5

ვ. ბელთაძე, მ. ნაჭყებია, ნ. მჭედლიშვილი

გაძუ[illegible] მიღების თეორ[illegible] ქვე[illegible]

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გ. ბელთაძე, მ. ნაჭყებია, ნ. მჭედლიშვილი

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიისა და ოპერაციათა კვლევის ამოცანები

(ლაბორატორიული და პრაქტიკული სამუშაოები)

რეკომენდებულია სტუ-ის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 18.05.2011, ოქმი №2

თბილისი
2011

უაკ 519.8

განხილულია გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკური თეორიის ორი ძირითადი უახლოესი მიმართულების — გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიისა და ოპერაციათა კვლევის დისციპლინებში ლაბორატორიული და პრაქტიკული მეცადინეობები. წარმოდგენილია 22 სამუშაო და მოიცავს აღნიშნული დისციპლინების ძირითად თემატიკას.

გათვალისწინებულია უნივერსიტეტების სტუდენტებისათვის. მისი გამოყენება შეუძლია აგრეთვე აღნიშნული თემატიკით დაინტერესებულ მკითხველს.

სამეცნიერო რედაქტორი ნ. მუსხელიშვილის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის ოპერაციათა კვლევის და დისკრეტულ ამოცანათა განყოფილების მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი, ჯ. გიორგობიანი

რეცენზენტები: სრული პროფესორი ნ. ჯიბლაძე,
ასოც. პროფესორი ნ. ნარიმანაშვილი

35/11

ISBN 978-9941-14-969-6

http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant, scripta manent

სარჩევი

წინასიტყვაობა

სახელმძღვანელო შედგენილია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტზე ლაბორატორიული და პრაქტიკული სამუშაოების ჩასატარებლად სტუდენტებისათვის, რომლებიც სწავლობენ გადაწყვეტილებათა მიღების ტექნოლოგიებს და ოპერაციათა კვლევას. იგი მოიცავს 22 სამუშაოს. თითოეულ მათგანში განსახილველი თემა წარმოდგენილია კლასიკური სქემით - ძირითადი განსაზღვრებები, ფორმულირებები და პრობლემის გადაწყვეტის მათემატიკური მეთოდები. ამოხსნილია შესაბამისი პრაქტიკული ამოცანები, რომელთა უმრავლესობა დამუშავებულია Matlab–ის ინტერაქტიურ გარემოში. რამდენიმე ამოცანის პრაქტიკული რეალიზება გათვალისწინებულია ლაბორატორიული მუშაობის პროცესში პროგრამული უზრუნველყოფის გარეშე.

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიისა და ოპერაციათა კვლევის სწავლებას ჩვენთან არ აქვს დიდი ხნის ისტორია. მიმდინარე ეტაპზე სახელმძღვანელოში წარმოდგენილია შედარებით მცირე თემატიკა ამ უაღრესად საჭირო და დიდი მოცულობის თეორიებიდან. ამიტომ, დროთა განმავლობაში ეს სახელმძღვანელოც გაფართოვდება.

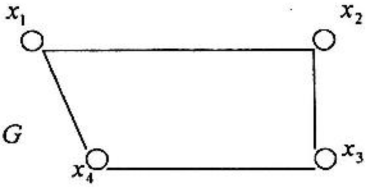
1. გრაფი და ხე. გრაფის მოსაზღვრეობის და ინციდენციის მატრიცები

1. სამუშაოს მიზანი - გრაფისა და ხის შემადგენელი ელემენტების, მათი სახეებისა და მათთან დაკავშირებული ძირითადი განსაზღვრებების დაუფლება, გრაფის წარმოდგენა მატრიცების საშუალებით და პირიქით, გრაფის წარმოდგენა ხის საშუალებით. აქ დასმული ამოცანების რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. გრაფი G წარმოადგენს გეომეტრიულ ფიგურას, რომელიც არის ორი X და U სიმრავლის ერთობლიობა: $G=(X,U)$, სადაც X გრაფის წვეროთა სიმრავლეა და მისი ელემენტები გამოისახება წერტილებით, წრეებით ან მართკუთხედებით, ხოლო U არის X-ის წყვილი ელემენტების დამაკავშირებელი წიბოების (ხაზების, მონაკვეთების, რკალების) სიმრავლე. თუ G გრაფის წიბოები არაა დალაგებული, ანუ განსხვავება საწყის და საბოლოო წვეროებს შორის არაა არსებითი, მაშინ ასეთ G-ს ეწოდება არაორიენტირებული გრაფი ან უბრალოდ გრაფი. თუ წიბოები დალაგებულია, ანუ მითითებულია საწყისი და ბოლო წვეროები, მაშინ ასეთ გრაფს ეწოდება ორიენტირებული ან მიმართული. გრაფის ორ წვეროს ეწოდება მომიჯნავე, თუ ისინი განსაზღვრავენ ერთ წიბოს. ორ წიბოს ეწოდება მომიჯნავე, თუ მათ აქვთ საერთო წვერო. $G=(X,U)$ გრაფის მოცემა ნიშნავს X და U სიმრავლეების ცოდნას, აგრეთვე მათ შესაბამის ელემენტებს შორის მიმართების (ინციდენციის) აღწერას. მაგალითად, თუ

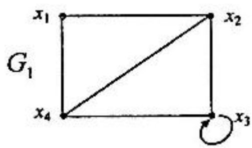
$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \text{ და } U=\{x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,x_1x_2\},$$

მაშინ $G=(X,U)$ გრაფი ასე მოიცემა (ნახ.1):



ნახ.1.

n წვეროს მქონე G გრაფის მოსაზღვრეობის მატრიცა ეწოდება n რიგის $M(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცას, რომლის a_{ij} ელემენტი ტოლია G-ს x_i და x_j წვეროების შემაერთებელ წიბოთა რაოდენობის. მაგალითად, G_1 გრაფს და მის შესაბამის $M(G_1)$ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 2):



$$M(G_1)=\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

ნახ. 2.

G_1 გრაფის x_3 წვეროში გავლებული წრე მიუთითებს, რომ გრაფს ამ წვეროში აქვს მარყუჟი და ამასთან, G_1 არაორიენტირებულია. ასეთი გრაფის მოსაზღვრეობის მატრიცა მთავარი დიაგონალის სიმეტრიულია.

თუ ორიენტირებული G გრაფის x_i წვერო საწყისია, ხოლო x_j- ბოლო და ამავდროულად x_ix_j წიბო ერთია, მაშინ $M(G)$ მატრიცის a_{ij} ელემენტი იქნება 1, ხოლო თუ x_i იქნება ბოლო და x_j საწყისი, მაშინ $a_{ij}=0$ და $a_{ji}=1$.

თუ G გრაფის $M(G)$ მატრიცა შეიცავს მხოლოდ 0 -ს და 1-ს, მაშინ G არ შეიცავს პარალელურ წიბოებს;

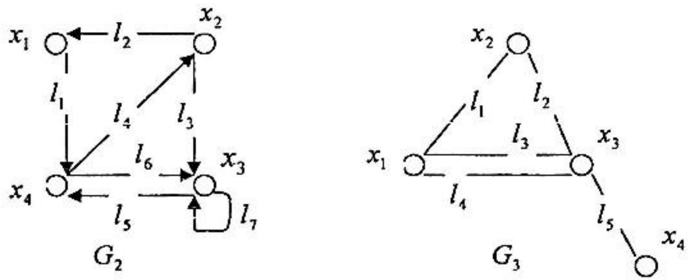
ხოლო თუ მთავარი დიაგონალის ელემენტებია 0, მაშინ გრაფს არ აქვს მარყუჟები.

n წვეროსა და m წიბოსაგან შედგენილი G გრაფის ინციდენციის მატრიცა ეწოდება $I(G)=(b_{ij})_{n\times m}$ მატრიცას, რომლის სტრიქონები შეესაბამება წვეროებს, ხოლო სვეტები - წიბოებს და შემდეგნაირად განისაზღვრება:

1) თუ G ორიენტირებულია, მაშინ: $b_{ij}=1$, როდესაც x_i წვერო არის l_j რკალის საწყისი წვერო; $b_{ij}=-1$, თუ x_i არის l_j-ს ბოლო წვერო; $b_{ij}=0$, თუ x_i წვერო არ არის ინციდენტური l_j რკალის; როდესაც x_i წვეროში გვაქვს მარყუჟი l_j, მაშინ $b_{ij}=k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია, გარდა 1, −1 და 0-ისა;

2) თუ G არაორიენტირებულია, მაშინ $b_{ij}=1$, თუ x_i ინციდენტურია l_j-ს და წინააღმდეგ შემთხვევაში $b_{ij}=0$.

მაგალითები. G_2 და G_3 გრაფების ინციდენციის მატრიცებია $I(G_2)$ და $I(G_3)$ (ნახ. 3):

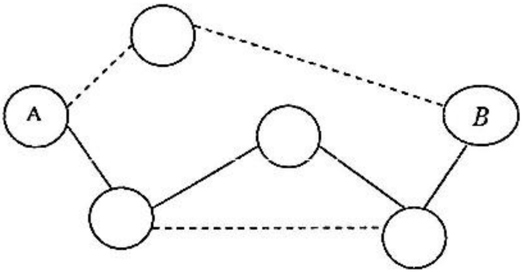


$$I(G_2)=\begin{array}{c|ccccccc} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 \\ \hline x_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ x_4 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$I(G_3) = \begin{array}{c|ccccc} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ნახ. 3.

გზა, რომელიც აერთებს გრაფის A და B წვეროებს, ეწოდება გრაფის წიბოების დალაგებულ ერთობლიობას, თუ მათ აქვთ შემდეგი თვისება: ყოველი წიბოს საწყისი დაწყებული მეორიდან, ემთხვევა წინა წიბოს ბოლოს; ამასთან პირველი წიბოს საწყისი ემთხვევა A წვეროს, ხოლო ბოლო წიბოს ბოლო ემთხვევა B წვეროს (ნახ. 4, AB გზის შესაბამისი წიბოები გამუქებულია):

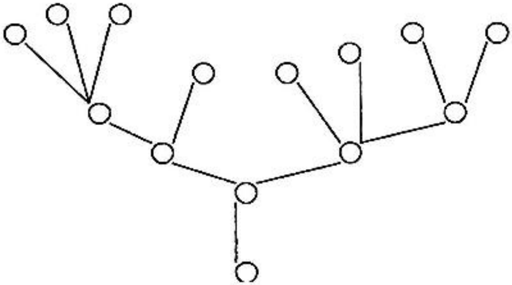


ნახ. 4.

გრაფის წვეროს ეწოდება ლუწი, თუ მისგან გამომავალი (ან მასში შემავალი) წიბოების რიცხვი ლუწია; ხოლო, წვეროს ეწოდება **კენტი**, თუ ასეთი წიბოების რიცხვი კენტია. გრაფს ეწოდება **სასრული**, თუ მისი წვეროების და წიბოების რიცხვი სასრულია. გრაფის A და B წვეროებს ეწოდება **ბმული**, თუ არსებობს გზა, რომელიც აერთებს ამ წვეროებს. გრაფს ეწოდება **ბმული**, თუ მისი ნებისმიერი ორი წვერო ბმულია. ჩვენ ყოველთ-

ვის საქმე გვექნება ისეთ გრაფებთან, რომლებიც სასრულია და ბმული.

გრაფთა მეტად საჭირო კლასს წარმოადგენს ხეები. ხე წარმოადგენს ბმულ გრაფს, რომელსაც არა აქვს ჩაკეტილი გზები (რომელიმე წვეროდან დაწყებული გზით ვერ მივ-ალთ იმავე წვეროში) (ნახ. 5):



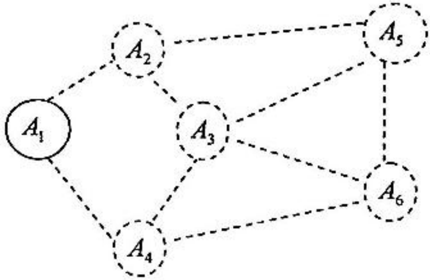
ნახ. 5.

ხეს ანუ ასეთ გრაფს აქვს ოპტიმალურობის შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: წვეროთა n რიცხვი ერთით მეტია მის წიბოთა m რიცხვზე - $n = m + 1$ და პირიქით, თუ $n = m + 1$, მაშინ გრაფი წარმოადგენს ხეს.

ჩვენი შემდეგი ამოცანა დაფუძნებულია დებულებაზე: თუ გრაფი სასრულია და ბმული, მაშინ მისგან შეგვიძლია ავაგოთ ხე, ამასთან არაერთი, რომელშიც წვეროების სიმრავლე იგივეა, რაც მოცემული გრაფის წვეროების სიმრავლე, ხოლო ხის ნებისმიერი წიბო ამავე დროს იქნება გრაფის წიბო (პირიქით შეიძლება არ იყოს). ასეთ ხეს ეწოდება გრაფის წარმომდგენი ან გრაფის ჩონჩხი, ან კიდევ გრაფის გაწელილი ჩონჩხი. თუ გრაფი სრულია, ანუ ნებისმიერი ორი წვერო შეერთებულია წიბოთი, მაშინ მისი წარმომდგენი ხეების რიცხვი ტოლია n^{n-2}, სადაც n გრაფის წვეროთა რიცხვია.

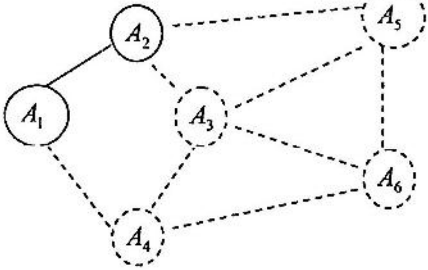
გრაფის წარმომდგენი ხის პოვნის ალგორითმი

ასეთი ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტული გრაფისათვის. ვთქვათ, მოცემულია G გრაფი (ნახ. 6):



ნახ. 6.

ავირჩიოთ G-ს ნებისმიერი წვერო, ვთქვათ A_1 და გავამუქოთ (ანუ მოვნიშნოთ) იგი (მისი წრეწირი). ეს ეტაპი მივაკუთვნოთ თავიდანვე მოცემულ გრაფს. რადგან გრაფს აქვს ექვსი წვერო და მის წარმომდგენ ხეს უნდა ჰქონდეს ხუთი წიბო, ამიტომ ხის აგების პროცესი დავანაწილოთ ხუთ ბიჯად.

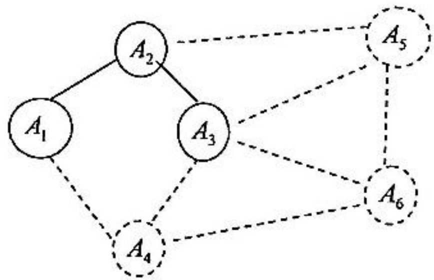


ნახ. 7.

ბიჯი 1. ავირჩიოთ A_1-დან გამომავალი ნებისმიერი წიბო. გავამუქოთ ეს წიბო და ის წვერო, რომელშიც ეს წიბო შედის; მაგალითად, ეს იყოს A_1A_2 წიბო და A_2 წვერო (ნახ. 7).

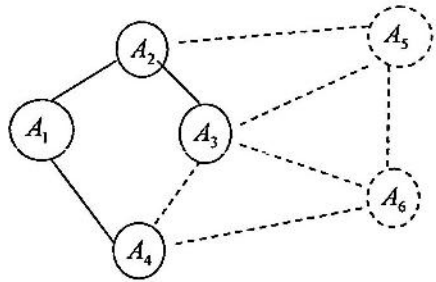
ბიჯი 2. ახლა ავირჩიოთ ნებისმიერი წიბო, გამომავალი ან A_1-დან ან A_2-დან. არჩეული წიბო და ის წვერო, რო-

მელშიც იგი შედის, გავამუქოთ. ეს წიბო იყოს A_2A_3 და A_3 წვერო (ნახ. 8):



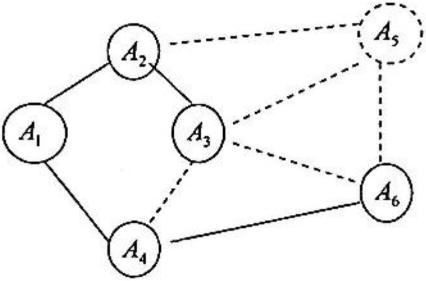
ნახ. 8.

ბიჯი 3. ავირჩიოთ მონიშნული სამი წვეროდან ერთ-ერთიდან გამომავალი ნებისმიერი წიბო; მოვნიშნოთ იგი და ის წვერო, რომელშიც იგი შედის. ვთქვათ, ეს წიბოა A_1A_4 და წვერო A_4 (ნახ. 9):



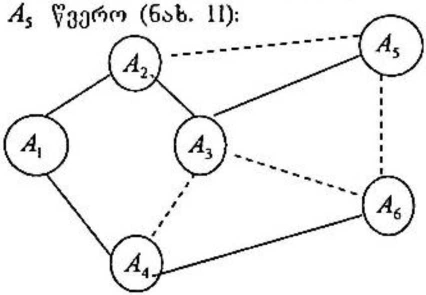
ნახ. 9.

ბიჯი 4. მონიშნული A_1, A_2A_3, A_4 წვეროებიდან ავირჩიოთ ნებისმიერი წვერო, რომლიდანაც გამოდის მოუნიშნავი წიბო და ავირჩიოთ ნებისმიერი ასეთი, ავირჩიოთ მაგალითად A_4A_6 წიბო. მოვნიშნოთ იგი და A_6 წვერო (ნახ. 10):



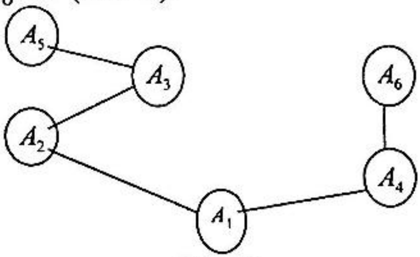
ნახ. 10.

ბიჯი 5. ახლა A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 წვეროებიდან ავირჩიოთ A_3 და მისგან გამომავალი A_3A_5 წიბო. გავამუქოთ ეს წიბო და A_5 წვერო (ნახ. 11):



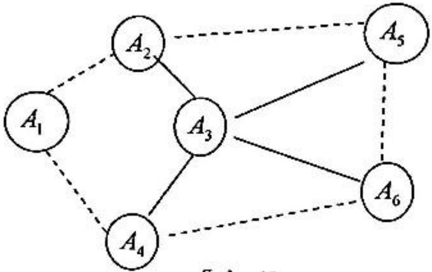
ნახ. 11.

ხუთი ბიჯის შედეგად მონიშულია ყველა წვერო და ხუთი წიბო. მაშასადამე, გრაფის წარმომდგენი ერთ-ერთი ხე ასეთია (ნახ. 12):



ნახ. 12.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი განსაზღვრება: გრაფის ყველა იმ წიბოთა სიმრავლეს, რომლებიც გამოდის მის რომელიმე წვეროდან, ეწოდება ამ წვეროს ვარსკვლავი. შემდეგ ნახაზზე (ნახ.13) მოცემულია A_3 წვეროს ვარსკვლავი:



ნახ. 13.

მოცემული მოსაზღვრეობის მატრიცის შესაბამისი გრაფისა და ამ გრაფის წარმომდგენი ხის აგების პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function mat2grafM(M)
% n-რიგის მოცემული მოსაზღვრეობის მატრიცის
% შესაბამისი არაორიენტირებული ჭარყუჟიანი და
% უმარყუჟო გრაფის აგება, გრაფის წარმომდგენი ხის
% აგება
n= length(M);
t=linspace(0,2*pi,n+1);
z=exp(1i*t);
jj=0;
hold on
for i=1:n
   k=0;
   for j=1:i
```

```
if M(i,j)>0
  if i==j
    t1=linspace(0,2*pi);
z1=exp(-1i*pi/4)*(z(i)+(0.1)*exp(1i*t1));
    plot(z1)
  else
    zz=exp(-1i*pi/4)*[z(i),z(j)];
    plot(zz)
    plot(zz,'o')
  end
 pause(1)
% გრაფის წარმომდგენი ხის აგება
   if jj<=j
    k=k+1;
    if k<2
      jj=j;
    zz=exp(-1i*pi/4)*[z(i),z(j)];
    plot(zz,'LineWidth',3)
    plot(zz,'o')
    plot(zz,'*','color','k')
    end
   end
end
% წვეროებთან წარწერების გაკეთება
   j1=num2str(j);
   s=strcat('x',j1);
   a=exp(-1i*pi/4)*exp(1i*t(j));
   if j<=n/2
     text(real(a)+0.1,imag(a),s)
   else
     text(real(a)-0.2,imag(a),s)
```

```
      end
   end
end
axis(axis+[-.5 .5 -.5 .5])
```

ამოცანა. მოცემულია გრაფის მოსაზღვრეობის მატრიცა

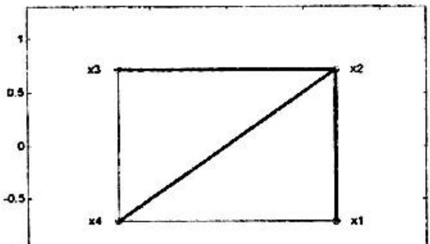
$$M_1=\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

ეს მატრიცა **mat2grafM(M) m**–ფაილ-ფუნქციას **Matlab**–ის ბრძანებათა ფანჯრიდან მივაწოდოთ შემდეგი ბრძანებებით:

>> M=[0 1 0 1;1 0 1 1;0 1 0 1 ;1 1 1 0];

>> function mat2grafM(M).

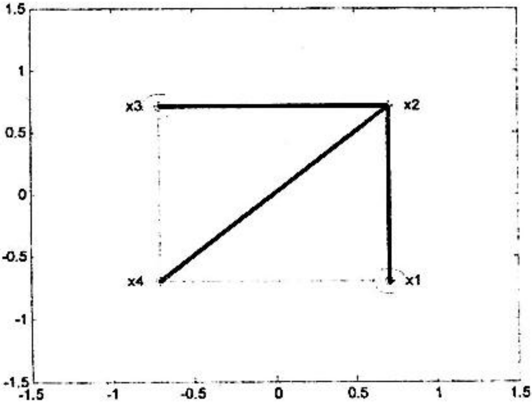
მივიღებთ შესაბამის გრაფს და მის წარმომდგენ ხეს, რომლის წიბოები გამუქებულია



ვთქვათ, შემდეგი მატრიცის გრაფს აქვს მარყუჟები:

$$
M_2 = \begin{array}{c|cccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
x_4 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}.
$$

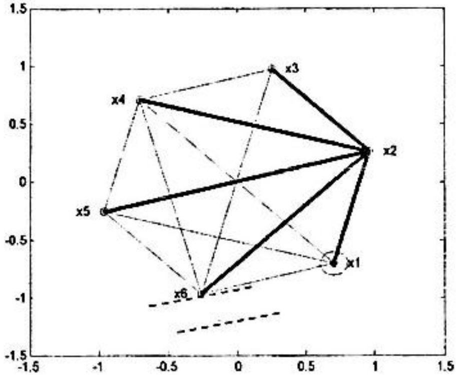
შესაბამის გრაფს და მის წარმომდგენ ხეს აქვს სახე



ახლა განვიხილოთ უფრო დიდი ზომის მოსაზღვრეობის მატრიცა:

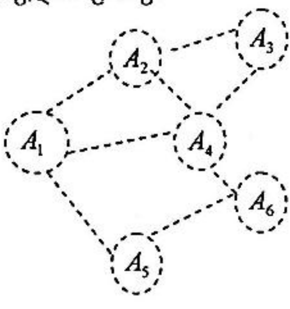
$$
M_3 = \begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
x_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}.
$$

შესაბამისი გრაფი და ხე ასეთია:



3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა (ან ამოცანები). ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენენ ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია გრაფი



და მატრიცა

$$M(G) = \begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ A_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ A_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(ნიმუშის მიხედვით სტუდენტები აიღებენ მონაცემებს თავიანთი სურვილით ან პედაგოგის მითითებით). იპოვეთ გრაფის მომიჯნავეობის და ინციდენციის მატრიცები. მოცემული მატრიცით დახაზეთ გრაფი. ააგეთ მოცემული გრაფის წარმომდგენი ხე.

2. გრაფის მინიმალურად წარმომდგენი ხის პოვნის ალგორითმი

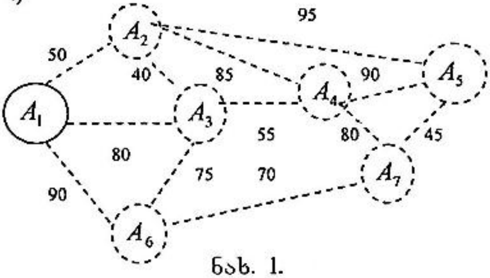
1. სამუშაოს მიზანი - მოცემული გრაფისათვის ისეთი წარმომდგენი ხის პოვნის ალგორითმის დაუფლება, რომლის ყველა წიბოს წონათა ჯამი იქნება მინიმალური. დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. გრაფებთან დაკავშირებულ მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში გვხვდება ისეთი გრაფის საჭიროება, როდესაც გრაფის თითოეულ წიბოს მიწერილი აქვს დადებითი (ან არაუარყოფითი) რიცხვი. ასეთ რიცხვს ეწოდება ამ წიბოს წონა. გრაფს, რომელიც ასეთი წესითაა დატვირთული, ეწოდება ქსელი, ხოლო გრაფის წვეროებს - კვანძები, წიბოებს კი - რკალები. გამოყენების თვალსაზრისით ასეთ რიცხვით დატვირთვას აქვს სხვადასხვა აზრი და შეიძლება აღნიშნავდეს სიგრძეს, ღირებულებას, გამტარუნარიანობას, დროის ხანგრძლივობას და სხვას.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც რკალების წონაში ვიგულისხმებთ მათ სიგრძეებს. ვიცით, რომ გრაფის წარმომდგენი ხე შეიძლება იყოს რამდენიმე. თუ ყოველ ასეთ ხეს შევუსაბამებთ რიცხვს, რომელიც ტოლი იქნება მისი ყველა რკალის სიგრძეთა (ზოგადა,დ წონების) ჯამის, მაშინ ბუნებრივია დავსვათ ამოცანა ისეთი წარმომდგენი ხის პოვნის შესახებ, რომლის ყველა რკალის სიგრძეთა ჯამი იქნება მინიმალური. ასეთ ხეს ეწოდება მინიმალურად წარმომდგენი ხე. ჩვენი სამუშაოს ძირითადი ამოცანაა ასეთი ხის პოვნის ალგორითმის ცოდნის დაუფლება. ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტული ქსელისათვის.

ამოცანა 1. გვაქვს 7 ქალაქი $A_1, A_2, ..., A_7$, რომლებიც ერთმანეთთან უნდა დავაკავშიროთ გზის ყველაზე იაფი ქსელით. ცნობილია, რომ $A_i A_j$ გზის მონაკვეთის აგების

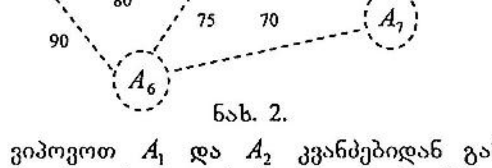
ხარჯები პროპორციულია მისი სიგრძის. ასევე შეგვიძლია ქსელის რკალზე ამ მონაკვეთის აგების ხარჯები მივუთითოთ (ნახ. 1):



ნახ. 1.

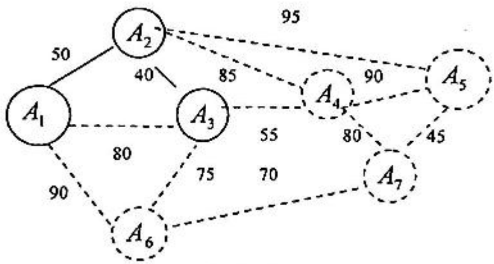
შენიშვნა 1. ისეთი გრაფი, რომლის შესაბამისი ქსელი იქნება ყველაზე იაფი, უნდა იყოს ხე. ასეთი ხის რკალების რიცხვი იქნება 6. ამიტომ, მინიმალურად წარმომდგენი ხის პოვნის ალგორითმი განიხილება 6 ბიჯისათვის. ალგორითმს დავიწყებთ გრაფის ნებისმიერი კვანძიდან. ვთქვათ, ესაა A_1. მისი წრეწირი გავამუქოთ მოცემულ პირველ ნახაზზე.

ბიჯი 1. ავირჩიოთ A_1-დან გამომავალი ყველაზე იაფი გზა A_1A_2, რომლის სიგრძეა 50. გავამუქოთ ეს რკალი და A_2 კვანძი (ნახ. 2):



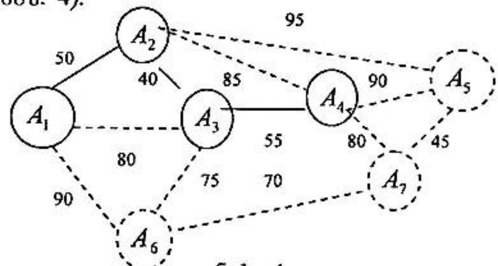
ნახ. 2.

ბიჯი 2. ვიპოვოთ A_1 და A_2 კვანძებიდან გამომავალი ყველაზე მოკლე რკალი, რომელიც ჯერ არაა მონიშნული. ეს არის A_2A_3, რომლის სიგრძეა 40. ეს რკალი დავუმატოთ ხეს, რისთვისაც გავამუქოთ იგი და A_3 კვანძი (ნახ. 3):



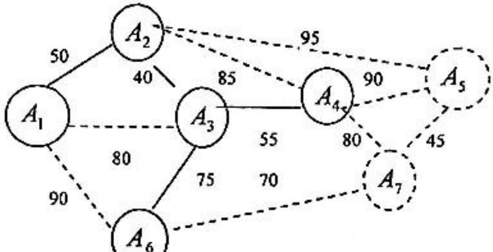
ნახ. 3.

ბიჯი 3. A_1, A_2, A_3 კვანძებიდან ყველაზე ახლოსაა მოუნიშნავი A_4 კვანძი. ამიტომ, გავამუქოთ ეს კვანძი და A_3A_4 რკალი (ნახ. 4):



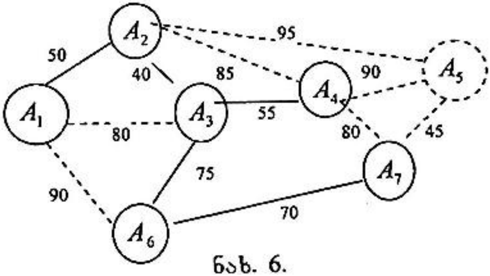
ნახ. 4.

ბიჯი 4. A_1, A_2, A_3, A_4 კვანძებიდან ყველაზე ახლოსაა მოუნიშნავი A_6 კვანძი. მოვნიშნოთ ეს კვანძი და A_3A_6 რკალი (ნახ. 5).



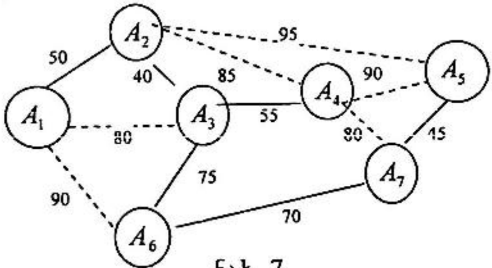
ნახ. 5.

ბიჯი 5. მონიშნული A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 კვანძებიდან ყველაზე ახლოს მდებარე მოუნიშნავი კვანძია A_7, რომელიც A_6-დან დაშორებულია 70 ერთეულით. გავამუქოთ A_7 წვერო და A_6A_7 რკალი (ნახ. 6):



ნახ. 6.

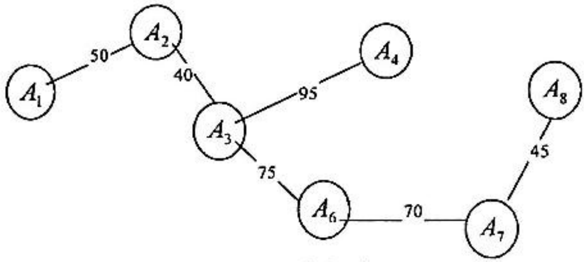
ბიჯი 6. ახლა მოუნიშნავი A_5 კვანძი არის A_7-დან უფრო ახლოს, ვიდრე A_2-დან და A_4-დან. ამიტომ, გავამუქოთ A_7A_5 და A_5 (ნახ. 7):



ნახ. 7.

ექვსი ბიჯის შედეგად მონიშნულია ქსელის ყველა კვანძი და ამიტომ საძიებელ ხეს აქვს სახე (ნახ. 8).

შენიშვნა 2. აქ განხილული ალგორითმი მარტივად შეგვიძლია განვიხილოთ ე.წ. **ღირებულებათა ცხრილების (მატრიცების)** საშუალებით. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.



ნახ. 8.

ამოცანა 2. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ქალაქები ერთმანეთთან დაავაკავშირ-ოთ იაფი ქსელით. ცნობილია ნებისმიერი ორი ქალაქის დამაკავშირებელი გზის სამუშაოთა ღირებულება. აღნიშნული ღირებულებები მოცემულია შემდეგი ღირებულებათა მატრიცით:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	-	9	13	10	7
A_2	9	-	6	9	12
A_3	13	6	-	10	8
A_4	10	9	10	-	9
A_5	7	12	8	9	-

გზათა ქსელი მინიმალური ღირებულებით, რომელიც წარმოადგენს ხეს, შედგება 5–1=4 რკალისაგან და მისი აგებისათვის საჭიროა 4 ბიჯი. თავიდან ავირჩევთ გზის ყველაზე იაფ მონაკვეთს. ცხრილიდან ჩანს, რომ ასეთი იაფი მონაკვეთია A_2A_3. გავამუქოთ ცხრილში ეს ღირებულებები:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	-	9	13	10	7
A_2	9	-	6	9	12
A_3	13	6	-	10	8
A_4	10	9	10	-	9
A_5	7	12	8	9	-

შემდეგ გავაგრძელოთ A_2A_3 გზა იაფი გზით, რომელიც გამოდის ან A_2-დან ან A_3-დან. ასეთია A_3-დან გამომავალი A_3A_5, რომლის ფასია 8. გავამუქოთ ეს მნიშვნელობებიც:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	-	9	13	10	7
A_2	9	-	6	9	12
A_3	13	6	-	10	8
A_4	10	9	10	-	9
A_5	7	12	8	9	-

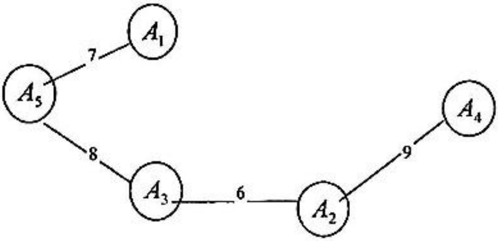
მესამე ბიჯზე ავირჩიოთ A_2, A_3, A_5 ქალაქებიდან გამომავალი ყველაზე იაფი გზა, რომელიც არის A_5A_1 და მისი ფასია 7. გავამუქოთ ცხრილში ეს მნიშვნელობები:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	-	9	13	10	7
A_2	9	-	6	9	12
A_3	13	6	-	10	8
A_4	10	9	10	-	9
A_5	7	12	8	9	-

მეოთხე ბიჯზე ავირჩიოთ მონაკვეთი ისე, რომ არ წარმოიქმნას ციკლი. ამისათვის A_4 ქალაქი შევაერთოთ მის უახლოეს A_2 ქალაქთან, ანუ ავირჩიოთ A_4A_2 ქალაქი, რომლის ფასია 9:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	-	9	13	10	7
A_2	9	-	6	9	12
A_3	13	6	-	10	8
A_4	10	9	10	-	9
A_5	7	12	8	9	-

მაშასადამე, მინიმალურად წარმომდგენ ხეს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 9):



ნახ. 9.

აქედან ჩანს, რომ გზის ყველაზე იაფი ქსელის აგება ჯდება 6+8+7+9=30 ერთეული.

მე-2 ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function MinGza(M)
%უმოკლესი გზის პოვნა
a=M;
n=length(a);
for i=1:n
  for j=1:n
     if a(i,j)==0
        a(i,j)=inf;
     end
  end
end
k=1:n;
listV(k)=0;
listV(1)=1;
e=1;
while (e<n)
   min=inf;
    for i=1:n
      if listV(i)==1
         for j=1:n
            if listV(j)==0
               if min>a(i,j)
                  min=a(i,j);
```

```
                b=a(i,j);
                s=i;
                d=j;
              end
            end
          end
        end
    end
    listV(d)=1;
    cona(e)=b;
    sackisi(e)=s;
    bolo(e)=d;
    e=e+1;
end
fprintf('umoklesi gzis Sesabamisi wveroebi da Stoebia');
fprintf('\nFORMAT: wibos wona(sawyisi kvanZi, bolo kvanZi)
\n');
for g=1:e-1
fprintf('%d(%d,%d)\n',wona(g),sawyisi(g),bolo(g));
end
fprintf('\n')
disp('minimaluri gzis sigrZe=')
disp(sum(wona))

%გრაფისა და მინიმალურად წარმომდგენი ხის ნახაზი –
MinXe1(M,sawyisi,bolo)

function MinXe1(M, sawyisi,bolo)
n=length(sawyisi);
x=linspace(pi,2*pi+pi/8,n+1);
z=exp(1i*x);
hold on
for i=1:n
   plot(z(i),'ro')
   Z=[z(i),z(i+1)];
   plot(Z,'LineWidth',3)
end
plot(z(n+1),'ro')
m=1;
k=num2str(m);
```

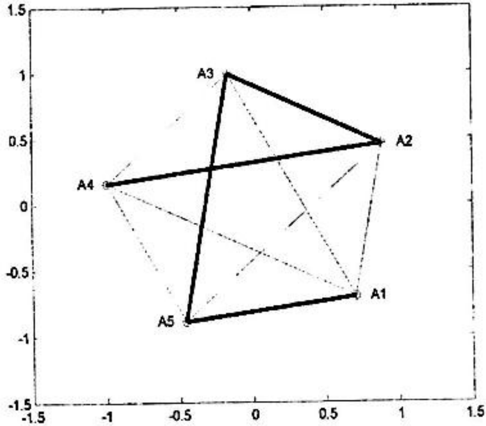
```
s=strcat('A',k);
text(real(z(1)-0.2),imag(z(1)),s)
for i=1:n
   for j=1:n
      if sawyisi (j)==bolo(i)
         k=num2str(sawyisi (j));
         s=strcat('A',k);
         text(real(z(j))-0.02,imag(z(j))-0.15,s)
      end
   end
end
 k=num2str(bolo(n));
 s=strcat('A',k);
 text(real(z(n+1))+0.1,imag(z((n+1))),s)
axis(axis+[-.5 .5 -.5 .5])
```

ბრძანებათა ფანჯარაში უნდა მიეწოდოს

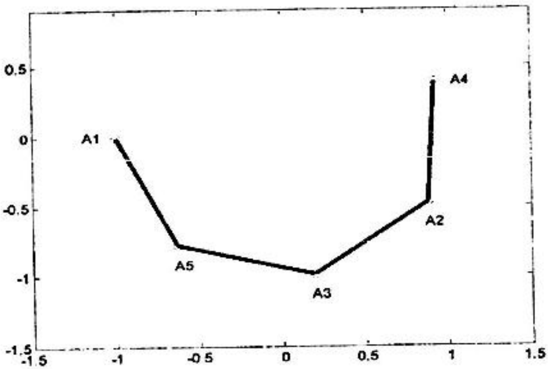
>>M=[0 9 13 10 7;9 0 6 9 12;13 6 0 10 8;10 9   10 0 9;7 12 8 9 0];
>>MinGza(M)

MinGza(M) - მინიმალური სიგრძის გზის პოვნის პროგრამა **M** ღირებულებათა მატრიცის მიხედვით. შესრულების პროცესში ეს პროგრამა იყენებს მოცემული მატრიცის შესაბამისი გრაფისა და მინიმალური გზის აგების პროგრამას - **MinXe1(M, sawyisi, bolo) M** მატრიცის და მინიმალური ხის საწყისი და ბოლო კვანძების მიხედვით.

ბრძანებათა ფანჯარაში გამოდის ინფორმაცია:
უმოკლესი გზის შესაბამისი წვეროები და შტოებია
FORMAT: wibos wona(sawyisi kvanZi, bolo kvanZi)
7(1,5)
8(5,3)
6(3,2)
9(2,4)
minimaluri gzis sigrZe =   30



მინიმალურად წარმომდგენ ხეს აქვს სახე:



3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა (ან ამოცანები). ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული

ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რვეულის საშუალებით.

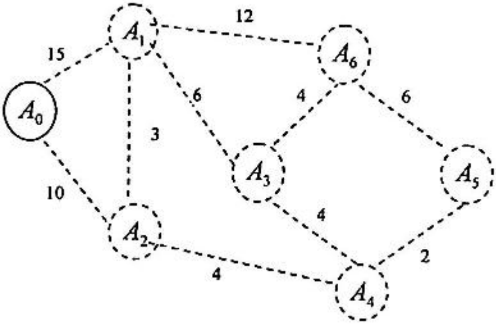
4. ამოცანა. მოცემულია ქსელი და ღირებულებათა მატრიცა (ნიმუშის მიხედვით სტუდენტები აიღებენ მონაცემებს თავიანთი სურვილით ან პედაგოგის მითითებით). იპოვეთ მინიმალურად წარმომდგენი ხე ორივე მოცემულობისათვის.

3. უმოკლესი მარშრუტის ამოცანა და მისი ამოხსნის ალგორითმი

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია ქსელი, რომლის თითოეული რკალის წონაში ვგულისხმობთ ამ რკალის სიგრძეს. სამუშაოს მიზანია ვიპოვოთ ისეთი უმოკლესი მარშრუტები, რომელთა გავლით მივალთ წინასწარ გამოყოფილი კვანძიდან თითოეულში. ამისათვის აქ აღწერილია ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი ერთი კონკრეტული ამოცანის შემთხვევაში. მისი გამოყენება ნებისმიერი ანალოგიური ამოცანისათვის არ წარმოადგენს სირთულეს.

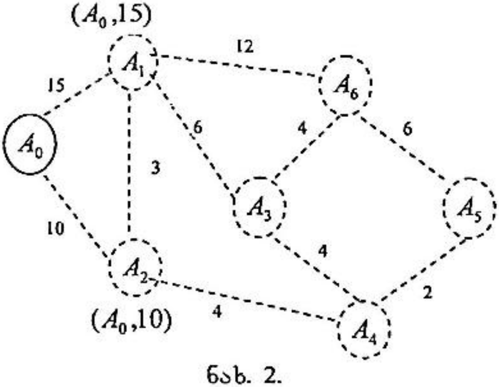
2. ძირითადი განსაზღვრებები. ზემოაღნიშნული ალგორითმი შემოთავაზებულია ე. დეიკსტრის მიერ. იგი განსაზღვრავს იტერაციულ პროცედურას, რომლითაც ყოველ კვანძს მიეწერება ნიშანი - ან მუდმივი და იგი გვიჩვენებს უმოკლეს მანძილს წინასწარ გამოყოფილი კვანძიდან ამ კვანძამდე; - ან დროებითი, რომელიც გვიჩვენებს გამოყოფილი კვანძიდან ამ კვანძამდე მანძილის შეფასებას ზემოდან. ყოველ იტერაციაში ზუსტდება შეფასებები და ყოველ ბიჯზე ზუსტად ერთი დროებითი ნიშანი იცვლის თავის სტატუსს მუდმივზე (ამის შემდეგ, ეს ნიშანი არ იცვლება). განვიხილოთ ასეთი ალგორითმი ერთი კონკრეტული ამოცანისათვის.

ამოცანა. მოცემულია ქსელი, რომელშიც გამოყოფილია A_0 კვანძი. ვიპოვოთ უმოკლესი მარშრუტები, რომლებიც გაივლის ქსელის რკალებზე და მიგვიყვანს A_0 -დან ნებისმიერ კვანძში (ნახ. 1):



ნახ. 1.

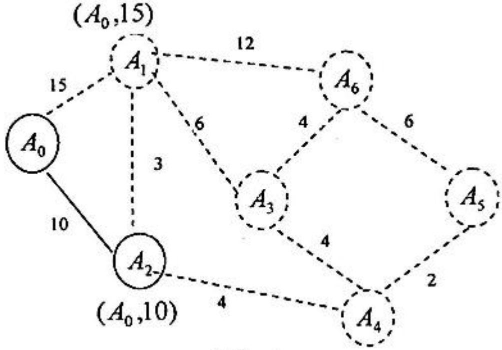
ბიჯი 1. განვიხილოთ ისეთი კვანძები, რომლებიც გამოყოფილ A_0 კვანძთან შეერთებულია ერთი რკალით, ასეთებია A_1 და A_2. ამ კვანძებს მივაწეროთ ნიშნები $(A_0,15)$ და $(A_0,10)$ შესაბამისად, სადაც რიცხვი გვიჩვენებს მანძილს A_0-დან მოცემულ კვანძამდე. ეს ნიშნები ჯერჯერობით დროებითია (ნახ. 2):



ნახ. 2.

მიღებული ორი A_0A_1 და A_0A_2 რკალიდან მეორე რკალი უმოკლესია. ეს ნიშნავს, რომ A_0 და A_2-ის შემაერთებელი ნებისმიერი მარშრუტიდან A_0A_2 რკალი არის ყველა-

ზე მოკლე. მუქი ფერით მოვნიშნოთ A_2 კვანძის წრეწირი და A_0A_2 რკალი. ამით ნიშანი $(A_0,10)$ გახდება მუდმივი (ნახ. 3):



ნახ. 3.

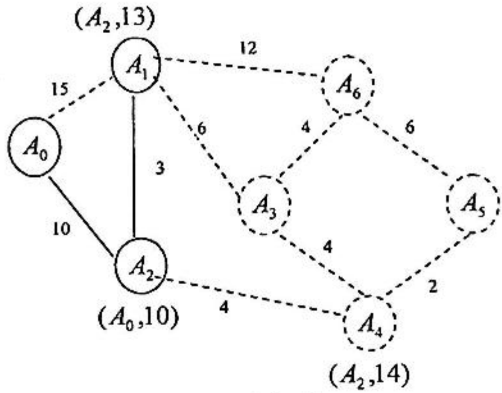
ამრიგად, 1-ელი ბიჯის შემდეგ A_0 და A_2 კვანძებს აქვს მუდმივი ნიშნები. ამ ბიჯზე დავადგინეთ უმოკლესი მარშრუტის სიგრძე A_0-დან A_2-მდე და ეს მონაცემი ჩავწეროთ შემდეგ ცხრილში, სადაც აღნიშნული სიგრძე გამუქებული ფერითაა ნაჩვენები (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	0	15	10				

ბიჯი 2. შევარჩიოთ ისეთი კვანძები, რომლებსაც არა აქვს მუდმივი ნიშნები და მათი დაკავშირება A_0 და A_2-თან შეიძლება ერთი რკალით. ასეთი კვანძებია A_1 და A_4. ვიპოვოთ უმოკლესი მარშრუტები A_0-დან A_1-მდე და A_0-დან A_4-მდე. შევადაროთ A_0A_1 და $A_0A_2A_1$ მარშრუტების სიგრძეები. ცხადია, პირველის სიგრძე მეტია მეორეზე - 15>10+3. ე.ი. A_0-დან A_1-მდე უმოკლესი მანძილია 13. რადგან უმოკლესი მანძილი A_0-დან A_4-მდე

არის 14, რომელიც მეტია 13-ზე, ამიტომ გამუქდება A_2A_1 რკალი და A_1 კვანძი. მისი ნიშანი $(A_0,15)$ შეიცვლება მუდმივი $(A_2,13)$-ით. A_4 კვანძის ნიშანი $(A_2,14)$ რჩება დროებითი (ნახ. 4):



ნახ. 4.

აქ $(A_2,13)$-ში 13 ნიშნავს $A_0A_2A_1$ გზის სიგრძეს A_0-დან A_1-მდე, ხოლო A_2 ნიშნავს, რომ ის A_1-ის წინა კვანძია ამ გზაზე. ამრიგად, ორი ბიჯის შემდეგ გვაქვს ნაპოვნი ორი უმოკლესი მარშრუტი და სამ A_0, A_1, A_2 კვანძს აქვს მუდმივი ნიშანი. ეს პირობები მოვათავსოთ ცხრილში (ცხრილი 2).

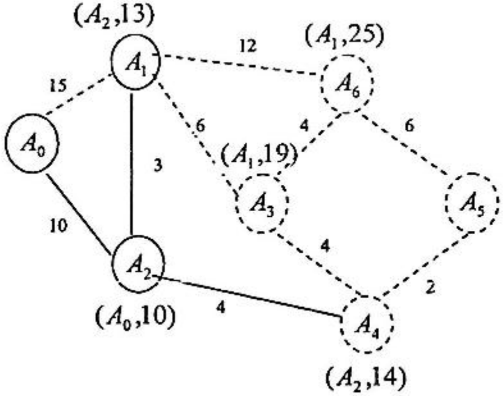
ცხრილი 2

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	0	15	10				
2		13			14		

ბიჯი 3. ბოლოს მოვნიშნეთ A_1 კვანძი. ახლა ავირჩიოთ ყველა ისეთი კვანძი, რომლებიც შეერთებულია ბოლოს მონიშნულ A_1 კვანძთან ერთი რკალით და არ აქვს მუდ-

მივი ნიშანი. ასეთებია A_3 და A_6. ამ შემთხვევაში A_3 მიიღებს დროებით ნიშანს $(A_1{,}19)$, ხოლო A_6 მიიღებს დროებით ნიშანს $(A_1{,}25)$.

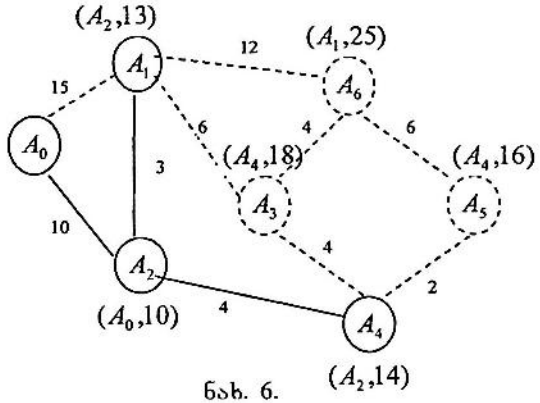
დროებითნიშნიანი A_3, A_4, A_6 კვანძებიდან ავირჩევთ ისეთ კვანძს, რომლიდანაც მანძილი A_0-მდე უმცირესია. ასეთია A_4 კვანძი. მივანიჭოთ მას $(A_2{,}14)$ ნიშანი მუდმივად და გავამუქოთ A_4 კვანძი და A_2A_4 რკალი. მაშასადამე, მე-3 ბიჯის ბოლოს A_0, A_1, A_2, A_4 კვანძებს აქვს მუდმივი ნიშნები, A_3 და A_6 კვანძებს - დროებითი ნიშნები, ხოლო A_5-ს - არცერთი (ნახ. 5):



ნახ. 5.

ბიჯი 4. ავირჩიოთ ყველა კვანძი, რომლებიც ბოლოს მონიშნულ A_4 კვანძთან შეერთებულია ერთი რკალით და არ აქვს მუდმივი ნიშნები. ასეთია A_3 და A_5. მათგან უმცირესია A_4A_5 რკალის სიგრძე და მივანიჭოთ A_5-ს დროებითი ნიშანი $(A_4{,}16)$.

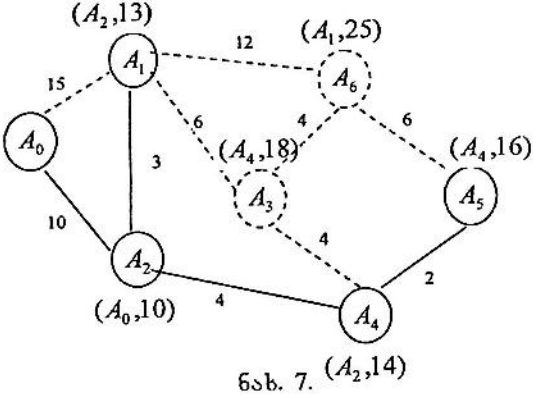
შევადაროთ $(A_1,19)$ და $(A_4,16)$ ნიშნები. გზა A_0-დან A_3-მდე, რომელიც გაივლის A_4-ში, უფრო მოკლეა იმ გზასთან შედარებით, რომელიც გაივლის A_1-ში. ამიტომ, $(A_1,19)$ შევცვალოთ $(A_4,18)$-ით (ნახ. 6):



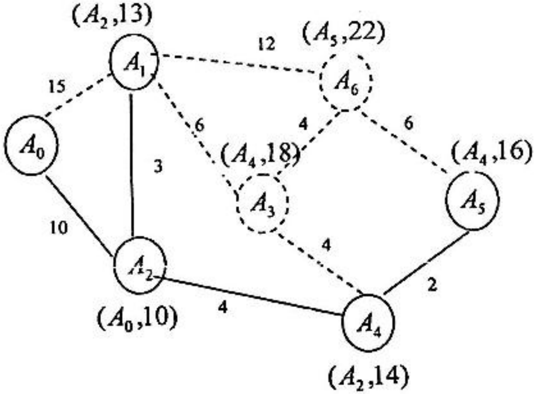
ნახ. 6.

A_0 კვანძიდან სამ დროებითნიშნიან A_3, A_5, A_6 კვანძებამდე ყველაზე ახლოსაა A_5. ამიტომ გავამუქოთ A_5 კვანძი და A_4A_5 რკალი. A_5-ის ნიშანი $(A_4,16)$ გახდება მუდმივი (ნახ. 7).

ბიჯი 5. შევარჩიოთ კვანძები, რომლებიც ბოლოს მონიშნულ A_5 კვანძთან შეერთებულია ერთი რკალით და არ აქვს მუდმივი ნიშანი. ასეთია A_6. შევადაროთ A_6-ის მისანიჭებელი ნიშნები $(A_1,25)$ და $(A_5,22)$. რადგან $(A_5,22)$ უპირატესია ვიდრე $(A_1,25)$, ამიტომ A_6 კვანძს მივაწეროთ ნიშანი $(A_5,22)$ (ნახ. 8).

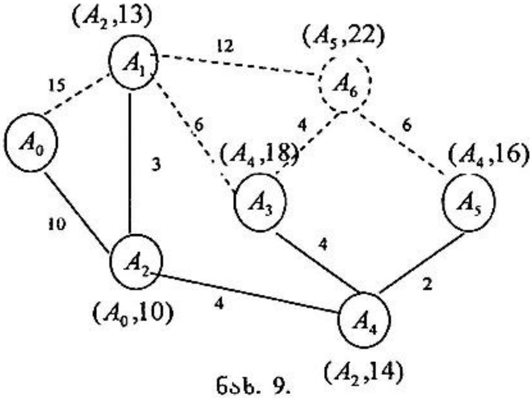


ნახ. 7.



ნახ. 8.

დავაკვირდეთ დროებით მონიშნულ A_3 და A_6 კვანძებს. A_0 კვანძიდან ამ კვანძებამდე მანძილების შედარებით ვღებულობთ, რომ უმცირესი იქნება გზა A_3-მდე. ამიტომ, მუდმივად მოინიშნება A_3 კვანძი, გამუქდება იგი და A_4A_3 რკალი (ნახ. 9):



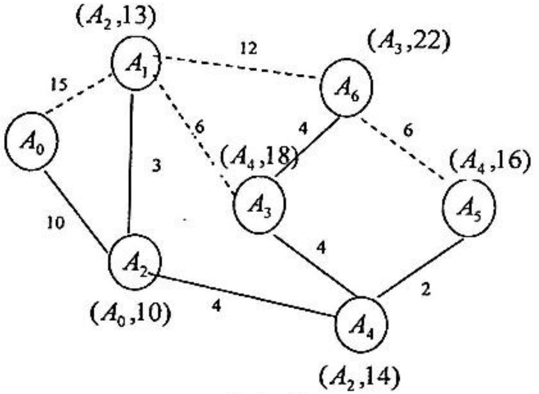
ნახ. 9.

ბიჯი 6. ერთადერთი დროებითი ნიშანი აქვს ქსელის A_6 კვანძს და ესაა $(A_5,22)$. წინა ბიჯზე მუდმივი ნიშანი მიიღო A_3 კვანძმა. ამიტომ A_3-დან A_6-მდე უმცირესი მანძილია 4 და A_6 მიიღებს მუდმივ ნიშანს $(A_3,22)$. გავამუქებთ A_6 კვანძს და A_3A_6 რკალს. A_6 კვანძისათვის შეგვიძლია გავითვალისწინოთ $(A_3,22)=(A_5,22)$ პირობაც. ამრიგად, მე-6 ბიჯის ბოლოს ყველა კვანძს აქვს მუდმივი ნიშანი და ამით პროცესი ამოწურულია (ნახ. 10).

ყველა მიღებული მონაცემი შეგვიძლია ცხრილის სახით წარმოვადგინოთ (ცხრილი 3).

ცხრილი 3

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	0	15	10				
2		13			14		
3				19	14		
4				18		16	25
5				18			22
6							22



ნახ. 10.

3. **დამოუკიდებელი სამუშაო.** ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ისინი წარმოადგენენ ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. **ამოცანა.** მოცემულია ქსელი, რომლის წონებში იგულისხმება კვანძებს შორის მანძილები. იპოვეთ უმოკლესი სიგრძის მარშრუტები მინიშნებული კვანძიდან თითოეულ კვანძამდე.

