგრალი:

$$\int \frac{dy}{u(y)} = \int \frac{dx}{v(x)} + C.$$

C ნებისმიერი მუდმივია, რომელიც განისაზღვრება საწყისი პირობიდან.

REM. განტოლების ამონახსნი შეიცავს C მუდმივს. ასეთ ამონახსნებს ხშირად ზოგად ამონახსნებს უწოდებენ.

EX. ამოხსენით განტოლება $(1+x)y'=\alpha y$, საწყისი პირობით $y(0)=1$.

პასუხი: $y=(1+x)^{a}$.

■ გამოვიყენოთ ცვლადების განცალების მეთოდი:

$$(1+x)y'=\alpha y \Leftrightarrow (1+x)\frac{dy}{dx}=\alpha y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\alpha\frac{dx}{1+x} \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\alpha\frac{dx}{1+x}+c \Leftrightarrow \ln y=\alpha\ln(1+x)+c \Leftrightarrow$$

$$\ln y=\ln C(1+x)^{a}, C=e^{c}.$$

C მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობიდან: $y(0)=1 \Leftrightarrow C=1$. ■

C. ნორმალური გამრავლების განტოლება

განვიხილოთ რაიმე ბიოლოგიური პოპულაცია (მაგალითად, ბაქტერიების ან თევზების). ვთქვათ, x არის დრო, y არის პოპულაციის რაოდენობა x დროის მომენტში. განვიხილოთ პოპულაციის ევოლუცია. ვთქვათ, საწყის მომენტში ცნობილია პოპულაციის რაოდენობა: $y(x_0)=y_0$.

დავუშვათ, პოპულაციის ინდივიდებს შორის არ არის არსებობისათვის კონკურენცია. მალთუსის კანონის თანახმად გამრავლების სიჩქარე პოპულაციის რაოდენობის პროპორციულია:

$$y'=ay.$$

DEF. 1. ამ განტოლებას უწოდებენ ნორმალური გამრავლების განტოლებას.

2. a რიცხვს აქვს სპეციალური სახელი. მას უწოდებენ შობადობას.

თეორემა. ნორმალური გამრავლების განტოლების ამონახსნია ფუნქცია:

$$y=Ce^{ax},\quad C\text{–ნებისმიერი მუდმივია.}$$

■ გამოვიყენოთ ცვლადების განცალების მეთოდი:

$$y'=ay \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=ay \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=adx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=a\int dx+c \Leftrightarrow$$

$$\ln y=ax+C \Leftrightarrow y=Ce^{ax}, C=e^{c}.$$ ■

REM. C მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობიდან:

$$y_0=Ce^{ax_0} \Leftrightarrow C=y_0e^{-ax_0}$$

განტოლების ამონახსნია ექსპონენტა: $y=y_0e^{a(x-x_0)}$.

2. პოპულაციის რაოდენობის გაორმაგების დრო არ არის დამოკიდებული პოპულაციის საწყის რაოდენობაზე:

$$2y_0=y_0e^{aT} \Leftrightarrow e^{aT}=2 \Leftrightarrow T=\ln2/a.$$

3. ნორმალური გამრავლების განტოლებას აქვს მნიშვნელოვანი თვისება. კერძოდ,

1) თუ განტოლების ამონახსნს გავამრავლებთ ნებისმიერ რიცხვზე მივიღებთ ისევ ამონახსნს.

2) თუ განტოლების ნებისმიერ ორ ამონახსნს შევკრიბავთ მივიღებთ ისევ ამონახსნს.

DEF. განტოლებას, რომელსაც გააჩნია ეს ორი თვისება ეწოდება წრფივი.

4. ნორმალური გამრავლების განტოლებას ხშირად უწოდებენ პირველი რიგის მუდმივკოეფიციენტიან წრფივ ერთგვაროვან გატოლებას.

D. ლოგისტიკური განტოლება

ინდივიდებს, რომლებიც ადგენენ პოპულაციას, გამრავლების გარდა ახასიათებს სიკვდილიანობა. სიკვდილიანობის მიზეზი შეიძლება იყოს საკვებისათვის ან ადგილისათვის ბრძოლა, აგრეთვე ეპიდემიის გავრცელება. სიკვდილიანობის სიჩქარე პროპორციულია ინდივიდთა წყვილების ე. ი. y^2–ის. y არის პოპულაციის რაოდენობა. x არის დრო. სიკვდილიანობის გათვალისწინებით გამრავლების განტოლება ლებუ-

ლობს შემდეგ სახეს:

$$y'=ay-by^2.$$

ამ განტოლებაში a რიცხვი არის შობადობა, ხოლო b რიცხვი — სიკვდილიანობა. ასეთ განტოლებას ლოგისტიკურ განტოლებას უწოდებენ. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, $a=b=1$. მივიღებთ განტოლებას:

$$y'=(1-y)y.$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ განტოლებას აქვს ორი მუდმივი ამონახსნი. ეს ის წერტილებია, სადაც მარჯვენა მხარე ხდება ნული: $(1-y)y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=1.\end{array}\right.$

DEF. დიფერენციალური განტოლების მუდმივ ამონახსნს წონასწორობის მდგომარეობა ეწოდება.

წონასწორობის მდგომარეობაში სიჩქარე უდრის ნულს და სისტემის მდგომარეობა არ იცვლება.

თეორემა. ლოგისტიკური განტოლების ამონახსნებია ფუნქციები:

$$y=\frac{Ce^x}{Ce^x\pm 1},$$ C–ნებისმიერი დადებითი მუდმივია.

■ გამოვიყენოთ ცვლადთა განცალების მეთოდი:

$$\int\frac{dy}{y(1-y)}=\int dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y-1}=\int dx\Rightarrow \ln y-\ln|y-1|=$$

$$x+a\Rightarrow \ln\frac{y}{|y-1|}=x+a\Rightarrow\frac{y}{|y-1|}=Ce^x\Rightarrow y=\pm Ce^x(y-1)\Rightarrow$$

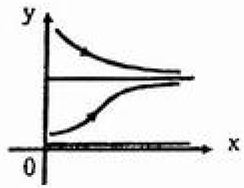
$$y=\frac{Ce^x}{Ce^x\pm 1},\quad C=e^a$$ – ნებისმიერიდადებითიმუდმივია.

იგი განისაზღვრება საწყისი პირობიდან. ■

REM. 1. ევოლუციის პროცესს აქვს ორი წონასწორობის მდგომარეობა: $y=0$ და $y=1$.

ამათგან, $y=0$ არ არის მდგრადი. წონასწორობიდან ხულ მცირე გადახრა არღვევს წონასწორობის მდგომარეობას და სისტემა უახლოვდება მეორე წონასწორობის მდგომარეობას. $y=1$ წონასწორობის მდგომარეობა მდგრადია. ამ წონასწორობიდან გადახრა აბრუნებს სისტემას საწყის მდგომარეობაში.

