ვ. მელაძე

მათემატიკური ოპერატორები ფიზიკაში

„ტექნიკური უნივერსიტეტი''

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ვ. მელაძე

მათემატიკური ოპერატორები ფიზიკაში

რეგისტრირებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლისათვის. სახელმძღვანლოს შინაარსი მოიცავს ვექტორულ აღრიცხვას, დიფერენციაულურ ოპერაციებს ვექტორებზე, წერტილის ფუნქციებს და ცდომილებათა თეორიის დამუშავების ძირითად მეთოდებს. სახელმძღვანელოს მიზანია მისცეს სტუდენტებს იმ აუცილებელი ცნებების განმარტებები და მათემატიკური ფორმულირება, რომლებიც გაუადვილებენ მათ თანამედროვე ფიზიკის ნებისმიერი ნაწილის დაუფლებას.

რეცენზენტი სრული პროფესორი

კონსტანტინე ცხაკაია

ISBN 978-9941-14-503-2

http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant, scripta manent

წინასიტყვაობა

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლის ფიზიკური და საინჟინრო სპეციალობების სტუდენტებისათვის. მასში კომპაქტურად თავმოყრილია ის მათემატიკური ფიზიკის საკითხები, რომლებიც გაუადვილებენ სტუდენტებს ზოგადი ფიზიკის ნებისმიერი ნაწილის შესწავლას თანამედროვე დონეზე.

სახელმძღვანელოში აგრეთვე მოცემულია ცდომილებათა თეორიის დამუშავების ძირითადი მეთოდები, რომელთა ათვისება დაეხმარება სტუდენტებს ლაბორატორიული სამუშაოების შესრულებაში. ვფიქრობთ, რომ ის ხელს შეუწყობს სტუდენტებს ლექციების და ლაბორატორიული სამუშაოების შესაბამისი კურსის ათვისება-შესწავლაში.

ავტორი მადლიერებით მიიღებს ყველა შენიშვნას და წინადადებას და აუცილებლად გაითვალისწინებს მათ შემდგომში.

ვ. მელაძე

სარჩევი

1. ფიზიკური სიდიდეები. ზოგიერთი ცნებები ვექტორებზე
ფიზიკური სიდიდეები

ფიზიკური კანონები გამოისახებიან მათემატიკური თანაფარდობებით, რომლებიც მყარდებიან ფიზიკურ სიდიდეებს შორის. ფიზიკური სიდიდეები ფიზიკური ობიექტების (საგნების, მდგომარეობების, პროსეცების) გაზომვადი მახასიათებლებია (თვისებებია).

თითოეული ფიზიკური სიდიდე წარმოადგენს რიცხვითი მნიშვნელობის და სიდიდის ერთეულის ნამრავლს.

სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

ნებისმიერი ფიზიკური შინაარსის მათემატიკური თანაფარდობა შეიცავს სკალარულ და ვექტორულ სიდიდეებს. სიდიდეს ეწოდება სკალარული, თუ ის სრულად ხასიათდება რიცხვითი მნიშვნელობით. სიდიდე ვექტორულია, თუ ის სრულად ხასიათდება რიცხვითი მნიშვნელობით და მიმართულებით.

ვექტორებს აღნიშნავენ მსხვილი შრიფტიანი ასოებით, ან ისრიანი ასოებით (მაგ. $\vec{A}$). იგივე ასო, მოთავსებული ორ პარალელურ მცირე ხაზს (ხაზაკს) შორის წარმოადგენს ვექტორის მოდულს:

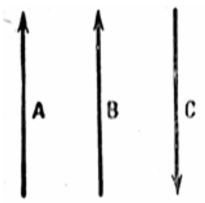
$|\vec{A}| = A = \vec{A}$ ვექტორის მოდულს, $|\vec{V}_{12}| = V_{12} = \vec{V}_{12}$ ვექტორის მოდულს.

ვექტორის მოდული – სკალარია. სკალარი ყოველთვის დადებითი სიდიდეა.

ნახაზებზე ვექტორები გამოისახებიან ისრიანი მონაკვეთებით. მონაკვეთის სიგრძე (დადგენილ მასშტაბში) წარმოადგენს ვექტორის მოდულს, ხოლო ისრით ნაჩვენები მიმართულება გვაძლევს ვექტორის მიმართულებას.

პარალელური წრფეების გასწვრივ მიმართულ ვექტორებს კოლინეარულები ეწოდებათ.

ტოლი მოდულების პარალელური ვექტორები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო ანტიპარალელურები განსხვავდებიან ნიშნით:

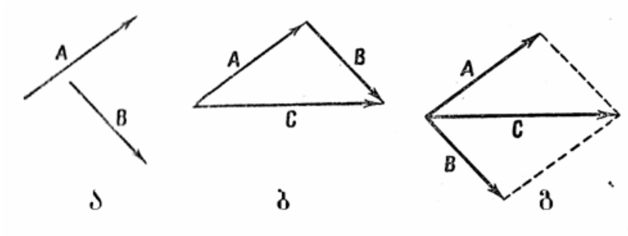


$\vec{A} = \vec{B}$; $\vec{A} = -\vec{C}$; $\vec{B} = -\vec{C}$

$A = B = C$ ან $|A| = |B| = |C|$

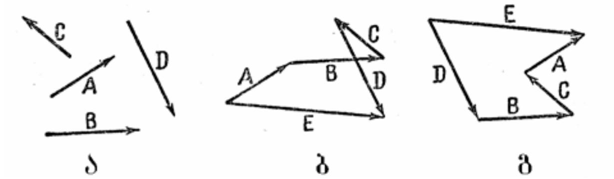
ნახ. 1.

ვექტორების შეკრება. დავუშვათ მოცემულია ორი ვექტორი $\vec{A}$ და $\vec{B}$. მათი ჯამი ანუ ტოლქმედი (მარეზულტირებელი) $\vec{C}$ ვექტორის მისაღებად, გადავიტანოთ $\vec{B}$ ვექტორი თავისთავის პარალელურად ისე, რომ მისი საწყისი შეუთავსდეს $\vec{A}$ ვექტორის ბოლოს. ტოლქმედი $\vec{C}$ გაივლება $\vec{A}$ ვექტორის საწყისიდან $\vec{B}$ ვექტორის ბოლომდე (ნახ. 2). $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



ნახ. 2

არსებობს შეკრების სხვა ხერხიც. გადავიტანოთ $\vec{B}$ ვექტორი (ან $\vec{A}$) ისე, რომ ვექტორების საწყისები ერთმანეთს შეუთავსდნენ. $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელოგრამი, რომლის დიაგონალი $\vec{C}$ იქნება მათი ტოლქმედი (ნახ. 2, გ). ორივე მეთოდი (ბ) და (გ) ერთნაირ შედეგს იძლევა. თუ მოცემულია რამდენიმე ვექტორი – $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ და $\vec{D}$, მაშინ მათი შეკრებისას (ტოლქმედის პოვნისას), ისინი უნდა გადავიტანოთ თავისთავის პარალელურად, ისე, რომ ყოველი მომდევნო ვექტორის საწყისი შევუთავსოთ წინას ბოლოს (ნახ. 3ა, ბ, გ).



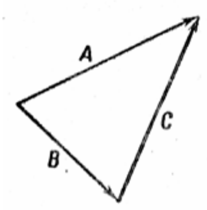
ნახ. 3

მივიღებთ ტეხილ წირს. ტოლქმედი ვექტორი იქნება $\vec{E}$, გავლებული $\vec{A}$ ვექტორის საწყისიდან $\vec{D}$ ვექტორის ბოლომდე.

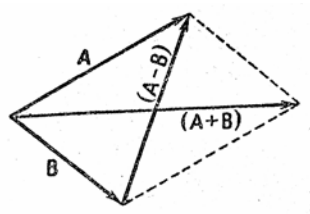
ნახაზიდანაც (ბ და გ-დან) ჩანს, რომ $\vec{E}$ ვექტორი არ არის დამოკიდებული შესაკრებთა მიმდევრობაზე, ნაჩვენებია ორი შემთხვევა $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ და $\vec{E} = \vec{D} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{A}$.

