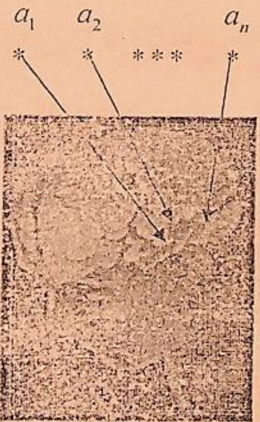
გურამ ბელთაძე, ნოდარ ჯიბლაძე

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია

II ნაწილი

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილებები, კონფლიქტები და თამაშები, კოლექტიური გადაწყვეტილებები



"ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გ. ბელთაძე, ნ. ჯიბლაძე

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია

II ნაწილი

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილებები, კონფლიქტები და თამაშები, კოლექტიური გადაწყვეტილებები

დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ
სტუ-ის სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ. 04.03.2011, ოქმი №1

თბილისი
2011

უაკ 519. 816

განხილულია გაწყვეტილებათა მიღების თეორიის თეორიის ძირითადი მიმართულებები და მათი საფუძლები. მოცემულია: მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ობიექტური და სუბიექტური მოდელები და მათი ანალიზის მეთოდები; იერარქიული ანალიზის მეთოდის გამოყენება ერთკრიტერიუმიანი და მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების რანჟირებისათვის; გადაწყვეტილების მიღების მეთოდები და ძირითადი კრიტერიუმები კონფლიქტის, რისკის და სრული განუსღვრელობის პირობებში - მატრიცული, ბიმატრიცული, პოზიციური, კოოპერატიული და სტატისტიკური თამაშები; კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღება არჩევნებსა და ექსპერტულ შეფასებებში.

გათვალისწინებულია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ბაკალავრების, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტები-სათვის. მისი გამოყენება შეუძლია უმაღლესი სასწავლებლების ყველა ფაკულტეტს და ყველა პირს, ვინც დაინტერესებულია მართვის სფეროში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებით, აგრეთვე, ადამიანთა რაციონალური და არარაციონალური ქცევების შეფასებით.

სამეც. რედაქტორი საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი, პროფესორი
მ. სალუქვაძე

რეცენზენტები: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი, პროფესორი ა. ფრანგიშვილი,

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო კიბერნეტიკისა და ხელსაწყოთმშენებლობის დეპარტამენტის უფროსი, პროფესორი თ. ობგაძე

ISBN 978-9941-14-335-9(ყველა ნაწილი)
ISBN 978-9941-14-975-7(მეორე ნაწილი)
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

40/11

Verba volant,
scripta manent

სარჩევი

შესავალი

თუ არსებობს პრობლემის გადაჭრის 2 ალტერნატივა და მათგან ერთს მიჰყავართ კატასტროფამდე, მაშინ ადამიანები უფრო მეტად ასეთ გადაწყვეტილებას ირჩევენ.

მერფის კანონი

ადამიანის, კოლექტივის და საზოგადოების ცხოვრება მთლიანობაში წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა უწყვეტ ჯაჭვს. მრავალი გადაწყვეტილება, განსაკუთრებით კერძო ხასიათის, ყოველთვის მიიღება ინსტიქტურად და "ჯანსაღი აზრის" მოთხოვნის დაცვისას ნაკლებად მოქმედებს გადაწყვეტილების მიმღებ პირზე (გმპ) და მის გარემოცვაზე. სულ სხვაგვარადაა საქმე სოციალურ, ეკონომიკურ, პოლიტიკურ და ტექნიკურ გადაწყვეტილებებში - განსაკუთრებით არასტანდარტულ სიტუაციებში. ამავე დროს, იერარქიული კიბის რაც უფრო მაღალ საფეხურზე იმყოფება გმპ, მით უფრო სერიოზული შეიძლება აღმოჩნდეს მის მიერ მიღებული გადაწყვეტილების შედეგი. ამიტომ არის, რომ გადაწყვეტილების მიღება ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემაა კაცობრიობისათვის მთელი მისი არსებობის განმავლობაში (საყოველთაოდ აღიარებულია, რომ მიღებული გადაწყვეტილების ხარისხი განსაზღვრავს ცხოვრების ხარისხს).

რეალურია ის ფაქტიც, რომ რაც უფრო ინტენსიურია კოლექტივის წევრთა შორის ურთიერთკავშირი, მით უფრო ძლიერ ზემოქმედებს მთელი კოლექტივის ბედ-იღბალზე მისი ყოველი წევრის გადაწყვეტილება. ამის გამო, ასეთ კოლექტივში თითოეული წევრის ვალდებულებაა რაციონალური არჩევანის (გადაწყვეტილების) გაკეთება. ამა თუ იმ აზრით, რაციონალური არჩევანი და მისი განმსაზღვრელი ესა თუ ის ძირითადი ცნება, როგორიცაა მაგალითად, "წონასწორობა", კომპრომისი", "სამართლიანობა" და რომლებიც არ ეწინააღმდეგება ინტუიციას, ლოგიკას და გამოცდილებას, სასურველია განისაზღვროს აქსიომათა შესაბამისი სისტემის სახით, რომლითაც დაფიქსირდება ამ ცნებების თვისებები.

მაშასადამე, რაციონალური გადაწყვეტილება გულისხმობს გარკვეულ აქსიომატიკურ თეორიაზე დაყრდნობით კოლექტივის წევრთა შეთანხმებულ მუშაობას, კოლექტიური პროექტის შესაბამისობას თავის დანიშნულებასთან, ეფექტურ მართვას, მოლაპარაკების მიღწევას და კონფლიქტის გადაწყვეტას. ყოველივე ეს ნიშნავს, რომ რთულ სიტუაციებში რაციონალური გადაწყვეტილების მიღება მოითხოვს მეცნიერულ მხარდაჭერას.

მარტივი სიტუაციებისაგან განსხვავებით, რთულ სიტუაციებში, როდესაც არჩევის მიზანი არ შეიძლება განისაზღვროს ერთადერთი კრიტერიუმით, გადაწყვეტილების მიღება არსებითადაა დამოკიდებული გადაწყვეტილების მიმღები პირის (გმპ) სარგებლიანობის სკალაზე. ასეთი სკალის გამოყენება კი გმპ-საგან მოითხოვს განსაკუთრებულ შემოქმედებას და სიახლეების ძიებას.

მაშასადამე, მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებში, კოლექტიურ გადაწყვეტილებებში, კონფლიქტური სიტუაციებისა და განუზღვრელობების პირობებში, რომლებიც სუსტად სტრუქტურირებულ და არასტრუქტურირებულ ამოცანებს მიეკუთვნება, ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნისათვის ოპტიმალური დასაშვები გადაწყვეტილებების განმსაზღვრელი პირობების გარდა, აუცილებელია კიდევ განსხვავებული, ურთიერთსაწინააღმდეგო მოთხოვნათა შეთანხმებების ხერხების დამუშავება და გამოყენება. ამ საკითხებში შეუძლებელია ყველა გმპ-ს ჰქონდეს ერთიანი მიდგომა. ამისათვის ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში საჭიროა კომპრომისის მოძებნა, რომელსაც განსაზღვრავს ყოველგვარი უფლებით და მოვალეობით აღჭურვილი გმპ. ამასთან, გადაწყვეტილების მიღების ფორმალური მეთოდები უზრუნველყოფს გმპ-ის გადაწყვეტილებათა მხოლოდ ლოგიკურ არაწინააღმდეგობრიობას. გარდა ამისა, ფორმალური მეთოდები გვეხმარება გმპ-ის ამა თუ იმ გადაწყვეტილების შედეგების პროგნოზირებისას.

დღეისათვის, გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია არსებითადაა გაფართოებული და შეიცავს ისეთ დარგებს, როგორებიცაა: მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაცია; კოლექტიური (ჯგუფური) და მათ შორის ექსპერტული გადაწყვეტილებები; თამაშთა თეორია. ამიტომ, გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის ყოველი კერძო კლასის

ამოცანა ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნისათვის მოითხოვს მოდელირების კერძო მიდგომის დამუშავებას.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩამოთვლილი დარგების ამოცანები ყალიბდება და იხსნება ობიექტური ან სუბიექტური წინააღმდეგობის პირობებში; ეს კი ნიშნავს, რომ ყველა ეს მიმართულება თამაშთა თეორიას მიეკუთვნება.

გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკურ თეორიას ძირითადად საქმე აქვს ორი კლასის ამოცანებთან. პირველს წარმოადგენს ის ამოცანები, რომელთა შინაარსობრივი არსი მიეკუთვნება გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის დარგებს. თითოეულ მათგანში მოითხოვება მოცემული პირობების საფუძველზე დადგინდეს R_j ბინარული მიმართება, რომელიც მოცემულ კონკრეტულ სიტუაციაში განსაზღვრავს შემდეგ ცნებებს: რაციონალურად აგრეგირებულ კრიტერიუმს (მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანებში); გმპ-ის რაციონალურად აგრეგირებულ უპირატესობას (კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში); წონასწორობას ან კომპრომისს (თამაშთა თეორიაში).

მეორე კლასის ამოცანებში R_j მიმართება (ან მათი განმსაზღვრელი მექანიზმები) იგულისხმება მოცემულად. ამ შემთხვევაში პრობლემაა ისეთი გამომთვლელი მეთოდების დამუშავება, რომლებიც უზრუნველყოფს კონსტრუქციული გადაწყვეტილების არჩევას იმ პირობით, რომ კრიტერიუმებისა და უპირატესობების აგრეგირებასთან, ასევე შესაბამისი კომპრომისის ცნების დადგენასთან დაკავშირებული საკითხები უკვე გარკვეულია.

გადაწყვეტილებათა მიღების სხვადასხვა მიდგომა ჩამოყალიბდა ერთ დამოუკიდებელ დისციპლინად და მისი ყოველი პრობლემა ატარებს მეცნიერებათაშორისო ხასიათს. იმ კვლევების შედეგად, რომლებიც ჩაატარეს მათემატიკოსებმა, ფსიქოლოგებმა, ეკონომისტებმა, სოციოლოგებმა, წარმოიშვა ამ დარგის ორი შტო - რაციონალურ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია (იგივე გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკური თეორია) და გადაწყვეტილებათა მიღების ფსიქოლოგიური ანუ ქცევითი თეორია. მათგან პირველი პასუხობს კითხვებზე - "რას უნდა ვუწოდოთ რაციონალური გადაწყვეტილება" და "როგორ მივიღოთ რაციონალური გადაწყვეტილება";

მეორე თეორია კი პასუხობს კითხვებზე - "როგორ უნდა მიიღოს ადამიანმა სინამდვილეში პიროვნული და ორგანიზაციული გადაწყვეტილებები" და "ამ დროს რა შეცდომებს უშვებს იგი".

აღნიშნული ორი შტოს სხვადასხვა მიმართულების სინთეზის საფუძველზე დღეისათვის ჩამოყალიბებულია ორი მეტად მნიშვნელოვანი დისციპლინა - "ოპერაციათა კვლევა" და "გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია", რომელთა შორის საერთო და განსხვავება აღწერილი გვაქვს სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილში.

გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია გმპ-თვის ადგენს ქცევის ნორმებს, რომლებიც უნდა დაიცვას მან იმისათვის, რომ თავის მსჯელობებთან და უპირატესობებთან წინააღმდეგობაში არ აღმოჩნდეს. თეორია არ გვაძლევს ცალკეული პირის ქცევის მეთოდის აღწერას. იგი გმპ-ს აიარაღებს მეთოდოლოგიით ისეთი რთული გადაწყვეტილების მიღებისათვის, რომელიც შეიცავს სუბიექტივიზმის ელემენტებს და მათი შეცვლა შეუძლებელია. თეორია ახდენს პრობლემის სუბიექტური ასპექტების ფორმალიზებას.

რაც შეეხება თამაშთა თეორიას - კონფლიქტის, განუზღვრელობისა და კოოპერაციის პირობებში გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკურ თეორიას, რაც აგრეთვე ურთიერთობათა მათემატიკურ თეორიას წარმოადგენს, იგი მთლიანად მიეკუთვნება ოპერაციათა კვლევას, ხოლო მისი დიდი ნაწილი - გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიას. იმის გამო, რომ ოპერაციათა კვლევის ნებისმიერ ამოცანას შეიძლება მივცეთ თამაშთა თეორიის მოდელის სახე, ხოლო გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის ნებისმიერი ამოცანა იგივე თამაშთა თეორიის ამოცანაა, ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ თანამედროვე მდგომარეობით ოპერაციათა კვლევა და გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია ერთად თამაშთა თეორიაა.

ამრიგად, გადაწყვეტილების მიღების მეცნიერების და ხელოვნების დაუფლება შესაძლებელია გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის შესწავლით. თუ ის გვეცოდინება, მაშინ რთულ და საპასუხისმგებლო სიტუაციებში ვიქნებით უფრო წინდახედული. განსაცდელი მხოლოდ ისაა, რომ ეს მეცნიერება საკმაოდ რთულია. იგი, როგორც აღვნიშნეთ, მეცნიერებათა დარგების კომპლექ-

სია, გამსჭვალულია მათემატიკის საკმაოდ დიდი ნაწილით. აქ არის თამაშთა თეორია და ოპერაციათა კვლევა, სისტემური ანალიზი, კიბერნეტიკა, გამოთვლითი ტექნიკა, ფსიქოლოგია, სოციოლოგია. ამავე დროს აუცილებელია, რომ ადამიანი პროფესიონალი იყოს იმ კონკრეტულ დარგში, რომელსაც ეკუთვნის გადასაწყვეტი ამოცანა. უნდა აღინიშნოს, რომ გადაწყვეტილებათა მიღების დარგის დაუფლება ანალიტიკოსის რანგში, დიდი მონდომებითაც კი ახალგაზრდულ ასაკში შეუძლებელია, მას დიდი დრო და მონდომება, ამავე დროს გამოცდილებაც ესაჭიროება.

თუ შევეხებით გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის პრაქტიკულ საჭიროებას, აქ გადამწყვეტ როლს ასრულებს ქვეყანაში მიმდინარე სოციალური, ეკონომიკური, სამართლებრივი, პოლიტიკური და სამეცნიერო-ტექნიკური პროცესები. ამ პროცესების პრობლემებში საუკეთესო ვარიანტების მოძებნისათვის უნდა არსებობდეს ობიექტ-ური მოთხოვნები. ცხოვრების ყველა სფეროში პრობლემების გადასაჭრელად ობიექტური მოთხოვნები მრავლად არსებობს მსოფლიოს განვითარებულ ქვეყნებში, რაც გამოწვეულია მაგალითად, კონკურენციის, მეცნიერული ტექნოლოგიების ან ნამდვილი ოპოზიციის არსებობის პირობებით. ასეთი სიტუაციები - გმპ-ს აიძულებს ეძებოს ოპტიმალური სტრატეგიები. ეს კი აყენებს მოთხოვნებს ქვეყანაში კონსულტანტ-ანალიტიკოსების აღზრდისათვის და გადაწყვეტილებათა მიღების საკონსულტაციო ფირმების ჩამოყალიბებისათვის. ასეთი ჯგუფები მრავლადაა განვითარებულ ქვეყნებში (თითქმის ყველა სამსახურში), რაც ინტერესს აღვივებს სტუდენტებში მათი მომავალი დასაქმებისა და მაღალი ანაზღაურებისათვის. ამ მიზნის მისაღწევად კი მრავალთან ერთად, მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიას და გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკურ თეორიას (თამაშთა თეორიას და ოპერაციათა კვლევას).

წარმოდგენილ სახელმძღვანელოში გადმოცემულია გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის ძირითადი მიმართულებები და საფუძვლები, რომლებიც სავალდებულოდ მიგვაჩნია საუნივერსიტეტო კურსისათვის. სახელმძღვანელო შედგება ხუთი თავისაგან. მისი სტრუქტურა ისეთივეა, როგორიც პირველი ნაწილის. აქ არ ვიმეორებთ

პირველ ნაწილში მოყვანილ განსაზღვრებებს და დებულებებს, მისი შესწავლა კი ამ ნაწილის დაუფლებისათვის სავალდებულოა.

პირველი თავი ეძღვნება ვექტორული ოპტიმიზაციის ანუ მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების მოდელებისა და მათი ანალიზის მეთოდების შესწავლას. ეს მოდელები შეიძლება მივაკუთვნოთ როგორც ობიექტურ, ისე სუბიექტურ გარემოს. ამოხსნის მეთოდის მეშვეობით მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება მის რომელიმე ერთკრიტერიუმიანი ანუ სკალარული მოდელის ანალიზზე.

მეორე თავში განვიხილავთ ინდივიდუალური და კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების მეტად მნიშვნელოვან პრობლემას, რომლის შედეგს არსებითად შეუძლია იმოქმედოს სხვა ადამიანთა როგორც პირად კეთილდღეობებსა და ღირსებებზე, ასევე ქვეყნის მომავალ წარმატებებსა და ავტორიტეტზე. ასეთი პრობლემის გადასაწყვეტად გამოიყენება ამერიკელი მათემატიკოსის, თამაშთა თეორიის თანამედროვე სპეციალისტის, თომას საატის იერარქიული ანალიზის მეთოდი. მოცემულია ამ მეთოდის ძირითადი ელემენტები და მათი გამოყენება ალტერნატივების რანჟირებისათვის.

მესამე თავში განხილულია მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების სუბიექტური მოდელები, რომელთა ანალიზისათვის ვიყენებთ ზოგიერთ ხარისხობრივ და ევრისტიკულ მეთოდს. ასეთი ამოცანები ძირითადად არასტრუქტურირებულია, თუმცა მათ შორის არის ისეთი ამოცანაც, რომელსაც შეიძლება მივცეთ სუსტად სტრუქტურირებული ფორმა.

სუბიექტური მოდელების ანალიზისათვის, ისევე როგორც ობიექტური მოდელების შემთხვევაში, ვიყენებთ გადამწყვეტ წესს. გადამწყვეტ წესში ვგულისხმობთ: ალტერნატივების შეფასების, მათი რანჟირების, კლასიფიკაციის და მათგან საუკეთესოს არჩევის მეთოდს. გადამწყვეტი წესის აგების ხერხი უშუალოდ მოქმედებს ალტერნატივების შეფასებაზე. ამიტომ, გადამწყვეტი წესის აგებისათვის უნდა დამუშავდეს გმპ-საგან საჭირო ინფორმაციის მიღების ხერხი, ინფორმაციის გადამუშავებისათვის ადამიანთა რეალური შესაძლებლობების დადგენის ხერხი და სხვ. დღეისათვის არსებობს გადამწყვეტი წესის აგების

მრავალი მეთოდი, რომელთაგან რამდენიმე მესამე თავშია მოცემული.

მეოთხე თავში შესწავლილია გადაწყვეტილების მიღების პრობლემები კონფლიქტის, რისკის და სრული განუზღვრელობის (გაურკვევლობის) პირობებში. ამისათვის გამოიყენება თამაშთა თეორიის ანტაგონისტური და არაანტაგონისტური (არაკოალიციური) მოდელები მოთამაშეთა სასრული რიცხვისა და მათი სტრატეგიების სასრული რიცხვის შემთხვევაში. ასეთი მოდელებია: მატრიცული, ბიმატრიცული და პოზიციური თამაშები, რომლებშიც წონასწორობის ძირითადი პრინციპია ნეშის წონასწორობა. მოცემულია აგრეთვე სტატისტიკური თამაშების ელემენტები და სრული გაურკვევლობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღების ძირითადი წესები.

სოციალურ-ეკონომიკური და პოლიტიკური პრობლემების კვლევისას თეორეტიკოსებმა უნდა გადაწყვიტონ შემდეგი ამოცანა: როგორ შევათანხმოთ ინდივიდუალური გადაწყვეტილებები (შესაბამისად, ინდივიდუალური უპირატესობები) კოლექტიურ (საზოგადოებრივ, ჯგუფურ) გადაწყვეტილებასთან? ამ ამოცანის მათემატიკური შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: განისაზღვროს ინდივიდუალური გადაწყვეტილებების აგრეგირების (გაერთიანების) ისეთი სამართლიანი მეთოდი, რომელიც მოგვცემს ოპტიმალურ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას. ასეთი სახის ამოცანას ვუწოდოთ კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების (ჯგუფური გადაწყვეტილების მიღების ან კოლექტიური არჩევის) ამოცანა. მისი ნათელი მაგალითია, ვთქვათ არჩევნები - იგივე კენჭისყრა.

მეხუთე თავში განვიხილავთ კოლექტიური გადაწყვეტილების პრობლემებს, მათ შორის კენჭისყრის, ექსპერტული შეფასებისა და ანალიზის მოდელებს, გამოვავლენთ მათ განსაკუთრებულ თავისებურებებს.

აქვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის აქ განხილული ყველა მიმართულების განვითარებაში მნიშვნელოვანი წვლილი აქვთ შეტანილი ქართველ მეცნიერებს. მათგან განსაკუთრებით გამოვყოფთ აკადემიკოს მინდია სალუქვაძეს, რომელსაც ჩვენი სახელმძღვანელოს ძირითად სამეცნიერო მიმართულებაში - მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილებების თეორიაში, დამფუძნებლის როლი აქვს შესრულებული.

I თავი

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ობიექტური მოდელები

1.1. მრავალკრიტერიანობის საჭიროება და მისი ფორმალიზება

ხაზგასმით უნდა აღვნიშნოთ ის გარემოება, რომ გადაწყვეტილების მიღება შესაძლებელია: ან ობიექტური მონაცემების საფუძველზე (მათ შორის, ოპტიმიზაციისა და ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების მეშვეობით), რასაც ობიექტურ გარემოს ვუწოდებთ და ამისათვის ვიყენებთ ობიექტურ მოდელებს; ან ხარისხობრივი მონაცემების საფუძველზე დარგის სპეციალისტების – ექსპერტთა და ანალიტიკოსთა დახმარებით, რასაც სუბიექტურ გარემოს ვუწოდებთ და ვიყენებთ სუბიექტურ მოდელებს. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს კარგად სტრუქტურირებულ ამოცანებთან, მეორე შემთხვევაში კი - არასტრუქტურირებულ ან სუსტად სტრუქტურირებულ ამოცანებთან. ამოცანების განსაკუთრებულ კლასს წარმოადგენს ვექტორული ოპტიმიზაციის ანუ მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ამოცანები, რომლებიც შეიძლება მივაკუთვნოთ როგორც ობიექტურ, ისე სუბიექტურ გარემოს. სწორედ ასეთი ამოცანების მოდელებს განვიხილავთ ამ თავში.

ზოგადად, ობიექტურ მოდელებში ვგულისხმობთ ოპერაციათა კვლევის თეორიის ამოცანების მოდელებს. ოპერაციათა კვლევაში იგულისხმება ადამიანთა მიზანმიმართული საქმიანობის ყველა სფეროში მათემატიკური, რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენება ოპტიმალურ გადაწყვეტილებათა დასაბუთებისათვის (ნაწილი I). აქ ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნისათვის გამოიყენება შემდეგი ძირითადი ეტაპები: მოდელის აგება, ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევა, ოპტიმალური გადაწყვეტი-

ლების პოვნა. ოპერაციათა კვლევის მიდგომა გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიისაგან შემდეგით განსხვავდება:

1. ოპერაციათა კვლევაში გამოყენებულ მოდელებს აქვს ობიექტური ხასიათი, ანუ ეს მოდელები გამოსახავს ობიექტურად არსებულ რეალობას და ერთსა და იმავე მონაცემების პირობებში სხვადასხვა ანალიტიკოსების მიერ მიღებული შედეგი ერთნაირია;

2. ხელმძღვანელი, იგივე გმპ, ანალიტიკოსისაგან ღებულობს მეცნიერულად დასაბუთებულ გადაწყვეტილებას. გარდა აუცილებელი დამატებითი ინფორმაციის მიწოდებისა, გმპ-საგან არაფერი მოითხოვება, ანალიტიკოსების ჯგუფი დამოუკიდებლად პოულობს სასურველ გადაწყვეტილებას;

3. ოპერაციათა კვლევის მეთოდების გამოყენებისას არსებობს წარმატების ობიექტური კრიტერიუმი, რომლითაც ვაფასებთ მისაღები გადაწყვეტილების ხარისხს და მისი წარმატებულად განსაზღვრა მნიშვნელოვანია ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნისათვის.

ოპერაციათა კვლევის ერთი კლასიკური ამოცანა ამოხსნილი გვაქვს პირველ ნაწილში, თანაც იქ გამოვიყენეთ ორი კრიტერიუმი. საგანგებოდ უნდა აღინიშნოს, რომ დღეისათვის ოპერაციათა კვლევის და, საერთოდ, გადაწყვეტილებათა მიღების მათემატიკური თეორიის ამოცანებში საქმე გვაქვს გადაწყვეტილების ხარისხის შემფასებელ არა ერთ, არამედ რამდენიმე კრიტერიუმთან, ანუ საქმე გვაქვს მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებთან.

ამავე დროს, ასეთ ამოცანებში განსაკუთრებით ყურადსაღებია შემდეგი გარემოება. საბოლოო გადაწყვეტილების შესარჩევად აუცილებელია განსხვავებული კრიტერიუმებით შესაფასებელ გდაწყვეტილებებს შორის კომპრომისები, ვინაიდან ეს კრიტერიუმები, უმეტეს შემთხვევაში, ერთმანეთთან წინააღმდეგობაშია. ასეთი კომპრომისების საპოვნელად ამოცანის პირობებში ინფორმაცია არ

გვაქვს. მაშასადამე, ის არ შეიძლება განისაზღვროს ობიექტური გამოთვლების საფუძველზე - აუცილებელი ხდება სუბიექტური მოსაზრებების გამოყენება. ეს კი ნიშნავს, რომ გამოყენების თვალსაზრისით ოპერაციათა კვლევის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანები, ამავე დროს, სუსტად სტრუქტურირებულია და, მაშასადამე, გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის ამოცანებიცაა.

ამრიგად, მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანებისათვის შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა.

დასკვნა. ოპერაციათა კვლევის და გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებს აქვს უნიკალური ახალი თვისება - არ არსებობს ობიექტური ან სტატისტიკური მონაცემები, რომლებითაც შეგვეძლება დავადგინოთ დამოკიდებულებები განსხვავებულ კრიტერიუმებს შორის. გადაწყვეტილების მიღების მომენტში პრინციპულად არ არსებობს ინფორმაცია, რომლითაც შეგვეძლება ობიექტურად შევაფასოთ ამა თუ იმ არჩეული გადაწყვეტილების შესაძლო შედეგი, გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობა კი ითხოვს არასაკმარისი ინფორმაციების მოპოვებას, რაც ყველაზე მეტად შესაძლებელია გამოცდილების ან ინტუიციის საფუძველზე. გარდა აღნიშნულისა, ორივე ურთიერთმონათესავე დარგში გვხვდება პრობლემები, რომლებშიც ცნობილია მხოლოდ ძირითადი პარამეტრების ჩამონათვალი, მაგრამ მათ შორის რაოდენობრივი და ხარისხობრივი კავშირები არც არსებობს და მათი დადგენა შეუძლებელია.

მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების წარმოშობამ მოითხოვა მათი გადაწყვეტის ხასიათის განსაკუთრებული ცვლილებები. აქ გადაწყვეტილების პოვნის საფუძველი გახდა გმპ-ის უპირატესობები, რითაც ძირითადად განისაზღვრება გადაწყვეტილების შედეგი და ამით ხდება ობიექტური და სუბიექტური ფაქტორების ერთმანეთში შერწყმა - გადაწყვეტილების პოვნის პროცესში გამოიყენება

ობიექტური მოდელები, ხოლო გადაწყვეტილებას შეგვიძლია ვუწოდოთ სუბიექტური.

ახლა შევეხოთ კრიტერიალური მოდელის ცნებას როგორც ერთი, ისე მრავალი კრიტერიუმისათვის. როგორც ვიცით, გადაწყვეტილების მიღების ამოცანას მაშინ აქვს ადგილი, როცა მოცემული ან სასურველი შედეგის მისაღწევად არსებობს რამდენიმე ვარიანტი (ალტერნატივა, სტრატეგია) და აუცილებელია მათგან ერთი ან რამდენიმე ავირჩიოთ საუკეთესო განსაზღვრული აზრით. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, როგორც რაიმე სიმრავლიდან ელემენტის არჩევის ამოცანა, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, X ალტერნატივების სიმრავლეა, ხოლო Y - შესაძლო შედეგების სიმრავლე. იგულისხმება, რომ არსებობს მიზეზობრივი კავშირი $x_i \in X$ ალტერნატივის არჩევასა და მის შესაბამის $y_i \in Y$ შედეგს შორის. გარდა ამისა, არსებობს ასეთი არჩევის ხარისხის შეფასების მექანიზმი - იგულისხმება შედეგის ხარისხის შეფასება. ზოგიერთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია ვიგულისხმოთ, რომ შესაძლებელია უშუალოდ შევაფასოთ x_i ალტერნატივის ხარისხი და ამით შედეგების გარკვეული სიმრავლის განხილვა აღარ იქნება საჭირო. ჩვენ შემთხვევაში კი მოისთხოვება, რომ ავირჩიოთ ისეთი ალტერნატივა, რომლის შესაბამის შედეგს ექნება ხარისხის საუკეთესო შეფასება.

ალტერნატივებსა და შესაბამის შედეგებს შორის მიზეზობრივი კავშირის ხასიათი შეიძლება იყოს სხვადასხვა და გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში პირველ ძირითად მომენტს წარმოადგენს ამ კავშირის ხასიათის დადგენა. ასეთი კავშირის ხასიათი შეიძლება იყოს: დეტერმინირებული (შესაბამისად გვაქვს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა განსაზღვრულობის პირობებში), ალბათური (გვაქვს სტატისტიკური გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა განუზღვრელობის პირობებში), სრული განუზღვრელობის, როდესაც ალბათური ხასიათის ინფორ-

მაციაც არ გვაქვს (შესაბამისად, გვაქვს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა სრული განუზღვრელობის პირობებში).

გადაწყვეტილების მიღების თეორიაში მეორე მნიშვნელოვან მომენტს წარმოადგენს გმპ-ის უპირატესობათა განსაზღვრა ან შესწავლა. ეს მომენტი არსებითად არაა კავშირში პირველთან და უპირატესობათა განსხვავებული სისტემები შეიძლება რეალიზებულ იქნეს ალტერნატივებისა და შედეგების ყოველი სახის კავშირისათვის.

გარკვეული აზრით, უმარტივესი სიტუაცია მაშინ წარმოიშობა, როცა თითოეული y შედეგი შეგვიძლია ნამდვილი რიცხვით შევაფასოთ კონკრეტული ასახვის (ფუნქციის) საშუალებით

$$f : Y \to R^1. \qquad (1.1.1)$$

ამ შემთხვევაში შედეგების შეფასება დაიყვანება მათ შესაბამის რიცხვებს შორის შედარებაზე. მაგალითად, შედეგი y_i შეგვიძლია უფრო უპირატესად ჩავთვალოთ y_j შედეგთან შედარებით და ვწერთ $y_i \succ y_j$, თუ $f(y_i) > f(y_j)$ (მაქსიმუმის ამოცანაში). ეს ორი შედეგი ტოლფასია და დავწერთ $y_i \approx y_j$, თუ $f(y_i) = f(y_j)$. ასეთ f ფუნქციას აქვს სხვადასხვა სახელი: სარგებლიანობის ფუნქცია, მიზნის ფუნქცია, კრიტერიალური ფუნქცია, ოპტიმალურობის კრიტერიუმის ფუნქცია ან მარტივად ოპტიმალურობის კრიტერიუმი. ეს უკანასკნელი სახელწოდება არაა კორექტული, ვინაიდან ოპტიმალურობის კრიტერიუმი ერთ-ერთი უმთავრესი ცნებაა ოპერაციათა კვლევაში და გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში. იგი აღნიშნავს გარკვეულ წესს, რომლითაც შეგვიძლია შევადაროთ ერთმანეთს და დავადგინოთ მათგან რომელი შედეგი ან გადაწყვეტილებაა “ოპტიმალური” და რომელი “არაოპტიმალური”. მოცემულ შემთხვევაში, ეს წესი დაკავშირებულია სარგებლიანობის ან მიზნის f ფუნქციის

მოცემასთან. ამის გამო, სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანებში, რომლებიც სინამდვილეში მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების კერძო კლასია ერთი კრიტერიუმის შემთხვევაში, იშვიათად გამოიყენება კრიტერიუმის ცნება იმ გაგებით, როგორიც მრავალი კრიტერიუმის შემთხვევაშია. ამიტომ, უფრო მეტად მის ნაცვლად გამოვიყენებთ "სარგებლიანობის ფუნქციას" და "მიზნის ფუნქციას". თუ ვიხმართ "კრიტერიუმს", მაშინ მივუთითებთ კონკრეტულ სახელს.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ალტერნატივების X სიმრავლესა და შედეგების Y სიმრავლეს შორის კავშირი დეტერმინირებულია, ე.ი. არსებობს φ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\varphi : X \to Y\,,\quad y = \varphi(x), x \in X, y \in Y\,,$$

მაშინ f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია Y-ზე, ტრანსფორმირდება სარგებლიანობის რაიმე F ფუნქციონალში (ფუნქციონალი ნებისმიერ სიმრავლეს ცალსახად გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში), რომელიც განსაზღვრულია X-ზე და წარმოადგენს φ და f ფუნქციების სუპერპოზიციას:

$$F : X \to R^1,\quad F = f o \varphi\,.$$

ამ შემთხვევაში, ოპტიმალური შედეგის არჩევა დაიყვანება X სიმრავლიდან ოპტიმალური ალტერნატივის არჩევის ამოცანაზე და იგი გადაწყდება ოპტიმიზაციის თეორიის მეთოდებით.

ამ შემთხვევისაგან განსხვავებით, ხშირად გვაქვს სიტუაცია, როდესაც y შედეგის ხარისხი ან სარგებლიანობა ფასდება არა ერთი $f(y)$ რიცხვით, არამედ რამდენიმეთი. უფრო ზუსტად ეს გულისხმობს, რომ არსებობს გადაწყვეტილების ხარისხის რამდენიმე მაჩვენებელი - კრიტერიუმი, რომლებიც მოიცემა შემდეგი ფუნქციებით:

$$f_i : Y \to R^1, i = 1,2,...,m,$$

ამასთან, მოითხოვება თითოეული კერძო სარგებლიანობის f_i ფუნქციის მაქსიმუმი (ჩვენ მხოლოდ მაქსიმუმის ამოცანებს განვიხილავთ). ასე მივიღეთ ალტერნატივის (ან შედეგის) შეფასების მრავალკრიტერიუმიანი ან ვექტორული მოდელი $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივის (ან შედეგის) შეფასების მოდელთან ან ვექტორულ კრიტერიუმთან. ეს მოდელი გაცილებით რთულია, ვიდრე ერთი კრიტერიუმის შემთხვევაში. აქ, საზოგადოდ, კრიტერიუმები წინააღმდეგობრივია და მაქსიმუმს აღწევს განსხვავებულ $y \in Y$ წერტილებში. მაშასადამე, წარმოიშობა შესაბამისი ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნის არა მარტო ალგორითმული სირთულე, არამედ წმინდა კონცეპტუალური სირთულეც: რა უნდა ვიგულისხმოთ ამ შემთხვევაში ოპტიმალურ გადაწყ-ვეტილებად? გარდა აღნიშნულისა, აქ კიდევ გვხვდება ვე-ქტორული $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ კრიტერიუმით შეუდარებადი y_i და y_j ვარიანტები.

მაშასადამე, დავადგინეთ უპირატესობათა აღწერის კრიტერიალური ენა, რაც გულისხმობს ერთკრიტერიუმიანი და მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების შეფასების მოდელებს. გადაწყვეტილებათა მიღების ასეთი მრავალკრიტერიუმიანი მოდელები არის ჩვენი შესწავლის საგანი, რომელთა ანალიზი ხშირ შემთხვევაში დაიყვანება ერთკრიტერიუმიანი ანუ სკალარული მოდელების ანალიზზე.

1.2. ბინარული მიმართებით და კრიტერიალური ფუნქციებით მიღებულ გადაწყვეტილებათა შედარება

უპირატესობათა აღწერის კრიტერიალური ენის შემდეგი, უფრო ზოგადია ბინარული მიმართების ენა, რომელიც შევისწავლეთ ალტერნატივების სიმრავლისათვის. აქ შევეხებით ბინარულ მიმართებებს შედეგების სიმრავლისათვის.

ვიგულისხმოთ, რომ გმპ თავის უპირატესობებს ადგენს A სიმრავლეზე, რომელიც სტანდარტულ შემთხვევაში შედეგების $A = Y$ სიმრავლეა. ამასთან, როცა არსებობს X-ის Y-თან დეტერმინირებული კავშირი, მაშინ შესაძლოა ჩავთვალოთ, რომ $A = X$ ან შედეგთა მრავალკრიტერიალური აღწერისას ვწერთ $A = f(Y)$, სადაც $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. გმპ-ის უპირატესობათა სისტემა მოიცემა შესაბამისი ბინარული R მიმართებით. გავიხსენოთ, რომ ბინარული მიმართება A სიმრავლეზე, ეწოდება A^2-ის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს, სადაც A^2 არის ყველა დალაგებული (a_i, a_j) წყვილის სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული ელემენტი $a_i, a_j \in A$. მაშასადამე, $R \subseteq A^2$ და მათ შორის A^2-ც ბინარული მიმაროებაა, რადგან $A^2 \subseteq A^2$. იგულისხმება, რომ ცნობილია ბინარულ მიმართებათა ძირითადი თვისებები - რეფლექსურობა, სიმეტრიულობა, ტრანზიტულობა, ანტირეფლექსურობა და სხვ.

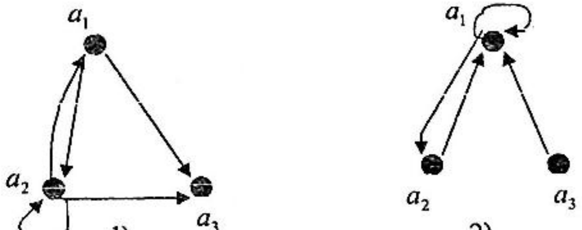
ბინარულ მიმართებებს თვალსაჩინოდ გამოვსახავთ ორიენტირებული გრაფების საშუალებით. ამისათვის, A სიმრავლის ელემენტები გამოვსახოთ სიბრტყეზე წერტილებით. თუ მოცემულია მიმართება $R \subseteq A^2$ და $(a_i, a_j) \in R$, სადაც $a_i, a_j \in A$, მაშინ მათი შემაერთებელი რკალის ისარი მივმართოთ a_i-დან a_j-სკენ; თუ $(a_i, a_i) \in R$, მაშინ a_i წერტილს აქვს მარყუჟი.

აქ ძირითადი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, A სიმრავლეზე მოცემულია გმპ-ის უპირატესობათა სისტემა ბინარული R მიმართების სახით. რა უნდა ვიგულისხმოთ გადაწყვეტილების მიღებაში ანუ არჩევის ამოცანაში?

შემოვიღოთ განსაზღვრებები. ვთქვათ, A ალტერნატივების მოცემული სიმრავლეა, ხოლო R - ბინარული მიმართება მასზე. მაშინ $\Gamma =< A,R >$ წყვილი წარმოადგენს არჩევის მოდელს.

განსაზღვრება 1.2.1. $\Gamma =< A,R >$ მოდელში $a^{*} \in A$ ელემენტს ეწოდება **საუკეთესო** R-ით A-ში, თუ სრულდება $(a^{*},a) \in R$ ნებისმიერი a-სთვის $A \setminus a^{*}$-დან ანუ $\forall a \in A \setminus a^{*}$, $(a^{*},a) \in R$.

ვიგულისხმოთ, რომ R არის უპირატესობის მიმართება, ხოლო ისარი აღნიშნავს დომინირების რაიმე ვარიანტს. განვიხილოთ ბინარული მიმართების მაგალითი (ნახ. 1.2.1, 1)).



ნახ.1.2.1.

შევამოწმოთ a_1 ელემენტი. რადგან $A \setminus a_1 = \{a_2, a_3\}$ და $(a_1,a_2) \in R$, $(a_1,a_3) \in R$, ამიტომ a_1 არის საუკეთესო R-ით A-ში. ახლა ავიღოთ a_2 და $A \setminus a_2 = \{a_1, a_3\}$. რადგან $(a_2,a_1) \in R$ და $(a_2,a_3) \in R$, ამიტომ a_2-ც საუკეთე-

სოა R-ით A-ში. ასეთი პირობები არ სრულდება a_3-სთვის. მაშასადამე, აქ a_1 და a_2 საუკეთესო ელემენტებია R-ით A-ში.

2.1. 2) ნახ.-ზე a_1 ვერ იქნება საუკეთესო, რადგან $(a_1,a_3)\notin R$ ხოლო a_2 ვერ იქნება საუკეთესო, ვინაიდან $(a_2,a_3)\notin R$ და, ასევე გვაქვს $(a_3,a_2)\notin R$. მაშასადამე, ამ ნახაზზე საუკეთესო ელემენტი R-ით A-ში არ გვაქვს.

საუკეთესო ელემენტის ნაცვლად შემოვიღოთ უფრო სუსტი ცნება.

განსაზღვრება 1.2.2. $\Gamma=<A,R>$ მოდელში $a^0\in A$ ელემენტს ეწოდება მაქსიმალური R-ით A-ში ან მაქსიმალური $\Gamma=<A,R>$-ში, თუ $\forall a\in A$, სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(a,a^0)\in R\rightarrow(a^0,a)\in R.$$

$\Gamma=<A,R>$ მოდელში ყველა მაქსიმალური ელემენტის სიმრავლე აღვნიშნოთ $\max_R A$ - ით.

ამ განსაზღვრების თანახმად, გრაფის წვერო იქნება მაქსიმალური $\Gamma=<A,R>$-ში, თუ ამ წვეროში შემავალ ისარს შეესაბამება მისგან გამომავალი "კომპენსირებადი" ისარი, რომელიც მიმართულია იმ წვეროსაკენ, რომლიდანაც გამოდის მოცემულ წვეროში შემავალი ისარი. აქედან გამომდინარე, 1.2.1 ნახ.-ის ორივე გრაფზე მაქსიმალური ელემენტია $\max_R A=\{a_1,a_2\}$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ საუკეთესო ელემენტი R-ით A-ში, ამავე დროს მაქსიმალურიცაა. შებრუნებული დებულება მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა R ხასიათდება სუსტად დალაგების სპეციალური თვისებით:

$$\forall a_1,a_2,\ \ a_1\neq a_2,\ ((a_1,a_2)\in R)\vee((a_2,a_1)\in R).$$

ასეთი თვისება არ აქვს ნახ. 1.2.1. 2)-ზე მოცემულ მიმართებას, რადგან აქ

$$a_2\neq a_3,\ \text{მაგრამ}\ (a_2,a_3)\notin R\ \text{და, ასევე,}\ (a_3,a_2)\notin R.$$

განსაზღვრება 1.2.3. $\max_R A$ სიმრავლეს ეწოდება გარეგნულად მდგრადი, თუ $\forall a \in A \setminus \max_R A$, არსებობს ისეთი $a^0 \in \max_R A$, რომ $(a^0, a) \in R$.

ეს განსაზღვრება არსებითია გადაწყვეტილების მიღების პრობლემისათვის. მართლაც, თუ $\max_R A$ გარეგნულად მდგრადი სიმრავლეა, მაშინ დამატებითი ინფორმაციის მიღების შემდეგ, ოპტიმალური ელემენტი შეიძლება ავირჩიოთ ამ სიმრავლიდან. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა ასეთი მდგრადობა არ აქვს $\max_R A$ სიმრავლეს, მისგან რომელიმე ელემენტის არჩევას ვერ დავასაბუთებთ.

გარეგნულად მდგრად $\max_R A$ სიმრავლეს, ეწოდება R **მიმართების გული** A-ში. ზოგჯერ ამ სიმრავლეს მოიხსენიებენ, როგორც უბრალოდ "გულს", გარეგანი მდგრადობის მოთხოვნის გარეშე.

1.2.1. 1) ნახ.-ზე მოცემულ მაგალითში ალტერნატივების სიმრავლე $\max_R A = \{a_1, a_2\}$ გარეგნულად მდგრადია, ხოლო 1.2.1. 2) ნახ.-ზე მოცემულ მაგალითში სიმრავლე $\max_R A = \{a_1, a_2\}$ არაა გარეგნულად მდგრადი.

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში, რომელიც ჩამოყალიბებულია ბინარული მიმართების ენაზე, ვიგულისხმებთ ამოცანას გულის პოვნაზე, რომელიც წარმოადგენს A-ს ქვესიმრავლეს: $A^* = \max_R A$. როგორც ვიცით ასეთ ამოცანებში, მეტად მნიშვნელოვანია ბინარული R მიმართების სპეციალური სახეები: კვაზიდალაგება - R არის რეფლექსური და ტრანზიტული; მკაცრი დალაგება - R არის ანტირეფლექსური და ტრანზიტული; ეკვივალენტობა - R არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა

$$f : Y \to R^1,$$

სადაც f სარგებლიანობის ანუ მიზნის ფუნქციაა და უნდა ვიპოვოთ მისი მაქსიმუმ. ამ ფუნქციის მეშვეობით, Y სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ორი ბინარული მიმართება R_1 და R_2:

$$(y_1, y_2) \in R_1 \Leftrightarrow f(y_1) \geq f(y_2);$$

$$(y_1, y_2) \in R_2 \Leftrightarrow f(y_1) > f(y_2).$$

ცხადია, Y-ზე R_1 განსაზღვრავს კვაზიდალაგებას, R_2 კი - მკაცრ დალაგებას. ორივე შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობას

$$\max_{R_i} Y = Arg \max f(y), \ i = 1,2.$$

ეს სიმრაელე არის გარეგნულად მდგრადი Y-ში. მაშასადამე, Y-ზე f-ის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანა Y-ში R_1-ის ან R_2-ის გულის აგების ამოცანის ტოლფასია.

ახლა განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ შედეგის სარგებლიანობა ანუ ხარისხი ფასდება რამდენიმე რიცხვით. მაშასადამე, არსებობს გადაწყვეტილების ხარისხის რამდენიმე მაჩვენებელი, რომლებიც აღიწერება სარგებლიანობის ფუნქციებით

$$f_k : Y \to R^1, \ k = 1,2,...,m$$

და უნდა ვიპოვოთ ყველას მაქსიმუმი. თუ აღვნიშნავთ $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, მაშინ ეს ამოცანა იგივეა, რაც

$$f : Y \to R^m, \ f = (f_1, f_2, ..., f_m) \to \max_Y.$$

მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების თეორიაში გამოიყენება დომინირების შემდეგი ორი სახის მიმართება:

$$(y_i, y_j) \in R_P \Leftrightarrow \forall k : (f_k(y_i) \geq f_k(y_j)) \wedge (f(y_i) \neq f(y_j)),$$

$$(y_i, y_j) \in R_S \Leftrightarrow \forall k : (f_k(y_i) > f_k(y_j)).$$

დომინირების R_P მიმართებას ეწოდება პარეტოს მიმართება, ხოლო R_S მიმართებას - სლეიტერის მიმართება. ზოგჯერ მათ ნაცვლად გამოიყენება, აგრეთვე, მოკლე ჩანაწერი

$$(y_i, y_j) \in R_t \Leftrightarrow y_i \overset{t}{\succ} y_j,\ t = P, S.$$

განსაზღვრება 1.2.4. თუ რომელიმე $y^0 \in Y$ წერტილისათვის არ არსებობს პარეტოს უფრო უპირატესი წერტილი, ე.ი. ისეთი y წერტილი, რომ $(y, y^0) \in R_P$, მაშინ y^0 წერტილს ეწოდება მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_m(y)) \to \max_{y \in Y} \qquad (1.2.1)$$

ეფექტური ან პარეტოს ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

Y სიმრავლის ყველა ეფექტური გადაწყვეტილების სიმრავლე აღინიშნება $P_f(Y)$ ან უბრალოდ $P(Y)$-ით, თუ ცნობილია რომელ ვექტორულ კრიტერიუმზეა საუბარი და ეწოდება (1.2.1) ამოცანის პარეტოს სიმრავლე.

ცხადია, $P(Y) \subseteq Y$ და $P(Y)$ სიმრავლის სახე კრიტერიალურ R^m სივრცეში აღინიშნება $P(f) = f(P(Y))$; მას ეფექტური შეფასებების სიმრავლე ან კრიტერიალურ სივრცეში პარეტოს სიმრავლე ეწოდება.

ეფექტური გადაწყვეტილების შინაარსი წარმოადგენს პარეტოს პრინციპს - ოპტიმალური შედეგი უნდა ვეძებოთ მხოლოდ არადომინირებულ $P(Y)$ სიმრავლის ელემენტებში. წინააღმდეგ შემთხვევაში, მოიძებნება $y \in Y$ შედეგი, რომელიც უფრო უპირატესი სარგებლიანობის იქნება ყველა $f_i(y)$ ფუნქციით.

ცხადია, პარეტოს ბინარული მიმართება R_P არის ანტირეფლექსური: $\forall y \in Y, (y, y) \notin R_P$; გარდა ამისა, იგი ტრანზიტულია:

$$((y_i, y_j) \in R_P) \wedge ((y_j, y_k) \in R_P) \to (y_i, y_k) \in R_P .$$

ამრიგად, R_P ნაწილობრივი მკაცრი დალაგებაა Y-ზე.

ჩვეულებრივ, მრავალკრიტერიუმიანი (1.2.1) ამოცანის ამოხსნის მიზანია მისი პარეტოს $P(Y)$ სიმრავლის გამოყოფა.

ახლა შევეხოთ R_S მიმართებას.

განსაზღვრება 1.2.5. $y' \in Y$ წერტილს ეწოდება მრავალკრიტერიუმიანი (1.2.1) ამოცანის სუსტად ეფექტური ან სლეიტერის ოპტიმალური გადაწყვეტილება, თუ არ არსებობს სლეიტერის უფრო უპირატესი წერტილი, ე.ი. ისეთი y წერტილი, რომ $(y, y') \in R_S$.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, y' შედეგს ეწოდება სუსტად ეფექტური, თუ ის არ შეიძლება გაუმჯობესდეს ყველა m კრიტერიუმით, რომლებიც მოიცემა სარგებლიანობის $f_i(y)$, $i = 1, \ldots, m$ ფუნქციებით. Y სიმრავლის ყველა სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილების სიმრავლე აღინიშნება $S_f(Y)$ ან $S(Y)$-ით და ეწოდება (1.2.1) ამოცანის სლეიტერის სიმრავლე.

ცხადია, $S(Y) \subseteq Y$ და $P(Y) \subseteq S(Y)$. წინა შემთხვევის მსგავსად აღვნიშნოთ $S(f) = f(S(Y))$ და მას, სუსტად ეფექტური შეფასებების სიმრავლე ან კრიტერიალურ სივრცეში სლეიტერის სიმრავლე ვუწოდოთ.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებები ნაკლებ საინტერესოა, ვიდრე ეფექტური გადაწყვეტილებების სიმრავლე, თუმცა მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანებში იგი საკმაოდ ხშირად გამოიყენება.

ისევე, როგორც არჩევის (გადაწყვეტილების) სკალარულ ამოცანაში, მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნის მიზანია დომინირების R_P მიმართების ანუ პარეტოს მიმართების გულის პოვნა. ამ შემთხვევაში,

$$P(Y) = \max_{R_P} Y$$

და მას აქვს გარეგანი მდგრადობის თვისება.

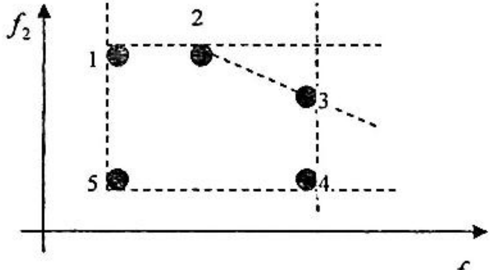
ამრიგად, როგორც ერთკრიტერიუმიან, ისე მრავალკრიტერიუმიან შემთხვევაში, სარგებლიანობის ფუნქციებით შედეგების ხარისხის ანუ სარგებლიანობების შეფასებისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ უპირატესობათა განსხვავებული სისტემები, რომლებიც გამოისახება ბინარული მიმართებებით. ამასთან, გულის აგების ამოცანა სარგებლიანობის სკალარული ფუნქციის შემთხვევაში იქნება ამ ფუნქციის მაქსიმუმის არგუმენტების სიმრავლის პოვნის ეკვივალენტური, ხოლო გულის აგების ამოცანა სარგებლიანობის ვექტორული ფუნქციის შემთხვევაში - მისი მაქსიმუმის პარეტოს სიმრავლის პოვნის ეკვივალენტური.

ამოცანა **1.2.1.** ვთქვათ, მოცემულია ორკრიტერიუმიანი ამოცანა შედეგების $Y=\{y_1,y_2,...,y_5\}$ სიმრავლეზე:

$$f(y)=(f_1(y),f_2(y))\to\max_Y .$$

ავაგოთ მისი გული.

y_i $(i=1,...,5)$ წერტილთა სახეები (f_1,f_2) კრიტერიალურ სივრცეში აღვნიშნოთ ამ წერტილთა შესაბამისი ინდექსებით და ვიგულისხმოთ, რომ მას აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 1.2.2):

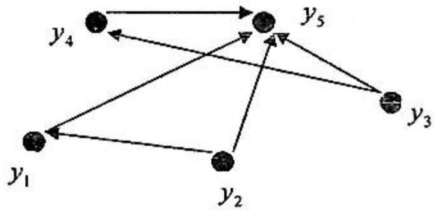


ნახ. 1.2.2.

მოცემულ შემთხვევაში, პარეტოს დომინირების განსაზღვრით შეგვიძლია ავაგოთ თვით R_P მიმართება

$$R_P = \{(y_2, y_1), (y_1, y_5), (y_2, y_5), (y_4, y_5), (y_3, y_5), (y_3, y_4)\}$$

და მისი გრაფი (ნახ. 1.2.3):



ნახ. 1.2.3.

აქედან, გრაფის ანალიზით განვსაზღვრავთ გულს:

$$\max_{R_P} Y = \{y_2, y_3\}.$$

1.3. მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა

განვიხილოთ: ალტერნატივების სიმრავლე X, შედეგების სიმრავლე Y, ვექტორული კრიტერიუმი ანუ სარგებლიანობის ვექტორული ფუნქცია $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, რომლის ყოველი კრიტერიუმი $f_i : Y \to R^1$, $i = 1, \dots, m$ აფასებს შედეგის ხარისხს, $\varphi : X \to Y$ დეტერმინირებული ფუნქცია, რომელიც ალტერნატივების სიმრავლეს შედეგების სიმრავლეში გადასახავს.

აქ ვგულისხმობთ, რომ ყოველ $x \in X$ გადაწყვეტილებას $y = \varphi(x)$ წესით შეესაბამება ერთადერთი შედეგი $y \in Y$. y შედეგის და ამით მისი შესაბამისი x გადაწყვეტილების ხარისხი ანუ სარგებლიანობა m

რიცხვით ფასდება f_i $(i=1,...,m)$ ფუნქციების საშუალე-ბით. ასევე, იგულისხმება, რომ უნდა ვიპოვოთ ყველა f_i-ის მაქსიმუმი.

განვიხილოთ სუპერპოზიცია

$$J_i(x)=f_i(\varphi(x)), \quad i=1,...,m,$$

რომლის საშუალებით შეგვიძლია უშუალოდ შევაფასოთ თვით x გადაწყვეტილების სარგებლიანობა. მათგან შევა-დგინოთ ვექტორული ფუნქცია

$$J: X \to R^m, \; J(x)=(J_1(x),...,J_m(x)), \; J(X)\equiv F\subset R^m$$

და ძირითადი ასახვის როლში განვიხილოთ ფუნქცია

$$J: X \to F.$$

პრაქტიკულ ამოცანებში J ასახვა უშუალოდ მო-იცემა და ითვლება, რომ $Y=F$, ანუ შედეგების როლში განიხილება თვით J_i $(i=1,...,m)$ შეფასებები. ამის შედე-გად, ვღებულობთ გადაწყვეტილებათა მიღების მრავალ-კრიტერიუმიან მოდელს ანუ მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანას შემდეგი სახით:

$$J_i(x)\to \max_X, \; i=1,...,m, \; X\subset R^n,$$

რომელსაც, სხვანაირად ასე ჩავწერთ:

$$J(x)=(J_1(x),...,J_m(x))\to \max_X, \; X\subset R^n.$$

აქ $X\subset R^n$ ჩანაწერში იგულისხმება, რომ ყველა ალტერნატივა ანუ გადაწყვეტილება პარამეტრიზებულია და თითოეულ გადაწყვეტილებას შეესაბამება წერტილი $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$.

შენიშვნა. გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$J_i(x)\equiv f_i(x), \; J(x)\equiv f(x)$$

და X სიმრავლეს ვუწოდებთ გადაწყვეტილებათა დასაშ-ვებ სიმრავლეს.

აქედან დაწყებული, მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმი-ზაციის ძირითად ამოცანას განვიხილავთ შემდეგი სახით:

$$f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))\to \max_X, \; X\subset R^n, \qquad (1.3.1)$$

რომელშიც იგულისხმება, რომ

$$f_i(x) \to \max_X, \ \ f_i : X \to R^1, \ \ i = 1,...,m.$$

აქ, $X \subset R^n$ ანუ ოპტიმალურ x მნიშვნელობას (გადაწყვეტილებას) ვეძებთ n-განზომილებიანი R^n სივრცის რომელიღაც X ქვესიმრავლეში.

(1.3.1) ამოცანის ამოხსნისათვის გვესაჭიროება: პარეტოს პრინციპი და მასთან დაკავშირებული ეფექტური (პარეტოს ოპტიმალური) და სუსტად ეფექტური (სლეიტერის ოპტიმალური) გადაწყვეტილებების ცნებები, მათი შესაბამისი სიმრავლეთა აგების რიცხვითი მეთოდები.

ქვემოთ განვიხილავთ მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ზოგიერთ მეთოდს, რომელთა მეშვეობით (1.3.1) ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება მის რომელიმე ერთკრიტერიუმიან ვერსიაზე.

1.4. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა წრფივი ნახვევის მეთოდით

როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ძირითად ამოცანაში ვგულისხმობთ მაქსიმუმის ამოცანას ალტერნატივების დასაშვებ $X \subset R^n$ სიმრავლეზე და მას აქვს სახე

$$f(x) = (f_1(x),..., f_m(x)) \to \max_X. \qquad (1.4.1)$$

მისი ამოხსნისათვის ვიყენებთ პარეტოს პრინციპს და ამონახსნში ვგულისხმობთ ამ პრინციპთან დაკავშირებულ ეფექტურ (პარეტოს ოპტიმალურ) და სუსტად ეფექტურ (სლეიტერის ოპტიმალურ) გადაწყვეტილებებს (ვექტორების სახით მოიცემა). ამისათვის ჩამოვაყალიბოთ ასეთი გადაწყვეტილებების განსაზღვრება ალტერნატივებისათვის (ზემოთ ჩამოყალიბებული გვაქვს შედეგებისათვის).

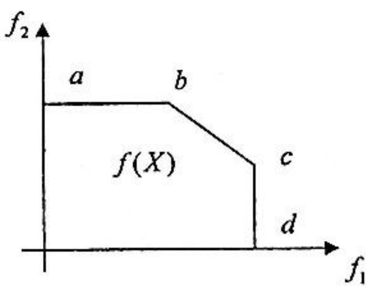
(1.4.1) ამოცანისათვის $x^0 \in X$ გადაწყვეტილების (ან ვექტორის) ეფექტურობა ანუ პარეტოს ოპტიმალურობა აღნიშნავს, რომ იგი არ შეიძლება გაუმჯობესდეს რომელიმე f_i კრიტერიუმით ისე, რომ სიტუაცია არ გაფუჭდეს

დანარჩენი კრიტერიუმებით. მაშასადამე, x^0 ეფექტურია ანუ იგი ოპტიმალურია, თუ არ არსებობს სხვა გადაწყვეტილება $x^{'} \in X$, რომლისთვისაც შესრულდება უტოლობები

$$f_i(x^{'}) \geq f_i(x^0), \ i = 1,...,m,$$

რომელთაგან ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია. ანალოგიურად, სუსტად ეფექტურში ან სლეიტერის ოპტიმალურში იგულისხმება გადაწყვეტილება, რომელიც არ შეიძლება გაუმჯობესდეს ერთდროულად ყველა კრიტერიუმით.

ამ სიმრავლეების თვალსაჩინოდ გამოსახვისათვის ვ-გულისხმობთ, რომ X სიმრავლის $f = (f_1,...,f_m)$ ვექტორული ასახვის სახე ანუ ვექტორული მნიშვნელობების მიღწევადი სიმრავლეა $f(X)$. მაშინ ორკრიტერიუმიანი (1.4.1) ამოცანისათვის 1.4.1 ნახაზზე მოცემული $f(X)$ სიმრავლის ჩრდილოეთ, ჩრდილო-აღმოსავლეთ და აღმოსავლეთ საზღვრების ნაწილები შეესაბამება სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებებს, ხოლო ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვარი - ეფექტურ გადაწყვეტილებებს. მაშასადამე, სუსტად ეფექტური შეფასებების სიმრავლე ანუ სლეიტერის სიმრავლე $S(f)$ ემთხვევა სიმრავლეს $[a,b] \cup [b,c] \cup [c,d]$. პარეტოს შეფასებების სიმრავლე $P(f)$ არის $[b,c]$ ანუ $f(X)$-ის ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვარი



ნახ. 1.4.1.

სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანისაგან განსხვავებით, მრავალკრიტერიუმიანი (1.4.1) ამოცანის ამოხსნისას წარმოიშობა დამატებითი სირთულეები, რომლებიც დაკავშირებულია გმპ-საგან ინფორმაციების მიღებაზე. პირველი ბუნებრივი რეაქცია ასეთი სირთულეების დაძლევისათვის გამოიხატება იმაში, რომ მოვიცილოთ მრავალკრიტერიანობა და გავაერთიანოთ ეს კრიტერიუმები ერთ გლობალურ კრიტერიუმში, ე.წ. კრიტერიუმების საჭიროებების წონითი კოეფიციენტების საშუალებით.

სწორედ ასეთი მეთოდი წარმოადგენს (1.4.1) ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ ძირითად მეთოდს, რომლითაც ვექტორული კრიტერიუმი $f=(f_1,\ldots,f_m)$ "დაიხვევა" ერთ სკალარულ $J:X\to R^1$ კრიტერიუმად. მას ჰქვია წრფივი ნახვევის მეთოდი და იგი სკალირების ერთ-ერთი მეთოდია. ამ მეთოდში შემოდის კერძო მიზნობრივი $f_1,\ldots,f_m$ ფუნქციების, ანუ ჩვენს შემთხვევაში, ფუნქციონალების (რომლებიც X სიმრავლეს ასახავენ ნამდვილ რიცხვთა R^1 სიმრავლეში) შესაბამისი წონითი $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ კოეფიციენტები, რომელთა შინაარსში იგულისხმება შესაბამისი კრიტერიუმების შედარებითი მნიშვნელობის მაჩვენებლები და მათი საშუალებით განისაზღვრება სკალარული ფუნქციონალი - გლობალური კრიტერიუმი წრფივი ნახვევის სახით

$$J(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)\,,\ \alpha_i>0\,(i=1,\ldots,m),\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\,. \qquad (1.4.2)$$

აქვე აღვნიშნავთ, რომ მიღებული გლობალური კრიტერიუმის მაქსიმუმით ვღებულობთ (1.4.1) ამოცანის მხოლოდ ეფექტურ შეფასებას და გადაწყვეტილებას.

(1.4.2) ნახვევში რაც მეტ მნიშვნელობას მივანიჭებთ f_i კრიტერიუმს, მით მეტი წვლილი ექნება მას მოცემულ ჯამში და, მაშასადამე, მით მეტი წონა α_i უნდა ჰქონდეს. თუ კრიტერიუმები ახასიათებს არსებითად განსხვავებულ მაჩვენებლიან ობიექტებს ან მოვლენებს, მაშინ საკმაოდ რთულია მათი საბოლოო წონითი კოეფიციენტების შერ-

ჩევა, რაც ზოგადად, ხორციელდება არაფორმალური მოსაზრებებიდან გამომდინარე.

ამავე თავის ბოლო პარაგრაფში შევისწავლით (1.4.1) ამოცანის წრფივი ნახვევის ერთ მეთოდს, რომელშიც წონითი კოეფიციენტები განისაზღვრება არა თავიდან, არამედ ამოცანის ანალიზიდან გამომდინარე.

ჩამოვაყალიბოთ ზუსტი დებულება, რომელიც ახასიათებს (1.4.2) გლობალური კრიტერიუმის მაქსიმუმის ამოცანის ამოხსნით მიღებულ ამონახსნს.

თეორემა 1.4.1. ვთქვათ,

$$A = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \mid \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}$$

წონითი ვექტორების სიმრავლეა, ხოლო $\alpha \in A$ მუდმივია, მაშინ

$$F(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_X \tag{1.4.3}$$

ამოცანის ამონახსნი არის (1.4.1) ამოცანის ეფექტური ანუ პარეტოს ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x^0 \in X$ არის (1.4.3) ამოცანის ამონახსნი და არსებობს ისეთი $x' \in X$, რომ სრულდება უტოლობები $f_i(x') \geq f_i(x^0)$, $i = 1, ..., m$, ხოლო $i = i_0$-სთვის $f_{i_0}(x') > f_{i_0}(x^0)$. მაშინ ამ უტოლობების $\alpha_i > 0$ $(i = 1, ..., m)$ სიდიდეებზე გამრავლებით და შეკრებით, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x') > \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x^0).$$

ეს ნიშნავს, რომ x^0 არ ანიჭებს მაქსიმუმს F ფუნქციონალს. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ ასეთი წერტილი $x' \in X$ მითითებული თვისებებით არ არსებობს და ამიტომ, x^0 ეფექტური გადაწყვეტილებაა. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1.4.1. ამ თეორემის საწინააღმდეგო მტკიცებულება დამატებითი მოთხოვნის გარეშე არასწორია. მაშასადამე, არსებობს (1.4.1) ამოცანის ეფექტური გადაწყვეტილება, რომელიც არ იქნება (1.4.3) ამოცანის ამონახსნი არც ერთი $\alpha \in A$ -სთვის.

ამ ფაქტის სისწორეს ვაჩვენებთ მაგალითის საშუალებით.

ამრიგად, დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\text{თუ } X(\alpha) = Arg\max_X F(x,\alpha), \text{ მაშინ } \bigcup_{\alpha \in A} X(\alpha) \subseteq P(X).$$

ახლა განვიხილოთ (1.4.1) და, შესაბამისად, (1.4.3) ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ორი კრიტერიუმის შემთხვევაში. ამრიგად, გვაქვს ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \to \max_X .$$

ამ შემთხვევაში,

$$F(x,\alpha) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv \Phi(f_1, f_2),$$

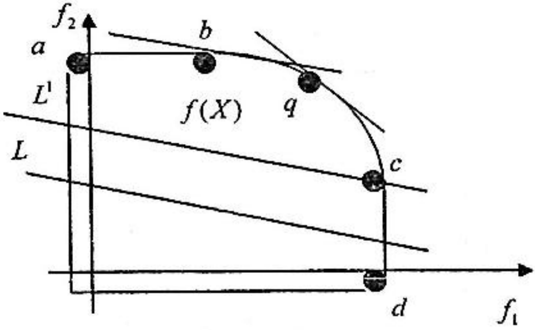
სადაც Φ ფუნქცია განსაზღვრულია (f_1, f_2) კრიტერიუმების სივრცეში. ავაგოთ Φ ფუნქციის დონის წირები:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = const, \tag{1.4.4}$$

სადაც $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in A$ მუდმივი წონითი ვექტორია მოცემულ პირობებში. (1.4.4) იგივეა, რაც

$$f_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1 + const$$

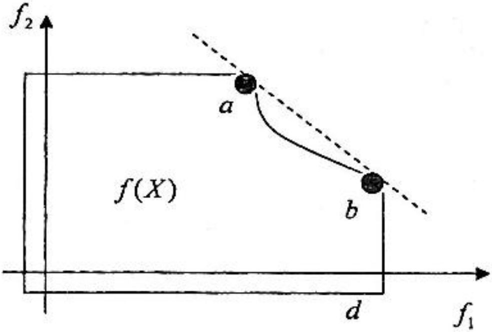
წრფეები განსხვავებული const სიდიდეებისათვის, რომელთა კუთხური კოეფიციენტები $(-\alpha_1/\alpha_2)$ მუდმივებია. მათი გრაფიკები ანუ Φ-ის დონის წირები, მოცემულია 1.4.2 ნახაზზე.



ნახ. 1.4.2.

(1.4.4) განტოლების მარჯვენა მხარეს const სიდიდის გაზრდით შესაბამისი წრფე L-ის პარალელურად ზემოთ გადაადგილდება. ამიტომ Φ ფუნქციის და, მასთან ერთად, F-ის მაქსიმუმი მიიღწევა ყველაზე ზედა დონის წირისა და $f(X)$-ის საზღვრის შეხების და არა გადაკვეთის წერტილში (დონის წირი საზღვართან შეხების წერტილში მხებია). მაგალითად, 1.4.2 ნახაზზე b წერტილი (f_1^b, f_2^b) კოორდინატებით წარმოადგენს ჩვენი მეთოდით ეფექტურ შეფასებას. ნახაზზე ადვილი შესამჩნევია, რომ $[a,b)$ და $(c,d]$ მონაკვეთები არის სუსტად ეფექტური და არა ეფექტური შეფასებები; ვერც ერთ წერტილში ვერ მოხდება Φ ფუნქციის რომელიმე დონის წირის შეხება, რადგან ასეთი წრფის კუთხური კოეფიციენტი $(-\alpha_1/\alpha_2)$ არ შეიძლება იყოს ნული ან უსასრულო. რაც შეეხება b, q და c წერტილებს, აქ აუცილებლად მოხდება დონის წირების შეხება სხვა წონითი ვექტორებისათვის. მაშასადამე, α ვექტორების შერჩევის ხარჯზე შეგვიძლია მივიღოთ $P(f)$ და $P(X)$ სიმრავლეების საკმაოდ ზუსტი აპროქსიმაცია.

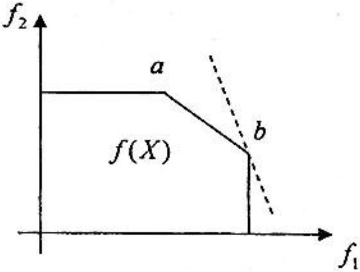
1.4.1 შენიშვნის მართებულობას ავხსნით შემდეგი ნახაზის (ნახ. 1.4.3) საშუალებით



ნახ. 1.4.3.

აქ, ab რკალის ყოველი წერტილი არის ორკრიტერიუმიანი $f(x)=(f_1(x),f_2(x))\to\max\limits_X$ ამოცანის ეფექტური შეფასება; მაგრამ არც ერთი მათგანი, გარდა a და b წერტილებისა, არ შეიძლება იყოს Φ ფუნქციის დონის წირი $f(X)$ სიმრავლესთან რომელიმე $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in A$ ვექტორისათვის, რაც (1.4.3) ამოცანის ამოხსნით უნდა მომხდარიყო. ეს კი გამოიწვია იმ გარემოებამ, რომ $f(X)$ სიმრავლე არაა ამოზნექილი. მაშასადამე, $f(X)$-ის არაამოზნექილობას მივყავართ წრფივი ნახვევის მეთოდის არაეფექტურობასთან და ამით 1.4.1 შენიშვნის მართებულობა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1.4.2. თუ თავიდან ვიცით $f_1,\dots,f_m$ კრიტერიუმების შეფასებები საჭიროების მიხედვით, ხშირად, წრფივი ნახვევის მეთოდში წონითი ვექტორის არჩევით გვინდა ვაჩვენოთ მოცემული შეფასების ან მოცემული გადაწყვეტილების ეფექტურობა. ამ გზას კი ყოველთვის არ მივყავართ მიზანთან. ვთქვათ, ისევ ორკრიტერიუმიან ამოცანაში f_2 არსებითად უპირატესია f_1-ზე და გვინდა ერთადერთ ეფექტურ შეფასებად მივიღოთ a წერტილი (ნახ. 1.4.4).



ნახ. 1.4.4.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, α_2 კოეფიციენ-ტი მეტი უნდა იყოს α_1-ზე, მაგრამ არ ვიცით რამდენჯერ, რათა მივიღოთ ზუსტად a. შესაძლოა მივიღოთ სიტუაცია, როცა ავიღებთ რაგინდ დიდ $\alpha_2 > \alpha_1$, მაგრამ Φ ფუნქციის დონის წირი ეხება b-ს და, მაშასადამე, ამოცანის ეფექტურ შეფასებად ასეთი წონითი $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$-სთვის მივიღეთ b წერტილი და არა a.

1.5. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა მაქსიმინური ნახვევის მეთოდით

ეს მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \to \max_{x} \qquad (1.5.1)$$

ამოცანის სუსტად ეფექტური შეფასებები და გადაწყვეტილებები (შესაძლოა ისინი შეიცავდნენ პარეტოს ეფექტურ შეფასებებს და გადაწყვეტილებებს). ამისათვის, პირველ რიგში, დავამტკიცოთ ძირითადი თეორემა.

თეორემა 1.5.1. განვიხილოთ m დადებითი რიცხვი $\alpha_i > 0, \quad i = 1, ..., m$. მაშინ შემდეგი ამოცანის

$$\min_i \alpha_i (f_i(x) - t_i) \to \max_X \qquad (1.5.2)$$

ამონახსნი x^0 ფიქსირებული t_i, $i=1,...,m$ სიდიდეებისათვის იქნება (1.5.1) ამოცანის სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება. პირიქით, (1.5.1) ამოცანის ნებისმიერი სუსტად ეფექტური ვექტორი x^0 შეიძლება (1.5.2) ამოცანის ამოხსნით მივიღოთ ზოგიერთი $\alpha_i > 0$ და $t_i < f_i(x^0)$, $i=1,...,m$ სიდიდეებისათვის.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემის პირველი ნაწილი წინააღმდეგობის დაშვებით. ვთქვათ, x^0 არის (1.5.2) ამოცანის ამონახსნი, მაგრამ იგი არ არის (1.5.1) ამოცანის სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $x' \in X$ ვექტორი, რომლისთვისაც

$$f_i(x') > f_i(x^0), \quad i=1,...,m,$$

ანუ x^0 გაუმჯობესდა ყველა კრიტერიუმით. მაშინ, ცხადია, ნებისმიერი დადებითი $\{\alpha_i > 0\}$ და $\{t_i\}$ რიცხვებისათვის წინა უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\alpha_i(f_i(x') - t_i) > \alpha_i(f_i(x^0) - t_i), \ i=1,...,m$$

და, მაშასადამე,

$$\min_i \alpha_i(f_i(x') - t_i) > \min_i \alpha_i(f_i(x^0) - t_i).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ x^0 ვერ იქნება (1.5.2) ამოცანის ამონახსნი, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ, x^0 არის (1.5.1) ამოცანის სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება - $x^0 \in S(X)$. მაშასადამე, არ არსებობს სხვა ვექტორი $x' \in X$, რომლისთვისაც

$$f_i(x') > f_i(x^0), i=1,...,m. \tag{1.5.3}$$

თეორემის პირობების მიხედვით განვიხილოთ ისეთი $\{t_i\}$ სიდიდეე-ბი, რომ $f_i(x^0) - t_i > 0$, $i=1,...,m$ და აღვნიშნოთ

$$\alpha_i' = \frac{1}{f_i(x^0) - t_i} > 0, \quad i=1,...,m.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა:

$$\max_X \min_i \alpha_i'(f_i(x)-t_i)=\min_i \alpha_i'(f_i(x^0)-t_i)=1, \quad (1.5.4)$$

რაც ნიშნავს, რომ ასე შერჩეული α_i' კოეფიციენტებისათვის მაქსიმუმი მიიღწევა x^0-ზე და ამით თეორემა ჩაითვლება დამტკიცებულად.

(1.5.3)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x' \neq x^0$ ვექტორისათვის იარსებებს ისეთი ნომერი $i=i_0$, რომლისთვისაც $f_{i_0}(x') \leq f_{i_0}(x^0)$. აქედან ვღებულობთ

$$\alpha_{i_0}'(f_{i_0}(x')-t_{i_0}) \leq \alpha_{i_0}'(f_{i_0}(x^0)-t_{i_0})=1$$

და

$$\min_i \alpha_i'(f_i(x')-t_i) \leq 1.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $x' \neq x^0$-სთვის

$$\min_i \alpha_i'(f_i(x')-t_i) \leq \min_i \alpha_i'(f_i(x^0)-t_i)=1$$

და, მაშასადამე, ამ პირობებში მარცხენა მხარის მაქსიმუმი x'-ით ვერ იქნება 1-ზე მეტი. ამით (1.5.4) ტოლობა და, მასთან ერთად, 1.5.1 თეორემაც დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1.5.1. თუ (1.5.4) ამოცანის სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება მიღებულია (1.5.2) ამოცანის ამოხსნით $\alpha_1>0,\ldots,\alpha_m>0$ კოეფიციენტებისათვის, მაშინ, ცხადია, იგივე გადაწყვეტილება მიიღება $k\alpha_1,\ldots,k\alpha_m$ კოეფიციენტებისთვისაც, სადაც $k>0$ ნებისმიერია. ამიტომ ჩავთვლით, რომ მათთვის ყოველთვის სრულდება ნორმირების პირობა $\alpha_1+\ldots+\alpha_m=1$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, α_i-ს ნაცვლად განვიხილავთ

$$\bar{\alpha}_i=\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i}.$$

დამტკიცებული თეორემიდან გავაკეთოთ ზოგიერთი დასკვნა. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $f_1,\dots,f_m$ ფუნქცია გადაწყვეტილებათა დასაშვებ X სიმრავლეზე დადებითია: $\forall x\in X, f_i(x)>0,\ i=1,\dots,m$. მაშინ ნებისმიერი $x^0\in S(X)$-სთვის შესრულდება $f_i(x^0)>t_i$ პირობები, როცა $t_i=0,\ i=1,\dots,m$. ამიტომ (1.5.2) ამოცანის მაგივრად განვიხილავთ მის კერძო შემთხვევას:

$$F_1(x,\alpha)\equiv\min_i \alpha_i f_i(x)\to\max_X, \tag{1.5.5}$$

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m), x=(x_1,\dots,x_n).$$

ფიქსირებული α-სთვის (1.5.5) ამოცანის ამონახსნთა სიმრავლე აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$X(\alpha)\equiv Arg\max_X F_1(x,\alpha).$$

1.5.1 თეორემის თანახმად, სიმრავლე

$$\bigcup_{\alpha\in A}X(\alpha),\ \text{სადაც}\quad A=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\mid \alpha_i>0,\sum_{i=1}^m\alpha_i=1\}$$

ემთხვევა (1.5.1) ამოცანის სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებათა სიმრავლეს

$$\bigcup_{\alpha\in A}X(\alpha)=S(X). \tag{1.5.6}$$

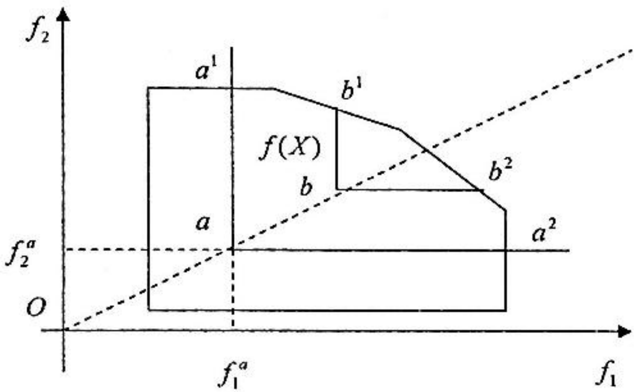
(1.5.6) ტოლობა გეომეტრიულად ავხსნათ ორკრიტერიუმიანი $f(x)=(f_1(x),f_2(x))\to\max\limits_X$ ამოცანისათვის. ამ შემთხვევაში, გვაქვს

$$F_1(x,\alpha)\equiv\min\{\alpha_1 f_1(x),\alpha_2 f_2(x)\}.$$

ეს დამოკიდებულება კრიტერიუმების სივრცეში გვაძლევს შემდეგ ფუნქციას:

$$\Phi_1(f_1(x),f_2(x))=\min\{\alpha_1 f_1(x),\alpha_2 f_2(x)\}.$$

ავაგოთ Φ_1 ფუნქციის მუდმივი მნიშვნელობების წრფეები - დონეთა წირები f_1Of_2 სიბრტყეზე. ამისათვის განვიხილოთ $\alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2$ განტოლებით განსაზღვრული L წრფე $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$-სთვის. ამ წრფის განტოლებაა $f_2 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1$ და ავაგოთ იგი (ნახ. I.5.1).