2. ლოგისტიკური განტოლების ინტეგრალურ წირს ლოგისტიკური წირი ეწოდება. მცირე x–თვის ლოგისტიკური წირი ძალიან გავს ექსპონენტას. ამის მიზეზი ის არის, რომ ასეთ დროს მცირეა y^2–იანი წევრი და ლოგისტიკური განტოლება ახლოს არის ნორმალურ გამრავლების განტოლებასთან. მცირე y–თვის კონკურენცია თითქმის არ ახდენს გავლენას პოპულაციის ზრდაზე. y–ის შემდგომი ზრდა იწვევს ინდივიდებს შორის კონკურენციის ზრდას. ამის შედეგად პოპულაციის ზრდის ტემპი მცირდება და პოპულაციის რაოდენობა უახლოვდება მდგრადი წონასწორობის რეჟიმს.



E. ლოტკა–ვოლტერას მოდელი

განვიხილოთ პოპულაცია, რომელიც შედგება ორი სახეობის ინდივიდებისაგან. ვთქვათ, A არის მტაცებლები, ხოლო B–მათი მსხვერპლი. მტაცებლის გარეშე B სახეობის ინდივიდები მრავლდებიან ნორმალური გამრავლების განტოლების მიხედვით: $x'=ax$.

ვთქვათ, y არის მტაცებლების რაოდენობა. ჩავთვალოთ, რომ A და B სახის ინდივიდებს შორის შეხვედრის რაოდენობა მათი რიცხვის პროპორციულია. თითოეული ასეთი შეხვედრის დროს მტაცებელი ჭამს თავის მსხვერპლს. ამიტომ მსხვერპლის ევოლუცია აღიწერება განტოლებით: $x'=ax-bxy$, b არის მსხვერპლის სიკვდილიანობა.

მსხვერპლის გარეშე მტაცებლის რაოდენობა მცირდება. შემცირების სიჩქარე მტაცებლის რაოდენობის პროპორციულია: $y'=-ky$. მტაცებლის მატება შეჭმული მსხვერპლის პროპორციულია. ამიტომ მტაცებლის ევოლუცია აღიწერება განტოლებით: $y'=-ky+lxy$, l არის მტაცებლის შობადობა.

ვთქვათ, დრო არის t. ორივე განტოლებაში წარმოებული ჩავწეროთ დიფერენციალების შეფარდების სახით. ამის შემდეგ მეორე განტოლება გავყოთ პირველზე:

$$\begin{matrix}\dfrac{dx}{dt}=ax-bxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-ky+lxy\end{matrix}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(-k+lx)y}{(a-by)x}.$$

თეორემა. განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ტოლობიდან:

$a\ln y - y = k\ln x + lx + C$, C ნებისმიერი მუდმივია.

■ გამოვიყენოთ ცვლადების განცალების მეთოდი:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-k+lx)y}{(a-by)x}\Leftrightarrow\frac{a-by}{y}dy=\frac{-k+lx}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{a-by}{y}dy=\int\frac{-k+lx}{x}dx\Leftrightarrow a\int\frac{dy}{y}-b\int dy=-k\int\frac{dx}{x}+l\int dx\Leftrightarrow$$

$$a\ln y-by=-k\ln x+lx+C$$

C მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობიდან. ■

თეორემა. განტოლების ინტეგრალური წირები ჩაკეტილია.

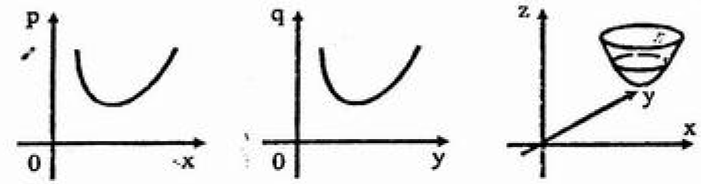
■ შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$p(y)=a\ln y-by,\quad q(x)=k\ln x-lx.$$

მაშინ განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$p(y)+q(x)=C.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალური წირები არიან ორი ცვლადის ფუნქციის მუდმივი დონის წირები.



ავაგოთ p და q ფუნქციის გრაფიკები. ორივე მათგანს აქვს ორმოს ფორმა. მათ ჯამსაც აქვს ორმოს ფორმა სივრცეში. ამიტომ მუდმივი დონის წირები ჩაკეტილია სიბრტყეზე. ■

REM. 1. ლოტკა-ვოლტერას მოდელში ორივე სახეობის ინდივიდების რაოდენობა იცვლება პერიოდულად. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ინტეგრალური წირები ჩაკეტილია.

2. პოპულაციის წონასწორობის მდგომარეობაა: $x_0=k/l$ და $y_0=b/a$.

F. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება:

$$y''+py'+qy=0.$$

REM. 1. ამ განტოლებაში p და q არიან გარკვეული რიცხვები.

2. განტოლებაში მონაწილეობს მეორე რიგის წარმოებული. იმისათვის, რომ განტოლებას ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი, ისმება ორი საწყისი პირობა. მაგალითად:

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1.$$

3. განტოლება [illegible] ეს იმას ნიშნავს, რომ განტოლების ამონახსნის გამრავლება ნებისმიერ რიცხვზე გვაძლევს ისევ ამონახსნს. აგრეთვე, ნებისმიერი ორი ამონახსნის ჯამი ისევ ამონახსნია.

განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით შევადგინოთ კვადრატული განტოლება:

$$k^2+pk+q=0.$$

DEF. ამ განტოლებას ეწოდება მახასიათებელი განტოლება.

თეორემა. ექსპონენტა $y=e^{kx}$ არის განტოლების ამონახსნი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც k არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი.

■ $y=e^{kx}$ ექსპონენტა ჩავსვათ განტოლებაში:

$$(e^{kx})''+p(e^{kx})'+qe^{kx}=0 \Leftrightarrow k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0 \Leftrightarrow$$

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0 \Leftrightarrow k^2+pk+q=0. \quad ■$$

მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტია:

$$D=p^2\text{-}4q.$$

განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1. ვთქვათ, $D>0$.

ამ შემთხვევაში მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი: $k_1 \neq k_2$.

თეორემა. განტოლების ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, C_1 \text{ და } C_2 \text{ ნებისმიერი მუდმივებია.}$$

■ k_1 და k_2 რიცხვები არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები. ამიტომ ექსპონენტები არიან განტოლების ამონახსნები. თუ ამ ამონახსნებს გავამრავლებთ ნებისმიერ მუდმივებზე და შევკრიბავთ მივიღებთ ისევ ამონახსნს. ■

REM. მუდმივები, რომლებიც მონაწილეობენ ამონახსნის ფორმულაში განისაზღვრებიან საწყისი პირობიდან:

$$y(0)=y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1+C_2=y_0$$

$$y'(0)=y_1 \quad \Leftrightarrow \quad k_1C_1+k_2C_2=y_1.$$

ამ სისტემას ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ვინაიდან სისტემის მთავარი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=k_2-k_1\neq 0.$$

2. ვთქვათ, $D=0$.

