ტ. კიკვაძე

# გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელები და მეთოდები

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ტ. კიკვაძე

# გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელები და მეთოდები

დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ
სტუ-ის სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ. 06.06.2013, ოქმი №3

თბილისი
2013

გაანალიზებულია გადაწყვეტილებათა მიღების პრობლემის თეორიული, მეთოდოლოგიური და პრაქტიკული ასპექტები. განხილულია გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელების აგებასთან და მეთოდების შემუშავებასთან დაკავშირებულ საკითხთა ფართო წრე.

ნაშრომი გადაწყვეტილებათა მიღების რთული და მრავალფეროვანი პროცესის ერთ-ერთი პირველი მცდელობაა მშობლიურ ენაზე, რის გამოც, რა თქმა უნდა, იგი არ არის დაზღვეული გარკვეული ხარვეზებისაგან. ავტორი სრულ პასუხისმგებლობას იღებს მათზე და დიდი სიამოვნებით მიიღებს ნებისმიერ არგუმენტირებულ შენიშვნასა თუ სურვილს.

განკუთვნილია ეკონომიკის, ბიზნესის ადმინისტრირებისა და ტექნიკური პროფილის მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის. იგი შეიძლება საინტერესო აღმოჩნდეს აღნიშნული სფეროების აკადემიური პერსონალისთვისაც, აგრეთვე პრაქტიკოსებისთვისაც, რომელთა წინაშეც ხშირად დგას ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების პრობლემა.

რეცენზენტები: სრული პროფესორი გ. ცაავა,
სრული პროფესორი ა. გაბელია




ISBN 978-9941-20-384-8
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba volant,
scripta manent

შინაარსი

# შესავალი

სწორი გადაწყვეტილების მიღების უნარი წარმატების საწინდარია ადამიანის საქმიანობის ნებისმიერ სფეროში. გადაწყვეტილების მიღება არის ალტერნატიულ ქმედებათა არჩევის პროცესი, რომელიც მიზნად ისახავს გაცნობიერებული შედეგის მიღწევას.

გადაწყვეტილებას გამოიმუშავებს ადამიანი (ან ადამიანთა ჯგუფი), რომელიც გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში გადაწყვეტილების მიმღები პირის (გმპ-ს) სახელწოდებით არის ცნობილი. აღნიშნულიდან გამომდინარე, როგორც წესი, გადაწყვეტილების მიღების პროცესი სუბიექტურ ხასიათს ატარებს და მნიშვნელოვანწილად სწორედ გმპ-ს პიროვნულ თვისებებზეა დამოკიდებული.

არცთუ შორეულ წარსულში გადაწყვეტილების მიღების პროცესში უპირატესად საღ აზრსა და ინტუიციას ეყრდნობოდნენ. ამ ფაქტორებს დღესაც არ დაუკარგავს აქტუალობა, მაგრამ მათ რაციონალურ შერწყმას ანალიტიკურ, რაოდენობრივ მეთოდებთან გადაწყვეტილების მიღების პროცესს, ერთის მხრივ, გარკვეული ობიექტური ხასიათი შესძინოს და მეორეც, საგრძნობლად გააუმჯობესოს მიღებული გადაწყვეტილების ხარისხი.

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია, როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერული მიმართულება მეოცე საუკუნის მეორე ნახევარში ოპერაციათა კვლევას გამოეყო და იმთავითვე დაიწყო ინტენსიური განვითარება. იგი იყენებს მათემატიკის, სტატისტიკის, ეკონომიკის, მენეჯმენტისა და ფსიქოლოგიის ცნებებსა და მეთოდებს. მის ერთერთ სპეციფიკურ თავისებურებას სუბიექტური ინფორმაციის მოპოვების, დამუშავებისა და გამოყენების აუცილებლობა წარმოადგენს.

წინამდებარე მონოგრაფიული გამოკვლევა ოთხი თავისაგან შედგება. მისი სტრუქტურა და შინაარსი განაპირობა გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელის ძირითადმა ელემენტებმა, რომელიც პირველ თავშია წარმოდგენილი. აღნიშნული ელემენტების ფორმალიზაცია წარმოუდგენელია ექსპერტული შეფასებების გამოყენების გარეშე. თავის მხრივ, ექსპერტული შეფასება ობიექტთა შედარებისა და ნიშანთვისებათა გაზომვის პროცესს წარმოადგენს. მოცემულ თავში გაანალიზებულია გაზომვათა თეორიის ორი ძირითადი, რიცხვითი წარმოდგენისა და ერთადერთობის პრობლემა, გაზომვათა სკალის სხვადასხვა ტიპი, ახსნილია ექსპერტული შეფასების მეთოდის არსი და დეტალურად არის აღწერილი მისი რეალიზაციის ეტაპები - ექსპერტთა შერჩევა, გამოკითხვის ჩატარება და გამოკითხვის შედეგების დამუშავება. განხილულია ექსპერტული გამოკითხვის ჩატარების ისეთი ცნობილი და პრაქტიკაში ხშირად გამოყენებადი მეთოდები, როგორიცაა "გონებრივი შეტევის" მეთოდი, "დელფოსის" პროცედურა და სხვ. ამავე თავში განიხილება სარგებლიანობის თეორიის გამოყენების შესაძლებლობები გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში.

მეორე თავში განხილულია გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანები განსაზღვრულ გარემოში მათი გადაწყვეტის ძირითადი მეთოდის - მათემატიკური პროგრამირების გამოყენებით. აქცენტი გაკეთებულია წრფივი პროგრამირების მეთოდსა და მის გამოყენებაზე ტრანსპორტულ

ამოცანებში. გარდა ამისა, ახსნილია დინამიკური პროგრამირების მეთოდის არსი და გაანალიზებულია მისი გამოყენების შესაძლებლობები ეკონომიკის, ბიზნესისა და ტექნიკის მნიშვნელოვანი ამოცანების გადასაწყვეტად.

მესამე თავში მრავალკრიტერიუმიან გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანები განიხილება. მოყვანილია ამოცანის ზოგადი დასმა, ახსნილია პარეტო-ოპტიმალობის ცნების არსი და პარეტოს სიმრავლის ფორმირების მნიშვნელობა ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებში. განხილულია პრაქტიკაში გავრცელებული მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ისეთი მეთოდები, როგორიცაა განზოგადებული და ძირითადი კერძო კრიტერიუმის მეთოდები, ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის სქემა. განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა მრავალკრიტერიუმიანი არჩევანის ერთობ ორიგინალურ მეთოდს, რომელიც "ელექტრას" სახელწოდებით არის ცნობილი. ამ მეთოდში არსებითია კავშირი გმპ-ს პრიორიტეტების აღმწერი აგრეგირებული გრაფის ბირთვსა (მეთოდი დაფუძნებულია გრაფთა თეორიაზე) და პარეტოს სიმრავლეს შორის.

ბოლო, მეოთხე თავში, რომელშიც განიხილება გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები რისკისა და განუსაზღვრელობის პირობებში ძირითადად გამოიყენება თამაშთა თეორიის (უპირატესად მატრიცული თამაშების) აპარატი. გარდა ამისა, განხილულია გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა ბუნდოვან პირობებში, რომელიც დაფუძნებულია ბუნდოვანი სიმრავლეების თეორიაზე. მოვანილია ბუნდოვანი სიმრავლეების ძირითადი თვისებები. გადაწყვეტილების მიღებას ბუნდოვან პირობებში საფუძვლად უდევს დაშვება, რომელიც მიზნებისა და შეზღუდვების სიმეტრიულობაში მდგომარეობს.

# 1. გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესის ბუნება

## 1.1 გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანის მოდელის ძირითადი ელემენტები

ნებისმიერი ზრდასრული ადამიანი ყოველდღიურად ასობით, ხოლო სიცოცხლის განმავლობაში ათასობით გადაწყვეტილებას იღებს. როგორც კომუნიკაციის, ისე გადაწყვეტილების მიღების უნარს იგი გამოცდილების დაგროვების საფუძველზე იძენს.

გადაწყვეტილების მიღების პროცესის განხილვისას შეიძლება ვისაუბროთ ინტუიციურ და რაციონალურ მიდგომებზე. ადამიანის ქცევას საკმაოდ ხშირად განაპირობებს არა ლოგიკა, არამედ სუბიექტური გრძნობები.

ინტუიციური გადაწყვეტილების მიღება, როგორც წესი, ადვილია, რადგანაც ამ დროს სწორი არჩევანის შეგრძნება ძირითადად სუბიექტურ განსჯას ემყარება ( როგორც იტყვიან, მოქმედებაში მოდის ე.წ. "მეექვსე გრძნობა").

გაცილებით რთულია, კარგი გადაწყვეტილების მიღება, რომელიც მხოლოდ რაციონალური მიდგომის საფუძველზე არის შესაძლებელი. იგი ეფუძნება არა მარტო გმპ-ს პრიორიტეტების გათვალისწინებას, არამედ რაოდენობრივი (ანალიტიკური) ხერხებისა და მეთოდების გამოყენებას, რადგანაც აუცილებლად უნდა "აიწონ-დაიწონოს" არგუმენტები თითოეული ალტერნატივის სასარგებლოდ, ან საწინააღმდეგოდ.

რაციონალური გადაწყვეტილების გამომუშავება გულისხმობს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის ფორმალური მოდელის აგებას.

გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანის მოდელის ძირითადი ელემენტებია:

- გადაწყვეტილებათა მიღების გარემო;
- გადაწყვეტილებათა სიმრავლე;
- მიზნის ფუნქციათა სიმრავლე;
- ამოცანის ტიპი;
- ამომხსნელი წესი.

თითოეული, მოდელში ჩამოთვლილ ელემენტთაგან შეიძლება საფუძვლად დაედოს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანათა კლასიფიკაციას.

როდესაც საუბარია გადაწყვეტილების მიღების გარემოზე, იგულისხმება გმპ-ს ინფორმაციული უზრუნველყოფის ხარისხი. კერძოდ, თუ გმპ სრულად აკონტროლებს გადაწყვეტილების მიღების სიტუაციას და ფლობს იმ ინფორმაციას, რომელიც აუცილებელია საუკეთესო (ოპტიმალური) გადაწყვეტილების მისაღებად, მაშინ საქმე გვაქვს დეტერმინირებულ ამოცანასთან (ანუ, გადაწყვეტილება მისაღებია განსაზღვრულობის

პირობებში), წინააღმდეგ შემთხვევაში - გადაწყვეტილების მიღების ამოცანასთან განუსაზღვრელობის პირობებში. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში წინასწარ არ არის ცნობილი, თუ რა შედეგი მოყვება გმპ-ს მიერ ამა თუ იმ გადაწყვეტილების მიღებას.

გადაწყვეტილებათა სიმრავლის ქვეშ იგულისხმება ყველა შესაძლო ქმედება, რომელიც შეიძლება განახორციელოს გმპ-მ და რომელსაც სრულიად გასაზღვრული შედეგი მოყვება ("გადაწყვეტილების" ნაცვლად ზოგჯერ, სიტუაციის შესაბამისად, იყენებენ სინონიმურ ტერმინებს - "სტრატეგია", "ალტერნატივა", "გეგმა", "ამონახსნი" და სხვ.). იგი შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულოც, ხოლო მის ელემენტები სრულიად გასხვავებული ბუნებისა იყოს (ნამდვილი რიცხვები, ვექტორები, მატრიცები, ფუნქციები და, თუნდაც სიტყვიერი ინსტრუქციები). თუმცა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის ზოგადი დასმა გულისხმობს, რომ ეს სიმრავლე მოცემულია, პრაქტიკაში მისი ფორმორება საკმაოდ რთულია.

გადაწყვეტილება კონკრეტული მიზნის მისაღწევად მიიღება, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც ერთადერთი, ისე რამდენიმეც. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს გადაწყვეტილებათა მიღების ერთმიზნიან (სკალარულ), ხოლო მეორეში - მრავალმიზნიან (ვექტორულ) ამოცანასთან. ნაცვლად "მიზნის ფუნქციისა", რომელსაც ოპტიმიზაციის თეორიაში იყენებენ, გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში უპირატესობას ეფექტურობის კრიტერიუმის ცნებას ანიჭებენ. იგი თეორიის საკვანძო ტერმინების კატეგორიას განეკუთვნება და გვიჩვენებს დასახული მიზნის მიღწევის ხარისხს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეფექტურობის კრიტერიუმი წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა სიმრავლეზე გასაზღვრულ ფუნქციას. პრაქტიკულ ამოცანებში მისი ცვლილების (ე.წ. სკალური მნიშვნელობების) არე ან მოცემულია, ან უნდა აიგოს.

გადაწყვეტილებათა მიღების კონკრეტული სიტუაციიდან გამომდინარე ამოცანა შემდეგნაირად შეიძლება დაისვას:

- ვიპოვოთ ერთადერთი საუკეთესო გადაწყვეტილება;
- მოვახდინოთ გადაწყვეტილებათა სიმრავლის სრული დალაგება (რა უნდა თქმა, იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს სიმრავლე სასრულია);
- გამოვყოთ რამდენიმე საუკეთესო გადაწყვეტილება.

ამომხსნელი წესი წარმოადგენს ანალიტიკურ გამოსახულებას ან ალგორითმს, რომელიც დასმული ამოცანის გადაწყვეტის საშუალებას იძლევა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საუბარია შესაბამისი მეთოდების გამოყენებაზე. ეს შეიძლება იყოს როგორც კლასიკური ოპტიმიზაციის (ნიუტონის, ლაგრანჟის, გრადიენტის, საჯარიმო ფუნქციების, შემთხვევითი ძებნის და ა.შ.), ისე მათემატიკური პროგრამირების (წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური და სხვ.) მეთოდები. ხოლო სადაც მათი გამოყენება ვერ ხერხდება - ერთეტაპიანი ან იტერაციული ევრისტიკული პროცედურები.

## 1.2 ექსპერტული შეფასებების მეთოდის არსი

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის რეალიზაციას ახორციელებს გმპ, რომელიც პასუხისმგებელია მიღებულ გადაწყვეტილებაზე და მის შესაძლო შედეგებზე.

გადაწყვეტილების მიღების პროცესში ხშირად აუცილებელი ხდება შესაბამისი სფეროს ექსპერტ-სპეციალისტთა მოზიდვა, რომელთაც მნიშვნელოვანი დახმარება შეუძლიათ გაუწიონ გმპ-ს პრობლემური სიტუაციების თვისობრივ და რაოდენობრივ (სადაც ეს შესაძლებელია) გაანალიზებაში, გადაწყვეტილების მისაღებად საჭირო რესურსებისა და დროის შეფასებაში, მიზანთა და გადაწყვეტილებათა სიმრავლეების ფორმირებაში და ა.შ.

ზოგად შემთხვევაში ექსპერტთა შეხედულებები და პრიორიტეტები შეიძლება არ ემთხვეოდეს გმპ-ისას, რაც აუცილებლად უნდა იქნეს გათვალისწინებული მის მიერ.

ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ ექსპერტებს მნიშვნელოვანი ინფორმაციული და ანალიტიკური სამუშაოების შესრულება შეუძლიათ საუკეთესო გადაწყვეტილების ფორმირების პროცესში.

ექსპერტული შეფასებების გამოყენება სათავეებს უძველესი დროიდან იღებს და უშუალოდ უკავშირდება საზოგადოების ფორმირებასა და განვითარებას. უხუცესთა და ბრძენთა, სხვადასხვა სახის სახელმწიფო და სამხედრო საბჭოები, სენატები და კოლეგიები - ექსპერტული შეფასებების რეალიზაციის ფორმებია. თანამედროვე ეტაპზე ექსპერტული პროცედურები წარმოადგენს ეფექტურ და რიგ შემთხვევებში არაფორმალიზებადი პრობლემების გადაწყვეტის ერთადერთ საშუალებას პოლიტიკურ, იდეოლოგიურ, ეკონომიკურ, სოციალურ, სამხედრო და ადამიანთა საქმიანობის სხვა სფეროში.

ექსპერტული შეფასებების მეთოდის არსი მდგომარეობს ძნელად ფორმალიზებადი პრობლემის გადაწყვეტის ისეთი პროცედურების შემუშავებაში, რომელშიც ამ პრობლემის ინტუიციურ-ლოგიკური ანალიზის შედეგები ოპტიმალურად იქნება შერწყმული შეფასებისა და ინფორმაციის დამუშავების რაოდენობრივ მეთოდებთან.

კვალიფიციურ და კომპეტენტურ ექსპერტთა ჯგუფის მოზიდვა საშუალებას იძლევა გამოყენებული იქნას მათი ინტუიცია და ცხოვრებისეული გამოცდილება რთული პრობლემის თვისობრივი და რაოდენობრივი ასპექტების გასაანალიზებლად.

ექსპერტების შერჩევისას მხედველობაში იღებენ როგორც პიროვნულ, ისე საქმიან თვისებებს.

საექსპერტო პრობლემათა სიმრავლე პირობითად ორ კლასად შეიძლება დაიყოს.

პირველ კლასს მიაკუთვნებენ პრობლემებს, რომელთა წარმატებით გადასაჭრელად დაგროვილია საკმარისი მოცულობის ინფორმაციული პოტენციალი. მთავარი სირთულე ამ დროს მდგომარეობს ამ ინფორმაციის რეალიზაციაში ექსპერტული გამოკითხვის რაციონალური პროცედურების შემუშავების გზით.

მეორე კლასის პრობლემათა გადასაწყვეტად აღნიშნული ტიპის ინფორმაცია არ არსებობს. ამიტომ, ამ შემთხვევაში აუცილებელია გარკვეული სიფრთხილის გამოჩენა იმ თვალსაზრისით, რომ გასაშუალოების მეთოდების გამოყენებამ ამ დროს შეიძლება სერიოზულ შეცდომამდე მიგვიყვანოს. ასე მაგალითად, სწორი შეიძლება აღმოჩნდეს ერთადერთი ექსპერტის მოსაზრება, რომელიც მკვეთრად განსხვავდება ყველა დანარჩენისაგან.

სადღეისოდ შემუშავებულია ინდივიდუალური და კოლექტიური, ერთეტაპიანი და მრავალეტაპიანი, ანონიმური და ღია ექსპერტიზები (ზოგიერთ მათგანს ქვემოთ განვიხილავთ).

ექსპერტიზის ჩატარების ჩამოთვლილ მეთოდებს გააჩნიათ თავიანთი უპირატესობანი და ნაკლოვანობები, გამოყენების რაციონალური სფეროები. რეალობაში უფრო ხშირად მაქსიმალურ ეფექტს მათი კომბინირებული გამოყენება იძლევა.

ექსპერტიზის პროცესში შეიძლება გამოვყოთ შემდეგი პრობლემები (თითოეული მათგანი, თავის მხრივ, გარკვეული ქვეპრობლემებისაგან შედგება): ექსპერტთა შერჩევა, ექსპერტთა გამოკითხვის ჩატარება და გამოკითხვის შედეგების დამუშავება.

## 1.3 გაზომვათა თეორიის ელემენტები

ექსპერტული შეფასება წარმოადგენს გაზომვის პროცესს, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს როგორც ობიექტთა შედარების პროცედურა შერჩეული მაჩვენებლის (ნიშანთვისების) შესაბამისად.

ობიექტების როლში შეიძლება მოგვევლინოს საგნები, მოვლენები,გადაწყვეტილებები და სხვ. შედარების მაჩვენებლებად კი შეიძლება აღებული იქნას ობიექტთა ფიზიკური, ფიზიოლოგიური, ფსიქიკური, დროითი, სივრცული და სხვა სახის თვისებები და მახასიათებლები.

შედარების პროცედურა გულისხმობს იმის განსაზღვრას, თუ როგორ მიმართებაში (დამოკიდებულებაში) არიან ერთმანეთთან ობიექტები და მათი შედარების ხერხებს.

შედარების კონკრეტული მაჩვენებელი საშუალებას იძლევა, მაგალითად, დავადგინოთ შემდეგი სახის დამოკიდებულებები ობიექტებს შორის: "მეტი", "ნაკლები", "ტოლი", "უკეთესი", "უარესი" და ა.შ. ხოლო შედარების ხერხი შეიძლება ნიშნავდეს, ვთქვათ, ყველა ობიექტის მიმდევრობით ერთ ობიექტთან, ან ყველა ობიექტის ყველასთან შედარებას ნებისმიერი თანმიმდევრობით.

ობიექტთა სიმრავლისა და მათ შორის დამოკიდებულებათა აღსაწერად შემოაქვთ შემდეგი ცნება - ემპირიული სისტემა დამოკიდებულებებით:

$$M = < O, R >,$$

სადაც $O = (O_1, O_2, \ldots, O_n)$ - ობიექტთა სიმრავლეა, ხოლო $R = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ - ობიექტთა შორის დამოკიდებულებები.

ჩანაწერი $O_i R_k O_j$ აღნიშნავს, რომ $O_i$ ობიექტი იმყოფება $R_k$ დამოკიდებულებაში $O_j$ ობიექტთან; ასეთ დამოკიდებულებას უწოდებენ ორადგილიან (ბინარულ) დამოკიდებულებას, რადგანაც იგი ერთმანეთთან ორ ობიექტს აკავშირებს . თუ დამოკიდებულება ერთმანეთთან სამ ობიექტს აკავშირებს, მას სამადგილიანი დამოკიდებულება ეწოდება და ა.შ.

მოვიყვანოთ ბინარული დამოკიდებულების ძირითადი თვისებები.

$R$ ბინარულ დამოკიდებულებას ეწოდება:

რეფლექსური, თუ $O_i R O_i$, წინააღმდეგ შემთხვევაში - ანტირეფლექსური ; სიმეტრიული, თუ $O_i R O_j$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $O_j R O_i$ დამოკიდებულება, ხოლო ანტისიმეტრიული - თუ $O_i R O_j$ და $O_j R O_i$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ $O_i = O_j$ ; არასიმეტრიული (ასიმეტრიული), თუ $O_i R O_j$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $O_j R O_i$ დამოკიდებულებას არა აქვს ადგილი; ტრანზიტული, თუ $O_i R O_j$ და $O_j R O_k$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს $O_i R O_k$ დამოკიდებულება ($O_i$, $O_j$ და $O_k - O$ სიმრავლის ელემენტებია).

დამოკიდებულებას, რომელსაც ერთდროულად გააჩნია რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები, ეკვივალენტობის დამოკიდებულებას უწოდებენ ($O_i \sim O_j$).

რეალური გაზომვებისათვის დამახასიათებელია შესაძლო ობიექტთა, შედარების მაჩვენებლებისა და დამოკიდებულებათა სახეობების მრავალფეროვნება, რამაც განაპირობა უნივერსალური სისტემის ცნების შემოტანის აუცილებლობა. გაზომვათა თეორიაში აღნიშნული სისტემა ცნობილია სახელწოდებით - რიცხვითი სისტემა დამოკიდებულებებით:

$$H = < N; S > ,$$

სადაც $N$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო $S = (S_1, S_2 \ , \ \dots \ , \ S_m \ )$ - რიცხვებს შორის დამოკიდებულებათა სიმრავლე. რიცხვით სისტემას დამოკიდებულებებით ეწოდება სრული, თუ $N$ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

გაზომვათა თეორიში ორი ძირითადი პრობლემა არსებობს - წარმოდგენისა და ერთადერთობის. წარმოდგენის პრობლემა მდგომარეობს იმის დამტკიცებაში, რომ ემპირიული სისტემისათვის დამოკიდებულებებით, რომელიც შერჩეულია ობიექტთა გარკვეული თვისებების გასაზომად, შეიძლება აიგოს შესაბამისი რიცხვითი სისტემა დამოკიდებულებებით, ანუ სისტემა, რომელიც რიცხვების საშუალებით აღწერს ობიექტთა თვისებებსა და მათ შორის დამოკიდებულებებს.

იმისათვის, რომ რიცხვითმა სისტემამ შეინარჩუნოს ობიექტთა თვისებები და მათ შორის დამოკიდებულებები, იგი უნდა იყოს ემპირიული სისტემის იზომორფული (ან, უკიდურეს შემთხვევაში, ჰომომორფული მაინც).

დავაზუსტოთ მოყვანილი ცნებების შინაარსი.

რიცხვითი სისტემა დამოკიდებულებებით $H =< N; S_1 \ , \ \dots \ , S_m \ >$ იზომორფულია ემპირიული სისტემის დამოკიდებულებებით $M =< O; R_1 \ , \dots \ , R_m >$ , თუ იგი მისი მსგავსია (ანუ, $N$ და $O$ სიმრავლეები ერთიდაიმავე რაოდენობის ელემენტებისაგან შედგება, ხოლო $S_i$ და $R_i$ ტოლადგილიანი დამოკიდებულებებია, $i = \overline{1, m}$ ) და არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა (ფუნქცია) $f$ ობიექტებისა რიცხვით სიმრავლეზე.

რიგ შემთხვევებში $f$ ასახვისათვის ურთიერთცალსახობის თვისების მოთხოვნა ძალზე ხისტად გამოიყურება და აუცილებელი არ არის.

თუ ზემოთმოყვანილ განსაზღვრებაში ურთიერთცალსახობის მოთხოვნას ამოვიღებთ, მივიღებთ ჰომომორფულ ასახვას.

ერთადერთობის პრობლემა მდგომარეობს მოცემული ემპირიული სისტემის სხვადასხვა რიცხვითი სისტემით წარმოდგენის შესაძლებლობაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ერთადერთობის პრობლემის გადაწყვეტა მდგომარეობს იმის გარკვევაში, თუ რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება აღიწეროს მოცემული ემპირიული სისტემა იზომორფული ან ჰომომორფული რიცხვითი სისტემით და როგორ არიან დაკავშირებული ეს რიცხვითი სისტემები ერთმანეთთან.

ერთადერთობის პრობლემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ როგორც სკალის ტიპის დადგენის პრობლემა.

სკალა ეწოდება ემპირიული სისტემის, რიცხვითი სისტემისა და ასახვის ერთობლიობას - $< M, H, f >$.

დავუშვათ, $< M, H, f >$ და $< M, H, g >$ წარმოადგენს ორ სკალას სხვადასხვა $f$ და $g$ ასახვებით.

მაშინ ისმის კითხვა, თუ როგორ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული ამ ასახვებით მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობები.

ვთქვათ, $r_i = f(O_i)$, $r_i^* = g(O_i)$. $r_i$ და $r_i^*$ რიცხვებს შორის კავშირი ჩავწეროთ ფუნქციის სახით:

$\varphi$: $r_i = \varphi(r_i^*)$, ან $f(O_i) = \varphi[g(O_i)]$.

$\varphi$ ეწოდება სკალის დასაშვები გარდაქმნა.

მოყვანილი განმარტების აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ $\varphi$ ფუნქცია ადგენს კავშირს ყველა იმ რიცხვით სისტემას შორის, რომლებიც მოცემულ ემპირიულ სისტემას აღწერს. $\varphi$ ფუნქციის თვისებები განსაზღვრავს სკალის ტიპს და აქედან გამომდინარე, შეიძლება საფუძვლად დაედოს გაზომვის სკალათა კლასიფიკაციას.

განვიხილოთ პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გამოყენებადი სკალათა ტიპები.

დასახელებათა სკალას იყენებენ იმისათვის , რომ აღწერონ ობიექტების ამა თუ იმ კლასისადმი მიკუთვნება. ყველა ობიექტს, რომელიც ეკუთვნის მოცემულ კლასს, ერთიდაიგივე რიცხვი მიეწერება, ობიექტებს, რომლებიც სხადასხვა კლასს ეკუთვნის - სხვადასხვა რიცხვი. ამის გამო ხშირად ამ ტიპის სკალას კლასიფიკაციის სკალასაც უწოდებენ.

დასახელ ებათა სკალა ინარჩუნებს ეკვივალენტობის დამოკიდებულებასა და განსხვავებებს ობიექტებს შორის. მას ფართო გამოყენება აქვს პრაქტიკაში ნაკეთობათა ნომენკლატურის, სხვადასხვა სახის დოკუმენტებისა და ინფორმაციის ინდექსირებისას.

დასახელების სკალა ერთადერთია ცალსახა გარდაქმნის სიზუსტით. ეს ნიშნავს, რომ თუ გვაქვს ორი $f$ და $g$ ასახხვა, ანუ კლასებისადმი რიცხვითი მნიშვნელობების მიწერის ორი ვარიანტი, მაშინ ეს რიცხვითი მნიშვნელობები ერთმანეთთან დაკავშირებული უნდა იყოს ცალსახა $\varphi$ გარდაქმნით.

რიგობრივი სკალა გამოიყენება ობიექტების დალაგების გასაზომად ერთი, ან ნიშანთვისებათა ერთობლიობის შესაბამისად. მაგალითის სახით შეიძლება მინერალების სიმყარის სკალის მოყვანა. ამ ტიპის სკალისათვის დასაშვებ $\varphi$ გარდაქმნას მონოტონური გარდაქმნა წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე, რიგობრივი სკალა ერთადერთია მონოტონური გარდაქმნის სიზუსტით. რიცხვები მოცემულ შემთხვევაში ასახავს მხოლოდ ობიექტთა რიგითობას და არ იძლევა იმის საშუალებას, რომ გამოითქვას მოსაზრება, თუ რამდენით, ან რამდენჯერ აღემატება ერთი ობიექტისათვის დამახასიათებელი ესა თუ ის თვისება მეორე ობიექტის იმავე თვისებას.

ინტერვალთა სკალას იყენებენ იმისათვის, რომ აისახოს განსხვავებათა სიდიდეები ობიექტთა თვისებებში. დასაშვებ გარდაქმნას ამ შემთხვევაში წრფივი $\varphi(x) = ax + b$ გარდაქმნა წარმოადგენს. ამიტომ ინტერვალთა სკალა ერთადერთია წრფივი გარდაქმნის სიზუსტით.

კონკრეტული გაზომვა ინტერვალთა სკალაში განისაზღვრება $a$-სა (მასშტაბის) და $b$-ს (ათვლის სათავის) დაფიქსირებით. სკალის ტიპის სახელწოდება აიხსნება მისი ძირითადი თვისებით, რომელიც ინტერვალთა ფარდობის შენარჩუნებაში მდგომარეობს:

$$\frac{f(O_i)-f(O_j)}{f(O_k)-f(O_l)}=\frac{(af(O_i)+b)-(af(O_j)+b)}{(af(O_k)+b)-(af(O_l)+b)}.$$

ტემპერატურის გაზომვა ფარენგეიტის ან ცელსიუსის გრადუსებში ინტერვალთა სკალაში გაზომვის მაგალითს წარმოადგენს. ასევე, გრიგორიანული და მუსულმანური კალენდრები ამ ტიპის სკალის ორ კონკრეტიზაციაა, რადგანაც დროის გასაზომად აუცილებელია მასშტაბისა და ათვლის სათავის დაფიქსირება.

შეფარდებათა სკალა გამოიყენება იმ შემთხვევებში, როდესაც საჭიროა ობიექტთა თვისების ფარდობათა ასახვა, ე. ი. იმის განსაზღვრა, თუ რამდენჯერ აღემატება ერთი ობიექტის რომელიმე თვისება მეორე ობიექტის იმავე თვისებას. შეფარდებათა სკალისათვის დასაშვებია მსგავსების $\varphi(x) = ax$ გარდაქმნა. აქედან გამომდინარე, შეფარდებათა სკალა ერთადერთია მსგავსების გარდაქმნის სიზუსტით.

სკალის სახელწოდება აიხსნება შეფარდებათა შენარჩუნების თვისებით:

$$\frac{a\,f(O_i)}{a\,f(O_j)} = const, \quad a\text{-ს მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად.}$$

შეფარდებათა სკალაში იზომება მაგალითად, სიგრძე, მასა და სხვა ფიზიკური სიდიდეები, აგრეთვე ამა თუ იმ საქონლის ფასი. თუ ჩვენ ვაპირებთ ავტომობილის შეძენას და გვეუბნებიან, რომ ერთი მოდელის ავტომობილი ორჯერ ძვირია სხვა მოდელის ავტომობილთან შედარებით, რა თქმა უნდა, არ შევეკითხებით გამყიდველს, თუ რომელ ვალუტაში იყიდება ავტომობილები.

ადვილი მისახვედრია, რომ შეფარდებათა სკალა ინტერვალთა სკალის კერძო შემთხვევას იმ თალსაზრისით, რომ შეფარდებათა სკალებში ფიქსირდება ათვლის სათავის ნულოვანი მნიშვნელობა $(b = 0)$. ინტერვალთა სკალებში კი მასშტაბისა და ათვლის სათავის არჩევა ნებისმიერად შეიძლება.

ინტერვალთა სკალის კიდევ ერთ კერძო შემთხვევას აბსოლუტური სკალა წარმოადგენს ერთეულოვანი მასშტაბითა და ათვლის სათავის ნულოვანი მნიშვნელობით $(a = 1\,,\ b = 0)$. ამ ტიპის სკალისათვის დასაშვებია იგივური, ანუ $\varphi(x) = x$ სახის გარდაქმნა გარდაქმნა. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ერთადერთი $f$ ასახვა ობიექტებისა რიცხვით სისტემაში , საიდანაც გამომდინარეობს სკალის ტიპის სახელწოდება, ასე ვთქვათ, ბუკვალური, აბსოლუტური აზრით. აბსოლუტურ სკალაში (ერთადერთი ნატურალური რიცხვით) იზომება, მაგალითად, ობიეტების რაოდენობა ნებისმიერ სიმრავლეში.

გაზომვები ინტერვალთა და შეფარდებათა სკალებში სხვა ტიპის სკალებთან შედარებით უფრო ზუსტ, ობიექტურ ხასიათს ატარებს და რაოდენობრივი ბუნების მქონე მაჩვენებლებისათვის (ანუ, მაჩვენებლებისათვის, რომლებთანაც მიმართებაში აზრი აქვს შემდეგი სახის გამონათქვამებს - მოცემული მაჩვენებელი ერთ ობიექტში "ამდენით" ან "ამდენჯერ" აღემატება იმავე მაჩვენებელს მეორე ობიექტში) გამოიყენება.

პრაქტიკაში საკმაოდ ხშირად იყენებენ სკალის კიდევ ერთ სპეციფიკურ სახეობას, რომელიც ბალური სკალის სახელწოდებით არის ცნობილი. მისი სპეციფიკური თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ სკალის მნიშვნელობები (გრადაციები) წარმოადგენს რიცხვთა შემოსაზღვრულ დისკრეტულ მწკრივს, რომლებიც ერთმანეთისაგან თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული. ჩვეულებრივ, ასეთ მნიშვნელობებად იღებენ ნატურალური მწკრივის საწყის მონაკვეთს $(1,2,\ldots\ ,m)$.

ბალური შეფასებების გამოყენება გულისხმობს საყოველთაოდ ცნობილი და მიღებული, სკალის გრადაციების შესაბამისი მეტნაკლებად ობიექტური ხასიათის ეტალონების არსებობას, რომლებთანაც ხდება განსახილველი ობიექტების შედარება.

მაგალითების სახით შეიძლება მოვიყვანოთ პროფესორ-მასწავლებელთა მიერ სტუდენტთა ცოდნის შეფასება კონკრეტულ დისციპლინაში, არბიტრების მიერ სპორტსმენთა გამოსვლების არტისტულობისა და ტექნიკის შეფასება ფიგურულ სრიალში და სხვ.

ზემოთთქმულიდან გამომდინარე, შეიძლება ითქვას, რომ ბალური ტიპის სკალებს გარკვეულწილად შუალედური პოზიცია უჭირავს რაოდენობრივი და თვისობრივი ტიპის სკალებს შორის გაზომვათა სიზუსტისა და ობიექტურობის თვალსაზრისით.

პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გამოყენებად ექსპერტული შეფასებების მეთოდებს ნიშანთვისებათა გასაზომად განეკუთვნება რანჟირება, წყვილური შედარება და უშუალო შეფასება, რომელთა რეალიზაციას კონკრეტული ტიპის სკალის აგებამდე მივყევართ

თითოეულ ზემოთჩამოთვლილ მეთოდს ცალცალკე განვიხილავთ. ამასთან, ყველა შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ მოცემულია ობიექტთა სასრული $O_1, O_2, \dots, O_n$ სიმრავლე და ერთი ან რამდენიმე $I_1, I_2, \dots, I_k$ ნიშანთვისება, რომელთა შესაბამისად უნდა განხორციელდეს მათი შედარება. აქედან გამომდინარე, გაზომვის მეთოდები მხოლოდ ობიექტთა შედარების პროცედურებით შეიძლება განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. აღნიშნული პროცედურა გულისხმობს ემპირიული სისტემის აგებას, $f$ ფუნქციის შერჩევას, რომელიც ემპირიულ სისტემას რიცხვით სისტემაზე ასახავს და გაზომვათა სკალის ტიპის განსაზღვრას.

რანჟირება წარმოადგენს ობიექტთა დალაგების პროცედურას ნიშათვისების (ან ნიშანთვისებათა ერთობლიობის) შესაბამისად, რომელსაც ექსპერტი ახორციელებს თავისი ცოდნისა და გამოცდილების საფუძველზე. ობიექტებს შორის დამოკიდებულებათა სახის მიხედვით შესაძლებელია ობიექტთა დალაგების სხვადასხვა ვარიანტი. განვიხილოთ ისინი.

ვთქვათ ობიექტთა სიმრავლე არ შეიცავს ეკვივალენტურ ობიექტებს. ამ შემთხვევაში ობიექტებს შორის ადგილი აქვს მკაცრი დალაგების ორადგილიან "$\succ$" დამოკიდებულებას (ეს სიმბოლო აღნიშნავს ექსპერტის პრიორიტეტის მიმართულებას: ჩანაწერი $O_i \succ O_j$ შემდეგნაირად შეიძლება წავიკითხოთ - $O_i$ ობიექტი "უკეთესია"$O_j$ ობიექტზე , ანუ ექსპერტი მიიჩნევს, რომ მოცემული ნიშანთვისება $O_i$ ობიექტში აღემატება იმავე ნიშანთვისებას $O_j$ ობიექტში), რომელსაც აქვს ასიმეტრიულობის $(O_i \succ O_j \rightarrow O_j \nsucc O_i)$ , ტრანზიტულობისა $(O_i \succ O_j, O_j \succ O_k \rightarrow O_i \succ O_k)$ და სისრულის (ობიექტთა ნებისმიერი $O_i$ და $O_j$ წყვილისათვის ან $O_i \succ O_j$, ან $O_j \succ O_i$) თვისებები.

ყველა ობიექტის შედარების საფუძველზე ექსპერტი ადგენს შემდეგ დალაგებულ მიმდევრობას მკაცრი დალაგების დამოკიდებულების შესაბამისად :

$$O_1 \succ O_2 \succ \cdots \succ O_n, \qquad (1.1)$$

სადაც ობიექტი პირველი ნომრით ყველაზე ობიექტზე "უკეთესია", მეორე ნომრით - "უარესია" პირველ ობიექტზე, მაგრამ "უკეთესია" ყველა დარჩენილ ობიექტზე და ა. შ.

მიღებულ ემპირიულ სისტემას მკაცრი დალაგების დამოკიდებულებით - $< O, \succ >$ ეწოდება სერია. მარტივად მტკიცდება სერიის იზომორფული (ჰომომორფული) რიცხვითი $< f(O), > >$ სისტემის არსებობა, ანუ არსებობს $f(O_i)$, $i = \overline{1, n}$ , რომელიც შეესაბამება (1.1) მიმდევრობას:

$$f(O_1) > f(O_2) > \cdots > f(O_n). \qquad (1.2)$$

ექსპერტული რანჟირების პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად (1.1) მიმდევრობის ნატურალურ რიცხვით წარმოდგენას იყენებენ:

$$r_1 = f(O_1) = 1; r_2 = f(O_2) = 2, \dots, r_n = f(O_n) = n.$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$ რიცხვებს რანგებს უწოდებენ, ანუ, ყველაზე პრიორიტრტულ ობიექტს მიეწერება რანგი ერთი, ნაკლებად პრიორიტეტულს - რანგი ორი და ა.შ.

რა თქმა უნდა, $f(O_i)$ მნიშვნელობების ნებისმიერი მონოტონური გარდაქმნა ემპირიული სისტემის ახალ რიცხვით წარმოდგენას მოგვცემს. ეს კი იმას ნიშნავს,რომ რანჟირებას რიგობრივი სკალის აგებამდე მივყევართ.

თუ ობიექტებს შორის ეკვივალენტობის დამოკიდებულების არსებობაც შესაძლებელია, რანჟირების შედეგად მიიღება შემდეგი სახის დალაგებული მიმდევრობა:

$$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \sim O_4 \sim O_5 \succ \cdots \succ O_{n-1} \sim O_n . \qquad (1.3)$$

ემპირიულ სისტემას $< O, \succ, \sim >$ , რომელიც მკაცრი დალაგების დამოკიდებულებასთან ერთად ეკვივალენტობის დამოკდებულებასაც შეიცავს, კვაზისერიას უწოდებენ. კვაზისერიისათვისაც არსებობს იზომორფული (ჰომომორფული) რიცხვითი სისტემა შემდეგი სახით - $< f(O), >, = >$, რომლიდანაც კვაზისერიის ნებისმიერი სხვა იზომორფული (ჰომომორფული) რიცხვითი $< g(O), >, = >$ სისტემის მიღება მონოტონური გარდაქმნით არის შესაძლებელი.

ზოგჯერ კვაზისერიას არამკაცრი დალაგების ერთი ბინარული "$\succcurlyeq$" დამოკიდებულებით აღწერენ, რომელიც მკაცრი დალაგებისა და ეკვივალენტობის დამოკიდებულებათა გაერთიანებას წარმოადგენს (თუ ბინარულ დამოკიდებულებას განვსაზღვრავთ, როგორც $O \times O$ სიმრავლის გარკვეულ ქვესიმრავლეს). ამ დამოკიდებულებას რიცხვით სისტემაში შეესამამება "$\geq$" ("მეტია, ან ტოლია").

ამგვარად, რანჟირებას რიგობრივ სკალამდე მივყევართ იმისდა მიუხედავად, შეიცავს თუ არა ობიექტთა სიმრავლე ეკვივალენტურ ობიექტებს.