ვექტორების გამოკლება. ორი ვექტორის $\vec{A} - \vec{B}$ სხვაობა, ეწოდება ისეთ $\vec{C}$ ვექტორს, რომელიც $\vec{B}$ ვექტორთან ჯამში მოგვცემს $\vec{A}$ ვექტორს (ნახ. 4).

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



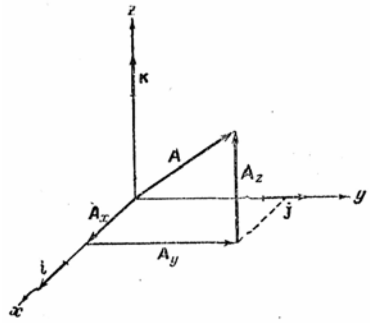
ნახ. 4



ნახ. 5

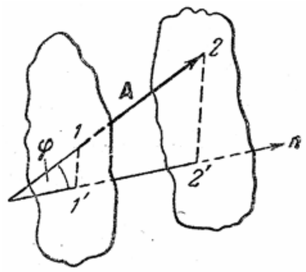
ნახ. 5-ზე შეპირისპირებულია $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორების ჯამი და სხვაობა.

ვექტორის დაშლა მდგენელებად. ნებისმიერი $\vec{A}$ ვექტორი შეიძლება დაიშალოს რამდენიმე ვექტორად $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ და ა.შ., რომლებიც ჯამში მოგვცემს $\vec{A}$ ვექტორს. ასეთ შემთხვევაში $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$ და ა.შ. ვექტორებს $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელები ეწოდებათ. ნახ. 6-ზე მოცემულია $\vec{A}$ მდგენელებად დაშლა კოორდინატთა მართკუთხა სისტემის ღერძებზე. $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ და $\vec{A}_z$ სიმბოლოებით აღნიშნულია x, y, z ღერძებზე $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელები. შეგვიძლია დავწეროთ $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$



ნახ. 6.

ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დავუშვათ მოცემული გვაქვს $\vec{A}$ ვექტორი და გარკვეული მიმართულება სივრცეში n ღერძის სახით. $\vec{A}$ ვექტორის საწყისიდან და ბოლოდან გავავლოთ ღერძის მართობი სიბრტყეები. ცხადია, ისინი ერთმანეთის პარალელურები იქნებიან. $1'$ და $2'$ წერტილებს, სადაც გადაიკვეთებიან სიბრტყეები n ღერძთან, ეწოდებათ $\vec{A}$ ვექტორის საწყისის (1) და ბოლოს (2) გეგმილები (პროექციები) n ღერძზე, ხოლო ღერძის მონაკვეთს $1'$ და $2'$ წერტილებს შორის ეწოდებათ $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილი n ღერძზე. თუ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას, გეგმილი დადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში უარყოფითია. ვექტორის პროექცია სკალარია.



ნახ. 7

გეგმილი აღინიშნება იგივე ასოთი, როგორც ვექტორი ინდექსის დამატებით. ინდექსი აღნიშნავს იმ ღერძს და მიმართულებას, რომელზედაც გეგმილდება ვექტორი, ჩვენს შემთხვევაში $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილი n მიმართულებაზე აღინიშნება A_n.

თუ $\vec{A}$ ვექტორსა და n ღერძის მიმართულებას შორის კუთხეს აღვნიშნავთ φ-ით, მაშინ ნახაზის თანახმად

$A_n = A\cos\varphi$

სადაც $A = |\vec{A}|$ ვექტორის მოდულია.

თუ ვექტორი მოცემულ მიმართულებასთან ადგენს მახვილ კუთხეს, $\cos\varphi > 0$ და გეგმილიც დადებითი იქნება, ბლაგვი კუთხის შემთხვევაში $\cos\varphi < 0$ და გეგმილიც უარყოფითი იქნება. თუ ვექტორი მართობია ღერძისადმი, მისი გეგმილი ნულის ტოლია.

ნახ. 8-ზე ნაჩვენებია რამდენიმე ვექტორის გეგმილები x, y კოორდინატთა ღერძებზე. ამ გეგმილებისათვის ძალაშია შემდეგი თანაფარდობები:

$A_x = C_x > 0,\ B_x < 0$

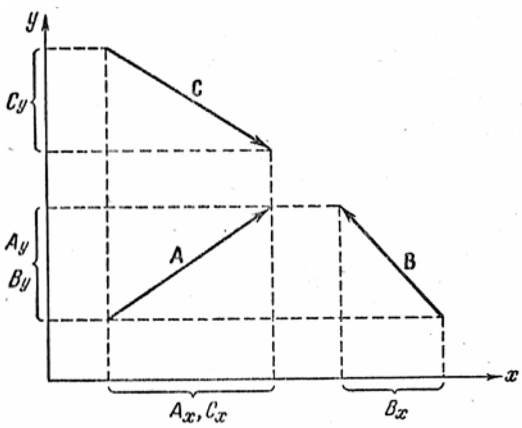
$A_y = B_y > 0,\ C_y < 0$

თუ $\vec{A}$ ვექტორი x, y, z ღერძებთან ადგენენ შესაბამისად α, β, γ კუთხეებს, მაშინ მისი გეგმილები ტოლი იქნებიან:

$A_x = A\cos\alpha$

$A_y = A\cos\beta$

$A_z = A\cos\gamma$



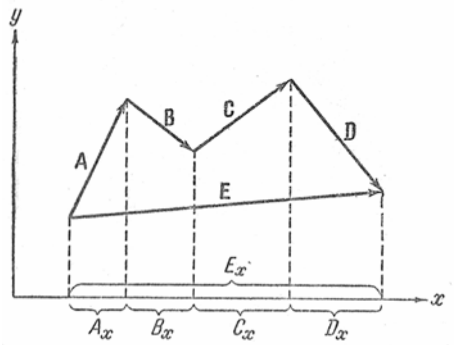
ნახ. 8

ცხადია, მოცემული ვექტორის გეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე ყოველთვის შესაძლებელია ავაგოთ თვით ვექტორიც.

განვიხილოთ რამდენიმე ვექტორის ჯამი $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ (ნახ. 9). ნახაზიდან ჩანს, რომ მისი გეგმილის მდგენელი x ღერძზე ტოლია

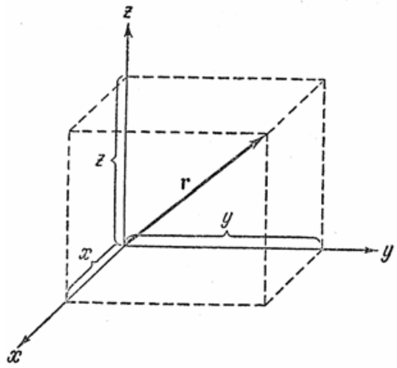
$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x$$

ე.ი. ვექტორების ჯამის გეგმილი რაღაც მიმართულებაზე ტოლია შესაკრები ვექტორების გეგმილების ჯამის იგივე მიმართულებაზე.



ნახ. 9.

რადიუს-ვექტორი. წერტილის რადიუს-ვექტორი ეწოდება ვექტორს, რომელიც გაივლება კოორდინატთა სათავიდან განსახილველ წერტილში (ნახ. 10). რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$ ცალსახად განისაზღვრება წერტილის მდებარეობით სივრცეში. ნახაზიდან ჩანს, რომ მისი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია წერტილის კოორდინატების.



ნახ. 10.

$r_x = x, r_y = y, r_z = z$

$\vec{r}$ ვექტორის მოდულის კვადრატი ტოლია კოორდინატების კვადრატების ჯამის:

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

ვექტორის ნამრავლი სკალარზე. $\vec{A}$ ვექტორის ნამრავლი a სკალარზე ისეთი $\vec{B}$ ვექტორის ტოლია, რომლის მოდული $|a|$-ჯერ მეტია $\vec{A}$-ს მოდულზე, გააჩნია იგივე მიმართულება, თუ $a>0$, და საპირისპიროა, თუ $a<0$. თუ $\vec{B} = a.\vec{A}$, მაშინ $B = |a|A$.