4. მაქსიმალური ნაკადი ორიენტირებულ ქსელში

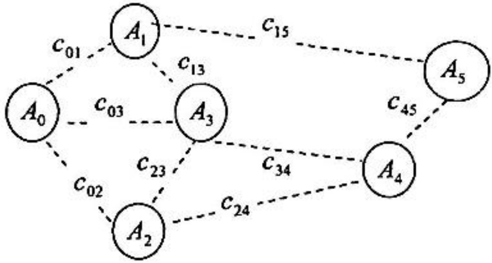
1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია სატრანსპორტო ქსელი, რომლის თითოეული რკალისათვის ცნობილია გამტარუნარიანობა. ასეთ ქსელში გვაქვს ერთი საწყისი წყარო და ერთი ჩამდინარი კვანძი. ამოცანის დანიშნულებაა საწყისი წყაროდან გამომავალი და ჩამდინარ კვანძში ჩასული მაქსიმალური ნაკადის განსაზღვრა. ასეთი ნაკადის პოვნის ალგორითმი განისაზღვრება მოცემულ ლაბორატორიულ სამუშაოში. ამისათვის აქ აღწერილია ამოხსნის ალგორითმი ერთი კონკრეტული ამოცანის შემთხვევაში. მისი გამოყენება ნებისმიერი ანალოგიური ამოცანისათვის არ წარმოადგენს სირთულეს.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. ქსელის რკალს ეწოდება ორიენტირებული, თუ კვანძები, რომლებსაც ეს რკალი აერთებს დალაგებულია - ერთი მათგანი საწყისია, მეორე კი ბოლო. ასეთ რკალს აღვნიშნავთ ისრით და გვიჩვენებს რომელი კვანძიდან გამოდის და რომელში შედის. ქსელს ეწოდება ორიენტირებული, თუ ორიენტირებულია მისი ყველა რკალი. კვანძს, რომელიც საწყისია ყველა თავისი რკალის, ეწოდება წყარო, რკალებს კი - გამომავალი. კვანძს, რომელიც საბოლოოა ყველა თავისი რკალის, ეწოდება ჩამდინარი, მის რკალებს კი - შემომავალი. ყველა სხვა კვანძს ეწოდება შუალედური.

მივაწეროთ ორიენტირებული ქსელის A_iA_k რკალს არაუარყოფითი რიცხვი $c_{ik} = c(A_i, A_k)$, რომელსაც ვუწოდოთ ამ რკალის გამტარუნარიანობა. A_iA_k რკალის გამტარუნარიანობაში ვგულისხმობთ იმ პროდუქტების მაქსიმალურ რაოდენობას, რომლებიც შეიძლება გადავიტანოთ

დროის ერთეულში A_i-დან A_k-ში. აღნიშნული ტიპის ქსელებს, სატრანსპორტო ქსელები ეწოდება.

ვთქვათ ასეთ სატრანსპორტო ქსელს აქვს სახე (ნახ. 1):



ნახ. 1.

აქ A_0 წყაროა, A_5 - ჩამდინარი, $A_1,\dots,A_4$ - შუალედური კვანძებია.

ვიტყვით, რომ ქსელში მოცემულია V სიდიდის ნაკადი, თუ ქსელის თითოეულ A_iA_k რკალზე მიწერილია არაუარყოფითი მთელი რიცხვი

$$\varphi_{ik} = \varphi(A_i, A_k),$$

რომელსაც ეწოდება ნაკადი A_iA_k რკალზე. ამასთან, სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1) $\varphi_{ik} \le c_{ik}$, ანუ ნაკადი რკალზე არ აღემატება მის გამტარუნარიანობას;

2) A_0 წყაროდან გამომავალ რკალებზე ნაკადების ჯამი ტოლია V-ს:

$$\sum_{i \in A_0-} \varphi_{0i} = \sum_{i \in A_0-} \varphi(A_0, A_i) = V.$$

აქ $i \in A_0-$ აღნიშნავს ყველა A_0A_i რკალს, რომლებიც გამოდის A_0 - დან;

3) ყოველ შუალედურ $A_1,\dots,A_4$ კვანძში ყველა რკალით შემავალი ნაკადების ჯამი ტოლია ამ კვანძიდან გამომავალი ყველა რკალის ნაკადების ჯამის:

$$\sum_{i\in A_k+}\varphi(A_i,A_k)=\sum_{l\in A_k-}\varphi(A_k,A_l)\,,\ k=1,...,n-1\,. \qquad (1)$$

აქ $i\in A_k+$ აღნიშნავს A_k კვანძში შემავალ A_i რკალს და შესაბამისი ჯამი წარმოებს ყველა ასეთი რკალით, ხოლო $l\in A_k-$ აღნიშნავს A_k კვანძიდან გამომავალ A_l რკალს. მაშასადამე, (1) ტოლობა აღნიშნავს, რომ ყოველი შუალედური კვანძიდან გამოდის ზუსტად იმდენი პროდუქტი, რამდენიც მასში შევიდა და ამით იგულისხმება აგრეთვე, რომ A_k კვანძში დანაკარგი არ ხდება.

(1) ტოლობების შეკრებით ყოველი $k=1,2,3,4$-თვის და შესაკრებთა გარკვეული თვისებებიდან გამომდინარე, მტკიცდება ტოლობა

$$\sum_{i\in A_0-}\varphi(A_0,A_i)=\sum_{l\in A_5+}\varphi(A_l,A_5)=V\,.$$

რაც ნიშნავს, რომ A_0 წყაროდან გამომავალი V ნაკადი ტოლია A_5 ჩამდინარეში შემავალი V ნაკადის. მაშასადამე, არც ქსელში არ გვაქვს რაიმე დანაკარგი.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ქსელში არ გვაქვს ჯერადი რკალები, ანუ განსხვავებული რკალები, რომლებიც აერთებენ ერთსა და იმავე კვანძებს (თუ გვაქვს A_iA_k რკა-ლი, მაშინ არ გვაქვს A_kA_i რკალი).

განვიხილოთ სატრანსპორტო ქსელი, რომლის ყოველ რკალს აქვს გამტარუნარიანობა ორივე მხარეს და ისინი განსაზღვრავენ ნაკადის მაქსიმალურ რაოდენობას, რომელიც გაივლის ამ რკალზე. ამ შემთხვევაში, ორიენტირებული (ზემოთ განსაზღვრული ცალმხრივი) ქსელის რკალს შეესაბამება ნულოვანი გამტარუნარიანობა საპირისპირო მიმართულებით.

ქსელის გამტარუნარიანობები წარმოვადგინოთ მატრიცული $C=(c_{ij})$ ფორმის სახით. ამოცანის დანიშნულებაა A_0 წყაროდან გამომავალი და A_n ჩამდინარეში ჩასული მაქსიმალური ნაკადის განსაზღვრა.

ასეთი ნაკადის პოვნის ალგორითმი განისაზღვრება შემდეგი სამი ბიჯის საშუალებით.

ბიჯი 1. ვიპოვოთ გზა, რომელიც A_0-ს აერთებს A_n-თან და რომლითაც ნაკადი მიიღებს დადებით მნიშვნელობას $A_0 \to A_n$ მიმართულებით. თუ ასეთი გზა არ არსებობს, მაშინ გადავალთ მე-3 ბიჯზე. თუ ასეთი გზა არსებობს, მაშინ გადავალთ შემდეგ ბიჯზე.

ბიჯი 2. ვთქვათ, c_{ij}^{-} (c_{ij}^{+}) არის (A_0A_n) გზის $A_0 \to A_n$ $(A_n \to A_0)$ მიმართულებით A_iA_j რკალის გამტარუნარიანობა და

$$\theta = \min\{c_{ij}^{-}\} > 0.$$

გამტარუნარიანობის მატრიცა $C = (c_{ij})$ შევცვალოთ შემდეგი წესით:

ა) გამოვაკლოთ ყველა c_{ij}^{-} ელემენტს რიცხვი θ;

ბ) მივუმატოთ θ ყველა c_{ij}^{+} ელემენტს.

შევცვალოთ მიმდინარე $C = (c_{ij})$ მატრიცა ახლით და გადავიდეთ ბიჯი 1-ზე.

ა) ოპერაცია გვაძლევს იმის შესაძლებლობას, რომ გამოვიყენოთ არჩეული გზის რკალების გამტარუნარიანობის ნაშთები $A_0 \to A_n$ მიმართულებით, ბ) ოპერაცია აღადგენს ქსელის გამოსავალ გამტარუნარიანობას, ვინაიდან რკალის გამტარუნარიანობის შემცირება ერთი მიმართულებით შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მისი გამტარუნარიანობის გაზრდა საპირისპირო მიმართულებით.

ბიჯი 3. ვიპოვოთ მაქსიმალური ნაკადი ქსელში. ვთქვათ, $C = (c_{ij})$ გამტარუნარიანობების მატრიცაა, ხოლო $C^{*} = (c_{ij}^{*})$ მატრიცა მიღებულია პირველი და მეორე ბიჯის შედეგად. ოპტიმალური ნაკადი $X = (x_{ij})$ რკალებში მოი-ცემა შემდეგი ფორმულით:

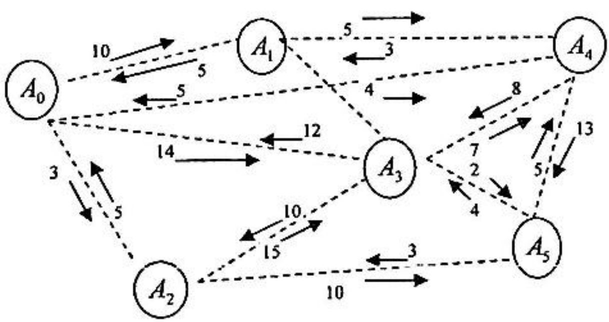
$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - c_{ij}^{*} \\ 0, c_{ij} < c_{ij}^{*} \end{cases} \qquad (2)$$

მაქსიმალური ნაკადი A_0-დან A_n-ში ტოლია

$$z = \sum_i x_{A_0 i} = \sum_j x_{jA_n} .$$

შევნიშნოთ, რომ z არის ყველა დადებითი θ რიცხვის ჯამი, რომლებიც განისაზღვრება მე-2 ბიჯზე. აქედან გამომდინარე, $X = C - C^{*}$ მატრიცის დადებითი ელემენტები საბოლოო ნაკადისათვის უნდა გამოვიყენოთ $A_0 \to A_n$ მიმართულებით.

ამოცანა. მოცემულია ქსელი გამტარუნარიანობებით (ნახ. 2):



ნახ. 2.

განვსაზღვროთ მაქსიმალური ნაკადი.

ამოხსნა. ვიპოვოთ შესაბამისი მატრიცა C. ამის შემდეგ, პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ A_0-დან გამომავალი ნაკადი ტოლია 10+3+14+4=31, ხოლო A_5-ში ჩამავალი ნაკადია 13+2+10=25 და ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

მოცემულ ქსელში გვაქვს შემდეგი გზები:

$A_0 \to A_1 \to A_4 \to A_5$, $A_0 \to A_3 \to A_2 \to A_5$, ...

$$C = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline
A_0 & & 10^- & 3 & 14 & 4 & \\ \hline
A_1 & 5^+ & & 5 & 9 & 5^- & \\ \hline
A_2 & 5 & 6 & & 15 & & 10 \\ \hline
A_3 & 12 & 7 & 10 & & 7 & 2 \\ \hline
A_4 & 3 & 9^+ & & 8 & & 13^- \\ \hline
A_5 & & & 3 & 4 & 5^+ & \\ \hline
\end{array}.$$

ავირჩიოთ საწყის გზად $A_0 \to A_1 \to A_4 \to A_5$. ამიტომ, C მატრიცის $(A_0, A_1), (A_1, A_4), (A_4, A_5)$ უჯრების შესაბამისი რიცხვები აღვნიშნოთ თავზე (–) ნიშნით, ხოლო $(A_1, A_0), (A_4, A_1), (A_5, A_4)$ უჯრების შესაბამისი რიცხვები - თავზე (+) ნიშნით. ამრიგად, C-ს მონიშნული ელემენტები (–)-ით და (+)-ით შეესაბამება ჩვენს საწყის $A_0 \to A_1 \to A_4 \to A_5$ გზას. ამ გზისათვის მაქსიმალური ნაკადი განისაზღვრება სიდიდით

$$\theta = \min\{10,5,13\} = 5.$$

C-ს კორექტირება მოვახდინოთ ზემოაღნიშნული წესით: ყველა c_{ij}^- ელემენტს გამოვაკლოთ 5, ხოლო c_{ij}^+ ელემენტებს მივუმატოთ 5, მივიღებთ C_1 მატრიცას:

$$C_1 = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline
A_0 & & 5 & 3 & 14^- & 4 & \\ \hline
A_1 & 10 & & 5 & 9 & 0 & \\ \hline
A_2 & 5 & 6 & & 15^+ & & 10^- \\ \hline
A_3 & 12^+ & 7 & 10^- & & 7 & 2 \\ \hline
A_4 & 3 & 14 & & 8 & & 8 \\ \hline
A_5 & & & 3^+ & 4 & 10 & \\ \hline
\end{array}.$$

ახლა უნდა ავირჩიოთ წინასაგან განსხვავებული გზა. უკეთესი იქნება, თუ თავიდან და ყოველი იტერაციის დასაწყისში ავირჩევთ გზას, რომელიც მოგვცემს θ-ს ყველაზე დიდ მნიშვნელობას. გამოთვლების თვალსაზრისით, უმჯობესია ასეთი გზა განვსაზღვროთ უშუალოდ C მატრიციდან. ამასთან გზა დავიწყოთ პირველი A_0 სტრიქონიდან და ავირჩიოთ შემდეგი კვანძი, რომელიც A_0 კვანძთან დაკავშირებულია დადებითი ნაკადით. შემდეგ ავირჩევთ არჩეული კვანძის შესაბამის სტრიქონს და შემდეგ კვანძს, რომელიც წინასთან შეერთებულია დადებითი რკალით. ასე ჩავალთ A_5-ში.

მართლაც, რადგან C_1-ის A_0 სტრიქონში მაქსიმალურია 14, ამიტომ ახალი გზის როლში განვიხილავთ

$$A_0 \to A_3 \to A_2 \to A_5 .$$

სათანადო ელემენტები C-ს მსგავსად აღვნიშნოთ (–) და (+) ნიშნებით, შესაბამისად. აქ $\theta = \min\{14,10,10\} = 10$.

იმავე წესით C_1-ის კორექტირება მოგვცემს:

$C_2 =$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0		5^-	3	4	4	
A_1	10^+		5	9^-	0	
A_2	5	6		25		0
A_3	22	7^+	0		7^-	2
A_4	3	14		8^+		8^-
A_5			13	4	10^+	

აქ ავირჩიოთ (A_0, A_1) უჯრაში მოთავსებული 5-ის შესაბამისი გზის დასაწყისი და შემდეგ ვიპოვოთ დადებითი რკალების შესაბამისი კვანძები, რომელთა გავლით ჩავალთ A_5-ში. ეს იყოს

$$A_0 \to A_1 \to A_3 \to A_4 \to A_5 .$$

ამ შემთხვევაში, $\theta = \min\{5,9,7,8\} = 5$ და მივიღებთ ახალ მატრიცას:

$C_3 =$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0		0	3	4	4	
A_1	15		5	4	0	
A_2	5	6		25		0
A_3	22	12	0		2	2
A_4	3	14		13		3
A_5			13	4	15	

დავსვათ კითხვა: სანამდე უნდა გაგრძელდეს ეს პროცესი? როგორც კი ბოლო A_5 სვეტის (ან პირველი A_0 სტრიქონის) შესაბამისი ელემენტები გახდება ნულები, ანუ არ შეგვეძლება ავაგოთ A_0-დან A_5-ში ჩასვლის გზა დადებითი ნაკადებით, აქ შეწყდება იტერაციის პროცესი.

C_3-ით ავირჩიოთ გზა $A_0 \to A_4 \to A_5$. ამ შემთხვევაში, $\theta = \min\{4,3\} = 3$. მივიღებთ ახალ C_4 მატრიცას:

$C_4 =$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_0		0	3	4	4^-	
A_1	15		5	4	0	
A_2	5	6		25		0
A_3	22	12	0		2	2
A_4	3^+	14		13		3^-
A_5			13	4	15^+	

ამ მატრიცის კორექტირება მოგვცემს:

$$C_5 = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline
A_0 & & 0 & 3 & 4^- & 1 & \\ \hline
A_1 & 15 & & 5 & 4 & 0 & \\ \hline
A_2 & 5 & 6 & & 25 & & 0 \\ \hline
A_3 & 22^+ & 12 & 0 & & 2 & 2^- \\ \hline
A_4 & 6 & 14 & & 13 & & 0 \\ \hline
A_5 & & & 13 & 4 & 18^+ & \\ \hline
\end{array}.$$

აქ ავირჩიოთ გზა $A_0 \to A_3 \to A_5$. მაშინ $\theta = \min\{4,2\} = 2$. ამიტომ, C_5-დან მივიღებთ

$$C_6 = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline
A_0 & & 0 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline
A_1 & 15 & & 5 & 4 & 0 & \\ \hline
A_2 & 5 & 6 & & 25 & & 0 \\ \hline
A_3 & 24 & 12 & 0 & & 2 & 0 \\ \hline
A_4 & 6 & 14 & & 13 & & 0 \\ \hline
A_5 & & & 13 & 4 & 18 & \\ \hline
\end{array}.$$

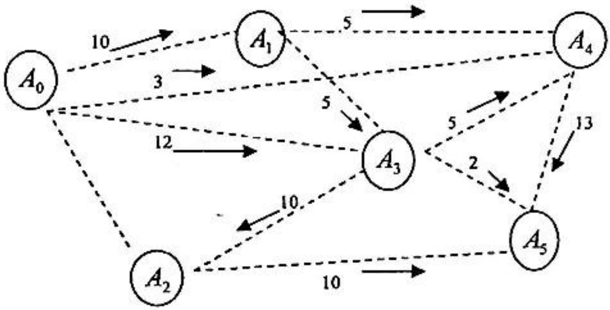
აქ უნდა გავჩერდეთ, რადგან ბოლო A_5 სვეტის ელემენტები ნულებია. ამიტომ, ესაა მატრიცა $C^* = C_6$. გამოვთვალოთ $X = C - C^*$ მატრიცის ელემენტები (2) ფორმულით:

$$X = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline
A_0 & & 10 & & 12 & 3 & \\ \hline
A_1 & & & & 5 & 5 & \\ \hline
A_2 & & & & & & 10 \\ \hline
A_3 & & & 10 & & 5 & 2 \\ \hline
A_4 & & & & & & 13 \\ \hline
A_5 & & & 13 & 4 & 18 & \\ \hline
\end{array}.$$

აქედან ჩანს, რომ მაქსიმალური ნაკადი A_0-დან A_5-ში ტოლია

$$z=\sum_i x_{A_0 i}=10+12+3=25=\sum_j x_{jA_5}=10+2+13=25.$$

ყველა θ-ს ჯამი 5+10+5+3+2=25 ასევე გვაძლევს მაქსიმალურ ნაკადს. გრაფიკულად მას აქვს სახე (ნახ. 3):



ნახ. 3.

A_5-დან A_0-ში მაქსიმალური ნაკადის საპოვნელად უნდა განვიხილოთ ანალოგიური ბიჯები იმ გზებისათვის, რომლებიც მიმართულია A_5-დან A_0-საკენ.

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენენ ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია სატრანსპორტო ქსელი. ვიპოვოთ მაქსიმალური ნაკადი.

5. ქსელური მოდელები აქტიურ სისტემებში

1. სამუშაოს მიზანი - სოციალურ-ეკონომიკური სისტემების მართვაში ორიენტირებული ქსელის გამოყენების ერთი კონკრეტული მოდელის შედგენის და ანალიზის საფუძველზე ანალოგიური ამოცანების გადაწყვეტის უნარ - ჩვევების დაუფლება. დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრება. აქტიური სისტემების თეორიაში, რომელიც სოციალურ-ეკონომიკური სისტემების მართვის სფეროს წარმოადგენს, განსაკუთრებით რთულია ახალი სისტემების დაგეგმვა, შექმნა და ანალიზი. ასეთივე სირთულეს იწვევს ზოგიერთი პერიოდულად გამეორებადი სამუშაოები, მაგალითად ყოველწლიური ბიზნესგეგმის და სტიმულირების სისტემის შედგენა, ორგანიზაციული მართვა ცვალებადი პარამეტრებით და სხვ. ყველა შემთხვევაში შესასრულებელია უამრავი ურთიერთდაკავშირებული ოპერაცია, სამუშაოში უნდა ჩავრთოთ სხვადასხვა კატეგორიის ადამიანთა ჯგუფები, საწარმოები, ორგანიზაციები. ასეთი დამუშავება იწვევს ერთიანი კომპლექსის მართვისათვის საჭირო ოპერატიული და პერსპექტიული გადაწყვეტილების მიღების სირთულეს. რთულდება აგრეთვე მომავალი სახელფასო გადასახადების ვადების და რაოდენობის დადგენის პროცესი. ასეთი სისტემების დაგეგმვასა და მართვაში მაღალეფექტური აღმოჩნდა ქსელური მოდელები - სამუშაოთა გეგმის თვალსაჩინო გამოსახვა. იგულისხმება, რომ ასეთი ქსელები არ არის ჩაკეტილი და არ შეიცავს მარყუჟებს.

აქტიური სისტემების მრავალ ამოცანაში განსახილველი ქსელის კვანძებსა და რკალებს შეესაბამება შესა-

ბამისი მოვლენები და სამუშაოები. მოვლენაში იგულისხმება შედეგი, რომელსაც გვაძლევს სისტემის მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში, დროის შუალედში ან სამუშაოს დასრულების მომენტში. სამუშაო წარმოადგენს დროში გაგრძელებულ პროცესს, რომელიც აუცილებელია მოვლენის მოსახდენად ან შესასრულებლად. გრაფის ქსელზე სამუშაოს შეიძლება აღნიშნავდეს ნებისმიერი საწარმო, საინჟინრო-საკონსტრუქტორო ან სხვა ოპერაცია, რომლებიც მოითხოვს დროს, შრომითი და მატერიალური რესურსების ხარჯვას. ქსელის საშუალებ-ით ოპტიმალური დაგეგმვითი სამუშაოების შესრულება განვიხილოთ ერთი კონკრეტული ამოცანის მეშვეობით.

ამოცანა. კომპლექსური სამუშაოს გეგმის შედგენისათვის გამოყოფილია 10 განსხვავებული სამუშაო $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. მოვათავსოთ ისინი სამუშაო გეგმის ცხრილის პირველ სვეტში (ცხრილი 1). ამ ცხრილში მოვათავსოთ ყველა საჭირო მონაცემი. მეორე სვეტში A_i-ს გასწვრივ მითითებულია ის სამუშაოები, რომლებიც ტექნოლოგიური მოთხოვნების შესაბამისად უნდა შესრულდეს A_i-ს შესრულებამდე. ამ სვეტში ცარიელი ადგილი მიუთითებს, რომ შესაბამისი სამუშაოს შესრულება არ მოითხოვს სხვა სამუშაოს შესრულებას და იგი შეიძლება თავიდანვე პარალელურ რეჟიმში შესრულდეს. მესამე სვეტში მივუთითოთ სამუშაოს შესასრულებლად საჭირო დრო (დროის ერთეულად ავიღოთ “დღე”). მეოთხე სვეტში აღნიშნულია შესასრულებელი სამუშაოს საწყისი მოვლენა (საწყისი კვანძი) ანუ რა მომენტში იწყება იგი. მეხუთე სვეტში მოცემულია საბოლოო მოვლენა (საბოლოო კვანძი) და იგი გვიჩვენებს რა მომენტში მთავრდება ეს სამუშაო. მაგალითად, A_6-ის გასწვრივ აღნიშნულია, რომ იგი უნდა შესრულდეს A_2 სამუშაოს შესრულების შემ-

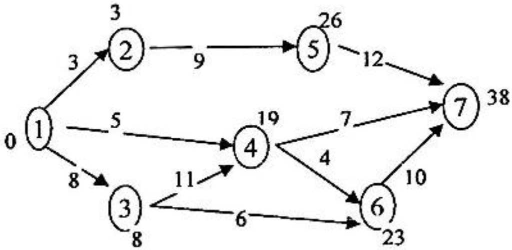
დეგ. იგი მთავრდება 3-ში. ამიტომ, A_6-ის საწყისი იქნება 3, ხოლო საბოლოო მომენტი იქნება 6. მე-3 სვეტში მითითებული 6 ნიშნავს, რომ A_6-ის შესრულებას ესაჭიროება 6 დღე. მაშასადამე, 1-ლი ცხრილი წარმოადგენს ათივე სამუშაოს შესრულების გეგმას.

ცხრილი 1

1	2	3	4	5
A_1	–	3	1	2
A_2	–	8	1	3
A_3	–	5	1	4
A_4	A_1	9	2	5
A_5	A_2	11	3	4
A_6	A_2	6	3	6
A_7	A_2, A_5	7	4	5
A_8	A_3, A_5	4	4	6
A_9	A_4, A_7	12	5	7
A_{10}	A_6, A_8	10	6	7

მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ მიღებული ცხრილის შესაბამისი ქსელი.

ქსელის საწყისი კვანძები მოვათავსოთ მარცხნივ, რკალები ისრებით მივმართოთ მარჯვნივ. ცხადია, სამუშაოს სახელს ქსელზე არ აღვნიშნავთ. იგი მოიცემა მოვლენის საწყისი და საბოლოო ნომრებით, რომლებიც მოვათავსოთ კვანძებში. მაგალითად, სამუშაო A_1 აღვნიშნოთ 1-2-ით, ანუ მისი საწყისი კვანძი არის 1, საბოლოო კი - 2. სამუშაო A_{10} აღნიშნულია 6-7-ით და ა.შ. ამრიგად, 1-ლი ცხრილის შესაბამის ქსელს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 1):



ნახ. 1.

გავაანალიზოთ ქსელის დაგეგმვა დროითი კრიტერიუმის მეშვეობით. რკალზე მითითებული რიცხვი აღნიშნავს შესაბამისი სამუშაოს მოსალოდნელ ხანგრძლივობას დღეებში. ამ რიცხვებს რკალის სიგრძესთან არავითარი კავშირი არა აქვს. ვიანგარიშოთ თითოეული მოვლენის მოსალოდნელი ვადები.

ვიგულისხმოთ, რომ საწყისი მოვლენის დრო ნულოვანია. ვინაიდან 1-2 სამუშაო გრძელდება 3 დღე, ამიტომ მოვლენა 2 მოხდება სამუშაოს დაწყებიდან 3 დღეში. თანაც მისი მოხდენა არ გულისხმობს რაიმე წინასწარი სამუშაოს შესრულებას. ამიტომ რიცხვი 3 მოვათავსოთ მოვლენა 2-ის წრესთან ახლოს. ასევე, მოვლენა 3 მოხდება 8 დღეში და 8 დავწეროთ მე-3 მოვლენის შესაბამის წრესთან ახლოს. მოვლენა 4 მოხდება ორი 1-4 და 3-4 სამუშაოს შესრულების შემდეგ. პირველი შესრულდება მთელი სამუშაოს დაწყებიდან 5 დღეში. სამუშაო 3-4 შეიძლება დაიწყოს მოვლენა 3-ის მოხდენის შე-მდეგ ან საწყისი მომენტიდან 8 დღის შემდეგ. ამიტომ 4-ის მოხდენას ესაჭიროება სამუშაოს დაწყებიდან 8+11=19 დღე. რადგან 5 და 19 დღეებიდან მაქსიმალურია 19, ამიტომ უნდა ჩავთვალოთ, რომ მე-4 მოვლენის მოხდენას ესაჭიროება 19 დღე. დავწეროთ იგი მოვლენა 4-ის წრეწირთან.

გადავიდეთ მე–5 მოვლენაზე. იგი მოხდება 2-5 და 4-5 სამუშაოთა შესრულების შემდეგ. პირველი შესრულდება 3+9=12 დღეში, მეორე შესრულდება 19+7=26 დღეში. აქედან მაქსიმალური 26 დღე არის 5-ის მოხდენის მოსალოდნელი ვადა.

მე-6 მოვლენა მოხდება 3-6 და 4-6 სამუშაოთა შესრულების შემდეგ. მე-3 მოხდება 8 დღეში, ამიტომ მე-6 მოხდება 8+6=14 დღეში. 4 მოხდება 19 დღეში, 6 კი - 19+4=23 დღეში. აქედან მაქსიმალურ დროში - 23 დღეში მოხდება მე-6 მოვლენა.

მე-7 მოვლენა მოხდება 5-7 და 6-7 სამუშაოების შემდეგ. რადგან მე-5 ხდება 26 დღეში, ამიტომ მე-7 მოხდება 26+12=38 დღეში. მე-6 ხდება 23 დღეში და მე-7 მოხდება 23+10=33 დღეში. აქედან გამომდინარე, 7-ის მოხდენისათვის უნდა ვიგულისხმოთ 38 დღე. მაშასადამე, მთელი სამუშაო კომპლექსის თავიდან ბოლომდე შესრულების ოპტიმალური ვადაა 38 დღე.

განსაზღვრება. სამუშაოთა მიმდევრობას (ქსელში რკალების მიმდევრობას) ქსელის საწყისი მოვლენიდან მის ბოლო მოვლენამდე, რომელსაც შეესაბამება დროის ყველაზე დიდი მნიშვნელობა, ეწოდება კრიტიკული გზა. ამ გზაზე მოთავსებულ მოვლენებს და სამუშაოებს ეწოდება კრიტიკულები.

კრიტიკული გზის პოვნას უნდა დაეთმოს დიდი ყურადღება კრიტიკული სამუშაოების შესრულებისას.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function lab5(A)
disp('samuSao gegmis cxrili')
A
n=length(A);
for i=1:n
  if A(i,2)==1
    b(i)=A(i,1);
  else
    for i1=1:i-1
      if A(i,2)==A(i1,3)
        b(i)=A(i,1)+b(i1);
      end
    end
  end
end
disp('samuSaoTa mosalodneli xangrZlivobebi')
```

```
b
     [maxb,ii]=max(b);
     C=zeros(1,n);
     C(ii)=A(ii,3);
     for i=ii-1:-1:1
        if A(i,3)==A(ii,2)
           C(i)=A(i,3);
           ii=i;
        end
     end
     ind=find(C>0); ind1=[1,ind];C(1)=1;
     maxb
    disp('kritikuli gza')
    CC=C(ind1)
```

MATLAB-ის ბრძანებათა ფანჯრიდან შესატანი ბრძანებები:

m-ფაილ-ფუნქციის შემავალი არგუმენტი

```
>>A=[3 1 2;8 1 3;5 1 4;9 2 5;11 3 4;6 3 6;7 4 5;4 4 6;12 5 7;10 6 7]
>> lab5(A)
```

პროგრამის შესრულების შედეგად მიღებული პასუხი:

```
samuSao gegmis cxrili
A =
   3    1    2
   8    1    3
   5    1    4
   9    2    5
  11    3    4
   6    3    6
   7    4    5
   4    4    6
  12    5    7
  10    6    7

samuSaoTa mosalodneli xangrZlivobebi
b =    3 8 5 12 19 14 26 23 38 33
```

maxb =   38

kritikuli gza
CC =
1 3 4 5 7

3. **დამოუკიდებელი სამუშაო.** ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენენ ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია სამუშაო გეგმის ცხრილი. იპოვეთ კომპლექსური სამუშაოს შესრულების ოპტიმალური გეგმა. სასურველია იპოვოთ კრიტიკული გზა.

6. აქტიური სისტემის მონაწილეთა უპირატესობები

1. სამუშაოს მიზანი - გავერკვეთ შემდეგი ამოცანის შინაარსში და ნაწილობრივ მაინც გადავწყვიტოთ იგი: როგორ მოიცემა აქტიური ელემენტის ან ელემენტების და ცენტრის უპირატესობები და შესაძლებელია თუ არა განსხვავებული უპირატესობების გაერთიანება ერთ უპირატესობაში? მოვახდინოთ დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. ვთქვათ, აქტიურ ელემენტს შეუძლია აირჩიოს რაიმე ქმედება (სტრატეგია, ალტერნატივა, მდგომარეობა, ვარიანტი და სხვ.) გადაწყვეტილებათა დასაშვები A სიმრავლიდან. ასეთი ქმედება აღვნიშნოთ y-ით, $y \in A$. y-ის არჩევით და გარემოს ზემოქმედებით რეალიზდება აქტიური ელემენტის ქმედების შედეგი $z \in A_0$, სადაც A_0 ქმედებათა შესაძლო შედეგების სიმრავლეა. ერთი და იმავე y-ის არჩევით ერთსა და იმავე შედეგს საზოგადოდ ვერ მივიღებთ, რაც შესაძლოა გამოიწვიოს გარემოს განსხვავებულმა ქმედებებმა.

აქტიური სისტემების თეორიაში იგულისხმება, რომ A_0 სიმრავლეზე აქტიურ ელემენტს აქვს უპირატესობის მიმართება (შეიძლება ერთი ან რამდენიმე), ანუ შეუძლია ერთმანეთს შეადაროს განსხვავებული შედეგები და მოახდინოს რაციონალური არჩევანი. აქტიური ელემენტის უპირატესობა შეიძლება მოცემულ იქნეს სარგებლიანობის ფუნქციით, მიზნის ფუნქციით, უპირატესობის ბინარული და არამკაფიო მიმართების საშუალებით. რაციონალური არჩევანი გულისხმობს ისეთი გადაწყვეტილების პოვნას, რომელიც მიზნის ან სარგებლიანობის ფუნქციას მიანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ან კიდევ ბინარული და არამკაფიო მიმართებით იქნება ყველაზე უპირატესი.

ჩვენ განვიხილავთ რაციონალური არჩევანის ამოცანას, როდესაც უპირატესი შედეგი აირჩევა ორი R_1 და R_2 ბინარული მიმართების კომპოზიციით (შერწყმით, გაერთიანებით), ხოლო R_1 და R_2 მიმართება მოიცემა ორიენტირებული გრაფების და მოსაზღვრეობის მატრიცების საშუალებით. ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ R_1 და R_2 ერთი და იმავე აქტიური სისტემის განსხვავებული აქტიური ელემენტების ბინარული მიმართებებია.

განსაზღვრება. A_0 სიმრავლეზე განსაზღვრული R_1 და R_2 ბინარული მიმართების კომპოზიცია $R_1 o R_2$ ეწოდება შემდეგი სახის ბინარულ მიმართებას

$$R_1 o R_2 = \{(a,b) |\ a,b \in A_0, \exists c \in A_0 : aR_1c, cR_2b\}.$$

თუ A_0 სიმრავლეზე ბინარული მიმართება R_{A_0} არის სრული ($\forall a,b \in A_0$ ან $aR_{A_0}b$ ან $bR_{A_0}a$), რეფლექსური ($\forall a \in A_0$ სრულდება $aR_{A_0}a$) და ტრანზიტული ($\forall a,b \in A_0, aR_{A_0}b$ და $bR_{A_0}c$-დან გამომდინარეობს $aR_{A_0}c$), მაშინ R_{A_0} მიმართებას ეწოდება უპირატესობის ბინარული მიმართება.

უპირატესობის ბინარული R_{A_0} მიმართების შესაბამისი ინდივიდუალური რაციონალური არჩევანი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P(R_{A_0}, A_0) = \{z \in A_0 |\quad \forall t \in A_0, zR_{A_0}t\}.$$

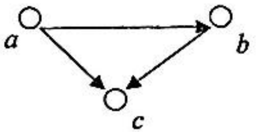
მაგალითი. ვთქვათ, ორმა აქტიურმა ელემენტმა უნდა გააკეთოს არჩევანი სამი $A_0 = \{a,b,c\}$ ალტერნატივიდან. ელემენტის უპირატესობა მოიცემა უპირატესობის ბინარული R მიმართებით. ასეთი მიმართების მაგალითები შეიძლება იყოს შემდეგი ანტირეფლექსური და ტრანზიტული მიმართებები:

1. R_1 მიმართებით პირველი აქტიური ელემენტი უპირატესობას a-ს ანიჭებს b-სთან შედარებით, b-ს - c-სთან შედარებით და ამასთან, მისთვის a უპირატესია, ვიდრე c.

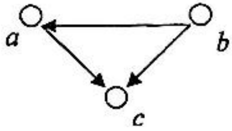
2. R_2 მიმართებით მეორე აქტიური ელემენტი უპირატესობას b-ს ანიჭებს a-სთან შედარებით და a-ს - c-სთან შედარებით. ამ შემთხვევაში აქტიური ელემენტების უპირატესობათა სიმრავლე იქნება $M = \{R_1 R_2\}$.

ცხადია, ინდივიდუალური რაციონალური არჩევანი R_1 და R_2 ბინარული მიმართებით შესაბამისად ტოლია $P(R_1, \{a,b,c\}) = a$, $P(R_2, \{a,b,c\}) = b$.

არსებობს სასრულ სიმრავლეზე ბინარული მიმართების თვალსაჩინოდ გამოსახვის რამდენიმე საშუალება. მათგან ყველაზე თვალსაჩინო საშუალებად ითვლება ბინარული მიმართების წარმოდგენა ორიენტირებული გრაფის სახით, სადაც ალტერნატივას შეესაბამება გრაფის წვერო, წიბო მიმართულია a-დან b-საკენ თუ სრულდება მიმართება $aR_{A_0}b$. ამის გამო, ჩვენს მაგალითში განხილული R_1 და R_2 ბინარული მიმართება შემდეგი ორიენტირებული გრაფებით მოიცემა (ნახ. 1 და ნახ. 2 შესაბამისად):



ნახ. 1.



ნახ. 2.

შევნიშნოთ, რომ სრული ბინარული მიმართება ყოველთვის არ გამოისახება სრული ორიენტირებული გრაფით, ანუ სრული ბინარული მიმართება შეიძლება მოცემულ იქნეს არასრული გრაფით.

სრული ბინარული მიმართება R შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მოსაზღვრეობის მატრიცული ფორმით, სადაც a ალტერნატივის შესაბამისი სტრიქონის და b ალტერნატივის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე 1-ს დავწერთ, თუ aRb; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვწერთ 0-ს. მაშასადამე, 1-ელ ნახ-ზე მოცემულ გრაფს შეესაბამება r_1 მატრიცა, მე-2 ნახ-ზე მოცემულ გრაფს კი - r_2 მატრიცა:

$$r_1 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad r_2 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

განვსაზღვროთ ნებისმიერი R_1 და R_2 ბინარული მიმართების მოსაზღვრეობის მატრიცებით $R_1 o R_2$ კომპოზიციის მოსაზღვრეობის მატრიცა. ვთქვათ, R_1 მიმართებას შეესაბამება მოსაზღვრეობის $r_1 = (r_{ij}^1)$ მატრიცა, R_2-ს კი $r_2 = (r_{ij}^2)$ მატრიცა. მაშინ $R_1 o R_2$-ის მოსაზღვრეობის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$r^{1o2} = (r_{ij}^{1o2}), \text{ სადაც } r_{ij}^{102} = \max_k \min\{r_{ik}^1, r_{kj}^2\}. \qquad (1)$$

ამოცანა. აქტიური სისტემის პირველი და მეორე აქტიური ელემენტის უპირატესობათა R_1 და R_2 ბინარული მიმართების მოსაზღვრეობის მატრიცებია შესაბამისად:

$$r_1 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad r_2 = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

ვიპოვოთ აქტიური ელემენტების ერთობლივი უპირატესობის ბინარული მიმართების მოსაზღვრეობის მატრიცა.

ამოხსნა. ორი აქტიური ელემენტის ერთობლივი უპირატესობის ბინარული მიმართების მატრიცა წარმოადგენს $R_1 o R_2$ კომპოზიციის მოსაზღვრეობის მატრიცას. ვიპოვოთ იგი (1) ფორმულით. ამ ფორმულის თანახმად, r_{ij}^{1o2} ელემენტის საპოვნელად r_1-ის i-ური სტრიქონის და r_2-ის j-ური სვეტის შესაბამისი წყვილი ელემენტების შედარებიდან ვირჩევთ მინიმალურ ელემენტებს, ხოლო მათგან ვირჩევთ მაქსიმალურს. ცხადია, r_1 და r_2 ერთნაირი განზომილების კვადრატული მატრიცებია. ჩვენს მაგალითში $i = 1,2;\ j = 1,2$. ამიტომ, ვღებულობთ:

$$r_{11}^{1o2} = \max_k \min\{r_{1k}^1, r_{k1}^2\} = \max\{\min\{r_{11}^1, r_{11}^2\}, \min\{r_{12}^1, r_{21}^2\},$$

$$\min\{r_{13}^1, r_{31}^2\}\} = \max\{\min\{0,0\}, \min\{1,1\}, \min\{1,0\}\} =$$

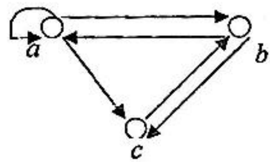
$$\max\{0,1,0\} = 1.$$

ანალოგიურად მივიღებთ: $r_{12}^{1o2} = 0$, $r_{13}^{1o2} = 1$, $r_{21}^{1o2} = 0$, $r_{22}^{1o2} = 0$, $r_{23}^{1o2} = 0$, $r_{31}^{1o2} = 0$, $r_{32}^{1o2} = 0$, $r_{33}^{1o2} = 0$.

ამრიგად,

$$r^{1o2} = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

შესაბამის გრაფს აქვს სახე (ნახ. 3):



ნახ. 3.

აქედან ჩანს, რომ b და c საუკეთესო ვარიანტებია ორივე აქტიური ელემენტისათვის ერთდროულად.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function lab6(r1,r2)
%ორი ბინარული მიმართების მოსაზღვრეობის r1 და r2
%მატრიცებით ამ მიმართებათა კომპოზიციის მოსაზღვრე-
%ობის მატრიცის - r1o2-ის განსაზღვრა
disp('binaruli mimarTebebis mosazRvreobis matricebi')
r1,r2
n=length(r1);
for i=1:n
   for j=1:n
      for k=1:n
```

```
      m(k)=min(r1(i,k),r2(k,j));
    end
    r1o2(i,j)=max(m);
  end
end
disp('mimarTebaTa  kompoziciis  mosazRvreobis matrica')
r1o2
end
```

პასუხი:

```
binaruli mimarTebebis mosazRvreobis matricebi
r1 =
   0   1   1
   0   0   1
   0   0   0
r2 =
   0   0   1
   1   0   1
   0   0   0

mimarTebaTa kompoziciis mosazRvreobis matrica
r1o2 =
   1   0   1
   0   0   0
   0   0   0
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენს ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია ორი აქტიური ელემენტის უპირატესობათა ბინარული მიმართების მოსაზღვრეობის მატრიცები. იპოვეთ ამ მიმართებების კომპოზიცია. დახაზეთ შესაბამისი გრაფი.

7. ედჟვორტ - პარეტოს სიმრავლეების პოვნა ორკრიტერიუმიან ამოცანაში

1. სამუშაოს მიზანი - გავერკვეთ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების შინაარსში, დავეუფლოთ ასეთ ამოცანებთან დაკავშირებულ ძირითად განსაზღვრებებს და მათი გადაწყვეტის მეთოდებს. ორკრიტერიუმიანი ამოცანების გადაწყვეტა არ არის რთული, რადგან აქ ყველაფერი ნათლად გამოისახება და მისი შესწავლით საკმარისი საფუძველი გვექნება უფრო კარგად გავერკვეთ ამ რთულ და თანამედროვე მიმართულებაში. მოვახდინოთ დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკურ თეორიაში, როგორც წესი უმეტესად გვხვდება ისეთი ამოცანები და სიტუაციები, რომლებშიც ინდივიდთა ან კოლექტივების უპირატესობები მოიცემა ერთზე მეტი კრიტერიუმით. ასეთ შემთხვევაში, $x \in X$ გადაწყვეტილება ფასდება ვექტორული კრიტერიუმით

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in X. \tag{1}$$

თუ თითოეული $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ კერძო კრიტერიუმის მაქსიმუმის პოვნაა საჭირო, მაშინ გვაქვს ვექტორული მაქსიმუმის ამოცანა:

$$f(x) \to \max. \tag{2}$$

თუ თითოეული $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ კერძო კრიტერიუმის მინიმუმის პოვნაა საჭირო, მაშინ გვაქვს ვექტორული მინიმუმის ამოცანა:

$$f(x) \to \min. \tag{3}$$

(2) და (3) ამოცანებს აგრეთვე მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებს უწოდებენ.

ასეთი ამოცანების ამონახსნში ვგულისხმობთ პარეტოს (ვ.პარეტო) გადაწყვეტილებებს, რომლებიც ედჟვორტ-პარეტოს გადაწყვეტილებების სახელით მოიხსენიება.

ასეთი გადაწყვეტილების პოვნის ამოცანა და მეთოდი განვიხილოთ ორკრიტერიუმიანი ამოცანისათვის (როცა (1)-ში $m=2$)

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x))\to \max \ (\text{ან} \to \min),\ x\in X, \quad (4)$$

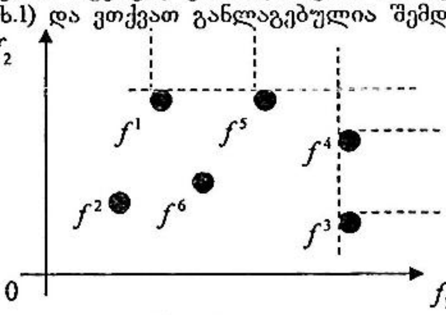
რადგან ამ შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნის პროცესი სიბრტყეზე მიმდინარეობს, მისი თვალსაჩინოდ გამოსახვა ძალიან დაგვეხმარება ამ საქმეში.

(2) და (3) ამოცანების გადაწყვეტა ხორციელდება პარეტოს გარკვეულ აქსიომებზე დამყარებული ფუნდამენტური დებულების საფუძველზე, რომელსაც ეწოდება **ედჯვორტ-პარეტოს პრინციპი.** ამ პრინციპის თანახმად, საუკეთესო არჩევანი (გადაწყვეტილება) უნდა გაკეთდეს მხოლოდ პარეტოს სიმრავლის ელემენტებიდან.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც X სიმრავლის ელემენტები დისკრეტულია და ამავე დროს სასრული. ვთქვათ, მაგალითისათვის $X=\{x_1,x_2,...,x_6\}$.მაშინ $x_i\in X$ გადაწყვეტილებას შეესაბამება ვექტორული შეფასება

$$f(x_i)=(f_1(x_i),f_2(x_i)),\ i=1,...,6.$$

აღვნიშნოთ $f(x_i)\equiv f^i$. ეს შეფასებები მოვათავსოთ შემდეგი წესით აგებულ კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში (ნახ.1) და ვთქვათ განლაგებულია შემდეგნაირად:



ნახ. 1.

აღვნიშნოთ $f(x_i)$ შეფასებების სიმრავლე G-თი - $G=\{f(x_i)\}$ და განვიხილოთ (4)-დან მაქსიმუმის ამოცანა.

განსაზღვრება 1. $f^* = (f_1^*, f_2^*)$ ვექტორს (შეფასებას) ვუწოდოთ ეფექტური ან ოპტიმალური პარეტოს აზრით, თუ არ არსებობს ისეთი ვექტორი $f = (f_1, f_2) \in G$, განსხვავებული f^*-საგან, როდესაც ერთდროულად მართებულია უტოლობები $f_1 \geq f_1^*, f_2 \geq f_2^*$.

განსაზღვრება 2. $f^* = (f_1^*, f_2^*)$ ვექტორს (შეფასებას) ვუწოდოთ სუსტად ეფექტური ან სუსტად ოპტიმალური პარეტოს აზრით, თუ არ არსებობს ისეთი ვექტორი $f = (f_1, f_2) \in G$, როდესაც ერთდროულად მართებულია $f_1 > f_1^*, f_2 > f_2^*$ უტოლობები.

განსაზღვრება 3. $f^* = (f_1^*, f_2^*)$ შეფასება დომინირებს $f^{**} = (f_1^{**}, F_2^{**})$ შეფასებას, თუ ერთდროულად სრულდება $f_1^* > f_1^{**}$ და $f_2^* > f_2^{**}$ უტოლობები.

ეფექტურ და სუსტად ეფექტურ შეფასებებს, პარეტოს ოპტიმუმები ეწოდება.

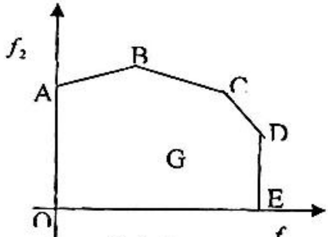
განსაზღვრება 4. ისეთ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ მნიშვნელობებს, რომლებსაც შეესაბამება პარეტოს აზრით ეფექტური (სუსტად ეფექტური) ვექტორები, ეწოდება პარეტოს აზრით ეფექტური (სუსტად ეფექტური) ამონახსნები ან გადაწყვეტილებები.

ახლა შევხედოთ 1-ელ ნახ-ს. პარეტოს პრინციპის თანახმად, უნდა გადავაგდოთ დომინირებული შეფასებები, რის შედეგად სიბრტყეზე დაგვრჩება არადომინირებული შეფასებები. ნახაზიდან ჩანს, რომ f^2 დომინირებულია f^6-ის მიერ, ხოლო f^6 დომინირებულია f^4 და f^5-ის მიერ. მაშასადამე, f^2 და f^6 შეფასებები აღარ განიხილება. გვრჩება $f^1, f^3, f^4 f^5$ შეფასებები, რომლებიც ერთმანეთს არ დომინირებენ. ამ შეფასებებში გვაქვს ორი სახის შეფასება: 1) პარეტოს ეფქტური შეფასებები - f^4 და f^5; 2) პარეტოს სუსტად ეფექტური შეფასებები

- f^1 და f^3. ყველა მათგანი მოცემულ სისტემაში ჩრდილო-აღმოსავლეთ მხარესაა მოთავსებული. შესაბამისად, x_4 და x_5 პარეტოს ეფექტური გადაწყვეტილებებია, ხოლო x_1 და x_3 - სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებები.

ეფექტური და სუსტად ეფექტური შეფასებების პოვნა და განსხვავება გეომეტრიულად ასე შეიძლება: შეფასების წერტილში, როგორც სათავეში, მაქსიმუმის ამოცანის შემთხვევაში ავაგოთ დადებითი მიმართულების მართი კუთხე, ვთქვათ f^5-ში. ამ კუთხის არც შიგნით და არც მის გვერდებზე სხვა შეფასება არ არის მოთავსებული. ამიტომ, f^5 შეფასება არის ეფექტური და x_5 ეფექტური გადაწყვეტილებაა პარეტოს აზრით. ჩვენს შემთხვევაში, ასეთივეა f^4 და x_4. თუ ასეთივე უსასრულო მართ კუთხეს ავაგებთ f^1 წერტილში, ვნახავთ, რომ ამ კუთხის შიგნით არა, ხოლო მის ერთ გვერდზე არის სხვა შეფასება, კერძოდ f^5. ამიტომ f^1 არის სუსტად ეფექტური შეფასება და x_1 სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება. ასეთივეა f^3 და x_3. რაც შეეხება დომინირებულ შეფასებებს, f^2-ს და f^6-ს, თუ ამ წერტილებში ავაგებთ ანალოგიურ კუთხეებს, მაშინ მათ შიგნით მოთავსდება სხვა შეფასებაც და ამიტომ ისინი ვერ იქნებიან ვერც ეფექტური და ვერც სუსტად ეფექტური შეფასებები.

თუ გადაწყვეტილებათა სიმრავლე X იქნება უწყვეტი და შესაბამისად ვექტორული შეფასებების სიმრავლე G იქნება უწყვეტი, მაშინ პარეტოს ეფექტური და სუსტად ეფექტური შეფასებები უნდა ვეძიოთ G სიმრავლის ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვარზე (მაქსიმუმის ამოცანაში). ვთქვათ, G სიმრავლის სახე ასეთია (ნახ. 2):



ნახ.2

აქ BCD ტეხილის წერტილები, პარეტოს აზრით არის ეფექტური ანუ ოპტიმალური შეფასებები, ხოლო $BCDE$ ტეხილის წერტილები კი - პარეტოს აზრით - სუსტად ეფექტური ანუ სუსტად ოპტიმალური შეფასებები.

შენიშვნა. მინიმუმის ამოცანაში პარეტოს შეფასებები უნდა ვეძებოთ სიბრტყის სამხრეთ-დასავლეთ საზღვარზე.

ამოცანა. ვიპოვოთ პარეტოს შეფასებები და გადაწყვეტილებები ამოცანებში

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \to \max \ (\text{და} \to \min), \ x \in X,$$

სადაც $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ და კერძო კრიტერიუმების მნიშვნელობები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f_1(x)$	1	2	3	2	5	4	3
$f_2(x)$	6	3	6	4	4	5	3

.

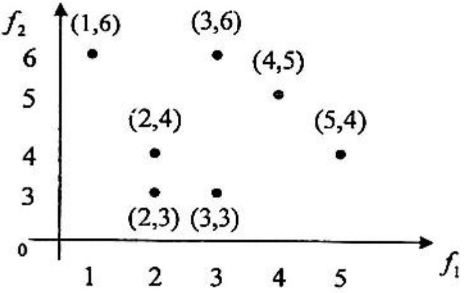
ამოხსნა. მოვათავსოთ

$$f(x_i) = (f_1(x_i), f_2(x_i)), \ i = 1,...,6,7$$

შეფასებები კოორდინატთა სისტემაში (ნახ. 3).

ამ სისტემის ანალიზით მივიღებთ, რომ მაქსიმუმის ამოცანაში: პარეტოს ეფექტური შეფასებებია (3,6), (4,5), (5,4), ხოლო ეფექტური გადაწყვეტილებებია მათი შესაბამისი არგუმენტები $x = 3;6;5$. პარეტოს სუსტად ეფექტური შეფასებაა (1,6) და სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება $x = 1$. მინიმუმის ამოცანაში: პარეტოს ეფექტური შეფასებებია (2,3), (1,6), ხოლო ეფექტური გადაწყვეტილებები -

მათი შესაბამისი არგუმენტები $x = 2;1$. სუსტად ეფექტური შეფასებებია (3,3) და (2,4), ხოლო შესაბამისი არგუმენტები ანუ სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებები $x = 7,4$.



ნახ. 3.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function paretomax(x,f1,f2)
% ვექტორული მაქსიმუმის ორკრიტერიუმიანი ამოცანა
% გადაწყვეტილებათა დისკრეტული x სიმრავლისათვის,
% პარეტოს აზრით ოპტიმალური ამოხსნები
    n=length(x);
  hold on
  for i=1:n
     plot(f1,f2,'.')
     k=num2str(i);s=strcat('F',k);
     text(f1(i),f2(i)-0.5,s)
  end
  I=ones(1,n);
  for i=1:n
   if f1(i)==max(f1)||f2(i)==max(f2)
  plot([f1(i),max(f1)+2],[f2(i),f2(i)],'--')
  plot([f1(i),f1(i)],[f2(i),max(f2)+2],'--')
   else
    for j=1:n
     if f1(i)<f1(j)&& f2(i)<f2(j)
        I(i)=0;
```

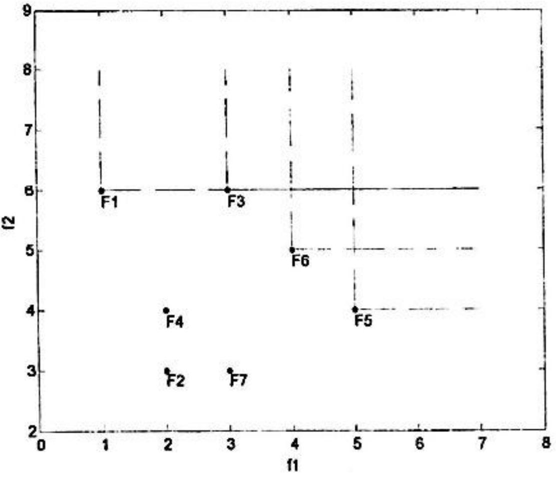
```
      end
            end
        if I(i)==1
plot([f1(i),max(f1)+2],[f2(i),f2(i)],'—')
plot([f1(i),f1(i)],[f2(i),max(f2)+2],'--')
        end
   end
  end
  xlabel('f1')
  ylabel('f2')
  axis(axis+[-1 1 -1 1])
disp('I=1 – efeqturi  da sustad efeqturi Sefasebebis indcqsebi'),  I
```

ბრძანებათა ფანჯარაში შესატანი ბრძანებები:

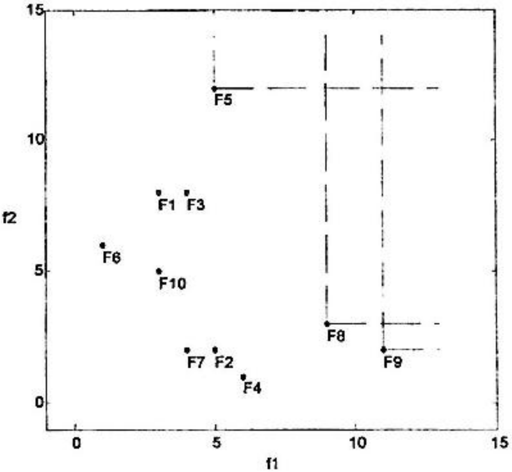
>>x=[1,2,3,4,5,6,7]; f1=[1,2,3,2,5,4,3];   f2=[6,3,6,4,4,5,3];

>>paretomax(x,f1,f2)

მაქსიმუმის ამოცანის შესაბამის ნახაზს აქვს შემდეგი სახე:



ქვემოთ მოცემული დამოუკიდებელი სამუშაოს მაქსიმუმის ამოცანას შეესაბამება შემდეგი ნახაზი:



3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენს ჩათელის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. ვიპოვოთ პარეტოს შეფასებები და გადაწყვეტილებები ამოცანებში

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \to \max \ \text{(და } \to \min), \ x \in X,$$

სადაც $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ და კერძო კრიტერიუმების მნიშვნელობები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

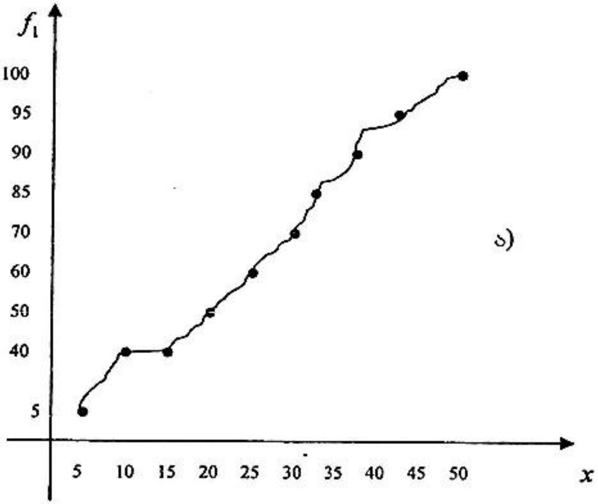
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(x)$	3	5	4	6	5	1	4	9	11	3
$f_2(x)$	8	2	8	1	12	6	2	3	2	5

8. “ღირებულება-ეფექტურობის” მეთოდში გამოყენებული მოდელების სინთეზი

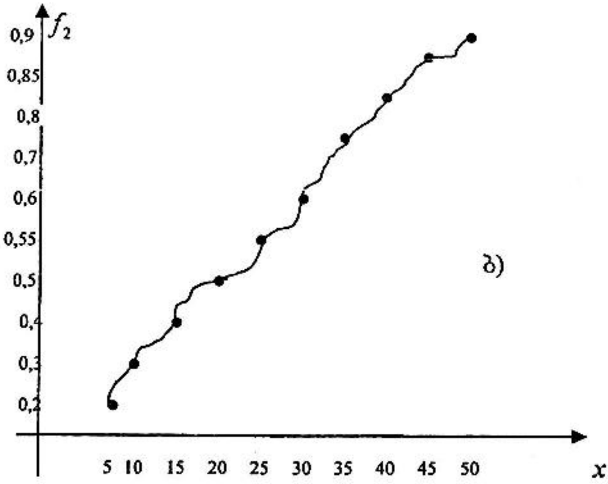
1. სამუშაოს მიზანი - “ღირებულება-ეფექტურობის” მეთოდი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მრავალი ანალოგიური ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად. აქ განვიხილავთ ერთ კონკრეტულ ამოცანას და ანალოგიური მიეცემა სტუდენტებს დამოუკიდებელი სამუშაოს შესასრულებლად. სამუშაოს მიზანია სტუდენტები დაეუფლონ პარეტოს სიმრავლეების აგების მეთოდს უწყვეტი საზღვრის შემთხვევაში, რომელიც მიიღება დისკრეტული მონაცემების აპროქსიმაციით. მოვახდინოთ დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. “ღირებულება-ეფექტურობის” მეთოდი არის პირველი ორკრიტერიუმიანი ამოცანა გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში, სადაც ოპტიმალური გადაწყვეტილება მიიღება სუბიექტურ მოსაზრებებზე დამოკიდებულებით. ეს მოდელი აშშ-ში დამუშავდა გასული საუკუნის 50-იან წლებში საომარი მოქმედებების გადასაწყვეტად; კერძოდ, გადასაწყვეტი იყო რამდენი რაკეტა უნდა აგებულიყო. ჩავწეროთ ეს მოდელი ამოცანის სახით.