რანჟირების, როგორც გაზომვის მეთოდის დადებით მხარეს პროცედურების განხორციელების სიმარტივე წარმოადგენს, ხოლო ნაკლოვანებად უნდა ჩაითვალოს ის, რომ ამ მეთოდის გამოყენებით პრაქტიკულად შეუძლებელია ობიექტთა დალაგება, როდესაც მათი რაოდენობა დიდია. როგორც პრაქტიკული გამოცდილება აჩვენებს, როდესაც ობიექტთა რიცხვი 15-20-ს აღემატება, ექსპერტებს უკვე უძნელდებათ რანჟირებული მწკრივის აგება. ეს იმით აიხსნება, რომ რანჟირების პროცესში ექსპერტმა უნდა მოახერხოს ცალკეული ობიექტის პრიორიტეტულობის შეფასება ობიექტთა მთელი სიმრავლის გათვალისწინებით. ამიტომ, ობიექტთა დიდი რაოდენობის რანჟირებისას ექსპერტები ხშირად არსებითი ხასიათის შეცდომებს უშვებენ.

წყვილური შედარება წარმოადგენს ობიექტთა პრიორიტეტულობის დადგენის პროცრდურას ყველა შესაძლო წყვილის შედარების საფუძველზე, რაც გაცილებით მარტივ ამოცანას წარმოადგენს, ვიდრე ობიექტთა მთელი სიმრავლის რანჟირების ამოცანასთან შედარებით.

ობიექტთა $O_i$ და $O_j$ წყვილის შედარებისას ექსპერტმა უნდა დააფიქსიროს ერთერთი, შემდეგ დამოკიდებულებათაგან: ან $O_i \succ O_j$, ან $O_j \succ O_i$, ან $O_i \sim O_j$. რიცხვითი $f$ წარმოდგენის შერჩევაც შესაბამისად უნდა განხორციელდეს ( ანუ, თუ $O_i \succ O_j$, მაშინ $f(O_i) > f(O_j)$, ხოლო თუ $O_i \sim O_j$, მაშინ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა $f(O_i) = f(O_j)$ ).

ექსპერტული შეფასებების პრაქტიკაში შემდეგი სახის რიცხვითი წარმოდგენები გამოიყენება:

2. თუ $O_i \succ O_j$, მაშინ $f(O_i) = 2, f(O_j) = 0$,
   თუ $O_i \sim O_j$, მაშინ $f(O_i) = f(O_j) = 1$.
2. თუ $O_i \succ O_j$, მაშინ $f(O_i) = 1$, $f(O_j) = -1$,
   თუ $O_i \sim O_j$, მაშინ $f(O_i) = f(O_j) = 0$.

ამ რიცხვების განთავსება მოსახერხებელია შემდეგი სახის ცხრილში (იგი ანალოგიურია ცხრილებისა, რომლებშიც აისახება სპორტული თამაშების შედეგები):

| ობიექტები | $O_1$ | … | $O_i$ | … | $O_j$ | … | $O_k$ | … | $O_l$ | … | $O_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | | | | | | | | | | | |
| … | | | | | | | | | | | |
| $O_i$ | | | | | 2 | | | | | | |
| … | | | | | | | | | | | |
| $O_j$ | | | 0 | | | | | | | | |
| … | | | | | | | | | | | |
| $O_k$ | | | | | | | | | 1 | | |
| … | | | | | | | | | | | |
| $O_l$ | | | | | | | 1 | | | | |
| … | | | | | | | | | | | |
| $O_n$ | | | | | | | | | | | |

ცხრილი 1.1

ობიექტთა სიმრავლის სრული დალაგება (ანუ, რიგობრივი სკალის აგება) წყვილური შედარებების საუძველზე შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ემპირიულ დამოკიდებულებებს შესაბამისი თვისებები გააჩნიათ.

უშუალო შეფასება წარმოადგენს ობიექტებისადმი რიცხვითი მნიშვნელობების მიწერის პროცედურას ინტერვალთა სკალაში. ექსპერტს თავაზობენ მიაწეროს ყოველ ობიექტს რიცხვითი მნიშვნელობა რომელიმე უწყვეტი, მაგალითად, [0,1] ინტერვალიდან მოცემული ნიშანთვისების შესაბამისად. ბუნებრივია, ამ დროს მოითხოვება, რომ ეკვივალენტურ ობიექტებს ერთიდაიგივე რიცხვითი მნიშვნელობა მიეწეროს.

ობიექტთა პრიორიტეტულობის ინტერვალთა სკალაში გაზომვა მხოლოდ იმ შემთხვევებში შეიძლება განხორციელდეს, როდესაც ექსპერტები სრულ ინფორმაციას ფლობენ ობიექტთა თვისებების შესახებ.

რეალობაში ასეთი შემთხვევები შედარებით იშვიათია, ამიტომ გარკვეულწილად არბილებენ აღნიშნულ მოთხოვნას (რა თქმა უნდა, ამ დროს გაზომვათა სიზუსტის ხარისხი მცირდება) და ნაცვლად უწყვეტი ინტერვალისა განიხილავენ ობიექტებისადმი ბალური შეფასებების მიწერის შესაძლებლობას. კერძოდ, მთლიან განსახილველ უწყვეტ ინტერვალს ყოფენ თანაუკვეთ ქვეინტერვალებად, რომელთაც გარკვეული ბალური მნიშვნელობები მიეწერება (პრაქტიკაში უფრო ხშირად გამოიყენება 5, 10 და 100 ბალიანი სკალები). ამის შემდეგ ექსპერტმა უნდა განსაზღვროს, თუ რომელ ქვეინტერვალს შეესაბამება ესა თუ ის ობიექტი, რაც მისი მხრიდან ობიექტთა ბალური შეფასების ეკვივალენტურია.

ექსპერტიზის პრაქტიკამ აჩვენა, რომ რიგ შემთხვევებში უფრო ეფექტურ შედეგებს ჩვენს მიერ განხილული მეთოდების კომლექსური (კომბინირებული) გამოყენება იძლევა.

### 1.4 ექსპერტთა შერჩევა

ექსპერტული შეფასების პროცედურის სარეალიზაციოდ აუცილებელია ექსპერტთა ჯგუფის ფორმირება. საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის ეფექტურობას განსაზღვრავს ექსპერტული შეფასებების სანდოობის მახასიათებლები და ექსპერტიზის ხარჯები.

ექსპერტულ შეფასებათა სანდოობის განსაზღვრა შესაძლებელია მხოლოდ ექსპერტიზის შედეგების გაანალიზების საფუძველზე (ასე ვთქვათ, აპოსტერიულად). როდესაც ექსპერტიზა სისტემატურად ტარდება და მასში ექსპერტთა ერთიდაიგივე შემადგენლობა მონაწილეობს, დაგროვილი სტატისტიკური მონაცემები შემდეგ ექსპერტიზებში ექსპერტთა ამ ჯგუფის წევრების მოსაზრებათა სანდოობის მდგრადი შეფასების საშუალებას იძლევა.

საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის ხარისხის შესაფასებლად იყენებენ ექსპერტთა შემდეგ მახასიათებლებს: კომპეტენტურობა; კრეატულობა; ექსპერტიზასთან დამოკიდებულება; კონფორმიზმი; აზროვნების ანალიტიკურობა; აზროვნების კონსტრუქციულობა; კოლექტივიზმი; თვითკრიტიკულობა.

ჩამოთვლილი მახასიათებლების შეფასება ძირითადად მხოლოდ თვისობრივად არის შესაძლებელი, თუმცა, ზოგიერთი მათგანისათვის არის რაოდენობრივი შეფასებების შემოღების გარკვეული მცდელობებიც.

კომპეტენტურობა არის ექსპერტის კვალიფიკაციის ხარისხი ცოდნის გარკვეულ სფეროში. მისი განსაზღვრა შესაძლებელია სპეციალისტის საქმიანობის გაანალიზების საფუძველზე.

ექსპერტული შეფასებების პრაქტიკაში ექსპერტის კომპეტენტურობის შესაფასებლად იყენებენ როგორც სხვა ექსპერტთა შეფასებებს, ასევე თვითშეფასებებსაც.

საკმაოდ ეფექტურია კომპეტენტურობის შეფასების მეთოდიკა, რომელშიც გამოიყენება ექსპერტთა შეფარდებითი კომპეტენტურობის კოეფიციენტები. ამ კოეფიციენტების გამოანგარიშებას საფუძვლად უდევს ექსპერტთა მიერ გამოთქმული მოსაზრებები ექსპერტული ჯგუფის წევრების შესახებ. კერძოდ, ექსპერტებს თხოვენ გამოთქვან მოსაზრებები ამა თუ იმ პიროვნების ექსპერტიზის ჯგუფში ჩართვის მიზანშეწონილობაზე (საკუთარი თავის ჩათვლით) გარკვეული პრობლემის გადასაწყვეტად. გამოკითხვის შედეგების საფუძველზე დგება მატრიცა, რომლის სტრიქონებისა და სვეტების ელემენტებია ცვლადები:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ თუ } j\text{-ურმა ექსპერტმა დაასახელა } i\text{-ური ექსპერტი;} \\ \\ 0, \text{ თუ } j\text{-ურმა ექსპერტმა არ დაასახელა } i\text{-ური ექსპერტი.} \end{cases}$$

ე. წ. ლიდერის გამოვლენის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის [5] გამოყენებით შესაძლებელია $l$ რიგის კომპეტენტურობის შეფარდებითი კოეფიციენტის გამოთვლა თითოეული ექსპერტისათვის:

$$k_i^l = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_j^{l-1}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_j^{l-1}}, i = \overline{1,m}, l = 1,2,... \qquad (1.4)$$

ამ ფორმულაში $m$ აღნიშნავს ექსპერტთა რაოდენობას ჯგუფში ( კვადრატული $(x_{ij})$ მატრიცის განზომილებას); $x_{ij}$ - მატრიცის ელემენტებს; $l$ -კომპეტენტურობის კოეფიციენტის რიგის ნომერს. კომპეტენტურობის კოეფიციენტები ნორმირებულია ისე, რომ მათი ჯამი ერთის ტოლია:

$$\sum_{i=1}^{m} k_i^l = 1 \ . \qquad (1.5)$$

(1.4) ფორმულის გამოყენებით შეიძლება პირველიდან დაწყებული, სხვადასხვა რიგის კომპეტენტურობის კოეფიციენტების გამოანგარიშება. კერძოდ, პირველი რიგის კოეფიციენტებისათვის გვექნება

$$k_i^1 = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}}, (i = \overline{1,m}). \qquad (1.6)$$

ამ უკანასკნელის აზრი შემდეგში მდგომარეობს: ითვლება "ხმები", რომელიც მიიღო $i$-ურმა ექსპერტმა (ერთიანების ჯამი $i$-ურ სტრიქონში ) და იყოფა მატრიცის ყველა ერთიანის ჯამზე.

მეორე რიგის კომპეტენტურობის შეფარდებითი კოეფიციენტები ($l=2$) კი შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$k_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_j^1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_i^1}, (i=\overline{1,m}). \qquad (1.7)$$

ამ ფორმულაში ჩასმულია (1.6) ფორმულით გამოთვლილი პირველი რიგის შეფარდებითი კომპეტენტურობის კოეფიციენტების მნიშვნელობები. ამგვარად, მეორე რიგის კომპეტენტურობის კოეფიციენტები წარმოადგენს პირველი რიგის კოეფიციენტებით შეწონილი "ხმების" შეფარდებით რაოდენობას.

3-4 იტერაციის შემდეგ კომპეტენტურობის კოეფიციენტების მნიშვნელობები უკვე სტაბილური ხდება.

[5]-ში ნაჩვენებია, რომ კომპეტენტურობის კოეფიციენტის ზღვრული მნიშვნელობები წარმოადგენს საკუთრივი ვექტორის კომპონენტებს , რომელიც $X=(x_{ij})$ მატრიცის მაქსიმალურ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება. $X$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები განისაზღვრება როგორც შემდეგი ალგებრული განტოლების ფესვები

$$|X-\lambda E|=0, \qquad (1.8)$$

სადაც $\lambda$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვების ვექტორია, ხოლო $E$ - ერთეულოვანი მატრიცა.

კომპეტენტურობის $k=(k_1,k_2,...k_m)$ ვექტორი, რომელიც წარმოადგენს $X$ მატრიცის საკუთრივ ვექტორს საკუთრივი რიცხვის მაქსიმალური $\lambda^*$ მნიშვნელობისათვის, $m+1$ რიგის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგი სისტემის ამოხსნით მიიღება:

$$Xk=\lambda^* k; \sum_{i=1}^{m} k_i = 1. \qquad (1.9)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც თითოეული ექსპერტი მიზანშეწონილად მიიჩნევს ექსპერტობის ყველა კანდიდატის ჩართვას ექსპერტიზის ჯგუფში (ანუ, $X$ მატრიცა ელემენტების სახით მხოლოდ ერთიანებს შეიცავს) , $Xk$ ნამრავლი იძლევა ვექტორს ტოლი კომპონენტებით. ამიტომ, (1.9) განტოლებები ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$1=\lambda^* k_i, i=\overline{1,m}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ კომპეტენტურობის კოეფიციენტები

$$k_i = \frac{1}{\lambda^*}, i = \overline{1,m}.$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ მოცემულ კერძო შემთხვევაში საკუთრივი რიცხვის მაქსიმალური მნიშვნელობა $\lambda^* = m$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ კომპეტენტურობის კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია და მათი მნიშვნელობა

$$k^* = \frac{1}{m}, (i = \overline{1,m}).$$

კრეატულობა არის ადამიანის უნარი შემოქმედებითად მიუდგეს ამოცანების დასმასა და გადაწყვეტას. ამჟამად , გარდა ცალკეული თვისობრივი ხასიათის მოსაზრებებისა, ამ მახასიათებლის შეფასების მეთოდები შემუშავებული არ არის.

ისეთი მახასიათებელი, როგორიცაა ექსპერტიზასთან დამოკიდებულება, მნიშვნელოვანია სპეციალისტის ექსპერტულ ჯგუფში ჩართვის გადაწყვეტილების მიღებისას. ექსპერტის ნეგატიური ან პასიური დამოკიდებულება კონკრეტული პრობლემის გადაწყვეტისადმი , მისი დაკავებულობის მაღალი ხარისხი და სხვა ფაქტორები არსებით გავლენას ახდენს ექსპერტის ფუნქციების შესრულებაზე.

კონფორმიზმი არის ადამიანის მიდრეკილება ავტორიტეტების გავლენის ქვეშ მოქცევისადმი. ეს თვისება ვლინდება საკუთარი მოსაზრებების არამდგრადობაში, განსაკუთრებით ღია დისკუსიების დროს.

აზროვნების ანალიტიკურობა ექსპერტის მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს რთული პრობლემების გადაწყვეტისას. თუ სპეციალისტისათვის დამახასიათებელია "პროფესიული სიბრმავე", იგი ხარისხიანად ვერ გადაწყვეტს პრობლემას, რომელიც საჭიროებს აზროვნების ვიწრო ჩარჩოებიდან გასვლასა და ფართო ხედვას მიუხედავად იმისა, თუ რამდენად ღრმაა ექსპერტის ცოდნა თავის სფეროში.

აზროვნების კონსტრუქციულობა მის პრაგმატულ ასპექტს ასახავს. არსებობენ კვალიფიციური სპეციალისტები სუსტად გამოხატული პრაგმატული მიმართულებებით. ექსპერტები კი პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე მოსაზრებებს უნდა გამოთქვამდნენ.

კოლექტივიზმის თვისება გათვალისწინებული უნდა იქნეს ღია დისკუსიების ჩატარებისას. ადამიანის ეთიკური ქცევა ჯგუფში ხშირ შემთხვევებში არსებით გავლენას ახდენს ჯანსაღი ფსიქოლოგიური კლიმატის შექმნაზე და აქედან გამომდინარე, პრობლემის წარმატებით გადაწყვეტის ხარისხზე.

ექსპერტის თვითკრიტიკულობა პირითადად მჟღავნდება კომპეტენტურობის თვითშეფასებისას, აგრეთვე, განსახილველ პრობლემასთან დაკავშირებული გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში.

ჩამოთვლილი მახასიათებლები საკმარისი სისრულით აღწერს იმ თვისებებს, რომლებიც აუცილებელია ექსპერტული შეფასების ამოცანათა წარმატებული გადაწყვეტისათვის. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ შესაბამისი ინფორმაციის შეგროვება და შესწავლა მეტად შრომატევადია. გარდა ამისა, პრობლემურია ინტეგრალური მახასიათებლის ფორმულირება, რომელშიც ასახული იქნება ექსპერტთა უმნიშვნელოვანესი თვისებები. ამ პრობლემას ართულებს ის გარემოებაც, რომ მახასიათებელთა ნაწილი ექსპერტის დადებით, ხოლო ნაწილი - უარყოფითი თვისებას ასახავს.

საერთოდ, ექსპერტული შეფასებების დროს ექსპერტები ერთგვარი "საზომი ხელსაწყოს" როლში გვევლინებიან. მათი ეს ფუნქცია შეიძლება აისახოს ისეთი ინტეგრალური მახასიათებლით, როგორიცაა გამოთქმული მოსაზრებების სანდოობა (ანუ, მოკლედ, ექსპერტთა სანდოობა). ასეთი განზოგადებული მახასიათებლის გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევებში, როდესაც არსებობს ადეკვატური ინფორმაცია ექსპერტთა გამოცდილების შესახებ.

რაოდენობრივად ექსპერტთა საიმედობას შემდეგი ფორმულით აფასებენ:

$$S_i = \frac{N_i}{N}, i = \overline{1,m},$$

სადაც $N_i$ აღნიშნავს იმ შემთხვევათა რაოდენობას, რომლებშიც $i$-ური ექსპერტის მიერ მიღებული გადაწყვეტილება მისაღები აღმოჩნდა პრაქტიკაში, ხოლო - $N$, $i$-ური ექსპერტის მონაწილეობის საერთო რიცხვს პრობლემათა გადაწყვეტაში.

შესაძლებელია თითოეული ექსპერტის ხვედრითი წილის გათვალისწინებაც მთლიანი ექსპერტული ჯგუფის სანდოობაში (ანუ, შეფარდებითი სანდოობის გამოთვლა) შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$S_i^c = \frac{S_i}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i}, \quad (i = \overline{1,m}),$$

სადაც $m$ აღნიშნავს ექსპერტთა რაოდენობას ჯგუფში.

მოყვანილი ფორმულის თანახმად, ექსპერტის შეფარდებითი სანდოობა წარმოადგენს ექსპერტის სანდოობისა და ექსპერტთა ჯგუფის საშუალო სანდოობის ფარდობას.

ექსპერტული შეფასებების სანდოობა მთლიანობაში დამოკიდებულია ექსპერტთა რაოდენობაზე ჯგუფში და მისი წევრების კომპეტენტურობაზე.

პირველი კლასის პრობლემებისათვის (ინფორმაციული პოტენციალის მაღალი დონით) დამახასიათებელია ექსპერტიზის სანდოობის ხარისხის ზრდა ჯგუფში ექსპერტთა რაოდენობის ზრდასთან ერთად. საექსპერტო პრობლემებში კი, რომლებიც მეორე კლასს განეკუთვნება, ასეთი დამოკიდებულების არსებობა ნაკლებალბათურია.

ექსპერტთა მინიმალურ რაოდენობას ჯგუფში განაპირობებს საექსპერტო პრობლემის სიღრმე, ანუ სხვადასხვა პროფილის სპეციალისტთა მოზიდვის აუცილებლობა.

ექსპერტიზაში მონაწილეობა წახალისებული უნდა იყოს როგორც მორალურად, ისე მატერიალურადაც, რადგანაც ექსპერტთა მოტივაცია და მათი ექსპერტიზასთან დამოკიდებულება მნიშვნელოვანწილად სწორედ ამ ფაქტორებზე არის დამოკიდებული.

ექსპერტიზის ხარჯები, როგორც წესი, ექსპერტთა რაოდენობისა და გამოკითხვის ტურების რაოდენობის პროპორციულად იზრდება.

შეზღუდული ფინანსური რესურსები განსაზღვრავს ექსპერტთა მაქსიმალურ რაოდენობას ჯგუფში.

ამგვარად, ექსპერტული ჯგუფის ფორმირებისას შეიძლება დაისვას მინიმალური ხარჯებით სანდოობის მისაღები დონის, ან შეზღუდული ფინანსური რესურსების პირობებში სანდოობის მაქსიმალური დონის მიღწევის ამოცანები.

ექსპერტთა შერჩევის მიზნით იქმნება კვალიფიციური სპეციალისტებისაგან შემდგარი მართვის ჯგუფი. ამ ჯგუფის საქმიანობაში შეიძლება შემდეგი სამი ეტაპი გამოიყოს: ექსპერტთა რაოდენობის განსაზღვრა; ექსპერტთა სიის შედგენა და ექსპერტთა თანხმობის მიღება.

მართვის ჯგუფი თავის საქმიანობას იწყებს ექსპერტთა წინასწარი სიის შედგენით. ამ დროს გარდა იმ კრიტერიუმებისა, რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი, ითვალისწინებენ იმ ადამიანთა შეხედულებებს, რომლებიც კარგად იცნობენ ექსპერტობის კანდიდატებს, მათ ადგილმდებარეობასა და ექსპერტიზაში მონაწილეობის შესაძლებლობებს.

ექსპერტთა წინასწარი სიის შედგენის შემდეგ მათ ეგზავნებათ მოსაწვევი წერილები ექსპერტიზაში მონაწილეობის მისაღებად. ამ წერილებში ახსნილია ექსპერტიზის მიზნები, შესასრულებელი სამუშაოების რიგითობა და მოცულობები, აგრეთვე, შრომის ანაზღაურების პირობები.

პასუხების მიღების შემდეგ მართვის ჯგუფი ადგენს ექსპერტთა საბოლოო სიას. ეს სია მტკიცდება და ექსპერტებს ეგზავნებათ შეტყობინებები მათი ექსპერტთა ჯგუფში ჩართვის შესახებ. თუ ექსპერტული შეფასებები ანკეტირების მეთოდის გამოყენებით უნდა განხორციელდეს, აღნიშნულ შეტყობინებებს თან ერთვის ანკეტები, მათი შევსების შესაბამისი ინსტრუქციებით.

## 1.5 ექსპერტთა გამოკითხვის პროცედურა

ექსპერტთა გამოკითხვა ხორციელდება მართვის ჯგუფის მიერ. გამოკითხვის პროცედურა შეიძლება მიზნად ისახავდეს ერთერთი შემდეგი ტიპის ამოცანის გადაწყვეტას:

- მოცემული ობიექტების თვისობრივი, ან რაოდენობრივი შეფასება;
- ახალი ობიექტების აგება;
- ახალი ობიექტების აგება და შეფასება.

კოლექტიური ექსპერტიზის ჩატარებისას გამოიყენება გამოკითხვის შემდეგი ძირითადი სახეობები: ანკეტირება და ინტერვიურება, დისკუსია, იდეების კოლექტიური გენერირება, ანუ ე.წ. "გონებრივი შეტევა".

ანკეტირება შეიძლება ჩატარდეს როგორც უკუკავშირით, ისე მის გარეშეც.

ანკეტირება უკუკავშირით რამდენიმე ეტაპად ტარდება: ექსპერტებს აცნობებენ გამოკითვის წინა ეტაპის ზოგიერთ შედეგს, აგრეთვე, სხვა ექსპერტთა შეფასებებსა და არგუმენტაციებს.

ანკეტირების დროს ექსპერტებს ურიგდებათ გამოკითხვის სპეციალური ფურცლები - ანკეტები, რომლის შეკითხვებს მათ წერილობითი ფორმით უნდა გასცენ პასუხები. ანკეტის კონკრეტულ ფორმასა და მასში დასმული კითხვების შინაარსს განაპირობებს პრობლემის სპეციფიკა.

ანკეტირება შეიძლება განხორციელდეს დასწრებული ან დაუსწრებელი ფორმით. პირველ შემთხვევაში ექსპერტები ანკეტებს ავსებენ მართვის ჯგუფის თანდასწრებით. დაუსწრებელი ანკეტირების დროს ექსპერტებს ეგზავნებათ ანკეტები, მართვის ჯგუფის წევრებთან მათ უშუალო კონტაქტები არა აქვთ. დაუსწრებელი ანკეტირების დადებით მხარეს წარმოადგენს მისი ორგანიზების სიმარტივე და ექსპერტთა მოზიდვის შესაძლებლობა ქვეყნის სხვადასხვა რეგიონებიდან დიდი ხარჯების გარეშე. მაგრამ, ამ დროს შესაძლებელია ანკეტის კითხვებს არასწორი ინტერპრეტაცია მიეცეს ექსპერტთა მიერ, გამოკითხვის პროცესის გაჭიანურება და ა.შ. გარდა ამისა, გამორიცხული არ არის, რომ ანკეტის კითხვებზე პასუხების გაცემაში სრულიად სხვა პიროვნებები მონაწილეობდნენ.

დასწრებული ანკეტირების ნაკლოვან მხარედ ექსპერტის პასუხებზე გალენის მოხდენის შესაძლებლობა ითვლება.

ანკეტების კითხვების კლასიფიკაცია შეიძლება განხორციელდეს შინაარსისა და ფორმის შესაბამისად.

შინაარსის მიხედვით კითხვები იყოფა სამ ჯგუფად:

- კითხვები ექსპერტთა მონაცემების (ასაკი, განათლება, თანამდებობა, სამუშაო სტაჟი და ა.შ.) დასაზუსტებლად;

* საანალიზო პრობლემასთან დაკავშირებული არსებითი ხასიათის კითხვები;
* დამატებითი კითხვები, რომლებზეც პასუხის გაცემა ექსპერტთა ინფორმაციის წყაროებისა დადგენისა და არგუმენტაციების ახსნის საშუალებას იძლევა.

კითხვების ფორმის მიხედვით კლასიფიკაციას საფუძვლად უდევს მათზე პასუხის გაცემის შემდეგი ტიპები: ღია (ანუ, თავისუფალი), დახურული და მარაოსებრი.

ღია კითხვებზე პასუხების გაცემა შესაძლებელია ნებისმიერი ფორმით.

დახურულ კითხვებზე პასუხის გაცემის შემდეგი სამი ვარიანტი არსებობს - "დიახ"" "არა" და "არ ვიცი", ხოლო მარაოსებრი კითხვები ექსპერტს თავაზობს აირჩიოს ერთერთი, ალტერნატიული პასუხებიდან (შესაძლებელია პასუხის რამდენიმე ვარიანტის არჩევაც).

როდესაც გამოკითხვა რამდენიმე ტურად ტარდება, ღია კითხვების დასმა მიზანშეწონილია პირველ ტურში, რადგანაც ამ ფორმით პრობლემის გადაწყვეტისადმი ახლებური მიდგომების გამოვლენა უფრო შესაძლებელია.

ღია ტიპის შეკითხვების ნაკლოვან მხარეს პასუხების მეტად ფართო დიაპაზონი წარმოადგენს, რაც საკმაოდ ართულებს ექსპერტთა მოსაზრებების შეჯერებასა და გამოკითხვის შედეგების დამუშავებას.

დახურული და მარაოს ტიპის კითხვებზე პასუხების კონკრეტული ხასიათი გამოკითხვის შედეგების დამუშავებისას რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენების საშუალებას იძლევა, რის გამოც ანკეტირების ასეთი ფორმებს პრაქტიკაში ყველაზე ხშირი გამოყენება აქვს. თუმცა, ამ დროს გამორიცხული არ არის, რომ ექსპერტთა პასუხებზე გარკვეული ზეგავლენასაც ქონდეს ადგილი.

აღნიშნული ნაკლის კომპენსირების მიზნით გონივრულ ფარგლებში აფართოებენ პასუხების მარაოს განშტოებებს და სათანადო არგუმენტაციების შემთხვევაში ექსპერტებს მარაოს ჩარჩოებიდან გასვლის უფლებასაც აძლევენ.

ანკეტებს, როგორც წესი, თან ერთვის ახსნა-განმარტებითი წერილი ექსპერტიზის მიზნებისა და ობიექტების შესახებ, ორგანიზაციული ხასიათის აუცილებელი ცნობები და ინსტრუქცია ანკეტის შესავსებად.

ანკეტირების ერთერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდს დელფოსის მეთოდი წარმოადგენს.

მეთოდის სახელწოდება დაკავშირებულია ძველი საბერძნეთის რელიგიურ ცენტრთან - დელფოსთან, რომელიც განთქმული იყო მომავლის წინასწარმეტყველებით ( ძვ. წელთაღრიცხვის VI საუკუნე).

ექსპერტთა გამოკითხვა ამ მეთოდის შესაბამისად რამდენიმე ტურად ტარდება.

პირველ ტურში ექსპერტები ანკეტის შეკითხვებს პასუხობენ ღია ფორმით ყოველგვარი არგუმენტაციების გარეშე.

პასუხების დამუშავების საფუძველზე გამოვლინდება საშუალო და უკიდურესი მოსაზრებები, რომლებიც ეცნობება ექსპერტებს.

მეორე ტურში ექსპერტებს საშუალება ეძლევათ გადახედონ თავიანთ მოსაზრებებს და სურვილის შემთხვევაში შეცვალონ პირველ ტურში გაცემული პასუხები, ოღონდ, ამ ტურში ექსპერტებმა უნდა ახსნან, თუ რატომ ცვლიან (ან არ ცვლიან) პასუხებს.

ამ ტურის ჩატარების საფუძველზე მიღებული ახალი საშუალო და უკიდურესი მოსაზრებები, აგრეთვე, ცვლილებათა არგუმენტაციები ანონიმურობის სრული დაცვით ეცნობება ექსპერტებს და ტარდება მესამე ტური, რომელშიც ექსპერტები კვლავ გადახედავენ თავიანთ პასუხებს შესაბსამისი არგუმენტაციებით.

საჭიროების შემთხვევაში მომდევნო ტურები ანალოგიურად ტარდება.

ჩვეულებრივ, მეოთხე ან მეხუთე ტურის შემდეგ ექსპერტები უკვე აღარ ცვლიან თავიანთ მოსაზრებებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ გამოკითხვა უნდა დასრულდეს.

დელფოსის მეთოდი სამომავლო პერსპექტივების საკმაოდ კარგ შეფასებებს იძლევა.

უნდა აღინიშნოს მეთოდის სერიოზული ნაკლოვანებებიც. კერძოდ, რამდენიმე ტურის ჩატარების აუცილებლობა მნიშვნელოვნად აჭიანურებს გამოკითხვის პროცესს; მოსაზრებათა მრავალჯერ გადახედვა ხშირად ექსპერტების უარყოფით რეაქციებს იწვევს, რაც ადეკვატურად აისახება მათი მუშაობის ხარისხზე; ანონიმურობა აქვეითებს ინფორმაციის საიმედოობასა და ექსპერტთა პასუხისმგებლობის გრძნობას.

ინტერვიუ არის საუბარი, რომლის დროსაც ინტერვიუერი ექსპერტს უსვამს კითხვებს მეტნაკლებად წინასწარ შემუშავებული პროგრამის შესაბამისად. შეიძლება ერთდროულად რამდენიმე ექსპერტის გამოკითხვაც განხორციელდეს, მაგრამ ამ შემთხვევაში გარკვეულწილად იზღუდება ექსპერტთა დამოუკიდებლობა და ინტერვიუმ შეიძლება დისკუსიის ხასიათი მიიღოს.

ინტერვიურებისა და ანკეტირების მკვეთრი გამიჯვნა შეუძლებელია. შეიძლება ითქვას, რომ ინტერვიურება, ფაქტიურად იგივე ანკეტირებაა, ოღონდ ზეპირი ფორმით.

ინტერვიუს პროცესში ინტერვიუერსა და ექსპერტს შორის მყარდება უწყვეტი ხასიათის ცოცხალი კონტაქტი, რაც დროის მცირე მონაკვეთში საკმაოდ დიდი მოცულობის ინფორმაციის მიღების საშუალებას იძლევა.

ინტერვიუს ნაკლოვან მხარედ ითვლება ექსპერტის პასუხებზე გავლენის მოხდენის შესაძლებლობა, აგრეთვე, შედარებით მცირე დრო ღრმა და გააზრებული პასუხების გასაცემად.

როდესაც საექსპერტო პრობლემის გადასაწყვეტად ზუსტი რაოდენობრივი შეფასებების გამოყენება აუცილებელი არ არის, მიზანშეწონილია დისკუსიის ჩატარება, რომლის მონაწილეთა რაოდენობა შეიძლება მერყეობდეს 20-30-ის ფარგლებში.

დისკუსიის მომზადებისა და ჩატარების პროცესში შეიძლება გამოიყოს შემდეგი სამი ეტაპი:

- დისკუსიის საგნის განსაზღვრა და დისკუსიაში მონაწილეთა მომზადება;
- საკუთრივ დისკუსია;
- დისკუსიის შედეგების ფიქსაცია და დამუშავება.

პირველ ეტაპზე მართვის ჯგუფი შემდეგ ამოცანებს წყვეტს:

- საექსპერტო პრობლემასთან დაკავშირებული არსებითი ფაქტორების გამოვლენა;
- დისკუსიის მიზნების ფორმულირება;
- საკამათო და არასაკამათო საკითხთა გამიჯვნა;
- დისკუსიის ჩატარების პროცედურის შემუშავება.

დისკუსიის მეორე ეტაპი, ჩვეულებრივ, წამყვანის შესავალი სიტყვით იწყება. თავის მოხსენებაში იგი აანალიზებს საექსპერტო პრობლემას და ხსნის მის არსს, განსაზღვრავს გამომსვლელთა რიგითობას, სვამს კითხვებსა და იღებს გადაწყვეტილებებს.

დისკუსიის ეფექტურობა მნიშვნელოვანწილად სწორედ წამყვანზეა დამოკიდებული. იგი უნდა იყოს ლოგიკური, ობიექტური და კეთილგანწყობილი დისკუსიაში მონაწილეთა მიმართ, მაქსიმალურად უზრუნველყოს შემოქმედებითი ატმოსფერო, არ დაუშვას განმეორებები და გადახვევები დისკუსიის თემიდან. გარდა ამისა, წამყვანმა მკაცრად უნდა დაიცვას რეგლამენტი (პირველ ყოვლისა, თვითონ არ უნდა დაარღვიოს იგი) და აღკვეთოს კონფორმიზმის შესაძლო გამოვლინებები.

განსაკუთრებული ყურადღება წამყვანმა დისკუსიაში მონაწილე იმ პიროვნებების მიმართ უნდა გამოიჩინოს, რომელთაც მაღალი სამსახურებრივი და საზოგადოებრივი მდგომარეობა არ უჭირავთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი დისკუსიაში მონაწილეობა, უბრალოდ, აზრს კარგავს. ზოგჯერ, კონფორმიზმის ხარისხის შემცირების მიზნით დისკუსიის ასეთ მონაწილეებს საშუალებას აძლევენ პირველები გამოვიდნენ მოხსენებებით (სასურველია, ეს მომენტი მაინცდამაინც არ იყოს ხაზგასმული, თუმცა, აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ აღნიშნული სპეციალისტები კომპეტენტურნი არიან საანალიზო პრობლემის კერძო ასპექტებში, რომელთა განხილვა სწორედ პირველ რიგში არის მიზანშეწონილი).

გამოცდილება აჩვენებს, რომ დისკუსიის მონაწილეები პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე მოსაზრებებს დისკუსიის ჩატარებიდან დაახლოებით ერთი დღის შემდეგ გამოთქვამენ. ამიტომ, მათ ხშირად მიმართავენ შესაბამისი თხოვნით, კერძოდ, თხოვენ გადახედონ თავიანთ მოსაზრებებს, დააზუსტონ და შეავსონ ისინი.

დისკუსიის დასკვნით ეტაპს წარმოადგენს მისი მონაწილეების მიერ გამოთქმული მოსაზრებების გაანალიზება და გადამუშავება.

დისკუსია საექსპერტო პრობლემის შედარებით შემჭიდროვებულ ვადებში გადაწყვეტის საშუალებას იძლევა. მისთვის დამახასიათებელ ნაკლოვან მხარედ კი ძირითადი თემიდან შესაძლო გადახვევებს მიიჩნევენ.

"გონებრივი შეტევა" საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტაზე ორიენტირებული ახალი იდეების კოლექტიური გენერირების შემოქმედებითი პროცესია, რომელიც ხორციელდება ე.წ. სხდომა-სეანსის მეშვეობით გარკვეული წესების შესაბამისად.

მეთოდის არსი ორი შემდეგი ამოცანის გამიჯვნაში მდგომარეობს:

- ახალი იდეების გენერირება;
- იდეების ანალიზი და შეფასებები.

შესაბამისად, ფორმირდება ორი ჯგუფი: იდეების გენერატორებისა და ანალიტიკოსებისა.

აუცილებელი არ არის, რომ პირველი ჯგუფის წევრები საექსპერტო პრობლემის სფეროს სპეციალისტები იყვნენ (თუმცა, მის არსში უნდა ერკვეოდნენ). უფრო მეტიც, მიზანშეწონილია სპეციალისტთა წრე შეძლებისდაგვარად ფართო იყოს, რადგანაც ამ დროს პრობლემაზე "შეტევის ფრონტიც" ფართოვდება. არცთუ იშვიათია შემთხვევები, როდესაც მდიდარი შემოქმედებითი ფანტაზიის მქონე "არაპროფესიონალებს" პრობლემის გადაწყვეტის ისეთი არაორდინარული და ორიგინალური იდეა გამოუთქვამთ, რომელიც არასოდეს მოუვიდოდა თავში საპრობლემო სფეროს რაგინდ მაღალი კომპეტენტურობის სპეციალისტს.

სასურველია, ჯგუფი შედგებოდეს დაახლოებით ერთნაირი თანამდებობრივი და საზოგადოებრივი მდგომარეობის მქონე ადამიანებისაგან, არ იყვნენ დაინტერესებული პრობლემის გადაწყვეტის რომელიმე ვარიანტით (ვთქვათ, უწყებრივად).

ისევე, როგორც დისკუსიის შემთხვევაში, "გონებრივი იერიშის" სეანსს წარმართავს წამყვანი, რომელსაც მისი მსვლელობის პროცესში ანალოგიური ამოცანების გადაწყვეტა უხდება.

სეანსის ხანგრძლივობა შეადგენს 15-45 წუთს შესვენების გარეშე და, როგორც წესი, წყდება მაშინ, როდესაც იდეების ნაკადი ამოიწურება. გამოსვლების ხანგრძლივობა მოკლეა (1-2 წუთი) და შესაძლებელია რამდენჯერმე (ოღონდ არა ერთმანეთის მიყოლებით).

იდეების გაანალიზება და შეფასებები ხორციელდება მათი კლასიფიკაციისა და წინასწარ შემუშავებული კრიტერიუმთა საფუძველზე. უნდა აღინიშნოს, რომ სეანსის პროცესში გენერირებული იდეები (პატენტუნარიანი იდეების ჩათვლით) კოლექტიური შრომის შედეგია და არ პერსონიფიცირდება.

## 1.6 ექსპერტული შეფასებების დამუშავება

ექსპერტული გამოკითხვის პროცედურის დამთავრების შემდეგ იწყება ექსპერტთა შეფასებების დამუშავების პროცესი. მისი მიზანია აღნიშნული შეფასებების განზოგადება. ამ დროს აუცილებელია მონაცემთა დამუშავების როგორც რაოდენობრივი, ისე თვისობრივი მეთოდების გამოყენება, რადგანაც ექსპერტები გარდა რიცხვითი შეფასებებისა, თავიანთ მოსაზრებებს სიტყვიერი ფორმით გამოთქვამენ. განზოგადებული შეფასებები საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის საფუძველს წარმოადგენს.

ექსპერტული შეფასებების მიზნებიდან და გაზომვის არჩეული მეთოდიდან გამომდინარე, გამოკითხვის შედეგების დამუშავებისას შეიძლება დაისვას შემდეგი ამოცანები:

- ობიექტთა განზოგადებული შეფასებების მიღება ექსპერტთა ინდივიდუალური შეფასებების საფუძველზე;
- ობიექტთა განზოგადებული შეფასებების მიღება თითოეული ექსპერტის მიერ განხორციელებული წყვილური შედარებების საფუძველზე;
- ობიექტთა შეფარდებითი წონითი კოეფიციენტების განსაზღვრა;
- ექსპერტთა მოსაზრებების თანხვედრის შეფასება;
- რანჟირებებს შორის დამოკიდებულებების განსაზღვრა;
- დამუშავების შედეგების საიმედოობის შეფასება.

ხშირად საექსპერტო პრობლემის გადასაწყვეტად ობიექტთა რანჟირება ერთი, ან მაჩვენებელთა გარკვეული ერთობლიობის შესაბამისად საკმარისი არ არის. ამიტომ, სასურველია ობიექტთა ისეთი შეფასებების მიღება, რომელიც ობიექტთა არა მარტო რანჟირების განხორციელების, არამედ ერთი ობიექტის მეორეზე უპირატესობის ხარისხის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება უშუალო შეფასების მეთოდის გამოყენებით, რომელიც 1.3 პარაგრაფში განვიხილეთ.

ექსპერტთა მოსაზრებების თანხვედრის შეფასება ხორციელდება იდივიდუალური მოსაზრებების სიახლოვის ზომის შემოღების გზით.

მნიშვნელოვანია დამოკიდებულების განსაზღვრა იმ რანჟირებათა შორის, რომლებიც განხორციელებულია სხვადასხვა მაჩვენებლების შესაბამისად. აღნიშნული დამოკიდებულებების დადგენა მაჩვენებელთა შორის არსებული კავშირების გამოვლენისა და ამ კავშირების სიმჭიდროვის ხარისხების შესაბამისად მათი დაჯგუფების საშუალებას იძლევა.

შეფასებები, რომლებიც ექსპერტიზის შედეგების დამუშავების საფუძველზე მიიღება შემთხვევით სიდიდეებს წარმოადგენს, ამიტომ მათი სანდოობის შესაფასებლად გამოყენებული უნდა იქნეს მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები.

ექსპერტიზის შედეგების დამუშავება მეტად შრომატევადი პროცესია და თანამედროვე ეტაპზე მისი განხორციელება წარმოუდგენელია შესაბამისი ალგორითმებისა და კომპიუტერული პროგრამების გამოყენების გარეშე.