ვექტორის გაყოფა b სკალარზე დაიყვანება ვექტორის გამრავლებაზე $\alpha = \frac{1}{b}$.

ერთეულოვანი ვექტორი. ნებისმიერ $\vec{A}$ ვექტორს შეესაბამება იგივე მიმართულების, მოდულით ერთეულოვანი ვექტორი $\vec{A}_{\text{ერთ}}$. ცხადია შემდეგი თანაფარდობები:

$\vec{A} = A.\vec{A}_{\text{ერთ}}$

$$\vec{A}_{\text{ერთ}} = \frac{\vec{A}}{A}$$

ერთეულოვან ვექტორებს უწოდებენ აგრეთვე ორტებს. ვექტორის მდგენელების მოდულები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია ვექტორის მოდულების გეგმილების იმავე ღერძზე:

$|\vec{A}_x| = |A_x|$

$|\vec{A}_y| = |A_y|$

$|\vec{A}_z| = |A_z|$

კოორდინატთა ღერძების x, y, z გასწვრივ ერთეულოვან ვექტორებს შესაბამისად აღნიშნავენ $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ სიმბოლოებით და უწოდებენ ორტებს. ვექტორის მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i},\quad \vec{A}_y = A_y\vec{j},\quad \vec{A}_z = A_z\vec{k}$$

რადგან $\vec{A}$ ვექტორი ტოლია თავის მდგენელების ჯამის, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i}, \vec{A}_y = A_y\vec{j}, \vec{A}_z = A_z\vec{k}$$

აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება გამოვსახოთ შესაბამისი გეგმილებით კოორდინატთა ღერძებზე ამ ღერძების ორტების (მგეზავების) საშუალებით.

მაგალითისათვის განვიხილოთ დეკარტეს მართკუთხა (ორთოგონალური) კოორდინატთა სისტემა, რომლის მგეზავი (ბაზისური) ვექტორებია $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$. ეს ვექტორები აკმაყოფილებენ ორთოგონალობისა და ნორმირების პირობებს:

$(\vec{i}\vec{j}) = (\vec{i}\vec{k}) = (\vec{j}\vec{k}) = 0$ – ორთოგონალობის პირობა, $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2$ – ნორმირების პირობა.

ორთოგონალობის პირობა გვიჩვენებს, რომ ეს ვექტორები ურთიერთმართობულია, ხოლო ნორმირების პირობის თანახმად მგეზავი (ორტების) ვექტორების სიგრძე ერთის ტოლია. გარდა ამ ორი პირობისა კოორდინატთა მარჯვენა სისტემისათვის შესრულებული უნდა იყოს ტოლობები

$$[\vec{i}\vec{j}] = \vec{k},\qquad [\vec{j}\vec{k}] = \vec{i},\qquad [\vec{k}\vec{i}] = \vec{j}$$

$$[\vec{j}\vec{i}] = -\vec{k},\ [\vec{k}\vec{j}] = -\vec{i},\ [\vec{i}\vec{k}] = -\vec{j},$$

სადაც კვადრატული ფრჩხილებით აღნიშნულია ვექტორული ნამრავლი. ყოველთვის სრულდება პირობები

$$[\vec{i}\vec{i}] = [\vec{j}\vec{j}] = [\vec{k}\vec{k}] = 0$$

ეს ვექტორები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ $\vec{A}$ ვექტორის რიცხვითი მნიშვნელობები A_x, A_y, A_z, რომლებსაც მოცემული ვექტორის კოორდინატები ეწოდება და რომლებიც წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის ორთოგონალურ გეგმილებს (პროექციებს) კოორდინატთა ღერძებზე.

ამგვარად, თუ $\vec{A}$ ვექტორი სივრცეში ნებისმიერადაა მიმართული, გვექნება

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

ხოლო $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორისათვის

$$\vec{r} = \vec{i} r_x + \vec{j} r_y + \vec{k} r_z$$

სადაც $r_x = x, r_y = y$ და $r_z = z$ – რადიუს-ვექტორი კოორ-დინატებია $0x, 0y$ და $0z$ ღერძებზე, ამიტომ

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z$$

ვექტორის სიგრძე ამ ვექტორის თავისთავზე სკალარული ნამრავლიდან კვადრატული ფესვის ტოლია. ზემოთ მიღებული ფორმულების საფუძველზე

$$|A| = A = \sqrt{(\vec{A}\vec{A})} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

რადიუს-ვექტორისთვის გვექნება

$$r = \sqrt{\vec{r}\vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

თუ $z = 0$, მაშინ რადიუს-ვექტორი $x0y$ სიბრტყეშია და სიდიდით ტოლია

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

თუ $y = z = 0$, წერტილი მდებარეობს $0x$ ღერძზე და $r = x$.

ორი ვექტორის $\vec{A}$ და $\vec{B}$ სკალარული ნამრავლისათვის გვექნება

$$(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z)(\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)$$

მრავალწევრების გამრავლების წესისა და ორთოგონალო-ბის პირობის გამოყენებით

$$(\vec{A}\vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლისთვის

$$[\vec{A}\vec{B}] = [\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z, \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z]$$

მგეზავების ვექტორული ნამრავლის ფორმულების და მრავალწევრების გამრავლების წესის გამოყენება გვაძლევს

$$[\vec{A}\vec{B}] = \vec{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

რაც ასეც ჩაიწერება

$$[\vec{A}\vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

ორმაგი ვექტორული ნამრავლისათვის ადვილად მივიღებთ

$$\left[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]\right] = \vec{B}(\vec{C}\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$$

სკალარული შერეული ნამრავლისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$(\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]) = (\vec{B}[\vec{C}\vec{A}]) = (\vec{C}[\vec{A}\vec{B}])$$

ცხადია, რომ

$$(\vec{A}[\vec{A}.\vec{C}]) = 0.$$

2. დიფერენციალური ოპერაციები ვექტორებზე ვექტორის წარმოებული.

დავუშვათ $\vec{A}$ იცვლება დროში ცნობილი კანონით $\vec{A}(t)$, რაც ნიშნავს რომ, მისი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე წარმოადგენენ t დროის ფუნქციებს:

$$\vec{A} = \vec{i}A_x(t) + \vec{j}A_y(t) + \vec{k}A_z(t)$$

დავუშვათ t დროში ვექტორის გეგმილები ღებულობენ ნაზრდს A_x, A_y, A_z, რის შედეგადაც $\vec{A}$ ვექტორიც მიიღებს ნაზრდს $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$. $\vec{A}$ ვექტორის ცვლილების სიჩქარე t დროში დახასიათდება განტოლებით:

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \vec{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \vec{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \vec{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}$$

რაც წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის ცვლილების საშუალო სიჩქარეს Δt დროის შუალედში. თუ $\vec{A}$ ვექტორის უწყვეტი ცვლილებისას Δt-ს უსასრულოდ შევამცირებთ-მივასწრაფებთ ნულისაკენ $(\Delta t \to 0)$, მაშინ $\vec{A}$ ვექტორის ცვლილების სიჩქარე იქნება:

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to \infty}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \vec{i}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \vec{j}\lim\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \vec{k}\lim\frac{\Delta A_z}{\Delta t}$$

რაიმე f ფუნქციის ნაზრდის ფარდობას Δt არგუმენტის ნაზრდთან, როდესაც ის მიისწრაფვის ნულისაკენ $(\Delta t \to 0)$, ეწოდება ამ ფუნქციის წარმოებული t-თი და ჩაიწერება $\frac{df}{dt}$ სიმბოლოთი. მაშასადამე $\vec{A}$ ვექტორის ცვლილების სიჩქარე დროში იქნება

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{i}\frac{dA_x}{dt} + \vec{j}\frac{dA_y}{dt} + \vec{k}\frac{dA_z}{dt}$$

ორტების მამრავლები წარმოადგენენ $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ვექტორის არს კოორდინატთა ღერძებზე:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Ox} = \frac{dA_x}{dt}, \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Oy} = \frac{dA_y}{dt}, \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Oz} = \frac{dA_z}{dt}$$

ვექტორის წარმოებული ვექტორით.