ამოცანა. გადაწყვეტილებათა მიღების ერთსა და იმავე X სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი კრიტერიუმი (ორი სკალარული ფუნქცია) f_1 და f_2. ამ ფუნქციების გრაფიკები ნაჩვენებია 1, ა და ბ ნახ-ზე. მოცემულია f_1 და f_2 კრიტერიუმების მნიშვნელობების შუალედები $\{f_1^0, f_1^{00}]$ და $[f_2^0, f_2^{00}]$ შესაბამისად. ავიღოთ X სიმრავლიდან $n=10$ კონკრეტული მნიშვნელობა $x_i \in X, i=1,2,...,10$ და $f_1 0 f_2$ სიბრტყეზე ავაგოთ წერტილები $(f_1(x_i), f_2(x_i))$, $i=1,2,...,10$. ვიპოვოთ ამ მნიშვნელ-



f_1
100
95
90
85
70
60
50
40
5
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
x
ა)



f_2
0,9
0,85
0,8
0,7
0,6
0,55
0,5
0,4
0,3
0,2
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
x
ბ)

ნახ. 1

ობების უწყვეტი აპროქსიმაცია და ამ სიმრავლეში ვიპოვოთ

$$(f_1(x_i), f_2(x_i)) \to \max \text{ (ან min)}$$

ამოცანის პარეტოს ეფექტური და სუსტად ეფექტური ვექტორები (შეფასებები) და შესაბამისი გადაწყვეტილებები.

ამოხსნა. ნახაზებიდან ჩანს, რომ $[f_1^0, f_1^{00}]$=[5;100], $[f_2^0, f_2^{00}]$=[0,2; 0,9]. შევადგინოთ კრიტერიუმების მნიშვნელობათა ცხრილი (ცხრილი 1).

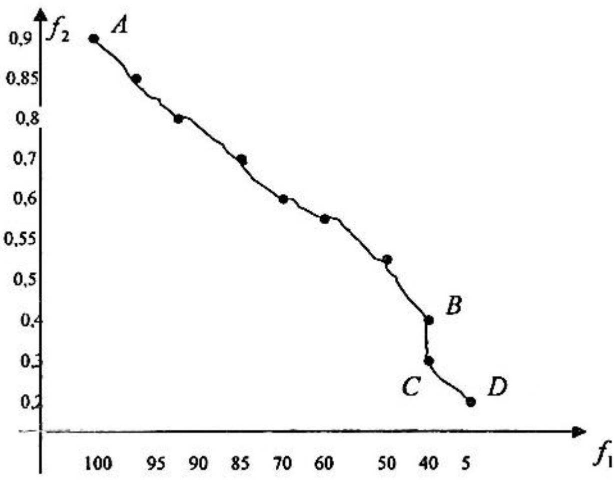
ცხრილი 1

x	f_1	f_2
5	5	0,2
10	40	0,3
15	40	0,4
20	50	0,5
25	60	0,55
30	70	0,6
35	85	0,7
40	90	0,8
45	95	0,85
50	100	0,9

$f_1 0 f_2$ სიბრტყეზე ავაგოთ წერტილები $(f_1(x_i), f_2(x_i))$, $i = 1,2,...,10$ (ნახ. 2). ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირისათვის f_1-ის ნაკლები მნიშვნელობა უპირატესია.

ამ ნახაზზე შეფასებათა AB საზღვარი ბოლო წერტილების ჩათვლით და CD საზღვარი C წერტილის გარდა, პარეტოს ეფექტური ვექტორების (შეფასებების) სიმრავლეა მაქსიმუმის ამოცანისათვის, ხოლო CB მონაკვეთი B წერტილის გარდა, პარეტოს სუსტად ეფექტური

ვექტორების (შეფასებების) სიმრავლეა ამავე ამოცანისათვის. შესაბამისად, $x = 5;15;20;25;30;35;40;45;50$ პარეტოს ეფექტური გადაწყვეტილებებია, ხოლო $x = 10$ პარეტოს სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებაა. რაც შეეხება მინიმუმის ამოცანას, აქ AB და CD, გარდა C წერტილისა, პარეტოს ეფექტური ვექტორების (შეფასებების) სიმრავლეა, ხოლო CB მონაკვეთი, B წერტილის გარდა, პარეტოს სუსტად ეფექტური ვექტორების სიმრავლეა.



ნახ. 2.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function lab8(x,f1,f2)
    n=length(x);
    subplot(3,1,1)
    plot(x,f1)
xlabel('x')
ylabel('f1')
```

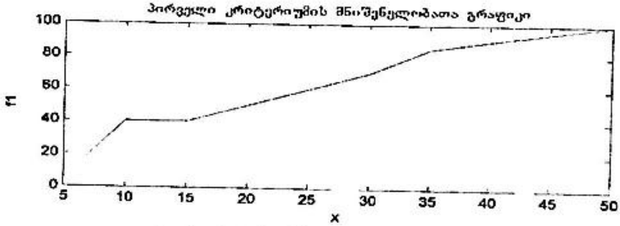
```
s='pirveli kriteriumis mniSvnelobaTa grafiki';
title(s,'FontName','AcadNusx')
     subplot(3,1,2)
     plot(x,f2)
xlabel('x')
ylabel('f2')
s='meore kriteriumis mniSvnelobaTa grafiki';
title(s,'FontName','AcadNusx' )
     subplot(3,1,3)
     plot(f1,f2,'.')
hold on
     plot(f1,f2)
axis([0 110 ,0 1])
set(gca,'XDir','reverse')
xlabel('f1')
ylabel('f2')
s='paretos efeqturi da sustad efeqturi Sefasebebi';
title(s,'FontName','AcadNusx' )
 for i=1:n
    k=num2str(i);s=strcat('F',k);
    text(f1(i)+5,f2(i)-0.03,s)
 end
```

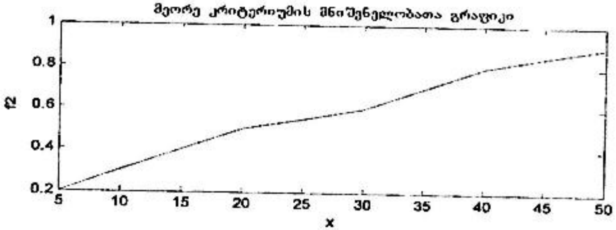
lab8(x,f1,f2) – m – ფაილ-ფუნქციის შემავალი არგუმენტები:

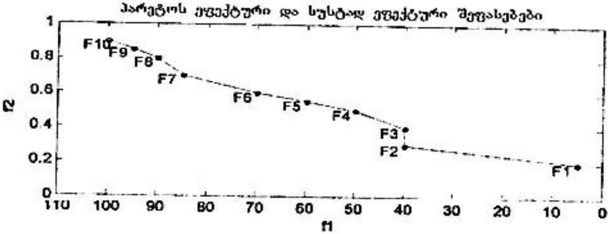
```
>>f1=[5 40 40 50 60 70 85 90 95 100];
>>f2=[0.2 .3 .4 .5 .55 .6 .7 .8 .85 .9];
>>x =[5 10 15 20 25 30 35 40 45 50].
```

პროგრამის შესრულების ბრძანება: **<<lab7(x, f1,f2)**

პასუხი:



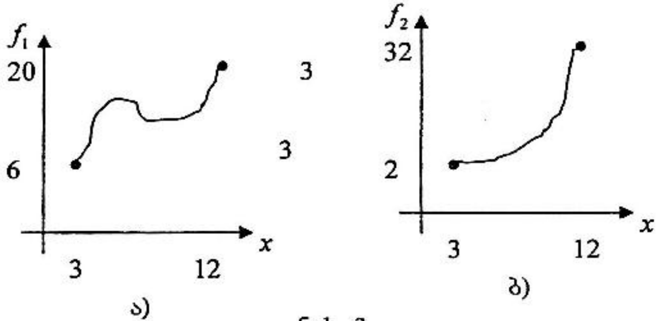




3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენენ ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. გადაწყვეტილებათა მიღების ერთსა და იმავე X სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი კრიტერიუმი (ორი

სკალარული ფუნქცია) f_1 და f_2. ამ ფუნქციების გრაფიკები ნაჩვენებია 3, ა და ბ ნახ-ზე.



ნახ. 3.

მოცემულია f_1 და f_2 კრიტერიუმების მნიშვნელობების შუალედები $\{f_1^0, f_1^{00}]$ და $[f_2^0, f_2^{00}]$ შესაბამისად. ავიღოთ X სიმრავლიდან $n=8$ კონკრეტული მნიშვნელობა $x_i \in X, i=1,2,...,8$ და $f_1 0 f_2$ სიბრტყეზე ავაგოთ წერტილები $(f_1(x_i), f_2(x_i))$, $i=1,2,...,8$. ვიპოვოთ ამ მნიშვნელობების უწყვეტი აპროქსიმაცია ამ სიმრავლეში

$$(f_1(x_i), f_2(x_i)) \to \max \ \ (\text{და } \min)$$

ამოცანის პარეტოს ეფექტური და სუსტად ეფექტური ვექორები (შეფასებები) და შესაბამისი გადაწყვეტილებები.

9. რაციონალური ქცევის განსაზღვრა ლატარიის საშუალებით. გადაწყვეტილებათა ხეების გამოყენება

1. სამუშაოს მიზანი - ვიცოდეთ რა არის ლატარია და მისი საშუალებით დავეუფლოთ რაციონალური გადაწყვეტილების მიღებას. ამავე მიზნით გამოვიყენოთ გადაწყვეტილებათა მიღების ხე. ამისათვის განხილულია ერთი კონკრეტული ამოცანა. დამოუკიდებელი სამუშაო გულისხმობს ანალოგიური ამოცანის გადაწყვეტას. სასურველია დასმულ ამოცანაში გამოთვლების რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. შემოვიღოთ ლატარიის ცნება. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ლატარია შედგება რთული სარისკო ალტერნატივებისაგან ანუ მასში მონაწილეობს მისაღები გადაწყვეტილებები შესაბამისი ალბათობებით.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ, $a,b \in X^0$ ნებისმიერი ორი შედეგია, ხოლო $0 \le p \le 1$. p ლატარია a და b-ზე ვუწოდოთ ალბათურ ხდომილობას (თამაშს, შემთხვევით მექანიზმს), რომელსაც აქვს ორი შესაძლებელი a და b შედეგი შესაბამისი p და $1-p$ ალბათობებით. მისთვის გამოვიყენოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$L = \begin{cases} a & b \\ p & 1-p \end{cases} \text{ ან } L = (pa, (1-p)b) \text{ ან } L = pa + (1-p)b.$$

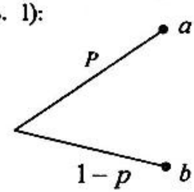
ორი შედეგის შემთხვევაში, ლატარიას ეწოდება მარტივი.

ანალოგიურად განისაზღვრება $a_1, a_2, ..., a_r$-ზე ლატარია $p = (p_1, p_2, ..., p_r)$, სადაც $p_i \ge 0$, $i = 1, ..., r$ და $p_1 + ..., + p_r = 1$. იგი აღინიშნება ანალოგიურად, ვთქვათ,

$L=(p_1a_1, p_2a_2,..., p_ra_r)$ ან $L=p_1a_1+p_2a_2+...+p_ra_r$ სახით.

$L=pa+(1-p)b$ ლატარიას კიდევ, (a,b) შედეგების p ნარევს ვუწოდებთ. ასევე, $L=p_1a_1+p_2a_2+...+p_ra_r$ ლატარიას $(a_1,a_2,...,a_r)$ შედეგების $p=(p_1,p_2,...,p_r)$ ნარევს ვუწოდებთ. შევნიშნოთ, რომ თუ მოცემულ ლატარიაში შედეგების როლში განვიხილავთ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს, მაშინ ლატარია წარმოადგენს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს.

მარტივი ლატარია $(pa,(1-p)b)$ გრაფიკულად ასე წარმოვადგინოთ (ნახ. 1):



ნახ. 1.

აქსიომების ერთ-ერთი სისტემიდან, რომელიც მთლიანად აგებულია ლატარიების შედარებაზე, ჩამოვაყალიბოთ აქსიომა, რომელიც ცნობილია ლატარიის მონოტონურობის თვისებით.

აქსიომა 1 (მონოტონურობის). ვთქვათ, ორი x_1 და x_2 შედეგიდან $x_1 \succ x_2$, მაშინ

$$px_1+(1-p)x_2 \succ qx_1+(1-q)x_2 \Leftrightarrow p>q.$$

ეს აქსიომა ნიშნავს, რომ ორი ლატარიიდან, რომლებიც შეიცავს ერთ და იმავე უფრო უპირატეს და ნაკლებ უპირატეს შედეგებს (ან ალტერნატივებს), უნდა ავირჩიოთ ის ლატარია, რომელშიც უფრო უპირატეს შედეგს აქვს მეტი ალბათობა.

აქსიომა 2 (უწყვეტობის). თუ $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, მაშინ არსებობს ისეთი $p,q \in (0,1)$, რომ

$$px_1+(1-p)x_3 \succ x_2 \text{ და } x_2 \succ qx_1+(1-q)x_3.$$

აქსიომათა ზოგიერთი სისტემა კი ძალიან სასარგებლო აღმოჩნდა გადაწყვეტილების მიღებისათვის რისკის (ანუ ლატარიის) პირობებში. ასეთია ერთ-ერთ სისტემაში აქსიომა, რომელიც ისევ უწყვეტობის სახელითაა ცნობილი.

აქსიომა 3 (უწყვეტობის). ვთქვათ,

$$x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_r.$$

მაშინ ყოველი x_i ეკვივალენტურია ლატარიის, რომელიც შეიცავს მხოლოდ x_1 და x_r-ს ანუ არსებობს ისეთი $0 \le q_i \le 1$, რომ $x_i \sim q_i x_1 + (1-q_i)x_r$.

აღნიშნულ და კიდევ სხვა აქსიომების პირობებში დამტკიცებულია თეორემა.

თეორემა 1. ნებისმიერი $(p_1, p_2, ..., p_r)$ ლატარიისათვის $(x_1, x_2, ..., x_r)$-ზე სრულდება ეკვივალენტობა:

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_rx_r \sim px_1+(1-p)x_r,$$

სადაც $p=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_rq_r$.

ამ თეორემის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 1. ვთქვათ, გმპ-თვის $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$. შემდეგი ორი

$$L_1=0{,}25x_1+0{,}25x_2+0{,}25x_3+0{,}25x_4,$$

$$L_2=0{,}15x_1+0{,}5x_2+0{,}15x_3+0{,}2x_4$$

ლატარიიდან რომელია მისთვის უპირატესი?

ამოხსნა. დავიყვანოთ ეს ლატარიები x_1 და x_4-ის ლატარიამდე. ვთქვათ, სუბიექტური ალბათობებით დავადგინეთ, რომ

$$x_2 \sim 0{,}6x_1+0{,}4x_4, \quad x_3 \sim 0{,}2x_1+0{,}8x_4.$$

მაშინ

$$L_1 \sim 0{,}25x_1+0{,}25(0{,}6x_1+0{,}4x_4)+0{,}25(0{,}2x_1+0{,}8x_4)+$$
$$0{,}25x_4 \sim 0{,}45x_1+0{,}55x_4.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $L_2 \sim 0{,}48x_1 + 0{,}52x_4$.

მონოტონურობის 1 აქსიომიდან გამომდინარე, ვწერთ $L_2 \succ L_1 \Leftrightarrow 0{,}48 > 0{,}45$.

განუზღვრელობის და რისკის პირობებში ლატარიისა და გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებაზე განვიხილოთ ამოცანა.

ამოცანა 2. გმპ-ის წინ დევს ურნა, რომელიც შეიძლება იყოს 1-ელი ან მე-2 ტიპის და მან უნდა გამოიცნოს რომელი ტიპისაა იგი. მისთვის ცნობილია შემდეგი ინფორმაცია: რამდენი ასეთი ტიპის ურნა არსებობს; რამდენი შავი და წითელი ფერის ბურთია 1-ელი და მე-2 ტიპის ურნაში (ერთნაირი ტიპის ურნებში ბურთების რაოდენობა და შემადგენლობა ფერების მიხედვით ერთნაირია); რა მოგებას მიიღებს იგი, თუ სწორად გამოიცნობს რომელ ტიპს მიეკუთვნება მის მიერ არჩეული ურნა და რას წააგებს შეცდომის შემთხვევაში.

დავუშვათ, რომ არსებობს 1-ელი ტიპის 700 ურნა, მე-2 ტიპის 300 ურნა. თუ გმპ-ის წინ დევს 1-ლი ტიპის ურნა და სწორად გამოიცნობს მას, მაშინ ის მიიღებს მოგებას 350 დოლარს. თუ შეცდება გამოთვლებში და დაასახელებს მას, როგორც მე-2 ტიპის ურნას, მაშინ ის წააგებს 50 დოლარს. თუ მის წინ მე-2 ტიპის ურნაა და გამოიცნობს მას, მიიღებს 500 დოლარს, თუ ვერა და ის წააგებს 100 დოლარს. ჩავთვალოთ, რომ გმპ-თვის ფულის სარგებლიანობა ფულადი ერთეულით იანგარიშება (1 დოლარის სარგებლიანობა 1-ის ტოლია). გმპ-ს აქვს ორი სტრატეგია: x_1-თქვას, რომ ურნა 1-ელი ტიპისაა; x_2-თქვას, რომ ურნა მე-2 ტიპისაა.

ამოცანის პირობები ჩავწეროთ ცხრილის სახით (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

ურნის ტიპი	არჩევის ალბათობა	x_1	x_2
1	0,7	350	-100
2	0,3	-50	500

რა გადაწყვეტილება უნდა მიიღოს გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა?

სარგებლიანობის თეორიის მოსალოდნელი სარგებლიანობის პრინციპის თანახმად, უნდა შეფასდეს მისი თითოეული სტრატეგია და მათგან აირჩიოს მაქსიმალური მოსალოდნელი სარგებლიანობის შესაბამისი. გამოვთვალოთ თითოეული სტრატეგიის მოსალოდნელი სარგებლიანობა:

$$u(x_1) = 350 \cdot 0{,}7 + (-50) \cdot 0{,}3 = 230\,;$$

$$u(x_2) = 500 \cdot 0{,}3 + (-100) \cdot 0{,}7 = 80\,.$$

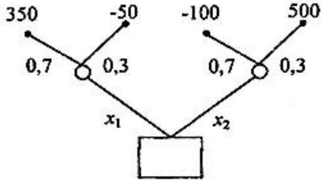
მოსალოდნელი სარგებლიანობის პრინციპის თანახმად, გმპ აირჩევს x_1 სტრატეგიას.

ამ მაგალითიდან და, საერთოდ, სარგებლიანობის თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ გადაწყვეტილების მიღებისათვის რაციონალური ადამიანი უნდა მოიქცეს შემდეგნაირად: განსაზღვროს თითოეული სტრატეგიის შესაბამისი შედეგები და მათი სარგებლიანობები, გაამრავლოს ეს სარგებლიანობები შესაბამის ალბათობებზე და შეკრიბოს. ასე გამოითვლის მოსალოდნელ სარგებლიანობებს. შემდეგ აირჩიოს მოსალოდნელი სარგებლიანობებიდან მაქსიმალურის შესაბამისი სტრატეგია.

აქ საქმე გვქონდა გადაწყვეტილების მიღების ისეთ ამოცანასთან, რომელშიც გადაწყვეტილების მიღება ხდებოდა ე.წ. ერთეტაპიანი ალტერნატივებიდან და მაშინვე ვღებულობდით შედეგებს. ბუნებრივია, არსებობს ისეთი უამრავი ამოცანაც, რომლებშიც გადაწყვეტილებების მიღება ხდება ერთმანეთზე დამოკიდებული მრავალეტაპიანი პროცესით და ურთიერთდამოკიდებული გადაწყვეტილებები მიიღება მიმდევრობით. გადაწყვეტილების მიღების ასეთი პროცესის მარტივი სახით აღწერისათვის უმჯობესია იგი წარმოდგენილ იქნეს გრაფის, გარკვეული გრაფიკული სქემის სახით, რომელსაც გადაწყვეტილებათა **ხე** ეწოდება. გადაწყვეტილებათა ხე ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ინსტრუმენტია მონაცემების შენახვისათვის, გადაწყვეტილებათა ანალიზისათვის და, მაშასადამე,

მთლიანად გადაწყვეტილებათა მიღების ხელშემწყობი სისტემებისათვის.

განვიხილოთ ჩვენი მაგალითი, რომლის პირობები მოცემულია 1-ელი ცხრილით. წარმოვადგინოთ ეს მონაცემები გადაწყვეტილებათა ხის სახით (ნახ. 2):



ნახ. 2.

ამ ხის ძირი-კვადრატი მიუთითებს ადგილს, სადაც გმპ ღებულობს გადაწყეეტილებას ან x_1-ს ან x_2-ს; წრე მიუთითებს ადგილს, სადაც გადაწყვეტილება მიიღება შემთხვევით; აქედან გამომავალ შტოებზე (იმავე ალტერნატივებზე) მითითებულია ჩვენთვის ცნობილი ალბათობები; შტოების საბოლოო წვეროებზე მითითებულია შედეგების მნიშვნელობები სარგებლიანობებში.

ასეთი ხის საშუალებით შეგვიძლია გავთვალოთ ჩვენი შესაძლო ქმედებები ანუ ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა ისეთი მიმდევრობა, რომ მივიღოთ მაქსიმალური მოსალოდნელი სარგებლიანობა. მოცემული ხის შემთხვევაში x_1-ის სარგებლიანობაა $0{,}7.350+0{,}3(-50)=230$, ხოლო x_2-თვის ეს სიდიდეა 0,7(-100)+0,3.500=80. მაშასადამე, უნდა ავირჩიოთ x_1.

ჩვენს მაგალითში ასეთი ქმედება მოცემულ ნახაზზე წარმოდგენილი შესაბამისი ხის გარეშეც მარტივად დავადგინეთ, მაგრამ ამოცანის უფრო რთულ პირობებში ამის გაკეთება გადაწყვეტილებათა ხის გარეშე შეუძლებელია.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

უპირატესი ლატარიის დადგენა 4 შედეგის შემთხვევაში

```
function lab91(k1,k2,p,q)
%უპირატესი ლატარიის დადგენა 4 შედეგის შემთხვევაში
% მოცემულია k1 - ზე განსაზღვრული L1 ლატარია და
% k2 - ზე განსაზღვრული L2 ლატარია
% p,q  -  x1 და x4  შედეგების მოსვლის ალბათობები
k1,k2,p,q
xs=1;xb=0;
x=[xs,xb]';
x2=p*x;
x3=q*x;
xx=[x;x2;x3];
L1=k1*xx
L2=k2*xx
L=L1-L2;
if L>=0
   disp('L1 lataria upiratesia')
else
   disp('L2 lataria upiratesia')
end
```

ამოცანა 1. ბრძანებათა ფანჯრიდან შესატანი არგუმენტები:

```
k1=[.25,.25,.25,.25];
k2=[.15,.5,.15,.2];
 p=[.6,.4]; q=[.2,.8];
```

და პროგრამის შესრულების ბრძანება

```
>> lab91(k1,k2,p,q)
```

პასუხი:

```
k1 =  0.2500   0.2500   0.2500   0.2500
k2 =  0.1500   0.5000   0.1500   0.2000
p =   0.6000   0.4000
q =   0.2000   0.8000
```

L1 = 0.4500

L2 = 0.2800

L1 lataria upiratesia

```
function lab92(p,x1,x2)
% ლატარიის გამოყენება გადაწყვეტილების მისაღებად
% რისკის პირობებში
disp('  arCevis')
disp('  albaToba    x1    x2 ')
U=[p,x1,x2], disp(U)
u1=p'*U(:,2);
u2=p'*U(:,3);
if u1>=u2
   disp('optimaluria x1 strategia, gmp–s mosalodneli
sargeblianobaa')
   u1
else
   disp('optimaluria x2 strategia, gmp–s mosal-odneli
sargeblianobaa')
   u2
end
```

ამოცანა 2: **lab92(p,x1,x2)**-ის შემავალი არგუმენტები
p=[0.7;0.3]; x1=[350;-50]; x2=[-100;500];
და პროგრამის შესრულების ბრძანება
>> lab92(p, x1, x2)

პასუხი:

```
   arCevis
 albaToba    x1          x2
   0.7000    350.0000  -100.0000
   0.3000    -50.0000   500.0000
optimaluria x1  strategia, gmp–s mosalodneli sargeblianobaa
u1 = 230.0000
```

დამოუკიდებლად ამოსახსნელი ამოცანა
ბრძანებათა ფანჯრიდან შესატანი არგუმენტები:

p=[0.5;0.3;0.2]; x1=[350; -50; 150];
x2=[-100; 500; -80];
და პროგრამის შესრულების ბრძანება
>> lab92(p, x1, x2)

პასუხი:

```
  arCevis
 albaToba     x1          x2
  0.5000   350.0000  -100.0000
  0.3000   -50.0000   500.0000
  0.2000   150.0000   -80.0000
optimaluria x1 strategia, gmp–s mosalodneli sargeblianobaa
u1 =  190
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. ამოცანის პირობები მოცემულია ცხრილის სახით (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

ურნის ტიპი	არჩევის ალბათობა	x_1	x_2
1	0,5	350	-100
2	0,3	-50	500
3	0,2	150	-80

წარმოადგინეთ ეს პირობები ხის სახით და მიიღეთ რაციონალური გადაწყვეტილება.

10. ხარისხობრივი შედეგების შეფასება სარგებლიანობის ფუნქციით

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია n ხარისხობრივი შედეგი $x_1, x_2, ..., x_n \in X^0$. გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა (გმპ) უნდა შეაფასოს თითოეული მათგანი, ანუ იპოვოს თითოეული შედეგის სარგებლიანობა. ამისათვის გმპ ალაგებს მათ უპირატესობების მიხედვით. ამის შემდეგ, მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენებთ ორ მეთოდს. მათ რეალიზაციას მოვახდენთ MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. ხარისხობრივ შედეგებს წარმოადგენენ სხვადასხვა სიტუაციები, მოვლენები, ობიექტები, მდგომარეობები და მათი თვისებები, რომლებიც თითოეულ ჩვენგანს უამრავი გვხვდება როგორც პირად ცხოვრებაში, ისე საზოგადოებაში და საერთოდ, ბუნებაში. მათი შეფასებები კი მეტად საჭირო და საინტერესოა არა მხოლოდ უპირატესობის თვალსაზრისით (ვთქვათ პროექტების, სტუდენტთა ჯგუფის, კონკურსის შედეგების, ომის შედეგად მისაღები ან მიღებული შედეგების შეფასება და ა.შ.). ასეთი შედეგების შეფასების მეთოდები ეყრდნობა ნეიმან-მორგენშტერნის მოსალოდნელი სარგებლიანობის ფუნქციის არსებობის პირობებს და პოვნის მეთოდს. კერძოდ, ვთქვათ $x \in X^0$ შედეგის მოხდენის ალბათობაა p, არმოხდენის ალბათობა $1-p$ და ასეთი ლატარიაა $L(p) = px$. მაშინ ამ ლატარიის სარგებლიანობა ტოლია $u(px) = pu(x)$; და კიდევ, თუ $x_1, x_2, ..., x_n \in X^0$ შედეგების ერთდროულ მიღწევას აღვნიშნავთ სიმბოლური ჯამით $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, მაშინ უნდა შესრულდეს ადიტიურობის შემდეგი აქსიომა: $x_1, x_2, ..., x_n$ შედეგების ერთდროული მიღწევის სარგებლიანობა ტოლია ცალკეულ შედეგთა მიღწევის სარგებლიანობების ჯამის

$$u(x_1+x_2+\cdots+x_n)=u_1(x_1)+u_2(x_2)+\cdots+u_n(x_n).$$

ახლა განვიხილოთ სარგებლიანობის, ანუ შეფასებ-ის პოვნის ორივე მეთოდი ცალ-ცალკე.

მეთოდი I

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. გვაქვს ორი შედეგი x_1 და x_2. სარგე-ბლიანობის განსაზღვრის მეთოდი ასეთია:

1. გმპ განსაზღვრავს რომელია ამ ორი შედეგიდან მისთ-ვის უფრო უპირატესი, ვთქვათ $x_1 \succ x_2$;

2. შემდეგ გმპ განსაზღვრავს ისეთ p ალბათობას, რომ-ლითაც x_1 შედეგის მიღწევა ეკვივალენტური (~) იქნება x_2 შედეგის უეჭველად მიღების, ანუ x_2 შედეგის 1-ის ტო-ლი ალბათობით მიღების: $px_1 \sim x_2$;

3. $u(px_1)=pu(x_1)=u(x_2)$ ტოლობაში მივიღოთ $u(x_2)=1$ და აქედან ვიპოვოთ $u(x_1)=\dfrac{1}{p}$. ამრიგად, $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{p}>1$.

შემთხვევა II. გვაქვს n შედეგი $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X^0$.

1. გმპ თავიდან ალაგებს ამ შედეგებს უპირატესობების მიხედვით. ვთქვათ, პირობითად $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$. შემდეგ კი მიღებული შეფასებების საიმედოობისათვის მან თითოეული შედეგი უნდა შეადაროს აგრეთვე სხვებს;

2. p_1 სიდიდეს ვპოულობთ ეკვივალენტობიდან

$$p_1x_1 \sim x_2: \quad u(p_1x_1)=p_1u(x_1)=u(x_2);$$

3. ანალოგიურად განვსაზღვრავთ $p_2, \ldots, p_{n-1}$ სიდიდეებს ემდეგი პირობებიდან:

$$p_2x_2 \sim x_3: \quad p_2u(x_2)=u(x_3);$$

$$p_3x_3 \sim x_4: \quad p_3u(x_3)=u(x_4);$$

– – – – – – – – – – – – – –

$$p_{n-1}x_{n-1} \sim x_n: \quad p_{n-1}u(x_{n-1})=u(x_n);$$

4. ყველაზე ნაკლებ უპირატესი x_n შედეგის სარგებლიანობა $u(x_n)$ ჩავთვალოთ 1-ის ტოლად $u(x_n)=1$. მაშინ წინა ტოლობებიდან ქვემოდან ზემოთ ვიპოვით:

$$u(x_{n-1})=\frac{1}{p_{n-1}},\ u(x_{n-2})=\frac{1}{p_{n-2}\cdot p_{n-1}},\ .\ .\ .\ ,\ u(x_1)=\frac{1}{p_1\cdot p_2\cdots p_{n-1}}.$$

ამოცანა 1. მოცემულია სამი შედეგი x_1, x_2, x_3 და მათ უპირატესობების მიხედვით ვალაგებთ ასე: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$. შევაფასოთ თითოეული მათგანი.

შეფასებათა საიმედოობის თვალსაზრისით, უნდა განვიხილოთ ყველა ვარიანტი: $x_1 \succ x_2$, $x_2 \succ x_3$, $x_1 \succ x_3$. ეს ნიშნავს, რომ p_1, p_2 და p_3 ალბათობები უნდა განისაზღვროს ტოლობებიდან

$$p_1 u(x_1)=u(x_2),\ \ p_2 u(x_2)=u(x_3)=1,\ \ p_3 u(x_1)=u(x_3)=1.$$

თუ ავიღებთ, მაგალითად $p_1=0{,}25$; $p_2=0{,}5$; $p_3=0{,}4$, მაშინ $u(x_1)=8$; $u(x_2)=2$; $u(x_3)=1$. მიღებული შეფასებებისათვის შესრულდება როგორც $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, ისე $x_1 \succ x_2$, $x_2 \succ x_3$ და $x_1 \succ x_3$ უპირატესობები. თუ მათგან რომელიმე უპირატესობა მიღებული შეფასებებისათვის არ შესრულდება, ანუ მივიღებთ წინააღმდეგობას, მაშინ საჭიროა ალბათურ შეფასებათა კორექტირება.

ცხადია, n-ის გაზრდისას იზრდება საიმედოობაზე შესამოწმებელი უპირატესობების რიცხვი. მაგალითად, როცა n იყო სამი, მაშინ შევამოწმეთ მხოლოდ ერთი უპირატესობა. როცა $n=4$, მაშინ უნდა შევამოწმოთ სამი უპირატესობა. კერძოდ, თუ ჩავთვლით, რომ

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4,$$

მაშინ შესამოწმებელია დამატებით $x_1 \succ x_3$, $x_1 \succ x_4$ და $x_2 \succ x_4$ უპირატესობები.

მეთოდი II

მოცემულია ხარისხობრივი $x_1, x_2, ..., x_n \in X^0$ შედეგები. მათი შეფასებისათვის განიხილება შემდეგი ეტაპები:
1. გმპ უპირატესობების მიხედვით ალაგებს მოცემულ შედეგებს, კლებადი მიმდევრობით, ვთქვათ ასეთია დალაგება

$$x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n;$$

2. გმპ ადგენს ერთდროულად მიღწევადი შედეგების კომბინაციების ცხრილს და შემდეგ დადგინდება მათი უპირატესობები ცალკეულ $x_1, x_2, ..., x_n$ შედეგთან. მაშასადამე, გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა უნდა დაადგინოს ცხრილის მეორე და მესამე სვეტში მოთავსებული შედეგებიდან რომელია უპირატესი (ცხრილი 1).

ცხრილი 1.

1	2	3
1	x_1	$x_2 + ... + x_n$
2	x_1	$x_2 + ... + x_{n-1}$
3	x_1	$x_2 + ... + x_{n-2}$
.	.	.
$n-1$	x_1	x_2
n	x_2	$x_3 + ... + x_n$
$n+1$	x_2	$x_3 + ... + x_{n-1}$
$n+2$	x_2	$x_3 + ... + x_{n-2}$
$n+3$	x_2	$x_3 + ... + x_{n-3}$
.	.	.
N	x_{n-2}	$x_{n-1} + x_n.$

3. ცალკეულ $x_1, x_2, ..., x_n$ შედეგებს მიეწერება სარგებლიანობათა საწყისი შეფასებები

$$u_0(x_1), u_0(x_2), \; . \; . \; . \; , \; u_0(x_n).$$

ამ შეფასებებით მოწმდება გმპ-ის მიერ ცხრილში დადგენილი უპირატესობები.

4. შემოწმებას ვიწყებთ ცხრილში ბოლო უპირატესობიდან. შემოწმებიდან. თუ იგი დაკმაყოფილდა, მაშინ შეფასებებს ვტოვებთ იგივეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში, სარგებლიანობების კორექციას ვაწარმოებთ ისე, რომ დაკმაყოფილდეს იგი.
5. ამის შემდეგ გადავალთ მის წინა უპირატესობის შემოწმებაზე და ვიქცევით ანალოგიურად. ეს პროცესი გრძელდება ქვემოდან ზემოთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ საბოლოო, მართებულ შეფასებათა სისტემას $u^{*}(x_1), \ldots,$ $u^{*}(x_n)$, რომელიც დააკმაყოფილებს ცხრილში მითითებულ ყველა უპირატესობას. შეფასებათა კორექციას ვაწარმოებთ რაც შეიძლება მინიმალური რაოდენობის შედეგებისათვის.

ამოცანა 2. ვთქვათ, გმპ ხუთ შედეგს $x_1, x_2, \ldots, x_5$ ალაგებს უპირატესობებით $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$. მათ საწყის შეფასებებად იგი ღებულობს მნიშვნელობებს:
$u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.
მან გამოთქვა შემდეგი უპირატესობების მართებულობა:

1) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;

2) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_4$;

3) $x_1 \prec x_2 + x_3 + x_5$;

4) $x_1 \succ x_2 + x_3$;

5) $x_2 \prec x_3 + x_4 + x_5$;

6) $x_2 \succ x_3 + x_4$;

7) $x_3 \succ x_4 + x_5$.

გმპ-ის ამოცანაა, დააზუსტოს შედეგების საწყისი შეფასებები ისე, რომ დაკმაყოფილდეს აქ ჩამოთვლილი შვიდივე უპირატესობა.

ჩავსვათ საწყისი შეფასებები მე-7 უპირატესობაში:

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5 .$$

მაშასადამე, მოცემული შეფასებებისათვის მე-7 უპირატესობა არ კმაყოფილდება.

ჩავატაროთ $u_0(x_3)$-ის კორექტირება. ვთქვათ, იგი არის $u_1(x_3)=3$. მაშინ მე-7 სრულდება. ახლა გამოვიყენოთ ეს ახალი შეფასება და შევამოწმოთ მე-6 უპირატესობა. რადგან

$$u_0(x_2)=4<u_1(x_3)+u_0(x_4)=4{,}5,$$

ამიტომ იგი არ კმაყოფილდება. მივიღოთ $u_1(x_2)=5$. ცხადია, შესრულდება როგორც მე-6 ისე მე-5 უპირატესობა:

$$u_1(x_2)=5<u_1(x_3)+u_0(x_4)+u_0(x_5)=5{,}5.$$

გადავიდეთ მე-4 უპირატესობის შემოწმებაზე:

$$u_0(x_1)=7<u_1(x_2)+u_1(x_3)=8.$$

მაშასადამე, არ სრულდება მე-4. ამიტომ დავუშვათ, $u_1(x_1)=8{,}5$. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ შეცვლილი შეფასებებისათვის შესრულდება მე-3, მე-2 და 1-ელი უპირატესობები:

$$8{,}5<5+3+1; 8{,}5<5+3+1{,}5; 8{,}5<5+3+1{,}5+1.$$

იგივე შეფასებები აკმაყოფილებს მე-6 და მე-7 უპირატესობებს: $5>3+\ 1{,}5;\ 3>1{,}5+1$.

ამრიგად, შედეგთა სარგებლიანობების საბოლოო შეფასებებია: $u_1(x_1)=8{,}5$; $u_1(x_2)=5$; $u_1(x_3)=3$; $u_1(x_4)=15$; $u_1(x_5)=1$.

სარგებლიანობათა განსაზღვრის ეს მეთოდი გამოიყენება, როდესაც შედეგთა რაოდენობა $n\le 7$; ხოლო როდესაც $n>7$, მაშინ გამოიყენება მეთოდის შემდეგი მოდიფიკაცია, რომელსაც ეწოდება შეფასებათა კორექციის წესი და იგი შემდეგში მდგომარეობს:

შედეგების სიმრავლე იყოფა ქვესიმრავლეებად, რომლებიც შედგება ხუთი-შვიდი შედეგისაგან და რომლებსაც აქვს ერთი საერთო შედეგი, მაგალითად x_1. შემდეგ ავიღებთ სარგებლიანობათა საწყის შეფასებებს ყველა შედეგისათვის; ამასთან, საერთო x_1 შედეგის სარგებლიანობა ყველა ქვესიმრავლეში ერთნაირია. შემდეგ გამოიყენება სარგებლიანობათა შეფასებების კორექციის წესი დამოუკიდებლად თითოეულ ქვესიმრავლეში მოთხოვ-

ნით $u(x_1)$=const. ამის შემდეგ მიეიღებთ სარგებლიანობების სისტემას $u(x_1)$ საერთო შეფასებით ყველა ქვესიმრავლისათვის.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

მეთოდი I

ამოცანა 1:

```
function lab101(p)
% შეფასებათა საიმედოობის შემოწმება I მეთოდით
n=length(p); u(n)=1;
for i=n-1:-1:1
  u(i)=u(i+1)/p(i);
end
u
for j=1:n
  for k=j+1:n
    if u(j)<=u(k)
      u(j),u(k)
disp('saWiroa albaTur SefasebaTa koreqtireba')
      break
    end
  end
end
```

შესატანი არგუმენტი : **p=[.25, .5, .4]**

პროგრამის შესრულების ბრძანება: **>> lab101(p)**

პასუხი:

```
p =  0.2500  0.5000  0.4000
u =    8     2     1
```

მეთოდი II

ამოცანა 2:

```
function lab102(u,xL,xR)
% შეფასებათა საიმედოობის შემოწმება II მეთოდით
% ერთი უპირატესობის შემოწმება
% u – საწყის შეფასებათა მნიშვნელობების ვექტორი
% xL – უპირატესობის მარცხენა მხარის
% კოეფიციენტების ვექტორი
% xR – უპირატესობის მარჯვენა მხარის
```

```
% კოეფიციენტების ვექტორი
sL=xL*u';sR=xR*u';
 upiratesobis Marcxena Mxare=sL
 upiratesobis Marjvena Mxare=sR
if sL>sR
   disp('Sefasebebi  moiTxovs  koreqtirebas')
else
   disp('upiratesoba samarTliania')
end
```

შესატანი არგუმენტები:

u=[7,4,2,1.5,1]; xL=[0,0,-1,0,0]; xR=[0,0,0,-1,-1];

პროგრამის შესრულების ბრძანება: **>> lab10 2(u,xL,xR)**

პასუხი:

upiratesobis Marcxena Mxare = -2
upiratesobis Marjvena Mxare = -2.5000
Sefasebebi moiTxovs koreqtirebas

თუ **u(3)**-ის მნიშვნელობას 2-ს შევცვლით 3-ით, ე.ი. შევიტანთ **u=[7,4,3,1.5,1]** და გავუშვებთ პროგრამას შესრულებაზე, მივიღებთ პასუხს:

upiratesobis marcxena mxare = -3
upiratesobis marjvena mxare = -2.5000
upiratesoba samarTliania

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი თითოეული ჯგუფი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია ოთხი შედეგი x_1, x_2, x, x_4. დაალაგეთ ისინი უპირატესობების მიხედვით და შეაფასეთ თითოეული მათგანი ორივე მეთოდის გამოყენებით. ალბათობები და შედეგების საწყისი შეფასებები აიღეთ სუბიექტური მოსაზრებებიდან გამომდინარე.

11. მატრიცული თამაშის გრაფიკული ამოხსნა

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია $2\times n$ ან $m\times 2$ მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა. საჭიროა მოცემული თამაშის ამოხსნა - ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები და თამაშის მნიშვნელობა (პირველი მოთამაშის მოგება) გრაფიკული მეთოდის საშუალებით. აქ აღწერილი მეთოდით ამოხსნილია კონკრეტული ამოცანები თითოეული შემთხვევისათვის. ვახდენთ დასმული ამოცანის რეალიზაციას MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. მოცემული ამოცანის ამოხსნისათვის გვესაჭიროება 2×2 მატრიცული თამაშის ამოხსნა, როცა მასში არ არსებობს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში.

განვიხილოთ 2×2 მატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$$H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} \\ \hline 2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} .$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ თამაშს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში. ამიტომ იგი უნდა ამოვხსნათ შერეულ სტრატეგიებში. ასეთ თამაშში პირველი მოთამაშის შერეულ სტრატეგიას აქვს სახე $X=(x,1-x)$, სადაც x არის პირველი სტრიქონის არჩევის ალბათობა, $1-x$ კი - მეორე სტრიქონის არჩევის ალბათობა. ასევე, მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგიაა $Y=(y,1-y)$, სადაც y პირველი სვეტის არჩევის ალბათობაა, $1-y$ კი - მეორე სვეტის არჩევის ალბათობა. ჩვენი დაშვების თანახმად, $0<x<1$ და $0<y<1$.

მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები $X^*=(x^*,1-x^*), Y^*=(y^*,1-y^*)$ ქმნის უნაგირა წერტილს $(X^*,Y^*)\equiv(x^*,y^*)$, სადაც x^*,y^* და თამაშის მნიშვნელობა ანუ, I მოთამაშის მოგება შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$x^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}, y^*=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}, \tag{1}$$

$$v^*=\frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}.$$

2.1. $2\times n$ მატრიცული თამაშის ამოხსნა

განვიხილოთ $2\times n$ მატრიცული თამაში, სადაც $n\geq2$ ნებისმიერია

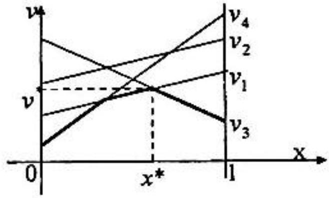
H=		1	2	...	n
	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	.2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

თუ ამ თამაშში არ არსებობს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, მაშინ მისი ამოხსნა მიზანშეწონილია გრაფიკული ხერხით. აქ არ მოვიყვანთ მაქსიმინის იმ თვისებებს, რომლებითაც უნდა ვიხელმძღვანელოთ. აღვნიშნავთ მხოლოდ გრაფიკული მეთოდის ფორმალურ მხარეს.

$X=(x,1-x)$ სტრატეგიისათვის განვიხილოთ 1 მოთამაშის საშუალო მოგებები:

$$v_1=a_{11}x+a_{21}(1-x)=(a_{11}-a_{21})x+a_{21},$$
$$v_2=a_{12}x+a_{22}(1-x)=(a_{12}-a_{22})x+a_{22},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2}$$
$$v_n=a_{1n}x+a_{2n}(1-x)=(a_{1n}-a_{2n})x+a_{2n}.$$

ამ ტოლობებში x არის ცვლადი [0,1] შუალედიდან. (2)-ში თითოეული ტოლობაში წარმოადგენს კოორდინატთა $x0v$ სისტემაში მონაკვეთს. ვთქვათ, მათ აქვთ სახე:



[0,1] შუალედის შესაბამისი გამუქებული ქვედა საზღვრის უმაღლესი წვეროს შესაბამისი x^* რიცხვით განვსაზღვრავთ I მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას $X^*=(x^*,1-x^*)$, ხოლო ამ წვეროს შესაბამისი ორდინატი v^* არის თამაშის მნიშვნელობა.

II მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის მისაღებად შევნიშნოთ, რომ იგი მოცემულ თამაშში გამოიყენებს მხოლოდ იმ ორ სვეტს (ორ სტრატეგიას), რომელთა შესაბამისი მონაკვეთები იკვეთება გამუქებული ქვედა საზღვრის უმაღლეს წვეროში. ამიტომ სხვა სვეტების არჩევის ალბათობები ნულია და Y^* სტრატეგიაში მონაწილეობს აღნიშნული ორი მონაკვეთის შესაბამისი სტრატეგიები დადებითი ალბათობებით. ამრიგად, ჩვენი ნახაზის პირობებში H მატრიციდან უნდა შევადგინოთ 2×2 მატრიცული თამაში, რომლის სვეტები იქნება v_1 და v_3 მონაკვეთების შესაბამისი სვეტები ანუ H მატრიციდან უნდა ავიღოთ პირველი და მესამე სვეტი შესაბამისად:

$$
H = \begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & 1 & 2 \\
\hline
1 & a_{11} & a_{13} \\
\hline
2 & a_{21} & a_{23} \\
\hline
\end{array}\,.
$$

(1) ფორმულებიდან გამოვიყენებთ მეორეს

$$
y^* = \frac{a_{23} - a_{13}}{a_{11} + a_{23} - a_{21} - a_{13}}
$$

და საბოლოოდ II მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია იქნება $Y^*=(\,y^*,0,1-y^*,0,\dots,0)$.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ მატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$H =$

	1	2	3	4
1	1	−2	5	6
2	4	1	2	−1

აქ H-ს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, ამიტომ ამოვხსნათ იგი გრაფიკული ხერხით. შევადგინოთ (2) ტოლობები:

$$v_1=(1-4)x+4=-3x+4,\ v_2=(-2-1)x+1=-3x+1,$$

$$v_3=(5-2)x+2=3x+2,\ v_4=(6+1)x-1=7x-1$$

და ავაგოთ ისინი. ამისათვის თითოეულში საკმარისია დავუშვათ $x=0$ და $x=1$, რითაც მივიღებთ ორ წერტილს $x0v$ სიბრტყეზე და მათი შეერთებით მივიღებთ სასურველ მონაკვეთებს:

$v_1:\ x=0,\ v_1=4,\ (0,4);$

$x=1,\ v_1=-3\cdot1+4=1,\ (1,1);$

$v_2:\ x=0,\ v_2=1,\ (0,1);$

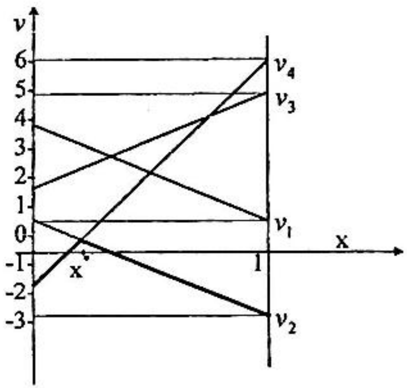
$x=1,\ v_2=-3\cdot1+1=-2,\ (1,-2);$

$v_3:\ x=0,\ v_3=2,\ (0,2);$

$x=1,\ v_3=3\cdot1+2=5,\ (1,5);$

$v_4:\ x=0,\ v_4=-1,\ (0,-1);$

$x=1,\ v_4=7\cdot1-1=6,\ (1,6).$



როგორც ნახაზიდან ჩანს, x^* მიიღება v_2 და v_4-ის შესაბამისი მონაკვეთების გადაკვეთით. ამიტომ უნდა გაეუტოლოთ ერთმანეთს v_2 და v_4, რაც გვაძლევს განტოლებას $3x+1=7x-1$. აქედან $10x=2$ და $x^*=2/10=1/5$. ამრიგად, I მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $X^*=(1/5,4/5)$. გამოეთვალოთ v_2 ან v_4-ის მნიშვნელობა $x^*=1/5$-ში, მივიღებთ თამაშის მნიშვნელობას:

$$v^* = v_2\left(\frac{1}{5}\right) = -3\cdot\frac{1}{5}+1 = \frac{2}{5}\cdot$$

II მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის საპოვნელად უნდა განვიხილოთ H-დან მატრიცული თამაში v_2 და v_4-ის შესაბამისი ანუ მეორე და მეოთხე სვეტებით

H =

	2	4
1	−2	6
2	1	−1

.

(1)-ის გამოყენებით ვწერთ:

$$y^* = \frac{-1-6}{-2-1-1-6} = \frac{7}{10}, \qquad 1-y^* = \frac{3}{10}.$$

ამრიგად, მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $Y^* = (0;0,7;0;0,3)$.

2.2. $m\times 2$ მატრიცული თამაშის ამოხსნა

ვთქვათ, $m\times 2$ მატრიცულ თამაშს აქვს სახე:

H =

	1	2
1	a_{11}	a_{12}
2	a_{21}	a_{22}
.	.	.
m	a_{m1}	a_{m2}

აქ $m \geq 2$ ნებისმიერია და ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულ თამაშს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში არა აქვს. ამოვხსნათ ეს თამაში გრაფიკული ხერხით. II მოთამაშის $Y=(y,1-y)$ სტრატეგიისათვის განვიხილოთ I მოთამაშის მოგებები:

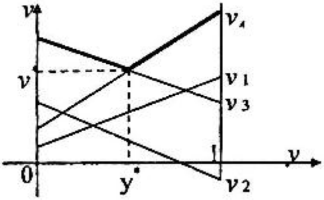
$$v_1 = a_{11}y + a_{12}(1-y) = (a_{11}-a_{12})y + a_{12},$$

$$v_2 = a_{21}y + a_{22}(1-y) = (a_{21}-a_{22})y + a_{22},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_m = a_{m1}y + a_{m2}(1-y) = (a_{m1}-a_{m2})y + a_{m2}$$

და ავგოთ შესაბამისი მონაკვეთები y $(0 \leq y \leq 1)$ ცვლადით კოორდინატთა $y0v$ სისტემაში:



მიღებული გამუქებული ზედა საზღვრის ქვედა წეროს შესაბამისი აბსცისა y^* განსაზღვრავს II მოთამაშის ოპტიალურ შერეულ სტრატეგიას $Y^*=(y^*,1-y^*)$, ხოლო ამ წვეროს ორდინატი v^* იქნება თამაშის მნიშვნელობა.

I მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის საპოვნელად განვიხილოთ 2x2 მატრიცული თამაში, რომელშიც სტრიქონები შეესაბამება მოცემულ წვეროში გამავალ მონაკვეთებს. ჩვენი ნახაზის შემთხვევაში, H–დან ავიღებთ მესამე და მეოთხე სტრიქონებს:

$$H = \begin{array}{c|c|c} & 1 & 2 \\ \hline 3 & a_{31} & a_{32} \\ \hline 4 & a_{41} & a_{42} \end{array}.$$

აქ კი გამოვიყენებთ (1) ფორმულას I

$$x^{*} = \frac{a_{42} - a_{41}}{a_{31} + a_{42} - a_{41} - a_{32}}.$$

I მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია იქნება

$$X^{*}=(0,0,x^{*},1-x^{*},0,\ldots,0).$$

ამოცანა 2. ამოვხსნათ მოცემული თამაში, ანუ ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის მნიშვნელობა შემდეგ თამაში

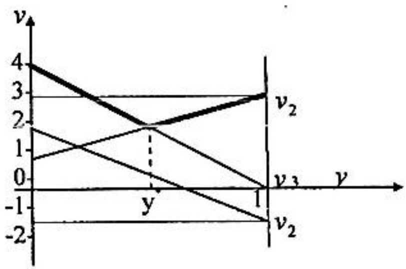
H =

	1	2
1	–1	2
2	3	1
3	0	4

რადგან H-ს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტ-რატეგიებში, ამიტომ ავაგოთ მნიშვნელობები

$v_1=(-1-2)y+2=-3y+2$, $v_2=(3-1)y+1=2y+1$, $v_3=(0-4)y+4=-4y+4$.

