ნ. ხვედელიძე

მათემატიკა

ეკონომიკის და ბიზნესისთვის

სულხან-საბა ორბელიანის სასწავლო უნივერსიტეტი

მათემატიკა

ეკონომიკის და ბიზნესისთვის

დამხმარე სახელმძღვანელო

თბილისი 2014

ავტორი: ნუგზარ ხვედელიძე –

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სულხან-საბა ორბელიანის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი, ი. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მოწვეული პედაგოგი.

"მათემატიკა ეკონომიკის და ბიზნესისთვის" განკუთვნილია დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და ბიზნესის მართვის სპეციალობების ბაკალავრის საფეხურის სტუდენტებისათვის

რედაქტორი: ნ. ხვედელიძე

რეცენზენტები:

რ. მელაძე – საქართველოს დავით აღმაშენებლის სახელობის უნივერსიტეტის პროფესორი

დ. კალანდარიშვილი – გურამ თავართქილაძის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

ქართველი სპეციალისტები დღესაც კამათობენ ეკონომიკის და ბიზნესის მართვის თეორიაში, მათემატიკის გამოყენების აუცილებლობის შესახებ. ხშირად, სტუდენტებიც ეჭვის თვალით უყურებენ შეთავაზებული მათემატიკური მეთოდების დაუფლების აუცილებლობას.

იმ ქვეყნებში, სადაც ჩვენთან შედარებით აღნიშნული პროფილის საგნების სწავლების მეტი გამოცდილება და ტრადიციები გააჩნიათ, დიდი ხანია ცალსახად განსაზღვრული პოზიცია აქვთ ამ საკითხთან დაკავშირებით. თანამედროვე სახელმძღვანელოების უმრავლესობა, რომლებშიც ავტორები მკითხველს, ამერიკული და ევროპული სკოლების მიდგომებს აცნობენ, ცხადყოფენ, ეკონომიკის თეორიის საფუძვლიანი შესწავლა შეუძლებელია მათემატიკის კარგი ცოდნის გარეშე. ცნობილი ეკონომისტისა და მათემატიკოსის, როი ჯორჯ ალენის მიხედვით, მათემატიკა ეკონომისტებისათვის წარმოადგენს მძლავრ დამატებით იარაღს მის წინაშე მდგომი განსაკუთრებით რთული პრობლემების გადასაჭრელად.

მათემატიკური აღწერის, საინტერპრეტაციო და ოპტიმიზაციის მოდელები დღეს უკვე მოიცავენ ეკონომიკური თეორიის დიდ ნაწილს და მათი როლი სულ უფრო იზრდება ეკონომიკურ პრაქტიკაშიც.

მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და ბიზნესის მართვის სპეციალობების ბაკალავრის საფეხურის სტუდენტებისათვის.

სახელმძღვანელო ემყარება საკმარისად მცირე მოცულობის საბაზისო ცოდნას. სტუდენტებს სახელმძღვანელო მისცემს საკმარისად ფართო კლასის მათემატიკური მეთოდების პრაქტიკულ ცხოვრებაში გამოყენების უნარ-ჩვევებს.

წიგნში უხვად არის განხილული ამოცანები ეკონომიკის და ბიზნესის სფეროდან, რომელთა ამოხსნისა და გაანალიზებისათვის საჭირო მათემატიკური აპარატი გადმოცემულია შესაბამის თავებში. ამის გამო სახელმძღვანელოს კითხვისას სტუდენტებს ეჭვი არ გაუჩნდება შეთავაზებული მათემატიკური მეთოდების დაუფლების აუცილებლობაზე.

ყოველ თავს ერთვის კითხვები თვითშემოწმებისათვის და სავარჯიშოები. კითხვებზე პასუხების გაცემა და სავარჯიშოების დამოუკიდებლად ამოხსნა დიდად დაეხმარება სტუდენტს მასალის ათვისებაში.

წიგნში გადმოცემულია მათემატიკის ის საკითხები, რომლებიც ყველაზე ხშირად გვხვდება ეკონომიკის და ბიზნესის თეორიაში. ესენია: ანალიზური გეომეტრიის, წრფივი ალგებრის, ფინანსური მათემატიკის, მათემატიკური ანალიზის ელემენტები. აგრეთვე, ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის უმნიშვნელოვანესი საკითხები.

ავტორი დიდი სიამოვნებით და გულისხმიერებით მიიღებს ყველა შენიშვნას, რომელიც სახელმძღვანელოს გაუმჯობესების სურვილით იქნება გამოთქმული.

უღრმესი მადლობა მინდა გადავუხადო წიგნის რეცენზენტებს: საქართველოს დავით აღმაშენებლის სახელობის უნივერსიტეტის პროფესორს
რ. მელაძეს და გურამ თავართქილაძის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებულ პროფესორს დ. კალანდარიშვილს, საგულისხმო რჩევების და მითითებებისათვის, რომლებიც გათვალისწინებულია სახელმძღვანელოს საბოლოო რედაქტირებისას.

წიგნზე მუშაობა მიმდინარეობდა სულხან-საბა ორბელიანის სასწავლო უნივერსიტეტის რექტორის ბატონი ვაჟა ვარდიძის და ამავე ინსტიტუტის ბიზნესის ფაკულტეტის დეკანის ქალბატონ ნათია გოგოლაურის ხელშეწყობით, რისთვისაც მათ დიდ მადლობას მოვახსენებ.

თავი 1

წრფე და წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები

დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემაში ყოველი წრფე აღიწერება პირველი ხარისხის განტოლებით x და y ცვლადების მიმართ და პირიქით, ყოველი პირველი ხარისხის ორცვლადიანი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს, თუ ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან.

წრფის განტოლება სიბრტყეზე შეიძლება სხვადასხვა სახით იყოს მოცემული. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ სახის განტოლებებს, რომელთაც გამოვიყენებთ ეკონომიკური ამოცანების გამოკვლევისას.

§1.1. წრფის განტოლება ზოგადი სახით. წრფის განტოლება ზოგადი სახით ასე ჩაიწერება:

$$ax + by + c = 0\,, \qquad (1.1)$$

შადაც a, b და c მოცემული ნამდვილი რიცხვებია. ამასთან, იგულისხმება, რომ a და b კოეფიციენტები ერთდროულად არაა ნული, ე.ი. $a^2 + b^2 \neq 0$.

რადგან ყოველი წრფე ცალსახად განისაზღვრება მასზე მდებარე ორი წერტილით, ამიტომ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების შესაბამისი წრფე რომ ავაგოთ, საკმარისია ვიპოვოთ მოცემული განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნი, ავაგოთ მათი შესაბამისი წერტილები და ამ ორ წერტილზე გავავლოთ წრფე.

განვიხილოთ წრფის ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევები და მათი შესაბამისი წრფეების გეომეტრიული სახე.

ა) $c = 0$. მაშინ (1.1) განტოლებას აქვს სახე:

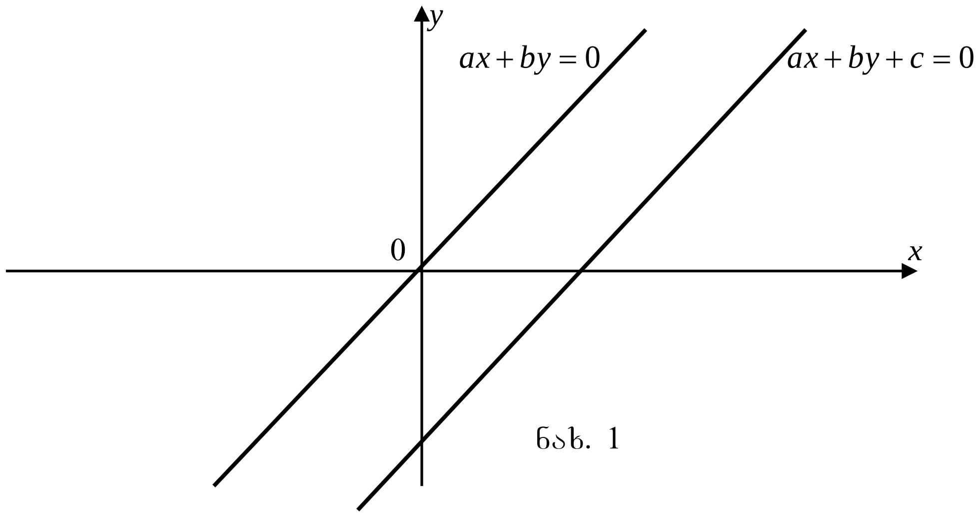
$$ax + by = 0 \qquad (1.2)$$

და იგი განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეს, რადგანაც $(0;0)$ წყვილი (1.2) განტოლების ამონახსნია (ნახ.1).

ბ) $b = 0,\ a \neq 0$. მაშინ (1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

ე.ი. (1.1) განტოლების ამონახსნებია შემდეგი სახის წყვილები $\left(-\dfrac{c}{a}; y\right)$, სადაც y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. რადგან ამ წყვილების შესაბამისი



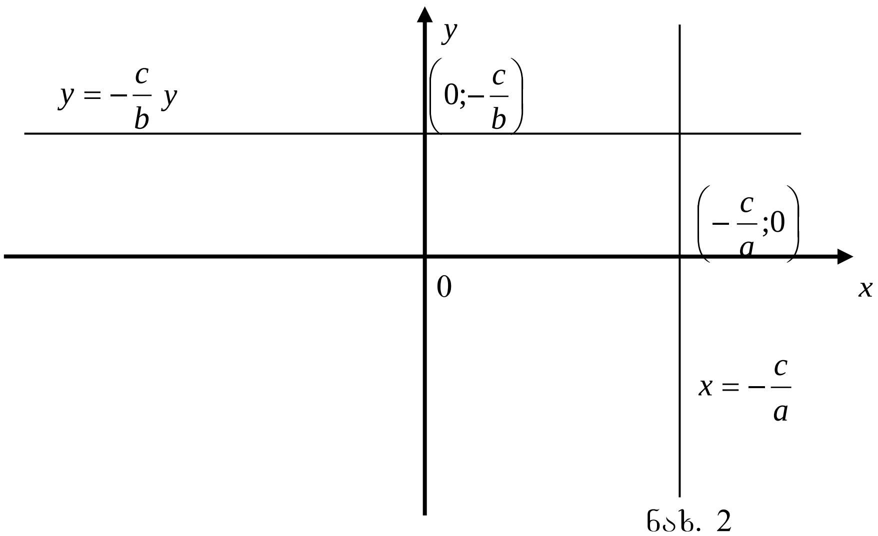
ნახ. 1

აბსცისები ერთი და იგივეა, ამიტომ ისინი განსაზღვრავენ წრფეს, რომელიც Ox ღერძის მართობია (ე.ი. Oy ღეძის პარალელურია) და კვეთს მას $\left(-\frac{c}{a};0\right)$ წერტილში (ნახ. 2). კერძოდ, $x=0$ წარმოადგენს Oy ღერძის განტოლებას.

გ) $a=0, b\neq 0$. მაშინ (1.1)-დან გამომდინარეობს

$$y=-\frac{c}{b}.$$

რომელიც განსაზღვრავს Oy ღერძის პერპენდიკულარულ (ანუ Ox ღერძის პარალელურ) წრფეს. ეს წრფე კვეთს Oy ღერძს წერტილში $\left(0;-\frac{c}{b}\right)$ (ნახ. 2). კერძოდ, $y=0$ წარმოადგენს Ox ღერძის განტოლებას.



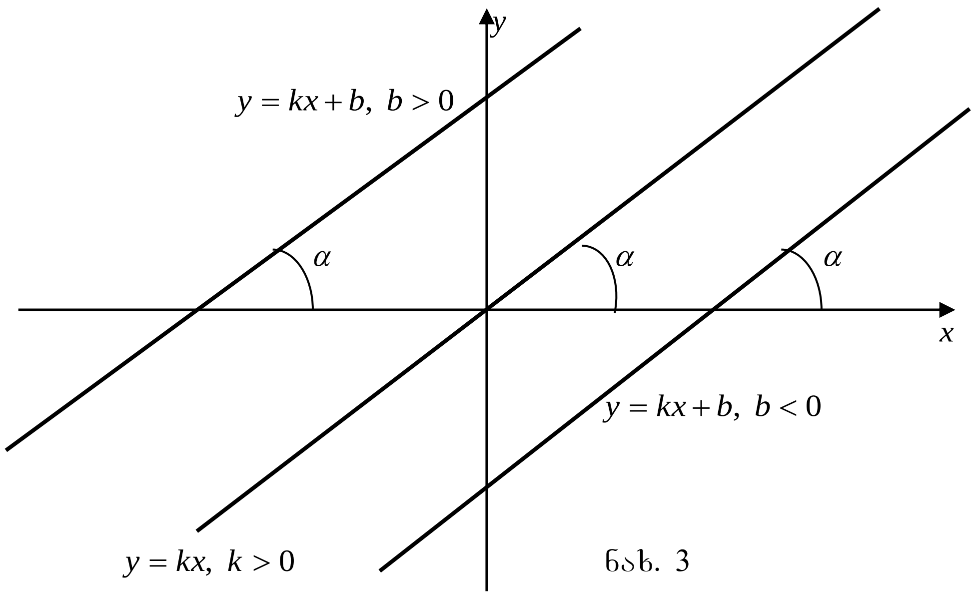
ნახ. 2

§1.2. წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით. წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით აქვს შემდეგი სახე:

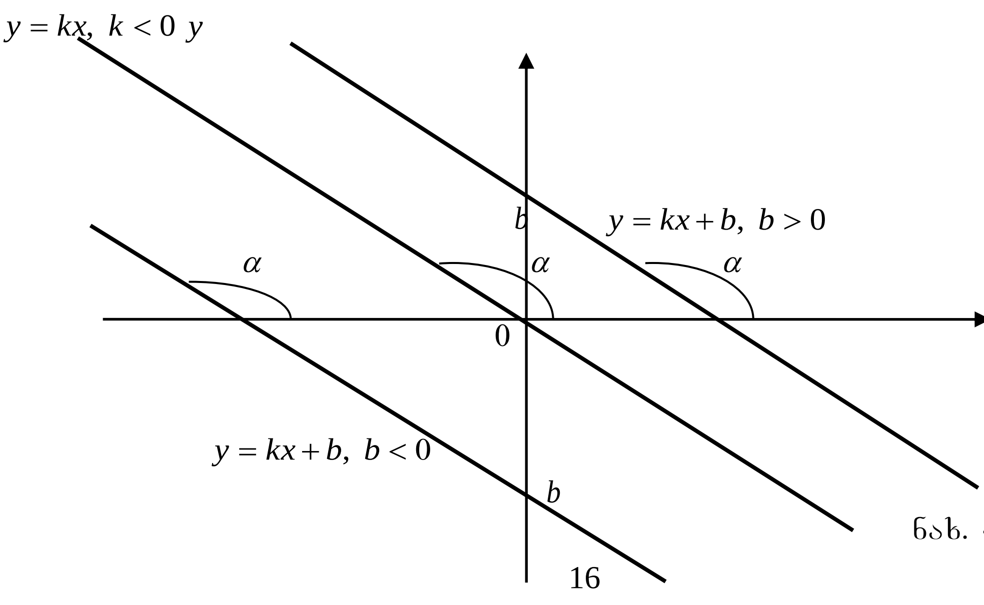
$$y = kx + b, \qquad (1.3)$$

სადაც k და b ნამდვილი რიცხვებია. ამ განტოლების სახელწოდება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ k კოეფიციენტი რიცხვობრივად უდრის იმ α კუთხის ტანგესს, რომელსაც (1.3) განტოლებით განსაზღვრული წრფე ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ე.ი. $k = tg\alpha$.

ამიტომ, თუ $k > 0$ მაშინ შესაბამისი წრფე Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს მახვილ კუთხეს, ხოლო, თუ $k < 0$, მაშინ – ბლაგვ კუთხეს. ეს წრფე Oy ღერძს კვეთს $(0;b)$ წერტილში. აქვე შევნიშნოთ, რომ (1.3) განტოლებით განსაზღვრული წრფე, თუ $k \neq 0$, პარალელურია $y = kx$ განტოლებით მოცემული კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფისა (ნახ. 3,4).



ნახ. 3

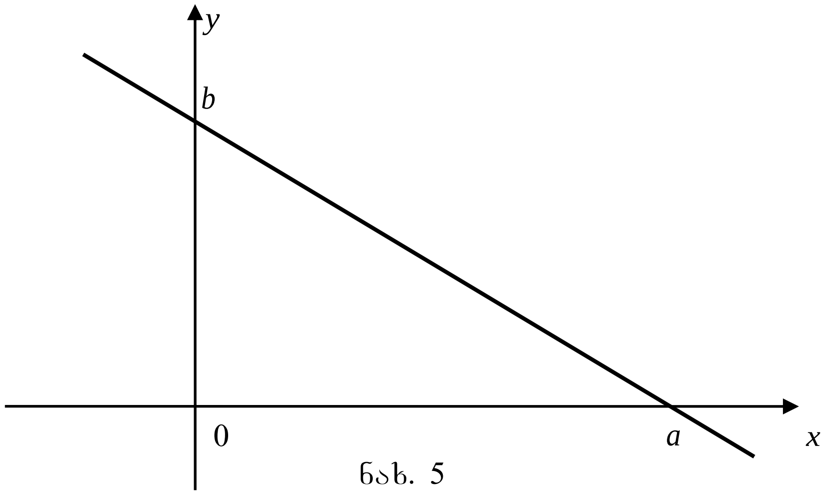


ნახ. 4

§1.3. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. თუ წრფე საკოორდინატო ღერძებს კვეთს $(a;0)$ და $(0;b)$ წერტილებში, ამასთან $a \neq 0$ და $b \neq 0$, მაშინ მისი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

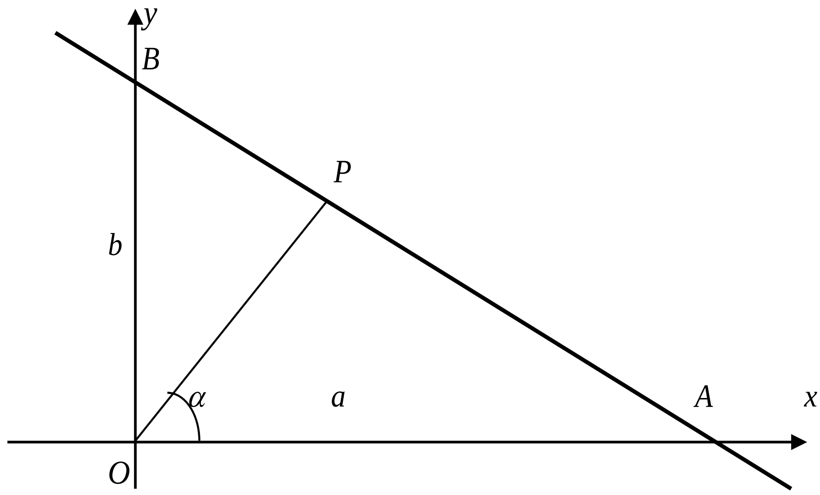
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{1.4}$$

რომელსაც ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში (ნახ. 5).



ნახ. 5

§1.4. წრფის განტოლება ნორმალური სახით. განვიხილოთ (1.4) განტოლება. კოორდინატთა სათავიდან წრფეზე დავუშვათ OP მართობი. OP მართობის Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ α-თი, ხოლო OP მონაკვეთის სიგრძე p-თი (ნახ. 6). OPA და



ნახ. 6

OPB მართკუთხა სამკუთხედებიდან

$$a=\frac{p}{\cos\alpha}, \qquad b=\frac{p}{\sin\alpha}.$$

a და b-ს ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (1.4)-ში, მივიღებთ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{1.5}$$

ამ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ნორმალური სახით.

წრფის ზოგადი სახის განტოლების დასაყვანად ნორმალურ სახეზე საჭიროა (1.1) განტოლების ყველა წევრი გავყოთ $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ რიცხვზე, რომლის ნიშანი უნდა იყოს c რიცხვის ნიშნის საპირისპირო.

§1.5. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. მანძილი წერტილიდან წრფემდე არის ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის სიგრძე.

ვთქვათ წრფის განტოლება მოცემულია ნორმალური სახით. მაშინ $(x_0; y_0)$ წერტილიდან ამ წრფემდე მანძილი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|. \tag{1.6}$$

თუ წრფე მოცემულია ზოგადი სახით, მაშინ

$$d = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

§1.6. ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ, მოცემილი გვაქვს ორი $A_1(x_1; y_1)$ და $A_2(x_2; y_2)$ წერტილი.

თუ $x_1 = x_2$, მაშინ, ცხადია, რომ A_1 და A_2 წერტილებზე გამავალი წრფე პარალელურია Oy ღერძის და საძიებელი განტოლება იქნება $x = x_1$. ანალოგიურად, თუ $y_1 = y_2$, მაშინ წრფე Ox ღერძის პარალელურია და საძიებელი განტოლება იქნება. $y = y_1$.

ახლა დავუშვათ, რომ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$, მაშინ ამ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{1.7}$$

და მას ეწოდება ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

ეს განტოლება გამოდგება $x_1 = x_2$ ან $y_1 = y_2$ შემთხვევაშიც (დაამტკიცეთ!).

§1.7. ორუცნობიანი წრფივი განტოლებათა სისტემის გრაფიკული ამოხსნა. განვიხილოთ ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}, \qquad (1.8)$$

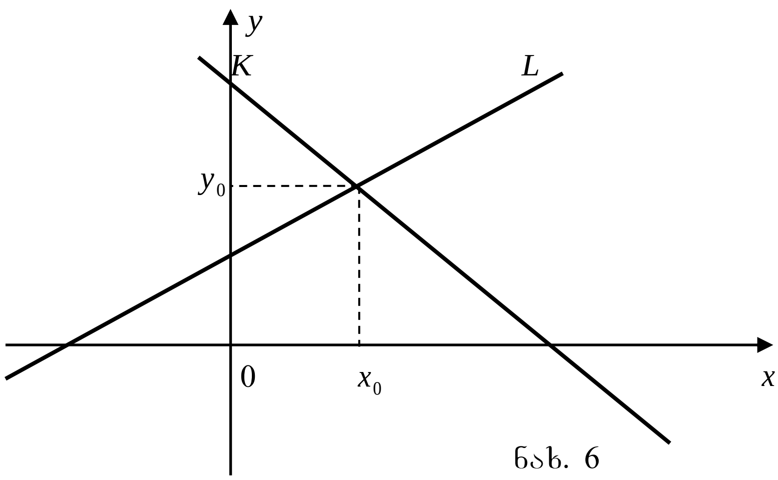
სადაც $a_1, a_2 . b_1, b_2, c_1, c_2$ მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო x და y უცნობებია. $a_1, a_2 . b_1, b_2$ რიცხვებს უწოდებენ სისტემის კოეფიციენტებს, c_1 და c_2 რიცხვებს კი – თავისუფალ წევრებს. (1.8) სისტემის ამონახსნი ეწოდება x და y ცვლადების დალაგებულ $(x; y)$ წყვილს, რომელიც ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს (1.8) სისტემის ორივე განტოლებას.

(1.8) სისტემის გრაფიკული ამოხსნა ნიშნავს ამ წრფეების თანაკვეთის წერტილის კოორდინატების პოვნას (თუ ასეთი წერტილი არსებობს).

განვიხილოთ ერთ სიბრტყეში გავლებული ორი წრფის ყველა შესაძლო მდებარეობა.

ა) თუ (1.8) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი K და L წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. წერტილი $(x_0; y_0)$ წარმოადგენს (1.8) სისტემის ამონახსნს და K და L წრფეების გადაკვეთის წერტილსაც (ნახ. 6). ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$



ნახ. 6

ბ) თუ (1.8) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთმანეთის პარალელურია და სხვადასხვა, მაშინ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_{2.}}.$$

გ) თუ (1.8) სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ამ წრფის ყოველი წერტილის შესაბამისი კოორდინატების წყვილი (1.8) სისტემის ამონახსნია, ე.ი. სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება პირობა

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

- როგორი სახე აქვს წრფის განტოლებას ზოგადი სახით?მოიყვანეთ მისი დახასიათება კოეფიციენტების მიხედვით (აჩვენეთ ნახაზზე).
- როგორი სახე აქვს წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით?მოიყვანეთ მისი დახასიათება კოეფიციენტების მიხედვით (აჩვენეთ ნახაზზე).
- რას ეწოდება წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში (აჩვენეთ ნახაზზე)?
- რას ეწოდება წრფის განტოლება ნორმალური სახით?
- როგორ მივიყვანოთ ზოგადი სახის წრფის განტოლება ნორმალურ სახეზე?
- როგორ გამოითვლება მანძილი წერტილიდან წრფემდე?
- მოიყვანეთ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.
- რას ეწოდება ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი ამონახსნი?
- რასწარმოადგენს ორუცნობიან წრფივგანტოლებათა სისტემის ამოხსნა გრაფიკულად?
- როდის აქვს ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი? უამრვი ამონახსნი? არა აქვს ამონახსნი? (აჩვენეთ ნახაზზე)

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1

1. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის შემდეგ წერტილებზე:

   ა) $(3;4)$ და $(4;3)$; ბ) $(-3;1)$ და $(-2;7)$;

   გ) $(3;-5)$ და $(-2;5)$; დ) $(-5;2)$ და $(0;4)$.

2. ჩაწერეთ წრფეთა განტოლებები საკუთხო კოეფიციენტებით და ააგეთ გრაფიკი:

   ა) $4x+5y+8=0$; ბ) $5x-8y-1=0$;

   გ) $x+y=0$; დ) $2x+3y-6=0$

3. დაიყვანეთ განტოლებაზე ღერძთა მონაკვეთებში შემდეგ წრფეთა განტოლებები და ააგეთ გრაფიკი:

   ა) $4x+5y+8=0$; ბ) $5x-8y-1=0$; გ) $3x+4y-12=0$;

   დ) $4x+5y+20=0$; ე) $6x+y-9=0$; ვ) $5x-2y+16=0$.

4. იპოვეთ ABC სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ:

ა) $A(1;1)$; $B(3;5)$; $C(-7;1)$; ბ) $A(2;-3)$; $B(-3;4)$; $C(4;4)$.

5. ამოხსენით გრაფიკულად წრფივ განტოლებათა სისტემა:

   ა) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+3y=9 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+5y=10 \end{cases}$;

   გ) $\begin{cases} x+y=0 \\ -3x+4y=14 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 3x+10y=-12 \end{cases}$.

6. წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოუხსნელად გამოარკვიეთ, აქვს თუ არა მას ამონახსნი და თუ აქვს, რამდენი:

   ა) $\begin{cases} 4y-x=12 \\ 3y+x=-3 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} y-3x=-3 \\ 3y-x=6 \end{cases}$;

   გ) $\begin{cases} 1{,}5x=1 \\ -3x+2y=-2 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} x+2y=3 \\ y=-0{,}5x \end{cases}$;

   ე) $\begin{cases} 2x=11-3y \\ 6y=22-4x \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} -x+2y=8 \\ x+4y=10 \end{cases}$.

7. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $B(0;3)$ წერტილზე და აბსცისთა ღერძთან ადგენს $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ კუთხეს.

8. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც ორდინატთა ღერძს 5 ერთეულის ტოლ მონაკვეთს ჩამოჭრის და აბსცისთა ღერძთან ადგენს $\varphi = 120^\circ$-იან კუთხეს.
9. იპოვეთ k და b პარამეტრები იმ წრფისა, რომელიც $M(1;1)$ და $N(3;-2)$ წერტილებზე გადის.
10. განსაზღვრეთ კუთხეები, რომლებსაც აბსცისთა ღერძთან ადგენს შემდეგი წრფეები: ა) $x-y=0$; ბ) $x+y=0$; გ) $\sqrt{3}x-y+5=0$; დ) $5x-y+7=0$.
11. წრფეზე, რომლის განტოლებაა $2x+y-3=0$, იპოვეთ წერტილი, რომელიც ამავე წრფის $M(1;1)$ წერტილიდან დაშორებულია $d=\sqrt{5}$ მანძილით.
12. იპოვეთ $2x-y+4=0$ წრფითა და კოორდინატთა ღერძებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი.
13. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $B(0;3)$ წერტილზე გადის და კოორდინატთა ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს, $S=9$ კვ. ერთ. ფართობით.
14. წრფე გადის $P(10;-4)$ წერტილზე და კოორდინატთა ღერძებთან შეადგენს სამკუთხედს, რომლის ფართობი 10 კვადრატული ერთეულის ტოლია; დაწერეთ ამ წრფის განტოლება.
15. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც აბსცისთა ღერძზე კვეთს ორჯერ მეტი სიგრძის მონაკვეთს, ვიდრე ორდინატთა ღერძზე და გადის (4; 3) წერტილზე.
16. მიიყვანეთ ნორმალურ სახემდე წრფეთა შემდეგი განტოლებები:

ა) $5x-12y-36=0$; ბ) $4x-3y-20=0$;

გ) $3x+1=0$; დ) $2y-1=0$;

ე) $2x-y-1=0$; ვ) $-\frac{8}{17}x+\frac{15}{17}y-3=0$;

ზ) $x-y=0$; თ) $3x+y=0$.

17. იპოვეთ მანძილი $A(3;1)$ წერტილიდან შემდეგ წრფეებამდე:

ა) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-7=0$; ბ) $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y+1=0$; გ) $15x-20y+3=0$;

დ) $2x+3y-9=0$; ე) $2x+3=0$; ვ) $3y-1=0$;

18. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეებს შორის:

ა) $x-2y+5=0$ და $2x-4y+1=0$;

ბ) $3x-4y+7=0$ და $3x-4y-18=0$;

გ) $3x+4y-6=0$ და $6x+8y-7=0$;

დ) $y=3x+4$ და $y=3x-5$.

თავი2

წრფივი ფუნქციები და ეკონომიკის უმარტივესი მათემატიკური მოდელები

§2.1. წრფივი ფუნქციების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში. პროდუქციისგამოშვებაზე ფირმის დანახარჯი ორგვარია: მუდმივი დანახარჯი და ცვლადი დანახარჯი. მუდმივი დანახარჯი არ არის დამოკიდებული გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაზე. ამიტომ სრული დანახარჯი ამ ორი სახის დანახარჯის ჯამის ტოლია, ე.ი.

სრული დანახარჯი = ცვალებადი დანახარჯი + მუდმივი დანახარჯი.

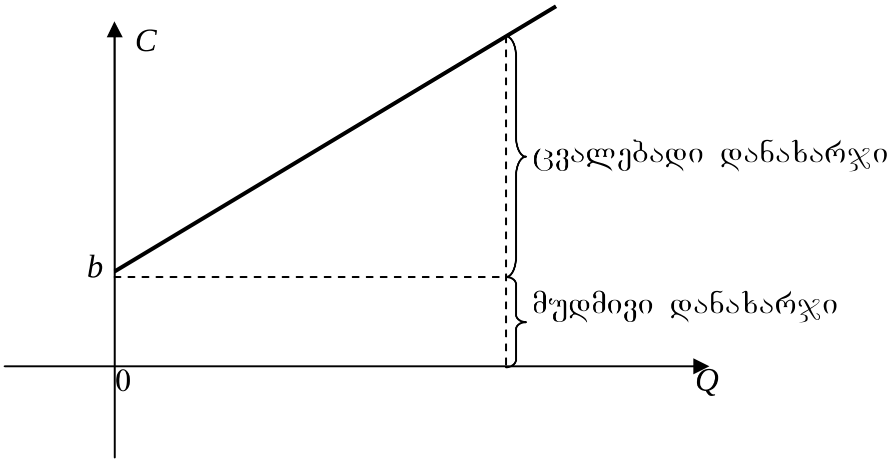
დავუშვათ, პროდუქციის ერთეულზე გაწეული ცვალებადი დანახარჯია k და სულ გამოშვებულია პროდუქციის Q რაოდენობა. მაშინ

$$\text{ცვალებადი დანახარჯი} = kQ.$$

b-თი აღვნიშნოთ მუდმივი დანახარჯი, C-თი კი სრული დანახარჯი, მაშინ

$$C = kQ + b.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს სრული დანახარჯის წრფივ მოდელს. k საკუთხო კოეფიციენტი ტოლია პროდუქციის ერთეულზე გაწეული ცვალებადი დანახარჯისა, ხოლო C ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი b ტოლია მუდმივი დანახარჯისა.



ამოცანა 1. ვთქვათ, 1კგ ყავის მარცვლის წარმოებაზე გაწეული ცვალებადი დანახარჯია 0,5 ლარი, ხოლო ფირმის მუდმივი დანახარჯია 300 ლარი. ააგეთ სრული დანახარჯის წრფივი მოდელი.

ამოხსნა. თუ ფირმა აწარმოებს Q კგ ყავის მარცვალს, მაშინ სრული დანახარჯი შეადგენს

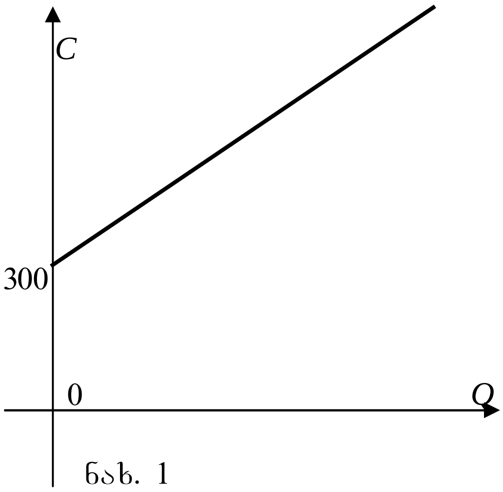
$$C=0{,}5Q+300.$$

შესაბამის წრფივი მოდელის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 1).

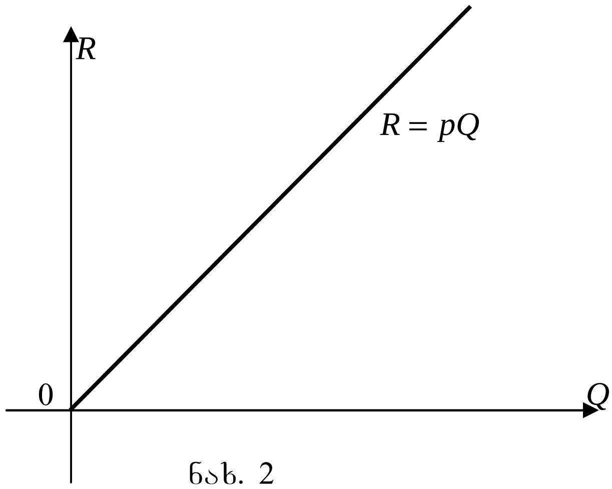
დავუშვათ, ფირმის მიერ გამოშვებული პროდუქციის საცალო ფასი P მუდმივია. თუ ფირმის მიერ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა Q, მაშინ $R(Q)$ შემოსავლის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$R(Q)=PQ\,.$$

როგორც ვხედავთ, შემოსავლის ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე: თუ პროდუქცია არ იყიდება, მაშინ $Q=0$ და შემოსავალიც ნულის ტოლია (ნახ. 2).



ნახ. 1

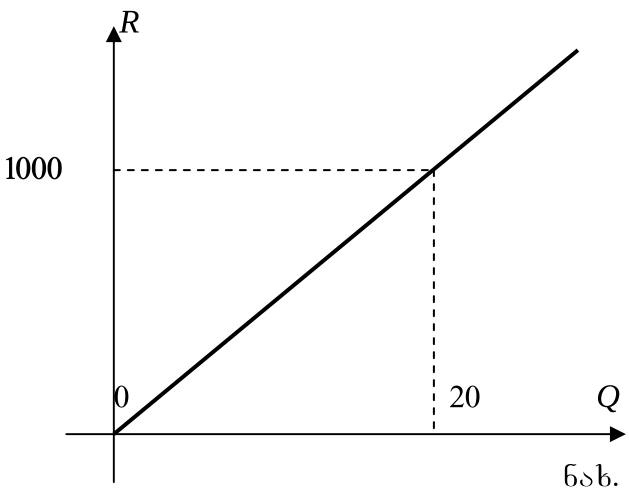


ნახ. 2

ამოცანა 2. ფირმის მიერ გამოშვებული პროდუქციის საცალო ფასია 50 ლარი. ა) ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი; ბ) რისი ტოლია შემოსავალი, თუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 20?

ამოხსნა. ა) $R(Q)=50Q$; ბ) $Q=20 \Rightarrow R(20)=50\cdot 20=1000$.

ე.ი. თუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 20, მაშინ ფირმის მიერ მიღებული შემოსავალია 1000 ლარი (ნახ. 3).



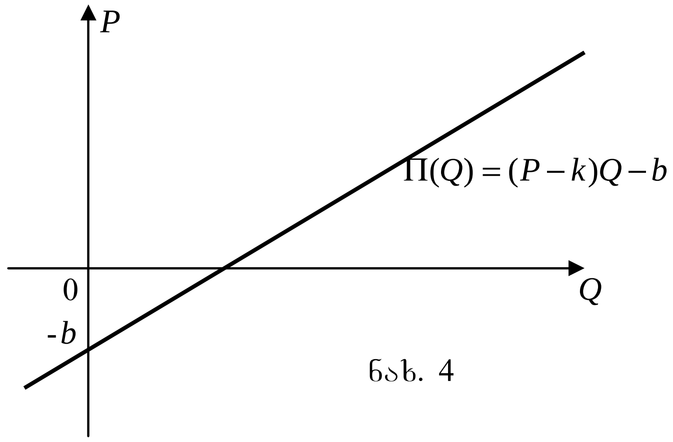
ნახ. 3

ფირმის მიერ მიღებული მოგება წარმოადგენს სხვაობას შემოსავალსა და დანახარჯსშორის. თუ მოგების ფუნქციას აღვნიშნავთ $\Pi(x)$-ით, მაშინ

$$\Pi(Q) = \text{შემოსავალი - დანახარჯი} = R(Q) - C(Q) = PQ - (kQ + b) = (P - k)Q - b$$

მაშასადამე, მოგების ფუნქცია $\Pi(Q)$ არის წრფივი ფუნქცია $(P-k)$ საკუთხო კოეფიციენტით და y ღერძს გადაკვეთს წერტილში, რომლის ორდინატი $-b$-ს ტოლია. $-b<0$, რადგან b მუდმივი დანახარჯი დადებითია.

რენტაბელური ეკონომიკა გულისხმობს, რომ საცალო ფასი უნდა აღემატებოდეს ამ პროდუქციის გამოშვებაზე გაწეულ დანახარჯს, ე.ი. $P>k$ $\Rightarrow P-k>0$, რაც ნიშნავს, რომ მოგების ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა (ნახ. 4).



ნახ. 4

ამოცანა 3. ფირმის მუდმივი დანახარჯია 80 000 ლარი. ფირმის მიერ პროდუქციის ერთეულის გამოშვებაზე გაწეული ცვალებადი დანახარჯია 25 ლარი, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია 75 ლარი. ავაგოთ მოგების წრფივი მოდელი.

ამოხსნა. b=80000, k=25, P=75.

$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = PQ - (kQ + b) = 75Q - (25Q + 80\ 000) = 50Q - 80\ 000.$

თუ ფირმის მიერ გაწეული დანახარჯი აღემატება პროდუქციის გაყიდვისაგან მიღებულ შემოსავალს

$$R(Q) < C(Q) \Rightarrow \Pi(Q) = R(Q) - C(Q) < 0,$$

მაშინ ფირმა განიცდის ზარალს.

თუ ფირმის შემოსავალი აღემატება სრულ დანახარჯს

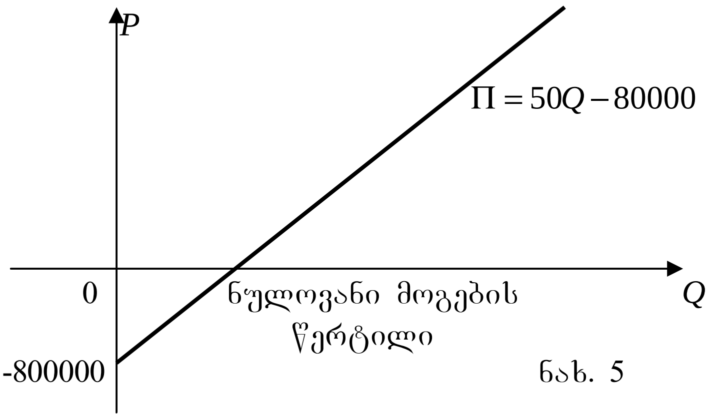
$$R(Q) > C(Q) \Rightarrow \Pi(Q) = R(Q) - C(Q) > 0,$$

მაშინ ფირმის მუშაობა მომგებიანია.

პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომლისთვისაც სრული დანახარჯი უტოლდება შემოსავალს

$$R(Q)=C(Q)\Rightarrow \Pi(Q)=R(Q)\ -\ C(Q)=0,$$

ე.ი. როდესაც ფირმას არც მოგება აქვს და არც ზარალი, ეწოდება ნულოვანი მოგების წერტილი (ნახ. 5).



ნახ. 5

ამოცანა 4. ამოცანა 3-ის პირობებში ვიპოვოთ ნულოვანი მოგების წერტილი.

ამოხსნა. $\Pi(Q)\ =\ 0 \Rightarrow 50Q - 80000\ =\ 0 \Rightarrow Q = 1600.$

ე.ი. ფირმას ნულოვანი მოგება ექნება, თუ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობაა 1600.

წარმოებისა და მომსახურების გაწევის პროცესში ფირმები იყენებენ მათ ხელთ არსებულ ძირითად საშუალებებს (შენობა-ნაგებობება, ტექნიკური აღჭურვილობა და სხვა), რომლებიც დროთა განმავლობაში ცვდებიან, ძველდებიან და საერთოდ გამოდიან მწყობრიდან. შესაბამისად მათი ღირებულება მცირდება.

ძირითადი საშუალებების ღირებულების შემცირების ზომას ცვეთა (ამორტიზაცია) ეწოდება.

ცვეთის ბუღალტრული აღრიცხვის რამდენიმე მეთოდი არსებობს. ჩვენ განვიხილავთ წრფივ მეთოდს, რაც გულისხმობს ძირითადი საშუალებების საწყისი ღირებულების ერთი და იგივე სიდიდით შემცირებას მათი ექსპლოტაციის პერიოდის განმავლობაში.

ამოცანა 5. დანადგარის საწყისი ღირებულებაა 100 000 ლარი, სალიკვიდაციო ღირებულებაა 5000 ლარი, ხოლო ექსპლოტაციის პერიოდია 10 წელი. იპოვეთ: ა) რა სიდიდით მცირდება ყოველწლიურად დანადგარის ღირებულება; ბ) რისი ტოლი იქნება დანადგარის ღირებულება 9 წლის შემდეგ? გ) რისი ტოლია დანადგარის ღირებულება t წლის შემდეგ?

ამოხსნა. ა) დანადგარის ღირებულება 10 წლის განმავლობაში მცირდება 100 000-დან 5000-მდე. იმის დასადგენად, თუ რა თანხით მცირდება ყოველწლიურად დანადგარის ღირებულება, საჭიროა სხვაობა საწყის და სალიკვიდაციო ღირებულებებს შორის გავყოთ ექსპლუატაციის პერიოდზე

$$m = \frac{100000 - 5000}{10} = 9500.$$

მაშასადამე, დანადგარის ღირებულება ყოველწლიურად 9 500 ლარით მცირდება.

ბ) 9 წლის შემდეგ დანადგარის საწყისი ღირებულება შემცირდება $9500 \times 9 = 85500$-ით და მისი ღირებულება იქნება 100000–85500=14500.

გ) t წლის შემდეგ დანადგარის საწყისი ღირებულება შემცირდება $9500t$-თი და მისი ღირებულება V იქნება

$$V = -9500t + 100\ 000.$$

ზოგადად, თუ აქტივის საწყისი და სალიკვიდაციო ღირებულებაა შესაბამისად I და S და ექსპლოტაციის პერიოდია n წელი, მაშინ ყოველწლიურად აქტივის ღირებულება მცირდება

$$m = \frac{I - S}{n}$$

სიდიდით, რომელსაც წლიურ ცვეთას (ცვეთის ნორმას) უწოდებენ.

ცხადია, $m > 0$ და t წლის შემდეგ აქტივის ღირებულება V იქნება

$$V = I - mt.$$

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა წრფივი ფუნქციების ეკონომიკაში გამოყენების საილუსტრაციოდ. შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყველა ამოცანის ამოხსნისას მოგვიწევს გარკვეული ცვლადების შემოყვანა. აქ ცვლადები შეზღუდულია და ისინი შეიძლება იცვლებოდნენ მხოლოდ ამოცანის პირობებით განსაზღვრულ სიმრავლეებზე. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ ამოცანაში აუცილებელია მივუთითოთ ცვლადების შესაბამისი დასაშვები სიმრავლეები, რომ თავიდან ავიცილოთ მცდარი პასუხები და გავაკეთოთ სწორი დასკვნები.

ამოცანა 6. (ტვირთის გადატანის ხარჯების განსაზღვრა). ვთქვათ, ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 30 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე ღირს 45 ლარი, ხოლო 50 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე – 65 ლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა x კმ მანძილზე მოცემული ქალაქიდან,

თუ ცნობილია, რომ დამოკიდებულება მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია?

ამოხსნა. პირობის თანახმად, მანძილი ქალაქიდან დანიშნულ პუნქტამდე x კმ-ია. ტვირთის გადატანის ხარჯები აღვნიშნოთ y-ით (ლარი). ვინაიდან y-სა და x-ს შორის დამოკიდებულება განსაზღვრავს წრფეს და ამასთან, როდესაც $x=30$, მაშინ $y=45$, ხოლო როდესაც $x=50$, მაშინ $y=65$, ამიტომ აღნიშნული წრფე გაივლის (30;45) და (50;65) წერტილებზე. მისი შესაბამისი განტოლება ჩაიწერება ასე

$$\frac{x-30}{50-30}=\frac{y-45}{65-45},$$

საიდანაც მივიღებთ $y=x+15$. ამრიგად, x კმ-ზე ტვირთის გადატანის ხარჯი იქნება $(x+15)$ ლარი. ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ აქ $x\geq 0$ და $y>0$.

ამოცანა 7 (წარმოების სიმძლავრის განსაზღვრა). ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ მას საათში შეუძლია აწარმოოს 300 ლიტრი ლუდი ან 600 ლიტრი ლიმონათი. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად გამოუშვას ლუდიც და ლიმონათიც. შევადგინოთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეს, თუ დამოკიდებულება წარმოებული ლუდისა და ლიმონათის რაოდენობებს შორის წრფივია.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, რადგან შესაბამისი წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი გადის (300; 0) და (0; 600) წერტილებზე, ამიტომ საძიებელი წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში ჩაიწერება ასე

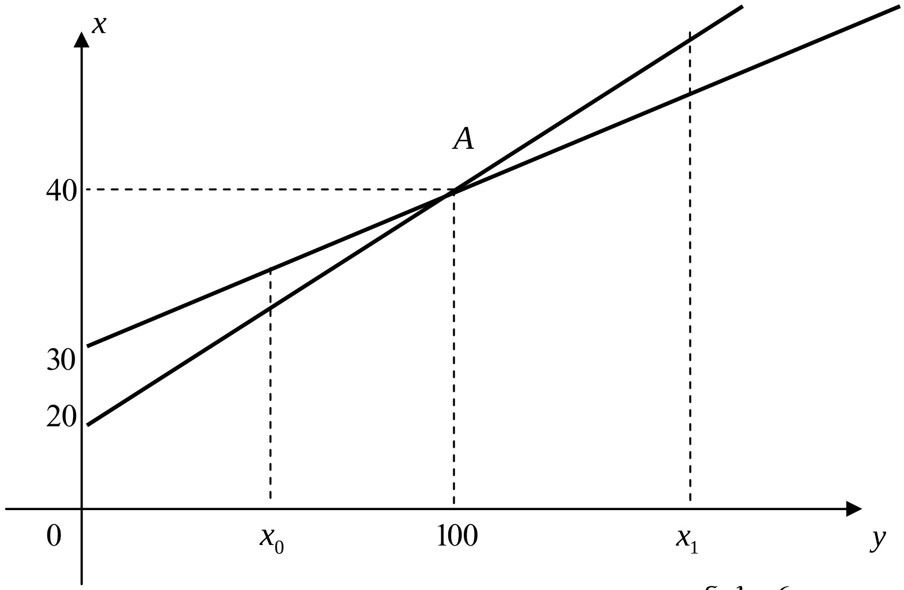
$$\frac{x}{300}+\frac{y}{600}=1.$$

აქედან $2x+y=600$. ამ განტოლებით განისაზღვრება ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე, რომელიც აკავშირებს 1 სთ-ში წარმოებული ლუდისა და ლიმონათის რაოდენობებს. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $0\leq x\leq 300$ და $0\leq y\leq 600$.

ამოცანა 8 (ტვირთის გადატანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა). ვთქვათ, ტვირთის გადატანის ხარჯები ქალაქიდან x კმ მანძილზე დაშორებულ პუნქტამდე პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y=0{,}2x+20$ ფორმულით, მეორე სახის ტრანსპორტით კი – $y=0{,}1x+30$

ფორმულით. გამოვიკვლიოთ, რა სახის ტრანსპორტითაა უფრო ხელსაყრელი ტვირთის გადატანა.

ამოხსნა. გამოკვლევა ჩავატაროთ გრაფიკული მეთოდით (ნახ. 6). ამისათვის, ავაგოთ ამოცანაში მითითებული წრფეები, ამასთან უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $x>0$.



ნახ. 6

აღნიშნული წრფეების გადაკვეთის A წერტილი მარტივად მოიძებნება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} y = 0{,}2x + 20 \\ y = 0{,}1x + 30 \end{cases}.$$

მივიღებთ: A=(100; 40). ნახაზიდან დავასკვნით, რომ თუ $0 < x_0 < 100$, მაშინ პირველი სახის ტრანსპორტით გადაზიდვის ხარჯები ნაკლებია, ვიდრე მეორე სახის ტრანსპორტით; თუ $x_1>100$, მაშინ ტვირთის გადაზიდვა ხელსაყრელი იქნება მეორე სახის ტრანსპორტით; თუ მანძილი 100 კმ-ის ტოლია, მაშინ ორივე ტრანსპორტის შემთხვევაში დანახარჯები ერთი და იგივეა და უდრის 40 ლარს.

ამოცანა 9. (კომპლექსური საწარმოს მუშაობის ოპტიმალური პროგრამის შედგენა).მექანიკურ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია დაამზადოს A სახის მანქანისათვის ნაწილების 60 კომპლექტი ან B სახის მანქანისათვის ნაწილების 120 კომპლექტი. ამწყობ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია ააწყოს A სახის 120 მანქანა ან B სახის 80 მანქანა. შევადგინოთ ორივე საამქროს მუშაობის ყველაზე ოპტიმალური და

ეკონომიური პროგრამა, თუ თითოეული საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ A და B სახის გამოშვებულ პროდუქციებს შორის დამოკიდებულება წრფივია. (ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიური პროგრამა არის მუშაობის ისეთი რეჟიმი, როდესაც მექანიკური საამქრო ერთ თვეში აწარმოებს n რაოდენობის A და m რაოდენობის B სახის კომპლექტებს და ამწყობი საამქროც ერთ თვეში აწყობს n რაოდენობის A სახის და m რაოდენობის B სახის მანქანებს).

ამოხსნა. აქაც გამოვიყენოთ გრაფიკული მეთოდი. Ox ღერძზე გადავზომოთ A სახის პროდუქციის რაოდენობა, ხოლო Oy ღერძზე – B სახისა. პირობის თანახმად მექანიკური საამქროს მიერ გამოშვებული A და B სახის კომპლექტებს შორის დამოკიდებულების წრფე (60; 0) და (0; 120) წერტილებზე გადის. ამიტომ შესაბამისი წრფის განტოლება იქნება

$$\frac{x}{60}+\frac{y}{120}=1, \text{ ანუ } 2x+y=120.$$

ეს განტოლება ნიშნავს შემდეგს: მექანიკური საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია ერთ თვეში აწარმოოს x კომპლექტი A სახის მანქანისათვის და $y=120-2x$ კომპლექტი B სახის მანქანისათვის.

ასევე, ამოცანის პირობის თანახმად, ამწყობი საამქროს მიერ გამოშვებული A და B სახის მანქანების რაოდენობებს შორის დამოკიდებულება აღიწერება წრფით, რომელიც (120; 0) და (0; 80) წერტილებზე გადის. ამიტომ მისი განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში იქნება

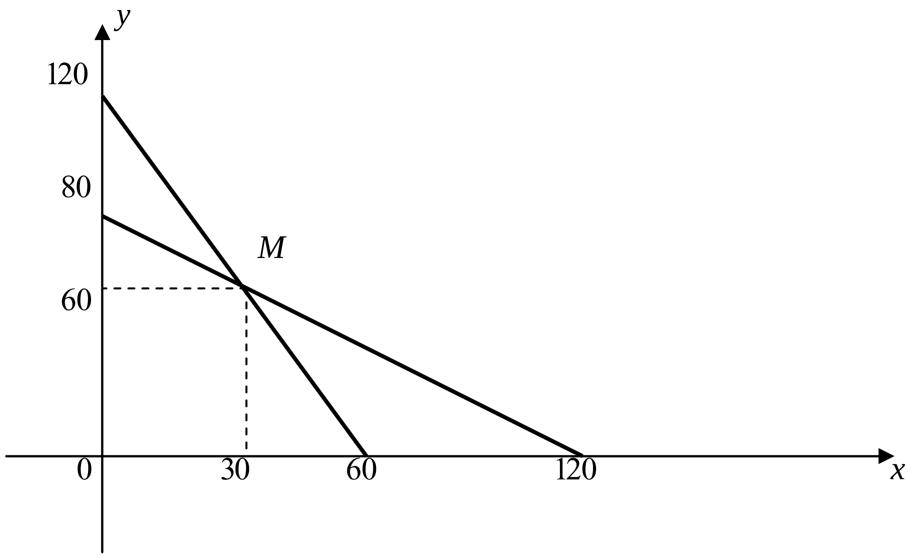
$$\frac{x}{120}+\frac{y}{80}=1, \quad \text{ანუ } 2x+3y=240 \ .$$

ამრიგად, ამწყობი საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ თუ ერთ თვეში იგი გამოუშვებს x რაოდენობის A სახის მანქანას, მაშინ მან უნდა გამოუშვას $y=\frac{1}{3}(240-2x)$ რაოდენობის B სახის მანქანა.

ავაგოთ მიღებული წრფეების გრაფიკები და შევუდგეთ ანალიზს (ნახ. 7). ეს ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს M წერტილში. ცხადია, რომ მისი კოორდინატები უნდა მოვძებნოთ შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 2x+y=120 \\ 2x+3y=240 \end{cases}.$$

მარტივად მივიღებთ, რომ სისტემის ამონახსნია x=30 და y=60. ე.ი. $M(30;60)$.



ნახ. 7

რადგან M წერტილი ორივე გრაფიკს ეკუთვნის, ეს ნიშნავს, რომ მექანიკურ საამქროს თავისი სიმძლავრის პირობებში შეუძლია აწარმოოს 30 კომპლექტი A სახის მანქანისათვის და 60 კომპლექტი B სახის მანქანისათვის, ხოლო ამწყობ საამქროს შეუძლია გამოუშვას 30 ცალი A სახის მანქანა და 60 ცალი B სახის მანქანა. ამიტომ $M(30; 60)$ წერტილი იძლევა ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიური მუშაობის პროგრამას, რომლის მოძებნაც იყო ჩვენი მიზანი.

§2.2. მოთხოვნისა და მიწოდების ანალიზი. აქამდე გადმოცემული მათემატიკური მასალა სრულიად საკმარისია იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ საბაზრო ეკონომიკის ერთი მეტად მნიშვნელოვანი საკითხი, რომელსაც მიწოდებისა და მოთხოვნის წონასწორობას უწოდებენ.

შემოვიღოთ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციათა ცნება.

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე ფიქსირებულ ნაწარმზე არის Q. ცხადია, Q არის რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოთხოვნილი ნაწარმის რაოდენობას და იზომება გარკვეული ერთეულებით. აღვნიშნოთ ერთეული პროდუქციის საბაზრო ფასი P სიმბოლოთი.

საბაზრო ეკონომიკის პირობებში მოთხოვნა Q დამოკიდებულია პროდუქციის საბაზრო P ფასზე

$$Q = f(P). \tag{2.1}$$

f ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ან ეკონომიკური თეორიიდან ან საბაზრო მონაცემებიდან. (2.1) ტიპის დამოკიდებულებას უწოდებენ **მოთხოვნის ფუნქციას** და ამის მისათითებლად f-ს ინდექსად მიუწერენ D ასოს (ინგლ. ***Demand function***):

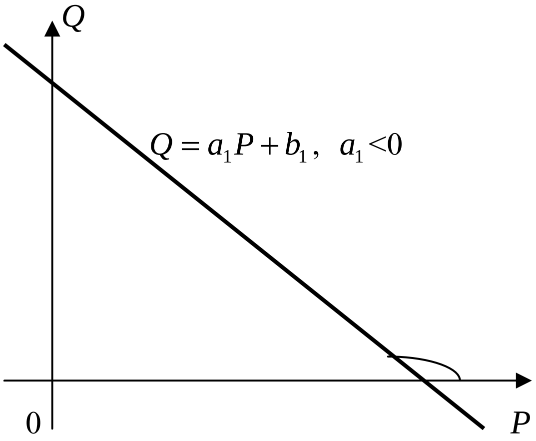
$$Q = f_D(P). \tag{2.2}$$

საზოგადოდ, f_D შეიძლება ძალიან რთული ფუნქცია იყოს. იგი დამოკიდებულია P ფასზე, მომხმარებლის Y შემოსავალზე, ალტერნატიული პროდუქციის P_S ფასზე, დამატებითი საქონლის P_C ფასზე, რეკლამის A დანახარჯზე, მომხმარებელთა T გემოვნებაზე და სხვ.

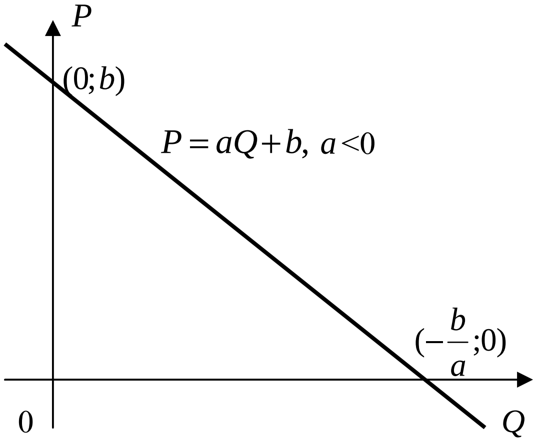
ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როდესაც f_D წრფივი ფუნქციაა P-ს მიმართ, კერძოდ,

$$Q = f_D(P) = a_1P + b_1, \tag{2.3}$$

სადაც a_1 და b_1 რაიმე კონკრეტული მუდმივებია, რომლებსაც ეკონომიკაში პარამეტრებს უწოდებენ. რეალურ ცხოვრებაში რაიმე პროდუქციაზე ფასის ზრდა იწვევს ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის შემცირებას, ე.ი. (3) ფუნქცია უნდა იყოს კლებადი. ეს კი ნიშნავს, რომ a_1<0. ამიტომ შესაბამისი გრაფიკი OP ღერძის დადებით მიმართულებასთან ბლაგვ კუთხეს შეადგენს (ნახ. 8)



ნახ. 8



ნახ. 9

ტრადიციულად, ეკონომისტები მოთხოვნის ფუნქციას წერენ არა (2.2) სახით, არამედ შემდეგნაირად

$$P = g_D(Q)$$

ე.ი. ფასს გამოსახავენ როგორც მოთხოვნის ფუნქციას. ეს ტოლფასია იმისა, რომ (2.2) განტოლებიდან გამოვსახოთ P ცვლადი Q ცვლადის

საშუალებით. ამის შესაბამისად, გრაფიკის აგების დროს ორდინატთა ღერძზე გადაზომავენ P ფასს, აბსცისათა ღერძზე კი $-Q$ მოთხოვნას.

(2.3) წრფივი დამოკიდებულებიდან მარტივად მივიღებთ

$$P = g_D(Q) = aQ + b, \tag{2.4}$$

სადაც $a = \dfrac{1}{a_1}$, $b = -\dfrac{b_1}{a_1}$. შევნიშნოთ, რომ, რადგან a_1 უარყოფითი სიდიდეა, a პარამეტრიც უარყოფითია. ამიტომ (2.4) ფუნქცია კლებადია და მის შესაბამის წრფეს ნახ. 9-ზე გამოსახული მდებარეობა ექნება (იგი OQ ღერძთან შადგენს ბლაგვ კუთხეს). მას უწოდებენ მოთხოვნის წირს (წრფეს).

ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ $P \geq 0$ და $Q \geq 0$. ამასთან, P=0 ნიშნავს, რომ, ფაქტობრივად, პროდუქცია უფასოდ ეძლევა ყველა მსურველს, ხოლო Q=0 ნიშნავს, რომ მოთხოვნა განსახილველ პროდუქციაზე არ არსებობს.

გავარკვიოთ b პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი (2.4) ტოლობაში.

ცხადია , როდესაც $P = b$, მაშინ $Q = 0$, ე.ი. როდესაც ფასი არის b-ს ტოლი, მაშინ განსახილველ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ არსებობს (რაღაც მიზეზების გამო, მაგალითად, მაღალი ფასის გამო). ამრიგად b პარამეტრი დადებითია და პროდუქციის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ b რიცხვით.ასევე ცხადია, როდესაც $P = 0$, მაშინ $Q = -\dfrac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

ახლა განვიხილოთ მიწოდების ფუნქცია (ინგლ. ***Supply function***). იგი შესაბამისობას ამყარებს რაიმე პროდუქციის ერთეულის P ფასსა და ამავე პროდუქციის იმ Q რაოდენობას შორის, რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. ეკონომიკური თეორია და რეალური ცხოვრება უჩვენებს, რომ ფასის ზრდას მოსდევს მიწოდების ზრდა. ამიტომ მიწოდების ფუნქცია

$$P = g_S(Q) \tag{2.5}$$

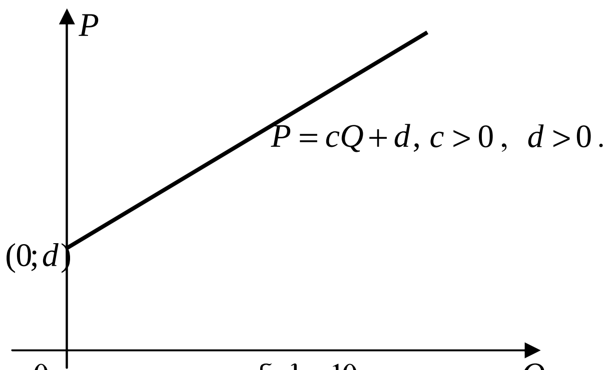
ზრდადი ფუნქციაა.

აქაც განვიხილავთ იმ კონკრეტულ შემთხვევას, როცა $g_S(Q)$ წრფივი ფუნქციაა, ე.ი.

$$P = g_S(Q) = cQ + d, \tag{2.6}$$

სადაც c და d მუდმივებია. ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ c კუთხური კოეფიციენტი დადებითია. რადგან ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ d პარამეტრიც დადებითია. ამრიგად, (2.6) ტოლობაში $c>0$, $d>0$.

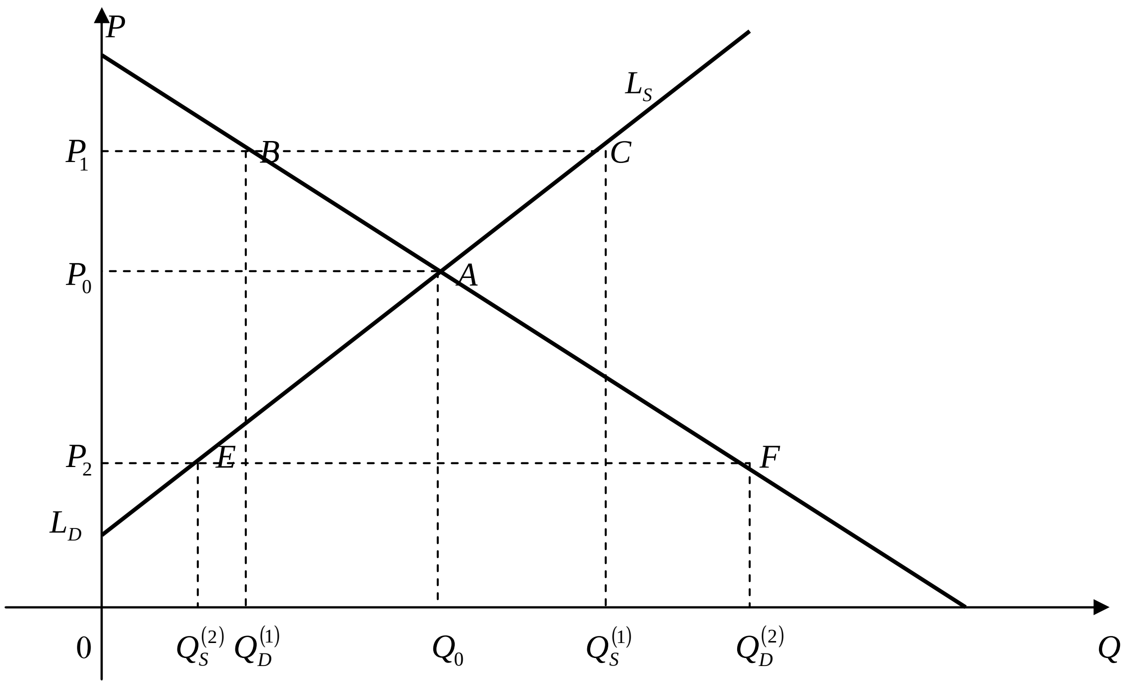
აქედან დავასკვნით, რომ შესაბამისი გრაფიკი OQ ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს და OP ღერძს კვეთს d წერტილში (ნახ. 5). ამ გრაფიკს მიწოდების წირი (წრფე) ეწოდება.



ნახ. 10

ზემოთ მოტანილი მსჯელობიდან (ნახ. 10) გამომდინარეობს, რომ მწარმოებელი დაგეგმავს პროდუქციის შეტანას ბაზარზე მხოლოდ მაშინ, თუ ფასი გადააჭარბებს d სიდიდეს.

ავაგოთ ახლა ერთსა და იმავე OPQ სიბრტყეზე მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წირები (ნახ. 11).



ნახ. 11

ჩავატაროთ ამ ნახაზის ანალიზი.

ჯერ განვიხილოთ P_1 ფასის შესაბამისი B და C წერტილები L_D და L_S წრფეებზე. რადგან $B \in L_D$ და $C \in L_S$, ამიტომ P_1 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(1)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(1)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(1)} < Q_S^{(1)}$, ე.ი. მოთხოვნა ჩამორჩება მიწოდებას. ეს კი ნიშნავს, რომ ბაზარი გაჯერებულია მიწოდებული პროდუქციით და ამიტომ ეს პროდუქცია მთლიანად არ გაიყიდება. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ბაზარზე გვაქვს ჭარბი პროდუქცია.

ახლა განვიხილოთ P_2 ფასის შესაბამისი $E \in L_S$ და $F \in L_D$ წერტილები. ცხადია, რომ P_2 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(2)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(2)}$ მიწოდება. ამასთან, $Q_D^{(2)} > Q_S^{(2)}$, ე.ი. მოთხოვნა ჭარბობს მიწოდებას. ეს კი ნიშნავს, რომ მოთხოვნა მთლიანად ვერ კმაყოფილდება და საქმე გვაქვს პროდუქციის დეფიციტთან. ეს ორივე ვარიანტი არასასურველია საბაზრო ეკონომიკისათვის.

ახლა განვიხილოთ P_0 ფასის შესაბამისი სიტუაცია. მას შეესაბამება L_D და L_S წრფეების საერთო A წერტილი, რომლის აბსცისაა Q_0, ბუნებრივია, რომ P_0 ფასის შესაბამისი Q_0 მოთხოვნა და Q_0 მიწოდება ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. მოთხოვნა ემთხვევა მიწოდებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ , რომ ბაზარი გაწონასწორებულია (იყიდება იმ რაოდენობის პროდუქცია, რა რაოდენობის პროდუქციაც მიეწოდება ბაზარს). ამ P_0 ფასს ეწოდება წონასწორობის ფასი, შესაბამის Q_0-ს კი – წონასწორობის სიდიდე (მოცულობა).

აშკარაა, რომ გაწონასწორებული ბაზარი წარმოადგენს იდეალურ ვარიანტს. ამ იდეალური ვარიანტის შესაბამისი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე განისაზღვრება შემდეგი სისტემის ამოხსნით

$$\begin{cases} P = aQ + b \\ P = cQ + d \end{cases},$$

რომლის (P_0, Q_0) ამონახსნიც განსაზღვრავს მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წრფეების საერთო A წერტილის კოორდინატებს.

§2.3. ეროვნული შემოსავლის განსაზღვრა

გავეცნოთ მიკროეკონომიკის ერთ-ერთ კონკრეტულ ამოცანას, რომელიც შეეხება ეროვნული (ნაციონალური) შემოსავლის ანალიზს.

ვთქვათ ეროვნულ ეკონომიკას გააჩნია ორი სექტორი: **საოჯახო მეურნეობები და ფირმები.**პროდუქციის წარმოებისა და მომსახურებისათვის ფირმები ისეთ რესურსებს იყენებენ, როგორიცაა მიწა, კაპიტალი და შრომა. ამ რესურსებს **წარმოების ფაქტორები** ეწოდებათ და, როგორც წესი, ისინი საოჯახო მეურნეობების სექტორს მიეკუთვნებიან. აღნიშნულ შემთხვევაში **ეროვნული შემოსავალი** იმ თანხების ნაკადია, რომლებსაც ფირმები უხდიან საოჯახო მეურნეობებს წარმოების ფაქტორებისათვის.

საოჯახო მეურნეობებს შეუძლიათ მიღებული თანხა მოიხმარონ ორი მიმართულებით: 1) მათ შეუძლიათ თანხის ნაწილით შეიძინონ ფირმების მიერ წარმოებული პროდუქცია ან ისარგებლონ ფირმების მომსახურებით; 2) დაზოგილი თანხა ანაბრების ან სხვა სახით შეინახონ ან დააბანდონ, მაგალითად, ბანკებში, აქციებში და ა. შ.

ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა მიერ მოხმარებული C თანხისა და დაზოგილი S თანხის რაოდენობები დამოკიდებულია ეროვნულ Y შემოსავალზე, ე.ი.

$$C = f(Y),$$

$$S = g(Y).$$

აქ f-ს **მოხმარების (დანახარჯის) ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო g-ს – დანაზოგის ფუნქცია. რეალურ ცხოვრებაში Y-ის ზრდას მოსდევს როგორც მოხმარების ხარჯების, ისე დანაზოგების ზრდა, ამიტომ f და g ზრდადი ფუნქციებია.

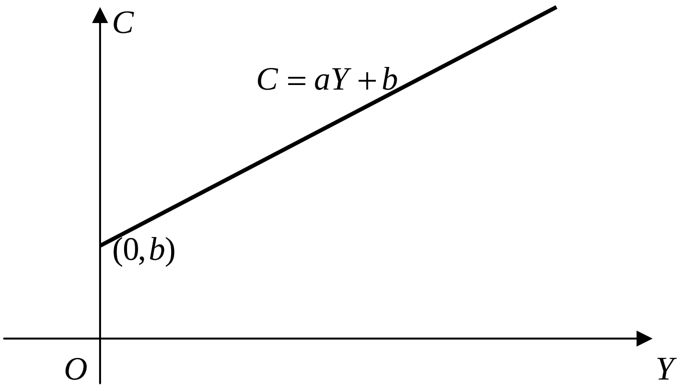
ჯერ გავეცნოთ მოხმარების f ფუნქციას. ვთქვათ, მოხმარების C დანახარჯი წრფივადაა დამოკიდებული Y შემოსავალზე, ე.ი.

$$C = aY + b. \tag{2.7}$$

ამ ფუნქციის ზრდადობიდან გამომდინარეობს, რომ a უნდა იყოს დადებითი. ამასთან, $a < 1$, რადგან, საზოგადოდ, დანახარჯმა არ უნდა გადააჭარბოს შემოსავალს. b პარამეტრს **ავტონომიური დანახარჯი** ეწოდება და იგი დადებითია. ამრიგად, (2.7) ტოლობაში a და b პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$0 < a < 1, \quad b > 0. \tag{2.8}$$

ამიტომ მოხმარების ფუნქციის გრაფიკს ნახ. 12-ზე ნაჩვენები სახე ექნება.



ნახ. 12

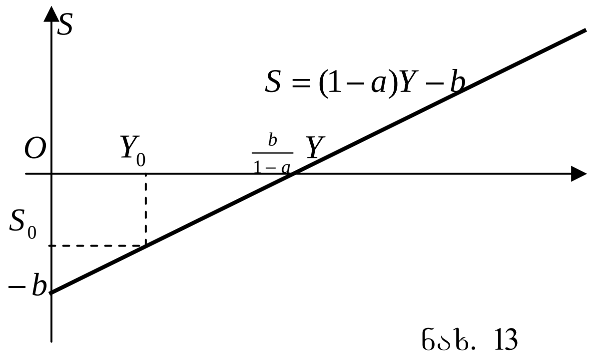
ცხადია, რომ საოჯახო მეურნეობათა დანახარჯებისა და დანაზოგების ჯამი ემთხვევა ეროვნულ შემოსავალს (**ბალანსის განტოლება**)

$$C + S = Y \tag{2.9}$$

ამიტომ (2.7) ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$S = (1-a)Y - b\,, \tag{2.10}$$

რომელსაც **დანაზოგის ფუნქცია** ეწოდება. მისი შესაბამისი გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ. 13-ზე. (2.10) ფორმულიდან დავასკვნით, რომ დანაზოგი დადებითია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეროვნული შემოსავალი გადააჭარბებს გარკვეულ სიდიდეს, კერძოდ, $\frac{b}{1-a}$ სიდიდეს.



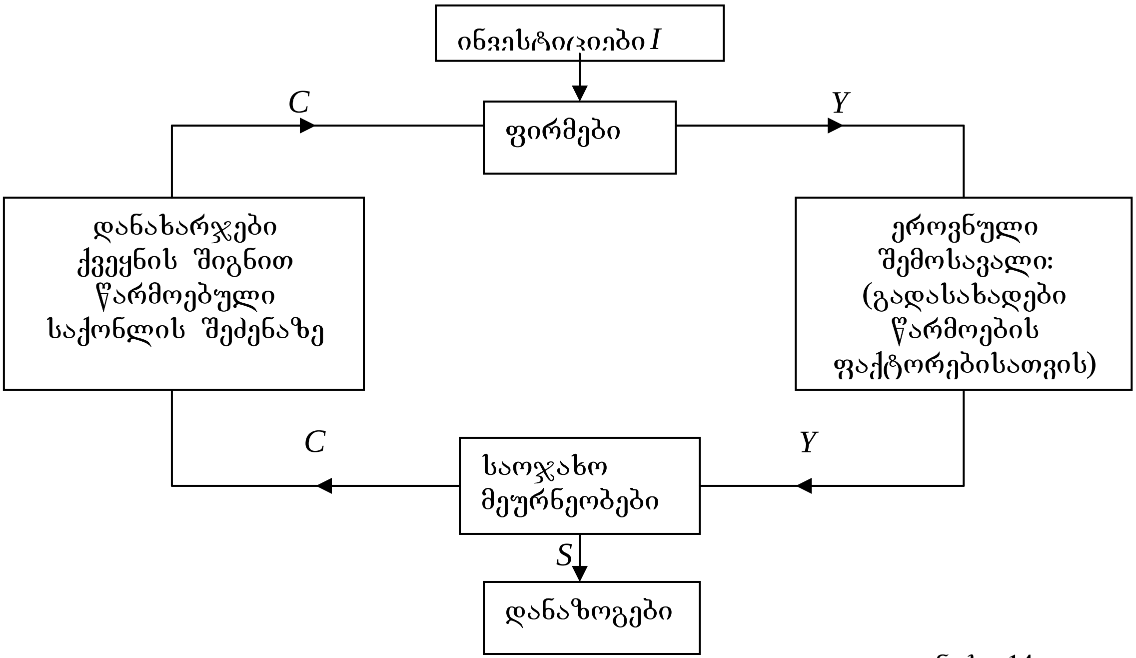
ნახ. 13

მრავალი ეკონომიკური ფუნქციისაგან განსხვავებით, დანაზოგის ფუნქციამ შეიძლება მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობაც. კერძოდ, როდესაც $0 < Y < \frac{b}{1-a}$, მაშინ დანაზოგი უარყოფითია. მაგალითად, ნახ. 13-ზე Y_0-ის შესაბამისი S_0 დანაზოგი უარყოფითია.

ეს რეალურ ცხოვრებაში იმ ფაქტზე მიუთითებს, რომ როდესაც შემოსავალი საკმარისი არაა აუცილებელი დანახარჯების დასაფარავად,

მაშინ დანახარჯების ნაწილი იფარება, მაგალითად, ანაბრებიდან დანაზოგების მოხსნით.

გამოვსახოთ ეროვნული ეკონომიკის განხილული უმარტივესი მოდელი შემდეგი სქემის სახით (ნახ. 14).



ნახ. 14

ვთქვათ, ფირმები გეგმავენ რაიმე კონკრეტული, ფიქსირებული $I = I^*$ რაოდენობის თანხის ინვესტიციას. მაშინ (იხ. ნახ. 14) უჯრედში “ფირმები” შედის C და I^* თანხების ნაკადი, ხოლო გამოდის Y თანხის ნაკადი. თუ შესრულებულია ტოლობა

$$C + I^* = Y \tag{2.11}$$

მაშინ ამბობენ, რომ **ეკონომიკა წონასწორობაშია**. როგორც აღვნიშნეთ, აქ I^* არის ფიქსირებული მუდმივი სიდიდე, რომელიც დაგეგმილია მოდელის გარეთ, ხოლო C და Y ცვლადი სიდიდეებია. შევნიშნოთ, რომ ეკონომიკის წონასწორობის შემთხვევაში დანაზოგების სიდიდე (S) ემთხვევა ინვესტიციის სიდიდეს (I), რასაც ადვილად დავასკვნით (2.9) და (2.11) ტოლობების შედარებით.

თუ დავუშვებთ, რომ C დანახარჯი და Y შემოსავალი ერთმანეთთან დაკავშირებულია (2.7) ტოლობით, სადაც a და b ცნობილი მუდმივებია, მაშინ ეკონომიკის წონასწორობის (2.11) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ ორუცნობია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} C = aY + b \\ Y = C + I^* \end{cases}, \qquad \text{ანუ} \qquad \begin{cases} C = aY + b \\ C = Y - I^* \end{cases}. \tag{2.12}$$

ამ სისტემის ამონახსნი $(Y_0; C_0)$ განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონაწორობის შესაბამის Y_0 შემოსავლისა და C_0 დანახარჯის დონეებს.

ამოცანა 9. ვიპოვოთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების წონასწორობის დონე, თუ მოხმარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$C = 0{,}7Y + 20$$

და დაგეგმილი საინვესტიციო თანხაა $I = 10$ (ერთეული)

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (2.12) განტოლებათა სისტემა. ჩვენს შემთხვევაში, ამოცანის პირობის თანახმად, a=0,7, b=20, I^*=10. ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{cases} C = 0{,}7Y + 20 \\ Y = C + 10 \end{cases}.$$

ამ სისტემის ამოხსნით დავადგენთ, რომ Y_0=100 და C_0=90. ამ რიცხვებით განისაზღვრება ეკონომიკის წონასწორობის შესაბამისი ეროვნული შემოსავალი და დანახარჯები.

ნახ. 14-ზე გამოსახული მოდელი უფრო რთულდება, თუ მასში გავითვალისწინებთ **სახელმწიფო დანახარჯებს** (G) და **საგადასახადო მოსაკრებლებს (ბეგარას)** (T). სქემატურად ეს გამოსახულია ნახ. 15-ზე.

თანხა, რომელიც საოჯახო მეურნეობებს რჩება საქონლის შესაძენად და დანაზოგისათვის უკვე არის არა Y, არამედ $Y - T$.

სიდიდეს

$$Y_d = Y - T, \tag{2.13}$$

ეწოდება **წმინდა შემოსავალი** (შემოსავალი გადასახადების გადახდის შემდეგ).

ვთქვათ, $G = G^*$ არის რაიმე ფიქსირებული სახელმწიფო დანახარჯების სიდიდე, $I = I^*$ კი – ფიქსირებული ინვესტიციებია. მაშინ**ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის პირობა** ასე დაიწერება

$$C + I^* + G^* = Y. \tag{2.14}$$

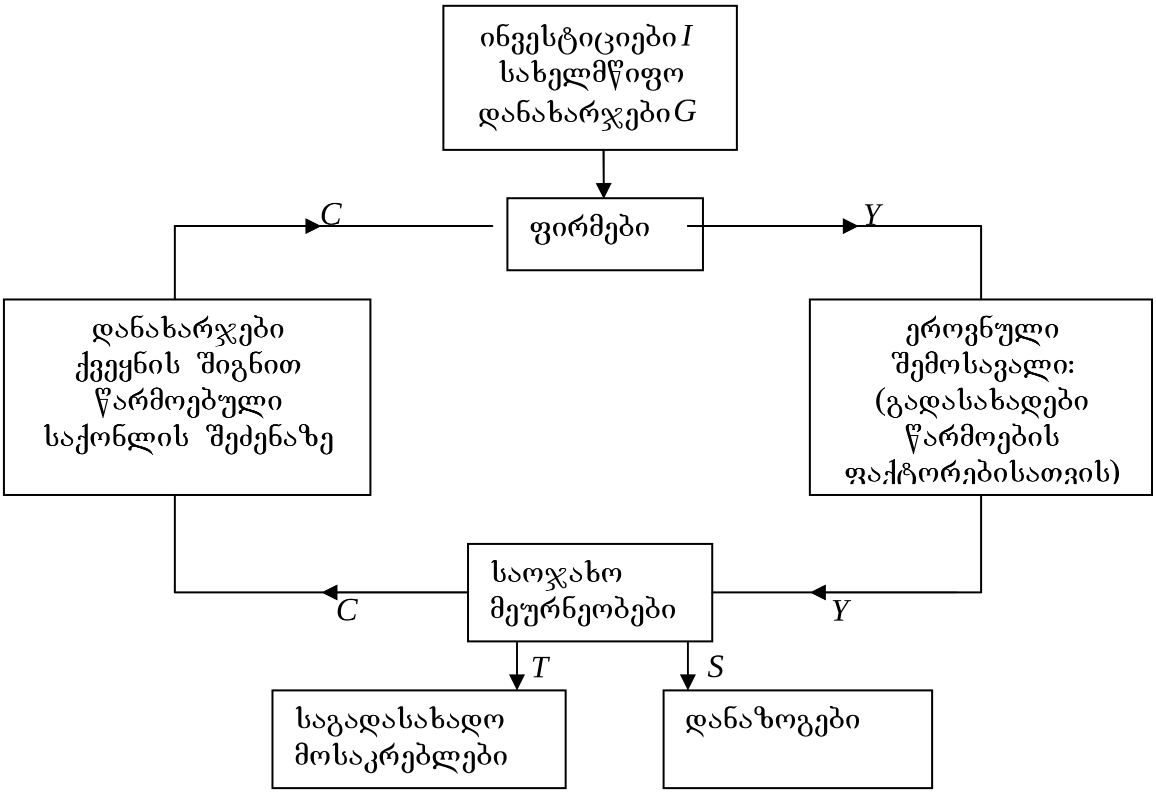
“საოჯახო მეურნეობების” უჯრედის ბალანსის განტოლება განსახილველ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება (იხ. ნახ 15)

$$C + S + T = Y. \tag{2.15}$$

ახლა უკვე წრფივი კავშირი C დანახარჯებსა და წმინდა Y_d შემოსავალს შორის შემდეგ სახეს მიიღებს

$$C = aY_d + b \text{ ანუ } C = a(Y-T)+b, \qquad (2.16)$$

სადაც Y_d განსაზღვრულია (2.13) ფორმულით.



ნახ. 15

თვით საგადასახადო T მოსაკრებლები დამოკიდებულია ეროვნულ Y შემოსავალზე. ძალიან ხშირად ამ დამოკიდებულებას (საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქციას) იღებენ წრფივი სახით

$$T = h(Y) = kY + T^*, \qquad (2.17)$$

სადაც k და T^* ფიქსირებული მუდმივებია.

რადგან საგადასახადო მოსაკრებლები არ აღემატება შემოსავალს, ამიტომ $0 \le k < 1$. გარდა ამისა, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, $T^* > 0$.

(2.13)-(2.17) განტოლებები გვაძლევს ხუთი წრფივი ალგებრული განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას ხუთი (Y, T, Y_d, C და S) ცვლადის მიმართ:

$$\begin{cases} Y_d = Y - T & \text{(წმინდა შემოსავალი)} \\ Y = C + I^* + G^* & \text{(წონასწორობის განტოლება)} \\ Y = C + S + T & \text{(ბალანსის განტოლება)} \\ C = aY_d + b & \text{(მოხმარების ფუნქცია)} \\ T = kY + T^* & \text{(საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია)} \end{cases} \qquad (2.18)$$

აქ I^*, G^*, a, b, k და T^* მოცემული ფიქსირებული რიცხვებია.

ეს სისტემა არის **ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა**, როდესაც გათვალისწინებულია სახელმწიფო დანახარჯები და საგადასახადო მოსაკრებლები.

ამოცანა 10. დავადგინოთ ეროვნული შემოსავლის წონასწორობის დონე, თუ ცნობილია, რომ: $G^* = 30$ (მთავრობის დანახარჯები), $I^* = 40$ (ინვესტიციები), $C = 0{,}8Y_d + 60$ (მოხმარების ფუნქცია), $T = 0{,}3Y + 20$ (საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია).

ვიპოვოთ ამ წონასწორობის შესაბამისი S დანაზოგის დონე, საგადასახადო T თანხა, წმინდა Y_d შემოსავალი და მოხმარების C დონე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად $G^* = 30$, ხოლო $I^* = 40$.ამიტომ წონასწორობის (2.14) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$C + 40 + 30 = Y$$

ანუ

$$C = Y - 70. \qquad (2.19)$$

გავიხსენოთ, რომ $Y_d = Y - T$, გადავწეროთ ამოცანის პირობებში მოცემული მოხმარების ფუნქცია და (2.19) განტოლება ერთი სისტემის სახით

$$\begin{cases} C = Y - 70 \\ C = 0{,}8(Y - T) + 60. \\ T = 0{,}3Y + 20 \end{cases} \qquad (2.20)$$

რადგან პირველ და მეორე განტოლებაში მარცხენა მხარეები ერთი და იგივეა, ამიტომ მარჯვენა მხარეთა გატოლება გვაძლევს

$$Y - 70 = 0{,}8Y - 0{,}8T + 60$$

ანუ

$$0{,}2Y + 0{,}8T = 130.$$

დავაჯგუფოთ ეს უკანასკნელი განტოლება (2.20) სისტემის მესამე განტოლებასთან

$$\begin{cases} T = 0{,}3Y + 20 \\ 0{,}2Y + 0{,}8T = 130 \end{cases}.$$

მივიღეთ ორუცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემა. პირველი განტოლებიდან T-ს მნიშვნელობის მეორეში ჩასმით მივიღებთ

$$0{,}2Y + 0{,}8(0{,}3Y + 20) = 130$$

აქედან მარტივად ვიპოვით

$$Y = \frac{114}{0{,}44} \approx 259{,}1,$$

რაც ეროვნული შემოსავლის წონასწორობის დონეა. შესაბამისი საგადასახადო თანხა გამოითვლება ამოცანაში მოცემული T ფუნქციის საშუალებით

$$T \approx 0{,}3 \cdot 259{,}1 + 20 = 97{,}73.$$

რადგანწმინდა შემოსავალი გამოითვლება (2.13) ფორმულით, ამიტომ მივიღებთ

$$Y_d = Y - T \approx 259{,}1 - 97{,}73 = 161{,}37.$$

გამოვთვალოთ ახლა მოხმარების C დონე (2.19) ფორმულით

$$C = Y - 70 \approx 259{,}1 - 70 = 189{,}1.$$

და ბოლოს , დანაზოგების S თანხის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (2.15) ფორმულა. მივიღებთ

$$S = Y - T - C \approx 259{,}1 - 97{,}73 - 189{,}1 = -27{,}73.$$

ამრიგად, ამოცანის პირობებით მოცემული მოდელის შესაბამისი ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობა განისაზღვრება რიცხვებით: $Y = 259{,}1$, $T = 97{,}73$, $Y_d == 161{,}37$, $C = 189{,}1$, $S = -27{,}73$.

დავუბრუნდეთ ლექციის დასაწყისში შემოყვანილ ორ სექტორიან მოდელს, რომლის წონასწორობის მდგომარეობა აღიწერება განტოლებებით

$$Y = C + I, \tag{2.21}$$

$$C = aY + b. \tag{2.22}$$

ადრე ჩვენ ვიხილავდით შემთხვევას, როდესაც I იყო მუდმივი. რეალურად ინვესტიციები დამოკიდებულია დაბანდების სარგებლის r განაკვეთზე. ცხადია, სარგებლის რაც უფრო მეტ განაკვეთს ითხოვს ინვესტორი, მით უფრო ნაკლები იქნება ფირმების მოთხოვნა საინვესტიციო თანხაზე. ეს კი ნიშნავს, რომ I ინვესტიცია r პარამეტრის კლებადი ფუნქციაა. კერძოდ, თუ მათ შორის დამოკიდებულება წრფივია, ე.ი.

$$I = cr + d\,, \tag{2.23}$$

მაშინ $c < 0$ (კლებადობის გამო) და $d > 0$ (ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე). აქ c და d ფიქსირებული მოცემული რიცხვებია. ამასთან, d-ს **ავტონომიური ინვესტიცია** ეწოდება.

ზემოთ ამოწერილი სამი განტოლება – (2.21), (2.22) და (2.23) – შეიცავს ოთხ უცნობს (Y, C, I, r). ეს საშუალებას იძლევა ერთმანეთთან დავაკავშიროთ Y და r სიდიდეები. მართლაც, თუ (2.22) და (2.23) ტოლობებიდან C-ს და I-ს მნიშვნელობებს შევიტანთ (2.21) ტოლობაში, მივიღებთ

$$Y = aY + b + cr + d$$

ანუ

$$(1 - a)Y - cr = b + d\,. \tag{2.24}$$

ამ ტოლობას, რომელიც ეროვნული შემოსავლის Y და სარგებლის განაკვეთის r სიდიდეებს აკავშირებს IS თანაფარდობა ეწოდება (ინგ. $Investment - Saving \quad schedule$)

საჭიროა კიდევ ერთი განტოლება Y და r უცნობების მიმართ, რომ ისინი C და I უცნობებთან ერთად ცალსახად განისაზღვროს. ეს კავშირი მყარდება ფულის ბაზრის წონასწორობით.

ამბობენ, რომ ფულის ბაზარი წონასწორობაშია, თუ ბაზარზე მიწოდებული ფულის M_s რაოდენობა ტოლია ფულზე ბაზრის მოთხოვნის M_d რაოდენობისა, ე.ი.

$$M_s = M_D\,.$$

ბაზარზე მიწოდებულ ფულში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ქაღალდის ბანკნოტები და ლითონის მონეტები, რომლებიც ყოველდღიურ ბრუნვაშია. აგრეთვე ის ფულიც, რომელიც ინახება საბანკო დეპოზიტებზე (ანგარიშებზე). ამ ფულს აკონტროლებს სახელმწიფოს ცენტრალური ბანკი და მისი რაოდენობა ითვლება რაღაც ფიქსირებულ M_S^* სიდიდედ. ამრიგად, ფულის M_s რაოდენობა მუდმივი M_S^* სიდიდის ტოლია

$$M_s = M_S^*\,.$$

მეორე მხრივ, ფულზე მოთხოვნა ხორციელდება სამი წყაროდან (რომლებსაც კეინზის ანალიზის კატეგორიებს უწოდებენ) :

1) გარიგებისათვის საჭირო ფულზე მოთხოვნა (ყოველდღიური საქონელგაცვლისა და მოხმარებისათვის);

2) გაუთვალისწინებელი მიზნებისათვის ფულზე მოთხოვნა (მაგალითად საგანგებო შემთხვევის დაფინანსებისათვის);

3) სპეკულაციური მიზნებისათვის ფულზე მოთხოვნა (ეს არის სარეზერვო თანხები იმ შემთხვევისათვის, როცა კერძო პირები ან ფირმები გადაწყვეტილებებს მიიღებენ ინვესტიციების ალტერნატიულ სფეროში ჩასადებად, როგორიცაა, მაგალითად, სახელმწიფო აქციები და ა. შ.)

პირველ და მეორე პუნქტში მითითებულ მოთხოვნების ჯამს ერთ სიდიდედ აერთიანებენ და გულისხმობენ, რომ ეს ჯამი (აღვნიშნოთ იგი L_1 -ით) ეროვნული Y შემოსავლის პროპორციულია, ე.ი.

$$L_1 = k_1 Y, \tag{2.25}$$

სადაც k_1 არის დადებითი მუდმივი.

მოთხოვნის მესამე პუნქტში აღწერილ სიდიდეს (აღვნიშნოთ იგი L_2-ით) უკავშირებენ სარგებლის r განაკვეთს შემდეგი თანაფარდობით

$$L_2 = k_2 r + k_3, \tag{2.26}$$

სადაც $k_2 < 0$ და $k_3 > 0$ ფიქსირებული მუდმივებია. ფულზე მოთხოვნა სპეკულაციური მიზნებისათვის რომ r-ის კლებადი ფუნქციაა, ჩვენ ამას ვნახავთ მე-7 თავში (იხ. ამოცანა 39).

ფულზე მთლიანი M_D მოთხოვნა სამივე მოთხოვნის ჯამია, ანუ

$$M_D = L_1 + L_2 = k_1 Y + k_2 r + k_3. \tag{2.27}$$

ამიტომ ფულის ბაზრის წონასწორობის პირობა $M_S = M_D$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$k_1 Y + k_2 r + k_3 = M_S^*. \tag{2.28}$$

ამ ტოლობას, რომელიც ეროვნულ Y შემოსავალსა და სარგებლის r განაკვეთის სიდიდეს აკავშირებს, LM თანაფარდობა ეწოდება (ინგ. *Liquidity - Money schedule*). ეს არის სწორედ ის მეორე განტოლება, რომელიც (2.24) განტოლებასთან ერთად გვაძლევს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას Y და r უცნობებისათვის:

$$\begin{cases} (1-a)Y - cr = b + d \\ k_1 Y + k_2 r = M_S^* - k_3 \end{cases}. \tag{2.29}$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა ყოველთვის ამოხსნადია, რადგან

$$\frac{1-a}{k_1} \neq \frac{-c}{k_2}.$$

ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{1-a}{k_1} > 0$, ხოლო $\frac{-c}{k_2} < 0$. (2.29)

განტოლებათა სისტემა (2.21) – (2.23) ტოლობებთან ერთად მთლიანად განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის ყველა პარამეტრს.

ამოცანა 11. განვსაზღვროთ წონასწორობის შესაბამისი ეროვნული შემოსავალი და საინვესტიციო თანხის სარგებლის განაკვეთი, თუ ცნობილია სასაქონლო ბაზრის შემდეგი მონაცემები:

$$C = 0{,}7Y + 200, \quad I = -30r + 2000,$$

და ფულის ბაზრის შემდეგი ინფორმაცია:

$$M_s = 3000, \quad L_1 = 0{,}2Y, \quad L_2 = -20r + 2000.$$

რა ეფექტს ახდენს ბაზარზე ფულის მიწოდების შემცირება Y და r სიდიდეების წონასწორობის დონეზე?

ამოხსნა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $Y = C + I$ და $L_1 + L_2 = M_S$, მაშინ (23) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} Y = -100r + 7333{,}3 \\ Y = 100r + 5000 \end{cases}. \tag{2.30}$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა ალგებრულად და გრაფიკულად (იხ. ნახ. 5).
ამ სისტემის ამონახსნია

$$\begin{cases} Y_0 = 6166{,}7 \\ r_0 = 11{,}7 \end{cases}.$$

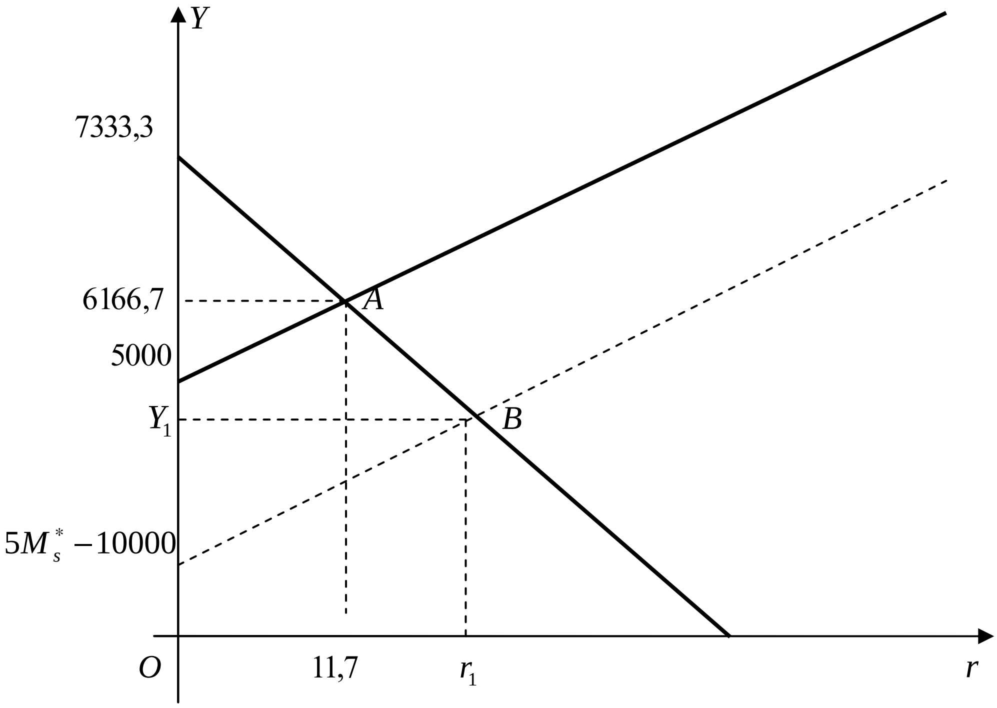
ამრიგად, ეროვნული შემოსავლის შესაბამისი წონასწორობითი დონეა $Y_0 = 6166{,}7$, ხოლო შესაბამისი სარგებლის განაკვეთია $r_0 = 11{,}7$. ახლა გავარკვიოთ, როგორ მოქმედებს წონასწორობაზე ბაზარზე ფულის მიწოდების ანუ M_S^* სიდიდის შემცირება. განვიხილოთ კვლავ (2.29) სისტემის კერძო სახე ჩვენი შემთხვევისათვის, ოღონდ მონაცემად დავტოვოთ M_S^*, რომელიც ნაკლებია 3000-ზე. მივიღებთ

$$\begin{cases} 0{,}3Y + 30r = 2200 \\ 0{,}2Y - 20r = M_S^* - 2000 \end{cases}.$$

შევნიშნოთ, რომ $M_S^* - 2000 < 1000$, რადგან $M_S^* < 3000$. გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგი სახით

$$\begin{cases} Y = -100r + 7333{,}3 \\ Y = 100r + 5M_S^* - 10000 \end{cases}, \qquad (2.31)$$

და ავაგოთ თითოეული განტოლების შესაბამისი გრაფიკი (იხ. ნახ. 16)



ნახ. 16

ცხადია, რომ (2.30) და (2.31) სისტემების პირველი განტოლებები ერთი და იგივეა და მათი გრაფიკები ერთმანეთს დაემთხვევა. რაც შეეხება მეორე განტოლებების შესაბამის წრფეებს, რადგან

$$5M_S^* - 10000 < 15000 - 10000 = 5000,$$

ამიტომ (2.31) სისტემის მეორე განტოლების გრაფიკი მიიღება (2.30) სისტემის მეორე განტოლების გრაფიკის პარალელურად ქვემოთ გადაადგილებით (იგი ნახ. 16-ზე გავლებულია წყვეტილად). ამის შედეგად მივიღებთ, რომ ნაცვლად $A(r_0;Y_0)$ წერტილის კოორდინატებისა, ამონახსნი იქნება $B(r_1;Y_1)$ წერტილის კოორდინატები.

ამიტომ, ცხადია, რომ $Y_1 < Y_0 = 6166{,}7$, ხოლო $r_1 > r_0 = 11{,}7$. ამრიგად, წონასწორობის ახალ მდგომარეობაში, რაც განპირობებულია M_S^* ფულის მიწოდების შემცირებით, ეროვნული შემოსავალი მცირდება, ხოლო საინვესტიციო თანხის სარგებლის განაკვეთი იზრდება.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

- აღწერეთ დანახარჯის წრფივი მოდელი.
- რა პირობებშია მოგების ფუნქცია ზრდადი?
- რას წარმოადგენს ნულოვანი მოგების წერტილი?
- რას ეწოდება ცვეთა? ცვეთის ნორმა?რას ეწოდება მოთხოვნის ფუნქცია და როგორი სახე აქვს მას?
- რაზე შეიძლება იყოს დამოკიდებული მოთხოვნის ფუნქცია?
- როგორი სახე აქვს მოთხოვნის ფუნქციას, როცა მოთხოვნასა და ფასს შორის დამოკიდებულება წრფივია? აჩვენეთ გრაფიკზე.
- გამოარკვიეთ მოთხოვნის ფუნქციაში პარამეტრების ეკონომიკური შინაარსი.
- რას ეწოდება მიწოდების ფუნქცია და როგორი სახე აქვს მას?
- მიუთითეთ მიწოდების ფუნქციაში შემავალი პარამეტრების ეკონომიკური შინაარსი.
- მოთხოვნისა და მიწოდების წირების დახმარებით ახსენით რას ნიშნავს ბაზარზე: ა) ჭარბი პროდუქცია? ბ) პროდუქციის დეფიციტი? გ) წონასწორობა?
- განსაზღვრეთ ეროვნული შემოსავალი, როცა ეროვნულ ეკონომიკას გააჩნია ორი სექტორი.
- დაახასიათეთ მოხმარებისა და დანაზოგის ფუნქციები. განიხილეთ შესაბამისი გრაფიკები.
- როგორი სახე აქვს ბალანსის განტოლებას ორსექტორიანი ეროვნული ეკონომიკისათვის?
- მოიყვანეთ ორსექტორიანი ეროვნული ეკონომიკის სქემა.
- რას ნიშნავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობა? მოიყვანეთ ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა.
- როგორი სახე ექნება ეროვნული ეკონომიკის სქემას, როცა მასში გათვალისწინებულია სახელმწიფო დანახარჯები და საგადასახადო მოსაკრებლები?
- რაზეა დამოკიდებული საგადასახადო მოსაკრებლები? როგორი სახე ექნება მას, როცა ეს დამოკიდებულება წრფივია?

- ამოწერეთ ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის განტოლებათა სისტემა, როდესაც გათვალისწინებულია სახელმწიფო დანახარჯები და საგადასახადო მოსაკრებლები.
- რას ეწოდება IS თანაფარდობა?
- რას ნიშნავს ფულის ბაზრის წონასწორობა?
- მოიყვანეთ კეინზის ანალიზის კატეგორიები.
- რას ეწოდება LM თანაფარდობა?
- IS და LM თანაფარდობის გათვალისწინებით ჩაწერეთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც მთლიანად განსაზღვრავს ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის ყველა პარამეტრს.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 2

1. ფირმა აწარმოებს სკამებს. თითოეული სკამის წარმოებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია 25 ლარი. ფირმის ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 3000 ლარს.

   ა) ააგეთ დანახარჯის წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;

   ბ) რისი ტოლია 100 ცალი სკამის წარმოებაზე გაწეული სრული დანახარჯი?
2. პროდუქციის საცალო ფასია 40 ლარი. რისი ტოლია შემოსავალი, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 300? ააგეთ შესაბამისი წრფივი მოდელი და მისი გრაფიკი.
3. თუ ფირმა გამოუშვებს და გაყიდის 500 ცალ ტელევიზორს, მაშინ მისი შემოსავალი იქნება 80 000 ლარი.

   ა) რისი ტოლია ტელევიზორის საცალო ფასი?

   ბ) ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი;

   გ) რისი ტოლია ფირმის მიერ მიღებული შემოსავალი, თუ გამოშვაბული და გაყიდულია 300 ცალი ტელევიზორი.
4. ფირმის მუდმივი დანახარჯია 400 ლარი. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია 2 ლარი, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია 4 ლარი. ააგეთ მოგების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი. რისი ტოლია მოგება, თუ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა: ა) 100 ცალი; ბ) 200 ცალი; გ) 300 ცალი.

5. ფირმის მუდმივი დანახარჯი შეადგენს 240 ლარს. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია 3,5 ლარი, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია 12 ლარი. ააგეთ შესაბამისი მოგების გრაფიკი.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი;

ბ) რისი ტოლია ნულოვანი მოგების შესაბამისი შემოსავალი და სრული დანახარჯები?

6. ფირმის მუდმივი დანახარჯი შეადგენს 5000 ლარს. პროდუქციის თითოეულ ერთეულზე გაწეული ცვლადი დანახარჯია 3,5 ლარი, ხოლო პროდუქციის საცალო ფასია 6 ლარი. ააგეთ შესაბამისი მოგების გრაფიკი.

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი;

ბ) პროდუქციის რა რაოდენობაა გამოშვებული და გაყიდული, თუ ფირმის მოგებაა 100 ლარი?

გ) რისი ტოლია ზარალი, თუ გამოშვებული და გაყიდულიპროდუქციის რაოდენობაა 1500?

7. დანახარჯების წრფივი მოდელია

$$C(x) = 2{,}8x + 600 .$$

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია 4 ლარი;

ბ) ცნობილია, რომ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 450-ზე ნაკლები. რისი ტოლი უნდა იყოს პროდუქციის საცალო ფასი, რომ ფირმამ არ იზარალოს?

გ) ააგეთ შესაბამისი მოგების წრფივი მოდელის გრაფიკი.

8. დანახარჯების წრფივი მოდელია

$$C(x) = 2{,}5x + 300 .$$

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია 5 ლარი;

ბ) ცნობილია, რომ გამოშვებული და გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 150-ზე ნაკლები. რისი ტოლი უნდა იყოს საცალო ფასი, რომ ფირმამ არ იზარალოს?

გ) ააგეთ შესაბამისი მოგების გრაფიკი.

9. დანახარჯების წრფივი მოდელია

$$C(x) = 5x + 1000 .$$

ა) იპოვეთ ნულოვანი მოგების წერტილი, თუ პროდუქციის საცალო ფასია 7 ლარი;

ბ) ფირმას შეუძლია შეამციროს პროდუქციის თითოეული ერთეულის წარმოებაზე გაწეული ცვლადი დანახარჯები 4 ლარამდე მუდმივი დანახარჯების 1200 ლარამდე გაზრდის ხარჯზე. დაადგინეთ, ხელსაყრელია თუ არა ფირმისათვის ამგვარი ცვლილება, თუ ცნობილია, რომ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა არ იქნება 300-ზე ნაკლები.

10. დანადგარის საწყისი ღირებულებაა 50 000 ლარი, სალიკვიდაციო ღირებულება კი – 5000 ლარი, ხოლო ექსპლოტაციის პერიოდია 9 წელი.
ა) განსაზღვრეთ ცვეთის ნორმა;
ბ) ააგეთ წრფივი ცვეთის მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;
გ) რისი ტოლი იქნება დანადგარის ღირებულება 5 წლის შემდეგ?

11. შენობის საწყისი ღირებულებაა 1 000 000 ლარი, ნარჩენი ღირებულებაა 100 000 ლარი, ხოლო ექსპლუატაციის პერიოდია 50 წელი.
ა) განსაზღვრეთ ცვეთის ნორმა;
ბ) ააგეთ წრფივი ცვეთის მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;
გ) რისი ტოლი იქნება შენობის ღირებულება 40 წლის შემდეგ?

12. წარმოების დანახარჯი გარკვეული საქონლის 100 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 300 ლარს, ხოლო 500 ერთეულის საწარმოებლად – 600 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯი საქონლის 400 ერთეულის საწარმოებლად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯის ფუნქცია წრფივია.

13. ორი სახის ტრანსპორტით გადაზიდვის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით $y = 50x + 150$ და $y = 25x + 250$, სადაც x მანძილია, ხოლო y სატრანსპორტო ხარჯები. როდისაა უფრო ეკონომიური მეორე სახის ტრანსპორტის გამოყენება?

14. წარმოების დანახარჯები გარკვეული საქონლის 200 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 500 ლარს, ხოლო 600 ერთეულის საწარმოებლად – 900 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯები საქონლის 350 ერთეულის საწარმოებლად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯების ფუნქცია წრფივია?

15. ვთქვათ, ერთი და იმავე ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 20 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე ღირს 50 ლარი, ხოლო 50 კმ-ით

დაშორებულ პუნქტამდე კი – 80 ლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა x კმ მანძილზე მოცემული ქალაქიდან, თუ ცნობილია, რომ დამოკიდებულება მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია?

16. ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია საათში აწარმოოს 300 კგ არაჟანი ან 500 კგ ხაჭო. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად გამოუშვაც არაჟანიც და ხაჭოც. შეადგინეთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეს, თუ დამოკიდებულება წარმოებული არაჟანისა და ხაჭოს რაოდენობებს შორის წრფივია.

17. ვთქვათ, რაიმე წარმოებას აქვს 200 ტ ნედლეული, რომელიც უნდა დაიხარჯოს 25 დღის განმავლობაში. იპოვეთ კავშირი დახარჯული ნედლეულისა და გავლილი დღეების რაოდენობას შორის, თუ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

18. ცნობილია, რომ წყალი იყინება $0^\circ C$-ზე (ცელსიუსის სკალით), ანუ $32^\circ F$-ზე (ფარენგეიტის სკალით). ასევე ცნობილი ფაქტია, რომ წყლის დუღილის ტემპერატურაა $100^\circ C$, ანუ $212^\circ F$. იპოვეთ დამოკიდებულება ამ ორი სკალით გაზომილი ტემპერატურის მნიშვნელობებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ეს დამოკიდებულება წრფივია. ამასთან უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს: ა) $30^\circ C$ რამდენი ფარენგეიტია? ბ) $77^\circ F$ რამდენი ცელსიუსია?

19. ქალაქიდან x კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე ტვირთის გადატანის ხარჯები პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y=4x+60$ ფორმულით, მეორე სახის ტრანსპორტით კი – $y=2x+90$ ფორმულით. გამოიკვლიეთ, რომელი სახის ტრანსპორტით უფრო ხელსაყრელია ტვირთის გადატანა?

20. ორი სახის ტრანსპორტით ტვირთის გადაზიდვის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით:

ა) $y=20x+260$ და $y=16x+360$;

ბ) $y=6x+100$ და $y=9x+40$.

სადაც x მანძილია, ხოლო y დანახარჯი. როდისაა უფრო ეკონომიური მეორე სახის ტრანსპორტის გამოყენება?

21. წარმოებაში დასანერგად გამოსცადეს ორი კონვეიერი. ორივე კონვეიერის მუშაობის რეჟიმი ისეთია, რომ დახარჯული ნედლეულის x რაოდენობასა და გამოშვებული პროდუქციის y რაოდენობას შორის დამოკიდებულება წრფივია. კერძოდ, პირველის მუშაობის რეჟიმი აღიწერება ფორმულით $y=5x+50$, მეორისა კი – $y=6x+10$. რომელი კონვეიერის დანერგვაა უფრო ხელსაყრელი საწარმოსათვის?
22. ერთ სამკერვალოში ტანსაცმლის ერთი კომპლექტის შეკერვა ღირს 30 ლარი და მომსახურების ხარჯები შეადგენს 50 ლარს, ხოლო მეორე სამკერვალოში კი – 25 ლარი და მომსახურების ხარჯები კი არის 80 ლარი. რომელ სამკერვალოში უფრო მოსახერხებელია ტანსაცმლის დიდი პარტიის შეკვეთა?
23. მექანიკურ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია დაამზადოს A სახის მანქანისათვის ნაწილების 105 კომპლექტი ან B სახის მანქანისათვის – ნაწილების 210 კომპლექტი. ამწყობ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლიაააწყოს A სახის 280 მანქანა ან B სახის 70 მანქანა. შეადგინეთ ორივე საამქროს მუშაობის ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიური პროგრამა, თუ თითოეული საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ A და B სახის გამოშვებულ პროდუქციებს შორის დამოკიდებულება წრფივია.
24. ააგეთ მოთხოვნის ფუნქციის გრაფიკი, თუ $P=-2Q+50$. იპოვეთ: ა) რა ფასი შეესაბამება $Q=9$ მოთხოვნას? ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც $P=10$? გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ერთი ერთეულით გადიდებისას?
25. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით $P=-4Q+100$. იპოვეთ: ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 10? ბ) რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც ფასია 40? გ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ორი ერთეულით შემცირებისას?
26. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ ცნობილია, რომ, როცა პროდუქციის ერთეულის ფასი არის 20 ლარი, მაშინ მოთხოვნაა 30 და როცა ფასია 10 ლარი, მაშინ მოთხოვნა 35 ერთეულის ტოლია. ცნობილია, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.
27. ააგეთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით $P=-3Q+120$. ა) რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 30? ბ) რას

უდრის მოთხოვნა, თუ ფასია 60? გ) როგორ იცვლება მოთხოვნა ფასის 3 ერთეულით გაზრდისას? დ) როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის 4 ერთეულით შემცირებისას?

28. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით $P = -5Q + 250$. ა) რა საზღვრებში იცვლება მოთხოვნა? ბ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი? გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

29. ააგეთ მიწოდების წირი, თუ მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით $P = f_S(Q) = 4Q + 10$. ა) რას უდრის მიწოდება, როცა ფასი არის 90? ბ) რას უდრის ფასი, თუ მიწოდებაა 7? გ) როგორ იცვლება ფასი მიწოდების 4 ერთეულით გაზრდის შემღხვევაში?

30. ჩაწერეთ მიწოდების ფუნქცია და ააგეთ შესაბამისი მიწოდების წირი, თუ ცნობილია, რომ როცა ფასი არის 400 ლარი, მაშინ ფირმა გეგმავს პროდუქციის 100 ერთეულის შეტანას ბაზარზე, ხოლო როცა ფასი არის 640 ლარი, მაშინ ფირმა შეიტანს ბაზარზე პროდუქციის 180 ერთეულს. (იგულისხმება, რომ მიწოდების ფუნქცია წრფივია).

31. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით $P = f_S(Q) = \frac{1}{5}Q + 20$.

ა) ააგეთ შესბამისი მიწოდების წირი. ბ) რა საზღვრებში იცვლება მიწოდება? გ) რა საზღვრებში იცვლება ფასი? გაანალიზეთ მიღებული შედეგები.

32. ააგეთ მიწოდების წირი, თუ $P = f_S(Q) = 6Q + 120$. ა) რას უდრის მიწოდება, როცა ფასი არის 180 ლარი? ბ) რა ფასის შემთხვევაშია მიწოდება 20-ის ტოლი? გ) როგორ იცვლება მიწოდება ფასის 6 ერთეულით შემცირებისას? დ) როგორ იცვლება ფასი მიწოდების 12 ერთეულით შემცირების შემთხვევაში?

33. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი სახით:

ა) $\begin{matrix} P = f_D(Q) = -3Q + 60 \\ P = g_S(Q) = 2Q + 10 \end{matrix}$; ბ) $\begin{matrix} P = f_D(Q) = -6Q + 100 \\ P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 22 \end{matrix}$; გ) $\begin{matrix} P = f_D(Q) = -4Q + 80 \\ P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 17 \end{matrix}$.

34. მოთხოვნის და მიწოდების ფუნქციები შესაბამისად არის:

$$\begin{matrix} P = f_D(Q) = -4Q + 120 \\ P = g_S(Q) = \frac{1}{3}Q + 29 \end{matrix}.$$

ა) გამოთვალეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე.

ბ) გამოთვალეთ ახალი წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქტის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე მთავრობამ დააწესა გადასახადი 13 ლარის ოდენობით. როგორ ნაწილდება ეს გადასახადი მომხმარებელსა და ფირმას შორის?

35. მოთხოვნისა დამიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი სახით:

$$P = f_D(Q) = -3Q + 100$$
$$P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 30 \quad ,$$

სადაც პირველ განტოლებაში Q არის მოთხოვნა, მეორეში კი – მიწოდება.

ა) იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე;

ბ) მთავრობამ გადაწყვიტა დააწესოს ფიქსირებული გადასახადი 7 ლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. როგორ ნაწილდება ეს გადასახადი მომხმარებელსა და მიმწოდებელს შორის?

36. იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$P = f_D(Q) = -4Q + 120$$
$$P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 30 \quad .$$

გამოთვალეთ წონასწორობის ახალი $P_0^{/}$ ფასი და წონასწორობის ახალი $Q_0^{/}$ სიდიდე, თუ მთავრობამ დააწესა გადასახადი 9 ლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. როგორ ნაწილდება აღნიშნული გადასახადი მომხმარებელსა და მიმწოდებელს შორის?

37. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები, შესაბამისად, განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობებით:

$$P = f_D(Q) = -3Q + 150$$
$$P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 45 \quad .$$

ა) იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე (გრაფიკულად და ალგებრულად).

ბ) მთავრობამ გადაწყვიტა დააწესოს ფიქსირებული გადასახადი 14 ლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. იპოვეთ ამ ღონისძიების გავლენა ბაზრის წონასწორობაზე.

38. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები მოცემულია შემდეგი ტოლობებით:

$$P = f_D(Q) = -5Q + 150$$
$$P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 40.$$

ა) იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე (გრაფიკულად და ალგებრულად).

ბ) იპოვეთ წონასწორობის ახალი ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე დააწესეს გადასახადი (ბეგარა) ფასის 10%-ის ოდენობით.

39. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები, შესაბამისად, განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობებით:

$$P = f_D(Q) = -5Q + 80$$
$$P = g_S(Q) = 2Q + 10.$$

ა) იპოვეთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე (გრაფიკულად და ალგებრულად).

ბ) იპოვეთ წონასწორობის ახალი ფასი და წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე დააწესეს გადასახადი (ბეგარა) ფასის 15%-ის ოდენობით.

40. იპოვეთ წონასწორობის ფასები და წონასწორობის სიდიდეები თითოეული პროდუქტისათვის, თუ მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები ორსაქონლიანი ბაზრისათვის, შესაბამისად, განისაზღვრება ტოლობებით:

ა) $Q_1 = 40 - 5P_1 - P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_1 = -3 + 4P_1$ (მიწოდების ფუნქცია),

$Q_2 = 50 - 2P_1 - 4P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_2 = -7 + 3P_2$ (მიწოდების ფუნქცია).

ბ) $Q_1 = 60 - 6P_1 - P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_1 = -2 + 3P_1$ (მიწოდების ფუნქცია),

$Q_2 = 50 - 5P_1 - P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_2 = -4 + 2P_2$ (მიწოდების ფუნქცია).

გ) $Q_1 = 52 - 10P_1 + P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_1 = -2 + 5P_1$ (მიწოდების ფუნქცია),

$Q_2 = 30 + P_1 - 4P_2$ (მოთხოვნის ფუნქცია),
$Q_2 = -8 + 3P_2$ (მიწოდების ფუნქცია).

41. იპოვეთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების წონასწორობითი დონე, თუ მოხმარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე $C = 0{,}8Y + 25$, ხოლო დაგეგმილი ინვესტიციაა $I = 17$. როგორ ცვლილებას განიცდის ეროვნული შემოსავლის წონასწორობითი დონე, თუ დაგეგმილი ინვესტიცია გაიზრდება ერთი ერთეულით?

42. მოცემულია: $G = 40$ (სახელ;მწიფო დანახარჯები); $I = 55$ (ინვესტიცია); $C = 0{,}8Y_d + 25$ (მოხმარების ფუნქცია); $T = 0{,}1Y + 10$ (საგადასახადო მოსაკრებლების ფუნქცია). იპოვეთ ამ მოდელით მოცემული ეროვნული ეკონომიკის წონასწორობის მდგომარეობის შესაბამისი: ა) ეროვნული შემოსავალი; ბ) საგადასახადო მოსაკრებლები; გ) მოხმარების დონე; დ) დანაზოგების დონე.

43. მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით $C = 0{,}6Y + 30$, ხოლო დაგეგმილი საინვესტიციო თანხაა $I = 100$. იპოვეთ ეროვნული შემოსავლის, მოხმარებისა და დანაზოგების წონასწორობითი დონე. როგორ მოქმედებს ინვესტიციის გაორმაგება წონასწორობაზე?

44. განსაზღვრეთ წონასწორობითი Y შემოსავალი და ინვესტიციის სარგებლის r განაკვეთი, თუ მოცემულია შემდეგი ინფორმაცია სასაქონლო ბაზრის შესახებ: $M_s = 500$, $L_1 = 0{,}2Y$, $L_2 = -40r + 230$. ააგეთ Y-ისა და r-ის დამაკავშირებელი განტოლებების შესაბამისი წრფეები ერთი და იმავე საკოორდინატო სიბრტყეზე (იხ. სისტემა (23)). რა გავლენას ახდენს ავტონომიური ინვესტიციის ზრდა წონასწორობის Y ეროვნულ შემოსავალზე და სარგებლის r განაკვეთზე?

45. ღია ეკონომიკა წონასწორობაშია, როდესაც $Y = C + I + G + X - M$, სადაც ცვლადები აღნიშნავენ თანხებს, რომლებიც შეესაბამება ეროვნულ შემოსავალს (Y), მოხმარებას (C), ინვესტიციას (I), სახელმწიფო ხარჯებს (G), ექსპორტს (X), იმპორტს (M). განსაზღვრეთ

წონასწორობითი ეროვნული შემოსავალი, თუ მოცემულია, რომ: $C = 0{,}8Y + 80$, $I = 70$, $G = 130$, $X = 100$, $M = 0{,}2Y + 30$.

46. მოცემულია: მოხმარების ფუნქცია $C = 0{,}8Y + 60$; ინვესტიცია $I = -30r + 740$; ფულის მიწოდება $M_s = 4000$; ფულზე მოთხოვნა გარიგებისა და გაუთვალისწინებელი მიზნებისათვის $L_1 = 0{,}15Y$; ფულზე მოთხოვნა სპეკულაციური მიზნებისათვის $L_2 = -20r + 3825$. განსაზღვრეთ ეროვნული Y შემოსავალი და სარგებლის r განაკვეთი, თუ სასაქონლო და ფულადი ბაზრები წონასწორობაშია.

თავი 3

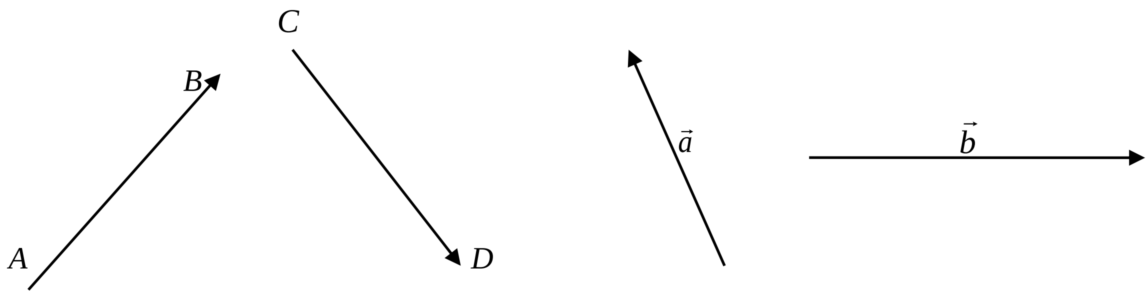
ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§3.1. ვექტორის ცნება. ერთ-ერთი ძირითადი მათემატიკური ცნებაა სიდიდის ცნება. სიდიდე ორი სახისაა: სკალარული (რიცხვითი), რომელიც ხასიათდება მხოლოდ ერთი რიცხვითი მნიშვნელობით (სიგრძე, ფართობი, მასა და სხვა) და ვექტორული, რომელიც ხასიათდება არა მარტო რიცხვითი მნიშვნელობით, არამედ მიმართულებითაც (ძალა, აჩქარება, მაგნიტური ველი დაძაბულობა და სხვა).

ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს, ე.ი. მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი.

ვექტორს აღნიშნავენ $\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი, სადაც A წერტილს ეწოდება ვექტორის სათავე, ხოლო B-ს – ვექტორის ბოლო.

ვექტორის აღსანიშნავად ხშირად გამოიყენება ლათინური ანბანის მცირე ასოები: $\vec{a}$, $\vec{b}$ და ა.შ. ნახაზზე ვექტორი გამოისახება ისრით (ნახ. 1).



ნახ. 1

ვექტორს, რომლის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა ნულოვანი ვექტორი ეწოდება და $\vec{0}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მას გარკვეული მიმართულება არ გააჩნია.

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე ეწოდება A და B წერტილებს შორის მანძილს.

$\overrightarrow{AB}$ და $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეები აღინიშნება, შესაბამისად $|\overrightarrow{AB}|$ და $|\vec{a}|$ სიმბოლოებით. ცხადია, $|\vec{0}| = 0$.

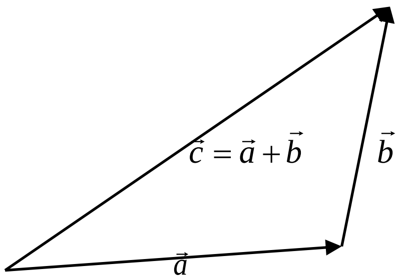
- ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია. ერთეულოვანი ვექტორი ეწოდება.

- ერთი და იგივე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება. სამ ვექტორს ეწოდება კომპლანარული, თუ ისინი პარალელურია ერთი და იგივე სიბრტყის.

• ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე სიგრძე და მიმართულება.

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ტოლია, წერენ $\vec{a}=\vec{b}$.

§3.2. ოპერაციები ვექტორებზე. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ **ვექტორების ჯამი** ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომლის სათავეა $\vec{a}$ ვექტორის სათავე, ხოლო ბოლო – $\vec{b}$ ვექტორის ბოლო, თუ $\vec{b}$ ვექტორის სათავე $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოშია (ნახ. 2).



ნახ. 2

ვექტორების შეკრების ამ წესს **სამკუთხედის წესი** ეწოდება. იგი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ვექტორთა შეკრების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (კომუტაციურობა);

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ასოციაციურობა).

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

$\vec{a}$ **ვექტორის** λ **რიცხვზე** ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $\left|\vec{b}\right|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, თუ $\lambda>0$ და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda<0$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება $\lambda\cdot\vec{a}$ სიმბოლოთი. თუ $\lambda=0$ ან $\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{0}$, მაშინ $\lambda=0$ ან $\vec{a}=\vec{0}$.

$\vec{a}$ ვექტორის (-1)-ზე ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$ **ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი** და აღინიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი. ცხადია, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

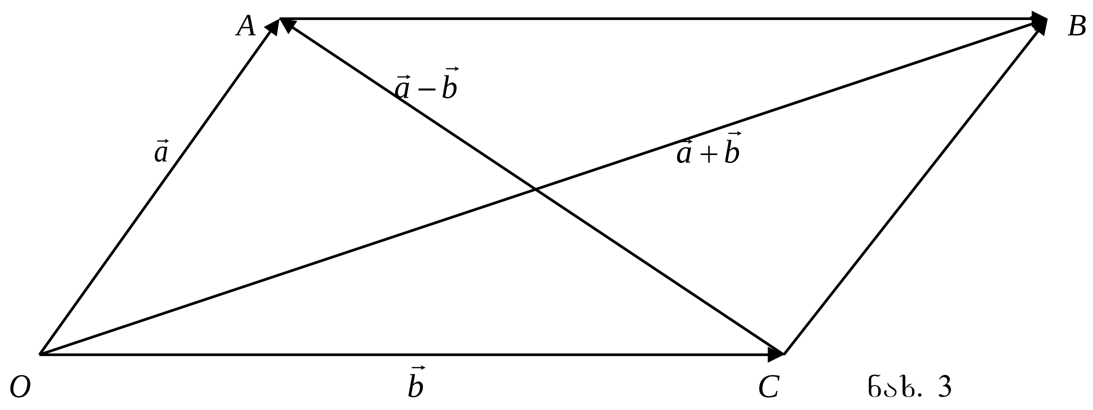
2) $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;

3) $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=\lambda_2(\lambda_1\vec{a})$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ **ვექტორების სხვაობა** ეწოდება $\vec{a}+(-\vec{b})$ ვექტორს და ის აღინიშნება $\vec{a}-\vec{b}$ სიმბოლოთი, ანუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომ $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

არსებობს არაკოლინეარულ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, ე.წ. **პარალელოგრამის წესი**, რომელიც ვექტორთა სხვაობის აგების წესსაც გვაძლევს.

ვთქვათ, გვაქვს ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. ეს ვექტორები მოვდოთ ნებისმიერ O წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 3) ნახაზიდან ჩანს, რომ $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$.



ნახ. 3

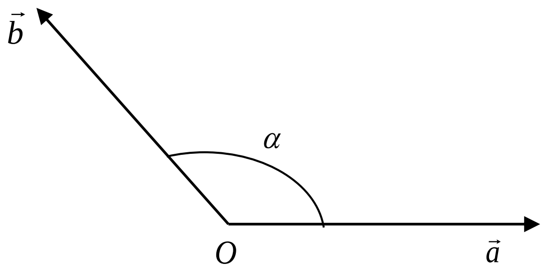
§3.3. **ვექტორის გეგმილი ღერძზე.** ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. მოვდოთ ისინი სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე (ნახ. 4). $\vec{a}$ და $\vec{b}$ **ვექტორებს შორის კუთხე** ეწოდება იმ უმცირეს α კუთხეს, რომლითაც უნდა მობრუნდეს $\vec{a}$ ვექტორი, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს $\vec{b}$ ვექტორის მიმართულებას და მას ასე აღნიშნავენ: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

თუ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^\circ$, მაშინ წერენ $\vec{a}\perp\vec{b}$.

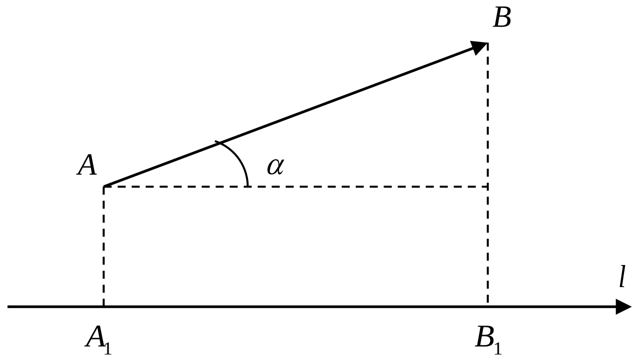
კუთხე $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის ეწოდება კუთხეს $\vec{a}$ ვექტორსა და l ღერძის მიმართულების მქონე ნებისმიერ $\vec{b}$ ვექტორს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. A და B წერტილების გეგმილები l ღერძზე შესაბამისად არის A_1 და B_1.

$\overrightarrow{A_1B_1}$ ვექტორს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ **ვექტორის გეგმილი** l ღერძზე და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{\text{გეგ}_l}\,\overrightarrow{AB}$.



ნახ. 4



ნახ. 5

$\overrightarrow{AB}$ **ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა** l ღერძზე ეწოდება A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძეს, ე.ი. $|A_1B_1|$-ს, თუ კუთხე ვექტორსა და ღერძის დადებით მიმართულებას შორის მახვილია და -$|A_1B_1|$-ს, თუ ეს კუთხე ბლაგვია (ნახ. 5).

$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა l ღერძზე გეგ$_l\,\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ α არის კუთხე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის, მაშინ

$$\text{გეგ}_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha .$$

ცხადია, რომ ტოლ ვექტორებს ერთსა და იმავე ღერძზე ტოლი გეგმილები აქვთ.

მართებულია შემდეგი

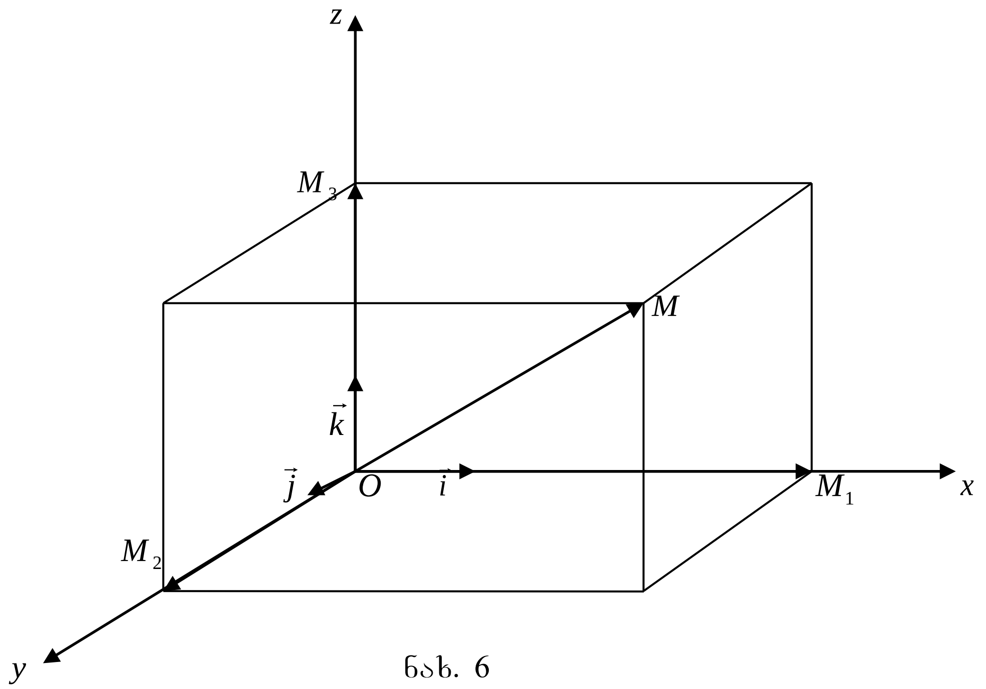
თეორემა 3.1. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია; ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ნამრავლს ამავე რიცხვზე.

§3.4. ვექტორის კოორდინატები. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e},$$

სადაც $\vec{e}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორი. მას $\vec{a}$ ვექტორის **მიმმართველი ვექტორი ანუ მგეზავი** ეწოდება.

განვიხილოთ დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა სივრცეში. $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძების მგეზავებია (ნახ. 6).



ნახ. 6

ვთქვათ, მოცემულია $\overrightarrow{OM}$ ვექტორი. $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ და $\overrightarrow{OM_3}$ ვექტორები $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის გეგმილებია შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძებზე.

ცხადია, რომ

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i} + \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j} + \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k} .$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = x, \quad \left|\overrightarrow{OM_2}\right| = y, \quad \left|\overrightarrow{OM_3}\right| = z .$$

მაშინ

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} .$$

აქ x, y და z რიცხვებს $\overrightarrow{OM}$ **ვექტორის კოორდინატები** ეწოდება და ასე აღინიშნება:

$$\overrightarrow{OM} = (x; y; z).$$

ე.ი. ვექტორის კოორდინატები გეომეტრიულად წარმოადგენს ამ ვექტორის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე.

კოორდინატთა სათავეზე მოდებული $\overrightarrow{OM}$ ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო M წერტილის კოორდინატებს.

ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორის საწყისი წერტილია $A_1(x_1;y_1;z_1)$, ბოლო წერტილი კი – $A_2(x_2;y_2;z_2)$. მაშინ $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$ ვექტორის კოორდინატებია $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$, $a_3=z_2-z_1$. ე.ი.

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, და პირიქით, თუ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, მაშინ ვექტორები ტოლია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ და $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომლის კოორდინატებია a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3. ე.ი.

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3).$$

ანალოგიურად განიმარტება ორი ვექტორის სხვაობა.

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ტოლია $\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$ ვექტორის.

§3.5. სკალარული ნამრავლი. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრებით

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha,$$

სადაც α არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) სკალარული ნამრავლი კომუტაციურია: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ურთიერთმართობულია ან ერთი მათგანი მაინც ნულოვანი ვექტორია.

ე.ი. ორი არანულოვანი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა;

3) ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ე.ი.

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\,;$$

4) საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ მგეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0\,;$$

5) სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე.ი.

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\,;$$

6) ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 3.2. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს, ე.ი. თუ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ და $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$, მაშინ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,.$$

შედეგი 1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0\,.$$

შედეგი 2. $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

შედეგი 3. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,.$$

როგორც დავინახეთ, სივრცის ყოველი ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება თავისი კოორდინატებით – ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულით (ანალოგიურად, , წრფეზე და სიბრტყეზე მოცემული ვექტორები

ცალსახად განისაზღვრება შესაბამისად – ნამდვილი რიცხვით და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილით). ყველა ასეთი სამეულების სიმრავლე წარმოქმნის სამგანზომილებიან სივრცეს. ჩვენ შეგვიძლია განვაზოგადოთ სამგანზომილებიანი სივრცის ცნება, თუ განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული ოთხეულების, ხუთეულების და ა.შ. n-ეულების სიმრავლეებს. ასეთი სიმრავლეებისათვის ჩვენ ვეღარ ვიხელმძღვანელებთ იმ ბუნებრივი გეომეტრიული წარმოდგენით, რაც ჩვენ გვაქვს სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში. მიუხედავათ ამისა, ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულების სიმრავლეზე შესაძლებელია განისაზღვროს ყველა ის ოპერაცია, რომელიც სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში გვქონდა.

n რაოდენობის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ ერთობლიობას (ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ n-ეულს) ეწოდება n კოორდინატიანი (კომპონენტიანი) ვექტორი და იგი ჩაიწერება შემდეგნაირად $\vec{a}=\left(a_1;a_2;\cdots;a_n\right)$.

a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები (კომპონენტები) ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი n-განზომილებიანი $\vec{a}=\left(a_1;a_2;\cdots;a_n\right)$ და $\vec{b}=\left(b_1;b_2;\cdots;b_n\right)$ ვექტორი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ტოლია, თუ სრულდება ტოლობები: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\cdots$, $a_n=b_n$.

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება ვექტორს

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;\cdots;a_n+b_n).$$

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1;\lambda a_2;\cdots;\lambda a_n\right).$$

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორთა სხვაობა ეწოდება ვექტორს

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}=\left(a_1-b_1;a_2-b_2;\cdots;a_n-b_n\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ n კოორდინატიანი ვექტორებისათვის ძალაში რჩება ყველა ის თვისება, რომელიც სამკოორდინატიან ვექტორებზე ოპერაციებისათვის იყო ჩვენთვის ცნობილი.

ნებისმიერი $\vec{a}=\left(a_1;a_2;\cdots;a_n\right)$ ვექტორი ერთადერთი გზით წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\cdots+a_n\vec{e}_n,$$

სადაც $\vec{e}_1=\left(1;0;\cdots;0\right)$, $\vec{e}_2=\left(0;1;\cdots;0\right)$, . . . , $\vec{e}_n=\left(0;0;\cdots;1\right)$.

ორი $\vec{a}=(a_1;a_2;\cdots;a_n)$ და $\vec{b}=(b_1;b_2;\cdots;b_n)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება შესაბამისი კომპონენტების ნამრავლთა ჯამს:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ვექტორის სიგრძე ეწოდება სიდიდეს

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\,.$$

ცხადია, რომ ორი არანულოვანი ვექტორი ორთოგონალურია (მათ შორის კუთხეა 90°) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება ვექტორი? რას ეწოდება ნულოვანი ვექტორი?
- რას ეწოდება ვექტორის სიგრძე? ერთეულოვანი ვექტორი?
- როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული? კომპლანარული?
- როგორ ვექტორებს ეწოდებათ ტოლი?
- ჩამოაყალიბეთ ვექტორთა შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესები.
- რას ეწოდება ვექტორის ნამრავლი რიცხვზე?
- რას ეწოდება ორი ვექტორის სხვაობა?
- რას ეწოდება კუთხე ორ ვექტორს შორის? ვექტორსა და ღერძს შორის?
- რას ეწოდება ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა ღერძზე?
- მოიყვანეთ თეორემა ვექტორთა ჯამისა და ვექტორთა რიცხვზე ნამრავლის გეგმილის შესახებ.
- განსაზღვრეთ ვექტორის კოორდინატები.
- როგორ ხორციელდება კოორდინატული ფორმით მოცემულ ვექტორთა შეკრება, გამოკლება და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები?
- განმარტეთ ვექტორის დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატები. რა კავშირი აქვს ამ კოორდინატებს ვექტორის გეგმილებთან კოორდინატთა ღერძებზე?

- რას უდრის კოორდინატთა სათავეზე მოდებული ვექტორის კოორდინატები? როგორ გამოისახება ნებისმიერი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები A და B წერტილთა კოორდინატების საშუალებით?
- განსაზღვრეთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი სამგანზომილებიან სივრცეში.
- მოიყვანეთ კოორდინატული ფორმით მოცემულ ვექტორთა მართობულობის პირობა.
- მოიყვანეთ ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.
- მოიყვანეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელი ფორმულა.
- რას ეწოდება n-კოორდინატიანი ვექტორი?
- როგორ განისაზღვრება n-კოორდინატიანი ვექტორების შეკრების, გამოკლების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები?
- როგორ განისაზღვრება n-კოორდინატიან ვექტორთა სკალარული ნამრავლი?

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 3

1. იპოვეთ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, თუ მოცემულია:

ა) $\left|\vec{a}\right|=8$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=14$; ბ) $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{b}\right|=12$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6$.

2. იპოვეთ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, თუ მოცემულია:

ა) $\left|\vec{a}\right|=9$, $\left|\vec{b}\right|=13$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=16$; ბ) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=7$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=6$.

3. მოცემულია $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$=15; $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$=20; $((\vec{a}+\vec{b}),\widehat{(\vec{a}-\vec{b})})=30^\circ$. იპოვეთ $\left|\vec{a}\right|$ და $\left|\vec{b}\right|$.

4. მოცემულია $\left|\vec{a}\right|$=4, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$=8, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$=5. იპოვეთ $\left|\vec{b}\right|$.

5. მოცემულია $\left|\vec{a}\right|$=5, $\left|\vec{b}\right|$=14, $\vec{a}\perp\vec{b}$. იპოვეთ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ და $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

6. მოცემულია $\left|\vec{a}\right|$=6, $\left|\vec{b}\right|$=8, $(\vec{a},\widehat{\vec{b}})=150^\circ$. იპოვეთ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

7. მოცემულია $\left|\vec{a}\right|$=2, $\left|\vec{b}\right|$=5, $(\vec{a},\widehat{\vec{b}})=60^\circ$. იპოვეთ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ და $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

8. მოცემულია $\left|\vec{a}\right|$=3, $\left|\vec{b}\right|$=1, $(\vec{a},\widehat{\vec{b}})=30^\circ$. იპოვეთ $\left|3\vec{a}+4\vec{b}\right|$ და $\left|3\vec{a}-4\vec{b}\right|$.

9. $ABCD$ პარალელოგრამში $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ და $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ და $\overrightarrow{MD}$, თუ M წარმოადგენს დიაგონლების გადაკვეთის წერტილს.

10. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების საშუალებით $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ და $\overrightarrow{MC}$ ვექტორები, სადაც M სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია. დაამტკიცეთ, რომ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

11. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებით შემდეგი ვექტორები: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ და $\overrightarrow{CP}$ სადაც M, N და P შესაბამისად BC, AC და AB გვერდების შუაწერტილებია.

12. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. BC გვერდზე აღებულია M წერტილი, რომელიც მას ყოფს შეფარდებით $BM:MC=3:5$. გამოსახეთ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

13. ABC სამკუთხედის BC გვერდი გაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად და დაყოფის M_1, M_2 და M_3 წერტილები შეერთებულია A წვეროსთან. იპოვეთ $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$ და $\overrightarrow{AM_3}$ ვექტორები, თუ $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ და $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$.

14. ABC სამკუთხედში M წერტილი BC გვერდის შუა წერტილია. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. გამოსახეთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

15. ვთქვათ, N არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ხოლო O სივრცის ნებისმიერი წერტილია. $\overrightarrow{ON}$ ვექტორი გამოსახეთ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ და $\overrightarrow{OC}$ ვექტორების საშუალებით.

16. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა l ღერძზე, თუ $|\vec{a}|=6$ და $\vec{a}$ ვექტორი l ღერძთან ადგენს: ა) 45°; ბ) 150°.

17. იპოვეთ Oxy სიბრტყეზე მდებარე $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობა Ox და Oy ღერძებზე, თუ მისი სიგრძეა $|\vec{a}|=8$ და Ox ღერძთან ადგენს 30°-იან კუთხეს.

18. იპოვეთ გეგ$_l\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{l}})=30^\circ$, $(\widehat{\vec{b},\vec{l}})=60^\circ$.

19. იპოვეთ გეგ$_l\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{l}})=45^\circ$, $(\widehat{\vec{b},\vec{l}})=150^\circ$.

20. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}=(2;-1;3)$ და $\vec{b}=(-2;3;4)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორები:

ა) $\vec{a}+\vec{b}$; ბ) $\vec{a}-\vec{b}$; გ) $3\vec{a}$; დ) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$; ე) $2\vec{a}+4\vec{b}$; ვ) $-4\vec{a}+3\vec{b}$

21. მოცემულია $\vec{a}=(-3;2;4)$, $\vec{b}=(0;3;-2)$ და $\vec{c}=(1;3;-2)$ ვექტორები. იპოვეთ $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+4\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები.

22. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}=(-3;2;4)$ და $\vec{b}=(0;3;-2)$. იპოვეთ შემდეგი ვექტორების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე:

ა) $4\vec{a}$; ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}$; გ) $\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$; დ) $4\vec{a}-2\vec{b}$.

23. მოცემულია $A(1;2;-5)$, $B(3;-2;1)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორების კოორდინატები.

24. მოცემულია $A(-1;3;2)$, $B(1;2;4)$ და $C(4;3;-2)$ წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{AN}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ N არის BC მონაკვეთის შუა წერტილი.

25. მოცემულია $\vec{a}=(-1;2;-2)$ ვექტორი. იპოვეთ ვექტორი, რომლის სიგრძე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეზე ორჯერ მეტია და რომელსაც $\vec{a}$ ვექტორის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს.

26. მოცემულია $\vec{a}=(3;2;-1)$ და $\vec{b}=(-1;0;6)$ ვექტორები. იპოვეთ $2\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები და გამოთვალეთ მისი სიგრძე.

27. მოცემულია $\vec{a}=(2;3;-4)$ და $\vec{b}=(1;6;5)$ ვექტორები. შეამოწმეთ, რომ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

28. მოცემულია $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(4;7;-1)$ და $D(6;11;-9)$ წერტილები. შეამოწმეთ, რომ $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=0$.

29. ცნობილია $\vec{a}$ ვექტორის ორი კოორდინატი: $a_1=2$, $a_2=1$. იპოვეთ მესამე კოორდინატი, თუ $|\vec{a}|=3$.

30. $\overrightarrow{AB}=(1;2;-2)$ და $\overrightarrow{AC}=(5;4;2)$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

31. შეამოწმეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(-1;1;0)$, $B(1;3;-1)$, $C(0;2;1)$ მართკუთხაა.

32. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის უდრის $\frac{\pi}{6}$-ს. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, თუ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$.

33. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის უდრის $\frac{\pi}{3}$-ს, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$. იპოვეთ:

ა) $\vec{a}^{\,2}$; ბ) $\vec{b}^{\,2}$; გ) $\vec{a}(\vec{a}+\vec{b})$; დ) $\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$; ე) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; ვ) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$.

34. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომელთა სიგრძეებია სათანადოთ 4 და 3, ურთიერთმართობულია. გამოთვალეთ:

ა) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; ბ) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; გ) $\vec{a}(2\vec{a}+5\vec{b})$; დ) $(2\vec{a}-3\vec{b})(4\vec{a}+5\vec{b})$.

35. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$.

36. მოცემულია: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$. იპოვეთ კუთხე $2\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორთა შორის.

37. დაადგინეთ k-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $3\vec{a}+2k\vec{b}$ და $2k\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთმართობული, თუ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$.

38. იპოვეთ $\vec{a}=(11;2;3)$ და $\vec{b}=(-1;10;2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

39. $\vec{a}=(x;2;1)$ და $\vec{b}=(1;1;-1)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი უდრის 5-ს. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის უცნობი კოორდინატი.

40. გამოთვალეთ:

ა) $(\vec{j}+2\vec{k})^2-(2\vec{j}+\vec{i})(\vec{k}-\vec{j})+\vec{k}(\vec{j}+\vec{k})$; ბ) $(\vec{i}-2\vec{j})\cdot\vec{k}-(2\vec{i}+3\vec{k})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-\vec{k})^2$.

41. გამოთვალეთ $\vec{a}=(3;0;6)$ და $\vec{b}=(1;2;-2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონლების სიგრძეები და კუთხე მათ შორის.

42. იპოვეთ $\vec{a}=(3;0;4)$ და $\vec{b}=(7;0;1)$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის კუთხეები.

თ ა ვ ი 4

მეორე რიგის წირები

§4.1. წრეწირი. წრეწირის განტოლებაა

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{4.1}$$

სადაც a და b წრეწირის ცენტრის კოორდინატებია, ხოლო R – რადიუსი. კერძოდ, თუ ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ წრეწირის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{4.2}$$

თუ

$$A^2+B^2>4c,$$

მაშინ

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

განტოლება განსაზღვრავს წრეწირს ცენტრით $(-0{,}5A;\ -0{,}5B)$ წერტილში და რადიუსით

$$R=0{,}5\sqrt{A^2+B^2-4C}.$$

ამოცანა 1. დავწეროთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსი $R=7$, ხოლო ცენტრის კოორდინატებია $C(3;-2)$.

ამოხსნა. წრეწირის განტოლება ჩავწეროთ (4.1) სახით. ჩვენს შემთხვევაში $R=7$, $a=3$, $b=-2$, ამიტომ მივიღებთ

$$(x-3)^2+(y+2)^2=49.$$

ამოცანა 2. ვიპოვოთ

$$x^2+y^2-6x+10y-30=0$$

წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი.

ამოხსნა. წრეწირის მოცემული განტოლებიდან გამოვყოთ სრული კვადრატები:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)-30-9-25=0,$$

საიდანაც

$$(x-3)^2+(y+5)^2=64.$$

პასუხი: $C(3;-5);\ R=8$.

ამოცანა 3. წრეწირი გადის $A(5;3)$ და $B(-2;4)$ წერტილებზე. დავწეროთ წრეწირის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ცენტრი აბსცისთა ღერძზე მდებარეობს.

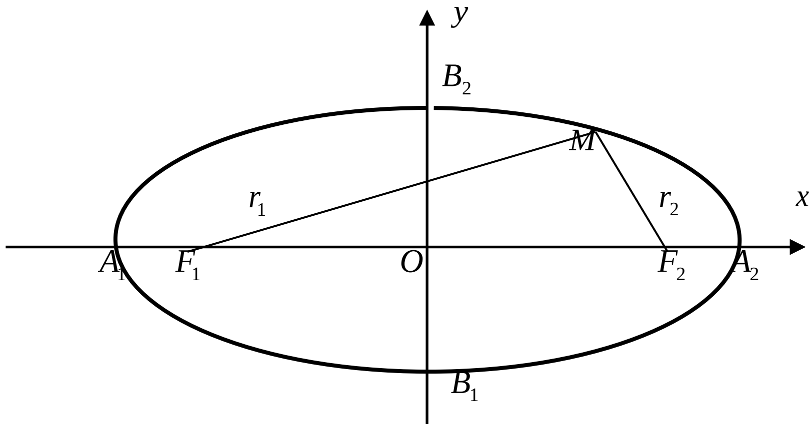
ამოხსნა. დაუშვათ, წრეწირის ცენტრია $C(a,b)$. ცხადია, რომ $b=0$. a-ს საპოვნელად შევნიშნოთ, რომ $AC=BC$, ე.ი.

$$\sqrt{(a-5)^2+9}=\sqrt{(a+2)^2+16}.$$

ამ განტოლებიდან $a=1$, ე.ი. წრეწირის ცენტრია $C(1,0)$. წრეწირის რადიუსი $R=AC=\sqrt{(1-5)^2+9}=5$. ამრიგად საძიებელი განტოლებაა

$$(x-1)^2+y^2=25.$$

§4.2. ელიფსი. ელიფსი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიდანაც სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების ჯამი მუდმივია. ამ ორ მოცემულ წერტილს ელიფსის ფოკუსები ეწოდება.



ნახ. 1

$r_1=F_1M$ და $r_2=F_2M$ მონაკვეთებს, სადაც F_1 და F_2 ელიფსის ფოკუსებია, ხოლო M ელიფსზე მდებარე წერტილი, ამ წერტილის **ფოკალური რადიუსები** ეწოდება. თუ ელიფსის ფოკუსებია $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$, ხოლო $r_1+r_2=2a$, $(2a>2c)$, მაშინ ელიფსის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.3}$$

სადაც $b^2 = a^2 - c^2$. ელიფსის ამ განტოლებას **კანონიკური განტოლება** ეწოდება. $A_1A_2 = 2a$ და $B_1B_2 = 2b$ მონაკვეთებს შესაბამისად **ელიფსის დიდი და მცირე ღერძები** ეწოდება, ხოლო a-ს და b-ს – **ნახევარღერძები.**

ელიფსის ექსცენტრისიტეტი (e) ეწოდება ფოკალური მანძილის $(2c)$ შეფარდებას დიდ ღერძთან $(2a)$, ე.ი. $e = c : a$, ცხადია, რომ

$$0 < e < 1.$$

შენიშვნა 1. (4.3) განტოლებით გამოსახული ელიფსი $\vec{m}(p,q)$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანით აისახება ელიფსში, რომლის განტოლებაა

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1, \tag{4.4}$$

ხოლო ფოკუსები აღმოჩნდება $F_1(-c+p,q)$ და $F_2(c+p,q)$ წერტილებში.

ამოცანა 4. დავწეროთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსებია $F_1(-2,0)$ და $F_2(2,0)$ წერტილებში, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{2}{3}$.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $c = 2$. ვინაიდან $e = \frac{c}{a}$, ამიტომ $\frac{2}{3} = \frac{2}{a}$, ე.ი. $a = 3$. b^2-ის საპოვნელად გამოვიყენოთ $b^2 = a^2 - c^2$ ტოლობა. მივიღებთ $b^2 = 5$.

ამრიგად, ელიფსის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

ამოცანა 5. დავწროთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ნახევარღერძების ჯამი უდრის 7-ს, ხოლო დიდი და მცირე ღერძების ბოლოებს შორის მანძილი 5-ს.

ამოხსნა. პირობის ძალით $a + b = 7$, ხოლო $A_2B_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. ამრიგად, a და b-ს მოსაძებნად გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

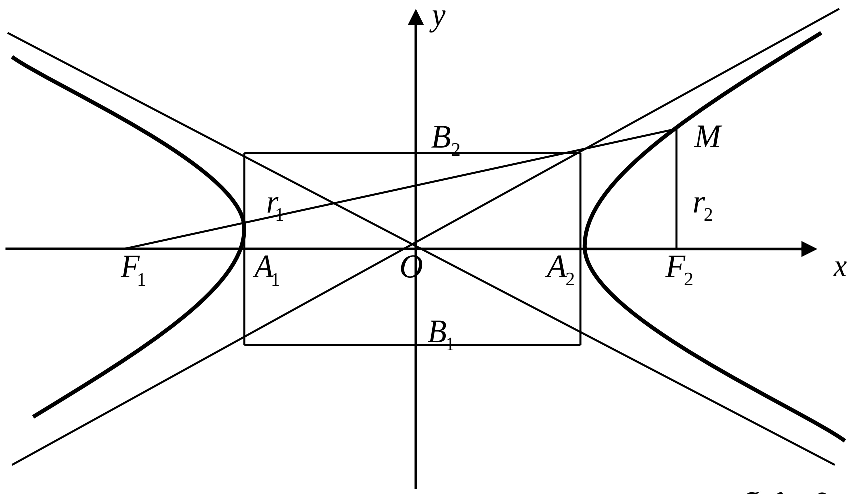
$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}.$$

ამ სისტემას ორი ამონახსნი აქვს: (4; 3) და (3; 4). თუ გავითვალისწინებთ $a > b$ უტოლობას, ცხადი გახდება, რომ მეორე ამონახსნი არ გამოგვადგება.

მაშასადამე, ელიფსის საძიებელი განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

§4.3. ჰიპერბოლა. ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიდანაც ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივია. ამ მოცემულ წერტილებს ჰიპერბოლის ფოკუსები ეწოდება.



ნახ. 2

$r_1 = F_1M$ და $r_2 = F_2M$ მონაკვეთებს, სადაც F_1 და F_2 ჰიპერბოლის ფოკუსებია, ხოლო $M-$ ჰიპერბოლაზე მდებარე წერტილი, M წერტილის **ფოკალური რადიუსები** ეწოდება, ხოლო A_1 და A_2 წერტილებს (ნახ. 2) **ჰიპერბოლის წვეროები**. თუ ჰიპერბოლის ფოკუსებია $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$, ხოლო $|r_1 - r_2| = 2a$, $(2a < 2c)$, მაშინ ჰიპერბოლის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.5}$$

სადაც $b^2 = c^2 - a^2$. ჰიპერბოლის ამ განტოლებას **კანონიკური განტოლება** ეწოდება. $A_1A_2 = 2a$ და $B_1B_2 = 2b$ მონაკვეთებს შესაბამისად **ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ღერძები** ეწოდება, ხოლო a-ს და b-ს – **ნახევარღერძები**. თუ $a = b$, ჰიპერბოლას **ტოლფერდა** ეწოდება.

ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი (e) ეწოდება ფოკალური მანძილის – $(2c)$ შეფარდებას ნამდვილ ღერძთან – $(2a)$, ე.ი. $e = c : a$. ცხადია, რომ $e > 1$. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e = \sqrt{2}$.

$y = \pm \frac{b}{a} x$ წრფეებს **ჰიპერბოლის ასიმპტოტები** ეწოდება. ტოლფერდა ჰიპერბოლის ასიმპტოტები ურთერთმართობულია.

შენიშვნა 2. (4.5) განტოლებით გამოსახული ჰიპერბოლა $\vec{m}(p,q)$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანით აისახება ჰიპერბოლაში, რომლის განტოლებაა

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1, \tag{4.6}$$

ხოლო ფოკუსები აღმოჩნდება $F_1(-c+p,q)$ და $F_2(c+p,q)$ წერტილებში.

ამოცანა 6. შევადგინოთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ნამდვილი ნახევარღერძი 5-ის ტოლია და ჰიპერბოლა $M(10;-3)$ წერტილზე გადის.

ამოხსნა. ვთქვათ, საძიებელი განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

პირობის თანახმად $a=5$. რადგან M წერტილი ჰიპერბოლაზე ძევს, ამიტომ მისი კოორდინატები ($x=10,\ y=-3$) უნდა აკმაყოფილებდეს (4.5) განტოლებას. თუ a-ს, x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{100}{25}-\frac{9}{b^2}=1,$$

საიდანაც $b^2=3$.

ამრიგად ჰიპერბოლის საძიებელი განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{3}=1.$$

ამოცანა 7. ვიპოვოთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ კუთხე ასიმპტოტსა და ნამდვილ ღერძს შორის არის $\frac{\pi}{3}$.

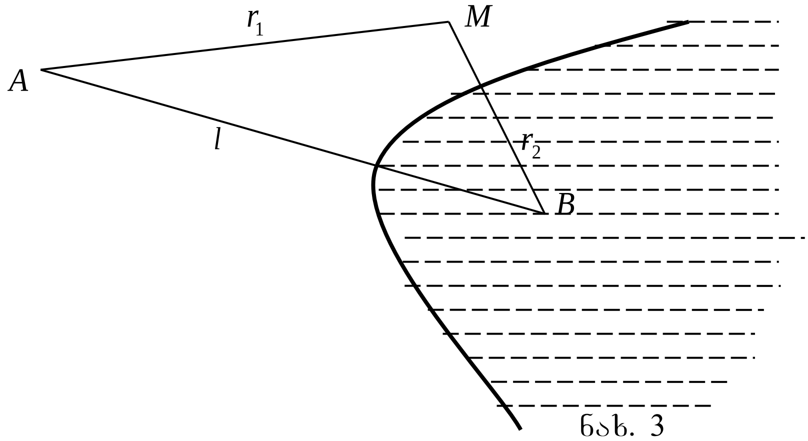
ამოხსნა. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{b}{a}=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. მაშასადამე, $e=2$.

§4.4. ჰიპერბოლის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანაში. სწორხაზოვანი რკინიგზა A ქალაქს აერთებს B სადგურთან. ვთქვათ, ერთი ტონა ტვირთის 1 კილომეტრზე გადაზიდვა ჯდება, მანქანით p

ლარი, ხოლო რკინიგზით q ლარი. ვიგულისხმოთ, რომ ტონა ტვირთის ჩატვირთვა მატარებელში და ქალაქში გადმოტვირთვა ღირს m ლარი, ამასთან რკინიგზით ტვირთის გადაზიდვა მანქანით გადაზიდვაზე იაფია. ვთქვათ, M წერტილი აღნიშნავს სოფელს (ნახ. 3), რომლიდანაც მანძილები A და B ადგილებამდე არის r_1 და r_2, შესაბამისად. ვიანგარიშოთ რა ეღირება 1 ტონა ტვირთის გადაზიდვა M სოფლიდან პირდაპირ A ქალაქამდე მანქანით და ასევე იმავე ტვირთის გადაზიდვა M სოფლიდან ჯერ B სადგურამდე მანქანით და შემდეგ B სადგურიდან A ქალაქამდე რკინიგზით.



ნახ. 3

პირველ შემთხვევაში გვექნება pr_1, მეორე შემთხვევაში კი $pr_2 + lq + m$, სადაც l წარმოადგენს მანძილს B სადგურიდან A ქალაქამდე.

ახლა დავსვათ კითხვა: M წერტილის რა მდებარეობისათვის იქნება ეს ორი ღირებულება თანატოლი? მივიღებთ ტოლობას

$$pr_1 = pr_2 + lq + m,$$

საიდანაც

$$r_1 - r_2 = \frac{lq + m}{p}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ M სოფელი უნდა მდებარეობდეს ჰიპერბოლაზე, რომლის ფოკუსებია A და B, ხოლო ნამდვილი ნახევარღერძია

$$a = \frac{lq + m}{2p}.$$

რადგანაც $a > 0$, ამიტომ $r_1 - r_2 > 0$ და მაშასადამე, მივიღებთ ჰიპერბოლის ერთ შტოს, რომლის შესაბამისი ფოკუსია B.

ამგვარად, იმ სოფლებისათვის, რომლებიც ჰიპერბოლიდან მდებარეობენ A ქალაქის მხარეს, უფრო ხელსაყრელია ტვირთის პირდაპირ მანქანით გადაზიდვა, იმათთვის კი, რომლებიც მდებარეობენ ჰიპერბოლიდან B სადგურის მხარეს, უკეთესია ტვირთის ჯერ მანქანით მიტანა B სადგურში, ხოლო შემდეგ რკინიგზით გადაზიდვა A ქალაქში (ასეთი სოფლები ნახაზის დაშტრიხულ ნაწილში მოექცევიან). იმ სოფლებისათვის, რომლებიც თვით ჰიპერბოლაზე მდებარეობენ, ტვირთის გადაზიდვა ორივე გზით ერთი და იმავე ღირებულებისაა.

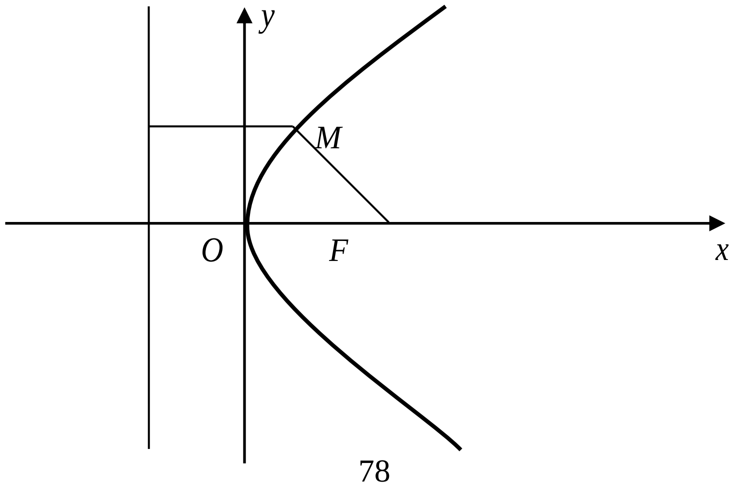
შევნიშნოთ, რომ ისეთი M წერტილების არსებობისათვის, რომელთათვისაც $r_1 - r_2 = \dfrac{lq+m}{p}$, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს უტოლობა $\dfrac{lq+m}{p} < l$, რადგან ABM სამკუთხედში უნდა გვქონდეს $r_1 - r_2 < l$. მაშასადამე,

$$m < l(p-q),$$

აქედან ჩანს, რომ l არ უნდა იყოს ძალიან მცირე, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში უკანასკნელი უტოლობა დაირღვევა.

ეს გარემოება უშუალოდ ჩანს: თუ B სადგური ძალიან ახლოსაა A ქალაქთან, მაშინ ჩატვირთვა-გადმოტვირთვის m ფასს ვერ ანაზღაურებს ის განსხვავება, რომელსაც იძლევა მცირე მანძილზე რკინიგზის იაფი ტარიფით ტვირთის გადაზიდვა.

§4.5. პარაბოლა. პარაბოლა ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან და მოცემული წრფიდან. მოცემულ წერტილს პარაბოლის ფოკუსი ეწოდება ეწოდება, ხოლო წრფეს – დირექტრისა.



ნახ. 4

$r = FM$ მონაკვეთს, სადაც F პარაბოლის ფოკუსია, M კი – პარაბოლაზე მდებარე წერტილი, M წერტილის **ფოკალური რადიუსი** ეწოდება. თუ პარაბოლის ფოკუსია $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, დირექტრისის განტოლება კი $x = -\frac{p}{2}$, მაშინ პარაბოლის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$y^2 = 2px. \tag{4.7}$$

აბსცისთა ღერძი არის (4.7) პარაბოლის **სიმეტრიის ღერძი**, კოორდინატთა სათავე კი **პარაბოლის წვერო**. პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს **პარაბოლის ღერძი** ეწოდება.

თუ პარაბოლა ორდინატთა ღერძის სიმეტრიულია და წვერო კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ პარაბოლის განტოლებაა

$$x^2 = 2qy. \tag{4.8}$$

როგორც (4.7), ისე (4.8) განტოლებას **პარაბოლის კანონიკური განტოლება** ეწოდება. (8) განტოლება ხშირად $y = ax^2$ სახით ჩაიწერება.

შენიშვნა 3. (4.7) განტოლებით გამოსახული პარაბოლა $\vec{l}\,(m,n)$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანით აისახება პარაბოლაში, რომლის განტოლებაა

$$(y-n)^2 = 2p(x-m), \tag{4.9}$$

ამასთან პარაბოლის ფოკუსი იქნება $F\left(\frac{p}{2}+m,\ \text{n}\right)$ წერტილში, დირექტრისის განტოლება კი $x = -\frac{p}{2}+m$.

მაგალითი 8. $y^2 = 4x$ პარაბოლაზე ვიპოვოთ წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუსი $r = 2$.

ამოხსნა. ვინაიდან მოცემული პარაბოლისათვის $p = 2$, ამიტომ ფოკუსი $F(1;0)$ წერტილშია. ვთქვათ, $M(x;y)$ საძიებელი წერტილია. მაშინ, პირობის ძალით $FM = 2$, ე.ი. $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2$.

არიგად, M წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{cases}.$$

ამ სისტემის ამონახსნებია: $x = 1$, $y = \pm 2$. მაშასადამე ამოცანის პირობას ორი წერტილი აკმაყოფილებს: $M_1(1;2)$ და $M_2(1;-2)$.

ამოცანა 9. დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე პარაბოლის $y = x^2 - 4x + 7$ განტოლება.

ამოხსნა. პარაბოლის მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით: $(x-2)^2 = y - 3$. შემოვიღოთ ახალი ცვლადები $x_1 = x - 2$ და $y_1 = y - 3$, მაშინ უკანასკნელი განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით: $x_1^2 = y_1$, რაც წარმოადგენს პარაბოლის კანონიკურ განტოლებას (4.8) სახით, სადაც $q = \frac{1}{2}$.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- როგორ ჩაიწერება წრეწირის განტოლება?
- რას ეწოდება ელიფსი? დაწერეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება.
- მიუთითეთ რა არის ელიფსის ფოკუსები და ფოკალური რადიუსები?
- განმარტეთ ელიფსის დიდი და მცირე ღერძები.
- რას ეწოდება ელიფსის ექსცენტრისიტეტი? როგორი სიდიდეა ელიფსის ექსცენტრისიტეტი?
- წერტილთა როგორ სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერბოლა?
- დაწერეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება.
- განმარტეთ ჰიპერბოლის ფოკუსები და ფოკალური რადიუსები.
- რას ეწოდება ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ღერძები?
- რას ეწოდება ტოლფერდა ჰიპერბოლა?
- რას ეწოდება ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი?
- რას ეწოდება ჰიპერბოლის ასიმპტოტები?
- რას ეწოდება პარაბოლა? მოიყვანეთ მისი კანონიკური განტოლება.

- განმარტეთ პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისა.
- როგორ სახეს მიიღებს ელიფსის, ჰიპერბოლის და პარაბოლის კანონიკური განტოლებები მათი პარალელური გადატანის შედეგად?

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 4

1. წრეწირის ცენტრია $C(0,3)$ და წრეწირი $A(2;2)$ წერტილზე გადის. დაწერეთ წრეწირის განტოლება.
2. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი $P(-1,3)$ წერტილშია და რომელიც აბსცისთა ღერძს ეხება.
3. წრეწირი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, ეხება $4x+3y-10=0$ წრფეს. დაწერეთ ამ წრეწირის განტოლება.
4. $A(2;3)$ და $B(4;-1)$ წერტილები წრეწირის ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია. დაწერეთ წრეწირის განტოლება.
5. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ორდინატთა ღერძს სათავეში ეხება და აბსცისთა ღერძს კი (-8; 0) წერტილში კვეთს.
6. შეადგინეთ განტოლება იმ წრეწირისა, რომელიც აბსცისთა ღერძს $P(4;0)$ წერტილში ეხება და ორდინატთა ღერძს $Q(0;2)$ წერტილში კვეთს.
7. წრეწირი გადის (1; -2) წერტილზე და ეხება კოორდინატთა ღერძებს. იპოვეთ მისი განტოლება.
8. შეადგინეთ (0; 1), (3; 0) და (-1; 2) წერტილებზე გამავალი წრეწირის განტოლება.
9. წრეწირი გადის სათავეზე და კოორდინატთა ღერძებს კვეთს $P(-12;0)$ და $Q(0;5)$ წერტილებში. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება.
10. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია: $x+2y-4=0$, $3x-y-5=0$, $5x+3y+1=0$. შეადგინეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის განტოლება.
11. იპოვეთ $x^2+y^2=25$ წრეწირის $A(3;4)$ წერტილზე გატარებული მხების განტოლება.

12. შეადგნეთ $x^2+y^2+4x-4y-24=0$ წრეწირის (2;-2) წრეტილზე გატარებული მხების განტოლება.
13. შეადგინეთ $x^2+y^2=13$ წრეწირის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $3x+2y=0$ წრფის პარალელურია.
14. იპოვეთ $x^2+y^2-4x-4=0$ წრეწირის იმ მხების განტოლება, რომელიც კოორდინატთა ღერძებზე ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს.
15. შეადგინეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომელთათვის $F_1(-3,0)$ და $F_2(3,0)$ წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივია და 10-ს უდრის.
16. მოცემულია ელიფსის განტოლება:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

განსაზღვრეთ მისი ღერძების სიგრძეები, ფოკალური მანძილი და ექსცენტრისიტეტი.

17. დაწერეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ მისი ნახევარღერძებია 2 და 1. იპოვეთ მისი ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი.
18. დაწერეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ მისი დიდი ღერძია 10, ექსცენტრისიტეტი კი 0,6.
19. დაწერეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ მისი მცირე ღერძი 5-ს უდრის, ფოკუსებს შორის მანძილი კი 6-ს.
20. ელიფსის ღერძების ჯამია 16, ექსცენტრისიტეტი კი 0,8. დაწერეთ ამ ელიფსის კანონიკური განტოლება.
21. შედგინეთ იმ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომელიც $P(2,2)$ და $Q(4;1)$ წერტილებზე გადის.
22. $12x^2+16y^2=192$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან 5 ერთეულითაა დაშორებული.
23. ელიფსზე, რომლის განტოლებაა $60x^2+64y^2=3840$, იპოვეთ წერტილი, რომელიც მარჯვენა ფოკუსიდან 9 ერთეულითაა დაშორებული.
24. ელიფსზე, რომლის განტოლებაა $27x^2+36y^2=972$, იპოვეთ წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან ორჯერ მეტადაა დაშორებული, ვიდრე მარჯვენა ფოკუსიდან.

25. $x^2+4y^2=4$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $M(3;3)$ და $N(5;-1)$ წერტილებიდან.

26. დაწერეთ $x^2+2y^2=2$ ელიფსის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც (0; 3) წერტილზე გადის.

27. შეამოწმეთ, რომ $3x^2-12x+4y^2=0$ განტოლება გამოსახავს ელიფსს. იპოვეთ მისი ღერძები და ფოკუსები.

28. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე ელიფსის შემდეგი განტოლება: $25x^2+16y^2+160y=0$. იპოვეთ მისი ფოკუსები.

29. კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანით დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე ელიფსის $9x^2+25y^2-180x+300y+900=0$ განტოლება. განსაზღვრეთ ფოკუსების კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ.

30. შეადგინეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომელთათვის $F_1(-5,0)$ და $F_2(5,0)$ წერტილებამდე მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივია და 6-ს უდრის.

31. დაწერეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომელთათვის $F_1(0,-3)$ და $F_2(0,3)$ წერტილებამდე მანძილების სხვაობის მოდული 4-ს უდრის.

32. მოცემულია ჰიპერბოლის განტოლება:

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

განსაზღვრეთ მისი ღერძების სიგრძეები, ფოკალური მანძილი და ექსცენტრისიტეტი.

33. დაწერეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ მანძილი წვეროებს შორის 10-ია, ხოლო ფოკუსებს შორის 12. იპოვეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

34. დაწერეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის წვეროები

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

ელიფსის ფოკუსებშია, ფოკუსები კი ამ ელიფსის წვეროებში.

35. რა სახე აქვს ელიფსის განტოლებას, რომლის წვეროები $9x^2-16y^2=144$ ჰიპერბოლის ფოკუსებშია, ფოკუსები კი ამ ჰიპერბოლის წვეროებში?

36. $3x^2 - y^2 = 75$ ჰიპერბოლის მარჯვენა შტოზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან 25 ერთეულითაა დაშორებული.

37. შეადგინეთ $2x^2 - 5y^2 = 10$ ჰიპერბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $2x + 3y + 5 = 0$ წრფის პარალელურია.

38. დაწერეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ცნობილია, რომ $x - y - 1 = 0$ წრფე ეხება ამ ჰიპერბოლას (4, 3) წერტილში.

39. იპოვეთ $9x^2 - 16y^2 - 18x - 135 = 0$ ჰიპერბოლის ფოკუსები.

40. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე ჰიპრბოლის $xy = 2$ განტოლება. იპოვეთ მისი ფოკუსები.

41. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე ჰიპერბოლის შემდეგი განტოლება: $8x^2 - 5y^2 - 40y = 0$.

42. დაწერეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული $F(4,0)$ წერტილიდან და $x + 4 = 0$ წრფიდან.

43. დაწერეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლის განტოლება, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული $F(0,6)$ წერტილიდან და $y + 6 = 0$ წრფიდან.

44. მოცემულია პარაბოლის განტოლება: $y^2 = 4x$. იპოვეთ მისი ფოკუსი და დაწერეთ დირექტრისის განტოლება.

45. გამოთვალეთ მანძილი $y^2 = 12x$ და $x^2 = 16y$ პარაბოლების ფოკუსებს შორის.

46. განსაზღვრეთ მანძილი $A(5;6)$ წერტილიდან $y^2 + 12x = 0$ პარაბოლის დირექტრისამდე.

47. $y^2 = 8x$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუსი $r = 10$.

48. იპოვეთ $y^2 = 4x$ პარაბოლისა და $2x - 3y + 4 = 0$ წრფის თანაკვეთის წერტილი.

49. შეადგინეთ $y^2 = 8x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც (-1, -1) წერტილზე გადის.

50. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე პარაბოლის $y^2 = 4x - 4$ განტოლება. იპოვეთ მისი ფოკუსი და დირექტრისა.

51. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე პარაბოლის $y = x^2 + 2x + 2$ განტოლება. იპოვეთ ამ პარაბოლის წვეროსა და ფოკუსის კოორდინატები. დაწერეთ დირექტრისის განტოლება.

52. იპოვეთ მანძილი $4y = x^2 + 2x + 5$ და $8x = y^2 + 4y + 4$ პარაბოლების ფოკუსებს შორის.

53. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის დირექტრისა $y + 3 = 0$ წრფეა, ხოლო ფოკუსი კოორდინატთა სათავეშია.

თავი 5
მატრიცები და დეტერმინანტები

§5.1. მატრიცის ცნება. მატრიცა წარმოადგენს რიცხვებისაგან (მონაცემებისაგან) შედგენილ მართკუთხა ცხრილს, რომელშიც მონაცემები ჩაწერილია სტრიქონებისა და სვეტების სახით.

მატრიცებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით, მაგ. A, B, C,..., მატრიცა, ხოლო მონაცემებს ათავსებენ [ ] კვადრატულ ან ( ) მრგვალ ფრჩხილებში. მატრიცაში მოთავსებულ რიცხვებს მატრიცის ელემენტებს უწოდებენ და მათ პატარა ლათინური ასოებით აღნიშნავენ, მაგ. a_{ij}, სადაც პირველი ინდექსი მიუთითებს იმაზე, თუ რომელ სტრიქონშია ეს ელემენტი, ხოლო მეორე ინდექსი – სვეტის ნიმერია. თუ მატრიცა შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს, $m \times n$ რიგის მატრიცა ეწოდება და ასე ჩაიწერება

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ხშირად გამოიყენება შემდეგი შემოკლებული აღნიშვნაც $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

ამბობენ, რომ A მატრიცა არის $m \times n$ რიგის, თუ ის შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს.

$1\times n$ რიგის მატრიცას n განზომილებიანი მატრიცა-სტრიქონი, ხოლო $m\times 1$ რიგის მატრიცას m განზომილებიანი მატრიცა-სვეტი ეწოდება.

თუ მატრიცის სტრიქონების და სვეტების რაოდენობა ტოლია, ე.ი. m $=n$, მაშინ მას n რიგის კვადრატული მატრიცა ეწოდება.

§5.2. ოპერაციები მატრიცებზე. ერთი და იგივე რიგის $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ და $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ მატრიცებს ეწოდებათ ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე.ი. $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$. ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ $A=B$.

შემოვიღოთ ოპერაციები მატრიცებზე.

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ და $B=(b_{ij})_{m\times n}$ მატრიცების ჯამი ეწოდება ისეთ $C=A+B=(c_{ij})_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი მოცემული მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,m; \; j=1,2,\cdots,n$$

ცხადია, რომ $A+B=B+A$.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ A და B მატრიცების ჯამი, თუ

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა.

$$A+B=\begin{pmatrix}5-4 & 2+5\\ 3+0 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება ისეთ $C=\lambda\cdot A=(c_{ij})_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი არის მოცემული A მატრიცის სათანადო ელემენტის ნამრავლი მოცემულ რიცხვზე, ე.ი. $c_{ij}=\lambda a_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ A მატრიცის და λ რიცხვის ნამრავლი, თუ

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \lambda=2.$$

ამოხსნა.

$$2\times A=\begin{pmatrix}2\cdot 5 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 6 & -2\end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ და $B=(b_{ij})_{m\times p}$ მატრიცების ნამრავლი ეწოდება ისეთ $m\times p$ რიგის $C=AB=(c_{ij})_{m\times p}$ მატრიცას, სადაც c_{ij} ელემენტი არის A მატრიცის i-ური სტრიქონის B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \qquad i=1,2,...,m, \qquad j=1,2,...,p.$$

AB მატრიცული ნამრავლი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობის.

ამოცანა 3. გადავამრავლოთ A და B მატრიცები, თუ

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. განმარტების ძალით გვაქვს

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 2+0\cdot 1\\ 3\cdot 3+3\cdot 0 & 3\cdot 2+3\cdot 1\\ 1\cdot 3+2\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 9\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

ცხადია, რომ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში B მატრიცის გამრავლება A მატრიცაზე არ შეიძლება.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცთა გამრავლება არ არის კომუტაციური ოპერაცია, ე.ი. საზოგადოდ $AB \neq BA$. მართლაც, ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 9 & 10\end{pmatrix}, \qquad BA=\begin{pmatrix}12 & 8\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$

საიდანაც ცხადია, რომ $AB \neq BA$. უფრო მეტიც, შეიძლება ამ ორი ნამრავლიდან ერთი განისაზღვრებოდეს, მეორე კი არა, მათი განზომილებებიდან გამომდინარე.

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება.

კვადრატულ მატრიცაში ერთნაირინდექსიანი ელემენტების ერთობლიობას მატრიცის მთავარი დიაგონალი ეწოდება. თუ ელემენტები, რომლებიც არ მდებარეობენ მთავარ დიაგონალზე, ნულის ტოლია, მაშინ კვადრატულ მატრიცას დიაგონალური ეწოდება. ამრიგად, დიაგონალურ $(a_{ik})_{n\times n}$ მატრიცაში a_{ik}=0, როცა $i \neq k$.

დიაგონალურ $n\times n$ რიგის მატრიცას, რომელშიც მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, n რიგის ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება და აღინიშნება I სიმბოლოთი

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 1 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & . & 1\end{pmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ მატრიცული ნამრავლის ნულოვან მატრიცასთან ტოლობის შემთხვევაში არ არის აუცილებელი რომ ერთ-ერთი მატრიცა იყოს ნულოვანი.

ამოცანა 4. მოცემულია არანულოვანი A და B მატრიცები

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ მათი ნამრავლი.

ამოხსნა.

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

თუ A მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ სვეტებად და, პირიქით, სვეტებს ჩავწერთ სტრიქონებად, მივიღებთ A მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას. მას აღნიშნავენ A^T სიმბოლოთი

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

თუ A მატრიცის რიგია $m\times n$, მაშინ ტრანსპონირებული მატრიცის რიგი იქნება $n\times m$.

ტრანსპონირების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
3. $(AB)^T = B^T\cdot A^T$.

n-ური რიგის A მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ $A^T=A$ ანუ, ნებისმიერი i და j-თვის $a_{ij}=a_{ji}$. მაგ.:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

და ეწოდება ირიბადსიმეტრიული, თუ $A^T=-A$, ანუ ნებისმიერი

ნებისმიერი i და j-თვის $a_{ij}=-a_{ji}$. მაგ.:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

კერძოდ, თუ $i = j$, მაშინ $a_{ii} = -a_{ii}$, და ე.ი. a_{ii}=0, ანუ ირიბადსიმეტრიული მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტები ნულის ტოლია.

გამოვყოთ კიდევ ეგრეთ წოდებული სამკუთხა მატრიცი. ასე უწოდებენ მატრიცს, რომლის დიაგონლის ერთ-ერთ მხარეს (ზევით ან ქვევით) მოქცეული ელემენტები ყველა ნულის ტოლია:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

მარტრიცები ფრიად მოსახერხებელია ინფორმაციის კომპაქტური ფორმით წარმოდგენისათვის. ამით აიხსნება მათი დიდი გამოყენება ეკონომიკური საკითხების სხვადასხვა ასპექტით შესწავლისას. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ორი ამოცანა.

ამოცანა 5. ორი ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქცია იგზავნება სამ საწყობში. ვთქვათ, პირველ საწყობში პირველი ქარხნიდან პროდუქციის ერთეულის გადაზიდვაზე იხარჯება, შესაბამისად, 4 ლარი, 3 ლარი და 5 ლარი, ხოლო მეორე ქარხნიდან – 2 ლარი, 1 ლარი და 3 ლარი. ჩავწეროთ ორივე ქარხნის სატრანსპორტო ხარჯები მატრიცული სახით.

ამოხსნა. რადგან ცნობილია თითოეული ქარხნის მიერ ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯები, ამიტომ სატრანსპორტო ხარჯები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი მატრიცის სახით

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

აქ პირველი სტრიქონი მიუთითებს პირველი ქარხნის მიერ წარმოებული ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯებს სამივე საწყობში, ხოლო მეორე სტრიქონი – მეორე ქარხნის მიერ წარმოებული ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯებს.

ამოცანა 6. ორმა მომხმარებელმა მაღაზიაში შეიძინა სამი დასახელების პროდუქტი: შაქარი, მაკარონი და წიწიბურა. პირველმა შეიძინა 2 კგ. შაქარი, 4 კგ. მაკარონი და 3 კგ. წიწიბურა. მეორემ კი – 3 კგ. შაქარი, 2 კგ. მაკარონი და 5 კგ. წიწიბურა. განვსაზღვროთ თითოეული მომხმარებლის დანახარჯი, თუ 1 კგ. შაქარი ღირს 1,5 ლარი, 1 კგ. მაკარონი – 1,2 ლარი, ხოლო 1 კგ. წიწიბურა – 1,8 ლარი.

ამოხსნა. ორივე მომხმარებლის მიერ შეძენილი პროდუქტების რაოდენობა (კილოგრამობით) ხასიათდება მატრიცით

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

სადაც პირველი სტრიქონი შეესაბამება პირველი მომხმარებლის ნავაჭრს, ხოლო მეორე სტრიქონი – მეორე მომხმარებლის ნავაჭრს.

პროდუქტების ღირებულება (ლარებში) ხასიათდება შემდეგი მატრიცით

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}2 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}.$$

მარტივი დასანახია, რომ ამ მატრიცების გადამრავლებით მივიღებთ ორივე მომხმარებლის დანახარჯების ცხრილს

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}2 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 1{,}8 \\ 3 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}2 + 5 \cdot 1{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}2 \\ 15{,}9 \end{pmatrix}.$$

აქედან ჩანს, რომ პირველმა მომხმარებელმა დახარჯა 13,2 ლარი, ხოლო მეორემ – 15,9 ლარი.

§5.3. დეტერმინანტი, მისი გამოთვლის წესები და თვისებები.

განვიხილოთ ნებისმიერი n რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

(5.1) კვადრატულ მატრიცას ყოველთვის შეესაბამება გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ამ მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით:

$$|A|, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ $n=1$, მაშინ (5.1) მატრიცა შედგება a_{11} რიცხვისაგან და მისი შესაბამისი პირველი რიგის დეტერმინანტი ეწოდება თვით ამ რიცხვს.

თუ $n=2$, მაშინ (5.1) მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

და ამ მატრიცის შესაბამისი მეორე რიგის დეტერმინანტი ასე განიმარტება:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

ნებისმიერი $n>2$ რიგის დეტერმინანტის განსაზღვრისათვის წინასწარ მოვიყვანოთ მატრიცის ელემენტის მინორისა და ალგებრული დამატების ცნებები: n რიგის (5.1) მატრიცის a_{ij} $(i, j = 1,2,..., n)$ ელემენტის მინორი M_{ij} ეწოდება n-1 რიგის იმ მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტს, რომელიც (5.1) მატრიციდან i-ური სტრიქონის და j-ური სვეტის ამოშლით მიიღება.

a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ij} განისაზღვრება ტოლობით

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(5.1) მატრიცის შესაბამისი n-ური რიგის დეტერმინანტი ტოლია მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტებისა და მათი ალგებრული დამატებების ნამრავლების ჯამის:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5.2}$$

ან

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{5.3}$$

მაშასადამე დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება მისი გაშლით ნებისმიერი სტრიქონის ან სვეტის მიმართ. ამიტომ პრაქტიკული გამოთვლებისას მიზანშეწონილია იმ სტრიქონის ან სვეტის ამორჩევა, სადაც ბევრი ნულია.

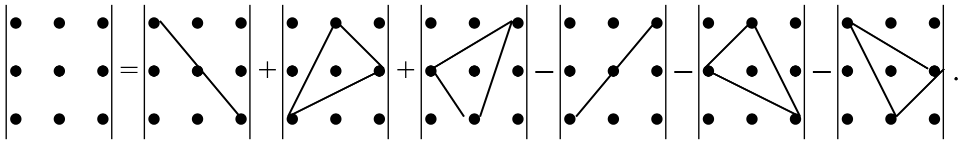
მესამე რიგის დეტერმინანტისათვის, თუ გამოვიყენებთ (5.2) ფორმულას პირველი სტრიქონის გაშლით, მივიღებთ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{12}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

დეტერმინანტის გამოთვლას ამ ფორმულით უწოდებენ დეტერმინანტის გამოთვლას მინორებად დაშლის წესით.

ამ ფორმულის დასამახსოვრებლად სასარგებლოა ე.წ. სამკუთხედის წესი, რომელიც სიმბოლურად ილუსტრირებულია შემდეგი სქემით:



ამოცანა 7. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

ამოხსნა.

$$|A|=(-1)\cdot(-2)\cdot 2+0\cdot 3\cdot(-3)+4\cdot 2\cdot 1-4\cdot(-2)\cdot 0-(-1)\cdot 1\cdot(-3)-2\cdot 3\cdot 2=$$

$$=4+8-3-12=-3.$$

მოვიყვანოთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $n=3$.

1. მატრიცის ტრანსპონირებით დეტერმინანტი არ შეიცვლება, ე.ი.

$$\left|A^T\right|=|A|.$$

2. დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს იცვლის, თუ მოვახდენთ მისი ნებისმიერი ორი სვეტის (სტრიქონის) ურთიერთგადანაცვლებას.

მაგალითად:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

3. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტი ნულია.

4. დეტერმინანტი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე ორი სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები ტოლია.

5. დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

მაგალითად:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები პროპორციულია სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტებისა.

7. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით, მაშინ ეს დეტერმინანტი წარმოიდგინება ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით. მაგალითად:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32}+a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სვეტის (სტრიქონის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სვეტის (სტრიქონის) შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული დეტერმინანტის ტოლ დეტერმინანტს.

9. ორი ერთი და იგივე რიგის კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის ამ მატრიცთა დეტერმინანტების ნამრავლს, ე.ი.

$$|AB| = |A|\cdot|B|.$$

§5.4. შებრუნებული მატრიცა. ვთქვათ, A არის n რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო I იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა.

A მატრიცის **შებრუნებული მატრიცა** ეწოდება ისეთ B მატრიცას, რომლისთვისაც

$$A\cdot B = B\cdot A = I.$$

A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა აღინიშნება სიმბოლოთი A^{-1}, ე.ი.

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I. \qquad (5.4)$$

(5.4) ტოლობა სიმეტრიულია A და A^{-1} მატრიცების მიმართ. ამიტომ თუ A^{-1} არის A მატრიცის შებრუნებული, მაშინ A არის A^{-1}-ის შებრუნებული:

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1}.$$

სიმეტრიულობიდან ცხადია აგრეთვე, რომ A^{-1} არის იმავე რიგის კვადრატული მატრიცა რაც A მატრიცა.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია.

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **გადაგვარებული,** თუ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცას ეწოდება **გადაუგვარებელი.**

A კვადრატული მატრიცის **მიკავშირებული მატრიცა** ეწოდება მატრიცას

$$A^{\bullet}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} $(i, j=1,2,...,n)$ ელემენტის ალგებრული დამატება.

თეორემა 5.1. იმისათვის, რომ A **მატრიცას გააჩნდეს შებრუნებული მატრიცა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ** A **იყოს გადაუგვარებელი მატრიცა.**

შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{\bullet}. \tag{5.5}$$

ამოცანა 8. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-18+100-84-105+90+16=-1.$$

ამასთან

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=-1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=(-18-20)=38;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-12-15=-27;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-(-15+14)=1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-6-35=-41;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-(-4-25)=29;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=20-21=-1;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-(8-42)=34;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=6-30=-24.$$

ამრიგად მიკავშირებული მატრიცა იქნება

$$A^{\bullet}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}.$$

(5.5) ფორმულის მიხედვით გვაქვს

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

მოვიყვანოთ შებრუნებული და მიკავშირებული მატრიცების ზოგიერთი თვისება:

1. $|A^{-1}|=|A|^{-1}$;
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;
3. $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$;
4. $(A^{T})^{\bullet}=(A^{\bullet})^{T}$;
5. $(AB)^{\bullet}=B^{\bullet}A^{\bullet}$.

§5.5. მატრიცის რანგი. განვიხილოთ $m\times n$ რიგის A მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

შევარჩიოთ ამ მატრიცაში r სტრიქონი და r სვეტი, სადაც $r \le \min\{m,n\}$. არჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს **მატრიცის r რიგის მინორი** ეწოდება.

მთელ r რიცხვს ეწოდება **მატრიცის რანგი**, თუ მისი r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა r-ზე მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია.

A მატრიცის რანგი აღინიშნება სიმბოლოთი $rangA$. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა $(r+1)$ რიგის მინორი (თუ ასეთი არსებობს) ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის რანგი r რიცხვის ტოლია.

ამოცანა 9. გამოვთვალოთ A მატრიცის რანგი, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $rangA$, საჭიროა ჯერ გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი. რადგან $|A| = 0$, ამიტომ $rangA < 3$.

გადავიდეთ მეორე რიგის მინორების გამოთვლაზე:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \ne 0.$$

რადგან მეორე რიგის მინორებს შორის აღმოჩნდა ნულისაგან განსხვავებული მინორი, ამიტომ $rangA$=2. დანარჩენი მეორე რიგის მინორების გამოთვლა აღარ არის საჭირო.

ზოგად შემთხვევაში მატრიცის რანგის გამოთვლა მისი ყველა მინორის დათვლის საშუალებით, რა თქმა უნდა, ძალიან შრომატევადი სამუშაოა. ამიტომ უნდა გამოვყოთ მატრიცის ისეთი **ელემენტარული გარდაქმნები**, რომლებიც არ ცვლიან მის რანგს. ასეთი ელემენტარული გარდაქმნებია:

1) **მატრიციდან ნულოვანი სტრიქონის ან სვეტის ამოშლა.**
2) **მატრიცის სტრიქონის ან სვეტის გამრავლება რაიმე რიცხვზე.**
3) **მატრიცის სტრიქონების ან სვეტების გადაადგილება.**
4) **მატრიცის სტრიქონების ან სვეტების შეკრება.**

5) მატრიცის ტრანსპონირება.

ადვილი დასანახია, რომ თუ მატრიცას აქვს სამკუთხა მატრიცის სახე, მაშინ მისი რანგი ტოლია მის დიაგონალზე მყოფი არანულოვანი ელემენტების რაოდენობისა.

მაშინ უკვე გასაგებია, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ მოცემული მატრიცის რანგი: ამისათვის 1) – 5) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნებით მატრიცა უნდა დავიყვანოთ საფეხურიან სახეზე:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

სადაც $a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{kk} \neq 0$. მაშინ $rangA = k$.

ამოცანა 10. ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

ამოხსნა. თანდათანობითი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & -7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ამიტომ $rangA$=2.

ამოცანა 11. ვიპოვოთ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგი.

ამოხსნა. . თანდათანობითი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -11 & -10 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ამიტომ $rangA$=2.

ამოვიწეროთ მატრიცის რანგის თვისებები:

1) $rang(A+B) \leq rangA + rangB$;

2) $rang(A+B) \geq |rangA - rangB|$;

3) $rang(A \cdot B) \leq \min\{rangA, rangB\}$;

4) $rang(A^T \cdot A) = rangA$;

5) $rang(A \cdot B) = rangA$, თუ A და B კვადრატული მატრიცაა და $|B| \neq 0$.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

- რას ეწოდება მატრიცა?
- რას ეწოდება მატრიცის რიგი?
- რას ეწოდება ტრანსპონირებული მატრიცა?
- რას ეწოდება კვადრატული მატრიცა?
- რას ეწოდება ნულოვანი მატრიცა? დიაგონალური მატრიცა? ერთეულოვანი მატრიცა?
- როგორ მატრიცებს ეწოდება ტოლი?
- როგორ შევკრიბოთ ორი მატრიცა?
- რას ეწოდება სკალარისა და მატრიცის ნამრავლი?
- როგორ გავამრავლოთ A და B მატრიცები?
- არის თუ არა A და B მატრიცების ნამრავლი კომუტაციური? (აჩვენეთ მაგალითზე).
- რას ეწოდება A მატრიცის ტრანსპონირებული?
- მოიყვანეთ ტრანსპონირების ოპერაციის ძირითადი თვისებები.
- რისი ტოლია ირიბადსიმეტრიული მატრიცის დიაგონალური ელემენტები?
- ამოწერეთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის კვადრატული მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულები.
- რას ეწოდება n რიგის მატრიცის a_{ij} $(i, j = 1,2,...,n)$ ელემენტის მინორი? ალგებრული დამატება?
- ამოწერეთ n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა.
- მოიყვანეთ დეტერმინანტის გამოთვლის სამკუთხედის წესის ილუსტრაცია.
- ჩამოთვალეთ დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები.

- დეტერმინანტის გამოსათვლელ რომელ ფორმულას უწოდებენ მინორებად გაშლის წესს?
- n რიგის დეტერმინანტის გამოსათვლელად რამდენი n-1 რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა დაგვჭირდება მინორებად გაშლის წესით სარგებლობისას?
- განსაზღვრეთ n-ური რიგის კვადრატული მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.
- შესაძლებელია თუ არა , რომ A მატრიცას ჰქონდეს ერთზე მეტი შებრუნებული მატრიცა?
- რაში მდგომარეობს შებრუნებული მატრიცის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა? მოიყვანეთ შებრუნებული მატრიცის გამოსათვლელი ფორმულა.
- რა კავშირი არსებობს მატრიცისა და მისი შებრუნებული მატრიცის დეტერმინანტებს შორის?
- რას უდრის მატრიცთა ნამრავლის შებრუნებული მატრიცა? რას უდრის მატრიცთა ნამრავლის მიკავშირებული მატრიცა?
- მოიყვანეთ მატრიცის რანგის განმარტება.
- მოიყვანეთ მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები რომლებიც არ ცვლის მატრიცის რანგს.
- ამოწერეთ მატრიცის რანგის თვისებები.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 5

1. იპოვეთ $A+B$ და $A-B$, თუ

ა) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

ბ) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. იპოვეთ $A \cdot B$, თუ

ა) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$;

ბ) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

დ) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$;

ე) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

ვ) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ზ) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

თ) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

ი) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

კ) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

ლ) $A=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

მ) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & -2\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\-3 & 3\end{pmatrix}$. იპოვეთ:

ა) $3A+4B$; ბ) $-2A+2B$; გ) $-AB+3B$; დ) $0,5B-3A$; ე) $1/2A+1/3B$.

4. იპოვეთ $AB-BA$, თუ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\0 & 2 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\2 & 3 & 3\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 3\end{pmatrix}$ მატრიცებისათვის შეამოწმეთ სრულდება თუ არა ტოლობა $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

6. $A=\begin{pmatrix}a & 1\\b & -1\end{pmatrix}$ და $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$ მატრიცებისათვის განსაზღვრეთ a და b ისეთნაირად, რომ

ა) $(A+B)^2=A^2+B^2$; ბ) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

7. იპოვეთ ისეთი A მატრიცა, რომლისთვისაც სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

ა) $A\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\end{pmatrix}$;   ბ) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

8. იპოვეთ C მატრიცა, თუ:

ა) $C=A\cdot B^T-3A^T$, $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

ბ) $C=A-B\cdot B^T$, $A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\ 4 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

9. გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

ა) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}$;   ბ) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}$;   გ) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{vmatrix}$;

დ) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\beta\\ \sin\alpha & \cos\beta\end{vmatrix}$;   ე) $\begin{vmatrix}1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3}\\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2}\end{vmatrix}$.

10. გამოთვალეთ დეტერმინანტები სამკუთხედის წესით:

ა) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$;   ბ) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$

გ) $\begin{vmatrix}a & -a & -a\\ a & a & a\\ a & -a & a\end{vmatrix}$;   დ) $\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ a & b & c\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$;   ვ) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}$;

ზ) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 5 & -2\\ 5 & 7 & -1\end{vmatrix}$;   თ) $\begin{vmatrix}a^2-p^2 & ab & ac\\ ab & b^2-p^2 & bc\\ ac & bc & c^2-p^2\end{vmatrix}$.

11. გამოთვალეთ

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის $a_{22}=1$ და $a_{32}=6$ ელემენტთა მინორები და ალგებრული დამატებები.

12. გამოთვალეთ დეტერმინანტები მინორებად გაშლის წესით:

ა) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$; ბ) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; დ) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

13. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; ბ) $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & x \end{vmatrix}$;

გ) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$; დ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}$;

ე) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; ვ) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

14. იპოვეთ A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა, თუ

ა) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; ბ) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$; დ) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

15. იპოვეთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, თუ

ა) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; ბ) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; დ) $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}$;

ე) $A=\begin{pmatrix}15 & 6 & 8\\ 7 & 1 & 6\\ 10 & 5 & 4\end{pmatrix}$; ვ) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

16. დაადგინეთ გააჩნია თუ არა A მატრიცას შებრუნებული მატრიცა, თუ

ა) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$; ბ) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; დ) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

17. უშუალო გადამრავლებით დაადგინეთ, არის თუ არა A მატრიცი B მატრიცის შებრუნებული:

ა) $A=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 10 & 2 & 7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}11 & 13 & -10\\ -13 & -16 & 12\\ -12 & -14 & 11\end{pmatrix}$;

ბ) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

18. იპოვეთ $(AB)^{-1}$, თუ ცნობილია, რომ

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

19. ცნობილია, რომ

$$A^{\bullet}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B^{\bullet}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $(AB)^{\bullet}$.

20. მოცემულია A და B მატრიცები. იპოვეთ ამ მატრიცების ნამრავლის მიკავშირებული მატრიცა, თუ:

ა) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

ბ) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

21. შემდეგი მატრიცებიდან ამოარჩიეთ ისეთი ორი, რომელთაც გააჩნიათ შებრუნებული და იპოვეთ მათი ნამრავლი:

$A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}6 & 7\\ 36 & 42\end{pmatrix}$, $\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

22. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

ა) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; $\qquad$ ბ) $X\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

გ) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$; $\qquad$ დ) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

ე) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -7\\ -1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; $\qquad$ ვ) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$.

23. შეამოწმეთ $(AB)^{\bullet} = B^{\bullet}A^{\bullet}$ ტოლობის სამართლიანობა შემდეგი მატრიცებისათვის:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

24. მოცემულია A მატრიცის ტრანსპონირებული A^T მატრიცა. იპოვეთ A^{-1} მატრიცის დეტერმინანტი, თუ

$$A^T=\begin{pmatrix}7 & 0 & 7\\ 0 & 7 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

25. იპოვეთ A მატრიცის რანგი, თუ

ა) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$; ბ) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

გ) $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 4 & 6\\ 2 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; დ) $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

თავი 6

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

ხშირად ეკონომიკური მოდელი შეიცავს მრავალ პარამეტრს და, კონკრეტული პრობლემებიდან გამომდინარე, საჭირო ხდება მოიძებნოს პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ თანაფარდობებს (განტოლებებს). თუ ეს თანაფარდობები წარმოადგენენ წრფივ განტოლებებს, მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სუსტემასთან.

§6.1. ძირითადი ცნებები. ვთქვათ, მოცემულია n უცნობიანი m წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{6.1}$$

სადაც $x_1, x_{2,}, ..., x_n$ **უცნობებია**, ხოლო $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ **კოეფიციენტები** და $b_1, b_{2,}, ..., b_n$ **თავისუფალი წევრები** ცნობილი რიცხვებია. საზოგადოდ, უცნობთა რიცხვი n არ უდრის განტოლებათა m რიცხვს.

განტოლებათა (6.1) სისტემას ეწოდება **ერთგვაროვანი**, თუ მისი ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ხოლო **არაერთგვაროვანი** – თუ ერთი მაინც თავისუფალი წევრი განსხვავებულია ნულისაგან.

$c_1, c_{2,}, ..., c_n$ რიცხვებს ეწოდება (6.1) **სისტემის ამონახსნი**, თუ (6.1) სისტემაში $x_1, x_{2,}, ..., x_n$ უცნობების ნაცვლად შესაბამისად $c_1, c_{2,}, ..., c_n$ რიცხვების ჩასმით, სისტემის ყოველი განტოლება გადაიქცევა ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად.

(6.1) სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნას **სისტემის ამოხსნა** ეწოდება.

სისტემას ეწოდება **თავსებადი,** თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, ხოლო **არათავსებადი** – თუ მას არ აქვს არც ერთი ამონახსნი.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან დაკავშირებით ისმება ორი ძირითადი საკითხი: 1) სისტემის თავსებადობის გამოკვლევა და 2) თავსებადი სისტემის ყველა ამონახსნის პოვნა.

(6.1) სისტემის ამონახსნის არსებობა მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგ ორ მატრიცასთან:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

A მატრიცას ეწოდება (6.1) სისტემის შესაბამისი მატრიცა, ხოლო $\overline{A}$ -ს – სისტემის გაფართოებული მატრიცა.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია, ე.ი.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{6.2}$$

ასეთ სისტემას **წრფივ ალგებრულ განტოლებათა კვადრატული სისტემა** ეწოდება. ამ ლექციაში ჩვენ შევისწავლით (6.2) ტიპის სისტემის ამოხსნადობის საკითხს.

§6.2. კრამერის ფორმულები. განვიხილოთ (6.2) სისტემა და ამ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი აღვნიშნოთ Δ-თი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

განვიხილოთ აგრეთვე n რიგის დამხმარე დეტერმინანტები: $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$, სადაც Δ_j $(j = 1,2,\cdots,n)$ მიიღება სისტემის Δ დეტერმინანტისაგან მისი j-ური სვეტის შეცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

მტკიცდება, რომ, თუ სისტემის Δ დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ (6.2) სისტემა თავსებადია და მას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{6.5}$$

(6.5) ფორმულებს **კრამერის ფორმულები** ეწოდება.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

კრამერის ფორმულებით:

ამოხსნა. გამოვთვალოთ საჭირო დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

მაშინ ამონახსნია $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$, $x_3 = -\frac{5}{3}$.

§6.3. მატრიცული ხერხი. გადავწეროთ (6.2) სისტემა მატრიცული სახით, რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A-ს ეწოდება სისტემის მატრიცა, B-ს – თავისუფალ წევრთა ერთსვეტიანი მატრიცა, ხოლო X-ს – უცნობი ერთსვეტიანი მატრიცა.

მატრიცთა გამრავლებისა და მატრიცთა ტოლობის განსაზღვრების თანახმად, წრფივ განტოლებათა (6.2) სისტემა მატრიცულად ასე ჩაიწერება

$$AX = B. \tag{6.6}$$

დავუშვათ, რომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, ე.ი. A მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta = |A| \neq 0$.მაშინ, როგორც ვიცით, არსებობს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა A^{-1}. გავამრავლოთ (6.6) მატრიცული განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან A^{-1} მატრიცაზე

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

რადგან

$$A^{-1}(AX) = \left(A^{-1}A\right)X = I \cdot X = X\ ,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{6.7}$$

რაც წარმოადგენს (6.6) განტოლების მატრიცულ ამონახსნს.

(6.7) ტოლობიდან განისაზღვრება $x_1, x_{2,}, ..., x_n$ უცნობთა მნიშვნელობები, რომლებიც წარმოადგენენ (6.2) სისტემის ერთადერთ ამონახსნს.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ მატრიცული ხერხით შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

მოცემული სისტემა, მატრიცული სახით ასე გადაიწერება

$$AX = B.$$

რადგან

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 3 - 1 - 12 - 1 = -17 \neq 0,$$

ამიტომ

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

სადაც

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7\,; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4\,;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+1 = -1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-1) = 5\,;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3-1 = -4\,; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6+1) = 5\,; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3\,.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} -63+4+8 \\ -36+12-10 \\ -9+20+6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} -51 \\ -34 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, კრამერის ფორმულებით ან მატრიცული ხერხის გამოყენებით წრფივი სისტემების ამოხსნა ძალიან შრომატევადია და პრაქტიკაში სისტემების ამოხსნა სხვა მეთოდებით ხდება. გარდა ამისა, კრამერის წესით და მატრიცული ხერხით შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ ისეთი წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია და სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. ახლა, განვიხილავთ ისეთ განტოლებათა სისტემას, სადაც უცნობთა რიცხვი არ არის განტოლებათა რიცხვის ტოლი ან სისტემის დეტერმინანტი (როცა საქმე გვაქვს კვადრატულ სისტემასთან) არ უდრის ნულს.

§6.3. გაუსის მეთოდი. გაუსის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს n უცნობის შემცველი m განტოლებიანი წრფივი სისტემა დავიყვანოთ ისეთ სახეზე, რომლის ამოხსნა სიძნელეს აღარ წარმოადგენს. იგულისხმება, რომ სისტემა დაიყვანება სამკუთხა სახეზე ან საფეხურებიან სახეზე, რომელთა ამოხსნა მართლაც არავითარ სიძნელეს აღარ წარმოადგენს.

ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}, \tag{6.8}
$$

სადაც $a_{11} \neq 0$. თუ $a_{11} = 0$, მაშინ შეიძლება განტოლებების გადანაცვლება, ისე, რომ პირველი გასნტოლების x_1-ის კოეფიციენტი არ იყოს ნულის ტოლი.

პირველი ეტაპი. პირველ განტოლებას ვამრავლებთ ისეთ რიცხვზე, რომ პირველ განტოლებას პირველი კოეფიციენტი გაუდეს a_{21}-ის ტოლი და მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ მიღებული განტოლება. შემდეგ პირველ განტოლებას ვამრავლებთ ისეთ რიცხვზე, რომ პირველი კოეფიციენტი გაუხდეს a_{31}-ის ტოლი და მესამე განტოლებას გამოვაკლოთ მიღებული განტოლება, და ასე შემდეგ, პირველ განტოლებას ვამრავლებთ ისეთ რიცხვზე, რომ პირველი კოეფიციენტი გაუხდეს a_{m1}-ის ტოლი და m-ურ განტოლებას გამოვაკლოთ მიღებული განტოლება. მაშინ ყველა განტოლებაში (დაწყებული მეორედან) გაქრება წევრები, რომლებიც შეიცავენ x_1-ს. მიიღება

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}
\end{cases}.
$$

მეორე ეტაპი. დავუშვათ, რომ $a_{22}^{(1)} \neq 0$. ვიმეორებთ იგივე პროცედურას: ვამრავლებთ მეორე განტოლებას ისეთ რიცხვზე, რომ ის შესაბამისად გაუტოლდეს $a_{32}^{(1)}$-ს, $a_{42}^{(1)}$-ს, და ა.შ. $a_{m2}^{(1)}$-ს და პარალელურად მიღებულ განტოლებებს ვაკლებთ შესაბამისად, მე-3, მე-4, და ა.შ. m-ურ განტოლებას. ამის შედეგად მიიღება სისტემა, რომელშიც ყველა განტოლებაში დაწყებული მესამიდან აღარ იქნება წევრები x_1-ით და x_2-ით:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}
\end{cases}.
$$

თუ პროცესს გავაგრძელებთ, საბოლოოდ მიიღება სისტემა

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \\
\qquad\qquad 0 = b_{k+1}^{(k-1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad 0 = b_m^{(k-1)}
\end{cases}.
$$

ცხადია, რომ თუ $b_{k+1}^{(k-1)},\dots,b_m^{(k-1)}$ რიცხვებს შორის არის ერთი არანულოვანი რიცხვი მაინც, მაშინ სისტემას ამონახსნი არ ექნება.

თუკი ეს რიცხვები ნულის ტოლია, მაშინ ბოლო $(m-k)$ განტოლება სისტემაში იქცევა ტოლფასობად და მათი უგულვებელყოფა შეიძლება. მაშინ მათი მოცილების შემდეგ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) საბოლოო სისტემაში უცნობებისა და განტოლებების რაოდენობა ტოლია, ე.ი. $k=n$. მაშინ შესაბამისი მატრიცა სამკუთხაა:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2' \\
\qquad\qquad a_{33}'x_3 + \cdots a_{3n}'x_n = b_3' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}'x_n = b_n'
\end{cases}
$$

ამ სისტემის ამოხსნა უკვე ადვილია, უნდა დავიწყოთ ქვემოდან და თანდათანობით განვსაზღვროთ $x_n, x_{n-1},\dots,x_1$.

2) საბოლოო სისტემაში $k<n$. მაშინ შესაბამისი მატრიცა საფეხურებიანია:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2' \\
\qquad\qquad a_{33}'x_3 + \cdots a_{3n}'x_n = b_3' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad a_{kk}'x_k + \cdots + a_{kn}'x_n = b_k'
\end{cases}.
$$

ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში სისტემას უკვე ერთადერთი ამონახსნი აღარ აქვს.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით განტოლებათა სისტემა

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\
3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0
\end{cases}.
$$

ამოხსნა. ამოვწეროთ სისტემის შესაბამისი მატრიცა და გაფართოებული მატრიცა

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

და თანდათან გარდავქმნათ იგი. მაშინ მიიღება

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & -13 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -22 & -22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

მაშასადამე საბოლოოდ მიიღება სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad x_2 + 7x_3 = 8 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases},$$

საიდანაც $x_3 = 1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1$.

ამოცანა 4. ამოვხსნათ გაუსის მეთოდით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}.$$

ამოხსნა. ამოვწეროთ ამ სისტემის შესაბამისი მატრიცა და თანდათან გარდავქმნათ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

მაშასადამე ბოლო განტოლებაა 0=1. ამიტომ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია.

§6.4. კრონეკერ-კაპელის თეორემა. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (6.8) სისტემის თავსებადობისათვი აუცილებელი და საკმარისია, რომ

სისტემის მატრიცის რანგი უდრიდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს, ე.ი. $rangA = rang\overline{A}$. ამასთან:

ა) თუ $rangA = rang\overline{A} = n$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი;

ბ) თუ $rangA = rang\overline{A} < n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე;

გ) თუ $rangA \neq rang\overline{A}$, მაშინ სისტემა არათავსებადია.

თეორემის შინაარსი ჩანს ზემოთ მოყვანილი გაუსის მეთოდის შედეგად მიღებული სისტემიდან:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{/}x_2 + a_{23}^{/}x_3 + \cdots + a_{1n}^{/}x_n = b_2^{/} \\ \text{...} \\ \qquad\qquad a_{kk}^{/}x_k + \cdots + a_{kn}^{/}x_n = b_k^{/}\;. \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{k+1}^{/} \\ \qquad\qquad\qquad \text{..........} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{/} \end{cases}$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b_{k+1}^{/} = b_{k+2}^{/} = \cdots = b_m^{/} = 0$. მაგრამ, ეს სწორედ იმას ნიშნავს, რომ სისტემის გაფართოებული მატრიცის რანგი ტოლია k-სი და ე.ი. სისტემის რანგისა. თუკი გაფართოებული მატრიცის რანგი მეტია k-ზე, მაშინ რომელიღაც $b_{k+j}^{/} \neq 0$ და სისტემა არათავსებადია.

ამრიგად, სისტემის თავსებადობის გასარკვევად საჭიროა გაუსის მეთოდით სისტემა დავიყვანოთ სამკუთხა ან საფეხურიან სახეზე და გავარკვიოთ ემთხვევა თუ არა ერთმანეთს მატრიცისა და გაფართოებული მატრიცის რანგები.

თუ რანგები ტოლია, მაშინ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) სისტემის მატრიცა დაიყვანება სამკუთხა ფორმაზე და მაშინ $k = n$, ე.ი. სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

2) სისტემის მატრიცა დაიყვანება საფეხურიან სახეზე და მაშინ $k < n$. ამ დროს სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ 2) შემთხვევა. ამ დროს მიიღება სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}.$$

ასეთ შემთხვევაში $x_1, x_2, \cdots, x_k$ უცნობებს ეწოდებათ საბაზისო ცვლადები (ძირითადი ცვლადები), ხოლო დანარჩენ ცვლადებს კი თავისუფალი ცვლადები. ადვილი დასანახია, რომ თავისუფალ ცვლადებს შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობები, ხოლო ძირითადი ცვლადები ამის მერე ცალსახად გამოითვლება. როცა თავისუფალი ცვლადები ნულის ტოლები არიან, მაშინ მიიღება სისტემის ამონახსნი, რომელსაც საბაზისო ამონახსნი ეწოდება

ამოცანა 5. გაუსის მეთოდით ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \end{cases}.$$

ამოხსნა. ამოვიწეროთ სისტემის გაფართოებული მატრიცა და თანდათანობით გარდავქმნათ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 4 & 3 & -3 & 5 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

მაშასადამე საბოლოოდ მიიღება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ \quad 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -17 \end{cases},$$

აქ x_1 და x_2 ძირითადი ცვლადებია, ხოლო x_3 და x_4 კი თავისუფალი ცვლადებია. თუ $x_3 = C_1$ და $x_4 = C_2$, მაშინ

$$x_2 = -\frac{17}{5} + C_1 - \frac{7}{5}C_2, \quad x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}C_2.$$

§6.5. ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა. წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{21}x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases},
$$

ცხადია, რომ ერთგვაროვანი სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან ერთი ამონახსნი (ნულოვანი) მას ყოველთვის აქვს.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $m=n$ და მატრიცის რანგია n, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს და ამიტომ სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. მაშასადამე არანულოვანი (არატრივიალური) ამონახსნები აქვს მხოლოდ ისეთ სისტემებს, რომელშიც განტოლებათა რაოდენობა ნაკლებია ცვლადების რაოდენობაზე ან, თუკი ისინი ტოლია, მაშინ დეტერმინანტია ნულის ტოლი.

სხვაგვარად: ერთგვაროვან სისტემას არატრივიალური ამონახსნები აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის რანგი ნაკლებია სისტემის უცნობების რაოდენობაზე.

აღვნიშნოთ ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,. . . , $x_n = k_n$, სტრიქონის სახით $e_1 = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ e_1 ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნია, მაშინ $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \cdots, \lambda k_n)$-იც სისტემის ამონახსნია. ასევე, თუ e_1 და e_2 სისტემის ამონახსნებია, მაშინ $(e_1 + e_2)$-იც ამონახსნია.

მაშასადამე ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ისევ სისტემის ამონახსნია.

ამოცანა 6. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი სისტემა

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\
x_1 + 5x_2 - x_3 = 0
\end{cases},
$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (3-10) - 2(-1+5) + (2-3) = -7-8-1 = -16
$$

რადგან სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი არა, ამიტომ სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი

$$
x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.
$$

ამოცანა 7. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

ამოხსნა. ამოვხსნათ სისტემა გაუსის მეთოდით

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

რადგან მატრიცის რანგია 2, ამიტომ სისტემას აქვს არატრივიალური ამონახსნები. დაყვანილი სისტემაა

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

ავიღოთ $x_3 = 3C$. მაშინ $x_2 = -2C$ და $x_1 = C$. მაშასადამე სიასტემის ზოგადი ამონახსნია

$$x_1 = C,\ \ x_2 = -2C,\ \ x_3 = 3C.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- ამოწერეთ n უცნობიანი m წრფიფ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. რა შემთხვევაში უწოდებენ ამ სისტემას ერთგვაროვანს? არაერთგვაროვანს?
- რას ეწოდება წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი? რას ნიშნავს სისტემის ამოხსნა?
- როგორ სისტემას უწოდებენ თავსებადს? არათავსებადს?
- რას ეწოდება სისტემის შესაბამისი მატრიცა? გაფართოებული მატრიცა?
- ჩამოაყალიბეთ კრამერის წესი.
- როგორ ჩაიწერება n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცული სახით?
- ჩაწერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მატრიცული სახით.
- გადმოეცით გაუსის მეთოდის ძირითადი ეტაპები.
- ჩამოაყალიბეთ კრონეკერ-კაპელის თეორემა.
- რას ეწოდება წრფივ განტოლებათა სისტემის საბაზისო ცვლადები? თავისუფალი ცვლადები?
- რას ეწოდება წრფივ განტოლებათა სისტემის საბაზისო ამონახსნები?

- რა თვისებები აქვს ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს?

სავარჯიშო 6

1. კრამერის წესის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

ა) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$;

ე) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_3 = 15 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$;

ზ) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$; თ) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$;

ი) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$; კ) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$;

ლ) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = \sqrt{2} \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2\sqrt{2} \end{cases}$; მ) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3b \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

2. კრამერის წესის გამოყენებით დაადგინეთ a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ექნება შემდეგ განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

გ) $\begin{cases}(1-a)x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-a)x_3 = 0\end{cases}$; დ) $\begin{cases}ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^3\end{cases}$.

3. ამოხსენით სისტემა მატრიცული ხერხით:

ა) $\begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 5\end{cases}$; ბ) $\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_3 = 7 \\ 2x_2 - x_3 = -4\end{cases}$;

გ) $\begin{cases}2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 80 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 100\end{cases}$; დ) $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5 \\ 5x_2 - 2x_3 = 4\end{cases}$

4. სამსაქონლიანი ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციებია შესაბამისად:

$$Q_1 = 8 - P_1 + P_2 - P_3,$$
$$Q_2 = 10 + P_1 = P_2 - P_3,$$
$$Q_3 = 6 + P_1 + P_2 - 3P_3,$$

მიწოდების ფუნქციები კი –

$$Q_1 = -3 + P_1,$$
$$Q_2 = -7 + P_2,$$
$$Q_3 = -2 + P_3,$$

სადაც P_1, P_2, P_3 შესაბამისი პროდუქტების ერთეულის ფასებია. იპოვეთ:

ა) წონასწორობის ფასები; ბ) წონასწორობის სიდიდეები სამივე სახის საქონლისათვის.

5. ღვინის მწარმოებელი კომპანია სავაჭრო ცენტრს აწვდის სამი დასახელების სამარკო ღვინოს, რომელთა მოთხოვნის ფუნქციებია შესაბამისად:

$$Q_1 = 50(2 - P_1 + P_2 + 2P_3),$$
$$Q_2 = 50(4 - P_1 - P_2 + P_3),$$
$$Q_3 = 50(1 + P_1 + P_2 - P_3),$$

მიწოდების ფუნქციები კი –

$$Q_1 = -50 + 100P_1,$$
$$Q_2 = -100 + 50P_2,$$
$$Q_3 = -100 + 50P_3,$$

სადაც P_1, P_2, P_3 შესაბამისი პროდუქტების ერთეულის ფასებია. იპოვეთ:

ა) წონასწორობის ფასები; ბ) წონასწორობის სიდიდეები სამივე სახის საქონლისათვის.

6. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1 \\ -x_1+3x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x_1+4x_2+5x_3=10 \\ 2x_1+8x_2+10x_3=20 \\ x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$;

გ) $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 5x_1-9x_2+3x_3=-1 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-4x_3=8 \\ x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$;

ე) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=1 \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} 5x_1-4x_2+3x_3=4 \\ x_1+3x_2-4x_3=0 \\ 9x_1-11x_2+10x_3=8 \end{cases}$;

ზ) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=2 \\ -2x_1+6x_2-2x_3=-4 \\ 3x_1-9x_2+3x_3=6 \end{cases}$; თ) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -x_1+5x_2-2x_3=3 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$

ი) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4 \end{cases}$; კ) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+4x_4=4 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=2 \\ 4x_1+3x_2-5x_3+6x_4=6 \end{cases}$;

ლ) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-5x_4=-5 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$; მ) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_3+x_4+x_5=2 \\ x_4+x_5=-1 \end{cases}$.

7. ამოხსენით ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემები:

ა) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

გ) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 7x_2 = 0 \end{cases}$;

ე) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

თავი 7

ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

§7.1. პროცენტის არსი. პროცენტი ეწოდება რიცხვის მეასედ ნაწილს და აღინიშნება სიმბოლოთი %. განვიხილოთ პროცენტებთან დაკავშირებული შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა.

ა) ვიპოვოთ მოცემული a რიცხვის k პროცენტი.

ამ ამოცანის ამოსახსენლად მოცემული a რიცხვი უნდა გავამრავლოთ პროცენტის k რიცხვზე და შედეგი გავყოთ 100-ზე.

$$b = \frac{a \cdot k}{100}. \tag{7.1}$$

ბ) ვიპოვოთ a რიცხვი, თუ ცნობილია, რომ მისი $k\%$ უდრის b-ს.

(7.1) ტოლობიდან განვსაზღვროთ a რიცხვი:

$$a = \frac{b \cdot 100}{k}. \tag{7.2}$$

გ) ორი რიცხვის პროცენტული შეფარდების პოვნა.

ამ ამოცანაში მოცემულია ორი a და b რიცხვი და უნდა ვიპოვოთ, a რიცხვის რამდენი პროცენტია b რიცხვი.

საძიებელი პროცენტის გამოსათვლელად უნდა ვიპოვოთ b და a რიცხვების შეფარდება და შედეგი გავამრავლოთ 100-ზე

$$k = \frac{b \cdot 100}{a}. \tag{7.3}$$

პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევები, როდესაც ერთი მხარე (პიროვნება, ბანკი, ორგანიზაცია, სახელმწიფო და ა.შ.) სარგებლობის მიღების მიზნით მეორე მხარეს აძლევს სესხს (კრედიტს). იმ მხარეს, ვინც ფული გაასესხა (კრედიტი გასცა), კრედიტორი ანუ მევალე ეწოდება, ხოლო იმ მხარეს, ვინც ფული ისესხა (კრედიტი აიღო) – დებიტორი ანუ მოვალე.

არსებობს სესხის გაცემის მრავალი ფორმა. მაგალითად, სესხები ერთჯერადი ან მრავალჯერადი გადახდით, ფულის მოთავსება საბანკო ანგარიშზე, ინვესტიციები ფასიან ქაღალდებში და ა.შ.

ხელშეკრულების დადებისას მხარეები ადგენენ სარგებლის განაკვეთს. ვთქვათ, გარკვეული ვადით აღებულია P სიდიდის სესხი ერთჯერადი გადახდით და სარგებლის r განაკვეთით. ეს ნიშნავს, რომ მოვალემ დადგენილი ვადის გადასვლის შემდეგ მევალეს უნდა დაუბრუნოს

r%-ით გაზრდილი თანხა. ზოგჯერ აწარმოებენ სარგებლის მრავალჯერად დარიცხვას. დარიცხვები ხდება დროის გარკვეული ინტერვალების გასვლის შემდეგ. როგორც წესი, ეს ინტერვალები კონკრეტული სესხისთვის ერთი და იგივეა და მათ დარიცხვის პერიოდს უწოდებენ. დარიცხვის პერიოდად შეიძლება აიღონ წელი, ნახევარი წელი, კვარტალი, თვე და ა.შ. ხანდახან აწარმოებენ ყოველდღიურ დარიცხვას, ხოლო ზოგჯერ – უწყვეტ დარიცხვას.

დადებული ხელშეკრულების შესაბამისად, სარგებლის განაკვეთით გათვალისწინებულ თანხას უხდიან კრედიტორს, ან უმატებენ ვალს. ორივე შემთხვევაში ხდება საკრედიტო ფულადი თანხის გაზრდა. ამ პროცესს **საწყისი თანხის ზრდა ანუ დაგროვება** ეწოდება.

თუ ცნობილია სარგებლის დარიცხვის წესი, მაშინ დროის ნებისმიერი t პერიოდისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ შესაბამისი თანხის რაოდენობა. ამ თანხას **მიმდინარე თანხას** უწოდებენ. იმ თანხას კი, რომელიც შეესაბამება საკრედიტო ვადის ბოლოს, **დაგროვილი** ანუ **საბოლოო** თანხა ეწოდება.

არსებობს სარგებლის დარიცხვის რამდენიმე განსხვავებული წესი. მათ შორის ძირითადი განსხვავება განპირობებულია იმით, თუ რომელი თანხიდან იანგარიშება სარგებელი. თუ სესხის მთელი ვადის განმავლობაში დასარიცხი r%-იანი სარგებელი იანგარიშება კრედიტის საწყისი თანხიდან, მაშინ ვამბობთ, რომ საქმე გვაქვს **სარგებლის მარტივ განაკვეთთან**.

თუ დარიცხვის ყოველ პერიოდში დასარიცხი r%-იანი სარგებელი მიმდინარე თანხიდან იანგარიშება, მაშინ საქმე გვაქვს **სარგებლის რთულ განაკვეთთან.**

§7.2. დაგროვება მარტივი პროცენტით. გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც გამოითვლება სარგებლის მარტივი განაკვეთით დაბანდებული თანხის რაოდენობა საკრედიტო ვადის ბოლოს.

ვთქვათ, მოცემულია P ლარის რაოდენობის კრედიტი n პერიოდის ხანგრძლივობით. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ პერიოდში დარიცხვა ხდება სარგებლის მარტივი r%-იანი განაკვეთით, მაშინ ყოველი პერიოდის

გასვლის შემდეგ დაბანდებული თანხა იზრდება ერთი და იმავე $\frac{r}{100}\cdot P$ თანხით. ამიტომ პირველი პერიოდის ბოლოს გვექნება თანხა

$$S_1 = P + P\cdot\frac{r}{100},$$

მეორე პერიოდის ბოლოს –

$$S_2 = S_1 + P\cdot\frac{r}{100} = P + 2P\cdot\frac{r}{100},$$

მესამე პერიოდის ბოლოს –

$$S_3 = S_2 + P\cdot\frac{r}{100} = P + 3P\cdot\frac{r}{100},$$

და ა.შ. n პერიოდის ბოლოს გვექნება:

$$S_n = S_{n-1} + P\cdot\frac{r}{100} = P + P\cdot n\cdot\frac{r}{100}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ფორმულა, რომელიც აღწერს კაპიტალის დაგროვებას სარგებლის **მარტივი განაკვეთით** დაბანდების შემთხვევაში

$$S = P\left(1 + n\cdot\frac{r}{100}\right). \tag{7.4}$$

ამოცანა 1. 5000 ლარი გაცემულია სესხად 6 თვით, სარგებლის მარტივი 3%-იანი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 თვე. იპოვეთ: ა) დაგროვილი თანხა; ბ) რამდენი პროცენტით გაიზრდება საწყისი კაპიტალი?

ამოხსნა. (ა) ამოცანის პირობით საწყისი კაპიტალი P=5000, თვეების (პერიოდების) რაოდენობაა n=6, ხოლო სარგებლის მარტივი განაკვეთია $r = 3\%$. გამოვიყენოთ (7.4) ფორმულა დაგროვილი თანხის გამოსათვლელად

$$S = 5000\left(1 + 6\cdot\frac{3}{100}\right) = 5000\cdot 1{,}18 = 5900 \quad \text{(ლარი)}$$

(ბ) ჯერ გამოვთვალოთ მოგება. მივიღებთ: 5900-5000=900. ახლა გამოვთვალოთ 5000-ის რამდენი პროცენტია 900:

$$\frac{900}{5000}\cdot 100 = 18\%.$$

ამრიგად, საწყისი კაპიტალი 6 თვის შემდეგ გაიზარდა 18%-ით.

§7.3. მოკლევადიანი სესხები. პრაქტიკაში, როგორც წესი, სარგებლის მარტივ განაკვეთებს იყენებენ მოკლევადიანი სესხების გაცემის დროს, როდესაც სესხის ვადა არ აღემატება 1 წელს. ასევე მისი

გამოყენება ხდება მაშინაც, როცა პროცენტი არ ემატება ძირითად ვალს და ხდება პროცენტების პერიოდული გადახდა. რადგანაც, როგორც წესი, კონტრაქტში მითითებულია წლიური საპროცენტო განაკვეთი, ამიტომ ვადაც მითითებული უნდა იყოს წლებში და ამიტომაც საჭირო ხდება იმის დადგენა, თუ წლიური პროცენტის რა ნაწილი უნდა იქნას გადახდილი ერთ წელზე ნაკლები ვადის შემთხვევაში.

განვიხილოთ პრაქტიკაში გავრცელებული შემთხვევები. უპირველეს ყოვლისა ვადა n შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი წილადის სახით:

$$n = \frac{t}{k},$$

სადაც t არის სესხის ვადა დღეებში, k – დღეების რაოდენობა წელიწადში ანუ დროის ბაზა. დროის ბაზა შეიძლება იყოს: $k = 360$ (12 თვე თითოეული 30 დღით) ან $k = 365$ ან k=366. თუ : $k = 360$, მაშინ პროცენტს უწოდებენ კომერციულ ანუ ჩვეულებრივ პროცენტს. თუ : $k = 365$ ან $k = 366$, მაშინ კი – ზუსტ პროცენტს.

სესხის დღეების რაოდენობა შეიძლება დათვლილი იყოს მიახლოებით ან ზუსტად. პირველ ვარიანტში ყოველი თვე ითვლება 30 დღედ. სესხის გაცემის და დაბრუნების დღე კი ერთ დღედ.

პრაქტიკაში გამოიყენება დღეთა აღრიცხვის ოთხი ბაზისი:

1	$US(NASD)$ $European, 360/360$	წელიწადში – 360 დღე თვეში – 30 დღე	"გერმანული პრაქტიკა"
2	$Actual/Actual$ ან $365/365$	წელიწადი – ზუსტი დღეები თვეშიც – ზუსტი დღეები	"ინგლისური პრაქტიკა"
3	$Actual/360$ ან $365/360$	წელიწადი – 360 დღე თვეში – ზუსტი დღეები	"ფრანგული პრაქტიკა"

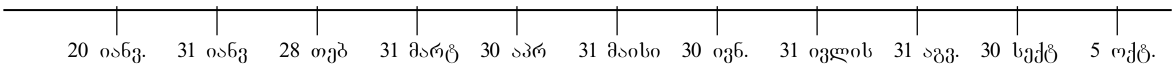
ცხრილის პირველ სვეტში მითითებული რიცხვები გამოიყენება $Exel$-ის პროგრამის გამოყენების დროს.