თუ მოცემული გვაქვს ორი ვექტორი $\vec{A}$ და $\vec{B}$, მაშინ $\vec{A}$ ვექტორის წარმოებული $\vec{B}$ ვექტორით ეწოდება ვექტორს

$$\frac{d\vec{A}}{dB} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}B_x + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}B_y + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}B_z$$

ამ ვექტორის გეგმილები $0_x, 0_y$ და 0_z ღერძებზე შესა-ბამისა იქნებიან:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}B_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}B_y + \frac{\partial A_x}{\partial z}B_z$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}B_x + \frac{\partial A_y}{\partial y}B_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}B_z$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}B_x + \frac{\partial A_z}{\partial y}B_y + \frac{\partial A_z}{\partial z}B_z$$

გადიფერენციალების ძირითადი ფორმულები:

ჯამის წარმოებული. დავუშვათ, S სიდიდე წარმოადგენს შემდეგ ჯამს: $s = a + b + \dots + p$, მაშინ მისი წარმოებული იქნება $s' = a' + b' + \dots + p'$. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის წარმო-ბული. დავუშვათ $\vec{b} = n\,\vec{a}$ მაშინ მისი წარმოებული $\overline{b'} = n\,\overline{a'}$

თუ $n, m \dots q$ რიცხვებია, მაშინ $\vec{u}$ ვექტორის წარმოებული $\vec{u} = n\,\vec{a} + m\,\vec{b} + \dots + q\,\vec{p}$, იქნება $\overline{u'} = n\,\overline{a'} + m\,\overline{b'} + \dots q\,\overline{p'}$

ვექტორული და სკალარული ფუნქციების ნამრავლის წარმოებული.

დავუშვათ $f(t)$ და $\vec{a}(t)$ სკალარული და ვექტორული ფუნქციებია დროის და $\vec{u} = f\,\vec{a}$, მაშინ $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{(f+\Delta f)(\vec{a}+\Delta\vec{a}) - f\vec{a}}{\Delta t} = f\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} + \vec{a}\frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{a}\Delta f}{\Delta t}$. ზღვარზე გადასვლით $\overline{u'} = f\,\vec{a}' + f'\,\vec{a}$

სკალარული ნამრავლის წარმოებული.

დავუშვათ $\vec{a}(t)$ და $\vec{b}(t)$ ვექტორული ფუნქციებია და $f=\vec{a}.\vec{b}$ - მათი სკალარული ნამრავლია. განვიხილოთ

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{(\vec{a}+\Delta\vec{a})+(\vec{b}+\Delta\vec{b})-\vec{a}.\vec{b}}{\Delta t}=\vec{a}\,\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t}+\vec{b}\,\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}+\frac{\Delta\vec{a}.\Delta\vec{b}}{\Delta t}$$

ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ: $f' =\vec{a}.\vec{b}' +\vec{a}'.\vec{b}$

ვექტორული ნამრავლის წარმოებული.

ვექტორული ნამრავლის $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ წარმოებულისათვის, წინა ფორმულის ანალოგიურად მივიღებთ $\vec{c}' =\vec{a}\times\vec{b}' + \vec{a}' \times\vec{b}$

უნდა გვახსოვდეს რომ $\vec{b}\times\vec{a}' = -\vec{a}' \times b$

ინტეგრალი ვექტორიდან.

დავუშვათ მოცემული გვაქვს ცვლადი ვექტორი $\vec{a}(t)$; $\vec{a}(t) = \vec{i}a_x +\vec{j}\,a_y + \vec{k}a_z$.

თუ t_0 და t_1 აღვნიშნეთ t დროის საწყის და საბოლოო მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}\,(dt) = \vec{i}\int_{t_0}^{t_1} a_x dt +\vec{j}\int_{t_0}^{t_1} a_y dt +\vec{k}\int_{t_0}^{t_1} a_z dt$$

3. ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘᲡ ᲤᲣᲜᲥᲪᲘᲔᲑᲘ

მათემატიკურ ფიზიკაში ხშირად განიხილავენ სიდიდეებს, რომლებიც გარდა კოორდინატებისა, დამოკიდებულნი არიან სხვა ცვლადებზეც (მაგალითად დროზე). თუ განსახილველი სიდიდე ვექტორია (რიცხვია), მაშინ განიხილავენ წერტილის ვექტორულ (სკალარულ) ფუნქციას. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სივრცის განსახილველ არეში მოცემულია ვექტორული ან სკალარული ველი.

ძირითად შემთხვევაში შესასწავლ ველებს ახასიათებენ სამი ფუნქციით:

1) გრადიენტით - ვექტორული ფუნქციით, რომლის არგუმენტია წერტილის სკალარული ფუნქცია.

2) დივერგენციით - სკალარული ფუნქციით, რომლის არგუმენტია წერტილის ვექტორული ფუნქცია.

3) როტორით (გრიგალი) - ვექტორული ფუნქციით, რომლის არგუმენტია წერტილის ვექტორული ფუნქცია.

განვიხილოთ ეს ფუნქციები ცალ-ცალკე.

გრადიენტი. თუ მოცემულია სკალარული ფუნქცია $f(x,y,z)$, მაშინ ამ ფუნქციის გრადიენტი იქნება ვექტორი კოორდინატებით $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$. გრადიენტის განმარტების თანახმად დავწერთ: $grad\ f=\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ ამ ვექტორის შინაარსის გასარკვევად გამოვთვალოთ f ფუნქციის სრული დიფერენციალი $d\vec{r}$ გადაადგილებაზე, $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=grad f d\vec{r}$$

ე.ი. df -ის უსასრულო მცირე ნაზრდი გადაადგილებისას გარკვეული მიმართულებით ტოლია $grad\ f$ კომპონენტის სკალარული ნამრავლისა გადაადგილებაზე. $\frac{df}{|d\vec{r}|}$-ის ფარდობას ეწოდება f სკალარული ფუნქციის წარმოებული $d\vec{r}$ მიმართულებით. $f=const$ ზედაპირზე გადაადგილებისას $df=0$, ამიტომ $grad\ f$ მართობელია $d\vec{r}$-ის, ანუ ვექტორი $grad\ f$ მართობულია $f=const$ ზედაპირის.

დივერგენცია. ფიზიკური პროცესების შესწავლისას, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან ფიზიკური სიდიდეების წარმოშობასთან, გაქრობასთან და შენახვასთან მნიშვნელოვან როლს ასრულებს დივერგენციის ცნების მათემატიკური განმარტება.

დავუშვათ მოცემულია სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის განსაზღვრული ვექტორი $\vec{A}(xyz)$. $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი რაიმე S ზედაპირში ეწოდება გამოსახულებას $\Phi_A=\int_s \vec{A}\,d\vec{S}$

ვექტორის დივერგენცია სკალარული სიდიდეა. ახასიათებს ნაკადის წყაროების სიმრავლეს და განისაზღვრება ფორმულით $div\,\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \vec{A}d\vec{S}}{\Delta V}$ სადაც dS - უსასრულოდ მცირე ჩაკეტილი ზედაპირია, შეზღუდული მცირე ΔV მოცულობით.

დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში $\vec{A}$ ვექ-ტორის დივერგენცია ჩაიწერება:

$$div\ \vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ეს შეიძლება გამოვსახოთ აგრეთვე შემდეგი სკალარული ნამრავლების ჯამით:

$$div\ \vec{A}=\vec{i}\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

ვექტორულ აღრიცხვაში რაიმე $\vec{A}$ ვექტორის დივერგენცია ეწოდება ზღვარს, რომლისკენაც მიისწრაფვის ჩაკეტილ ზედაპირში $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადის ფარდობა ამ ზედაპირით შემოსაზღვრულ ΔV მოცულობასთან, როდესაც $\Delta V\to 0$ ე.ი. $div\ \vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint A_n dS}{\Delta V}$.