ამ შემთხვევაში მახასიათებელი განტოლების ფესვები ემთხვევა ერთმანეთს. აღვნიშნოთ იგი უბრალოდ k-თი.

PR. აჩვენეთ, რომ როდესაც კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი ნულია, შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვი არის არა მარტო სამწევრის ნული, არამედ მისი წარმოებულის ნულიც:

$$k^2+pk+q=0, \quad 2k+p=0.$$

■ როცა დისკრიმინანტი ნულია, პარაბოლა ეხება OX ღერძს. ■

თეორემა. განტოლების ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{kx},$$

C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

■ k არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი. ამიტომ $y=e^{kx}$ ექსპონენტა არის განტოლების ამონახსნი.

განტოლებას აქვს კიდევ ერთი ამონახსნი. ეს არის ფუნქცია:

$$y=xe^{kx}.$$

ჩავსვათ ეს ფუნქცია განტოლების მარცხენა მხარეში და ორჯერ გამოვიყენოთ ლეიბნიცის ფორმულა, მივიღებთ:

$$(xe^{kx})''+p(xe^{kx})'+q\,xe^{kx}=(e^{kx}+kxe^{kx})'+p(e^{kx}+kxe^{kx})+qxe^{kx}=$$

$$ke^{kx}+ke^{kx}+k^2xe^{kx}+pe^{kx}+pkxe^{kx}+qxe^{kx}=$$

$$=e^{kx}[\underbrace{(2k+p)}_{0}+\underbrace{(k^2+pk+q)}_{0}x\,]=0.$$

$y=e^{kx}$ და $y=xe^{kx}$ ამონახსნების ნამრავლი ნებისმიერ მუდმივზე იძლევა ისევ ამონახსნს. ამონახსნების ჯამიც განტოლების ამონახსნია. ■

REM. მუდმივები, რომლებიც მონაწილეობენ ამონახსნის ფორმულაში განისაზღვრებიან საწყისი პირობიდან:

$$y(0)=y_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1=y_0,$$

$$y'(0)=y_1 \quad \Leftrightarrow \quad kC_1+C_2=y_1.$$

ამ სისტემას ყოველთვის აქვს ამონახსნი.

3. ვთქვათ, $D<0$.

ამ შემთხვევაში მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური ფესვი:

$$k_1=\frac{-p-i\sqrt{-D}}{2}=a-ib,\ k_2=\frac{-p+i\sqrt{-D}}{2}=a+ib$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნები: $a=-p/2$, $b=\sqrt{-D}/2$.

თეორემა. განტოლების ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx),$$

C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

■ k_1 და k_2 რიცხვები არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები. ამიტომ e^{k_1x} და e^{k_2x} ექსპონენტები არიან განტოლების ამონახსნები. თუ ამონახსნებს გავამრავლებთ ნებისმიერ მუდმივებზე და შევკრებავთ, მივიღებთ ისევ ამონახსნს. შემდეგ გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულით:

$$y=A_1e^{k_1x}+A_2e^{k_1x}=A_1e^{(a-ib)x}+A_2e^{(a+ib)x}=$$

$$=e^{ax}(A_1\cos bx-iA_1\sin bx+A_2\cos bx+iA_2\sin bx)=$$

$$=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx),$$

სადაც

$$C_1=A_1+A_2,\ C_2=i(A_2-A_1),$$

C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ■

ქანქარის რხევის განტოლება

განვიხილოთ ქანქარის მცირე რხევების განტოლება:

$$y''+hy=0.$$

ქანქარა არის ძაფზე ჩამოკიდებული ბურთულა. ვიგულისხმოთ, რომ ბურთულის მასაა $m=1$.

1. y არის ქანქარის გადახრის კუთხე ვერტიკალიდან.
2. x არის დრო.
3. $h=l/g$, სადაც l არის ძაფის სიგრძე, ხოლო $g=9.8$ თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.

ვთქვათ, განტოლების საწყისი პირობაა:

$$y(0)=0,\ y'(0)=\alpha,\ \alpha=\sqrt{h}\quad.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ქანქარა მოძრაობას იწყებს ვერტიკალური მდგომარეობიდან.

თეორემა. განტოლების ამონახსნია სინუსი:

$$y=\sin\alpha x.$$

■ დავწეროთ მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2+h=0.$$

h რიცხვი დადებითია, ამიტომ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები: $k_1=-i\sqrt{h}$, $k_2=i\sqrt{h}$.

ამ შემთხვევაში ფესვების ნამდვილი ნაწილია $a=0$. განტოლების ამონახსნია: $y=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x$, C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობიდან:

$$y(0)=C_1=0,\ y'(0)=\alpha C_2=\alpha, \Rightarrow y=\sin\alpha x.\quad ■$$

REM. სინუსი პერიოდული ფუნქციაა. ქანქარის რხევის პერიოდია:

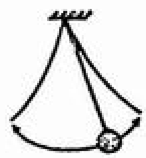
$$T=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

ამ ფორმულაში მნიშვნელოვანია, ის რომ ქანქარის რხევის პერიოდი დამოკიდებულია მხოლოდ ძაფის სიგრძეზე და არ არის დამოკიდებული გადახრის მაქსიმალურ კუთხეზე, რომელსაც ამპლიტუდა ეწოდება.

* ქანქარის ეს თვისება პირველად შენიშნა გალილეიმ. სწორედ ამ თვისების წყალობით გახდა შესაძლებელი ქანქარის გამოყენება მექანიკურ საათში. პირველად ასეთი საათი გამოიგონა ჰიუგენსმა.

მექანიკური საათის შექმნის აუცილებლობა განაპირობა ზღვაოსნობის განვითარებამ. საჭირო იყო ზღვაში გემის კოორდინატების დადგენა. გეოგრაფიაში ამ კოორდინატებს განედი და გრძედი ეწოდება. განედის დადგენა იმ დროისათვის სიძნელეს არ წარმოადგენდა. მას ვარსკვლავების საშუალებით ითვლიდნენ. გრძედის დასათვლელად საჭირო იყო მექანიკური საათი, რომელსაც გადაადგილების დროს შეეძლო ადგილობრივი დროის შენარჩუნება. ამის საფუძველზე შესაძლებელი იქნებოდა დედამიწის სხვადასხვა წერტილში ადგილობრივი დროის შედარება. დროთა სხვაობით ადვილად შეიძლებოდა გრძედის დადგენა.

მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ქანქარის რხევის პერიოდი არ არის დამოკიდებული ამპლიტუდაზე მხოლოდ მცირე რხევების დროს. როდესაც ამპლიტუდა, მაგალითად, სამოცი გრადუსია, მაშინ პერიოდი უკვე სხვა რიცხვია. ამ მიზეზით ქანქარიანი საათის გამოყენება ზღვაოსნობაში, რომელსაც ყოველთვის თან სდევს ზღვის ღელვა, შეუძლებელი იყო. საჭირო იყო მოდიფიკაცია.



