თ. ვეკუა

რიცხვითი მეთოდები და მოდელები

(Mathcad-ის ბაზაზე)

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თ. ვეკუა

რიცხვითი მეთოდები და მოდელები

(Mathcad-ის ბაზაზე)

რეგისტრირებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2009

წინამდებარე სახელმძღვანელოში “რიცხვითი მეთოდები და მოდელები” გადმოცემულია პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი პრობლემები. სახელდობრ: წრფივი და არაწრფივი განტოლებათა სისტემების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები. ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხები. დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი საკითხები. ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმისა და წრფივი დაპროგრამების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები. ჩვეულებრივი და კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის საკითხები. ფრედგოლმისა და ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები. ამ ამოცანების ამოხსნა დაყვანილია კონკრეტულ რიცხვით შედეგამდე ავტორის მიერ შედგენილი პროგრამებითა და Mathcad-ის პროგრამული პაკეტების საშუალებით.

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია საბუნებისმეტყველო, საინჟინრო-ტექნიკური და ეკონომიკური პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის; აგრეთვე შეიძლება გამოყენებულ იქნეს როგორც ცნობარი აღნიშნული მეთოდებითა და მოდელებით დაინტერესებულ პირთა მიერ.

რედაქტორი თსუ-ს პროფესორი ჯ. **როგავა**
რეცენზენტები: სრული პროფესორი **დ. ნატროშვილი**
სრული პროფესორი **თ. მაჭარაძე**

ISBN 978-9941-14-550-6
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant, scripta manent

წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

კომპიუტერული ტექნოლოგიების ეპოქაში დიდად გაიზარდა მათემატიკის როლი ტექნიკური, ეკონომიკური და მრავალი გამოყენებითი ამოცანების გადაწყვეტის საქმეში. კომპიუტერული პროგრამების პაკეტები იძლევა საშუალებას-ძვირადღირებული ტექნიკური ექსპერიმენტი შეიცვალოს კომპიუტერული ექსპერიმენტით. ამისათვის აუცილებელია გამოყენებითი ამოცანის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის აგება, მისი თეორიული გამოკვლევა და მიახლოებით რიცხვითი ანალიზის ჩატარება კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით.

სახელმძღვანელოს თითქმის ყველა პარაგრაფში განხილულია ტიპიური მაგალითები, რომელთა ამოხსნისა და გაანალიზებისათვის საჭირო მათემატიკური აპარატი გადმოცემულია შესაბამის განაკვეთში. ყოველი თავის ბოლოში სავარჯიშოების სახით დართულია მაგალითები, რომელთა ამოხსნა დიდად დაეხმარება მკითხველს პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრის უნარ-ჩვევების გამომუშავებაში. ამავდროულად ყოველი თავის ბოლო პარაგრაფებში ფართოდ არის წარმოდგენილი Mathcad-ის გამოყენებითი პროგრამების პაკეტები. ყველა განაკვეთის შესაბამისი მაგალითები და ამოცანები დაყვანილია კონკრეტულ რიცხვით შედეგამდე. წარმოდგენილია შესაბამისი პროგრამები Mathcad-ის ენაზე. ამგვარად სახელმძღვანელოში მკითხველი შეხვდება მრავალ პრაქტიკულ ამოცანას უმაღლესი მათემატიკის თანამედროვე კურსიდან, რომელთა ამოხსნა დაიყვანება კონკრეტულ რიცხვით შედეგამდე.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ აქ მოყვანილი პროგრამების დანიშნულებაა დაინტერესებულმა პირმა შეძლოს გამოყენებითი პროგრამების შედგენა, ძირითადი საინჟინრო და ეკონომიკური ამოცანების სარეალიზაციოდ რის გამოც არ გვიცდია პროგრამა ყოფილიყო უნივერსალური.

სახელმძღვანელოში განხილულია ყველა სახის წრფივ განტოლებათა სისტემების, ფუნქციათა აპროქსიმაციის, რიცხვითი გაწარმოებისა და ინტეგრების, ოპტიმიზაციის, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისა და განტოლებათა სისტემების, კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების, ფრედგოლმისა და ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები.

ვფიქრობთ, რომ შემოთავაზებული სახელმძღვანელო მნიშვნელოვნად დაეხმარება სტუდენტებს და მეცნიერ-მკვლევარებს იმ ძირითადი მათემატიკური მეთოდების დაუფლებაში, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირებასა და გამოკვლევაში და შეუწყობს ხელს შესაბამისი პროფესიონალური უნარ-ჩვევების გამომუშავებას.

წინასიტყვაობის ბოლოს უდიდეს მადლობას ვუხდი რედაქტორს პროფესორ **ჯემალ როგავას** და რეცენზენტებს სრულ პროფესორებს **დავით ნატროშვილსა** და **თენგიზ მაჭარაძეს** სასარგებლო რჩევებისათვის. ასევე მადლობას ვუხდი **თაზო (თევდორე) ვეკუას** კურსის კომპიუტერზე აწყობისათვის და ნახაზების აგებისათვის.

ავტორი მადლობით მიიღებს ყოველგვარ საქმიან შენიშვნას წიგნის შემდგომი გაუმჯობესების მიზნით.

თ. ვეკუა

თავი I
წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

§ 1.1. აუცილებელი ცნობები ალგებრიდან. მატრიცები და დეტერმინანტები.

წინასწარ გავიხსენოთ წრფივი ალგებრიდან ის მასალა, რომელიც ეხება მატრიცთა გარკვეულ თვისებებს.

m სტრიქონისა და n სვეტისაგან შედგენილ $a_{ij}=(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$ ნამდვილ რიცხვთა მართკუთხა ცხრილს mxn განზომილებიანი მატრიცა ეწოდება. იგი ასე ჩაიწერება

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn} \qquad \text{ან} \qquad A=(a_{ij})_{mxn}$$

a_{ij} რიცხვებს ეწოდება მატრიცის ელემენტები. თუ $m=n$, მაშინ მატრიცას ეწოდება n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, ხოლო a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} ელემენტებს მთავარი დიაგონალის ელემენტები.

მატრიცებიდან აღსანიშნავია:

1. სტრიქონ-მატრიცა $A_{1xn}=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$

2. სვეტ-მატრიცა

$$A_{mx1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix}$$

3. ნულოვანი მატრიცა

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

4. სამკუთხა მატრიცა

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{l}{......................................} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ან} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \; ... & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} ... & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{...........................} \\ a_{n1} & a_{n2} ... & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. დიაგონალური მატრიცა

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0...0 & 0 \\ 0 & d_{22}...0 & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{.............} \\ 0 & 0...0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

6. ერთეულოვანი კი

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0...0 & 0 \\ 0 & 1...0 & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{...........} \\ 0 & 0....0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. კანონიკური მატრიცა

$$A_r = \begin{pmatrix} E_r & ... & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{............} \\ 0 & ...... & 0 \end{pmatrix}$$

8. ტრანსპონირებული მატრიცა

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

E_r თავის მხრივ წარმოადგენს ერთეულოვან rxr-ზე მატრიცას.

ორი $A=(a_{ij})_{mxn}$ და $B=(b_{ij})_{mxn}$ მატრიცები ტოლია თუ $a_{ij}=b_{ij}$.

K ნამდვილი რიცხვის ნამრავლი A მატრიცაზე განისაზღვრება ტოლობით:

$$K \cdot A=(Ka_{ij})_{mxn}$$

ორი ერთი და იგივე განზომილების A და B მატრიცთა ჯამი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{mxn}$$

თუ A მატრიცის სვეტების რაოდენობა ტოლია B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობისა ე.ი. $A=(a_{ij})_{mxr}$ და $B=(b_{ij})_{rxn}$, მაშინ მატრიცების ნამრავლი განი-საზღვრება ტოლობით:

$$A \cdot B=C$$

სადაც $C=(c_{ij})_{mxn}$, ხოლო

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

ნებისმიერი მატრიცა მიიყვანება კანონიკურ სახეზე შემდეგი ელემენტარული გარდაქმნებით:

1°. სტრიქონების (სვეტების) გადაადგილება;

2°. ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ნულისაგან განსხვავებულ ერთი და იგივე რიცხვზზე გამრავლება (გაყოფა);

3°. ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტებთან მიმატება (გამოკლება).

A მატრიცის რანგი ეწოდება მისი შესაბამისი კანონიკური A_r მატრიცაში მდგომი ერთეულოვანი E_r მატრიცის რიგს და აღინიშნება სიმბოლოთი rangA=r.

ან r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი, თუ ამ მატრიცის r-ზე მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, ხოლო r რიგის მინორებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. უნდა აღინიშნოს, რომ ელემენტარული გარდაქმნების ჩატარებისას მატრიცის რანგი არ იცვლება.

დეტერმინანტები: ყოველ კვადრატულ $A=(a_{ij})_{mxn}$ მატრიცას გარკვეული წესით შეესაბამება რაიმე ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ეწოდება დეტერმინანტი და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\Delta = \det A = |A|$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ მეორე რიგის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი გამოითვლება ტოლობით

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12},$$

ხოლო მესამე რიგის მატრიცის შესბამისი დეტერმინანტი გამოითვლება შემდეგნაირდ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

შევნიშნოთ, რომ M_{ik}-მინორი, წარმოადგენს A მატრიცაში i-ური სტრიქონისა და k-ური სვეტის ამოშლის შედეგად მიღებულ დეტერმინანტს, ხოლო a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი n-ური რიგის A მატრიცასათვის ერთმანეთის ტოლია რიცხვები

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}\ , \quad i = 1, 2, ..., n \quad \text{და} \quad \Delta = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

თუ კვადრტული A მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი $|A| = 0$, მაშინ ასეთ მატრიცას ეწოდება გადაგვარებული. წინააღმდეგ შემთხვევაში არაგადაგვარებული (გადაუგვარებელი).

ყოველი გადაუგვარებელი A მატრიცასათვის არსებობს შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

მტკიცდება, რომ

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*\ , \ \text{სადაც} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ \dots\ A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22}\ \dots\ A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}\ A_{2n}\ \dots\dots\ A_{nn} \end{pmatrix}$$

§1.2. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შებრუნებული მატრიცით. კრამერის ფორმულები

ვთქვათ, ამოსახსნელია n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}_{nx1} \qquad (1.2)$$

როცა B=0 (1.1) სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში არაერთგვაროვანი.

A არის უცნობთა კოეფიციენტებისაგან შედგენილი კვადრატული მატრიცა;

X – საძიებელი სვეტ მატრიცა;

B – სისტემის თავისუფალი წევრებსაგან შედგენილი სვეტ მატრიცი.

განტოლებათა (1.1) სისტემის ამონახსნი ეწოდება $x_1, x_2, \ldots x_n$ ცვლადების იმ მნიშვნელობათა ერთობლიობას, რომელიც (1.1) სისტემის ყოველ განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად.

თუ სისტემას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, მაშინ მას ეწოდება თავსებდი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არათავსებადი.

(1.2) აღნიშვნების საფუძველზე (1.1) სისტემა მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$A \cdot X = B$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\Delta = det\,\mathrm{A} \neq 0$, მაშინ როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არსებობს შებრუნებული A^{-1} მატრიცი. (1.3) ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1} მატრიცზე, მივიღებთ:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

რადგან $A \cdot A^{-1} = E$, ხოლო $E \cdot X = X$, გვექნება

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{1.4}$$

ფორმულა (1.4) გვაძლევს (1.1) წრფივ განტოლებათა სისტემის ერთადერთ ამონახსნს. ამ ფორმულიდან გარკვეული გარდაქმნებით მიიღება კრამერის ფორმულები.

რადგან სისტემის შესაბამისი დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ (1.1) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1.5}$$

სადაც Δi-ით აღნიშნულია დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება Δ-გან, მასში i-ური სვეტის ელემენტების ნაცვლად B სვეტ-მატრიცის ელემენტების ჩასმით. (1.5) ფორმულებს **კრამერის** ფორმულები ეწოდება.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases} \qquad (1.6)$$

ამოხსნა. (1.6) სისტემა ჩავწეროთ მატრიცული სახით

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

მოცემული სისტემის შესაბამისი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

გმოვთვალოთ შებრუნებული მატრიცი A^{-1}, ამისათვის ვიპოვოთ მატრიცის ყველა ელემენტის ალგებრული დამატებები:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -10 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1.4)-ის ძალით, მივიღებთ

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -10 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ამგვარად, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$.

იგივე (1.6) სისტემა ამოვხსნათ კრამერის ფორმულებით, ამისათვის დამხმარე დეტერმინანტები იქნება:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-10; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix}=-5;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix}=-15$$

(1.5) ფორმულებით მივიღებთ:

$$x_1=\frac{-10}{-5}=2; \qquad x_2=\frac{-5}{-5}=1 \qquad \text{და}$$

$$x_3=\frac{-15}{-5}=3$$

ეხლა შევადგინოთ (1.1) სისტემის შესაბამისი გაფართოებული მატრიცა

$\bar{A}$, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ თეორემა, რომელიც გაგვცემს პასუხს წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობაზე (ამოხსნადობაზე).

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. იმისათვის, რომ (1.1) სისტემა იყოს თავსებადი, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\,\bar{A} \qquad (1.8)$$

ვთქვათ, ეხლა $r = n = \mathrm{rang}A$, მაშინ (1.1) სისტემა თავსებადია და მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო თუ $r<n$, მაშინ – ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

თუ (1.8) პირობა არ სრულდება მაშინ (1.1) სისტემას მონახსი არა აქვს. თუ $B=0$, მშინ წფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი სისტემა და როცა $r = n$, მაშინ მას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი, ხოლო, როცა $r<n$ – არანულოვანი ამონახსნიც. ე.ი. ერთგვაროვანი სისტემა ყოველთვის თავსებადია.

§1.3. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გაუს-ჟორდანის მეთოდით

ეს მეთოდი ითვალისწინებს წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას შემდეგი გზით. ამოვწეროთ მოცემული სისტემის შესაბამისი გაფართოებული (1.7) მატრიცა და ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით მივიყვანოთ მასში შემავალი A მატრიცა კანონიკურ სახეზე. ეს უკანასკნელი იქნება Ā მატრიცის საბოლოო სახე, საიდანაც, როგორც ამას მაგალითის ამოხსნის დროს ვნახავთ, გავარკვევთ თავსებადობის საკითხს და სისტემის თავსებადობის შემთხვევაში, ამოვწერთ საძიებელ ამონახსნს. სისტემის ამოხსნის ეს გზა წრმოადგენს გაუს-ჟორდანის მეთოდის მოდიფიკაციას.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ სისტემის ამ მეთოდით ამოხსნისას არ არის აუცილებელი წინასწარ დავადგინოთ სისტემის თავსებადობის საკითხი, ვინაიდან Ā მატრიცის საბოლოოო სახე თვითონ გვიჩვენებს, სისტემა არათავსებადია, სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე ან სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

მაგალითი 2. ამოვხსათ სისტემა

$$\begin{aligned} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 7 \\ 3\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

ამოხსნა. ამოვწეროთ მოცემული სისტემის შესაბამისი გაფართოებული მატრიცა და ელემენტარული გარდაქმნებით A მატრიცა მივიყვაოთ სამკუთხა მატრიცაზე, გვექნება:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

აქ პირველი სტრიქონი გავამრავლეთ 3-ზე და გამოვაკელით მეორე სტრიქონს, მერე პირველი სტრქონი დაუმატეთ მესამე სტრიქონს. ხოლო მეორე სტრიქონი გავყავით -7-ზე.

როგორც ჩანს rangA=rangĀ=3 ე.ი. სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რადგან r = n = 3. ეხლა ამონახსნის მოსაძებნად გავაგრძელოთ ანალო-გიური გარდაქმნები, ვიდრე A მატრიცას არ მივიყვანთ კანონიკურ სახემდე. გვექნება:

$$> \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ჩვენ მივიღეთ Ā მატრიცის საბოლოო სახე, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული სისტემა ეკვივალენტურია შემდეგი სისტემისა

$$\begin{aligned} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= -1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{ანუ} \qquad \begin{aligned} x_1 + 0 + 0 &= -1 \\ 0 + x_2 + 0 &= 1 \\ 0 + 0 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ამგვარად, (1.9) სისტემის ამონახსია:

x_1= -1 x_2 =1 x_3=2.

მაგლითი 3. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი სისტემა:

$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 = 0$$
$$2\cdot x_1 - x_2 + 3\cdot x_3 = 0$$
$$x_1 + 3\cdot x_2 - 4\cdot x_3 = 0$$

ცხადია ამ სისტემის ერთერთი ამონახსნია

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

რადგან $r=2<3$ კრონეკერ-კაპელის თეორემის საფუძველზე ამ სისტემას გააჩია არანულოვანი ამონახსნიც. ვიპოვოთ ეს ამოხსნები, გვექნება

$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = x_3$$
$$x_1 + 3\cdot x_2 = 4\cdot x_3$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{-5\cdot x_3}{7} \qquad x_2 = \frac{11\cdot x_3}{7}$$

ჩავთვალოთ, რომ $x_3=7t$, t-ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ მოცემული სისტემის ამონახსნი იქნება

$x_1=-5t$; $x_2=11t$; $x_3=7t$;

§1.4. სპეციალური სახის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

§1.1.-ში ჩამოთვლილი 1^0, 2^0 და 3^0 ოპერაციებით ჩვენ შეგვიძლია განტოლებათა სისტემა და მისი შესაბამისი მატრიცა დავიყვნოთ სასურველ ფორმაზე, მაგალითად, მივიღოთ სამკუთხა სისტემა:

<u>შემთხვევა ა):</u>

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\
a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\
a_{33}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}\cdot x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{nn}\cdot x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

ცხადია $a_{ii}\neq 0$ ნებისმიერი $i=1,2,\ldots,n$, მაშინ ამ შემთხვევაში (1.10) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რადგან $r=\mathrm{rang}A=n$ და ეს ამონახსნი შეიძლება ჩავწეროთ რეკურენტული ფორმულით შემდეგნირად

$$
x_{n-i} = \frac{b_{n-i} - \sum_{m=0}^{i-1}\left(a_{n-i,\,n-m}\cdot x_{n-m}\right)}{a_{n-i,\,n-i}} \qquad (1.11) \qquad i=1,2,\ldots,n-1
$$

ან რაც იგივეა

$$
x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad\qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,\,n}\cdot x_n}{a_{n-1,\,n-1}}
$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n} \cdot x_n - a_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

....

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1n} \cdot x_n - a_{1,n-1} \cdot x_{n-1} - ...... - a_{12} \cdot x_2}{a_{11}}$$

<u>**შემთხვევა ბ):**</u>

თუ წრფივ განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია შემდეგი ფორმით:

$$\begin{aligned}
&A_{11} \cdot x_1 && .= B_1 \\
&A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 && .= B_2 \\
&A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33}\, x_3 && .= B_3 \qquad (1.12) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A_{n1} \cdot x_1 + A_{n2} \cdot x_2 + A_{n3} \cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{nn} \cdot x_n = B_n
\end{aligned}$$

მაშინ ამ სისტემის ამონახსნიც ჩაიწერება შემდეგი რეკურენტული ფორმულით:

$$x_i = \frac{B_i - \sum_{m=1}^{i-1} \left(A_{i,m} \cdot x_m\right)}{A_{i,i}} \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (1.13)$$

საიდანაც

$$x_1 = \frac{B_1}{A_{11}}$$

$$x_2 = \frac{B_2 - A_{21} \cdot x_1}{A_{22}}$$

$$x_3 = \frac{B_3 - A_{31} \cdot x_1 - A_{32} \cdot x_2}{A_{33}}$$

....

....

$$x_n = \frac{B_n - A_{n1} \cdot x_1 - A_{n2} \cdot x_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - A_{n,n-1} \cdot x_{n-1}}{A_{nn}}$$

<u>**შემთხვევა გ)**</u>: როგორც ვნახეთ, სამკუთხა სისტემების ამოხსნა ადვილია, ამიტომ სხვადასხვა მეთოდების სტრატეგია ხშირად ემყარება განტოლებების ამ ფორმაზე დაყვანას. ამ ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის სხვაობიანი სქემები, ტექნიკის სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანები, კერძოდ, განვიხილოთ სამდაგონალიანი სისტემა, რომელიც მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

(1.14)

ამ სისტემის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ გაუს-ჟორდანის უმრტივესი სქემა. გავყოთ სისტემის პირველი განტოლება b_1-ზე. გადავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$x_1 + p_1 \cdot x_2 = q_1 \qquad (1.15)$$

სადაც

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1} \qquad q_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

მეორე განტოლებიდან x_1 უცნობის გამორიცხვის მიზნით გამოვაკლოთ მას a_2-ზე გამრავლებული (1.15) გამოსახულება, მივიღებთ:

$$\left(b_2 - a_2 \cdot p_1\right) \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = d_2 - a_2 \cdot q_1$$

უკანასკნელი განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x_2 + p_2 x_3 = q_2 \qquad (1.16)$$

სადაც

$$p_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 p_1} \qquad q_2 = \frac{d_2 - q_1 a_2}{b_2 - a_2 p_1}$$

(1.16) თანაფარდობის გამოყენებით და ანალოგიური გარდაქმნით გამოვრიცხოთ x_2 მესამე განტოლებიდან და ა.შ. რის შედეგადაც, მივალთ სისტემამდე ორდიაგონალური მატრიცით, მას ექნება სახე:

$$
\begin{pmatrix}
1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{n-3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \\ d_n
\end{pmatrix}
\qquad (1.17)
$$

ბოლო ორი განტოლება ამოვწეროთ ცხდი სახით გვექნება:

$$x_{n-1} + p_{n-1} \cdot x_n = q_{n-1}$$

$$a_n \cdot x_{n-1} + b_n \cdot x_n = d_n$$

ბოლო განტოლებიდან x_{n-1}-ის გამორიცხვის მიზნით წინა გავამრავლოთ a_n-ზე და გამოვაკლოთ ბოლო განტოლებას, მივიღებთ:

$$\left(b_n - a_n \cdot p_{n-1}\right) \cdot x_n = d_n - a_n \cdot q_{n-1}$$

საიდანაც

$$x_n = \frac{d_n - a_n \cdot q_{n-1}}{b_n - a_n \cdot p_{n-1}} = q_n$$

ამდენად (1.17) სისტემის კოეფიციენტები და მარჯვენა მხარეები გამოითვლება ფორმულებით:

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1} \qquad p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \cdot p_{i-1}} \qquad i = 1, 2, ..n - 1$$

$$q_1 = \frac{d_1}{b_1} \qquad q_i = \frac{d_i - a_i \cdot q_{i-1}}{b_i - a_i \cdot p_{i-1}} \qquad i = 1, 2, ...n \tag{1.18}$$

ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ $x_n=q_n$ ჩატარებული გამოთვლების საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ სამდიაგონალური (1.14) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ალგორითმი, რომელიც შედგება ორი ეტაპისაგან:

I. ეტაპი: (1.18) ფორმულებით ითვლება p_i და q_i მასივები;

II. ეტაპი: შემდეგი ფორმულებით

$$x_n = q_n \qquad x_i = q_i - p_i \cdot x_{i+1} \qquad i = n - 1, ..., 2, 1 \tag{1.19}$$

გამოითვლება საძიებელი ამონახსნი.

ეს ალგორითმი ცნობილია **ფაქტორიზაციის** მეთოდის სახელწოდებით. ამგვარად, I ეტაპი არის ე.წ. პირდაპირი ფაქტორიზაცია, II – კი შებრუნებული ფაქტორიზაცია.

შევნიშნოთ, რომ (1.18) ფორმულებში შემავალი მნიშვნელი ყოველთვის განსხვავდება ნულისაგან

მაგალითი 4. სამდიაგონალური ალგორითმის გამოყენებით ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა

$$
\begin{aligned}
2\cdot x_1 + x_2 \quad\quad\quad &. = 1\\
x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 \quad &. = 1\\
x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 &= 1\\
x_3 + 2\cdot x_4 &= -2
\end{aligned}
\qquad (1.20)
$$

(1.18) ფორმულებით გამოვთვლოთ p_i და q_i სიდიდეები, მივიღებთ:

$$p_1 = \frac{1}{2} \qquad p_2 = \frac{2}{3} \qquad p_3 = \frac{3}{4}$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \qquad q_2 = \frac{1}{3} \qquad q_3 = \frac{1}{2} \qquad q_4 = -2$$

(1.19) ფორმულებით მივიღებთ (1.20) სისტემის ამონახსნს

$x_4=-2$, $x_3=2$, $x_2=-1$, $x_1=1$

ასე, რომ (1.20) სისტემის ამონხსნი არის $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

§1.5. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის იტერაციული მეთოდით

განვიხილოთ (1.1) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, ვიგულისხმოთ, რომ $a_{ii}\neq 0$, $i=1, 2, ..., n$ და ის გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \alpha_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n} x_n$$

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}\cdot x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.21)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \beta_n + \alpha_{n1}\cdot x_1 + \alpha_{n2}\cdot x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n,n-1}\cdot x_{n-1}$$

სადაც

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \alpha_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \qquad i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

ან (1.21) სისტემა მატრიცული ფორმით შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$X = \beta + \alpha\cdot X$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \alpha_{21} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

მივიჩნიოთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთა ნულოვან მიახლოებად ნებისმიერიი რიცხვები, თუნდაც $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n$ ე.ი. $x_1=\beta$, $x_2=\beta,\ldots$, $x_n=\beta n$. უცნობთა ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (1.21) სისტემის მარჯვენა მხარეში. მივიღებთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთათვის ახალ მნიშვნელბებს, რომლებიც სათანადოდ აღვნიშნოთ $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}$-ით.

მატრიცულად ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება

$$X^1 = \beta + \alpha \cdot X^0 \qquad (1.22)$$

სადც

$$X^0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

საზოგადოდ გვექნება

$$X^i = \beta + \alpha \cdot X^{i-1} \qquad (1.23)$$

ჩავწეროთ ეს ტოლობა გაშლილი სახით, გვექნება

$$x_k^{(i)} = \beta_k + \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{kj} \cdot x_j\right) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$x_k^{(0)} = \beta_k \qquad \alpha_{kk} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$x^{(i)}$, i=1,2... სიდიდეების (1.22) ფორმულით მოძებნის წესს მიმდევრობითი მიახლოების ანუ იტერაციის მეთოდი ეწოდება.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ სისტემა

$$5\cdot x_1 + 0.25\cdot x_2 - 0.04\cdot x_3 = 2.44$$

$$0.5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 0.32\cdot x_3 = 7.72$$

$$0.3\cdot x_1 + 11.8\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 8.22$$

<u>**ამოხსნა**</u>. ჩავწეროთ სისტემა (1.21) ფორმით, გვექნება

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.488 - 0.55\cdot x_2 + 0.008\cdot x_3 \\ x_2 &= 1.93 - 0.125\cdot x_1 + 0.08\cdot x_3 \\ x_3 &= 2.74 - 0.1\cdot x_1 - 0.6\cdot x_2 \end{aligned} \qquad (1.24)$$

აქ

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0.05 & 0.008 \\ -0.125 & 0 & 0.08 \\ -0.1 & -0.6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0.488 \\ 1.93 \\ 2.74 \end{pmatrix} = x^{(0)}$$

შევიტანოთ (1.22)-ში ან რაც იგივეა (1.24)-ში, მივიღებთ:

$$x_1^{(1)} = 0.488 - 0.0965 + 0.0219 = 0.4134$$

$$x_2^{(1)} = 1.93 - 0.061 + 0.2192 = 2.0882$$

$$x_3^{(1)} = 2.74 - 0.0488 - 1.158 = 1.5332$$

მიღებული შედეგები შევიტანოთ (1.24)-ში.

$$x_1^{(2)} = 0.488 - 0.1044 + 0.0123 = 0.3959$$

$$x_2^{(2)} = 1.93 - 0.0517 + 0.1227 = 2.0010$$

$$x_3^{(2)} = 2.74 - 0.0413 - 1.2529 = 1.4458$$

$$x_1^{(3)} = 0.488 - 0.10005 + 0.0116 = 0.39955$$

$$x_2^{(3)} = 1.93 - 0.0495 + 0.1157 = 1.9962$$

$$x_3^{(3)} = 2.74 - 0.0396 - 1.2006 = 1.4998$$

ამგვარად, მესამე იტერაციის შედეგად მივიღეთ შემდეგი მიახლოებითი ამონახსენი

$x_1 = 0.3996$ $\qquad$ $x_2 = 1.9962$ $\qquad$ $x_3 = 1.4998$

მოცემული სისტემის ზუსტი ამონახსნია:

$$x_1=0,4; \quad x_2=2; \quad x_3=1,5$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ იაკობის მეთოდის კრებადობისთვის საკმარისია, რომ სისტემის ძირითად მატრიცში ადგილი ჰქონდეს დიაგონალურ დომინირებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამოსავალი განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ უტოლობებს

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right| \qquad \text{ყველა } i\text{-სათვის.}$$

§1,6 **Mathcad**

განვიხილოთ სისტემა Mathcad-ის ძირითადი „ფანჯრები-პანელები,"რომელიც ხშირად გამოიყენება ძირითადი მათემატიკური და ლოგიკური ოპერაციების ჩატარების დროს.

1. Calculator

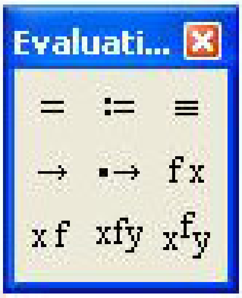
. **კალკულატორი,** გამოიყენება ძირითადი მათემატიკური ოპერაციების ჩასაწერად;

2. Grap

. **გრაფიკი,** გამოიყენება სხვადასხვა სახის გრაფიკების ასაგებად;

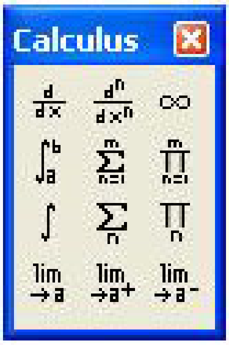
3. Matrix

. **მატრიცა,** მისი გამოყენებით ხდება მატრიცის ფორმირება, მატრიცული ოპერაციებისა და ვექტორების ჩაწერა;



4. Evaluation

. **გამოსახულება,** გამოიყენება გამოთვლების მართვის ოპერატორების ჩასაწერად

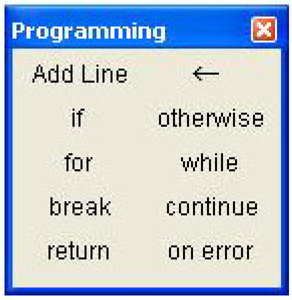


5. Calculus

. **გამოთვლა,** მოიცავს შემდეგ ოპერატორებს: წარმოებულისა და მაღალი რიგის წარმოებულის, კერძო წარმოებულების, განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალებისა და არასაკუთრივი ინტეგრალების, ჯამების, ნამრავლისა და ზღვრების, მათ შორის ცალმხრივი ზღვრების გამოთვლის ოპერატორებს;

6. Boolean

. **ბულის სიმბოლოები,** გამოიყენება ბულის ლოგიკური ოპერატორების ჩასაწერად;

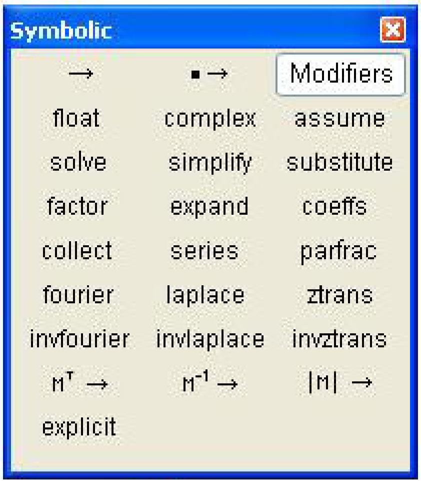


7. Programming

. **პროგრამირება,** Mathcad-ის საშუალებებით დაპროგრამებისათვის;

8. Greek

. **ბერძნული სიმბოლოები,** გამოიყენება პროგრამული სიმბოლოებისა და ოპერატორების ჩასაწერად;



9. Symbolic

. **სიმბოლური** ოპერატორების ჩასაწერად;

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ძირითად საკითხებს :
. მატრიცის ფორმირება;
. მოქმედებანი მატრიცებზე;
. მოცემული მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტის გამოთვლა
. შებრუნებული მატრიცის პოვნა;
. მატრიცის რანგის გამოთვლა;
. სხვადასხვა სახის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა;

რაიმე მატრიცის ფორმალიზაციის მიზნით ანუ A მატრიცის ასაგებად გარკვეულ წინასწარ “+”-ით მონიშნულ ადგილზე ვწერთ A:=, := მინიჭების ოპერატორს ვიღებთ 1. Calculator-იდან ან 4. Evaluation-

დან. მის მერე 3. Matrix-იდან ვიძახებთ მატრიცს, იმავდროულად ეკრანზე გამოჩნდება ფანჯაარა, რომელშიც შეგვაქვს მოცემული მატრიცის განზომილებები და OK-ით მივიღებთ სასურველ განზომილებიან მატრიცას შემდეგი სახით

$$A := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

რომელშიც მონიშნულ ადგილებზე შეგვიძლია შევიტანოთ A მატრიცის შესაბამისი ელემენტების რიცხვითი ან სიმბოლური მნიშვნელობები.

ავაგოთ შემდეგი მატრიცები

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

$$R := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

ვიპოვოთ:

1) kA+mC, 2) 3A-5C, 3) BR

სამუშაო დაფაზე ავკრიფოთ თითოეული მათგანი მივიღებთ:

$$k\cdot A + m\cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\cdot k + c_{11}\cdot m & a_{12}\cdot k + c_{12}\cdot m & a_{13}\cdot k + c_{13}\cdot m & a_{14}\cdot k + c_{14}\cdot m \\ a_{21}\cdot k + c_{21}\cdot m & a_{22}\cdot k + c_{22}\cdot m & a_{23}\cdot k + c_{23}\cdot m & a_{24}\cdot k + c_{24}\cdot m \\ a_{31}\cdot k + c_{31}\cdot m & a_{32}\cdot k + c_{32}\cdot m & a_{33}\cdot k + c_{33}\cdot m & a_{34}\cdot k + c_{34}\cdot m \\ a_{41}\cdot k + c_{41}\cdot m & a_{42}\cdot k + c_{42}\cdot m & a_{43}\cdot k + c_{43}\cdot m & a_{44}\cdot k + c_{44}\cdot m \end{pmatrix}$$

$$m\cdot A - k\cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\cdot m - c_{11}\cdot k & a_{12}\cdot m - c_{12}\cdot k & a_{13}\cdot m - c_{13}\cdot k & a_{14}\cdot m - c_{14}\cdot k \\ a_{21}\cdot m - c_{21}\cdot k & a_{22}\cdot m - c_{22}\cdot k & a_{23}\cdot m - c_{23}\cdot k & a_{24}\cdot m - c_{24}\cdot k \\ a_{31}\cdot m - c_{31}\cdot k & a_{32}\cdot m - c_{32}\cdot k & a_{33}\cdot m - c_{33}\cdot k & a_{34}\cdot m - c_{34}\cdot k \\ a_{41}\cdot m - c_{41}\cdot k & a_{42}\cdot m - c_{42}\cdot k & a_{43}\cdot m - c_{43}\cdot k & a_{44}\cdot m - c_{44}\cdot k \end{pmatrix}$$

$$B\cdot R \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11}\cdot R_{11} + b_{12}\cdot R_{21} & b_{11}\cdot R_{12} + b_{12}\cdot R_{22} & b_{11}\cdot R_{13} + b_{12}\cdot R_{23} \\ b_{21}\cdot R_{11} + b_{22}\cdot R_{21} & b_{21}\cdot R_{12} + b_{22}\cdot R_{22} & b_{21}\cdot R_{13} + b_{22}\cdot R_{23} \\ b_{31}\cdot R_{11} + b_{32}\cdot R_{21} & b_{31}\cdot R_{12} + b_{32}\cdot R_{22} & b_{31}\cdot R_{13} + b_{32}\cdot R_{23} \\ b_{41}\cdot R_{11} + b_{42}\cdot R_{21} & b_{41}\cdot R_{12} + b_{42}\cdot R_{22} & b_{41}\cdot R_{13} + b_{42}\cdot R_{23} \end{pmatrix}$$

ვიპოვოთ: detM, M^T, M^{-1}, MM^{-1}, rankM-რანგი

$$|M| = -11$$

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \rightarrow \frac{-1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 12 & -7 & 2 \\ 4 & 35 & -25 & 15 \\ 3 & 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad M \cdot M^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(M) = 4$$

დეტერმინანტის გამოსათვლელად |X|-ს ვიღებთ Calculator-იდან და მონიშნულ X-ის ადგილზე ჩავწერთ M-ს შემდეგ “=”-ით მივიღებთ დეტერმინანტის მნიშვნელობას. M^{-1} ავიღეთ Symbolic-იდან. ეხლა ამოვხსნათ შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 = 2$$

$$2 \cdot x_2 - x_3 + 2 \cdot x_4 = 1$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5$$

$$x_3 - 5 \cdot x_4 = 0$$

Mathcad-ის სამუშაო დაფაზე ავაგოთ მოცემული სისტემის შესაბამისი A მატრიცი და თავისუფალი წევრებისგან B სვეტ მატრიცი:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ამის შემდეგ კლავიატურიდან ავკრიფოთ lsoslve ოპერატორი-წრფივი სისტემის ამოხსნა და ჩავწეროთ შემდეგი სახით lsoslve(A,B) ბოლოს ტოლობის ნიშანით 1 ან 4-იდან ვღებულობთ მოცემული სისტემის ამონახსნს შემდეგი ფორმით:

$$\mathrm{lsolve}(A,B) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 0 \\ -1.667 \\ -0.333 \end{pmatrix}$$

ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ მოცემული სისტემის ამონახსნია

$$x_1 = \frac{10}{3} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \frac{-5}{3} \qquad x_4 = \frac{-1}{3}$$

ცხადია იგივეს მივიღებთ თუ გამოვიენებთ შემდეგ ფორმულას

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

თუ "lsolve" ოპერატორმა არ მოგვცა პასუხი, მაშინ გამოვთვალოთ სისტემის მატრიცისა და გაფართოებული მატრიცის რანგები, თუ ისინი ტოლია და ნაკლებია სისტემის რიგზე, მაშინ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი და ის მიიღება "Given – Find" ოპერატორების გამოყენებით. მაგალითად განვიხილოთ სისტემა შემდეგი მატრიცით

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(A, B) = \blacksquare$$

$$A1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2 \qquad \mathrm{rank}(A1) = 2$$

რადგან სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლებია სისტემის რიგზე ამიტომ ვისარგებლოთ შემდეგი Given-find ოპერატორით

$$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$$

Given

$$2\cdot x1 + x2 + 2\cdot x3 = 6$$

$$x1 + 2\cdot x3 = 4$$

$$3\cdot x1 + 6\cdot x3 = 12$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{bmatrix} (-2)\cdot x3 + 4 \\ 2\cdot x3 - 2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ამოვხსნათ სამკუთხა სისტემა

$$5\cdot x_0 + 3\cdot x_1 - x_2 + 4\cdot x_3 + x_4 = 9$$
$$x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 + 3\cdot x_4 = 12$$
$$4\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 4\cdot x_4 = 8$$
$$3\cdot x_3 + x_4 = 9$$
$$2\cdot x_4 = 6$$

$$a := \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 8 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_n := \frac{b_n}{a_{n,n}} \qquad n := 4 \qquad i := 1..n$$

$$x_{n-i} := \frac{b_{n-i} - \sum_{m=0}^{i-1} \left(a_{n-i,n-m}\cdot x_{n-m}\right)}{a_{n-i,n-i}} \qquad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ამოვხსნათ სისტემა

$$2\cdot x_0 \text{.................................} = 14$$
$$3\cdot x_0 + 4\, x_1 \text{.....................} = 9$$
$$x_0 + x_1 - 2\, x_2 \text{.............} = 4$$
$$4\cdot x_0 + 5\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 = 16$$

$$a := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$x_i := \frac{b_i - \sum_{m=0}^{i-1} \left(a_{i,m} \cdot x_m\right)}{a_{i,i}} \qquad n := 3$$

$$x_0 := \frac{b_0}{a_{0,0}} \qquad i := 1..n$$

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{lsolve}(a, b) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ცხადია lsolve-ც იგივეს გვაძლევს.

ამოვხსნათ ისევ მაგალითი 5,Mathcad-ის გამოყენებით შესაბამის პროგრამას ექნება სახე

$$X_0 := \begin{pmatrix} 0.488 \\ 1.93 \\ 2.74 \end{pmatrix} \qquad \beta := X_0$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} 0 & -0.05 & 0.008 \\ -0.125 & 0 & 0.08 \\ -0.1 & -0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n := 5$$

$$i := 1..n$$

$$X_i := \beta + \alpha \cdot X_{i-1}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

მივიღეთ ზუსტი ამონახსნი. ეტაპობრივად გვაქვს

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.413 \\ 2.088 \\ 1.533 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0.396 \\ 2.001 \\ 1.446 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.996 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 2 \\ 1.502 \end{pmatrix} \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

მიმდევრობა კრებადია.

მაგალითები

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები

1.1 $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 7\cdot x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ 3\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 1 \end{aligned}$$

1.2 $$\begin{aligned} x + 3\cdot x + 2\cdot x &= 7 \\ x + 2\cdot x - 3x &= 5 \\ 2\cdot x + 5\cdot x + 4x &= 12 \end{aligned}$$

1.3 $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3\cdot x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 19 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

1.4 $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

1.5 $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$$

1.6 $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1.7 $$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1.8 $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1.9 $$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -6 \end{aligned}$$

1.10 $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2.x_1 + 4.x_2 + 6x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

1.11 $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

1.12 $\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 8x_3 &= 16 \end{aligned}$

1.13 $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 &= 0 \\ 3\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$

1.14 $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

1.15 $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \end{aligned}$

1.16 $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

1.17 $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \end{aligned}$

1.18 $\begin{aligned} x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$

1.19
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_2 + 2\cdot x_3 &= 9 \\ 7\cdot x_5 - 8\cdot x_6 &= 5 \\ x_4 + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

1.20
$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 &= 8 \\ 2\cdot x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_4 - x_5 - 3\cdot x_6 &= 1 \\ 2x_4 - x_5 + 8x_6 &= 4 \end{aligned}$$

1,21
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

1.22
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + 3\cdot x_5 &= 2 \\ x_3 + x_4 + 2\cdot x_5 &= 4 \end{aligned}$$

1.23
$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 - x_4 + x_5 + 4x_6 - 7x_7 - 3x_8 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 - 2x_7 + x_8 &= 16 \\ 5x_3 + 6x_4 - x_5 - 12x_6 + 8x_7 - 2x_8 &= 0 \\ 2x_4 + 3x_5 - 4x_6 + 2x_7 + 2x_8 &= 8 \\ 4x_5 + x_6 - 7x_7 - 2x_8 &= 0 \\ 5x_6 + 2x_7 + x_8 &= 7 \\ 3\cdot x_7 + x_8 &= 1 \\ 2x_8 &= 8 \end{aligned}$$

1.24

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 - 6x_6 + 2x_7 - 3x_8 + 2x_9 &= 12 \\
x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 &= 17 \\
3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + x_8 + 4x_9 &= 5 \\
2x_4 + x_5 - 3x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 6x_9 &= 4 \\
4x_5 + x_6 + x_7 - x_8 - 4x_9 &= 1 \\
5x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 8x_9 &= -5 \\
6x_7 + x_8 + 2x_9 &= 5 \\
4x_8 + 2x_9 &= 5 \\
-2\cdot x_9 &= 3
\end{aligned}$$

1.25

$$\begin{aligned}
3\cdot x_1 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= 6 \\
4x_1 + x_2 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &= 5 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ \dots\dots\dots\dots\dots &= -1 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ \dots\dots\dots\dots &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \ \dots\dots\dots\dots &= 0 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 + x_6 \ \dots\dots\dots &= -5 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 \ \dots\dots &= 13 \\
2\cdot x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 + 2x_7 - x_8 \ \dots\dots &= 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \ \dots &= 15 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + 4x_7 + x_8 + x_9 - x_{10} &= 6
\end{aligned}$$

1.26
$$
\begin{aligned}
3\cdot x_1 &= 9\\
2\cdot x_1 - x_2 &= 4\\
4\cdot x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2\\
x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 9\\
3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 &= 9\\
5\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 - 4\cdot x_4 - 5x_5 - x_6 + x_7 &= 20
\end{aligned}
$$

1.27
$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 &= 1\\
2\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 &= 3\\
2\cdot x_2 - x_3 + x_4 &= 4\\
4x_3 - x_4 + x_5 &= -3\\
3\cdot x_4 + x_5 - 3x_6 &= -1\\
2\cdot x_5 + x_6 &= 12
\end{aligned}
$$

1.28
$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 &= -5\\
-x_1 + x_2 - x_3 &= 2\\
5x_2 + 3x_3 - 10x_4 &= -13\\
x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0\\
4\cdot x_4 + 2\cdot x_5 - x_6 &= 0\\
x_5 + 2x_6 - x_7 &= 2\\
x_6 + 2x_7 &= 8
\end{aligned}
$$

ამოხსენით სისტემა იტერაციული მეთოდით

1.29
$$\begin{aligned} 4\cdot x_1 + 0.24\cdot x_2 - 0.08\cdot x_3 &= 8 \\ 0.09\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 0.15\cdot x_3 &= 9 \\ 0.04\cdot x_1 - 0.08\cdot x_2 + 4\cdot x_3 &= 20 \end{aligned}$$

1.30
$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - 2\cdot x_3 &= 1 \\ x_1 - 4\cdot x_2 + 10\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

თავი II

ფუნქციათა აპროქსიმაცია

§2.1. ფუნქციათა აპროქსიმაციის უმარტივესი ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე დისკრეტულ წერტილებში $f(x_i)=f_i$. აპროქსიმაციის უმარტივესი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: შევადგინოთ გამოთვლებისათვის ისეთი მარტივი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ წერტილებში მიიღებს $f(x)$ ფუნქციის ცხრილით, მოცემულ f_i მნიშვნელობებს. ეს ამოცანა ეკუთვნის იმ ამოცანების კლასს, რომლებიც ხშირად გვხვდება გამოყენებით მათემატუიკაში – ცხრილური მონაცემები შეიძლება მივიღოთ ან კომპიუტერზე ჩატარებული გამოთვლების შედეგად, ან რაიმე ექსპერიმენტის დროს ჩატარებული გაზომვების შედეგად.