ისინი გაივლიან შესაბამისად წერტილებში (0,2), (1,-1), (0,1), (1,3), (0,4), (1,0):



აქ ზედა საზღვრის ქვედა წვერო მიღებულია v_2 და v_3-ის გადაკვეთით, ამიტომ y^{*}-ის საპოვნელად ვწერთ განტოლებას $v_2=v_3$, ანუ $2y+1=-4y+4$. აქედან $6y=3$ და $y^{*}=\frac{1}{2}$.

მაშასადამე, II მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა $Y^{*}=(1/2,1/2)$. თამაშის მნიშვნელობა კი არის

$v^{*} = v_2(0,5) = 2.0,5 + 1 = 2$. პირველი მოთამაში ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის საპოვნელად H-დან შევადგინოთ 2x2 მატრიცული თამაში, რომელშიც შევა მეორე და მესამე სტრიქონები:

$$H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

(1) ფორმულებიდან

$$x^{*} = \frac{4-0}{3+4-0-1} = \frac{2}{3},\ 1-x^{*} = \frac{1}{3}$$

და პირველის ოპტიმალური სტრატეგია იქნება $X^{*}=(0,2/3,1/3)$.

შენიშვნა. ზოგიერთ მატრიცულ თამაშში შესაძლებელია მოთამაშეთა წმინდა სტრატეგიების რიცხვის შემცირება. ეს ხორციელდება დომინირების პრინციპის საფუძველზე, რომლის შედეგად დომინირებული წმინდა სტრატეგიები არ განიხილება.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

2×2 თამაშისათვის:

```
function [x,y,V]=mat2on2(A)
% 2×2 თამაშის ამოხსნა შერეულ სტრატეგიებში
x=(A(2,2)-A(2,1))/(A(1,1)+A(2,2)-A(1,2)-A(2,1));
y=(A(2,2)-A(1,2))/(A(1,1)+A(2,2)-A(1,2)-A(2,1));
V=(A(2,2)*A(1,1)-A(1,2)*A(2,1))/(A(1,1)+A(2,2)-A(1,2)-A(2,1));
X=[x,1-x],Y=[y,1-y]
```

2×n თამაშისათვის:

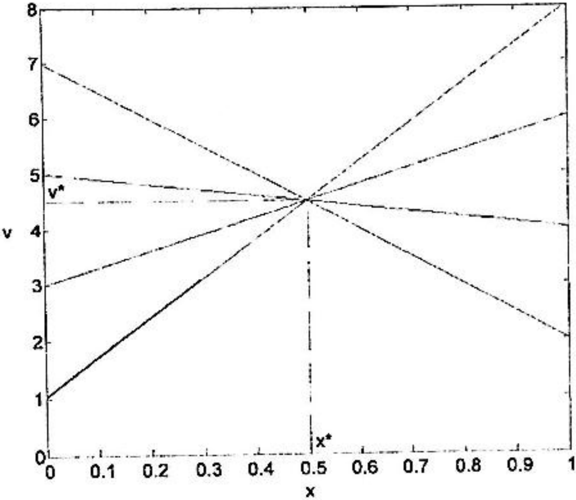
```
function mat2onN(A)
% 2×n თამაშის ამოხსნა გრაფიკულად
k=20000;
n=length(A);
x=linspace(0,1,k);
i1=0;i2=0;
```

```
hold on
 for i=1:n
  for j=1:k
  v(i,j)=(A(1,i)-A(2,i))*x(j)+A(2,i);
  end
  plot(x,v(i,:))
 end
[z,ii]=min(v);
[maxz,jj]=max(z);
plot(x,z,'linewidth',2)
xlabel('x');
ylabel('v');

i1=ii(jj-1),i2=ii(jj+1)
xx=(jj-1)/k;
plot([xx,xx],[0,maxz],'--')
plot([0,1],[0,0])
title('2×n TamaSis grafikuli
amoxsna','FontSize',14,'FontName','AcadNusx')
text(xx+0.01,0.2,'x*','HorizontalAlignment','Left')
plot([0,xx],[maxz,maxz],'--')
text(0.01,maxz+0.2,'v*','HorizontalAlignment','Left')
hold off

if i1<i2
b1=A(:,i1);b2=A(:,i2);
else b2=A(:,i1);b1=A(:,i2);
end
B=[b1,b2]
[x1,y1,v]=mat2on2(B);
Y=zeros(1,n); Y(1,i1)=y1; Y(1,i2)=1-y1;
X=[x1,1-x1],Y,V=v
```

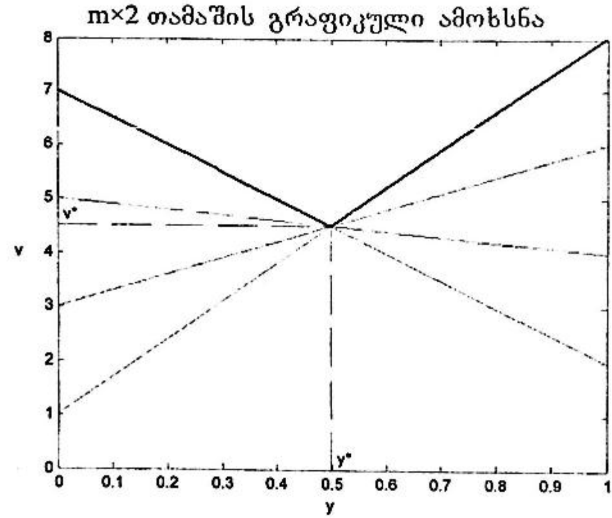
2×n თამაშის გრაფიკული ამოხსნა



m×2 თამაშისათვის:

```
function matMon2(A)
% m×2 მატრიცული თამაშის ამოხსნა გრაფიკულად
k=20000;
m=length(A);
y=linspace(0,1,k);
i1=0;i2=0;
hold on
for i=1:m
   for j=1:k
   v(i,j)=(A(i,1)-A(i,2))*y(j)+A(i,2);
   end
   plot(y,v(i,:))
end
[z,ii]=max(v);
[minz,jj]=min(z);
plot(y,z,'linewidt',2)
```

```
xlabel('y');
ylabel('v');
i1=ii(jj-1),i2=ii(jj+1)
yy=(jj-1)/k;
plot([yy,yy],[0,minz],'--')
title('mx2-ze TamaSis grafikuli
amoxsna','FontSize',14,'FontName','AcadNusx')
text(yy+0.01,0.2,'y*','HorizontalAlignment','Left')
plot([0,yy],[minz,minz],'--')
text(0.01,minz+0.2,'v*','HorizontalAlignment','Left')
hold off
if i1<i2
b1=A(i1,:);b2=A(i2,:);
else b2=A(:,i1);b1=A(:,i2);
end
% მიღებული 2×2 მატრიცული თამაშის ამოხსნა
B=[b1;b2]
[x1,y1,v]=mat2on2(B);
X=zeros(1,m); X(1,i1)=x1; X(1,i2)=1-x1;
Y=[y1,1-y1],X,V=v
```



3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში და გრაფიკები უნდა შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათელის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა. იპოვეთ მისი ამონახსნი გრაფიკული ხერხით:

H =

	1	2	3	4
1	4	−2	1	5
2	−3	2	6	−1

, H =

	1	2
1	8	−3
2	4	6
3	−5	8

.

12. მატრიცული თამაშის ამოხსნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის საშუალებით

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა. საჭიროა მოცემული თამაშის ამოხსნა - ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები და თამაშის მნიშვნელობა (პირველი მოთამაშის მოგება) წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით, ანუ მატრიცული თამაშის ამოხსნა დავიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნაზე. აქ აღწერილი ალგორითმით ამოხსნილია ერთი კონკრეტული ამოცანა. ალგორითმის გამოყენება ნებისმიერი მატრიცული თამაშისათვის არ წარმოადგენს სირთულეს. მატრიცულ თამაშში ოპტიმალური წმინდა სტრატეგიების არსებობის დადგენა კი შესაძლებელია უშუალოდ. ვახდენთ დასმული ამოცანის რეალიზაციას MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. განვიხილოთ მატრიცული თამაში მოგების მატრიცით $H = (a_{ij})_{m \times n}$. ვიგულისხმოთ, რომ ამ მატრიცის ელემენტები დადებითია. ელემენტების დადებითობიდან კი გამომდინარეობს, რომ მატრიცული თამაშის მნიშვნელობა (პირველი მოთამაშის მოგება) დადებითია მოთამაშეთა ნებისმიერი სტრატეგიებისათვის. თუ მოგების მატრიცის ელემენტები არაა დადებითი, მაშინ მატრიცის ყველა ელემენტს დავუმატოთ საკმაოდ დიდი დადებითი რიცხვი. ასე მივიღებთ მოცემული თამაშის ეკვივალენტურ თამაშს, რომელშიც მოთამაშეების ოპტიმალური სტრატეგიები იქნება იგივე, რაც მოცემულ თამაშში, ხოლო თუ მიღებული თამაშის მნიშვნელობას გამოვაკლებთ დამატებულ დადებით რიცხვს, მივიღებთ მოცემული თამაშის მნიშვნელობას.

ვთქვათ, $z^0=(z_1^0,\dots,z_m^0)$ არის წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი

$$f(z)=\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1, j=1,\dots,n, \ z_i \ge 0, i=1,\dots,m.$$

როდესაც ვიპოვით z^0 ვექტორს, თამაშის მნიშვნელობას და პირველი მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას გამოვითვლით შემდეგნაირად:

$$v=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0}, \ x^0=v\,z^0 \ \ (x_i^0=vz_i^0, i=1,\dots,m).$$

ასევე ვიპოვოთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი $w^0=(w_1^0,\dots,w_n^0)$:

$$g(w)=\sum_{j=1}^{n} w_j \to \max, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le 1, i=1,\dots,m; w_j \ge 0, j=1,\dots,n.$$

w^0 ვექტორის საშუალებით ვიპოვით მეორე მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას

$$y^0=vw^0 \ \ (y_j^0=v\,w_j^0, j=1,\dots,n).$$

მოცემულ თამაშში მოთამაშეთა ოპტიმალური წმინდა სტრატეგიების პოვნა მარტივია და უშუალოდაა შესაძლებელი.

(1)-(2) ამოცანების ოპტიმალური z^0 და w^0 ამონახსნებისათვის თუ გამოვიყენებთ მატრიცული თამაშების დამატებითი არასიმკაცრობის თვისებას, მივიღებთ:

1) $\quad z_i^0>0 \ \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0=1;$

2) $\quad w_j^0>0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^0=1.$

ამოცანა 1. ამოვხსნათ მატრიცული თამაში, რომლის მოგების მატრიცაა

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. დავუმატოთ ყველა ელემენტს 4, მივიღებთ მოგების მატრიცას

$$\mathrm{H}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

აქ $v_1 = v(\mathrm{H}_1) > 0$. დავწეროთ H_1-თვის წრფივი დაპროგრამების (1)–(2) ამოცანები:

$$f(z) = z_1 + z_2 \to \min \tag{3}$$

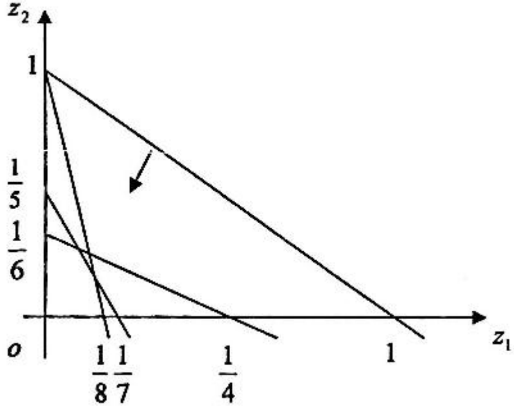
$$4z_1 + 6z_2 \ge 1,\ \ 7z_1 + 5z_2 \ge 1,\ \ 8z_1 + z_2 \ge 1,\ \ z_1 \ge 0, z_2 \ge 0;$$

$$g(w) = w_1 + w_2 + w_3 \to \max \tag{4}$$

$$4w_1 + 7w_2 + 8w_3 \le 1,\ \ 6w_1 + 5w_2 + w_3 \le 1,\ \ w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

$$w_3 \ge 0.$$

ამოვხსნათ (3) ამოცანა გრაფიკული ხერხით (ნახ. 1).



ნახ. 1.

აქედან მივიღებთ, რომ $z^0 = \left(\dfrac{5}{44}, \dfrac{4}{44}\right)$ არის მოცემული (3) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი. ამიტომ,

$$v_1 = \frac{1}{z_1^0 + z_2^0} = \frac{1}{\frac{9}{44}} = \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9}, \quad x^0 = v_1 z^0 = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

ახლა ამოვხსნათ (4) ამოცანა. დამატებითი არამკაცრი თვისებებიდან გამომდინარე, რადგან $z_1^0 > 0$, $z_2^0 > 0$ და $4z_1^0 + 6z_2^0 = 1$, $7z_1^0 + 5z_2^0 > 1$, $8z_1^0 + 1z_2^0 = 1$, ამიტომ $w_2^0 = 0$. ამის გამო, (4) ამოცანა ასე ჩაიწერება:

$$g(w) = w_1 + w_3 \to \max,$$

$$4w_1 + 8w_3 = 1, \quad 6w_1 + w_3 = 1, \; w_1 \geq 0, w_2 \geq 0.$$

აქედან მივიღებთ

$$w^0 = \left(\frac{7}{44}, 0, \frac{2}{44}\right), \quad y^0 = v_1 w^0 = \left(\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

პასუხი. ჩვენს ამოცანაში, H მოგების მატრიცის მქონე მატრიცულ თამაშში პირველი და მეორე მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებია შესაბამისად $x^0 = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$ და $y^0 = \left(\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right)$. რაც შეეხება ამ თამაშის მნიშვნელობას, დასაწყისში გაკეთებული მითითების თანახმად, იგი ტოლი იქნება

$$v = 4\frac{8}{9} - 4 = \frac{8}{9}.$$

მოცემულ მატრიცულ თამაშში ამონახსნი წმინდა სტრატეგიებში არ არსებობს.

ამოცანა **2.** მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვიპოვოთ მისი ამონახსნი წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით.

ამოხსნა. ჩავწეროთ (1) ამოცანა ჩვენი თამაშისათვის:

$$
\begin{aligned}
f(z) = z_1 + z_2 + z_3 \to \min,\\
2z_1 + 5z_2 \qquad \geq 1\\
z_1 + 6z_2 + 5z_3 \geq 1\\
4z_1 + z_2 + 8z_3 \geq 1\\
3z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 1\\
z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

მას კი მივცეთ შემდეგი სახე:

$$
\begin{aligned}
f(z) = z_1 + z_2 + z_3 \to \min,\\
-2z_1 - 5z_2 \qquad \leq -1\\
-z_1 - 6z_2 - 5z_3 \leq -1\\
-4z_1 - z_2 - 8z_3 \leq -1\\
-3z_1 - 2z_2 - z_3 \leq -1\\
z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

ახლა (2) ამოცანას მივცეთ ასეთივე სახე. ამისათვის იგი ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
-g(w) = -w_1 - w_2 - w_3 - w_4 \to \min,\\
2w_1 + w_2 + 4w_3 + 3w_4 \leq 1\\
5w_1 + 6w_2 + w_3 + 2w_4 \leq 1\\
5w_2 + 8w_3 + w_4 \leq 1\\
w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად განვიხილოთ ორი პროგრამა, რომელთაგან პირველის გამოყენებით ამოვხსნით (5) და (6) ამოცანებს. შესაბამისი პროგრამა ასეთია:

```
function [z,fval,v,x0]=matlinprog(f,A,b)
% მატრიცული თამაშის ამოხსნა წრფივი დაპროგრამების
% ამოცანის ამოხსნის საშუალებით
n=length(f);
```

```
ib=zeros(n,1);
[z,fval]=linprog(f,A,b,[],[],ib);
v=1/abs(fval);
x0=v*z;
```

ამ პროგრამის შესასრულებლად ბრძანებათა ფანჯარაში უნდა შევიტანოთ m-ფაილ-ფუნქციის შემავალი არგუმენტების მნიშვნელობები, შემდეგ კი - მისი შესრულების ბრძანება გამომავალი არგუმენტების შესაბამისი სახელებით.

წრფივი დაპროგრამების (5) ამოცანის ამოსახსნელად უნდა შევიტანოთ არგუმენტები:

```
f=[1;1;1];
A=[-2,-5,0;-1,-6,-5;-4,-1,-8;-3,-2,-1];
b=[-1; -1; -1; -1];
```

ფუნქციის გამოძახება: **>>[z,fval,v,x0]=matlinprog(f,A,b).**

ვღებულობთ:

```
z =
   0.2500
   0.1250
   0.0000
fval =   0.3750
v =   2.6667
x0 =
   0.6667
   0.3333
   0.0000
```

წრფივი დაპროგრამების (6) ამოცანის ამოსახსნელად შესატანი არგუმენტებია:

```
g=[-1,-1,-1,-1]; B=[2,1,4,3,5,6,1,2,0,5,8,1];
c=[1,1,1];
```

ფუნქციის გამოძახება: **>>[w,gval,v,y0]=matlinprog(g,B,c)**

ვღებულობთ:

```
w =
   0.0000
   0.0625
   0.0000
   0.3125
```

```
gval =  -0.3750
v =   2.6667
y0 =
   0.0000
   0.1667
   0.0000
   0.8333
```

მეორე პროგრამის გამოყენებით იხსნება როგორც (5), ისე (6) ამოცანა, შესატანი იქნება მხოლოდ თამაშის მოგების მატრიცა. ეს პროგრამაა:

```
function mat2linprog(A)
% A მატრიცით მოცემული თამაშის ამოხსნა წრფივი
% დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით

%წრფივი  დაპროგრამების (5) ამოცანის ამოხსნა
a=min(min(A));
 if a<0
  A=A-a;
 end
A=-A';
s=size(A);
m=s(1);n=s(2);
f=ones(n,1);
b=-ones(m,1);
ib=zeros(n,1);
[z,fval]=linprog(f,A,b,[],[],ib);
v=1/fval+a
x0=(v*z)'

% ორადული (6) ამოცანის ამოხსნა
g=-ones(m,1);
c=ones(n,1);
ib=zeros(m,1);
B=-A';
[w,gval]=linprog(g,B,c,[],[],ib);
val=-gval;
v1=1/val+a;
y0=(v1*w)'
```

პროგრამის შესასრულებლად ბრძანებათა ფანჯარაში უნდა შევიტანოთ თამაშის მატრიცა:

A=[2,1,4,3; 5,6,1,2; 0,5, 8,1]

და **m**-ფაილ-ფუნქციის შესრულების ბრძანება:

>>mat2linprog(A).

პასუხი:

```
A =
   2   1   4   3
   5   6   1   2
   0   5   8   1
Optimization terminated.
v =  2.6667
x0 =   0.6667   0.3333   0.0000
Optimization terminated.
y0 =   0.0000   0.1667   0.0000   0.8333
```

პირველი და მეორე მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებია შესაბამისად

$$x^0 = (0{,}6667;0{,}3333;0{,}0000),$$

$$y^0 = (0{,}0000;1{,}1667;0{,}0000;0{,}8333).$$

თამაშის მნიშვნელობა, ანუ პირველი მოთამაშის მოგებაა 2,2667.

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში უნდა შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას წარმოადგენს ჩათვლის პროცესში საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა. იპოვეთ მისი ამონახსნი წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით:

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & -9 \\ -5 & 6 & 0 & -2 \\ 10 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

13. ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნა

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია ბიმატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა. საჭიროა მოცემული თამაშის ამოხსნა - ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური წმინდა და შერეული სტრატეგიები და მოთამაშეთა მოგებები. ასეთ თამაშში ოპტიმალურობის პრინციპს წარმოადგენს ნეშის წონასწორობის სიტუაცია, რომელიც ხასიათდება სიტუაციის მდგრადობით: არც ერთი მოთამაშე არაა დაინტერესებული მის დარღვევაზე და თუ ერთი მოთამაშე შეცვლის თავის სტრატეგიას, ხოლო მეორე შეინარჩუნებს თავის არჩეულ სტრატეგიას, მაშინ სტრატეგიის შემცვლელი მოთამაშე ასეთი შეცვლით ვერაფერს მოიგებს. თუ წონასწორობის სიტუაციიდან ორივე გადაიხრება, ამით შეიძლება ორივეს მოგება გაიზარდოს.

ჩვენ განვიხილავთ 2×2 ბიმატრიცულ თამაშს, განვსაზღვრავთ წონასწორობის სიტუაციას წმინდა და შერეულ სტრატეგიებში. ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიებს ვიპოვით გრაფიკული ხერხით. ამოვხსნით ერთ კონკრეტულ ამოცანას. მოვახდენთ დასმული ამოცანის რეალიზაციას MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. განვიხილოთ ბიმატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$(H_1, H_2) =$

	1	2
1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

. (1)

განსაზღვრება 1. ბიმატრიცულ, (1) თამაშში $(i^* j^*)$ სიტუაციას წმინდა სტრატეგიებში მისაღები ეწოდება მოთამაშისათვის, თუ ამ მოთამაშეს $(i^* j^*)$ სიტუაციაში თავისი სტრატეგიის ნებისმიერი სხვა სტრატეგიით შეცვლით მოგება არ გაეზრდება; კერძოდ, $(i^* j^*)$ იქნება მისაღები I

მოთამაშისათვის, თუ $a_{i^*j^*} \ge a_{ij^*}$,i=1,2, ხოლო ეს სიტუაცია იქნება მისაღები II მოთამაშისათვის, თუ $b_{i^*j^*} \ge b_{i^*j}$,j=1,2.

განსაზღვრება 2. ბიმატრიცულ (1) თამაშში (i^*j^*) სიტუაციას წმინდა სტრატეგიებში ეწოდება წონასწორობის სიტუაცია (ნეშის წონასწორობის სიტუაცია, ნეშის წონასწორული სიტუაცია ან წონასწორული ნეშის აზრით), თუ ეს სიტუაცია მისაღებია ორივე მოთამაშისათვის. ამრიგად, სიტუაცია (i^*j^*) იქნება წონასწორობის სიტუაცია (1) თამაშში, თუ შესრულდება შემდეგი პირობები: ა) j^* სვეტში მდგომი a_{ij^*} (i=1,2) რიცხვებიდან უდიდესია $a_{i^*j^*}$ რიცხვი; ბ) i^* სტრიქონში მდგომი b_{i^*j} (j=1,2) რიცხვებიდან უდიდესია $b_{i^*j^*}$ რიცხვი. უტოლობების საშუალებით ა) და ბ) პირობები ასე ჩაიწერება:

$$a_{i^*j^*} \ge a_{ij^*}\ i=1,2;\ \ b_{i^*j^*} \ge b_{i^*j}, j=1,2.$$

(1) თამაშში მატრიცული თამაშის ანალოგიურად, I და II მოთამაშის შერეული სტრატეგიებია შესაბამისად

$$X=(x_1,x_2) \equiv (x,1-x),\ Y=(y_1,y_2) \equiv (y,1-y).$$

განსაზღვრება 3. სიტუაციას $(X^*,Y^*)=(x^*,y^*)$ შერეულ სტრატეგიებში ეწოდება წონასწორობის სიტუაცია, თუ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_i^* y_j^* \ge \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_i y_j^*,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}x_i^* y_j^* \ge \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}x_i^* y_j$$

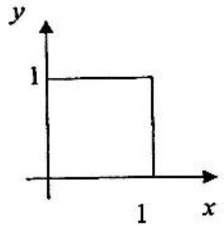
ნებისმიერი X და Y შერეული სტრატეგიებისათვის.

განვიხილოთ თითოეული მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაციები ცალ-ცალკე, ამისათვის განვიხილოთ სიდიდეები

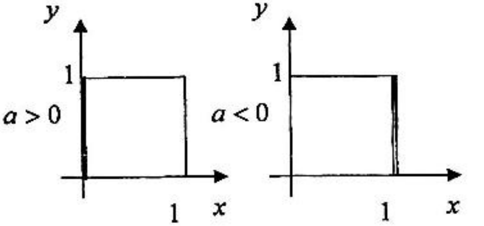
$$A=a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12},\quad B=b_{11}+b_{22}-b_{21}-b_{12},$$
$$a=a_{22}-a_{12},\qquad b=b_{22}-b_{21}.$$

მოთამაშეთა მისაღებ სიტუაციებს ვიხილავთ ერთეუ-

ლოვან კვადრატზე (ნახ. 1):



ნახ. 1.



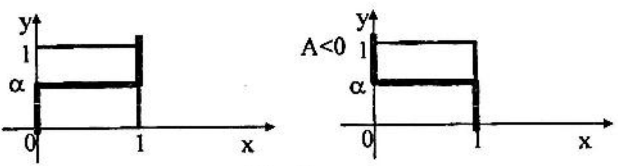
ნახ. 2.

პირველ რიგში ვიპოვოთ I მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაციები. განვიხილოთ შემთხვევები:

1) A=a=0, მაშინ მისაღებია მთელ კვადრატზე საზღვრის ჩათვლით მოთავსებული სიტუაციები (ნახ. 1).

2) A=0, a≠0. თუ a>0, მაშინ მისაღებია კვადრატის მარცხენა გვერდი (მისაღები სიტუაციები გავამუქოთ). თუ a<0, მაშინ მისაღებია კვადრატის მარჯვენა გვერდი (ნახ. 2).

3) A≠0. აღვნიშნოთ $\alpha=a/A$. A>0 და A<0 შემთხვევებისათვის მისაღები სიტუაციები მოთავსებულია ზიგზაგებზე (ნახ. 3).

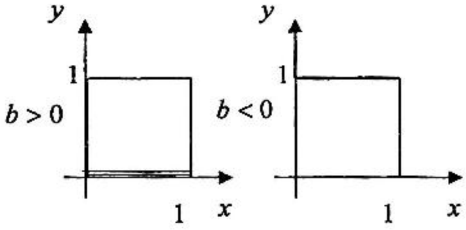


ნახ. 3.

ახლა ვიპოვოთ II მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაციები.

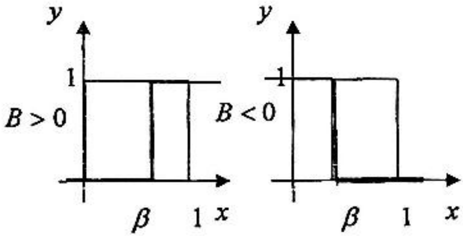
4) B=b=0. მაშინ მისაღებია მთელ კვადრატზე მოთავსებული სიტუაციები.

5) B=0, b≠0. მისაღებ სიტუაციების სახე ნაჩვენებია მე-4 ნახ-ზე.



ნახ. 4.

6) B≠0 და ვთქვათ, β=b/B. შესაბამისი ზიგზაგები ნაჩვენებია მე-5 ნახ-ზე.



ნახ. 5.

(I) ბიმატრიცულ თამაში წონასწორობის სიტუაციებს წარმოადგენს კვადრატის ფარგლებში ორივე მოთამაშის მისაღები სიტუაციების ანუ შესაბამისი ზიგზაგების გადაკვეთის წერტილები.

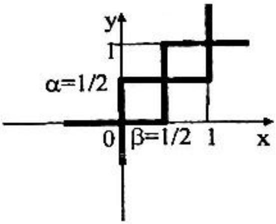
ამოცანა 1. ამოვხსნათ ბიმატრიცული თამაში

$(H_1, H_2) =$

	1	2
1	(2,0)	(−1,−2)
2	(1,−3)	(0,−1)

.

აქ გვაქვს



$A=2+0-1-(-1)=2, B=0-1-(-3)-(-2)=4,$

$a=0-(-1)=1,$ $\quad b=-1-(-3)=2,$

$\alpha=1/2,$ $\quad \beta=1/2.$

ამრიგად, გვაქვს 3) და 6) შემთხვევები. ზიგზაგები იკვეთება სამ წერტილში: (0,0), (1,1) და $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. მაშასადამე ისინი წონასწორული სიტუაციებია, რომელთაგან პირველი-ორი წმინდა სტრატეგიებშია, მესამე კი - შერეულ სტრატეგიებში. მოთამაშეთა მოგებებია

$$v_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$v_2 = (-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}.$$

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function bimat2on2(C,D, pirveli, meore)
% 2×2 ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნა
% C–პირველი მოთამაშის მოგების მატრიცა
% D–მეორე მოთამაშის მოგების მატრიცა
% თუ pirveli =1, იძებნება პირველი მოთამაშისათვის
% მისაღები სიტუაციები
% თუ meore =1, იძებნება მეორე მოთამაშისათვის
% მისაღები სიტუაციები
plot([0,1,1,0,0],[0,0,1,1,0])
xlabel('x')
ylabel('y')
set(gca,'XTick',[0 1 2 ])
set(gca,'YTick',[0 1 2 ])
```

```
axis([-0.5 1.5 -0.5 1.5])
hold on
if pirveli==1
A=C(1,1)+C(2,2)-C(1,2)-C(2,1)
a=C(2,2)-C(1,2)
disp('pirveli moTamaSisaTvis misaRebi situaciebia:')
if A==0
   if a==0
      disp('mTel kvadratze sazRvris CaTvliT moTavsebuli
situaciebi')
     plot([0,1,1,0,0],[0,0,1,1,0],'linewidth',3)
      text(-0.05,0.5,'A=0,a=0','HorizontalA-lignment','right')
   end
   if a>0
      disp('kvadratis marcxena gverdi')
      plot([0,0],[0,1],'linewidth',3)
      text(-0.05,0.5,'A=0,a>0','HorizontalA-lignment','right')
   end
   if a<0
     disp('kvadratis marjvena gverdi')
      plot([1,1],[0,1],'linewidth',3)
      text(-0.05,0.5,'A=0,a<0','HorizontalA-lignment','right')
   end
else disp('alfa-s Sesabamisi zigzagi, sadac')
   alfa=a/A
   if A>0      plot([0,0,1,1],[0,alfa,alfa,1],'linewidth',3)
      text(-0.05,0.7,'A>0','HorizontalAlig-nment','right')
       text(-0.05,alfa,'alfa','HorizontalA-lignment','right')
   else      plot([0,0,1,1],[1,alfa,alfa,0],'linewidth',3)
      text(-0.05,0.7,'A<0','HorizontalAlig-nment','right')
       text(-0.05,alfa,'alfa','HorizontalA-lignment','right')
   end
end
if meore==1
B=D(2,2)+D(1,1)-D(1,2)-D(2,1)
b=D(2,2)-D(2,1)
disp('meore moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:')
if B==0
```

```
  if b==0
     disp('mTel kvadratze sazRvris CaTvliT moTavsebuli
situaciebi')
     plot([0,1,1,0,0],[0,0,1,1,0],'linewidth',3)
     text(-0.05,0.4,'B=0,b=0','HorizontalA-lignment','right')
  end
  if b>0
     disp('kvadratis qveda gverdi')
     plot([0,1],[0,0],'linewidth',3)
     text(-0.05,0.4,'B=0, b>0','Horizonta-lAlignment','right')
  end
  if b<0
    disp('kvadratis zeda gverdi')
     plot([0,1],[1,1],'linewidth',3)
     text(-0.05,0.6,'B=0, b<0','Horizonta-lAlignment','right')
  end
else disp('beta-s Sesabamisi zigzagi, sadac')
  beta=b/B
  if B>0   plot([0,beta,beta,1],[0,0,1,1],'linewidth',3)
     text(-0.05,0.6,'B>0','HorizontalA-lignment','right')
      text(beta,-0.05,'beta','HorizontalA-lignment','right')
  else
plot([0,beta,beta,1],[1,1,0,0],'linewidth',3)
     text(-0.05,0.6,'B<0','HorizontalA-lignment','right')
      text(beta,-0.05,'beta','HorizontalA-lignment','right')
  end
end
end
if pirveli==1&&meore==1
  disp('wonasworuli situaciebia orive moTama-SisaTvis
misaRebi situaciebi - zigzagebis gadakve-Tis wertilebi')
  disp('pirveli moTamaSis mogeba - ')
  V1=[alfa,1-alfa]*C*[beta,1-beta]'
  disp('meore moTamaSis mogeba - ')
  V2=[alfa,1-alfa]*D*[beta,1-beta]'
end
```

პროგრამის გაშვება შესრულებაზე ხდება ბრძანებათა ფანჯრიდან შემდეგი ბრძანებით:

>> bimat2on2(C,D, pirveli, meore),

სადაც შემავალი არგუმენტებია:

C- პირველი მოთამაშის მოგების მატრიცა;

D- მეორე მოთამაშის მოგების მატრიცა;

თუ **pirveli=1**, იძებნება პირველი მოთამაშისთვის მისაღები სიტუაციები;

თუ **meore=1**, იძებნება მეორე მოთამაშისთვის მისაღები სიტუაციები.

პასუხები:

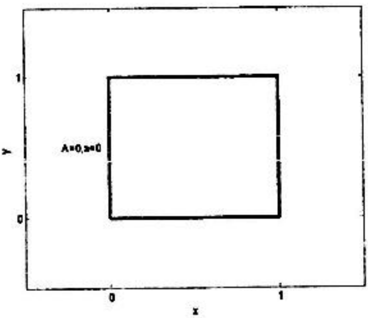
პირველი მოთამაშისთვის მისაღები სიტუაციები სხვადა-სხვა შემთხვევაში:

1) C=

2 1

2 1

A=0, a=0



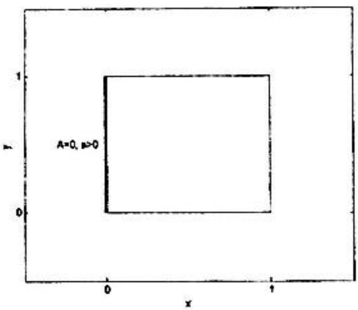
pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
mTel kvadratze sazRvris CaTvliT moTavsebuli situaciebi.

2) C=

1 1

2 2

A=0, a=1

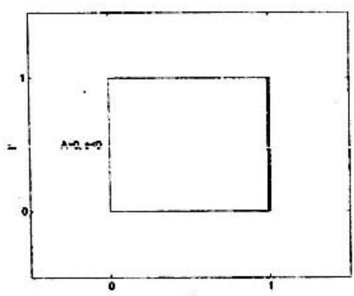


pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia: kvadratis marcxena gverdi.

3) C=

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

A=0, a=-1

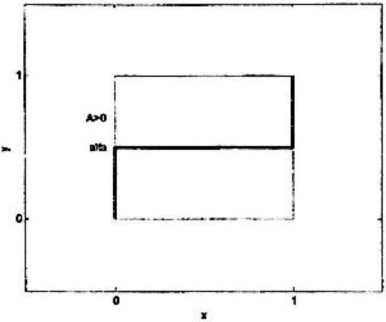


pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia: kvadratis marjvena gverdi.

4) C=

$$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

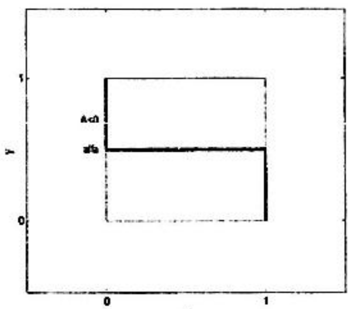
A=2, a=1



pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
alfa-s Sesabamisi zigzagi, sadac
alfa = 0.5000.
5) C=

$$\begin{matrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

A=-2, a=-1



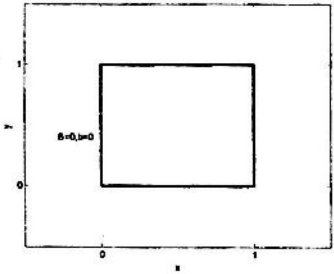
pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
alfa-s Sesabamisi zigzagi, sadac
alfa = 0.5000.

მეორე მოთამაშისთვის მისაღები სიტუაციები სხვადასხვა შემთხვევაში:

1) D=

    2 2
    1 1

B=0, b=0

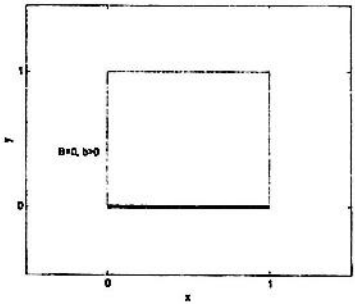


meore moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
mTel kvadratze sazRvris CaTvliT moTavsebuli situaciebi.

2) D=

    1 2
    1 2

B=0, b=1

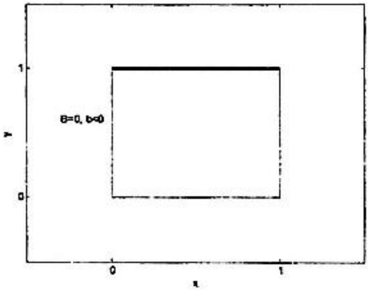


meoren moTamaSisTvism misaRebi situaciebia:
kvadratis qveda gverdi.

3) D=

    2 1
    2 1

B=0, b=-1



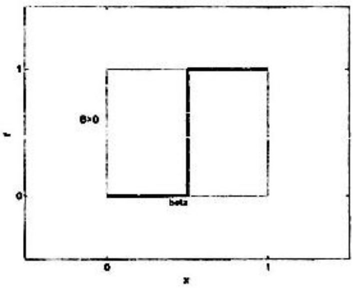
meore moTamaSisTvis misaRebi situaciebia: kvadratis zeda gverdi.

4) D=

2 1

-1 0

B=2, b=1



meore moTamaSisaTvis misaRebi situaciebia: beta-s Sesabamisi zigzagi, sadac

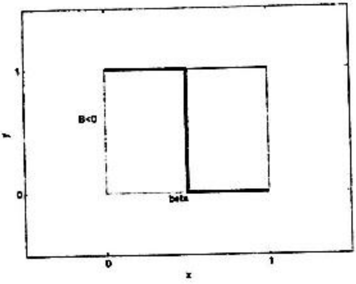
beta = 0.5000.

5) D=

-2 -1

1 0

B=-2, b=-1



meore moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
beta-s Sesabamisi zigzagi, sadac
beta = 0.5000.

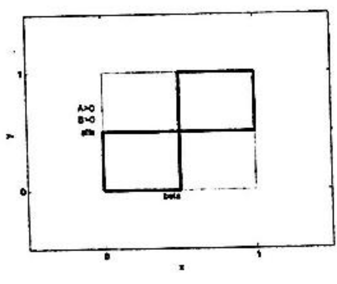
ამოცანა. პროგრამის საშუალებით ამოვხსნათ ჩვენს მიერ ამოხსნილი ამოცანა 1:

$(H_1, H_2) =$

	1	2
1	(2,0)	(−1,−2)
2	(1,−3)	(0,−1)

პასუხი:

1) C=
2 -1
1 0
D=
0 -2
-3 -1
A=2, a=1
B=4, b=2



pirveli moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
alfa-s Sesabamisi zigzagi, sadac
alfa = 0.5000.

meore moTamaSisTvis misaRebi situaciebia:
beta-s Sesabamisi zigzagi, sadac
beta = 0.5000.

წონასწორული სიტუაციებია ორივე მოთამაშისთვის მისაღები სიტუაციები - ზიგზაგების გადაკვეთის წერტილები.

პირველი მოთამაშის მოგებაა
V1 = 0.5000,

მეორე მოთამაშის მოგებაა
V2 = -1.5000.

3. **დამოუკიდებელი სამუშაო.** ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. ამოხსენით ბიმატრიცული თამაში

$(H_1,H_2)=$

	1	2
1	(3,5)	(7,−8)
2	(5,6)	(6,10)

.

14. გადაწყვეტილებათა მიღება რისკისა და სრული განუზღვრელობის პირობებში

1. სამუშაოს მიზანი - შევისწავლოთ გადაწყვეტილების მიღების ორი სახის მოდელი: 1. გადაწყვეტილების მიღება რისკის პირობებში ანუ ნაწილობრივი განუზღვრელობის (იგივე ნაწილობრივი გაურკვევლობის) პირობებში, როცა ყოველ ქმედებას მივყავართ შესაძლო კერძო შედეგების სიმრავლიდან ერთ-ერთ შედეგთან. ამასთან, თითოეულ შედეგს აქვს მოხდენის კონკრეტული ალბათობა, რომლებიც ცნობილია გმპ-თვის (თუ უცნობია, მაშინ მათი გამოთვლა შესაძლებელია მის მიერ, ან ექსპერტული შეფასებებით); 2. გადაწყვეტილების მიღება სრული განუზღვრელობის პირობებში, როცა ამა თუ იმ ქმედებას ან მათგან რამდენიმეს აქვს კერძო შედეგების სიმრავლე, რომელთა ალბათობები გმპ-თვის უცნობია და მათი პოვნა შეუძლებელია, ან ამ ალბათობებს საერთოდ არა აქვს აზრი; დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. აღნიშნული მოდელების დამუშავების და ანალიზის მეთოდები რისკის პრობლემასთან არის დაკავშირებული და შეისწავლება სტატისტიკური თამაშების და სტატისტიკური გადაწყვე-ტილებების მიღების თეორიაში. თამაშთა თეორიის პრინციპებზე დაყრდნობით არსებობს საკმაოდ მარტივი მეთოდები და მოდელები, რომელთა წარმატებით გამოყენების შემთხვევაში შეგვიძლია მინიმუმამდე დავიყვანოთ მოსალოდნელი დანაკარგები. ორი მოთამაშის შემთხვევაში, როცა ერთი - პირველი მოთამაშე (შემდეგში მოთამაშე, გმპ) რაციონალური მოთამაშეა, ხოლო მეორე - ბუნება - გადაწყვეტილებას არ ღებულობს გონივრული ქმედებით - სტრატეგიას ირჩევს შემთხვევით, თამაში მოიცემა მატრიცული თამაშის ფორმით და მას ეწოდება **სტატისტიკური თამაში ან თამაში ბუნების წინააღმდეგ.**

ასეთ თამაშში შევისწავლით მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის პოვნის ამოცანას რისკის და სრული განუზღვრელობის პირობებში.

2.1. გადაწყვეტილების მიღება რისკის პირობებში

ბუნების წინააღმდეგ თამაშში შეგნებულად მოქმედებს მხოლოდ მოთამაშე (გმპ, სტატისტიკოსი), ხოლო ბუნების ქმედება გაურკვეველია და ზოგიერთ შემთხვევაში არც პროგნოზირებადია. აქ გაურკვევლობა გამოწვეულია ბუნების ქცევაზე ჩვენი არასაკმარისი ინფორმირებულობით. ამიტომ, ასეთ თამაშს ზოგჯერ უწოდებენ "თამაშს არასრული ინფორმაციით". აქ ბუნება არაა დაინტერესებული მონაწილე, მის ქმედებას განაპირობებს შემთხვევა. "ბუნებაში" შეიძლება ვიგულისხმოთ ისეთი გაურკვეველი ფაქტორების სიმრავლე, რომელთაც ადგილი აქვს ან წარმოიშობა მოთამაშის მიერ გადაწყვეტილების მიღების მომენტში. ბუნების წინააღმდეგ თამაშების ერთი კლასია სტატისტიკური თამაშები, მეორე კი - თამაშები სრული განუზღვრელობის პირობებში. პირველს კიდევ უწოდებენ "თამაშებს რისკის ან ექსპერიმენტის პირობებში", ხოლო მეორეს - "თამაშებს ქსპერიმენტის გარეშე პირობებში". ბუნების წინააღმდეგ თამაშში მოთამაშეს აქვს სტრატეგიები (სვლები) $x_i \in X$ (ჩავთვალოთ $x_i \equiv i$), ხოლო ბუნების სტრატეგიები (მდგომარეობები) იყოს $\omega_j \in \Omega$ $(\omega_j \equiv j)$, რომელთა დადგენა ზოგიერთ შემთხვევაში მოითხოვს ექსპერტებთან თანამშრომლობას. ასეთ თამაშში შესაძლებელია მოთამაშის სტრატეგიების რიცხვის შემცირება დომინირებით, ხოლო ბუნების სტრატეგიებზე ამ წესს ვერ გამოვიყენებთ.

პირველ რიგში განვიხილოთ სტატისტიკური თამაში. რადგან ასეთ თამაშში ბუნება არაა დაინტერესებული მოგებით, ამიტომ თამაშში საინტერესოა მხოლოდ მოთამაშის მოგებები. ჩავწეროთ სტატისტიკური თამაში მატრიცული თამაშის სახით:

$$
H_u(Q)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
 & \omega_1 & \omega_2 & . & \omega_n \\
\hline
x_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\
\hline
x_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\
\hline
. & . & . & . & . \\
\hline
x_m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \\
\hline
Q & q_1 & q_2 & . & q_n \\
\hline
\end{array}, \qquad (1)
$$

სადაც $u_{ij}=u(x_i,\omega_j)$ მოთამაშის სარგებლიანობაა (მოგება), რომელსაც იგი მიიღებს თუ აირჩევს x_i სტრატეგიას, ხოლო ბუნება იქნება ω_j მდგომარეობაში.

ამ მატრიცის ბოლო სტრიქონში მოთავსებული ვექტორი $Q(\omega)=(q_1,q_2,...,q_n)$ ბუნების მდგომარეობათა ალბათობებია.

(1) სტატისტიკურ თამაშში გადაწყვეტილება მიიღება ბაიესური სტრატეგიის გამოყენებით. ამისათვის გამოითვლება თითოეული სტრატეგიის საშუალო მოსალოდნელი სარგებლიანობა $u(x_i)=q_1u_{i1}+\cdots+q_nu_{in}, i=1,...,m$ და ოპტიმალური ბაიესური სტრატეგია იქნება ისეთი $x_i^*=i^*$, რომლისთვისაც $u(x_i^*)=u(i^*)=\max\limits_i u(x_i)$.

სტატისტიკური თამაშიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ახალ თამაშზე, რომლის მოგების მატრიცა უფრო ბუნებრივად გამოსახავს მოთამაშის მოგების გაურკვევლობას იმ შემთხვევაში, როცა ბუნება უმართავია, არაწინასწარმეტყველია. მოგების ასეთ მატრიცას წარმოადგენს რისკების მატრიცა $R_u=\left(r(x_i,\omega_j)\right)\equiv(r_{ij})$, რომლის ელემენტები რისკებია და გამოითვლება ფორმულით $r_{ij}=\max\limits_i u_{ij}-u_{ij}=u_j-u_{ij}\ge 0$. ეს სიდიდე წარმოადგენს მოთამაშის შესაძლო დანაკარგს ბუნების შესაბამის მაქსიმალურ წაგებასთან შედარებით. უფრო დაწვრილებით, მოთამაშის რისკი r_{ij}, როცა ის ირჩევს x_i სტრატეგიას,

ხოლო ბუნების მდგომარეობაა ω_j, ეწოდება სხვაობას, რომელშიც საკლებია ის მოგება, რომელსაც მოთამაშე მოიგებდა, თუ ეცოდინებოდა ბუნების მდგომარეობა ω_j; ხოლო მაკლებია ის მოგება, რომელსაც ის მოიგებს x_i სტრატეგიის გამოყენებისას, თუ მას არ ექნება ინფორმაცია ბუნების ω_j მდგომარეობაზე. ამრიგად, რისკების თამაშს აქვს სახე:

$$R_u(Q) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \omega_1 & \omega_2 & \cdot & \omega_n \\ \hline x_1 & r_{11} & r_{12} & \cdot & r_{1n} \\ \hline x_2 & r_{21} & r_{22} & \cdot & r_{2n} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline x_m & r_{m1} & r_{m2} & \cdot & r_{mn} \\ \hline Q & q_1 & q_2 & \cdot & q_n \\ \hline \end{array}. \tag{2}$$

ასეთ თამაშში კარგად ჩანს, რას რისკავს მოთამაშე ამა თუ იმ სტრატეგიის გამოყენებისას. რაც შეეხება გადაწყვეტილების მიღებაზე მიდგომას, იგი დამოკიდებულია ბუნების მდგომარეობის განუზღვრელობის ხარისხზე.

შენიშვნა 1. ბუნების წინააღმდეგ (1) სტატისტიკურ თამაშში მაქსიმალური საშუალო მოგების შესაბამისი სტრატეგია x_i^* ემთხვევა რისკების (2) თამაშში მინიმალური საშუალო რისკის შესაბამის სტრატეგიას:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} q_j = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{n} u_{i^* j} q_j = \sum_{j=1}^{n} r_{i^* j} q_j \, .$$

ამოცანა 1. მოცემულია სტატისტიკური თამაში

$H_u(Q) =$

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
x_1	4	3	6	5
x_2	2	1	8	6
x_3	3	2	5	1
Q	0,1	0,2	0,5	0,2

ვიპოვოთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ თითოეული სტრატეგიისათვის საშუალო მოსალოდნელი სარგებლიანობა:

$$u(x_1) = 0,1 \cdot 4 + 0,2 \cdot 3 + 0,5 \cdot 6 + 0,2 \cdot 5 = 5;$$

$$u(x_2) = 0,1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 8 + 0,2.6 = 5,6;$$

$$u(x_3) = 0,1 \cdot 3 + 0,2 \cdot 2 + 0,5 \cdot 5 + 0,2.1 = 3,4.$$

ამრიგად, მაქსიმალური საშუალო სარგებლიანობა მივიღეთ x_2 სტრატეგიისათვის - $u(x_2^*) = 5,6$ და ამიტომ, x_2 არის ოპტიმალური რისკის პირობებში.

ახლა განვიხილოთ მოცემული ამოცანისათვის რისკების თამაში (2), რომლის მოგების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$R_u(Q) =$

	ω_1	ω_2	ω_3	4
x_1	0	0	2	1
x_2	2	2	0	0
x_3	1	1	3	5
Q	0,1	0,2	0,5	0,2

გამოვთვალოთ საშუალო რისკის მნიშვნელობა თითოეული სტრატეგიისათვის:

$$r(x_1) = 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 2 + 0,2 \cdot 1 = 1,2;$$

$$r(x_2) = 0,1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 = 0,6;$$

$$r(x_3) = 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 3 + 0,2 \cdot 5 = 2,8.$$

მაშასადამე, მინიმალური საშუალო რისკი მივიღეთ იმავე x_2 სტრატეგიისათვის, რომელმაც მოგვცა მაქსიმალური საშუალო სარგებლიანობა. პირველი შენიშვნის თანახმად რისკების თამაშში იგივე გადაწყვეტილება უნდა მიგვეღო.

2.2. გადაწყვეტილების მიღება სრული განუზღვრელობის პირობებში. ოპტიმალურობის ძირითადი კრიტერიუმები

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სრული განუზღვრელობის პირობებში არაა ცნობილი როგორც ჭეშმარიტი ბუნების მდგომარეობები, ისე შესაძლო მდგომარეობების ალბათური განაწილება. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში საქმე გვაქვს მეორე კლასის თამაშთან და გადაწყვეტილების მისაღებად უნდა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ იმ ინფორმაციებით, რომლებიც მოცემულია შესაბამისი თამაშის მოგების მატრიცაში:

$$H_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \omega_1 & \omega_2 & . & \omega_n \\ \hline x_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ \hline x_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline x_n & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \\ \hline \end{array} . \qquad (3)$$

მოცემულ თამაშში ოპტიმალური გადაწყვეტილებისათვის ვისწრაფვით რაიმე გარანტირებული მოგების მისაღებად. ყოველივე ეს ხორციელდება ოპტიმალურობის კრიტერიუმის (წესის) გამოყენებით. ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევას წინ უძღვის ოპტიმალურობის პრინციპის განსაზღვრა, რაც თავისთავად არაა მარტივი ამოცანა და იგი თამაშთა თეორიის დამოუკიდებელი შესწავლის საგანია.

აქ განვიხილავთ ოპტიმალურობის ძირითად კრიტერიუმებს (გადაწყვეტილების მიღების წესებს), რომ-

ლებსაც ყველაზე მეტად ვიყენებთ (3) თამაშში გადაწყვეტილების მისაღებად.

ლაპლასის კრიტერიუმი

ლაპლასის კრიტერიუმი ეყრდნობა ი. ბერნულის მიერ ჩამოყალიბებულ არასაკმარისი საფუძვლის პრინციპს, რომელიც გვეუბნება: ვინაიდან ბუნების მდგომარეობათა ალბათობები $Q(\omega)=(q_1,q_2,...,q_n)$ უცნობია, ამიტომ არ გვაქვს იმის საფუძველი, რომ ისინი ჩავთვალოთ განსხვავებულად. მაშასადამე, ლაპლასის კრიტერიუმი იყენებს ოპტიმისტურ დაშვებას იმის შესახებ, რომ ბუნების ყველა მდგომარეობის ალბათობა ერთნაირია, ე.ი.

$$q_1=q_2=\cdots=q_n=\frac{1}{n}.$$

მაშინ მოთამაშის საუკეთესო გადაწყვეტილება იქნება ისეთი სტრატეგია x_{i^*}, რომელიც უზრუნველყოფს საშუალო სარგებლიანობებიდან მაქსიმუმის მიღებას

$$\max_{x_i}\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j}.$$

ცხადია, ასე განსაზღვრული H_u მატრიცის $x_{i^*}=i^*$ სტრიქონი იგივე იქნება, რომელშიც ელემენტების ჯამი იქნება უდიდესი. ამიტომ, ლაპლასის კრიტერიუმით ოპტიმალურ $x_{i^*}=i^*$ გადაწყვეტილებას ვპოულობთ ასე:

$$\max\{\sum_{j=1}^{n}u_{1j},\sum_{j=1}^{n}u_{2j},...,\sum_{j=1}^{n}u_{mj}\}=\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j},$$

ხოლო შესაბამისი საშუალო მოგება იქნება

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j}.$$

მაქსიმაქსის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი გულისხმობს მაქსიმალური მოგებების მაქსიმიზაციას. იგი გვეხმარება ავირჩიოთ ისეთი

სტრატეგია, რომლითაც მივიღებთ ბუნების თითოეული მდგომარეობისათვის მაქსიმალური სარგებლიანობებიდან მაქსიმუმს. ასეთი x_{i^*} სტრატეგია გამოითვლება ფორმულით

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \max_{\omega_j} u_{ij},$$

რომელსაც მაქსიმაქსის კრიტერიუმი ეწოდება. მას კიდევ მეტისმეტად ოპტიმისტის კრიტერიუმს უწოდებენ.

ვალდის კრიტერიუმი

ვალდის კრიტერიუმით მოთამაშე ორიენტირებულია უარეს პირობებზე და ირჩევს ისეთ გადაწყვეტილებას, რომლითაც ყველაზე ცუდ პირობებში სარგებლიანობა მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამ კრიტერიუმის თანახმად, ოპტიმალური x_{i^*} სტრატეგიის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \min_{\omega_j} u_{ij}.$$

ამ კრიტერიუმით მოთამაშე ყოველთვის ხელმძღვანელობს ბუნების უარესი მდგომარეობებით. გადაწყვეტილების მიღებისას ასეთი მიდგომა განპირობებულია მეტისმეტად პესიმიზმით. ამიტომ, ვალდის კრიტერიუმს აგრეთვე უწოდებენ, მეტისმეტად პესიმისტის კრიტერიუმს.

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი საშუალებას გვაძლევს (3) თამაშში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად, მისი შესაბამის რისკების

$R_u =$

	ω_1	ω_2	.	ω_n
x_1	r_{11}	r_{12}	.	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	.	r_{2n}
.	.	.	.	.
x_m	r_{m1}	r_{m2}	.	r_{mn}

თამაშში ავირჩიოთ ისეთი სტრატეგია, რომლისთვისაც ყველაზე უარეს და არახელსაყრელ პირობებში რისკის სიდიდე იქნება მინიმალური. ასეთი სტრატეგია გამოითვლება ფორმულით

$$r(x_{i}.) = \min_{x_i} \max_{\omega_j} r_{ij}\text{, სადაც } r_{ij} = \max_{i} u_{ij} - u_{ij} = u_{j} - u_{ij}.$$

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმი, როგორც ვალდის კრიტერიუმი, მეტისმეტად პესიმისტის კრიტერიუმია. ამასთან, აქ პესიმიზმი იმით გამოიხატება, რომ მცირდება არა მინიმალური სარგებლიანობა, არამედ სარგებლიანობის მაქსიმალური დანაკარგი.

ჰურვიცის კრიტერიუმი

ამ კრიტერიუმს ეწოდება ოპტიმიზმ-პესიმიზმის კრიტერიუმი და იგი ემყარება შემდეგ ორ დაშვებას: 1) ბუნება შეიძლება იმყოფებოდეს ყველაზე უკეთეს მდგომარეობაში α ალბათობით და 2) ბუნება შეიძლება ყველაზე უარეს მდგომარეობაში იმყოფებოდეს $1-\alpha$ ალბათობით, სადაც α ოპტიმიზმის კოეფიციენტია. ამ კრიტერ-იუმით (3) თამაშის მოგების მატრიცის ყოველი $i(i=1,2,...,m)$ სტრიქონისათვის ვანგარიშობთ სიდიდეს

$$\alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha) \min_{\omega_j} u_{ij},$$

შემდეგ კი ამ სიდიდეებიდან მაქსიმალურის შესაბამისი სტრატეგია $x_{i}. = i^{*}$ იქნება ოპტიმალური:

$$u(x_{i}.) = \max_{x_i} \{\alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha) \min_{\omega_j} u_{ij}\}.$$

α სიდიდეს აგრეთვე **ოპტიმიზმის ზომა** ეწოდება. იგი აირჩევა სუბიექტურად და დამოკიდებულია სიტუაციის შეფასებაზე. რაც უფრო თავის დაზღვევა სურს მოთამაშეს, მით უფრო ახლოს უნდა იყოს იგი ნულთან, ხოლო რაც უფრო ოპტიმისტია იგი, მით უფრო ახლოსაა ერთთან. როცა $\alpha=1$, მაშინ ჰურვიცის კრიტერიუმი ემთხვევა მაქსიმაქსის კრიტერიუმს, ხოლო როცა $\alpha=0$, იგი გვაძლევს ვალდის კრიტერიუმს.

შენიშვნა. ბუნების წინააღმდეგ თამაშში ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევა ეყრდნობა სუბიექტურ

მოსაზრებებს. ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებამდე, მოცემული თამაში უნდა გავაანალიზოთ რამდენიმე კრიტერიუმის გამოყენებით. თუ ყველა კრიტერიუმი მოგვცემს ერთსა და იმავე ოპტიმალურ სტრატეგიას, მაშინ ასეთი გადაწყვეტილება შეგვიძლია ავირჩიოთ დაჯერებულად; ხოლო თუ მიღებული გადაწყვეტილებები განსხვავდებიან, მაშინ ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება მოითხოვს პრობლემური სიტუაციის უფრო ღრმა ანალიზს.

ამოცანა 2. ოპტიმალურობის ძირითადი კრიტერიუმების (წესების) გამოყენებით ვიპოვოთ ოპტიმალური გადაწყვეტილებები სრული განუზღვრელობის პირობებში, რომელიც მოცემულია შემდეგი თამაშის საშუალებით:

$$H_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \hline x_1 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ \hline x_2 & 2 & 3 & 4 & 12 \\ \hline x_3 & 8 & 5 & 3 & 10 \\ \hline x_4 & 1 & 4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩამოთვლილი კრიტერიუმები: ლაპლასის კრიტერიუმის მიხედვით უნდა გამოვთვალოთ სიდიდეები

$$5+2+8+4=19;\ 2+3+4+12=21;\ 8+5+3+10=26;$$
$$1+4+2+8=15.$$

მათგან უდიდესია 26 და იგი მიიღება x_3 სტრატეგიის არჩევით. ამიტომ ლაპლასის კრიტერიუმით ოპტიმალურია $x_{3^*}=3$ სტრატეგია, ხოლო შესაბამისი საშუალო სარგებლიანობაა $\frac{1}{4}.26=6{,}5$.

მაქსიმაქსის კრიტერიუმის მიხედვით,

$$u(x_{i^\cdot}) = \max_{x_i} \max_{\omega_j} u_{ij} =$$

$$\max\{\max u_{1j}, \max u_{2j}, \max u_{3j}, \max u_{4j}\} = \max\{8,12,10,8\} = 12$$

და იგი მიიღწევა $x_{2^\cdot} = 2$ სტრატეგიისათვის;

ვალდის კრიტერიუმის მიხედვით

$$u(x_{i^\cdot}) = \max_{x_i} \min_{\omega_j} u_{ij} =$$

$$= \max\{\min u_{1j}, \min u_{2j}, \min u_{3j}, \min u_{4j}) = \max(2,2,3,1\} = 3,$$

რომელიც შეესაბამება $x_{3^\cdot} = 3$ სტრატეგიას;

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმის გამოსაყენებლად განვიხილოთ მოცემული თამაშის შესაბამისი რისკების თამაში

$R_u =$

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
x_1	3	3	0	8
x_2	6	2	4	0
x_3	0	0	5	2
x_4	7	1	6	4

აქ

$$r(x_{i^\cdot}) = \min_{x_i} \max_{\omega_j} r_{ij} =$$

$$= \min\{\max r_{1j}, \max r_{2j}, \max r_{3j}, \max r_{4j}\} = \min\{8,6,5,6\} = 5$$

და იგი შეესაბამება $x_{3^\cdot} = 3$ სტრატეგიას;

ჰურვიცის კრიტერიუმი გამოვიყენოთ ოპტიმიზმის სამი კოეფიციენტისათვის - $\alpha = 0{,}3; \alpha = 0{,}5; \alpha = 0{,}9$:

1) $\alpha = 0{,}3$ -სთვის

$$u(x_{i^\cdot}) = \max_{x_i} \{\alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha) \min_{\omega_j} u_{ij}\} =$$

$$\max\{0{,}3 \cdot 8 + 0{,}7 \cdot 2; 0{,}3 \cdot 12 + 0{,}7 \cdot 2; 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 3; 0{,}3 \cdot 8 +$$

$$0{,}7 \cdot 1\} = \max\{3{,}8; 5{,}0; 5{,}1; 3{,}1\} = 5{,}1$$

და $x_{3^*} = 3$;

2) $\alpha = 0,5$-სთვის

$u(x_{i^*}) = \max\{0,5\cdot 8 + 0,5\cdot 2; 0,5\cdot 12 + 0,5\cdot 2; 0,5\cdot 10 + 0,5\cdot 3;$

$0,5\cdot 8 + 0,5\cdot 1\} = \max\{5;7;6,5;4,5\} = 7$ და $x_{2^*} = 2$;

3) $\alpha = 0,9$-სთვის

$u(x_{i^*}) = \max\{0,9\cdot 8 + 0,1\cdot 2;\ 0,9\cdot 12 + 0,1\cdot 2;\ 0,9\cdot 10 + 0,1\cdot 3;$

$0,9\cdot 8 + 0,1\cdot 1\} = \max\{7,4;11;9,3;7,3\} = 11$ და $x_{2^*} = 2$.

ამრიგად, ჰურვიცის კრიტერიუმის მიხედვით, პესიმისტური ოპ-ტიმალური გადაწყვეტილებაა x_3 სტრატეგია, ხოლო ოპტიმისტური ოპტიმალური გადაწყვეტილებაა x_2 სტრატეგია.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
%
disp('გადაწყვეტილების მიღება')
% სტატისტიკური თამაში მატრიცული სახით
disp('შეიყვანეთ სტატისტიკური თამაში მატრიცული
სახით')
H=input('H=');
disp('შეიყვანეთ მდგომარეობათა ალბათობები Q')
Q=input('Q=');
disp('სტატისტიკური  თამაში მატრიცული სახით
H=');disp(H);
disp('მდგომარეობათა ალბათობები Q=');disp(Q);
disp('H მატრიცის სტრიქონების რაოდენობა')
n1=input('n1=');
disp('H მატრიცის სვეტების რაოდენობა')
n2=input('n2=');
% საშუალო სარგებლიანობის გამოთვლა
u=H*Q';
[umax,iumax]=max(u);
disp('მაქსიმალური  საშუალო სარგებლიანობა
umax=');disp(umax);
```

```
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(iumax);
% რისკების თამაში
hmax=max(H);
for j=1:n1
for i=1:n2
R(j,i)=hmax(i)-H(j,i);
end
end
disp('რისკების თამაშის მატრიცა');
disp('R=');disp(R);
% საშუალო რისკის გამოთვლა
r=Q*R';
[rmin,irmin]=min(r);
disp('მინიმალური საშუალო რისკი rmin=');disp(rmin);
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(irmin);
% ოპტიმალურობის კრიტერიუმები
% თამაშის მატრიცა
disp('შეიყვანეთ  თამაშის მატრიცა')
Hu=input('Hu=');
disp('სტატისტიკური თამაში მატრიცული სახით
Hu=');disp(Hu);
disp('Hu მატრიცის სტრიქონების რაოდენობა')
n3=input('n3=');
disp('Hu მატრიცის სვეტების რაოდენობა')
n4=input('n4=');
% ლაპლასის კრიტერიუმი
N=sum(Hu');
[nmax,inmax]=max(N);
disp('max nmax=');disp(nmax);
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(inmax);
ss=nmax*1/4;
disp('საშუალო  სარგებლიანობა ტოლია');disp(ss);
% maxmax კრიტერიუმი
M=max(Hu');
[mmax,immax]=max(M);
disp('mmax=');disp(mmax);
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(immax);
% ვალდის კრიტერიუმი
V=min(Hu');
```

```
[vmax,ivmax]=max(V);
disp('vmax=');disp(vmax);
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(ivmax);
% სევიჯის კრიტერიუმი
% რისკების თამაში
humax=max(Hu);
for j=1:n3
for i=1:n4
Ru(j,i)=humax(i)-Hu(j,i);
end
end
disp('რისკების თამაშის მატრიცა');disp('Ru=');disp(Ru);
S=max(Ru');
[smin,ismin]=min(S);
disp('smin=');disp(smin);
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(ismin);
% ჰურვიცის კრიტერიუმი
disp('შეიყვანეთ  ალფა კოეფიციენტის მნიშვნელობები')
alfa=input('alfa=');
for j=1:3
   for i=1:4
    su(j,i)=alfa(j)*M(i)+(1-alfa(j))*V(i);
    ui(j,i)=max(su(j,i));
   end
end
[uimax,iuimax]=max(ui');
disp('ჰურვიცის   კრიტერიუმი')
for i=1:3
disp('alfa=');disp(alfa(i));
disp('მაქსიმალური სარგებლიანობა=');disp(uimax(i))
disp('ოპტიმალური სტრატეგია=');disp(iuimax(i));
end
%
```