გერმანული პრაქტიკა გავრცელებულია გერმანიაში, შვედეთში, დანიაში და სხვა. ''ინგლისური პრაქტიკა'' – ინგლისში, აშშ-ში, პორტუგალიაში, ''ფრანგული პრაქტიკა'' კი – საფრანგეთში, ესპანეთში, შვეიცარიაში და სხვა.

ავღნიშნოთ, რომ ''ფრანგული პრაქტიკა'' უფრო დიდ შედეგს იძლევა, რადგან მაგ. თუ სესხის ვადააა 364 დღე, მაშინ $n = 364/360 = 1{,}011$ წ.

ამოცანა 2. ბანკმა სესხი 1 მლნ. ლარი გასცა 20.01.03წ., სესხის დაფარვის ვადაა 05.10.03. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 18%. რა თანხა უნდა გადაიხადოს მევალემ ვადის ბოლოს? გამოიყენეთ სამივე ''პრაქტიკა''.

ამოხსნა. ვიპოვოთ დღეების რაოდენობა t:



ზუსტი დღეების რაოდენობაა – 258;

მიახლოებითი – 255;

''ინგლისური პრაქტიკა''. 365/365; n=258/365=0,706 წელი.

$$S = 1 \cdot (1 + 0{,}706 \cdot 0{,}18) = 1{,}127232 \text{ მლნ.}$$

''ფრანგული პრაქტიკა''. n=258/360=0,716 წელი

$$S = 1 \cdot (1 + 0{,}716 \cdot 0{,}18) = 1{,}129 \text{ მლნ.}$$

''გერმანული პრაქტიკა''. n=255/360=0,708 წელი.

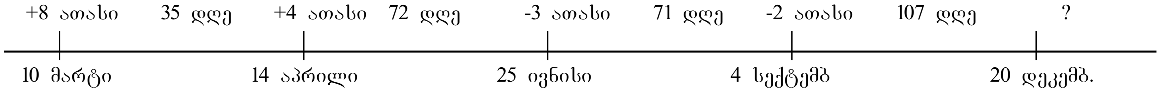
$$S = 1 \cdot (1 + 0{,}708 \cdot 0{,}18) = 1{,}127499 \text{ მლნ.}$$

როგორც მაგალითიდან ჩანს ''ფრანგული პრაქტიკის'' შემთხვევაში უფრო მეტი თანხაა გადასახდელი.

მოვიყვანოთ ორი ტიპიური ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია მარტივ პროცენტთან.

ამოცანა 3. მეანაბრემ ანაბარზე შეიტანა 10 მარტს 8 ათასი ლარი. 14 აპრილს მან ისევ შეიტანა 4 ათასი ლარი. შემდეგ 25 ივნისს ანგარიშიდან მოხსნა 3 ათასი ლარი და 4 სექტემბერს კი – 2 ათასი ლარი. და ბოლოს ანგარიში დახურა 20 დეკემბერს. იპოვეთ მფლობელის მიერ მიღებული თანხა, თუ წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთია 30%. (ჩვეულებრივი პროცენტი ზუსტი დღეებით)

ამოხსნა. ამოცანის პირობები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:



რადგან მარტივი პროცენტის დროს პროცენტი ერიცხება მხოლოდ ძირითად თანხას, ამიტომ გვექნება:

$$S_{14\ \text{აპრ}} = 8000 \cdot (1 + \frac{35}{360} \cdot 0{,}3) = 8233{,}33 \text{ ლარი.}$$

აქედან 233,33 ლარი არის დარიცხული პროცენტი.

რადგან 14 აპრილს დაემატა 4 ათასი ლარი, ამიტომ 25 ივნისისთვის იქნება:

$$S_{25\ \text{ივნისი}} = (8000 + 4000)\cdot(1 + \frac{72}{360}\cdot 0{,}3) = 12720 \text{ ლარი.}$$

ხოლო დარიცხული პროცენტი ამ დროისთვის იქნება:

233,33+720=953,33 ლარი

ანალოგიურად, დარჩენილი პერიოდებისთვის მივიღებთ:

$$S_{4\ \text{სექტ.}} = (12000 - 3000)\cdot(1 + \frac{71}{360}\cdot 0{,}3) = 9532{,}5 \text{ ლარი}$$

და დარიცხული პროცენტი 953,33+532,5=1485,83 ლარი.

$$S_{20\ \text{დეკ.}} = (9000 - 2000)\cdot(1 + \frac{107}{360}\cdot 0{,}3) = 7624{,}17 \text{ ლარი}$$

და დარიცხული პროცენტი 1485,83+624,17=2110 ლარი.

ამრიგად მეანაბრეს ბოლოს მიუღია 7000+2110=9110ლარი.

ამოცანა 4. მეწარმემ აიღო სესხი 90 დღით წლიური მარტივი 36% საპროცენტო სარგებლით. ამასთან ბანკმა დაიტოვა საკომისიო, სესხის 2,5%. იპოვეთ ამ ოპერაციების სრული შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ დარიცხვა ხდებოდა სესხის საწყის სიდიდეზე. ჩავთვალოთ, რომ წელიწადში არის 360 დღე.

ამოხსნა: ვთქვათ, P არის სესხის საწყისი სიდიდე, მაშინ საკომისიო იქნება $0{,}025P$. აქედან გამომდინარე, მეწარმემ რეალურად მიიღო $P - 0{,}025P = 0{,}975P$. მეწარმემ 90 დღის შემდეგ უნდა დააბრუნოს $S = P\cdot(1 + \frac{90}{360}\cdot 0{,}36) = 1{,}09P.$ ე.ი. ბანკმა რეალურად გასცა $0{,}0975P$ და დაიბრუნა $1{,}09P$. თუ რეალურ საპროცენტოო განაკვეთს ავღნიშნავთ $r_{\text{რეალ.}}$-ით, მაშინ (4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ განტოლებას:

$$1{,}09P = 0{,}975P\cdot\left(1 + \frac{90}{360}\cdot\frac{r_{\text{რეალ.}}}{100}\right)$$

საიდანაც გვექნება $r_{\text{რეალ.}}$=47,18% ანუ, ბანკის შემოსავლიანობა შეადგენს წლიურ მარტივ 47,18% საპროცენტო განაკვეთს.

§7.4. დისკონტირება მარტივი პროცენტით. საფინანსო პრაქტიკაში გვხვდება დაგროვებული ჯამის განსაზღვრის საწინააღმდეგო ამოცანის ამოხსნა: მოცემული S თანხის მიხედვით, რომელიც n წლის შემდეგ არის გადასახადი, უნდა განსვაზღვროთ სესხის ოდენობა P. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ხდება S თანხის **დისკონტირება**. დისკონტირების აუცილებლობა ხდება მაშინაც, როცა ხდება იმ მოკლევადიანი ვალდებულებების (თამასუქი, ტრატა და ა.შ) შესყიდვა, რომლებზეც ანგარიშსწორება მოხდება მომავალში.

ტერმინი ''დისკონტირება'' გამოიყენება უფრო ფართო აზრითაც – როგორც ნებისმიერი ღირებულებითი სიდიდის განსაზღვრის საშუალება დროის გარკვეული მომენტისათვის იმ პირობით, რომ მომავალში მისი ღირებულება იქნება S-ის ტოლი.

S-ის დისკონტირებით გამოთვლილ P-ს უწოდებენ S-ის **მიმდინარე ან დაყვანილ სიდიდეს**. ხანდახან P-ს S-ის **დღევანდელ ღირებულებას** უწოდებენ. ეს ცნება ერთ-ერთი უმთავრესია რაოდენობრივ ფინანსურ ანალიზში, რადგან სწორედ დისკონტირების მეშვეობით ხდება ისეთი ფაქტორის გათვალისწინება, როგორიცაა დრო. უმეტესი ანალიტიკური მეთოდები ეფუძნება დღევანდელი ღირებულების განსაზღვრას.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, დისკონტირების დროს ხდება შემდეგი ამოცანის ამოხსნა: რა ოდენობის თანხა უნდა გაიცეს სესხად, რომ სესხის ვადის ბოლოს მივიღოთ S თანხა, იმ პირობით, რომ სესხზე დაერიცხება მარტივი პროცენტი r საპროცენტო განაკვეთით? ამ ამოცანის ამოხსნისათვის (4) განტოლებიდან ვიპოვოთ P სიდიდე:

$$P = \frac{S}{1 + n \cdot \frac{r}{100}}. \tag{7.5}$$

$\frac{1}{1 + n \cdot \frac{r}{100}}$ სიდიდეს დისკონტირების კოეფიციენტი ეწოდება. იგი უჩვენებს საბოლოო დავალიანების რა ნაწილს შეადგენს სესხის საწყისი სიდიდე.

$$D = S - P$$

სიდიდეს **დისკონტი** ეწოდება.

ამოცანა 5. კონტრაქტის ხელმოწერიდან 180 დღის შემდეგ გადახდილ უნდა იქნეს 310000 ლარი, 16% წლიური საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ სესხის საწყისი თანხა, თუ ერთი წელი ითვლება 360 დღედ.

ამოხსნა. მოცემულია: S=310000ლ., r=16%, t=180 დღე ანუ $n=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$ წელი. (7.5) ფორმულით ვიპოვით P-ს :

$$P=\frac{310000}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{100}}=287037{,}03.\text{ლარი},$$

ხოლო დისკონტი იქნება:

D=310000-287037,03=22962,97 ლარი.

ამოცანა 6. დეპოზიტური სერტიფიკატი, ნომინალით 20 ათასი ლარი, გამოშვებულია ერთი წლის ვადით. სერტიფიკატს ერიცხება წლიური მარტივი 40% სარგებელი. რა ფასად შეიძლება მისი ყიდვა განაღდებამდე 60 დღით ადრე, რომ უზრუნველყოს წლიური მარტივი 45% შემოსავლიანობა. გამოიყენეთ ზუსტი პროცენტი.

ამოხსნა. დეპოზიტური სერტიფიკატი არის დოკუმენტი, რომელიც ადასტურებს, რომ მის მფლობელს აქვს ბანკში სერტიფიკატზე მითითებული თანხა. წლის ბოლოსთვის სერტიფიკატის ღირებულება იქნება $S=20\cdot(1+0{,}4)=28$ ათასი ლარი. მისი ღირებულება 60 დღით ადრე 45% სარგებლით იქნება:

$$P=\frac{20\cdot(1+0{,}4)}{1+\frac{60}{365}\cdot\frac{45}{100}}.=26{,}071 \text{ ათასი ლარი.}$$

ე.ი. თუ სერტიფიკატის გასაყიდი ფასი ნაკლებია 26071 ლარზე, მაშინ მისი ყიდვა მომგებიანია მყიდველისთვის.

§7.5. სესხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთის გამოთვლა მარტივი პროცენტის დროს. კონტრაქტის პირობების შემუშავებისას და მათი ანალიზისთვის საჭირო ხდება მეორადი ამოცანების – სესხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთის ამოხსნა, ამ სიდიდეების პოვნა შეიძლება (7.4) ფორმულიდან. გვექნება:

სესხის ვადა:

$$n = \frac{S - P}{P \cdot \dfrac{r}{100}} \qquad (7.6)$$

ან

$$t = \frac{S - P}{P \cdot \dfrac{r}{100}} \cdot k, \qquad \text{სადაც} \quad n = \frac{t}{k}; \qquad (7.7)$$

საპროცენტო განაკვეთი:

$$r = 100 \cdot \frac{S - P}{Pn} \qquad \text{ან} \qquad r = 100 \cdot \frac{S - P}{Pt} \cdot k. \qquad (7.8)$$

ამოცანა 6. სესხი 1 მლნ. ლარი გაიზარდა 1,20 მლნ.-მდე წლიური 25% საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ სესხის ხანგრძლივობა (k =365 დღე).

ამოხსნა. (7.7) ფორმულით მივიღებთ

$$t = \frac{1{,}2 - 1}{1 \cdot 0{,}25} \cdot 365 = 292 \ \text{დღე}.$$

ამოცანა 7. სესხი 90 ათასი, გაცემულია 120 დღით. დასაბრუნებელი თანხაა 110 ათასი. იპოვეთ კრედიტორის შემოსავლიანობა წლიური საპროცენტო განაკვეთის სახით (k =365 დღე)

ამოხსნა. (7.8) ფორმულით მივიღებთ

$$r = 100 \cdot \frac{110 - 90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 66{,}66$$

ე.ი. წლიური შემოსავლიანობაა 66,66%.

§7.6. დაგროვება რთული პროცენტით. გრძელვადიან საფინანსო-საკრედიტო ოპერაციებში, თუ პროცენტების გადახდა არ ხდება მათი დარიცხვისთანავე და ისინი ემატებიან ვალს, მაშინ სესხის დაგროვება ხდება რთული პროცენტით. მარტივი პროცენტისაგან განსხვავებით, პროცენტების დარიცხვა ხდება წინა დავალიანებაზე და ამიტომ მისი დაგროვება ხდება აჩქარებით. რთული პროცენტით დაგროვება შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც დაბანდებული სახსრების პერიოდული რეინვესტირება მარტივი პროცენტით დარიცხვის ერთი პერიოდით.

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, ვთქვათ, პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს წინა თანხაზე. ვთქვათ, P არის სესხის საწყისი სიდიდე და r – წლიური საპროცენტო განაკვეთი, მაშინ ერთი წლის შემდეგ დავალიანება იქნება

$$S_1 = P + P\cdot\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right),$$

მეორე წლის ბოლოს კი

$$S_2 = P\left(1+\frac{r}{100}\right) + P\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

და ა.შ. საბოლოოდ, n წლის ბოლოს დაგროვებული ჯამი (დავალიანება) ტოლი იქნება

$$S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n. \tag{7.9}$$

ამოცანა 8. სესხი 1000 ლარი, გაცემულია 5 წლის ვადით წლიური 10% სარგებლით (დარიცხვა ყოველი წლის ბოლოს). იპოვეთ დაგროვებული თანხა.

ამოხსნა. (7.9) ფორმულით გვექნება:

$$S = 1000\cdot(1+0.1)^5 = 1610{,}51 \text{ ლარი.}$$

§7.7. შერეული პროცენტი. ხშირად პროცენტების დარიცხვის პერიოდი არ გამოისახება წლების მთელი რიცხვებით. ასეთ შემთხვევაში გამოიყენება ორი მეთოდი. პირველი მეთოდი იყენებს (7.9) ფორმულას, სადაც n არის წილადი (უმეტეს შემთხვევაში ათწილადად ჩაწერილი). მაგალითად თუ სესხის ვადაა 2 წელი და 3 თვე, მაშინ n=2,25 წელი. მეორე მეთოდით პერიოდი n იყოფა ორ შესაკრებად, სადაც პირველი შესაკრები არის მთელი წლების რაოდენობა, ხოლო მეორე კი წარმოადგენს წილადურ ნაწილს. მთელი წლებისათვის გამოიყენება (7.9) ფორმულა და მიღებული სიდიდისთვის შემდეგ გამოიყენება მარტივი პროცენტის (7.4) ფორმულა. ე.ი. თუ $n=a+b$, სადაც a არის მთელი რიცხვი, b კი წილადური რიცხვი, მაშინ დაგროვებული ჯამი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^a\left(1+b\cdot\frac{r}{100}\right).$$

ამოცანა 9. სესხი, 3000 ლარი, გაცემულია 3 წლით და 160 დღით წლიური რთული 16,5%-ით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი.

ამოხსნა. გვაქვს: $P = 3000, \quad r = 16{,}5, \quad n = 3\frac{160}{365} = 3{,}43836$ წელი. პირველი მეთოდით მივიღებთ:

$$S = 3000 \cdot 1.165^{3,43836} = 5071{,}93 \text{ ლარი.}$$

შერეული მეთოდით:

$$S = 3000 \cdot 1.165^3 \cdot (1 + 0{,}43836 \cdot 0.165) = 5086.59 \text{ ლარი.}$$

ამოცანა 10. ერთი ბანკი სთავაზობს კლიენტებს წლიურ 110% საპროცენტო განაკვეთს, მეორე ბანკი კი კვარტალურ 22% სარგებელს ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით. ორივე ვარიანტში გამოიყენება შერეული პროცენტი. რომელი ვარიანტია მომგებიანი კლიენტისათვის, თუ ანაბრის ვადა იქნება 9 თვე.

ამოხსნა. ვთქვათ საწყისი თანხაა P. რადგან ანაბრის ვადაა 9 თვე, ამიტომ პირველ ვარიანტში გამოიყენება მარტივი პროცენტი. ანგარიშზე დაგროვილი თანხა იქნება:

$$S_1 = P\left(1 + \frac{9}{12} \cdot 1{,}1\right) = 1{,}825P.$$

მეორე ვარიანტში, რადგან 9 თვე არის სამი კვარტალი და დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს, ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ რთული პროცენტი. ამ შემთხვევაში ანგარიშზე დაგროვებული ჯამი იქნება:

$$S_2 = P(1 + 0{,}22)^3 = 1{,}816P.$$

რადგან $S_1 > S_2$, ამიტომ კლიენტისათვის პირველი ვატრიანტი არის მომგებიანი.

§7.8. ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი. თანამედროვე საფინანსო პრაქტიკაში პროცენტების დარიცხვა ხდება არა წელიწადში ერთხელ, არამედ რამდენჯერმე. კერძოდ, ყოველ 6 თვეში, ოველ კვარტალში, ყოველ თვე და ყოველდღეც კი. ამ შემთხვევაშიც შეიძლება (7.9) ფორმულის გამოყენება შემდეგი ცვლილებებით: n–ით უნდა აღვნიშნოთ დარიცხვების პერიოდების რაოდენობა, r-ით კი პერიოდის საპროცენტო განაკვეთი. მაგალითად, თუ სესხის ვადაა 5 წელი, პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს და წლიური განაკვეთია 12%, მაშინ გვექნება $5 \cdot 4 = 20$ პერიოდი და პერიოდის განაკვეთი იქნება $12 : 4 = 3\%$. ე.ი. (7.9) ფორმულაში $n = 20$ და $r = 3$.

რადგან პრაქტიკაში, კონტრაქტებში ფიქსირდება უმეტესად წლიური საპროცენტო განაკვეთი, ამიტომაც, დამატებით მიეთითება დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში. მაგალითად, "წლიური 24 პროცენტი, დარიცხვა ყოველი თვის ბოლოს". ასეთ საპროცენტო განაკვეთს **ნომინალურ** განაკვეთს უწოდებენ.

ვთქვათ, წელიწადში დარიცხვის რაოდენობაა m. თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია r, მაშინ პერიოდის საპროცენტო განაკვეთი იქნება $\frac{r}{m}$. ხოლო პერიოდების რაოდენობა იქნება $n \cdot m$. ასეთ პირობებში დაგროვებული თანხის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{nm} \quad . \qquad (7.10)$$

ამოცანა 11. იპოვეთ ამოცანა 8-ის პირობებში დაგროვებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა. გვაქვს: $P = 1000,\ \ r = 10,\ \ n = 5.$ (7.9) ფორმულით მივიღებთ:

$$S = 1000\left(1 + \frac{10}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 1638{,}61 \text{ ლარი.}$$

თუ შევადარებთ მიღებულ შედეგს ამოცანა 8-ში მიღებულ სიდიდეს, ვნახავთ, რომ დაგროვებული თანხა გაიზარდა. უფრო მეტიც, იგი მით უფრო მოიმატებს, რაც უფრო ხშირად მოხდება პროცენტების დარიცხვა (თვეში ერთხელ, ყოველდღიურად და ა.შ.), თუმცა ზრდა არ ხდება უსასრულოდ. ზრდის ზღვრულ სიდიდეს იძლევა უწყვეტი პროცენტი.

ამოცანა 12. მეანაბრემ ანაბარზე განათავსა 40 ათასი ლარი. 1,5 წლის შემდეგ ანგარიშიდან მოხსნა 18 ათასი ლარი და მომდევნო 3 წლის შემდეგ დახურა ანგარიში. იპოვეთ ბოლოს მიღებული თანხა, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 34% და დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ 1,5 წლის შემდეგ ანგარიშზე დაგროვებული თანხა. გვაქვს: $P = 40000,\ \ n = 1{,}5,\ \ m = 2,\ \ r = 34.$ (7.10) ფორმულით გვექნება:

$$S = 40000\left(1 + \frac{34}{2 \cdot 100}\right)^{2 \cdot 1{,}5} = 64064{,}52 \text{ ლარი.}$$

თანხის გატანის შემდეგ ანგარიშზე დარჩა 64064,52 – 18000 = 46064,52 ლარი. მომდევნო სამი წლის შემდეგ დარჩენილი თანხიდან ანგარიშზე დაგროვდებოდა:

$$S_3 = 46064{,}52\left(1+\frac{34}{2\cdot 100}\right)^{2\cdot 3} = 118163 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. მეანაბრემ ბოლოს მიიღო 118163 ლარი.

§7.9. ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი. თუ დავაკვირდებით ამოცანა 11-ს, დავინახავთ რომ თანხის დაგროვება ხდებოდა არა წლიური 10%-ით, არამედ უფრო მეტი საპროცენტო განაკვეთით. ამ ამოცანაში რეალური საპროცენტო განაკვეთი არის არა წლიური 10%, არამედ 10,38%. (შეამოწმეთ თქვენ თვითონ!). აქედან გამომდინარე, ბუნებრივია, შემოვიღოთ რეალური განაკვეთის, ანუ, როგორც მას უწოდებენ, ეფექტური განაკვეთის ცნება. ე.ი. **ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი არის პროცენტი , რომელიც დაერიცხება ანაბარს წელიწადში ერთხელ და რომელიც იძლევა იმავე შედეგს, რასაც წელიწადში m-ჯერ დარიცხული რთული პროცენტი.** ეფექტური განაკვეთი აღვნიშნოთ r_{eff}-ით. განმარტების თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობა

$$P\left(1+\frac{r_{eff}}{100}\right)^{n} = P\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn}$$

აქედან

$$r_{eff} = 100\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{m} - 100. \tag{7.11}$$

ამოცანა 13. ა) იპოვეთ ეფექტური განაკვეთი, თუ ნომინალური განაკვეთია 25% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს. ბ) იპოვეთ ნომინალური განაკვეთი, თუ ეფექტური განაკვეთია 30% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა. ა) გვაქვს $r = 25,\quad m = 12.$ (7.11) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$r_{eff} = 100\left(1+\frac{25}{12\cdot 100}\right)^{12} - 100 = 28{,}07\%$$

ე.ი. წლიური ნომინალური 25% საპროცენტო განაკვეთი, პროცენტების ყოველთვიურად დარიცხვით, ტოლფასია 28,07% ეფექტური განაკვეთისა.

ბ) გვაქვს $r_{eff} = 30,\quad m = 4.$ (7.11) ფორმულიდან მივიღებთ განტოლებას:

$$\left(1+\frac{r}{4\cdot 100}\right)^{4} = 1 + 0{,}3,$$

საიდანაც r=27,11, ანუ, ნომინალური საპროცენტო განაკვეთია 27,11%.

§7.10. უწყვეტი პროცენტი. რადგან წელიწადში დარიცხვები შეიძლება ხდებოდეს რამდენჯერმე, და რადგან, რაც უფრო ხშირია დარიცხვები, მით უფრო იზრდება დაგროვებული ჯამის სიდიდე, ამიტომ, ბუნებრივია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $m \to \infty$. მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს უწყვეტი პროცენტი. ცხადია, ამ შემთხვევაში პროცენტების დარიცხვა ხდება მყისიერად, რაც პრაქტიკულად იშვიათად გამოიყენება, თუმცა, უწყვეტი პროცენტის გამოყენება ხდება საინვესტიციო გადაწყვეტილებების მიღებისას და რთული ფინანსური პრობლემების ანალიზისას, აგრეთვე ზოგიერთი ფასიანი ქაღალდების (ფიუჩერსული კონტრაქტები და ა.შ. ანალიზისას.

მტკიცდება, რომ უწყვეტი პროცენტის დროს (7.10) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$S = P \cdot e^{\frac{rn}{100}} \quad . \tag{7.12}$$

სადაც, e არის ე.წ. ნეპერის რიცხვი., რომელიც ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა 2,7182.

უწყვეტ პროცენტში გამოყენებულ საპროცენტო განაკვეთს ზოგჯერ ზრდის სიდიდეს უწოდებენ . თუ r>0, მაშინ (7.12) ფორმულა აღწერს კაპიტალის უწყვეტი ზრდის კანონს, ხოლო თუ r<0, მაშინ – კაპიტალის უწყვეტი კლების კანონს.

ვიპოვოთ ეფექტური განაკვეთი უწყვეტი პროცენტისათვის. (7.12) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$P\left(1 + \frac{r_{eff}}{100}\right)^n = P \cdot e^{\frac{rn}{100}},$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$r_{eff} = 100e^{\frac{r}{100}} - 100. \tag{7.13}$$

ამოცანა 14. 6000 ლარს 5 წლის განმავლობაში ერიცხებოდა უწყვეტი პროცენტი. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი, თუ ზრდის სიდიდეა 7%.

ამოხსნა. გვაქვს: $P = 6000,\quad n = 5,\quad r = 7.$ (7.12) ფორმულით გვექნება:

$$S = 6000 \cdot e^{\frac{7 \cdot 5}{100}} = 8514 \text{ ლარი.}$$

მიღებული სიდიდე მიუთითებს, რომ 6000 ლარი მაქსიმუმ შეიძლება გაიზარდოს 8514 ლარამდე 7% განაკვეთის შემთხვევაში.

§7.11. დისკონტირება რთული პროცენტით. ისევე როგორც მარტივი პროცენტის შემთხვევაში, რთული პროცენტის დროსაც დისკონტირება გულისხმობს მოცემული S-ის მიხედვით P სიდიდის პოვნას. (7.9) ფორმულიდან მივიღებთ

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} \tag{7.14}$$

სადაც

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\text{-ს}$$

ეწოდება დისკონტირების კოეფიციენტი, ხოლო P-ს კი დღევანდელი ღირებულება ანუ მიმდინარე სიდიდე.

თუ პროცენტების დარიცხვა წელიწადში ხდება m-ჯერ, მაშინ (7.10)-დან მივიღებთ:

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn}} \quad . \tag{7.15}$$

უწყვეტი პროცენტის შემთხვევაში კი მივიღებთ:

$$P = S \cdot e^{-\frac{rn}{100}} \tag{7.16}$$

რადგან მიმდინარე სიდიდე საფინანსო პრაქტიკაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სიდიდეა, ამიტომ მოვიყვანოთ მისი რამდენიმე თვისება: 1) რაც უფრო მაღალია საპროცენტო განაკვეთი, მით უფრო ძლიერია დისკონტირება, ე.ი. უფრო მეტად მცირდება P, თუ სხვა პირობები თანაბარია; 2) დიდი n-ის შემთხვევაში P იქნება მცირე; 3) P შეიძლება განისაზღვროს დროის ნებისმიერი მომენტისათვის. რაც უფრო უახლოვდება მიმდინარე სიდიდის განსაზღვრის მომენტი S-ის გაცემის მომენტს, მით უფრო მცირდება სხვაობა $D = S - P$; 4) m-ის ზრდასთან ერთად იზრდება $\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn}$-ის მნიშვნელობა.

ამოცანა 15. 5000 ლარი გადახდილი უნდა იქნეს 5 წლის შემდეგ. იპოვეთ მიმდინარე ღირებულება, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%, ხოლო დარიცხვა ხდება ა) წელიწადში ერთხელ, ბ) ყოველთვიურად.

ამოხსნა. გვაქვს: $S = 5000, \quad n = 5, \quad r = 12.$

ა) $m=1$, მაშინ

$$P = 5000 \cdot 1{,}12^{-5} = 2837{,}13 \text{ ლარი.}$$

ბ) $m=12$, მაშინ

$$P = \frac{5000}{\left(1+\frac{12}{12\cdot 100}\right)^{60}} = 2752{,}25 \text{ ლარი.}$$

ამოცანა 16. იპოვეთ 20000 ლარის დღევანდელი ღირებულება, თუ: ა) ეს თანხა მიღებული იქნება 4 წლის შემდეგ. ეს თასნხა მიღებული იყო 2 წლის და 6 თვის წინ. შესაძლებელია თანხის განთავსება დეპოზიტზე რთული წლიური 20% სარგებლით ყოველი 6 თვის ბოლოს დარიცხვებით.

ამოხსნა. ა) გვაქვს: $S=20000,\ \ n=4,\ m=2,\ \ r=20.$ (7.15) ფორმულით მივიღებთ:

$$P = \frac{20000}{\left(1+\frac{20}{2\cdot 100}\right)^{60}} = 9330 \text{ ლარი.}$$

ბ) ამ შემთხვევაში გვექნება: $P=20000,\ \ n=2{,}5,\ m=2,\ \ r=20.$ (7.10) ფორმულით მივიღებთ:

$$S = 20000\left(1+\frac{20}{2\cdot 100}\right)^{5} = 32210 \text{ ლარი.}$$

§7.12. სესხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთის გამოთვლა რთული პროცენტის დროს. (7.9) და (7.10) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ სესხის ვადა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით

$$n = \frac{\lg(S/P)}{\lg\left(1+\frac{r}{100}\right)}, \qquad n = \frac{\lg(S/P)}{m\lg\left(1+\frac{r}{100m}\right)},$$

ხოლო საპროცენტო განაკვეთი კი –

$$r = 100\left(\sqrt[n]{S/P}-1\right), \qquad r = 100m\left(\sqrt[mn]{S/P}-1\right).$$

უწყვეტი პროცენტის შემთხვევაში (7.12)-დან გვექნება

$$n = \frac{100\ln(S/P)}{r} \qquad \text{და} \qquad r = \frac{100\ln(S/P)}{n}.$$

ამოცანა 17. წლიური რთული საპროცენტო სარგებელია 30%. რა დროა საჭირო საწყისი თანხის 4-ჯერ გაზრდისათვის?

ამოხსნა. თუ საწყის თანხას აღვნიშნავთ P-ით, მაშინ დაგროვებული თანხა იქნება $S=4P$, ხოლო

$$n=\frac{\lg(S/P)}{\lg\left(1+\frac{r}{100}\right)}=\frac{\lg 4}{\lg(1+0{,}3)}=5{,}284 \text{ წელი.}$$

ამოცანა 18. რა საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში გასამმაგდება საწყისი თანხა 7 წელიწადში, თუ დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი 6 თვის ბოლოს, ბ) ყოველი თვის ბოლოს?

ამოხსნა. ა) რადგან $S=3P$, $n=7$, $m=2$, ამიტომ

$$r=100m\left(\sqrt[mn]{S/P}-1\right)=200\cdot\left(\sqrt[14]{3}-1\right)=16{,}33.$$

ე.ი. თანხა გაორმაგდება16,33% განაკვეთის დროს.

ბ) გვაქვს: $S=3P$, $n=7$, $m=12$, ამიტომ

$$r=100m\left(\sqrt[mn]{S/P}-1\right)=1200\cdot\left(\sqrt[84]{3}-1\right)=15{,}80.$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში თანხა გასამმაგდება 15,8% საპროცენტო განაკვეთის დროს.

§7.13. გადასახადების ფინანსური ექვივალენტობა. პრაქტიკაში, ხშირად საჭირო ხდება ერთი ფინანსური ვალდებულების შეცვლა მეორეთი (მაგალითად უფრო შორეული ვადით), რამდენიმე ვალდებულების ერთში გაერთიანება (გადასახადების კონსოლიდაცია) და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში აუცილებლად გასარკვევია, თუ რა პრინციპებით უნდა ვიხელმძღვანელოთ ხელშეკრულების პირობების შეცვლისას. ცხადია, რომ ეს პრინციპი უნდა მდგომარეობდეს ვალდებულებების ფინანსურ ექვივალენტობაში. ექვივალენტურად ითვლება ისეთი გადასახადები, რომელთა დაყვანილი სიდიდე დროის რაიმე მომენტისათვის, ერთი და იგივეა.

გარდა ამისა, ექვივალენტურობის პრინციპი საშუალებას იძლევა შევადაროთ ერთმანეთს დროის სხვადასხვა მომენტში გადასახდელი გადასახადები, ამისათვის ისინი უნდა დავიყვანოთ დროის რაიმე ერთი მომენტისათვის. ასეთი სახის ამოცანები პრაქტიკაში გვხვდება არა მხოლოდ საფინანსო ვალდებულებების შეცვლისას, არამედ ალტერნატივების არჩევისას. თუ ფინანსური ექვივალენტობის პრინციპი დაირღვა, მაშინ კონტრაქტში მონაწილე ერთ-ერთი მხარე ზარალდება.

ამოცანა 19. გვაქვს ორი ვალდებულება: პირველი – 400 ათასი ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 4 თვის შემდეგ და მეორე – 450 ათასი ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 8 თვის შემდეგ. გადამხდელისათვის რომელი

ვარიანტია უფრო იაფი, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20% (მარტივი პროცენტი).

ამოხსნა. ვიპოვოთ ორივე ვარიანტის მიმდინარე ღირებულება კონტრაქტის დასაწყისისათვის. ლექცია 11-ის (5) ფორმულით გვექნება:

$$P_1 = \frac{400}{1+\frac{4}{12}\cdot\frac{20}{100}} = 375 \text{ ათასი}; \qquad P_2 = \frac{450}{1+\frac{8}{12}\cdot\frac{20}{100}} = 397{,}06 \text{ ათასი}.$$

რადგან $P_1 < P_2$ ამიტომ პირველი ვარიანტი უფრო იაფია გადამხდელისათვის.

ამოცანა 20. ორი სესხი: 10 ათასი ლარი გადახდის ვადით 150 დღე და 5 ათასი ლარი გადახდის ვადით – 180 დღე – უნდა გაერთიანდეს ერთ სესხად, გადახდის ვადით 200 დღე. მხარეები შეთანხმდენ წლიურ 20%-იან განაკვეთზე. იპოვეთ გადასახდელი თანხის სიდიდე (მარტივი პროცენტი, k =360).

ამოხსნა.

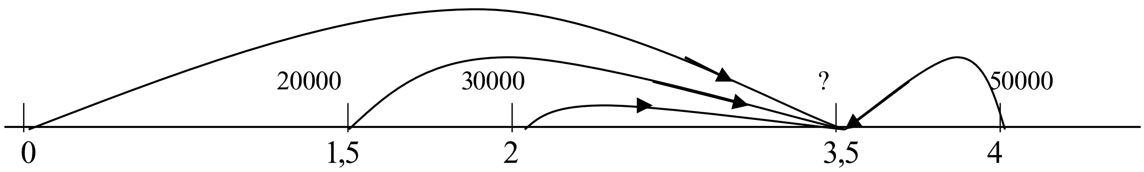
$$P_1 = \frac{10000}{1+\frac{150}{360}\cdot 0{,}2} = 9230{,}7; \qquad P_2 = \frac{5000}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}2} = 4545{,}4$$

რადგან ახალი ვალდებულება ექვივალენტური უნდა იყოს მოცემული ორი ვალდებულებისა, ამიტომ თუ მის დღევანდელ ღირებულებას აღვნიშნავთ P-ით, მაშინ $P = P_1 + P_2$. ე.ი. P =9230,7+4545,4=13776,1 ლარი. საბოლოოდ გადასახდელი თანხის სიდიდე 200 დღის შემდეგ ტოლი იქნება

$$S = 13776{,}1\cdot\left(1+\frac{200}{360}\cdot 0.2\right) = 15306{,}8 \text{ ლარი}.$$

ამოცანა 21. კონტრაქტის მიხედვით მოვალემ კრედიტორს უნდა გადაუხადოს 20, 30 და 50 ათასი ლარი შესაბამისად 1,5 წლის, 2 წლის და 4 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად, მოვალე დაფარავს მთლიან დავალიანებას ერთჯერადად 3 წლის და 6 თვის შემდეგ. იპოვეთ გადასახდელი თანხა, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 36%.

ამოხსნა. რადგან გადახდა უნდა მოხდეს 3 წლის და 6 თვის შემდეგ, ამიტომ ბუნებრივია, დაყვანის დროის მომენტად ავიღოთ ნახაზზე პუნქტი "3,5".



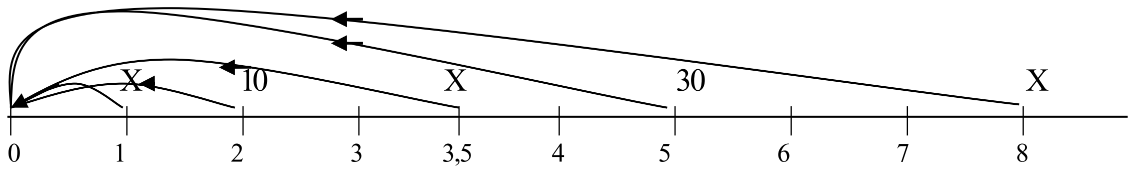
ნახაზიდან ჩანს, რომ $P_1 = 20000$, $n_1 = 3,5-1,5 = 2$, $P_2 = 30000$, $n_2 = 3,5-2 = 1,5$, $S = 50000$, $n = 4-3,5 = 0,5$, $r = 36$. აღვნიშნოთ X-ით გადასახდელი თანხა, მაშინ

$$X = 20000\cdot(1+0,36)^2 + 30000\cdot(1+0,36)^{1,5} + \frac{50000}{(1+0,36)^{0,5}} = 127447 \text{ ლარი.}$$

აღვნიშნოთ, რომ იგივე შედეგს მივიღებდით, დაყვანის მომენტად რომ აგვერჩია ნებისმიერი სხვა პუნქტი და მიღებული სიდიდის მიხედვით შემდეგ გამოგვეთვალა გადასახდელი თანხა.

ამოცანა 22. კონტრაქტის მიხედვით მეწარმემ უნდა გადაუხადოს ბანკს 10 ათასი ლარი 2 წლის შემდეგ და 30 ათასი ლარი 5 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად მეწარმე დაფარავს დავალიანებას ტოლი გადასახადებით 1 წლის, 3,5 წლის და 8 წლის შემდეგ. იპოვეთ ეს სიდიდეები, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 36% და დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

ამოხსნა. დაყვანის მომენტად ავიღოთ პუნქტი “0”.



ნახაზიდან გამომდინარე (7.15) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ საწყისი ვარიანტისა და შესაცვლელი ვარიანტის დღევანდელ ღირებულებას:

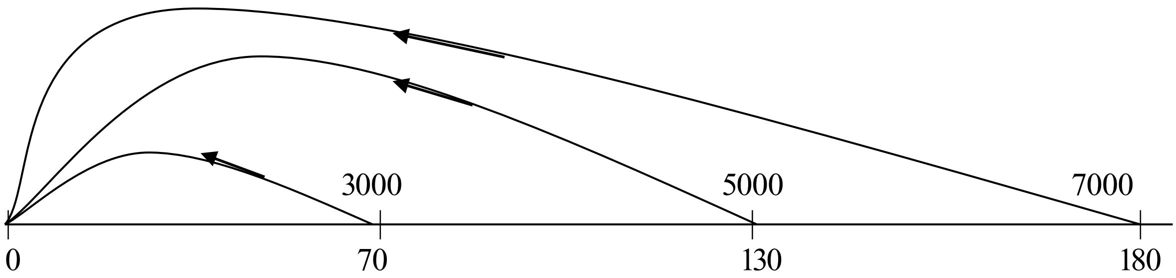
$$P_1 = \frac{10000}{\left(1+\frac{36}{200}\right)^{2\cdot 2}} + \frac{30000}{\left(1+\frac{36}{200}\right)^{2\cdot 5}}, \qquad P_2 = \frac{X}{\left(1+\frac{36}{200}\right)^{2\cdot 1}} + \frac{X}{\left(1+\frac{36}{200}\right)^{2\cdot 3,5}} + \frac{X}{\left(1+\frac{36}{200}\right)^{2\cdot 8}}.$$

ექვივალენტობის პრინციპით გვაქვს $P_1 = P_2$. ამიტომ $X = 12010$ ლარი.

ამოცანა 23. სამი გადასახადი, 3000, 5000 და 7000, შესაბამისად, 70 დღის, 130 დღის და 180 დღის შემდეგ გადახდით, უნდა შეიცვალოს მათი ჯამის ტოლი ერთ გადასახადით. იპოვეთ კონსოლიდირებული გადასახადის

გადახდის ვადა. გამოიყენეთ მარტივი წლიური 32% საპროცენტო განაკვეთი, ჩვეულებრივი პროცენტი. დაყვანის მომენტად განიხილეთ პუნქტი “0”.

ამოხსნა. გვაქვს: $S_1=3000,\ S_2=5000,\ S_3=7000,\ S=S_1+S_2+S_3=15000,$ $n_1=70/360,\ n_2=130/360,\ n_3=180/360,\ k=360,\ r=32.$ საძიებელი ვადა აღვნიშნოთ n-ით. ვიპოვოთ სამივე გადასახადის დღევანდელი ღირებულება პუნქტ “0”-ში.



$$P_0=\frac{3000}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}32}+\frac{5000}{1+\frac{130}{360}\cdot 0{,}32}+\frac{7000}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}32}=13340 \text{ ლარი.}$$

მივიღეთ, რომ 13340 ლარი n წლის შემდეგ გახდება 15000 ლარი წლიური 32% სარგებლით. (7.5) ფორმულით გვექნება განტოლება:

$$\frac{15000}{1+n\cdot 0{,}32}=13340,$$

საიდანაც მივიღებთ $n=0{,}389$ წელი ანუ 140 დღე.

§7.14. ინფლაცია. ფასების ცვლილების გამო ინვესტორის ნომინალურმა შემოსავალმა შეიძლება დაკარგოს მსყიდველუნარიანობა. ამიტომ აზრი აქვს რეალური შემოსავლის ანგარიშს, რომელიც დამოკიდებულია ინფლაციის ტემპზე (განაკვეთზე). ამისათვის კი ხშირად გამოიყენება **სამომმხმარებლო ინდექსი** (***Consumer*** Pr***ise Indexs***, ***CPI***) ანუ, როგორც ხშირად უწოდებენ **ინფლაციის ინდექსი**.

ინფლაციის ტემპი გულისხმობს ფასების ზრდის ფარდობით სიდიდეს მოცემულ პერიოდში. მაგალითად, თუ პერიოდის დასაწყისში 1000 ლარის ღირებულების ნივთი პერიოდის ბოლოს ღირს 1200 ლარი, მაშინ ამბობენ, რომ ფასები გაიზარდა 1,2-ჯერ, ანუ ინფლაციის ინდექსი არის 1,2. ხოლო ინფლაციის ტემპია (1200 – 1000)/1000=0,2 ანუ 20%. ინფლაციის ტემპს აღნიშნავენ h ასოთი. ე.ი. $h=100\cdot(CPI-1)$.

ინფლაცია არის ჯაჭვური პროცესი. აქედან გამომდინარე, რამდენიმე პერიოდის ინფლაციის სრული ინდექსი ტოლია თითოეული პერიოდის ინფლაციის ინდექსების ნამრავლისა. ე.ი. თუ n პერიოდში ინფლაციის ტემპებია $h_1, h_2, \cdots, h_n$ მაშინ ინფლაციის ინდექსი იქნება:

$$CPI = \left(1+\frac{h_1}{100}\right)\left(1+\frac{h_2}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{h_n}{100}\right) \tag{7.17}$$

კერძოდ, თუ ყოველ პერიოდში ინფლაციის ტემპი მუდმივია, მაშინ

$$CPI = \left(1+\frac{h}{100}\right)^n.$$

განვიხილოთ ინფლაციის გავლენა დაგროვებულ ჯამზე. შემოვიღოთ რეალური დაგროვებული ჯამი (მსყიდველუნარიანობის მიხედვით) $S_{real.}$. ცხადია,

$$S_{real.} = \frac{S}{CPI}.$$

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$S_{real.} = \frac{S}{CPI} = \frac{P\left(1+n\cdot\frac{r}{100}\right)}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}. \tag{7.18}$$

რთული პროცენტის შემთხვევაში, როცა დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს და h არის ინფლაციის წლიური ტემპი, გვექნება:

$$S_{real.} = \frac{S}{CPI} = \frac{P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n} = P\cdot\left(\frac{100+r}{100+h}\right)^n. \tag{7.19}$$

ანალოგიურად გამოითვლება რეალური დაგროვებული ჯამი, როცა დარიცხვა ხდება ყოველ თვე, ყოველ კვარტალში და ა.შ. **(გამოიყვანეთ თქვენ თვითონ!).**

თუ $r = h$, მაშინ $S_{real.} = P$. ე.ი. თუ ინფლაციის ტემპი ემთხვევა საპროცენტო სარგებელს, მაშინ, მართალია, საწყისი კაპიტალი რაოდენობრივად იზრდება, მსყიდველობითი უნარი იგივე რჩება. თუ $h > r$, მაშინ ხდება კაპიტალის “ეროზია” და რეალური დაგროვება არ ხდება.

ვიპოვოთ რეალური საპროცენტო r_{real} განაკვეთი ნომინალური r_{nom} და ინფლაციის h ტემპის მიხედვით.

მარტივი პროცენტის შემთხვევაში (7.18) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$P\left(1+n\cdot\frac{r_{real}}{100}\right)=\frac{P\left(1+n\cdot\frac{r_{nom}}{100}\right)}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^{n}}.$$

საიდანაც ვიპოვით რეალურ განაკვეთს:

$$r_{real}=\frac{100}{n}\left(\frac{1+n\cdot\frac{r_{nom}}{100}}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^{n}}-1\right). \tag{7.20}$$

რთული პროცენტის შემთხვევაში (7.19) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$P\cdot\left(1+\frac{r_{real}}{100}\right)^{n}=P\cdot\left(\frac{100+r_{nom}}{100+h}\right)^{n}.$$

საიდანაც გვექნება:

$$100\cdot(100+r_{nom})=(100+r_{real})\cdot(100+h.)$$

ანუ

$$r_{real}=\frac{r_{nom}-h}{1+\frac{h}{100}}. \tag{7.21}$$

რადგანაც ნორმალურ ეკონომიკაში ინფლაციის ტემპი მცირეა, ამიტომ ბოლო ტოლობაში $\frac{h\cdot r_{real}}{100}$ შესაკრები იქნება მცირე და მისი უგულვებელყოფა შეიძლება. მაშინ მივიღებთ ე.წ. **ფიშერის ფორმულას:**

$$r_{real}=r_{nom}-h \tag{7.22}$$

აღვნიშნოთ, რომ თუ ინფლაციის ტემპი დიდია, მაშინ ფიშერის ფორმულა იძლევა დამახინჯებულ შედეგს, მაგალითად, თუ ნომინალური შემოსავალია 110% და ინფლაციაა 100%, მაშინ რეალური შემოსავალია 5% და არა 10%.

ანალოგიურად გამოითვლება ინფლაცია, როცა დარიცხვა ხდება ყოველ თვე, ყოველ კვარტალში და ა.შ. (**გამოიყვანეთ თქვენ თვითონ!).**

ამოცანა 24. სამ თვეში სამომხმარებლო კალათა გაძვირდა 634 ლარიდან 692 ლარამდე. იპოვეთ: ა) CPI სამ თვეში, ბ) საშუალო თვიური CPI, გ) ინფლაციის ტემპი სამ თვეში, დ) ინფლაციის საშუალო თვიური ტემპი.

ამოხსნა. ა) $CPI = 692/634 = 1{,}0915$. ე.ი. ამ პერიოდში ფასები გაიზარდა 1,0915-ჯერ ანუ 9,15%-ით ბ) x-ით აღვნიშნოთ საშუალო თვიური ინდექსი. მაშინ გვექნება $1{,}0915 = x^3$. საიდანაც $x = \sqrt[3]{1{,}0915} = 1{,}0296$. გ) $h = CPI - 1 = 0{,}0915$. იგივე შედეგს მივიღებდით, თუ გამოვიყენებდით $h = (692 - 634)/634 = 0{,}0915$. დ) საშუალო ტემპი თვეში იქნება 1,0296 – 1=0,296 ანუ 2,96%.

ამოცანა 25. საწყისი თანხაა 1000 ლარი. ინფლაციის წლიური ტემპია 20%, წლიური ნომინალური განაკვეთია 42%. იპოვეთ 4 წლის ბოლოს დაგროვებული ჯამი (მსყიდველობითი უნარის მიხედვით) და რეალური წლიური საპროცენტო განაკვეთი ა) მარტივი პროცენტის, ბ) რთული პროცენტის შემთხვევაში.

ამოხსნა. ა) მარტივი პროცენტის შემთხვევაში გვაქვს: $P = 1000$; $r_{nom} = 42;\ \ h = 20;\ \ n = 4.$ (7.20) ფორმულით ვპოულობთ

$$r_{real} = \frac{100}{4}\left(\frac{1 + 4\cdot 0{,}42}{(1 + 0{,}2)^4} - 1\right) = 7{,}31.$$

ე.ი. რეალური განაკვეთი არის წლიური 7,31%. დაგროვებული ჯამი იქნება

$$S_{real} = P\left(1 + n\cdot\frac{r_{real}}{100}\right) = 1292 \text{ ლარი.}$$

ბ) რთული პროცენტის შემთხვევაში: (7.21) ფორმულით გვაქვს

$$42 = r_{real} + 20 + 0{,}2\cdot r_{real}.$$

საიდანაც, რეალური განაკვეთი იქნება წლიური 18,3%. დაგროვებული ჯამი იქნება

$$S_{real} = P\cdot\left(1 + \frac{r_{real}}{100}\right)^4 = 1961 \text{ ლარი.}$$

ფიშერის ფორმულით კი $r_{real} = 42 - 20 = 22\%$. როგორც ვხედავთ განსხვავება საკმაოდ დიდია.

ამოცანა 26. რვა ათასს ლარს სამი კვარტლის განმავლობაში ერიცხებოდა პროცენტი შემდეგნაირად: პირველ კვარტალში წლიური 40%, მეორეში – წლიური 45% და მესამეში კი – წლიური 50%. თითოეულ კვარტალში ინფლაციის ყოველთვიური ტემპი იყო, შესაბამისად, 3%, 1,5% და 2%. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი (მსყიდველობითი უნარის მიხედვით) და რეალური შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ დაგროვებული ჯამი ინფლაციის გარეშე. გვაქვს: $P = 8000,\ n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}25$ წელი, $r_1 = 40,\ r_2 = 45,\ r_3 = 50.$ მაშინ მივიღებთ:

$$S = 8000 \cdot \left(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}45 + 0{,}25 \cdot 0{,}5\right) = 10700 \text{ ლარი.}$$

ინფლაციის ინდექსი სამი კვარტლისთვის იქნება:

$$CPI = \left(1 + 0{,}03\right)^3 \cdot \left(1 + 0{,}015\right)^3 \cdot \left(1 + 0{,}02\right)^3 = 1{,}2126.$$

მაშინ რეალური დაგროვებული ჯამი იქნება:

$$S_{real} = \frac{10700}{1{,}2126} = 8824 \text{ ლარი.}$$

რეალური საპროცენტო განაკვეთის საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ განტოლება:

$$8824 = 8000 \cdot \left(1 + 0{,}75 \cdot \frac{r_{real}}{100}\right).$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $r_{real} = 13{,}73\%.$

§7.15. ანუიტეტის ცნება. თანამედროვე საფინანსო-საბანკო ოპერაციებში ხშირად იყენებენ არა ცალკეულ და ერთჯერად გადასახადებს, არამედ დროში განაწილებული გადასახადებისა და შემოსავლების მიმდევრობას. მაგალითად, გრძელვადიანი კრედიტის მიღება და დაფარვა, ინვესტიციიდან პერიოდული შემოსავლების მიღება, პენსიების გადახდა და ა.შ. შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც გადასახადებისა და შემოსავლების მიმდევრობა, რომელთაც გადასახადების ნაკადს უწოდებენ.

გადასახადების ნაკადს რომლის ყოველი წევრი დადებითი სიდიდეა და დროის ინტერვალი ორ მომდევნო გადასახადს შორის მუდმივია, მათი წარმოშობის, დანიშნულებისა და მიზნების მიუხედავად, უწოდებენ **ანუიტეტს** ანუ **ფინანსურ რენტას**.

მაგალითად, ანუიტეტი არის შენატანები სამომხმარებლო კრედიტის დასაფარავად; სადაზღვევო შენატანები; გადასახადები საამორტიზაციო ფონდში და ა. შ.

ანუიტეტის ძირითადი პარამეტრებია: ანუიტეტის წევრი, აღინიშნება R-ით, ყოველი ცალკეული გადასახადის სიდიდე; ანუიტეტის პერიოდი – დროის ინტერვალი ორ გადახდას შორის, როგორც წესი, ანუიტეტის პერიოდია თვე, კვარტალი, ნახევარწელიწადი და წელი; ანუიტეტის ვადა, აღინიშნება n-ით, დრო (წლებში) ანუიტეტის დასაწყისიდან მის

დასრულებამდე; წლიური საპროცენტო განაკვეთი, აღინიშნება r-ით, გადასახადების დაგროვების ან დისკონტირების დროს გამოყენებული განაკვეთი; პროცენტების დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში, აღინიშნება m-ით და გადასახადების რაოდენობა წელიწადში, აღინიშნება p-ით.

გადასახადების ნაკადების რაოდენობრივი ანალიზის დროს გვიხდება ორი ძირითადი მახასიათებლის გამოთვლა: დაგროვებული ჯამი და დღევანდელი ღირებულება.

დაგროვებულ ჯამში, რომელიც აღინიშნება S-ით, იგულისხმება მიმდევრობის ყველა წევრის ჯამი, მათზე დარიცხული პროცენტების ჩათვლით, ანუიტეტის ვადის ბოლოსათვის. ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულება, რომელიც აღინიშნება A-ით, არის ანუიტეტის ყველა წევრის დისკონტირებულ სიდიდეთა ჯამი ანუიტეტის საწყისი მომენტისათვის.

ანუიტეტის ეს ორი მახასიათებელი, განსაკუთრებით დღევანდელი ღირებულება, ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე ფინანსურ გათვლებში. მათ გარეშე შეუძლებელია შევადგინოთ სესხის დაფარვის გეგმა, შევაფასოთ პროექტის ფინანსური ეფექტიანობა, შევადაროთ კონტრაქტები ერთმანეთს, შევცვალოთ კონტრაქტი ექვივალენტური კონტრაქტით და ა. შ. ქვემოთ მოყვანილი იქნება ამ მახასიათებლების გამოთვლის ფორმულები ზოგიერთი ანუიტეტისათვის.

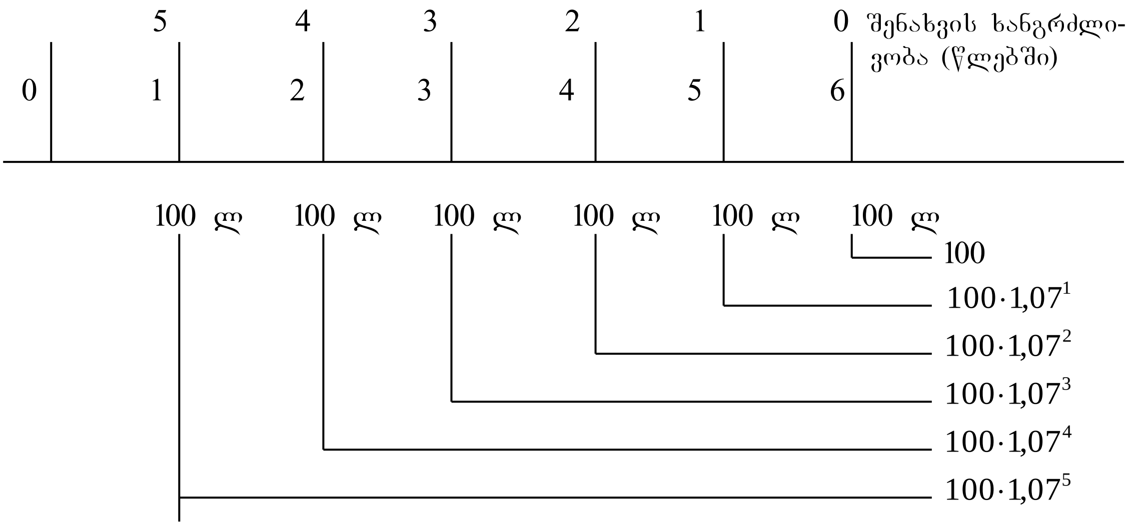
§7.16. ანუიტეტის დაგროვებული ჯამი. ანუიტეტის დაგროვებული ჯამი ყალიბდება ყველა გადასახადისაგან და რთული პროცენტების ჯამისაგან, რომლებიც ამ თანხებს ერიცხება. განვიხილოთ

ამოცანა 27. ვთქვათ, 6 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს კეთდება 100 ლარის შენატანი. რისი ტოლი იქნება საერთო თანხა, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთი ტოლია 7%-ის?

ამოხსნა. თანხების შეტანა წარმოვადგინოთ დროითი დიაგრამის მეშვეობით.

დიაგრამიდან ჩანს, რომ თანხის შეტანა წარმოებს ყოველი წლის ბოლოს. ბოლო, მე-6 შენატანი საერთოდ არ იძლევა პროცენტს. მე-5 შენატანი იძლევა

$$100\cdot\left(1+\frac{7}{100}\right)=100\cdot 1{,}07^{1}.$$



მე-4 შენატანი იძლევა

$$100\cdot\left(1+\frac{7}{100}\right)^2=100\cdot 1{,}07^2.$$

ანალოგიურად მიიღება პროცენტები დანარჩენი თანხებიდან. თუ საბოლოო თანხას აღვნიშნავთ S-ით, მაშინ

$$S=100+100\cdot 1{,}07^1+100\cdot 1{,}07^2+100\cdot 1{,}07^3+100\cdot 1{,}07^4+100\cdot 1{,}07^5.$$

ამ ჯამის გამოთვლა შესაძლებელია, მაგრამ დამღლელი. წარმოვიდგინოთ, რომ თანხის შეტანა ხდება ყოველთვიურად რამდენიმე ათეული წლის განმავლობაში (ასე იქმნება საპენსიო ფონდები). ამ შემთხვევაში შესაკრებთა რიცხვმა შეიძლება რამდენიმე ასეულს გადააჭარბოს. გარდა ამისა, ზოგიერთ ამოცანაში უცნობია შესაკრებთა რაოდენობა. ხშირად საჭიროა განისაზღვროს, თუ რამდენი შენატანის გაკეთებაა საჭირო, რომ თანხამ მიაღწიოს წინასწარ მოცემულ S სიდიდეს. ამ საკითხების გადასაწყვეტად გავიხსენოთ გეომეტრიული პროგრესიის თვისებები.

გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება რიცხვთა ისეთ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ მიმდევრობას, რომელშიც ყოველი მომდევნო წევრი მიიღება წინა წევრის ერთი და იმავე q რიცხვზე გამრავლებით, რომელსაც გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება. ე.ი.

$$a_2=a_1\cdot q,\quad a_3=a_2\cdot q,\cdots,a_n=a_{n-1}\cdot q.$$

ზოგადი წევრი

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

თუ S-ით აგვნიშნავთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამს, მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}. \tag{7.23}$$

დავუბრუნდეთ ანუიტეტის ამოცანას თანხის ყოველწლიური შეტანით. ამ ამოცანაში $a_1 = 100,\ q = 1{,}07,\ n = 6,\ S_n = S$. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (7.23)-ში, მივიღებთ

$$S = \frac{100 \cdot \left(1{,}07^6 - 1\right)}{1{,}07 - 1} = 715{,}33.$$

(7.23)-დან გამომდინარეობს ზოგადი ფორმულა, რომელიც გამოითვლის ანუიტეტის გადასახადების ჯამს:

$$S = 100R \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{r}, \tag{7.24}$$

სადაც R-ით აღვნიშნავთ ყოველი წლის ბოლოს შესატან თანხას, n-ით – წლების რაოდენობას, r-ით – წლიურ საპროცენტო განაკვეთს. იმ შემთხვევაში, როცა პროცენტების დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში m-ის ტოლია, ხოლო გადასახადების რაოდენობა წელიწადში არის p, მაშინ მიიღება ანუიტეტის დაგროვებული ჯამის ყველაზე ზოგადი ფორმულა:

$$S = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{7.25}$$

შენიშვნა 1. (7.25) ფორმულაში R აღნიშნავს თითოეული გადასახადის სიდიდეს. თუკი წელიწადში გადასახადების რაოდენობა არის p, მაშინ წელიწადში R სიდიდის გადასახადი გვექნება p-ჯერ.

ამოცანა 28. მოქალაქეს 5 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს დეპოზიტზე შეაქვს 4000 ლარი. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 10%. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი 5 წლის ბოლოს, თუ პროცენტის დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა. ა) (7.24) ფორმულის თანახმად:

$$S = 4000 \cdot \frac{(1 + 0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 24420 \text{ ლარი;}$$

ბ) აქ $p=1$ და $m=4$. მაშინ (7.25)-ის თანახმად:

$$S=4000\cdot\frac{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{20}-1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{4}-1}=24606 \text{ ლარი.}$$

ამოცანა 29. ჩავთვალოთ, რომ ამოცანა 2-ის პირობებში შეტანა ხდება არა წელიწადში ერთხელ, არამედ წელიწადში 4-ჯერ (ე.ი. ყოველი კვარტლის ბოლოს 1000 ლარი). იპოვეთ დაგროვებული ჯამი 5 წლის ბოლოს, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს; გ) ყოველი თვის ბოლოს.

ამოხსნა. (7.25) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

ა) p =4; m =1; S =25319;

ბ) p =4; m =4; S =25544;

გ) p =4; m =12; S =25586.

ამოცანა 30. ყოველი კვარტლის ბოლოს ანაბარზე შეჰქონდათ 1000 ლარი 3 წლის განმავლობაში. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 12%. დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს. იპოვეთ დაგროვებული თანხა, თუ დასაწყისში ანაბარზე უკვე იყო 3000 ლარი.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ ანუიტეტით დაგროვებული ჯამი. გვაქვს: R =1000, n =3, r =12, m =4, p =4. (7.25) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$S_{\text{ანუიტეტი}}=1000\cdot\frac{\left(1+\frac{12}{400}\right)^{12}-1}{\left(1+\frac{12}{400}\right)^{1}-1}=14192 \text{ ლარი.}$$

ახლა ვიპოვოთ, თუ რამდენი გახდება 3000 ლარი 3 წლის შემდეგ. რთული პროცენტის (7.10) ფორმულით მივიღებთ:

$$S_{\text{რთული}}=3000\cdot\left(1+\frac{12}{400}\right)^{12}=4277 \text{ ლარი.}$$

საბოლოოდ, სრული დაგროვებული თანხა იქნება:

$$S_{\text{ანუიტეტი}}+S_{\text{რთული}}=18469 \text{ ლარი.}$$

(7.25) ფორმულა ანუიტეტის გადასახადების ჯამს ითვლის იმ პირობით, თუ თანხის შეტანა ხდება ყოველი პერიოდის ბოლოს (ბოლოს შეტანილ თანხას პროცენტი არ ერიცხება). თუ თანხის შეტანა წარმოებს

ყოველი პერიოდის დასაწყისში, მაშინ (7.25) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$S^* = R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}}. \tag{7.26}$$

(7.25) და (7.26) ფორმულა შეიძლება გამოყენებული იქნას იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ცნობილია S, r, n, m, p და საჭიროა პერიოდული R შენატანების განსაზღვრა.

ამოცანა 31. ფირმის ხელმძღვანელობა თვლის, რომ 5 წლის შემდეგ მოწყობილობების შესაცვლელად საჭირო იქნება 10000 ლარი. ისმის კითხვა, როგორი უნდა იყოს ყოველთვიური შენატანები (ყოველი თვის ბოლოს), თუ საპროცენტო განაკვეთი ტოლია 6%-ისა წლიურად.

ამოხსნა. გვაქვს: $S=10000$, $r=6$, $n=5$, $m=12$, $p=12$. (7.25) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$R = S \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{mn} - 1}. \tag{7.27}$$

ჩავსვათ ჩვენი მონაცემები:

$$R = 10000 \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{\frac{12}{12}} - 1}{\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{12\cdot 5} - 1} = 143{,}33 \text{ ლარი.}$$

143,33 ლარი არის ყოველთვიური შენატანის ოდენობა.

§7.17. ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულება. გავიხსენოთ, რომ დღევანდელი ღირებულება წარმოადგენს ანუიტეტის საწყისი მომენტისათვის გადასახადების ნაკადის ყოველი წევრის დისკონტირებით მიღებული სიდიდეების ჯამს. ეს სიდიდე ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა ფინანსურ გათვლებში, როგორიცაა მაგალითად, გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვის დაგეგმვა, ინვესტიციების ფინანსური ეფექტიანობის შეფასება და ა. შ.

განვიხილოთ ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია თანხის რეგულარულ მიღებასთან.

ამოცანა 32 . რა თანხა უნდა იქნას შეტანილი ბანკში, რომელიც იხდის 5%-ს წლიურად, რომ შესაძლებელი იყოს მომდევნო 6 წელს ყოველწლიურად მივიღოთ 100 ლარი (იგულისხმება, რომ თანხის ბოლო მიღების შემდეგ ანგარიშზე არაფერი არ რჩება).

ამოხსნა. ცხადია, იმისათვის, რომ n წლის შემდეგ მივიღოთ R თანხა წლიური r საპროცენტო განაკვეთით, უნდა შევიტანოთ შემდეგი სიდიდის თანხა

$$A_n = R\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}.$$

ჩვენს ამოცანაში $R=100$, $r=5\%$, $n=1,2,\cdots,6.$

ამრიგად, ყოველწლიურად 100 ლარის მისაღებად ჩვენ უნდა შევიტანოთ ანაბარი, რომელიც ტოლი იქნება:

$$A_1+A_2+\cdots+A_6=\sum_{n=1}^{6}A_n=100\cdot 1{,}05^{-1}+100\cdot 1{,}05^{-2}+\cdots+100\cdot 1{,}05^{-6}.$$

ამ ჯამის შესაკრებები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას, რაც შესაძლებლობას გვაძლევს მივიღოთ ზოგადი ფორმულა (1)-ის გამოყენებით. აღვნიშნოთ:

$$a_1=R\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1},\quad q=\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1},$$

მაშინ

$$A=100R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}{r}. \qquad (7.28)$$

თუ ამ ფორმულაში ჩავსვამთ ჩვენი ამოცანის მონაცემებს, მივიღებთ:

$$A=100\cdot 100\cdot\frac{1-\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-6}}{5}=507{,}57.$$

ე.ი. საწყისი ანაბრის სიდიდეა $A=507{,}57$ (ლარი). როგორც მოსალოდნელი იყო, ეს სიდიდე ნაკლებია, ვიდრე ბანკის მიერ გადახდილი თანხების ჯამი, რომელიც 600-ის ტოლია.

ცხადია, (7.28) ფორმულა წარმოადგენს ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულების გამოსათვლელ ფორმულას, სადაც R არის ყოველწლიური გადასახადის სიდიდე, n – წლების რაოდენობა, r – წლიური საპროცენტო

განაკვეთი. იმ შემთხვევაში, როცა წელიწადში პროცენტების დარიცხვების რაოდენობა m-ის ტოლია და გადასახადების რაოდენობა წელიწადში არის p, მაშინ მიიღება დღევანდელი ღირებულების გამოსათვლელი ზოგადი ფორმულა:

$$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad . \tag{7.29}$$

შენიშვნა 2. (7.29) ფორმულაში R აღნიშნავს პერიოდული გადასახადის სიდიდეს, რომელიც დამოკიდებულია p-ზე.

ამოცანა 33. სესხის დასაფარავად მეწარმემ ყოველი წლის ბოლოს უნდა გადაიხადოს 20000 ლარი 5 წლის განმავლობაში. იპოვეთ გაცემული სესხის სიდიდე, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 10%. ხოლო პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა. (7.29) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

ა) R=20000; r=10; p=1; m=1; n=5, მაშინ A=75815,74 ლარი.

ბ) R=20000; r=10; p=1; m=4; n=5, მაშინ A=75082,13 ლარი.

ამოცანა 34. ამოცანა 33-ის პირობებში ჩავთვალოთ, რომ გადახდა ხდება არა წელიწადში ერთხელ, არამედ ყოველი კვარტლის ბოლოს (ე.ი. 5000 ლარი). დანარჩენი მონაცემები უცვლელია. იპოვეთ დღევანდელი ღირებულება, თუ დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი თვის ბოლოს.

ამოხსნა. (7.29) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

ა) R=5000; r=10; p=4; m=1; n=5, მაშინ A=78602 ლარი;

ბ) R=5000; r=10; p=4; m=12; n=5, მაშინ A=77792 ლარი.

ამოცანა 35. პროექტი ითვალისწინებს ყოველი 6 თვის ბოლოს 2000 ლარის გადახდას 3 წლის განმავლობაში და მესამე წლის ბოლოს დამატებით 5000 ლარის გადახდას. იპოვეთ პროექტის დღევანდელი ღირებულება, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 12% და დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულება. გვაქვს: R=2000, n=3, m=2, p=2, r=12. მაშინ (7.29) ფორმულის საშუალებით მივიღებთ:

$$A_{ანუიტეტი}=2000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{12}{200}\right)^{-6}}{\frac{12}{200}}=9835 \text{ ლარი.}$$

ახლა ვიპოვოთ 5000 ლარის დღევანდელი ღირებულება. გვაქვს S =5000, n=3, m=2, r=12. მაშინ (7.15) ფორმულით მივიღებთ:

$$P_{რთული}=\frac{5000}{\left(1+\frac{12}{200}\right)^{6}}=3525 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. სრული დღევანდელი ღირებულება არის 9835+3525=13360 ლარი.

ამოცანა 36. რა თანხა უნდა მოვათავსოთ ანაბარზე წლიური რთული 36% საპროცენტო სარგებლით, რომ 6 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს ანგარიშიდან მოვხსნათ 8000 ლარი და ბოლოს ანგარიში დაიხუროს, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს, ბ) ყოველი თვის ბოლოს.

ამოხსნა. ა) გვაქვს: R=8000, n=6, m=1, p=1, r=36. მაშინ

$$A=8000\cdot\frac{1-(1+0,36)^{-6}}{0,36}=18710 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. საკმარისია 18710 ლარი შევიტანოთ ანაბარზე იმისათვის, რომ ყოველი წლის ბოლოს გამოვიტანოთ 8000 ლარი და ყოველი გამოტანის შემდეგ დარჩენილმა ნაშთმა მასზე დარიცხული პროცენტით უზრუნველყოს მე-6 წლის ბოლოს ანგარიშზე ნულოვანი ნაშთი.

ბ) გვაქვს: R=8000, n=6, m=12, p=1, r=36. მაშინ

$$A=8000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{36}{1200}\right)^{-72}}{\left(1+\frac{36}{1200}\right)^{12}-1}=16553 \text{ ლარი.}$$

ამოცანა 37. თანამშრომელმა ორგანიზაციასთან გააფორმა კონტრაქტი, რომლის თანახმად ორგანიზაცია იღებს ვალდებულებას თანამშრომლის ანგარიშზე 25 წლის განმავლობაში გადარიცხოს ყოველი წლის ბოლოს თანაბარი თანხები. დაგროვებული თანხა უზრუნველყოფს თანამშრომლის პენსიას (65 წლის ასაკის მიღწევის შემდეგ) ყოველი წლის ბოლოს 8000 ლარს, 18 წლის განმავლობაში. იპოვეთ ბანკში გადასარიცხი ყოველწლიური თანხა, თუ თანამშრომელი არის 40 წლის და წლიური სარგებელია 20%.

ამოხსნა. ამოცანის პირობების მიხედვით უნდა მოხდეს ერთი ანუიტეტის (ბანკში გადარიცხვა) შეცვლა მეორეთი (ბანკიდან გამოტანა). შეცვლის ანუ დაყვანის მომენტად ავიღოთ თანამშრომლის პენსიაზე გასვლის მომენტი (პუნქტი “65”). ე.ი. შენატანების დაგროვებული ჯამი ტოლი უნდა იყოს გამოტანების დღევანდელი ღირებულების ანუ $S_{\text{შეტ.}} = A_{\text{გამ.}}$. გვაქვს:

$$S_{\text{შეტ.}} = R \cdot \frac{(1+0,2)^{25} - 1}{0,2}, \qquad A_{\text{გამ.}} = 8000 \cdot \frac{1-(1+0,2)^{-18}}{0,2}.$$

ამ ორი სიდიდის ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ R=81,57 ლარი. ე.ი. საკმარისია შევიტანოთ ყოველი წლის ბოლოს მხოლოდ 81 ლარი და 57 თეთრი 25 წლის განმავლობაში, რომ უზრუნველვყოთ მომდევნო 18 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს 8000 ლარის გამოტანა.

(7.29) ფორმულა ანუიტეტის დღევანდელ ღირებულებას ითვლის იმ პირობით, თუ გადასახადები წარმოებს ყოველი პერიოდის ბოლოს. თუკი გადასახადების გადახდა ხდება ყოველი პერიოდის დასაწყისში, მაშინ ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულება გამოთვლება შემდეგი ფორმულით:

$$A^* = R \cdot \frac{1-\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\frac{m}{p}}. \tag{7.30}$$

ამოცანა 38. სესხის დასაფარავად მეწარმემ ყოველი წლის დასაწყისში უნდა გადაიხადოს 20000 ლარი 5 წლის განმავლობაში. იპოვეთ ვალის დღევანდელი ღერებულება, თუ რთული წლიური საპროცენტო განაკვეთია 10%, ხოლო პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს.

ამოხსნა. რადგან გადახდა ხდება ყოველი წლის დასაწყისში, ამიტომ ვალის დღევანდელი ღირებულება გამოითვლება (7.30) ფორმულით:

ა) მოცემულია: R=20000, m=1, p=1, n=5, მაშინ $A^* = 83397$ ლარი.

ბ) მოცემულია: R=20000, p=1, m=4, n=5, მაშინ $A^* = 82871$ ლარი.

ხშირად საჭირო ხდება ანუიტეტის წევრის R-ის გამოთვლა. იგულისხმება, რომ სხვა სიდიდეები ცნობილია. ამისათვის გამოიყენება (7.28) ან (7.29) ფორმულა.

ამოცანა 36. სესხი 100000 ლარი უნდა დაიფაროს 5 წლის განმავლობაში თანაბარი გადახდებით. გადახდა ყოველი წლის ბოლოს. დარიცხვა ყოველი წლის ბოლოს. საპროცენტო განაკვეთია 10%. იპოვეთ ყოველწლიური გადასახადის სიდიდე.

ამოხსნა. გვაქვს $A=100000$, $n=5$, $p=1$, $m=1$, $r=10$. მაშინ (7.28) ფორმულიდან ვწერთ:

$$R = A\cdot\frac{r}{100-100\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}} = 100000\cdot\frac{10}{100-100\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^{-5}} = 26379 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. ყოველწლის ბოლოს უნდა მოხდეს 26379 ლარის გადახდა, რომ 5 წელიწადში დაიფაროს 100000 ლარი სესხი.

§7.18. ინვესტიციების შეფასება და შედარება. ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით ერთმანეთისაგან განსხვავებულ პარამეტრებიანი საინვესტიციო პროექტების შეფასების ხერხებს მათი ფინანსური მომგებიანობის თვალსაზრისით. განვიხილოთ შემდეგი

ამოცანა 37. ვთქვათ, საინვესტიციო პროექტი ითხოვს 10000 ლარის ინვესტირებას და გარანტიას იძლევა, რომ ოთხ წელიწადში იგი დაუბრუნებს ინვესტორს 16000 ლარს. ამასთან ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 8%. ვიპოვოთ:

ა) 10000 ლარის შესაბამისი საბოლოო თანხა 4 წლის შემდეგ სარგებლის ზემოთ მითითებული განაკვეთით;

ბ) 16000 ლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა სარგებლის იმავე განაკვეთით, თუ დროის ინტერვალი 4 წელიწადია;

გ) სარგებლის რა რთული განაკვეთი შეესაბამება თანხის ზრდას 4 წლის ინტერვალში 10000-დან 16000 ლარამდე?

დ) სასურველია თუ არა საფინანსო თვალსაზრისით ამ ინვესტიციის განხორციელება?

ამოხსნა. ა) ოთხი წლის შემდეგ 10000 ლარის შესაბამისი თანხა სარგებლის წლიური რთული 8%-იანი განაკვეთით გამოითვლება (7.9) ფორმულით:

$$S = 10000\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)^4 = 10000\cdot 1{,}3605 = 13604{,}89 \text{ ლარი.}$$

ბ) გამოვიყენოთ დისკონტირების (7.14) ფორმულა და გამოვთვალოთ 16000 (S) ლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა, როდესაც

სარგებლის განაკვეთია 8% (r) და დროის ინტერვალია 4 წელიწადი (n), მივიღებთ:

$$P = 16000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{-4} = 16000 \cdot 1{,}08^{-4} = 11760{,}47 \text{ ლარი.}$$

გ) ოთხი წლის განმავლობაში 10000-დან 16000 ლარამდე ზრდის შესაბამისი სარგებლის წლიური განაკვეთი ვიპოვოთ (7.9) ფორმულის გამოყენებით:

$$16000 = 10000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 .$$

აქედან

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 1{,}6 \quad \text{ანუ} \quad x = \left(\sqrt[4]{1{,}6} - 1\right) \cdot 100 \approx 12.$$

ამრიგად, საძიებელი სარგებლის განაკვეთია $x = 12\%$. ეს იმას ნიშნავს, რომ რთულ წლიურ 12%-ად დაბანდებული 10000 ლარი 4 წლის შემდეგ მოგვცემს 16000 ლარს.

დ) საინვესტიციო პროექტი ითხოვს 10000 ლარს და აბრუნებს ოთხი წლის შემდეგ 16000 ლარს. საფინანსო ბაზარზე კი 10000 ლარის დაბანდება 8%-ად 4 წლის შემდეგ იძლევა 13604,89 ლარს. აქედან ცხადია, რომ საინვესტიციო პროექტში თანხის დაბანდება ფინანსურად მომგებიანია.

ეს გამომდინარეობს აგრეთვე განხილული ბ) პუნქტიდან: იმისათვის, რომ საფინანსო ბაზარზე 4 წლის შემდეგ მივიღოთ საინვესტიციო პროექტით შემოთავაზებული 16000 ლარი, ამისათვის ბაზარზე დღეს უნდა დაბანდდეს საწყისი თანხა 11760,47 ლარი, რაც 1760,47 ლარით აღემატება საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ საწყის თანხას.

საინვესტიციო პროექტით გათვალისწინებულ საბოლოო თანხის შესაბამის დისკონტირებულ სიდიდესა და საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ საწყისი თანხის სიდიდეს შორის სხვაობას **წმინდა საწყისი სიდიდე** ეწოდება.

ჩვენს შემთხვევაში წმინდა საწყისი სიდიდე იქნება

$$11760{,}47 - 10000 = 1760{,}47 \text{ ლარი.}$$

თუ წმინდა საწყისი სიდიდე დადებითია, მაშინ საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა ფინანსურად მომგებიანია. ეს არის ერთ-ერთი კრიტერიუმი საინვესტიციო პროექტის მომგებიანობის შესაფასებლად.

მეორე მხრივ გ) პუნქტში ვაჩვენეთ, რომ საინვეტიციო პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია თანხის დაბანდებისა 4 წლის მანძილზე სარგებლის წლიური რთული 12%-იანი განაკვეთით, რაც აღემატება საბაზრო განაკვეთს.

სარგებლის იმ წლიურ რთულ განაკვეთს, რომელიც უზრუნველყოფს საინვესტიციო თანხის ზრდას საინვესტიციო პროექტით განსაზღვრულ საბოლოო თანხამდე, ეწოდება **სარგებლის შიგა განაკვეთი**.

ჩვენს შემთხვევაში სარგებლის შიგა განაკვეთია 12%. ცხადია, სარგებლის შიგა განაკვეთი მეტია საფინანსო ბაზრის დომინანტურ განაკვეთზე, მაშინ საინვესტიციო პროექტი მომგებიანია. ეს წარმოადგენს კიდევ ერთ კრიტერიუმს საინვესტიციო პროექტის ფინანსური მომგებიანობის შესფასებლად.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

(NPV) – წმინდა საწყისი სიდიდე (*Net present value*);

(IRR) – სარგებლის შიგა განაკვეთი (*Internal rate of returne*);

M_1 – პროექტით გათვალისწინებული საწყისი საინვესტიციო თანხა;

M_2 – პროექტით გათვალისწინებული საბოლოო თანხა, რომელიც უბრუნდება ინვესტორს;

r – საფინანსო ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთი;

n – საინვესტიციო პერიოდის ხანგრძლივობა.

(NPV)-ს და (IRR)-ის განმარტების საფუძველზე მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$(NPV) = M_2 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} - M_1, \tag{7.31}$$

$$(IRR) = \left(\sqrt[n]{\frac{M_2}{M_1}} - 1\right) \cdot 100 \ \ (\%). \tag{7.32}$$

როდესაც საქმე ეხება სხვადასხვა საინვესტიციო პროექტების შედარებას, საჭიროა გამოვიყენოთ ორივე კრიტერიუმი უფრო მომგებიანი პროექტის შესარჩევად. როდესაც საქმე ეხება სხვადსხვა თანხებს, მაშინ (IRR) კრიტერიუმი ყოველთვის ვერ იძლევა ფინანსური მოგების თვალსაზრისით საუკეთესო პროექტის არჩევის საშუალებას. ასეთ შემთხვევაში უფრო მიზანშეწონილია (NPV) კრიტერიუმის გამოყენება.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, როდესაც ინვესტორი იღებს მრავალჯერად შემოსავალს გარკვეული პერიოდის შემდეგ.

ამოცანა 38. ვთქვათ, ინვესტორს აქვს 18000 ლარი, რომელიც შეიძლება დაბანდდეს ორი A და B საინვესტიციო პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. დაბანდებული 18000 ლარის შემთხვევაში თითოეული პროექტი იძლევა გარანტიას, რომ 4 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად დაუბრუნებს ინვესტორს გარკვეულ თანხებს, რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელიწადი	ინვესტორის შემოსავალი	
	A პროექტი	B პროექტი
1	a_1=4000	b_1=10000
2	a_2=4000	b_2=5000
3	a_3=10000	b_3=5000
4	a_4=4000	b_4=1000
სულ	22000	21000

შევარჩიოთ, რომელ პროექტში არის უმჯობესი თანხის დაბანდება, თუ ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 8%.

ამოხსნა. ჩავატაროთ ამ ცხრილის ანალიზი.

ერთი შეხედვით A პროექტი უფრო მომგებიანი ჩანს, რადგან 4 წელიწადში იგი იძლევა 1000 ლარით მეტს, ვიდრე B პროექტი. ორივე პროექტში თითო გადასახადი შეადგენს 10000 ლარს. A პროექტი ამ თანხას უხდის ინვესტორს მესამე წლის ბოლოს, ხოლო B პროექტი – პირველი წლის ბოლოს. რადგან ეს მიღებული 10000 ლარი ინვესტორს შეუძლია კვლავ დააბანდოს ბაზარზე, ამიტომ B პროექტის მიერ პირველი წლის გადახდილ 10000 ლარს უფრო მეტი “ფასი” აქვს, ვიდრე A პროექტის მიერ გადახდილ იგივე თანხას მესამე წლის ბოლოს.

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ რომელი პროექტი სჯობია, დავითვალოთ პროექტებით გათვალისწინებული გადასახადების შესაბამისი დისკონტირებული თანხების ჯამი (დღევანდელი ღირებულება).

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 8%, დისკონტირებული $a_k^/$ და $b_k^/$ თანხებისათვის მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

წელიწადი	დისკონტირებული თანხები	
	A პროექტი	*B* პროექტი
1	$a_1^/$=37037	$b_1^/$=9259,26
2	$a_2^/$=3429,36	$b_2^/$=4286,69
3	$a_3^/$=7938,32	$b_3^/$=3969,16
4	$a_4^/$=2940,12	$b_4^/$=735,03
სულ	18011,5	18250,14

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ *A* პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია მიმდინარე მომენტში ბაზარზე 18011,5 ლარის დაბანდებისა, ხოლო *B* პროექტში მონაწილეობა – 18250,14 ლარის დაბანდებისა. რადგა *B* პროექტის დღევანდელი ღირებულება მეტია *A* პროექტის დღევანდელ ღირებულებაზე, ამიტომ *B* პროექტში მონაწილეობა უფრო მომგებიანია.

ახლა გავაანალიზოთ ის დამოკიდებულება, რომელიც არსებობს სარგებლის განაკვეთსა და ფულზე სპეკულაციური მიზნებით მოთხოვნას შორის.

სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნა შედგება იმ ფულისაგან, რომელიც წარმოადგენს სარეზერვო თანხას მთავრობის ფასიანი ქაღალდების (ობლიგაციების) შესაძენად. მიღებული ფულის სანაცვლოდ მთავრობა იძლევა ობლიგაციას, რაც მის მფლობელს საშუალებას აძლევს ყოველწლიურად მთავრობისაგან მიიღოს გარკვეული თანხა. ამასთან, გათვალისწინებული ვადის გასვლის შემდეგ მთავრობა გამოისყიდის ობლიგაციას და მის მფლობელს სრულად უბრუნებს ობლიგაციის შესაძენად გადახდილ საწყის თანხას.

ამოცანა 39. ვთქვათ, მთავრობამ გამოუშვა ათწლიანი ობლიგაცია, რომლის ღირებულებაა 4000 ლარი. მყიდველს მთავრობა სთავაზობს მარტივ 10%-იან წლიურ სარგებელს, ხოლო 10 წლის გასვლის შემდეგ მთავრობა გამოისყიდის ობლიგაციას და მფლობელს დაუბრუნებს გადახდილ საწყის თანხას. ეს ობლიგაცია შეიძლება გაიყიდოს ნებისმიერ

დროს. ცხადია, რომ ობლიგაციის ღირებულება დამოკიდებულია გამოსყიდვამდე დარჩენილი წლების რაოდენობასა და საფინანსო ბაზრის სარგებლის დომინანტურ განაკვეთზე, რომელიც შეიძლება არ იყოს 10%-ის ტოლი.

ამოხსნა. ვთქვათ, ობლიგაციის გამოსყიდვამდე დარჩენილია 3 წელი. შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც ასახავს ობლიგაციისაგან მიღებულ შემოსავალს (გამოსასყიდი თანხის ჩათვლით მესამე წლის ბოლოს) და შესაბამისი თანხების დისკონტირებულ საწყის თანხებს ბაზრის სარგებლის სხვადასხვა წლიური რთული განაკვეთების მიხედვით:

წელიწადი	შემოსავალი	დისკონტირებული თანხა				
		6%	8%	10%	12%	14%
1	400	377	370	364	357	351
2	400	356	343	330	319	308
3	4400	3694	3493	3306	3132	2970
სულ	5200	4427	4206	4000	3808	3629

გავაანალიზოთ ცხრილის შინაარსი. პირველ სტრიქონში წერია შემოსავალი პირველი წლის ბოლოს (400 ლარი) და მისი შესაბამისი დისკონტირებული (დღევანდელი ღირებულება) თანხები გამოთვლილი 6%, 8%, 10%, 12% და 14% განაკვეთების შემთხვევებში. ანალოგიური შინაარსი აქვს დანარჩენ 2 სტრიქონსაც. სულ ბოლო სტრიქონში კი მითითებულია სრული შემოსავლის შესაბამისი მთლიანი დღევანდელი (საწყისი) ღირებულება. აშკარად ჩანს, რომ სარგებლის საბაზრო განაკვეთის ზრდას მოსდევს ობლიგაციის საწყისი ღირებულების შემცირება.

ახლა განვიხილოთ აღნიშნული დამოკიდებულების გავლენა ფინანსურ ბაზარზე.

ვთქვათ, სარგებლის საბაზრო განაკვეთი საკმარისად მაღალია (მაგალითად, 14%). მაშინ, როგორც ცხრილიდან ჩანს, ობლიგაციის ღირებულება საკმარისად დაბალია (3629 ლარი). თუ სავარაუდოა, რომ სარგებლის ასეთ მაღალ საბაზრო განაკვეთს მოჰყვება განაკვეთის შემცირება, მაშინ ობლიგაციების ფასი უახლოეს მომავალში აიწევს. ამ სიტუაციაში ინვესტორი თამამად ყიდულობს ობლიგაციას არა მარტო იმ ვარაუდით, რომ იგი მიიღებს ობლიგაციასთან ფიქსირებულად

დაკავშირებულ შემოსავალს, არამედ იმიტომ, რომ თვით ობლიგაციის ფასი იზრდება (რაც კიდევ უფრო ზრდის ინვესტორის კაპიტალს).

ცხადია, ამ შემთხვევაში ხდება ფულის დაბანდება ფასიან ქაღალდებში. ეს კი იწვევს სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნის შემცირებას.

საწინააღმდეგო სიტუაციასთან გვაქვს საქმე, როდესაც სარგებლის საბაზრო განაკვეთი მცირეა (მაგალითად, 6%). თუ მოსალოდნელია სარგებლის საბაზრო განაკვეთის გაზრდა, მაშინ ეს ავტომატურად გამოიწვევს ობლიგაციების საწყისი ფასის შემცირებას. ამიტომ ინვესტორები თავს არიდებენ თანხის დაბანდებას ფასიან ქაღალდებში, რაც იწვევს ფულზე სპეკულაციური მიზნით მოთხოვნის ზრდას.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება რიცხვის პროცენტი?
- ამოწერეთ რიცხვის პროცენტთან დაკავშირებული სამივე ფორმულა.
- რას ეწოდება სარგებელი? რას ეწოდება დარიცხვის პერიოდი?
- რას ეწოდება საწყისი თანხა? მიმდინარე თანხა? საბოლოო თანხა?
- რა არის სარგებლის მარტივი განაკვეთი?
- რა არის სარგებლის რთული განაკვეთი?
- მოიყვანეთ მარტივი პროცენტით დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.
- რას ეწოდება კომერციული ანუ ჩვეულებრივი პროცენტი? ზუსტი პროცენტი?
- განმარტეთ დღეთა აღრიცხვის ოთხი ბაზისი.
- რას ეწოდება დისკონტირება? დისკონტი? მოიყვანეთ ფორმულები.
- მოიყვანეთ სესხის ვადისა და საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულები.
- რით განსხვავდება დარიცხვის რთული პროცენტი მარტივი პროცენტისაგან?

- მოიყვანეთ რთული პროცენტით დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.
- როგორ გამოითვლება დაგროვებული ჯამი, როცა დარიცხვის პერიოდი არ გამოისახება წლების მთელი რიცხვით? მიუთითეთ ორი მეთოდი.
- რას ეწოდება ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი?
- მოიყვანეთ რთული პროცენტით დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა, როცა წელიწადში დარიცხვა ხდება m-ჯერ?
- რას ეწოდება ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი? მოიყვანეთ ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულა.
- მოიყვანეთ დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა, როცა დარიცხვა ხდება უწყვეტად.
- როგორ გამოითვლება ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი უწყვეტი დარიცხვის დროს?
- განმარტეთ დისკონტირება რთული პროცენტის დროს და მოიყვანეთ შესაბამისი ფორმულა.
- რას ეწოდება დღევანდელი მნიშვნელობა ანუ მიმდინარე სიდიდე?
- მოიყვანეთ დისკონტირების ფორმულა რთული პროცენტის დროს, როცა პროცენტების დარიცხვა ხდება წელიწადში m-ჯერ?
- მოიყვანეთ სესხის ვადის გამოსათვლელი ფორმულები.
- მოიყვანეთ სესხის საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულები.
- რას ეწოდება ფინანსურად ექვივალენტური გადასახადები?
- რა დანიშნულება აქვს ფინანსური ექვივალენტურობის პრინციპს?
- რას ეწოდება სამომხმარებლო ფასების ინდექსი? ინფლაციის ტემპი?
- როგორ გამოითვლება რეალური დაგროვებული ჯამი (მსყიდველუნარიანობის მიხედვით) მარტივი პროცენტის შემთხვევაში? რთული პროცენტის შემთხვევაში?
- მიუთითეთ როდის ხდება რეალურად საწყისი კაპიტალის ზრდა? კლება?
- მოიყვანეთ რეალური საპროცენტო განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულები.
- რას ეწოდება ანუიტეტი?
- მოიყვანეთ ანუიტეტის მაგალითები.
- დაასახელეთ ანუიტეტის პარამეტრები.
- რას ეწოდება ანუიტეტის დაგროვებული ჯამი?

- რას ეწოდება ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულება?
- ამოწერეთ ანუიტეტის დაგროვებული ჯამის გამოსათვლელი ფორმულები.
- ამოწერეთ ანუიტეტის დღევანდელი ღირებულების გამოსათვლელი ფორმულები.
- რას ეწოდება წმინდა საწყისი სიდიდე? ამოწერეთ წმინდა საწყისი სიდიდის გამოსათვლელი ფორმულა.
- (NPV)-ს როგორი მნიშვნელობისათვის არის საინვესტიციო პროექტი ფინანსურად მომგებიანი?
- რას ეწოდება სარგებლის შიგა განაკვეთი? ამოწერეთ სარგებლის შიგა განაკვეთის გამოსათვლელი ფორმულა.
- რა კრიტერიუმებითაა შესაძლებელი საინვესტიციო პროექტების შეფასება?
- რას ნიშნავს სპეკულაციური მიზნით ფულზე მოთხოვნა?
- როგორი დამოკიდებულებაა ფასიანი ქაღალდის ღირებულებასა და საფინანსო ბაზარზე არსებულ დომინანტურ რთულ სარგებელს შორის?

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 7

1. 4000 ლარი გაცემულია სესხად ოთხი წლის ვადით სარგებლის წლიური მარტივი 6%-იანი განაკვეთით. განსაზღვრეთ ოთხი წლის განმავლობაში დაგროვილი თანხა.
2. კლიენტმა განათავსა 6 ათასი ლარი ბანკში წლიური 20% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. რა თანხა ექნება მას: ა) 7 წლის შემდეგ, ბ) 3 წლის შემდეგ, გ) 3 წლის და 9 თვის შემდეგ?
3. ბანკი იღებს თანხებს 3-თვიან დეპოზიტზე წლიური 28%, 6-თვიან დეპოზიტზე წლიური 32% და ერთწლიან დეპოზიტზე წლიური 34% მარტივი საპროცენტო განაკვეთებით. რა თანხა ექნება კლიენტს სამივე შემთხვევაში, თუ მან სამივე ვარიანტში დეპოზიტზე შეიტანა 20000 ლარი?
4. მეწარმემ აიღო ორწლიანი სესხი წლიური 32% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. რამდენჯერ აღემატება ვადის ბოლოს გადასახდელი თანხა გაცემულ კრედიტს?

5. ბანკმა გასცა 10 ათასი ლარი 45 დღით წლიური 30% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. იპოვეთ ბანკის შემოსავლიანობა (თანხის სახით), თუ ითვლება, რომ წელიწადში არის ა) 360 დღე ბ) 365 დღე
6. თანხა მოთავსებული იქნა ბანკში 10 იანვარს და გატანილ იქნა იმავე წლის 14 აპრილს. იპოვეთ დღეების რაოდენობა, თუ წელიწადი იყო ა) ნაკიანი, ბ) ჩვეულებრივი. გამოიყენეთ ორივე (ზუსტი და მიახლოებითი) მეთოდი.
7. იპოვეთ პროცენტების დარიცხვის დღეების რაოდენობა (ზუსტად და მიახლოებით), თუ თანხა განთავსებული იყო დეპოზიტზე: ა) 12 თებერვლიდან იმავე წლის 15 მაისამდე ბ) 5 ივნისიდან იმავე წლის 3 ნოემბრამდე. როგორ შეიცვლება შედეგები, თუ წელიწადი იქნება ნაკიანი?
8. სესხი 60 ათასი ლარი გაცემულია ნაკიანი წლის 12 მარტს წლიური 32% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. სესხის დაბრუნების ვადაა იმავე წლის 15 აგვისტო. იპოვეთ ბოლოს გადასახდელი თანხა. გამოიყენეთ სამივე პრაქტიკა.
9. 40 ათასი ლარი შეტანილი იქნა ბანკში 12 მარტს წლიური 30% მარტივი საპროცენტო სარგებლით. იმავე წლის 15 ოქტომბრისთვის ანგარიშზე იყო 47134 ლარი. რომელი მეთოდი გამოიყენა ბანკმა პროცენტების დარიცხვისას?
10. ბანკმა გასცა სესხი 9 თვით წლიური 28% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით. ამასთან, ბანკმა გაცემის მომენტში დაიტოვა 3% საკომისიო. იპოვეთ ბანკის რეალური შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ პროცენტები ერიცხებოდა სესხის საწყის სიდიდეს.
11. სესხის გაცემისას, წლიური 42% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, ბანკმა დაიტოვა 2,5% საკომისიო. ბანკის რეალურმა შემოსავლიანობამ წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით შეადგინა 64%. რა ვადით იყო გაცემული სესხი, თუ პროცენტები ერიცხებოდა სესხის საწყის სიდიდეს (ზუსტი პროცენტი).
12. ბანკმა გასცა სესხი ჯერ ერთ მეწარმეზე, 30 ათასი ლარი, 80 დღით. შემდეგ დაბრუნებული თანხა სრულად გასცა მეორეზე 60 დღით და ბოლოს, დაბრუნებული თანხა ისევ გასცა მესამეზე 160 დღით. ყველა სესხზე ერიცხებოდა წლიური 30% მარტივი საპროცენტო განაკვეთით

(ჩვეულებრივი პროცენტი). რა თანხა უნდა დააბრუნოს მესამე მეწარმემ? იპოვეთ ბანკის შემოსავლიანობა წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით.

13. ბანკმა გასცა სესხი თავის ოთხ კლიენტზე შემდეგი წესით: პირველ კლიენტზე 45 დღით წლიური 28%-ით, დაბრუნებული თანხა იმავე დღეს სრულად გასცა მეორეზე 120 დღით წლიური 33%-ით, შემდეგ დაბრუნებული თანხა იმავე დღეს სრულად გასცა მესამეზე 100 დღით წლიური 32%-ით და მესამისაგან დაბრუნებული თანხა სრულად მისცა მეოთხე კლიენტს 40 დღით წლიური 30%-ით. მეოთხემ ბანკს დაუბრუნა 37632 ლარი. რა თანხა მიიღო სესხად პირველმა (ჩვეულებრივი პროცენტი)?

14. კლიენტმა 16 იანვარს შეიტანა ბანკში 14000 ლარი, 20 თებერვალს ანგარიშიდან მოხსნა 8000 ლარი, 14 აპრილს მან შეიტანა 3000 ლარი, 16 ივნისს კი – 2000 ლარი. 10 სექტემბერს ანგარიში დახურა. იპოვეთ ბოლო თანხის სიდიდე, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20%. გამოიყენეთ 365/360 მეთოდი. ოპერაციები ტარდებოდა ერთი და იგივე წელიწადში.

15. დეპოზიტური სერტიფიკატი, ნომინალით 60 ათასი ლარი, წლიური მარტივი 35%-იანი საპროცენტო განაკვეთით , გამოშვებულია ერთი წლის ვადით. რა თანხად შეიძლება მისი ყიდვა განაღდებამდე 150 დღით ადრე, რომ უზრუნველყოფილ იქნეს შემოსავლიანობა 42% წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთის სახით. ჩავთვალოთ წელიწადში არის 365 დღე.

---

16. 40 ათასი ლარი შეტანილი იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 28% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი.

17. ბანკმა გასცა სესხი 250 ათასი ლარი 33 თვით წლიური 34% სარგებლით. იპოვეთ დასაბრუნებელი თანხა: ა) რთული პროცენტით, ბ.) შერეული სქემით. პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს. რომელი სქემაა მომგებიანი ბანკისთვის?

18. 90000 ლარი გაცემული იქნა წლიური რთული 36% საპროცენტო სარგებლით. 2 წლისა და 7 თვის შემდეგ დაბრუნებული იქნა 201421 ლარი. რომელი მეთოდი გამოიყენა ბანკმა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს?

19. 14000 ლ;არი შეტანილ იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 32% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვილი ჯამი რთული და მარტივი პროცენტის შემთხვევაში, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს, ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს.

20.8000 ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 1,5 წლით წლიური 32% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს. როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ დარიცხვა მოხდება ყოველი თვის ბოლოს?

21.100000 ლარი შეტანილ იქნა ბანკში 5 წლით წლიური რთული 36% საპროცენტო სარგებლით. იპოვეთ დაგროვებული ჯამი, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი კვარტლის ბოლოს; ბ) ყოველი თვის ბოლოს.

22.რა დროში გასამმაგდება 20000 ლარი, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთია 28%, ხოლო პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს; გ) ყოველი თვის ბოლოს.

23.მეანაბრეს სურს საწყისი თანხა გაორმაგდეს 4 წლის შემდეგ. რა წლიური ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი იქნება მისთვის მისაღები, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს?

24.სესხის გაცემის რომელი ვარიანტია ბანკისთვის მომგებიანი: ა) წლიური 29% ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით, თუ ბ) წლიური 30% ყოველი 6 თვის ბოლოს დარიცხვით?

25.სესხი 8000 ლარი გაცემული იქნა 3 წლით და 6 თვით. დაბრუნებული იქნა 20000 ლარი. იპოვეთ ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი.

26.იპოვეთ ნომინალური საპროცენტო განაკვეთი, თუ ეფექტური განაკვეთია 30%, ხოლო პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი კვარტლის ბოლოს, ბ) ყოველი თვის ბოლოს.

27.რა საწყისი კაპიტალის შემთხვევაში მივიღებთ 15000 ლარს 4 წლის შემდეგ წლიური 24% საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს; გ) ყოველი თვის ბოლოს? იპოვეთ დისკონტი.

28.მეშვიდე წლის ბოლოს დაგროვებული თანხაა 240000 ლარი. იპოვეთ მისი დღევანდელი ღირებულება, თუ დარიცხვა ხდებოდა: ა) ყოველი 6 თვის ბოლოს წლიური 30% სარგებლით; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს წლიური 40% სარგებლით.

29. რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში რთული წლიური 30% სარგებლით, რომ დავაგროვოთ 50000 ლარი: ა) 6 წლის შემდეგ თუ დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს; ბ) 4 წლის შემდეგ, თუ დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს?

30. იპოვეთ 40000 ლარის დღევანდელი ღირებულება, თუ: ა) ეს თანხა მიღებული იქნება 5 წლის და 3 თვის შემდეგ; ბ) ეს თანხა მიღებული იქნა 3 წლის და 6 თვის წინ; გ) ეს თანხა მიღებული იქნა კონტრაქტის გაფორმების მომენტში. თანხის განთავსება შეიძლება ბანკში წლიური რთული 36%-ით.

31. ნომინალური საპროცენტო განაკვეთია 32%. პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს. იპოვეთ 15000 ლარის დღევანდელი ღირებულება, თუ: ა) ეს თანხა მოთავსებული იქნა დეპოზიტზე 3 წლის და 2 თვის წინ; ბ) ეს თანხა მოთავსებული იქნება ბანკში 10 თვის შემდეგ.

32. თქვენ გაქვთ 8000 ლარი. ბანკი გთავაზობთ წლიურ რთულ 25% სარგებელს. გარდა ამისა, გთავაზობენ ფინანსურ გარიგებას, რომლის მიხედვითაც თქვენი აქტივი 5 წლის შემდეგ გაიზრდება 2,9-ჯერ. რომელ ვარიანტს ამჯობინებდით?

33. რა არის უკეთესი თქვენთვის წლიური რთული 29% სარგებლის შემთხვევაში: 100000 ლარი დღეს, თუ 700000 ლარი 8 წლის შემდეგ?

34. რა უფრო მომგებიანია თქვენთვის: 4600 ლარი 4 წლის შემდეგ, თუ 5200 ლარი 5 წლის შემდეგ, თუ შეგიძლიათ განათავსოთ თანხა დეპოზიტზე წლიური რთული 16% სარგებლით?

35. კლიენტმა განათავსა 25000 ლარი ბანკში რთული წლიური 30%–ით. 1 წლის და 9 თვის შემდეგ მან გამოიტანა 8000 ლარი, მომდევნო 3 წლის შემდეგ შეიტანა 4000 ლარი. კლიენტმა ანგარიში დახურა მომდევნო 2 წლის და 3 თვის შემდეგ. იპოვეთ თანხის სიდიდე დახურვის მომენტისათვის.

36. მეწარმემ განათავსა 30000 ლარი ბანკში რთული წლიური 32% სარგებლითა და ყოველკვარტალური დარიცხვებით. 3 წლის და 3 თვის შემდეგ მან გამოიტანა 12000 ლარი, მომდევნო 1 წლის და 6 თვის შემდეგ შეიტანა 8000 ლარი. ანგარიში დახურა მომდევნო 15 თვის შემდეგ. იპოვეთ თანხის სიდიდე დახურვის მომენტისათვის.

37. ფირმას სურს დააგროვოს 2 მილიონი ლარი, რათა 10 წლის შემდეგ შეიძინოს შენობა ოფისისათვის. ყველაზე უსაფრთხო მეთოდია ურისკო სახელმწიფო ფასიანი ქაღალდების შეძენა, რომელიც იძლევა წლიურ რთულ 8% სარგებელს, ყოველი 6 თვის ბოლოს დარიცხვებით. რა თანხა უნდა გამოყოს ფირმამ დღეს ფასიანი ქაღალდების შესაძენად?

38. მაენაბრემ შეიტანა ბანკში 16000 ლარი 2 წლის წინ რთული წლიური 28% სარგებლითა და ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვებით. შეტანიდან 18 თვის შემდეგ მან მოხსნა ანგარიშიდან 12000 ლარი, ხოლო მომდევნო 3 წლის შემდეგ ისევ შეიტანა 10000 ლარი. მომდევნო 1,5 წლის შემდეგ მეანაბრემ შეიტანა გარკვეული რაოდენობის თანხა და ბოლოს ნახევარი წლის შემდეგ ანგარიშზე აღმოჩნდა 80000 ლარი. რა თანხა შეუტანია მეანაბრეს ბოლოს.

39. მეწარმემ აიღო სესხად 200000 ლარი წლიური 25% განაკვეთით. 2 წლის შემდეგ მან დაუბრუნა ბანკს 120000 ლარი. მომდევნო ერთი წლის შემდეგ ისევ აიღო სესხად 60000 ლარი იგივე პირობებით. ამის შემდეგ 3 წლის ბოლოს მან დაფარა დავალიანება. რა თანხა დააბრუნა მეწარმემ ბოლოს?

40. მეწარმემ შეიძინა 400000 ლარის მოწყობილობა კრედიტში რთული წლიური 20% სარგებლით. 2,5 წლის შემდეგ გადაიხადა 250000 ლარი და კიდევ ერთი წლის შემდეგ მან სრულად დაფარა დავალიანება. იპოვეთ ბოლოს გადახდილი თანხა.

41. მოქალაქემ შეიძინა 140000 ლარად ღირებული სახლი კრედიტში რთული წლიური 30% სარგებლით. ყიდვის მომენტში მან გადაიხადა 80000 ლარი. დარჩენილ დავალიანებას იგი დაფარავს 2 წლის განმავლობაში ყოველი 6 თვის ბოლოს თანაბარი გადახდებით (პირველი გადახდა ყიდვიდან 6 თვის შემდეგ). რისი ტოლია ყოველი გადასახადი?

---

42. გადასახადი 4000 ლარი, 3 თვის შემდეგ გადახდით, უნდა შეიცვალოს 5 თვის შემდეგ გადახდით. იპოვეთ ახალი გადასახადი, თუ წლიური მარტივი საპროცენტო სარგებელია 36%.

43. გადასახადები 8000 ლარი, 5000 ლარი, 10000 ლარი და 7000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს, შესაბამისად, 60, 150, 120 და 200 დღის შემდეგ. მხარეების შეთანხმების შედეგად მოვალე დაფარავს მთლიან დავალიანებას 140 დღის შემდეგ. იპოვეთ კონსოლიდირებული

გადასახადი, თუ ამ ფინანსურ ოპერაციაში გამოიყენებოდა წლიური მარტივი საპროცენტო სარგებელი 40%. (დაყვანის მომენტად განიხილეთ კონსოლიდირებული გადასახადის გადახდის დღე).

44.გადასახადები 4000 ლარი, 12000 ლარი და 9000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს, შესაბამისად, 80, 150 და 210 დღის შემდეგ. მხარეების შეთანხმების შედეგად მოვალე გადაიხდის სამივე გადასახადის ჯამს. იპოვეთ კონსოლიდირებული გადასახადის ვადა, თუ ამ ფინანსურ ოპერაციაში გამოიყენებოდა წლიური მარტივი 30%-იანი განაკვეთი. დაყვანის მომენტად განიხილეთ ათვლის მომენტი. (ჩვეულებრივი პროცენტი).

45. 20000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს 100 დღის შემდეგ. იგი უნდა შეიცვალოს ორი გადასახადით 30 და 60 დღის შემდეგ. პირველი გადასახადის სიდიდეა 12000 ლარი. იპოვეთ მეორე გადასახადი, თუ წლიური სარგებელია მარტივი 36%. დაყვანის მომენტად განიხილეთ ათვლის მომენტი. (ჩვეულებრივი პროცენტი). როგორ შეიცვლება შედეგი, თუ დაყვანის მომენტად განიხილავთ ბოლო დღეს?

46.კონტრაქტის პირობის მიხედვით, გადასახადები 15000 ლარი, 5000 ლარი და 10000 ლარი გადახდილ უნდა იქნეს, შესაბამისად, 15 აპრილს, 8 ივნისს და 20 სექტემბერს. მხარეები შეთანხმდნენ გადახდის ახალ წესზე: 12000 – 25 მაისს, 4000 – 15 ივლისს, დარჩენილი დავალიანება დაიფარება 1 აგვისტოს. იპოვეთ ბოლო გადასახადი, თუ წლიური მარტივი განაკვეთია 38%. (გამოიყენეთ 365/365 მეთოდი, წელიწადი ნაკიანია). დაყვანის მომენტად განიხილეთ 15 აპრილი.

47.კონტრაქტის პირობის მიხედვით, მეწარმემ უნდა გადაუხადოს ბანკს 20000, 10000 და 30000 ლარი, შესაბამისად, 1 მარტს, 15 ივლისს და 18 ოქტომბერს. ორმხრივი შეთანხმების შედეგად მეწარმე დაფარავს დავალიანებას ტოლი გადასახადებით 10 აპრილს, 1 ივნისს და 1 სექტემბერს. იპოვეთ ეს გადასახადები, თუ წლიური მარტივი განაკვეთია 26%. (გამოიყენეთ 365/365 მეთოდი). დაყვანის მომენტად განიხილეთ 1 მერტი.

48.კონტრაქტის პირობის მიხედვით, მეწარმემ უნდა გადაუხადოს კრედიტორს 5000 ლარი 1 წლის შემდეგ, 25000 ლარი 3 წლის შემდეგ და 20000 ლარი 4 წლის შემდეგ. მეწარმემ შესთავაზა გადახდის შემდეგი ვარიანტი: 20000 ლარი 2 წლის შემდეგ და 25000 ლარი 3 წლის შემდეგ. არის თუ არა ეს ორი ვარიანტი ექვივალენტური, თუ წლიური მარტივი

განაკვეთია 28%? რომელი მხარე დაზარალდა? დაყვანის მომენტად განიხილეთ კონტრაქტის გაფორმების მომენტი.

49. გადასახადი 18000 ლარი, 5 წლის შემდეგ გადახდით, უნდა შეიცვალოს 3 წლის შემდეგ გადახდით. იპოვეთ ახალი გადასახადი, თუ წლ;იური საპროცენტო სარგებელია რთული 24%, პროცენტების ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით.

50. გადასახადები 8000, 15000 და 25000 ლარი, შესაბამისად, 1 წლის, 2,5 წლის და 3 წლის შემდეგ გადახდებით, უნდა შეიცვალოს 2 წლის შემდეგ გადახდით. იპოვეთ ეს გადასახადი, თუ წლიური განაკვეთია რთული 36%.

51. კონტრაქტის პირობის მიხედვით, მეწარმემ უნდა გადაუხადოს ბანკს 16000 ლარი 6 თვის შემდეგ, 12000 ლარი მომდევნო 1 წლის შემდეგ და 24000 ლარი მომდევნო 2 წლის შემდეგ. მეწარმემ შესთავაზა გადახდის შემდეგი ვარიანტი: 35000 ლარი 3 წლის შემდეგ და 60000 ლარი მომდევნო 3 წლის შემდეგ. არის თუ არა ეს ორი ვარიანტი ექვივალენტური, თუ წლიური საპროცენტო სარგებელია რთული 36%, პროცენტების ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით? რომელი მხარე დაზარალდება?

52. კონტრაქტის პირობის მიხედვით, მეწარმემ უნდა გადაუხადოს კრედიტორს 12000 ლარი 9 თვის შემდეგ, 15000 ლარი მომდევნო 1 წლის შემდეგ და 18000 ლარი მომდევნო 1,5 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად მეწარმე დაფარავს დავალიანებას ტოლი გადახდებით 2 წლის და 4 წლის შემდეგ. იპოვეთ თითოეული გადასახადი, თუ წლიური განაკვეთია რთული 32%, პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

53. მეწარმემ უნდა გადაუხადოს ბანკს 5000 ლარი 1 წლის შემდეგ, 15000 ლარი 2,5 წლის შემდეგ და 10000 ლარი 4 წლის შემდეგ. შეთანხმების შედეგად მეწარმე დაფარავს დავალიანებას ოთხი ტოლი გადასახადით, შესაბამისად, 6 თვის, 1,5 წლის, 3 წლის და 5 წლის შემდეგ. იპოვეთ თითოეული გადასახადი, თუ წლიური განაკვეთია რთული 28% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს.

54. ორი ვალდებულება 60000 ლარი და 90000 ლარი გადახდილ უნდა იქნას შესაბამისად, 3 წლის და 5 წლის შემდეგ. ორმხრივი შეთანხმების შედეგად დავალიანების დაფარვა მოხდება შემდეგნაირად: 15000 ლარი –

1,5 წლის შემდეგ, 45000 ლარი – 2 წლის შემდეგ, 50000 ლარი – 6 წლის შემდეგ. დარჩენილი დავალიანება დაიფარება 7 წლის შემდეგ. იპოვეთ ბოლო გადასახადი, თუ წლიური განაკვეთია რთული 32% და პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის ბოლოს.

55. ნახევარწელიწადში სამომხმარებლო კალათა გაძვირდა 645 ლარიდან 788 ლარამდე. იპოვეთ ინფლაციის ტემპი: ა) ყოველ თვეში; ბ) ყოველ ორ თვეში.

56. წლის განმავლობაში ინფლაციის საშუალო თვიური ტემპია 4%. იპოვეთ ინფლაციის ინდექსი და ტემპი: ა) კვარტალში, ბ) წელიწადში.

57. 10000 ლარს 3 თვის განმავლობაში ერიცხებოდა წლიური მარტივი 30% სარგებელი. ყოველთვე ფასები იზრდებოდა, შესაბამისად, 7%, 5% და 4%-ით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა ინფლაციის გათვალისწინებით და რეალური საპროცენტო სარგებელი.

58. ბანკმა გასცა 700000 ლარი სესხად 75 დღით მარტივი წლიური 40%-ით. ამ პერიოდში ინფლაციის ტემპი შეადგენდა 8%-ს. იპოვეთ ბანკის რეალური შემოსავალი, თუ წელიწადში არის ა) 360 დღე; ბ) 365 დღე.

59. იპოვეთ რეალური საპროცენტო განაკვეთი, თუ ნომინალური წლიური მარტივი განაკვეთია 30%, ხოლო ინფლაციის ტემპია 16%. რას უნდა უდრიდეს ნომინალური განაკვეთი, რომ რეალური განაკვეთი იყოს 30%?

60. კრედიტი, 150000 ლარი, გაცემულია რთულ პროცენტში 5 წლის ვადით. როგორი უნდა იყოს საპროცენტო ნომინალური განაკვეთი, თუ რეალური განაკვეთია წლიური 20% და ამ პერიოდში ფასები გაიზარდა 2,6-ჯერ? იპოვეთ დაგროვებული ჯამი ინფლაციის გაუთვალისწინებლად.

61. სესხის გაცემისას ბანკი ცდილობს მიიღოს რეალური წლიური სარგებელი რთული 22%. წლიური რთული რა საპროცენტო განაკვეთით უნდა გასცეს მან სესხი, თუ ინფლაციის მოსალოდნელი ტემპია 14% წელიწადში?

62. იპოვეთ რეალური შემოსავლიანობა წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ ნომინალური განაკვეთია წლიური 36% და ინფლაციის მოსალოდნელი ტემპია 20% წელიწადში?

63. ანაბარზე არსებული თანხის ზრდის ტემპმა 4 წლის განმავლობაში შეადგინა, შესაბამისად, 1,52; 1,41; 1,64 და 1,53. იპოვეთ წლიური რეალური შემოსავლიანობა ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის სახით, თუ ინფლაციის წლიური ტემპია 30%.

----

64. მოქალაქეს ყოველი წლის ბოლოს ბანკში შეჰქონდა 4000 ლარი, რომელსაც ერიცხებოდა წლიური 30% რთული საპროცენტო სარგებელი. იპოვეთ ანგარიშზე დაგროვებული თანხა: ა) 3 წლის შემდეგ; ბ) 8 წლის შემდეგ; გ) 15 წლის შემდეგ. როგორ შეიცვლება თანხის სიდიდე, თუ თანხის შეტანა მოხდება ყოველი წლის დასაწყისში?