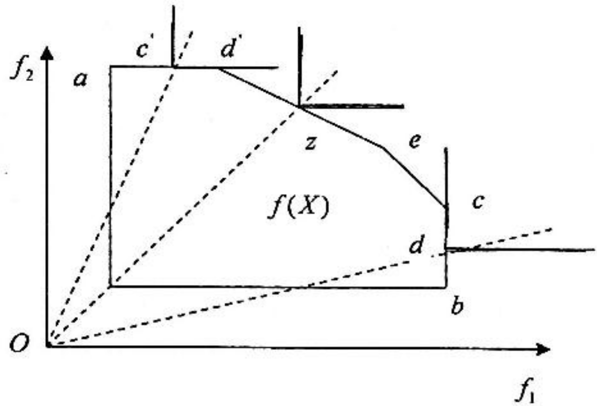
ნახ. I.5.1.

L წრფის ნებისმიერ წერტილში, მაგალითად, $a = (f_1^a, f_2^a)$ წერტილში გვაქვს $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$. a წერტილის მარჯვნივ aa^2 წრფის გასწვრივ $\alpha_1 f_1 > \alpha_2 f_2^a$ და ანალოგიურად aa^1 წრფის გასწვრივ ზემოთ $\alpha_2 f_2 > \alpha_1 f_1^a$. ამიტომ, Φ_1 ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, $\Phi_1 = \alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$ მნიშვნელობის შესაბამისი მისი დონის წირი a წერტილში წვეროთი $a^1 a a^2$ დაემთხვევა კუთხის გვერდებს (იგულისხმება $f(X)$ სიმ-

რავლის საზღვრებში). მაშასადამე, $[a,a^1]$ და $[a,a^2]$ მონაკვეთების ყოველ წერტილში Φ_1 ფუნქცია ღებულობს ეროსა და იმავე მნიშვნელობას, რომელიც ემთხვევა მის მნიშვნელობას ამ "კუთხის" a წვეროში და იგი ტოლია $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$.

ნებისმიერი ასეთი ტიპის "კუთხე" ანუ იმ კუთხის გვერდები, რომლის წვერო მოთავსებულია L წრფეზე, ასევე იქნება დონის წირი, რომელიც შეესაბამება Φ_1 ფუნქციის მნიშვნელობას. ამავე დროს, რაც უფრო დაშორდებით L წრფეზე კოორდინატთა სისტემის სათავეს ჩრდილო-აღმოსავლეთ მიმართულებით, ჩვენ მივიღებთ დონის წირს, რომელიც Φ_1-ის უფრო მეტ მნიშვნელობას შეესაბამება. მაგალითად, 1.5.1 ნახაზზე დონის b^1bb^2 წირისათვის, რომელიც შედგება $[b,b^1]$ და $[b,b^2]$ მონაკვეთებისაგან, გვაქვს მეტობა $\Phi_1(b) > \Phi_1(a)$. ამრიგად, ფიქსირებულ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$-ს შეესაბამება Φ_1 ფუნქციის ე.წ. "კუთხური" დონის წირები.

აქედან გამომდინარე ცხადია, კერძო (1.5.5) ამოცანის ამონახსნს ანუ მაქსიმინს $f(X)$ სიმრავლეში შეესაბამება კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ყველაზე მეტად დაშორებული "კუთხე", რომელიც განისაზღვრება Φ_1-ის ანუ F_1-ის მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობით. მაგალითად, რომელიმე კონკრეტული $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$-სთვის (1.5.5)-ის ამოხსნით შეგვიძლია მივიღოთ სუსტად ეფექტური შეფასებების $[d,c]$ სიმრავლე (ნახ. 1.5.2).



ნახ. 1.5.2.

1.5.2 ნახაზზე სხვა $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$-სთვის მიეიღებთ $[c',d']$ სუსტად ეფექტურ შეფასებებს, ხოლო კიდევ სხვა $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ გვაძლევს პარეტოს z შეფასებას ჩრდილო-აღმოსავლეთ $[e,d']$ მონაკვეთზე. თუ ასე გავაგრძელებთ (1.5.5)-ის ამოხსნას ყველა შესაძლო $\alpha\in A$ წონითი ვექტორისათვის, მიეიღებთ $f(X)$ სიმრავლის ჩრდილოეთ, ჩრდილო-აღმოსავლეთ და აღმოსავლეთ საზღვრებს ანუ (1.5.1) ამოცანის ოპტიმალურ შეფასებებს:

$$S(f)=[a,d']\cup[d',e]\cup[e,c]\cup[c,b].$$

სწორედ ესაა დამტკიცებული 1.5.1 თეორემის ძირითადი შინაარსი. მიღებული შეფასებების საშუალებით ვიპოვით შესაბამის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებებს: ეფექტურს და სუსტად ეფექტურს. ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ოპტიმიზაციის (1.5.5) ამოცანას, ზოგადად, არ აქვს ერთადერთი ამონახსნი (როგორც შეფასება, ისე გადაწყვეტილება). ისინი მიიღება განსხვავებული α ვექტორებისათვის. ამიტომ, (1.5.5) ამოცანის ამოხსნა გულისხმობს ყველა შეფასების და, შესაბამისად, ყველა გადაწყვეტილების პოვნას.

აქედან გამომდინარე კი, მაქსიმინური ნახვევის საფუძველზე, (1.5.5) ამოცანის ამოსახსნელად წონითი ვექტორების A სივრცეში გვჭირდება გარკვეული ბადის მოცემა. ვთქვათ, იგი მოიცემა A სიმრავლის სასრული $\alpha^1 = (\alpha_1^1,...,\alpha_m^1),...,\alpha^r = (\alpha_1^r,...,\alpha_m^r)$ ქვესიმრავლით. მათი გამოყენებით ამოვხსნით შესაბამის ერთკრიტერიუმიან (1.5.5) ან (1.5.2) ამოცანას. ასე ავაგებთ $S(X)$ და $S(f)$ სიმრავლეთა აპროქსიმაციებს. მათი აგების პროცესის მართვა შესაძლებელია აღებული ბადის ცვლილებით, რითაც შეიძლება მივაღწიოთ ჩვენთვის საინტერესო ცალკეული საზღვრების უფრო ზუსტ აპროქსიმაციებს.

1.6. მაქსიმინური კრიტერიუმის მეთოდი და მისი გამოყენება ფუნქციონალურ უტოლობათა სისტემის ამოხსნისათვის

წინა პარაგრაფში მაქსიმინური ნახვევის მეთოდმა მოგვცა მისი კერძო შემთხვევა (1.5.5) მოდელის სახით, რომელიც გვაძლევს მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის სუსტად ეფექტურ შეფასებებს და გადაწყვეტილებებს. ასეთ ამოცანამდე მივყავართ, აგრეთვე, შემდეგი ერთკრიტერიუმიანი ამოცანის მოდელს

$$J(x) = \min_i f_i(x) \to \max_X , \qquad (1.6.1)$$

რომელსაც მაქსიმინური კრიტერიუმის მეთოდი ეწოდება.

აქ წრფივი ნახვევის მეთოდისაგან განსხვავებით, x წერტილში მიზნის $J(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობაზე გავლენას ახდენს მხოლოდ ის კერძო $f_i(x)$ კრიტერიუმი, რომელსაც იმავე მოცემულ x წერტილში აქვს უმცირესი მნიშვნელობა. თუ წრფივი ნახვევის (1.4.3) ამოცანაში, საზოგადოდ, დასაშვებია ზოგიერთი f_i-ს ცუდი მნიშვნელობები სხვა f_j-ს საკმაოდ კარგი მნიშვნელობების სანაცვლოდ, $J(x)$-ის მნიშვნელობით ყველა $f_i(x)$ ფუნქცი-

ონალისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ გარანტირებული ქვედა შეფასება. ამ ფაქტის გამო, მაქსიმინური კრიტერიუმის მეთოდი უპირატესია წრფივი ნახვევის მეთოდთან შედარებით.

ცალკეული $f_i(x)$ $(i=1,...,m)$ კრიტერიუმების მნიშვნელობების საერთო მასშტაბში გაზომვისათვის ვახდენთ მათ ნორმირებას, რისთვისაც ვიყენებთ მაქსიმინური კრიტერიუმის აწონილ ფორმას

$$J(x)=\min_i \alpha_i f_i(x) \to \max_X , \tag{1.6.2}$$

სადაც წონითი α_i კოეფიციენტები აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს: $\alpha_i > 0 (i=1,...,m), \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

აპრიორული ინფორმაციის გამოყენებით და სათანადო α_i მნიშვნელობების შერჩევით, შეგვიძლია გარკვეულწილად ვიმოქმედოთ ოპტიმიზაციის პროცესზე. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 1.6.1 (ფუნქციონალურ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა). ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანებში ოპტიმალური პარამეტრების შერჩევისათვის ხშირად გამოიყენება შემდეგი სახის ფუნქციონალურ უტოლობათა სისტემა:

$$y_i(x) \le t_i, \quad i=1,...,m . \tag{1.6.3}$$

აქ, $y_i(x)$ ფუნქცია გამოსახავს სისტემის ფუნქციონირების ხარისხის კერძო მაჩვენებელს; ცვლადებისაგან შედგენილი ვექტორი $x=(x_1,...,x_n)$ პარამეტრების ვექტორია, რომლებიც უნდა შევარჩიოთ; t_i მოცემული ხარისხის მაჩვენებლის ზედა დასაშვები საკონტროლო საზღვარია. (1.6.3) უტოლობის ფორმაზე დაიყვანება, აგრეთვე, შემდეგი ფორმის უტოლობები $z_k(x) \ge s_k$, $k=1,...,m$.

(1.6.3) უტოლობათა სისტემის ამოსახსნელად ვიყენებთ მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის მეთოდს. შემოგვაქვს ე.წ. f_i $(i=1,...,m)$ მარაგები, რომლებიც გამოსახავს უტოლობათა მოცემული სისტემის თითოეული

უტოლობის შესრულების ხარისხს. მარაგის უმარტივესი ფორმა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$f_i(x) = t_i - y_i(x), i = 1,...,m .$$

$f_i(x)$, $i = 1,...,m$ მარაგთა შეფასებებთან დაკავშირებით უნდა შესრულდეს შემდეგი: 1) იყვნენ რაც შეიძლება მაქსიმალურები ან 2) რაც შეიძლება მინიმალურები.

პირველ შემთხვევაში გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$(f_1(x),...,f_m(x)) \to \max_X , \tag{1.6.4}$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$(f_1(x),...,f_m(x)) \to \min_X . \tag{1.6.5}$$

(1.6.4) ამოცანის ამოსახსნელად შევნიშნოთ, რომ იგი ტოლფასია ყველაზე მცირე მარაგის მაქსიმუმის პოვნის ამოცანის ანუ ამოცანის, რომელიც მოიცემა მაქსიმინური კრიტერიუმის მოდელით

$$J(x) = \min_i (t_i - y_i(x)) \to \max_X . \tag{1.6.6}$$

(1.6.5) ამოცანა კი ტოლფასია მინიმაქსური კრიტერიუმის მოდელის

$$J(x) = \max_i (t_i - y_i(x)) \to \min_X .$$

განვიხილოთ მხოლოდ მაქსიმინური კრიტერიუმის (1.6.6) მოდელი.

მარაგთა წოხითი კოეფიციენტების არსებობის შემთხვევაში, (1.6.6) მიიღებს სახეს

$$J(x) = \min_i \alpha_i (t_i - y_i(x)) \to \max_X . \tag{1.6.7}$$

აქ, წონითი α_i კოეფიციენტი ასრულებს კრიტერიუმის მნიშვნელობების ნორმირების ფუნქციას, რაც შეიძლება შემდეგნაირად განხორციელდეს. ყველა უტოლობისათვის (1.6.3)-დან მოიცემა მახასიათებელი მნიშვნელობები $\delta_i > 0,...,\delta_m > 0$, რომლებიც გმპ-ის თვალსაზრისით, განსაზღვრავს კრიტერიუმების ეკვივალენტურ ნაზრდებს, რომელთაც შემდეგი შინაარსი აქვს: f_i კრიტერიუმის გა-

ზრდა δ_i-ით ისეთივე "კარგია", როგორც f_j-ს გაზრდა δ_j-ით. (1.6.7)-ის ნაცვლად მივიღებთ ამოცანას

$$J(x) = \min_i \frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \to \max_x . \qquad (1.6.8)$$

აქ თითოეული სხვაობა $t_i - y_i(x)$ იზომება $\delta_i > 0$-ით განსაზღვრული სპეციალური ერთეულით. ნორმირებისათვის δ_i-ს როლში ზოგჯერ გამოიყენება $f_i(x)$-ის მნიშვნელობა საწყის x^0 წერტილში - $f_i(x^0)$ ან $f_i(x)$-ის სხვა მნიშვნელობა, ან t_i მნიშვნელობა, თუ იგი ნულისაგან განსხვავებულია.

პარამეტრული ოპტიმიზაციის (1.6.3) სახის ამოცანებში ხშირად, ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, არაა სასურველი, რომ ზოგიერთი მაჩვენებელი, ვთქვათ, $y_1(x)$, იყოს ბევრად უფრო მცირე, ვიდრე t_1. მაშასადამე, მოითხოვება (1.6.3)-ში შესაბამისი უტოლობის შესრულება, მაგრამ მცირე მარაგით. ასეთ შემთხვევაში ვისარგებლოთ წონითი კოეფიციენტების მარეგულირებელი თვისებებით, კერძოდ, (1.6.8) ამოცანის მაგივრად ამოვხსნით შემდეგ ამოცანას:

$$J(x) = \min_i \alpha_i' \; \frac{t_i - y_i(x)}{\delta_i} \to \max_x . \qquad (1.6.9)$$

ამავდროულად, α_1' სიდიდეს ავირჩევთ ბევრად მეტს, ვიდრე α_i $(i = 2, \dots, m)$ სიდიდეებია. ასეთი დიდი α_1' კოეფიციენტის არჩევა იწვევს ერთი მხრივ, პირველი $y_1(x) \le t_1$ უტოლობის დარღვევისას ანუ როცა შესრულდება $y_1(x) > t_1$ უტოლობა, (1.6.9) ფუნქციონალის არსებით გაუარესებას; რადგან, თუ $t_1 - y_1(x) < 0$ უტოლობას გავამრავლებთ დიდ α_1'-ზე, მივიღებთ უარყოფით რიცხვს, რომლის აბსოლუტური სიდიდე საკმაოდ დიდია (მაშა-

სადამე, $J(x)$ ვერ მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას). ამრიგად, გვექნება

$$J(x)=\alpha_1' \frac{t_1 - y_1(x)}{\delta_1}.$$

მეორე მხრივ, $f_1 = t_1 - y_1(x)$ მარაგის მცირე დადებითი მნიშვნელობისათვის ის შედარებადი იქნება დანარჩენი მაჩვენებლების შრომისუნარიანობათა მარაგებთან. მაშასადამე, α_1'-ის გაზრდა იწვევს გარკვეულ მასტაბილიზებელ ფაქტორს. ამის შედეგად, შრომისუნარიანობის შესაბამისი პირობა დიდი ალბათობით შესრულდება და ამავდროულად ოპტიმალურ წერტილში იქნება მცირე დადებითი მარაგი.

1.7. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა მთავარი კრიტერიუმის მეთოდით

ამ მეთოდით ძირითადი მრავალკრიტერიუმიანი

$$f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x)) \to \max_X \tag{1.7.1}$$

ამოცანის ამოხსნისათვის მიზნის ანუ სარგებლიანობის ძირითადი ფუნქციის როლში $f_i(x)$, $i=1,\dots,m$ ფუნქციებიდან აირჩევა ერთ-ერთი, რომელიც ყველაზე სრულად ასახავს გმპ-ის თვალსაზრისს, მაგალითად, f_1. დანარჩენი მოთხოვნები საბოლოო შეფასებაზე ან გადაწყვეტილებაზე, რომლებიც შეიძლება აღიწეროს $f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმებით, გამოისახება აუცილებელი დამატებითი შეზღუდვების შემოღებით. ამრიგად, (1.7.1) ამოცანის ნაცვლად ამოვხსნით ერთკრიტერიუმიან შემდეგ ამოცანას:

$$f_1(x) \to \max_{X'},\ X' \subseteq X \subset R^n; \tag{1.7.2}$$

$$X' = \{x \in X \mid f_i(x) \geq t_i,\ i = 2,...,m\}.$$

ასე რომ, მივიღეთ უფრო მარტივი ამოცანა, რომელშიც ვეძებთ f_1 ფუნქციონალის მაქსიმუმს X-ის ახალ დასაშვებ X' ქვესიმრავლეზე. X' სიმრავლის განსაზღვრისათვის შემოვიღეთ $f_i(x) \geq t_i$ $(i = 2,...,m)$ სახის შეზღუდვები, რომლებიც გვიჩვენებს, რომ თანახმა ვართ $f_2,...,f_m$ ფუნქციონალების მაქსიმალური მნიშვნელობების ნაცვლად დავკმაყოფილდეთ მათი ქვედა მისაღები მნიშვნელობებით, რომლებსაც, ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, თავიდანვე განვსაზღვრავთ.

უნდა აღინიშნოს, რომ (1.7.1) ამოცანიდან (1.7.2) ამოცანაზე გადასვლა არ ნიშნავს ერთი ამოცანიდან მის ეკვივალენტურ ამოცანაზე გადასვლას. ადგილი აქვს თავიდან დასმული ამოცანის არსებითი ცვლილებას, რაც ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მოითხოვს დასაბუთებას.

შევნიშნოთ, რომ ასეთი დასაბუთება ყოველთვის ვერ ხერხდება, რაც შეიძლება გამოწვეული იყოს სხვადასხვა სირთულით. მაგალითად, შეიძლება არსებობდეს ერთზე მეტი მთავარი კრიტერიუმი, რომლებიც ერთმანეთთან წინააღმდეგობაშია. ასევე, ზოგჯერ გაურკვეველია t_i სიდიდეების დადგენის წესი. მათი რომელიმე კონკრეტული მნიშვნელობებით შესაძლოა X' სიმრავლე ცარიელი აღმოჩნდეს.

მთავარი კრიტერიუმის მეთოდის გამოყენებით ვღებულობთ (1.7.1) მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებას, კერძოდ, ადგილი აქვს თეორემას.

თეორემა 1.7.1. თუ (1.7.2) ამოცანაში გადაწყვეტილებათა დასაშვები სიმრავლე X' არაა ცარიელი, მაშინ მისი ამონახსნი წარმოადგენს (1.7.1) ამოცანის სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებას.

დამტკიცება. ვთქვათ, x^0 არის (1.7.2) ამოცანის ამონახსნი და იგი არ არის (1.7.1) ამოცანის სუსტად ეფექტური ვექტორი. მაშასადამე, არსებობს ისეთი $x' \in X$, რომ

$$f_i(x') > f_i(x^0), \quad i = 1,...,m. \qquad (1.7.3)$$

მაშინ $x' \notin X'$, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ როცა $x' \in X'$, უნდა შესრულდეს $f_1(x^0) \geq f_1(x')$ ნებისმიერი x'-სთვის X'-დან. ეს კი ეწინააღმდეგება (1.7.3)-ს. ამიტომ არსებობს ისეთი ნომერი $i = i_0$, რომლისთვისაც $f_{i_0}(x') < t_{i_0}$. ეს კი ეწინააღმდეგება (1.7.3) დაშვებას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.7.2. (1.7.1) ამოცანის ნებისმიერი ეფექტური გადაწყვეტილება შეიძლება მივიღოთ (1.7.2) ამოცანის ამოხსნით რომელიმე t_i, $i = 2,...,m$ სიდიდისათვის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x^0 \in P(X)$. ავიღოთ სიდიდეები $t_i = f_i(x^0)$, $i = 2,...,m$ და ვაჩვენოთ, რომ

$$f_1(x^0) = \max f_1(x), x \in X'. \qquad (1.7.4)$$

ავირჩიოთ ნებისმიერი $x' \in X'$. მაშინ X'-ის განსაზღვრის თახახმად, გვექნება

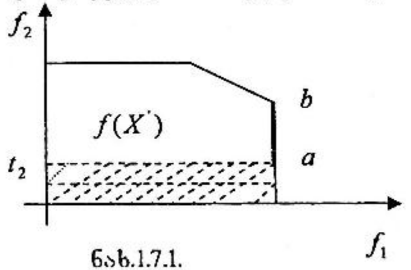
$$f_i(x') \geq f_i(x^0), \quad i = 2,...,m.$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $f_1(x') > f_1(x^0)$, მაშინ x^0 ვერ იქნება ეფექტური ვექტორი და ამიტომ $f_1(x^0) \geq f_1(x')$, რაც ტოლფასია (1.7.4)-ის. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მთავარი კრიტერიუმის როლში შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი კრიტერიუმი $f_1,...,f_m$-დან. ასეთი არჩევანისგან დამოუკიდებლად, (1.7.1) ამოცანის ნებისმიერი ეფექტური გადაწყვეტილება შეიძლება (1.7.2) ამოცანის ამოხსნით

მივიღოთ შესაბამისი t_i სიდიდეების სათანადო შერჩევისას.

მთავარი კრიტერიუმის მეთოდის არსი გეომეტრიულად ავხსნათ კონკრეტული მონაცემებისათვის (ნახ. 1.7.1).



ნახ.1.7.1.

აქ მთავარი კრიტერიუმია f_1, ხოლო f_2-ზე დადებულია მოთხოვნა $f_2 \geq t_2$. აღსანიშნავია, რომ $f(X)$ არის მთლიანი X სიმრავლის სახე და მოიცავს დაშტრიხულ და დაუშტრიხავ მრავალკუთხედებს. $f(X')$ კი არის $f_2 \geq t_2$ შეზღუდვით განსაზღვრული X' სიმრავლის სახე და მოიცავს დაუშტრიხავ ნაწილს.

f_1 კრიტერიუმის მაქსიმუმი X' სიმრავლეზე მიიღწევა $[a,b]$ მონაკვეთზე. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ განსხვავებული t_2 სიდიდეებისათვის შეგვიძლია მივიღოთ $f(X')$ სიმრავლის აღმოსავლეთ და ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვრების ნაწილთა აპროქსიმაციები, რომლებიც შეესაბამება (1.7.1) ამოცანის სუსტად ეფექტურ და ეფექტურ გადაწყვეტილებებს. თუ აქ მთავარი კრიტერიუმის როლში ავიღებდით f_2-ს, ანალოგიურად ავაგებთ ჩრდილოეთ და ჩრდილო-აღმოსავლეთ საზღვრების ნაწილებს.

1.8. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა ლექსიკოგრაფიული ოპტიმიზაციის მეთოდით

როგორც ვნახეთ, მაქსიმინური ნახვევის მეთოდით შესაძლებელია მივიღოთ სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებები, თუ $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ მიიღებს A-დან ყველა მნიშვნელობას. წრფივი ნახვევის მეთოდით კი შესაძლებელია მივიღოთ მხოლოდ ეფექტური გადაწყვეტილებები და ამასთან, არა ყველა. ა. ჯოფრიონის მიერ შემოთავაზებული იდეის თანახმად, მაქსიმინური ნახვევის მეთოდით აგებული სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილებების $S(X)$ სიმრავლიდან წრფივი ნახვევის მაქსიმუმის პროცედურით გამოიყოფა ეფექტური გადაწყვეტილებები. ამ იდეის განხორციელებით შესაძლებელია ყველა ეფექტური გადაწყვეტილების პოვნა. ა. ჯოფრიონის ეს იდეა თეორემის სახით ჩამოვაყალიბოთ დამტკიცების გარეშე და შემდეგ გავაანალიზოთ მისი შინაარსი გეომეტრიული ინტერპრეტაციის გამოყენებით.

თეორემა 1.8.1. ვთქვათ, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)\in A$. მაშინ შემდეგი ამოცანის

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)\to\max_{X_\alpha},\;\; X_\alpha = Arg\max_X\min_i \alpha_i(f_i-t_i) \quad (1.8.1)$$

ამონახსნი x^0 არის $f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))\to\max_X$ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ეფექტური გადაწყვეტილება. პირიქით, ამ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ნებისმიერი ეფექტური გადაწყვეტილება x^0 შეგვიძლია (1.8.1) ამოცანის ამოხსნით მივიღოთ რომელიმე $\alpha\in A$ ვექტორისა და $t_i<f_i(x^0)$, $i=1,...,m$ რიცხვებისათვის.

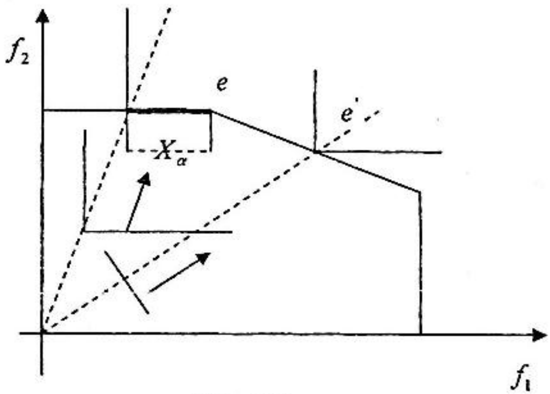
მოცემული თეორემის თანახმად, ფიქსირებული α-სთვის მაქსიმინური ნახვევით ვპოულობთ სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებათა X_α სიმრავლეს. მტკიცდება, რომ, თუ X_α არაა ცარიელი სიმრაველე, მაშინ იგი აუცი-

ლებლად შეიცავს თუნდაც ერთ ეფექტურ გადაწყვეტილე-ბას. შემდეგ, X_α სიმრავლეზე კერძო კრიტერიუმების წრფივი (1.8.1) ნახვევის მაქსიმუმით მივიღებთ ეფექტურ გადაწყვეტილებას. ცხადია, თუ X_α შედგება ერთადერთი ელემენტისაგან, მაშინ ის ეფექტური იქნება და წრფივი ნახვევის მაქსიმუმის პოვნა აღარაა საჭირო.

ორკრიტერიუმიანი (ნახ. 1.8.1)

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \to \max_X$$

ამოცანისათვის გარკვეული $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ გვაძლევს X_α სიმრავლეს, რომლის დროს $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \to \max_{X_\alpha}$ ამოცანა e ეფექტურ შეფასებას იძლევა.



ნახ. 1.8.1.

სხვა $\alpha' \in A$-ს შემთხვევაში, $X_{\alpha'}$ სიმრავლე ერთელემენ-ტიანია - $X_{\alpha'} = \{e'\}$ და, მაშასადამე, e' არის ეფექტური შეფასება.

ავხსნათ გამოყენებული ლექსიკოგრაფიული ოპტი-მიზაციის მეთოდის არსი. ეფექტური გადაწყვეტილების (უფრო ზუსტად ეფექტური შეფასების) საპოვნელად პირ-ველად გამოვიყენეთ მაქსიმინური ნახვევის მეთოდი და

ვიპოვეთ X_{α}. თუ ეს სიმრავლე შეიცავს ერთზე მეტ ელემენტს, მაშინ ვიყენებთ მეორე მეთოდს - წრფივი ნახვევის მეთოდით მათგან ვირჩევთ ისეთს, რომელიც ამ ნახვევს მიანიჭებს მაქსიმუმს. თუ პირველი მეთოდით ნაპოვნი X_{α} შეიცავს ერთადერთ ელემენტს, მაშინ მეორე მეთოდის გამოყენება არაა საჭირო. სწორედ ესაა ლექსიკოგრაფიული ოპტიმიზაციის მეთოდი, რომელიც 1.8.1 თეორემის თანახმად ორკრიტერიუმიანი

$$(\min_i \alpha_i (f_i - t_i),\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)) \xrightarrow{L} \max_X$$

ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის სახით მოიცემა, სადაც მაქსიმუმის L ოპერაცია სწორედ ლექსიკოგრაფიულ ოპტიმიზაციას გულისხმობს.

1.9. მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნა კრიტერიუმების სასურველი მნიშვნელობების მიღებით

განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \ \to \max_{x \in X}, \qquad (1.9.1)$$

რომელშიც კრიტერიუმები არაერთგვაროვანია და, ამავე დროს აქვს სხვადასხვა რაოდენობრივი საჭიროებები. ეს ნიშნავს, რომ თითოეულ მათგანს აქვს საკუთარი რიცხვითი წონა. ასეთი წონის შესახებ კი გმპ-ს წინასწარი ინფორმაცია არ აქვს. (1.9.1) ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ შეზღუდვების მეთოდს, რომლითაც ისე ვარეგულირებთ გადაწყვეტილებებს, რომ თითოეულმა კრიტერიუმმა მიიღოს სასურველ მნიშვნელობაზე არანაკლები მნიშვნელობა. ამ მეთოდით წონების შესახებ გმპ ინფორმაციას ღებულობს და მათ განსაზღვრავს ამოცანის

ანალიზის პროცესში. ამისათვის გამოიყენება ნახევის მეთოდი გლობალური კრიტერიუმის შედგენის წესით.

განვიხილავთ შემთხვევას, როცა (1.9.1) ამოცანაში $x=(x_1,...,x_n)\in X$ ცვლადების დასაშვები სიმრავლე X განისაზღვრება წრფივი უტოლობებით და განტოლებებით, ანუ X სიმრავლე გეომეტრიულად წარმოადგენს ამოზნექილ მრავალწახნაგას. ასევე ვიგულისხმებთ, რომ $f_1, f_2, \dots, f_m$ სკალარული კრიტერიუმები წრფივი ფუნქციებია X-ზე. აქედან გამომდინარე, მიიღება მრავალკრიტერიუმიანი წრფივი დაპროგრამების ამოცანები.

შემოვიღოთ აღნიშვნები. X სიმრავლეზე სკალარული $f_i (i=1,...,m)$ კრიტერიუმის ოპტიმიზაციით

$$f_i(x)\to\max_{x\in X}$$

მიღებული გადაწყვეტილება აღვნიშნოთ $(x_1^i,...,x_n^i)$-ით. ამ გადაწყვეტილებისათვის გამოვთვალოთ f_k $(k=1,...,m)$ კრიტერიუმის მნიშვნელობა და იგი აღვნიშნოთ f_k^i-ით. ასეთი მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ ცხრილი (ცხრილი 1.9.1).

ცხრილი 1.9.1

	f_1	f_2	$\cdots$	f_i	$\cdots$	f_m
f_1	f_1^1	f_2^1	$\cdots$	f_i^1	$\cdots$	f_m^1
f_2	f_1^2	f_2^2	$\cdots$	f_i^2	$\cdots$	f_m^2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
f_i	f_1^i	f_2^i	$\cdots$	f_i^i	$\cdots$	f_m^i
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
f_m	f_1^m	f_2^m	$\cdots$	f_i^m	$\cdots$	f_m^m

ამრიგად, აქ k-ური სვეტისა და i-ური სტრიქონის გადაკვეთაზე f_k^i სიდიდე არის f_k-ს მნიშვნელობა გამოთვლილი $f_i(x)\to\max_{x\in X}$ ამოცანის ოპტიმალური $(x_1^i,...,x_n^i)$

გადაწყვეტილებისათვის. ცხადია, i-ურ სვეტში რიცხვი f_i^i მაქსიმალურია

$$f_i^i = \max_l f_i^l .$$

1.9.1 ცხრილის მნიშვნელობების [0,1]-ში ნორმირებისათვის f_k^i სიდიდე შევცვალოთ შემდეგი სიდიდით:

$$\varphi_k^i = \frac{f_k^i - \min_l f_k^l}{\max_l f_k^l - \min_l f_k^l}, \quad i,k = 1,2,...,m. \quad (1.9.2)$$

მაშასადამე, ცხრილის ნებისმიერი ელემენტის ნორმირებისათვის ამ ელემენტს გამოვაკლებთ ამ სვეტში მინიმალურს და მიღებულ სხვაობას გავყოფთ ამ სვეტში მაქსიმალური და მინიმალური სიდიდეების სხვაობაზე.

როცა ცხრილის ყველა f_k^i ელემენტი დადებითია, მაშინ მათი ნორმირება შეგვიძლია შემდეგნაირად:

$$\varphi_k^i = \frac{f_k^i}{\max_l f_k^l}.$$

ასეთი გარდაქმნებით მივიღებთ კრიტერიუმების უგანზომილებო მნიშვნელობებს, ამასთან, თითოეული კრიტერიუმის მაქსიმალური სიდიდე გახდება 1.

ნორმირებული სიდიდეები მოვათავსოთ ცხრილში (ცხრილი 1.9.2), რომლის კრიტერიუმების წონა (ან ინდექსები) გამოითვლება შემდეგი წესით:

1.9.2 ცხრილის ყოველ i $(i = 1,...,m)$ სვეტში მითითებულია მაქსიმალური სიდიდე 1. გამოვთვალოთ თითოეული i სვეტის ელემენტების, გარდა ასეთი 1-იანისა, საშუალო არითმეტიკული და იგი იყოს α_i^0 $(i = 1,...,m)$. ასეთი სიდიდეების საშუალებით f_i კრიტერიუმის წონას ვიპოვით შემდეგი ფორმულით:

$$\omega_i^0 = \frac{1-\alpha_i^0}{\sum_{p=1}^{m}(1-\alpha_p^0)}, i = 1,...,m. \qquad (1.9.3)$$

ცხრილი 1.9.2

	f_1	f_2	...	f_i	...	f_m
f_1	1	φ_2^1	...	φ_i^1	...	φ_m^1
f_2	φ_1^2	1	...	φ_i^2	...	φ_m^2
...	...	...	...	...	...	...
f_i	φ_1^i	φ_2^i	...	1	...	φ_m^i
...	...	...	...	...	...	...
f_m	φ_1^m	φ_2^m	...	f_i^m	...	1

ω_i^0 $(i=1,...,m)$ წონას ზოგჯერ f_i კრიტერიუმის ტექნიკურ წონასაც უწოდებენ. მაშასადამე, აღნიშნულ მეთოდში კრიტერიუმის რიცხვითი წონა გამოითვლება ამოცანის ანალიზის პირობებში.

მიღებული $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, ..., \omega_m^0)$ წონითი ვექტორისაგან შევადგინოთ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ ვექტორ-ფუნქციის წრფივი ნახვევი ანუ გლობალური კრიტერიუმი და ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა:

$$F_{\omega^0}(x) = \omega_1^0 f_1(x) + ... + \omega_m^0 f_m(x) \to \max_{x \in X}. \qquad (1.9.4)$$

მისი ამონახსნი ანუ ოპტიმალური გადაწყვეტილება აღვნიშნოთ $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$-ით და მისთვის გამოვთვალოთ მოცემული კრიტერიუმების მნიშვნელობები

$$f_1(x^0), f_2(x^0), ..., f_m(x^0).$$

მათგან შევადგინოთ ვექტორი

$$Y^0 = \left(f_1(x^0), f_2(x^0), ..., f_m(x^0)\right).$$

1.9.1 ცხრილის მიხედვით მიუღწეველი (უტოპიური) მაქსიმალური მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ ვექტორი

$$Z^0 = \max_X (f_1(x),...,f_m(x)) = (f_1^1,...,f_m^m).$$

მიღებული ვექტორები გავაცნოთ გმპ-ს მათი შედარებისათვის. მისგან უნდა მივიღოთ პასუხი კითხვაზე: აქვს თუ არა Y^0 ვექტორის ყველა კომპონენტს დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობა?

თუ მისი პასუხი იქნება დადებითი, მაშინ (1.9.4) ამოცანის ოპტიმალური გადაწყვეტილება $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ უნდა იქნეს მიღებული (1.9.1) ამოცანის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებად.

თუ გმპ იტყვის, რომ Y^0 ვექტორის ზოგიერთ კომპონენტს არა აქვს დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობა, მაშინ მან ასეთი არასასურველი მნიშვნელობების შესაბამისი კრიტერიუმებიდან მხოლოდ ერთი კრიტერიუმი უნდა გამოყოს ყველაზე ცუდი მნიშვნელობით. ვთქვათ, მან ასეთ კრიტერიუმად აირჩია f_i. ახლა მან უნდა მიუთითოს ამ კრიტერიუმის ქვედა სასაზღვრო რიცხვითი მნიშვნელობა J_i:

$$f_i \geq J_i.$$

ამ შეზღუდვით, დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე $(x_1,...,x_n) \in X$ შევიწროვდება და გადაიქცევა X^0 სიმრავლედ, ხოლო f_i კრიტერიუმი გამოირიცხება. ასე მივიღებთ $(m-1)$- კრიტერიუმიან ამოცანას X^0-ზე. საბოლოო გადაწყვეტილების მიღების პროცესი გაგრძელდება განხილულის ანალოგიურად და იგი დასრულდება სასრული ბიჯის შემდეგ.

ამოცანა 1.9.1. $(x,y) \in X$ სიმრავლე მოცემულია შემდეგი უტოლობათა სისტემით:

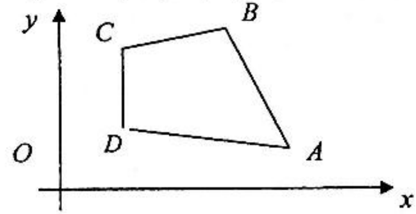
$$\begin{cases} 2x+y-13 \le 0 \\ x-3y+11 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ 2x+5y-17 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.9.5)$$

ვიპოვოთ ისეთი წერტილი $(x^0, y^0) \in X$, რომლისთვისაც

$$f(x,y) = \big(2x-7y+35, \ \ -2x+19y+25,$$

$$-14x-3y+95\big) \to \max_{x}$$

ამოხსნა. X სიმრავლე წარმოადგენს $ABCD$ ოთხკუთხედს, წვეროებით $A(6,1)$, $B(4,5)$, $C(1,4)$, $D(1,3)$ (ნახ. 1.9.1).



ნახ. 1.9.1.

$ABCD$ ოთხკუთხედის ყოველ წვეროში გამოვთვალოთ $f_1 = 2x-7y+35$, $f_2 = -2x+19y+25$, $f_3 = -14x-3y+95$ კრიტერიუმების მნიშვნელობები და მოვათავსოთ ისინი შემდეგ ცხრილში:

	f_1	f_2	f_3
A	40	32	8
B	8	112	24
C	9	99	69
D	16	80	72

ამით მოცემული კრიტერიუმებით X სიმრავლეზე ამოვხსენით წრფივი დაპროგრამების შემდეგი სამი ამოცანა:

f_1 მაქსიმუმს აღწევს A წერტილში და $f_1(A(6,1)) = 40$;

f_2 მაქსიმუმს აღწევს B წერტილში და $f_2(B(4,5)) = 112$;
f_3 მაქსიმუმს აღწევს D წერტილში და $f_3(D(1,3)) = 72$.

ახლა შევადგინოთ ზემოთ განსაზღვრული ცხრილი 1.9.1 (ცხრილი 1.9.3)

ცხრილი 1.9.3

	f_1	f_2	f_3
f_1	40	32	8
f_2	8	112	24
f_3	16	80	72

ამ ცხრილის ელემენტების (1.9.2) ფორმულით ნორმირებისას მივიღებთ 1.9.2 ცხრილს (ცხრილი 1.9.4).

ცხრილი 1.9.4

	f_1	f_2	f_3
f_1	1	0	0
f_2	0	1	$1/4$
f_3	$1/4$	$3/5$	1

1.9.4 ცხრილის სვეტებით გამოვთვალოთ შემდეგი:

$$\alpha_1^0 = \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \alpha_2^0 = \frac{0+\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10}, \quad \alpha_3^0 = \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}.$$

ამიტომ,

$$1-\alpha_1^0 = \frac{7}{8}, \quad 1-\alpha_2^0 = \frac{7}{10}, \quad 1-\alpha_3^0 = \frac{7}{8},$$

$$\sum_{p=1}^{3}(1-\alpha_p^0) = \frac{7}{8} + \frac{7}{10} + \frac{7}{8} = \frac{49}{20}.$$

ამ მონაცემებით და (1.9.3) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვლით კრიტერიუმების წონას

$$\omega_1^0=\frac{7}{8}:\frac{49}{20}=\frac{5}{14},\quad \omega_2^0=\frac{7}{10}:\frac{49}{20}=\frac{4}{14},\quad \omega_3^0=\frac{7}{8}:\frac{49}{20}=\frac{5}{14}.$$

შევადგინოთ გლობალური კრიტერიუმი (1.9.4):

$$F_{\omega^0}(x,y)=\frac{5}{14}(2x-7y+35)+\frac{4}{14}(-2x+19y+25)+$$

$$\frac{5}{14}(-14x-3y+9)=\frac{1}{7}(-34x+13y+375)$$

და ამოვხსნათ $F_{\omega^0}(x,y)\to\max\limits_X$ ამოცანა, სადაც X არის $ABCD$ ოთხკუთხედი. ეს მაქსიმუმი მიიღწევა $C(1,4)$ წერტილში და ამიტომ $(x^0,y^0)=(1,4)$.

შევადგინოთ Y^0 ვექტორი. აქ

$f_1(1,4)=2\cdot1-7\cdot4+35=9,\quad f_2(1,4)=99,\quad f_3(1,4)=69$

და $\quad Y^0=(9;\ 99;\ 69).$

რაც შეეხება Z^0 ვექტორს, მისი კოორდინატები მოცემულია 1.9.3 ცხრილში

$$Z^0=(40;\ 112;\ 72).$$

თუ გმპ ჩათვლის, რომ Y^0-ს აქვს მისაღები მნიშვნელობები, მაშინ გადაწყვეტილება $(x^0,y^0)=(1,4)$ მან უნდა მიიღოს (1.9.1) ამოცანის ოპტიმალურ გადაწყვეტილებად. შესაბამისი ვექტორული შეფასებაა

$$f_1^0=9,\ f_2^0=99,\ f_3^0=69.$$

თუ გმპ იტყვის, რომ, მაგალითად, მისთვის მიუღებელია f_1 კრიტერიუმის მნიშვნელობა 9, მაშინ მან უნდა მიუთითოს ამ კრიტერიუმის მნიშვნელობის ქვედა საზღვარი. დავუშვათ, გმპ f_1-ის ქვედა დასაშვებ მნიშვნე-

ლობად თელის 30-ს ანუ $f_1 \geq 30$. ეს მოთხოვნა (1.9.5) პირობებთან ერთად

$$\begin{cases} 2x+y-13 \leq 0 \\ x-3y+11 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 2x+5y-17 \geq 0 \\ 2x-7y+35 \geq 30 \end{cases}$$

განსაზღვრავს დასაშვებ მნიშვნელობათა ახალ X^0 სიმრავლეს და ამოცანის გადაწყვეტა გაგრძელდება ზემოთ აღწერილი სქემის მიხედვით f_2 და f_3 კრიტერიუმებისათვის

$$f = (f_2, f_3) \to \max_{X^0} .$$

II თავი

ალტერნატივების რანჟირება იერარქიული ანალიზის მეთოდით

2.1. მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანა და ალტერნატივების რანჟირება წონის მიხედვით

როგორც ვიცით, გადაწყვეტილების მიღება აზროვნებითი პროცესია, რომელიც გულისხმობს მიზნის წინასწარ გაცნობიერებას და მისი მიღწევისათვის ქმედების ხერხების (ალტერნატივების, კანდიდატების, სტრატეგიების) განსაზღვრული ვარიანტებიდან ერთ-ერთის არჩევას. გადაწყვეტილებაში ინტეგრირდება ადამიანის ცოდნა, ინტერესები და მსოფლმხედველობა. გადაწყვეტილება ყოველთვის მიიღება ერთი ან რამდენიმე პირის მიერ და ამიტომ იგი თავისი ბუნებით სოციალური ფენომენია.

როგორც აღვნიშნეთ, გადაწყვეტილებათა მიღების თანამედროვე თეორიაში იგულისხმება, რომ გადაწყვეტილებათა კანდიდატები გადაწყვეტილების მიმღები პირისათვის (გმპ) ან ჯგუფისათვის (გმჯ) ხასიათდება მათი მიმზიდველობის და პრიორიტეტულობის განსხვავებული მაჩვენებლებით ანუ ეფექტურობით. ასეთ მაჩვენებლებს, რომლებიც აუცილებელია გადაწყვეტილებათა განსხვავებული ვარიანტების შედარებისა და მათგან საუკეთესოს არჩევისათვის, აგრეთვე, დასახული მიზნის ხარისხის შეფასებისათვის, ეწოდება გადაწყვეტილებათა ეფექტურობის კრიტერიუმი. მაშასადამე, კრიტერიუმი ესაა გმპსთვის განსხვავებული ვარიანტების შეფასების წესი, უპირატესობის თვალსაზრისით მათ შორის განსხვავების ხერხი. ამდენად, კრიტერიუმი წარმოადგენს გადაწყვეტილების ფორმირების ძირითად და აუცილებელ საშუალებას.

სასურველია, რომ გადაწყვეტილების ეფექტურობის შეფასების კრიტერიუმს ჰქონდეს რაოდენობრივი სახე

(ფიზიკური აზრი), ყველაზე სრულად გამოსახავდეს გადაწყვეტილების შედეგებს, იყოს მარტივი და კონკრეტული. ეფექტურობის კრიტერიუმის სწორი არჩევანი ამოცანის სწორი ფორმულირების ეკვივალენტურია, რადგან ხშირად თვით კრიტერიუმი განსაზღვრავს ამოცანის გადაწყვეტის მიმართულებას. მაგალითად, მაქსიმალური მოგება, როგორც ეფექტურობის კრიტერიუმი, ორიენტირებულია მოგების წარმომქმნელი მაჩვენებლების ანალიზზე.

ეფექტურობის კრიტერიუმის არჩევა არც ისე მარტივი ამოცანაა. კრიტერიუმის არჩევა პროფესიულ საქმიანობაში ხშირად განისაზღვრება მრავალწლიანი პრაქტიკული გამოცდილებით. გარდა ეფექტურობის რაოდენობრივი კრიტერიუმებისა, არსებობს, აგრეთვე, ეფექტურობის ხარისხობრივი კრიტერიუმები. მაგალითად, თანამშრომელთა ხარისხობრივი შემადგენლობა, ხელმძღვანელისა და პედაგოგის ავტორიტეტი, პროდუქციის ხარისხი, განათლების დონე და სხვ. ამიტომ ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებთან, რომლებშიც ზოგიერთი კრიტერიუმი ხარისხობრივია, ზოგიერთი კი რაოდენობრივი. ასეთ ამოცანებს შევისწავლით მესამე თავში.

მრავალკრიტერიუმიან ამოცანაში კრიტერიუმები შეიძლება იყოს ერთმანეთზე დამოკიდებული ან დამოუკიდებელი. ეს პირობები კი ძალიან მოქმედებს გადაწყვეტილების მიღების მეთოდის არჩევაზე. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანის სირთულეზე მოქმედებს, აგრეთვე, კრიტერიუმების რაოდენობა. კრიტერიუმების მცირე რიცხვისათვის (ორი ან სამი) ორი ალტერნატივის შედარების ამოცანა შეიძლება მარტივად მოგვეჩვენოს, ვინაიდან კრიტერიუმების თვისებები შეიძლება უშუალოდ შევადაროთ და საბოლოო კომპრომისიც იოლად გამოვიმუშაოთ. სინამდვილეში კი, როგორც ამას ორი კრიტერიუმის მქონე მარტივი ამოცანის შემთხვევაში ვნახავთ (მაგალითი 2.4.1), საქმე არც ისე მარტივადაა. კრიტერიუმების უფრო დიდი რიცხვისათვის კომპრომისის გამომუშავება კი შეუძლებელია. ასევე ვიცით, რომ კრიტერიუმების რაოდენობა სასურველია არ აღემატებოდეს ჯ. მილერის მიერ

დადგენილ 7 ± 2 მაგიურ რიცხვს. სპეციალისტებმა პრაქტიკულად დაადგინეს, რომ ეს რიცხვი არ უნდა იყოს 6-ზე ან 7-ზე მეტი. ამავე დროს, არასწორად შერჩეულმა კრიტერიუმმა შეიძლება რეალურიდან განსხვავებულ შედეგებამდე მიგვიყვანოს.

გადაწყვეტილების მიღების და, საერთოდ, არჩევის ამოცანა ყველაზე სრულყოფილად მაშინ იქნება გადაწყვეტილი, თუ კანდიდატების რანჟირებას შევძლებთ პრიორიტეტების კლების მიხედვით. ამ შემთხვევაში, ყველაზე უპირატესი იქნება ამ რიგში პირველ ადგილზე მდგომი კანდიდატი. თუ არჩევის ამოცანაში მოითხოვება n რაოდენობის კანდიდატთა სიმრავლიდან ყველაზე საუკეთესო k რაოდენობის ($n \geq k$) კანდიდატის არჩევა, მაშინ ისინი უნდა ავირჩიოთ პრიორიტეტების აღნიშნულ რიგში პირველიდან k-ური კანდიდატის ჩათვლით. ასე დასმული ამოცანა გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაა, რომელიც გულისხმობს კანდიდატთა მოცემული სიმრავლიდან ფიქსირებული რაოდენობის სასურველ კანდიდატთა ამორჩევას. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში ასეთი ტიპის ამოცანებს, მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანები ეწოდება. ასეთი ამოცანების მაგალითებია სხვადასხვა სახის კონკურსები, ტენდერები და სხვა. მრავალკრიტერიუმიანი k რაოდენობის საუკეთესო კანდიდატის არჩევის ამოცანის გადაწყვეტისათვის მნიშვნელოვანია თომას საატის იერარქიული ანალიზის მეთოდი. ამ მეთოდის ჩამოყალიბებისათვის წინასწარ უნდა შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრება.

განვიხილოთ n რაოდენობის ალტერნატივათა (ობიექტის, კანდიდატის, სტრატეგიის) $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ სიმრავლე. თითოეულ a_i ალტერნატივას შევუსაბამოთ გარკვეული დადებითი რიცხვი $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ისეთი, რომ $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. α_i-ს ვუწოდოთ a_i-ს წონა ან წონითი კოეფიციენტი. α_i გამოსახავს a_i ალტერნატივის შე-

დარებით საჭიროებას (ფასს, მნიშვნელოვნებას, სარგებლიანობას). წონითი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ვექტორს, ეწოდება $a_1,a_2,...,a_n$ ალტერნატივების წონითი ვექტორი.

განვიხილოთ წონითი ვექტორების სიმრავლე

$$A=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\middle|\alpha_i>0,\ \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m=1\right\}.$$

საწყის ეტაპზე ჩვენი ამოცანაა $a_1,a_2,...,a_n$ ალტერნატივების წონითი ვექტორის $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ პოვნა, რომლითაც ალტერნატივების რანჟირება მოხდება პრიორიტეტულობის გათვალისწინებით: რაც მეტია α_i, მით უპირატესია a_i. ამისათვის გამოვიყენოთ თ. საატის იერარქიული ანალიზის მეთოდი, რომელიც დღეისათვის ყველაზე ახალი, ეფექტური და საჭირო მეთოდია მოცემული მიმართულებით. ამ მეთოდის თანახმად, უნდა შევადგინოთ გარკვეული მაჩვენებლით (ნიშნით) ან მაჩვენებლებით $a_1,a_2,...,a_n$ ალტერნატივების წყვილობითი შედარების $n\times n$ მატრიცა S_X, რომლის ყოველი α_{ij} ელემენტი წარმოადგენს i-ური ალტერნატივის a_i-ს "წონის" შეფარდებას j-ური ალტერნატივის a_j-ს "წონაზე" - $\alpha_{ij}=\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$.

რიცხვი α_{ij} გვიჩვენებს, თუ რამდენად უპირატესია a_i ალტერნატივა a_j ალტერნატივზე. $\alpha_{ij}>1$ ნიშნავს, რომ a_i უპირატესია a_j-ზე; თუ $\alpha_{ij}<1$, მაშინ a_i ნაკლებ უპირატესია a_j-ზე; თუ $\alpha_{ij}=1$, მაშინ აღნიშნული უპირატესობით a_i და a_j თანაბარი მნიშვნელობისაა. ასე მიიღება ალტერნატივების წყვილობითი შედარების მატრიცა:

$$S_X = \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_n \\ \hline a_1 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ a_2 & \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & . & . & . & \alpha_{n-1,n} \\ a_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & . & . & . & 1 \end{array} .$$

ცხადია, მოცემული S_X მატრიცის ელემენტებს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. S_X-ს ყველა ელემენტი დადებითია, ე.ი. $\alpha_{ij} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j} > 0$, $\forall i, j = 1, 2, ..., n$;

2. S_X შებრუნებულად სიმეტრიულია, ე.ი. მისი ელემენტები, განთავსებული მთავარი დიაგონალის სიმეტრიულად, ერთმანეთის შებრუნებულია -

$$\alpha_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha_{ji}}, \ \forall i, j = 1, 2, ..., n .$$

ამასთან, მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულია ერთიანები -

$$\alpha_{ii} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i} = 1, \ i = 1, 2, ..., n ;$$

3. S_X-ს აქვს თავსებადობის თვისება იმ აზრით, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\alpha_{ik} . \alpha_{kj} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k} . \frac{\alpha_k}{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \alpha_{ij}, \quad \forall i, k, j = 1, ..., n ;$$

4. n რიცხვი არის S_X მატრიცის მაქსიმალური საკუთრივი რიცხვი, ხოლო ვექტორ-სვეტი $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$, თუ ეს ვექტორი ნორმირებულია (კოორდინატების ჯამი არის ერთი), მაშინ იგი წარმოადგენს n-ის შესაბამის ერთადერთ საკუთრივ ვექტორს, ანუ

$$S_X \cdot \alpha = n \cdot \alpha . \qquad (2.1.1)$$

ცნობილია, რომ აღნიშნული თვისებების S_X მატრიცას აქვს ორი საკუთრივი რიცხვი 0 და n. ამიტომ, (2.1.1) ტოლობა ჩავწეროთ ასე:

$$S_A \cdot \alpha = \lambda_{\max} \cdot \alpha ,$$

სადაც $\lambda_{\max} = \max\{0, n\}$.

S_X მატრიცის შედგენისას ვგულისხმობდით, რომ $a_1, a_2, ..., a_n$ ობიექტების წონა $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ წინასწარ იყო ცნობილი. სინამდვილეში, პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ეს რიცხვები უცნობია და ამოცანა სწორედ მათ განსაზღვრაში მდგომარეობს.

2.2. იერარქიული ანალიზის მეთოდი (იამ)

იერარქიული ანალიზის მეთოდში $a_1, a_2, ..., a_n$ ალტერნატივების წყვილობითი შედარებისათვის ექსპერტი (გმპ) ან ექსპერტთა ჯგუფი (გმჯ) იყენებს შემდეგ ხარისხობრივ უპირატესობებს და მათ შესაბამის რაოდენობრივი შეფასების ზოგად სკალას:

1) თანაბრად უპირატესი - 1;
2) სუსტად უპირატესი - 3;
3) ძლიერ უპირატესი - 5;
4) ძალიან ძლიერ უპირატესი - 7;
5) აბსოლუტურად უპირატესი - 9.

რიცხვები 2, 4, 6, 8 შეიძლება გამოვიყენოთ შედარებითი, შუალედური უპირატესობის განსაზღვრისათვის.

აღნიშნული ზოგადი სკალის გამოყენებისას უპირატესობებში ზოგჯერ მიიღება შეუსაბამობა. კერძოდ, თუ a_i ობიექტი ძლიერ უპირატესია a_j ობიექტზე, a_j ძლიერ უპირატესია a_k-ზე, მაშინ S_X მატრიცის თავსებადობის პირობის თანახმად უნდა მივიღოთ, რომ a_i უპირატესია a_k-ზე $5 \cdot 5 = 25$-ჯერ. მაგრამ რიცხვი 25 არ მონაწილეობს

აღნიშნულ რაოდენობრივ შეფასებებში. ამის გამო, პრაქტიკაში უფრო მეტად გამოიყენება ტრანზიტული სკალა უპირატესობის a კოეფიციენტით. მის მნიშვნელობად თუ აეიღებთ $a=1{,}5$, მაშინ გვექნება $a^2=2{,}25$, $a^3=3{,}38$, $a^4=5{,}06$. თუ ავიღებთ $a=2$, მაშინ 1)-ს შეესაბამება 1, 2)-ს - $a=2$, 3)-ს - $a\cdot a=a^2=4$, 4)-ს - $a\cdot a\cdot a=a^3=8$, 5)-ს - $a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4=16$.

აღნიშნული ზოგადი სკალით ან a კოეფიციენტით გმპ ან გმჯ თავიდან განსაზღვრავს S_X მატრიცის მთავარი დიაგონალის ზედა სამკუთხედში მდგომ შეფასებებს. მთავარ დიაგონალზე დაისმება ერთიანები, ხოლო ამ დიაგონალის ქვედა სამკუთხედის ელემენტები S_X მატრიცის შებრუნებულად განისაზღვრება სიმეტრიულობის მე-2 თვისებით.

შევნიშნოთ, რომ ასეთი წესით მიღებულ S_X მატრიცას შეიძლება არ ახასიათებდეს მე-3 თვისება, ანუ რომელიმე $i,k,j\in\{1,2,...,n\}$, $i\neq k$-სთვის არ სრულდებოდეს ტოლობა $\alpha_{ik}.\alpha_{kj}=\alpha_{ij}$.

შემდეგ ვპოულობთ მიღებული S_X მატრიცის მაქსიმალურ საკუთრივ $\lambda_{\max}$ რიცხვს, რომელიც არასდროს არაა ნაკლები n-ზე. ამისათვის α-ს მიმართ ამოვხსნით წრფივ ერთგვაროვან $(S_A-\lambda_{\max}\cdot I)\cdot\alpha=0$ განტოლებათა სისტემას. ასე მიღებული საკუთრივი $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ვექტორი არის $a_1,a_2,...,a_n$ ალტერნატივების საძებნი წონითი ვექტორი (თუ იგი არაა ნორმირებული, მაშინ უნდა მოხდეს მისი ნორმირება).

აღნიშნული წესით მიღებული $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ წონითი კოეფიციენტები (ან წონა) ძალიან ხშირად შეესაბამება $\lambda_{\max}>n$ საკუთრივ რიცხვს. ამის გამო ვღებულობთ წყვილობითი შედარების ისეთ S_X მატრიცას, რომლის ელემენტები არ დააკმაყოფილებს წინა პარაგრაფში ჩამოთ-

ვლილ 1 - 4 თეისებებს, რამაც შეიძლება მიგვიყვანოს გარკვეულ შეცდომამდე. ასეთი შეცდომისაგან თავის დაზღვევის მიზნით, განვიხილოთ იამ-ის უფრო მარტივი მოდელები. უნდა აღინიშნოს, რომ პრაქტიკულ ამოცანებში S_X მატრიცის მიახლოებითი საკუთრივი ვექტორი მისი ელემენტებისაგან გამოითვლება სხვადასხვა ხერხით.

მოდელი 1

დავიწყოთ S_X მატრიცის აგება იმ წესით, რომ შესრულდეს 1 - 4 თვისებები. ექსპერტს (გმპ) ან ექსპერტთა ჯგუფს (გმჯ) ვთავაზობთ შეადაროს a_i ალტერნატივის წონა a_2-ის წონასთან ანუ α_{12} განსაზღვროს - რამდენჯერ უპირატესია a_1 ალტერნატივა a_2-ზე. შემდეგ განსაზღვრავს α_{23}-ს - რამდენჯერ უპირატესია a_2 ალტერნატივა a_3-ზე და ა.შ. ასე იპოვის α_{34}, . . . , $\alpha_{n-1,n}$ რიცხვებს. ამრიგად გვაქვს,

$$\alpha_{12},\ \alpha_{23},\ \alpha_{34},\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_{n-1,n} \tag{2.2.1}$$

შეფასებები. ამავე დროს, $\alpha_{ii}=1$, $i=1,...,n$.

მიღებული შეფასებების საშუალებით ვიპოვით S_X-ს ყველა ელემენტს. მაგალითად, მივყვეთ მიმდევრობით:

$$\alpha_{21}=\frac{1}{\alpha_{12}},\ \alpha_{31}=\alpha_{32}.\alpha_{21},\ \alpha_{13}=\frac{1}{\alpha_{31}},\ \alpha_{24}=\alpha_{23}\cdot\alpha_{34} \text{ და ა.შ.}$$

ამრიგად, ამ შემთხვევაში იამ-ის გამოსავალი ელემენტებია (2.2.1). განსაზღვრის თანახმად,

$$\alpha_{12}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \alpha_{23}=\frac{\alpha_2}{\alpha_3},\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_{n-1,n}=\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

ამ ჯაჭვურ განტოლებებში, რომელთა რიცხვია $n-1$, უცნობებია $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. თუ ამ განტოლებებს დავუმატებთ $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ განტოლებას, მივიღებთ n - უცნობიან n განტოლებას. ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

ერთადერთ ნორმირებულ $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ დადებით ამონახსნს. მაშასადამე, წონითი ვექტორის პოვნა დაიყვანება უმარტივეს განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე.

მოდელი 2

წონითი ვექტორის პოვნის კიდევ უფრო მარტივი მეთოდი (რომელიც არ მოითხოვს განტოლებების ამოხსნას და ამიტომ მას გამოვიყენებთ) შემდეგში მდგომარეობს. ექსპერტი განსაზღვრავს S_X მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტებს, ანუ a_1 ალტერნატივას ადარებს ყველა სხვას. ასე მიიღება $\alpha_{12},\alpha_{13},...,\alpha_{1n}$ შეფასებები. იგულისხმება, რომ მატრიცის მთავარი დიაგონალის რიცხვებია $\alpha_{ii}=1$, $\forall i=1,...,n$.

ამ რიცხვების საფუძველზე, მე-2 თვისების გამოყენებით და მე-3 თვისებით $k=1$-სთვის განისაზღვრება S_X-ს ყველა ელემენტი

$$\alpha_{ij}=\alpha_{i1}.\alpha_{1j}=\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1i}},\ i=1,2,...,n;\quad j=1,2,...,n. \quad (2.2.2)$$

ასე მიღებული S_X მატრიცა $k=1,2,...,n$-სთვის დააკმაყოფილებს მე-3 თვისებას

$$\alpha_{ik}.\alpha_{kj}=\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{1i}}.\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1k}}=\frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1i}}=\alpha_{ij}.$$

თეორემა 2.2.1. თუ S_X მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებს 1 - 3 თვისებებს, მაშინ ისინი აკმაყოფილებენ მე-4 თვისებასაც.

დამტკიცება. დავწეროთ S_X-ის მახასიათებელი განტოლება, რომელსაც (2.2.2)-ის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე:

$$|S_A - \lambda I| = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \dfrac{1}{\alpha_{12}} & 1-\lambda & \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}} & . & . & . & \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}} \\ \dfrac{1}{\alpha_{13}} & \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}} & 1-\lambda & . & . & . & \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{13}} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \dfrac{1}{\alpha_{1n}} & \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{1n}} & \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{1n}} & . & . & . & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

ამ დეტერმინანტის მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1-\lambda & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - n) = 0.$$

მაშასადამე, $\lambda = 0$ და $\lambda = n$.

განვიხილოთ ვექტორი

$$\alpha = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ..., \alpha_{nn}) = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ..., \alpha_{n-1,n}, 1) \equiv (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, 1)$$

და მისთვის შევამოწმოთ (2.1.1) ტოლობა, რომელშიც გა-ვითვალისწინოთ თავსებადობის მე-4 თვისება:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \cdot \alpha_{in} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{kn} = n \cdot \alpha_{kn} = n \cdot \alpha_k ,$$

$$k = 1, 2, ..., n .$$

2.3. წონითი ვექტორის პოვნა

ვთქვათ, მე-2 მოდელით განსაზღვრულ S_X მატრიცაში პირველი სტრიქონის ელემენტებია $1, a_{12}, \dots, a_{1n}$. მათი საშუალებით შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)$, რომლის კომპონენტები გამოითვლება ტოლობით

$$\alpha_i^0 = \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1i}}, \quad i = 1,2,\dots,n, \text{ სადაც } \alpha_{11} = 1. \qquad (2.3.1)$$

აქ $\alpha_n^0 = \dfrac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}} = 1$ და, მაშასადამე, α^0 ვექტორი არაა ნორმირებული. (2.3.1) ტოლობებით გამოთვლილი რიცხვები

$$\alpha_1^0 = \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} = \alpha_{1n}, \quad \alpha_2^0 = \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}} = \alpha_{2n}, \ \dots, \ \alpha_n^0 = \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1n}} = \alpha_{nn} = 1$$

$$(2.3.2)$$

(2.2.2) ტოლობების გათვალისწინებით, S_X მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებია:

$$S_X = \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & & a_n \\ \hline a_1 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & & a_1^0 \\ a_2 & & 1 & & \dots & & a_2^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & & & & \dots & & a_{n-1}^0 \\ a_n & & & & \dots & & 1 \end{array}.$$

(2.3.2) ტოლობებით განსაზღვრული α^0 ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ ვექტორის:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \qquad (2.3.3)$$

დასკვნა 2.3.1. (2.3.3)-ით განსაზღვრული წონითი ვექტორი α წარმოადგენს მე-2 მოდელით აგებული და (2.3.2) ტოლობებით განსაზღვრული S_X მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებისაგან შედგენილი ვექტორის ნორმირე-

ბულ ვექტორს. წონითი ვექტორი (2.3.3) მარტივად გამოითვლება, რომელიც არ მოითხოვს განტოლებათა სისტემის ამოხსნას. საკმარისია ვიპოვოთ S_X მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტები. ამისათვის კი, (2.3.2) ფორმულების თანახმად გამოიყენება ექსპერტის მიერ დადგენილი S_X მატრიცის მხოლოდ პირველი სტრიქონის ელემენტები. ამ სტრიქონის ბოლო α_{1n} ელემენტს გაეყოფთ შესაბამისად, $1, \alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1n}$-ზე და მივიღებთ S_X-ის ბოლო სვეტს. მათგან შევადგენთ $\alpha^0=(\alpha_{1n},\alpha_{2n},...,\alpha_{nn})$ ვექტორს და მისი ნორმირებით მივიღებთ α წონით ვექტორს.

ამოცანა 2.3.1. მოცემულია ოთხი ალტერნატივა $X=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. ვიპოვოთ მათი წონითი ვექტორი.

ამოხსნა. ვიპოვოთ შეფასებები $\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}$. ვთქვათ, უპირატესობის კოეფიციენტის $a=2$ მნიშვნელობისათვის ეს შეფასებებია

$$\alpha_{12}=4,\ \alpha_{13}=\frac{1}{4}=0{,}25,\ \alpha_{14}=2.$$

ამიტომ, (2.3.2) ფორმულების თანახმად ვწერთ

$$\alpha_{14}=2,\ \alpha_{24}=\frac{2}{4}=0{,}5,\ \alpha_{34}=\frac{2}{0{,}25}=8,\ \alpha_{44}=1.$$

ამრიგად, S_X მატრიცის პირველ სტრიქონს და ბოლო სვეტს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_X=\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 4 & 0{,}25 & 2 \\ a_2 & & 1 & & 0{,}5 \\ a_3 & & & 1 & 8 \\ a_4 & & & & 1 \end{array}.$$

შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^0=(2;0{,}5;8;1)$ და მოვახდინოთ მისი ნორმირება. რადგან 2+0,5+8+1=11,5, ამიტომ მოცემული a_1,a_2,a_3,a_4 ალტერნატივების წონითი ვექტორი იქნება

$$\alpha = (0{,}17;\, 0{,}043;\, 0{,}69;\, 0{,}09).$$

ამ ვექტორის თანახმად, ობიექტების სიმრავლეზე განსაზღვრულია უპირატესობის მკაცრი ბინარული მიმართება $\succ$:

$$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2 \,.$$

2.4. მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების რანჟირება

ვთქვათ, $x \in X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ რაიმე კონკურსში მონაწილე კანდიდატების სასრული სიმრავლეა, ხოლო $f_1, f_2, ..., f_m$ - კერძო კრიტერიუმები, რომლებითაც ვაფასებთ კანდიდატებს. დავსვათ ამოცანა: X სიმრავლიდან ავირჩიოთ ყველაზე საუკეთესო კანდიდატი, ანუ ისეთი, რომელსაც ექნება ყველაზე მაქსიმალური შეფასება ყველა $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმით. მაშასადამე, გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \to \max_X \,. \qquad (2.4.1)$$

როგორც პირველი თავიდან ცნობილია, (2.4.1) ამოცანის ამონახსნში ვგულისხმობთ ეფექტურ და სუსტად ეფექტურ გადაწყვეტილებებს.

გავიხსენოთ, რომ $x^0 \in X$ გადაწყვეტილებას (კანდიდატს) ეწოდება პარეტოს ეფექტური, ან მოკლედ ეფექტური გადაწყვეტილება, თუ არ არსებობს სხვა გადაწყვეტილება $x^* \in X$, რომლისთვისაც

$$f_i(x^*) \ge f_i(x^0),\ i = 1, 2, ..., m,$$

სადაც ერთი უტოლობა მაინც იქნება მკაცრი. მაშასადამე, ეფექტური x^0 გადაწყვეტილება არ შეიძლება გაუმჯობესდეს რომელიმე f_i მაჩვენებლით ისე, რომ არ გა-

უარესდეს სხვა მაჩვენებელი. სუსტად ეფექტური გადაწყვეტილება კი არის ისეთი, რომლის გაუმჯობესება ერთდროულად ყველა მაჩვენებლით შეუძლებელია.

(2.4.1) ამოცანისათვის ეფექტური გადაწყვეტილება (ან ამონახსნი) ყოველთვის არსებობს. ამასთან, ასეთი შეიძლება არსებობდეს ერთზე მეტიც. ბოლო შემთხვევაში კი, ერთადერთის არჩევა გარკვეული კომპრომისის დაშვებას გულისხმობს. აქედან გამომდინარე, სასურველია X სიმრავლის ელემენტების რანჟირება პრიორიტეტების (საჭიროებების, სარგებლიანობის) მიხედვით. ჩვენი მიზანია (2.4.1) ამოცანის ამოხსნით ჩატარდეს X სიმრავლის ელემენტების ასეთი რანჟირება უპირატესობებით. ამისათვის გამოვიყენოთ პირველ თავში დამტკიცებული თეორემა 1.4.1, რომლის შინარსი აქვე გავიმეოროთ.

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ,

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \middle| \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}$$

წონითი ვექტორების სიმრავლეა, ხოლო $\alpha \in A$ მუდმივია. მაშინ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$-ის კრიტერიუმების წრფივი ნახვევით მიღებული განზოგადებული სკალარული ამოცანის

$$F(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \to \max_X \tag{2.4.2}$$

ამონახსნი x^0 არის (2.4.1) ამოცანის ეფექტური ანუ პარეტოს ოპტიმალური გადაწყვეტილება.

შენიშვნა 2.4.1. ასეთი წრფივი ნახვევი კორექტულია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა კრიტერიუმი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია უპირატესობებით. ამ თეორემის შებრუნებული არასწორია: არსებობს (2.4.1)-ის ეფექტური ამონასხნი, რომელიც არ მიიღება (2.4.2)-ის ამოხსნით, კერძოდ, ადგილი აქვს თეორემას.

თეორემა 2.4.2 (ს. კარლინის). ვთქვათ, x^0 არის (2.4.1) ამოცანის ეფექტური ამონახსნი. მაშინ არსებობს

ისეთი არაუარყოფითი რიცხვები $\alpha_1 \ge 0,\dots,\alpha_m \ge 0$ და $\alpha_1+\dots+\alpha_m=1$, რომ x^0 იქნება $F(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

თუ მოვითხოვთ, რომ ყველა f_i კრიტერიუმის წონა $\alpha_i>0$, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ 2.4.1 თეორემა.

ჩვენი ამოცანის პირობებში თუ ჩავთვლით, რომ $f_1, f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმებით გამოთვლილი x კანდიდატის შეფასებები $f_1(x),\dots,f_m(x)$ გმპ-ის ან გმჯ-ის სარგებლიანობაა x-ის არჩევის შემთხვევაში, მაშინ $F(x,\alpha)$ არის სარგებლიანობის ადიტიური ფუნქცია X სიმრავლეზე:

$$x_i \succ x_j \Leftrightarrow F(x_i) > F(x_j); \quad x_i \succcurlyeq x_j \Leftrightarrow F(x_i) \ge F(x_j).$$

ეს ნიშნავს, რომ $f_1, f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმების შერჩევაზეა დამოკიდებული X სიმრავლეზე სარგებლიანობის აქსიომების შესრულება. $F(x,\alpha)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლით კანდიდატების რანჟირება სარგებლიანობით ხდება ყველა კრიტერიუმის გათვალისწინებით, პირველ ადგილზე იქნება ეფექტური ანუ ყველაზე საუკეთესო კანდიდატი.

ჩვენი მიზანია ამოვხსნათ (2.4.2) ამოცანა. ამისათვის განვიხილოთ სამი ეტაპი.

I ეტაპი. ვპოულობთ $f_1, f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმების წონით $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ ვექტორს. ამისათვის, ექსპერტთა ჯგუფი $f_1, f_2,\dots,f_m$ კრიტერიუმების წყვილობითი შედარების S_f მატრიცაში მე-2 მოდელის გამოყენებით, იპოვის $\alpha_{12},\alpha_{13},\dots,\alpha_{1m}$ ელემენტებს:

$$
S_f = \begin{array}{c|cccc}
 & f_1 & f_2 & . & f_m \\
\hline
f_1 & 1 & \alpha_{12} & . & \alpha_{1m} \\
f_2 & & 1 & & \\
. & . & . & . & . \\
f_m & & & & 1
\end{array} . \qquad (2.4.3)
$$

მათი საშუალებით გამოვთვლით (2.3.2) რიცხვებს ანუ S_f მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებს და მათგან შევადგენთ $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_m^0)$ ვექტორს. მისი ნორმირებით კი ვიპოვით α-ს (ეს მეთოდი კონკრეტულადაა აღწერილი 2.3.1 დასკვნაში).

II ეტაპი. ხდება კანდიდატების რანჟირება თითოეული კერძო $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმით ცალ-ცალკე, ანუ კერძო კრიტერიუმების მნიშვნელობების გამოთვლა $x_1, x_2, ..., x_n$ კანდიდატებისათვის. ამისათვის, f_i კრიტერიუმით კანდიდატების წყვილობითი შედარების S_i მატრიცაში ანალოგიურად I ეტაპისა, გმპ იპოვის შეფასებებს $\alpha_{12}^i, \alpha_{13}^i, ..., \alpha_{1n}^i$ $(i = 1, 2, ..., n)$:

$$
S_i = \begin{array}{c|cccc}
f_i & x_1 & x_2 & . & x_n \\
\hline
x_1 & 1 & \alpha_{12}^i & . & \alpha_{1n}^i \\
x_2 & & 1 & & \\
. & . & . & . & . \\
x_n & & & & 1
\end{array} .
$$

შემდეგ, მათი საშუალებით ვიპოვით S_i–ს ბოლო სვეტს და შევადგენთ ვექტორს $\alpha^{i,0} = (\alpha_1^{i,0}, \alpha_2^{i,0}, ..., \alpha_n^{i,0})$. მისი ნორმირებით გამოვთვლით $x_1, x_2, ..., x_n$ კანდიდატების წონით $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, ..., \alpha_n^i)$ ვექტორს, რომლის კოორდინატებია $f_i(x)$ კრიტერიუმის მნიშვნელობები კანდიდატებისათვის:

$$f_i(x_1)=\alpha_1^i,\ f_i(x_2)=\alpha_2^i\ ,\dots,\ f_i(x_n)=\alpha_n^i,\ i=1,2,\dots,m.$$

III ეტაპი. კრიტერიუმების მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ ცხრილი (ცხრილი 2.4.1), რომლის ბოლო სვეტში გამოთვლილია $F(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ალტერნატივებისათვის.

ცხრილი 2.4.1

f	f_1	f_2	f_3	.	f_m	$F(x_k,\alpha)$
α	α_1	α_2	α_3	.	α_m	
x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	.	$f_m(x_1)$	$F(x_1)$
x_2	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_2)$	.	$f_m(x_2)$	$F(x_2)$
.	.	.	.	.	.	.
x_n	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$f_3(x_n)$	.	$f_m(x_n)$	$F(x_n)$

მაშასადამე, ამ ცხრილის f_i-ის შესაბამის სვეტში მოთავსებულია მისი α_i წონა და შესაბამისი α^i ვექტორის კოორდინატები.

დასკვნა 2.4.1. ცხრილის ბოლო სვეტში მოთავსებული $F(x_1,\alpha)$, $F(x_2,\alpha)$, ..., $F(x_n,\alpha)$ რიცხვები დავალაგოთ კლებადობით. ამით ხდება შესაბამისი $x_1,x_2,\dots,x_n$ კანდიდატების რანჟირება პრიორიტეტების კლების მიხედვით - რაც მეტია $F(x_k,\alpha)$, მით მნიშვნელოვანია კანდიდატი x_k. თუ კანდიდატებს დავალაგებთ მკაცრი $\succ$ ბინარული მიმართებით, მაშინ სასურველი რაოდენობის საუკეთესო კანდიდატთა სიმრავლე ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ. თუ ეს დალაგება იქნება არამკაცრი $\succcurlyeq$ ბინარული მიმართებით, ანუ თუ ზოგიერთი ორი კანდიდატი ერთნაირია უპირატესობით, ვთქვათ, $x_i\approx x_j$, მაშინ მათგან უპირატესი კრიტერიუმების წონითი α ვექტორის საფუძველზე უნდა განისაზღვროს ლექსიკოგრაფიული უპირატესობით.

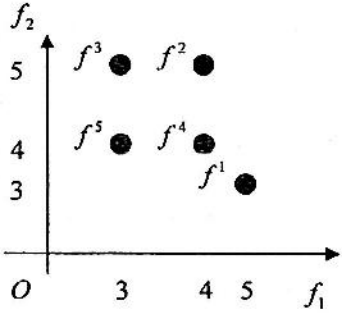
2.1 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ საუკეთესო კანდიდატის არჩევა, თუნდაც ორი ან სამი კრიტერიუმის შემთხვევაში, საკმაოდ პრობლემურია. შესაძლოა იმ მარტივ და რეალურ ამოცანასთან გვქონდეს საქმე, რომელშიც 3, 4 და 5 რიცხვითი შეფასებების მონაწილეობის შემთხვევაშიც კი ამოცანის გადაწყვეტის სხვადასხვა ხერხმა განსხვავებული შედეგები მოგვცა. განვიხილავთ ასეთ მაგალითს და ამოვხსნით მას ჩვენ მიერ აღწერილი ალგორითმით. ასევე, განვიხილავთ სხვა მიდგომებსაც, რომლებსაც მიმართავენ თუნდაც ანალოგიური ამოცანების გადასაწყვეტად და ვნახავთ, რომ ზოგიერთი მათგანი არაეფექტურია. სწორედ აქ ჩანს მეცნიერების როლი ასეთი ამოცანების გადასაწყვეტად და ამიტომ უნდა გავითვალისწინოთ დიდი რუსი მეცნიერების ვ. ვერნადსკის და დ. მენდელეევის გამონათქვამები: "მეცნიერება იწყება მაშინ, როცა ადამიანს საქმე ექნება ბუნების ისეთ მოვლენებთან, რომლებშიც მონაწილეობენ რიცხვები და ზომები; მეცნიერება იწყება მაშინ, როცა იწყება გაზომვა".

ამოცანა 2.4.1. ხუთი სტუდენტისაგან შედგენილი ჯგუფიდან უნდა ავირჩიოთ ერთი საუკეთესო სტუდენტი ორი საგნის, ვთქვათ, მათემატიკისა და ინფორმატიკის საგნებში წარმატებების მიხედვით. განვიხილოთ კრიტერიუმები: f_1-შეფასება მათემატიკაში; f_2-შეფასება ინფორმატიკაში. ამრიგად, საქმე გვაქვს ვექტორულ კრიტერიუმთან $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$, ხოლო კანდიდატთა სიმრავლეა $X=\{x_1,x_2,...,x_5\}$. კანდიდატთა შეფასებები ვექტორული $f(x)$ კრიტერიუმით თავიდანვე მოცემულია შემდეგნაირად:

$$f(x_1)=(5,3)\equiv f^1,\ f(x_2)=(4,5)\equiv f^2,\ f(x_3)=(3,5)\equiv f^3,$$

$$f(x_4)=(4,4)\equiv f^4,\ f(x_5)=(3,4)\equiv f^5.$$

ეს შეფასებები გეომეტრიულად გამოვსახოთ f_1Of_2 კოორდინატთა სისტემაში (ნახ. 2.4.1).



ნახ. 2.4.1.