იმისათვის, რომ ქანქარის რხევის პერიოდი დამოკიდებული არ იყოს გადახრის კუთხეზე, საჭიროა ბურთულა მოძრაობდეს არა წრეწირზე, არამედ ამობრუნებულ ციკლოიდაზე.

ამის მისაღწევად თურმე საკმარისია, რომ ძაფის მოძრაობას ხელი შეუშალოს ისეთმა არემ, რომლის საზღვარიც ასევე ციკლოიდას წარმოადგენს. ეს საოცარი აღმოჩენები ეკუთვნის ჰიუგენსს. ჰიუგენსმა მაინც ვერ მიაღწია თავის მთავარ მიზანს. ჰიუგენსის ქანქარიანი საათი საზღვაო ნაოსნობაში ვერ გამოდგა. საათი, რომელიც გამოყენებული იქნა ნაოსნობაში, გამოიგონეს უფრო გვიან 1735 წელს. ამ საათში გამოყენებული იყო არა ქანქარა, არამედ ზამბარა. საათის ავტორია ჯონ პირსონი. მანვე მიიღო მთავრობის მიერ დაწესებული ჯილდო 20 000 ფუნტი. მიუხედავად ამისა ჰიუგენსს მაინც „ყველა დროის გენერალური საათის ოსტატი“ უწოდეს.

PR. ამოხსენით განტოლება: $y''+y=0$, საწყისი პირობებით

$$y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

9. მწკრივები

ელემენტარული ფუნქციები გამოისახება ფორმულებით, რომლებშიც გამოიყენება მხოლოდ ორი არითმეტიკული ოპერაცია: შეკრება და გამრავლება. ამ ფორმულებს აქვს ერთი თავისებურება. ისინი წარმოადგენენ უსასრულო ჯამებს. უსასრულო ჯამებს მათემატიკოსები მწკრივებს უწოდებენ. მწკრივები მოიგონა ნიუტონმა. მწკრივების საშუალებით ნიუტონი ხსნიდა დიფერენციალურ განტოლებებს.

A. რიცხვითი მწკრივის ცნება

ვთქვათ, მოცემულია (a_n) რიცხვითი მიმდევრობა. ამ რიცხვებისაგან შევადგინოთ გამოსახულება:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \ (\text{ან } \Sigma a_n)$$

DEF. ამ გამოსახულებას რიცხვითი მწკრივი (ან უბრალოდ მწკრივი) ეწოდება.

განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$s_1=a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_2=a_1+a_2,$$
$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEF. (s_n)-ს ეწოდება კერძო ჯამების მიმდევრობა.

DEF. 1. მწკრივს ეწოდება განშლადი, თუ კერძო ჯამების მიმდევრობა განშლადია.

2. მწკრივს ეწოდება კრებადი, თუ კერძო ჯამების მიმდევრობა კრებადია.

3. ვთქვათ, $\lim s_n = s$. მაშინ s რიცხვს ეწოდება მწკრივის ჯამი. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=s.$$

EX. 1. მწკრივი $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$ განშლადია.

■. განვიხილოთ კერძო ჯამების მიმდევრობა:

$$s_1=1,$$
$$s_2=1-1=0,$$
$$s_3=1-1+1=1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

მიმდევრობა $(1,0,1,0\dots)$ განშლადია. ■

თეორემა. ვთქვათ, გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი $|q|<1$, მაშინ პროგრესიის წევრების ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}+\dots=\frac{1}{1-q}.$$

■ განვიხილოთ კერძო ჯამების მიმდევრობა. მიმდევრობის ზოგადი წევრი: $s_n=\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{1}{1-q}$. ■

B. მწკრივის ძირითადი თვისებები

მოცემულია ორი კრებადი მწკრივი:

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots=A,$$
$$b_1+b_2+\dots+b_n+\dots=B.$$

თეორემა. 1. $ca_1+ca_2+\dots+ca_n+\dots=c(a_1+a_2+\dots)=cA.$

2. $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)+\dots=A+B.$

■ 1. განვიხილოთ კერძო ჯამი:

$$ca_1+ca_2+\dots+ca_n=c(a_1+a_2+\dots+a_n)\to cA.$$

2. განვიხილოთ კერძო ჯამი:

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_n+b_n)=$$
$$=\underbrace{(a_1+a_2+\dots a_n)}_{\downarrow\\ A}+\underbrace{(b_1+b_2+\dots+b_n)}_{\downarrow\\ B}\to A+B.$$ ■

PR. აჩვენეთ, რომ მწკრივის სასრული რაოდენობის წევრთა შეცვლა არ მოქმედებს მწკრივის კრებადობაზე (თუმცა შეიძლება შეიცვალოს ჯამის მნიშვნელობა).

DEF. მწკრივს, რომლის ყველა წევრი დადებითია, დადებითწევრებიანი მწკრივი ეწოდება.

მოცემულია ორი დადებითწევრებიანი მწკრივი. ამასთან, ერთი მწკრივის წევრები არ აღემატება მეორე მწკრივის შესაბამის წევრებს:

$$\begin{array}{l} a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \\ \wedge \quad \wedge \qquad \wedge \\ b_1+b_2+\dots+b_n+\dots. \end{array}$$

თეორემა. 1. თუ Σb_n კრებადია, მაშინ კრებადია Σa_n.

2. თუ Σa_n განშლადია, მაშინ განშლადია Σb_n.

■ 1. განვიხილოთ კერძო ჯამების მიმდევრობა:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=A_n.$$

ეს მიმდევრობა ზრდადია:

$$A_{n+1}=\underbrace{a_1+a_2+\dots a_n}_{\|\\ A_n}+a_{n+1}=A_n+\underbrace{a_{n+1}}_{\vee\\ 0}>A_n.$$

კერძო ჯამების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია:

$$A_n=a_1+a_2+\dots+a_n<a_1+a_2+\dots+a_n+\dots<$$
$$<b_1+b_2+\dots+b_n+\dots=B.$$

უწყვეტობის პრინციპის თანახმად (A_n) მიმდევრობა კრებადია.

2. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, მწკრივი Σb_n კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება Σa_n. ეს ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. ■

C. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა

მოცემულია კრებადი მწკრივი:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

თეორემა. იმისათვის, რომ მწკრივი იყოს კრებადი, აუცილებელია მისი ზოგადი წევრი უახლოვდებოდეს ნულს: $a_n \to 0$.

■ ვთქვათ, მწკრივის ჯამია s. მაშინ

$$s_n = s_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = \underset{\downarrow \atop s}{s_n} - \underset{\downarrow \atop s}{s_{n-1}} \to s - s = 0 \; ■$$

შებრუნებული თეორემა არ არის სამართლიანი. მწკრივის ზოგადი წევრი შეიძლება უახლოვდებოდეს ნულს, მაგრამ მწკრივი არ იყოს კრებადი. ამის კლასიკური მაგალითია:

ჰარმონიული მწკრივი

განვიხილოთ მწკრივი:

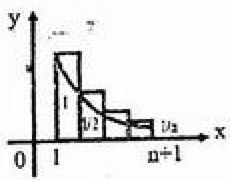
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

DEF. ამ მწკრივს აქვს სპეციალური სახელი. მას ეწოდება ჰარმონიული მწკრივი.