ცხადია თუ $|x_i - x_{i+1}|$ მცირე სიდიდეა $x \approx x_i$-სათვის შეიძლება დავუშვათ $f(x) \approx f_i$, ამ მიახლოების ცდომილებაა

$$f(x) - f_i \approx f'(x)\cdot(x - x_i)$$

ალბათ, უფრო ზუსტ მიახლოებას მივიღებთ თუ $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$– სათვის $f(x)$ ფუნქციას შევცვლით იმ წფის მონაკვეთით, რომელიც გადის (x_i, f_i) და (x_{i+1}, f_{i+1}) წერტილებზე, კერძოდ:

$$f(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}\cdot(x - x_i)$$

ამდენად, აზრი ესახება $f(x)$ ფუნქცის ისეთი ხარისხოვანი პოლინომით შეცვლის იდეას, რომელიც მოცემულ წერტილებში ღებულობს მოცემულ ცხრილურ მნიშვნელობებს. ეს იდეა უდევს საფუძვლად აპროქსიმაციის (ინტერპოლების) თეორიას.

x_0, x_1, ... x_n წერტილებს საინტერპოლაციო კვანძები ეწოდება $\Phi(x)$ ფუნქციას – კი საინტეპოლაციო პოლინომი. საინტერპოლაციო პოლინომით ფართოდ სარგებლობენ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად x-ის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც $[x_0, x_n]$ შუალედის როგორც შიგნით, ისე გარეთ მდებარეობენ. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ინტერპოლირებასთნ, ხოლო მეორე შემთხვევაში – ექსტრაპოლირებასთნ.

ამ შემთხვევაში ცდომილობაა

$$R(x) = f(x) - \Phi(x)$$

და ცხადია,

$$R(x_0) = R(x_1) = ... = R(x_n) = 0$$

ხოლო დანარჩენ წერტილში $R(x)$ ფუნქცია ახასიათებს $f(x)$-ის გადახრას $\Phi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობისაგან. $R(x)$ ფუნქციას ნაშთითი წევრი ეწოდება.

§2.2. ფუნქციათა მიახლოება საინტერპოლაციო პოლინომებით

ლაგრანჟის სინტერპოლაციო ფორმულა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია მოცემულა ცხრილის სახით:

$$f(x_i) = f_i, \qquad i=0, 1, 2, \ldots, n$$

რომელიც შეიცავს $f(x)$-ის მნიშვნელბებს (n+1) წერტილში, ამასთან x_i წერტილები წყვილ-წყვილად განსხვავებულნი არიან.

ვისარგებლოთ ალგებრის ცნობილი თეორემით, რომ (n+1) წერტილზე შეიძლება გავატაროთ მხოლოდ ერთი n-ური რიგის პარაბოლა.

ვთქვათ, x-ის საძიებელი პოლინომი, რომელიც გადის ცხრილის საკვანძო წერტილებზე იყოს:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (2.1)$$

თუ მოვითხოვთ, რომ ცხრილის ყოველ საკვანძო წერტილში პოლინომის მნიშვნელბა დაემთხვეს ფუნქციის მნიშვნელობას იმავე წერტილში, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = f_i, \quad i=1, 2, \ldots, n \qquad (2.2)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

ეს დეტერმინანტი წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ძირითად კურსში განხილულ ვანდერმონდის დეტერმინანტს, განსხვავებულ წერტილთა სიმრავლისათვის, მტკიცდება, რომ $\Delta \neq 0$ და მისი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}} \left(x_i - x_j\right) \neq 0$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი პოლინომი არსებობს და ის ერთადერთია. თეორემა დამტკიცებულია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ დასმული ამოცანის საძიებელი ამონახსნი შეიძლება ამოვწეროთ ცხადი სახით:

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots \\ & + f_k \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} + \ldots \quad (2.3) \\ & + fn \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$L_n^{(k)}(x) = (x - x_0)(x - {}_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$$

რომელიც წარმოადგენს n-ური რიგის სპეციალურ პოლინომს.

ამ აღნიშვნის საფუძველზე (2.3) შეიძლება მოკლედ ასე ჩაიწეროს:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \frac{L_n^{(k)}(x)}{L_n^{(k)}(x_k)} \qquad (2.4)$$

მართლაც ცხადია, რომ (2.4) წარმოადგენს n-ური რიგის პოლინომს და მასში ნებისმიერი k-სათვის $x=x_k$-ს ჩასმით ვღებულობთ $P_n(x_k) = f_k$.

(2.4) პოლინომს ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი ეწოდება. თუ x_i; i=o, 1, 2,. . ., n კვანძები დალაგებულია ზრდის მიხედვით ანუ $x_{i+1}>x_i$ ნებისმიერი i-სათვის, მაშინ სიდიდეებს $\{h_i=x_{i+1}-x_i;\ i=o,1,...,n\}$ ინტერპოლაციის ბიჯებს უწოდებენ. თუ $h_i=h=const$, მაშინ $x_i=x_0+ih$, i=0,1, . . . , n და ამ შემთხვევაში გვაქვს თანაბარი ბიჯით ინტერპოლირება. $[x_0, x_n]$ მონაკვეთს საინტერპოლაციო მონაკვეთი ეწოდება.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი (n+1) რიგის სპეციალური სახის პოლინომი:

$$W_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

ცხადია, რომ

$$L_n^{(k)}(x_k) = w'_{n+1}(x_k), \text{ ხოლო } L_n^{k}(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

$w_{n+1}(x)$-ის გამოყენებით ლაგრანჟის პოლინომი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P_n(x) = w_{n+1}(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{w'_{n+1}(x_k)(x - x_k)} \qquad (2.5)$$

(2.3)-დან გამომდინარეობს, რომ x^n-ის კოეფიციენტი, ტოლია

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{L_n^{(k)}(x_k)} \qquad (2.6)$$

§2.3. ნიუტონის საინტერპოლაციო პოლინომი

განვიხილოთ საინტერპოლაციო პოლინომის ჩაწერის კიდევ ერთი ფორმა:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + ... + A_n(x - x_0)(x - x_1)....(x - x_{n-1}) \quad (2.7)$$

მოვითხოვოთ, (2.7) პოლინომის მნიშვნელობები დაემთხვეს ფუნქციის მნიშვნელობებს მოცემულ საკვანძო წერტილებში, მაშინ უცნობი A_i; i=0, 1, 2,. . . n კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას სამკუთხა მატრიცით:

$$\begin{cases} A_0 = f_0, \\ A_0 + A_1(x_1 - x_0) = f_1, \\ A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.8)$$

რომლის რიცხვითი ამოხსნა ჩვენთვის ცნობილია (1.12) – სისტემის (1.13) ამონახსნის სახით.

საინტერპოლაციო პოლინომს, რომელიც ჩაწერილია (2.7) ფორმით, ნიუტონის პოლინომი ეწოდება. ის საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ მისი ყოველი პირველი $(n+1)$ წევრის კერძო ჯამი თავის მხრივ წარმოადგენს n-ური ხარისხის საინტერპოლაციო პოლინომს, აგებულს ცხრილის პირველი (n+1) მნიშვნელობისათვის.

(2.8) სისტემის ამონახსნი (1.13)-ის ანალოგიურად და (2.6)-ის გათვალისწინებით შეიძლება ჩავწეროთ ცხადი სახით:

$$A_0 = f_0, \quad A_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{f_k}{L_m^{(k)}(x_k)}, \qquad m=0, 1, 2,\ldots, n \qquad (2.9)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (2.7) ტოლობაში, მივიღებთ ნიუტონის შემდეგ საინტერპოლაციო პოლინომს:

$$P_n(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) + \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(2!)h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{(3!)h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots +$$

$$+ \frac{f_n = nf_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} nf_{n-1} + (-1)^n \cdot f_0}{(n!)h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{L_n^{(k)}(x_k)} = \frac{1}{(n!)h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{\ k} f_{n-k}$$

სადაც

$$C_n^{\ k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

გამოთვლების თვალსაზრისით უმჯობესია გამოვიყენოთ

$$A_n = \frac{1}{(n!)h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^{\ k} f_{n-k}$$

$$n=0, 1, 2. \ldots$$

ფორმულები.

შევნიშნოთ, რომ (2.1), (2.3), (2.7) საინტერპოლაციო პოლინომები §2.2-ში მოყვანილი ერთადერთობის

თეორემის საფუძველზე წარმოადგენენ ერთიდაიმავე პოლინომების სხვადსხვა ჩანაწერს.

რა თქმა უნდა საინტერესოა ამ ჩანაწერების შედარება პრაქტიკული ამოცნის გადაწყვეტის დროს, მათი გამოყენების მოხერხებულობის თვალსაზრისით. თუმცა ცხადია, უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი მოსაზრება. კონკრეტულად თუ საჭიროა ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოთვლა $x \neq x_i$ (i=0, 1, 2,..., n) წერტილში, ეს რა თქმა უნდა არ ნიშნავს იმას, რომ უნდა გამოვიყენოთ ცხრილის ყველა წერტილზე აგებული საინტერპოლაციო პოლინომი. დიდი როდენობის ცხრილური მონაცემებისათვის ეს არაპრაქტიკულია. ამ შემთხვევაში ასე იქცევიან: აგებენ დაბალი რიგის საინტერპოლაციო პოლინომს x წერტილთან მდებარე ახლო კვანძებზე და იყენებენ მას მოცემული $f(x)$ ფუნქციის გამოსათვლელად.

შედარების თვალსაზრისით ხაზი უნდა გაესვას შემდეგ გარემოებას, კერძოდ (2.1)-ის კოეფიციენტების საპოვნელად, საჭიროა ამოვხსნათ (2.2) განტოლებათა სისტემა, მაშინ როდესაც ნიუტონის მრავალწევრის კოეფიციენტები განისაზღვრება მარტივი (2.8) სისტემიდან და გამოითვლება (2.9) ფორმულით. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ, x_1 წერტილის მიდამოში ჩვენ ავაგეთ მეოთხე რიგის პოლინომი. აღმოჩნდა, რომ მისი სიზუსტე არ არის დამაკმაყოფილებელი და საჭიროა მეხუთე რიგის მრავალწევრის აგება. ნიუტონის პოლინომისათვის ხარისხის აწევა ერთი შესაკრების დამატებას ნიშნავს ანუ ჩვენს შემთხვევაში A_5 კოეფიციენტის გამოთვლას (2.9) ფორმულით, მაშინ როდესაც (2.1) მრავალწევრის

ხარისხის აწევა მოითხოვს (2.2) წრფივ განტოლებათა (ამ შემთხვევაში) მეხუთე რიგის სისტემის ამოხსნას.

ამგვარად, თანამედროვე კომპიუტერიზაციის პირობებში, რეალიზაციის თვალსაზრისით განხილული მეთოდებიდან არცერთი არ წარმოადგენს დიდ სირთულეს, მაგრამ აშკარაა ნიუტონისეული პოლინომის უპირატესობა.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციის მნიშვნელბათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5
f	0	0.5	1	2	1	0.5

მოცემულ ექვს საკვანძო წერტილზე ავაგოთ მეხუთე რიგის პოლინომი ეს პოლინომი ჩავწეროთ ნიუტონისეული ფორმით, მივიღებთ სამკუთხა წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამონახსნი მოიცემა (2.9) ფორმულით, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში, რადგან $A_0 = f_0 = 0$, მიიღებს სახეს:

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{L_m^{(k)}(x_k)}, \qquad m=1, 2, \ldots, 5.$$

სადაც

$$L_m^{(k)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_m)$$

ამასთან გვაქვს

$L_1^{(1)}(x) = x - x_0$

$L_2^{(1)}(x) = (x - x_0)(x - x_2)$

$L_2^{(2)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$L_3^{(1)}(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)$

$L_3^{(2)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$

$L_3^{(3)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$L_4^{(1)}(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$L_4^{(2)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$

$L_4^{(3)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$

$L_4^{(4)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$L_5^{(1)}(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x4)(x - x_5)$

$L_5^{(2)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$L_5^{(3)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5)$

$L_5^{(4)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_5)$

$L_5^{(5)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$A_1 = \dfrac{f_1}{x_1 - x_0} = 0.5,$

$$A_2 = \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = -0{,}5 + 0{,}5 = 0,$$

$$A_3 = \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$

$$\frac{f_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$A_3 = 0.0833 \qquad A_4 = -0.1249 \qquad A_5 = 0.0667.$

იგივე შედეგს მივიღებთ თუ სამკუთხა სისტემას ამოვხსნით (1.13) ფორმულებით.

ამგვარად საინტერპოლაციო პოლინომი მიიღებს სახეს:

$P_5(x)=0,5x+0,0833x(x-1)(x-2)-0,1249x(x-1)(x-2)(x-3)+$
$+0.0667x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

აქედან მივიღებთ:

$P_5(0)=0$; $P_5(1)=0,5$; $P_5(2)=1$; $P_5(3)=1,9998$; $P_5(4)=1,002$; $P_5(5)=0,51$.

ამგვარად გვაქვს საკმარისად კარგი აპროქსიმაცია.

ა) ბუან-უბან წრფივ ინტერპოლება. ამ შემთხვევაში გამოიყენება წრფივი მიახლოება (2.7) პოლინომში ვიღებთ პირველ ორ შესაკრებს და მივიღებთ:

$$f(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1}}{h}(x - x_i) \qquad (2.10)$$

ცხადია (2.10) წარმოადგენს (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1}) საკვანძო წერტილებზე გამავალ წრფეს.

ბ) უბან-უბან კვადრატული ინტერპოლება. გამოიყენება კიდევ ერთი დამატებითი საკვანძო წერტილი (x_i, f_i);(x_{i+1},f_{i+1}) და (x_{i+2},f_{i+2}) აიგება მეორე რიგის მრავალწევრი. კერძოდ,

$$f(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}\cdot(x - x_i) + \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}\cdot(x - x_i)\cdot(x - x_{i+1}) \qquad (2.11)$$

$f(x_i)=f_i$, $\quad f(x_{i+1})=f_{i+1}$, $\quad f(x_{i+2})=f_{i+2}$

§2.4. საშუალო კვადრატული მიახლოება (უმცირეს კვადრატთა მეთოდი)

ვთქვათ, $x_0, x_1, \ldots x_n$ წერტილებში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნლობები $f(x_i) f_i$, i=0, 1, 2,...,n . ვიპოვოთ ისეთი m, (m<n) ხარისხის პოლინომი $\Phi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, რომ $\Phi(x_i) - f(x_i)$ სხვაობათა კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი, ე.ი.

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - f(x_i) \right]^2 \quad (2.12)$$

გამოსახულება ღებულობდეს უმცირეს მნიშვნელობას. გმოვიყენოთ (m+1) ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m)$$

მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{n} \Phi(x_i) \cdot x_i^k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, m)$$

ამ სისტემას ნორმალური სისტემა ეწოდება. შევიტანოთ მასში $\Phi(x_i)$ მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} X_i^k + a1 \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+1} + \ldots + am \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+m} = f(x_i) x_i k \qquad (2.13)$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, m$$

უცნობი $\{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m\}$ კოეფიციენტებისათვის ჩვენ მივიღეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა სიმტრიული მატრიცით. მისი ელემენტები გამოითვლება ცხრილური წერტილების კოორდინატებით. თავის მხრივ (2.13)-ის მარჯვენა მხარეები განისზღვრება ცხრილით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობებით.

$\Phi(x)$ მიახლოებას განსაზღვრულს (2.13) სისტემიდან ეწოდება საშუალო კვადრატული მიახლოება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით.

ამ მიახლოების ცდომილება განისაზღვრება ფორმულით

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[P_m(x_i) - f_i\right]^2}$$

(2.13) სისტემა მატრიცული ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{bmatrix} (n+1) & \sum\limits_{i=0}^{n} x_i & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^2 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^m \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_i & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^2 & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^3 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^{m+1} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^2 & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^3 & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^4 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^m & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^{m+1} & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^{m+2} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i)^{2\cdot m} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} f_i \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (f_i x_i) \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \left[f_i \cdot (x_i)^2\right] \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \left[f_i \cdot (x_i)^{2\cdot m}\right] \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

ცხადია, $m = n$-სათვის ამ ამოცანის ამონახსნი არის ლაგრანჟის ან ნიუტონის საინტერპოლაციო

პოლინომი, ვინაიდან სწორედ მასზე მიიღწევა Φ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი. $\Phi \equiv 0$. თუ $m \le n$, მაშინ დასმულ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. $m. > n$-სათვის Φ-ს, აბსოლუტურ მინიმუმს უამავი ამონხსნი ანიჭებს. ჩვენ განვიხილოთ შემთხვევა $m < n$ და ამ შემთხვევაში განვიხილოთ მაგალითი 2.1, $m = 2$ პირობით (ე.ი. მივუახლოვდეთ პარაბოლით):

$$f(x) \approx f(x_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \text{ მივიღებთ}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 7140; \quad \Delta_1 = -700; \quad \Delta_2 = 7\ 620; \quad \Delta_3 = -1340;$$

$$a_0 = -0{,}098; \quad a_1 = 1{,}067; \quad a_2 = -0{,}188;$$

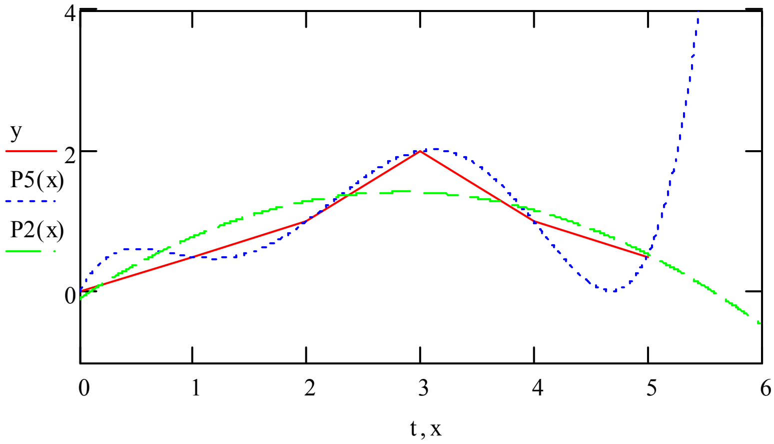
ამგვარად, გვაქვს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული შემდეგი აპროქსიმცია:

$$f(x) \approx P_2(x) = -0{,}098 + 1{,}067x - 0{,}188x^2$$

$$f(0) = -0{,}098, \quad f(1) = 0{,}781, \quad f(2) = 1{,}284, \quad f(3) = 1{,}411$$

$$f(4) = 1{,}162, \quad f(5) = 0{,}537.$$

შევადაროთ ერთმანეთს ნიუტონისეული პოლინომით მიღებული აპროქსიმაცია (წერტილოვანი მრუდი) და უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული მნიშვნელობები (წყვეტილი მრუდი) გვაქვს შემდეგი სურათი (ნახ. 2.1).



ნახ. 2.1

ამ შემთხვევაში ნათლად ჩანს, რომ ნიუტონისეული მიახლოება უკეთესია, მაგრამ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიახლოებაც მისაღებია. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით ვიპოვოთ β_0 და β_1 კოეფიციენტები ცხრილით მოცემული

x	x_0	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_0	y_1	y_2	. . .	y_n

ფუნქციებისათვის, თუ ისინი წარმოადგენენ შემდეგ მოდელებს:

ა) $y = \beta_0 + \beta_1 x$

(2.14)-დან, მივიღებთ

$$\beta_0 = \frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i x_i\right)}{(n+1)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\beta_1 = \frac{(n+1)\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{(n+1)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (2.15)$$

ბ) $y=\beta_0+\dfrac{\beta_1}{x}$ მოდელისათვის გვექნება:

$$\beta_0=\frac{\Sigma\left(y_i\right)\cdot\Sigma\left[\dfrac{1}{\left(x_i\right)^2}\right]-\Sigma\left(\dfrac{1}{x_i}\right)\cdot\Sigma\left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)}{(n+1)\cdot\Sigma\left[\dfrac{1}{\left(x_i\right)^2}\right]-\left(\Sigma\left(\dfrac{1}{x_i}\right)\right)^2}$$

$$\beta_1=\frac{(n+1)\cdot\left(\Sigma\left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)\right)-\left(\Sigma\left(\dfrac{1}{x_i}\right)\right)\cdot\left(\Sigma y_i\right)}{(n+1)\cdot\Sigma\left[\dfrac{1}{\left(x_i\right)^2}\right]-\left(\Sigma\left(\dfrac{1}{x_i}\right)\right)^2} \qquad (2.16)$$

გ) $y=\beta_0+\beta_1 \ln x$ მოდელის შემთხვევაში უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, მივიღებთ:

$$\beta_0=\frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum \ln^2 x_i -\right)-\left(\sum \ln x_i\right)\left(\sum y_i \ln x_i\right)}{(n+1)\left(\sum \ln^2 x_i\right)-\left(\sum \ln x_i\right)^2}$$

$$\beta_1=\frac{(n+1)\left(\sum y_i \ln x_i\right)-\left(\sum y_i\right)\left(\sum \ln x_i\right)}{(n+1)\left(\sum \ln^2 x_i\right)-\left(\sum \ln x_i\right)^2} \qquad (2.17)$$

დ) $y=\beta_0+\beta_1 e^{ax}$ მოდელის შემთხვევაში გვაქვს

$$\beta_0=\frac{\left(\Sigma y_i\right)\left(\Sigma\left(e^{2ax_i}\right)\right)-\left(\Sigma y_i e^{ax_i}\right)\left(\Sigma e^{ax_i}\right)}{(n+1)\left(\Sigma e^{2ax_i}\right)-\left(\Sigma e^{ax_i}\right)^2}$$

$$\beta_1=\frac{(n+1)\cdot\left(\Sigma y_i e^{ax_i}\right)-\left(\Sigma e^{ax_i}\right)\cdot\left(\Sigma y_i\right)}{(n+1)\cdot\left(\Sigma e^{2ax_i}\right)-\left(\Sigma e^{ax_i}\right)^2} \qquad (2.18)$$

§ 2.5 Mathcad

ცხრილის მოცემული ფუნქციიების აპროქსიმაცია Mathcad-ზე მოსახერხებელია უბან-უბან წრფივი, კვადრატული, კუბური ან პოლინომიალური სპლაინ ფუნქციებით მოვიყვანოთ კონკრეტული მაგალითი და შევადაროთ ერთმანეთს აპროქსიმაციით მიღებული და მოცემული ფუნქციების მნიშვნელობები. არგუმენტის მნიშვნელობა დალაგებული უნდა იყოს ზრდადობის მიხედვით და უნდა წარმოვადგინოთ სვეტ მატრიცის სახით. საინტერპოლაციო y ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებიც წარმოვადგინოთ მატრიცულად. გვექნება:

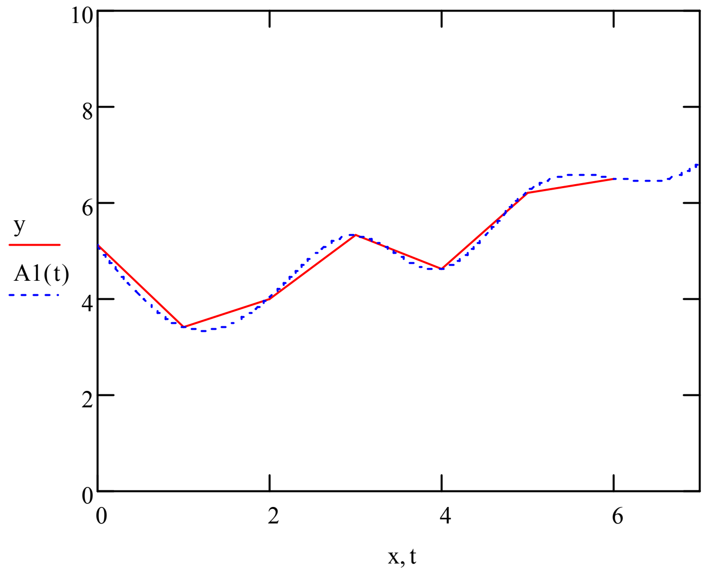
$$x := \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \\ \vdots \\ yn \end{pmatrix}$$

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 5.1 \\ 3.4 \\ 4 \\ 5.3 \\ 4.6 \\ 6.2 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

მაშინ მიმართვა $A1(t) := interp(s, x, y, t)$

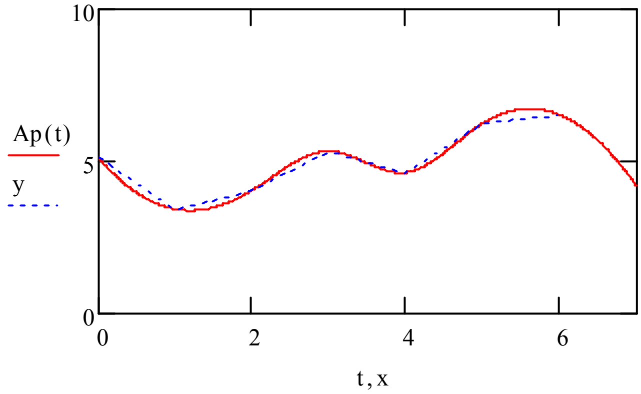
გვაძლევს წრფივ ინტერპოლაციას A1(t) ფუნქციის სახით t-არის არგუმენტის მნიშვნელობა, რომელშიც შეიძლება გამოვთვალოთ საინტერპოლაციო ფუნქციის მნიშვნელობები. შედარების მიზნით ავაგოთ მოცემული და ინტერპოლირების- აპროქსიმაციით მიღებული ფუნქციების გრაფიკები. გვაქვს:



უბან-უბან კვადრატული აპროქსიმაცია p-სპლაინით ხდება შემდეგნაირად.

$s := pspline(x, y)$

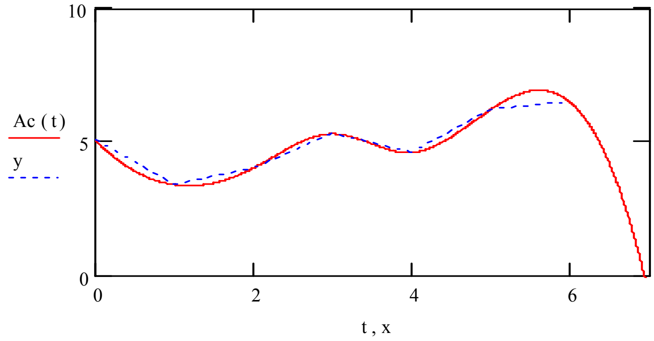
$Ap(t) := interp(s, x, y, t)$



კუბური სპლაინისთვის გვაქვს

$s := cspline(x, y)$

$Ac(t) := interp(s, x, y, t)$

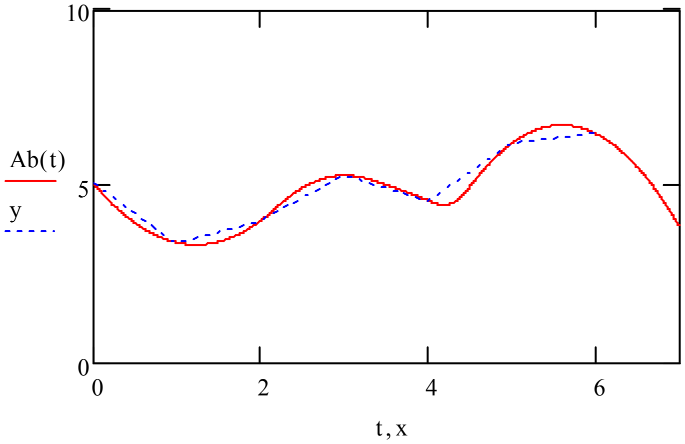


პოლინომიალური სპლინებით მიახლოების შემთხვევაში დამატებით გვჭირდება u ვექტორი რომლის განზომილება ნაკლებია მოცემული ფუნქციისა და არგუმენტის განზომილებაზე და ის ფაქტიურად წარმოადგენს არგუმენტის შუალედურ მნიშვნელობებს სადაც ხდება მაპროქსიმებადი ფუნქციების გადაბმა, ამასთან $u_0 < x_0$ და ბოლო მნიშვნელობა $u_m > x_n$

$$u := \begin{pmatrix} -0.1 \\ 2.2 \\ 3.3 \\ 4.1 \\ 4.5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$s := \mathrm{bspline}(x, y, u, 2)$$

$$Ab(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$$



ბოლოს შედარების მიზნით ავაგოთ 4-ივე გრაფიკი ერთ ნახაზზე.

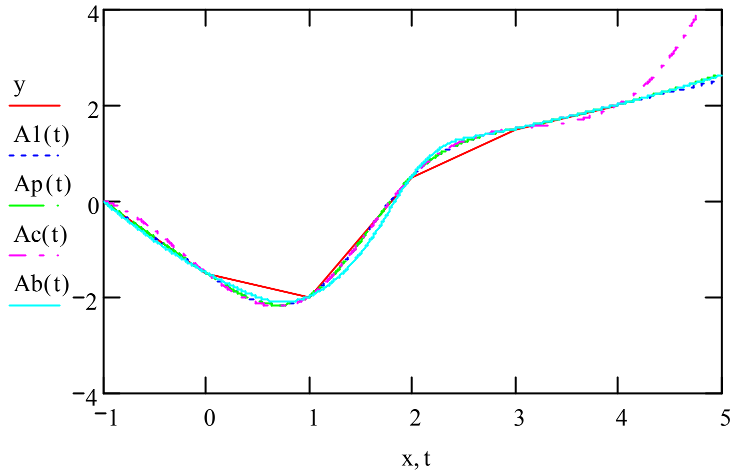
$$x := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \\ -2 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u := \begin{pmatrix} -2 \\ 0.5 \\ 1.8 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$s1 := \mathrm{lspline}(x, y)$ $\qquad$ $s2 := \mathrm{pspline}(x, y)$

$A1(t) := \mathrm{interp}(s1, x, y, t)$ $\qquad$ $Ap(t) := \mathrm{interp}(s2, x, y, t)$

$s3 := \mathrm{cspline}(x, y)$ $\qquad$ $s := \mathrm{bspline}(x, y, u, 2)$

$Ac(t) := \mathrm{interp}(s3, x, y, t)$ $\qquad$ $Ab(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$



$t1 := 4.5$

$A1(t1) = 2.26$ $\qquad$ $Ap(t1) = 2.297$ $\qquad$ $Ac(t1) = 2.969$ $\qquad$ $Ab(t1) = 2.291$

$u := 2.5$

$A1(u) = 1.217$ $\qquad$ $Ap(u) = 1.219$ $\qquad$ $Ac(u) = 1.244$ $\qquad$ $Ab(u) = 1.291$

$u := 4$

$A1(u) = 2$ $\qquad$ $Ap(u) = 2$ $\qquad$ $Ac(u) = 2$ $\qquad$ $Ab(u) = 2$

$y = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x}$ მოდელის აპროქსიმაციისთვის გვექნება

$$x := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 10.2 \\ 10.5 \\ 8.5 \\ 7.8 \end{pmatrix}$$

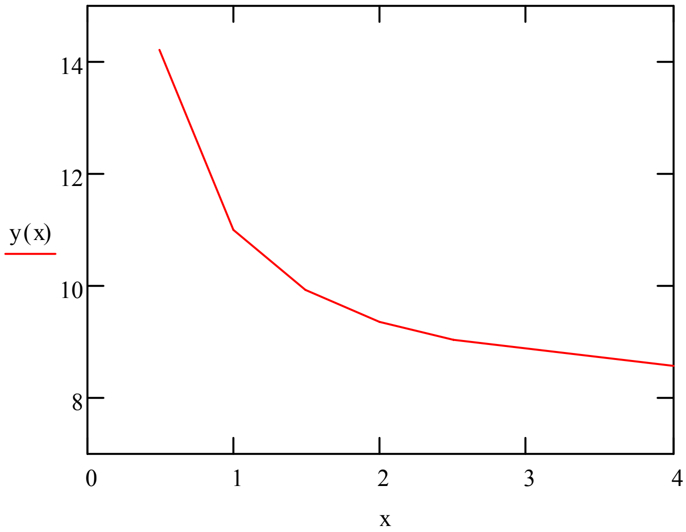
$$n := 5$$

$$\beta_0 := \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)\cdot\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(x_i\right)^2}\right] - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{x_i}\right)}{(n+1)\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(x_i\right)^2}\right] - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2}$$

$$\beta_1 := \frac{(n+1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{x_i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}\right)}{(n+1)\cdot\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left(x_i\right)^2}\right] - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2}$$

$$\beta_0 = 7.738 \qquad \beta_1 = 3.233$$

$$y(x) := 7.738 + \frac{3.233}{x}$$



მაგალითები

2.1. $y = f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილით:

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	-1	-0.5	0

ა) დაწერეთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი.

ბ) ააგეთ ნიუტონის სინტერპოლაციო პოლინომი.

გ) გამოთვალეთ $f(1.5)$ და $f(2.5)$ ორივე პოლინომით.

2.2. მოცემულია ფუნქცია

x	1	1.1	1.2
y	2	2.5	1.8

გამოიყენეთ კვადრატული ინტერპოლების (2.11) ფორმულა და გამოთვალეთ $f(1.05)$.

2.3. ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით:

x	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
y	1	1.2	1.4	1.3	0.99

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, ცხრილით მოცემული ფუნქცია შეცვალეთ წრფივი ფუნქციით. მიახლოება შეამოწმეთ საკვანძო წერტილებში (ისარგებლეთ (2.15) ორმულებით).

2.4. ცხრილური სახით მოცემულ შემდეგ

x	1	1.5	2	2.5	3	4
y	2	1	0	-1	0	1

ფუნქციას, უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მივუახლოვდეთ კვადრატული ფუნქციით. მიახლოების გასაანალიზებლად გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები საკვანძო წერტილებში.

შემდეგი ცხრილით მოცემული ფუნქციები შეცვალეთ $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ დამოკიდებულებით. გამოიყენეთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

2.5.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	-1	-0.5	1.5	4.5	8.5

2.6.

x	0.07	031	0.61	0.99	1.29	1.78	2.09
y	1.34	1.08	0.94	106	1.25	201	2.6

2.7.

x	26	30	34	38	42	46	50
y	394	46	567	693	8.25	7.73	10.55

2.8.

x	-2	-1	0	1	2

y	4.8	0.4	-3.4	0.8	3.2

2.9.

t	5	10	15	20	25
T	59.3	59.8	601	649	72

2.10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	00	4	5	4	2	-2

ცხრილით მოცემული ფუნქციები შეცვალეთ მითითებული მოდელით

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}$$

2.11

x	2	4	6	12
y	8	5.25	3.5	3.25

2.12

x	0.5	1	1.5	2	2.5	4
y	20	10	7	5.33	4.12	2.6

2.13

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	16.5	13.75	13.31	12.5	13.52	12.75	12.30	12.83	12.28	1234

x	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6
y	4.39	4.75	4.98	5.11	5.12	5.18	5.28	5.36	5.45	5.52	5.53	5.57

2.14

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	11	12
y	2.11	2.45	2.61	2.73	2.75	2.81	2.87	2.91	2.96	3.03	3.05	3.12

2.15

შევცვალოთ $y = \beta_0 + \beta_1 e^{0.1x}$ მოდელით

2.16

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0.1	0.21	0.43	0.51	0.62	0.81	1.01	1.23	1.47	1.53	1.75

2.17

x	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
y	4.11	4.16	4.23	4.29	4.36	4.42	4.53	4.57	4.63	4.75	4.87

თავი III

რიცხვითი გაწარმოება და ინტეგრება

§ 3.1. რიცხვითი გაწარმოება

ცხრილით ან გრაფიკულად მოცემული ფუნქციის შემთხვევაში წარმოებულის მისაღებად ანალიზური მეთოდების გამოყენება შეუძლებელია, ამ ნაწილში ჩვენ განვიხილავთ ცხრილური სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

ვთქვათ, x_i, $i = 0;\ 1;\ 2;\ ...,\ n$ წერტილებში ცნობილია ფუნქციის $f(x) = f_i$, $i = 0;\ 1;\ 2;\ ...,\ n$ მნიშვნელობები. რიცხვითი გაწარმოების ფორმულების მიღების უმარტივესი გზა მდგომარეობს შემდეგში: ცხრილის მონაცემებით უნდა მოვახდინოთ $f(x)$ ფუნქციის ინტერპოლება მრავალწევრით და შემდეგ ამ მრავალწევრის საჭირო რიცხვჯერ გაწარმოებით მივიღებთ საძიებელ ფორმულას.

მაგალითად, (2.7) n-ური რიგის პოლინომის გამოყენებისას გვაქვს:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (3.1)$$

სადაც, $R_n(x)$ – ინტერპოლაციის ცდომილებაა (ან რაც იგივეა ნაშთითი წევრია) და ტეილორის მწკრივის შესაბამისად აქვს სახე:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\xi}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \qquad (3.2)$$

ამგვარად, $f(x)$ ფუნქციის m-ური რიგის წარმოებულისათვის $[x_0,\ x_n]$-ზე ვღებულობთ ფორმულას

$$f^m(x) \approx \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad (3.3)$$

რომლის ცდომილებაა ინტერპოლაციის ცდომილების m-ური რიგის წარმოებული - $R_n^m(x)$.

მაშასადამე, თუ საჭიროა $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მიახლოებითი გამოთვლა ცხრილის რაიმე x_i წერტილის მიდამოში, მაშინ უნდა შევნიშნოთ შემდეგი: ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს თანაბრად h-ბიჯით დაშორებული კვანძები, ანუ $x_k = x_0 + k \cdot h$. ეს გვაძლევს საშუალებას გაწარმოების ფორმულები ჩავწეროთ უფრო მარტივი სახით. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. განსახილველ x_i წერტილის მიდამოში ფუნქციას მიუახლოვდეთ პირველი რიგის პოლინომით (2.10), გვაქვს:

$$f(x) \approx P_1(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(x - x_i)$$

ამ ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$f^{'}(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \qquad (3.4)$$

ეს წარმოადგენს ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის გამოსათვლელ უმარტივეს მიახლოებით ფორმულას.

ანალოგიურად, უბან-უბან წრფივი ინტერპოლების გამოყენებით შესაძლებელია $f(x)$ ფუნქციასთან შემდეგი სახის მიახლოება:

$$f(x) \approx P_1(x) \approx f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x - x_i)$$

აქედან,

$$f^{'}(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \qquad (3.5)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ (3.4) წარმოადგენს მარჯვენა სხვაობიან თანაფარდობას, ხოლო (3.5) – კი მარცხენა სხვაობიან თანაფარდობას.

2. მოცემული x_i წერტილის მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას მივუახლოვდეთ (2.11) ფორმულით აგებული მეორე რიგი პოლინომით:

$$f(x) \approx P_1(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(x - x_i) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}(x - x_i)(x + x_{i+1})$$

ამ პოლინომის ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ მეორე რიგის წარმოებულისათვის შემდეგ მიახლოებით ფორმულას;

$$f^{''}(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad (3.6)$$

ანალოგიურად განსახილველ მიდამოში შესაძლებელია ფუნქციას მივუახლოვდეთ მეორე რიგის შემდეგი პარაბოლით

$$f(x) \approx P_2(x) \approx f_i + \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}(x - x_i) + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}(x - x_i)^2$$

(3.7)

ცხადია $f(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $f(x_i) = f_i$ და $f(x_{i+1}) = f_{i+1}$ ე.ი ეს საინტერპოლაციო პოლინომი აგებულია ფუნქციის მნიშვნელობებზე x_{i-1}, x_i, x_{i+1} წერტილებში. ამასთან ცხადია, რომ ჩანაწერის ასეთი ფორმა შედარებით უფრო კომპაქტურია ვიდრე დონის და მით უმეტეს ლანგრაჟისეული ფორმები.

(3.7)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \cdot (x - x_i) \qquad (3.8)$$

$x = x_i$-სათვის მივიღებთ პირველი რიგის წარმოებულის გამოსათვლელ კიდევ ერთ მიახლოებით ფორმულას:

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad (3.9)$$

ეს ფორმულა ითვალისწინებს ქორდის კუთხური კოეფიციენტის აპროქსიმაციას მხების კუთხური კოეფიციენტით (ლაგრანჟის თეორემა).

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ცენტრალურ სხვაობიან თანაფარდობას. (3.8)-ის გაწარმოებით მივიღებთ (3.6) თანაფარდობას.

ანალოგიურად, უფრო მაღალი რიგის საინტერპოლაციო ფორმულების გამოყენებით შეიძლება მივიღოთ მაღალი რიგის წარმოებულების გამოსათვლელი მიახლოებითი ფორმულები.

კერძოდ m-ური რიგის საინტერპოლაციო პოლინომის m-ჯერ დიფერენცირებით, გაწარმოების მიახლოებითი ფორმულები შეიძლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$f^{(m)}(x) \approx \frac{1}{h^m} \sum_{K=0}^{m} (-1)^K C_m^K f_{m-k} \qquad (3.10)$$

სადაც $C_m^K = \dfrac{m!}{K!(m-K)!}$

მართლაც, როცა m=0, მივიღებთ $f^0 = f_0$. როცა m=1, მივიღებთ პირველი რიგის წარმოებულის გამოსათვლელ (3.4) ფორმულას. m=2-სათვის ვღებულობ

მეორე რიგის წარმოებულის გამოსათვლელ (3.6) ფორმულას. ხოლო, როცა $m=3$ მივიღებთ

$$f'''(x_i) \approx \frac{1}{h^3}\left(f_{i+1} - 3f_i + 3f_{i-1} - f_{i-2}\right) \text{ და ა.შ.}$$

§ 3.2. ინტეგრალის გამოთვლის რიცხვითი მეთოდები

ხშირად მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში ფუნქციები, რომელთა ინტეგრებაა საჭირო, უფრო მეტად მოცემულია გრაფიკულად ან მნიშვნელობათა ცხრილის სახით, იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ფუნქცია ანალიზურად არის მოცემული, ხშირად არ ხერხდება მათი ინტეგრება ე.ი პასუხად პირველადი ფუნქციის პოვნა. აგრეთვე, ბევრ საინჟინრო და მეცნიერულ პრობლემებში წინასწარ არის ცნობილი, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა გარკვეული სიზუსტით არის საჭირო და მიახლოებითი მეთოდის გამოყენებამ შეიძლება თავიდან აგვაცილოს არასასურველი სამუშაო. ყველა ამ შემთხვევაში ჩვენ გვიწევს ინტეგრალის რიცხვითი გამოთვლა.

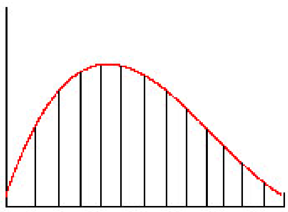
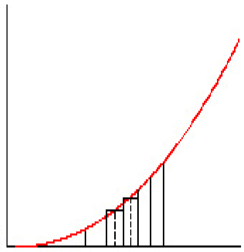
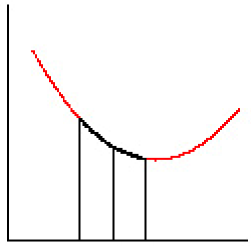
ცნობილია მარტივი მეთოდი, რომელსაც განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებამდე მივყავართ, რომელიც გულისხმობს არის დაყოფას ტოლი სიგანის ზოლებად და გარკვეული გზით ყოველი ზოლის ფართობის აპროქსიმაციას. ამ აპროქსიმაციების ჯამი იძლევა საბოლოო რიცხვით შედეგს.

მაშასადამე, გამოსათვლელია შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int_a^b f(x)dx$$

ამისათვის $[a,b]$ ინტერვალი x_0, x_1, x_2, ..., x_n წერტილებით დავყოთ n ტოლ ნაწილად, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$ და ყოველი ზოლის სიგანე $h = \dfrac{b-a}{n}$-ის ტოლია. $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში, როგორც წესი, აღინიშნება $f(x_i) = f_i$-ით. ნახ, 3.1

ჩვენ განვიხილავთ მარტივ, მაგრამ ამავდროულად გამოთვლით პრაქტიკაში ფართოდ აპრობირებულ ფორმულებს: მართკუთხედების (ცენტრალური წერტილით), ტრაპეციების, სიმპსონის.

ნახ. 3.1 ნახ 3.2 ნახ. 3.3

ნახაზი 3.1 წარმოადგენს არის დაყოფას ტოლი სიგანის ვერტიკალურ ზოლებად.

ნახაზი 3.2 ზოლის ფართობის შეცვლა მართკუთხედით.