ნახაზიდან და მის გარეშეც ნათლად ჩანს, რომ შეფასება f^2 დომინირებს f^5-ს (f^2-ის ორივე კოორდინატი მეტია f^5-ის ორივე კოორდინატზე, შესაბამისად) და ამიტომ, დომინირებული x_5 კანდიდატი გამოირიცხება. დანარჩენი ოთხი კანდიდატიდან f^1 და f^2 პარეტოს ეფექტური შეფასებებია და, მაშასადამე, x_1 და x_2 ეფექტური ანუ საუკეთესო კანდიდატებია. არჩევანი მათგან უნდა გაკეთდეს, მაგრამ როგორ? რადგან ვიცით, რომ პარეტოს ეფექტური გადაწყვეტილებების სიმრავლე კომპრომისულია, ამიტომ გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა უნდა გვითხრას რომელი კრიტერიუმია მისთვის უფრო მნიშვნელოვანი (ფასეული, სასარგებლო) - მათემატიკა თუ ინფორმატიკა. თუ ჩაითვლება, რომ მათემატიკა უპირატესია ინფორმატიკაზე, მაშინ ბუნებრივია, უნდა ავირჩიოთ x_1 კანდიდატი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, უნდა ავირჩიოთ x_2. რაც შეეხება შეფასებებს f^3 და f^4, ისინი სუსტად

ეფექტურებია და, შესაბამისად, x_3 და x_4 კანდიდატები სუსტად ეფექტური კანდიდატებია.

მოცემული ამოცანის პირობებში შეიძლება დაისვას კითხვა: რამდენად მნიშვნელოვანია ერთი კრიტერიუმი მეორეზე? კრიტერიუმების მნიშვნელოვნების პრობლემებს გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში გასული საუკუნის 70-იანი წლებიდან შეისწავლის ცნობილი რუსი მეცნიერი ე. პოდინოვსკი. ამ პრობლემებზე მუშაობას იგი დღესაც აგრძელებს.

დასმული ამოცანა გადავწყვიტოთ ჩვენ მიერ აღწერილი ალგორითმით, ანუ - კანდიდატების რანჟირებით. ეს უფრო საჭიროა, რადგან შეიძლება აღნიშნული ხუთი სტუდენტიდან ერთზე მეტი საუკეთესო სტუდენტის არჩევაც კი გახდეს საჭირო, ანუ საქმე გვქონდეს მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანასთან.

I ეტაპის თანახმად განვსაზღვროთ კრიტერიუმების წონა. ეს კი მოითხოვს (2.4.3) მატრიცაში მხოლოდ ერთი ელემენტის, α_{12}-ის პოვნას:

$$S_f = \begin{array}{c|cc} f & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & 1 & \alpha_{12} \\ f_2 & & 1 \end{array}.$$

ვთქვათ, $\alpha_{12} = 3$ (მათემატიკა სუსტად უპირატესია ინფორმატიკაზე). რადგან მატრიცის ბოლო სვეტის ელემენტებია $\alpha_1^0 = 3,\ \alpha_2^0 = 1$, ამიტომ $\alpha^0 = (3,1)$. ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ $\alpha = (0,75;\ 0,25)$. ჩვენი მონაცემები მოვათავსოთ შემდეგ ცხრილში (ცხრილი 2.4.2).

ცხრილი 2.4.2

f	f_1	f_2
α	0,75	0,25
x_1	5	3
x_2	4	5
x_3	3	5
x_4	4	4
x_5	3	4

ახლა განვიხილოთ II ეტაპში განსაზღვრული S_1 და S_2 მატრიცები. ვთქვათ, S_1-ში

$$\alpha_{12}^1 = 2,\ \alpha_{13}^1 = 4,\ \alpha_{14}^1 = 2,\ \alpha_{15}^1 = 4:$$

$$S_1 = \begin{array}{c|ccccc} f_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ x_2 & & 1 & & & \\ x_3 & & & 1 & & \\ x_4 & & & & 1 & \\ x_5 & & & & & 1 \end{array}.$$

მაშინ (2.3.2) ფორმულების მეშვეობით S_1-ის ბოლო სვეტის ელემენტები იქნება

$$\alpha_{15}^1 = 4, \alpha_{25}^1 = \frac{4}{2} = 2, \alpha_{35}^1 = \frac{4}{4} = 1, \alpha_{45}^1 = \frac{4}{2} = 2, \alpha_{55}^1 = 1.$$

ამ რიცხვებისაგან შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^{1,0} = (4;2;1;2;1)$. მისი ნორმირებით მივიღებთ $\alpha^1 = (0,4;0,2;0,1;0,2;0,1)$.

ანალოგიურად, ვთქვათ, S_2-ში

$$\alpha_{12}^2 = \frac{1}{4} = 0,25; \alpha_{13}^2 = \frac{1}{4} = 0,25; \alpha_{14}^2 = \frac{1}{2} = 0,5; \alpha_{15}^2 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

ამიტომ,

$$\alpha^{2,0} = (0,5;2;2;1;1) \text{ და } \alpha^2 = (0,08;0,31;0,31;0,15;0,15).$$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ 2.4.1 ცხრილში და გამოვთვალოთ $F(x_k,\alpha)$ $(k=1,2,...,5)$.

f	f_1	f_2	$F(x_k,\alpha)$
α	0,75	0,25	
x_1	0,4	0,08	0,32
x_2	0,2	0,31	0,23
x_3	0,1	0,31	0,155
x_4	0,2	0,15	0,188
x_5	0,1	0,15	0,113

ამ ცხრილის ბოლო სვეტის რიცხვების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$ და, მაშასადამე, კანდიდატებიდან ყველაზე საუკეთესოა x_1, ხოლო ყველაზე ცუდი - x_5.

შენიშვნა 2.4.2. ანალოგიური ტიპის საკონკურსო ამოცანებში კრიტერიუმების თავდაპირველი შეფასებების როლში ზოგჯერ განიხილავენ გარკვეული ქულების მინიჭების საკითხს, რაც წარმოშობს მრავალ გაურკვევლობას და კითხვას. კერძოდ, თანაზომადია თუ არა აღნიშნული სკალები, კრიტერიუმები დამოუკიდებელია თუ დამოკიდებული, ამ კრიტრიუმებით შესაძლებელია თუ არა ობიექტური შეფასებები, რატომ ავირჩიეთ ასეთი სკალა და ა.შ. ამასთან ერთად, წონების როლში ზოგჯერ აიღებენ მთელ კოეფიციენტებს და განიხილავენ თითქოს აწონილ სიდიდეებს. ასეთ შემთხვევაში განსაკუთრებული სიფრთხილე და ექსპერიმენტებია საჭირო, რადგან ამ დროს შესაძლებელია ძალიან ცუდი შედეგის მიღება (ცუდმა კანდიდატმა დაიკავოს ღირსეულის ადგილი). ასეთი სიფრთხილის საჭიროება ვაჩვენოთ ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში.

შემთხვევა 1. 2.4.2 ცხრილში წონითი ვექტორის კოეფიციენტები ავიღოთ 1-ზე მეტი; კერძოდ, რადგან უპირა-

ტესობას ვანიჭებთ მათემატიკას, ამიტომ ვთქვათ, $\alpha_1 = 4;\ \alpha_2 = 2$.

f	f_1	f_2	$4f_1$	$2f_2$	$F(x_k, \alpha)$
α	4	2			
x_1	5	3	20	6	26
x_2	4	5	16	10	26
x_3	3	5	12	10	22
x_4	4	4	16	8	24
x_5	3	4	12	8	20

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1 \approx x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$. ეს ნიშნავს, რომ ორი განსხვავებული ეფექტური კანდიდატი x_1 და x_2 პრიორიტეტის მიხედვით ერთნაირია. ეს კი პარადოქსია.

შემთხვევა 2. ახლა იმავე ცხრილში წონითი ვექტორის კოეფიციენტებად ავიღოთ $\alpha_1 = 6;\ \alpha_2 = 4$. მაშინ გვექნება,

f	f_1	f_2	$6f_1$	$4f_2$	$F(x_k)$
α	6	4			
x_1	5	3	30	12	32
x_2	4	5	24	20	44
x_3	3	5	18	20	38
x_4	4	4	24	16	40
x_5	3	4	18	16	34

აქედან ჩანს, რომ ასე მიღებული გადაწყვეტილება ანუ კანდიდატების რანჟირება $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_1$ არამართებულია. მაშასადამე, აქაც პარადოქსთან გვაქვს საქმე - ყველაზე ეფექტური კანდიდატი x_1 საერთოდ ვერ აღმოჩნდა ვერც პირველ და ვერც მეორე ადგილზე; ის ყველაზე ცუდი კანდიდატი გამოვიდა. წარმოვიდგინოთ, რომ

საპასუხისმგებლო თანამდებობაზე ასარჩევი საუკეთესო კანდიდატი, რომელიც ღია კონკურსის შედეგად ამ თანამდებობაზე არ იქნა არჩეული და თანაც კანდიდატებს შორის ყველაზე უარესი აღმოჩნდა. ეს ფაქტი ხომ სერიოზულ კონფლიქტს გამოიწვევს?

ყოველივე აღნიშნულიდან გამომდინარე, აწონილ ჯამში წონითი კოეფიციენტები წესიერი წილადი რიცხვები უნდა იყოს, რომელთა ჯამი ერთია.

მრავალკრიტერიუმიან ამოცანებში კრიტერიუმების მნიშვნელობები ხშირად სხვადასხვა განზომილებით მოიცემა (მაგალითად, პირველი კგ-ით, მეორე - მეტრებით, მესამე სთ-ით და ა.შ.). მაშინ საჭიროა ამ მონაცემების ნორმირება შემდეგი წესით: თითოეული კრიტერიუმის მნიშვნელობები უნდა გავყოთ მათგან უდიდეს მნიშვნელობაზე, რითაც მივიღებთ უგანზომილებო მაჩვენებლებს. განვიხილოთ ასეთი შემთხვევაც.

შემთხვევა **3.** კრიტერიუმების მნიშვნელობები თანაზომადია - მათ საერთო მასშტაბი აქვთ. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე ჩვენს ამოცანაში. განვიხილოთ მისთეის იერარქიული ანალიზის მეთოდით განსაზღვრული წონითი კოეფიციენტები და ასე ავწონოთ კანდიდატთა სარგებლიანობები. ეს ნიშნავს, რომ საქმე გვაქვს 2.4.2 ცხრილთან.

f	f_1	f_2
α	0,75	0,25
x_1	5	3
x_2	4	5
x_3	3	5
x_4	4	4
x_5	3	4

აქედან მივიღებთ, რომ $F(x_1,\alpha)=0,75\cdot 5+0,25\cdot 3=4,5;$

$$F(x_2,\alpha)=4,25;\, F(x_3,\alpha)=3,5;\, F(x_4,\alpha)=4;\, F(x_5,\alpha)=3,25$$

და $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$, რაც მართებულია და ემთხვევა იამ-ით მიღებულ რანჟირებას.

შემთხვევა **4.** დავუშვათ, რომ ჩვენს ამოცანაში კრიტერიუმების განზომილებები განსხვავებულია. განვიხილოთ მათი მნიშვნელობების ნორმირება ჩვენ მიერ აღნიშნული წესით. ამის გამო, 2.4.2 ცხრილიდან მივიღებთ

f	f_1	f_2
α	0,75	0,25
x_1	1	0,6
x_2	0,8	1
x_3	0,6	1
x_4	0,8	0,8
x_5	0,6	0,8

კანდიდატთა წონების განსაზღვრით იმავე შედეგს მივიღებთ რაც მივიღეთ იამ-ით წინა შემთხვევაში $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$.

ზოგადად შევეხოთ არჩევის პრობლემას. არჩევის პრობლემაში იგულისხმება სამართლიანი ანუ დემოკრატიული და რაციონალური არჩევანის გაკეთება, რაც ყველა დროში მეტად მნიშვნელოვანია. მისი გადაწყვეტა ხშირ შემთხვევაში ცალსახად და სამართლიანად ვერ ხერხდება. აქ საქმე გვაქვს პარადოქსებთან, რომლებსაც ადამიანები ზოგჯერ ვერც კი აცნობიერებენ. ასეთ პარადოქსებსა და სამართლიან არჩევანზე მხოლოდ მას შემდეგ გახდა შესაძლებელი დაკვირვება და გაცნობიერება, როცა ჩაერთო ფორმალური აპარატი. პირველად ეს 1780-იანი წლების დასაწყისში მოხდა საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიაში წევრების მისაღებად გამოყენებულ არჩევის (კენჭისყრის) წესებში. ასეთი წესები დაამუშავეს ფრანგმა სწავლულებმა, საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრებმა: კონდორსემ, ბორდამ და ლაპლასმა. აღვნიშნავთ, რომ არჩევის კონდორსეს წესი იყენებს უპირატესობებით კანდიდატების წყვილობით შედარებას. ამ წესით გამარჯვებული კანდიდატი შეიძლება არ არსებობ-

დეს. კონდორსეს და ბორდას შორის შეუთანხმებლობა იყო არჩევის წესებთან დაკავშირებით.

არჩევნების თეორიის მათემატიკური დამუშავება კი დაიწყო დიდიდ ხნის შემდეგ - 1951 წელს ამერიკელი მათემატიკოსის, ნობელის პრემიის ლაურეატის კ. ეროუს მიერ. არჩევნების წესების და კანონების უდიდეს მნიშვნელობაზე მიუთითებს ის გარემოება, რომ მათ შესწავლას აშშ-ში დიდი ყურადღება ექცევა საწყისი კლასებიდან. არჩევნების და, საერთოდ, კოლექტიური გადაწყვეტილების ამოცანები და ამ თეორიის ელემენტები გადმოცემულია მეხუთე თავში.

2.5. პროფესორ-მასწავლებელთა კონკურსი

განვიხილოთ ჩვენი ქვეყნის პირობებში განხორციელებული, უმაღლესი სკოლის რეფორმის შესაბამისად, უნივერსიტეტებში კონკრეტულ მიმართულებაზე ჩასატარებელ პროფესორ-მასწავლებელთა კონკურსის პრობლემა. პრობლემის მნიშვნელობიდან გამომდინარე, ძირითადია მრავალრიცხოვანი არჩევის საკონკურსო ორგანიზაციული სისტემის ოპტიმალური მართვის პრობლემა და ამიტომ შევისწავლოთ იგი. ამისათვის პირველ რიგში უნდა დადგინდეს ოპტიმალურობის ის თეისებები (აქსიომები), კრიტერიუმები და პრინციპები, რომელთა საფუძველზეც ყველა კანდიდატი აღმოჩნდება თანაბარ პირობებში, შეგვეძლება ღია და გამჭვირვალე წესით გამარჯვებული კანდიდატების გამოვლენა. ასეთი აქსიომების როლში შეგვიძლია დავასახელოთ ზოგიერთი დემოკრატიული და რაციონალური აქსიომები, თუნდაც, კ. ეროუს აქსიომებიდან - მონოტონურობის, დიქტატორის არარსებობის, კანდიდატთა სუვერენულობის, და კ. მეის აქსიომებიდან - ანონიმურობის, ნეიტრალობის (ორივე კანდიდატის და გადაწყვეტილების მიმღებ პირთა თანაბ-

რობის აქსიომაა), დადებითი რეაქციის (მოცემულია მეხუთე თავში).

მრავალრიცხოვანი არჩევის კონკურსისათვის მიზანშეწონილად მიგვაჩნია იმ აუცილებელი რეალური კრიტერიუმების გამოყენება, რომლებიც, ამავე დროს, საკმარისიც უნდა იყოს და მათთვის არ ირღვეოდეს ჩამოთვლილი აქსიომები. ასეთი კრიტერიუმები უნდა დადგინდეს იმ უაღრესად კომპეტენტური და ავტორიტეტული ჯგუფის მიერ, რომელიც პასუხისმგებლობას აიღებს საკონკურსო პროცესის ოპტიმალურ მართვაზე. საკონკურსო სისტემის მართვის ოპტიმალურობის პრინციპი უნდა აკმაყოფილებდეს მოთხოვნას: რაც მეტი და ხარისხიანი, მით უპირატესი. ამდენად, ოპტიმალურობის პრინციპი უნდა იყოს პარეტოს ეფექტურობის პრინციპი. ამ პრინციპით და დადგენილი კრიტერიუმებით უნდა დახასიათდეს უმაღლესი სკოლისათვის სასურველი პედაგოგები და მეცნიერები. ჩვენ დავასახელებთ ექვს კრიტერიუმს (არ გამოირიცხება მათი რიცხვის შემცირება ან გაზრდა, თუმცა არაა სასურველი მათი რაოდენობა იყოს 7-ზე მეტი). სხვა დამატებითი კრიტერიუმებისათვის დიდად სავარაუდოა, რომ დაირღვევა ოპტიმალურობის ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებებიდან რომელიმე.

საკონკურსო პრობლემის გადაჭრა მხოლოდ სწორი გადაწყვეტილებების პოვნით და მათი რეალიზებითაა შესაძლებელი. ასეთების პოვნა კი რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენებას ითვალისწინებს და მათ გარეშე ვერც ერთი პროცესის ვერანაირი ოპტიმიზაცია იქნება სამართლიანი. მიუხედავად იმისა, რომ ყოველი გადაწყვეტილება-არჩევანი სუბიექტური ფაქტორებითაა განპირობებული, საუნივერსიტეტო პროფესორ-მასწავლებელთა კონკურსი უნდა ჩატარდეს ძალიან ფრთხილად, რაც შეიძლება ობიექტურად და სამართლიანად, თუნდაც უნივერსიტეტის მომავლის საკეთილდღეოდ. ამასთან, ობიექტურობა და სამართლიანობა უნდა ითვალისწინებდეს პატიოსანი,

წარმატებული და საჭირო სპეციალობის მეცნიერთა შენარჩუნებას.

ალნიშნული კონკურსის ამოცანაში ძირითად კრიტერიუმებად მიგვაჩნია შემდეგი:

f_1 - აკადემიური ხარისხი (მეცნიერებათა დოქტორი, მეცნიერებათა კანდიდატი, დარგის დოქტორი);

f_2 - სამეცნიერო წოდება და აკადემიური თანამდებობა (არსებობს შესაბამისი დოკუმენტი): სრული პროფესორი, პროფესორი, ასოცირებული პროფესორი, ასისტენტ პროფესორი, დოცენტი, წამყვანი მეცნიერი-თანამშრომელი, უფროსი მეცნიერი-თანამშრომელი;

f_3 - უმაღლეს სკოლაში პედაგოგიური მუშაობის სტაჟი და გამოცდილება, მათ შორის პროფესიონალიზმი, ადამიანური ხასიათი და თვისებები თანამშრომლებთან და სტუდენტებთან ურთიერთობაში;

f_4 - გამოქვეყნებული სამეცნიერო სტატიებისა და გამოგონებების სრული ნუსხა;

f_5 - სამეცნიერო კონფერენციებში მონაწილეობა (საერთაშორისო, რესპუბლიკური, ადგილობრივი);

f_6 - მონოგრაფია, სახელმძღვანელო, დამხმარე სახელმძღვანელო, გამოგონება, ლაბორატორიული და სხვა სამუშაოები პირობითი ნაბეჭდი თაბახის და გვერდების რაოდენობის მითითებით.

შევისწავლოთ დასახელებული კრიტერიუმები. შევნიშნოთ, რომ ამ კრიტერიუმებიდან f_1 და f_2 ხარისხობრივია, f_3 - ნაწილობრივ ხარისხობრივი, ხოლო f_4, f_5 და f_6 - რაოდენობრივი. ყველა ამ კრიტერიუმით კონკურსში მონაწილე კანდიდატების შედარება შეგვიძლია იერარქიული ანალიზის მეთოდის 1)-5) ხარისხობრივი უპირატესობებით და შესაბამისი რაოდენობრივი შეფასებების სკალით. ყოველი კონკრეტული კონკურსის შემთხვევაში

საჭირო კრიტერიუმები და ასეთი ხარისხობრივი უპირატესობები თავიდანვე უნდა დადგინდეს გმჯ-ის (საორგანიზაციო კომისიის) მიერ, მაგალითად, რამდენჯერ უპირატესია სრული პროფესორი ასოცირებულ პროფესორზე, მეცნიერებათა დოქტორი - დარგის დოქტორზე, 20-წლიანი პედაგოგიური სტაჟის და შესაბამისი გამოცდილების მქონე კანდიდატი 12-წლიან პედაგოგიური სტაჟის და შესაბამისი გამოცდილების მქონე კანდიდატზე და ა.შ.

ამავე დროს, f_1, f_2 და f_3 მარტივი კრიტერიუმებია. რაც შეეხება f_4, f_5 და f_6 კრიტერიუმებს, ისინი შედგენილი კრიტერიუმებია იმ განსაზღვრებით, რომ თავისთავად, საკუთრივი კრიტერიუმებით განისაზღვრება. ეს გამოწვეულია იმის გამო, რომ გამოქვეყნებული სამეცნიერო სტატიები შესაბამისი ჟურნალების რეიტინგის მიხედვით განსხვავდება, ასევე, განსხვავდება სამეცნიერო კონფერენციები მათი ხარისხობრივი დონის მიხედვით. იგივე ითქმის გამოქვეყნებული წიგნების შესახებ. საკონკურსო პროცესის წარმატებით და სამართლიანი მართვისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს f_4, f_5 და f_6 კრიტერიუმების დაზუსტებას.

f_4 კრიტერიუმი აფასებს კანდიდატის მიერ გამოქვეყნებული სამეცნიერო სტატიების ხარისხობრივ რაოდენობას. ამიტომ, მათი რიცხვი დავახასიათოთ შემდეგი საკუთრივი კრიტერიუმებით:

s_1 - გამოქვეყნებული იმპაქტ-ფაქტორის მქონე ჟურნალში;

s_2 - საზღვარგარეთ გამოქვეყნებული;

s_3 - გამოქვეყნებული საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბეში ;

s_4 - უნივერსიტეტის შრომებში გამოქვეყნებული;

s_5 - გამოქვეყნებული ფაკულტეტებისა და აკადემიური ინსტიტუტების შრომებში;

s_6 - სხვა გამოცემებში.

ამრიგად, f_4 კრიტერიუმი პირველი დონის ექვსი იერარქიული საკუთრივი კრიტერიუმისაგან შედგება

$$f_4=(s_1,s_2,...,s_6).$$

f_5 კრიტერიუმის პირველი დონის იერარქიული საკუთრივი კრიტერიუმები:

k_1- მოხსენების ტექსტი ქვეყნის გარეთ გამოქვეყნებულია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში;

k_2- მოხსენების თეზისი ქვეყნის გარეთ გამოქვეყნებულია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში;

k_3- მოხსენების ტექსტი ქვეყნის შიგნით გამოქვეყნებულია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში;

k_4- მოხსენების თეზისი ქვეყნის შიგნით გამოქვეყნებულია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში;

k_5- მოხსენების ტექსტი ქვეყნის შიგნით გამოქვეყნებულია რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში;

k_6- მოხსენების თეზისი გამოქვეყნებულია ქვეყნის შიგნით რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენციის მასალებში.

მაშასადამე, $f_5=(k_1,k_2,...,k_6)$.

f_6 კრიტერიუმის საკუთრივი კრიტერიუმების როლში ავიღოთ:

m_1- მონოგრაფიები პირობით ნაბეჭდ თაბახებში ჯამურად;

m_2- სახელმძღვანელოები პირობით ნაბეჭდ თაბახებში ჯამურად;

m_3- დამხმარე სახელმძღვანელოები პირობით ნაბეჭდ თაბახებში ჯამურად;

m_4- ლაბორატორიული და სხვა სამუშაოები პირობით ნაბეჭდ თაბახებში ჯამურად.

ამრიგად, $f_6=(m_1, m_2, m_3, m_4)$.

ახლა დავადგინოთ საკონკურსო მონაცემები. ვიგულისხმოთ, რომ კანდიდატთა შესარჩევი კონკურსი მოცემული კონკრეტული მიმართულებისათვის ცალ-ცალკე ტარდება სრული პროფესორების, ასოცირებული პროფესორების და ასისტენტ-პროფესორების თანამდებობის დასაკავებლად. კონკურსის ჩატარებისათვის საჭიროა მომზადდეს კონკურსში მონაწილე კანდიდატების მონაცემების ცხრილი. ამისათვის განვიხილავთ ორ ძირითად ეტაპს.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ (2.4.1) ამოცანის თანახმად გვაქვს ექვსკრიტერიუმიანი ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_6(x)) \to \max_X ,$$

სადაც $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ კონკურსში მონაწილე კანდიდატთა სიმრავლეა. ამ სიმრავლის ყველა კრიტერიუმის გათვალისწინებით უპირატესობებით რანჟირებისათვის, (2.4.2) ამოცანის თანახმად, უნდა ამოვხსნათ ამოცანა

$$F(x,\alpha) = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i f_i(x) \to \max_X .$$

I ეტაპი. $f_1, f_2, \ldots, f_6$ კრიტერიუმებისათვის განვიხილოთ (2.4.3)-ით განსაზღვრული S_f მატრიცა და ვიპოვოთ მისი წონითი ვექტორი $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)$.

იმავე მეთოდით ვიპოვოთ:

$f_4=(s_1, s_2, \ldots, s_6)$-ის წონითი ვექტორი $\alpha^s = (\alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, \alpha_6^s)$;

$f_5=(k_1, k_2, \ldots, k_6)$-ის წონითი ვექტორი $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_6^k)$;

$f_6=(m_1, m_2, m_3, m_4)$-ის წონითი ვექტორი

$$\alpha^m = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m, \alpha_4^m).$$

აღნიშნულ კრიტერიუმებს, მათ წონით კოეფიციენტებს და $x_1, x_2, \ldots, x_n$ კანდიდატთა ყველა მონაცემს, რომ-

ლებსაც მოითხოვს $f_1, f_2, ..., f_6$ კრიტერიუმები, მოვათავსებთ ცხრილში (ცხრილი 2.5.1).

ცხრილი 2.5.1

f	f_1- აკ.ხარ.	f_2- აკ.წოდ.	f_3- სტაჟი	f_4 - სტატიები
α	α_1	α_2	α_3	α_4
				s_1 - s_2 - s_3 - s_4 - s_5 - s_6 -
				$\alpha_1^s\ \alpha_2^s\ \alpha_3^s\ \alpha_4^s\ \alpha_5^s\ \alpha_6^s\ \sum(s)$
x_1				
$\vdots$				

f_5 -კონფერენციები	f_6 - წიგნები
α_5	α_6
k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5 - k_6 -	m_1 - m_2 - m_3 - m_4 -
$\alpha_1^k\ \alpha_2^k\ \alpha_3^k\ \alpha_4^k\ \alpha_5^k\ \alpha_6^k$ $\sum(k)$	$\alpha_1^m\ \alpha_2^m\ \alpha_3^m\ \alpha_4^m\ \sum(m)$

ამ ცხრილში, f_4-ის კრიტერიუმების ბოლო სვეტში გამოვთვლით

$$\sum(s) \equiv \sum_{l=1}^{6} \alpha_l^s \cdot x_{il}^s$$

სიდიდეს, სადაც x_{il}^{s} არის s_l კრიტერიუმის შესაბამისი მონაცემი i-ური კანდიდატისათვის; α_l^{s} კი არის s_l კრიტერიუმის წონითი კოეფიციენტი.

ანალოგიურად გამოითვლება f_5 და f_6 კრიტერიუმების ბოლო სვეტებში მითითებული სიდიდეები

$$\sum(k) \equiv \sum_{l=1}^{6} \alpha_l^k \cdot x_{il}^k \quad \text{და} \quad \sum(m) \equiv \sum_{l=1}^{4} \alpha_l^m \cdot x_{il}^m .$$

II ეტაპი. ახლა 2.4 პარაგრაფის II ეტაპის შესაბამისად ვახდენთ $x_1, x_2, ..., x_n$ კანდიდატების რანჟირებას $f_1, f_2, ..., f_6$ კრიტერიუმებით $S_1, S_2, ..., S_6$ მატრიცების გამოყენებით. ამისათვის ვპოულობთ

$$\alpha^1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, ..., \alpha_n^1), \; . \; . \; . \; , \; \alpha^6 = (\alpha_1^6, \alpha_2^6, ..., \alpha_n^6)$$

წონით ვექტორებს, რომელთა კოორდინატებია

$$\alpha_1^1 = f_1(x_1), \; \alpha_2^1 = f_1(x_2), \; \ldots \; , \; \alpha_n^1 = f_1(x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1^6 = f_6(x_1), \; \alpha_2^6 = f_6(x_2), \; \ldots, \; \alpha_n^6 = f_6(x_n).$$

მიღებული კრიტერიალური მნიშვნელობები მოვათავსოთ 2.4.1 ცხრილში. გამოვთვლით ამ ცხრილის ბოლო სვეტის $F(x_1,\alpha), F(x_2,\alpha), ..., F(x_n,\alpha)$ მნიშვნელობებს, მათი დალაგებით კლებადობის მიხედვით მოვახდენთ შესაბამისი კანდიდატების რანჟირებას უპირატესობების კლებით.

შენიშვნა 2.5.1. $\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ წონითი ვექტორების გამოსათვლელად საჭირო S_4, S_5, S_6 მატრიცების პირველი სტრიქონების ელემენტების პოვნა არ მოითხოვს ექსპერტულ შეფასებებს. ისინი $\sum(s)$, $\sum(k)$ და $\sum(m)$ რიცხვების საშუალებით ძალიან მარტივად გამოითვლება. ყველა შემთხვევაში, უპირატესობა ამ რიცხვების გაყოფით გამოითვლება.

ამოცანა 2.5.1. ვთქვათ, კონკურსში მონაწილე სამი კანდიდატის x_1, x_2 და x_3-ის მონაცემები მოცემულია 2.5.1 ცხრილში. ვახდენთ მათ რანჟირებას.

f	f_1-	f_2-	f_3-	f_4						
α	0,216	0,108	0,027	0,108						
				s_1-	s_2-	s_3-	s_4-	s_5-	s_6-	
				0,64	0,16	0,08	0,04	0,02	0,02	$\sum(s)$
x_1	მეცნ.დ	სრ.პრ.	25	1	1	1	1	-	2	0,96
x_2	დოქტ.	ას.პრ.	12	1	-	2	3	2	1	0, 98
x_3	მეცნ.დ.	პროფ.	20	-	2	1	1	1	2	0,5

f_5 -							f_6 -				
0,108							0,432				
k_1-	k_2-	k_3-	k_4-	k_5-	k_6-		m_1-	m_2-	m_3-	m_4-	
0,4	0,2	0,15	0,02	0,21	0,02	$\sum(k)$	0,45	0,3	0,2	0,05	$\sum(m)$
1	-	2	1	1	-	0,93	20	12	8	-	10,96
-	2	3	-	1	1	1,0	-	16	30	5	11,05
1	1	3	1	-	2	1,11	8	10	20	-	10,6

ამოხსნა. საკონკურსო კომისიის მიერ დადგენილია შემდეგი წონითი ვექტორები:

$$\alpha = (0,216;0,108;0,027;0,108;0,108;0,432);$$

$$\alpha^s = (0,64;0,16;0,08;0,04;0.02;0,02);$$

$\alpha^k = (0,4;0,2;0,15;0,02;0,21;0,02)$;

$\alpha^m = (0,45;0,3;0,2;0,05)$.

თითოეული კანდიდატის მონაცემებით გამოვთვლით ცხრილში მითითებულ $\sum(s)$, $\sum(k)$, $\sum(m)$ სიდიდეებს.

ახლა დაგვრჩა საპოვნელი $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^6$ წონითი ვექტორები. ისინი გამოვთვალოთ თანამიმდევრობით.

განვიხილოთ S_1 მატრიცა და ვთქვათ, ექსპერტმა აქ f_1-აკადემიური ხარისხის კრიტერიუმით მიუთითა შეფასებები $\alpha_{12}^1 = 4$, $\alpha_{13}^1 = 1$:

$$S_1 = \begin{array}{c|ccc} f_1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 4 & 1 \\ x_2 & & 1 & 0,25 \\ x_3 & & & 1 \end{array}$$

(2.3.2) ფორმულების გამოყენებით (ან როგორც ეს პროცესი 2.2.1 დასკვნაშია გადმოცემული) ბოლო სვეტში უცნობია $\alpha_{22}^1 = \frac{1}{4} = 0,25$. ამრიგად, $\alpha^{1,0} = (1;0,25;1)$. რადგან 1+0,25+1=2,25, ამიტომ ამ ვექტორის ნორმირებით მივიღებთ

$$\alpha^1 = (0,44;0,11;0,44).$$

ვთქვათ, S_2 მატრიცაში f_2 კრიტერიუმით ექსპერტის მიერ მითითებული შეფასებებია $\alpha_{12}^2 = 2, \alpha_{13}^2 = \frac{1}{2} = 0,5$:

$$S_2 = \begin{array}{c|ccc} f_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 0,5 \\ x_2 & & 1 & 0,25 \\ x_3 & & & 1 \end{array}.$$

აქ, ბოლო სვეტია $\alpha^{2,0} = (0,5;0,25;1)$ და მისი ნორმირებული ვექტორი იქნება

$$\alpha^2 = (0,29;0,14;0,57).$$

ვთქვათ, S_3-ის პირველ სტრიქონში მიღებულია სიდიდეები $\alpha_{12}^3 = \frac{25}{12} = 2$, $\alpha_{13}^3 = 1$:

$$S_3 = \begin{array}{c|ccc} f_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 1 \\ x_2 & & 1 & 0,5 \\ x_3 & & & 1 \end{array}.$$

მაშინ $\alpha^{3,0} = (1;0,5;1)$ და $\alpha^3 = (0,4;0,2;0,4)$.

2.5.1 შენიშვნის თანახმად S_4, S_5, S_6-ის პირველ სტრიქონში შეფასებების პოვნა მარტივად შეიძლება. მაგალითად, S_4-ში $\alpha_{12}^4 = \frac{0,96}{0,98} = 1, \alpha_{13}^4 = \frac{0,96}{0,5} = 1,92$ და

$$S_4 = \begin{array}{c|ccc} f_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 2 \\ x_2 & & 1 & 2 \\ x_3 & & & 1 \end{array}.$$

აქ, $\alpha^{4,0} = (2;2;1)$, ხოლო $\alpha^4 = (0,4;0,4;0,2)$.

S_5-ში $\alpha_{12}^5 = \frac{0,93}{1} = 1$, $\alpha_{13}^5 = \frac{0,93}{1,11} = 0,8$. ამიტომ,

$$S_5 = \begin{array}{c|ccc} f_5 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0,8 \\ x_2 & & 1 & 0,8 \\ x_3 & & & 1 \end{array}.$$

აქ, $\alpha^{5,0} = (0,8;0,8;1)$ და $\alpha^5 = (0,31;0,31;0,38)$.

ანალოგიურად, S_6-ში პირველი სტრიქონის ელემენტებია 1, $\alpha_{12}^6 = \frac{10,96}{11,05} = 0,99$, $\alpha_{13}^6 = \frac{10,96}{10,6} = 1,03$:

$$S_6 = \begin{array}{c|ccc} f_6 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0,99 & 1,03 \\ x_2 & & 1 & 1,04 \\ x_3 & & & 1 \end{array}$$

საიდანაც $\alpha^{6,0} = (1,03;1,04;1)$ და $\alpha^6 = (0,33;0,33;0,34)$.

$\alpha, \alpha^1, ..., \alpha^6$-ის მიღებული მნიშვნელო-ბები მოვათავსოთ 2.4.1 ცხრილში (გვ. 79).

f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	$F(x_k, \alpha)$
α	0,216	0,108	0,027	0,108	0,108	0,432	
x_1	0,44	0,29	0,4	0,4	0,31	0,33	0,356
x_2	0,11	0,14	0,2	0,4	0,31	0,33	0,263
x_3	0,44	0,57	0,4	0,2	0,38	0,34	0,378

.

ცხრილის მარჯვენა სვეტის მნიშვნელობები აკმაყო-ფილებს $F(x_3, \alpha) > F(x_1, \alpha) > F(x_2, \alpha)$ პირობებს და, მა-შასადამე, $x_3 \succ x_1 \succ x_2$.

კანდიდატთა მიღებული რანჟირებიდან გამომდინარე-ობს, რომ თუ ამოცანა მოითხოვს ერთი კანდიდატის არ-ჩევას, მაშინ უნდა ავირჩიოთ x_3 კანდიდატი; თუ საჭიროა ორი კანდიდატის არჩევა, მაშინ უნდა ავირჩიოთ x_1 და x_3; თუ სამივე უნდა ავირჩიოთ, მაშინ მათი რანჟირება საერთოდ არაა საჭირო და სამივეს ავირჩევთ.

დასკვნა 2.5.1. სარგებლიანობის თეორია ინდივიდე-ბისა და კოლექტივების სუბიექტური გრძნობა - დამოკი-დებულებების თეორიაა ობიექტების და მოვლენების მი-მართ, რომლითაც დგინდება მათში პრიორიტეტები. ამდე-ნად, მრავალრიცხოვანი მრავალკრიტერიუმიანი საკონ-კურსო სისტემის მართვის აღწერილი მოდელი ისეთივე სუბიექტურია, როგორიც ყველა სხვა არსებული. მათგან განსხვავებით კი, ეს მოდელი ყველაზე ოპტიმალურია, რომლის საშუალებით შესაძლებელია ჩატარდეს ღია და გამჭვირვალე კონკურსი.

საკონკურსო ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდის გამოყენებით, ადვილად შეიძლება ამოეხსნათ რანჟირებასთან დაკავშირებული სხვადასხვა ტიპის ამოცანები, კერძოდ, შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 2.5.2 (პრემიის განაწილება). უმაღლესი სკოლის კონკრეტული მიმართულების ექვსი თანამშრომლისაგან შედგენილ $X=\{x_1,x_2,...,x_6\}$ სიმრავლეში: x_1 და x_2 სრული პროფესორებია; x_3 და x_4 - ასოცირებული პროფესორები; x_5 - ასისტენტ-პროფესორი, ხოლო x_6 - ლაბორანტი. მოითხოვება, რომ წლის ბოლოს ამ მიმართულებისათვის პრემიის სახით გამოყოფილი თანხა s განაწილდეს ყველა თანამშრომელზე. როგორ გავაკეთოთ ეს?

ამოხსნა. ეს ამოცანა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რესურსის განაწილების ამოცანა რანჟირებული სისტემის სხვადასხვა დონეზე. ასეთი ტიპის ამოცანაში ოპტიმალური გადაწყვეტილების პოვნისათვის წარმატებით გამოყენება იერარქიული ანალიზის მეთოდი. ამისათვის, საექსპერტო კომისია წინასწარ ადგენს მიმართულებისათვის პრიორიტეტულ ძირითად კრიტერიუმებს. ვთქვათ, ასეთებია: f_1-აკადემიური თანამდებობა; f_2-გამოქვეყნებული სტატიები; f_3-სამეცნიერო კონფერენციაზე გამოსვლა; f_4-გამოცემული სახელმძღვანელოები.

ხარისხობრივი უპირატესობები და მათი შესაბამისი რაოდენობრივი შეფასების სკალა იყოს იგივე, რაც 2.5.1 ამოცანაში: თანაბრად უპირეტესობა - 1; სუსტად უპირატესობა - 2; ძლიერი უპირატესობა - 4; ძალიან ძლიერი უპირატესობა - 8; აბსოლუტური უპირატესობა - 16.

ვთქვათ, ექსპერტთა მიერ დადგენილ S_f მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$S_f = \begin{array}{c|cccc} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ f_2 & & 1 & & \\ f_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_4 & & & & 1 \end{array}.$$

აქედან ვღებულობთ კრიტერიუმების წონით ვექტორს

$$\alpha = (0{,}104;0{,}052;0{,}026;0{,}832)\,.$$

ახლა ვიპოვოთ $S_i\ (i=1,2,3,4)$ მატრიცა, რომლის საშუალებით მიღებული წონითი ვექტორი α' მოგვცემს $f_i\ (i=1,2,3,4)$ კრიტერიუმით X სიმრავლის რანჟირებას, ხოლო მისი საშუალებით გავანაწილებთ s თანხას.

ვთქვათ,

$$S_1 = \begin{array}{c|cccccc} f_1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 8 \\ x_2 & & 1 & & & & 8 \\ x_3 & & & 1 & & & 4 \\ x_4 & & & & 1 & & 4 \\ x_5 & & & & & 1 & 2 \\ x_6 & & & & & & 1 \end{array}\,.$$

აქ, $\alpha^1 = (0{,}296;0{,}296;0{,}148;0{,}148;0{,}074;0{,}037)$. მიღებული წონითი ვექტორით ანუ მხოლოდ f_1 კრიტერიუმით გავანაწილოთ თანხის s რაოდენობა მიმართულების თანამშრომელთა შორის და ასეთი წილები აღვნიშნოთ ვექტორით

$$\alpha^{1,s} = (0{,}296s;0{,}296s;0{,}148s;0{,}148s;0{,}074s;0{,}037s).$$

ანალოგიურად, ვთქვათ, გამოქვეყნებული სტატიებით - f_2 კრიტერიუმით გვაქვს

$$S_2 = \begin{array}{c|cccccc} f_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 8 & 8 \\ x_2 & & 1 & & & & 4 \\ x_3 & & & 1 & & & 2 \\ x_4 & & & & 1 & & 8 \\ x_5 & & & & & 1 & 1 \\ x_6 & & & & & & 1 \end{array}\,.$$

აქედან, $\alpha^{2,S}=(0{,}336s;0{,}168s;0{,}084s;0{,}336s;0{,}042s;0{,}042s)$.

ასევე ვიგულისხმოთ, რომ

$$S_3=\begin{array}{c|cccccc} f_3 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ x_2 & & 1 & & & & 1/4 \\ x_3 & & & 1 & & & 1/2 \\ x_4 & & & & 1 & & 1/8 \\ x_5 & & & & & 1 & 1/4 \\ x_6 & & & & & & 1 \end{array}.$$

აქ, $\alpha^{3,S}=(0{,}192s;0{,}096s;0{,}192s;0{,}048s;0{,}096s;0{,}384s)$;

$$S_4=\begin{array}{c|cccccc} f_4 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 2 & 1/2 & 1 & 1 \\ x_2 & & 1 & & & & 1 \\ x_3 & & & 1 & & & 1/2 \\ x_4 & & & & 1 & & 1/4 \\ x_5 & & & & & 1 & 1 \\ x_6 & & & & & & 1 \end{array}$$

და $\alpha^{4,S}=(0{,}212s;0{,}212s;0{,}106s;0{,}053s;0{,}212s;0{,}212s)$.

ამრიგად, s თანხიდან f_1, f_2, f_3, f_4 კრიტერიუმებით X სიმრავლის წევრთა წილებია:

$$f_i(x_1)=\alpha_1^{i,S}, f_i(x_2)=\alpha_2^{i,S},\dots,f_i(x_6)=\alpha_6^{i,S}, i=1,2,3,4.$$

ამ მნიშვნელობებისაგან შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

f	f_1	f_2	f_3	f_4	$F(x_k,\alpha)$
α	0,104	0,052	0,026	0,832	
x_1	$0{,}296s$	$0{,}3365s$	$0{,}192s$	$0{,}212s$	$0{,}232632s$
x_2	$0{,}296s$	$0{,}168s$	$0{,}096s$	$0{,}212s$	$0{,}188400s$
x_3	$0{,}148s$	$0{,}084s$	$0{,}192s$	$0{,}106s$	$0{,}112944s$
x_4	$0{,}148s$	$0{,}336s$	$0{,}048s$	$0{,}053s$	$0{,}080208s$
x_5	$0{,}074s$	$0{,}042s$	$0{,}096s$	$0{,}212s$	$0{,}188260s$
x_6	$0{,}037s$	$0{,}042s$	$0{,}384s$	$0{,}212s$	$0{,}192420s$

ამ ცხრილის მარჯვენა სვეტის თითოეული მნიშვნელობა არის x_i-ს შესაბამისი წილი s თანხიდან. მაგალითად, თუ $s = 2000$ ლარს, მაშინ x_1 მიიღებს

$$0{,}232632 \cdot 2000 = 465{,}264 \text{ ლარს;}$$

x_2 მიიღებს

$$0{,}1884 \cdot 2000 = 376{,}8 \text{ ლარს;}$$

x_6 მიიღებს

$$0{,}19242 \cdot 2000 = 384{,}84 \text{ ლარს.}$$

III თავი

მრავალკრიტერიუმიანი გადაწყვეტილების მიღების სუბიექტური მოდელები

3.1. მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების შეფასების კონსტრუქციული ELECTRE I მეთოდი

პირველ ნაწილში ვნახეთ, რომ გადაწყვეტილების მიღების მრავალი პრინციპი, რომლებიც დაკავშირებულია მოსალოდნელი სარგებლიანობისა და პროსპექტების თეორიასთან, გვეხმარება ავიცილოთ არჩევის ზოგიერთი პარადოქსი (ვთქვათ, მ. ალეს პარადოქსი). მაგრამ მათ არ შეუძლიათ გადაწყვიტონ ყველა ის პრობლემა და პარადოქსი, რომლებიც შეიძლება წარმოიშვას ადამიანთა ქცევასთან დაკავშირებული გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებში. ყოველივე ამის მიზეზი იმ პრინციპების აქსიომატიკური საფუძველია, რომელთა აქსიომებს აქვს არაშემოწმებადი ხასიათი; ეს კი ნიშნავს, რომ პრაქტიკაში ადამიანმა რაციონალური ქცევის წესად უნდა მიიღოს ამა თუ იმ თეორიიდან გამომდინარე რწმენა.

გასული საუკუნის ოთხმოციან და ოთხმოცდაათიან წლებში ფრანგ მეცნიერთა ჯგუფის მიერ ბ. რუას ხელმძღვანელობით დამუშავდა მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების პირობებში გადაწყვეტილების მიღების ახალი მიდგომა. ამ მიდგომით აქსიომატიკური თეორიის ნაცვლად ჩამოაყალიბეს კონსტრუქციული თეორია, რომელშიც მეთოდები, მოდელები და კონცეფციები განიხილება, როგორც დამხმარე საშუალებები, როგორც "მოწყობილობები" სიტუაციის პრაქტიკული ანალიზისათვის. ამ თეორიის მეთოდები განსაკუთრებით ადეკვატურია ისეთი პრობლემის წინასწარი ანალიზისათვის, რომელშიც გმპსაგან მოითხოვება მინიმალური ინფორმაცია. ბ. რუას მიდგომას ეწოდება "წყვილი ალტერნატივების ინდექსების დადგენის მიდგომა", მოკლედ "რუმი"; ამ მიდგომით მრავალკრიტერიუმიან ამოცანაში თითოეული კრიტერიუმის

საჭიროება ანუ წონა მოიცემა მთელი რიცხვით, რომლებთანაც გმპ-ის მუშაობა უფრო მოხერხებულია.

დღეისათვის არსებობს გადაწყვეტილებათა მიღების მრავალი მეთოდი, რომლებიც დამუშავებულია ბ.რუას მიდგომის საფუძველზე. მათგან ყველაზე ცნობილია მეთოდების ჯგუფი ELECTRE (Elimination Et Choix Traduisant la Realite-რეალობის შესაბამისი გამორიცხვა და არჩევა), რომელიც გამოიყენება მრავალკრიტერიუმიანი არჩევისათვის. მათგან ყველაზე მარტივია ELECTRE I მეთოდი, რომელშიც მოცემულია ალტერნატივების სიმრავლე, კრიტერიუმების სიმრავლე ბალური სკალებით და კრიტერიუმების წონები.

"რუმი"-ს მეთოდები, ისევე როგორც იერარქიული ანალიზის მეთოდი, გამოიყენება მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების მოცემული სიმრავლიდან უპირატესი ალტერნატივების გამოყოფისათვის. გმპ სარგებლიანობით და იერარქიული ანალიზით უპირატესობის ფორმირებას ძირითადად ახდენს გადაწყვეტილების მიღების მეთოდის გამოყენებამდე. "რუმი" გულისხმობს, რომ გმპ-ის უპირატესობა ფორმირდება პრობლემის ანალიზის პროცესში და იგი ხორციელდება გადაწყვეტილების მიღების მეთოდით. მაშასადამე, აქ გადაწყვეტილების მიღების მეთოდით გმპ წარმოადგენს პრობლემის გადაწყვეტის განსხვავებულ ვარიანტებს ამა თუ იმ გადამწყვეტ წესზე დამოკიდებულებით. გადამწყვეტ წესში ვგულისხმობთ: ალტერნატივების შეფასების, მათი რანჟირების, კლასიფიკაციის და მათგან საუკეთესოს არჩევის მეთოდს. ასეთი წესები მოიცემა ალტერნატივების წყვილობითი შედარების ინდექსების მეშვეობით.

"რუმი"-ს მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში განასხვავებენ სამუშაოს შემდეგ ორ ძირითად ეტაპს:

1) დამუშავების ეტაპი. აქ აიგება ალტერნატივების წყვილობითი შედარების ერთი ან რამდენიმე ინდექსი;

2) კვლევის ეტაპი. აქ აგებული ინდექსები გამოიყენება ალტერნატივების მოცემული სიმრავლის რანჟირების ან კლასიფიკაციისათვის.

ალტერნატივების წყვილობითი შედარების ინდექსები "რუმი"-ს ბევრ მეთოდში აიგება თანხმობის ან უთანხმოების პრინციპზე დაყრდნობით. ამ პრინციპების თანახმად: "a_i ალტერნატივა არაა უარესი თუნდაც a_j ალტერნატივზე", თუ სრულდება შემდეგი მოთხოვნა: კრიტერიუმების "საკმარისი უმრავლესობა" მხარს უჭერს ამ მტკიცებულებას (ესაა თანხმობის პრინციპი); "წინააღმდეგობა" დანარჩენი კრიტერიუმებისაგან - "არა ძალიან ძლიერად" (ესაა მცირეთა უთანხმოების პრინციპი).

"რუმი"-ს მეთოდები დაფუძნებულია ალტერნატივების A სიმრავლეზე ძირითადი ბინარული მიმართებების - სრულის, ტრანზიტულის, სრული დალაგების (სრულია და ტრანზიტული), ნაწილობრივი დალაგების (რეფლექსურია და ტრანზიტული, მაგრამ არაა სრული) აგებაზე. ბინარულ მიმართებას ვუწოდოთ გარკვეული ან მკაფიო, თუ იგი არის აგებული კრიტერიუმების საფუძველზე.

აქ განვიხილავთ აღნიშნული მიდგომის ELECTRE - ს მეოდებიდან მხოლოდ პირველ მეთოდს - ELECTRE I-ს. ამისათვის გვჭირდება შემდეგი აღნიშვნა: k-ური კრიტერიუმით a_i და a_j ალტერნატივების შეფასებები აღვნიშნოთ შესაბამისად x_i^k და x_j^k-თი. ამ მეთოდში ალტერნატივების შედარებისათვის ვიყენებთ მკაფიო ბინარულ მიმართებებს.

დამუშავების ეტაპზე ავაგოთ თანხმობის და უთანხმოების წყვილობითი შედარების ინდექსები.

განვიხილოთ $K=\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ კრიტერიუმების სიმრავლე, რომელიც შედგება m ელემენტისაგან და მათი საშუალებით ფასდება ყველა ალტერნატივა. ამავე დროს, თითოეულ მათგანს აქვს საკუთარი რიცხვითი სკალა. თითოეულ კრიტერიუმს წონის როლში შევუსაბამოთ მთელი რიცხვი ω, რომელიც დაახასიათებს ამ კრიტერიუმის საჭიროებას. ბ. რუას წინადადებით ω განიხილება, როგორც ჟიურის წევრთა რიცხვი, რომლებიც მხარს უჭერს ამ კრიტერიუმის საჭიროებას. მაშასადამე, კრიტერიუმების წონებად ავიღებთ $m, m-1, ..., 1$ რიცხვებს.

დავუშვათ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ "a ალტერნატივა უპირატესია b ალტერნატივზე". კრიტერიუმების K სიმრაელე დავყოთ სამ ქვესიმრავლედ:

$K^{+}(a,b) \equiv K^{+}$-კრიტერიუმების ქვესიმრავლე, რომელთათვისაც a უპირატესია b-ზე;

$K^{=}(a,b) \equiv K^{=}$ -კრიტერიუმების ქვესიმრავლე, რომელთათვისაც a ტოლფასია b-ს;

$K^{-}(a,b) \equiv K^{-}$-კრიტერიუმების ქვესიმრავლე, რომელთათვისაც b უპირატესია a-ზე.

შემდეგ ვანგარიშობთ a-ს b-ზე უპირატესობის ჰიპოთეზაზე თანხმობის ინდექსს, რომელსაც აღვნიშნავთ $c_{a,b}$-თი. ELECTRE I მეთოდში ეს ინდექსი გამოითვლება კრიტერიუმების წონების საშუალებით. ამისათვის უნდა შევკრიბოთ K^{+} და $K^{=}$ სიმრავლეთა კრიტერიუმების წონები და ეს ჯამი გავყოთ ყველა კრიტერიუმის წონების ჯამზე

$$c_{a,b} = \frac{\sum\limits_{i \in K^{+}, i \in K^{=}} \omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i}. \tag{3.1.1}$$

ამასთან ერთად, უნდა გამოვთვალოთ უთანხმოების ინდექსი ჰიპოთეზისათვის "a უპირატესია b-ზე". ამისათვის განვიხილოთ კრიტერიუმების $K^{-}(a,b)$ ქვესიმრავლე. მისი ყოველი $f_i \in K^{-}(a,b)$ კრიტერიუმისათვის ვიპოვოთ შემდეგი წილადის მნიშვნელობა:

$$d_{a,b}^{i} = \frac{x_a^i - x_b^i}{L_i}, \quad f_i \in K^{-}(a,b), \tag{3.1.2}$$

სადაც L_i არის f_i კრიტერიუმის სკალის მაქსიმალური სიგრძე, x_a^i და x_b^i სიდიდეები ჩვენი აღნიშვნით არის f_i კრიტერიუმით a და b ალტერნატივების შეფასებები შე-

საბამისად. ამ სიდიდეებიდან მაქსიმალური წარმოადგენს უთანხმოების $d_{a,b}$ ინდექსს:

$$d_{a,b} = \max_{f_i} d^i_{a,b}. \qquad (3.1.3)$$

უთანხმოების ინდექსს შეიძლება ვუწოდოთ "ვეტო", რადგან ის თითქოს ვეტოს ადებს შედარებაზე.

მოცემული ალტერნატივებისათვის შემოტანილი თანხმობის და უთანხმოების ინდექსები შესაბამისად გამოიყენება თანხმობის და უთანხმოების მატრიცების ასაგებად.

წინამდებარე მეთოდში უპირატესობის ბინარული მიმართება მოიცემა α_1 თანხმობის და γ_1 უთანხმოების დონით. თუ α_1 და γ_1 მოცემული დონეებია და $c_{a,b} \geq \alpha_1$, $d_{a,b} \leq \gamma_1$, მაშინ a ალტერნატივა ითვლება b ალტერნატივზე უპირატესად.

თუ ამ დონეებისათვის ალტერნატივების შედარება ვერ მოხერხდება, მაშინ ისინი ითვლებიან შეუდარებლად. შეუდარებლობის ცნება მეტად მნიშვნელოვანია პრაქტიკული თვალსაზრისით. თუ ალტერნატივების შეფასება გარკვეულწილად წინააღმდეგობრივია, ანუ გარკვეული კრიტერიუმებით ერთი ალტერნატივა მეორეზე უპირატესია, ხოლო სხვა კრიტერიუმებით - მეორეა უპირატესი პირველზე, მაშინ ასეთი ალტერნატივების შედარება შეუძლებელია. ამ შემთხვევაში ისინი მოითხოვენ სპეციალურ შესწავლას.

თანხმობისა და უთანხმოების დონეები, რომელთათვისაც ალტერნატივები შედარებადია, წარმოადგენს ანალიზის ინსტრუმენტს. ამ დონეების ახალი მნიშვნელობების მოცემა (თანხმობის საჭირო დონის თანდათანობით შემცირება, უთანხმოების დონის თანდათანობით გაზრდა) საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ ალტერნატივების მოცემული სიმრავლე.

მოცემული დონეებისათვის ალტერნატივების სიმრავლიდან გამოიყოფა ქვესიმრავლე - გული არადომინირე-

ბადი ალტერნატივებისა, რომლებიც ერთმანეთთან ან ტოლფასობის, ან შეუდარებლობის მიმართებაშია. დონეთა შეცვლით, მოცემული სიმრავლიდან გამოიყოფა ახალი უფრო მცირე გული. ამ პროცესით საბოლოოდ შეიძლება მივიღოთ ერთი საუკეთესო ალტერნატივა. ამასთან, თანხმობის და უთანხმოების მნიშვნელობები ახასიათებს მონაცემებზე "ძალადობის" ხარისხს, რის შედეგადაც კეთდება საბოლოო დასკვნა. ამრიგად, ELECTRE I მეთოდის ორი ძირითადი ეტაპი შეიძლება შემდეგნაირად დავახასიათოთ.

I ეტაპი - ინდექსების დამუშავება

ყოველი ორი ალტერნატივის მოცემული შეფასების საფუძველზე გამოვთვლით თანხმობის და უთანხმოების ინდექსებს. ისინი განსაზღვრავენ "*a* უპირატესია, ვიდრე *b*" ჰიპოთეზაზე თანხმობას და უთანხმოებას, შესაბამისად.

მოიცემა თანხმობის და უთანხმოების დონეები და მათ შევადარებთ ალტერნატივების ყოველი წყვილისათვის გამოთვლილ ინდექსებს. თუ თანხმობის ინდექსი აღემატება მოცემულ დონეს, ხოლო უთანხმოების ინდექსი დაბალია შესაბამის დონეზე, მაშინ პირველი ალტერნატივა უპირატესია მეორეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ალტერნატივები შეუდარებელია.

II ეტაპი - ალტერნატივების სიმრაველის გამოკვლევა

ალტერნატივების სიმრაველიდან უკუვაგდებთ დომინირებულ ალტერნატივებს. დარჩენილები ქმნის პირველ გულს. ამ გულში შემავალი ალტერნატივები ან ტოლფასებია, ან შეუდარებლები. შემდეგ შემოგვაქვს თანხმობის და უთანხმოების დონეთა უფრო "სუსტი" მნიშვნელობები (თანხმობის დონის უფრო ნაკლები მნიშვნელობა და უთანხმოების დონის უფრო მეტი მნიშვნელობა) და მათთვის გულს განვსაზღვრავთ ნაკლები რაო-

დენობის ელემენტებით. ასე მიღებული ბოლო გული შეიცავს საუკეთესო ალტერნატივებს. გულთა მიმდევრობა განსაზღვრავს ალტერნატივების დალაგებას, მათი ხარისხის კლების მიხედვით.

ამოცანა 3.1.1. ქვეყნის ხელისუფლებამ გადაწყვიტა ქალაქთან მოქმედ აეროპორტებთან ერთად, ააგოს ახალი თანამედროვე მნიშვნელობის აეროპორტი. ძირითადი პრობლემაა, სად ააშენოს იგი.

კომისიამ ასაშენებელი ადგილის შესარჩევად განსაზღვრა სამი ძირითადი კრიტერიუმი: f_1-მშენებლობის ღირებულება. აეროპორტი სასურველია აშენდეს მგზავრთა მოცემული გამტარუნარიანობით, რაც შეიძლება მინიმალური ხარჯებით (გავზომოთ იგი მლნ ლარით); f_2-დაშორება ქალაქიდან. სასურველია, რომ ქალაქიდან აეროპორტამდე და პირიქით მგზავრობა შესრულდეს უმცირეს დროში (გავზომოთ წუთებით); f_3-მინიმალური ხმაურიანი ზემოქმედება. ქალაქის შესაბამის ნაწილში მცხოვრებთა რაოდენობა, რომლებიც აეროპორტის ფუნქციენირების შედეგად განიცდიან არასასურველ ხმაურიან ზემოქმედებას, უნდა იყოს რაც შეიძლება მცირე (ათასი ადამიანი). როგორი ადგილი ავირჩიოთ აეროპორტის მშენებლობისათვის?

ცხადია, შესარჩევ ადგილთა X სიმრავლეზე გვაქვს სამკრიტერიუმიანი მინიმუმის ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \to \min_X,$$

რომელშიც სამივე კრიტერიუმი ერთმანეთთან წინააღმდეგობაშია.

შევნიშნოთ, რომ ამოცანა სუსტად სტრუქტურირებული ტიპისაა და მაშასადამე, იგი უნდა ამოიხსნას გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის მეთოდებით. ცხადია, მისი ამოხსნა შეიძლება იერარქიული ანალიზის მეთოდით. ჩვენ კი მას ამოვხსნით ELECTRE I მეთოდით.

ვთქვათ, კომისიამ აეროპორტის ასაშენებლად შეარჩია ოთხი ვარიანტი - ოთხი ალტერნატივა, კრიტერიუმების შესაბამისი მნიშვნელობებით:

$a_1(180;\ 70;\ 10); a_2(170;\ 40;\ 15); a_3(160;\ 55;\ 25); a_4(150;\ 50;\ 25)$.

ამრიგად, ჩვენს შემთხვევაში $K=\{f_1, f_2, f_3\}$. f_i კრიტერიუმის სკალის სიგრძეა $L_i (i=1,2,3)$ და ჩვენს ამოცანაში ავიღოთ შესაბამისად

$$L_1 = 100;\ \ L_2 = 50;\ \ L_3 = 45.$$

კრიტერიუმების წონებად ავიღოთ $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$.

ავაგოთ თანხმობის ინდექსთა მატრიცა (ცხრილი 3.1.1).

ცხრილი 3.1.1

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	*	1/6	1/6	1/6
a_2	5/6	*	3/6	3/6
a_3	5/6	$3/6$	*	1/6
a_4	5/6	3/6	5/6	*

აქ პირველად ვპოულობთ მთავარი დიაგონალის ზედა ელემენტებს, ქვედა ელემენტებს კი მარტივად ვიპოვით. (3.1.1) ფორმულით გამოვთვალოთ ზოგიერთი მათგანი.

დავუშვათ ჰიპოთეზა, რომ a_1 უპირატესია a_2-ზე. მაშინ მათი კრიტერიუმების მნიშვნელობების შედარებიდან გამომდინარე, ცხადია,

$K^+(a_1, a_2) = \{f_3\}$, რადგან a_1 უპირატესია a_2-ზე მხოლოდ f_3 კრიტერიუმით;

$K^=(a_1, a_2) = \varnothing$, რადგან a_1 და a_2 არც ერთი კრიტერიუმით არ არის ტოლფასი;

$K^-(a_1, a_2) = \{f_1, f_2\}$, რადგან a_2 უპირატესია a_1-ზე f_1 და f_2 კრიტერიუმით.

ამრიგად, (3.1.1) ფორმულის მიხედვით ვწერთ

$$c_{a_1,a_2}=\frac{1}{3+2+1}=\frac{1}{6}.$$

აქედან გამომდინარე, $c_{a_2,a_1}=\frac{5}{6}$.

ახლა დავუშვათ ჰიპოთეზა: a_2 უპირატესია a_3-ზე. მაშინ

$$K^{+}(a_2,a_3)=\{f_2,f_3\},\ K^{=}(a_2,a_3)=\varnothing,\ K^{-}(a_2,a_3)=\{f_1\}$$

და $c_{a_2,a_3}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}$. ასე ვიპოვით თანხმობის ინდექსთა მატრიცის ყველა ელემენტს.

ახლა ვიპოვოთ უთანხმოების ინდექსთა მატრიცა (ცხრილი 3.1.2).

ცხრილი 3.1.2

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	*	0,6	0,3	0,4
a_2	0,11	*	0,1	0,2
a_3	0,22	0,3	*	0,1
a_4	0,33	0,22	0,11	*

აქ, თანხმობის ინდექსთა მატრიცისაგან განსხვავებით, უნდა გამოვთვალოთ თითოეული ელემენტი ცალ-ცალკე. ვიპოვოთ, მაგალითად d_{a_1,a_2}. ამისათვის უნდა ვიპოვოთ $K^{-}(a_1,a_2)$. რადგან a_1 და a_2 ალტერნატივების შედარებიდან a_2 უპირატესია a_1-ზე f_1 და f_2 კრიტერიუმისათვის, ამიტომ $K^{-}(a_1,a_2)=\{f_1,f_2\}$. (3.1.2) ფორმულის და კრიტერიუმების მნიშვნელობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$d^1_{a_1,a_2}=\frac{180-170}{100}=0{,}1;\quad d^2_{a_1,a_2}=\frac{70-40}{50}=0{,}6.$$

აქედან (3.1.3)-ის თანახმად, მივიღებთ

$$d_{a_1,a_2}=\max\{0{,}1;0{,}6\}=0{,}6.$$

ასევე, $K^-(a_1,a_3)=\{f_1,f_2\}$,

$$d^1_{a_1,a_3}=\frac{180-160}{100}=0{,}2,\ d^2_{a_1,a_3}=\frac{70-55}{50}=0{,}3$$

და $d_{a_1,a_3}=0{,}3$.

ვიპოვოთ d_{a_2,a_1}. რადგან $K^-(a_2,a_1)=\{f_3\}$, ამიტომ

$$d_{a_2,a_1}=\frac{15-10}{45}=0{,}11.$$

ანალოგიურად,

$$K^-(a_2,a_3)=\{f_1\}\ \text{და}\ \ d_{a_2,a_3}=\frac{170-160}{100}=0{,}1.$$

მაშასადამე, როგორც ვაჩვენეთ, 3.1.2ცხრილის ელემენტების პოვნა არ წარმოადგენს განსაკუთრებულ სირთულეს.

შემოვიღოთ თანხმობისა და უთანხმოების პირველი დონე შესაბამისად, $\alpha_1=5/6$ და $\gamma_1=0{,}11$. მათთვის სრულდება უტოლობები

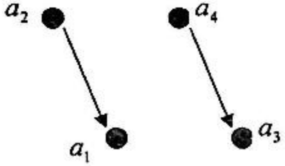
$$c_{a_2,a_1}=5/6\geq\alpha_1=5/6\ \text{და}\ d_{a_2,a_1}=0{,}11\leq\gamma_1=0{,}11.$$

ამრიგად, a_2 ალტერნატივა უპირატესია a_1-ზე. ასევე

$$c_{a_4,a_3}=5/6\geq\alpha_1=5/6,\quad d_{a_4,a_3}=0{,}11\leq\gamma_1=0{,}11$$

და a_4 ალტერნატივა უპირატესია a_3-ზე.

ასე გამოვყავით პირველი დონისათვის ალტერნატივების პირველი გული, რომელიც შედგება a_2 და a_4 ალტერნატივებისაგან:



ეს ნიშნავს, რომ a_1, a_2, a_3, a_4 ალტერნატივებიდან გამოვრიცხეთ a_1 და a_3. რაც შეეხება a_2 და a_4-ს, მათ შედარებას მოცემული დონეებისათვის ვერ ვახერხებთ, რადგან

$$c_{a_2,a_4} = 3/6 < 5/6\,,\quad d_{a_2,a_4} = 0{,}2 > 0{,}11\,,$$

$$c_{a_4,a_2} = 3/6 < 5/6\,,\quad d_{a_4,a_2} = 0{,}22 > 0{,}11\,.$$

ამოცანის პირობების თანახმად, a_2 და a_4 ალტერნატივების შეფასება წინააღმდეგობრივია: a_4 უპირატესია a_2-ზე პირველი კრიტერიუმით, მაგრამ a_2 არსებითად უპირატესია a_4-ზე მეორე და მესამე კრიტერიუმით.

შევცვალოთ α_1 და γ_1: პირველი შევამციროთ, მეორე გავზარდოთ - $\alpha_2 = 0{,}5; \gamma_2 = 0{,}22$. ამ დონეებისათვის

$$c_{a_4,a_2} = 3/6 \geq \alpha_2 = 0{,}5\,,\quad d_{a_4,a_2} = 0{,}22 \leq \gamma_2 = 0{,}22$$

და a_4 უპირატესია a_2-ზე. მაშასადამე, მეორე დონეზე მივიღეთ მეორე გული, რომელიც შედგება ერთადერთი a_4 ალტერნატივისაგან.

დასკვნა. ELECTRE I მეთოდით ოპტიმალურია a_4 გადაწყვეტილება და შესაბამისი ადგილმდებარეობა მიუთითებს აეროპორტის აშენებისათვის ყველაზე საუკეთესო ვარიანტს.

3.2. საყრდენი სიტუაციების ჩაკეტილი პროცედურები - სსჩპ მეთოდი

ვთქვათ, მოცემულია მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივები, რომელთა კრიტერიუმებს აქვს რიგობრივი (იგივე ხარისხობრივი) შეფასებების სკალები. ყველა ეს მოცემულობა გმპ-თვის გადამწყვეტი წესის აგების საფუძველია. იგულისხმება, რომ მრავალკრიტერიუმიანი შეფასების მქონე რეალური ალტერნატივების დადგენა ხდება გადამწყვეტი წესის აგების შემდეგ. ასეთი ალტერნატივების რიცხვი შეიძლება იყოს საკმაოდ დიდი და ამ ალტერნატივებს კრიტერიუმებით შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი შეფასებები.

ამოცანა მდგომარეობს გმპ-ის უპირატესობით ასეთი მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების დალაგების წესის დადგენაში. ფორმალურად ეს ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება.

მოცემულია:

1. კრიტერიუმების სიმრავლე $K=\{f_1, f_2, ..., f_m\}$, რომლებითაც ფასდება ყველა ალტერნატივა;
2. j-ური f_j კრიტერიუმით შეფასების რიგობითი სკალა შედგება n_j რაოდენობის შეფასებისაგან;
3. j-ური f_j კრიტერიუმის სკალური შეფასებები $X_j=\left\{x_j^1, x_j^2, ..., x_j^{n_j}\right\}$ დალაგებულია უპირატესობიდან უარესობისაკენ;
4. ყველა შესაძლო შეფასების ვექტორის სიმრავლე $Y=X_1\times X_2\times...\times X_m$ - კრიტერიუმების სკალური შეფასებების დეკარტული ნამრავლი შედგება $y_i=\left(x_1^k, x_2^l, ..., x_m^l\right)$ სახის შეფასებისაგან, სადაც y_i ვექტორი არის ერთ-ერთი სკალური შეფასება ყველა კრიტერიუმით. $Y=X_1\times X_2\times...\times X_m$ ჩანაწერი განსაზღვრავს m-განზომილებიან ბადეს, რომლის ყოველი

წერტილი არის ყველა კრიტერიუმით შეფასების ვექტორი;

5. კონკრეტულ ამოცანაში რეალური ალტერნატივების $A=\{a_1,a_2,...,a_s\}$ სიმრავლის ელემენტების შეფასებები შესაბამისად $y_1,y_2,...,y_s$ ვექტორები.

მოითხოვება, რომ გმპ-ის უპირატესობის საფუძველზე ავაგოთ მრავალკრიტერიუმიანი A ალტერნატივების დალაგების გადამწყვეტი წესი და ამ წესის საფუძველზე დავალაგოთ მოცემული ალტერნატივები. განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

ამოცანა 3.2.1 (პროექტების შეფასება). გარკვეულმა ჯგუფმა გადაწყვიტა ფონდის ორგანიზება გამოყენებითი ხასიათის სამეცნიერო-ტექნიკური პროექტების დასაფინანსებლად. ფონდის ორგანიზატორი დაინტერესებულია პროექტების შერჩევის ეფექტური სისტემის დადგენისათვის და ამიტომ მოიწვია მან კონსულტანტი გადაწყვეტილების მიღების დარგში.

კონსულტანტმა ფონდის ორგანიზატორთან (ვუწოდოთ მას გმპ) ერთად დაამუშავა პროექტების შესაფასებელი ანკეტა. მასში ასახულია გმპ-ის პოლიტიკა პროექტის ხარისხის შესაფასებელი ძირითადი კრიტერიუმების და მათი შესაძლო სკალური შეფასებების მითითებით ისე, რომ თითოეული კრიტერიუმით შეფასების სკალა დალაგებულია უპირატესობიდან უარესობისაკენ.

დადგინდა, რომ პროექტის შეფასების ძირითადი კრიტერიუმები თავისი სკალებით ასეთია:

f_1 - პროექტის ჩანაფიქრის შემოწმებადობის ხარისხი

1. შექმნილია ცალკეული ნაწარმი (x_1^1);
2. დამუშავებულია ტექნოლოგია (x_1^2);
3. შემოთავაზებულია იდეა (x_1^3).

f_2 - პროექტზე დანახარჯების ამოგება

1. წარმოების დაწყებიდან ნახევარ წლამდე დროში (x_2^1);

2. წარმოების დაწყებიდან ერთ წელიწადში (x_2^2);

3. ორ ან მეტ წელიწადში (x_2^3).

f_3 - სირთულე პროექტის შესაბამისი ნაწარმის წარმოების ორგანიზაციისათვის (ფულადი რესურსების არსებობისას)

1. მცირე (x_3^1);

2. საშუალო (x_3^2);

3. დიდი (x_3^3).

f_4 - მოთხოვნის არსებობა პროექტის შესაბამის ნაწარმზე

1. დიდი მოთხოვნა (x_4^1);

2. საკმარისი მოთხოვნა (x_4^2);

3. განუსაზღვრელი მოთხოვნა (x_4^3).

თითოეული კრიტერიუმის სკალა რომ შეიცავს ერთსა და იმავე რაოდენობის შეფასებას, ეს სიმარტივისათვის განვიხილეთ, მეთოდს კი ასეთი შეზღუდვა არა აქვს.

წინასწარ უცნობია თუ როგორი პროექტები იქნება ფონდში წარმოდგენილი განსახილველად. მხოლოდ ისაა ცნობილი, რომ აუცილებლად უნდა შეირჩეს საუკეთესო პროექტები, რომელთა ჯამური დაფინანსება არ იქნება ფონდის შესაძლებლობაზე მეტი.

კონსულტანტმა შესთავაზა გმპ-ს, რომ პროექტების შესაფასებლად მოიწვიონ ექსპერტთა ჯგუფი. ამასთან, თითოეულმა ექსპერტმა ყოველი პროექტისათვის თითოეული კრიტერიუმით უნდა განსაზღვროს ერთადერთი შეფასება. პროექტების შეფასებამდე უნდა განისაზღვროს პროექტების რანჟირების წესი უპირატესობიდან უარესობისაკენ. უპირატესობა კი განისაზღვრება სუბიექტური მოსაზრებით. რადგან გმპ არის პასუხისმგებელი ფონდის ფინანსებზე, ამიტომ სწორედ მისი უპირატესობა უნდა იყოს პროექტის ხარისხის შეფასების საფუძველი. ამრიგად, უნდა განისაზღვროს ეს უპირატესობა და აგებულ იქნეს გადამწყვეტი წესი.

კონსულტანტის წინადადებით პრობლემის გადასაწყვეტად სასურველია გამოყენებულ იქნეს სსჩპ (საყრდენი სიტუაციების ჩაკეტილი პროცედურების) - მეთოდი. მისი საშუალებით შესაძლებელია დასაფინანსებლად ავირჩიოთ ისეთი საუკეთესო პროექტები, რომელთა ჯამური მოთხოვნები დაფინანსებაზე შეესაბამება ფონდის შესაძლებლობებს. თუ როგორ გაკეთდეს ეს, ვაჩვენოთ ჩვენი ამოცანის საშუალებით. ამისათვის გვჭირდება რამდენიმე ეტაპის შესრულება. პირველ რიგში, საჭიროა განვსაზღვროთ კრიტერიუმების ერთიანი რიგობითი სკალა. პირველად გავაკეთოთ ეს ორი კრიტერიუმისათვის.

კრიტერიუმების ნებისმიერი სიმრავლისათვის წარმოვიდგინოთ იდეალური ალტერნატივა (ჩვენს შემთხვევაში - პროექტი), რომელსაც ყველა კრიტერიუმით აქვს უპირატესი (საუკეთესო) შეფასება. ასეთ იდეალურ ალტერნატივას განვიხილავთ, როგორც **საყრდენ სიტუაციას**, რომელზეც ორიენტირებით განვსაზღვრავთ დანარჩენი ალტერნატივების შეფასებას კრიტერიუმებით. ასეთ საყრდენ სიტუაციას, ვუწოდოთ **პირველი საყრდენი სიტუაცია**; ხოლო, ისეთ ალტერნატივს, რომელსაც ყველა კრიტერიუმით აქვს ყველაზე უარესი შეფასება, ვუწოდოთ **მეორე საყრდენი სიტუაცია**. პირველი საყრდენი სიტუაცია შეიძლება არ არსებობდეს, მაგრამ მას წარმოვიდგენთ ათვლის წერტილის როლში. ვაჩვენოთ რა ინფორმაცია მოითხოვება ამ შემთხვევაში გმპ-საგან ორი კრიტერიუმისათვის.

უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი ფაქტი. ვთქვათ, ალტერნატივას $(m-2)$ კრიტერიუმით აქვს საუკეთესო შეფასება, ხოლო ორი i და j კრიტერიუმით შეფასება შეიძლება იცვლებოდეს. ამ შემთხვევაში, საუკეთესო შეფასებიდან ცუდზე გადასვლა იწვევს ალტერნატივის ხარისხის შემცირებას. ასევე მოვიყვანთ ფსიქოლოგიაში დადგენილ ფაქტს იმის შესახებ, რომ ადამიანს შეუძლია ადეკვატურად შეადაროს ორი ვექტორული შეფასება იმ შემთხვევაში, თუ ისინი განსხვავდებიან არა უმეტეს ორი კომპონენტით. ამიტომ განიხილება სსჩპ მეთოდში ყოველი წყვილი კრიტერიუმის შეფასება.

განვიხილოთ ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში ორი კრიტერიუმი, კერძოდ f_1 და f_2 თავიანთი სკალით. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები. ვთქვათ, a_1 ალტერნატივის შეფასებები ამ კრიტერიუმებით არის x_1^2, x_2^1 (სადაც x_1^2 ჩვენი აღნიშვნით ნიშნავს f_1 კრიტერიუმით 2 შეფასებას, x_2^1 ნიშნავს f_2 კრიტერიუმით 1 შეფასებას). აღვნიშნოთ თითოეული ეს შეფასება ასე: $x_1^2 = f_1 2$; $x_2^1 = f_2 1$. a_1 ალტერნატივის შეფასება კი აღვნიშნოთ $f_1 2 f_2 1$. აგრეთვე, თუ a_2-ის შეფასებები ამ ორი კრიტერიუმით არის $x_1^1 = f_1 1$ და $x_2^2 = f_2 2$, მაშინ a_2-ის შეფასება იქნება $f_1 1 f_2 2$. ასევე აღვნიშნავთ ალტერნატიეის სხვა შეფასებას.

გმპ-ის გამოკითხვას ვატარებთ შეკითხვების საშუალებით. მაგალითად, რომელია თქვენთვის ორი ალტერნატივიდან უპირატესი: ალტერნატივა a_1 შეფასებით $f_1 2 f_2 1$ თუ ალტერნატივა a_2 შეფასებით $f_1 1 f_2 2$? პასუხი უნდა იყოს ერთ-ერთი შემდეგიდან:

$a_1 \succ a_2$ ან რაც იგივეა $f_1 2 f_2 1 \succ f_1 1 f_2 2$;

$a_1 \Leftrightarrow a_2$ ან რაც იგივეა $f_1 2 f_2 1 \Leftrightarrow f_1 1 f_2 2$;

$a_2 \succ a_1$ ან რაც იგივეა $f_1 1 f_2 2 \succ f_1 2 f_2 1$.

ამიტომ, კითხვები და პასუხები შეგვიძლია გამოვსახოთ შეფასებებს შორის უპირატესობით. მაგალითად, კითხვა "რომელია თქვენთვის უპირატესი $f_1 2 f_2 1$ თუ $f_1 1 f_2 2$" ნიშნავს: "რომელია თქვენთვის უპირატესი a_1 თუ a_2".

საყრდენ სიტუაციად ავიღოთ $f_1 1 f_2 1$ (ალტერნატივა ყველაზე საუკეთესო შეფასებით).

დავუშვათ, რომ კითხვები და მათზე პასუხები ასეთია:

კითხვა 1. რომელია თქვენთვის უპირატესი $f_1 1 f_2 2$, თუ $f_1 2 f_2 1$?

პასუხი 1. უპირატესია $f_1 1 f_2 2$.

კითხვა 2. რომელია თქვენთვის უპირატესი $f_1 2 f_2 1$, თუ

$f_1 1 f_2 3$?

პასუხი 2. $f_1 2 f_2 1$.

კითხვა 3. რომელია თქვენთვის უპირატესი $f_1 1 f_2 3$, თუ

$f_1 3 f_2 1$?

პასუხი 3. ორივე ცუდია, მაგრამ მათგან უკეთესია

$f_1 1 f_2 3$.

ეს კითხვები და პასუხები წარმოვადგინოთ ორიენტ-ირებული გრაფის სახით (ნახ. 3.2.1), სადაც მიმართული ისარი აღნიშნავს უპირატესობას:

$$
\begin{tikzcd}
& f_1 1 f_2 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f_1 2 f_2 1 \arrow[d] \arrow[drr] & & f_1 1 f_2 2 \arrow[ll] \arrow[d] \\
f_1 3 f_2 1 & & f_1 1 f_2 3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

ნახ. 3.2.1

აქ, $f_1 1 f_2 2 \succ f_1 1 f_2 3$ გამომდინარეობს უპირატესობებიდან $f_1 1 f_2 2 \succ f_1 2 f_2 1 \succ f_1 1 f_2 3$, ხოლო $f_1 2 f_2 1 \succ f_1 3 f_2 1$ გამომდინარეობს $f_1 2 f_2 1 \succ f_1 1 f_2 3 \succ f_1 3 f_2 1$ უპირატესობებიდან.