ექსპერტულ შეფასებათა დამუშავების პროცესის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ განზოგადებული რანჟირების აგების ამოცანა ჯამური რანგების მეთოდის გამოყენებით.

ეს მეთოდი გულისხმობს $(m \times n)$ განზომილების რანგების $(r_{ij})$ მატრიცის ($m$ და $n$, შესაბამისად, ექსპერტებისა და ობიექტების რაოდენობას აღნიშნავს) ფორმირებას რანჟირების შედეგების საფუძველზე და ობიექტთა ჯამური რანგების გამოანგარიშებას:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,, \quad (i = \overline{1,n})\,. \qquad (1.10)$$

განზოგადებული რანჟირება იგება უტოლობათა ჯაჭვის შესაბამისად, რომელიც ჯამური რანგების ზრდას ასახავს.

მაგალითი 1.1 ხუთი ექსპერტის მიერ განხორციელდა ხუთობიექტიანი სიმრავლის შემდეგნაირი რანჟირებები:

$$O_2 \succ^1 O_1 \succ^1 O_3 \succ^1 O_4 \succ^1 O_5,$$

$$O_2 \succ^2 O_1 \succ^2 O_3 \succ^2 O_5 \succ^2 O_4,$$

$$O_2 \succ^3 O_3 \succ^3 O_1 \succ^3 O_4 \succ^3 O_5,$$

$$O_3 \succ^4 O_1 \succ^4 O_2 \succ^4 O_4 \succ^4 O_5,$$

$$O_1 \succ^5 O_2 \succ^5 O_4 \succ^5 O_3 \succ^5 O_5.$$

ავაგოთ შესაბამისი განზოგადებული რანჟირება.

ამოხსნა. რანჟირების შედეგები წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით:

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| $E_2$ | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| $E_3$ | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $E_4$ | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| $E_5$ | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| $\sum_{j=1}^{5} r_{ij}$ | 10 | 8 | 13 | 20 | 24 |

ცხრილი 1.2

ობიექტთა ჯამური რანგების შედარების საფუძველზე ვღებულობთ უტოლობათა შემდეგ ჯაჭვს:

$$r_2 < r_1 < r_3 < r_4 < r_5.$$

ამგვარად, განზოგადებულ რანჟირებას ექნება შემდეგი სახე:

$$O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_5.$$

მოყვანილ მაგალითში განხილულია ობიექტებს შორის მკაცრი დალაგების დამოკიდებულებების არსებობის შემთხვევა. თუ მათ შორის შესაძლებელია ეკვივალენტობის დამოკიდებულებების არსებობაც, ეს განზოგადებული რანჟირების აგების პროცედურას არ შეცვლის.

განზოგადებული რანჟირების აგებისას შესაძლებელია ექსპერტთა კომპეტენტურობის გათვალისწინებაც. იგი შეიძლება განხორციელდეს ობიექტთა ჯამური რანგების შესაბამისად, რომლებიც შემდეგი ფორმულით იანგარიშება:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} k_j r_{ij}, \qquad (i = \overline{1,n}), \qquad (1.11)$$

სადაც $k_j$ აღნიშნავს $j$-ური ექსპერტის კომპეტენტურობის კოეფიციენტს .

უნდა აღინიშნოს, რომ განზოგადებული რანჟირების აგების პროცედურა კორექტულია მაშინ, როდესაც ობიექტთა რანგები ნატურალური რიცხვებით განისაზღვრება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ჯამური რანგებისათვის მონოტონური გარდაქმნის პირობა შეიძლება არ შესრულდეს და, აქედან გამომდინარე, ობიექტთა სხვადასხვა რიცხვით სისტემაში ასახვამ სხვადასხვა განზოგადებული რანჟირების აგებამდე მიგვიყვანოს.

[6]-ში აღწერილია განზოგადებული რანჟირების მეთოდი, რომელიც ეფუძნება რანჟირების სივრცისა და რანჟირებათა შორის მანძილის (მეტრიკის) ცნებებს. გამოთვლითი ხასიათისა და რიგი სხვა სირთულეების გამო ამ მეთოდს შედარებით იშვიათი პრაქტიკული გამოყენება აქვს.

კიდევ ერთი, თეორიულად უფრო დასაბუთებული მიდგომა განზოგადებული რანჟირების აგებისადმი მდგომარეობს რანჟირებათა მატრიციდან წყვილური შედარებების მატრიცაზე გადასვლასა და საკუთრივი ვექტორის გამოთვლაში, რომელიც ამ მატრიცის მაქსიმალურ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება [5]. ობიექტთა რანჟირება ხორციელდება საკუთრივი ვექტორის კომპონენტების სიდიდეების შესაბამისად.

როდესაც ექსპერტული შეფასებები წყვილური შედარებების გზით ხორციელდება, აუცილებლად დადგება ჯგუფური ბინარული დამოკიდებულების აგების ამოცანა ინდივიდუალური ბინარული დამოკიდებულებების საფუძველზე. ასეთი დამოკიდებულების აგების ყველაზე მარტივ და გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს უმრავლესობის წესი სხვადასხვა მოდიფიკაციებით.

უმრავლესობის წესის რეალიზაცია შეიძლება ორი შემდეგი პრინციპის შესაბამისად:

1. $O_i R O_j \leftrightarrow n(O_i, O_j) > \frac{m}{2}$;
2. $O_i R^* O_j \leftrightarrow n(O_i, O_j) > n(O_j, O_i)$,

სადაც, $n(O_i, O_j)$ აღნიშნავს ექსპერტთა რაოდენობას, რომლებიც უპირატესობას $O_i$ ობიექტს ანიჭებს $O_j$ ობიექტთან შედარებით, ხოლო $n(O_j, O_i)$ - ექსპერტთა რაოდენობას, რომლებიც პირიქით, $O_j$ ობიექტს ანიჭებს უპირატესობას $O_i$ ობიექტთან შედარებით. $R$-ითა და $R^*$-ით კი ჯგუფური მკაცრი დალაგების ორი სხადასხვა დამოკიდებულება არის აღნიშნული.

არსებობს თვალსაზრისი, რომლის თანახმად ჯგუფური გადაწყვეტილება მიღებული უნდა იქნეს "აქტიური" ინდივიდუუმების მოსაზრებათა საფუძველზე, რადგანაც დანარჩენებისათვის "სულერთია". მეორე პრინციპით სწორედ ასეთი თვალსაზრისი არის ფორმალიზებული. ასე მაგალითად, თუ ასი ექსპერტისაგან შედგენილი ჯგუფის ორი წევრი უპირატესობას ერთერთ ობიექტს ანიჭებს მეორესთან შედარებით, ერთი წევრი პირიქით - მეორეს, ხოლო ოთხმოცდაჩვიდმეტი მათ ეკვივალენტურად მიიჩნევს, ჯგუფური გადაწყვეტილება პირველი ობიექტის სასარგებლოდ უნდა იქნეს მიღებული.

ალტერნატიული თვალსაზრისი, რომელიც პირველი პრინციპით არის ფორმალიზებული, გულისხმობს რომ, მსგავს სიტუაციებში გათვალისწინებული უნდა იყოს ეკვივალენტურ დამოკიდებულებათა რაოდენობაც. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჯგუფური გადაწყვეტილების მისაღებად საკმარისი საფუძველი უნდა არსებობდეს.

ექსპერტების აზრთა სხვადასხვაობის რაოდენობრივი შეფასება ხდება კონკორდაციის კოეფიციენტის საშუალებით, რომლის მნიშვნელობა იცვლება ნულსა და ერთს შორის.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ექსპერტული შეფასებები რანჟირების მეთოდით ხორციელდება, იყენებენ კონკორდაციის დისპერსიულ კოეფიციენტს:

$$W = \frac{D}{D_{max}}, \qquad (1.12)$$

სადაც $D$ იმ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის შეფასებაა, რომლის რეალიზაციებად (1.10) ფორმულით გამოთვლილი ობიექტთა ჯამური რანგების $r_i$ მნიშვნელობები განიხილება, ხოლო $D_{max}$ - ამ შეფასების მაქსიმალური მნიშვნელობაა.

დისპერსიის შეფასება შემდეგი ფორმულით გამოითვლება

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2, \qquad (1.13)$$

სადაც $\bar{r}$ -ით აღნიშნულია შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის შეფასება:

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\ . \qquad (1.14)$$

( ამ უკანასკნელში გამოყენებულია ჯამური რანგების გამოთვლის (1.10) ფორმულა).

როდესაც ექსპერტთა რანჟირებებში ყველა ობიექტის რანგი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, დისპერსიის შეფასების მაქსიმალურ მნიშვნელობა შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$D_{max} = \frac{m^2 n(n+1)}{12}. \qquad (1.15)$$

მაგალითი 1.2 სამი ექსპერტის მიერ განხორციელებული ხუთი ობიექტის რანჟირების შედეგები წარმოდგენილია ობიექტთა რანგების შემდეგი ცხრილით:

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $E_2$ | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 |
| $E_3$ | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 |

ცხრილი 1.3

გამოვთვალოთ კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტი.

ამოხსნა. როგორც ცხრილიდან ჩანს, ყველა ობიექტს განსხვავებული რანგები აქვს მიწერილი ექსპერტების მიერ. ამიტომ დისპერსიის შეფასების მაქსიმალური მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ (1.15) ფორმულა:

$$D_{max} = \frac{m^2 n(n+1)}{12} = \frac{3^2 \times 5 \times (5+1)}{12} = 22{,}5.$$

(1.14)-ის გამოყენებით მათემატიკური ლოდინის შეფასებისათვის მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$\bar{r} = \frac{1}{5} \times \sum_{i=1}^{5} r_i = \frac{1}{5} \times \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} r_{ij} = \frac{1}{5} \times 45 = 9.$$

(1.10)-ის თანახმად $r_1 = 7,\ r_2 = 6,\ r_3 = 9,\ r_4 = 12,\ r_5 = 11.$

დისპერსიის შეფასების მნიშვნელობა გამოვთვალოთ (1.13) ფორმულის გამოყენებით:

$$D = \frac{1}{5-1} \times \sum_{i=1}^{5} (r_i - 9)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \times [(7-9)^2 + (6-9)^2 + (9-9)^2 + (12-9)^2 + (11-9)^2] = \frac{1}{4} \times 26 = 6{,}5.$$

საბოლოოდ, (1.12)-ის თანახმად კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტისათვის ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$W = \frac{D}{D_{max}} = \frac{6,5}{22,5} \approx 0,29.$$

კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტი ნულოვან მნიშვნელობას მიიღებს მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როდესაც $m = n$ და რანჟირებებში ობიექტებს ერთმანეთისაგან განსხვავებული რანგები აქვთ, რადგანაც ამ დროს $r_i = \bar{r}, i = \overline{1,n}$ და აქედან გამომდინარე, $D = 0$.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ექსპერტთა რანჟირებები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტის მნიშვნელობა ერთის ტოლია.

მნიშვნელოვნად რთულდება კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტის გამოთვლა რანჟირებებში ერთნაირი რანგის მქონე ობიექტების არსებობისას. კერძოდ, ამ შემთხვევაში გათვალისწინებული უნდა იქნას როგორც ტოლი რანგების ჯგუფთა რაოდენობა, ისე ობიექტთა რიცხვი ამ ჯგუფებში თითოეული რანჟირებისათვის [5].

## 1.7 სარგებლიანობა და გადაწყვეტილების მიღება

ეკონომიკური გადაწყვეტილებების მიღების მეტად მოსახერხებელ ინსტრუმენტს წარმოადგენს სარგებლიანობის ცნება.

პრაქტიკულმა გამოცდილებამ აჩვენა, რომ ფულადი გამოხატულება ყოველთვის არ აღწერს ადეკვატურად ადამიანთა დამოკიდებულებას მოგების ან ზარალის მიმართ, რის გამოც საჭირო გახდა მისი უფრო გასაგებ განზომილებაში გარდაქმნა. სარგებლიანობის ცნების შემოტანა სწორედ აღნიშნულმა გარემოებამ განაპირობა.

ფილოსოფოსები და ეკონომისტები სარგებლიანობას პიროვნების კეთილდღეობის ინდიკატორად ჯერ კიდევ ვიქტორიანულ ეპოქაში მიიჩნევდნენ. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ კლასიკოს ეკონომისტებს არასოდეს უცდიათ სარგებლიანობის გაზომვა.

სარგებლიანობის თანამედროვე თეორიაში არსებობს ორი ძირითადი მიმართულება - ორდინალური და კარდინალური.

ორდინალური თეორიის თანახმად ადამიანთა ქცევის აღსაწერად საკმარისია ვიცოდეთ, თუ რომელ ალტერნატივას ანიჭებენ ისინი უპირატესობას არჩევანის პროცესში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ორდინალური თეორია სარგებლიანობის რიგობრივ სკალაში გაზომვას გულისხმობს.

კარდინალური თეორიის მიხედვით კი უნდა შეფასდეს, თუ რამდენით ან რეამდენჯერ აღემატება ერთი ალტერნატივის სარგებლიანობა მეორისას, ანუ სარგებლიანობა რაოდენობრივ სკალაში უნდა გაიზომოს. შემოღებულია სარგებლიანობის კონცეპტუალური ერთეულიც, რომელსაც უტილი უწოდეს.

ემპირიული სისტემის რიცხვით სისტემაში ასახვა სარგებლიანობის თეორიაში აღიწერება სარგებლიანობის $U$ ფუნქციის საშუალებვით, რომელსაც შემდეგი თვისება უნდა ქონდეს:

$$O_i \succcurlyeq O_j \leftrightarrow U(O_i) \geq U(O_j). \qquad (1.16)$$

რაც შეეხება სარგებლიანობის ფუნქციის არსებობისა და ერთადერთობის პრობლემას, იგი დაკავშირებულია პრიორიტეტულობის დამოკიდებულებათა თვისებებთან და დასაშვები გარდაქმნის სახეობასთან.

ეკონომიკის თეორიიდან ცნობილია, რომ მომხმარებელი ცდილობს გააკეთოს მისთვის ხელმისაწვდომი სასაქონლო არჩევანი. სამომხმარებლო ქცევის შესაბამის ეკონომიკურ-მათემატიკურ მოდელს საფუძვლად უდევს სასაქონლო სივრცის, საბიუჯეტო სიმრავლისა და მომხმარებლის სარგებლიანობის ფუნქციის ცნებები.

სასაქონლო სივრცე იმ საქონლისა და მომსახურების სრულ ჩამონათვალს წარმოადგენს, რომელიც ჩართულია მომხმარებლის არჩევანის პრობლემაში. ამ სივრცის კონკრეტულ წერტილს სასაქონლო ნაკრები ეწოდება.

მომხმარებლის სარგებლიანობის ფუნქცია განსაზღვრულია საბიუჯეტო სიმრავლეზე და აღწერს მის სასაქონლო პრიორიტეტებს (პრეფერენციებს).

იმ სასაქონლო ნაკრების შერჩევის ამოცანა, რომელიც სარგებლიანობის ფუნქციას მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს, ცნობილია მოხმარების ნეოკლასიკური ამოცანის სახელწოდებით.

ფონ ნეიმანისა და მორგენშტერნის მიერ შემოღებული იქნა ორიგინალური მიდგომა სარგებლიანობის ფუნქციის აგებისადმი, რომელიც სარგებლიანობისა და ალბათობათა თეორიების ერთობლივ გამოყენებას ეფუძნება [8].

აღნიშნული კონცეფციის მთავარი დაშვების თანახმად შესაძლებელი უნდა იყოს არა მხოლოდ უშუალოდ ობიექტების, არამედ მათი ალბათური ნარევის, ე. წ. ლატარეების პრიორიტეტულობის შედარებაც.

$O_1, O_2, \ldots, O_n$ ობიექტებისაგან შედგენილი $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ალბათური ნარევი ($P_i \geq 0, i = \overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$), ანუ ლატარეა წარმოადგენს, შეიძლება ითქვას, შემთხვევით ობიექტს, რომელიც $P_i$ ალბათობით იღებს $O_i$ "მნიშვნელობას", $i = \overline{1,n}$. იგი შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$L = (P_1, O_1; P_2, O_2; \ldots; P_n, O_n). \qquad (1.17)$$

ლატარიის სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ, ასე ვთქვათ, ნებისმიერი "წმინდა" $O_i$ ობიექტიც:

$$O_i \sim (0, O_1; 0, O_2; \ldots; 1, O_i; 0, O_{i+1}; \ldots; 0, O_n). \qquad (1.18)$$

ლატარიის ცნების შემოტანა საშუალებას იძლევა სარგებლიანობა რაოდენობრივ სკალაში გაიზომოს. მართლაც, დავუშვათ $O_i \succ O_j \succ O_k$. მაშინ, $O_j$-ის სარგებლიანობა $O_i$-ისა და $O_k$-ს სარგებლიანობათა შორის უნდა იყოს. განვიხილოთ სხვადასხვა $(P, O_i; 1-P, O_k)$ ლატარეა. გასაგებია რომ, როდესაც $P$ ახლოსაა 1-თან, ასეთი ლატარეა $O_j$-ზე უკეთესია, ხოლო როდესაც მისი მნიშვნელობა 0-თან არის ახლოს, პირიქით $O_j$ არის $(P, O_i; 1-P, O_k)$ ლატარეაზე უკეთესი. აქედან გამომდინარე, უნდა არსებობდეს $P$-ს ისეთი $P^*$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $(P^*, O_i; 1-P^*, O_k) \sim O_j$ .

რთული (ლატარიებისაგან შედგენილი) ლატარეა, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება

$$\mathcal{L} = (q_1, L_1; q_2, L_2; \dots; q_m, L_m),$$

$\left(L_i = \left(P_1^i, O_1; P_2^1, O_2; \dots; P_n^i, O_n\right),\ q_i \geq 0\,, i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^m q_i = 1\right)$, უნდა აკმაყოფილებდეს აქსიომას, რომლის თანახმადაც შესაძლებელი უნდა იყოს მისი მარტივ ლატარეაზე დაყვანა:

$$\mathcal{L} \sim L' = (r_1, O_1; r_2, O_2; \dots; r_n),$$

სადაც

$$r_1 = q_1 P_1^1 + q_2 P_1^2 + \cdots + q_m P_1^m,$$

$$r_2 = q_1 P_2^1 + q_2 P_2^2 + \cdots + q_m P_2^m,$$

.................................

$$r_n = q_1 P_n^1 + q_2 P_n^2 + \cdots + q_m P_n^m.$$

მტკიცდება რომ, თუ არსებობს ობიექტთა $(O_1, O_2, \dots, O_n)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სარგებლიანობის $U$ ფუნქცია და რთული ლატარიები აკმაყოფილებს ზემოთმოყვანილ აქსიომას, მაშინ შეიძლება აიგოს ლატარიათა სიმრავლეზე განსაზღვრული სარგებლიანობის ფუნქცია შემდეგი ფორმით:

$$U(P_1, O_1; P_2, O_2; \dots; P_n, O_n) = U(L) = \sum_{i-1}^{n} P_i U(O_i), \qquad (1.19)$$

ანუ, ლატარიის სარგებლიანობა განისაზღვროს როგორც ობიექტთა სარგებლიანობის მათემატიკური ლოდინი.

ფონ ნეიმანისა და მორგენშტერნის სარგებლიანობის (1.19) ფუნქციას გამოყენება აქვს გადაწყვეტილებათა მიღების ისეთ პროცესებში, რომლებშიც ამა თუ იმ სტრატეგიის არჩევის შედეგს ლატარიის ინტერპრეტაცია შეიძლება მიეცეს.

ასეთ შემთხვევებში საუკეთესო არჩევანი დაკავშირებულია მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან.

ლატარიის ტერმინებში შეიძლება აღიწეროს მაგალითად, საინვესტიციო პროექტების არჩევანის შედეგები.

ინვესტირება თითქმის ყოველთვის გარკვეულ რისკებთან არის დაკავშირებული. ზღვრული სარგებლიანობის კლების კანონის მოქმედების გამო ინვესტორთა უმრავლესობას რისკის მიმართ უარყოფითი დამოკიდებულება აქვს. ისინი არ წავლენ რისკზე, თუ სანაცვლოდ შესაბამის მაკომპენსირებელ პრემიას (ე.წ. რისკის პრემიას) არ მიიღებენ.

რისკის პრემიის სიდიდე დამოკიდებულია ინვესტორის სარგებლიანობის ფუქციასა და ფინანსურ მდგომარეობაზე.

### კითხვები და სავარჯიშოები

1. რაში მდგომარეობს გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის სპეციფიკური თავისებურება?
2. ჩამოთვალეთ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანის მოდელის ძირითადი ელემენტები და ახსენით მათი არსი.
3. მოიყვანეთ გადაწყვეტილებათა მიღების ამოცანის დასმის ალტერნატიული ვარიანტები.
4. ახსენით ამოხსნელი წესის შინაარსი.
5. რას წარმოადგენს ექსპერტული შეფასება და რაში მდგომარეობს ექსპერტული შეფასებების მეთოდის არსი?
6. რამდენ კლასად იყოფა საექსპერტო პრობლემები და რა ტიპის პრობლემებს მიაკუთვნებენ თითოეულ კლასს?
7. რა პრობლემებს გამოყოფენ ექსპერტიზის პროცესში?
8. ჩამოთვალეთ და ახსენით ბინარული დამოკიდებულებების ძირითადი თვისებები.
9. მოიყვანეთ ემპირიული და რიცხვითი დამოკიდებულებებიანი სისტემების განმარტებები.
10. რაში მდგომარეობს წარმოდგენისა და ერთადერთობის პრობლემები გაზომვათა თეორიაში?
11. რას უწოდებენ გაზომვათა სკალას?
12. განმარტეთ სკალათა სხვადასხვა ტიპები.
13. რა არის ბალური სკალა და რაში მდგომარეობს მისი სპეციფიკური თავისებურება?
14. მოიყვანეთ რანჟირების, სერიისა და კვაზისერიის განმარტებები.
15. რაში მდგომარეობს წყვილური შედარებებისა და უშუალო შეფასების არსი?
16. რა განსაზღვრავს საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის ეფექტურობას?
17. ჩამოთვალეთ ექსპერტთა მახასიათებლები, რომლებიც გამოიყენება საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის ხარისხის შესაფასებლად. ახსენით თითოეული მახასიათებლის შინაარსი.
18. ექსპერტებმა გამოთქვეს მოსაზრებები მათი ექსპერტთა ჯგუფში ჩართვის მიზანშეწონილობის შესახებ, რომელიც ასახულია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

| $E_i$ \ $E_i$ | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $E_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $E_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $E_4$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $E_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

გამოთვალეთ ექსპერტთა მეორე რიგის კომპეტენტურობის შეფარდებითი კოეფიციენტები.

19. რაზეა დამოკიდებული ექსპერტული შეფასებების სანდოობა?
20. რა განსაზღვრავს ექსპერტთა მინიმალურ და მაქსიმალურ რაოდენობას ექსპერტთა ჯგუფში?
21. რა ეტაპები შეიძლება გამოიყოს ექსპერტთა შერჩევისას მართვის ჯგუფის საქმიანობაში?
22. ჩამოთვალეთ ექსპერტთა გამოკითხვის პროცედურის ეტაპები.
23. რა ამოცანების გადაწყვეტა შეიძლება დაისახოს მიზნად მართვის ჯგუფმა ექსპერტთა გამოკითხვის პროცესში?
24. გამოკითხვის რომელი ძირითადი სახეობები გამოიყენება კოლექტიური ექსპერტიზის ჩატარებისას?
25. ახსენით ანკეტირების არსი. ანკეტირების როგორი ფორმები არსებობს და რა დადებითი და უარყოფითი მხარეებით ხასიათდება თითოეული ფორმა?
26. რის მიხედვით და როგორ ხორციელდება ანკეტების კითხვების კლასიფიკაცია?
27. დაასახელეთ ღია, დახურული და მარაოსებრი ტიპის კითხვებიანი ანკეტების ნაკლოვანებები და დადებითი მხარეები.
28. აღწერეთ ანკეტირების მეთოდი "დელფოსი".
29. რა განსხვავებაა ინტერვიურებასა და ანკეტირებას შორის? შეიძლება თუ არა მათი მკვეთრი გამიჯვნა?
30. რა შემთხვევებშია მიზანშეწონილი დისკუსიის ჩატარება? რომელი ეტაპები შეიძლება გამოვყოთ დისკუსიის მომზადებისა და ჩატარების პროცესში?
31. დაახასიათეთ წამყვანის როლი დისკუსიის ჩატარების პროცესში.
32. რას მიიჩნევენ დისკუსიის ნაკლოვანებად და დადებით მხარედ?
33. აღწერეთ საექსპერტო პრობლემის გადაწყვეტის "გონებრივი შეტევის" მეთოდი.
34. რა მიზანს ისახავს ექსპერტული შეფასებების დამუშავება?
35. რა სახის ამოცანები შეიძლება დაისვას ექსპერტთა გამოკითხვის შედეგების დამუშავებისას?

36. როგორ ხორციელდება ექსპერტთა მოსაზრებების თანხვედრის შეფასება?
37. ოთხი ექსპერტის მიერ, რომელთა კომპეტენტურობის კოეფიციენტები, შესაბამისად, 0,1-ის, 0,3-ის, 0,2-ისა და 0,4-ის ტოლია, განხორციელდა ხუთობიექტიანი სიმრავლის რანჟირებები:

$$O_3 \succ^1 O_5 \succ^1 O_4 \succ^1 O_1 \succ^1 O_2,$$
$$O_4 \sim^2 O_3 \succ^2 O_5 \succ^2 O_1 \succ^2 O_2,$$
$$O_4 \succ^3 O_5 \succ^3 O_2 \succ^3 O_3 \succ^3 O_1,$$
$$O_3 \succ^4 O_4 \sim^4 O_5 \succ^4 O_1 \succ^4 O_2.$$

გამოთვალეთ ობიექტთა ჯამური რანგები და ააგეთ განზოგადებული რანჟირება.
38. როდის დგას ჯგუფური ბინარული დამოკიდებულების აგების ამოცანა?
39. რომელი ორი პრინციპის შესაბამისად შეიძლება უმრავლესობის წესის რეალიზაცია?
40. სამი ექსპერტის მიერ განხორციელებული ოთხი ობიექტის რანჟირების შედეგები წარმოდგენილია ობიექტთა რანგების შემდეგი ცხრილით:

| $O_i$ / $E_j$ | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| $E_2$ | 2 | 1 | 3 | 4 |
| $E_3$ | 4 | 3 | 2 | 1 |

გამოვთვალოთ კონკორდაციის დისპერსიული კოეფიციენტი.
41. რა განსხვავებაა სარგებლიანობის თეორიის ორდინალურ და კარდინალურ მიმართულებებს შორის?
42. როგორ განიმარტება სარგებლიანობის ფუნქცია და რასთან არის დაკავშირებული მისი არსებობისა და ერთადერთობის პრობლემა?
43. რას ეფუძნება სარგებლიანობის სარგებლიანობის ფუნქციის აგების ფონ ნეიმანისა და მორგენშტერნისეული მიდგომა?
44. მოიყვანეთ ლატარიის განმარტება.
45. გადაწყვეტილების მიღების როგორ პროცესებში შეიძლება ფონ ნეიმანისა და მორგენშტერნის სარგებლიანობის ფუნქციის გამოყენება და რასთან არის დაკავშირებული ამ დროს საუკეთესო არჩევანის განსორციელება?
46. როგორია ინვესტორთა უმრავლესობის დამოკიდებულება რისკთან?
47. რა ტერმინებში შეიძლება აღიწეროს საინვესტიციო პროექტის არჩევანის შედეგები?

# 2. გადაწყვეტილებათა მიღება განსაზღვრულ გარემოში

## 2.1 მათემატიკური პროგრამირების ამოცანათა კლასიფიკაცია

როგორც წინა თავიდან ვიცით, გადაწყვეტილებათა მიღების განსაზღვრული გარემო გულისხმობს, რომ გმპ სრულად აკონტროლებს მას და ზუსტად იცის რა შედეგები მოყვება კონკრეტულ გადაწყვეტილებებს.

ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ასეთ კონცეფციას პრაქტიკასთან კავშირი არა აქვს და მას მხოლოდ აკადემიური ინტერესი თუ შეიძლება ქონდეს. თუმცა, არსებობს გადაწყვეტილებათა მიღების მოკლევადიანი სიტუაციები, როდესაც გმპ სრულ ინფორმაციას ფლობს გადაწყვეტილების მისაღებად.

საერთოდ, გადაწყვეტილების გამომუშავება განსაზღვრულობის პირობებში მიმართულია ან სარგებლის (შემოსავლის, მოგების) მაქსიმიზაციისაკენ, ან ხარჯების მინიმიზაციისაკენ. ეს პროცესი ცნობილია ოპტიმიზაციური ანალიზის სახელწოდებით და მის ძირითად მეთოდს მათემატიკური პროგრამირება წარმოადგენს.

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანების დასმა უკავშირდება ოპტიმალურ დაგეგმვასა და მმართველობითი გადაწყვეტილებების მიღებას საწარმოო-სამეურნეო პროცესებში. იგი გადაწყვეტილებათა მიღების მოდელის ყველა ძირითად ელემენტს შეიცავს ტერმინოლოგიური ხასიათის მცირეოდენი განსხვავებებით. კერძოდ, მათში გადაწყვეტილებათა სიმრავლისა და ეფექტურობის კრიტერიუმის ნაცვლად უპირატესად გამოიყენება, შესაბამისად, დასაშვები ამონახსნებისა და მიზნის ფუნქციის ცნებები.

მათემატიკური პროგრამირება იკვლევს ექსტრემალურ ამოცანებს და ამუშავებს მათი ამოხსნის მეთოდებს. ამოცანის ზოგადი დასმა შემდეგი სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$max\ (min) \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.1)$$

პირობებით

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \ \ (i = \overline{1, m}), \qquad (2.2)$$

სადაც $f$ და $g_i$ მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $b_i$ - ნამდვილი რიცხვები.

ექსტრემალურ ამოცანას, რომელშიც ცვლადებს ნებისმიერი მნიშვნელობების მიღება შეუძლიათ (ანუ, (2.2) პირობების გარეშე) უწოდებენ უპირობო, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში - პირობიან ექსტრემალურ ამოცანას.

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანათა კლასიფიკაციას საფუძვლად უდევს $f$ და $g_i$ ფუნქციათა თვისებები, რომელთაც, შესაბამისად, მიზნისა და შეზღუდვების ფუნქციები ეწოდებათ.

პირველ რიგში, მათემატიკური პროგრამირების ამოცანები იყოფა წრფივი და არაწრფივი პროგრამირების ამოცანებად.

წრფივი პროგრამირების ამოცანებში როგორც მიზნის, ისე შეზღუდვის ყველა ფუნქცია წრფივია. წინააღმდეგ შემთხვევაში (ანუ, როდესაც მიზნის, ან შეზღუდვის ერთი მაინც ფუნქცია წრფივი არ არის), მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა არაწრფივი პროგრამირების ამოცანას წარმოადგენს.

არაწრფივი პროგრამირების ამოცანებიდან ყველაზე უკეთ შესწავლილია ამოზნექილი პროგრამირების ამოცანები. ამ ამოცანებში უნდა მოიძებნოს ამოზნექილ და ჩაკეტილ სიმრავლეზე განსაზღვრული ამოზნექილი ფუნქციის მინიმუმი, ან ჩაზნექილი ფუნქციის მაქსიმუმი. მაგალითად, კვადრატული პროგრამირების ამოცანა მდგომარეობს კვადრატული ფუნქციის მაქსიმუმის, ან მინიმუმის პოვნაში წრფივი შეზღუდვების პირობებში.

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანათა ცალკე კლასებს წარმოადგენს მთელრიცხვა, პარამეტრული და წილად-წრფივი პროგრამირების ამოცანები.

მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანებში ცვლადებს მხოლოდ მთელი მნიშვნელობების მიღება შეუძლიათ.

პარამეტრული პროგრამირების ამოცანებში მიზნისა და შეზღუდვების ფუნქციები შეიძლება დამოკიდებული იყოს გარკვეულ პარამეტრებზე.

წილად-წრფივი პროგრამირების ამოცანებში მიზნის ფუნქცია წარმოადგენს ორი წრფივი ფუნქციის შეფარდებას, ხოლო შეზღუდვის ყველა ფუნქცია წრფივია.

სტოქასტური პროგრამირების ამოცანებში მიზნისა და შეზღუდვების ფუნქციების არგუმენტებს შემთხვევითი სიდიდეებიც შეიძლება წარმოადგენდეს.

ექსტრემალური ამოცანები, რომლებშიც ამონახსნის პოვნის პროცესი მრავალ ეტაპს მოიცავს დინამიკური პროგრამირების ამოცანათა კლასს მიეკუთვნება.

## 2.2 წრფივი პროგრამირების ამოცანები

მათემატიკური პროგრამირების ყველაზე უკეთ შესწავლილ ნაწილს წრფივი პროგრამირება წარმოადგენს. წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოსახსნელად შემუშავებულია მრავალი მეთოდი, ალგორითმი და კომპიუტერული პროგრამა.

წრფივი პროგრამირების მეთოდი დიდი წარმატებით გამოიყენება ეკონომიკისა და ბიზნესის სფეროებში. კერძოდ, ნებისმიერი ეკონომიკური ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია კონკურენტულ პროექტებს შორის შეზღუდული რესურსების (სამუშაო ძალის, ნედლეულისა და მასალების, კაპიტალის და ა. შ.) ოპტიმალურ განაწილებასთან, თავისი არსით წრფივი პროგრამირების ამოცანას წარმოადგენს.

წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე დაიყვანება კომპონენტთა ოპტიმალური ნაკრების, ოპტიმალური საწარმოო ხაზებისა და პროცესების, გადაზიდვათა ოპტიმალური მარშრუტების განსაზღვრისა და მრავალი სხვა ამოცანა.

ფორმალურად ზოგადი სახით წრფივი პროგრამირების ამოცანა შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$max\ (min) \to f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.3)$$

პირობებით

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq, =, \geq\} b_i, (i = \overline{1,m}), \qquad (2.4)$$

$$x_j \geq 0, \ \ (j = \overline{1,n}), \qquad (2.5)$$

სადაც, $c_j, a_{ij}, b_i, (j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$ მოცემული რიცხვებია, ხოლო $\{\leq, =, \geq\}$ ჩანაწერი აღნიშნავს, რომ კონკრეტული შეზღუდვა შეიძლება იყოს როგორც ტოლობის, ისე უტოლობის (რომელიმე მიმართულების) ტიპის.

შევნიშნოთ, რომ ცვლადების არაუარყოფითობის (2.5) პირობის შესრულება ყოველთვის და ყველა ცვლადისათვის არ არის აუცილებელი. ეს დამოკიდებულია კონკრეტული ცვლადის შინაარსზე პრაქტიკულ ამოცანებში.

წრფივი პროგრამირების ამოცანას ეწოდება სტანდარტული (სიმეტრიული), თუ ყველა ცვლადზე დადებულია არაუარყოფითობის შეზღუდვა და ყველა შეზღუდვა უტოლობის ტიპისაა, ხოლო თუ ყველა შეზღუდვა უტოლობის ტიპისაა - კანონიკური.

მიზნის ფუნქციის (-1)-ზე გადამრავლებით შესაძლებელია მასიმიზაციის ამოცანიდან მინიმიზაციის ამოცანაზე გადასვლა და პირიქით. ასევე, უტოლობის ტიპის შეზღუდვის (-1)-ზე გადამრავლებით შეიძლება შევცვალოთ უტოლობის მიმართულება. დამატებითი ცვლადების შემოღების გზით აუცილებლობის შემთხვევაში შეიძლება მივაღწიოთ იმასაც, რომ არაუარყოფითობის შეზღუდვა ყველა ცვლადზე იყოს დადებული, უტოლობის ტიპის შეზღუდვიდან გადავიდეთ ტოლობის ტიპის შეზღუდვაზე და პირიქით.

მსგავსი გარდაქმნებით შესაძლებელი ხდება წრფივი პროგრამირების ამოცანის ერთი ფორმიდან მეორეზე გადასვლა, რაც ზოგჯერ საგრძნობლად ამარტივებს საჭირო გამოთვლების პროცესს.

ცვლადების მნიშვნელობათა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებს (2.4) და (2.5) პირობებს, წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასაშვები ამონახსნი ეწოდება.

თუ ეს პირობები უთავსადია, მაშინ, ცხადია, დასაშვები ამონასხნი არ არსებობს, ხოლო თავსებადობის შემთხვევაში დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს ევკლიდეს $n$ განზომილებიანი სივრცის დადებითი ორტანტის ამოზნექილ ჩაკეტილ შემოსაზღვრულ ან

შემოუსაზღვრავ მრავალწახნაგა სიმრალეს. თითოეულ შეზღუდვას ევკლიდეს $n$ განზომილებიანი სივრცეში შეესაბამება ჰიპერსიბრტყე, რომელიც მას ორ ქვესივრცედ ყოფს. აღნიშნული მრავალწახნაგა სწორედ ამ ნახევარსივრცეების თანაკვეთით მიიღება.

(2.3)-(2.5) ამოცანის დასაშვებ $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ ამონახსნს ეწოდება ოპტიმალური, თუ იგი მიზნის ფუნქციას მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას ანიჭებს.

მოვიყვანოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის დასმის მარტივი მაგალითი, რომელიც წარმოების დაგეგმვის ამოცანათა კლასს განეკუთვნება.

მაგალითი 2.1 $P_1$ და $P_2$ პროდუქციის საწარმოებლად გამოიყენება სამი სახეობის $S_1, S_2$ და $S_3$ სახეობის ნედლეული, რომელთა მარაგები, შესაბამისად 20, 40 და 30 ერთეულს შეადგენს. ცხრილში მოყვანილია თითოეული დასახელების ნედლეულის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად. აგრეთვე, მოგებები, რომელიც პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციას მოაქვს:

| | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 5 |
| $S_2$ | 8 | 5 |
| $S_3$ | 5 | 6 |
| მოგება | 50 | 40 |

დავსვათ პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური ვარიანტის (ანუ, ვარიანტის, რომელიც მაქსიმალურ მოგებას უზრუნველყოფს) განსაზღვრის ამოცანა. იპოვეთ რამდენიმე დასაშვები ამონახსნი და შეადარეთ ისინი ერთმანეთს.

ამოხსნა. თუ $x_1$ -ითა და $x_2$ -ით აღვნიშნავთ, შესაბამისად, $P_1$ -ისა და $P_2$ -ის საძიებელ რაოდენობას, მივიღებთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$max \rightarrow f = 50x_1 + 40x_2$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ (3,2) და (2,3) წყვილები პროდუქციის წარმოების ორ დასაშვებ კომბინაციას წარმოადგენს. მათ შეესაბამებათ მიზნის ფუნქციის შემდეგი მნიშვნელობები:

$$f_1 = 3 \times 50 + 2 \times 40 = 230, \; f_2 = 2 \times 50 + 3 \times 40 = 220.$$

პროდუქციის წარმოების პირველი ვარიანტი მეორეზე უკეთესია. ეს, რა თქმა უნდა, არ ნიშნავს იმას, რომ იგი ოპტიმალურია, რადგანაც დასაშვები კომბინაციების უამრავი სხვა ვარიანტიც არსებობს.

განხილული ამოცანა, ცვლადების შინაარსიდან გამომდინარე, მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანას წარმოადგენს. ამ ტიპის ამოცანებისათვის შემუშავებულია ოპტიმალური ამონახსნის პოვნის სპეციალური მეთოდი.

ორი ცვლადის შემთხვევაში წრფივი პროგრამირების ამოცანა გრაფიკული მეთოდის გამოყენებით შეიძლება ამოიხსნას.

დავუშვათ, მოცემულია წრფივი პროგრამირების ამოცანა სტანდარტული ფორმით:

$$max\ (min) \to f = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (2.6)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

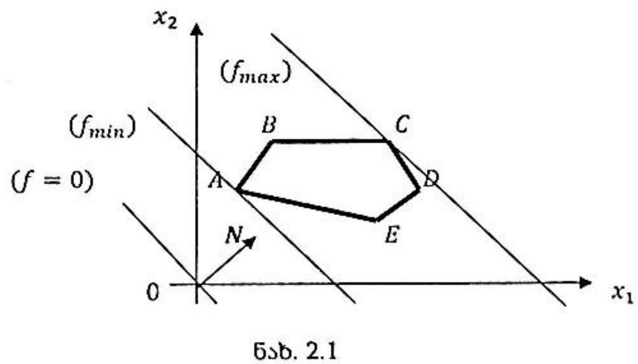
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad (2.7)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

(2.7) -ის თითოეული უტოლობა განსაზღვრავს ნახევარსიბრტყეებს სასაზღვრო $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, (i = \overline{1, m})$, $x_1 = 0, x_2 = 0$ წრფეებით. პირობათა თავსებადობის შემთხვევაში ამ ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთა გვაძლევს დასმული ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა ამოზნექილ მრავალკუთხედს (ნახ. 2.1). $f$-ის ყოველ ფიქსირებულ მნიშვნელობას შეესაბამება განტოლება $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ , რომლის გრაფიკს მიზნის ფუნქციის დონის წრფეს უწოდებენ. მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებისაგან შედგენილ $N = (c_1, c_2)$ ვექტორს ნორმალი ეწოდება. იგი მიზნის ფუნქციის ნულოვანი დონის წრფის მართობულია და გვიჩვენებს მიზნის ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას.




ნახ. 2.1

ამგვარად, შეიძლება გამოიყოს დასმული ამოცანის გრაფიკული მეთოდით ამოხსნის შემდეგი ეტაპები:

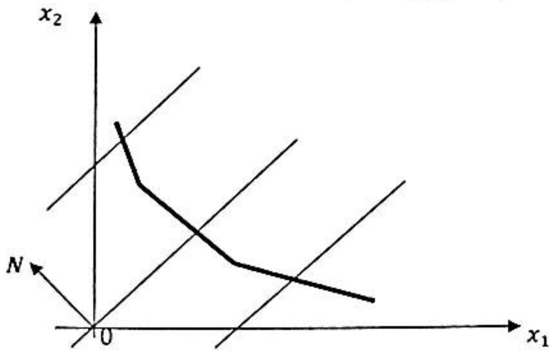
- დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედის აგება;
- ნორმალის აგება;
- მიზნის ფუნქციის ნულოვანი დონის წრფის აგება;
- ნულოვანი დონის წრფის გადაადგილება მანამ, სანამ იგი დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედის საყრდენი წრფე არ გახდება (ეს გადაადგილება ხორციელდება თავისი თავის პარალელურად, ანუ ნორმალის მართობულად).