ნახაზი 3.3 ზოლის ფართობის აპროქსიმაცია ტრაპეციით.

ნახ. 3.1-ის საფუძველზე ინტეგრალის საძიებელი მნიშვნელობა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$J = \sum_{m=0}^{n-1} J_m = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)dx \qquad (3.11)$$

სადაც, $J_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)dx$ არის $[x_m; x_{m+1}]$ ზოლის ფართობი.

1. **მართკუთხედების ფორმულა.** . ჩავთვალოთ h მცირე სიდიდედ და (3.11)-ში J_m შევცვალოთ მართკუთხედის ფართობით ნახ. 3.2, რომლის ფუძეა h, ხოლო სიმაღლე $f_{r+\frac{1}{2}} = f\left(x_r + \frac{h}{2}\right)$, მაშინ მივიღებთ მართკუთხედის ფართობს.

$$J_r = h \cdot f_{r+\frac{1}{2}} \qquad (3.12)$$

თუ ავჯამავთ (3.12)-ის შესაბამის მიახლოებით მნიშვნელობებს ყველა ელემენტარულ მონაკვეთზე, J-ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად მივიღებთ მართკუთხედების შემდეგ ფორმულას;

$$\widetilde{J} \approx h \cdot \left(f_{a+1/2} + f_{a+3/2} + \ldots + f_{n-1+1/2} \right) = h \sum_{r=0}^{n-1} f_{r+1/2} \qquad (3.13)$$

ჩვენ აქ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს ვითვლით მონაკვეთის შუა წერტილზე, მაგრამ, როცა $f(x)$ მოცემულია ცხრილის სახით, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უნდა განვიხილოთ საზღვრებზე (მარჯვენა ან მარცხენა). მაგრამ ამ შემთხვევაში საგრძნობლად მცირდება მიღებული შედეგების სიზუსტე.

2. **<u>ტრაპეციის ფორმულა</u>**. ახლა მოვახდინოთ ყოველი ზოლის ფართობის აპროქსიმირება იმ ტრაპეციის ფართობით, რომელიც ზოლის ზედა საზღვრითი წირის ქორდით შეცვლით მიიღება, როგორც ეს 3.3. ნახაზზეა ნაჩვენებზი. როგორც ნახაზიდან ჩანს ტრაპეციის სიმაღლეა h, ხოლო ფუძეებია f_k და f_{k+1},

ამდენად $[x_k, x_{k=1}]$ ელემენტარულ მონაკვეთზე ტრაპეციის ფართობი უდრის

$$J_k \approx \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}) \qquad (3.14)$$

თუ ავჯამავთ (3.14)-ის შესაბამის მიახლოებით მნიშვნელობებს ყველა ელემენტარულ მონაკვეთზე, J-ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად მივიღებთ ტრაპეციების ფორმულას:

$$J = \frac{h}{2}\cdot\left[f_0 + 2\cdot\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}\right) + f_n\right] = \frac{h}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_i + f_{i+1}\right) \qquad (3.15)$$

ცხადია იგივე შედეგს მივიღებთ თუ $[x_k, x_{k=1}]$ მონაკვეთზე ინტეგრალქვეშა ფუნქციას შევცვლით პირველი ხარისხის საინტერპოლაციო მრავალწევრით ფორმულა (2.10)-ით:

$$f(x) \approx f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{h}(x - x_k),$$

3. **სიმპსონის ფორმულა.** $[x_k, x_{k=1}]$ ელემენტარულ მონაკვეთზე, მხედველობაში მივიღებთ რა ფუნქციის მნიშვნელობას ინტერვალის შუა წერტილში, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შევცვალოთ მეორე ხარისხის საინტერპოლაციო შემდეგი მრავალწევრით,

$$f(x) \approx f_{K+1/2} + \frac{f_{K+1} - f_K}{h}\left(x - \frac{x_K + x_{K+1}}{2}\right) + \frac{f_{K+1} - 2f_{K+1/2} + f_K}{2(h/2)^2}\left[x - \frac{x_K + x_{K+1}}{2}\right]^2 \quad (3.16)$$

აქ $f_{K+1/2} = f\left((x_K + x_{K+1})/2\right)$ (3.16) პოლინომიდან ინტეგრალის გამოთვლა $[x_k, x_{k=1}]$ მონაკვეთზე გვაძლევს სიმპსონის ლოკალურ ფორმულას

$$\widetilde{J}_K = \frac{h}{6}\left(f_K + 4f_{K+1/2} + f_{K+1}\right) \qquad (3.17)$$

(3.17)-ის აჯამვით ვღებულობთ J-ის მიახლოებით გამოსათვლელ სიმპსონის
ფორმულას

$$\widetilde{J}_K = \frac{h}{6}\left(f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + 4f_{n-1/2} + f_n\right) \quad (3.18)$$

თუ ინტეგრების $[a,b]$ მონაკვეთს დავყოფთ $2n$ თანასწორ ნაწილად, მაშინ (3.18) ფორმულა მიიღებს სახეს .

$$\widetilde{J}_K = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4(f_1 + f_3 + 2f_2 + \ldots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n-2}) + f_{2n}\right) \quad (3.19)$$

ინტეგრალის მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოსათვლელ (3.13), (3.15), (3.18) და (3.19) ფორმულებს კვადრატურული ფორმულები ეწოდება.

კვადრატურული ფორმულების ცდომილებები ასეთია:

მართკუთხედის ფორმულა – $\left|\widetilde{J} - J\right| \le \frac{b-a}{24} \cdot M_2 \cdot h^2$,

ტრაპეციის ფორმულა – $\left|\widetilde{J} - J\right| \le \frac{b-a}{12} \cdot M_2 \cdot h^2$,

სიმპსონის (3.18) ფორმულა – $\left|\widetilde{J} - J\right| \le \frac{b-a}{2880} \cdot M_4 \cdot h^4$,

სიმპსონის (3.19) ფორმულა – $\left|\widetilde{J} - J\right| \le \frac{b-a}{180} \cdot M_4 \cdot h^4$

სადაც $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(2)}(x)\right|$ და $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

ახლა გამოვიყვანოთ კიდევ ერთი რიცხვითი გაწარმოების ფორმულა, ცხადია, $\int_0^t u(\tau)\,d\tau = f(t)$ ტოლობა

ნიშნავს $u(t) = f'(t)$; ცხადია გვაქვს $\int_0^{t_K} u(\tau)d\tau = f_K$ ანუ $\int_{t_{K-1}}^{t_K} u(\tau)d\tau = f_K - f_{K-1}$ თუ ინტეგრალს გამოვთვლით ტრაპეციის ფორმულით, მივიღებთ:

$$u_K = \frac{2}{h}(f_K - f_{K-1}) - u_{K-1}$$

უკანასკნელი რეკურენტული ფორმულა გვაძლევს საშუალებას ვიპოვოთ მოცემული f ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული.

§. 3.3. არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოთვლა

როდესაც ჩვენ წინა პარაგრაფში განვიხილეთ $\int_a^b f(x)dx$ განსაზღვრული ინტეგრალი და ვაჩვენეთ მისი კავშირი წირის ქვემოთ მოთავსებული არის ფართობთან. ვგულისხმობდით, რომ არაუარყოფითი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია იყო უწყვეტი ან უბან-უბან უწყვეტი მაინც ჩაკეტილ $[a,b]$ ინტერვალზე. იმისათვის რომ ვაჩვენოთ ის შესაძლო შედეგი, რასაც მივიღებთ, როცა ეს პირობა არ სრულდება, განვიხილოთ “განსაზღვრული ინტეგრალი”.

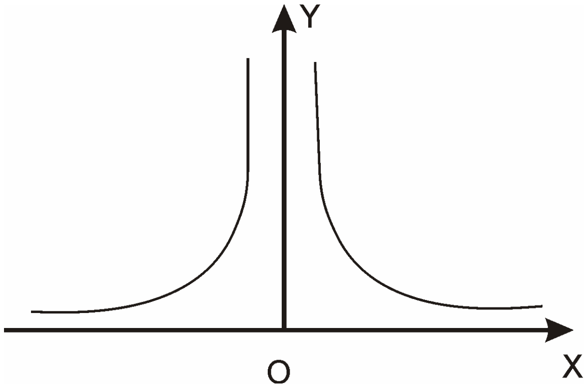
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} dx$$

თუ ამოვხსნით მას ჩვეულებრივად, მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} dx = \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}$$

მაგრამ თუ დავხაზავთ $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ ფუნქციის გრაფიკს, როგორც ეს ნახ. 3.4-ზეა ნაჩვენები, ადვილად

დავრწმუნდებით, რომ მიღებული შედეგი არ არის სწორი, რადგანაც ეს ნიშნავს, რომ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც მოთავსებულია წირსა და ox ღერძს შორის უარყოფითია.



ნახ. 3.4 $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ფუნქციის გრაფიკი

ისმება კითხვა, სად დაუშვით შეცდომა? საქმე ის არის, რომ $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს უსასრულო წყვეტა ანუ სინგულარობა (რაც ნიშნავს, რომ იგი შემოუსაზღვრულია). აქედან გამომდინარე, ხსენებული ფიგურა შემოუსაზღვრავია და ჩვენი ინტეგრების პროცესი არასწორია.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ იმ პირობებს, რომელთა დროსაც $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი არსებობს, როცა

1. ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრავია (ანუ მას მეორე გვარის წყვეტა აქვს) ინტეგრების არის რომელიმე წერტილში, ან

2. ინტეგრების არეა უსასრულო (ანუ ან a, ან b ან ორივე ერთად უსასრულობაა).

ასეთ ინტეგრალებს არასაკუთრივი ინტეგრალები ეწოდებათ და ხშირად გამოიყენებიან საინჟინრო ამოცანებში. მაგალითად, წონასწორობის მდგომარეობიდან α კუთხით გადახრილი მარტივი ქანქარას პერიოდია:

$$\int_0^{\alpha} \frac{4}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}} dx \qquad (3.20)$$

როგორც მაგალითიდან ჩანს, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უსასრულოა $x = \alpha$ წერტილში, თუმცა, როგორც ფიზიკიდან ცნობილია, არსებობს სრულიად განსაზღვრული პასუხი.

1. ინტეგრალქვეშა ფუნცია შემოუსაზღვრელია

ვიგულისხმოთ, რომ $x = a$ ქვედა ზღვარი არის $f(x)$ ფუნქციის ერთადერთი უსასრულო წყვეტის წერტილი $[a, b]$ ინტერვალზე. ამ შემთხვევაში $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი განვმარტოთ, როგორც

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to 0+} \int_{a+t}^b f(x)dx, \qquad (3.21)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს, სხვა შემთხვევაში J ინტეგრალის მნიშვნელობა არ იარსებებს (ე.ი ინტეგრალი განშლადია).

ანალოგიურად, თუ $x = b$ ზედა ზღვარი $f(x)$ ფუნქციის ერთადერთი უსასრულო წყვეტის წერტილია $[a, b]$ ინტერვალზე, მაშინ

$$J = \lim_{t \to 0+} \int_a^{b-t} f(x)dx, \qquad (3.22)$$

იმ პირობით, რომ ეს ზღვარი არსებობს. სხვა შემთხვევაში J ინტეგრალის მნიშვნელობა არ არსებობს (ე.ი. ინტეგრალი განშლადია).

თუ ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქციას უსასრულო წყვეტა აქვს $x=c$ წერტილში, სადაც $a<c<b$, მაშინ ინტეგრალი განვმარტოთ, როგორც:

$$J=\lim_{t\to 0+}\left(\int_a^{c-t} f(x)dx+\int_{c+t}^{b} f(x)dx\right) \qquad (3.23)$$

თუ მარჯვნივ ორივე ზღვარი არსებობს. სხვა შემთხვევაში J ინტეგრალი განშლადია (არ არსებობს). თუ ერთერთი ზღვარი არ არსებობს, მაშინ J-ც არ არსებობს.

მაგალითი 3.1. ვაჩვენოთ, რომ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}dx$ არ არსებობს.

ამოხსნა. ეს ის ინტეგრალია, რომელიც ამ პარაგრაფის შესავალში განვიხილეთ და ვნახეთ, რომ ჩვეულებრივი ინტეგრების ტექნიკის მექანიკურად გამოყენებით მივიღეთ მცდარი პასუხი. ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს უსასრულო წყვეტა. გამოვიყენოთ (3.23) ზღვრები:

$$\lim_{t\to 0+}\int_{-1}^{a-t}\frac{1}{x^4}dx=\lim_{t\to 0+}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-1}^{a-t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{3}\right)=+\infty$$

ანალოგიურად მეორე ზღვარიც არ არსებობს და ამდენად არასაკუთრივი $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}dx$ ინტეგრალიც არ არის განსაზღვრული.

2. <u>ინტეგრალები უსასრულო საზღვრით</u>

იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრების არე უსასრულოა, შესაბამისი არასაკუთრივი ინტეგრალი ანალოგიური გზით განიმარტება ასე:

$$J=\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx \qquad (3.24)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს. სხვა შემთხვევაში J არ არსებობს.

ცხადია (3.21) და (3.22) ეკვივალენტურია შესაბამისად შემდეგი ზღვრების

$$\lim_{t\to 0+}\int_a^{a+t} f(x)dx=0 \ \text{(ა)} \quad \text{და} \quad \lim_{t\to 0+}\int_{b-t}^{b} f(x)dx=0 \ \text{(ბ)}$$

ხოლო (3.23) კი:

$$\lim_{t\to 0+}\int_{c-t}^{c} f(x)dx=0 \ \text{(გ)} \quad \text{და} \quad \lim_{t\to 0+}\int_{c}^{c+t} f(x)dx=0 \ \text{(დ)}$$

თუ თითოეული ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას მივიღებთ:

(ა) და (დ)-სათვის

$$\lim_{t\to 0+} t\cdot f(d+\theta t)=0 \qquad (3.25)$$

(ბ) და (გ)-სათვის

$$\lim_{t\to 0+} t\cdot f(d-\theta t)=0 \qquad (3.26)$$

სადაც $d\in[a,b]$-ში შემავალი წყვეტის წერტილია, ხოლო $0<\theta<1$. ამგვარად (3.25) და (3.26) წარმოადგენენ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის აუცილებელ პირობებს.

მეთოდები, რომლებიც გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ საიმედო შედეგები განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალის მაგალითზე:

$$J=\int_0^1 \frac{tgx}{\sqrt[3]{x}}dx$$

ა) ზოგჯერ ცვლადთა გარდაქმნით გვეძლევა საშუალება თავი დავაღწიოთ ინტეგრალის განსაკუთრებულობას. ამ მაგალითში $x=z^3$ გარდაქმნით მივიღებთ:

$$J = 3\int_0^1 ztgz^3 dz$$

და მიღებული ინტეგრალი ნებისმიერი კვადრატურული ფორმულით გამოითვლება საჭირო სიზუსტით.

ბ) იგივე ინტეგრალში შეგვიძლია ნაწილობითი ინტეგრებით თავი დავაღწიოთ განსაკუთრებულობას

$$J = \int_0^1 \frac{tgx}{\sqrt[3]{x}} dx = \sqrt[3]{x^2}\, tgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\cos^2 x} dx$$

ბოლო ინტეგრალი გარანტირებული სიზუსტით შეიძლება გამოვთვალოთ ნებისმიერი კვადრატურული ფორმულით.

გ) მაშინ როცა ზემოთ მოყვანილი მარტივი ხერხებით განსაკუთრებულობის მოსპობა არ ხერხდება, ასეთ შემთხვევაში მიმართავენ განსაკუთრებულობის გამოყოფის უნივერსალურ მეთოდებს.

კერძოდ

$$J = J_1 + J_2 = \int_a^{a+\eta} f(x)dx + \int_{a+\eta}^{b} f(x)dx$$

J_2 ცხადია არ შეიცავს არავითარ განსაკუთრებულობას და შგვიძლია გამოვთვალოთ ნებისმიერი სიზუსტით (კვადრატული ფორმულით), ხოლო რაც შეეხება J_1 ინტეგრალს მისი მნიშვნელობა შეიძლება გავხადოთ $\frac{\varepsilon}{2}$-ის ტოლი, ვინაიდან, ამისთვის ადგილი აქვს (3.25) ან (3.26) პირობებს, მივიღებთ:

$$\eta\ f(a+\theta\eta) = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.27)$$

ვთქვათ, (3.27) განტოლების ამონახსნია $\eta = \eta_0$ მაშინ, საძებნი ინტეგრალის მნიშვნელობა იქნება

$$J = \frac{\varepsilon}{2} + \int_{a+\eta}^{b} f(x)dx$$

უკანასკნელი მეორე შესაკრები ინტეგრალი კვადრატურული ფორმულით დავთვალოთ $\frac{\varepsilon}{2}$ სიზუსტით, ამდენად მივიღებთ J-ს მნიშვნელობას ε-ს სიზუსტით.

მაგალითი 3.1.

გამოვთვალოთ მიახლოებით ინტეგრალი

$$J = \int_1^3 x^3 dx$$

გამოვიყენოთ მართკუთხედების (3.13) ფორმულა, $n = 5$, $h = 0.4$

$$J \approx 0.4 \cdot (1.728 + 4.096 + 8 + 13.824 + 21.952) = 19.84$$

ინტეგრალის ზუსტი მნიშვნელობა $J = 20$.

ახლა ვთქვათ, $n = 10$, $h = 0.2$, (3.13) ფორმულით მივიღებთ:

$$J_2 \approx 0.2 \cdot (1.331 + 2.197 + 3.375 + 4.913 + 6.859 + 9.261 + 12.167 +$$
$$+ 15.625 + 19.683 + 24.389) = 19.96$$

იგივე ინტეგრალი გამოვთვალოთ ტრაპეციის (3.15) ფორმულით $n = 5$, $h = 0.4$

$$J_{11} \approx \frac{0.4}{2}\left(1 + 2(2.744 + 5.832 + 10.648 + 17.576) + 27\right) = 20.32$$

ახლა იგივე ინტეგრალი გამოვთვალოთ სიმპსონის ფორმულით:

$n = 4$, $h = 0.5$

$$J = \frac{0.5}{3}\left(1 + 4(3.375 + 15.625) + 2.8 + 27\right) = 20$$

3.4 Mathcad რიცხვითი გაწარმოება

$$f(x) := \frac{2\cdot x^3 + 36\cdot x - 15\cdot x^2}{6}$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow x^2 + 6 - 5\cdot x$$

$$f2(x) := \frac{d}{dx} f1(x) \rightarrow 2\cdot x - 5$$

ვთქვათ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით
ვისარგებლოთ რიცხვითი გაწარმოების ფორმულებით
და ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულები

$h := 0.03 \qquad i := 0..16 \qquad j := 1..14$

$x_i := h\cdot i \qquad x_j := j\cdot h$

$$\phi_j := \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\cdot h} \qquad Y_j := \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h}$$

$$Z_j := \frac{f(x_{j+1}) - 2\cdot f(x_j) + f(x_{j-1})}{h^2} \qquad g_j := \frac{f(x_{j+2}) - 3\cdot f(x_{j+1}) + 3\cdot f(x_j) - f(x_{j-1})}{h^3}$$

$f(x_i) =$

0
0.178
0.351
0.52
0.685
0.845
1.001
1.153
1.301
1.444
1.584
1.72
1.852
1.98
2.104
2.224

$f1(x_i) =$

6
5.851
5.704
5.558
5.414
5.272
5.132
4.994
4.858
4.723
4.59
4.459
4.33
4.202
4.076
3.953

$\phi =$

	0
0	0
1	5.851
2	5.704
3	5.558
4	5.415
5	5.273
6	5.133
7	4.994
8	4.858
9	4.723
10	4.59
11	4.459
12	4.33
13	4.202
14	4.077

$Y =$

	0
0	0
1	5.777
2	5.631
3	5.486
4	5.343
5	5.202
6	5.063
7	4.926
8	4.79
9	4.656
10	4.524
11	4.394
12	4.266
13	4.139
14	4.014

$f2(x_1) =$

-5
-4.94
-4.88
-4.82
-4.76
-4.7
-4.64
-4.58
-4.52
-4.46
-4.4
-4.34
-4.28
-4.22
-4.16
-4.1

$Z =$

	0
0	0
1	-4.94
2	-4.88
3	-4.82
4	-4.76
5	-4.7
6	-4.64
7	-4.58
8	-4.52
9	-4.46
10	-4.4
11	-4.34
12	-4.28
13	-4.22
14	-4.16

$g =$

	0
0	0
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	2
12	2
13	2
14	2

f1(x) – არის f'(x) - ის ზუსტი მნიშვნელობა

f2(x) – არის f''(x) - ის ზუსტი მნიშვნელობა

¢ გამოთვლილია ¢j ცენტრალურ სხვაობიანი ფორმულით

Y გამოთვლილია Yj მიახლოებითი ფორმულით

Z მეორე რიგის წარმოებულის Zj ფორმულით მიღებული მნიშვნელობებია

თვალსაჩინოების მიზნით შევადაროთ f1(x)-ი, და Y, f2(x) და Z

gj ფორმულით მიღებული მნიშვნელობები ემთხვევა მესამე რიგის წარმოებულის ზუსტ მნიშვნელობას.

წარმოებულის გამოსათვლელი ოპერატორები

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare \qquad \frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare \qquad \frac{d}{d\blacksquare}\left(\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare\right)$$

წარმოებულის გამოსათვლელი ოპერატორის მონიშნულ ადგილზე ჩავსვათ წინასწარ ჩაწერილი ფუნქციის სახელი ან თვით ფუნქცია და ამასთან მონიშნულ ადგილზე მივუთითოთ წარმოებულის რიგი, შემდეგ —> ლოგიკური ნიშნის გამოყენებით მივიღებთ წარმოებუის მნიშვნელობას. განვიხილოთ მაგალითები:

$$y(x) := x^2 \cdot \sin(x) \qquad \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

$$G(x) := \ln\left(x^2 + 2\right) \qquad \frac{d}{dx}G(x) \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{x^2 + 2}$$

მაღალი რიგის წარმოებულების გამოთვლა

$$f(x) := \frac{x^6}{60} + \frac{x^5}{120} + x^3 - x^2 \qquad \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \frac{1}{10} \cdot x^5 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + 6 \cdot x - 2 \qquad \frac{d^3}{dx^3}f(x) \rightarrow 2 \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 6$$

$$\frac{d^4}{dx^4}f(x) \rightarrow 6 \cdot x^2 + x \qquad \frac{d^5}{dx^5}f(x) \rightarrow 12 \cdot x + 1$$

$$\frac{d^6}{dx^6}f(x) \rightarrow 12 \qquad \frac{d^7}{dx^7}f(x) \rightarrow 0$$

$$q(x) := x \cdot e^{x}$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} q(x) \rightarrow e^{x} + x \cdot e^{x}$$

$$G(x) := \frac{d^{2}}{dx^{2}} q(x) \rightarrow 2 \cdot e^{x} + x \cdot e^{x}$$

პირველადი ფუნქციის მისაღებად ინტეგრების ოპერატორის მონიშნულ ადგილზე ჩავსვათ საინტეგრაციო ფუნქციის სახელი ან თვით ფუნქციის გამოსახულება და —> ნიშნით, მივიღებთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის მნიშვნელობას. განვიხილოთ მაგალითები:

ინტეგრების ოპერატორს აქვს სახე

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

მონიშნულ ადგილებში ჩავწეროთ ფუნქცია და საინტეგრაციო ცვლადი, გვექნება

$$G1(x) := \int G(x)\,dx \rightarrow e^{x} + x \cdot e^{x} \qquad G2(x) := \int G1(x)\,dx \rightarrow x \cdot e^{x}$$

ვთქვათ $P(x) := \dfrac{1 + \cos(x)^{2}}{1 + \cos(2 \cdot x)}$

$$K(x) := \int P(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2 \cdot \cos(x)} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot x$$

მართლაც $\frac{d}{dx}K(x) = P(x)$

$$\frac{d}{dx}K(x) \rightarrow \frac{1}{2\cdot\cos(x)^2}\cdot\sin(x)^2 + 1$$

$$\int \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)^5}\,dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^4} \qquad \int \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\,dx \rightarrow -\left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M(x) := \int x\cdot\sqrt{A + x}\,dx \rightarrow \frac{2}{5}\cdot(A + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\cdot(A + x)^{\frac{3}{2}}\cdot A$$

$$\frac{d}{dx}M(x) \rightarrow (A + x)^{\frac{3}{2}} - (A + x)^{\frac{1}{2}}\cdot A$$

ცხადია ეს გამოსახულება ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია ე.ი. M(x)- პირველადი ფუნქციაა.

$$f(x) := \frac{1}{x^2 + 4} \qquad f1(x) := \frac{2\cdot x}{\sqrt{3 - x^2}}$$

$$F(x) := \int f(x)\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \qquad F1(x) := \int f1(x)\,dx \rightarrow -2\cdot\sqrt{3 - x^2}$$

<u>მართლაც</u>

$$\frac{d}{dx}F(x) \rightarrow \frac{1}{4\cdot\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)} \qquad \frac{d}{dx}F1(x) \rightarrow \frac{2\cdot x}{\sqrt{3 - x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\cos(t)^2}\,dt \rightarrow \tan(t) \qquad \int \frac{e^{2\cdot x}-1}{e^x+1}\,dx \rightarrow e^x - x$$

$$\int x\cdot\sin(x)\,dx \rightarrow \sin(x) - x\cdot\cos(x) \qquad \int x\cdot e^x\,dx \rightarrow e^x\cdot(x-1)$$

$$\int x^3\cdot\ln(x)\,dx \rightarrow \frac{x^4\cdot\left(\ln(x)-\frac{1}{4}\right)}{4} \qquad \int x\cdot 2^x\,dx \rightarrow 2^x\cdot\left(\frac{x}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)^2}\right)$$

$$\int (2-7\cdot x)\cdot\cos(2\cdot x)\,dx \rightarrow \sin(2\cdot x) - \frac{7\cdot\cos(2\cdot x)}{4} - \frac{7\cdot x\cdot\sin(2\cdot x)}{2}$$

$$\int \operatorname{atan}(x)\,dx \rightarrow x\cdot\operatorname{atan}(x) - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} \qquad \int \operatorname{asin}(x)\,dx \rightarrow x\cdot\operatorname{asin}(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int x\cdot\operatorname{atan}(x)\,dx \rightarrow \operatorname{atan}(x)\cdot\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{x}{2}$$

$$\int x\cdot\operatorname{asin}(x)\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{asin}(x)\cdot\left(2\cdot x^2-1\right)}{4} + \frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}$$

$$F2(x) := \int \frac{1}{4+9\cdot x^2}\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{3\cdot x}{2}\right)}{6} \qquad \frac{d}{dx}F2(x) \rightarrow \frac{1}{4\cdot\left(\frac{9\cdot x^2}{4}+1\right)}$$

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიძახოთ ინტეგრების ოპერატორი

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

მონიშნულ ადგილებში შევიტანოთ შესაბამისი მონაცემები.

განვიხილოთ მაგალითები:

$$\int_{1}^{2} x\cdot\ln(x)\,dx = 0.636 \qquad \int_{1}^{2} x\cdot\ln(x)\,dx \rightarrow 2\cdot\ln(2) - \frac{3}{4} = 0.636$$

$$f(x) := x^{2}\cdot\sin(x)$$

$$\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 5.87 \qquad \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \rightarrow \pi^{2} - 4 = 5.87$$

$$\Phi(x) := 2\cdot x\cdot e^{x^{2}}$$

$$\int_{0}^{1} \Phi(x)\,dx = 1.718 \qquad \int_{0}^{1} \Phi(x)\,dx \rightarrow e - 1 = 1.718$$

ჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად შესაბამის ოპერატორში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ჩასასმელ-მონიშნულ ადგილზე ჩავსვათ ისევ ინტეგრალის ოპერატორი შემდეგ ჩავსვათ საზღვრები და ყურადღებით შევარჩიოთ ინტეგრების რიგი. ჩავწეროთ ინტეგრალქვეშა ფინქცია მონიშნულ ადგილზე და შემდეგ —> -ით ან = ნიშნით, მივიღებთ გამოსათვლელი ინტეგრალის მნიშვნელობას.

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare \, d\blacksquare$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx \to \frac{1}{12}\cdot\pi = 0.262 \qquad \int_0^1\int_1^2 \left(x^2+y^2\right)dx\,dy = 2.667$$

$$\int_2^4\int_x^{2\cdot x} \frac{y}{x}\,dy\,dx \to 9 \qquad \int_0^c\int_{y-c}^{2\cdot y} x\cdot y\,dx\,dy \to \frac{11}{24}\cdot c^4$$

$$f(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\int_0^c\int_{\frac{x}{c}}^{x} f(x,y)\,dy\,dx \to \frac{1}{4}\cdot c\cdot\pi - c\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$\int_0^1\int_2^4\int_0^3 (x+y+z)\,dz\,dy\,dx = 30$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x-y} (x+2\cdot z)\,dz\,dy\,dx = 1.583$$

$$G(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \rightarrow \frac{248}{15} - \frac{72}{5}\cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{32}{5}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 0.643$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx = 0.393$$

ნებისმიერი ინტეგრალის გამოთვლისას მივენდოთ **Mathcad**-ს. ეხლა გამოვთვალოთ არასაკუთრივი ინტეგრალები

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx \rightarrow 3 + \frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{2}{3}} = 6.78 \qquad \int_{-1}^1 \frac{3\cdot x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx \rightarrow \frac{102}{7} = 14.571$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx \rightarrow \infty \qquad \int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx \rightarrow \frac{22}{3}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 10.371$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = 3.142 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy \rightarrow \pi$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\,dx\,dy\,dz = 1.235$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}\,dx\,dy\,dz \to \frac{1}{8}\cdot\pi^2$$

<u>არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოსათვლელი პროგრამა</u>

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(1+\alpha) \to \frac{1}{\left(2\cdot\alpha+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\alpha := 0.5$ $\varepsilon := 0.0001$

Given

$$\alpha\cdot f(1+\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} = 0$$

$\eta := \mathrm{Find}(\alpha)$ $\eta = 4.919\times 10^{-9}$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \int_{1+\eta}^{2} f(x)\,dx \text{ float}, 11 \to 1.3169078969 = 1.317$$

<u>ვნახოთ რას მოგვცემს **Matcad-ი**</u>

$$\int_1^2 f(x)\,dx \text{ float}, 11 \to 1.3169578969$$

როგორც ვხედავთ გამოთვლილი შედეგები ემთხვევა მძიმიდან ოთხი ნიშნის სიზუსტით.

კერძოწარმოებულების გამოთვლა

$f(x,y) := x^y + x\cdot\sin(y)$

$\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\frac{y}{x} + \sin(y)$

$\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\ln(x) + x\cdot\cos(y)$

$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\frac{y^2}{x^2} - x^y\cdot\frac{y}{x^2}$ ან $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\frac{y^2}{x^2} - x^y\cdot\frac{y}{x^2}$

$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\ln(x)^2 - x\cdot\sin(y)$ $\frac{d}{dy}\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\ln(x)^2 - x\cdot\sin(y)$

შერეული წარმოებულები ასე გამოითვლება

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x) + \frac{x^y}{x} + \cos(y)$

$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow x^y\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x) + \frac{x^y}{x} + \cos(y)$

ჯამის, ნამრავლისა და ზღვრის გამოთვლა

$\sum_{n=1}^{10} n = 55$ $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$ $\sum_{n=0}^{5} (2\cdot n + 1)^2 = 286$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \rightarrow 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot i\cdot \mathrm{Psi}(1-i) - \frac{1}{2}\cdot i\cdot \mathrm{Psi}(1+i) = 1.077$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-1} \to \infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right] \to \ln(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cdot n+2}\right] \to \frac{-1}{25} \cdot \ln\left(\frac{24}{25}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n} \to \frac{4e+1+e^2}{(-4)\cdot e^3+e^4+6e^2-4e+1} + \frac{1}{(-1)+e} + 3\frac{e+1}{(-3)\cdot e^2+3e+e^3-1} + \frac{3}{(-2)\cdot e+e^2+1} = 6.00$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i \to \frac{-1}{c-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1+b)^n \to \frac{-(1+b)}{b}$$

$$\prod_{i=0}^{5} \left(x - x_i\right) \to \left(x - x_0\right)\cdot\left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right)\cdot\left(x - x_3\right)\cdot\left(x - x_4\right)\cdot\left(x - x_5\right)$$

$$g(x) := \prod_{i=1}^{3} (x-i) \to (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$

$$\frac{d}{dx} g(x) \to (x-2)\cdot(x-3) + (x-1)\cdot(x-3) + (x-1)\cdot(x-2)$$

$$\prod_{n=0}^{3} (2\cdot n+1) \to 105 \qquad \prod_{n=1}^{5} n \to 120$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3\cdot x-4}{x-1} \to 5 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2\cdot\left(e^{3\cdot x}-1\right)} \to \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi\cdot x)}{x^2-4} \to \frac{1}{4}\cdot\pi \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2\cdot x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to e^{\frac{3}{2}} = 4.482$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x-3} \to \infty \qquad \lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x-3} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}\left[x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right] \to 1 \qquad \lim_{x\to 1^-}(\ln(x)\cdot\ln(1-x)) \to 0$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^5+7x^4+2}{x^5+5x^4+2}\right)^x \to e^2 \qquad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}} \to 1$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\cos\left(\frac{A}{x}\right)\right)^x \to 1 \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{a^x+b^x-1} \to a\cdot b$$

ფუნქციის გაშლა ხარისხოვან მწკრივად
expand series ოპერატორების მიმდევრობით გამოძახებით
განვიხილოთ მაგალითები:

$$\sin(x)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 10\end{array}\right. \to 1\cdot x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5-\frac{1}{5040}\cdot x^7+\frac{1}{362880}\cdot x^9$$

$$\cos(x)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 10\end{array}\right. \to 1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{24}\cdot x^4-\frac{1}{720}\cdot x^6+\frac{1}{40320}\cdot x^8$$

$$\ln(1+x)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 7\end{array}\right. \rightarrow 1\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{1}{6}\cdot x^6$$

$$e^x\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 6\end{array}\right. \rightarrow 1+1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{24}\cdot x^4+\frac{1}{120}\cdot x^5$$

$$3\cdot\cos(x)+x\cdot\sin(x)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 8\end{array}\right. \rightarrow 3-\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{24}\cdot x^4+\frac{1}{240}\cdot x^6$$

$$x\cdot(1+\tan(x))\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 8\end{array}\right. \rightarrow 1\cdot x+1\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^4+\frac{2}{15}\cdot x^6$$

$$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 10\end{array}\right. \rightarrow 1+2\cdot x+2\cdot x^2-2\cdot x^4-2\cdot x^5+2\cdot x^7+2\cdot x^8$$

$$\text{atan}(x)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, x\\ \text{series}, x, 10\end{array}\right. \rightarrow 1\cdot x-\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{1}{5}\cdot x^5-\frac{1}{7}\cdot x^7+\frac{1}{9}\cdot x^9$$

რაციონალური წილადის წარმოდგენა ელემენტარული წილადების ჯამის სახით

წილადის ფორმირების შემდეგ symbolic-დან ვიძახებთ **parfrac**-ოპერატორს რის შედეგადაც წილადის გაგრძელებაზე გამოჩნდება **convert, parfrac**, მონიშნულ ადგილას ჩავსვათ შესაბამისი ცვლადი. მივიღებთ:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)}\ \text{convert}, \text{parfrac}, x\ \rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^2-7x+10}\ \text{convert}, \text{parfrac}, x\ \rightarrow 2-\frac{1}{x-2}+\frac{12}{x-5}$$

$$\frac{x^3+8}{x^2-4x+3}\ \text{convert},\text{parfrac},x \rightarrow x+4-\frac{9}{2\cdot(x-1)}+\frac{35}{2\cdot(x-3)}$$

$$\frac{x+2}{x^3-8}\ \text{convert},\text{parfrac},x \rightarrow \frac{1}{3\cdot(x-2)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2+2\cdot x+4}$$

$$\frac{x^2+2\cdot x+4}{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}\ \text{convert},\text{parfrac},x \rightarrow \frac{3}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\ \text{convert},\text{parfrac},x \rightarrow \frac{5}{6\cdot x}-\frac{26}{15\cdot(x+3)}+\frac{9}{10\cdot(x-2)}$$

მაგალითები

გამოვთვალოთ მიახლოებით შემდეგი ინტეგრალები:

ა) მართკუთხედების ფორმულით:

3.1 $\int_0^4 x^2dx$; $(n=10)$. 3.2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; $(n=10)$.

ბ) ტრაპეციების ფორმულით:

3.3. $\int_0^1 (4x-x^2)dx$; $(n=10)$ 3.5. $\int_0^{\pi} \sin xdx$; $(n=6)$.

3.4. $\int_{-1}^1 (2+x-3x^2)dx$; $(n=10)$ 3.6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos xdx$;

$(n=6)$.

გ) სიმპსონის ფორმულით:

3.7 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; $(2n=10)$. 3.8. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; $2n=2$.

3.9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; ($2n=10$). 3.10. $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$; ($2n=10$).

3.11. $\int_2^3 x\sqrt[3]{x-2}\cdot dx$; ($2n=10$). 3.12. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$; ($2n=10$).

გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

3.13. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 3.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tgxdx$;

3.15. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 3.16. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

თავი IV
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

ვიცით, რა ზოგიერთი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ანალიზური ამოხსნის მეთოდები, ახლა განვიხილოთ რამდენიმე მეთოდი, რომლებიც საჭიროების შემთხვევაში გამოიყენება დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამონახსნების ასაგებად. ამ წიგნში ჩვენ ვერ განვიხილავთ ყველა მეთოდს, ამიტომ ყურადღებას გავამახვილებთ დიფერენციალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნების ძირითადი მიმართულების ამსახველ მეთოდებზე. განვიხილავთ ძირითად საბაზისო პრინციპებს.

§ 4.1. დიფერენიალური განტოლების ამოხსნის ეილერის უმარტივესი მეთოდი

კოშის ამოცანა. ვთქვათ, საძიებელია შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, მოცემული საწყისი პირობებით ე.ი. გვაქვს კოშის ამოცანა:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ y_i\left(a\right) = y_{ia} \\ a < x \le b \end{cases} \qquad i=1, 2,. . ., n \qquad (4.1)$$

f_i ფუნქციები აკმაყოფილებენ კოშის თეორემის პირობებს ამონახსნის არსებობის შესახებ. მოცემული (4.1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \\ y\left(a\right) = y_a \end{cases} \qquad (4.2)$$

სადაც

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ . \\ . \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} f_1\left(x, y_1, y_2, ...y_n\right) \\ f_2\left(x, y_1, y_2, ...y_n\right) \\ .... \\ f_n\left(x, y_1, y_2, ...y_n\right) \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ დიფერენციქლური განტოლება ამოხსნილია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ, მაშინ კოშის ამოცანა შეიძლება ჩაიწეროს (4.1) სისტემის სახით. მაგალითად ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \dfrac{dy}{x}, ..., \dfrac{d^{n-1}y}{x^{n-1}} \right) \\ y(a) = \alpha_0 \\ \dfrac{dy}{dx} \ \Big|_{x=a} = \alpha_1 \\ .... \\ \dfrac{d^{n-1}y}{x^{n-1}} \ \Big|_{x=a} = \alpha_{n-1} \end{cases}$$

ადვილად დაიყვანება (4.1) ფორმაზე, თუ შემოვიღებთ ახალ უცნობ ფუნქციებს:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = \frac{dy}{dx}, \qquad y_3 = \frac{d^2y}{dx^2}, . \ . \ . \ . \ , \ y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^n}$$

სისტემის ამონახსნს ცხადია ვეძებთ [a, b] ინტერვალზე, ამავდროულად ყველა დასმული ამოცანისათვის შესრულებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობიდ პირობები, ამასთან f_i ფუნქციებსაც გააჩნიათ სათანადო სიგლუვე.

ამგვარად ეს დაყვანა ეკვივალენტურია, ამიტომ მიღებული პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ამოხსნა ეკვივალენტურია საწყისი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისა. სიმარტივისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის მეთოდებს განვიხილავთ ერთი განტოლების მაგალითზე:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(a) = y_a \end{cases} \qquad (4.4)$$

ამასთან, უნდა გვახსოვდეს, რომ (4.4) ამოცანის ამოხსნის ნებისმიერი ალგორითმი დამატებითი სირთულეების გარეშე შეიძლება თავისუფლად გამოვიყენოთ (4.2) სისტემის ამოსახსნელად, თუ კარგად გავითვალისწინებთ (4.3) ტოლობებით მოცემული ფუნქციების ვექტორულ ხასიათს.

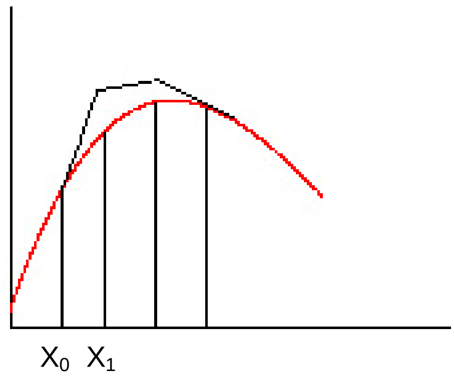
ვიწყებთ რა რომელიმე (x_o,y_o) წერტილიდან $[a, b]$ სეგმენტზე შევადგინოთ $y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი. დავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი n თანატოლ ნაწილად წერტილებით

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b;$$

$$h=x_{i+1}-x_i, \quad i=0, 1, \ldots, n-1$$

შევცვალოთ $[x_0, x_1]$ სეგმენტზე ინტეგრალური AB წირის რკალი A წერტილზე გამავალი მხების AA_1 მონაკვეთით (ნახ. 4.1) მხების $y-y_0=(x-x_0)\cdot f(x_0, y_a)$ განტოლებაში x-ის ნაცვლად თუ ჩავსვამთ $x_1=x_0+h$, მივიღებთ $y(x)$ ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობას x_1 წერტილში

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_a)$$



ნახ.4.1

$[x_1, x_2]$ სეგმენტზე ინტეგრალური წირი შევცვალოთ წრფით, რომელიც გადის $A_1(x_1, y_1)$ წერტილზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტია $f(x_1, y_1)$. ამ წრფის განტოლებაა:

$$y-y_1=(x-x_1)\cdot f(x_1, y_1)$$

თუ ამ განტოლებაში შევიტანთ $x=x_1+h$, მივიღებთ:

$$y_2=y_1+h\cdot f(x_1, y_1)$$

ანალოგიურად $y(x)$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა x_{i+1} წერტილში იქნება

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i, y_i) \qquad i=0, 1, \dots, n-1 \qquad (4.5)$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის აგების ამ მეთოდს ეილერის მეთოდი ეწოდება.

§ 4.2. ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდი

ცდომილობათა დაგროვების თავიდან ნაწილობრივ აცილების მიზნით იყენებენ $y_1, y_2, \dots, y_n$ მნიშვნელობათა გადათვლის შემდეგ წესს. x_1 წერტილზე ეილერის მეთოდით პოულობენ $y_1=y_0+hf(x_0, y_0)$ მნიშვნელობას. ამავე წერტილზე $y(x)$ ფუნქციის უკეთეს მიახლოებით მნიშვნელობად ღებულობენ გამოსახულებას:

$$y_1^{(1)}=y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1)\right]$$

$y_1^{(1)}$ მნიშვნელობა შეიძლება კიდევ უფრო დავაზუსტოთ შემდეგი გამოსახულებით:

$$y_1^{(2)}=y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f\left(x_1,y_1^{(1)}\right)\right]$$

და საერთოდ

$$y_1^{(i)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(i-1)}\right)\right]$$

y_k –ს ყოველი დაზუსტებული მნიშვნელობის მისაღებად გადათვლის ეს პროცესი მაშინ უნდა შევწყვიტოთ, როცა ორ მომდევნო მიახლოებაში $y_k^{(i+1)}$ და $y_k^{(i)}$
მძიმის შემდეგ ერთმანეთს დაემთხვევა ათწილად ნიშანთა საჭირო რაოდენობა. ე.ი.

$$\left|y_k - y_k\right| < \varepsilon$$

თუ y_k –ს მნიშვნელობაში სამი ოთხი გადათვლის შემდეგ ერთმანეთს არ დაემთხვევა ათწილად ნიშანთა საჭირო რაოდენობა, მაშინ, უნდა შევამციროთ ცხრილის h ბიჯი.

ამ მეთოდს ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდი ეწოდება, რასაც შერეული მეთოდი ან PC-მეთოდიც (Predictor-Corrector) ეწოდება.

პრედიქტორი შედეგის წინასწარი გათვლა, რომელიც გამოითვლება შუალედური ფორმულით; კორექტორი შედეგის დაზუსტება.

შევნიშნოთ, რომ ეს მეთოდი ახდენს ამოსავალი დიფერენციალური (4.4) განტოლების აპროქსიმაციას მეორე რიგის სიზუსტით.

განვიხილოთ დაწვრილებით, როგორც ვნახეთ ყოველი y_{k+1}-ის გამოსათვლელად ჩვენ მივიღეთ იტერაციული პროცესი

$$y_{k+1}^{(i+1)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)}\right)\right] \quad (4.6)$$

$k=0, 1, \ldots, n$.