ჩატარებული კითხვებისა და პასუხების ანალიზის საფუძველზე შეგვიძლია დავალაგოთ ორი კრიტერიუმით მიღებული შეფასებები და ავაგოთ მათი გაერთიანებული სკალა. ასეთ სკალას ვუწოდოთ ორი კრიტერიუმის ერთიანი რიგობითი სკალა (ერს). ჩვენს შემთხვევაში, ერს-ი ჩავწეროთ შემდეგი სახის მიმდევრობით, რომელშიც მიმდევრობის ხარისხი კლებულობს მარცხნიდან მარჯვენივ:

$$f_1 1 f_2 1 \Rightarrow f_1 1 f_2 2 \Rightarrow f_1 2 f_2 1 \Rightarrow f_1 1 f_2 3 \Rightarrow f_1 3 f_2 1. \quad (3.2.1)$$

ეს ერთიანი სკალა შეიძლება წარმოვადგინოთ უფრო მარტივი სახით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ერთ-ერთი კრიტერიუმით f_1 და f_2-დან მასში ჩვენ გვაქვს საუკეთესო შეფასება. ამიტომ, (3.2.1) ერთიანი სკალური შეფასების წყვილებში არ დავწერთ იმ სკალურ შეფასებას, რომელიც საუკეთესოა. კერძოდ, $f_1 1 f_2 2$-ის ნაცვლად დავწერთ $f_2 2$-ს, $f_1 2 f_2 1$-ის ნაცვლად-$f_2 1$-ს და ა.შ. ამის გამო, f_1 და f_2 კრიტერიუმის ერთიან სკალაში გაერთიანებული რიგობითი სკალა (3.2.1) ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$f_1 f_2 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_1 3. \qquad (3.2.2)$$

ამრიგად, გმპ-თვის დასმულ კითხვებზე პასუხებმა f_1 და f_2 კრიტერიუმის სკალების ერთიან სკალაში გაერთიანების საშუალება მოგვცა. ვგულისხმობთ, რომ მოცემულ ალტერნატივას f_3 და f_4 კრიტერიუმით აქვს საუკეთესო შეფასება. ასევე შეგვიძლია გავაერთიანოთ f_1 და f_3 კრიტერიუმების სკალები ერთიან სკალაში იმ მოთხოვნით, რომ როგორც ამ კრიტერიუმებით, ისე f_2 და f_4-ით არსებობს საუკეთესო შეფასება. ასე შეგვიძლია გავაკეთოთ ნებისმიერი ორი კრიტერიუმის შემთხვევაში.

მოვიყვანოთ მარტივი წესი, რომლის მიხედვით უნდა დავსვათ კითხვები ორი სკალის გაერთიანებისათვის:

1) ვადარებთ ორ საშუალო შეფასებას - მათგან ერთი გახდება უპირატესი, მეორე უარესი;
2) პირველ შედარებაზე მიღებული უარესი შეფასება შედარდება მეორე კრიტერიუმის ქვედა შეფასებას (3.2.1 ნახ-ზე ორი საშუალო შეფასების შედარებით $f_2 2$ უპირატესია, ხოლო $f_1 2$-უარესი. ამიტომ $f_1 2$ უნდა შევადაროთ $f_2 3$-ს);
3) მეორე შედარებაზე მიღებული უარესი შეფასება (ჩვენ შემთხვევაში $f_2 3$) შედარდება მეორე კრიტერიუმის ქვედა შედარებას (ჩვენს შემთხვევაში, $f_1 3$-ს) და ა.შ.

კრიტერიუმების ერთიანი სკალა შეიცავს გმპ-ის უპირატესობაზე აუცილებელ ინფორმაციას. ამასთან, ასეთი ინფორმაციის გამოყენება შესაძლებელია ყოველი წყვილი კრიტერიუმის დამოუკიდებლობის შემთხვევაში, მათი ხარისხების შემცირებისას; ეს კი სსჩ მეთოდის აუცილებელი პირობაა.

განსაზღვრება 3.2.1. კრიტერიუმების ერთიან სკალაში ორ კრიტერიუმს ვუწოდოთ დამოუკიდებელი მათი ხარისხების შემცირებისას, თუ ამ კრიტერიუმების ერს-ი უცვლელი დარჩება დანარჩენი კრიტერიუმებით ერთნაირი შეფასების შედარების შემთხვევაში.

დამოუკიდებლობის პირობის შემოწმება შემდეგნაირად ხორციელდება. გავიმეოროთ გმპ-ის გამოკითხვა ორი კრიტერიუმის სკალური შეფასების შედარებაზე იმ დაშვებით, რომ დანარჩენი კრიტერიუმებით არსებობს ყველაზე ცუდი შეფასებები. აქ წარმოვიდგენთ, რომ არსებობს ასეთი ალტერნატივა. შემდეგ, ამის გათვალისწინებით ვახდენთ მოცემული ორი კრიტერიუმით უფრო უკეთესი შეფასებების შედარებას. ასე მივიღებთ ამ წყვილი კრიტერიუმით შეფასებების ერთიანი სკალის ნაწილს, რომელიც აგებულია მეორე საყრდენი სიტუაციით. თუ პირველი და მეორე საყრდენი სიტუაციით აგებული ერთიანი რიგობითი სკალები ერთმანეთს დაემთხვევა, მაშინ ეს ორი კრიტერიუმი ყოფილა დამოუკიდებელი. განვიხილოთ ეს ჩვენი მაგალითით. გავიმეოროთ f_1 და f_2 კრიტერიუმით შეფასებების შედარება იმ დაშვებით, რომ არსებობს ყველაზე ცუდი შეფასების მქონე ალტერნატივა როგორც f_1 და f_2, ისე f_3 და f_4-ით. ასეთი შედარების შესაძლო ვარიანტი იყოს შემდეგი გრაფი (ნახ. 3.2.2):

$$\begin{tikzcd}
f_1 3 f_2 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & f_1 2 f_2 3 \arrow[dl] \\
& f_1 3 f_2 3 &
\end{tikzcd}$$

ნახ. 3.2.2.

ამ ნახაზიდან და ჩვენი დაშვებიდან გამომდინარე, ყველა კრიტერიუმის ერთიანი სკალის ნაწილს აქვს სახე

$$f_1 3 f_2 2 \Rightarrow f_1 2 f_2 3 \Rightarrow f_1 3 f_2 3 f_3 3 f_4 3$$

ანუ

$$f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_1 3 f_2 3 f_3 3 f_4 3\,. \qquad (3.2.3)$$

იგივე იქნება ჩვენი დაშვების პირობებში, თუ (3.2.2)-ს განვიხილავთ, როგორც პირველი საყრდენი სიტუაციით აგებული ყველა კრიტერიუმის ერთიანი სკალის ნაწილს

$$f_1 f_2 1 f_3 1 f_4 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_1 3\,.$$

მაშინ აქედან და (3.2.3)-დან გამომდინარეობს, რომ f_1 და f_2 კრიტერიუმები დამოუკიდებელია ხარისხების ცვლილებისას, რადგან ორივე საყრდენი სიტუაციით აგებული ერთიანი რიგობითი სკალები ერთმანეთს არ ეწინააღმდეგება.

რაც შეეხება ორზე მეტი კრიტერიუმისაგან შედგენილი სიმრავლის დამოუკიდებლობას დანარჩენებისაგან, აქ გამოიყენება შემდეგი ცნობილი დებულება: თუ კრიტერიუმების მოცემული სიმრავლიდან ყველა წყვილი დამოუკიდებელია ხარისხების ცვლილებისას, მაშინ ამ სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე დამოუკიდებელია ხარისხების ცვლილებისას. თუ აღმოჩნდება, რომ არ სრულდება კრიტერიუმების დამოუკიდებლობის პირობა, მაშინ დამოუკიდებლობის შენარჩუნებისათვის რეკომენდებულია პრობლემის აღწერის შეცვლა.

ახლა შევეცადოთ ავაგოთ ყველა კრიტერიუმით შეფასებათა ერთიანი სკალა. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა წყვილი კრიტერიუმისათვის ანალოგიური კითხვების დასმით და შედარებათა ანალიზით ჩვენ ავაგეთ წყვილი კრიტერიუმების შეფასებათა ერთიანი სკალები. m კრიტერიუმის შემთხვევაში, გმპ-ის გამოკითხვა $m(m-1)/2$ რაოდენობის წყვილი კრიტერიუმისათვის არის საჭირო. ჩვენს ამოცანაში გვაქვს ექვსი წყვილი კრიტერიუმი. ვთქვათ, მათ ერთიან სკალებს აქვს სახე:

$$f_1 1 f_2 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_1 3;$$
$$f_1 1 f_3 1 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_3 2 \Rightarrow f_1 3 \Rightarrow f_3 3;$$
$$f_1 1 f_4 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_4 2 \Rightarrow f_1 3 \Rightarrow f_4 3;$$
$$f_2 1 f_3 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_3 2 \Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_3 3; \qquad (3.2.4)$$
$$f_2 1 f_4 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_4 2 \Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_4 3;$$
$$f_3 1 f_4 1 \Rightarrow f_3 3 \Rightarrow f_4 2 \Rightarrow f_3 3 \Rightarrow f_4 3.$$

(3.2.4) ერთიანი სკალები შესაძლებლობას გვაძლევს ავაგოთ ოთხივე კრიტერიუმის ერთიანი სკალა. ამ სკალებში მონაწილეობს ერთი და იგივე კრიტერიუმების ერთნაირი შეფასებები, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია ერთი ერთიანი სკალიდან მეორეზე გადასვლა, რის საფუძველზეც ადვილია განვსაზღვროთ მათი ადგილი საერთო ერთიან სკალაში:

$$f_1 1 f_2 1 f_3 1 f_4 1 \Rightarrow f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_3 2 \Rightarrow f_4 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_2 3 \Rightarrow f_1 3 \Rightarrow f_3 3 \Rightarrow f_4 3. \qquad (3.2.5)$$

ოთხივე კრიტერიუმის ერთიანი სკალა (3.2.5) ადგენს პროექტების რანჟირების წესს, რომელშიც გათვალისწინებულია გმპ-ის ინტერესები. ამისათვის, ამ სკალის თითოეულ შეფასებას მიეწერება საკუთარი რანგი. ამ რანგებით განისაზღვრება თითოეული პროექტის შეფასების რანგების ვექტორი და შემდეგ ხდება ამ ვექტორების შედარება. ამ წესს უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ.

მოცემულ მეთოდში ყურადღება უნდა მივაქციოთ შემდეგ გარემოებას. ორი კრიტერიუმით შეფასებების შედარება, რომელიც საჭიროა მათი ერთიანი სკალის აგებისათვის, შეიძლება ეწინააღმდეგებოდეს სხვა ორი კრიტერიუმით შეფასებების შედარებას. მაგალითად, დავუშვათ, რომ f_2 და f_3 კრიტერიუმის ერთიანი სკალის ნაწილს (3.2.4)-ით მოცემულის ნაცვლად, აქვს უპირატესობები

$$f_2 1 f_3 1 \Rightarrow f_3 2 \Rightarrow f_2 2.$$

მაშინ ყველა კრიტერიუმის ერთიანი სკალის აგებისას მივიღებთ წინააღმდეგობას. მართლაც, f_1 და f_2 კრ-

იტერიუმის ერთიანი სკალიდან გამომდინარე $f_2 2$ უპირატესია $f_1 2$-ზე - $f_2 2 \succ f_1 2$, ხოლო f_1 და f_3 კრიტერიუმების ერთიანი სკალიდან გამომდინარე $f_1 2 \succ f_3 2$. მაშასადამე,

$$f_2 2 \Rightarrow f_1 2 \Rightarrow f_3 2 .$$

ჩვენი დაშვების თანახმად კი $f_3 2 \succ f_2 2$. ეს წინააღმდეგობა არ გვაძლევს საშუალებას $f_1 2$, $f_2 2$ და $f_3 2$ შეფასებები მოვათავსოთ ერთიან სკალაში. ასეთი წინააღმდეგობა მიიღება არათანამიმდევრული მსჯელობის შედეგად. მისი დაძლევისათვის აუცილებელია გავერკვეთ ჩატარებულ შედარებებში და შევცვალოთ წინააღმდეგობრივი გადაწყვეტილებები.

ამრიგად, ყველა კრიტერიუმის ერთიანი სკალის აგებისას ვამოწმებთ გმპ-ის უპირატესობას არაწინააღმდეგობაზე. ამისათვის უნდა დავადგინოთ რამდენიმე წყვილი კრიტერიუმის ერთიანი სკალების ერთმანეთთან დაკავშირების შესაძლებლობა.

წყვილი კრიტერიუმის ერთიანი სკალის აგებისათვის საჭირო კითხვების და პასუხების გარდა, სხვა ინფორმაციის მიღება გმპ-საგან არ მოითხოვება და მაშასადამე, იგი წარმოადგენს გმპ-თან მოლიან დიალოგს. ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში გვაქვს 4 კრიტერიუმი და გმპ-ის გამოკითხვა გვაძლევს 24 პასუხს (არაწინააღმდეგობის შემთხვევაში). ამისათვის სსჩპ მეთოდის გამოყენება არ საჭიროებს დიდ დროს.

ახლა დავსვათ კითხვა: როგორ შევადაროთ ორი ალტერნატივა? ამისათვის ვიყენებთ შემდეგ დებულებას:

წყვილი კრიტერიუმის ერთიანი სკალის შეფასებების დალაგება განისაზღვრება უშუალოდ გმპ-ის მიერ წყვილობითი შედარებით ან ტრანზიტულობის თვისებით, კრიტერიუმების რიგობით სკალებზე შეფასებების თვისებიდან გამომდინარე.

მაგალითად, განვიხილოთ f_1 და f_2-ის ერთიანი სკალა. აქ $f_1 2$ და $f_2 2$ შეფასებას ადარებს გმპ და ვთქვათ, $f_1 2 \Rightarrow f_2 2$. რადგან $f_2 2 \succ f_2 3$, ამიტომ ტრანზიტულობის თვისების მიხედვით ვღებულობთ $f_1 2 \Rightarrow f_2 3$.

ასევე განისაზღვრება ყველა კრიტერიუმის ერთიან სკალაში შეფასებების ხარისხის კლებით დალაგება: ან გმპ-ის მიერ მათი პირდაპირი შედარებით ან კრიტერიუმების სკალებზე შეფასების თვისების მიხედვით.

შემოვიღოთ y_1 ალტერნატივის ხარისხის ფუნქცია $V(y_1)$ და გავაკეთოთ შემდეგი ორი დაშვება ამ ფუნქციის თვისებებზე: 1) არსებობს $V(y_1)$-ის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები; 2) დამოუკიდებელი კრიტერიუმების შემთხვევაში, $V(y_1)$-ის მნიშვნელობა იზრდება, თითოეული კრიტერიუმით შეფასების გაზრდისას.

ყველა კრიტერიუმის ერთიან სკალაზე თითოეულ შეფასებას მივანიჭოთ რანგი, დაწყებული უპირატესი შეფასებიდან. მაგალითად, (3.2.5)-ში საყრდენი სიტუაციის შესაბამის შეფასებას მივანიჭოთ რანგი 1, ხოლო $f_2 2$ შეფასებას - რანგი 2, $f_1 2$-ს - 3, $f_3 2$-ს - 4 და ა.შ., $f_4 3$-ს - 9.

ქვემოთ ალტერნატივს ჩავწერთ მოცემული კრიტერიუმებით ვექტორული შეფასების სახით. მაგალითად, თუ ჩვენს ამოცანაში პროექტის შეფასებები კრიტერიუმებით არის $f_1 2; f_2 2; f_3 1; f_4 1$ ანუ პროექტის შეფასებაა $f_1 2 f_2 2 f_3 1 f_4 1$, მაშინ ამ შეფასებას $(f_1 2; f_2 2; f_3 1; f_4 1)$ სახით ან (2,2,1,1) სახით ჩავწერთ. ამიტომ, შესაბამის პროექტს, ვთქვათ P_1-ს, აღვნიშნავთ როგორც

$$P_1 = (f_1 2; f_2 2; f_3 1; f_4 1) \text{ ან } P_1 = (2,2,1,1).$$

განვიხილოთ ორი ალტერნატივა α და β, რომელთა შეფასებები მონაწილეობს (3.2.5)-ში და მინიჭებული აქვს რანგები. მაშასადამე, შეგვიძლია ვიპოვოთ α და β-ს ყველა კომპონენტის რანგი.

ალტერნატივის კომპონენტების რანგები დავალაგოთ უკეთესობიდან უარესობისაკენ. ამით ყოველ ალტერნატივს შევუსაბამებთ ერთიანი რიგობითი სკალის შეფასებათა რანგების დალაგებულ ვექტორს. ვთქვათ, α-ს შეესაბამება ვექტორი $R=(r_i,r_j,...,r_k)$, ხოლო β-ს - ვექტორი $Q=(q_l,q_s,...,q_p)$. ამ ვექტორებით განისაზღვრება ალტერნატივების ხარისხები

$$V(\alpha)\Leftrightarrow V(R),\ V(\beta)\Leftrightarrow V(q).$$

მაგალითად, (3.2.5) ერთიან სკალაში თითოეულ შეფასებას მივანიჭეთ საკუთარი რანგი და ესენია 1,2,...,9. ვთქვათ, α მოიცემა შეფასებების ვექტორით

$$\alpha=(f_1 2;f_2 3;f_3 2;f_4 2),$$

ხოლო β ალტერნატივა - ვექტორით

$$\beta=(f_1 2;f_2 2;f_3 3;f_4 3).$$

ერთიანი სკალის რანგებიდან α-ს კომპონენტების რანგებია 3, 6, 4, 5 და მათი დალაგებით $R=(3,4,5,6)$, ხოლო β-ს კომპონენტების რანგებია 3, 2, 8, 9 და მათი დალაგებით $Q=(2,3,8,9)$.

მოვიყვანოთ ორი ალტერნატივის შედარების წესი.

თუ სრულდება კრიტერიუმების დამოუკიდებლობის პირობა ყოველი წყვილი კრიტერიუმისათვის და α-ს კომპონენტების შესაბამისი რანგების R ვექტორი არაა ნაკლები, ვიდრე β-ს კომპონენტების შესაბამისი Q ვექტორი (იგულისხმება კომპონენტებს შორის ნაკლებობა ან ტოლობა), ხოლო α-ს თუნდაც ერთი შეფასების რანგი მკაცრად უკეთესია β-ს შესაბამის რანგზე, მაშინ ერთიანი რიგობითი სკალის შესაბამისად α უპირატესია β-ზე: $\alpha\succ\beta\Leftrightarrow V(\alpha)>V(\beta)$. თუ $R=Q$, მაშინ α და β ტოლფასია: $\alpha\approx\beta\Leftrightarrow V(\alpha)=V(\beta)$. თუ არც $\alpha\succ\beta$, არც $\beta\succ\alpha$, არც $\alpha\approx\beta$, მაშინ ისინი შეუდარებელია. მაშასადამე, ერთიანი სკალით ყოველთვის არ შეგვიძლია შევადაროთ ალტერნატივები.

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, α და β ალტერნა-ტივები შეუდარებელია.

მაშასადამე, კრიტერიუმების ერთიანი სკალით შეფა-სების წყვილობითი შედარება საშუალებას გვაძლევს და-ვასკვნათ, ერთი ალტერნატივა მეორეზე უპირატესია თუ ისინი ტოლფასია. თუ ამას ვერ ვახერხებთ გმპ-ის ინფორმაციით, რაც ასახულია ერთიან სკალაში, მაშინ ისინი შეუდარებელია.

ახლა გასარკვეია ძირითადი საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ შევადაროთ რეალური ალტერნატივები ერთ-მანეთს, რომლებიც მოცემულია ვექტორული შეფასების სახით. ამისათვის გამოიყენება ამ ალტერნატივების წყვი-ლობითი შედარება ზემოთ აღწერილი წესით და შემდეგ დავალაგებთ მათ ხარისხის მიხედვით. ეს თეორიულად შევასრულოთ ექვსი $\{P_1, P_2, ..., P_6\}$ პროექტისათვის.

წყვილი პროექტის შედარების შედეგი ისრით აღვნიშნოთ უპირატესობიდან უარესობისაკენ მიმართუ-ლებით, შეუდარებლობისას კი არ გვაქვს ისარი (ნახ. 3.2.2).

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[dr] & & & \\
P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[r] & P_5 \arrow[r] & P_3 \\
 & P_6 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

ნახ.3.2.2.

გამოვყოთ P_1 პროექტი, რომელშიც არ შედის არც ერთი ისარი. მაშასადამე, ის ყველაზე საუკეთესოა და გამოვ-ყოთ იგი. დანარჩენებიდან P_2 და P_6 ყველაზე კარგია. გამოვყოთ ისინიც. დარჩენილი სამიდან საუკეთესოა P_4 და ა.შ.

პრაქტიკულად რეალური ალტერნატივების წყვილო-ბითი შედარების საკითხი გადავწყვიტოთ წყვილობითი შედარების მატრიცის საშუალებით. ამისათვის უნდა შე-მოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება **3.2.2.** საყრდენი სიტუაციის ვექტო-რული შეფასებების სია ვუწოდოთ ყველა შესაძლო შე-ფასების Y სიმრავლის ქვესიმრაველეს, რომლის ელემე-

ნტებს ყველა კრიტერიუმით, გარდა ერთისა, ექნება იგივე მნიშვნელობა, რაც მოცემულ საყრდენ სიტუაციას.

ცხადია, ასეთი სია იქნება ორი - პირველი საყრდენი სიტუაციის და მეორე საყრდენი სიტუაციის. ჩვენი ამოცანისათვის პირველი სია იქნება

$$L_1 = \{(1,1,1,2),(1,1,1,3),(1,1,2,1),(1,1,3,1),(1,2,1,1),$$
$$(1,3,1,1),(2,1,1,1),(3,1,1,1)\},$$

მეორე სია კი -

$$L_2 = \{(3,3,3,1),(3,3,3,2),(3,3,1,3),(3,3,2,3),(3,1,3,3),$$
$$(3,2,3,3),(1,3,3,3),(2,3,3,3)\}.$$

ამ სიმრავლეებში ვექტორების რაოდენობა ტოლია და მათი რიცხვი გამოითვლება ფორმულით

$$|L_1| = |L_2| = m_1 = \sum_{j=1}^{4}(n_j - 1).$$

ცხადია, ვექტორების ნებისმიერი წყვილი როგორც L_1-დან, ისე L_2-დან დასაშვებია შედარებაზე. ამიტომ, ასეთ შედარებაზე ვატარებთ გმპ-ის გამოკითხვას ბინარული მიმართებების საშუალებით: L_1-ზე $y_i R_1 y_j$ და L_2-ზე - $y_i' R_2 y_j'$.

თუ კრიტერიუმების K სიმრავლდან ყოველი წყვილი დამოუკიდებელია ჩვენი განსაზღვრებით, მაშინ R_1 და R_2 მიმართებით შეგვიძლია შევადაროთ ნებისმიერი ორი შეფასება Y-დან. ეს კი საშუალებას მოგვცემს შევადაროთ ალტერნატივები A სიმრავლიდან, რომელთა ვექტორული შეფასება მოცემულია. გავაკეთოთ ეს Y სიმრავლიდან სამი კონკრეტული ვექტორული შეფასებისათვის.

წყვილობითი შედარების მატრიცა გამოვიყენოთ ისევ ჩვენი ამოცანისათვის, რომელიც შეეხება პროექტების შედარებას, ოღონდ მისი უფრო მარტივად წარმოდგენისათვის ამოცანაში განვიხილოთ პირველი სამი კრი-

ტერიუმი $K=\{f_1,f_2,f_3\}$, ე.ი. f_4-ის გარეშე იმავე სკალური შეფასებებით. ამ შემთხვევაში დავსვათ ამოცანა $A=\{P_1=(1,2,3),P_2=(2,3,1),P_3=(3,1,2)\}$ პროექტების სიმრავლის ელემენტების შედარებაზე. ამ მაგალითზე ვაჩვენოთ წყვილობითი შედარების მატრიცით კრიტერიუმების ერთიანი რიგობითი სკალის აგების პროცესი.

ამისათვის, თავიდან განვიხილოთ პირველი საყრდენი სიტუაციის ვექტორულ შეფასებათა სია

$$L_1=\{(2,1,1),(3,1,1),(1,2,1),(1,3,1),(1,1,2),(1,1,3)\}.$$

ეს ექვსი შეფასება უნდა შევადაროთ ერთმანეთს წყვილობითი შედარების $H=(h_{ij}),i,j=1,2,...,6$ მატრიცის საშუალებით, რომელშიც ვიპოვით მთავარი დიაგონალის ზედა ელემენტებს. ამ მატრიცის ელემენტები შემდეგი წესით განვსაზღვროთ: $h_{ij}=1$, თუ i-ური სტრიქონის შესაბამისი შეფასება უპირატესია j-ური სვეტის შესაბამის შეფასებაზე; $h_{ij}=2$, თუ ისინი ტოლფასებია; $h_{ij}=3$, თუ j-ური სვეტის შეფასება უპირატესია i-ური სტრიქონის შეფასებაზე; $h_{ij}=0$, თუ ისინი შეუდარებელია.

H მატრიცის მთავარი დიაგონალის ყველა ელემენტია 2. დაშვების თანახმად, კრიტერიუმის რიგობითი სკალის შეფასება 1 უპირატესია შეფასება 2-ზე, 2 უპირატ-ესია 3-ზე და ტრანზიტულობით 1 უპირატესია 3-ზე. ამიტომ, თუ წყვილები შეფასების მხოლოდ ერთი პოზიციით განსხვავდება, მაშინ მათი შედარება მარტივია. მაგალითად, თუ სტრიქონის (2,1,1) შეფასებას ვადარებთ სვეტის (3,1,1) შეფასებას, მაშინ შესაბამისი ელემენტი მატრიცაში იქნება 1, რადგან $(2,1,1)\succ(3,1,1)$. ასევე $(1,1,2)\succ(1,1,3)$ და $(1,2,1)\succ(1,3,1)$. აღნიშნულის გამო, H მატრიცას მკაცრი დალაგების P^0 მიმართების გამოყენებით, აქვს შემდეგი სახე:

$H =$

	(2,1,1)	(3,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)	(1,1,2)	(1,1,3)
(2,1,1)	2	1	–	–	–	–
(3,1,1)		2	–	–	–	–
(1,2,1)			2	1	–	–
(1,3,1)				2	0	0
(1,1,2)					2	1
(1,1,3)						2

.

მასში უნდა ვიპოვოთ გამოტოვებული ელემენტები. ამისათვის გვჭირდება გმპ-ის გამოკითხვა. პირველი კითხვა შეეხება (2,1,1)-ის და (1,2,1)-ის შედარებას. ვთქვათ, მან მიუთითა, რომ $(2,1,1) \succ (1,2,1)$. მაშინ შედარების შესაბამისი ელემენტი მატრიცაში იქნება 1. რადგან $(2,1,1) \succ (1,2,1)$ და $(1,2,1) \succ (1,3,1)$, ამიტომ ტრანზიტულობის თვისების მიხედვით გვექნება $(2,1,1) \succ (1,3,1)$. მათი შედარების შესაბამისი ელემენტი მატრიცაში აღვნიშნოთ 1^{*}-ით. ასე აღვნიშნავთ ტრანზიტულობის თვისებით მიღებულ ყველა ელემენტს.

ახლა გამოვკითხოთ გმპ (2,1,1) და (1,1,2)-ის შედარებაზე. ვთქვათ მან აღნიშნა, რომ $(2,1,1) \succ (1,1,2)$. რადგან $(1,1,2) \succ (1,1,3)$, ამიტომ ტრანზიტულობით $(2,1,1) \succ (1,1,3)$. ასე ვიპოვით H-ის პირველი სტრიქონის ელემენტებს. შემდეგი გამოკითხვით და ტრანზიტულობის თვისების გამოყენებით ჩავთვალოთ, რომ პირველი საყრდენი სიტუაციის ვექტორული შეფასებების სიის წყვილობითი შეფასების მატრიცის ელემენტები ნაპოვნია:

$$H = $$

	(2,1,1)	(3,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)	(1,1,2)	(1,1,3)
(2,1,1)	2	1	1	1^*	1	1^*
(3,1,1)		2	3^*	3	3	1
(1,2,1)			2	1	3	1^*
(1,3,1)				2	3^*	1^*
(1,1,2)					2	1
(1,1,3)						2

ჩვენს მაგალითში არ შევეხებით კრიტერიუმების უპირატესობით დამოუკიდებლობას. ვიგულისხმოთ, რომ ეს პირობა შესრულებულია. ამის გამო არ განვიხილავთ მეორე საყრდენი სიტუაციის ვექტორული შეფასებების სიის წყვილობითი შედარების მატრიცას.

H მატრიცის საშუალებით ადვილად ვიპოვით L_1-ის შეფასებების ერთიან რიგობით სკალას. მართლაც, (1,1,1) ყველა შეფასებაზე უპირატესია, რადგან იგი პირველი საყრდენი სიტუაციაა. მიღებული მატრიცით გვაქვს უპირატესობები

$$(2,1,1)\succ(1,1,2),\ (1,1,2)\succ(1,2,1),\ (1,2,1)\succ(1,3,1),\ (1,3,1)\succ(3,1,1),$$
$$(3,1,1)\succ(1,1,3)$$

და, მაშასადამე L_1-ის შეფასებების ერთიანი რიგობითი სკალა ასეთია:

$$(1,1,1)\Rightarrow(2,1,1)\Rightarrow(1,1,2)\Rightarrow(1,2,1)\Rightarrow(1,3,1)\Rightarrow(3,1,1)\Rightarrow(1,1,3)$$

ან, რაც იგივეა,

$$(f_1 1, f_2 1, f_3 1)\Rightarrow f_1 2\Rightarrow f_3 2\Rightarrow f_2 2\Rightarrow f_2 3\Rightarrow f_1 3\Rightarrow f_3 3 \quad (3.2.6).$$

გამოვიყენოთ ეს სკალა და შევეცადოთ ჩვენს პირობებში საკონკურსოდ წარმოდგენილი სამი პროექტი $P_1=(1,2,3), P_2=(2,3,1), P_3=(3,1,2)$ დავალაგოთ შემდეგი პრინციპებით:

1. (3.2.6)-ში პირველ შეფასებას $(f_1 1, f_2 1, f_3 1)$ მივანიჭოთ რანგი 1, მეორე შეფასებას $f_1 2$-ს - რანგი 2 და ა.შ., ბოლო შეფასებას $f_3 3$-ს - რანგი 7;

2. თითოეული პროექტის კრიტერიუმით შეფასების გამომსახველი რიცხვი შევცვალოთ ამ შეფასების რანგით (3.2.6) სკალიდან. მაგალითად: $P_1 = (1,2,3)$-ში 1 აღნიშნავს f_1-ით 1 შეფასებას, ანუ $f_1 1$-ს. მისი რანგი არის 1; $2 = f_2 2$ და მისი რანგი არის 4; $3 = f_3 3$ და მისი რანგია 7. ამიტომ, $P_1 = (1,2,3)$ შეიცვლება (3.2.6) სკალის რანგობრივი ვექტორული $P_1^r = (1,4,7)$ შეფასებით. ანალოგიურად, $P_2 = (2,3,1)$ შეიცვლება შეფასებით $P_2^r = (2,5,1)$, $P_3 = (3,1,1)$ კი $P_3^r = (6,1,3)$-ით;

3. მიღებულ თითოეულ რანგობრივ შეფასებაში რანგები დავალაგოთ ზრდის მიხედვით. მაგალითად, $P_1^r = (1,4,7)$ ასე ჩავწეროთ $P_1^{r,>} = (1,4,7)$, $P_2^r = (2,5,1)$ ჩავწეროთ $P_2^{r,>} = (1,2,3)$, ხოლო $P_3^r = (6,1,3)$ - $P_3^{r,>} = (1,3,6)$ სახით.

მოვათავსოთ ყველა მონაცემი შემდეგ ცხრილში:

P_i	P_i^r	$P_i^{r,>}$
$P_1 = (1,2,3)$	(1,4,7)	(1,4,7)
$P_2 = (2,3,1)$	(2,5,1)	(1,2,5)
$P_3 = (3,1,2)$	(6,1,3)	(1,3,6)

;

4. $P_i^{r,>} (i = 1,2,3)$ შეფასებათა შედარებით დავალაგებთ პროექტებს. მათი შედარება გვაძლევს:

$(1,2,5) \succ (1,3,6)$; $(1,3,6) \succ (1,4,7)$ და $(1,2,5) \succ (1,4,7)$,

რაც ნიშნავს, რომ

$$P_2 \succ P_3 \succ P_1.$$

მაშასადამე, ყველაზე უპირატესია მეორე პროექტი, მასზე ნაკლებ უპირატესია მესამე და ყველაზე ცუდია პირველი პროექტი.

ახლა შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა.

დასკვნა. სსჩპ მეთოდის უპირატესობა შემდეგში მდგომარეობს: 1. არც ერთი კითხვა, რომელზეც პასუხი უნდა გასცეს გმპ-მა, არ არის რთული, იგი მოცემულია კრიტერიუმით შეფასების ენაზე; 2. რეალური პროექტების შედარებისათვის გმპ-საგან მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე კომპიუტერს შეუძლია შეამოწმოს გმპ-ის უპირატესობა არაწინააღმდეგობაზე; 3. პროექტების შედარება დაიყვანება კრიტერიუმებით შეფასების შედარებაზე.

ჩვენ მიერ განხილული ამოცანა წარმოადგენს ტიპურ პრაქტიკულ ამოცანას არასტრუქტურირებული ამოცანების კლასიდან. ასეთებია ძირითადად ეკონომიკური, სოციალური და პოლიტიკური ხასიათის სტრატეგიული გადაწყვეტილების მიღების, სამეცნიერო კვლევების დაგეგმვის და დამუშავების, პროექტების კონკურსით შერჩევის და საერთოდ, პირადი არჩევის მრავალი პრობლემა.

3.3. წყვილობითი კომპენსირების - წკომპ მეთოდი

განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების იგივე ამოცანა, რაც წინა სსჩპ მეთოდში, ოღონდ იმ განსხვაევებით, რომ რეალური ალტერნატივების რიცხვი არაა ძალიან დიდი - იგი შეიძლება იყოს 3, 4, და ა.შ., მაგრამ არაა სასურველი იყოს 9-ზე მეტი. მოითხოვება მათგან ყველაზე უპირატესის არჩევა. ამოცანის ასეთი დასმა ხშირად გვხვდება სტრატეგიული არჩევის ამოცანებში.

ფორმალურად ეს ამოცანა ხუთი პუნქტით ზუსტად ისე ჩამოყალიბდება, როგორც სსჩპ მეთოდი.

გმპ-ის უპირატესობის საფუძველზე საჭიროა რეალური ალტერნატივების A სიმრავლიდან არჩეულ იქნეს ყველაზე უპირატესი (საუკეთესო) ალტერნატივა.

ვგულისხმობთ, რომ წინა მეთოდის მსგავსად, ალტერნატივები ფასდება კრიტერიუმებით და მათი ხარისხობრივი სკალების საშუალებით. ამასთან შევნიშნოთ, რომ აქ კრიტერიალურ სივრცეში გადამწყვეტი წესის აგება ვერ მოგვცემს რეალური ალტერნატივების ერთმანეთთან შედარების გარანტიას, რადგან ალტერნატივების რიცხვი საკმაოდ მცირეა.

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად გამოიყენება მეთოდი წკომპ - წყვილობითი კომპენსირების მეთოდი, რომლითაც აიგება გადაწყვეტილების მიღების მხარდამჭერი სისტემა და იგი გმპ-ის უპირატესობაზე ინფორმაციის მოპოვებით მოახდენს რეალური მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების უშუალოდ შედარებას.

წკომპ მეთოდში იგულისხმება, რომ გმპ კარგად ერკვევა მის წინაშე მდგარ პრობლემაში და მისი გადაწყვეტის გზებში.

მეთოდში გაერთიანდება შემდეგი ორი ძირითადი ურთიერთდაკავშირებული ფუნქცია: 1) პრობლემის სტრუქტურირება და 2) საუკეთესო ალტერნატივის არჩევა. საუკეთესო ალტერნატივის არჩევა წარმოებს წყვილობითი შედარების საფუძველზე. ამიტომ, მოცემულ მეთოდში ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია გმპ-ის უპირატესობის საფუძველზე წყვილი ალტერნატივის შედარების პროცედურა. ამისათვის, გმპ-ს შეუძლია:

1. უპირატესობით შეადაროს ორი ალტერნატივის ცალკეული კრიტერიუმებით განსაზღვრული შეფასებები;

2. უპირატესობით შეადაროს მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივების შეფასებები, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ორი კრიტერიუმით განსაზღვრული შეფასებით განსხვავდება;

3. უპირატესობით შეადაროს 2-ზე მეტი კრიტერიუმის მქონე ორი ალტერნატივის შეფასება, თუ მათგან ერთი მეორეზე უპირატესია ყველა კრიტერიუმით, გარდა ერთისა;

4. ორი a_i და a_j ალტერნატივის შეფასების შედარებისას დაასახელოს ზუსტად ერთი პასუხი, შემდეგი ოთხიდან:

$$1)\ a_i \succ a_j;\ 2)\ a_j \succ a_i;\ 3)\ a_i \Leftrightarrow a_j;$$

4) პასუხის გაცემა რთულია.

ასევე, მეთოდში გამოიყენება კრიტერიუმების დამოუკიდებლობა და გმპ-ის უპირატესობის ტრანზიტულობა.

ჩამოთვლილი პრინციპების საფუძველზე მეთოდი გვაძლევს ორი მრავალკრიტერიუმიანი ალტერნატივის შედარების პროცედურას წყვილობითი კომპენსირების პრინციპით, რომელიც ერთი ალტერნატივის უპირატესობაზე ნაკლოვანებას გააწონასწორებს მეორე ალტერნატივის ნაკლოვანებით და საბოლოო ანალიზით დადგინდება მათგან რომელს აქვს უპირატესობაზე მცირე ნაკლოვანება ან რომელს - უფრო უპირატესი ღირებულება.

წკომპ მეთოდი და მისი იდეები ავხსნათ კონკრეტული ამოცანის განხილვით.

ამოცანა 3.3.1 (როგორ შევიძინოთ აგარაკი). ქალაქში მცხოვრებმა ოჯახმა გადაწყვიტა შეიძინოს აგარაკი, რაც შეიძლება უკეთესი და, ამავე დროს, ნაკლებ ფასად.

ასეთი პრობლემის გადასაწყვეტად მიღებულია, რომ დავათვალიეროთ განცხადებები გაზეთებში ან დავიხმაროთ ნაცნობები და ვარიანტების შედარებიდან საბოლოოდ ავირჩიოთ ერთი, ჩვენთვის ყველაზე მეტად მისაღები. მაგრამ ეს მეთოდი არაა მეცნიერული და ამიტომ შეცდომისაგან თავის დაზღვევის მიზნით, მის გადაწყვეტას მივუდგეთ მეცნიერულად.

ვთქვათ ოჯახმა (გმპ) გადაწყვეტილების მისაღებად კონსულტანტის როლში დაასახელა ოჯახის უფროსი, რომელმაც აგარაკის ასარჩევად უნდა გამოიყენოს რაციონალური ხერხი. ამისათვის მან, პირველ რიგში, აგარაკის ვარიანტის შეფასებისათვის შეადგინა კრიტერიუმთა სია და განსაზღვრა თითოეული კრიტერიუმის ხარისხობრივი შემდეგი სკალა:

f_1 - მისვლის დრო სახლიდან იმ სადგურამდე, საიდანაც შეიძლება წასვლა აგარაკზე:

4. ნახევარ საათზე ნაკლები;
5. ნახევარი საათიდან ერთ საათამდე;
6. ერთ საათზე მეტი.

f_2 - მისვლის დრო სადგურიდან აგარაკამდე:

4. ფეხით 15 წთ;
5. ავტობუსით 10–დან 20 წთ-მდე.

f_3 - აგარაკის ღირებულება:

4. მოცემული ქალაქისათვის მისაღებზე დაბალი;
5. მოცემული ქალაქისათვის მისაღები;
6. მისაღებზე მაღალი.

f_4 - აგარაკთან ახლოს მაღაზიის არსებობა:

4. არის;
2. არ არის.

f_5 - აგარაკთან ახლოს ტყის არსებობა:

1. არის;
2. არ არის.

f_6 - აგარაკთან ახლოს ბანაობის შესაძლებლობა:

1. არის;
2. არ არის.

f_7 - აგარაკზე მყუდროება:

1. სრული;
2. ზოგჯერ ხმაურია;
3. ხმაური.

f_8 - ნიადაგის ხარისხი:

1. კარგი;
2. ცუდი.

ამის შემდეგ გადაწყდა, რომ არჩევის პროცესი განხორციელდეს შემდეგნაირად: აგარაკის გაყიდვის შესაბამის განცხადებაში მითითებული ტელეფონით მიიღონ ყვე-

ლა საჭირო ინფორმაცია და მათგან შეირჩეს რამდენიმე უკეთესი ვარიანტი; შემდეგ დაათვალიერონ ისინი და გააკეთონ საბოლოო არჩევანი. პირველ რიგში, ოჯახმა გადაწყვიტა გამორიცხოს ისეთი ვარიანტები, რომლებსაც რამდენიმე კრიტერიუმით აქვს არამისაღები შეფასება. კერძოდ, გამოირიცხა ისეთი ვარიანტები, რომელთა კრიტერიუმების შეფასებებია: $f_1 3$ - საათზე მეტი სადგურამდე; $f_2 2$ - აგარაკი შორსაა სადგურიდან; $f_3 3$ - მაღალი ფასი; $f_7 3$ - აგარაკზე ხმაურია.

შემდეგი ეტაპია უკეთესი ვარიანტების გამოყოფის წესი: თუ I-ელ ვარიანტს ყველა კრიტერიუმით აქვს არანაკლები შეფასება, ვიდრე მე-2 ვარიანტს, ამასთან პირველს თუნდაც ერთი კრიტერიუმით აქვს უკეთესი შეფასება, მაშინ მე-2 ვარიანტი გამოირიცხება.

ახლა შეიძლება კომპიუტერის გამოყენება. მასში შეტანილ იქნა რეალური ვარიანტები ყოველი საჭირო აუცილებელი ინფორმაციით, ანუ სახეზე გვაქვს ყველა ვარიანტი. ეკრანზე გამოიტანება, ეთქვათ აგარაკის ოთხი ვარიანტი (ცხრილი 3.3.1).

ცხრილი 3.3.1

I ვარიანტი	II ვარიანტი
$f_1 1$. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1 2$. სადგურამდე ერთი სთ.
$f_2 1$. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2 1$. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3 2$. ფასი მისაღებია.	$f_3 1$. ფასი მისაღებზე დაბალია.
$f_4 2$. მაღაზია არაა.	$f_4 2$. მაღაზია არაა.
$f_5 2$. ტყე არაა.	$f_5 1$. ტყე არის.
$f_6 2$. მდინარე არაა.	$f_6 1$. მდინარე არის.
$f_7 2$. ზოგჯერ ხმაურია.	$f_7 1$. სრული მყუდროება.

$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$2. ნიადაგი ცუდია.
III ვარიანტი	**IV** ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარი სთ.	$f_1$2. სადგურამდე ერთი სთ
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$2. ფასი მისაღებია.	$f_3$1. ფასი მისაღებია.
$f_4$2. მაღაზია არაა.	$f_4$2. მაღაზია არის.
$f_5$2. ტყე არაა.	$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$2. მდინარე არის.	$f_6$1. მდინარე არაა.
$f_7$2. სრული მყუდროება.	$f_7$1. ზოგჯერ ხმაურია.
$f_8$1. ნიადაგი ცუდია.	$f_8$2. ნიადაგი კარგია.

მოცემული ოთხი ვარიანტიდან აიღება ერთი, როგორც საუკეთესო, რომლითაც დაიწყება არჩევის პროცესი. თუ ასეთი საუკეთესოს არჩევაში შევცდებით, იგი შეიძლება შემდეგ შეიცვალოს. კერძოდ, ავიღოთ მის როლში I ვარიანტი და შევადაროთ მას მე-II ვარიანტი. ამ ორი ვარიანტის ქვემოთ მიეთითება დავალება, თუ რა უნდა გაკეთდეს შემდეგ (ცხრილი 3.3.2).

ცხრილი 3.3.2

I ვარიანტი	II ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1$2. სადგურამდე ერთი სთ.
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$2. ფასი მისაღებია.	$f_3$1. ფასი მისაღებზე დაბალია.
$f_4$2. მაღაზია არაა.	$f_4$2. მაღაზია არაა.
$f_5$2. ტყე არაა.	$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$2. მდინარე არაა.	$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$2. ზოგჯერ ხმაურია.	$f_7$1. სრული მყუდროება.

$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$2. ნიადაგი ცუდია.

თითოეულ ვარიანტში საჭიროა შედარებითი ნაკლოვანებების რანჟირება უფრო არსებითიდან ნაკლებ არსებითისაკენ და რანგები (რ) ასე გაანაწილეთ: 1-ყველაზე არსებითს; 2-უფრო ნაკლებ არსებითს; 3-კიდევ მასზე ნაკლებ არსებითს და ა.შ.

ასეთი დავალების შესრულების შემდეგ გვაქვს (ცხრილი 3.3.3).

ცხრილი 3.3..3

I ვარიანტი	რ	რ	II ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.		1	$f_1$2. სადგურამდე ერთი სთ.
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.			$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$2. ფასი მისაღებია.	2		$f_3$1. ფასი მისაღებზე დაბალია.
$f_4$2. მაღაზია არაა.			$f_4$2. მაღაზია არაა.
$f_5$2. ტყე არაა.	4		$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$2. მდინარე არაა.	3		$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$2. ზოგჯერ ხმაურია.	1		$f_7$1. სრული მყუდროება.
$f_8$1. ნიადაგი კარგია.		2	$f_8$2. ნიადაგი ცუდია.

შემდეგ ცხრილებში განვიხილავთ ოჯახის (გმპ-ის) დიალოგს კომპიუტერთან, რომლის მეშვეობით გმპ აირჩევს ოპტიმალურ ალტერნატივას.

პირველად განვიხილოთ არა რეალური, არამედ დამხმარე ვარიანტები, რომელთა მისაღებად პირველ ეტაპზე I და II ვარიანტისაგან უნდა მივიღოთ ერთი პირველი ბაზისური ვარიანტი. მასში ერთი და იმავე კრიტერიუმით, განსხვავებული შეფასებებიდან ავიღებთ საუკეთესოს (ცხრილი 3.3.4).

ცხრილი 3.3.4

I ვარიანტი	II ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1$1. *სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.*
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$1. *ფასი მისალებზე დაბალია*	$f_3$1. ფასი მისალებზე დაბალია.
$f_4$2. მაღაზია არაა.	$f_4$2. მაღაზია არაა.
$f_5$1. *ტყე არის.*	$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$1. *მდინარე არის.*	$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$1. *სრული მყუდროება.*	$f_7$1. სრული მყუდროება.
$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$1. *ნიადაგი კარგია.*

ახლა ამ ორი ერთნაირი ბაზისური ვარიანტიდან პირველში $f_7 1$ შევცვალოთ პირველი ვარიანტის 1 რანგის $f_7 2$ შეფასებით, ხოლო მეორეში $f_1 1$ - მეორე ვარიანტის 1 რანგის $f_1 2$ შეფასებით. ასე მივიღებთ ორ დამხმარე I - I და II - ! ვარიანტს შეკითხვით (ცხრილი 3.3.5).

ცხრილი 3.3..5

I - I ვარიანტი	II - I ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1$2. *სადგურამდე ერთი სთ.*
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$1. ფასი მისალებზე დაბალია	$f_3$1. ფასი მისალებზე დაბალია.
$f_4$2. მაღაზია არაა.	$f_4$2. მაღაზია არაა.
$f_5$1. ტყე არის.	$f_5$1. ტყე არის.

$f_6$1. მდინარე არის.	$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$2. *ზოგჯერ ხმაურია.*	$f_7$1. სრული მყუდროება.
$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$1. ნიადაგი კარგია.
შეადარეთ	ერთმანეთს

ვთქვათ, გმპ მათგან ირჩევს I - I ვარიანტს, როგორც უფრო უპირატესს.

ახლა 3.3.5 ცხრილში II - I ვარიანტი დავტოვოთ უცვლელად, ხოლო I - I ში $f_3$1 შევცვალოთ $f_3$2-ით, რომელსაც თავიდან აქვს მე-2 რანგი. ასე მივიღებთ ორი დამხმარე ვარიანტის მეორე იტერაციას და მასში დასმულ შეკითხვას (ცხრილი 3.3.6).

ცხრილი 3.3.6

I - II ვარიანტი	II - I ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1$2. *სადგურამდე ერთი სთ.*
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$2. *ფასი მისაღებია.*	$f_3$1. ფასი მისაღებზე დაბალია.
$f_4$2. მალაზია არაა.	$f_4$2. მალაზია არაა.
$f_5$1. ტყე არის.	$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$1. მდინარე არის.	$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$2. *ზოგჯერ ხმაურია.*	$f_7$1. სრული მყუდროება.
$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$1. ნიადაგი კარგია.
შეადარეთ	ერთმანეთს

გმპ-ის ინფორმაციით I - II ვარიანტის ორი ძირითადი ნაკლოვანება (f_3 და f_7 კრიტერიუმით) უფრო არსებითია, ვიდრე II - I ვარიანტის ერთი ძირითადი ნაკ-

ლოვანება (f_1-ით) და მაშასადამე, მისთვის უპირატესია II - I ვარიანტი.

შემდეგი შეკითხვა განხორციელდება ორი დამხმარე ვარიანტისაგან მიღებულ მესამე იტერაციაში (ცხრილი 3.3.7).

ცხრილი 3.3.7

I- III ვარიანტი	II - II ვარიანტი
$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.	$f_1$1. სადგურამდე ნახევარ სთ-ზე ნაკლები.
$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.	$f_2$1. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3$1. ფასი მისაღებზე დაბალია	$f_3$1. ფასი მისაღებზე დაბალია.
$f_4$2. მალაზია არაა.	$f_4$2. მალაზია არაა.
$f_5$2. *ტყე არაა.*	$f_5$1. ტყე არის.
$f_6$2. *მდინარე არაა.*	$f_6$1. მდინარე არის.
$f_7$1. სრული მყუდროება.	$f_7$1. სრული მყუდროება.
$f_8$1. ნიადაგი კარგია.	$f_8$2. *ნიადაგი ცუდია.*
შეადარეთ	*ერთმანეთს*

აქ I - III ვარიანტი მიღებულია 3.3.4 ცხრილით მოცემულ ბაზისურ ვარიანტში უპირატესი $f_5 1$ და $f_6 1$ შეფასებებ-ის შეცვლით თავიდან მოცემული I ვარიანტის რეალური $f_5 2$ და $f_6 2$ შეფასებებით შესაბამისად (მათგან პირვე-ლის რანგია 4, მეორის - 3). II - II ვარიანტი კი მიღე-ბულია ბაზისურ ვარიანტში $f_8 1$-ის შეცვლით რეალური $f_8 2$ შეფასებით (მისი რანგია 2).

მესამე იტერაციაში გმპ უპირატესობას ანიჭებს II - II ვარიანტს. მაშასადამე, მისთვის $f_8 2$ შეფასება უპირა-

ტესობაზე ნაკლებ არსებითია, ვიდრე I - III ვარიანტის შეფასებები $f_5 2$ და $f_6 2$. აქედან შეიძლება გავაკეთოთ წინასწარი დასკვნა, რომ II ვარიანტი უკეთესია I ვარიანტზე.

ახლა სასურველია შევამოწმოთ, თუ რამდენადაა დამოკიდებული 3.3.6 და 3.3.7 ცხრილებით მოცემული პასუხები ბაზისურ ვარიანტზე. ამისათვის, ბაზისური ვარიანტი უნდა ავიღოთ სხვა - იგი შევადგინოთ I და II ვარიანტების კრიტერიუმებით ცუდი შეფასებებისაგან (პირველი ბაზისური ვარიანტის მსგავსად). მივიღებთ მეორე ბაზისურ სიტუაციას (ვარიანტს) (ცხრილი 3.3.8).

ცხრილი 3.3.8.

მეორე ბაზისური სიტუაცია
$f_1 2$. სადგურამდე ერთი სთ.
$f_2 1$. სადგურიდან ფეხით 15 წთ.
$f_3 2$. ფასი მისაღებია.
$f_3 1$. ფასი მისაღებზე
$f_4 2$. მაღაზია არაა.
$f_5 2$. ტყე არაა.
$f_6 2$. მდინარე არაა.
$f_7 2$. ზოგჯერ ხმაურია.
$f_8 2$. ნიადაგი ცუდია.

ამ ბაზისური სიტუაციით ვადარებთ I და II ვარიანტებს. თუ გმპ-ის პასუხი არ შეიცვალა, მაშინ მე-2 ვარიანტი ყოფილა უპირატესი პირველზე.

ამის შემდეგ მე-2 ვარიანტი შედარდება მე-3 ვარიანტს, მათგან უპირატესი კი - მე-4 ვარიანტს.

იმ პირობებში, როცა ვერ ხერხდება ერთი ალტერნატივის ნაკლოვანების კომპენსირებას მეორე ალტერნა-

ტივის ნაკლოვანებით, მაშინ ითვლება, რომ ალტერნატივები ითვლება შეუდარებელია.

დასკვნა. წკომპ მეთოდით რამდენიმე ალტერნატივიდან ავირჩევთ ერთ უპირატეს ალტერნატივას. ამასთან იგულისხმება, რომ ასეთ ამოცანებში ალტერნატივების რიცხვი მცირეა - იგი არაა 9-ზე მეტი. თუ ეს ასე არაა, მაშინ მათი რიცხვი წინასწარ უნდა შევამციროთ: გამოვრიცხოთ ცალკეული კრიტერიუმებით ცუდი შეფასებების მქონე ალტერნატივები ან გამოვყოთ საუკეთესო ალტერნატივების ქვესიმრავლე ორკლას მეთოდით, რომელიც შემდეგ პარაგრაფშია მოცემული. წკომპ მეთოდში ალტერნატივების შედარების წესისათვის გმპ-საგან მოითხოვება სხვა სახის ინფორმაცია, ვიდრე იგი სსჩპ მეთოდშია საჭირო.

3.4. ორდინალური კლასიფიცირების – ორკლას მეთოდი

თუ ობიექტების კლასიფიცირების ამოცანებში ობიექტებს აქვს განსხვავებულ ნიშან-თვისებათა ერთობლიობა, მაშინ ასეთი ამოცანები მიეკუთვნება გადაწყვეტილების მიღების ამოცანებს. კლასიფიცირების მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანები გადაწყვეტილებათა მიღების დანარჩენი მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანებისაგან იმით განსხვავდება, რომ აქ ალტერნატივების (ვარიანტების, ობიექტების) რანჟირება კი არ მოითხოვება, არამედ საკმარისია ისინი გავანაწილოთ გადაწყვეტილებათა მცირე რაოდენობის კლასებს შორის. უმეტეს შემთხვევაში, ეს კლასები შეიძლება დალაგდეს ხარისხის მიხედვით. მაშინ გმპ-სთვის I კლასის ობიექტები უფრო უპირატესია, ვიდრე II კლასის ობიექ-ტები, ხოლო II კლასის ობიექტები უფრო უპირატესია, ვიდრე III კლასის ობიექტები და ა.შ.

ასეთი ტიპის ამოცანები ძალიან ხშირად დაისმის სხვადასხვა სფეროში. მაგალითად: სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრამის ხელმძღვანელმა უნდა გადაწყვიტოს ამ პროგრამაში ჩართოს თუ არა ცალკეული წარმოდგენილი პროექტები მათი დამახასიათებელი ნიშან-თვისებების საფუძველზე; ექიმმა პაციენტისათვის დამახასიათებელი შესაბამისი სიმპტომების საფუძველზე უნდა დაადგინოს დაავადების სიმძიმის ხარისხი; ინჟინერმა უნდა განსაზღვროს ალბათობა იმისა, რომ რთული სისტემის გაუმართაობის მიზეზი შეიძლება იყოს მოცემული ბლოკი; ჟურნალის რედაქტორმა უნდა გადაწყვიტოს პუბლიკაციისათვის წარმოდგენილი სტატიის ხარისხი რეცენზენტის მიერ ნაჩვენები დახასიათების საფუძველზე და სხვ.

მსგავსი ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია რიგობრივი (იგივე ორდინალური) კლასიფიცირების - ორკლას მეთოდის საშუალებით. ჯერ ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა შემდეგი სახით.

ვთქვათ, განსახილველი ამოცანისათვის დამახასიათებელი პრობლემური სიტუაცია ის არის, რომ გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა (გმპ) კონკრეტული ობიექტი უნდა მიაკუთვნოს k რაოდენობის კლასიდან ერთ-ერთს. ამასთან, ეს კლასები დალაგებულია იმ ვარაუდით, რომ პირველი კლასის ობიექტი გმპ-თვის უფრო უპირატესია, ვიდრე მეორე კლასის ობიექტი და ა.შ. თითოეული ობიექტი ხასიათდება m-კრიტერიუმიანი შეფასებით, ხოლო თითოეული კრიტერიუმის სკალა გმპ-თვის დალაგებულია უპირატესობიდან უარესობისაკენ (როგორც წინა ორ მეთოდში).

ფორმალურად რიგობრივი კლასიფიცირების ამოცანა განსხვავდება წინა ორი მეთოდით (სსჩპ, წკომპ) ამოხსნილი ამოცანისაგან. აქ არ გვაქვს რეალური ობიექტების A სიმრავლე, სამაგიეროდ გვაქვს ერთი ახალი პუნქტი. კონკრეტულად, ჩვენი ამოცანა ფორმალურად ასეთია:

მოცემულია

1. კრიტერიუმების სიმრავლე $K=\{f_1,f_2,...,f_m\}$, რომლებითაც ფასდება ყველა ალტერნატივა;

2. j-ური f_j კრიტერიუმით შეფასების რიგობითი სკალა შედგება n_j რაოდენობის შეფასებისაგან;
3. j-ური f_j კრიტერიუმის სკალური შეფასებები $X_j = \{x_j^1, x_j^2, ..., x_j^{n_j}\}$ დალაგებულია უპირატესობიდან უარესობისაკენ;
4. ყველა შესაძლო შეფასების ვექტორთა სიმრავლე $Y = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ კრიტერიუმების სკალური შეფასებების დეკარტული ნამრავლი შედგება $y_i = (x_1^k, x_2^l, ..., x_m^t)$ სახის შეფასებისაგან, სადაც y_i ვექტორი არის ერთ-ერთი სკალური შეფასება ყველა კრიტერიუმით. $Y = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ ჩანაწერი განსაზღვრავს m-განზომილებიან ბადეს, რომლის ყოველი წერტილი არის ყველა კრიტერიუმით შეფასების ვექტორი;
5. მოცემულია დალაგებულ გადაწყვეტილებათა k განსხვავებული კლასი.

მოითხოვება, რომ გმპ-ის უპირატესობის საფუძველზე ვექტორული შეფასებების სიმრავლე Y დავყოთ წყვილ-წყვილად არათანაკვეთ k კლასად.

არსებითი განსხვავება წინა ამოცანებისაგან ისაა, რომ აქ წინასწარ არაა ცნობილი რეალური ალტერნატივების სიმრავლე, ამიტომ ამოცანის ამოხსნა გულისხმობს Y სიმრავლის ყველა ვარიანტის კლასიფიცირებას.

ამრიგად, რიგობრივი კლასიფიცირების ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ალტერნატივების მოცემული სიმრავლიდან გამოვყოთ უპირატესობით დალაგებულ ალტერნატივთა კლასები (ქვესიმრავლეები). უმარტივეს შემთხვევად ითვლება ისეთი ამოცანა, რომელშიც თითოეული ალტერნატივა ერთ-ერთს უნდა მიეკუთვნოს შემდეგი ორი კლასიდან: K_1 ="გამოდგება", K_2 ="არ გამოდგება".

განვიხილოთ რიგობრივი კლასიფიცირების ერთი უმარტივესი ამოცანა და ამოვხსნათ იგი ორკლას მეთოდით ე.წ. პირდაპირი გზით. საჭირო პროცესს ავხსნით დაწვრილებით.

ამოცანა 3.4.1 (ვის მივცეთ კრედიტი). ვიგულისხმოთ, რომ რამდენიმე საწარმომ ფინანსური კრედიტის თაობაზე მიმართა კომერციულ ბანკს. ბანკის ხელმძღვანელობიდან ერთ-ერთს (გმპ) დაევალებული აქვს ყველა სახის ოპერაციის პოლიტიკის შემუშავება. მან საწარმოსათვის კრედიტის მიცემის თუ არმიცემის გადასაწყვეტად მოიწვია კონსულტანტი გადაწყვეტილების მიღების დარგში.

კონსულტანტს გმპ-საგან ესაჭიროება ზუსტი წესი: რა შემთხვევაში და რა პირობებში შეიძლება მიეცეს კრედიტი საწარმოს და რა შემთხვევაში ეთქვას უარი. კონსულტანტმა გააკეთა გასულ წლებში კრედიტის დაუბრუნებლობის შემთხვევების ანალიზი და შეისწავლა ბანკის კლიენტებთან მუშაობის გამოცდილება. აქედან გამომდინარე, მან მიიღო გარკვეული წარმოდგენა ბანკის ხელმძღვანელობის ძირითად მიზნებზე. ეს მიზნები გააერთიანა ბანკის ორ ძირითად მიზანში: 1. "მოგება"; 2. "რისკის შემცირება". პირველი მიზანი გულისხმობს კლიენტისაგან ბანკის ვალის დროულ დაბრუნებას და ამ ოპერაციისაგან მაღალი პროცენტის მიღებას, რაც ზრდის ბანკის კაპიტალს. მეორე მიზანია გაცემული სესხის დაბრუნებისათვის გარანტიის გაზრდა და ჩატარებული ოპერაციებისაგან ფულის დანაკარგის შემცირება. ბანკი კრედიტის გაცემისას საპროცენტო განაკვეთის დადგენისათვის ორიენტირებს საერთო ბაზარზე და რომ არ დაკარგოს კლიენტები, ცდილობს არ დააწესოს მაღალი პროცენტი.

ბანკი რისკის შესამცირებლად კლიენტების ფინანსურ შესაძლებლობებზე აგროვებს მონაცემებს და განსაზღვრავს გირაოს ისეთ ფორმას, რომლითაც გარანტირებული ექნება თანხის დაბრუნება. საუკეთესოდ ითვლება ისეთი გირაო, რომლის გაყიდვა ბანკს მალე შეეძლება, ხოლო ცუდად ითვლება ის გირაო, რომლის გაყიდვა დიდ დროს და ენერგიას მოითხოვს. კონსულტანტმა გმპ-სთან ერთად დაადგინა, რომ ბანკის ხელმძღვანელობის მიზნებს პასუხობს შემდეგი სამი ძირითადი კრიტერიუმი შესაბამისი ხარისხობრივი შეფასებებით:

f_1 - კრედიტის ვადა:

1. მოკლევადიანი (3 თვით);
2. საშუალოვადიანი (6 თვით);
3. გრძელვადიანი (1 წელი და მეტი).

f_2 - კლიენტის რეპუტაცია:

1. წარმატებული საწარმო;
2. საკმაოდ სტაბილური საწარმო;
3. საწარმოს სტაბილურობა გაურკვეველია.

f_3 - თანხის დაბრუნების შესაძლებლობა გირაოთი:

1. მაღალი;
2. საშუალო;
3. დაბალი.

ცხადია, ბანკს მზად უნდა ჰქონდეს კლიენტებისათვის ისეთი წესი, რომელშიც ნაჩვენები იქნება ყველა შეფასება, რადგან წინასწარ უცნობია, როგორი კლიენტი მიმართავს მას კრედიტისათვის.

ამ შეფასებათა ზოგიერთი კომბინაცია-წყობა ბანკს აძლევს იმის შესაძლებლობას, რომ იოლად გადაწყვიტოს გასცეს თუ არა კრედიტი. მაგალითად, შეფასებათა ვექტორისათვის $(f_1 1; f_2 1; f_3 1)$ ან იგივე შეფასებათა $f_1 1 f_2 1 f_3 1$ წყობისათვის ბანკი თავისუფლად გასცემს კრედიტს, ხოლო შეფასებათა $f_1 3 f_2 3 f_3 3$ წყობისათვის ბანკმა არ უნდა გასცეს კრედიტი. მაგრამ, როგორ უნდა იმოქმედოს ბანკმა სხვა შემთხვევაში? ამისათვის, აქვე შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: შეფასების ვექტორი $(f_1 1; f_2 1; f_3 1)$ აღვნიშნოთ (1,1,1)-ით, ხოლო მათგან შედგენილი წყობა 111-ით; ასევე შეფასებათა წყობა $f_1 3 f_2 3 f_3 3$ აღვნიშნოთ 333–ით. ზოგადად, $f_1 i f_2 j f_3 k$ წყობა აღვნიშნოთ ijk-თი.

გადამწყვეტი წესის დასადგენად კონსულტანტმა გმპ-ს შესთავაზა გამოიყენონ ორკლას მეთოდი.

ჩვენი ამოცანის პირობებში მოცემული კრიტერიუმებით შეფასებებისაგან შესადგენი წყობები განვსაზღვროთ სამი ცხრილის საშუალებით (ნახ. 3.4.1).

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$			

$f_3 1$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$			

$f_3 2$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$			

$f_3 3$

ნახ. 3.4.1.

სიმარტივისათვის, წყობა და შესაბამისი უჯრა იყოს ერთი და იგივე. ამიტომ, ერთი და იგივეა, ავიღებთ წყობას თუ შესაბამის უჯრას. ცხადია, აქ შეფასებათა წყობების ვარიანტების ანუ უჯრების რიცხვია $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. გადამწყვეტი წესის ასაგებად ეს წყობები დავყოთ ორ კლასად: I-მივცეთ კრედიტი; II-არ მივცეთ კრედიტი. ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ შეფასებათა 27 ვარიანტიდან ორი წყობისათვის კლასები გარკვეულია: 111 ეკუთვნის I კლასს, ხოლო 333 ეკუთვნის II კლასს.

ავირჩიოთ ამოცანის გადაწყვეტის პირდაპირი გზა, რაც გულისხმობს, რომ გმპ-ის გადასაწყვეტია, შეფასებათა დარჩენილი 25 წყობიდან რომელი მიაკუთვნოს I კლასს და რომელი II კლასს. ამასთან, შევნიშნოთ, რომ ასეთი პირდაპირი გზა, ზოგად შემთხვევაში, როცა შეფასებათა წყობების რიცხვი შეიძლება იყოს რამდენიმე ათასიც კი, ვერ გამოდგება.

ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში კარგი იქნება, თუ გმპ-ს წარედგინება ისეთი წყობები, რომელთა კლასიფიკაცია მარტივად შეეძლება. გადამწყვეტი წესი აგებული იქნება მაშინ, როდესაც მოცემული ცხრილის თითოეულ უჯრაში იქნება ერთი ნომერი I ან II. პირველი ცხრილის ზედა პირველი უჯრაა 111 და რადგან იგი ეკუთვნის I

კლასს, ამიტომ მასში ჩავწერთ I-ს. ასევე, მესამე ცხრილის ბოლო ქვედა უჯრაა 333, იგი ეკუთვნის II კლასს და მასში ჩავწეროთ II.

ვთქვათ, გმპ-ს კლასიფიცირებისათვის წარედგინა წყობა ანუ უჯრა 312 (მეორე ცხრილის ქვედა პირველი უჯრა) და მან გადაწყვიტა, რომ იგი ეკუთვნის I კლასს. მაშასადამე, ამ უჯრაში ჩაიწერება I. რადგან 312 წყობაზე უპირატესია წყობები 211, 311, 112 და 212, ამიტომ ამ უჯრებშიც ჩაიწერება I.

ცხადია, მასზე უპირატესია 111 წყობაც, მაგრამ რადგან მისი საკითხი გადაწყვეტილია, ამიტომ 312-ზე უპირატესად ახლა მას არ ჩავთვლით. ასევე, 333 მასზე უარესია და არც მას მივაკუთვნებთ უარესების რიცხვს (ეს წესი გვჭირდება ქვემოთ). მაშასადამე, დეკარტული ნამრავლის თვისებით, იოლი დასადგენია, რომ 312-ზე უპირატესია $1\cdot3\cdot2-1-1=4$ წყობა. ამრიგად, ერთ შეკითხვაზე გმპ-ის პასუხით მივიღეთ შემდეგი სურათი:

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	I		
$f_1 2$	I		
$f_1 3$	I		

$f_3 1$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	I		
$f_1 2$	I		
$f_1 3$	I		

$f_3 2$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$			

$f_3 3$.

ნახ. 3.4.2.

დავსვათ კითხვა: რა მოხდებოდა მაშინ, თუ გმპ 312 უჯრას მიაკუთვნებდა არა I კლასს, არამედ II კლასს? მაშინ II კლასს მიეკუთვნებოდა უჯრებიც 322, 332, 313, 323 (ნახ. 3.4.3), რადგან ეს წყობები უარესია, ვიდრე 312:

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$			

$f_3 1$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$	II		

$f_3 2$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$			
$f_1 2$			
$f_1 3$	II	II	II

$f_3 3$

ნახ. 3.4.3.

ცხადია, გმპ-ის პასუხი რომელიმე კონკრეტულ კითხვაზე წინასწარ უცნობია. თუ ვიგულისხმებთ, რომ მისგან ორივე პასუხი თანაბრადაა მოსალოდნელი, მაშინ უმჯობესია გმპ-ს ვკითხოთ იმ წყობის ანუ იმ უჯრის შესახებ, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალური რაოდენობის უჯრების კლასიფიცირებას. შეფასებათა ასეთ წყობას ეწოდება **მაქსიმალურად ინფორმირებადი**. მისი განსაზღვრისათვის შემოვიღოთ **შეფასებათა წყობის ინფორმირებადობის ინდექსი**.

ინფორმირებადობის ინდექსი იანგარიშება ჯერ კიდევ არაკლასიფიცირებულ შეფასებათა წყობისათვის. იგულისხმება, რომ შეფასებათა მოცემული წყობა წარედგინება გმპ-ს და დაითვლება იმ წყობათა რიცხვი, რამდენიც კლასიფიცირდება მისი პასუხის შესაბამისად - ეკუთვნის იგი I კლასს თუ II კლასს. ასეთ წყობათა რიცხვის პოვნა არაა რთული, მასზე ზემოთ მივუთითეთ და შემდეგშიც აღვნიშნავთ.

3.4.4 ნახაზზე სამივე ცხრილის ყოველ უჯრაში (გარდა, თავიდანვე გარკვეული ორი უჯრისა) მოცემულია

ინფორმირებადობის ორი ინდექსის ჯამი, რომელთაგან პირველი შეესაბამება გმპ-ის პასუხს I კლასთან დაკავშირებით, ხოლო მეორე - პასუხს II კლასთან დაკავშირებით:

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	I	$1+17$	$2+8$
$f_1 2$	$1+17$	$3+11$	$5+5$
$f_1 3$	$2+8$	$5+5$	$8+2$

$f_3 1$

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	$1+17$	$3+11$	$5+5$
$f_1 2$	$3+11$	$7+7$	$11+3$
$f_1 3$	$5+5$	$11+3$	$17+1$

$f_3 2$

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	$2+8$	$5+5$	$8+2$
$f_1 2$	$5+5$	$11+3$	$17+1$
$f_1 3$	$8+2$	$17+1$	II

$f_3 3$

ნახ. 3.4.4.

25 უჯრიდან ზოგიერთის მაგალითზე ვაჩვენოთ, როგორ მივიღეთ მასში მოთავსებული რიცხვების ჯამი.

ავიღოთ მაგალითად 211 უჯრა. მასზე უპირატესია 111, მაგრამ იგი არ ეკუთვნის იმ 25 უჯრას. ამიტომ I-ს ეკუთვნის მხოლოდ 211 და ამ უჯრაში ვწერთ 1+. მეორე შესაკრები გვიჩვენებს 211-ზე უარეს უჯრათა რიცხვს. მათი რაოდენობაა $2\cdot3\cdot3-1(211)-1(333)=16$. ამას დაემატება 211 და ამიტომ მეორე შესაკრები იქნება 17. $2\cdot3\cdot3$ არის სამი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლში ელემენტების ანუ წყობების რაოდენობა. ამ ნამრავლში 2 გვიჩვენებს, რომ 211-ში პირველი შეფასება შეიძლება იყოს 2 ან 3 (უარესი უჯრისათვის) და ამიტომ მათი რიცხვია 2. ცხადია, $2\cdot3\cdot3$-ში პირველი 3 გვიჩვენებს, რომ 211-ში მეორე შეფასება შეიძლება იყოს 1, 2 ან 3 და მათი რიცხვია 3. ასევე გვაქვს 2.3.3-ში მეორე 3-სთვის. ყველა

ასეთი წყობიდან კი გამოირიცხება 211 და 333. მაშასადამე, თუ 211 უჯრაზე გმპ-ის პასუხი იქნება I კლასი, მაშინ გამოიცნობა მხოლოდ ეს ერთი უჯრა და თუ პასუხი იქნება II კლასი, მაშინ მე-II კლასს მიეკუთვნება 16 უჯრა ამ უჯრის ჩათვლით.

თუ ავიღებთ 311 უჯრას, მაშინ პასუხით - I კლასი, გამოიცნობა ეს და მისი ზედა უჯრა 211, რადგან 211 უპირატესია 311-ზე. ამრიგად, 311-ზე უპირატესია $2\cdot1\cdot1-1=1$ უჯრა. ამიტომ, პირველი ინდექსი იქნება 2 და იგი ჩაიწერება 311-ში. რაც შეეხება 311-ზე უარეს უჯრებს, მათი რიცხვია $1\cdot3\cdot3-1(333)=8$. მაშასადამე, ამ უჯრაში ვწერთ 2+8.

321 უჯრისათვის, თუ იგი ეკუთვნის I კლასს, გვაქვს: მასზე უკეთესია $3\cdot2\cdot1-1(321)-1(111)=4$ უჯრა და სულ I კლასს ეკუთვნის 5 უჯრა; თუ პასუხი იქნება II კლასი, მაშინ მასზე უარესია $1\cdot2\cdot3-1(321)-1(333)=4$ უჯრა და სულ II კლასს მიეკუთვნება 5 უჯრა. მაშასადამე, 321 უჯრაში ამიტომაცაა 5+5.

ავიღოთ კიდევ ერთი უჯრა - 332. მასზე უკეთესია $3\cdot3\cdot2-1(332)-1(111)=16$ უჯრა და 332 უჯრაში პირველი შესაკრებია 17. 332-ზე უარესი არაა არც ერთი უჯრა - $1\cdot1\cdot2-1-1=0$ და ამიტომ, მეორე შესაკრები ინდექსი იქნება 1 (მხოლოდ ეს უჯრა).

ახლა, 3.4.4 ნახაზზე უნდა ავირჩიოთ მაქსიმალურად ინფორმირებადი შეფასებათა წყობა ანუ უჯრა. იგი განისაზღვრება შემდეგი მოთხოვნებით:

1) სასურველია, ჯამის შემადგენელი ინდექსები ახლოს იყოს ერთმანეთთან (გმპ-ის ორი მოსალოდნელი პასუხის თანაბრად ალბათურობის მოთხოვნის გამო);

2) სასურველია, ჯამური ინდექსი იყოს მაქსიმალური;

3) თუ ასეთი უჯრა რამდენიმეა, მაშინ მათგან ერთი ავირჩიოთ შემთხვევით.

თავიდან, გმპ-თან დიალოგს ვიწყებთ მეორე ცხრილის შუაში მოთავსებული მაქსიმალურად ინფორმირებადი უჯრით 7+7 (წყობით 222). ეს უჯრა ახალ ნახაზზე (ნახ. 3.4.5) აღვნიშნოთ $N1$ ნომრით. გმპ-ს ვეკითხებით: "როგორ გადაწყვეტილებას მიიღებთ კრედიტის გაცემაზე იმ საწარმოსათვის, რომელიც ითხოვს კრედიტს 6 თვით, საკმაოდ სტაბილურია და გირაოთი თანხის და-ბრუნების საშუალო შესაძლებლობა აქვს?" დავუშვათ, გმპ დადებითად წყვეტს საკითხს - იგი თანახმაა კრედიტის გაცემაზე. რა კითხვა იქნება შემდეგი?

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	I	I	I^{N10}
$f_1 2$	I	I	II^{N7}
$f_1 3$	I	II^{N9}	II^{N3}

$f_3 1$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	I	I	II^{N4}
$f_1 2$	I	I^{N1}	II
$f_1 3$	I^{N5}	II	II

$f_3 2$,

	$f_2 1$	$f_2 2$	$f_2 3$
$f_1 1$	II^{N11}	II^{N8}	II
$f_1 2$	II^{N6}	II^{N2}	II
$f_1 3$	II	II	II

$f_3 3$.

ნახ. 3.4.5.

პირველი პასუხის შედეგად მოხდა შვიდი წყობის კლასიფიცირება. გაურკვეველი დარჩა $27-2-7=18$ წყობის საკითხი. თითოეული მათგანისათვის თავიდან დაითვლება ინფორმირებადობის ინდექსი და შემდეგი კითხვა განხორციელდება ზემოთ აღნიშნული მოთხოვნებით. იმავე ნახაზზე მოცემულია გმპ-თან კითხვების ნომრები, რომელთა საშუალებით ჩატარდა ყველა უჯრის კლასიფიცირება. როგორც აქედან ჩანს, კითხვების საერთო რიცხვი არის 11.

მას შემდეგ, რაც გმპ-საგან მივიღებთ ინფორმაციას, უნდა განხორციელდეს კონტროლი მის არაწინააღმდეგობაზე. ამისათვის, ხელახლა უნდა დავუსვათ მას კითხვები შეფასებათა სასაზღვრო წყობების შესახებ. შეფასებათა სასაზღვრო წყობა ეწოდება ისეთ წყობას, როდესაც მასში თითო შეფასების შეცვლით, იგი შეიცვლის კლასს.

II კლასის სასაზღვრო შეფასებებიდან შეიძლება ავირჩიოთ ისეთები, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავს II კლასის ყველა დანარჩენ შეფასებას. ასეთ უჯრებს მოცემულ ნახაზზე აქვს ნომრები: N4; N7; N9; N11. ისინი ხელმეორედ წარედგინება გმპ-ს. ამის ანალოგიურად შეიძლება ავირჩიოთ უჯრები ნომრებით N1, N5, N10, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავს I კლასის დანარჩენ შეფასებებს და განმეორებით წარედგინება გმპ-ს.

გმპ-ის პასუხები ნაბიჯ-ნაბიჯ განსაზღვრავს კლასიფიცირების ზოგად წესს. ეს წესი შეიძლება აღიწეროს შინაარსობრივად. კერძოდ, 3.4.5 ნახაზზე მოცემული წესი ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

1. საწარმოს, რომლის სტაბილურობა გაურკვეველია, გირაოს თანხის დაბრუნების მაღალი შესაძლებლობისას შეიძლება მიეცეს მხოლოდ მოკლევადიანი კრედიტი (131);
2. წარმატებულ საწარმოს, გირაოთი თანხის დაბრუნების საშუალო შესაძლებლობის შემთხვევაში, შეიძლება მიეცეს გრძელვადიანი კრედიტი (312);
3. საკმაოდ სტაბილურ საწარმოს, თანხის დაბრუნების საშუალო შესაძლებლობის შემთხვევაში, შეიძლება მიეცეს საშუალოვადიანი კრედიტი (222) და ა.შ.

ამრიგად, დადგენილი გადამწყვეტი წესით შეუძლია ისარგებლოს ბანკმა იმისათვის, რომ ნებისმიერი შეფასებების მქონე კლიენტისათვის განსაზღვროს შესაბამისი კლასი - I (მისცეს კრედიტი) ან II - (არ მისცეს კრედიტი). ეს წესი შეიძლება გამოიყენონ აგრეთვე ბანკის თანამშრომლებმა გმპ-ის ნებისმიერი გადაწყვეტილების ახსნისათვის.

მოყვანილი მარტივი ამოცანის გადაწყვეტიდან ნათლად ჩანს ორკლას მეთოდის დადებითი მხარეები. მისი ძირითადი იდეა ისაა, რომ გმპ ახორციელებს არა ყველა

ალტერნატივის კლასიფიცირებას, არამედ მათგან ზოგიერთისას, რომელთა საფუძველზე ხდება დანარჩენების ავტომატური კლასიფიკაცია.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, რომელიც შეეხება სამეცნიერო ჟურნალში გამოსაქვეყნებლად წარდგენილი სტატიის ხარისხის შეფასებას.