თეორემა. ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

■ დავხაზოთ $y=1/x$ ფუნქციის გრაფიკი. მონაკვეთი $[1,n+1]$ დავყოთ n ნაწილად. თითოეულ მონაკვეთზე ავაგოთ მართკუთხედი. მართკუთხედის ფუძეა 1, ხოლო სიმაღლე $1/k$. მივიღებთ საფეხურებიან ფიგურას. ამ ფიგურის ფართობი იქნება ჰარმონიული მწკრივის კერძო ჯამი.

განვიხილოთ მრუდწირული ტრაპეცია, რომლის ფუძეა $[1, n+1]$ მონაკვეთი. საფეხურებიანი ფიგურა მთლიანად შეიცავს ტრაპეციას. ტრაპეციის ფართობი არის ინტეგრალი. გვაქვს



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n \to \infty.$$

ჰარმონიული მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა განშლადია. ამიტომ განშლადია ჰარმონიული მწკრივი. ■

D. ნიშანცვალებადი მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობა

მოცემულია მიმდევრობა (a_n). ვიგულისხმოთ, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია. განვიხილოთ მწკრივი:

$$a_1-a_2+a_3 \ldots +(-1)^{n-1}a_n+\ldots$$

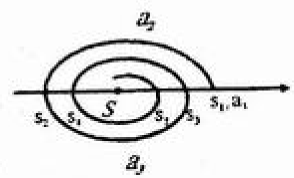
DEF. ასეთი სახის მწკრივს ნიშანცვალებადი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა (ლეიბნიცი).

თუ ნიშანცვალებადი მწკრივის ზოგადი წევრი მონოტონურად უახლოვდება ნულს, მაშინ მწკრივი კრებადია.

■ OX ღერძზე აღვნიშნოთ $s_1=a_1$ წერტილი. იგი მდებარეობს ნულის მარჯვნივ. s_1 წერტილიდან მარცხნივ გადავზომოთ a_2 სიგრძის მონაკვეთი, მივიღებთ $s_2=s_1+a_2$ წერტილს. s_2 წერტილიდან მარჯვნივ გადავზომოთ a_3 სიგრძის მონაკვეთი. მივიღებთ $s_3=s_2+a_3$ წერტილს. ეს წერტილი მდებარეობს s_1 წერტილის მარცხნივ და ა.შ.

მივიღებთ კერძო ჯამების მიმდევრობას. ამ მიმდევრობის კენტნომრიანი წევრები კლებადია, ხოლო ლუწნომრიანი წევრები – ზრდადი. უწყვეტობის პრინციპის თანახმად, ორივე ეს მიმდევრობა კრებადია. მეზობელ წევრებს შორის მანძილი არის მწკრივის ზოგადი წევრი. იგი უახლოვდება ნულს. ამიტომ კენტნომრიანი და ლუწნომრიანი წევრები უახლოვდებიან ერთი და იმავე რიცხვს. ეს რიცხვია მწკრივის ჯამი. ■



PR. კრებადია თუ არა მწკრივი $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$?

პასუხი: კრებადია.

E. აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი

ვთქვათ, მოცემულია მწკრივი:

$$a_1+a_2+ \dots +a_n+ \dots$$

DEF. მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ამ მწკრივის წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივი:

$$|a_1|+|a_2|+ \dots +|a_n|+ \dots$$

თეორემა. თუ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ იგი კრებადია.

■ 1. მწკრივის ის წევრები, რომლებიც დადებითია, დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო ის წევრები, რომლებიც უარყოფითია შევცვალოთ ნულებით. მივიღებთ მწკრივს $a_1^+ + a_2^+ + \dots a_n^+ + \dots$, ცხადია $a_n^+ \le |a_n|$. ამიტომ მიღებული მწკრივი კრებადია.

2. მწკრივის ის წევრები, რომლებიც უარყოფითია, დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო ის წევრები, რომლებიც დადებითია, შევცვალოთ ნულებით. მივიღებთ მწკრივს $a_1^- + a_2^- + \dots a_n^- + \dots$, ცხადია, $-a_n^- \le |a_n|$. ამიტომ მიღებული მწკრივი კრებადია.

3. მოცემული მწკრივი არის მიღებული ორი კრებადი მწკრივის ჯამი:

$$a_1+a_2+ \dots +a_n+ \dots = (a_1^+ + a_1^-) + (a_2^+ + a_2^-) + \dots (a_n^+ + a_n^-) + \dots,$$

ამიტომ იგი კრებადია. ■

შებრუნებული თეორემა სამართლიანი არ არის. მწკრივი შეიძლება იყოს კრებადი, მაგრამ არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი.

EX. მწკრივი $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ კრებადია, იგი აკმაყოფილებს ლეიბნიცის თეორემის პირობებს. ამ მწკრივის წევრების მოდულები ადგენენ

ჰარმონიულ მწკრივს. ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

REM. როდესაც შესაკრებთა რაოდენობა სასრულია, შესაკრებების გადანაცვლება შეიძლება ნებისმიერად. გადანაცვლების შედეგად ჯამი არ იცვლება. უსასრულო ჯამებში ანუ მწკრივებში ეს ასე არ არის. შესაკრებების გადანაცვლებამ კრებადი მწკრივი შეიძლება გადააქციოს განშლად მწკრივად. აღმოჩნდა, რომ წევრების გადანაცვლება შეიძლება მხოლოდ აბსოლიტურად კრებად მწკრივში. თუ მწკრივი არ არის აბსოლიტურად კრებადი, მაშინ მწკრივის წევრები ისეთნაირად შეიძლება გადავანაცვლოთ, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი იქნება წინასწარ დასახელებული ნებისმიერი რიცხვი.

F. მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობა

მოცემულია მწკრივი

$$a_1+a_2+ \dots +a_n+ \dots$$

ვთქვათ,

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a^n}\right| = a.$$

თეორემა. 1. თუ $a<1$, მაშინ მწკრივი კრებადია.

2. თუ $a>1$, მაშინ მწკრივი განშლადია.

■ 1. ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი $q \in (a, 1)$. მაშინ

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a^n}\right| < \lim q.$$

უტოლობაში შეიძლება ზღვრის ნიშნის მოხსნა, მაგრამ მიღებული უტოლობა სამართლიანია ყველა წევრისათვის დაწყებული გარკვეული ნომრიდან:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, n > N \Rightarrow |a_{n+1}| < q|a_n|, n > N.$$

მწკრივის კრებადობაზე არ მოქმედებს მწკრივის სასრული რაოდენობის წევრების შეცვლა. მწკრივის ის წევრები, რომელთა ნომრები ნაკლებია N-ზე, შევცვალოთ ისე, რომ უტოლობა შესრულდეს ყველა ნომრისათვის. მაშინ

$$|a_n|<q|a_{n-1}|<q^2|a_{n-2}|<\ldots<q^{n-1}|a_1|,$$

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots<|a_1|+|a_1|q+\ldots|a_1|q^{n-1}+\ldots=$$

$$=|a_1|(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots)=|a_1|\frac{1}{1-q}.$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

2. ავირჩიოთ ნებისმიერი რიცხვი $q\in(1, a)$. მაშინ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან

$$|a_n|>q^{n-1}|a_1|>|a_1|.$$

მწკრივის ზოგადი წევრი არ უახლოვდება ნულს. ამიტომ მწკრივი განშლადია. ■

REM. 1. როცა $a=1$, მწკრივი შეიძლება იყოს, როგორც განშლადი, ისე კრებადი.