სანამ $\left|y_{k+1} - y_{k+1}\right| < \varepsilon$

ეილერის ცხადი მეთოდით გამოითვლება (ნულოვანი) $y_{k+1}^{(0)}$ საწყისი მიახლოება

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad (4.7)$$

(4.6) თანახმად პირველი მიახლოებისათვის მივიღებთ

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)\right] \qquad (4.8)$$

მეორესათვის გვექნება

$$y_{k+1}^{(2)} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(1)}\right)\right] \qquad (4.8')$$

და ა.შ. $\left|y_{k+1} - y_{k+1}\right| < \varepsilon$ პირობის შესრულების შემდეგ გადავალთ საძიებელი ფუნქციის y_{k+2} მნიშვნელობის გამოთვლაზე, ამგვარად .x_0, x_1, . . . ,x_n წერტილებზე ჩვენ მივიღებთ y_0, y_1, . . .y_n ორდინატებს და მიღებული $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, . . . , $M_n(x_n,y_n)$ წერტილების გადაერთებით მივიღებთ მოცემული (4.4) დიფერენციალური განტოლების იმ ინტეგრალურ წირს, რომელიც მოცემულ $M_0(a,y_a)$ ან რაც იგივეა $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გადის.

$ 4.3. რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდი

როგორც ეილერ-კოშის გადათვლის მეთოდიდან ვნახეთ, ინტეგრალური წირის დახრილობა $[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთის შუა წერტილში იცვლება მონაკვეთის საზღვრებზე მისი დახრილობების საშუალო არითმეტიკულით. ამ შემთხვევაშიც ადვილად შეიძლება

იმის შემოწმება, რომ (4.6) ახდენს (4.4)-ის აპროქსიმაციას მეორე რიგის სიზუსტით.

რუნგ-კუტას მეთოდები ავრცელებენ ამ პრინციპებს $[x_k, x_{k+1}]$ ინტერვალის სხვადასხვა წერტილებში დახრის კუთხის სიდიდის გამოყენებით, რათა შეფასდეს ამონახსნის დახრის კუთხის სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა ამ ინტერვალზე. ჩვეულებრივად, ყველაზე გავრცელებულია რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის მეთოდი, რომელიც უკვე გამოთვლილი y_k –სათვის მომდევნო y_{k+1} მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}\cdot(c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 + c_4)\\
c_1 &= hf(x_k, y_k)\\
c_2 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{c_1}{2}\right)\\
c_3 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{c_2}{2}\right)\\
c_4 &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + c_3\right)
\end{aligned}
\qquad (4.9)
$$

შევნიშნოთ, რომ (4.9) ტოლობებით განსაღვრული მეოთე რიგის პროცესის მათემატიკური დასაბუთება სცილდება ამ წიგნის მიზნებს. აღსანიშნავია, რომ (4.8), (4.8') PC მეთოდი აგრეთვე შესაძლებელია გმოისახოს ასე:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = hf(x_k, y_k),\\
&c_2 = hf(x_k + h, y_k + c_1),\\
&y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(c_1 + c_2),
\end{aligned}
$$

ცხადია, ამასაც რუნგე-კუტას (მეორე რიგის რუნგა-კუტას) მეთოდის სახე აქვს და მაშასადამე, მეორე რიგის რუნგე-კუტას მეთოდი და PC მეთოდები სინამდვილეში, ტოლძალოვანი პროცესებია.

აღვნიშნოთ, რომ რუნგე-კუტას სქემები წარმოადგენენ ერთბიჯიან მოდელებს, იმ შინაარსით, რომ ისინი თხოულობენ მხოლოდ y_k-ს მნიშვნელობას და არა y-ის მნიშვნელობას რომელიმე წინა ნაბიჯზე. ამდენად, ისინი არსებითად „თვითდამწყები“ არიან, განსხვავებით PC თუ სხვა მრავალბიჯიანი მეთოდებისაგან.

საკომპიუტერო უზრუნველყოფის თვალსაზრისით (რაც ყველაზე მნიშვნელოვანია), რუნგე-კუტას ფორმულები იძლევა საშუალებას დამატებითი სირთულეების გარეშე ვაწარმოოთ გამოთვლები ინტეგრების ცვლადი ბიჯით (მაგალითად, ბიჯის ავტომატური შერჩევით საჭირო სიზუსტის მოთხოვნიდან გამომდინარე), სხვა ფორმულების გამოყენებისას – ეს პროცესი რთულია.

§ 4.4. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ამოხსნა

ამ თავში ჩვენ გავეცანით შემდეგი სახის

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის რიცხვით მეთოდებს. იქვე შევნიშნეთ, რომ შესაძლებელია განხილული მეთოდების განზოგადება

პირველი რიგის განტოლებათა სისტემისათვის. ასეთი სისტემის მაგალითია

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x,y,z) \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x,y,z) \end{cases} \qquad (4.10)$$

ამოვხსნათ (4.10) სისტემა PC მეთოდით, რომელიც ცხადია ასეთ სახეს მიიღებს:

$c_1=hf_1(x_i,y_i,z_i)$, $k_1=hf_2(x_i,y_i,z_i)$,

$c2=hf_1(x_i+h, y_i+c_1, z_i+k_1)$, $k_2=hf_2(xi+h, y_i+c_1, z_i+k_1)$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{2}(c_1+c_2); \qquad z_{i+1}=z_i+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \qquad (4.11)$$

პრაქტიკულად, ეს ნიშნავს, რომ ორი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაში, მიახლოებითი ამოხსნის პროცედურა უნდა ერთდროულად განვიხილოთ ორივე განტოლებისთვის. ამგვარად (4.10) სისტემის ამონახსნს გვაძლევს (4.11) ფორმულები.

ამოვხსნათ იგივე სისტემა რუნგე-კუტას მეთოდის მეოთხე რიგის სქემის გამოყენებით, გვექნება:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \end{cases} \qquad (4.12)$$

სადაც

$$\begin{cases} p_1 = hf_1(x_i, y_i, z_i); q_1 = hf_2(x_i, y_i, z_i) \\ p_2 = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p_1}{2}, z_i + \frac{q_1}{2}\right) \\ q_2 = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p_1}{2}, z_i + \frac{q_1}{2}\right) \\ p_3 = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p2}{2}, z_i + \frac{q_2}{2}\right) \\ q_3 = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{p_2}{2}, z_i + \frac{q_2}{2}\right) \\ p_4 = hf_1(x_i + h, y_i + p_3, z_i + q_3) \\ q_4 = hf_2(x_i + h, y_i + p_3, z_i + q_3) \end{cases}$$

განვიხილოთ შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z) \qquad (4.13) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t, x, y, z) \end{aligned}$$

ამ სისტემისათვის რუნგე-კუტას მეთოდის შესაბამისი სქემა მიიღებს ასეთ სახეს:

$p_1=hf_1(t_n;x_n;y_n;z_n)$, $q_1=hf_2(t_n;x_n;y_n;z_n)$, $r_1=hf_3(t_n;x_n;y_n;z_n)$.

$$p_2=hf_1(\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{p_1}{2}; y_n + \frac{q_1}{2}; z_n + \frac{r_1}{2}\right)$$

$$q_2=hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}; x_n + \frac{p_1}{2}; y_n + \frac{q_1}{2}; z_n + \frac{r_1}{2}\right)$$

$r_2=hf_3\left(t_n+\frac{h}{2};x_n+\frac{p_1}{2};y_n+\frac{q_1}{2};z_n+\frac{r_1}{2}\right)$

$p_3=hf_1\left(t_n+\frac{h}{2};x_n+\frac{p_2}{2};y_n+\frac{q_2}{2};z_n+\frac{r_2}{2}\right)$

$q_3=hf_2\left(t_n+\frac{h}{2};x_n+\frac{p_2}{2};y_n+\frac{q_2}{2};z_n+\frac{r_2}{2}\right)$

$r_3=hf3\left(t_n+\frac{h}{2};x_n+\frac{p_2}{2};y_n+\frac{q_2}{2};z_n+\frac{r_2}{2}\right)$

$p_4=hf_1(t_n+h;\ x_n+p_3;\ y_n+q_3;\ z_n+r_3)$

$q_4=hf_2(t_n+h;\ x_n+p_3;\ y_n+q_3;\ z_n+r_3)$

$r_4=hf_3(t_n+h;\ x_n+p_3;\ y_n+q_3;\ z_n+r_3)$

$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}\left(p_1+2p_2+2p_3+p_4\right)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left(q_1+2q_2+2q_3+q_4\right)$

$z_{n+1}=z_n+\frac{1}{6}\left(r_1+2r_2+2r_3+r_4\right)$

§ 4.5. სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევჩერდებით ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდებზე. განვიხილავთ ამოსავალი დიფერენციალური განტოლების უშუალო აპროქსიმაციას და მის დაყვანას სამდიაგონალიანი წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. ამ ტიპის ამოცანები ხშირად გვხვდება საინჟინრო პრაქტიკაში.

დასაწყისში განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\begin{cases} y' + P(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b; \\ y(a) = y_a, \ \ y(b) = y_b \end{cases} \tag{4.14}$$

ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ შემდგომში ჩვენს მიერ განხილულ ამ და სხვა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები არსებობენ და ერთადერთია.

პირველ რიგში შემოვიღოთ (როგორც წინა პარაგრაფებში) ინტეგრების კვანძთა ბადე

$$\left\{ x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots n, h = \frac{b-a}{n} \right\}$$

ზუსტად ანალოგიურად საძიებელი ამონახსნების ქვეშ იგულისხმება ამონახსნის მნიშვნელობათა სიმრავლე ბადის კვანძებში ანუ ბადური ფუნქცია

$$\left\{ y(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n \right\}$$

განვიხილოთ (4.14) განტოლება i-ური კვანძის მიდამოში და წარმოებულები შევცვალოთ რიცხვითი

გაწარმოების შესაბამისი ფორმულებით, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას $y_0, y_1, \ldots, y_n$ კომპონენტების მიმართ (ე.წ. სხვაობიან სქემას):

$$\left\{\begin{aligned} & y_0 = y_a \\ & \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h_2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \\ & y_n = y_b; \quad i = 1,2,\ldots,n-1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

აქ $p(x_i)=p_i$, $q(x_i)=q_i$, $f(x_i)=f_i$

შევნიშნოთ, რომ შიდა კვანძებში (4.15) ამოცანის ყოველი განტოლება უახლოვდება დიფერენციალურ განტოლებას მეორე რიგის სიზუსტით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \qquad b_i = q_i - \frac{2}{h^2} \qquad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$$

$$f_{1,0} = f_1 - a_1 y_0 \qquad f_{n-1,n} = f_{n-1} - c_{n-1} y_n$$

სადაც $y_0 = y_a$ $\quad y_n = y_b$

ამ აღნიშვნების საფუძველზე (4.15) სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} & b_1 y_1 + c_1 y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f_{1,0} \\ & a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f_2 \\ & \qquad a_3 y_2 + b_3 y_3 + c_3 y_4 \ldots\ldots\ldots = f_3 \qquad (4.16) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad a_{n-1} y_{n-1} + b_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1,n} \end{aligned}$$

(4.16) სისტემა წარმოადგენს (1.14) სისტემის ზუსტ ანალოგს და როგორც ვნახეთ ადვილად იხსნება ფაქტორიზაციის მეთოდით, კერძოდ, (1.18) და (1.19) ფორმულებით.

მაგალითი 4.1. ამოვხსნათ განტოლება

$y'' + (x+1)y' - 2y = 2(x+1)$

$y(0) = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad 0 \le x \le 1 \qquad h = 0.2$

ამოხსნა. მოცემულ განტოლებაში წარმოებულები შევცვალოთ რიცხვითი გაწარმოების ფორმულებით და ყოველ საკვანძო წერტილში ჩავწეროთ მათი მნიშვნელობები, მივიღებთ (4.16) სახის სისტემას შემდეგი კოეფიციენტებით:

$a_i = 22.5 - 0.5i \qquad b_i = -52 \qquad c_i = 27.5 + 0.5i$

$f_{1,0} = 2.4 \qquad f_2 = 2.8 \qquad f_3 = 3.2 \qquad f_{4,5} = -25.9$

	$b_1 = -52$	$c_1 = 28$
$a_2 = 21.5$	$b_2 = -52$	$c_2 = 28.5$
$a_3 = 21$	$b_3 = -52$	$c_3 = 29$
$a_4 = 20.5$	$b_4 = -52$	$c_4 = 29.5$

აგრეთვე წრფივი სამდიაგონალიანი განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}
-52y_1 + 28.y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 2.4 \\
21.5y_1 - 52y_2 + 28.5y_3 \ldots\ldots &= 2.8 \qquad (4.17) \\
21y_2 - 52y_3 + 29y_4 &= 3.2 \\
20.5y_3 - 52y_4 &= -25.9
\end{aligned}$$

რომლის ამონახსნი (1.18) და (1.19) ფორმულების საფუძველზე იქნება

$y_0 = 0 \quad y_1 = 0.04 \quad y_2 = 0.16 \quad y_3 = 0.36 \quad y_4 = 0.64 \quad y_5 = 1$

შევნიშნოთ, რომ მოცემული განტოლების ზუსტი ამონახსნია $y=x^2$.

§ 4.6. დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მრავალწერტილოვანი მეთოდები

ამ ტიპის მეთოდებს ხშირად მრავალბიჯიან მეთოდებსაც უწოდებენ. ეს მეთოდები ხასიათდება იმით, რომ გამოსათვლელი ამონახსნის მნიშვნელობა მიმდინარე კვანძში დამოკიდებულია არა მხოლოდ ერთ წინა კვანძში ცნობილ მონაცემებზე, არამედ რამდენიმეზე. აქედან გამომდინარე, ადვილად მისახვედრია თუ დიფერენციალურ განტოლებაში წარმოებულს შევცვლით მრავალწერტილიანი რიცხვითი გაწარმოების ფორმულით, მაშინ, მივიღებთ შესაბამის მრავალწერტილოვან მეთოდს.

მოკლედ, აღვწეროთ მოდელი, რომლითაც შეიძლება ავაგოთ სხვადასხვა სიზუსტის სქემები. განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d}{dx}y = f(x, y) \qquad (4.18)$$

შევნიშნოთ, რომ ამ განტოლების ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ თანაფარდობას:

$$y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dx \qquad (4.19)$$

თუ ამონახსნი k-ური კვანძის ჩათვლით უკვე გამოთვლილია, მაშინ $f_i(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., k$ ცნობილი მნიშვნელობებით შეიძლება ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ინტერპოლება სხვადასხვა რიგის პოლინომებით.

არჩეული საინტერპოლაციო პოლინომიდან ინტეგრალის გამოთვლით მივიღებთ სხვადასხვა ფორმულებს:

1. თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას (4.19)-ში, შევცლით მისი მნიშვნელობით x_k წერტილში (ნულოვანი რიგის პოლინომი), მივიღებთ:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dx = hf_k \tag{4.19'}$$

ან

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f_k \tag{4.20}$$

უკანასკნელი წარმოადგენს ეილერის ცხად მეთოდს;

2. $f = f_{k+1}$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dx = h \cdot f_{k+1}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_{k+1}\right) \tag{4.21}$$

(4.21) გვაძლევა ეილერის არაცხად მეთოდს.

3. $f = f_{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_k, y_{k+\frac{1}{2}}\right)$

შესაბამისად მოვიღებთ ეილერის მოდიფიცირებულ მეთოდს, კერძოდ

$$y_{k+1} = y_k + h\cdot f_{k+\frac{1}{2}} \qquad (4.22)$$

4. $$f = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{h}\cdot\left(x - x_k\right)$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dx = \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right)$$

ან (4.18) განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\cdot\left(f_k + f_{k+1}\right) \qquad (4.23)$$

მივიღეთ PC მეთოდი ანუ რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის მეთოდი.

ამ ახალი მიდგომით ჩვენ მივიღეთ უკვე ცნობილი ორწერტილიანი მეთოდები. ახლა ვნახოთ როგორ სახეს მიიღებს მრავალწერტილიანი მეთოდები, რომლებიც შეიძლება მივიღოთ შემდეგი გზით.

$[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთზე f ფუნქციას მიუახლოვდეთ ნიუტონისეული პოლინომით

$$f = f_k + \frac{f_k - f_{k-1}}{h}\left(x - x_k\right) + \frac{f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}}{2\cdot h^2}\left(x - x_k\right)\left(x - x_{k-1}\right)\ldots \qquad (4.24)$$

(4.19’) ინტეგრალის გამოთვლისას პირველი ორი შესაკრების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dx = \frac{1}{2}\left(3f_k - f_{k-1}\right)$$

აქედან მივიღებთ მეორე რიგის სიზუსტის შემდეგ მეთოდს:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\cdot\left(3f_k - f_{k-1}\right) \qquad (4.25)$$

(4.24)-ში პირველი სამი შესაკრების გათვალისწინებით მივიღებთ მესამე რიგის სიზუსტის მეთოდს:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right) \qquad (4.26)$$

თუ (4.24)-დან ავიღებთ ოთხ წევრს მივიღებთ მეოთხე რიგის სიზუსტის შემდეგ სქემას:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55\cdot f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right) \qquad (4.27)$$

(4.25), (4.26) და (4.27) ფორმულები წარმოადგენენ ადამსის შესაბამისად მეორე, მესამე და მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემებს.

ამგვარად ჩვენ გვაქვს მეოთხე რიგის სიზუსტის ორი სქემა, ერთ რუნგე-კუტას (4.9) სქემა და მეორე ადამსის (4.27) სქემა, საინტერესოა რომელია უკეთესი? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემისას უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი მოსაზრებები: ადამსის მეთოდი მოითხოვს ნაკლებ არითმეტიკულ ოპერაციებს მომდევნო y_{k+1} მნიშვნელობის მისაღებად, ვინაიდან (4.27) ფორმულით თვლის დროს საჭიროა მხოლოდ ერთხელ გამოვთვალოთ f_k მნიშვნელობა, დანარჩენი f_{k-1}, f_{k-2}, f_{k-3} მნიშვნელობები ამ დროისათვის უკვე გამოთვლილია, მაშინ როდესაც y_{k+1}-ის გამოსათვლელად რუნგე-კუტას (4.9) მეთოდი მოითხოვს f ფუნქციის ოთხი დამხმარე მნიშვნელობის გამოთვლას.

მეორეს მხრივ, ადამსის სქემით გათვლების ჩატარებისას გარდა y_0 მნიშვნელობისა, საჭიროა როგორმე განვსაზღვროთ y_1, y_2 და y_3-ის მნიშვნელობები

ინტეგრების პირველ სამ კვანძში. ეს უკანასკნელი კი ადვილად მოსახერხებელია რუნგე-კუტას სქემით. გარდა ამისა, უფრო მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ რუნგე-კუტას ფორმულები იძლევა საშუალებას ყოველგვარი სირთულეების გარეშე ვაწარმოოთ გამოთვლები ინტეგრების ცვლადი ბიჯით (მაგალითად, ბიჯის ავტომატური შერჩევით საჭირო სიზუსტის მოთხოვნიდან გამომდინარე), ადამსის ფორმულებით – ეს საკმარისად რთულია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ (4.20) – (4.27) ფორმულების, გარდა (4.24)-სა, მიღების გზიდან გამომდინარე აპროქსიმაციაზე შემოწმების გარეშეც ცხადია დასკვნა მეთოდის სიზუსტის შესახებ. მართლაც, ვინაიდან კოშის ამოცანის ამოხსნა განიხილება როგორც ინტეგრალის გამოთვლა, მეთოდის ცდომილება არ აღემატება გამოყენებული კვადრატურული ფორმულების ლოკალურ ცდომილობათა ჯამს ყველა ელემენტარულ მონაკვეთზე, რომლებადაც დაყოფილია სათვლელი არე.

4.7 Mathcad

ამოვხსნათ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება Given-Odesolve-ს ოპერატორების გამოყენებით

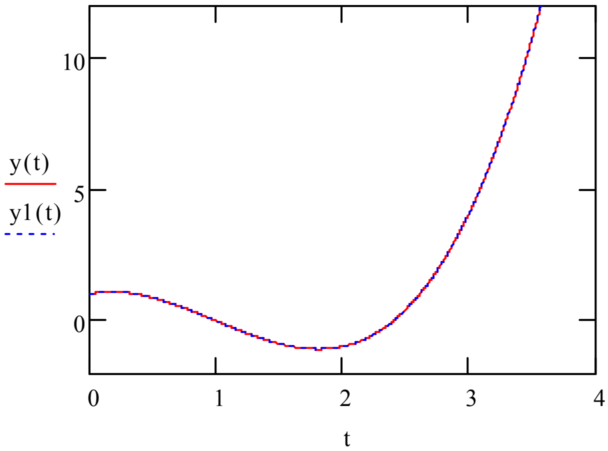
Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = 3\cdot t^2 - 6\cdot t + 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(t, 5)$$

$$y1(t) := t^3 - 3\cdot t^2 + t + 1$$



y1(t) წარმოადგენს მოცემული განტოლების ზუსტ ამონახსნს.

ოსცილატორის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნა

$$\lambda := 0.6$$

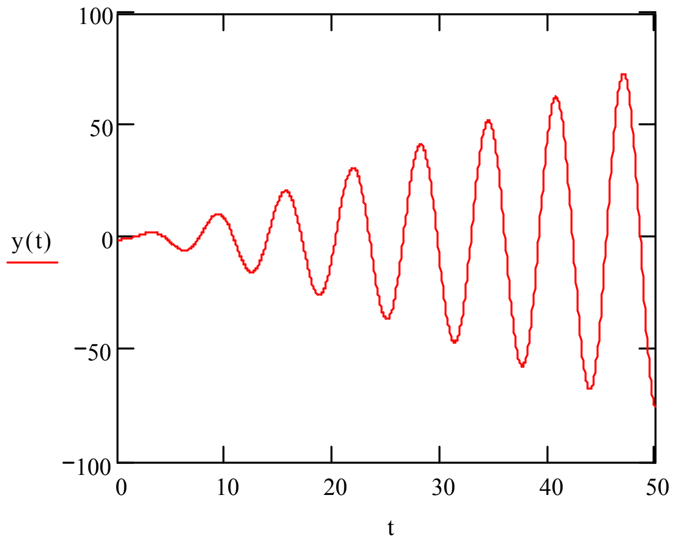
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \lambda \cdot \left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = t \cdot \sin(t)$$

$y(0) = -1$

$y'(0) = 0$

$y := \text{Odesolve}(t, 50)$



ოსცილატორის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა:

$$\lambda := 0.2$$

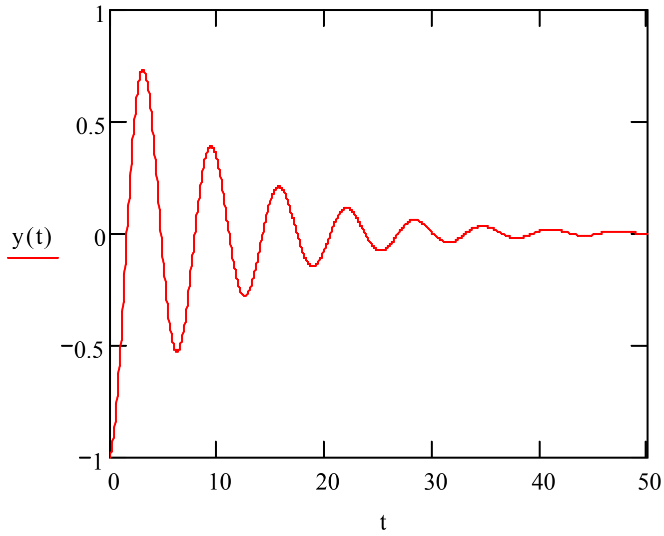
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \lambda\cdot\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = 0$$

$$y(0) = -1$$

$$y'(0) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(t, 50)$$



დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა რუნგე-კუტეს მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით ფიქსირებული **h=0,1** ბიჯით:

$y' = 12 \cdot y - y^2$

$y := 0.1$

$D(t, y) := 15y - y^2$

$M := 100$

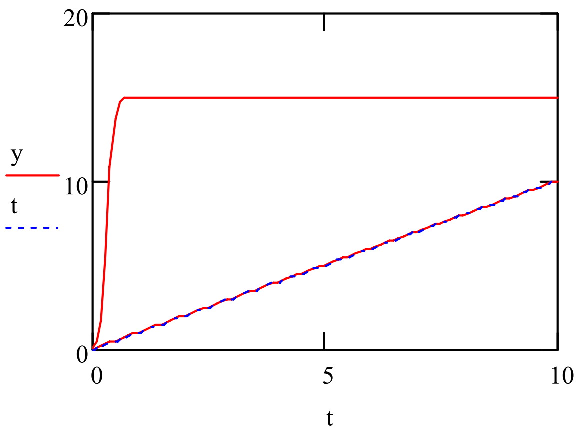
$y := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 10, M, D)$

$k := 0 .. 100$

$t_k := k \cdot 0.1$

y =

	0	1
0	0	0.1
1	0.1	0.43
2	0.2	1.73
3	0.3	5.497
4	0.4	10.81
5	0.5	13.739
6	0.6	14.649
7	0.7	14.903
8	0.8	14.974
9	0.9	14.993
10	1	14.998
11	1.1	14.999
12	1.2	15
13	1.3	15
14	1.4	15
15	1.5	15



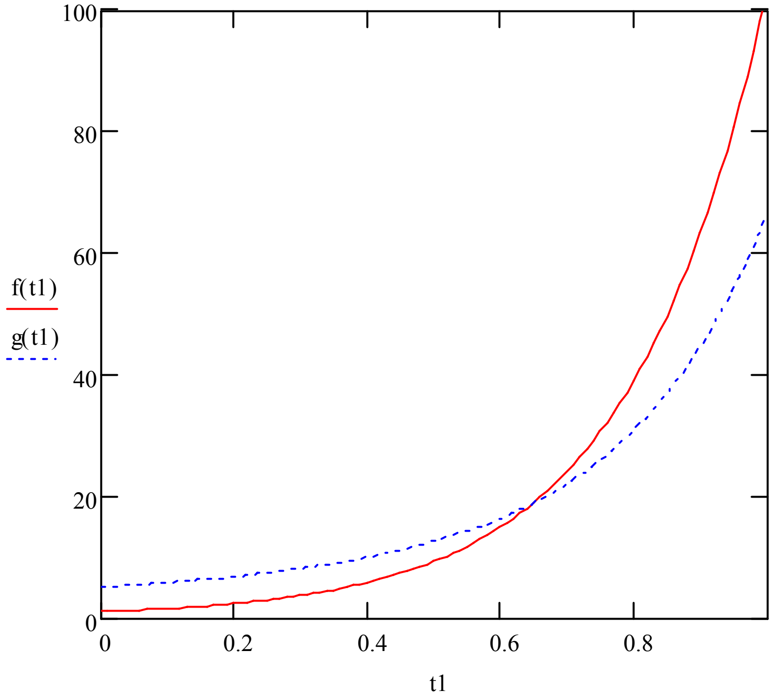
$T1 := 1$

Given

$$\frac{d}{du}y(u) = 5\cdot y(u) - 0.2\cdot z(u) \qquad y(0) = 1$$

$$\frac{d}{du}z(u) = 2\,y(u) + z(u) \qquad z(0) = 5$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, u, T1, 100\right] \qquad t1 := 0, \frac{T1}{100} .. 1$$



სისტემის ამოსახსნელი პროგრამა **Mathcad**-ზე:

$T1 := 2$

Given

$$\frac{d}{du}x(u) = 2\cdot x(u) - y(u) - z(u)$$

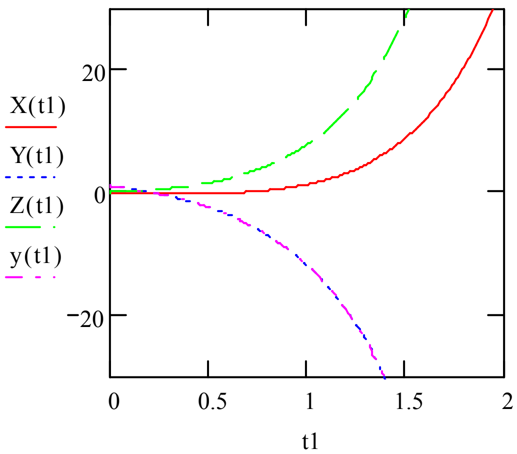
$$\frac{d}{du}y(u) = 12\cdot x(u) - 4\cdot y(u) - 12\cdot z(u)$$

$$\frac{d}{du}z(u) = -4\cdot x(u) + y(u) + 5\cdot z(u)$$

$x(0) = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad z(0) = 0$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, u, T1, 200\right] \qquad t1 := 0, \frac{T1}{200} .. T1$$

$y(t1) := 3 - 2\cdot e^{2\cdot t1}$, y(t1)-- ზუსტი ამონახსნი, შევადაროთ Y-ს



დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელი პროგრამა

$T1 := 10$

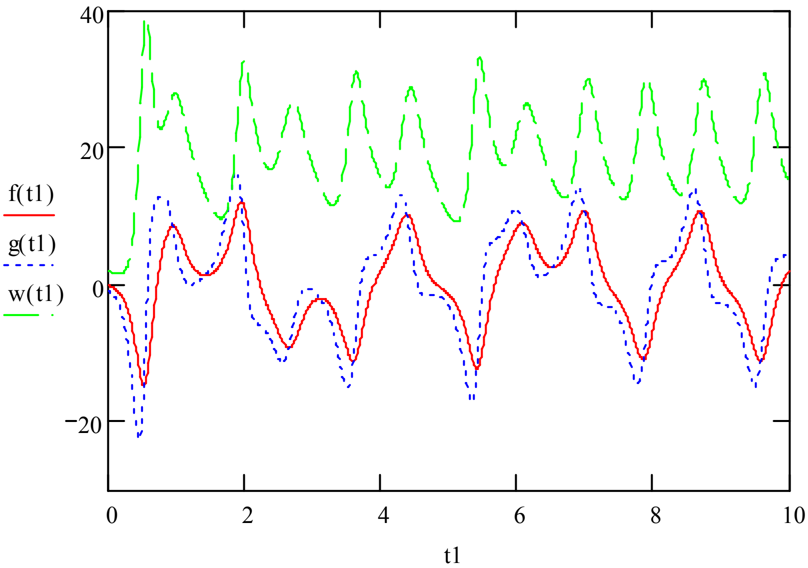
Given

$$\frac{d}{du}y0(u) = -6\cdot y0(u) + 6\cdot y1(u) \qquad y0(0) = 0$$

$$\frac{d}{du}y1(u) = 20\cdot y0(u) + y1(u) - y0(u)\cdot y2(u) \qquad y1(0) = -1$$

$$\frac{d}{du}y2(u) = y0(u)\cdot y1(u) - 2\cdot y2(u) \qquad y2(0) = 2$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ w \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \end{pmatrix}, u, T1, 1000\right] \qquad t1 := 0, \frac{T1}{1000} .. T1$$



ვან დერ პოლის დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელი პროგრამა

$\mu := 2$

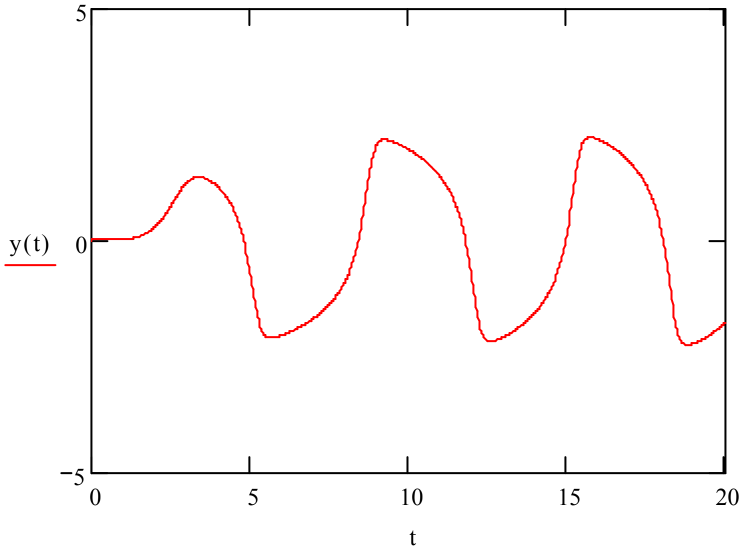
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \mu\cdot\left(1 - y(t)^2\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = \frac{t}{10}\cdot\sin(t)$$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 20)$



მაგალითები:

ამოხსენით ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის სათანადო ამოცანა ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული, ან რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით.

4.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{tx}{3} + \cos^2 t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1{,}5$

4.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{t^2 + x^2}}{4.563 + tg^2 \dfrac{t}{x}} \\ x(1) = 3 \end{cases}$ $\quad 1 \le t \le 2$

4.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{0.3333 e^{x+t^2}}{2\sin^2 t + t^4 x^2} \\ x(1) = 0.5 \end{cases}$ $\quad 1 \le t \le 2$

4.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sin tx}{\sqrt{t^2 + x^2}} \\ x(2) = 3.058 \end{cases}$ $\quad 2 \le t \le 3$

4.5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x - \ln\left(\dfrac{t}{x^2+1} + \sqrt{2}\right) & t \in [2;3] \\ x(2) = 0.2 \end{cases}$$

ამოხსენით დიფერეციალურ განტოლებათა სისტემა PC მეთოდით.

4.6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{15x + 40y}{3(2xy + x^2 - y^2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{10x + 15y}{3(2xy + x^2 - y^2)} \end{cases}$$

$x(0) = 3 \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0.3$

იპოვეთ x(0,3) და y(0,3).

4.7. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{x} + 1 \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3z^2}{x(y-1)} + \dfrac{x}{z} \\ y(1) = 0; \quad z(1) = 1, \quad h = 0{,}25 \end{cases}$$

იპოვეთ y(125) და z(1,25)

4.8. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{-\left(x^2 + y^2\right)} \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y^2 + z \quad , \quad x \in [0;0{,}5] \\ y(0) =; \quad z(0) = 2, \quad h = 0{,}5 \end{cases}$$

იპოვეთ y(0.5); z(0.5).

4.9.
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{19+2y}{2x(1+2y)},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{18}{1+2y}\\ x(0)=-1;\;\; y(0)3;\;\; h=0.1\end{cases}\qquad t\in[0;1]$$

იპოვეთ x(1); y(1).

4.10.
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\mathrm{xz}+\mathrm{y}\\ \dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}=\mathrm{xy}+\mathrm{z}\\ \mathrm{z}(0)=\mathrm{y}(0)=1\end{cases}\qquad \begin{array}{l}0\le \mathrm{x}\le 0.5\\ \mathrm{h}=0.25\end{array}$$

ქვემოთ მოყვანილი მაღალი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები დაიყვანეთ პირველი რიგის დიფერეციალურ განტოლებათა სისტემამდე და ამოხსენით რუნგე-კუტას მეთოდით.

4.11.
$$\begin{cases}\{(x^2+6x-1)(1-x^2)y'''+(4-7x^2)y''+64y-xy'=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=6\\ y''(0)=-16\end{cases}$$
$$x\in[0;05]$$
$$h=0.25$$

4.12. $\begin{cases} 2y''' - xy'' + (x^2 - 6)(y' - y) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x} \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad [1;2] \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} (1 + x^2)^2 y'' = y(1 - 2x) \\ y(0) = y'(0) = 1 \\ [0;2]; \quad h = 0{,}5 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \cos^2 x y'' - y' \cos^2 x = 2y + e^x \\ y(0) = 0; \quad y'(0) = 1, \quad [0;2], \quad h = 0{,}5 \end{cases}$

თავი V

ფუნქციათა დიფერენციალური აღრიცხვის გამოყენება ოპტიმიზაციის საკითხებში

ამ თავში ჩვენ ვნახავთ თუ როგორ გამოიყენება დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ცნებები პრაქტიკული პრობლემების გადაწყვეტისას. ამავდროულად გავეცნობით რიცხვითი გამოთვლების მეთოდებს, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში არსებული პრობლემების გადაწყვეტისას. ცხადია, რომ წარმოების მართვის ძირითადი როლი იმ გადაწყვეტილების მიღებაშია, რომელიც არსებული რესურსების ყველაზე ეფექტურად გამოყენების საშუალებას იძლევა. ეფექტური მართვა გულისხმობს მთლიანი პროცესის შემადგენელი ცალკეული ნაწილების ოპტიმიზაციას. არსებობს მათემატიკური მეთოდების ფართო არჩევანი, ოპტიმიზაციის ისეთი პრობლემების გადასაწყვეტად, რომელიც ეფუძნება დიფერენციალურ აღრიცხვას.

§. 5.1. ექსტრემალური მნიშვნელობები

ოპტიმიზაციის ამოცანების შესწავლაში ძირითადად გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ დიფერენცირებადი $f(x)$ ფუნქციის ექტრემალური მნიშვნელობა (მისი მაქსიმალური ან მინიმალური

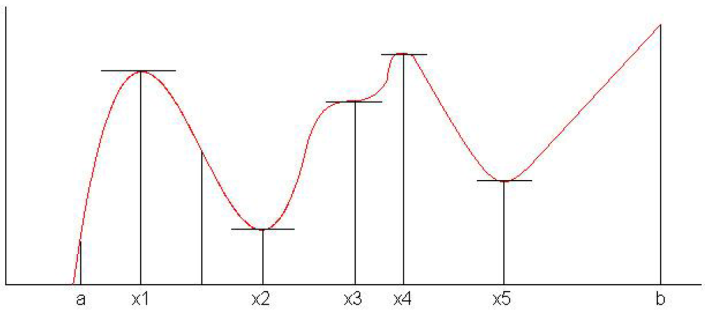
მნიშვნელობა), საზოგადოდ მიიღწევა იქ სადაც ფუნქციის წარმოებული ნულია:

$$f'(x) = 0 \tag{5.1}$$

ან სადაც წარმოებული არ არსებობს.

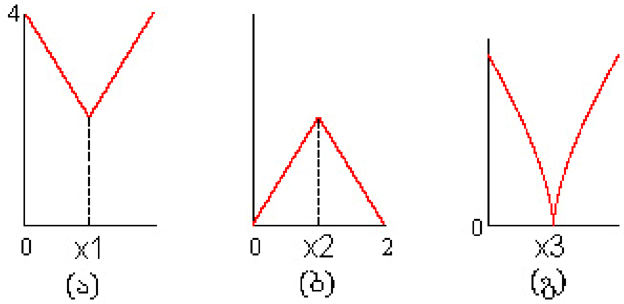
(5.1) პირობა აუცილებელია, რადგანაც ფუნქციის გრაფიკს მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობების შესაბამის წერტილებში ჰორიზონტალური მხები წრფე აქვს. ნახ. 5.1-დან ჩანს, რომ ეს ექსტრემალური მნიშვნელობეი მხოლოდ ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის მნიშვნელობებია. რომლებიც შეესაბამება გრაფიკის “პიკებს”.

ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობების დადგენისათვის ჰორიზონტალური მხები წრფეების გამოყენებისას უნდა გამოვიჩინოთ ყურადღება.



ნახ. 5.1

$$y1(x) := 2\cdot|x-1| + 2 \qquad y2(x) := 2 - 2\cdot|x-1| \qquad y3(x) := 2\cdot(|x-8|)^{\frac{2}{3}}$$



ნახ. 5.2

ნახ. 5.1 $x=a$ აბსოლუტური მინიმუმის წერტილია,

$x=x_1$ და $x=x_4$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებია;

$x=x_3$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია (არა აქვს ექსტრემუმი);

$x=x_2$ და $x=x_5$ ლოკალური მინიმუმის წერტილებია;

$x=b$ წარმოადგენს აბსოლუტური მაქსიმუმის წერტილს.

ნახ. 5.2. (ა) x_1-ში წარმოებული არ არსებობს, $y=|x-x_1|+a$ ფუნქციას აქვს a-ს ტოლი მინიმუმი;

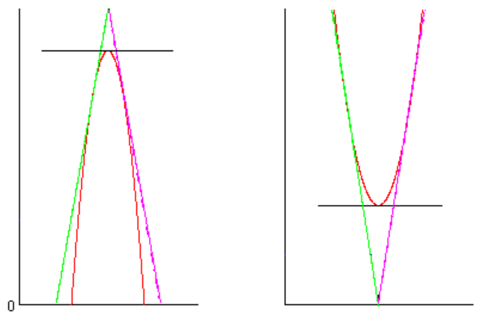
(ბ) x_2-ში წარმოებული არ არსებობს, $y=b-|x-x_2|$ ფუნქციას აქვს b-ს ტოლი მაქსიმუმი;

(გ) x_3-ში წარმოებული არ არსებობს, $y=\sqrt[3]{(x-x3)^2}$ ფუნქციას აქვს 0-ს ტოლი მინიმუმი;

ნახაზი 5.1-დან ჩანს, თუ რატომ უნდა გამოვიჩინოთ ყურადღება ზოგიერთ, ე.წ. გადაღუნვის წერტილებში, ანუ იმ წერტილებში, სადაც ფუნქციის გრაფიკი კვეთს მისსავე მხებ წრფეს – მხები წრფე შეიძლება იყოს ჰორიზონტალური, მაგრამ ეს წერტილი (ჩვენს შემთხვევაში x_3) არ წარმოადგენს ექსტრემუმის წერტილს.

კიდევ ერთი მიზეზი ყურადღებისა არის ის, რომ ფუნქციას შეიძლება გააჩნდეს ექსტრემალური მნიშვნელობა იმ წერტილში, სადაც ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს. ამის მარტივი მაგალითებია ნახ. 5.2-ზე მოყვანილი (ა), (ბ) და (გ) ფუნქციები.

წერტილებს, სადაც $f'(x)=0$, კრიტიკული, ანუ სტაციონალური წერტილები ეწოდებათ. ჩვენ გვჭირდება ვიცოდეთ, როდის წარმოადგენენ ისინი ლოკალური მინიმუმის, ლოკალური მაქსიმუმის, ან გადაღუნვის წერტილებს. ჩვენ ამის დადგენას შევძლებთ, თუ შევისწავლით $f'(x)$-ის მნიშვნელობებს კრიტიკული წერტილის მიდამოში.



ნახ. 5.3.

კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება

ა) ლოკალური მაქსიმუმი ბ) ლოკალურიმინიმუმი

თუ $f'(x)$-ის მნიშვნელობა, ანუ მხები წრფის კუთხური კოეფიციენტი იცვლება დადებითიდან უარყოფითისაკენ, როცა სტაციონარული წერტილის გავლით მივდივართ მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ მოცემული წერტილი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია (ნახ. 5.3.ა).

თუ $f'(x)$-ის მნიშვნელობა იცვლება უარყოფითიდან დადებითისაკენ, როცა სტაციონალური წერტილის გავლით მივდივართ მარცხნიდან მარჯვნივ, მაშინ ეს წერტილი ლოკალური მინიმუმის წერტილია.

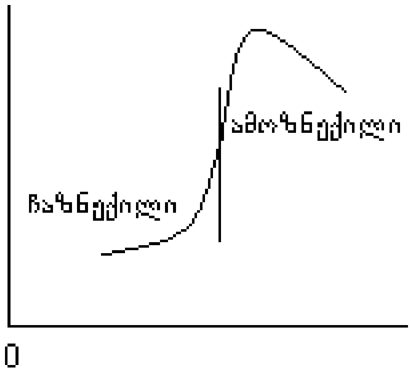
თუ კი $f'(x)$ არ იცვლის ნიშანს სტაციონალურ წერტილზე გავლისას, მაშინ ეს წერტილი ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

სტაციონარული წერტილის ბუნების დასადგენად გამოიყენება მოცემული $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$.

ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი $x=a$ წერტილში, თუ $f'(a)=0$ და $f''(a)<0$;

ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი $x=a$ წერტილში, თუ $f'(a)=0$ და $f''(a)>0$;

თუ $f''(a)=0$, უცებ ვერ ვასკვნით, რომ $x=a$ წერტილი გადაღუნვის წერტილია, ამ შემთხვევაში უნდა დავადგინოთ $f'(x)$-ის ნიშანი სტაციონალური წერტილის ორივე მხარეს. გადაღუნვის წერტილში იცვლება გრაფიკის ჩაზნექილობა-ამოზნექილობა, რადგანაც ისინი განისაზღვრება $f''(x)$-ის ნიშნით, ამიტომ გადაღუნვის წერტილში $f''(x)=0$. შევნიშნოთ, რომ გადაღუნვის წერტილში არ არის აუცილებელი $f'(x)=0$ ნახ. 5.4.



ნახ. 5.4

$M(a, f(a))$ - გადაღუნვის წერტილია.

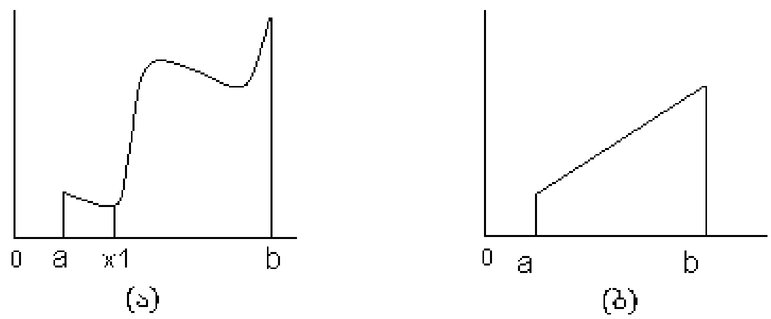
§5.2. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნა სეგმენტზე (გლობალური ექსტრემუმი)

რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები მოიძებნება შემდეგი წესით:

1. უნდა ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის ყველა ის სტაციონალური წერტილი, რომელიც ეკუთვნის $[a,b]$ სეგმენტს;
2. გამოვთვალოთ $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ზემოთ აღნიშნულ სტაციონარულ წერტილებში და სეგმენტის a და b ბოლოებში. მიღებული რიცხვებიდან ყველაზე მცირე იქნება უმცირესი მნიშვნელობა $[a,b]$

სეგმენტზე, ყველაზე დიდი კი – უდიდესი მნიშვნელობა ამავე სეგმენტზე.