ამოცანა 3.4.2 (სამეცნიერო სტატიის მიღება გამოსაქვეყნებლად). გამოსაქვეყნებლად წარმოდგენილი სტატიის შესაფასებელი კრიტერიუმები და მათი სკალები ასეთია:

f_1 - ჟურნალის მიმართულებასთან შესაბამისობა
1. ზუსტად შეესაბამება ჟურნალის თემატიკას;
2. შეეხება ჟურნალის თემატიკას;
3. ნაკლებად შეესაბამება ჟურნალის მიმართულებას.

f_2 - შედეგების თეორიული ღირებულება
1. აქვს დიდი თეორიული ღირებულება;
2. აქვს გარკვეული თეორიული ღირებულება;
3. არა აქვს თეორიული ღირებულება.

f_3 - შედეგების პრაქტიკული ღირებულება
1. აქვს დიდი პრაქტიკული ღირებულება;
2. აქვს გარკვეული პრაქტიკული ღირებულება;
3. არა აქვს პრაქტიკული ღირებულება.

f_4 - შეცდომების არსებობა
1. არაა შეცდომები;
2. არის ზოგიერთი შეცდომა;
3. არის არსებითი ხასიათის შეცდომები.

f_5 - გადმოცემის ხარისხი
1. კარგია;
2. საშუალოა;
3. ცუდია.

გადაწყვეტილებათა კლასებია

I კლასი: სტატია გამოქვეყნდეს;

II კლასი: სტატია უნდა გადამუშავდეს და გამოქვეყნდება;

III კლასი: სტატია უნდა გადამუშავდეს და შემდეგ რეცენზირდება;
IV კლასი: სტატიას უარი ეთქვას გამოქვეყნებაზე.

ცხადია, აღნიშნული მონაცემების გამოყენებით შესაძლებელია განისაზღვროს ყველა შესაძლო ვექტორული შეფასება. ამიტომ, თუ შევძლებთ ყველა ასეთი შეფასების კლასიფიცირებას, ჩვენ ავაგებთ ობიექტების კლასიფიცირების სრულ სისტემას. როგორც წინა ამოცანაში ვნახეთ, გამოცდილი გმპ-ის მიერ კლასიფიცირების კონკრეტული ამოცანის გადამწყვეტი წესი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სხვა რეალური ალტერნატივების კლასიფიცირებისათვის. ამიტომ, სამეცნიერო ჟურნალის რედაქციას შეუძლია ააგოს ასეთი წესი რეალური შემთხვევისათვის და შემდეგ გამოიყენოს იგი თითოეული რეცენზირებული სტატიის შესაფასებლად.

ვთქვათ, რედაქციაში წარმოდგენილი ოთხი ხელნაწერი სტატია $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ შეფასებულია დადგენილი კრიტერიუმებით (ნახ. 3.4.6).

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
a_1	1	2	1	1	1
a_2	2	2	1	2	1
a_3	2	2	3	2	1
a_4	2	1	1	1	1

ნახ. 3.4.6.

ამრიგად, რედაქციაში წარმოდგენილი თითოეული ალტერნატივა შეგვიძლია ჩავწეროთ ვექტორული შეფასების სახით (ასეთ ჩაწერაზე ადრე შევთანხმდით):

$$a_1 = (1,2,1,1,1),\ a_2 = (2,2,1,2,1),\ a_3 = (2,2,3,2,1),\ a_4 = (2,1,1,1,1).$$

აქედან ჩანს, რომ a_1 დომინირებს a_2-ს, რადგან a_1-ის პირველი და მეოთხე შეფასება უკეთესია a_2-ის შესაბამის შეფასებებზე, ხოლო დანარჩენი ორი შეფასება მათ ერთნაირი აქვთ. ასევე, a_2 დომინირებს a_3-ს, a_4 დომინი-

რებს a_2-ს და a_3-ს. რაც შეეხება a_1 და a_4 ალტერნატივებს, ისინი დომინირების მიხედვით შეუდარებელია.

მოცემული ალტერნატივების კლასიფიცირებით I კლასის ალტერნატივა უპირატესი უნდა იყოს II კლასის და დანარჩენი კლასების ნებისმიერ ალტერნატივზე. ამიტომ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ, თუ რომელიმე ალტერნატივა დომინირებს მოცემულს, მაშინ იგი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს უფრო ნაკლები უპირატესობის კლასს, ვიდრე მოცემული ალტერნატივის შესაბამისი კლასია. ჩვენი მაგალითისათვის ეს პირობა ნიშნავს, რომ, თუ გმპ-ის აზრით a_2 ეკუთვნის I კლასს, მაშინ a_1 აგრეთვე უნდა ეკუთვნოდეს იმავე I კლასს.

დავუშვათ, ჩვენს მაგალითში განიხილება გადაწყვეტილებათა მხოლოდ ორი კლასი: I - სტატია გამოქვეყნდეს; II - სტატიას უარი ეთქვას გამოქვეყნებაზე. ვთქვათ, გმპ-ს კლასიფიცირებისათვის წარედგინა a_2. ამ შემთხვევაში გმპ-ის პასუხზე დამოკიდებულებით, შეგვიძლია a_1-ის და a_3-ის კლასიფიცირება წარდგენის გარეშე. მართლაც, თუ გმპ ჩათვლის, რომ a_2 ეკუთვნის I კლასს, მაშინ a_1-ც ეკუთვნის I კლასს. თუ იგი ჩათვლის, რომ a_2 ეკუთვნის II კლასს, მაშინ a_3-ც ეკუთვნის II კლასს. ამრიგად, გმპ-ის ნებისმიერი პასუხით შეიძლება განისაზღვროს კიდევ ერთი სხვა ალტერნატივის კლასი. ხოლო თუ გმპ-ს წარედგინება a_1 და მისი გადაწყვეტილებით იგი ეკუთვნის I კლასს, მაშინ არ შეგვიძლია დავადგინოთ სხვა რომელიმე ალტერნატივის კლასი. ასევე ვერ გავარკვევთ სხვა ალტერნატივის კლასს, თუ გმპ-ს პირველად წარედგინება a_3 და მიაკუთვნებს მას II კლასს. მაშასადამე, ვექტორული შეფასებების Y სიმრავლის ელემენტებს აქვს განსხვავებული ინფორმირებადობის შესაძლებლობა და ამიტომ სასურველია გმპ-ს წარედგინოს ისეთები, რომლებსაც უფრო მეტი ინფორმირე-

ბადობის ხარისხი აქვს. მაშასადამე საჭიროა დადგინდეს Y სიმრაელის ელემენტების ინფორმირებადობა.

ამისათვის, Y დავყოთ მისი ელემენტების ინფორმირებადობის ხარისხის მიხედვით k რაოდენობის $Y_1,...,Y_k$ კლასად, რომლებიც დააკმაყოფილებს მოცემული ამოცანის პირობებს (ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში, ეს კლასები იქნება Y_1, Y_2, Y_3, Y_4). ასეთი დაყოფა გამოყენებული იქნება ნებისმიერი ალტერნატივის კლასის განსაზღვრისათვის.

განვიხილოთ ერთი რომელიმე, ვთქვათ, Y_p კლასის ელემენტები. ცხადია, ამ ერთი კლასის ნებისმიერი ორი ელემენტი y_i და y_j ერთმანეთთან ან დომინირების მიმართებაშია, ან დომინირებით შეუდარებელია, ე.ი. სრულდება ერთ-ერთი შემდეგიდან (აქ დომინირება და უპირატესობა ერთი და იგივეა):

1) $y_i \succ y_j$; 2) $y_j \succ y_i$; 3) $y_i \approx y_j$ (შეუდარებელია).

მაშასადამე, Y_p კლასიდან შეიძლება გამოიყოს ორი ქვესიმრავლე: Y_p^1, რომლის ელემენტები არ იქნება დომინირებული სხვების მიერ; Y_p^2, რომლის ელემენტები არ დომინირებს სხვას, ანუ

$$Y_p^1 = \{y_i \in Y_p \mid \forall y_j \in Y_p \Rightarrow y_i \succ y_j \text{ ან } y_i \approx y_j\},$$

$$Y_p^2 = \{y_i \in Y_p \mid \forall y_j \in Y_p \Rightarrow y_j \succ y_i \text{ ან } y_i \approx y_j\}.$$

ამ ქვესიმრავლეებს ვუწოდოთ Y_p კლასის საზღვრები.

განსაზღვრება 4.3.1. $Y_p (p = 1,...,k)$ კლასის ზედა საზღვარი ვუწოდოთ Y_p^1-ს, ხოლო ამ კლასის ქვედა საზღვარი - Y_p^2-ს.

რას გვეუბნება ეს განსაზღვრება? იგი გვიჩვენებს, რომ p კლასს მიეკუთვნება ისეთი ელემენტები, რომლე-

ბიც არ არის ხარისხით უკეთესები ამ კლასის ზედა საზღვრის ელემენტებზე და არ არის უარესები ამ კლასის ქვედა საზღვრის ელემენტებზე. ამრიგად, თუ გვეცოდინება მოცემული კლასის ზედა და ქვედა საზღვრები, მაშინ მათი საშუალებით შეიძლება განისაზღვროს ამ კლასის ყველა ელემენტი. ამ აზრით, კლასის საზღვრების ელემენტებით განისაზღვრება ამ კლასისათვის Y სიმრავლის კონკრეტული ვექტორული შეფასების მიკუთვნების წესი.

განვიხილოთ ასეთი წესი ჩვენი ამოცანისათვის. ვთქვათ, გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა უპასუხა ყველა საჭირო კითხვას და ამის შედეგად მოხდა ყველა შესაძლო ვექტორული შეფასების სრული არაწინააღმდეგობრივი კლასიფიცირება ოთხ კლასად. ამ ინფორმაციის საფუძველზე, რიგობითი სკალის საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ თითოეული კლასის ზედა და ქვედა საზღვრები (ნახ. 3.4.7).

I კლასი
ყველაზე უპირატესი ვექტორები
(1,1,1,1,1)
ყველაზე უარესი ვექტორები
(2,3,2,1,2), (2,3,3,1,1)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

II კლასი
ყველაზე უპირატესი ვექტორები
(1,1,1,2,1), (1,1,1,1,3), (1,1,3,1,2)
ყველაზე უარესი ვექტორები
(2,3,3,2,3)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

III კლასი
ყველაზე უპირატესი ვექტორები
(1,1,1,3,1)
ყველაზე უარესი ვექტორები
(1,3,3,3,3),(2,2,3,3,3),(2,3,2,3,3), (2,3,3,3,2)

- -
IV კლასი
ყველაზე უპირატესი ვექტორები
(3,1,1,1,1), (2,3,3,3,3)
ყველაზე უარესი ვექტორები
(3,3,3,3,3)

ნახ. 3.4.7.

შევეცადოთ ამ საზღვრების გამოყენებით დავადგინოთ თითოეული ალტერნატივის (სტატიის) გადაწყვეტილების კლასი. როგორც ვიცით,

$$a_1 = (1,2,1,1,1),\ a_2 = (2,2,1,2,1),\ a_3 = (2,2,3,2,1),\ a_4 = (2,1,1,1,1).$$

განვიხილოთ a_1. იგი დომინირებს I კლასის ქვედა საზღვრის ელემენტებს და მაშასადამე მიეკუთვნება I კლასს. a_2-ის შეფასება f_4 კრიტერიუმით არის 2 და ამიტომ იგი ვერ დომინირებს I კლასის ქვედა საზღვრის ელემენტებს. მაშასადამე, a_2 არ მიეკუთვნება I კლასს. მაგრამ იგი დომინირებს მეორე კლასის ქვედა საზღვრის (2,3,3,2,3) ელემენტს და ამიტომ მიეკუთვნება II კლასს. ასევე მიეკუთვნება II კლასს ალტერნატივა a_3. ალტერნატივა a_4 დომინირებს I კლასის ქვედა საზღვრის ელემენტებს და ამის გამო, იგი ეკუთვნის I კლასს.

მაშასადამე, წარმოდგენილი ოთხი სტატიიდან a_1 და a_4 ეკუთვნის I კლასს - მიიღება გამოსაქვეყნებლად, ხოლო a_2 და a_3 სტატია ეკუთვნის II კლასს და იგი გადამუშავების შემდეგ გამოქვეყნდება. ამ შემთხვევაში, III და IV კლასები აღმოჩნდა ცარიელი.

IV თავი

თამაშთა თეორია - გადაწყვეტილების მიღება კონფლიქტისა და განუზღვრელობის პირობებში

4.1. კონფლიქტები და თამაშთა თეორია

ყოველგვარი კონფლიქტის და კრიზისის კვლევის, მათი განვითარების ანალიზის, პროგნოზირების და მართვის პრობლემები დღეისათვის ერთ-ერთი ყველაზე აქტუალური თემებია. ამაზე მიუთითებს მსოფლიოს სხვადასხვა კუთხეში განვითარებული ან მოსალოდნელი კონფლიქტები, რომლებიც საერთაშორისო ურთიერთობებში არასტაბილურ გარემოს ქმნის. ამიტომ, ყოველი ძალღონე მიმართული უნდა იყოს ისეთი მექანიზმებისა და საშუალებების გამომუშავებისათვის, რომელთა დახმარებით შესაძლებელი გახდება წინასწარ გამოვიცნოთ პოტენციური კონფლიქტების და კრიზისული სიტუაციების განვითარების პროგნოზები, გამოვიმუშაოთ მათი ეფექტურად გადაწყვეტის რეკომენდაციები.

აღნიშნული ტიპის არასასიამოვნო სიტუაციების კვლევის საკმაოდ ეფექტურ საშუალებად მსოფლიოს სამეცნიერო საზოგადოებებში მიჩნეულია მათი მოდელირება თამაშებით, რაშიც იგულისხმება მოცემულ სიტუაციაში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად ამ სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება თამაშთა თეორიის გამოყენებით. თამაშთა თეორია თანამედროვე მათემატიკის დარგია. იგი მათემატიკური მოდელების თეორიაა, რომელიც შეისწავლის ოპტიმალური (რაციონალური) გადაწყვეტილების მიღების პრობლემებს კონფლიქტის, განუზღვრელობისა და კოოპერაციის პირობებში. ამ პირობების განსაკუთრებულობა განისაზღვრება მათი პრაქტიკული საჭიროებით საზოგადოების ცხოვრებასა და განვითარებაში, ასევე, მათი სირთულით, რომლის დროსაც

გვიხდება გადაწყვეტილების მიღება. თამაშთა თეორიის დანიშნულებაა ჩამოთვლილ პირობებში რაციონალური ქმედებისათვის რეკომენდაციების შემუშავება. ამ დარგს, მათემატიკის სხვა დარგებს შორის, ფრიად განსაკუთრებული ადგილი უკავია, რადგან იგი ერთადერთია მათ შორის, რომელთა საგანია სოციალურ მოვლენებთან დაკავშირებით განსხვავებული ინტერესების მქონე ადამიანთა და კოლექტივების ჭკვიანური ქმედებების არჩევის გზების მოძებნა. უფრო მეტიც, ასეთი ქმედებები ყველა ფორმით წარმოადგენს ადამიანთა მთელი სოციალური ყოფის შინაარსს და, ამდენად, თამაშთა თეორიას აქვს მრავალმხრივი გამოყენება ადამიანთა შემოქმედების ყველა სფეროში. ამრიგად, თამაშთა თეორია სწავლობს ისეთ სიტუაციებს, რომლებშიც მონაწილეობს ადამიანები, კოლექტივები, ავტომატები და ბუნების სხვა ობიექტები. ყველა მათგანს, მოთამაშეები ეწოდება. მოთამაშე, უბრალოდ, ტერმინია, რომელიც მოსახერხებელია მკაფიოდ აღწერილი წესებით შესასწავლი სიტუაციის სალონურ თამაშებთან ანალოგიისათვის. კონფლიქტში იგულისხმება ადამიანთა, მათი ჯგუფების და მხარეთა ურთიერთობებში რაიმე მოვლენის, სიტუაციის ან საგნის მიმართ ყოველგვარი ტიპის უთანხმოება, აზრთა განსხვავებულობა. ჩვეულებრივ, კონფლიქტში წარმოიდგენენ საყოფაცხოვრებო პირობებში ადამიანთა შორის უთანხმოებებს, სხვადასხვა სახის ინტერესთა დაპირისპირებებს და საქმეთა გარჩევას. კონფლიქტურ სიტუაციაში კი გულისხმობენ ისეთ სიტუაციას, რომელსაც მიეყავართ კონფლიქტთან საყოფაცხოვრებო მნიშვნელობით, თუმცა, ეს ყოველთვის არაა აუცილებელი. მაგალითად, მას შემდეგ, რაც სტუდენტი აიღებს საგამოცდო ბილეთს, იწყება კონფლიქტური სიტუაცია მასსა და პედაგოგს შორის იმიტომ, რომ მათი მიზნები ამ მომენტიდან უკვე განსხვავებულია. მაგრამ მას არ მივყავართ კონფლიქტამდე. თამაშთა თეორიაში კონფლიქტი ეწოდება ისეთ მოვლენას, რომლის შესახებ შეიძლება ითქვას ვინ და როგორ მონაწილეობს ამ მოვლენაში, რა შედეგებით შეიძლება დამთავრდეს იგი და ვინ არის დაინტერესებული ამ

შედეგებით. აქ, სიტყვა კონფლიქტი გამოიყენება უფრო ფართო მნიშვნელობით და მოიცავს სოციალური წინააღმდეგობრიობის ნებისმიერ ფორმას - ანტაგონისტურს და არაანტაგონისტურს, ღიას და ფარულს, მწვავეს და შერბილებულს, არსებითს და არაარსებითს, აზრთა განსხვავებულობას, კოოპერაციას. კონფლიქტები შეიძლება წარმოიშვას ცალკეულ ინდივიდებს შორის, მოპაექრე მხარეებს შორის, ქვეყნებს შორის, ეკონომიკურ მოწინააღმდეგეებს შორის, პოლიტიკურ პარტიებს შორის. ბუნებასთან ურთიერთობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კონფლიქტი, თუ ბუნებას ჩავთვლით მის ერთ-ერთ მონაწილედ. ასეთ კონფლიქტს ვუწოდებთ თამაშს ან ბრძოლას ბუნების წინააღმდეგ. ამ თეორიაში კონფლიქტურ სიტუაციად კი გაიგება ყოველივე ისეთი სიტუაცია - მოვლენა, რომელში მონაწილე მხარეებიც ისწრაფვიან განსაზღვრული მიზნისაკენ, აქვთ რამდენიმე არჩევანის შესაძლებლობა. ამასთან, თითოეული მხარის არჩევანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა არჩევანს გააკეთებს მოწინააღმდეგე და, მაშასადამე, თითოეული მოთამაშისათვის მიზნის მიღწევის ხარისხი დამოკიდებულია ყველა მონაწილის არჩევანზე. ვინაიდან კონფლიქტურ სიტუაციაში მონაწილეს არა აქვს საკმარისი ინფორმაცია იმაზე, თუ რა ჩაიფიქრა მოწინააღმდეგემ, ამიტომ თამაშთა თეორიის მეთოდებით, გადაწყვეტილება მიიღება განუზღვრელობის პირობებში.

დღეისათვის არსებობს თამაშთა თეორიის და მისი ამოცანების შესახებ მრავალი განსაზღვრება. მაგალითად: „თამაშთა თეორია არის მართვის თეორიის ნაწილი, რომელიც იკვლევს კონფლიქტის პირობებში (მხარეთა შეჯახების პირობებში, როდესაც თითოეული მხარე მიისწრაფვის საკუთარი ინტერესებისათვის მოახდინოს ზემოქმედება კონფლიქტის განვითარებაზე) ოპტიმალური მართვის არსებობის და პოვნის ამოცანებს"; „თამაშთა თეორია არის არათანმხვედრი ინტერესების მქონე ადამიანთა რაციონალური ქცევის თეორია"; „თამაშთა თეორია, ესაა მეცნიერება სტრატეგიულ აზროვნებაზე". თამაშთა თეორიაში ტერმინები - „თამაში" და „კონფლიქტი", სინონი-

მებია და ეს თეორია საშუალებას იძლევა მოხდეს მომავალი თამაშის პროცესის და მისი შესაძლო შედეგების მოდელირება მის რეალურ დაწყებამდე და, კიდევ, მომავალი თამაშის მოდელირების შედეგებზე დაყრდნობით მივიღოთ გადაწყვეტილება ჩვენთვის ამ კონფლიქტში მონაწილეობა რამდენად არის ეკონომიკურად მიზანშეწონილი ან უსაფრთხო.

თამაშთა თეორიის განსაკუთრებული აღიარება მოხდა ბოლო 15 წლის განმავლობაში იმის გამო, რომ ამ პერიოდში თამაშთა თეორიის რვა გამოჩენილ მეცნიერს მიენიჭა ნობელის პრემია, კერძოდ, 1994 წელს ჯ. ნეშს (აშშ), რ. ზელტენს (გერმანია), ჯ. ხარშანს (აშშ), 2005 წელს რ. აუმანს (ისრაელი) და თ. შელინგს (აშშ), 2007 წელს რ. მაიერსონს (აშშ), ე. მასკინს (აშშ) და ლ. ჰურვიცს (აშშ). ყველა მათგანს ეს პრემია მიენიჭა „თამაშთა თეორიის საშუალებით კონფლიქტისა და თანამშრომლობის უკეთ გაგებაში შეტანილი წვლილისათვის“. კერძოდ, რ. აუმანმა დაამტკიცა, რომ კონფლიქტის მხარეებს შეურიგებელი წინააღმდეგობის შემთხვევაშიც კი, ექნებათ ურთიერთხელსაყრელი თანამშრომლობის დიდი შანსი, თუ ისინი ხანგრძლივი დროის განმავლობაში დაამყარებენ ერთმანეთთან მუდმივი ურთიერთობას. დღეისათვის მათგან უმეტესობა აგრძელებს კვლევას და პედაგოგიურ საქმიანობას. მათემატიკის დარგებიდან მხოლოდ ამ დარგში მეცნიერული წვლილი იძლევა ნობელის პრემიის მოპოვების შესაძლებლობას. დღევანდელი მდგომარეობით, თამაშთა თეორიის მოდელებით აღიწერება ადამიანთა მიზანმიმართულ ქმედებათა ძალიან ფართო სპექტრი - ეკონომიკური და სამართლებრივი კონფლიქტები, ადამიანის ურთიერთობა ბუნებასთან, ბიოლოგიური ბრძოლა არსებობისათვის, საომარი ქმედებები, კოალიციების ფორმირება სოციალურ და პოლიტიკურ მეცნიერებებში, კანონთა მოქმედებანი ადამიანთა და პარტიების ქცევებზე, ეკონომიკური, სოციალური და პოლიტიკური პროცესები, ორგანიზაციული სისტემების მართვის პროცესები და ა.შ. კონფლიქტების გადაწყვეტის სხვადასხვა მეთოდებიდან, თამაშთა თეორიის მეთოდების განსაკუთრებულობა ისაა, რომ მხოლოდ აქ ხდება საკუთარი მიზნების უზრუნველ-

საყოფად კონფლიქტურ სიტუაციაში მონაწილე ყველა მხარის ქცევის ალტერნატიული სტრატეგიების ანალიზის და შეფასებების გათვალისწინება. ეს კი მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს მისაღები შედეგების ადეკვატურობას და საიმედოობას. ამასთან, წარმოებს კონფლიქტში მონაწილე მხარეთა არა მხოლოდ ქცევის ალტერნატიული სტრატეგიების ანალიზი და შეფასებები, აგრეთვე, - ამ სტრატეგიების გამოყენებით წარმოქმნილი სიტუაციების ანალიზი და შეფასებები. ეს კი კონფლიქტების და კრიზისების სცენართა შესაძლო ვარიანტების განვითარების ფორმირების, აგრეთვე, ყველაზე მეტად ალბათური სცენარის განსაზღვრის საშუალებასაც იძლევა.

მიღებულია, რომ თამაშთა თეორიაში თამაში ვუწოდოთ კონფლიქტის გამომსახველ მოდელს, თუ მასში მოცემულია კონფლიქტის ყველა მახასიათებელი: 1. კონფლიქტში მონაწილე მხარეები, რომელთაც მოთამაშეები ეწოდება; 2. იმ ვარიანტების (ალტერნატივების, სტრატეგიების) სიმრაველე, საიდანაც მოთამაშეს შეუძლია არჩევანი გააკეთოს; ასეთ სიმრავლეს ეწოდება მოთამაშის სტრატეგიების სიმრაველე, ხოლო ამ სიმრავლის ყოველ ელემენტს - მოთამაშის სტრატეგია. თამაშში ყველა მოთამაშის მიერ სტრატეგიის არჩევით მიიღება შედეგი, რომელსაც სიტუაცია ეწოდება მოცემულ თამაშში; 3. ყოველ სიტუაციაში მოთამაშის ინტერესი იზომება რიცხვით ან სხვა ბუნების ელემენტით და მას ეწოდება მოთამაშის მოგება შესაბამის სიტუაციაში. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი მოთამაშისათვის მოდელში ცნობილი უნდა იყოს მისი მოგების ფუნქცია, რომელიც ყოველ სიტუაციაში მას შეუსაბამებს მოგებას. ასეთ ფუნქციას, ეწოდება მოთამაშის მოგების ფუნქცია.

ორი ურთიერთსაპირისპირო ინტერესების მქონე მხარის კონფლიქტის შემთხვევაში, თამაშთა თეორიის მეთოდებიდან პირველი და ყველაზე კარგად დამუშავებული ანტაგონისტური თამაშების თეორია გამოიყენება. იგი ფართოდ გამოიყენება ორი მხარის სამხედრო კონფლიქტში საბრძოლო მოქმედებათა მოდელირებისათვის, ანალიზისა და პროგნოზირებისათვის. ამასთან, ზოგიერთ შემთხვევაში ანტაგონისტური თამაშების გამოყენება კონ-

ფლიქტების და კრიზისების ხარისხობრივი ანალიზისა და პროგნოზირებისათვის შესაძლოა არაეფექტური აღმოჩნდეს, რაც განპირობებულია შემდეგი ფაქტორებით: 1) კონფლიქტები და კრიზისები მრავალ შემთხვევაში ხასიათდება ორზე მეტი მხარის მონაწილეობით, რომელთაგან ზოგიერთი არაა ამ პროცესის აქტიური მონაწილე, მაგრამ გავლენას ახდენს მის განვითარებაზე (ასეთი შეიძლება იყოს, მაგალითად, მშვიდობისდამცველი მხარე, კონფლიქტში მონაწილის მხარდამჭერი მხარე და სხვ.); 2) სამხედრო კონფლიქტში მონაწილე ორი მხარის (ორი მოთამაშის) ინტერესები არ ატარებს აბსოლუტურად ანტაგონისტურ ხასიათს ანუ კონფლიქტი არის მრავალკრიტერიუმიანი პროცესი (ზოგიერთი კრიტერიუმი გულისხმობს მოპირდაპირე მხარის გარკვეული მდგომარეობის შენარჩუნებას ან გაუმჯობესებასაც). ამის გამო, კონფლიქტურ და კრიზისულ სიტუაციებში უფრო ეფექტური ინსტრუმენტია რამდენიმე მოთამაშის სტრატეგიული (არაკოოპერატიული, არაკოალიციური) თამაში, ორი მოთამაშის კონფლიქტის შემთხვევაში კი სტრატეგიული თამაშის კერძო მოდელი - ბიმატრიცული თამაში. ქვემოთ შევისწავლით როგორც ანტაგონისტურ, ისე ბიმატრიცულ თამაშს.

თამაშთა თეორიის საშუალებით კონფლიქტის მოდელირების ძირითად განსაკუთრებულობას წარმოადგენს მოდელის ანალიზის საფუძველზე ჯ. ნეშის წონასწორობის (წონასწორული, სტაბილური, მდგრადი) სიტუაციის პოვნა. ასეთი სიტუაცია ხასიათდება შემდეგი თვისებით: რომელიმე მხარის მიერ მოცემულ სიტუაციაში თავისი სტრატეგიის ცალმხრივი შეცვლით, მისი მდგომარეობა არ უნდა გაუმჯობესდეს. ყველა აღნიშნულ საკითხს დაწვრილებით განვიხილავთ.

4.2. არაკოალიციური (სტრატეგიული) თამაშები

თამაშთა თეორია ორ შემადგენელ ნაწილად იყოფა: ერთია - არაკოალიციურ (იგივე არაკოოპერატიულ) თამაშთა თეორია, ხოლო მეორე - კოოპერატიულ თამაშთა

თეორია. ასეთი დაყოფა დაფუძნებულია იმაზე, რომ არაკოალიციური თამაშების ანალიზის ძირითადი ერთეულია რაციონალური ინდივიდუალური მონაწილე, რომელიც ცდილობს ნათლად განსაზღვრული წესებით და შესაძლებლობებით თამაშიდან დამოუკიდებლად მიიღოს მაქსიმალური სარგებლიანობა (მოგება). თუკი ინდივიდები იყენებენ ისეთ ქმედებებს, რომლებიც შეიძლება შეფასდეს როგორც "კოოპერაცია" ამ სიტყვის ჩვეულებრივი გაგებით, მაშინ ეს იმისათვის კეთდება, რომ ასეთი კოოპერატიული ქცევა ყველა ინდივიდის ინტერესებშია: თითოეული თავს არიდებს კოოპერაციის დარღვევის შემოხვევას.

არაკოალიციურისაგან განსხვავებით, კოოპერატიულ თამაშთა თეორიაში ანალიზის ძირითადი ერთეულია მონაწილეთა ჯგუფი ანუ კოალიცია და თუ ასეთი თამაში განსაზღვრულია, მაშინ ამ განსაზღვრაში აღწერილ უნდა იქნეს მიღწევა შეუძლია ყველა კოალიციას იმის მითითების გარეშე, როგორ მოქმედებს კონკრეტულ კოალიციაზე მისი საბოლოო შედეგი. ამასთან, ასეთი დაყოფა არ უნდა განვიხილოთ როგორც განსხვავებული და დამოუკიდებელი თეორიები - დაყოფა მიუთითებს მხოლოდ ორ მიდგომასა და იმავე პრობლემაზე.

არაკოალიციური თეორია სტრატეგიულად ორიენტირებულია. მაშასადამე, ამ მიდგომით მოთამაშეთა შედეგები დამოკიდებულია მათ შესაძლებობებზე თამაშში. კოოპერატიული მიდგომით ჩვენ გვაინტერესებს შესაძლო მიღწევადი შედეგების სიმრავლე და არა ის, თუ როგორ შეიძლება მათი მიღწევა. არაკოალიციური თეორია თავისებური მიკროთეორიაა, რომელიც გულისხმობს იმის დეტალურ აღწერას, რაც ხდება თამაშის პროცესში. ამდენად, კოოპერატიული თეორია არაკოოპერატიულთან შედარებით, მაკროთეორიაა, რომლის საფუძველია არაკოალიციური თამაშების თეორია.

განვსაზღვროთ არაკოალიციური თამაშის მოდელი. არაკოალიციურიი თამაშების თეორია - ისეთი სიტუაციების მოდელირების და ანალიზის თეორიაა, რომელშიც თითოეული მონაწილის (მოთამაშის) ოპტიმალური გა-

დაწყვეტილება დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ წარმოიდგენს და გათვლის იგი თითოეული ოპონენტის თამაშის ვარიანტებს. მაშასადამე, ასეთ თამაშში, გამომდინარე იქიდან, რომ თითოეული მოთამაშე ყველა მოთამაშეს თვლის რაციონალურ მოთამაშედ, თითოეულმა მოთამაშემ უნდა იწინასწარმეტყველოს თავისი ოპონენტების თამაშები და, ასევე, თითოეულმა მოთამაშემ უნდა შეძლოს საკუთარი მოგების მაქსიმუმის მიღწევა.

არაკოალიციურ თამაშს აქვს წარმოდგენის ორი ხერხი. ერთია თამაშის პოზიციური ფორმა, მეორე - ნორმალური ანუ სტრატეგიული ფორმა. თამაშის პოზიციური ანუ გაშლილი ფორმა წარმოდგება თამაშის ხის სახით, რომელიც რამდენიმე მოთამაშის შემთხვევაში წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა ხის განზოგადებას, რომელიც შეისწავლება გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში (განხილულია წიგნის პირველ ნაწილში).

პირველად შევისწავლოთ თამაშის ნორმალური ანუ სტრატეგიული ფორმა. ასეთი თამაშები ყველაზე მარტივი სახისაა. მათში არავითარი დინამიკა არ არსებობს; თითოეული მოთამაშე ღებულობს მხოლოდ ერთ გადაწყვეტილებას (აკეთებს სვლას), ყველა მოთამაშის გადაწყვეტილება კი მიიღება ერთდროულად და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამასთან, არც ერთმა მათგანმა არ იცის რა გადაწყვეტილება მიიღო ან მიიღებს მისი პარტნიორები. მაშასადამე, ასეთი თამაში წარმოადგენს სტატიკურ თამაშს, რომელშიც მოთამაშის სტრატეგია და მისი სვლა ერთი და იგივეა. განსხვავება შეიძლება წარმოიშვას მხოლოდ დინამიკურ ანუ პოზიციურ თამაშებში.

განსაზღვრება 4.2.1. არაკოალიციური თამაშის ნორმალური (ან სტრატეგიული) ფორმა ეწოდება სამეულს

$$\Gamma = < N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N} >, \qquad (4.2.1)$$

სადაც $N = \{1,...,n\}$ მოთამაშეთა სიმრავლეა ანუ თითოეულ მოთამაშეს აქვს თავისი ნომერი; S_i - $i \in N$ მოთამაშის წმინდა სტრატეგიების (სვლების) სიმრავლე; $H_i : S = \prod_{i\in N} S_i \to R^1$ კი - $i \in N$ მოთამაშის მოგების (სარ-

გებლიანობის) ფუნქცია, რომელიც მოთამაშეთა სტრატეგიების ყოველ $s=(s_1,...,s_n)$ წყებას, რომელსაც თამაშის შედეგი ან სიტუაცია ეწოდება, შეუსაბამებს ამ მოთამაშის მოგებას (სარგებლიანობას).

თუ i მოთამაშეს აქვს k წმინდა სტრატეგია, მაშინ S_i-ს ასე აღვნიშნავთ: $S_i=\{s_i^1,...,s_i^k\}$.

ზოგადად შევნიშნოთ, რომ, H_i არის i-ური მოთამაშის სარგებლიანობა, რომელიც კერძო შემთხვევაში შესაძლოა მოგებასაც გამოსახავდეს. ამიტომ, მის ნაცვლად ზოგჯერ შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენთვის კარგად ცნობილი სარგებლიანობის ფუნქცია u_i და (4.2.1)-ს ასეთი სახე ექნება:

$$\Gamma = < N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} > .$$

Γ-ს ეწოდება **სასრული**, თუ მასში სასრულია მოთამაშეთა სიმრავლე N და მათი სტრატეგიების სიმრავლეები $S_1,...,S_n$. შემდგომში საქმე გვექნება მხოლოდ სასრულ Γ თამაშთან.

Γ თამაშში მოთამაშის მონაწილეობა (თამაში) გულისხმობს მის მიერ სტრატეგიის არჩევას. მოთამაშეთა თამაშით რეალიზდება სიტუაცია. ყოველ სიტუაციაში მოთამაშეებს აქვთ განსხვავებული უპირატესობები ანუ ყოველი მოთამაშე უპირატესობას ანიჭებს სხვადასხვა სიტუაციას და ამიტომ სახეზე გვაქვს ინტერესთა კონფლიქტი. ამის გამო, თითოეული მოთამაშის წინაშე დგება პრობლემა: როგორი თამაშია მისთვის საუკეთესო. ვინაიდან მოთამაშეები არაკოალიციურ თამაშში ურთიერთდამოკიდებულნი არიან, ამიტომ ამ კითხვაზე პასუხი დამოკიდებულია არა მხოლოდ საკუთარ უპირატესობაზე, აგრეთვე იმაზეც, თუ როგორ ითამაშებენ დანარჩენი მოთამაშეები. იმის დაშვებით, რომ თამაშში ყველა მონაწილე რაციონალურად ითამაშებს, თამაშთა თეორია გვაძლევს ინსტრუმენტების, კონცეფციებისა და მოდელების ერთობლიობას, რომელთა მეშვეობით შეიძლება მსგავსი სიტუაციების გაანალიზება და მივიღოთ პასუხები ამ კითხვებზე. ამრიგად, თამაშთა თეორიის ძირითადი

მიზანია მოთამაშეთა ქცევების წინასწარმეტყველება და თამაშის ყველაზე სამართლიანი შედეგის ან შედეგთა ერთობლიობის პოვნა.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არაკოალიციურ თამაშში იგულისხმება, რომ: ყველა მოთამაშე რაციონალურია იმ აზრით, რომ თითოეული მოთამაშე განიხილავს მის განკარგულებაში მყოფ ალტერნატივებს, აქვს განსაზღვრული უპირატესობა ყოველ სიტუაციაში, თავის სტრატეგიას ირჩევს საკუთარი მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის მისაღწევად და თითოეული მოთამაშე თითოეულს თვლის რაციონალურ მოთამაშედ.

შენიშვნა 4.2.1. პრაქტიკამ აჩვენა, რომ არარაციონალური მოთამაშის ჩათვლა რაციონალურად, არაა რაციონალური გადაწყვეტილება. ამის გამო, ბოლო წლებში განვითარდა სტრატეგიული თამაშების თეორია შეზღუდული რაციონალურობის შემთხვევაშიც.

სტრატეგიული თამაშების თეორიაში, გარდა წმინდა სტრატეგიებისა, გამოიყენება შერეული სტრატეგიის ცნებაც. განვსაზღვროთ იგი. ამისათვის $\sigma_i(s_i)$-ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ აირჩევა სტრატეგია s_i.

განსაზღვრება 4.2.2. ვთქვათ, Γ თამაშში S_i არის i მოთამაშის წმინდა სტრატეგიების სასრული სიმრავლე. i მოთამაშის **შერეული სტრატეგია** σ_i ეწოდება S_i სიმრავლეზე ალბათურ განაწილებას: $\forall s_i \in S_i$, $\sigma_i(s_i) \geq 0$, $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ (აქ σ_i-ში i აღნიშნავს, რომ იგი არის i-ური მოთამაშის შერეული სტრატეგია, მოცემულ ჯამში იცვლება $s_i \in S_i$).

i მოთამაშის ყველა შერეული სტრატეგიის სიმრავლე აღვნიშნოთ Σ_i-ით. მაშინ ყველა მოთამაშის შერეული სტრატეგიებისაგან შედგენილი სიტუაციების სიმრავლე იქნება $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma_i$, რომლის ელემენტს აქვს სახე $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$.

σ სიტუაციაში i მოთამაშის მოგება იქნება

$$H_i(\sigma)=\sum_{s\in S}(\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j))H_i(s)\,, \qquad (4.2.2)$$

რომელსაც მოსალოდნელი მოგება (სარგებლიანობა) ეწოდება.

σ_i შერეული სტრატეგიის სპექტრი ვუწოდოთ ისეთ s_i წმინდა სტრატეგიას, რომლისთვისაც $\sigma_i(s_i)>0$; ხოლო σ_i შერეული სტრატეგიის მატარებელი, ვუწოდოთ მისი სპექტრების სიმრავლეს.

შევნიშნოთ, რომ წმინდა სტრატეგია წარმოადგენს გადაგვარებულ შერეულ სტრატეგიას, როდესაც ამ წმინდა სტრატეგიას აქვს ალბათობა 1, ხოლო ყველა დანარჩენის ალბათობაა 0.

განსაზღვრება **4.2.3.** (4.2.1) თამაშის შერეული გაფართოება ეწოდება არაკოალიციურ თამაშს

$$\bar{\Gamma}=<N,\{\Sigma_i\}_{i\in N},\{H_i\}_{i\in N}>, \qquad (4.2.3)$$

სადაც $H_i(\sigma)$ განისაზღვრება (4.2.2) ტოლობით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: თუ $i\in N$, მაშინ $s_{-i}\in S_{-i}$-ით აღვნიშნოთ $N\setminus\{i\}$ მოთამაშეთა სტრატეგიებისაგან შედგენილი სიტუაცია; ყველა მოთამაშის სტრატეგიებისაგან შედგენილი სიტუაცია კი აღვნიშნოთ $(s_i',s_{-i})=(s_1,...,s_{i-1},s_i',s_{i+1},...,s_n)$; ასევე შერეული სტრატეგიებისათვის - $(\sigma_i',\sigma_{-i})=(\sigma_1,...,\sigma_{i-1},\sigma_i',\sigma_{i+1},...,\sigma_n)$. ამიტომ წმინდა და შერეული სიტუაციები იქნება შესაბამისად, $s=(s_i,s_{-i})$, $\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$.

განსაზღვრება **4.2.4.** Γ თამაშში წმინდა სტრატეგია $s_i\in S_i$ მკაცრად დომინირდება, თუ არსებობს სხვა ისეთი წმინდა სტრატეგია $s_i'\in S_i$, რომ

$$H_i(s_i',s_{-i})>H_i(s_i,s_{-i}),\forall s_{-i}\in S_{-i}\,. \qquad (4.2.4)$$

ამ შემთხვევაში s_i' სტრატეგია დომინირებს s_i სტრატეგიას და $s_i\in S_i$ სტრატეგია სუსტად დომინირდება, თუ

არსებობს ისეთი წმინდა სტრატეგია $s_i' \in S_i$, რომ სრულდება (4.2.4), როგორც არამკაცრი უტოლობა; ხოლო მასში თუნდაც ერთი $s_{-i} \in S_{-i}$ სიტუაციისათვის, უტოლობა მკაცრია. ანალოგიურად განისაზღვრება დომინირება შერეული სტრატეგიისათვის.

განსაზღვრება 4.2.5. $\overline{\Gamma}$ თამაშში შერეული სტრატეგია $\sigma_i \in \Sigma_i$ მკაცრად დომინირდება, თუ არსებობს სხვა ისეთი შერეული სტრატეგია $\sigma_i' \in \Sigma_i$, რომ

$$H_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \ \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}.$$

თუ ეს უტოლობა სრულდება, როგორც არამკაცრი უტოლობა, ხოლო მასში თუნდაც ერთი σ_{-i} სიტუაციისათვის უტოლობა მკაცრია, მაშინ σ_i სუსტად დომინირდება σ_i'-ის მიერ.

სტრატეგიათა დომინირების ცნება არსებითად მნიშვნელოვანია. ბუნებრივია, მისი გამოყენებით, თამაშში მკაცრად დომინირებული და სუსტად დომინირებული სტრატეგიები უნდა გამოვრიცხოთ. თანაც, აქ შესაძლებელია მიმდევრობითი გამორიცხვის შედეგად აღმოჩნდეს ახალი დომინირებული სტრატეგიები, რითაც თამაშის ანალიზი უფრო მარტივდება (თამაშის ანალიზს ქვემოთ განვიხილავთ).

როგორც აღვნიშნეთ, (4.2.1) სისტემით მოცემული არაკოალიციური თამაში ყველაზე მარტივი სახის თამაშია. აქ "სიმარტივეში" იგულისხმება ამ კლასის თამაშების შედარებითი სიმარტივე სხვა კლასის თამაშებთან შედარებით. როგორც თამაშების ცალკე კლასი, იგი საკმაოდ ზოგადია. მოთამაშეთა რიცხვისა და მათი მოგების ფუნქციებს შორის დამოკიდებულების საფუძველზე მისგან შეგვიძლია მივიღოთ თამაშთა კონკრეტული კლასები, რომელთა ანალიზის ხერხები და საშუალებები ერთმა-

ნეთისაგან შეიძლება მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდეს. ჩვენ განვიხილავთ ორ ასეთ კონკრეტულ კლასს.

(4.2.1) Γ თამაშის ყველაზე უმარტივეს და, ამასთან, უფრო მეტად შესწავლილ თამაშებს მიეკუთვნება ანტაგონისტური თამაშები.

ვთქვათ, Γ თამაშში მოთამაშეთა რიცხვი არის ორი - $N=\{1,2\}$ და $\forall s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2$ სრულდება ტოლობები

$$H_1(s_1,s_2)+H_2(s_1,s_2)=0 \text{ ანუ } H_1(s_1,s_2)=-H_2(s_1,s_2).$$

ასეთ თამაშს ეწოდება ნულჯამიანი ან ანტაგონისტური თამაში. მაშასადამე, ანტაგონისტურ Γ თამაშში ყოველ სიტუაციაში მოთამაშეთა მოგებები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება. ამიტომ, თუ ერთი მოთამაშის მოგებაა სიდიდე $H(s_1,s_2)$, მაშინ მეორე მოთამაშის მოგება იქნება სიდიდე $(-H(s_1,s_2))$. ამის გამო, ასეთი თამაში სრულად განისაზღვრება ამ ორი მოთამაშიდან ერთ-ერთის მოგებებით. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ცნობილია მხოლოდ ერთი მოთამაშის მოგებები.

პირობის თანახმად, ანტაგონისტური Γ თამაში სასრულია (რადგან თავიდან მოცემული (4.2.1) თამაში სასრულია). ამიტომ თუ ვიგულისხმებთ, რომ 1-ელი მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლე S_1 შედგება m სტრატეგიისაგან, ხოლო მე-2 მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლე S_2 შედგება n სტრატეგიისაგან, მათი დანომვრა მოგვცემს: $S_1=\{1,2,...,m\}$, $S_2=\{1,2,...,n\}$. განვიხილოთ მართკუთხა ცხრილი - მატრიცა, რომლის სტრიქონებს შევუსაბამოთ S_1 სიმრავლის სტრატეგიები, სვეტებს კი - S_2 სიმრავლის სტრატეგიები. სიტუაციებს შევუსაბამოთ სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთის უჯრები, რომლებშიც ჩავწეროთ 1-ელი მოთამაშის სარგებლიანობები. მაშასადამე, მოცემული თამაში წარმოვადგინეთ მატრიცული ფორმით და ამიტომ მას, მატრიცული თამაში ეწოდება. მატრიცული თამაშის აღსანიშნავად გამოვი-

ყენოთ სხვადასხვა სახის მართკუთხა ცხრილი და იგი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$H = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & . & n \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ \hline 2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \\ \hline \end{array}, \quad H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & . & n \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ 2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \end{array}.$$

მატრიცული თამაში მოცემულია $m\times n$ განზომილების მატრიცით. მას ეწოდება H მატრიცული თამაში, ან 1-ელი მოთამაშის მოგების მატრიცა, ან $m\times n$ მატრიცული თამაში, ან უბრალოდ $m\times n$ თამაში. აქ u_{ij} არის 1-ელი მოთამაშის მოგება (ანუ სარგებლიანობა) (i,j) სიტუაციაში (ხოლო $(-u_{ij})$ - მე-2 მოთამაშის მოგება იმავე სიტუაციაში). ამ რიცხვებს, მოგების მატრიცის ელემენტები ეწოდება. ზოგიერთ შემთხვევაში, იგი შეიძლება იყოს მოგებათა საშუალო მნიშვნელობა ანუ მათემატიკური ლოდინი.

მატრიცული თამაშის მოდელის განსაზღვრა გულისხმობს, რომ მოთამაშეთა სტრატეგიების სიმრავლის დადგენის შემდეგ, ყოველ სიტუაციაში უნდა განისაზღვროს მოთამაშეთა სარგებლიანობა წინასწარ თამაშის დაწყებამდე მოთამაშეთა მიერ შეთანხმებულად ან ექსპერტის მიერ თითოეული სიტუაციის ანალიზის საფუძველზე. რადგან ანტაგონისტურ კონფლიქტში მხარეთა შეთანხმება სარგებლიანობაზე, ზოგადად არ ხერხდება, ამიტომ ასეთ სამუშაოს ასრულებს ექსპერტი. კონფლიქტის ხასიათის შესაბამისად ან კიდევ მეორე მხარესთან "მიუდგომლობის" შემთხვევაში, ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად თითოეულ მხარეს შეუძლია შეადგინოს მოდელი და მისი ანალიზით მიიღოს შესაბამისი გადაწყვეტილება.

მატრიცული თამაშის პროცესი მოცემული მოდელის შესაბამისად ასე შეგვიძლია ავხსნათ: ორივე მოთამაშემ

იცის მოდელის სტრუქტურა; მათ უნდა აირჩიონ თავიანთი სტრატეგიები დამოუკიდებლად ყოველგვარი ინფორმაციის გაცვლის გარეშე (1-ელი ირჩევს სტრიქონს, მე-2 - სვეტს); დაასახელებენ რა თავიანთ გადაწყვეტილებებს, ექსპერტი პირველ მოთამაშეს მიანიჭებს მოგებას მეორე მოთამაშისაგან, რომელიც მოთავსებულია არჩეული სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთაზე. თუ ეს რიცხვი იქნება დადებითი, მაშინ იგი იქნება 1-ელის რეალური მოგება, ხოლო თუ იგი იქნება უარყოფითი, მაშინ იგი იქნება 1-ელის რეალური წაგება ანუ მე-2 მოთამაშის მოგება. განვიხილოთ ერთი კონკრეტული მატრიცული თამაში.

ამოცანა 4.2.1 ("არიოლი და რეშკა"). ორი მოთამაშე ერთდროულად და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, მონეტის აგდებამდე ირჩევს ან 1. 'არიოლს" ან 2. "რეშკას". თუ მონეტის აგდების შემდეგ მათი არჩევანი ერთნაირი იქნება, 1-ელი მოთამაშე მოიგებს 1 ლარს (მეორე მოთამაშე უხდის პირველს), ხოლო თუ მათი არჩევანი იქნება განსხვავებული, მაშინ 1-ელი მოთამაშე უხდის მე-2 მოთამაშეს იმდენივეს.

მოდელის შედგენა. ცხადია, მოთამაშეთა სტრატეგიების სიმრავლეებია $S_1 = \{1,2\}$ და $S_2 = \{1,2\}$, შესაბამისად. გვაქვს ოთხი სიტუაცია: $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$. აქედან მხოლოდ ორ სიტუაციაშია მოთამაშეთა არჩევანი ერთნაირი - ესენია (1,1) და (2,2). ამ სიტუაციებში 1-ელი მოთამაშე იგებს 1 ლარს, ხოლო (1,2) და (2,1) სიტუაციებში მე-2 მოთამაშე იგებს 1 ლარს. ამიტომ ჩვენს მატრიცულ თამაშს აქვს შემდეგი სახე:

$$H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}$$

(4.2.1) თამაშებიდან გამოვყოთ კიდევ ერთი კლასი, რომლის ყოველ თამაშში მონაწილეობს ორი მოთამაშე

და მოთამაშეთა ინტერესები შესაძლოა იყოს როგორც დიამეტრულად ურთიერთსაწინააღმდეგო, ასევე, შესაძლოა მათი ინტერესები ერთმანეთს ემთხვეოდეს. მაშასადამე, ახალი კლასის Γ თამაშში მოთამაშეთა რიცხვი არის ორი $N=\{1,2\}$ და $\forall s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ შესაძლოა სრულდებოდეს როგორც ტოლობა $H_1(s_1,s_2)+H_2(s_1,s_2)=0$, ისე უტოლობა $H_1(s_1,s_2)+H_2(s_1,s_2)\neq 0$. რადგან ასეთ Γ თამაშში მოთამაშეთა სტრატეგიების სიმრავლეები S_1 და S_2 სასრულია, თუ ვიგულისხმებთ, რომ, როგორც მატრიცული თამაშის შემთხვევაში, ისინი შეიცავენ შესაბამისად m და n რაოდენობის სტრატეგიებს, ასეთი თამაში შეგვიძლია ჩავწეროთ $m\times n$ მატრიცის ფორმით. მასში სტრიქონები შეესაბამება 1-ელი მოთამაშის სტრატეგიებს, სვეტები კი - მე-2 მოთამაშის სტრატეგიებს. ყოველ სიტუაციაში კი დავწერთ სარგებლიანობათა წყვილებს, რომელთაგან პირველი იქნება პირველი მოთამაშის სარგებლიანობა, მეორე კი - მეორე მოთამაშის სარგებლიანობა. იგივე თამაში შეგვიძლია, ასევე, წარმოვადგინოთ ორი $m\times n$ მატრიცის სახით, რომელთაგან პირველ მატრიცაში მოცემული იქნება პირველი მოთამაშის მოგებები, მეორეში კი - მეორის მოგებები. ჩვენ გამოვიყენებთ სარგებლიანობების წყვილობითი ჩაწერის ერთ-ერთ ფორმას შემდეგი ორიდან:

$(H_1,H_2)=$

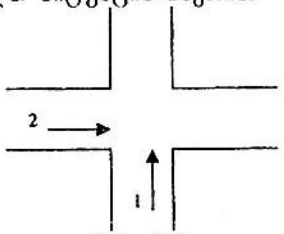
	1	2	.	n
1	(u_{11},v_{11})	(u_{12},v_{12})	.	(u_{1n},v_{1n})
2	(u_{21},v_{21})	(u_{22},v_{22})	.	(u_{2n},v_{2n})
.	.	.	.	.
m	(u_{m1},v_{m1})	(u_{m2},v_{m2})	.	(u_{mn},v_{mn})

,

$$
(H_1,H_2)=\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & . & n \\
\hline
1 & (u_{11},v_{11}) & (u_{12},v_{12}) & . & (u_{1n},v_{1n}) \\
2 & (u_{21},v_{21}) & (u_{22},v_{22}) & . & (u_{2n},v_{2n}) \\
. & . & . & . & . \\
m & (u_{m1},v_{m1}) & (u_{m2},v_{m2}) & . & (u_{mn},v_{mn})
\end{array}.
$$

ასეთ თამაშს, $m\times n$ ბიმატრიცული ეწოდება. განვიხილოთ ერთი ბიმატრიცული თამაში.

ამოცანა 4.2.2. მოთამაშეები ავტომობილების მძღოლებია, რომლებიც ერთდროულად მიუახლოვდნენ შუქნიშნის არმქონე გზაჯვარედინს. თითოეულ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: 1. დაიცვას "მარჯვენა ხელის წესი" - გაატაროს მარჯვნიდან მომავალი ავტომობილი და 2. დაიცვას "მარცხენა ხელის წესი" - გზა დაუთმოს მარცხნიდან მომავალს. სიტუაცია ასეთია:



ნახ. 4.2.1.

შევაფასოთ მოთამაშეთა სარგებლიანობები სიტუაციებში. (1,1) სიტუაციაში ორივე მოთამაშე იცავს მოძრაობის წესს - გზაჯვარედინს გადაკვეთს 1-ელი მოთამაშე. მისი ეს სარგებლიანობა შევაფასოთ 1 ერთეულით. მეორე მოთამაშე კი აქ ვერავითარ დადებით სარგებლიანობას ვერ მიიღებს და მისი სარგებლიანობა იყოს 0. (2,2) სიტუაციაში პირველად გაივლის მე-2 მოთამაშე და მისი სარგებლიანობა იქნება 1, ხოლო 1-ელის სარგებლიანობა იქნება 0. თუ 1-ელი მოთამაშე აირჩევს 1-ელ სტრატეგიას, ხოლო მე-2 მოთამაშე - 2-ს, მაშინ ავარია გარდაუვალია და ამ სიტუაციაში თითოეულის მოგება შევაფასოთ (−10)-ით. თუ 1-ელი აირჩევს 2-ს და მე-2 აირჩევს 1-ს, მაშინ,

როგორც ნახაზიდან ჩანს, პირველმა მოთამაშემ უნდა გაატაროს მეორე, რითაც მისი გადაწყვეტილება ავარიისათვის სარისკოა (გზაჯვარედინის გავლა პირველად მას ეკუთვნოდა, მეორემ ხომ არ იცის პირველის გადაწყვეტილება, რომ იგი გზას დაუთმობს). ამიტომ 1-ელის სარგებლიანობა შევაფასოთ (–1)-ით. მეორე გზას უთმობს პირველს კანონიერად, მაგრამ პირველის გადაწყვეტილების გამო, მისი სარგებლიანობაც უარყოფითი უნდა იყოს და, ვთქვათ, ესაა (–1). ამით ოთხივე სიტუაცია შეფასებულია და მათი თამაში მოიცემა 2×2 ბიმატრიცული თამაშის საშუალებით:

$$(H_1,H_2)=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & (1,0) & (-10,-10) \\ 2 & (-1,-1) & (0,1) \end{array}.$$

4.3. ნეშის წონასწორობა წმინდა და შერეულ სტრატეგიებში

სტრატეგიათა დომინირების 4.2.4 და 4.2.5 განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ რაციონალური მოთამაშე დომინირებულ და სუსტად დომინირებულ სტრატეგიებს არასდროს აირჩევს იმისდა მიუხედავად, თუ როგორ მოქმედებს დანარჩენი მისი პარტნიორი. პირველ რიგში, ასარჩევი სტრატეგია უნდა იყოს მოთამაშისათვის მისაღები ანუ რაციონალიზებადი.

განსაზღვრება 4.3.1. არაკოალიციურ (4.2.1) Γ თამაშში i მოთამაშის $s_i \in S_i$ სტრატეგიას ეწოდება მისთვის **მისაღები** ან **საუკეთესო პასუხი** მისი პარტნიორების s_{-i} პასუხზე, თუ $H_i(s_i,s_{-i}) \geq H_i(s_i',s_{-i})$, $\forall s_i' \in S_i$.

ანალოგიურად განისაზღვრება i მოთამაშის მისაღები ანუ საუკეთესო პასუხი შერეულ სტრატეგიებში.

მაშასადამე, მოთამაშემ მხოლოდ ასეთი სტრატეგიებიდან უნდა შეარჩიოს თავისი გადაწყვეტილება. ამიტომ, პირველ რიგში, მოთამაშემ უნდა გამორიცხოს ისეთი სტრატეგიები, რომლებიც არ იქნება მისთვის მისაღები.

ამის გამო, Γ თამაშში თამაშის ძირითადი ობიექტური პრინციპი წმინდა სტრატეგიებში შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება.

განსაზღვრება 4.3.2. (4.2.1) Γ თამაშში სიტუაციას $s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$ წმინდა სტრატეგიებში ეწოდება ნეშის წონასწორობა (ან ნეშის წონასწორული სიტუაცია, ან უბრალოდ წონასწორული სიტუაცია), თუ ნებისმიერი $i = 1,...,n$ მოთამაშისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

$$H_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq H_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i. \qquad (4.3.1)$$

ეს პირობები აღნიშნავს, რომ თუ მოთამაშე ცალმხრივად გადაიხრება არჩეული სტრატეგიისაგან (დანარჩენები კი ინარჩუნებენ არჩეულ სტრატეგიებს), მაშინ მისი მდგომარეობა მხოლოდ გაუარესდება.

წონასწორულ სიტუაციაში თითოეული მოთამაშის მიერ არჩეული სტრატეგია საუკეთესო პასუხია იმ სტრატეგიებზე, რომლებიც ითამაშეს მოწინააღმდეგეებმა. მაშასადამე, ნეშის წონასწორობა ასაბუთებს, რომ შესაბამისი სიტუაციის ყოველი სტრატეგია ანუ გადაწყვეტილება შეესაბამება მოთამაშისათვის მისაღებ სტრატეგიას. ანალოგიურად განისაზღვრება ნეშის წონასწორობა შერეულ სტრატეგიებში (4.2.3) $\bar{\Gamma}$ თამაშისათვის.

განსაზღვრება 4.3.3. $\bar{\Gamma}$ თამაშში შერეულ სტრატეგიებში $\sigma^* = (\sigma_1^*,...,\sigma_n^*) \in \Sigma$ სიტუაციას ეწოდება ნეშის წონასწორობა, თუ ნებისმიერი $i = 1,...,n$ მოთამაშისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

$$H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) > H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \ \forall \sigma_i \in \Sigma_i. \qquad (4.3.2)$$

შევნიშნოთ, რომ (4.3.1) და (4.3.2) პირობები შესაბამისად ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\max_{S_i} H_i(s_i, s_{-i}^*) = H_i(s^*), \ \max_{\sigma_i} H_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(\sigma^*), \forall i \in N,$$

რაც იგივეა,

$$(H_1(s),...,H_n(s)) \to \max_{s \in S} \text{ და } (H_1(\sigma),...,H_n(\sigma)) \to \max_{\sigma \in \Sigma}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ არაკოალიციური თამაშების თეორია (მთლიანად თამაშთა თეორია) მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანების თეორიას მიეკუთვნება (იხ. მაგალითად, (1.3.1) ამოცანა (გვ. 29)).

წონასწორული სიტუაციის პოვნისათვის გამოიყენება შემდეგი დებულება.

თეორემა 4.3.1. ვთქვათ, $S_i^+ \subset S_i$ არის i მოთამაშის წმინდა სტრატეგიების სიმრავლე, რომლებსაც იგი $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*) \in \Sigma$ სიტუაციაში თამაშობს დადებითი ალბათობით. σ^* იქნება წონასწორული სიტუაცია $\overline{\Gamma}$ თამაშში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $i = 1, ..., n$-სთვის სრულდება:

$$(1)\ \ H_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = H_i(s_i', \sigma_{-i}^*)\,,\ \ \forall s_i, s_i' \in S_i^+;$$

$$(2)\ \ H_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \ge H_i(s_i', \sigma_{-i}^*)\,,\ \ \forall s_i \in S_i^+, s_i' \notin S_i^+.$$

ძირითადი ამოცანები, რომლებიც დაისმის არაკოალიციურ თამაშში, მდგომარეობს იმაში, რომ: 1) არსებობს თუ არა მასში ნეშის წონასწორობა და 2) თუ არსებობს, როგორ ვიპოვოთ იგი. ამ ორი ამოცანიდან პირველი ყოველთვის გადაწყვეტილია, რასაც ადასტურებს ჯ. ნეშის მიერ დამტკიცებული თეორემა.

თეორემა 4.3.2. თუ Γ სასრული თამაშია, მაშინ მის შერეულ $\overline{\Gamma}$ გაფართოებაში ყოველთვის არსებობს ნეშის წონასწორული სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ Γ თამაშში წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში შეიძლება არ არსებობდეს (ვნახავთ ამოცანებში). მის შერეულ გაფართოებაში კი, თეორემის თანახმად, ასეთი სიტუაცია ყოველთვის არსებობს.

ამრიგად, არაკოალიციურ თამაშებში გადასაწყვეტი რჩება ერთადერთი ამოცანა 2), თუ როგორ ვიპოვოთ მოცემულ თამაშში ნეშის წონასწორული სიტუაცია.

არაკოალიციურ თამაშში წონასწორული სიტუაციის და ამ სიტუაციაში თითოეული მოთამაშის მოგების პოვნას, **თამაშის ამოხსნა** ეწოდება. **თამაშის ამონახსნი** ან კიდევ მოთამაშეთა ოპტიმალური გადაწყვეტილებები, ეწოდება წონასწორულ სიტუაციაში შემავალ მოთამაშეთა სტრატეგიებს (იქნება იგი წმინდა თუ შერეული).

ასეთი ამოცანა გადავწყვიტოთ ჩვენ მიერ განსაზღვრულ თამაშთა ორი კლასისათვის - მატრიცული და ბიმატრიცული თამაშებისათვის. განვიხილავთ შესაბამის მოდელებს და მათი ანალიზის ხერხებს.

ბუნებრივია დაისვას კითხვა: რატომ მაინც და მაინც წონასწორული სიტუაციის პოვნაა საჭირო არაკოალიციურ თამაშში? ავხსნათ რატომ.

1. ნეშის წონასწორობა, ესაა თითქოს "შეთანხმებული" წინასწარმეტყველება იმისა, თუ როგორ გათამაშდება თამაში იმ აზრით, როცა ყველა მოთამაშე წინასწარმეტყველებს, რომ წარმოიშობა გარკვეული წონასწორობა. მაშინ არც ერთ მოთამაშეს არ ექნება თავისი სტრატეგიის შეცვლის ანუ წონასწორული სიტუაციიდან გადახრის სტიმული. ამრიგად, მხოლოდ ნეშის წონასწორულ სიტუაციას შეიძლება ჰქონდეს ისეთი თვისება, რომ მოთამაშეებმა შეძლონ მისი წინასწარმეტყველება და მათ ოპონენტებსაც შეუძლიათ მისი წინასწარმეტყველება. პირიქით, იმის წინასწარმეტყველება, რომ თამაშში წარმოიშობა არაწონასწორული სიტუაცია, გამოიწვევს იმას, რომ თუნდაც ერთი მოთამაშე შეცდომას დაუშვებს ან თავის წინასწარმეტყველებაში, ან თავისი მოგების ოპტიმიზაციაში. ბუნებრივია, არ შეიძლება იმის დაშვება, რომ ასეთი შეცდომები არასდროს არ წარმოიშობა,;

2. ნეშის წონასწორობა აუცილებელი პირობაა, თუ არსებობს თამაშის ერთადერთი წინასწარმეტყველური შედეგი (სიტუაცია). მართლაც, თუ მოთამაშეები ფიქრობენ და ეთანხმებიან იმ მოსაზრებას, რომ თამაშში არსებობს ერთადერთი და ცხადი შედეგი, მაშინ იგი უნდა იყოს წონასწორული სიტუაცია;

3. ნეშის წონასწორობა თვითფორსირებადი შეთანხმებაა. თუ მოთამაშეებს თამაშის დაწყებამდე აქვთ მოლაპარაკების შესაძლებლობა და თუ ისინი შეთანხმდებიან შედეგზე, ის რომ გახდეს ფორსირებადი (ბრძოლით გადალახვადი), საჭიროა, ეს შედეგი იყოს ნეშის წონასწორობა. თუმცა, მაშინაც კი, თუ ისინი შეთანხმდებიან ითამაშონ წონასწორული სიტუაცია, მათგან ზოგიერთი მაინც გადაიხრება, თუ ელოდებიან, რომ სხვებიც ასევე გადაიხრება;

4. ნეშის წონასწორობა მდგრადი სოციალური შეთანხმებაა. თუ თამაში მეორდება და შეინიშნება რაიმე მდგრადი სოციალური შეთანხმება, მაშინ თამაშის წესი ისეთი უნდა იყოს, რომ შენარჩუნდეს ასეთი შეთანხმება. ეს შეთანხმება კი გვაძლევს ნეშის წონასწორობას.

4.4. მატრიცული თამაშების ამოხსნა

განვიხილოთ $m \times n$ მატრიცული თამაში

$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & . & n \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ 2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \end{array} . \qquad (4.4.1)$$

$m \times n$ მატრიცული (4.4.1) თამაში, როგორც არაკოალიციური (4.2.1) თამაშის კერძო შემთხვევა, აღვნიშნოთ ასე: $\Gamma =< \{1,2\}, \{[1,...,m\}, \{1,...,n\}\}, H >$. ჩვენი ძირითადი ამოცანაა ვიპოვოთ მოცემულ თამაშში ნეშის წონასწორობა. ჯერ შევეცადოთ ვიპოვოთ იგი წმინდა სტრატეგიებში.

4.4.1. ნეშის წონასწორობა მატრიცულ თამაშში წმინდა სტრატეგიებით

(4.3.2) განსაზღვრების თანახმად, (4.4.1) თამაშში სიტუაცია (i^*, j^*) იქნება წონასწორული, თუ შესრულდება უტოლობები

$$H_1(i^*, j^*) \geq H_1(i, j^*), \ H_2(i^*, j^*) \geq H_2(i^*, j) \qquad (4.4.2)$$

$\forall i \in \{1,2,...,m\}, j \in \{1,2,...,n\}$-სთვის.

ამრიგად, ნეშის წონასწორობის პოვნა ნიშნავს მოთამაშეთა საუკეთესო (ოპტიმალური) სტრატეგიების პოვნას. H მატრიცულ თამაშში 1-ელი მოთამაშის მიზანია, რაც შეიძლება მეტი მოიგოს, ხოლო მე-2 მოთამაშის მიზანია, რაც შეიძლება ნაკლები წააგოს. პირველ რიგში, წარმოვიდგინოთ თავი 1-ელი მოთამაშის ადგილზე და ვიმსჯელოთ მაქსიმალური მოგების მიღების შესახებ. ამისათვის საჭიროა, ყველა $1,2,...,m$ სტრატეგიისათვის შევაფასოთ u_{ij} სარგებლიანობები ცალ-ცალკე. ვთქვათ, გადავწყვიტეთ, რომ ავირჩიოთ პირველი სტრატეგია ანუ პირველი სტრიქონი. აქ მოთავსებულია რიცხვები

$u_{11},...,u_{1n}$. უნდა ვიყოთ ფრთხილად, რადგან ჩვენი მოწინააღმდეგე მე-2 მოთამაშე, რომელიც ცდილობს, რომ რაც შეიძლება ნაკლები წააგოს, ცხადია, აირჩევს იმ სვეტს, რომელშიც იქნება $u_{11},...,u_{1n}$ რიცხვებიდან უმცირესი. ამრიგად, 1-ელი სტრიქონის არჩევისას მივიღებთ გარანტირებულ მოგებას $\alpha_1 = \min\{u_{11},...,u_{1n}\}$. ანალოგიურად, თუ ავირჩევთ მეორე სტრიქონს, ჩვენი გარანტირებული მოგება იქნება $\alpha_2 = \min\{u_{21},...,u_{2n}\}$. ასეთნაირად თუ განვიხილავთ ყველა სტრიქონის არჩევის შესაძლებლობას, მაშინ ბუნებრივია, რომ მაქსიმალური გარანტირებული მოგების მისაღებად უნდა ავირჩიოთ ისეთი სტრიქონი, რომელშიც აღნიშნული მინიმალური რიცხვებიდან მოთავსებულია მაქსიმალური რიცხვი:

$$\alpha = \max_{1\le i\le m} \alpha_i = \max_i \min_j u_{ij}.$$

ესაა 1-ელი მოთამაშის გარანტირებული მოგება, რომელსაც თამაშის მაქსიმინური მოგება ან კიდევ თამაშის ქვედა მნიშვნელობა ეწოდება.

ახლა ვიმსჯელოთ მე-2 მოთამაშის ადგილზე. თუ ჩვენ ავირჩევთ j $(j=1,...,n)$ სვეტს, მაშინ 1-ელი აირჩევს ისეთ სტრიქონს, რომელშიც იქნება $u_{1j},...,u_{mj}$ რიცხვებიდან უდიდესი ანუ ჩვენი ყველაზე დიდი წაგება ამ შემთხვევაში იქნება $\beta_j = \max\{u_{1j},...,u_{mj}\}$, $j=1,...,n$. ამიტომ, უნდა ავირჩიოთ ისეთი სვეტი, რომელიც იქნება $\beta_1,...,\beta_n$ რიცხვებიდან უმცირესის შესაბამისი:

$$\beta = \min_{1\le j\le n} \beta_j = \min_j \max_i u_{ij}.$$

ეს არის ის რიცხვი, რომელზე მეტსაც მე-2 მოთამაშე არ წააგებს. მას თამაშის მინიმაქსური მოგება ან თამაშის ზედა მნიშვნელობა ეწოდება.

მატრიცულ თამაში 1-ელი მოთამაშისათვის ყველაზე ჭკვიანური ოპტიმალობის პრინციპია მაქსიმინური მოგების განსაზღვრა, ხოლო მე-2 მოთამაშისათვის ოპტიმალურობის პრინციპია მინიმაქსური მოგების პოვნა. ასეთი პრინციპების შეცვლას, მოთამაშეებისათვის არა აქვს აზრი.

აქ ყოველთვის სრულდება უტოლობა $\max_i \min_j u_{ij} \le \min_j \max_i u_{ij}$, რის გამოც $\alpha \le \beta$ და ამიტომ ვუწოდეთ α-ს თამაშის ქვედა მნიშვნელობა, β-ს კი - თამაშის ზედა მნიშვნელობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მაქსიმინი და მინიმაქსი ტოლია, თამაშის მოგების მატრიცაში იარსებებს ისეთი ელემენტი $u_{i^*j^*}$, რომელიც უმცირესია i^* სტრიქონში და, იმავე დროს, უდიდესია j^* სვეტში:

$$u_{ij^*} \le u_{i^*j^*} \le u_{i^*j}, \ \forall i,j. \tag{4.4.3}$$

ამ შემთხვევაში, (i^*, j^*) სიტუაციას ეწოდება (4.4.1) მატრიცული თამაშის უნაგირა წერტილი ან ამონახსნი წმინდა სტრატეგიებში. სტრატეგიების მოცემული წყვილისათვის უნაგირა წერტილის სახელწოდება დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ თუ u_{ij}-ს განვიხილავთ ორი უწყვეტი i და j ცვლადების ნამდვილ რიცხვით ფუნქციას, მაშინ u_{ij}-ს მნიშვნელობები კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში ქმნის ზედაპირს და (i^*, j^*) წერტილს შეესაბამება ზედაპირის უნაგირის ფორმის წერტილი - ამ წერტილში ერთდროულად მიიღწევა მაქსიმუმი i ცვლადით და მინიმუმი j ცვლადით. i^* სტრატეგიას (გადაწყვეტილებას) ეწოდება 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია, j^* სტრატეგიას კი მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია მოცემულ თამაშში. $u_{i^*j^*}$ სიდიდეს ეწოდება თამაშის მნიშვნელობა და იგი არის 1-ელი მოთამაშის მოგება, ხოლო $(-u_{i^*j^*})$ არის მეორე მოთამაშის მოგება. მატრიცული თამაშის ამოხსნა ნიშნავს უნაგირა წერტილისა და თამაშის მნიშვნელობის პოვნას.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ მატრიცულ თამაშში (4.4.2) და (4.4.3) პირობები ერთი და იგივეა და ორივე ნიშნავს ნეშის წონასწორობას H მატრიცულ თამაშში. ამავე

დროს, მატრიცულ თამაშში (i^*, j^*) უნაგირა წერტილის არსებობის პირობა $\max_i \min_j u_{ij} = \min_j \max_i u_{ij} = u_{i^* j^*}$ ტოლფასია (4.4.3)-ის.

მატრიცული თამაშის ამოხსნა წმინდა სტრატეგიებში ძალიან მარტივად წარმოებს. ვაჩვენოთ ეს კონკრეტული თამაშისათვის.

ამოცანა 4.4.1. ამოვხსნათ მატრიცული თამაში წმინდა სტრატეგიებში:

$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1^* \\ 3 & -5 & 2 & 8 & 0 \end{array}.$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ α და β: $\alpha = \max\{-3,1,-5\} = 1$, $\beta = \min\{4,5,8,1] = 1$. ამრიგად, $\alpha = \beta = 1$ და ეს 1 არის მეორე სტრიქონში და მეოთხე სვეტში. მაშასადამე, მოცემულ თამაშში უნაგირა წერტილია (2,4), ხოლო თამაშის მნიშვნელობა ანუ პირველი მოთამაშის მოგებაა 1. ეს რიცხვი უმცირესია მეორე სტრიქონში და უდიდესია მეოთხე სვეტში.

ამოცანა 4.4.2. განვიხილოთ (4.2.1) მატრიცული თამაში ("არიოლი და რეშკა"):

$$H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}.$$

აქ $\alpha = \max\{-1,-1\} = -1$, $\beta = \min\{1,1\} = 1$. რადგან $\alpha \neq \beta$, ამიტომ მოცემულ თამაშში უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში არ არსებობს.

შესაძლოა მატრიცულ თამაშში არსებობდეს რამდენიმე განსხვავებული უნაგირა წერტილი. ამ შემთხვევაში, თამაშის მნიშვნელობა ყველა უნაგირა წერტილში ერთი და იგივეა. ვნახოთ ეს აქვე.

ამოცანა 4.4.3. შევამოწმოთ უნაგირა წერტილის არსებობა წმინდა სტრატეგიებში თამაშში

$$H = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3^{*} & 4 & 3^{*} \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{array}.$$

ამოხსნა. $\alpha = \max\{3,2\} = 3$, $\beta = \min\{3,6,3\} = 3$ და მათი ტოლობა მიიღწევა (1,1) და (1,3) უნაგირა წერტილებში. ორივე წერტილში მიიღწევა თამაშის ერთი და იგივე მნიშვნელობა 3.

4.4.2. ნეშის წონასწორობა მატრიცულ თამაშში შერეული სტრატეგიებით

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\alpha \neq \beta$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $\alpha < \beta$ და მატრიცულ თამაშს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში. ამ უტოლობის გამო, 1-ელ მოთამაშეს აქვს გარანტირებული მოგება, არანაკლები α-ზე და მე-2 მოთამაშე არ წააგებს β-ზე მეტს. ბუნებრივია დავსვათ კითხვა: როგორ გაიყოს მოთამაშეებს შორის $\beta - \alpha$ სხვაობა? სწორედ ეს კითხვა წარმოშობს მოთამაშეთა იმ სტრატეგიული შესაძლებლობების გაფართოების საჭიროებას, რაც მათ თავიდან აქვთ. აღმოჩნდა, რომ ასეთი გაფართოებისათვის მიზანშეწონილია მოთამაშეების მიერ თავიანთი სტრატეგიების შემთხვევით არჩევა. აქ "შემთხვევით" არ ნიშნავს მოუფიქრებლად არჩევას, არამედ იგულისხმება, რომ მოთამაშეებმა წმინდა სტრატეგიები უნდა აირჩიონ წინასწარ დასაბუთებული ალბათობებით, რომლის განსახორციელებლად საჭიროა შესაბამისი შემთხვევითი მექანიზმის გამოცდა, რომლის შედეგებს ექნება აღნიშნული ალბათობები. ასეთი მიდგომით კონფლიქტის მონაწილეები თავიანთ წმინდა სტრატეგიებს ერთმანეთში შეურევენ შემთხვევითი რიგით სპეციალურად დამუშავებული სქემით - მოთამაშე ერთ პარტიაში აირჩევს ერთ წმინდა სტრა-

ტეგიას, ხოლო სხვა პარტიაში - სხვას, რის გამოც მოთამაშეთა ქმედება ერთმანეთისათვის გაურკვეველი და ფარულია.

თამაშთა თეორიაში სტანდარტული მოთხოვნაა, რომ თუ მოგება შემთხვევითია, მაშინ მოთამაშე უპირატესობას ანიჭებს ისეთი სტრატეგიის არჩევას, რომლითაც იგი მიიღებს მაქსიმალურ მოსალოდნელ მოგებას (სარგებლიანობას).

მოთამაშეთა მიერ თავიანთი წმინდა სტრატეგიების არჩევა წინასწარ მოცემული ალბათობებით, თამაშის ჩატარების ერთ-ერთი წესია და ისიც, აგრეთვე, წარმოადგენს გარკვეულ სტრატეგიას. წმინდა სტრატეგიებისაგან განსხვავებით, ასეთ სტრატეგიებს შერეული ეწოდება. იგი განსაზღვრული გვაქვს n მოთამაშის არაკოალიციური Γ თამაშისათვის, ახლა კი განვსაზღვროთ მატრიცული Γ თამაშისათვის..

განსაზღვრება 4.4.1. $m \times n$ მატრიცულ (4.4.1) თამაშში 1 მოთამაშის შერეული სტრატეგია ეწოდება მის წმინდა სტრატეგიათა სიმრავლეზე $X = (x_1, \dots, x_m)$ ალბათურ განაწილებას, სადაც $x_i \ge 0 (i = 1, \dots, m)$ და $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

ანალოგიურად, იმავე თამაშში მე-2 მოთამაშის შერეული სტრატეგია ეწოდება მის წმინდა სტრატეგიათა სიმრავლეზე $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ალბათურ განაწილებას, სადაც $y_j \ge 0 (j = 1, \dots, n)$ და $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

ამრიგად, ამ განსაზღვრებაში x_i არის 1 მოთამაშის მიერ i-ური წმინდა სტრატეგიის არჩევის ალბათობა, ხოლო y_j - მე-2 მოთამაშის მიერ j-ური წმინდა სტრატეგიის არჩევის ალბათობა. როგორც 4.2 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, წმინდა სტრატეგია წარმოადგენს გადაგვარებულ შერეულ სტრატეგიას. კერძოდ, 1-ელი მოთამაშის ნებისმიერი წმინდა სტრატეგია i იგივეა, რაც შერეული

სტრატეგია $X=(x_1,...,x_m)$, რომელშიც $x_i=1$, ხოლო $x_j=0$ $(j\neq i)$. ასევე, გვაქვს მე-2 მოთამაშის ნებისმიერი წმინდა სტრატეგიისათვისაც.

ცხადია, მოთამაშეებს აქვთ შერეული სტრატეგიების ფართო არჩევანი და ასეთი სიმრავლეები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, 1-ელი მოთამაშისათვის $\bar{X}$-ით და მე-2 მოთამაშისათვის $\bar{Y}$-ით.

გამოირკვა, რომ მატრიცულ თამაშში თითოეული მოთამაშის მიერ შერეული სტრატეგიების გამოყენებით საშუალო მოგება შეიძლება გახდეს მაქსიმინზე მეტი და მინიმაქსზე ნაკლები, რაც ორივე მოთამაშისათვის ხელსაყრელია. ამიტომ ბუნებრივია, ორივე მოთამაშე ცდილობს ასეთ მდგომარეობამდე მისვლას და ისმის კითხვა: როგორი მოსაზრებით უნდა ვიხელმძღვანელოთ შერეული სტრატეგიების არჩევისას? აღმოჩნდა, რომ მაქსიმინის პრინციპი ამ შემთხვევაშიც ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას.