65. მეწარმე ინვესტიციის შედეგად იღებს ყოველი 6 თვის ბოლოს 12000 ლარს. ამ თანხების განთავსება ხდება ბანკში წლიური რთული 24% სარგებლით. იპოვეთ 4 წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს; გ) ყოველი კვარტლის ბოლოს.

66. 6 წლის განმავლობაში ყოველი 6 თვის ბოლოს ბანკში შეჰქონდათ 10000 ლარი. წლიური საპროცენტო განაკვეთია 20%. დარიცხვა ყოველი 6 თვის ბოლოს. იპოვეთ დაგროვებული თანხა.

67. შეადარეთ კაპიტალის დაგროვების 2 ვარიანტი: ა) ყოველი 6 თვის ბოლოს ანაბარზე 30000 ლარის განთავსება წლიური 18% სარგებლით და ყოველი 6 თვის ბოლოს დარიცხვით; ბ) ყოველი წლის ბოლოს ანაბარზე 63000 ლარის განთავსება წლიური 19% სარგებლით და ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე 10 წლის შემდეგ? შეიცვლება თუ არა გადაწყვეტილება, თუ მეორე ვარიანტში საპროცენტო განაკვეთი იქნება 18,5%?

68. შეადარეთ კაპიტალის დაგროვების 2 ვარიანტი: ა) ყოველი კვარტლის დასაწყისში დეპოზიტზე 15000 ლარის განთავსება წლიური 20% სარგებლით და ყოველი კვარტლის ბოლოს დარიცხვით; ბ) ყოველი წლის დასაწყისში დეპოზიტზე 52000 ლარის განთავსება წლიური 22% სარგებლით და ყოველი წლის ბოლოს დარიცხვით. რა თანხა იქნება ანგარიშზე 8 წლის შემდეგ? შეიცვლება თუ არა გადაწყვეტილება, თუ მეორე ვარიანტში საპროცენტო განაკვეთი იქნება 23%?

69. სადაზღვევო კომპანიამ გააფორმა კონტრაქტი ორგანიზაციასთან 3 წლის ვადით, რომლის თანახმად წლიური სადაზღვევო შენატანი იქნება 6000 ლარი. ამ შენატანების განთავსება ხდება ბანკში წლიური რთული 25%-ით. იპოვეთ სადაზღვევო კომპანიის მიერ მიღებული თანხა, თუ შეტანა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს 3000 ლარის ოდენობით; გ) ყოველი კვარტლის ბოლოს 1500 ლარის ოდენობით.

70. სადაზღვევო კომპანიამ გააფორმა კონტრაქტი ორგანიზაციასთან 4 წლის ვადით, რომლის თანახმად კვარტალური სადაზღვევო შენატანია 15000 ლარი. ამ შენატანების განთავსება ხდება ბანკში წლიური რთული 36%-ით. იპოვეთ ანგარიშზე დაგროვებული თანხის დღევანდელი ღირებულება, თუ დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი კვარტლის ბოლოს: ბ) ყოველი თვის ბოლოს.

71. მოქალაქეს დეპოზიტზე ყოველწლიურად შეაქვს 24000 ლარი ნომინალური 32% სარგებლით. იპოვეთ 8 წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა, თუ: ა) შეტანა ხდება ყოველი წლის ბოლოს, დარიცხვა კი – ყოველი 6 თვის ბოლოს; ბ) შეტანა ხდება ყოველი თვის ბოლოს თანაბარი წილებით (ე.ი. 2000 ლარი), დაროცხვა კი – ყოველი 3 თვის ბოლოს.

72. ღირს თუ არა 5500 ლარის ფასიანი ქაღალდების ყიდვა, რომელიც იძლევა 1000 ლარის წლიურ შემოსავლებს 20 წლის განმავლობაში, მაშინ, როცა ბანკი სთავაზობს ანაბარზე წლიურ რთულ 18% სარგებელს?

73. კლიენტს სურს დააგროვოს 80000 ლარი: ა) 5 წლის შემდეგ; ბ) 10 წლის შემდეგ. რა თანხა უნდა შეიტანოს მან ყოველი წლის ბოლოს, თუ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთია 30%.

74. მეწარმეს, მოწყობილობის შეძენის მიზნით, სურს დააგროვოს 250000 ლარი: ა) 3 წლის შემდეგ; ბ) 8 წლის შემდეგ. ამისათვის ყოველი კვარტლის ბოლოს მას შეაქვს ბანკში ტოლი თანხები. წლიური 28% სარგებლით. დარიცხვა ხდება ყოველი 6 თვის ბოლოს. იპოვეთ ყოველკვარტალური შენატანი.

75. ყოველი კვარტლის დასაწყისში ანაბარზე შეაქვთ 10000 ლარი ნომინალური 24% სარგებლით. იპოვეთ 3 წლის ბოლოს დაგროვებული თანხა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს.

76. ხუთწლიანი 300000 ლარიანი ფონდის შესაქმნელად მეწარმეს დეპოზიტზე შეაქვს ყოველი წლის ბოლოს გარკვეული თანხა. ნომინალური განაკვეთია 24%. დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი თვის ბოლოს. იპოვეთ ეს შენატანები.

77. თანამშრომელმა ორგანიზაციასთან გააფორმა კონტრაქტი, რომლის თანახმად ორგანიზაცია იღებს ვალდებულებას თანამშრომლის

ანგარიშზე 15 წლის განმავლობაში გადარიცხოს ყოველი წლის ბოლოს თანაბარი თანხები. დაგროვებული თანხა უზრუნველყოფს თანამშრომლის პენსიას (60 წლის ასაკის მიღწევის შემდეგ) ყოველი წლის ბოლოს 5000 ლარს, 10 წლის განმავლობაში. იპოვეთ ბანკში გადასარიცხი თანხა, თუ თანამშრომელი არის 45 წლის და წლიური საპროცენტო სარგებელია 22%.

78. მეწარმეს სთავაზობენ 300000 ლარის ინვესტიციას, რომლის დაბრუნება მოხდება შემდეგნაირად: ყოველი წლის ბოლოს 60000 ლარი 5 წლის განმავლობაში და 5 წლის ბოლოს 120000 ლარი. მისაღებია თუ არა ეს ვარიანტი მეწარმისათვის, თუ მას შეუძლია ამ თანხის დეპონირება ბანკში წლიური 20% სარგებლით?

79. რა თანხა უნდა განათავსოს მეწარმემ ანაბარზე, რომ მისმა I კურსის სტუდენტმა შვილმა, ყოველი წლის ბოლოს ანგარიშიდან მოხსნას 3600 ლარი და მეხუთე წლის ბოლოს დახუროს ანგარიში, თუ ნომინალური განაკვეთია 30%?

80. რა მინიმალური თანხა უნდა მოვათავსოთ დეპოზიტზე წლიური 30% სარგებლით, რომ 10 წლის განმავლობაში ყოველი წლის ბოლოს მოიხსნას 7000 ლარი, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი 6 თვის ბოლოს?

81. რა თანხა უნდა მოვათავსოთ დეპოზიტზე წლიური 24% სარგებლით, რომ 9 წლის განმავლობაში ყოველი 2 თვის ბოლოს მოიხსნას 2000 ლარი და მეცხრე წლის ბოლოს ანგარიში ამოიწუროს, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება: ა) ყოველი წლის ბოლოს; ბ) ყოველი კვარტლის ბოლოს?

---

82. იურიდიულ პირს აქვს 40000 ლარი და თანხის ინვესტირება შესაძლებელია ორი *A* და *B* პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. *A* პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას 10000 ლარს და 3 წლის შემდეგ აბრუნებს 12000 ლარს. *B* პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას 40000 ლარს და 3 წლის შემდეგ აბრუნებს 45000 ლარს. ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 6%. რომელ პროექტში უფრო მომგებიანია ფულის დაბანდება?

83. ფირმას აქვს არჩევანი დააბანდოს 15000 ლარი ორი *A* და *B* პროექტებიდან ერთში. ამ პროექტებიდან შემოსავალი წლების მიხედვით მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელიწადი	ფირმის შემოსავალი	
	A პროექტი	*B* პროექტი
1	a_1=4000	b_1=10000
2	a_2=5000	b_2=3000
3	a_3=8000	b_3=4000
4	a_4=3000	b_4=2000
სულ	20000	19000

ცნობილია, რომ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 12%. რომელ პროექტში მონაწილეობაა უფრო მომგებიანი?

84. საინვესტიციო პროექტი 18000 ლარის ინვესტორს ჰპირდება 6000 ლარის მოგებას ხუთ წელიწადში. გამოთვალეთ სარგებლის შიგა განაკვეთი და განსაზღვრეთ, მომგებიანია თუ არა ეს პროექტი, თუ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 9%.

85. მთავრობის მიერ გამოშვებული რვაწლიანი ობლიგაციის თავდაპირველი ღირებულება იყო 3000 ლარი, მარტივი 8%-იანი ყოველწლიური სარგებლით. განსაზღვრეთ ობლიგაციის საწყისი ღირებულება, თუ გამოსყიდვამდე დარჩენილია 4 წელი და სარგებლის საბაზრო რთული განაკვეთია 10%.

86. მთავრობის მიერ გამოშვებული ათწლიანი ობლიგაციის თავდაპირველი ღირებულება იყო 1000 ლარი, მარტივი 7%-იანი ყოველწლიური სარგებლით. განსაზღვრეთ ობლიგაციის საწყისი ღირებულება, თუ გამოსყიდვამდე დარჩენილია 5 წელი და სარგებლის საბაზრო რთული განაკვეთია 9%.

87. რა თანხას დაუბრუნებს პროექტში მონაწილე მხარე ინვესტორს 18000 ლარის სანაცვლოდ, თუ სარგებლის შიგა განაკვეთია 10%, ხოლო პროექტის ხანგრძლივობაა 6 წელი?

88. დაბანდებული თანხის სანაცვლოდ 8 წლის შემდეგ ინვესტორს დაუბრუნდა 85000 ლარი. რა თანხა დააბანდა ინვესტორმა, თუ სარგებლის შიგა განაკვეთი იყო 12%?

89. დაბანდებული 18000 ლარის სანაცვლოდ ინვესტორს დაუბრუნდა 26000 ლარი. რამდენი წელი გრძელდებოდა ინვესტიცია, თუ პროექტის სარგებლის შიგა განაკვეთი იყო 8%?

90. საინვესტიციო პროექტი მოითხოვს 35000 ლარს და 6 წლის შემდეგ აბრუნებს 42000 ლარს. ამასთან ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 8%. იპოვეთ: ა) წმინდა საწყისი სიდიდე; ბ) სარგებლის შიგა განაკვეთი; გ) რა თანხას მიიღებს ინვესტორი 6 წლის შემდეგ თანხის საფინანსო ბაზარზე დაბანდებით? დ) რა თანხა უნდა დააბანდოს ინვესტორმა საფინანსო ბაზარზე, რომ 6 წლის შემდეგ მიიღოს 42000 ლარი.

91. ინვესტორს აქვს შესაძლებლობა 30000 ლარი დააბანდოს შემდეგი ოთხი პროექტიდან მხოლოდ ერთში: *A* პროექტი ითხოვს 18000 ლარს და აბრუნებს 25000 ლარს; *B* პროექტი ითხოვს 22000 ლარს და აბრუნებს 28000 ლარს; *C* პროექტი ითხოვს 26000 ლარს აბრუნებს 35000 ლარს; *D* პროექტი ითხოვს 30000 ლარს და აბრუნებს 40000 ლარს. რომელი პროექტია უფრო მომგებიანი ინვესტორისათვის, თუ საფინანსო ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 10% და თითოეული პროექტი არის სამწლიანი?

თავი 8

რიცხვითი მიმდევრობები და მწკრივები

§8.1. ძირითადი ცნებები. თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება ერთი გარკვეული a_n რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

a_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2-ს – მეორე წევრი და ა.შ., a_n-ს ეწოდება n-ური ანუ ზოგადი წევრი.

სიმოკლისათვის რიცხვით მიმდევრობას აღნიშნავენ $\{a_n\}$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის მაგალითები:

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$, ე.ი. გვექნება $1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; ...; \dfrac{1}{n}; ...$ ამ მიმდევრობას მათემატიკაში ჰარმონიული მიმდევრობა ეწოდება. როგორც ვხედავთ ამ მიმდევრობის ყოველი წინა წევრი მეტია მის მომდევნო წევრზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მიმდევრობა კლებადია.

2. $a_n = \dfrac{2n}{n+2}$, ე.ი. გვექნება $\dfrac{2}{3}; 1; \dfrac{6}{5}; ...; \dfrac{2n}{n+2}; ...$ ამ მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრი მეტია წინა წევრზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მიმდევრობა ზრდადია.

3. $a_n = (-1)^n$, ე.ი. გვაქვს $-1; 1; -1; 1; ...; (-1)^n; ...$ ეს მიმდევრობა ნიშანცვლადია.

4. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, ე.ი. გვაქვს $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{(-1)^n}{n+1}, ...$ მიმდევრობა ნიშანცვლადია.

5. $a_n = 3n+4$, ე.ი. გვაქვს $7, 10, 13, ..., 3n+4, ...$ მიმდევრობა ზრდადია.

6. $a_n = -3n+4$, ე.ი. გვაქვს $1, -2, -5, ..., -3n+4, ...$ მიმდევრობა კლებადია.

თუ მიმდევრობა მოცემულია, როგორც ზემოთ, ფორმულით, მაშინ ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია ანალიზური სახით. მაგალითად, თუ $a_n = 3n+4$, მაშინ შეგვიძლია გამოვთვალოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი. კერძოდ, $a_4 = 16$, $a_{20} = 64$, $a_{100} = 304$.

მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იყოს აგრეთვე რეკურენტული სახითაც.

ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული სახით, თუ მოცემულია მიმდევრობის პირველი ან რამდენიმე საწყისი წევრი და

ფორმულა, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება მიმდევრობის დანარჩენი წევრები.

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. $a_1 = 2$ და $a_{n+1} = a_n + 3,\ n \geq 1.$ ეს არითმეტიკული პროგრესიაა.

2. $a_1 = 2$ და $a_{n+1} = 2a_n,\ n \geq 1.$ ეს გეომეტრიული პროგრესიაა.

3. $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ და $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ და ეწოდება კლებადი, თუ $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება არაკლებადი, თუ $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$ და ეწოდება არაზრდადი, თუ $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

ზრდად, კლებად, არაკლებად და არაზრდად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ეწოდებათ.

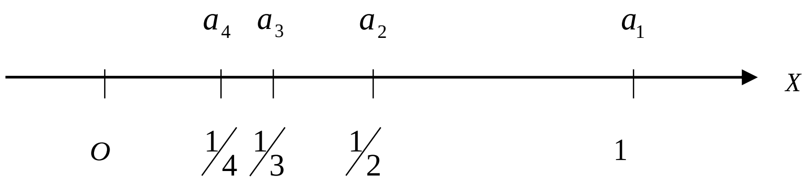
$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მეტია ან ტოლი მიმდევრობის ყოველ წევრზე, ე.ი. $a_n \leq M$.

$\{a_n\}$ მიმდევრობას, ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვეული, თუ არსებობს ისეთი m რიცხვი, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი მიმდევრობის ყოველ წევრზე, ე.ი. $a_n \geq m.$

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ ის ერთდროულად შემოსაზღვეულია ქვემოდანაც და ზემოდანაც, ე.ი. არსებობს ისეთი M და m რიცხვები, რომ ნებისმიერი $n-$სთვის ადგილი აქვს $m \leq a_n \leq M$ უტოლობას. სხვა სიტყვებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი მოთავსებულია m და M რიცხვებს შორის.

§8.2. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი. განვიხილოთ კონკრეტული მიმდევრობა $\{a_n\}$, სადაც $a_n = \dfrac{1}{n}$ და დავადგინოთ,რა ხდება, როდესაც n უსასრულოდ იზრდება (ანუ $n \to \infty$). როგორც ვხედავთ ეს მიმდევრობა კლებადია $a_1 = 1 > a_2 = \dfrac{1}{2} > a_3 = \dfrac{1}{3} > \ldots > a_n = \dfrac{1}{n} > a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} > \ldots$

ცხადია, რომ როდესაც n ძალიან დიდი ნატურალური რიცხვია, მაშინ $a_n=\frac{1}{n}$ ძალიან მცირე დადებითი რიცხვია. თუ $a_n=\frac{1}{n}$ რიცხვებს გამოვსახავთ რიცხვით ღერძზე, დავინახავთ, რომ რაც უფრო დიდია n, მით უფრო ახლოსაა $a_n=\frac{1}{n}$ წერტილი O სათავესთან. ე.ი. მანძილი სათავესა და a_n წერტილს შორის ძალიან მცირდება.

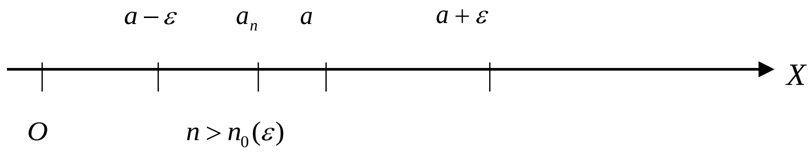


ამრიგად, როცა n მიისწრაფის უსასრულობისკენ, მაშინ $a_n=\frac{1}{n}$ რიცხვები უახლოვდებიან ნულს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $a_n=\frac{1}{n}$ მიმდევრობა მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n მიისწრაფის უსასრულობისკენ. ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ან $\frac{1}{n}\to 0$, როდესაც $n\to\infty$. ახლა შემოვიღოთ მიმდევრობის ზღვრის ზუსტი მათემატიკური განმარტება.

a რიცხვს ეწოდება $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $n_0=n_0(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n>n_0(\varepsilon)$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას $|a_n-a|<\varepsilon$.

ის ფაქტი, რომ a არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ჩაიწერება ასე: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

მიმდევრობის ზღვარს შეიძლება მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობის წევრები რიცხვით ღერძზე გამოსახულია წერტილებით. თუ a რიცხვი არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, მაშინ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობისა, მოთავსდება $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ ინტერვალის შიგნით. $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ ინტერვალს უწოდებენ a წერტილის ε მიდამოს ან a წერტილის სიმეტრიულ მიდამოს.



თუ $\{a_n\}$ რიცხვით მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი, მაშინ მას კრებადი მიმდევრობა ეწოდება. საწინააღმდეგო შემთხვევაში მიმდევრობა განშლადია.

თეორემა 8.1. ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

თეორემა 8.2. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:

მიმდევრობას, რომ ზღვარი ჰქონდეს, იგი აუცილებლად შემოსაზღვრული უნდა იყოს.

შევნიშნოთ, რომ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან, არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა.

მაგალითად, მიმდევრობა $a_n=(-1)^n$ შემოსაზღვრულია, რადგან $-1\le a_n\le 1$, მაგრამ, მას ზღვარი არ გააჩნია.

ზღვრების გამოთვლის დროს გამოიყენება შემდეგი თეორემები:

თეორემა 8.3. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადია $\{a_n+b_n\}$ მიმდევრობაც და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

თეორემა 8.4. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, მაშინ კრებადია $\{a_n\cdot b_n\}$მიმდევრობაც და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\cdot b_n\}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

კერძოდ, თუ $a_n=a$ მუდმივი მიმდევრობაა, მაშინ $\lim_{n\to\infty}\{a_n\cdot b_n\}=a\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$.

ე.ი. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ.

თეორემა 8.5. თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია, $\lim_{n\to\infty}b_n\ne 0$, და ყოველი $n-$თვის $b_n\ne 0$, მაშინ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ მიმდევრობა კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

თეორემა 8.6. თუ მონოტონური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი კრებადია.

§8.3. ნეპერის რიცხვი. ზღვარს $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ ეწოდება ნეპერის რიცხვი. e ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ათი ათწილადის სიზუსტიდ შემდეგია e=2,7182818284. პრაქტიკულ გამოთვლებში უმეტეს შემთხვევაში ათობითი ლოგარითმებით სარგებლობენ, მაგრამ ხშირ შემთხვევაში სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას უფრო ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ნატურალური ანუ ნეპერის ლოგარითმებით, რომელთა ფუძედ აღებულია ნეპერის რიცხვი e. თუ x რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს აღნიშნავენ $\ln x$ სიმბოლოთი. ე.ი. $\log_e x=\ln x$. მიმდევრობის ზღვრის გამოთვლისას ხშირად სარგებლობენ ფორმულით:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{nb}=e^{ab}.$$

წინა პარაგრაფში (7.12) ფორმულა მივიღეთ დაუმტკიცებლად. ახლა დავამტკიცოთ ეს ფორმულა: თუ წელიწადში ანაბარზე დარიცხვა ხდება $m-$ჯერ, მაშინ t წლის შემდეგ დაგროვილი თანხა იქნება

$$K_m=K\left(1+\frac{r}{m\cdot 100}\right)^{mt}, \tag{8.1}$$

სადაც, r-ნომინალური წლიური საპროცენტო განაკვეთია. თუ (8.1)-ს შევადარებთ $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{nb}$-ს და შემოვიღებთ $a=\frac{r}{100}$, $b=t$ აღნიშვნებს, გვექნება:

$$\lim_{m\to\infty}K_m=\lim_{m\to\infty}K\left(1+\frac{r}{m\cdot 100}\right)^{mt}=Ke^{\frac{rt}{100}}.$$

მივიღეთ (7.12) ფორმულა.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ მიმდევრობის ზღვარი, თუ

$$a_n=\frac{3-4n-8n^2}{7+4n^2}.$$

ამოხსნა. მრიცხველისა და მნიშვნელის n^2-ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$a_n = \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n} - 8}{\frac{7}{n^2} + 4}.$$

ზემოთ მოყვანილი თეორემების ძალით გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n} - 8}{\frac{7}{n^2} + 4} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 8}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} 4} = \frac{0-0-8}{0+4} = -2.$$

§8.4. რიცხვითი მწკრივი. ვთქვათ, მოცემულია უსასრულო $\{a_n\}$ მიმდევრობა. ამ უსასრულო მიმდევრობის წევრთა ჯამს

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{8.2}$$

ეწოდება რიცხვითი მწკრივი.

ამ მწკრივის წევრებისაგან შევადგინოთ $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ მიმდევრობა, სადაც

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2,$$

. . . .

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

. . . .

S_n ჯამს (8.2) მწკრივის კერძო ჯამები ეწოდება.

(8.2) მწკრივს ეწოდება კრებადი, თუ კერძო ჯამთა $\{S_n\}$ მიმდევრობა კრებადია, და ამ მიმდევრობის ზღვარს მწკრივის ჯამი ეწოდება. ე.ი. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, მაშინ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = S$.

თუ მწკრივის კერძო ჯამთა $\{S_n\}_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადი არ არის, მაშინ მწკრივს განშლადი ეწოდება.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. $S_1 = \frac{1}{3}$; $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}$;...; $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$.

გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის თანახმად

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}1 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

ამოცანა 3. ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $a_n = (-1)^n$, განშლადია.

ამოხსნა. რადგან

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = -1+1-1+...+(-1)^n+...$$

და მისი კერძო ჯამთა მიმდევრობა

$$S_1 = -1,\ S_2 = 0,\ S_3 = -1,\ S_4 = 0,...$$

განშლადია, ამიტომ $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i$ მწკრივიც განშლადია.

ამოცანა 4. ვიპოვით $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. განვიხილოთ კერძო ჯამი

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

ე.ი. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$ მწკრივი კრებადია.

მწკრივის ჯამი ყოველთვის არ გამოითვლება. ამიტომ მნიშვნელოვანია იმის დადგენა როდის არის მწკრივი კრებადი.

თეორემა 8.7. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი ზოგადი წევრი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $n \to \infty$, ე.ი. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობაა, რომ მისი ზოგადი წევრი მიისწრაფოდეს ნულისკენ, როცა $n \to \infty$ და ეს შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

ცნობილია რიცხვითი მწკრივის კრებადობის რამდენიმე საკმარისი პირობა (ნიშანი). ჩამოვაყალიბოთ ერთ-ერთი მათგანი:

თეორემა 8.8. თუ დადებითწევრებიანი $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ მწკრივისათვის არსებობს

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ზღვარი, მაშინ მწკრივი კრებადია, თუ $l < 1$ და განშლადი – თუ $l > 1$; თუ $l = 1$ ან ზღვარი არ არსებობს – მწკრივი შეიძლება კრებადიც იყოს და განშლადიც.

ამოცანა 5. გამოვიკვლიოთ

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots$$

მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0,$$

ე.ი. შესრულებულია მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.

$$a_n = \frac{n}{3^n},\ a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n},$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

ე.ი. მოცემული მწკრივი კრებადია.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება რიცხვითი მიმდევრობა?
- როგორი ხერხებით მოიცემა მიმდევრობა?
- რას ნიშნავს: მიმდევრობა მოცემულია ანალიზური ხერხით?
- რას ნიშნავს: მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული ხერხით?
- როგორ მიმდევრობებს ეწოდებათ მონოტონური? (განსაზღვრეთ თითოეული მათგანი)
- როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული?
- როგორ მიმდევრობას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული?
- როგორ მიმდევრობას ეწოდევა შემოსაზღვრული?
- რას ეწოდება მიმდევრობის ზღვარი?
- როგორ მიმდევრობას ეწოდება კრებადი? განშლადი?
- ჩამოაყალიბეთ თეორემები კრებად მიმდევრობებზე.
- რას ეწოდება ნეპერის რიცხვი?
- რას ეწოდება კრებადი (განშლადი) მწკრივი?
- ჩამოაყალიბეთ მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.
- ჩამოაყალიბეთ მწკრივის კრებადობის საკმარისი პირობა.

სავარჯიშო 8

1. **გამოთვალეთ ზღვრები:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n-8}{n^3-n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-13n^2+12}{3n^4-14n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+13n-17}{n^3-14n+25}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^4+6n-1}{14n^3+3n^2-n+8}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+13n-17}{4n^2-1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3+6n-1}{14n^3-n+8}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{25n^2+7n-2}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{9n^2-4n+1}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-2n+3}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-\sqrt{4n^2-5n+1}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{7n^3-1}}{n}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt[4]{n^4+5}}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{2n-1}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{7n}\right)^{2n}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{5n}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{7n}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{\frac{4n-7}{3}}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{\frac{3n-2}{4}}$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+7}{5n+1}\right)^{\frac{8n-3}{3}}$.

2. ჩაწერეთ ჯამი გაშლილი სახით:

1) $\sum\limits_{i=3}^{6}(-1)^{i+1}\frac{3i-1}{4i+1}$;

2) $\sum\limits_{i=2}^{5}\frac{3^i}{3i-1}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{(-2)^k}{k+1}$;

4) $\sum\limits_{k=2}^{4}\frac{2^{k+1}}{k^2}$.

3. იპოვეთ მწკრივის ჯამი:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{3^i}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3}{(2k-1)(2k+1)}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{7}{(4k-2)(4k+2)}$.

4. ამოწერეთ მწკრივის ზოგადი წევრი და შეამოწმეთ სრულდება თუ არა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა:

1) $1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^3}+...$;

2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...;$

4) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 7}+...;$

5) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}...;$

6) $\frac{1}{13}+\frac{2}{23}+\frac{3}{33}+....$

5. მწკრივის კრებადობის საკმარისი ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2.$

თავი 9

ფუნქცია, მისი ზღვარი და უწყვეტობა

§9.1. ფუნქციის ცნება. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი (არა აუცილებლად რიცხვითი) ორი X და Y სიმრავლე.

თუ მოცემულია რაიმე f წესი, რომლის მიხედვითაც X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია ფუნქცია და ვწერთ: $X \to Y$ ან $f: X \to Y$ ან $y = f(x)$.

x-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს ანუ არგუმენტს, ხოლო y-ს დამოკიდებულ ცვლადს ანუ ფუნქციას. $f(x_0)$-ს უწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x_0 მნიშვნელობას. X სიმრავლეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მას აღნიშნავენ $D(f)$ სიმბოლოთი, ხოლო Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამება, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $E(f)$ სიმბოლოთი.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნისვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ და შევისწავლით რიცხვით ფუნქციებს. რიცხვითი ფუნქციების შემთხვევაში ძალიან ხშირად გამოიყენება მისი გრაფიკული წარმოდგენა. რიცხვითი ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება საკოორდინატო Oxy სიბრტყის ყველა იმ $(x;y)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y = f(x)$. საზოგადოდ, ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს წირს Oxy სიბრტყეში და $y = f(x)$-ს უწოდებენ მის განტოლებას.

§9.2. ფუნქციის ზღვარი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა.

- A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $|f(x) - A| < \varepsilon$, როცა $0 < |x - x_0| < \delta$. ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

ფაქტობრივად, ეს განმარტება გვეუბნება, რომ როდესაც x მიისწრაფის x_0-კენ ნებისმიერად ისე, რომ x არ ემთხვევა x_0-ს (ანუ x ძალიან ახლოა x_0-თან და

$x \neq x_0$) , მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები მიისწრაფიან A რიცხვისაკენ (ანუ $f(x)$ ძალიან ახლოა A-სთან).

ზოგჯერ საჭიროა ისეთი შემთხვევების განხილვა, როცა x მიისწრაფის x_0-სკენ ისე, რომ $x > x_0$ ან $x < x_0$, ე.ი. x მიისწრაფის x_0-სკენ მარჯვნიდან ან მარცხნიდან. ამ შემთხვევაში შემოდის ფუნქციის ე.წ. ცალმხრივი ზღვრის ცნება.

- A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $|f(x) - A| < \varepsilon$, როცა $x_0 < x < x_0 + \delta$. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A \text{ ან } f(x_0+) = A.$$

- A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $|f(x) - A| < \varepsilon$, როცა $x_0 - \delta < x < x_0$. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A \text{ ან } f(x_0-) = A.$$

ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ არსებობს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში მარჯვნიდან და მარცხნიდან და ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია.

პირიქით, თუ x_0 წერტილში არსებობს ერთმანეთის ტოლი მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები, მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ზღვარი, რომელიც ტოლია მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების საერთო მნიშვნელობის.

ცხადია რომ, თუ რაიმე x_0 წერტილში არსებობს სასრული მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები, მაგრამ ისინი არ არიან ერთმანეთის ტოლი, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

თეორემა 9.1. თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ ეს ზღვარი ერთადერთია და ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის მცირე მიდამოში.

თეორემა 9.2.. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციებს აქვს ზღვრები x_0 წერტილში, მაშინ:

ა) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

ბ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x);$

გ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$ თუ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0;$

დ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ სადაც $c=const.$ **(მუდმივია).**

§9.3. ფუნქციის უწყვეტობა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში თვით x_0 წერტილის ჩათვლით. შემოვიღოთ შემდეგი მეტად მნიშვნელოვანი სამი განმარტება:

- $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ მას x_0 წერტილში გააჩნია ზღვარი და ეს ზღვარი $f(x_0)$ რიცხვის ტოლია, ე.ი. თუ
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$
- $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში მარჯვნიდან, თუ არსებობს მისი მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში და ეს ზღვარი $f(x_0)$ რიცხვის ტოლია, ე.ი. თუ
$$f(x_0+)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0).$$
- $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში მარცხნიდან, თუ არსებობს მისი მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ეს ზღვარი $f(x_0)$ რიცხვის ტოლია, ე.ი. თუ
$$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0).$$

ფუნქციის ზღვრების ცნებიდან და ზემოთ მოყვანილი განმარტებებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 9.3. x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები:
$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$

ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი, შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

- $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $(a;b)$ ინტერვალში, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყველა წერტილში.
- $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a;b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია $(a;b)$ ინტერვალში და, გარდა ამისა, a წერტილში იგი უწყვეტია მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილში – მარცხნიდან.

§9.4. ფუნქციის წყვეტა და მისი სახეები. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე $(a;b)$ შუალედში და x_0 ამ შუალედის რომელიმე შიგა წერტილია. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$

თუ ამ ტოლობებიდან რომელიმე დარღვეულია ან f არ არის განსაზღვრული x_0 წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში.

განვიხილოთ ფუნქციის წყვეტის შემდეგი სახეები:

1) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ და ეს ზრვრები ერთმანეთის ტოლია $f(x_0+)=f(x_0-)$, მაგრამ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}.$$

ცხადია, ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა

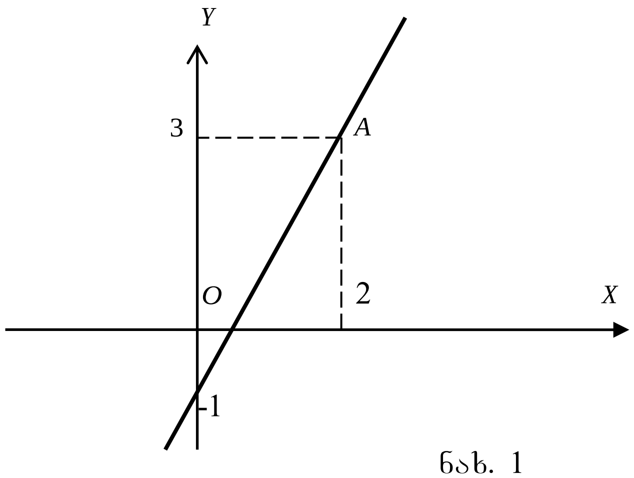
$$D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ ფუნქციას გააჩნია მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=2$ წერტილში:

$$f(1+)=\lim_{x\to 2+}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(2x-1)=3,$$

$$f(1-)=\lim_{x\to 2-}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(2x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(2x-1)=3.$$

ამრიგად, არსებობს $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა სასრული ზღვრები და ისინი ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ $f(x)$ ფუნქცია $x=2$ წერტილში განსაზღვრული არ არის. ამ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი (იხ. ნახაზი 1) არ შეიცავს A წერტილს. (შესაბამისი წრფიდან ამოვარდნილია ერთადერთი A წერტილი).



ნახ. 1

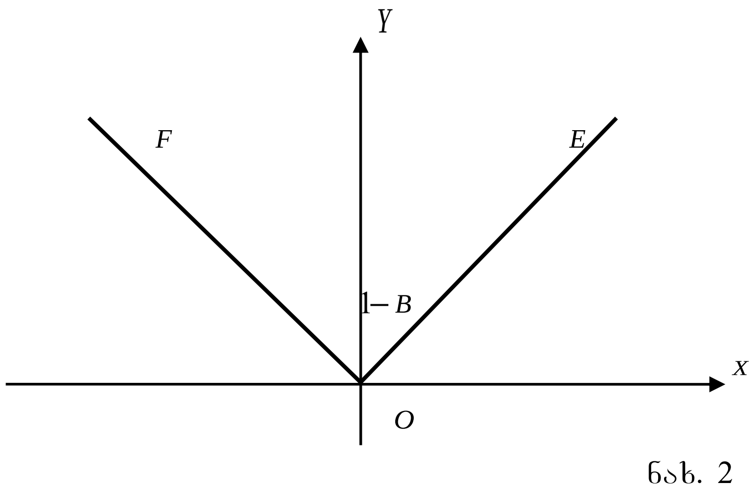
2) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ და ეს ზღვრები ერთმანეთის ტოლია, მაგრამ მათი საერთო მნიშვნელობა არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში, ე.ი.

$$f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0).$$

მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases}|x|, \text{ როცა } x\neq 0,\\ 1, \text{ როცა } x=0.\end{cases}$$

$f(x)$ ფუნქციისთვის $x=0$ წერტილი არის წყვეტის წერტილი, რადგან $f(0+)=f(0-)=0$, მაგრამ $f(0)=1$. ფუნქციის გრაფიკი შედგება ღია OE და OF სხივებისგან და B წერტილისგან (იხ. ნახაზი 2).



ნახ. 2

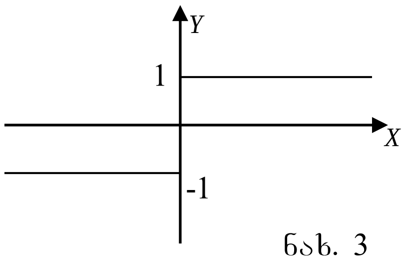
ზემოთ განხილულ ორივე შემთხვევაში x_0 წერტილს ასაცილებელი წყვეტის წერტილი ეწოდება. ეს სახელწოდება სავსებით გამართლებულია იმით, რომ თუ ფუნქციის მნიშვნელობად x_0 წერტილში ავიღებთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს ამავე x_0 წერტილში, მაშინ ასეთი ფუნქცია გახდება უწყვეტი მოცემულ წერტილში.

3) არსებობს სასრული ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$, მაგრამ $f(x_0-)\neq f(x_0+)$. ამ შემთხვევაში x_0 წერტილს ნახტომის წყვეტის წერტილი ეწოდება, ხოლო სხვაობას $f(x_0+)-f(x_0-)$ ეწოდება ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილში.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, \text{ როცა } x\neq 0,\\ 0, \text{ როცა } x=0.\end{cases}$$

თუ $x>0$, მაშინ $f(x)=1$ და ამიტომ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$. თუ $x<0$, მაშინ $f(x)=-1$ და $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$. $x=0$ წერტილში ფუნქციის ნახტომია $f(0+)-f(0-)=2$ (იხ. ნახ. 3).



ნახ. 3

თუ x_0 წერტილში რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი არ არსებობს, მაშინ მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება ფუნქცია?
- რას ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე?
- რას ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე?
- რას ეწოდება რიცხვითი ფუნქცია?
- რას ეწოდება ფუნქციის ზღვარი?
- რას ეწოდება ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან? მარცხნიდან?
- მოიყვანეთ ფუნქციის უწყვეტობის განმარტება.
- მოიყვანეთ ფუნქციის უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.
- რას ნიშნავს, რომ ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში?
- რას ნიშნავს, რომ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე?

- რას ნიშნავს რომ ფუნქცია განიცდის წყვეტას წერტილში?
- ჩამოთვალეთ ფუნქციის წყვეტის სახეები.
- რას ეწოდება ნახტომის წყვეტის წერტილი?
- რას ეწოდება პირველი გვარის წყვეტა?
- რას ეწოდება მეორე გვარის წყვეტა?

სავარჯიშო 9

გამოთვალეთ ფუნქციის ზღვარი:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+16}{x^2+5x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-10}{5x^3+7x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{9x^2-x+1}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{2x}\right)^{3x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{5x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x}\right)^{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{5x}$

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

11) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$;

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$;

13) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x+5}{2x^2-10x}$;

15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$;

17) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5-4x}-3}{x^2+x}$;

18) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{4+x}-1}$;

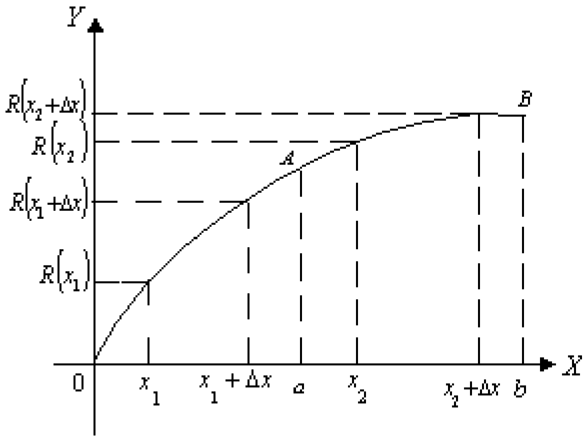
19) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{5}{x}}$;

თავი 10
ფუნქციის წარმოებული

§10.1. წარმოებულის ცნება. მრავალ ეკონომიკურ ამოცანაში გვჭირდება იმის დადგენა, თუ რომელ შუალედებში იზრდება ან კლებულობს ფუნქცია, სად აღწევს ის ლოკალურ მაქსიმუმს ან მინიმუმს. მაგალითად, როდის აღწევს შემოსავლის ფუნქცია $y = R(x)$ მაქსიმუმს, ან როდისაა მოგება $y = P(x)$ მაქსიმალური.

ვთქვათ, შემოსავლის $y = (TR) = R(x)$ ფუნქციის გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახ. 1-ზე.



ნახ. 1

ნახაზიდან ჩანს, რომ $R(x)$ ზრდადი ფუნქციაა $[0;b]$ შუალედზე, ამასთან იგი უფრო სწრაფად იზრდება $[0;a]$ შუალედზე, ვიდრე $[a;b]$ შუალედზე.

ამ ფუნქცის ეკონომიკური შინაარსი შემდეგია: თუ შევადარებთ ერთმანეთს შემოსავლის ზრდას გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე Δx რაოდენობით ზრდისას x_1–დან $x_1 + \Delta x$–მდე და x_2–დან $x_2 + \Delta x$–მდე, დავინახავთ, რომ პირველ შემთხვევაში შემოსავლის ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით, არის

$$\frac{R(x_1 + \Delta x) - R(x_1)}{\Delta x},$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$\frac{R(x_2 + \Delta x) - R(x_2)}{\Delta x}.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$R(x_1+\Delta x)-R(x_1)>R(x_2+\Delta x)-R(x_2),$$

ამიტომ

$$\frac{R(x_1+\Delta x)-R(x_1)}{\Delta x}>\frac{R(x_2+\Delta x)-R(x_2)}{\Delta x}.$$

ეს ნიშნავს შემდეგს: გაყიდული საქონლის Δx რაოდენობით გაზრდისას შემოსავლის საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $[0;a]$ შუალედის x_1 წერტილისათვის, ვიდრე $[a;b]$ შუალედის x_2 წერტილისათვის. ე.ი. შეფარდება

$$\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}. \tag{10.1}$$

აღწერს მთლიანი ამონაგების „ცვლილების სიჩქარეს“ პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება x–დან $x+\Delta x$–მდე. რაც უფრო მცირეა Δx რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს (10.1) შეფარდება $R(x)$ ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარეს“. თუ შემოსავლის ფუნქცია წრფივია, მაშინ მისი „ცვლილების სიჩქარე“ მუდმივია. მართლაც:

$$y=(TR)=R(x)=P\cdot x$$

და

$$\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}=\frac{P\cdot(x+\Delta x)-P\cdot x}{\Delta x}=\frac{P\cdot\Delta x}{\Delta x}=P.$$

ე.ი. წრფივი მოდელის შემთხვევაში შემოსავლის „ცვლილების სიჩქარე“ არ არის დამოკიდებული Δx ნაზრდის შერჩევაზე. ზოგად შემთხვევაში კი, ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარის“ იდიალურად ზუსტი მახასიათებელი იქნება (10.1) გამოსახულების ზღვარი, როცა $\Delta x\to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას ზღვრული ანუ მარჟინალური შემოსავალი ეწოდება და აღინიშნება (MR) სიმბოლოთი. ე.ი.

$$(MR)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(x+\Delta x)-R(x)}{\Delta x}. \tag{10.2}$$

ამ ტიპის ზღვრებს მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე.

ვთქვათ, მოცემული $y = f(x)$ უწყვეტი ფუნქცია, განსაზღვრული $[a;b]$ შუალედზე და x ამ შუალედის რაიმე წერტილია. არგუმენტის Δx ნაზრდისათვის დავწეროთ ფუნქციის Δy ნაზრდი:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

ეს გამოსახულება დამოკიდებულია Δx–ზე, ე.ი. ის წარმოედგენს Δx–ის ფუნქციას. Δx–ის ფუნქცია იქნება აგრეთვე შეფარდება

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x).}{\Delta x}, \tag{10.3}$$

და თუ არსებობს ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$, მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.

• ფუნქციის წარმოებული x წერტილში ეწოდება ამ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ.

ფუნქციის წარმოებული აღინიშნება შემდეგნაირად: $f^{'}(x)$, $y^{'}$, $\dfrac{dy}{dx}$ („დე იგრეკ დე იქსი“) ან $\dfrac{df(x)}{dx}$. ამრიგად,

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{10.4}$$

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ $y = f(x) = x^2 + 2$ ფუნქციის წარმოებული $x = 4$ წერტილში.

ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ნაზრდი $x = 4$ წერტილში

$$\Delta y = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 - 4^2 = \Delta x(\Delta x + 8)$$

და განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \Delta x + 8.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ

$$f^{'}(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x + 8) = 8.$$

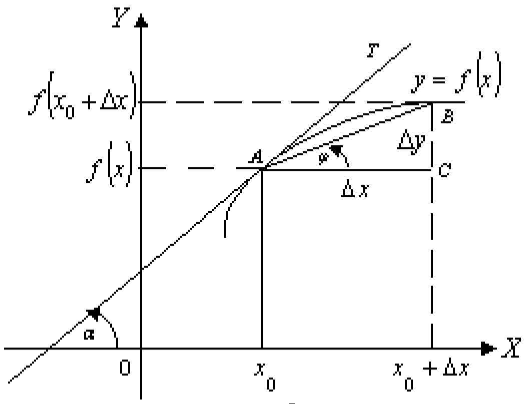
ზუსტად ასევე გამოითვლება $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x წერტილში და ადგილი ექნება ტოლობას

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად საჭიროა ვიპოვოთ ფუნქციის Δy ნაზრდი და გამოვთვალოთ ზღვარი, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ არსებობს ფუნქციის წარმოებული x წერტილში.

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

§10.2. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი. გავეცნოთ წარმოებულის გეომეტრიულ შინაარსს. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქციის შესაბამის წირს $A(x_0;\ \ f(x_0))$ წერტილში გააჩნია მხები (ნახ. 2).



ნახ. 2

გამოვთვალოთ $A(x_0;\ \ f(x_0))$ და $B(x_0+\Delta ხ;\ \ f(x_0+\Delta ხ))$ წერტილებზე გამავალი AB მკვეთის Ox ღერძთან დახრის φ კუთხის ტანგესი: $\left(tg\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ და მივასწრაფოთ Δx ნაზრდი ნულისაკენ (იხ. ნახ. 2). მაშინ AB წრფე დაიკავებს ზღვრულ მდებარეობას და დაემთხვევა AT მხებს. ცხადია, ამ შემთხვევაში $\varphi=\angle BAC$ მიისწრაფის $\alpha=\angle TAC$ –კენ ანუ $tg\varphi\to tg\alpha$. წარმოებულის განმარტების თანახმად

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{'}(x_0)\ ,$$

ე.ი. ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში რიცხობრივად ტოლია იმ კუთხის ტანგენსის, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $A(x_0;\ \ f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხები შეადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

§10.3. მხების განტოლება.

თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული მისი განსაზღვრის არის ყოველ x წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია წარმოებადია მოცემულ არეში.

თეორემა 10.1. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს სასრული წარმოებული, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

ამრიგად, თუ ფუნქცია წარმოებადია წერტილში, მაშინ იგი ამ წერტილში უწყვეტიცაა, მაგრამ შეიძლება, ფუნქცია იყოს უწყვეტი მოცემულ წერტილში, მაგრამ წარმოებადი არ იყოს ამ წერტილში. მაგალითად, $f(x)=|x|$ ფუნქცია უწყვეტია x–ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაგრამ $x=0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია (ნახ. 3).

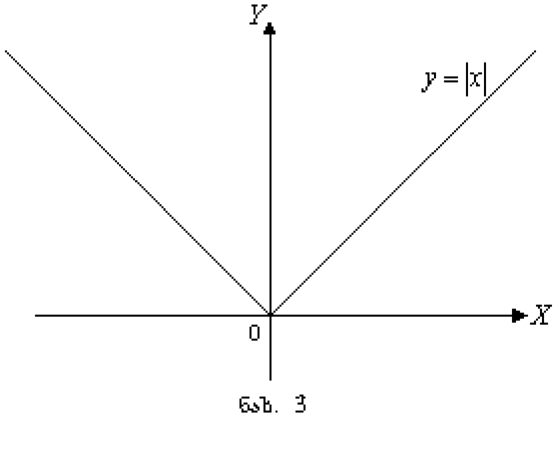
ნახაზზე მოცემულ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილში მხები არ გააჩნია. ამ წერტილში $y=|x|$ ფუნქციის მხების დახრილობა არ განისაზღვრება. ე.ი. თუ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია წარმოებული $f'(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას გრაფიკის $(x, f(x))$ წერტილში გააჩნია მხები, რომლის დახრილობა $f'(x)$ მნიშვნელობის ტოლია.

$(x_0;\ y_0)$ წერტილზე გამავალი ყველა წრფის განტოლება (გარდა y ღერძის პარალელური წრფეებისა) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (10.5)$$

თუ (10.5) ფორმულას გამოვიყენებთ, ფუნქციის მხების განტოლება, რომელიც $(x_0;\ f(x_0))$ წერტილზე გადის, იქნება

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (10.6)$$



ნახ. 3

ამოცანა 2. ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x) = x^2 + 2$ ფუნქცია. დავწეროთ ამ ფუნქციის მხების განტოლება $x = 4$ წერტილში.

ამოხსნა. როგორც უკვე ვნახეთ, $f'(4) = 8$. როცა $x = 4$, მაშინ $y = 16 + 2 = 18$. ამიტომ მხების განტილება, რომელიც (4; 18) წერტილზე გადის, იქნება

$$y - 18 = 8(x - 4) \quad \text{ან} \quad y = 8x - 14.$$

§10.4. გაწარმოების წესები და წარმოებულების ცხრილი.

თეორემა 10.2. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია რაიმე ინტერვალში, მაშინ ამავე ინტერვალში წარმოებადია აგრეთვე $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ ფუნქციები და მართებულია ტოლობები:

ა) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

ბ) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

გ) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad g(x) \neq 0$;

კერძოდ, თუ c მუდმივია, მაშინ $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$.

ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

1. $c' = 0, \quad c = const$;
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; 14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

§10.5. რთული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, მოცემულია $t = g(x)$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $D(g) = [c;d]$, ხოლო მნიშვნელობათა არეა $D(g) = [a;b]$. მოცემულია აგრეთვე $y = h(t)$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $D(h) = [a;b]$, მაშინ $y = f(x) = h(g(x))$ ფუნქციას ეწოდება x არგუმენტის რთული ფუნქცია. თუ არგუმენტის მითითებული მნიშვნელობებისათვის თვითოეული $g(x)$ და $h(t)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ არსებობს $h(g(x))$ ფუნქციის წარმოებულიც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x) = [h(g(x))]' = h'(t)\Big|_{t=g(x)} \cdot g'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (10.7)$$

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ ფუნქციის წარმოებული. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $h(t) = \sqrt{t}$, $t = g(x) = x^2 + 3x$. მაშინ (10.7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$f'(x) = h'(t)\Big|_{t=g(x)} \cdot g'(x) = \left(\sqrt{t}\right)'\Big|_{t=x^2+3x+1} \cdot \left(x^2 + 3x + 1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big|_{t=x^2+3x+1} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$$

ამოცანა 4. ვიპოვოთ $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ ფუნქციის წარმოებული. შემოვიღოთ აღნიშვნები: მივიღებთ, $h(t) = \ln t$ სადაც $t = x^2 + 1$. (10.7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$f'(x) = h'(t)\Big|_{t=g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{t}\Big|_{t=x^2+1} \cdot \left(x^2 + 1\right)' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების (10.7) ფორმულის გამოყენებით წარმოებულების ცხრილი, რომელიც წინა პარაგრაფში იყო მოცემული შეიძლება უფრო ზოგადი სახით ჩავწეროთ:

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1}u'$, $n \in R$; 2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3. $\left(e^u\right)' = e^u u'$; 4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$;

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$;

ამ ტოლობებში იგულისხმება, რომ u არის x-ის ფუნქცია და გაწარმოება x-ით ხდება.

§10.6. მაღალი რიგის წარმოებული. თუ მეორე რიგის წარმოებულს გააჩნია წარმოებული, მაშინ მას უწოდებენ მესამე რიგის წარმოებულს და აღნიშნავენ $f'''(x)$ ან y''' სიმბოლოთი.

საზოგადოდ, $(n-1)$ რიგის წარმოებულს ეწოდება n–ური რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f^{(n)}(x)$ ან $y^{(n)}$ სიმბოლოთი.

ამოცანა 5. ვიპოვოთ $f(x)=2x^3+3x^2+4x+5$ ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებული.

თანმიმდევრობითი გაწარმოებით მივიღებთ: $f'(x)=6x^2+6x+4$, $f''(x)=12x+6$, $f'''(x)=12$, $f^{(4)}(x)=0$ და ყველა უფრო მაღალი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია.

ამოცანა 6. ვიპოვოთ $f(x)=\sin x$ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები.

$f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x$; $f'''(x)=-\cos x$; $f^{(4)}(x)=\sin x$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f^{(4k)}(x)=\sin x$; $f^{(4k+1)}(x)=\cos x$; $f^{(4k+2)}(x)=-\sin x$; $f^{(4k+3)}(x)=-\cos x$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

§10.7. ფუნქციის დიფერენციალი. ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x წერტილის რაიმე მიდამოში. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება

დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \qquad (10.9)$$

სადაც A სასრული რიცხვია და არ არის დამოკიდებული Δx–ზე, ხოლო $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$. ფუნქციის ნაზრდის $A \cdot \Delta x$ შესაკრებს, რომელიც წრფივია არგუმენტის Δx ნაზრდის მიმართ, ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება. იგი აღინიშნება dy სიმბოლოთი. მაშასადამე, $dy = A \cdot \Delta x$

მაგალითად, თუ მოცემულია ფყნქცია $y = f(x) = x^2$, მაშინ ფუნქციის ნაზრდისათვის მივიღებთ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 .$$

ამ შემთხვევაში $\alpha = \Delta x$, ხოლო ნაზრდის მთავარი ნაწილია $dy = 2x \cdot \Delta x$.

მტკიცდება, რომ თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ ფუნქციას x წერტილში აქვს სასრული წარმოებული. მართლაც, ვთქვათ

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

აქედან $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$. ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A.$$

მაშასადამე, $A = f'(x)$. უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (10.10)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $y = f(x) = x$ მაშინ $f'(x) = 1$ და ამიტომ (10.10)-ის თანახმად $dx = \Delta x$, ე.ი. არგუმენტის დიფერენციალი არგუმენტის ნაზრდის ტოლია. ამიტომ, ფუნქციის დიფერენციალი შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$dy = f'(x) dx. \qquad (10.11)$$

ამრიგად ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს. ეს საშუალებას გვაძლევს ფუნქციის წარმოებული წარმოვადგინოთ შემდეგნაირადაც

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}. \qquad (10.12)$$

ე.ი. ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფუნქციის დიფერენციალის შეფარდება არგუმენტის დიფერენციალთან.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\alpha \to 0$ როდესაც $\Delta x \to 0$, გარკვეული სიზუსტით (10.9) ფორმულიდან ფუნქციის ნაზრდისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx A\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x = df(x). \qquad (10.13)$$

ე.ი. ფუნქციის ნაზრდი მიახლოებით ამ ფუნქციის დიფერენციალის ტოლია.

მაგალითად, ვიპოვოთ $f(x)=x^3-5x+15$ ფუნქციის დიფერენციალი:

$$df(x)=\left(x^3-5x+15\right)'dx=(3x^2-5)dx$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება მარჟინალური ფუნქცია?
- რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული წერტილში?
- რას უწოდებენ ფუნქციის წარმოებულის პოვნის ოპერაციას?
- რაში მდგომარეობს წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი?
- როგორი სახე აქვს ფუნქციის მხების განტოლებას წერტილში?
- მოიყვანეთ ფუნქციის ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულთა გამოსათვლელი ფორმულები.
- ამოწერეთ ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი.
- რას ეწოდება რთული ფუნქცია?
- 2. ამოწერეთ რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა.
- 3. რას ეწოდება ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული? მესამე რიგის წარმოებული? n–ური რიგის წარმოებული?
- 4. რას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი?

სავარჯიშო 10

1. გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1) $y = x^3 + 2x$; 2) $y = 3x^2 - \log_2 x$; 3) $y = e^x - tgx$;

4) $y = 5x^2 + 2\sin x$; 5) $y = 7x^3 + 3\cos x$; 6) $y = 2x^3 - 4\ln x$;

7) $y = x^3 \cdot 3^x$; 8) $y = x^2 \cdot e^x$; 9) $y = 2x^2 \cdot \log_2 x$;

10) $y = 4x^3 \cdot 3\ln x$; 11) $y = 3x^3 \cdot \cos x$; 12) $y = 2x^3 \cdot \sin x$;

13) $y = e^x \cdot \log_3 x$; 14) $y = e^x \cdot \ln x$; 15) $y = x^3 \cdot tgx$;

16) $y = 2^x \cdot \sin x$; 17) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$; 18) $y = \dfrac{x^3}{\sin x}$;

19) $y = \dfrac{e^x}{\sin x}$; 20) $y = \dfrac{2^x}{\cos x}$; 21) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 2x}$;

22) $y = \dfrac{3x^2 - 3x + 1}{\cos x}$; 23) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3x + 1}$; 24) $y = \dfrac{tgx}{2x - 1}$;

25) $y = 2^x + e^x \cdot \sin x$; 26) $y = \log_5 x + e^x \cdot \cos x$; 27) $y = \sin x - 2^x \cdot \cos x$;

28) $y = tgx + x^2 \cdot \sin x$; 29) $y = x^3 + \dfrac{x}{\cos x}$; 30) $y = 3x^2 + \dfrac{e^x}{\cos x}$;

31) $y = e^x \cdot \arcsin x$; 32) $y = 2^x \cdot \arccos x$; 33) $y = 3^x \cdot arctgx$

2. დაწერეთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებული მხების განტოლება წერტილში, რომლის კოორდინატებია $(x_0;\ y_0)$

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$, $(0;\ 5)$; 2) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $(1;\ 1)$;

3) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $(2;\ 4)$; 4) $f(x) = -x^2 - 4x - 8$, $(0;\ -8)$.

3. გამოთვალეთ რთული ფუნქციების წარმოებულები:

1) $y = x^2 - e^{3x}$; 2) $y = \log_5 x + 3\sin 3x$; 3) $y = tg2x - e^x$;

4) $y = 5x^2 - 2\cos 5x$; 5) $y = (5x^2 + 1)^{10}$; 6) $y = (4x^3 - 3x)^{20}$;

7) $y = x^2 \cdot e^{5x}$; 8) $y = e^x \cdot \sin 3x$; 9) $y = x^5 \cdot \cos 4x$;

10) $y = e^{7x} \cdot tgx$; 11) $y = \log_2 x \cdot \sin 2x$; 12) $y = \ln x \cdot e^{2x}$;

13) $y = \dfrac{\ln x}{\sin 3x}$;   14) $y = \dfrac{\log_2 x}{\cos 2x}$;   15) $y = \dfrac{e^{4x}}{x^2+1}$;

16) $y = \dfrac{\sin 2x}{x+1}$;   17) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{e^{2x}}$;   18) $y = \dfrac{3x^2 - 2x}{\sin 7x}$;

19) $y = x^2 + e^{2x} \cdot \sin x$;   20) $y = tgx + x^2 \cdot \cos 4x$;   21) $y = \arcsin 4x$;

22) $y = \arccos 7x$;   23) $y = arctg 4x$;   24) $y = arcctg 6x$;

4. იპოვეთ მეორე რიგის წარმოებულები:

1) $y = 1 - x^2 - x^4$;   2) $y = (x+10)^4$;   3) $y = 7x^3 - 9x^2 + 10x + 170$;

4) $y = x^3 \cdot \ln x$;   5) $y = e^{2x-1}$;   6) $y = x^2 \cdot e^x$;

7) $y = \sin(5 - 6x)$;   8) $y = \cos(5 + 9x)$;   9) $y = \ln(4x + 3)$;   10) $y = \sin 2x$.

5. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალები:

1) $y = x^2 - 5x + 17$;   2) $y = e^{-x} \cdot \left(2 - 2x - x^2\right)$;   3) $y = x \cdot \ln x - x$;

4) $y = \log_3(4x - 2)$;   5) $y = x^2 \cdot \log_2 x$;   6) $y = \left(1 + x - x^2\right)^3$;

7) $y = e^{5x} + 3^{4x}$;   8) $y = e^{4x} + 5^{3x}$.

თავი 11

წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება

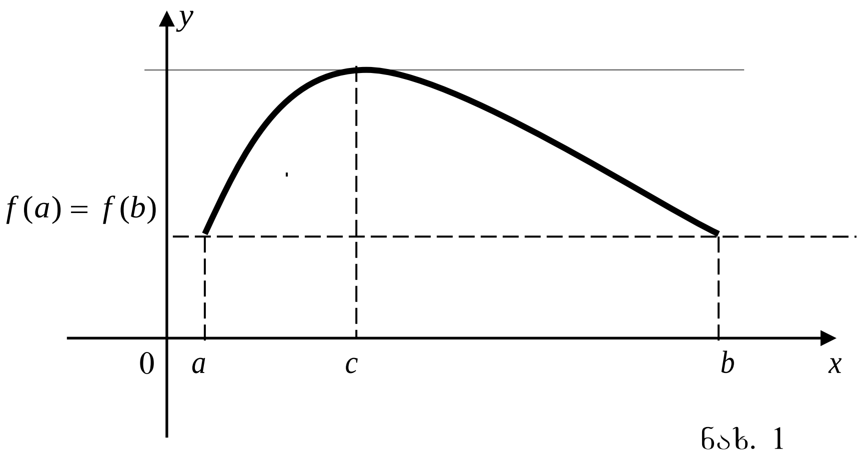
ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტისას ხშირად გვხვდება გარკვეული ფუნქციების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნა, ზრდადობის და კლებადობის შუალედების დადგენა და სხვა, რაც დაკავშირებულია წარმოებულის ცნებასთან.

ამ თავში ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ წარმოებულის გამოყენების სხვადასხვა ასპექტი.

§11.1. ძირითადი თეორემები.

თეორემა 11.1 (როლის თეორემა). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, წარმოებადია ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში და $f(a)=f(b)$. მაშინ a და b წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი c წერტილი, რომ $f'(c)=0$.

როლის თეორემას აქვს შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი: თუ წარმოებადი ფუნქცია რაიმე ორ წერტილში ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობს, მაშინ ამ წერტილებს შორის იარსებებს ისეთი წერტილი, რომლისთვისაც გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხები აბსცისათა ღერძის პარალელურია (იხ. ნახ. 1).



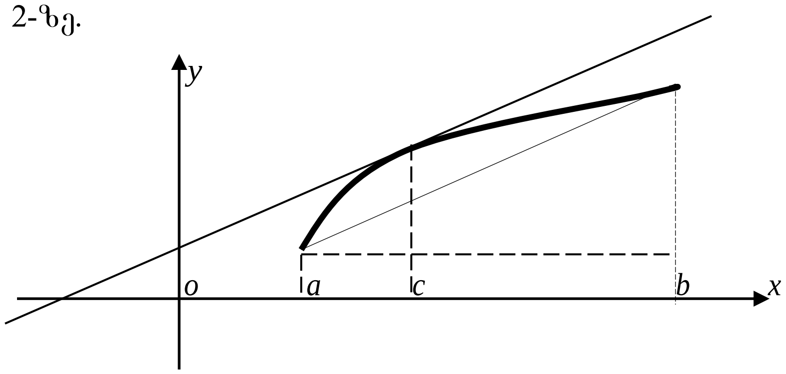
ნახ. 1

თეორემა 11.2 (ლაგრანჟის თეორემა). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში. მაშინ

იარსებებს ისეთი c წერტილი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება ტოლობას

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

ლაგრანჟის თეორემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოყვანილია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2

წარმოებადიფუნქციის გრაფიკზე აღებულ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის არსებობს ისეთი წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები ამ ორი წერტილის შემაერთებელი ქორდის პარალელურია.

§11.2. განუზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესი.

თეორემა 11.3 (ლოპიტალის წესი). ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვითონ a წერტილისა და აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{11.1}$$

თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, მაშინ არსებობს აგრეთვე ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

შენიშვნა 1. მოყვანილი თეორემა სამართლიანია მაშინაც, როცა (11.1) პირობის ნაცვლად სრულდება შემდეგი

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty. \tag{11.2}$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

ამოცანა 1. ლოპიტალის წესის გამოყენებით ვიპოვოთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+8}$; ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{x}$; გ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

დ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}$; ე) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3}$; ვ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, მივიღებთ

ა) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)'}{\left(x^3+8\right)'}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+3}{3x^2}=-\dfrac{1}{12}$;

ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^x-5^x\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2-5^x\ln 5}{1}=\ln 2-\ln 5=\ln\dfrac{2}{5}$;

გ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$;

დ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^5-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{5x^4}=\dfrac{3}{5}$;

ე) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{3x^2}=+\infty$;

ვ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\infty$.

§11.3. ტეილორის და მაკლორენის ფორმულები.

გარკვეულ პირობებში ტეილორის ფორმულის გამოყენების საფუძველზე ფუნქცია შეგვიძლია მიახლოებით წარმოვადგინოთ მრავალწევრის სახით, რაც საშუალებას გვაძლევს რთული ანალიზური გამოსახულებანი შევცვალოთ მარტივი გამოსახულებით.

თერემა11.4 (ტეილორის ფორმულა). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას a წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია წარმოებული $n+1$ რიგამდე ჩათვლით. მაშინ, ამ მიდამოს ნებისმიერი x წერტილისათვის მოიძებნება a და x წერტილებს შორის მდებარე ისეთი c წერტილი, რომლისთვისაც

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

სადაც

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{11.3}$$

ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი ეწოდება.

რადგანა $a<c<x$, ამიტომ c შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ $c=a+\theta(x-a)$, სადაც $0<\theta<1$.მაშასადამე,r_n მიიღებს სახეს

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

ეს არის ტეილორის ნაშთითი წევრი ლაგრანჟის სახით.

თუ ტეილორის ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $a=0$, მაშინ ეს ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (11.4)$$

სადაც $0<\theta<1$.

(11.4) ფორმულას, რომელიც წარმოადგენს ტელორის ფორმულის კერძო სახეს, ეწოდება **მაკლორენის ფორმულა.**

წარმოვადგინოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით.

ვთქვათ, $f(x)=e^x$. რადგან

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$

ამიტომ

$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (11.4) ფორმულაში, მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას e^x ფუნქციისათვის

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

სადაც $0<\theta<1$.

ანალოგიურად, მივიღებთ

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0<\theta<1.$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\left[\alpha-(n-\alpha)\right]}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

გამოსახულებას

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ეწოდება ტეილორის n-ური ხარისხის მრავალწევრი. $P_n(x)$ მრავალწევრი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $f(x)$ ფუნქციის

მიახლოებითი მნიშვნელობა r_n სიზუსტით. მაგრამ r_n ნაშთით წევრში შედის θ, რომლის შესახებაც ცნობილია მხოლოდ ის, რომ იგი იმყოფება 0-სა და 1-ს შორის. ამიტომ r_n სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა საზოგადოდ უცნობია. მიუხედავად ამისა ეს ხელს არ უშლის ტეილორის ფორმულის გამოყენებას მთელ რიგ საკითხებში.

ზემოთგანხილული ფუნქციებისათვის ტეილორის მრავალწევრი პირდაპირ დაიწერება, თუ უკუვაგდებთ ნაშთით წევრს. მაშინ გვექნება ფუნქციების მიახლოებითი გამოსახულებანი:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-\alpha)]}{n!}x^n.$$

§11.4. ფუნქციის მონოტონურობის პირობები. ახლა გავეცნოთ წარმოებულის გამოყენებით ფუნქციის გამოკვლევას. პირველ რიგში შევისწავლოთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების დადგენა, რაც ფუნქციის გამოკვლევის ერთ-ერთ ძირითად საკითხს წარმოადგენს.

• რაიმე შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდად ფუნქცია, თუ ამ შუალედის ყოველი x_1 და x_2 მნიშვნელობებისათვის $x_2 > x_1$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $f(x_2) > f(x_1)$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი ფუნქცია მოცემულ შუალედში, თუ $f(x_2) \geq f(x_1)$, როცა $x_2 > x_1$.

• რაიმე შუალედში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კლებადი ფუნქცია, თუ ამ შუალედის ყოველი x_1 და x_2 მნიშვნელობებისათვის $x_2 > x_1$ უტოლობიდან გამომდინარეობს უტოლობა $f(x_2) < f(x_1)$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება არაზრდადი ფუნქცია მოცემულ შუალედში, თუ $f(x_2) \leq f(x_1)$, როცა $x_2 > x_1$.

• რაიმე შუალედში ზრდად, კლებად, არაკლებად და არაზრდად ფუნქციებს ეწოდება მონოტონური ფუნქციები შესაბამის შუალედში.

მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 11.5 (ფუნქციის ზრდადობის საკმარისი პირობა). ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციაა. თუ $f'(x) > 0$, მაშინ $f(x)$ ზრდადია.

თეორემა 11.6 (ფუნქციის არაკლებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა). ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციაა. $f(x)$ არაკლებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x) \geq 0$.

თეორემა 11.7 (ფუნქციის კლებადობის საკმარისი პირობა). ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციაა. თუ $f'(x) < 0$, მაშინ $f(x)$ კლებადია.

თეორემა 11.8 (ფუნქციის არაზრდადობისაუცილებელი და საკმარისი პირობა). ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციაა. $f(x)$ არაზრდადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(x) \leq 0$.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.

ამოხსნა. $f'(x) = 2x - 5$. ცხადია $f'(x) > 0$ როცა $x > 2{,}5$ და $f'(x) < 0$, როცა $x < 2{,}5$, ე.ი. ფუნქცია კლებადია $(-\infty; 2{,}5)$ ინტერვალში და ზრდადია $(2{,}5; +\infty)$ ინტევალში, სადაც $x_0 = 2{,}5$ წარმოადგენს პარაბოლის აბსცისას.

§11.5. ფუნქციის ექსტრემუმები. ფუნქციის გამოკვლევისას არსებითია, ეგრეთ წოდებული, მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების მოძებნა.

- x_0 წერტილს ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ მიდამოდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x) \leq f(x_0).$$

ფუნქციის მნიშვნელობას მაქსიმუმის წერტილში მაქსიმუმი ეწოდება. მაქსიმუმის წერტილი აღინიშნება $x_{\max}$-ით, ხოლო მაქსიმუმი $y_{\max}$-ით.

- x_0 წერტილს ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ამ მიდამოდან ადგილი აქვს უტოლობას

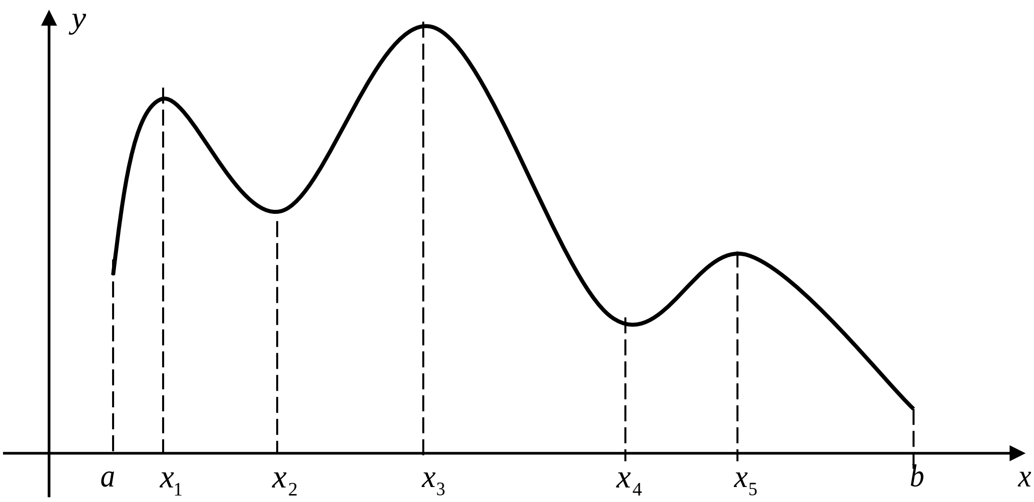
$$f(x) \geq f(x_0).$$

ფუნქციის მნიშვნელობას მინიმუმის წერტილში მინიმუმი ეწოდება. მინიმუმის წერტილი აღინიშნება $x_{\min}$-ით, ხოლო მაქსიმუმი $y_{\min}$-ით.

• წერტილს ეწოდება ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, თუ ის არის ამ ფუნქციის ან მაქსიმუმის ან მინიმუმის წერტილი.

ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემუმები ეწოდებათ.

$[a,b]$სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე მაქსიმუმი და მინიმუმი. ამასთან, ზოგიერთი მაქსიმუმი შეიძლება ზოგიერთ მინიმუმზე ნაკლები იყოს. მაგალითად, ნახ. 3-ზე x_1, x_3, x_5 მაქსიმუმის წერტილებია, ხოლო x_2, x_4 მინიმუმის წერტილებია. ამასთან შევნიშნოთ, რომ $f(x_2)$ მინიმუმი მეტია $f(x_5)$ მაქსიმუმზე.



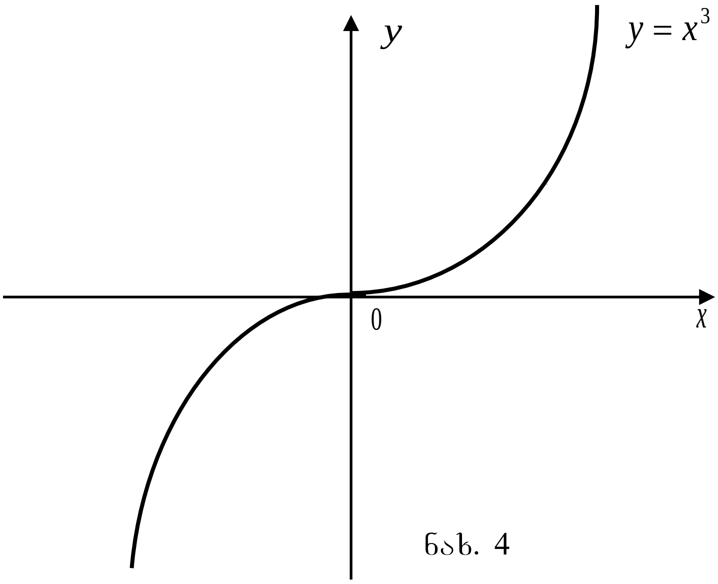
ნახ. 3

ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოსაძებნად უდიდესი მნიშვნელობა აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 11.9 (ფერმას თეორემა). თუ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x_0)$ ან არ არსებობს ან $f'(x_0)=0$.

შევნიშნოთ, რომ წარმოებადი ფუნქციისათვის რაიმე წერტილში წარმოებულის ნულთან ტოლობა არის ამ წერტილში ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელი პირობა და არა საკმარისი, ე.ი. შეიძლება ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში იყოს ნულის ტოლი, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არ ჰქონდეს ექსტრემუმი. მაგალითად, $y=x^3$ ფუნქციის წარმოებული $y'=3x^2$ ნულია $x=0$ წერტილში, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას არ აქვს ექსტრემუმი (იხ. ნახ. 4). მეორე მხრივ,

ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი იმ წერტილში, რომელშიც ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.



ნახ. 4

• წერტილებს, რომლებშიც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილები ეწოდება, ხოლო იმ წერტილებს, სადაც $f^{'}(x)=0$, სტაციონალური წერტილები ეწოდება.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კრიტიკული წერტილი ყოველთვის არ წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს, მაგრამ თუ რაიმე წერტილში ფუნქცია აღწევს ექსტრემუმს, მაშინ იგი აუცილებლად იქნება კრიტიკული წერტილი.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები:

თეორემა 11.9 (ექსტრემუმის არსებობის პირველი საკმარისი პირობა).

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. მაშინ: 1) თუ $f'(x)$ x_0 წერტილზე გავლისას იცვლის ნიშანს მინუსიდან პლუსზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი, 2) თუ $f'(x)$ x_0 წერტილზე გავლისას იცვლის ნიშანს პლუსიდან მინუსზე, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, 3) თუ $f'(x)\, x_0$ წერტილზე გავლისას არ იცვლის ნიშანს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არ აქვს ექსტრემუმი.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 1$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული

$$y' = 3x^2 - 18x + 15.$$

ეს წარმოებული გავუტოლოთ ნულს

$$3x^2 - 18x + 15 = 0, \quad \text{ანუ}\; x^2 - 6x + 5 = 0.$$

აქედან $x_1 = 1,\; x_2 = 5$.

ჯერ ავიღოთ $x_1 = 1$ კრიტიკული წერტილი. თუ $x < 1$, მაშინ $y' > 0$, ხოლო თუ $1 < x < 5$, მაშინ $y' < 0$.

მაშასადამე, $x = 1$ წერტილზე გავლისას y' წარმოებული დადებითი მნიშვნელობიდან უარყოფითზე გადადის და თეორემა 11.9.-ის თანახმად ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

ანალოგიურად გამოირკვევა, რომ $x_2 = 5$ წერტილზე მოცემულ ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

საბოლოოდ, გვაქვს $x_{\max} = 1$, $y_{\max} = 6$, $x_{\min} = 5$, $y_{\min} = -26$

მოვიყვანოთ ექსტრემუმის არსებობის კიდევ ერთი საკმარისი პირობა, რომელიც ყალიბდება მეორე რიგის წარმოებულის ტერმინებში.

თეორემა11.10 (ექსტრემუმის არსებობის მეორე საკმარისი პირობა).

ვთქვათ, x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული, ამასთან $f'(x_0) = 0$. მაშინ:

1) თუ $f''(x_0) > 0$, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია;

2) თუ $f''(x_0) < 0$, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია;

3) თუ $f''(x_0) = 0$, მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

ამოცანა 4.ვიპოვოთ მაქსიმუმი და მინიმუმი $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 1$ ფუნქციისათვის.

ამოხსნა.ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8.$$

გავუტოლოთ ეს უკანასკნელი ნულს და ვიპოვოთ მისი ფესვები:

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

მივიღებთ $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. ახლა ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$f''(x) = 2x - 6.$$

ჩავსვათ მეორე რიგის წარმოებულში ფესვები $x_1 = 4$ და $x_2 = 2$, მაშინ მივიღებთ

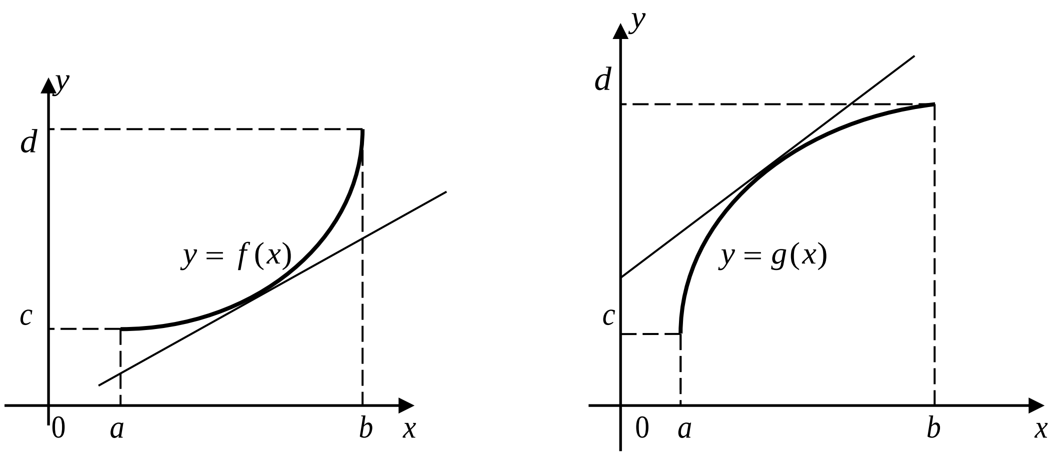
$$f''(4) = 2\cdot 4 - 6 = 2 > 0\,, \qquad f''(2) = 2\cdot 2 - 6 = -2 < 0\,.$$

ამრიგად, თეორემა 11.10.-ის თანახმად, $x_{\min} = 4$, $x_{\max} = 2$. შესაბამისად

$$f_{\min}(4) = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4 - 1 = 4\frac{1}{3}\,, \quad f_{\max}(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 1 = 5\frac{2}{3}\,.$$

§11.6.ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი. ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად აუცილებელია სრული ინფორმაციის მოძიება შესაბამისი წირის ფორმის შესახებ.

მაგალითად, განვიხილოთ ორი ფუნქცია $y = f(x)$ და $y = g(x)$, რომელთა გრაფიკები გამოსახულია ნახ. 5-ზე.



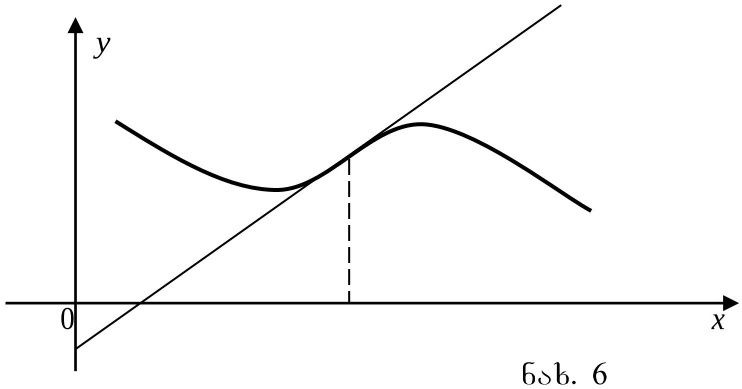
ა) ბ)

ნახ. 5

ორივე ფუნქცია განსაზღვრულია (a,b) შუალედში, ორივე ზრდადია ამ შუალედში, ორივე ფუნქცია იღებს c და d რიცხვებს შორის მოთავსებულ ყველა მნიშვნელობას, მაგრამ მათი გრაფიკები მაინც თვისობრივად განსხვავებულ წირებს წარმოადგენენ: $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი „ჩაზნექილია ქვემოთ“, ხოლო $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკი – „ამოზნექილია ზემოთ“. ფუნქციათა გრაფიკების მსგავსი ყოფაქცევა შეიძლება დადგინდეს წარმოებულის გამოყენებით. შემოვიღოთ რამდენიმე განმარტება:

- რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თვითონ ფუნქციასაც ჩაზნექილი ეწოდებათ, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ქვემოთ (ნახ. 5. ა).
- რაიმე შუალედში წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკს და თვითონ ფუნქციასაც ამოზნექილი ეწოდებათ, თუ გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები მდებარეობს გრაფიკის ზემოთ (ნახ. 5. ბ).

• წარმოებადი ფუნქციის გრაფიკის წერტილს გადაღუნვის წერტილი ეწოდება, თუ ამ წერტილზე გავლისას გრაფიკის ამოზნექილობა იცვლება ჩაზნექილობით ან პირიქით (ნახ. 6)



ნახ. 6

თეორემა11.11 (ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები). ვთქვათ, $f(x)$ რაიმე შუალედზე ორჯერ წარმოებადი ფუნქციაა. ამ შუალედზე:

1) $f(x)$ ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x) \leq 0$,

2) $f(x)$ ჩაზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f''(x) \geq 0$.

თეორემა11.12 (გადაღუნვის წერტილის არსებობის აუცილებელი პირობა). თუ $(x_0; f(x_0))$ არის რაიმე შუალედზე წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, მაშინ $f''(x)$ ან არ არსებობს, ან $f''(x) = 0$.

შენიშვნა 2. $f''(x_0) = 0$ არის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $(x_0; f(x_0))$ იყოს $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი. მაგალითად, $f(x) = x^4$ ფუნქციისათვის $f''(0) = 0$, მაგრამ ამ ფუნქციის გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია, რადგან იგი ამოზნექილია მთელ თავის განსაზღვრის არეში.

თეორემა11.13 (გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა) თუ $f''(x)$-ს x_0-ის სხვადასხვა მხარეს სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ $(x_0; f(x_0))$ არის $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

ამოცანა 5. ვიპოვოთ $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 1$ ფუნქციის ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.

ამოხსნა. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. გამოვთვალოთ მისი წარმოებულები:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 24, \qquad f''(x) = 12x^2 - 12x - 24.$$

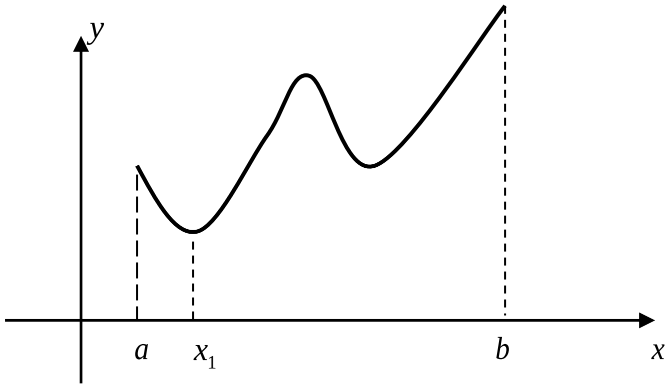
მეორე რიგის წარმოებული არსებობს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვიპოვოთ მის ნულები:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

ამ განტოლებას გააჩნია ამონახსნები $x_1 = -1$და $x_2 = 2$. მარტივად დავადგენთ, რომ, თუ $x < -1$ ან $x > 2$, მაშინ $f''(x) > 0$, ხოლო, თუ $-1 < x < 2$, მაშინ $f''(x) < 0$. ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკი, ჩაზნექილია $(-\infty; -1)$ და $(2; +\infty)$ შუალედებში და ამოზნექილია $(-1; 2)$ შუალედში. ამიტომ$(-1; \mathrm{f}(-1)) = (-1; -32)$ და $(2; f(2)) = (2; 1)$ წერტილები არის წირის გადაღუნვის წერტილები

§11.7. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მონაკვეთზე. გამოყენებითი ამოცანების, კერძოდ ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნის დროს მნიშვნელოვანია ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნა მოცემულ მონაკვეთზე.

ცნობილია, რომ, თუ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a; \mathrm{b}]$ მონაკვეთზე, მაშინ ამ ფუნქციას გააჩნია უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ამ მონაკვეთზე. აღმოჩნდა, რომ ფუნქციას უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები შესაძლებელია ჰქონდეს როგორც ექსტრემუმის წერტილებში, ისე მონაკვეთის ბოლოებზე. როგორც ნახაზი 7-დან სჩანს



ნახ. 7

ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა $[a; \mathrm{b}]$ მონაკვეთის ბოლოში, $x = b$-ში, ხოლო უმცირესი – x_1 მინიმუმის წერტილში.

მონაკვეთზე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნად შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი სქემით: 1) ვიპოვოთ $f'(x)$ წარმოებული;

2) ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები ე.ი. წერტილები სადაც $f'(x)=0$ ან $f'(x)$ არ არსებობს; 3) ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები კრიტიკულ წერტილებში და მონაკვეთის ბოლოებში და ავარჩიოთ მათგან უდიდესი $f_{\text{უდიდ.}}$ და უმცირესი $f_{\text{უმცირ.}}$ მნიშვნელობები.

ამოცანა 6. ვიპოვოთ $f(x)=3x^2-x^3$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[-1;1]$ მონაკვეთზე.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მონაკვეთზე უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის ზემოთ მოყვანილი სქემით:

1) $f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$;

2) $f'(x)=0$, საიდანაც კრიტიკული წერტილებია $x_1=0$ და $x_2=4$;

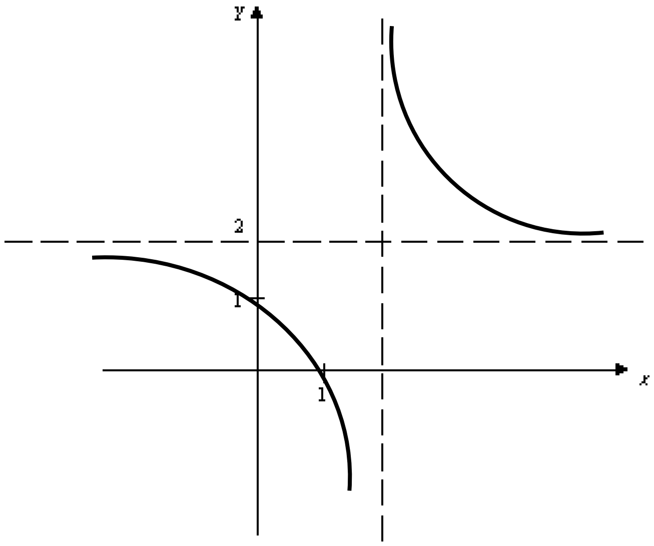
3) ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები მონაკვეთის ბოლოებში და იმ კრიტიკულ წერტილში, რომელიც აღმოჩნდა მოცემულ მონაკვეთში: $f(-1)=4$, $f(1)=2$, $f(0)=0$. ამრიგად, $f_{\text{უდიდ.}}=f(-1)=4$, $f_{\text{უმცირ.}}=f(0)=0$.

§11.8. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. ფუნქციის გრაფიკის დადგენის დროს, ხშირ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია მისი ფორმის დადგენა, როდესაც ამ გრაფიკის წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წერტილი გრაფიკზე მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. ვიტყვით, რომ $N(x;y)$ წერტილი, რომელიც მდებარეობს მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, თუ მისი ერთ-ერთი კოორდინატი მაინც მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. თუ გრაფიკის $N(x;y)$ წერტილი ისე მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, რომ ის სულ უფრო უახლოვდება რაიმე წრფის გრაფიკს, მაშინ ამ წრფეს უწოდებენ მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტს.

• რაიმე წრფეს ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.

ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს **ვერტიკალური, ჰორიზონტალური და დახრილი ასიმპტოტები.**

მაგალითად $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+2$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)=(-\infty;\ \ 2)\cup(2;\ \ +\infty)$ და მის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 8-ზე. $x=2$ არის ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი, ხოლო $y=2$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.



ნახ. 8

ამრიგად, ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებს შორის, სადაც მოცემული ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას და ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილში მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.

ჰორიზონტალური ასიმპტოტის მოსაძებნად უნდა განვიხილოთ

$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და ის სასრული რიცხვია, ე.ი.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a,$$

მაშინ $y=a$ იქნება ამ ფუნქციის ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

დახრილი ასიმპტოტი მოიცემა ფორმულით $y = kx + b$, სადაც

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{11.5}$$

და

$$b=\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)-kx\bigr). \tag{11.6}$$

თუ არსებობს (11.5) ზღვარი, მაშინ ვეძებთ (11.6) ზღვარსაც, თუ (11.6) ზღვარიც არსებობს, მაშინ ამბობენ რომ მოცემულ $y = f(x)$ ფუნქციას აქვს დახრილი ასიმპტოტი და ის არის $y = kx + b$ წრფე.

ამოცანა 7. მოცემულია $y = x + \dfrac{1}{x-2}$. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. $x = 2$ წერტილი არ შედის ფუნქციის განსაზღვრის არეში და ამ წერტილში ფუნქციას აქვს უსასრულო წყვეტა, ე.ი. $x = 2$ არის ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

ამფუნქციას აქვს დახრილი ასიმპტოტიც. (11.5) ტოლობით

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x + \dfrac{1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x(x-2)}\right) = 1.$$

რადგანარსებობს (11.5) ზღვარი, ვიხილავთ (11.6) ზღვარსაც:

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2} = 0 \ .$$

ე.ი. $y = x$ წრფე არის ამ ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტი.

§11.9. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება. უკვე შესწავლილი მასალა საშუალებას გვაძლევს სრულყოფილად გამოვიკვლიოთ ფუნქცია და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

ჩამოვაყალიბოთ ცალკეული პუნქტების სახით იმ საკითხების სია, რომლებიც უნდა შევისწავლოთ ფუნქციის სრული გამოკვლევის ჩასატარებლად:

1. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე;

2. გამოვიკვლიოთ ფუნქციის ლუწობა და კენტობა, რათა დავადგინოთ როგორი სახის სიმეტრიულობასთან გვაქვს საქმე:

თუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა Oy ღერძის მიმართ, ხოლო თუ $f(x)$ კენტია, მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;

3. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები, ე.ი. მოვძებნოთ Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

$(0; f(0))$ და ამოვხსნათ განტოლება $f(x)=0,$ რომლის ამონახსნებიც განსაზღვრავენ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს;

4. ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

5. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმები;

6. ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და დავადგინოთ გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები;

7. ვიპოვოთ ფუნქციის ასიმპტოტები;

8. ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოცანა 8. გამოვიკვლიოთ

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$$

ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ამოხსნა. ჩავატაროთ გამოკვლევა ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით.

1. მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია მთელ რიცხვთა ღერძზე, გარდა $x=0$ წერტილისა, ე.ი.

$$D(f)=(-\infty;\quad 0)\cup(0;\quad +\infty)$$

2. რადგან განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და

$$f(-x)=-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=-f(x),$$

ამიტომ ფუნქცია არის კენტი.

3. Oy ღერძს არ კვეთს, რადგან $x=0$ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. ვიპოვოთ Ox ღერძთან გადაკვეტის წერტილი:

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0,\qquad \text{აქედან}\qquad \frac{x^2+4}{2x}=0.$$

ეს გამოსახულება არსად ნული არ ხდება. ე.ი. მოცემულ ფუნქციას კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები არა აქვს.

4. ვიპოვოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები. ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის წარმოებული:

$$f^{'}(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}.$$

სტაციონალური წერტილის მოსაძებნად საჭიროა წარმოებული გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. მივიღებთ: $x_1=-2,\quad x_2=2$, ე.ი. გვაქვს ორი სტაციონალური წერტილი. თუ $x<-2$ ან $x>2$, მაშინ $f^{'}(x)>0$, ხოლო, თუ $-2<x<0$ ან $0<x<2$, მაშინ $f^{'}(x)<0$. ამიტომ ფუნქცია ზრდადია $x\in(-\infty;2]\cup[2;+\infty)$ შუალედებში, ხოლო კლებადია $x\in[-2;\quad 0)\cup(0;\quad 2]$ შუალედებში.

5. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმები. გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$f^{''}(x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)^{'}=\frac{4}{x^3}.$$

რადგან $f(-2)=\frac{4}{(-2)^3}=-\frac{1}{2}<0,$ ამიტომ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

რადგან $f(2)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}>0,$ ამიტომ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს მინიმუმი.

ე.ი. $f_{\max}(-2)=-2$ და $f_{\min}(2)=2.$

6. ვიპოვოთ ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები. მეორე რიგის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია, რადგანაც ნებისმიერი $x-$თვის განსაზღვრის არედან $f^{''}(x)\neq 0.$ გარდა ამისა, $f^{''}(x)$-ის ნიშანი ემთხვევა x გამოსახულების ნიშანს. ცხადია, როცა $x>0$ გრაფიკი ჩაზნექილი იქნება, ხოლო როცა $x<0$ გრაფიკი ამოზნექილი იქნება.

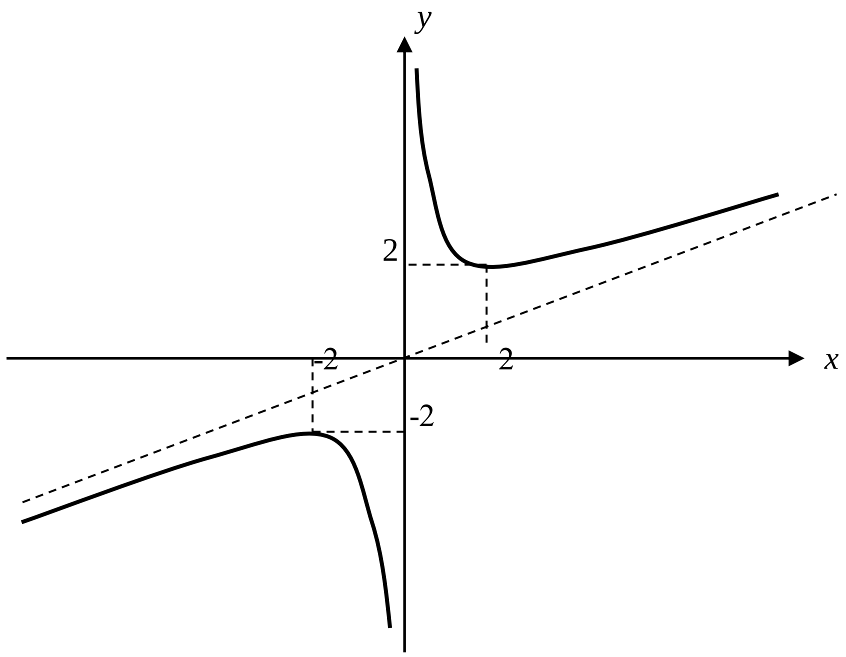
7. $x=0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)=0$$

ე.ი. დახრილი ასიმპტოტია $y=\frac{1}{2}x$ წრფე.

8. ჩატარებული გამოკვლევების გათვალისწინებით შეგვიძლია ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 9).



ნახ. 9

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- ჩამოაყალიბეთ როლის თეორემა.
- რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს როლის თეორემას?
- ჩამოაყალიბეთ ლაგრანჟის თეორემა.
- რა გეომეტრიული შინაარსი აქვს ლაგრანჟის თეორემას?
- მოიყვანეთ განუზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესი.
- მოიყვანეთ ტეილორის ფორმულა. როგორი სახე აქვს ტეილორის ნაშთით წევრს ლაგრანჟის სახით?
- მოიყვანეთ მაკლორენის ფორმულა.
- რას ეწოდება ზრდადი, კლებადი, არაზრდადი და არაკლებადი ფუნქციები რაიმე შუალედში?
- რას ეწოდება მონოტონური ფუნქცია მოცემულ შუალედში?

- მოიყვანეთ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის საკმარისი პირობები.
- მოიყვანეთ ფუნქციის არაკლებადობის და არაზრდადობისა აუცილებელი და საკმარისი პირობები.
- რას ეწოდება ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები?მაქსიმუმები და მინიმუმები?
- რას ეწოდება ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები?
- მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა (ფერმას თეორემა).
- რას ეწოდება სტაციონალური წერტილები? კრიტიკული წერტილები?
- მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის პირველი საკმარისი პირობა (პირველი რიგის წარმოებულის გამოყენებით).
- მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის მეორე საკმარისი პირობა (მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით).
- განსაზღვრეთ, რას ეწოდება ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა?
- მოიყვანეთ ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის საკმარისი პირობები.
- რას ეწოდება გადაღუნვის წერტილი?
- მოიყვანეთ გადაღუნვის წერტილის არსებობის აუცილებელი პირობა.
- მოიყვანეთ გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა.
- განსაზღვრეთ ფუნქციის ასიმპტოტი.
- მოიყვანეთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები.
- გადმოეცით ფუნქციის გამოკვლევის ზოგადი სქემა.

სავარჯიშო 11

1. ლოპიტალის წესის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{x^5+x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{3x^4+2x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{5x^3-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^3+2x^2-6}{x^3+x^2-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-2x-16}{x^3-3x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-2x-6}{3x^2-5x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2\ln x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(x+3)-\log_2 3}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$.

2. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები და ექსტრემუმის წერტილები:

1) $y=x^3+3x^2+1$; 2) $y=4+3x-x^3$; 3) $y=x^3-3x^2+4$;

4) $y=x^3+6x^2+1$; 5) $y=2x^3-3x^2+1$; 6) $y=x^3-12x+4$;

7) $y=x^3-3x+2$; 8) $y=2x^3-3x^2$; 9) $y=x^3-3x^2-9x+2$;

10) $y=x^3+3x^2-9x-1$; 11) $y=-2x^3+3x^2+12x+1$; 12) $y=x^3-6x^2+9x-15$;

13) $y=x^3-6x^2+15x-2$; 14) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 15) $y=\dfrac{7x-7}{x^2+3}$.

3. იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმები მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენების წესით:

1) $y=x^2-6x+3$; 2) $y=x^2+8x+4$; 3) $y=-2x^3+3x^2-5$; 4) $y=x^3-9x^2+8$.

4. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

1) $y=x^4-2x^3+x+1$; 2) $y=1-4x+4x^3-x^4$;

3) $y=x^4-6x^2+2x+2$; 4) $y=1-4x+6x^2-x^4$;

5) $y=x^4-6x^3+12x^2+4x+1$; 6) $y=x^4+x^3-12x^2+x-1$;

5. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები აღნიშნულ შუალედებში:

1) $y=x^3-3x^2+8$, [-1; 1]; 2) $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$, [-3; 1];

3) $y=\dfrac{2x^3}{3}-x^2+1$, [0; 2]; 4) $y=x^3-12x+3$, [0; 3];

5) $y=x^3-3x+4$, [0; 2]; 6) $y=x^4-4x+3$, [0; 2];

7) $y=3x^3-9x^2-27x-1$, [0; 4]; 8) $y=x^4-\dfrac{8}{3}x^3-6x^2+1$, [-2; 4];

9) $y=\dfrac{3}{4}x^4+2x^3-\dfrac{9}{2}x^2-1$, [-4; 2]; 10) $\dfrac{x^2+3x}{x-1}$, [-3; 0].

6. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ჰორიზონტალური და დახრილი ასიმპტოტები:

1) $y=\frac{5}{9-x^2}$; 2) $y=\frac{2x+3}{x-1}$; 3) $y=\frac{3x^2-5x}{x-1}$; 4) $y=\frac{3x^3-5x^2+1}{x^2+1}$.

7. გამოიკვლიეთ და ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

1) $y=x^3-6x^2+2$; 2) $y=-\frac{2}{3}x^3+2x-\frac{4}{3}$; 3) $y=-3x^3-x+3$;

4) $f(x)=-x^4+2x^2+3$; 5) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; 6) $y=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$;

7) $y=\frac{x^2+2x-4}{x^2}$; 8) $y=\frac{2x}{1-x^2}$; 9) $y=\frac{x^2+3x}{x-1}$.

8. რიცხვი 10 დაშალეთ ორ ისეთ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ეს ნამრავლი.

9. 40 მეტრი სიგრძის მავთულისაგან დაამზადეთ ისეთი მართკუთხედი, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ეს ფართობი.

10. რიცხვი 10 წარმოადგინეთ ორი ისეთი შესაკრების სახით, რომლის კვადრატების ჯამი უმცირესი იქნება.

11. ფირმა ყიდის ტელევიზორებს. ყოველკვირეული შემოსავლის ფუნქციაა

$$y=-100x^2+50000x,$$

სადაც x ერთი ტელევიზორის ფასია, ხოლო y შემოსავალი. როგორი ფასისთვის იქნება შემოსავალი მაქსიმალური? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

12. ავტომანქანის მიერ 100 კმ მანძილის გავლაზე დახარჯული საწვავის რაოდენობა დამოკიდებულია მორაობის სიჩქარეზე. ეს დამოკიდებულება გარკვეულ პირობებში მოძრაობისას აღიწერება კვადრატული ფუნქციით

$$y=0{,}005x^2-0{,}4x+20,\qquad 0\le x\le 200.$$

სადაც x მოძრაობის სიჩქარეა (გაზომილი კმ/სთ-ში), ხოლო y განსაზღვრავს 100 კმ-ის გავლისთვის საჭირო საწვავის დანახარჯს (ლიტრობით). იპოვეთ: ა) ოპტიმალური სიჩქარე, რომლისთვისაც საწვავის

დანახარჯი მინიმალურია; ბ) გაარკვიეთ სიჩქარის გაზრდა რა შემთხვევაში იწვევს დანახარჯის გაზრდას? (შემცირებას?)

13. ვთქვათ, საწარმოში დღე-ღამის განმავლობაში ელექტროენერგია იხარჯება შემდეგი წესით

$$y = -\frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{3}x + 2, \qquad 0 \le x \le 24,$$

სადაც x არის დრო (საათებში), ხოლო y - მოხმარებული ელექტროენერგია (კვტ/სტ-ობით). იპოვეთ: ა) რომელ საათზე აღწევს ელექტროენერგიის მოხმარება მაქსიმუმს? ბ) დროის რა შუალედში იზრდება (კლებულობს) ელექტროენერგიის მოხმარება?

14. დანახარჯების ფუნქციას აქვს სახე

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 40,$$

სადაც x პროდუქციის მოცულობაა. გამოთვალეთ, წარმოების რა მოცულობის დროს იქნება დანახარჯები მინიმალური.

თავი 12
ორი ცვლადის ფუნქცია

რეალურ ცხოვრებაში ხშირად ვხვდებით ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის დახმარებით.

მრავალსაქონლიანი ბაზრის მახასიათებლები დამოკიდებულია თითოეული საქონლის მოთხოვნასა და ფასზე, რასაც ბუნებრივად მივყავართ ერთზე მეტი ცვლადის ფუნქციამდე.

ასეთი დამოკიდებულებათა შესასწავლად უნდა შემოვიღოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება. სიმარტივისათვის შევისწავლოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა ცვლადების რაოდენობა ორის ტოლია.

§12.1. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა. ვთქვათ, E არის Oxy სიბრტყის რაიმე სიმრავლე. თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც D სიმრავლის ყოველ (x,y) წერტილს შეესაბამება ერთადერთი z რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია და ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება

$$z = f(x,y).$$

x და y სიდიდეებს უწოდებენ არგუმენტებს, ანუ დამოუკიდებელ ცვლადებს, ხოლო z–ს – დამოკიდებულ ცვლადს, ანუ ფუნქციას.

D სიმრავლეს ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე და აღინიშნება სიმბოლოთი $D(f)$. f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე აღინიშნება სიმბოლოთი $-E(f)$.

მაგალითად, $z = f(x;y) = a + by + cy + dxy + ex^2 + fxy + hy^2$, ფუნქცია სადაც $a,b,c,d,f,h \in R$, განსაზღვრულია მთელ სიბრტყეზე, ხოლო ფუნქცია

$$z = g(x;y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

განსაზღვრულია x და y ცვლადების იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\geq 0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1.$$

ვთქვათ, $z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M(x_0;y_0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით M წერტილისა.

- A რიცხვს ეწოდება $z=f(x,y)$ ფუნქციის ზღვარი $M(x_0;y_0)$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x;y)-A\right|<\varepsilon$$

როცა $0<\left|x-x_0\right|+\left|y-y_0\right|<\delta.$

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A.$$

მაგალითად, თუ $f(x;y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$, და $M(x_0;y_0)=M(4;\ \ 6)$ მაშინ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=\lim_{\substack{x\to 4\\ y\to 6}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=\frac{16}{4}+\frac{36}{9}=4+4=8.$$

თეორემები ზღვრების შესახებ, რომლებიც მოყვანილი იყო ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის მართებულია ორი ცვლადის ფუნქციისათვისაც. ამიტომ მათ აქ აღარ გავიმეორებთ.

- ვიტყვით, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია $M(x_0;y_0)$ წერტილში, თუ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0).$$

- თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე D არის ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ იგი უწყვეტია D არეში.

თუ გამოვიყენებთ უწყვეტობის განმარტებას და თეორემებს ზღვრების შესახებ, შეიძლება ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაშიც დამტკიცდეს თეორემები ჯამის, ნამრავლისა და ფარდობის უწყვეტობის შესახებ.

- თუ $z=f(x,y)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი $M(x_0;y_0)$ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ამ წერტილში ის განიცდის წყვეტას.

მაგალითად, $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}, & (x;y)\neq(4;\ \ 6)\\ 10, & (x;y)=(4;\ \ 6)\end{cases}$

ფუნქცია (4;6) წერტილში განიცდის წყვეტას, რადგან

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ y\to 6}} f(x;y)=8\ ,\qquad f(4;\ \ 6)=10\ .$$

§12.2. კერძო წარმოებულები. ვთქვათ, Oxy სიბრტყის რაიმე D არეში მოცემულია ორი ცვლადის $z=f(x,y)$ ფუნქცია და $M(x_0;y_0)\in D$ დავაფიქსიროთ y_0 სიდიდე და x_0 სიდიდეს მივცეთ ისეთი Δx ნაზრდი, რომ წერტილი $(x_0+\Delta x;y_0)$ არ გამოვიდეს განსაზღვრის არედან. ასეთ შემთხვევაში z ფუნქცია მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელსაც აღვნიშნავთ $\Delta_x z$ სიმბოლოთი და ვუწოდებთ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდს x ცვლადის მიმართ

$$\Delta_x z(x_0;y_0)=f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე Δx–ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$.

თუ არსებობს ამ ფარდობის სასრული ზღვარი, მაშინ მას უწოდებენ $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x ცვლადით $(x_0;y_0)$ წერტილში და აღნიშნავენ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ან $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ან $f_x'(x_0,y_0)$ სიმბოლოებით. მაშასადამე,

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x(x_0+\Delta x;y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x}\ .$$

- $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x ცვლადით $(x_0;y_0)$ წერტილში ეწოდება ფუნქციის $\Delta_x z(x_0;y_0)$ კერძო ნაზრდის არგუმენტის Δx ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ.

სრულიად ანალოგიურად დავაფიქსიროთ x ცვლადი $(x=x_0)$ და y_0–ს მივცეთ ისეთი Δy ნაზრდი, რომ წერტილი $(x_0;y_0+\Delta y)$ არ გამოვიდეს განსაზღვრის არედან. მაშინ z ფუნქციაც მიიღებს შესაბამის ნაზრდს,

რომელსაც აღვნიშნავთ $\Delta_y z(x_0;y_0)$ სიმბოლოთი და ვუწოდებთ ფუნქციის კერძო ნაზრდს y ცვლადით

$$\Delta_y z(x_0;y_0)=f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0).$$

ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $\Delta y-$ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta y\to 0$. თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით $(x_0;y_0)$ წერტილში და აღვნიშნოთ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ან $\frac{\partial f}{\partial y}$ ან $f_y'(x_0,y_0)$ სიმბოლოებით. მაშასადამე,

$$\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z(x_0;y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)}{\Delta y}.$$

- $z=f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული y ცვლადით $(x_0;y_0)$ წერტილში ეწოდება ფუნქციის $\Delta_y z$ კერძო ნაზრდის არგუმენტის Δy ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ.

ამრიგად, $z=f(x,y)$ ფუნქციის $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ კერძო წარმოებულის მოსაძებნად უნდა ჩავთვალოთ, რომ y ფიქსირებული პარამეტრია და გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია როგორც ერთი x ცვლადის ფუნქცია. ასევე $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}-$ის მოსაძებნად საჭიროა x ჩავთვალოთ ფიქსირებულ პარამეტრად და გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია როგორც ერთი y ცვლადის ფუნქცია. ამიტომ კერძო წარმოებულების გამოთვლა წარმოებს გაწარმოების იგივე წესების გამოყენებით, რაც გვქონდა ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები (4; 6) წერტილში.

ამოხსნა.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{9}$$

ამიტომ

$$\frac{\partial z(4;\ 6)}{\partial x}=\frac{4}{2}=2; \qquad \frac{\partial z(2;\ 3)}{\partial y}=\frac{2\cdot 6}{3}=\frac{4}{3}.$$

§12.3. სრული დიფერენციალი. ვთქვათ, მოცემულია $z=f(x,y)$ ფუნქცია. გამოსახულებას

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x;y)$$

ეწოდება ფუნქციის სრული ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტების Δx და Δy ნაზრდებს.

მტკიცდება, რომ თუ ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ ფუნქციის სრული ნაზრდი მიახლოებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta z\approx\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dy,$$

სადაც $dx=\Delta x,\quad dy=\Delta y.$ ტოლობის მარჯვენა მხარეს ეწოდება f ფუნქციის სრული დიფერენციალი. იგი აღინიშნება dz სიმბოლოთი. ამრიგად

$$dz=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dy.$$

წინაამოცანაში განხილული ფუნქციის სრული დიფერენციალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$dz(x;y)=d\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=\frac{x}{2}dx+\frac{2y}{9}dy$$

§12.4. მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. ვთქვათ, $z=f(x,y)-$ ფუნქციას გააჩნია $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები. ეს კერძო წარმოებულები, საზოგადოდ, წარმოადგენენ x და y ცვლადების ფუნქციებს. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია კვლავ გამოვთვალოთ მათი კერძო წარმოებულები.

ამ წარმოებულებს ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და აღინიშნება

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

$f''_{xy}(x;y)$ და $f''_{yx}(x;y)$ წარმოებულებს უწოდებენ მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულებს. შერეული კერძო წარმოებულებისათვის სამართლიანია შემდეგი

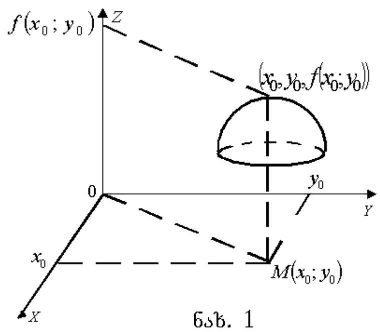
თეორემა12.1 (შვარცის თეორემა). თუ $z = f(x,y)$ ფუნქცია და მისი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები უწყვეტია გარკვეულ არეში, მაშინ ამ არის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

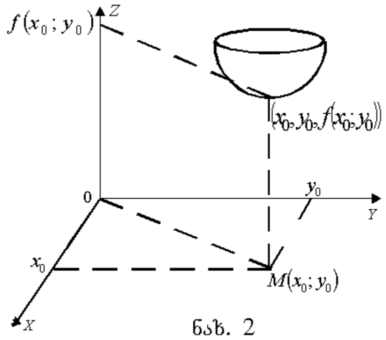
§12.5. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. ვთქვათ, მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x,y)$, რომელიც განსაზღვრულია Oxy სიბრტყის რაიმე D არეში. დავუშვათ, $M(x_0;y_0) \in D$.

- ამბობენ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია $M(x_0;y_0)$ წერტილში აღწევს მაქსიმუმს, თუ არსებობს D არეში $M(x_0;y_0)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $N(x,y)$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x;y) \le f(x_0;y_0)$ (იხ. ნახ. 1).

- ამბობენ, რომ ფუნქცია $M(x_0;y_0)$ წერტილში აღწევს მინიმუმს, თუ არსებობს D არეში $M(x_0;y_0)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი $N(x,y)$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$ (იხ. ნახ. 2).



ნახ. 1



ნახ. 2

- მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში – ფუნქციის ექსტრემუმები.

ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანაში არსებით როლს თამაშობს შემდეგი დებულება:

თეორემა 12.2. თუ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $M(x_0;y_0)$ წერტილში და ამ წერტილში არსებობს $f(x,y)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები $f_x'(x_0;y_0)$და $f_y'(x_0;y_0)$, მაშინ მართებულია ტოლობები

$$\begin{cases} f_x'(x_0;y_0)=0, \\ f_y'(x_0;y_0)=0. \end{cases} \tag{12.1}$$

- $M(x_0;y_0)$წერტილს, რომლის კოორდინატებიც აკმაყოფილებს (12.1) სისტემას, ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი.

უწყვეტ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს აგრეთვე იმ წერტილშიც, რომელშიც მისი კერძო წარმოებულები არ არსებობენ.

- ყველა იმ წერტილების ერთობლიობას, რომელშიც $f(x,y)$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები ნულის ტოლია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილები ეწოდება.

თეორემა 12.2. გვიჩვენებს, რომ ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ კრიტიკულ წერტილებს შორის. შევნიშნოთ, რომ როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის, აქაც პირველი რიგის კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

თეორემა12.3. ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და $M(x_0;y_0)$ არის $f(x,y)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $M(x_0;y_0)$ წერტილში და გამოვთვალოთ რიცხვები:

$$A=f_{xx}''(x_0;y_0), \qquad B=f_{xy}''(x_0;y_0), \qquad C=f_{yy}''(x_0;y_0).$$

ა) თუ $AC-B^2>0,$ მაშინ $M(x_0;y_0)$ მინიმუმის წერტილია, როცა $A>0$ (ან $C>0$), ხოლო $M(x_0;y_0)$ მაქსიმუმის წერტილია, როცა $A<0$ (ან $C<0$);

ბ) თუ $AC-B^2<0,$ მაშინ $M(x_0;y_0)$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი;

გ) თუ $AC-B^2=0,$ მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა და საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა იმის დასადგენად, აქვს თუ არა მოცემულ ფუნქციას $M(x_0;y_0)$ წერტილში ექსტრემუმი.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $f(x;y)=2x^2+3y^2+8x-12y$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ სტაციონალური წერტილები. ამისათვის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს:

$$\begin{cases} f'_x(x;y)=4x+8=0 \\ f'_y(x;y)=6y-12=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

შევამოწმოთ, არის თუ არა $(-2;\ 2)$ ექსტრემუმის წერტილი. გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები ამ წერტილში:

$$A=f''_{xx}(-2;\ 2)=4, \qquad B=f''_{xy}(-2;\ 2)=0, \qquad C=f''_{yy}(-2;\ 2)=6.$$

ცხადია, რომ

$$AC-B^2>0$$

რადგან $A>0,$ ამიტომ $(-2;\ 2)$ არის მინიმუმის წერტილი და ეს მინიმუმია

$$f(-2;\ 2)=8+12-16-24=-20.$$

§12.6. პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი ისეთ სიტუაციაში, როდესაც არგუმენტები აკმაყოფილებენ რაიმე დამატებით პირობებს. ასეთ ამოცანებს ეწოდებათ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები.