მითითებული ალგორითმიდან ჩანს, რომ, საზოგადოდ, ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $[a,b]$ სეგმენტზე შეიძლება არ დაემთხვეს ფუნქციის ლოკალურ ექსტრემუმებს. მაგალითად, ნახ. 5.5 ა-ზე გამოსახული ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას აღწევს x_1 წერტილში, რომელიც ამავე დროს, არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო მაქსიმუმს აღწევს სეგმენტის ბოლო b წერტილში, რომელიც არ წარმოადგენს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილს.



ნახ. 5.5.

(5.5.) (ბ) – ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას, არ გააჩნია ლოკალური ექსტრემუმები, მაგრამ იგი თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს აღწევს სეგმენტის ბოლოებზე, შესაბამისად a და b წერტილებში.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი

მაგალითი 5.1. ა) ვიპოვოთ,

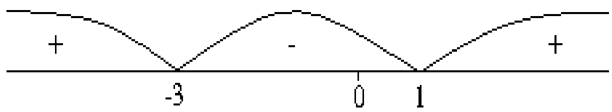
$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 4$$

ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმები.

ამოხსნა: პირველ რიგში ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$, მივიღებთ:

$$x^2+2x-3=0$$

სტაციონალური წერტილებია $x_1=-3$ და $x_2=1$, მივიღებთ შემდეგ სქემას.



აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1=-3$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო $x_2=1$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია.

ხოლო, რადგან $f''(x)=12x+12$ და $f(-3)<0$, $f''(1)>0$; ადასტურებს იმას, რომ $x_1=-3$ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია და $x_2=1$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია. ამის შემდეგ გამოვთვალოთ ექსტრემალური მნიშვნელობები:

$$f_{\max}(-3)=-54+54+54+4=58$$

$$f\min(1)=2+6-18+4=-6$$

მაგალითი 5.2. მაგ. 5.1.-ში განხილული ფუნქციისათვის ვიპოვოთ, გლობალური ექსტრემუმები $[-4;0]$ სეგმენტზე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე $[-4;0]$ სეგმენტში შედის მხოლოდ $x_1=-3$ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, ამიტომ გამოვთვალოთ

მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები საზღვრის ბოლოებზე და $x_1=-3$-ში გვექნება:

$$f(-4)=-128+96+72+4=44$$

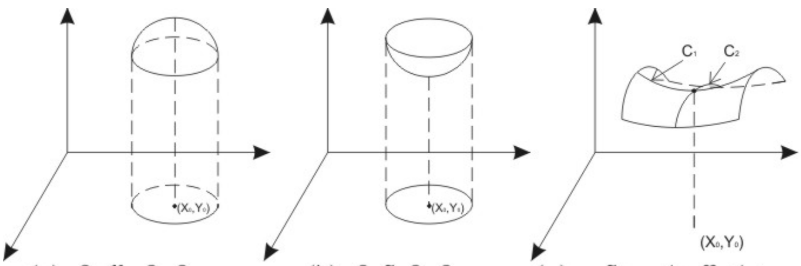
$$f(-3)=58$$

$$f(0)=4$$

ამგვარად, f უმც.=4, f უდ.=58.

§5.3. ორი ცვლადი ფუნქციის ექსტრემუმი

როგორც ცნობილია $z=f(x;y)$ ორი ცვლადის ფუნქცია, გეომეტრიულად გამოსახავს ზედაპირს სამგანზომილებიან სივრცეში. სადაც z გვიჩვენებს $(x;y)$ სიბრტყიდან მანძილს ზედაპირამდე:



(ა). მაქსიმუმი (ბ). მინიმუმი (გ). უნაგირა წერტილი

ნახ. 5.6.

განმარტება. $z=f(x;y)$ ფუნქციას $(x_0;y_0)$ წერტილში გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ

არსებობს ამ წერტილის მიდამო, რომლის ყოველ $(x;y)$ წერტილისათვის $\left((x;y)\neq(x_0;y_0)\right)$ სრულდება უტოლობა

$$f(x;y)<f(x_0;y_0) \text{ (ა);} \quad (f(x;y)>f(x_0;y_0)) \text{, (ბ);}$$

მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილებს უწოდებენ ექსტრემუმის წერტილებს. თუ $z=f(x;y)$ ფუნქციას $(x_0;y_0)$ წერტილში გააჩნია ექსტრემუმი, მაშინ ორივე პირველი რიგის კერძო წარმოებული, თუ ისინი არსებობენ ნულის ტოლია (სტაციონალური წერტილები) ან ერთი მაინც არ არსებობს ამ წერტილში (ფუნქციის კრიტიკული წერტილი).

ამგვარად ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა:

$$f_x^{'}(x;y)=0\,;\; f_y^{'}(x;y)=0 \qquad (5.2)$$

წერტილებს სადაც (5.2) პირობა სრულდება, ფუნქციის სტაციონალური წერტილები ეწოდებათ, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში – სტაციონალური მნიშვნელობები ანუ ექსტრემუმები.

ამ შემთხვევაში, ჩვენ გვჭირდება ვიცოდეთ, როდის წარმოადგენენ ისინი ლოკალური მინიმუმის, ლოკალლური მაქსიმუმის ან უნაგირა წერტილებს. ამისათვის ჯერ შემოვიღოთ ზოგიერთი აღნიშვნები:

$$A=Z_{xx}^{''}(x_0;y_0)\,, \qquad B=Z_{xy}^{''}(x_0;y_0)\,, \qquad C=Z_{yy}^{''}(x_0;y_0)\,,$$

$\Delta=B^2-AC$,

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის საკმარისი პირობა:

ა) თუ $\Delta < 0$, მაშინ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, ამასთან $A > 0$ გვაქვს მინიმუმი;

ბ) თუ $\Delta < 0$ და $A < 0$, გვაქვს მაქსიმუმი;

(გ) $\Delta > 0$, მაშინ ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს და სტაციონალური წერტილი უნაგირა წერტილია. c_1 წირის მინიმუმის და c_2 წირის მაქსიმუმის წერტილი.

თუ $\Delta = 0$, მაშინ ჩვენ ამ პირობიდან ვერ გავაკეთებთ დასკვნას და წერტილი შეიძლება იყოს ან მაქსიმუმის, ან მინიმუმის, ან უნაგირა წერტილი. ამ შემთხვევაში საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა, შესაძლოა გახდეს აუცილებელი ტეილორის მწკრივის მესამე რიგის წევრის განხილვა.

მაგალითი 5.3. ვიპოვოთ $z = x + y + \dfrac{16}{x} + \dfrac{9}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი.

ამოხსნა. მოვძებნოთ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები

$$\begin{cases} z_x' = 1 - \dfrac{16}{x^2} = 0 \\ z_y' = 1 - \dfrac{9}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

ამგვარად მივიღეთ ოთხი სტაციონალური წერტილი (4; 3), (4; -3), (-4; 3) და (-4; -3). ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, გამოვთვალოთ მათი მნიშვნელობები ოთხივე წერტილში და შევამოწმოთ ექსტრემუმის საკმარისი პირობები.

რადგან $z''_{xx} = \frac{32}{x^3}$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = \frac{18}{y^3}$

(4; 3) წერტილში: $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{2}{3}$

$\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{3} < 0$, $A = \frac{1}{2} > 0$ ამიტომ გვაქვს მინიმუმი: $z_{\min}(4;3) = 14$

(4; -3) წერტილში: $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{2}{3}$

$\Delta = \frac{1}{3} > 0$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია, (4; -3) უნაგირა წერტილია.

(-4; 3) წერტილში: $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{2}{3}$

$\Delta = \frac{1}{3} > 0$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია,

(-4; 3) უნაგირა წერტილია.

(-4; -3) წერტილში: $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{2}{3}$

$\Delta = -\frac{1}{3} < 0$, $A = -\frac{1}{2} < 0$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი: $z_{\max}(-4;-3) = -14$

§5.4. პირობითი ექსტრემუმი

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z = f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x; y) = 0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y) \tag{5.3}$$

სადაც λ უცნობი პარამეტრია, ფაქტიურად L წარმოადგენს x, y და λ სამი ცვლადის ფუნქციას და მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი უპირობო ექსტრემუმი. ამ შემთხვევაში (5.3) ფუნქციის სტაციონარული წერტილები მოიძებნება შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან:

$$\begin{cases} L_x^{'}(x;y;\lambda) = f_x^{'}(x;y) + \lambda\varphi_x^{'}(x;y) = 0 \\ L_y^{'}(x;y;\lambda) = f_x^{'}(x;y) + \lambda\varphi_x^{'}(x;y) = 0 \\ L_\lambda^{'}(x;y;\lambda) = \varphi(x;y) = 0 \end{cases} \qquad (5.4)$$

თუ ამ სისტემის ამონახსნია (x_0; y_0; λ_0) სამეული, მაშინ $z = f(x;y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი $\varphi(x,y) = 0$ პირობით განისაზღვრება შემდეგი დებულებით:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x^{'}(x_0;y_0) & \varphi_y^{'}(x_0;y_0) \\ \varphi_x^{'}(x_0;y_0) & L_{xx}^{''}(x_0;y_0;\lambda_0) & L_{xy}^{''}(x_0;y_0;\lambda_0) \\ \varphi_y^{'}(x_0;y_0) & L_{xy}^{''}(x_0;y_0;\lambda_0) & L_{yy}^{''}(x_0;y_0;\lambda_0) \end{vmatrix} \qquad (5.5)$$

თუ $\Delta < 0$, მაშინ $z = f(x,y)$ ფუნქციას გააჩნია (x_0, y_0) წერტილში პირობითი მაქსიმუმი, ხოლო თუ $\Delta > 0$ - პირობითი მინიმუმი.

ზემოთ მოყვანილი ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი რაოდენობა ცვლადის ფუნქციების შემთხვევაში. იგი აგრეთვე შეიძლება ბუნებრივად განზოგადდეს იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ერთზე მეტი პირობა. ამ შემთხვევაში შემოდის პირობის რაოდენობის ტოლი რაოდენობის ლაგრანჟის მამრავლები. ზოგადად, თუ $f(x_1;x_2;...;x_n)$

წარმოადგენს n ცვლადის ფუნქციას m $(m < n)$ რაოდენობის $g_j(x_1;x_2;...;x_n) = 0$, $(j = 1,2,...,m)$ პირობით, მაშინ, იმისათვის რომ ვიპოვოთ f ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობები, შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქცია.

$$L = f(x_1;x_2;...;x_n) + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$$

და ამის შემდეგ ამოვხსნათ $m+n$ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \ i = 1,2,...,n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_j = 0, \ \ j = 1,2,...,n \end{cases}$$

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

მაგალითი 5.4. ვიპოვოთ $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 6z^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი $x + y + z = 1$ პირობით და პასუხი დავასაბუთოთ.

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$L = 3x^2 + 2y^2 + 6z^2 + \lambda(x + y + z - 1)$.

მაშინ (5.4) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} 6x + \lambda = 0 \\ 4y + \lambda = 0 \\ 12x + \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad (5.4')$$

(5.4’) სისტემის ამონახსნია

$x_0 = \dfrac{1}{3}$, $y_0 = \dfrac{1}{2}$, $z_0 = \dfrac{1}{6}$, $\lambda_0 = 2$

მეორეს მხრივ თუ $x+y+z=1$ პირობიდან განვსაზღვრავთ z-ს და შევიტანთ $f(x,y,z)$ ფუნქციის მნიშვნელობაში, მივიღებთ:

$$\phi(x,y)=9x^2+8y^2-12x-12y+12xy+6$$

ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალურ ექსტრემუმს.

$\Phi'_x(x,y)=18x+12y-12=0$

$\Phi'_y(x,y)=12x+16y-12=0$

ან $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$

ამ სისტემის ამონახსნია $x_0=\dfrac{1}{3}$, $y_0=\dfrac{1}{2}$ და ამასთან პირობიდან $z_0=\dfrac{1}{6}$

$A=\Phi''_{xx}=18$, $B=\Phi''_{xy}=12$, $C=\Phi''_{yy}=16$

$A=B^2-AC=144-288<0$, $A=18>0$, წერტილი $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ მინიმუმის წერტილია $f_{\min}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right)=1$.

შევნიშნოთ, რომ შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ არეში დიფერენცირებადი $z=f(x;y)$ ფუნქცია აღწევს თავის უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას სტაციონალურ წერტილში ან არის საზღვარზე.

ვიპოვოთ $z=x^2+y^2+2x-4y$ ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმი $x^2+y^2\le 5$ არეში.

როგორც ვიცით ფუნქციის სტაციონარული წერტილები მოიძებნება შემდეგი სისტემიდან

$$\begin{cases} z_x' = 2x + 2 = 0 \\ z_y' = 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია (-1; 2) წერტილი, რომელიც მდებარეობს მოცემული არის საზღვარზე. ამ წერტილში $z(-1;2) = -5$.

ახლა ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები არის საზღვარზე. ამისათვის შევადგინოთ ლაგრანჟის შემდეგი ფუნქცია

$$L(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

და ვიპოვოთ მისი სტაციონარული წერტილები. გვექნება

$$\begin{cases} 2x + 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახნებია (-1; 2) და (1; -2) წერტილები. (-1; 2) წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა გამოთვლილია და უდრის -5. ხოლო $z(1;-2) = 15$.

მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა შედარებით მივიღებთ

$z_{\text{უმც.}} = z(1;-2) = -5$; $\quad z_{\text{უდ.}} = z(1;-2) = 15$

§5.5. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა. მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაცია

ჩვენ გავეცანით მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის პოვნის წესებს, როდესაც დამატებითი შეზღუდვები მოცემული იყო განტოლების სახით. ძალიან ხშირად პრაქტიკულ ამოცანებში დამატებითი შეზღუდვები ეკონომიკურ მახასიათებლებს შორის მოცემულია უტოლობების სახით.

იმ ამოცანებს, რომელშიც მოსაძებნია წრფივი ფუნქციის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა და რომელშიც ცვლადები აკმაყოფილებენ წრფივი უტოლობებით განსაზღვრულ შეზღუდვებს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდებათ.

ამ ამოცანების ამოხსნა შეიძლება დავყოთ ორ ეტაპად.

პირველ ეტაპზე ხდება წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა ანუ წერტილთა იმ სიმრავლის მოძებნა, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ მოცემული სისტემის ყველა უტოლობას. ამ სიმრავლეს დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება.

მეორე ეტაპზე კი ვპოულობთ მოცემული წრფივი ფუნქციის (მიზნის ფუნქციის) უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას დასაშვებ სიმრავლეზე.

თავდაპირველად განვიხილოთ ორცვლადიანი ერთი უტოლობა. საზოგადოდ მას ექნება სახე:

$$ax+by>c \qquad (5.6)$$

$$ax+by\geq c \qquad (5.7)$$

$$ax+by<c \qquad (5.8)$$

$$ax+by\leq c \qquad (5.9)$$

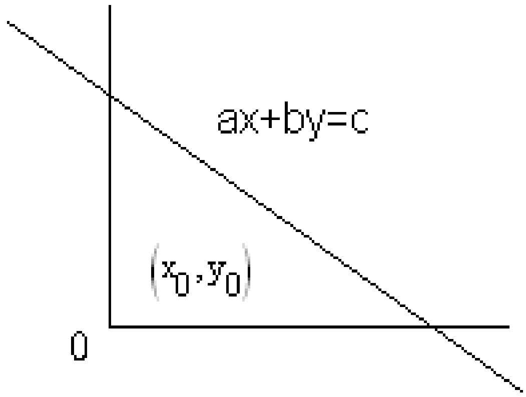
სადაც a, b და c მუდმივებია.

ამ უტოლობების ამოხსნა ნიშნავს სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მოძებნას, რომელთა კოორდინატებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობას.

ასეთი ტიპის უტოლობების გეომეტრიულად ამოხსნის მიზნით, პირველ რიგში XOY საკოორდინატო სიბრტყეზე უნდა ავაგოთ l წრფე, რომლის განტოლებაა

$$ax + by = c \qquad (5.10)$$

ცხადია, ამ წრფით მთელი სიბრტყე გაიყოფა ორ ნახევარსიბრტყედ იხილეთ (ნახ. 5.7).



ნახ. 5.7

შევნიშნოთ, რომ თუ $(x_0; y_0)$ წერტილი არ ეკუთვნის l წრფეს, მაშინ $ax_0 + by_0 \neq c$, რადგან $ax + by - c$ ფუნქცია ნული ხდება მხოლოდ l წრფის წერტილებზე. აქედან გამომდინარე, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $ax + by - c$ ფუნქციას l წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყეში აქვს სხვადასხვა ნიშანი. ამისათვის საკმარისია ავიღოთ რაიმე “საცდელი” $(x_0; y_0)$

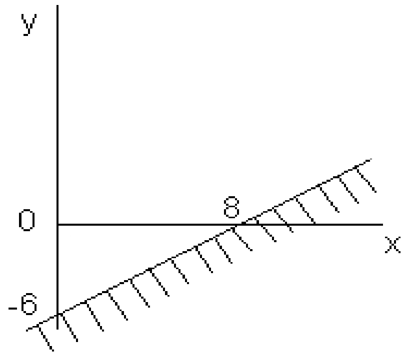
წერტილი და გამოვთვალოთ $ax_0 + by_0 - c$ სიდიდე. ამ რიცხვის ნიშანი განსაზღვრავს $ax + by - c$ ფუნქციის ნიშანს განსახილველ ნახევარსიბრტყეებში $ax + by > 0$ ან $ax + by < c$.

მაგალითი 5.5. ამოვხსნათ უტოლობა

$$3x - 4y \geq 24$$

ამოხსნა: პირველ რიგში ავაგოთ l წრფე, რომლის განტოლებაა $3x - 4y = 24$

ნახ. 5.8. საცდელ წერტილად ავიღოთ (0; 0) წერტილი და შევამოწმოთ სრულდება თუ არა მოცემული უტოლობა ამ შემთხვევაში: ვხედავთ, რომ მოცემული საცდელი წერტილის კოორდინატები მოცემულ უტოლობას არ აკმაყოფილებენ. ამიტომ, უტოლობის ამონახსნი არ იქნება ის ნახევარსიბრტყე, რომელშიც მოთავსებულია საცდელი (0; 0) წერტილი. ამგვარად ამონახსნია მეორე ნახევარსიბრტყე.



ნახ. 5.8

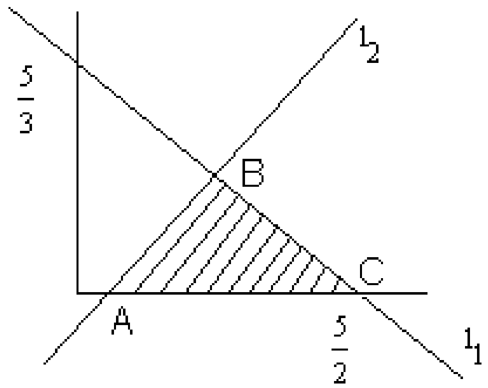
ამ შემთხვევაში, რადგან l წრფე განსაზღვრულია არამკაცრი უტოლობით, ამიტომ l წრფე ეკუთვნის ამონახსნთა ნახევარსიბრტყეს.

როცა მოცემულია რამდენიმე ორუცნობიანი წრფივი უტოლობისგან შედგენილი სისტემა, მაშინ მისი ამოხსნა ნიშნავს ყველა იმ წერტილთა სიმრავლის მოძებნას სიბრტყეზე, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ სისტემაში შემავალ ყველა უტოლობას. რადგან სისტემაში შემავალი თითოეული უტოლობის ამონახსენია ნახევარსიბრტყე, ამიტომ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა დაიყვანება შესაბამისი უტოლობებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთის პოვნაზე. ამ თანაკვეთით განსაზღვრულ სიმრავლეს ეწოდება დასაშვები სიმრავლე (დასაშვები არე).

<u>მაგალითი 5.6</u>. ავაგოთ დასაშვები სიმრავლე, რომელიც მოცემულია შემდეგი უტოლობებით:

$$\begin{cases} 2x+3y \le 5; \ (l_1) \\ 4x - y \ge 3; \ l_2 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

ავაგოთ l_1 და l_2 წრფეები.



ნახ. 5.9

პირველი უტოლობის ამონახსენია l_1 წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე (საცდელი წერტილია (0; 0)). იმავე საცდელი წერტილის შემთხვევაში მეორე უტოლობის ამონახსნი იქნება აგრეთვე l_2 წრფის ქვემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, მესამე უტოლობის ამონახსნია x ღერძის ზემოთ მდებარე ნახევარსიბრტყე, ხოლო მეოთხე უტოლობის ამონახსნია y ღერძის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყე. ამიტომ, სისტემის ამონახსნია დაშტრიხული ABC სამკუთხედი. სადაც $A\left(\frac{3}{4};0\right)$; $B(1;1)$ და $C\left(\frac{5}{2};0\right)$. ცხადია, B-ს კოორდინატები განისაზღვრა

$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-y=3 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნით.

ახლა გადავიდეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის მეორე ძირითად ნაწილზე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი x და y ცვლადი წრფივი ფუნქცია

$$L(x;y)=Ax+By \qquad (5.11)$$

სადაც A და B მოცემული არანულოვანი რაიმე მუდმივი რიცხვებია.

ვიგულისხმოთ, რომ x და y ცვლადები შეზღუდულია რაიმე პირობებით, რომლებიც გამოისახებიან წრფივი უტოლობათა სისტემის სახით. ეს იმას ნიშნავს, რომ (x; y) წერტილი იცვლება რაიმე D დასაშვებ სიმრავლეზე, რომელიც განისაზღვრება ხსენებული უტოლობათა სისტემის ამოხსნით. ასეთ $L(x;y)$ ფუნქციას მიზნის ფუნქცია ეწოდება.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა დაისმება ასე: ვიპოვოთ (5.11) ტოლობით მოცემული ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა დასაშვებ D არეზე.

წრფივი მიზნის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნად D არეზე მივიღოთ შემდეგი ალგორითმი:

1. ავაგოთ D მრავალკუთხედი და მოვძებნოთ მისი წვეროების კოორდინატები;
2. გამოვთვალოთ $L(x; y) = Ax + By$ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წვეროებში;
3. შევარჩიოთ მიღებულ მნიშვნელობებს შორის უმცირესი და უდიდესი რიცხვები. სწორედ ისინი იქნებიან $L(x; y)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები D სიმრავლეზე. თუ უმცირეს (უდიდეს) მნიშვნელობას $L(x; y)$ ფუნქცია იღებს ორ წვეროში, მაშინ ეს წვეროები აუცილებლად მდებარეობენ D მრავალკუთხედის ერთ გვერდზე და ამ გვერდის ყველა წერტილში $L(x; y)$ ფუნქცია იღებს იმავე უმცირეს (უდიდეს) მნიშვნელობას.

<u>მაგალითი.5.7.</u> ვიპოვოთ მიზნის $L(x; y) = 8x + 5y$

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები D სიმრავლეზე, თუ D განსაზღვრულია მაგალითი 5.6-ში მოცემული უტოლობათა სისტემით.

ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის თანახმად მაგ. 6.6.-ში დავადგინეთ, რომ ABC სამკუთხედის წვეროებია

$A\left(\frac{3}{4};0\right)$; $B(1;1)$ და $C\left(\frac{5}{2};0\right)$ გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წვეროებში:

$$L\left(\frac{3}{4};0\right)=6\,;\ L(1;1)=13\,;\ L\left(\frac{5}{2};0\right)=20\,.$$

ამგვარად, მიზნის ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა 6, რომელსაც მოცემული ფუნქცია აღწევს $A\left(\frac{3}{4};0\right)$ წერტილში, ხოლო უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა წერტილში $C\left(\frac{5}{2};0\right)$ და $L\left(\frac{5}{2};0\right)=20$.

§5.6. ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნა წრფივი დაპროგრამების გამოყენებით

გამოყენებითი სახის ამოცანების გადაწყვეტისას ყველაზე რთული მომენტია სიტყვიერად ჩაწერილი ეკონომიკური პირობების აღწერა ზუსტი მათემატიკური მოდელის სახით.

მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური ამოცანა.

<u>მაგალითი 5.8</u>. საწარმო უშვებს ორი P_1 და P_2 სახის პროდუქციას, რომლებზე ბაზრის მოთხოვნა აღემატება საწარმოს სიმძლავრეს. P_1 სახის პროდუქციის ერთეულზე დანახარჯია 8 ლარი, ხოლო P_2 სახის ერთეულზე დანახარჯია 4 ლარი. ამასთან, P_1 სახის პროდუქციის ერთეული იყიდება 10 ლარად, P_2 სახისა –

6 ლარად. ტრანსპორტირების ხარჯები P_1 სახის პროდუქციის ერთეულზე არის 0.2 ლარი, P_2 სახის ერთეულისათვის კი – 0.3 ლარი. საწარმოს ფინანსური შესაძლებლოების შეზღუდულობის გამო მისი ყოველთვიური დანახარჯების მაქსიმუმი ორივე სახის პროდუქციის საწარმოებლად შეიძლება იყოს 3200 ლარი, ხოლო ყოველთვიური სატრანსპორტო ხარჯები არაუმეტეს 150 ლარისა, როგორ უნდა ააწყოს საწარმომ საქმიანობა, რომ მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

ამოხსნა. პირველ რიგში საწარმომ უნდა გადაწყვიტოს თუ რა რაოდენობის P_1 და P_2 სახის საქონელი დაამზადოს ყოველთვიურად. რადგან ეს რაოდენობები უცნობია P_1 სახის პროდუქციის რაოდნობა, რომელიც უნდა აწარმოოს საწარმომ ყოველთვიურად აღვნიშნოთ x-ით. y-ით კი P_2 სახის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც უნდა დაამზადოს საწარმომ ყოველთვიურად.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, საჭიროა x და y შევარჩიოთ ისე, რომ საწარმომ მიიღოს მაქსიმალური მოგება. ამდენად საჭიროა ვიპოვოთ მოგების გამოსათვლელი ფუნქცია, რომელიც გამოისახება x და y ცვლადებით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$f_1(x;y)$ იყოს პროდუქციის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგები ერთ თვეში;

$f_2(x;y)$ იყოს დანახარჯი ერთ თვეში x და y რაოდენობის პროდუქციის საწარმოებლად;

$f_3(x;y)$ იყოს P_1 და P_2 სახის პროდუქციის ტრანსპორტირებაზე გაღებული დანახარჯები ერთ თვეში.

აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ ყოველთვიური მოგების ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე: $f(x;y) = f_1(x;y) - f_2(x;y) - f_3(x;y)$

შევნიშნოთ, რომ რადგან წარმოებული პროდუქციაზე მოთხოვნა აღემატება საწარმოს სიმძლავრეს, ამიტომ მოთხოვნა აღემატება პროდუქციის მიწოდებას ბაზარზე. ამის გამო, საწარმოს მიერ დამზადებული პროდუქცია იყოდება მთლიანად. რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველთვიურად პროდუქციის გაყიდვით მიღებული მთლიანი ამონაგებია $f_1(x;y) = 10x + 6y$.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ორივე სახის პროდუქციის საწარმოებლად ყოველთვიური დანახარჯი გამოითვლება ტოლობით $f_2(x;y) = 8x + 4y$, ამასთან ყოველთვიური სატრანსპორტო დანახარჯია $f_3(x;y) = 0.2x + 0.3y$. ამიტომ, მივიღებთ მოგების ფუნქციის შემდეგ გამოსახულებას.

$$f(x;y) = 10x + 6y - (8x + 4y) - (0.2x + 0.3y) = 1.8x + 0.7y$$

ე.ი. $$f(x;y) = 1.8x + 1.7y$$

წარმოადგენს მიზნის ფუნქციას და საძიებელია მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ახლა დავადგინოთ ყველა ის შეზღუდვა, რასაც უნდა აკმაყოფილებდნენ x და y ცვლადები. საწარმოს მიზნებიდან გამომდინარე, ყოველთვიური დანახარჯი არ უნდა აღემატებოდეს 3200 ლარს, ე.ი.

$$8x + 4y \le 3200$$

ამასთან ყოველთვიური სატრანსპორტო დანახარჯები არ უნდა აღემატებოდეს 150 ლარს, ე.ი. $0.2x + 0.3y \le 150$.

გარდა ამისა, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ $x \ge 0$ და $y \ge 0$. ამრიგად, მათემატიკურად დასმული ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ

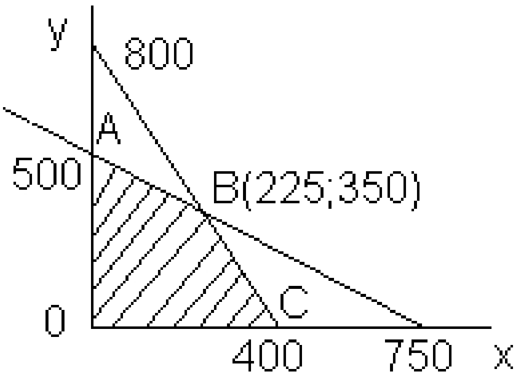
$$f(x;y) = 1.8x + 1.7y$$

მიზნის ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, როცა x და y ცვლადები ექვემდებარება შემდეგ შეზღუდვებს:

$$\begin{cases} 8x + 4y \le 3200, \\ 0.2x + 0.3y \le 150, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$$

ამგვარად, მივიღეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანა. წინა პარაგრაფში აღწერილი ალგორითმის თანახმად ჯერ უნდა ვიპოვოთ დასაშვებ მნიშვნელობათა არე ანუ ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა და შემდეგ ვიპოვოთ დასაშვები არის საკვანძო წერტილების კორდინატები (არის წვეროების კოორდინატები პირველი ეტაპი).

საცდელ წერტილად მივიღოთ $(0;0)$ კოორდინატთა სათავე და ავაგოთ $8x + 4y = 3200$ და $0.2x + 0.3y = 150$ განტოლებებით განსაზღვრული წრფეები.



ნახ. 5.10

უტოლობათა სისტემის პირველი და მეორე უტოლობათა ამონახსნია l_1 და l_2 წრფეების ქვემოთ მოთავსებული არე რომელსაც ეკუთვნის $(0;0)$ საცდელი წერტილი. ამგვარად უტოლობათა სისტემით განსაზღვრული დასაშვებ მნიშვნელობათა არეა $OABCO$ ოთკუთხედი ნახ. 5.10.

ცხადია, რომ O, A და C წვეროების კოორდინატებია $O(0;0)$, $A(0;500)$ და $C(400;0)$, ხოლო B წერტილი კოორდინატები წარმოადგენს l_1 და l_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილს, ამიტომ ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} 8x + 4y = 3200 \\ 0.2x + 0.3y = 150 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია

$$x = 225\,; \quad y = 350$$

ახლა გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები D მრავალკუთხედის წვეროებში (მეორე ეტაპი):

$$f(0;0)=0,$$
$$f(0;500)=850,$$
$$f(225;350)=1000,$$
$$f(400;0)=720.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ მესამე ეტაპი ითვალისწინებს მიღებულ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი (უმცირესი) რიცხვის შერჩევას. ჩვენს შემთხვევაში, უდიდესი რიცხვია

$$f(225;350)=1000$$

რომელიც მიიღწევა მხოლოდ ერთ $B(225;350)$ წვეროზე. ამიტომ, საწარმოს ყოველთვიური მოგება იქნება 1000 ლარი, რომელიც მიიღწევა იმ შემთხვევაში, თუ საწარმო ყოველთვიურად აწარმოებს P_1 სახის 225 ერთეული პროდუქციას და 350 ერთეულ P_2 სახის პროდუქციას.

Mathcad

ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის გამოსათვლელი პროგრამა

$$f(x) := \frac{x^3}{3} - 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 15$$

$x := 5$

Given

$R := \text{Maximize}(f, x)$

$R = 1$

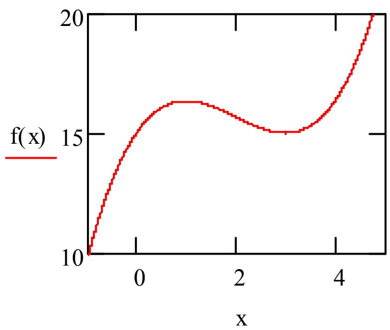
$f(R) = 16.333$

$L := \text{Minimize}(f, x)$

$L = 3$

$f(L) = 15$ $\quad i := 0..200$

$x := 0.01\cdot i$



ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი

$Z(x,y) := 18 + 6\cdot x - 2\cdot y - x^2 - y^2$

$x := 0$ $y := 0$

Given

$P := \text{Maximize}\ (Z, x, y)$

$P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

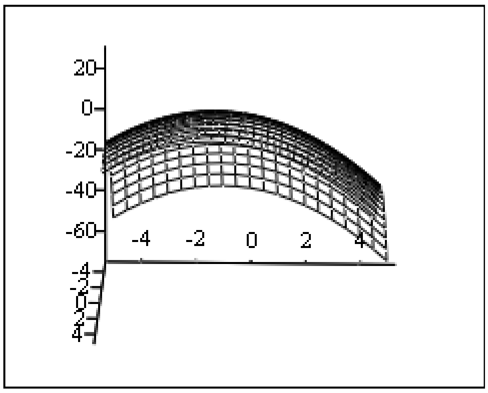
$Z(P_0, P_1) = 28$

$Q := \text{Minimize}(Z, x, y)$

$Q = \blacksquare$

$Z(Q_0, Q_1) = \blacksquare$

ე.ი. მინიმუმი არააქვს. მართლაც



Z

ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი

$F(x,y) := \frac{9}{x} + \frac{4}{y} + x + 4 \cdot y + 7$

$x := 10$

$y := 5$

Given

$T := \text{Maximize}(F, x, y)$

$T = 1\,T$

$F(T_0, T_1) = \blacksquare$

$L := \text{Minimize}(F, x, y)$

$L = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F(L_0, L_1) = 21$

$x := -5$ $y := -5$

Given

$K := \text{Maximize}(F, x, y)$

$K = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$F(K_0, K_1) = -7$

წრფივი დაპროგრამების ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნა

$f(x,y) := 0.8\cdot x + 0.7\cdot y$

$x := 0$

$y := 0$

Given

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$6\cdot x + 3\cdot y \le 2700$

$0.2\cdot x + 0.3\cdot y \le 120$

$R := \mathrm{Maximize}(f, x, y)$

$R = \begin{pmatrix} 375 \\ 150 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = 405$

$RM := \mathrm{Minimize}(f, x, y)$

$RM := \begin{pmatrix} m1 \\ m2 \end{pmatrix}$

$f(m1, m2) =$ ▮

მინიმუმი არააქვს

$f(x,y) := 400 \cdot x + 320 \cdot y$

$x := 1$ $\qquad$ $y := 1$

Given

$60 \cdot x + 20 \cdot y \geq 120$

$20 \cdot x + 20 \cdot y \geq 80$

$40 \cdot x + 120 \cdot y \geq 240$

$x \geq 0$ $\qquad$ $y \geq 0$

$x \leq 7$ $\qquad$ $y \leq 7$

$S := \text{Maximize}(f, x, y)$

$$S = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$f(S_0, S_1) = 5.04 \times 10^3$

$x := 2$ $\qquad$ $y := 1$

Given

$3x + y \geq 6$

$x + y \geq 4$

$x + 3y \geq 6$

$R := \text{Minimize}(f, x, y)$ $\qquad$ $f(R_0, R_1) = 1.36 \times 10^3$

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

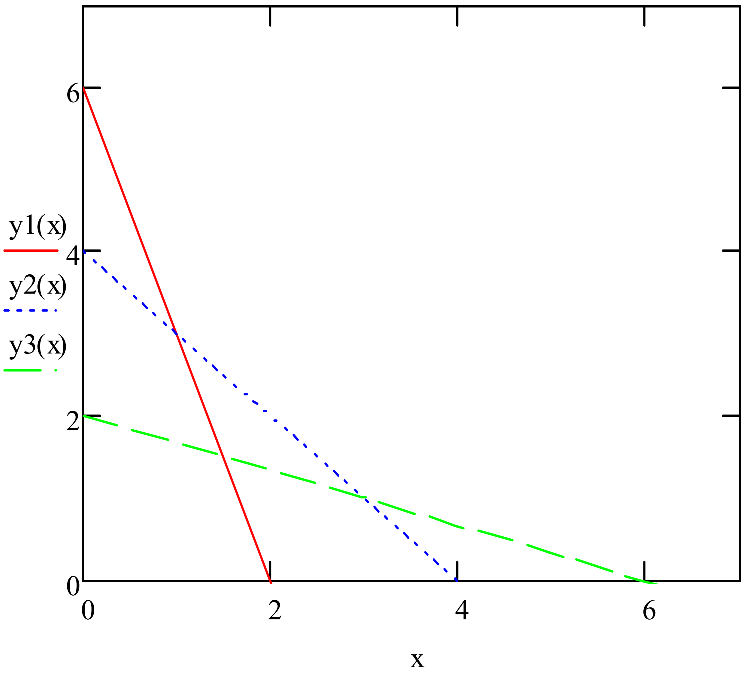
$f(R_0, R_1) = 1.36 \times 10^3$

$y1(x) := -3 \cdot x + 6$

$y2(x) := -x + 4$

$y3(x) := 2 - \frac{x}{3}$

$x := 0..7$ $\qquad$ $y := 0..7$



არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის პროგრამა

$f(x,y) := (x-3)^2 + (y-4)^2$

$x := 10 \qquad y := 10$

Given

$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$3 \cdot x + 2 \cdot y \geq 7$

$10 \cdot x - y \leq 8$

$-18 \cdot x + 4 \cdot y \leq 12$

$R := \text{Maximize}(f, x, y)$

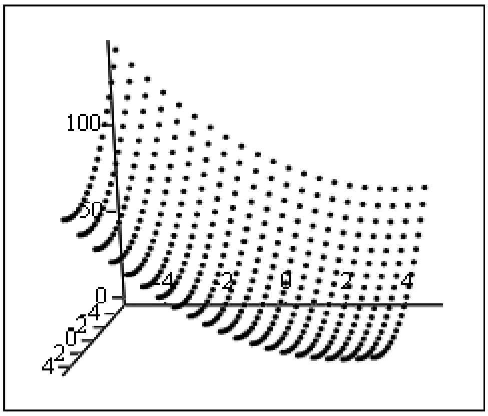
$R = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = 65.001$

$R := \text{Minimize}(f, x, y)$

$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = 0$



f

$f(x,y) := (x-3)^2 + (y-4)^2$

$x := 0 \qquad\qquad y := 0$

Given

$x \ge 0 \qquad\qquad y \ge 0$

$3 \cdot x + 2 \cdot y \ge 7$

$10 \cdot x - y \le 8$

$-18 \cdot x + 4 \cdot y \le 12$

$R := \text{Maximize}(f, x, y)$

$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = 8$

$R := \text{Minimize}(f, x, y)$

$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = 0$

$y1(x) := \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{x}{2} \qquad i := 0 .. 1000 \qquad x := 5 \qquad y := 5$

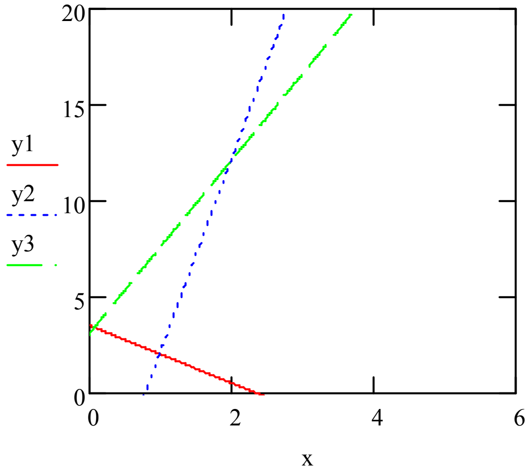
$y2(x) := 10 \cdot x - 8 \qquad x_i := 0.01 \cdot i \qquad$ Given

$y3(x) := 3 + 9 \cdot \frac{x}{2} \qquad y1_i := y1(x_i) \qquad M := \text{Maximize}(f, x, y)$

$y2_i := y2(x_i) \qquad M :=$

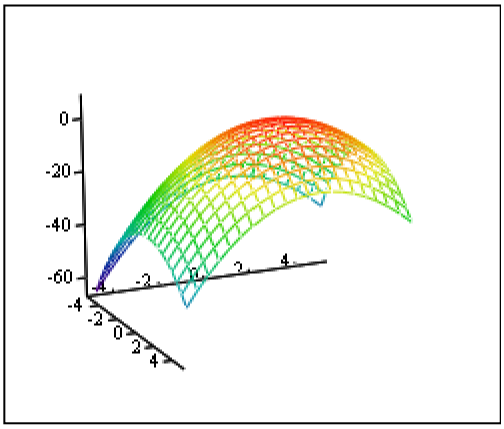
$y3_i := y3(x_i)$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნია სამკუთხედის
შიგა არე



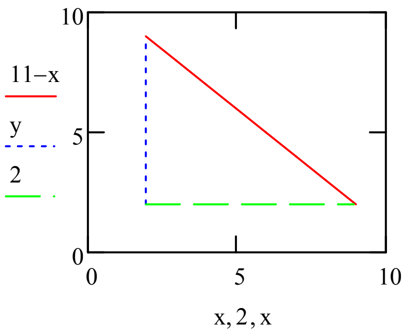
ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმის პოვნა

$f(x,y) := 5 + 2\cdot x + 2\cdot y - x^2 - y^2$



f

$x := 2 .. 9$ $\qquad\qquad$ $y := 2 .. 9$



$x := 3 \qquad y := 5$

Given

$x \ge 2$

$2 \le y \le 9 - x$ ამ შეზღუდვებით ვიპოვოთ ექსტრემუმი

$P := \text{Minimize}(f, x, y) \qquad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad f(P_0, P_1) = -30$

$x := 5 \qquad y := 4$

Given

$x > 2$

$2 \le y \le 9 - x$

$Q := \text{Minimize}(f, x, y) \qquad Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(Q_0, Q_1) = -30$

$x := 4 \qquad y := 5$

Given

$x \ge 2$

$2 \le y \le 9 - x$

$R := \text{Maximize}(f, x, y) \qquad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(R_0, R_1) = 5$

$L := \text{Maximize}(f, x, y) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(L_0, L_1) = 7$

(1,1) წერტილში, რომელიც მდებარეობს დასაშვებ მნიშვნელობათა არის გარეთ, ნაპოვნია ლოკალური მაქსიმუმი.

მაგალითები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები. მითითებულ შუალედში კი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები:

5.1. $y=\frac{1}{2}x^4-x^2+1$;

5.2. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

5.3. $y=9-3x+2x^2-\frac{x^3}{3}$;

5.4. $y=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-5$

5.5. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{8}{3}$

5.6. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3-2x^2-\frac{1}{3}$

5.7. $y=2x^2-x^4+4$

5.8. $y=x^4-8x^2$

5.9. $y=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

5.10. $y=\frac{1}{3}x^3-3.5x^2+6x+3$

5.11. $y=x^3-5x^2+3x+6$; $[1;3]$

5.12. $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-5$; $[0;3]$

5.13. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-5$; $[-1;2]$

5.14. ა) $y=2-5x$; ბ) $y=5+3x$; $[-1;3]$

5.15. ა) $y=17-2x$; ბ) $y=12+x$; $[-1;4]$

5.16. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$; $[-1;5]$

5.17. $y=-1+6x^2-3x^4$; $[-2;2]$

5.18. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; $[-1;2]$

5.19 $y=2x^3-15x^2+36x$; $[-1;1]$

5.20. $y=x+2\sqrt{x}$; $[0;4]$

იპოვეთ შემდეგი ორი ცვლადის ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმი:

5.21. $z=x^2+xy+y^2-5x-10y+50$;

5.22. $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$;

5.23. $z=6x^2-x^3-y^2-8y$;

5.24. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

5.25. $z=x^3-y^3+3xy$;

5.26. $z=x+y+\frac{16}{x}+\frac{9}{y}$;

5.27. $z=x+y+\frac{1}{4x}+\frac{1}{y}$

5.28. $z=xy(3-x+y); x\neq 0; y\neq 0$

5.29. $z=xy(x+y-1); x\neq 0; y\neq 0$

5.30. $z=xy+\frac{5}{x}+\frac{25}{y}$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირობითი ექსტრემუმი:

5.31. $z=x^2+y^2$, თუ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4$

5.32. $z = x + 2y$, თუ $x^2 + y^2 = 5$

5.33. $z = 5 - 4x - 3y$, თუ $x^2 + y^2 = 1$

5.34. $z = 4xy^2 + 4x - 3y - 5$, თუ $3y - 4x + 9 = 0$.