განვიხილოთ მატრიცული თამაში (4.4.1)

$$\Gamma=<\{1,2\},\{[1,...,m\},\{1,...,n\}\},H>$$

და მასში მოთამაშეთა შერეული სტრატეგიები იყოს $X=(x_1,...,x_m)\in\bar{X}$, $Y=(y_1,...,y_n)\in\bar{Y}$. მათგან შევადგინოთ სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში, აღვნიშნოთ იგი (X,Y)-ით. ამ სიტუაციაში 1-ელი მოთამაშის მოგება (საშუალო მოგება ანუ მოგების მათემატიკური ლოდინი) განისაზღვრება ჯამით:

$$H(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}x_iy_j=XHY^T.$$

განსაზღვრება 4.4.2. Γ მატრიცული თამაშის შერეული გაფართოება ეწოდება სისტემას $\bar{\Gamma}=<\{1,2\},\bar{X},\bar{Y},H>$, სადაც $H=H(X,Y)$ განისაზღვრება ბოლო ტოლობით. აქ მაქსიმინი და მინიმაქსი ასე განისაზღვრება: $\max\limits_X\min\limits_Y H(X,Y)$; $\min\limits_Y\max\limits_X H(X,Y)$.

აღმოჩნდა, რომ $\overline{\Gamma}$ თამაშს ყოველთვის აქვს წონასწორობის სიტუაცია ანუ ყოველთვის არსებობს დასახელებული მაქსიმინი, მინიმაქსი და ისინი ტოლია ოპტიმალური შერეული სტრატეგიების ერთი (X^*,Y^*) წყვილისათვის მაინც, რომელიც წონასწორობის სიტუაციაა მოცემულ თამაშში და იგი გვაძლევს 1-ელი მოთამაშის მოგებას ანუ $\overline{\Gamma}$ თამაშის $v(H)=H(X^*,Y^*)$ მნიშვნელობას. ეს დებულება დაამტკიცა ჯონ ფონ ნეიმანმა და მას თამაშთა თეორიის ძირითადი თეორემა ეწოდება.

თეორემა 4.4.1 (ჯონ ფონ ნეიმანი). $\overline{\Gamma}$ თამაშში ყოველთვის არსებობს $\max\limits_X \min\limits_Y H(X,Y)$, $\min\limits_Y \max\limits_X H(X,Y)$ და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\max_X \min_Y H(X,Y)=\min_Y \max_X H(X,Y)=H(X^*,Y^*)=v(H).$$

შევნიშნოთ, რომ $v(H)$ სიდიდეს აქვს მათემატიკური ლოდინის ბუნება ანუ იგი რეალიზდება, როგორც თამაშის პარტიათა მიმდევრობაში მოგებათა საშუალო არითმეტიკული.

ბოლო ტოლობაში შემავალი X^* და Y^* სტრატეგიები მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებია, ხოლო მათგან შედგენილ წყვილს ანუ სიტუაციას (X^*,Y^*) ეწოდება უნაგირა წერტილი ან ოპტიმალური სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში. მას კიდევ ეწოდება, მატრიცული თამაშის ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში. მისგან ცალმხრივი გადახრა არცერთი მოთამაშისათვის არაა ხელსაყრელი (მაშასადამე, იგი მდგრადია):

$$H(X,Y^*)\le H(X^*,Y^*)\le H(X^*,Y),\ \forall X\in\overline{X},Y\in\overline{Y}.$$

ეს უტოლობები ტოლფასია შემდეგის:

$$H_{i.}Y^{*T}\le v(H)\le X^*H_{.j},\ \forall i=1,...,m;\ j=1,...,n,$$

სადაც $H_{i.}$ და $H_{.j}$ შესაბამისად, H მატრიცის i-ური სტრიქონი და j-ური სვეტია.

როგორც ვიცით, ისეთ წმინდა სტრატეგიას, რომლის შესაბამისი ალბათობა შერეულ სტრატეგიაში დადებითია, ეწოდება მოთამაშის აქტიური სტრატეგია. აქტიურ სტრატეგიას აქვს შემდეგი თვისება: თუ ერთი მოთამაშე გამოიყენებს თავის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას, ხოლო მისი მოწინააღმდეგე გამოიყენებს თავის აქტიურ სტრატეგიას, მაშინ მოსალოდნელი მოგება ანუ თამაშის მნიშვნელობა უცვლელი რჩება. ჩავწეროთ ეს თვისება ფორმალურად. ვთქვათ, (X^*, Y^*) უნაგირა წერტილია $\bar{\Gamma}$ თამაშში, ხოლო $v(H) = H(X^*, Y^*)$ თამაშის მნიშვნელობაა. ვიგულისხმოთ, რომ $X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ და მასში $x_{i_0}^* > 0$ ანუ i_0 სტრატეგია აქტიურია. თუ მეორე მოთამაშე გამოიყენებს თავის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$, ხოლო 1-ელი აირჩევს i_0 სტრატეგიას, მაშინ

$$v(H) = H(i_0, Y^*) = u_{i_0 1} y_1^* + \ldots + u_{i_0 n} y_n^*.$$

ასევე, გვექნება მე-2 მოთამაშის აქტიური j_0 სტრატეგიისათვის:

$$v(H) = H(X^*, j_0) = u_{1 j_0} x_1^* + \ldots + u_{m j_0} x_m^*.$$

ზოგჯერ გამოვიყენებთ, აგრეთვე, (4.4.1) თამაშში (X^*, Y^*) უნაგირა წერტილის შემდეგ თვისებასაც: თუ H მატრიცის ყოველ ელემენტს მივუმატებთ ერთსა და იმავე მუდმივ c რიცხვს, მაშინ (X^*, Y^*) იქნება, აგრეთვე, უნაგირა წერტილი ახალ მატრიცულ თამაშში.

შენიშვნა 4.4.1. მატრიცული თამაშის ამოსახსნელად პირველ რიგში ვამოწმებთ მასში უნაგირა წერტილის არსებობას წმინდა სტრატეგიებში. თუ ასეთი არსებობს, ვიპოვით ყველას და თამაშის მნიშვნელობასაც. ამით მისი ამოხსნა დასრულებულია. თუ ასეთი უნაგირა წერტილი არ არსებობს, მაშინ უნდა ვიპოვოთ უნაგირა წერტილი შერეულ სტრატეგიებში (ერთი მაინც, რადგან ყველა უნაგირა წერტილში თამაშის მნიშვნელობა ერთი და იგივეა). გამოვთვლით თამაშის მნიშვნელობას და ამით

თამაშის ამოხსნა დასრულებულია. $m\times n$ მატრიცული თამაშის ამოსახსნელად თავიდან უნდა შევეცადოთ, თუ შესაძლებელია შევამციროთ მისი განზომილება. შე-მდეგ კი გამოვიყენოთ მატრიცული თამაშის ამოხსნის მეთოდი იმის მიხედვით, თუ რა განზომილებისაა იგი. ქვემოთ ვნახავთ, რომ 2×2-ის ამოსახსნელად გვაქვს ფორმულები, $2\times n$ და $m\times 2$ თამაშები იხსნება გრაფიკული ხერხით, ხოლო $m\times n$ მატრიცული თამაშის ამოხსნას წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნაზე დავიყვანთ.

4.4.3. მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცის განზომილების შემცირება

შერეულ სტრატეგიებში მატრიცული თამაშის ამოხსნისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს მისი მოგების მატრიცის განზომილების შემცირებას (იგულისხმება როგორც სტრიქონების, ასევე სვეტების რიცხვის შემცირება). ეს გამოწვეულია იმის გამო, რომ ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები ადვილად მოიძებნება შედარებით მცირე განზომილების მოგების მატრიცებისათვის. რაც უფრო მეტი იქნება წმინდა სტრატეგიების რიცხვი, მით უფრო რთულდება მისი ამოხსნა. ასეთი შემცირება ხორციელდება დომინირების წესის გამოყენებით წმინდა და შერეული სტრატეგიებისათვის. დომინირების წესი წმინდა სტრატეგიებისათვის გამოვიყენოთ 4.2.4 განსაზღვრების შესაბამისად.

განსაზღვრება 4.4.3. ვიტყვით, რომ (4.4.1) თამაშში 1-ელი მოთამაშის i-ური სტრატეგია დომინირებს k-ურ სტრატეგიას, თუ ყველა $j=1,\dots,n$-სთვის $u_{ij}\ge u_{kj}$ და ერთი მაინც რომელიღაც j_0-სთვის $u_{ij_0}>u_{kj_0}$. მე-2 მოთამაშის j-ური სტრატეგია დომინირებს l-ურ სტრატეგიას, თუ ყველა $i=1,\dots,m$-სთვის $u_{ij}\le u_{il}$ და ერთი მაინც რომელიღაც i_0-სთვის $u_{i_0j}<u_{i_0l}$.

ამრიგად, დომინირების განსაზღვრება 1-ელი და მე-2 მოთამაშისათვის განსხვავებულია. მოცემულ მატრიცაში

დომინირებულია მცირე ელემენტებიანი სტრიქონი და დიდ ელემენტებიანი სვეტი, რომლებიც ამოიშლება და ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიებში მათი არჩევის ალბათობები იქნება ნული.

ამოცანა **4.4.4.** ამოვხსნათ მატრიცული თამაში

$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 9 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 0 \end{array}.$$

ამოხსნა. მოცემული თამაშის მატრიცაში პირველი სტრიქონი დომინირებს მეოთხეს. ამოვშალოთ დომინირებული მეოთხე სტრიქონი, მივიღებთ

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 9 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \end{array} \Rightarrow$$

აქ მეორე სვეტი დომინირებს პირველ სვეტს, ამიტომ პირველი სვეტის ამოშლით, გვექნება

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{array} \Rightarrow$$

მიღებულ მატრიცაში პირველი სტრიქონი დომინირებს მესამეს:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

ამ მატრიცაში კი მესამე სვეტი დომინირებს მეორეს -

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \equiv H^{*}.$$

მივიღეთ 2×2 მატრიცული თამაში, რომელშიც არც ერთი სტრატეგია არაა დომინირებული და არც აქ არსებობს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში. ამიტომ, უნდა ვიპოვოთ მასში ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები და შემდეგ დავადგენთ თავიდან მოცემულ თამაშში მოთამაშეთა ოპტიმალურ სტრატეგიებს. ეს მოცემულია შემდეგ ქვეპუნქტში.

4.4.4. 2×2 მატრიცული თამაშის ამოხსნა

განვიხილოთ 2×2 მატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$$H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} \\ 2 & u_{21} & u_{22} \end{array}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ ამ თამაშს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში. ამიტომ იგი უნდა ამოვხსნათ შერეულ სტრატეგიებში. ასეთ თამაშში 1-ელი მოთამაშის შერეულ სტრატეგიას აქვს სახე $X=(x,1-x)$, სადაც x არის პირველი სტრიქონის არჩევის ალბათობა, $1-x$ კი - მეორე სტრიქონის არჩევის ალბათობა. ასევე, მე-2 მოთამაშის შერეული სტრატეგიაა $Y=(y,1-y)$, სადაც y პირველი სვეტის არჩევის ალბათობაა, $1-y$ კი არის მეორე სვეტის არჩევის ალბათობა. ჩვენი დაშვების თანახმად $0<x<1$ და $0<y<1$.

ვთქვათ, 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა $X^{*}=(x^{*},1-x^{*})$. ზემოთ აღნიშნული აქტიური სტრატეგიის თვისების თანახმად, მე-2 მოთამაშის ნებისმიერი წმინდა სტრატეგიისათვის თამაშის მნიშვნელობა $v(H)\equiv v$ ტოლი იქნება:

$$\begin{cases} u_{11}x^* + u_{21}(1-x^*) = v \\ u_{12}x^* + u_{22}(1-x^*) = v \end{cases}.$$

ანალოგიურად, თუ $Y^* = (y^*, 1-y^*)$ მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა, მაშინ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} u_{11}y^* + u_{12}(1-y^*) = v \\ u_{21}y^* + u_{22}(1-y^*) = v \end{cases}.$$

ამ ორი სისტემის ამოხსნით მივიღებთ

$$x^* = \frac{u_{22}-u_{21}}{u_{11}+u_{22}-u_{21}-u_{12}}, y^* = \frac{u_{22}-u_{12}}{u_{11}+u_{22}-u_{21}-u_{12}},$$

$$v = \frac{u_{11}u_{22}-u_{21}u_{12}}{u_{11}+u_{22}-u_{21}-u_{12}}. \qquad (4.4.4)$$

ამრიგად, 2×2 მატრიცულ თამაშში უნაგირა წერტილი შერეულ სტრატეგიებში იქნება $\left((x^*, 1-x^*), (y^*, 1-y^*)\right)$, რასაც ასე ჩავწერთ (x^*, y^*).

ამოცანა 4.4.5. ამოვხსნათ (4.4.4) ამოცანაში მიღებული 2×2 მატრიცული თამაში

$$H^* = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (4.4.4) ფორმულები:

$$x^* = \frac{1-3}{2+1-3-7} = \frac{2}{7}, y^* = \frac{1-7}{2+1-3-7} = \frac{6}{7}, v = \frac{19}{7}.$$

ამრიგად, H^* მატრიცული თამაშის უნაგირა წერტილია: $(\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$, ხოლო თამაშის მნიშვნელობა ანუ 1-ელი მოთამაშის მოგებაა $v = \frac{19}{7}$.

ახლა ამოვხსნათ (4.4.4) ამოცანა. H მატრიციდან H^* მატრიცის მისაღებად ამოვშალეთ მესამე და მეოთხე სტრიქონები, პირველი და მესამე სვეტები. ამიტომ H მატრიცულ თამაშში 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა $X^* = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, 0, 0)$, ხოლო მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია იქნება $Y^* = (0, \frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7})$. თამაშის მნიშვნელობა კი - იგივე $v = \frac{19}{7}$.

ასევე, ამოვხსნათ 4.2.1 მატრიცული თამაში - "არიოლი და რეშკა"

$$H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}.$$

(4.4.4) ფორმულების თანახმად, ვწერთ:

$$x^* = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2}, y^* = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2},\ v = \frac{1-1}{4} = 0.$$

მაშასადამე, მოცემულ თამაშში უნაგირა წერტილია (0,5;0,5), ხოლო თამაშის მნიშვნელობა 0.

4.4.5. $2 \times n$ მატრიცული თამაშის ამოხსნა

განვიხილოთ $2 \times n$ მატრიცული თამაში, სადაც $n \geq 2$ ნებისმიერია

$H=$

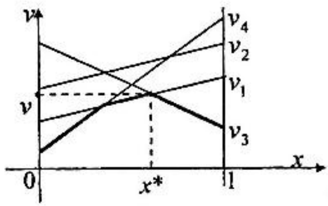
	1	2	...	n
1	u_{11}	u_{12}	...	u_{1n}
2	u_{21}	u_{22}	...	u_{2n}

თუ ამ თამაშში არ არსებობს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, მაშინ მისი ამოხსნა მიზანშეწონილია გრაფიკული ხერხით. ჩვენ არ მოვიყვანთ მაქსიმინის იმ თვისებებს, რითაც ვიხელმძღვანელებთ. აღვნიშნავთ მხოლოდ გრაფიკული მეთოდის ფორმალურ მხარეს.

$X=(x,1-x)$ სტრატეგიისათვის განვიხილოთ 1-ელი მოთამაშის საშუალო მოგებები:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_{11}x+u_{21}(1-x)=(u_{11}-u_{21})x+u_{21}, \\
v_2 &= u_{12}x+u_{22}(1-x)=(u_{12}-u_{22})x+u_{22}, \qquad (4.4.5) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= u_{1n}x+u_{2n}(1-x)=(u_{1n}-u_{2n})x+u_{2n}.
\end{aligned}
$$

ამ ტოლობებში x არის ცვლადი [0,1] შუალედიდან. თითოეული ტოლობა (4.4.5)-ში წარმოადგენს კოორდინატთა $x0v$ სისტემაში მონაკვეთებს. ვთქვათ, მათ აქვთ სახე:



[0,1] შუალედის შესაბამისი გამუქებული ქვედა საზღვრის უმაღლესი წვეროს შესაბამისი x^* რიცხვით განვსაზღვრავთ 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას $X^*=(x^*,1-x^*)$, ხოლო ამ წვეროს შესაბამისი ორდინატი v^* არის თამაშის მნიშვნელობა.

მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის მისაღებად შევნიშნოთ, რომ იგი მოცემულ თამაშში გამოიყენებს მხოლოდ იმ ორ სვეტს (ორ სტრატეგიას), რომელთა შესაბამისი მონაკვეთები იკვეთება გამუქებული ქვედა საზღვრის უმაღლეს წვეროში. ამიტომ, სხვა სვეტების არჩევის ალბათობები ნულია და Y^* სტრატეგიაში მონაწილეობს აღნიშნული ორი მონაკვეთის შესაბამისი სტრატეგიები დადებითი ალბათობებით. ამრიგად, ჩვენი ნახაზის პირობებში, H მატრიციდან უნდა შევადგინოთ 2×2 მატრიცული თამაში, რომლის სვეტები იქნება v_1 და v_3 მონაკვეთების შესაბამისი სვეტები ანუ H მატრიციდან უნდა ავიღოთ პირველი და მესამე სვეტი შესაბამისად:

$H =$

	1	3
1	u_{11}	u_{13}
2	u_{21}	u_{23}

აქ გამოვიყენებთ (4.4.4) ფორმულებიდან მეორეს

$$y^* = \frac{u_{23} - u_{13}}{u_{11} + u_{23} - u_{21} - u_{13}}$$

და, საბოლოოდ, მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია იქნება $Y^*=(y^*,0,1-y^*,0,\dots,0)$.

ამოცანა 4.4.6. ამოვხსნათ მატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$H =$

	1	2	3	4
1	1	–2	5	6
2	4	1	2	–1

ამოხსნა. აქ H-ს არ აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, ამიტომ ამოვხსნათ იგი გრაფიკული ხერხით. შევადგინოთ (4.4.5) ტოლობები:

$$v_1=(1-4)x+4=-3x+4,\ v_2=(-2-1)x+1=-3x+1,$$

$$v_3=(5-2)x+2=3x+2,\ v_4=(6+1)x-1=7x-1$$

და ავაგოთ ისინი. ამისათვის თითოეულში საკმარისია დავუშვათ $x=0$ და $x=1$, რითაც მივიღებთ ორ წერტილს $x0v$ სიბრტყეზე და მათი შეერთებით მივიღებთ სასურველ მონაკვეთებს:

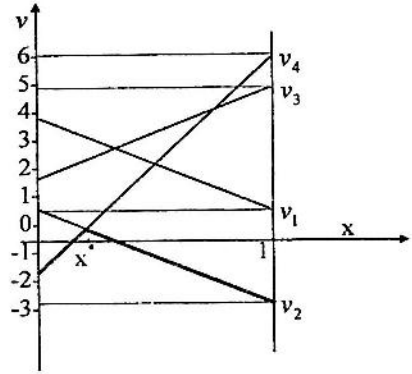
v_1: $x=0$, $v_1=4$, $(0,4)$; v_2: $x=0$, $v_2=1$, $(0,1)$;

$x=1$, $v_1=-3\cdot1+4=1$, $(1,1)$; $x=1$, $v_2=-3\cdot1+1=-2$, $(1,-2)$;

v_3: $x=0$, $v_3=2$, $(0,2)$; v_4: $x=0$, $v_4=-1$, $(0,-1)$;

$x=1$, $v_3=3\cdot1+2=5$, $(1,5)$; $x=1$, $v_4=7\cdot1-1=6$, $(1,6)$.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, x^* მიიღება v_2 და v_4-ის შესაბამისი მონაკვეთების გადაკვეთით. ამიტომ უნდა გავუტოლოთ ერთმანეთს v_2 და v_4, რაც გვაძლევს განტოლებას



$3x+1=7x-1$. აქედან $10x=2$ და $x^*=2/10=1/5$. ამრიგად, 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $X^*=(1/5,4/5)$. გამოვთვალოთ v_2 ან v_4-ის მნიშვნელობა $x^*=1/5$-ში, მივიღებთ თამაშის მნიშვნელობას:

$$v = v_2\left(\frac{1}{5}\right) = -3\cdot\frac{1}{5}+1=\frac{2}{5}\cdot$$

მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის საპოვნელად უნდა განვიხილოთ H-დან მატრიცული თამაში v_2 და v_4-ის შესაბამისი ანუ მეორე და მეოთხე სვეტებით

$$H^1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}.$$

(4.4.4)-ის გამოყენებით ვწერთ:

$$y^* = \frac{-1-6}{-2-1-1-6}=\frac{7}{10},\ \ 1-y^*=\frac{3}{10}.$$

ამრიგად, მეორე მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $Y^* = (0;0,7;0;0,3)$.

4.4.6. $m\times 2$ მატრიცული თამაშის ამოხსნა

ვთქვათ, $m\times 2$ მატრიცულ თამაშს აქვს სახე:

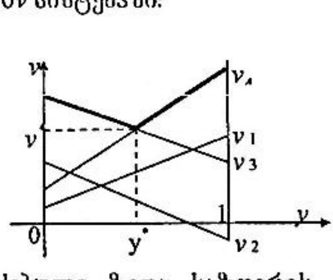
H =

	1	2
1	u_{11}	u_{12}
2	u_{21}	u_{22}
.	.	.
m	u_{m1}	u_{m2}

აქ, $m\geq 2$ ნებისმიერია და ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულ თამაშს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში არ აქვს. ამოვხსნათ ეს თამაში გრაფიკული ხერხით. მე-2 მოთამაშის $Y=(y,1-y)$ სტრატეგიისათვის განვიხილოთ 1-ელი მოთამაშის მოგებები:

$$v_1=u_{11}y+u_{12}(1-y)=(u_{11}-u_{12})y+u_{12},$$
$$v_2=u_{21}y+u_{22}(1-y)=(u_{21}-u_{22})y+u_{22},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_m=u_{m1}\,y+u_{m2}(1-y)=(u_{m1}-u_{m2}\,y+u_{m2}$$

და ავაგოთ შესაბამისი მონაკვეთები $y\,(0\leq y\leq 1)$ ცვლადით კოორდინატთა $y0v$ სისტემაში:



მიღებული გამუქებული ზედა საზღვრის ქვედა წვეროს შესაბამისი აბსცისა y^* განსაზღვრავს მე-2 მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას $Y^*=(y^*,1-y^*)$, ხოლო ამ წვეროს ორდინატი v^* იქნება თამაშის მნიშვნელობა.

1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის საპოვნელად განვიხილოთ 2×2 მატრიცული თამაში, რომელშიც სტრიქონები შეესაბამება მოცემულ წვეროში გამა-

ვალ მონაკვეთებს. ჩვენი ნახაზის შემთხვევაში, H-დან ავიღებთ მესამე და მეოთხე სტრიქონებს:

$$H^2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 3 & a_{31} & a_{32} \\ \hline 4 & a_{41} & a_{42} \\ \hline \end{array}.$$

აქ კი გამოვიყენებთ (4.4.4)-ს:

$$x^* = \frac{a_{42} - a_{41}}{a_{31} + a_{42} - a_{41} - a_{32}}.$$

1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია იქნება

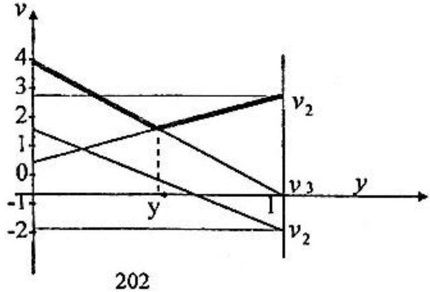
$$X^* = (0,0,x^*,1-x^*,0,\ldots,0).$$

ამოცანა 4.4.7. ამოვხსნათ მოცემული თამაში, ანუ ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიები და თამაშის მნიშვნელობა შემდეგ თამაშში:

$$H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

ამოხსნა. რადგან H-ს არა აქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, ამიტომ ავაგოთ მნიშვნელობები

$v_1=(-1-2)y+2=-3y+2, v_2=(3-1)y+1=2y+1,\ v_3=(0-4)y+4=-4y+4.$
ისინი გაივლიან შესაბამისად, (0,2), (1,–1), (0,1), (1,3), (0,4), (1,0) წერტილებში:



აქ ზედა საზღვრის ქვედა წვერო მიღებულია v_2 და v_3-ის გადაკვეთით, ამიტომ y^*-ის საპოვნელად ვწერთ განტოლებას $v_2 = v_3$ ანუ $2y+1=-4y+4$. აქედან $6y=3$ და $y^* = \frac{1}{2}$.

მაშასადამე, მე-2 მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიაა $Y^*=(1/2,1/2)$. 1-ელის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის საპოვნელად H-დან შევადგინოთ 2×2 მატრიცული თამაში, რომელშიც შევა მეორე და მესამე სტრიქონები:

$$H^3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

(4.4.4) ფორმულებიდან

$$x^* = \frac{4-0}{3+4-0-1} = \frac{2}{3},\ 1-x^* = \frac{1}{3}$$

და 1-ელის ოპტიმალური სტრატეგია იქნება $X^*=(0,2/3,1/3)$. რადგან მე-2 მოთამაშის ორივე წმინდა სტრატეგია აქტიურია, ამიტომ თამაშის მნიშვნელობა ტოლი იქნება

$$v = (-1).0 + 3.(2/3) + 0.(1/3) = 2.$$

4.4.7. მატრიცული თამაშის ამოხსნა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საშუალებით

თამაშთა თეორია მჭიდრო კავშირშია მათემატიკურ დაპროგრამებასთან. კერძოდ, ნებისმიერი განზომილების მატრიცული თამაში შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის სახით და პირიქით. ეს დამოკიდებულება თამაშთა თეორიის შემქმნელმა ჯონ ფონ ნეიმანმა დაადგინა მას შემდეგ, როცა იგი გაეცნო ჯონ დანციგის მიერ დამუშავებულ წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის სიმპლექს-მეთოდს. მატრიცული თამაშის ამოხსნისათვის სიმპლექს-მეთოდის ალგორითმის გამოყენება ყველაზე ეფექტური საშუალებაა.

განვიხილოთ $m\times n$ მატრიცული თამაში (4.4.1). ვიგულისხმოთ, რომ ამ თამაშის მატრიცის ელემენტები და-

დებითია. ელემენტების დადებითობიდან კი გამომდინარეობს, რომ მატრიცული თამაშის მნიშვნელობა (პირველი მოთამაშის მოგება) დადებითია მოთამაშეთა ნებისმიერი სტრატეგიებისათვის. თუ მოგების მატრიცის ელემენტები არაა დადებითი, მაშინ, 4.4.2 პუნქტში აღნიშნული უნაგირა წერტილის თვისების თანახმად, მატრიცის ყველა ელემენტს შეგვიძლია დავუმატოთ საკმაოდ დიდი დადებითი რიცხვი. ასე მივიღებთ მოცემული თამაშის ეკვივალენტურ თამაშს, რომელშიც მოთამაშეების ოპტიმალური სტრატეგიები იქნება იგივე, რაც მოცემულ თამაშში, ხოლო თუ მიღებული თამაშის მნიშვნელობას გამოვაკლებთ დამატებულ დადებით რიცხვს, მივიღებთ მოცემული თამაშის მნიშვნელობას.

ამრიგად, ჩავთვალოთ, რომ მოცემული H მატრიცის მქონე თამაშის მნიშვნელობა $v>0$. როგორც ვიცით, v შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ორი ფორმულის საშუალებით:

$$v=\max_{x\in X}\min_{1\le j\le n}H(x,j)=\max_{x\in X}\min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}x_i u_{ij}\,.$$

შემოვიღოთ ახალი დამხმარე ცვლადი u და მაქსიმინის პოვნის ამოცანა ჩავწეროთ, როგორც წრფივი დაპროგრამების ამოცანა

$$v=\max_{(u,x)\in\mathrm{B}}u\,,$$

სადაც

$$\mathrm{B}=\{(u,x)\,|\sum_{i=1}^{m}x_i ua_{ij}\ge u\,,\,j=1,...,n,\,\sum_{i=1}^{m}x_i=1,x_i\ge 0,i=1,...,m\}\,.$$

მართლაც, ფიქსირებული $x\in X$-სთვის u-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა $(u,x)\in\mathrm{B}$ შეზღუდვებში ტოლია

$$\min_{1\le j\le n}H(x,j)=\min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}x_i u_{ij}\,.$$

ვინაიდან v>0, ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ u ღებულობს დადებით მნიშვნელობას. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$z_i = \frac{x_i}{u}, \quad z = (z_1, \ldots, z_m).$$

მაშინ $(u, x) \in \mathrm{B}$ პირობების გათვალისწინებით, რადგან

$$\sum_{i=1}^{m} x_i u_{ij} = \sum_{i=1}^{m} z_i u u_{ij} = u \sum_{i=1}^{m} u_{ij} z_i \geq u,$$

ამიტომ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{1}{u}, \ \sum_{i=1}^{m} u_{ij} z_i \geq 1, j = 1, \ldots, n, \ z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

აქედან

$$v = \max_{(u,x) \in \mathrm{B}} u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0},$$

სადაც $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_m^0)$ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i \to \min,$$

(4.4.6)

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} z_i \geq 1, j = 1, \ldots, n, \ z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

ვიპოვით რა z^0 ვექტორს, ვიპოვით პირველი მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას და თამაშის მნიშვნელობას:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0}, \ x^0 = v\, z^0 \quad (x_i^0 = v z_i^0, i = 1, \ldots, m).$$

ანალოგიურად ვიპოვით მეორე მოთამაშის ოპტიმალურ სტრატეგიას, კერძოდ,

$$v = \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{H}(i, y) = \min \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} w_j^0},$$

სადაც $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)$ არის წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი:

$$g(w)=\sum_{j=1}^{n} w_j \to \max \tag{4.4.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} w_j \le 1, i=1,\dots,m; w_j \ge 0, j=1,\dots,n.$$

აქედან ვიპოვით w^0 ვექტორს და შემდეგ - მეორე მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას

$$y^0 = vw^0 \quad (y_j^0 = v\, w_j^0, j=1,\dots,n).$$

(4.4.6) და (4.4.7) ამოცანები ერთმანეთის ორადულებია.

ამ ამოცანების ოპტიმალური z^0 და w^0 ამონახსნებისათვის თუ გამოვიყენებთ მატრიცული თამაშების შემდეგ დამატებითი არასიმკაცრობის თვისებას, მივიღებთ:

1) $z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} u_{ij} w_j^0 = 1$;

2) $w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} u_{ij} z_i^0 = 1$.

ამოცანა **4.4.8.** ამოვხსნათ მატრიცული თამაში, რომლის მოგების მატრიცაა

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა. აქ უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში არ არსებობს. დავუმატოთ ყველა ელემენტს 4, მივიღებთ მოგების მატრიცას

$$H_1=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

აქ $v_1 = v(H_1) > 0$. დავწეროთ H_1-სთვის წრფივი დაპროგრამების (4.4.6)-(4.4.7) ამოცანები:

$$f(z) = z_1 + z_2 \to \min \tag{4.4.8}$$

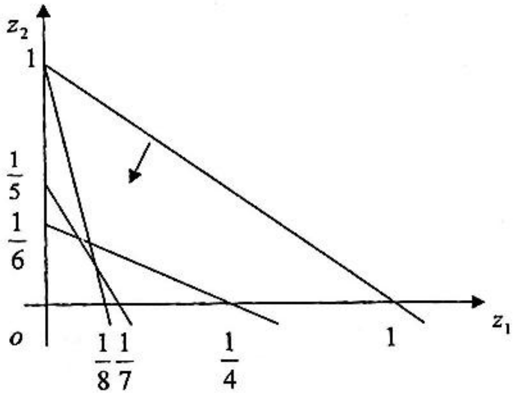
$$4z_1 + 6z_2 \ge 1,\ \ 7z_1 + 5z_2 \ge 1,\ \ 8z_1 + z_2 \ge 1,\ \ z_1 \ge 0, z_2 \ge 0;$$

$$g(w) = w_1 + w_2 + w_3 \to \max \tag{4.4.9}$$

$$4w_1 + 7w_2 + 8w_3 \le 1,\ \ 6w_1 + 5w_2 + w_3 \le 1,\ \ w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

$$w_3 \ge 0.$$

ამოვხსნათ (4.4.8) ამოცანა გრაფიკული ხერხით:



აქედან მივიღებთ, რომ $z^0 = \left(\frac{5}{44}, \frac{4}{44}\right)$ არის მოცემული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი. ამიტომ,

$$v_1 = \frac{1}{z_1^0 + z_2^0} = \frac{1}{\frac{9}{44}} = \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9}, \quad x^0 = v_1 z^0 = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

ამოვხსნათ (4.4.9) ამოცანა. დამატებითი არასიმკაცრობის თვისებებიდან გამომდინარე, რადგან

$z_1^0 > 0$, $z_2^0 > 0$, $4z_1^0 + 6z_2^0 = 1$, $7z_1^0 + 5z_2^0 > 1$, $8z_1^0 + 1z_2^0 = 1$,

ამიტომ $w_2^0 = 0$ და ამის გამო, (4.4.9) ამოცანა ასე ჩაიწერება

$$g(w) = w_1 + w_3 \to \max$$

$$4w_1 + 8w_3 = 1, \quad 6w_1 + w_3 = 1, \; w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

აქედან მივიღებთ,

$$w^0 = \left(\frac{7}{44}, 0, \frac{2}{44}\right), \quad y^0 = v_1 w^0 = \left(\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right).$$

პასუხი. ჩვენს ამოცანაში H მოგების მატრიცის მქონე მატრიცულ თამაშში პირველი და მეორე მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებია შესაბამისად, $x^0=\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right)$ და $y^0=\left(\frac{7}{9},0,\frac{2}{9}\right)$. რაც შეეხება ამ თამაშის მნიშვნელობას, დასაწყისში გაკეთებული მითითების თანახმად იგი ტოლი იქნება

$$v=4\frac{8}{9}-4=\frac{8}{9}.$$

4.4.8. ზოგიერთი ანტაგონისტური კონფლიქტის მოდელი

წმინდა ანტაგონისტური კონფლიქტი უფრო მეტად გვხვდება საომარ ქმედებებსა და სპორტულ შეჯიბრებებში, სხვა სფეროში კი - იშვიათად. ამასთან, თუ ასეთ კონფლიქტურ სიტუაციებში მოთამაშეებს აქვთ ქმედებათა სასრული რაოდენობები, მათი მოდელირება შესაძლებელია მატრიცული თამაშებით. განვიხილოთ რამდენიმე ასეთი კონკრეტული სიტუაცია.

ამოცანა 4.4.9 (თესვის დაგეგმვა). სასოფლო-სამეურნეო საწარმოს შეუძლია მოიყვანოს ორი სახის საზაფხულო მარცვლეული კულტურა - $\{s_1,s_2\}$. აუცილებელია განისაზღვროს მათი დათესვის გეგმა - რომელი დათესოს, ვინაიდან ამ კულტურების მოსავალი დამოკიდებულია კლიმატის (ბუნებრივ) პირობებზე. ასეთი დაგეგმვით უნდა მივიღოთ მაქსიმალური მოგება მოსავლის გაყიდვიდან. ბუნებრივია დაგეგმვა უნდა განხორციელდეს ბუნების ყველაზე ნაკლებ ხელსაყრელ პირობებში. მაშინ ბუნების უკეთესი მდგომარეობის შემთხვევაში, მოსავალიც უკეთესი იქნება.

ამოხსნა. სასოფლო-სამეურნეო საწარმო იყოს 1-ელი მოთამაშე, რომელიც დაინტერესებულია მაქსიმალური შემოსავლით, მეორე მოთამაშეს - ბუნებას შეუძლია ბუნებრივი პირობებით საწინააღმდეგოდ იმოქმედოს 1-ელი მოთამაშის ინტერესებზე. ბუნების სტრატეგიები

იყოს: t_1 - გვალვიანი ზაფხული; t_2 - ნორმალური ზაფხული და t_3 - წვიმიანი ზაფხული.

1-ელი მოთამაშის მოგებაში ვიგულისხმოთ მოსავლის რეალიზაციით მიღებული მოგება და ჩავთვალოთ, რომ მისი მოგებები ბუნების მდგომარეობების შესაბამისად მოცემულია მატრიცული თამაშის სახით, რომლის ელემენტები გამოსახულია მლნ ლარებით:

$$H = \begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline s_1 & 8 & 5 & 3 \\ s_2 & 2 & 3 & 6 \end{array}.$$

აქ არ გვაქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში და არც რომელიმე სვეტია დომინირებული. ამიტომ, 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას ვპოულობთ გრაფიკული ხერხით $X^* = (0,6;0,4)$, ხოლო მისი მოგებაა $v = 4,2$.

ამ სტრატეგიის "ფიზიკური" რეალიზაცია სასოფლო-სამეურნეო საწარმომ უნდა მოახდინოს შემდეგნაირად:

მთელი სათესი ფართობის 0,6 ნაწილზე უნდა გააშენოს s_1 კულტურა, ხოლო სათესი ფართობის 0,4 ნაწილზე - s_2 კულტურა. მიღებული მოგება იქნება 4,2 მლნ ლარზე არანაკლები.

ასეთი ტიპის თამაში მიეკუთვნება ბუნების წინააღმდეგ თამაშების კლასს, რომელიც თავის დასკვნით ნაწილშია შესწავლილი. აქვე შევნიშნავთ, რომ ბუნება არაა მოქმედი მოთამაშე და იგი წინასწარ განზრახვით არ ირჩევს სტრატეგიებს. ასეთ თამაშში ორიენტირებას ვაკეთებთ ბუნების ყველაზე უარეს სტრატეგიებზე.

ამოცანა 4.4.10 (მოლაპარაკება კონტრაქტის გაფორმებაზე). განვიხილოთ ფირმა, რომლის ადმინისტრაცია მოლაპარაკებას აწარმოებს თავის მოსამსახურეთა და მუშების პროფკავშირთან კონტრაქტის გაფორმებაზე. ვიგულისხმოთ, რომ მხარეების ინტერესები გამოსახულია 1-ელი მოთამაშის - პროფკავშირის შემოსავლებით და

ფირმის ადმინისტრაციის გადასახადებით მატრიცული თამაშის საშუალებით. მასში 1-ელი მოთამაშე ცდილობს შემოსავლების მაქსიმუმის მიღებას, ხოლო მე-2 მოთამაშე - საკუთარი დანახარჯების შემცირებას. ვიპოვოთ მოთამაშეთა ოპტიმალური გადაწყვეტილებები. მატრიცული თამაში ასეთია:

$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 75 & 105 & 65 & 45 \\ 2 & 70 & 60 & 55 & 40 \\ 3 & 80 & 90 & 35 & 50 \\ 4 & 95 & 100 & 50 & 55 \end{array}.$$

ამოხსნა. მოცემულ თამაშში არ გვაქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში. აქ შესაძლებელია მხოლოდ დომინირებული სტრატეგიების გამორიცხვა, რითაც მივიღებთ მატრიცულ თამაშს

$$H^1 = \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ \hline 1 & 65 & 45 \\ 4 & 50 & 55 \end{array}.$$

ამ თამაშის ელემენტები ასე წარმოიდგინება:

$$65 = 5.4 + 45; 45 = 5.0 + 45; 50 = 5.1 + 45' 55 = 5.2 + 45.$$

ამიტომ, H^1 თამაშის ამოხსნა დაიყვანება მისი ტოლფასი მატრიცული თამაშის

$$H^2 = \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}$$

ამოხსნაზე. მისი ამოხსნით მივიღებთ H მატრიცული თამაშის ამონახსნს:

$$X^* = (0,2;0;0;0,8);\ Y^* = (0;0;0,4;0,6);\ v = 53.$$

ამრიგად, როდესაც მოლაპარაკებათა პროცესი ბევრჯერ გამეორდება, მაშინ პროფკავშირმა 1-ელი სტრატეგია უნდა აირჩიოს 20%-ის შემთხვევაში, ხოლო მე-4 სტრატეგია - 80% შემთხვევაში; ადმინისტრაციამ 0,4 ალბათობით აირჩიოს მე-3 სტრატეგია, ხოლო 0,6 ალბათობით - მე-4

სტრატეგია. ამასთან, პროფკავშირის მოსალოდნელი მოგებაა 53.

რაც შეეხება ერთხელ მოლაპარაკების შემთხვევას, ამ დროს ერთ-ერთი მხარე - პროფკავშირი ან ადმინისტრაცია, აუცილებლად დარჩება დაუკმაყოფილებელი.

ამოცანა 4.4.11 (ლოკალური ომი). ვთქვათ, ორი პატარა სახელმწიფო 1 და 2 აწარმოებს 12-დღიან ომს. მე-2 მხარისათვის მნიშვნელოვანი სამხედრო ობიექტის – ხიდის დაბომბვისათვის 1-ელი მხარე იყენებს მის ხელთ არსებულ ორ ავიაგამანადგურებელს. დაზარალებული ხიდის აღდგენა შესაძლებელია ერთი დღე-ღამის განმავლობაში, ხოლო თითოეული თვითმფრინავი დღეში ასრულებს თითო გაფრენას ორ საჰაერო მარშრუტზე, რომელიც აკავშირებს ამ ქვეყნებს ერთმანეთთან. მე-2 მხარეს აქვს ორი საზენიტო ტყვიამფრქვევი, რომლითაც შესაძლებელია 1-ელი მხარის თვითმფრინავების ჩამოგდება. თუ თვითმფრინავი ჩამოვარდება, მაშინ რომელიღაც მესამე მხარეს შეუძლია 1-ელ მხარეს ერთი დღე-ღამის განმავლობაში მიაწოდოს ახალი თვითმფრინავი.

1-ელ მხარეს შეუძლია გააგზავნოს ორივე თვითმფრინავი ან ერთ მარშრუტზე, ან თითო - ორივეზე. მე-2 მხარეს შეუძლია დაუმიზნოს ორივე საზენიტო დანადგარი ან ერთ მარშრუტზე, ან ორივეზე თითო. თუ ერთი თვითმფრინავი გაფრინდება იმ მარშრუტზე, რომელზეც მიმართულია ერთი საზენიტო ტყვიამფრქვევი, მაშინ ეს თვითმფრინავი აუცილებლად ჩამოვარდება. თუ ორივე თვითმფრინავი გაფრინდება იმ მარშრუტზე, რომელზეც მიმართულია ორივე საზენიტო ტყვიამფრქვევი, მაშინ ორივე თვითმფრინავი იქნება ჩამოგდებული. თუ ორივე თვითმფრინავი გაფრინდება იმ მარშრუტზე, რომელზეც მიმართულია ერთი ტყვიამფრქვევი, მაშინ ჩამოგდებული იქნება მხოლოდ ერთი. თუ თვითმფრინავი მიაღწევს მიზნამდე, მაშინ ხიდი აუცილებლად იქნება განადგურებული.

ამოხსნა. დავადგინოთ მოთამაშეთა სტრატეგიები. ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, 1-ელ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: 1 - გააგზავნოს თვითმფრინავები

განსხვავებულ მარშრუტებზე; 2 - გააგზავნოს ორივე თვითმფრინავი ერთ მარშრუტზე. მე-2 მოთამაშეს, ასევე აქვს ორი სტრატეგია: 1 - მიმართოს საზენიტო ტყვიამფრქვევი გამანადგურებლების განსხვავებულ მარშრუტებზე; 2 - მიმართოს ორივე საზენიტო ტყვიამფრქვევი ერთ მარშრუტზე. გვაქვს ოთხი სიტუაცია და შევაფასოთ ისინი.

(1,1) სიტუაციაში 1-ელი მოთამაშე მიზნამდე ვერ აღწევს და ამიტომ მისი მოგება ნულია;

(2,1) სიტუაციაში ერთი თვითმფრინავი მაინც აღწევს მიზნამდე და ხიდის განადგურების ალბათობაა 1;

(1,2) სიტუაციაში, ასევე, თუნდაც ერთი თვითმფრინავი მიაღწევს მიზნამდე და ხიდის განადგურების ალბათობა იქნება 1;

(2,2) სიტუაციაში 1-ელი მოთამაშე 0,5 ალბათობით ირჩევს მარშრუტს, რომელზეც არაა მიმართული ორივე საზენიტო ტყვიამფრქვევი. ამიტომ, მიზანი განხორციელდება 0,5 ალბათობით.

მაშასადამე, ანტაგონისტური თამაში მოიცემა მოდელით

$$H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0,5 \end{array}.$$

აქედან, $X^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $v = \frac{2}{3}$. მაშასადამე, თუ 1-ელი მხარე 12 დღიანი ომის განმავლობაში თვითმფრინავებს გააგზავნის 4 დღე განსხვავებულ მარშრუტებზე და 8 დღე - ერთ მარშრუტზე, მაშინ 1-ელ მოთამაშეს საშუალოდ ექნება 66,7% წარმატებული შემთხვევა. ანალოგიურად, Y^*-ის გამოყენებით მე-2 მოთამაშე არ დაუშვებს ხიდის განადგურებას 66,7%-ზე მეტ შემთხვევაში.

მოცემულ ამოცანაში გარკვეულ როლს ასრულებს ბუნება (შემთხვევითობა), რომლის პირობებშიც იგი დავიყვანეთ მატრიცულ თამაშზე.

4.5. ბიმატრიცული თამაშების ამოხსნა

განვიხილოთ $m \times n$ ბიმატრიცული თამაში

$(H_1, H_2) =$

	1	2	.	n
1	(u_{11}, v_{11})	(u_{12}, v_{12})	.	(u_{1n}, v_{1n})
2	(u_{21}, v_{21})	(u_{22}, v_{22})	.	(u_{2n}, v_{2n})
.	.	.	.	.
m	(u_{m1}, v_{m1})	(u_{m2}, v_{m2})	.	(u_{mn}, v_{mn})

ან

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & . & n \\ \hline 1 & (u_{11}, v_{11}) & (u_{12}, v_{12}) & . & (u_{1n}, v_{1n}) \\ 2 & (u_{21}, v_{21}) & (u_{22}, v_{22}) & . & (u_{2n}, v_{2n}) \\ . & . & . & . & . \\ m & (u_{m1}, v_{m1}) & (u_{m2}, v_{m2}) & . & (u_{mn}, v_{mn}) \end{array} \quad (4.5.1)$$

ფორმით.

ასეთ თამაშში მოთამაშეთა ინტერესები ზოგჯერ, ემთხვევა კიდეც. ამიტომ ზოგიერთ თამაშში შესაძლოა მოთამაშეთა კოოპერირებაც სასარგებლო აღმოჩნდეს ორივე მოთამაშისათვის. ზოგიერთ შემთხვევაში კი ასეთი კოოპერირება შესაძლოა აკრძალული იყოს თამაშის წესით. ამიტომ, ბიმატრიცული თამაშისათვის განიხილება ორი შემთხვევა - არაკოალიციური და კოოპერატიული. პირველ შემთხვევაში აკრძალულია ან შეუძლებელია მოთამაშეებს შორის თანამშრომლობა, როგორც სტრატეგიის არჩევაზე, ასევე, დამატებითი გადასახადის თაობაზე. ამიტომ მოთამაშეები გადაწყვეტილებებს იღებენ დამოუკიდებლად. კოოპერატიული ვარიანტი მრავალფეროვანია და ამის შესაბამისად გვაქვს განსხვავებული თეორიები. კოოპერაცია შეიძლება განხორციელდეს მოლაპარაკებით და მაშინ გამოდგება პარეტოს გადაწყვეტილებები. ჩვენ ამ შემთხვევასაც განვიხილავთ. თავიდან კი განვიხილოთ თამაშის არაკოალიციური ვარიანტი.

ბიმატრიცული თამაშის არაკოალიციურ ვარიანტში მოცემული თამაშის ამოხსნა ნიშნავს მასში ვიპოვოთ ნეშის წონასწორული სიტუაციები წმინდა და შერეულ სტრატეგიებში და მოთამაშეთა მოგებები. ასეთ თამაშში ოპტიმალურობის პრინციპია **ნეშის წონასწორობის სიტუაცია**, რომელიც ხასიათდება სიტუაციის მდგრადობით: არც ერთი მოთამაშე არაა დაინტერესებული მის დარღვევაზე და თუ ერთი მოთამაშე შეცვლის თავის სტრატეგიას, ხოლო მეორე შეინარჩუნებს თავის არჩეულ სტრატეგიას, მაშინ სტრატეგიის შემცვლელი მოთამაშე ასეთი შეცვლით ვერაფერს მოიგებს. თუ წონასწორობის სიტუაციიდან ორივე გადაიხრება, ამით შეიძლება ორივეს მოგება გაიზარდოს.

ბიმატრიცულ თამაშს, მატრიცული თამაშისაგან განსხვავებით, მრავალი სახის განსაკუთრებულობა ახასიათებს. მაგალითად, თუ მატრიცულ თამაშში ყველა წონასწორობის სიტუაცია როგორც წმინდა, ისე შერეულ სტრატეგიებში, მოთამაშეებს ერთსა და იმავე მოგებას აძლევს, ბიმატრიცულ თამაშში განსხვავებულ წონასწორობის სიტუაციებში (როგორც წმინდაში, ისე შერეულში) მოთამაშეებს განსხვავებული მოგებები შეესაბამება. ამიტომ, ზოგჯერ შეუძლებელია ზუსტად განისაზღვროს ბიმატრიცული თამაშის მოსალოდნელი მოგების მნიშვნელობა. ამის ერთ-ერთი მიზეზია მოთამაშეთა u_{ij} და v_{ij} მოგებებს შორის კავშირის არარსებობა, რის გამოც მოთამაშეები მხოლოდ თავიანთ მოგებებზე ორიენტირებენ, პარტნიორისაგან დამოუკიდებლად. თუმცა მსგავსი დამოუკიდებლობა ზოგიერთ შემთხვევაში ტყუილის და ღალატის გამო, მოთამაშეს შეიძლება ძვირი დაუჯდეს. ასევე, ნეშის თეორემა, რომელიც ამტკიცებს, რომ ნებისმიერ ბიმატრიცულ თამაშში არსებობს თუნდაც ერთი წონასწორული სიტიაცია შერეულ სტრატეგიებში, არ გვაძლევს შერეულ სტრატეგიებში წონასწორობის სიტუაციის პოვნის ხერხს. ეს კი ბიმატრიცული თამაშებისათვის დამოუკიდებელი პრობლემაა, რაც გადაწყვეტილია სხვადასხვა ალგორითმის - ვორობიოვის და კუნის ალგორითმების საშუალებით. n მოთამაშის შემთხვევაში არაკოალიციური თამაშებისათვის არსებობს ლემკე-ჰაუსონის ალგო-

რითმი. ყველა ეს ალგორითმი საკმაოდ რთულია და სტუდენტისათვის მათი გამოყენება შეუძლებელია. შედარებით მარტივად ხერხდება 2×2 ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნა, რისთვისაც გამოიყენება გრაფიკული ხერხი და იგი მოითხოვს ელემენტარული მოქმედებების ჩატარებას. ჩვენ, სწორედ ასეთი თამაშის ამოხსნას დაწვრილებით განვიხილავთ. პრაქტიკული საჭიროების თვალსაზრისით, თითქმის საკმარისია 2×2 ბიმატრიცული თამაშების ცოდნა, ვინაიდან მათი საშუალებით მოდელირდება მარტივი სიტუაციების დიდი რიცხვი საზოგადოებრივ-პოლიტიკური ცხოვრებიდან, რომლებშიც კონკურენციის, კოორდინა-ციისა და კოოპერაციის ელემენტები მონაწილეობს ალტერნატიული ვარიანტების სახით: ვისწავლო თუ არ ვისწავლო, წავიდე თუ არ წავიდე, ხმა მივცე თუ არა და სხვ.

გამოვიყენოთ 4.3.1 განსაზღვრება და (i^*,j^*) სიტუაციას ვუწოდოთ მისაღები (4.5.1) თამაშში 1-ელი მოთამაშისათვის, თუ $u_{i^*j^*} \ge u_{ij^*}$, $\forall i=1,...,m$, ხოლო იგი იქნება მისაღები მე-2 მოთამაშისათვის, თუ შესრულდება პირობები $v_{i^*j^*} \ge v_{i^*j}$, $\forall j=1,...,n$.

განსაზღვრება 4.5.1. (i^*,j^*) სიტუაციას (4.5.1) თამაშში ეწოდება წონასწორული, თუ იგი მისაღებია ორივე მოთამაშისათვის, ე.ი.

$$u_{i^*j^*} \ge u_{ij^*},\ \forall i=1,...,m;\ v_{i^*j^*} \ge v_{i^*j},\ \forall j=1,...,n. \quad (4.5.2)$$

მაშასადამე, (i^*,j^*) სიტუაცია რომ იყოს წონასწორული (4.5.1) ბიმატრიცულ თამაშში, საჭიროა, $u_{i^*j^*}$ უდიდესი იყოს j^* სვეტში, ხოლო $v_{i^*j^*}$ უდიდესი - i^* სტრიქონში.

ამოცანა 4.5.1. ვიპოვოთ წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში (4.2.2) ბიმატრიცულ თამაშში:

$$(H_1,H_2)=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & (1,0) & (-10,-10) \\ 2 & (-1,-1) & (0,1) \end{array}.$$

ამოხსნა. ასეთ ამოცანაში (4.5.2) უნდა შევამოწმოთ ყველა სიტუაციისათვის ცალ-ცალკე. (1,1) სიტუაციაში პირველი მოთამაშის მოგება 1 მაქსიმალურია პირველ სვეტში 1>–1, ხოლო მეორე მოთამაშის მოგება 0 მაქსიმალურია პირველ სტრიქონში 0>–10. ამიტომ (1,1) წონასწორულია. მასში 1-ელი მოთამაშე იგებს 1-ს, მეორე კი - 0-ს. ასევე, წონასწორულია სიტუაცია (2,2), რომელშიც 1-ის მოგებაა 0, ხოლო 2-ის - 1.

ისევე, როგორც $m \times n$ მატრიცულ თამაშში, (4.5.1) ბიმატრიცულ თამაშში მოთამაშეთა შერეული სტრატეგიებია $X = (x_1, ..., x_m) \in \bar{X}$, $Y = (y_1, ..., y_n) \in \bar{Y}$. მათგან შედგენილი სიტუაცია (X, Y) არის სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში $m \times n$ ბიმატრიცულ თამაშში. ამ სიტუაციაში მოთამაშეთა მოგებებია შესაბამისად,

$$H_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_i y_j = XH_1Y^T,$$

$$H_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_i y_j = XH_2Y^T.$$

წმინდა სტრატეგიებისა ანალოგიურად განისაზღვრება მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაცია და წონასწორული სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში ბიმატრიცული თამაშისათვის. კერძოდ, წონასწორული სიტუაცია ასე განისაზღვრება.

განსაზღვრება 4.5.2. (X^*, Y^*) სიტუაციას (4.5.1) თამაშში ეწოდება წონასწორული, თუ $\forall X \in \bar{X}, Y \in \bar{Y}$-სთვის სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$H_1(X^*,Y^*) \geq H_1(X,Y^*), \; H_2(X^*,Y^*) \geq H_2(X^*,Y).$$

თამაშთა თეორიაში მეტად მნიშვნელოვანია ნეშის თეორემა.

თეორემა 4.5.1 (ჯ. ნეში). n მოთამაშის ნებისმიერ სასრულ არაკოალიციურ თამაშში ყოველთვის არსებობს თუნდაც ერთი წონასწორობის სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში.

აქედან გამომდინარე, (4.5.1) ბიმატრიცულ თამაში ყოველთვის არსებობს თუნდაც ერთი წონასწორობის სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში.

მატრიცული თამაშის მსგავსად, (4.5.1) ბიმატრიცულ თამაში, წონასწორული სიტუაციის ანალიზისათვის გამოიყენება მისი ტოლფასი განსაზღვრება შემდეგი სახით: (X^*,Y^*) სიტუაცია (4.5.1) თამაში იქნება წონასწორული, თუ $\forall i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$-სთვის სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$H_1(X^*,Y^*)\geq H_1(i,Y^*),\ H_2(X^*,Y^*)\geq H_2(X^*,j).\qquad(4.5.3)$$

4.5.1. 2×2 ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნა

განვიხილოთ 2×2 ბიმატრიცული თამაში მოგების მატრიცით

$$(\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 2\\\hline 1 & (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12})\\\hline 2 & (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22})\\\hline\end{array}.\qquad(4.5.4)$$

ამოვხსნათ მოცემული თამაში. ამისათვის, პირველ რიგში შევამოწმებთ მისთვის (4.5.2) პირობებს

$$u_{i^*j^*}\geq u_{ij^*},\ \forall i=1,2;\ v_{i^*j^*}\geq v_{i^*j},\ \forall j=1,2.$$

თუ აღნიშნული პირობები შესრულდება, მაშინ არსებობს წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში.

ამის შემდეგ, უნდა შევამოწმოთ მასში წონასწორული სიტუაციის არსებობა შერეულ სტრატეგიებ'ში. ეს კი მოითხოვს თავისებურ ანალიზს.

ისევე როგორც 2×2 მატრიცულ თამაში, (4.5.4) თამაში, 1-ელი და მე-2 მოთამაშის შერეული სტრატეგიებია შესაბამისად $X=(x,1-x)$, $Y=(y,1-y)$. შერეულ სტრატეგიებში წონასწორული სიტუაციის ანალიზისათვის გამოიყენება (4.5.3) უტოლობები

$$H_1(X^*,Y^*)\geq H_1(i,Y^*),\ H_2(X^*,Y^*)\geq H_2(X^*,j)\qquad(4.5.5)$$

$\forall i=1,2;\ j=1,2$ -სთვის.

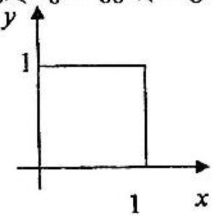
სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში ჩავწეროთ ასე $(X,Y)=\big((x.1-x),(y,1-y)\big)\equiv(x,y)$. რადგან წმინდა სტრატეგია იგივე გადაგვარებული შერეული სტრატეგიაა, ამიტომ (4.5.5) იგივეა, რაც

$$H_1(X^*,Y^*)\geq H_1(0,Y^*),\quad H_2(X^*,Y^*)\geq H_2(X^*,0),$$
$$H_1(X^*,Y^*)\geq H_1(1,Y^*),\quad H_2(X^*,Y^*)\geq H_2(X^*,1).$$

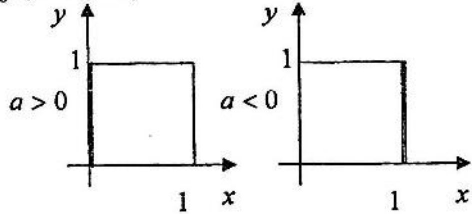
თუ ამ უტოლობებს ჩავწერთ (4.5.1) მოგების მატრიცის ელემენტების საშუალებით და განვიხილავთ სიდიდეებს

$$A=u_{11}+u_{22}-u_{21}-u_{12},\quad B=v_{11}+v_{22}-v_{21}-v_{12},$$
$$a=u_{22}-u_{12},\qquad b=v_{22}-v_{21},$$

განვსაზღვრავთ მოთამაშეთა მისაღებ სიტუაციებს ერთეულოვან კვადრატზე (ნახ. 4.5.1).



ნახ. 4.5.1.



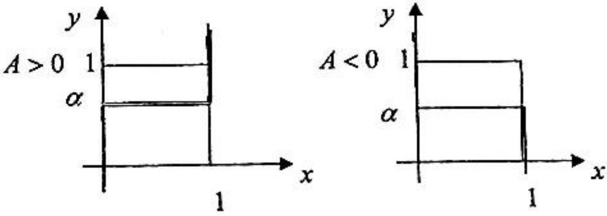
ნახ. 4.5.2.

პირველ რიგში, ვიპოვოთ 1-ელი მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაციები. განვიხილოთ შემთხვევები:

1) $A=a=0$, მაშინ მისაღებია მთელ კვადრატზე, საზღვრის ჩათვლით, მოთავსებული სიტუაციები (ნახ. 4.5.1).

2) $A=0$, $a\neq0$. თუ $a>0$, მაშინ მისაღებია კვადრატის მარცხენა გვერდი (მისაღები სიტუაციები გავამუქოთ). თუ $a<0$, მაშინ მისაღებია კვადრატის მარჯვენა გვერდი (ნახ. 4.5.2).

3) $A\neq0$. აღვნიშნოთ $\alpha=a/A$. $A>0$ და $A<0$ შემთხვევებისათვის მისაღები სიტუაციები მოთავსებულია შემდეგი სახის ზიგზაგებზე (ნახ. 4.5.3):

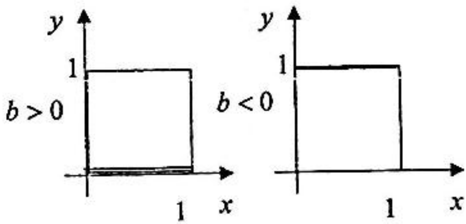


ნახ. 4.5.3.

ახლა ვიპოვოთ მე-2 მოთამაშისათვის მისაღები სიტუაციები.

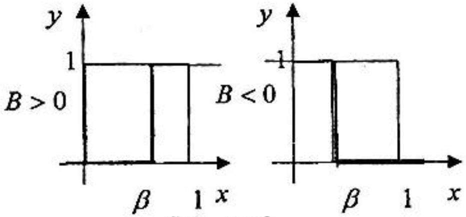
4) $B=b=0$. მაშინ მისაღებია მთელ კვადრატზე მოთავსებული სიტუაციები.

5) $B=0$, $b\neq0$. მისაღებ სიტუაციებს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 4.5.4.

6) $B\neq0$ და, ვთქვათ, $\beta=b/B$. შესაბამის ზიგზაგებს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 4.5.5.

(4.5.4) ბიმატრიცულ თამაშში წონასწორობის სიტუაციებს წარმოადგენს კვადრატის ფარგლებში ორივე მოთამაშის მისაღები სიტუაციების ანუ შესაბამისი ზიგზაგების გადაკვეთის წერტილები.

ამოცანა 4.5.2.. ამოვხსნათ ბიმატრიცული თამაში

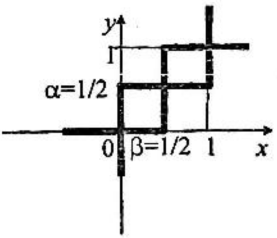
$$(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & (2,0) & (-1,-2) \\ \hline 2 & (1,-3) & (0,-1) \\ \hline \end{array}\,.$$

ამოხსნა. აქ გვაქვს

A=2+0−1−(−1)=2, B=0−1−(−3) −(−2)=4,

a=0−(−1)= 1, b= −1−(−3)= 2,

α=1/2, β=1/2.



ამრიგად, გვაქვს 3) და 6) შემთხვევები. ზიგზაგები იკვეთება შემდეგ სამ წერტილში: (0,0), (1,1) და (0,5;0,5). მაშასადამე, ისინი წონასწორული სიტუაციებია, რომელთაგან პირველი ორი წმინდა სტრატეგიებშია, მესამე კი - შერეულ სტრატეგიებში. ამ სიტუაციებში მოთამაშეთა მოგებებია შესაბამისად:

(0,0)-ში $u_1 = 0, v_1 = -1$; (1,1)-ში $u_2 = 2, v_2 = 0$; (0,5;0,5)-ში

$$u_3 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$v_3 = (-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}.$$

შენიშვნა 4.5.1. როგორც აღვნიშნეთ, ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნისათვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში და შემდეგ, - ვიპოვოთ წონასწორული სიტუაცია შერეულ სტრატეგიებში. როგორც გრაფიკული ანალიზი გვიჩვენებს, შერეულ სტრატეგიებში წონასწორული სიტუაციის ანალიზით ვღებულობთ წონასწორობის სიტუაციებს წმინდა სტრატეგიებშიც.

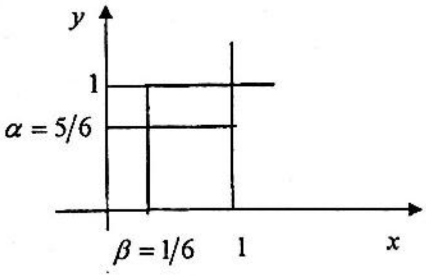
ამოვხსნათ 4.5.1 ამოცანა შერეულ სტრატეგიებში ((4.2.2) ბიმატრიცული თამაში)

$$(H_1,H_2)=\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & (1,0) & (-10,-10) \\ 2 & (-1,-1) & (0,1) \end{array}.$$

აქ,

$$A = 1+0+1+10=12,\ a=0+10=10,\ B=0+1+1+10=12$$
$$b=1+1=2,\ \alpha=10/12=5/6,\ \beta=1/6.$$

ამიტომ, მისაღებ სიტუაციებს აქვს შემდეგი სახე:



მიეიღეთ, რომ წონასწორული სიტუაციებია: (0,0), (1,1) და (1/6,5/6). აქედან, პირველ და მეორეში განსაზღვრული გვაქვს მოთამაშეთა მოგებები, მესამეში კი მათი მოგებებია:

$$u = 1.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} - 10.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} - 1.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = -\frac{5}{6},$$

$$v = -10.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} - 1.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} + 1.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} = -\frac{5}{6}.$$

4.5.2. ბიმატრიცული თამაშების ზოგიერთი მოდელი

ახლა განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული ამოცანისათვის ბიმატრიცული თამაშის მოდელი. ეს მოდელები ცნობილია და გამოიყენება კიდეც ეკონომიკის, პოლიტიკის და ქვეყნის ნაციონალური უსაფრთხოების დაცვის პრობლემებში.

ამოცანა 4.5.3 (ოჯახური დავა). ქმარსა (1-ელი მოთამაშე) და ცოლს (მე-2 მოთამაშე) გადაწყვეტილი აქვთ გამოსასვლელი დღის ერთად გატარება. არჩევანი კი ორია - ფეხბურთი (F) ან ოპერა (O). ამასთან, ფეხბურთზე წასვლით ქმარი მეტადაა დაინტერესებული, ვიდრე ცოლი, ხოლო ოპერის არჩევანში საპირისპირო სურათი გვაქვს. ამავე დროს, ერთად ყოფნა ორივეს სურვილია. თუ მათი არჩევანი არ დაემთხვევა ერთმანეთს ანუ დღის ღონისძიებას ერთად ვერ დაესწრებიან, მაშინ დღე ითვლება ჩაშლილად.

მოდელის შედგენა და ანალიზი. 1-ელი მოთამაშის სტრატეგიებია: $1(F)$ - ფეხბურთზე წასვლა, $2(O)$ - ოპერაში წასვლა. მე-2 მოთამაშის სტრატეგიები იგივეა. ამრიგად, ორივე მოთამაშეს აქვს სტრატეგიების ერთი და იგივე სიმრავლე $S_1 = S_2 = \{1(F), 2(O)\}$. (F,F) სიტუაციაში (ორივე ფეხბურთზე) მოთამაშეთა სარგებლიანობები შევაფასოთ (2,1) წყვილით, (O,O) სიტუაციაში (ორივე ოპერაში) სარგებლიანობებია (1,2), (F,O) სიტუაციაში (ქმარი ფეხბურთზე, ცოლი ოპერაში) სარგებლიანობებია

(0,0), რაც იგივე იქნება (O,F) სიტუაციაში (ქმარი ოპერაში, ცოლი ფეხბურთზე). ჩვენი ამოცანის მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

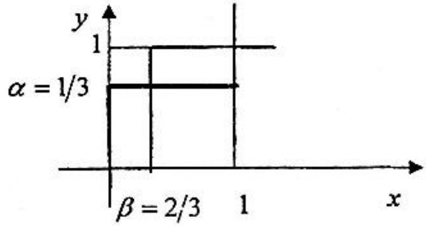
$$(H_1,H_2)=\begin{array}{c|cc} & 1(F) & 2(O) \\ \hline 1(F) & (2,1) & (0,0) \\ 2(O) & (0,0) & (1,2) \end{array}.$$

გამოვთვალოთ საჭირო მნიშვნელობები:

$$A=2+1-0-0=3, a=1-0=1, B=1+2-0-0=3,$$

$$b=2-0=2, \alpha=1/3, \beta=2/3.$$

მოთამაშეთა მისაღები სიტუაციების ზიგზაგები ასეთია:



აქ ზიგზაგები იკვეთება სამ წერტილში. ესენია წონასწორობის სიტუაციები: (0,0) - მოთამაშეები ირჩევენ თავიანთ მეორე სტრატეგიებს; (1,1) - მოთამაშეები ირჩევენ თავიანთ პირველ სტრატეგიებს; $(2/3, 1/3)$ - I-ელი ირჩევს I-ელ სტრატეგიას $2/3$ ალბათობით, მე-2 კი I-ელ სტრატეგიას ირჩევს $1/3$ ალბათობით. ამ სიტუაციებში მოთამაშეთა მოგებებია, შესაბამისად, (1,2), (2,1), $(2/3, 2/3)$. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს მოთამაშეთა საშუალო მოგებების წყვილს:

$$u=2.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}+1.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3},\ v=1.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}+2.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

ამოცანა 4.5.4 (პატიმართა დილემა - Prisoner's Dilemma). დააკავეს ორი ეჭვმიტანილი მძიმე დანაშაულის ჩადენასთან დაკავშირებით და მოათავსეს ერთმანეთისაგან

განცალკავებით ისე, რომ მათ არ აქვთ შესაძლებლობა ერთმანეთს მიაწოდონ რაიმე სახის ინფორმაცია. პირდაპირი ბრალდება მათ მიმართ სამართალდამცავებს არა აქვთ. ამიტომ მათი დადანაშაულება დამოკიდებულია იმაზე, აღიარებენ თუ არა ისინი დანაშაულს. პოლიცია სთავაზობს მათ შემდეგს: თუ ერთი მისცემს ჩვენებას მეორის დანაშაულში მონაწილეობაზე, ხოლო ის მეორე გაჩუმდება, მაშინ პირველს გაათავისუფლებენ და მეორეს მიუსჯიან მაქსიმუმ 10-წლიან პატიმრობას. თუ ორივე გაჩუმდება, მაშინ პოლიციას შეუძლია დაუმტკიცოს მათ გაცილებით ნაკლები სიმძიმის ბრალდება (ვთქვათ, იარაღის ტარება) და მიესჯებათ ერთწლიანი პატიმრობა. თუ ორივე მისცემს ჩვენებას, მაშინ მათ მიუსჯიან 8-წლიან პატიმრობას. ამრიგად, თითოეულს აქვს ორი გადაწყვეტილებიდან ერთ-ერთის არჩევის შესაძლებლობა: გაჩუმდეს თუ მისცეს ჩვენება?

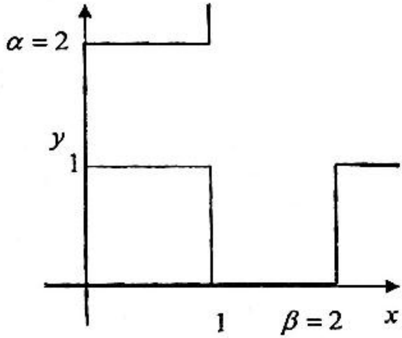
მოდელის შედგენა და ანალიზი. ცხადია, თითოეულ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: $1(NC)$ - არაღიარება (გაჩუმება) და $2(C)$ - აღიარება (Confess). მაშასადამე, ორივე მოთამაშეს აქვს სტრატეგიების ერთი და იგივე სიმრავლე - $S_1 = S_2 = \{1(NC), 2(C)\}$. ვთქვათ, მოთამაშის მოგება ნიშნავს პატიმრობის წელს უარყოფითი ნიშნით. ამიტომ, შესაბამისი ბიმატრიცული თამაშის მოდელი იქნება:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(NC) & 2(C) \\ \hline 1(NC) & (-1,-1) & (-10,0) \\ 2(C) & (0,-10) & (-8,-8) \end{array}.$$

აქ გვაქვს:

$$A = -1-8-0+10 = 1, a = -8+10 = 2, B = -1-8+10-0 = 1,$$
$$b = -8+10 = 2, \alpha = 2/1 = 2, \beta = 2/1 = 2.$$

მოთამაშეთა მისაღები სიტუაციების შესაბამისი ზიგზაგების გადაკვეთა გვაძლევს შემდეგს:



ზიგზაგები გადაიკვეთა მხოლოდ ერთ (0,0) წერტილში, რაც ნიშნავს, რომ მოცემულ თამაშს ერთადერთი წონასწორობის სიტუაცია აქვს და ისიც წმინდა სტრატეგიებში - მოთამაშეებმა უნდა აირჩიონ თავიანთი მეორე სტრატეგიები - (2,2). მაშასადამე, მოთამაშეთა საუკეთესო გადაწყვეტილებაა აღიარონ დანაშაულში მონაწილეობა, რითაც მათ რვაწლიანი პატიმრობა მიესჯებათ.

აქ პარტნიორის შეცდომით მოთამაშე დიდ მოგებას მიიღებს: თუ მე-2 შეცდა, ე.ი. ვერ მოძებნა წონასწორული სიტუაცია ანუ თავისი ოპტიმალური სტრატეგია, მაშინ 1-ელი მოთამაშე (–8)-ის ნაცვლად მოიგებს 0-ს, ხოლო შეცდომის ჩამდენი მე-2 მოთამაშე მოიგებს (–10)-ს.

ცხადია, მოცემულ თამაშში მოთამაშეებისათვის ყველაზე საუკეთესო გადაწყვეტილება იქნებოდა თავისი პირველი სტრატეგიის არჩევა, მაგრამ შესაბამისი სიტუაცია (1,1) აქ არამდგრადია.

პატიმართა დილემის თამაშს დიდი ხნის ისტორია აქვს და ამ პერიოდის განმავლობაში იგი გამოყენებულ იქნა სხვადასხვა ექსპერიმენტებში და მან დაამტკიცა თავისი საჭიროება. განვიხილოთ მისი ინტერპრეტაცია არჩევნებთან დაკავშირებით.

ჩავთვალოთ, რომ ორი პარტიის თამაშის მოდელში თითოეულ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: 1*N* (*No*) - არ გააყალბოს არჩევნები და 2Y(yes) - გააყალბოს არჩევნები.

ვთქვათ, პატიმართა დილემის მოდელში სტრატეგია "გაჩუმება" ნიშნავს მოთამაშის კანონიერ ქმედებას - N სტრატეგიის არჩევას, ხოლო "აღიარება" ნიშნავს Y სტრატეგიის არჩევას. მაშასადამე, არჩევნების თამაშის მოდელში ორივე მოთამაშეს აქვს სტრატეგიების ერთი და იგივე სიმრავლე - $S_1 = S_2 = \{1(N), 2(Y)\}$. შესაბამის სიტუაციებში მოთამაშეთა მოგებები უცვლელად დავტოვოთ და დავწეროთ ბიმატრიცული თამაში:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(N) & 2(Y) \\ \hline 1(N) & (-1,-1) & (-10,0) \\ 2(Y) & (0,-10) & (-8,-8) \end{array}.$$

ამ მოდელში პარტიათა სარგებლიანობა ნათლად შეესაბამება არჩევნებში თითოეული მოთამაშის ქმედებას. როგორია ამ თამაშში რაციონალურ მოთამაშეთა ოპტიმალური გადაწყვეტილებები? მასში არსებობს ერთადერთი წონასწორობის სიტუაცია მხოლოდ წმინდა სტრატეგიებში და ესაა (2, 2) - ერთდროულად ორივემ რომ გააყალბოს არჩევნები. სიტუაცია (1,1) კი ოპტიმალურია პარეტოს აზრით, ანუ არჩევნების არგაყალბება ორივე მოთამაშისათვის საუკეთესოა. მაგრამ ეს სიტუაცია არ არის მდგრადი (რომელიც შეცვლის გადაწყვეტილებას, ის მოიგებს) და ასეთი გადაწყვეტილების მიღება მხოლოდ კომპრომისული გზებითაა შესაძლებელი, რაც იგივე კოოპერაციაა ორი მოთამაშის შემთხვევაში. ეს კი ნიშნავს, რომ კანონის სრული მოთხოვნით არც ერთმა მხარემ არ უნდა გააყალბოს არჩევნები, რომელიც ორივე მოთამაშისათვის, როგორც ჯგუფისათვის (მაშასადამე, საერთოდ ქვეყნისათვის) ყველაზე საუკეთესოა, რადგან ჯამურად ორივე ამ შემთხვევაში მიიღებს მაქსიმალურ სარგებლიანობას. ნებისმიერი სხვა გადაწყვეტილება მოცემულ თამაშში ნაკლებად ხელსაყრელია. მოცემული ამოცანის შემთხვევაში, პარეტოს ოპტიმალური გადაწყვეტილება (1,1) საწინააღმდეგოა ნეშის წონასწორული (2,2) სიტუაციის.

ამოცანა **4.5.5 (მშიშარა-Chicken).** ორი ავტომანქანა დატვირთულია ფეთქებადი ნივთიერებებით და მათი მძღოლები ეჯიბრებიან ერთმანეთს, საპირისპირო მიმარ-

თულებით მოძრაობისას, ვიწრო გზის გავლაში. ორივე ავტომანქანა ერთდროულად მოძრაობისას ერთმანეთს გვერდს ვერ აუვლის. მძღოლი, რომელიც პირველად გადაუხვევს გზიდან და გზას დაუთმობს მეორეს, თავის მეგობრებში კარგავს ავტორიტეტს და იწოდება მშიშარად, ხოლო მეორე მძღოლი გამარჯვებულად ითვლება. თუ არც ერთი არ გადაუხვევს გზიდან, მაშინ მათი შეჯახება გარდაუვალია, რისი შედეგიც იქნება ავტომანქანების აფეთქება და მძღოლების დაღუპვა.

მოდელის შედგენა და ანალიზი. ამ თამაშში თითოეულ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: $1(S)$ - გადახვევა (Swerve) და $2(DS)$ - პირდაპირ წასვლა (Drive straight). მაშასადამე, ორივე მოთამაშეს აქვს სტრატეგიების ერთი და იგივე სიმრავლე - $S_1 = S_2 = \{1(S), 2(DS)\}$. (S, DS) სიტუაციაში, როდესაც ორივე მძღოლი ერთდროულად დაუთმობს გზას ერთმანეთს, მათი სარგებლიანობა შევაფასოთ 5-ით. თუ არც ერთი მძღოლი არ გადაუხვევს და ორივე გააგრძელებს გზას პირდაპირ, მაშინ ყველაზე ცუდი შედეგი - მძღოლების დაღუპვა შევაფასოთ (−100)-ით. თუ ერთი გადაუხვევს და მეორე არა, გადამხვევის სარგებლიანობა შევაფასოთ (−10)-ით, ხოლო ვინც პირდაპირ გააგრძელებს გზას, მისი სარგებლიანობა იყოს 10. ამრიგად, თამაშის მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(S) & 2(DS) \\ \hline 1(S) & (5,5) & (-10,10) \\ 2(DS) & (10,-10) & (-100,-100) \end{array} .$$

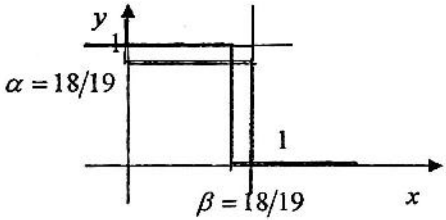
გამოვთვალოთ საჭირო პარამეტრები:

$$A = 5 - !00 - 10 + 10 = -95, a = -100 + 10 = -90,$$

$$B = 5 - 100 + 10 - 10 = -95, b = -100 + 10 = -90,$$

$$\alpha = 90/95 = 18/19, \beta = 18/19.$$

შესაბამისი ზიგზაგების გადაკვეთა გვაძლევს შედეგს:



ზიგზაგები გადაიკვეთა სამ წერტილში და ამიტომ, მოცემულ თამაშში გვაქვს სამი წონასწორული სიტუაცია - ორი წმინდა სტრატეგიებში და ერთი შერეულში: (0,1), (1,0), $(18/19, 18/19)$. პირველი გვიჩვენებს, რომ პირველმა მძღოლმა გზა პირდაპირ გააგრძელოს და მეორემ გადაუხვიოს, მეორე გვიჩვენებს პირიქით - პირველმა გადაუხვიოს და მეორემ გააგრძელოს გზა, ხოლო მესამე სიტუაცია ამბობს, რომ 18/19 ალბათობით ორივემ უნდა გადაუხვიოს გზიდან - დაუთმოს გზა პარტნიორს.

პარეტოს აზრით, მოცემულ თამაშში ოპტიმალურია სიტუაცია (1,1), რომელსაც შეესაბამება მოგებები (5,5), მაგრამ იგი არ არის მდგრადი. თუმცა ეს სიტუაცია - ორივე მოთამაშის მიერ გზის დათმობა, ყველაზე საუკეთესოა ორივესათვის.

ამ თამაშსაც აქვს ინტერპრეტაცია არჩევნების ენაზე. ვთქვათ, გზის დათმობა ნიშნავს N სტრატეგიას - როგორც წინა თამაშში არჩევნების არგაყალბებას; ხოლო გზის გაგრძელება ნიშნავს Y სტრატეგიას. მაშინ ორი პარტიის თამაშის მოდელი იქნება ბიმატრიცული თამაში:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(N) & 2(Y) \\ \hline 1(N) & (5,5) & (-10,10) \\ 2(Y) & (10,-10) & (-100,-100) \end{array},$$

რომლის ანალიზი გაკეთებული გვაქვს.