გრიგალი (როტორი). $\vec{A}$ ვექტორის როტორი ვექტორული სიდიდეა

$$rot\ \vec{A}=\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

ე.ი. $rot\ \vec{A}$ გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე იქნება:

ღერძი : $0_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$

ღერძი : $0_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}$

ღერძი : $0_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$

ის აგრეთვე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ვექტორული ნა-მრავლების ჯამის სახით:

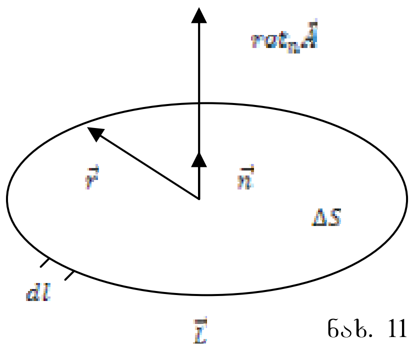
$$rot\ \vec{A}=\vec{i}\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}+\vec{j}\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}+\vec{k}\times\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

განვიხილოთ $\vec{A}$ როტორის ვექტორული განმარტება, რომელიც აღვნიშნოთ $rot\ \vec{A}$ სიმბოლოთი. ეს ვექტორი განისაზღვრება სხვადასხვა სიბრტყეებში მდებარე სამი მდგენელით. $\vec{n}$ ერთეულოვანი მგეზავი ვექტორის მართობ ΔS სიბრტყეში შემოვიფარგლოთ L მცირე კონტურით. (ნახ. 11) L კონტურზე შემოვლის დადებითი მიმართულება ჩვეულებრივ დაკავშირებულია $\vec{n}$-თან მარჯვენა ბურღის წესით. როტორი

ეწოდება ვექტორს, რომლის პროექცია $\vec{n}$ მიმართულებაზე განისაზღვრება ფორმულით: $rot_n\,\vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}$

როტორი ახასითებს ვექტორის ინტენსივობის “დაგრიგალებას”

განვიხილოთ როტორის გამოყენების მაგალითი: დავუშვათ აბსოლუტურად მყარი სხეული ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით უძრავი ღერძის გარშემო. განვსაზღვროთ $rot_n\,\vec{v}$ მისი ბრუნვის ღერძის წერტილებისათვის.



ნახ. 11

მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად L კონტურად მივიჩნიოთ r რადიუსიანი წრეწირი (ნახ. 11) ΔS ფართის სიბრტყეში, ღერძის მართობულად. ვისარგებლოთ ცნობილი ფორმულებით: $v = \omega r$, $\Delta S = \pi r^2$ და $\vec{A}\,d\vec{l} = vdl$ (dl-წრეწირის ელემენტია)

გვექნება: $rot_n\,\vec{v} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2w$

მივიღეთ, რომ მბრუნავი აბსოლუტურად მყარი სხეულის წერტილების წრფივი სიჩქარის როტორი ორჯერ მეტია ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეზე. ეს მტკიცებულება ეხება მბრუნავი მყარი სხეულის ნებისმიერ წერტილს.

ამგვარად, ვექტორულ აღრიცხვაში რაიმე $\vec{A}$ ვექტორის როტორი შემდეგნაირად განისაზღვრება: $\vec{A}$ ვექტორის ცირკულაციას ნებისმიერი შეკრული კონტურის გასწვრივ ყოფენ ამ კონტურით შემოსაზღვრულ ΔS ფართობზე და ამ შეფარდების ზღვარს, როდესაც $\Delta S \to 0$, უწოდებენ ვექტორის როტორის გეგმილს ΔS ზედაპირის ნორმალზე:

$rot\ \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint A_l dl}{\Delta S}$. ეს განსაზღვრება ზოგადია და არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

ლაპლასის ოპერატორი.

ლაპლასიანი – ლაპლასის ოპერატორი ეწოდება გამოსახულებას

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

სკალარული ფუნქციისათვის

$$\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ხოლო რაიმე $\vec{A}$ ვექტორისათვის გვექნება

$$\nabla \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

რადგან $\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k}\ A_z$

$\Delta \vec{A}$ ვექტორისათვის დავწერთ:

$$\Delta \vec{A} = \vec{i} \Delta A_x + \vec{j} \Delta A_y + \vec{k}\ \Delta A_z$$

ჰამილტონის ოპერატორი – სიმბოლური ვექტორი ნაბლა.

ჰამილტონის ოპერატორს უწოდებენ ვექტორულ ოპერატორს

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

სკალარული ფუნქციისთვის გვექნება:

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = grad\, f$$

∇ და $\vec{A}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ჩაიწერება

$$\nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\ \vec{A}$$

∇ და $\vec{A}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლისათვის კი

$$\nabla x \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = rot\ \vec{A}$$

აქედან გამომდინარე $grad\ f$, $div\ \vec{A}$ და $rot\ \vec{A}$ ფუნქციებისათვის ხშირად გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები: ∇f, $\nabla \vec{A}$, $\nabla x \vec{A}$.

ანალოგიურად მივიღებთ: $\Delta f = \nabla^2 f$, $\Delta A = \nabla^2 \vec{A}$

სადაც სკალარული ოპერატორი $\nabla^2 = \nabla . \nabla$ აღნიშნულია Δ-ით.

ძირითადი ფორმულები

სკალარული ნამრავლის გრადიენტი:

$$grad(\vec{a} \; . \; \vec{b}) = \vec{a} \text{ x } rot\, \vec{b} + \vec{b} \text{ x} rot\, \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} + \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$$

სკალარული ფუნქციის ვექტორზე ნამრავლის დივერგენცია:

$$div(f\, \vec{a}) = \vec{a}\, grad f + f div\, \vec{a}$$

ვექტორული ნამრავლის დივერგენცია:

$$div(\vec{a} \text{ x } \vec{b}) = \vec{b}. rot\, \vec{a} - \vec{a}\; rot\, \vec{b}$$

დივერგენციის გრადიენტი: $div(grad f) = \Delta f$

როტორის დივერგენცია: $div(rot\, \vec{a}) = 0$

ლაპლასიანის დივერგენცია: $div(\Delta \vec{A}) = \Delta(div\, \vec{a})$

გრადიენტის როტორი: $rot(grad f) = 0$

სკალარული ფუნქციის ვექტორულზე ნამრავლის როტორი:

$$rot(f\, \vec{a}) = grad f \text{ x } \vec{a} + f rot\, \vec{a}$$

ვექტორული ნამრავლის როტორი:

$$rot(\vec{a} \text{ x } \vec{b}) = \vec{a}\, div\, \vec{b} - \vec{b}\; div\, \vec{a} + \frac{d\vec{a}}{d\vec{b}} - \frac{d\vec{b}}{d\vec{a}}$$

4. ოპერატორების გამოყენების მაგალითები.

სკალარული და ვექტორული სიდიდეების გაწარმოება მანძილით

ფიზიკური მოვლენების შესასწავლად ხშირად ვსარგებლობთ სკალარული და ვექტორული სიდიდეებით. დავუშვათ, გვაინტერესებს წნევის და ტემპერატურის განაწილება სივრცის გარკვეულ ნაწილში. ამ შემთხვევაში წნევა (ტემპერატურა) განიხილება როგორც წერტილის რადიუს-ვექტორის ფუნქცია. თუ განსახილველი სიდიდეების განაწილება დროის მომენტებში იცვლებიან, მაშინ ისინი იქნებიან t დროის სკალარული ფუნქციები. თუ გვაინტერესებს რაიმე დინების კანონების შესწავლა, უნდა ვიპოვოთ სიჩქარის ვექტორის განაწილება, როგორც რადიუს-ვექტორის ფუნქცია.