შევისწავლოთ ორი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანა ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

ვთქვათ, მოსაძებნია $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი პირობით

$$g(x,y)=0$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას ზოგჯერ უწოდებენ ბმის განტოლებას. შემოვიღოთ ახალი დამხმარე ფუნქცია $F(x;y;\lambda)$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით

$$F(x;y;\lambda)=f(x;y)+\lambda g(x;y).$$

$F(x;y;\lambda)$-ს უწოდებენ ლაგრანჟის ფუნქციას, ხოლო λ–ს ლაგრანჟის მამრავლს.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ იმ M წერტილის x და y კოორდინატები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $g(x,y)=0$ განტოლებას და რომლისთვისაც $z=f(x,y)$ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს პირობითი მაქსიმუმი ან მინიმუმი, საჭიროა გამოვთვალოთ $F(x;y;\lambda)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები x, y და λ ცვლადებით, გავუტოლოთ ისინი ნულს და მიღებული სისტემიდან განვსაზღვროთ საძიებელი x, y და λ სიდიდეები, ე.ი. უნდა ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} F'_x(x;y;\lambda)=f'_x(x;y)+\lambda\ g'_x(x;y)=0 \\ F'_y(x;y;\lambda)=f'_y(x;y)+\lambda\ g'_y(x;y)=0 \\ F'_\lambda(x;y;\lambda)=g(x;y)=0\ . \end{cases} \tag{12.2}$$

მიღებული სისტემა წარმოადგენს პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას. $M(x_0;y_0)$ წერტილს, რომლის x_0 და y_0 კოორდინატები აკმაყოფილე-ბენ (12.2) სისტემას, უწოდებენ პირობითი ექსტრემუმის სტაციონალურ წერტილს ბმის $g(x,y)=0$ განტოლების მიმართ. ცხადია, რომ თუ $(x_0;y_0;\lambda_0)$ არის (12.2) სისტემის ამონახსნი, მაშინ $N(x_0;y_0;\lambda_0)$ წერტილი წარმოადგენს ლაგრანჟის $F(x;y;\lambda)$ ფუნქციის სტაციონალურ წერტილს.

ახლა მოვიყვანოთ პირობითი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები. ვთქვათ, $(x_0;y_0;\lambda_0)$ არის (12.2) სისტემის ამონახსნი. ამასთან, ვიგულისხმოთ, რომ $f(x,y)$ და $g(x,y)$ ფუნქციებს $M(x_0;y_0)$ წერტილში აქვთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. შევადგინოთ შემდეგი დეტერმინანტი

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x\left(x_0;y_0\right) & g'_y\left(x_0;y_0\right) \\ g'_x\left(x_0;y_0\right) & F''_{xx}\left(x_0;y_0;\lambda_0\right) & F''_{xy}\left(x_0;y_0;\lambda_0\right) \\ g'_y\left(x_0;y_0\right) & F''_{xy}\left(x_0;y_0;\lambda_0\right) & F''_{yy}\left(x_0;y_0;\lambda_0\right) \end{vmatrix}.$$

მტკიცდება, რომ თუ $\Delta > 0$, მაშინ $z = f(x,y)$ ფუნქციას $M\left(x_0;y_0\right)$ წერტილში აქვს პირობითი მინიმუმი, ხოლო თუ $\Delta < 0$, მაშინ $z = f(x,y)$ ფუნქციას $M\left(x_0;y_0\right)$ წერტილში აქვს პირობითი მაქსიმუმი.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქცია?
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი?
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა?
- რას ეწოდება ფუნქციის კერძო ნაზრდი?
- მოიყვანეთორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების განმარტება?
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი?
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები?
- როგორ აღინიშნება ორი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები?
- მოიყვანეთ შვარცის თეორემა.
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი?
- რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი?
- რას ეწოდება ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები?
- მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.
- რას ეწოდება სტაციონალური წერტილები?
- რას ეწოდება კრიტიკული წერტილები?

- მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.
- რას ეწოდება პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები?
- რაში მდგომარეობს პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.

სავარჯიშო 12

1. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი:

1) $f(x;y)=x^2-y^2$;
2) $f(x;y)=xy-x^2y^3+y^4$;
3) $f(x;y)=3x^2y^3+2x^3+3y^4-2$
4) $f(x;y)=2xy\cdot(x^2y^3+y^4)$
5) $f(x;y)=\dfrac{3xy^2}{x^2+y^3}$;
6) $f(x;y)=\dfrac{2x^2y^3-x+y}{xy}$;
7) $f(x;y)=\left(2x^3y+3xy^2\right)^5$;
8) $f(x;y)=\left(xy^2+3x-2y\right)^3$;
9) $f(x;y)=e^{2x^2-xy}$;
10) $f(x;y)=e^{3x^2y^3}$;
11) $f(x;y)=\ln\left(x^2y-y^2\right)$;
12) $f(x;y)=\log_3(x^3y^2+3x)$;
13) $f(x;y)=\sin\left(3xy^2-2x^2y\right)$;
14) $f(x;y)=\cos\left(x^2-y^2\right)$;
15) $f(x;y)=tgx^2y$;
16) $f(x;y)=\arcsin xy$;
17) $f(x;y)=arctgx^2y^3$;
18) $f(x;y)=3x^2y^3+\sin(2x+y^2)$;
19) $f(x;y)=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$;
20) $f(x;y)=\arcsin\dfrac{x-y}{1+xy}$.

2. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

1) $f(x;y)=x^2y^4$;
2) $f(x;y)=3x^2y^3-2x^3+3y^2$;
3) $f(x;y)=e^{2x-3y}$;
4) $f(x;y)=e^{x-y}$;
5) $f(x;y)=\ln\left(x+y^2\right)$;
6) $f(x;y)=\ln\left(y+x^2\right)$;

7) $f(x;y)=\dfrac{x}{y^2}$; 8) $f(x;y)=\dfrac{y}{x^2}$.

3. გამოთვალეთ შემდეგ ფუნქციათა ექსტრემუმები:

1) $f(x;y)=5+4x+6y-x^2-3y^2$;
2) $f(x;y)=2x^2+xy+2y^2$;
3) $f(x;y)=x^2-4xy+y^2-2x-2y$;
4) $f(x;y)=3x^2+4xy+y^2-14x-8y$;
5) $f(x;y)=2x^2-6xy+3y^2+2x$;
6) $f(x;y)=-2x^2+2xy+y^2-8x-8y$;
7) $f(x;y)=x^2+4xy+y^2+6x$;
8) $f(x;y)=x^2+4xy+y^2+6y$;
9) $f(x;y)=3x^2-6xy+2y^2+2y$;
10) $f(x;y)=14x+8y-3x^2-4xy-y^2$
11) $f(x;y)=2x+2y-x^2+4xy-y^2$;
12) $f(x;y)=-x^2+2xy-2y^2+2y$;
13) $f(x;y)=-x^2+2xy-2y^2-4x+2y$;
14) $f(x;y)=2x^2+2xy+y^2+2x+4y$
15) $f(x;y)=x^3+y^3-3x-4y+7$;
16) $f(x;y)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-y^2+2y+6$
17) $f(x;y)=xy(x-y)+y^2-4y$;
18) $f(x;y)=x^3-3x^2-2y^2+4y+2$.

4. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ პირობითი ექსტრემუმები:

1) $\begin{cases} f(x;y)=3x^2+y^2 \\ x+y=4 \end{cases}$;
2) $\begin{cases} f(x;y)=-x^2+xy-4y^2 \\ x+y=-4 \end{cases}$;
3) $\begin{cases} f(x;y)=2x^2+xy+y^2+x \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$;
4) $\begin{cases} f(x;y)=-2x^2+xy-y^2+3x+y \\ 2x+3y+11=0 \end{cases}$;
5) $\begin{cases} f(x;y)=x^2-y^2 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$;
6) $\begin{cases} f(x;y)=x^2+y^2-5 \\ x+2y-10=0 \end{cases}$.

თავი 13
განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§13.1. პირველადი ფუნქციის და განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება. განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა, რომლის ამოხსნაც მოითხოვს გაწარმოების შექცეული ოპერაციის ჩატარებას.

ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე შუალედში.

• $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია რაიმე შუალედში, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილში

$$F'(x) = f(x).$$

მაგალითად, $F(x) = x^3$ ფუნქცია არის $f(x) = 3x^2$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში, რადგან ამ შუალედის ყოველ წერტილში

$$\left(x^3\right)' = 3x^2.$$

მოცემული $f(x)$ ფუნქციით მისი პირველადის მოძებნა ინტეგრალური აღრიცხვის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს.

ბუნებრივია ისმის შემდეგი კითხვები: ყოველი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა პირველადი ფუნქცია? თუ არსებობს, როგორ მოვძებნოთ პირველადი ფუნქცია და ერთადერთია თუ არა იგი?

პირველ კითხვაზე პასუხობს შემდეგი დებულება:

თეორემა 13.1. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში, მაშინ ამ შუალედში არსებობს $f(x)$–ის პირველადი ფუნქცია.

მეორე კითხვაზე კი პასუხს იძლევა შემდეგი ორი თეორემა:

თეორემა 13.2. თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია, მაშინ $F(x)+c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქციაა.

თეორემა 13.3. თუ $F(x)$ და $\Phi(x)$ წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის პირველად ფუნქციებს რაიმე შუალედში, მაშინ მოიძებნება ისეთი c მუდმივი, რომ ამ შუალედში ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\Phi(x) = F(x)+c,$$

ე.ი. $f(x)$ ფუნქციის ორი პირველადი ფუნქცია ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება.

• $f(x)$ ფუნქციის ყველა $F(x)+c$ პირველადთა სიმრავლეს ეწოდება განუსაზღვრელი ინტეგრალი $f(x)$ ფუნქციიდან და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int f(x)dx = F(x)+c. \tag{13.1}$$

(13.1) ტოლობაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ხოლო $f(x)dx$ გამოსახულებას ეწოდება ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, x-ს ეწოდება საინტეგრაციო (ანუ ინტეგრების) ცვლადი, ხოლო $\int$ სიმბოლო წარმოადგენს ინტეგრალის ნიშანს.

• მოცემული ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნას ფუნქციის ინტეგრება ეწოდება.

§13.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები.

განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული ინტაგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტაგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3. განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე ფუნქციის წარმოებულიდან უდრის ამ ფუნქციისა და ნებისმიერი მუდმივის ჯამს

$$\int F'(x)dx = F(x)+c,$$

ანუ

$$\int dF(x) = F(x)+c;$$

4. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ

$$\int Af(x)dx = A\cdot\int f(x)dx, \qquad A = const;$$

5. განუსაზღვრელი ინტეგრალი ორი ფუნქციის ალგებრული ჯამიდან უდრის მოცემული ფუნქციებიდან ინტეგრალების ალგებრულ ჯამს

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

ეს უკანასკნელი თვისება მართებულია აგრეთვე შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13.4. თუ $\int f(x)dx = F(x) + c$, მაშინ

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c. \tag{13.2}$$

მართლაც, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+c\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b),$$

ეს ნიშნავს, რომ (13.2) ტოლობის მარჯვენა მხარის წარმოებული ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია. ე.ი. (13.2) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი a და b რიცხვებისათვის, სადაც $a \neq 0$.

§13.3. ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი. ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულთა ცხრილის გამოყენებით მივიღებთ ძირითადი ინტეგრალების შემდეგ ცხრილს:

1. $\int dx = x + c;$
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad (\alpha \neq -1);$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c;$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \qquad (a > 0, \quad \alpha \neq 1);$
5. $\int e^x dx = e^x + c;$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c;$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c.$

§13.4. უშუალო ინტეგრების ხერხი. ამ ხერხით სარგებლობენ იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებებისა ძირითადი ინტეგრალების ცხრილის გამოყენებით შეგვიძლია მოვახდინოთ უშუალო ინტეგრება.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left(6x^3 + 3x^2 + 1\right)dx.$$

ამოხსნა. მე-4 და მე-5 თვისების თანახმად გვაქვს:

$$I = 6\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + \int dx = 6 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + c = \frac{3}{2}x^4 + x^3 + x + c.$$

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x} + 4\cos x\right)dx.$$

ამოხსნა. მე-4 და მე-5 თვისების თანახმად გვაქვს:

$$I = 2\int x^{\frac{1}{3}} dx - 7\int \frac{dx}{x} + 4\int \cos x dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 7 \cdot \ln|x| + 4\sin x + c =$$

$$= \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - 7\ln|x| + 4\sin x + c.$$

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left(5\cos t + 2\sin t\right)dt.$$

ამოხსნა. მე-4 და მე-5 თვისების თანახმად გვაქვს:

$$I = 5\int \cos t dt + 2\int \sin t dt = 5\sin t - 2\cos t + c.$$

ამოცანა 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int x^2 \left(1 + x^3\right)^3 dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I = \int x^2 \left(1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9\right)dx = \int \left(x^2 + 3x^5 + 3x^8 + x^{11}\right)dx =$$

$$= \int x^2 dx + 3\int x^5 dx + 3\int x^8 dx + \int x^{11} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{12}x^{12} + c.$$

ამოცანა 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I = 2 \cdot \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 3 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -2ctgx - 3\arcsin x + c.$$

ამოცანა 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I = \int \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}. + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + c.$$

ამოცანა 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}==x-arctgx+c.$$

ამოცანა 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\sin(5x+6)dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს $a=5,\quad b=6,$ (13.2) ტოლობის ძალით

$$\int\sin(5x+6)dx=-\frac{1}{5}\cos(5x+6)+c.$$

ამოცანა 9. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int(5x+6)^8\,dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს $a=5,\quad b=6,$ (13.2) ტოლობის ძალით

$$\int(5x+6)^8\,dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x+6)^9}{9}+c=\frac{1}{45}\cdot(5x+6)^9+c.$$

§13.5. ჩასმის ხერხი განუსაზღვრელ ინტეგრალში. ზოგიერთ შემთხვევაში განუსაზღვრელი ინტეგრალი შესაძლებელია გავამარტივოთ ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით:

თეორემა 13.5. თუ $\int f(x)dx$ ინტეგრალში დავუშვებთ, რომ $x=\varphi(t)$, სადაც t არის ახალი ცვლადი, ხოლო $\varphi(t)-$უწყვეტად წარმოებადი შექცევადი ფუნქცია, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

ამოცანა 10. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I=\int x(3x^2+2)dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $3x^2+2=t.$ გავადიფერენციალოთ ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ $6xdx=dt$ ანუ $dx=\dfrac{dt}{6x}$ და, მაშასადამე,

$$I=\int xt^5\frac{dt}{6x}=\frac{1}{6}\int t^5dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^6}{6}+C=\frac{(3x^2+2)^6}{36}+C.$$

ამოცანა 11. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $x^3 - 1 = t.$ გავადიფერენციალოთ ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ $3x^2 dx = dt$ ანუ $dx = \dfrac{dt}{3x^2}$ და, მაშასადამე,

$$I = \int \frac{x^2 \cdot \dfrac{dt}{3x^2}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 - 1\right| + C.$$

ამოცანა 12. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\ln^2 x dx}{x}.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\ln x = t.$ გავადიფერენციალოთ ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ $\dfrac{1}{x}dx = dt$ ანუ $dx = xdt$ და, მაშასადამე,

$$I = \int \frac{t^2 x dt}{x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

§13.6. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი განუსაზღვრელ ინტეგრალში. ზოგიერთ შემთხვევაში ერთი განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება მეორე განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე პირველი.

თეორემა 13.6. ვთქვათ, $u = u(x)$ და $v = v(x)$ რაიმე შუალედზე უწყვეტად წარმოებადი ისეთი ფუნქციებია, რომ $u'(x)v(x)$ ფუნქციას გააჩნია პირველყოფილი, მაშინ პირველყოფილი გააჩნია $u(x)v'(x)$ ფუნქციასაც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.. \tag{13.3}$$

როგორც ვიცით, $f'(x)dx = df(x)$, ამიტომ (13.3) ფორმულა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

ანუ, მოკლედ

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

ამოცანა 13. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int x\cos x dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = x, \qquad dv = \cos x dx.$$

მაშინ

$$du = dx, \qquad v = \sin x$$

და ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების თანახმად,

$$I = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

ამოცანა 14. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int xe^{3x}dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = x, \qquad dv = e^{3x}dx,$$

$$du = dx, \qquad v = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით

$$I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx. = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\int xe^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{9}\right) + C.$$

ამოცანა 15. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int x^3 \ln x dx.$$

ამოხსნა. ვთქვათ,

$$u = \ln x, \qquad dv = x^3 dx.$$

აქედან,

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{1}{4}x^4.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად:

$$I = \frac{1}{4}x^4\ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება პირველადი ფუნქცია?
- მოიყვანეთ თეორემა პირველადი ფუნქციის არსებობის შესახებ?
- მოიყვანეთ თეორემა პირველადი ფუნქციის ერთადერთობის შესახებ?
- მოიყვანეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტება.
- რას ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია? ინტეგრალქვეშა გამოსახულება?
- მოიყვანეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები.
- მოიყვანეთ ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი.
- ახსენით, რაში მდგომარეობს ჩასმის ხერხი.
- მოიყვანეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.

სავარჯიშო 13

1. უშუალო ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთშემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int x^4 dx$; 2) $\int x^{-2} dx$; 3) $\int 2x dx$;

4) $\int (2x^3 - 3x^2 + 2x + 5) dx$; 5) $\int \left(3x^2 + 2x + \frac{4}{x}\right) dx$; 6) $\int (2x + 3\cos x) dx$;

7) $\int (2^x + 5\sin x) dx$; 8) $\int \left(e^x - \frac{7}{x}\right) dx$; 9) $\int \frac{x^3+1}{x} dx$;

10) $\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} dx$; 11) $\int \frac{2-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; 12) $\int (3x+2)^5 dx$;

13) $\int (5x-2)^7 dx$; 14) $\int \frac{1}{2x+3} dx$; 15) $\int \frac{3}{5x-1} dx$;

16) $\int e^{2x+3} dx$; 17) $\int e^{-3x} dx$; 18) $\int \sin(5x+2) dx$;

19) $\int \cos(2x-3) dx$; 20) $\int \sin 3x dx$; 21) $\int \cos 5x dx$;

22) $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$; 23) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$; 24) $\int \frac{5}{(4x+1)^3} dx$.

2. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int x\cdot(3x^2+1)dx$; 2) $\int 3x^2(2x^3-1)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$;

4) $\int \frac{2x^2}{5x^3-1}dx$; 5) $\int 2xe^{x^2+2}dx$; 6) $\int x^2e^{x^3}dx$;

7) $\int x\cdot 2^{x^2+1}dx$; 8) $\int x^3\cdot 5^{x^4+3}dx$; 9) $\int x\cdot\cos(2x^2+5)dx$;

10) $\int x\sin(3x^2-7)dx$; 11) $\int tgxdx$; 12) $\int ctgxdx$

13) $\int \cos^3 x\sin xdx$; 14) $\int \sin^2 x\cos xdx$; 15) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$;

16) $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$; 17) $\int \frac{\mathrm{lnx}}{\mathrm{x}}dx$; 18) $\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx$

19) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; 20) $\int \sin xe^{\cos x}dx$; 21) $\int \frac{e^xdx}{2+e^x}$.

3. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int x\sin xdx$; 2) $\int x\cos xdx$; 3) $\int 2x\sin 5xdx$;

4) $\int 3x\cos 2xdx$; 5) $\int x\sin(2x+3)dx$; 6) $\int x\cos(3x+2)dx$

7) $\int x\ln xdx$; 8) $\int x^5\ln xdx$; 9) $\int \ln xdx$;

10) $\int x\log_5 xdx$; 11) $\int xe^xdx$; 12) $\int xe^{2x}dx$;

13 $\int x2^x dx)$; 14) $\int x3^x dx$; 15) $\int x^2\sin xdx$;

16) $\int x^2\cos xdx$; 17) $\int x^2e^xdx$; 18) $\int (x^2+1)e^xdx$.

თავი 14
განსაზღვრული ინტეგრალი

§14.1. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქცია. დავყოთ ეს სეგმენტი n ნაწილად x_k $(k = 0,1,\dots,n)$ წერტილებით, სადაც

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

მივიღებთ $[a,b]$ სეგმენტის ქვესეგმენტებს:

$[x_0, \quad x_1]$, $\quad [x_1, \quad x_2]$, $\quad [x_2, \quad x_3]$, . . . , $[x_{k-1}, \quad x_k]$, . . . , $[x_{n-1}, \quad x_n]$.

მიღებული ქვესეგმენტების სიგრძეები აღვნიშნოთ, შესაბამისად,

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{k-1}, \ldots, \Delta x_n$$

სიმბოლოებით, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\qquad k = 1, \ 2, \ . \ . \ . \ , \ n$.

აღვნიშნოთ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი λ სიმბოლოთი, ე.ი. $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

ახლა ყოველ $[x_{k-1}, \quad x_k]$ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი და შევადგინოთ ჯამი:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k . \tag{14.1}$$

ამ ჯამს ეწოდება f ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია, როგორც $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე, ასევე ξ_k წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს (14.1) ინტეგრალური ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $\lambda \to 0$ და იგი არაა დამოკიდებული $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებაზე და ξ_k წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრულ ინტეგრალს $[a,b]$ სეგმენტზე და ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

ამ შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი $[a,b]$ შუალედში. a და b რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად ინტეგრალის ქვედა და ზედა საზღვარი, $[a,b]$ სეგმენტს კი – ინტეგრების შუალედი, x ცვლადს ეწოდება

ინტეგრების ცვლადი. ცხადია, რომ განსაზღვრული ინტეგრალი წარმოადგენს რიცხვს და იგი არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ასოთი აღვნიშნავთ ინტეგრების ცვლადს. ზემოთ ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ $a < b$. თუ $a > b$, ხოლო ფუნქცია $f(x)$ ინტეგრებადია $[b,a]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

თუ $a = b$, მაშინ

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

§14.2. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები. განსაზღვრულ ინტეგრალს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ინტეგრების ცვლადზე, ე.ი.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^b f(t)dt \ ;$$

2. თუ $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და A მუდმივი რიცხვია, მაშინ $A \cdot f(x)$ ფუნქციაც ინტეგრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx \ ;$$

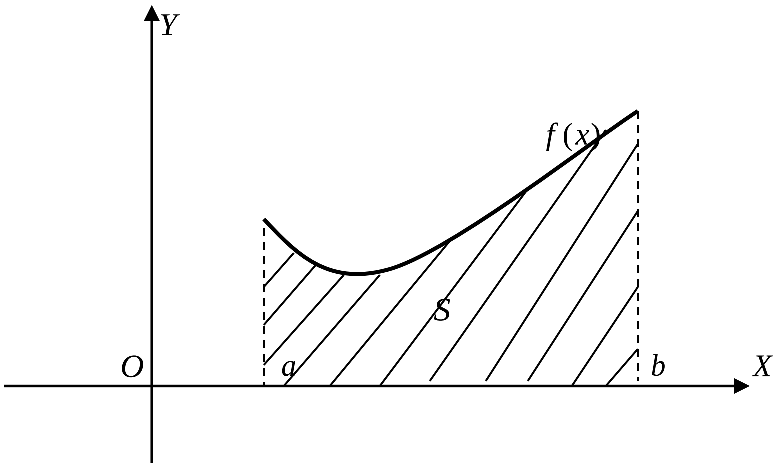
3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე ინტეგრებადია ამავე სეგმენტზე და

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ ;$$

4. თუ $f(x)$ არის არაუარყოფითი ინტეგრებადი ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

§14.3. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა. ზოგიერთი სახის ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული არაუარყოფითი $y=f(x)$ ფუნქცია. როგორც ვიცით, ასეთი ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. ამ $f(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრული ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით (იხ. ნახ. 1).



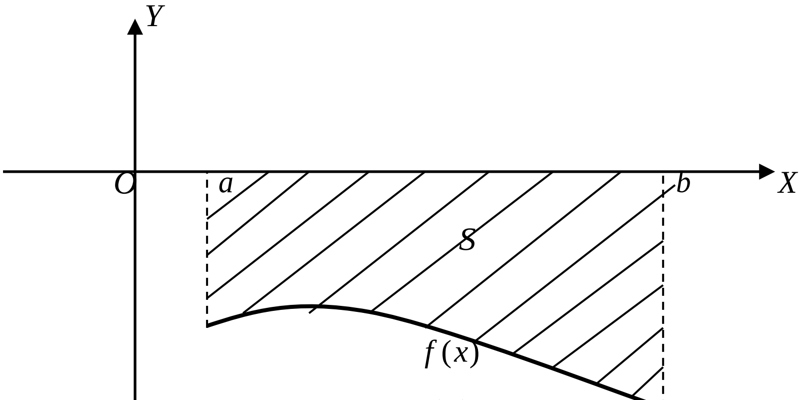
ნახ. 1

თუ ამ ფართობს S–ით აღვნიშნავთ, მაშინ გვექნება:

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და არადადებითია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx \le 0.$$



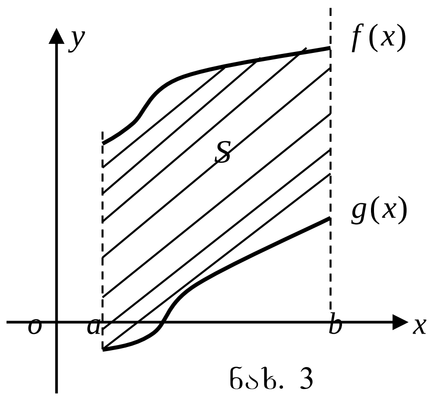
ნახ. 2

ამ ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ტოლია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ წირით, Ox ღერძით, $x=a$ და $x=b$ წრფეებით (იხ. ნახ. 2).

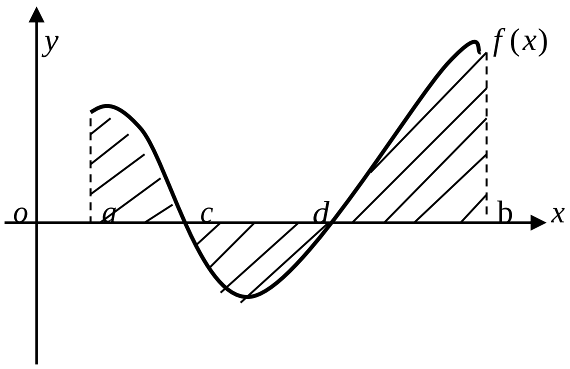
განსაზღვრული ინტეგრალის საშუალებით შესაძლებელია სხვადსხვა სახის ფიგურის ფართობის გამოთვლა. ჩვენ სანიმუშოდ განვიხილავთ ორ მათგანს.

1) იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)\ge g(x)$ ფუნქციებით და $x=a$ და $x=b$ ვერტიკალური წრფეებით (იხ. ნახ. 3), გამოითვლება ფორმულით

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx .$$



ნახ. 3



ნახ. 4

2) ნახ. 4-ზე გამოსახული ტიპის ფიგურის ფართობი შეგვიძლია გამოვსახოთ ასე

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx.$$

§14.4. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. ვთქვათ, $f(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია. აღვნიშნოთ $F(x)$–ით მისი რომელიმე პირველადი ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

ამ ტოლობას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება. $F(x)\Big|_a^b$ სიმბოლო იკითხება ასე: „ჩასმა $F(x)$–ში a–დან b–მდე“.

§14.5. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ხერხები.

შევისწავლოთ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ხერხები:

1. ჩასმის ხერხი. ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$, სადაც $f(x)$ წარმოადგენს $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას. დავუშვათ, რომ $x=\varphi(t)$, სადაც $\varphi(t)$ წარმოადგენს t ცვლადის რაიმე უწყვეტ და ზრდად (ან კლებად) ფუნქციას $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, რომლის წარმოებული $\varphi'(t)$ უწყვეტია ამავე შუალედში. გარდა ამისა, $\varphi(\alpha)=a$ და $\varphi(\beta)=b$ მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

ინტეგრალის გამოთვლის ამ წესს ეწოდება ჩასმის ხერხი.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}.$$

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $\ln x=t,$ მაშინ $\frac{dx}{x}=dt.$ დავადგინოთ ახალი საზღვრები t ცვლადისათვის. როცა $x=e$, მაშინ $t=\ln e=1,$ ხოლო როცა $x=e^2$, მაშინ $t=\ln e^2=2,$ ამიტომ

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_1^2\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

2. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და უწყვეტად წარმოებადია (a,b) ინტერვალში.

როგორც ვიცით

$$(uv)'=u'v+uv'$$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე a –დან b –მდე და გამოვიყენოთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

$$\int_a^b uv'dx = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u'vdx.$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრული ინტეგრალისათვის.

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^2 x2^x dx.$$

ამოხსნა. აღვნიშნოთ: $u = x$ და $dv = 2^x dx$. აქედან მივიღებთ $du = dx$ და $v = \dfrac{1}{\ln 2}2^x$. ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\int_0^2 x2^x dx = \frac{x2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2^x}{\ln 2}dx = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\Big|_0^2 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2} = \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{\ln^2 2}.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი?
- რას ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი?
- მოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები.
- რაში მდგომარეობს განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი.
- მოიყვანეთ ზოგიერთი ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები.
- მოიყვანეთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.
- რაში მდგომარეობს ჩასმის ხერხი განსაზღვრული ინტეგრალისათვის.
- მოიყვანეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღვრულ ინტეგრალში.

სავარჯიშო 14

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

1) $\int_0^1 4xdx$; 2) $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 2)dx$; 3) $\int_1^2 (3x^2 + 2x)dx$

4) $\int_1^2 \left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx$; 5) $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$; 6) $\int_0^1 (3x+1)^3 dx$;

7) $\int_1^2 (2x+1)^5 dx$; 8) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$; 9) $\int_0^{\pi/2} \sin xdx$;

10) $\int_0^{\pi/2} \cos xdx$; 11) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$; 12) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x}dx$.

2. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

1) $\int_0^1 x(2x^2+1)^3 dx$; 2) $\int_0^1 x^2(1+x^3)dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x}{3x^2+1}dx$;

4) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$; 5) $\int_1^2 xe^{x^2-1}dx$; 6) $\int_1^2 3x^2 5^{x^3-1}dx$;

7) $\int_1^e \frac{2\ln xdx}{x}$; 8) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; 9) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$;

10) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{1+2\sin x}$; 11) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos xdx$; 12) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+1}$.

3. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალები:

1) $\int_1^2 x\ln xdx$; 2) $\int_1^2 x^2 \ln xdx$ 3) $\int_0^{\pi/2} x\sin xdx$;

4) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$; 5) $\int_0^{\ln 5} xe^x dx$; 6) $\int_1^2 xe^x dx$.

4. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:

1) $y=3x^2$; $y=0$; $x=1$; $x=3$;

2) $y=3x^2+2x$; $y=0$; $x=2$; $x=3$;

3) $y=6x^2+4x$; $y=0$; $x=1$; $x=3$;

4) $y=9x^2+2x$; $y=0$; $x=1$; $x=2$;

5) $y=e^x$; $y=0$; $x=\ln 7$; $x=\ln 12$;

6) $y=4x-x^2$; $y=0$;

7) $y=3x-x^2$; $y=0$;

8) $y=x^2-2x$; $y=3$;

9) $y=x^2-3x$; $y=4$;

10) $y=-x^2$; $y=-x-2$;

11) $y=2x-x^2$; $y=x$;

12) $y=x^2-2x+2$; $y=2+4x-x^2$;

13) $y=x^2-4x+3$; $y=3+2x-x^2$.

თავი 15
არასაკუთრივი ინტეგრალები

ძალიან ხშირად გამოყენებით ამოცანებში საჭიროა ისეთი განსაზღვრული ინტეგრალის განხილვა, რომელშიც საინტეგრაციო საზღვრები არაა სასრული რიცხვები (ინტეგრების შუალედი არაა შემოსაზღვრული), ან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას. ასეთ ინტეგრალებს არასაკუთრივი ინტეგრალები ეწოდებათ.

ჩვენ განვიხილავთ ორი ტიპის არასაკუთრივ ინტეგრალებს: 1. როცა ინტეგრების შუალედი უსასრულოა; 2. როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოუსაზღვრელია.

მოვიყვანოთ არასაკუთრივი ინტეგრალების ზუსტი განმარტება.

ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a;\ +\infty)$ შუალედში და ინტეგრებადია $[a;\ b]$ ნებისმიერ სეგმენტზე $(b>a)$.

• თუ არსებობს

$$\int_a^b f(x)dx.$$

ინტეგრალის სასრული ზღვარი, როცა $b\to+\infty$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a;\ +\infty)$ შუალედში და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ . \tag{15.1}$$

ანალოგიურად, ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;\ b]$ შუალედში და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a;\ b]$ სეგმენტზე $(a<b)$

• თუ არსებობს

$$\int_a^b f(x)dx$$

ინტეგრალის სასრული ზღვარი, როცა $a\to-\infty$ მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty;\ b]$ შუალედში და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\ . \tag{15.2}$$

• თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;\ +\infty)$ შუალედში და არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \text{და} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

სადაც a ფიქსირებული რიცხვია, მაშინ მათ ჯამს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\ . \tag{15.3}$$

ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx\ . \tag{15.4}$$

• თუ არსებობს (15.1), (15.2) და (15.4) არასაკუთრივი ინტეგრალების სასრული ზღვარი, მაშინ ამბობენ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. თუ ეს ზღვრები არ არსებობენ, ან უსასრულონი არიან, მაშინ ზემოთ განხილულ ინტეგრალებს ეწოდებათ განშლადი არასაკუთრივი ინტეგრალები.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

ამოხსნა. არასაკუთრივი ინტეგრალის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

ე.ი. არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია.

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

ამოხსნა. არასაკუთრივი ინტეგრალის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{-1} x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{b\to-\infty} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_b^{-1} = \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{b^2}\right) = -\infty.$$

ე.ი. არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

ეხლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას უსასრულო წყვეტა აქვს საინტეგრაციო შუალედში

- ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[a;\ c)$ შუალედში და c წერტილში აქვს უსასრულო წყვეტა. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx,$$

მაშინ მას ვუწოდებთ არასაკუთრივ ინტეგრალს $[a;\ c)$ შუალედში და ვწერთ

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx\ . \qquad (15.5)$$

ანალოგიურად, თუ მოცემული $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $(c;\ b]$ შუალედში და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)dx,$$

მაშინ ვწერთ

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)dx\ . \qquad (15.6)$$

- თუ არსებობენ (15.5) და (15.6) ზღვრები, მაშინ ვამბობთ რომ, არასაკუთრივი ინტეგრალები კრებადია, წინააღმდეგ შემთხვევაში არასაკუთრივი ინტეგრალებს განშლადი ეწოდებათ.

- თუ $y = f(x)$ ფუნქციასააქვს უსასრულო წყვეტა $[a;\ b]$ შუალედში შიგა c წერტილზე, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი შემდეგნაირად განიმარტება

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^{b} f(x)dx. \qquad (15.7)$$

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

ამოხსნა. განმარტების თანახმად

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to 0} \int_\alpha^4 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\alpha \to 0} \left[2\sqrt{ხ}\right] \Big|_0^4 = \lim_{\alpha \to 0} \left(4 - 2\sqrt{\alpha}\right) = 4.$$

ე.ი. ინტეგრალი კრებადია.

ამოცანა 4. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი (ან გავარკვიოთ კრებადია თუ არა)

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

ამოხსნა. განმარტების თანახმად

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} [\sin x] \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} \sin b \ .$$

ამ გამოსახულების ზღვარი არ არსებობს, ე.ი. არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

ამოცანა 5. გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი

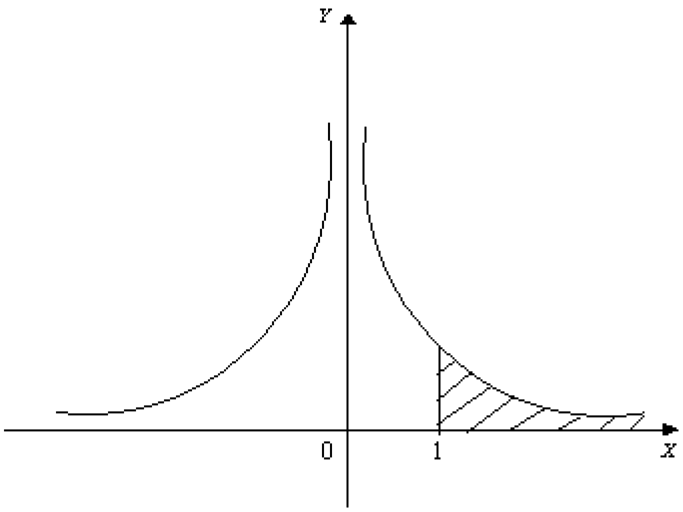
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} .$$

ამოხსნა. განმარტების თანახმად

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{+\infty} x^{-4} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-5}}{5} \right] \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} .$$

ე.ი. არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია.

განვიხილოთ ამ ფაქტის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (ნახ. 1).



ნახ. 1

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ წარმოადგენს დაშტრიხული უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. საზოგადოდ, თუ $f(x) > 0$, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ წარმოადგენს აბსცისთა ღერძით, $x = a$ წრფითა და

$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით შემოსაზღვრულ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს. ანალოგიური გეომეტრიული ინტერპრეტაცია აქვთ სხვა არასაკუთრივ ინტეგრალებსაც.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რას ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ \ a]$ და $(-\infty;\ \ +\infty)$ შუალედებში?
2. რა შემთხვევაში ამბობენ, რომ განშლადია არასაკუთრივი ინტეგრალი?
3. რას ეწოდება შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან არასაკუთრივი ინტეგრალი?

სავარჯიშო 15

1. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^3}}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x-3)^2}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{(1+x^2)^2}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$;

5) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 7) $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}dx$; 8) $\int\limits_{-\infty}^{0} 3^x dx$.

2. გამოთვალეთ ინტეგრალები შემოუსაზღვრელი ფუნქციებიდან:

1) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; 3) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 4) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3. გამოთვალეთ იმ უსასრულო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია:

1) $x = -3$ წრფით, აბსცისთა ღერძით და $y = -3e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკით;

2) აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებით და $y=-3e^{-x}$ ფუნქციის გრაფიკით;

3) $y=0$, $x=0$, $x=1$ წრფეებით და $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის გრაფიკით;

4) ორდინატთა ღერძით, $x=3$ წრფით, აბსცისთა ღერძით და $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ფუნქციის გრაფიკით.

თავი 16
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

§16.1. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ცნება. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

• განტოლებას, რომელიც დამოკიდებულებას ამყარებს დამოუკიდებელ ცვლადებსა, ამ ცვლადების უცნობ ფუნქციებსა და ამ ფუნქციების სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს ან დიფერენციალებს შორის, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

• თუ დამოუკიდებელი ცვლადების რიცხვი არის ერთი, მაშინ განტოლებას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

თუ გვაქვს რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადი, მაშინ განტოლება შეიცავს ერთი ან რამდენიმე უცნობი ფუნქციის კერძო წარმოებულებს, ამის გამო ასეთ განტოლებას კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

ჩვენ შევისწავლით ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

თუ უცნობ ფუნქციათა რიცხვი რამდენიმეა, მაშინ უნდა გვქონდეს იმდენი დიფერენციალური განტოლება, რამდენი უცნობი ფუნქციაც გვაქვს, ანუ სხვანაირად ამ შემთხვევაში გვექნება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელშიაც განტოლებათა რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვის.

• როცა გვაქვს ერთი დიფერენციალური განტოლება ერთი უცნობი ფუნქციით, მასში შემავალი წარმოებულების ან დიფერენციალების უმაღლეს რიგს, დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება.

ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (16.1)$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო y არის x–ის უცნობი ფუნქცია, წარმოადგენს n–ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად სახეს. კერძოდ, როცა $n=1$, მაშინ გვექნება

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \qquad (16.2)$$

მაშასადამე, (16.2) არის პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე.

იმისათვის, რომ (16.1) განტოლება წარმოადგენდეს $n-$ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, მასში სავალდებულოა შედიოდეს $y^{(n)}$, ხოლო დანარჩენი სიდიდეების $x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n-1)}$ შესვლა ამ განტოლებაში სავალდებულო არ არის.

ასევე (16.2) განტოლება უსათუოდ უნდა შეიცავდეს $y^{'}-$ს (ან dx და $dy-$ს) დანარჩენი სიდიდეები x და y შეიძლება შედიოდნენ ან არ შედიოდნენ ამ განტოლებაში.

ასე, მაგალითად;

$$F\left(x, y^{'}\right)=0, \qquad F\left(y, y^{'}\right)=0, \qquad F\left(y^{'}\right)=0$$

წარმოადგენენ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების კერძო სახეებს, ხოლო

$$F(x, y)=0$$

არ წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას, რადგან მასში უცნობი ფუნქცია არ შედის წარმოებულის ან დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ.

ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური, თუ იგი უცნობ ფუნქციას შეიცავს წარმოებულის ან დიფერენციალის ქვეშ.

- n-ური რიგის (16.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება ყველა ისეთ n რიგამდე ჩათვლით წარმოებად $y=\varphi(x)$ ფუნქციას, რომელიც ჩასმული (16.1) განტოლებაში მას გადააქცევს იგივეობად, ე.ი.

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right)=0,$$

x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის სათანადო შუალედში.

კერძოდ, პირველი რიგის (16.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება ყველა $y=\varphi(x)$ წარმოებად ფუნქციას, რომელიც ჩასმული ამ განტოლებაში მას გადააქცევს იგივეობად ე.ი.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x))=0,$$

x-ის ყოველ მნიშვნელობისათვის სათანადო შუალედში. მაგალითად,

$$y^{''}-y=0.$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია $y = e^x$, რადგან $y' = e^x$, $y'' = e^x$ და ამ მნიშვნელობების ჩასმა მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში მოგვცემს

$$e^x - e^x \equiv 0 .$$

ეს კი არის იგივეობა (ე.ი. მას ყველა x−სთვის აქვს ადგილი).

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის მოძებნის პროცესს დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ეწოდება.

თუ $y = \varphi(x)$ არის (16.2) განტოლების ამონახსნი, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკს მოცემული დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი ეწოდება.

როგორც ვიცით, პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე არის

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{16.3}$$

ზოგჯერ შესაძლებელია ამ განტოლების ამოხსნა y'−ის მიმართ, მივიღებთ

$$y' = f(x, y). \tag{16.4}$$

(16.4) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მივცეთ სახე

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} ,$$

სადაც $M(x,y)$ და $N(x,y)$ მოცემული ფუნქციებია, მაშინ (16.4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{16.5}$$

სამართლიანია (16.4) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი

თეორემა 16.1 (კოშის თეორემა). თუ $f(x, y)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებული $f_y'(x, y)$ უწყვეტია oxy სიბრტყის რაიმე D არეზე, რომელიც შეიცავს (x_0, y_0) წერტილს, მაშინ მოიძებნება $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ინტერვალი, სადაც არსებობს (16.4) განტოლების ერთადერთი $y = y(x)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$y(x_0) = y_0. \tag{16.6}$$

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ D არის ნებისმიერ (x_0, y_0) წერტილზე გადის (16.4) დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი ინტეგრალური წირი. თუ (16.6) პირობაში x_0–ს დავაფიქსირებთ, ხოლო y_0–ს ნებისმიერად შევცვლით (ამასთან (x_0, y_0) წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს D არეს), მაშინ ცხადი გახდება, რომ D არის ნებისმიერ წერტილზე გადის ერთი და მხოლოდ ერთი ინტეგრალური წირი. აქედან გამომდინარე, (16.4) განტოლებას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა, რომელიც წარმოიდგინება ერთპარამეტრიანი $y = y(x, c)$ ფუნქციათა ოჯახის სახით.

- ამოცანას, რომელიც მდგომარეობს, ვიპოვოთ (16.4) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (16.6) პირობას, ეწოდება კოშის ამოცანა, ხოლო (16.6) პირობას – საწყისი პირობა. (16.6) პირობას ხშირად წერენ შემდეგი სახით

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 .$$

- (16.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ეწოდება $y = y(x, c)$ ფუნქციას, სადაც c – ნებისმიერი მუდმივია, თუ

1) ის წარმოადგენს ამ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს, c მუდმივის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის;

2) არსებობს ერთადერთი $c = c_0$ მნიშვნელობა, რომ $y = y(x, c_0)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $y(x_0) = y_0$ საწყის პირობას, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_0, y_0) \in D$.

- (16.4) განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება, ისეთ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან, c მუდმივის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის.

ხშირად დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მიიღება მხოლოდ არაცხადი სახით, ე.ი.

$$\Phi(x, y, c) = 0. \qquad (16.7)$$

ამ შემთხვევაში (16.7) ტოლობას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. თუ (16.7) დამოკიდებულებაში $c = c_0$, მაშინ მივიღებთ კერძო ინტეგრალს.

§16.2. განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება.

პირველი რიგის განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვლადებით, თუ მას აქვს ან შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0, \tag{16.8}$$

სადაც $P(x)$ არის x–ის მოცემული ფუნქცია, ხოლო $Q(y)$ y–ის მოცემული ფუნქცია.

ასეთი ტიპის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია (16.8) ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით, რაც მოგვცემს

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=c,$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. თუ გამოვთვლით ამ ინტეგრალებს, მივიღებთ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას x,y და c სიდიდეთა შორის $f(x,y,c)=0$. ეს იქნება (16.8) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

შესაძლებელია მოცემულ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ჰქონდეს სახე

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dy+\varphi_2(x)\psi_2(y)dy=0, \tag{16.9}$$

სადაც $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$ და $\psi_2(y)$ მოცემული ფუნქციებია. ამ განტოლებაში შესაძლებელია ცვლადთა განცალება. მართლაც, გავყოთ განტოლების წევრები $\varphi_2(x)\psi_1(y)$ნამრავლზე; მივიღებთ

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}dy=0.$$

ეს განტოლება კი არის (16.8) სახის, რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\int\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}dy=c.$$

ამ ინტეგრალების გამოთვლით მივიღებთ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას x,y და c სიდიდეთა შორის $f(x,y,c)=0$, რაც იქნება (16.9) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა ცვლადთა განცალებაზე.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$xdx+ydy=0.$$

ამოხსნა. რადგან აქ ცვლადები განცალებულია, ამიტომ შესაძლებელია მისი ინტეგრება, გვექნება

$$\int x dx + \int y dy = c_1, \qquad \text{ანუ} \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x^2 + y^2 = c^2, \qquad \text{სადაც} \qquad c^2 = 2c_1.$$

მაშასადამე მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია კონცენტრულ წრეწირთა ოჯახი, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$(1+2y)x dx + (1+x^2)dy = 0\,.$$

ამოხსნა. ამისათვის გავყოთ მისი წევრები $(1+2y)(1+x^2)$–ზე, მივიღებთ

$$\frac{x dx}{(1+x^2)} + \frac{dy}{(1+2y)} = 0.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით, გვექნება:

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)} + \int \frac{dy}{(1+2y)} = \frac{1}{2}\ln c,$$

ანუ

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+2y) = \frac{1}{2}\ln c,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(1+2y)(1+x^2) = c.$$

ასეთია მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ განტოლება

$$e^y\left(y' + 1\right) = 1.$$

ამოხსნა. ამისათვის ეს განტოლება გადავწეროთ ასეთნაირად

$$e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 1, \qquad \text{ანუ} \qquad e^y dy + (e^y - 1)dx = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{e^y}{e^y - 1}dy + dx = 0.$$

მოვახდინოთ ამ ტოლობის ინტეგრება

$$\int \frac{e^y}{e^y - 1}dy + \int dx = \ln c, \qquad \text{ანუ} \qquad \ln(e^y - 1) + x = \ln c,$$

საიდანაც

$$\ln\frac{e^y - 1}{c} = -x, \qquad \text{ანუ} \qquad e^y = 1 + ce^{-x}.$$

ასეთია მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ $y^{'}\sin x = y\ln y.$ დიფერენციალური განტოლების ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: როცა $x = \frac{\pi}{2},$ მაშინ $y = e.$

ამოხსნა. ჯერ ვიპოვოთ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რისთვისაც მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

ამ განტოლების ინტეგრებით, მივიღებთ:

$$\int\frac{dy}{y\ln y} = \int\frac{dx}{\sin x} + \ln c,$$

ანუ

$$\ln(\ln y) = \ln\left(tg\frac{x}{2}\right) + \ln c.$$

აქედან

$$\ln y = c\cdot tg\frac{x}{2}$$

ასეთია ზოგადი ამონახსნი.

კერძო ამონახსნის საპოვნელად შევიტანოთ ამ ტოლობაში მოცემული საწყისი პირობა, მივიღებთ

$$\ln e = c\cdot tg\frac{\pi}{4}, \qquad \text{აქედან} \qquad c = 1.$$

შევიტანოთ $c-$ს მნიშვნელობა ზოგად ამონახსნში, მივიღებთ

$$\ln y = tg\frac{x}{2}, \qquad \text{ანუ} \qquad y = e^{tg\frac{x}{2}}$$

ეს იქნება საძიებელი კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს.

§16.3. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

- დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც აქვს სახე

$$y^{'} + p(x)y = q(x), \tag{16.10}$$

სადაც $p(x)$ და $q(x)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია გარკვეულ შუალედში, პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება.

თუ აღებულ შუალედში $q(x)=0$, მაშინ გვექნება

$$y' + p(x)y = 0, \tag{16.11}$$

რომელსაც წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება ეწოდება.

იმ შემთხვევაში, როდესაც აღებულ შუალედში $q(x) \neq 0$, განტოლებას ეწოდება წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის რამდენიმე ხერხი არსებობს. ჩვენ განვიხილავთ ე.წ. ბერნულის ხერხს.

ვეძებოთ (16.10) განტოლების ზოგადი ამონახსნი

$$y = u(x)v(x). \tag{16.12}$$

ნამრავლის სახით, სადაც $u = u(x)$, $v = v(x)$ გარკვეულ შუალედში უწყვეტად წარმოებადი უცნობი ფუნქციებია.

გავაწარმოოთ (1612) ტოლობა $x-$ით, მივიღებთ:

$$y' = u'v + uv'.$$

შევიტანოთ $y-$ისა და $y'-$ის მნიშვნელობები (16.10) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

ანუ

$$v(u' + p(x)u) + uv' = q(x). \tag{16.13}$$

$u(x)$ ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ

$$u' + p(x)u = 0. \tag{16.14}$$

ეს კი არის დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით, რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$u = ce^{-\int p(x)dx}.$$

კერძოდ, თუ მივიღებთ $c = 1$, გვექნება

$$u = e^{-\int p(x)dx}. \tag{16.15}$$

ამრიგად, თუ $u(x)-$ს შევარჩევთ (16.15) სახით, მაშინ შესრულებული იქნება (16.14) ტოლობა, რის გამოც (16.13) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$u\frac{dv}{dx} = q(x),$$

და რადგანაც u ფუნქციაა x–ის, ამიტომ უკანასკნელ განტოლებაში ცვლადების განცალებით მივიღებთ

$$dv = \frac{q(x)dx}{u} = q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

რომლის ინტეგრებით გვექნება

$$v = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c, \qquad (16.16)$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

შევიტანოთ u–სა და v–ს მნიშვნელობები (16.12) ფორმულაში, გვექნება

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \qquad (16.17)$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

ამოცანა 5. ვიპოვოთ

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. (16.17) ფორმულის თანახმად, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = ce^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = ce^{\ln(1+x^2)}$$

ანუ

$$y = c(1+x^2).$$

ამოცანა 6. ვიპოვოთ

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x, \qquad (x > 0)$$

დიფერენციალური განტოლების ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობას: როცა $x = 1$, მაშინ $y = 1$.

ამოხსნა. (16.17) ფორმულის ძალით, გვექნება

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c + 3\int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c + x^3\right),$$

$$y = \frac{c}{x} + x^2.$$

კერძო ამონახსნის საპოვნელად ჩავსვათ $x = 1$ და $y = 1$ მივიღებთ

$$c + 1 = 1, \qquad \text{ე.ი.} \qquad c = 0.$$

რის გამოც

$$y = x^2.$$

ეს არის ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

ამოცანა 7. ამოვხსნათ განტოლება

$$y' \cos^2 x + y = tgx$$

შემდეგი საწყისი პირობებით: როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$.

ამოხსნა. გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{\cos^2 x}.$$

გამოვიყენოთ (16.17) ფორმულა მოცემული მაგალითისთვის და მივიღებთ:

$$y(x) = e^{-\int \frac{dx}{\cos^2 x}} \left(\int \frac{tgx}{\cos^2 x} e^{\int \frac{dx}{\cos^2 x}} dx + c \right) = e^{-tgx} \left(\int \frac{tgx}{\cos^2 x} e^{tgx} dx + c \right) =$$
$$= e^{-tgx} \left(e^{tgx} (tgx - 1) + c \right) = tgx - 1 + ce^{-tgx}.$$

საწყისი პირობების გამოყენება გვაძლევს:

$$tg0 - 1 + ce^{-tg0} = 0$$

საიდანაც $c = 1$.

მაშასადამე, საძიებელ კერძო ამონახსნს აქვს სახე:

$$y = tgx - 1 + e^{-tgx}.$$

§16.4. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებაა

$$ay'' + by' + cy = 0$$

სახის განტოლება, ცადაც a, b და c ($a \neq 0$) მოცემული რიცხვებია, ხოლო $y = \varphi(x)$ საძიებელი ფუნქციაა. განტოლების a-ზე წევრ-წევრად გაყოფით მას შეგვიძლია მივცეთ სახე

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{16.18}$$

ჩვენი მიზანია მოვძებნოთ (16.18) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამისათვის, პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თუ y_1 და y_2 არიან მისი ამონახსნები, ხოლო c_1 და c_2 რაიმე მუდმივები, მაშინ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ აგრეთვე იქნება (16.18) განტოლების ამონახსნი. მართლაც

$$(c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) =$$
$$= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.$$

ამის გამო, დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ თუ ვიპოვით (16.18) განტოლების რაიმე ორ y_1 და y_2 დამოუკიდებელ ამონახსნს (ე.ი. რომელთა შეფარდება არაა მუდმივი), მაშინ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{16.19}$$

იქნება (16.18) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თურმე, საძიებელი ზოგადი ამონახსნის სახე დამოკიდებულია

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{16.20}$$

კვადრატულ განტოლებაზე, რომელსაც (16.18) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლება ჰქვია. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი. ვთქვათ, ეს ფესვებია λ_1 და λ_2. მაშინ ფუნქციები $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ და $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ იქნებიან (16.18) განტოლების დამოუკიდებელი ამონახსნები (შევამოწმოთ ჩვენ თვითონ!). თუ y_1 და y_2-ს შევიტანთ (16.19) ტოლობაში, მივიღებთ, რომ ამ შემთხვევაში (16.18) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}.$$

ამოცანა 8. ვიპოვოთ

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. მოცემული განტოლების მახასიათებელ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0,$$

რომლის ფესვებია $\lambda_1 = -3$ და $\lambda_2 = 2$. საიდანაც დავწერთ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს $y_1 = e^{-3x}$ და $y_2 = e^{2x}$. აქედან

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნია.

2) **როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი.** ვთქვათ, ეს ფესვია λ. მაშინ (16.18) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს მოგვცემენ ფუნქციები $y_1 = e^{\lambda x}$ და $y_2 = xe^{\lambda x}$ (შევამოწმოთ ჩვენ თვითონ!).

ამრიგად, ამ შემთხვევაში (16.18) განტოლების ზოგადი ამონახსნს ექნება სახე

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 xe^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}.$$

ამოცანა 9. ვიპოვოთ

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. დავწეროთ მახასიათებელი განტოლება

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

რომელსაც გააჩნია ერთადერთი ნამდვილი ამონახსნი $\lambda = -3$. აქედან მოცეემული განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები იქნება $y_1 = e^{-3x}$ და $y_2 = xe^{-3x}$.

საბოლოოდ

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნია.

3) **როცა მახასიათებელ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვები.** ამ დროს $D = p^2 - 4q < 0$. აღვნიშნოთ $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$. ამ შემთხვევაში (16.18) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს მოგვცემენ ფუნქციები $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ და $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ (დავამტკიცოთ ჩვენ თვითონ!).

ამრიგად, ამ შემთხვევაში (16.18) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y = c_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + c_2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

ანუ

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x\right).$$

ამოცანა 10. ვიპოვოთ

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. რადგან $D=4-20=-16<0$, ამიტომ შემოვიღოთ აღნიშვნები $\alpha=-\frac{2}{2}=-1$ და $\beta=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$. აქედან, მოცემული განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $y_1=e^{-x}\sin 2x$ და $y_2=e^{-x}\cos 2x$.

საბოლოოდ

$$y=e^{-x}\left(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x\right)$$

წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება?
- რას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიგი?
- რას ეწოდება n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება?
- რას ეწოდება n-ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი? პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი?
- ჩამოაყალიბეთ კოშის თეორემა.
- ჩამოაყალიბეთ კოშის ამოცანა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის?
- რას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი? კერძო ამონახსნი?
- როგორ განტოლებას ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება განცალებადი ცვლადებით?
- მოიყვანეთ განცალებადცვლადებიანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის გზა.
- რას ეწოდება პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება.
- მოიყვანეთ პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულა.

- როგორი სახე აქვს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას?
- როგორი სახე აქვს მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლების ზოგად ამონახსნს?
- რას ეწოდება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლება?
- როგორ ამოიხსნება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება, როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ფესვი?
- როგორ ამოიხსნება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება, როცა მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი?
- როგორ ამოიხსნება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება, როცა მახასიათებელ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვები?

სავარჯიშო 16

1. იპოვეთ განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

1) $y' - x = 0$; 2) $yy' = x$; 3) $y - xy' = 0$;

4) $xy' + y = 0$; 5) $yy' - 3x = 0$; 6) $x^3dx - ydy = 0$;

7) $(1+y^2)dy - ydx = 0$; 8) $(1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0$; 9) $(y - x^2y)dy + (xy^2 + x)dx = 0$;

10) $(xy + x)dx = (1+x^2)dy$; 11) $\cos x \sin y dy = \sin x \cos y dx$; 12) $y' = y\cos x$.

2. იპოვეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

1) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $y' + 2y = 4x$; 4) $xy' - y = x^3$;

5) $y' - 2y + 2 = 0$; 6) $xy' + y = 3$; 7) $xy' + y = x + 1$; 8) $xy' + y - e^x = 0$.

3. იპოვეთ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

1) $y'' + 2y' = 0;$ 2) $y'' - 9y = 0;$ 3) $y'' - y' - 6y = 0;$

4) $y'' - 8y' + 15y = 0;$ 5) $y'' - 6y' + 9y = 0;$ 6) $y'' + 4y' + 4y = 0;$

7) $y'' - 2y' + 17y = 0;$ 8) $y'' + 2y' + 2y = 0;$ 9) $y'' + 9y = 0.$

თავი 17

ხდომილობა და მისი ალბათობა

§17.1. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. ოპერაციები ხდომილობებზე. ბუნებაში გვხვდება უამრავი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ტიპის მოვლენები, რომელთა შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულებები. მოვლენათა ეს სიმრავლე შეგვიძლია დავყოთ ორ კლასად:

ა) მოვლენები, რომელთა შედეგების გამოცნობა შეიძლება წინასწარ. მათ უწოდებენ დეტერმინისტულ ანუ განსაზღვრულ ცდებს;

ბ) მოვლენები, რომელთა შედეგების გამოცნობა წინასწარ შეუძლებელია. მათ უწოდებენ შემთხვევით ცდებს.

ალბათობის თეორიის კვლევის ობიექტს წარმოადგენს შემთხვევითი ცდები.

- ცდის ნებისმიერ შესაძლო შედეგს ეწოდება ***ხდომილობა.***

ხდომილობები აღინიშნება ლათინური ანბანის დიდი, ინდექსიანი ან უინდექსო, ასოებით: $A, B, C, ..., A_1, B_1, C_1, ...$ კამათლის გაგორებისას ხდომილობის მაგალითებია:

$A_1 = \{\text{მოვა ექვსიანი}\} = \{6\}$,

$A_2 = \{\text{მოვა ორიანი}\} = \{2\}$,

$A_3 = \{\text{მოვა ლუწი რიცხვი}\} = \{2,4,6\}$,

$A_4 = \{\text{მოვა ხუთზე ნაკლები რიცხვი}\} = \{1,2,3,4\}$.

ხდომილობას, რომელიც არ შეიცავს სხვა უფრო მარტივ ხდომილობას, ეწოდება ***ელემენტარული ხდომილობა***. ზემოთმოყვანილი ხდომილობებიდან A_1 და A_2 წარმოადგენენ ელემენტარულ ხდომილობებს, ხოლო A_3 და A_4 არ არიან ელემენტარული ხდომილობები, რადგან ისინი შეიცავენ უფრო მარტივ ხდომილობებს.

ელემენტარულ ხდომილობებს აღნიშნავენ $e_1, e_2, ...$ სიმბოლოებით. თუ A შეიცავს e ელემენტარულ ხდომილობას, მაშინ ამბობენ, რომ e ***იწვევს*** $A-$ს.

- ცდის ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა ერთობლიობას ეწოდება ***ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე*** და აღინიშნება E ასოთი.

მაგალითად, კამათლის გაგორებისას ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება $E = \{1;2;3;4;5;6\}$.

• თუ e ელემენტარული ხდომილობა იწვევს რაიმე A ხდომილობას, მაშინ მას ეწოდება A–ს ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა და ეს ფაქტი სიმბოლურად ჩაიწერება ასე: $e \in A$.

თუ e არ არის A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა, მაშინ წერენ $e \notin A$.

• ვიტყვით, რომ A ხდომილობა მოხდა, თუ ცდის შედეგი წარმოადგენს მის ხელშემწყობ რაიმე ელემენტარულ ხდომილობას. მაგალითად, A_3 მოხდება მაშინ, როცა ცდის შედეგი იქნება ან {2} ან {4} ან {6}.

• ხდომილობას, რომელიც შეიცავს მოცემული ცდის ყველა ელემენტარულ ხდომილობას, ეწოდება აუცილებელი ხდომილობა. ისევე როგორც ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე, აუცილებელი ხდომილობა E ასოთი აღინიშნება.

განსაზღვრების თანახმად ცხადია, აუცილებელი ხდომილობა მოხდება ცდის ყოველი განხორციელებისას.

• ხდომილობას რომელიც მოცემული ცდის არც ერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ შეიცავს, ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი.

შეუძლებელი ხდომილობა არ მოხდება ცდის არცერთ განხორციელებისას. ხდომილობას, რომელიც არც აუცილებელია და არც შეუძლებელი, ეწოდება შემთხვევითი ხდომილობა.

• ვიტყვით, რომ A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას, თუ A–ს ხელშემწყობი ყველა ელემენტარული ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას და ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე: $A \subset B$.

• თუ $A \subset B$ და $B \subset A$ მაშინ A–სა და B–ს ეწოდება ექვივალენტური ხდომილობები და წერენ $A = B$.

• ორი A და B ხდომილობების ჯამი (გაერთიანება) ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც A და B ხდომილობებიდან ერთი მაინც მოხდება და აღინიშნება $A+B$ ან $A \cup B$ სიმბოლოთი.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $A+B$ ხდომილობა შეიცავს A და B ხდომილობების ყველა ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობას.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში

$$A_1 + A_2 = \{2;6\},\ A_1 + A_3 = \{2;4;6\},\ A_3 + A_4 = \{1;2;3;4;6\}.$$

• ორი A და B ხდომილობების ნამრავლი ეწოდება ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და B ერთდროულად. იგი აღინიშნება $A \cdot B$ ან $A \cap B$ სიმბოლოთი.

A და B ხდომილობის ნამრავლი შეიცავს მხოლოდ იმ ელემენტარულ ხდომილობებს, რომლებიც ერთდროულად იწვევენ როგორც A–ს, ასევე B–ს. ხდომილობების ზემოთ მოყვანილ მაგალითში

$$A_1 \cdot A_2 = \varnothing, \ A_2 \cdot A_3 = \{2\}, \ A_3 \cdot A_4 = \{2;4\}.$$

• A და B ხდომილობების სხვაობა ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება A და არ ხდება B, აღინიშნება $A - B$ ან $A \setminus B$ სიმბოლოთი.

A და B ხდომილობების სხვაობა $A \setminus B$ შეიცავს მხოლოდ იმ ელემენტარულ ხდომილობებს, რომლებიც იწვევენ A–ს და არ იწვევენ B–ს.

იგივე მაგალითიდან:

$$A_1 \setminus A_2 = \{6\}, \ A_2 \setminus A_3 = \varnothing, \ A_3 \setminus A_4 = \{6\}.$$

• ორ A და B ხდომილობას ეწოდება უთავსებადი, თუ მათი ნამრავლი შეუძლებელი ხდომილობაა.

ამრიგად, თუ A და B უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ $A \cdot B = \varnothing$, ე.ი. A–სა და B–ს ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია.

მაგალითად, A_1 და A_2 უთავსებადი ხდომილობებია, ხოლო A_1 და A_3– თავსებადი.

• A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომელიც მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არ მოხდება A და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი.

$\overline{A}$ შეიცავს მოცემული ცდის ყველა იმ ელემენტარულ ხდომილობას, რომელსაც არ შეიცავს A, ე.ი. $\overline{A} = E \setminus A$.

ცხადია, A და $\overline{A}$ უთავსებადი ხდომილობებია. მაგალითად,

$\overline{A}_1 = \{1;2;3;4;5\}$, $\overline{A}_2 = \{1;3;4;5;6\}$, $\overline{A}_3 = \{1;3;5\}$, $\overline{A}_4 = \{5;6\}$.

ანალოგიურად განისაზღვრება ხდომილობათა ჯამი და ნამრავლი ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ხდომილობებისათვის.

§17.2. ალბათობის კლასიკური განმარტება. განვიხილოთ ცდა, რომლის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ შეიცავს სასრული

რაოდენობის ელემენტარულ ხდომილობებს. ვთქვათ, ცდის შედეგად თითოეული ელემენტარული ხდომილობის მოხდენის შესაძლებლობა ერთი და იგივე რიცხვია.

ვთქვათ, $A \subset E$ ხდომილობა შეიცავს m ელემენტს, მაშინ $\frac{m}{n}$ ფარდობას უწოდებენ A ხდომილობის ალბათობას და აღნიშნავენ $P(A)$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{17.1}$$

სადაც m არის A ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი, ხოლო n – E სივრცის ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა (ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი). (17.1)-ს ეწოდება ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება, რომელიც სიტყვიერად ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

- ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა ეწოდება ამ ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვის ფარდობას ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვთან.

განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა

$$P(E) = \frac{n}{n} = 1,$$

ხოლო შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა

$$P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

ამოცანა 1. ვთქვათ, ვაგორებთ კამათელს. განვიხილოთ ხდომილობები: $A = \{1;2\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3;4;5;6\}$, $D = \{2;4;6\}$.

ვიპოვოთ თითოეული ხდომილობის ალბათობა.

ამოხსნა. ცხადია, ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, ე.ი. შედგება 6 ელემენტისაგან. ამიტომ,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

§17.3. კომბინატორიკის ელემენტები და ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით. ბევრ შემთხვევაში E სივრცის ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა და ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვის პირდაპირი გამოთვლა შეუძლებელია. ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლის დროს ხშირად საჭირო ხდება კომბინატორიკის ფორმულების გამოყენება.

კომბინატორიკა არის მეცნიერება, რომელიც სწავლობს კომბინაციებს, რომელთა შედგენაც შესაძლებელია გარკვეული სასრული სიმრავლის ელემენტებიდან განსაზღვრული წესის გამოყენებით.

პირველ რიგში ჩამოვაყალიბოთ კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი, რომელსაც გამრავლების პრინციპი ეწოდება:

თუ ასარჩევია m ობიექტი და არსებობს პირველი ობიექტის არჩევის n_1 შესაძლებლობა, პირველი ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე ობიექტის არჩევის n_2 შესაძლებლობა, და ა. შ., $m-1$ ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს m-ური ობიექტის არჩევის n_m შესაძლებლობა, მაშინ არსებობს ამ m ობიექტის ამ მიმდევრობით არჩევის $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ შესაძლებლობა.

მაგალითად, თუ მამაკაცს აქვს 4 პერანგი, 3 პიჯაკი და 2 ჰალსტუხი, მაშინ ამ მამაკაცს აქვს პერანგის, პიჯაკის და ჰალსტუხის შერჩევის $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ შესაძლებლობა (ვარიანტი).

- n ელემენტიანი სიმრავლის გადანაცვლებები ეწოდება, ისეთ კომბინაციებს, რომლებიც შედგენილია მოცემული სიმრავლის ყველა ელემენტისაგან და ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით. n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვია:

$$P_n = n!.$$

მართლაც, თუ ამ ამოცანას შევხედავთ როგორც n ობიექტიდან n ობიექტის არჩევის ამოცანას, მაშინ არსებობს პირველი ობიექტის არჩევის n შესაძლებლობა, პირველი ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე ობიექტის არჩევის $n-1$ შესაძლებლობა, და ა. შ., $n-1$ ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს n-ური ობიექტის არჩევის ერთადერთი შესაძლებლობა. შესაბამისად, გამრავლების პრინციპის თანახმად:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

ამოცანა 2. რამდენი გზით შეიძლება დავსვათ 5 ბავშვი 5 ადგილზე?

ამოხსნა.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

- წყობათა რიცხვი ეწოდება n ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეთა რაოდენობას (ე.ი. ქვესიმრავლეები ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტების შემადგენლობით ან ელემენტების განლაგების

რიგით). n ელემენტიანი სიმრავლიდან m ელემენტიანი ყველა შესაძლო წყობების რიცხვია:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

ამ ამოცანას ჩვენ შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც n ობიექტიდან m ობიექტის შერჩევის ამოცანას.. რადგანაც, არსებობს პირველი ობიექტის არჩევის n შესაძლებლობა, პირველი ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე ობიექტის არჩევის $n-1$ შესაძლებლობა, და ა. შ., $m-1$ ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს m-ური ობიექტის არჩევის $n-m+1$ შესაძლებლობა. ამიტომ, გამრავლების პრინციპის საფუძველზე გვაქვს:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

ამოცანა 3. საკრებულოს 10 წევრიდან რამდენი გზით შეიძლება ავირჩიოთ საკრბულოს თავმჯდომარე და მისი პირველი და მეორე მოადგილე?

ამოხსნა.

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

- ჯუფთებათა რიცხვი ეწოდება n ელემენტიანი სიმრავლის m ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას (ე.ი. ქვესიმრავლეები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტების შემადგენლობით). ჯუფთებათა რიცხვი გამოითვლება ფორმულით:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

ამოცანა 4. საკრებულოს 10 წევრიდან რამდენი გზით შეიძლება 3 წევრიანი კომისიის არჩევა?

ამოხსნა. წინა ამოცანისგან განსხვავებით აქ დალაგებას მნიშვნელობა არ აქვს. ამიტომ ვიყენებთ ჯუფთების ფორმულას. შესაბამისად საძიებელი რიცხვია:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$$

ახლა განვიხილოთ ამოცანები ალბათობის გამოთვლაზე, სადაც გამოვიყენებთ კომბინატორიკის ელემენტებს.

ამოცანა 5. საკრებულო სედგება 10 წევრისაგან, რომელთაგან 3 რესპუბლიკური პარტიიდანაა, ხოლო 7 – დემოკრატიული პარტიიდან. ამ საკრებულოდან ალალბედზე უნდა აირჩიონ 3 განსხვავებული თანამდებობის

პირი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) სამივე არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან; ბ) სამივე არჩეული იქნება დემოკრატიული პარტიიდან; გ) ერთი არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან, ხოლო ორი – დემოკრატიული პარტიიდან.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობების აღნიშვნები: A – “სამივე არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან”, B – “სამივე არჩეული იქნება დემოკრატიული პარტიიდან” და C – “ერთი არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან, ხოლო ორი – დემოკრატიული პარტიიდან” . მაშინ,

ა) $$p(A)=\frac{P_3}{A_{10}^3}=\frac{3!}{10!/7!}=\frac{1}{120};$$

ბ) $$p(B)=\frac{A_7^3}{A_{10}^3}=\frac{7!/4!}{10!/7!}=\frac{7}{24};$$

გ) $$p(C)=\frac{A_3^1\cdot A_7^2}{A_{10}^3}=\frac{3\cdot 7!/5!}{10!/7!}=\frac{7}{40}.$$

ამოცანა 6. საკრებულოში 10 წევრია, რომელთაგან 4 რესპუბლიკური პარტიიდანაა და 6 დემოკრატიული პარტიიდან. ალალბედზე უნდა აირჩიონ სამწევრიანი კომისია. იპოვეთ ალბათობა, იმისა, რომ: ა) სამივე იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან; ბ) სამივე იქნება დემოკრატიული პარტიიდან; გ) ერთი იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან, ხოლო ორი – დემოკრატიული პარტიიდან.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: A – “სამივე არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან”, B – “სამივე არჩეული იქნება დემოკრატიული პარტიიდან” და C – “ერთი არჩეული იქნება რესპუბლიკური პარტიიდან, ხოლო ორი – დემოკრატიული პარტიიდან” . მაშინ,

ა) $$p(A)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30};$$

ბ) $$p(B)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6};$$

გ) $$p(C)=\frac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{4\cdot 15}{120}=\frac{1}{2}.$$

§17.4. ალბათობის გეომეტრიული განმარტება. ალბათობის კლასიკური განმარტების ერთ-ერთი ნაკლი ისაა, რომ მისი გამოყენება არ შეიძლება იმ

ექსპერიმენტებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ შედეგების უსასრულო რაოდენობა. ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელია ვისარგებლოთ გეომეტრიული ალბათობის ცნებით.

დავუშვათ L მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ წერტილს. რაც იმას ნიშნავს, რომ წერტილი აუცილებლად დაეცემა L მონაკვეთზე და ამასთანავე, თანაბარი შესაძლებლობებით ის შესაძლებელია დაემთხვეს მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილს. ამავე დროს, ალბათობა იმისა, რომ წერტილი დაეცემა L მონაკვეთის ნებისმიერ ნაწილზე არაა დამოკიდებული ამ ნაწილის განლაგებაზე მონაკვეთის შიგნით და პროპორციულია მისი სიგრძის.. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ აგდებული წერტილი დაეცემა l მონაკვეთზე, რომელიც არის ნაწილი L მონაკვეთის, გამოითვლება ფორმულით:

$$P = \frac{|l|}{|L|}, \tag{17.2}$$

სადაც $|l|$ – l მონაკვეთის სიგრძეა, ხოლო $|L|$ – L მონაკვეთისსიგრძე.

ანალოგიურად, შესაძლებელია ამოცანის დასმა წერტილისათვის, რომელსაც ვაგდებთ ბრტყელ S არეზე და ალბათობა იმისა, რომ ის მოხვდება ამ არის s ნაწილში განიმარტება როგორც:

$$P = \frac{|s|}{|S|}, \tag{17.3}$$

სადაც $|s|$ – s არის ფართობია, ხოლო $|S|$ – S არის ფართობი.

სამგანზომილებიან შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი გზით V სხეულში ჩავარდნილი წერტილი აღმოჩნდება ამ სხეულის v ნაწილში, გამოითვლება ფორმულით:

$$P = \frac{|v|}{|V|}, \tag{17.4}$$

სადაც, $|v|$ – v სხეულის მოცულობაა, ხოლო $|V|$ – V სხეულის მოცულობა.

ამოცანა 7. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში, რომლის ფართობია 100 კვადრატული სანტიმეტრი, შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი აღმოჩნდება ამ წრეში ჩახაზულ სამკუთხედში, რომლის ფართობიცაა 25 კვადრატული სანტიმეტრი.

ამოხსნა. (17.3) ფორმული გამოყენებით, გვექნება

$$P = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

§17.5. ალბათობის სტატისტიკური განმარტება. შემოვიღოთ A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის $W(A)$ ცნება, რომელიც ფორმულით ასე ჩაიწერება:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

სადაც n – ცდათა საერთო რიცხვია, m – A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი.

- A ხდომილობის სტატისტიკური ალბათობა ეწოდება A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ზღვარს, როცა ცდათა რიცხვი მიისწრაფის უსასრულობისკენ. ეს ფაქტი ფორმულით ასე ჩაიწერება:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} W_n(A).$$

ამ განმარტებიდან გამომდინარე, ცხადია ხდომილობის სტატისტუკურ ალბათობათ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ამ ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, როცა ცდათა რაოდენობა საკმარისად დიდია.

§17.6. ალბათობის განმარტება ზოგად შემთხვევაში. ალბათობის ფუნქცია და მისი თვისებები. საზოგადოდ, ხდომილობის ალბათობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს დისკრეტულ (წყვეტილ) ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$.

P ფუნქციას, რომელიც E სივრცის ყოველ e_i $(i = 1,2,\ldots)$ ელემენტარულ ხდომილობას შეუსაბამებს [0;1] სეგმენტში მოთავსებულ ნამდვილ $P(e_i)$ რიცხვს, ეწოდება ალბათობის ფუნქცია, თუ

$$\sum_{e_i \in E} P(e_i) = 1.$$

$P(e_i)$ რიცხვს ეწოდება e_i ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა.

- ნებისმიერ $A \subset E$ ხდომილობის ალბათობა ეწოდება რიცხვს

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} P(e_i).$$

ადვილად მტკიცდება ალბათობის ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

1) ნებისმიერი A ხდომილობის ალბათობა არაუარყოფითი სიდიდეა, ე.ი. $P(A) \geq 0$;
2) $P(E) = 1$, $P(\varnothing)=0$;
3) თუ A და B უთავსებადი ხდომილობებია, ე.ი. $A \cdot B = \varnothing$, მაშინ $P(A+B) = P(A) + P(B)$;

4) თუ $A \subset B$, მაშინ $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

5) ნებისმიერი A და B ხდომილობებისათვის $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

6) თუ $A \subset B$, მაშინ $P(A) \leq P(B)$;

7) ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $P(A) \leq 1$;

8) ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

თუ E არ არის დისკრეტულ ხდომილობათა სივრცე, ალბათობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

- E ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეზე განსაზღვრულ P ფუნქციას, რომელიც ყოველ $A \subset E$ ხდომილობას შეუსაბამებს არაუარყოფით რიცხვს, ეწოდება ალბათობის ფუნქცია, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) ნებისმიერი A ხდომილობისათვის $P(A) \geq 0$;

2) $P(E) = 1$; ;

3) თუ A და B უთავსებადი ხდომილობებია, მაშინ $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$P(A)$-ს უწოდებენ A ხდომილობის ალბათობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამგვარად განსაზღვრული P ფუნქცია აკმაყოფილებს 1)-8) თვისებებს.

დ ა ვ ა ლ ე ბ ა

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება ხდომილობა?
- რას ეწოდება ელემენტერული ხდომილობა?
- რას ეწოდება ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე?
- როგორ ელემენტარულ ხდომილობას ეწოდება A ხდომილობის ხელშემწყობი?
- რას ნიშნავს A ხდომილობის მოხდენა?
- რას ეწოდება აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობები?
- რას ეწოდება შემთხვევითი ხდომილობა?
- რას ნიშნავს: A ხდომილობა იწვევს B ხდომილობას?
- რას ეწოდება ექვივალენტური ხდომილობები?

- განსაზღვრეთ A და B ხდომილობების ჯამი.
- განსაზღვრეთ A და B ხდომილობების ნამრავლი.
- განსაზღვრეთ A და B ხდომილობების სხვაობა.
- რას ეწოდება უთავსებადი ხდომილობები?
- რას ეწოდება A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა?
- მოიყვანეთ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება.
- ჩამოაყალიბეთ კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი.
- რას ეწოდება გადანაცვლებათა რიცხვი?
- რას ეწოდება წყობათა რიცხვი?
- რას ეწოდება ჯუფთებათა რიცხვი?
- ჩამოაყალიბეთ ალბათობის გეომეტრიული განმარტება სიგრძის, ფართობის და მოცულობის მიხედვით.
- რას ეწოდება ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე?
- ჩამოაყალიბეთ ალბათობის სტატისტიკური განმარტება.
- მოიყვანეთ ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრება.
- მოიყვანეთ ალბათობის ფუნქციის განსაზღვრება, როცა ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე დისკრეტულია.
- მოიყვანეთ ალბათობის ფუნქციის თვისებები.
- მოიყვანეთ ალბათობის ზოგადი განმარტება.

სავარჯიშო 17

1. ყუთში, ერთმანეთისაგან მხოლოდ ფერით განსხვავებული, 5 თეთრი და 15 შავი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი ფერის?
2. ყუთში 1-დან 20-მდე გადანომრილი ერთნაირი ბურთულებია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული ბურთულას ნომერი გაიყოფა 5-ზე?
3. ალალბედზე ასახელებენ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება 24-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი წარმოადგენს 24-ის გამყოფს.
4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას მოვა ოთხზე მეტი რიცხვი?

5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას: ა) მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 8, ხვაობა 4; ბ) მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 8, თუ ცნობილია, რომ მათი სხვაობაა 4?

6. ლითონის ფული ააგდეს ორჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც მოვა ''გვირგვინი''?

7. ყუთში აწყვია 15 დეტალი, მათგან 10 შეღებილია. ამწყობი ალალბედზე იღებს 3 დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამივე აღმოჩნდება შეღებილი?

8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას ერთ მათგანზე მოვა ექვსიანი, ხოლო ორ დანარჩენზე 6-ისაგან განსხვავებული რიცხვები?

9. ყუთში აწყვია 100 დეტალი, მათგან 10 არასტანდარტულია. ალალბედზე იღებენ 4 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) არც ერთი მათგანი არ აღმოჩნდება არასტანდარტული; ბ) ყველა არასტანდარტულია; გ) ორი სტანდარტულია, ორი არასტანდარტული.

10. 12 სტუდენტს შორის 8 ფრიადოსანია. ამ ჯგუფიდან ალალბედზე აირჩიეს 9 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) 5 მათგანი იქნება ფრიადოსანი; ბ) 3 მათგანი იქნება ფრიადოსანი.

11. ყუთში აწყვია 5 ერთნაირი დეტალი, რომელთაგან 3 შეღებილია. ალალბედზე იღებენ 2 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ერთი მათგანი შეღებილი იქნება; ბ) ორივე იქნება შეღებილი; გ) ერთი მაინც იქნება შეღებილი.

12. ყუთში მოთავსებულია 3 თეთრი და 7 შავი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ორი ბურთულა იქნება: ა) ორივე შავი? ბ) ერთი შავი და ერთი თეთრი?

13. ცნობილია, რომ მიღებულ 50 ხელსაწყოში 5 დეფექტიანია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული 6 ხელსაწყოდან 2 აღმოჩნდება დეფექტიანი?

14. შვიდსართულიანი სახლის ლიფტში, პირველ სართულზე, შევიდა სამი პიროვნება. თითოეულ მათგანს ერთნაირი ალბათობით შეუძლია გამოსვლა მეორედან დაწყებულ ნებისმიერ სართულზე. იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:

$A=${სამივე პიროვნება მეოთხე სართულზე გამოვა};

$B=${სამივე პიროვნება ერთსა და იმავე სართულზე გამოვა};

C={სამივე პიროვნება სხვადასხვა სართულზე გამოვა}.

15. 20 სმ რიგრძის მონაკვეთზე მოთავსებულია 7 სმ სიგრძის მეორე მონაკვეთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დიდ მონაკვეთზე ალალბედზე დასმული წერტილი მცირე მონაკვეთზე მოხვდება.

16. ქარიშხალმა დააზიანა ხაზი 160-ე და 230-ე კილომეტრებს შორის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდება ხაზის მე-200-დან 220-ე კმ-ს შორის.

თავი 18

შედგენილი ხდომილობების ალბათობები

§18.1. პირობითი ალბათობა. ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა.

განვიხილოთ E ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის ორი A და B ხდომილობა. დავსვათ კითხვა: რას უდრის A ხდომილობის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ B ხდომილობა უკვე მოხდა? ეს ალბათობა აღინიშნება $P_B(A)$ ან $P(A|B)$ სიმბოლოთი და იკითხება ასე: A ხდომილობის ალბათობა B პირობით.

A ხდომილობის ალბათობა B პირობით ეწოდება სიდიდეს

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{თუ} \quad P(B) > 0.$$

მოყვანილი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

რადგან $AB = BA$, ამიტომ

$$P(AB) = P(BA) = P(A) \cdot P_A(B)$$

და მაშასადამე

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

ამოცანა 1. სტუდენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 50 საკითხიდან მოამზადა 40. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტს შეხვდება ბილეთი, რომლის სამივე საკითხი მომზადებული აქვს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: A_k იყოს იმის ხდომილობა, რომ სტუდენტს შეხვდა ბილეთი, რომლის $k-$ური საკითხი მას მომზადებული აქვს ($k = 1,2,3$). ხდომილობა, რომლის ალბათობაც ჩვენ გვაინტერესებს, წარმოადგენს სამი ხდომილობის ნამრავლს: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ და

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{40}{50} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{38}{48} = \frac{147}{490}.$$

§18.2. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა. ორი A და B ხდომილობას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ერთი მათგანის მოხდენა ან არ მოხდენა გავლენას არ ახდენს მეორის მოხდენის ალბათობაზე, ე.ი. $P_B(A) = P(A)$ და $P_A(B) = P(B)$.

ამოცანა 2. ყუთში აწყვია 20 თეთრი და 30 შავი ერთნაირი ზომის ბურთულა. ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ თუ ყუთიდან ალალბედზე ამოვიღებთ ორ ბურთულას, ორივე აღმოჩნდება თეთრი. ცდის განხორციელება შესაძლებელია ორი გზით: 1) ყუთიდან ვიღებთ ერთ ბურთულას, ვინიშნავთ მის ფერს, ბურთულას ვაბრუნებთ ყუთში და ცდას ვიმეორებთ; 2) ყუთიდან ვიღებთ ერთ ბურთულას, ვინიშნავთ მის ფერს, მაგრამ უკან აღარ ვაბრუნებთ და ცდას ვიმეორებთ.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: A იყოს ხდომილობა – ‘‘პირველი ბურთულა თეთრია’’, B – ‘‘მეორე ბურთულა თეთრია’’.

პირველ შემთხვევაში

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}=\frac{4}{25},$$

მეორე შემთხვევაში

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}=\frac{38}{245}.$$

პირველ შემთხვევაში B ხდომილობა დამოუკიდებელია A ხდომილობისაგან, ხოლო მეორე შემთხვევაში – დამოკიდებულია A ხდომილობაზე.

§18.3. სრული ალბათობის ფორმულა. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე E ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილობები.

ხდომილობათა $A_1, A_2, ..., A_n$ სისტემას უწოდებენ ხდომილობათა სრულ ჯგუფს, თუ ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

ა) ისინი წყვილ-წყვილად უთავსებადი ხდომილობებია, ე.ი.

$A_iA_j=\varnothing, \qquad i, j=1,2,...,n;$

ბ) $A_1+A_2+...+A_n=E.$

ხშირად $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილობებს უწოდებენ ჰიპოთეზებს, ხოლო ხდომილობათა სრულ ჯგუფს – E სივრცის დახლეჩვას.

თეორემა 18.1. ვთქვათ, $A_1, A_2, ..., A_n$ ქმნიან ხდომილობათა სრულ ჯგუფს. მაშინ ნებისმიერი $B\subset E$ ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P_{A_i}(B). \qquad (18.1)$$

(18.1)-ს ეწოდება სრული ალბათობის ფორმულა.

ამოცანა 3. საწყობში ინახება სამ საამქროში დამზადებული ერთი დასახელების 2000 დეტალი. მათ შორის 600 დამზადებულია №1 საამქროში, 650 – №2 საამქროში, ხოლო 750 – №3 საამქროში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდება, თუ ცნობილია, რომ №1 საამქრო საშუალოდ 95% სტანდარტულ პროდუქციას უშვებს, №2 საამქრო – 99%-ს, ხოლო №3 საამქრო – 98%-ს?

ამოხსნა. B იყოს ხდომილობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი არასტანდარტული აღმოჩნდება, A_1 – ხდომილობა, რომ ეს დეტალი დამზადებულია №1 საამქროში, A_2 – დეტალი დამზადებულია №2 საამქროში, A_3 – დეტალი დამზადებულია №3 საამქროში.

გამოვიყენოთ სრული ალბათობის ფორმულა:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P(B_{A_2}) + P(A_3) \cdot P(B_{A_3}) .$$

$P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$ გამოითვლება ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების გამოყენებით:

$$P(A_1) = \frac{600}{2000} = 0{,}3; \quad P(A_2) = \frac{650}{2000} = 0{,}325; \quad P(A_3) = \frac{750}{2000} = 0{,}375;$$

$$P_{A_1}(B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05; \quad P_{A_2}(B) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01; \quad P_{A_3}(B) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 .$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}325 \cdot 0{,}01 + 0{,}375 \cdot 0{,}02 = 0{,}02575.$$

§18.4. ბაიესის ფორმულა.

თეორემა 18.2. ვთქვათ, $A_1, A_2, ..., A_n$ სისტემა ქმნის ხდომილობათა სრულ ჯგუფს და B რაიმე ხდომილობაა. მაშინ ნებისმიერი $k-$სათვის $(k = 1,2,...,n)$ მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)}. \qquad (18.2)$$

(18.2)-ს ეწოდება ბაიესის ფორმულა.

ამოცანა 4. ზემოთ მოყვანილი მაგალითის პირობებში დავუშვათ, რომ ალალბედზე აღებული დეტალი აღმოჩნდა არასტანდარტული და განვსაზღვროთ, როგორი ალბათობით შეიძლება მივაკუთვნოთ ეს დეტალი თითოეულ საამქროს.

ამოხსნა. უნდა ვიპოვოთ $P_B(A_1)$, $P_B(A_2)$, $P_B(A_3)$ ალბათობები. ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულებით:

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{0{,}02575} = \frac{60}{103},$$

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{0{,}325 \cdot 0{,}01}{0{,}02575} = \frac{13}{103},$$

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}(B)}{P(B)} = \frac{0{,}375 \cdot 0{,}02}{0{,}02575} = \frac{30}{103}.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება A ხდომილობის ალბათობა B პირობით?
- მოიყვანეთ ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის ფორმულა.
- რას ეწოდება A და B ხდომილობის დამოუკიდებლობა?
- რას ეწოდება ხდომილობათა სრული ჯგუფი?
- ჩამოაყალიბეთ თეორემა სრული ალბათობის შესახებ.
- ჩამოაყალიბეთ ბაიესის თეორემა.

სავარჯიშო 18

1. იპოვეთ ერთი კამათლის გაგორებისას 2-ანის მოსვლის ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ მოვიდა ლუწი რიცხვი.
2. ყუთში 20 თეთრი და 15 შავი ბურთულაა. რიგრიგობით იღებენ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბურთულა იქნება თეთრი, თუ ცნობილია, რომ პირველი იყო შავი?
3. ყუთში 19 თეთრი და 5 შავი ბურთულაა. ერთიმეორის მიყოლებით ალალბედზე ამოიღეს ორი ბურთულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა იქნება თეთრი?
4. კარგად არეულ 36 კარტიანი კომპლექტიდან ალალბედზე ამოიღეს ორი კარტი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი იქნება წითელი?
5. ამწყობმა საამქრომ მიიღო 100 დეტალი, რომელთაგან ორი არასტანდარტულია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე აღებული ორი დეტალიდან ორივე იქნება არასტანდარტული?

6. 6 სახელმძღვანელოს შორის სამი ყდიანია. ალალბედზე იღებენ ორ წიგნს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე წიგნი ყდიანი იქნება?

7. 25 კაციან ჯგუფში 7 ოთხოსანი და 3 ხუთოსანი სტუდენტია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოძახებული სამი სტუდენტიდან: ა) სამივე იქნება ოთხოსანი; ბ) სამივე იქნება ხუთოსანი; გ) არცერთი არ იქნება ოთხოსანი ან ხუთოსანი?

8. ყუთში 6 თეთრი და 4 წითელი ბურთულაა. რას უდრის ალბათობა, რომ ალალბედზე ამოღებული ოთხი ბურთიდან: ა) ოთხივე იქნება წითელი ბ) პირველი ორი იქნება წითელი დანარჩენი ორი კი თეთრი?

9. ერთ ყუთში 6 თეთრი და 4 შავი ბურთულაა, მეორეში კი – 7 თეთრი და 3 შავი. თითოეული ყუთიდან იღებენ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა იქნება თეთრი?

10. აბიტურიენტმა პროგრამით გათვალისწინებული 60 საკითხიდან შეისწავლა 50. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აბიტურიენტი ხუთიანს მიიღებს, თუ ცნობილია, რომ მას მხოლოდ სამ საკითხს ეკითხებიან?

11. ჩათვლა ტარდება შემდეგი წესით: მიღებული საკითხის არცოდნის შემთხვევაში სტუდენტს დამატებით აძლევენ კიდევ ერთ საკითხს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩათვლას ვერ მიიღებს, თუ ჩათვლისთვის განკუთვნილ 10 საკითხიდან მან იცის მხოლოდ 7 საკითხი?

12. აგორებენ ორ კამათელს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთზე მოვა კენტი რიცხვი, ხოლო მეორეზე – ხუთიანი?

13. 52 კარტიანი ორი კომპლექტიდან ალალბედზე იღებენ თითო კარტს რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი იქნება ჯვრის?

14. ერთ ყუთში 10 დეტალია, რომელთაგან 3 სტანდარტულია, მეორეში იმავე დასახელების 15 დეტალიდან 6-ია სტანდარტული. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე იღებენ თითო დეტალს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე დეტალი იქნება სტანდარტული?

15. ხარატი საშუალოდ 90% სტანდარტულ დეტალს ამზადებს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ხარატის მიერ დამზადებული სამი დეტალიდან სამივე იქნება სტანდარტული?

16. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი სამიზნეს მოახვედრებს 0,8-ის ტოლია, მეორე მსროლელითვის იგივე ალბათობა უდრის 0,2-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელის მიერ თითოჯერ გასროლის შემდეგ

სამიზნე დაზიანდება, თუ ცნობილია, რომ სამიზნის დასაზიანებლად მიზანში ერთხელ მოხვედრაა საკმარისი?

17. ამწყობმა საამქრომ მიიღო ერთი და იგივე დეტალების ორი პარტია: 200 დეტალი, რომელთაგან 4 არასტანდარტულია და 100 დეტალი, რომელთაგან 5 არასტანდარტულია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თითოეული პარტიიდან ალალბედზე აღებული თითო დეტალიდან ერთი მაინც იქნება სტანდარტული?

18. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას ოთხივეზე ერთი და იგივე რიცხვი მოვა?

19. ერთ ყუთში 5 შავი და 10 თეთრი ბურთულაა, მეორეში კი 10 შავი და 5 თეთრი. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე ვიღებთ თითო ბურთულას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ორი ბურთულიდან, ერთი მაინც იქნება თეთრი?

20. ერთი მსროლელისთვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა p, მეორისთვის – q. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად გასროლისას ერთი მოახვედრებს მიზანში, მეორე კი ააცდენს?

21. ერთ ყუთში მოთავსებულია პირველი ხარატის მიერ დამზადებული 100 დეტალი, მეორე ხარატის მიერ დამზადებული 80 დეტალი და მესამე ხარატის მიერ დამზადებული 120 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული დეტალი სტანდარტული იქნება, თუ პირველი ხარატი საშუალოდ 95% სტანდარტულ დეტალს ამზადებს, მეორე ხარატი 98%-ს, მესამე კი 90%-ს.

22. ორ ყუთში ერთნაირი დასახელების ოც-ოცი დეტალია, თითოეულში 18 სტანდარტული და 2 არასტანდარტული. პირველი ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორე ყუთში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ამოღებული დეტალი იქნება სტანდარტული.

23. სამ ყუთში ერთნაირი დასახელების მქონე ოც-ოცი დეტალია, მათ შორის 15 სტანდარტული და 5 არასტანდარტული. პირველი ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მეორე ყუთში. ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან ალალბედზე ამოიღეს ერთი დეტალი და ჩადეს მესამე ყუთში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მესამე ყუთიდან ალალბედზე ამოღებული დეტალი იქნება სტანდარტული?

24. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს დააზიანებს, არის 0,6, ხოლო მეორისთვის – 0,7. ორივე მსროლელმა ერთმანეთისაგან

დამოუკიდებლად გაისროლა. რის შედეგადაც მიზანი დაზიანდა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მიზანი პირველმა მსროლელმა დააზიანა?

25. სამი ქვემეხისგან შემდგარმა ბატარეამ ერთდროულად გაისროლა, რის შედეგადაც მიზანში ორი ყუმბარა მოხვდა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვდა პირველი ქვემეხის გასროლილი ყუმბარა, თუ ამ ქვემეხებისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობა შესაბამისად 0,2-ის, 0,4-ის და 0,3-ის ტოლია.

26. ერთ ყუთში მოთავსებულია 10 თეთრი და 5 შავი მხოლოდ ფერით განსხვავებული ბურთი, მეორე ყუთში კი – 20 თეთრი და 5 შავი. თითოეული ყუთიდან ალალბედზე იღებენ თითო ბურთს და შემდეგ ამოღებული ორიდან ალალბედზე არჩევენ ერთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ: ა) ამოღებული ბურთი შავი ფერისაა; ბ) ეს შავი ფერის ბურთი ამოღებულია პირველი ყუთიდან.

27. გამოცდაზე მისული 20 სტუდენტიდან 8 მომზადებულია ხუთიანზე, 6 ოთხიანზე, 4 სამიანზე და 2 ორიანზე. საგამოცდო ბილეთებში შეტანილია 40 საკითხი, რომელთაგან ხუთიანზე მომზადებულმა იცის ყველა, ოთხიანზე მომზადებულმა 35, სამიანზე მომზადებულმა 25 და ორიანზე მომზადებულმა 10 საკითხი. ერთ-ერთმა სტუდენტმა მიიღო ხუთიანი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს სტუდენტი მომზადებულია: ა) ოთხიანზე; ბ) ორიანზე.

28. ალბათობა იმისა, რომ პიროვნებას აქვს რაიმე დაავადება 0,03-ის ტოლია. თუ პიროვნება დაავადებულია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ სამედიცინო დიაგნოსტიკური ცენტრის ტესტი მოგვცემს დადებით პასუხს (დაავადება აღმოჩენილია) არის 0,9-ის ტოლი. თუ პიროვნება დაავადებული არ არის, მაშინ დადებითი პასუხის ალბათობაა 0,02.

ა) დავუშვათ ტესტმა მოგვცა დადებითი შედეგი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ პიროვნება მართლაც დაავადებულია;

ბ) დავუშვათ ტესტმა მოგვცა უარყოფითი შედეგი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ პიროვნება დაავდადებული არ არის?

29. პირველ ყუთში 10 ბურთია, მათგან 8 თეთრი ფერისაა, მეორე ყუთში 20 ბურთია, მათგან მხოლოდ 4-ია თეთრი ფერის. თითოეული ყუთიდან შემთხვევით ამოიღეს თითო-თითო ბურთი და შემდეგ ამოღებული ორი ბურთიდან შემთხვევით ამოირჩიეს ერთ-ერთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ბურთი თეთრი ფერისაა?

თავი 19

შემთხვევითი სიდიდე

§19.1. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის ცნება, მისი განაწილების კანონი და განაწილების ფუნქცია. სიდიდეს, რომელიც ექსპერიმენატის შედეგად იღებს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს, შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეებს, როგორც წესი, დიდი ლათინური ასოებით აღნიშნავენ, ხოლო მათ შესაძლო მნიშვნელობებს – შესაბამისი პატარა ასოებით.

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობებია $x_1, x_2, ..., x_n$. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, მათ ელემენტარული ხდომილობები ეწოდებათ, უფრო სწორედ, ელემენტარულ ხდომილობებს წარმოდგენს $\{X = x_k\}$ სიმრავლეები. p_k-თი აღვნიშნოთ ამ ელემენტარული ხდომილობების ალბათობები. ასეთ შემთხვევით სიდიდეებს (ე.ი. ისეთებს, რომლებიც სასრული რაოდენობის მნიშვნელობებს ღებულობენ) დისკრეტულ (წყვეტილ) შემთხვევით სიდიდეებს უწოდებენ.

X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი (ან უბრალოდ განაწილება) ეწოდება შემდეგი სახის ცხრილს

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

სადაც $p_k = P(X = x_k)$ და $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

აქვე ვიგულისხმოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები დალაგებულია ზრდადობით – $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

ვიტყვით, რომ შემთხვევითი სიდიდე სრულად არის განსაზღვრული, თუ მოცემულია მისი განაწილების კანონი. ეს ფაქტი ასე შეიძლება იქნას გააზრებული: თუ მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, მაშინ შესაძლებელია $\{a < X < b\}$ სახის ხდომილობების ალბათობათა გამოთვლა ნებისმიერი a და b ნამდვილი რიცხვებისათვის. ამისათვის კი საკმარისია შევკრიბოთ ის p_i–ები, რომელთა შესაბამისი x_i–ებიც მოხვდება $(a;b)$ ინტერვალში.

ამოცანა 1. X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,15	0,3	0,25	0,2

რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ

1) შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ერთზე ნაკლებ მნიშვნელობას;
2) შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს დადებით მნიშვნელობას;
3) შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს სამზე ნაკლებ დადებით მნიშვნელობას.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ,

$$(X=-1),\quad (X=0),\quad (X=1),\quad (X=2),\quad (X=3)$$

ელემენტარული ხდომილობებია და რადგან ისინი უთავსებადია, ხდომილობათა შეკრების წესის გამოყენებით:

1) $P(X<1)=P(X=-1)+P(X=0)=0{,}1+0{,}15=0{,}25;$

2) $P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}3+0{,}25+0{,}2=0{,}75;$

3) $P(0<X<3)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}3+0{,}25=0{,}55.$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შემთხვევითი სიდიდის სრულად განსაზღვრისათვის საჭიროა მისი განაწილების ცოდნა. მაგრამ, ეს არ არის ერთადერთი გზა; კერძოთ, $p_k=P\{X=x_k\}$ ალბათობების ნაცვლად განვიხილოთ $\{X\le x_k\}$ ხდომილობათა ალბათობები, რომლებსაც ჩვენ $F(x_k)-$ით აღვნიშნავთ, ე.ი.

$$F(x_k)=P(X\le x_k).$$

მაშინ

$$F(x_k)=P(X\le x_k)=P(X=x_1 \text{ ან } X=x_2 \text{ ან და ა.შ ან } X=x_k)$$

და რადგან

$$(X=x_1),\quad (X=x_2),\ \ldots\ ,(X=x_k)$$

ხდომილობები უთავსებადია, ხდომილობათა შეკრების წესით გვექნება:

$$F(x_k)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_k)=p_1+p_2+\ldots+p_k. \qquad (19.1)$$

ე.ი. თუ ჩვენ ვიცით $p_1,\ p_2,\ \ldots\ ,\ p_n$ შეგვიძლია გამოვთვალოთ

$$F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots\ ,\ F(x_n).$$

პირიქით, (19.1)-დან ადვილად ჩანს, რომ

$$p_k=F(x_k)-F(x_{k-1}). \qquad (19.2)$$

მაშასადამე, (19.2)-დან, თუ ჩვენ ვიცით $F(x_1)$, $F(x_2)$, ... , $F(x_n)$, შეგვიძლია $p_1, p_2, ..., p_n-$ის აღდგენა. ასე რომ, $p_1, p_2, ..., p_n-$ის ცოდნა და $F(x_1), F(x_2), ...,$ $F(x_n)-$ის ცოდნა ერთი და იგივეა.

ახლა განვიხილოთ $F(x) = P(X \le x)$ ნებისმიერი $x-$თვის. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < x_1; \\ \sum_{i=1}^{k} p_i, & \text{როცა } x_k \le x < x_{k+1},\ k = 1,2,...,n-1; \\ 1, & \text{როცა } x \ge x_n \end{cases} \qquad (19.3)$$

და

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a). \qquad (19.4)$$

მაშასადამე, გარდა განაწილების კანონისა, შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება სრულიად დავახასიათოთ $F(x)$ ფუნქციის საშუალებით.

$F(x)$ ფუნქციას დიდი მნიშვნელობა აქვს ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში. $F(x)$ ფუნქციას აქვს სპეციალური სახელი: ***„X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია".***

x ცვლადის $F(x) = P(X \le x)$ ფუნქციას X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება.

განმარტების თანახმად, განაწილების ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის და ის წარმოადგენს $(X \le x)$ ხდომილობის ალბათობას. ამიტომ, მას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1;$

2) F არაკლებადი ფუნქცია;

3) F ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია $[0,\ 1]-$ში.

ამოცანა 2. ამოცანა 1-ში მოყვანილი განაწილების კანონიდან განვსაზღვროთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. როცა $x < -1$, მაშინ

$F(x) = P(X \le x) = 0;$

თუ $-1 \le x < 0$, მაშინ

$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) = 0{,}1;$

თუ $0 \le x < 1$, მაშინ

$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25;$

თუ $1 \le x < 2$, მაშინ

$$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}55;$$

თუ $2 \le x < 3$, მაშინ

$$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}8;$$

თუ $x \ge 3$, მაშინ

$$F(x) = P(X \le x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < -1; \\ 0{,}1, & \text{როცა} \quad -1 \le x < 0; \\ 0{,}25, & \text{როცა} \quad 0 \le x < 1; \\ 0{,}55, & \text{როცა} \quad 1 \le x < 2; \\ 0{,}8, & \text{როცა} \quad 2 \le x < 3; \\ 1, & \text{როცა} \quad x \ge 3. \end{cases}$$

ამოცანა 3. ვთქვათ, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < -3; \\ 0{,}15, & \text{როცა} \quad -3 \le x < 0{,}5; \\ 0{,}45, & \text{როცა} \quad 0{,}5 \le x < 2; \\ 0{,}65, & \text{როცა} \quad 2 \le x < 5; \\ 0{,}8, & \text{როცა} \quad 5 \le x < 7; \\ 1, & \text{როცა} \quad x \ge 7. \end{cases}$$

ვიპოვოთ განაწილების კანონი.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებს განსაზღვრავს $F(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები, ხოლო შესაბამისი ალბათობები გამოითვლება (19.2) ფორმულით. ამიტომ მივიღებთ, რომ განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

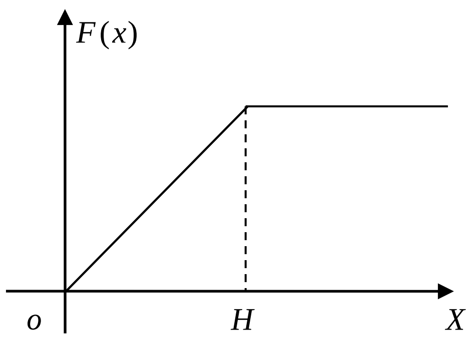
X	-3	0,5	2	5	7
P	0,15	0,3	0,2	0,15	0,2

§19.2. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის ცნება, მისი განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე. უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდის ცნებამდი მივყავართ შემდეგ მაგალითს: ვთქვათ, ცილინდრული ფორმის სავსე ჭიქიდან, რომლის სიმაღლეა H სმ, ხოლო ფსკერის რადიუსი R სმ, ხდება წყლის გადმოსხმა. შემთხვევით მომენტში წყლის გადმოსხმა წყდება და ჩვენ

ვინტერესდებით დარჩენილი წყლის სიმაღლით, რომელსაც აღვნიშნავთ X-ით. ცხადია, რადგანაც წყლის გადმოსხმის შეწყვეტის მომენტი შემთხვევითია, X წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0, H]$ ინტერვალი. გამოვთვალოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია გეომეტრიული ალბათობის საშუალებით

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{V_x}{V_H} = \frac{\pi R^2 x}{\pi R^2 H} = \frac{x}{H},$$

სადაც V_x და V_H, შესაბამისად, არის წყლის დარჩენილი და მთელი მოცულობები. როგორც ვხედავთ, განაწილების ფუნქცია $(-\infty;0)$ შუალედში ნულის ტოლია, 0-დან H–მდე წრფივია და H–ის შემდეგ 1-ის ტოლია ანუ მის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 1

ცხადია, ასეთი განაწილების ფუნქცია არ შეიძლება ჰქონდეს არც ერთ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს და მაშასადამე, ამ მაგალითში საქმე გვქონია სულ სხვა ბუნების შემთხვევით სიდიდესთან – უწყვეტი ტიპის შემთხვევით სიდიდესთან.

- შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი ტიპის, თუ მისი განაწილების ფუნქცია უწყვეტია.

უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ფუნქციებს აქვთ ყველა ის თვისება, რაც ჰქონდათ დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ფუნქციებს, მაგრამ მათგან განსხვავებით ნებისმიერი x–სათვის

$$P(X = x) = 0.$$

გარდა ამისა, განსხვავებით დისკრეტულისაგან, მათ აქვთ კიდევ ერთი დამატებითი თვისება: ისინი არიან უწყვეტნი და გააჩნიათ წარმოებული. განაწილების ფუნქციის წარმოებულს, ***განაწილების სიმკვრივეს*** უწოდებენ და აღნიშნავენ $f(x)$–ით. მაშასადამე,

$$f(x) = F'(x). \tag{19.5}$$

თუ ცნობილია უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის $f(x)$ განაწილების სიმკვრივე, მაშინ $F(x)$ განაწილების ფუნქცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \ . \tag{19.6}$$

განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) განაწილების სიმკვრივე არაუარყოფითია, ე.ი. $f(x) \geq 0$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

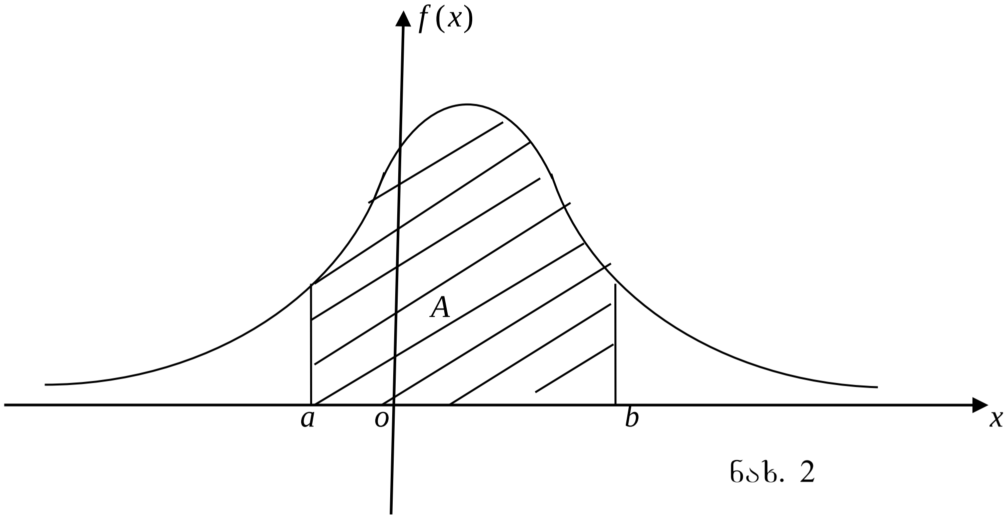
კერძოდ, თუ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები ეკუთვნის $[a,b]$ ინტერვალს, მაშინ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1 .$$

განაწილების სიმკვრივითაც ცალსახად შეიძლება განვსაზღვროთ ყველა $\{a \leq X < b\}$ სახის ხდომილობათა ალბათობები, შემდეგი ფორმულით:

$$P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx . \tag{19.7}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ განაწილების სიმკვრივეს განაწილების ფუნქციასთან შედარებით ის უპირატესობა აქვს, რომ მისი საშუალებით გამოსახული რაიმე ინტერვალში შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობას (როგორც ინტერვალს) აქვს ჩვენთვის უკვე კარგად ცნობილი ფართობის ინტერპრეტაცია.



ნახ. 2

ალბათობა ამ შემთხვევაში წარმოადგენს სიმკვრივის წირის ქვეშ მოთავსებული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს (იხ. ნახ. 2).

$$P(a < X \le b) = S(A).$$

ამოცანა 4. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \le 0; \\ D\cos x, & \text{როცა } 0 < x \le \frac{\pi}{3}; \\ 0, & \text{როცა } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

ა) განსაზღვრეთ D პარამეტრის მნიშვნელობა;

ბ) იპოვეთ $F(x)$ განაწილების ფუნქცია;

გ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$$

ინტერვალში.

ამოხსნა. პირველ რიგში შევამოწმოთ, აკმაყოფილებს თუ არა ფუნქცია განაწილების სიმკვრივის თვისებებს. მართლაც, $f(x) \ge 0$, როცა $D > 0$. D პარამეტრის მნიშვნელობა კი გამოითვლება განაწილების სიმკვრივის მეორე თვისებიდან.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1.$$

ჩავატაროთ გამოთვლები. განაწილების სიმკვრივის გამოსახულებიდან გამომდინარე მივიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(u)du + \int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} D\cos u du + \int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} 0du = D\sin u \Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = 1.$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ, რომ როცა $D = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $f(x)$ აკმაყოფილებს განაწილების სიმკვრივის ყველა თვისებას.

განაწილების ფუნქციის გამოსათვლელად ვისარგებლოდ ფორმულით

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

როცა $x<0$, მაშინ $f(x)=0$ და

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0du=0.$$

როცა $0<x<\dfrac{\pi}{3}$, მაშინ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0du+\int_{0}^{x}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x.$$

როცა $x>\dfrac{\pi}{3}$, მაშინ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0du+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du+\int_{\frac{\pi}{3}}^{x}0du=1.$$

ამრიგად, საძიებელი განაწილების ფუნქციაა

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\le 0;\\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x, & \text{როცა } 0<x\le\dfrac{\pi}{3};\\ 1, & \text{როცა } x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

მესამე შეკითხვაზე პასუხის მისაღებად ვისარგებლოდ (19.7) ფორმულით. მივიღებთ:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin u\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}.$$

ამოცანა 5. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\le 0;\\ \sin 2x, & \text{როცა } 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 1, & \text{როცა } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე.

ამოხსნა. (19.5) ფორმულის თანახმად

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } x\le 0;\\ 2\cos 2x, & \text{როცა } 0<x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 0, & \text{როცა } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე?
- რას ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე?
- რას ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?
- რას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია?
- რა კავშირი არსებობს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონსა და განაწილების ფუნქციას შორის?
- მოიყვანეთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის თვისებები?
- როგორ შენთხვევით სიდიდეს ეწოდება უწყვეტი?
- რას ეწოდება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე.
- როგორ გამოისახება განაწილების ფუნქცია განაწილების სიმკვრივის საშუალებით?
- მოიყვანეთ განაწილების სიმკვრივის თვისებები.
- მოიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის რაიმე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია განაწილების სიმკვრივის დახმარებით.

სავარჯიშო 19

1. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. შემთხვევითი X სიდიდე არის მიზანში მოხვედრათა რიცხვი. დაწერეთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

2. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1 = 2;\ x_2 = 5;\ x_3 = 8$. ცნობილია პირველი ორი შესაძლო მნიშვნელობის ალბათობები: $p_1 = 0{,}4;\quad p_2 = 0{,}15$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

3. ლატარიაში გამოშვებულია 1000 ბილეთი. აქედან გათამაშდება: ერთი მოგება 1000 ლარიანი, ოთხი მოგება – თითო 500 ლარიანი, ხუთი მოგება – თითო 400 ლარიანი და 10 მოგება – თითო 100 ლარიანი. იპოვეთ ერთი ბილეთის მოგების განაწილების კანონი.

4. მსროლელი მიზანში ისვრის სამჯერ, ყოველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. დაწერეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

5. კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. დაწერეთ 6-იანის მოსვლათა განაწილების კანონი.

6. ლითონის ფულს აგდებენ 4-ჯერ. დაწერეთ ‘‘გვირგვინის’’ მოსვლათა განაწილების კანონი.

7. მსროლელი, რომელსაც 3 ვაზნა აქვს, ესვრის მიზანში პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,8-ს. იპოვეთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

8. მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, მიზანში ისვრის პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,6-ს. იპოვეთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

9. ორი მსროლელი ისვრის ერთ მიზანში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანში მოახვედრებს, არის 0,5, მეორე რომ მოახვედრებს – 0,4. შეადგინეთ მიზანში მოხვედრათა განაწილების კანონი.

10. მონადირე ესვრის ნადირს პირველ მოხვედრამდე და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. შეადგინეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ ერთი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,7ს.

11. ალბათობა იმისა, რომ ბიბლიოთეკაში სტუდენტისათვის საჭირო წიგნი თავისუფალია, უდრის 0,4-ს. შეადგინეთ იმ ბიბლიოთეკების განაწილების კანონი, რომლებიც უნდა ინახულოს სტუდენტმა, თუ ქალაქში 4 ბიბლიოთეკაა.

12. ოჯახში 4 ბავშვია. შეადგინეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც გამოსახავს ვაჟთა რაოდენობას, თუ ვაჟიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია.

13. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	1	3
P	0,4	0,6

Y	2	4
P	0,2	0,8

შეადგინეთ $X+Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

14. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	4	6
P	0,3	0,7

Y	1	2
P	0,8	0,2

შეადგინეთ $X-Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

15. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი:

X	-2	0	1	3
P	0,1	0,5	0,3	0,1

შეადგინეთ X^2 და $3X$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

16. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

X	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

შეადგინეთ XY შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

17. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია.

18. მიზანში ისვრიან 4-ჯერ. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,3. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია და განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება [1, 4] შუალედში.