5.35. $z = 2x + y$, თუ $x^2 + y^2 = 1$

იპოვეთ ფუნქციათა გლობალური ექსტრემუმი მოცემულ არეებში:

5.36. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$, თუ $x^2 + y^2 \le 52$

5.37. $z = x^2 + y^2 - 12x - 16y$, თუ $x^2 + y^2 \le 25$

5.38. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$, თუ $x + y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.39. $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y$, თუ $x + y \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.40. $z = \frac{1}{2}y^2 - x^2 - 2y + 4x$, თუ $x + y \le 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

მოახდინეთ ფუნქციათა მაქსიმიზაცია:

5.41. $z = 3x + 2y \to \max$, თუ $3y + x \le 5$, $y + x \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.42. $z = 3x + 5y \to \max$, თუ $3y + 2x \le 18$, $y + x \le 7$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.43. $z = 3x + 4y \to \max$, თუ $x + 3y \le 9$, $2x + y \le 8$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.44. $z = 4x + 10y \to \max$, თუ $2x + 5y \le 20$, $x + y \le 7$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.45. $z = 3x + 3y \to \max$, თუ $x + y \le 4$, $3x + y \le 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

5.46. ფაბრიკა უშვებს ორი H და G ტიპის პროდუქციას, რომლებზე მოთხოვნა აღემატება ფაბრიკის სიმძლავრეს. H ტიპის პროდუქციის ერთეულზე დანახარჯია 6 ლარი, ხოლო G ტიპის ერტეულზე 3

ლარი. ამავდროულად, H ტიპის პროდუქციის ერთეული იყიდება 7 ლარად, G ტიპის კი 4 ლარად. ტრანსპორტირების ხარჯები H ტიპის პროდუქციის არის 0.2 ლარი, G ტიპის ერთეულისათვის კი – 0.3 ლარი. ფაბრიკის ფინანსური შესაძლებლობებიდან გამომდინარე მისი ყოველთვიური დანახარჯების მაქსიმუმი ორივე ტიპის პროდუქციის საწარმოებლად შეიძლება იყოს მხოლოდ 2700 ლარი, ხოლო ყოველთვიური სატრანსპორტო ხარჯები არ უნდა აღემატებოდეს 120 ლარს. როგორ უნდა ააწყოს ფაბრიკამ საქმიანობა, რომ მიიღოს მაქსიმალური მოგება?

5.47. ფირმა აწარმოებს სამი ხარისხის ლუდს. ამისათვის მას აქვს ორი H_1 და H_2 ჩამოსასხმელი ხაზი. პირველი ხარისხის ლუდი მიეწოდება ელიტარულ მაღაზიებს, მეორე ხარისხის ლუდი მიეწოდება სუპერმარკეტებს, მესამე ხარისხის ლუდი კი – დაბალი შემოსავლის მქონე მოსახლეობისათვის განკუთვნილ სპეციალურ მაღაზიებს. კონტრაქტის თანახმად ფირმამ ელიტარულ მაღაზიებს ყოველკვირა უნდა მიაწოდოს არანაკლებ 120 დეკალიტრი ლუდი, სუპერმარკეტებს – არანაკლებ 80 დეკალიტრი და სპეციალურ მაღაზიებს – არანაკლებ 240 დეკალიტრი.

H_1 ხაზის ექსპლუატაცია 1 სამუშაო დღეში ფირმას უჯდება 400 ლარი, ხოლო H_2 ხაზისა – 320 ლარი. ამასთან H_1 ხაზით 1 სამუშაო დღის განმავლობაში შეიძლება ჩამოისხას 60 დეკალიტრი პირველი ხარისხის, 20 დეკალიტრი მეორე ხარისხის და 40 დეკალიტრი მესამე ხარისხის ლუდი. შესაბამისი მაჩვენებლები H_2 ხაზისათვის არის 20 დეკალიტრი – პირველი ხარისხის, 20 დეკალიტრი – მეორე ხარისხის და 120 დეკალიტრი

მესამე ხარისხის. რამდენი დღე უნდა იმუშაოს კვირაში თითოეულმა ხაზმა, რომ ფირმამ დაიცვას კონტრაქტის პირობები ეკონომიკური რეჟიმით?

5.48. სადაზღვევო კომპანია GPI-ს ჰყავს მუდმივი და დროებითი შტატის თანამშრომლები. მუდმივი შტატის თანამშრომლები მუშაობენ კვირაში 40 საათს და იღებენ 800 ლარ ხელფასს (ყოველკვირეულად), ხოლო ხელშეკრულებით მომუშავე დროებითი შტატის თანამშრომლები მუშაობენ კვირაში 20 საათს და იღებენ 320 ლარ ხელფასს (ყოველკვირეულად). კომპანიის საშტატო წესდებით, დროებითი შტატების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მუდმივი შტატების რაოდენობის მესამედს. სადაზღვევო საქმეების შესასრულებლად საჭიროა არანაკლებ 900 სამუშაო საათის დახარჯვა კვირაში.

როგორ უნდა დაადგინოს კომპანიამ სადაზღვევო საქმეების შესასრულებლად მუდმივი და დროებითი შტატების რაოდენობა, რომ მისი დანახარჯები იყოს მინიმალური?

5.49. ფირმამ გადაწყვიტა გამოუშვას ორი ახალი K_1 და K_2 ტიპის კომპიუტერი. K_1 ტიპის ერთი კომპიუტერი ფირმას უჯდება 1200 დოლარი, ხოლო K_2 ტიპისა – 1600 დოლარი. რისკის ფაქტორის გათვალისწინებით ფირმამ შეზღუდა ყოველკვირეული წარმოების დანახარჯი 40 000 დოლარამდე. გარდა ამისა, კვალიფიციური სპეციალისტების დეფიციტის გამო, ერთ კვირაში ფირმას არ შეუძლია დაამზადოს 30-ზე მეტი კომპიუტერი.

K_1 ტიპის თითოეული კომპიუტერიდან ფირმას აქვს 600 დოლარი მოგება, ხოლო K_2 ტიპის კომპიუტერიდან 700 დოლარი.

როგორ უნდა ააწყოს ფირმამ წარმოება, რომ მისი მოგება იყოს მაქსიმალური?

5.50. ღვინის ქარხანა ბოთლებში ასხამს და საფირმო მაღაზიებს აწვდის თეთრ და წითელ ღვინნოებს. 1 ბოთლი თეთრი ღვინის ფასია 6 დოლარი, 1 ბოთლი წითელი ღვინის ფასი კი – 8 დოლარი. 1 ბოთლი თეთრი ღვინის წარმოება ქარხანას უჯდება 1.5 დოლარი. 1 ბოთლი წითელი ღვინისა – 4 დოლარი. კონტრაქტის პირობებით მიწოდებული თეთრი ღვინის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს წითელი ღვინის რაოდენობის მეოთხედს. საქონლის ტრანსპორტირება ქარხანას ყოველთვიურად უჯდება გადასატანი ტვირთის ღირებულების 10%. მაღაზიებისათვის გადასახდელი ყოველთვიური ხარჯები შეადგენს 3000 დოლარს.

ყოველთვიურად მაღაზიებს შეუძლიათ მიიღონ და გაყიდონ არა უმეტეს 2000 ბოთლი ღვინო. როგორ უნდა დაგეგმოს ქარხანამ ღვინის მიწოდება, რომ მისი ყოველთვიური მოგება იყოს მაქსიმალური?

თავი VI

კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები

§. 6.1 კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები (გადატანის განტოლება)

დავიწყოთ კერძოწარმოებულიანი მოდელური განტოლებების შემცველი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განხილვა.

ფიზიკური და ტექნიკური პროცესების მათემატიკურ მოდელებს მივყავართ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებამდე.

რაც შეეხება ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნის რიცხვით მეთოდებს, არსებობს მრავალი მონოგრაფია და სახელმძღვანელო, რომელშიც გაშუქებულია ამ საკითხების გადაწყვეტის გზები. ჩვენი მიზანია შესავალი კურსის ფარგლებში მივიღოთ პირველადი წარმოდგენა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნის სხვაობიანი სქემების (ალგორითმების) აგების უმარტივეს მეთოდებზე.

განვიხილავთ გადატანის, თბოგამტარობის და პუასონის მოდელური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების შესწავლას. ამ განტოლებებს აქვს სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial U}{\partial x} = F(t,x)$$ - გადატანის განტოლება, (6.1)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$ - თბოგამტარობის განტოლება, (6.2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y)$$ - პუასონის განტოლება (6.3)

$U(t,x)$ პირველ ორ განტოლებაში აღწერს მდგრადობის ევოლუციას დროსა და სივრცეში და მათ ევოლუციური ან არასტაციონალური განტოლებები ეწოდებათ.

მესამე განტოლებაში $U(x,y)$ აღწერს დამყარებულ (სტაციონალურ) მდგომარეობას.

ახლა, დავიწყოთ კეროწარმოებული დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი სხვაობიანი სქემების სიმრავლეში ორიენტირების სწავლა.

დავიწყოთ უმარტივესი ამოცანით.

ვიპოვოთ, (6.1) დიფერენციალური განტოლების $U(t,x)$ ამონახსნი $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ (6.4) არეში, რომელიც როცა $t = 0$ ღებულობს მოცემულ მნიშვნელობებს

$$U(0,x) = \Phi(x) \qquad (6.5)$$

ამ ამოცანის ზუსტი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით:

$$U(t,x)=\Phi(x-at)+\int_0^t F(\tau,x-at+a\tau)d\tau \qquad (6.6)$$

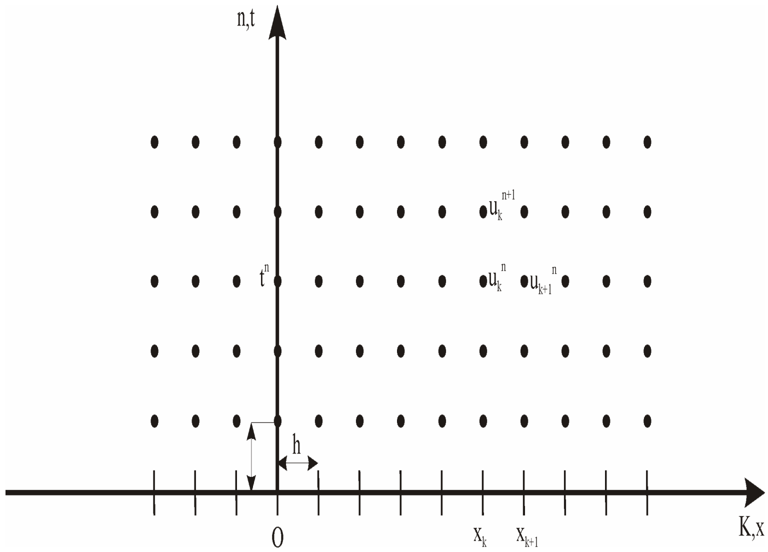
მაგრამ მიუხედავად სიმარტივისა ჩვენ განვიხილავთ (6.1), (6.4) (6.5) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის გზებს, რადგან ამის საფუძველზე შეიძლება შევისწავლოთ კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები.

რიცხვითი ალგორითმის აგების მიზნით უწყვეტი (6.4) არე უნდა შეიცვალოს წერტილთა დისკრეტული სიმრავლით კერძოდ:

$$\begin{cases} x_k = kh, & k=0,\pm1,\pm2,.. \\ t^n = n\tau & n=0,1,2,... \end{cases} \qquad (6.7)$$

ამგვარად მივიღეთ ორი τ და h ბადური ბიჯები.

$U(t,x)$, $F(t,x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების ნაცვლად განვიხილოთ ბადური ფუნქციები ან რაც იგივეა რიცხვითი u_k^n, f_k^n, φ_k, მიმდევრობები, რომლებიც შეესაბამება ბადის x_k, t^n (6.7) წერტილს ნახ. 6.1.



ნახ. 6.1

თუ (6.1) განტოლებაში შემავალ $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ და $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ კერძოწარმოებულებს x_k, t^n წერტილის მიდამოში შევცვლით სხვაობებით, მივიღებთ

$$\frac{u_k^{n+1}}{\tau} + a \cdot \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = f_k^n \qquad (6.8)$$

ინდექსების ყოველი k, n წყვილისათვის.

ამგვარად (6.5)-ის ნაცვლად მივიღებთ

$$u_k^0 = \varphi_k = U(0, x_k) = \Phi(x_k) \qquad (6.9)$$

ხოლო

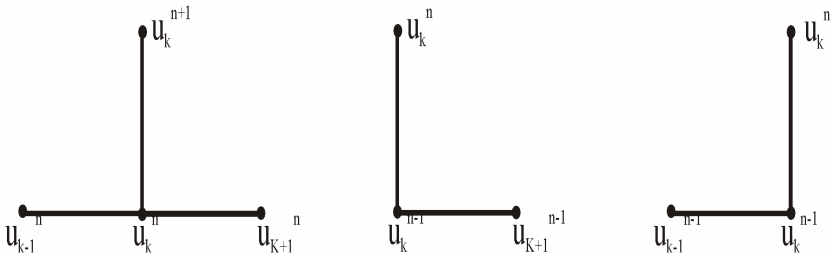
$$f_k^n = F\left(t^n, x_k\right) \qquad (6.10)$$

ამგვარად (6.1), (6.4), (6.5) ამოცანის ნაცვლად ჩვენ მივიღეთ (6.8), (6.9), (6.10) სხვაობიანი ამოცანა. თუ (6.8) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ u_k^{n+1}-ს, მივიღებთ u_k^n ამონახსნთა გამოსათვლელ ფორმულას:

$$u_k^{n+1} = \left(1 + \frac{\tau}{h} \cdot a\right) u_k^n - a \cdot \frac{\tau}{h} u_{k+1}^n + \tau \cdot f_k^n \qquad (6.11)$$

როგორც (6.9)-დან ჩანს ცნობილია $u_k^0 = \varphi_k$ მნიშვნელობები (6.11) ფორმულით მივიღებთ u_k^1, შემდეგ u_k^2 და ა.შ.

მტკიცდება, რომ (6.8) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (6.1) განტოლების აპროქსიმაციას $0(\tau, h)$ პირველი რიგის სიზუსტით. ხოლო, რაც შეეხება კვანძთა კონფიგურაციას, რომლებშიც ბადური ფუნქციის მნიშვნელობები განსაზღვრავს ბადის შიდა კვანძებისათვის ჩაწერილი სხვაობიანი განტოლებების სახეს, ეწოდება სხვაობიანი სქემის შესაბამისი შაბლონი. მაგალითად, (5.8) სქემის შესაბამისი შაბლონი მოცემულია 6.2 ნახ-ზე.



ნახ.6.2 ნახ.6.3 ნახ.6.4

ნახ. 6.3-ზე მოცემული შაბლონით სხვაობიანი სქემა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau} + a \cdot \frac{u_{k+1}^{n-1} - u_k^{n-1}}{h} = f_k^{n-1} \qquad (6.12)$$

და პირიქით, სქემას

$$\frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\tau} + a \cdot \frac{u_k^{n-1} - u_{k-1}^{n-1}}{h} = f_k^{n-1} \qquad (6.13)$$

შეესაბამება ნახ. 6.4-ზე მოცემული შაბლონი.

ახლა გადავიდეთ უფრო კონკრეტული ამოცანის ამოხსნაზე.

განვიხილოთ

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial U}{\partial x} = f(t,x) \qquad (6.14)$$

გადატანის განტოლებისათვის შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა.

ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ (6.14) განტოლების ამონახსნი $0 \le t \le T$, $0 \le x \le 1$ მართკუთხედში.

ჯერ განვიხილოთ ამოცანის კორექტულობასთან დაკავშირებული საკითხები.

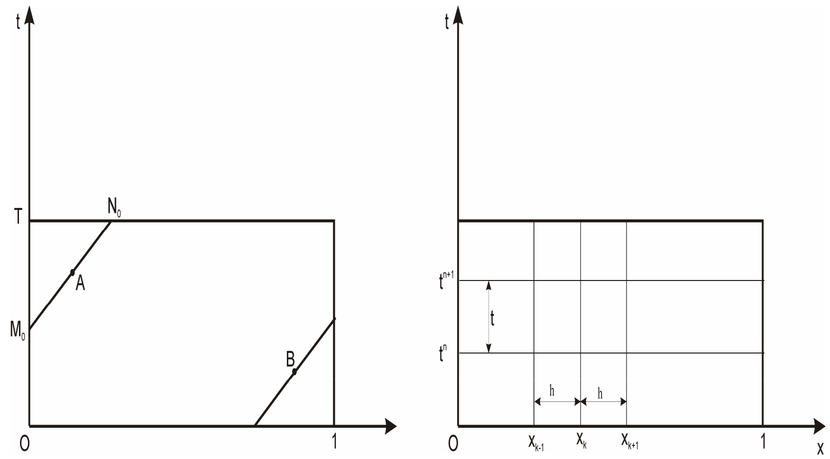
განვიხილოთ $\dfrac{dx}{dt} = a$ დიფერენციალური განტოლება. მის ამონახსნს წარმოადგენს $x = at + c$ წრფეთა ოჯახი, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ამ ოჯახის ყოველი წირის გასწვრივ ამოსავალი (6.14) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების სახით:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_C = \left. f(t,x)\right|_C, \qquad (6.14')$$

$\left.\dfrac{du}{dt}\right|_C = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} = U_t + aU_x$ წარმოადგენს $\dfrac{dx}{dt} = a$ განტოლებით განსაზღვრული მიმართულებით წარმოებულს. $x = at + c$ წირებს რომელთა გასწვრივ კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება გადადის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე, ეწოდებათ მახასიათებელი წირები.

იმისათვის, რომ ცალსახად განვსაზღვროთ (6.14) განტოლების ამონახსნი მართკუთხედის რომელიმე შიდა A წერტილზე ნახ. 6.5 (ა), შეიძლება ამ წერტილზე გავატაროთ მახასიათებელი წრფე და შემდეგ ამოვხსნათ

კოშის ამოცანა (6.14) განტოლებისათვის t-ს მიმართ ზრდის ან საწინააღმდეგო მიმართულებით. პირველ შემთხვევაში საწყისი პირობა უნდა იყოს მოცემული M_0 წერტილში, ხოლო მეორე შემთხვევაში N_0 წერტილში. ხოლო ამონახსნის ცალსახად განსაზღვრისათვის შიდა (A,B) წერტილებში აუცილებელია U-ს მნიშვნელობის მოცემა x ღერძის [0;1] მონაკვეთზე (საწყისი მონაცემები) და t ღერძის $[O;T]$ მონაკვეთზე (სასაზღვრო პირობები).



(ა) (ბ)

ნახ. 6.5

ამ შემთხვევაში ამოცანა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} U_t + aU_x = f(t,x) & (t > 0, 0 < x \le 1 \\ U(0,x) = \varphi(x) & (0 < x \le 1) \\ U(t,0) = \psi(t) & (0 < t \le T \end{cases} \qquad (6.15)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ $a<0$, მაშინ დამატებითი პირობები უნდა დაისვას არა მარცხენა, არამედ მარჯვენა საზღვარზე.

ნახ. 6.4-ზე მოცემული შაბლონით სხვაობიანი განტოლებათა შიდა წერტილებისათვის იგება შემდეგი სქემა:

$$
\begin{cases}
\dfrac{U_K^n - U_K^{n-1}}{\tau} + a\dfrac{U_K^{n-1} - U_{K-1}^{n-1}}{h} = f_K^{n-1}, \quad n=1,2,3,\ldots, \quad N.K=1,2,\ldots,K, \\
U_K^0 = \varphi(x_K), K=1,2,\ldots K \\
U_0^n = \psi(t^n), n=1,2,3,\ldots N
\end{cases}
$$

(6.16)

აქ იგულისხმება, რომ $\varphi(0)=\psi(0)$

(6.16) სქემის პირველი ტოლობიდან მივიღებთ ამონახსნის შუალედური მნიშვნელობების გამოსათვლელ ფორმულებს განსახილველი შრის დარჩენილ კვანძებში:

$$
U_K^n = U_K^{n-1} - \frac{a\tau}{h}\left(U_K^{n-1} - U_{K-1}^{n-1}\right) + \tau \cdot f_K^{n-1} \qquad (6.17)
$$

თუ განვიხილავთ სქემას ნახ. 6.3-ზე მოცემული შაბლონით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{U_K^n - U_K^{n-1}}{\tau} + a\dfrac{U_{K+1}^{n-1} - U_K^{n-1}}{h} = f_K^{n-1}, n = 1,2,3,..,N, K = 1,2,\ldots,K, \\ U_K^0 = \varphi(x_K), K = 1,2,\ldots,K \\ U_0^n = \psi(t^n), n = 1,2,3,..,N \end{cases} \quad (6.18)$$

ამ სისტემის პირველი ტოლობიდან მივიღებთ

$$U_K^n = -\frac{\tau \cdot a}{h} U_{K+1}^{n-1} + \left(1 + \frac{\tau \cdot a}{h}\right) U_K^{n-1} + \tau \cdot f_K^{n-1} \quad (6.19)$$

ამოვხსნათ გადატანის ამოცანა ნახ.6.4-ზე მოცემული შაბლონით აგებული (6.17) სხვაობიანი სქემით.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

მაგალითი 6.1. ვთქვათ, $f(t; x) = t + x$, $a = 1$; $\tau = h = 0.2$; მაშინ ამოცანა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} u_K^n = u_{K-1}^{n-1} + 0.2\big((n-1) \cdot 0.2 + K \cdot 0.2\big) \\ u_K^0 = \varphi(x_K) = \dfrac{1}{4} x_K^2 = 0.01 \cdot K^2 \\ u_0^n = \psi(t_n) = \dfrac{1}{4} t_n^2 = 0.01 \cdot n^2 \end{cases}$$

ანუ

$$
\begin{array}{llllll}
u_0^0=0; & u_1^0=0.01; & u_2^0=0.04; & u_3^0=0.09; & u_4^0=0.16; & u_5^0=0.25; \\
u_0^1=0.01; & u_1^1=0.04; & u_2^1=0.09; & u_3^1=0.16; & u_4^1=0.25; & u_5^1=0.36; \\
u_0^2=0.04; & u_1^2=0.09; & u_2^2=0.16; & u_3^2=0.25; & u_4^2=0.36; & u_5^2=0.49; \\
u_0^3=0.09; & u_1^3=0.16; & u_2^3=0.25; & u_3^3=0.36; & u_4^3=0.49; & u_5^3=0.64; \\
u_0^4=0.16; & u_1^4=0.25; & u_2^4=0.36; & u_3^4=0.49; & u_4^4=0.64; & u_5^4=0.81; \\
u_0^5=0.25; & u_1^5=0.36; & u_2^5=0.49; & u_3^5=0.64; & u_4^5=0.81; & u_5^5=1.0;
\end{array}
$$

შევნიშნოთ, რომ განტოლების ზუსტი ამონახსნია

$$u(t;x)=\frac{1}{4}(x+t)^2; \text{ ანუ } u(t_n;x_K)=0.01(k+n)^2 .$$

სხვაობიანი სქემით მიღებული კვანძითი მნიშვნელობები კარგად ეთანადება ზუსტ ამონახსნს.

(6.19) დამოკიდებულებით მარცხენა საზღვრის წერტილებში ამონახსნი არ განისაზვრება ცალსახად, ამდენად (6.15) განტოლების ამოსახსნელად ეს სქემა არ გამოდგება.

§6.2. თბოგამტარობის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

განვიხილოთ (6.2) თბოგამტარობის განტოლება და განვიხილოთ მისი ამოხსნა სასრულ არეზე, კერძოდ ჩავთვალოთ, რომ $0 < x \le 1$, $t > 0$ და თუ U არის ტემპერატურა, მაშინ (6.2) განტოლება აღწერს სითბოს გადატანას ერთეულოვანი სიგრძის ერთგანზომილებიანი ღეროს გასწვრივ ტემპერატურის მოცემული საწყისი $\varphi(x)$ განაწილებით და მოცემული ტემპერატურული $\psi_1(t)$ და $\psi_2(t)$ რეჟიმებით ღეროს ბოლოებზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ U არის კონცენტრაცია, მაშინ (6.2) აღწერს ნივთიერების დიფუზიას და შესაბამისად (6.2) განტოლებას ზოგჯერ დიფუზიის განტოლებას უწოდებენ.

ამგვარად გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \mu > 0, t > 0, 0 \le x \le 1 \\ U(0;x) = \varphi(x), U(t;0) = \psi_1(t), U(t;1) = \psi_2(t) \end{cases} \tag{6.20}$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ნახ. 5.2-ზე მოცემული შაბლონით ბადეზე სხვაობიანი სქემა ჩაიწერება შემდეგი სახით

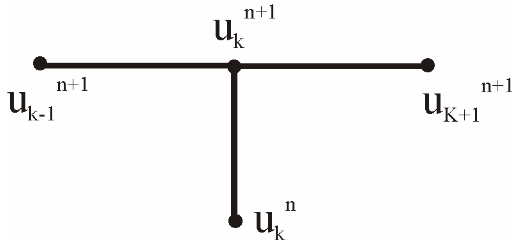
$$\begin{cases} \dfrac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\tau} = \mu \dfrac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h}, \ n = 1,2,3,.., \ N-1, \ k = 1,2,...,K-1, \\ U_k^0 = \varphi(x_k), \ k = 1,2,...,k \\ U_0^n = \psi_1(t^n), \ U_k^n = \psi_2(t^n), \ n = 1,2,3,..,N \end{cases} \tag{6.21}$$

აქედან სათვლელი ფორმულა $(n+1)$ შრის შიდა კვანძებისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U_K^{n+1} = U_K^n + \frac{\tau \cdot \mu}{h^2}\left(U_{K+1}^n - 2U_K^n + U_{K-1}^n\right), \qquad (6.22)$$

ხოლო მნიშვნელობები მარჯვენა საზღვრის კვანძებში გამოითვლება მოცემული ფორმულით - $\psi_2(t_n)$.

განვიხილოთ კიდევ ერთი შემდეგი სახის შაბლონი



ნახ. 6.6

ნახ. 6.6-ზე მოცემული შაბლონით მივიღებთ შემდეგი სახის აპროქსიმაციას

$$\begin{cases} \dfrac{U_K^{n+1} - U_K^n}{\tau} = \mu \dfrac{U_{k+1}^{n+1} - 2U_k^{n+1} + U_{k-1}^{n+1}}{h}, n > 1,2,..N-1, \quad k = 1,2,...,k-1 \\ U_K^0 = \varphi K, \qquad K = 1,2,...,k \\ U_0^n = \psi_1(t_n), U_k^n = \psi_2(t_n), \qquad n = 1,2,3,...,N \end{cases}$$

(6.23)

ამგვარად, მივიღეთ არაცხადი სქემა (6.23), რომელიც გვაძლევს საშუალებას n-ური შრიდან ცნობილი მონაცემებით, გამოვთვალოთ $(n+1)$ შრის ამონახსნები ეს ამოცანა დაიყვანება წრფივ განტოლებათა სამდიაგონალიანი სისტემის ამოხსნაზე და როგორც

ვიცით იხსნება ფაქტორიზაციის მეთოდით – სისტემა (1.14).

სისტემა (6.23) ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} u_0^n = \psi_1(t_n), \\ -ru_{K-1}^{n+1} + (1+2r)u_K^{n+1} - ru_{K+1}^{n+1} = u_K^n, \\ u_K^n = \psi_2(t_n), \end{cases}$$

სადაც $r = \dfrac{\tau \cdot \mu}{h^2}$

§. 6.3. პუასონის განტოლების რიცხვითი ამოხსნა

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა – დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y),(x,y) \in \omega \\ U\big|_r = \varphi(x,y),(x,y) \in r \end{cases} \qquad (6.25)$$

სადაც ω არის სათვლელი არის შიდა წერტილების სიმრავლე, r არის სათვლელი ω არის საზღვარი.

თუ გამოვიყენებთ ჩვეულებრივ მიდგომას ე.ი წარმოებულებს შევცვლით სხვაობებით, მივიღებთ (6.25) ამოცანის აპროქსიმაციას სხვაობიანი განტოლებით.

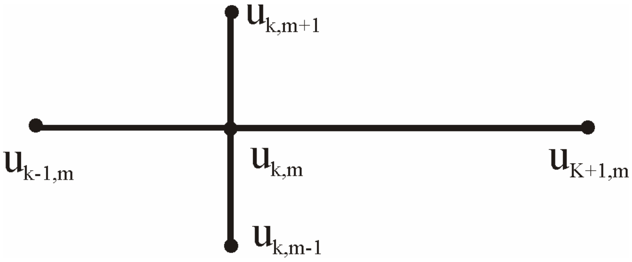
$$\frac{U_{K+1,m} - 2U_{K,m} + U_{K-1,m}}{h_x^2} + \frac{U_{K,m+1} - 2U_{K,m} + U_{K,m} - 1}{h_y^2} = f(x_k, y_m) \qquad (6.26)$$

$$(x_k, y_k) \in \omega$$

სადაც

$$U_{K,m} = \widetilde{\varphi}_{K,m} = \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \qquad (6.27)$$

სადაც $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ არის (6.25) ამოცანაში Γ საზღვრის კვანძთან მდებარე უახლესი წერტილი. სქემა (6.26) აღიწერება შემდეგი შაბლონით



ნახ. 6.7

ამოცანის ამოხსნის საკითხზე გადასვლისას ჩვენ შემოვიფარგლებით მართკუთკა სათვლელი არით: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. (6.26) – (6.27) სქემა ახდენს ამოსავალი (6.25) ამოცანის აპროქსიმაციას მართკუთხა არეზე მეორე რიგის სიზუსტით, ორივე ცვლადის მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში სხვაობიანი სქემა წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას.

(6.6) სხვაობიანი სისტემა $U_{K,m}$-ის მიმართ გადავწეროთ და განვიხილოთ იტერაციული პროცესი

$$\overset{(i+1)}{U}_{K,m} = \frac{h_x^2 \cdot h_y^2}{2\left(h_x^2 + h_y^2\right)} \left[-f_{K,m} + \frac{1}{h_x^2}\left(\overset{(i)}{U}_{K+1,m} + \overset{(i)}{U}_{K-1,m}\right) + \frac{1}{h_y^2}\left(\overset{(i)}{U}_{K,m+1} + \overset{(i)}{U}_{K,m-1}\right) \right] \qquad (6.28)$$

სადაც i-მიახლოების ნომერია; $(x_K, y_m)\Gamma$ საზღვრის კვანძთან მდებარე უახლოესი წერტილია.

(6.28) პროცესი იგივეა რაც წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით §1.5 ვინაიდან ჩვენ (k,m)-ური განტოლებიდან გამოვრიცხავთ $U_{K,m}$-ს ანუ დიაგონალურ ელემენტს. მტკიცდება, რომ (6.28) იტერაცია კრებადია. ის იკრიბება ძალიან ნელა, მაგრამ მიუხედავად ამისა, ეს მეთოდი მაინც გამოიყენება.

თუ ავიღებთ $h_x = h_y = h$, მაშინ (6.28) მიიღებს სახეს:

$$\overset{(i+1)}{U}_{K,m} = \frac{1}{4}\left[-h^2 f_{K,m} + \overset{(i)}{U}_{K+1,m} + \overset{(i)}{U}_{K-1,m} + \overset{(i)}{U}_{K,m+1} + \overset{(i)}{U}_{K,m-1}\right] \quad (6.29)$$

6.4 Mathcad

კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის პროგრამები.

$a \equiv 1 \qquad L \equiv 2\cdot\pi \qquad T \equiv 2\cdot\pi$

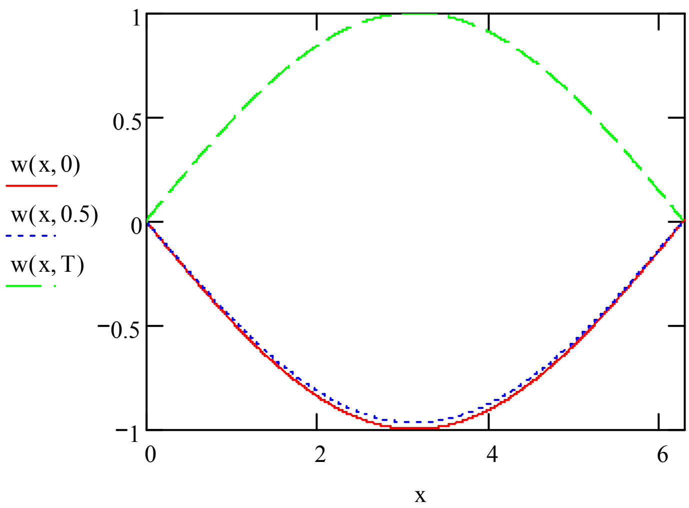
Given

$v_t(x,t) = a^2\cdot w_{xx}(x,t) \qquad w_t(x,t) = v(x,t)$

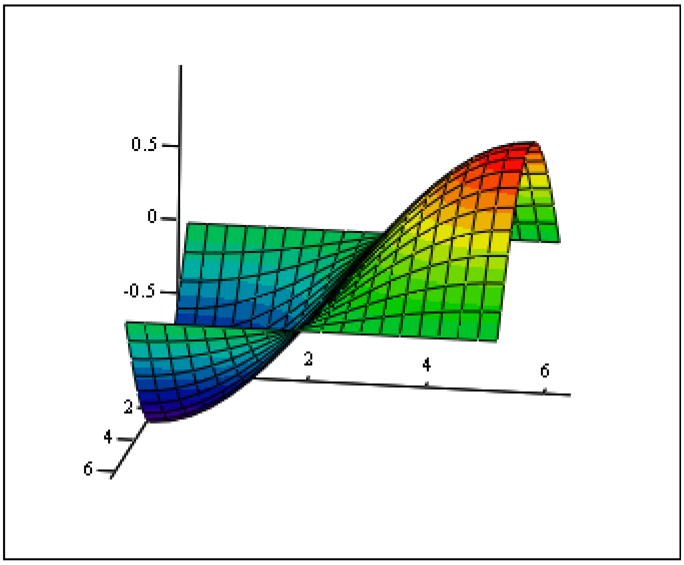
$w(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{L}\right) \qquad v(x,0) = 0$

$w(0,t) = 0 \qquad w(L,t) = 0$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \text{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$



M := CreateMesh(w, 0, L, 0, T)



M

$a \equiv 1$ $\qquad$ $L \equiv 2\cdot\pi$ $\qquad$ $T \equiv 2\cdot\pi$

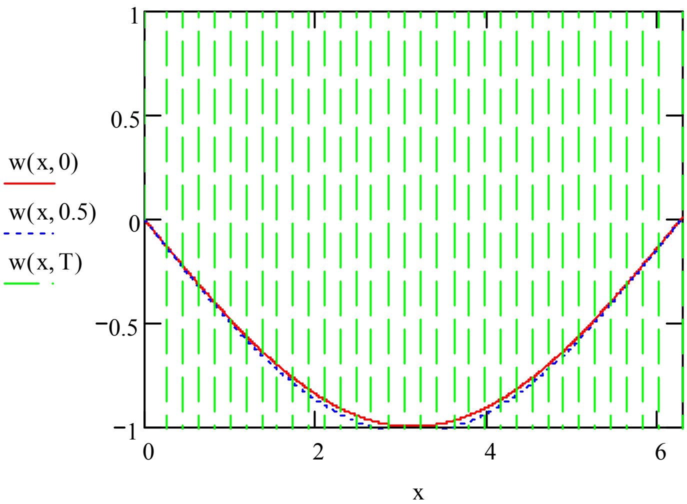
Given

$v_t(x,t) = a^2 \cdot w_{xx}(x,t)$ $\qquad$ $w_t(x,t) = -v(x,t)$

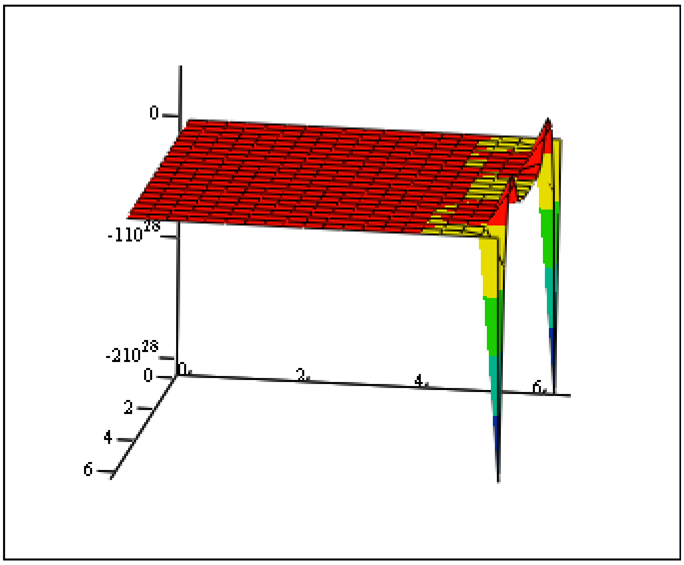
$w(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{L}\right)$ $\qquad$ $v(x,0) = 0$

$w(0,t) = 0$ $\qquad$ $w(L,t) = 0$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \text{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$



M := CreateMesh (w, 0, L, 0, T)



M

$a \equiv 2 \qquad L \equiv 2\cdot\pi \qquad T \equiv 2\cdot\pi$

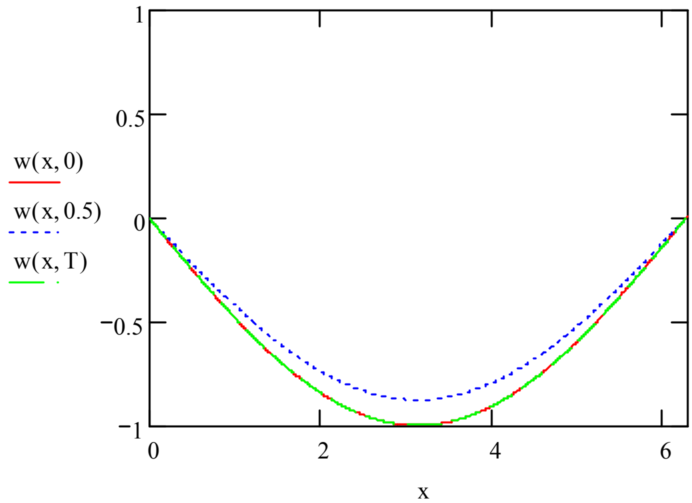
Given

$v_t(x,t) = a^2\cdot w_{xx}(x,t) \qquad w_t(x,t) = v(x,t)$

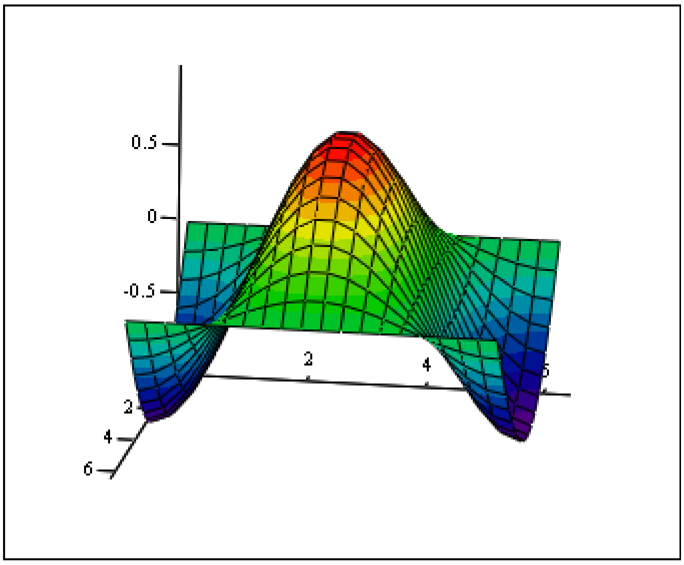
$w(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{L}\right) \qquad v(x,0) = 0$

$w(0,t) = 0 \qquad w(L,t) = 0$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \mathrm{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$



M := CreateMesh (w, 0, L, 0, T)



M

$$\frac{d}{dt}v(x,t) = a^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}w(x,t)$$

$$\frac{d}{dt}w(x,t) = v(x,t)$$

Given

$v_t(x,t) = a^2 \cdot w_{xx}(x,t)$ $\qquad$ $w_t(x,t) = v(x,t)$

$w(x,0) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$ $\qquad$ $v(x,0) = 0$

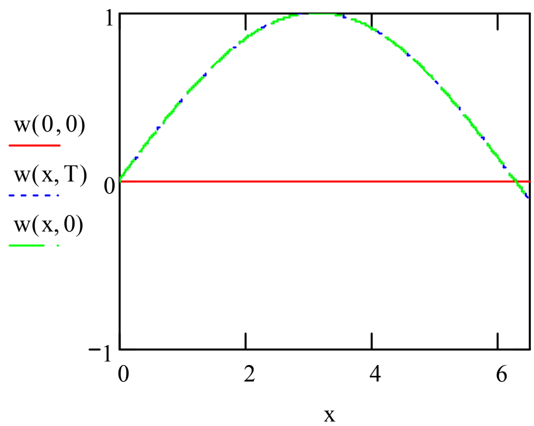
$w(0,t) = 0$ $\qquad$ $w(L,t) = 0$

$w(x,t) := \text{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$ $\qquad$ $a \equiv 3$

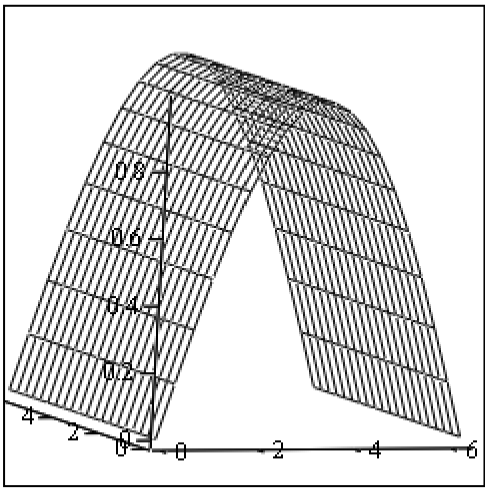
$L \equiv 2 \cdot \pi$

$T := 2 \cdot \pi$

$w(x,t) := \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$



$M := \mathrm{CreateMesh}(w, 0, L, 0, T)$



M

მაგალითები

ამოხსენით გადატანის ამოცანები ნახ. 6.4-ზე მოცემული შაბლონით აგებული სხვაობიანი სქემით:

6.1. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=3(t+x), \quad \tau=h=0.2 \\ u_K^0=0.04K^2 \\ u_0^n=0.04n^2 \end{cases}$$

6.2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+0.5\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+t, \quad \tau=h=0.25 \\ u_K^0=0 \\ u_0^n=0 \end{cases}$$

6.3. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=2tx(t+x), \quad \tau=h=0.1 \\ u_K^0=0 \\ u_0^n=0 \end{cases}$$

6.4. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=2(t+x), \quad \tau=h=0.2 \\ u_k^0=1+0.02k^2 \\ u_0^n=1+0.04n^2 \end{cases}$$

6.5. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2(t + 2x), \ \ \tau = 0.1; \ \ h = 0.2, \\ u_k^0 = 0.04k^2 \\ u_0^n = 0.01n^2 \end{cases}$$

ნახ. 6.2-ზე მითითებული შაბლონით მიღებული სხვაობიანი სქემით ამოხსენით თბოგამტარობის სასაზღვრო ამოცანები.

6.6. $$\begin{cases} u_K^{n+1} = u_k + \dfrac{\tau \cdot \mu}{h^2}\left(u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n\right), \\ u(0;x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{2}x^2, \ \ 0 \le x \le 1, \\ u(t;0) = \psi_1(t) = t, \ \ \tau = h = 0.2, \ \ \mu = 1, \\ u(t;1) = \dfrac{1}{2} + t, \ \ n = 0,1,...,4; \ \ K = 1,2,..,4 \end{cases}$$

6.7. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ \mu = 1, \ \ \tau = h = 0.2 \\ u_k^0 = \varphi_k = 0.04k^2, \ \ k = 1,2,..,4 \\ u_0^n = \psi_1(t_n) = 0.4n, \ \ n = 0,1,...,4; \\ u_5^n = \psi_2(t_n) = 1 + 0.4n, \ \ n = 0,1,...,4; \end{cases}$$

$$
6.8.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \mu = 2, \ \tau = h = 0.2 \\ u_k^0 = \varphi k = 0.02k^2, \ k = 1,2,..,4 \\ u_0^n = \psi_1(t_n) = 0.4n, \ n = 0,1,...,4; \\ u_5^n = \psi_2(t_n) = \dfrac{1}{2} + 0.4n, \ n = 0,1,...,4; \end{cases}
$$

ნახ. 6.5-ზე აღნიშნული შაბლონით მიღებული სქემის გამოყენებით ამოხსენით დიფუზიის განტოლება შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$
6.9.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \mu = 1, \ \tau = h = 0.2, \ n = 0,1,...,4; \ k = 1,2,..,4 \\ u_k^0 = \varphi(x_k) = 0.02k^2, \ k = 0,1,..,5 \\ u_0^n = \psi_1(t_n) = 0.2n, \ n = 1,2,...,5; \\ u_5^n = \psi_2(t_n) = \dfrac{1}{2} + 0.2n, \ n = 1,2,...,5; \end{cases}
$$

$$
6.10.\quad \begin{cases} u_0^n = \psi_1(t_n) = 0.4n; \\ -ru_{k-1}^{n+1} + (1+2r)u_k^{n+1} - ru_{k+1}^{n+1} = u_5^n \\ u_5^n = \psi_2(t_n) = 0.5 + 0.4n, \ n = 1,2,...,5; \\ \tau = h = 0.2; \ k = 0,1,...,4 \end{cases}
$$

სადაც $r = \dfrac{\tau \cdot \mu}{h^2}$

თავი VII

ზოგიერთი განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მოდიფიცირებული რიცხვითი მეთოდები

§.7.1. განტოლების ნამდვილი ფესვის მოძებნა მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდით

ვიპოვოთ $f(x)=0$, განტოლების ნამდვილი ფესვი $[a;b]$-ში. საინჟინრო ტექნიკური, ფიზიკური და სხვა ამოცანების ამოხსნის დროს ამ ამოცანების შინაარსიდან გამომდინარე უფრო მეტად ცნობილია სასურველი ფესვის შემცველი $[a;b]$ მონაკვეთი.