ახლა განვიხილოთ ბიმატრიცული თამაში, რომელშიც მონაწილეობს ბუნება (შემთხვევითობა) და ვაჩვენოთ როგორ შეიძლება დავიყვანოთ იგი ნორმალურ ფორმაზე. ანალოგიური ტიპის ამოცანასთან გვქონდა საქმე წინა

პარაგრაფის 4.4.1 ამოცანაში, რომელიც ჩავწერეთ მატრიცული თამაშის ფორმით.

ამოცანა 4.5.6 (ფეხით მოსიარულის და ავტომობილის მძღოლის კონფლიქტი). ფეხით მოსიარულის (1-ელი მოთამაშე) და ავტომობილის მძღოლის (მე-2 მოთამაშე) ურთიერთობა 1-ელი მოთამაშის მიერ საავტომობილო გზის გადაკვეთის მცდელობისას შესაძლოა მისთვის ტრაგიკული შედეგით დასრულდეს. თითოეულ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: s_1 - გამოიჩინოს სიფრთხილე და s_2 - არ გამოიჩინოს სიფრთხილე. მათ მიერ არჩეულ სტრატეგიებზეა დამოკიდებული საგზაო-სატრანსპორტო შემთხვევა (სსშ) – მე-2 მოთამაშის მიერ 1-ელი მოთამაშის დაზარალება. გზის ამ მონაკვეთისათვის ცნობილია შემდეგი გარემოება: თუ არც ერთი მოთამაშე მათგან არ გამოიჩენს სიფრთხილეს, მაშინ სსშ-ის ალბათობაა 0,5; თუ მხოლოდ ერთი მოთამაშე არ გამოიჩენს სიფრთხილეს, მაშინ სსშ-ის ალბათობაა 0,1; ხოლო თუ ორივე იქნება ფრთხილი, მაშინ სსშ-ის ალბათობაა 0,01. თუ მოხდება სსშ, მაშინ 1-ელი მოთამაშის ზარალი შეადგენს 1000 ერთეულს, ხოლო მძღოლის ზარალი იყოს 200 ერთეული. გარდა ამისა, სიფრთხილის გამოჩენა აზარალებს ორივეს (სხვადასხვა ფაქტორის გამო) და ეს ზარალი გამოვსახოთ 100-ით. დავწეროთ თამაშის მოდელი.

მოდელის შედგენა და ანალიზი. ჩვენს თამაშში მოთამაშეთა სარგებლიანობები გამოსახულია გარკვეული პირობითი ერთეულებით (არა მაინცდამაინც ფულადი ერთეულებით) და სარგებლიანობების რაიმე დონეს მოთამაშეებისათვის გამოსახავენ მოცემულ სიტუაციაში.

თამაშში გვაქვს ოთხი სიტუაცია:

$$(s_1,s_1),(s_1,s_2),(s_2,s_1),(s_2,s_2).$$

(s_1,s_1) სიტუაციაში ორივე მოთამაშე იჩენს სიფრთხილეს, თუმცა, მოსალოდნელია როგორც სსშ 0,01 ალბათობით და 1-ელი მოთამაშე მოიგებს $(-1000-100)=(-1100)$, ისე 0,99 ალბათობით არ მოხდება სსშ და იგი ზარალდება მხოლოდ 100-ით, ანუ ასეთი ალბათობით მოიგებს (-100)-ს. მაშასადამე, 1-ელი მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება (s_1,s_1) სიტუაციაში ტოლია

$$0.01.(-1100) + 0,99.(-100) = -110.$$

იმავე სიტუაციაში მე-2 მოთამაშის (მძღოლის) მოსალოდნელი მოგება იქნება

$$0,01.(-300) + 0,99.(-100) = -102 .$$

ანალოგიურად გამოითვლება მოთამაშეთა მოსალოდნელი მოგებები დანარჩენ სამ სიტუაციაში და მიღებული მოგებები (სინამდვილეში ზარალი-წაგება) მოგვცემს ბიმატრიცულ თამაშს

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline s_1 & (-110,-102)) & (-200,-20) \\ s_2 & (-100,-120) & (-500,-100) \end{array} .$$

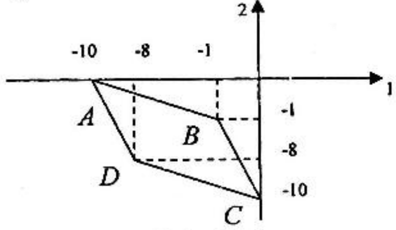
წინა ამოცანების მსგავსად, ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ თამაშში არსებობს მხოლოდ ერთი წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში - (s_1, s_2), რაც მიუთითებს, რომ 1-ელი მოთამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილებაა "სიფრთხილე", მე-2 მოთამაშის კი - არ დაიცვას სიფრთხილე".

ამოცანა 4.5.7 (ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნა კოოპერაციული ვარიანტით). დავუშვათ, ბიმატრიცულ თამაშში მოთამაშეებს შორის შესაძლებელია კოოპერაცია. კოოპერაციაში იგულისხმება მოლაპარაკების შესაძლებლობა. ასეთი თამაშის როლში განვიხილოთ "პატიმართა დილემის" მოდელი

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(NC) & 2(C) \\ \hline 1(NC) & (-1,-1) & (-10,0) \\ 2(C) & (0,-10) & (-8,-8) \end{array} .$$

ბუნებრივია, მოლაპარაკებაში უნდა ვიგულისხმოთ თამაშში სტრატეგიის არჩევის თაობაზე შეთანხმება. თუ მოთამაშეები შეთანხმდებიან სიტუაციის არჩევაზე, მაშინ მათ უნდა შეძლონ გაცილებით მეტი მოგების მიღება, ვიდრე წონასწორობის სიტუაციაში. ასეთ შეთანხმებასთან მივყავართ პარეტოს გადაწყვეტილებას. პარეტოს გადაწყვეტილების მისაღებად, ბიმატრიცული თამაში უნდა წარმოვადგინოთ დიაგრამის სახით. ამისათვის, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ვიპოვით სიტუაციების შესაბა-

მის მოგებებს წერტილების სახით და მათ შევაერთებთ მონაკვეთებით. ასე მივიღებთ ამოზნექილ მრავალკუთხედს. ჩვენი თამაშისათვის ამოზნექილ ოთხკუთხედს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 4.5.6.

პარეტოს შეფასებები შეესაბამება ABC საზღვარს, რომელთაგან ყველაზე უკეთესია B-ს შესაბამისი მოგებათა წყვილი $(-1,-1)$ და იგი შეესაბამება თამაშში $\left(1(N),1(N)\right)$ პარეტოს სიტუაციას. როგორც 4.5.4 და 4.5.5 ამოცანებში აღვნიშნეთ, იგი არამდგრადია.

4.5.3. კონფლიქტის მოდელირება და ანალიზი მეტათამაშებით

თამაშში წონასწორული სიტუაციის პოვნა გვეხმარება განვსაზღვროთ კონფლიქტში მონაწილე მხარეთა ოპტიმალური და, მაშასადამე, რაციონალური ქცევის სტრატეგიები, მხარეთა ერთმანეთთან ურთიერთობის ხასიათი. თუ ასეთი სტრატეგიების გამოყენებით ეს ურთიერთობა საკმაოდ გაგრძელდება და ეს სიტუაცია მისაღები იქნება კონფლიქტში მონაწილე ყველა მხარისათვის, მაშინ ასეთი ინფორმაცია შეიძლება სასარგებლო აღმოჩნდეს კონფლიქტის გადაწყვეტის შესაძლო გზის პროგნოზისათვის. თუ მიღებული წონასწორული სიტუაცია მიუთითებს კონფლიქტის გაღრმავებას ან მის განვითარებას დროში, მაშინ ეს ინფორმაციაც მნიშვნელოვნად ჩაითვლება, ვინაიდან ამით განისაზღვრება კონფლიქტის განვითარების არასასურველი ვარიანტები.

როგორც ვნახეთ, წონასწორული ანუ სტაბილური სიტუაცია მოცემულ თამაშში შეიძლება რამდენიმე არსებობდეს. ამ შემთხვევაში უნდა ვიფიქროთ მათგან ჩვენთვის (ჩვენი მხარისათვის) უფრო საინტერესო ვარიანტის არჩევა და რეალიზება. მოცემულ თამაშში წონასწორული სიტუაციის პოვნა უფრო სასარგებლოა მოწინააღმდეგე მხარეებთან მოსალაპარაკებელი პროცესის ანალიზისა და პროგნოზირებისათვის, რადგან ამით კიდევ უფრო გამყარდება სტაბილური სიტუაციიდან ცალმხრივი გადახრის არახელსაყრელობა. მოლაპარაკება კი განსაკუთრებით აუცილებელია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც წონასწორული სიტუაცია ამავდროულად ეფექტურიცაა, პარეტოს აზრით.

კონფლიქტების გადაწყვეტისას საკმაოდ მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა მეტათამაშის მოდელი, რომელიც ისევ თამაშთა თეორიის მოდელია და მის ასაგებად მოცემული უნდა იყოს კონკრეტული თამაშის მოდელი ბაზისის როლში. ასეთ საბაზისო მოდელზე დაყრდნობით შესაძლებელია რამდენიმე მეტათამაშის მოდელის აგება. მეტათამაშის მოდელს გარკვეული ინფორმაციული დატვირთვა აქვს. ჩვენ განვიხილავთ ერთი კონკრეტული თამაშის საბაზისო მოდელს და მისგან აგებულ მეტათამაშებს. დავრწმუნდებით, რომ საომარი სიტუაციების მოდელირებისათვის უფრო მიზანშეწონილია მეტათამაშების მოდელების განხილვა და მათი ანალიზი.

ამოცანა 4.5.8. ვთქვათ, ორი ქვეყნის კონფლიქტის მათემატიკურ მოდელს - 2×2 ბიმატრიცულ თამაშს აქვს სახე:

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & (3,2)^{*} & (4,1) \\ \hline 2 & (1,3) & (2,4) \\ \hline \end{array}. \qquad (4.5.6)$$

ავაგოთ მისი მეტათამაშები.

ამოხსნა. ამ თამაშში არსებობს ნეშის ერთადერთი წონასწორული სიტუაცია და ისიც წმინდა სტრატეგიებში

- (1,1). მაშასადამე, ამ კონფლიქტის ერთადერთი სტაბილური გამოსავალია (1,1) სიტუაცია.

ახლა განვსაზღვროთ Γ (4.5.6) თამაშის მეტათამაში, რომელსაც მოცემული თამაშის მეტაგაფართოება ეწოდება. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ Γ თამაშში მოთამაშეებმა იციან ერთმანეთის სტრატეგიები და შეფასებები. ბიმატრიცულ თამაშში, თამაშის წესის შესაბამისად, თითოეული მოთამაშე დამოუკიდებლად ირჩევს თავის სტრატეგიას ისე, რომ არაფერი იცის მისი მოწინააღმდეგის არჩევანზე. განვიხილოთ მოცემული თამაშის გათამაშების ისეთი შემთხვევა, როდესაც რომელიმე მოთამაშე ფლობს გარკვეულ ინფორმაციას პარტნიორის არჩევანის გადაწყვეტილების შესახებ და მასზე დამოკიდებულებით მას აქვს შესაძლებლობა გააკეთოს არჩევანი თავისი სტრატეგიის თაობაზე. მაშინ, ყოველ ასეთ თამაშს ეწოდება მოცემული თამაშის მეტათამაში.

სტრატეგიული თამაშის მეტათამაშები პირველად განსაზღვრა ამერიკელმა მათემატიკოსმა ნ. ჰოვარდმა. დღეისათვის შექმნილია მეტათამაშების თეორია, რომელიც წარმოადგენს კლასიკურ თამაშთა თეორიის ინფორმაციულ განზოგადებას.

განვსაზღვროთ (4.5.6) თამაშის პირველი დონის მეტათამაშები, რომელთა რიცხვი ორია. ასეთ მეტათამაშებს, კიდევ, პირველი დონის მეტასტრატეგიული გაფართოებები ეწოდება. Γ_1 იყოს Γ-ს ისეთი პირველი მეტათამაში, რომელშიც პირველი მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეა $S_1=\{1,2\}$, ხოლო მეორე მოთამაშე ფლობს ინფორმაციას პირველი მოთამაშის მიერ მიღებული გადაწყვეტილების შესახებ. ამ შემთხვევაში, მეორე მოთამაშის მეტასტრატეგიების სიმრავლეს წარმოადგენს $S_2^{S_1}=\{1/1,1/2,2/1,2/2\}$. აქ პირველი მეტასტრატეგია 1/1 აღნიშნავს, რომ მეორე მოთამაშე Γ-ში აირჩევს თავის პირველ სტრატეგიას, თუ პირველმა აირჩია პირველი სტრატეგია; ხოლო ისევ პირველ სტრატეგიას აირჩევს, თუ პირველი აირჩევს მეორე სტრატეგიას. მეტასტრატეგია 1/2

ალნიშნავს: მეორე აირჩევს 1-ს ანუ პირველ სტრატეგიას, თუ პირველი აირჩევს პირველს, ხოლო აირჩევს 2-ს, ანუ მეორე სტრატეგიას, თუ პირველი აირჩევს მეორე სტრატეგიას. 2/1 ნიშნავს: მეორე აირჩევს 2-ს, თუ პირველი აირჩევს 1-ს და აირჩევს 1-ს, თუ პირველი აირჩევს 2-ს. 2/2 - მეორე ირჩევს 2-ს თუ პირველი აირჩევს 1-ს და ირჩევს 2-ს, თუ პირველი აირჩევს 2-ს. ამიტომ, Γ_1 მეტათამაში ასე გამოისახება:

$\Gamma_1 =$

	1/1	1/2	2/1	2/2
1	$(3,2)^*$	$(3,2)^*$	(4,1)	(4,1)
2	(1,3)	(2,4)	(1,3)	(2,4)

მიღებულ მეტათამაში ორი წონასწორული სიტუაცია მივიღეთ - (1,1/1) და (1,1/2), რომლებშიც მოგებები ერთი და იგივეა. აქ პირველი სიტუაცია (1,1/1) ალნიშნავს: Γ თამაში პირველმა მოთამაშემ აირჩიოს პირველი სტრატეგია; მეორემ კი აირჩიოს პირველი სტრატეგია, თუ პირველი აირჩევს პირველ სტრატეგიას, ხოლო აირჩიოს ისევ პირველი სტრატეგია, თუ პირველი აირჩევს მეორე სტრატეგიას.

ასეთი თამაშები მრავალმხრივ საინტერესოა. ჯერ ერთი, თუ მოცემულ საბაზისო თამაში წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში არ არსებობს, მაშინ ასეთი სიტუაცია რომელიმე მეტაგაფართოებაში აუცილებლად იარსებებს. თუკი იგი არსებობს მოცემულ საბაზისო თამაში, მაშინ ასეთი აუცილებლად აღმოჩნდება მის რომელიმე მეტაგაფართოებაში.

Γ-ს ისეთი პირველი დონის მეტათამაში Γ_2, რომელშიც მე-2 მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეა $S_2 = \{1,2\}$, ხოლო პირველს შეუძლია მოიპოვოს ზუსტი ინფორმაცია მეორის მიერ მიღებულ გადაწყვეტილებაზე, იქნება შემდეგი:

$$\Gamma_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1/1 & (3,2)^{*} & (4,1) \\ \hline 1/2 & (3,2) & (2,4) \\ \hline 2/1 & (1,3) & (4,1) \\ \hline 2/2 & (1,3) & (2,4) \\ \hline \end{array}.$$

მიღებულ მეტათამაშში კი ახალი წონასწორული სიტუაცია ვერ მივიღეთ.

ამის შემდეგ, ისევ შეგვიძლია განვიხილოთ მიღებული თამაშების პირველი დონის ანუ თავიდან მოცემულის მეორე დონის მეტათამაშები და ა.შ.

ახლა შევეხოთ მეტათამაშების თეორიის მთავარ მიზანს, რომლის საწყისები, როგორც ზემოთ ვთქვით, დამუშავდა თანამედროვეობის ერთ-ერთი გამოჩენილი მათემატიკოსის, თამაშთა თეორიის სპეციალისტის ნიგელ ჰოვარდის (1934-2008) მიერ. მის სახელთანაა დაკავშირებული კონფლიქტების თეორიის განვითარების მნიშვნელოვანი ეპოქა. მან თამაშთა თეორიისაგან ააგო მეტათამაშების თეორია და ახსნა ნებისმიერ კონფლიქტში მონაწილე ყველა მოთამაშის მიერ თავისი მიზნისათვის ყველა მისაღები გადაწყვეტილების მიღწევის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. მანვე შექმნა დრამის თეორია. ამიტომ არის იგი ცნობილი ინგლისურენოვან სამყაროში, როგორც წამყვანი სპეციალისტი მეტათამაშების თეორიის და დრამის თეორიის გამოყენებით ომის და მშვიდობის პრობლემების გადაწყვეტის საქმეში. XX ს-ის 90-იანი წლების შემდეგ გამოცემულმა მისმა შრომებმა საფუძველი ჩაუყარა არასაომარი საშუალებებით მშვიდობის მიღწევის კონცეფციას. ამ ფაქტის აღიარების შედეგად, აგრეთვე, აშშ-ის უმაღლესი სამხედრო მეთაურთა შემადგენლობის გადამზადების საქმეში აქტიური მონაწილეობის გამო, აშშ-ის თავდაცვის სამინისტრომ 2007 წელს ნ. ჰოვარდი დააჯილდოვა სპეციალური ჯილდოთი "მშვიდობისდამცველი ოპერაციების ჩატარების კონცეფციის დამუშავებაში შეტანილი მეცნიერული წვლილისათვის".

თამაშთა თეორიის განვითარებამ აჩვენა, რომ ბიზნესსა და პოლიტიკაში კონფლიქტის პირობებში მხარეებს შორის კონსულტაციებსა და მოლაპარაკების წარმოებაზე მოთხოვნა მთავარი მოტივია კიდევ უფრო რეალისტური რაციონალური გადაწყვეტილების მიღების თეორიის შექმნისათვის. კონსულტაციები და მოლაპარაკებები მოითხოვს ინტერაქტიურ ურთიერთობებს, შეკითხვებს და პასუხებს, შედეგების რეფლექსიებს. უნარი იმისა, რომ გაითვალისწინო კონფლიქტში მონაწილეთა ქმედებები, აგრეთვე, მათი შესაძლო კონტრქმედებები და კონტრქმედებებზე ქმედებები, არის კონფლიქტის ეფექტური ანალიზისა და გადაწყვეტის აუცილებელი პირობა. თითოეული მოთამაშე კონფლიქტურ სიტუაციას, როგორც წესი, თავისებურად აფასებს. მაშასადამე, უნარი იმისა, რომ კონფლიქტში მოთამაშეებმა ერთმანეთს შეუთავსონ განსხვავებული თვალსაზრისი და იპოვონ შესაბამისი გადაწყვეტილება, ასევე, რეალისტური თამაშთა თეორიის აუცილებელი პირობაა. ემოციები, ირაციონალური ქმედებები, ტყუილი, უნდობლობა, მუქარები და დაპირებები არსებითად მოქმედებს მოთამაშეთა უპირატესობების ცვლილებებზე და, მაშასადამე, მოთამაშეთა ქცევაზე, კონფლიქტის განვითარებაზე. ნ. ჰოვარდის აზრით, ეს ფაქტორებიც უნდა ყოფილიყო გათვალისწინებული რეალისტურ თამაშთა თეორიის მიერ. იგი თვლის, რომ ამ მიზნით აუცილებელია და საკმარისი ყველა მოთამაშის მიერ ურთიერთრეაქციებისა და კონტრრეაქციების ანალიზი ანუ რეფლექსია - საკუთარი ქმედებების ანალიზი სხვა მოთამაშეთა შესაძლო რეაქციების გათვალისწინებით. ყოველივე ამის საშუალებით, მოთამაშეს შეუძლია გაზარდოს თავისი ქცევის ობიექტურობის ხარისხი. ამასთან, რაც უფრო ღრმა იქნება რეფლექსია, მით მაღალი იქნება მოთამაშის ქმედების ობიექტური რაციონალურობის ხარისხი. ასეთი იდეითაა აგებული კლასიკურ თამაშთა თეორიის განზოგადებული მეტათამაშების თეორია.

ზემოთ განხილული (4.5.6) თამაში კლასიკური თამაშია, Γ_1 და Γ_2 კი მისგან აგებული მეტათამაშებია. განსხვავება მათ შორის მხოლოდ ისაა, რომ ამ მეტათა-

მაშებში ან კიდევ უფრო მაღალი დონის მეტათამაშებში მოთამაშეებმა იციან ერთმანეთის სტრატეგიები და არჩევანი. Γ_1-ით და Γ_2-ით მოცემულ მატრიცებში მითითებული მეტაშედეგები განსხვავდება Γ-თი მოცემული შედეგებისაგან იმით, რომ მეტაშედეგები აღნიშნავს არა მხოლოდ მოთამაშეთა ქცევების შედეგებს, არამედ ყველა იმ შესაძლებლობასაც, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია მისი მიღება.

სხვადასხვა დონის მეტათამაშების საჭიროება კიდევ ისაა, რომ შეიძლება წარმოიშვას კონფლიქტში მონაწილე მხარეთა თანამშრომლობის და კოოპერირების აუცილებლობა, რაც უფრო ხელსაყრელია ვიდრე დაპირისპირება საკუთარი გამარჯვებისათვის. მეტათამაშების თეორიაში დამტკიცებულია, რომ n მოთამაშის სასრული კლასიკური არაკოალიციური თამაშის სხვადასხვა დონის მეტათამაშების რიცხვი ანუ ინფორმაციულ გაფართოებათა რიცხვი, რომლებიც საკმარისია ყველა წონასწორული და, მაშასადამე, სტაბილური სიტუაციების პოვნისათვის, არ აღემატება მოთამაშეთა n რიცხვს. n-1 დონის მეტაგაფართოებაში კი რომელიმე წონასწორული სიტუაცია აუცილებლად იარსებებს. ნ. ჰოვარდის კონსტრუქციიდან გამომდინარე შედეგის თანახმად, ორი მოთამაშის სასრული არაკოალიციური თამაშის ანუ ბიმატრიცული თამაშის რომელიმე დონის მეტაგაფართოებაში აუცილებლად იარსებებს ისეთი სიტუაცია, რომელიც პარეტოს აზრით ერთდროულად იქნება წონასწორული და ოპტიმალური. ამიტომ არის ეს შედეგი ორ მხარეს შორის კონფლიქტის (განსაკუთრებით კი საომარი დაპირისპირების) პირობებში გასათვალისწინებელი, რომელსაც მოსალაპარაკებელ სიტუაციამდე მივყავართ.

მეტათამაშების თეორიის აგებიდან ნ. ჰოვარდი აცნობიერებს კიდევ ახალი თეორიის დამუშავებას, რომელსაც იგი უწოდებს „დრამის თეორიას". ამ თეორიის დაბადების თარიღად მიჩნეულია 1991 წელი, როცა ნ. ჰოვარდი, თამაშთა თეორიის სამ თანამოაზრე სპეციალისტთან ერთად გადაწყვეტს, რომ თამაშთა თეორიასთან მათი მიდგომა ითხოვს ახალი პარადიგმის შექმნას. დრამის თე-

ორიის შექმნას და გაუმჯობესებას ნ. ჰოვარდმა მიუძღვნა თავისი სიცოცხლის ბოლო 20 წელი. ეს თეორია შეიქმნა კონფლიქტების ანალიზისა და გადაწყვეტისათვის საჭირო ყველა მნიშვნელოვანი შედეგისა და შემოქმედებითი რაციონალურობის მათემატიკური აპარატის სახით. ნ. ჰოვარდმა დრამის თეორიის, როგორც მეტათამაშების თეორიის ახალი მიმართულების, შექმნასთან დაკავშირებით 1992 წელს გამოაქვეყნა სპეციალური მანიფესტი, რომელიც ასე იწყება: „დრამის თეორია, როგორც რაციონალური არჩევის პარადიგმა, ავითარებს გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიას, თამაშთა თეორიას, მათემატიკურ ეკონომიკას და წარმოადგენს სოციალურ გადაწყვეტილებათა ზოგად მათემატიკურ მოდელს. ესაა ანალიზური თეორია მკაცრი მათემატიკური დასაბუთებით“.

დრამის თეორიაში მოთამაშეებს უწოდებენ დრამის გმირებს. კლასიკურ თამაშთა თეორიაში თამაში - „მკაცრია“; მისი წესებით მოთამაშეებს არ შეუძლიათ შეცვალონ არც მოთამაშეები, არც მათი სტრატეგიები, არც შედეგები (მოგება, სარგებლიანობა, შეფასება) და არც მოთამაშეთა უპირატესობები. დრამა - „რბილი“ თამაშია, რომლის ტრანსფორმაციის პროცესში გმირებს ნება ეძლევათ შეცვალონ იგი ნებისმიერი მიმართულებით, რათა მიაღწიონ საერთო პოზიციას. მოცემული საწყისი „მკაცრი“ თამაშის დრამატული განვითარება აიძულებს გმირებს მოიქცნენ ირაციონალურად და ამით თამაში გარდაიქმნება ახალ თამაშად, რომელშიც შეეძლებათ თავიანთი პრობლემები რაციონალურად გადაწყვიტონ. მაშასადამე, დრამა - ესაა თამაში, რომელსაც შეუძლია: თვითკორექცია, იმ შეზღუდვების მოხსნა, რომლებიც ხელს უშლის მის მონაწილეებს შექმნან საერთო პოზიცია და ახალი თამაშების წარმოქმნა მანამ, სანამ არ იქნება ნაპოვნი ყველა მოთამაშის ოპტიმალური გადაწყვეტილება. ამრიგად, თამაშის დრამატული ანალიზი არსებითად ავსებს თამაშთა თეორიას და, მაშასადამე, დრამის თეორია მთლიანობაში წარმოადგენს კლასიკურ თამაშთა თეორიის პერსპექტიულ განვითარებას.

ბოლოს აღვნიშნავთ თ. შელინგის მიერ თამაშთა თეორიაში ბოლო პერიოდში დამტკიცებულ ზოგიერთ შედეგს. ეს შედეგები გამომდინარეობს მის მიერ შექმნილი თავშეკავებათა თეორიიდან. ერთ-ერთი მათგანი ასეთია: **„მოთამაშეს, რომელიც თავისთავზე აიღებს ხანგრძლივ ვალდებულებებს და დაიცავს მათ, აქვს უეჭველი უპირატესობა იმ მოთამაშეებთან შედარებით, რომლებიც თავისთავზე აიღებენ ხანმოკლე ვალდებულებებს ან არ ასრულებენ არავითარ ვალდებულებებს".**

ჩვენ შეჩვეულნი ვართ და ბუნებრივად გვეჩვენება ის ფაქტი, რომ რაც მეტი იქნება მოთამაშის სტრატეგიებში გამოყენებული შეზღუდვები, მით მეტი იქნება მისი წარმატების ალბათობა. ამასთან დაკავშირებით, პარადოქსულად მოგვეჩვენება თ. შელინგის შემდეგი შედეგი, რომლის ძალით: **„მოთამაშისათვის თვითშეზღუდვა ყველაზე ძვირფასი აღმოჩნდება გარანტირებული გამარჯვებისათვის. მოთამაშეს შეუძლია გაიძლიეროს თავისი პოზიცია მისდამი ხელმისაწვდომი რეაგირების ვარიანტების შემცირებით".** დღეისათვის ეს პარადოქსული შედეგი დამტკიცებულია და იგი შეეხება ჩვენს ყოველდღიურ ცხოვრებაში მრავალრიცხოვან მოვლენას, დაწყებული ელემენტარული სიტუაციებიდან, დამთავრებული კონფლიქტების და კრიზისული სიტუაციების ჩათვლით. მოკლედ რომ ვთქვათ, აღნიშნული შედეგები თ. შელინგმა შემდეგი დასკვნის სახით ჩამოაყალიბა: **„მოელაპარაკე და დაიცავი შეთანხმებები, თუ არა და იქნება უარესი".**

4.5.4. უმაღლეს სკოლაში საგნის სწავლების ორგანიზაციის სტრატეგიული მოდელირება

უმაღლეს სკოლაში კონკრეტული საგნის სწავლების მიზანია ცოდნის გადაცემა ამ დარგში, მისი აღქმა და დაუფლება სტუდენტების მიერ. ასეთი პროცესი ხორციელდება პედაგოგისა და სტუდენტების ურთიერთობების პირობებში. საგნის პედაგოგის (პროფესორის) ძირითადი ამოცანაა სტუდენტის პიროვნების წარმოჩენა, რომლის

გადაწყვეტა შესაძლებელია საგნის სწავლების პროცესში მის მიერ სტუდენტებთან ეფექტური ურთიერთობების პირობებში. ეს კი მხოლოდ პროფესიონალ პედაგოგს ხელეწიფება. აქ პროფესიონალი პედაგოგის ცნებაში იგულისხმება როგორც კონკრეტული საგნის ცოდნა, ისე პედაგოგიური ხელოვნება და გამოცდილება ანუ სტუდენტებთან კომუნიკაციის პირობებში თითოეული სტუდენტი სწავლების ობიექტიდან გადააქციოს შემსწავლელ სუბიექტად. ეს კი დამოკიდებულია პედაგოგის მიერ სტუდენტთა კოლექტივის მართვის სტილზე ანუ მათი ურთიერთქმედების მოდელზე. პედაგოგისა და სტუდენტის ურთიერთობის სხვადასხვა მოდელიდან (ასეთებია ავტორიტარული, ლიბერალური, დემოკრატიული) ყველაზე ოპტიმალურია დემოკრატიული მოდელი. იგი გულისხმობს პედაგოგისა და სტუდენტის ობიექტურ ურთიერთპასუხისმგებლობას მათზე დაკისრებული უფლება-მოვალეობებისადმი, სტუდენტის მონაწილეობას საგნის სწავლების მთელი პერიოდის განმავლობაში როგორც პროგრამით გათვალისწინებული თემების დამუშავება-განხილვისას, ასევე, მთელი ჯგუფის წინაშე არსებული პრობლემების გადაჭრის გზების ძებნისას. ასეთ შემთხვევაში, შრომის პროცესით და შედეგებით ვღებულობთ დიდ მორალურ კმაყოფილებას - მაქსიმალურ სარგებლიანობას. სტუდენტთა ჯგუფში მართვის ასეთი მოდელის არჩევის შემთხვევაში სტუდენტები ერთმანეთთან ამყარებენ მჭიდრო კონტაქტს, აქვთ საერთო საქმისათვის პასუხისმგებლობისა და თვითკონტროლის მაღალი გრძნობა და ნათლად ჩანს თითოეულის კმაყოფილება თანაჯგუფელების წარმატებებში. დემოკრატიული სტილის პედაგოგი ცდილობს გაითვალისწინოს სტუდენტთა ინდივიდუალური თავისებურებანი, რითაც სტუდენტთა ჯგუფზე ორგანიზაციული ზემოქმედება უფრო მაღალი იქნება, ვიდრე დისციპლინარული.

სტუდენტებთან მუშაობისას პედაგოგს, როგორც ადამიანს, ცალკეული სტუდენტის მიმართ შეიძლება გაუჩ-

ნდეს სიმპათია ან ანტიპათია, რაც შეიძლება გამოწვეული იყოს სტუდენტის ქცევით და მისი მუშაობის შედეგით. ჭეშმარიტებაა, რომ პედაგოგს მოსწონს "ჭკვიანი" სტუდენტები, ისინი, რომლებიც არ აცდენენ ლექცია-სემინარებს, სისტემატურად სწავლობენ ახსნილ მასალას, ასრულებენ დავალებებს და კითხულობენ დამატებით ლიტერატურას. ასეთ შემთხვევებში, "ჭკვიანი" სტუდენტები თავის დროზე უპრობლემოდ ღებულობენ დადებით შეფასებებს. ეს ნიშნავს, რომ პედაგოგის სარგებლიანობა მათი მუშაობით გაზრდილია და მისი გადაწყვეტილებებიც ადეკვატურია. რატომ უჭირთ დანარჩენებს? იმიტომ, რომ ისინი არ ფიქრობენ იმ ურთიერთქმედებებზე და გაწონასწორებული გარემოს შექმნაზე, რომლითაც გაიზრდებოდა როგორც მათი, ისე პედაგოგის სარგებლიანობა. ამიტომ, სტუდენტებთან ურთიერთობის დემოკრატიული მოდელის არჩევის შემთხვევაში სტუდენტთა მიმართ სიმპათიისა თუ ანტიპათიის გამომჟღავნება ნორმალურ გარემოებად უნდა ჩაითვალოს და პედაგოგს ვერავინ შეედავება, რადგან იგი ობიექტურია. იგულისხმება, რომ პედაგოგისაგან ასეთი ანტიპათიის გამომჟღავნება რეალურად შეუმჩნეველია. ჯგუფის წარმატებისათვის სასურველია, რომ პედაგოგის სიმპათია გამოხატული იყოს ჯგუფის წევრთა აბსოლუტური უმრავლესობისათვის და, რაც უფრო მცირე იქნება დანარჩენები, მით მეტი იქნება პედაგოგის და, მაშასადამე, ჯგუფის სარგებლიანობაც. იმიტომ, რომ ისევ ადამიანური ღირებულებების გათვალისწინებით, ე.წ. მეორე კატეგორიის თუნდაც ერთი სტუდენტის არსებობა ჯგუფში გავლენას ახდენს მთლიანი ჯგუფის წარმატებებზე. მაშასადამე, თითოეული სტუდენტის ქცევა დემოკრატი პედაგოგის შემთხვევაში გავლენას ახდენს დანარჩენი პარტნიორების და მთლიანად ჯგუფის წარმატებაზე.

ყოველივე აღნიშნულის გათვალისწინება განსაკუთრებით საგულისხმოა საქართველოს უნივერსიტეტებში განხორციელებული რეფორმების პირობებში. სტუდენტებთან პედაგოგის დემოკრატიული ურთიერთობის მოდელში გასათვალისწინებელია სტუდენტთა უწყვეტი მუშაობა

ლექცია-სემინარების მომზადებისათვის, რადგან სემესტრის განმავლობაში რამდენიმე შუალედური გამოცდის ჩატარება მოითხოვს მას. ზოგიერთი სტუდენტი კი ამას ან არ აკეთებს, ან მას ეს არ შეუძლია. ამის გამო ობიექტური და ღირსეული პედაგოგი ხშირად აღმოჩნდება გაურკვევლობის პირობებში და მის მიერ მიღებული გადაწყვეტილება ყოველთვის ვერ იქნება ყველა სტუდენტისათვის ან ზოგიერთი პედაგოგისათვის მისაღები. ასეთი ფორმალური გარემოებით ხშირად სარგებლობს ზედმეტად "ლოიალური პროფესორი", რომელიც არც თავის თავს აძალებს უმაღლესი სკოლის პედაგოგისათვის დამახასიათებელ ჩვეულ მძიმე შრომას, და არც სტუდენტებს აიძულებს თავის შეწუხებას - მათ სურვილს იგი შესანიშნავად და ყოველგვარი წყენის გარეშე განახორციელებს. ეს კი იმ ლოკალურ კოლექტივში ცუდად აისახება ობიექტური პედაგოგის საქმიანობასა და ავტორიტეტზე. ამიტომ უნივერსიტეტების მთელი ძალისხმევა უნდა იქნეს მიმართული სწავლების დემოკრატიული მოდელების დაფუძნებისა და თითოეული საგნის სწავლების ორგანიზაციისათვის. ასეთი მოდელები და ორგანიზაცია უნდა გადაიქცეს თითოეული პედაგოგის და სტუდენტის უმთავრეს ამოცანად, რომლის გადაწყვეტა და შედეგები დამოკიდებული იქნება ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში თითოეული მონაწილის მიერ მიღებული გადაწყვეტილების ხარისხზე.

უმაღლეს სკოლაში საგნის სწავლების ორგანიზაციაში ვგულისხმობთ ორგანიზაციული S სისტემის ფუნქციონირებას, რომელიც შეიცავს P-პედაგოგს (პროფესორს) და სტუდენტთა K კოლექტივს. ამდენად, S სისტემის მონაწილეთა (ელემენტების) ინტერესები დაკავშირებულია S სისტემის ფუნქციონირების ხარისხთან. ბუნებრივია, სწავლების ორგანიზაციული სისტემის როლში შეგვიძლია განვიხილოთ, აგრეთვე, უნივერსიტეტი, ფაკულტეტი, მიმართულება. მაშინ, ჩვენი S სისტემა იქნება მისი ერთ-ერთი ორგანიზაციული ქვესისტემა.

S სისტემის ორგანიზაციისათვის არსებითია შემდეგი ორი გარემოება: იგი ფუნქციონირებს გარკვეული მიზ-

ნისათვის, ანუ სისტემას აქვს თავისი ინტერესი; მის თითოეულ მონაწილეს საკუთარი ინტერესი აქვს და მათი ინტერესები, საზოგადოდ, განსხვავდება როგორც ერთმანეთისაგან, ისე ერთიანობაში S-ის ინტერესისაგან. ძირითადად ეს ორი გარემოება გვაძლევს იმის საფუძველს, რომ განვიხილოთ S-ის ოპტიმალური ფუნქციონირებისათვის (მართვისათვის) მისი ზოგიერთი ასპექტის მათემატიკური მოდელი თამაშთა თეორიის გამოყენებით, ვინაიდან ამ სისტემაში მონაწილეობს განსხვავებული ინტერესების მქონე რამდენიმე ინდივიდი (მოთამაშე, მხარე), რომელთაც შეუძლიათ აირჩიონ ერთი ან რამდენიმე ქმედება - სტრატეგია. განახორციელებენ რა შესაბამის ქმედებებს, საბოლოოდ ისინი მიიღებენ მოგებებს ან გადაიხდიან ჯარიმებს. მოთამაშეთა მიზანია აირჩიონ ოპტიმალური სტრატეგიები, რომელთა მეშვეობით მიიღებენ მაქსიმალურ სარგებლიანობას.

ამრიგად, S სისტემის ფუნქციონირების მათემატიკურ მოდელში უნდა მონაწილეობდეს ამ პროცესში თანამონაწილე კომპონენტები: 1. მოთამაშეები; 2. თითოეული მოთამაშის სტრატეგიათა სიმრაველეები; 3. მოთამაშეთა ინტერესები, გამოსახული უპირატესობებით, სარგებლიანობებით (მოგებებით).

ავაგოთ S სისტემის მართვის შესაბამისი თამაშის არაკოოპერატიული ანუ არაკოალიციური თამაშის მოდელი აღნიშნული სამი კომპონენტის მონაწილეობით. ასეთი მოდელი არის სტრატეგიული ვარიანტი, რომელიც გამოსახავს კონფლიქტური სიტუაციის ისეთ სახეს, რომელშიც მოთამაშეებს აქვთ განსხვავებული ინტერესები და დამოუკიდებლად ირჩევენ თავიანთ სტრატეგიებს. გვაქვს კი, S სისტემაში კონფლიქტური სიტუაცია და დამოკიდებულია თუ არა მისი გადაწყვეტა სისტემის მართვაზე? ცხადია, პედაგოგისა და სტუდენტთა ინტერესების განსხვავებულობა მაშინვე წარმოიშვება, როგორც კი სტუდენტის ცოდნის შემოწმებაზე და გამოცდის შესახებ დადგება საკითხი. რადგან S სისტემის დემოკრატიული მართვა (ფუნქციონირება) გულისხმობს როგორც პედაგოგის, ისე სტუდენტთა მუშაობას და აქტიურობას მთელი სე-

მესტრის განმავლობაში, ამასთან, 2 ან 3 შუალედური და საბოლოო გამოცდა აქვთ ჩასაბარებელი სტუდენტებს, ზოგს კი აღდგენები აქვთ შესასრულებელი; ბუნებრივია, "კონფლიქტი" მათემატიკურ ენაზე მთელი სემესტრი გრძელდება. ასეთი სახის "კონფლიქტს" აღრმავებს სტუდენტთა ფსიქოლოგიური დაძაბულობა, რადგან ასეთ გარემოში პირველად აღმოჩნდნენ. ამავე დროს, ცალკეული სტუდენტის არჩეული სტრატეგია, შეეხება იგი ქცევას თუ საგანში აქტიურობას, გავლენას ახდენს დანარჩენების გადაწყვეტილებებზეც და ამიტომ გამართლებულია სტრატეგიული (და არა კოოპერატიული) თამაშის მოდელის განხილვა.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს თამაში მოთამაშეებია პედაგოგი P და სტუდენტების ჯგუფი K. ვთქვათ, K ჯგუფში არის n სტუდენტი და ეს სიმრავლეა $K=\{1,2,\ldots,n\}$. P პედაგოგის, როგორც მოთამაშის ნომერი იყოს 0. ამრიგად, მოცემული ორგანიზაციული S სისტემა ფუნქციონირებს $n+1$ მოთამაშით და ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ ასე: $N=P\bigcup K=\{0,1,2,\ldots,n\}$.

განვსაზღვროთ მოთამაშეთა N სიმრავლის თითოეული $i\in N(i=0,1,\ldots,n)$ მოთამაშის სტრატეგიათა სასრული სიმრავლეები: $X_0,X_1,\ldots,X_n$. ვიგულისხმება, რომ ამ სიმრავლეთა ელემენტები ანუ სტრატეგიები დამოკიდებულია სხვადასხვა ფაქტორზე (ფაქტორების ფუნქციებია), რომელთაგან გამოვყოფთ ძირითადს, როგორიცაა: საერთო განათლება და უნარ-ჩვევები; ხელშემწყობი მატერიალური გარემო (სასწავლო აუდიტორიის მდგომარეობა, სასწავლო-მეთოდური ლიტერატურა და ტექნიკური საშუალებები); ერუდიცია და მსოფლმხედველობა; ფსიქოლოგიური მდგომარეობა; სოციალური მდგომარეობა. პედაგოგის სტრატეგიათა X_0 სიმრავლის როლში განვიხილოთ საგნის პროგრამით გათვალისწინებული შესასწავლი მასალიდან ასარჩევი ცოდნის მოცულობა - $\{x_0\}\subseteq X_0=\left[a_{\min}^0,b_{\max}^0\right]$, სადაც $a_{\min}^0$ და $b_{\max}^0$ არის შესაბამისად, ის მინიმალური და მაქსიმალური ცოდნის მოცუ-

ლობა, რაც შეიძლება პედაგოგმა პროგრამიდან მიაწოდოს სტუდენტთა ჯგუფს. $i \in N(i=1,2,...,n)$ სტუდენტის სტრატეგიათა სიმრავლე $\{x_i\} \subseteq X_i = \left[a_{\min}^i, b_{\max}^i\right]$ წარმოადგენს ცოდნის იმ მოცულობას, რომლის ნაწილსაც უნდა დაეუფლოს იგი, ამასთან, უნდა შესრულდეს პირობები

$$a_{\min}^0 \le a_{\min}^i, \ b_{\max}^i \le b_{\max}^0, \ \mathrm{i}=1,2,...,n..$$

თითოეული $i \in N \ (i=0,1,2,...,n)$ მოთამაშის $x_i \in X_i$ სტრატეგიის არჩევით მიიღება სიტუაცია

$$x=(x_0, x_1, ..., x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i \ .$$

როგორც დავრწმუნდით, გადაწყვეტილების გამომუშავების პროცესში ადამიანი სარგებლობს თავისი უპირატესობებით ანუ ირჩევს ქმედებას, რომელიც, მისი აზრით, მას მიიყვანს მისთვის ყველაზე უპირატეს შედეგამდე. ინდივიდუალურ უპირატესობათა განსაზღვრისათვის კი ძირითადად გამოიყენება ორი საშუალება - უპირატესობის ბინარული მიმართება და სარგებლიანობის ფუნქცია.

ცხადია, ჩვენი ამოცანის პირობებში, თითოეულ მოთამაშეს უნდა შეეძლოს გაარკვიოს ნებისმიერი ორი სიტუაციიდან რომელია უპირატესი ანუ თითოეული $i \in N$ მოთამაშისათვის ხარისხობრივი უპირატესობა სიტუაციათა X სიმრავლეზე უნდა განისაზღვროს ბინარული მიმართების საშუალებით. ამიტომ, თუ R_i არის $i \in N$ მოთამაშის უპირატესობა სიტუაციათა X სიმრავლეზე (ე.ი. იგი არის სრული და ტრანზიტული), შეგვიძლია განვსაზღვროთ სისტემა

$$\Gamma = < N, \{X_i\}_{i \in N}, \{R_i\}_{i \in N} >, \qquad (4.5.7)$$

რომელიც წარმოადგენს S სისტემის მართვის შესაბამისი თამაშის მოდელს - არაკოოპერატიულ თამაშს მოთამაშეთა უპირატესობებით. ასეთ თამაშში კი ოპტიმალურობის ძირითადი პრინციპია წარმოადგენს ნეშის წონასწორული სიტუაცია.

გადაწყვეტილებათა მიღების რეალურ ამოცანებში, კერძოდ, (4.5.7) თამაშში მოთამაშეთა ინტერესების აღწე-

რისათვის ბინარული მიმართებების გამოყენება გარკვეულწილად მოუხერხებელია. ამიტომ უფრო მეტად გამოიყენება სარგებლიანობის ფუნქცია. წინა პარაგრაფებში განხილულ არაკოალიციურ თამაშებში მოთამაშეთა ინტერესები ასეთი ფუნქციებით იყო წარმოდგენილი.

დავუშვათ, (4.5.7) თამაშში სიტუაციათა X სიმრავლეზე ყოველ $i \in N(i = 0,1,2,...,n)$ მოთამაშეს აქვს სარგებლიანობის ფუნქცია H_i. მაშინ შესაბამისი მოდელი

$$\Gamma(H) = < N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} > \qquad (4.5.8)$$

იქნება არაკოოპერატიული თამაში ნორმალური ფორმით (ან მოგების ფუნქციებით).

როგორც მოყვანილი განსაზღვრებებიდან ჩანს, სარგებლიანობის თეორია სიტუაციების, ობიექტებისა და სხვადასხვა ღირებულებების რაოდენობრივი გაზომვების (შეფასებების) ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია, რომლით დაინტერესებულია მეცნიერების მრავალი დარგი. (4.5.7)-(4.5.8) თამაშების განხილვიდან ნათლად ჩანს, რომ ამ თეორიის ელემენტების ცოდნა სასარგებლოა უმაღლესი განათლების ყველა საფეხურზე არა მარტო სწავლების პროცესის სამართლიანობის პრინციპებით წარმართვისათვის. ამიტომაა, რომ მსოფლიოს ცნობილ უნივერსიტეტებში სხვადასხვა სპეციალობის სტუდენტები შეისწავლიან გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიას და მის სხვადასხვა მიმართულებებს სარგებლიანობის თეორიაზე დაყრდნობით. მათ საწყისებს აშშ-ის ზოგიერთ სკოლებშიც ასწავლიან, რათა მოსწავლეები თავიდანვე დაეუფლონ არჩევანის გაკეთების ხელოვნებას. ასეთი გარემოებები, თავისთავად, მოითხოვს ყოველი პედაგოგისაგან, განსაკუთრებით უმაღლესი სკოლის პროფესორისაგან გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის თუნდაც ელემენტების საფუძვლიან ცოდნას.

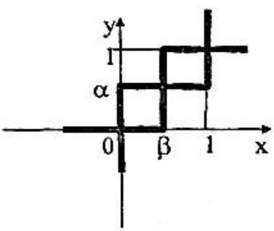
(4.5.8) მოდელი ორი მოთამაშის შემთხვევაში წარმოადგენს ბიმატრიცულ თამაშს და გამოვიყენოთ იგი გამოცდის პროცესში.

ამოცანა 4.5.9 (სტუდენტის გამოცდის მოდელი). ვთქვათ, სტუდენტი (I-ელი მოთამაშე) საგამოცდოდ ემზა-

დება სასურველი შეფასების მიღების მიზნით. გამოცდას ღებულობს პედაგოგი (მე-2 მოთამაშე). ჩავთვალოთ, რომ სტუდენტს აქვს ორი სტრატეგია: 1 - მოემზადოს შესაბამისად, 2 - არ მოემზადოს. პედაგოგსაც აქვს ორი სტრატეგია: 1 - დაუწეროს სტუდენტს დადებითი შეფასება, 2 - არ დაუწეროს დადებითი შეფასება. როგორია მათი ოპტიმალური გადაწყვეტილებები?

მოდელის შედგენა და ანალიზი. შევადგინოთ თამაშის მოდელი. გვაქვს 4 სიტუაცია: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). შევაფასოთ ისინი. სიტუაცია (1,1) აღნიშნავს, რომ სტუდენტი მოემზადა სათანადოდ და პედაგოგმა დაუწერა შესაბამისი ნიშანი. ამ შემთხვევაში, სტუდენტისა და პედაგოგის სარგებლიანობა შევაფასოთ შესაბამისად 2-ით და 0-ით. ამრიგად, (1,1) სიტუაციაში მათი მოგებათა წყვილია (2,0). ცხადია, (1,2) სიტუაცია (სტუდენტი მოემზადა, პედაგოგმა კი არ დაუწერა) სტუდენტისათვის საწყენია, რაც გამოვხატოთ (–1) სარგებლიანობით, ხოლო პედაგოგის სარგებლიანობა, რადგან მან გამოიჩინა არასამართლიანობა და იგი მის ავტორიტეტზე უაროფითად მოქმედებს, შევაფასოთ (–2)-ით. მივიღეთ, რომ (1,2) სიტუაციაში მოთამაშეთა მოგებები მოიცემა რიცხვების წყვილით (–1,–2). სიტუაციაში (2,1) (სტუდენტი არ მოემზადა, ხოლო პედაგოგმა ან თავი მოიტყუა ან სხვა მიზეზის გამო ნიშანი დაუწერა), სტუდენტის სარგებლიანობა დადებითია და ვთქვათ იგი არის 1, ხოლო პედაგოგის სარგებლიანობა, წინა შემთხვევისგან განსხვავებით, გაცილებით უარყოფითია თავისი ავტორიტეტისათვის, რაც შევაფასოთ (–3)-ით. (2,2) სიტუაციაში - სტუდენტი არ მოემზადა და პედაგოგმა იგი შესაბამისად შეაფასა - სტუდენტი არც აგებს და არც იგებს, მისი სარგებლიანობა იყოს 0. პედაგოგი კი სტუდენტის განმეორებითი მისვლით დამატებით უნდა გაისარჯოს, რაც მის სარგებლიანობას უარყოფითს ხდის და იგი შევაფასოთ (–1)-ით. ამრიგად, გვაქვს ბიმატრიცული თამაში:

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & (2,0) & (-1,-2) \\ \hline 2 & (1,-3) & (0,-1) \\ \hline \end{array}\,.$$



აქ $\alpha = 0{,}5$ და $\beta = 0{,}5$. ზიგზაგები იკვეთება წონასწორობის სამ წერტილში: (1,1), (0,0), (0,5;0,5). მათ კი შეესაბამება შემდეგი სიტუაციები: სტუდენტმა მოამზადოს საგანი და პედაგოგმა დაუწეროს სასურველი შეფასება; სტუდენტმა არ მოამზადოს საგანი და პედაგოგმა უარი უთხრას სასურველ შეფასებაზე; სტუდენტმა საგანი მოამზადოს 0,5 ალბათობით და პედაგოგმაც იმავე ალბათობით დაუწეროს მას სასურველი შეფასება. აღნიშნულ სიტიაციებში მოთამაშეთა სარგებლიანობებია, შესაბამისად: (2, 0), (0, –1) და (0,5: –1,5).

მოცემული ამოცანის ანალიზის თანახმად, ორივე მოთამაშისათვის საუკეთესოა პირველი სტრატეგიის არჩევა - სტუდენტი მოემზადოს სათანადოდ და პედაგოგმა შეაფასოს მისი ცოდნა სამართლიანად. მხოლოდ ამ შემთხვევაში ღებულობს სარგებლიანობის მაქსიმალურ მნიშვნელობას როგორც სტუდენტი, ისე პედაგოგი. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ მოდელში 1-ელი მოთამაშის როლში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, აგრეთვე, მთელი ჯგუფი, როგორც ერთი მოთამაშე.

თამაშთა თეორიის მეთოდები არატრადიციული ოპტიმიზაციის მეთოდებს წარმოადგენს. (4.5.8) პირობით განსაზღვრულ $\Gamma(H)$ თამაშში იგულისხმება, რომ თითოეული მოთამაშის არჩევანი ითვალისწინებს დანარჩენების ინტერესებს და ასე ახდენს თავისი მოგების ფუნქციის ოპტიმიზაციას. თუ $\Gamma(H)$ თამაშის რომელიმე მონაწილე, ვთქვათ, $i^* \in N$ მხოლოდ თავისი მაქსიმალური გარანტირებული მოგების მიღებას მოინდომებს სხვათა ინტერესების გაუთვალისწინებლად, მაშინ მისი ოპტიმალური x_{i^*} გადაწყვეტილება $x = (x_{i^*}, x_{-i^*})$ სიტუაციაში

$$a^0_{\min} \le a^i_{\min},\ b^i_{\max} \le b^0_{\max},\ i = 1,2,\dots,n$$

პირობების გათვალისწინებით, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ოპტიმიზაციის (მათემატიკური დაპროგრამების) შემდეგი ამოცანის ამოხსნით:
ვიპოვოთ

$$\max_{x_{i^*}} \min_{x_{-i^*}} H_{i^*}(x_{i^*}, x_{-i^*})$$

პირობებში:

$$\begin{cases} a^i_{\min} \le x_i \le b^i_{\max}, i = 0,1,\ldots,n, \\ a^i_{\min} \ge a^0_{\min}, b^0_{\max} \ge b^i_{\max}, i = 1,\ldots,n. \end{cases} \quad (4.5.9)$$

$\Gamma(H)$ თამაშში წონასწორული და კოალიციურად მდგრადი ეფექტური (პარეტოს აზრით) სიტუაციების პოვნის ამოცანა კი შეგვიძლია ჩავწეროთ, როგორც მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა:

(4.5.9) პირობებში ვიპოვოთ $\max_{x \in X}(H_0(x), H_1(x), \ldots, H_n(x))$.

ჩვენი ორგანიზაციული S სისტემის ფუნქციონირება და მისი ოპტიმალური მართვა გულისხმობს მოთამაშეთა კოლექტივის რაციონალურ ქცევას, რომელიც შეესაბამება წონასწორულ და ეფექტურ სიტუაციებს.

თუ S სისტემის ფუნქციონირებას და მართვას განვიხილავთ, როგორც ორდონიან იერარქიულ თამაშს ცენტრსა და აგენტებს შორის (პედაგოგსა და ჯგუფის სტუდენტებს შორის), რომელშიც პირველ სვლას აკეთებს პირველი მოთამაშე (ცენტრი-პედაგოგი), მაშინ მართვის ასეთი ტიპის ამოცანის ანალიზისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ოპტიმალურ გადაწყვეტილებათა მიღების ის კონცეფციები, რომლებიც დამუშავებულია იერარქიული თამაშების თეორიაში.

თანამედროვე პირობებში სწავლების პროცესში სხვადასხვა გარემოებათა გამო, მრავალი საორგანიზაციო პრობლემის ცალსახად გადაწყვეტა შეუძლებელია. ავიღოთ თუნდაც ასეთი: ვთქვათ, საუნივერსიტეტო გადაწყვეტილებით სტუდენტის ყოველკვირეული მაქსიმალური შეფასებაა 2 ქულა. როგორ გავანაწილოთ ეს 2 ქულა? ცხადია, სტუდენტის შეფასება უნდა მოხდეს შესასწავლი საგნის პრაქტიკული ნაწილის საშუალებით, როდესაც

პედაგოგს ეძლევა სტუდენტთან ურთიერთობის საშუალება. თუ საგნის წამყვანი პროფესორი არ ასწავლის პრაქტიკულ ნაწილს, მაშინ მან შეფასებისათვის მაინც უნდა გაითვალისწინოს ეს ძირითადი მხარე. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველკვირეული შეფასება მოიცავს შემდეგ ალტერნატივებს და მათ შეფასებებს: a_1 - დასწრება (ვგულისხმობთ მხოლოდ დასწრებას დავალებისა და მომზადების გარეშე); a_2- დავალების შესრულება პრაქტიკულ ნაწილში; a_3 - სალექციო მასალის საშუალოდ მომზადება; a_4 - სალექციო მასალის კარგად მომზადება. (შეიძლება განვიხილოთ სტუდენტის მიერ დაფასთან ურთი-ერთობის ალტერნატივაც).

პირველ რიგში ვიპოვოთ მოცემული ალტერნატივების წონითი ვექტორი იერარქიული ანალიზის მეთოდის გამოყენებით (ეს მეთოდი აღწერილი გვაქვს 2.2 და 2.3 პარაგრაფებში). ამისათვის განვიხილოთ ალტერნატივების შემდეგი ხარისხობრივი უპირატესობები და შესაბამისი რაოდენობრივი შეფასებები: თანაბრად უპირატესობა - 1; სუსტად უპირატესობა - 3; ძლიერად უპირატესობა - 5; ძალიან ძლიერად უპირატესობა - 7; აბსოლუტურად უპირატესობა - 9. წონითი ვექტორის საპოვნელად განვიხილოთ შემდეგი ცხრილი:

$$S_X = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ a_2 & & 1 & & \frac{5}{9} \\ a_3 & & & 1 & \frac{7}{9} \\ a_4 & & & & 1 \end{array}$$

და ვიპოვოთ $\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14}$ შეფასებები. ამ შეფასებებს ვპოულობ მე - საგნის წამყვანი პროფესორი. ჩემთვის უპირატესია ის სტუდენტი, რომელიც წარმომიდგენს დამოუკიდებლად შესასრულებელ პრაქტიკულ სამუშაოს, ვიდრე

ის სტუდენტი, რომელსაც ეს დავალება არ აქვს გაკეთებული (არ აქვს მნიშვნელობა მის რაოდენობას და ხარისხს). როგორ გამოვსახოთ ეს უპირატესობა? მე მას ვთვლი ძლიერ უპირატესობად (და არა სუსტად უპირატესად) და ამიტომ, $\alpha_{12}=1/5$. სალექციო მასალის საშუალოდ შემსრულებელ სტუდენტს მე ვთვლი უპირატესად მხოლოდ გამოცხადებაზე, ე.ი. a_3 უპირატესია a_1-ზე, თანაც ძალიან ძლიერად ანუ $\alpha_{13}=1/7$. სალექციო მასალის კარგად მომზადება ჩემთვის აბსოლუტურად უპირატესია მხოლოდ გამოცხადებაზე და ამიტომ, $\alpha_{14}=1/9$. ცნობილი მეთოდის შესაბამისად ვიპოვით S_X ცხრილის საჭირო ელემენტებს.

შევადგინოთ ვექტორი $\alpha^0=\left(\frac{1}{9},\frac{5}{9},\frac{7}{9},1\right)$ და მოვახდინოთ მისი ნორმირება. რადგან $1/9+5/9+7/9+1=22/9$, ამიტომ მოცემული a_1,a_2,a_3,a_4 ალტერნატივების წონითი ვექტორი იქნება

$$\alpha=(0{,}045;0{,}225;0{,}315;0{,}405).$$

ახლა 2 ქულა გავანაწილოთ ამ წონების მიხედვით:

$$2.0{,}045=0.090\approx 0{,}1;\ 2.0{,}225=0{,}450\approx 0{,}5;\ 2.0{,}315=0{,}630\approx 0{,}6;$$

$$2.0{,}405=0{,}810\approx 0{,}8.$$

ამრიგად, თუ სტუდენტი მოვიდა დავალებების გარეშე (მხოლოდ გამოცხადება), იგი შეფასდება 0,1-ით; თუ მოვიდა და პრაქტიკული დავალება შესრულებული აქვს, იგი შეფასდება 0,1+0,5=0,6; თუ მოვიდა, აქვს პრაქტიკული დავალება და თეორიული მასალა მოამზადა საშუალოდ, შეფასდება 0,6+0,6=1,2; თუ სტუდენტს აქვს დავალებაც და მომზადებულია კარგად, მისი შეფასება იქნება 1,2+0,8=2 (მაგალითად, წიგნის ერთ-ერთი ავტორის მიერ მოცემული ალტერნატივები ფასდება შესაბამისად: 0,5; 1; 1,5; 2. ასე

რომ, სტუდენტის ან რომელიმე პროფესორის ყოველგვარი პრეტენზია მის მიმართ სტუდენტის შეფასებებთან დაკავშირებით, სრულიად უსაფუძვლოა).

აქვე აღვნიშნავთ, რომ სტუდენტის შეფასება უნდა იყოს რაც შეიძლება ობიექტური და სამართლიანი. მისი წახალისება შრომის შედეგის შესაბამისად აუცილებელია, მაგრამ აქ ყოველთვის უნდა განისაზღვროს ასეთი წახალისების სამართლიანი ზედა საზღვარი. ამ საზღვრის არასამართლიანი გაზრდისათვის პედაგოგი მომავალში აუცილებლად დაისჯება (სახალხო თეორემის თანახმად).

4.6. პოზიციური თამაშები და მათი დაყვანა ნორმალურ ფორმაზე

როგორც 4.2 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, სტრატეგიული თამაშების მოცემის ერთ-ერთი ხერხია პოზიციური ფორმა. პოზიციური თამაშებით აღიწერება დინამიკური კონფლიქტები და მათი დინამიკა გავლენას ახდენს მოთამაშეთა ქცევებზე. ასეთი თამაშების შესწავლა განპირობებულია იმ გარემოებით, რომ მრავალ რეალურ კონფლიქტურ სიტუაციას აქვს ხანგრძლივი ხასიათი.

პოზიციური თამაში (ან თამაში გაშლილი ფორმით) არის არაკოალიციური თამაში, რომელიც ახდენს მოთამაშეების მიერ დროში ცვალებადი და, საზოგადოდ, არასრული ინფორმაციის პირობებში მიმდევრობითი გადაწყვეტილებების პროცესის მოდელირებას.

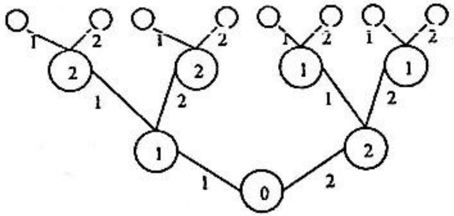
თვით პოზიციური თამაშის პროცესი შედგება თამაშის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში მიმდევრობითი გადასვლისაგან, რაც ხორციელდება თამაშის წესების შესაბამისად ან მოთამაშეთა მიერ ერთი რომელიმე შესაძლო ქმედების არჩევით, ან შემთხვევითი სვლით (ბუნების სტრატეგიით). ასეთი თამაშის მაგალი-

თია ჭადრაკი. პოზიციურ თამაშებში ძალიან ხშირად პირველი სვლის არჩევისათვის გამოიყენება შემთხვევითი სვლა.

თამაშის მდგომარეობას ეწოდება პოზიცია, ხოლო ყოველ პოზიციაში შესაძლო არჩევანს - ალტერნატივა.

პოზიციური თამაშის განსაკუთრებული მახასიათებელია მისი ხის სახით წარმოდგენის შესაძლებლობა და მას თამაშის ხე ეწოდება. ამ ხეზე პოზიციას შეესაბამება წვერო, ხოლო ალტერნატივა - ხის წიბო.

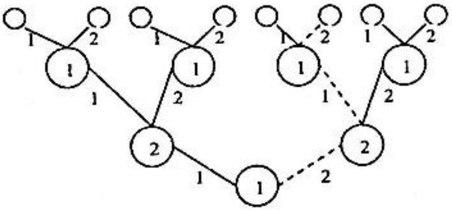
სიმარტივისათვის განვიხილავთ ორი მოთამაშის $N = \{1,2\}$ ისეთ პოზიციურ თამაშებს, რომელთა ყველა პოზიციაში, გარდა საბოლოოსი, ალტერნატივების რიცხვი არის ორი და აღვნიშნოთ მათი სიმრავლე $\{1,2\}$-ით. იმ მოთამაშის სახელი, რომელიც მორიგ სვლას აკეთებს მოცემულ პოზიციაში, ჩავსვათ წრეში; ხოლო პოზიციაში ჩავსვათ ასო 0, თუ აქ სვლას აკეთებს არა მოთამაშე, არამედ რომელიმე შემთხვევითი მექანიზმი (ბუნება). მაგალითად, შემდეგ პოზიციურ თამაშში მონაწილეობს ორი მოთამაშე, ხოლო პირველი სვლა კეთდება შემთხვევით (ნახ. 4.6.1).



ნახ. 4.6.1.

თამაშის ხე გვიჩვენებს თამაშის პროცესს საწყისი პოზიციიდან ერთმანეთის მიმდევრობით შუალედური პოზიციების გავლით, საბოლოო პოზიციაში გადასვლამდე. ამასთან, საწყისი პოზიციიდან მოცემულ საბოლოო პოზიციაში (წვეროში) მისვლა შესაძლებელია ერთადერთი

გზით - ჯაჭვით, რომელსაც თამაშის პარტია ეწოდება. ერთი ასეთი პარტია შემდეგი თამაშის ხეზე წყვეტილი წიბოებისაგან შედგება. მოცემულ თამაშში იმდენი პარტიაა, რამდენიც საბოლოო წვეროა (პოზიცია) მასში (ნახ. 4.6.2).



ნახ. 4.6.2.

თამაშის საბოლოო პოზიციებში მოცემულია მოთამაშეთა მოგებები (სარგებლიანობები). თუ თამაში ანტაგონისტურია, მაშინ იქ დავწერთ 1-ელი მოთამაშის მოგებას; თუ თამაში არაანტაგონისტურია, მაშინ საბოლოო პოზიციებში მიეთითება ყველა მოთამაშის მოგება.

პოზიციური თამაშებიდან გამოიყოფა თამაშები სრული ინფორმაციით (ან სრულინფორმაციანი თამაშები) და თამაშები არასრული ინფორმაციით (ან არასრულინფორმაციანი თამაშები). სრულინფორმაციანი და სასრულსვლიანი პოზიციური თამაშები ყველაზე მარტივია. ასეთ თამაშში თითოეულმა მოთამაშემ თავისი სვლისას იცის თამაშის ხის ის პოზიცია, რომელშიც იგი იმყოფება. ყოველ ბიჯზე სვლას აკეთებს მხოლოდ ერთი მოთამაშე. გარდა ამისა, მას აქვს სრული ინფორმაცია ყველა შესრულებულ სვლასა და თამაშის ზოგად სტრუქტურაზე. ყველა ჩამოთვლილი გარემოება ითვლება სრულ ინფორმაციად.

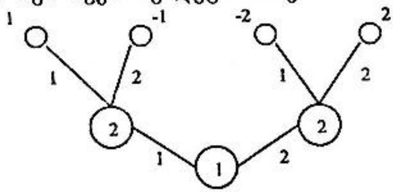
არასრულინფორმაციან პოზიციურ თამაშში მოთამაშემ სვლის გაკეთებისას ზუსტად არ იცის ხის რომელ პოზიციაში იმყოფება. მისთვის ცნობილია მხოლოდ პოზიციების სიმრავლე, რომელიც შეიცავს მის ფაქტობრივ

პოზიციას. პოზიციების ასეთ სიმრავლეს, ინფორმაციული სიმრავლე ეწოდება. ხეზე ერთი ინფორმაციული სიმრავლის პოზიციები გავაერთიანოთ წყვეტილგვერდებიანი მართკუთხედის საშუალებით. სრულინფორმაციან თამაშში თითოეული ინფორმაციული სიმრავლე შედგება ერთადერთი პოზიიცისაგან (წვერო). განვიხილოთ მოთამაშეთა თითოსვლიანი ანტაგონისტური სრულინფორმაციანი პოზიციური თამაში.

ამოცანა 4.6.1. პირველ სვლას აკეთებს 1-ელი მოთამაშე და ირჩევს x რიცხვს {1,2} სიმრავლიდან. მეორე სვლას აკეთებს მე-2 მოთამაშე, რომელმაც იცის 1-ის არჩევანი პირველ სვლაზე და ირჩევს y რიცხვს {1,2}-დან. 1-ელი მოთამაშის მოგების ფუნქცია $u(x,y)$ ასე განვსაზღვროთ:

$$u(1,1)=1, u(1,2)=-1, u(2,1)=-2, u(2,2)=2.$$

მოცემული პოზიციური თამაში სრულინფორმაციანი თამაშია და მის ხეს აქვს შემდეგი სახე:

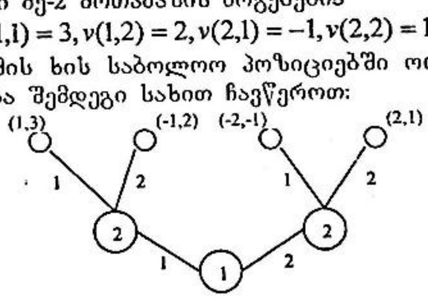


ნახ. 4.6.3.

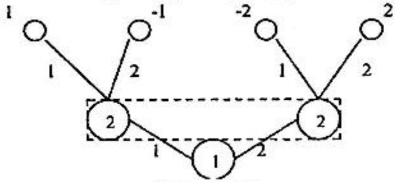
თუ ეს თამაში არ არის ანტაგონისტური და იმავე სიტუაციებში მე-2 მოთამაშის მოგებებია

$$v(1,1)=3, v(1,2)=2, v(2,1)=-1, v(2,2)=1,$$

მაშინ თამაშის ხის საბოლოო პოზიციებში ორივე მოთამაშის მოგება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:



ამოცანა **4.6.2.** ახლა დავუშვათ, რომ წინა ამოცანის პირობებიდან არ სრულდება ერთი - მეორე მოთამაშემ არ იცის პირველ სვლაზე 1-ელი მოთამაშის მიერ გაკეთებული არჩევანი. ამ შემთხვევაში თამაში არასრულინფორმაციანია და მის ხეს აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 4.6.4.

აქ მე-2 მოთამაშემ იცის რომელ ინფორმაციულ სიმრავლეში იმყოფება თვითონ, მაგრამ არ იცის ამ სიმრავლის რომელ პოზიციაშია - მარცხენაში თუ მარჯვენაში.

განსაზღვრება **4.6.1.** პოზიციურ თამაშში მოთამაშის მიერ წინასწარ განსაზღვრულ სვლათა მიმდევრობას, რომელშიც გათვალისწინებული იქნება სხვა მოთამაშეების და ბუნების სვლების შესახებ ინფორმაციები, ეწოდება მისი წმინდა სტრატეგია.

მაშასადამე, წმინდა სტრატეგია არის თამაშის დაწყებამდე მოთამაშის ქმედების სრული გეგმა, რომელიც ყოველ ინფორმაციულ სიმრავლეს შეუსაბამებს მის არჩევანს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც პოზიციურ თამაშში არაა შემთხვევითი სვლა (0 მოთამაშე), მაშინ მოთამაშეების მიერ წმინდა სტრატეგიების არჩევით ცალსახად განისაზღვრება თამაშის შედეგი - საბოლოო პოზიცია, რომელშიც 1-ელი მოთამაშე მიიღებს თავის მოგებას (ანტაგონისტურ თამაშში) ან ორივე მოთამაშე მიიღებს თავის მოგებას, როდესაც თამაში არაა ანტაგონისტური. ეს გარემოება გვეხმარება ანტაგონისტური პოზიციური თამაშის მატრიცულ თამაშზე დაყვანისა და არაანტაგონისტურ შემთხვევაში, ბიმატრიცულ თამაშზე დაყვანისას.

პოზიციური თამაშის მატრიცულ ან ბიმატრიცულ თამაშზე დაყვანას, ეწოდება **პოზიციური თამაშის ნორმალიზება**. ვაჩვენოთ როგორ კეთდება ეს 4.6.1 და 4.6.2 ამოცანების შემთხვევაში.

ამოცანა **4.6.1 (ნორმალიზება).** სრულინფორმაციანი პოზიციური თამაშის ხე მოცემულია 4.6.3 ნახაზზე. პირველ რიგში აღვწეროთ მოთამაშეთა წმინდა სტრატეგიები. აქ 1-ელი მოთამაშის წმინდა სტრატეგია ჩაიწერება ერთი x რიცხვით, რომელიც გვიჩვენებს თუ რომელ ალტერნატივას აირჩევს იგი {1,2}-დან. მაშასადამე, მას აქვს ორი სტრატეგია და ესენია:

$$s_1 \text{ - "აირჩიოს } x=1\text{"; } s_2 \text{ - "აირჩიოს } x=2\text{"}.$$

მე-2 მოთამაშემ იცის პირველ სვლაზე 1-ელი მოთამაშის არჩევანი, ამიტომ მისი წმინდა სტრატეგია აღვნიშნოთ დალაგებული $[y_1, y_2]$ წყვილით. აქ $y_1(y_1=1,2)$ ალტერნატივაა, რომელსაც მე-2 მოთამაშე აირჩევს იმ პირობით, რომ პირველმა მოთამაშემ აირჩია ალტერნატივა $x=1$. ხოლო $y_2(y_2=1,2)$ ალტერნატივაა, რომელსაც აირჩევს მე-2 მოთამაშე იმ პირობით, თუ პირველმა აირჩია ალტერნატივა $x=2$. მაგალითად, მოცემულ თამაშში მე-2 მოთამაშის სტრატეგია [2,1] აღნიშნავს, რომ, თუ პირველ სვლაზე პირველმა აირჩია $x=1$ სტრატეგია, მაშინ მე-2 მოთამაშე თავის მეორე სვლაზე აირჩევს $y=2$-ს. თუ პირველ სვლაზე პირველმა აირჩია $x=2$, მაშინ მე-2 თავის მეორე სვლაზე აირჩევს $y=1$-ს. ამრიგად, მე-2 მოთამაშეს აქვს ოთხი წმინდა სტრატეგია:

$$t_1-[1,1],\ \ t_2-[1,2],\ \ t_3-[2,1],\ \ t_4-[2,2].$$

ახლა განვსაზღვროთ 1-ელი მოთამაშის მოგებები 8 სიტუაციაში. ვთქვათ, მაგალითად, 1-ელი ირჩევს $x=1$ სტრატეგიას, ხოლო მე-2 - [1,2] სტრატეგიას. აქედან გა-

მომდინარეობს, რომ $y=1$ და $u(x,y)=u(1,1)=1$. თუ 1-ელი აირჩევს $x=2$, ხოლო მე-2 აირჩევს [2,2], მაშინ $y=2$ და $u(2,2)=2$. ასე ვიპოვით სხვა სიტუაციებში 1-ელის მოგებებს და მატრიცულ თამაშს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$H=\begin{array}{c|cccc} & t_1-[1,1] & t_2-[1,2] & t_3-[2,1] & t_4-[2,2] \\ \hline s_1-x=1 & u(1,1) & u(1,1) & u(1,2) & u(1,2) \\ s_2-x=2 & u(2,1) & u(2,2) & u(2,1) & u(2,2) \end{array},$$

ან შემდეგნაირად

$$H=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}.$$

მიღებულ მატრიცულ თამაშში გვაქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში - (1,3)=(1,[2,1]). მაშასადამე, მოცემულ სრულინფორმაციან პოზიციურ თამაშში არსებობს ამონახსნი წმინდა სტრატეგიებში - 1-ელი მოთამაშე ირჩევს $x=1$, ხოლო მე-2 მოთამაშე ირჩევს $y=2$. თამაშის მნიშვნელობა ანუ 1-ელის მოგებაა $u=-1$.

შენიშვნა 4.6.1. 4.5.8 ამოცანაში განსაზღვრული მეტასტრატეგიული გაფართოების შესაბამისად, მიღებული მატრიცული თამაში H წარმოადგენს

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}$$

მატრიცული თამაშის პირველი დონის მეტაგაფართოებას ანუ პირველი დონის მეტათამაშს, რომელშიც 1-ელი მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეა $\{1,2\}$, ხოლო მე-2 მოთამაშის სტრატეგიების სიმრავლეა $\{1/1,1/2,2/1,2/2\}$. ეს სიმრავლე წინა პარაგრაფში მიღებული აღნიშვნების თანახმად იგივეა, რაც {[1,1],[1,2],[2,1],[2,2]}.

ამოცანა 4.6.2 (ნორმალიზება). აქ (ნახ. 4.6.4) პირველ მოთამაშეს აქვს იგივე სვლები s_1 და s_2. რადგან მეორე მოთამაშისათვის უცნობია 1-ელი მოთამაშის არჩევანი ანუ არ იცის თუ რომელ პოზიციაში იმყოფება იგი, ამიტომ აქ მას აქვს ორი სტრატეგია:

t_1 - "აირჩიოს $y=1$"; t_2 - "აირჩიოს $y=2$".

მაშინ, შესაბამისი მატრიცული თამაში იქნება

$$H = \begin{array}{c|cc} & t_1 - y = 1 & t_2 - y = 2 \\ \hline s_1 - x = 1 & u(1,1) & u(1,2) \\ s_2 - x = 2 & u(2,1) & u(2,2) \end{array} \quad \text{ან} \quad H = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}.$$

აქ მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებია $X^* = (2/3, 1/3)$, $Y^* = (1/2, 1/2)$, ხოლო 1-ელი მოთამაშის მოგებაა $u = 0$. ამრიგად, არასრულინფორმაციან პოზიციურ თამაშში უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში ვერ მივიღეთ, ასეთი წერტილი მხოლოდ შერეულ სტრატეგიებში აღმოჩნდა (ეს გამომდინარეობს ცნობილი დებულებიდან, რომელსაც პარაგრაფის დასასრულს ჩამოვაყალიბებთ).

როგორც ეს ამოცანები გვიჩვენებს, პოზიციური თამაშის მატრიცულ თამაშზე დაყვანა დამოკიდებულია მოთამაშეთა ინფორმაციების ხარისხზე. კერძოდ, მეორე ამოცანის შემთხვევაში მე-2 მოთამაშის მიერ 1-ელი მოთამაშის არჩევანის არცოდნამ შეამცირა მისი შესაძლო სტრატეგიების რიცხვი, რითაც თამაშის შედეგი მისთვის გახდა უფრო არასასურველი - თუ პირველ შემთხვევაში მისი მოგება იყო 1 ერთეული (1-ელი მოთამაშე იქ აგებდა 1-ს), ახლა იგი გახდა 0.

განვიხილოთ ერთი პოზიციური თამაში შემთხვევითი სვლით.

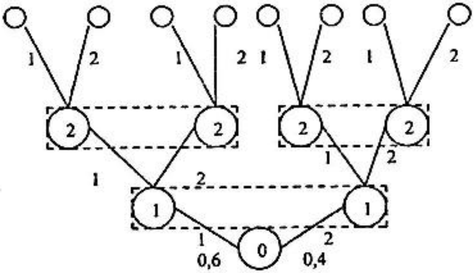
ამოცანა 4.6.3. პირველი სვლა შემთხვევითია: 0 ირჩევს $x=1$-ს 0,6 ალბათობით, ხოლო $x=2$-ს - 0,4

ალბათობით. მეორე სვლაზე 1-ელი მოთამაშე ირჩევს y-ს {1,2} სიმრავლიდან და მან არ იცის პირველი სვლის შედეგი. მესამე სვლას აკეთებს მე-2 მოთამაშე: ირჩევს z რიცხვს {1,2}-დან, რომელმაც იცის რა რიცხვი იყო არჩეული პირველ სვლაზე, მაგრამ არ იცის მე-2 მოთამაშის არჩევანი მეორე სვლაზე. ამის შემდეგ 1-ელი მოთამაშის მოგებები იანგარიშება $(u(x,y,z)$ ფუნქციით:

$$u(1,1,1) = -2; u(1,1,2) = 4; u(1,2,1) = 1; u(1,2,2) = -4;$$

$$u(2,1,1) = 3; u(2,1,2) = 0; u(2,2,1) = -3; u(2,2,2) = 5.$$

ამოხსნა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ეს თამაში არასრულინფორმაციანი თამაშია, რომლის პოზიციური ფორმა – ხე, ასეთია:



აღვწეროთ მოთამაშეთა სტრატეგიები. 1-ელ მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: $y=1; y=2$. მე-2 მოთამაშის სტრატეგია, 4.6.1 ამოცანის მსგავსად, არის დალაგებული წყვილი $[z_1, z_2]$: აირჩიოს $z_1 (z_1 = 1,2)$, თუ პირველ სვლაზე არჩეული იყო $x=1$, და აირჩიოს $z_2 (z_2 = 1,2)$, თუ პირველ სვლაზე არჩეული იყო $x=2$. ამრიგად, მე-2 მოთამაშეს აქვს 4 წმინდა სტრატეგია:

$$t_1 - [1,1], \;\; t_2 - [1,2], \;\; t_3 - [2,1], \;\; t_4 - [2,2].$$

ახლა ვიპოვოთ მატრიცული თამაშის ელემენტები - 1-ელი მოთამაშის მოგებები. ვთქვათ, მაგალითად, 1-ელი

ირჩევს სტრატეგიას $y=1$, ხოლო მე-2 ირჩევს სტრატეგიას [2,1]. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) $x=1$ და 2) $x=2$.