ოპტიმალურ ამონახსნს წარმოადგენს საყრდენი წერტილის კოორდინატები (ან, მრავალკუთხედის საყრდენი გვერდის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები, რაც ძალზე იშვიათად შეიძლება მოხდეს). მათი განსაზღვრა შესაძლებელია გრაფიკულად გარკვეული მიახლოებით, ან ზუსტად, თუ ამოვხსნით იმ წრფივი განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას, რომელთა შესაბამისი წრფეების გადაკვეთას საყრდენი წერტილი წარმოადგენს.

როგორც ნახ. 2.1-დან ჩანს, მიზნის ფუნქციის დონის წრფე ორჯერ ხდება საყრდენი დასაშვებ ამონახსნთა $ABCDE$ მრავალკუთხედისათვის ($A$ და $C$ წერტილებში). $A$ წერტილში მიზნის ფუნქცია ღებულობს მინიმალურ, ხოლო $C$-ში - მაქსიმალურ მნიშვნელობას. $C$ წერტილის კოორდინატების გამოთვლა, მაგალითად, შეიძლება $BC$ და $CD$ წრფეების განტოლებებისაგან შედგენილი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

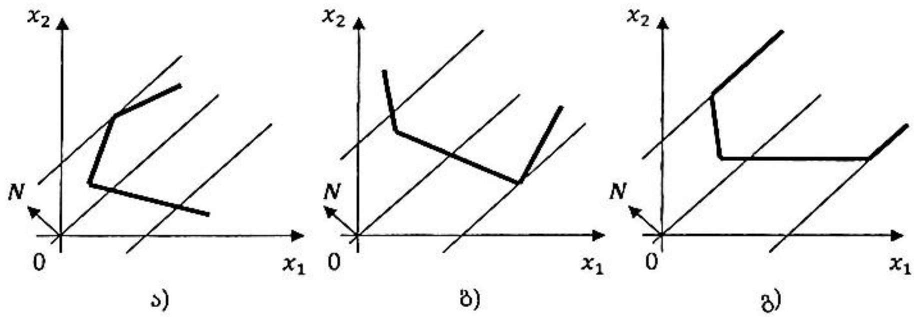
როდესაც დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედი შემოსაზღვრული არ არის, შესაძლებელია შემდეგი ორი შემთხვევა:

1. მიზნის ფუნქციის დონის წრფის ნორმალის ან მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით გადაადგილებისას იგი მუდმივად კვეთს მრავალკუთხედს და არასდროს გახდება საყრდენი მისთვის (ნახ. 2.2). ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შემოსაზღვრული არ არის არც ზემოდან და არც ქვემოდან.




ნახ. 2.2

2. აღნიშნული წრფის გადაადგილებით მიიღწევა მისი საყრდენი მდგომარეობა მრავალკუთხედის მიმართ. ამ დროს მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შეიძლება შემოსაზღვრული იყოს ზემოდან, მაგრამ არ იყოს შემოსაზღვრული ქვემოდან (ნახ. 2.3 ა), შემოსაზღვრული იყოს ქვემოდან, მაგრამ არ იყოს შემოსაზღვრული ზემოდან (ნახ. 2.3 ბ) და შემოსაზღვრული იყოს ზემოდანაც და ქვემოდანაც (ნახ. 2.3 გ).




ნახ. 2.3

განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის კიდევ ერთი მაგალითი , რომელსაც გრაფიკული მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნით. იგი ე. წ. რაციონის შედგენის ამოცანათა კლასს განეკუთვნება.

მაგალითი 2.2 ცხოველის გამოსაკვებად ორი სახეობის საკვები გამოიყენება. მისი ყოველდღიური რაციონი უნდა შეიცავდეს $S_1, S_2$ და $S_3$ საკვებ ნივთიერებებს, შესაბამისად, არანაკლებ 9, 8 და 12 ერთეულისა. ცხრილში მოყვანილია თითოეული დასახელების საკვების 1 კგ-ის შედგენილობა და ღირებულება:

| | საკვები 1 | საკვები 2 |
|---|---|---|
| $S_1$ | 3 | 1 |
| $S_2$ | 1 | 2 |
| $S_3$ | 1 | 6 |
| ღირებულება | 4 | 6 |

განვსაზღვროთ მინიმალური ღირებულების დღიური რაციონი, რომელიც აკმაყოფილებს მოთხოვნებს საკვებ ნივთიერებებზე.

ამოხსნა. თუ $x_1$ -ითა და $x_2$ -ით აღვნიშნავთ, შესაბამისად, პირველი და მეორე სახეობის საკვების საძიებელ რაოდენობას, მივიღებთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$min \to f = 4x_1 + 6x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \, .$$

დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედის აგების მიზნით თავდაპირველად $x_1Ox_2$ საკოორდინატო სიბრტყეზე ვაგებთ შემდეგი სასაზღვრო წრფეების გრაფიკებს (ნახ. 2.4):

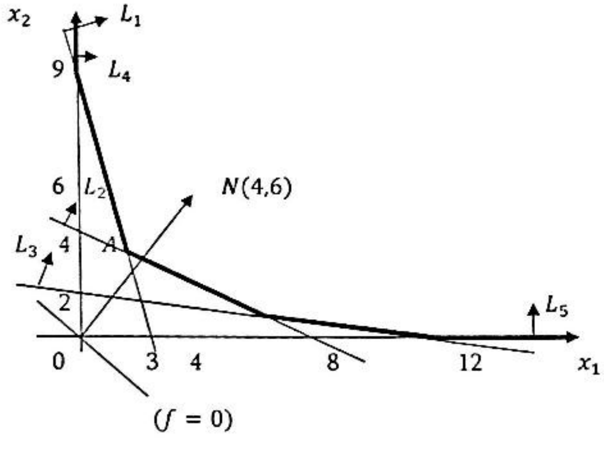
$$3x_1 + x_2 = 9 \; (L_1),$$

$$x_1 + 2 = 8 \; (L_2),$$

$$x_1 + 6x_2 = 12 \; (L_3),$$

$$x_1 = 0 \; (L_4),$$

$$x_2 = 0 \; (L_5).$$




ნახ. 2.4

შეზღუდვებით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყეების თანაკვეთა გვაძლევს დასაშვებ ამონახსნთა მრავალკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრული არ არის.

ნორმალის $N(4,6)$ ვექტორისა და მიზნის ფუნქციის ნულოვანი დონის წრფის აგების შემდეგ ამ წრფეს გადავაადგილებთ ნორმალის მართობულად და როგორც გრაფიკიდან ჩანს. იგი მრავალკუთხედის $A$ წვეროში საყრდენ მდგომარეობას აღწევს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ამ წერტილის კოორდინატები დასმული ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს წარმოადგენს.

$A$ წერტილი $L_1$ და $L_2$ წრფეების გადაკვეთაში მდებარეობს. ამიტომ, ოპტიმალური ამონახსნის გამოსათვლელად ვადგენთ წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2 = 8. \end{cases}$$

საბოლოოდ, ამ უკანასკნელის ამოხსნით ვღებულობთ დასმული ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს:

$$x_1^{*} = 2; x_2^{*} = 3, \quad f_{min} = 4 \times 2 + 6 \times 3 = 26.$$

წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე დაიყვანება ოპტიმალური პორტფელის ფორმირების ამოცანაც, რომლის ამოხსნით შესაძლებელია რისკიან აქტივთა ხვედრითი წილების ოპტიმალური კომბინაციის განსაზღვრა.

აღნიშნულ ამოცანაში მიზნის ფუნქციად იღებენ პორტფელის მოსალოდნელი უკუგებას, ხოლო ძირითადი შეზღუდვა კი იმაში მდგომარეობს, რომ პორტფელის ბეტას მაქსიმალური დონე არ უნდა აღემატებოდეს წინასწარ დასახელებულ მნიშვნელობას.

საერთოდ, ბეტა-კოეფიციენტით იზომება რისკიანი აქტივის მოსალოდნელი უკუგების რეაქციის დონე საბაზრო პორტფელის მოსალოდნელი უკუგების ცვლილებაზე, ანუ ბაზრის გავლენის ხარისხი მოცემულ რისკიან აქტივზე. პორტფელის ბეტა კი მასში შემავალი რისკიანი აქტივების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

მაგალითი 2.3 სამი რისკიანი $a, b$ და $c$ აქტივის მოსალოდნელი უკუგებები, შესაბამისად, 0,14-ს, 0,16-სა და 0,10-ს, ხოლო ბეტა-კოეფიციენტები - 1,2-ს, 1,4-სა და 1,0-ს შეადგენს. განვსაზღვროთ აქტივთა ხვედრითი წილების ის კომბინაცია, რომლის დროსაც ამ აქტვებისაგან ფორმირებული პორტფელის უკუგება მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიაღწევს იმ პირობით, რომ პორტფელის ბეტას მაქსიმალური დონე 1,3-ზე მაღალი არ იქნება.

ამოხსნა. თუ აქტივთა საძიებელ ხვედრით წილებს, შესაბამისად $x_a$-თი, $x_b$-თი და $x_c$-თი აღვნიშნავთ, მაშინ მივიღებთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$max \rightarrow f = 0{,}14x_a + 0{,}16x_b + 0{,}10x_c$$

$$1{,}2x_a + 1{,}46x_b + 0x_c \leq 1{,}3$$

$$0 \leq x_a \leq 1$$

$$0 \leq x_b \leq 1$$

$$0 \leq x_c \leq 1$$

$$x_a + x_b + x_c = 1$$

$$x_a, x_b, x_c \geq 0.$$

მეხუთე შეზღუდვიდან განვსაზღვროთ $x_c$-ს მნიშვნელობა და შევიტანოთ იგი მიზნის ფუნქციასა და დანარჩენ შეზღუდვებში:

$$max \rightarrow f = 0{,}04x_a + 0{,}06x_b + 0{,}10$$

$$0{,}2x_a + 0{,}4x_b \leq 0{,}3$$

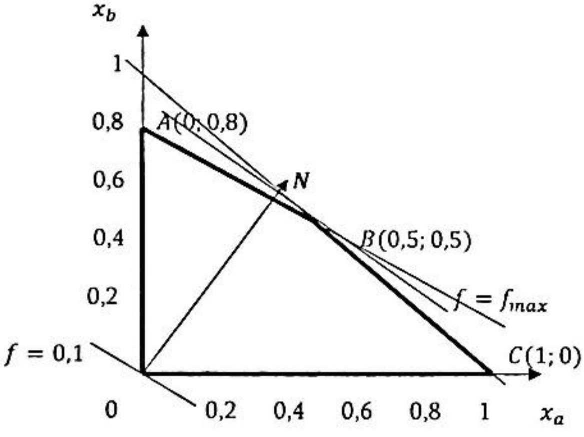
$$0 \leq x_a \leq 1$$

$$0 \leq x_b \leq 1$$

$$0 \leq x_a + x_b \leq 1$$

$$x_a, x_b \geq 0.$$

ეს უკანასკნელი კი უკვე ორცვლადიან ამოცანას წარმოადგენს, რაც მისი გრაფიკული ხერხით ამოხსნის საშუალებას იძლევა. შესაბამისი აგებები წარმოდგენილი ნახ. 2.5-ზე.




ნახ. 2.5

თუ $f = 0{,}1$ დონის წრფეს $N$-ის (თვალსაჩინოებისათვის მისი კოორდინატები ათჯერ არის ზრდილი) მართობულად გადავაადგილებთ, იგი საყრდენ მდგომარეობას დასაშვები ონახსნების მრავალკუთხედის $B$ წერტილში მიიღებს. მის კოორდინატებს ვპოულოვბთ შემდეგი სტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} x_a + x_b = 1, \\ 0{,}2x_a + 0{,}4x_b = 0{,}3, \end{cases}$$

დანაც ვღებულობთ $x_a = 0{,}5$; $x_b = 0{,}5$; $f_{max} = 0{,}04 \times 0{,}5 + 0{,}06 \times 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}15$.

ამგვარად, პორტფელის მოსალოდნელი უკუგების მაქსიმალური მნიშვნელობა 0,15-ს (ანუ, 15%-ს) შეადგენს და იგი მაშინ მიიღწევა, როდესაც $a, b$ და $c$ აქტივთა ხვედრითი წილები პორტფელში, შესაბამისად 0,5-ის, 0,5-ისა და 0-ის ტოლი იქნება.

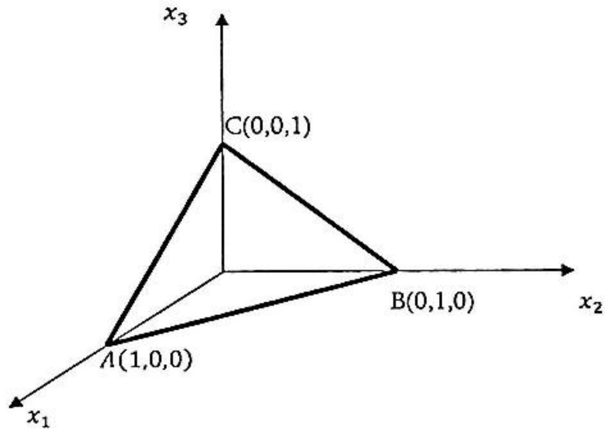
წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის ძირითადი მეთოდი სიმპლექს-მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი, რომელიც ამერიკელმა მათემატიკოსმა ჯ. დანცინგმა შეიმუშავა 1949 წელს.

ამოცანის საწყის დასმაში შეზღუდვებს შემდეგი სახე ქონდა:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \;\; x_j \geq 0, \;\; (j = \overline{1,n}). \qquad (2.8)$$

(2.8) სისტემით განსაზღვრულ არეს $n$ განზომილებიან სივრცეში სიმპლექსი ეწოდება, რამაც განაპირობა მეთოდის სახელწოდება.

სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში სიმპლექსი $ABC$ სამკუთხედს წარმოადგენს (ნახ. 2.5).




ნახ. 2.5

სიმპლექს-მეთოდი საკმაოდ რთული იტერაციული პროცედურაა, რომელიც დასაშვებ ამონახსნთა მრავალწახნაგას გარკვეული წვეროდან იწყება. როგორც წესი, ოპტიმალური ამონახსნი (მისი არსებობის შემთხვევაში) ერთერთი წვეროს კოორდინატებს წარმოადგენს. ყოველ შემდეგ იტერაციაზე (ნაბიჯზე) ხორციელდება მეზობელ წვეროზე გადასვლა ისე, რომ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა უმჯობესდება. ძებნის პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ აღნიშნული წვერო არ მიიღწევა. შემუშავებულია ოპტიმალური ამონახსნის ძებნის პროცედურის დასრულების შესაბამისი მათემატიკური კრიტერიუმიც.

წრფივი პროგრამირების ყოველ ამოცანასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული მისი ორადული, ასევე წრფივი პროგრამირების სხვა ამოცანა, რომლის ფორმირება შესაძლებელია შემდეგი წესების შესაბამისად:

1) თუ საწყის (პირდაპირ) ამოცანაში მიღწეული უნდა იქნას მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა, მაშინ მისი ორადული ამოცანა ფორმულირდება მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანის სახით;
2) პირდაპირი და ორადული ამოცანების შეზღუდვათა სისტემების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცები ერთმანეთისაგან ტრასპონირების გზით მიიღება;
3) ორადულ ამოცანაში იმდენი ცვლადია, რამდენი შეზღუდვაცაა პირდაპირ ამოცანაში, ხოლო შეზღუდვათა რაოდენობა ორადულ ამოცანაში ემთხვევა პირდაპირი ამოცანის ცვლადების რაოდენობას;
4) ცვლადების კოეფიციენტებს ორადულ ამოცანაში პირდაპირი ამოცანის თავისუფალი წევრები წარმოადგენს, ხოლო ორადული ამოცანის შეზღუდვათა სისტემის თავისუფალი წევრები პირდაპირი ამოცანის მიზნის ფუნქციის ცვლადების კოეფიციენტებისაგან ფორმირდება;
5) თუ პირდაპირი ამოცანის $x_j$ ცვლადზე დადებულია არაუარყოფითობის პირობა, მაშინ $j$-ური შეზღუდვა ორადულ ამოცანაში $\geq$ უტოლობის სახით ჩაიწერება (იგულისხმება, რომ პირდაპირ ამოცანაში უტოლობის ტიპის ყველა შეღუდვა $\leq$-ის სახისაა), ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში - ტოლობის სახით. თუ $i$-ური შეზღუდვა პირდაპირ ამოცანაში უტოლობას წარმოადგენს, მაშინ ორადულ $y_i$ ცვლადს ედება არაუარყოფითობის პირობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში $y_i$ ცვლადს შეუძლია მიიღოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობაც.

არსებობს წრფივი პროგრამირების შეუღლებულ ამოცანათა წყვილების სიმეტრიული და არასიმეტრიული მათემატიკური მოდელები. სიმეტრიულ წყვილში როგორც პირდაპირ, ისე ორადულ ამოცანაში ყველა შეზღუდვა უტოლობის ტიპისაა და ყველა ცვლადზე დადებულია არაუარყოფითობის პირობა.

ორადული ამოცანის ფორმირების სისწორის შემოწმება შესაძლებელია შემდეგი მარტივი კრიტერიუმის საფუძველზე: ორადული ამოცანის ორადულმა ამოცანამ საწყისი ამოცანა უნდა მოგვცეს.

პირდაპირი და ორადული ამოცანების ამონახსნებს შორის მჭიდრო კავშირი არსებობს. კერძოდ, კერძოდ, წრფივი პროგრამირების ამოცანათა სიმეტრიული წყვილისათვის ადგილი აქვს ერთერთს, შემდეგი ურთიერთგამომრიცხავი შემთხვევებიდან:

1) ორივე ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსნი და მიზნის ფუნქციების ოპტიმალური მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია:
$$f_{max} = g_{min};$$
2) ერთერთს ამოცანას საერთოდ არა აქვს დასაშვები ამონახსნი, მეორის მიზნის ფუნქცია კი დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეზე შემოსაზღვრული არ არის;
3) არცერთ მათგანს არა აქვს დასაშვები ამონახსნი.

გამოკვლეულია სხვა კავშირებიც ორადული წყვილის ამონახსსნებს შორის. დამუშავებულია ორადული სიმპლექს-მეთოდი, რომლის გამოყენებით შესაძლებელია ერთდროულად პირადაპირი და ორადული ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნების პოვნა.

ორადულობის თეორია ეფექტურად შეიძლება იქნას გამოყენებული ეკონომიკური ანალიზის პროცესში. კერძოდ, განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს ორადულობის შემდეგი ეკონომიკური ინტერპრეტაცია:

დავუშვათ, წარმოების დაგეგმვის ამოცანაში $n$ სახეობის პროდუქციის საწარმოებლად შესაძლებელია $m$ სახის რესურსის გამოყენება, რომელთა მარაგები $b_i$ ერთეულს შეადგენს $(i = \overline{1,m})$. $j$-ური პროდუქციის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა $i$-ური რესურსის $a_{ij}$ რაოდენობა $(j = \overline{1,n})$. $j$-ური პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციას წარმოებისათვის $c_j$-ს ტოლი მოგება მოაქვს.

პირდაპირი ამოცანა - რამდენი უნდა ვაწარმოოთ თითოეული სახეობის პროდუქცია რესურსული შეზღუდვების პირობებში, რომ მაქსიმალური ჯამური მოგება მივიღოთ.

ორადული ამოცანა - როგორი ფასი უნდა დაედოს თითოეული სახეობის რესურსის ერთეულს, რომ არსებული რესურსების ჯამური ღირებულება მინიმალური იყოს პირობით - ყველა იმ რესურსის ჯამური ღირებულება, რომელიც საჭიროა ნებისმიერი სახეობის პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად არ იყოს ნაკლები მოგებაზე, რომელიც ამ პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციას მოაქვს წარმოებისათვის.

ორადული ამოცანის შინაარსში უკეთ გარკვევის მიზნით წარმოვიდგინოთ, რომ რომელიმე ორგანიზაციამ გადაწყვიტა წარმოებისაგან მისი ყველა რესურსის შესყიდვა. ცხადია, იგი ამ დროს შეეცდება მინიმალური თანხის გადახდას. თუ რესურსების შეთავაზებული ფასები ისეთი იქნება, რომ ყველა იმ რესურსის ჯამური ღირებულება, რომელიც საჭიროა ნებისმიერი პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად ნაკლები იქნება მოგებაზე, რომელიც ამ პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციას მოაქვს, წარმოება უარს იტყვის რესურსების გაყიდვაზე და პროდუქციის წარმოებას ამჯობინებს.

თუ $x_j$ -ით აღვნიშნავთ, თითოეული სახეობის პროდუქციის წარმოების საძიებელ რაოდენობას $(j = \overline{1,n})$, ხოლო $y_i$-ით - თითოეული სახეობის რესურსის საძიებელ ფასს $(i = \overline{1,m})$, ადვილი მისახვედრია, რომ მოყვანილი ამოცანების მათემატიკური მოდელები წრფივი პროგრამირების ამოცანათა სიმეტრიული ორადული წყვილი იქნება.

ორადული ამოცანის ამონახსნებს ჩრდილოვან ფასებს (ან ორადულ შეფასებებს) უწოდებენ. დადებითი ორადული შეფასებები რესურსების მხოლოდ იმ სახეობებს შეესაბამება, რომლებიც მთლიანად გამოიყენება წარმოების ოპტიმალურ ვარიანტში. ამიტომ, ორადული შეფასება განსაზღვრავს რესურსების დეფიციტურობას წარმოების პროცესში: თუ რესურსის ერთეულის ორადული შეფასება ნულის ტოლია, ეს იმას ნიშნავს, რომ რესურსის ეს სახეობა მთლიანად არ გამოიყენება წარმოების ოპტიმალურ ვარიანტში და ამდენად, დეფიციტური არ არის. არანულოვანი ორადული შეფასება კი შესაბამისი რესურსის დეფიციტურობაზე მიგვანიშნებს. ამასთან, მისი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, თუ რამდენი ერთეულით გაიზრდება მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა პირდაპირ ამოცანაში აღნიშნული რესურსის ერთი ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში.

შეიძლება $b_i$-ს ცვლილების მდგრადობის ინტერვალების დადგენაც, რომლის ფარგლებში ოპტიმალური $y_i^*$ ამონახსნები უცვლელი რჩება $(i = \overline{1,m})$. ეს საშუალებას იძლევა განისაზღვროს $b_i$-ს შესაძლო ცვლილებების ყველაზე მიზანშეწონილი ვარიანტი.

**მაგალითი 2.4** ოთხი სახეობის $P_1, P_2, P_3$ და $P_2$ პროდუქციის საწარმოებლად გამოიყენება სამი სახეობის $S_1, S_2$ და $S_3$ სახეობის ნედლეული, რომელთა მარაგები, შესაბამისად 35, 30 და 40 ერთეულს შეადგენს. ცხრილში მოყვანილია თითოეული დასახელების ნედლეულის ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად. აგრეთვე, მოგებები, რომელიც პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციას მოაქვს:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 | 2 | 2 | 3 |
| $S_2$ | 1 | 1 | 2 | 3 |
| $S_3$ | 3 | 1 | 2 | 1 |
| მოგება | 14 | 10 | 14 | 11 |

შეადგინეთ წარმოების დაგეგმვის პირდაპირი და ორადული ამოცანების მათემატიკური მოდელები და გაანალიზეთ ორადული შეფასებები, თუ ცნობილია ამოცანათა შესაბამისი სიმეტრიული წყვილის ოპტიმალური ამონახსნები.

**ამოხსნა.** პირდაპირი ამოცანის მათემატიკური მოდელი ზუსტად ისე იგება, როგორც იგი 2.1 მაგალითში ავაგეთ:

$$max \to f = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4$$

$$\begin{gathered} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{gathered}$$

ორადული ამოცანის მათემატიკურ მოდელს კი ზემოთაღწერილი წესების საფუძველზე მივიღებთ:

$$min \to g = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3$$

$$4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 14$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \ge 10$$

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 14$$

$$3y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 11$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

ორადული სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით მიღებულია მოცემული სიმეტრიული წყვილის შემდეგი ოპტიმალური ამონახსნები:

$$x_1^* = 0;\ x_2^* = 5;\ x_3^* = 12{,}5;\ x_4^* = 0\,,\quad y_1^* = 3;\ y_2^* = 4;\ y_3^* = 0.$$

როგორც ვხედავთ, ნულოვანი შეფასება ორადული ამოცანის მესამე ცვლადს აღმოაჩნდა, რაც იმაზე მიგვანიშნებს, რომ მესამე სახეობის ნედლეული მთლიანად არ გამოიყენება წარმოებაში და ამდენად, იგი დეფიციტური არ არის. პირველი და მეორე სახეობის ნედლეულები კი დეფიციტურია და მათი თითო ერთეულით გაზრდა, შესაბამისად, მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის 3 და 4 ერთეულით გაზრდას გამოიწვევდა.

## 2.3 ტრანსპორტული ამოცანები

წრფივი პროგრამირების ამოცანათა სპეციალურ კლასს ტრასპორტული ტიპის ამოცანები წარმოადგენს.

დავუშვათ, $A_i$ $(i = \overline{1,m})$ მიმწოდებლებიდან $B_j$ $(j = \overline{1,n})$ მომხმარებლებამდე უნდა გადაიზიდოს ერთგვაროვანი პროდუქცია გარკვეული სატრანსპორტო საშუალებების გამოყენებით. $a_i$-ითა და $b_j$-ით, შესაბამისად, აღვნიშნოთ პროდუქციის მარაგი $A_i$ მიმწოდებელთან და $B_j$ მომხმარებლის მოთხოვნა პროდუქციაზე, ხოლო $c_{ij}$-ით - პროდუქციის ერთეულის გადაზიდვის სატრანსპორტო ხარჯები $i$-ური მიმწოდებლიდან $j$-ურ მომხმარებლამდე $(i = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{1,n})$. უნდა განისაზღვროს გადაზიდვების ისეთი გეგმა, რომელიც მინიმალური ჯამური სატრანსპორტო ხარჯებით უზრუნველყოფს ყველა მომხმარებლის მოთხოვნას პროდუქციაზე.

თუ $x_{ij}$-ით აღვნიშნავთ $i$-ური მიმწოდებლიდან $j$-ურ მომხმარებლამდე გადასაზიდი პროდუქციის საძიებელ რაოდენობას, ამოცანის პირობები შეიძლება წარმოვადგინოთ 2.1 ცხრილის სახით, რომელსაც სატრანსპორტო გადაზიდვების დაგეგმვის მატრიცა ეწოდება:

| | $B_1$ | $B_2$ | | $B_n$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $x_{11};\ c_{11}$ | $x_{12};\ c_{12}$ | ... | $x_{1n};\ c_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $x_{21};\ c_{21}$ | $x_{22};\ c_{22}$ | ... | $x_{2n};\ c_{2n}$ | $a_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $x_{m1};\ c_{m1}$ | $x_{m2};\ c_{m2}$ | ... | $x_{mn};\ c_{mn}$ | $a_m$ |
| მოთხოვნები | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ | |

ცხრილი 2.1

დასმული ამოცანა წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანის სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$min \to f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{1,n}.$$

მოყვანილ მოდელში იგულისხმება, რომ ჯამური მარაგი ჯამური მოთხოვნის ტოლია, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2.9)$$

ტრასპორტული ამოცანის ასეთ მოდელს დახურული მოდელი ეწოდება, ხოლო თუ ჯამური მოთხოვნა ჯამური მარაგისაგან განსხვავდება - ღია მოდელი.

მტკიცდება, რომ დახურული ტიპის ტრანსპორტულ ამოცანას ყოველთვის აქვს ოპტიმალური ამონახსნი

როდესაც ჯამური მარაგი ჯამურ მოთხოვნას აღემატება, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

შემოყავთ ფიქტიური $(n+1)$-ე მომხმარებელი მოთხოვნით

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

ამასთან, ითვლება, რომ $c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}$.

ანალოგიურად, როდესაც $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, შემოყავთ ფიქტიური $(m+1)$-ე მიმწოდებელი შემდეგი მარაგით

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_i.$$

ამ დროს ითვლება, რომ $c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}$.

ამგვარად, როგორც ვხედავთ, ღია ტიპის ტრანსპორტული ამოცანის დახურულ ტიპზე დაყვანა ყოველთვის შესაძლებელია.

ტრანსპორტული ამოცანები სიმპლექს-მეთოდის გამოყენებით შეიძლება ამოიხსნას.

გაითვალისწინეს რა ამოცანის სპეციფიკა, უნგრელ მათემატიკოსთა ჯგუფმა მისი ამოხსნის გაცილებით ეფექტური მეთოდი შეიმუშავა, რომელიც უნგრული მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი. გარდა ამისა, არსებობს ტრანსპორტული ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდებიც. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

ტრანსპორტული ამოცანის ამოხსნის ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის მეთოდის შესაბამისად იტერაციული პროცედურის ყოველ ნაბიჯზე განიხილება ტვირთის გაგზავნისა და მიღების პირველი დარჩენილი პუნქტები. ამონახსნთა ცხრილის უჯრების შევსება იწყება $x_{11}$ უცნობის შესაბამისი მარცხენა ზედა კუთხიდან ("ჩრდილო-დასავლეთი კუთხე") და მთავრდება უჯრით, რომელიც $x_{mn}$ უცნობს შეესაბამება, ე.ი. პროცედურა ცხრილის მთავარ დიაგონალს მიყვება.

მაგალითი 2.4 ქვემოთმოყვანილ ცხრილში წარმოდგენილია ტრანსპორტული ამოცანის დაგეგმვის მატრიცა:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 140 |
| $A_2$ | 8 | 4 | 1 | 4 | 1 | 180 |
| $A_3$ | 9 | 7 | 3 | 7 | 2 | 160 |
| მოთხოვნები | 60 | 70 | 120 | 130 | 100 | $\sum = 480$ |

ვიპოვოთ ტრანსპორტირების გეგმა ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის მეთოდის გამოყენებით.

ამოხსნა. გეგმის ძებნის იტერაციული პროცედურა შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ (რიცხვები ყოველი სვეტისა და სტრიქონის ბოლოში გვიჩვენებს მოცემული ნაბიჯის შემდეგ დარჩენილ მოთხოვნებსა და გასაზიდი ტვირთის მოცულობებს, ხოლო მონიშვნის " ^" სიმბოლოთი აღნიშნულია ამა თუ იმ სტრიქონის ან სვეტის "დახურვის" ფაქტი, ანუ, ამ ნაბიჯის შემდეგ ან მთლიანად დაკმაყოფილებულია შესაბამისი მომხმარებლის მოთხოვნა, ან მთლიანად გაზიდულია ტვირთი მოცემული მიმწოდებლიდან):

↓ 1

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 60 | | | | | 140 |
| $A_2$ | | | | | | 180 |
| $A_3$ | | | | | | 160 |
| მოთხოვნები | 60^ | 70 | 120 | 130 | 100 | |

↓ 2

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | 70 | | | | 80 |
| $A_2$ | | | | | | 180 |
| $A_3$ | | | | | | 160 |
| მოთხოვნები | | 70^ | 120 | 130 | 100 | |

↓ 3

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | 10 | | | 10^ |
| $A_2$ | | | | | | 180 |
| $A_3$ | | | | | | 160 |
| მოთხოვნები | | | 120 | 130 | 100 | |

↓ 4

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | | |
| $A_2$ | | | 110 | | | 180 |
| $A_3$ | | | | | | 160 |
| მოთხოვნები | | | 110^ | 130 | 100 | |

↓ 5

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | | |
| $A_2$ | | | | 70 | | $70^{\wedge}$ |
| $A_3$ | | | | | | 160 |
| მოთხოვნები | | | | 130 | 100 | |

↓ 6

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | | |
| $A_2$ | | | | | | |
| $A_3$ | | | | 60 | | 160 |
| მოთხოვნები | | | | $60^{\wedge}$ | 100 | |

↓ 7

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | | |
| $A_2$ | | | | | | |
| $A_3$ | | | | | 100 | $100^{\wedge}$ |
| მოთხოვნები | | | | | $100^{\wedge}$ | |

როგორც ვხედავთ, იტერაციული პროცედურა მეშვიდე ნაბიჯზე დასრულდა, რ შედეგადაც მიღებული იქნა ტრანსპორტირების შემდეგი გეგმა:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 60 | 70 | 10 | 0 | 0 | 140 |
| $A_2$ | 0 | 0 | 110 | 70 | 0 | 180 |
| $A_3$ | 0 | 0 | 0 | 60 | 100 | 160 |
| მოთხოვნები | 60 | 70 | 120 | 130 | 100 | $\sum = 480$ |

შესაბამისი ჯამური სატრანსპორტო ხარჯებისათვის ვღებულობთ მნიშვნელობას:

$$f = 2 \times 60 + 3 \times 70 + 4 \times 10 + 1 \times 110 + 4 \times 70 + 7 \times 60 + 2 \times 100 = 1380.$$

მიღებული ამონახსნი შეიძლება საკმაოდ განსხვავებული იყოს ოპტიმალურისაგან, მაგრ მისი გამოყენება მაინც შეიძლება, თუნდაც, საწყისი დასაშვები გეგმის სახით.

გაგზავნისა და მიღების პუნქტების შერჩევისას მიზანშეწონილია გადაზიდვასთან დაკავშირებული ხარჯების გათვალისწინება.

ტრანსპორტული ამოცანის მიახლოებით ამოხსნის კიდევ ერთ იტერაციულ მეთოდს წარმოადგენს მინიმალური ელემენტის მეთოდი, რომლის მიხედვით ყოველ ნაბიჯზე შერჩეული უნდა იქნას უჯრა გადაზიდვათა მინიმალური ღირებულებით (თუ ასეთი უჯრა რამდენიმეა, მნიშვნელობა არა აქვს, თუ რომელი მათგანი იქნება არჩეული) და ამ უჯრის შესაბამისი პუნქტები.

მაგალითი 2.5 ცხრილში მოყვანილია ტრანსპორტული ამოცანის დაგეგმვის მატრიცა:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 7 | 8 | 1 | 2 | 160 |
| $A_2$ | 4 | 5 | 9 | 8 | 140 |
| $A_3$ | 9 | 2 | 3 | 6 | 170 |
| მოთხოვნები | 120 | 50 | 190 | 110 | $\sum = 470$ |

ვიპოვოთ ტრანსპორტირების გეგმა მინიმალური ელემენტის მეთოდის გამოყენებით.

ამოხსნა. ისევე, როგორც წინა მაგალითში, საძიებელ გეგმას განვსაზღვრავთ შემდეგი იტერაციული პროცედურის საფუძველზე:

↓ 1

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | 160 | | $160^{\wedge}$ |
| $A_2$ | | | | | 140 |
| $A_3$ | | | | | 170 |
| მოთხოვნები | 120 | 50 | 190 | 110 | |

↓ 2

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | |
| $A_2$ | | | | | 140 |
| $A_3$ | | 50 | | | 170 |
| მოთხოვნები | 120 | $50^{\wedge}$ | 30 | 110 | |

↓ 3

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | |
| $A_2$ | | | | | 140 |
| $A_3$ | | | 30 | | 120 |
| მოთხოვნები | 120 | | $30^{\wedge}$ | 110 | |

↓ 4

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | |
| $A_2$ | 120 | | | | 140 |
| $A_3$ | | | | | 90 |
| მოთხოვნები | $120^{\wedge}$ | | | 110 | |

$\downarrow 5$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | |
| $A_2$ | | | | | 20 |
| $A_3$ | | | | 90 | $90^{\wedge}$ |
| მოთხოვნები | | | | 110 | |

$\downarrow 6$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | | | | | |
| $A_2$ | | | | 20 | |
| $A_3$ | | | | | $20^{\wedge}$ |
| მოთხოვნები | | | | $20^{\wedge}$ | |

ამგვარად, ვღებულოთ ტრანსპორტირების შემდეგ გეგმას

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 0 | 160 | 0 | 160 |
| $A_2$ | 120 | 0 | 0 | 20 | 140 |
| $A_3$ | 0 | 50 | 30 | 90 | 170 |
| მოთხოვნები | 120 | 50 | 190 | 110 | $\sum = 470$ |

შესაბამისი ჯამური სატრანსპორტო ხარჯებით

$f = 1 \times 160 + 4 \times 120 + 8 \times 20 + 2 \times 50 + 3 \times 30 + 6 \times 90 = 1530$.

უნდა აღინიშნოს, რომ მინიმალური ელემენტის მეთოდის გამოყენებით ხშირად ოპტიმალურთან საკმაოდ მიახლოებული ტრანსპორტირების გეგმა მიიღება.

ამ მეთოდის ღია ტიპის სატრანსპორტო მოდელებში გამოყენების შემთხვევაში შერჩეული უნდა იყოს მხოლოდ რეალური მიმწოდებლებისა და მომხმარებლების მინიმალური ღირებულების შესაბამისი უჯრები. ფიქტიური მიმწოდებლის მარაგები (ფიქტიური მომხმარებლის მოთხოვნები) კი ბოლო ნაბიჯზე უნდა განაწილდეს. ამგვარი მიდგომით შესაძლებელია ოპტიმალურთან უფრო ახლოს მდგომი სატრანსპორტო გეგმის ფორმირება. ამ დროს მომხმარებლები, რომლებიც ტვირთებს ფიქტიური მიმწოდებლიდან იღებენ, დაუკმაყოფილებელი რჩებიან, ხოლო იმ მიმწოდებლებთან, რომლებიც ტვირთებს ფიქტიურ მომხმარებელს აწვდიან, ტვირთების ნაწილი გაუზიდავი რჩება.

## 2.4 დინამიკური პროგრამირების მეთოდი

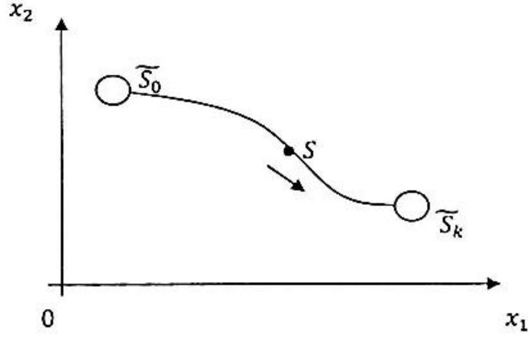
როგორც წრფივი, ისე არაწრფივი პროგრამირების ამოცანებში სტატიკური, ერთეტაპიანი გადაწყვეტილებები მიიღება. დინამიკური პროგრამირების ამოცანებში კი პროცესები დამოკიდებულია დროის რამდენიმე ეტაპზე. ამიტომ, ოპტიმალური გადაწყვეტილების (რომელსაც დინამიკური პროგრამირების თეორიაში პირობით ოპტიმალურ მართვას უწოდებენ) მიღება ხდება ყოველ ეტაპზე, რაც უზრუნველყოფს პროცესის ოპტიმალურ განვითარებას მთლიანობაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თითოეულ ეტაპზე გადაწყვეტილების მიღებისას ყოველთვის მხედველობაში უდა გვქონდეს საბოლოო მიზანი (ანუ, გათვალისწინებული უნდა იყოს მომავალი).

ზოგადი სახით დინამიკური პროგრამირების ამოცანა შემდეგნაირად შეიძლება იქნას დასმული:

დავუშვათ, რაიმე მართვადი სისტემა $S$ იმყოფება საწყის $S_0 \in \widetilde{S_0}$ მდგომარეობაში. დროთა განმავლობაში მისი მდგომარეობა იცვლება და საბოლოო $S_k \in \widetilde{S_k}$ მდგომარეობაში გადადის. სისტემის მდგომარეობის ცვლილების პროცესი დაკავშირებულია გარკვეულ $W$ რიცხვით კრიტერიუმთან.

შესაძლებელ მართვათა $U$ სიმრავლიდან უნდა შევარჩიოთ ისეთი $U^*$ მართვა, რომელიც $S$ სისტემას საწყისი $S_0 \in \widetilde{S_0}$ მდგომარეობიდან გადაიყვანს საბოლოო $S_k \in \widetilde{S_k}$ მდგომარეობაში ისე, რომ $W(U)$ კრიტერიუმს ოპტიმალურ $W^*$ მნიშვნელობას მიანიჭებს.

ორგანზომილებიან შემთხვევაში შესაძლებელია დასმული ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (ნახ. 2.6).

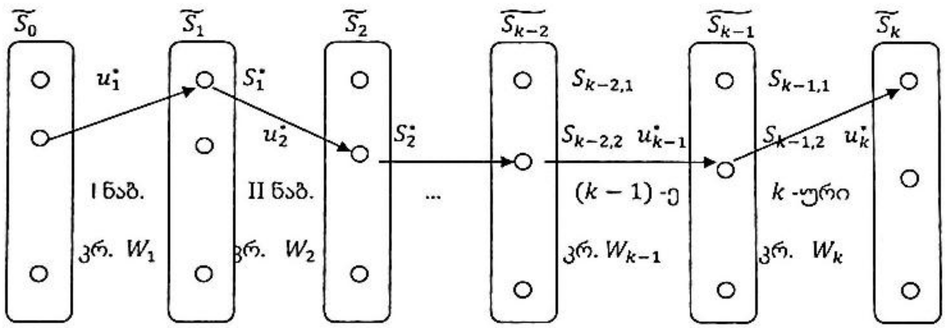



ნახ. 2.6

მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია საწყისი და საბოლოო მდგომარეობათა არეების შემაერთებელი ერთერთი ტრაექტორია, რომელიც კონკრეტულ მართვას შეესაბამება (ანუ, ამ მართვას სისტემა საწყისიდან საბოლოო მდგომარეობაში მოცემული ტრაექტორიით გადაჰყავს). ყველა შესაძლო მსგავსი ტრაქტორიიდან არჩეული უნდა იქნესს ისეთი, რომელსაც $W$ კრიტერიუმის ოპტიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება.