19. ყუთში 7 ბურთულაა, რომელთაგან 4 თეთრია, დანარჩენი შავი. შემთხვევითად აირჩევა 3 ბურთულა. X წარმოადგენს არჩეულ 3 ბურთულაში თეთრების რაოდენობას. ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და ალბათობა $P(X \geq 2)$.

20. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x<0;\\ x^2, & \text{როცა} \quad 0<x\le 1;\\ 1, & \text{როცა} \quad x>1.\end{cases}$$

ვიპოვოთ შემთხვევითი სიდიდის (0,25; 0,75) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

21. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}, & \text{როცა} \quad x>1;\\ 0, & \text{როცა} \quad x\le 1.\end{cases}$$

ვიპოვოთ X -ის განაწილების სიმკვრივე.

22. X შემთხვევით სიდიდე მოცემულია განაწილების ფუნქციით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\le 2;\\ 0,5x-1, & \text{როცა} \quad 2<x\le 4;\\ 1, & \text{როცა} \quad x>4.\end{cases}$$

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას:

ა) 0,2-ზე ნაკლებს ბ) 3-ზე ნაკლებს გ) არანაკლებ 5-ისა.

23. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\le 0;\\ x^4, & \text{როცა} \quad 0<x\le 1;\\ 1, & \text{როცა} \quad x>1.\end{cases}$$

ვიპოვოთ განაწილების სიმკვრივე

24. შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების სიმკვრივით:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{როცა} \quad 0\le x\le \pi;\\ 0, & \text{როცა} \quad x>\pi.\end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

თავი 20
შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

§20.1. მათემატიკური ლოდინი – საშუალო მნიშვნელობა. როგორც ადრე ავღნიშნეთ, შემთხვევითი სიდიდეების სრული მახასიათებლებია ე.წ. განაწილების კანონები. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები სრულიად ხასიათდება განაწილების ფუნქციის ან განაწილების კანონის მოცემით, ხოლო უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები – განაწილების ფუნქციის ან განაწილების სიმკვრივის მითითებით. ხშირად არ არის აუცილებელი შემთხვევითი სიდიდე ამომწურავად იყოს დახასიათებული, საკმარისია მივუთითოთ მისი ცალკეული რიცხვითი მახასიათებლები (განაწილების პარამეტრები), რომლებიც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების არსებით ნიშნებს ახასიათებენ. რიცხვით მახასიათებლებს (პარამეტრებს), რომელთა დანიშნულებაა შეკუმშულ ფორმაში გადმოგვცეს განაწილების კანონის ყველაზე არსებითი თავისებურებანი, შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები ეწოდება.

შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის, უპირველეს ყოვლისა, უნდა განვსაზღვროთ ისეთი მახასიათებლები, რომლებიც ახასიათებენ, შემთხვევითი სიდიდის მდებარეობას რიცხვით ღერძზე, ე.ი. უჩვენებენ რომელიღაც საშუალო მნიშვნელობას, რომლის ‘‘გარშემოც’’ ჯგუფდება შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი. ერთ-ერთ ასეთ რიცხვით მახასიათებელს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომელსაც ზოგჯერ მის საშუალო მნიშვნელობასაც უწოდებენ. განვმარტოთ ეს ცნება ჯერ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის. ამისთვის განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების კანონია

X	x_1	x_2	···	x_n
P	p_1	p_2	···	p_n

- დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლების ჯამს:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n \ . \tag{20.1}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n},$$

მაშინ,

$$EX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

ანუ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არის მისი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული, რაც ამართლებს მათემატიკური ლოდინის მეორე სახელწოდებას: „შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა".

დამტკიცების გარეშე მოგვყავს მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. $Ec = c$, ანუ მუდმივის მათემატიკური ლოდინი ამავე მუდმივის ტოლია.

2. $EcX = cEX$, ანუ მუდმივი გადის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ.

3. $E(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1EX_1 + c_2EX_2$, ანუ წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი ლოდინების წრფივი კომბინაციის ტოლია.

4. თუ X_1 და X_2 შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებლებია, მაშინ $EX_1X_2 = EX_1EX_2$.

უწყვეტი ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება რიცხვს:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad \text{თუ} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < +\infty .$$

§20.2. დისპერსია – გაფანტულობის საზომი. განვიხილოთ ორი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე განაწილების შემდეგი კანონებით:

X_1	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2	-1000	1000
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(20.1) ფორმულის მიხედვით,

$$EX_1 = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0; \qquad EX_2 = (-1000)\cdot\frac{1}{2} + 1000\cdot\frac{1}{2} = 0;$$

და ე.ი.

$$EX_1 = EX_2 = 0 .$$

მაშასადამე, მათემატიკური ლოდინის დონეზე ამ შემთხვევით სიდიდეებს შორის განსხვავება არ არის. მივცეთ ამ შემთხვევით სიდიდეებს შემდეგი

ინტერპრეტაცია. დავუშვათ პიროვნებას სთავაზობენ ითამაშოს ''გვირგვინი-საფასურის'' გრძელი სერიის ორიდან ერთ-ერთი ვარიანტი: პირველის მიხედავით, ყოველი გამოცნობისას ის იგებს ერთ ლარს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებს ერთ ლარს, ხოლო მეორე ვარიანტის მიხედვით, ყოველი წარმატების შემთხვევაში იგებს 1000 ლარს, ხოლო მარცხისას აგებს 1000 ლარს. თამაშის რომელ ვარიანტს აირჩევდა ეს პიროვნება, თუ მისი საწყისი კაპიტალი შეზღუდულია და შეადგენს 10000 ლარს?

ასეთი ინტერპრეტაციის დროს $EX_1 = EX_2 = 0$ ტოლობა ნიშნავს იმას, რომ საშუალო მოგება ორივე ვარიანტში ერთნაირია და ნულის ტოლია. ე.ი. თითქოს ორივე თამაშს ერთნაირ შედეგამდე მივყავართ: ორივე ვარიანტში ის არც წააგებს და არც მოიგებს. ბევრი პიროვნება ალბათ უარს იტყოდა თამაშის მეორე ვარინტზე პირველის სასარგებლოდ. საქმე იმაშია, რომ პირველი ვარიანტის ყოველ აგდებაში შემთხვევითი სიდიდის (მოგება-წაგების) გადახრა მისი საშუალოდან მხოლოდ ერთ ლარს შეადგენს, მაშინ როცა მეორე ვარიანტისთვის ეს სიდიდე 1000 ლარის ტოლია.

ეს მაგალითი კარგად გვიჩვენებს, რომ შემთხვევითი სიდიდის მხოლოდ მათემატიკური ლოდინის ცოდნა მის შესახებ ბევრს არაფერს გვეუბნება და რომ შემთხვევითი სიდიდის შემდგომი დახასიათებისათვის საჭიროა დაისვას შეკითხვა: რამდენად ახლოსაა მისი შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობასთან, ანუ როგორია შესაძლო მნიშვნელობების გადახრები შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინისგან და ბოლოს, როგორ დავახასიათოთ ეს გადახრები?

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მისი საშუალოს ანუ მათემატიკური ლოდინის მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ საზომს წარმოადგენს ალბათობის თეორიაში კარგად ცნობილი შემთხვევითი სიდიდის ***დისპერსია.***

- X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია DX ეწოდება $(X - EX)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$$DX = E(X - EX)^2. \qquad (20.2)$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$DX = E(X - EX)^2 = E\left(X^2 - 2XEX + (EX)^2\right) = EX^2 - 2EXEX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2, \qquad (20.3)$$

სადაც EX^2 არის X შემთხვევითი სიდიდის კვადრატის მათემატიკური ლოდინი.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის (20.2) და (20.3) ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - EX\right)^2 f(x)dx, \tag{20.4}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (EX)^2. \tag{20.5}$$

- EX^k-ს უწოდებენ შემთხვევითი სიდიდის k რიგის ***საწყის მომენტს*** და ცხადია

$$EX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \tag{20.6}$$

$$EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \tag{20.7}$$

– შესაბამისად, დისკრეტული და უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

ამ ტერმინებში მათემატიკური ლოდინი შემთხვევითი სიდიდის პირველი რიგის საწყისი მომენტია.

- X შემთხვევიტი სიდიდის $k-$ური რიგის ***ცენტრალური მომენტი*** ეწოდება $\left(X - EX\right)^k$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს ანუ $E\left(X - EX\right)^k-$ს. ამ ტერმინებში დისპერსია შემთხვევითი სიდიდის მეორე რიგის ცენტრალური მომენტია.

მოვიყვანოთ დისპერსიის თვისებები:

1) თუ c მუდმივია, მაშინ $Dc = 0$;

2) თუ c მუდმივია, მაშინ $DcX = c^2 DX$;

3) თუ X_1 და X_2 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო c_1 და c_2 რაიმე მუდმივები, მაშინ

$$D(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1^2 DX_1 + c_2^2 DX_2 \tag{20.8}$$

$$D(c_1X_1 - c_2X_2) = c_1^2 DX_1 + c_2^2 DX_2; \tag{20.9}$$

4) $D\left(cX + a\right) = c^2 DX$ ე.ი. შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივის დამატება მის დისპერსიას არ ცვლის.

ვთქვათ, X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია EX, ხოლო დისპრსიაა DX. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \tag{20.10}$$

და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებებიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$EY = E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{\sqrt{DX}}\left(EX - EX\right) = 0,$$

ხოლო

$$DY = D\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right) = E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right)^2 - \left[E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right)\right]^2 = \frac{E(X - EX)^2}{DX} = 1.$$

როგორც ვხედავთ, (20.10) იძლევა იმის საშუალებას, რომ X შემთხვევითი სიდიდე გარდავქმნათ ისეთ Y შემთხვევით სიდიდეთ, რომლის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია არაა დამოკიდებული X შემთხვევით სიდიდეზე და არის შესაბამისად 0 და 1. ამ გარდაქმნას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირება $\left(X - EX\right)$ და ნორმირება ($\sqrt{DX}$-ზე გაყოფა) ან უფრო მოკლედ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია. ამ გარდაქმნას ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ მომავალში.

§20.3. საშუალო კვადრატული გადახრა. X შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა (აღინიშნება σX სიმბოლოთი) ეწოდება ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან კვადრატულ ფესვს:

$$\sigma X = \sqrt{DX}\ .$$

ამ ტერმინებში სტანდარტიზაციის ოპერაცია ასე ჩაიწერება:

$$Y = \frac{X - EX}{\sigma X}\ .$$

§20.4. p-რიგის კვანტილი და მედიანა. X შემთხვევითი სიდიდის (ან რაც იგივეა F განაწილების) p რიგის ქვანტილი ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$F(x_p) = p.$$

X შემთხვევითი სიდიდის (ან F განაწილების) მედიანა ეწოდება M რიცხვს თუ

$$F(M) = \frac{1}{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ p რიგის ქვანტილისა და M მედიანის ასეთი განმარტებები დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის არ გამოგვადგება, ვინაიდან მათი განაწილების F ფუნქციისათვის ჩვენ შეიძლება საერთოდ ვერ

მოვძებნოთ ისეთი x რიცხვი, რომლისთვისაც $F(x)=p$, რადგან როგორც გვახსოვს, დისკრეტული განაწილების ფუნქცია საფეხურა ფუნქციაა. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში ქვანტილი და მედიანა განიმარტება შემდეგნაირად:

$$x_p = \min\{x_k : F(x_k) \ge p\}.$$

მედიანის განმარტებაში $p=\frac{1}{2}$.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- მოიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განმარტება, როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდისათვის.
- მოიყვანეთ მათემატიკური ლოდინის თვისებები.
- მოიყვანეთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შემთხვევითი სიდიდის მხოლოდ მათემატიკური ლოდინის ცოდნა, ზოგჯერ არასაკმარისია მის დასახასიათებლად.
- მოიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის განმარტება, როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდისათვის.
- მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $DX = EX^2 - (EX)^2$.
- რას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის k რიგის საწყისი მომენტი?
- შემთხვევითი სიდიდის რომელი რიგის საწყისი მომენტია მათემატიკური ლოდინი? რატომ?
- რას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის k რიგის ცენტრალური მომენტი?
- შემთხვევითი სიდიდის რომელი რიგის ცენტრალური მომენტია დისპერსია? რატომ?
- მოიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის თვისებები.
- რას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირება და ნორმირება?
- რას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია?
- დაამტკიცეთ, რომ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაციით მიღებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 0-ს, ხოლო დისპერსია უდრის 1-ს.

- რას ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა?
- რას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის p რიგის ქვანტილი?
- რას ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის მედიანა?

სავარჯიშო 20

1. იპოვეთ დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, რომლის განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი სახით:

ა)

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

ბ)

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

2. იპოვეთ დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა, თუ მისი განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

3. იპოვეთ დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა X შემთხვევითი სიდიდისა, თუ მისი განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

ა)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

ბ)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

4. X შემთხვევითი სიდიდე არის სამ დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის რიცხვი. იპოვეთ მისი დისპერსია, თუ თითოეულ ცდაში ხდომილობის მოხდენის ალბათობა უდრის 0,2-ს.

5. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილით:

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

იპოვეთ X^2–ის განაწილების კანონი და მათემატიკური ლოდინი.

6. იპოვეთ Z შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ ცნობილია X და Y შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინები:

ა) $Z = X + 2Y$, $EX = 5$, $EY = 3$;

ბ) $Z = 3X + 4Y$, $EX = 5$, $EY = 6$.

7. X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან. იპოვეთ $Z = 3X + 2Y$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, თუ ცნობილია, რომ $DX = 5$, $DY = 6$.

8. X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელნი არიან. იპოვეთ $Z = 2X + 3Y$ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია, თუ ცნობილია, რომ $DX = 4$, $DY = 5$.

9. X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$. ასევე ცნობილია, რომ $EX = 2{,}3,\ EX^2 = 5{,}9.$ იპოვეთ შესაბამისი ალბათობები.

10. მოცემულია X შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები: $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$ ასევე ცნობილია, რომ $EX = 0{,}1$ და $EX^2 = 0{,}9.$. იპოვეთ P_1, P_2 და P_3 ალბათობები, რომლებიც x_1, x_2, x_3 მნიშვნელობებს შეესაბამება.

11. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	1	2	4
P	0,1	0,5	0,4

იპოვეთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის ცენტრალური მომენტები.

12. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

იპოვეთ პირველი რიგის საწყისი და ცენტრალური მომენტი.

13. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის სახით:

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

იპოვეთ პირველი, მეორე და მესამე რიგის საწყისი მომენტები.

თავი 21
დისკრეტული განაწილებები

§21.1. ბერნულის განაწილება. ბიზნესსა და ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირია სიტუაცია, რომელშიც რაიმე ცდის შედეგთა სიმრავლეს წარმოადგენს ალტერნატიული ნიშნის ორ ელემენტიანი სიმრავლე: მოხდა ესა და ეს ხდომილობა ან ის არ მოხდა. მაგალითად, რაიმე ოპერაციის შედეგად ფირმა მიიღებს მოგებას თუ არ მიიღებს მოგებას. შემთხვევით არჩეული ახალშობილი ბიჭი იქნება თუ გოგო; კამათლის გაგორებისას მოვა თუ არა სამის ჯერადი და ა.შ. ყველა ასეთ მოვლენას ალბათობის თეორიაში აღწერენ ერთი და იმავე შემთხვევითი სიდიდით, რომელსაც სახელად ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ. საინტერესო ხდომილობის (''წარმატების'') მოხდენას მიაწერენ ციფრს 1, ხოლო არ მოხდენას (''მარცხს'') ციფრს 0; წარმატებას მიაწერენ ალბათობას p, ხოლო მარცხს – $1-p$. მაშასადამე, ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

X	1	0
P	p	$1-p$

ან მოკლედ

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, \quad k=0,\ 1.$$

შევნიშნოთ, რომ $EX=p$ და $DX=p(1-p)$.

§21.2. ბინომიალური განაწილება. ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განმარტებაც ზემოთ შემოვიტანეთ, შეიძლებოდა გამოგვეყენებინა შემდეგი ექსპერიმენტის აღსაწერად: ვთქვათ, ყუთში მოთავსებულია თეთრი და შავი ბურთები, რომელთაგან თეთრების წილი შეადგენს p–ს, ხოლო შავებისა – $(1-p)$-ს. ხდება ერთი ბურთის შემთხვევით ამორჩევა. თუ წარმატებად ჩავთვლით თეთრი ბურთის ამოღებას, მაშინ ასეთ ექსპერიმენტს აღწერს ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ზემოთ იყო განხილული.

ვთქვათ, ამოღებული ბურთი დავაბრუნეთ და ყუთიდან კვლავ ვიღებთ ბურთს, შემდეგ კვლავ ვაბრუნებთ და ა.შ. ვიმეორებთ ცდას n–ჯერ. ჩვენს ინტერესს შეადგენს n–ცდაში წარმატების (თეთრი ბურთის ამოღების)

მოხდენათა რაოდენობა. ცხადია, რომ ასეთ ექსპეიმენტს ბერნულის ერთი შემთხვევითი სიდიდით ვეღარ ავღწერთ, ახლა ჩვენ უკვე გვაქვს ბერნულის n–ცალი შემთხვევითი სიდიდე: X_1 – პირველი ცდის შედეგი (1, თუ პირველი ბურთი თეთრია და 0–თუ ის შავია), X_2 – მეორე ცდის შედეგი და ა.შ., X_n – n-ური ცდის შედეგი. ახლა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდე:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{21.1}$$

და დავახასიათოთ ის. რადგან X_1, X_2, ... , X_n შემთხვევითი სიდიდეები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, ნულს ან ერთს, ამიტომ მათი ჯამი ტოლი იქნება ერთიანების რაოდენობისა X_1, X_2, ... , X_n შესაკრებებს შორის, ანუ S_n მიიღებს იმ მნიშვნელობას, რამდენ წარმატებასაც ექნება ადგილი. მაშასადამე, S_n იქნება ის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აღწერს ჩვენთვის საინტერესო ექსპერიმენტის შედეგს: n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რაოდენობას. მაგრამ საინტერესოა, როგორი განაწილება აქვს შემთხვევით სიდიდეს? ამის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ S_n წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა რიცხვითი სიმრავლე $\{0;1;2;...;n\}$. $(S_n = k)$ ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად, ცალკე გამოვყოთ X_1, X_2, ... , X_n შემთხვევითი სიდიდეების ორი ძირითადი თვისება:

1) X_1, X_2, ... , X_n შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, რადგან ისინი წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ცდათა შედეგს.

2) X_1, X_2, ... , X_n შემთხვევითი სიდიდეები ერთნაირადაა განაწილებული ანუ მათი წარმატების ალბათობები ტოლია, ე.ი. $(S_n = k)$ ხდომილობა ნიშნავს იმას, რომ რომელიღაცა k ცალი შესაკრები X_1, X_2, ... , X_n შემთხვევითი სიდიდეებიდან ღებულობს ერთიანის ტოლ მნიშვნელობას და დანარჩენი $(n-k)$ შესაკრები 0-ის ტოლია.

თითოეული ასეთი ხდომილობის ალბათობა 1) და 2) თვისების ძალით, ცხადია, ტოლია $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ რიცხვისა. გარდა ამისა, ეს ხდომილობები წარმოადგენენ უთავსებად ხდომილობებს. მართლაც, შეუძლებელია ერთდროულად განხორციელდეს, მაგალითად, შემდეგი ხდომილობები:

0 0 . . . 0 1 1 . . . 1 და 1 1 . . . 1 0 0 . . . 0.

ე.ი. $(S_n = k)$ ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად საჭიროა გამოვთვალოთ ასეთი ხდომილობების რაოდენობა. ეს კი სხვა არაფერია, თუ არა n ელემენტიანი სიმრავლიდან k ელემენტიან ქვესიმრავლის ამორჩევათა, ანუ ჯუფთებათა რიცხვი, რომელიც ტოლია

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{21.2}$$

სადაც $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,$ თუ $n>0$ და $n! = 1,$ თუ $n=0.$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$P_n(k) = P_n(S_n = k) = C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \tag{21.3}$$

(21.2) რიცხვებს ბინომიალურ კოეფიციენტებს უწოდებენ. ამდენად, ბუნებრივია შემთხვევით სიდიდეს ბინომიალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო ალბათობათა (21.3) განაწილებას კი ბინომიალური განაწილება ვუწოდოთ. ის ფაქტი, რომ (21.3) მართლაც განაწილებაა, ადვილად გამომდინარეობს ნიუტონის ბინომის ფორმულიდან

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

მართლაც,

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1.$$

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $ES_n = np$ და $DS_n = np(1-p).$

დავუბრუნდეთ (21.3) გამოსახულებას და დავსვათ ასეთი შეკითხვა: ვთქვათ, n და p ცნობილი რიცხვებია. k რიცხვის რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის მიიღებს

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

გამოსახულება უდიდეს მნიშვნელობას, ანუ წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე მეტად მოსალოდნელი n დამოუკიდებელ ცდაში? ამ კითხვაზე პასუხი ასეთია: k უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$(n+1)p - 1 < k < (n+1)p.$$

ასეთ k რიცხვს ეწოდება უალბათესი რიცხვი (მოცემული n და p–სათვის).

§21.3. ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. წინა პუნქტში ჩვენ განვიხილეთ ე.წ. ბერნულის ცდათა სქემა, რომელშიც ხდებოდა ყუთიდან ბურთების ამოღება

დაბრუნებით და გვაინტერესებდა წარმატებათა რაოდენობა ასეთ n ცდაში. ახლა დავინტერესდეთ იგივე სიდიდით, მხოლოდ ცდათა ისეთ სქემაში, რომელშიც აღარ ხდება ბურთების უკან დაბრუნება. ვთქვათ ყუთში N ცალი ბურთია, აქედან A თეთრია, ხოლო დანარჩენი $(N-A)$ – შავი. იღებენ ერთ ბურთს, გადადებენ გვერდზე, ისე რომ ფერიც არ იციან, შემდეგ მეორეს და ა.შ მე-n ბურთს. ბოლოს ინტერესდებიან თეთრი ბურთების რაოდენობით ამოღებულ n ცალიდან.

ცდათა ასეთი სქემის დროს ამბობენ, რომ S_n შემთხვევით სიდიდეს აქვს ***ჰიპერგეომეტრიული განაწილება***. $(S_n = k)$ ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად ჩვენ კვლავ დავუბრუნდებით ექვივალენტურ ექსპერიმენტს (ყუთიდან n ცალი ბურთის ერთდროულად ამოღებას) და ამ ალბათობებს გამოვთვლით უშუალოდ ალბათობის კლასიკური განმარტებით. მართლაც $N-$დან n ცალი ბურთის ამორჩევა შეიძლება C_N^n-ნაირად, ე.ი. $N(E) = C_N^n$ (ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი), k ცალი თეთრი ბურთის ამორჩევა A-დან შეიძლება C_A^k-ნაირად, ხოლო დანარჩენი $(n-k)$ ცალი შავი ბურთის ამორჩევა $(N-A)-$დან $C_{N-A}^{n-k}-$ნაირად. ამიტომ, $m(S_n = k) = C_A^k \cdot C_{N-A}^{n-k}$ (ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი). საბოლოოდ $(S_n = k)$ ხდომილობის ალბათობა ტოლი იქნება

$$P_n(k) = P(S_n = k) = \frac{C_A^k \cdot C_{N-A}^{n-k}}{C_N^n}.$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობაც, რომელიც გამომდინარეობს უკანასკნელი ტოლობიდან:

$$P_n(k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{A-k}}{C_N^A}.$$

მტკიცდება , რომ

$$ES_n = n \cdot \frac{A}{N} \quad \text{და} \quad DS_n = n \cdot \frac{A}{N} \cdot \left(1 - \frac{A}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

თუ შევადარებთ მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ამ გამოსახულებებს ბინომიალური განაწილების მათემატიკურ ლოდინსა და დისპერსიის ფორმულებს ჩაწერილს $p = \frac{A}{N}-$სათვის – $ES_n = n \cdot \frac{A}{N}$, $DS_n = n \cdot \frac{A}{N} \cdot \left(1 - \frac{A}{n}\right)$, დავინახავთ მათ შორის აშკარა მსგავსებას. განსხვავება

მხოლოდ დისპერსიებშია. კერძოთ, ჰიპერგეომეტრიული განაწილების დისპერსიას გაუჩნდა თანამამრავლი

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=1-\frac{n-1}{N-1},$$

რომელსაც სახელად სასრული პოპულაციის ფაქტორს უწოდებენ. ეს სახელწოდება იმითაა განპირობებული, რომ თუ ჩვენ წარმოვიდგენთ, რომ ყუთში ბურთების რაოდენობები, როგორც თეთრის, ისე შავის ძალიან დიდია, მხოლოდ ისე, რომ $\frac{A}{N}\approx p$, ხოლო ამორჩევათა რაოდენობა n გაცილებით პატარაა ბურთების საერთო რაოდენობაზე, მაშინ $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=1-\frac{n-1}{N-1}\approx 1$ და ზემოთხსენებული დისპერსიები დაემთხვევა ერთმანეთს. ცხადია, ასეთი ექსპერიმენტის დროს (როცა ბურთების საერთო რაოდენობა ძალიან დიდია) წარმატებათა რაოდენობაზე აღარ უნდა ახდენდეს დიდ გავლენას ის, თუ როგორ ვიღებთ ბურთებს, დაბრუნებით თუ დაუბრუნებლად. ამ ფაქტის თეორიულ დასაბუთებას წარმოდგენს თეორემა, რომელსაც ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 21.1. თუ $A\to\infty$ და $N\to\infty$ ისე, რომ $\frac{A}{N}\to p$, მაშინ ნებისმიერი n და $k-$სათვის

$$\frac{C_{N-n}^{A-k}}{C_N^A}\approx p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

§21.4. პუასონის განაწილება.

საზოგადოდ, პუასონის კანონით განაწილებული ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს თვლადი რაოდენობის მთელ მნიშვნელობებს 0, 1, 2, ...

$$p(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{21.4}$$

ალბათობებით, სადაც λ რაიმე დადებითი რიცხვია, რომელსაც X შემთხვევითი სიდიდის ინტენსივობას ან პუასონის განაწილების პარამეტრს უწოდებენ. ის რომ (21.4) მართლაც განაწილებაა, ემყარება მათემატიკურ ანალიზში კარგად ცნობილ ფაქტს: e^{λ} ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

გავარკვიოთ λ პარამეტრის აზრი. ამისთვის გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

როგორც ვხედავთ, $EX = \lambda$ ე.ი λ პარამეტრი წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას).

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- აღწერეთ ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე და მოიყვანეთ მისი განაწილების კანონი.
- რას უდრის ბერნულის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?
- აღწერეთ ბინომიალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე და მისი განაწილების კანონი.
- აჩვენეთ რა კავშირი აქვს ბინომიალურ განაწილებას ნიუტონის ბინომის ფორმულასთან.
- რას უდრის ბინომიალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?
- რას ეწოდება უალბათესი რიცხვი?
- აღწერეთ შემთხვევითი სიდიდე, რომელსაც აქვს ჰიპერგეომეტრიული განაწილება.
- რას უდრის ჰიპერგეომეტრიული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?
- შეადარეთ ბინომიალური და ჰიპერგეომეტრიული შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები და დისპერსიები. გააკეთეთ დასკვნა.
- აღწერეთ შემთხვევითი სიდიდე, რომელსაც აქვს პუასონის განაწილება.
- რას უდრის პუასონის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი?

სავარჯიშო 21

1. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ჯამში ერთხელ მაინც დაჯდება შვიდიანი.

2. რა უფრო მოსალოდნელია: ტოლი ძალის მოთამაშესთან ოთხიდან ორი პარტიის მოგება, თუ ექვსიდან სამის?

3. რა უფრო მოსალოდნელია: კამათლის ექვსჯერ გაგორებისას სამის ჯერადი რიცხვის ორჯერ მოსვლა, თუ "შაშის" ერთხელ მოსვლა?

4. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 36 კარტიანი ბანქოს შეკვრიდან 5-ჯერ ერთი კარტის (დაბრუნებით) ამოღებისას ორჯერ მოვა ტუზი?

5. სისტემა შედგება ხუთი ერთგვაროვანი ელემენტისაგან, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად 1/7-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა გამოვა მწყობრიდან, თუ ცნობილია, რომ ამისათვის საჭიროა მწყობრიდან გამოვიდეს სისტემის ორი ელემენტი მაინც.

6. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან შვიდი დააზიანებს სამიზნეს, თუ თითოეულის მიერ სამიზნეს დაზიანების ალბათობაა 7/8?

7. საკალათბურთო ტურნირში მონაწილეობს ხუთი ერთნარი ძალის მქონე გუნდი. ტურნირი წრიულია (ერთ წრედ) და მოგებაზე თითოეულს ერიცხებათ 2 ქულა, ხოლო წაგებაზე 0. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი (წინასწარ განსაზღვრული) გუნდი დააგროვებს 6 ქულას.

8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დომინოს 28 ქვიდან 6-ჯერ ერთი ქვის შემთხვევით (დაბრუებით) ამორჩევისას უდიდეს და უმცირეს რიცხვებს შორის სხვაობა 2-ჯერ იქნება 3-ის ტოლი.

9. ყუთში 3 წითელი, 2 შავი და 6 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის ხუთჯერ დბრუნებით ამოღებისას სამჯერ ამოვა თეთრი ბურთი.

10. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამორჩეული 6 ციფრიდან ორი იქნება სამის ჯერადი.

11. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის ცხრაჯერ გაგორებისას მოსულ ციფრთა სხვაობის მოდული 2-ჯერ აღმოჩნდება 2-ის ტოლი.

12.ყუთში 7 წითელი, 3 შავი და 10 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის სამჯერ დაბრუნებით ამოღებისას ერთხელ მაინც ამოვა შავი ბურთი.

13.ერთ-ერთ კვლევით ინსტიტუტში მომუშავე ქალთა შორის 20 ეწევა სიგარეტს, ხოლო 10 არამწეველია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეულ 5 ქალთა შორის 3 ეწევა.

14.52 კარტიანი ბანქოს შეკვრიდან შემთხვევით იღებენ 5 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული კარტებიდან 2 ნახატია.

15.ყუთში არის 15 თეთრი და 10 შავი ბურთი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 8 ბურთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთიდან 5 თეთრია.

16.აუდიტორიაში იმყოფება 25 ბიჭი და 15 გოგო. შემთხვევით ირჩევენ 10 სტუდენტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 6 ბიჭია.

17.საბავშვო ბაღში 60 ქართველი და 10 არაქათველი ბავშვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 15 ბავშვიდან 12 ქართველია.

18.სატელეფონო სადგურში შესულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 9 გამოძახება წუთში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება 3-ზე მეტი.

19.ფირმის მიერ წარმოებული წუნდებული პაკეტების ინტენსივობაა 9 პაკეტი დღეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ დღეში წუნდებული პაკეტების რაოდენობა 7-ზე ნაკლებია.

20.მსოფლიო ჩემპიონატზე გატანილი ბურთების ინტენსივობა იყო 3 ბურთი თამაშში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ ორ თამაშში გავა 4 ბურთზე ნაკლები.

21.სადაზღვევო აგენტი დღეში საშუალოდ აზღვევს 10 ადამიანს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი ერთ დღეში დააზღვევს 8 ადამიანზე ნაკლებს.

22.ექიმთან მისული პაციენტების ინტენსივობაა 8 პაციენტი დღეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი ერთ დღეს მიიღებს ხუთ პაციენტს.

23.მანქანების გამყიდველი მაღაზია კვირაში საშუალოდ ყიდის 9 მანქანას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ კვირაში მაღაზია ვერ გაყიდის 4-ზე მეტ მანქანას.

24.მბეჭდავის მიერ დაშვებულ შეცდომათა ინტენსივობაა 8 შეცდომა სტატიაში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი მოცემულ სტატიაში არ დაუშვებს 5 შეცდომაზე მეტს.

თავი 22

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები და განაწილებები

§22.1. ნორმალური განაწილება. ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე (აღინიშნება $N(m,\sigma^2)$ სიმბოლოთი) წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების სიმკვრივესაც აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (22.1)$$

სადაც m და σ^2 რაიმე ნამდვილი რიცხვებია $(-\infty < m < +\infty, \sigma > 0)$, რომელთაც განაწილების პარამეტრებს უწოდებენ. როგორც ვიცით, თუ ცნობილია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, მაშინ ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

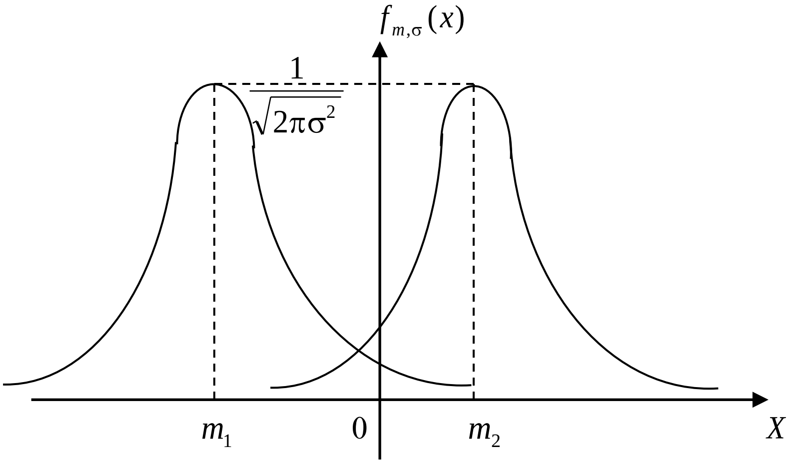
$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (EX)^2.$$

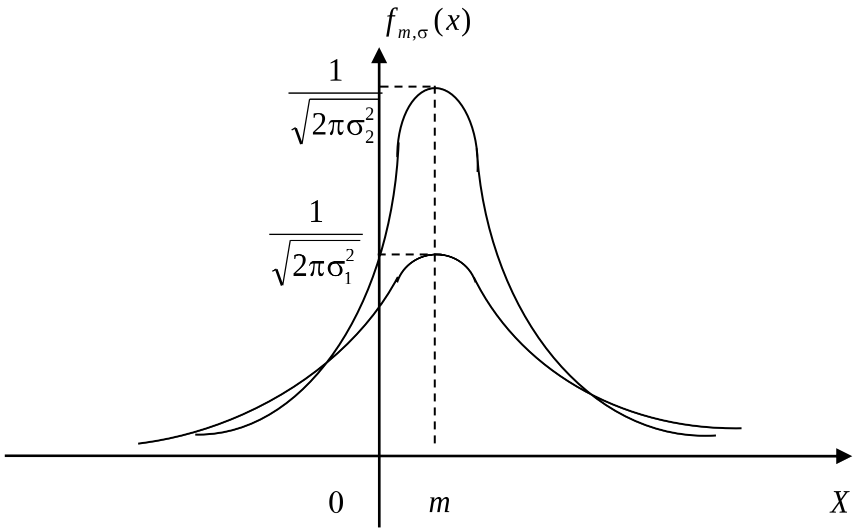
გამოთვლების გარეშე მოგვყავს ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის და დისპერსიის რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$EN(m,\sigma^2) = m, \qquad DN(m,\sigma^2) = \sigma^2. \qquad (22.2)$$

ამრიგად, ნორმალური განაწილების სიმკვრივე დამოკიდებულია ორ m და σ^2 პარამეტრზე, რომლებიც, შესაბამისად, წარმოადგენენ ამ განაწილების მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის რიცხვით მნიშვნელობებს.

(22.1)-ით განსაზღვრული სიმკვრივის ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს როცა $x = m$-ს. $x = m$ წრფე წარმოადგენს (22.1)-ით განსაზღვრული ფუნქციის სიმეტრიის ღერძს. $m \pm \sigma^2$ წერტილებში ამ ფუნქციას აქვს გადაღუნვის წერტილები და ის ასიმპტოტურად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x \to \pm\infty$. განაწილების სიმკვრივის თვისებების გამო მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია ამ ფუნქციით, ხოლო ქვემოდან აბსცისთა ღერძით, ტოლია ერთის. ამრიგად, მათემატიკური ლოდინის m პარამეტრი განსაზღვრავს განაწილების სიმკვრივის მაქსიმუმის წერტილს, ხოლო σ^2 დისპერსია – ამ წერტილში ფუნქციის რიცხვით მნიშვნელობას, რაც $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ –ის ტოლია. m პარამეტრი განსაზღვრავს განაწილების გრაფიკის ადგილმდებარეობას რიცხვით ღერძზე, მაშინ როცა σ გვიჩვენებს მის გაშლილობას (იხ. ნახაზზე).





როგორც ნახაზებიდან ჩანს, რაც უფრო დიდია მათემატიკური ლოდინი, მით უფრო მარჯვნივაა განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი და რაც უფრო მცირეა დისპერსია, მით უფრო შეკუმშულია განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი. დისპერსიის დიდი მნიშვნელობებისათვის განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი უფრო გაშლილია. (22.1)-ის საფუძველზე $N(m,\sigma^2)$ კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია იქნება

$$F_{m,\sigma}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt. \tag{22.3}$$

ცხადია, $F_{m,\sigma}(x)$ ალბათობების გამოთვლა საკმარისად რთულია მისი ინტეგრალური ფორმის გამო. გარდა ამისა, ის დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე და მაშასადამე, პარამეტრების მნიშვნელობათა ცვლილებასთან ერთად იცვლება. ეს კი მოუხერხებელია პრაქტიკულ გამოყენებაში. მაგრამ, აქ არის ერთი გამოსავალი, რომელიც ეყრდნობა შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაციას. მართლაც,

$$N(0,1) = \frac{N(m,\sigma^2) - m}{\sigma} \tag{22.4}$$

კვლავ იქნება ნორმალურად განაწილებული, პარამეტრებით (0,1). რადგან (4) მიღებული არის $N(m,\sigma^2)$ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაციით, ამიტომ მას უწოდებენ სტანდარტულ შემთხვევით სიდიდეს, ხოლო მის განაწილებას სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას. მის განაწილების ფუნქციას აღნიშნავენ $\Phi(x)$–ით, ხოლო სიმკვრივეს $\varphi(x)$–ით. მაშასადამე,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{22.5}$$

და

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{22.6}$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ არსებობს სტატისტიკური ცხრილები, რომლებშიც ტაბულირებულია $\Phi(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობები ყველა შესაძლო x არგუმენტზე, რაც საშუალებას გვაძლევს მარტივად გამოვთვალოთ ამა თუ იმ ხდომილობის ალბათობა. ამასთან უნდა გავითვალისწინოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების თვისებები, კერძოდ,

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2}$$

და

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

აღნიშნული თვისებების გამო სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციასა და სიმკვრივის ცხრილები, როგორც წესი, მოცემულია მხოლოდ არგუმენტის დადებით მნიშვნელობებისათვის.

ამოცანა 1. გამოვთვალოთ $X \sim N(0,1)$–თვის შემდეგი ალბათობები:

ა) $p(X < 1{,}2)$, ბ) $p(X > 0{,}5)$, გ) $p(-0{,}5 < X \le 0{,}7)$,

დ) $p(-k < X < k)$, როცა $k = 1,2,3$.

ამოხსნა.

ა) $p(X < 1{,}2) = \Phi(1{,}2) = 0{,}88;$

ბ) $p(X > 0{,}5) = 1 - p(X \le 0{,}5) = 1 - 0.69 = 0{,}31;$

გ) $p(-0{,}5 < X \le 0{,}7) = \Phi(0{,}7) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}75 - 0{,}31 = 0{,}44;$

დ) $p(-1 < X < 1) = 0{,}62;$ $p(-2 < X < 2) = 0{,}94;$ $p(-3 < X < 3) = 0{,}99.$

დავუშვათ, ვატარებთ საკმარისად დიდი რაოდენობის n დაკვირვებას $N(0,1)$ კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე. მაშინ, მიღებული გამოთვლები იმაზე მიუთითებენ, რომ ჩატარებული n დაკვირვებიდან $0{,}99n$ შემთხვევაში X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს რიცხვით მნიშვნელობას (-3,3) ინტერვალიდან, $0{,}94n$ შემთხვევაში – (-2,2) ინტერვალიდან, ხოლო $0{,}84n$ შემთხვევაში – (-1,1) ინტერვალიდან. ამრიგად n დაკვირვებიდან $N(0,1)$ კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე მხოლოდ $0{,}1n$ შემთხვევაში მიიღებს რიცხვით მნიშვნელობას, რომელიც არ ეკუთვნის (-3,3) ინტერვალს. მაგალითად, n=1000-ის შემთხვევაში საშუალოდ 10 დაკვირვების რიცხვითი მნიშვნელობა არ მოხვდება (-3,3) ინტერვალში. ეს ფაქტი ალბათობის თეორიაში ცნობილია 3σ–ს წესის სახელით სტანდარტული ნორმალური განაწილებისათვის (როგორც ვიცით, მისთვის $\sigma = 1$).

ახლა გადავიდეთ იმ შემთხვევის განხილვაზე, როდესაც X შემთხვევითი სიდიდე $N(m,\sigma^2)$ კანონითაა განაწილებული. ვთქვათ, გვაინტერესებს $(N(m,\sigma^2) \le x)$ ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა, თუ ცნობილია m და σ^2 პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები. საძიებელი ხდომილობის ალბათობა განაწილების ფუნქციის ტერმინებში ასე ჩაიწერება:

$$p(N(m,\sigma^2) \le x) = F_{m,\sigma}(x).$$

მაგრამ (22.4)-დან

$$N(m,\sigma^2) = m + \sigma \cdot N(0,1), \tag{22.7}$$

ამიტომ

$$F_{m,\sigma}(x) = p(N(m,\sigma^2) \le x) = p\left(N(0,1) \le \frac{x-m}{\sigma} \right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right).$$

ამოცანა 2. X შემთხვევითი სიდიდე $N(3,4)$ კანონითაა განაწილებული, გამოთვალეთ შემდეგი ხდომილობის ალბათობები: ა) $p(X<1)$, ბ) $p(X>6)$.

ამოხსნა. ა) $p(X<1) = p(N(3,4)<1) = p\left(N(0,1) < \frac{1-3}{2} \right) =$

$$= p(N(0,1) < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16;$$

ბ) $p(X>6) = 1 - p(X \le 6) = 1 - \Phi\left(\frac{6-3}{2} \right) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07.$

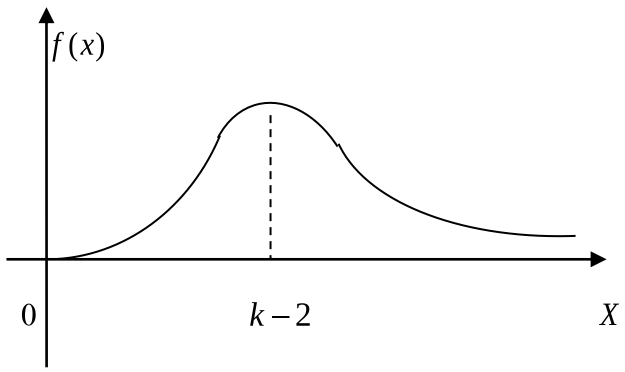
§22.2. ხი-კვადრატ განაწილება. საზოგადოდ, ხი-კვადრატ განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდე

$$\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2, \tag{22.8}$$

სადაც $X_1, X_2, ..., X_k$ დამოუკიდებელი სტანდარტულად ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია.

რადგან $\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2$ სიდიდე ღებულობს არაუარყოფით მნიშვნელობებს, მისი განაწილება თავმოყრილია დადებით ნახევარღერძზე, და თუ გავიხსენებთ სფეროს განტოლებას მათემატიკური ანალიზიდან, მაშინ $(\chi^2 \le x)$ ხდომილობის მოხდენა ნიშნავს $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ ვექტორის მოხვედრას $\sqrt{x}$–რადიუსიანი k განზომილებიანი სფეროს შიგნით, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

ქვემოთ მოყვანილია განაწილების სიმკვრივის სქემატური ნახაზი, რომელიც საჭიროა ცხრილებით სარგებლობის დროს.

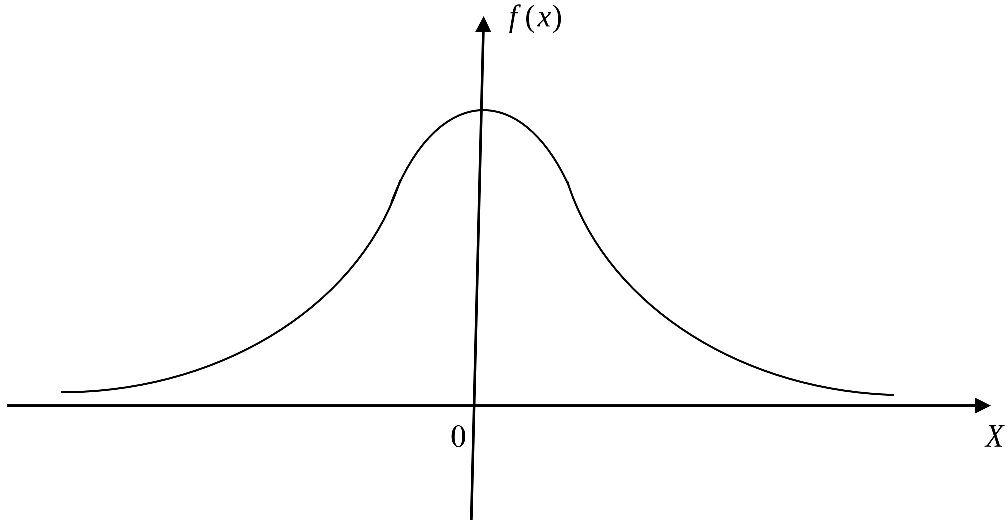


როგორც ვხედავთ, ნორმალური განაწილების სიმკვრივისაგან განსხვავებით χ^2 განაწილების სიმკვრივე ასიმეტრიულია. მისი პიკის აბსცისას წარმოადგენს მისი თავისუფლების ხარისხს მინუს ორი. როცა თავისუფლების ხარისხი $k \to \infty$, $\chi^2(k)$ განაწილება უახლოვდება ნორმალურს.

§22.3. სტიუდენტის განაწილება. სტიუდენტის განაწილება, თავისუფლების ხარისხით ν, აქვს შემდეგ შემთხვევით სიდიდეს

$$t(\nu) = \frac{X}{\sqrt{\chi_\nu^2 / \nu}}, \tag{22.9}$$

სადაც χ^2_ν შემთხვევით სიდიდეს აქვს χ^2 განაწილება ν თავისუფლების ხარისხით, ხოლო მისგან დამოუკიდებელ X შემთხვევით სიდიდეს კი სტანდარტული ნორმალური განაწილება. ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც მხოლოდ სიმკვრივის სქემატურ გრაფიკს მოვიყვანთ (იხ. ნახ.).



ნორმალურის მსგავსად ეს სიმკვრივეც სიმეტრიულია, მისი პიკის აბსცისა მოთავსებულია $x=0$ წერტილში. როცა თავისუფლების ხარისხი $\nu \to \infty$, t განაწილება სწრაფად უახლოვდება სტანდარტულ განაწილებას. ამიტომ, t განაწილების ცხრილებს იყენებენ მხოლოდ თავისუფლების ხარისხის მცირე მნიშვნელობებისათვის $(\nu < 30)$.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- როგორ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე?
- რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?
- როდის ღებულობს ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე მაქსიმალურ მნიშვნელობას? რას უდრის მაქსიმალური მნიშვნელობა?
- როგორ არის დამოკიდებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივის გრაფიკი მათემატიკურ ლოდინზე და დისპერსიაზე?
- რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია?

• როგორი სახე აქვს სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს და ფუნქციას?

• რაში მდომარეობს სტანდარტული ნორმალური განაწილების უპირატესობა ჩვეულებრივ ნორმალურ განაწილებასთან შედარებით?

• მოიყვანეთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების თვისებები.

• რაში მდგომარეობს სტანდარტული ნორმლური განაწილებისათვის 3σ–ს წესი?

• ალბათობის გამოთვლის დროს, როგორ უკავშირდება $N(m,\sigma^2)$ $N(0,1)$–ს?

• რას ეწოდება χ^2 განაწილება?

• როგორი სახე აქვს χ^2 განაწილების სიმკვრივის გრაფიკს სქემატურად?

• რას ეწოდება $t(\nu)$ განაწილება?

• მოიყვანეთ $t(\nu)$ განაწილების სიმკვრივის სქემატური გრაფიკი.

სავარჯიშო 22

1. რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

2. რას უდრის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} e^{-\frac{x^2}{5}}.$$

3. ამოწერეთ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივისა და ფუნქციის გამოსახულებები, თუ მათემატიკური ლოდინი ნულის, ხოლო დისპერსია 5-ის ტოლია.

4. ვთქვათ, $X \sim N(0,1)$. ცხრილების გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ალბათობები:

ა) $p(X<1)$, ბ) $p(X<-0,7)$, გ) $p(X<1,96)$, დ) $p(X<-1,6)$,

ე) $p(X<2,33)$, ვ) $p(0,3<X<2,9)$.

5. ვთქვათ, $X \sim N(0,1)$.

ა) $p(X<\beta)=0{,}8$, $p(X>\alpha)=0{,}7$, შეადარეთ ერთმანეთს $|\alpha|$ და $|\beta|$ რიცხვები.

ბ) $p(X<\alpha)=0{,}4$, $p(X>\beta)=0{,}6$. შეადარეთ ერთმანეთს α და β რიცხვები:

გ) $p(X>\alpha)=0{,}8$, $p(X>\beta)=0{,}4$. რას უდრის $p(\alpha<X<\beta)$?

6. X შემთხვევითი სიდიდე $N(3;4)$ კანონითაა განაწილებული. გამოთვალეთ შემდეგი ხდომილობების ალბათობები: ა) $p(X<1)$, ბ) $p(X>6)$.

7. X შემთხვევითი სიდიდე $N(5;16)$ კანონითაა განაწილებული. ვიპოვოთ ისეთი α და β რიცხვები, რომლებისთვისაც: ა) $p(X<\beta)=0{,}7$, ბ) $p(X>\alpha)=0{,}4$; გ) $p(\alpha<X<\beta)=0{,}8$.

8. $X\sim N(0{,}1)$, $p(X>\alpha)=0{,}76$, $p(X<\beta)=0{,}64$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას α და β რიცხვებს შორის?

9. $X\sim N(7{,}16)$, $p(9<X<11)=\alpha$. რას უდრის $p(3<X<5)$?

10. $X\sim N(5{,}25)$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინის მიმართ ისეთი სიმეტრიული $(\alpha;\beta)$ ინტერვალი, რომლისთვისაც $p(\alpha<X<\beta)=0{,}8$.

11. $X\sim N(8{,}36)$. იპოვეთ ისეთი ცალმხრივი მარჯვენა $(a;+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0,2-ის ტოლია.

12. $X\sim N(13{,}49)$. იპოვეთ ისეთი ცალმხრივი მარცხენა $(-\infty;a)$ ინტერვალი, რომელშიც X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0,1-ის ტოლია.

13. $X\sim N(0{,}1)$. იპოვეთ $p=0{,}95$ დონის კვანტილის რიცხვითი მნისვნელობა.

14. $X\sim N(4{,}64)$, $Y\sim N(13{,}36)$. როგორია $X-Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?

15. $X\sim N(34{,}49)$. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას (20; 50) ინტერვალიდან.

16. $X\sim N(20{,}36)$. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ X შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინისგან იქნება 3-ზე ნაკლები?

17. $X\sim N(0{,}1)$ განაწილებისთვის ვიპოვოთ $p=0{,}4$ დონის კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა.

18. ვთქვათ $X\sim\chi^2(21)$.

ა) იპოვეთ მარჯვენა ცალმხრივი $(a;+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0,05-ის ტოლია.

ბ) იპოვეთ მარცხენა ცალმხრივი $(-\infty;a)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0,05-ის ტოლია.

19. $X_1 \sim \chi^2(13)$, $X_2 \sim \chi^2(13)$. იპოვეთ ისეთი სიმეტრიული ინტერვალი, რომელშიც $Y = X_1 + X_2$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0,9-ის ტოლია.

20.ვთქვათ, $X \sim t(25)$. იპოვეთ მარჯვენა ცალმხრივი $(a;+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0, 025-ის ტოლია.

21.ვთქვათ, $X \sim t(19)$. იპოვეთ მარცხენა ცალმხრივი ინტერვალი, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა 0,05-ის ტოლია.

22.ვთქვათ $X \sim N(0,1)$, $Y \sim t(7)$, $Z \sim t(30)$. ამ შემთხვევით სიდიდეთაგან თითოეულისათვის ვიპოვოთ ისეთი ნულის მიმართ სიმეტრიული ინტერვალი, რომ მასში მოხვედრის ალბათობა იყოს 0,95. რას გვეუბნება მიღებული შედეგი?

თავი 23

დიდ რიცხვთა კანონი. ზღვარითი თეორემები

განვიხილოთ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული $X_1, X_2, ..., X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

დავუშვათ, რომ $EX_i = m,\ DX_i = \sigma^2, i = 1,2,...,n.$ მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების გამო

$$E\overline{X}_n = m,\ D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{23.1}$$

ანუ $\overline{X}_n$ შემთხვევით სიდიდეს იგივე საშუალო აქვს, რაც ყოველ შესაკრებს, მაგრამ ხასიათდება $n-$ჯერ უფრო მცირე გაფანტულობით თავისი საშუალოს მიმართ, ვიდრე თითოეული შესაკრები. ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ დებულებებს არითმეტიკული საშუალოს ყოფაქცევის შესახებ შესაკრებთა რაოდენობის ზრდისას, რომლებიც ეყრდნობა ჯამის დისპერსიის შემცირების ეფექტს.

§23.1. ჩებიშევის უტოლობა. X შეთხვევითი სიდიდის საკუთარი მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის შესაფასებლად იყენებენ ე.წ. ჩებიშევის უტოლობას.

ვთქვათ, X რაიმე დადებით მნიშვნელობებიანი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის მათემატიკური ლოდინი სასრულია: $EX \prec +\infty.$ მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის

$$p(X \ge \varepsilon) \le {EX}/{\varepsilon}. \tag{23.2}$$

მართლაც, თუ შემოვიფარგლებით დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდით, რომელიც ღებულობს $x_1, x_2, ..., x_n$ დადებით მნიშვნელობებს $p_1, p_2, ..., p_n$ ალბათობებით, გვექნება

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i: x_i \ge \varepsilon} x_i p_i + \sum_{i: x_i \prec \varepsilon} x_i p_i \ge \sum_{i: x_i \ge \varepsilon} x_i p_i = \varepsilon \cdot p(X \ge \varepsilon).$$

ამით უტოლობა (23.2) დამტკიცებულია. იგი ასევე მარტივად მტკიცდება ზოგად შემთხვევაში.

თეორემა 23.1. (ჩებიშევის თეორემა). ვთქვათ, X რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა სასრული DX დისპერსიით, მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$p(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq DX/\varepsilon^2. \qquad (23.3)$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $p(|X-EX|\geq\varepsilon)=p((X-EX)^2\geq\varepsilon^2)$. (23.2) უტოლობის ძალით

$$p(|X-EX|\geq\varepsilon)=p(|X-EX|^2\geq\varepsilon^2)\leq\frac{E(X-EX)^2}{\varepsilon^2}=\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

ჩებიშევის უტოლობა ამტკიცებს, რომ როგორც არ უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, ალბათობა იმისა, რომ X შემთხვევითი სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინიდან ε სიდიდეზე მეტად,ზემოდან შემოსაზღვრულია $\frac{DX}{\varepsilon^2}$ სიდიდით.

(23.3) უტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს ექვივალენტური სახით:

$$p(|X-EX|\leq\varepsilon)>1-\frac{DX}{\varepsilon^2} \qquad (23.4)$$

ამ სახით ჩაწერილი ჩებიშევის უტოლობა განსაზღვრავს $p\ (|X-EX|\leq\varepsilon)$ ხდომილობის ალბათობას, რომელიც ქვევიდანაა შემოსაზღვრული $1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ სიდიდით.

ამოცანა 1. შეაფასეთ ზემოდან $p(|X-EX|\geq 2)$, თუ ცნობილია, რომ $DX=2.$

ამოხსნა. (23.3) ფორმულით გვექნება

$$p(|X-EX|\geq 2)\leq DX/2^2=\frac{1}{2}.$$

საზოგადოდ ჩებიშევის უტოლობა იძლევა მათემატიკური ლოდინისაგან შემთხვევითი სიდიდის გადახრის მხოლოდ უხეშ შეფასებას, რასაც ადასტურებს შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, $EX=m,\ DX=\sigma^2$ და $\varepsilon=3\sigma$. მაშინ ჩებიშევის უტოლობით გვექნება:

$$p(|X-m|\geq 3\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}\approx 0{,}1111.$$

თუ დავუშვებთ, რომ X განაწილებულია ნორმალურად m და σ^2 პარამეტრებით, მაშინ, როგორც შესაბამისი ცხრილებიდან ჩანს, იმავე ხდომილობის ალბათობა დიდი სიზუსტით ტოლია 0,0027 რიცხვისა, რაც გაცილებით ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{9}$.

§23.2. დიდ რიცხვთა კანონი. ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა m მათემატიკური ლოდინითა და σ^2 დისპერსიით.

განვიხილოთ

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა. (23.1) ფორმულისა და ჩებიშევის უტოლობის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის გვექნება:

$$p(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| > \varepsilon) = p(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) \le \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \tag{23.5}$$

საიდანაც, იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0,$ როცა $n \to +\infty,$ მივიღებთ

$$p(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) \to 0, \qquad \text{როცა} \quad n \to +\infty. \tag{23.6}$$

საბოლოოდ შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც დიდ რიცხვთა კანონის სახელითაა ცნობილი.

თეორემა 23.2. (დიდ რიცხვთა კანონი). თუ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო m მათემატიკური ლოდინით, მაშინ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon-$ისათვის

$$\lim_{n\to\infty} p(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \succ \varepsilon) = 0. \tag{23.7}$$

შემთხვევით სიდიდეთა $Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათობით კრებადი Y შემთხვევითი სიდიდისაკენ, რაც $Y_n \xrightarrow{p} Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება, თუ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon-$ისათვის

$$\lim_{n\to\infty} p(|Y_n - Y| \succ \varepsilon) = 0. \tag{23.8}$$

აქედან გამომდინარე დიდ რიცხვთა კანონი მოკლედ ასე ჩაიწერება:

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p} m.$$

ახლა განვიხილოთ ერთი მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როდესაც X_i შემთხვევითი სიდიდეები ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებია წარმატების p ალბათობით. ამ შემთხვევაში $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{S_n}{n}$ წარმოადგენს წარმატების ფარდობით სიხშირეს n დამოუკიდებელ ცდაში. ვინაიდან $E\overline{X}_n = p,$ ამიტომ დიდ რიცხვთა კანონს ბერნულის სქემისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p.$$

სტატისტიკურ ლიტერატურაში $\frac{S_n}{n}$ ფარდობით სიხშირეს უწოდებენ შერჩევით პროპორციას და მას $\hat{p}_n$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ, $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$.

ამ ტერმინებში ბერნულის თეორემა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\hat{p}_n \xrightarrow{p} p.$$

§23.3. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა. ვთქვათ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა m საშუალოთი და σ^2 დისპერსიით. როგორც ცნობილია, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ ნორმალურადაა განაწილებული nm საშუალოთი და $n\sigma^2$ დისპერსიით, ხოლო ნორმირებული ჯამების განაწილება ნორმალურია ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით, ე.ი.

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1). \tag{23.9}$$

როდესაც X_i შემთხვევით სიდიდეთა განაწილება ნორმალური არაა, S_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილება არ შეიძლება იყოს ნორმალური. მიუხედავათ ამისა, ნორმირებული ჯამებისათვის გარანტირებულია მიახლოებითი ნორმალურობა, როდესაც შესაკრებთა რაოდენობა იზრდება. ეს ფაქტი ცნობილია ცენტრალური ზღვარითი თეორემის სახელწოდებით.

თეორემა 23.3. თუ $X_1, X_2, ..., X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია საერთო m მათემატიკური ლოდინითა და სასრული σ^2 დისპერსიით, ხოლო $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, მაშინ

$$p\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x) \to 0, \text{ როცა } n \to +\infty, \tag{23.10}$$

სადაც $\Phi(x)$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.

(23.10) თანაფარდობიდან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი:

$$p\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \le x\right) \to \Phi(x), \quad \text{როცა } n \to +\infty.$$

ამრიგად, შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რაოდენობისათვის მათი

არითმეტიკული საშუალო $\overline{X}_n$ მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული m საშუალოთი და σ^2/n დისპერსიით.

ბერნულის სქემისათვის წარმატების მუდმივი p ალბათობით, $0<p<1,\ q=1-p$ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა იძენს შემდეგ ფორმას: ყოველი $x-$ისათვის

$$p\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\le x\right)\to\Phi(x),\quad \text{როცა}\quad n\to+\infty. \tag{23.11}$$

ამ თეორემის მეშვეობით შესაძლებელია გამოითვალოს S_n შემთხვევითი სიდიდის ზღვარითი განაწილებაც, სახელდობრ,

$$p(S_n\le x)-\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)\to 0,\quad \text{როცა}\, n\to+\infty. \tag{23.12}$$

აქედან გამომდინარეობს

თეორემა 23.4 (მუავრ-ლაპლასის თეორემა). როგორიც არ უნდა იყოს a და b ნამდვილი რიცხვები, $a<b$, გვაქვს

$$\left|p(a\le S_n\le b)-\left[\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)\right]\right|\to 0,\quad \text{როცა}\ n\to+\infty.$$

ამ თეორემიდან ვღებულობთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას საკმაოდ დიდი $n-$სათვის:

$$p(a\le S_n\le b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{23.13}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა

$$p(S_n\le x)\approx\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{23.14}$$

(23.11)-დან ადვილად მიიღება შემდეგი თანაფარდობა შერჩევითი პროპორციისათვის:

$$p\left(\frac{\hat{p}_n-p}{\sqrt{pq/n}}\le x\right)\to\Phi(x),\quad \text{როცა}\ n\to+\infty. \tag{23.15}$$

რაც სიტყვიერად ასე გამოითქმის:

თუ ბერნულის სქემაში წარმატების ალბათობაა p, ცდათა დიდი რაოდენობისათვის შერჩევითი პროპორცია $\hat{p}_n$ მიახლოებით ნორმალურადაა

განაწილებული p საშუალოთი და pq/n დისპერსიით.

თუ n საკმაოდ დიდია და წარმატების p ალბათობა არ არის ახლოს ან 1-თან ან 0-თან, ბინომური განაწილების მიახლოება ნორმალურით საკმაოდ ზუსტ შედეგებს იძლევა. ზომიერად დიდი $n-$ისათვის უფრო ზუსტ მიახლოებას იძლევა ფორმულა

$$p(a \le S_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np+0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np+0{,}5}{\sqrt{npq}}\right), \tag{23.16}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა

$$p(S_n \le x) \approx \Phi\left(\frac{x-np+0{,}5}{\sqrt{npq}}\right). \tag{23.17}$$

ამოცანა 2. განვიხილოთ ბერნულის სქემა, რომელშიც $p=0{,}1$ და $n=100$. მაშინ

$$p(S_{100} \le 9)=\sum_{k=0}^{9} C_{100}^{k}\cdot(0{,}1)^k(0{,}9)^{100-k}=0{,}45.$$

(23.12)-ის ძალით

$$p(S_{100} \le 9)\approx \Phi\left(\frac{9-10}{3}\right)=\Phi(-0{,}33)=0{,}3707.$$

როგორც ვხედავთ, (23.12)-ის გამოყენება არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს, მაშინ როდესაც (23.16)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$p(S_{100} \le 9)\approx \Phi\left(\frac{9-10+0{,}5}{3}\right)=\Phi(-0{,}17)=0{,}4325.$$

ამრიგად, (23.16) მიახლოებითი ფორმულის გამოყენებამ გააუმჯობესა აპროქსიმაციის სიზუსტე.

ამოცანა 3. 100 დამოუკიდებელ ცდაში ხდომილობის განხორციელების ალბათობა მუდმივია და 0,8-ის ტოლია. ნორმალური აპროქსიმაციის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობა 100 ცდაში განხორციელდება: ა) არა უმცირეს 75-ჯერ და არა უმეტეს 90-ჯერ; ბ) არა უმცირეს 75-ჯერ; გ) არა უმეტეს 90-ჯერ.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, $n=100, p=0{,}8, a=75, b=90$ და საძიებელია შემდეგი ალბათობები: ა) $p(75 \le X \le 90)$, ბ) $p(X \ge 75)$, გ) $p(X \le 90)$.

(23.13)-ის ძალით გვაქვს

$$p(75 \le X \le 90) \approx \Phi\left(\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = 0{,}888;$$

$$p(X \ge 75) = p(75 \le X \le 100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}89;$$

$$p(X \le 90) = P(0 \le X \le 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-20) = 0{,}99.$$

ბერნულის ცდათა სქემაში, როდესაც წარმატების ალბათობა p ახლოსაა ნულთან და np დიდი არაა, ნორმალურ მიახლოებას ამჯობინებენ პუასონის მიახლოებას

$$p(S_n \le x) \approx \sum_{k=0}^{x} \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}. \tag{23.18}$$

ამ თანადობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $\lambda = np$ პარამეტრის მქონე პუასონის განაწილების ფუნქციას. ეს აპროქსიმაცია ეყრდნობა შემდეგ თეორემას.

თეორემა 23.5 (პუასონის თეორემა). თუ $n-$ის ზრდისას $p \to 0$ ისე, რომ, $np = \lambda \ge 0,$ მაშინ

$$p(S_n \le x) = \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{23.19}$$

პუასონის (23.19) მიახლოება ამოცანა 2-ში მოგვცემს, რომ

$$p(S_n \le 9) = 0{,}4558,$$

რაც ამ მაგალითში მოცემულ ორივე ნორმალურ მიახლოებაზე უკეთესია.

ამოცანა 4. ვთქვათ, 5000 მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს და მიზანში მოხვედრის ალბათობა თითოეულისათვის არის 0,001. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს ორი მსროლელი მაინც დააზიანებს.

ამოხსნა. უნდა ვიპოვოთ $p(S_n \ge 2) = 1 - p(S_n = 0) - p(S_n = 1).$ ზუსტი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $p(S_n \ge 2) = 0{,}9597.$

ნორმალური აპროქსიმაცია მოგვცემს: $p(S_n \ge 2) = 0{,}9633,$ თუ გამოვიყენებთ (23.14)-ს, ხოლო (23.17)-დან გვექნება $p(S_n \ge 2) = 0{,}9415.$ თუ ახლა გამოვიყენებთ პუასონის (23.19) განაწილებას, მივიღებთ, რომ: $p(S_n \ge 2) = 0{,}9596.$ როგორც

ვხედავთ, პუასონის მიახლოება ამ შემთხვევაში უკეთეს შედეგს იძლევა ნორმალურთან შედარებით.

მარტივი რეცეპტები, თუ როდის გამოვიყენოთ ნორმალური და როდის პუასონის მიახლოება არ გაგვაჩნია, თუმცა ზოგიერთი სტატისტისტიკოსი გვთავაზობს უხეშ, ემპირიულ წესებს. მაგალითად, თუ n დიდია, ხოლო p ისეთია, რომ $\lambda = np < 15$, მაშინ რეკომენდებულია პუასონის მიახლოების გამოყენება.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ჩებიშევის უტოლობა.
- ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ დიდ რიცხვთა კანონი.
- რას ეწოდება შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის ალბათობით კრებადობა?
- ჩამოაყალიბეთ დიდ რიცხვთა კანონი ბერნულის სქემისათვის.
- მოიყვანეთ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.
- ჩამოაყალიბეთ ცენტრალური ზღვარითი თეორემა ბერნულის სქემისათვის.
- ჩამოაყალიბეთ მუავრ-ლაპლასის თაორემა.
- მოიყვანეთ მიახლოებითი ფორმულები, რომლებიც გამომდინარეობს მუავრ-ლაპლასის თეორემიდან.
- ჩამოაყალიბეთ პუასონის თეორემა.

სავარჯიშო 23

1. X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $EX = 1$, ხოლო დისპერსია $DX = 0{,}04$. ჩებიშევის უტოლობის საშუალებით შევაფასოთ $0.5 < X < 1{,}5$ უტოლობის ალბათობა.

2. ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით და შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ $|X - EX| < 0{,}2$, თუ $DX = 0{,}004$.

3. მოცემულია: $p(|X - EX| < \varepsilon) \geq 0{,}9$ და $DX = 0{,}009$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ქვემოდან შევაფასოთ $\varepsilon -$ის მნიშვნელობა.

4. X შემთხვევით სიდიდეს აქვს შემდეგი მახასიათებლები: $EX = 1, \quad \sigma = 0{,}2.$ შევაფასოთ ქვემოდან შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები: $A = (0{,}5 \le X < 1{,}5),\ B = (0{,}75 \le X < 1{,}25),\ C = (0 < X < 2).$

5. ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით და შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინისაგან არა ნაკლებ 2-ჯერ საშუალო კვადრატული გადახრისა.

6. შევაფასოთ იმის ალბათობა, რომ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის, თავის მათემატიკური ლოდინისაგან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება: ა) 2 საშუალო კვადრატულ გადახრას; ბ) 3 საშუალო კვადრატულ გადახრას; გ) 4 საშუალო კვადრატულ გადახრას.

7. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $|X - EX| < 0{,}2$ უტოლობის ალბათობა.

8. დისკრეტული ტიპის X შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ

$$\left|X - EX\right| < \sqrt{0{,}4}.$$

9. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 200 ასროლაში, საფასურის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე გადაიხრება მისი მათემატიკური ლოდინისაგან არა უმეტეს 0,1-ისა.

10. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 1200 დამოუკიდებელ ასროლაში, 1-იანის მოსვლის რიცხვი არ აღემატება 800-ს.

11. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 3600 დამოუკიდებელ ასროლაში, 6-იანის მოსვლის რიცხვი მეტია ან ტოლი 900-ის.

12. თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 1/4. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილების მოხდენის X რიცხვი, 800 დამოუკიდებელ ცდაში მოთავსდება 150-დან 250-მდე.

13. თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 1/2. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილების მოხდენის X რიცხვი, 100 დამოუკიდებელ ცდაში მოთავსდება 40-დან 60-მდე.

14. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის 10000 დამოუკიდებელ ასროლაში ექვსიანის მოსვლის სიხშირის მისი ალბათობისაგან გადახრის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 0,01-ს.

15. ბიჭის დაბადების ალბათობა ტოლია 0,52-ისა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 150 ახალშობილს შორის იქნება: ა) 70-ზე მეტი ბიჭი; ბ) 80-ზე ნაკლები გოგო; გ) 65-დან 75-მდე (ჩათვლით) გოგო?

16. როგორია იმის ალბათობა, რომ სტუდენტი მიიღებს ჩათვლას, თუ მან 100 კითხვიდან უნდა უპასუხოს 60-ს მაინც. ერთ კითხვაზე პასუხია “კი” ან “არა” და სტუდენტი აბსოლუტურად მოუმზადებელია.

17. მანქანის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობაა 0,05. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 1000 მანქანიდან მწყობრიდან გამოვა არა უმეტეს 60 მანქანისა.

18. გამორკვეულია, რომ მაღაზიაში შესული 5 მყიდველიდან ერთი ყიდულობს რაიმე ნივთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 300 მყიდველიდან არანაკლებ 50-სა იყიდის რაიმე ნივთს

19. მწარმოებელმა, რომელიც უშვებს დისკეტებს კომპიუტერისათვის, იცის, რომ დისკეტების 5% საგარანტიო პერიოდის გასვლამდე მწყობრიდან გამოდის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 80 დისკეტიდან საგარანტიო პერიოდის გასვლამდე მწყობრიდან გამოვა არა უმეტეს 5 დისკეტა.

20. სატელეფონო სადგური ემსახურება 400 აბონენტს. ალბათობა იმისა, რომ თითოეული აბონენტი ერთი საათის განმავლობაში დარეკავს სადგურში 0,01-ის ტოლია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში სადგურში დარეკავს არა ნაკლებ სამი აბონენტისა.

21. მაღაზიამ უნდა მიიღოს 1000 ბოთლი ბორჯომი. ალბათობა იმისა, რომ ბოთლი გატყდება გზაში ტოლია 0,003-ის. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მაღაზია მიიღებს არა უმეტეს ორ დამტვრეულ ბოთლს.

22. სატელეფონო სადგურში შემოსულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 29 გამოძახება წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება არა ნაკლებ 23.

23. გამოკვლეულია, რომ მაღაზიაში შესული 5 მყიდველიდან ერთი ყიდულობს რაიმე ნივთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 30 მყიდველიდან 4 მაინც იყიდის რაიმე ნივთს.

თავი 24
მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები

§24.1. შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილების კანონი და განაწილების ფუნქცია. ჩვენ აქამდე ვიხილავდით ისეთ მოვლენებს, რომლის დამახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდეები ექსპერიმენტის შედეგად იღებდა რაიმე რიცხვით მნიშვნელობებს. მაგრამ ბუნებაში და ყოველდღიურ ცხოვრებაში ბევრია ისეთი მასობრივი მოვლენები, რომელთა დახასიათება შესაძლებელია მხოლოდ რამდენიმე შემთხვევითი სიდიდის ერთობლიობით. მაგალითად, სასოფლო-სამეურნეო ბაზრის მოთხოვნათა შესწავლის დროს ინტერესდებიან დღის განმავლობაში გაყიდული სხვადასხვა სახის პროდუქტის (ხორცი, ყველი, კვერცხი და ა.შ.) რაოდენობებით. ასეთ შემთხვევაში, X_1 შემთხვევითი სიდიდე არის პირველი სახის პროდუქტის რაოდენობა, X_2-მეორესი, და ა.შ. X_k – k-ურისა. მაშასადამე ექსპერიმენტის ყველანაირი შედეგი აღიწერება $(X_1, X_2, ..., X_k)$ შემთხვევითი სიდიდეთა ერთობლიობით, რომელსაც ეწოდება k განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე ან უბრალოდ შემთხვევითი ვექტორი.

შევნიშნოთ, რომ სიმარტივისათვის შევისწავლით შემთხვევას, როცა შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტების რაოდენობა $k=2$. მისი განზოგადება სამი და უფრო მეტი განზომილების ვექტორისათვის ხდება სრულიად ბუნებრივად და არ არის დაკავშირებული არსებით სიძნელეებთან.

X და Y დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისგან შედგენილ $(X;Y)$ ვექტორს დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორი ეწოდება. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი განისაზღვრება მისი შესაძლო მნიშვნელობებისა და შესაბამისი ალბათობების მოცემით. განაწილების კანონი ადვილად ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nn}

სადაც $x_1, x_2, ..., x_n$ არის X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო $y_1, y_2, ..., y_m$ – Y შემთხვევითი სიდიდისა. P_{ij} არის X-ის მიერ x_i მნიშვნელობის და ერთდროულად Y-ის მიერ y_j მნიშვნელობის მიღების ალბათობა, $i = 1,2,...,n,\quad j = 1,2,...,m$, სადაც $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$

- ასეთ ცხრილს ეწოდება X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების კანონი ან მოკლეთ, ერთობლივი განაწილება.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონიდან ადვილად მიიღება მისი ნებისმიერი კომპონენტის განაწილების კანონი. მართლაც

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i; Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \equiv P_{i*}, \tag{24.1}$$

და ანალოგიურად

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i; Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \equiv P_{*j}. \tag{24.2}$$

ასეთი ხერხით მიღებულ განაწილებების კანონებს, შესაბამისად X და Y შემთხვევითი სიდიდეების მარგინალური განაწილების კანონებს უწოდებენ. მაშასადამე, იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $P(X = x_i)$ ალბათობა, საჭიროა შევკრიბოთ ცხრილის i-ურ სტრიქონში მოთავსებული ალბათობები, ხოლო $P(Y = y_j)$ ალბათობის გამოსათვლელად საჭიროა შევკრიბოთ ცხრილის j-ურ სვეტში ჩაწერილი ალბათობები.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_{1*}	p_{2*}	$\cdots$	p_{n*}

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
p	p_{*1}	p_{*2}	$\cdots$	p_{*m}

- X და Y დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ყოველი (i,j) წყვილისათვის

$$P_{ij}=P\left(X=x_i;Y=y_j\right)=P\left(X=x_i\right)\cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{Y}=\mathrm{y}_\mathrm{j}\right). \qquad (24.3)$$

ამრიგად, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$P_{ij}=P_{i*}\cdot P_{*J}\ .$$

ამოცანა 1. ვთქვათ ვაგორებთ ორ კამათელს. X-ით აღვნიშნოთ პირველ კამათელზე, ხოლო Y-ით – მეორეზე მოსული ქულები. მაშინ $(X;Y)$ წარმოადგენს ორგანზომილებიან დისკრეტულ შემთხვევით ვექტორს. ვნახოთ, როგორია ამ ვექტორის განაწილება და დავადგინოთ, არის თუ არა მისი კომპონენტები დამოუკიდებელი.

ამოხსნა. ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად

$$P_{ij}=P\left(X=i;Y=j\right)=\frac{1}{36}, \qquad \mathrm{i,j}=1{,}2{,}\ldots{,}6$$

ამავე დროს $P_{i*}=P\left(X=i\right)=\dfrac{1}{6},\ \ P_{*j}=P\left(Y=j\right)=\dfrac{1}{6}$

და, მაშასადამე, $P_{ij}=P_{i*}\cdot P_{*j}$.

ამოცანა 2. ამოცანა 1-ის პირობებში შევამოწმოთ, არის თუ არა დამოუკიდებელი X და $\left|X-Y\right|$ შემთხვევითი სიდიდეები.

ამოხსნა. ადვილი დასანახია, რომ

$$P\left(X=3,\ \left|X-Y\right|=4\right)=0,$$

ხოლო $P\left(X=3\right)=\dfrac{1}{6},\quad \mathrm{P}\left(\left|X-Y\right|=4\right)=\dfrac{4}{36}.$

ამრიგად, რადგან

$$P\left(X=3,\ \left|X-Y\right|=4\right)\neq P\left(X=3\right)\cdot P\left(\left|X-Y\right|=4\right),$$

X და $\left|X-Y\right|$ შემთხვევითი სიდიდეები არ არიან დამოუკიდებელნი.

საზოგადოდ, შემთხვევით სიდიდეთა $(X;Y)$ წყვილს ეწოდება შემთხვევითი ვექტორი, თუ ყოველი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის განსაზღვრულია ალბათობა:

$$F_{X,Y}\left(x;y\right)=P\left(X\le x,\ Y\le y\right). \qquad (24.4)$$

- $F_{X,Y}(x;y)$ ფუნქციას $(X;Y)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია ეწოდება. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, შემთხვევითი ვექტორის X და Y

შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების ფუნქციები განისაზღვრება $F_{X,Y}$ ფუნქციის საშუალებით და ამიტომ $F_{X,Y}(x;y)$ ფუნქციას X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების ფუნქციასაც უწოდებენ.

ქვემოთ ვისარგებლებთ $F_{X,Y}(x;y)=F(x;y)$ შემოკლებული ჩანაწერით.

მოვიყვანოთ ერთობლივი განაწილების ფუნქციის თვისებები:

1) ნებისმიერი $(x;y)$ წყვილისათვის $0 \le F(x;y) \le 1$ და $F(x;y)$ არაკლებადი ფუნქციაა თითოეული არგუმენტის მიმართ;

2) ნებისმიერი x-სა და y-ისათვის $F(-\infty;y)=F(x;-\infty)=0,\quad F(+\infty;+\infty)=1,$ სადაც $F(-\infty;y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x;y),\quad F(x;-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x;y)$

3) $P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$

ნებისმიერი $x_1 \le x_2$ და $y_1 \le y_2$ რიცხვებისათვის.

თუ ცნობილია ერთობლივი განაწილების ფუნქცია, შეგვიძლია აღვადგინოთ ცალკეული შემთხვევითი სიდიდის (მარგინალური) განაწილების ფუნქცია:

$F(x;+\infty)=F_X(x),\quad F(+\infty;y)=F_Y(y),$

სადაც $F(x;+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x;y),\quad F(+\infty;y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x;y).$

შევნიშნოთ, რომ, საზოგადოდ, შებრუნებული დებულება არ არის მართებული, ანუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ ფუნქციების ცოდნა არ არის საკმარისი X-ის და Y-ის ერთობლივი განაწილების ფუნქციის განსაზღვრისათვის.

$(X;Y)$ შემთხვევით ვექტორს უწოდებენ უწყვეტს, თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი $f(x;y)$ ფუნქცია, რომელსაც განაწილების სიმკვრივე ჰქვია, რომ სიბრტყის ნებისმიერი $(x;y)$ წერტილისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F(x;y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s;u)\,ds\,du. \tag{24.5}$$

განაწილების ფუნქციის მე-2 თვისებიდან ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s;u)\,ds\,du=F(+\infty;+\infty)=1.$$

(24.5)-დან გვაქვს

$$f(x;y)=F''_{XY}(x;y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x;y+\Delta y)-F(x+\Delta x;y)-F(x;y+\Delta y)+F(x;y)}{\Delta x\Delta y}$$

და განაწილების ფუნქციის მე-3 თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს შემდეგი ორმაგი ზღვარი

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{p(x<X<x+\Delta x; y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}=f(x;y)$$

ეს უკანასკნელი თანაფარდობა ამართლებს $f(x;y)$ სიმკვრივის ფუნქციის სახელწოდებას.

საზოგადოდ, X და Y შემთხვევით სიდიდეებს დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ნებისმიერი $(a;b]$ და $(c;d]$ ინტერვალებისათვის

$$p(a<X\le b;c<Y\le d)=p(a<X\le b)\cdot p(c<Y\le d). \tag{24.6}$$

აქედან ავტომატურად გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობა

$$F(x;y)=F_X(x)\cdot F_Y(y), \tag{24.7}$$

სადაც $F(x;y)$ არის X-ისა და Y-ის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია, ხოლო $F_X(x)$ და $F_Y(y)$ შესაბამისად X და Y-ის განაწილების ფუნქციებია. პირიქით, მტკიცდება, რომ (24.7) იწვევს (24.6)-ს ნებისმიერი $(a;b]$ და $(c;d]$ ინტერვალებისათვის. ამდენად (24.7) შეიძლება გამოყენებული იქნას, როგორც დამოუკიდებლობის განსაზღვრება.

მარგინალური განაწილების სიმკვრივეები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x;u)du \quad \text{და} \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s;y)ds. \tag{24.8}$$

ეს ფორმულები (24.1) და (24.2) ფორმულების უწყვეტი ანალოგიებია. აქ ალბათობათა სათანადო ინდექსებით აჯამვის ოპერაცია შეცვლილია სიმკვრივიდან სათანადო ცვლადებით ინტეგრალის აღების ოპერაციით.

- X და Y შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათი ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე ტოლია შესაბამისი მარგინალური განაწილების სიმკვრივეების ნამრავლისა:

$$f(x;y)=f_X(x)\cdot f_Y(y). \tag{24.9}$$

ცხადია, ამ შემთხვევაშიც

$$F(x;y)=F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

§24.2. შემთხვევითი ვექტორის რიცხვითი მახასიათებლები. ახლა განვიხილოთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები. ვთქვათ, $(X;Y)$ ვექტორის კომპონენტების მათემატიკური ლოდინი შესაბამისად EX –ის და EY –ის ტოლია. მაშინ (EX,EY) რიცხვით

ვექტორს უწოდებენ $(X;Y)$ შემთხვევითი ვექტორის მათემატიკურ ლოდინს (ან ლოდინების ვექტორს). (EX,EY) ვექტორის კომპონენტებს აქვს ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ყველა თვისება და ამიტომ ჩვენ მათ აღარ გავიმეორებთ.

განვსაზღვროთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის სხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარაცია ეწოდება ამ სიდიდეთა მათივე მათემატიკური ლოდინებიდან გადახრების ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$\operatorname{cov}(X;Y) = E[(X-EX)\cdot(Y-EY)]\,. \tag{24.10}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\operatorname{cov}(X;Y) = EXY - EXEY, \tag{24.11}$$

სადაც

$$EXY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_i \cdot p_{ij} \tag{24.12}$$

დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, ხოლო უწყვეტი განაწილების შემთხვევაში

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} suf(s;u)\,ds\,du, \tag{24.13}$$

იგულისხმება, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |su|\, f(s;u)\,ds\,du < +\infty\,.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $EXY = EX\cdot EY$ და

$$\operatorname{cov}(X;Y) = 0.$$

(24.10) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ამ შემთხვევითი სიდიდის თავისთავთან კოვარიაცია. მართლაც, კოვარიაციის განსაზღვრების თანახმად,

$$\operatorname{cov}(X;X) = E(X-EX)(X-EX) = E(X-EX)^2 = DX.$$

კოვარაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\operatorname{cov}(X;Y) = \operatorname{cov}(Y;X)$ – კოვარიაცია სიმეტრიულია;

2) $\operatorname{cov}(X_1+X_2;Y) = \operatorname{cov}(X_1;Y) + \operatorname{cov}(X_2;Y)$ – კოვარიაცია ადიციურია;

3) $\operatorname{cov}(aX+b;Y)=a\operatorname{cov}(X;Y)$ შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივი სიდიდის დამატება მის კოვარიაციას მეორე შემთხვევით სიდიდესთან არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი გადის კოვარიაციის ნიშნის გარეთ;

4) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(X;Y)=0.$

კოვარიაცია ახასიათებს კავშირს ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის. სახელდობრ, როგორც კოვაირაციის (24.10) განსაზღვრებიდან ჩანს, ის წარმოადგენს ორი შემთხვევითი სიდიდის მათი საშუალოების მიმართ ყოფაქცევის "მსგავსების" საზომს. კოვარიაცია დადებითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები საშუალოდ ერთსა და იმავე მხარეს იხრებიან შესაბამისად EX და EY მნიშვნელობებიდან და ის უარყოფითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები EX და EY მნიშვნელობებიდან საშუალოდ სხვადასხვა მხარეს არიან გადახრილი. საზოგადოდ კოვარიაციის კოეფიციენტმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი რიხვითი მნიშვნელობა $(-\infty;+\infty)$ შუალედიდან.

ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის დამოკიდებულების დასახასიათებლად უფრო მოხერხებულია ე.წ. კორელაციის კოეფიციენტის შემოღება.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება რიცხვს.

$$\rho(X;Y)=\frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma X\sigma Y}. \tag{24.14}$$

როგორც ვხედავთ, მოხდა კოვარიაციის კოეფიციენტის მხოლოდ ნორმირება, მასშტაბის შეცვლა, მაგრამ ამ ნორმირებას აქვს გარკვეული ალბათური შინაარსი, რომელიც კარგად ჩანს კორელაციის კოეფიციენტის ქვემოთ ჩამოთვლილი თვისებებიდან.

1) $\rho(X;Y)=\rho(Y;X)$,

2) $\rho(aX;Y)=\operatorname{signa}\cdot\rho(X;Y)$, სადაც $\operatorname{signa}=\begin{cases}-1, & \text{თუ } a<0\\ 0, & \text{თუ } a=0\\ 1, & \text{თუ } a>0\end{cases}$,

3) $|\rho(X;Y)|\le 1$,

4) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\rho(X;Y)=0$,

5) $|\rho(X;Y)|=1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y=aX+b$ რაიმე ნამდვილი a და b რიცხვებისათვის ანუ, როცა X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის

არსებობს წრფივი კავშირი, ამასთან $a>0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=1$ და $a<0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=-1$.

საზოგადოდ მე-4 თვისების შებრუნებული დებულება, რომ თუ $\rho(X;Y)=0$, მაშინ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები "დამოუკიდებელია", არ არის სწორი. როცა $\rho(X;Y)=0$ ამბობენ, რომ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები არაკორელირებულია. არსებობს ერთადერთი კლასი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომელთათვისაც არაკორელირებისა და დამოუკიდებლობის ცნებები ემთხვევა; კერძოდ, ეს არის კლასი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისა. მოვიყვანოთ მაგალითი იმისა, რომ არაკორელირებულობიდან არ გამომდინარეობს შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაციის კოეფიციენტი, სადაც X და Y ამოცანა 1-შია განსაზღვრული.

ამოხსნა. X და $|X-Y|$ შემთხვევით სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები მოიცემა ცხრილით.

$X \backslash \lvert X-Y\rvert$	0	1	2	3	4	5	p_{i*}
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	$1/36$	$2/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	0	$1/6$
3	$1/36$	$2/36$	$2/36$	$1/36$	0	0	$1/6$
4	$1/36$	$2/36$	$2/36$	$1/36$	0	0	$1/6$
5	$1/36$	$2/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	0	$1/6$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
p_{*j}	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$	1

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$EX = \sum_{j=1}^{6} jp(X = j) = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \frac{1}{6} = (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E|X-Y| = \sum_{i=0}^{5} i \cdot p(|X-Y| = i) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{35}{18}$$

და ასევე,

$$EX \cdot |X-Y| = \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=0}^{5} i \cdot j \cdot p(X = j,\ |X-Y| = i) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{36} + \ldots + 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{36} +$$
$$+ \ldots + 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{245}{36}.$$

მაშასადამე, $\operatorname{cov}(X;|X-Y|) = \frac{245}{36} - \frac{7}{2} \cdot \frac{35}{18} = 0$ ანუ $\rho(X;|X-Y|) = 0,$ მიუხედავად იმისა, რომ, როგორც ამოცანა 2-ში ვაჩვენეთ X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეები არ არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\rho(X;Y) = 0,$ ტოლობიდან არ გამომდინარეობს X და Y შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.

ნებისმიერ X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$D(X+Y) = E((X+Y) - E(X+y))^2 = E((X-EX) + (Y-EY))^2 =$$
$$= E\left((X-EX)^2 + 2(X-EX)\cdot(Y-EY) + (Y-EY)^2\right).$$

ამრიგად,

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

ეს ფაქტი სამართლიანია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, Y_j).$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით.

- რას ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილების კანონი?
- რას ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტების მარგინალური განაწილების კანონი?

- რას ეწოდება დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა?
- მოიყვანეთ დამოუკიდებელი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების მაგალითი.
- მოიყვანეთ მაგალითი, სადაც დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები არ არის დამოუკიდებელი.
- რას ეწოდება შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია?
- მიოყვანეთ ერთობლივი განაწილების ფუნქციის თვისებები.
- როგორ შეიძლება ერთობლივი განაწილების ფუნქციიდან აღვადგინოთ მარგინალური განაწილების ფუნქცია?
- როდის ეწოდება შემთხვევით ვექტორს უწყვეტი? რას ეწოდება განაწილების სიმკვრივე?
- როგორ გამოისახება განაწილების სიმკვრივე ორმაგი ზღვარით?
- როგორ განიმარტება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა?
- დაამტკიცეთ, რომ (6)-დან გამომდინარეობს (7) და პირიქით.
- როგორ გამოითვლება მარჟინალური განაწილების სიმკვრივე?
- როგორ განიმარტება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის საშუალებით?
- რას ეწოდება შემთხვევით სიდიდეთა კოვარიაცია? (განმარტება მოიყვანეთ როგორც დისკრეტულ, ისე უწყვეტ შემთხვევაში).
- როგორ განისაზღვრება შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია კოვარიაციის გამოყენებით?
- მოიყვანეთ კოვარიაციის თვისებები.
- განმარტეთ შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი.
- მოიყვანეთ კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები.
- როდის ემთხვევა შემთხვევით სიდიდეთა არაკორელირებულობა და დამოუკიდებლობა?
- მოიყვანეთ მაგალითი იმისა, რომ არაკორელირებულობიდან არ გამომდინარეობს შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.
- მოიყვანეთ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულა.

სავარჯიშო 24

1. მოცემულია, $(X;Y)$ დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი

$X \backslash Y$	-1	0	1
-2	$3/12$	$1/12$	$2/12$
2	$2/12$	$3/12$	$1/12$

გამოთვალეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების მარგინალური განაწილებები და შეამოწმეთ არიან თუ არა ისინი დამოუკიდებლები.

2. მოცემულია $(X;Y)$ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$X \backslash Y$	-2	0	1
0	$1/21$	$1/21$	$5/21$
1	$2/21$	$4/21$	$1/21$
2	$1/21$	$5/21$	$1/21$

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები და შეამოწმეთ არიან თუ არა ისინი დამოუკიდებლები.

3. ცდა მდგომარეობს ორი ტეტრაედრის აგდებაში, რომლის წახნაგებს აწერია რიცხვები 1,2,3,4. X_1–ით აღვნიშნოთ, პირველ ტეტრაედრზე მოსული ქულა ანუ რიცხვი, რომელიც დავარდნილი ტეტრაედრის ფუძეზე წერია, ხოლო X_2–ით მეორე ტეტრაედრზე მოსული რიცხვი. ააგეთ Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები, თუ

ა) $Y_1 = X_1 + X_2$ და $Y_2 = |X_1 - X_2|$,

ბ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = \min(X_1, X_2)$,

გ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = |X_1 - X_2|$,

დ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = |2X_1 - X_2|$,

დაადგინეთ დამოუკიდებელია თუ არა Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეები.

4. მოცემულია უწყვეტი ტიპის ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x;y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & \text{თუ} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{თუ} \quad x < 0 \quad \text{ან} \quad y < 0. \end{cases}$$

ვიპოვოთ $(X;Y)$ შემთხვევითი სიდიდის, $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{6},\ y = \dfrac{\pi}{3}$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში მოხვედრის ალბათობა.

5. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \begin{cases} 1 - 3^{-\mathrm{x}} - 3^{-\mathrm{y}} + 3^{-\mathrm{x}-\mathrm{y}}, & \text{თუ} \quad \mathrm{x} \ge 0, \quad \mathrm{y} \ge 0, \\ 0, & \text{თუ} \quad \mathrm{x} < 0 \quad \text{ან} \quad \mathrm{y} = 0. \end{cases}$$

ვიპოვოთ მისი განაწილების სიმკვრივე.

6. მოცემულია $(X;Y)$ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \begin{cases} \left(1 - \mathrm{e}^{-4\mathrm{x}}\right)\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{y}}\right), & \text{თუ} \quad \mathrm{x} > 0, \quad \mathrm{y} > 0, \\ 0, & \text{თუ} \quad \mathrm{x} < 0, \quad \mathrm{y} < 0. \end{cases}$$

ვიპოვოთ მისი განაწილების სიმკვრივე.

7. მოცემულია $(X;Y)$ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$1/4$	$3/10$
1	$1/5$	$3/20$
2	$1/20$	$1/20$

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების: ა) კოვარიაცია; ბ) კორელაციის კოეფიციენტი.

8. მოცემულია $(X;Y)$ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$X \backslash Y$	-2	0
-1	0	$1/15$
0	$1/5$	$4/15$
2	$1/3$	$2/15$

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების: ა) კოვარიაცია; ბ) კორელაციის კოეფიციენტი. გამოთვალეთ $Z = 2X - Y + 1$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

9. ვთქვათ, $T = 2X - Y - 2Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX = 2$, $EY = 3$, $EZ = 1$, $DX = 9$, $DY = 16$, $DZ = 16$, $\mathrm{cov}(X;Y) = 8$, $\mathrm{cov}(X;Z) = 4$, $\mathrm{cov}(Z;Y) = 4$.

10. ვთქვათ, $T = 2X - 2Y + Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ $EX = 2$, $EY = 1$, $EZ = 2$, $DX = 9$, $DY = 25$, $DZ = 16$, $\mathrm{cov}(X;Y) = 5$, $\mathrm{cov}(X;Z) = 7$, $\mathrm{cov}(Z;Y) = 8$.

თავი 25

მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავება და შერჩევის მეთოდები

§25.1. მონაცემები, პოპულაცია და შერჩევა. მონაცემების ქვეშ იგულისხმება ობიექტთა რაიმე სიმრავლის რაოდენობრივ ან თვისებრივ მახასიათებელთა დაკვირვებული მნიშვნელობების ერთობლიობა. ამ ერთობლიობის ყოველ წევრს დაკვირვება, მონაცემი ან მონაცემი წერტილი ეწოდება. იგი შეიძლება იყოს ფიზიკური გაზომვის შედეგი (მაგალითად, წონა ან სიმაღლე), პასუხი კითხვაზე (კი ან არა) ან რაიმე ნიშნის მიხედვით კლასიფიკაციის შედეგი. ყველა შესაძლო დაკვირვებათა სიმრავლე შეადგენს სტატისტიკურ პოპულაციას ან უბრალოდ პოპულაციას. ამგვარად გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება:

პოპულაცია არის კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის ერთობლიობა.

უნდა აღინიშნოს, რომ პოპულაციაზე საუბრისას არ იგულისხმება, რომ ყველა შესაძლო მნიშვნელობა მართლაც დაკვირვებულია. პოპულაცია შეიძლება იყოს რეალური (როგორც, მაგალითად, 2006 წელს თეუსუ-ში ჩარიცხული აბიტურიენტების მიერ ზოგად უნარებში მოგროვილი ქულების ერთობლიობა), ისე წარმოსახვითი ანუ კონცეპტუალური (ვთქვათ, გარკვეული ცხოველის გარკვეულ პირობებში სიცოცხლის ხანგრძლივობის შესაძლო მნიშვნელობანი).

შერჩევა ანუ ამოკრეფა შეიცავს ზოგიერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას.

შერჩევა ანუ ამოკრეფა არის დაკვირვებათა ერთობლიობა, რომელიც შეადგენს პოპულაციის მხოლოდ რაიმე ნაწილს.

სტატისტიკური კვლევის საბოლოო მიზანი პოპულაციის შესწავლაა. იმ შემთხვევაში, როცა პოპულაცია სრულადაა მოცემული, ამბობენ, რომ ხელთა გვაქვს სრული აღწერის შედეგები. მაგრამ პრობლემა სწორედ ისაა, რომ ხშირად სრული აღწერა შეუძლებელია ან მიზანშეუწონელია და მკვლევარის განკარგულებაში მხოლოდ შერჩევაა.

პოპულაციის ელემენტარული ერთეულები ეწოდება ობიექტებს, რომელთა მახასიათებლებიც პოპულაციას შეადგენენ. ერთი და იგივე ელემენტარული ერთეულების მეშვეობით, შეიძლება შეიქმნას სხვადასხვა პოპულაცია. მაგალითად, თეუსუს აკადემიური პერსონალის ერთობლიობა მოგვცემს მათი შემოსავლების პოპულაციას, მათი წონების პოპულაციას, მათი სამეცნიერო

მიმართულებების პოპულაციას და ა.შ. შესაბამისად განისაზღვრება შერჩევის ელემენტარული ერთეულები.

ელემენტარულ ერთეულთა მახასიათებლების მიხედვით განირჩევა თვისებრივი და რაოდენობრივი პოპულაციები. ისინი სხვადასხვა მეთოდით შეისწავლება. თვისებრივი მახასიათებელი ეწოდება ელემენტარული ერთეულის რაიმე თვისებას ან მდგომარეობას (მაგალითად სქესი, პროფესია, ფერი, პოლიტიკური ორიენტაცია და სხვა). თვისებრივ მახასიათებლის კონკრეტულ დონეს ატრიბუტი ეწოდება. ატრიბუტებია, მაგალითად, პირის ქორწინებითი მდგომარეობის შემდეგი დონეები: მარტოხელა, დაქორწინებული, გაყრილი, ქვრივი. რაოდენობრივია ისეთი მახასიათებელი, რომლის ცალკეული მნიშვნელობები დაკვირვების, გაზომვის ან თვლის შედეგად მიიღება და რიცხვებით გამოიხატება (სიმაღლე, მასა, ხელფასი, წლიური მოგება და სხვა). რაოდენობრივი მონაცემები ობიექტების (ელემენტარულ ერთეულთა) გაზომვის შედეგია, ხოლო თვით გაზომვა ნიშნავს საგნებისთვის რიცხვების მიწერას გარკვეული წესით.

დაკვირვებული რაოდენობრივი მახასიათებლების მიხედვით შეიძლება განვასხვავოთ დისკრეტული და უწყვეტი მონაცემები. დისკრეტული მახასიათებელი ღებულობს მხოლოდ ცალკეულ იზოლირებულ მნიშვნელობებს, ხოლო უწყვეტ მახასიათებლებს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი (ნამდვილი) რიცხვითი მნიშვნელობა რაიმე საზღვრებში. დისკრეტული მახასიათებელი ჩვეულებრივ თვლის შედეგად მიიღება. ასეთებია, მაგალითად: ოჯახის წევრთა რაოდენობა, ოთახების რაოდენობა ბინებში, აბიტურიენტების მიერ მიღებული ქულების რაოდენობა მათემატიკაში და ა.შ. ასეთ მონაცემებს დისკრეტული ეწოდება. დისკრეტული მონაცემების ალტერნატივა უწყვეტი მონაცემებია, როგორიცაა წონა, სიმაღლე, სიცოცხლის ხანგრძლივობა, შემოსავალი და სხვა. მაგალითად, წონა ბუნებითაა უწყვეტი მახასიათებელი, თორემ მოცემული სიზუსტით გაზომვისას ისიც კი შეიძლება დისკრეტულად ჩაითვალოს. ამდენად გაზომვის მოცემული სიზუსტისათვის ალტერნატივა – დისკრეტული ან უწყვეტი – პირობითია.

პოპულაციისა და შერჩევისათვის ჩვენ ქვემოთ ვიხმართ გამაერთიანებელ ტერმინს – ერთობლიობას. ერთობლიობაში შემავალ მონაცემთა რაოდენობას მისი მოცულობა ჰქვია. პოპულაციის მოცულობა სასრულიც შეიძლება იყოს და, როცა პოპულაცია წარმოსახვითია, უსასრულოც. შერჩევა ყოველთვის სასრული მოცულობისაა.

ქვემოთ შეგვხვდება ტერმინი "გენერალური ერთობლიობა", რაც "პოპულაციის" სინონიმია, "შერჩევის" მაგიერ კი ზოგჯერ "შერჩევითი ერთობლიობა" იხმარება.

თავდაპირველ მონაცემებს რაიმე აზრით დალაგების და დაჯგუფების გარეშე ნედლი (დაუმუშავებელი) მონაცემები ეწოდება.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ რაოდენობრივ მონაცემთა თვალსაჩინო, კერძოდ, ცხრილური და გრაფიკული წარმოდგენის მეთოდებს, რომელთა მიზანია არსებული ინფორმაციის ისეთი შეკუმშული ფორმით გადმოცემა, რომ მისი ძირითადი შინაარსი იყოს მარტივად აღსაქმელი.

§25.2. ვარიაციული მწკრივი. წერტილოვანი და მესერული დიაგრამები.

ვთქვათ ელემენტარული ერთეულები ხასიათდება ერთი რაოდენობრივი x ნიშნით და ნედლი მონაცემები შედგება შემდეგი n დაკვირვებისაგან:

$$x_1, x_2, ..., x_n .$$

პირველი, რაც შეიძლება სტატისტიკოსმა მოიმოქმედოს, ესაა ამ მიმდევრობის დალაგება არაკლებადი მიმდევრობის სახით:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)} ,$$

რასაც ვარიაციული მწკრივი ეწოდება. თუ ახლა $x^{(1)}$–ით აღვნიშნავთ მინიმალურ დაკვირვებულ მნიშვნელობას, $x^{(2)}$-ით – სიდიდით მეორე მნიშვნელობას ვარიაციულ მწკრივში და ა.შ. $x^{(s)}$–ით კი – მაქსიმალურს, მაშინ მივიღებთ ზრდად ვარიაციულ მწკრივს

$$x^{(1)} < x^{(2)} < ... < x^{(s)}$$

და თუ n_1–ით აღვნიშნავთ ვარიაციულ მწკრივში $x^{(1)}$–ის სიხშირეს (ანუ $x^{(1)}$–ის ტოლ მნიშვნელობათა რაოდენობას ვარიაციულ მწკრივში), n_2-ით – $x^{(2)}$-ის სიხშირეს და ა.შ., n_s-ით – $x^{(s)}$-ის სიხშირეს, მივიღებთ ზრდადი ვარიაციული მწკრივის შესაბამის სიხშირეებს, ანუ სიხშირეთა განაწილებას:

$x^{(i)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	. . .	$x^{(s)}$	ჯამი
n_i	n_1	n_2	. . .	n_s	n

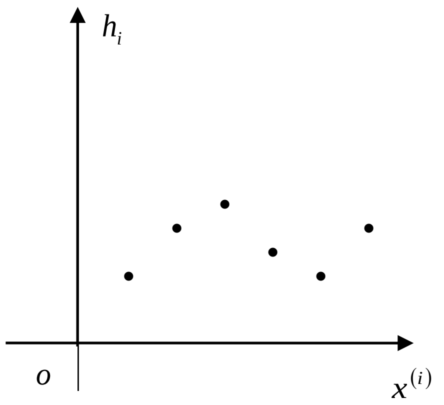
ცხრილი 1

თუ გადავალთ $h_1 = n_1/n, \ldots, h_s = n_s/n$ ფარდობით სიხშირეებზე, სადაც $h_1 + h_2 + \ldots + h_s = 1$, ცხრილი 1-ის მაგიერ გვექნება ფარდობით სიხშირეთა განაწილება

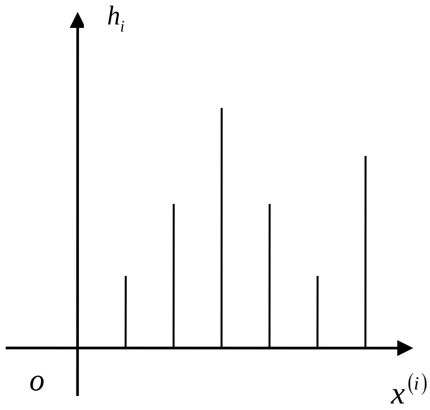
$x^{(i)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	. . .	$x^{(s)}$	ჯამი
h_i	h_1	h_2	. . .	h_s	1

ცხრილი 2

პირველი და მეორე ცხრილები შეიძლება წერტილიანი დიაგრამის ან მესერული დიაგრამის სახით გამოისახოს: (იხ. ნახ. 1, და ნახ. 2)



ნახ.1. სიხშირეთა განაწილების წერტილიანი დიაგრამა



ნახ.2. ფარდობით სიხშირეთა განაწილების მესერული დიაგრამა

§25.3. დაგროვილ სიხშირეთა ფუნქცია (კუმულატა). ე.წ. დაგროვილ სიხშირეთა ან დაგროვილ ფარდობით სიხშირეთა ფუნქციები, რომელთაც ჩვენ ახლა შემოვიღებთ, მოიცავენ სიხშირეთა განაწილებით და ფარდობით სიხშირეთა განაწილებით მოცემულ ინფორმაციას.

მოცემული ნამდვილი x რიცხვისათვის დაგროვილი სიხშირე $N_n(x)$ განისაზღვრება როგორც იმ $x^{(i)}$ მნიშვნელობათა სიხშირეების ჯამი, რომლებიც x–ს არ აღემატება (ანუ $x^{(i)} \le x$). თუ $N_n(x)$–ს n–ზე გავყოფთ, მივიღებთ $F_n(x)$ დაგროვილ ფარდობით სიხშირეს, რომელიც, ცხადია, იქნება იმ $x^{(i)}$ მნიშვნელობების ფარდობით სიხშირეთა ჯამი, რომლებიც არ აღემატება x–ს. ამრიგად, ვინაიდან $x^{(1)},\ldots,x^{(k)}$ და მხოლოდ ისინი არ აღემატება იმ x–ს, რომელიც $x^{(k)}$–ზე ნაკლები არაა და ნაკლებია $x^{(k+1)}$–ზე, გვაქვს

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x^{(1)},\\ \dfrac{n_1}{n}, & x^{(1)}\le x<x^{(2)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{n_1+\dots+n_k}{n}, & x^{(k)}\le x<x^{(k+1)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x\ge x^{(s)}.\end{cases}$$

როგორც აქედან ჩანს, $F_n(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია და მისი ზრდა ხდება $x^{(1)},\dots,x^{(s)}$ წერტილებში. $x^{(1)}$–მდე $F_n(x)$ ნულია, $x^{(s)}$-ის მარჯვნივ (მისი ჩათვლით) კი – 1. ყოველ $x^{(k)}$ წერტილში $F_n(x)$ ფუნქცია მატულობს $h_k={}^{n_k}\!/_{n}$ ფარდობითი სიხშირის ტოლი სიდიდით, სწორედ ეს უკანასკნელი გარემოება ნიშნავს, რომ $F_n(x)$ მოიცავს ფარდობით სიხშირეთა განაწილებით მოცემულ ინფორმაციას.

$F_n(x)$ ფუნქციას ზოგჯერ კუმულატას უწოდებენ.

§25.4. მონაცემთა დაჯგუფება. სიხშირეთა ინტერვალური განაწილება.

$x^{(1)},\dots,x^{(s)}$ ვარიანტების დიდი რაოდენობისათვის კუმულატა ძნელად აღსაქმელია და მისი გამოყენება შემდგომი ანალიზისათვის შეზღუდულია. ამ შემთხვევაში, განსაკუთრებით კი უწყვეტ მონაცემთა აღწერისას მიმართავენ დაჯგუფებას და სიხშირეებს და კუმულაციურ სიხშირეებს დაჯგუფებული მონაცემებისათვის გამოთვლიან.

დაჯგუფების მიზნით ინტერვალი, რომელშიც მოთავსებულია დაკვირვებული მნიშვნელობები $x_{\min}$ მინიმალური მნიშვნელობიდან $x_{\max}$ მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე დაიყოფა ტოლი ან არატოლი სიგრძის რამდენიმე ინტერვალად:

$$x_{\min}=a_0\le x<a_1,\quad a_1\le x<a_2,\dots,\; a_{k-1}\le x\le a_k=x_{\max}$$

შემდეგ გამოიყოფა ამ ინტერვალებში მოთავსებულ დაკვირვებათა ჯგუფები, რომელთა სიხშირეები $n_1,n_2,\dots,n_k$ სიმბოლოებით აღინიშნება.

თუ გავიხსენებთ $[a;b)=\{x:a\le x<b\}$ და $[a;b]=\{x:a\le x\le b\}$ აღნიშვნებს, მივიღებთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალურ განაწილებებს, რომლებიც შემდეგი ცხრილით მოიცემა:

ინტერვალი	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	. . .	$[a_{k-1};a_k]$	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	. . .	n_k	n
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	. . .	$\frac{n_k}{n}$	1

ცხრილი 3

ზოგჯერ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა განაწილების ნაცვლად იხილავენ მის დისკრეტიზაციას ანუ განაწილებას, რომელიც ყოველი ინტერვალის შუაწერტილს მიაწერს ინტერვალის შესაბამის სიხშირეს ან ფარდობით სიხშირეს.

ინტერვალი	$\frac{(a_0+a_1)}{2}$	$\frac{(a_1+a_2)}{2}$	. . .	$\frac{(a_{k-1}+a_k)}{2}$	ჯამი
სიხშირე	n_1	n_2	. . .	n_k	n
ფარდობითი სიხშირე	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	. . .	$\frac{n_k}{n}$	1

ცხრილი 4

§25.5. ჰისტოგრამა. მონაცემების დაჯგუფებისას, როგორც წესი, ტოლი სიგრძის ინტერვალებს ამჯობინებენ, თუმცა ზოგჯერ გამართლებულია განსხვავებული სიგრძის ინტერვალების განხილვაც. ინტერვალების არაერთგვაროვნების მაჩვენებელია შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ, ერთი ინტერვალის სიგრძეა 10 და იგი 30 დაკვირვებას შეიცავს, მეორის სიგრძეა 4 და მასში 20 დაკვირვებაა. პირველში სიგრძის ერთეულზე მოდის საშუალოდ 3 დაკვირვება, ხოლო მეორეში – 5. ამდენად გამართლებულია სიხშირეთა სიმკვრივის, ანუ

$$\xi_i = \frac{n_i}{\Delta a_i}, \quad i = 1,...,k,$$

ფარდობის შემოღება, სადაც $\Delta a_i = a_i - a_{i-1}$. ანალოგიურად მივიღებთ ფარდობითი სიხშირის სიმკვრივესაც:

$$\eta_i = \frac{h_i}{\Delta a_i} = \frac{n_i}{n\Delta a_i}, \qquad i = 1,\ldots,k,$$

თუ ახლა 3 ცხრილის ინტერვალების სიხშირეთა სიმკვრივეებს შესაბამის ინტერვალებში Ox ღერძის პარალელური მონაკვეთებით გამოვსახავთ ღერძიდან ξ_i სიმაღლეზე, მივიღებთ $\xi(x)$ სიხშირეთა ჰისტოგრამას, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა სიმკვრივეების ანალოგიური გამოსახვით Ox ღერძის პარალელური მონაკვეთებით ღერძიდან η_i სიმაღლეზე – $\eta(x)$ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამას, ყოველ $[a_{i-1};a_i)$ ინტერვალზე, როგორც ფუძეზე, აგებულია პირველ შემთხვევაში n_i ფართობის მართკუთხედი, ხოლო მეორეში – $h_i = \dfrac{n_i}{n}$ ფართობისა. $\xi(x)$ სიხშირეთა ჰისტოგრამისათვის ამ ფართობების ჯამია n, ხოლო $\eta(x)$ ფართობით სიხშირეთა ჰისტოგრამისათვის – 1.

ჰისტოგრამთა აგების მოყვანილი წესი მოკლედ მე-5 ცხრილით გამოისახება.

ინტერვალი	$x < a_0$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	. . .	$[a_{k-1};a_k]$	$x \geq a_k$
$\xi(x)$	0	$\xi_1 = \dfrac{n_1}{\Delta a_1}$	$\xi_2 = \dfrac{n_2}{\Delta a_2}$	. . .	$\xi_k = \dfrac{n_k}{\Delta a_k}$	0
$\eta(x)$	0	$\eta_1 = \dfrac{h_1}{\Delta a_1}$	$\eta_2 = \dfrac{h_2}{\Delta a_2}$	. . .	$\eta_k = \dfrac{h_k}{\Delta a_k}$	0

ცხრილი 5

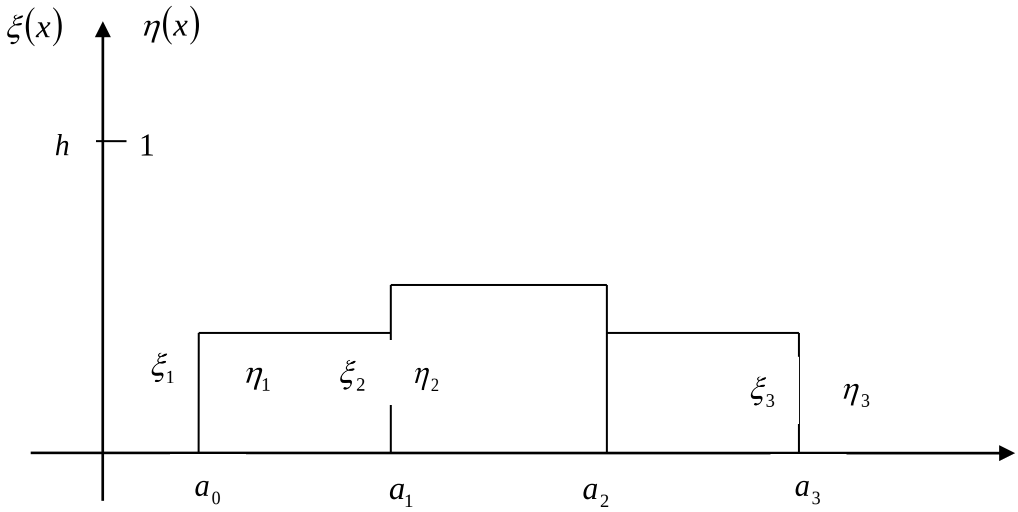
$\xi(x)$ და $\eta(x) = \dfrac{\xi(x)}{n}$ ფუნქციები ერთი და იგივე ნახაზზე გამოვსახოთ, ოღონდ $\eta(x)$–ის შემთხვევაში ორდინატთა ღერძზე მასშტაბი n–ჯერ მეტი უნდა ვიგულისხმოთ. (იხ.ნახ.3).

სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების აგებისას ინტერვალების რაოდენობისა და სიგანის განსაზღვრისათვის საყოველთაოდ მიღებული წესი არ არსებობს. სტატისტიკურ ლიტერატურაში რეკომენდებულია 5-დან 20-მდე ტოლი სიგრძის ინტერვალის აგება, მაგრამ საკითხი ყოველ კერძო შემთხვევაში ცალკეა გადასაწყვეტი.

თუ ტოლი Δ სიგრძის ინტერვალებს ვაგებთ, მაშინ მათი k რაოდენობა

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta}$$

ფორმულით განისაზღვრება.



ნახ. 3

ამოცანა 1. ავაგოთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა დიდი ზომის ავტომანქანებში საწვავის დანახარჯზე 100 დაკვირვების მეშვეობით. მე-6 ცხრილი გვიჩვენებს გარბენის იმ მანძილს მილებში (1 მილ = 1,609 კმ), რომელსაც ყოფნის 1 გალონი (1 გალონი = 3,78 ლ) საწვავი (1 მილ/გალონზე = 1,426 კმ/ლ).