მონაკვეთის შუაზე გაყოფის უმარტივესი მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: $[a;b]$ მონაკვეთს ვყოფთ შუაზე $c=(a+b)/2$ და ვამოწმებთ $f(a)$, $f(c)$ და $f(b)$-ს ნიშნებს და ამის შემდეგ ვადგენთ $[a;c]$ და $[a;b]$ შუალედებიდან რომელ ნახევარს მიეკუთვნება საძიებელი ფესვი. კერძოდ ფესვია იმ ნახევარ ღერძზე სადაც $f(*)\cdot f(**)<0$. უკანასკნელ ნახევარ ღერძს ისევ ვყოფთ შუაზე და ა.შ. მანამ სანამ არ შესრულდება პირობა

$$\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$$

სადაც n არის ჩატარებულ გაყოფათა რაოდენობა, ხოლო ε-არის სიზუსტის მახასიათებელი მცირე პარამეტრი ან რაც იგივეა დასაშვები ცდომილების ზღვარი, მისი შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში x_* ამონახსნი უნდა განსხვავდებოდეს x^* ზუსტი ამონახსნისაგან არაუმეტეს ε-სიდიდით ე.ი.

$$\left|x^* - x_*\right| \le \varepsilon$$

ან რაც იგივეა, რომ ორ მომდევნო მიახლოებებს შორის გვაქვს:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon$$

შევნიშნოთ, რომ განხილული მიდგომა შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც საძიებელი ფესვის მიმდევრობითი დაზუსტების საშუალება: ყოველ ეტაპზე ფესვის შემცველი სეგმენტის ზომა ორჯერ მცირდება. ცხადია, რომ ეს მეთოდი, შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულ განტოლებას აქვს კენტი ჯერადობის ფესვი.

§.7.2. განტოლების ამოხსნის ნიუტონის მხებთა მეთოდი

გავეცნოთ ნიუტონის მხებთა მეთოდს შემდეგი ინტერპრეტაციით.

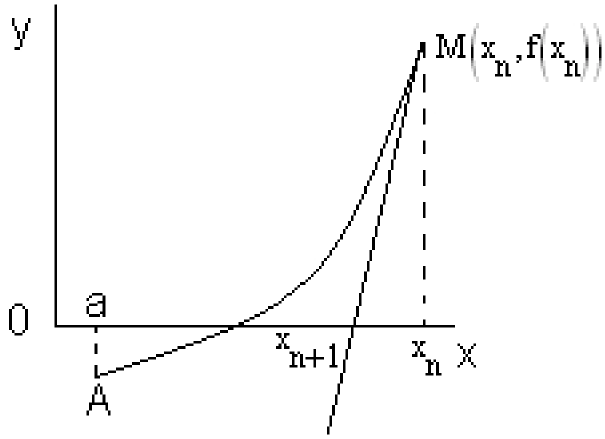
ვთქვათ,

$$f(x) = 0 \qquad (7.1)$$

განტოლების საძიებელი ამონახსნის ერთერთი მიახლოებაა x_n მნიშვნელობა.

$M\left(x_n, f(x_n)\right)$ წერტილზე $f(x)=0$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გამავალი მხების განტოლება იქნება:

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\cdot(x - x_n) \quad (7.2)$$



ნახ. 7.1.

(7.1) განტოლების ფესვის შემდეგ მიახლოებად მივიჩნიოთ (7.2) მხების OX ღერძთან გადაკვეთის x_{n+1} აბცისა, რომელიც მიიღება (7.2) განტოლების ამოხსნით, როცა $y=0$.

ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (7.3)$$

ნახაზი 7.1-დან ჩანს, რომ A წერტილზე გამავალი მხების OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბცისი განტოლების ფესვს დაშორდება.

მტკიცდება, რომ მხებთა მეთოდი გამოიყენება სეგმენტის იმ ბოლოდან, სადაც $f\cdot f''>0$, მაშინ

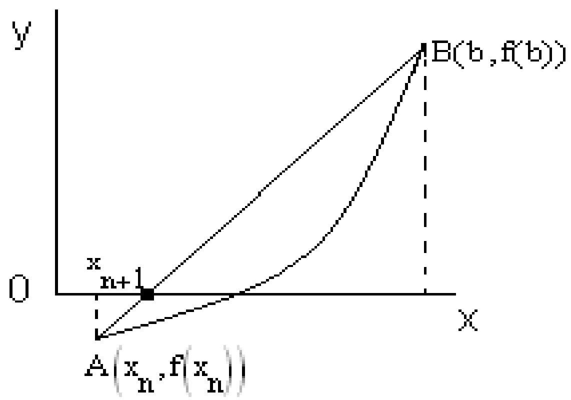
1. (7.3) ფორმულით მიღებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა მონოტონურია და ყველა x_i, $i=1,2,...$ მდებარეობს საძიებელი x^* ფესვის ერთ მხარეს, სადაც $f(x)$ და $f''(x)$ სიდიდეებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ.
2. $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი (7.1) განტოლების ფესვია.

§.7.3. განტოლების ნამდვილი ფესვის მოძებნა ქორდათა მეთოდით

ისევ განვიხილოთ ალგებრული ან ტრანსცენდენტული (7.1) განტოლება.

ვთქვათ, ნაპოვნია ორი ისეთი a და b რიცხვი, რომ $f(a)\cdot f(b)<0$. დავუშვათ, რომ $f(x)$, $f'(x)$ და $f''(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$-ზე და $f'(x)$ და $f''(x)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს.

ამ პირობებში $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს $[a;b]$-სეგმენტზე ექნება ამოზნექილი ან ჩაზნექილი ფორმა. განვიხილოთ, რომელიმე მათგანი ნახ. 7.2.



ნახ. 7.2.

დავწეროთ AB ქორდის განტოლება:

$$\frac{y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{x-x_n}{b-x_n} \qquad (7.4)$$

AB ქორდის OX ღერძთან გადაკვეთის x_{n+1} აბცისა განისაზღვრება (7.4) ტოლობიდან, მასში $y=0$-ის ჩასმით, მივიღებთ:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad (7.5)$$

$$x_1=a\,,\;\; n=1,2,...$$

მტკიცდება, რომ:

1. (7.5) ფორმულით მიღებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა მონოტონურია და ყველა x_i, $i=1,2,...$ მდებარეობს საძიებელი ფესვის ერთ მხარეს, სადაც $f(x)$ და $f''(x)$ სიდიდეებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, ე.ი. $f(x_i)\cdot f''(x_i)<0$

2. $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარია x^*, და ის (7.1) განტოლების ფესვია. ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის ამ მეთოდს ***ქორდათა მეთოდი*** ეწოდება.

§. 7.4. განტოლებათა ამოხსნის იტერაციის მეთოდი

გარდა აღნიშნული მეთოდებისა პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ***მარტივი იტერაციის მეთოდი*** ანუ ***მიმდევრობითი მიახლოების*** მეთოდი (რომლის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ნიუტონის მეთოდი). განტოლება (7.1) ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით.

$$x = \varphi(x)$$

ცხადია, რომ საძიებელი x^* ფესვი ამ უკანასკნელ ტოლობას გადააქცევს იგივეობად:

$$x* = \varphi(x*)$$

მტკიცდება, რომ $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ტოლობით განსაზღვრული $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია (7.1) განტოლების ფესვისაკენ, თუ x^* ფესვის მიდამოში სრულდება შემდეგი პირობა:

$$0 < |\varphi'(x)| < q < 1$$

მაგალითად, თუ ჩავთვლით, რომ

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ამ შემთხვევაში ვღებულობთ ნიუტონის მეთოდს (როგორც მარტივი იტერაციის მეთოდის კერძო შემთხვევას).

პრაქტიკაში ხშირად გამოთვლების ჩატარებისას მიღწეული სიზუსტის შემოწმება ხდება შემდეგი პირობის საფუძველზე:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon ,$$

ამ პირობის შესრულებისთანავე x_{n+1} ჩაითვლება საძიებელი ფესვის მიახლოებად და გამოთვლები დამთავრდება.

§7.5. განტოლების ამოხსნა მოდიფიცირებული დიფერენციალური მეთოდით

განვიხილოთ ისევ (7.1) განტოლება და სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ ის წარმოადგენს ფუნქციონალურ განტოლებას ე.ი. $f(x)=0$

განტოლებაში $x = x(t)$, ხოლო მოცემული ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნის საწყის მიახლოებად მივიღოთ ნებისმიერი $x(0) = x_0$ რიცხვი და განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

$$f(x) = f(x_0)\cdot\left(1-\frac{t}{h}\right) \qquad (7.6)$$

სადაც t წარმოადგენს დამოუკიდებელ პარამეტრს და $0 \le t \le h$.

(7.6) ტოლობიდან ჩანს, რომ როცა $t=0$, $f(x)=f(x_0)$, ე.ი x უდრის შერჩეულ საწყის x_0 მნიშვნელობას, ხოლო, როცა $t=h$, მაშინ $f(x)=0$.

ამგვარად $x = x(h)$ აკმაყოფილებს (7.6) ფუნქციონალურ განტოლებას ან რაც იგივეა (7.1) განტოლებას.

ამდენად ვასკვნით, რომ როცა t იცვლება 0-დან h-მდე, x იცვლება x_0 საწყისი მნიშვნელობიდან იმ უახლოეს $x(h)$ მნიშვნელობამდე, რომელიც წარმოადგენს (7.1) განტოლების ერთერთ ამონახსნს. შემდეგ შევცვლით, რა x_0-ს მივუახლოვდებით მეორე ამონახსნს და ა.შ.

გავაწარმოოთ (7.6) ტოლობა t პარამეტრით, მივიღებთ:

$$f'_x(x) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-f(x_0)}{h} \tag{7.7}$$

ამ უკანასკნელიდან მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{f(x_0)}{hf'_x(x)} = \Phi(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{7.8}$$

ამგვარად მივიღეთ კოშის ამოცანა.

შევნიშნოთ, რომ (7.8) დიფერენციალური განტოლებისათვის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობა $(h, x(h))$ წერტილის მიდამოში იქნება $\left|f_x(x)\right| \geq q > 0$ კოშის თეორემა. რაც ნიშნავს იმას, რომ $f(x) = 0$ განტოლებას არა აქვს ლუწი ჯერადობის ფესვი.

(7.8) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შესაძლებელია მივიღოთ სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდებით, განვიხილოთ რამოდენიმე შემთხვევა:

I. **შემთხვევა:** ჩავთვალოთ ნებისმიერი x_n რიცხვი ფესვის საწყის მიახლოებად, ამასთან განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ეილერის მეთოდი და წარმოებული შევცვალოთ სხვაობიანი სქემით.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

თუ წარმოებულის აპროქსიმაციის h ბიჯს დავამთხვევთ (7.8)-ში შემავალ h-ს მივიღებთ ნიუტონის სქემას, კერძოდ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n)} \tag{7.9}$$

$$n = 0,1,2,...$$

II **შემთხვევა:** ახლა (7.8) დიფერენციალური განტოლება ამოვხსნათ ეილერ-კოშის გადათვლის მეთოდით (PC-მეთოდი) ან რაც იგივეა რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის მეთოდი, მივიღებთ შემდეგ ალგორითმს:

$$C1 = -\frac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n)}, \ C2 = -\frac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n + C1)} \tag{7.10}$$

$$x_{n+1} = x_n + 0.5 \cdot (C1 + C2)$$

$$n = 0,1,2,...$$

III. **შემთხვევა.** თუ (7.8) განტოლებას ამოვხსნით რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით, მივიღებთ შემდეგ მოდელს:

$$
\begin{cases}
K1 = -\dfrac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n)} \\
K2 = -\dfrac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n + \dfrac{K1}{2})} \\
K3 = -\dfrac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n + \dfrac{K2}{2})} \\
K4 = -\dfrac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n + K3)} \\
x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{6}\left(K1 + 2K2 + 2K3 + K4\right) \\
n = 0,1,2,...
\end{cases}
\tag{7.11}
$$

თუ (7.9), (7.10) და (7.11) ხერხებით მიღებულ x_1 მნიშვნელობებს მივიჩნევთ საწყის მნიშვნელობად და პროცესს გავიმეორებთ მივიღებთ x_2-ს და ა.შ. x_1, x_2, ... მიმდევრობის წევრები ქმნიან $x(h)$ ამონახსნისაკენ კრებად მიმდევრობებს.

სამივე შემთხვევაში განხილული სქემები წარმოადგენენ იტერაციულ მეთოდებს გარკვეული მოდიფიკაციით.

უნდა შევნიშნოთ, რომ III-შემთხვევაში განხილული სქემა უფრო სწრაფად კრებადია ვიდრე მეორე ხოლო მეორე სქემა სწრაფია პირველზე. ცხადია, გამოთვლები დამთავრდება მაშინ, როცა

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$$

როგორც ვნახეთ განტოლების ამოხსნის x_0 მიახლოებიდან $x(h)$ მიახლოებაზე გადასასვლელად

ზემოთ მოყვანილი დიფერენციალური მეთოდის საფუძველზე, მივიღეთ შესაბამისი მარტივად რეალიზებადი იტერაციული სქემები.

განვიხილოთ კონკრეტული განტოლება და ამოვხსნათ ის ზემოთ მოყვანილი მეთოდებით:

მაგალითი 7.1: ამოვხსნათ განტოლება:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x-18=0$$

ამოხსნა: პირველ რიგში მოცემული განტოლება ჩავწეროთ დიფერენციალური ფორმით:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{f(x_n)}{f_x^{'}(x_n)} \\ x_2=2 \\ n=0,1,2,... \end{cases}$$

I **შემთხვევა:** (7.9) სქემით მივიღებთ:

$x_1 \approx 2+1.3333334=3.3333334$

$x_2 \approx 3.3333334-0.3079615=3.0253719$

$x_3 \approx 3.0253719-0.025212=3.0001599$

$x_4 \approx 3.0001599-0.0001598=3.0000001$

განტოლების ზუსტი ამონახსნია $x=3$.

II **შემთხვევა**. (7.10) მოდელით მივიღებთ:

I იტერაცია $\begin{cases} C1=1.3333334, C2=0.661417 \\ x_1 \approx 2+0.9973753=2.9973753 \end{cases}$

II იტერაცია

$$\begin{cases} C1=0.0026265, C2=0.005246 \\ x_2 \approx 2.9973753+0.5(0.0026265+0.002623)=3 \end{cases}$$

მაშასადამე, (7.10) მეთოდით მეორე იტერაციით მივიღეთ კარგი მიახლოება.

III **შემთხვევა**

I იტერაცია $\begin{cases} K1 = 1.3333334, K2 = 0.9230769 \\ K3 = 1.0302635, K4 = 0.7661265 \\ x_1 = 3.0010234 \end{cases}$

II იტერაცია $\begin{cases} K1 = -0.0010231, K2 = -0.0010228 \\ K3 = -0.0010228, K4 = -0.00010236 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

შევნიშნოთ, რომ განხილული სამივე იტერაციული პროცესი კრებადია ნებისმიერი საწყისი x_0-სათვის.

§.7.6. არაწრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მოდიფიცირებული რიცხვითი მეთოდები

არაწრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გამოთვლითი მეთოდების განხილვისას ჩვენ, ძირითადად, გავყვებით გეგმას, რომელიც რეალიზებული იყო წინა პარაგრაფში, სადაც განვიხილეთ არაწრფივი განტოლების ფესვების პოვნის საკითხი.

ამგვარად, განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1; x_2; ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

ან ვექტორული ფორმით

$$F(X)=0 \qquad (7.13)$$

სადაც $X-t$ ფორმალურ პარამეტრზე დამოკიდებული უცნობ სიდიდეთა ვექტორია, $F(X)$ - ვექტორ-ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის განტოლებათა სტრუქტურას:

$$X=X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots\cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F(X)=\begin{pmatrix} f_1(x_1;x_2;...,x_n)=0 \\ f_2(x_1;x_2;...,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1;x_2;...,x_n)=0 \end{pmatrix}$$

ჩავთვალოთ, რომ მოცემულ (7.12) სისტემას გააჩნია ერთი ამონახსნი მაინც, ისევე როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, ფიზიკურ მოსაზრებებზე დაყრდნობით ან სხვა მოსაზრებით. ნულოვან მიახლოებად მივიღოთ რაიმე $X_0=X(0)$ და (7.13) სისტემა ცავწეროთ შემდეგი პარამეტრული ფორმით:

$$F(X)=F(X_0)\cdot\left(1-\frac{t}{h}\right) \qquad (7.14)$$

სადაც t როგორც ადრე წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს, $0\le t\le h$. ცხადია, რომ როცა $t=0$, F(x)=F(x₀) , სადაც X_0 საწყისი მიახლოებაა, ხოლო როცა $t=h$, მაშინ $F(X(h))=0$, ანუ $X=X(h)$ მოცემული სისტემის ამონახსნია. ამდენად აქაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ როცა t იცვლება 0-დან h-მდე, X იცვლება X_0 ნებისმიერი საწყისი მიალოებიდან $X(h)$ მიახლოებამდე, რომელიც წარმოადგენს სისტემის ერთერთ ამონახსნს.

(7.14)-ის t-თი დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=-\frac{1}{h}f_1(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=-\frac{1}{h}f_2(0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=-\frac{1}{h}f_n(0) \end{cases} \qquad (7.15)$$

სადაც

$$f_i(0)=f_i\left(x_1(0);x_2(0);\ldots;x_n(0);\right) \qquad i=1,2,\ldots,n\,.$$

(7.15) სისტემის შესაბამისი მატრიცი წარმოადგენს იაკობის მატრიცს თუ (7.15) სისტემას ამოვხსნით $\frac{dx}{dt}$-ს მიმართ, მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=-\frac{1}{h}\left[F_X\left(X\right)\right]^{-1}\cdot F(X_0) \qquad (7.16)$$

სადაც $\left[F_X\left(X\right)\right]^{-1}$ არის იაკობის მატრიცის შებრუნებული მატრიცი.

თვალსაჩინეობის თვალსაზრისით განვიხილოთ ორუცნობიანი ორი განტოლებათა სისტემა და მივიყვანოთ ის ცხადი სახით (7.16) სისტემაზე.

ვთქვათ, გვაქვს სისტემა:

$$\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases} \qquad (7.17)$$

სადაც, როგორც აღვნიშნეთ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le h$. საწყის მიახლოებად აქ ავიღოთ $M_n = M_n\left(x_n; y_n\right)$, n=0,1,2,... წერტილი და (7.17) ჩავწეროთ შემდეგი პარამეტრული ფორმით:

$$\begin{cases} f(x(t); y(t)) = f(M_n)\left(1 - \dfrac{t}{h}\right) \\ g(x(t); y(t)) = g(M_n)\left(1 - \dfrac{t}{h}\right) \end{cases} \tag{7.18}$$

ამ სისტემის გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{h} f(M_n) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{h} g(M_n) \end{cases} \tag{7.19}$$

თუ (7.19) სისტემიდან განვსაზღვრავთ $\dfrac{dx}{dt}$ და $\dfrac{dy}{dt}$-ს მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{h}\dfrac{g(M_n) f_y'(M) - f(M_n) g_y'(M)}{f_X'(M) g_y'(M) - f_y'(M) g_X'(M)} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{h}\dfrac{f(M_n) g_X'(M) - g(M_n) f_X'(M)}{f_X'(M) g_y'(M) - f_y'(M) g_X'(M)} \end{cases} \tag{7.20}$$

სადაც $M = M(x; y)$

(7.17) სისტემის ნაცვლად ჩვენ მივიღეთ (7.20) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. აქ ჩვენ განვიხილავთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის იმ გამოთვლით მეთოდებს, რომელიც მარტივია რიცხვითი რეალიზაციის თვალსაზრისით. ცხადია, ის რაც მიღებული იქნება (7.20) სისტემისათვის ადვილად

გადაიტანება უფრო მაღალი რიგის სისტემებისათვის. განვიხილოთ ამოხსნის შემდეგი შემთხვევები.

I **შემთხვევა**. თუ (7.20) სისტემაში $\frac{dx}{dt}$ და $\frac{dy}{dt}$ წარმოებულებს შევცლით სასრული სხვაობებით, მივიღებთ ნიუტონის განრფივების მეთოდს, ჩავწეროთ აღნიშნული ფაქტი სათვლელი ფორმულების სახით, გვექნება შემდეგი ალგორითმი:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{g(M_n)f_y^{'}(M) - f(M_n)g_y^{'}(M)}{f_X^{'}(M)g_y^{'}(M) - f_y^{'}(M)g_X^{'}(M)} \\ y_{n+1} = y_n \dfrac{f(M_n)g_X^{'}(M) - g(M_n)f_X^{'}(M)}{f_X^{'}(M)g_y^{'}(M) - f_y^{'}(M)g_X^{'}(M)} \end{cases} \qquad (7.21)$$

$n = 0,1,2,...,$ $M_0 = M_0(x_0; y_0)$ ნებისმიერი საწყისი წერტილია.

II **შემთხვევა**. (7.21) ტოლობის მარჯვენა მხარეში წილადები შევცვალოთ შესაბამისად $F(x_n; y_n)$ და $G(x_n; y_n)$ -ით, მაშინ (7.20) სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{h}F(x; y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{h}G(x; y) \end{cases} \qquad (7.22)$$

ამოვხსნათ (7.22) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ეილერ-კოშის (PC) გადათვლის მეთოდით ან რაც იგივეა რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის მეთოდით და გამოთვლის ალგორითმი ჩავწეროთ ცხადი სახით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} C_1 = F(x_n, y_n), \quad P_1 = G(x_n, y_n) \\ C_2 = F(x_n + C_1, y_n + P_1), \quad P_2 = G(x_n + C_1, y_n + P_1) \\ x_{n+1} = x_n + 0.5 \cdot (C_1 + C_2), \quad y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot (P_1 + P_2) \\ n = 0,1,2,... \end{cases}, \qquad (7.23)$$

III **შემთხვევა.** ამოვხსნათ (7.22) სისტემა რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით და ალგორითმი ჩავწეროთ ცხადი სახით:

$$\begin{cases} P_1 = F(x_n, y_n), \ l_1 = G(x_n, y_n) \\ P_2 = F(x_n + \frac{P_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}), \ l_2 = G(x_n + \frac{P_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}) \\ P_3 = F(x_n + \frac{P_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}), \ l_2 = G(x_n + \frac{P_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}) \\ P_4 = F(x_n + P_3, y_n + l_3), \ l_1 = G(x_n + P, y_n + l_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} \cdot \left(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot \left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right) \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ამგვარად, (7.17) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის (7.22) პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე დაყვანის შემდეგ, ცხადია უნდა ვისარგებლოთ დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის (7.21), (7.23) ან (7.24) ალგორითმებით. შევნიშნოთ, რომ (7.21) ალგორითმი ნელა კრებადია, მაგრამ თანაემდროვე კომპიუტერიზაციის პირობებში არც ერთი ალგორითმის რეალიზაცია არ წარმოადგენს სირთულეს. თვალსაჩინოების თვალსაზრისით განვიხილოთ კონკრეტული არაწრფივ განტოლებათა

სისტემა და ამოვხსნათ იგი სამივე განხილული გზით, ერთი და იგივე საწყისი პირობით.

მაგალითი 7.2. ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y = -1 \end{cases}$$

ამოხსნა. საწყისი პირობა იყოს შემდეგი $x(0) = x_0 = -1$, $y(0) = y_0 = 3$ ან $M_0(-1;3)$, რადგან $f(M_0) = -19$ და $g(M_0) = -1$, ამ პირობების გათვალისწინებით ამოსახსნელი სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} f(x;y) = x^2 + y^2 - 29 = -19\left(1 - \dfrac{t}{h}\right) \\ g(x;y) = x^2 - y + 1 = -1\left(1 - \dfrac{t}{h}\right) \end{cases}$$

t პარამეტრით გაწარმოება, გვაძლევს

$$\begin{cases} 2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{19}{h} \\ 2x\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{h} \end{cases}$$

თუ უკანასკნელი სისტემიდან განვსაზღვრავთ $\dfrac{dx}{dt}$ და $\dfrac{dy}{dt}$-ს მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{19+2y}{2h(1+2y)x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{18}{h(1+2y)} \end{cases}$$

თუ ვისარგებლებთ (7.21) სისტემის ამოხსნის ალგორითმით და აქ ყველგან გავითვალისწინებთ, რომ ინტეგრების h ბიჯი ემთხვევა მოდიფიცირებულ სისტემაში შემავალ h-ს მივიღებთ:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 1.7857142 = -2.7857142 \\ y_1 = 3 + 2.5714285 = 5.5714285 \end{cases}$$

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი მიახლოება

$M_1(-2.7857142; 5.5714285)$

$f(M_1) = 9.801018$

$g(M_1) = 3.1887751$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{9.801018 - 6 \cdot 3775502 \cdot y}{2xh(1+2y)} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{6.6123049}{h(1+2y)} \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} x_2 = -2.7857142 + 0.3803382 = -2.405376 \\ y_2 = 5.5714285 - 0.5445427 = 5.0268858 \end{cases}$$

მეორე ეტაპზე მივიღეთ შემდეგი მიახლოება

$M_2(-2.405376; 5.0268858)$

შემდეგ ეტაპზე გვექნება:

$f\left(M_2\right)=2.055413$ და $g\left(M_2\right)=1.7589482$

შემდეგ ეტაპზე გვაქვს

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2.055413+3.5178964\cdot y}{2hx\left(1+2y\right)} \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{0.2964648}{h\left(1+2y\right)} \end{cases}$$

$x_3=-2.0341725$ და $y_3=5.0000656$

ამგვარად $M_3\left(-2.0341725;5.0000656\right)$

ანალოგიურად შემდეგ მეოთხე ეტაპზე მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{0.138513+0.2755842\cdot y}{2hx\left(1+2y\right)} \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{0.0007209}{h\left(1+2y\right)} \end{cases}$$

საიდანაც $x_4=-2.0002871$, $y_4=5.0000001$

$M_4\left(-2.0002871;\ 5.0000001\right)$

განხილული სისტემის ერთ-ერთი ზუსტი ამონახსნია

$x=-2$ და $y=5$

ახლა იგივე სისტემა ამოვხსნათ II შემთხვევაში მოყვანილი მოდიფიცირებული PC მეთოდით.

ვისარგებლოთ (7.23) ალგორითმით:

გვაქვს შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{19+2y}{2x(1+2y)h} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{18}{(1+2y)h} \\ M_0 = (-1;3) \end{cases}$$

$C_1 = \dfrac{19+6}{-2(1+6)} = -1.7857142;\ P_1 = \dfrac{18}{7} = 2.5714285$

$C_2 = \dfrac{19+11.142857}{-5.5714284 \cdot 12.142857} = 0.445505;\ P_1 = \dfrac{18}{12.142857} = 1.4823529$

$x_1 = -1 + \dfrac{1}{2}(-1.7857142 - 0.445505) = -2.1156096$

$y_1 = 3 + \dfrac{1}{2}(2.5714285 + 1.4823529) = 5.0268907$

$M_1(-2.1156096;\ 5.0268907)$

შემდეგი ეტაპი:

$f(M_1) = 4.4758039 + 25.26963 - 29 = 0.745433$

$g(M_1) = 4.4758039 - 5.0268907 + 1 = 0.4489132$

ამის საფუძველზე მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{0.745433 + 0.8978264 \cdot y}{2x(1+2y)h} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{0.2965198}{(1+2y)h} \\ M_1(-2.1156096;\ 5.0268907) \end{cases}$$

$$C_1=\frac{0.745433+0.4489132\cdot 10.053781}{4.2312192\cdot 11.053781}=0.1124352;\; P_1=-\frac{0.2965198}{11.053781}=-0.026825$$
$$C_2=\frac{0.745433+0.4489132\cdot 10.053781}{4.2312192\cdot 11.053781}=0.1187784;\; P_2=\frac{0.2965198}{11.000131}=-0.026956$$
$$x_2=-2.1156096+\frac{1}{2}\left(0.1124352+0.1187787\right)=-2.0000027,$$
$$y_2=5.0368907+\frac{1}{2}\left(-0.026825-0.026956\right)=5.0000065,$$
$$M_2\left(-2.0000027;\; 5.0000065\right)$$

მაშინ, როცა მოცემული სისტემის ზუსტი ამონახსნია

M(-2, 5)

ამოვხსნათ მოცემული სისტემა რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით, ამისათვის ვისარგებლოთ (7.24) ალგორითმით, მივიღებთ:

$$P_1=-1.7857142;\; l_1=2.571425;$$
$$P_2=\frac{19+8.5714284}{-3.7857142\cdot 9.5714284}=-0.7609124;\; l_2=\frac{18}{9.5714284}=1.880597;$$
$$P_3=\frac{19+7.880597}{-2.7609124\cdot 8.880597}=-1.0963371;\; l_3=\frac{18}{8.880597}=2.0268907;$$
$$P_4=\frac{19+10.053781}{-4\cdot 1926742\cdot 11.053781}=-0.6269034;\; l_4=\frac{18}{11.053781}=1.628402;$$
$$x_1=-1-\frac{1}{6}\left(1.7857142+1.5218248+2.1926742+0.6269034\right)=-2.0211861,$$
$$y_1=3+\frac{1}{6}\left(2.5714285+3.761194+4.0537814+1.628402\right)=5.0024675$$

ამ ეტაპზე ჩვენ მივიღეთ შემდეგი მიახლოება:

$$M_1\left(-2.0211861;\; 5.0024675\right)$$

$$f\left(M_1\right)=4.0851932+25.024681-29=0.109874$$
$$g\left(M_1\right)=4.0851932-5.0024675+1=0.0827257$$

შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა მიიღევს სახეს:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{0.109874+0.1654514\cdot y}{2x\left(1+2y\right)h}\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{0.0271483}{\left(1+2y\right)h}\\ M_1\left(-2.0211961;\ 5.0024675\right)\end{cases}$$

$$P_1=\frac{0.9375392}{4.0423722\cdot 11.004935}=0.0210749;\ l_1=-\frac{0.0271483}{11.004935}=-0.0024669;$$
$$P_2=\frac{0.937335}{4.0212974\cdot 11.002468}=0.0211854;\ l_2=\frac{0.0271483}{11.002468}=-0.0024674;$$
$$P_3=\frac{0.97131}{4.0211868\cdot 11.0000002}=0.0211862;\ l_3=-\frac{0.0271483}{11.0000008}=-0.0211862;$$
$$P_4=\frac{0.9371309}{43.999993}=0.021298;\ l_4=-\frac{0.0271483}{10.999999}=-0.002468;$$
$$x_2=-2.0211861+\frac{1}{6}\left(0.0210749+0.0423708+0.0423724+0.021298\right)=-2.0000001,$$
$$y_2=5.0024675-\frac{1}{6}\left(0.0024669+0.0049348+0.004936+0.002468\right)=5.000000$$

მაშასადამე, მძიმიდან შვიდი ნიშნის სიზუსტით გვაქვს:

$$M_2\left(-2.0000001;\ 5.0000000\right).$$

§7.7. ფრედგოლმის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები

ფიზიკის, გეოფიზიკის, ტექნიკური და სხვა მრავალი ამოცანების ამოხსნის დროს, ხშირად გვხვდება განტოლებები, რომლებიც საძიებელ ფუნქციას შეიცავენ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ასეთ განტოლებებს ინტეგრალური განტოლებები ეწოდებათ.

ჩვენ ძირითადად შემოვიფარგლებით ფრედგოლმისა და ვოლტერას ტიპის განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებით.

ფრედგოლმის პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\lambda\int_a^b K(t;\tau)\,U(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (7.25)$$

ხოლო ფრედგოლმის მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(t)+\lambda\int_a^b K(t;\tau)\,U(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (7.26)$$

ვოლტერას პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$\lambda\int_a^t K(t;\tau)\,U(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (7.27)$$

$$U(t)+\lambda\int_a^t K(t;\tau)\,U(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (7.28)$$

სადაც $f(t)$ და $K(t;\tau)$ - მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $U(t)$ - საძიებელი ფუნქციაა და λ - პარამეტრია.

I. ფრედგოლმის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა კვადრატურული მეთოდით.

$[a;b]$ ინტერვალი $t_1, t_2, ..., t_n$, წერტილებით დავყოთ n ტოლ ნაწილად.

(7.25) ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებაში ჩავსვათ $t = t_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, მაშინ გვექნება:

$$U(t_1) = \lambda \int_a^b K(t_i, \tau)\ U(\tau)\ d\tau = f(t) \qquad (7.29)$$

$$i = 1, 2, ..., n$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ რომელიმე კვადრატული ფორმულა, ვთქვათ,

$$\int_a^b F(t)dt = \sum_{j=1}^{n} A_j F\left(t_j\right) + R \qquad (7.30)$$

A_1, A_2, ..., A_n კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული F-ის შერჩევაზე, სადაც R გამოყენებული ფორმულის შესაბამისი ცდომილებაა.

(7.29) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი შევცვალოთ (7.30) კვადრატურული ფორმულით, მივიღებთ:

$$U_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} U_j = f_i\ , \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (7.31)$$

სადაც $U_i = U\left(t_i\right)$; $f\left(t_i\right) = f_i$ და $K\left(t_i; t_j\right) = K_{ij}$

(7.31) წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას U_i, $i = 1, 2, ..., n$ საძიებელი $U\left(t\right)$ ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობების მიმართ.

ამგვარად (7.31) სისტემის ამონახსნი, წარმოადგენს $U\left(t\right)$ საძიებელი ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობას.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 7.3. ამოვხსნათ ფრედგოლმის მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება სიმპსონის კვადრატურული ფორმულით:

$$U(t) + \int_0^1 t\left(e^{\tau} - 1\right)\cdot U(\tau)\, d\tau = 2\cdot e^{t} - 2\cdot t$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი. ამისათვის, $[0,1]$ სეგმენტის შუალედურ წერტილებად მივიღოთ $t_1 = 0$, $t_2 = 0.5$ და $t_3 = 1$, ამ მნიშვნელობებისათვის, მივიღებთ:

$$U_1 = 2$$

$$U_2 + \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\left(e^{0.5\cdot\tau} - 1\right) U(\tau)\, d\tau = 2\cdot e^{0.5} - 1$$

$$U_3 + \int_0^1 \left(e^{\tau} - 1\right) U(\tau)\, d\tau = 2\cdot(e - 1)$$

თუ ყოველი ინტეგრალს შევცვლით სიმპსონის პარაბოლური ფორმულით:

$$\int_0^1 \frac{1}{2} f(\tau)\, d\tau \approx \frac{1}{6}\left[f(0) + 4 f(0.5) + f(1)\right],$$

მივიღებთ:

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_2 + \frac{1}{6}\left[0 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(l^{0.25} - 1\right)\ U_2 + \frac{1}{2}\left(l^{0.5} - 1\right)U_3\right] = 2l^{0.5} - 1 \\ U_3 + \frac{1}{6}\left[0 + 4 \cdot \left(l^{0.5} - 1\right)\ U_2 + \left(l - 1\right)U_3\right] = 2(l - 1) \end{cases}$$

ანუ

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ 1.0947U_2 + 0.0541U_3 = 2.2974 \\ 0.4325U_2 + 1.2864U_3 = 3.4366 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$U_1 = 2\ ,\ U_2 = 1.9999\ ;\ U_3 = 1.9992\ .$$

განხილული ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $U(t) = 2$. როგორც ჩანს მიღებული შედეგი საკმარისად კარგია.

II. ფრედგოლმის განტოლების ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით

(7.26) ფრედგოლმის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მიზნით, გამოიყენება მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში.

(7.26) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი (λ-ს მიმართ) ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$U(t) = \varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots \qquad (7.32)$$

(7.32) ჩავსვათ (7.26) განტოლებაში და λ-ს ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = f(t) \\ \varphi_1(t) = -\int_a^b \varphi_0(\tau)K(t;\tau)d\tau \\ \varphi_2(t) = -\int_a^b \varphi_1(\tau)K(t;\tau)d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(t) = -\int_a^b \varphi_{n-1}(\tau)K(t;\tau)d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (7.33)$$

მაგალითი 7.4. ამოვხსნათ შემდეგი ინტეგრალური განტოლება

$$U(t) + \int_0^1 t\cdot\tau\, U(\tau)\,d\tau = 14l + 12$$

ამოხსნა: (7.33) მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებით გვექნება

$$
\begin{cases}
\varphi_0(t) = 14t + 12 \\
\varphi_1(t) = -\int_0^1 t(14\tau^2 + 12\tau)d\tau = -\dfrac{32}{3}t \\
\varphi_2(t) = -\int_0^1 t(-\dfrac{32}{3}\tau^2)d\tau = \dfrac{32}{9}t \\
\varphi_3(t) = -\dfrac{32}{9}t\int_0^1 \tau^2 d\tau = -\dfrac{32}{27}t \\
\varphi_4(t) = \dfrac{32}{27}t\int_0^1 \tau^2 d\tau = \dfrac{32}{81}t \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
U(t) = 14t + 12 - \dfrac{32}{3}t + \dfrac{32}{9}t - \dfrac{32}{27}t + \dfrac{32}{81}t - \ldots - = 14t + 12 - \dfrac{32}{3}t\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots\right) = \\
= 14t + 12 - \dfrac{32}{3}t \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}} = 14t + 12 - 8t = 6t + 12
\end{cases}
$$

ე.ი. $U(t) = 6t + 12$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს მოცემული ინტეგრალური განტოლების ზუსტ ამონახსნს.

იმ შემთხვევაში, როცა განტოლებაში შემავალი ინტეგრალი ზუსტად არ გამოითვლება ან მარჯვენა მხარე $f(t)$ მოცემულია ცხრილის სახით, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ ინტეგრალის გამოსათვლელი რომელიმე კვადრატურული ფორმულა და შემდეგ ამოვხსნათ საძიებელი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობებისათვის მიღებული წრფივ განტოლებათა სისტემა, როგორც ეს გავაკეთეთ მაგალით 7.3-ში.

შევნიშნოთ, რომ ფრედგოლმის პირველი გვარის (7.25) განტოლების ამოსახსნელად (7.31) სისტემის ნაცვლად გვექნება შემდეგი სისტემა:

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} U_j = f_i \ , \ i = 1, 2, \dots, n \qquad (7.34)$$

თუ (7.34) სისტემაში შემავალ ინტეგრალურ ჯამს შევცვლით მართკუთხედების ფორმულით, მაშინ

$$t_1 = a,\ t_2 = a + h,\ \dots,\ t_n = a + (n-1)h = b;$$

$$A_1 = A_2 = \cdots A_n = h = \frac{b-a}{n-1};$$

ტრაპეციის ფორმულის გამოყენებისას გვექნება:

$$t_i = a + ih,\ i = 0, 1, \cdots, n-1;$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2};\ A_2 = A_3 = \cdots A_{n-1} = h;$$

ხოლო ინტეგრების სიმპსონის ფორმულისათვის, $n = 2m + 1$

$$t_1 = a,\ t_2 = a + h,\ \dots,\ t_{2m+1} = 2mh = b,\ h = \frac{b-a}{2m};$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{2};\ A_2 = A_4 = \cdots = A_{2m} = \frac{4h}{3};$$

$$A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}$$

§7.8. ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები

1. ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ თუ ინტეგრალური განტოლების $K(t;\tau)$ გული უწყვეტია $R\{a \le \tau \le t \le b\}$ არეში, და $f(t)$

უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ (7.28) ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი უწყვეტი $u(t)$ ამონახსნი ნებისმიერი λ-სათვის. ეს ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$U(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i(t) \qquad (7.35)$$

(7.35) შევიტანოთ ვოლტერას შემდეგ მეორე გვარის განტოლებაში

$$U(t)-\lambda\int_a^t K(t;\tau)U(t)dt = f(t) \qquad (7.36)$$

და გავუტოლოთ ერთმანეთს λ-ს ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები, მივიღებთ:

$$\varphi_0(t)=f(t),\ \varphi_{i+1}(t)=\int_a^t K(t;\tau)\varphi_i(\tau)d\tau \qquad (7.37)$$
$$i=0,1,2,...$$

ამ მეთოდს მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი ეწოდება.

მაგალითი 7.5. მიმდევრობითი მიახლოების (7.37) მეთოდით ამოვხსნათ ვოლტერას მეორე გვარის შემდეგი ინტეგრალური განტოლება:

$$U(t)-\lambda\int_0^t e^{-(t+\tau)}U(\tau)d\tau=1-e^{-1}+e^{-2t}$$

ამოხსნა: ამ განტოლებიდან $u(0)=1$ და (7.37) ალგორითმით მივიღებთ:

$$\varphi_0(t)=1-e^{-t}+e^{2t}$$

$$\varphi_1(t)=\frac{5}{6}e^{-t}+e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$\varphi_2(t)=\frac{17}{120}e^{-t}-\frac{5}{12}e^{-3t}+\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{1}{8}e^{-5t}+\frac{1}{15}e^{-6t}$$

$$\varphi_3(t)=0.0215e^{-t}-0.0708e^{-3t}+0.1042e^{-5t}-0.0667e^{-6t}+0.0208e^{-7t}-0.0095e^{-8t}$$

$$\varphi_4(t)=-0.0017e^{-t}-0.0108e^{-3t}+0.0177e^{-5t}-0.0124e^{-7t}+0.0095e^{-8t}-0.0034e^{-9t}+0.0011e^{-10t}$$

$$U(t)\approx\varphi_0(t)+\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)+\varphi_4(t)\approx 1-0052e^{-t}+0.0017e^{-3t}-$$

$$-0.0031e^{-5t}+0.0084e^{-7t}-0.0034e^{-9t}+0.0011e^{-10t}$$

$U(0)\approx 0.9995,$, ხოლო $U(1)\approx 0.9982,$

თავიდან განხილული ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $U(t)\equiv 1$. როგორც ჩანს გვაქვს საკმარისად კარგი მიახლოება.

ახლა განვიხილოთ ვოლტეას პირველი გვარის (7.27) განტოლება, იმ შემთხვევაში როცა $K(t;t)\neq 0$ და $f(t)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ ის დაიყვანება ვოლტერას მეორე გვარის განტოლებაზე, ამისათვის (7.27) გავაწარმოოთ t პარამეტრით, მივიღებთ

$$\lambda K(t;t)U(t)+\lambda\int_a^t K_t'(t;\tau)U(\tau)d\tau = f'(t)$$

საიდანაც, მივიღებთ ვოლტერას მეორე გვარის შემდეგ განტოლებას:

$$U(t)+\frac{1}{K(t;t)}\int_a^t K_t'(t;\tau)U(\tau)=\frac{f'(t)}{\lambda K(t;t)}$$

§7.9. ვოლტერას განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის კიდევ ერთი მეთოდი (თ. ვეკუას მეთოდი)

განვიხილოთ ვოლტერას ტიპის შემდეგი განტოლება

$$\alpha \cdot U(t)+\int_a^t K''_{\tau\tau}(t;\tau)d(\tau)=f(t) \qquad (7.38)$$

როცა პარამეტრი $\alpha=1$, მივიღებთ ვოლტერას მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას, ხოლო, როცა $\alpha=0$, გვექნება ვოლტერას პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება, (7.38) განტოლების ამონახსნს, ჩვენ ვეძებთ $t\in[a,b]$ სეგმენტზე, ვთქვათ, $h=\dfrac{b-a}{n}$; $t_i=a+ih$, $i=0,1,...,n$, ცხადია, რომ

$$\alpha \cdot U(t_i)+\int_a^{t_i} K''_{\tau\tau}(t;\tau)U(t)d(\tau)=f(t_i)$$

ცხადია, $\alpha\cdot U_0=f_0=f(a)$ და მაშინ, როცა $\alpha=0$ პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების შემთხვევაში ვიგულისხმოთ, რომ $f(t_0)=f_0=f(a)$, ხოლო მეორე გვარის განტოლებისათვის $\alpha=1$ და $U_0=U(t_0)=f_0=f(a)$.

ამ პირობებში მოცემული განტოლება ჩავწეროთ ასე:

$$\alpha\cdot U_i+\sum_{j=0}^{i-1}\int_j^{t_{j+1}} K''_{\tau\tau}(t_i;\tau)U(\tau)d(\tau)=f_i \qquad (7.39)$$

სადაც $U(t_i)=U_i$ და $f(t_i)=f_i$, $f(a)=f_0$.