2. ამ თეორემას ხშირად უწოდებენ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანს. სინამდვილეში იგი ეკუთვნის უორინგს.

(* დალამბერი დაიბადა არისტოკრატულ ოჯახში. დედა იყო კარდინალის და, მამა – გენერალი. ახალშობილი დალამბერი მშობლებმა მიატოვეს პარიზის ერთ-ერთ ეკლესიაში. დალამბერი გაიზარდა უბრალო მუშის ოჯახში. მშობლებს მაშინ გაახსენდათ საკუთარი შვილი, როდესაც დალამბერი გახდა ცნობილი პიროვნება საფრანგეთში. დედამ თხოვნით მიმართა დალამბერს თავი ეცნო მის შვილად, რაზეც დალამბერმა უარი განუცხადა. გვარი დალამბერი მან მიიღო ახალგაზრდობაში.

დალამბერს ჰქონდა ბრწყინვალე განათლება. იცოდა სამართალი, მედიცინა, მათემატიკა. დიდროსთან ერთად შეადგინა ენციკლოპედიის ტომები. 28 წლის ასაკში გახდა საფრანგეთის აკადემიის წევრი. ფრიდრიხ მეორემ მიიწვია პრუსიის აკადემიის ხელმძღვანელად. დალამბერმა ამ მიწვევაზე უარი განაცხადა. მისი მოსაზრება მარტივი იყო: „არ შეიძლება ასეთი თანამდებობის დაკავება, როდესაც ცოცხალია ეილერი. *)

G. ხარისხოვანი მწკრივი

განვიხილოთ გამოსახულება:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

ამ გამოსახულებაში $a_0, a_1, a_2, \ldots$ არიან რიცხვები, ხოლო x არის ცვლადი.

DEF. 1. ასეთი სახის გამოსახულებას ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება.

2. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ რიცხვებს ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

თუ ხარისხოვან მწკრივში x ცვლადის ნაცვლად ჩავსვამთ რაიმე რიცხვს, მივიღებთ ჩვეულებრივ მწკრივს. ეს მწკრივი x-ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის შეიძლება იყოს კრებადი, ხოლო ზოგიერთისთვის – არა.

ვთქვათ,

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r.$$

თეორემა. 1. თუ $x\in(-r, r)$, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია.

2. თუ $x\notin(-r, r)$, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია.

■ 1. ვთქვათ, $x\in(-r, r)\Leftrightarrow|x|<r\Leftrightarrow|x|/r<1$. მაშინ

$$a=\lim\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\frac{1}{r}<1.$$

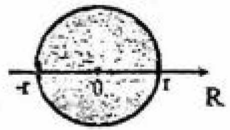
სრულდება მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანი.

PR. დაამტკიცეთ მეორე დებულება. ■

REM. 1. შეიძლება $r=\infty$. ამ შემთხვევაში ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

2. ხარისხოვან მწკრივში x-ის მაგივრად შეიძლება ჩავსვათ კომპლექსური რიცხვებიც. ავიღოთ წრეწირი, რომ-

ლის დიამეტრია $[-r, r]$. აღმოჩნდა, რომ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია ყველა იმ კომპლექსური რიცხვებისათვის, რომლებიც მდებარეობენ ამ წრეწირის შიგნით.



3. წრეწირის წერტილებში ხარისხოვანი მწკრივი შეიძლება იყოს, როგორც განშლადი, ისე კრებადი.

DEF. r რიცხვს ეწოდება კრებადობის რადიუსი.

EX. 1. მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი:

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

მწკრივი კრებადია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. კრებადობის რადიუსი $r=\infty$.

■ გამოვთვალოთ ზღვარი:

$$r=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{(n+1)!}{n!}=\lim(n+1)=\infty.$$ ■

2. მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი

$$1+\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$$

კრებადობის რადიუსია $r=1$.

■ განვიხილოთ ზღვარი:

$$r=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{(n+1)}{n}=1.$$ ■

PR. მოცემულია მწკრივი:

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

აჩვენეთ, რომ მწკრივის კრებადობის რადიუსია $r=\infty$.

ხარისხოვანი მწკრივის გაწარმოება

განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

ვთქვათ, კრებადობის რადიუსია r.

გავაწარმოოთ ხარისხოვანი მწკრივის თითოეული შესაკრები და შევადგინოთ მწკრივი:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსია ისევ r. ყოველი x-ისთვის $(-r,r)$ ინტერვალიდან მიღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი არის თავდაპირველად მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის ჯამის წარმოებული:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)'=$$
$$=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots.$$

ინტეგრალის აღება ხარისხოვანი მწკრივიდან

განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

ვთქვათ, კრებადობის რადიუსია r.

ავიღოთ ხარისხოვანი მწკრივის თითოეული შესაკრებიდან ინტეგრალი და შევადგინოთ მწკრივი:

$$a+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,$$

სადაც, a ნებისმიერი მუდმივია. ამ მწკრივის კრებადობის რადიუსია ისევ r. ყოველი x-ისთვის $(-r, r)$ ინტერვალიდან მიღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი არის თავდაპირველად მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის ჯამის ინტეგრალი:

$$\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)dx=$$
$$=a+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

H. ანალიზური ფუნქცია

მოცემულია ფუნქცია:

$$y=f(x), \quad x\in(-r, r).$$

DEF. ფუნქციას ეწოდება ანალიზური $(-r, r)$ ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალზე ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლება ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots .$$

ანალიზური ფუნქციის ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები გამოითვლება შემდეგი წესით.

თეორემა.

$$a_0=f(0),$$
$$a_1=f'(0)/1!,$$
$$a_2=f''(0)/2!.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=f^{(n)}(0)/n!.$$

■ ტოლობაში $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ ჩავსვათ $x=0$. მივიღებთ:

$$f(0)=a_0.$$

ავიღოთ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots .$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=0$. მივიღებთ:

$$f'(0)=a_1=a_1/1!.$$

ავიღოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+\ldots$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში $x=0$. მივიღებთ

$$f''(0)=2a_2 \Rightarrow a_2=f''(0)/2=f''(0)/2!.$$

. . . . ■

კოეფიციენტების მნიშვნელობები შევიტანოთ მწკრივში. ანალიზური ფუნქციის ხარისხოვანი მწკრივი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

DEF. ამ მწკრივს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი.