თუ სიჩქარე წერტილში იცვლება დროის მიხედვით (არასტაციონალურია), მაშინ სიჩქარე იქნება $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის და t სკალარული სიდიდის ფუნქცია. ასე რომ, საქმე გვექნება როგორც სკალარულ ველთან, ასევე ვექტორულთანაც. აღნიშნული ველების დასახასიათებლად სათანადოდ შემოვიღოთ $\varphi(\vec{R})$ სკალარული და $\vec{f}(\vec{R})$ ვექტორული ფუნქციები, რომელთაც ექნებათ სასრულო წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ. დავუშვათ P_0 წერტილში $\varphi(\vec{R})$-ის მნიშვნელობაა φ_0 და ამ წერტილიდან $\vec{l}$-ის მიმართულებით $\Delta\vec{l}$ მანძილზე გადაადგილებისას გადავდივართ P წერტილში, რომელშიც $\varphi(\vec{R})$ სკალარის მნიშვნელობაა φ_1. $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ იქნება $\varphi(\vec{R})$ ფუნქციის ნაზრდი. ფუნქციის ნაზრდის Δl მანძილთან შეფარდების ზღვარს, როცა $\Delta l \to 0$, ეწოდება ფუნქციის წარმოებული $\vec{l}$-ის მიმართულებით:

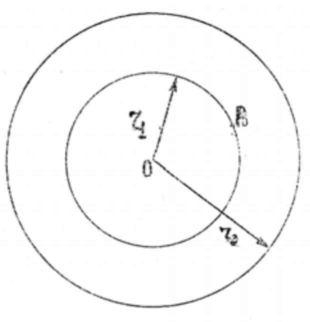
$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta l} = \frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

ამ წარმოებულის მნიშვნელობა დამოკიდებულია $\vec{l}$ მიმართულების არჩევაზე. ამ საკითხის გასარკვევად განვიხილოთ სივრცის ის წერტილები, რომლებშიც φ-ის აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა. თუ $\varphi(x, y, z) = \frac{\alpha}{r}$, სადაც $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha = const$

წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებშიც φ-ს აქვს ერთი და იგივე $\varphi_1 = \frac{\alpha}{r_1}$ მნიშვნელობა, წარმოადგენს r_1 რადიუსის სფეროს ზედაპირს. თუ $\varphi_2 = \frac{\alpha}{r_2}$, მივიღებთ r_2 რადიუსის სფერულ ზედაპირს და ა.შ. ამ ზედაპირებს დონეთა ზედაპირები ეწოდებათ, ამ შემთხვევაში დონეთა ზედაპირები იქნება კონცენტრული სფერული ზედაპირები, რომელთა ცენტრია 0 (ნახ. 12) საზოგადოდ $\varphi = const$, წარმოადგენს რაიმე ზედაპირს სივრცეში. $\varphi_0 = const$ ზედაპირის P_0 წერტილიდან, $\varphi_1 = c$ ზედაპირს P წერტილში l-ის მიმართულებით გადაადგილების დროს, როგორც ვიცით ვღებულობთ

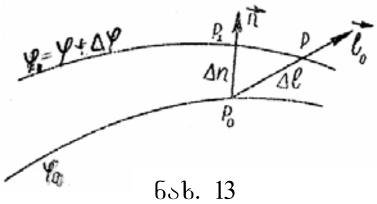
$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta l}$$

ახლა დავუშვათ P_0 წერტილიდან გადაადგილება ხდება P_1 წერტილში $\vec{n}$-ის მიმართულებით, სადაც $\vec{n}$ არის φ_0 ზედაპირის ნორმალი φ-ის ზრდის მიმართულებით P_0-ში. ვთქვათ $\vec{n}$ ნორმალი φ_1 ზედაპირს კვეთს P_1 წერტილში. P_1 არის φ_1 ზედაპირის წერტილი, რომელში φ_1 აქვს ისეთივე მნიშვნელობა, როგორც P-ში. $(\varphi_1(P) = \varphi_1(P_1))$ (ნახ. 13). φ ფუნქციის წარ $\vec{n}$-ის მიმართულებით



ნახ. 12

წინა ფორმულის თანახმად:



ნახ. 13

$$\lim_{P_0P_1 \to 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{P_0P_1} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$ რადგან

$$\Delta l = P_0P = \frac{PP_1}{\cos\gamma} = \frac{\Delta n}{\cos\gamma}$$

საიდანაც: $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{P_0P \to 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{P_0P} = \lim_{P_0P_1 \to 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{P_0P_1} \cos\gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos\gamma$

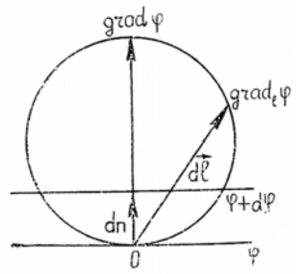
მივიღეთ, რომ φ ფუნქციის მანძილით წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით ტოლია ამ ფუნქციის წარმოებულის $\vec{n}$ ნორმალით, გამრავლებულს $\vec{l}$ და $\vec{n}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსზე.

ვექტორს რომლის სიდიდე ტოლია $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$-ის და მიმართულია დონის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ φ-ს ზრდის მიმართულებით, ეწოდება φ სკალარის გრადიენტი, ვღებულობთ:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}, |\vec{n}| = 1$$

ამგვარად, φ ფუნქციის გრადიენტი არის ვექტორი, რომლის გასწვრივ φ-ის ზრდის სიჩქარე მაქსიმალურია და სიდიდით ტოლია ამ მიმართულებით φ ფუნქციის მანძილის ერთეულზე ცვლილების.

ფუნქციის გრადიენტის განმარტების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ერთიმეორისგან უსასრულოდ ახლოს მდებარე ორი φ და $\varphi + d\varphi$ დონის ზედაპირი (ნახ. 14). 0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში ეს ორი ზედაპირი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი პარალელური ბრტყელი ზედაპირი, რომელთა სათანადო წერტილების ნორმალების მიმართულება თანხვედრილი იქნება. როგორც ვიცით $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\gamma$ ან $grad_l\varphi = |grad\varphi|\cos\gamma$.



ნახ. 14

რადგან $\cos_\gamma \leq 1$ ამიტომ $|grad\varphi| \geq grad_l\varphi$. თუ 0 წერტილიდან ავაგებთ $grad_l\varphi$ ვექტორებს $\vec{l}$-ის ყველა მიმართულებით, ისინი თავის ბოლოებით აღწერენ სფერულ ზედაპირს. ამ ვექტორებს შორის ყველაზე მეტი იქნება $grad\varphi$ ვექტორი. ამრიგად φ ფუნქციის გრადიენტი ვექტორია, რომლის მიმართულებით ყველაზე სწრაფად იზრდება φ ფუნქცია, ხოლო გრადიენტის სიდიდე განისაზღვრება ფუნქციის ზრდის სიჩქარით მანძილის ერთეულზე.

გრადიენტი აიღება მხოლოდ სკალარული ველის აღმწერი სკალარული ფუნქციიდან, მისი გრადიენტ გვაძლევს ვექტორს და აღწერს ვექტორულ ველს. მართლაც ვთქვათ $\varphi = \frac{q}{r}$, ამ შემთხვევაში ერთნაირი დონის ზედაპირები სფეროებია და ნორმალის მიმართულება ნებისმიერ წერტილში თანხვდება ამ წერტილის რადიუს ვექტორის მიმართულებას, ამიტომ φ-ის

გრადიენტი განისაზღვრება ასე $grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$ სადაც $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ არის ერთეულის სიგრძის ვექტორი ნორმალის – რადიუს ვექტორის გასწვრივ.