ყოველ $[t_j,t_{j+1}]$ ლოკალურ შუალედზე საძიებელი $U(t)$ ფუნქცია შევცვალოთ წრფის მონაკვეთით:

$$U(\tau) = U_j + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}\cdot\left(\tau - t_j\right)$$

და ნაწილობითი ინტეგრებით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} K''_{\tau\tau}\left(t_i;\tau\right)\cdot\left[U_j + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}\left(\tau - t_j\right)\right]d\tau =$$

$$= \left[U_j + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}\left(\tau - t_j\right)\right]K'_\tau\left(t_i;\tau\right)\Bigg|_{t_j}^{t_{j+1}} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{U_{j+1} - U_j}{h}\cdot K'_\tau\left(t_i;\tau\right)d\tau =$$

$$= U_{j+1}K'_\tau\left(t_i;t_{j+1}\right) - U_jK'_\tau\left(t_i;t_j\right) - -\frac{U_{j+1} - U_j}{h}\left[K\left(t_i;t_{j+1}\right) - K\left(t_i;t_j\right)\right]$$

აჯამვით (7.39)-დან მივიღებთ:

$$\alpha\cdot U_i + \frac{1}{h}\cdot\left[K\left(t_i,t_{i-1}\right) - K\left(t_i,t_i\right) + h\cdot K_\tau\left(t_i,t_i\right)\right]\cdot U_i +$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left(K\left(t_i,t_{j-1}\right) - 2\cdot K\left(t_i,tj\right) + K\left(t_i,t_{j+1}\right)\right)\cdot U_j = f_i$$

უკანასკნელი ტოლობიდან, მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას

$$U_i = \frac{hf_i}{\beta_i\left(\alpha_i;h\right)} - \frac{1}{\beta(\alpha,h)}\sum_{j=1}^{i-1}\left[K\left(t_i;t_{j+1}\right) - 2K\left(t_i;t_j\right) + K\left(t_i;t_{j-1}\right)\right]U_j \quad (7.40)$$

სადაც $\beta_i\left(\alpha_i;h\right) = \alpha h + hK'_\tau\left(t_i;t_i\right) - K\left(t_i;t_i\right) + K\left(t_i;t_{i-1}\right)$; $i = 1,2,...,n$.

თუ ინტეგრალური განტოლების $K\left(t;\tau\right) = K\left(t - \tau\right)$ გული შეიცავს $\left(t - \tau\right)$ სხვაობას, მაშინ

$\beta_i(\alpha;h)=\alpha h+hK_\tau^{'}(0)-K(0)+K(h)=\beta(\alpha;h)$, მაშინ ფორმულა (7.40) მიიღებს სახეს:

$$U_i=\frac{h\cdot f_i-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\left(K(t_i,t_{j+1})-2\cdot K(t_i,t_j)+K(t_i,t_{j-1})\right)\cdot U_j\right]}{\beta} \qquad (7.41)$$

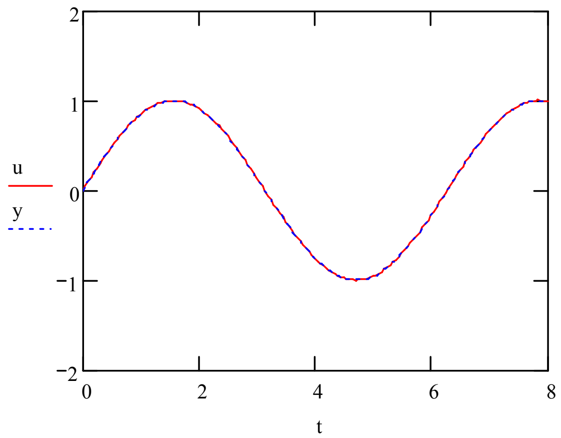
მაგალითი 7.6. ამოვხსნათ ვოლტერას მეორე გვარის

$$U(t)+\int_0^t \sin(t-\tau)U(\tau)d\tau=\frac{3}{2}\sin t-\frac{t}{2}\cos t$$

ინტეგრალური განტოლება:

აქ $\alpha=1$; $K_{\tau\tau}^{"}(t-\tau)=\sin(t-\tau)$; $K_\tau^{'}(t-\tau)=\cos(t-\tau)$; $K(t-\tau)=-\sin(t-\tau)$, $\beta(1;h)=2h-\sinh=\beta$.

(7.41) რეკურენტული ფორმულით მივიღებთ შედეგს, რომელიც გამოსახულია ნახ. 7.3-ზე უწყვეტი წირით, ხოლო წერტილებით ოცემულია ნტეგრალური განტოლების ზუსტ ამონახსნს, კერძოდ $U(t)\equiv\sin t$, $h=0.1$.



ნახ.7.3

მაგალითი 7.7. განვიხილოთ აბელის ამოცანა, რომელიც დაიყვანება ვოლტერას პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების ამოხსნაზე:

$$\int_0^t \frac{U(t)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = f(t)$$

ამ ტიპის განტოლებაზე დაიყვანება მექანიკისა და ფიზიკის უამრავი ამოცანები. ამ შემთხვევაში $\alpha = 0$; $U(0)=0$; $f(0)=0$; განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა: $f(t)=\frac{16}{15}t^2\sqrt{t}$, ამასთან $K''(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$, ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების ზუსტი ამონახსნია $U(t)=t^2$, $h=0.1$, შევადაროთ ერთმანეთს $U(t)=t^2$-ის ზუსტი და (7.41) ფორმულით მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობები, იხილეთ ცხრილი:

t	t^2	(7.41)	t	t^2	(7.41)	t	t^2	(7.41)
0.1	0.01	0.008	0.6	0.36	0.359	1.1	1.21	1.208
0.2	0.04	0.039	0.7	0.49	0.488	1.2	1.44	1.438
0.3	0.09	0.088	0.8	0.64	0.637	1.3	1.69	1.688
0.4	0.16	0.159	0.9	0.81	0.808	1.4	1.96	1.959
0.5	0.25	0.248	1.0	1.0	0.998	1.5	2.25	2.248

§ 7.10. ფრედჰოლმის განტოლების რიცხვით ამოხსნის კიდევ ერთი მეთოდი

როგორც ვიცით ვოლტერას წრფივი ინტეგრალური განტოლებას აქვს სახე:

$$U(t)+\int_a^t K\left(t;\tau\right)U\left(\tau\right)d\tau = f\left(t\right),\ a\le t\le b \qquad (7.42)$$

ზოგიერთი შეზღუდვით ვოლტერას ინტეგრალური განტოლება ეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფრედჰოლმის განტოლების კერძო შემთხვევა.

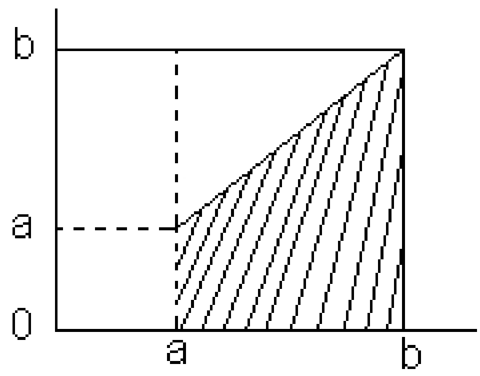
$K\left(t;\tau\right)$ ინტეგრალური გული (7.42) განტოლებაში ამოცანის არსიდან გამომდინარე, განსაზღვრულია $a\le\tau\le t$. თუ გულს დამატებით, როცა $\tau>t$, განვმარტავთ ასე: $K\left(t;\tau\right)=0$, $t<\tau\le b$ მაშინ (7.42) განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფრედჰოლმის განტოლების კერძო შემთხვევა, შემდეგი $G\left(t;\tau\right)$ გულით

$$G\left(t;\tau\right)=\begin{cases}K\left(t;\tau\right), & \tau\le t\\ 0 & \tau>t\end{cases} \quad \text{როცა}$$

ასეთნაირად განმარტებული ინტეგრალური $G\left(t;\tau\right)$ გულით ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება

$$U(t)+\int_a^b G\left(t;\tau\right)U\left(\tau\right)= f\left(t\right) \qquad (7.43)$$

იგიურია (7.42) ვოლტერას განტოლებისა.



ნახ. 7.4

დაშტრიხულ არეში $G(t;\tau)$ ემთხვევა $K(t;\tau)$-გულს, ხოლო არის მეორე ნაწილში იგიურად ნულია.

7.11 **Mathcad**

არაწრფივი განტოლებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მოდიფიცირებული რიცხვითი მეთოდები.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ არაწრფივი განტოლებისა და განოტელებათა სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია სახელმძღვანელოს ავტორის მიერ შემოთავაზებული მოდიფიცირებული მეთოდით, რომლისგანაც მიიღება დასმული ამოცანის ამოხსნის ნიუტონის, რუნგე-კუტას მეორე რიგის (PC-მეთოდი) და რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდები.

ამოვხსნათ f(x)=0 განტოლება სამივე მეთოდით ერთი და იმავე საწყისი პირობით.

$$f(x)=x^3+x^2-4x-4$$

ნიუტონის მეთოდით მივიღებთ

$x_0 := 4 \qquad n := 5$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4\cdot x - 4$

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 4$

$$x := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad x_{i+1} \leftarrow x_i - \dfrac{f(x_i)}{f1(x_i)} \end{array} \right. \qquad x \text{ float}, 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 4. \\ 2.846153846 \\ 2.239419356 \\ 2.027615546 \\ 2.000434296 \\ 2.000000110 \\ 2.000000000 \end{pmatrix}$$

PC-რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის მეთოდით ვღებულობთ:

$n := 2$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4 \cdot x - 4$

$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4$

$$x := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow 0 \\ x_0 \leftarrow 4 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} A \leftarrow f(x_i) \\ k1 \leftarrow \dfrac{-A}{f1(x_i)} \\ k2 \leftarrow \dfrac{-A}{f1(x_i + k1)} \\ x_{i+1} \leftarrow x_i + 0.5 \cdot (k1 + k2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.269 \\ 2.001 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x \text{ float}, 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 4. \\ 2.268968114 \\ 2.001178172 \\ 2.000000000 \end{pmatrix}$$

რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზისტის მეთოდით ვღებულობთ:

$n := 1$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 4$

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 4$

$$
x := \left|
\begin{array}{l}
z \leftarrow 0 \\
x_0 \leftarrow 4 \\
\text{for } i \in 0..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
b \leftarrow f\left(x_i\right) \\
c1 \leftarrow \dfrac{-b}{f1\left(x_i\right)} \\
c2 \leftarrow \dfrac{-b}{f1\left(x_i + \dfrac{c1}{2}\right)} \\
c3 \leftarrow \dfrac{-b}{f1\left(x_i + \dfrac{c2}{2}\right)} \\
c4 \leftarrow \dfrac{-b}{f1\left(x_i + c3\right)} \\
x_{i+1} \leftarrow x_i + \dfrac{c1 + 2\cdot c2 + 2\cdot c3 + c4}{6}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

$$
x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.012 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad x \text{ float}, 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 4. \\ 2.011635922 \\ 2.000000000 \end{pmatrix}
$$

როგორც ვნახეთ ერთი და იგივე მიახლოება 10-ნიშნის სიზუსტით მიიღწევა შემდეგ ეტაპებზე:

ნიუტონის მეთოდით n=6

რუნგე-კუტა მეორე (PC) n=3

რუნგე-კუტა მეოთხე n=2

ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მეთოდებით

ამოვხსნათ ვოლტერას მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება:

$$\alpha\cdot U(t) + \int_0^t (t-\tau-4\cdot\sin(t-\tau))\cdot U(\tau)\,d\tau = t$$

და რიცხვითი მეთოდით მიღებული ამონახსნი შევადაროთ ამ განტოლების $y(t) \equiv t\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ ზუსტ ამონახსნს. გამოსათვლელ პროგრამას აქვს სახე:

$h := 0.1 \qquad \alpha := 1 \qquad n := 40$

$K2(t,\tau) := t-\tau-4\cdot\sin(t-\tau) \qquad f(t) := t$

$K1(t,\tau) := \int K2(t,\tau)\,d\tau \rightarrow t\cdot\tau - \frac{1}{2}\cdot\tau^2 - 4\cdot\cos[(-t)+\tau]$

$K(t,\tau) := \int K1(t,\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{2}\cdot t\cdot\tau^2 - \frac{1}{6}\cdot\tau^3 - 4\cdot\sin[(-t)+\tau]$

$i := 2..n \qquad j := 0..n$

$t_i := i\cdot h \qquad t_j := j\cdot h$

$K_{i,j} := K(t_i, t_j)$

$\beta_i := \alpha\cdot h + h\cdot K1(t_i,t_i) - K_{i,i} + K_{i,i-1}$

$\beta_2 = 0.1$ $\qquad u_1 := \frac{h \cdot f(t_1)}{\beta_2}$

$$u_i := \frac{h \cdot f(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(K_{i,j+1} - 2 \cdot K_{i,j} + K_{i,j-1}\right) \cdot u_j\right]}{\beta_i}$$

$u_0 = 0$ $\qquad y_j := t_j \cdot \frac{e^{-t_j} + e^{t_j}}{2}$

$u_1 = 0.101$

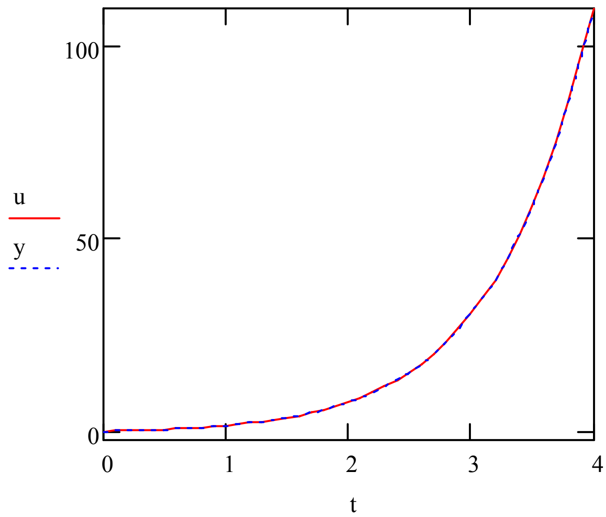
პროგრამით მიღებული შედეგებია

$u =$

	0
0	0
1	0.101
2	0.204
3	0.314
4	0.433
5	0.564
6	0.712
7	0.879
8	1.071
9	1.291
10	1.545
11	1.837
12	2.176
13	2.566
14	3.016
15	3.535

$y =$

	0
0	0
1	0.101
2	0.204
3	0.314
4	0.432
5	0.564
6	0.711
7	0.879
8	1.07
9	1.29
10	1.543
11	1.835
12	2.173
13	2.562
14	3.011
15	3.529



ამოვხსნათ ვოლტერას პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება.

$$\int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \frac{16t^2\cdot\sqrt{t}}{15}$$

და ამონახსნი შევადაროთ $y=t^2$ ზუსტ ამონახსნს.

$h := 0.2 \qquad \alpha := 0 \qquad n := 40$

$$K2(t,\tau) := \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \qquad f(t) := \frac{16\cdot t^2\cdot\sqrt{t}}{15}$$

$$K1(t,\tau) := \int K2(t,\tau)\,d\tau \rightarrow (-2)\cdot(t-\tau)^{\frac{1}{2}}$$

$$K(t,\tau) := \int K1(t,\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{4}{3}\cdot(t-\tau)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{4}{3}\cdot(t-\tau)^{\frac{3}{2}}$$

$i := 2..n \qquad j := 0..n$

$t_i := i \cdot h \qquad t_j := j \cdot h$

$K_{i,j} := K(t_i, t_j)$

$\beta_i := \alpha \cdot h + h \cdot K1(t_i, t_i) - K_{i,i} + K_{i,i-1}$

$\beta_2 = 0.119 \qquad u_1 := \dfrac{h \cdot f(t_1)}{\beta_2} \qquad u_0 := f(0)$

$$u_i := \frac{h \cdot f(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\left(K_{i,j+1} - 2 \cdot K_{i,j} + K_{i,j-1}\right) \cdot u_j\right]}{\beta_2}$$

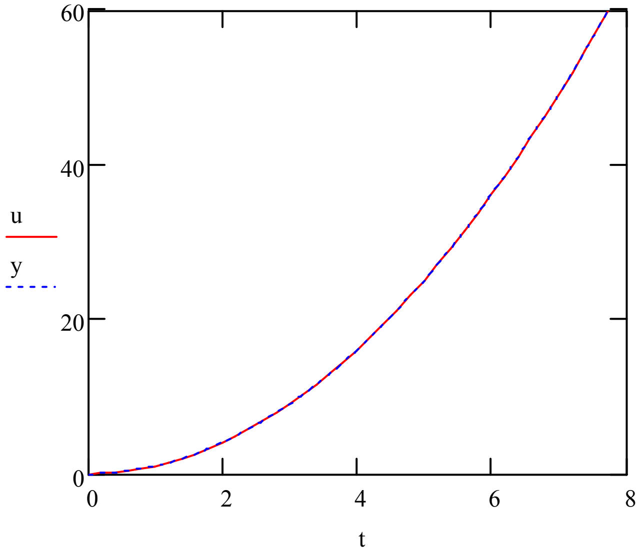
$y_j := (t_j)^2$

u =

	0
0	0
1	0.032
2	0.155
3	0.354
4	0.634
5	0.994
6	1.434
7	1.954
8	2.554
9	3.234
10	3.994
11	4.834
12	5.754
13	6.754
14	7.834
15	8.994

y =

	0
0	0
1	0.04
2	0.16
3	0.36
4	0.64
5	1
6	1.44
7	1.96
8	2.56
9	3.24
10	4
11	4.84
12	5.76
13	6.76
14	7.84
15	9



ვთქვათ, უნდა ვიპოვოთ $P(x) = anx^{n} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 x_1 + a_0$ პოლინომის ფესვები, ამისათვის საჭიროა შევადგინოთ კოეფიციენტების სვეტ-მატრიცა V

$$v := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

შემდეგ polyroot ოპერატორით მივიღებთ სასურველ შედეგს. განვიხილოთ მაგალითები:

1. $f(x) := x^4 - 10\cdot x^3 + 27\cdot x^2 - 2\cdot x - 40$

$$v := \begin{pmatrix} -40 \\ -2 \\ 27 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2+3i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

2. $f(x) := x^4 - 3\cdot x^3 + 7\cdot x^2 + 21\cdot x - 26$

$$v := \begin{pmatrix} -26 \\ 21 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2+3i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

3. $f(x) := x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 39$

$$v := \begin{pmatrix} 39 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3-2i \\ 3+2i \end{pmatrix}$$

4. $f(x) := x^4 + 7\cdot x^3 - x + 5$

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(-1) = 0$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -6.965 \\ -1 \\ 0.482+0.697i \\ 0.482-0.697i \end{pmatrix}$$

5. $f(x) := x^5 + 4\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x$

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -2.325-0.666i \\ -2.325+0.666i \\ 0 \\ 0.325-0.256i \\ 0.325+0.256i \end{pmatrix}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა **Given-Find** ოპერატორებით

$g(x,y) := x + y - 3$

$f(x,y) := x^2 + y^2 - 5$

$x := 3 \quad y := -1$

Given

$f(x,y) = 0$

$g(x,y) = 0$

$R := \mathrm{Find}(x,y)$

$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f(R_0, R_1) = -2.637 \times 10^{-6}$

$g(R_0, R_1) = 0$

როცა ცნობილია ფესვის განთავსების შუალედი მაშინ ვსარგებლობთ root(f(x),x, a,b) ოპერატორით

1. $G(x) := x^2 - 4 \cdot x + 3$

$P0 := \mathrm{root}(G(x), x, 0, 1)$	$P1 := \mathrm{root}(G(x), x, 2, 4)$
$P0 = 1$	$P1 = 3$
$G(P0) = 0$	$G(P1) = 0$

ანტოლების ამოხსნა root ოპერატორით

2. $f(x) := \tan(x) - e^{-x}$

$R := \mathrm{root}(f(x), x, 0, 1)$

$R = 0.531$

$f(R) = -2.21\times 10^{-9}$

3. $f1(x) := \sqrt{x-1} - 0.5\cdot\sin(2\cdot x)$

$L := \mathrm{root}(f1(x), x, 1, 2)$

$L = 1.143$

$f1(L) = -1.95\times 10^{-9}$

განტოლების ამოხსნა solve ოპერატორით

$$f(x) := \cos(x)^2 - 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

$$f1(x) := \sin(x)^2 - 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\pi \\ \frac{-1}{2}\cdot\pi \end{pmatrix}$$

$$f2(x) := x^3 + x^2 - 4x - 4 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f3(x) := x^2 - 8\cdot\cos(x) \text{ solve}, x \rightarrow 1.34328641878073128\text{(}$$

$$f3(x) \text{ float}, 20 \rightarrow 1.34328641878073128\text{(}$$

$$f4(x) := x^3 - 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$f5(x) := x^2 - 25 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$g(x) := \sin(x) - 1$

$x := 1$

Given

$g(x) = 0$

$R := \text{root}(g(x), x)$

$R = 1.571$

$g(R) = -7.029 \times 10^{-11}$

მაგალითები

იპოვეთ $f(x)=0$ განტოლების ერთ-ერთი ნამდვილი ფესვი მოთავსებული (a,b) შუალედში $\varepsilon=10^{-4}$ სიზუსტით:

7.1. $f(x)=\ln x+e^{x}-4$; $(1;2)$

7.2. $f(x)=e^{x/2}+x^{4}-6$; $(1;2)$

7.3. $f(x)=3\sin x+0.5\ln(1+x)+x-1$; $(0;1)$

7.4. $f(x)=\ln(1+\sin x)-e^{x}+4x$; $(0;1)$

7.5. $f(x)=\ln(1+e^{x})-\cos x+2x$; $(0;1)$

7.6. $f(x)=xe^{x}(x+1)\cos x+5x$; $(0;1)$

7.7. $f(x)=\ln(1+\cos x)-3\cdot 2^{-x}+e^{2}x$; $(0;1)$

7.8. $f(x)=5.425tg^{2}x-0.163e^{-x}+\sqrt{7.15}x^{2}$; $(0;1)$

7.9. $f(x)=e^{x/3}+x^{4}-6$; $(1;2)$

7.10. $f(x)=3\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1.3001x$; $(0;1)$

7.11. $f(x)=2x-\cos x-1$; $(0;1)$

7.12. $f(x)=\cos x-x^{2}+1$; $(1;2)$

7.13. $f(x)=x^{3}+24x-30$; $(1;2)$

7.14. $f(x)=tgx-e^{-x}$ $(0;1)$

7.15. $f(x)=\sqrt{x-1}-0.5\sin 2x$; $(1;2)$

7.16. $f(x)=x^{4}+x^{3}+7x+1$; $(-2;1)$

7.17. $f(x)=x-1+0.25\ln(1+x)$; $(0;1)$

7.18. $f(x)=e^{x}+\cos x-7x+1$; $(0;1)$

7.19. $f\left(x\right)=x^4-1.5x^3+6x-1$; $\left(0;1\right)$

7.20. $f\left(x\right)=e^x+\ln\left(x+2\right)-10x$; $\left(0;1\right)$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები მოდიფიცირებული დიფერენციალური მეთოდებით.

7.21. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$; $x_0=0.5;\ 2.5,\ -3.5$;

7.22. $f\left(x\right)=x^3-0.468473$; $x_0=1$;

7.23. $f\left(x\right)=x^3-4x^2-x+4$;

7.24. $f\left(x\right)=x^3-2x^2-1.2621399x+2.5242798$;

7.25. $f\left(x\right)=x^3+2x^2-0.1254661x-0.2509322$;

7.26. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^2-xy=10. \end{cases}$ $M_0\left(1;-1\right)$; $M_0\left(3;1\right)$

7.27. $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ x^2-y=-1. \end{cases}$

7.28. 7.27 ამოხსენით რუნგე-კუტას მეოთხე რიგის სიზუსტის მეთოდით.

7.29. $\begin{cases} x^2-y+1=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} x+3\ln x-y^2=0, \\ 2x^2-xy-5x=-1. \end{cases}$

ამოხსენით ფრედგოლმის ინტეგრალური განტოლებები კვადრატული ფორმულების გამოყენებით:

7.31. $U(t)+\int_0^1 te^{t+\tau}U\left(\tau\right)d\tau=1+t+te^{1+t}$

7.32. $U(t)+\int_0^1 te^{t-\tau}U(\tau)\,d\tau = t+te^t-2te^{t-1}$

7.33. $U(t)+\int_0^1 te^{t^2-\tau}U(\tau)\,d\tau = e^t-te^{t^2}$

7.35. $U(t)-\int_0^1 \sin 2\pi t\cdot\tau U(\tau)\,d\tau = t+\dfrac{1}{3}$

ამოხსენით მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლებები მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით:

7.36. $U(t)-\int_0^1 t\cdot\tau U(\tau)\,d\tau = 2t$

7.37. $U(t)+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\tau\; U(\tau)\,d\tau = 1$

7.38. $U(t)-\pi\int_0^1 (1-x)\sin(\pi\tau)\cdot U(\tau)\,d\tau = \dfrac{1}{2}(1-t)$

7.39. $U(t)-\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t\; U(\tau)\,d\tau = 2\sin t$

7.40.

$$U(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(t+\tau)+\cos(t-\tau)\right]\;U(\tau)\,d\tau = \cos t$$

7.41. $U(t)-\int_0^t \; U(\tau)\,d\tau = 1$

7.42. $U(t)+\int_0^t \; U(\tau)\,d\tau = t+\dfrac{t^2}{2}$

7.43. $U(t)-\int_0^t t\; U(\tau)\,d\tau = 1-t^2$

7.44. $U(t)-\int_0^t t\; U(\tau)\,d\tau = 1$

7.45. $U(t)-\int_0^t \tau\; U(\tau)\,d\tau = 1$

7.46. $U(t)-\int_0^t (t-\tau)\; U(\tau)\,d\tau = 1$

(7.41) რეკურენტული ფორმულით ამოხსენით შემდეგი ინტეგრალური განტოლებები:

7.47. $U(t)+\int_0^t \sin\left(t-\tau\right)\ U\left(\tau\right)d\tau = 2t-\sin t$; $h=0.1$;

7.48. $U(t)+\int_0^t U\left(\tau\right)d\tau = t^2+\frac{1}{3}t^3$; $h=0.25$;

7.49. $\int_0^t U\left(\tau\right)d\tau = f\left(t\right)$, ამონახსნი $U(t)$ წარმოადგინეთ რეკურენტული ფორმულის სახით.

7.50. $\int_0^t U\left(\tau\right)d\tau = \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$, . ამოხსენით 7.49-ში მიღებული რეკურენტული ფორმულით.

პასუხები

1.1. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ 1.2. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$

1.4. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$ 1.4. $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$

1.5. $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$ 1.6. $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$

1.7. $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$ 1.8. $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$

1.9. $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ 1.10. სისტემა არათავსებადია

1.11. $x_1 = 7x_3 - 8$; $x_2 = 4 - 3x_3$; x_3 - ნებისმიერი რიცხვია;

1.12. $x_1 = 4 - 2x_3$; $x_2 = 2x_3 - 2$; x_3 - ნებისმიერი რიცხვია;

1.13. $x_1 = 2t$; $x_2 = -3t$; $x_3 = st$; t - ნებისმიერი რიცხვია;

1.14. $x_1 = x_2 - x_3$; სადაც x_2 და x_3 ნებისმიერი რიცხვია;

1.15. $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$.

1.16. $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$.

1.17. $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$.

1.18. $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$; $x_4 = 1$.

1.19. $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$; $x_4 = 2$; $x_5 = 3$; $x_6 = 2$.

1.20. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$; $x_5 = 2$; $x_6 = 0$.

1.21. $x_1 = x_5$; $x_2 = 1 - x_5$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3 - x_5$; x_5 - ნებისმიერია.

1.22. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$.

1.23. $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 0$; $x_6 = 1$; $x_7 = -1$; $x_8 = 4$.

1.24. $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = -2$; $x_6 = 0$; $x_7 = 1$; $x_8 = 2$; $x_9 = -1.5$.

1.25. $x_1 = 2$; $x_2 = -3$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_5 = -2$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$; $x_8 = 8$; $x_9 = 9$; $x_{10} = 9$.

1.26. $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = -8$; $x_7 = -13$;

1.27. $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 5$; $x_6 = 2$.

1.28. $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$; $x_4 = 0$; $x_5 = 1$; $x_6 = 2$; $x_7 = 3$.

1.29. $x_1 \approx 1.9092$; $x_2 \approx 3.1949$; $x_3 \approx 5.0449$.

1.30. $x_1 \approx -0.842$; $x_2 \approx 0.88$; $x_3 \approx 0.436$.

2.1. ა)

$$P_4(x) = \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) -$$
$$-\frac{1}{4}(x+1)x(x-2)(x-3) + \frac{1}{12}(x+1)x(x-1)(x-3)$$

ბ) $P_4(x) = 1 - \frac{31}{12}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{13}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

გ) $f(1.5) = P_4(1.5) = -1.04685$; $f(2.5) = P_4(2.5) = 0.14063$

2.2. $f(1.05) = 2.4$

2.5. $y = 3.995 - 2.163x + 0.268x^2$.

2.6. $y = 1.4 - 1.23x + 0.87x^2$.

2.7. $y = 0.14 + 0.088x + 0.002x^2$.

2.8. $y = -1.93 - 0.28x + 1.54x^2$.

2.9. $T = 61.84 - 0.67t + 0.04t^2$.

2.10. $y = 5.38 + x - 1.24x^2$

2.11. $y \approx 2 + \frac{12}{x}$.

2.12. $y \approx 4.69 + \frac{15.97}{x}$.

2.13. $y \approx 11.92 + \frac{4.39}{x}$.

2.14. $y \approx 2.209 + 0.35 \ln x$.

2.15. $y \approx 4.973 + 0.466 \ln x$

2.16. $y \approx -0.863 + 0.913e^{0.1x}$

2.17. $y \approx 3.018 + 0.992e^{0.1x}$

3.1. 18.24; 3.2. 0.719; 3.3. 0.995; 3.4. 1.96; 3.5. 1.951; 3.6. -1.9541;

3.7. 0.69; 3.8. 0.75; 3.9. 0.78; 3.10. 0.31; 3.11. 1.929; 3.12. 0.159;

3.13 2.6667; 3.14. ინტეგრალი განშლადია; 3.15. 14.571; 3.16. 6;

4.1. $x(0.25) \approx 1.007904$; $x(0.5) \approx 1.032735$; $x(0.75) \approx 1.091106$;

$x(1.0) \approx 1.149478$; $x(1.25) \approx 1.255612$; $x(1.55) \approx 1.405889$;

4.2. $x(1) = 3$; $x(1.25) \approx 3.39024$; $x(1.5) \approx 3.83433$;

$x(1.75) \approx 4.33876$; $x(2) \approx 4.91069$;

4.3. $x(1) = 0.5$; $x(1.25) \approx 0.8281$; $x(1.5) \approx 1.1274$; $x(1.75) \approx 1.4038$; $x(2) \approx 1.6679$;

4.4. $x(2) = 3.058$; $x(2.25) \approx 3.30285$; $x(2.5) \approx 3.53471$;

$x(2.75) \approx 3.74642$; $x(3) \approx 3.92234$;

4.5. $x(2) = 0.2$; $x(2.2) \approx -0.03211$; $x(2.4) \approx -0.32448$;

$x(2.6) \approx -0.68329$; $x(2.8) \approx -1.04209$; $x(3) \approx -1.40856$

4.6. $x(0.3) \approx 3.536427$; $y(0.3) \approx 0.706737$

4.7. $y(1.25) \approx 0.3$; $z(1.253) \approx 0.6$

4.8. $y(0) = 1$; $y(0.5) \approx 1.6044$; $z(0) = 2$; $z(0.5) \approx 5.0882$

4.9. $x(1) \approx -2.1156096$; $y(1) \approx 5.0268907$

4.10. $y(0) = z(0) = 1$; $y(0.25) = z(0.25) \approx 1.3203125$; $y(0.5) = z(0.5) \approx 1.8432506$

4.11. პირველი რიგის განტოლებათა სისტემა, ახალ $y'=u$; $y''=u'=z$; $y'''=z$ ფუნქციებში მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \left(x^2+6x-1\right)\left(1-x^2\right)z'+\left(4-7x^2\right)z+64y-xu=0, \\ y'=u \\ u'=z \\ y(0)=1,\ u(0)=6,\ z(0)=-16, \end{cases}$$

$y(0.25)=0.53125$; $y(0.5)=-0.5$

4.12. $$\begin{cases} y'=0, \\ u'=z, \\ z'=\dfrac{x}{2}z+\dfrac{6-x^2}{2}\cdot(u-y) \\ y(0)=0,\ u(0)=1,\ z(0)=0. \quad [0,1] \end{cases}$$

$y(0.5)=0.8243$; $y(1)\approx 2.7183$

4.13. $y(1.25)\approx 0.217698$; $y(1.5)\approx 0.483673$; $y(1.75)\approx 0.700992$; $y(2)\approx 0.896362$;

4.14. $y(0)=0$; $y(0.5)\approx 1.58986$; $y(1)\approx 2.19328$; $y(1.5)\approx 2.67191$; $y(2)\approx 3.02571$

4.15. $y(0.5)\approx 1.30958$; $y(1)\approx 2.61444$; $y(1.5)\approx 2.88981$; $y(2)\approx 7.32464$

5.1. $y_{\max}(0)=1$; $y_{\max}(-1)=y_{\min}(1)=\dfrac{1}{2}$

5.2. $y_{\max}(0)=-2$; $y_{\min}(2)=2$

5.3. $y_{\min}(1)=7\dfrac{2}{3}$; $y_{\max}(3)=9$

5.4. $y_{\min}(-1) = -6\frac{1}{3}$; $y_{\max}(-3) = -5$

5.5. $y_{\min}(-1) = \frac{9}{4}$; $y_{\max}(0) = 2\frac{2}{3}$; $y_{\min}(2) = 0$

5.6. $y_{\min}(0) = -\frac{1}{3}$; $y_{\max}(1) = 0.25$; $y_{\min}(4) = -11$

5.7. $y_{\min}(0) = 4$; $y_{\max}(\pm 1) = 5$;

5.8. $y_{\max}(0) = 0$; $y_{\min}(\pm 2) = -16$;

5.9. $y_{\min}(1) = 0$;

5.10. $y_{\max}(1) = 5\frac{5}{6}$; $y_{\min}(6) = -15$;

5.11. $y_{\text{უმც.}}(3) = -3$;

5.12. $y_{\text{უმც.}}(2) = -5\frac{2}{3}$; $y_{\text{უდ.}}(3) = -3.5$

5.13. $y_{\text{უმც.}}(-1) = -5\frac{5}{6}$; $y_{\text{უდ.}}(2) = -4\frac{1}{3}$

5.14. ა) $y_{\text{უდ.}}(-1) = 7$; $y_{\text{უმც.}}(3) = -13$

ბ) $y_{\text{უმცდ.}}(-1) = 2$; $y_{\text{უდ.}}(3) = 13$

5.15. ა) $y_{\text{უდ.}}(-1) = 19$; $y_{\text{უმც.}}(4) = 9$

ბ) $y_{\text{უმცდ.}}(-1) = 11$; $y_{\text{უდ.}}(4) = 16$

5.16. $y_{\text{უმც.}}(-1) = -4\frac{1}{3}$; $y_{\text{უდ.}}(5) = -7\frac{2}{3}$

5.17. $y_{\text{უმც.}}(\pm 2) = -25$; $y_{\text{უდ.}}(\pm 1) = 2$

5.18. $y_{\text{უმც.}}(-1) = -10$; $y_{\text{უდ.}}(1) = 2$

5.19. $y_{\text{უდ.}}(1) = 23$; $y_{\text{უმც.}}(-1) = -53$

5.20. $y_{\text{უმც.}}(0)=0$; $y_{\text{უდ.}}(4)=8$

5.21. $z_{min}(0;5)=25$; 5.26. $z_{min}(4;3)=14$;

$z_{\max}(-4;-3)=-14$

5.22. $z_{min}(1;2)=-1$; 5.27. $z_{min}(0.5;1)=3$;

5.23. $z_{min}(0;4)=-16$; 5.28. $z_{min}(1;-1)=-1$;

5.24. $z_{min}(1;0)=-1$; 5.29. $z_{min}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$;

5.25. $z_{\max}(-1;1)=1$; 5.30. $z_{min}(1;5)=15$;

5.31. $z_{min}\left(\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}$; 6.32. $z_{min}(0.5;-1)=-2.5$;

5.33. $z_{\max}\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)=10$; $z_{min}\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)=0$;

5.34. $z_{\min}\left(\frac{9}{4};0\right)=4$; $z_{\max}\left(\frac{3}{4};-2\right)=16$;

5.35. $z_{\min}(2;1)=-8$; $z_{\max}(-2;-1)=36$;

5.36. $z_{\text{უმც.}}(3;-2)=-13$; $z_{\text{უდ.}}(-6;4)=104$

5.37. $z_{\text{უმც.}}(3;4)=-75$; $z_{\text{უდ.}}(-3;-4)=125$

5.38. $z_{\text{უმც.}}\left(1;\frac{1}{2}\right)=-2.25$; $z_{\text{უდ.}}(0;3)=6$

5.39. $z_{\text{უმც.}}(1;3)=-10$; $z_{\text{უდ.}}(5;0)=15$

5.40. $z_{\text{უმც.}}(6;0)=-12$; $z_{\text{უდ.}}(0;6)=6$

5.41. $z_{\text{უდ.}}(5;0)=15$; 5.42. $z_{\text{უდ.}}(0;6)=30$

5.43. $z_{\text{უდ.}}(3;2)=17$; 5.44. $z_{\text{უდ.}}(5-5t;2+2t)=40$

5.45. $z_{\text{უდ.}}(1-t;3+t)=12$;

5.46. ამოცანა დაიყვანება $z=f(x;y)=0.8x+0.7y\to\max$ z-ფუნქციის მაქსიმიზაციაზე შემდეგი შეზღუდვებით:

$$\begin{cases}6x+3y\le 2700\\ 0.2x+0.3y\le 120\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0\end{cases}$$

ამგვარად ფაბრიკის ყოველთვიური მაქსიმალური მოგებაა 405 ლარი. 14 ტიპის პროდუქციის რაოდენობა 375 ერთეული. G-კი 150.

5.47. $z=f(x;y)=400x+320y\to\min$ კონტრაქტით უნდა შესრულდეს შემდეგი შეზღუდვები:

$$\begin{cases}60x+20y\ge 120\\ 20x+20y\ge 80\\ 40x+120y\ge 280\\ 0\le x\le 7,\ \ 0\le y\le 7\end{cases}$$

$z_{\min}=f(1;3)=1360$. H_1 ხაზმა უნდა იმუშაოს 1 დღეს, H_2-მა კი – 3 დღეს.

5.48. $z=f(x;y)=800x+320y\to\min$, შემდეგი პირობებით:

$$\begin{cases}40x+20y\ge 900\\ y\le \dfrac{x}{3},\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0\end{cases}$$

$z_{\min}=f(20;5)=17600$ მუდმივი შტატის 20 თანამშრომელი, დროებითი შტატის 5 თანამშრომელი.

5.49. თუ ფირმა გამოუშვებს K_1 ტიპის 20 კომპიუტერს და K_2 ტიპის 10 კომპიუტერს, მაშინ იგი მიიღებს 1900 დოლარ მაქსიმალურ მოგებას.

5.50. ქარხანამ უნდა ჩამოასხას 400 ბოთლის თეთრი და 1600 ბოთლის წითელი ღვინო, ამ დროს მაქსიმალლური ყოველთვიური მოგებაა 3680.

6.1. $U_K^n = 0.04\left(K^2 + Kn + n^2\right)$; **6.2.** $U_K^n = 0.125Kn$;

6.3. $U_K^n = 0.0001K^2n^2$; **6.4.** $U_K^n = 1 + 0.02K^2 + 0.04n^2$;

6.5. $U_K^n = 0.01\left(n^2 + 4K^2\right)$; **6.6.** $U_K^n = 0.2n + 0.02K^2$;

6.3. $U_K^n = 0.4n + 0.04K^2$; **6.4.** $U_K^n = 0.4n + 0.02K^2$;

6.5. $U_K^n = 0.2n + 0.02K^2$; **6.4.** $U_K^n =).4n + 0.02K^2$;

7.1. ≈ 1.3153; **7.2.** ≈ 1.412; **7.3.** ≈ 0.2259;

7.4 ≈ 0.265; **7.5.** ≈ -0.621; **7.6.** ≈ 0.188;

7.7 ≈ 0.251; **7.8.** ≈ -0.132; **7.9.** ≈ 1.4467;

7.10 ≈ 0.2884; **7.11.** ≈ 0.8352; **7.12.** ≈ 1.177;

7.13 ≈ 1.1812; **7.14.** ≈ 0.5315; **7.15.** ≈ 1.1427;

7.16 ≈ -1.143; **7.17.** ≈ 0.847; **7.18.** ≈ 0.505;

7.19 ≈ 0.1677; **7.20.** ≈ 0.2012;

7.21 $x_1 \approx 0.$; $x_2 \approx 3.46414$; $x_3 \approx -3.46414$

7.22. $x_1 \approx 0.776655$ **7.23.** $x_1 \approx -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$

7.24. $x_1 \approx -1.12345$; $x_2 \approx 1.12345$; $x_3 = 2$

7.25. $x_1 = -2$; $x_2 \approx -0.354212$; $x_3 \approx 0.354212$

7.26. $(2;-3)$; $(3.535534;0.707107)$; $(-2;3)$; $(-3.535534;-0.707107)$

7.27. $(-2;5)$; $(2;5)$; 7.28. $(-2;5)$; $(2;5)$

7.29. $(0;1)$; $(1;2)$; 7.30. $\approx(3.487;2.262)$;

7.31. $u(0)=1$; $u(0.5)\approx 1.4992$; $u(1)\approx 1.997$

7.32. $u(0)=0$; $u(0.5)\approx 0.5003$; $u(1)\approx 1.0012$

7.33 $u(0)=1$; $u(0.5)\approx 1.6381$; $u(1)\approx 2.718$

7.34. $u(0)=1$; $u(0.5)\approx 1.12501$; $u(1)\approx 1.2502$

7.35. $u(0)=\frac{1}{3}$; $u(0.5)\approx -0.8333$; $u(1)\approx 1.3333$

7.36. $u(t)=3t$; 7.37. $u(t)=\frac{2}{3}$;

7.38. $u(t)=1-t$;

7.39. $u(t)=4\sin(t)$; 7.40. $u(t)=\frac{2}{3}\cos(t)$;

7.41. $u(t)=e^{t}$; 7.42. $u(t)=t$; 7.43. $u(t)=1$;

7.44. $u(t)=1+e^{t^2/2}$; 7.45. $u(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$; 7.46. $u(t)=\cos(t)$;

7.47. $u(0)=0$; $u(0.1)\approx 0.1$; $u(0.2)\approx 0.21;....$

7.48. $u(0)=0$; $u(0.25)\approx 0.0626$; $u(0.5)\approx 0.2502$; $u(0.75)\approx 0.5626$; $u(1)\approx 1.0003$

7.49. $u_K=\frac{2}{h}\cdot\left(f_K-f_{K-1}\right)-U_{K-1}$

7.50. $u(0)=0$; $u_0(0.2)\approx -0.1633$; $u_0(0.4)\approx -0.24$; $u(0.6)\approx -0.2533$; $u(0.8)\approx -0.16$; $u(1)\approx -0.0134$

ლიტერატურა

1. მათემატიკა ინჟინრებისათვის. რედაქტორები პროფესორი დავით ნაატროშვილი, პროფესორი ოთარ ზუმბურიძე, გლინზ-ჯეიმსის რედაქციით, გამომცემლობა გლობალ-პრინტი, თბილისი, 2001

2. დ.ნატროშვილი, ლ.გიორგაშვილი, გ.ჯაშიაშვილი. მათემატიკა ეკონომისტებისთვის. გამომცემლობა გლობალ-პრინტი, თბილისი, 2008

3. ს.თოფურია, .ხოჭოლავა, მ.გაბიძაშვილი, ნ.მაჭარაშვილი. უმაღლესი მათემატიკა. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი, 1991

4. ნ.დურგლიშვილი, ა.ბუაძე, მ.იოსავა, ო.მელაძე, ლ.სიგუა. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებულუ, I ნაწილი, გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1989

5. ნ.დურგლიშვილი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. II ნაწილი. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1980

6. გ.ჯავახიშვილი, ზ.კანდელაკი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული ეკონომისტებისათვის. თბილისი, 2005

7. ლ.დობორჯგინიძე, თ.ვეკუა, გ.სამსონაძე, ა.ჯაღმაიძე. უმაღლესი მათემატიკა (ეკონომისტებისთვის). თბილისი, 1991

8. ნ.ართმელაძე, თ.კოხია, ო.მელაძე. გამოთვლის მეთოდებისა და პროგრამირების პრაქტიკული სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1989
9. ვ.კოსარევი. 12 ლექცია გამოთვლით მათემატიკაში (შესავალი კურსი). თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2003

10. Березин Н.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. т.1, 2. Москва, Физматгиз, 1960.

11. თ. ობგაძე, ლ. ობგაძე, ნ. მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი, მათემატიკური მოდელირების კურსი 1,2 ტომი, თბილისი,2007.

12. Д.Мак-Кракен. У. Дорн. Численные методы и програмирование на Фортране, издательство «МИР», Москва, 1977.

13. В.Ф.Дьяченко. Основные понятия вычислительной математики, издательство «Наика», Москва, 1972.

14. Б.П.Демидович и И.А.Марон; Основы вычислительной математики, издательство «Наука», Москва, 1970.

15. Н.Н.Калиткин; Численные методы, издательство «Наука», Москва, 1978

16. Э.А.Вуколов, А.В.Ефимов и др.; Сборник задач по математике, для втузов, Специальные курсы, издательство «Наука», Москва, 1984.

17. М.Л.Краснов; Интегральные уравнения, издательство «Наука», Москва, 1975.

18. Т.П.Векуа, Г.В.Хвичия; Приближенное решение некоторых функциональных уравнений, Международный научный журнал «Проблемы механики» №3(28).2007, Тбилиси, 2007

19. Т.П.Векуа; Численный метод решения некоторых интегральных уравнений, Международный научный журнал «Проблемы механiки», №3(28).2007.

სარჩევი

იბეჭდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 28.05.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 03.06.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 17,5. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant, scripta manent

შპს „ვეკო“, თბილისი, აღმაშენებლის 154