* ფორმულას ჰქვია მაკლორენის სახელი, მაგრამ სინამდვილეში იგი ეკუთვნის სტირლინგს.*

I. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა მაკლორენის მწკრივში

ექსპონენტა. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=e^x, \quad x\in R.$$

თეორემა. ექსპონენტა არის ანალიზური ფუნქცია:

$$\boxed{e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots, \quad x\in R.}$$

■ მწკრივი კრებადია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ y-ით:

$$y=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots .$$

მაშინ $$y'=\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots\right)'=$$

$$=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots=y.$$

y აკმაყოფილებს ჩვეულებრივი გამრავლების განტოლებას: $y'=y$. ამასთან, სრულდება საწყისი პირობა: $y(0)=1$. დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y=Ce^x.$$

საწყისი პირობიდან ვღებულობთ: $y(0)=1 \Leftrightarrow C=1$. მივიღეთ: $y=e^x$. ■

PR. დამტკიცება:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$$

ლოგარითმი. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=\ln(1+x),\quad x\in(-1,1).$$

თეორემა. ლოგარითმი არის ანალიზური ფუნქცია:

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots,\quad x\in(-1,1).}$$

■ განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots,\quad x\in(-1,1).$$

ლოგარითმი არის ინტეგრალი:

$$\ln(1+x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int(1-x+x^2-\dots)dx=$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots \quad ■$$

სინუსი. განვიხილოთ ფუნქცია: $y=\sin x,\quad x\in R$.

ეილერის ფორმულა დავწეროთ ix და $-ix$ რიცხვებისათვის. მივიღებთ:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

პირველ ტოლობას გამოვაკლოთ მეორე:

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x \Rightarrow \sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/2i.$$

თეორემა. სინუსი არის ანალიზური ფუნქცია:

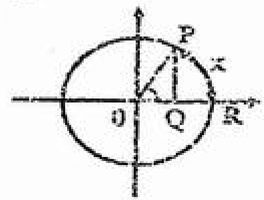
$$\boxed{\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots,\quad x\in R.}$$

■ გვაქვს: $$e^{ix}=1+\frac{1}{1!}ix-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}ix^3-\dots$$

$$e^{-ix}=1-\frac{1}{1!}ix-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}ix^3-\dots$$

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots\right). \quad ■$$

REM. 1. ავიღოთ ერთეულოვანი წრეწირი. x არის PR რკალის სიგრძე. $\sin x$ არის PQ მონაკვეთის სიგრძე. სინუსის მაკლორენის მწკრივი ფაქტობრივად არის სინუსის ფორმულა, რომელიც გვიჩვენებს, როგორ გამოისახება PQ მონაკვეთი PR რკალის საშუალებით.



2. სინუსის ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი x-თვის. კრებადობის რადიუსია $r=\infty$. ამიტომ მწკრივი კრებადია ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვისათვის. ეს იმას ნიშნავს, რომ სინუსი არსებობს არა მარტო ნამდვილი რიცხვებისთვის, არამედ კომპლექსური რიცხვებისთვისაც.

3. ნამდვილი რიცხვებისთვის სინუსი მოთავსებულია -1-სა და 1-ს შორის. კომპლექსური რიცხვებისათვის სინუსი შეიძლება გახდეს ნებისმიერი რიცხვი.

კოსინუსი. მოცემულია ფუნქცია: $y=\cos x,\quad x\in R$.

ეილერის ფორმულა დავწეროთ ix და $-ix$ რიცხვებისათვის. მივიღებთ:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

პირველ ტოლობას დავუმატოთ მეორე:

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2.$$

თეორემა. კოსინუსი არის ანალიზური ფუნქცია:

$$\boxed{\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots, \quad x\in R.}$$

■ გვაქვს: $e^{ix}=1+\frac{1}{1!}ix-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}ix^3-\ldots$

$$e^{-ix}=1-\frac{1}{1!}ix-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}ix^3-\ldots$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x=(e^{ix}+e^{-ix})/2=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots\right). \quad ■$$

PR. აჩვენეთ, რომ $\cos x$ არსებობს კომპლექსური რიცხვებისთვისაც და შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა.

არკტანგენსი. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$y=\operatorname{arctg}x, \quad x\in(-1, 1).$$

თეორემა. არკტანგენსი არის ანალიზური ფუნქცია:

$$\boxed{\operatorname{arctg}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ldots, \quad x\in(-1, 1).}$$

■ ვთქვათ, $x\in(-1, 1)$. განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მნიშვნელია x^2:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$$

არკტანგენსი არის ინტეგრალი:

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int(1-x^2+x^4-\ldots)dx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ldots \quad ■$$

PR. დაამტკიცეთ: $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$.

ნიუტონის ბინომი ნებისმიერი მაჩვენებლისათვის

მოცემულია ფუნქცია: $y=(1+x)^\alpha \quad x\in(-1, 1)$, α ნებისმიერი რიცხვია.

თეორემა. ნიუტონის ბინომი არის ანალიზური ფუნქცია:

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots}$$

■ მწკრივი კრებადია ნებისმიერი x-თვის. მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ y-ით. მაშინ

$$y'=\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots$$

გავამრავლოთ ეს მწკრივი x-ზე:

$$xy'=\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+\ldots$$

მიღებული ორი მწკრივი შევკრიბოთ:

$$y'+xy'=\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)+\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+2\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots$$

$$=\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots\right)=\alpha y$$

y აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$(1+x)y'=\alpha y.$$

ამასთან სრულდება საწყისი პირობა: $y(0)=1$.

განტოლების ამონახსნია: $y=(1+x)^\alpha$. ■

EX. დაშალეთ მაკლორენის მწკრივში ფუნქცია: $y=\sqrt{1+x}$.

■ ამ შემთხვევაში $\alpha=1/2$. ამიტომ

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1/2(1-1/2)}{2!}x^2+\ldots=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\ldots \blacksquare$$

* ბინომის ფორმულა ნებისმიერი მაჩვენებლისათვის იცოდა ნიუტონმა, მაგრამ ამ ფორმულის დამტკიცება მოიყვანა ეილერმა.

ეილერი დაიბადა შვეიცარიაში. მამა იყო მღვდელი. მას სურდა თავისი შვილი გამოსულიყო თეოლოგი, მაგრამ ეილერმა აირჩია მათემატიკა. ასეთი არჩევანი ეილერმა გააკეთა ბერნულის წყალობით. იოჰან ბერნული იყო ეილერის მასწავლებელი. ეილერმა დაამთავრა ბაზელის უნივერსიტეტი. მიიღო ფართო განათლება. იცოდა თეოლოგია, მედიცინა, ასტრონომია, ფიზიკა, უცხო ენები.

1727 წელს ეილერი მიიწვიეს ახლადგახსნილ რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიაში. აკადემია გაიხსნა პეტერბურგში ეკატერინე პირველის მეფობის დროს. აკადემიის გეგმა პეტრე პირველს შესთავაზა ლეიბნიცმა.