მილი/გალონზე									
19.0	20.8	22.0	22.7	20.0	18.9	16.6	16.8	20.8	14.7
15.1	21.8	21.1	21.5	21.1	15.5	19.3	15.1	20.6	16.8
18.2	20.5	15.3	16.2	16.3	22.8	22.7	21.9	22.5	17.1
19.1	21.6	19.0	18.3	18.6	22.1	17.5	2.9	21.7	18.7
21.9	20.2	14.5	14.1	22.9	20.2	17.3	22.6	19.3	21.7
21.5	22.6	18.7	19.2	22.8	21.6	21.7	20.5	22.7	20.4
18.8	15.1	16.5	20.5	19.1	17.4	19.7	19.2	16.4	21.9
14.3	19.2	19.7	17.1	21.4	21.9	21.7	19.2	23.9	19.6
20.9	18.5	20.2	18.2	20.2	22.4	20.4	21.6	21.3	22.4
20.5	18.1	20.7	21.3	16.9	20.3	23.9	18.8	21.1	21.9

ცხრილი 6

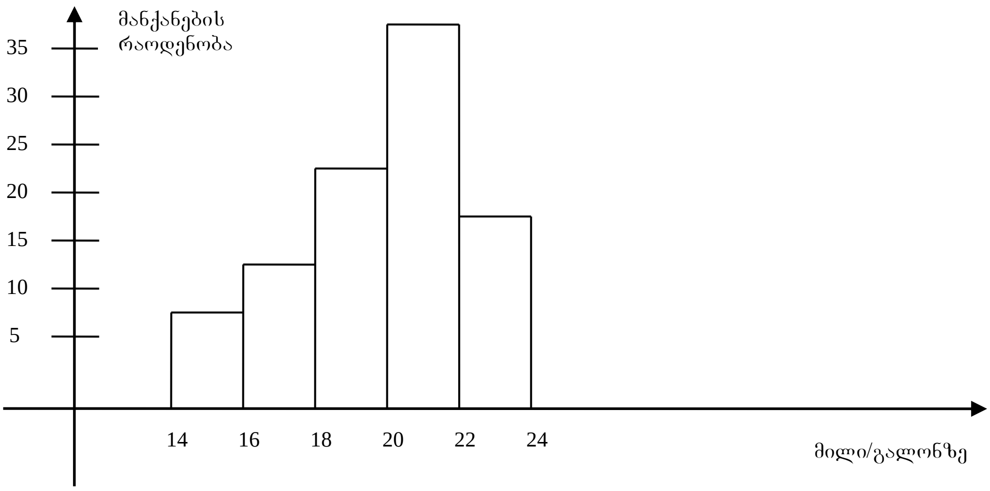
ამოხსნა. თუ მოცემული პოპულაციისათვის დაჯგუფების 5 ინტერვალს ავირჩევთ, მაშინ $\Delta = (23{,}9 - 14{,}1) : 5 = 1{,}96$ (მილი/გალონზე). სიმარტივისათვის ეს მნიშვნელობა დავამრგვალოთ 2-მდე და მინიმუმად ავიღოთ 14, ხოლო

მაქსიმუმად – 24. მივიღებთ დაჯგუფების 5 ინტერვალს, ხოლო სიხშირეები გამოთვლილია მე-7 ცხრილში:

ინტერვალი	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24]	ჯამი
სიხშირე	9	13	24	38	16	100

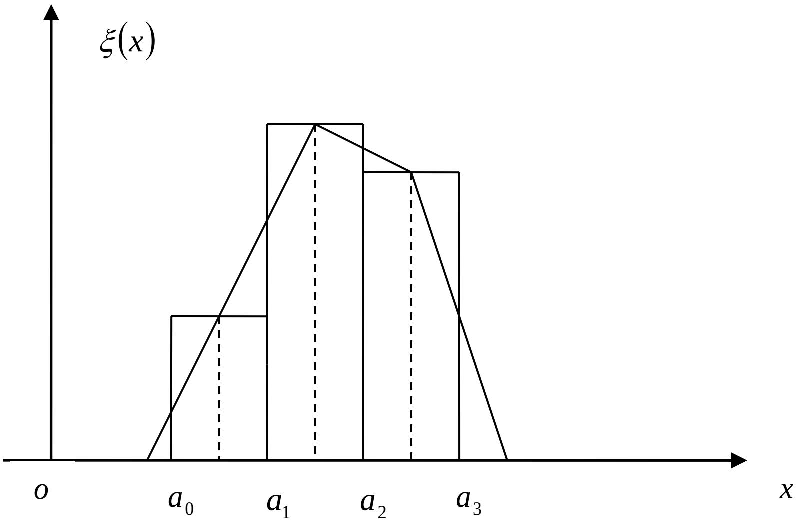
ცხრილი 7

მე-7 ცხრილის მიხედვით ავაგოთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა:



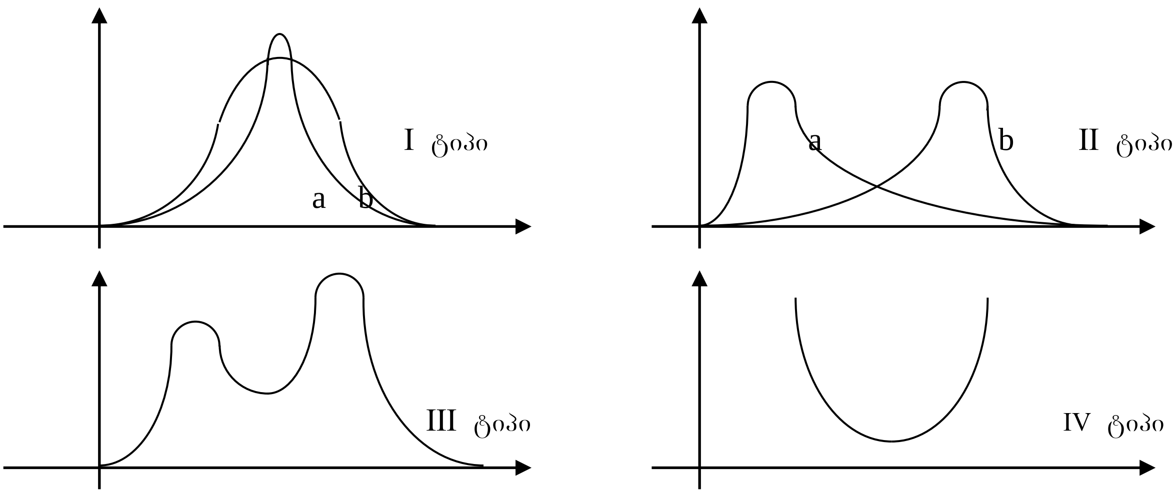
ნახ. 4

§25.6. პოლიგონი. ჰისტოგრამასთან ერთად განიხილავენ ე.წ. პოლიგონსაც. დისკრეტული მონაცემებისათვის პოლიგონი მიიღება წერტილოვანი დიაგრამის წერტილების შეერთებით (იხ. ნახ. 1). ინტერვალური მონაცემებისათვის ხდება მათი დისკრეტიზაცია მე-4 ცხრილის მიხედვით და მონაკვეთებით აერთებენ მიღებულ წერტილებს, როდესაც $\Delta a_1 = \Delta a_2 = ... = \Delta a_k = \Delta$. Ox ღერძზე პირველი ინტერვალის მარცხნივ, მისი შუა წერტილიდან Δ მანძილზე და ბოლო ინტერვალის შუა წერტილიდან მარჯვნივ იგივე Δ მანძილზე აიღება წერტილები და ისინიც უერთდება მიღებული ტეხილის უახლოეს წერტილებს (ნახ. 5). ამგვარად მიღებულ ტეხილს (რომელიც უკვე დასრულებული პოლიგონია) და Ox ღერძს შორის ფართობი სიხშირეთა შემთხვევაში n–ის ტოლია, ხოლო ფარდობით სიხშირეთა შემთხვევაში – 1-ისა.



ნახ. 5

§25.7. სიხშირეთა განაწილების ფორმები. ჰისტოგრამისა და პოლიგონის მეშვეობით ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ განაწილებათა ტიპობრივი ფორმები, რაც მნიშვნელოვანია განაწილებათა შედარებისას. უმნიშვნელოვანესი ტიპები მე-6 ნახაზზეა გამოსახულია. ცხადია, რომ რაც მეტია შერჩევის მოცულობა და დაჯგუფების ინტერვალთა რაოდენობა და რაც ნაკლებია ინტერვალის სიგრძე, მით უფრო გლუვი იქნებიან ჰისტოგრამა და პოლიგონი. ამიტომ განაწილების სავარაუდო ფორმები შეგვიძლია გლუვი წირების მეშვეობით წარმოვადგინოთ.



ნახ. 6

პირველი ტიპის მრუდი იმ გარემოებას ასახავს, რომ კიდურა მნიშვნელობანი უფრო იშვიათად გვხვდება, ვიდრე შუალედური. ამასთან b მრუდი უფრო მდორედ იცვლება, ვიდრე a მრუდი. ორივე მრუდს ერთადერთი

წვერო აქვს მნიშვნელობათა სიმრუდის შუაში და ამ მნიშვნელობის ირგვლივ ეს მრუდები სიმეტრიულია.

მეორე ტიპის განაწილება ასიმეტრიულია წვეროს შესაბამისი მნიშვნელობის (ინტერვალის) გარშემო. *b* მრუდი მარცხნივ დამრეცია, მარჯვნივ კი ციცაბოდ ეშვება. მაქსიმალური სიხშირის მნიშვნელობის მარცხნივ მნიშვნელობათა სპექტრი უფრო განიერია, ვიდრე მარჯვნივ, და ამ მნიშვნელობისგან ერთი და იგივე მანძილზე გადახრათაგან მარცხენას უფრო მეტი სიხშირე აქვს ვიდრე მარჯვენას. ამგვარი ასიმეტრია არის მარცხენა ასიმეტრია. *a* მრუდი სიხშირეთა ზუსტად შებრუნებულ ყოფაქცევას გვიჩვენებს, ანუ მარჯვენა ასიმეტრია გააჩნია.

მესამე ტიპის მრუდს რამდენიმე წვერო აქვს. ასეთი მრუდები მაშინ ჩნდება, როდესაც პოპულაცია, რომლის თვისებებსაც ასახავს პოპულაციიდან ამორჩეული მონაცემებით აგებული მრუდი, არაერთგვაროვანია, ე.ი. პოპულაცია ფაქტობრივად სხვადასხვა თვისებების მქონე რამდენიმე პოპულასციისაგან შედგება. მაგალითად, თუ ადამიანთა პოპულაციიდან, სადაც ქალებიც და მამაკაცებიც საკმაო რაოდენობითაა, გამოვყოფთ შერჩევას, მაშინ სიმაღლეთა პოლიგონს ორი წვერო ექნება. საქმე ისაა, რომ ცალკე ქალებს და ცალკე მამაკაცების სიმაღლეთა განაწილება თითქმის სიმეტრიულია და მათ თავთავისი განსხვავებული ცენტრალური მნიშვნელობები გააჩნიათ, რომელთა გარშემოც თავს იჩენს სიმეტრია, ხოლო ამ ერთობლიობათა გაერთიანებას კი ექნება ორწვერა განაწილება.

მეოთხე ტიპის მრუდი გვიჩვენებს, რომ კიდურა მნიშვნელობები უფრო ხშირად გვხვდება, შუა მნიშვნელობები კი – იშვიათად. ეს მრუდიც სიმეტრიულია, მაგრამ ორი წვერო გააჩნია კიდურა მნიშვნელობებზე, სადაც მაქსიმალური სიხშირეებია. იგი დიდ ლათინურ U–ს წააგავს.

§25.8. რატომ ვამჯობინებთ შერჩევას? პოპულაციის სრულ აღწერას ჩვენ შერჩევის გამოყოფას და მის შესწავლას ვამჯობინებთ თუნდაც იმიტომ, რომ ნაწილის დაკვირვება უფრო იაფია, ვიდრე მთელისა. თუმცა ხარჯების ეკონომიის გარდა შერჩევის უპირატესობას სხვა მოტივებიც განაპირობებენ.

ინფორმაციის დროულად მოპოვება მხოლოდ შერჩევის მეშვეობით შეიძლება, მაგალითად, პოლიტიკური ხასიათის გამოკითხვისას, როცა საჭიროა განისაზღვროს, ვისკენ იხრება ამომრჩეველთა სიმპათიები, დროის ფაქტორი გადამწყვეტი მნიშვნელობისაა. საქმე ისაა, რომ ამომრჩეველთა ნება ხშირად

თვით არჩევნებამდეც კი მერყეობს და ამიტომ ყოველი გამოკითხვა მხოლოდ იმ მოკლე პერიოდს ასახავს, როცა ის შედგა. აქ სრული აღწერის ჩატარება კიდეც რომ იყოს შესაძლებელი, მისი შედეგები ვერ იქნებოდა ადეკვატური საზოგადოებრივი აზრის მნიშვნელოვანი ცვლილების გამო იმ ხნის განმავლობაში, რაც სრულ აღწერას სჭირდება. ზუსტად ასევე მუშაობს დროის ფაქტორი მარკეტინგულ გამოკვლევებშიც. არასოდეს არაა იმის საშუალება, რომ რაიმე ახალი პროდუქტის ან მომსახურების ახალი სახეობის თაობაზე მოსახლეობის 100%-ს შეექმნას აზრი. თუკი შერჩევამ ცხადი სურათი დახატა, ეს საკმაო საფუძვლად ითვლება დასკვნების გამოსატანად.

თუ პოპულაცია დიდი მოცულობისაა, ელემენტარული ერთეულიდან ინფორმაციის აღება ძალზე იაფიც რომ იყოს, სრულ აღწერას აზრი მაინც არ ექნება და შერჩევით უნდა დავკმაყოფილდეთ. ასეთივე დასკვნამდე მივალთ, თუ პოპულაციის ერთეულების უმეტესობა მიუღწევადია. გასათვალისწინებელია არა მარტო ფიზიკური მიუღწევადობა; შესაძლებელია ერთეულის გამოკვლევა იმდენად ძვირი იყოს, რომ შესაბამისი ელემენტარული ერთეული მიუღწევადად ჩავთვალოთ.

ზოგჯერ თვით დაკვირვების აქტიც კი სპობს ელემენტარულ ერთეულს. ასანთის კოლოფის ხარისხზე ყველაზე უფრო საიმედო დასკვნას მაშინ გამოვიტანთ, თუ კი ყოველი ღერის ხარისხში დავრწმუნდებით, მაგრამ შედეგად ცარიელი კოლოფი დაგვრჩება. არავინ ამოწმებს ყოველ საავტომობილო ძრავას ან ყოველი ტელევიზორის კინესკოპს გაანგარიშებული სამუშაო ვადის ტოლფასი დატვირთვის მიცემით. სრული აღწერის მაგიერ, მსგავს სიტუაციებში იძულებული ვართ მხოლოდ შერჩევას მივმართოთ.

ბოლოს, შერჩევა შეიძლება იყოს უფრო ზუსტი, ვიდრე სრული აღწერა. ცუდად ჩატარებულ სრულ აღწერას შეიძლება მოჰყვეს ბევრად უფრო არასაიმედო შედეგი, ვიდრე ზედმიწევნით ჩატარებულ შერჩევას.

§25.9. შერჩევის სახეობანი. შერჩევის ცდომილება. სიტყვა შერჩევა ორი აზრით მოიცემა. ერთი მხრივ ესაა პოპულაციის ნაწილი, მეორე მხრივ კი პროცედურა ამ ნაწილის გამოსაყოფად. ამიტომ პროცედურის როლში ჩვენ ხშირად გამოვიყენებთ სინონიმებს “მიღება”, “გამოყოფა”.

შერჩევას ეწოდება წარმომადგენლობითი ანუ რეპრეზენტაციული, თუ იგი კარგად წარმოადგენს პოპულაციის პროპორციებს.

შერჩევის წესი განსაზღვრავს შერჩევით ერთობლიობის ადეკვატურობას. მიღებული შერჩევის რეპრეზენტაციულობას ხელს უშლის შერჩევის ცდომილება.

შერჩევის შემთხვევითი ცდომილება ეს ის განსხვავებაა შერჩევასა და პოპულაციას შორის, რომელსაც განაპირობებენ მხოლოდ შერჩევაში მონაწილე კონკრეტული ელემენტარული ერთეულები. ასეთი ცდომილება ძალიან ადვილი წარმოსადგენია. თუ მაგალითად, ყუთში 7 სხვადასხვა ფერის 70 ბურთია, თითოეული 10-10 ოდენობით, მაშინ 10 ელემენტიან შერჩევაში შეიძლება ყველა წითელი აღმოჩნდეს და აქედან გაკეთებული დასკვნა იმის თაობაზე, რომ ყუთში, ბურთების უმეტესობა წითელია, სწორი არ იქნება. შემთხვევითი ცდომილებიდან თავის დაღწევის მთავარი საშუალებაა შერჩევის მოცულობის გაზრდა.

შერჩევის სისტემატური ცდომილება ანუ ჩანაცვლება, ესაა ტენდენცია არჩეულ იქნას გარკვეული კერძო თვისებების მქონე ელემენტარული ერთეულები. ამგვარი ცდომილება, ცხადია, შერჩევის ცუდი დაგეგმვის შედეგია. განვიხილოთ პოლიტიკური აზრის გამოკითხვის შემდეგი კლასიკური მაგალითი.

მაგალითი 1. 1936 წელს აშშ-ის გაზეთმა “ლიტერატურული დაიჯესტი” მოაწყო ამომრჩეველთა გამოკითხვა. არჩევნებში დემოკრატი ფრანკლინ რუზველტი გამოდიოდა რესპუბლიკელი ალფრედ ლანდონის წინააღმდეგ. რამდენიმე მილიონი გამოკითხულის რეაქცია იყო საფუძველი იმისა, რომ გაზეთმა გამოაცხადა, ლანდონი სარეკორდო შედეგით გაიმარჯვებსო. მოხდა სრულიად საპირისპირო, რუზველტმა მოიპოვა ამერიკის ისტორიაში უდიდესი გამარჯვება. გამოკვლევის მცდარი შედეგი შემდგომ კვალიფიცირებული იყო როგორც შერჩევის ჩანაცვლება.

საქმე ისაა, რომ გაზეთმა შერჩევა მოაწყო თავისი ხელმომწერების სიებიდან და სატელეფონო წიგნებიდან. ამერიკის ისტორიაში დიდი დეპრესიის სახელით ცნობილი პერიოდის მკაცრ პირობებში ორივე ეს წყარო შეიცავდა იმ წარმატებული პირების დისპროპორციულ რაოდენობას, რომელთაც მოსწონდათ რესპუბლიკელთა პლატფორმა. ვინაიდან უკმაყოფილო უმრავლესობას, რომელიც ცალსახად რუზველტს ამჯობინებდა, არც ტელეფონები გააჩნდა და არც გაზეთზე ხელმოწერა, იგი შერჩევაში ადეკვატურად არ იყო წარმოდგენილი.

შერჩევის ჩანაცვლების თავიდან აცილება სტატისტიკოსის ძირითადი ამოცანაა.

არსებობს შერჩევის მიღების სხვადასხვა ხერხი, რომლებიც ან შემთხვევითი ხასიათისაა და ექვემდებარება ალბათობის თეორიის მეთოდებით შესწავლას ან არაა ასეთი ხასიათის და ამდენად მათთვის ზუსტი თეორია არ არსებობს. ჯერ

ჩამოვთვალოთ ისეთი გავრცელებული ხერხები, რომელთაც არა აქვთ შემთხვევითი ხასიათი.

1) შერჩევა იფარგლება პოპულაციის მხოლოდ მისაწვდომი ნაწილით (მისაწვდომი შერჩევა). ამის მაგალითია რკინიგზის ღია ვაგონიდან ქვანახშირის ამოღება მხოლოდ 15-20 სანტიმეტრის სიღრმიდან.

2) შერჩევა უწესრიგოდ წარმოებს (უწესრიგო შერჩევა). მაგალითად, თუ მკვლევარს სჭირდება ათი ბოცვერი ლაბორატორიაში მდებარე დიდი გალიიდან, იგი იმათ დაიჭერს, რომლებიც ხელში მოხვდება.

3) მცირე, მაგრამ არაერთგვაროვანი პოპულაციის გამოსაკვლევად ათვალიერებენ მთელ პოპულაციას და ირჩევენ ტიპობრივი ერთეულების მცირე რაოდენობას, ე.ი. ისეთ ერთეულებს, რომლებიც პასუხობენ საშუალო წარმოდგენას პოპულაციის შესახებ. ამგვარ მეთოდს მიზანმიმართული შერჩევა ეწოდება.

შერჩევის გამოყოფის სამივე ეს ხერხი ანუ გეგმა იძლევა ჩანაცვლებას, მაგრამ ზოგჯერ შერჩევით გამოკვლევის სხვა საშუალება არ არსებობს. ჩამოთვლილი არაშემთხვევითი მეთოდები შესაბამის პირობებში შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს, თუნდაც წინასწარი ინფორმაციის მოპოვებისათვის, მაგრამ შერჩევითი მეთოდის თეორიის განვითარება ამ მეთოდებს არ უკავშირდება, ვინაიდან ისინი არ შეიცავენ შემთხვევითი (ანუ ალბათური) შერჩევის ელემენტებს.

§25.10. შემთხვევითი შერჩევა. შერჩევის უმნიშვნელოვანესი სახეობაა შემთხვევითი შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევა გულისხმობს, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისთვის განსაზღვრულია შერჩევაში მოხვედრის შანსი (ანუ ალბათობა).

1) მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. როდესაც შერჩევის გეგმა ისეთია, რომ პოპულაციის ყოველი ელემენტისათვის შერჩევაში მოხვედრის შანსი ერთნაირია, ამბობენ, რომ გვაქვს მარტივი შემთხვევითი შერჩევა.

მარტივი შემთხვევითი შერჩევა ლატარიის პრინციპით ეწყობა. თუ, მაგალითად, გვსურს შერჩევის მიხედვით წარმოდგენა შევიქმნათ მოცემული დაწესებულების თანამშრომელთა განათლების დონეზე, შეგვიძლია ე.წ. კადრების აღრიცხვის ბარათებიდან შემთხვევით ამოვიღოთ საჭირო რაოდენობის ბარათები. ტექნიკურად უმჯობესია მცირე ზომის ფურცლებზე დავწეროთ ბარათების ნომრები, მოვათავსოთ ყუთში, კარგად ავურიოთ და შემდეგ

შემთხვევით ავირჩიოთ იმდენი ფურცელი, რამდენიც გვჭირდება. თუ ახლა შერჩეული ნომრების მიხედვით გადმოვიღებთ სააღრიცხვო ბარათებს, შემთხვევითი შერჩევაც მიღებული იქნება.

2) **სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა.** თუ პოპულაციის ერთეულები გადანომრილია, შეგვიძლია ავირჩიოთ შემთხვევითი ციფრი და ამ ნომრიანი ერთეულიდან დაწყებული ავირჩიოთ ყოველი მეათე ერთეული. ეს იქნება ე.წ. სისტემატური შერჩევა.

ამრიგად სისტემატური შერჩევა მიიღება ერთი ერთეულის შემთხვევითი შერჩევით და დანარჩენების როლში ამ ერთეულიდან გარკვეული ბიჯით დაშორებული ნომრების მქონე ერთეულების გამოყოფით მანამ, სანამ ერთეულების საჭირო რაოდენობა არ დაგროვდება. თუ ბიჯი არის k, პირველი ელემენტი ამოიღება შემთხვევით $1,2,...,k$ ნომრიანი ერთეულებიდან და თუ მისი ნომერია α მაშინ სისტემატური შერჩევაა $\alpha, \alpha+k,...,\alpha+nk$, სადაც n შერჩევის მოცულობაა.

არსებობს შერჩევის სხვა მეთოდებიც, რომლებიც ერთი მხრივ ამარტივებენ შერჩევის პროცედურას, მეორე მხრივ კი ზრდიან მოპოვებულ ინფორმაციას.

3) **განშრევებული შემთხვევითი შერჩევა.** ზოგჯერ ჩვენი ამოცანაა უზრუნველვყოფთ შერჩევაში პოპულაციის სხვადასხვა ჯგუფის წარმომადგენლობა. ამისათვის გამოყოფა ისე უნდა მოხერხდეს, რომ ამ ჯგუფების პროპორციები შერჩევაში ისეთივე იყოს, როგორც პოპულაციაში. პოპულაციის თითოეულ ჯგუფს შრეს უწოდებენ, ხოლო მიღებულ შერჩევას- ***განშრევებულ შერჩევას.***

განშრევებას მაშინ მიმართავენ, როდესაც პოპულაცია არაერთგვაროვანია. არსებობს სხვა მიზეზიც, რის გამოც განშრევება სასურველია. კერძოდ, ხანდახან უფრო მოხერხებულია შერჩევათა მიღება რაიმე ტერიტორიის სხვადასხვა რაიონისათვის. ადამიანების პოპულაციის განშრევება შეიძლება მოხდეს სქესის, ასაკის, პროფესიული კუთვნილების ან სამუშაოს ტიპის მიხედვით და ა.შ. განშრევება ისე უნდა მოეწყოს, რომ შრეები თანაუკვეთი გამოვიდნენ. როგორც კი პოპულაცია შრეებად დაიყოფა, ჩვენ შეგვიძლია თითოეულ შრეში მარტივი შემთხვევითი შერჩევა მოვაწყოთ.

4) კლასტერული შემთხვევითი შერჩევა. შემთხვევითი შერჩევის კიდევ ერთი ფორმა გამოიყენება უპირატესად მომხმარებელთა აზრის გამოკითხვისას, როდესაც უფრო ეკონომიურია, მაგალითად, რომ გამომკითხველმა ქალაქის

შემთხვევით არჩეულ უბანში 50 ოჯახი კარდაკარ დაიაროს, ვიდრე ქალაქის მასშტაბით 50 შემთხვევით არჩეულ ოჯახს ესტუმროს.

თუ პოპულაციას დავყოფთ თანაუკვეთ ნაწილებად-კლასტერებად (ვთქვათ, ქალაქის მცხოვრებლებს გეოგრაფიული სიახლოვის მიხედვით უბნებად დავყოფთ), მაშინ შემთხვევითი შერჩევა შეიძლება ჯერ კლასტერის ან კლასტერების შემთხვევით შერჩევაში მდგომარეობდეს, ხოლო შემდეგ თითოეული შერჩეული კლასტერის სრულ აღწერაში. ამგვარ შერჩევას კლასტერული შერჩევა ეწოდება (ზოგჯერ კლასტერს ბუდეს უწოდებენ, ხოლო კლასტერულ შერჩევას – ბუდობრივ შერჩევას).

სისტემატური შერჩევა კლასტერულის კერძო შემთხვევაა, თუ k არის სისტემატური შერჩევის ბიჯი და პოპულაციის ყველა $N = mk$ ერთეული გადანომრილია, მაშინ გვაქვს k კლასტერი, რომლებიც შესაბამისად შემდეგ ნომრებს შეესაბამება

$$[1, k+1, ..., (m-1)k+1], ..., [k, 2k, ..., mk]$$

და სისტემატური შერჩევა ნიშნავს კლასტერებიდან ერთ-ერთის შემთხვევით შერჩევას და მის სრულ აღწერას.

კლასტერული შერჩევა უფრო ეკონომიურია, მაგრამ მას ხშირად თან სდევს ჩანაცვლება, ვინაიდან სოციალური გამოკვლევისას მეზობლობის პრინციპით შედგენილ კლასტერში შეიძლება ერთგვაროვანი შედეგები მივიღოთ და ამით პოპულაციის ადეკვატური სურათი არ გამოვიდეს, ვინაიდან განსხვავებული დაკვირვება სწორედ იმ კლასტერში დარჩეს, რომელიც არ არჩეულა.

ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ განშრევებული და კლასტერული შერჩევა ორივე ყოფს პოპულაციას ჯგუფებად, მაგრამ თუ შრე ერთგვაროვანი ელემენტებისაგან შედგება, კლასტერის აგების პრინციპია მეზობლობა და სიახლოვე. განშრევებულ შერჩევაში ყველა შრე მონაწილეობს, კლასტერში კი მხოლოდ რამდენიმე კლასტერია წარმოდგენილი, ოღონდ სრულად. თუ განშრევებული შერჩევა ახერხებს ჩანაცვლების გამორიცხვას, კლასტერული შერჩევის უპირატესობა მხოლოდ ეკონომიურობაშია.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- რას ეწოდება მონაცემები?
- რას ეწოდება სტატისტიკური პოპულაცია? შერჩევა?

- რა არის სტატისტიკური კვლევის მიზანი?
- რას ეწოდება პოპულაციის ელემენტარული ერთეული?
- როგორ გესმით ელემენტარული ერთეულის თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებელი? მოიყვანეთ მაგალითები.
- რას ნიშნავს დისკრეტული და უწყვეტი მონაცემები? მოიყვანეთ მაგალითები.
- როგორ შეიძლება რაოდენობრივ მონაცემთა თვალსაჩინო წარმოდგენა?
- განმარტეთ ვარიაციული მწკრივი.
- როგორ წარმოვადგინოთ ვარიაციული მწკრივის სიხშირეთა (ფარდობით სიხშირეთა) განაწილება ცხრილის სახით?
- რა არის წერტილოვანი და მესერული დიაგრამა?
- რას ეწოდება კუმულატა?
- განმარტეთ სიხშირეთა და ფარდობით სიხშირეთა ინტერვალური განაწილება.
- როგორ ხდება ჰისტოგრამის აგება?
- როგორ ხდება პოლიგონის აგება?
- მოიყვანეთ სიხშირეთა განაწილების ფორმები ჰისტოგრამის და პოლიგონის დახმარებით.
- რატომ სჯობია შერჩევის გამოყოფა და მისი შესწავლა პოპულაციის სრულ აღწერასთან შედარებით?
- რას ნიშნავს შერჩევის სისტემატური ცდომილება ანუ ჩანაცვლება?
- მოიყვანეთ შერჩევის მიღების ხერხები, რომლებსაც არა აქვთ შემთხვევითი ხასიათი.
- მოიყვანეთ შერჩევის მიღების ხერხები, რომლებიც შემთხვევითი ხასიათისაა.
- დაახასიათეთ მარტივი შემთხვევითი შერჩევა.
- რას ნიშნავს სისტემატური შემთხვევითი შერჩევა?
- აღწერეთ განშრევებული შემთხვევითი შერჩევა.
- დაახასიათეთ კლასტერული შემთხვევითი შერჩევა.
- შეადარეთ განშრევებული და კლასტერული შერჩევა.

თავი 26

შერჩევითი რიცხვითი მახასიათებლები. მათემატიკური სტატისტიკის ალბათური საფუძვლები

აქამდე, მონაცემების აღსაწერად ჩვენ ვსარგებლობდით ისეთი მახასიათებლებით, როგორიცაა სიხშირეთა განაწილებები, სახელდობრ, ვაჯგუფებდით რა მონაცემებს, გრაფიკულად წარმოვაჩენდით სიხშირეთა განაწილებებს ჯგუფების მიხედვით. როგორც გვახსოვს, ასეთი მახასიათებლებია ჰისტოგრამა და პოლიგონი.

ამ თავში განხილული რიცხვითი მახასიათებლებიდან თითოეული საშუალებას იძლევა შეკუმშული ფორმით დავახასიათოთ რიცხვით მონაცემთა ესა თუ ის თვისება, კერძოდ, სად და როგორ არიან მონაცემები განლაგებული, სად არის მათი განაწილების ცენტრი, როგორია მათი გაფანტულობა, სიმეტრიულია თუ არა მონაცემთა განლაგება ცენტრის მიმართ, ასიმეტრიულობის რა ტიპთან გვაქვს საქმე და სხვა.

§26.1. ცენტრალური ტენდენციის საზომები: არითმეტიკული საშუალო, მედიანა და მოდა.

არითმეტიკული საშუალო (ანუ უბრალოდ საშუალო) წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულსა და გამჭირვალე შინაარსის მქონე საზომს.

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვებით გამოხატული n დაკვირვება (n მოცულობის შერჩევა რაიმე პოპულაციიდან), რომლებსაც აღვნიშნავთ $x_1, x_2, ..., x_n$ სიმბოლოებით. მაშინ ამ მონაცემთა არითმეტიკული საშუალო აღინიშნება $\bar{x}$–ით და გამოითვლება ფორმულით:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{26.1}$$

ანუ არითმეტიკული საშუალო წარმოადგენს დაკვირვებულ მნიშვნელობათა ჯამის ფარდობას დაკვირვებათა რაოდენობასთან.

ამოცანა 1. შესწავლილია 10 ოჯახში ბავშვთა რაოდენობა. შესაბამისი მონაცემებია 3, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 2, 2.

მაშინ ერთ ოჯახზე მოსული ბავშვების საშუალო რაოდენობა იქნება

$$\frac{3+2+1+1+2+3+3+1+2+2}{10} = 2,$$

ე.ი. 2 ბავშვი.

იმის გამო, რომ საშუალო ადვილი გამოსათვლელია, გააჩნია მარტივი ინტერპრეტაცია და მასზე შეიძლება მათემატიკური ოპერაციების ჩატარება, ის წარმოადგენს მონაცემთა ცენტრის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ რიცხვით მახასიათებელს. საშუალო განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია გადაწყვეტილებების მიღების თვალსაზრისით, რადგან ხშირ შემთხვევებში ის ცენტრალური ტენდენციის საუკეთესო საზომია და მასზე დაყრდნობით შესაძლებელია დასაბუთებული სტატისტიკური დასკვნების გაკეთება პოპულაციის განლაგების ცენტრის შესახებ.

მაგრამ საშუალო არითმეტიკულს გააჩნია ერთი სერიოზული ნაკლი, რომელიც გარკვეული აზრით არადამაკმაყოფილებელს ხდის მას, როგორც ცენტრალური ტენდენციის საზომს. იგი ზედმეტად რეაგირებს ექსტრემალური დაკვირვებების უმნიშვნელო რაოდენობაზეც კი.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 2. ვთქვათ, მუსიკალურ ნაწარმოებთა კატალოგიდან, რომელშიც მოცემულია ცალკეული ნაწარმოების შესრულების ხანგრძლივობა (გამოხატული წუთებში) შემთხვევით ავირჩიეთ 5 ნაწარმოები, რომელთა მონაცემებია $x_1 = 37,$ $x_2 = 46,$ $x_3 = 40,$ $x_4 = 57,$ $x_5 = 50,$ მაშინ $\bar{x} = 46.$ მაგრამ მეხუთე ნაწარმოების (ჩაიკოვსკის სიმფონიის) ნაცვლად ჩვენ, რომ აგვერჩია ვაგნერის ოპერა ე.ი. $x_5 = 200,$ მაშინ $\bar{x} = 76,$ ე.ი. საშუალომ გადაინაცვლა ექსტრემალური $x_5 = 200,$ დაკვირვებისაკენ, ყველა დანარჩენი მონაცემი საგრძნობლად ნაკლებია 76-ზე – ყველა დათანხმდება იმას, რომ $\bar{x}$ არ არის განლაგების მდგრადი მახასიათებელი. შევნიშნოთ, რომ თუ მეხუთე მონაცემებს შევცვლით $x_5 = 400-$ ით, მაშინ $\bar{x} = 116$და ა.შ.

მიუხედავად ამ პოტენციური დეფექტისა საშუალო წარმოადგენს ცენტრალური ტენდენციის ყველაზე პოპულარულ საზომს, რადგანაც არსებობს მრავალი პოპულაცია, რომელთათვის ექსტრემალური დაკვირვებები ძალიან მცირედაა მოსალოდნელი (მაგალითად, როდესაც გაგლუვებულ ჰისტოგრამას აქვს ე.წ. ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ფორმა). ასეთი პოპულაციებისათვის არითმეტიკული საშუალო მდგრადია და შერჩევის კარგი მახასიათებელია.

მედიანა განეკუთვნება ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომების ჯგუფს.

საზოგადოდ, მონაცემთა რაიმე რიცხვითი მახასიათებლის მდგრადობა ნიშნავს, რომ დაკვირვებათა მცირე რაოდენობის ცვლილებას შეზღუდული გავლენა აქვს მასზე, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია ამ ცვლილების სიდიდე. საშუალოს არ გააჩნია ეს თვისება, რადგან ჩვენ შეგვიძლია რაგინდ დიდი გავხადოთ იგი, შევცვლით რა მხოლოდ ერთ მონაცემს უფრო დიდი მონაცემით.

როგორც ცნობილია "მედიანა" არის "შუა"-ს სინონიმი. სინამდვილეშიც, მედიანა განიმარტება, როგორც მონაცემთა ვარიაციული მწკრივის (ანუ ზრდის მოხედვით დალაგებული დაკვირვებების მწკრივის) შუა მნიშვნელობა იმ აზრით, რომ მასზე ნაკლები რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობა მასზე დიდი რიცხვითი მნიშვნელობის მონაცემთა რაოდენობის ტოლია. მიღებულია მედიანის შემდეგი განმარტება.

ვთქვათ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ შერჩევის ელემენტებია, ხოლო $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ შესაბამისი ვარიაციული მწკრივია. მედიანა აღინიშნება $\tilde{x}$ –ით და აიგება შემდეგი წესით:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{თუ n კენტია,} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{თუ } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

არსებობს შემთხვევები, როდესაც მედიანა უკეთ აღწერს ცენტრალურ ტენდენციას, ვიდრტე საშუალო და ამასთან მედიანა უფრო მდგრადია ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ, ანუ ექსტრემალური დაკვირვებების გავლენა მედიანაზე უმნიშვნელოა. ამაში დავრწმუნდებით შემდეგ მაგალითზე.

ამოცანა 3. ქვემოთ მოყვანილია ავსტრალიის ერთ-ერთი უნივერსიტეტის თანამშრომელთა წლიური შემოსავლები ($\$ 1000$-ში):

$$28,\ 109,\ 26,\ 32,\ 30,\ 26,\ 29.$$

დავალაგოთ ეს მონაცემები ზრდის მიხედვით:

$x_{(1)} = 26,\quad x_{(2)} = 26,\quad x_{(3)} = 28,\quad x_{(4)} = 29,\quad x_{(5)} = 30,\quad x_{(6)} = 32,\quad x_{(7)} = 109.$

მაშინ, რადგან n კენტია, $\tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x_4 = 29,$ ხოლო, საშუალო $\bar{x} = 40$

როგორც ვხედავთ, მედიანა უკეთ აღწერს ტიპობრივ შემოსავალს, ვიდრე საშუალო.

ვთქვათ, დაკვირვება $x_{(7)} = 109.$ შევცვალეთ 200–ით მაშინ, შეცვლილი მონაცემებისათვის $\tilde{x} = 29,$ ხოლო $\bar{x} = 53.$ ამრიგად მედიანა არ შეიცვალა,

საშუალომ კი მნიშვნელოვნად წაინაცვლა დიდი დაკვირვების მიმართულებით. ამრიგად, მედიანა მდებარეობის უფრო მდგრადი მახასიათებელია, ვიდრე საშუალო.

მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ მდგრადობის გამო მედიანას ყოველთვის უნდა მიენიჭოს უპირატესობა საშუალოსთან შედარებით. საშუალო გამოითვლება ყველა მონაცემის მეშვეობით და შეიცავს მეტ ინფორმაციას, ვიდრე მედიანა, მისი მგრძნობიარობა კი ხშირ შემთხვევაში მას მოცემული შერჩევის კარგ მახასიათებლად აქცევს. უხეშად რომ ვთქვათ, საშუალო შეიძლება გამოყენებული იქნას როგორც საზომი, რომელიც ასახავს, თუ საშუალოდ რა სიდიდისაა შერჩევის ელემენტები.

ცენტრალური ტენდენციის მესამე საზომს წარმოადგენს **მოდა.** ის წარმოადგენს შერჩევიდან იმ მნიშვნელობას, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება. მაგალითად, თუ ჩვენი მონაცემებია

2, 3, 5, 4, 6, 4, 7, 1,

მაშინ მოდა იქნება 4, რადგანაც ის ორჯერ შეგვხვდა შერჩევაში, ყველა დანარჩენი დაკვირვება კი ერთხელ.

შეიძლება ისე მოხდეს, რომ შერჩევაში ასეთი მნიშვნელობა არ აღმოჩნდეს. ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ ე.წ. მოდალურ ინტერვალზე, რომელიც ასე განიმარტება: თუ აგებული გვაქვს ასე თუ ისე მისაღები ჰისტოგრამა, მაშინ მოდალური ინტერვალი იქნება ის, რომელსაც შეესაბამება ჰისტოგრამის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ამრიგად, მოდალური ინტერვალი წარმოადგენს იმ ინტერვალს, რომელშიც მოხვდა დაკვირვებათა ყველაზე დიდი რაოდენობა. გარკვეულობისათვის მოდას უწოდებენ მოდალური ინტერვალის შუა წერტილს. თუ შერჩევის მოცულობა დიდია, ამჯობინებენ მონაცემთა დაჯგუფებას და მოდალური ინტერვალის მოძებნას.

მოდაც, ისევე როგორც მედიანა ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი საზომია. ის რეაგირებს შერჩევის ელემენტების მხოლოდ ზოგიერთ ცვლილებაზე და არა ყოველგვარზე, როგორც საშუალო.

შერჩევითი მოდის ინტერპრეტაცია წააგავს ყოველდღიურ ცხოვრებაში სიტყვა “მოდის” მნიშვნელობას. როგორც ის, რაც “მოდაშია” (ანუ ყველაზე ხშირია, გავრცელებულია), შეიძლება სულაც არ აღწერდეს საერთო სტილს და ასევე შერჩევითი მოდაც ახასიათებს დაკვირვებათა მხოლოდ მცირე ნაწილს.

შერჩევითი მოდა იძლევა მნიშვნელოვან ინფორმაციას სხვადასხვა საქონლის გამომშვები ფირმისათვის, მაღაზიის მფლობელისათვის,

კონსტრუქტორებისათვის, რომლებიც აწოდებენ საქონელს სპეციფიკურ ბაზრებს. მაგალითად, ტანსაცმლის მაღაზიის მფლობელმა უნდა იცოდეს კოსტიუმების ყველაზე გავრცელებული ზომები, რათა გაითვალისწინოს ეს ფაქტი საქონლის მომარაგებისას. საათების მწარმოებელმა უნდა იცოდეს, თუ რა კლასის საათები იყიდება ყველაზე ხშირად, იმ მიზნით, რომ გაზარდოს ამ კლასის პროდუქციის წარმოება.

მონაცემთა განლაგების ცენტრის სამივე მახასიათებელი: არითმეტიკული საშუალო, მედიანა და მოდა წარმოადგენს პოპულაციის შესაბამისი მახასიათებლების: საშუალოს, მედიანისა და მოდის შერჩევით ანალოგებს.

თუ პოპულაცია სასრულია და შედგება $x_1, x_2, ..., x_N$ რიცხვითი მონაცემებისაგან, მაშინ პოპულაციის მახასიათებლები – საშუალო, მედიანა და მოდა იგივე გზით განისაზღვრება, როგორც შერჩევისათვის. მაგალითად, პოპულაციის საშუალოა

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ .$$

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ შერჩევა წარმოებს დაბრუნების გარეშე. მაშინ რაც უფრო მეტია შერჩევის n მოცულობა, $\bar{x}_n$-ის რიცხვითი მახასიათებლები, მით უფრო კარგად წარმოადგენს m საშუალოს.

§26.2. მომაცემთა გაფანტულობის საზომები: დისპერსია და სტანდარტული გადახრა. ჩვენ შევისწავლეთ ცენტრალური ტენდენციის სამი რიცხვითი მახასიათებელი: შერჩევითი საშუალო, შერჩევითი მედიანა და შერჩევითი მოდა. აშკარაა, რომ ეს სამი მახასიათებელი სრულად ვერ აღწერს მონაცემთა სიმრავლის თვისებებს.

ამოცანა 4. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მონაცემთა ორი მწკრივი:

A	8	9	10	10	13
B	1	5	10	16	18

გამოვთვალოთ თითოეული მათგანის საშუალო:

$\bar{x}_A = \frac{1}{5}(8+9+10+10+13) = 10,\quad \bar{x}_B = \frac{1}{5}(1+5+10+16+18) = 10.$ როგორც ვხედავთ ორივე საშუალო ტოლია, მაგრამ ერთი შეხედვითაც კი ცხადია, რომ B მწკრივის ელემენტების ცვალებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივისა: A მწკრივის წევრები მჭიდროდ არიან კონცენტრირებული საშუალოს ირგვლივ, რასაც ვერ ვიტყვით B მწკრივის შესახებ.

აშკარაა, რომ საჭიროა გაფანტულობის საზომების შემოღება, ე.ი. ისეთი რიცხვითი მახასიათებლებისა, რომლებიც საშუალებას მოგვცემდა გაგვეკეთებინა დასკვნები მონაცემთა გაბნევის ხარისხის შესახებ.

დისპერსია წარმოადგენს მონაცემთა საშუალოს მიმართ გაფანტულობის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს საზომს.

სანამ მოვიყვანდეთ მის განმარტებას, ჩავატაროთ მარტივი მსჯელობა. კვლავ განვიხილოთ მაგალით 4-ში მოყვანილი A და B მწკრივი.

როგორც უკვე ავღნიშნეთ. $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 10$. ამასთან ვიზუალურადაც ადვილი დასანახია, რომ B მწკრივის ცვალებადობა უფრო ძლიერია, ვიდრე A მწკრივისა. აშკარაა, რომ თუ მონაცემთა სიმრავლე დიდი მოცულობისაა, ასეთი ფაქტების ვიზუალურად აღმოჩენა შეუძლებლია. საჭიროა ისეთი საზომის შემოღება, რომელიც გაგვიადვილებს მონაცემების თავისი არითმეტიკული საშუალოს მიმართ გაფანტულობის შესახებ დასკვნის გაკეთებას. სწორედ ასეთ საზომს წარმოადგენს შერჩევითი დისპერსია. დისპერსიას ჩვენ შემოვიღებთ A და B მწკრივების მაგალითზე, შემდეგ კი მოვიყვანთ მის ფორმალურ განსაზღვრებას.

გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები ორივე მწკრივისათვის (თითოეულ მონაცემს ვაკლებთ საშუალოს).

A	-2	-1	0	0	3
B	-9	-5	0	6	8

შეიძლება გვეფიქრა, რომ გაფანტულობის საზომად შეიძლებოდა აგვეღო ამ გადახრების არითმეტიკული საშუალო, მაგრამ ორივე შემთხვევაში გადახრათა ჯამი ნულის ტოლია. ამიტომ გადახრების საშუალოც ნულის ტოლი იქნება და ე.ი. არავითარ ინფორმაციას ეს სიდიდე არ მოგვცემს.

ამ სირთულიდან თავის დაღწევის ერთ-ერთი საშუალებაა ავიღოთ საშუალოდან გადახრების კვადრატების საშუალო. ასე გამოთვლილ სიდიდეს ეწოდება დისპერსია (აღინიშნება S^2-ით). გვაქვს

$$S_A^2 = \frac{1}{5}(4+1+9) = 2{,}6,$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5}(81+25+36+64) = 41{,}2.$$

ე.ი. $S_A^2 < S_B^2$.

ჩავწეროთ შერჩევითი დისპერსიის გამოსახულება ფორმულის მეშვეობით.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის შერჩევა. გამოვთვალოთ $x_1, x_2, ..., x_n$ არითმეტიკული საშუალო $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ და მისგან გადახრები

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, ..., x_n - \bar{x},$$

გამოვთვალოთ გადახრათა კვადრატები

$$\left(x_1 - \bar{x}\right)^2, \left(x_2 - \bar{x}\right)^2, ..., \left(x_n - \bar{x}\right)^2$$

და მათი არითმეტიკული საშუალო. გვექნება შერჩევითი დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + ... + \left(x_n - \bar{x}\right)^2\right],$$

ანუ

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2.$$

თუ $x_1, x_2, ..., x_N$ წარმოადგენს პოპულაციას, მაშინ პოპულაციის საშუალოა

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

ხოლო

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - m\right)^2$$

გამოსახულაებას ეწოდება პოპულაციის დისპერსია.

რადგან შერჩევითი დისპერსიის გამოთვლამდე $\bar{x}$ უკვე გამოთვლილია, შერჩევითი დისპერსიის უფრო მარტივად გამოსათვლელი გამოსახულებაა

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2.$$

შევნიშნოთ, რომ შერჩევითი დისპერსიის განზომილება უდრის დაკვირვებათა განზომილების კვადრატს. მაგალითად, თუ დაკვირვებები იზომება წუთებში (კილოგრამებში, ლარებში) მაშინ დისპერსიის საზომი ერთეულებია წთ^2 (კგ^2, ლარი^2).

სტატისტიკოსს ხშირად ესაჭიროება გაფანტულობის ისეთი საზომი, რომელიც იმავე ერთეულებში იზომება, რაც საწყისი მონაცემები. ასეთი საზომი ადვილად მიიღება შერჩევითი დისპერსიიდან კვადრატული ფესვის ამოღებით.

სტანდარტული გადახრა წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან

$$S = \sqrt{S^2}\ ,$$

ასევე, პოპულაციის სტანდარტული გადახრა არის კვადრატული ფესვი პოპულაციის დისპერსიიდან

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}\ .$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სტანდარტული გადახრა არ წარმოადგენს გაფანტულობის მდგრად საზომს. ის გაცილებით უფრო მგრძნობიარეა ექსტრემალური დაკვირვებების მიმართ, ვიდრე საშუალო. საილუსტრაციოდ კვლავ განვიხილოთ მონაცემები

34 46 40 57 50.

მათთვის $\bar{x} = 46$. გამოვთვალოთ S^2. ჯერ გამოვთვალოთ საშუალოდან გადახრები:

-9 0 6 11 4 .

გვაქვს

$$S^2 = \frac{1}{5}(81 + 36 + 121 + 16) = 50{,}8, \qquad S = \sqrt{50{,}8} \approx 7{,}13.$$

ახლა მონაცემთა განხილულ სიმრავლეში ერთ-ერთი მონაცემი, ვთქვათ 50, შევცვალოთ 200-ით, ე.ი. ახალი მონაცემებია

34 46 40 57 200.

გვექნება $\bar{x} = 76$. გამოვთვალოთ შერჩევითი დისპერსია

$$S^2 = \frac{1}{5}\left(42^2 + 30^2 + 36^2 + 19^2 + 124^2\right) = 3939{,}4, \qquad S = \sqrt{3939{,}4} \approx 62{,}76.$$

ამრიგად, ერთი მონაცემის 50-ის 200-ით შეცვლამ გამოიწვია შემდეგი ცვლილებები:

$$\bar{x} = 46 \ \rightarrow\ \bar{x} = 76$$

$$S = 7{,}13 \ \rightarrow\ S = 62{,}76$$

ე.ი. სტანდარტული გადახრის რეაგირება უფრო ძლიერი აღმოჩნდა, ვიდრე საშუალოსი

ამოცანა 5. ბოლო წლებში მცირე ინვესტორთათვის, როგორც საინვესტიციო ალტერნატივა, დიდი პოპულარობით სარგებლობს ინვესტიციების ჩადება საინვესტიციო ფონდებში – ტრესტებში. იმისათვის, რომ ინვესტორს გაუადვილდეს გადაწყვეტილების მიღება, თუ რომელ კონკრეტულ ტრესტში

მოახდინოს ინვესტირება, ფინანსურ ჟურნალებში რეგულარულად ქვეყნდება ყოველი ცალკეული ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო ათი წლის განმავლობაში.

ცხრილში მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში.

ტრესტი A	8,3	− 6,2	20,9	− 2,7	33,6	42,8	24,4	5,2	3,1	30,5
ტრესტი B	12,1	− 2,8	6,4	12,2	27,8	25,3	18,2	10,7	−1,3	11,4

რომელი ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს, A თუ B?

ამოხსნა. რადგან დისპერსია მონაცემთა გაფანტულობის ყველაზე თვალსაჩინო საზომია, ყოველი ტრესტის მონაცემების მიხედვით უნდა გამოვთვალოთ თითოეული მათგანის შერჩევითი დისპერსია S_A^2 და S_B^2 და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

თავდაპირველად გამოვთვალოთ საშუალოები, შემდეგ კი დისპერსიები:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10}(8{,}3 - 6{,}2 + 20{,}9 - 2{,}7 + 33{,}6 + 42{,}8 + 24{,}4 + 5{,}2 + 3{,}1 + 30{,}5) = 16\%,$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{10}(12{,}1 - 2{,}8 + 6{,}4 + 12{,}2 + 27{,}8 + 25{,}3 + 18{,}2 + 10{,}7 - 1{,}3 + 11{,}4) = 12\%,$$

$$S_A^2 = \frac{1}{10}\left((8{,}3)^2 + (-6{,}2)^2 + \ldots + (30{,}5)^2\right) - 16^2 = \frac{1}{10}(5074{,}49 - 256) = 251{,}45,$$

$$S_B^2 = \frac{1}{10}\left((12{,}1)^2 + (-2{,}8)^2 + \ldots + (11{,}4)^2\right) - 12^2 = \frac{1}{10} \cdot 2334{,}36 - 144 = 89{,}44,$$

$$S_A = 15{,}86\%, \qquad S_B = 9{,}46\%.$$

ამრიგად, $S_A > S_B$ ე.ი. A ტრესტი მიეკუთვნება რისკის უფრო მაღალ დონეს (უფრო რისკიანია), ვიდრე B ტრესტი, სამაგიეროდ, $\bar{x}_A > \bar{x}_B$, ანუ A ტრესტის ამონაგები საშულოდ უფრო მაღალია, ვიდრე B ტრესტისა. ეს ფაქტი სავსებით ეთანხმება ჩვენ ინტუიციას. ინვესტიცია, რომელიც დაკავშირებულია რისკის უფრო მაღალ დონესთან, უნდა იძლეოდეს უფრო მაღალ საშუალო ამონაგებსაც.

§26.3. ჩებიშევის უტოლობა. დაკვირვებათა მოცემული $x_1, x_2, \ldots, x_n$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{\#\left\{x_i : \left|x_i - \bar{x}\right| \le ks\right\}}{n} \ge 1 - \frac{1}{k^2},$$

რაც სიტყვიერად ასე გამოითქმის: $\left[\bar{x}-ks; \bar{x}+ks\right]$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა ფარდობითი სიხშირე (ანუ ამ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობის ფარდობა შერჩევით მოცულობასთან) არანაკლებია $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$–ზე.

ჩებიშევის უტოლობა იძლევა $\left[\bar{x}-ks; \bar{x}+ks\right]$ ინტერვალში მოხვედრილი დაკვირვებების ფარდობითი სიხშირის ქვედა საზღვარს, როდესაც $\bar{x}$–ის და s–ის გარდა სხვა ინფორმაცია დაკვირვებათა განაწილების შესახებ არ გაგვაჩნია.

მოვიყვანოთ $\left[\bar{x}-ks; \bar{x}+ks\right]$ ინტერვალში მოხვედრილი დაკვირვებათა ფარდობითი და პროცენტული რაოდენობის ქვედა საზღვრები, როცა $k=1,2,3,4$.

$\left[\bar{x}-s; \bar{x}+s\right]$ ფარდობითი სიხშირე ≥ 0, პროცენტული რაოდენობა $\geq 0\%$;

$\left[\bar{x}-2s; \bar{x}+2s\right]$ ფარდობითი სიხშირე $\geq \frac{3}{4}$, პროცენტული რაოდენობა $\geq 75\%$;

$\left[\bar{x}-3s; \bar{x}+3s\right]$ ფარდობითი სიხშირე $\geq \frac{8}{9}$, პროცენტული რაოდენობა $\geq 89{,}9\%$;

$\left[\bar{x}-4s; \bar{x}+4s\right]$ ფარდობითი სიხშირე $\geq \frac{15}{16}$, პროცენტული რაოდენობა $\geq 93{,}7\%$;

მტკიცდება, რომ ჩებიშევის უტოლობა სამართლიანია პოპულაციისთვისაც. სასრული პოპულაციისათვის ჩებიშევის უტოლობა ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

ვთქვათ $y_1, y_2, ..., y_N$ არის პოპულაცია, რომლის საშუალოა m და დისპერსია – σ^2. მაშინ $\left[m\text{-}k\sigma;\ m+k\sigma\right]$ ინტერვალში მოხვედრილი წევრების რაოდენობის ფარდობა პოპულაციის N მოცულობასთან არანაკლებია $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$–ზე.

$$\frac{\#\left\{y_i : \left|y_i-\bar{y}\right| \leq k\sigma\right\}}{N} \geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

ჩებიშევის უტოლობა გვეუბნება, რომ თუ მონაცემთა განაწილების შესახებ სხვა არავითარი ინფორმაცია არ გაგვაჩნია (ე.ი. ცნობილია მხოლოდ $\bar{x}$ და s), მაშინ

$$\left[\bar{x}-2s; \bar{x}+2s\right]$$

ინტერვალში მოხვედრილ დაკვირვებათა პროცენტული რაოდენობა არანაკლებია 75%-ზე. მაგრამ, თუ გვეცოდინება დამატებით, რომ სიხშირეთა ჰისტოგრამას

მიახლოებით ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ფუნქციის გრაფიკის ფორმა გააჩნია, ანუ აქვს ზარისებური ფორმა, მაშინ

ინტერვალი $\left[\bar{x}-2s;\bar{x}+2s\right]$ შეიცავს მონაცემთა 95%;

ინტერვალი $\left[\bar{x}-3s;\bar{x}+3s\right]$ შეიცავს მონაცემთა 99%;

ინტერვალი $\left[\bar{x}-4s;\bar{x}+4s\right]$ შეიცავს პრაქტიკულად ყველა მონაცემს.

§26.4. ასიმეტრიისა და ექსცესის შერჩევითი კოეფიციენტები. ასიმეტრიის შერჩევითი კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^3}{S^3}.$$

ეს კოეფიციენტი იძლევა სიხშირეთა ჰისტოგრამის სიმეტრიულობის (ან ასიმეტრიულობის) შესახებ დასკვნის გაკეთების საშუალებას მისი აგების გარეშე. კერძოდ, თუ

$$\hat{\alpha}_n \neq 0,$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სიხშირეთა ჰისტოგრამა არაა სიმეტრიული $\bar{x}$–ის მიმართ, უფრო მეტიც, თუ

$$\hat{\alpha}_n > 0, \qquad \left(\hat{\alpha}_n < 0\right),$$

მაშინ სიხშირეთა განაწილება მარჯვნივ (მარცხნივ) ასიმეტრიულია.

ექსცესის შერჩევითი კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს

$$\hat{e}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{S^4}-3.$$

ექსცესის კოეფიციენტი არის სიხშირეთა ჰისტოგრამის $\bar{x}$–ის მიდამოში ზევით გაწელილობის (ანუ წვეტიანობის) საზომი.

§26.5. შერჩევითი საშუალოს და დისპერსიის გამოთვლა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის. განვიხილოთ დაჯგუფებული მონაცემები, რომლებიც მოცემულია სიხშირეთა ინტერვალური განაწილების შემდეგი ცხრილით:

ინტერვალი	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	. . .	$[a_{t-1};a_t)$
სიხშირე	n_1	n_2	. . .	n_t

ამ ცხრილის მიხედვით მონაცემები დაჯგუფებულია t რაოდენობის კლასად, თითოეული კლასი შეიცავს $[a_{i-1};a_i)$ ინტერვალში მოხვედრილ მონაცემებს, რომელთა სიხშირეა n_i, $i=1,2,\dots,t,$ $\sum_{i=1}^{t} n_i = n,$ n შერჩევის მოცულობაა. $[a_{i-1};a_i)$ ინტერვალის შუა წერტილი აღვნიშნოთ m_i–ით $(i=1,\ 2,\ .\ .\ .,\ t)$. მაშინ შერჩევითი საშუალოს მიახლოებითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ფორმულით

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_i m_i.$$

შერჩევითი დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა მოიცემა ფორმულით

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} n_i m_i^2 - \bar{x}^2.$$

§26.6. კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები. მრავალი პრობლემის კვლევისას, კერძოდ, როდესაც შეისწავლება კავშირი ორ (ან რამდენიმე) მახასიათებელს შორის, საქმე გვაქვს ისეთ მონაცემებთან, რომლებიც წარმოადგენს ამ მახასიათებლების ერთდროულად დაკვირვებულ მნიშვნელობათა სიმრავლეს. მაგალითად, ვთქვათ, ვიკვლევთ საკითხს დამოკიდებულია თუ არა სტუდენტის სწავლის ხარისხი მისაღებ გამოცდებზე, ზოგად უნარებში მიღებულ ქულებზე, არის თუ არა კავშირი აქციის დახურვისა და გახსნის ფასებს შორის და ა.შ.

ამა თუ იმ ორ მახასიათებელს შორის კავშირის შესწავლის მიზნით ამ მახასიათებლების დაკვირვებული მნიშვნელობების სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წყვილების შემდეგი სიმრავლის სახით

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \dots,\ (x_n,y_n).$$

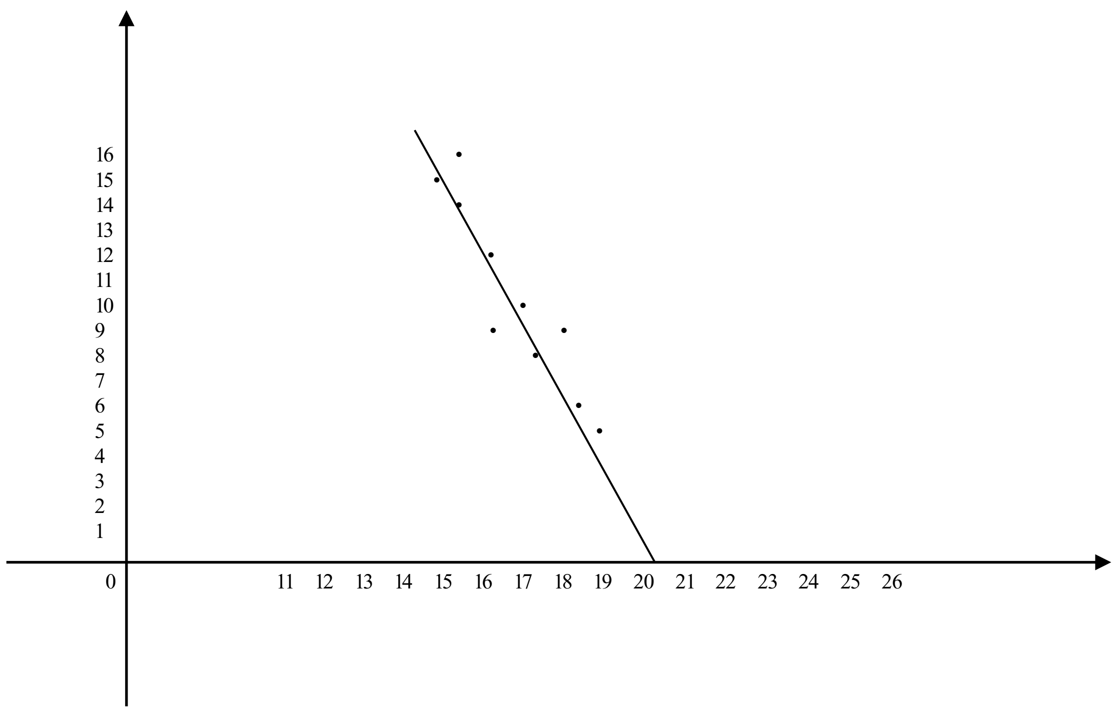
ამ მონაცემების მიხედვით აგებენ ე.წ. გაბნევის დიაგრამას შემდეგი წესით: სიბრტყეზე კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში მონიშნულია წერტილები, რომელთა კოორდინატებია (x_i,y_i), $\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n}$.

ამოცანა 6. იმისათვის, რომ განისაზღვროს ახალი პროდუქციის ფასი, რომლის გატანაც სურს კომპანიას ბაზარზე, კომპანიის კვლევის დეპარტამენტმა

შეარჩია 10 ქალაქი, რომლებსაც არსებითად ერთი და იგივე ყიდვის პოტენციალი გააჩნია და გამოიტანა პროდუქცია ბაზარზე ყოველ მათგანში სხვადასხვა ფასად. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია ფასები (დოლარებში) და შესაბამისი გაყიდვის მოცულობა (ათასობით დოლარებში).

ქალაქის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ფასი x	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
გაყიდვის მოცულობა y	15	14	16	9	12	10	8	9	6	5

ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა. ფასების მონაცემები გადავზომოთ x ღერძზე, გაყიდვის მოცულობები კი y ღერძზე.



ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლოა, რომ გაბნევის დიაგრამამ ვიზუალურად აღმოგვაჩენინოს კავშირი მონაცემთა ორ სიმრავლეს შორის. მაგალითად, შესაძლოა, რომ (x_i, y_i) წერტილები დაჯგუფებულნი იყვნენ რაიმე წრფის ან სხვა მრუდის მახლობლობაში. ჩვენს მიერ აგებული დიაგრამიდან ჩანს, რომ მონაცემები თავმოყრილი არიან უარყოფითი დახრილობის წრფის მიდამოში. ამ წრფის მოძებნის ამოცანას ქვენ მოგვიანებით შევეხებით. ახლა ჩვენ შემოვიღებთ

ორ რაოდენობრივ ცვლადს შორის კავშირის ერთ-ერთ უმთავრეს მახასიათებელს – კორელაციის კოეფიციენტს, რომელიც წარმოადგენს ორ ცვლადს შორის წრფივი კავშირის სიძლიერის საზომს.

თავდაპირველად განვმარტოთ შერჩევითი კოვარიაციის კოეფიციენტი. იგი განიმარტება შემდეგი თანაფარდობით

$$\mathrm{cov}(x;y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right),$$

სადაც $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი კი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$r=\frac{\mathrm{cov}(x;y)}{S_xS_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\cdot\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$$

კოვარიაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელი გამარტივებული ფორმულაა

$$cov(x;y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{x}\overline{y}.$$

ხშირად იყენებენ კორელაციის კოეფიციენტის შემდეგ ეკვალენტურ გამოსახულებასაც:

$$\mathrm{r}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{S_x}\right)\cdot\left(\frac{y_i-\overline{y}}{S_y}\right).$$

ახლა მოვიყვანოთ კორელაცცის კოეფიციენტის რამდენიმე თვისება:

1. $-1\le r\le 1$. r–ის დადებითი მნიშვნელობები მიუთითებს ცვლადებს შორის პოზიტიური დამოკიდებულების არსებობაზე, უარყოფითი მნიშვნელობანი კი უარყოფითზე.

2. $|r|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადებს შორის არსებობს ზუსტი წრფივი კავშირი, ანუ წერტილები გაბნევის დიაგრამაზე ზუსტად განლაგდება რაიმე წრფეზე.

3. კორელაცია ზომავს ცვლადებს შორის წრფივი დამოკიდებულების სიძლიერეს. სხვა, არაწრფივი, თუნდაც დეტერმინისტული კავშირი კორელაციაში არ აისახება.

გამოვთვალოთ მაგალით 6-ში მოყვანილი x და y სიდიდეებს შორის კორელაციის კოეფიციენტი. ამისათვის ჯერ შევავსოთ შემდეგი ცხრილი:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	15	15	225	225	225
2	15,5	14	217	240,25	196
3	16	16	256	256	256
4	16,5	9	148,5	272,25	81
5	17	12	204	289	144
6	17,5	10	175	306,25	100
7	18	8	144	324	64
8	18,5	9	166,5	342,25	81
9	19	6	114	361	36
10	19,5	5	97,5	380,25	25
ჯამი	172,5	104	1747	2996,25	1208

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\cdot 172{,}5 = 17{,}25,$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{299{,}625 - 297{,}5625} \approx 1{,}44,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{10}\cdot 104 = 10{,}4,$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{120{,}8 - 108{,}16} \approx 3{,}56,$$

$$cov(x;y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = 174{,}7 - 179{,}4 = -4{,}7 .$$

საბოლოოდ

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{S_x S_y} = -\frac{4{,}7}{5{,}13} \approx -0{,}92,$$

რაც ადასტურებს გაბნევის დიაგრამის დახმარებით მიღებულ დასკვნას.

მიუხედავად იმისა, რომ კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლილი მნიშვნელობა $r = -0{,}94$ მეტყველებს უარყოფითი წრფივი კავშირის არსებობაზე გაყიდვათა მოცულობასა და გაყიდვის ფასს შორის, ეს სიდიდე არაფერს გვეუბნება იმ წრფის შესახებ, რომლის მიდამოშიცაა თავმოყრილი დაკვირვებული წყვილები. ამ წრფის მოსაძებნად იყენებენ ე.წ. უმცირეს კვადრატთა მეთოდს (ამ მეთოდს დაწვრილებით გავეცნობით მე-15 ლექციაში),

რომლის თანახმადაც იძებნება ისეთი წრფე $y = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$, რომლიდანაც ვერტიკალური გადახრების კვადრატების ჯამი მინიმალურია. ამ წრფის კოეფიციენტებია:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{S_x}, \qquad \hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}.$$

მოვძებნოთ ეს წრფე მაგალით 6-ში მოყვანილი მონაცემებისათვის:

$$\hat{\beta}_1 = -\frac{4{,}7}{1{,}44} \approx -3{,}26, \qquad \hat{\beta}_0 = 10{,}4 + 3{,}26 \cdot 17{,}25 \approx 66{,}64.$$

ამრიგად საძებნი წრფის განტოლებაა

$$y = -3{,}26x + 66{,}64.$$

§26.7. მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ცნებები. მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს მასობრივ მოვლენებსა და პროცესებზე დაკვირვების ან ექსპერიმენტის შედეგთა მიხედვით დასკვნების მიღებაში. მათემატიკური სტატისტიკა არსებითად ეყრდნობა ალბათობის თეორიის მეთოდებს. გარკვეული აზრით მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები ალბათობის თეორიის ამოცანების შებრუნებულია. კერძოდ, თუ ალბათობის თეორიაში მოცემულად ითვლება შემთხვევითი მოვლენის მოდელი და მის საფუძველზე კეთდება დასკვნა ამ მოვლენის რეალური მდგომარეობის შესახებ, მათემატიკურ სტატისტიკაში განიხილება შემთხვევითი მოვლენის კონკრეტული რეალიზაციები და მათი საშუალებით კეთდება დასკვნები ამ მოვლენის აღმწერი შესაბამისი ალბათური მოდელის შესახებ.

დავუშვათ გვაქვს ელემენტთა რაიმე სიმრავლე, რომლის ყოველი წევრი ხასიათდება რაოდენობრივი ან თვისებრივი მახასიათებლის კონკრეტული მნიშვნელობით.

სტატისტიკური პოპულაცია არის კონკრეტული მახასიათებლის ყველა შესაძლო მნიშვნელობის ერთობლიობა.

შერჩევა ანუ ამოკრეფა არის დაკვირვებათა ერთობლიობა, რომელიც შეადგენს პოპულაციის მხოლოდ რაიმე ნაწილს.

სტატისტიკური კვლევის საბოლოო მიზანი პოპულაციის შესწავლაა.

პოპულაციასა და შერჩევაში შემავალ მონაცემთა რაოდენობას მისი მოცულობა ჰქვია. პოპულაციის მოცულობა სასრულიც შეიძლება იყოს და უსასრულოც. შერჩევა ყოველთვის სასრული მოცულობისაა.

შემთხვევითი სიდიდის ცნების შემოღების შემდეგ შესაძლებელი ხდება პოპულაციის აღწერა რაიმე X შემთხვევითი სიდიდის მეშვეობით. მაგალითად, თუ გვაქვს სასრული სიმრავლე, რომლის სრული აღწერა გვაძლევს შემდეგ სურათს: პოპულაცია შედგება რაოდენობრივი მახასიათებლის N მნიშვნელიბისაგან, რომელთა შორის არის k განსხვავებული მნიშვნელობა. ეს მნიშვნელობები იყოს $x_1, x_2, ..., x_k$. ვთქვათ, x_i-ის სიხშირეა n_i (ე.ი. n_i არის პოპულაციის იმ ელემენტების რაოდენობა, რომელთა მნიშვნელობებიც x_i–ის ტოლია), $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, მაშინ პოპულაცია აღიწერება დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდით, რომლის განაწილების კანონია

X	x_1	x_2	· · ·	x_k
p	p_1	p_2	· · ·	p_k

სადაც

$$p_i = P(X = x_i) = \frac{n_i}{N}, \; i = 1,2,...,k.$$

ეს დაშვება ბუნებრივია იმ თვალსაზრისით, რომ პოპულაციიდან შემთხვევით არჩეული ელემენტის მიერ x_i მნიშვნელობის მიღების ალბათობა $\frac{n_i}{N}$ შეფარდების ტოლია.

შემდგომში პოპულაციას გავაიგივებთ მის აღმწერ X შემთხვევით სიდიდესთან და პოპულაციის განაწილების ქვეშ ვიგულისხმებთ X-ის განაწილების კანონს. ამასთან, განაწილების კანონი შეიძლება მოცემული იყოს ნებისმიერი ფორმით: დისკრეტული განაწილების კანონით, განაწილების ფუნქციით, განაწილების სიმკვრივით და სხვა. პოპულაციის აღმწერი X შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს (საშუალოს, დისპერსიას, სტანდარტულ გადახრას და სხვა) პოპულაციის პარამეტრები ეწოდებათ.

დავუშვათ X შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობებია $x_1, x_2, ..., x_n$. x_1 არის პირველი დაკვირვებული მნიშვნელობა, x_2- მეორე და ა.შ. დაკვირვებების მოპოვებამდე ყოველი კერძო დაკვირვება განუსაზღვრელია, რის გამოც, მონაცემების მოპოვებამდე დაკვირვებებს განვიხილავთ, როგორც შემთხვევით სიდიდეებს და აღვნიშნავთ $X_1, X_2, ..., X_n$ სიმბოლოებით, რეალურად

დაკვირვებულ $x_1, x_2,..., x_n$ მნიშვნელობებს კი მივიჩნევთ $\mathbf{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის კონკრეტულ რეალიზაციად.

ვიტყვით, რომ $\mathbf{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ შემთხვევითი ვექტორი წარმოადგენს n მოცულობის შემთხვევით შერჩევას (ან უბრალოდ, შერჩევას) მოცემული პოპულაციიდან (გენერალური ერთობლიობიდან), თუ $X_1, X_2,..., X_n$ წარმოადგენს დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა საერთო განაწილება ემთხვევა პოპულაციის განაწილებას.

ხშირად გამოიყენება შემდეგი ტერმინოლოგიაც: $X_1, X_2,..., X_n$ მიმდევრობა წარმოადგენს დამოუკიდებელ დაკვირვებებს X შემთხვევით სიდიდეზე, რომლის განაწილების კანონია $F(x)$.

წინა თავში გავეცანით რიცხვითი მონაცემების (შერჩევითი მნიშვნელობების) წარმოდგენისა და დამუშავების ხერხებს. შერჩევითი მნიშვნელობების (მონაცემების) საფუძველზე ვითვლიდით სხვადასხვა მახასიათებლებს; ყოველი მახასიათებელი იყო $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$ შერჩევით მნიშვნელობათა საფუძველზე გამოთვლილი $T(x_1, x_2,..., x_n)$ რიცხვითი ფუნქცია. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ, $\mathbf{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$ ვექტორი არის $\mathbf{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის ერთ-ერთი შესაძლო მნიშვნელობა, ამიტომ $T_n(\mathbf{x})=T(x_1, x_2,..., x_n)$ სიდიდე წარმოადგენს $T_n(\mathbf{X})=T(X_1, X_2,..., X_n)$ შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთ დაკვირვებულ მნიშვნელობას $T_n(\mathbf{X})$–ის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან.

- შერჩევითი მნიშვნელობების ნებისმიერ ფუნქციას, რომლის აგების ალგორითმი ცნობილია, სტატისტიკა ეწოდება.

სტატისტიკას ჩვენ შევხედავთ ორნაირად:

1. როგორც რიცხვს, თუ T_n ფუნქციის არგუმენტად ავიღებთ $x_1, x_2,..., x_n$ შერჩევით მნიშვნელობებს. $t_n = T(x_1, x_2,..., x_n)$ სტატისტიკის დაკვირვებული (რეალიზებული) მნიშვნელობაა.
2. როგორც შემთხვევით სიდიდეს; თუ T_n ფუნქციის არგუმენტად ავიღებთ $X_1, X_2,..., X_n$ შერჩევას, მაშინ იგივე $T_n = T(X_1, X_2,..., X_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სტატისტიკა წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა შეიძლება გამოითვალოს შერჩევითი მონაცემების საშუალებით.

მონაცემების მიღებამდე სტატისტიკები განიხილება როგორც შემთხვევითი სიდიდეები, დაკვირვებების ჩატარების შემდეგ კი – როგორც რიცხვები.

ასე მაგალითად, ყოველი დაკვირვებული $x_1, x_2, ..., x_n$ მნიშვნელობებისათვის $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ -ს, ($s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$) რიცხვითი მნიშვნელობა არის შესაბამისი წესით აგებული $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ($S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$) შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

სტატისტიკას, განხილულს როგორც შემთხვევით სიდიდეს, გააჩნია თავისი განაწილების კანონი, რომელსაც ეწოდება სტატისტიკის შერჩევითი განაწილება. ყოველი კერძო სტატისტიკის განაწილება დამოკიდებულია არა მხოლოდ შერჩევის n მოცულობასა და პოპულაციის განაწილებაზე, არამედ იმ მეთოდზეც, რომლითაც წარმოებს შერჩევა.

შემდგომში დავუშვებთ, რომ პოპულაციიდან ამოკრეფა ხდება ისეთი წესით, რომ n მოცულობის $X_1, X_2, ..., X_n$ შერჩევა წარმოადგენს დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა საერთო განაწილება ემთხვევა პოპულაციის განაწილებას. მაგალითად, ეს პირობები სრულდება, როდესაც შერჩევა წარმოებს ან უსასრულო პოპულაციიდან ანდა სასრული პოპულაციიდან დაბრუნებით.

§26.8. შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

ვთქვათ, $X_1, X_2, ..., X_n$ დამოუკიდებელი შერჩევაა პოპულაციიდან, რომლის საშუალოა m და დისპერსიაა σ^2. გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალოს, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ -ის, მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ:

$$E\overline{X}_n = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot nm = m,$$

ხოლო

$$D\overline{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

ამრიგად, შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი ტოლია გენერალური ერთობლიობის მათემატიკური ლოდინისა, ხოლო შერჩევითი საშუალოს დისპერსია n–ჯერ ნაკლებია გენერალური ერთობლიობის

დისპერსიაზე. შევნიშნოთ, რომ მიღებული შედეგი სამართლიანია ნებისმიერად განაწილებული პოპულაციისათვის. ამასთან დიდ რიცხვთა კანონის ძალით, $\overline{X}_n \xrightarrow{p} m,$ როცა $n \to \infty.$

თუ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $EX_i = m,\ DX_i = \sigma^2$ და $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ მაშინ

$$E\overline{X}_n = m\,,\ \ D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}\,,\ \ \overline{X}_n \xrightarrow{p} m\,.$$

§26.9. შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი. გამოვთვალოთ

$$S_n^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი. ვინაიდან Y შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია $DY = EY^2 - (EY)^2$ ტოლობით მოიცემა. გვაქვს:

$$ES_n^{\ 2} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2)\,.$$

როგორც ვიცით

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^{\ 2} - 2\overline{X}_n X_i + \overline{X}_n^{\ 2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2} - 2\overline{X}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + X_n^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2} - \overline{X}_n^{\ 2}.$$

ამიტომ

$$ES_n^{\ 2} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^{\ 2} - E\overline{X}_n^{\ 2}\,,$$

$$EX_i^{\ 2} = DX_i + (EX_i)^2 = \sigma^2 + m^2,$$

$$E\overline{X}_n^{\ 2} = D\overline{X}_n + (E\overline{X}_n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2,$$

საიდანაც

$$ES_n^{\ 2} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\,\frac{n-1}{n}.$$

ამრიგად $E\overline{X}_n = m,$ ტოლობისაგან განსხვავებით, $ES_n^{\ 2} \neq \sigma^2$. ამ მიზეზის გამო განიხილავენ შესწორებულ შემთხვევით დისპერსიას, რომელიც შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება

$$S_n'^{\,2} = \frac{n}{n-1}S_n^{\ 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2. \qquad (26.2)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$ES_n'^2 = E(\frac{n}{n-1}S_n{}^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ $S_n'^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$, როცა $n \to \infty$.

თუ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია და $EX_i = m,$ $DX_i = \sigma^2$ და $S_n'^2$ განსაზღვრულია (26.2) თანაფარდობით, მაშინ

$$ES_n'^2 = \sigma^2, \ S_n'^2 \xrightarrow{p} \sigma^2, \text{ როცა } n \to \infty.$$

§26.10. შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის განაწილების კანონი ნორმალური პოპულაციისათვის. ნებისმიერი T_n სტატისტიკის სავარაუდო ყოფაქცევას აღწერს მისი განაწილების კანონი. ამ ლექციაში ჩვენ მოვიყვანთ შერჩევითი საშუალოსა და შერჩევითი დისპერსიის განაწილების კანონებს მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული.

ვთქვათ, $X_1, X_2, ..., X_n$ წარმოდგენს შერჩევას ნორმალური პოპულაციიდან, $X_i \sim N(m, \sigma^2), i = 1,2,...,n.$ რამდენადაც $\overline{X}_n$ წარმოადგენს დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების წრფივ კომბინაციას, ამიტომ

$$\overline{X}_n \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n}). \tag{26.3}$$

გადავიდეთ $S_n{}^2$ შერჩევითი დისპერსიის განაწილების კანონის დადგენაზე. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა დავადგინოთ, თუ როგორი განაწილება აქვს შერჩევით დისპერსიას $\overline{S}_n{}^2$ იმ შემთხვევაში, როდესაც პოპულაციის საშუალო ცნობილია

$$\overline{S}_n{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2. \tag{26.4}$$

რადგან $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, მივიღებთ, რომ $(X_i - m)/\sigma \sim N(0,1)$, ე.ი. $\frac{n\overline{S}_n{}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2$ წარმოადგენს $N(0,1)$ კანონით განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების კვადრატების ჯამს და მაშასადამე, მას აქვს χ^2–განაწილება თავისუფლების ხარისხით n:

$$\frac{n\bar{S}_n^{\ 2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n). \tag{26.5}$$

შევნიშნოთ, რომ $\bar{S}_n^{\ 2}$ სტატისტიკის (26.4) გამოსახულებაში $(X_i - m), i = 1,2,...n,$ არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. სულ სხვანაირადაა საქმე $S_n^{\ 2}$–ისათვის: $\frac{nS_n^{\ 2}}{\sigma^2}$ არ წარმოადგენს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების კვადრატების ჯამს. კერძოდ, $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n) = 0.$ ამ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ფაქტი: $\frac{nS_n^{\ 2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$ ამასთან, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\bar{X}_n$ და $S_n^{\ 2}$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. საბოლოოდ, ყველა ჩამოთვლილი ფაქტი შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით:

თეორემა 26.1 (ფიშერის თეორემა). თუ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ შემთხვევითი შერჩევაა ნორმალურად განაწილებული პოპულაციიდან m, σ^2 პარამეტრებით, მაშინ

ა) $\bar{X}_n$ და $S_n^2\left(S_n'^2\right)$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია;

ბ) $\bar{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;

გ) $\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

ნორმალური პოპულაციიდან მიღებული შერჩევისათვის განვიხილოთ შემდეგი ორი სტატისტიკა: ე.წ. Z სტატისტიკა და T სტატისტიკა:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \tag{26.6}$$

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - m}{S_n' / \sqrt{n}}. \tag{26.7}$$

ფიშერის თეორემის ძალით ადვილად მივიღებთ, რომ Z_n სტატისტიკას აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება, ხოლო T_n სტატისტიკას აქვს სტიუდენტის t განაწილება $n-1$ თავისუფლების ხარისხით, რაც აშკარად სჩანს T_n სტატისტიკის შემდეგი წარმოდგენიდან

$$T_n = \frac{\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}.$$

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- მოიყვანეთ ცენტრალური ტენდენციის საზომების: საშუალოს, მედიანის და მოდის განმარტება.
- მოიყვანეთ ცენტრალური ტენდენციის მდგრადი მახასიათებლები.
- მოიყვანეთ შერჩევითი დისპერსიის განმარტება.
- მოიყვანეთ პოპულაციის დისპერსიის განმარტება.
- რას ეწოდება სტანდარტული გადახრა?
- არის თუ არა სტანდარტული გადახრა გაფანტულობის მდგრადი საზომი? მოიყვანეთ მაგალითი.
- ჩამოაყალიბეთ ჩებიშევის უტოლობა შერჩევითი ერთობლიობისათვის.
- ჩამოაყალიბეთ ჩებიშევის უტოლობა პოპულაციისათვის.
- როგორ განისაზღვრება ასიმეტრიის შერჩევითი კოეფიციენტი და რას გვიჩვენებს იგი?
- რას ეწოდება ექსცესის შერჩევითი კოეფიციენტი?
- როგორ განისაზღვრება შერჩევითი საშუალოს და შერჩევითი დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა დაჯგუფებული მონაცემებისათვის?
- მოიყვანეთ შერჩევითი კოვარიაციის და კორელაციის კოეფიციენტების განმარტება.
- მოიყვანეთ შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები.
- რას ეწოდება სტატისტიკური პოპულაცია? შერჩევა?
- როგორ ხდება პოპულაციის აღწერა შემთხვევითი სიდიდის მეშვეობით?
- რას ნიშნავს, $X_1, X_2, ..., X_n$ შემთხვევითი ვექტორი წარმოადგენს n მოცულობის შემთხვევით შერჩევას მოცემული პოპულაციიდან?
- როგორ T_n ფუნქციას ეწოდება სტატისტიკა?

- დაახასიათეთ t_n და T_n სტატისტიკები. მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითები.
- რას უდრის შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური ლოდინი? პასუხი დაასაბუთეთ.
- რას უდრის შერჩევითი საშუალოს დისპერსია? პასუხი დაასაბუთეთ.
- დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებით რა დასკვნა შეგიძლიათ გააკეთოთ შერჩევითი საშუალოს შესახებ?
- რას უდრის შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური ლოდინი? პასუხი დაასაბუთეთ.
- რას ეწოდება შესწორებული შერჩევითი დისპერსია? რას უდრის მისი მათემატიკური ლოდინი?
- როგორი განაწილება აქვს შერჩევით საშუალოს, როცა პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული?
- როგორი განაწილება აქვს შერჩევით დისპერსიას, როცა პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და ცნობილია მისი საშუალო?
- როგორი განაწილება აქვს შერჩევით დისპერსიას (შესწორებულ შერჩევით დისპერსიას), როცა პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და მისი საშუალო უცნობია?
- ჩამოაყალიბეთ ფიშერის თეორემა.
- მოიყვანეთ Z და T სტატისტიკების განმარტება.
- როგორი განაწილება აქვს Z და T სტატისტიკებს? პასუხი დაასაბუთეთ.

სავარჯიშო 25

1. ვთქვათ, მონაცემთა რაიმე სიმრავლისათვის მოცემულია

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 105, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 31500, \quad n = 10.$$

ა) გამოთვალეთ $\bar{x}, \quad s^2, \quad s$;

ბ) შესაძლებელია თუ არა ამ მონაცემებით მედიანის გამოთვლა?

2. ა) ვთქვათ, $n = 9$ და მონაცემთა სიმრავლის შესახებ გაგვაჩნია შემდეგი ინფორმაცია: სიდიდით მეხუთე ელემენტი ე.ი. $x_{(5)} = 17$. შესაძლებელია თუ არა მედიანის გამოთვლა?

ბ) ვთქვათ, $n = 20$ და $x_{(10)} = 14$, $x_{(11)} = 17$. რას უდრის მედიანა და რა პოზიცია უკავია მას?

3. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემულია აშშ-ის 13 შტატის შემოსავლები ერთ სულ მოსახლეზე 1983 წელს (მონაცემები გამოსახულია დოლარებში)

9999, 9342, 11769, 12580, 9560, 10719, 9031, 12516, 12051, 10920, 13239, 16820, 12101.

ა) მოძებნეთ საშუალო და მედიანა.

ბ) ფიქრობთ თუ არა, რომ ამ შემთხვევაში საშუალო უკეთ ახასიათებს ტიპობრივ შემოსავლებს, ვიდრე მედიანა?

4. NED–ელექტრონიკსის მუშების მცირე რაოდენობა გამოკითხული იქნა იმ მიზნით, რომ დაედგინათ, თუ როგორია ტიპიური საათობრივი ანაზღაურება ($-ში), შედეგად მიიღეს:

9.50, 9.00, 11.70, 14.80, 13.00.

ა) ეს შერჩევაა თუ პოპულაცია?

ბ) რას უდრის არითმეტიკული საშუალო, მედიანა, დისპერსია, ასიმეტრიის კოეფიციენტი?

5. აშშ-ში შტატების მიხედვით წლიური შემოსავალი ერთ სულ მოსახლეზე (ათასობით $-ში) არის 11.1, 17.7, 13.2, 10.7, 16.8, 15.1, 19.2, 15.1, 18.9, 14.3, 13.2, 14.7, 11.4, 15.4, 12.9, 13.2, 14.4, 11.1, 11.2, 12.7, 16.6, 17.5, 14.1, 14.7, 9.5, 13.6, 11.9, 13.8, 15.1, 15.9, 18.3, 11.1, 17.1, 12.2, 12.3, 18.7, 12.4, 12.2, 13.9, 14.7, 11.1, 11.9, 11.8, 13.5, 10.7, 12.8, 15.4, 14.5, 10.5, 13.8, 13.2.

ა) ააგეთ სიხშირეთა განაწილება დაჯგუფების 5 ინტერვალით;

ბ) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა და მოდა;

გ) გამოთვალეთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა;

დ) გამოთვალეთ ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები;

ე) არის თუ არა განაწილება სიმეტრიული?

6. შემთხვევით შერჩეული 100 მანქანისათვის დადგენილია მანძილი (მილებში), რომელსაც მანქანა გაივლის 1 გალონი ბენზინის მოხმარებისას. მონაცემები დაჯგუფებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

ბენზინის მოხმარება	[14, 16)	[16, 18)	[18, 20)	[20, 22)	[22, 24)
მანქანათა რაოდენობა	9	18	24	33	16

ა) გამოთვალეთ მედიანა და საშუალო;

ბ) გამოთვალეთ დისპერსია და სტანდარტული გადახრა;

გ) ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა.

7. NYSE–ს აქციების შერჩევისათვის მიღებული იქნა ფასი/ამონაგები ფარდობის შემდეგი მონაცემები:

15.3, 9.7, 12.4, 21.0, 62.3, 9.5, 5.3, 8.6, 29.7, 43.4.

გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, დისპერსია, სტანდარტული გადახრა, ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტები.

8. ვთქვათ, მონაცემთა რაიმე სიმრავლისათვის $(n=6)$ გამოთვლილია $\bar{x}=8$, $s=2{,}5$.

ა) იმ პირობებში, როცა სხვა არავითარი ინფორმაცია არ გაგვაჩნია, მოძებნეთ ის $\left[\bar{x}-a;\ \bar{x}+a\right]$ ინტერვალები (ე.ი. a რიცხი), რომელშიც მოხვედრილია მონაცემთა არანაკლებ 84%-სა, 55,6%-სა, 91,8%-სა; 67,35%-სა.

9. შემდეგი მონაცემები წარმოადგენს შემთხვევით შერჩეული 25 მუშის კვირეულ ხელფასებს (დოლარებში). მონაცემები დაჯგუფებულია შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

ინტერვალი$[a_{i-1};a_i)$	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	[40, 45)	[45, 50)	[50,55)	[55,60)
სიხშირე n_i	2	3	3	7	6	2	2

ა) იპოვეთ მოდალური ინტერვალი;

ბ) გამოთვალეთ საშუალოსა და დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობანი.

10. ოჯახის შემოსავლების განაწილება აშშ-ში 1983 წელს მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

შემოსავლების ინტერვალი	ოჯახების პროცენტ. რაოდენობა
5000-მდე	5,7
[5000, 10000)	10,2
[10000, 15000)	11,6
[15000, 20000)	11,8
[20000, 25000)	11,5

[25000,35000)	19,5
[35000, 50000)	17,1
50000-ის ზევით	12,6

გამოთვალეთ მედიანის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

11. ავია კომპანია ბოლო რამდენიმე წლის განმავლობაში პერიოდულად ცვლიდა ბილეთების ფასს. ქვემოთ მოყვანილია გარკვეულ ავიარეისზე ბილეთების ფასები დოლარებში(X) და შესაბამისად მგზავრთა რაოდენობა (Y).

X	99	150	130	105	219	167	180
Y	1200	1000	1050	1150	700	850	900

გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები X და Y ცვლადებს შორის კავშირის შესახებ.

12. გარკვეულ რეგიონში ოჯახური შემოსავლების მონაცემები (ათასობით $-ში) დაჯგუფებული სახით თავმოყრილია ცხრილში:

შემოსავლების ინტერვალი	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
ოჯახების პროც. რაოდ.	11	19	30	15	10	15

გამოთვალეთ საშუალო და მედიანა.

13. ქვემოთ მოყვანილია მსოფლიოს რამდენიმე რეგიონისთვის ქალაქში მცხოვრებთა პროცენტული რაოდენობის მონაცემები 1975 წლისათვის:

აფრიკა	25,67		სამხრეთ აზია	22,02
ლათინური ამერიკა	61,21		ევროპა	66,45
ჩრდილო ამერიკა	71,99		ოკეანია	73,35
აღმოსავლეთ აზია	30,70		რუსეთი	60,90

გამოთვალეთ საშუალო და მედიანა.

14. მოცემულია აშშ-ს ერთ-ერთი უნივერსიტეტის 8 თანამშრომლის ასაკები (X) და შესაბამისი წლიური შემოსავლები(Y):

X	40	31	50	53	36	55	37	45
Y	32	24	47	50	30	55	33	41

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა და გააკეთეთ დასკვნა X და Y ცვლადებს შორის კავშირის შესახებ;

ბ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გაარკვიეთ თანხმობაშია თუ არა მისი მეშვეობით გაკეთებული დასკვნა ა) პუნქტის დასკვნასთან;

გ) დადებითია თუ უარყოფითი კავშირი X და Y ცვლადებს შორის?

15. რეკლამა წარმოადგენს წარმატების უმნიშვნელოვანეს ფაქტორს. იმის განსაზღვრისათვის თუ რა გავლენას ახდენს რეკლამაზე გაწეული ხარჯები (X, \$1000-ში) გაყიდვათა მოცულობაზე (Y,\$1000-ში) შეგროვდა შემდეგი მონაცემები:

X	3,0	5,0	7,0	6,0	6,5	8,0	3,5	4,0	4,5	6,5	7,0	7,5	7,5	8,5	7,0
Y	50	250	700	450	600	1000	75	150	200	550	750	800	900	1100	600

მოცემულია $\sum x_i = 91{,}5; \sum y_i = 8175; \sum x_i y_i = 57787{,}5; \sum x_i^2 = 598; \sum y_i^2 = 6070625.$

ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი;

ბ) ააგეთ საუკეთესო წრფე (მოძებნეთ მისი განტოლება);

გ) ახსენით რა კავშირია სარეკლამო ხარჯებსა და გაყიდვათა მოცულობებს შორის.

16. მოცემულია 13 ოჯახის შემდეგი მაჩვენებლები: ოჯახის წევრთა რაოდენობა (X) და თვიური სამედიცინო ხარჯები (Y,\$-ში)

X	2	2	4	5	7	3	8	10	5	2	3	5	2
Y	20	28	52	50	78	35	102	88	51	22	29	49	25

შეისწავლეთ კავშირი ამ ორ სიდიდეს შორის.

17. ახალი პროდუქციის რეალური ფასის განსაზღვრის მიზნით, რომლის გატანაც სურს კომპანიას ბაზარზე, მისმა კვლევის დეპარტამენტმა აარჩია 10

ქალაქი, რომლებსაც არსებითად ერთნაირი გაყიდვათა პროცენტი აქვს და ამ ქალაქების ბაზარზე გაიტანა პროდუქცია სხვადასხვა ფასად (X, $-ში). შედეგები თავმოყრილია შემდეგ ცხრილში (გაყიდვებია (Y, $1000-ში)):

X	15,0	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5
Y	15	14	16	9	12	10	8	9	6	5

რა დასკვნას გააკეთებდით?

თავი 27
პოპულაციის უცნობი პარამეტრების წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასება

განვიხილოთ რაიმე ობიექტთა პოპულაცია და ვთქვათ, გვაინტერესებს ამ ობიექტთა რომელიმე ნიშან-თვისების შესწავლა. დავუკავშიროთ მოცემულ პოპულაციას შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აღნიშნულ ნიშან-თვისებას შეესაბამება. ასეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ამავე დროს წარმოადგენს პოპულაციის დასაკვირვებელი ნიშან-თვისების განაწილებას. ამ განაწილების რიცხვით მახასიათებლებს (მათემატიკურ ლოდინს, დისპერსიას და ა. შ.) ეწოდება პოპულაციის რიცხვითი პარამეტრები. მათი ჭეშმარიტი მნიშვნელობა უმეტეს შემთხვევაში უცნობია. ისმის უცნობი პარამეტრების შეფასების ამოცანა. შეფასება ხდება პოპულაციიდან გარკვეული შერჩევის შესწავლის საფუძველზე.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ შერჩევა რაიმე კანონით განაწილებული პოპულაციიდან. შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ პოპულაციის განაწილების კანონის ფორმა ცნობილია, მაგრამ უცნობია განაწილების პარამეტრის (ან პარამეტრების) რიცხვითი მნიშვნელობა. განვიხილავთ ორ პარამეტრულ მოდელს:

I. ბინომური მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ბინომურად ცდათა n რიცხვითა და წარმატების უცნობი p ალბათობით, $0<p<1,\quad EX=np$. აღნიშვნა: $X\in Bi(n,p)$.

ამ მოდელის კერძო შემთხვევაა ბერნულის სქემა $X\in Bi(1,p),\quad EX=p$.

II. ნორმალური მოდელი: X შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული. რადგან განაწილებას გააჩნია ორი პარამეტრი, შეიძლება გამოვყოთ შემდეგი სამი შემთხვევა.

1) უცნობია m საშუალო, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა ცნობილია და უდრის σ_0–ს. აღნიშვნა: $X\in N(m,\sigma_0)$.

2) საშუალო კვადრატული გადახრა უცნობია, ხოლო საშუალო ცნობილია და უდრის m_0–ს. აღნიშვნა: $X\in N(m_0,\sigma)$.

3) უცნობია როგორც საშუალო, ისე საშუალო კვადრატული გადახრა. აღნიშვნა: $X\in N(m,\sigma)$.

ვთქვათ, მოდელის უცნობი პარამეტრია ϑ. ჩვენი შემდგომი მიზანია **X**=$(X_1, X_2,..., X_n)$ შერჩევის საფუძველზე გავაკეთოთ სტატისტიკური დასკვნები ϑ უცნობი პარამეტრის შესახებ: ავაგოთ უცნობი პარამეტრის ე. წ. წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასება.

§27.1. წერტილოვანი შეფასება. წერტილოვანი შეფასების აგების ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა მოიძებნოს ისეთი $T_n(X) = T_n(X_1, X_2,..., X_n)$ სტატისტიკა (შემფასებელი), რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა $t_n(x) = T_n(x_1, x_2,..., x_n)$, გარკვეული აზრით, შეიძლება ჩაითვალოს უცნობი ϑ პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის რიცხვით მიახლოებად და გამოყენებული იქნას მის ნაცვლად. ასეთ მიახლოებას ვუწოდებთ წერტილოვან შეფასებას. იმისათვის, რომ წერტილოვანი შეფასება იყოს "კარგი", იგი უნდა აკმაყოფილებდეს სამ პირობას: ჩაუნაცვლებლობას, ძალმოსილებას და ეფექტურობას. განვმარტოთ თითოეული მათგანი.

$T_n(X) = T_n(X_1, X_2,..., X_n)$ შეფასებას (სტატისტიკას) ეწოდება ჩაუნაცვლებელი, თუ ნებისმიერი $n-$სათვის

$$ET_n(X) = \vartheta. \tag{27.1}$$

ჩაუნაცვლებლობა ნიშნავს, რომ თუ ჩავატარებთ მრავალ განმეორებით ექსპერიმენტს (ანუ მივიღებთ n მოცულობის შერჩევათა სერიებს), მაშინ აგებულ შეფასებათა საშუალო მნიშვნელობა ახლოს იქნება პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან. ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს დარწმუნებული ვიყოთ, რომ სისტემურ შეცდომებს ადგილი არა აქვს.

$T_n = T_n(X)$ შეფასებას ეწოდება ძალმოსილი (ძალდებული), თუ ნებისმიერი $\varepsilon-$სათვის

$$p(|T_n - \vartheta| < \varepsilon) \to 1, \text{ როცა } n \to \infty. \tag{27.2}$$

ძალმოსილება შეფასების ასიმპტოტური (ზღვარითი) თვისებაა. ის ახასიათებს შეფასების ქცევას, როდესაც შერჩევის n მოცულობა უსასრულოდ იზრდება.

(27.1) და (27.2) პირობას ერთი და იგივე უცნობი პარამეტრისათვის შეიძლება აკმაყოფილებდეს რამდენიმე სხვადასხვა შეფასება. ასეთ შემთხვევაში უპირატესობა უნდა მივანიჭოთ უმცირესი დისპერსიის მქონე შეფასებას.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ პოპულაციის ყოველი უცნობი პარამეტრისათვის შესაძლებელია გამოთვლილ იქნას ნებისმიერი შეფასების დისპერსიის შესაძლო

მინიმალური მნიშვნელობა. თუ ფიქსირებული n–სათვის T_n სტატისტიკა მინიმალურია, მას ეფექტურს უწოდებენ.

ხშირ შემთხვევაში T_n სტატისტიკას არ გააჩნია აღნიშნული თვისება, მაგრამ სტატისტიკის დისპერსია მიისწრაფის მინიმალური მნიშვნელობისაკენ, როცა, $n \to \infty$. ამ შემთხვევაში T_n სტატისტიკა ასიმპტოტურად ეფექტურია.

მოვიყვანოთ ზემოთ განხილული პარამეტრული მოდელების უცნობი პარამეტრების შეფასებათა თვისებები:

- $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ -შერჩევითი საშუალო არის პოპულაციის უცნობი საშუალოს ჩაუნაცვლებელი, ძალმოსილი და ეფექტური შეფასება.
- ნორმალურად განაწილებული პოპულაციის შემთხვევაში შერჩევითი საშუალო ნორმალურადაა განაწილებული. სხვა შემთხვევაში, ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად, შერჩევითი საშუალო ასიმპტოტურად ნორმალურადაა განაწილებული.
- S_n^2 -შერჩევითი დისპერსია არის პოპულაციის უცნობი დისპერსიის ჩანაცვლებული, მაგრამ ძალმოსილი და ეფექტური შეფასება.
- $S_n'^2$ -შესწორებული შერჩევითი დისპერსია არის უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი, ძალმოსილი და ასიმპტოტურად ეფექტური შეფასება.

იმ შემთხვევაში, როცა საშუალო ცნობილია, ე. ი. $EX = m$, უცნობი დისპერსიის შესაფასებლად გამოიყენება სტატისტიკა

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

სწორედ $\overline{S}^2$ წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ, ძალმოსილ და ასიმპტოტურად ეფექტურ შეფასებას.

ამრიგად, თუ პოპულაციის m მათემატიკური ლოდინის და σ^2 დისპერსიის ჭეშმარიტი მნიშვნელობები უცნობია და მიღებულია n მოცულობის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ შერჩევითი მნიშვნელობები აღნიშნული პოპულაციიდან, მაშინ ამ შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე გამოთვლილი $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ –შერჩევით საშუალოსა და $S_n'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$ შესწორებული შერჩევითი დისპერსიის რიცხვითი მნიშვნელობები შეიძლება ჩაითვალოს პოპულაციის უცნობი საშუალოსა და დისპერსიის ჭეშმარიტი მნიშვნელობების მიახლოებად.

ამოცანა 1. მოცემულია 10 ჩვეულებრივი აქციის წლიური ამონაგების მნიშვნელობები. ეს მონაცემები წარმოადგენს შერჩევას აქციათა ამონაგებების დიდი პოპულაციიდან, რომელიც ნორმალურადაა განაწილებული. ეს მონაცემებია:

7, 9, 12, 8, 11, 13, 9, 12, 8, 7.

ა) რისი ტოლია პოპულაციის საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასება?

ბ) რისი ნტოლია პოპულაციის დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება?

ამოხსნა. ა) პოპულაციის საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა

$$\bar{x} = \frac{7+9+12+8+11+13+9+12+8+7}{10} = 9{,}6.$$

ბ) პოპულაციის დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასებაა

$$S_n'^2 = \frac{(7-9{,}6)^2 + (9-9{,}6)^2 + \ldots + (7-9{,}6)^2}{9} = 4{,}933.$$

აღნიშნული შეფასებები, გამოთვლილი კონკრეტული n მოცულობის შერჩევის საფუძველზე, როგორც წესი განსხვავდება უცნობი პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან და ჩვენთვის არ არის ცნობილი, თუ რამდენად დიდია ეს განსხვავება. ამ დროს, რა თქმა უნდა, ვუშვებთ გარკვეულ შეცდომას. წერტილოვანი შეფასების ნაკლი ისაა, რომ მხოლოდ მისი დაკვირვებული მნიშვნელობის ცოდნა არ იძლევა ამ შეცდომის სიდიდის დადგენის საშუალებას.

ეს მოსაზრება გვიბიძგებს, რომ წერტილოვანი შეფასება – ერთი რიცხვი, შევცვალოთ ინტერვალური შეფასებით – მთელი ინტერვალით.

§27.2. ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის.

$X \in N(m, \sigma_0)$ მოდელი. ვთქვათ, $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ არის n მოცულობის შერჩევა. როგორც ვიცით, პოპულაციის "კარგ" შეფასებას წარმოადგენს შერჩევითი საშუალო

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(m, \sigma/\sqrt{n}).$$

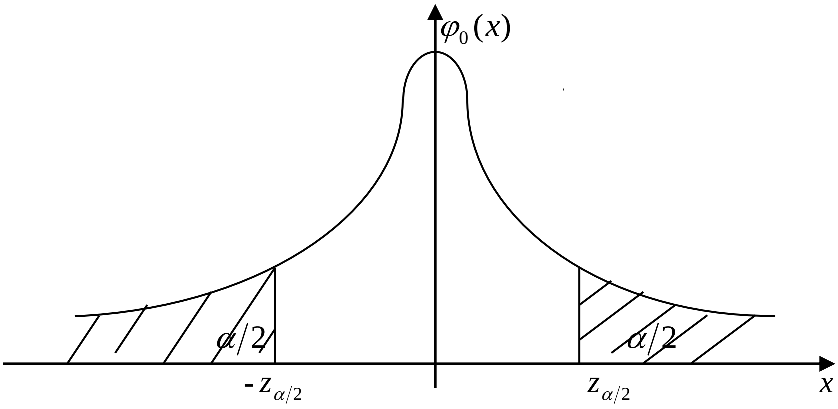
$\overline{X}$-ის სტანდარტიზაცია გვაძლევს

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1). \tag{27.3}$$

(27.3)-ის თანახმად ნებისმიერი წინასწარ განსაზღვრული $(1-\alpha)$–თვის ადვილი მოსაძებნია ნულის მიმართ სიმეტრიული ისეთი $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$ ინტერვალი, რომელშიც Z_n–ის მოხვედრის ალბათობა $(1-\alpha)$–ს ტოლია, ე.ი.

$$p(-z_{\alpha/2} \le Z_n \le z_{\alpha/2}) = p\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha. \qquad (27.4)$$

როგორც წესი იღებენ α–ს შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობებს: α =0,1; 0,05; 0,01. (იხ. ნახ.1, სადაც არადაშტრიხული ფიგურის ფართობი $(1-\alpha)$–ს, ანუ მთელი ფართობის $(1-\alpha)\cdot 100\%$–ის ტოლია).



ნახ.1

$z_{\alpha/2}$-ს სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$–კრიტიკულ წერტილს უწოდებენ. $z_{\alpha/2}$–ის რიცხვითი მნიშვნელობა მარტივად განისაზღვრება განაწილების ცხრილის საშუალებით (იხ. დანართი).

პირობის თანახმად შერჩევის მოცულობა და პოპულაციის დისპერსია ცნობილია. შერჩევითი მნიშვნელობების საფუძველზე ადვილი გამოსათვლელია $\overline{X}$, შერჩევითი საშუალოს, რიცხვითი მნიშვნელობა. ამრიგად, ერთადერთი უცნობი, რომელსაც შეიცავს (27.4) გამოსახულება არის პოპულაციის უცნობი საშუალო. (27.4)-დან მარტივად მივიღებთ შემდეგს:

$$p\left(\overline{X} - \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma_0}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

აქედან

$$\left(\overline{X} - \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma_0}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \qquad (27.5)$$

წარმოადგენს $(1-\alpha)$ ნდობის ალბათობით აგებულ ნდობის ინტერვალს. n მოცულობის შერჩევას ვუწოდოთ სერია. განმეორებით სერიებში ამ წესით აგებული ნდობის ინტერვალი შეიცავს უცნობი პარამეტრის ჭეშმარიტ m_0 მნიშვნელობას ყოველი 100 სერიიდან $(1-\alpha)\cdot 100$ შემთხვევაში. ამ ინტერვალს $(1-\alpha)\cdot 100\%$–იან ნდობის ინტერვალსაც უწოდებენ.

$(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი $X \in N(m,\sigma_0)$ მოდელის საშუალოსათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \ \bar{x}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right), \tag{27.6}$$

სადაც, $\bar{x}$ შერჩევითი საშუალოს რიცხვითი მნიშვნელობაა, ხოლო $z_{\alpha/2}$- სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$ კრიტიკული წერტილია.

თუ $(1-\alpha)$ ერთთან ახლომყოფი რაიმე რიცხვია, მაშინ პრაქტიკულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ აღნიშნული ხდომილობა ერთეულოვან ცდაში ყოველთვის განხორციელდება.

ამოცანა 2. $n=35$ მოცულობის შერჩევის მონაცემებმა ნორმალური პოპულაციიდან მოგვცა: $\bar{x}=24{,}7;\sigma=3.$ ავაგოთ 0,9 დონის მქონე ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (27.6) ფორმულით. აქ $z_{\alpha/2}=z_{0{,}05}=1{,}645$, ამიტომ საძიებელი ინტერვალია

$$(24{,}7-\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 1{,}645;\ 24{,}7+\frac{3}{\sqrt{35}}\cdot 1{,}645)=(24{,}7-0{,}8;\ 24{,}7+0{,}8),$$

რაც საბოლოოდ გვაძლევს (23,9; 25,5) ინტერვალს.

$X \in N(m,\sigma)$ მოდელი. დაშვება იმის შესახებ, რომ პოპულაციის საშუალო უცნობია, ხოლო დისპერსია ცნობილი, არარეალურია. როგორც წესი, დისპერსიის შესახებ ინფორმაციის მოპოვებას წინ უსწრებს საშუალოს შესახებ ინფორმაციის არსებობა. პრაქტიკულ ამოცანებში ეს ორივე პარამეტრი უცნობია. როგორც ვიცით, m და σ^2 პარამეტრების "კარგი" შეფასებებია შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია. ამასთან

$$\frac{\bar{X}_n-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \qquad\qquad \frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

ფიშერის თეორემის ძალით აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია. თუ ახლა გავიხსენებთ სტუდენტის t განაწილების განმარტებას, მივიღებთ, რომ

$$T_n=\frac{\dfrac{\bar{X}_n-m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\bar{X}_n-m}{S_n'/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

ნებისმიერი წინასწარ განსაზღვრული $(1-\alpha)$-თვის ადვილი მოსაძებნია ნულის მიმართ სიმეტრიული ისეთი $(t_{n-1,1-\alpha/2}, t_{n-1,\alpha/2})$ ინტერვალი, რომელშიც T_n სტატისტიკის მოხვედრის ალბათობა $(1-\alpha)$–ს ტოლია, ე.ი. ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობას

$$p\left(t_{n-1,1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X}_n - m}{S'/\sqrt{n}} \le t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha ,$$

სადაც $t_{n-1,1-\alpha/2}$ და $t_{n-1,\alpha/2}$ სტუდენტის $t(n-1)$ განაწილების ქვედა და, შესაბამისად, ზედა $\alpha/2$ ზომის კრიტიკული წერტილებია. ამ ფაქტზე დაყრდნობით $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის აიგება ზუსტად იგივე გზით, როგორც ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში. კერძოდ

$$\left(\bar{x} - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2} ; \bar{x} + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\right)$$

წარმოადგენს $(1-\alpha)$ ნდობის ალბათობით აგებულ ნდობის ინტერვალს უცნობი საშუალოსათვის.

$(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი $X \in N(m,\sigma)$ მოდელის საშუალოსათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\left(\bar{x} - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2} ; \bar{x} + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\right), \tag{27.7}$$

სადაც $\bar{x}$ და s' შერჩევითი საშუალოსა და, შესაბამისად, შესწორებული სტანდარტული გადახრის რიცხვითი მნიშვნელობებია, ხოლო $t_{n-1,\alpha/2}$ სტიუდენტის $t(n-1)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$ ზომის კრიტიკული წერტილია.

რადგან $S' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} S$, $(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი შეიძლება შემდეგი სახითაც გადაიწეროს:

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\alpha/2} ;\;\; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{n-1,\alpha/2}\right). \tag{27.8}$$

ამოცანა 3. განვიხილოთ მონაცემები, რომლებიც წარმოადგენს რომელიმე ფირმის მოსამსახურეთა 30 სატელეფონო საუბრის ხანგრძლივობას (გამოხატულს წუთებში).

11,8	3,6	16,6	13,5	4,8	8,8	8,9	9.1	7,7	2,3	12,1	6,1	6,2	11,2	10,4
10,2	8,0	11,4	6,8	9,6	19,5	15,3	12,3	8,5	15,9	18,7	11,7	7,2	5,5	14,5

ამ მონაცემების საფუძველზე ავაგოთ 0,99 ნდობის ინტერვალი ფირმის მოსამსახურეთა სატელეფონო საუბრების საშუალო ხანგრძლივობისათვის.

ამოხსნა. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად ჩავთვალოთ, რომ მონაცემები მიღებულია ნორმალურად განაწილებული პოპულაციიდან. პოპულაციის ორივე პარამეტრი უცნობია. გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და სტანდარტული გადახრა: $\bar{x} = 10{,}26, s = 4{,}29.$

ვისარგებლოთ (27.8) ფორმულით, რომლის თანახმადაც 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის იქნება:

$$(10{,}26 - \frac{4{,}29}{\sqrt{29}} t_{29,0.005}; 10{,}26 - \frac{4{,}29}{\sqrt{29}} t_{29,0.005}).$$

რადგან $t_{29,0.005}$=2,756, საბოლოოდ საძიებელი ინტერვალია (8,06; 12,46).

§27.3. ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში. ზემოთ, უცნობი საშუალოსათვის ნდობის ინტერვალის აგებისას ვგულისხმობდით, რომ პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული. ამასთან, შერჩევის მოცულობა ნებისმიერი იყო. ეს განპირობებული იყო იმით, რომ ნორმალური პოპულაციის შემთხვევაში შერჩევითი საშუალოსა და დისპერსიის განაწილება ზუსტად არის ცნობილი, რასაც საზოგადოდ, ვერ ვიტყვით იმ პოპულაციებისათვის, რომლებიც არ არის ნორმალურად განაწილებული. მიუხედავად ამისა ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები საშუალებას იძლევა ავაგოთ ნდობის ინტერვალი პოპულაციის უცნობი საშუალოსათვის ზოგად შემთხვევაშიც, როცა შერჩევის მოცულობა საკმაოდ დიდია.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პოპულაციის დისპერსია უცნობია. ვისარგებლოთ

$$\frac{\overline{X}_n - m}{S'_n / \sqrt{n}}$$

სტატისტიკით, რომელსაც შერჩევის საკმაოდ დიდი მოცულობისას (იმ დამატებითი ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $S_n'^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$, როცა $n \to \infty$), მიახლოებით ნორმალური განაწილება აქვს, ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით. აქედან, სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ ინტერვალი

$$(\bar{x}_n - s' \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x}_n + s' \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})$$

წარმოადგენს $(1-\alpha)$ ნდობის დონის ასიმპტოტურ ინტერვალს (მისი ნდობის დონე მიახლოებით $(1-\alpha)$–ს ტოლია).

§27.4. ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის.

$X \in N(m,\sigma)$ მოდელი. განსახილველ შემთხვევაში პოპულაციის უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასებას (სტატისტიკას)

$$S_n'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

აქვს χ^2 განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-1$, ანუ

$$\frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

რის საფუძველზეც წინასწარ განსაზღვრული $(1-\alpha)$–თვის

$$p\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \le \frac{(n-1)\cdot S_n'^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,\alpha/2} \right) = 1-\alpha, \qquad (27.9)$$

სადაც $\chi^2_{n,p}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა p–კრიტიკული წერტილი. (27.9)-ის საფუძველზე აიგება ნდობის ინტერვალი პოპულაციის დისპერსიისათვის.