ამოცანა 1

გადაწყვეტილების მიღება
შეიყვანეთ სტატისტიკური თამაში მატრიცული სახით
H=[4,3,6,5;2,1,8,6;3,2,5,1]

შეიყვანეთ მდგომარეობათა ალბათობები **Q**
Q=[0.1,0.2,0.5,0.2]
სტატისტიკური თამაში მატრიცული სახით
H=

4	3	6	5
2	1	8	6
3	2	5	1

მდგომარეობათა ალბათობები
Q= 0.1000 0.2000 0.5000 0.2000
H მატრიცის სტრიქონების რაოდენობა
n1=3
H მატრიცის სვეტების რაოდენობა
n2=4
მაქსიმალური საშუალო სარგებლიანობა
umax=
5.6000
ოპტიმალური სტრატეგია= **2**
რისკების თამაშის მატრიცა
R=

0	0	2	1
2	2	0	0
1	1	3	5

მინიმალური საშუალო რისკი
rmin=
0.6000
ოპტიმალური სტრატეგია= **2**

ამოცანა 2

შეიყვანეთ თამაშის მატრიცა
Hu=[5,2,8,4;2,3,4,12;8,5,3,10;1,4,2,8]
სტატისტიკური თამაში მატრიცული სახით
Hu=

5	2	8	4
2	3	4	12
8	5	3	10
1	4	2	8

Hu მატრიცის სტრიქონების რაოდენობა
n3=4

Hu მატრიცის სვეტების რაოდენობა
n4=4
max nmax= 26
ოპტიმალური სტრატეგია= 3
საშუალო სარგებლიანობა ტოლია 6.5000
mmax= 12
ოპტიმალური სტრატეგია= 2
vmax= 3
ოპტიმალური სტრატეგია= 3
რისკების თამაშის მატრიცა

Ru=

```
   3   3   0   8
   6   2   4   0
   0   0   5   2
   7   1   6   4
```

smin= 5
ოპტიმალური სტრატეგია= 3
შეიყვანეთ ალფა კოეფიციენტის მნიშვნელობები
alfa=[0.3,0.5,0.9]
ჰურვიცის კრიტერიუმი
alfa= 0.3000
მაქსიმალური სარგებლიანობა= 5.1000
ოპტიმალური სტრატეგია= 3
alfa= 0.5000
მაქსიმალური სარგებლიანობა= 7
ოპტიმალური სტრატეგია= 2
alfa= 0.9000
მაქსიმალური სარგებლიანობა= 11
ოპტიმალური სტრატეგია= 2

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა, რომელიც ორი პირობისაგან შედგება. სასურველია, ანგარიში შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის

პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. **1)** მოცემულია სტატისტიკური თამაში

$$H_u(Q) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \hline x_1 & 5 & -2 & 10 & 3 \\ \hline x_2 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ \hline x_3 & -4 & 5 & 3 & 6 \\ \hline Q & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ \hline \end{array}.$$

იპოვეთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება მასში; 2) მოცემულია თამაში სრული განუზღვრელობის პირობებში, რომელშიც სიტუაციები იმავე შეფასებებითაა მოცემული

$$H_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \hline x_1 & 5 & -2 & 10 & 3 \\ \hline x_2 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ \hline x_3 & -4 & 5 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}.$$

გამოიყენეთ ოპტიმალურობის ძირითადი კრიტერიუმები და იპოვეთ ოპტიმალური გადაწყვეტილებები.

15. კრიტერიუმების აწონილი ჯამი. ნორმირებული და აწონილი კრიტერიუმების მნიშვნელობები

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა არაერთგვაროვანი და სხვადასხვა ხარისხობრივი საჭიროებების მქონე კრიტერიუმების შემთხვევაში. მოითხოვება მისი ამოხსნა გლობალური კრიტერიუმის გამოყენებით და კრიტერიუმების ნორმირების წესით. აქ აღწერილია ეს მეთოდი; საჭიროა აგრეთვე გარკვევა იმის გარკვევა, თუ რამდენად ეფექტურია ამ მეთოდით მიღებული გადაწყვეტილება. ამ მეთოდით ამოხსნილია კონკრეტული ამოცანა. მოვახდინოთ დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \to \max_{x \in X}. \qquad (1)$$

ასეთი ამოცანის ამონახსნში, მსგავსად $m = 2$ შემთხვევისა, ვგულისხმობთ პარეტოს აზრით $x^0 \in X$ ეფექტურ გადაწყვეტილებას: არ არსებობს სხვა გადაწყვეტილება $x^* \in X$, რომ შესრულდეს შემდეგი უტოლობები $f_i(x^*) \ge f_i(x^0), i = 1,2,...,m,$ სადაც ერთი უტოლობა მაინც იქნება მკაცრი.

(1) ამოცანისათვის ეფექტური გადაწყვეტილების პოვნა მრავალ სირთულესთან არის დაკავშირებული, რაც წარმოშვა მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების მრავალსახეობამ. ამიტომ, მათი ანალიზისათვის სხვადასხვა მეთოდი ჩამოყალიბდა. (1) ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი სირთულეა გადაწყვეტილების მიმღები პირისაგან დამატებითი ინფორმაციის მიღება. ასეთი ინფორმაციებიდან პირველ რიგში უნდა გამოვყოთ

კრიტერიუმების შედარებითი საჭიროების (მნიშვნელოვნობის) შესახებ ინფორმაცია. დღეისათვის, გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკურ თეორიაში შემოტანილია კრიტერიუმების შედარებითი საჭიროების ცნება და მის საფუძველზე აგებულია კრიტერიუმების მნიშვნელოვნობის თეორიის საფუძვლები.

ალნიშნული ცნების დაზუსტებამდე, გადაწყვეტილებათა მიღების მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების თეორიაში შემოტანილ იქნა კრიტერიუმების საჭიროების წონითი კოეფიციენტები. მათი მეშვეობით (1) ამოცანის ამონახსნის პოვნა დაყვანილ იქნა შემდეგი გლობალური (განზოგადებული) სკალარული ამოცანის ამონახსნის პოვნაზე (ამ ფაქტს შემდეგ ლაბორატორიულ სამუშაოში ჩამოვაყალიბებთ თეორემის სახით)

$$F(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+...+\alpha_m f_m(x)) \to \max_{x\in X}, \quad (2)$$

სადაც $\alpha_i (i=1,...,m)$ არის $f_i (i=1,...,m)$ კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის წონა: ყველა $\alpha_i > 0$ და $\alpha_1+...+\alpha_m=1$. α_i გამოსახავს f_i-ს ღირებულებას გმპ-თვის. მათი განსაზღვრა შეუძლია გმპ-ს. მან შესაძლოა გადაწყვეტილების მიღების პროცესის დასაწყისში კრიტერიუმების საბოლოო წონა ცალსახად ვერ განსაზღვროს. თუ ეს ოპერაცია მისთვის აღმოჩნდება რთული, მაშინ იგი იქცევა შემდეგნაირად: შემოიღებს წონას წინასწარი შეხედულებით. შეამოწმებს მიღებული გადაწყვეტილებების შედეგებს და საჭიროების შემთხვევაში მოახდენს მათ კორექტირებას სასურველი შედეგის მიღებამდე. (2)-ს ხშირად უწოდებენ კრიტერიუმების აწონილ ჯამს ან წრფივ ნახვევს.

შენიშვნა 1. თუ $f_1,...,f_m$ კრიტერიუმები ერთნაირი საჭიროებისაა, მაშინ $\alpha_i=\frac{1}{m}(i=1,...,m)$ და

$$F(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_i(x).$$

შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ეს კრიტერიუმები არ არის ერთნაირი საჭიროების.

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, თუ რამდენად კორექტულია კრიტერიუმების აწონილი ჯამის გამოყენება (1) ამოცანის ამოხსნისათვის. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ აწონილი ჯამის მნიშვნელობის განსაზღვრა გულისხმობს არითმეტიკული ოპერაციების შესრულებას განსხვავებულ კრიტერიუმებზე. აქ პასუხი დამოკიდებულია სხვადასხვა მონაცემებზე: კრიტერიუმები იზომება ერთნაირი თუ გაგანსხვავებული სკალით. პირველ შემთხვევაში გვაქვს ერთგვაროვანი, მეორეში კი - არაერთგვაროვანი კრიტერიუმები.

თუ საქმე გვაქვს არაერთგვაროვან კრიტერიუმებთან (მაგალითად, ერთი კრიტერიუმი ფასდება სიჩქარით, მეორე - მასით და ა.შ.), მაშინ (2)-ის გამოსაყენებლად ყველა f_i კრიტერიუმი უნდა გარდავქმნათ - მივცეთ უგანზომილებო სახე, ანუ მოვახდინოთ f_i-ს ნორმირება. ძალიან ხშირად გამოიყენება კრიტერიუმის ნორმირების შემდეგი წესი: $f_i' = \dfrac{f_i}{f_i^*}$, სადაც f_i^* არის f_i-ის მაქსიმალური მნიშვ-ნელობა (ვთვლით, რომ $f_i > 0$). ნორმირების ამ წესს ვუწ-ოდოთ კრიტერიუმის მაქსიმალური მნიშვნელობის გათვა-ლისწინების წესი. ამასთან იგულისხმება, რომ f_i-ს უპ-ირატესობა თანაბრად იზრდება 0-დან f_i^*-მდე. ეს მოთხ-ოვნა ძლიერია და მან შეიძლება აშკარად არასწორ გადაწყვეტილებამდე მიგვიყვანოს.

ამოცანა 1. მოცემული სამი მოდელის მსუბუქი ავტომობილიდან $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ უნდა ვიყიდოთ ჩვენთვის ყველაზე ეფექტური. მათი ფასები და ძირითადი ტექნიკური მახასიათებლები დაახლოებით ერთნაირია, გარდა მაქსიმალური სიჩქარისა (კმ/სთ) და ეკონომიკურობისა

(კმ/ლ). ეს მაჩვენებლები მოცემულია შემდეგ 1-ელ ცხრილში.

ცხრილი 1

მოდელი	f_1 - სიჩქარე	f_2 - ეკონომიკ.
x_1	240	10
x_2	140	14
x_3	120	15

ვიპოვოთ $f = (f_1, f_2) \to \max$ ამოცანის ამონახსნი.

ამოხსნა. f_1 და f_2 არიან არაერთგვაროვანი კრიტერიუმებია. პირველ რიგში, საჭიროა მათი ნორმირება შემდეგი ფორმულით: $f_i^{'} = \dfrac{f_i}{f_i^*}$. აქ $f_1^* = 240$, $f_2^* = 15$. კრიტერიუმების ნორმირებული მნიშვნელობები მოვათავსოთ მე-2 ცხრილში.

ცხრილი 2

მოდელი	$f_1^{'}$	$f_2^{'}$	$F = 0{,}5f_1^{'} + 0{,}5f_2^{'}$
x_1	1	0,667	0,83
x_2	0,583	0,933	0,76
x_3	0,5	1	0,75

ჩავთვალოთ, რომ f_1 და f_2 მახასიათებლები ჩვენთვის ერთნაირი საჭიროებისაა. ამიტომ ავიღოთ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$. გამოვთვალოთ აწონილი ჯამის მნიშვნელობები $F = 0{,}5f_1^{'} + 0{,}5f_2^{'}$ ფორმულით და მოვათავსოთ იმავე ცხრილის ბოლო სვეტში. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$f = (f_1, f_2) \to \max \text{ და } F = 0{,}5f_1^{'} + 0{,}5f_2^{'} \to \max$$

ამოცანების ამონახსნია x_1 გადაწყვეტილება. ეს ავტომობილი ავითარებს მაქსიმალურ 200კმ/სთ სიჩქარეს, რაც ძალზედ მიმზიდველად გვეჩვენება. ამასთან, 140კმ/სთ-ზე მეტი სიჩქარე შესაძლოა მხოლოდ გამონაკლის შემთხვევაში განვავითაროთ. მაშასადამე, უფრო მეტად მისაღები 140კმ/სთ სიჩქარის შემთხვევაში, ბენზინი მაქსიმალურად იხარჯება. მაქსიმალური სიჩქარე 120კმ/სთ კი თითქოს მცირეა. განზოგადებული კრიტერიუმის მნიშვნელობა x_1-თვის მეტია, ვიდრე x_2-თვის, რაც სიჩქარის მნიშვნელოვანი ზრდის შედეგია. სიჩქარის მნიშვნელოვანმა ზრდამ კი ჩვენი უპირატესობის მცირეთი გაზრდა გამოიწვია.

ახლა შევნიშნოთ, რომ 120კმ/სთ-დან სიჩქარის მატება 20კმ/სთ-ით (რაც კარგად შესამჩნევია) x_2-ს ხდის უპირატესს x_3-თან შედარებით (ეკონომიკურობის მცირეთი განსხვავებით). მაშასადამე, ჩვენი უპირატესობა სიჩქარის სკალის გასწვრივ იზრდება არათანაბრად. ამ ფაქტის გათვალისწინება კი აწონილი ჯამის მნიშვნელობებში ვერ მოხდა (თუმცა ეს მოთხოვნა მასში თავიდანვე იყო). ამიტომ, საბოლოო გადაწყვეტილებით უპირატესობას მივანიჭებთ x_2-ს, რომელიც შეესაბამება აწონილი ჯამის მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამრიგად, კრიტერიუმების ნორმირების განხილულ წესს თან ახლავს არასწორი რეკომენდაციების მიღების საშიშროება. ამიტომ, პრობლემა თავიდან მოცემული არაერთგვაროვანი კრიტერიუმების ნორმირების წესის შერჩევაში მდგომარეობს.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function [F,Fn]=naxvevi(f,a)
%F–კრიტერიუმების აწონილი ჯამი, Fn–კრიტერიუმების
%ნორმირებული მნიშვნელობების აწონილი ჯამი,
%Fmax–მაქსიმალური მნიშვნელობა, I–ოპტიმალური
%გადაწყვეტილების ინდექსი
```

```
%a(i)-i-ური კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის წონა,
%f(:,i)-i-ური კრიტერიუმის მნიშვნელობები,
%ff –კრიტერიუმების ნორმირებული მნიშვნელობები
f=[f1,f2,f3];
f, a
F=aconili(f,a)
[Fmax,I1]=max(F)
n=size(f,1); m=size(f,2);
for i=1:m
ff(:,i)=f(:,i)/max(f(:,i));
end
ff
 Fn=aconili(ff,a);
[Fnmax,I2]=max(Fn)
function F=aconili(f,a)
F=0;m=size(f,2);
for j=1:m
F=F+a(j)*f(:,j);
end
```

ბრძანებათა ფანჯარაში შესატანი არგუმენტები:

```
>>f=[5 10 3 8; 12 2 6 6; 7 14 9 4]';
>>a=[1/3,1/3,1/3];
```

და პროგრამის შესრულების ბრძანება

```
>>[F,Fn]=naxvevi(f,a)
```

პასუხი:

```
f =
   5   12    7
  10    2   14
   3    6    9
   8    6    4
a =
  0.3333   0.3333   0.3333
F =
  8.0000
  8.6667
```

```
   6.0000
   6.0000
Fmax =
   8.6667
I1 =
    2
ff =
   0.5000   1.0000   0.5000
   1.0000   0.1667   1.0000
   0.3000   0.5000   0.6429
   0.8000   0.5000   0.2857

Fnmax =
   0.7222
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში უნდა შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მე-3 ცხრილში მოცემულია სამკრიტერიუმიანი $f=(f_1,f_2,f_3)\rightarrow \max\limits_X$ ამოცანის შესახებ მონაცემები. გამოიყენეთ გლობალურ კრიტერიუმში განხილული ნორმირების წესი და იპოვეთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

ცხრილი 3

X	f_1	f_2	f_3
x_1	5	12	7
x_2	10	2	14
x_3	3	6	9
x_4	8	6	4

16. პრიორიტეტების დადგენა მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანაში

სამუშაოს მიზანი - კანდიდატების რანჟირება პრიორიტეტების კლების მიხედვით. ამ შემთხვევაში, ყველაზე უპირატესი კანდიდატი იქნება ამ რიგში პირველ ადგილზე მდგომი კანდიდატი. თუ არჩევის ამოცანაში მოითხოვება n რაოდენობის კანდიდატთა სიმრავლიდან ყველაზე საუკეთესო k რაოდენობის ($n \geq k$) კანდიდატის არჩევა, მაშინ ისინი უნდა ავირჩიოთ პრიორიტეტების აღნიშნულ რიგში პირველიდან k-ური კანდიდატის ჩათვლით. ასე დასმული ამოცანა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაა, რომელიც გულისხმობს კანდიდატთა მოცემული სიმრავლიდან ფიქსირებული რაოდენობის სასურველ კანდიდატთა ამორჩევას. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში ასეთი ტიპის ამოცანებს, მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანები ეწოდება. ასეთი ამოცანების მაგალითებია სხვადასხვა სახის კონკურსები, ტენდერები და სხვ. მრავალკრიტერიუმიანი k რაოდენობის საუკეთესო კანდიდატის არჩევის ამოცანის გადაწყვეტისათვის გამოვიყენებთ თომას საატის იერარქიული ანალიზის მეთოდს, მოვახდენთ დასმული ამოცანის რეალიზაციას MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები

2.1. ობიექტების წონითი ვექტორი და შეფასებების მატრიცა

განვიხილოთ n რაოდენობის ობიექტის (კანდიდატის, ალტერნატივის, სტრატეგიის) $X = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ სიმრავლე. თითოეულ A_i ობიექტს შევუსაბამოთ გარკვეული ისეთი დადებითი რიცხვი $\alpha_i (i = 1,2,...,n)$, რომ

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$. α_i-ს ვუწოდოთ A_i-ს წონა ან წონითი კოეფიციენტი. α_i გამოსახავს A_i ობიექტის შედარებით საჭიროებას (ფასს, მნიშვნელოვნობას, სარგებლიანობას). წონითი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ვექტორს, ეწოდება $A_1,A_2,...,A_n$ ობიექტების წონითი ვექტორი.

განვიხილოთ წონითი ვექტორების სიმრავლე

$$\Omega=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\ \mid\ \alpha_i>0,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=1\}.$$

საწყის ეტაპზე ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ $A_1,A_2,...,A_n$ ობიექტების წონითი ვექტორი $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, რომლითაც ჩავატარებთ ობიექტების რანჟირებას პრიორიტეტულობის გათვალისწინებით: რაც მეტია α_i, მით უპირატესია A_i. ამისათვის გამოვიყენოთ თ. საატის იერარქიული ანალიზის მეთოდი, რომელიც დღეისათვის ყველაზე ახალი, ეფექტური და მნიშვნელოვანია მოცემული მიმართულებით. ამ მეთოდის თანახმად, შევადგინოთ გარკვეული მაჩვენებლით (ნიშნით) ან მაჩვენებლებით $A_1,A_2,...,A_n$ ობიექტების წყვილობითი შედარებების კვადრატული $n\ x\ n$ მატრიცა S_A, რომლის ყოველი α_{ij} ელემენტი წარმოადგენს i-ური ობიექტის A_i-ს "წონის" შეფარდებას j-ური ობიექტის A_j-ს "წონაზე"- $\alpha_{ij}=\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$. რიცხვი α_{ij} გვიჩვენებს თუ რამდენად უპირატესია A_i ობიექტი A_j ობიექტზე. $\alpha_{ij}>1$ ნიშნავს, რომ A_i უპირატესია A_j-ზე; თუ $\alpha_{ij}<1$, მაშინ A_i ნაკლებ უპირატესია A_j-ზე; თუ $\alpha_{ij}=1$, მაშინ აღნიშნული

უპირატესობით A_i და A_j თანაბარი მნიშვნელობისაა. ასე მიიღება წყვილობითი შედარებების მატრიცა

$$S_A = \begin{array}{c|cccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & . & . & . & A_n \\ \hline A_1 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ A_2 & \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{n-1} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & . & . & . & \alpha_{n-1,n} \\ A_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & . & . & . & 1 \end{array} .$$

ცხადია, მოცემული S_A მატრიცის ელემენტებს აქვს შემდეგი თეისებები:

1) S_A-ს ყველა ელემენტი დადებითია, ე.ი. $\alpha_{ij} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j} > 0$, $\forall i, j = 1,2,...,n$;

2) S_A შებრუნებულად სიმეტრიულია, ე.ი. მისი ელემენტები, განთავსებულნი მთავარი დიაგონალის სიმეტრიულად, ერთმანეთის შებრუნებულია -

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha_{ji}}, \forall i, j = 1,2,...,n.$$

ამასთან, მთავარ დიაგონალზე განთავსებულია ერთიანები

$$\alpha_{ii} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i} = 1, i = 1,2,...,n;$$

3) S_A-ს აქვს თავსებადობის თეისება იმ აზრით, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\alpha_{ik}.\alpha_{kj} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}.\frac{\alpha_k}{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \alpha_{ij}, \quad \forall i, k, j = 1,...,n;$$

4) რიცხვი n არის S_A მატრიცის მაქსიმალური საკუთრივი რიცხვი, ხოლო სვეტ-ვექტორი $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$, თუ ეს ვექტორი ნორმირებულია (კოორდინატების ჯამი

არის ერთი), მაშინ იგი წარმოადგენს n-ის შესაბამის ერთადერთ საკუთრივ ვექტორს, ანუ

$$S_A.\alpha = n.\alpha . \qquad (1)$$

ცნობილია, რომ აღნიშნული თვისებების S_A მატრიცას აქვს ორი საკუთრივი რიცხვი – 0 და n. ამიტომ, (1) ტოლობა ჩავწეროთ ასე:

$$S_A.\alpha = \lambda_{\max} \cdot \alpha ,$$

სადაც $\lambda_{\max} = \max\{0, n\}$.

S_A მატრიცის შედგენისას ვგულისხმობდით, რომ $A_1, A_2, ..., A_n$ ობიექტების წონა $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ წინასწარ იყო ცნობილი. სინამდვილეში, პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ეს რიცხვები უცნობია და ამოცანა სწორედ მათ განსაზღვრაში მდგომარეობს.

2.2. იერარქიული ანალიზის მეთოდი (იამ)

$A_1, A_2, ..., A_n$ ობიექტების წყვილობითი შედარებისათვის ექსპერტი (გმპ) ან ექსპერტთა ჯგუფი (გმჯ) იყენებს შემდეგ ხარისხობრივ უპირატესობებს და მათ შესაბამის რაოდენობრივი შეფასების ზოგად სკალას:

1. თანაბრად უპირატესი - 1;
2. სუსტად უპირატესი - 3;
3. ძლიერ უპირატესი - 5;
4. ძალიან ძლიერ უპირატესი - 7;
5. აბსოლუტურად უპირატესი - 9.

2, 4, 6, 8 რიცხვები შეიძლება გამოვიყენოთ შედარებითი, შუალედური უპირატესობის განსაზღვრისათვის.

აღნიშნული სკალის ნაცვლად, პრაქტიკაში გამოიყენება ტრანზიტული სკალა უპირატესობის a კოეფიციენტით. მის მნიშვნელობად აიღება ან a=1,5 ან $a = 2$. ამ შემთხვევაში 1-ს შეესაბამება 1, ხოლო 2-ს - a, 3-ს - $a.a = a^2$, 4-ს - $a.a.a = a^3$, 5-ს კი - $a.a.a.a = a^4$.

ზოგადი სკალით ან a კოეფიციენტით აღნიშნული გმპ ან გმჯ თავიდან განსაზღვრავს S_A მატრიცის მთავარი დიაგონალის ზედა სამკუთხედში მდგომ შეფასებებს. მთავარ დიაგონალზე დაისმის ერთიანები, ხოლო მისი ქვედა სამკუთხედის ელემენტები განისაზღვრება S_A მატრიცის შებრუნებულად სიმეტრიულობის მე-2) თვისებით.

შევნიშნოთ, რომ ასეთი წესით მიღებულ S_A მატრიცას შეიძლება არ ახასიათებდეს მე-3) თვისება, ანუ $\alpha_{ik} \cdot \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$ ტოლობა არ სრულდებოდეს ნებისმიერ $i,k,j \in \{1,2,...,n\}$, $i \neq k$.

შემდეგ ვპოულობთ მიღებული S_A მატრიცის მაქსიმალურ საკუთრივ $\lambda_{\max}$ რიცხვს, რომელიც არასდროს არაა ნაკლები n-ზე. ამისათვის, α-ს მიმართ ამოვხსნით შემდეგი სახის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას $(S_A - \lambda_{\max}.I) \cdot \alpha = O$. მიღებული საკუთრივი ვექტორი $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ არის $A_1, A_2, ..., A_n$ ობიექტების საძებნი წონითი ვექტორი (თუ იგი არაა ნორმირებული, მაშინ ჩავატარებთ მის ნორმირებას).

აღნიშნული წესით მიღებული $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ წონითი კოეფიციენტები (ან წონა) ძალიან ხშირად შეესაბამება $\lambda_{\max} > n$ საკუთრივ რიცხვს. ამის გამო ვღებულობთ წყვილობითი შედარებების ისეთ S_A მატრიცას, რომლის ელემენტები არ დააკმაყოფილებს ზემოთ ჩამოთვლილ 1) - 4) თვისებებს, რამაც შეიძლება მიგვიყვანოს გარკვეულ შეცდომამდე მიგვიყვანოს.

ასეთი შეცდომისაგან თავის დაზღვევის მიზნით განვიხილავთ $A_1, A_2, ..., A_n$ ობიექტების წონითი ვექტორის პოვნის მარტივ მეთოდს, რომელიც არ მოითხოვს განტოლებების ამოხსნას.

2.3. წონითი ვექტორის პოვნის მარტივი მეთოდი

ამ მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: ექსპერტით განისაზღვრება S_A მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები, ანუ A_1 ობიექტს შეადარებს ყველა სხვას. ასე მიიღება α_{12}, α_{13}, . . . ,α_{1n} შეფასებები. იგულისხმება, რომ მატრიცის მთავარი დიაგონალის რიცხვებია $\alpha_{ii}=1$, $\forall i=1,...,n$.

ამ რიცხვების საფუძველზე მე-2) და მე-3) თვისებით $k=1$-თვის განისაზღვრება S_A-ს ყველა ელემენტი

$$\alpha_{ij}=\alpha_{i1}\cdot\alpha_{1j}=\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1i}},\ i=1,2,...,n;\quad j=1,2,...,n. \qquad (2)$$

მიღებული S_A მატრიცა $k=1,2,...,n$-სთვის დააკმაყოფილებს მე-3) თვისებას

$$\alpha_{ik}.\alpha_{kj}=\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{1i}}\cdot\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1k}}=\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1i}}=\alpha_{ij}.$$

დამტკიცებულია, რომ თუ S_A მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებს 1) - 3) თვისებებს, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს 4) თვისებასაც.

განვიხილოთ აღნიშნული მეთოდით განსაზღვრული S_A მატრიცა. მისი ელემენტებისაგან შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^0=(\alpha_1^0,\alpha_2^0,...,\alpha_n^0)$, რომლის კომპონენტები გამოითვლება ტოლობით

$$\alpha_i^0=\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1i}},\quad i=1,2,...,n,\ \text{სადაც}\ \alpha_{11}=1. \qquad (3)$$

აქ $\alpha_n^0=\dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}}=1$ და, მაშასადამე, α^0 ვექტორი არაა ნორმირებული. (3) ტოლობებით გამოთვლილი რიცხვები

$$\alpha_1^0=\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}=\alpha_{1n},\alpha_2^0=\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}=\alpha_{2n},...,\alpha_n^0=\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}}=\alpha_{nn}=1 \quad (4)$$

(2) ტოლობების გათვალისწინებით არის S_A მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტები.

ჩავატაროთ (4) ტოლობებით განსაზღვრული α^0 ვექტორის ნორმირება, ვთქვათ ეს ვექტორია

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n). \quad (5)$$

დასკვნა 1. (5)-ით განსაზღვრული წონითი ვექტორი α წარმოადგენს აღნიშნული მეთოდით აგებული და (4) ტოლობებით განსაზღვრული S_A მატრიცის ბოლო სვეტ-ის ელემენტებისაგან შედგენილი ვექტორის ნორმირებულ ვექტორს. (5) წონითი ვექტორი მარტივად გამოითვლება, რომელიც არ მოითხოვს განტოლებათა სისტემის ამოხს-ნას. საკმარისია ვიპოვოთ S_A მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტები. ამისათვის კი (4) ფორმულების თანახმად, გამოიყენება ექსპერტის მიერ დადგენილი S_A მატრიცის მხოლოდ პირველი სტრიქონის ელემენტები. ამ სტრიქონ-ის ბოლო α_{1n} ელემენტს გავყოფთ შესაბამისად 1, $\alpha_{12},\alpha_{13},...,\alpha_{1n}$-ზე და მივიღებთ S_A-ს ბოლო სვეტს. მათგ-ან შევადგენთ α^0=$(\alpha_{1n},\alpha_{2n},...,\alpha_{nn})$ ვექტორს. მისი ნორმი-რებით კი მიიღება მე–(5) წონითი ვექტორი α.

ამოცანა 1. მოცემულია ოთხი ობიექტი A_1,A_2,A_3,A_4. ვიპოვოთ მათი წონითი ვექტორი და ჩავატაროთ შესა-ბამისი რანჟირება.

ამოხსნა. ვიპოვოთ შეფასებები $\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}$. ვთქვათ, მათი მნიშვნელობებია

$$\alpha_{12}=4,\ \alpha_{13}=\frac{1}{4}=0{,}25,\ \alpha_{14}=2.$$

ამიტომ (5) ფორმულების თანახმად, ვწერთ

$$\alpha_{14}=2,\ \alpha_{24}=\frac{2}{4}=0{,}5,\ \alpha_{34}=\frac{2}{0{,}25}=8,\ \alpha_{44}=1.$$

ამრიგად, S_A მატრიცის პირველ სტრიქონს და ბოლო სვეტს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_A=\begin{array}{c|cccc} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_1 & 1 & 4 & 0{,}25 & 2 \\ A_2 & & 1 & & 0{,}5 \\ A_3 & & & 1 & 8 \\ A_4 & & & & 1 \end{array}.$$

შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^0=(2;0{,}5;8;1)$ და ჩავატაროთ მისი ნორმირება. რადგან ამ ვექტორის კოორდინატების ჯამი არაა ერთი - 2+0,5+8+1=11,5, ამიტომ A_1,A_2,A_3,A_4 ობიექტების წონითი ვექტორი იქნება

$$\alpha=(0{,}17;0{,}043;0{,}69;0{,}09).$$

ამ ვექტორის თანახმად, ობიექტების სიმრავლეზე განსაზღვრულია უპირატესობის მკაცრი ბინარული მიმართება $\succ$:

$$A_3\succ A_1\succ A_4\succ A_2.$$

2.4. მრავალკრიტერიუმიანი კანდიდატების რანჟირება

ვთქვათ, $x\in X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ კონკურსში მონაწილე კანდიდატების სასრული სიმრავლეა, ხოლო $f_1,f_2,\dots,f_m$ - კერძო კრიტერიუმები, რომლებითაც ვაფასებთ კანდიდატებს. დავსვათ ამოცანა: X სიმრავლიდან ავირჩიოთ ყველაზე საუკეთესო კანდიდატი, ანუ ისეთი, რომელსაც ექნება ყველაზე მაქსიმალური შეფასება ყველა საჭირო $f_1,f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმით. მაშასადამე, გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))\to\max_X. \tag{6}$$

(6) ამოცანიდან გამომდინარე, საუკეთესო კანდიდატი უნდა იყოს პარეტოს აზრით ეფექტური ან სუსტად ეფექტური. (6) ამოცანისათვის ეფექტური გადაწყვეტილება (ან ამონახსნი) ყოველთვის არსებობს, ამასთან ასეთი შეიძლება ერთზე მეტიც არსებობდეს. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში კი ერთადერთის არჩევა გარკვეული კომპრომისის დაშვებას გულისხმობს. აქედან გამომდინარე, სასურველია X სიმრავლის ელემენტების რანჟირება პრიორიტეტების (საჭიროების, სარგებლიანობის) მიხედვით. ჩვენი მიზანია (6) ამოცანის ამოხსნით X სიმრავლის ელემენტების ასეთი რანჟირება უპირატესობებით ჩავატაროთ. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი ცნობილი დებულება.

თეორემა. ვთქვათ, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\in\Omega$ არის $f_1,f_2,...,f_m$ კრიტერიუმების წონითი ვექტორი. მაშინ $f(x)$-ის კრიტერიუმების წრფივი ნახვევით მიღებული განზოგადებული სკალარული ამოცანის

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)\to\max_X \tag{7}$$

ამონახსნი x^0 არის (6) ამოცანის ეფექტური გადაწყვეტილება პარეტოს აზრით.

ჩვენი ამოცანის პირობებში თუ ჩავთვლით, რომ $f_1,f_2,...,f_m$ კრიტერიუმებით გამოთვლილი x კანდიდატის შეფასებები $f_1(x),...,f_m(x)$ გმპ-ის ან გმჯ-ის სარგებლიანობაა x-ის არჩევის შემთხვევაში, მაშინ $F(x)$ არის სარგებლიანობის ფუნქცია X სიმრავლეზე. $F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლით კანდიდატების რანჟირებას სარგებლიანობებით ჩავატარებთ ყველა კრიტერიუმის გათვალისწინებით, რომლის პირველ ადგილზე იქნება ეფექტური ანუ ყველაზე საუკეთესო კანდიდატი. ყველა კანდიდატი, პირველიდან k-ური კან-

დიდატის ჩათვლით, იქნება k რაოდენობის გამარჯვებული კანდიდატი, კანდიდატთა მოცემული სიმრავლიდან.

(7) ამოცანის ამოხსნისათვის განვიხილავთ სამ ეტაპს.

I ეტაპი. ამ ეტაპზე ვპოულობთ $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმების წონით ვექტორს $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. ამისათვის, ექსპერტთა ჯგუფი $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმების წყვილობითი შედარებების S_A მატრიცაში იპოვის $\alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1m}$ ელემენტებს:

$$S_f = \begin{array}{c|cccc} & f_1 & f_2 & \cdot & f_m \\ \hline f_1 & 1 & \alpha_{12} & \cdot & \alpha_{1m} \\ f_2 & & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_m & & & & 1 \end{array} . \qquad (8)$$

მათი საშუალებით გამოვთვლით (4) რიცხვებს ანუ S_f მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებს და მათგან შევადგენთ $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_m^0)$ ვექტორს. მისი ნორმირებით კი ვიპოვით α-ს (ეს მეთოდი კონკრეტულადაა აღწერილი 1-ელ დასკვნაში).

II ეტაპი. ვახდენთ კანდიდატების რანჟირებას თითოეული კერძო $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმებით ცალ-ცალკე, ანუ კერძო კრიტერიუმების მნიშვნელობებს გამოვთვლით $x_1, x_2, ..., x_n$ კანდიდატებისათვის. ამისათვის, f_i კრიტერიუმით კანდიდატების წყვილობითი შედარებების S_i მატრიცაში გმპ, I ეტაპის ანალოგიურად იპოვის $\alpha_{12}^i, \alpha_{13}^i, ..., \alpha_{1n}^i$ $(i = 1,2,...,n)$ შეფასებებს:

$$S_i = \begin{array}{c|cccc} f_i & x_1 & x_2 & . & x_n \\ \hline x_1 & 1 & \alpha_{12}^i & . & \alpha_{1n}^i \\ x_2 & & 1 & & \\ . & . & . & . & . \\ x_n & & & & 1 \end{array}.$$

შემდეგ მათი საშუალებით ვიპოვით S_i-ს ბოლო სვეტს და მათგან შევადგენთ ვექტორს $\alpha^{i,0} = (\alpha_1^{i,0}, \alpha_2^{i,0}, ..., \alpha_n^{i,0})$. მისი ნორმირებით გამოვთვლით $x_1, x_2, ..., x_n$ კანდიდატების წონით $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, ..., \alpha_n^i)$ ვექტორს, რომლის კოორდინატებია $f_i(x)$ კრიტერიუმის მნიშვნელობები კანდიდატებისათვის:

$$f_i(x_1) = \alpha_1^i,\ f_i(x_2) = \alpha_2^i,\ . . . , f_i(x_n) = \alpha_n^i,\ i = 1,2,...,m.$$

III ეტაპი. კრიტერიუმების მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

f	f_1	f_2	f_3	.	f_m	$F(x_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i . f_i(x_k)$
α	α_1	α_2	α_3	.	α_m	
x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	.	$f_m(x_1)$	$F(x_1)$
x_2	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_2)$	.	$f_m(x_2)$	$F(x_2)$
.	.	.	.	.	.	.
x_n	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$f_3(x_n)$	.	$f_m(x_n)$	$F(x_n)$

მაშასადამე, ამ ცხრილის f_i-ის შესაბამის სვეტში მოთავსებულია მისი წონა α_i და შესაბამისი α^i ვექტორის კოორდინატები.

დასკვნა 2. $F(x_1), F(x_2), ..., F(x_n)$ რიცხვების კლებადობით დალაგებით მოვახდენთ შესაბამისი $x_1, x_2, ..., x_n$

კანდიდატების რანჟირებას პრიორიტეტების კლების მიხედვით და, რაც მეტია $F(x_k)$, მით მნიშვნელოვანია კანდიდატი x_k. თუ კანდიდატებს დავალაგებთ მკაცრი $\succ$ ბინარული მიმართებით, მაშინ სასურველი რაოდენობის საუკეთესო კანდიდატთა სიმრავლე ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ.

ამოცანა 2. მოცემულია კონკურსში მონაწილე კანდიდატთა სიმრავლე $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$. თითოეული მათგანი ფასდება $f=(f_1,f_2)$ ვექტორული კრიტერიუმით და ეს შეფასებები მოცემულია შემდეგ მატრიცაში

	f_1	f_2
x_1	5	3
x_2	4	5
x_3	3	5
x_4	4	4
x_5	3	4

.

მოვახდინოთ X სიმრავლის რანჟირება პრიორიტეტების კლების მიხედვით f_1 და f_2 კრიტერიუმების მაქსიმალური შეფასებით.

ამოხსნა. 2.4 პარაგრაფის I ეტაპის თანახმად, ეს მოითხოვს (8) მატრიცაში მხოლოდ α_{12}-ის პოვნას:

$$S_f = \begin{array}{c|cc} f & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & 1 & \alpha_{12} \\ f_2 & & 1 \end{array}.$$

ვთქვათ, $\alpha_{12}=3$ (f_1 სუსტად უპირატესია f-ზე). რადგან ამ მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებია $\alpha_1^0=3,\alpha_2^0=1$, ამიტომ $\alpha^0=(3;1)$. ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ $\alpha=(0,75;0,25)$. მოვათავსოთ ჩვენი მონაცემები ცხრილში (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

f	f_1	f_2
α	0,75	0,25
x_1	5	3
x_2	4	5
x_3	3	5
x_4	4	4
x_5	3	4

ახლა განვიხილოთ II ეტაპში განსაზღვრული S_1 და S_2 მატრიცები. ვთქვათ S_1-ში

$$\alpha_{12}^1 = 2, \alpha_{13}^1 = 4, \alpha_{14}^1 = 2, \alpha_{15}^1 = 4:$$

$$S_1 = \begin{array}{c|ccccc} f_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ x_2 & & 1 & & & \\ x_3 & & & 1 & & \\ x_4 & & & & 1 & \\ x_5 & & & & & 1 \end{array}.$$

მაშინ (4) ფორმულების საშუალებით S_1-ის ბოლო სვეტის ელემენტები იქნება

$$\alpha_{15}^1 = 4, \alpha_{25}^1 = \frac{4}{2} = 2, \alpha_{35}^1 = \frac{4}{4} = 1, \alpha_{45}^1 = \frac{4}{2} = 2, \alpha_{55}^1 = 1.$$

ამ რიცხვებისაგან შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^{1,0} = (4;2;1;2;1)$. მისი ნორმირებით მივიღებთ $\alpha^1 = (0,4;0,2;0,1;0,2;0,1)$.

ანალოგიურად, ვთქვათ S_2-ში

$$\alpha_{12}^2 = \frac{1}{4} = 0,25; \alpha_{13}^2 = \frac{1}{4} = 0,25; \alpha_{14}^2 = \frac{1}{2} = 0,5; \alpha_{15}^2 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

ამიტომ, $\alpha^{2,0} = (0,5;2;2;1;1)$, $\alpha^2 = (0,08;0,31;0,31;0,15;0,15)$.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები 1-ელ ცხრილში და გამოვთვალოთ $F(x_k)$ $(k=1,2,...,5)$:

f	f_1	f_2	$F(x_k)$
α	0,75	0,25	
x_1	0,4	0,08	0,32
x_2	0,2	0,31	0,23
x_3	0,1	0,31	0,155
x_4	0,2	0,15	0,188
x_5	0,1	0,15	0,113

ამრიგად, $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$ და კანდიდატებიდან ყველაზე საუკეთესოა x_1, ხოლო ყველაზე ნაკლებ უპირატესია x_5.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
%
disp('შეიყვანეთ a12,a13,a14')
a12=input('a12=');
a13=input('a13=');
a14=input('a14=');
A=ones(4,4);
A(1,:)=[1,a12,a13,a14];
a14=A(1,4)/A(1,1);
a24=A(1,4)/A(1,2);
a34=A(1,4)/A(1,3);
a44=A(1,4)/A(1,4);
A(:,4)=[a14,a24,a34,a44]
a0=A(:,4)
as=sum(a0)
a=(A(:,4)/as)'
B=ones(4,2);
B(:,2)=a;
B(:,1)=1:4;
C=sortrows(B,2)
```

```
disp('საუკეთესო არის')
disp('პროექტი N');disp(C(4,1))
disp('რომლის წონითი ვექტორია');disp(C(4,2))
```

ამოცანა 1

```
შეიყვანეთ a12,a13,a14
a12=4
a13=1/4
a14=2

A =
   1.0000   4.0000   0.2500   2.0000
   1.0000   1.0000   1.0000   0.5000
   1.0000   1.0000   1.0000   8.0000
   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000

a0 =

   2.0000
   0.5000
   8.0000
   1.0000
as =
  11.5000
a =
   0.1739   0.0435   0.6957   0.0870
C =
   2.0000   0.0435
   4.0000   0.0870
   1.0000   0.1739
   3.0000   0.6957

საუკეთესო არის
პროექტი N
   3
რომლის წონითი ვექტორია
   0.6957
```

ამოცანა 2

```
%
disp('შეიყვანეთ  მონაცემები x=m(xi,fi)')
m=input('m=');
disp('შეიყვანეთ a12')
a12=input('a12=');
ao=[a12;1];
a=[ao(1)/sum(ao),ao(2)/sum(ao)]
M=cat(1,a,m)
disp('შეიყვანეთ  მონაცემები s1')
s1=input('s1=');
S1=ones(5,5);
S1(1,:)=s1;
s51=s1(5)./s1
S1(:,5)=s51'
a1=s51/sum(s51)
disp('შეიყვანეთ  მონაცემები s2')
s2=input('s2=');
S2=ones(5,5);
S2(1,:)=s2;
s52=s2(5)./s2
S2(:,5)=s52'
a2=s52/sum(s52)
m(:,1)=a1';
m(:,2)=a2';
MM=cat(1,a,m)
for i=2:6
   f=MM(i,:).*MM(1,:);
   F(i-1)=sum(f);
end
   F
   [Fmin,imin]=min(F);
   [Fmax,imax]=max(F);
 disp('საუკეთესო არის')
disp('პროექტი N=');disp(imax)
disp('რომლის F(x)=');disp(Fmax)
```

```
disp('უარესი არის')
disp('პროექტი N=');disp(imin)
disp('რომლის F(x)=');disp(Fmin)
```

შედეგები

```
შეიყვანეთ მონაცემები x=m(xi,fi)
m=[5,3;4,5;3,5;4,4;3,4]
შეიყვანეთ a12
a12=3
a =
   0.7500   0.2500
M =

   0.7500   0.2500
   5.0000   3.0000
   4.0000   5.0000
   3.0000   5.0000
   4.0000   4.0000
   3.0000   4.0000

შეიყვანეთ მონაცემები s1
s1=[1,2,4,2,4];

s51 =
    4    2    1    2    1
S1 =
    1    2    4    2    4
    1    1    1    1    2
    1    1    1    1    1
    1    1    1    1    2
    1    1    1    1    1

a1 =
   0.4000   0.2000   0.1000   0.2000   0.1000

შეიყვანეთ მონაცემები s2
s2=[1,0.25,0.25,0.5,0.5];
```

```
s52 =
   0.5000   2.0000   2.0000   1.0000   1.0000
S2 =
   1.0000   0.2500   0.2500   0.5000   0.5000
   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000   2.0000
   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000   2.0000
   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000
   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000   1.0000

a2 =
   0.0769   0.3077   0.3077   0.1538   0.1538
MM =
   0.7500   0.2500
   0.4000   0.0769
   0.2000   0.3077
   0.1000   0.3077
   0.2000   0.1538
   0.1000   0.1538
F =
   0.3192   0.2269   0.1519   0.1885   0.1135
საუკეთესო არის
პროექტი N= 1
რომლის F(x)= 0.3192
უარესი არის
პროექტი N= 5
რომლის F(x)= 0.1135
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია კონკურსში მონაწილე კანდიდატთა სიმრავლე $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$. თითოეული მათ-

განი ფასდება $f=(f_1,f_2,f_3\}$ ვექტორული კრიტერიუმით და ეს შეფასებები მოცემულია შემდეგ მატრიცაში:

	f_1	f_2	f_3
x_1	8	1	6
x_2	4	5	0
x_3	2	10	3
x_4	5	5	9
x_5	7	0	12
x_6	3	2	15

ჩაატარეთ X სიმრავლის რანჟირება პრიორიტეტების კლების მიხედვით, f_1,f_2 და f_3 კრიტერიუმების მაქსიმალური შეფასებებით.

17. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა შეზღუდვების მეთოდით

1. სამუშაოს მიზანი - მოცემულია მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა არაერთგვაროვანი და სხვადასხვა რაოდენობრივი საჭიროების მქონე კრიტერიუმების შემთხვევაში. გმპ - ს კი ამ კრიტერიუმების შესაბამისი წონების განსაზღვრა თავიდან არ შეუძლია. ასეთი ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ შეზღუდვების მეთოდს ნახევრის მეთოდის - იმავე გლობალური კრიტერიუმის შედგენის წესით, რომელშიც წონები განისაზღვრება ამოცანის ანალიზის პროცესში. აქ აღწერილია ეს მეთოდი და ამოხსნილია კონკრეტული ამოცანა. სასურველია დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \quad \to \max_{x \in X}, \qquad (1)$$

რომელშიც კრიტერიუმები რაოდენობრივი საჭიროების მიხედვით განსხვავდება ერთმანეთისაგან, ანუ თითოეულ მათგანს აქვს საკუთარი რიცხვითი წონა. ასეთი წონის შესახებ კი გმპ -ს წინასწარი ინფორმაცია არ აქვს. ასეთ ინფორმაციას იგი ღებულობს ამოცანის ანალიზის პროცესში.