ეილერი გამოირჩეოდა საოცარი შრომის ნაყოფიერებით. ეილერის შრომების კრებული შეიცავს 75 ტომს. თავდაუზოგავმა მუშაობამ რასაკვირველია იმოქმედა ეილერის ჯანმრთელობაზე. სიცოცხლის უკანასკნელი 17 წელი ეილერმა მხედველობის გარეშე გაატარა. მიუხედავად ამისა, ამ პერიოდში მან გამოაქვეყნა ოთხასამდე ნაშრომი და რამოდენიმე წიგნი. ეილერის შრომები ეხება თითქმის ყველაფერს, რაც კი აქტუალური იყო იმ დროს. ეს არის: მათემატიკა, მექანიკა, დრეკადობის თეორია, ფიზიკა, ბალისტიკა, ზღვაოსნობა, სადაზღვეო საქმე და ა.შ. ეილერი წერდა სკოლის სახელმძღვანელოებსაც. საინტერესოა, რომ სკოლის მათემატიკაშიც აქვს ეილერს გაკეთებული აღმოჩენა. ეილერის არის, მაგალითად, ცნობილი ფორმულა სამკუთხედისთვის: $4rRp=abc$, r არის ჩახაზული წრის რადიუსი, R–შემოხაზული წრის რადიუსი, a, b და c–სამკუთხედის გვერდები, p–ნახევარპერიმეტრი. სხვათა შორის ეს აღნიშვნებიც ეკუთვნის ეილერს. ეილერმა შემოიტანა e, π და i რიცხვების აღნიშვნებიც. *

J. ლოპიტალის წესი

მოცემულია ორი ანალიზური ფუნქცია:

$$y=f(x) \text{ და } y=g(x), \quad x\in(-r, r).$$

ორივე ფუნქცია ნულში ხდება ნული: $f(0)=g(0)=0$, ხოლო წარმოებული $g'(0) \neq 0$.

თეორემა (ბერნული).

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.}$$

■ დავშალოთ ორივე ფუნქცია მაკლორენის მწკრივში:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$$

ორივე მწკრივის თავისუფალი წევრი უდრის ნულს:

$$a_0=f(0)=0, \quad b_0=g(0)=0.$$

X–იანი წევრის კოეფიციენტი არის წარმოებული:

$$a_1=f'(0), \; b_1=g'(0).$$

გვექნება:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_1x+b_2x^2+\ldots}=\frac{a_1+a_2x+\ldots}{b_1+b_2x+\ldots}\to\frac{a_1}{b_1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}. \quad \blacksquare$$

PR. ვთქვათ, თეორემის პირობაში პირველი რიგის წარმოებულები არიან ნულები: $f'(0)=g'(0)=0$, ხოლო მნიშვნელის მეორე რიგის წარმოებული არ უდრის ნულს. დაამტკიცეთ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(0)}{g''(0)}.$$

EX. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

■ ორჯერ გავაწარმოოთ მრიცხველი და მნიშვნელი:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}. \blacksquare$$

*. 0/0 ტიპის განუზღვრელობის პოვნის ეს წესი ცნობილია ლოპიტალის წესის სახელწოდებით. სინამდვილეში იგი ეკუთვნის ბერნულს. ბერნულიმ ლოპიტალი გაიცნო პარიზში. ლოპიტალი იყო მარკიზი. მატერიალურად იგი გაცილებით უფრო შეძლებული იყო ვიდრე ბერნული. მათ მიაღწიეს საინტერესო შეთანხმებას. ლოპიტალი უნიშნავდა ბერნულის ხელფასს, ხოლო ბერნულის უნდა გაეცნო ლოპიტალისათვის თავისი

ახალი რეზულტატები, რომლებიც ლოპიტალს შეეძლო გამოეყენებინა ისე, როგორც ჩათვლიდა საჭიროდ. ასე მოხვდა ლოპიტალის ხელში ბერნულის ფორმულა. ეს ფორმულა ლოპიტალმა გამოაქვეყნა თავის წიგნში. ლოპიტალის გარდაცვალების შემდეგ ბერნულიმ ლოპიტალს დააბრალა პლაგიატობა, თუმცა ლოპიტალს არ დაურღვევია შეთანხმების პირობა და უფრო მეტიც, იგი მადლიერების გრძნობით იხსენებდა ბერნულის. აქ ლაპარაკია იოჰან ბერნულიზე. საქმე ისაა, რომ ისტორიას არ ახსოვს, ერთ დინასტიას ჰყოლოდეს იმდენი მათემატიკოსი და საერთოდ გამოჩენილი მეცნიერი, როგორც ბერნულების გვარს.

თვითონ იოჰან ბერნული იყო ლეიბნიცის მოსწავლე. მან აქტიურად დაუჭირა მხარი ლეიბნიცს ნიუტონის წინააღმდეგ გამართულ ცნობილ კამპანიაში. ბერნულიმ დაწერა წერილი, რომელიც ლეიბნიცმა გამოაქვეყნა თავის ჟურნალში. ამ წერილში ბერნული უპირატესობას ანიჭებდა ლეიბნიცს და ცუდად იხსენებდა ნიუტონს. ბერნულიმ ეს წერილი გამოაქვეყნა ანონიმურად. მას არ სურდა, რომ ნიუტონს გაეგო წერილის ავტორის ვინაობა. საქმე ისაა, რომ ბერნული ნიუტონის ხელშეწყობით გახდა ინგლისის აკადემიის წევრი და ნიუტონი დაპირდა ბერნულის, რომ ასეთივე დახმარებას გაუწევდა ბერნულის შვილსაც. წერილის ავტორის ვინაობა მალე დადგინდა. ამან ბერნულის გაოცება გამოიწვია. იგი თვლიდა, რომ წერილის შესახებ იცოდა მხოლოდ მან და ლეიბნიცმა. მაგრამ საქმე გაცილებით მარტივად იყო. წერილში ბერნულის გაეპარა ფრაზა „ჩემი ფორმულა“. ნიუტონმა იცოდა, რომ ეს ბერნულის ფორმულა იყო.*

შინაარსი

[illegible]
1) [illegible]
2) [illegible] — XVI — [illegible]
3) [illegible] — 1633 წ. [illegible] 3-20 [illegible]
4) [illegible]
5) [illegible] — 1605 წ. — [illegible]
6) [illegible]

გამომცემლობის რედაქტორი ც. ნიკოლაიშვილი
მხატვარი და სამხატვრო რედაქტორი ა. ბუაძე
ტექნიკური რედაქტორი რ. ასათიანი
კომპიუტერზე დამკაბადონებელი ქ. კაპანაძე
კორექტორი ლ. კობახიძე

საბეჭდი ქაღალდი 60X84 1/16; პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 16,25; სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 15,45.

ტირაჟი 250

საგამომცემლო ფირმა „სიახლე“,
380030, თბილისი, ყიფშიძის ქ. № 10.