მივიღებთ $grad\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{a}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ და წარმოადგენს ვექტორს

თუ φ მხოლოდ რადიუს-ვექტორის ფუნქციაა, ე.ი. არ არის დამოკიდებული მიმართულებაზე, მაშინ ამ ფუნქციის გრადიენტი, როგორც ზემოთ მოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, გამოითვლება ასე: $grad\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(r))\frac{\vec{r}}{r}$

რადგან $r(x, y, z)$ კოორდინატების ფუნქციაა, ამიტომ $grad\varphi$-ის მდგენელებისათვის გვექნება $grad_x\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)$, $grad_y\varphi = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r)$, $grad_z\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r)$.

რადგან $grad_x\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(r))\frac{x}{r}$, $grad_y\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(r))\frac{y}{r}$, $grad_z\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\frac{z}{r}$, ამიტომ $grad\varphi$-ს გამოსათვლელი ფორმულა იქნება

$grad\varphi = \vec{i}\,grad_x\varphi + \vec{j}\,grad_y\varphi + \vec{k}\,grad_z\varphi$ ანუ $grad\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

ვექტორული ∇ ოპერატორი $\nabla = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, არის ნაბლა ოპერატორი და φ ფუნქციის გრადიენტი ჩაიწერება $grad\varphi = \nabla\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$

რაიმე $\vec{A}$ ვექტორთან ∇ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს აღნიშნავენ შემდეგნაირად:

$$div\vec{A} = (\nabla\vec{A}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z)$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

და უწოდებენ $\vec{A}$ ვექტორის დივერგენცს. ვექტორის დივერგენცი სკალარული სიდიდეა.

∇ ვექტორის და $\vec{A}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი გვაძლევს ვექტორის როტორს (ცირკულაციას) და გამოისახება: $rot\ \vec{A} = \left|\vec{\nabla}\,\vec{A}\right| = \vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

5. ცდომილებათა თეორიის ძირითადი დებულებები

ფიზიკური სიდიდის გაზომვა ნიშნავს მის შედარებას იმავე გვარის ფიზიკურ სიდიდესთან, სპეციალური გამზომი საშუალებების (ხელსაწყოების) გამოყენებით.

გაზომვას, რომლის დროსაც ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობას უშუალოდ ვსაზღვრავთ ცდით, პირდაპირი გაზომვა ეწოდება. ასეთი გაზომვის მაგალითია ტემპერატურის გაზომვა თერმომეტრით, დენის ძალის – ამპერმეტრით და სხვა. პირდაპირი გაზომვისას სიდიდეების მნიშვნელობები უშუალოდ აითვლებიან ხელსაწყოებზე.

არაპირდაპირი გაზომვების შემთხვევაში, საძიებელი სიდიდეების განსაზღვრისას, ეყრდნობიან სხვა ფიზიკური სიდიდეების პირდაპირი გაზომვის შედეგს, რომლებთანაც საძიებელი სიდიდე ფუნქციონალურ კავშირშია.

გაზომვის ცდომილებები შეიძლება იყოს სისტემატური, შემთხვევითი და უხეში.

უხეში ცდომილებები დაკავშირებულია გამზომი ხელსაწყოების დაზიანებასთან, ექსპერიმენტატორის შეცდომებთან ანათვლის აღებისას ან გაზომვის პირობების მკვეთრ ცვლილებასთან.

სისტემური ცდომილება ორი სახისაა: მეთოდური და ინსტრუმენტალური.

მეთოდური ცდომილება გამოწვეულია მოვლენის ფიზიკური თეორიის, გაზომვის მეთოდის და საძიებელი სიდიდის საანგარიშო ფორმულის ნაკლოვანებებით.

ინსტრუმენტალური ცდომილება გამოწვეულია დანადგარის კონსტრუქციის და გამზომი ხელსაწყობის არასრულფასოვნებით.

გაზომვის შემხვევითი ცდომილებები ისეთი ცდომილებებია, რომელთა აბსოლუტური სიდიდეები და ნიშანი

იცვლებიან ერთი და იგივე ფიზიკური სიდიდის მრავალჯერადი გაზომვებისას. მათი გამომწვევი ფაქტორები მრავალია და არ ექვემდებარებიან აღრიცხვას. შემთხვევით ცდომილებები თან სდევს ნებისმიერ გაზომვას, მათი თავიდან აცილება შეუძლებელია.

ცდომილებათა თეორიის საშუალებით შეიძლება გამოვითვალოთ მოსალოდნელი ცდომილება და დავადგინოთ საზღვრები, რომელთა შორისაც უნდა იყოს მოთავსებული გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა. ცდომილებათა სრული თეორიის განხილვა წარმოადგენს საკმარისად რთულ ამოცანას. ჩვენ გავეცნობით დამუშავების ძირითად და გავრცელებულ მეთოდებს.

ცდომილების შემცირების მიზნით მიზანშეწონილია საძიებელი სიდიდის მრავალჯერადი გაზომვა. მრავალი გაზომვის საშუალო არითმეტიკული, ცხადია ყველაზე ახლოს იქნება გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან. დავუშვათ ჩატარდა x ფიზიკური სიდიდის n-ჯერ გაზომვა და გაზომვის შემდეგად მიღებული იქნა $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ მნიშვნელობები. გასაზომი ფიზიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა $< x >$ იქნება

$$< x > = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ცალკეული გაზომვების აბსოლუტური ცდომილებები

$$|< x > - x_1| = \Delta x_1$$

$$|< x > - x_2| = \Delta x_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$|< x > - x_n| = \Delta x_n$$

x სიდიდის საშუალო აბსოლუტური ცდომილება იქნება:

$$< \Delta x > = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x$$

გასაზომი x სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა მოთავსებული იქნება $< x > - < \Delta x >$ და $< x > + < \Delta x >$ სიდიდეებს შორის, ცდის პასუხი ჩაიწერება:

$$< x > - < \Delta x > \leq x \leq < x > + < \Delta x >$$

რომელსაც ხშირად ასე წარმოადგენენ:

$$x = < x > \pm < \Delta x >$$

მხოლოდ აბსოლუტური ცდომილება ვერ განსაზღვრავს გაზომვის სიზუსტეს. ერთი და იგივე აბსოლუტური ცდომილება შეიძლება მცირედ ჩაითვალოს ერთ შემთხვევაში და პირიქით, ძალიან უხეშად სხვა შემთხვევისათვის, ეს დამოკიდებულია გასაზომი ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობაზე. გაზომვის სიზუსტის შესაფასებლად საჭიროა განისაზღვროს ფარდობითი ცდომილება. ფარდობითი ცდომილება არის აბსოლუტური ცდომილების შეფარდება გასაზომი ფიზიკური სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან, ის გვიჩვენებს გასაზომი სიდიდის რა ნაწილს შეადგენს აბსოლუტური ცდომილება. ჩვეულებრივ ფარდობით ცდომილებას პროცენტებში გამოსახავენ. ცდის სიზუსტე განისაზღვრება საშუალო ფარდობითი ცდომილებით $\delta \langle x \rangle = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$.

თუ ცალკეულ გაზომვათა შემთხვევაში ცდომილებები არ აღემატება იმ შეცდომას, რასაც ხელსაწყო იძლევა, საკმარისია ჩატარდეს ერთჯერადი გაზომვა. (მაგალითად: ტემპერატურის გაზომვა თერმომეტრით). იმ შემთხვევაში როდესაც შეიძლება შემოვიფარგლოთ ერთი გაზომვით, აბსოლუტური ცდომილება ხელსაწყოს უმცირესი დანაყოფის ნახევრის ტოლი იქნება. მაგალითად, თუ თერმომეტრის უმცირესი დანაყოფი 1^0-ია, მაშინ აბსოლუტური ცდომილება აიღება $0,5^0$.

არაპირდაპირი გაზომვების შემთხვევითი ცდომილებების გამოთვლა.

სიდიდეების არაპირდაპირი გამოთვლებისას ფიზიკური F სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$F = F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$, სადაც $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ ფიზიკური სიდიდის პირდაპირი გაზომვის შედეგებია. არაპირდაპირი გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება ΔF გამოითვლება ფორმულით $\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}|\Delta x_1|\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}|\Delta x_n|\right)^2}$, (1)

სადაც $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, F ფუნქციის კერძო წარმოებულია x_i-ით; Δx_i აბსოლუტური ცდომილებაა x_i სიდიდის გაზომვისას.