განვიხილავთ შემთხვევას, როცა (1) ამოცანაში $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ ცვლადების დასაშვები სიმრავლე X განისაზღვრება წრფივი უტოლობებისა და განტოლებებისაგან, ანუ X სიმრავლე გეომეტრიულად წარმოადგენს ამოზნექილ მრავალწახნაგას. ასევე ვიგულისხმებთ, რომ $f_1, f_2, \dots, f_m$ სკალარული კრიტერიუმები წრფივი ფუნქციებია X-ზე. აქედან გამომდინარე, საქმე გვექნება წრფივი დაპროგრამების ამოცანებთან.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები. X სიმრავლეზე სკალარული $f_i (i=1,...,m)$ კრიტერიუმის ოპტიმიზაციით

$$f_i(x) \to \max_{x \in X}.$$

მიღებული გადაწყვეტილება აღვნიშნოთ $(x_1^i,...,x_n^i)$-ით. ამ გადაწყვეტილებისათვის გამოვთვალოთ $f_k (k=1,...,m)$ კრიტერიუმის მნიშვნელობა და იგი აღვნიშნოთ f_k^i-ით. ასეთი მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ ცხრილი (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

	f_1	f_2	.	f_i	.	f_m
f_1	f_1^1	f_2^1	.	f_i^1	.	f_m^1
f_2	f_1^2	f_2^2	.	f_i^2	.	f_m^2
.	.	.	.	.	.	.
f_i	f_1^i	f_2^i	.	f_i^i	.	f_m^i
.	.	.	.	.	.	.
f_m	f_1^m	f_2^m	.	f_i^m	.	f_m^m

ამრიგად, აქ k-ური სვეტისა და i-ური სტრიქონის გადაკვეთაზე f_k^i სიდიდე არის f_k-ს მნიშვნელობა გამოთვლილი $f_i(x) \to \max_{x \in X}$ ამოცანის ოპტიმალური $(x_1^i,...,x_n^i)$ გადაწყვეტილებისათვის. ცხადია, i-ურ სვეტში რიცხვი f_i^i არის მაქსიმალური:

$$f_i^i = \max_l f_i^l.$$

ჩავატაროთ 1 ცხრილის მნიშვნელობების ნორმირება [0,1] -ში. ამისათვის, f_k^i სიდიდე შევცვალოთ შემდეგი სიდიდით:

$$\varphi_k^i = \frac{f_k^i - \min_l f_k^l}{\max_l f_k^l - \min_l f_k^l}, \quad i,k = 1,2,...,m. \qquad (2)$$

მაშასადამე, ცხრილის ნებისმიერი ელემენტის ნორმირებისათვის ამ ელემენტს ვაკლებთ ამ სვეტში მინიმალურს და სხვაობას ვყოფთ ამ სვეტში მაქსიმალური და მინიმალური სიდიდეების სხვაობაზე.

როდესაც ცხრილის ყველა f_k^i ელემენტი დადებითია, მაშინ მათი ნორმირება შეგვიძლია შემდეგნაირად:

$$\varphi_k^i = \frac{f_k^i}{\max_l f_k^l}.$$

ასეთი გარდაქმნებით მივიღებთ კრიტერიუმების უგანზომილებო მნიშვნელობებს, ამასთან, თითოეული კრიტერიუმის მაქსიმალური სიდიდე გახდება 1.

ნორმირებული სიდიდეები მოვათავსოთ ცხრილში (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

	f_1	f_2	.	f_i	.	f_m
f_1	1	φ_2^1	.	φ_i^1	.	φ_m^1
f_2	φ_1^2	1	.	φ_i^2	.	φ_m^2
.	.	.	.	.	.	.
f_i	φ_1^i	φ_2^i	.	1	.	φ_m^i
.	.	.	.	.	.	.
f_m	φ_1^m	φ_2^m	.	φ_i^m	.	1

ამ ცხრილით კრიტერიუმების წონა (ან ინდექსები) გამოითვლება შემდეგი წესით.

მე-2 ცხრილის ყოველ $i\ (i=1,...,m)$ სვეტში გვაქვს მითითებული მაქსიმალური სიდიდე 1. გამოვთვალოთ თითოეული i სვეტის ელემენტების, გარდა ასეთი 1-იანისა, საშუალო არითმეტიკული და იგი იყოს

$\alpha_i^0 \ (i=1,\dots,m)$. ასეთი სიდიდეების საშუალებით f_i კრიტერიუმის წონას ვიპოვით შემდეგი ფორმულით:

$$\omega_i^0 = \frac{1-\alpha_i^0}{\sum_{p=1}^{m}(1-\alpha_p^0)}, i=1,\dots,m. \qquad (3)$$

$\omega_i^0 (i=1,\dots,m)$ წონას ზოგჯერ f_i კრიტერიუმის ტექნიკურ წონასაც უწოდებენ. მაშასადამე, ჩვენს მეთოდში კრიტერიუმის რიცხვითი წონა გამოითვლება ამოცანის ანალიზის პირობებში.

მიღებული $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_m^0)$ წონითი ვექტორისაგან შევადგინოთ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ ვექტორ-ფუნქციის წრფივი ნახვევი ანუ გლობალური კრიტერიუმი და ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა

$$F_{\omega^0}(x) = \omega_1^0 f_1(x) + \dots + \omega_m^0 f_m(x) \to \max_{x \in X}. \qquad (4)$$

მისი ამონახსნი, ანუ ოპტიმალური გადაწყვეტილება აღვნიშნოთ $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$-ით და მისთვის გამოვთვალოთ მოცემული კრიტერიუმების მნიშვნელობები:

$$f_1(x^0), f_2(x^0), \dots, f_m(x^0).$$

მათგან შევადგინოთ ვექტორი

$$Y^0 = (f_1(x^0), f_2(x^0), \dots, f_m(x^0)).$$

1-ლი ცხრილიდან შევადგინოთ ასევე მიუღწეველი (უტოპიური) მაქსიმალური მნიშვნელობებისაგან ვექტორი

$$Z^0 = (\max_X f_1(x), \dots, f_m(x)) = (f_1^1, \dots, f_m^m).$$

მიღებული ვექტორები გავაცნოთ გმპ-ს მათი შედარებისათვის. მისგან უნდა მივიღოთ პასუხი კითხვაზე: აქვს თუ არა Y^0 ვექტორის ყველა კომპონენტს დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობა?

თუ მისი პასუხი იქნება დადებითი, მაშინ (4) ამოცანის ოპტიმალური გადაწყვეტილება $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ უნ-

და იქნეს მიღებული (1) ამოცანის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებად.

თუ გმპ იტყვის, რომ Y^0 ვექტორის ზოგიერთ კომპონენტს არ აქვს დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობა, მაშინ მან ასეთი არასასურველი მნიშვნელობების შესაბამისი კრიტერიუმებიდან მხოლოდ ერთი უნდა გამოყოს ყველაზე ცუდი მნიშვნელობით. ვთქვათ, მან ასეთ კრიტერიუმად აირჩია f_i. ახლა მან უნდა მიუთითოს ამ კრიტერიუმის ქვედა სასაზღვრო რიცხვითი მნიშვნელობა J_i:

$$f_i \geq J_i.$$

ამ შეზღუდვით, დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე $(x_1,...,x_n) \in X$ შევიწროვდება და გადაიქცევა X^0 სიმრავლედ, ხოლო f_i კრიტერიუმი გამოირიცხება. ასე მივიღებთ $m-1$ კრიტერიუმიან ამოცანას X^0-ზე. საბოლოო გადაწყვეტილების მიღების პროცესი გაგრძელდება განხილულის ანალოგიურად და იგი დასრულდება სასრული ბიჯის შემდეგ.

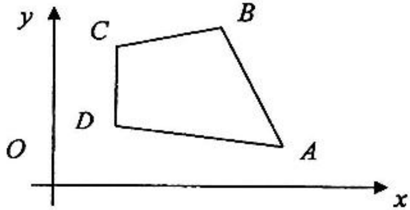
ამოცანა. $(x,y) \in X$ სიმრავლე მოცემულია უტოლობათა სისტემით

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \leq 0 \\ x - 3y + 11 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 2x + 5y - 17 \geq 0. \end{cases} \qquad (5)$$

ვიპოვოთ ისეთი წერტილი $(x^0, y^0) \in X$, რომლისთვისაც

$$f(x,y) = (2x - 7y + 35, -2x + 19y + 25, -14x - 3y + 95) \to \max_X$$

ამოხსნა. X სიმრავლე წარმოადგენს $ABCD$ ოთხკუთხედს, წვეროებით $A(6,1)$, $B(4,5)$, $C(1,4)$, $D(1,3)$ (ნახ. 1).



ნახ. 1.9.1.

$ABCD$ ოთხკუთხედის ყოველ წვეროში გამოვთვალოთ

$$f_1 = 2x - 7y + 35,\ f_2 = -2x + 19y + 25,\ f_3 = -14x - 3y + 95$$

კრიტერიუმების მნიშვნელობები და ისინი მოვათავსოთ შემდეგ ცხრილში

	f_1	f_2	f_3
A	40	32	8
B	8	112	24
C	9	99	69
D	16	80	72

.

ამით, მოცემული კრიტერიუმებით X სიმრავლეზე ამოვხსენით წრფივი დაპროგრამების სამივე ამოცანა:

f_1 მაქსიმუმს აღწევს A წერტილში და $f_1(A(6,1)) = 40$;

f_2 მაქსიმუმს აღწევს B წერტილში და $f_2(B(4,5)) = 112$;

f_3 მაქსიმუმს აღწევს D წერტილში და $f_3(D(1,3)) = 72$.

შევადგინოთ ზემოთ განსაზღვრული 1-ელი ცხრილი, მივიღებთ მე-3 ცხრილს.

ცხრილი 3

	f_1	f_2	f_3
f_1	40	32	8
f_2	8	112	24
f_3	16	80	72

.

ჩავატაროთ ამ ცხრილის ელემენტების ნორმირება (2) ფორმულით. მივიღებთ ცხრილს (ცხრილი 4).

ცხრილი 4

	f_1	f_2	f_3
f_1	1	0	0
f_2	0	1	$1/4$
f_3	$1/4$	$3/5$	1

მე-4 ცხრილის სვეტებით გამოვთვალოთ

$$\alpha_1^0=\frac{0+1/4}{2}=\frac{1}{8},\ \ \alpha_2^0=\frac{0+3/5}{2}=\frac{3}{10},\ \ \alpha_3^0=\frac{0+1/4}{2}=\frac{1}{8}.$$

ამიტომ,

$$1-\alpha_1^0=\frac{7}{8},\ \ 1-\alpha_2^0=\frac{7}{10},\ \ 1-\alpha_3^0=\frac{7}{8},$$

$$\sum_{p=1}^{3}(1-\alpha_p^0)=\frac{7}{8}+\frac{7}{10}+\frac{7}{8}=\frac{49}{20}.$$

ამ მონაცემებით და (3) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვლით კრიტერიუმების წონას:

$$\omega_1^0=\frac{7}{8}:\frac{49}{20}=\frac{5}{14},\ \ \omega_2^0=\frac{7}{10}:\frac{49}{20}=\frac{4}{14},\ \ \omega_3^0=\frac{7}{8}:\frac{49}{20}=\frac{5}{14}.$$

შევადგინოთ გლობალური კრიტერიუმი (4):

$$F_{\omega_0}(x,y)=\frac{5}{14}(2x-7y+35)+\frac{4}{14}(-2x+19y+25)+$$

$$\frac{5}{14}(-14x-3y+95)=\frac{1}{7}(-34x+13y+375)$$

და ამოვხსნათ ამოცანა $F_{\omega^0}(x,y)\to\max\limits_X$, სადაც X არის $ABCD$ ოთხკუთხედი. ეს მაქსიმუმი მიიღწევა $C(1,4)$ წერტილში და ამიტომ $(x^0,y^0)=(1,4)$.

შევადგინოთ Y^0 ვექტორი. აქ,

$$f_1(1,4) = 2\cdot 1 - 7\cdot 4 + 35 = 9,\quad f_2(1,4) = 99,\quad f_3(1,4) = 69$$

და

$$Y^0 = (9;99;69).$$

რაც შეეხება Z^0 ვექტორს, მისი კოორდინატები მოცემულია მე-3 ცხრილში

$$Z^0 = (40;112;72).$$

თუ გმპ ჩათვლის, რომ Y^0-ს აქვს მისაღები მნიშვნელობები, მაშინ გადაწყვეტილება $(x^0, y^0) = (1,4)$ მან უნდა მიიღოს (1) ამოცანის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებად. შესაბამისი ვექტორული შეფასებაა

$$f_1^0 = 9, f_2^0 = 99, f_3^0 = 69.$$

თუ გმპ იტყვის, რომ მაგალითად მისთვის მიუღებელია f_1 კრიტერიუმის მნიშვნელობა 9, მაშინ მან უნდა მიუთითოს ამ კრიტერიუმის მნიშვნელობის ქვედა ზღვარი. დავუშვათ, გმპ f_1-ის ქვედა დასაშვებ მნიშვნელობად თვლის 30-ს, ანუ $f_1 \geq 30$. ეს მოთხოვნა (5) პირობებთან ერთად,

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \leq 0 \\ x - 3y + 11 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 2x + 5y - 17 \geq 0 \\ 2x - 7y + 35 \geq 30 \end{cases}$$

განსაზღვრავს დასაშვებ მნიშვნელობათა ახალ X^0 სიმრავლეს და ამოცანის გადაწყვეტა ზემოთ აღწერილი სქემით გაგრძელდება ორი f_2 და f_3 კრიტერიუმისათვის

$$f = (f_2, f_3) \to \max_{X^0}.$$

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function fopt=glob(f0,fb,A,b)
% მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა
% შეზღუდვების მეთოდით
% A – შეზღუდვების კოეფიციენტების მატრიცა,
% b – შეზღუდვების თავისუფალი წევრების ვექტორი
% f0 – მიზნის ფუნქციათა კოეფიციენტების მატრიცა,
% fb – მიზნის ფუნქციათა თავისუფალი წევრების
% ვექტორი

m=length(f0)
for i=1:m
   f=f0(:,i);
   x=linprog(f,A,b);
   for k=1:m
      ff(i,k)=-(f0(:,k)'*x+fb(k));
   end
end
ff
% ნორმირება
ffmin=min(ff)
ffmax=max(ff)
for i=1:m
   for j=1:m
      g(i,j)=(ff(i,j)-ffmin(j))/(ffmax(j)-ffmin(j));
   end
end, g
% კრიტერიუმების წონა
for j=1:m
   a(j)=(sum(g(:,j))-g(j,j))/(m-1);
end, a
for k=1:m
omega(k)=(1-a(k))/(sum(1-a));
end
omega
% წრფივი ნახვევი - გლობალური კრიტერიუმი
disp('globaluri kriteriumi')
f1=[f0;fb]
```

```
[F,Fn]=naxvevi(f1,omega);
   f=F(1:m-1);
   x=linprog(f,A,b)
   for k=1:m
      ff1=-(f0(:,k)'*x+fb(k));
      fopt(k)=ff1;
   end
function [F,Fn]=naxvevi(f,a)
%F-კრიტერიუმების აწონილი ჯამი, Fn-კრიტერიუმების
%ნორმირებული მნიშვნელობების აწონილი ჯამი,
%a(i)-i-ური კრიტერიუმის მნიშვნელოვნობის წონა,
%f(:,i)-i-ური კრიტერიუმის მნიშვნელობები,
F=aconili(f,a);
[Fmax,I1]=max(F);
n=size(f,1); m=size(f,2);
 for i=1:m
    ff(:,i)=f(:,i)/max(f(:,i));
 end
 Fn=aconili(ff,a);
 [Fnmax,I2]=max(Fn);
function F=aconili(f,a)
F=0;m=size(f,2);
 for j=1:m
    F=F+a(j)*f(:,j);
 end
```

ბრძანებათა ფანჯარაში შესატანი არგუმენტები:

A=[2 1;-1 3;-1 0;-2 -5];b=[13;11;-1;-17];

f0=-[2 -7 ;-2 19 ;-14 -3]';fb=-[35 25 95];

და პროგრამის გაშვების ბრძანება: **>> fopt=glob(f0,fb,A,b)**

პასუხი:

```
ff =
  40.0000   32.0000    8.0000
   8.0000  112.0000   24.0000
  16.0000   80.0000   72.0000
ffmin =   8.0000   32.0000    8.0000
ffmax =  40.0000  112.0000   72.0000
g =   1.0000        0         0
           0   1.0000    0.2500
```

```
    0.2500   0.6000   1.0000
a =   0.1250   0.3000   0.1250
omega =   0.3571   0.2857   0.3571

globaluri kriteriumi
f =
   -2    2   14
    7  -19    3
  -35  -25  -95
a =   0.3571   0.2857   0.3571
F =
   4.8571
  -1.8571
 -53.5714
Fn =
   0.5408
  -2.2806
  -7.7806
Optimization terminated.
x =
   1.0000
   4.0000
fopt =
   9.0000   99.0000   69.0000
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. X სიმრავლე წარმოადგენს $ABCD$ ოთხკუთხედს წვეროებით $A(3,2)$, $B(2,8)$, $C(5, 10)$, $D(8,4)$. ამოხსენით ამოცანა:

$$f(x, y) = (3x + 4y - 5, -x + 12y + 2, 6x - 5y + 9) \rightarrow \max_{X}.$$

18. კენჭისყრის მოდელები. პარადოქსები არჩევნებში

1. სამუშაოს მიზანი - განისაზღვროს ინდივიდუალური გადაწყვეტილებების აგრეგირების (გაერთიანების) ისეთი სამართლიანი მეთოდი, რომელიც ოპტიმალურ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას მოგვცემს. ასეთი სახის ამოცანას ვუწოდოთ კოლექტიური გადაწყვეტილების (ჯგუფური გადაწყვეტილების ან კოლექტიური არჩევის) მიღების ამოცანა. მისი ნათელი მაგალითია არჩევნები, იგივე კენჭისყრა. შევისწავლით კენჭისყრის რამდენიმე ძირითად მოდელს და გამოვავლენთ მათ განსაკუთრებულ თავისებურებებს.

2. ძირითადი განსაზღვრებები

ვთქვათ, $N=\{1,2,\ldots,n\}$ სიმრავლე არის კოლექტივი (საზოგადოება, ჯგუფი, ინდივიდთა, ამომრჩეველთა და მოთამაშეთა სიმრავლე), ხოლო X ალტერნატივების (ვარიანტების, ობიექტების, კანდიდატების) სიმრავლე, საიდანაც $i \in N$ აკეთებს არჩევანს. ვთქვათ, P_i (ან $\succ_i$) აღნიშნავს $i \in N$ ინდივიდის უპირატესობის ბინარულ მიმართებას X-ზე. მაშასადამე, P_i წესია, რომლის საფუძველზეც i ინდივიდი განსაზღვრავს ორი ნებისმიერი $x \in X$ და $y \in X$ ალტერნატივიდან რომელია მისთვის უპირატესი. ეს წესი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ ინდივიდმა უნდა შეძლოს დადგენა ნებისმიერი ორი x და y ალტერნატივიდან რომელია მისთვის უპირატესი - xPy ($x \succ y$) თუ yPx ($y \succ x$). ასეთი წესის მოცემა უკვე ნიშნავს X-ის დალაგებას (რანჟირებას) i ინდივიდის მიერ უკეთესობიდან უარესობისაკენ. ასეთ პირობებში კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების (ან კოლექტიური არჩევის) მათემატიკური მოდელი მოიცემა შემდეგი სისტემით:

$$\Sigma = < N, X, \{P_i\}_{i\in N}, P(N) > \text{ ან } \Sigma = < N, X, \{\succ_i\}_{i\in N}, P(N) >,$$

სადაც P(N) კოლექტიური გადაწყვეტილების ანუ კოლექტიური უპირატესობის წესია (ფუნქცია) X-ზე.

რეალურ სიტუაციებში საბოლოო კოლექტიური გადაწყვეტილება დამოკიდებულია ისეთ უამრავ, ძნელად ასახსნელ ფაქტორზე, რომელთა გათვალისწინება შესაბამის მათემატიკურ მოდელში შეუძლებელია. ამის გამო, კოლექტიური გადაწყვეტილების შესაბამის მათემატიკურ $\Sigma = < N, X, \{P_i\}_{i\in N}, P(N) >$ მოდელში ვითვალისწინებთ, თუ რა ძირითადი თვისებები უნდა ჰქონდეს (თუ არ ჰქონდეს) ამ პროცესის საბოლოო შედეგს: რომელი გადაწყვეტილება სამართლიანი და რომელი არა, რომელია ჭკვიანური და რომელი არა და ა.შ. ასეთ მიდგომას, უწოდებენ **ნორმატიულს.**

2.1. კოლექტივის წევრთა უპირატესობების პროფილი. კენჭისყრის ეროუს აქსიომები და პარადოქსი

როგორც აღვნიშნეთ, კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში ძირითადია შემდეგი საკითხი: როგორი ინდა იყოს ინდივიდუალური უპირატესობების კოლექტიურ უპირატესობაზე გადასვლის და შეთანხმების წესი? სწორედ ასეთი სახით დაისვა ამოცანა ალტერნატივის არჩევის უმრავლესობის წესის შემთხვევაში, უფრო კონკრეტულად კენჭისყრის ამოცანაში, რომელმაც დასაბამი მისცა კოლექტიური გადაწყვეტილების თანამედროვე თეორიის ჩამოყალიბებას. უმრავლესობის წესის მათემატიკური ანალიზის განხილვა დაიწყო მე-18 საუკუნის ოთხმოციანი წლების დასაწყისში ფრანგი მკვლევარების ბორდას, კონდორსეს და ლაპლასის მიერ. ყოველივე ამის საფუძველს წარმოადგენდა მათთვის ცნობილი ფაქტი– კოლექტიური არჩევის უმრავლესობის წესის წინააღმდეგობა ინდივიდუალურ გადაწყვეტილებებთან. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 1. სამი წევრისაგან შემდგარმა N={1,2,3} კოლექტივმა X={a,b,c} კანდიდატებიდან ერთი უნდა აირ-

ჩიოს უმრავლესობის წესით, ანუ ისეთი, რომელიც კოლექტივის ორი წევრისათვის მაინც იქნება საუკეთესო.

დავუშვათ, პირველი ინდივიდისათვის a უკეთესია b-ზე, ხოლო b უკეთესია c-ზე. მაშასადამე, იგი კანდიდატების რანჟირებას ახდენს $P_1=[a,b,c]$ წესით. მეორე განიხილავს $P_2=[b,c,a]$ წესს, ხოლო მესამე - $P_3=[c,a,b]$ წესს. ჩავთვალოთ, რომ ყველაზე უპირატესი კანდიდატი ასეთი დალაგებისას დგას პირველ ადგილზე და მისი რანგია 1, მასზე ნაკლებ უპირატესი შემდეგი კანდიდატის რანგი - 2, ხოლო მესამე ადგილზე მდგომი კანდიდატის რანგი - 3. N-ის წევრების მიერ კანდიდატების ასეთ რანჟირებას შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$\Pi_1=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	b	c	a
P_3	c	a	b

ასეთი სახის ჩანაწერს შემდეგში, ინდივიდუალურ უპირატესობათა პროფილს ვუწოდებთ.

Π_1 პროფილის თანახმად ორი ინდივიდისათვის a უკეთესია b-ზე, b უკეთესია c-ზე, ხოლო c უკეთესია a-ზე. მაშასადამე, N კოლექტივისათვის a კანდიდატი უნდა იყოს ერთდროულად კარგიც და ცუდიც, ვიდრე ორი სხვა კანდიდატი. ეს კი ნიშნავს, რომ N კოლექტივს არ შეუძლია Π_1 პროფილის შემთხვევაში მიიღოს საუკეთესო გადაწყვეტილება ანუ აირჩიოს უმრავლესობისათვის მისაღები კანდიდატი.

სწორედ ასეთი ტიპის წინააღმდეგობამ მიიღო სახელწოდება "ეროუს პარადოქსი", დაკავშირებული ნობელის პრემიის ლაურეატის, მათემატიკოსისა და ეკონომისტის კ. ეროუს სახელთან. მან 1951 წელს ჩამოაყალიბა ხუთი აქსიომა ინდივიდთა დემოკრატიული ქცევის შემთხვევისათვის და აჩვენა, რომ ასეთი ბუნებრივი მოთხოვნები შეუთავსებადია კენჭისყრის ისეთ პროცედურასთან, რომელიც ინდივიდუალურ უპირატესობებს გააერთიანებს კოლექტიურ უპირატესობასთან.

წინა მაგალითში განსაზღვრული კენჭისყრის უმრავლესობის წესი კოლექტიური შეთანხმების ერთ-ერთი პრინციპია. ჩვენი მიზანია შეთანხმების ისეთი კოლექტიური უპირატესობის სხვადასხვა P(N) პრინციპის ფორმულირება, რომელთა საშუალებით დავალაგებთ კანდიდატების X სიმრაველეს.

ჩამოვაყალიბოთ ეროუს აქსიომები. ამ მოთხოვნების თანახმად, P(N) წესმა უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი აქსიომები.

ე1. უნივერსალობა. კოლექტიური არჩევის წესი P(N) განსაზღვრულია ინდივიდუალურ უპირატესობათა ყოველი პროფილისათვის. ვთვლით, რომ კანდიდატების რიცხვი X სიმრავლეში არაა სამზე ნაკლები, ხოლო ინდივიდთა რიცხვი N-ში არაა ორზე ნაკლები;

ე2. მონოტონურობა. თუ მოცემული პროფილისათვის P(N) წესის თანახმად x ალტერნატივა უპირატესია y-ზე ანუ xP(N)y, მაშინ ეს მიმართება დარჩება იგივე, თუ პროფილში x-ის შემცველი ინდივიდუალური უპირატესობები წყვილობით შედარებაში შეიცვლება x-ის სასარგებლოდ. დანარჩენი შედარებები არ იცვლება;

ე3. გვერდითი ალტერნატივებისაგან დამოუკიდებლობა. თუ X^1 არის X სიმრავლის ქვესიმრავლე ($X^1 \subset X$) და ინდივიდუალური უპირატესობების ყველა წყვილობითი შედარება X და X^1-ის შესაბამის ალტერნატივებს შორის პროფილებში უცვლელია, მაშინ კოლექტიური უპირატესობა ორივე პროფილში ერთი და იგივეა;

ე4. ამომრჩეველთა სუვერენულობა (იგივე ერთხმივობა). ალტერნატივების ყოველი (x,y) წყვილისათვის მოცემულ პროფილში არსებობს ისეთი ინდივიდუალურ უპირატესობათა ერთობლიობა $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, რომ კოლექტიური უპირატესობის წესით xP(N)y;

ე5. დიქტატორის არარსებობა. N-ში არ უნდა არსებობდეს ისეთი ინდივიდი *i*, რომ, როცა ნებისმიერი (x,y) წყვილიდან ის უპირატესობას ანიჭებს x კანდიდატს და არა y-ს, ანუ xP_iy, მაშინ კოლექტივიც უპირატესობას ანიჭებს x-ს, ე.ი. xP(N)y.

გამოყენების თვალსაზრისით, ზოგჯერ სადავოა მესამე აქსიომა. იგი აღნიშნავს, რომ ნებისმიერი (x,y) წყვილისათვის კოლექტიური გადაწყვეტილების წესი P(N) დამოკიდებული უნდა იყოს მხოლოდ ამ კანდიდატების შესახებ ინდივიდუალურ P_i უპირატესობებზე. პრაქტიკაში კი გვხვდება ამ აქსიომის პირობების ანალოგიური სიტუაციები და მათი არგათვალისწინება ართულებს არჩევის პროცესს; გათვალისწინება კი ამარტივებს არჩევის საბოლოო პროცესს. მაგალითად, ხომ შეიძლება კენჭისყრის შემთხვევაში კანდიდატთა რიცხვი სხვადასხვა მიზეზის გამო შემცირდეს? თუ კენჭისყრის წესი არ დააკმაყოფილებს მესამე აქსიომას, მაშინ საჭიროა დაინიშნოს ახალი არჩევნები. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 2. არჩევნებში მონაწილეობს სამი ამომრჩეველი N={1,2,3} და ოთხი კანდიდატი X={*a,b,c,d*}. P(N) წესი ასეთია: თითოეული ამომრჩეველი უპირატესობებით ალაგებს კანდიდატებს; ამ რიგში ყველაზე ცუდ კანდიდატს მიენიჭება 1 ქულა (ანუ მე-4 რანგს ენიჭება 1 ქულა), მის წინას - 2 ქულა, მის წინას - 3 ქულა, ხოლო ყველაზე უპირატესს - 4 ქულა. საბოლოოდ აირჩევა ის კანდიდატი, რომელიც დააგროვებს ყველაზე მეტ ქულათა ჯამს.

დავუშვათ, 1 და 2 ამომრჩეველი კანდიდატებს ალაგებს ერთნაირად P_{12}=[*a,b,c,d*] რანჟირებით, ხოლო მესამე ამომრჩევლისათვის P_3=[*c,d,a,b*]. ჩავწეროთ ინდივიდუალურ უპირატესობათა პროფილი ქულების მინიჭების შემთხვევაში, შემდეგი სახით:

Π_2=

რანგი	1	2	3	4
P_{12}	*a*	*b*	*c*	*d*
P_3	*c*	*d*	*a*	*b*
ქ	4	3	2	1

აქ *a* კანდიდატი აგროვებს 2.4+2=10 ქულას, *b* - 2.3+1=7 ქულას, *c* - 2.3+4=8 ქულას, ხოლო *d* - 2.1+3=5 ქულას. ამიტომ, მოცემული არჩევნების მოდელით გაიმარჯვებს *a* კანდიდატი.

ახლა X-დან გამოვრიცხოთ *b* კანდიდატი და განვიხილოთ კანდიდატთა ქვესიმრავლე $X^1=\{a,c,d\}$, რომელთა მიმართ ამომრჩეველთა უპირატესობები Π_2 პროფილში შენარჩუნებულია:

$\Pi=$

რანგი	1	2	3
P_{12}	*a*	*c*	*d*
P_3	*c*	*d*	*a*
ქ	3	2	1

აქ *a* აგროვებს 2.3+1=7 ქულას, *c* - 2.2+3=7 ქულას, ხოლო *d* - 2.1+2=4 ქულას. მესამე აქსიომის თანახმად, X^1 სიმრავლეზე კენჭისყრის მოცემულ წესს უნდა აერჩია იგივე *a* კანდიდატი, მით უმეტეს, რომ გამორიცხული *b* კანდიდატი ყველა ამომრჩევლის მიერ უფრო ნაკლებად ფასდება, ვიდრე *a*. ეს კი ასე არ მოხდა - მოცემული წესი *a* და *c* კანდიდატებს ერთნაირი ქულებით აფასებს. მაშასადამე, ე3 აქსიომა კენჭისყრის აღნიშნული წესის შემთხვევაში, Π_2 პროფილისათვის არ სრულდება და საჭიროა ახალი არჩევნების დანიშვნა.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ეროუს თეორემა, რომელიც ცნობილია ეროუს პარადოქსის სახელწოდებით.

თეორემა (ეროუს). თუ ინდივიდთა რიცხვი არაა ორზე ნაკლები, ხოლო ალტერნატივების რიცხვი არაა სამზე ნაკლები, მაშინ ე1-ე5 აქსიომები არათავსებადია; რაც ნიშნავს, რომ არ არსებობს კოლექტიური არჩევის P(N) წესი, რომელიც დააკმაყოფილებდა ხუთივე აქსიომას.

სწორედ ამ თეორემამ მისცა დასაბამი კოლექტიური გადაწყვეტილების მათემატიკური მოდელირების აქსიომატიკური თეორიის შექმნას, სადაც ალტერნატიული აქსიომები განიხილება იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ აღნიშნული წინააღმდეგობა. ქვემოთ განვიხილავთ კენჭისყრის რამდენიმე ცნობილ მოდელს, რომელთა გამ-

ოყენება ხშირ შემთხვევაში გვაძლევს სხვადასხვა სახის გაურკვევლობებს. მივუთითებთ კიდევაც ასეთ ფაქტებს.

2.2. კენჭისყრის წესები

2.2.1. შედარებითი უმრავლესობის წესი

კოლექტიური გადაწყვეტილების შედარებითი უმრავლესობის წესი P(N) ასეთია: თითოეული ამომრჩეველი ახდენს კანდიდატების რანჟირებას და ირჩევს პირველ ადგილზე მდგომ ერთ კანდიდატს (ანუ ირჩევს 1 რანგის კანდიდატს), სხვას გადაშლის. კოლექტივი აირჩევს იმ კანდიდატს, რომელიც მიიღებს ხმათა ყველაზე მეტ რაოდენობას (ხმათა ტოლობის შემთხვევაში, სხვადასხვა ვარიანტია შესაძლებელი).

მაგალითი 3. კენჭისყრაში მონაწილეობს 21 ამომრჩეველი და ოთხი კანდიდატი X={*a,b,c,d*}. ვიგულისხმოთ, რომ ამომრჩეველთა უპირატესობების პროფილია

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

ამ პროფილ'ში, მაგალითად P(3) გვეუბნება, რომ სამი ამომრჩევლისათვის *a* უკეთესია *b*-ზე, *b* უკეთესია *c* -ზე და *c* უკეთესია *d*-ზე. სამივე ამომრჩეველი ბიულეტენში ჩაინიშნავს *a* კანდიდატს, სხვებს კი გადაშლის. ამავე დროს, პროფილში უპირატესობათა მიმართებები ტრანზიტულია ყველა შემთხვევისათვის.

შედარებითი უმრავლესობის წესით აქ: 3+5=8 ამომრჩეველი ბიულეტენში ჩაიწერს *a* კანდიდატს და სხვებს გადაშლის; 7 ამომრჩეველი ხმას აძლევს *b* კანდიდატს, 6 კი - *c* კანდიდატს. მაშასადამე, 8 ხმით იმარჯვებს *a* კანდიდატი.

კენჭისყრის ამ წესმა დიდი კრიტიკა განიცადა კონდორსესა და ბორდას მიერ. მათ შენიშნეს, რომ შედა-

რებითი უმრავლესობის წესით შეიძლება არჩეულ იქნეს ყველაზე ცუდი კანდიდატი ანუ ისეთი, რომელიც უმრავლესობის წესით წყვილობით შედარებაში აგებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატთან. ამრიგად, ეს წესი შეიძლება ეწინააღმდეგებოდეს უმრავლესობის პრინციპს, რომელიც გადაწყვეტილებათა მიღების დემოკრატიული პროცესის გამოსავალ პუნქტს წარმოადგენს. განვიხილოთ კონდორსეს და ბორდას მოსაზრებები Π_3 პროფილთან დაკავშირებით.

კონდორსეს აზრით, *a* კანდიდატი ყველაზე ცუდია. მართლაც, Π_3 პროფილის თანახმად, 7+6=13 ამომრჩევლისათვის, რომელიც 21 ამომრჩევლიდან ნახევარზე მეტია და მაშასადამე, იგი უმრავლესობას წარმოადგენს, *a* კანდიდატი ყველაზე ცუდი ვარიანტია უმრაველესობისათვის. ეს უმრავლესობა უპირატესობას ანიჭებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატს, ვიდრე *a*-ს. უფრო მეტიც, 14 - კაციანი უმრავლესობა თვლის, რომ *c* უკეთესია *d*-ზე და ასევე, უმრავლესობა (11 კაცით) თვლის, რომ *c* უკეთესია, ვიდრე *b*. ამრიგად, კონდორსე ასკვნის, რომ თუ გვინდა დავეთანხმოთ უმრავლესობის აზრს, მაშინ უნდა ავირჩიოთ *c* კანდიდატი.

იმავე პროფილისათვის ბორდა ეთანხმება კონდორსეს იმაში, რომ *a* ცუდი კანდიდატია არჩევისათვის, მაგრამ გვთავაზობს სხვა გამარჯვებულ კანდიდატს, კერძოდ *b*-ს. მისი აზრით, მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული ყველა კანდიდატის რანგი ამომრჩეველთა უპირატესობებში. თუ კანდიდატი უპირატესობაში პირველ ადგილზეა, მაშინ ეს უნდა მიეხმაროს მას მეტად, ვიდრე იმ შემთხვევაში, თუ ის იქნება მეორე ადგილზე, ან უფრო მეტად, თუ ის იქნება მესამე ადგილზე და ა.შ.

ჩვენს პროფილში *b* და *c* შევადაროთ ამ თვალსაზრისით. *b*-ს აქვს 1 რანგი 7 ამომრჩევლისათვის, ხოლო *c*-ს აქვს 1 რანგი 6 ამომრჩევლისათვის; *b* -ს აქვს 1 ან 2 რანგი 7+3+6=16 ამომრჩევლისათვის, როცა *c*-ს აქვს იგივე რანგი 6+5=11 ამომრჩევლისათვის; *b*-ს აქვს 1, 2 ან 3 რანგი 7+3+6+5=21 ყველა ამომრჩევლისათვის, რაც იმავე

რანგს ემთხვევა *c*-ს შემთხვევაში. მაშასადამე, ბორდას აზრით *b*-ს უნდა მივანიჭოთ უპირატესობა *c*-თან შედარებით.

ასეთი მოსაზრება აქვს განხორციელებული ბორდას კენჭისყრის წესში, რომლითაც იგი შეეცადა შედარებითი უმრავლესობის წესის დიდი ნაკლის გამოსწორებას. ასევე აუარა გვერდი კონდორსემ შედარებითი უმრაველესობის წესს კენჭისყრის პროფილისათვის უმრავლესობის წესზე დაყრდნობით. კონდორსეს და ბორდას წესებს ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ.

2.2.2. უმრავლესობის წესი

უმრავლესობის წესი მისი სხვადასხვა მოდიფიკაციით ყველაზე გავრცელებული კოლექტიური არჩევის წესია. მათგან პრაქტიკაში უფრო გამოიყენება უბრავლო (ან მარტივი) უმრავლესობის და ორი მესამედით უმრავლესობის წესები. აქედან პირველ წესს ზოგჯერ უმრავლესობის წესით მოვიხსენიებთ. უმრავლესობის წესი მარტივია და ეფექტური, თუმცა მას ზოგჯერ მივყავართ კოლექტიური გადაწყვეტილების არატრანზიტულ უპირატესობასთან. ასეთია მაგალითად Π_1 პროფილით მოცემული კენჭისყრის შემთხვევა. ამჟამად ცნობილია ისეთი ეფექტური პირობები, რომელთა დროსაც კოლექტიური გადაწყვეტილება ტრანზიტულია. აქვე შევნიშნავთ, რომ როცა კანდიდატების რიცხვი ორია, მაშინ ტრანზიტულობის პრობლემა უმრავლესობის წესისათვის საერთოდ არ დგას პრაქტიკული გამოყენების არც ერთ სფეროში.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა. ნებისმიერი $x,y\in X$ კანდიდატებისათვის $n(x,y)$-ით ავღნიშნოთ იმ ამომრჩეველთა რიცხვი, რომლებისთვისაც x უპირატესია y-ზე. მაშინ კოლექტიური გადაწყვეტილების უმრავლესობის წესი $P(N)$ ასეთია.

კოლექტიური გადაწყვეტილების $P(N)$ წესს ეწოდება უმრავლესობის წესი, თუ ყველა x და y კანდიდატისათვის $xP(N)y \Leftrightarrow n(x,y)>n/2$.

უმრავლესობის წესის თანახმად, უპირატესობათა პროფილისათვის კოლექტივი უპირატესობას ანიჭებს x კა-

ნდიდატს y-თან შედარებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამომრჩეველთა უმრავლესობა უპირატესობას ანიჭებს x-ს და არა y-ს. P(N) წესს აგრეთვე, მაჟორიტარულ ტურნირსაც უწოდებენ.

ქვემოთ გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს: 1) $a \underset{(ij)}{\succ} b$ ნიშნავს, რომ i და j ამომრჩევლებისათვის a უპირატესია b-ზე; 2) $a \overset{k}{\succ} b$ ნიშნავს, რომ k რაოდენობის ამომრჩევლისათვის a უპირატესია b-ზე; 3) $a \succ b$ ნიშნავს, რომ a უპირატესია b-ზე.

მაგალითი 4. ვთქვათ, სამი ამომრჩევლისა და სამი კანდიდატისათვის უპირატესობის პროფილს აქვს სახე

Π=

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	c	b	a
P_3	b	a	c

აქ $b \underset{(23)}{\succ} a$, $b \underset{(13)}{\succ} c$ და $a \underset{(13)}{\succ} c$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში უმრავლესობის გადაწყვეტილება ემთხვევა მესამე ამომრჩევლის ინტერესებს - $P(N)=P_3=[b,a,c]$ და იმარჯვებს b კანდიდატი.

აღვნიშნოთ, რომ უმრავლესობის წესის გამოყენების პროცედურა მდგომარეობს წყვილი ობიექტების მიმდევრობით შედარებაში, როცა ნაკლებ უპირატეს ობიექტს ვცვლით ახლით.

უმრაელესობის წესი სამართლიანიცაა და ადვილად გამოსაყენებელი, მაგრამ მას ახასიათებს არსებითი ნაკლი: კოლექტიური უპირატესობა შეიძლება აღმოჩნდეს არატრანზიტული იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ინდივიდუალური უპირატესობები წრფივია, რეფლექსური და ტრანზიტული.

მიუხედავად ასეთი ნაკლისა, ეს წესი სხვადასხვა მკვლევართა ყურადღებას იქცევდა. ამ წესის ძირითადი

განსაკუთრებულობაა ეროუს მესამე აქსიომის შესრულება. მაშასადამე, კოლექტივის მიერ წყვილი კანდიდატებიდან ერთის არჩევა დამოკიდებულია მხოლოდ ამ წყვილის უპირატესობების პროფილზე. კ. მეი მიუთითებს, რომ უმრავლესობის წესი აკმაყოფილებს შემდეგ ოთხ აქსიომას:

მ1. განსაზღვრულობა. ინდივიდუალურ უპირატესობათა ნებისმიერი პროფილისათვის წესი მიუთითებს ერთადერთ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას ალტერნატივების ყოველი წყვილისაათვის;

მ2. ანონიმურობა. კოლექტიური გადაწყვეტილება არ არის დამოკიდებული ამომრჩეველთა სახელებზე, ე.ი. თუ ორი ინდივიდი გაცვლის თავიანთ ხმებს, იგი არ შეიცვლება;

მ3. ნეიტრალობა. კოლექტიური გადაწყვეტილება არ არის დამოკიდებული კანდიდატების სახელებზე, ე.ი. თუ ადგილებს შევუცვლით x და y კანდიდატებს ყოველი ამომრჩევლის უპირატესობებში, მაშინ კოლექტიური გადაწყვეტილების შედეგიც შესაბამისად შეიცვლება: თუ ადრე აირჩეოდა x, ახლა აირჩევა y და პირიქით. თუ ადრე აირჩეოდა სხვა რომელიმე კანდიდატი, განსხვავებული x და y-საგან, ახლაც იგივე აირჩევა;

მ4. დადებითი რეაქცია. თუ რაიმე პროფილისათვის $xP(N)y$, ხოლო ახალი პროფილისათვის, რომელიც წინასაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ აქ რომელიმე ამომრჩეველი ცვლის თავის უპირატესობას x და y-ს შორის x-ის სასარგებლოდ, მაშინ ახალი პროფილისათვისაც $xP(N)y$.

მ2 და მ3 აქსიომებს ზოგჯერ, თანაბრობის აქსიომებს უწოდებენ, რადგან ისინი ამომრჩეველთა და კანდიდატთა თანაბრობას მოითხოვენ.

თეორემა (მეის). უმრავლესობის წესი ერთადერთია, რომელიც აკმაყოფილებს მ1-მ4 აქსიომებს.

ზოგიერთ სიტუაციაში შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ უმრავლესობის წესით მიღებული კოლექტიური გადაწყვეტილების არატრანზიტულობა სრულიად მისაღებია, რა-

დგან ინდივიდუალურ უპირატესობებშიც დასაშვებია არატრანზიტულობა. მაგალითად, სახელმწიფო სამართლის თეორეტიკოსებს დიდად არ აწუხებთ უმრავლესობის წესის არატრანზიტულობა, რადგან მრავალ საკანონმდებლო ორგანოში დეპუტატისაგან მოითხოვება ერთი ალტერნატივის არჩევა და არა ყველა ალტერნატივის უპირატესობებით რანჟირება. ხშირად შემოიტანება ერთი ალტერნატიული კანონპროექტი არსებულის ნაცვლად, ხოლო თუ სახეზე გვექნება რამდენიმე ალტერნატიული კანონი, მაშინ მათ სთავაზობენ მიმდევრობით. ამასთან, თითოეული შემოთავაზებული კანონპროექტის დანიშნულებაა არსებული სიტუაციის გაუმჯობესება. ამიტომ, ზოგიერთმა შეიძლება იფიქროს, რომ არსებულ პრაქტიკაში არატრანზიტულობა არ შეიძლება წარმოიშვას, რაც მცდარი აზრია. განვიხილოთ ასეთი მაგალითი.

მაგალითი 5. ვთქვათ, a არსებული კანონია, ხოლო b და c ახალი განსახილველი კანონპროექტებია a–ს სანაცვლოდ. ვიგულისხმოთ, რომ კანონმდებელთა ორგანო იყოფა სამ თანაბარ ფრაქციად (ჯგუფად), რომლებმაც გამოკითხვის შედეგად მიუთითეს შემდეგი პროფილი:

$\Pi_4=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	b	c	a
P_3	c	a	b

სხდომის თავმჯდომარე ითხოვს, რომ უმრავლესობის წესით თავიდან b უნდა შევადაროთ a-ს, ხოლო შემდეგ მათგან გამარჯვებული უნდა შევადაროთ c-ს. რადგან უმრავლესობისათვის $a \overset{2}{\succ} b$, ამიტომ a უნდა შევადაროთ c-ს - $a \overset{1}{\succ} c$, ხოლო $c \overset{2}{\succ} a$. ამრიგად, $c \overset{2}{\succ} a$, $a \overset{2}{\succ} b$ და გადის კანონპროექტი c. მაგრამ c არ არის უპირატესი b-ზე უმრავლესობით, რადგან $c \overset{1}{\succ} b$, ანუ ტრანზიტულობა დარღვეულია.

ახლა დავუშვათ, რომ კანონპროექტები წარმოდგენილია c, b რიგით, რომლითაც ისინი უნდა შევადაროთ a-ს. c და a-ს შედარება გვაძლევს $c \overset{2}{\succ} a$, ხოლო c და b-ს შედარებიდან $b \overset{2}{\succ} c$, ე.ი. გაიმარჯვა b კანონპროექტმა.

ამრიგად, განსახილავი კანონპროექტების რიგს აქვს არსებითი მნიშვნელობა საბოლოო გადაწყვეტილების მისაღებად. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ეს ნიშნავს, რომ, თუ სხდომის თავმჯდომარე გვთავაზობს კანონპროექტების განხილვას მისთვის სასურველი $P_0^1=[a,b,c]$ რიგით, ხოლო კანონმდებელთა ჯგუფებს აქვთ Π_4 პროფილი, მაშინ უმრავლესობის წესით გადის c; ხოლო თუ თა-ვმჯდომარე შემოგვთავაზებს კანონპროექტებს $P_0^2=[a,c,b]$ რიგით, მაშინ უმრავლესობის წესით b გავა. $P_0^3=[b,a,c]$ რიგის შემთხვევაში $a \overset{2}{\succ} b$, $c \overset{2}{\succ} a$ და გამარჯვებულია c. აქედან გამომდინარე, მიღებული კანონპროექტი უფრო მეტად იზიარებს სხდომის თავმჯდომარის აზრს, თუმცა შესაძლოა ვერც ის ერკვეოდეს გადაწყვეტილების რეალურ არსში.

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში უმრავლესობის წესის გაძლიერება იმ აზრით, რომ ხმათა უმრავლესობის ქვედა საზღვრად ჩავთვალოთ არა n/2, არამედ 2n/3, 3n/4 ან მეტი, ვერ გვეხმარება.

2.2.3. კონდორსეს წესი

უპირატესობათა მოცემული Π პროფილისათვის კოლექტიური გადაწყვეტილების $P(N)$ წესს ეწოდება კონდორსეს წესი, თუ ის ირჩევს ისეთ a კანდიდატს (აუცილებლად ერთს), რომელიც იმარჯვებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატთან წყვილობით შედარებაში უმრავლესობის წესით: ყოველი x კანდიდატისათვის, რომელიც განსხვავებულია a-საგან, სრულდება უტოლობა $n(a,x)>n/2$.

აღნიშნული განსაზღვრიდან გამომდინარე, კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი ამავე დროს იქნება

გამარჯვებული უმრავლესობის წესით, თუ ასეთი არსებობს. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ზოგიერთი პროფილისათვის კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი შეიძლება არ არსებობდეს. ამ შემთხვევაში გვაქვს კონდორსეს პარადოქსი, ანუ პროფილში უმრაველესობის წესით კანდიდატების წყვილობითი შედარება ქმნის ციკლს.

მაგალითი 6. განვიხილოთ პროფილი, რომელშიც მონაწილეობს 21 ამომრჩეველი და 3 კანდიდატი

$\Pi_5=$

რანგი	1	2	3
P(8)	*a*	*b*	*c*
P(7)	*b*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*a*	*b*

ვიპოვოთ კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი.

კანდიდატების წყვილობითი შედარებისას გამარჯვებულმა კანდიდატმა უნდა მიიღოს 11-ზე მეტი ან ტოლი ხმა. აქ $a \overset{14}{\succ} b$ და რადგან 14 ამომრჩეველთა ნახევარზე მეტია, ამიტომ გამოერიცხოთ b. თუ a-ს შევადარებთ c-ს, მივიღებთ $a \overset{8}{\succ} c$. მაშასადამე, a არაა გამარჯეებული უმრავლესობით. ახლა b შევადაროთ სხვას. რადგან $b \overset{7}{\succ} a$, ეს ნიშნავს, რომ ვერც b იქნება გამარჯვებული. რადგან $c \overset{13}{\succ} a$, ამიტომ a შევცვალოთ სხვა კანდიდატით, ვთქვათ b-თი: $c \overset{6}{\succ} b$. ამრიგად, ვერც c იქნება გამარჯვებული კონდორსეს წესით. მივიღეთ, რომ Π_5 პროფილში კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი არ არსებობს და ამიტომ გვაქვს კონდორსეს ანუ კენჭისყრის პარადოქსი, რაც მოიცემა შემდეგი არატრანზიტული უპირატესობების ციკლით: $a \overset{14}{\succ} b,\ b \overset{15}{\succ} c,\ c \overset{13}{\succ} a$.

მაგალითი 7. კონდორსეს წესით განვამტკიცოთ კონდორსეს მსჯელობა ზემოთ განხილული Π_3 პროფილისათვის

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	a	b	c	d
P(5)	a	c	b	d
P(7)	b	d	c	a
P(6)	c	b	d	a

აქ უმრავლესობა იწყება 11 ამომრჩევლიდან. ამიტომ, $a\overset{8}{\succ}b$ უპირატესობიდან a გამოირიცხა; $b\overset{13}{\succ}a$, $b\overset{10}{\succ}c$ - გამოირიცხა b. რადგან $d\overset{0}{\succ}b$ - ანუ არც ერთისათვის არაა d უკეთესი b-ზე, ამიტომ გამოირიცხა d. ხოლო $c\overset{13}{\succ}a$, $c\overset{11}{\succ}b$, $c\overset{14}{\succ}d$ და ამიტომ გაიმარჯვა c კანდიდატმა. ამრიგად, ამ პროფილში კონდორსეს წესით გამარჯვებულია ერთადერთი კანდიდატი c.

მაგალითი 8. განვიხილოთ პროფილი 3 ამომრჩევლისათვის და 3 კანდიდატისათვის

$\Pi=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	a	c	b
P_3	c	b	a

აქ $a\overset{2}{\succ}b$, $a\overset{2}{\succ}c$, ე.ი. კონდორსეს წესით გამარჯვებულია a კანდიდატი. ამავე დროს $c\overset{2}{\succ}b$, რაც ნიშნავს, რომ უმრავლესობის წესით მიღებული კოლექტიური გადაწყვეტილება $P(N)=[a,c,b]=P_2$ და კონდორსეს წესით გამარჯვებული, ერთი და იგივე კანდიდატია.

2.2.4. შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესი

შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესი ძალიან მარტივია. მას იყენებენ და პატივს სცემენ მრავალ ქვეყანაში, განსაკუთრებით საფრანგეთში. მას აქვს ერთი

მნიშვნელოვანი ნაკლი - არ სრულდება მონოტონურობის აქსიომა.

კოლექტიური გადაწყვეტილების შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის P(N) წესის თანახმად, თუ კანდიდატი დააგროვებს ხმათა მკაცრ უმრავლესობას (ამომრჩეველთა ხმების ნახევარზე მეტს, ან ორ მესამედს და ა.შ. წინასწარი შეთანხმებით), მაშინ ის აირჩევა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჩატარდება არჩევნების მეორე ტური უმრავლესობის წესით იმ ორ კანდიდატს შორის, რომლებიც დააგროვებენ პირველ ტურში ხმათა მეტ რაოდენობას.

როგორც ვთქვით, იგი არ აკმაყოფილებს მონოტონურობის აქსიომას. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 9. მოცემულია კენჭისყრის პროფილი 17 ამომრჩევლისა და 3 კანდიდატი

$\Pi_6=$

რანგი	1	2	3
P(6)	*a*	*b*	*c*
P(5)	*c*	*a*	*b*
P(4)	*b*	*c*	*a*
P(2)	*b*	*a*	*c*

ვიპოვოთ გამარჯვებული კანდიდატი შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესით.

მოცემული პროფილის თანახმად, *a* კანდიდატი აგროვებს 6 ხმას, *b* აგროვებს 6 ხმას, ხოლო *c* - 5 ხმას. მაშასადამე, პირველი ტურით ვერც ერთი ვერ იგებს (ვერც ერთი ვერ აგროვებს 9 ან მეტ ხმას). არჩევნების მეორე ტური შედგება *a* და *b* კანდიდატს შორის გამარჯვებულის საპოვნელად, *c* კი გამოირიცხება. თუ ამომრჩევლები კანდიდატების მიმართ შეინარჩუნებენ იმავე უპირატესობებს, მაშინ მეორე ტურში კენჭისყრის პროფილი ასეთია:

რანგი	1	2
P(6)	*a*	*b*
P(5)	*a*	*b*
P(4)	*b*	*a*
P(2)	*b*	*a*

Π=

აქ კი *a* იმარჯვებს *b*-სთან 11 ხმით 6-ის წინააღმდეგ.

ახლა დავუშვათ, ორმა ამომრჩეველმა გაითვალისწინა საზოგადოებრივი აზრი იმის შესახებ, რომ პირველ ტურში *a* კანდიდატს მეტი მხარდამჭერები ჰყავს, ვიდრე *b*-ს (ჩვენი აღნიშვნით $a \overset{11}{\succ} b$) და კენჭისყრის მომენტისათვის მათ Π_6 პროფილში უპირატესობები $b \succ a \succ c$ შეცვალეს *a* კანდიდატის სასარგებლოდ: $a \succ b \succ c$. ამრიგად, გვაქვს შეცვლილი პროფილი

Π=

რანგი	1	2	3
P(6)	*a*	*b*	*c*
P(5)	*c*	*a*	*b*
P(4)	*b*	*c*	*a*
P(2)	*a*	*b*	*c*

პირველ ტურში ამ პროფილით *a* კანდიდატი აგროვებს 8 ხმას, *c* - 5 ხმას, *b* კი - 4 ხმას. ამიტომ გამოირ-იცხება *b* და მეორე ტურში მონაწილეობას მიიღებენ *a* და *c* უპირატესობებით

Π=

რანგი	1	2
P(6)	*a*	*c*
P(5)	*c*	*a*
P(4)	*c*	*a*
P(2)	*a*	*c*

სადაც იმარჯვებს *c* კანდიდატი 9 ხმით.

მაშასადამე, გამარჯვებისათვის თავიდანვე აღიარებული *a* კანდიდატისთვის ახალი მხარდამჭერების მიერ მისი პოზიციის გაუმჯობესებამ გამოიწვია მისი დამარც-

ხება. ეს კი ნიშნავს, რომ დაირღვა მონოტონურობის აქსიომა.

2.2.5. კანდიდატთა რანჟირების ბორდას წესი

მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში, სადაც უნდა გადაწყდეს კოლექტივის (ექსპერტთა ჯგუფის, ჟიურის) მიერ გამარჯვებული კანდიდატების (პროექტების) ქვესიმრავლის პოვნა, ყველაზე ხელსაყრელია გამოვიყენოთ ბორდას და კოპლენდის წესები. ორივეს საფუძვლად უდევს კანდიდატთა რაოდენობრივი შეფასებების პოვნის და მათი შედარების პრინციპი. ეს წესები არც ისე ხშირად იძლევა შეფასებების ტოლობას. თუ ტოლი შეფასებების შემთხვევაში საჭირო იქნება მათგან ერთადერთის არჩევა, უნდა გამოვიყენოთ ანონიმური წესი (ვთქვათ, ავირჩიოთ მათგან ისეთი, რომელიც ყველაზე მეტად მოსწონს პირველ ამომრჩეველს) ან არანეიტრალური წესი (მათგან ავირჩიოთ ალფაბეტის რიგით პირველი).

კოლექტიური P(N) გადაწყვეტილების ბორდას წესით ყოველი $x \in X$ კანდიდატისათვის გამოითვლება სიდიდე

$$\beta(x)=\sum_{y\in X}(n(x,y)-n(y,x)),$$

ხოლო ამ სიდიდეებიდან ბორდას ფუნქცია

$$B(P_1,\ldots,P_n)=\{z \mid \beta(z)=\max_{x\in X}\beta(x)\}$$

განსაზღვრავს გამარჯვებულ **z** კანდიდატს.