$(1-\alpha)$-ნდობის ინტერვალი $X \in N(m,\sigma)$ მოდელის დისპერსიისათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\left(\frac{(n-1)\cdot s'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \ \frac{(n-1)\cdot s'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right), \qquad (27.10)$$

სადაც $\chi^2_{n-1,p}$ არის $\chi^2(n-1)$ განაწილების ზედა p–კრიტიკული წერტილი.

ამოცანა 4. ნორმალურად განაწილებული პოპულაციიდან მიღებულია $n=25$–ის ტოლი ამონარჩევი და მის საფუძველზე გამოთვლილია შესწორებული შერჩევითი დისპერსია $S_n'^2 = 3{,}5$. $(1-\alpha)=0{,}9$ ნდობის ალბათობით ააგეთ ნდობის ინტერვალი პოპულაციის დისპერსიისათვის.

ამოხსნა. ცხრილის საშუალებით ვიპოვით $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{24;0.05} = 36{,}41$ და $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{24;0.95} = 13{,}84$. 0,9 ნდობის ალბათობით ნდობის ინტერვალი უცნობი დისპერსიისათვის იქნება

$$\left(\frac{25\cdot 3{,}5}{36{,}41};\frac{25\cdot 3{,}5}{13{,}84}\right)=(2{,}4;\ 6{,}32)$$

§27.5. ნდობის ინტერვალური შეფასება უცნობი ალბათობისათვის (უცნობი პროპორციისათვის) ბერნულის სქემაში. ბერნულის სქემაში უცნობი p ალბათობის საუკეთესო წერტილოვანი შეფასებაა ფარდობითი სიხშირე,

$$W_n=\frac{S_n}{n},$$

სადაც $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში, ამასთან

$$EW_n=p\,,\qquad DW_n=\frac{p(1-p)}{n}.$$

უცნობი p ალბათობისათვის ნდობის ინტერვალის ასაგებად იყენებენ სტანდარტიზაციის შედეგად მიღებულ სტატისტიკას

$$\frac{W_n-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}},$$

რომელიც თუ შერჩევის მოცულობა n საკმარისად დიდია, მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, ნულოვანი საშუალოთი და ერთეულოვანი დისპერსიით. მაგრამ ამ სტატისტიკის გამოსახულებაში მნიშვნელი შეიცავს შესაფასებელ p პარამეტრს, რაც აძნელებს სტანდარტული გზით ნდობის ინტერვალის აგებას.

შეიძლება გამოვიყენოთ გამარტივებული მიდგომა, რომლის თანახმადაც მნიშვნელში უცნობი p უნდა შეიცვალოს მისი W_n შეფასებით და აქედან მოყოლებული ნდობის ინტერვალი აიგოს სტანდარტული მსჯელობით.

შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში $(1-\alpha)-$ნდობის ინტერვალი $X\in Bi(n,p)$ მოდელის უცნობის ალბათობისათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\left(W_n-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{W_n\cdot(1-W_n)}{n}};\ W_n+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{W_n\cdot(1-W_n)}{n}}\right)\qquad(27.11)$$

სადაც $W_n=\dfrac{S_n}{n}$, S_n წარმატებათა რაოდენობაა n ცდაში. ეს ინტერვალი შეიძლება გამოყენებული იქნას, როცა $nW_n\geq 5,\ n(1-W_n)\geq 5.$ $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული

ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$ კრიტიკული წერტილია.

ამოცანა 5. საწარმო უშვებს გარკვეული ტიპის პროდუქციას. მენეჯერს აინტერესებს შეაფასოს დეფექტური პროდუქციის პროპორცია. ამ მიზნით შერჩეული იყო 400 ერთეული, რომელთა შორის დეფექტური აღმოჩნდა 60. 99%-იანი ნდობის დონით ააგეთ ინტერვალური შეფასება საწარმოს მიერ გამოშვებული დეფექტური პროდუქციის უცნობი ალბათობისათვის.

ამოხსნა. w_n=60/400=0,15; $1-w_n=0{,}85$; $\alpha=0{,}01$; $z_{\alpha/2}$=2,58. რადგან n=400, $nw_n=60,\quad n(1-w_n)=340,$ ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ (27.11) ფორმულით, რომლის თანახმად საძიებელი ინტერვალია

$$\left(0{,}15-2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot0{,}85}{400}};\ 0{,}15+2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}15\cdot0{,}85}{400}}\right)$$

ე.ი. უცნობი ალბათობისათვის 99%-იანი ნდობის ინტერვალია (0,104; 0,196).

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

1. რა პარამეტრული მოდელებია განხილული ლექციაში? მიუთითეთ უცნობი პარამეტრები.

2. რას ეწოდება პოპულაციის უცნობი პარამეტრის წერტილოვანი შეფასება?

3. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს "კარგი" წერტილოვანი შეფასება?

4. განმარტეთ წერტილოვანი შეფასების ჩაუნაცვლებლობა, ძალმოსილება და ეფექტურობა.

5. მოიყვანეთ ლექციაში განხილული მოდელების უცნობი პარამეტრების შემფასებლები და მათი თვისებები.

6. მოიყვანეთ $(1-\alpha)$-დონის ნდობის ინტერვალი $X\in N(m,\sigma_0)$ მოდელის საშუალოსათვის.

7. მოიყვანეთ $(1-\alpha)$-დონის ნდობის ინტერვალი $X\in N(m,\sigma)$ მოდელის საშუალოსათვის.

8. ამოწერეთ ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში.

9. ამოწერეთ ნდობის ინტერვალი $X\in N(m,\sigma)$ მოდელის დისპერსიისათვის.

10.როგორ გამოითვლება $(1-\alpha)$-დონის ნდობის ინტერვალი $X\in Bi(n,p)$ მოდელის უცნობი ალბათობისათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში?

სავარჯიშო 26

1. 40 პედაგოგზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ 12,6 წუთს ანდომებენ ერთი ნაწერის გასწორებას. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი გასწორების დროის საშუალოსათვის, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა ტოლია 2,5 წუთის.

2. შემთხვევით შერჩეული 40 თავდამსხმელის საშუალო ქულა არის 186, ხოლო თავდამსხმელთა პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 6. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი თავდამსხმელთა პოპულაციის საშუალო ქულისათვის.

3. შემთხვევით შერჩეულ 20 პაციენტის 100 მილილიტრ სისხლში ჰემოგლობინის საშუალო შემცველობა აღმოჩნდა 16 გრამი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 გრამი. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

4. 20 თინუსზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ ცურავენ 8,6 მილს საათში. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადხრაა 1,6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

5. შემთხვევით არჩეული 6 სპილოს საშუალო წონაა 12200 ფუნტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 200 ფუნტი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

6. 28 მოქალაქის გამიკითხვის მიხედვით მათი ამჟამინდელ მისამართზე ცხოვრების საშუალო ხანგრძლივობამ შეადგინა 9,3 წელი, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 2 წელი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის.

7. შემთხვევით შერჩეული 25 ავტომობილიანი სტუდენტი კვირაში საშუალოდ ხარჯავს 18,53 ლარის ბენზინს. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3 ლარი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

8. სტრესულ სიტუაციაში მყოფი 6 ქალის გულისცემის საშუალო რიცხვი წუთში შეადგენს 115-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 6. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სტრესულ სიტუაციაში მყოფი ქალების გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

9. ეროვნულ გამოცდაზე მათემატიკაში 20 აბიტურიენტის გულისცემის საშუალო იყო 96 დარტყმა წუთში, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

10. შემთხვევით შერჩეულ 49 ბავშვზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი სავაჭრო ცენტრში საშუალოდ ხარჯავენ 18,5 ლარს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1,56 ლარი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ბავშვების მიერ სავაჭრო ცენტრში დახარჯული თანხის რეალური საშუალოსათვის.

11. გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ აშშ-ს მოქალაქეს საშუალოდ ჭირდება 5,9 თვე ახალი სამუშაოს მოსაძებნად. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სამუშაოს მოძებნის საშუალოსათვის, თუ გამოკითხული 36 სამუშაოს მძებნელისათვის შესწორბული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 0,8 თვე.

12. ცენტრალური რესპუბლიკური საავადმყოფოს 84 სხვადსხვა ადგილას გაზომილი ხმაურის დონის საშუალო იყო 61,2 დეციბალი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 7,9 დეციბალი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საავადმყოფოში რეალური ხმაურის დონის საშუალოსათვის.

13. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ელემენტის სიცოცხლის ხანგრძლივობის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის თუ ცნობილია, რომ 20 ელემენტიანი შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1,7 თვე.

14. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ავტობუსის უსაფრთხოების შესამოწმებლად საჭირო დროის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის თუ ცნობილია, რომ 20 ავტობუსის უსაფრთხოების შესამოწმებლად საჭირო დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 6,8 წუთი.

15. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ძრავის ზეთის 25 ლიტრიანი კონტეინერის წონის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის თუ ცნობილია, რომ 14 კონტეინერისათვის შესწორებული დისპერსია არის 3,3.

16. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი უნივერსიტეტის მეოთხე კურსის სტუდენტების ასაკის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 24 სტუდენტის ასაკის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 2,3 წელი.

17. 1500 გამოკითხული ახალგაზრდიდან 39%-მა თქვა, რომ ისინი აპირებენ მომავალ წელს აიღონ უფრო ხანგრძლივი შვებულება. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ახალგაზრდების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც აპირებენ მომავალ წელს უფრო ხანგრძლივი შვებულების აღებას.

18. დედაქალაქის 100 შემთხვევით შერჩეულ მაცხოვრებელთა შორის 27 მსუქანია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი დედაქალაქის მოსახლეობაში მსუქანი ადამიანების რალური პროპორციისათვის.

19. 80 ავტოსაგზაო შემთხვევიდან 46-ის გამომწვევი მიზეზი იყო მძღოლის მიერ ალკოჰოლის მიღება. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ავტოსაგზაო შემთხვევების რეალური პროპორციისათვის, რომელთა გამომწვევი მიზეზი იყო მძღოლის მიერ ალკოჰოლის მიღება.

20. 90 გამოკითხული ოჯახიდან 40 ფლობს ერთ იარაღს მაინც. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ოჯახების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც ფლობენ ერთ იარაღს მაინც.

თავი 28
ჰიპოთეზათა შემოწმება

§28.1. ჰიპოთეზის შემოწმების ზოგადი სქემა. სტატისტიკური ჰიპოტეზა არის რაიმე გამონათქვამი პოპულაციის განაწილების კანონის ან მისი რიცხვითი მახასიათებლების შესახებ. ჰიპოთეზას განაწილების სახის შესახებ არაპარამეტრული ჰიპოთეზა ეწოდება, ხოლო ჰიპოთეზას განაწილების რიცხვით მახასიათებელზე – პარამეტრული ჰიპოთეზა.

სტატისტიკაში მიღებულია ჰიპოთეზების H_0 (ძირითადი ჰიპოთეზა) და H_1 (ალტერნატიული ჰიპოთეზა) სიმბოლოებით აღნიშვნა. ვთქვათ, პოპულაციის განაწილების კანონი ცნობილია და დამოკიდებულია რომელიღაც უცნობ ϑ პარამეტრზე. მაშინ, უცნობი პარამეტრისათვის გვაქვს ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჩამოყალიბების სამი შემთხვევა:

ორმხრივი: $H_0: \vartheta = \vartheta_0, H_1: \vartheta \neq \vartheta_0$.

მარჯვენა ცალმხრივი: $H_0: \vartheta \leq \vartheta_0, H_1: \vartheta > \vartheta_0$.

მარცხენა ცალმხრივი: $H_0: \vartheta \geq \vartheta_0, H_1: \vartheta < \vartheta_0$.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: პოპულაციიდან n მოცულობის $x_1, x_2, ..., x_n$ შერჩევის საფუძველზე დავადგინოთ, რომელი ჰიპოთეზაა სამართლიანი ძირითადი H_0 თუ ალტერნატიული H_1. ამისათვის უნდა აიგოს ე.წ. სტატისტიკური კრიტერიუმი ანუ გადაწყვეტილების მიღების წესი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ დაკვირვებულ მნიშვნელობათა როგორი ერთობლიობისათვის ჩავთვალოთ სამართლიანად ძირითადი ჰიპოთეზა და როგორისთვის არა. თუმცა, შესაძლებელია დავუშვათ შეცდომა და უკუვაგდოთ სამართლიანი ჰიპოთეზა. ასეთი შეცდომის ალბათობა აღინიშნება α-თი და მას მნიშვნელოვნობის დონე ეწოდება.

გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა: “სამართლიანია H_0 ჰიპოთეზა” ნიშნავს, რომ $x_1, x_2, ..., x_n$ მონაცემები არ ეწინააღმდეგება მას, ანუ ამ მონაცემებით H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის სფუძველი არა გვაქვს. ამით იმის თქმა გვინდა, რომ H_0-თან ერთად შეიძლება სამართლიანი იყოს ბევრი სხვა ჰიპოთეზაც.

საბოლოოდ ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება დავყოთ შემდეგ ეტაპებად: 1) ჩამოვაყალიბოთ H_0 და H_1 ჰიპოთეზები; 2)

ავარჩიოთ კრიტერიუმის (ტესტის) სტატისტიკა და მივუთითოთ მისი განაწილების კანონი; 3) მივუთითოთ მნიშვნელოვნობის α დონე; 4) ვიპოვოთ კრიტერიუმის (ტესტის) რიცხვითი მნიშვნელობა ($T.V.$); 5) ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილი ($C.V.$) და კრიტიკული არე ($C.R.$); 6) მივიღოთ გადაწყვეტილება.

§28.2. ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში. ვთქვათ, პოპულაციას, რომელსაც აღწერს X შემთხვევითი სიდიდე, აქვს ნორმალური განაწილება $X \cong N(m,\sigma^2)$, სადაც σ^2 დისპერსია ცნობილია, ხოლო m მათამატიკური ლოდინი უცნობია. $X_1, X_2, ..., X_n$ შერჩევითი ერთობლიობაა პოპულაციიდან. მოვიყვანოთ ჰიპოთეზის შემოწმება უცნობი m პარამეტრისათვის ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით.

1) ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

ორმხრივი: $H_0:\ m = m_0$, $H_1:\ m \neq m_0$.

მარჯვენა ცალმხრივი: $H_0:\ m \leq m_0$, $H_1:\ m > m_0$.

მარცხენა ცალმხრივი: $H_0:\ m \geq m_0$, $H_1:\ m < m_0$.

2) კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \cong N(0,1),$$

სადაც $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ შერჩევითი საშუალოა;

3) მნიშვნელოვნობის დონე: α.

4) კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

5) კრიტიკული წერტილი (წერტილები) და კრიტიკული არე:

ორმხრივი: $C.V. = \pm z_{\alpha/2}$, $C.R. = (-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$;

მარჯვენა ცალმხრივი: $C.V. = z_\alpha$, $C.R. = [z_\alpha; +\infty)$;

მარცხენა ცალმხრივი: $C.V. = -z_\alpha$, $C.R. = (-\infty; -z_\alpha]$.

აქ $z_{\alpha/2}$ (z_α) – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$ (α) კრიტიკული წერტილია.

6) გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V.\in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

შევნიშნოთ, რომ როცა შერჩევა მიღებულია არა ნორმალური პოპულაციიდან, მაგრამ შერჩევის მოცულობა n საკმაოდ დიდია (n>30), ცენტრალური ზღვარითი თეორემის ძალით, $\overline{X}_n$ შემთხვევითი სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, რის გამოც სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების ზემოთ მოყვანილი კრიტერიუმები ამ შემთხვევაშიც გამოიყენება.

ამოცანა 1. მეტეოროლოგის აზრით ქალაქში ქარის საშუალო სიჩქარეა 8 კმ/სთ. შემთხვევით შერჩეული 32 დღის მონაცემებით ქარის საშუალო სიჩქარე აღმოჩნდა 8,2 კმ/სთ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0,6 კმ/სთ. $\alpha=0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დავეთანხმოთ მეტეოროლოგს?

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ m=8, \qquad H_1:\ m\neq 8.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z=\frac{\overline{X}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1);$$

მნიშვნელოვნობის დონე: 0,05;

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\frac{8{,}2-8}{0{,}6/\sqrt{32}}=1{,}89.$$

კრიტიკული წერტილები და კრიტიკული არე:

$$C.V.=\pm z_{\alpha/2}=\pm z_{0{,}025}=1{,}96;$$

$$C.R.=(-\infty;-1{,}96]\cup[1{,}96;+\infty);$$

გადაწყვეტილება: ვინაიდან $T.V.\notin C.R.$, ამიტომ H_0 არ უნდა უარვყოთ, ანუ არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, რომ არ გავიზიაროთ მეტეოროლოგის აზრი.

ამოცანა 2. მკვლევარს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ მაშველების საშუალო ასაკი 24 წელზე მეტია. მან შემთხვევით შეარჩია 36 მაშველი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ასაკი იყო 24,7 წელი, ხოლო შესწორებული

სტანდარტული გადახრა 2 წელი. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ჰიპოთეზის მისაღებად $\alpha = 0{,}05$ მნისვნელოვნობის დონით?

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ m \le 24, \qquad H_1:\ m > 24.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \cong N(0{,}1);$$

მნიშვნელოვნობის დონე: 0,05;

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{24{,}7 - 24}{2 / \sqrt{36}} = 2{,}1.$$

კრიტიკული წერტილები და კრიტიკული არე:

$$C.V. = z_\alpha = z_{0{,}05} = 1{,}64;$$

$$C.R. = [1{,}64; +\infty);$$

გადაწყვეტილება: ვინაიდან $T.V. \in C.R.$, ამიტომ H_0 უნდა უარვყოთ, ანუ გვაქვს საკმარისი საფუძველი იმისა, რომ მაშველის საშუალო ასაკი მეტია 24 წელზე.

§28.3. ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში. პოპულაციას აქვს ნორმალური განაწილება $X \cong N(m, \sigma^2)$, სადაც m და σ^2 უცნობია. $X_1, X_2, ..., X_n$ შერჩევითი ერთობლიობაა პოპულაციიდან.

1) ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

ორმხრივი: $H_0:\ m = m_0$, $H_1:\ m \ne m_0$.

მარჯვენა ცალმხრივი: $H_0:\ m \le m_0$, $H_1:\ m > m_0$.

მარცხენა ცალმხრივი: $H_0:\ m \ge m_0$, $H_1:\ m < m_0$.

2) კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{S'_n / \sqrt{n}} \cong t(n-1),$$

სადაც $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – შერჩევითი საშუალოა, ხოლო $S'_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}$ –შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა;

3) მნიშვნელოვნობის დონე: α .

4) კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\frac{\bar{x}-m_0}{s'/\sqrt{n}}\ .$$

5) კრიტიკული წერტილი (წერტილები) და კრიტიკული არე:

ორმხრივი: $C.V.=\pm t_{n-1;\alpha/2}$; $C.R.=(-\infty;-t_{n-1;\alpha/2}]\cup[t_{n-1;\alpha/2};+\infty)$;

მარჯვენა ცალმხრივი: $C.V.=t_{n-1;\alpha}$, $C.R.=[t_{n-1;\alpha};+\infty)$;

მარცხენა ცალმხრივი: $C.V.=-t_{n-1;\alpha}$, $C.R.=(-\infty;-t_{n-1;\alpha}]$.

აქ $t_{n-1;\alpha/2}$ ($t_{n-1;\alpha}$) – სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$ (α) კრიტიკული წერტილია $n-1$ თავისუფლების ხარისხით.

6) გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V.\in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული კრიტერიუმი გამოიყენება, როცა $n<30$. როდესაც n იზრდება, როგორც ვიცით, სტიუდენტის განაწილება სწრაფად უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას, რის გამოც განაწილების კრიტიკული არის მოსაძებნად სარგებლობენ სტანდარტული ნორმალური განაწილებით.

ამოცანა 3. ჯანდაცვის მინისტრის მტკიცებით ექიმის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 24000 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 10 ექიმის წლიური შემოსავლის საშუალო აღმოჩნდა 23450 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 400 ლარი. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების უარსაყოფად $\alpha=0{,}05$ მნივნელოვნობის დონით?

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ m=24000,\qquad H_1:\ m\neq 24000.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$T=\frac{\bar{X}_n-m_0}{S'_n/\sqrt{n}}\cong t(n-1)\,;$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha=0{,}05$;

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\frac{\bar{x}-m_0}{s'/\sqrt{n}}=\frac{23450-24000}{400/\sqrt{10}}=-4{,}35;\ .$$

კრიტიკული წერტილები და კრიტიკული არე:

$$C.V.=\pm t_{n-1;\alpha/2}=\pm t_{9;0,025}=2{,}262,\qquad C.R.=(-\infty;-2{,}262]\cup[2{,}262;+\infty)\ ;$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V.\in C.R.$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ანუ გვაქვს საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების უარსაყოფად.

ამოცანა 4. ექიმების აზრით მორბენალი ადამიანი უფრო მეტ ჟანგბადს მოიხმარს ვიდრე საშუალოდ ყველა ადამიანი. შემთხვევით შერჩეული 15 მორბენალისათვის ჟანგბადის მოხმარების საშუალო იყო 40,6 მლ/კგ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 6 მლ/კგ. თუ ყველა ადამიანის საშუალო მოხმარება შეადგენს 36,7 მლ/კგ, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავუჯეროთ ექიმებს $\alpha=0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით?

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ m\le 36{,}7\ ,\qquad H_1:\ m>36{,}7\ ;$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$T=\frac{\overline{X}_n-m_0}{S'_n/\sqrt{n}}\cong t(n-1)\ ;$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha=0{,}05$;

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\frac{\bar{x}-m_0}{s'/\sqrt{n}}=\frac{40{,}6-36{,}7}{6/\sqrt{15}}=2{,}517;\ .$$

კრიტიკული წერტილი და კრიტიკული არე:

$$C.V.t_{n-1;\alpha}=t_{14;0,05}=1{,}761,\qquad C.R.=[1{,}761;+\infty)\ ;$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V.\in C.R.$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ანუ გვაქვს საკმარისი საფუძველი გავიზიროთ ექიმების მტკიცებულება.

§28.4. ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში. ვთქვათ, პოპულაციას, რომელსაც აღწერს X შემთხვევითი სიდიდე, აქვს ნორმალური განაწილება $X\cong N(m,\sigma^2)$, სადაც σ^2 დისპერსია და m მათამატიკური ლოდინი უცნობებია.

$X_1, X_2, ..., X_n$ შერჩევითი ერთობლიობაა პოპულაციიდან. მოვიყვანოთ ჰიპოთეზის შემოწმება უცნობი σ^2 პარამეტრისათვის :

1) ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

ორმხრივი: $H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$, $\quad H_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

მარჯვენა ცალმხრივი: $H_0: \ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $\quad H_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$.

მარცხენა ცალმხრივი: $H_0: \ \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $\quad H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$.

2) კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma_0^2} \cong \chi^2(n-1);$$

სადაც $S_n'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ შესწორებული შერჩევითი დისპერსიაა;

3) მნიშვნელოვნობის დონე: α .

4) კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{(n-1)s_n'^2}{\sigma_0^2};$$

5) კრიტიკული წერტილი (წერტილები) და კრიტიკული არე:

ორმხრივი: $(C.V.)_1 = \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ და $(C.V.)_2 = \chi^2_{n-1;\alpha/2}$; $\quad C.R. = (0; \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n-1;\alpha/2}; +\infty)$;

მარჯვენა ცალმხრივი: $C.V. = \chi^2_{n-1;\alpha}$, $\quad C.R. = [\chi^2_{n-1;\alpha}; +\infty)$;

მარცხენა ცალმხრივი: $C.V. = \chi^2_{n-1;1-\alpha}$, $\quad C.R. = (0; \chi^2_{n-1;1-\alpha}]$.

აქ $\chi^2_{n-1;\alpha}$ – ხი-კვადრატ განაწილების ზედა α კრიტიკული წერტილია $n-1$ თავისუფლების ხარისხით;

6) გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V. \in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 5. სიგარეტის კომპანიას სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ მის სიგარეტში ნიკოტინის შემცველობის დისპერსია არის 0.644. ნიკოტინის შემცველობა იზომება მილიგრამებში და იგულისხმება, რომ ის ნორმალურად განაწილებულია. 20 სიგარეტისგან აღებული შერჩევის შესწორებული სტანდაეტული გადახრაა 1 მილიგრამი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კომპანიის ჰიპოთეზა?

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ \sigma^2 = 0{,}644, \qquad H_1:\ \sigma^2 \neq 0{,}644.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma_0^2} \cong \chi^2(n-1);$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha = 0{,}05$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{(n-1)s_n'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\cdot 1^2}{0{,}644} = 29{,}5;$$

კრიტიკული წერტილები და კრიტიკული არე:

$$(C.V.)_1 = \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} = \chi^2_{19;0,975} = 8{,}907 \text{ და } (C.V.)_2 = \chi^2_{n-1;\alpha/2} = \chi^2_{19;0,025} = 32{,}852 \ ;$$

$$C.R. = (0;\ 8{,}907] \cup [32{,}852;\ +\infty);$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V. \notin C.R.$, ამიტომ H_0 არ უნდა უარვყოთ. ე.ი. არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კომპანიის მოსაზრება.

ამოცანა 6. პროფესორს სურს თავის ჯგუფში, სადაც 23 სტუდენტია, გაარკვიოს ქულების ცვალებადობა არის თუ არა ნაკლები, ვიდრე პოპულაციის დისპერსია 225. პროფესორის ჯგუფში ქულების შესწორებული დისპერსიაა 198. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ პროფესორის ჯგუფში ქულების ცვალებადობა ნაკლებია პოპულაციის დისპერსიაზე? ჩათვალეთ, რომ ქულები ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0:\ \sigma^2 \geq 225, \qquad H_1:\ \sigma^2 < 225.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n'^2}{\sigma_0^2} \cong \chi^2(n-1);$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha = 0{,}05$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{(n-1)s_n'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(23-1)\cdot 198}{225} = 19{,}36;$$

კრიტიკულიწერტილი და კრიტიკული არე:

$$C.V. = \chi^2_{n-1;1-\alpha} = \chi^2_{22;0,95} = 12{,}338,$$

$$C.R. = (0;\ 12{,}338].$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V.\notin C.R.$, ამიტომ H_0 არ უნდა უარვყოთ ანუ არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი იმისათვის, რომ პროფესორის ჯგუფში ქულების ცვალებადობა ნაკლებია პოპულაციის დისპერსიაზე.

§28.5.ჰიპოთეზათა შემოწმება უცნობი ალბათობისათვის (უცნობი პროპორციისათვის) ბერნულის სქემაში. პოპულაცია ბერნულისაა უცნობი p ალბათობით (პროპორციით). მოვიყვანოთ ჰიპოთეზის შემოწმების სქემა:

1) ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

ორმხრივი: $H_0: \ p = p_0$, $\quad H_1: \ p \neq p_0$.

მარჯვენა ცალმხრივი: $H_0: \ p \leq p_0$, $\quad H_1: \ p > p_0$.

მარცხენა ცალმხრივი: $H_0: \ p \geq p_0$, $\quad H_1: \ p < p_0$.

2) კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z = \frac{W_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{as.}{\cong} N(0,1),$$

აქ $W_n = \dfrac{S_n}{n}$, სადაც $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ($X_i = 1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარმატება, და $X_i = 0$ თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარუმატებლობა);

3) მნიშვნელოვნობის დონე: α.

4) კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{w_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}};$$

5) კრიტიკული წერტილი (წერტილები) და კრიტიკული არე:

ორმხრივი: $C.V. = \pm z_{\alpha/2}$, $\qquad C.R. = (-\infty; -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}; +\infty)$;

მარჯვენა ცალმხრივი: $C.V. = z_\alpha$, $\quad C.R. = [z_\alpha; +\infty)$;

მარცხენა ცალმხრივი: $C.V. = -z_\alpha$, $\quad C.R. = (-\infty; -z_\alpha]$.

აქ $z_{\alpha/2}$ (z_α) – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$ (α) კრიტიკული წერტილია.

6) გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V.\in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 7. მარკეტინგული კომპანიის მტკიცებით კომპანიის მიერ გაგზავნილი ელექტრონული წერილებიდან 8%-ზე ღებულობს პასუხებს. ამ

მტკიცებულების შესამოწმებლად შემთხვევით შერჩეულ 500 ადრესატს გაეგზავნა ელექტრონული წერილი და მათგან 25-მა გამოაგზავნა პასუხი. შეამოწმეთ შესაბამისი ჰიპოთეზა 0,05-ის ტოლი მნიშვნელოვნობის დონით.

ამოხსნა. სანამ გადავალთ ჰიპოთეზის შემოწმებაზე, მანამ ამოვწეროთ ზოგიერთი მოცემულობა: $p_0 = \frac{8}{100} = 0{,}08$; $n = 500$; $S_n = 25$; $w_n = \frac{25}{500} = 0{,}05$.

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0: \ p = 0{,}08, \qquad H_1: \ p \neq 0{,}08.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z = \frac{W_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{as.}{\cong} N(0,1),$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $0{,}05$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{0{,}05 - 0{,}08}{\sqrt{0{,}08(1-0{,}08)/500}} = -2{,}47;$$

კრიტიკული წერტილები და კრიტიკული არე:

$$C.V. = \pm z_{\alpha/2} = \pm z_{0,25} = \pm 1{,}96, \qquad C.R. = (-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty);$$

გადაწყვეტილება:რადგან კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V. \in C.R.$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, ე.ი. მარკეტინგული კომპანიის მტკიცება არასწორია.

ამოცანა 8. პროკურორის მტკიცებით ადვოკატების 25%-ზე მეტი იყენებს რეკლამას. 200 შემთხვევით შერჩეულ ადვოკატზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ 63 მათგანი ამა თუ იმ ფორმით იყენებდა რეკლამას. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ პროკურორის მტკიცებულება?

ამოხსნა.მოცემულია:

$$p_0 = 0{,}25; \quad n = 200; \ S_n = 63; \ w_n = \frac{63}{200} = 0{,}315.$$

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

$$H_0: \ p \leq 0{,}25, \qquad H_1: \ p > 0{,}25.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა და მისი განაწილების კანონი:

$$Z = \frac{W_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{as.}{\cong} N(0,1),$$

მნიშვნელოვნობის დონე: $0{,}05$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{0{,}315 - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}75/200}} = 2{,}12;$$

კრიტიკული წერტილი და კრიტიკული არე:

$$C.V. = z_\alpha = z_{0,05} = 1{,}64, \qquad C.R. = [1{,}64;+\infty);$$

გადაწყვეტილება: რადგან კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V. \in C.R.$, ამიტომ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ დამაშასადამე გვაქვს საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ პროკურორის მოსაზრება.

§28.6. დამოუკიდებლობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი. მოწმდება ერთი პოპულაციის ორი სხვადასხვა A და B ნიშნის ერთმანეთთან დამოკიდებულების საკითხი. A ნიშანი იყოფა R კატეგორიად, ხოლო B ნიშანი – C კატეგორიად.

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

H_0: A და B ნიშნები დამოუკიდებელია;

H_1: A და B ნიშნები დამოკიდებულია.

მნიშვნელოვნობის დონე: α.

კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი-კვადრატი.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \sum_{i,j} \frac{\left(o_{i,j} - e_{i,j}\right)^2}{e_{i,j}},$$

სადაც $o_{i,j}$ – დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები, რომლებიც ასე განისაზღვრებიან:

$$e_{i,j} = \frac{\sum_i o_{i,j} \times \sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j} o_{i,j}}.$$

შეზღუდვა: ყველა $e_{i,j} \geq 5$, წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა მოხდეს კატეგორიის გაერთიანება სხვა კატეგორიასთან ისე, რომ გაერთიანებული კატეგორიის მოსალოდნელი სიხშირე გახდეს მეტი ან ტოლი 5-ის.

კრიტიკული წერტილი:

$$C.V. = \chi^2_{k;\alpha},$$

სადაც თავისუფლების ხარისხი $k = (R-1)\cdot(C-1)$.

კრიტიკული არე:

$$C.R. = \left[\chi^2_{k;\alpha};+\infty\right).$$

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V. \in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 9. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი ადამიანის სქესსა და მის მიერ მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობას შორის. შემთხვევით შერჩეული 68 ადამიანისათვის მიღებული მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით, შეუძლია თუ არა მკვლევარს დაასკვნას, რომ მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობა დაკავშირებულია სქესთან?

სქესი	ალკოჰოლის მიღების დონე			ჯამი
	დაბალი	საშუალო	მაღალი	
მამრობ.	10	9	8	27
მდედრობ.	13	16	12	41
ჯამი	23	25	20	68

ამოხსნა. ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზა:

H_0: მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობა დამოუკიდებელია ადამიანის სქესისაგან;

H_1: ალკოჰოლის რაოდენობა დამოკიდებულია ადამიანის სქესისაგან;

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha = 0{,}1$.

გამოვთვალოთ მოსალოდნელი სიხშირეები:

$$e_{1,1} = \frac{27 \cdot 23}{68} = 9{,}13; \qquad e_{1,2} = \frac{27 \cdot 25}{68} = 9{,}93; \qquad e_{1,3} = \frac{27 \cdot 20}{68} = 7{,}94;$$

$$e_{2,1} = \frac{41 \cdot 23}{68} = 13{,}87; \qquad e_{2,2} = \frac{41 \cdot 25}{68} = 15{,}07; \qquad e_{2,3} = \frac{41 \cdot 20}{68} = 12{,}06.$$

თვალსაჩინოებისათვის მოსალოდნელი სიხშირეები შეიძლება ჩავწეროთ ფრჩხილებში ცხრილის შესაბამის უჯრებში:

სქესი	ალკოჰოლის მიღების დონე			ჯამი
	დაბალი	საშუალო	მაღალი	
მამრობ.	10 (9,13)	9 (9,93)	8 (7,94)	27
მდედრობ.	13 (13,87)	16 (15,07)	12 (12,06)	41
ჯამი	23	25	20	68

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\sum_{i,j}\frac{\left(o_{i,j}-e_{i,j}\right)^2}{e_{i,j}}=\frac{(10-9{,}13)^2}{9{,}13}+\frac{(9-9{,}93)^2}{9{,}93}+\frac{(8-7{,}94)^2}{7{,}94}+$$

$$+\frac{(13-13{,}87)^2}{13{,}87}+\frac{(16-15{,}07)^2}{15{,}07}+\frac{(12-12{,}06)}{12{,}06}=0{,}283$$

კრიტიკული წერტილი: აქ თავისუფლების ხარისხია $k=(R-1)\cdot(C-1)=(2-1)\cdot(3-1)=2$, ამიტომ

$$C.V.=\chi^2_{k;\alpha}=\chi^2_{2;0{,}1}=4{,}605.$$

კრიტიკული არე:

$$C.R.=\left[4{,}605;+\infty\right).$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V.\notin C.R.$, ამიტომ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ ალკოჰოლის მოხმარება დამოკიდებულია სქესზე.

§28.7. ერთგვაროვნების შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი. მოწმდება პოპულაციათა ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა, რომელიც ეკვივალენტურია ჰიპოთეზისა იმის შესახებ, რომ ამა თუ იმ ნიშნის პროპორციები სხვადასხვა პოპულაციებში ერთი და იგივეა.

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

H_0: პროპორციები ერთი და იგივეა (პოპულაციები ერთგვაროვანია);

H_1: პროპორციები არ არის ერთი და იგივე (პოპულაციები არაერთგვაროვანია);

მნიშვნელოვნობის დონე: α.

კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი-კვადრატი.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\sum_{i,j}\frac{\left(o_{i,j}-e_{i,j}\right)^2}{e_{i,j}},$$

სადაც $o_{i,j}$ – დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები, რომლებიც ასე განისაზღვრებიან:

$$e_{i,j}=\frac{\sum_i o_{i,j}\times\sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j}o_{i,j}}.$$

შეზღუდვა: ყველა $e_{i,j} \geq 5$, წინააღმდეგ შემთხვევაში უნდა მოხდეს კატეგორიის გაერთიანება სხვა კატეგორიასთან ისე, რომ გაერთიანებული კატეგორიის მოსალოდნელი სიხშირე გახდეს მეტი ან ტოლი 5-ის.

კრიტიკული წერტილი:

$$C.V. = \chi^2_{k;\alpha},$$

თავისუფლების ხარისხი $k = (R-1)\cdot(C-1)$, სადაც R წარმოადგენს პოპულაციათა (შერჩევათა) რაოდენობას, ხოლო C – პოპულაციათა (შერჩევათა) კლასების რაოდენობას.

კრიტიკული არე:

$$C.R. = \left[\chi^2_{k;\alpha};+\infty\right).$$

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა $T.V. \in C.R.$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გვაქვს.

ამოცანა 9. სამი ქარხანა უშვებს ერთი და იგივე დასახელების დეტალებს. ამ ქარხნებიდან აღებულია შესაბამისად 250, 200 და 150 დეტალი, რომელთაგან არასტანდარტული აღმოჩნდა შესაბამისად 10, 9 და 11 დეტალი. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა აღნიშნულ შერჩევათა ერთგვაროვნების შესახებ $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით.

ამოხსნა. პირველ რიგში, შევადგინოთ შერჩევათა შეუღლების ცხრილი:

	სტანდარტული	არასტანდარტული	ჯამი
I ქარხანა	240	10	250
II ქარხანა	191	9	200
III ქარხანა	139	11	150
ჯამი	570	30	600

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთზა:

H_0: შერჩევები ერთგვაროვანია;

H_1: შერჩევები არ არის ერთგვაროვანი;

მნიშვნელოვნობის დონე: $\alpha = 0{,}1$.

გამოვთვალოთ მოსალოდნელი სიხშირეები:

$e_{1,1} = \dfrac{250\cdot 570}{600} = 297{,}5$; $\quad e_{1,2} = \dfrac{250\cdot 30}{600} = 12{,}5$; $\quad e_{2,1} = \dfrac{200\cdot 570}{600} = 190$;

$e_{2,2} = \frac{200 \cdot 30}{600} = 10$; $\quad e_{3,1} = \frac{150 \cdot 570}{600} = 142{,}5$; $\quad e_{3,2} = \frac{150 \cdot 30}{600} = 7{,}5$.

მოსალოდნელი სიხშირეები ჩავწეროთ ფრჩხილებში ცხრილის შესაბამის უჯრებში:

	სტანდარტული	არასტანდარტული	ჯამი
I ქარხანა	240 (997,5)	10 (12,5)	250
II ქარხანა	191 (190)	9 (10)	200
III ქარხანა	139 (142,5)	11 (7,5)	150
ჯამი	570	30	600

კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \sum_{i,j} \frac{\left(o_{i,j} - e_{i,j}\right)^2}{e_{i,j}} = \frac{(240-237{,}5)^2}{237{,}5} + \frac{(10-12{,}5)^2}{12{,}5} + \frac{(191-190)^2}{190} +$$

$$+ \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(139-142{,}5)^2}{142{,}5} + \frac{(11-7{,}5)}{7{,}5} = 2{,}36.$$

კრიტიკული წერტილი:

$$C.V. = \chi^2_{k;\alpha} = \chi_{(3-1)\cdot(2-1)} = \chi^2_{2;0{,}1} = 4{,}605.$$

კრიტიკული არე:

$$C.R. = \left[4{,}605; +\infty\right).$$

გადაწყვეტილება: რადგან $T.V. \notin C.R.$, ამიტომ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს ანუ შერჩევები ერთგვაროვანია.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზის შემოწმების ზოგადი სქემა.
- როგორ ხდება ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში?
- როგორ ხდება ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში?
- აღწერეთ ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში.

- აღწერეთ ჰიპოთეზის შემოწმება ბერნულის სქემაში უცნობი ალბათობისათვის (უცნობი პროპორციისათვის).
- ჩამოაყალიბეთ დამოუკიდებლობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი.
- ჩამოაყალიბეთ ერთგვაროვნების შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი.

სავარჯიშო 27

1. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით დედაქალაქში სასტუმროს ერთი ნომრის საშუალო ღირებულება შეადგენს 69,21 ლარს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია სასტუმროს 30 ნომერი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ღირებულებაა 68,43 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3,72 ლარი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა?

2. სამგზავრო თვითმფრინავის საშუალო ასაკი შეადგენს 14 წელს. დიდი ავიაკომპანიის შემთხვევით შერჩეული 36 თვითმფრინავის საშუალო ასაკი აღმოჩნდა 11,8 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2,7 წელი. $\alpha = 0{,}01$მნიშვნელოვნობის დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ამ კომპანიის თვითმფრინავების საშუალო ასაკი ნაკლებია ვიდრე პოპულაციის საშუალო ასაკი.

3. ფირმის მენეჯერის მტკიცებით განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობაა 36 თვე. სტანდარტული გადახრა შეადგენს 8 თვეს. შემთხვევით შერჩეული 50 განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 32 თვე. შეიძლება თუ არა ამ მტკიცების უარყოფა $\alpha = 0{,}01$ მნიშვნელოვნობის დონით?

4. დეკანატის მტკიცებით სტუდენტების სახელმძღვანელოების საშუალო ფასი მეტია 27,5 ლარზე. შემთხვევით შერჩეული 50 სახელმძღვანელოს საშუალო ფასი აღმოჩნდა 39,3 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5 ლარი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ძირითადი ჰიპოთეზა?

5. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქში მცირე ბიზნესის ოფისის ხარჯების საშუალოა 800 ლარი. შემთხვევით შერჩეული 10 მცირე ბიზნესისათვის ოფისის ხარჯების საშუალომ შეადგინა 863 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 20 ლარი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებულება?

6. თბილგაზის მტკიცებით მცირე კომპანიების გაზის საშუალო დანახარჯი თვეში არ აღემატება 350 ლარს. კომპანიების მფლობელები კი ეჭვობენ, რომ გაზის დანახარჯი უფრო მეტია. შემთხვევით შეირჩა 12 მცირე კომპანია და აღმოჩნდა, რომ მათი საშუალო დანახარჯი იყო 358 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 16 ლარი. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გაზის საშუალო დანახარჯი მეტია 350 ლარზე.

7. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ რაიონებში მანქანის გარეცხვის საშუალო ფასია 3 ლარი, თუ ცნობილია, რომ შემთხვევით შერჩეულ 5 რაიონში მანქანის გარეცხვის საშუალო ფსი იყო 3,7 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0,3 ლარი.

8. სტუდენტების აზრით შაბათი საღამოს ბარში გატარება საშუალოდ არ უნდა დაჯდეს 30 ლარზე მეტი. თავიანთი მოსაზრების შესამოწმებლად მათ შემთხვევით შეამოწმეს 16 სტუდენტი და შეეკითხენ თუ რამდენი დახარჯეს გასულ შაბათ საღამოს ბარში. აღმოჩნდა, რომ შერჩევითი საშუალო არის 31,17 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5,51 ლარი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დავეთანხმოთ სტუდენტების მოსაზრებას?

9. შერჩეული იქნა 18 თითო კილოგრამიანი შაქრის ფუთა. აწონვის შედეგად აღმოჩნდა, რომ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია შეადგენს 6,5-ს. $\alpha = 0{,}01$ მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პოპულაციის დისპერსია მეტია 6,2-ზე.

10. კომპანიის მენეჯერის მტკიცებით მათ მიერ გამოშვებულ იოგურთში შაქრის შემცველობის დისპერსია არ აღემატება 25 გრამს. შემთხვევით შერჩეულ 20 იოგურთში გაზომეს შაქრის შემცველობა და აღმოჩნდა, რომ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია ტოლია 36-ის. $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით შეიძლება თუ არა ამ მტკიცებულების უარყოფა?

11. წინა კვლევების თანახმად მკვლევარი თვლის, რომ პირველკურსელ სტუდენტთა ასაკის დისპერსია შეადგენს 1,6-ს. შემთხვევით შერჩეული 20 პირველკურსელის ასაკის შესწორებული შერჩევითი დისპერსია აღმოჩნდა 2,3. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით არის თუ არა პირველკურსელთა ასაკის დისპერსია 1,6-ზე მეტი?

12. კრიმინალისტების კვლევის მიხედვით ხანძრების სულ ცოტა 40% გამოწვეულია ახალგაზრდების მიერ. მკვლევარის დაკვირვების მიხედვით 80

ხანძრიდან 30 გამოწვეული იყო ახალგაზრდების მიერ. $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ კრიმინალისტების მოსაზრება?

13. უკანასკნელი კვლევების მიხედვით ავიაკატასტროფაში მოყოლილი ადამიანების არაუმეტეს 32% იღუპება. 100 ადამიანისაგან შემდგარ შერჩევაში, რომლებიც მოყვნენ ავიაკატასტროფაში, 38 დაიღუპა. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით უნდა უარვყოთ თუ არა კვლევის შედეგი?

14. უკანასკნელი კვლევის მიხედვით პირველკურსელი სტუდენტების სულ ცოტა 15% ჭარბწონიანია. 80 შემთხვევით შერჩეულ პირველკურსელს შორის 9 აღმოჩნდა ჭარბწონიანი. $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კვლევის შედეგი?

15. კრიმინალისტების მიხედვით მკვლელობების 10% ჩადენილია ქალების მიერ. ვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0{,}01$ მნიშვნელოვნობის დონით უკუვაგდოთ ეს მტკიცებულება, თუ 67 შემთხვევით შერჩეული მკვლელობიდან 10 აღმოჩნდა ქალების მიერ ჩადენილი?

16. სწავლობენ არის თუ არა კავშირი სპორტსა და სისხლის წნევას შორის. შემთხვევით შერჩეული 210 ადამიანის ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სპორტი და წნევა არ არის დამოკიდებული.

	სისხლის წნევა		
	დაბალი	საშუალო	მაღალი
სპორტსმენი	34	57	21
არასპორტსმენი	15	63	20

17. ახალი პრეპარატის გამოკვლევის მიზნით შერჩეული იქნა პაციენტთა ორი ჯგუფი, რომელთაგან ერთს აძლევდნენ ახალ პრეპარატს, ხოლო მეორეს კი პლაცებოს. ქვემოთ მოყვანილი კვლევის შედეგების მიხედვით, $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით, შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ პრეპარატი ეფექტურია?

	ეფექტური	არაეფექტური
პრეპარატი	32	9
პლაცებო	12	18

18. წიგნის გამომცემელს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება მამაკაცებისა და ქალების მიერ წასაკითხად არჩეულ წიგნებს შორის. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0{,}05$ მნიშვნელოვნობის დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ არჩეული წიგნის ტიპი დამოუკიდებელია მკითხველის სქესისაგან.

	მისტიკა	რომანი	დეტექტივი
მამრობითი	243	201	191
მდედრობითი	135	149	202

19. გამოკითხული იქნა 100-100 ადამიანი ქვეყნის ოთხივე კუთხეში. მათ დაუსვეს კითხვა: "აქვთ თუ არა მუდმივი სამუშაო". $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ ადამიანების, რომელთაც აქვთ მუდმივი სამუშაო ტოლია ქვეყნის ოთხივე კუთხეში.

	აღმოსავლეთი	დასავლეთი	ჩრდილოეთი	სამხრეთი
დიახ	43	39	22	28
არა	57	61	78	72

20. სასურსათო მაღაზიების ქსელის მეპატრონეს სურს დაადგინოს მისი მაღაზიების მომხმარებლები მაღაზიაში წასვლამდე წინასწარ ადგენენ თუ არა საჭირო პროდუქტების სიას. ამ მიზნით გამოკითხულ იქნა 288 მომხმარებელი. $\alpha = 0{,}1$ მნიშვნელოვნობის დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ მომხმარებლების, რომლებიც მაღაზიაში წასვლამდე ადგენენ შესაძენი პროდუქტების სიას ტოლია სამივე მაღაზიისათვის.

	I მაღაზია	II მაღაზია	III მაღაზია
ადგენს სიას	77	74	68
არ ადგენს სიას	19	22	28

დ ა ნ ა რ თ ი

EXCEL-ის სტატისტიკური ფუნქციები

AVERAGE $(x_1 : x_2)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
BINOMDIST$(k, n, p, 0)$	$P_n(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
BINOMDIST$(k, n, p, 1)$	$P_n(S_n \le k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$
CHIDIST(x, n)	$P(X^2(n) > x)$
CHIINV(p, n)	$P(X^2(n) > x) = p \to x$
COMBIN(n, r)	$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
CONFIDENCE(α, σ, n)	$z_{\alpha/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
CORREL$(x_1 : x_n, y_1 : y_n)$	$\rho_{x,y} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$
COUNT $(x_1 : x_n)$	$n-$ მონაცემთა რაოდენობა
COVAR $(x_1 : x_n, y_1 : y_n)$	$cov(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)(y_i - m_Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy}$
CRITBINOM(n, p, α)	$\alpha = P_n(S_n \le k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \to k$
DEVSQ $(x_1 : x_n)$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
FACT(n)	$n!$
FORECAST$(x\ , y_1 : y_n, x_1 : x_n)$	$y = b_0 + b_1 x$
FREQUENCY$(x_1 : x_n, k)$	მონაცემთა რაოდენობა რომლებიც არ აღემატება k-ს
HYPGEOMDIST(k, n, A, N)	$P(k, n, A, N) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{A-k}}{C_N^A}$
INTERCEPT$(y_1 : y_n, x_1 : x_n)$	b_0-ის შეფასება წრფივი რეგრესიისათვი
KURT$(x_1 : x_n)$	$\frac{\sum(x - \overline{x})^3}{ns^3}$, ასიმეტრიის კოეფიციენტი
LINEST$(y_1 : y_n, x_1 : x_n, 1)$	b_1-ის შეფასება, როდესაც მოდელში b_0 ნულის ტოლია
LINEST$(y_1 : y_n, x_1 : x_n, 0)$	b_1-ის შეფასება, როდესაც მოდელში b_0 არ უდრის ნულს
MAX $(x_1 : x_n)$	$max(x_1; x_2; ...; x_n)$
MEDIAN $(x_1 : x_n)$	$\tilde{x} = median(x_1; x_2; ...; x_n)$
MIN $(x_1 : x_n)$	$min(x_1; x_2; ...; x_n)$
MODE $(x_1 : x_n)$	მოდა
NORMDIST$(x, m, \sigma, 0)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$NORMDIST(x, m, \sigma, 1)$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$
$NORMINV(p, m, \sigma)$	$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \to x$
$\mathrm{NORMSDIST}(x)$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$
$\mathrm{NORMSINV}(p)$	$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \to x$
$\mathrm{PERMUT}(n, r)$	$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
$\mathrm{POISSON}(k, \lambda, 0)$	$p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
$\mathrm{POISSON}(k, \lambda, 1)$	$p(X \le k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$
$\mathrm{PROB}(x_1 : x_n, p_1 : p_n, a, b)$	$p(a \le x \le b)$
$\mathrm{SKEW}(x_1 : x_n)$	$\frac{\sum (x - \overline{x})^4}{ns^4} - 3$, ექსცესის კოეფიციენტი
$\mathrm{SLOPE}(y_1 : y_n, x_1 : x_n)$	b_1-ის შეფასება წრფივი რეგრესიისათვი
$\mathrm{STANDARDIZE}(x, m, \sigma)$	$\frac{x - m}{\sigma}$
$\mathrm{STDEV}(x_1 : x_n)$	s'
$\mathrm{STDEVP}(x_1 : x_n)$	s
$\mathrm{SUMPRODUCT}(x_1 : x_n, p_1 : p_n)$	$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
$\mathrm{TDIST}(x, n, 1)$	$P(T(n) > x)$
$\mathrm{TDIST}(x, n, 2)$	$P(\lvert T(n) \rvert > x)$
$\mathrm{TINV}(p, n)$	$p = P(\lvert T(n) \rvert > x) \to x$
$\mathrm{VAR}(x_1 : x_n)$	$s_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}$
$\mathrm{VARP}(x_1 : x_n)$	$s_n'^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n^2}$
$\mathrm{ZTEST}(x_1 : x_n, m_0, \sigma)$	$P\left(Z > \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$, სადაც $Z \sim N(0,1)$

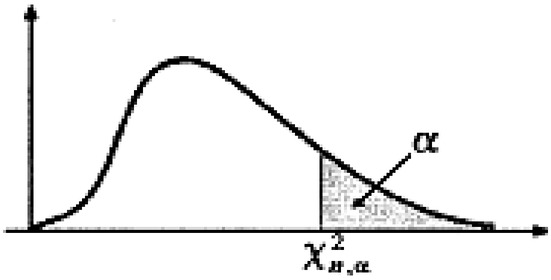
$\Phi(x)$ – სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილების, z_α-ს მნისვნელობები

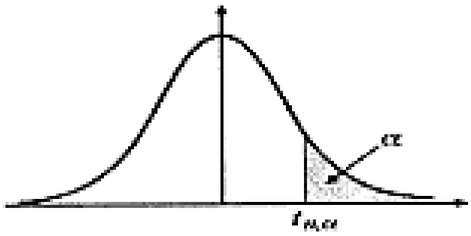
α	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.125**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
z_α	**1.28**	**1.64**	**1.96**	**2.24**	**2.33**	**2.57**	**2.81**	**3.08**

χ^2 (ხი-კვადრატ) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები, $\chi^2_{n,\alpha}$



	α							
n	**0.99**	**0.975**	**0.95**	**0.9**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922

t (სტიუდენტის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები, $t_{n,\alpha}$



	α						
n	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. გ. ჯავახიშვილი, ზ. კანდელაკი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული ეკონომისტებისათვის, დამხმარე სახელმძღვანელო, მეორე გამოცემა, თბილისი 2007.
2. მ. გელაშვილი, ქ.კიკვაძე, ქ.ლოსაბერიძე, ლ.მაღრაძე, რ.მესხია, ნ.სვანიძე, უმაღლესი მათემატიკა, თსუ, 2004.
3. ქ. სხვიტარიძე, გ. ქარსელაძე, ი. სიგუა, ე. ელერდაშვილი, მ. ხმიადაშვილი, ზ. თედიაშვილი. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, ამოცანათა კრებული, I ნაწილი. თბილისი, 2004.
4. დ. ბაღაშვილი, მ.ბედოშვილი,ზ.ბლიაძე, ე.გობრონიძე, ლ.სკამკოჩაიშვილი, ს.ჯიქია, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, თსუ, 2001.
5. ა. თავაძე. ფინანსური მათემატიკა. კონსპექტი *ESM* – თბილისის სტუდენტებისათვის. თბილისი, 2000.
6. დ. ნატროშვილი, ლ. გიორგაშვილი, მ. უსანეთაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი, 1999.
7. ა. გაგნიძე. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის, ნაწილი II. თბილისი, 1997.
8. ნ. მარკოზაშვილი, ნ. ლომაძე, მ. აქუბარდია. წრფივი ალგებრა. *ESM*, თბილისი, 1992.
9. პ. ზერაგია. უმაღლესი მათემატიკა, ტ.1, 2 თსუ, 1985.
10. ჰ. კრინსკი. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი, 1974.
11. ა. ბენდუქიძე, მ. გელაშვილი, ნ. ნიშნიანიძე, ლ. სკამკოჩაიშვილი, ნ. ჭუმბურიძე. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. თსუ, თბილისი, 1969.
12. ო. ფურთუხია. ალბათურ-სტატისტიკური ამოცანები. თსუ, თბილისი, 2012.
13. ო. ფურთუხია, ზ. ციგროშვილი, ქ. მანჯგალაძე. ალბათობა და მათემატიკური სტატისტიკა. თსუ, თბილისი, 2009.
14. ო. ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნების თეორია. სახელმძღ. სოციალურ-პოლიტიკური და ეკონომ. ფაკ-ტის სტუდენტებისათვის. თბილისი, 2008.
15. ო. ფურთუხია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი, 2007.
16. გ. მარი, ა. მოსიძე. ალბათობის თეორია და გამოყენებითი სტატისტიკა. *ESM*, თბილისი, 2005.

17. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის. ფონდი "ევრაზია", თბილისი, 2000.
18. გ. მარი, ა. მოსიძე, ზ. ციგროშვილი. სტატისტიკა. *ESM*, თბილისი, 1996.
19. ი. სხირტლაძე, თ. ტუღუში, ა. ოსიძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. განათლება, თბილისი, 1990.
20. თ.შერვაშიძე. ალბათობის თეორია. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1980.
21. გ. მანია, ნ. ანთელავა, ა. ედიბერიძე. ალბათობის თეორიისა და სტატისტიკის ამოცანათა კრებული. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1980.
22. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов, М., 2006
23. Carl P.Simon and Lavrence Blume. Mathematics for Economists, W.W. Norton & company, New York-London 1994.
24. Newbold P., Carlson W. L., Thorne B. M. Statistics for Business and economics. Prentice Hall, New Jersey, 2007
25. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2005.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი

სავარჯიშო 1

1. ა) $x+y-7=0$; ბ) $y=6x+19$; გ) $y=-2x+1$; დ) $2x-5y+20=0$. **2.** ა) $y=-0{,}8x-1{,}6$; ბ) $0{,}625x-0{,}125$; გ) $y=-x$; დ) $y=-\frac{2}{3}x+2$. **3.** ა) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1{,}6}=1$; ბ) $\frac{x}{0{,}2}+\frac{y}{-0{,}125}=1$; გ) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$; დ) $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1$; ე) $\frac{x}{1{,}5}+\frac{y}{9}=1$; ვ) $\frac{x}{-3{,}2}+\frac{y}{8}=1$. **4.** ა) $2x-y-1=0$, $x=1$, $2x-5y+19=0$; ბ) $7x+5y+1=0$, $7x-2y-20=0$, $y=4$; **5.** ა) (3, 2); ბ) (0, 2); გ) (-2, 2); დ) $\left(\frac{4}{9},-\frac{4}{3}\right)$. **6.** ა) ერთი; ბ) ერთი; გ) ერთი; დ) ; ე) უამრავი; ვ) ერთი. **7.** $y=x+3$; **8.** $y=-\sqrt{3}x\pm 5$; **9.** $k=-1{,}5$, $b=2{,}5$; **10.** ა) 45°; ბ) 135°; გ) 60°; დ) $arctg5$; **11.** (0, 3); (2, -1); **12)** 4; **13.** $x+2y-6=0$, $x-2y+6=0$; **14.** $x+5y+10$, $4x+5y-20=0$; **15.** $x+2y-10=0$; **16.** ა) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{36}{13}=0$; ბ) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-4=0$; გ) $x+\frac{1}{3}=0$; დ) $y-\frac{1}{2}=0$; ე) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; ვ) $-\frac{8}{17}x+\frac{15}{17}y-3=0$; ზ) $x-4=0$; თ) $\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y=0$; **17.** ა) 6; ბ) $3\frac{1}{13}$; გ) 1,12; დ) 0; ე) 4,5; ვ) $\frac{2}{3}$; . **18.** ა) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$; ბ) 5; გ) 0,5; დ) $\frac{9}{\sqrt{10}}$.

სავარჯიშო 2

1. ა) $y=25Q+3000$; ბ) $y(100)=5500$; **2.** $R(Q)=pQ$; $R(300)==1200$; **3.** ა) $p=160$; ბ) $R(Q)=160Q$; გ) 48000; **4.** $P(Q)=2Q-400$; ა)-200; ბ) 0; გ) 200; **5.** $P(Q)=8{,}5Q-240$; ა) $Q_0=28{,}24$; ბ) $R(Q_0)=338{,}82$; **6.** $P(Q)=2{,}5Q-5000$; ა) 2000; ბ) 2040; გ) 1250; **7.** ა) 500; ბ) 4,13; **8.** ა) 120; ბ) 4,5; **9.** ა) 500; ბ) ხელსაყრელია; **10.** ა) 5000; ბ) $V=-5000\ t+50000$; გ) 25000; **11.** ა) 18000; ბ) $V=-18000\ t+100000$; გ) 280000; **12.** 525; **13.** $x>4$; **14.** 650; **15.** $y=x+30$; **16.** $y=-\frac{5}{3}x+500$; **17.** $y=8x$; **18.** ა) $86^\circ F$; ბ) $45^\circ C$; **19.** მეორე; **20.** ა) $x>25$;

ბ) $x<20$; **21.** თუ $x<40$, მაშინ I, თუ $x>40$, ნაშინ II; **22.** მეორე; **23.** $A=80; B=50$; **24.** ა) $P=32$; ბ) $Q=20$; გ) მცირდება 2-ით; **25.** ა) $P=60$; ბ) $Q=15$; გ) გაიზრდება 8-ით; **26.** $P=-2Q+80$; **27**. ა) $P=30$; ბ) $Q=20$; გ) მცირდება 1-ით; დ) გაიზრდება 12-ით; **28.** ა) $0\le Q\le 50$; ბ) $0\le P\le 250$; **29**. ა) $Q=20$; ბ) $P=38$; გ) გაიზრდება 16-ით; **30.** $P=3Q+100$; **31.** ბ) $Q\ge 0$; გ) $P\ge 20$; **32.** ა) $Q=10$; ბ) $P=240$; გ) შემცირდება 1-ით; დ) შემცირდება 72-ით; **33.** ა) $(Q_0;P_0)=(10;30)$; ბ) (12; 28); გ) (17; 24) **34.** ა) $(Q_0;P_0)=(21;36)$; ბ) (18; 48); მომხმარებელი – 12 ლარს, მიმწოდებელი – 1 ლარს; **35.** ა) $(Q_0;P_0)=(20;40)$; ბ) (18; 46); მომხმარებელი – 6 ლარს, მიმწოდებელი – 1 ლარს; **36.** ა) $(Q_0;P_0)=(20;40)$; ბ) (18; 48); მომხმარებელი – 8 ლარს, მიმწოდებელი – 1 ლარს; **37.** ა) $(Q_0;P_0)=(30;60)$; ბ) (26; 72); **38.** ა) $(Q_0;P_0)=(20;50)$; ბ) (19; 55); **39.** ა) $(Q_0;P_0)=(10;30)$; ბ) (9,28; 33,6);

40. ა) $P_1=4,\ Q_1=13,\ P_2=7,\ Q_2=14$; ბ) $P_1=6,\ Q_1=16,\ P_2=8,\ Q_2=12$; გ) $P_1=4,\ Q_1=18,\ P_2=6,\ Q_2=10$; **41.** $C=193$; $Y=210$; ეროვნული შემოსავლის წონასწორობის დონე გაიზრდება 5 ერთეულით ($Y=215$); **42.** ა) 400; ბ) 50; გ) 305; დ) 45. **43.** $Y=325$; $C=225$; $S=100$. ინვესტიციის გაორმაგებისა გვაქვს $Y=575$; $C=375$; $S=200$; **44.** Y და r განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} 0{,}3Y+50r=1285 \\ 0{,}2Y=40r=270 \end{cases}$$

ავტონომიური d ინვესტიციის გაზრდა იწვევს Y ერობნული შემოსავლის და r განაკვეთის გაზრდას; **45.** $Y=875$; **46.** $Y=2500$; $r=10\%$.

სავარჯიშო 3

1. ა) 2; ბ) $\sqrt{452}$; **2.** ა) $2\sqrt{61}$; ბ) $4\sqrt{5}$; **3.** $0{,}5\sqrt{625+300\sqrt{3}}$; $0{,}5\sqrt{625-300\sqrt{3}}$; **4.** $\sqrt{28{,}5}$; **5.** $\sqrt{221}$; $\sqrt{221}$; **6.** $\sqrt{100+48\sqrt{3}}$; **7.** $\sqrt{39}$; $\sqrt{19}$; **8.** $\sqrt{97+36\sqrt{3}}$; $\sqrt{97-36\sqrt{3}}$; **9.** $-0{,}5(\vec{a}+\vec{b})$; $0{,}5(\vec{a}+\vec{b})$; $0{,}5(\vec{a}+\vec{b})$; $0{,}5(\vec{b}-\vec{a})$; **10**. $-\frac{2}{3}(\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a})$; $\frac{2}{3}(\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b})$; $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a})$; **11.** $0{,}5(\vec{c}-\vec{b})$; $0{,}5(\vec{a}-\vec{c})$; $0{,}5(\vec{b}-\vec{a})$; **12.** $\frac{1}{8}(5\vec{a}+3\vec{b})$; **13.**

$\vec{c}+0{,}25\vec{a}$; $\vec{c}+0{,}5\vec{a}$; $\vec{c}+0{,}75\vec{a}$; **14.** $2\vec{a}-\vec{b}$; **15.** $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; **16.** ა) $3\sqrt{2}$; ბ) $3\sqrt{3}$; **17.** $4\sqrt{3}$; 4; **18.** $4{,}5\sqrt{3}-4$; **19.** $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$; **20.** ა) (0; 2; 7); ბ) (4; -4; -1); გ) (6; -3; 9); დ) $\left(\frac{1}{6};\ \frac{5}{12};\ 2\right)$; ე) (-4; 10; 22); ვ) (-14; 13; 0); **21.** (-5; 16,5; 5); **22.** ა) (-12; 8; 16); ბ) (-6; 13; 2); გ) $\left(-1;\ 6\frac{2}{3};\ -2\frac{2}{3}\right)$; დ) (-12; 2; 20); **23.** (2; 4; 6) (-2; 4; -6); **24.** (1,5; -0,5; -1); **25.** (2; -4; 4); **26.** (7; 4; -8); $\sqrt{129}$; **29.** 2 ან -2; **30.** $|AB|=3$; $|AC|=3\sqrt{5}$; $|BC|=6$; **32.** $5\sqrt{3}$; **33.** ა) 25; ბ) 4; გ) 30; დ) 9; ე) 21; ვ) 45; **34.** ა) 25; ბ) 25; გ) 32; დ) -7; **35.** 45°; **36.** 90°; **37.** $\frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$; **38.** 15; **39.** 4; **40.** ა) 8; ბ) 2; **41.** 6; $6\sqrt{2}$; 45°; **42.** 45°; 90°; 45°.

სავარჯიშო 4

1. $x^2+(y-3)^2=5$; **2.** $(x+1)^2+(y-3)^2=9$; **3.** $x^2+y^2=4$; **4.** $(x-3)^2+(y-1)^2=5$; **5.** $(x+4)^2+y^2=16$; **6.** $(x-4)^2+(y-5)^2=25$; **7.** $(x-5)^2+(y+5)^2=25$, $(x-1)^2+(y+1)^2=1$; **8.** $x^2+y^2-6x-10y+9=0$; **9.** $x^2+y^2+12x-5y=0$; **10.** $7x^2+7y^2+12x-3y-55=0$; **11.** $3x+4y=25$; **12.** $x-y-4=0$; **13.** $3x+2y\pm13=0$; **14.** $x+y-6=0$, $x+y+2=0$; **15.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; **16.** $2a=20$, $2b=12$, $2c=16$, $e=0{,}8$. **17.** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$; **18.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; **19.** $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$; **20.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; **21.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$; **22.** $(2,\pm3)$; **23.** $(-4;\pm3\sqrt{5})$; **24.** $(4,\pm\sqrt{15})$; **25.** (2, 0), (0, -1); **26.** $y=\pm2x+3$; **27.** $2a=4$, $2b=2\sqrt{3}$, $F_1(1,0)$, $F_2(3,0)$; **28.** $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{25}=1$, $F_1(0,2)$, $F_2(0,8)$; **29.** $\frac{x'^2}{100}+\frac{y'^2}{36}=1$, $F_1(2,-6)$, $F_2(18,-6)$; **30.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; **31.** $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$; **32.** $2a=16$, $2b=12$, $2c=20$, $e=1{,}25$; **33.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$, $e=1{,}2$; **34.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; **35.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; **36.** $(10,\ \pm15)$; **37.**

$2x+3y\pm 2=0$; **38.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. **39.** $F_1(-4{,}0)$, $F_2(6{,}0)$; **40.** $x'^2-y'^2=4$, $F_1(-2,-2)$, $F_2(2,2)$; **41.** $\frac{y'^2}{16}-\frac{x'^2}{10}=1$; **42.** $y^2=16x$; **43.** $x^2=24y$; **44.** $F(1;0)$, $x+1=0$; **45.** 5; **46.** 2; **47.** $(8;\pm 8)$; **48.** (1; 2), (4; 4); **49.** $x+y+2=0,\ 2x-y+1=0$; **50.** $y'^2=4x'$, $F(1;0)$; **51.** $(-1;\ 1)$, $F(-1;\frac{5}{4})$, $4y-3=0$; **52.** 5; **53.** $6y=x^2-9$.

სავარჯიშო 5

1. ა) $\begin{pmatrix}3&2&5\\6&6&7\\4&-1&11\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1&4&3\\-2&2&3\\-2&1&5\end{pmatrix}$. ბ) $\begin{pmatrix}-3&8&11\\8&4&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5&-2&-3\\2&0&0\end{pmatrix}$;

2. ა) $\begin{pmatrix}3\alpha-2\gamma&3\beta-2\delta\\5\alpha-4\gamma&5\beta-4\delta\end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix}-5b&5a\\-5d&5c\end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix}1&5&-5\\3&10&0\\2&9&-7\end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

ე) $\begin{pmatrix}-1&3&0\\10&65&7\\3&1&2\end{pmatrix}$; ვ) $\begin{pmatrix}3&7\\1&4\\2&5\end{pmatrix}$; ზ) $\begin{pmatrix}1&4\\2&7\\3&10\\4&13\end{pmatrix}$; თ) (3); ი) გამრავლება არ შეიძლება; კ) $\begin{pmatrix}4&6&0\\1&2&-1\\1&0&3\\1&2&-1\end{pmatrix}$; ლ) $\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix}$; მ) (14). **3.** ა) $\begin{pmatrix}-7&3\\24&6\end{pmatrix}$;

ბ) $\begin{pmatrix}-14&-2\\-2&10\end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix}3&-3\\1&15\end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix}-11&-3\\-10{,}5&7{,}5\end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0{,}5\\1&0\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}-2&8&-4\\-6&-9&75\\-3&8&11\end{pmatrix}$. **5.** არა **6.** ა) $a=1; b=4$; ბ) $a=-3; b=-2$.

7. ა) $(3;\ -1)$; ბ) $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$. **8.** ა) $\begin{pmatrix}-17&-6\\3&2\end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix}-24&-13\\-25&-23\end{pmatrix}$.

9. ა) -10; ბ) 0; გ) $\sin(\alpha-\beta)$; დ) $\cos(\alpha+\beta)$; ე) -2.

10. ა) 0; ბ) 0; გ) $4a^3$; დ) $9b+3c$.; ე) 44; ვ) 0; ზ) 7; თ) $(a^2+b^2+c^2)p^4-p^6$; **11.** $M_{22}=A_{22}=-12$; $M_{32}=-A_{32}=-4$. **12.** ა) -3; ბ) -4; გ)

75; დ) -11; **13.** ა) -1/6; 3/2; ბ) 1/2; 2; გ) -9; 2; დ) 0; ე) $-4\pm\sqrt{22}$;

ვ) 2; 3; **14.** ა) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 15 & -1 & -3 \\ -5 & 10 & ` \end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

;

15. ა) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; ბ) $-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; გ) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$; დ) $-\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

ე) $\begin{pmatrix} -13 & 8 & 14 \\ 16 & -10 & -17 \\ 12{,}5 & -7{,}5 & 9-13{,}5 \end{pmatrix}$; ვ) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; **16.** ა) კი; ბ) არა; გ) კი;

დ) არა; **17.** ა) კი; ბ) კი; გ) კი; **18.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **19.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **20.** ა) $\begin{pmatrix} 29 & 2 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$;

ბ) $\begin{pmatrix} 18 & -5 & -34 \\ -6 & 35 & -2 \\ -6 & -5 & 38 \end{pmatrix}$; **21.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 16 & 44 \end{pmatrix}$. **22.** ა) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; გ) $\frac{1}{42}\begin{pmatrix} 31 \\ 68 \\ 1 \end{pmatrix}$;

დ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{12}{14} \\ 0 & -\frac{35}{14} \\ \frac{3}{7} & -\frac{31}{14} \end{pmatrix}$; ვ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; **24.** $-\frac{1}{98}$; **25.** ა) 3; ბ) 3; გ) 4; დ) 4.

სავარჯიშო 6

1. ა) $x_1=\frac{10}{7}$; $x_2=\frac{15}{7}$; ბ) $x_1=\frac{15}{7}$; $x_2=\frac{10}{7}$; გ) $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{2}{3}$; $x_3=2$; დ) $x_1=\frac{19}{7}$; $x_2=\frac{8}{7}$; $x_3=-\frac{17}{7}$; ე) $x_1=6$; $x_2=0$; $x_3=-3$; ვ) $x_1=-2$; $x_2=4$; $x_3=1$; ზ) $x_1=1{,}5$; $x_2=2{,}5$; $x_3=2$; თ) $\varnothing$; ი) $x_1=\frac{3}{7}$; $x_2=\frac{11}{7}$; $x_3=1$; კ) $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=2$; ლ) $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{23}$; $x_2=-\frac{20\sqrt{2}}{23}$; $x_3=\frac{27\sqrt{2}}{23}$; მ) $x_1=a+b$; $x_2=a+2b$; $x_3=a+3b$; **2.** ა) $a\neq-0{,}4$; ბ) $a\neq-1$; გ) $a\neq-0$; დ) $a\neq1$; $a\neq-2$; **3.** ა) $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; ბ) $x_1=-3$; $x_2=0$; $x_3=4$; გ) $x_1=10$; $x_2=20$; $x_3=30$; დ) $x_1=0{,}6$; $x_2=0{,}4$; $x_3=-1$; **4.** ა) $P_1=7$; $P_2=9$; $P_3=6$; ბ) $Q_1=4$; $Q_2=2$; $Q_3=4$; **5.** ა) $P_1=6$; $P_2=3$; $P_3=6$; ბ) $Q_1=550$; $Q_2=50$; $Q_3=200$;

6. ა) $\left(\frac{1-8x_3}{5};\ \frac{2-x_3}{5};\ x_3\right)$; ბ) $\left(\frac{14-9x_3}{5};\ \frac{9-4x_3}{5};\ x_3\right)$; გ) $\left(\frac{3x_3+2}{7};\ \frac{4x_3-2}{7};\ x_3\right)$; დ) (3; 2; 0) ე) $\left(\frac{5-2x_3}{3};\ \frac{-1-7x_3}{3};\ x_3\right)$; ვ) $\left(\frac{12+7x_3}{19};\ \frac{23x_3-4}{19};\ x_3\right)$; ზ) $\left(2+3x_2-x_3;\ x_2;\ x_3\right)$; თ) (1; 2; 3); ი) $\left(\frac{7+12x_2+x_4}{18};\ x_2;\ \frac{3-15x_4}{18};\ x_4\right)$ ან $\left(x_1;\ x_2;\ 6-15x_1-10x_2;\ 18x_1+28x_2-7\right)$; კ) არათავსებადია; ლ) (-1; -1; 0; 1); მ) $\varnothing$; **7.** ა) (0; 0; 0); ბ) $(c;\ 2c;\ c)$; გ) $(-2c;\ c;\ c)$; დ) (0; 0); ე) $(13c;\ -19c;\ -c;\ 7c)$; ვ) $(-23c;\ -11c;\ c;\ 2c)$.

სავარჯიშო 7

1. 4960; **2.** ა) 14400; ბ) 9600; გ) 10500; **3.** 21400; 23200; 26800; **4.** 1,64-ჯერ; **5.** ა) 375; ბ) 369,86%; **6.** ა) 94 და 95; ბ) 94; **7.** ა) 92; 93; ბ) 151; 148; ნაკიანისთვის: ა) ორივეში 93 დღე; ბ) 151 და 148; **8.** ა) 68320 (365/360); ბ) 68160 (360/360); გ) 68184 (365/365); **9.** ზუსტი პროცენტი, ზუსტი დღე; **10.** 32,99%; **11.** 0,1225 წელი ანუ 45 დღე; **12.** 38080; 32,32%; **13.** 29112; **14.** 12290; **15.** 69077; **16.** 137439; **17.** ა) 559085; ბ) 563370; **18.** შერეული სქემა; **19.** ა) 56105; 36400; ბ) 61760; 36400; **20.** 12695; 12848; **21.** ა) 560441; ბ) 589160; **22.** ა) 4,45; ბ) 4,059; გ) 3,969; **23.** 17,71%; **24.** პირველი; **25.** 29,93%; **26.** ა) 27,12%; ბ) 26,53%; **27.** ა) 6345 და 8655; ბ) 6059 და 8941; გ) 5798 და 9202; **28.** ა) 33919; ბ) 16642; **29.** ა) 10359; ბ) 15284; **30.** ა) 7961; ბ) 117340; გ) 40000; **31.** ა) 39761; ბ) 11606; **32.** პირველი; **33.** 100000 დღე; **34.** 4600 ლარი 4 წლის შემდეგ; **35.** 132373; **36.** 174010; **37.** 912800; **38.** 33512; **39.** 587158; **40.** 457172; **41.** 20600. **42.** 4220; **43.** 30441; **45.** 6924; 6887; **46.** 14624; **47.** 19635; **48.** მეორე უკეთესია; **49.** 11293; **50.** 42125; **51.** I უკეთესია; **52.** 29612; **53.** 6649; **54.** 12825; **55.** ა) 1,0339; 3,39%; ბ) 1,069; 6,9%; **56.** ა) 12,49%; ბ) 60,1%; **57.** 9200; 67,38%; 49,77%; **58.** ა) 2160; ბ) 1421; **59.** 12,07%; 50,8%; 23,47%; **60.** 45,27%; 970445; **61.** 39,08%; **62.** 13,33%; **63.** 16,96%. **64.** წლის ბოლოს: ა) 15960; ბ) 95431; გ) 669145; წლის დასაწყისში: ა) 20748; ბ) 124060; გ) 869889; 16152; **65.** ა) 144166; ბ) 147596; გ) 149549; **66.** 213843; **67.** ა) 1534803; ბ) 1556661; შემცირების შემდეგ 1518772; **68.** ა) 1185956; ბ) 1126840; გაზრდის შემდეგ 1178783; **69.** ა) 22875; ბ) 24225; გ) 24920; **70.** ა) 124689; ბ) 122618; **71.** ა) 676944; ბ) 826388; **72.** არა; **73.** ა) 8847; ბ) 1877; **74.** ა) 14165; ბ) 2372; **75.** ა) 173161; ბ) 176773; **76.** ა) 37274; ბ) 35275; **77.** 230 ლარი და 26 თეთრი; **78.** არა; **79.** 8768; **80.** ა) 20513; ბ) 19214; **81.** ა) 46886; ბ) 44294; **82.** A-ში; **83.** B-ში; **84.** 6%; წამგებიანია; **85.**

2809,81; **86.** 922,21; **87.** 31888,1; **88.** 34330,07; **89.** 5 წელი; **90.** ა) -8532,88; ბ) 3,1%; გ) 55540,60; დ) 26467,12; **91.** *A* პროექტი.

სავარჯიშო 8

1. 1) 0; 2) 0; 3) ∞; 4) ∞; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{3}{14}$; 7) $\frac{1}{5}$; 8) 1; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{3}{2}$; 11) 2;

12) $-\frac{5}{2}$; 13) $\sqrt[3]{7}$; 14) 2; 15) $e^{6/5}$; 16) $e^{-10/7}$; 17) $e^{-10/3}$; 18) $e^{21/2}$; 19) e; 20) e^4;

21) $e^{-3/4}$; 22) $e^{16/5}$.

2. 1) $\frac{8}{13}-\frac{11}{17}+\frac{14}{21}-\frac{17}{25}$; 2) $\frac{9}{5}+\frac{27}{8}+\frac{81}{11}+\frac{243}{14}$; 3) $-1+\frac{4}{3}+-2+\frac{16}{5}$;

4) $2+\frac{16}{9}+2$.

3. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{7}{8}$.

4. 1) $a_n=\frac{2n-1}{n^n}$, სრულდება; 2) $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$, სრულდება;

3) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, სრულდება; 4) $a_n=\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$, სრულდება;

5) $a_n=\frac{2n-1}{2n}$, არ სრულდება; 6) $a_n=\frac{n}{10n+3}$, არ სრულდება.

5. 1) კრებადია; 2) კრებადია; 3) კრებადია; 4) განშლადია;
5) განშლადია.

სავარჯიშო 9

1) 3; 2) 0; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $e^{15/2}$; 6) $e^{-15/4}$; 7) $e^{-9/2}$; 8) e^{10}; 9) $\frac{1}{2}$;

10) 4; 11) 4; 12) $\frac{2}{7}$; 13) $\frac{9}{2}$; 14) $\frac{3}{5}$; 15) $\frac{1}{3}$; 16) $\frac{1}{16}$; 17) $\frac{2}{3}$; 18) 2; 19) e^{10};

20) e^{-15}.

სავარჯიშო 10

1. 1) $3x^2+2$; 2) $6x-\frac{1}{x\ln 2}$; 3) $e^x-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $10x+2\cos x$;

5) $21x^2-3\sin x$; 6) $6x^2-\frac{4}{x}$; 7) $3x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 3^x\ln 3$; 8) $2xe^x+x^2e^x$;

9) $4x\log_2 x+\frac{2x}{\ln 2}$; 10) $36x^2\ln x+12x^2$; 11) $9x^2\cos x-3x^3\sin x$;

12) $6x^2\sin x + 2x^3\cos x$; 13) $e^x\log_3 x + \dfrac{e^x}{x\ln 3}$; 14) $e^x\ln x + \dfrac{e^x}{x}$;

15) $3x^2 tgx + \dfrac{x^3}{\cos^2 x}$; 16) $2^x(\ln 2\sin x + \cos x)$; 17) $\dfrac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$;

18) $\dfrac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}$; 19) $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; 20) $\dfrac{2^x(\ln 2\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$;

21) $\dfrac{\cos x(x^2-2x) - \sin x(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$; 22) $\dfrac{(6x-3)\cos x + (3x^2-3x+1)\sin x}{\cos^2 x}$;

23) $\dfrac{e^x(x^2-5x+4)}{(x^2-3x+1)^2}$; 24) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(2x-1) - 2tgx}{(2x-1)^2}$; 25) $2^x\ln 2 + e^x\sin x + e^x\cos x$;

26) $\dfrac{1}{x\ln 5} + e^x(\cos x - \sin x)$; 27) $\cos x - 2^x(\ln 2\cos x - \sin x)$;

28) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2x\sin x + x^2\cos x$; 29) $3x^2 + \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$; 30) $6x + \dfrac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$;

31) $e^x\arcsin x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 32) $2^x\ln 2\arccos x - \dfrac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 33) $3^x\ln 3 arctgx + \dfrac{3^x}{1+x^2}$.

2. 1) $y=5$; 2) $y=1$; 3) $y=2x$; 4) $y=-4x-8$.

3. 1) $2x-3e^{3x}$; 2) $\dfrac{1}{x\ln 5} + 9\cos 3x$; 3) $\dfrac{2}{\cos^2 2x} - e^x$; 4) $10x + 10\sin 5x$;

5) $100x(5x^2+1)^9$; 6) $20(4x^3-3x)^{19}(12x^2-3)$; 7) $e^{5x}(2x+5x^2)$;

8) $e^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$; 9) $5x^4\cos 4x - 4x^5\sin 4x$; 10) $7e^{7x}tgx + \dfrac{e^{7x}}{\cos^2 x}$;

11) $\dfrac{\sin 2x}{x\ln 2} + 2\log_2 x\cdot\cos 2x$; 12) $\dfrac{e^{2x}}{x} + 2\ln x e^{2x}$; 13) $\dfrac{\sin 3x - 3x\ln x\cos 3x}{x\sin^2 3x}$;

14) $\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}\cos 2x + 2\log_2 x\cdot\sin 2x}{\cos^2 2x}$; 15) $\dfrac{e^{4x}(4x^2-2x+4)}{(x^2+1)^2}$; 16) $\dfrac{2\cos 2x(x+1) - \sin 2x}{(x+1)^2}$;

17) $\dfrac{-2x^2+8x-5}{e^{2x}}$; 18) $\dfrac{(6x-2)\sin 7x - 7(3x^2-2x)\cos 7x}{\sin^2 7x}$; 19) $2x + e^{2x}(2\sin x + \cos x)$;

20) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2x\cos 4x - 4x^2\sin 4x$; 21) $\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$; 22) $-\dfrac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$; 23) $\dfrac{4}{1+16x^2}$;

24) $-\dfrac{6}{1+36x^2}$; 25) $\dfrac{3e^{3x}}{1+(e^{3x}+1)^2}$.

4. 1) $-2-12x^2$; 2) $12(x+10)^2$; 3) $42x-18$; 4) $6x\ln x+5x$; 5) $4e^{2x-1}$;

6) $e^x(x^2+4x+2)$; 7) $-36\sin(5-6x)$; 8) $81\sin(5+9x)$;9) $-\dfrac{16}{(4x+3)^2}$; 10)$-4\sin 2x$.

5. 1) $dy=(2x-5)dx$; 2) $dy=(x^2-4)e^{-x}dx$; 3) $dy=\ln x dx$;

4)$dy=\dfrac{4}{(4x-2)\ln 3}dx$; 5)$dy=\left(2x\log_2 x+\dfrac{x^2}{x\ln 2}\right)dx$; 6)$dy=3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx$;

7) $dy=(5e^{5x}+4\cdot 3^{4x}\ln 3)dx$; 8) $dy=(4e^{4x}+3\cdot 5^{3x}\ln 5)dx$.

სავარჯიშო 11

1. 1) 2; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{4}{15}$; 4) $\dfrac{16}{5}$; 5) 2; 6) 2; 7) $\dfrac{1}{2}$; 8) $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$; 9) $\dfrac{1}{2}$; 10) $\dfrac{3}{2}$; 11) $\dfrac{1}{3}$; 12) $\dfrac{1}{3\ln 2}$; 13) 2; 14) 0; 15) 0.

2. 1) ზრდადია: $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$, კლებადია: (0; -2), $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=0$;

2) კლებადია: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, ზრდადია: (-1; 1), $x_{\max}=1$, $x_{\min}=-1$;

3) ზრდადია : $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, კლებადია: (0; 2), $x_{\max}=0$, $x_{\min}=2$; 4) ზრდადია: $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$, კლებადია: (-4; 0), $x_{\max}=-4$, $x_{\min}=0$; 5) ზრდადია: $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, კლებადია: (0; 1), $x_{\max}=0$, $x_{\min}=1$; 6) ზრდადია: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, კლებადია: (-2; 2), $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=2$; 7) ზრდადია: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, კლებადია: (-1; 1), $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$; 8) ზრდადია: $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, კლებადია: (0; 1), $x_{\max}=0$, $x_{\min}=1$; 9) ზრდადია: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$, კლებადია: (-1; 3), $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=3$; 10) ზრდადია: $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$, კლებადია: (-3; 1), $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=1$; 11) კლებადია: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$, ზრდადია: (-1; 2), $x_{\max}=2$, $x_{\min}=-1$; 12) ზრდადია: $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$, კლებადია: (1; 3), $x_{\max}=1$, $x_{\min}=3$; 13) ზრდადია: $(-\infty;+\infty)$, ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს; 14) ზრდადია: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, კლებადია: $(0;1)\cup(1;2)$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=2$; 15) კლებადია: $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$, ზრდადია: (-1; 3), $x_{\max}=3$, $x_{\min}=-1$.

3. 1) $y_{\min}(3)=-6$; 2) $y_{\min}(-4)=-12$; 3) $y_{\min}(0)=-5$, $y_{\max}(1)=-4$; 4) $y_{\max}(0)=8$, $y_{\min}(6)=-100$.

4. 1) ამოზნექილია: $(0;1)$, ჩაზნექილია: $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(0;1)$ და $(1;1)$; 2) ამოზნექილია: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, ჩაზნექილია: (0; 2), გადაღუნვის წერტილებია: (0; 1) და (2; 9); 3) ჩაზნექილია: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, ამოზნექილია: (-1; 1), გადაღუნვის წერტილებია: (-1; -5) და (1; -1); 4) ამოზნექილია: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, ჩაზნექილია: (-1; 1), გადაღუნვის წერტილებია: (-1; 10) და (1; 2); 5) ჩაზნექილია: $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$, ამოზნექილია: (1; 2), გადაღუნვის წერტილებია: (1; 12) და (2; 25).

5. 1) 8 და 4; 2) $2\frac{1}{3}$ და 1; 3) $2\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{3}$; 4) 3 და -13; 5) 6 და 2; 6) 11 და 0; 7) -1 და -82; 8) $14\frac{1}{3}$ და $-9\frac{2}{3}$; 9) 9 და -34,75; 10) 1 და 0.

6. 1) ჰორიზონტალური ასიმპტოტია: $y=0$, დახრილი ასიმპტოტი არ აქვს; 2) ჰორიზონტალური ასიმპტოტია: $y=2$, დახრილი ასიმპტოტი არ აქვს; 3) ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არ აქვს, დახრილი ასიმპტოტია $y=3x-2$; 4) ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არ აქვს, დახრილი ასიმპტოტია $y=3x-5$;

8. 5 და 5; **9.** $S=100$; **10.** 5 და 5; **11.** $x=250$, $y=6250000$; **12.** ა) 40; ბ) თუ სიჩქარე იზრდება 40 კმ/სთ-მდე საწვავის დანახარჯი მცირდება, ხოლო 40 კმ/სთ- დან 200კმ/სთ-მდე – იზრდება; **13.** ა) 12 სთ; ბ) 0 სთ-დან 12 სთ-მდე მოხმარება იზრდება, ხოლო 12 სთ-დან 24 სთ-მდე – კლებულობს;
14. $x=5$

სავარჯიშო 12

1. 1) $f'_x=2x$, $f'_y=-2y$, $df(x;y)=2xdx-2ydy$; 2) $f'_x=y-2xy^3$, $f'_y=x-3x^2y^2+4y^3$, $df(x;y)=\left(x-3xy^3\right)dx+\left(x-3x^2y^2+4y^3\right)dy$; 3) $f'_x=6xy^3+6x^2$, $f'_y=6x^2y^2+12y^3$; 4) $f'_x=6x^2y^4+2y^5$, $f'_y=8x^3y^3+10xy^4$;

5) $f'_x=\dfrac{3y^5-3x^2y^2}{\left(x^2+y^3\right)^2}$, $f'_y=\dfrac{6x^3y-3xy^4}{\left(x^2+y^3\right)^2}$; 6) $f'_x=\dfrac{2x^2y^2-1}{x^2}$, $f'_y=\dfrac{4xy^3+1}{x^2}$;

7) $f'_x=5\cdot\left(2x^3y+3xy^2\right)^4\cdot\left(6x^2y+3y^2\right)$, $f'_y=5\cdot\left(2x^3y+3xy^2\right)^4\cdot\left(2x^3+6xy\right)$;

8) $f'_x=3\cdot\left(2xy^2+3x-2y\right)^2\cdot\left(y^2+3\right)$, $f'_y=3\cdot\left(2xy^2+3x-2y\right)^2\cdot\left(2xy-2\right)$;

9) $f'_x = e^{2x^2-xy}\cdot(4x-y)$, $\quad f'_y = e^{2x^2-xy}\cdot(-y)$; $\quad$ 10) $f'_x = 6xy^3e^{3x^2y^3}$, $\quad f'_y = 9x^2y^2e^{3x^2y^3}$;

11) $f'_x = \dfrac{2x}{x^2-y}$, $\quad f'_y = \dfrac{x^2-2y}{x^2y-y^2}$; $\quad$ 12) $f'_x = \dfrac{3x^2y^2+3}{(x^3y^2+3x)\ln 3}$, $\quad f'_y = \dfrac{2x^2y}{(x^3y^2+3x)\ln 3}$;

13) $f'_x = \cos(3xy^2-2x^2y)\cdot(3y^2-4xy)$, $\quad f'_y = \cos(3xy^2-2x^2y)\cdot(6xy-2x^2)$;

14) $f'_x = -2x\sin(x^2-y^2)$, $\quad f'_y = 2y\sin(x^2-y^2)$; 15) $f'_x = \dfrac{2xy}{\cos^2 x^2y}$, $\quad f'_x = \dfrac{x^2}{\cos^2 x^2y}$;

16) $f'_x = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\quad f'_y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$; $\quad$ 17) $f'_x = \dfrac{2xy^3}{1+x^4y^6}$, $\quad f'_y = \dfrac{3x^2y^2}{1+x^4y^6}$;

18) $f'_x = 6xy^3 + 2\cos(2x+y^2)$, $\quad f'_y = 9x^2y^2 + 2y\cos(2x+y^2)$.

2. 1) $f''_{xx} = 2y^4$, $\quad f''_{xy} = 8xy^3$, $\quad f''_{yy} = 12x^2y^2$; 2) $f''_{xx} = 6y^3 - 12x$, $\quad f''_{xy} = 18xy^2$, $f''_{yy} = 18x^2y + 6$; $\quad$ 3) $f''_{xx} = 4e^{2x-3y}$, $\quad f''_{xy} = -6e^{2x-3y}$, $\quad f''_{yy} = 9e^{2x-3y}$; $\quad$ 4) $f''_{xx} = e^{x-y}$, $f''_{xy} = -e^{x-y}$, $f''_{yy} = e^{x-y}$; 5) $f''_{xx} = -\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy} = -\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xx} = \dfrac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}$;

6) $f''_{xx} = \dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$, $\quad f''_{xy} = -\dfrac{2x}{(x^2+y)^2}$, $\quad f''_{xy} = -\dfrac{1}{(x^2+y)^2}$; 7) $f''_{xx} = 0$, $\quad f''_{xy} = -\dfrac{2}{y^3}$, $f''_{xy} = \dfrac{6x}{y^4}$; 8) $f''_{xx} = \dfrac{6y}{x^4}$, $\quad f''_{xy} = -\dfrac{2}{x^3}$, $f''_{yy} = 0$.

3. 1) $f_{\max}(2;1) = 12$; $\quad$ 2) $f_{\min}(0;0) = 0$; $\quad$ 3) $f_{\min}(3;-1) = 18$; $\quad$ 4) $f_{\min}(1;2) = -15$; 5) $f_{\min}(1;1) = 1$; $\quad$ 6) არ აქვს ექსტრემუმი; 7) $f_{\min}(1;-2) = 3$; $\quad$ 8) $f_{\min}(-2;1) = 3$; 9) $f_{\min}(1;1) = 1$; $\quad$ 10) $f_{\max}(1;2) = 15$; $\quad$ 11) $f_{\max}(-1;-1) = -2$; $\quad$ 12) $f_{\max}(1;1) = 1$; 13) $f_{\max}(-3;-1) = 5$; $\quad$ 14) $f_{\min}(1;-3) = -5$.

4. 1) $f_{\min}(1;3) = 12$; $\quad$ 2) $f_{\max}(-3;-1) = -10$; 3) $f_{\min}(1;1) = 5$; 5) $f_{\min}(-1;2) = -3$.

სავარჯიშო 13

1. 1) $\dfrac{x^5}{5}$; 2) $-x^{-1}$; 3) x^2; 4) $\dfrac{x^4}{2} - x^3 + x^2 + 5x$; 5) $x^3 + x^2 + 4\ln x$; 6) $x^2 + 3\sin x$;

7) $\dfrac{2^x}{\ln 2} - 5\cos x$; $\quad$ 8) $e^x - 7\ln x$; $\quad$ 9) $\dfrac{x^3}{3} + \ln x$; $\quad$ 10) $tgx - \sin x$; $\quad$ 11) $-2ctgx + \cos x$;

12) $\dfrac{(3x+2)^6}{18}$; $\quad$ 13) $\dfrac{(5x-2)^8}{40}$; $\quad$ 14) $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)$; $\quad$ 15) $\dfrac{3}{5}\ln(5x-1)$; $\quad$ 16) $\dfrac{1}{2}e^{2x+3}$;

17) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$; 18) $-\frac{1}{5}\cos(5x+2)$; 19) $\frac{1}{2}\sin(2x-3)$; 20) $-\frac{1}{3}\cos 3x$; 21) $\frac{1}{5}\sin 5x$;

22) $\frac{1}{3}tg3x$; 23) $-\frac{1}{5}ctg5x$; 24) $-\frac{5}{8(4x+1)^2}$.

2. 1) $\frac{(3x^2+1)^2}{12}$; 2) $\frac{(2x^3-1)^2}{4}$; 3) $-\frac{\ln(3-2x^2)}{4}$; 4) $\frac{2\ln(5x^3-1)}{15}$; 5) e^{x^2+2};

6) $\frac{1}{3}e^{x^3}$; 7) $\frac{2^{x^2+1}}{2\ln 2}$; 8) $\frac{5^{x^4+3}}{4\ln 5}$; 9) $\frac{1}{4}\sin(2x^2+5)$; 10) $-\frac{1}{6}\cos(3x^2-7)$;

11) $-\ln\cos x$; 12) $\ln\sin x$; 13) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$; 14) $\frac{1}{3}\sin^3 x$; 15) $-\frac{1}{3}\ln(1+3\cos x)$;

16) $\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)$; 17) $\frac{1}{2}\ln^2 x$; 18) $\frac{1}{5}\ln^5 x$; 19) $\ln(1+\ln x)$; 20) $-e^{\cos x}$;

21) $\ln(2+e^x)$.

3. 1) $-x\cos x+\sin x$; 2) $x\sin x+\cos x$; 3) $-\frac{2}{5}x\cos 5x+\frac{2}{25}\sin 5x$;

4) $\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x$; 5) $-\frac{1}{2}x\cos(2x+3)-\frac{1}{4}\sin(2x+3)$;

6) $\frac{1}{3}x\sin(3x+2)+\frac{1}{9}\cos(3x+2)$; 7) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2$; 8) $\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{1}{30}x^6$; 9) $x\ln x-x$;

10) $\frac{x^2}{2}\log_5 x-\frac{x^2}{4\ln 5}$; 11) xe^x-e^x; 12) $\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}$; 13) $\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{\ln^2 2}$;

14) $\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{\ln^2 3}$; 15) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$; 16) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$;

17) $x^2e^x-2xe^x+2e^x$; 18) $x^2e^x-2xe^x+3e^x$.

სავარჯიშო 14

1. 1) 2; 2) 2; 3) 10; 4) $e^2+\ln 2-e$; 5) $3+\ln 2$; 6) $\frac{85}{4}$; 7) $\frac{5^6-3^6}{12}$; 8) $\frac{\ln 3}{2}$; 9) 1;

10) 1; 11) 1; 12) -1.

2. 1) 5; 2) $13\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}\ln 4$; 4) $\frac{1}{3}\ln 2$; 5) $\frac{1}{2}(e^3-1)$; 6) $\frac{5^7-1}{\ln 5}$; 7) 1; 8) $\ln 2$;

9) $\ln 2$; 10) $\frac{1}{2}\ln 3$; 11) $\frac{1}{3}$; 12) $\ln 3-\ln 2$.

3. 1) $2\ln 2-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$; 3) 1; 4) $\frac{\pi}{2}-1$; 5) $5\ln 5-4$; 6) e^2.

4. 1) 26; 2) 24; 3) 68; 4) 24; 5) 5; 6) $2\frac{2}{3}$; 7) 4,5; 8) $10\frac{1}{3}$; 9) $20\frac{5}{6}$; 10) 4,5; 11) $\frac{1}{6}$; 12) 9; 13) 9.

სავარჯიშო 15

1. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1; 6) 1; 7) $\frac{1}{\ln 2}$; 8) $\frac{1}{\ln 3}$.

2. 1) $-\frac{3}{2}$; 2) $-2\sqrt{2}$; 3) 2; 4) $3\sqrt[3]{3}$.

3. 1) $3e^3$; 2) 3; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3\sqrt[3]{9}}{2}$.

სავარჯიშო 16

1. 1) $y=\frac{x^2}{2}+c$; 2) $y^2=x^2+c$; 3) $y=cx$; 4) $y=\frac{c}{x}$; 5) $y^2=3x^2+c$; 6) $x^4=2y^2+c$; 7) $\ln y+\frac{y^2}{2}=x+c$; 8) $(1+x^2)(1+2y)=c$; 9) $y^2+1=c(1-x^2)$; 10) $y=c\sqrt{1+x^2-1}$; 11) $c\sin x\cos x=1$; 12) $y=ce^{\sin x}$.

2. 1) $y=cx^3-x^2$; 2) $y=e^{-x}(c+x)$; 3) $y=2x-1+ce^{-2x}$; 4) $y=\frac{x^3}{2}+cx$; 5) $y=ce^{2x}+1$; 6) $y=\frac{c}{x}+3$; 7) $y=\frac{c}{x}+\frac{x}{2}+1$; 8) $y=\frac{c}{x}+\frac{e^x}{x}$.

3. 1) $y=c_1+c_2e^{-2x}$; 2) $y=c_1+c_2e^{9x}$; 3) $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$; 4) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}$; 5) $y=e^{3x}(c_1+c_2x)$; 6) $y=e^{-2x}(c_1+c_2x)$; 7) $y=e^{x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$; 8) $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$; 9) $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

სავარჯიშო 17

1. 0,25; 2. 0,2; **3.** $\frac{1}{3}$; **4.** $\frac{1}{3}$; **5.** ა) $\frac{1}{18}$; ბ) $\frac{1}{2}$; **6.** $\frac{3}{4}$; **7.** $\frac{24}{91}\approx 0{,}2637362$; **8.** $\frac{25}{72}\approx 0{,}3472222$; **9.** ა) $\frac{C_{90}^4}{C_{100}^4}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}$; ბ) $\frac{C_{10}^4}{C_{100}^4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97}$; გ) $\frac{C_{10}^2C_{90}^2}{C_{100}^4}$;

10. ა) $\dfrac{C_8^5 C_4^4}{C_{12}^9}$; ბ) 0; **11.** ა)0,6; ბ) 0,3; გ) 0,9; **12.** ა) $\dfrac{7}{15}$; ბ) $\dfrac{7}{15}$; **13.** $\dfrac{C_5^2 C_{45}^4}{C_{50}^6}$;

14. ა) $\dfrac{1}{216}$; ბ) $\dfrac{1}{36}$; გ) $\dfrac{5}{9}$; **15.** $\dfrac{7}{20}$; **16.** $\dfrac{2}{7}$.

სავარჯიშო 18

1. $\dfrac{1}{3}$; **2.** $\dfrac{10}{17}$; **3.** $\dfrac{19\cdot 3}{4\cdot 23}\approx 0{,}61$; **4.** $\dfrac{17}{70}\approx 0{,}2428571$; **5.** $\dfrac{1}{50\cdot 99}\approx 0{,}0002$; **6.** 0.2;

7. ა) $\dfrac{7}{460}\approx 0.015$; ბ) $\dfrac{1}{2300}\approx 0.0004$; გ) $\dfrac{91}{460}\approx 0.2$; **8.** ა) $\dfrac{1}{210}$; ბ) $\dfrac{1}{14}$; **9.** 0,42;

10. $\dfrac{980}{1711}\approx 0{,}57$; **11.** $\dfrac{1}{15}\approx 0{,}067$; **12.** $\dfrac{1}{6}$; **13.** $\dfrac{1}{16}$; **14.** $\dfrac{3}{25}$; **15.** 0,729; **16.** 0,84;

17. 0,999; **18.** $\dfrac{1}{216}$; **19.** $\dfrac{7}{9}$; **20.** $p+q-2pq$; **21.** 0,938; **22.** **0,9;** **23.** 0,75;

24. $\dfrac{0{,}6}{0{,}88}\approx 0{,}682$; **25.** $\dfrac{0{,}092}{0{,}188}=\dfrac{23}{47}\approx 0{,}48936$; **26.** ა) $\dfrac{4}{15}=0{,}266666$; **ბ)** 0,625; **27.** **ა)** 0,324; **ბ)** 0,03; **28.** **ა)** 0,58;**ბ)** 0,9968; **29.** 0,5.

სავარჯიშო 19

1.

X	0	1
P	0,7	0,3

2.

X	2	5	8
P	0,4	0,15	0,45

3.

X	0	10	400	500	1000
P	0,98	0,01	0,005	0,004	0,001

4.

X	0	5	10	15
P	0,216	0,432	0,288	0,064

5.

X	0	1	2	3
P	0,576	0,347	0,069	0,005

6.

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}0625 \end{cases}$$

7.

X	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

8.

X	1	2	3	4
P	0,6	0,24	0,096	0,064

9.

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

10.

X	1	2	3	4
P	0,7	0,21	0,063	0,027

11.

X	1	2	3	4
P	0,4	0,24	0,144	0,216

12.

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

13.

$X+Y$	3	5	7
P	0,08	0,44	0,48

14.

$X-Y$	2	3	4	5
P	0,06	0,24	0,14	0,56

15.

X^2	0	1	4	9
P	0,5	0,3	0,1	0,1

$3X$	-6	0	3	9
P	0,1	0,5	0,3	0,1

16.

X	0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	1	2	3
	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,2

-3	-2	-1	0	1	2	3
0,08	0,06	0,04	0,37	0,1	0,15	0,2

17.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } x<0\\ 0.7, \text{ როცა } 0\le x<1\\ 1, \text{ როცა } x\ge 1.\end{cases}$$

18.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } x<0;\\ 0,2401, \text{ როცა } 0\le x<1;\\ 0,6517, \text{ როცა } 1\le x<2\\ 0,9163, \text{ როცა } 2\le x<3;\\ 0,9919, \text{ როცა } 3\le x<4\\ 1, \text{ როცა } x\ge 4\end{cases}$$

$$p(1\le x\le 4)=0,7599$$

19.

X	0	1	2	3
P	0,0285	0,343	0,514	0,1143

$$p(x\ge 2)=0,6283.$$

20. 0,5

21.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \text{ თუ } x>1\\ 0, \text{ თუ } x\le 1\end{cases}$$

22. ა) 0; ბ) 0,5; გ) 0:

23.

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ თუ } x\le 0\\ 4x^3, \text{ თუ } 0<x\le 1\\ 0, \text{ თუ } x>1\end{cases}$$

24.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ როცა } x\le 0\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x, \text{ როცა } 0\le x\le \pi\\ 1, \text{ როცა } x>\pi.\end{cases}$$

სავარჯიშო 20

1. ა) 6; ბ) 0,535; **2.** $DX=15,291$; $\sigma X=\sqrt{15,291}\approx 3.91$;

3. ა) $DX=8,545$; $\sigma X=2,924$; ბ) $DX=248,9475$; $\sigma X=15,778$; **4.** 0,48;

5. $EX^2 = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2$

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4

6. ა) 11; ბ) 30; 7. 69; 8. 61; 9. $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$; 10. $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 0{,}5$; 11. $E(X - EX) = 0$; $E(X - EX)^2 = 1{,}21$; $E(X - EX)^3 = 0{,}216$; 12. $EX = 3{,}1$; $E(X - EX) = 0$; 13. $EX = 3{,}9$; $EX^2 = 16{,}5$; $EX^3 = 74{,}1$.

სავარჯიშო 21

1. 0,52; 2. $p_4(2) = 0{,}375$; $p_6(3) = 0{,}3125$; 3. $p_6(2) = 0{,}33$; $p_6(1) = 0{,}4$; 4. 0,087; 5. 0,152; 6. 0,092; 7. 0,256; 8. 0,165; 9. 0,335; 10. 0,5; 11)0,661; 12. 0,386; 13. 0,36;

14. $\frac{30}{91} \approx 0{,}3296703$; 15. $\frac{1456}{2185} \approx 0{,}666$; 16. $\frac{4226825}{1529728} \approx 0{,}276275$; 17) $p_{15}(12) = \frac{C_{60}^{12} \cdot C_{10}^{3}}{C_{70}^{15}}$;

18. $1 - \frac{9^2}{2!} \cdot e^{-9} - \frac{9}{1!} \cdot e^{-9} - \frac{9^0}{0!} \cdot e^{-9} \approx 0{,}9788956$;

19. $p(X < 7) = \frac{9^6}{6!} \cdot e^{-9} + \frac{9^5}{5!} \cdot e^{-9} + \frac{9^4}{4!} \cdot e^{-9} + \ldots + \frac{9^0}{0!} \cdot e^{-9}$;

20. $p(X < 4) = \frac{6^3}{3!} \cdot e^{-6} + \frac{6^2}{2!} \cdot e^{-6} + \frac{6^1}{1!} \cdot e^{-6} + \frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}15$;

21. $p(X < 8) = \frac{10^7}{7!} \cdot e^{-10} + \frac{10^6}{6!} \cdot e^{-10} + \ldots + \frac{10^0}{0!} \cdot e^{-10}$; 22. 0,09112;

23. $p(X \le 4) = \frac{9^1}{1!} \cdot e^{-9} + \frac{9^2}{2!} \cdot e^{-9} + \frac{9^3}{3!} \cdot e^{-9} + \frac{9^4}{4!} \cdot e^{-9} = e^{-9} \sum_{k=1}^{4} \frac{9^k}{k!}$;

24. $p(X \le 5) = \frac{8^5}{5!} \cdot e^{-8} + \frac{8^4}{4!} \cdot e^{-8} + \ldots + \frac{8^0}{0!} \cdot e^{-8}$.

სავარჯიშო 22

1) $EX = 3$, $\mathrm{D}X = 4$; 2) $EX = 0$, $\mathrm{D}X = 2{,}5$;

3. $f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{x^2}{10}}$, $F_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{x^2}{10}} dt$; 4. ა) 0,84; ბ)0,53; გ) 0,975; დ) 0,06; ე) 0,99; ვ) 0,381; 5. ა) β =0,85; α =-0,53; ბ) β =-0,26; α =-0,26; გ) 0,4; 6. ა) 0,16; ბ) 0,07; 7. ა) β =7,12 ; ბ) α =6,04; გ) 0,1; 8. 0,4; 9. α ; 10. $\alpha = -1{,}45$; $\beta = 11{,}45$; 11. (13,1;+ ∞); 12. (- ∞;3,97); 13. 1,65; 14. X - Y $\cong$ N(-9,100); 15. 0,964; 16. 0,38; 17. -0,26; 18. ა) (32,6706;+∞); ბ) (-∞;11,5915); 19. (15,3792; 38,8851); 20. (2,060;+∞); 21. (-∞; -1,729); 22. (-1,96; 1,96); (-2,365: 2,365); (-2,042; 2,042).

სავარჯიშო 23

1. 0.84; **2.** 0,9; **3.** 0,3; **4.** 0,84; 0,36; 0,96; **5.** 0,25; **6.** ა) 0,75; ბ) $\frac{8}{9}$; გ) $\frac{15}{16}$;

7. 0,64; **8.** 0,909; **9.** 0,875; **10**. 1; **11.** 0; **12.** $\frac{47}{50}$; **13.** 0,75; **14)**. $\frac{31}{36}$; **15.** ა) 0,872;

ბ) 0,872; გ) 0,559; **16.** 0,023; **17.** 0,926; **18.** 0,925; **19.** $\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!}e^{-4}$; **20.** $1-\sum_{k=0}^{2}\frac{4^k}{k!}e^{-4}$;

21. $\sum_{k=0}^{2}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$; **22.** $1-\sum_{k=0}^{22}\frac{29^k}{k!}e^{-29}$; **23.** $1-\sum_{k=0}^{3}\frac{6^k}{k!}e^{-6}$.

სავარჯიშო 24

1.

X	-2	2
p	1/2	1/2

Y	-1	0	1
p	5/12	1/3	1/4

არ არიან დამოუკიდებლები.

2.

X	0	1	2
p	1/3	1/3	1/3

Y	-2	0	1
	4/21	10/21	1/3

არ არიან დამოუკიდებლები.

3. ა)

Y_1 \ Y_2	0	1	2	3
2	1/16	0	0	0
3	0	2/16	0	0
4	1/16	0	2/16	0
5	0	2/16	0	2/16
6	1/16	0	2/16	0
7	0	2/16	0	0
8	1/16	0	0	0

Y_1	2	3	4	5	6	7	8
p	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Y_2	0	1	2	3
p	4/16	6/16	4/16	2/16

არ არიან დამოუკიდებლები.

ბ)

Y_2 \ Y_1	1	2	3	4
1	4/16	0	0	0
2	1/16	3/16	0	0
3	1/16	1/16	2/16	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

Y_1	1	2	3	4
p	4/16	4/16	4/16	4/16

Y_2	1	2	3	4
p	7/16	5/16	3/16	1/16

არ არიან დამოუკიდებლები.

გ)

$Y_1 \backslash Y_2$	0	1	2	3
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	1/16	2/16	1/16	0
3	1/16	2/16	1/16	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

Y_1	1	2	3	4
p	4/16	4/16	4/16	4/16

Y_2	0	1	2	3
p	4/16	6/16	4/16	2/16

არ არიან დამოუკიდებლები.

დ)

$Y_1 \backslash Y_2$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1/16	2/16	1/16	0	0	0	0	0
2	1/16	1/16	1/16	1/16	0	0	0	0
3	0	0	1/16	1/16	1/16	1/16	0	0
4	0	0	0	0	1/16	1/16	1/16	1/16

Y_1	1	2	3	4
p	4/16	4/16	4/16	4/16

Y_2	0	1	2	3	4	5	6	7
p	2/16	3/16	3/16	2/16	2//16	2/16	1/16	1/16

არ არიან დამოუკიდებლები.

4. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; **5.** $f(x;y)=\begin{cases}3^{-x-y}\ln^2 3, \text{ თუ } x \ge 0, y \ge 0\\ 0, \quad \text{თუ } \; x<0 \;\text{ an }\; y>0\end{cases}$; **6.** $f(x;y)=8e^{-4x-2y}$;

7. ა) $\operatorname{cov}(X;Y)=-\dfrac{1}{10}$; ბ) $\rho(X;Y)=\dfrac{-1/10}{\sqrt{26/20}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{-\sqrt{10}}{10\sqrt{13}}=-0{,}0877$;

8. ა) $\operatorname{cov}(X;Y)=0$; ბ) $\rho(X;Y)=0$; $EZ=\dfrac{57}{15}$; $DZ=\dfrac{1288}{225}$; **9.** $ET=1$; $DT=68$; **10.** $ET=4$; $DT=108$.

სავარჯიშო 26

1. (11,9; 13,3); **2.** (184; 188); **3.** (15; 17); **4.** (8; 9,2); **5**. (11990; 12410); **6**. (8,7; 9,9); **7.** (17,29; 19,77); **8.** (109; 121); **9.** (94; 98) **10.** (18,13; 18,87); **11.** (5,6; 6,2); **12.** (59,5; 62,9); **13.** (1,7; 6,2); (1,3; 2,5); **14.** (30,9; 78,2); (5,6; 8,8); **15.** (1,4; 11,7); (1,2; 3,4); **16.** (3,5; 9,3); (1,9;3); **17.** (0,365; 0,415); **18.** (0,197; 0,343); **19.** (0,467; 0,683); **20.** (0,337; 0,543).

სავარჯიშო 27

1. $H_0: m = 69{,}21$; $\mathrm{H}_1: m \neq 69{,}21$; $T.V. = -1{,}5$; $C.V. = \pm 1{,}96$; H_0;

2. $H_0: m \geq 14$; $\mathrm{H}_1: m < 14$; $T.V. = -4{,}89$; $C.V. = -2{,}33$; H_1;

3. $H_0: m = 36$; $\mathrm{H}_1: m \neq 36$; $T.V. = -3{,}54$; $C.V. = \pm 2{,}58$; H_1;

4. $H_0: m \leq 27{,}5$; $\mathrm{H}_1: m > 27{,}5$; $T.V. = 2{,}55$; H_1;

5. $H_0: m = 800$; $\mathrm{H}_1: m \neq 800$; $T.V. = 9{,}96$; $C.V. = \pm 2{,}262$; H_1;

6. $H_0: m \leq 350$; $\mathrm{H}_1: m > 350$; $T.V. = 1{,}732$; $C.V. = 1{,}796$; H_0;

7. $H_0: m = 3$; $\mathrm{H}_1: m \neq 3$; $T.V. = 5{,}22$; $C.V. = \pm 2{,}776$; H_1;

8. $H_0: m \leq 30$; $\mathrm{H}_1: m > 30$; $T.V. = 0{,}85$; H_0;

9. $H_0: \sigma^2 \leq 6{,}2$; $\mathrm{H}_1: \sigma^2 > 6{,}2$; $T.V. = 17{,}823$; $C.V. = 33{,}409$; H_0;

10. $H_0: \sigma^2 \leq 25$; $\mathrm{H}_1: \sigma^2 > 25$; $T.V. = 27{,}36$; $C.V. = 27{,}204$; კი;

11. $H_0: \sigma^2 \leq 1{,}6$; $\mathrm{H}_1: \sigma^2 > 1{,}6$; $T.V. = 70{,}438$; $C.V. = 30{,}144$; კი;

12. $H_0: p \geq 0{,}4$; $\mathrm{H}_1: p < 0{,}4$; $T.V. = -0{,}462$; $C.V. = -1{,}28$; არა;

13. $H_0: p \leq 0{,}32$; $\mathrm{H}_1: p > 0{,}32$; $T.V. = 1{,}29$; $C.V. = 1{,}65$; არა;

14. $H_0: p \geq 0{,}15$; $\mathrm{H}_1: p < 0{,}15$; $T.V. = -0{,}94$; $C.V. = -1{,}65$; H_0;

15. $H_0: p = 0{,}1$; $\mathrm{H}_1: p \neq 0{,}1$; $T.V. = 1{,}34$; H_0;

16. H_0: დამოუკიდებ.; H_1: დამოკიდებ.; $T.V. = 6{,}789$; $C.V. = 5{,}991$; H_1;

17. H_0: არაეფექტურია; H_1: ეფექტურია; $T.V. = 10{,}643$; H_1;

18. H_0: დამოუკიდებ.; H_1: დამოკიდებ.; $T.V. = 19{,}43$; H_1;

19. H_0: პროპორციები ტოლია; H_1: პროპორციები არ არის ტოლი; $T.V. = 12{,}755$; $C.V. = 6{,}251$; H_1;

20. H_0: პროპორციები ტოლია; H_1: პროპორციები არ არის ტოლი; $T.V. = 2{,}401$; $C.V. = 4{,}605$; H_0.