რა თქმა უნდა, ყოველ მრავალეტაპიან პროცესში არის ბოლო, $k$-ური ნაბიჯი, რომელზედაც გადაწყვეტილების მიღება მომავალზე დამოკიდებული არ არის. ამიტომ ამ ნაბიჯზე ირჩევენ მართვას, რომელიც მაქსიმალურ ეფექტს უზრუნველყოფს. აღნიშნული ნაბიჯის დაგეგმვის შემდეგ მას შეიძლება მივუერთოთ ბოლოსწინა $(k-1)$-ე ნაბიჯი, შემდეგ $(k-2)$-ე და ა.შ. ეს საბოლოო ანგარიშით , მიგვიყვანს სისტემის საწყის მდგომარეობაში ( ე.ი. დაგეგმვის პროცესი ბოლოდან დასაწყისისაკენ მიდის).

აღწერილი პროცესის უკეთ აღქმაში ქვემოთწარმოდგენილი სქემატური ნახაზი დაგვეხმარება:




ნახ. 2.7

იმისათვის, რომ დაიგეგმოს ბოლო, $k$-ური ნაბიჯი, უნდა ვიცოდეთ სისტემის მდგომარეობა $(k-1)$-ე ნაბიჯზე. თუ აღნიშნული მდგომარეობა ცნობილი არ არის, პროცესის ხასიათიდან გამომდინარე, გამოითქმება ვარაუდები სისტემის შესაძლო $S_{k-1,1}$, $S_{k-1,2}$, ... მდგომარობებზე ამ ნაბიჯისათვის.

შევადგინოთ შემდეგი ფუნქციონალური განტოლება:

$$F_1(\widetilde{S_{k-1}})=max_{u_k}\,[W_k(\widetilde{S_{k-1}},u_k)+F_0(\widetilde{S_k})],$$

სადაც, $W_k(\widetilde{S_{k-1}},u_k)$ - $k$-ური ნაბიჯის შესაბამისი რიცხვითი კრიტერიუმია, $F_0(\widetilde{S_k})$ - წინასწარ ცნობილი რიცხვითი მნიშვნელობები, რომლებიც საბოლოო $\widetilde{S_k}$ შესაძლო მდგომარეობებს

შეესაბამება, ხოლო $F_1(\widetilde{S_{k-1}})$ - მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა $\widetilde{S_{k-1}}$ -ის ნებისმიერი მდგომარეობიდან $\widetilde{S_k}$ -ში გადასვლისას.

ამ განტოლების საფუძველზე განისაზღვრება პირობით ოპტიმალური მართვები $u_k^o(S_{k-1,1})$ , $u_k^o(S_{k-1,2})$ , ... და მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მაქსიმალური მნიშვნელობები $F_1^o(S_{k-1,1})$ , $F_1^o(S_{k-1,2})$ , ... , რაც იმას ნიშნავს, რომ $k$-ური ნაბიჯი დაგეგმილია, რადგანაც, რომელ მდგომარეობაშიც არ უნდა აღმოჩნდეს სისტემა ბოლოსწინა ნაბიჯზე, უკვე ცნობილია, თუ რომელი მართვა უნდა იქნას გამოყენებული ბოლო ნაბიჯზე.

შემდეგი ფუნქციონალური განტოლება $F_2(\widetilde{S_{k-2}})=max_{u_{k-1}}[W_{k-1}(\widetilde{S_{k-2}},u_{k-1}) + F_1(\widetilde{S_{k-1}})]$

საშუალებას იძლევა $\widetilde{S_{k-2}}$ -ის ყველა შესაძლო მდგომარეობისათვის განისაზღვროს პირობით ოპტიმალური $u_{k-1}^o(S_{k-2,1})$ ,$u_{k-1}^o(S_{k-2,2})$,... მართვები, რომელთაგანაც თითოეული უკვე განსაზღვრულ $u_k^o(S_{k-1,1}), u_k^o(S_{k-1,2})$ , ... მართვებთან ერთად უზრუნველყოფს $W_{k-1}(\widetilde{S_{k-2}},u_{k-1})+ W_k(\widetilde{S_{k-1}},u_k)$ ჯამის მაქსიმალურ მნიშვნელობას ბოლო ორ ნაბიჯზე და ა.შ. პირველ ნაბიჯამდე, რომელზედაც ვარაუდების გამოთქმა სისტემის შესაძლო მდგომარეობებზე საჭირო არ არის (ითვლება, რომ სისტემის საწყისი მდგომარეობა ცნობილია).

დინამიკური პროგრამირების მეთოდი გულისხმობს, რომ მდგომარეობა $\widetilde{S_i}$ , რომელშიაც გადავიდა $S$ სისტემა, დამოკიდებულია $\widetilde{S_{i-1}}$ -სა და $u_i$ -ზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მივიდა სისტემა $\widetilde{S_{i-1}}$ მდგომარეობაში (შემდგომქმედების არარსებობის პირობა). მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა $k$ ნაბიჯზე შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$F = \sum_{i=1}^{k} W_i(\widetilde{S_{k-1}},u_i)$ (მიზნის ფუნქციის ადიტიურობის პირობა).

დინამიკური პროგრამირების მთავარ პირობას კი წარმოადგენს ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს: როგორიც არ უნდა იყოს სისტემის მდგომარეობა მორიგი ნაბიჯის წინ, ამ ნაბიჯზე ოპტიმალური მართვა ისე უნდა იქნას შერჩეული, რომ მიზნის ფუნქციის შესაბამისი შესაკრებისა და ყველა მომდევნო ნაბიჯზე მიზნის ფუნქციის შესაკრებთა ჯამის ოპტიმალური მნიშვნელობის ჯამი მაქსიმალური იყოს.

ამგვარად, ოპტიმალობის პრინციპის მათემატიკურ ფორმულირებას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

$$F_k(\widetilde{S_0}) = max_{u_1,u_2,...,u_k}[W_1(\widetilde{S_0},u_1) + W_2(\widetilde{S_1},u_2) +...+W_i(\widetilde{S_{k-1}},u_k)],$$

$$F_{k-i}(\widetilde{S_i}) = max_{u_{i+1}}[W_{i+1}(\widetilde{S_i},u_{i+1}) + F_{k-i-1}(\widetilde{S_{i+1}})], \quad i = \overline{k-1,0}. \qquad (2.10)$$

(2.10) ცნობილია ბელმანის ძირითადი ფუნქციონალური განტოლებების (რეკურენტული დამოკიდებულებების) სახელწოდებით. აქ $F_k(\widetilde{S_0})$ -ით აღნიშნულია მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა $k$ ნაბიჯზე სისტემის საწყისი $\widetilde{S_0}$ მდგომარეობიდან საბოლოო $\widetilde{S_k}$ მდგომარეობაში გადასვლისას ოპტიმალური $U^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_k^*)$ სტრატეგიის გამოყენებით, ხოლო $F_{k-i}(\widetilde{S_i})$-ით - მიზნის ფუნქციის შესაკრებთა ჯამის მაქსიმალური მნიშვნელობა სისტემის $\widetilde{S_i}$-ს

ნებისმიერი მდგომარეობიდან საბოლოო $\widetilde{S_k}$ მდგომარეობაში გადასვლისას მართვის ოპტიმალური სტრატეგიის გამოყენებით დარჩენილ $(k-i)$ ნაბიჯზე.

იმისათვის, რომ განისაზღვროს მართვის ოპტიმალური სტრატეგია, ამჯერად საჭიროა ნაბიჯთა მთელი მიმდევრობა დასაწყისიდან ბოლოსკენ გავიაროთ: პირველ ნაბიჯზე ოპტიმალურ $u_1^*$ მართვად უნდა ავიღოთ უკვე განსაზღვრული პირობით ოპტიმალური $u_1^0$ მართვა. მეორე ნაბიჯზე ვპოულობთ სისტემის $S_1^*$ მდგომარეობას, რომელშიაც სისტემა $u_1^*$ მართვას გადაყავს. ეს მდგომარეობა განსაზღვრავს პირობით ოპტიმალურ $u_2^*$ მართვას, რომელსაც ოპტიმალურ $u_2^*$ მართვად მივიჩნევთ. ვიცით რა $u_2^*$, ვპოულობთ $S_2^*$ -ს, ე.ი. განვსაზღვრავთ $u_3^*$ -ს და ა.შ.

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ ოპტიმალური ტრაექტორიის ნებისმიერი ნაწილი ოპტიმალურია.

დინამიკური პროგრამირების მეთოდის გამოყენება საგრძნობლად ამარტივებს ოპტიმალური ამონახსნის პოვნის პროცესს, პირველ რიგში, გამოსაკვლევი ვარიანტების მნიშვნელოვანი შემცირების ხარჯზე.

უნდა აღინიშნოს ზოგიერთი ნაკლოვანებაც, რომელიც დამახასიათებელია დინამიკური პროგრამირებისათვის. კერძოდ, არ არის შემუშავებული დინამიკური პროგრამირების ამოცანათა ამოხსნის უნივერსალური მეთოდი, როგორიცაა, მაგალითად, სიმპლექს-მეთოდი წრფივი პროგრამირების ამოცანებისათვის. მის ნაკლოვან მხარედ უნდა ჩაითვალოს აგრეთვე გამოთვლათა დიდი მოცულობა, განსაკუთრებით მრავალგანზომილებიანი ამოცანების შემთხვევაში.

მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების ამოცანათა კლასს ეკუთვნის.

მაგალითი 2.6 ინვესტორმა გადაწყვიტა განახრციელოს 10 მლნ. დოლარის ინვესტიცია ახალი მარკის ღვინის წარმოების ასათვისებლად. აქტიური კომერციული საქმიანობისათვის შერჩეული იქნა ოთხი დიდი ქალაქი. შეისწავლა რა ამ ქალაქებთან დაკავშირებული ზონების საბაზრო კონიუნქტურა, ფინანსისტთა ჯგუფმა გამოკვლევის შედეგები წარმოადგინა 2.2 ცხრილის სახით. ამ ცხრილის საშუალებით შეიძლება შეფასდეს მოსალოდნელი მოგება თითოეულ ზონაში ამა თუ იმ თანხის დაბანდების შემთხვევაში.

| კაპდაბანდება (მლნ. დოლარი) | მოგება | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I ზონა | II ზონა | III ზონა | IV ზონა |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,28 | 0,25 | 0,15 | 0,20 |
| 2 | 0,45 | 0,41 | 0,25 | 0,33 |
| 3 | 0,65 | 0,55 | 0,40 | 0,42 |
| 4 | 0,78 | 0,65 | 0,50 | 0,48 |
| 5 | 0,90 | 0,75 | 0,62 | 0,53 |
| 6 | 1,02 | 0,80 | 0,73 | 0,56 |
| 7 | 1,13 | 0,85 | 0,82 | 0,58 |
| 8 | 1,23 | 0,88 | 0,90 | 0,60 |
| 9 | 1,32 | 0,90 | 0,96 | 0,60 |
| 10 | 1,38 | 0,90 | 1,00 | 0,60 |

ცხრილი 2.2

განვსაზღვროთ მაქსიმალური ჯამური მოგების მიღების ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგია ზონებში.

ამოხსნა. რა თქმა უნდა, დასმული ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია უბრალო გადარჩევის გზით. ამისათვის უნდა გადაისინჯოს და ერთმანეთს შედარდეს მოსალოდნელი ჯამური მოგების მიხედვით მთელ რიცხვთა ყველა ოთხეული, რომელთა ჯამი 10-ის ტოლია. არ უნდა იყოს ძნელი იმის წარმოდგენა, თუ რაოდენ შრომატევადი იქნებოდა აღნიშნულ კომბინაციებთან დაკავშირებული გამოთვლითი პროცესი. ამიტომ, შევეცადოთ იგი დინამიკური პროგრამირების მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ.

თუ $f_i(x)$-ით აღვნიშნავთ მოგების სიდიდეს $i$-ური ზონიდან მასში $x$ მლნ. დოლარის დაბანდების შემთხვევაში ($i = \overline{1,4}$), დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$max \rightarrow F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x_i)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.$$

ჯერ განვიხილოთ ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების ამოცანა პირველ ორ ზონაში. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_{1,2}(A) = max_x[f_1(x) + f_2(A - x)], \;\; A = \overline{0,10}.$$

მაგალითად,

$F_{1,2}(2) = \max\,[(f_1(0) + f_2(2);\ (f_1(1) + f_2(1)\ ;\ [(f_1(2) + f_2(0)] =$

$$= \max[(0 + 0{,}4); (0{,}28 + 0{,}25); (0{,}45 + 0)] = 0{,}53.$$

2.3 ცხრილში მოყვანილია ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგიები პირველ ორ ზონაში:

| კაპდაბანდება $A$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $F_{1,2}(A)$ | ოპტიმალური სტრატეგიები |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | (0,0) |
| 1 | 0,28 | 0,25 | 0,28 | (1,0) |
| 2 | 0,45 | 0,41 | 0,53 | (1,1) |
| 3 | 0,65 | 0,55 | 0,70 | (2,1) |
| 4 | 0,78 | 0,65 | 0,90 | (3,1) |
| 5 | 0,90 | 0,75 | 1,06 | (3,2) |
| 6 | 1,02 | 0,80 | 1,20 | (3,3) |
| 7 | 1,13 | 0,85 | 1,33 | (4,3) |
| 8 | 1,23 | 0,88 | 1,45 | (5,3) |
| 9 | 1,32 | 0,90 | 1,57 | (6,3) |
| 10 | 1,38 | 0,90 | 1,68 | (7,3) |

ცხრილი 2.3

პირველ სამ ზონაში ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგიები განისაზღვრება პირველ ორ ზონაში ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგიების გათვალისწინებით შემდეგი ფუნქციონალური განტოლების საფუძველზე:

$$F_{1,2,3}(A) = max_x\big[F_{1,2}(x) + f_3(A - x)\big],\ \ A = \overline{0{,}10}.$$

შესაბამისი გაანგარიშების შედეგები წარმოდგენილია 2.4 ცხრილში.

| $A$ | $F_{1,2}(x)$ | $f_3(x)$ | $F_{1,2,3}(A)$ | ოპტიმალური სტრატეგიები | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | I , II ზონები | I,II,III ზონები |
| 0 | 0 | 0 | 0 | (0,0) | (0,0,0) |
| 1 | 0,28 | 0,15 | 0,28 | (1,0) | (1,0,0) |
| 2 | 0,53 | 0,25 | 0,53 | (1,1) | (1,1,0) |
| 3 | 0,70 | 0,40 | 0,70 | (2,1) | (2,1,0) |
| 4 | 0,90 | 0,50 | 0,90 | (3,1) | (3,1,0) |
| 5 | 1,06 | 0,62 | 1,06 | (3,2) | (3,2,0) |
| 6 | 1,20 | 0,73 | 1,21 | (3,3) | (3,2,1) |
| 7 | 1,33 | 0,82 | 1,35 | (4,3) | (3,3,1) |
| 8 | 1,45 | 0,90 | 1,48 | (5,3) | (4,3,1) |
| 9 | 1,57 | 0,90 | 1,60 | (6,3) | (5,3,1) ან (3,3,3) |
| 10 | 1,68 | 1,00 | 1,73 | (7,3) | (4,3,3) |

ცხრილი 2.4

ოთხ ზონაში ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგიების განსაზღვრა პირველ სამ ზონაში ოპტიმალური კაპიტალდაბანდების სტრატეგიების გათვალისწინებით შეიძლება შემდეგი ფუნქციონალური განტოლების საფუძველზე:

$$F_{1,2,3,4}(A) = max_x\left[F_{1,2,3}(x) + f_4(A-x)\right], \quad A = \overline{0,10}.$$

საბოლოო გაანგარიშების შედეგები 2.5 ცხრილშია მოყვანილი.

| $A$ | $F_{1,2,3}(x)$ | $f_4(x)$ | $F_{1,2,3,4}(A)$ | ოპტიმალური სტრატეგიები | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | I , II ,III ზონები | I,II,III,IV ზონები |
| 0 | 0 | 0 | 0 | (0,0,0) | (0,0,0,0) |
| 1 | 0,28 | 0,20 | 0,28 | (1,0,0) | (1,0,0,0) |
| 2 | 0,53 | 0,33 | 0,53 | (1,1,0) | (1,1,0,0) |
| 3 | 0,70 | 0,42 | 0,73 | (2,1,0) | (1,1,0,1) |
| 4 | 0,90 | 0,48 | 0,90 | (3,1,0) | (3,1,0,0) ან (2,1,0,1) |
| 5 | 1,06 | 0,53 | 1,10 | (3,2,0) | (3,1,0,1) |
| 6 | 1,21 | 0,56 | 1,26 | (3,2,1) | (3,2,0,1) |
| 7 | 1,35 | 0,58 | 1,41 | (3,3,1) | (3,2,1,1) |
| 8 | 1,48 | 0,60 | 1,55 | (4,3,1) | (3,,3,1,1) |
| 9 | 1,60 | 0,60 | 1,68 | (5,3,1) ან (3,3,3) | (4,3,1,1) ან (3,3,1,2) |
| 10 | 1,73 | 0,60 | 1,81 | (4,3,3) | (4,3,1,2) |

ცხრილი 2.5

დინამიკური პროგრამირების მეთოდს წარმატებით იყენებენ აგრეთვე სხვა მნიშვნელოვანი ამოცანების გადასაწყვეტად ეკონომიკის, ბიზნესისა და ტექნიკის სფეროებში.

## კითხვები და სავარჯიშოები

1. რომელი პროცესია ცნობილი ოპტიმიზაციური ანალიზის სახელწოდებით და რა წარმოადგენს მის ძირითად მეთოდს?
2. რას იკვლევს მათემატიკური პროგრამირება და რა ელემენტებისაგან შედგება შესაბამისი ამოცანის მათემატიკური მოდელი?
3. როგორ ამოცანებს ეწოდება უპირობო და პირობიანი ექსტრემალური ამოცანები?
4. მათემატიკური პროგრამირების ამოცანათა როგორი სახეობები არსებობს და რა თვისებები აქვს შესაბამის მიზნისა და შეზღუდვების ფუნქციებს?
5. ჩამოთვალეთ ამოცანები ეკონომიკისა და ბიზნესის სფეროებიდან, რომლებიც წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე დაიყვანება.
6. მოიყვანეთ წრფივი პროგრამირების სტანდარტული (სიმეტრიული) და კანონიკური ამოცანების განმარტებები.

7. ჩამოთვალეთ და აღწერეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდის ეტაპები.

8. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანები:

ა) $min \rightarrow f = -2x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ბ) $min \rightarrow f = 2x_1 - 10x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

გ) $max \rightarrow f = 2x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

დ) $max \rightarrow f = 3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ე) $min \rightarrow f = x_1 - 10x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

9. სამი $P_1$, $P_2$ და $P_3$ სახეობის პროდუქციის საწარმოებლად გამოიყენება ოთხი $S_1$, $S_2$, $S_3$ და $S_4$ სახეობის ნედლეული, რომელთა მარაგები, შესაბამისად, 150000, 170000, 100000-სა და 200000 ერთეულს შეადგენს. ცხრილში მოყვანილია თითოეული სახეობის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის საჭირო ნედლეულის ტექნოლოგიური ნორმები და მოგებები, რომელიც პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციას მოაქვს:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 4 | 2 | 1 |
| $S_2$ | 6 | 0 | 2 |
| $S_3$ | 0 | 2 | 4 |
| $S_4$ | 8 | 7 | 0 |
| მოგება | 100 | 150 | 200 |

შეადგინეთ წარმოების ისეთი გეგმის შედგენის ამოცანი მათემატიკური მოდელი, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ ჯამურ მოგებას ნედლეულის არსებული მარაგების გათვალისწინებით.

10. რაში მდგომარეობს სიმპლექს-მეთოდის არსი?
11. 30-დან 40 კგ-მდე წონის ცხოველის 300-400 გ-ის ტოლი საშუალო დღიური წონანამატის მისაღებად მისი კვების ყოველდღიური კვების რაციონი უნდა შეიცავდეს შემდეგი სახეობისა და რაოდენობის საკვებ ნივთიერებებს: საკვებ ერთეულებს - არანაკლებ 1,6 საკვები ერთეულისა, მონელებად პროტეინს - არანაკლებ 200 გ-ისა და კაროტინს - არანაკლებ 10 მგ-ისა. გამოსაკვებად გამოიყენება ქერი, ცერცვი და კომბინირებული საკვები. ცხრილში მოყვანილია საკვები ნივთიერების შედგენილობა ცალკეული სახეობის საკვების 1 კგ-ში და საკვების ერთი ერთეულის ფასი:

| | ქერი | ცერცვი | კომბ. საკვები |
|---|---|---|---|
| საკ. ერთეული | 1,2 | 1,4 | 0,8 |
| პროტეინი | 80 | 280 | 240 |
| კაროტინი | 5 | 5 | 100 |
| 1 კგ-ის ფასი | 3 | 4 | 5 |

შევადგინოთ მინიმალური ღირებულების მქონე დღიური რაციონის განსაზღვრის ამოცანის მათემატიკური მოდელი, რომელიც დააკმაყოფილებს მოთხოვნებს საკვებ ნივთიერებებზე.
12. ჩამოაყალიბეთ ორადული ამოცანის ფორმირების წესები.
13. რა კრიტერიუმის საფუძველზე შეიძლება ორადული ამოცანის ფორმირების სისწორის შემოწმება?
14. შეადგინეთ ორადული ამოცანები და შეამოწმეთ მათი სისწორე წრფივი პროგრამირების შემდეგი ამოცანებისათვის:

ა) $max \to f = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,4}$$

ბ) $max \to f = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 8 \\ x_1 - x_3 \le 4 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,3}$$

15. გააკეთეთ ორადული ამოცანის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია.

16. რას უწოდებენ ორადული ამოცანის ჩრდილოვან ფასებს (ორადულ შეფასებებს) და რას გვიჩვენებს ისინი?
17. რომელ ინტერვალებს ეწოდება ორადული ამოცანის მოდელის შეზღუდვების თავისუფალი წევრების ცვლილების მდგრადობის ინტერვალები?
18. რა ელემენტებისაგან შედგება სატრანსპორტო გადაზიდვების დაგეგმვის მატრიცა?
19. მოიყვანეთ ტრანსპორტული ამოცანის დახურული და ღია მოდელების განმარტებები.
20. როგორ შეიძლება დავიყვანოთ ღია ტიპის ტრასპორტული ამოცანის მოდელი დახურულ ტიპზე?
21. აღწერეთ ტრანსპორტული ამოცანის ამოხსნის ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის იტერაციული მეთოდი.
22. აღწერეთ ტრანსპორტული ამოცანის ამოხსნის მინიმალური ელემენტის იტერაციული პროცედურა.
23. ტრანსპორტული ამოცანის დაგეგმვის მატრიცა წარმოდგენილია შემდეგი ცხრილის სახით:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 7 | 2 | 9 | 90 |
| $A_2$ | 4 | 11 | 6 | 10 | 110 |
| $A_3$ | 6 | 3 | 12 | 14 | 170 |
| $A_4$ | 9 | 10 | 9 | 6 | 200 |
| $A_5$ | 2 | 13 | 7 | 11 | 130 |
| მოთხოვნები | 190 | 210 | 180 | 120 | $\sum = 700$ |

ვიპოვოთ ტრანსპორტირების გეგმა ჩრდილო-დასავლეთ კუთხის მეთოდის გამოყენებით და გამოვთვალოთ მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა.

24. ღია ტიპის ტრასპორტული ამოცანის დაგეგმვის მატრიცა წარმოდგენილია შემდეგი ცხრილით:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | მარაგები |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 6 | 8 | 12 | 16 | 100 |
| $A_2$ | 16 | 10 | 8 | 6 | 15 | 400 |
| $A_3$ | 4 | 1 | 9 | 11 | 13 | 100 |
| $A_4$ | 3 | 2 | 7 | 7 | 15 | 100 |
| მოთხოვნები | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | |

დავიყვანოთ ამოცანა დახურულ ტიპზე და ვიპოვოთ ტრანსპორტირების

გეგმა მინიმალური ელემენტის მეთოდის გამოყენებით.

25. რით განსხვავდება დინამიკური პროგრამირების ამოცანები სტატისტიკური ოპტიმიზაციის ამოცანებისაგან?
26. რას უწოდებენ პირობით ოპტიმალურ მართვას?
27. როგორ შეიძლება დაისვას დინამიკური პროგრამირების ამოცანა ზოგადი სახით?

28. აღწერეთ სქემატურად დინამიკური პროგრამირების იტერაციული მეთოდი.
29. როგორ შეიძლება ჩამოყალიბდეს ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი და რა მნიშვნელოვანი დასკვნა გამომდინარეობს ამ პრინციპიდან?

# 3. მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები

## 3.1 ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა. პარეტო-ოპტიმალობის ცნება

პრაქტიკაში საკმაოდ ხშირად გვხვდება გადაწყვეტილებათა მიღების ისეთი სიტუაციები, როდესაც ერთდროულად ეფექტურობის რამდენიმე კრიტერიუმი უნდა იქნას გათვალისწინებული.

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში მსგავსი პრობლემები მრავალკრიტერიუმიანი (ვექტორული) ოპტიმიზაციის ამოცანების ახელწოდებით არის ცნობილი. ამ ამოცანების ამოსახსნელად სკალარული (ერთმიზნიანი) ოპტიმიზაციის ამოცანებისაგან განსხვავებით ოპტიმიზაციის მხოლოდ ტრადიციული მეთოდების გამოყენება საკმარისი არ არის (ძირითადად, მათემატიკური პროგრამირების მეთოდებს ვგულისხმობთ). როგორც წესი, მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების ამოხსნის პროცესში აუცილებელი ხდება ექსპერტული შეფასებების გამოყენებაც, რადგანაც შესაძლებელია, რომ ზოგიერთები აღნიშნულ კრიტერიუმთაგან წინააღმდეგობაში მოდიოდნენ ერთმანეთთან , სხვები ერთი მიმართულებით მოქმედებდნენ, დანარჩენების ურთიერთდამოკიდებულებას კი ინდიფერენტული ხასიათი ჰქონდეს.

დავუშვათ, გადაწყვეტილებათა $U$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ეფექტურობის $m$ კერძო კრიტერიუმი $F_1(u), F_2(u),\ldots,F_m(u)$, რომელთა ერთობლიობა ქმნის ვექტორულ კრიტერიუმს - $F(u) = (F_1(u), F_2(u),\ldots,F_m(u))$.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ გმპ ცდილობს მიღწეული იქნას თითოეული კერძო კრიტერიუმის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$max_{u\in U} \to F_i(u),\ \ i = \overline{1,m}. \qquad (3.1)$$

თუ $U_i^*$-ით $(i = \overline{1,m})$ აღვნიშნავთ (3.1)-ის შესაბამის სიმრავლეებს, მაშინ ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისად, ცხადია, ოპტიმალურად უნდა იქნას მიჩნეული ნებისმიერი გადაწყვეტილება $u^* \in U^*$, სადაც, $U^* = \cap_{i=1}^{m} U_i^*$.

პრაქტიკულ ამოცანებში, ჩვეულებრივ, $U^*$ სიმრავლე ცარიელია, რაც იმას ნიშნავს, რომ დასმულ მრავალკრიტერიალურ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი. მიუხედავად ამისა, მსგავს სიტუაციებში მაინც უნდა იქნას მიღებული გარკვეული გადაწყვეტილებები. ეს კი, ოპტიმალობის კლასიკური გაგების გადახედვის გარეშე ვერ მოხერხდება.

პირველ რიგში უნდა გაირკვეს გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი წყვილის შედარების საკითხი ვექტორული $F$ კრიტერიუმის შესაბამისად.

$u$ გადაწყვეტილება $v$-ზე უკეთესია ვექტორული $F$ კრიტერიუმის მიხედვით ($u \succ^F v$), თუ $F_i(u) \geq F_i(v)$, $i = \overline{1, m}$, ამასთან, ერთი მაინც უტოლობა მკაცრად უნდა სრულდებოდეს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $u$ გადაწყვეტილება დომინირებს $v$-ზე, ხოლო $v$ დომინირებადი გადაწყვეტილებაა.

$u$ და $v$ გადაწყვეტილებებს ეწოდება ეკვივალენტური $F$ კრიტერიუმის მიხედვით ($u \sim^F v$), თუ $F_i(u) = F_i(v)$, $i = \overline{1, m}$.

სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებისაგან განსხვავებით, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებში გადაწყვეტილებათა ზოგიერთი წყვილის შედარების ობიექტური საფუძველი არ არსებობს.

$u$ და $v$ გადაწყვეტილებებს ეწოდება შედარებადი, თუ ადგილი აქვს ერთერთს შემდეგი სამი დამოკიდებულებიდან:

$$u \succ^F v, \quad v \succ^F u, \quad u \sim^F v.$$

გადაწყვეტილებათა არაშედარებადი წყვილების არსებობის შესაძლებლობა ვექტორული ოპტიმიზაციის მთავარ სპეციფიკურ თავისებურებას წარმოადგენს, რითაც განპირობებულია ექსპერტთა სუბიექტური შეფასებების გამოყენების აუცილებლობა.

ალბათ გასაგებია, რომ $\succ^F$ და $\sim^F$ ბინარულ დამოკიდებულებებს გააჩნიათ, შესაბამისად, მკაცრი დალაგებისა და ეკვივალენტობის დამოკიდებულების ყველა ის თვისება, რომელიც პირველ თავში განვიხილეთ.

მეცხრამეტე საუკუნის ბოლოს იტალიელმა მეცნიერმა ვ. პარეტომ შემოიღო ცნება, რომელმაც უდიდესი როლი ითამაშა გადაწყვეტილებათა მიღებისა და ეკონომიკური თეორიების განვითარებაში.

გადაწყვეტილებას ეწოდება ეფექტური (პარეტო-ოპტიმალური), თუ გადაწყვეტილებათა სიმრავლეში არ მოიძებნება მასზე უკეთესი გადაწყვეტილება ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისად, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არაეფექტური.

მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ეფექტური გადაწყვეტილება არადომინირებადია.

ყველა ეფექტურ გადაწყვეტილებათა სიმრავლეს პარეტოს სიმრავლე ეწოდება და $U^P$-თი აღინიშნება.

ადვილი მისახვედრია, რომ გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი წყვილი $U^P$-დან შედარებადი არ არის და ნებისმიერი არაეფექტური გადაწყვეტილებისათვის მოიძებნება ერთი მაინც გადაწყვეტილება $U^P$-დან, რომელიც მასზე დომინირებს.

პარეტო-ოპტიმალობის ცნების შემოტანა მნიშვნელოვნად ამარტივებს მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების პროცესს, რადგანაც იგი საშუალებას იძლევა განხილვიდან გამოვრიცხოთ არაეფექტური გადაწყვეტილებები.

იმ შემთხვევებში, როდესაც გადაწყვეტილებათა $U$ სიმრავლე სასრულია, პარეტოს სიმრავლე არ შეიძლება ცარიელი იყოს. საერთოდ კი $U^P \subseteq U$.

მაგალითი 3.1 გადაწყვეტილებათა სასრულ $U = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ეფექტურობის სამი კერძო კრიტერიუმისაგან შედგენილია ვექტორული $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ კრიტერიუმი. კრიტერიალური მნიშვნელობები წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

| $F_i$ / $u_j$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | 9 | 1 | 3 |
| $u_2$ | 8 | 1 | 2 |
| $u_3$ | 7 | 2 | 8 |
| $u_4$ | 5 | 1 | 7 |
| $u_5$ | 3 | 2 | 5 |
| $u_6$ | 1 | 2 | 4 |
| $u_7$ | 4 | 9 | 4 |
| $u_8$ | 5 | 5 | 5 |

გამოვყოთ პარეტოს სიმრავლე. მოვიყვანოთ შესაბამისი დასაბუთებები,

ამოხსნა. პარეტოს სიმრავლის ფორმირება შეიძლება შემდეგი სქემის შესაბამისად განვახორციელოთ:

გადაწყვეტილებათა სიმრავლეში ვეძებთ გადაწყვეტილებას, რომელიც $u_1$-ზე უკეთესია ვექტორული კრიტერიუმის მიხედვით. როგორც კი შეგვხვდება გადაწყვეტილება, რომელიც მასზე დომინირებს, $u_1$-ს გამოვრიცხავთ განხილვიდან მისი არაეფექტურობის გამო, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მას ჩავრთავთ პარეტოს სიმრავლეში. შემდეგ გადავდივართ $u_2$-ზე და ა.შ.

თუ მოყვანილ სქემას გავყვებით, მივიღებთ:

$$U^P = \{u_1, u_3, u_7, u_8\}.$$

დანარჩენი, $u_2, u_4, u_5$ და $u_6$ გადაწყვეტილებები არაეფექტურია, რადგანაც

$u_1 \succ^F u_2, \quad u_3 \succ^F u_4, \quad u_3 \succ^F u_5$ და $u_3, u_5, u_7, u_8 \succ^F u_6$.

ალბათ გასაგებია, რომ ოპტიმალური მრავალკრიტერიუმიანი არჩევანი პარეტოს სიმრავლიდან უნდა განხორციელდეს. ეს შესაძლებელი ხდება მხოლოდ გმპ-ს მხრიდან გარკვეულ კომპრომისულ დაშვებათა პირობებში ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმების რეალური არატოლფასოვნობის გათვალისწინებით.

ამგვარად, შეიძლება ითქვას, რომ მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღება სუბიექტური ინფორმაციის გამოყენების გარეშე შეუძლებელია და იგი ყოველთვის კომპრომისულ ხასიათს ატარებს.

## 3.2 მრავალკრიტერიუმიან გადაწყვეტილებათა მიღების მეთოდები

კომპრომისული გადაწყვეტილების მიღების პრაქტიკაში ყველაზე გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს განზოგადებული კრიტერიუმის მეთოდი.

განზოგადებული კრტერიუმი ფორმირდება ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმებისაგან, როგორც ფუნქციონალი $f[F_1(u), F_2(u), \ldots, F_m(u)]$, სადაც $f$ მრავალი ცვლადის მოცემული ფუნქციაა.

ამ ხერხით ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა სკალარული ოპტომიზაციის ამოცანაზე დაიყვანება. კერძოდ, საუკეთესო გადაწყვეტილებად მიიჩნევა ის გადაწყვეტილება $U$ სიმრავლიდან, რომელიც განზოგადებულ კრიტერიუმს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს.

განზოგადებულ კრიტერიუმს ეწოდება ეფექტური, თუ იგი მაქსიმუმს პარეტოს სიმრავლეზე აღწევს.

გამოთვლითი თვალსაზრისით ყველაზე მოსახერხებელია წრფივი განზოგადებული კრიტერიუმი:

$$f_L = \sum_{i=1}^{m} c_i F_i(u), \quad \text{სადაც} \quad c_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}.$$

მისი გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევებში, როდესაც ხერხდება კერძო კრიტერიუმთა მნიშვნელობების ერთ განზომილებაში გადაყვანა. მაგალითად, თუ $F_i(u)$ აღნიშნავს $i$-ური სახეობის პროდუქციის გამოშვებას წარმოების $u$ გეგმის გამოყენებისას, ხოლო $c_i$ - ამ პროდუქციის ერთეულის ფასს, მაშინ $\sum_{i=1}^{m} c_i F_i(u)$ ყველა სახეობის გამოშვებული პროდუქციის ჯამური ღირებულება იქნება. წრფივი განზოგადებული კრიტერიუმის გამოყენება ამ დროს წარმოების ისეთ გეგმას მოგვცემს, რომელიც აღნიშნულ ღირებულებას მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს.

მარტივად მტკიცდება აგრეთვე, რომ წრფივი განზოგადებული კრიტერიუმი ეფექტურიცაა, რაც ამლიერებს მისი გამოყენების მოტივაციას.

არსებობს განზოგადებული კრიტერიუმის სხვა სახეობებიც. $c_i$ სიდიდეები მსგავს ამოცანებში ასახავს, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ეფექტურობის შესაბამისი კერძო კრიტერიუმები გმპ-ს შეხედულებით. ამიტომ, მათ ხშირად წონით კოეფიციენტებსაც უწოდებენ.

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების კიდევ ერთ, საკმაოდ გავრცელებულ მეთოდს ძირითადი კერძო კრიტერიუმის მეთოდი წარმოადგენს. ამ დროს გარკვეული მოსაზრების საფუძველზე ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა სიმრავლიდან გამოიყოფა ერთი (ძირითადი) კრიტერიუმი (ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ეს არის $F_1$), ხოლო დანარჩენი კრიტერიუმების მნიშვნელობებს გმპ უყენებს გარკვეულ მოთხოვნებს, ჩვეულებრივ, შემდეგი უტოლობების სახით:

$$F_i(u) \geq F_i^{\wedge}, i = \overline{2, m},$$

სადაც $F_i^{\wedge}$ აღნიშნავს კერძო კრიტერიუმთა მნიშვნელობების მინიმალური დასაშვებ დონეებს.

მეთოდის მიხედვით საუკეთესოდ ის გადაწყვეტილება უნდა იქნას მიჩნეული, რომელიც შემდეგი ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს:

$$max \rightarrow F_1(u)$$

$$F_i(u) \geq F_i^{\wedge}, i = \overline{2, m.}$$

მეთოდის საილუსტრაციოდ დავუბრუნდეთ 3.1 მაგალითს და მას შემდეგი ინტერპრეტაცია მივცეთ:

უნივერსიტეტის მაგისტრატურის "ბიზნესის ადმინისტრირების" ერთი ვაკანტური ადგილის დასაკავებლად რვა სტუდენტი აბარებს მისაღებ გამოცდებს სამ დისციპლინაში - მენეჯმენტის საფუძვლები ($F_1$), ინფორმაციული ტექნოლოგიები ($F_2$) და უცხო ენა ($F_3$). ცხრილში მოყვანილი რიცხვები მივიჩნიოთ შეფასებებად, რომლებიც დაიმსახურეს სტუდენტებმა თითოეულ დისციპლინაში (ათბალიან სისტემაში). ვიგულისხმოთ, რომ ძირითადი კერძო კრიტერიუმია $F_1$, ხოლო $F_2^{\wedge} = F_3^{\wedge} = 2$ . მაშინ, ძირითადი კერძო კრიტერიუმის შესაბამისად მაგისტრატურაში უნდა ჩაირიცხოს ის სტუდენტი, რომლის შეფასებები პასუხობს შემდეგი ამოცანის მოთხოვნებს:

$$max_{u \in U} \rightarrow F_1(u)$$

$$F_2(u) \geq 2$$

$$F_3(u) \geq 2.$$

როგორც ცხრილიდან ჩანს, დასმული ამოცანის ამონახსნია $u_3$, რომელიც ამავე დროს პარეტო-ოპტიმალურია.

ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანათა სპეციფიკურ სახეობას წარმოადგენს ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის ამოცანები. ამ დროს გმპ ახდენს ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა სრულ რანჟირებას მათი პრიორიტეტულობის გათვალისწინებით.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ გმპ-მ ყველაზე მნიშვნელოვნად $F_1$ კრიტერიუმი მიიჩნია, ნაკლებად მნიშვნელოვნად $F_2$ და ა.შ.

ლექსიკოგრაფული სქემის შესაბამისად, გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი წყვილის შედარებისას უკეთესად ითვლება ის გადაწყვეტილება, რომელსაც $F_1$ კრიტერიუმის უფრო დიდი მნიშვნელობა შეესაბამება, მათი ტოლობის შემთხვევაში უკეთესია ის გადაწყვეტილება, რომელსაც $F_2$ კრიტერიუმის უფრო დიდი მნიშვნელობა შეესაბამება და ა.შ. თუ გადაწყვეტილებათა ყველა კერძო კრიტერიალური მნიშვნელობა ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს გადაწყვეტილებები ეკვივალენტურია.

ფორმალურად აღწერილი სქემა შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$u$ გადაწყვეტილება $v$-ზე უკეთესია ლექსიკგრაფულად ($u \succ^{lex} v$), თუ სრულდება ერთერთი ქვემოთმოყვანილი პირობა

1) $F_1(u) > F_1(v)$,
2) $F_1(u) = F_1(v)$, $F_2(u) > F_2(v)$,

............................

$r)$ $F_k(u) = F_k(v)$, $k = \overline{1, r-1}$, $F_r(u) > F_r(v)$ $(r < m)$,

.....................

$m)$ $F_k(u) = F_k(v)$, $k = \overline{1, m-1}$, $F_m(u) > F_m(v)$ .

$u$ და $v$ გადაწყვეტილება ეკვივალენტურია ($u \sim^{lex} v$), თუ

$$F_i(u) = F_i(v),\ i = \overline{1, m}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი $u$ და $v$ წყვილი $U$-დან ლექსიკოგრაფულად შედარებადია, ანუ ადგილი აქვს ერთერთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$u \succ^{lex} v, \qquad v \succ^{lex} u, \qquad u \sim^{lex} v.$$

$u^*$ გადაწყვეტილებას ეწოდება ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $u$ გადაწყვეტილებისათვის $U$-დან ან $u^* \succ^{lex} u$, ან $u^* \sim^{lex} u$.

აღვნიშნოთ $U^*$-ით ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალურ ყველა გადაწყვეტილებათა სიმრავლე. ცხადია, ყველა გადაწყვეტილება $U^*$-დან ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ასე რომ, ვექტორული $F$ კრიტერიუმის ოპტიმალური (ლექსიკოგრაფულად უდიდესი) მნიშვნელობა შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$F^* = (F_1(u^*), F_2(u^*), ..., F_m(u^*)).$$

ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალური გადაწყვეტილების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $U^*$ სიმრავლის ფორმირება შესაძლებელია შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებების საფუძველზე:

$$U_k^* = \{u^* : u^* \in U_{k-1}^*, F_k(u^*) = max_{u \in U_{k-1}^*} F_k(u)\},$$

$$k = \overline{1,m}, \;\; U_0^* = U, \; U_m^* = U^*.$$

ამ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$U \supseteq U_1^* \supseteq U_2^* \supseteq \cdots \supseteq U_m^*,$$

ე.ი. ყოველი მომდევნო კრიტერიუმი ავიწროებს წინა კრიტერიუმის საფუძველზე მიღებულ გადაწყვეტილებათა სიმრავლეებს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ თუ სკალარული ოპტიმიზაციის საწყის ამოცანას რამდენიმე ამონახსნი აქვს და გადაწყვეტილებათა შემდგომი შერჩევის მიზნით თანმიმდევრულად იყენებენ დამატებით კრიტერიუმებს, მაშინ ბოლოს მიღებული გადაწყვეტილებები იმ ლექსიკოგრაფული ამოცანის შესაბამისი ოპტიმალური გადაწყვეტილებები იქნება, რომლის ვექტორული კრიტერიუმი აღნიშნული რიგრიგობით გამოყენებული კრიტერიუმებისაგან არის ფორმირებული.