მაგალითი 10. განვიხილოთ ისევ Π_3 პროფილი 21 ამომრჩევლისა და 4 კანდიდატისათვის

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

გამოვთვალოთ $\beta(x)$-ის მნიშვნელობები ყოველი კანდიდატისათვის $x\in\{a,b,c,d\}$:

$$\beta(a)=(n(a,b)-n(b,a))+(n(a,c)-n(c,a))+(n(a,d)-n(d,a))=(8-13)+$$

$$+(8-13)+(8-13)= =24-39= -15;$$

$$\beta(b)=(\mathrm{n}(b,a)-\mathrm{n}(a,b))+(\mathrm{n}(b,c)-\mathrm{n}(c,b))+(\mathrm{n}(b,d)-\mathrm{n}(d,b))=(13-8)+$$

$$+(10-11)+(21-0)= =44-19=25;$$

$$\beta(c)=(\mathrm{n}(c,a)-\mathrm{n}(a,c))+(\mathrm{n}(c,b)-\mathrm{n}(b,c))+(\mathrm{n}(c,d)-\mathrm{n}(d,c))=(13-8)+$$

$$+(11-10)+(14-7)= =38-25=13;$$

$$\beta(d)=(\mathrm{n}(d,a)-\mathrm{n}(a,d))+(\mathrm{n}(d,b)-\mathrm{n}(b,d))+(\mathrm{n}(d,c)-\mathrm{n}(c,d))=(13-8+$$

$$+(0-21)+(7-14)= =20-43= -23.$$

აქედან, ბორდას ფუნქცია ირჩევს b კანდიდატს, რადგან

$$\max\{-15,25,13,-23\}=25=\beta(\mathrm{b})$$

მიიღწევა ერთადერთი b კანდიდატისათვის.

შევნიშნოთ, რომ ბორდას წესი კანდიდატების $X=\{a, b, c, d\}$ სიმრავლეს შეუსაბამებს აგრეთვე კოლექტიურ გადაწყვეტილებას კანდიდატების რანჟირების სახით $P(N)=[b,c,a,d]$, რაც უკვე ყველაზე ზოგადი და კარგი გადაწყვეტილებაა რამდენიმე საუკეთესო კანდიდატის გამოვლენისათვის.

ბორდას წესში გათვალისწინებულია კონდორსესთან კამათის დროს მის მიერ გამოთქმული მოსაზრება. ამ პრინციპით იგი კიდევ უფრო შორს წავიდა - კანდიდატთა სიმრავლიდან გამოყოფს გამარჯვებულ კანდიდატთა ქვესიმრავლეს.

ბორდას ეკუთვნის აგრეთვე ქულების წესის გამოყენება გამარჯვებული კანდიდატის პოვნისათვის. ამ წესის თანახმად, თუ $N=\{1,\ldots,n\}$ ამომრჩეველებია, ხოლო $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ კანდიდატები, მაშინ უპირატესობათა პროფილში k-ური რანგის მქონე კანდიდატი ღებულობს 0 ქულას, მისი წინა, ბოლოდან მეორე კანდიდატი ღებულობს 1 ქულას, მისი წინა - 3 ქულას და ა.შ., პირველი რანგის შესაბამისი კანდიდატი ღებულობს $k-1$ ქულას. იანგარიშება ყველა კანდიდატის ქულათა ჯამი და გაიმარჯვებს ის კანდიდატი, რომელიც მიიღებს ყველაზე მეტ ქულას. მაგალითად, იმავე Π_3 პროფილისათვის

რანგი	1	2	3	4
P(3)	a	b	c	d
P(5)	a	c	b	d
P(7)	b	d	c	a
P(6)	c	b	d	a
ქ	3	2	1	0

Π=

a კანდიდატი ღებულობს 3.3+5.3=24 ქულას, *b* კანდიდატი - 3.2+5.1+7.3+6..2=44 ქულას, *c* - 3.1+5.2+7.1+6.3=38 ქულას, *d* - 7.2+6.1=20 ქულას. მაშასადამე, *b* ღებულობს მაქსიმალურ ქულას სხვებთან შედარებით და ის არის გამარჯვებული. ამავე დროს, ბორდას ქულების წესით მივიღეთ კანდიდატების იგივე რანჟირება, რაც ბორდას ფუნქციის საშუალებით - P(N)=[*b*,*c*,*a*,*d*].

2.2.6. კანდიდატთა რანჟირების კოპლენდის წესი

კოპლენდმა ამ წესით აგვაცილა არატრანზიტულობის თვისება, რაც მოახერხა ეროუს მესამე აქსიომის უგულებელყოფით.

კოლექტიური P(N) გადაწყვეტილების კოპლენდის წესით, ყოველი x∈X კანდიდატისათვის და ყოველი *i*∈N ამომრჩევლისათვის შემოგვაქვს $a_i(x)$ და $b_i(x)$ რიცხვითი შეფასებები, რომლებიც შესაბამისად იმ კანდიდატების რიცხვია, რომლებზეც უპირატესია x და რომლებიც უპირატესია x–ზე. x∈X კანდიდატის შეფასება განისაზღვრება ასე:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) - b_i(x)).$$

x და y კანდიდატებიდან xP(N)y⇔u(x)≥u(y).

u(x) სიდიდეს, კოპლენდის შეფასება ეწოდება. კოპლენდის მიერ დამტკიცებულია, რომ მის წესს ყოველთვის მივყავართ ტრანზიტულ კოლექტიურ უპირატესობასთან.

მაგალითი 11. ისევ განვიხილოთ რამდენიმეჯერ განხილული პროფილი

Π_3=

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

გამოვთვალოთ კოპლენდის შეფასებები u(*a*), u(*b*), u(*c*) და u(*d*). ჩვენი პროფილის შემთხვევაში, u(x) გამოსახულება ჯამში შეიცავს n=21 შესაკრებს (იგი ამომრჩეველთა რიცხვია). იმის გამო, რომ მათგან რამდენიმეს აქვს ერთნაირი უპირატესობები, მივიღებთ:

$$u(a)=3(3-0)+5(3-0)+7(0-3)+6(0-3)=24-39=-15,$$
$$u(b)=3(2-1)+5(1-2)+7(3-0)+6(2-1)=44-19=25,$$
$$u(c)=3(1-2)+5(2-1)+7(1-2)+6(3-0)=38-25=13,$$
$$u(d)=3(0-3)+5(0-3)+7(2-1)+6(1-2)=20-43=-23.$$

კოპლენდის წესით

$$bP(N)a \Leftrightarrow 25>-15,$$
$$bP(N)c \Leftrightarrow 25>13,$$
$$bP(N)d \Leftrightarrow 25>-23.$$

ამავე დროს გვაქვს *c*P(N)*a*, *c*P(N)*d*, *a*P(N)*d*. მაშასადამე, კოლექტიური კოპლენდის წესმა მოგვცა ტრანზიტული უპირატესობა და P(N)=[*b,c,a,d*], რაც ემთხვევა ბორდას წესით მიღებულ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას. ამ პროფილში კონდორსეს წესით კი გამარჯვებულია c კანდიდატი.

აღვნიშნავთ, რომ კოპლენდის წესი, ისევე როგორც ბორდას წესი, გვაძლევს გამარჯვებული კანდიდატების ქვესიმრავლეს. კანდიდატების ტოლი შეფასებების შემთხვევაში, საჭიროა დასაწყისში აღნიშნული დამატებითი პროცედურის განხორციელება.

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რეფერატის საშუალებით.

4. ამოცანა. მოცემულია პროფილი. იპოვეთ გამარჯვებული კანდიდატები 2.2.1 - 2.2.6 კენჭისყრის წესებით.

19. დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი. ინვესტიციების (რესურსების) განაწილების ამოცანა

1. სამუშაოს მიზანი - გავეცნოთ დინამიკურ დაპროგრამებას, რომელიც წარმოადგენს ოპერაციათა კვლევის დამოუკიდებელ დარგს და სპეციალურადაა დამუშავებული მრავალსვლიანი პროცესების მართვისათვის. ეს დარგი ჩამოყალიბდა გასული საუკუნის 50-იან წლებში, რაც დაკავშირებულია რ. ბელმანის სახელთან. მან დაასაბუთა დინამიკური დაპროგრამების ოპტიმალურობის პრინციპი და ძირითადი განტოლება. ამ სამუშაოში შევისწავლით დინამიკური დაპროგრამების ძირითად განსაზღვ-რებებს, მოვიყვანთ ბელმანის განტოლებას და ამოვხსნით რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანას.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. დინამიკური დაპროგრამება გამოიყენება ისეთი Σ სისტემის (ან პროცესის) მართვისათვის, რომელიც ხასიათდება შემდეგი ნიშნებით:

Σ სისტემის ფუნქციონირების პროცესი შეიცავს მიმდევრობით ბიჯებს (ეტაპებს). მიმდინარე ბიჯს აქვს ნომერი i, საბოლოო ბიჯს კი – ნომერი m;

i-ურ ბიჯზე x_i მართვას (სტრატეგიას) Σ სისტემა $(i-1)$ ბიჯზე გადაჰყავს მიღწეული S_{i-1} მდგომარეობიდან ახალ S_i მდგომარეობაში;

Σ სისტემისათვის სრულდება თანაქმედებათა არარსებობის პრინციპი, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ x_i მართვით მიღწეული Σ-ს S_i მდგომარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ წინა ბიჯზე მიღწეულ S_{i-1} მდგომარეობაზე, მაგრამ არაა დამოკიდებული მის წინა $S_{i-2}, S_{i-1}, \dots, S_1$ მდგომარეობებზე და $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_1$ მართვებზე;

ცნობილია ოპერაციის ლოკალური ეფექტურობის მაჩვენებელი, რომელსაც ვუწოდებთ ლოკალური მოგების ფუნქციას (სარგებლიანობას) და აღვნიშნავთ

$$f_i = f_i(S_{i-1}, x_i). \qquad (1)$$

იგი გვაძლევს i-ურ ბიჯზე მოგების მნიშვნელობას x_i მართვის გამოყენებით, თუ წინა $(i-1)$ ბიჯზე Σ სისტემა იმყოფებოდა S_{i-1} მდგომარეობაში;

Σ სისტემის m- ბიჯიანი (ანუ მთლიანი) ფუნქციონირებით მიღწეული შედეგი ხასიათდება ეფექტურობის F მაჩვენებლით. ამ მაჩვენებელს ვუწოდებთ სისტემის მართვის მოგების ფუნქციას (სარგებლიანობას). უნდა ვიგულისხმოთ, რომ F მოგება ტოლია ლოკალური მოგებების ჯამის

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i. \qquad (2)$$

ასეთი თვისების F ფუნქციას, ადიტიური მიზნის ფუნქცია ან კრიტერიუმი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ f_i და შესაბამისად F მოგებები ზოგიერთ ამოცანაში შეიძლება ნიშნავდეს დანაკარგს, წაგებას.

ცხადია, სისტემის მართვა უნდა განხორციელდეს გარკვეული გადაწყვეტილებებით, რაც გულისხმობს ისეთი პარამეტრების არჩევას, რომლებიც იმოქმედებს პროცესის სვლაზე და შედეგზე. რადგან მართვა წარმოებს ეტაპობრივად, კერძოდ m ეტაპით, ამიტომ ასეთი გადაწყვეტილებების რიცხვი უნდა იყოს m. თითოეულ ასეთ გადაწყვეტილებას ვუწოდებთ ბიჯობრივ (ეტაპობრივ) მართვას (სტრატეგიას). ასეთი მართვები აღვნიშნოთ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ასოებით. მაშინ Σ სისტემის მართვა (სისტემის მართვის სტრატეგია) წარმოადგენს ამ მართვების (სტრატეგიების) ერთობლიობას და მას ასე ჩავწერთ:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

ასეთ Σ სისტემას ვუწოდებთ მართვადს.

შევნიშნოთ, რომ $x_1, x_2, ..., x_m$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი ბუნების ელემენტები – რიცხვები, ვექტორები, მატრიცები, ფუნქციები, ხარისხობრივი ნიშნები და ა.შ.

მოყვანილი განსაზღვრებების საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ დინამიკური დაპროგრამების ამოცანა შემდეგი სახით: მართვის X სიმრავლიდან ვიპოვოთ ისეთი მართვა $x \in X$, რომლისთვისაც (2) ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება მაქსიმალური:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \to \max_{x \in X}.$$

ისეთ x^* მართვას, რომლისთვისაც ეს მაქსიმუმი მიიღწევა, ვუწოდოთ ოპტიმალური მართვა. იგი წარმოადგენს ოპტიმალური ბიჯობრივი მართვების ერთობლიობას

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*).$$

ასეთი მართვის შესაბამის $F-$ის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ F^*-ით:

$$F^* = \max_{x \in X} F(x) \equiv F(x^*) = f_1(x_1^*) + ... + f_m(x_m^*).$$

დინამიკური დაპროგრამების მეთოდით ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნის პროცედურა ორი სტადიით - წინასწარი და საბოლოო სტადიებით ხორციელდება. წინასწარ სტადიაზე ყოველი ბიჯისათვის განისაზღვრება: 1. **პირობითი ოპტიმალური მართვა**, რომელიც დამოკიდებულია წინა ბიჯით მიღწეულ Σ სისტემის S მდგომარეობაზე და 2. **პირობითი ოპტიმალური** მოგება მოცემული ბიჯიდან დაწყებული ყველა დარჩენილი ბიჯ-ის ჩათვლით, რომლებიც ასევე დამოკიდებულია S მდგომარეობაზე.

პროცედურის საბოლოო ანუ დამამთავრებელ სტადიაზე ყოველი ბიჯის გათვალისწინებით განისაზღვრება **საბოლოო უპირობო ოპტიმალური მართვა.**

წინასწარი ანუ პირობითი ოპტიმიზაცია წარმოებს ბიჯობრივ საპირისპირო მიმართულებით - ბოლო ბიჯი-

დან პირველისაკენ; საბოლოო უპირობო ოპტიმიზაცია კი წარმოებს ასევე ბიჯობრივ, მაგრამ ბუნებრივი მიმართულებით - პირველი ბიჯიდან ბოლოსაკენ.

ოპტიმიზაციის აღნიშნული ორი სტადიიდან უფრო რთული და შრომატევადია პირველი. მეორე სტადია მოითხოვს პირველ სტადიაზე გამზადებული რეკომენდაციების გათვალისწინებას.

ეტაპობრივი პროცედურის საფუძველში დევს რ. ბელმანის ოპტიმალურობის შემდეგი პრინციპი: როგორიც არ უნდა იყოს Σ სისტემის მდგომარეობა S რომელიმე მომდევნო ბიჯის წინ, ამ მომდევნო ბიჯზე უნდა ავირჩიოთ ისეთი მართვა, რომლისთვისაც ამ ბიჯზე და ყველა მომდევნო დანარჩენ ბიჯზე მოგებათა ჯამი მაქსიმალური იქნება.

ჩავწეროთ ოპტიმიზაციის ორივე სტადიის სტრუქტურა ზოგადი მოდელის სახით. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები.

პირობითი ოპტიმალური მოგება აღვნიშნოთ შემდეგნაირად

$$F_i(S).$$

იგი ნიშნავს იმ მაქსიმალურ ჯამურ მოგებას, რომელიც მიიღება ყველა ბიჯზე i-ური ბიჯიდან დაწყებული, ამავე ბიჯისა და საბოლოო m-ური ბიჯის ჩათვლით, როცა i-ური ბიჯის წინ Σ სისტემა იმყოფება S მდგომარეობაში.

პირობითი ოპტიმალური მართვა აღვნიშნოთ ასე:

$$x_i(S).$$

იგი არის ოპტიმალური მართვა i-ურ ბიჯზე, რომელიც ყველა შემდეგ დარჩენილ ბიჯზე ოპტიმალურ მართვასთან ერთად, ჯამურ მაქსიმალურ მოგებას გვაძლევს i-ური ბიჯის მოგებასთან ერთად.

დინამიკური დაპროგრამების ზოგადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ყველა $i=1,2,...,m$ ბიჯისათვის განვსაზღვროთ $F_i(S)$ და $x_i(S)$ ფუნქციები.

ოპტიმალურობის პრინციპი მოითხოვს, რომ ვიცოდეთ i-ური ბიჯის შესაბამისი ლოკალური მოგება (1). გარდა ამისა, ყველა დანარჩენ ბიჯზე მივიღებთ რაიმე

მოგებას. ოპტიმალურობის პრინციპის თანახმად უნდა ჩავთვალოთ, რომ ისიც მაქსიმალურია. რომ ვიპოვოთ ეს მოგება, უნდა ვიცოდეთ Σ სისტემის მდგომარეობა შემდეგი $(i+1)$ ბიჯის წინა i-ურ ბიჯზე. i-ურ ბიჯზე x_i მართვის ზემოქმედებით სისტემა წინა S მდგომარეობიდან გადადის რაიმე ახალ S' მდგომარეობაში. მაშასადამე, უნდა ვიცოდეთ S' მდგომარეობის დამოკიდებულება S მდგომარეობაზე და x_i მართვაზე:

$$S' = \varphi_i(S, x_i). \tag{3}$$

ახლა ჩავწეროთ მოგება, რომელსაც მივიღებთ i-ური ბიჯიდან დაწყებული ყველა ბიჯზე, თუ i-ურ ბიჯზე გამოყენებული იქნება ნებისმიერი (საზოგადოდ არაოპტიმალური) მართვა x_i, ხოლო ყველა შემდეგზე - $(i+1)$-დან m-ის ჩათვლით, გამოყენებული იქნება ოპტიმალური მართვა. ასეთი მოგება ტოლი იქნება i-ურ ბიჯზე ლოკალურ $f_i(S, x_i)$ მოგებას დამატებული პირობითი ოპტიმალური მოგება ყველა შემდეგ ბიჯზე $(i+1)$-დან დაწყებული სისტემის ახალი (3) S' მდგომარეობისათვის:

$$f_i(S, x_i) + F_{i+1}(S') = f_i(S, x_i) + F_{i+1}(\varphi_i(S, x_i)).$$

ოპტიმალურობის პრინციპის შესაბამისად უნდა ავირჩიოთ ისეთი მართვა x_i, რომლისთვისაც ეს სიდიდე მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას და მაშასადამე, იგი ტოლი იქნება პირობითი ოპტიმალური მოგების:

$$F_i(S) = \max_{x_i} [\, f_i(S, x_i) + F_{i+1}(\varphi_i(S, x_i)) \,]. \tag{4}$$

ისეთი $x_i^*(S)$ მართვა, რომლისთვისაც ეს მაქსიმუმი მიიღწევა, არის პირობითი ოპტიმალური მართვა i-ურ ბიჯზე. თვით სიდიდე (4) კი, როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, არის პირობითი ოპტიმალური მოგება.

(4) განტოლებაში $f_i(S, x_i)$ და $\varphi_i(S, x_i)$ ფუნქციები ცნობილია. ამიტომ უცნობი რჩება $F_i(S)$ და $F_{i+1}(S')$ ფუ-

ნქციები. მათგან პირველი გამოისახება მეორის საშუალებით.

(4) ფორმულა არის დინამიკური დაპროგრამების ძირითადი ფუნქციონალური (რეკურენტული) განტოლება. მისი საშუალებით განისაზღვრება $F_i(S)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი შემდგომი $F_{i+1}(S')$ ფუნქცია.

რაც შეეხება $F_m(S)$ ფუნქციას - პირობით ოპტიმალურ მოგებას ბოლო ბიჯზე, იგი მარტივად განისაზღვრება. ამისათვის (4) განტოლებაში ვიგულისხმოთ, რომ $i=m$. მაშინ

$$F_m(S)=\max_{x_m} f_m(S,x_m)\,, \tag{5}$$

სადაც მაქსიმუმი აიღება ყველა იმ S მდგომარეობისათვის, რომელთაგან ერთი ბიჯით მივიღებთ საბოლოო მდგომარეობას. (5) განტოლების ამოხსნით თითოეული S მდგომარეობისათვის ვიპოვით პირობით ოპტიმალურ $x_m(S)$ მართვას და პირობით ოპტიმალურ $F_m(S)$ მოგებას. ასე რომ, (5) ტოლობა თავიდანვე უნდა გავითვალისწინოთ (4)-ით სარგებლობისას.

ამის შემდეგ, ერთი მეორის მიყოლებით ვიპოვით პირობით ოპტიმალურ მართვებს და პირობით ოპტიმალურ მოგებებს. მართლაც, ვიცით რა $F_m(S)$, (4) ფორმულაში ჩავსვამთ $i=m-1$ და მივიღებთ განტოლებას

$$F_{m-1}(S)=\max_{x_{m-1}}[\,f_{m-1}(S,x_{m-1})+F_m(\varphi_{m-1}(S,x_{m-1}))\,].$$

ამ განტოლების ამოხსნით S მდგომარეობისათვის ვიპოვით $F_{m-1}(S)$ მოგებას და შესაბამის ოპტიმალურ $x_{m-1}(S)$ მართვას. შემდეგ ვიპოვით $F_{m-2}(S)$ და $x_{m-2}(S)$ და ა.შ., $F_1(S)$ და $x_1(S)$-ს.

მიღებული $F_1(S)$ ფუნქცია არის პირობითი ოპტიმალური მოგება ყველა ოპერაციის შედეგად, ანუ ყველა ბიჯისათვის, დაწყებული პირველიდან დამთავრებული

ბოლომდე, თუ პირველი ბიჯი იწყება Σ სისტემის S მდგომარეობიდან.

ამრიგად, წინასწარი ოპტიმიზაცია დამთავრებულია - ცნობილია პირობითი ოპტიმალური მოგება და პირობითი ოპტიმალური მართვა თითოეული ბიჯისათვის.

ახლა გადავიდეთ ოპტიმიზაციის მეორე სტადიაზე - უპირობო, იგივე საბოლოო ოპტიმალური

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$$

მართვის პოვნაზე.

დავიწყოთ პირველი ბიჯიდან. ვიგულისხმოთ, რომ Σ სისტემის საწყისი მდგომარეობა S_0 სრულადაა ცნობილი. ჩავსვათ ეს მდგომარეობა პირობითი ოპტიმალურობის (4) ფორმულაში. როცა $i = 1$, მივიღებთ ოპტიმალურ მოგებას ყველა m ბიჯისათვის

$$\max F = F_1(S_0).$$

ამ ტოლობასთან ერთად, პირველ ბიჯზე ვიპოვით ოპტიმალურ $x_1^* = x_1^*(S_0)$ მართვას.

შემდეგ, ვიცით რა S_0 და x_1^*, (3) წესის თანახმად ვიპოვით სისტემის მდგომარეობას პირველი ბიჯის შემდეგ

$$S_1^* = \varphi_1(S_0, x_1^*).$$

S_1^* $-$ით ვიპოვით ოპტიმალურ მართვას მეორე ბიჯზე - $x_2^* = x_2^*(S_1^*)$ და ა.შ. მაშასადამე, გვაქვს მიმდევრობა

$$S_0 \to x_1^*(S_0) \to S_1^* \to x_2^*(S_1^*) \to ... \to S_{m-1}^* \to x_m^*(S_{m-1}^*) \to S_m^*,$$

რომლითაც ვიპოვით მთელი პროცესის ოპტიმალურ $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ მართვას და სისტემის საბოლოო $S_m = S_m^*$ მდგომარეობას. ამით ოპტიმიზაციის პროცესი დამთავრებულია.

შენიშვნა. მინიმუმის ამოცანის შემთხვევაში შენარჩუნებულია იგივე რეკურენტული დამოკიდებულება მინიმუმისათვის

$$F_i(S) = \min_{x_i} [\, f_i(S, x_i) + F_{i+1}(\varphi_i(S, x_i)) \,]. \qquad (6)$$

დინამიკური დაპროგრამების მეთოდით ამოვხსნათ ერთი ეკონომიკური ამოცანა, რომელსაც ინვესტიციების ან რესურსების განაწილების ამოცანა ეწოდება.

ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: უნდა დაიგეგმოს m საწარმოს $\Pi_1,...,\Pi_m$ საქმიანობა ერთი წლის განმავლობაში, რისთვისაც ჩვენს განკარგულებაში არსებული ინვესტიციების (რესურსების, საშუალებების, მარაგის) საწყისი K ერთეული უნდა გავანაწილოთ მათ შორის. თუ $\Pi_i(i=1,...,m)$ საწარმოში ჩავდებთ ინვესტიციის x რაოდენობას, მაშინ ამ საწარმოდან წლის ბოლოს მივიღებთ $f_i(x)(i=1,...,m)$ მოგებას. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ფუნქცია $f_i(x)$ მოცემულია და არაკლებადია. მათი მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილით (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

x \ f_i	f_1	f_2	...	f_m
x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	...	$f_m(x_1)$
x_2	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	...	$f_m(x_2)$
.	.	.	...	.
x_n	$f_1(x_m)$	$f_2(x_n)$	...	$f_m(x_n)$

უნდა მოვითხოვოთ, რომ:

1. $f_i(x)$ არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენ ინვესტიციას ჩავდებთ სხვა საწარმოში;
2. ყველა საწარმოს მოგება გამოისახება ერთნაირი ერთეულებით;
3. ყველა საწარმოდან მიღებული მოგება ტოლია ცალკეულ საწარმოთა მოგებათა ჯამის;
4. თითოეულ საწარმოს შეუძლია მხოლოდ შეზღუდული რაოდენობის ინვესტიციების ათვისება.

როგორ გავანაწილოთ K სიდიდე საწარმოებს შორის ისე, რომ წლის ბოლოს ყველა საწარმოდან ჯამში მივიღოთ მაქსიმალური მოგება?

ამ შემთხვევაში, მართვადი სისტემა Σ არის ინვესტიციები, რომლებიც უნდა გავანაწილოთ საწარმოებს შორის. სისტემის მდგომარეობა ბიჯის წინ არის ინვესტიციის სიდიდე S, რომელიც ჯერ არ გაგვინაწილებია. მაშასადამე, S არის ერთი კონკრეტული რიცხვი. ბიჯობრივი მართვები არის $x_1, x_2, ..., x_m$ ინვესტიციები, რომლებიც საწარმოებს მოცემული $\Pi_1, ..., \Pi_m$ რიგით გამოეყოფა. ამრიგად, დასმული მრავალბიჯიანი ამოცანის მათემატიკური აზრი შემდეგში მდგომარეობს: ვიპოვოთ ისეთი მართვა $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i^* = K, \\ x_i^* \geq 0, i = 1, ..., m \end{cases}$$

და უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას (ეფექტურობას)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \to \max_{X}.$$

ცხადია, ეს ამოცანა შეგვიძლია ამოვხსნათ ყვე-ლა შესაძლო ვარიანტის განხილვით. უფრო ეფექტურ მეთოდს კი წარმაოდგენს დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი, რისთვისაც უნდა გამოვიყენოთ ბელმანის (4) განტოლება $F_i(S)$ და $F_{i+1}(S)$ პირობითი ოპტიმალური მოგებებისათვის.

უნდა აღინიშნოს, რომ ყოველი გარკვეული ტიპის მრავალბიჯიანი დინამიკური დაპროგრამების ამოცანისათვის პირველ რიგში უნდა დადგინდეს ბელმანის (4) განტოლების სახე. გავაკეთოთ ეს ჩვენი ამოცანისათვის.

ვთქვათ, i-ურ ბიჯზე i-ური Π_i საწარმოსათვის ინვესტიციის გადაცემის წინ გვაქვს დარჩენილი S ერთეული. თუ ამ ბიჯზე გამოვიყენებთ x_i მართვას, მაშინ Π_i საწარმოდან მიღებული ლოკალური მოგება f_i დამოკიდ-

ებული იქნება S-ზე და x_i-ზე, ე.ი. $f_i = f_i(S, x_i)$. i-ურ ბიჯზე პირობითი ოპტიმალური მართვაა $x_i(S)$, ხოლო პირობითი ოპტიმალური მოგება - $F_i(S)$.

დავიწყოთ ოპტიმიზაცია ბოლო, m-ური ბიჯიდან. ვთქვათ, ამ ბიჯთან მივედით ნარჩენი S ინვესტიციით. ცხადია, იგი უნდა ჩავდოთ მთლიანად Π_m-ში. ამიტომ m-ურ ბიჯზე ოპტიმალური მართვა ტოლი იქნება

$$x_m(S) = S = x_m,$$

ხოლო პირობითი ოპტიმალური მოგებაა

$$F_m(S) = f_m(S, x_m).$$

ამრიგად, თუ ვიცით m-ურ ბიჯზე S-ის მნიშვნელობა, მაშინ უნდა ჩავთვალოთ, რომ ვიცით $x_m(S)$ და $F_m(S)$. ამით, ბოლო ბიჯის ოპტიმიზაცია მოხდენილია.

გადავიდეთ ბოლოსწინა $(m-1)$-ე ბიჯზე. ვთქვათ აქ მივედით S მარაგით. მაშინ $F_{m-1}(S)$ იქნება პირობითი ოპტიმალური მოგება ბოლო ორ $(m-1)$-ე და m-ურ ბიჯზე, რომელთაგან მეორის ოპტიმიზაცია უკვე გვაქვს. თუ $(m-1)$-ე ბიჯზე Π_{m-1}-ს გამოვუყოფთ x_{m-1} ერთეულს, მაშინ საბოლოო m-ური ბიჯისათვის დარჩება $S - x_{m-1}$ ერთეული. ამიტომ მოგება ბოლო ორ ბიჯზე ტოლი იქნება

$$f_{m-1}(S, x_{m-1}) + F_m(S - x_{m-1}).$$

მაშასადამე, $(m-1)$-ე ბიჯზე უნდა ვიპოვოთ ისეთი x_{m-1} რესურსი, რომლისთვისაც ეს ჯამი იქნება მაქსიმალური:

$$F_{m-1}(S) = \max_{x_{m-1} \le S} [f_{m-1}(S, x_{m-1}) + F_m(S - x_{m-1})].$$

ასეთი x_{m-1} იქნება $(m-1)$-ე ბიჯზე პირობითი ოპტიმალური მართვა და იგი არის $x_{m-1}(S)$.

შემდეგ მოვახდენთ $(m-2)$-ე, $(m-3)$-ე, . . . ბიჯების ოპტიმიზაციას. საზოგადოდ, ნებისმიერი i-ური ბიჯ-

ისათვის პირობით ოპტიმალურ $F_i(S)$ მოგებას, რომელიც არის ამ ბიჯიდან დაწყებული ბოლო ბიჯის ჩათვლით საერთო მოგება, ვპოულობთ ბელმანის განტოლებით:

$$F_i(S) = \max_{x_i \le S}[f_i(S,x_i) + F_{i+1}(S - x_i)]. \qquad (7)$$

აქედანვე ვიპოვით შესაბამის პირობით $x_i(S)$ ოპტიმალურ მართვას, რომლისთვისაც ეს მაქსიმუმი მიიღწევა.

ასეთი პროცესით მივალთ პირველ Π_1 საწარმომდე. აქ უკვე ვიცით, რომ პირველი ბიჯის წინ გვაქვს ინვესტიციის K ერთეული და ამიტომ

$$F^* = F_1(K) = \max_{x_1 \le K}[f_1(K,x_1) + F_2(K - x_1)], \qquad (8)$$

რაც ნიშნავს ყველა საწარმოდან წლის ბოლოს მიღებულ მოგებას. ამის შემდეგ გვჭირდება გარკვეული რეკომენდაციების გათვალისწინება.

x-ის ის მნიშვნელობა x_1^*, რომლისთვისაც (8) მაქსიმუმი მიიღწევა, არის პირველ ბიჯზე ოპტიმალური მართვა. მას შემდეგ, რაც x_1^* ჩავდეთ Π_1-ში, ჩვენ გვრჩება ინვესტიციის $K - x_1^*$ ერთეული. S-ის ამ მნიშვნელობაზე რეკომენდაციების გათვალისწინებით, Π_2-ს გადავცემთ $x_2^* = x_2(K - x_1^*)$ ერთეულს და ა.შ. ბოლოს ვიპოვით x_m^*-ს. ახლა ამოვხსნათ კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა. $m = 3$ საწარმოს-Π_1, Π_2, Π_3 განვითარებისათვის გამოყოფილია $K = 5$ მლნ. ლარის მოცულობის ინვესტიცია. ცნობილია მათგან თითოეულის ეფექტურობა - მოგება გადაცემულ ინვესტიციაზე დამოკიდებულებით ერთი წლის ბოლოსათვის– $f_i(x_i)(i = 1,2,3)$. ვიგულისხმოთ, რომ: თითოეულ საწარმოს გადაეცემა მთელრიცხვა ინვესტიცია $x_i = 0,1,2,3,4,5$. მოგებები მოცემულია ცხრილში (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

x_i	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

როგორ გავანაწილოთ $K=5$ მლნ ლარი საწარმოებს შორის ისე, რომ წლის ბოლოს ყველა საწარმოდან მიღებული მოგებების ჯამი იყოს მაქსიმალური?

ამოხსნა. პირობითი ოპტიმიზაცია: $i=3,2,1$.

მე-3 ბიჯი - $i=3$. ვთქვათ, ამ ბიჯთან მიეედით S ინვესტიციით. ყველა ასეთი S-თვის და x_3-თვის მე-2 ცხრილის საფუძველზე შევადგინოთ $F_3(S)$-ის მნიშვნელობების ცხრილი (ცხრილი 3). ამისათვის გავითვალისწინოთ ის ფაქტი, რომ თუ მესამე ბიჯზე დარჩენილი გვაქვს ინვესტიციის S ერთეული, მაშინ იგი მთლიანად ჩაიდება Π_3-ში და ამიტომ ამ ბიჯზე $S=x_3$, ხოლო $F_3(S)=f_3(S,x_3)$.

ცხრილი 3

S \ x_3	0	1	2	3	4	5	$F_3(S)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	-	2,8	-	-	-	-	2,8	1
2	-	-	5,4	-	-	-	5,4	2
3	-	-	-	6,4	-	-	6,4	3
4	-	-	-	-	6,6	-	6,6	4
5	-	-	-	-	-	6,9	6,9	5

მე-2 ბიჯი - $i=2$. ვიპოვოთ Π_2 და Π_3 საწარმოებს შორის ინვესტიციების განაწილების ოპტიმალური სტრატეგია. ამ შემთხვევაში ბელმანის (7) განტოლებას აქვს სახე:

$$F_2(S)=\max_{x_2 \le S}[f_2(S,x_2)+F_3(S-x_2)], \qquad (9)$$

რომლის საფუძველზეც მე-2 და მე-3 ცხრილების გამოყენებით შევადგინოთ ცხრილი (ცხრილი 4).

ცხრილი 4

S \ x_2	0	1	2	3	4	5	$F_2(S)$	x_2^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2+2,8	3,2+0	-	-	-	5,4	0
3	0+6,4	2+5,4	3,2+2,8	4,8+2,8	-	-	7,4	1
4	0+6,6	2+6,4	3,2+5,4	4,8+2,8	6,2+0	-	8,6	2
5	0+6,9	2+6,6	3,2+6,4	4,8+5,4	6,2+2,8	6,4+0	10,2	3

როგორ ვიპოვეთ ამ ცხრილის რიცხვითი მნიშვნელობები? განვიხილოთ მაგალითად, $S=2$ სტრიქონის შესაბამისი რიცხვები.

როცა $S=2$ და $x_2=0$, მაშინ (9) ფორმულის თანახმად გვჭირდება $f_2(2,0)$ და $F_3(2-0)=F_3(2)$ სიდიდეები. აქედან პირველი ნიშნავს იმ მოგებას, რომელსაც მივიღებთ Π_2 საწარმოდან, თუ პირველი ბიჯის შემდეგ დარჩენილი 2 ერთეული ინვესტიციიდან მეორე ბიჯზე ამ საწარმოში არც ერთ ერთეულს არ ჩავდებთ. ასეთი მნიშვნელობა მე-2 ცხრილის ძალით არის 0. რაც შეეხება $F_3(2)$-ს, მე–3 ცხრილის თანახმად იგი ტოლია 5,4-ის. ამიტომ (2,0) სიტუაციაში გვაქვს 0+5,4=5,4.

(2,1) სიტუაციაში იმავე ფორმულით და ცხრილების ძალით გვაქვს: $f_2(2,1)+F_3(2-1)=2+2{,}8=4{,}8$.

(2,2) სიტუაციისათვის

$$f_2(2{,}2)+F_3(2-2)=3{,}2+0=3{,}2.$$

(9) ფორმულით $F_2(S)=F_3(2)=\max\{5{,}4;4{,}8;3{,}2\}=5{,}4$. რადგან ეს მაქსიმუმი მიიღწევა $x_2=0$-თვის, ამიტომ $x_2^*=0$.

1-ლი ბიჯი - $i=1$. აქ უნდა განვსაზღვროთ Π_1,Π_2 და Π_3 საწარმოებს შორის ინვესტიციების განაწილების ოპტიმალური სტრატეგია. ამ შემთხვევაში, ბელმანის (7) განტოლებიდან ვწერთ

$$F_1(S)=\max_{x_1\le S}[f_1(S,x_1)+F_2(S-x_1)].$$

სხვადასხვა S-თვის და x_1-თვის $F_1(S)$-ის მნიშვნელობის ცხრილის შესადგენად (ცხრილი 5) გამოვიყენოთ მე-2 და მე-4 ცხრილები.

ცხრილი 5

$S \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	$F_1(S)$	x_1^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2,2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2,2+2,8	3+0	-	-	-	5,4	0
3	0+7,4	2,2+5,4	3+2,8	4,1+0	-	-	7,6	1
4	0+8,6	2,2+7,4	3+5,4	4,1+2,8	5,2+0	-	9,6	1
5	0+10,2	2,2+8,6	3+7,4	4,1+5,4	5,2+2,8	5,9	10,8	1

ამით პირობითი ოპტიმიზაცია დამთავრებულია.

უპირობო ოპტიმიზაცია: $i=1,2,3$.

1-ლი ბიჯი - $i=1$. მე-5 ცხრილიდან ჩანს, რომ სამ საწარმოზე $S=K=5$ მლნ ლარის განაწილებით მიღებული მაქსიმალური შემოსავალი ტოლია $F_1(5)=10{,}8$. ამასთან Π_1-ს უნდა გამოეყოს $x_1^*=1$ მლნ ლარი. ამიტომ Π_2 და Π_3 საწარმოებისათვის გასანაწილებელი დარჩა $5-1=4$ მლნ ლარი. ეს უნდა მოხდეს მე-2 ბიჯზე.

მე-2 ბიჯი - $i=2$. ამ ბიჯზე 4 ერთეული ინვესტიციიდან Π_2 საწარმოში უნდა ჩავდოთ იმდენი, რომ Π_2 და Π_3 საწარმოებიდან მივიღოთ მაქსიმალური ჯამური მოგების მნიშვნელობა. იგი კი არის $F_2(4)$, რომელიც მე-4 ცხრილის თანახმად ტოლია 8,6-ის - $F_2(4)$=8,6. ეს კი შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა Π_2-ს გამოეყოფა $x_2^*=2$ მლნ ლარი.

მე-3 ბიჯი - $i=3$. მეორე ბიჯის შემდეგ გასანაწილებელი დარჩა $5-(1+2)=2$ ერთეული ინვესტიცია, რომელიც მთლიანად უნდა გადაეცეს Π_3 საწარმოს. ამით მისგან მივიღებთ $F_3(2)$ მოგებას, რომელიც მე-3 ცხრილის თანახმად ტოლია $F_3(2)$=5,4 მლნ ლარის და მაშასადამე, $x_3^*=2$.

ამრიგად, 5 ერთეული ინვესტიციის ოპტიმალური მართვაა $x^*=(1,2,2)$, რაც ნიშნავს: Π_1-ს 1 მლნ ლარი; Π_2-ს 2 მლნ ლარი; Π_3-ს 2 მლნ ლარი. იგი უზრუნველყოფს მაქსიმალურ ჯამურ მოგებას სამივე საწარმოდან

$$F(5)=f_1(1)+f_2(2)+f_3(2)=2,2+3,2+5,4=10,8$$

მლნ ლარს.

ამოცანა ამოხსნილია.

3. **დამოუკიდებელი სამუშაო.** ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. $m=4$ საწარმოს - Π_1,Π_2,Π_3,Π_4 განვითარებისათვის გამოყოფილია $K=4$ მლნ ლარის მოცულობის

ინვესტიცია. ცნობილია მათგან თითოეულის ეფექტურობა - მოგება გადაცემულ ინვესტიციაზე დამოკიდებულებით ერთი წლის ბოლოსათვის- $f_i(x_i)(i = 1,2,3,4)$. ვიგულისხმოთ, რომ: თითოეულ საწარმოს გადაეცემა მთელრიცხვა ინვესტიცია $x_i = \{0,1,2,3,4$. მოგებები მოცემულია ცხრილში (ცხრილი 6).

ცხრილი 6

x_i	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0
1	1,3	3	2	1
2	4	5,2	3,5	2,5
3	5,5	6,8	4,4	3,4
4	5,8	7	4,6	3,8

როგორ გავანაწილოთ $K = 4$ მლნ ლარი საწარმოებს შორის ისე, რომ წლის ბოლოს ყველა საწარმოდან მიღებული მოგებების ჯამი იყოს მაქსიმალური?

20. დინამიკური დაპროგრამების მოდელები: ოპტიმალური მარშრუტების პოვნა

1. სამუშაოს მიზანი - დინამიკური დაპროგრამების მეთოდით ამოეხსნათ ოპტიმალური მარშრუტის ორი ამოცანა. ორივე მიეკუთვნება მინიმუმის ამოცანების კლასს. მათგან პირველი შეეხება გზის ოპტიმალური პროექტის დაგეგმვას, მეორე კი - ოპტიმალური მარშრუტის პოვნას. პირველ ამოცანაში გამოვიყენებთ დინამიკური დაპროგრამების პრინციპს, პირობით და უპირობო ოპტიმიზაციებს ბელმანის განტოლების გარე, მეორეში კი გამოვიყენებთ ამ განტოლებას.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. ჩამოვაყალიბოთ პირველი ამოცანა და მივცეთ მას გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. მოვიყვანოთ მასთან დაკავშირებული განსაზღვრებანი.

ამოცანა 1. გზის დაპროექტება. უნდა დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ორი A და B პუნქტი, ვთქვათ საავტომობილო გზით. გზის ეს ადგილმდებარეობა მოიცავს ტყეს, ჭაობს, კლდეს და მდინარეს, სადაც ხიდის აგებაა საჭირო. როგორი პროექტი უნდა ავირჩიოთ იმისათვის, რომ მთელი გზის აგებაზე გაწეული ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური?

აქ არ გვაქვს ბუნებრივი ბიჯები, ისინი უნდა შემოვიღოთ ხელოვნურად. ამისათვის AB მონაკვეთი დავყოთ m ნაწილად, თითოეულზე გავატაროთ AB-ს მართობული წრფეები და ბიჯი ნიშნავდეს ერთი ასეთი წრფიდან მეორეზე გადასვლას. თუ ეს წრფეები საკმაოდ ახლოს იქნებიან ერთმანეთთან, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ თითოეული ასეთი გზის ნაწილი იქნება წრფივი.

i-ურ ბიჯზე მართვა ნიშნავდეს $x_i = \alpha_i$ კუთხეს, რომელსაც შეადგენს ამ მონაკვეთზე ასაგები გზის ნაწილი AB მონაკვეთთან. მთელი ოპერაციის მართვა კი შედგება ბიჯობრივი მართვებისაგან:

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m).$$

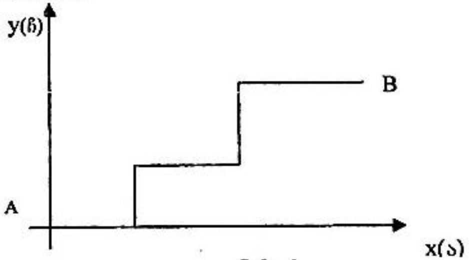
ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური მართვა x^*, ანუ დავგეგმოთ ისეთი გზის პროექტი, სადაც გზის თითოეული ნაწილის აგებაზე გაწეული ჯამური დანახარჯები იქნება მინიმალური

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i \to \min .$$

ვთქვათ, B პუნქტი მდებარეობს A-დან ჩრდილო–აღმოსავლეთ მხარეს. გზის გაყვანის პროცესის თითოეულ ბიჯზე შეგვიძლია ვიმოძრაოთ ან მკაცრად აღმოსავლეთით (მართვა ა), ან მკაცრად ჩრდილოეთით (მართვა ჩ). ამრიგად, ასეთ გამარტივებულ შემთხვევაში ყოველი $i = 1,2,...,m$-თვის ბიჯობრივი მართვა

$$\alpha_i = \text{ა} \quad \text{ან} \quad \alpha_i = \text{ჩ}.$$

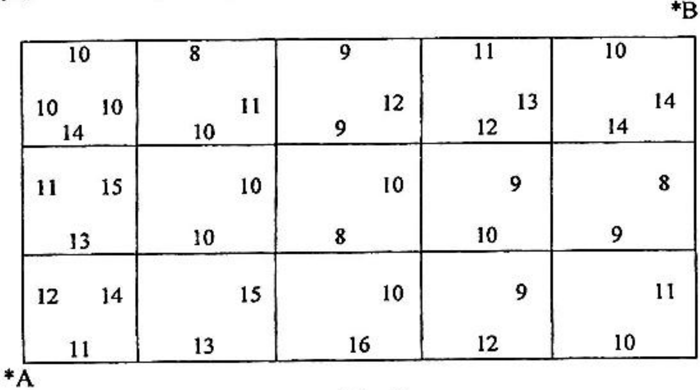
ამის გამო, მიღებული გზის მონაკვეთები პარალელურია ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის და ასეთი პროცესი სქემატურად შეგვიძლია გამოვსახოთ, მაგალითად შემდეგი სახით (ნახ.1):



ნახ. 1.

ვიგულისხმოთ, რომ A-დან და B-მდე მანძილი დანაწილებულია შემდეგნაირად: აღმოსაელეთით 5 ნაწილად, ჩრდილოეთით - 3 ნაწილად. მაშინ ნებისმიერი გზა A-დან B-მდე შედგება $m = 5 + 3 = 8$ მონაკვეთისაგან. ცნო-

ბილია თითოეულ ასეთ მონაკვეთზე გზის აგების ხარჯები, რომლებიც გამოვსახოთ შემდეგნაირად (ნახ. 2):



ნახ. 2.

უნდა ავირჩიოთ ისეთი გზა, რომლის მონაკვეთებზე რიცხვების ჯამი იქნება მინიმალური.

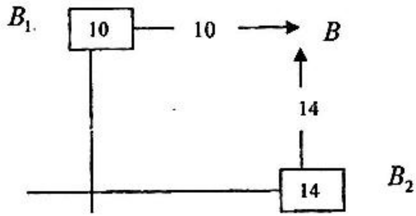
ამოცანის გადასაწყვეტად შეგვიძლია ავირჩიოთ ორი ხერხი: 1) განვიხილოთ გზის ყველა შესაძლო ვარიანტი და ავირჩიოთ ის, რომელზეც დანახარჯები იქნება მინიმალური. ცხადია, მონაკვეთების დიდი რიცხვისათვის ეს ხერხი საკმაოდ რთულია; 2) გზის აგების პროცესი დავანაწილოთ ბიჯებად - ერთი ბიჯი იყოს ერთი მონაკვეთი და მოვახდინოთ ბიჯობრივი მართვის ოპტიმიზაცია. აღმოჩნდა, რომ ეს ხერხი გაცილებით მოხერხებულია და იგი მიეკუთვნება დინამიკურ დაპროგრამებას.

განვიხილოთ მე-2) ხერხი ჩვენი ამოცანისათვის. ასაგები გზა განვიხილოთ, როგორც მართვადი სისტემა Σ, რომელიც მართვის ზემოქმედებით A-დან გადაადგილდება B-ში. ამ სისტემის მდგომარეობა თითოეული ბიჯის წინ ხასიათდება ორი მთელრიცხვა (x, y) კოორდინატით, რომელსაც შეესაბამება აქ მოყვანილი მართკუთხა ქსელის კვანძი და $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 3$. ყოველი ასეთი მდგომარეობისათვის უნდა ვიპოვოთ პირობითი ოპტიმალური

მართვა: ამ წერტილიდან წავიდეთ ან ჩრდილოეთით (მართვა ჩ), ან აღმოსავლეთით (მართვა ა); ეს მართვა ისე აირჩევა, რომ ბოლომდე ყველა დარჩენილი ბიჯის ჯამური ღირებულება მოცემული ბიჯის ჩათვლით იყოს მინიმალური. ეს ღირებულება არის ჩვენთვის კარგად ცნობილი პირობითი ოპტიმალური მოგება. იგი ჩვენს ამოცანაში არის არა მოგება, არამედ წაგება რიგითი ბიჯის წინ Σ სისტემის მოცემული მდგომარეობისათვის. მაშასადამე, საქმე გვაქვს მინიმუმის ამოცანასთან და ამიტომ ამოცანის ამოხსნის სქემა უნდა განვახორციელოთ წინა მე-19 სამუშაოში მოცემული დინამიკური დაპროგრამების (6) ფორმულით

$$F_i(S) = \min_{x_i} [\, f_i(S, x_i) + F_{i+1}(\varphi_i(S, x_i)) \,]. \qquad (1)$$

პირობითი ოპტიმიზაცია განვახორციელოთ საპირისპირო მიმართულებით - ბოლოდან საწყისისაკენ. პირველ რიგში მოვახდინოთ საბოლოოს, მე-8 ბიჯის პირობითი ოპტიმიზაცია. ამისათვის ცალკე განვიხილოთ ჩვენი ქსელის ზედა მარჯვენა კუთხე (ნახ. 3).



ნახ. 3.

ცხადია, მე-7 ბიჯის შემდეგ ჩვენ ვიმყოფებით ან B_1, ან B_2 წერტილში. თითოეულიდან მხოლოდ ერთადერთი გადაწყვეტილება რჩება ბოლო ბიჯის გასაკეთებლად. ამ წვეროების შესაბამის მართკუთხედებში მოვათავსოთ შესაბამისი რიცხვები და ისრებით მივუთითოთ მიმართულებები. ეს რიცხვებია პირობითი ოპტიმალური მოგებები, ხოლო ისრებით ნაჩვენები მიმართულებებია პი-

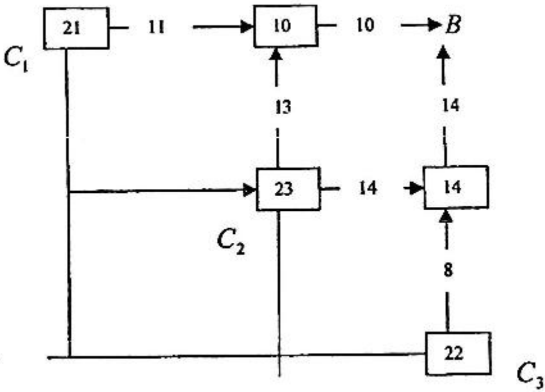
რობითი ოპტიმალური მართვები. პირობით ოპტიმალურ მოგებას ბოლო ბიჯზე, ანუ $F_m(S)$ ფუნქციას მინიმუმის ამოცანისათვის მე-19 ლაბორატორიული სამუშაოს (5) ფორმულის თანახმად, აქვს სახე

$$F_m(S)=\min_{x_m} f_m(S,x_m)\,, \qquad (2)$$

სადაც მინიმუმი აიღება ყველა იმ S მდგომარეობისათვის, რომელთაგან ერთი ბიჯით მივიღებთ საბოლოო მდგომარეობას. მისი ამოხსნით კი ვიპოვეთ როგორც პირობით ოპტიმალურ $x_m(S)$ მართვას, ისე პირობით ოპტიმალურ $F_m(S)$ მოგებას. მე-3 ნახ-ის თანახმად, ამ ფორმულიდან ვღებულობთ

$$F_8(B_1)=10,\ F_8(B_2)=14\,,\ \ x_8(B_1)=\text{ა},\ \ x_8(B_2)=\text{ჩ}.$$

ახლა მოვახდინოთ ბოლოსწინა, მე-7 ბიჯის ოპტიმიზაცია. მისი წინა (მე-6) ბიჯიდან ჩვენ შეიძლება აღმოვჩნდეთ ერთ-ერთში სამი C_1,C_2,C_3 წერტილიდან (ნახ. 4).



ნახ. 4.

თითოეული მათგანისათვის:

C_1-დან უნდა ვიმოძრაოთ აღმოსავლეთით და ბოლომდე. იგი ჯდება 21 ერთეული. დავწეროთ ეს რიცხვი C_1 წვეროში. ამრიგად, C_1 მდგომარეობის შემთხვევაში პირობითი ოპტიმალური მოგებაა $F_7(C_1) = 21$, ხოლო პირობითი ოპტიმალური მართვაა $x_7(C_1) =$ ა;

C_3-თვის პირობითი ოპტიმალური მოგებაა $F_7(C_3) = 22$ და დავწეროთ იგი ამ წვეროში. პირობითი ოპტიმალური მართვაა $x_7(C_3) =$ ჩ;

C_2 მდგომარეობიდან შეგვიძლია ვიმოძრაოთ როგორც ჩრდილოეთით, ისე აღმოსავლეთით. პირველ შემთხვევაში სამუშაო ჯდება 23 ერთეული, მეორე შემთხვევაში კი–28. ამიტომ, ამ მდგომარეობისათვის პირობითი ოპტიმალური მოგება იქნება $F_7(C_2) = 23$, ხოლო $x_7(C_2) =$ ჩ. მოვათავსოთ C_2 წვეროში 23.

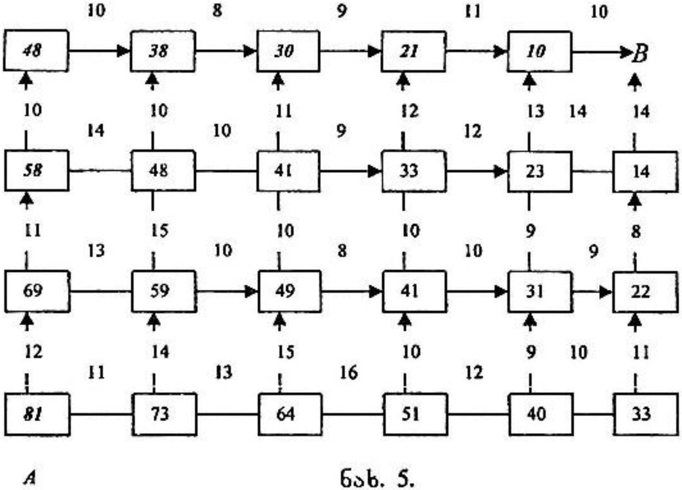
ანალოგიურად განვიხილავთ წინა ბიჯებს, რომლებსაც მივყავართ C_1, C_2, C_3 მდგომარეობებში. ყველა მათგანისათვის ვიპოვით პირობით ოპტიმალურ მოგებებს და მართვებს. ამ პროცესს გავაგრძელებთ მანამ, სანამ არ მივალთ საწყის A მდგომარეობამდე. ამრიგად, ყოველ ბიჯზე ვახდენთ მხოლოდ ამ ბიჯის პირობით ოპტიმიზაციას, ხოლო მისი მომდევნო ბიჯების ოპტიმიზაცია უკვე მოხდენილია. საბოლოო შედეგები გამოვსახოთ მე-4 ნახაზზე მოცემული სქემის ბოლო ნახაზზე. ამ საბოლოო სქემაში პირობითი ოპტიმალური მოგებები მოვათავსოთ მართკუთხედებში, ხოლო პირობითი ოპტიმალური მართვები აღნიშნულია ისრებით (ნახ. 5).

ამრიგად, პირობითი ოპტიმიზაცია უკვე მიღებულია: რომელ მდგომარეობაშიც არ უნდა აღმოვჩნდეთ, ვიცით აქედან საით ვიმოძრაოთ და რა გვიჯდება ეს გზა აქედან დაწყებული ბოლომდე. A წერტილში ნაჩვენები რიცხვი არის ოპტიმალური ხარჯები მთელი გზის აგებისათვის A-დან B-მდე: $F^* = 81$.

ახლა ასაგები დაგვრჩა უპირობო ოპტიმალური მართვა - ტრაექტორია, რომელიც A-დან B-ში მიგვიყვანს ყველაზე იაფი გზით. ამისათვის ყურადღება უნდა მივაქციოთ მხოლოდ საწყისი კვანძებიდან გამომავალ ისრებს. ასეთი კვანძები ნახაზზე ისეთი მართკუთხედებია, რომლებშიც მოგებები დახრილი და გამუქებულია. აქედან ჩანს, რომ შესაბამისი უპირობო ოპტიმალური მართვა იქნება

$$x^{*} = (\text{ჩ, ჩ, ჩ, ა, ა, ა, ა, ა}).$$

ამით ამოცანა ამოხსნილია.



ნახ. 5.

შენიშვნა 1. პირობითი ოპტიმალური მართვის პოვნისას შეიძლება აღმოვჩნდეთ ისეთ სიტუაციაში, როცა ერთი მდგომარეობისათვის ორივე მართვა ოპტიმალურია, ანუ ორივე გვაძლევს ერთსა და იმავე ხარჯებს ამ წერტილიდან ბოლომდე. ამ შემთხვევაში ვირჩევთ მათგან ნებისმიერს. ანალოგიურად მოვიქცევით დინამიკური დაპროგრამების ნებისმიერ ამოცანაში, ასეთი შემთხვევისათვის.