არაპირდაპირი, (ირიბი) გაზომვის შედეგს წარმოადგენენ:

$F = \langle F \rangle \pm \Delta F$, სადაც $\langle F \rangle = F(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle \ldots \langle x_n \rangle)$ - ფუნქცია F-ის მნიშვნელობა შეესაბამება $\langle x_i \rangle$-ბის საშუალო

მნიშვნელობებს. ფარდობითი ცდომილებისთვის $\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle}$ გვექნება

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\langle F \rangle}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\Delta x_i)\right)\right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\langle F \rangle}\left(\frac{\partial}{x_i} \ln F\,(\Delta x_i)\right)\right]^2} \quad (2)$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial x} \ln F = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x}$

გამოვითვალოთ ცდომილება ცილინდრული ფორმის სხეულის სიმკვრივის განსაზღვრისას:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}; \quad \rho = f(m, d, h)$$

სადაც ρ - სხეულის სიმკვრივეა, m - მისი მასა, d- ცილინდრის დიამტერია, h- მისი სიმაღლეა.

(1) ფორმულით გამოვითვალოთ აბსოლუტური ცდომილება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi h^3 h}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{4m}{\pi d^2 h^2};$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{4\Delta m}{\pi d^2 h}\right)^2 + \left(\frac{8\Delta d}{\pi d^3 h}\right)^2 + \left(\frac{4m \Delta h}{\pi d^2 h^2}\right)^2}$$

სადაც Δm, Δd, Δh - პირდაპირი გაზომვების აბსოლუტური ცდომილებებია – მასის, დიამეტრის და სიმაღლის.

გამოთვლების პასუხია $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$

ცდომილებების გამოთვლა (2) ფორმულით

გავალოგარითმოთ ρ-ს ფორმულა:

$\ln \rho = \ln m + \ln 4 - \ln \pi - 2\ln d - \ln h$.

განსაზღვროთ წარმოებულები $\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i}$:

$$\frac{\partial}{\partial m} \ln \rho = \frac{1}{m}, \qquad 2\frac{\partial}{\partial d} \ln \rho = 2\frac{1}{d}, \qquad \frac{\partial}{\partial m} \ln \rho = \frac{1}{h}$$

ფარდობითი ცდომილება:

$$\delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

სადაც m, d, h- სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობებია, $\Delta m, \Delta d, \Delta h$-პირდაპირი გაზომვების ცდომილებებია, $\Delta \rho = \delta \rho \langle \rho \rangle$ – აბსოლუტური ცდომილებაა.

გამოთვლების პასუხია $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$

აბსოლუტურ ცდომილებას და საშუალო შედეგს ამრგვალებენ შემდეგნაირად:

• თუ პირველი უკუსაგდები ციფრი მეტია 4-ზე, მაშინ მის შემდეგ ციფრს ემატება ერთი. მაგალითად, 18,6782 დამრგვალებისას მეასედამდე გვექნება 18,68.

• თუ პირველი უკუსაგდები ციფრი ნაკლებია ან ტოლია 4, მაშინ ბოლო ციფრი არ იცვლება. მაგალითად, თუ ვამრგვალებთ მეასემდე 29,3531, გვექნება 29,35.

• თუ დასამრგვალებელი ნაწილის ბოლო რიცხვშია 5, მაშინ მას ამრგვალებენ ისე, რომ ბოლო რიცხვი დარჩეს ლუწი. მაგალითად მეათემდე დამრგვალებისას 25,65 ჩაიწერება 25,6, ხოლო 27,75 იქნება 27,8.

საშუალო არითმეტიკული მეთოდით ცდომილებათა გამოთვლის წესი:

1) ერთი და იგივე უცვლელი სიდიდის გაზომვა ხდება მრავალჯერადად ერთნაირ პირობებში.

2) ყველა გაზომვა წარმოებს ერთნაირი ათვლის ცდომილებით

3) ამ მეთოდს იყენებენ იმ შემთხვევაში, როდესაც განსხვავება ცალკეულ გაზომვებს შორის აღემატება თითოეული გაზომვის ან დასაშვებ ინსტრუმენტალურ ცდომილებას.

4) თუ საძიებელი სიდიდე მნიშვნელოვანია (დიდია) და დამოკიდებულია გაზომვების მრავალჯერადობაზე, მაშინ პრაქტიკულად სავსებით საკმარისია გაზომვების იმდენჯერ გამეორება, რომ საშუალო არითმეტიკული ცდომილება მიუახლოვდეს დასაშვებ ინსტრუმენტალურს, ან დაყვანილ იქნას ათვლის ცალკეული გაზომვის ცდომილებაზე.

5) თუ განმეორებითი გაზომვისას მიიღება ერთი და იგივე შედეგები, მაშინ გაზომვის ცდომილებად მიიღებენ გამზომ ხელსაწყოს, ან ინსტრუმენტალურ ცდომილებას.

შენიშვნის სახით აღვნიშნავთ, რომ საშუალო არითმეტიკული ცდომილება დაკავშირებულია საშუალო კვადრატულ ცდომილებასთან ფორმულით

$\sigma \approx \frac{5}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\langle\Delta x\rangle$ სადაც $\langle\Delta x\rangle = \frac{\sum|x_i-\langle x\rangle|}{n}$

თუ მივიჩნევთ, რომ $[n(n-1)]^{\frac{1}{2}} \approx n - \frac{1}{2}$, მაშინ წინა ფორმულა შეიძლება ჩავწეროთ გამოთვლებისათვის იოლ ფორმაში $\sigma \approx \frac{5}{4}\frac{\sum|x_i - \langle x \rangle|}{n-\frac{1}{2}}$.

ქვემოთ ცხრილის სახით მოგვყავს აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებების ფორმულები. a და b მიახლოებითი რიცხვებია, Δa, Δb-შესაბამისი აბსოლუტური ცდომილებების საზღვრები, $c = const$.

N	ალგებრული გამოსახულება	მაქსიმალური ცდომილება	
		აბსოლუტური	ფარდობითი
1	$a + b$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$
2	$a - b$	$\Delta a + \Delta b$	$\frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$
3	$c.a$	$c.\Delta a$	$\frac{\Delta a}{a}$
4	$\frac{a}{c}$	$\frac{\Delta a}{c}$	$\frac{\Delta a}{a}$
5	$a.b$	$a\Delta b + b\Delta a$	$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
6	$\frac{a}{b}$	$\frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$	$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
7	a^n	$na^{n-1}\Delta a$	$n\frac{\Delta a}{a}$
8	$\sqrt[n]{a}$	$\frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$	$\frac{1}{n}\frac{\Delta a}{a}$

როგორც ფორმულები აჩვენებენ, აბსოლუტური ცდომილების მოძებნის წესები ემთხვევა გადიფერენციალების წესებს, იმ განსხვავებით რომ აბსოლუტურ ცდომილებათა ფორმულებში დამოუკიდებელი ცვლადების დიფერენციალები შეცვლილია ფიზიკურ სიდიდეთა გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებებით და კერძო წარმოებულები აღებულია დადებითი ნიშნებით. ფარდობითი ცდომილების წესები კი ემთხვევა ლოგარითმულ გადიფერენციალების შესაბამის წესებს.

გამოყენებული ლიტერატურა

1) И.В. Савельев. «Курс общей физики» т.1. «Наука», М. 1970.

2) მ. გობეჯიშვილი: ზოგადი ფიზიკის კურსი. თბილისი. 1975.

3) Андре Анго. «Математика для электро и радиоинженеров». «Наука». М. 1967.

4) Ф.Ж. Скваирс. «Практическая физика». «мир». 14. 1971.

5) И.Н. Кибец, В.И. Кибец. «Физика. Справочник». Харьков. 1997.

იბეჭდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 01.05.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 18.05.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 2. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant, scripta manent