შემუშავებულია ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის ამოცანათა ამოხსნის ერთეტაპიანი მეთოდიც. კერძოდ, შეიძლება აიგოს პრაქტიკული რეალიზაციისათვის მეტად მოსახერხებელი

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(u)$$

სახის ფუნქცია, რომლისთვისაც გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი $u$ და $v$ წყვილისათვის $U$-დან $u \succcurlyeq^{lex} v$ ( $u \succ^{lex} v$ ან $u \sim^{lex} v$ ) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $\Phi(u) \geq \Phi(v)$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\Phi$ მაქსიმუმს სწორედ $U^*$-ზე აღწევს:

$$U^* = U_\Phi^* = \{u^* : u^* \in U, max_{u \in U} \Phi(u) = \Phi(u^*)\}.$$

ტრასპორტულ მოდელებთან ერთად ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის მეთოდი წარმატებით შეიძლება იქნას გამოყენებული ტვირთების გადაზიდვის ოპტიმალური დაგეგმვის პროცესში, როდესაც გასათვალისწინებელია პუნქტებს შორის გადასაზიდი ტვირთის მოცულობებიც. გარდა ამისა მას იყენებენ დანიშვნისა (ოპერაციებზე მომუშავეთა მიმაგრების) და სხვა ტიპის ამოცანებში.

### 3.3 მეთოდი "ელექტრა"

არსებობს თვალსაზრისი, რომლის თანახმადაც ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებში აუცილებელია ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა სკალების ერთ ტიპზე (თვისობრივზე, ან რაოდენობრივზე) დაყვანა. რაოდენობრივიდან თვისობრივ სკალაზე გადასვლისას ინფორმაციის გარკვეული ნაწილი იკარგება, რაც, ბუნებრივია, არ არის სასურველი.

გარკვეულ პირობებში ბ. რუას მიერ შემუშავებული მეთოდი [9] საუკეთესო არჩევანის განხორციელების საშუალებას აღნიშნული გადასვლების გარეშეც იძლევა, რაც, უდავოდ, მის ღირსებად უნდა ჩაითვალოს. ეს მეთოდი, რომელიც გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში

"ელექტრას" სახელწოდებითაა ცნობილი, გრაფის ცნებას ეფუძნება, ამიტომ, მოვიყვანოთ აუცილებები განმარტებები გრაფთა თეორიიდან.

გრაფი წვეროებისა და მათი დამაკავშირებელი რკალების სიმრავლეებით მოიცემა :

$$G = (X, \Omega),$$

სადაც, $X$-ით აღნიშნულია წვეროთა სიმრავლე, ხოლო $\Omega \subseteq X \times X$, ანუ, თუ $(x_i, x_j) \in \Omega$, მაშინ $G$ გრაფში არსებობს $x_i$ და $x_j$ წვეროების დამაკავშირებელი $(x_i, x_j)$ რკალი (რა თქმა უნდა, იგულისხმება, რომ $G$ გრაფში შესაძლებელია ერთდროულად არსებობდეს როგორც $(x_i, x_j)$, ისე $(x_j, x_i)$ რკალიც).

$G_1 = (X, \Omega_1)$ გრაფს ეწოდება $G$ გრაფის ქვეგრაფი, თუ $\Omega_1 \subset \Omega$.

რკალთა მიმდევრობას, რომელშიც ყოველი წინა რკალის ბოლო შემდეგი რკალის დასაწყისს ემთხვევა, ეწოდება გზა, ხოლო გზას, რომლის საწყისი და საბოლოო წვერო ერთმანეთს ემთხვევა - კონტური.

კონტურის "მოჭიმვის" პროცედურის ქვეშ ესმით ისეთი $G_Y$ გრაფის აგება, რომელშიც $y_i$ და $y_j$ წვეროების დამაკავშირებელი რკალი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $G$ გრაფში მოიძებნება $x_k \in y_i$ , $x_l \in y_j$ წვეროების დამაკავშირებელი ერთი მაინც რკალი.

გავყოთ $G$ გრაფის წვეროების $X$ სიმრავლე ორ $S$ და $X - S$ ქვესიმრავლედ.

იტყვიან, რომ $S$ სიმრავლეს აქვს გარე მდგრადობის თვისება, თუ $X - S$ სიმრავლის ნებისმიერი წვეროსათვის მოიძებნება $S$ სიმრავლის ერთი მაინც წვერო, საიდანაც რკალი მოცემულ წვეროში შედის, ხოლო შიდა მდგრადობის თვისება - თუ $S$ სიმრავლის წვეროთა არცერთი წყვილი ერთმანეთთან რკალით დაკავშირებული არ არის.

გრაფის წვეროთა სიმრავლეს, რომელსაც ერთდროულად გააჩნია გარე და შიდა მდგრადობის თვისებების, ბირთვი ეწოდება.

შესაძლებელია გრაფს ჰქონდეს როგორც ერთი, ისე რამდენიმე ბირთვი, ან საერთოდ არ გააჩნდეს იგი.

მტკიცდება, რომ გრაფში ერთადერთი ბირთვის არსებობის საკმარის პირობას მასში კონტურების არარსებობა წარმოადგენს.

დავუშვათ, გადაწყვეტილებათა $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ეფექტურობის ვექტორული $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ კრიტერიუმი.

$i$-ური კერძო კრიტერიუმის შესაბამისი $U$ სიმრავლის სრული კვაზიდალაგება შეიძლება აღიწეროს $G_i = (U, \Omega_i)$ გრაფით:

$$(u_j, u_k) \in \Omega_i \leftrightarrow F_i(u_j) \geq F_i(u_k), \ \ i = \overline{1, m},$$

ანუ, $G_i$ გრაფში ორიენტირებული რკალი მაღალი კრიტერიალური მნიშვნელობის მქონე წვეროდან დაბალი კრიტერიალური მნიშვნელობის მქონე წვეროსაკენაა მიმართული, ხოლო ერთნაირი კრიტერიალური მნიშვნელობის მქონე წვეროთა ყველა წყვილი ერთმანეთთან დაკავშირებულია ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულების ორი რკალით.

დავსვათ $U$ სიმრავლის ახალი, ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისი სრული კვაზიდალაგების მიღების ამოცანა კერძო კრიტერიუმთა შესაბამისი კვაზიდალაგებების სინთეზირების გზით.

საძიებელი კვაზიდალაგების აღმწერი გრაფი $G = (U, \Omega^F)$-ით აღვნიშნოთ.

თუ გადაწყვეტილებათა რაიმე $u_j$ და $u_k$ წყვილისათვის $F_i(u_j) \geq F_i(u_k)$, $i = \overline{1,m}$, სინთეზირების ნებისმიერმა გონივრულმა პროცედურამ ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა ასეთი "ერთსულოვნება" არ უნდა დაარღვიოს, ანუ პროცედურა ისეთი უნდა იყოს, რომ

$$(u_j, u_k) \in \Omega_i, \ i = \overline{1,m} \rightarrow (u_j, u_k) \in \Omega^F.$$

განვიხილოთ გრაფი $G_0 = (U, \Omega_0)$, სადაც $\Omega_0 = \cap_{i=1}^{m} \Omega_i$. ალბათ გასაგებია, რომ ამ გრაფში $(u_j, u_k)$ რკალი მხოლოდ იმ შემთხვევაში არსებობს, როდესაც ყოველი კერძო კრიტერიუმისათვის $u_j$ გადაწყვეტილების შესაბამისი კრიტერიალური მნიშვნელობა $u_k$ გადაწყვეტილების შესაბამის კრიტერიალურ მნიშვნელობაზე ნაკლები არ არის.

რა პრინციპების საფუძველზე უნდა შეივსოს $G_0$ გრაფი ახალი რკალებით, რომ, ერთის მხრივ, მიღებული გრაფი მაქსიმალურად "შეწყობილი" იყოს $G_i$ გრაფებთან და ამასთან ძალიან არ "გაღარიბდეს" ინფორმაციულად იმ ინფორმაციებთან შედარებით, რომელსაც $G_i$ გრაფები შეიცავს.

დასმულ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი $u_j$ და $u_k$ წყვილისათვის ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა სიმრავლე გავყოთ ორ კლასად:

$$C(u_j, u_k) = \{F_i : (u_j, u_k) \in \Omega_i\},$$

$$D(u_j, u_k) = \{F_i : (u_j, u_k) \notin \Omega_i\}.$$

იმისათვის, რომ საკმარისი საფუძველი არსებობდეს ერთი გადაწყვეტილების მეორეზე სინთეზური დომინირების დასკვნის გამოსატანად, ბუნებრივია გათვალისწინებული უნდა იქნას იმ კერძო კრიტერიუმთა წონითი კოეფიციენტები, რომელთა მიხედვითაც ადგილი აქვს კერძო ხასიათის დომინირებას (ალბათ, გასაგებია, რომ საუბარია $C$ კლასის კრიტერიუმებზე).

აღნიშნული დასკვნის გამოტანის მეტნაკლები საფუძვლის არსებობის შესაფასებლად გამოიყენება ე.წ. "თანხმობის" ინდექსები:

$$c(u_j, u_k) = \frac{1}{\rho} \sum_{F_i \in C(u_j, u_k)} \rho_i. \qquad (3.2)$$

ამ სახის ინდექსს შემდეგი თვისებები გააჩნია:

- მისი მნიშვნელობა იცვლება 0-დან 1-მდე და $C$-ს გაფართოებისას არ მცირდება;
- იგი 1-ის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(u_j, u_k) \in \Omega_0$;
- იგი ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას, თუ ნებისმიერ $i$-ურ კერძო კრიტერიუმს წონითი $\rho_i$ კოეფიციენტით შევცვლით კრიტერიუმთა სხვა ერთობლიობით, რომელთა წონითი კოეფიციენტების ჯამი $\rho_i$-ს ტოლია.

მეორეს მხრივ, გათვალისწინებული უნდა იყოს გარკვეული "უთანხმოებები" რიგი კერძო კრიტერიუმების შესაბამისად (საუბარია, კერძო კრიტერიუმებზე, რომლებიც $D$ კლასს ქმნის). მართლაც, რაც უნდა ახლოს იყოს "თანხმობის" ინდექსის მნიშვნელობა 1-თან, მაინც განხილული უნდა იქნას გადაწყვეტილებათა შესაბამისი წყვილის $D$ კლასის კრიტერიალური მნიშვნელობები. თუ მათ შორის განსხვავებები მცირეა, მაშინ აღნიშნული "უთანხმოებების" უგულვებელყოფა შესაძლებელია, მაგრამ შეიძლება ისეც მოხდეს, რომ ამ განსხვავებებს მთელი სკალის სიგრძის რიგი ჰონდეს.

მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე "უთანხმოების" ინდექსებს შემდეგი გამოსახულების გამოყენებით ითვლიან:

$$d(u_j, u_k) = \begin{cases} 0, \text{თუ } D(u_j, u_k) = \emptyset, \\ \frac{1}{d} max_{F_i \in D(u_j, u_k)} \rho_i \frac{|F_i(u_j) - F_i(u_k)|}{d_i}, \text{თუ } D(u_j, u_k) \neq \emptyset, \end{cases} \quad (3.3)$$

სადაც $\rho = \sum_{i=1}^{m} \rho_i$, $d_i = max_{u_j, u_k \in U} |F_i(u_j) - F_i(u_k)|$, $i = \overline{1, m}$, ხოლო $d$ - კერძო კრიტერიუმთა სკალების უკიდურეს მნიშვნელობებს შორის მაქსიმალური შესაძლო გადახრაა.

ამ ინდექსს "თანხმობის" ინდექსის ანალოგიური თვისებები აქვს, კერძოდ:

- მისი მნიშვნელობა იცვლება 0-დან 1-მდე და $D$ კლასის შევიწროებისას არ იზრდება;
- იგი 0-ის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(u_j, u_k) \in \Omega_0$;
- იგი ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას $F_i$ კრიტერიუმის სკალაში ახალი დამატებითი გრადაციების შემოტანის შემთხვევაში იმ პირობით, რომ ძველი გრადაციები შენარჩუნებული იქნება.

შემოვიღოთ ორი რიცხვი 0-სა და 1-ს შორის, რომელთაგანაც პირველი $(p)$ შედარებით ახლოა 1-თან, ხოლო მეორე $(q)$ – 0-თან. მათი საშუალებით $U$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ პრიორიტეტის დამოკიდებულება, რომლის თანახმადაც $u$ გადაწყვეტილება $v$-ზე უკეთესია ვექტორული $\boldsymbol{F}$ კრიტერიუმის შესაბამისად, თუ "თანხმობის" ინდექსი $p$-ზე ნაკლები არ არის და "უთანხმოების" ინდექსი არ აღემატება $q$-ს.

$p$ -სა და $q$-ს ინდექსთა ზღურბლური მნიშვნელობები ეწოდება.

ასეთნაირად განსაზღვრული პრიორიტეტის დამოკიდებულება შემდეგი გრაფით შეიძლება აღიწეროს:

$$G(p,q) = (U, \Omega_{p,q}), \text{ სადაც}$$
$$(u, v) \in (U, \Omega_{p,q}) \leftrightarrow c(u, v) \geq p \text{ და } d(u, v) \leq q. \quad (3.4)$$

$G(p,q)$ გრაფს შემდეგი სამი მნიშვნელოვანი თვისება გააჩნია:

1. თუ $p \le p'$ და $q \ge q'$, მაშინ ($G(p',q')$ გრაფი $G(p,q)$ გრაფის ქვეგრაფს წარმოადგენს;
2. $G(1,q) = G(p,0) = G_0$. ამ დროს როგორიც არ უნდა იყოს $p$ და $q$, $G_0$ გრაფი $G(p,q)$-ს ქვეგრაფი იქნება;
3. თუ $p < 1$ და $q > 0$, უკვე არ არის აუცილებელი, რომ $G(p,q)$ გრაფი ტრანზიტული იყოს (თუმცა, ყველა $G_i$ გრაფი ტრანზიტულია).

ამგვარად, $u$ გადაწყვეტილება $v$-ზე უკეთესად მიიჩნევა ვექტორული $F$ კრიტერიუმის შესაბამისად, თუ $C$ კლასში შემავალ კერძო კერძო კრიტერიუმთა სიმრავლე მათი წონითი კოეფიციენტების გათვალისწინებით საკმაოდ "წარმომადგენლობითია" (ზრურბლი $p$), ხოლო $D$ კლასის კერძო კრიტერიმთა მნიშვნელობები არ იძლევა იმის საფუძველს, რომ უარი ვთქვათ $u$ გადაწყვეტილების უპირატესობაზე $v$ გადაწყვეტილებასთან შედარებისას (ზღურბლი $q$).

შემოღებული პრიორიტეტის დამოკიდებულება საგრძნობლად ამარტივებს მრავალკრიტერიუმიანი არჩევანის განხორციელების პრობლემას, მაგრამ, როგორც გამოცდილებამ აჩვენა, იგი ნაკლებად კონსტრუქციულია სრული კვაზიდალაგების მისაღწევად.

ადვილი მისახვედრია, რომ $G_0$ გრაფის ბირთვი პარეტოს სიმრავლეს ემთხვევა. თუ $p$ -სა და $q$-ს მნიშვნელობებს ნაკლებ მოთხოვნებს წავუყენებთ ( შევამცირებთ $p$-ს, გავზრდით $q$-ს , ან ორივე ცვლილებას ერთდროულად განვახორციელებთ), აღნიშნული ბირთვი თანდათან იკუმშება. კერძოდ, მტკიცდება, რომ $G\left(\frac{1}{2},1\right)$ გრაფის ბირთვის შეკუმშვა ყოველთვის შესაძლებელია ერთ ელემენტამდე.

შედგენილია მეთოდის შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა, რომლის გამოყენებით შესაძლებელია:

- "თანხმობისა" და "უთანხმოების" ინდექსების გამოთვლა;
- $G(p,q)$ გრაფების აგება $p$ -სა და $q$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;
- კონტურების გამოვლენა $G(p,q)$ გრაფებში;
- ბირთვის გამოყოფა (კონტურების შეკუმშვის შემდგომ) $p$ -სა და $q$-ს მნიშვნელობების სხვადასხვა კომბინაციებისათვის.

პროგრამა სხვა დამატებითი ინფორმაციის მიღების საშუალებასაც იძლევა.

მაგალითი **3.2** გადაწყვეტილებათა $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ეფექტურობის ვექტორული კრიტერიუმი $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$. კერძო კრიტერიუმების წონითი კოეფიციენტებია $\rho_1 = 3$; $\rho_2 = 2$; $\rho_3 = 3$; $\rho_4 = 1$; $\rho_5 = 1$, ხოლო კრიტერიალური მნიშვნელობები წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

| $F_i$ \ $u_j$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 10 | 20 | 5 | 10 | 16 |
| $u_2$ | 0 | 5 | 5 | 16 | 10 |
| $u_3$ | 0 | 10 | 0 | 16 | 7 |
| $u_4$ | 20 | 5 | 10 | 10 | 10 |
| $u_5$ | 20 | 10 | 15 | 10 | 13 |
| $u_6$ | 20 | 15 | 20 | 13 | 13 |

ა) ავაგოთ "თანხმობისა" და "უთანხმოების" ინდექსების მნიშვნელობათა ცხრილები;

ბ) ავაგოთ $G(p,q)$ გრაფები $p$ -სა და $q$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და გავაანალიზოთ ისინი.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ, მაგალითად, $c(u_1,u_2)$. კრიტერიალური მნიშვნელობების ცხრილისა და (3.2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$c(u_1,u_2) = \frac{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_5}{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4+\rho_5} = \frac{3+2+3+1}{3+2+3+1+1} = 0{,}9.$$

ანალოგიურად გამოიანგარიშება "თანხმობის" ინდექსების სხვა მნიშვნელობებიც, რის საფუძველზე ივსება შემდეგი ცხრილი:

$C =$

| $u_j$ \ $u_j$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | • | 0,90 | 0,90 | 0,40 | 0,40 | 0,30 |
| $u_2$ | 0,40 | • | 0,80 | 0,40 | 0,10 | 0,10 |
| $u_3$ | 0,10 | 0,60 | • | 0,30 | 0,30 | 0,30 |
| $u_4$ | 0,70 | 0,90 | 0,70 | • | 0,40 | 0,30 |
| $u_5$ | 0,70 | 0,90 | 0,90 | 1 | • | 0,60 |
| $u_6$ | 0,70 | 0,90 | 0,90 | 1 | 1 | • |

გადაწყვეტილებათა იგივე წყვილისათვის $D(u_1,u_2) = \{F_4\}$.

კრიტერიალური მნიშვნელობების ცხრილის თანახმად $d = 20 - 0 = 20$, ხოლო $d_4 = 16 - 10 = 6$. შესაბამისი მნიშვნელობების (3.3) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

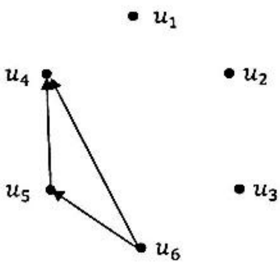
$$d(u_1,u_2) = \frac{1}{d}\frac{|F_4(u_1) - F_4(u_2)|}{d_4} = \frac{1}{20}\frac{|10-16|}{6} = 0{,}3.$$

ასევე გამოითვლება "უთანხმოების" სხვა ინდექსების მნიშვნელობები და ივსება შესაბამისი ცხრილი:

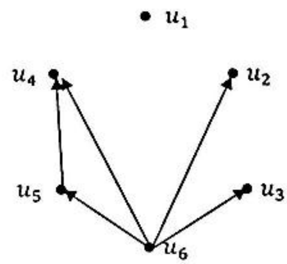
$D =$

| $u_j$ \ $u_j$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | • | 0,30 | 0,30 | 0,50 | 0,50 | 0,75 |
| $u_2$ | 0,75 | • | 0,25 | 0,10 | 0,10 | 0,10 |
| $u_3$ | 0,50 | 0,25 | • | 0,10 | 0,10 | 0,10 |
| $u_4$ | 0,75 | 0,30 | 0,30 | • | 0,25 | 0,50 |
| $u_5$ | 0,50 | 0,30 | 0,30 | 0 | • | 0,25 |
| $u_6$ | 0,50 | 0,15 | 0,15 | 0 | 0 | • |

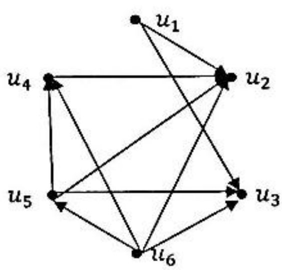
ბ) ქვემოთმოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია $G(p,q)$ გრაფების ვარიანტები $p$ -სა და $q$-ს რამდენიმე კომბინაციისათვის $C$ და $D$ ცხრილების მონაცემების საფუძველზე:



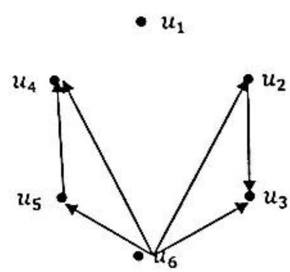

$G_0 = G(1,0)$



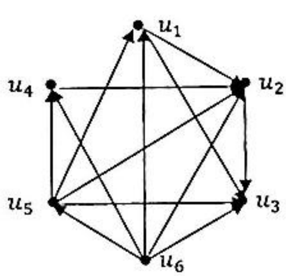

$G(0{,}90; 0{,}15)$




$G(0{,}90; 0{,}30)$




$G(0{,}80; 0{,}25)$




$G(0{,}70; 0{,}50)$

ნახ. 3.1

ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, რომ $G_0$ გრაფის ბირთვი $\{u_1, u_2, u_3, u_6\}$ პარეტოს სიმრავლეს ემთხვევა. $G(0{,}80; 0{,}25)$ გრაფის ბირთვი $\{u_1, u_6\}$ უკვე ორ ელემენტს შეიცავს, ხოლო $G(0{,}70; 0{,}50)$ გრაფის ბირთვი კი ერთადერთი $u_6$ ელემენტისაგან შედგება.

### კითხვები და სავარჯიშოები

1. როგორ ამოცანებს ეწოდება მრავალკრიტერიუმიანი (ვექტორული) ოპტიმიზაციის ამოცანები?
2. რითი განსხვავდება ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანები სკალარულისაგან?
3. როგორი გადაწყვეტილება უნდა იქნას მიჩნეული ოპტიმალურად ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისად?
4. რამ განაპირობა ოპტიმალობის კლასიკური გაგების გადახედვის აუცილებლობა?
5. მოიყვანეთ დომინირებისა და ეკვივალენტობის დამოკიდებულებათა განმარტება ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისად.
6. რითია განპირობებული ექსპერტთა სუბიექტური შეფასებების გამოყენების აუცილებლობა ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანებში?
7. როგორ გადაწყვეტილებას ეწოდება ეფექტური (პარეტო-ოპტიმალური)?
8. მოიყვანეთ პარეტოს სიმრავლის განმარტება. რა თვისებები აქვს ამ სიმრავლეში შემავალ გადაწყვეტილებებს?
9. მოყვანილი კრიტერიალური მნიშვნელობების საფუძველზე ააგეთ პარეტოს სიმრავლე. დაასაბუთეთ დანარჩენი გადაწყვეტილებების არაეფექტურობა.

ა)

| $F_j$ / $u_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | 8 | 2 | 3 |
| $u_2$ | 4 | 2 | 5 |
| $u_3$ | 2 | 9 | 2 |
| $u_4$ | 5 | 6 | 7 |
| $u_5$ | 3 | 6 | 6 |
| $u_6$ | 7 | 2 | 2 |

ბ)

| $F_j$ / $u_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | 7 | 5 | 5 |
| $u_2$ | 4 | 4 | 9 |
| $u_3$ | 2 | 3 | 7 |
| $u_4$ | 8 | 6 | 5 |
| $u_5$ | 4 | 6 | 4 |
| $u_6$ | 6 | 7 | 5 |

10. რაში მდგომარეობს განზოგადებული კრიტერიუმის მეთოდის არსი?
11. რა შემთხვევებში შეიძლება წრფივი განზოგადებული კრიტერიუმის გამოყენება და რა მნიშვნელოვანი თვისება აქვს ამ კრიტერიუმს?
12. რაში მდგომარეობს ძირითადი კერძო კრიტერიუმის მეთოდის არსი/
13. ეფექტურობის ვექტორულ $F = (F_1, F_2, F_3)$ კრიტერიუმში ძირითად კრიტერიუმად მიჩნეულია $F_1$ კერძო კრიტერიუმი. გარდა ამისა, მოითხოვება, რომ დანარჩენი ორი კრიტერიუმის მნიშვნელობა 3-ზე ნაკლები არ უნდა იყოს. კრიტერიალური მნიშვნელობა წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

| $F_j$ / $u_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | 5 | 4 | 6 |
| $u_2$ | 7 | 3 | 4 |
| $u_3$ | 8 | 2 | 3 |
| $u_4$ | 6 | 3 | 3 |
| $u_5$ | 5 | 5 | 8 |
| $u_6$ | 6 | 4 | 6 |

იპოვეთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება ძირითადი კერძო კრიტერიუმის მეთოდის გამოყენებით.
14. აღწერეთ გადაწყვეტილებათა შედარების ლექსიკოგრაფული სქემა.
15. როგორ გადაწყვეტილებას ეწოდება ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალური?
16. გადაწყვეტილებათა მიმღები პირი მიიჩნევს, რომ გადაწყვეტილებათა $\{u_1, u_2, \ldots, u_8\}$ სიმრავლის ნებისმიერი წყვილის ვექტორული $F = (F_1, F_2, F_3)$ კრიტერიუმის მიხედვით შედარებისას უნდა ვიხელმძღვანელოთ ლექსიკოგრაფული სქემით. ვიგულისხმოთ, რომ ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმთა ლექსიკოგრაფული პრიორიტეტულობა მათ ნუმერაციას შეესაბამება. კრიტერიალური მნიშვნელობები წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილ ცხრილში:

| $F_j$ / $u_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 7 | 9 | 9 | 4 |
| $u_2$ | 6 | 1 | 1 | 3 |
| $u_3$ | 1 | 9 | 9 | 7 |
| $u_4$ | 5 | 2 | 1 | 4 |
| $u_5$ | 3 | 5 | 6 | 7 |
| $u_6$ | 3 | 5 | 4 | 1 |
| $u_7$ | 8 | 1 | 1 | 2 |
| $u_8$ | 5 | 2 | 8 | 3 |

შეადარეთ ლექსიკოგრაფულად გადაწყვეტილებათა შემდეგი წყვილები: $(u_1, u_7)$, $(u_2, u_8)$, $(u_3, u_5)$, $(u_4, u_8)$, და $(u_5, u_6)$. იპოვეთ ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

17. აღწერეთ ლექსიკოგრაფულად ოპტიმალურ გადაწყვეტილებათა სიმრავლის ფორმირების რეკურენტული სქემა.
18. რა უდევს საფუძვლად ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის ამოხსნის ერთეტაპიან მეთოდს?
19. რა ტიპის ამოცანების გადაწყვეტა არის შესაძლებელი ლექსიკოგრაფული ოპტიმიზაციის მეთოდის გამოყენებით?
20. რომელ ცნებას ეფუძნება მეთოდი "ელექტრა" და გადაწყვეტილებათა მიღების როგორ სიტუაციებში იძლევა იგი საუკეთესო არჩევანის განხორციელების შესაძლებლობას?
21. მოიყვანეთ გრაფისა და გრაფთა თეორიის აუცილებელი ცნებების განმარტებები.
22. მოიყვანეთ გრაფის ბირთვის განმარტება.
23. რა წარმოადგენს გრაფში ერთადერთი ბირთვის არსებობის საკმარის პირობას?
24. როგორი გრაფით აღიწერება ეფექტურობის კერძო კრიტერიუმის შესაბამისი სიმრავლის სრული კვაზიდალაგება?
25. რა პრინციპის საფუძველზე შეიძლება განხორციელდეს გადაწყვეტილებათა სიმრავლის სრული კვაზიდალაგება ვექტორული კრიტერიუმის შესაბამისად?
26. მოიყვანეთ "თანხმობის" ინდექსის განმარტება და ჩამოთვალეთ მისი თვისებები.
27. მოიყვანეთ "უთანხმოების" ინდექსის განმარტება და ჩამოთვალეთ მისი თვისებები.
28. როგორი გრაფით აღიწერება "თანხმობისა" და "უთანხმოების" ინდექსების ზღურბლურ მნიშვნელობებზე დაფუძნებული პრიორიტეტის დამოკიდებულება და რა თვისებები აქვს ამ გრაფს?
29. როგორ იცვლება პრიორიტეტის აღმწერი გრაფის ბირთვი "თანხმობისა" და "უთანხმოების" ინდექსების მნიშვნელობათა ვარირების შესაბამისად?

# 4. გადაწყვეტილებათა მიღება რისკისა და განუსაზღვრელობის პირობებში

## 4.1 თამაშების კლასიფიკაცია. მატრიცული თამაშები

განუსაზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილებათა მისაღებად შემუშავებულია სპეციალური მათემატიკური მეთოდები, რომლებიც თამაშთა თეორიაში განიხილება. იგი სათავეს 1944 წლიდან იღებს, როდესაც გამოქვეყნდა ფ. ნეიმანისა და ო.მორგენშტერნის ცნობილი მონოგრაფია "თამაშთა თეორია და ეკონომიკური ქცევა". მოგვიანებით თამაშთა თეორია პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე დამოუკიდებელ მათემატიკურ მიმართულებად ჩამოყალიბდა.

თამაშთა თეორია იკვლევს კონფლიქტურ სიტუაციებს, რომელთა მონაწილეების ინტერესები და მიზნის მიღწევის გზები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. მის მთავარ ამოცანას წარმოადგენს რაციონალური სამოქმედო რეკომენდაციების შემუშავება კონფლიქტში მონაწილე მხარეებისათვის შესაბამისი მათემატიკური მოდელების გაანალიზების საფუძველზე.

კონფლიქტური სიტუაციის გამარტივებულ მოდელს თამაშს უწოდებენ. ბუნებრივ ბაზას კონფლიქტური სიტუაციების გასაანალიზებლად წარმოადგენს ისე ფართოდ გავრცელებული თამაშები, როგორიცაა ჭადრაკი, შაში, ბანქო და სხვ. ამიტომ, თამაშთა თეორიისათვის დამახასიათებელია შემდეგი ტერმინოლოგია: "მოთამაშეები" (კონფლიქტში მონაწილე მხარეები), "მოგება", (კონფლიქტის შედეგი) და ა.შ.

თამაშების კლასიფიკაციას საფუძვლად სხვადასხვა კრიტერიუმი შეიძლება დაედოს.

თამაშებში ერთმანეთს ორი ან მეტი მოწინააღმდეგის ინტერესები შეიძლება დაეჯახოს. პირველ შემთხვევაში თამაშს წყვილურს (ორი მოთამაშის თამაშს), ხოლო მეორეში - მრავლობითს (მრავალი მოთამაშის თამაშს) უწოდებენ.

თამაშების გაანალიზებისას ძალზე მნიშვნელოვანია მოთამაშეთა სვლების რიგითობა. სვლას უწოდებენ თამაშის წესებით განსაზღვრულ ერთერთი ქმედების შერჩევას და განხორციელებას. თამაშებში მოთამაშეთა ერთდროული სვლებით მოთამაშეები გადაწყვეტილებებს ისე იღებენ, რომ მათ არ იციან, თუ რა გადაწყვეტილებებს ღებულობენ დანარჩენი მოთამაშეები, ხოლო თამაშებში რიგრიგობითი სვლებით მოთამაშე სვლას მხოლოდ მას შემდეგ აკეთებს, როდესაც გაიგებს, თუ რა სვლა გააკეთა მოწინააღმდეგემ (მაგალითად, ჭადრაკი და მრავალი სხვა თამაში).

არსებობს თამაშთა კიდევ შემდეგი კლასიფიკაცია: ერთჯერადი და სერიული. ერთჯერად თამაშში შედეგი განისაზღვრება მოთამაშის ერთადერთი გადაწყვეტილებით, ხოლო სერიულში მოთამაშე თამაშში რამდენჯერმე ებმება.

თამაშის შედეგის განუსაზღვრელობას სხვადასხვა მიზეზი შეიძლება განაპირობებდეს.

თამაშის წესების თავისებურებები ხშირად თამაშის განვითარების ისეთი მრავალფეროვნებას (მრავალვარიანტულობა) იწვევს რომ, შედეგების წინასწარი განჭვრეტა თითქმის შეუძლებელი ხდება. თამაშებს, რომელთა შედეგებისათვის დამახასიათებელია მსგავსი ტიპის განუსაზღვრელობა, კომბინატორულ თამაშებს უწოდებენ.

განუსაზღვრელობის სხვა წყაროებს შემთხვევითი ფაქტორების გავლენა შეიძლება წარმოადგენდეს. ასეთი ტიპის თამაშებს აზარტული (შემთხვევითი) თამაშები ეწოდება. ე.წ. სალონური თამაშების უმრავლესობა, რა თქმა უნდა, აზარტული თამაშების ტიპს განეკუთვნება.

განუსაზღვრელობას კიდევ შეიძლება განპირობებდეს ის გარემოება, რომ მოთამაშე არ ფლობს ინფორმაციას მოწინააღმდეგის ქმედებებისა და სტრატეგიების შესახებ.

სტრატეგიას თამაშთა თეორიაში უწოდებენ გადაწყვეტილების მიღების წესს, რომლითაც გაწერილია მოთამაშის ქმედებები აღნიშნული გადაწყვეტილების მიღების ყოველ ეტაპზე. სტრატეგიათა შესაძლო რაოდენობის შესაბამისად თამაშები იყოფა სასრულ და უსასრულო თამაშებად.

ოპტიმალური ეწოდება სტრატეგიას, რომელიც თამაშის მრავალჯერ განმეორების შემთხვევაში უზრუნველყოფს მაქსიმალურად შესაძლებელ საშუალო მოგებას მოცემული მოთამაშისათვის.

სტრატეგიული თამაშების უმარტივეს სახეობას წარმოადგენს ორი მოთამაშის თამაში ნულოვანი ჯამით (მხარეების მოგებათა ჯამი ნულს უნდა უდრიდეს), ანუ მატრიცული თამაშები.

მატრიცულ თამაშებს ყველაზე მეტი გამოყენება აქვს პრაქტიკაში.

აღვნიშნოთ $A$ -თი და $B$-თი ამ ტიპის თამაშის მოთამაშეები. თამაში ორი სვლისაგან შედგება: თითოეული მოთამაშე ირჩევს, შესაბამისად, ერთერთ შესაძლო $A_i$ $(i=\overline{1,m})$ და $B_j$ $(j=\overline{1,n})$ სტრატეგიებს, ამასთან აღნიშნული არჩევანი ხორციელდება ისე, რომ არცერთმა იცის, თუ რომელი არჩევანი გააკეთა მოწინააღმდეგემ.

საერთოდ, თამაშთა უმრავლესობაში მიიჩნევენ, რომ მონაწილეთა ინტერესები რაოდენობრივ აღწერას ექვემდებარება, ანუ, თამაშის შედეგი (მოგება) გარკვეული რიცხვით განისაზღვრება.

აღვნიშნოთ $\varphi_1(A_i,B_j)$ -ითა და $\varphi_2(A_i,B_j)$-ით მოთამაშეთა მოგებები. ყველა $i$-სა და $j$-სათვის ადგილი უნდა ჰქონდეს თანაფარდობას:

$$\varphi_1\left(A_i,B_j\right)+\varphi_2\left(A_i,B_j\right)\equiv 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ, თუ $\varphi_1\left(A_i,B_j\right)=\varphi\left(A_i,B_j\right)$, მაშინ $\varphi_2\left(A_i,B_j\right)=-\varphi\left(A_i,B_j\right)$.

$A$ მოთამაშის მიზანია $\varphi(A_i,B_j)$ ფუნქციის მაქსიმიზაცია, ხოლო $B$-სი - იგივე ფუნქციის მინიმიზაცია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\varphi\left(A_i,B_j\right)=a_{ij}$ და შევადგინოთ შემდეგი მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცის სტრიქონები შეესაბამება $A_i$, ხოლო სვეტები - $B_j$ სტრატეგიებს. $A$ მატრიცას საგადამხდელო, ან უბრალოდ, თამაშის მატრიცას უწოდებენ, ხოლო ამ მატრიცის $a_{ij}$ ელემენტს - $A$ მოთამაშის მოგებას, თუ მან აირჩია $A_i$, ხოლო $B$-მ - $B_j$ სტრატეგია.

თუ $A$ მოთამაშე აირჩევს $A_i$ სტრატეგიას, მაშინ ყველაზე უარეს შემთხვევაში (ვთქვათ, თუ მისი არჩევანი ცნობილი გახდებოდა $B$ მოთამაშისათვის) იგი $min_j a_{ij}$-ს ტოლ მოგებას მიიღებს. მან უნდა დაუშვას ასეთი შესაძლებლობა, განიხილოს $min_j a_{ij}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე სხვადასხვა $i$-სათვის და უნდა აირჩიოს მისი ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც $min_j a_{ij}$ მაქსიმალური იქნება:

$$\alpha = max_i min_j a_{ij}.$$

$\alpha$ -ს თამაშის ქვედა ფასი ეწოდება, ხოლო $A_{i_0}$ სტრატეგიას, რომელიც ამ მოგების მიღებას უზრუნველყოფს - მაქსიმინური სტრატეგია.

$B$ მოთამაშემ სტრატეგიის არჩევისას უნდა იხელმძღვანელოს შემდეგი პრინციპით: $B_j$ სტრატეგიის არჩევის შემთხვევაში მისი წაგება მატრიცის $j$-ური სვეტის მაქსიმალურ ელემენტზე მეტი არ იქნება. აქედან გამომდინარე, მან უნდა განიხილოს $max_i a_{ij}$ მნიშვნელობათა სიმრავლე სხვადასხვა $j$-სათვის და უნდა აირჩიოს მისი ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც $max_i a_{ij}$ მინიმალური იქნება:

$$\beta = min_j max_i a_{ij}.$$

$\beta$ მნიშვნელობას თამაშის ზედა ფასი ეწოდება, ხოლო შესაბამის $B_{j_0}$ სტრატეგიას - მინიმაქსური სტრატეგია .

$A$ მოთამაშის ფაქტიური მოგება შემოსაზღვრულია თამაშის ქვედა და ზედა ფასებით.

თუ $max_i min_j a_{ij} = min_j max_i a_{ij} = v$, მაშინ მატრიცულ თამაშს უწოდებენ სრულად განსაზღვრულ თამაშს, $v$ მნიშვნელობას კი - თამაშის ფასს. ასეთი თამაშის მატრიცის $a_{i_0 j_0}$ ელემენტს, რომელიც ერთდროულად მინიმალურია $i_0$ სტრიქონში, ხოლო მაქსიმალური $j_0$ სვეტში - უნაგირა წერტილი ეწოდება, ამიტომ სრულად განსაზღვრულ თამაშს ზოგჯერ უწოდებენ თამაშს უნაგირა წერტილით.

უნაგირა წერტილი შეესაბამება მოთამაშეთა ოპტიმალურ სტრატეგიებს. მათი ერთობლიობა წარმოადგენს თამაშის ამონახსნს, რომელსაც შემდეგი თვისება გააჩნია: თუ ერთ-ერთი მოთამაშე

არჩევანს ოპტიმალურ სტრატეგიაზე აკეთებს, მაშინ მეორისათვის ოპტიმალური სტრატეგიიდან გადახვევა არ შეიძლება ხელსაყრელი აღმოჩნდეს მისთვის.

მაგალითი 4.1 ვიპოვოთ შემდეგი საგადამხდელო მატრიცით მოცემული თამაშის ამონახსნი:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. $\alpha = max\ \{0; 2; -1\} = 2,\ \beta = min\ \{3; 2; 4; 5\} = 2.$

ამგვარად, $\alpha = \beta = 2$ და ეს მნიშვნელობა თამაშის ფასს წარმოადგენს. თამაშის ამონახსნია სტრატეგიათა $(A_2, B_2)$ წყვილი.

თამაშებში, სადაც უნაგირა წერტილები არ არსებობს, $\alpha < \beta$. ასეთ შემთხვევებში, ბუნებრივია, თითოეული მოთამაშე შეეცდება გარანტირებულზე უკეთესი შედეგის მიღწევას. კერძოდ, $A$ მოთამაშე შეეცდება $\alpha$-ზე მეტი მოგების მიღებას, ხოლო $B$ მოთამაშე - $\beta$-ზე ნაკლების წაგებას. ასეთი ამონახსნის პოვნის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ მოთამაშეებმა უნდა გამოიყენონ არა ერთი, არამედ, რამდენიმე სტრატეგია და მათ შერჩევას შემთხვევითი ხასიათი უნდა ჰქონდეს. მოთამაშეთა მიერ სტრატეგიათა შემთხვევით შერჩევას შერეული სტრატეგია ეწოდება.

მაგალითი 4.2 ჯერ კიდევ ანტიკურ რომში თამაშობდნენ თამაშს, რომელიც "two finner Morra"-ს ("ორთითა მორრა") სახელწოდებით არის ცნობილი. იგი შემდეგში მდგომარეობს: ორ მოთამაშეს ზურგსუკან შეკუმშული აქვთ ხელები. ისინი ერთდროულად გამოაჩენენ ერთ ან ორ თითს და იმავდროულად წარმოთქვამენ სიტყვას - "ერთი" ან "ორი" (რითაც ცდილობენ გამოიცნონ, თუ რამდენ თითს გამოაჩენს მოწინააღმდეგე). თუ ორივე შეცდება, ან გამოიცნობს პარტნიორის მიერ გამოჩენილი თითების რაოდენობას, ისინი ერთმანეთს არაფერს უხდიან. წინააღმდეგ შემთხვევაში, წაგებული მოთამაშე მოგებულს გადაუხდის იმდენ ფულად ერთეულს, რამდენსაც შეადგენს მათ მიერ გამოჩენილი თითების რაოდენობათა ჯამი.