ახლა შევეცადოთ იგივე ამოცანა ამოვხსნათ ჭეშმარიტი ხერხით, ანუ თითოეულ ბიჯზე ავირჩიოთ ყველაზე სასურველი მიმართულება. ასე მივიღებთ მართვას

$$x = (ა, ა, ჩ, ა, ა, ჩ, ჩ, ა).$$

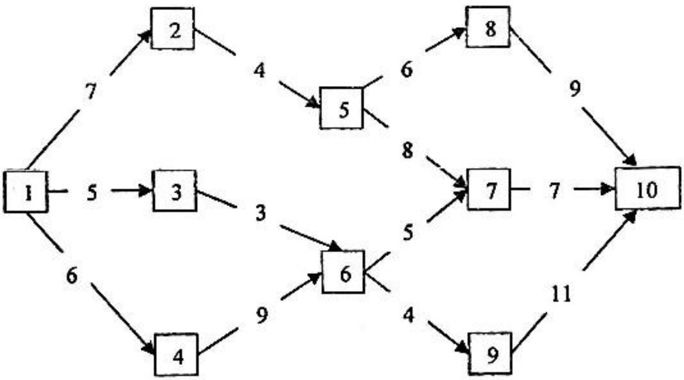
ამ გზის აგებისათვის შესაბამისი დანახარჯები იქნება

$$F = 11 + 13 + 15 + 8 + 10 + 9 + 13 + 10 = 89\,,$$

რაც მეტია, ვიდრე ზემოთ მიღებული ოპტიმალური მოგება $F^{*} = 81$.

შენიშვნა 2. A და B წერტილებიდან საწყის წერტილად შეგვიძლია ჩავთვალოთ B, A კი - საბოლოოდ. ვფიქრობთ, მოცემულ სისტემაში აღწერილი პროცესი უფრო შეესაბამება რეალობას.

ამოცანა 2. ოპტიმალური მარშრუტის პოვნა. მოცემულია სატრანსპორტო ქსელი ორიენტირებული გრაფის სახით, რომელიც შედგება 10 პუნქტისაგან (ქალაქისაგან) (ნახ. 6):



ნახ. 6.

აქ ისრებით ნაჩვენებია ამ პუნქტებს შორის გადაადგილების მიმართულება, ხოლო მასზე დაწერილი რიცხვი მიუთითებს მათ შორის მანძილს კმ–ით (შეიძლება იგი გამ-

ოსახავდეს ტვირთის გადატანის ღირებულებას ან სხვას). ვიპოვოთ ოპტიმალური მარშრუტი - უმოკლესი მანძილი 1-ელი პუნქტიდან მე-10 პუნქტამდე.

ამოხსნა. ასეთი ამოცანა ამოხსნილი გვაქვს ქსელურ მოდელებში. ახლა იგი ამოვხსნათ დინამიკური დაპროგრამების მეთოდით. ამისათვის, პირველ რიგში უნდა დავწეროთ შესაბამისი ბელმანის განტოლება. რადგან აქ საქმე გვაქვს მინიმუმის ამოცანასთან, ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$F_i(S) = \min_{x_i} [\, f_i(S, x_i) + F_{i+1}(S') \,], \tag{3}$$

სადაც $S' = \varphi_i(S, x_i)$.

ავხსნათ მასში შემავალი პარამეტრების და ფუნქციების შინაარსი ჩვენი ამოცანისათვის.

შევნიშნოთ, რომ საწყისი პუნქტიდან ბოლო პუნქტში ჩასვლისათვის საჭიროა ზუსტად $m = 4$ ბიჯის გაკეთება და 3 შუალედურ პუნქტში გავლა. ეს პუნქტები დავყოთ 5 ზოლად:

$$S_0 = \{1\}, S_1 = \{2,3,4\}, S_2 = \{5,6\}, S_3 = \{7,8,9\}, S_4 = \{10\}.$$

ამასთან, i-ურ ბიჯს შეესაბამება $S_i (i = 1,2,3,4)$ ზოლიდან პუნქტის არჩევა, რომელსაც ვუწოდოთ S_i ზოლის მდგომარეობა. ამრიგად, $S_i (i = 1,2,3,4)$ ზოლში შემავალი პუნქტები ამ ზოლის მდგომარეობებია და შეესაბამება i-ურ ბიჯებს. მაგალითად, S_1 ზოლში შემავალი 2, 3, 4 პუნქტები არის S_1 ზოლის მდგომარეობები და შეესაბამება 1-ელ ბიჯებს; S_2 ზოლში შემავალი 5 და 6 პუნქტები შეესაბამება მე–2 ბიჯებს და ა.შ.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

Σ სისტემაში ვიგულისხმოთ მოძრავი სხეული, რომელიც 1–ელი პუნქტიდან უნდა გადაადგილდეს მე-10-ში;

i-ურ ბიჯზე არჩეული x_i მართვა გვიჩვენებს წინა ბიჯზე არჩეული S ზოლის მდგომარეობიდან შემდეგი ზოლის მდგომარეობის არჩევას, რომელშიც აღმოჩნდება Σ ისრით მითითებული გზის გავლით. მაგალითად, x_1

მართვით Σ სისტემა $S=S_0$ ზოლის ერთადერთი მდგომარეობიდან (1-ელი პუნქტიდან) გადადის შემდეგი (S_1) ზოლის რომელიმე კონკრეტულ მდგომარეობაში (ან 2-ში, ან 3-ში, ან 4-ში); x_2 მართვით Σ წინა ბიჯზე არჩეული $S=S_1$ ზოლის მდგომარეობიდან (ან 1-დან, ან 2-დან, ან 3-დან) გადადის შემდეგი (S_2) ზოლის რომელიმე კონკრეტულ (ან 5-ში, ან 6-ში) მდგომარეობაში და ა.შ. ;

i-ურ ბიჯზე არჩეული x_i მართვის შესაბამისი ლოკალური მოგება $f_i(S,x_i)$ აღნიშნავს იმ გზის სიგრძეს, რომლითაც აღმოვჩნდებით S ზოლის მდგომარეობიდან შემდეგი ზოლის მდგომარეობაში;

პირობითი ოპტიმალური მოგება $F_i(S)$ აღნიშნავს იმ მინიმალურ სიგრძეთა მანძილების ჯამს, რომელიც მიიღება ყველა ბიჯზე i-ურიდან დაწყებული ამავე ბიჯისა და საბოლოო $m=4$ ბიჯის ჩათვლით, როცა i-ური ბიჯის წინ Σ სისტემა იმყოფება S მდგომარეობაში;

$F_{i+1}(S^{'})=F_{i+1}(\varphi_i(S,x_i))$ აღნიშნავს პირობით ოპტიმალურ მოგებას შემდეგი $(i+1)$-ე ბიჯისათვის, როცა Σ სისტემა i-ური ბიჯით იმყოფება $S^{'}$ მდგომარეობაში;

პირობითი ოპტიმალური მართვა $x_i(S)$ არის ოპტიმალური მართვა i-ურ ბიჯზე, რომელიც ყველა შემდეგ დარჩენილ ბიჯზე ოპტიმალურ მართვასთან ერთად გვაძლევს ჯამურ მინიმალურ მანძილს i-ური ბიჯის შესაბამის უმცირეს მანძილთან ერთად.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ყველა $i=1,2,3,4$ ბიჯისათვის განვსაზღვროთ $F_i(S)$ და $x_i(S)$.

ახლა გადავიდეთ ამოცანის ამოხსნაზე.

პირობითი ოპტიმიზაცია: $i=4,3,2,1$.

მე-4 ბიჯი - $i=4$. ამ ბიჯით საბოლოო მე-10 პუნქტში ჩასვლა შეგვიძლია $S=S_3$ – ის 7, 8 ან 9 პუნქტებიდან. ჩავწეროთ ამ ბიჯის მონაცემები ცხრილში (ცხრილი 1).

ცხრილი 1

S \ x_4	10	$F_4(S)$	x_4^*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

მე-3 ბიჯი - $i=3$. ამ შემთხვევაში, (3) განტოლებას აქვს სახე:

$$F_3(S)=\min_{x_3}[f_3(S,x_3)+F_4(S')].$$

მე-6 ნახ-ისა და 1-ელი ცხრილის მონაცემებით შევადგინოთ მე-2.

ცხრილი 2

S \ x_3	7	8	9	$F_3(S)$	x_3^*
5	8+7	6+9	-	15	7; 8
6	5+7	-	4+11	12	7

მე-2 ბიჯი - $i=2$. ამ ბიჯზე (3) განტოლება გვაძლევს

$$F_2(S)=\min_{x_2}[f_2(S,x_2)+F_3(S')].$$

მე-6 ნახ-ის და მე-2 ცხრილის 2-ის მონაცემებით შევადგინოთ მე-3 ცხრილი.

ცხრილი 3

x_2 \ S	5	6	$F_2(S)$	x_2^*
2	4+15	-	19	5
3	-	3+12	15	6
4	-	9+12	21	6

1-ელი ბიჯი - $i=1$. აქ

$$F_1(S)=\min_{x_1}[f_1(S,x_1)+F_2(S')].$$

მე-6 ნახ-ით და მე-3 ცხრილით შევადგინოთ მე-4 ცხრილი.

ცხრილი 4

x_1 \ S	2	3	4	$F_1(S)$	x_1^*
1	7+19	5+15	6+21	20	3

ამით პირობითი ოპტიმიზაცია დამთავრებულია.

უპირობო ოპტიმიზაცია: $i=1,2,3,4$.

1-ელი ბიჯი - $i=1$. მე-4 ცხრილიდან ჩანს, რომ 1-ელი პუნქტიდან მე-10-ში ჩასვლა შესაძლებელია ყველაზე უმოკლესი მანძილით - $F_1(3)=20$ კმ-ით. ამასთან, ეს მოხდება თუ 1-ელი პუნქტიდან მივალთ მე-3 პუნქტში, ანუ გავივლით 5 კმ-ს.

მე-2 ბიჯი - $i=2$. მე-3 ცხრილის მონაცემებით მე-3 პუნქტიდან უმოკლესი $F_2(6)=15$ კმ-ით ჩავალთ მე-10 პუნქტში, თუ მე-3-დან ჩავალთ მე-6 პუნქტში, ანუ მეორე ბიჯზე გავივლით 3 კმ-ს.

მე-3 ბიჯი - $i=3$. მე-2 ცხრილის ძალით, მე-6 პუნქტიდან ბოლოში ჩავალთ უმოკლესი $F_3(7)=12$ კმ-ით, თუ მე-6-დან ჩავალთ მე-7-ში, ანუ გავივლით 5 კმ- ს.

მე-4 ბიჯი - $i=4$. 1-ელი ცხრილიდან მე-10-ში ჩავალთ ერთადერთი გზით და ეს მანძილია $F_4(10)=7$ კმ.

ამრიგად, ოპტიმალური მარშრუტია

$$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 10$$

და ეს მანძილია 5+3+5+7=20 კმ.

ამოცანა ამოხსნილია. იგი შეგვიძლია ამოეხსნათ ყველა შესაძლო ვარიანტის ანალიზით, მაგრამ გამოყენებული მეთოდი გაცილებით მარტივია.

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ ან ორ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათელის პროცესში წარმოადგენენ საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანები:

1. დაადგინეთ ოპტიმალური გზის პროექტი A პუნქტიდან B პუნქტამდე, რომლებიც განლაგებულია 1-ელ ნახ-ზე მოცემული სქემით. დაანაწილეთ მათ შორის მანძილი შემდეგნაირად: აღმოსავლეთით 4 ნაწილად, ჩრდილოეთით 5 ნაწილად. ხარჯების ცხრილი შეადგინეთ მე-5 ნახ-ის შესაბამისად.

2. დაადგინეთ ოპტიმალური მარშრუტი ორიენტირებული სატრანსპორტო ქსელისაგან, რომელიც შედგება 8 პუნქტისაგან (ქალაქისაგან). მიუთითეთ მანძილები.

21. მარკოვის პროცესები და მარკოვის ჯაჭვები

1. სამუშაოს მიზანი - განსაზღვრულია მარკოვის ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ჯაჭვები, როგორც ფიზიკურ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესების კერძო შემთხვევები. შემოტანილია ასეთი ჯაჭვების აღწერისათვის საჭირო ძირითადი ცნებები და ფორმულები. ამ ფორმულების საშუალებით უნდა განვსაზღვროთ სისტემაში მიმდინარე მარკოვის ჯაჭვის მდგომარეობების ალბათობები ნებისმიერი სასრული ბიჯის შემდეგ. სასურველია დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. ვთქვათ, ფიზიკური სისტემა Σ დროის ცვლილების შესაბამისად იცვლის მდგომარეობას - ერთი მდგომარეობიდან გადადის მეორეში, ამასთან წინასწარ უცნობი, შემთხვევითი სახით. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ Σ სისტემაში მიმდინარეობს შემთხვევითი პროცესი. Σ სისტემა შეიძლება იყოს: ტექნიკური მოწყობილობა ან ასეთი მოწყობილობების ჯგუფი; მრეწველობის დარგი; ცოცხალი ორგანიზმი; პოპულაცია და სხვ. შემთხვევითი პროცესია, მაგალითად: კომპიუტერის ფუნქციონირების პროცესი; მართვადი რაკეტის ან კოსმოსური აპარატის მოცემულ ორბიტაზე გაყვანის პროცესი; კლიენტების მომსახურების პროცესი სალაროსთან და ა.შ.

Σ სისტემაში მიმდინარე შემთხვეეით პროცესს ეწოდება მარკოვის პროცესი (ან თანაქმედებათა არარსებობის პროცესი), თუ იგი ხასიათდება შემდეგი თვისებით:

როგორიც არ უნდა იყოს სისტემის მდგომარეობა დროის t_0 მომენტში, მისი ნებისმიერი მდგომარეობა მომავალში $(t > t_0)$ დამოკიდებულია მხოლოდ მის ახლანდელ $(t = t_0)$ მდგომარეობაზე და არაა დამოკიდებული იმა-

ზე, თუ როგორ განვითარდა პროცესი წარსულში - როდის და რა გზით მოვიდა სისტემა ამ მდგომარეობაში (აქედან ჩანს მარკოვის პროცესის ნათელი კავშირი დინამიკური დაპროგრამების ამოცანასთან).

ამრიგად, მარკოვის პროცესში მომავალი განვითარება დამოკიდებულია მის ახლანდელ მდგომარეობაზე და არაა დამოკიდებული მისი განვითარების წინაისტორიაზე.

იმის მიხედვით, როგორ და დროის რა მომენტებში იცვლის Σ სისტემა თავის მდგომარეობას, მარკოვის პროცესები იყოფა კლასებად. განვსაზღვროთ ისინი.

შემთხვევით პროცესს ეწოდება **პროცესი დისკრეტული მდგომარეობებით**, თუ სისტემის შესაძლო მდგომარეობები $S_1, S_2, \ldots$ შეგვიძლია ერთი-მეორის მომდევრობით გადავნომროთ, ხოლო თვით პროცესი იმაში მდგომარეობს, რომ დროის ცვლილების შესაბამისად Σ სისტემა წამიერად გადადის ერთი მდგომარეობიდან რომელიმე სხვა მდგომარეობაში.

მაგალითი 1. ტექნიკური სისტემა Σ შედგება ორი კვანძისაგან - {1,2}, რომელთაგან თითოეულის მწყობრიდან გამოსვლა შესაძლებელია სისტემის ფუნქციონირების ნებისმიერ მომენტში. ამ შემთხვევაში, სისტემის მდგომარეობებია: S_1-ორივე კვანძი მუშაობს; S_2-პირველი კვანძი გამოვიდა მწყობრიდან, მეორე მუშაობს; S_3-მეორე გამოვიდა მწყობრიდან, პირველი მუშაობს; S_4-ორივე კვანძი გამოვიდა მწყობრიდან.

ამრიგად, მოცემული სისტემის ყველა შესაძლო მდგომარეობა ჩვენ გადავნომრეთ. სისტემაში მიმდინარე პროცესი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი დროის რაიმე მომენტში შემთხვევითი სახით გადადის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში. მაშასადამე, გვაქვს შემთხვევითი პროცესი დისკრეტული მდგომარეობებით.

შემთხვევითი პროცესი დისკრეტული მდგომარეობებით შეგვიძლია გამოვსახოთ მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის სახით.

შემთხვევით პროცესს ეწოდება **პროცესი უწყვეტი მდგომარეობებით**, თუ სისტემის მდგომარეობა იცვლება

მდოვრედ, თანდათანობით. ასეთია მაგალითად, ელექტროქსელ'ში ძაბვის ცვლილება.

შემთხვევით პროცესს ეწოდება პროცესი დისკრეტული დროით, თუ სისტემის ერთი მდგომარეობიდან გადასვლა მეორეში შესაძლებელია მხოლოდ მკაცრად განსაზღვრულ, წინასწარ ფიქსირებულ დროის $t_1, t_2, \ldots$ მომენტებში. დროის ამ მომენტებს შორის Σ სისტემის მდგომარეობები უცვლელია.

შემთხვევით პროცესს ეწოდება პროცესი უწყვეტი დროით, თუ სისტემის ერთი მდგომარეობიდან გადასვლა მეორეში შესაძლებელია დროის ნებისმიერ, წინასწარ უცნობ შემთხვევით t მომენტში.

ჩვენ განვიხილავთ მარკოვის შემთხვევით პროცესს დისკრეტული მდგომარეობებით და დისკრეტული დროით. ასეთ პროცესს მარკოვის ჯაჭვი ეწოდება. ამრიგად, მარკოვის ჯაჭვი წარმოადგენს მარკოვის პროცესის კერძო შემთხვევას.

ვთქვათ, Σ სისტემის შესაძლო მდგომარეობებია

$$S_1, S_2, \ldots, S_n,$$

ამასთან სისტემის გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში შესაძლებელია მხოლოდ

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$$

მომენტებში. დროის ამ მომენტებს ვუწოდებთ პროცესის ბიჯებს ან ეტაპებს და Σ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევით პროცესს განვიხილავთ, როგორც მთელრიცხვა $1, 2, \ldots, k, \ldots$ არგუმენტის (ბიჯის ნომრის) ფუნქციას.

Σ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესი იმაში მდგომარეობს, რომ დროის $t_1, t_2, \ldots$ მიმდინარე მომენტებში Σ სისტემა აღმოჩნდება ამა თუ იმ მდგომარეობაში. ასეთია, მაგალითად შემთხვევითი პროცესი

$$S_1 \to S_3 \to S_5 \to S_4 \to S_2 \to S_1 \to \ldots,$$

ასევე

$$S_1 \to S_2 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_4 \to \ldots.$$

საზოგადოდ, დროის $t_1, t_2, \ldots$ მომენტებში სისტემა შესაძლოა არა მხოლოდ იცვლიდეს მდგომარეობებს, არამედ შეიძლება იმავეში დარჩეს, მაგალითად

$$S_1 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_3 \to S_3 \to S_4 \to \ldots.$$

ვთქვათ, k ბიჯის შემდეგ Σ სისტემა აღმოჩნდება S_i მდგომარეობაში. ასეთი ხდომილობა აღვნიშნოთ $S_i^{(k)}$-თი. ნებისმიერი k-თვის ხდომილობები

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \ldots, S_i^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$$

არის არათავსებადი და ქმნის სრულ ჯგუფს.

Σ სისტემაში მიმდინარე პროცესი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ხდომილობათა მიმდევრობა - ჯაჭვი. ასეთია, მაგალითად მიმდევრობა

$$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \ldots.$$

ხდომილობათა ასეთ შემთხვევით მიმდევრობას ეწოდება **მარკოვის ჯაჭვი,** თუ თითოეული ბიჯისათვის სისტემის ნებისმიერი S_i მდგომარეობიდან ნებისმიერ S_j მდგომარეობაში გადასვლა არაა დამოკიდებული იმაზე, როდის და როგორ მივიდა ის S_i მდგომარეობაში.

მარკოვის ჯაჭვს აღვწერთ სისტემის საწყის მდგომარეობათა ალბათობების საშუალებით. განვსაზღვროთ იგი.

ვთქვათ, დროის ნებისმიერ მომენტში, ანუ ნებისმიერი k-ური ბიჯის შემდეგ Σ სისტემა შეიძლება იმყოფებოდეს

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში. მაშასადამე, ადგილი აქვს არათავსებად ხდომილობათა ერთ-ერთ ჯგუფს:

$$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \ldots, S_i^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}.$$

ამ ხდომილობათა ალბათობებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

ალბათობები პირველი ბიჯის შემდეგ -

$$P(S_1^{(1)}) = p_1(1), P(S_2^{(1)}) = p_2(1), \ldots, P(S_n^{(1)}) = p_n(1);$$

ალბათობები მეორე ბიჯის შემდეგ -

$$P(S_1^{(2)}) = p_1(2), P(S_2^{(2)}) = p_2(2), \ldots, P(S_n^{(2)}) = p_n(2);$$

საზოგადოდ, ალბათობები k-ური ბიჯის შემდეგ -

$$P(S_1^{(k)}) = p_1(k), P(S_2^{(k)}) = p_2(k), \ldots, P(S_n^{(k)}) = p_n(k).$$

ცხადია, ყოველი k ბიჯისათვის

$$p_1(k)+p_2(k)+\cdots+p_n(k)=1.$$

შევადგინოთ ვექტორი

$$a^{(k)}=(p_1(k);p_2(k);...;p_n(k)). \qquad (1)$$

ამ ვექტორს ეწოდება Σ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი k-ური ბიჯის შემდეგ.

ძირითადი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ვიპოვოთ Σ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობები ნებისმიერი k-ური ბიჯის შემდეგ.

ასეთი ამოცანის გადასაწყვეტად უნდა მოვითხოვოთ შემდეგი: ნებისმიერი ბიჯისათვის (დროის $t_1,t_2,...,t_k,...$ მიმდევრობისათვისან $1,2,...,k,...$ ნომრებისათვის) ვიცით სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლის ალბათობა. ასეთ ალბათობას ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობა.

მარკოვის ჯაჭვს ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი გადასვლის ალბათობები არაა დამოკიდებული ბიჯის ნომერზე (ანუ დროზე). წინააღმდეგ შემთხვევაში, მარკოვის ჯაჭვს ეწოდება არაერთგვაროვანი.

Σ სისტემის $S_1,S_2,...,S_n$ მდგომარეობისათვის ალბათობა იმისა, რომ ერთი ბიჯის შემდეგ სისტემა გადავა S_i მდგომარეობიდან S_j მდგომარეობაში, ალვნიშნოთ p_{ij}-ით. მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ასეთი ალბათობებისაგან შევადგინოთ მარკოვის ჯაჭვის გადასვლების ალბათობების მატრიცა

$$P=\begin{array}{c|ccccc} & S_1 & S_2 & \cdot & \cdot & \cdot & S_n \\ \hline S_1 & p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ S_2 & p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{array}, \qquad (2)$$

რომლის სტრიქონებს შეესაბამება სისტემის ძველი მდგომარეობები, ხოლო სვეტებს - ახალი მდგომარეობები. აქ

ზოგიერთი ალბათობა შეიძლება იყოს ნული, რაც ნიშნავს, რომ შესაბამისი გადასვლა არ ხდება, ანუ სისტემა იმავე მდგომარეობაში რჩება.

ჩვენი აღნიშვნების თანახმად, p_{ij} პირობითი ალბათობაა

$$p_{ij} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)}).$$

(2)-ის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ მის ყოველ სტრიქონში ალბათობების ჯამი არის 1:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ i = 1,2,...,n.$$

მარკოვის ჯაჭვის შესწავლისას ყოველთვის ვგულისხმობთ, რომ სისტემა საწყის მომენტში (პირველი ბიჯის წინ) იმყოფება წინასწარ განსაზღვრულ მდგომარეობაში, მაგალითად S_m-ში. მაშინ საწყისი მომენტისათვის $(t = 0)$ გვექნება

$$p_1(0) = 0; p_2(0) = 0;...; p_m(0) = 1;...; p_n(0) = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ ყველა მდგომარეობის ალბათობა, გარდა S_m მდგომარეობისა, ნულია, ხოლო S_m მდგომარეობის ალბათობა არის 1. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სისტემის საწყისი მდგომარეობების ალბათობების ვექტორია

$$a^{(0)} = (0;...;0;1;0;...;0).$$

განვიხილოთ მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის შემთხვევა. ამ დროს, ვიცით რა ერთგვაროვანი გადასვლების მატრიცა (2) და სისტემის საწყისი მდგომარეობების ალბათობების ვექტორი $a^{(0)}$, k-ური ბიჯის შემდეგ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი (1) გამოითვლება რეკურენტული ფორმულით

$$a^{(k)} = a^{(k-1)}.P,$$

ანუ

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) p_{ji}, \ i = 1,2,...,n. \qquad (3)$$

მაშასადამე, აღნიშნულ პირობებში შეგვიძლია სრულად განვსაზღვროთ მარკოვის ჯაჭვი.

ამოცანა 1. სისტემის ყველა შესაძლო S_1, S_2, S_3, S_4 მდგომარეობებიდან საწყის მომენტში იგი იმყოფება S_1 მდგომარეობაში, ანუ $a^{(0)} = (1;0;...;0)$. მოცემულია შესაბამისი მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვი გადასვლების ალბათობების მატრიცით

$$P = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline S_1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ S_2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} . \qquad (4)$$

ვიპოვოთ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი 3 ბიჯის შემდეგ.

ამოხსნა. პირველი ბიჯის შემდეგ, სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების

$$a^{(1)} = (p_1(1); p_2(1); p_3(1); p_4(1))$$

ვექტორის კომპონენტები (4) მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტებია შესაბამისად

$$p_1(1) = 0,3; p_2(1) = 0,4; p_3(1) = 0,2; p_4(1) = 0,1$$

და $a^{(1)} = (0,3;0,4;0,2;0,1)$.

მეორე ბიჯის შემდეგ, სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი $a^{(2)}$ გამოვთვალოთ $a^{(1)}$ ვექტორით და (3) ფორმულით:

$$p_i(2) = \sum_{j=1}^{4} p_j(1) p_{ji}, \ i = 1,2,3,4:$$

$$p_1(2) = 0,3.0,3 + 0,4.0 = 0,09;$$

$$p_2(2) = 0,3.0,4 + 0,4.0,4 = 0,28;$$

$$p_3(2) = 0,3.0,2 + 0,4.0,4 + 0,2.0,3 = 0,28;$$

$$p_4(2) = 0,3.0,1 + 0,4.0,2 + 0,2.0,7 + 0,1.1 = 0,35.$$

ამრიგად, $a^{(2)} = (0,09;0,28;0,28;0,35)$.

მესამე ბიჯის შემდეგ, სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი $a^{(3)}$ გამოითვლება $a^{(2)}$ ვექტორით და ფორმულით

$$p_i(3) = \sum_{j=1}^{4} p_j(2) p_{ji}, i = 1,2,3,4:$$

$$p_1(3) = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027;$$

$$p_2(3) = 0,09 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,4 = 0,148;$$

$$p_3(3) = 0,09 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,3 = 0,214$$

$$p_4(3) = 0,09 \cdot 0,1 + 0,28 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 1 = 0,611.$$

ამრიგად, ვიპოვეთ მესამე ბიჯის შემდეგ სისტემის S_1, S_2, S_3, S_4 მდგომარეობების ალბათობების ვექტორი

$$a^{(3)} = (0,027; 0,148; 0,214; 0,611).$$

აქამდე განვიხილეთ მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვი. ახლა განვიხილოთ მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვი, ანუ ისეთი ჯაჭვი, რომლისთვისაც გადასვლის ალბათობა და მაშასადამე, გადასვლების ალბათობების მატრიცა P (2) იცვლება ბიჯიდან ბიჯამდე.

აღვნიშნოთ k-ური ბიჯის შემდეგ სისტემის S_i (იგივე $S_i^{(k-1)}$) მდგომარეობიდან S_j (იგივე $S_j^{(k)}$) მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა $p_{ij}^{(k)}$-თი, ხოლო შესაბამისი გადასვლების ალბათობების მატრიცა იყოს

$$P^{(k)} = \begin{array}{c|ccccc} & S_1 & S_2 & . & . & . & S_n \\ \hline S_1 & p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & . & . & . & p_{1n}^{(k)} \\ S_2 & p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & . & . & . & p_{2n}^{(k)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ S_n & p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & . & . & . & p_{nn}^{(k)} \end{array}, \qquad (5)$$

სადაც $p_{ij}^{(k)}$ პირობითი ალბათობაა - $p_{ij}^{(k)} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)})$.

k-ური ბიჯის შემდეგ, მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლების ალბათობების (5) მატრიცით Σ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი

$$A^{(k)} = (p_1(k); p_2(k); ...; p_n(k))$$

გამოითვლება ფორმულით

$$A^{(k)} = a^{(k-1)} . P^{(k)},$$

ანუ

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) p_{ji}^{(k)}, \ i = 1,2,...,n. \qquad (6)$$

ამოცანა 2. სისტემის S_1, S_2, S_3, S_4 მდგომარეობებიდან სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება S_1-ში. მოცემულია მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლების ალბათობების მატრიცები პირველი, მეორე და მესამე ბიჯის შემდეგ:

$$P^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline S_1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ S_2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad P^{(2)} = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline S_1 & 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ S_2 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ S_3 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$P^{(3)} = \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline S_1 & 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ S_2 & 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ S_3 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

ვიპოვოთ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორი 3 ბიჯის შემდეგ.

ამოხსნა. რადგან საწყის მომენტში სისტემა იმყოფება S_1 – ში, ამიტომ

$$A^{(0)} = (1;0;0;0) \text{ და } A^{(1)} = (0,3;0,4;0,2;0,1).$$

(6) ფორმულის და $P^{(2)}$ მატრიცის ძალით, მეორე ბიჯის შემდეგ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობებია

$p_1(2) = 0,3.0,1 = 0,03;$

```
P=[.3,.4,.2,.1;0,.4,.4,.2;0,0,.3,.7;0 0 0 1 ]
a0=[1 0 0 0]
k=3
```
და m–ფაილ-ფუნქციის შესრულების ბრძანება

```
>> lab21E(P,a0,k)
```

პასუხი:

```
P =
  0.3000   0.4000   0.2000   0.1000
       0   0.4000   0.4000   0.2000
       0        0   0.3000   0.7000
       0        0        0   1.0000
a0 =   1   0   0   0
k =   3
ak =   0.0270   0.1480   0.2140   0.6110
```

მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვი

```
function lab21A(P1,P2,P3,a0)
% მარკოვის არაერთგვაროვანი ჯაჭვი
% P1,P2,P3–გადასვლების ალბათობების მატრიცები
%პირველი, მეორე და მესამე ბიჯის შემდეგ
%a–სისტემის საწყისი მდგომარეობების ალბათობების
%ვექტორი
a=a0;
n=length(a0);
  a1=a*P1;
  a2=a1*P2;
  a3=a2*P3;
a1,a2,a3
```
ბრძანებათა ფანჯარაში შესატანი არგუმენტები:

```
P1=[.3,.4,.2,.1;0,.4,.4,.2;0 ,0,.3,.7;0 0 0 1]
P2=[.1,.4,.3,.2;0,.2,.5,.3;0 0,.2,.8;0 0 0 1]
P3=[.05,.3,.4,.25;0,.1,.6,.3;0,0,.1,.9;0 0 01]
a0=[1 0 0 0]
```
და m-ფაილ-ფუნქციის გაშვების ბრძანება:

```
>>lab21A(P1,P2,P3,a0
```

პასუხი:

```
P1 =
   0.3000   0.4000   0.2000   0.1000
        0   0.4000   0.4000   0.2000
        0        0   0.3000   0.7000
        0        0        0   1.0000
P2 =
   0.1000   0.4000   0.3000   0.2000
        0   0.2000   0.5000   0.3000
        0        0   0.2000   0.8000
        0        0        0   1.0000
P3 =
   0.0500   0.3000   0.4000   0.2500
        0   0.1000   0.6000   0.3000
        0        0   0.1000   0.9000
        0        0        0   1.0000
a0 =   1    0    0    0
a1 =   0.3000   0.4000   0.2000   0.1000
a2 =   0.0300   0.2000   0.3300   0.4400
a3 =   0.0015   0.0290   0.1650   0.8045
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს. შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რეეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. სისტემას აქვს ხუთი $S_1, S_2, S_3, S_4\, S_5$ შესაძლო მდგომარეობა. მიიღეთ საწყის მდგომარეობად მათგან რომელიმე. დაწერეთ შესაბამისი მარკოვის ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ჯაჭვების გადასვლების ალბათობების მატრიცები ოთხი ბიჯისათვის. იპოვეთ სისტემის მდგომარეობათა ალბათობების ვექტორები მეოთხე ბიჯის შემდეგ.

22. გადაწყვეტილებათა მიღების მარკოვის მოდელები

1. სამუშაოს მიზანი - შევისწავლოთ მარკოვის ჯაჭვის ოპტიმალური მართვა, რაშიც ვგულისხმობთ სისტემის ფუნქციონირების პროგნოზს. ამისათვის ვიყენებთ მარკოვის მოდელს. ასეთ მოდელთან დაკავშირებული ყველა განსაზღვრება და საჭირო აპარატი მოცემულია ერთი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის პროცესში. ამოცანა განხილულია დროის სასრული პერიოდისათვის. სასურველია დასმული ამოცანის რეალიზაცია MATLAB-ის საშუალებით.

2. ძირითადი განსაზღვრებები. წინამდებარე ლაბორატორიული სამუშაო ეძღვნება მარკოვის ჯაჭვის ოპტიმალურ მართვას. უფრო დაწვრილებით, აქ განიხილება ისეთი Σ სისტემის ოპტიმალური მართვის ამოცანა, რომლის მდგომარეობა $S_j (j=1,...,n)$ ფიქსირდება დროის დისკრეტულ $t_1 < t_2 < ...$ მომენტებში. დროის აღნიშნულ მომენტებში სისტემა მოულოდნელად, შემთხვევითი სახით გადადის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, ან რჩება იგივეში. ამასთან, ასეთი გადასვლის ალბათობა დამოკიდებულია წინა მომენტში მის მდგომარეობაზე და არაა დამოკიდებული უფრო ადრეულ ისტორიაზე. ვგულისხმობთ, რომ გადასვლების ალბათობები ცნობილია. მაშასადამე, ჩვენს Σ სისტემაში მიმდინარე შემთხვევითი პროცესი ქმნის მარკოვის ჯაჭვს, რომლის გადასვლების ალბათობების მატრიცა P ცნობილია, სადაც სტრიქონები შეესაბამება სისტემის ძველ მდგომარეობებს, სვეტები კი - ახალ მდგომარეობებს

$$
P = \begin{array}{c|cccc}
 & S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\
\hline
S_1 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\
S_2 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
S_n & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}
\end{array}.
$$

ასეთი სისტემის მართვა გულისხმობს გადაწყვეტილებების მიღებას რისკის პირობებში, რომელიც შესაძლებელი აღმოჩნდა მარკოვის მოდელების გამოყენებით. ამ საკითხში საფუძვლიანად გარკვევისათვის განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 1. კომპიტერული ფირმა ემსახურება კომპიუტერული სისტემების პროგრამულ უზრუნველყოფას. ყოველი წლის დასაწყისში ფირმა საჭიროების შესაბამისად ახდენს განახლებას - მოწყობილობათა განახლებას; ტექნიკური და პროგრამული საშუალებების განახლებას; მომსახურე პერსონალის პროფესიული დონის ამაღლებას. ყოველივე ეს უზრუნველყოფს აუცილებელ ტექნოლოგიურ გარემოს სამუშაოთა წარმოებისათვის. ფირმის ექსპერტული შეფასებების საფუძველზე მისი მდგომარეობა - სისტემა Σ, ფასდება სამი მდგომარეობით: S_1-კარგი; S_2-დამაკმაყოფილებელი და S_3-ცუდი. მაშასადამე, დროის ნებისმიერ მომენტში Σ შეიძლება ერთ-ერთში აღმოჩნდეს მდგომარეობათა $\{S_1, S_2, S_3\}$ სიმრავლიდან. ჯაჭვის გადასვლების ალბათობების მატრიცას აქვს სახე:

$$
P^{(1)} = \begin{array}{c|ccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 \\
\hline
S_1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\
S_2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\
S_3 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

აქ, მაგალითად რიცხვი 0,3 ნიშნავს, რომ თუ სისტემა იყო S_1 მდგომარეობაში, მაშინ სისტემის მდგომარეობა შემდეგ მომენტში, ანუ ანალიზის შემდეგი მომენტისათ-

ვის S_3-ში აღმოჩნდება 0,3 ალბათობით. სისტემის მდგომარეობის ცვლილება გამოწვეულია მოწყობილობათა ცვეთით და მოძველებით. თუ $P^{(1)}$ მატრიცა არ იცვლება, ანუ შესაბამისი მარკოვის ჯაჭვი არის ერთგვაროვანი, მაშინ Σ სისტემის მთლიანი მუშაობის ანალიზი იოლად შეიძლება განვახორციელოთ დროის ნებისმიერი პერიოდისათვის. საქმე უფრო რთულადაა, როცა $P^{(1)}$ ნებისმიერ მომენტში შეიძლება შეიცვალოს, ანუ როცა მარკოვის ჯაჭვი არაერთგვაროვანია. განვიხილოთ ასეთი შემთხვევა.

ვიგულისხმოთ, რომ იმ მდგომარეობებზე დამოკიდებულებით, რომლებშიც შეიძლება აღმოჩნდეს სისტემა, შეგვიძლია გამოვთვალოთ ფირმის შემოსავალი. უნდა ჩავთვალოთ, რომ ეს შემოსავალი გამოითვლება $t_{i+1}-t_i$ პერიოდში და იგი დამოკიდებულია ყველა იმ კომპონენტზე, რომელთა განახლებასაც ახდენს ფირმა ახალი მომენტის დასაწყისში. ამასთან, ფირმის დონე დამოკიდებულია იმ მდგომარეობებზე, რომლებშიც იგი იყო განსახილავი პერიოდის დასაწყისში და ბოლოში. თუ მაგალითად, t_i მომენტში სისტემა იყო S_1 მდგომარეობაში და t_{i+1} მომენტშიც იგივე მდგომარეობა იქნა შენარჩუნებული, მაშინ ფირმის შემოსავალი კარგი გარემო პირობებზე დამოკიდებულებით (არსებობდა შეკვეთები, ბაზარზე იყო კარგი სიტუაცია და ა.შ.) უნდა ჩაითვალოს მაქსიმალურად. ასეთი სიტუაციის მოდელირებისათვის $P^{(1)}$ მატრიცას უნდა შევუსაბამოთ შემოსავლების მატრიცა $F^{(1)}$:

$$F^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 7 & 6 & 3 \\ S_2 & 0 & 5 & 1 \\ S_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}.$$

ამ მატრიცის f_{ij}^1 ელემენტი არის ფირმის შემოსავალი $t_{i+1}-t_i$ პერიოდში, თუ Σ სისტემა S_i მდგომარეობიდან გადავა S_j-ში. მაგალითად, აქ რიცხვი 5 აღნიშნავს შემოსავალს რაიმე ერთეულებში, თუ S_2 მდგომარეობა ამ პერიოდში შენარჩუნდება. უარყოფითი ელემენტი კი აღნიშნავს დანაკარგს.

ამრიგად, ვიცით რა მატრიცები

$$P^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ S_2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ S_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad F^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 7 & 6 & 3 \\ S_2 & 0 & 5 & 1 \\ S_3 & 0 & 0 & -1 \end{array},$$

შეგვიძლია სისტემის ფუნქციონირების პროგნოზირება. ცხადია, რეალური მუშაობის გარემოში სისტემა ყოველთვის მოითხოვს განახლებას. ამიტომ აუცილებელია სისტემის პერიოდული ექსპერტული ანალიზი და მისი შედეგების გათვალისწინება. ეს პროცესი მოდელირდება როგორც გადასვლების ალბათობების მატრიცების, ისე შემოსავლების მატრიცების ცვლილებებით. ვთქვათ, ჩვენს მაგალითში ეს მატრიცები ახალი მომენტისათვის შემდეგნაირად შეიცვალა:

$$P^{(2)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ S_2 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ S_3 & 0{,}05 & 0.4 & 0{,}55 \end{array}, \quad F^{(2)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 6 & 5 & -1 \\ S_2 & 7 & 4 & 0 \\ S_3 & 6 & 3 & -2 \end{array}.$$

აქ $R^{(2)}$-ში გავითვალისწინეთ დანახარჯები ფირმის განახლებაზე - რეორგანიზაციასა და მოდიფიკაციაზე. მაგალითად, $f_{11}^2 = 6$ შეესაბამება შემოსავალს, თუ სისტემის განახლებით მისი S_1 მდგომარეობა გავაუმჯობესეთ. წინა ეტაპზე S_1 მდგომარეობიდან S_1-ში გადასვლის ალბათობა იყო 0,2, ახლა კი ასეთი განახლებით ეს ალბა-

თობა გაიზარდა და გახდა 0,3. ამან გამოიწვია დანახარჯები და წინა ეტაპის შემოსავალი $f_{11}^{1}=7$ აქ შემცირდა.

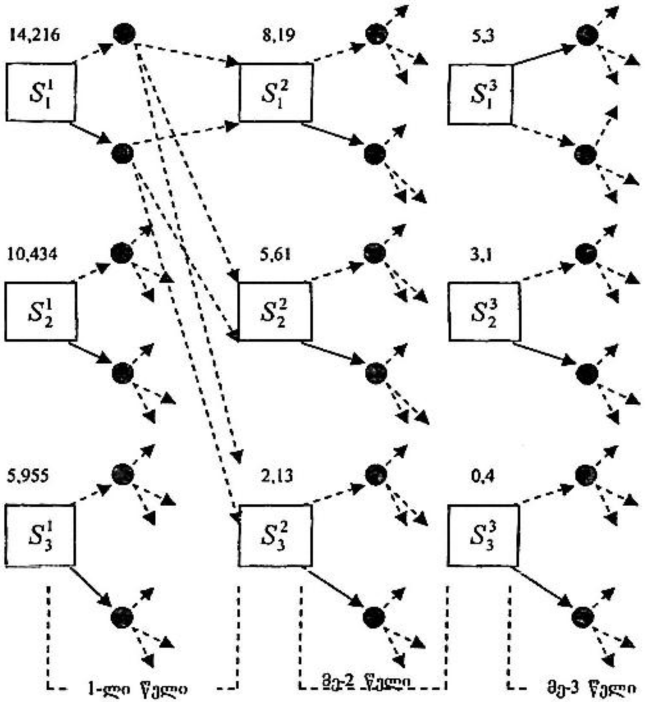
დავუშვათ, ყოველ ეტაპზე შეგვიძლია ორი გადაწყვეტილებიდან (სტრატეგიიდან) - $x_1=$"არ მოვახდინოთ ფირმის განახლება", $x_2=$"მოვახდინოთ ფირმის განახლება" მივიღოთ ერთ-ერთი. მაშინ x_1 გადაწყვეტილებით გვექნება $P^{(1)}$ და $F^{(1)}$ მატრიცები, ხოლო x_2 გადაწყვეტილებით გვექნება $P^{(2)}$ და $F^{(2)}$ მატრიცები. ამრიგად, ფირმის მაქსიმალური შემოსავლების განსაზღვრისათვის ყოველ ბიჯზე გვაქვს არჩევის ანუ გადაწყვეტილების მიღების პრობლემა.

რადგან გადაწყვეტილების მიღება ხორციელდება დროის მოცემულ დისკრეტულ მომენტებში, ამიტომ ჩვენი ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების მრავალბიჯიან ამოცანას.

განვიხილოთ ჩვენი ამოცანისათვის ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების ძირითადი მომენტები. ვიგულისხმოთ, რომ ფირმის ქცევის სტრატეგიულ დაგეგმვას ვახორციელებთ დროის სასრული პერიოდისათვის. ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნულ პირობებში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება შესაძლებელია დინამიკური დაპროგრამების მეთოდით.

ვთქვათ, დროის $t_{i+1}-t_i$ პერიოდი შეესაბამება ერთ წელს, ხოლო დაგეგმვა წარმოებს სამწლიანი პერიოდისათვის. შესაბამისი გადაწყვეტილებათა მიღების ხე წარმოვადგინოთ გრაფიკულად (ნახ. 1). აქ მართკუთხედი აღნიშნავს ხის გადამწყვეტ წვეროს და იგი შეესაბამება სისტემის გარკვეულ მდგომარეობას დროის გარკვეულ მომენტში. ამისათვის მასში ვწერთ S_i^j გამოსახულებას, რომელიც აღნიშნავს, რომ $j(j=1,2,3)$ მომენტში Σ სისტემა იმყოფება $S_i(i=1,2,3)$ მდგომარეობაში. ყოველი წვეროდან გამომავალი ორი ისარი შეესაბამება ყოველ ბიჯზე

სტრატეგიებს: ზედა x_1-ს და ქვედა x_2-ს. x_1-ის შესაბამის ისარს ვუწოდოთ 1-ელი მიმართულება, x_2-ის შესაბამის ისარს კი – მე-2 მიმართულება.



ნახ.1.

მრგვალი შავი წრე აღნიშნავს შემთხვევით წვეროს, რომლისაგან გადასვლა ხორციელდება გადასვლების ალბათობების შესაბამისი მატრიცით.

დინამიკური დაპროგრამების ზოგადი ალგორითმის შესაბამისად, ამოცანის ამოხსნა დავიწყოთ პირობითი ოპტიმიზაციით ბოლოდან - მეორე წლის ბოლოდან და მესამე წლის დასაწყისიდან. ვიმოძრაოთ გადამწყვეტი წვე-

როების გავლით მარჯვნიდან მარცხნივ. გადამწყვეტ S_i^j წვეროში $x_k\,(k=1{,}2)$ გადაწყვეტილებით მისაღები მოსალოდნელი შემოსავალი (სარგებლიანობა) აღვნიშნოთ $F_k(S_i^j)$-ით. დავიწყოთ ეს პროცესი S_1^3 წვეროდან. მაშინ x_1 გადაწყვეტილებით (არ მოვახდინოთ განახლება) მოსალოდნელი შემოსავალი იქნება

$$F_1(S_1^3)=0{,}2\cdot 7+0{,}5\cdot 6+0{,}3\cdot 3=5{,}3.$$

x_2 გადაწყვეტილებით მივიღებთ

$$F_2(S_1^3)=0{,}3\cdot 6+0{,}6\cdot 5+0{,}1\cdot(-1)=4{,}7.$$

რადგან 5,3>4,7, ამიტომ თუ აღმოვჩნდებით S_1^3 წვეროში, მაშინ უნდა წავიდეთ 1-ელი მიმართულებით (ანუ ფირმა არ განვაახლოთ). გამოვყოთ ეს მიმართულება (უწყვეტი ისრით) და S_1^3 წვეროზე დავწეროთ 5,3.

ახლა გადავიდეთ S_2^3 წვეროში (აქ მესამე წლის დასაწყისში სისტემა არის S_2 მდგომარეობაში). x_1 გადაწყვეტილებით გვექნება

$$F_1(S_2^3)=0\cdot 0+0{,}5\cdot 5+0{,}5\cdot 1=3\,,$$

ხოლო x_2 გადაწყვეტილებით

$$F_2(S_2^3)=0{,}1\cdot 7+0{,}6\cdot 4+0{,}3\cdot 0=3{,}1.$$

რადგან 3,1>3, ამიტომ S_2^3 წვეროდან გამოვყოფთ მე-2 მიმართულებას და ამ წვეროზე აღვნიშნავთ 3,1-ს.

S_3^3 წვეროსათვის

$$F_1(S_3^3)=0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot(-1)=-1\,,$$

$$F_2(S_3^3)=0{,}05\cdot 6+0{,}4\cdot 3+0{,}55\cdot(-2)=0{,}4\,.$$

ამიტომ S_3^3 წვეროზე დავწერთ 0,4-ს და მისგან გამოიყოფა მე-2 მიმართულება.

მიღებული რიცხვები 5,3; 3,1 და 0,4 ახასიათებს მდგომარეობათა ცვლილებების ერთ აქტს და ასე მიღებულ ლოკალურ მოსალოდნელ სარგებლიანობებს.

გადავიდეთ მეორე წლის დასაწყისში. დავიწყოთ S_1^2 წვეროდან. x_1 გადაწყვეტილებისათვის ვღებულობთ

$$F_1(S_1^2) = 0,2 \cdot 5,3 + 0,5 \cdot 3,1 + 0,3 \cdot 0,4 + 5,3 = 8,3 .$$

აქ რიცხვი 5,3 გამოსახავს წინა ბიჯის ლოკალურ შემოსავალს S_1 მდგომარეობისა და x_1 გადაწყვეტილებისათვის.

x_2 გადაწყვეტილებისათვის იმავე წვეროში იმავე წესით მივიღებთ

$$F_2(S_1^2) = 0,3 \cdot 5,3 + 0,6 \cdot 3,1 + 0,1 \cdot 0,4 + 4,7 = 8,19.$$

რადგან 8,19>8,03, ამიტომ S_1^2 წვეროზე ვწერთ 8,19-ს და გამოვყოფთ მე-2 მიმართულებას.

S_2^2 წვეროსათვის

$$F_1(S_2^2) = 0 \cdot 5,3 + 0,5 \cdot 3,1 + 0,5 \cdot 0,4 + 3 = 4,75,$$

$$F_2(S_2^2) = 0,1 \cdot 5,3 + 0,6 \cdot 3,1 + 0,3 \cdot 0,4 + 3,1 = 5,61.$$

აქედან ავირჩიოთ 5,61, დავწეროთ იგი S_2^2 წვეროზე და გამოვყოთ მე-2 მიმართულება.

S_3^2 წვეროსათვის

$$F_1(S_3^2) = 0 \cdot 5,3 + 0 \cdot 3,1 + 1 \cdot 0,4 + (-1) = -0,6 ,$$

$$F_2(S_3^2) = 0,05 \cdot 5,3 + 0,4 \cdot 3,1 + 0,55 \cdot 0,4 + 0,4 = 2,13.$$

აქედან, 2,13-ს ვწერთ S_3^2 წვეროზე და გამოვყოფთ მე-2 მიმართულებას.

პირველი წლის დასაწყისისათვის ვღებულობთ:

$$F_1(S_1^1) = 0.2 \cdot 8,19 + 0,5 \cdot 5,61 + 0,3 \cdot 2,13 + 8,03 = 13,012;$$

$$F_2(S_3^1) = 0,3 \cdot 8,19 + 0,6 \cdot 5,61 + 0,1 \cdot 2,13 + 8,19 = 14,216;$$

$$F_1(S_2^1) = 0 \cdot 8,19 + 0,5 \cdot 5,61 + 0,5 \cdot 2,13 + 4,75 = 8,62;$$

$$F_2(S_2^1) = 0,1 \cdot 8,19 + 0,6 \cdot 5,61 + 0,3 \cdot 2,13 + 5,61 = 10,434;$$

$$F_1(S_3^1) = 0 \cdot 8,19 + 0 \cdot 5,61 + 1 \cdot 2,13 + (-0,6) = 1,53;$$

$$F_2(S_3^1) = 0,05 \cdot 8,19 + 0,4 \cdot 5,61 + 0,55 \cdot 2,13 + 2,13 = 5,955.$$

ამრიგად, პირობითი ოპტიმალური შემოსავლები და გადაწყვეტილებები ნაპოვნია. ახლა ვიპოვოთ უპირობო ოპტიმალური გადაწყვეტილებები. ამისათვის ვიმოძრაოთ ხის საწყისიდან ბოლოსაკენ.

14,216; 10,434 და 5,955 რიცხვები აღნიშნავს ოპტიმალურ მოსალოდნელ შემოსავლებს, თუ სისტემა საწყის მომენტში იქნება შესაბამისად S_1, S_2 და S_3 მდგომარეობაში. ეს მოსალოდნელი შემოსავლები მიიღწევა, თუ ჩვენ მოვიქცევით ოპტიმალურად, ე.ი. ვიმოქმედებთ მითითებული მიმართულებებით, ანუ მივიღებთ შესაბამის გადაწყვეტილებებს. კერძოდ, მიღებული შედეგებიდან ჩანს, რომ რა მდგომარეობაშიც არ უნდა აღმოჩნდეს სისტემა პირველი წლის დასაწყისში, მიზანშეწონილია x_2 სტრატეგიის გამოყენება - ანუ ფირმის განახლება. იგივე სიტუაცია გვაქვს მეორე წლის დასაწყისში-ყველგან ოპტიმალურია x_2 სტრატეგია - ფირმის განახლება. გამონაკლისია მესამე წლის დასაწყისი - თუ ამ მომენტისათვის ფირმა აღმოჩნდება S_1 მდგომარეობაში, მაშინ მიზანშეწონილია არ განვაახლოთ იგი, ხოლო S_2 ან S_3-ში აღმოჩენისას, ფირმა უნდა განვაახლოთ. ამით ამოცანა ამოხსნილია.

შენიშვნა. მარკოვის პროცესების თეორიაში გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელები განიხილება აგრეთვე უსასრულო ბიჯების შემთხვევაშიც.

ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

```
function lab22(P1,F1,P2,F2,k)
% გადაწყვეტილებათა მიღების მარკოვის მოდელები
% P1,P2–მარკოვის ჯაჭვის გადასვლების ალბათობების
% მატრიცები,
% F1,F2–შემოსავლების მატრიცები,
% k–ბიჯების რაოდენობა
n=length(P1);
for j=k:-1:1
```

```
  if j==3
   for i=1:n
     f(i)=P1(i,:)*F1(i,:)';
     ff(i)=P2(i,:)*F2(i,:)';
     if f(i)>=ff(i)
        FS(i)=f(i); x(i,j)=0;
     else
        FS(i)=ff(i); x(i,j)=1;
     end
   end
   F=FS, FS=0;
  else
  for i=1:n
     f(i)=P1(i,:)*F'+f(i);
     ff(i)=P2(i,:)*F'+ff(i);
     if f(i)>=ff(i)
        FS(i)=f(i); ,x(i,j)=0;
     else
        FS(i)=ff(i); x(i,j)=1;
     end
  end
  F=FS, FS=0;
  end
end
```

m-ფაილ-ფუნქციის არგუმენტები:

```
P1=[.2 .5 .3;0 .5 .5;0 0 1]
F1=[7 6 3;0 5 1;0 0 -1]
P2=[.3 .6 .1;.1 .6 .3;.05 .4 .55]
F2=[6 5 -1;7 4 0;6 3 -2]
k=3
```

და მისი გაშვების ბრძანება:

```
>>lab22(P1,F1,P2,F2,k)
```

პასუხი:

```
P1 =
   0.2000   0.5000   0.3000
```

```
     0   0.5000   0.5000
     0        0   1.0000
F1 =
   7   6   3
   0   5   1
   0   0  -1
P2 =
  0.3000   0.6000   0.1000
  0.1000   0.6000   0.3000
  0.0500   0.4000   0.5500
F2 =
   6   5  -1
   7   4   0
   6   3  -2
k = 3
F =  5.3000   3.1000   0.4000
F =  8.1900   5.6100   2.1250
F = 14.2255  10.4325   5.9473
x =
   1   1   0
   1   1   1
   1   1   1
```

3. დამოუკიდებელი სამუშაო. ერთ სტუდენტს მიეცემა დამოუკიდებლად გადასაწყვეტი ამოცანა. ანგარიში სასურველია შესრულდეს MATLAB-ის საშუალებით. სამუშაოს შემსრულებელი შესრულებულ სამუშაოს შეინახავს საკუთარ ფაილში. ამოცანის შინაარსს და მის გადაწყვეტას ჩათვლის პროცესში წარმოადგენს საკუთარი რვეულის საშუალებით.

4. ამოცანა. სისტემას აქვს 3 შესაძლო მდგომარეობა: S_1, S_2, S_3. შესაბამისი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლების და შემოსავლების მატრიცებია x_1 სტრატეგიის გამოყენებისას

$$P^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ S_2 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ S_3 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{array}, \quad F^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 4 & -2 & 5 \\ S_2 & 0 & 3 & 2 \\ S_3 & 0 & 6 & 4 \end{array},$$

ხოლო x_2 სტრატეგიის გამოყენებისას, ასეთი მატრიცებია

$$P^{(2)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ S_2 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ S_3 & 0,1 & 0.3 & 0,6 \end{array}, \quad F^{(2)} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 5 & 4 & 1 \\ S_2 & 7 & 4 & 3 \\ S_3 & 1 & 2 & 5 \end{array}.$$

დაადგინეთ სისტემის ფუნქციონირების პროგნოზი 4 ბიჯის - 4 წლის განმავლობაში.

ლიტერატურა

1. ბელთაძე გ., მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის საფუძვლები და მათი გამოყენება საზოგადოებრივ მეცნიერებებში. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2003. - 478 გვ.
2. ბელთაძე გ., ჯიბლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია (I ნაწილი). თეორიის საწყისები, პრიორიტეტების და სარგებლიანობების ანალიზი. საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2009. -196 გვ.
3. ბელთაძე გ. მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანა მრავალკრიტერიუმიანი კანდიდატების შემთხვევაში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის შრომები № 4 (474), 2009, გვ. 66-80.
4. ბელთაძე გ. რისკი და სარისკო გადაწყვეტილება ბუნების წინაღმდეგ თამაშში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, შრომები მართვის ავტომატიზებული სისტემები № 1(8), 2010, გვ. 21-29.
5. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Академия, 2008. - 464 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. - 552 с.
7. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. М.: Университетская книга, Логос, 2006. - 392 с.
8. Подиновский В.В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. - 256 с.
9. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев. М.: Физматлит, 2007. - 64 с.
10. Таха Х. Введение в исследование операций, в 2-х книгах. М.: Мир, 1985, I том - 479 с., II том - 496 с.
11. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций. М.: Проспект, 2006.- 280 с.

რედაქტორი ი. სემიკინა

გადაეცა წარმოებას 23.06.2011. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.07.2011. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 16. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent

7=