შევადგინოთ თამაშის საგადამხდელო მატრიცა და ვაჩვენოთ, რომ მას უნაგირა წერტილი არ გააჩნია.

ამოხსნა. თამაშის პირობების თანახმად, საგადამხდელო მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1) & ((1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

აქ, ფრჩხილებში პირველ ადგილზე მდგარი რიცხვი აღნიშნავს მოთამაშის მიერ გამოჩენილ თითების რაოდენობას, ხოლო მეორე - მის მიერვე წარმოთქმულ რიცხვს.

თამაშის ზედა და ქვედა ფასები, შესაბამისად, ინება

$$\alpha = max_j min_i a_{ij} = -2;\ \ \beta = min_i max_j a_{ij} = 2,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ თამაშს უნაგირა წერტილი არ გააჩნია.

(შევადგინოთ და ამოვხსნათ ანალოგიური ამოცანა "სამთითა მორრას" შემთხვევისათვის).

თამაშში $m \times n$ განზომილების მატრიცით $A$ მოთამაშის (შერეული) სტრატეგიები მოიცემა ალბათობათა $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ნაკრებით, რომლებითაც მოთამაშე საწყის წმინდა სტრატეგიებს იყენებს. ეს ნაკრები წარმოადგენს $m$ განზომილებიან ვექტორს, რომლის კომპონენტები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

ანალოგიურად, $B$ მოთამაშისათვისაც შეიძლება განვსაზღვროთ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ვექტორები, რომლებიც მის შერეულ სტრატეგიებს შეესაბამება.

$A$ მოთამაშის მოგება შერეული სტრატეგიის გამოყენებისას განისაზღვრება როგორც მოგების მატემატიკური ლოდინი:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$, ან $XAY'$ (ვექტორულ-მატრიცული ფორმით).

თამაშთა თეორიის ძირითადი თეორემის თანახმად ყოველ სასრულ თამაშს აქვს ერთი მაინც ამონახსნი (შესაძლებელია შერეულ სტრატეგიებში).

ოპტიმალური სტრატეგიების გამოყენება თამაშის ფასის ტოლი მოგების მიღების საშუალებას იძლევა:

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიებისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$max_X min_Y XAY' = min_Y max_X XAY'.$$

$A$ მოთამაშის მიერ ოპტიმალური $X^*$ სტრატეგიის გამოყენებამ უნდა უზრუნველყოს არანაკლებ თამაშის $v$ ფასის ტოლი მოგება იმის მიუხედავად, თუ როგორ სტრატეგიას გამოიყენებს $B$ მოთამაშე:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq v,\ \ j = \overline{1,n}. \qquad (4.1)$$

ანალოგიურად, ოპტიმალურმა $Y^*$ სტრატეგიამ $B$ მოთამაშისათვის უნდა უზრუნველყოს წაგება, რომელიც არ უნდა აღემატებოდეს $v$-ს $A$ მოთამაშის მიერ ნებისმიერი სტრატეგიის გამოყენების შემთხვევაში:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq v, \ \ i = \overline{1,m}. \qquad (4.2)$$

თუ თამაშს უნაგირა წერტილი არა აქვს, თამაშის ამოხსნა მით უფრო რთულია, რაც უფრო დიდია $m$-ისა და $n$-ის მნიშვნელობები. ამიტომ თამაშთა თეორიაში შემუშავებულია ხერხები, რომელთა საშუალებით ერთი თამაშის ამოხსნა მეორე, უფრო მარტივი თამაშის ამოხსნაზე დაიყვანება (თამაშის მატრიცის განზომილების შემცირების საფუძველზე). მატრიცის განზომილების შემცირება შესაძლებელია მატრიციდან დუბლირებული და დომინირებული სტრატეგიების შესაბამისი სტრიქონების (სვეტების) გამორიცხვის გზით.

დუბლირებული ეწოდება ისეთ სტრატეგიებს, რომელთაც მატრიცაში ელემენტების ერთიდაიგივე მნიშვნელობები შეესაბამება, ანუ, იგი შეიცავს ერთიდაიგივე სტრიქონებს (სვეტებს). თუ მატრიცის $i$-ური სტრიქონის ყველა ელემენტი ნაკლებია ან ტოლი რომელიმე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებზე, მაშინ $A$ მოთამაშის $A_i$ სტრატეგიას დომინირებული სტრატეგია ეწოდება. ხოლო, თუ მატრიცის $j$-ური სვეტის ელემენტები მეტია ან ტოლი რომელიმე სხვა სვეტის შესაბამის ელემენტებზე, მაშინ $B$ მოთამაშის $B_j$ სტრატეგიასაც დომინირებულ სტრატეგიას უწოდებენ.

ზემოთმოყვანილ მაგალითში $B$ მოთამაშისათვის მეოთხე სტრატეგიის გამოყენება არ არის ხელსაყრელი, რადგანაც მეოთხე სვეტის ელემენტები აღემატება პირველი და მეორე სვეტების შესაბამის ელემენტებს. ასე რომ, მატრიციდან შეიძლება გამოირიცხოს მეოთხე სვეტი, რადგანაც $B$ მოთამაშე არასოდეს გამოიყენებს მეოთხე სტრატეგიას.

მატრიცის განზომილების შემცირება შესაძლებელია აგრეთვე, თუ მას ისეთ ქვემატრიცებად დავყოფთ, რომლებშიც სვეტებისა და სტრიქონების ელემენტების ჯამი ერთმანეთის ტოლია. ამ დროს მატრიცაში წმინდა სტრატეგიების ნაცვლად შეიძლება შერეული სტრატეგიები ჩავრთოთ. მატრიცის ელემენტები, რომლებიც შეესაბამება შერეულ სტრატეგიებს, მიიღება შესაბამისი ელემენტების ჯამების შერეულ სტრატეგიებში გაერთიანებულ წმინდა სტრატეგიების რიცხვზე გაყოფით. თუ შერეული სტრატეგია ოპტიმალურია, მაშინ ალბათობები, რომლებითაც მასში შემავალი წმინდა სტრატეგიები გამოიყენება, ერთმანეთის ტოლია.

განვიხილოთ მაგალითი, რომელშიც $A$ მატრიცა დაყოფილია ოთხ ქვემატრიცად ისე, რომ მათში სრულდება ელემენტთა ჯამების ტოლობის ზემოთაღნიშნული პირობა:

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$A_1$, $A_2$ და $A_3$, $A_4$ და $A_5$, $B_1$ და $B_2$, $B_3$ და $B_4$ სტრატეგიების გაერთიანებას შემდეგი სახის მატრიცამდე მივყევართ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ამ უკანასკნელს აქვს უნაგირა წერტილი. ამიტომ საწყისი თამაშის ამონახსნი იქნება:

$X^* = \left({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3, 0, 0\right)$, $Y^* = \left({}^1/_2, {}^1/_2, 0, 0\right)$. თამაშის ფასი 1-ის ტოლია.

ოპტიმალურ (შერეულ) სტრატეგიებს $A$ და $B$ მოთამაშისათვის წარმოადგენს $A_1, A_2, A_3$ და $B_1, B_2$ სტრატეგიების კომბინირება, შესაბამისად ${}^1/_3$-ისა და ${}^1/_2$-ის ტოლი ალბათობებით.

ამგვარად, $m \times n$ განზომილების თამაშის ამოხსნისას:

ა) უნდა შემოწმდეს, აქვს თუ არა მატრიცას უნაგირა წერტილი;

ბ) თუ მატრიცაში უნაგირა წერტილი არ არის, დუბლირებული და დომინირებული

სტრატეგიების გამორიცხვის მიზნით სტრიქონებისა და სვეტების ელემენტები ერთმანეთს უნდა შევადაროთ;

გ) განხილული უნდა იქნას მატრიცის ქვემატრიცებად დაყოფის შესაძლებლობა

წმინდა სტრატეგიების გარკვეული ჯგუფების შერეული სტრატეგიებით შესაცვლელად.

უმარტივეს მატრიცულ თამაშს წარმოადგენს თამაში, რომელშიც თითოეულ მოთამაშეს ორი სტრატეგია აქვს:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

თუ უნაგირა წერტილი არ არსებობს, თამაშის ამონახსნი შერეული $X = (x_1, x_2)$ და $Y = (y_1, y_2)$ სტრატეგიები იქნება.

თამაშთა ძირითადი თეორემის თანახმად, ოპტიმალურ $X = (x_1, x_2)$ სტრატეგია $A$ მოთამაშისათვის უზრუნველყოფს $\nu$-ს ტოლ მოგებას $B$ მოთამაშის მიერ ნებისმიერი სტრატეგიის გამოყენების შემთხვევაში. $B$ მოთამაშის სტრატეგიაც შერეულია. ამიტომ, თუ $A$ თავის

ოპტიმალურ სტრატეგიას იყენებს, ამ დროს $B$-მ შეიძლება თავისი ერთერთი წმინდა სტრატეგია გამოიყენოს, $A$ მოთამაშის მოგება უცვლელი დარჩება. შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v. \end{cases}$$

რადგანაც, $x_1 + x_2 = 1$, სისტემის ამონახსნი ასეთი იქნება:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (4.3)$$

თუ ჩავსვამთ $x_1$-ისა და $x_2$-ის მნიშვნელობებს ერთერთ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (4.4)$$

შევადგენთ რა ანალოგიურ განტოლებათა სისტემას, შეიძლება ვიპოვოთ ოპტიმალური სტრატეგია $B$ მოთამაშისთვისაც:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (4.5)$$

**მაგალითი 4.3** ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცით მოცემული თამაშის ამონახსნი:

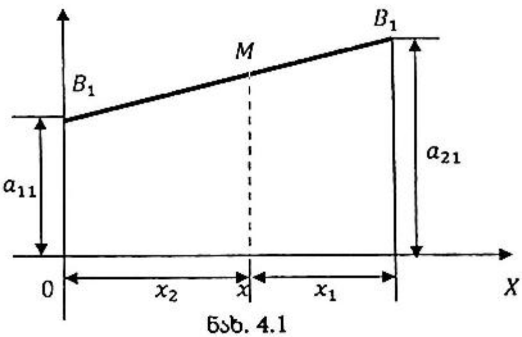
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ამოხსნა. რადგანაც $\alpha = 1$ და $\beta = 2$, მატრიცას უნაგირა წერტილი არა აქვს. (4.3)-(4.5) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$X = (1/3, 2/3), \quad Y = (2/3, 1/3), \quad v = 5/3.$$

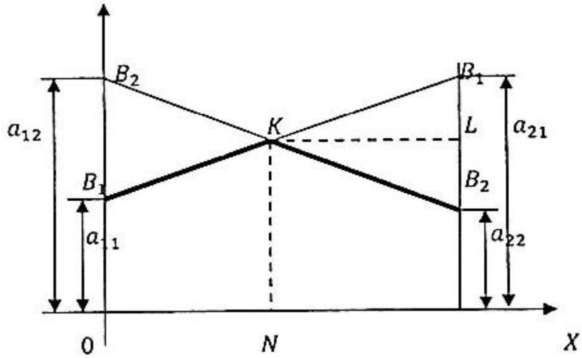
$2\times 2$ განზომილების მატრიცული თამაშის ამონახსნი შეიძლება გრაფიკულადაც ვიპოვოთ. ამისათვის აბსცისათა ღერძზე უნდა გადავზომოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია (ნახ. 4.1). მონაკვეთის მარცხენა ბოლო (წერტილი $x = 0$) შევუსაბამოთ $A_1$, ხოლო მარჯვენა - $A_2$ სტრატეგიას. მაშინ შუალედური $x$ წერტილი შეესაბამება გარკვეულ $(x_1, x_2)$ შერეულ სტრატეგიას, სადაც $x_1 = 1 - x$, $x_2 = x$. აღნიშნული მონაკვეთის ბოლოებზე აღვმართოთ აბსცისათა ღერძის მართობული წრფეები და მათზე გადავზომოთ წმინდა სტრატეგიების შესაბამისი მოგებები. თუ $B$ მოთამაშე გამოიყენებს $B_1$ სტრატეგიას, მაშინ $A$ მოთამაშის მოგება $A_1$ და $A_2$ სტრატეგიების გამოყენებისას, შესაბამისად, $a_{11}$-ისა და $a_{21}$-ის ტოლი იქნება. გადავზომოთ ეს

სიდიდეები წრფეებზე და მიღებულ წერტილებზე გავატაროთ $B_1B_1$ წრფე. თუ $A$ იყენებს შერეულ სტრატეგიას, მაშინ მის მოგებას შეესაბამება ამ წრფეზე მდებარე გარკვეული $M$ წერტილი.




ნახ. 4.1

ანალოგიურად შეიძლება ავაგოთ $B_2B_2$ წრფე (ნახ. 4.2), რომელიც $B$ მოთამაშის $B_2$ სტრატეგიას შეესაბამება.




ნახ. 4.2

ტეხილი $B_1KB_2$ წარმოადგენს $A$ მოთამაშის მოგების ქვედა საზღვარს. $K$ წერტილი, რომელშიაც მოგება მაქსიმალურია, განსაზღვრავს თამაშის ფასსა და ამონახსნს. $B$ მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიების მოსაძებნად შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულებით:

$$y_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \qquad y_2 = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}.$$

მოყვანილი ფორმულების სისწორეში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მათში $LB_2$-ისა და $LB_1$-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ:

$$LB_2 = v - a_{22}; \; LB_1 = a_{21} - v.$$

მართლაც, ამ უკანასკნელ გამოსახულებებში (4.4) ფორმულით განსაზღვრულ $v$-ს მნიშვნელობის ჩასმით $y_1$-ისა და $y_2$-ისათვის (4.5)-ის იდენტურ გამოსახულებებს მივიღებთ.

თუ თამაშის ამოხსნის პროცესში $A$ და $B$ მოთამაშეებს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ უნდა განვიხილოთ $B$ მოთამაშის მოგების ზედა საზღვრის მინიმიზაციის ამოცანა.

გრაფიკული ხერხით $2 \times n$ განზომილების მატრიცის მქონე თამაშის ამოხსნაც შეიძლება. $B$ მოთამაშის თითოეულ წმინდა სტრატეგიას შეესაბამება გარკვეული წრფე. ამ წრფეებით ფორმირდება მოგების ქვედა საზღვარი. თამაშის ფასსა და ამონახსნს განსაზღვრავს $K$ წერტილი, რომელიც აღნიშნულ საზღვარზეა და რომლისთვისაც მოგება უდიდესია. ამ დროს განისაზღვრება $B$-ს აქტიური სტრატეგიები (მათი შესაბამისი წრფეები $K$ წერტილში იკვეთება). $y_j$ მნიშვნელობები, რომლებიც $B$-ს აქტიურ სტრატეგიებს შეესაბამება, $A$ მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიები და $v$-ს მნიშვნელობა შეიძლება ვიპოვოთ (4.3)-(4.5) ფორმულების გამოყენებით, ან გრაფიკულად.

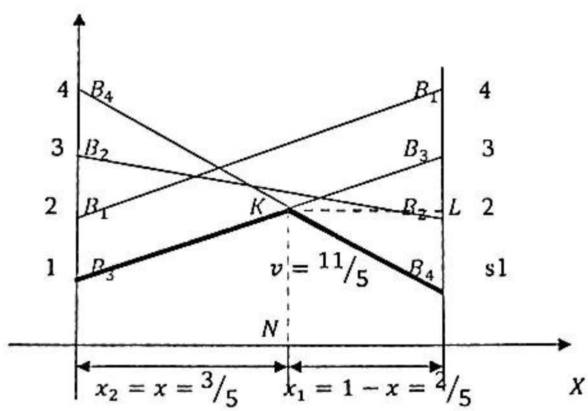
ანალოგიურად შეიძლება ამოვხსნათ $m \times 2$ განზომილების მატრიცის მქონე თამაშიც, ოღონდ, ამ შემთხვევაში უნდა აიგოს მოგების ზედა საზღვარი, რომელზედაც მოგების მინიმუმის შესაბამისი წერტილი მდებარეობს.

როგორც ვხედავთ, გეომეტრიული ინტერპრეტაცია საშუალებას იძლევა თამაშები $2 \times n$ და $m \times 2$ განზომილების მატრიცებით დავიყვანოთ $2 \times 2$ განზომილების მატრიცის მქონე თამაშზე, რის შემდეგაც ოპტიმალური სტრატეგიების განსაზღვრა შესაძლებელი ხდება ანალიტიკურად, ან გრაფიკის გამოყენებით.

მაგალითი 4.4 ვიპოვოთ თამაშის ამონახსნი, რომელიც შემდეგი მატრიცით არის მოცემული:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. ავაგოთ წრფეები, რომლებიც $B$ მოთამაშის სტრატეგიებს შეესაბამება (ნახ.4.3):



ნახ. 4.3

$B_3KB_4$ ტეხილი შეესაბამება მნოგების ქვედა საზღვარს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $B$ მოთამაშისათვის აქტიურია მესამე და მეოთხე სტრატეგიები. (4.3)-(4.5) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ თამაშის შემდეგ ამონახსნს:

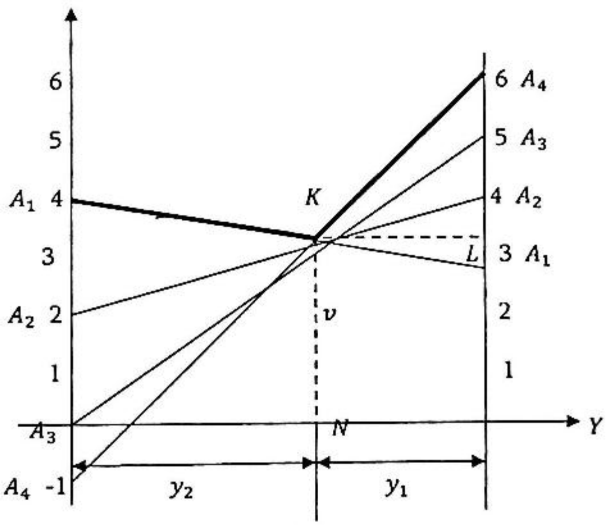
$$X = \left(2/_5\,;3/_5\right),\ Y = \left(0;0;3/_5\,;2/_5\right),\ v = 11/_5.$$

გარკვეული მიახლოებით იმავე ამონახსნს გრაფიკის გამოყენებითაც მივიღებდით.

მაგალითი **4.5** ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცით მოცემული თამაშის ამონახსნი:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

ამოხსნა. რადგანაც მატრიცის განზომილებაა 4 × 2, ვაგებთ მოგების ზედა საზღვარს (ნახ. 4.4):




ნახ. 4.4

$$X = \left(7/_8\,;0;0;1/_8\right),\qquad Y = \left(3/_8\,;5/_8\right),\qquad v = 27/_8.$$

( ამონახსნის შემოწმება შეიძლება როგორც ანალიტიკურად, ისე გრაფიკის საშუალებითაც).

მატრიცული თამაში შეიძლება წრფივი პროგრამირების ამოცანაზე დავიყვანოთ.

განვიხილოთ თამაში $m \times n$ განზომილების $\boldsymbol{A}$ მატრიცით:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ვიგულისხმოთ, რომ მატრიცას უნაგირა წერტილი არა აქვს. ამიტომ, მისი ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შერეულ სტრატეგიებში:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)\ ,\ \ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

$A$ მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიისათვის უნდა სრულდებოდეს (4.1), ხოლო $B$-სათვის - (4.2) პირობები.

ამგვარად, შეიძლება განვიხილოთ $A$ მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის პოვნის ამოცანა შემდეგი შეზღუდვებით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge v \end{cases}$$

თამაშის $v$ ფასის მნიშვნელობა ცნობილი არ არის, მაგრამ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $v > 0$. ეს უკანასკნელი პირობა ყოველთვის სრულდება, როდესაც მატრიცის ყველა ელემენტი არაუარყოფითია. ამის მიღწევა შეიძლება მატრიცის ყველა ელემენტისათვის ერთიდაიგივე გარკვეული დადებითი რიცხვის მიმატებით.

შეზღუდვათა სისტემის თითოეული უტოლობა გავყოთ $v$-ზე:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \ge 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \ge 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \ge 1, \end{cases}$$

სადაც $t_i = {}^{x_i}/_{v}$, $i = \overline{1, m}$.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $t_1 + t_2 + \cdots + t_m = {}^1/_v$.

თამაშის ამონახსნმა $v$-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა უნდა მიანიჭოს (ანუ, $Z = \sum_{i=1}^{m} t_i$ ფუნქციამ მინიმალური მნიშვნელობა უნდა მიიღოს), რაც იმას ნიშნავს, რომ ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების შემდეგ ამოცანას:

$$min \to \; Z = \sum_{i=1}^{m} t_i$$

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \geq 1 \\ t_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

$B$ მოთამაშის სტრატეგიის მოსაძებნად ჩავწეროთ შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \leq v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \leq v \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \leq v. \end{cases}$$

გავყოთ უტოლობათა თითოეული წევრი $v$-ზე:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \leq 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \leq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \leq 1, \end{cases} \qquad (4.6)$$

სადაც $u_j = {}^{y_j}/_v$, $j = \overline{1,n}$.

$u_j$ ცვლადების მნიშვნელობები ისე უნდა იქნეს შერჩეული, რომ შესრულდეს (4.6) პირობები, ხოლო $W = \sum_{j=1}^{n} u_j = {}^1/_v$ ფუნქციამ მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღოს.

ამგვარად, ვღებულობთ წრფივი პროგრამირების ამოცანათა სიმეტრიულ ორადულ წყვილს, რომელთაგანაც შეიძლება ამოვხსნათ ერთერთი (რომელიც უფრო მარტივი აღმოჩნდება გამოთვლითი თვალსაზრისით), ხოლო შემდეგ ვიპოვით მეორე ამონახსნს სიმეტრიულობის თვისების საფუძველზე.

საგადამხდელო მატრიცა გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესის კონცეპტუალიზაციისა და ფორმალიზაციის მეტად მოსახერხებელ ინსტრუმენტს წარმოადგენს განუსაზღვრელობის პირობებში.

სერიული მატრიცული თამაშის მოდელის ჩარჩოებში შეიძლება მოვაქციოთ მაგალითად, აზარტული თამაშები. ამ დროს, პირველ რიგში, თამაშის მატრიცა უნდა გაანალიზდეს. თუ მას უნაგირა წერტილი აღმოაჩნდება, ორივე მოთამაშემ ყველა "პარტიაში" ოპტიმალურ წმინდა სტრატეგიათა შესაბამისი წყვილი უნდა გამოიყენოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, თამაშთა თეორიის თეორემის თანახმად - ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები.

გრძელვადიანი მენეჯერული გადაწყვეტილებების მიღების ამოცანათა უმრავლესობა ერთჯერადი მატრიცული თამაშის სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ, სადაც მეორე, პირობითი "მოთამაშის" წმინდა სტრატეგიების როლში გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს შესაძლო მდგომარეობები გამოდის. მდგომარეობათა ალბათური განაწილება შეიძლება როგორც ცნობილი (ასეთ შემთხვევებში ამბობენ, რომ გადაწყვეტილება მისაღებია რისკის პირობებში), ისე უცნობიც იყოს (ამ დროს კი ამბობენ, რომ გადაწყვეტილება განუსაზღვრელობის პირობებში უნდა იქნას მიღებული).

საერთოდ, გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში "რისკის" ცნება გამოიყენება არა საშიშროების (ხიფათის), არამედ გადაწყვეტილებათა გარემოს განუსაზღვრელობის დონის კონტექსტში.

მსგავსი ტიპის თამაშის ერთერთ მოთამაშედ შეიძლება განვიხილოთ მარკეტინგის მენეჯერი დუოპოლურ ბაზარზე, რომელმაც ფასის დაწესების სტრატეგია (მაღალი, ზომიერი ან დაბალი) უნდა შეიმუშავოს, ინვესტორი, რომელმაც უნდა აირჩიოს ინვესტირების სტრატეგია ქვეყნის ეკონომიკის შესაძლო მდგომარეობების (აღმავალი, სტაბილური, დაღმავალი ან დეპრესიული) გათვალისწინებით, ფერმერი, რომელმაც უნდა მიიღოს ამა თუ იმ სასოფლო სამეურნეო კულტურის წარმოების გადაწყვეტილება კლიმატური პირობების გათვალისწინებით და ა.შ. აღნიშნულ შემთხვევებში არა აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა იმას, აქვს თუ არა თამაშის შესაბამის მატრიცებს უნაგირა წერტილი. შემუშავებულია ოპტიმალურ გადაწყვეტილებათა მიღების სხვადასხვა კრიტერიუმი მსგავსი სიტუაციებისათვის, რომელთაც ქვემოთ განვიხილავთ.

**სავარაუდო ღირებულების მეთოდი** გულისხმობს, რომ გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს ალბათობათა $P_j,\ j=\overline{1,n}$ განაწილება ცნობილია, ხოლო შეფასების კრიტერიუმს $S_i$ სტრატეგიის სავარაუდო ღირებულება წარმოადგენს:

$$E(S_i)=\sum_{j=1}^{m}P_j a_{ij},\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (4.7)$$

ალბათობათა შესაფასებლად ორი ძირითადი მიდგომა არსებობს - აპრიორული და აპოსტერიული.

**აპრიორული მიდგომის** დროს ექსპერიმენტირება და წარსული გამოცდილების ანალიზი აუცილებელი არ არის. ისინი განისაზღვრება დედუქციურად, გარკვეული დაშვებების

საფუძველზე იმ პირობით, რომ შესაძლო შემთხვევების მახასიათებლები წინასწარ არის ცნობილი. მაგალითად, ჩვენ ვიცით, რომ მონეტას ორი მხარე აქვს. ამიტომ, მონეტა აგდებისას ან ერთ, ან მეორე მხარეზე დაეცემა. თუ დავუშვებთ, რომ მონეტა ერთგვაროვანია, მაშინ შეიძლება გამოვიტანოთ დედუქციური დასკვნა - თითოეული შემთხვევა ტოლალბათურია და ამის შესამოწმებლად მონეტის მრავალჯერ აგდება არ არის აუცილებელი.

აპოსტერიული მიდგომა გულისხმობს, რომ წარსული გამოცდილება ტიპიურია და მას მომავალშიც ექნება გაგრძელება. ალბათობათა გასაზომად გმპ აკვირდება მისთვის საინტერესო შემთხვევებს და აფასებს მათ სიხშირეებს დაკვირვებათა საერთო რაოდენობაში.

(4.7)-ის თანახმად, $E(S_i)$ წარმოადგენს $P_j$ ალბათობებით "შეწონილ" საშუალო ღირებულებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $S_i$ სტრატეგიის მრავალჯერ გამოყენების შემთხვევაში საშუალოდ, $E(S_i)$-ის ტოლ მოგებას უნდა მოველოდეთ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $E(S_i)$ მოთამაშის მოგების მათემატიკური ლოდინის შეფასებას წარმოადგენს.

მეთოდის მიხედვით ოპტიმალურად მიჩნეული უნდა იქნას სტრატეგია, რომელსაც სავარაუდო ღირებულების მაქსიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება.

**მაგალითი 4.6** ინვესტორმა უნდა აირჩიოს ინვესტირების სტრატეგია ქვეყნის ეკონომიკის ოთხი შესაძლო მდგომარეობის - აღმავლობის ($N_1$), სტაბილურობის ($N_2$), დაღმავლობისა ($N_3$) და დეპრესიის ($N_4$) გათვალისწინებით. სათანადო ანალიზის საფუძველზე მიღებულია

$$P_1 = 0{,}2;\ P_2 = 0{,}65;\ P_3 = 0{,}1;\ P_4 = 0{,}05,$$

ხოლო სტრატეგიისა და ეკონომიკის მდგომარეობის ყოველი კომბინაციის შესაბამისი უკუგება (საგადამხდელო მატრიცა) წარმოდგენილია ქვემოთმოყვანილი ცხრილის სახით:

| ალტერნატიული სტრატეგიები | ეკონომიკის მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ |
| $S_1$ | 6 | 6 | 6 | 4 |
| $S_2$ | 25 | 7 | 7 | -15 |
| $S_3$ | 20 | 20 | 7 | -1 |
| $S_4$ | 19 | 16 | 9 | -2 |
| $S_5$ | 20 | 15 | 15 | -3 |

ცხრილი **4.1**

განვსაზღვროთ ოპტიმალური სტრატეგია სავარაუდო ღირებულების მეთოდის გამოყენებით.

ამოხსნა. (4.7)-ის თანახმად, თითოეული სტრატეგიის სავარაუდო ღირებულება შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$E(S_1) = 0{,}20 \times 6 + 0{,}65 \times 6 + 0{,}10 \times 6 + 0{,}05 \times 4 = 5{,}90;$$

$$E(S_2) = 0,20 \times 25 + 0,65 \times 7 + 0,10 \times 7 + 0,05 \times (-15) = 9,50;$$

$$E(S_3) = 0,20 \times 20 + 0,65 \times 20 + 0,10 \times 7 + 0,05 \times (-1) = 17,65;$$

$$E(S_4) = 0,20 \times 19 + 0,65 \times 16 + 0,10 \times 9 + 0,05 \times (-2) = 15,00;$$

$$E(S_4) = 0,20 \times 20 + 0,65 \times 15 + 0,10 \times 15 + 0,05 \times (-3) = 15,10.$$

როგორც ვხედავთ, ოპტიმალურია $S_3$ სტრატეგია, რომელსაც შეესაბამება სავარაუდო ღირებულების მაქსიმალური მნიშვნელობა - 17,65.

შეიძლება მოხდეს ისე, რომ ორ, ან მეტ სტრატეგიას სავარაუდო ღირებულების ერთიდაიგივე მნიშვნელობა შეესაბამებოდეს. მაშინ საჭიროა დამხმარე კრიტერიუმის გამოყენება. ასეთ კრიტერიუმად შეიძლება გამოდგეს გაბნევის დიაპაზონი (სხვაობა უკუგებათა ორ უკიდურეს მნიშვნელობებს შორის).

მაგალითი **4.7** ვიპოვოთ ქვემოთმოყვანილ ცხრილში წარმოდგენილი მონაცემების შესაბამისი ინვესტირების ოპტიმალური სტრატეგია სავარაუდო ღირებულების მეთოდის გამოყენებით:

| ალტერნატიული სტრატეგიები | ეკონომიკის მდგომარეობები | | |
|---|---|---|---|
| | $N_1$ $P_1 = 0,25$ | $N_2$ $P_2 = 0,50$ | $N_3$ $P_3 = 0,25$ |
| $S_1$ | 20 | 10 | 20 |
| $S_2$ | 40 | 10 | 0 |
| $S_3$ | 10 | 10 | 10 |

ცხრილი **4.2**

ამოხსნა. (4.7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$E(S_1) = E(S_2) = 15; \;\; E(S_3) = 10,$$

ანუ, პირველ და მეორე სტრატეგიებს სავარაუდო ღირებულების ერთიდაიგივე მნიშვნელობა შეესაბამებათ, რაც იმაზე მიგვანიშნებს, რომ საჭიროა დამხმარე კრიტერიუმის გამოყენება: გაბნევის დიაპაზონი $S_1$ სტრატეგიისათვის 10-ის (20 − 10), ხოლო $S_2$-ისათვის - 40-ის (40 − 0) ტოლია. მაშასადამე, $S_1$ სტრატეგიის არჩევის შემთხვევაში რისკის ხარისხი უფრო დაბალია, ამიტომ ოპტიმალურად ეს სტრატეგია უნდა მივიჩნიოთ.

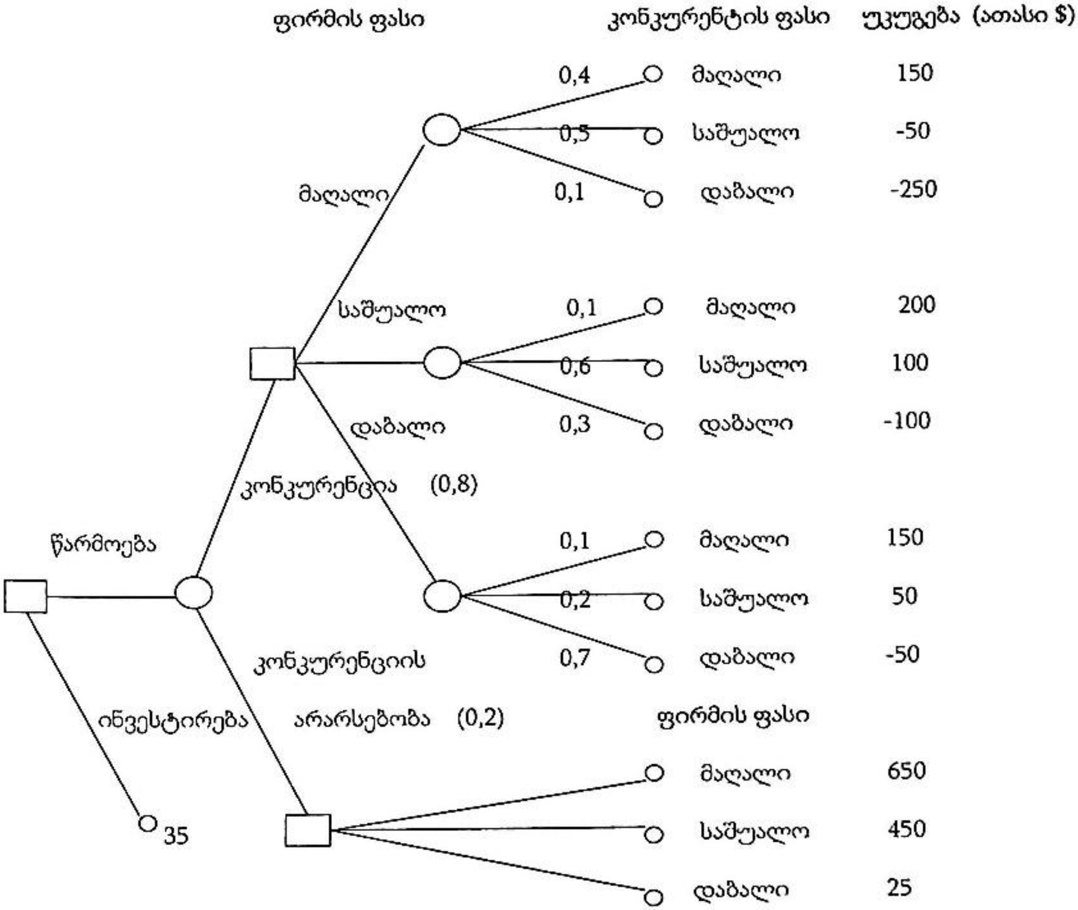
უკუგებათა ორ უკიდურეს მნიშვნელობებს შორის სხვაობა არ ითვალისწინებს მათ შორის მოთავსებულ უკუგებათა მნიშვნელობებს, ამიტომ შემუშავებულია რისკის გაზომვის უფრო ზუსტი ხერხი, რომელიც საშუალოკვადრატული გადახრის ცნებას ემყარება.

კომბინატორულ თამაშებში შეიძლება გამოყენებული იქნას ე.წ. "გადაწყვეტილების ხის" აგებისა და ანალიზის მეთოდი.

"გადაწყვეტილების ხე" არის გრაფიკი, რომელზედაც ნაჩვენებია სტრატეგიულ გადაწყვეტილებათა მიმდევრობა და მდგომარეობათა ყოველი ბლოკის სავარაუდო განშტოებები.

"გადაწყვეტილების ხის" აგება პირველი, ანუ ყველაზე ადრეული გადაწყვეტილებით იწყება და გრძელდება დროში რიგი გადაწყვეტილებებისა და მდგომარეობების გავლით მანამ, სანამ საბოლოოდ არ გამოიკვეთება ყველა ლოგიკური მიმდევრობა შესაბამისი უკუგებებით.

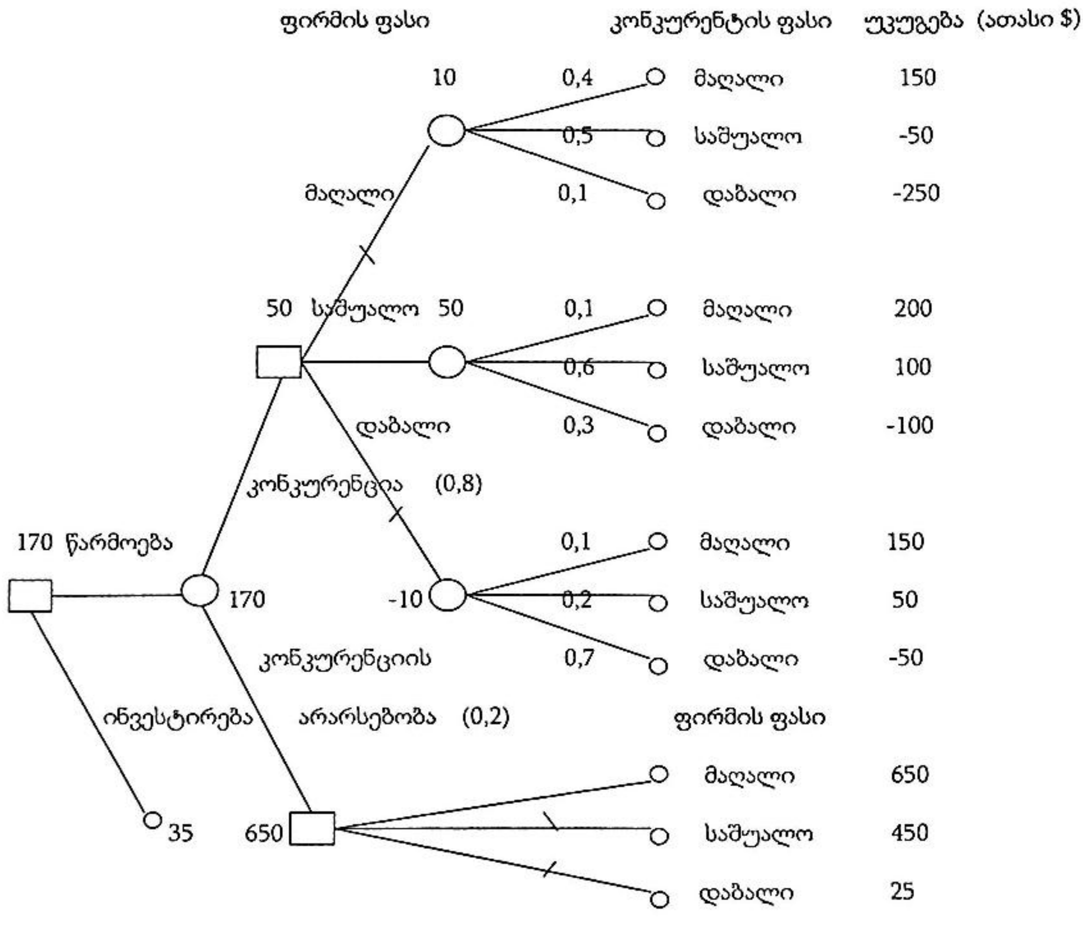
(4.5) ნახაზზე წარმოდგენილია "გადაწყვეტილების ხის" მაგალითი. ფირმამ უნდა მიიღოს გადაწყვეტილება, დააბანდოს 350000 დოლარი ახალი პროდუქციის წარმოებაში, თუ მოახდინოს ამ თანხის ალტერნატიული ინვესტირება 10%-იანი გარანტირებული უკუგებით.




ნახ. 4.5

მდგომარეობათა მიმდევრობის განხილვას დავიწყებთ მარცხნიდან. თუ ფირმა უარს იტყვის ახალი პროდუქციის წარმოებაზე, ალტერნატიული ინვესტიციისაგან უკუგება 35000 დოლარის ტოლი იქნება, ხოლო თუ იგი გადაწყვეტს აითვისოს ახალი პროდუქციის წარმოება, მაშინ შემდეგი

მდგომარეობა (არაკონტროლირებადი სიტუაცია, რომელიც შედარებით დიდრადიუსიანი წრეწირით არის აღნიშნული) ასახავს ბაზარზე კონკურენტის შესვლის შესაძლებლობას. კონკურენტის არსებობისა და არარსებობის ალბათობები, შესაბამისად, 0,8-ისა და 0,2-ის ტოლია. რადგანაც კვადრატებით აღნიშნული მდგომარეობები შეესაბამება ისეთ სიტუაციებს, რომლებშიც გმპ სრულ კონტროლს ახორციელებს სტრატეგიის არჩევის თვალსაზრისით, ამიტომ მათგან გამოსულ განშტოებებზე ალბათობები აღნიშნული არ არის. თუ კონკურენცია არ არის, მაშინ ერთადერთი გადაწყვეტილება იმაში მდგომარეობს, თუ როგორი ფასი (მაღალი, საშუალო თუ დაბალი) იქნას არჩეული. თუ ადგილი აქვს კონკურენციას, იგივე სახის განშტოებები გამოიყენება, მაგრამ თითოეული მათგანი ისევ "იტოტება", რაც კონკურენტის მხრიდან მაღალი, საშუალო, ან დაბალი ფასის დანიშვნის შესაძლო განზრახვას ასახავს. ყოველ ასეთ განშტოებაზე აღნიშნულია შესაბამისი ფასდადების ალბათობები. "გადაწყვეტილების ხის" ანალიზს ფირმის ანალიტიკოსი ზემო მარჯვენა ნაწილიდან იწყებს (იხ. ნახ. 4.6).




ნახ. 4.6

კერძოდ, პირველ რიგში იგი ანგარიშობს სავარაუდო უკუგებას იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ფირმა კონკურენციის არსებობის პირობებში მაღალ ფასს აწესებს:

$$0{,}4 \times 150 + 0{,}5 \times (-50) + 0{,}1 \times (-250) = 10.$$

ანალოგიურად იანგარიშება სავარაუდო უკუგება ფირმის მიერ საშუალო და დაბალი ფასების დაწესების შემთხვევაში (შესაბამისად, 50 და -10 ათასი დოლარი). რადგანაც საშუალო ფასს სავარაუდო უკუგების მაქსიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება, სხვა ორი განშტოება მონიშნულია, რითაც ხაზგასმულია მათი არაოპტიმალურობა.

კონკურენციის არარსებობის შემთხვევაში გადასაწყვეტია ერთადერთი საკითხი: როგორი ფასი დაწესდეს - მაღალი, საშუალო თუ დაბალი. შესაბამის უკუგებათა გაანალიზება მოწმობს, რომ ოპტიმალურია მაღალი ფასი (მას 650 ათასი დოლარის ტოლი უკუგება შეესაბამება). დანარჩენი ორი განშტოება მონიშნულია.

საბოლოოდ, ფირმა გადაწყვეტს ახალი პროდუქციის წარმოებას, რადგანაც სავარაუდო უკუგება ამ შემთხვევაში $0{,}8 \times 50 + 0{,}2 \times 650 = 170$ ათას დოლარს შეადგენს.

თუ ყურადღებით დავაკვირდებით "გადაწყვეტილების ხის" ანალიზის პროცესს, იმ დასკვნამდე მივალთ, რომ მას საფუძვლად დინამიკური პროგრამირების მეთოდი უდევს.

განუსაზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილების მისაღებად ორი მიდგომა არსებობს:

1) გმპ-ს შეუძლია გამოიყენოს მის ხელთ არსებული ინფორმაცია, გამოცდილება და ინტუიცია გადაწყვეტილების გარემოს მდგომარეობათა სუბიექტური ალბათობებისა და თითოეული სტრატეგიის შესაბამისი უკუგების შესაფასებლად. ამ შემთხვევაში ოპტიმალური სტრატეგიის შესარჩევად შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ ზემოთგანხილული სავარაუდო ღირებულების მეთოდი;
2) თუ განუსაზღვრელობის ხარისხი ძალზე მაღალია, გმპ-ს ურჩევნია არ გამოთქვას ვარაუდები გარემოს მდგომარეობათა ალბათობების შესახებ (ე.ი. საერთოდ არ გაითვალისწინოს ალბათობები), ან ტოლალბათურად მიიჩნიოს ისინი (რაც პრაქტიკულად ერთიდაიგივეა). ასეთი მიდგომის გამოყენების შემთხვევაში არსებობს სტრატეგიათა შერჩევის ოთხი შემდეგი კრიტერიუმი:

ვალდის კრიტერიუმი, რომელსაც ხშირად მაქსიმინურ კრიტერიუმსაც უწოდებენ, კონსერვატიზმის გამოვლინებასა და საიმედოობის დონის მაქსიმიზაციის მცდელობას ასახავს. ეს კრიტერიუმი გარემოს შესაძლო მდგომარეობებს წარმოადგენს როგორც "ჭირვეული და არაკეთილმოსურნე მოთამაშის" წმინდა სტრატეგიებს. აქედან გამომდინარე, კრიტერიუმის მიხედვით თითოეული სტრატეგიისათვის განისაზღვრება ყველაზე უარესი შესაძლო შედეგი, რის შემდეგაც იმ სტრატეგიას ენიჭება უპირატესობა, რომელსაც უარეს შედეგებს შორის საუკეთესო შედეგი შეესაბამება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მოცემულ შემთხვევაში ოპტიმალური სტრატეგია უზრუნველყოფს არანაკლებ თამაშის ქვედა ფასის ტოლი უკუგების მიღებას.

გამოვიყენოთ ვალდის კრიტერიუმი 4.1 ცხრილის მონაცემების შესაბამისი საგადამხდელო მატრიცისათვის (მომდევნო კრიტერიუმებისთვისაც, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ, იმავე მონაცემებს გამოვიყენებთ). ქვემოთმოყვანილ ცხრილში საიმედოობის მინიმალურ დონედ აღებულია სტრატეგიათა შესაბამისი მინიმალური უკუგება თითოეული სტრიქონისათვის. მათ შორის მაქსიმალური მნიშვნელობა 4-ის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული კრიტერიუმის მიხედვით საუკეთესოა $S_1$ სტრატეგია.

| ალტერნატიული სტრატეგიები | ეკონომიკის მდგომარეობები | | | | მაქსიმინური კრიტერიუმი | მაქსიმაქსური კრიტერიუმი |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | | |
| $S_1$ | 6 | 6 | 6 | 4 | 4* | 6 |
| $S_2$ | 25 | 7 | 7 | -15 | -15 | 25* |
| $S_3$ | 20 | 20 | 7 | -1 | -1 | 20 |
| $S_4$ | 19 | 16 | 9 | -2 | -2 | 19 |
| $S_5$ | 20 | 15 | 15 | -3 | -3 | 20 |

ცხრილი 4.3

კრიტერიუმის კონსერვატული ბუნების გამო მისი გამოყენება ყველაზე უფრო გამართლებულია წვრილი კომერციული ფირმებისათვის, რადგანაც მათი სიცოცხლისუნარიანობა მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენად მოახერხებენ ისინი შესაძლო ზარალის თავიდან აცილებას.

4.3 ცხრილში დამატებით მოყვანილია მაქსიმინურის საპირისპირო მაქსიმაქსური კრიტერიუმი, რომელიც "გამოუსწორებელი ოპტიმისტის" შეხედულებებს ასახავს. ამ დროს გმპ ორიენტირად ყოველი სტრატეგიის შესაბამის მაქსიმალურ უკუგებას ირჩევს. ოპტიმალურად ის სტრატეგია ითვლება, რომელიც საუკეთესოთა შორის საუკეთესო შედეგს "გვპირდება". ეს, რა თქმა უნდა, აბსურდია. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, მაქსიმინური და მაქსიმაქსური კრიტერიუმები გურვიცის ალფა-კრიტერიუმის გამოყენების ორ უკიდურეს შემთხვევას შეესაბამება.

ყოველი სტრატეგიისათვის გურვიცის ალფა-კრიტერიუმის შესაბამისად განისაზღვრება გადაწყვეტილების $d$ ინდექსი, რომელიც წარმოადგენს მის ექსტრემალურ უკუგებათა საშუალოშეწონილ მნიშვნელობას. შემწონი პარამეტრის როლში გამოდის ოპტიმიზმის $\alpha$ კოეფიციენტი. სტრატეგიათა ინდექსები შემდეგნაირად იანგარიშება:

$$d_i = \alpha M_i + (1 - \alpha) m_i, \; i = \overline{1, m} \qquad (4.8)$$

სადაც $M_i$ და $m_i$, შესაბამისად, აღნიშნავს მაქსიმალურ და მინიმალურ უკუგებებს $S_i$ სტრატეგიის არჩევის შემთხვევაში. ოპტიმალურად ის სტრატეგია მიიჩნევა, რომელსაც $d$-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება.

ოპტიმიზმის კოეფიციენტს 0-დან 1-მდე დიაპაზონში ნებისმიერი მნიშვნელობა შეიძლება მიენიჭოს, რითაც გმპ-ს მისი რისკთან დამოკიდებულების გამოხატვის საშუალება ეძლევა

ოპტიმიზმის ამა თუ იმ ხარისხით. თუ გმპ უკიდურესად პესიმისტური ბუნებისაა, მაშინ იგი გადაწყვეტს, რომ $\alpha = 0$. შედეგი იგივე იქნება, რასაც მაქსიმინური კრიტერიუმის გამოყენების შემთხვევაში მივიღებდით, ხოლო თუ იგი "გამოუსწორებელი ოპტიმისტია", ჩათვლის, რომ $\alpha = 1$. ეს კი იგივე შედეგს იძლევა, რასაც მაქსიმაქსური კრიტერიუმის გამოყენება მოგვცემდა.

დავუშვათ გმპ ოპტიმისტურ პოზიციაზე დგას და მიიჩნია, რომ $\alpha = 0{,}7$. ოპტიმიზმის კოეფიციენტის ამ მნიშვნელობისათვის გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის შესაბამისი ანალიზი წარმოდგენილია 4.4 ცხრილში, საიდანაც ჩანს, რომ მაქსიმალური საშუალოშეწონილი უკუგება შეესაბამება $S_3$ სტრატეგიას.

| სტრატეგია | $M$ | $\alpha$ | $\alpha M$ | $m$ | $(1-\alpha)$ | $(1-\alpha)m$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 6 | 0,7 | 4,2 | 4 | 0,3 | 1,2 | 5,4 |
| $S_2$ | 25 | 0,7 | 17,5 | -15 | 0,3 | -4,5 | 13,0 |
| $S_3^*$ | 20 | 0,7 | 14,0 | -1 | 0,3 | -0,3 | 13,7* |
| $S_4$ | 19 | 0,7 | 13,3 | -2 | 0,3 | -0,6 | 12,7 |
| $S_5$ | 20 | 0,7 | 14,0 | -3 | 0,3 | -0,9 | 13,1 |

ცხრილი 4.4

ალფა-კრიტერიუმის საფუძველზე მიღებული გადაწყვეტილება დამოკიდებულია $\alpha$-ს მნიშვნელობაზე, რომელიც, თავის მხრივ, დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორია გმპ-ს რისკთან მიმართება. ეს კრიტერიუმი შეიძლება გამოიყენოს კომერციულმა ფირმებმა, მაგრამ საფუძველსმოკლებული ოპტიმიზმის ხარისხის შემთხვევაში მნიშვნელოვან დანაკარგებს შეიძლება ჰქონდეს ადგილი. აქედან გამომდინარე, გმპ-მ გარკვეული სიფრთხილე უნდა გამოიჩინოს ამ კრიტერიუმის გამოყენებისას.

სევიჯის კრიტერიუმის შესაბამისად ანალიზდება ის დანაკარგები, რომელიც შეიძლება მოყვეს არასწორი გადაწყვეტილების მიღებას. რომელიმე სტრატეგიის არჩევით გამოწვეული დანაკარგები იზომება როგორც გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მოცემული მდგომარეობის შესაბამისი მაქსიმალური უკუგებისა და იმავე მდგომარეობის შემთხვევაში აღნიშნული სტრატეგიის შესაბამისი უკუგების სხვაობა. დანაკარგების გაზომვის არსი მარტივია. თუ არჩეული სტრატეგია, რომელიც ამა თუ იმ კონკრეტული მდგომარეობისათვის მაქსიმალურ უკუგებას უზრუნველყოფს, მაშინ დანაკარგს არ ექნება ადგილი. ნებისმიერი სხვა სტრატეგიის არჩევისას, დანაკარგი წარმოადგენს განსხვავებას ფაქტიურ და იმ შედეგს შორის, რომელსაც ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების შემთხვევაში მივიღებდით.

ყველა შესაძლო დანაკარგს დანაკარგების მატრიცის სახით წარმოადგენენ, რომელიც საგადამხდელო მატრიციდან შემდეგნაირად მიიღება: ყოველ სვეტში ვპოულობთ მაქსიმალურ უკუგებას, რომელსაც შემდეგ ვაკლებთ ამავე სვეტის უკუგებათა თითოეულ მნიშვნელობას.

ოპტიმალურად ითვლება ის სტრატეგია, რრომელსაც მაქსიმალური დანაკარგის ყველაზე დაბალი მნიშვნელობა შეესაბამება. (4.5) ცხრილიდან ჩანს, რომ ასეთი სტრატეგიაა $S_4$ .

| სტრატეგია | ეკონომიკის მდგომარეობები | | | | დანაკარგების მატრიცა | | | | მაქსიმალური დანაკარგები |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | |
| $S_1$ | 6 | 6 | 6 | 4 | 19 | 14 | 9 | 0 | 19 |
| $S_2$ | 25 | 7 | 7 | -15 | 0 | 13 | 8 | 19 | 19 |
| $S_3$ | 20 | 20 | 7 | -1 | 5 | 0 | 8 | 5 | 8 |
| $S_4^{*}$ | 19 | 16 | 9 | -2 | 6 | 4 | 6 | 6 | $6^{*}$ |
| $S_5$ | 20 | 15 | 15 | -3 | 5 | 5 | 0 | 7 | 7 |

ცხრილი 4.5

ირჩევს რა ისეთ სტრატეგიას, რომელიც რისკის შედარებით დაბალი ხარისხის პირობებში უკუგების დამაკმაყოფილებელ დონეს უზრუნველყოფს, გმპ სევიჯის კრიტერიუმის გამოყენებით აშკარად უარს ამბობს უკუგების მაქსიმიზაციაზე. ამიტომ მისი გამოყენება ყველაზე უფრო გამართლებულია დროის ხანგრძლივ პერიოდზე გათვლილ პროექტთა შეფასებისას.

ლაპლასის კრიტერიუმი ეყრდნობა ბაიესის პოსტულატს (რის გამოც მას ზოგჯერ ბაიესის კრიტერიუმსაც უწოდებენ), რომლის თანახმად, თუ გადაწყვეტილებათა გარემოს შესაძლო მდგომარეობების ალბათობები ცნობილი არ არის, მაშინ ისინი ტოლალბათურად უნდა მივიჩნიოთ.

აღნიშნული დაშვების პირობებში იანგარიშება თითოეული სტრატეგიის შესაბამისი სავარაუდო ღირებულება. ოპტიმალურად ითვლება ის სტრატეგია, რომლის სავარაუდო ღირებულება მაქსიმალურია (ანუ, ფაქტიურად ლაპლასის კრიტერიუმი სავარაუდო ღირებულების მეთოდის გამოყენებას გულისხმობს).

ჩვენს მიერ განხილული მაგალითისათვის, ცხადია, უნდა მივიღოთ, რომ

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0{,}25, \text{ მაშინ}$$

$$E(S_1) = 0{,}25 \times 6 + 0{,}25 \times 6 + 0{,}25 \times 6 + 0{,}25 \times 4 = 5{,}5$$

$$E(S_2) = 0{,}25 \times 25 + 0{,}25 \times 7 + 0{,}25 \times 7 + 0{,}25 \times (-15) = 6{,}0,$$

$$E(S_3) = 0{,}25 \times 20 + 0{,}25 \times 20 + 0{,}25 \times 7 + 0{,}25 \times (-1) = 11{,}5,$$

$$E(S_4) = 0{,}25 \times 19 + 0{,}25 \times 16 + 0{,}25 \times 9 + 0{,}25 \times (-2) = 10{,}5,$$

$$E(S_5) = 0{,}25 \times 20 + 0{,}25 \times 15 + 0{,}25 \times 15 + 0{,}25 \times (-3) = 11{,}75.$$

როგორც ვხედავთ, ლაპლასის კრიტერიუმის მიხედვით გადაწყვეტილებათა მოცემული მატრიცის შემთხვევაში უნდა ავირჩიოთ $S_5$ სტრატეგია.

გადაწყვეტილების გარემოს შესაძლო მდგომარეობათა ტოლალბათობის დაშვება მოკლევადიანი პერიოდებისათვის არარეალურია. აქედან გამომდინარე, ლაპლასის კრიტერიუმის გამოყენებას უფრო მეტი ლოგიკური საფუძველი აქვს გრძელვადიანი პროგნოზირებისას, რომელსაც მსხვილი ფირმები ახორციელებს.

როგორც ვნახეთ, სხვადასხვა კრიტერიუმის გამოყენებისას გადაწყვეტილებათა ერთიდაიმავე მატრიცისათვის სხვადასხვა სტრატეგიამდე მივყევართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ გადაწყვეტილების მიღების პროცესი განუსაზღვრელობის პირობებში დიდად არის დამოკიდებული კონკრეტული კრიტერიუმის შერჩევაზე, რაც საკმაოდ რთულ პრობლემას წარმოადგენს. მაინც რომელ კრიტერიუმს უნდა მიენიჭოს უპირატესობა?

დასმულ კითხვაზე ცალსახა პასუხი არ არსებობს. არჩევანი დამოკიდებულია კონკრეტულ სიტუაციებსა და პირად შეხედულებებზე (ანუ, გმპ-ს ოპტიმისტურ, პესიმისტურ, კონსერვატულ თუ პროგრესულ ბუნებაზე).

ბოლოს აღვნიშნავთ, რო განუსაზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილებათა გამოსამუშავებლად არარაოდენობრივი მეთოდებიც გამოიყენება.

### 4.2 გადაწყვეტილებათა მიღება ბუნდოვანი სიმრავლის ცნების გამოყენებით

პრაქტიკაში ხშირად გადაწყვეტილების მიღება ისეთ პირობებში უხდებათ, როდესაც მიზნები, შეზღუდვები და შედეგები, რომელიც სხვადასხვა შესაძლო ქმედებას შეიძლება მოყვეს, ზუსტად არ არის ცნობილი. ჩვეულებრივ, ინტუიციურად უზუსტობა თითქოსდა შემთხვევითობასთან უნდა იყოს გაიგივებული მისი ბუნებისაგან დამოუკიდებლად.

აღნიშნული შეხედულება გასული საუკუნის სამოცდაათიან წლებში სადავოდ მიიჩნია ლ. ზადემ. კერძოდ, მის სახელთან დაკავშირებულია ე.წ. ბუნდოვანი (არამკაფიო, მქრქალი) სიმრავლის (fuzzy set) ცნების შემოტანა, რამაც დასაბამი მისცა ბუნდოვანი სიმრავლეების თეორიის განვითარებას.

ლ. ზადეს აზრით, აუცილებლად უნდა განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან შემთხვევითობა (randomness) და ბუნდოვნობა (fuzziness), რომელიც უზუსტობის ძირითად წყაროს წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა მიღების მრავალ პროცესში.

შემთხვევითობა გულისხმობს განუსაზღვრელობას, რომელიც ამა თუ იმ ობიექტის არაბუნდოვანი სიმრავლისადმი მიკუთვნება-არმიკუთვნებასთან არის დაკავშირებული, ხოლო ბუნდოვნობა - ობიექტთა კლასს, რომელთან მიმართებაში შეიძლება ვიმსჯელოთ ობიექტის მოცემული კლასისადმი მიკუთვნების ხარისხის სხვადასხვა შუალედურ გრადაციაზე სრულ მიკუთვნებასა და არმიკუთვნებას შორის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საუბარია ისეთი სახის ობიექტთა კლასებზე, სადაც შეუძლებელია მოვნიშნოთ იმ ელემენტების გამმიჯნელი მკაფიო საზღვრები, რომლებიც ეკუთვნის ან არა მოცემულ კლასებს.

მაგალითად, წითელი ობიექტების კლასი ბუნდოვან სიმრავლეს წარმოადგენს. ბუნდოვან სიმრავლეებს მიეკუთვნება აგრეთვე ობიექტთა კლასები, რომლებიც ხასიათდება ისეთი ხშირად გამოყენებადი ზედსართავი სახელებით, როგორიცაა "დიდი", "პატარა", "არსებითი", "მნიშვნელოვანი", "სერიოზული", "მარტივი", "ზუსტი", "მიახლოებითი" და ა.შ.

ჩვეულებრივად, ადამიანები ერთმანეთთან საუბრის დროს ხშირად იყენებენ ბუნდოვანი ხასიათის გამონათქვამებს, ისეთებს მაგალითად, როგორიცაა "პეტრე რამდენიმე სანტიმეტრით მაღალია პავლეზე", "საფონდო ბირჟაზე შეინიშნება აქციების კურსის მკვეთრი დაცემა", "უახლოეს მომავალში მოსალოდნელია საწვავის ფასების მნიშვნელოვანი ზრდა" და სხვ.

მიუხედავად ხაზგასმული სიტყვების უზუსტობებისა, ისინი მაინც მნიშვნელოვან ინფორმაციას შეიცავს. უფრო მეტიც, ბუნდოვან სიმრავლეთა თეორიის მიმდევრები მიიჩნევენ, რომ ერთერთი ძირითადი განსხვავება ადამიანურ და ხელოვნურ ინტელექტებს შორის მდგომარეობს ადამიანების უნარში ოპერირება მოახდინონ ბუნდოვან კატეგორიებში (ცნებებში) და შეასრულონ ბუნდოვანი ინსტრუქციები, რაც არ შეუძლია ყველაზე თანამედროვე კომპიტერულ ტექნიკას.

აღნიშნული განსხვავებების გამო ბუნდოვანი სიმრავლეების თეორიის მათემატიკური მეთოდები სრულებით არ წააგავს ალბათობათა თეორიის მეთოდებს თუნდაც იმიტომ, რომ ალბათური ზომის ცნებას ბუნდოვანი სიმრავლეების თეორიაში შეესაბამება უფრო მარტივი - მიკუთვნების ფუნქციის ცნება. გარდა ამისა, ნაცვლად ჩვეულებრივი $a+b$ და $ab$ ოპერაციებისა, სადაც $a$ და $b$ ნამდვილი რიცხვებია, გამოიყენება უფრო მარტივი $max\,(a,b)$ და $min\,(a,b)$ ოპერაციები. ამ მიზეზის გამო, იმ შემთხვევებშიც კი, როდესაც ბუნდოვნობა გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში ალბათური მოდელის საშუალებით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი, უფრო მოსახერხებელია ბუნდოვან სიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენება.

მოკლედ მიმოვიხილოთ ბუნდოვანი სიმრავლეების ძირითადი თვისებები. პირველ ყოვლისა, მოვიყვანოთ ბუნდოვანი სიმრავლის უფრო ზუსტი (ფორმალური) განმარტება.

ობიექტთა $X=\{x\}$ ერთობლიობაში ბუნდოვანი სიმრავლე ეწოდება წყვილს

$$A=\{x,\mu_A(x)\}, x\in X,$$

სადაც $\mu_A(x)$ წარმოადგენს $x$-ის $A$-სადმი მიკუთვნების ხარისხს, ხოლო $\mu_A: X\to Y$ - ფუნქციას, რომელიც $X$-ს მიკუთვნების $Y$ სივრცეში ასახავს. როდესაც $Y$ მხოლოდ ორი რიცხვითი მნიშვნელობისაგან - 0-ისა და 1-ისაგან შედგება, მაშინ $A$ არაბუნდოვანი სიმრავლეა და მისი მიკუთვნების ფუნქცია ემთხვევა არაბუნდოვანი სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $Y$ წარმოადგენს $[0,1]$ ინტერვალს, ამასთან 0 და 1 მნიშვნელობები შეესაბამება მიკუთვნების ყველაზე დაბალ და ყველაზე მაღალ ხარისხებს.

პრაქტიკულ სიტუაციებში, როგორც წესი, მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები სუბიექტურად განისაზღვრება და საკმაოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს.

ბუნდოვან სიმრავლეს ეწოდება ნორმალური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $sup_x\mu_A(x)=1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - სუბნორმალური.

ბუნდოვანი სიმრავლე ცარიელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mu_A(x)\equiv 0$. არაცარიელი სუბნორმალური ბუნდოვანი სიმრავლის ნორმალიზება შესაძლებელია $\mu_A(x)$-ის $sup_x\mu_A(x)$-ზე გაყოფით ყველა $x$-ისათვის.

ბუნდოვანი $A$ სიმრავლის მატარებელი ეწოდება $S(A)$ სიმრავლეს, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

$$x \in S(A) \leftrightarrow \mu_A(x) > 0.$$

თუ $\mu_A(x) = const$ $S(A)$ სიმრავლეზე, მაშინ $A$ არაბუნდოვან სიმრავლეს წარმოადგენს. უნდა აღინიშნოს, რომ არაბუნდოვანი სიმრავლე შეიძლება სუბნორმალური იყოს.

ორი $A$ და $B$ სიმრავლე ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ (ჩაიწერება ჩვეულებრივად - $A = B$), როდესაც $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ყველა $x$-ისათვის $X$-დან (ჩაწერის სიმარტივისათვის შემდგომში გამოვტოვებთ $x$ არგუმენტს, როდესაც ადგილი აქვს ტოლობას ან უტოლობას $x$-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $X$-დან).

ბუნდოვანი $A$ სიმრავლე შედის ბუნდოვან $B$ სიმრავლეში, ანუ წარმოადგენს მის ქვესიმრავლეს ($A \subset B$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

$A'$ ბუნდოვანი სიმრავლე წარმოადგენს $A$ ბუნდოვანი სიმრავლის დამატებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mu_{A'} = 1 - \mu_A$.

$A$ და $B$ ბუნდოვანი სიმრავლეების თანაკვეთა ($A \cap B$) განიმარტება როგორც უდიდესი ბუნდოვანი სიმრავლე, რომელიც შედის როგორც $A$, ისე $B$ სიმრავლეში. $A \cap B$-სათვის მიკუთვნების ფუნქცია შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in X,$$

სადაც $min(a, b) = a$, თუ $a \leq b$, ხოლო $min(a, b) = b$, თუ $a > b$.

თუ $min$-ის ნაცვლად გამოვიყენებთ კონიუნქციის $\wedge$ სიმბოლოს, მაშინ თანაკვეთის მიკუთვნების ფუნქცია ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B.$$

$A$ და $B$ ბუნდოვანი სიმრავლეების გაერთიანება ($A \cup B$) განიმარტება როგორც უმცირესი ბუნდოვანი სიმრავლე, რომელიც მოიცავს როგორც $A$, ისე $B$ სიმრავლეს. მიკუთვნების ფუნქცია $A \cup B$-სათვის შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in X,$$

სადაც $max(a, b) = a$, თუ $a \geq b$, ხოლო $min(a, b) = b$, თუ $a < b$.

აქაც, თუ $max$-ის ნაცვლად გამოვიყენებთ დიზიუნქციის $\vee$ სიმბოლოს, მიკუთვნების ფუნქცია უფრო მარტივი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A \vee \mu_B.$$

ადვილი შესამოწმებელია ბუნდოვანი სიმრავლეების თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციებთან დაკავშირებული შემდეგი იგივეობის სამართლიანობა:

$$A \cup B = (A' \cap B').$$

$A$ და $B$ ბუნდოვანი სიმრავლეების ალგებრული ნამრავლის $(AB)$ მიკუთვნების ფუნქცია შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$\mu_{AB}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x), x \in X.$$

$A$ და $B$ ბუნდოვანი სიმრავლეების ალგებრული ჯამის $(A \oplus B)$ მიკუთვნების ფუნქცია კი შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \ x \in X.$$

ასევე ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი იგივეობის ჭეშმარიტება:

$$A \oplus B = (A'B').$$

ბუნდოვან პირობებში გადაწყვეტილებათა ფორმირებისადმი მიდგომას საფუძვლად უდევს ლოგიკური სქემა, რომლის არსი მიზნებისა და შეზღუდვების მიმართ სიმეტრიულობის დაშვებაში მდგომარეობს.

დავუშვათ, $X = \{x\}$ ალტერნატივათა მოცემულ სიმრავლეს წარმოადგენს. ბუნდოვან მიზანს (ან უბრალოდ, მიზანს) აიგივებენ ფიქსირებულ $F$ სიმრავლესთან $X$-ში. მაგალითად, თუ $X$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო ბუნდოვანი მიზანი შემდეგნაირად არის ფორმულირებული - "$x$ მნიშვნელოვნად უნდა აღემატებოდეს 10-ს", მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ბუნდოვანი $F$ სიმრავლე $X$-ში, ვთქვათ, მიკუთვნების შემდეგი სახის ფუნქციით:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 10, \\ \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, \ x \geq 10. \end{cases}$$

ანალოგიურად, მიზანს "$x$ უნდა იყოს 15-ის მიდამოში" შეიძლება შევუსაბამოთ ბუნდოვანი სიმრავლე მიკუთვნების ფუნქციით

$$\mu_F(x) = (1 + (x - 15)^4)^{-1}.$$

ჩვეულებრივი მიდგომის დროს გადაწყვეტილების მიღების პროცესში პრიორიტეტულობის (მიზნის) ფუნქციის გამოყენებით ხორციელდება ალტერნატივათა სიმრავლის წრფივი დალაგება. ბუნდოვანი მიზნის მიკუთვნების $\mu_F(x)$ ფუნქციის მიღება შესაძლებელია პრიორიტეტულობის ფუნქციისაგან ნორმალიზაციის გზით და იმავე ამოცანის გადაწყვეტას ემსახურება. სწორედ აღნიშნული ნორმალიზაცია ქმნის საფუძველს მიზნებისა და შეზღუდვების სიმეტრიულობის უზრუნველსაყოფად ბუნდოვან პირობებში.

ანალოგიურად, ბუნდოვანი შეზღუდვა (ან უბრალოდ, შეზღუდვა) $C$ განიმარტება როგორც გარკვეული ბუნდოვანი სიმრავლე $X$-ში. მაგალითად, შეზღუდვა "$x$-ის მნიშვნელობა დაახლოებით 2-10 დიაპაზონში უნდა იყოს" შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ბუნდოვანი სიმრავლე მიკუთვნების შემდეგი ფუნქციით

$$\mu_C(x) = (1 + a(x-6)^m)^{-1},$$

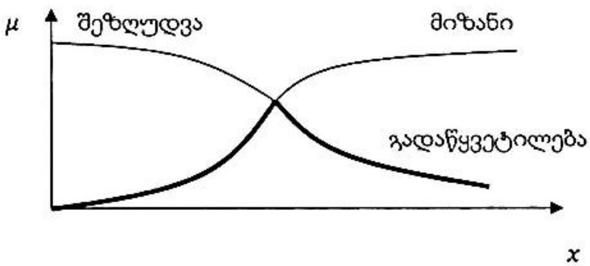
სადაც $a > 0$, ხოლო $m$ ლუწი რიცხვია, რომელიც ისე უნდა შეირჩეს, რომ აზრი მიეცეს [2,10] დიაპაზონთან "მიახლოებას".

ბუნდოვანი გადაწყვეტილება, ან უბრალოდ, გადაწყვეტილება განიმარტება როგორც ბუნდოვანი სიმრავლე ალტერნატივათა სივრცეში, რომელიც მიიღება მოცემული მიზნებისა და შეზღუდვების თანაკვეთით. ანუ, თუ გვაქვს ერთი ბუნდოვანი $G$ მიზანი და ბუნდოვანი $C$ შეზღუდვა, ბუნდოვანი $D$ გადაწყვეტილება შემდეგნაირად განიმარტება

$$D = G \cap C.$$

შესაბამისად, $\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C$.

ბუნდოვანი მიზნის, შეზღუდვისა და გადაწყვეტილების ურთიერთკავშირის გრაფიკული ინტერპრეტაცია ნაჩვენებია 4.7 ნახაზზე.




ნახ. 4.7

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს $n$ მიზანი და $m$ შეზღუდვა,მარეზულტირებელი გადაწყვეტილება განისაზღვრება როგორც ყველა მოცემული ბუნდოვანი მიზნისა და შეზღუდვის თანაკვეთა:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_m.$$

შესაბამისად

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}.$$

ბუნდოვანი გადაწყვეტილების მოყვანილ განმარტებაში იგულისხმება, რომ ყველა მიზანი და შეზღუდვა თანაბრად მნიშვნელოვანია. იმ შემთხვევებში, როდესაც ერთი მიზანი (შეზღუდვა) მეორეზე უფრო მნიშვნელოვანია, $D$ გადაწყვეტილება შეიძლება განიმარტოს როგორც მიზნებისა

და შეზღუდვების წრფივი კომბინაცია, რომელშიც წონითი კოეფიციენტებით ასახული უნდა იყოს მდგენელი ელემენტების პრიორიტეტულობა:

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x)\mu_{C_j}(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \equiv 1.$$

ბუნდოვან პირობებში გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში კიდევ მრავალი სხვა, საკმაოდ რთული ამოცანა განიხილება, რომელთა რიცხვს მიეკუთვნება მიზნებისა და შეზღუდვების ერთმანეთზე დამოკიდებულების ხარისხის გამოკვლევა, ბუნდოვანი ალგორითმების შემუშავება და რეალიზაცია, გადაყვეტილების მიღების ამოცანა შერეულ პირობებში, როდესაც უზუსტობა როგორც შემთხვევითობის, ისე ბუნდოვნობის შედეგს წარმოადგენს და ა.შ.

## კითხვები და სავარჯიშოები

1. რაში მდგომარეობს თამაშთა თეორიის მთავარი ამოცანა?
2. მოიყვანეთ თამაშის განმარტება.
3. რა კრიტერიუმები შეიძლება დაედოს საფუძვლად თამაშების კლასიფიკაციას?
4. რა მიზეზები განაპირობებს თამაშის შედეგების განუსაზღვრელობას?
5. როგორ განიმარტება თამაშის ოპტიმალური სტრატეგია?
6. რაში მდგომარეობს მატრიცული თამაშის არსი?
7. მოიყვანეთ მატრიცული თამაშის ქვედა ფასისა და მაქსიმინური სტრატეგიის განმარტება.
8. მოიყვანეთ მატრიცული თამაშის ზედა ფასისა და მინიმაქსური სტრატეგიის განმარტება.
9. რას ეწოდება მატრიცული თამაშის ფასი და უნაგირა წერტილი?
10. რა მნიშვნელოვანი თვისება აქვს უნაგირა წერტილს?
11. მოცემულია მატრიცული თამაშები:

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A_2} = \begin{array}{c} 4 \\ \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 9 & -2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -4 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

განსაზღვრეთ თითოეული თამაშის ქვედა და ზედა ფასები და გამოიკვლიეთ, გააჩნიათ თუ არა მათ უნაგირა წერტილები.

12. როგორ განიმარტება შერეული სტრატეგია?
13. ჩამოაყალიბეთ თამაშთა თეორიის ძირითადი თეორემა.
14. როგორ განიმარტება დუბლირებული და დომინირებული სტრატეგიები?
15. რა გზით არის შესაძლებელი თამაშის მატრიცის განზომილების შემცირება?
16. რა ეტაპები შეიძლება გამოვყოთ მატრიცული თამაშის ამოხსნის პროცესში?
17. ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცებით მოცემული თამაშების ამონახსნები ანალიტიკური მეთოდის გამოყენებით:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

18. ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცებით მოცემული თამაშების ამონახსნები:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

19. აღწერეთ მატრიცული თამაშის წრფივი პროგრამირების ამოცანათა სიმეტრიულ წყვილზე დაყვანის პროცესი.
20. როგორი მიდგომები არსებობს გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს ალბათობათა შესაფასებლად და რაში მდგომარეობს მათი არსი?
21. ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა შემდეგი მატრიცის შესაბამისი ოპტიმალური სტრატეგიები სავარაუდო ღირებულების მეთოდის გამოყენებით:

ა)

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ $P_1 = 0,1$ | $N_2$ $P_2 = 0,4$ | $N_3$ $P_3 = 0,3$ | $N_4$ $P_4 = 0,2$ |
| $S_1$ | 8 | 6 | 5 | 3 |
| $S_2$ | 15 | 12 | 4 | -3 |
| $S_3$ | 22 | 16 | 5 | -9 |

ბ)

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | |
|---|---|---|---|
| | $N_1$ $P_1 = 0,25$ | $N_2$ $P_2 = 0,50$ | $N_3$ $P_3 = 0,25$ |
| $S_1$ | 30 | 10 | 20 |
| $S_2$ | 15 | 15 | 15 |
| $S_3$ | 60 | 0 | 10 |

22. რა ტიპის თამაშებში გამოიყენება "გადაწყვეტილების ხის" აგებისა და ანალიზის მეთოდი და რაში მდგომარეობს მისი არსი?
23. ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა შემდეგი მატრიცის შესაბამისი ოპტიმალური სტრატეგია ვალდის კრიტერიუმის გამოყენებით:

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ |
| $S_1$ | 16 | 9 | 6 | -4 |
| $S_2$ | 12 | 7 | 5 | 3 |
| $S_3$ | 20 | 13 | 7 | -6 |
| $S_4$ | 32 | 16 | 9 | -23 |
| $S_5$ | 26 | 14 | 8 | -13 |

24. როგორი ფირმებისათვის არის გამართლებული ვალდის კრიტერიუმის გამოყენება?
25. როგორი ინდივიდუმის შეხედულებებს ასახავს მაქსიმაქსური კრიტერიუმი? რამდენად გამართლებულია მისი პრაქტიკაში გამოყენება?
26. ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა შემდეგი მატრიცის შესაბამისი ოპტიმალური სტრატეგია გურვიცის ალფა-კრიტერიუმის გამოყენებით ($\alpha = 0,6$):

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ |
| $S_1$ | 11 | 15 | 9 | 6 |
| $S_2$ | 13 | 4 | 14 | 7 |
| $S_3$ | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $S_4$ | 9 | 11 | 15 | 13 |
| $S_5$ | 8 | 3 | 7 | 5 |

27. როგორმა ფირმებმა შეიძლება გამოიყენოს გურვიცის ალფა-კრიტერიუმი?
28. რაში მდგომარეობს ოპტიმიზმის კოეფიციენტის არსი?
29. რა კავშირია ვალდისა და გურვიცის ალფა-კრიტერიუმებს შორის?
30. რაში მდგომარეობს დანაკარგების მატრიცის არსი?

31. ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა შემდეგი მატრიცის შესაბამისი ოპტიმალური სტრატეგია სევიჯის კრიტერიუმის გამოყენებით:

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ |
| $S_1$ | 12 | 7 | 5 | -3 |
| $S_2$ | 19 | 12 | 6 | -6 |
| $S_3$ | 10 | 4 | 4 | -2 |
| $S_4$ | 16 | 8 | 5 | -4 |
| $S_5$ | 9 | 5 | 3 | -1 |

32. რა შემთხვევებშია გამართლებული სევიჯის კრიტერიუმის გამოყენება?
33. რაში მდგომარეობს ლაპლასის კრიტერიუმის არსი და რა შემთხვევებში შეიძლება მისი გამოყენება?
34. ვიპოვოთ გადაწყვეტილებათა შემდეგი მატრიცის შესაბამისი ოპტიმალური სტრატეგია ლაპლასის კრიტერიუმის გამოყენებით:

| ალტერნატიული სტრატეგიები | გადაწყვეტილებათა მიღების გარემოს მდგომარეობები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ |
| $S_1$ | 17 | 9 | 2 | -5 |
| $S_2$ | 14 | 8 | 6 | -3 |
| $S_3$ | 20 | 15 | 3 | -9 |
| $S_4$ | 12 | 7 | 5 | 2 |

35. რაზეა დამოკიდებული კონკრეტული კრიტერიუმის გამოყენება განუსაზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღებისას?
36. რა განსხვავებაა შემთხვევითობისა და ბუნდოვნობის ცნებებს შორის?
37. მოიყვანეთ ბუნდოვანი სიმრავლის მაგალითები.
38. როგორ განიმარტება ფორმალურად ბუნდოვანი სიმრავლე?
39. რა კავშირია ბუნდოვანი სიმრავლის მიკუთვნებისა და არაბუნდოვანი სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციებს შორის?
40. განმარტეთ ნორმალური და სუბნორმალური სიმრავლეები.
41. როგორ განიმარტება ბუნდოვანი სიმრავლის მატარებელი სიმრავლე?
42. როგორ განიმარტება ბუნდოვანი სიმრავლეების ტოლობა?
43. მოიყვანეთ ბუნდოვანი სიმრავლის ქვესიმრავლისა და დამატების განმარტებები.
44. როგორ განიმარტება ბუნდოვანი სიმრავლეების თანაკვეთა და გაერთიანება?
45. როგორ განიმარტება ბუნდოვანი სიმრავლეების ალგებრული ჯამი და ნამრავლი?
46. მოიყვანეთ ბუნდოვანი მიზნისა და შეზღუდვის განმარტებები.

47. რა უდევს საფუძვლად მიზნებისა და შეზღუდვების სიმეტრიულობის უზრუნველყოფას ბუნდოვან პირობებში?
48. როგორ განიმარტება ბუნდოვანი გადაწყვეტილება?
49. წარმოადგინეთ გრაფიკულად ბუნდოვანი მიზნის, შეზღუდვისა და გადაწყვეტილების ურთიერთკავშირი.
50. რა ტიპის ამოცანებს განიხილავენ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში ბუნდოვან პირობებში?

# გამოყენებული ლიტერატურა


1. მ. ახობაძე, ზ. თევდორაძე. არამკაფიო სიმრავლეები და მათი გამოყენების მაგალითები. "ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, 2001
2. ტ. კიკვაძე. მენეჯერული ეკონომიქსის შესავალი (ნაწილი I). "ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, 2002
3. И. Г. Пфанцагль. Теория измерения. Москва, «Мир», 1976
4. П. Г. Евланов, В. А. Кутузов. Экспертные оценки в управлении. Москва, «Экономика», 1978
5. К. Берж. Теория графов и ее применение. Москва, «Иностранная литература», 1962
6. Б. Г. Миркин. Проблема группового выбора. Москва, «Наука», 1974
7. Вопросы анализа и процедуры принятия решений (сборник переводов). Москва, «Мир», 1976
8. Ю. Н. Кузубов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. Математическое программирование. Москва, «Высшая школа», 1980
9. М. Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Москва, «Прогресс», 1975
10. В. Е. Жуковин. Модели и процедуры принятия решений. Тбилиси, «Мецниереба», 1981
11. В. Е. Жуковин. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. Тбилиси, «Мецниереба», 1988
12. Т. Ф. Киквадзе. Об эквивалеентности векторных критериев эффективности. Сообщения АН ГССР, т. 101, №2, с. 309-312, 1981
13. Т. Ф. Киквадзе. Диалоговая процедура формирования порядковой шкалы измерений. Сообщения АН ГССР, т. 123, №1, с. 53-56, 1986
14. Р. Л. Кини, Х. Райфа. Принятия решений при многих критериях: предпочтения и замещения. Москва, «Наука», 1978
15. М. Е. Салуквадзе. Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси, «Мецниереба», 1975
16. Т. Л. Саати. Математические модели конфликтных ситуаций. Москва, «Советское радио», 1972
17. П. К. Фишберн. Теория полезности для принятия решений. Москва, «Наука», 1978
18. В. В. Подиновский. Методы многокритериальной оптимизации. Москва, Военная Академия им. Ф. Э. Дзержинского, 1971
19. Дж. Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведене. Москва, «Наука», 1970
20. О. И. Ларичев. Наука и искуство принятия решений. Москва, «Наука», 1979
21. Б. Г. Литвак. Эксрертные оценки и принятия решений. Москва, «Патент», 1996
22. А. И. Орлов. Теория принятия решений. Москва, «Экзамен», 2006
23. Jie Lu. Multi-objective group decision making. Imperial College Press, 2007
24. Cengiz Kahraman. Fuzzy multi-criteria decision making: Theory and Applications with Recent Developments. Springer, Istanbul, 2008

25. Katta G. Murty. Optimization for Decision Making: Linear and Quadratic Models. Springer, University of Michigan, 2009s

იბეჭდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 19.06.2013. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 20.09.2013. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 7. ტირაჟი 50 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი'', თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent

9789941203848