თუ $x=1$, მაშინ $t_3-[2,1]$ სტრატეგიით მე-2 მოთამაშე ირჩევს $z=2$. ამრიგად, (1,[2,1]) სიტუაციაში 1-ელი მოთამაშის მოგებაა $u(x,y,z)=u(1,1,2)=4$. თუ $x=2$, მაშინ $t_3-[2,1]$ სტრატეგიით მე-2 მოთამაშე ირჩევს $z=1$. ამიტომ, (2,[2,1]) სიტუაციაში $u(x,y,z)=u(2,1,1)=3$.

ვინაიდან პირველ სვლაზე $x=1$ აირჩევა 0,6 ალბათობით, ხოლო $x=2$ აირჩევა 0,4 ალბათობით, ამიტომ აღნიშნული მოგებების ალბათობები იქნება იგივე და 1-ელი მოთამაშის საშუალო მოგება ამ სტრატეგიების პირობებში გამოითვლება ასე

$$4.0,6+3.0,4=3,6.$$

ანალოგიურად ვიპოვით ცალკე $x=1$-სთვის 1-ელი მოთამაშის მოგებებს ყველა სიტუაციაში

$$H(1,x,y)=\begin{array}{c|cccc} & t_1-[1,1] & t_2-[1,2] & t_3-[2,1] & t_4-[2,2] \\ \hline y=1 & u(1,1,1) & u(1,1,1) & u(1,1,2) & u(1,1,2) \\ y=2 & u(1,2,1) & u(1,2,1) & u(1,2,2) & u(1,2,2) \end{array}$$

ან

$$H(1)=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}$$

და ცალკე $x=2$-სთვის

$$H(2,x,y)=\begin{array}{c|cccc} & t_1-[1,1] & t_2-[1,2] & t_3-[2,1] & t_4-[2,2] \\ \hline y=1 & u(2,1,1) & u(2,1,2) & u(2,1,1) & u(2,1,2) \\ y=2 & u(2,2,1) & u(2,2,1) & u(2,2,1) & u(2,2,2) \end{array}$$

ან

$$H(2)=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -3 & 5 \end{array}.$$

საბოლოოდ, 1-ელი მოთამაშის საშუალო მოგებებისაგან შედგენილი მატრიცული თამაში იქნება

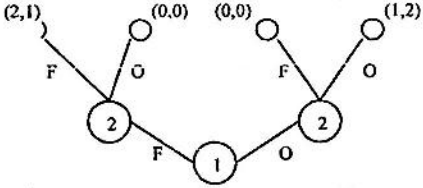
$$H = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -3 & 5 \end{array}.$$

ამ თამაშის ამოხსნით მივიღებთ მოთამაშეთა ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიებს და 1-ელი მოთამაშის მოგებას მოცემულ პოზიციურ თამაშში.

დავსვათ შებრუნებული ამოცანა: შეგვიძლია თუ არა ნორმალური ფორმით მოცემული თამაში წარმოვადგინოთ პოზიციური ფორმით? განვიხილოთ ბიმატრიცული თამაში - "ოჯახური დავა"

$$(H_1, H_2) = \begin{array}{c|cc} & 1(F) & 2(O) \\ \hline 1(F) & (2,1) & (0,0) \\ 2(O) & (0,0) & (1,2) \end{array}$$

და მისი დინამიკური მოდიფიკაცია: ვთქვათ, მე-2 მოთამაშეს (ცოლს) შეუძლია გამოიცნოს 1-ელი მოთამაშის (ქმარის) ქმედება - აირჩევს იგი F-ს თუ O-ს. ამის მიხედვით მე-2 მოთამაშე გააკეთებს სვლას და გვექნება პოზიციური თამაში



ახლა საჭიროა აღინიშნოს სრულინფორმაციანი პოზიციური თამაშების ძირითადი განსაკუთრებულობა, რაც მოიცემა ჰ. კუნის შემდეგი თეორემით.

თეორემა **(Kuhn H.) 4.6.1.** n მოთამაშის სასრულსვლიან სრულინფორმაციან პოზიციურ თამაშში ყოველთვის არსებობს ნეშის წონასწორული სიტუაცია წმინდა სტრატეგიებში.

4.7. კოოპერატიული თამაშები და მათი ამოხსნა

კოოპერატიული თამაშები მიეკუთვნება არასტრატეგიულ თამაშებს და, ამდენად, მათი მოდელები განიხილება არაანტაგონისტური კონფლიქტების შემთხვევაში, როდესაც რეალური სიტუაციების პირობებით მოთამაშეების ძალების გაერთიანებისათვის ნებადართულია კოალიციების შექმნა - კოოპერირება. მოთამაშეთა კოოპერირება გულისხმობს სამართლიანობის გარკვეული პრინციპით (მათი რიცხვი საკმაოდ ბევრია კოოპერატიული თამაშების თეორიაში) ყველა მოთამაშის საერთო მოგების (სარგებლიანობის, შემოსავლის) განაწილებას მოთამაშეებს შორის, რისთვისაც მოთამაშეებმა შეიძლება გამოიყენონ ერთიანი სტრატეგია, ინფორმაციების სრული გაცვლა, ყოველგვარი შეთანხმება დამატებითი მოგებების მიღებაზე თუ არმიღებაზე.

კოოპერატიული თამაშების თეორიაში განიხილება ორი ძირითადი მიმართულება: 1) როცა მოთამაშეთა სარგებლიანობას აქვს ტრანსფერაბელობის თვისება - იზომება ერთიანი სკალით და დამატებითი სარგებლიანობა ერთი მოთამაშიდან მეორეს შეიძლება გადაეცეს ყოველგვარი შეზღუდვების გარეშე; 2) როცა სარგებლიანობას არა აქვს ტრანსფერაბელობის თვისება. პირველ შემთხვევაში, კოოპერატიულ თამაშს ეწოდება კლასიკური კოოპერატიული თამაში. აქ მხოლოდ ასეთ თამაშებს შევეხებით.

კლასიკური კოოპერატიული თამაში ან მოკლედ კოოპერატიული თამაში ეწოდება წყვილს $G=<N,v>$, სადაც $N=\{1,...,n\}$ მოთამაშეთა სიმრავლეა, ხოლო v - ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია მოთამაშეთა N სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეზე და მას ასე აღვნიშნავთ: $v:2^N \to R^1$. ამასთან, იგულისხმება, რომ $v(\varnothing)=0$ ანუ მოთამაშეთა ცარიელი სიმრავლის მოგება ყოველთვის ითვლება ნულის ტოლად. N-ის ქვესიმრაელეს $S \subseteq N$, ეწოდება კოალიცია, ხოლო

თვით v ფუნქციას - კოოპერატიული G თამაშის მახასიათებელი ფუნქცია. ქვემოთ თვით v-ს ვუწოდებთ, აგრეთვე, კოოპერატიულ თამაშს მოთამაშეთა სიმრავლის მითითების გარეშე.

კოოპერატიული თამაშის სტანდარტული ინტერპრეტაცია შემდეგში მდგომარეობს. მოთამაშეებს N-დან შეუძლიათ გაერთიანდნენ სხვადასხვა კოალიციაში, რათა ერთმანეთთან შეათანხმონ თავიანთი ქმედებები მაქსიმალური მოგების მიღებისათვის. თუ შეიქმნება S კოალიცია, მაშინ ცნობილი უნდა იყოს $v(S)$ სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს S კოალიციის იმ მაქსიმალურ ჯამურ მოგებას, რომლის მიღება ერთიანი ძალებით გარანტირებული ექნება ამ კოალიციას.

მახასიათებელი ფუნქცია ანუ კოოპერატიული თამაში v შეიძლება წარმოიშვას სხვადასხვა გზით. ძირითადად იგი წარმოიშობა არაკოალიციური

$$\Gamma = < N, \{A_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N} >$$

თამაშიდან (არაკოალიციური თამაშის მოდელში S_i შევცვალეთ A_i-ით, ვინაიდან S_i-ით კოოპერატიულ თამაშებში ჩვენ კოალიციას აღვნიშნავთ).

როცა N-დან გამოიყოფა კოალიცია $S \subset N$, ცხადია, იგი ცდილობს მაქსიმალური მოგების მიღებას დანარჩენ $N \setminus S$ მოთამაშეებთან დაპირისპირებით. მაშასადამე, წარმოიშობა ანტაგონისტური თამაში ორ S და $N \setminus S$ მოთამაშეს შორის. ამიტომ, ასეთ ანტაგონისტურ თამაშში S კოალიციის გარანტირებული მოგება $v(S)$ იქნება $v(S) = \max\limits_{A_S} \min\limits_{A_{N\setminus S}} H_S(A_S, A_{N\setminus S})$, სადაც A_S და $A_{N\setminus S}$ სტრატეგიათა სიმრავლეებია S და $N \setminus S$ მოთამაშეების შესაბამისად, ხოლო H_S არის S კოალიციის მოგების ფუნქცია $H_S = \sum\limits_{i\in S} H_i$.

v ფუნქციის თვისებების მიხედვით განიხილება კოოპერატიული თამაშების განსხვავებული კლასები.

v თამაშს (კოოპერატიულ თამაშს) ეწოდება სუპერადიტიური, თუ ორი ნებისმიერი განსხვავებული S და T კოალიციისათვის - $S \cap T = \varnothing$ სრულდება შემდეგი არამკაცრი უტოლობა $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. ეს თვისება აღნიშნავს, რომ ორი განსხვავებული კოალიციის გაერთიანებით მიღებული საერთო მოგება არაა ნაკლები ამ კოალიციების მოგებების ჯამზე - კოალიციის გაზრდით მისი მოგება არ უნდა შემცირდეს. მაგალითად, სამი მოთამაშის კოოპერატიული თამაში

$$v(\varnothing)=0; v(1) = 0{,}1; v(2) = 0; v(3) = 0{,}2; v(12) = 0{,}1; \quad (4.7.1)$$

$$v(13) = 1{,}3; v(23) = 1{,}2; v(123) = v(N) = 5{,}3$$

აკმაყოფილებს სუპერადიტიურობის თვისებას. აქ, მაგალითად, $v(1) = 0{,}1$ აღნიშნავს, რომ პირველი მოთამაშე მარტო ქმედებით იგებს 0,1-ს. $v(23) = 1{,}2$ ნიშნავს, რომ თუ გაერთიანდება მეორე და მესამე მოთამაშე, მაშინ მათი გარანტირებული მოგება იქნება 1,2. თუ ყველა გაერთიანდება, მაშინ მათი გარანტირებული მოგებაა 5,3.

ამოცანა 4.7.1. მოცემულია ორი მოთამაშის სასრული არაკოალიციური თამაში - 2×2 ბიმატრიცული თამაში

$(H_1, H_2) =$

	1	2
1	(1,1)	(−2,3)
2	(−1,4)	(1,−1)

და ვიპოვოთ მისი კოოპერატიული ვარიანტი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $N = \{1,2\}, S = \varnothing$, $S=\{1\}$, $S=\{2\}$, $S=\{1,2\}$. ვიპოვოთ $v(S)$ ფუნქციის მნიშვნელობები.

როგორც ყოველთვის $v(\varnothing)=0$. როცა $S=\{1\}$, მაშინ $v(1)$ არის 1-ელი მოთამაშის მოგებებისაგან შედგენილი შემდეგი მატრიცული თამაშის მნიშვნელობა

$H_1 =$

	1	2
1	1	−2
2	−1	1

.

რადგან აქ არ გვაქვს უნაგირა წერტილი წმინდა სტრატეგიებში, ამიტომ მისი მნიშვნელობა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიების საშუალებით გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$$v(1) = \frac{1.1-(-1).(-2)}{1+1-(-1)-(-2)} = -\frac{1}{5}.$$

მე-2 მოთამაშის მოგებებისაგან შედგენილი მატრიცაა

$$H_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & -1 \\ \hline\end{array},$$

რომელშიც იგი ირჩევს სვეტს. $v(2)$-ის საპოვნელად მე-2 მოთამაშე თამაშში უნდა ირჩევდეს სტრიქონს, რისთვისაც ჩავატაროთ ამ მატრიცის ტრანსპონირება:

$$H_2^T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & -1 \\ \hline\end{array}.$$

აქ კი, $v(2) = \dfrac{1.(-1)-3.4}{1+(-1)-3-4} = \dfrac{13}{7}$. $v(12)$-ის საპოვნელად ვიპოვოთ მატრიცული თამაში

$$H_{(1,2)} = H_1 + H_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ \hline\end{array}.$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ ორივე მოთამაშე კოოპერაციით მიიღებს მაქსიმინს $v(12)=3$. მაშასადამე, მოცემული ბიმატრიცული თამაშისაგან მიღებული კოოპერატიული თამაში ანუ მახასიათებელი ფუნქციაა

$$v(\varnothing)=0, v(1)=-1/5, v(2)=13/7, v(12)=3.$$

v თამაშის სუპერადიტიურობიდან გამომდინარეობს, რომ $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(i)$. თუ აქ $v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i)$, მაშინ v-ს ეწო-

დება არაარსებითი; ეს კი ნიშნავს, რომ ასეთი თამაშის შემთხვევაში კოალიციის შექმნას აზრი არა აქვს. თუ ადგილი ექნება მკაცრ უტოლობას $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i)$, მაშინ v-ს ეწოდება არსებითი. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია არსებითი კოოპერატიული თამაშების შესწავლა.

v თამაშში i მოთამაშეს ეწოდება არსებითი, თუ არსებობს ისეთი კოალიცია $K \subset N$, რომ შესრულდება უტოლობა $v\left(K \cup i\right) > v(K) + v(i)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, როცა ნებისმიერი $K \subset N$ კოალიციისათვის შესრულდება ტოლობა $v\left(K \cup i\right) = v(K) + v(i)$, მაშინ i მოთამაშეს ეწოდება ბრიყვი. მაშასადამე, ბრიყვია მოთამაშე, რომელიც ვერც ერთ კოალიციასთან ვერ ამჟღავნებს დამატებით შესაძლებლობას.

v კოოპერატიულ თამაშს ეწოდება u კოოპერატიული თამაშის ეკვივალენტური, თუ არსებობს დადებითი რიცხვი $c > 0$ და ისეთი ნამდვილი რიცხვები $a_i \ (i \in N)$, რომ ნებისმიერი $K \subset N$ კოალიციისათვის სრულდება ტოლობა

$$v(K) = cu(K) + \sum_{i \in K} a_i \ .$$

ცხადია, თუ v ეკვივალენტურია u-ს, მაშინ u ეკვივალენტურია v-ს. ასეთ თამაშებს შორის განსხვავება აღნიშნავს მოთამაშეთა საწყისი კაპიტალის და კოალიციების მოგების საზომი ერთეულების განსხვავებას.

მოცემული თამაშის ეკვივალენტური თამაშის როლში ვღებულობთ მის გამარტივებულ ფორმას, რომელსაც 0–1 რედუცირებული ფორმა ეწოდება და იგი აღნიშნავს გარკვეული აზრით ნორმირებას: v თამაშს აქვს 0–1 რედუცირებული ფორმა, თუ ნებისმიერი $i \in N$-სთვის $v(i) = 0$ და $v(N) = 1$.

თეორემა 4.7.1. ყოველი არსებითი კოოპერატიული თამაში v ერთადერთი 0–1 რედუცირებული ფორმის თამაშის ეკვივალენტურია.

არსებითი v კოოპერატიული თამაშის ეკვივალენტური 0–1 რედუცირებული ფორმის u თამაშისათვის

$$c=\left(v(N)-\sum_{i\in N}v(i)\right)^{-1},\ a_i=-v(i)\cdot\left(v(N)-\sum_{i\in N}v(i)\right)^{-1},\ i\in N.$$

v თამაშს ეწოდება მარტივი კოოპერატიული თამაში, თუ იგი ღებულობს მხოლოდ ორ 0 და 1 მნიშვნელობას. თუ v მარტივი თამაშია, მაშინ ისეთ K კოალიციას, რომლისთვისაც $v(K)=1$, ეწოდება მომგებიანი; ხოლო თუ რომელიმე S კოალიციისათვის $v(S)=0$, მაშინ S კოალიციას ეწოდება წამგებიანი.

კოოპერატიულ თამაშში გადაწყვეტილების მიღების ძირითადი ამოცანაა ოპტიმალურობის ძირითადი პრინციპის დადგენა და მის საფუძველზე მოთამაშეთა შესაძლებლობების (სიძლიერის) მიხედვით საერთო მოგების მოთამაშეებს შორის განაწილება. თამაშთა თეორიაში დადგენილია და კიდევ დგინდება ოპტიმალობის ახალი პრინციპები. ამრიგად, ყველა ასეთი პრინციპისათვის თითოეულმა მოთამაშემ თამაშის დასასრულს უნდა მიიღოს სარგებლიანობის თავისი სამართლიანი წილი. n მოთამაშის კოოპერატიულ v თამაშში მოთამაშეთა საბოლოო მოგებების წილებისაგან შედგენილი ვექტორი აღვნიშნოთ $x=(x_1,...,x_n)$-ით, რომელიც, ბუნებრივია, უნდა აკმაყოფილებდეს ინდივიდუალური და კოლექტიური (საზოგადოებრივი, ჯგუფური) რაციონალურობის პირობებს:

$$1)\, x_i\geq v(i),\ \ \forall i=1,...,n;\ 2)\ \ v(N)=x_1+\cdots+x_n.$$

აქ ინდივიდუალური რაციონალურობის პირობა აღნიშნავს, რომ მოთამაშისათვის კოოპერატიულ თამაშს მხოლოდ მაშინ ექნება აზრი, თუ ის კოოპერაციისაგან იმაზე მეტს მოიგებს, რისი მოგებაც შეუძლია დამოუკიდებლად. კოლექტიური რაციონალურობის პირობა კი აღნიშნავს, რომ მოთამაშეებს შორის უნდა განაწილდეს მათი საერთო მოგება $v(N)$. ამრიგად, კოოპერატიულ თამაშში ძირითადი გადაწყვეტილებაა მოგებათა ასეთი ვექტორის

ან მათი სიმრაელის მიღება. ამიტომ, ამ ვექტორს ოპტიმალურობის ნებისმიერი პრინციპის შემთხვევაში, აქვს თავისი სახელი.

განსაზღვრება 4.7.1. კოოპერატიულ v თამაშში მოგებათა $x=(x_1,...,x_n)$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს 1) - 2) პირობებს, ეწოდება განაწილება (ინგლისურად **"imputation"**, რუსულად - **"дележ"**) და განაწილების ვექტორი.

აქედან გამომდინარეობს, რომ განაწილების ვექტორები ქმნის სიმრაველეს. აღვნიშნოთ ასეთი სიმრავლე $I(v)$-თი.

გამოვიყენოთ (4.7.1) კოოპერატიული თამაშისათვის ზემოთ მოყვანილი ძირითადი ცნებები. იგი არსებითია, რადგან $v(N)=5{,}3>0{,}1+0+0{,}2$. სამივე მოთამაშე არსებითია:

$$v(\{2,3\}\cup 1)>1{,}2+0{,}1; v\{1,3\}\cup 2)>1{,}3+0; v(\{1,2\}\cup 3)>$$
$$0{,}1+0{,}2.$$

მოცემულ თამაშს არა აქვს 0–1 რედუცირებული ფორმა. დავიყვანოთ ასეთი ფორმის u თამაშზე:

$$c=(v(N)-\sum_{i\in N}v(i))^{-1}=(5{,}3-0{,}1-0{,}2)^{-1}=1/5,$$
$$a_1=-0{,}1/5; a_2=-0/5=0; a_3=-0{,}2/5.$$

ამიტომ, u თამაშის მნიშვნელობები $K\subseteq N$ კოალიციებისათვის გამოითვლება ფორმულით:

$$u(K)=\frac{v(K)-\sum_{i\in K}v(i)}{5};$$

$$u(i)=0, i=1,2,3; u(12)=0; u(13)=0{,}2; u(23)=0{,}2; \quad (4.7.2)$$
$$u(123)=1.$$

v კოოპერატიულ თამაშში განაწილების ვექტორი იქნება $x=(x_1,x_2,x_3)$, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$x_1\geq 0{,}1; x_2\geq 0; x_3\geq 0{,}2; x_1+x_2+x_3=5{,}3,$$

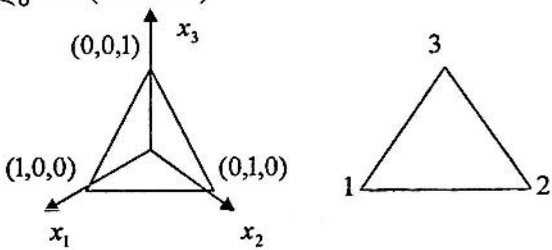
ხოლო მისი 0–1 რედუცირებული ფორმის u თამაშში განაწილება იქნება $x=(x_1,x_2,x_3)$, რომლისთვისაც:

$$x_1\ge 0; x_2\ge 0; x_3\ge 0; x_1+x_2+x_3=1.$$

4.7.1 ამოცანაში განსაზღვრულ ორი მოთამაშის კოოპერატიულ თამაშში განაწილებათა სიმრავლე $I(v)$ შედგება ისეთი $x=(x_1,x_2)$ ვექტორებისაგან, რომელთათვისაც $x_1\ge -1/5; x_2\ge 13/7; x_1+x_2=3$.

არაარსებით v კოოპერატიულ თამაშში გვაქვს ერთადერთი განაწილება $x=(v(1),...,v(n))$.

აქვე შევნიშნოთ, რომ სამი მოთამაშის 0–1 რედუცირებული ფორმის u თამაშში განაწილების ვექტორების სიმრავლე $I(u)$ გეომეტრიულად გამოისახება ფუნდამენტური სამკუთხედის $x=(x_1,x_2,x_3)$ წერტილთა სიმრავლის საშუალებით (ნახ. 4.7.1):



ნახ. 4.7.1.

შენიშვნა 4.7.1. რადგან x განაწილებაში x_i აღნიშნავს i-ური მოთამაშის საბოლოო მოგებას (წილს), ამიტომ, ბუნებრივია, ყოველი მოთამაშე ცდილობს მიიღოს თავისი წილის მაქსიმუმი. კოლექტიური რაციონალურობის პირობით, ერთი მოთამაშის წილის გაზრდა იწვევს სხვა რომელიმე მოთამაშის წილის შემცირებას და თამაშში გვაქვს ახალი ტიპის კონფლიქტური სიტუაცია. მის გადასაწყვეტად საჭიროა ვიპოვოთ საუკეთესო განაწილება ან მათი ქვესიმრავლე $I(v)$ სიმრაველის შემცირებით, რაც ხდება ამ სიმრავლეზე დომინირების ცნებისა და

გარკვეული ოპტიმალურობის იმ პრინციპების შემოღებით, რამელსაც უნდა დაემორჩილოს კოოპერატიული თამაშის ყველა მონაწილე.

პირველ რიგში შემოვიღოთ დომინირების ცნება.

განსაზღვრება 4.7.2. ვიტყვით, რომ v კოოპერატიულ თამაშში K კოალიციაში $x=(x_1,...,x_n)$ განაწილება დომინირებს $y=(y_1,...,y_n)$ განაწილებას და აღინიშნება $x \succ_K y$ (ან x უპირატესია y-ზე K-სთვის), თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა: 1) $x_i > y_i, \forall i \in K$; 2) $\sum_{i\in K} x_i \le v(K)$.

აქ 1) გამოსახავს K კოალიციის წევრთა ერთხმივობის პირობას, ხოლო 2) ნიშნავს, რომ x განაწილება K-სთვის რეალიზებადია. მაშასადამე, K კოალიციის წინაშე დგას ამოცანა ასეთი გადაწყვეტილების პოვნის შესახებ.

ვიტყვით, რომ x დომინირებს y-ს, თუ არსებობს ისეთი კოალიცია K, რომლისთვისაც $x \succ_K y$.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $I(v)$ სიმრავლეზე დომინირება არ შეიძლება ორი კოალიციის შემთხვევაში: როცა კოალიცია ერთწევრიანია და როცა კოალიციაში ყველა მოთამაშეა. ამიტომ, ორი მოთამაშის კოოპერატიულ თამაში განაწილებათა დომინირება არ განიხილება.

ახლა მოვიყვანთ კოოპერატიულ თამაშებში ორი ძირითადი გადაწყვეტილების - ოპტიმალურობის ორი ძირითადი პრინციპის განსაზღვრებას. მათგან ისტორიულად პირველია თანამედროვეობის გამოჩენილი მათემატიკოსის ლ. შეპლის მიერ შემოტანილი ოპტიმალურობის ნორმატიული პრინციპი - აქსიომატიკური განსაზღვრება, რომელიც ცნობილია შეპლის მნიშვნელობით და შეპლის ვექტორის სახელით. v კოოპერატიულ თამაშში შეპლის ვექტორი $F(v)=\left(F_1(v),...,F_n(v)\right)$ ცალსახად განისაზღვრება სამართლიანობის შემდეგი ბუნებრივი აქსიომებით:

1) ეფექტურობის - $F(v)$ არის v კოოპერატიულ თამაში განაწილება $v(N)=\sum_{i=1}^{n} F_i(v)$;

2) სიმეტრიულობის - თუ მოთამაშეებს გადავნომრავთ ისე, რომ i მოთამაშეს ჰქონდეს ახალი ნომერი k_i, მაშინ ახალ v' კოოპერატიულ თამაშში შეპლის $F(v')$ ვექტორი აკმაყოფილებს პირობას $F_{k_i}(v')=F_i(v), i=1,...,n$;

3) ბრიყვის (მატარებლის) - თუ i მოთამაშე ისეთია, რომ $v(S\cup i)=v(S)$ ნებისმიერი $S\subset N$-სთვის, მაშინ $F_i(v)=0$ და i მოთამაშეს ეწოდება ბრიყვი. ეს აქსიომა ეკვივალენტურია შემდეგის: თუ K ისეთი კოალიციაა, რომ $v(S)=v(S\cap K)$ ნებისმიერი $S\subset N$-სთვის ანუ K არის v თამაშის მატარებელი, მაშინ $\sum_{j\in K} F_j(v)=v(K)$;

4) წრფივობის - თუ $w(S)=v(S)+u(S)$ ნებისმიერი $S\subseteq N$-სთვის, მაშინ ყველა $i=1,...,n$-სთვის ადგილი აქვს ტოლობას $F_i(w)=F_i(u)+F_i(v)$.

მაგალითად, სამი მოთამაშის v კოოპერატიულ თამაშში

$$v(1)=0; v(2)=v(3)=1; v(12)=v(13)=1; v(23)=3; v(123)=3$$

1-ელი მოთამაშე ბრიყვია, ხოლო კოალიცია {2,3} მატარებელია.

მეოთხე აქსიომის თანახმად, თუ მოთამაშეები მონაწილეობენ ორ თამაშში, მაშინ მათი მოგებები ცალკეულ თამაშში უნდა შეიკრიბოს.

აღნიშნული აქსიომების პირობებში არსებობს ერთადერთი განაწილების ვექტორი $F(v)=(F_1(v),...,F_n(v))$, რო-

მლის i-ური კოორდინატი არის i მოთამაშის მოგება და იგი გამოითვლება ფორმულით:

$$F_i(v) = \sum_{K \subset N, i \in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \cdot \left(v(K) - v(K \setminus i)\right), \ i \in N, \quad (4.7.3)$$

სადაც k მოთამაშეთა რიცხვია K-ში ($k = |K|$, $k! = 1.2....k; 0! = 1$), ხოლო შეკრება წარმოებს ისეთი K კოალიციების მიმართ, რომლებიც შეიცავს i-ს.

იმ შემთხვევაში, როცა v მარტივი კოოპერატიული თამაშია, მაშინ (4.7.3) მიიღებს მარტივ სახეს:

$$F_i(v) = \sum_{K \subset N, i \in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}, \ i \in N, \quad (4.7.4)$$

სადაც შეკრება წარმოებს ისეთი მომგებიანი K კოალიციების მიმართ, როცა $K \setminus i$ არ არის მომგებიანი (ანუ წამგებიანია).

ამოცანა 4.7.2. გამოვთვალოთ შეპლის ვექტორი (4.7.2) კოოპერატიული თამაშისათვის

$$v(i) = 0, i = 1,2,3; v(12) = 0; v(13) = 0,2; v(23) = 0,2;$$

$$v(123) = 1.$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (4.7.3) ფორმულა. ამ ფორმულის თანახმად, $F_i(v)$-ს საპოვნელად უნდა განვიხილოთ შესაკრებთა მნიშვნელობები ყველა ისეთი K კოალიციისათვის, რომლებიც შეიცავს i-ს. ჩამოვთვალოთ ეს კოალიციები ყველა i-სთვის:

$$i = 1, K_1 = \{1\}, K_2 = \{1,2\}, K_3 = \{1,3\}, K_4 = \{1,2,3\};$$

$$i = 2, K_1 = \{2\}, K_2 = \{1,2\}, K_3 = \{2,3\}, K_4 = \{1,2,3\};$$

$$i = 3, K_1 = \{3\}, K_2 = \{1,3\}, K_3 = \{2,3\}, K_4 = \{1,2,3\}.$$

ამის შემდეგ, იოლად გამოვთვლით (4.7.3)-ში თითოეულ შესაკრებს:

$$F_1(v) = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}.(v(1) - v(\varnothing)) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}.(v(12) -$$

$$v(2)) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}.(v(13) - v(3)) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(v(123) -$$

$$v(23)) = \frac{0!.2!}{3!}.0 + \frac{1!.1!}{3!}.0 + \frac{1!.1!}{3!}.0{,}2 + \frac{2!.0!}{3!}.(1-0{,}2) = 0{,}3\,.$$

ანალოგიურად ვიპოვით ვექტორის დანარჩენ ორ კოორდინატსაც: $F_2(v) = 0{,}3$; $F_3(v) = 0{,}4$. შევნიშნოთ, რომ მესამე კოორდინატი შეგვეძლო უფრო იოლად გამოგვეთვალა - $F_3(v) = 1-(0{,}3+0{,}3)) = 0{,}4$. ამრიგად, შეპლის ვექტორი ტოლია $F(v) = (0{,}3;0{,}3;0{,}4)$. იგი გვიჩვენებს, რომ 1-ელ და მე-2 მოთამაშეს თანაბარი წილი 0,3 ხვდებათ საერთო $v(123) = 1$ მოგებიდან, ხოლო მე-3 მოთამაშე ღებულობს 0,4-ს. ეს ვექტორი მიუთითებს, რომ 1-ელი და მე-2 თანაბარი სიძლიერისაა, ხოლო მე-3 მოთამაშე მათზე ძლიერია. ამიტომ მოთამაშეები სიძლიერის უპირატესობებით ასე დალაგდება: $3 \succ 1 \approx 2$. მაშასადამე, შეპლის ვექტორით და საერთოდ, განაწილების ვექტორით შეგვიძლია მოთამაშეების რანჟირება სიძლიერის მიხედვით.

ამოცანა 4.7.3 (აუქციონერებზე). განვიხილოთ 4 აუქციონერისაგან შემდგარი კორპორაცია, რომელშიც მათ აქვთ, შესაბამისად, 10, 20, 30 და 40 აქცია. ვიგულისხმოთ, რომ აუქციონერების მიერ ნებისმიერი გადაწყვეტილება მიღებული იქნება უმრავლესობით. ვიპოვოთ შეპლის ვექტორი.

ამოხსნა. აუქციონერთა ასეთი ურთიერთობა არის 4 მოთამაშის მარტივი კოოპერატიული თამაში, რომელშიც მომგებიანია კოალიციები

$$\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\,.$$

აქ როცა $i=1$, გვაქვს ერთადერთი მომგებიანი კოალიცია {1,2,3}, როცა წამგებიანია {1,2,3}\{1}={1,2} კოალიცია. ამიტომ, (4.7.4) ფორმულის მიხედვით $F_1(v) = \dfrac{2!.1!}{4!} = \dfrac{1}{12}$.

$i=2$-სთვის საჭირო თვისების მქონე კოალიციებია $K=\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\}$. ამიტომ,

$$F_2(v)=\frac{1!.2!}{4!}+\frac{2!.1!}{4!}+\frac{2!.1!}{4!}=\frac{1}{4}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ $F_3(v)=\frac{1}{4}$ და $F_4(v)=\frac{5}{12}$. მაშასადამე, შეპლის ვექტორია $F(v)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{12}\right)$.

შეპლის ვექტორი გამოიყენება გადაწყვეტილების მისაღებად პოლიტიკის პრობლემებში, კერძოდ, არჩევნებში, პოლიტიკური პარტიების ან საარჩევნო უბნების სიძლიერის განსაზღვრისათვის. მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენთან ასეთი პრობლემებით ჯერ კიდევ ნაკლებად ინტერესდებიან, მაინც შევეხებით 4.7.3 ამოცანის ინტერპრეტაციას საარჩევნო უბნების სიძლიერის განსაზღვრისათვის და მასზე გავაკეთებთ მოკლე კომენტარს.

ამოცანა 4.7.4 (საარჩევნო უბნის წონის განსაზღვრა). ვთქვათ, საარჩევნო ოლქი შედგება 4 უბნისაგან: № 1, № 2, № 3, № 4, სადაც კენჭი ეყრება კანდიდატთა ერთსა და იმავე A სიმრავლეს. უბნებში ამომრჩეველთა რიცხვია, შესაბამისად, 10, 20, 30, 40. კენჭისყრა წარმოებს უმრავლესობის წესით. შევადაროთ თითოეული უბნის წონა.

ამოხსნა. თითოეული უბანი ჩავთვალოთ მოთამაშედ და განვიხილოთ ოთხი მოთამაშის კოოპერატიული თამაში v. უბნის წონა განისაზღვრება შეპლის ვექტორით, რომელიც ნაპოვნი გვაქვს წინა ამოცანაში და იგი ტოლია $F(v)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{12}\right)$.

ეს ვექტორი გამოსახავს კანდიდატის არჩევისათვის გადაწყვეტილების მისაღებად თითოეული უბნის შედარებით წვლილს. მისი ანალიზით ირკვევა, თუ რომელი უბნის უფრო მეტი მხარდაჭერა იქნება საჭირო სასურველი კანდიდატის არჩევისათვის. თავდაპირველი მონაცემები,

რაც გულისხმობს ამომრჩეველთა რიცხვის ცოდნას, ამისათვის არაა საკმარისი. მართლაც, თუ ამ რიცხვს გავითვალისწინებთ, მაშინ მესამე უბანს უფრო მეტი შესაძლებლობა უნდა ჰქონდეს, ვიდრე მეორეს, რასაც გვიჩვენებს შემდეგი "კენჭისყრის ვექტორი":

$$\left(\frac{10}{100},\frac{20}{100},\frac{30}{100},\frac{40}{100}\right)=\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right).$$

შეპლის ვექტორით კი ეს ასე არაა - მეორე და მესამე უბნებს თანაბარი წვლილი აღმოაჩნდა.

ახლა შევეხოთ ოპტიმალურობის მეორე პრინციპს, რომელიც დაკავშირებულია მოთამაშეთა მდგრად ქცევასთან. მას ეწოდება C-გული (ინგლისური core-დან).

განსაზღვრება 4.7.3. კოოპერატიულ v თამაშში ისეთი განაწილებების სიმრავლეს, რომელთაგან არც ერთი არ დომინირდება სხვა განაწილებით, ეწოდება ამ თამაშის C-გული და აღინიშნება $C(v)$-თი.

მაშასადამე, თუ $x^{*}\in C(v)$, მაშინ x^{*}-ს არც ერთი განაწილება არ დომინირებს. რადგან ასეთი არადომინირებული განაწილების წინააღმდეგ არც ერთ მოთამაშეს და არც ერთ კოალიციას არ შეუძლია წინააღმდეგობის გაწევა, ამიტომ ასეთი განაწილების რეალიზება შესაძლებელია. ამის გამო, $C(v)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც დაპირისპირებულ მხარეებს შორის კომპრომისის საფუძველი და, მაშასადამე, v თამაშის ამონახსნი. C-გულის პოვნისათვის გამოიყენება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.7.2. იმისათვის, რომ $x=(x_1,\ldots,x_n)\in C(v)$ განაწილება ეკუთვნოდეს C-გულს, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N);\quad \sum_{i\in S}x_i\geq v(S),\ \forall S\subset N.$$

რადგან ეს უტოლობები ქმნის წრფივ უტოლობათა სისტემას, ამიტომ $C(v)$ ჩაკეტილი და ამოზნექილი სიმრავლეა. ამასთან, შეიძლება მოხდეს, რომ $C(v)=\varnothing$.

$C(v)$ შეიძლება შეიცავდეს ერთადერთ განაწილებას. ვაჩვენოთ ამ ფაქტის მართებულობა შემდეგი მაგალითით.

ამოცანა 4.7.5. ვიპოვოთ $C(v)$ კოოპერატიულ თამაშში

$$v(i) = 0, i = 1,2,3;\ v(12) = v(13) = 0,5;\ v(23) = v(123) = 1.$$

ამოხსნა. თეორემის თანახმად, განაწილებათა ვექტორი $x = (x_1, x_2, x_3) \in C(v)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულდება შემდეგი პირობები:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_i \geq 0, i = 1,2,3; x_1 + x_2 \geq 0,5; x_1 + x_3 \geq 0,5;$$

$$x_2 + x_3 \geq 1.$$

ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან, მეორე და ბოლო უტოლობიდან ვღებულობთ $x_1 = 0$. ამიტომ სისტემას აქვს სახე

$$x_2 + x_3 = 1; x_1 = 0; x_2 \geq 0,5; x_3 \geq 0,5.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1 = 0; x_2 = 0,5; x_3 = 0,5$ და $x^* = (0;0,5;0,5)$ არის $C(v)$-ს ერთადერთი განაწილება.

ამოცანა 4.7.6. ვიპოვოთ (4.7.2) კოოპერატიული თამაშის

$$v(i) = 0, i = 1,2,3; v(12) = 0; v(13) = 0,2; v(23) = 0,2;$$

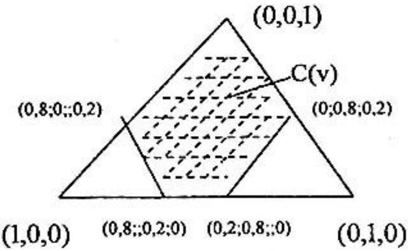
$$v(123) = 1.$$

C-გული $C(v)$.

ამოხსნა. ეს თამაში მოცემულია 0–1 რედუცირებული ფორმით. 4.7.2 თეორემის თანახმად, ვწერთ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_1 + x_2 \geq 0; x_1 + x_3 \geq 0,2; x_2 + x_3 \geq 0,2.$$

ამ სისტემიდან ვღებულობთ $x_1 \leq 0,8; x_2 \leq 0,8; x_3 \leq 1$. ეს კი განსაზღვრავს $C(v)$-ს, რომელიც შეგვიძლია გამოვსახოთ ფუნდამენტური სამკუთხედის (ნახ. 4.7.1) $x = (x_1, x_2, x_3)$ წერტილთა სიმრავლის საშუალებით:



მოცემული დაშტრიხული ნაწილიდან არც ერთი განაწილება არ დომინირდება სხვა რომელიმე განაწილებით ფუნდამენტური სამკუთხედიდან.

ამოცანა 4.7.7 (პროდუქციის წარმოების გეგმა). ვთქვათ, ერთ ქალაქში ფუნქციონირებს სამი საწარმო $N = \{1,2,3\}$, რომლებიც უშვებს ერთსა და იმავე დანიშნულების პროდუქციას. ეს პროდუქცია იყიდება მხოლოდ იმავე ქალაქში. ამ საწარმოებიდან: 1-ელი უშვებს A_1 და A_2 ტიპის საქონელს 900 ერთეულის მოცულობით; მე-2 უშვებს იმავე A_1 და A_2 ტიპის საქონელს 700 ერთეულის მოცულობით; ხოლო მე-3 - B_1 და B_2 ტიპის საქონელს 1000 ერთეულის მოცულობით. ყველა სახის პროდუქციის თვითღირებულება და გასაყიდი ფასი ერთნაირია. დავუშვათ, A_1 და B_1 ტიპის საქონელი გამოვიდა მოდიდან და მასზე არაა მოთხოვნა, ხოლო A_2 და B_2 ტიპის საქონელი იყიდება მხოლოდ კომპლექტში: ერთი ერთეული A_2 და ერთი ერთეული B_2. ამასთან, პროგნოზით ბაზარზე 1000 ასეთ კომპლექტზეა მოთხოვნა. ვიპოვოთ საწარმოებს შორის კოოპერატიული თანამშრომლობის C-გული.

ამოხსნა. ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, ყველა საწარმოს საერთო შესაძლებლობა აღემატება პროგნოზის შესაბამის მოთხოვნას და ვინაიდან თითოეული მათგანი დაინტერესებულია რაც შეიძლება მეტი პროდუქციის გასაღებაში, ამიტომ სახეზე გვაქვს საწარმოებს შორის ეკონომიკური კონფლიქტი. თუ დავუშვებთ, რომ

საწარმოებს შეუძლია ერთმანეთს შორის მიაღწიოს შეთანხმებას, რომლის თანახმად მათ შეეძლებათ ერთმანეთს გადაუხადონ სარგებლიანობის ერთეულში გამოსახული კომპენსაცია, მაშინ მოცემული კონფლიქტი მოდელირდება კოოპერატიული $G=<N,v>$ თამაშით. v-ს მნიშვნელობების პოვნისათვის ჩავთვალოთ, რომ $S \subset N$ კოალიციის $v(S)$ მოგება წარმოადგენს გაყიდული პროდუქციის რაოდენობას.

რადგან $S=\{1,2\}$ კოალიციის წევრებს როგორც ცალ-ცალკე, ისე ერთად არ შეუძლიათ გამოუშვან პროდუქცია კომპლექტში, ამიტომ $v(1)=v(2)=v(12)=0$. ასევე, მარტო მე-3 საწარმო ვერ ამზადებს პროდუქციას კომპლექტში და ამიტომ $v(3)=0$.

$S=\{1,3\}$ კოალიციიდან 1-ელი უშვებს 900 ერთეულს, მე-3 - 1000 ერთეულს და ამიტომ მათი საერთო მოგება იქნება $v(S)=1800$ ერთეული.

$S=\{2,3\}$ კოალიციიდან მე-2 უშვებს 700 ერთეულს, მე-3 უშვებს 1000 ერთეულს, ამიტომ მათი საერთო ნაწარმიდან გაიყიდება $v(23)=1400$ ერთეული. რაც შეეხება $S=\{1,2,3\}$ კოალიციის მოგებას, იგი ტოლი იქნება $v(123)=2000$ ერთეულის (მე-3-ის 1000 ერთეულს დამატებული 1-ელი და მე-2 საწარმოს საერთო ნაწარმიდან 1000 ერთეული). მაშასადამე, სამი საწარმოს v კოოპერატიული თამაში ასეთია:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

4.7.1 თეორემის გამოყენებით დავიყვანოთ ეს არსებითი კოოპერატიული თამაში მის ეკვივალენტურ 0–1 რედუცირებული ფორმის u კოოპერატიულ თამაშზე. აქ,

$$u(12)=\frac{1800}{2000}=0{,}9; \quad u(23)=\frac{1400}{2000}=0{,}7; \quad u(123)=1.$$

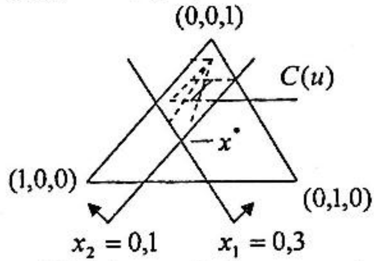
მაშასადამე,

$$u(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\}, \\ 0{,}9, & S = \{1,3\}, \\ 0{,}7, & S = \{2,3\}, \\ 1, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

4.7.2 თეორემის თანახმად, მოგებათა განაწილება $x = (x_1, x_2, x_3) \in C(u)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3; x_1 + x_3 \ge 0{,}9; x_2 + x_3 \ge 0{,}7; x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

აქედან $x_1 \le 0{,}3$ და $x_2 \le 0{,}1$. თუ გამოვსახავთ ასეთი განაწილებების სიმრავლეს ბარიცენტრული სამკუთხედის წერტილებით, მივიღებთ $C(u)$-ს,



რომელიც არის დაშტრიხული პარალელოგრამის წერტილთა სიმრავლე. აქედან ნებისმიერი წერტილი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მოცემული u თამაშის ამონახსნი (მთლიანად $C(u)$-ც ამონახსნია). მაგალითად, ამ სიმ-რავლეს ეკუთვნის x^* წერტილი, როომლის კოორდინატებია $x_1^* = 0{,}3; x_2^* = 0{,}1; x_3^* = 0{,}6$. ამიტომ $x^* = (0{,}3;0{,}1;0{,}6)$ არის განაწილება 0–1 ფორმის u თამაშში. v თამაშში კი შესაბამისი განაწილება იქნება $x^* = (600;200;1200)$.

მიღებული ოპტიმალური გადაწყვეტილების თანახმად 1-ელი, მე-2 და მე-3 საწარმოები მიიღებს, შესაბამისად, მოგებებს 600, 200, 1200. ეს ნიშნავს, რომ ამ საწარმოებმა უნდა გამოუშვას, შესაბამისად, 600, 200 და 1200 ერთეული პროდუქცია.

4.8. კონფლიქტის გადაწყვეტა რეგულირებით გამარჯვების მეთოდით

კოოპერატიული თამაშების შესწავლით დავრწმუნდით რომ, კონფლიქტის გადაწყვეტის ერთ-ერთი გზაა კოოპერაციული თანამშრომლობით სამართლიანი განაწილების პოვნა. სამართლიანი განაწილების პრობლემა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საბაზრო ეკონომიკისა და დემოკრატიის პირობებში ყველა ორგანიზაციისათვის, სახელმწიფო სტრუქტურებისათვის, საარბიტრაჟო ორგანიზაციებისათვის, სამართალმცოდნეებისათვის, სასამართლო ორგანოსა და თითოეული ოჯახისათვის. ავიღოთ თუნდაც ცხოვრებისეული პრობლემები: როგორ გავუნაწილოთ ქონება შთამომავლობას? როგორ განაწილდეს გაყრილ ცოლ-ქმარს შორის საერთო ქონება? პოლიტიკურ ცხოვრებაშიც, თუნდაც ასეთი: როგორ განაწილდეს ორ მხარეს შორის სადავო ტერიტორია?

კონფლიქტის მშვიდობიანი და სამართლიანი გზით გადაწყვეტისათვის მოსაფიქრებელია კოოპერაციის ახალი ფორმა - სამართლიანი განაწილების პოვნის ისეთი მეთოდი - პროცედურა, რომლის გამოყენებით შესაძლებელი იქნება ერთდროულად სამი მოთხოვნის - სამი კრიტერიუმის შესრულება: 1) შურის არარსებობა; 2) ტოლფასობა; 3) ეფექტურობა. ასეთი განაწილების პოვნა ხორციელდება "რეგულირებით გამარჯვების" (Adjusted winner) მეთოდით. ამ მეთოდის გამოყენება გულისხმობს, რომ კონფლიქტში მონაწილე მხარეები - მოთამაშეები გულწრფელები არიან თავიანთი შეფასებების განაწილებაში. აქ "ტოლფასობაში" ვგულისხმობთ მოთამაშეთა წონითი შეფასებების გათანაბრებას, როცა თითოეული მხარე დარწმუნებულია, რომ მიიღებს სხვა მხარის წილის ტოლ წილს. "ეფექტურობა" გვესმის ჩვენის თეორიის ერთიანი გაგებით: განაწილება ეფექტურია, თუ არ არსებობს სხვა განაწილება, რომელიც იქნება ერთი მხარისათვის უკეთესი და არ იქნება სხვა მხარისათვის უარესი.

რეგულირებით გამარჯვების მეთოდის იდეა შემდეგში მდგომარეობს: განისაზღვრება სტრატეგიების სია სია იმ საგნებისა, რომლებიც კონფლიქტის ობიექტებია და ექვემდებარება განაწილებას და სია სადავო პრობლემის გადაწყვეტილებების. შემდეგ მხარეებმა - მოთამაშეებმა თავიანთი უპირატესობების პროპორციულად უნდა გაანაწილონ 100 ქულა. ასეთი ინფორმაცია კი თითოეულ მოთამაშეს ავალდებულებს იყოს რაც შეიძლება გულწრფელი იმისათვის, რომ მიღებულ იქნეს ტოლფასოვანი და ეფექტური გადაწყვეტილება. ასეთ მოტივაციას გვთავაზობს რეგულირებით გამარჯვების პროცედურა, რომლითაც მიღებული გადაწყვეტილებით ყველა მოთამაშე იქნება კმაყოფილი.

რეგულირებით გამარჯვების მეთოდით ამოვხსნათ შემდეგი კონკრეტული ამოცანა ორი მოთამაშის შემთხვევაში.

ამოცანა 4.8.1. არასაპენსიო ასაკის ცოლ-ქმარი (1-ელი და მე-2 მოთამაშე, შესაბამისად) ემზადება განქორწინებისათვის. ამოცანა მდგომარეობს მათი თანაცხოვრების პერიოდში დაგროვილი ქონების განაწილებაში. ორივემ ერთობლივად დაადგინა გასაყოფი საგნების სია და მიუთითეს თავიანთი უპირატესობები:

1. საპენსიო დანაზოგი. იგი წარმოადგენს მე-2-ის ხელფასიდან დაგროვილ თანხას, რომელიც ღირებულია ორივესათვის, განსაკუთრებით 1-ელისთვის, რადგან მე-2-ს კიდევ აქვს მისი დაგროვების შანსი პენსიაზე გასვლამდე;

2. სახლი. იგი არც ისე ძვირადღირებულია, მაგრამ მე-2 აფასებს მას უფრო მეტად, ვიდრე 1-ელი, რადგან ამ სახლთან ახლოსაა მისი სამსახური;

3. აგარაკი. იგი გამოიყენება მთელი წელი, მაგრამ ნაკლებღირებულია, ვიდრე სახლი. თუმცა 1-ელი თვლის, რომ იქ ცხოვრებით იგი ძალიან კმაყოფილი იქნება;

4. აქციები. მათ აქვთ საერთო ფონდი, რომელიც ნაკლებღირებულია, ვიდრე საპენსიო დანაზოგი;

5. დანარჩენი. აქ იგულისხმება ორი ავტომობილი და ძვირფასი იახტა, რომელიც განსაკუთრებით ღირებულია მე-2-სთვის.

ვიპოვოთ რეგულირებით გამარჯვებული გადაწყვეტილება.

ამოხსნა. მოთამაშეებმა ჩამოთვლილ საგნებზე თავიანთი უპირატესობების საფუძველზე 100 ქულა შემდეგნაირად გაანაწილეს (ცხრილი 4.8.1).

ცხრილი 4.8.1

საგანი	1-ცოლი	2-ქმარი
1. საპენსიო დანაზოგი	50	40
2. სახლი	20	30
3. აგარაკი	15	10
4. აქციები	10	10
5. დანარჩენი	5	10

რეგულირებით გამარჯვების პროცედურა მხარეებს შორის ანაწილებს თითოეულ საგანს იმის მიხედვით, თუ რომელმა მხარემ შეაფასა ეს საგანი უფრო მეტად. ასეთი შეფასება აღინიშნება ქვედა ხაზით. ამიტომ, ცხრილის მიხედვით მე-2(ქმარი) ღებულობს სახლს და დანარჩენს. 1-ელი(ცოლი) ღებულობს საპენსიო დანაზოგს და აგარაკს. ჯერჯერობით არ მივაქციოთ ყურადღება თანაბრად შეფასებულ აქციებს. ამრიგად, 1-ელი ღებულობს 50+15=65 ქულას, ხოლო მე-2 - 30+10=40 ქულას. ამით პროცედურის პირველი ეტაპი დასრულებულია.

ვინაიდან აქ ჩამორჩება ქმარი, ამიტომ მივუმატოთ მას აქციები, რითაც იგი მიიღებს 40+10=50 ქულას.

ახლა იწყება გადანაწილების ეტაპი. ამ ეტაპით უნდა მივაღწიოთ ტოლფასოვნებას საგნების ან მათი ნაწილების გადანაწილებით 1-ელიდან მე-2-ზე (მე-2 ჩამორჩება 15-ით). აქ საჭიროა გადანაწილების რიგი. ეს რიგი განისაზღვრება გარკვეული წილადით. წილადი აიგება იმ საგნების მიხედვით, რომლებითაც პირველ ეტაპზე ცოლი გახდა გამარჯვებული და მათ გადანაწილებაზე მან შეიძლება თქვას უარი. კერძოდ, თითოეული იმ საგნისათვის, რომელიც პირველ ეტაპზე მიიღო ცოლმა, ჩვენ ვანგარიშობთ წილადს, რომლის მრიცხველში იქნება გამარჯვებულის (ცოლის) მიერ შეფასებული ქულა, ხოლო მნიშვნელში - წაგებულის (ქმრის) მიერ შეფასებული ქულა.

ჩვენს შემთხვევაში, პირველ ეტაპზე 1-ელს აქვს ორი საგანი: 1. საპენსიო დანაზოგი და 2. აგარაკი. აქედან პირველი საგნის შესაბამისი წილადი იქნება $\frac{50}{40}=1{,}25$, ხოლო მეორე საგნისათვის ასეთი წილადი იქნება $\frac{15}{10}=1{,}5$.

საგნების გადანაწილება ცოლიდან ქმარზე დავიწყოთ წილადიდან, რომელსაც აქვს უმცირესი მნიშვნელობა. ასეთია საპენსიო დანაზოგი 1,25 მნიშვნელობით. შემდეგ გადავალთ უფრო მაღალი შეფასების საგნებზე, სანამ ქულები არ გათანაბრდება. თუ მეორეს გადაეცემა პირველის მთლიანი საპენსიო დანაზოგი, მაშინ მეორე მიიღებს 50+40=90 ქულას. ცხადია, რომ ამით მე-2 გახდება სრული გამარჯვებული, ხოლო 1-ელი სრული დამარცხებული, რადგან მას დარჩება 65–50=15 ქულა. აქედან გამომდინარე, საპენსიო დანაზოგი უნდა გაიყოს. ახლა ჩვენი ამოცანაა, რომ განისაზღვროს იმ საგნის ზუსტი წილი, რომელსაც მიიღებს თითოეული მხარე ისე, რომ მათ მიერ მიღებული ქულები თანაბარი გახდეს.

ასეთი წილადები ვიპოვოთ მოსინჯვით. ვინაიდან ქმარი ჩამორჩება ცოლს 15 ქულით, ამიტომ დავუმატოთ მას 8 ქულა, რითაც შემცირდება 1-ელის ქულების რაოდენობა. ამრიგად, ქმრისთვის საპენსიო დანაზოგიდან 8 ქულის დამატება ნიშნავს მისთვის საპენსიო დანაზოგის

$\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$ ნაწილის გადაცემას. ამით მას ექნება 50+8=58 ქულა.

ამ პროცედურით ცოლის მიერ საპენსიო დანაზოგის 50 ქულით შეფასებიდან მას დააკლდება 10 ქულა (50-დან ქმარს ეძლევა მისი $\frac{1}{5}$ ნაწილი - $50.\frac{1}{5}=10$). მაშასადამე, მას დარჩება 65–10=55 ქულა. ახლა ქმარს აქვს 58 ქულა, ცოლს 55. მაშასადამე, ქმარს აქვს ცოლზე მეტი ქულა, რაც მიუთითებს, რომ ქმარს გადაეცა იმაზე მეტი, რაც მას სინამდვილეში ეკუთვნოდა.

აღმოჩნდა, რომ საპენსიო დანაზოგის სამართლიანი წილი, რომელიც უნდა გადაეცეს ქმარს ცოლისაგან, შეიძლება განისაზღვროს მარტივი არითმეტიკული გამოთვლებით. მართლაც, ვთქვათ, x აღნიშნავს საპენსიო დანაზოგის იმ წილს, რომელსაც მიიღებს ქმარი. მაშინ იგი სულ მიიღებს $50+40\cdot x$ ქულას, ხოლო ცოლს დარჩება $65-50\cdot x$ ქულა. თუ გვინდა, რომ მათი ქულები გათანაბრდეს, უნდა დავწეროთ განტოლება

$$50+40x=65-50x\,,$$

საიდანაც $x=\frac{1}{6}$.

ამრიგად, ქმარი მიიღებს საპენსიო დახაზოგის $\frac{1}{6}$ ნაწილს, ხოლო ცოლი - $\frac{5}{6}$ ნაწილს. აქედან გამომდინარე, ქმარი საბოლოოდ მიიღებს $50+\frac{1}{6}\cdot 40=56,67$ ქულას, ხოლო ცოლი მიიღებს $65-\frac{1}{6}\cdot 50=56,67$ ქულას.

მაშასადამე, თავიანთი გულწრფელი შეფასებებიდან გამომდინარე, ორივე მხარე ღებულობს წილებს თანაბარი რაოდენობით, რითაც საგნები სამართლიანად განაწილდება ცოლ-ქმარს შორის. ასეთი გადაწყვეტილება მოგვეცა რეგულირებით გამარჯვების მეთოდმა და ორივე გა-

მოვიდა გამარჯვებული, თანაც ორივე კმაყოფილი ყოველგვარი შურისა და წყენის გარეშე.

4.9. გადაწყვეტილებათა მიღება რისკისა და სრული განუზღვრელობის პირობებში

კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირის (გმპ) მიერ საქმიანობის ნებისმიერ სფეროში გადაწყვეტილების მიღება დამოკიდებულია განსხვავებული სტრატეგიების (ქმედებების) გამოყენების შედეგად მისაღები შედეგების წინასწარ განსაზღვრულობის ხარისხზე. ამიტომ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში განვიხილავთ გადაწყვეტილების მიღების სამი სახის მოდელს:

1. გადაწყვეტილების მიღება განსაზღვრულობის პირობებში, როცა ყოველ ქმედებას მივყავართ წინასწარ გარკვეულ კონკრეტულ შედეგთან;
2. გადაწყვეტილების მიღება რისკის პირობებში ანუ ნაწილობრივი განუზღვრელობის (იგივე ნაწილობრივი გაურკვევლობის) პირობებში, როცა ყოველ ქმედებას მივყავართ შესაძლო კერძო შედეგების სიმრავლიდან ერთ-ერთ შედეგთან. ამასთან, თითოეულ შედეგს აქვს კონკრეტული ალბათობა და იგი ცნობილია გმპ-სთვის (თუ უცნობია, მაშინ მათი გამოთვლა შესაძლებელია პირადად მის მიერ ან ექსპერტული შეფასებით);
3. გადაწყვეტილების მიღება განუზღვრელობის (ან სრული განუზღვრელობის) პირობებში, როცა ამა თუ იმ ქმედებას ან მათგან რამდენიმეს აქვს კერძო შედეგების სიმრავლე, რომელთა ალბათობები გმპ-სთვის უცნობია და მათი პოვნა შეუძლებელია ან ამ ალბათობებს საერთოდ არა აქვს აზრი.

ამდენად, აღნიშნული სამი მოდელიდან, მეორე და მესამე რისკის პრობლემასთან არის დაკავშირებული. მათი დამუშავების და ანალიზის მეთოდები შეისწავლება სტატისტიკური თამაშების და სტატისტიკური გადაწყვე-

ტილების მიღების თეორიაში. თამაშთა თეორიის პრინციპებზე დაყრდნობით არსებობს საკმაოდ მარტივი მეთოდები და მოდელები, რომელთა წარმატებით გამოყენების შემთხვევაში შეგვიძლია მინიმუმამდე დავიყვანოთ მოსალოდნელი დანაკარგები. ორი მოთამაშის შემთხვევაში, როცა ერთი - პირველი მოთამაშე (შემდეგში მოთამაშე, გმპ) რაციონალური მოთამაშეა, ხოლო მეორე მოთამაშე - ბუნება, გადაწყვეტილებას არ ღებულობს გონიერული ქმედებით - იგი სტრატეგიას ირჩევს შემთხვევით, თამაში მოიცემა მატრიცული თამაშის ფორმით და მას ეწოდება **სტატისტიკური თამაში ან თამაში ბუნების წინააღმდეგ**. ასეთ თამაშში შევისწავლით მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის პოვნის ამოცანას რისკის და განუზღვრელობის პირობებში. ეს კი საჭიროებს რისკის და განუზღვრელობის ცნებებში საფუძვლიან გარკვევას. განვიხილოთ დასმული ამოცანები.

4.9.1. რისკი და განუზღვრელობა

რისკის ცნებას და მის გამოყენებას საკმაოდ დიდი ისტორია აქვს. ისტორიკოსების მტკიცებით რისკი არსებობდა ყოველთვის. ადამიანები ძველ დროში თამაშობდნენ აზარტულ თამაშებს, კერძოდ, კამათლის თამაშის სცენები აღმოჩენილია ეგვიპტის სამარხებში. კაცობრიობის ისტორია მოწმობს, რომ ის, ვისაც შეუძლია დროულად გარისკვა, ის უფრო დიდ მოგებას (სარგებლიანობას) ღებულობს. ამისათვის საკმარისია გავიხსენოთ გაბედული პოლიტიკოსები და მხედართმთავრები, უშიშარი ინჟინრები, მეწარმეები და ა.შ. მრავალი გადაწყვეტილება დაკავშირებულია რისკთან, სარისკო სიტუაციიდან გადახრა ხშირ შემთხვევაში გარდაუვალი ხდება და ამიტომ აუცილებელია ყველაფერი გავაკეთოთ იმისათვის, რომ შევამციროთ არასასურველი რისკი. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა ვისწავლოთ ანგარიშით გარისკვა, დავეუფლოთ რისკის მეცნიერებას და ხელოვნებას.

1738 წელს დ. ბერნულიმ სანქტ-პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის მოამბეში გამოაქვეყნა სტატია - "ახალი თეორიის შინაარსი რისკის გაზომვის შესახებ", სა-

დაც მან ჩამოაყალიბა თავისი აღიარებული სანქტ-პეტერბურგის პარადოქსი. ამ ნაშრომის ძირითადი თეზისი დ. ბერნულიმ ასე ჩამოაყალიბა: "რისკი თითოეულის მიერ აღიქმება თავისებურად და იგი არ შეიძლება შეფასდეს ერთნაირად. ამასთან, ქონების სარგებლიანობის შეფასება არ არის მარტივი წრფივი ფუნქცია და იგი დამოკიდებულია ადამიანზე, რომელიც იმყოფება სარისკო სიტუაციაში". ამრიგად, ფასის და ალბათობის ცოდნა ყოველთვის არაა საკმარისი შედეგის შეფასებისათვის, ვინაიდან სარგებლიანობა ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში შეიძლება დამოკიდებული იყოს შემფასებელ სუბიექტზე. ყოველი სუბიექტი კი რისკზე რეაგირებს ღირებულებათა სისტემის შესაბამისად.

ორასი წელი დასჭირდა დ. ბერნულის იდეის შემდგომ განვითარებას. მხოლოდ 1944 წელს დამუშავდა ჯონ ფონ ნეიმანისა და ოსკარ მორგენშტერნის მიერ სარგებლიანობის თეორია, რომლითაც შესაძლებელია ვიპოვოთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება სარისკო პირობებში.

სიტყვა "რისკის" წარმოშობის შესახებ არსებობს განსხვავებული შეხედულებები. ზოგიერთი თვლის, რომ იგი არაბული წარმოშობისაა, ზოგიერთი თვლის, რომ იგი ბერძნული წარმოშობისაა, ზოგიერთის აზრით კი იგი იტალიურია. უფრო მეტად თვლიან, რომ იგი ესპანურ-პორტუგალიური წარმოშობისაა და აღნიშნავს ბრაგას (წყალქვეშა კლდეს ზღვაში, რომელიც თითქმის წყლის ზედაპირზეა ამოსული) ანუ მოსალოდნელ საფრთხეს, საშიშროებას. ინგლისურენოვან სამეცნიერო ლიტერატურაში თავიდან გამოიყენებოდა სიტყვა საშიშროება, სიტყვა "რისკი" კი გამოიყენება 1830 წლიდან და პირველად გვხვდება სადაზღვევო კომპანიებში. მეოცე საუკუნეში საბოლოოდ დამკვიდრდა სიტყვა "რისკი". რისკის გაწევა ალალბედზე მოქმედებას, სახიფათო მდგომარეობაში ჩადგომას ნიშნავს. აქედან გამომდინარეობს, რომ რისკზე წასვლას ჩვენ გვაიძულებს გარემოების გაურკვევლობა: აუცილებელია ვიმოქმედოთ, მაგრამ უცნობია როგორ. ამასთან, რაც მეტია გადაწყვეტილების მიღებისას გაურკ-

ველობა, მით მეტია რისკი. გარდა ამისა, გარისკვა გვიწევს ისეთ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს წარმატების იმედი და კიდევ, როცა რისკის მოსალოდნელ დადებით შედეგს აქვს კანონზომიერი ხასიათი (იღბლიანი შემთხვევა). მაშასადამე, რისკისათვის დამახასიათებელია მიზეზები: გაურკვევლობა, წარმატების მოლოდინი და იღბლიანი შედეგის მიღების იმედი.

ჩვენ შესაძლოა განვიცადოთ ზემოქმედება პოლიტიკური, ეკონომიკური, ეკოლოგიური, ფსიქოლოგიური, სამართლებრივი, სამედიცინო და სხვა რისკისაგან. მათგან ზოგიერთი განსაკუთრებით საშიშია უსაფრთხო ცხოვრებისათვის. ასეთი რისკების კონტროლისათვის მეტად საჭირო ფაქტორს წარმოადგენს ჩვენი აღზრდა და განათლება სარისკო კულტურის ფორმირებისათვის. სარისკო კულტურა წარმოადგენს მართვისათვის საჭირო ცოდნისა და პრაქტიკული უნარ-ჩვევების ერთობლიობას, რომლებიც განპირობებულია ჩვენი წარმოდგენების, თვალსაზრისთა, ღირებულებათა და ტრადიციული ადათ-წესების საშუალებით.

დღემდე არ არსებობს რისკის არსის ცალსახა გაგება. ეს გამოწვეულია მისი, როგორც მოვლენის სირთულით, რომელსაც აქვს მრავალი არათანმთხვევი, ზოგჯერ კი ურთიერთსაწინააღმდეგო რეალური საფუძვლები. ეს განაპირობებს რისკის ცნების განსაზღვრის რამდენიმე ვარიანტის შესაძლებლობას:

1. რისკი პოტენციური დანაკარგის შესაძლებლობის რიცხვითი განზომილებაა. რისკის ცნებით ხასიათდება განუზღვრელობა, რომელიც დაკავშირებულია მიღებული გადაწყვეტილების რეალიზაციისას წარმოშობილ შესაძლო არასასურველ სიტუაციასთან და შედეგთან;
2. რისკი დანაკარგების და ზარალის წარმოშობის, გეგმით გათვალისწინებული შემოსავლების და მოგების მიღების ალბათობაა;
3. რისკი მომავლისათვის ჩვენი ფინანსური შედეგების გაურკვევლობაა;
4. რისკი მომავალში წმინდა შემოსავლების გაურკვევლობის ხარისხია;

5. რისკი არასასურველი შედეგის, საშიშროების, დანაკარგის და დაზიანების შანსია;
6. რისკი ღირებულებათა დაკარგვის ალბათობაა ისეთი საქმიანობის პირობებში, როცა საქმიანობის პირობები და გარემოება განსხვავდება წინასწარ დასახული გეგმისა და ანგარიშისაგან.

ჩამოთვლილი ცნებებიდან ნათლად ჩანს, რომ რისკის საფუძველში დევს ალბათობისა და განუზღვრელობის მოვლენები, რისთვისაც რისკთან დაკავშირებით საჭიროა ამ ორი მოვლენის ძირეული კლასიფიკაცია.

მაინც რა არის განუზღვრელობის (იგივე გაურკვევლობის) მიზეზები, რომლებიც წარმოშობს რისკს? ასეთი ძირითადად სამი მიზეზია. მათგან პირველია არცოდნა, საკმარისად არაინფორმირებულობა ანუ გარემომცველ გარემოზე ჩვენი ცოდნის არასისრულე, არასაკმარისობა. ამიტომ არის კაცობრიობის განვითარების ისტორია და, შესაბამისად, ცივილიზაცია, ამავე დროს, გაურკვევლობასთან ბრძოლის ისტორია. მეორე მიზეზად უნდა დავასახელოთ შემთხვევითობა, რაშიც ვგულისხმობთ ისეთ შემთხვევას, როცა ერთნაირ პირობებშიც კი შესაძლებელია განსხვავებული შედეგების მიღება, ე.ი. წინასწარ არ შეგვიძლია დავადგინოთ რა შედეგს მივიღებთ ქმედების გამეორების შემთხვევაში. ამრიგად, ყოველი ასეთი შემთხვევის დაგეგმვა შეუძლებელია და რადგან არ ვიცით რას მოგვცემს შემთხვევითობა, ამიტომ წარმოიშობა რისკი. მესამე მიზეზია წინააღმდეგობა და მუქარა, რომლებსაც ადგილი აქვს ნებისმიერი სახის კონფლიქტურ სიტუაციებში. ასეთი სიტუაციები გვხვდება ყველა სფეროში და თითოეული მათგანის პირობებში გადაწყვეტილების მიღება ყოველთვის დაკავშირებულია გაურკვევლობასთან და, მაშასადამე, რისკთან. კონფლიქტურ სიტუაციებში გადაწყვეტილების მიღებას სწავლობს თამაშთა მათემატიკური თეორია და, ამდენად, ამ დარგის საგანს წარმოადგენს, აგრეთვე, როგორც გაურკვევლობების, ისე რისკების კანონზომიერების ანალიზი. ყოველივე აღნიშნულიდან გა-

მომდინარეობს, რომ ყველა გადაწყვეტილება, რომელიც დაკავშირებულია რისკთან, დამოკიდებულია არა მხოლოდ გარემოს მდგომარეობაზე და მის ცვლილებაზე, არამედ მაზეც, გადაწყვეტილების მიმღები პირისათვის როგორი სახით იქნება ფორმირებული გარემოზე წარმოდგენა. ამიტომ აღმოჩნდება, რომ გმპ რაც მეტ ინფორმაციას მოიპოვებს გარემოს შესახებ, გამოიყენებს საკუთარ გამოცდილებას და შესაბამის მეთოდებს, მისი გადაწყვეტილება აღმოჩნდება უფრო მეტად კონსერვატიული, ფრთხილი: ის უპირატესობას მიანიჭებს ისეთ გადაწყვეტილებებს, რომლებშიც მოგების ალბათობა მეტია, ხოლო წაგების ალბათობა ნაკლები.

შევეხოთ გაურკვევლობის ვარიანტებს, რომელთაგან თითოეული ან მათი შერეული კომბინაციები გვხვდება თამაშთა თეორიაში:

1. სტრატეგიების კომბინატორული რაოდენობა, რომელთა განხილვა განსაზღვრულ დროში კომპიუტერის გამოყენებითაც კი შეუძლებელია (მაგალითად, ჭადრაკში);
2. შემთხვევითი ძალების მოქმედების შედეგად წარმოქმნილი შემთხვევითი ფაქტორებით გამოწვეული მოვლენები; სამიზნეში სროლისას მოხვედრათა გაბნევა; მომსახურების სისტემაში მოთხოვნილებათა შემთხვევითი ნაკადი; ფულად სახსრებათა შემთხვევითი ნაკადი საბანკო სისტემაში ან წარმოებაში და ა.შ.;
3. სტრატეგიული გაურკვევლობა, რომელიც გამოწვეულია თამაშში პარტნიორის, ბუნების წინააღმდეგ თამაშში კი - ბუნების უცნობი ქმედების შედეგად.

4.9.2. გადაწყვეტილების მიღება რისკის პირობებში

ბუნების წინააღმდეგ თამაშში შეგნებულად მოქმედებს მხოლოდ მოთამაშე (გმპ, სტატისტიკოსი), ხოლო ბუნების ქმედება გაურკვეველია და ზოგიერთ შემთხვე-

ვაში არც პროგნოზირებადია. აქ გაურკვევლობა გამოწვეულია ბუნების ქცევაზე ჩვენი არასაკმარისი ინფორმირებულობით. ამიტომ, ასეთ თამაშს ზოგჯერ უწოდებენ "თამაშს არასრული ინფორმაციით". აქ ბუნება არაა დაინტერესებული მონაწილე, მის ქმედებას განაპირობებს შემთხვევა. "ბუნებაში" შეიძლება ვიგულისხმოთ ისეთი გაურკვეველი ფაქტორების სიმრავლე, რომელთაც ადგილი აქვს ან წარმოიშობა მოთამაშის მიერ გადაწყვეტილების მიღების მომენტში. ბუნების წინააღმდეგ თამაშების ერთი კლასია **სტატისტიკური თამაშები**, მეორე კი - **თამაშები სრული განუზღვრელობის პირობებში**. პირველს კიდევ უწოდებენ "თამაშებს რისკის ან ექსპერიმენტის პირობებში", ხოლო მეორეს - "თამაშებს ქსპერიმენტის გარეშე პირობებში". ბუნების წინააღმდეგ თამაში მოთამაშეს აქვს სტრატეგიები (სვლები) $x_i \in X$ (ჩავთვალოთ $x_i \equiv i$), ხოლო ბუნების სტრატეგიები (მდგომარეობები) აღვნიშნოთ $\omega_j \in \Omega\ (\omega_j \equiv j)$, რომელთა დადგენა ზოგიერთ შემთხვევაში მოითხოვს ექსპერტებთან თანამშრომლობას. ასეთ თამაშში შესაძლებელია მოთამაშის სტრატეგიების რიცხვის შემცირება დომინირებით, ხოლო ბუნების სტრატეგიებზე ამ წესს ვერ გამოვიყენებთ.

პირველ რიგში განვიხილოთ სტატისტიკური თამაში. რადგან ასეთ თამაშში ბუნება არაა დაინტერესებული მოგებებით, ამიტომ თამაშში საინტერესოა მხოლოდ მოთამაშის მოგებები. ჩავწეროთ სტატისტიკური თამაში მატრიცული თამაშის სახით, სადაც $u_{ij} = u(x_i, \omega_j)$ მოთამაშის სარგებლიანობაა (მოგება), რომელსაც იგი მიიღებს თუ აირჩევს x_i სტრატეგიას, ხოლო ბუნება იქნება ω_j მდგომარეობაში:

$$H_u(Q)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline & \omega_1 & \omega_2 & . & \omega_n \\ \hline x_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ \hline x_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline x_m & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \\ \hline Q & q_1 & q_2 & . & q_n \\ \hline \end{array}. \qquad (4.9.1)$$

ამ მატრიცის ბოლო სტრიქონში მოთავსებული ვექტორი $Q(\omega)=(q_1,q_2,...,q_n)$ ბუნების მდგომარეობათა ალბათობებია.

შევნიშნოთ, რომ (4.9.1) თამაშში უნაგირა წერტილის არსებობა როგორც წმინდა, ისე შერეულ სტრატეგიებში მოთამაშეს არ აძლევს გარანტიას ასეთი წონასწორული გადაწყვეტილების არჩევაზე. ამიტომ ბუნების წინააღმდეგ ნებისმიერი თამაშის შემთხვევაში მოთამაშემ გარანტირებული სარგებლიანობის მისაღებად სასურველია გამოიყენოს ფრთხილი, მაქსიმინური სტრატეგია

$$\underline{v}(i^*)=\max_i \min_j u_{ij}.$$

(4.9.1) სტატისტიკურ თამაშში გადაწყვეტილება მიიღება ბაიესური სტრატეგიის გამოყენებით. ამისათვის გამოითვლება თითოეული სტრატეგიის საშუალო მოსალოდნელი სარგებლიანობა

$$u(x_i)=q_1u_{i1}+...+q_nu_{in}, i=1,...,m$$

და ოპტიმალური ბაიესური სტრატეგია იქნება ისეთი $x_i^*=i^*$, რომლისთვისაც $u(x_i^*)=u(i^*)=\max_i u(x_i)$.

შესაძლოა (4.9.1) თამაშში მაქსიმინური და ოპტიმალური ბაიესური სტრატეგიები ერთმანეთს დაემთხვეს და ეს საუკეთესო შემთვევაა. შეიძლება მაქსიმინური და ბაიესური მნიშვნელობები ერთმანეთისაგან მცირეთი განსხვავდებოდეს. ამ შემთხვევაში კი ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად საჭირო იქნება დამატებითი ექსპერიმენტის ჩატარება.

სტატისტიკური თამაშიდან შეგვიძლია გადავიდეთ ახალ თამაშზე, რომლის მოგების მატრიცა უფრო ბუნებრივად გამოსახავს მოთამაშის მოგების გაურკვევლობას იმ შემთხვევაში, როცა ბუნება უმართავია, არაწინასწარმეტყველია. მოგების ასეთ მატრიცას წარმოადგენს რისკების მატრიცა $R_u = \left(r(x_i, \omega_j)\right) \equiv (r_{ij})$, რომლის ელემენტები რისკებია და გამოითვლება ფორმულით

$$r_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij} = u_j - u_{ij} \geq 0 .$$

ეს სიდიდე წარმოადგენს მოთამაშის შესაძლო დანაკარგს ბუნების შესაბამის მაქსიმალურ წაგებასთან შედარებით. უფრო დაწვრილებით, მოთამაშის რისკი r_{ij}, როცა ის ირჩევს x_i სტრატეგიას, ხოლო ბუნების მდგომარეობაა ω_j, ეწოდება სხვაობას, რომელშიც საკლებია ის მოგება, რომელსაც მოთამაშე მოიგებდა, თუ ეცოდინებოდა ბუნების მდგომარეობა ω_j, ხოლო მაკლებია ის მოგება, რომელსაც ის მოიგებს x_i სტრატეგიის გამოყენებისას, თუ მას არ ექნება ინფორმაცია ბუნების ω_j მდგომარეობაზე. ამრიგად, რისკების თამაშს აქვს სახე:

$$R_u(Q) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \omega_1 & \omega_2 & . & \omega_n \\ \hline x_1 & r_{11} & r_{12} & . & r_{1n} \\ \hline x_2 & r_{21} & r_{22} & . & r_{2n} \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline x_m & r_{m1} & r_{m2} & . & r_{mn} \\ \hline Q & q_1 & q_2 & . & q_n \\ \hline \end{array} . \qquad (4.92)$$

ასეთ თამაშში კარგად ჩანს რას რისკავს მოთამაშე ამა თუ იმ სტრატეგიის გამოყენებისას. რაც შეეხება გადაწყვეტილების მიღებაზე მიდგომას, იგი დამოკიდებულია ბუნების მდგომარეობის განუზღვრელობის ხარისხზე.

თეორემა 4.9.1. ბუნების წინააღმდეგ (4.9.1) სტატისტიკურ თამაშში მაქსიმალური საშუალო მოგების შესაბამისი სტრატეგია x_i^* ემთხვევა რისკების (4.9.2) თამაშში მინიმალური საშუალო რისკის შესაბამის სტრატეგიას:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} q_j = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{n} u_{i^* j} q_j = \sum_{j=1}^{n} r_{i^* j} q_j .$$

დამტკიცება. (4.8.1) თამაშიდან ვწერთ

$$H_u\left(x_i^*, Q(\omega)\right) = \max_i$$

$$H_u\left(x_i^*, Q(\omega)\right) = \max_i H_u\left(x_i, Q(\omega)\right) = \max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{n} u_{i^* j} q_j .$$

(4.9.2) თამაშიდან ვღებულობთ:

$$R_u\left(x_i, Q(\omega)\right) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (u_j - u_{ij}) q_j = \sum_{j=1}^{n} (u_j q_j - u_{ij} q_j) = C - \sum_{j=1}^{n} u_{ij} q_j ,$$

სადაც C მუდმივი სიდიდეა და აქედან

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} q_j + R_u\left(x_i, Q(\omega)\right) = C .$$

ამ ტოლობაში $i^* = x_i^*$ სტრატეგიისათვის პირველი შესაკრების მნიშვნელობა მაქსიმალურია, რის გამოც მეორე შესაკრები სიდიდე $R_u(x_i^*, Q(\omega))$ იქნება მინიმალური. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა 4.9.1. გადაწყვეტილი გვაქვს სასოფლო-სამეურნეო დანიშნულების მიწის გარკვეულ ფართობზე ერთ-ერთი გავაშენოთ შემდეგი სამი სახის კულტურიდან: x_1-სიმინდი, x_2-კარტოფილი, x_3-პომიდორი. მოსავლისაგან მიღებული სარგებლიანობა დამოკიდებულია ამინდის პირობებზე, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს ერთ-ერთი მდგომარეობა შემდეგიდან: ω_1-ზაფხული იქნება ცხელი და მშრალი; ω_2-ზაფხული იქნება მშრალი და ცივი;

ω_3-ზაფხული იქნება ცხელი და წვიმიანი; ω_4-ზაფხული იქნება ცივი და წვიმიანი. ამინდის ბიუროს სამსახურიდან მოვიპოვეთ ინფორმაცია, რომ გასული ათი წლის განმავლობაში ბუნების ჩამოთვლილი მდგომარეობებიდან ω_1-ს ადგილი ჰქონდა ერთხელ, ω_2-ს - ორჯერ, ω_3-ს - ხუთჯერ, ω_4-ს - ორჯერ. რა გადაწყვეტილება მივიღოთ მაქსიმალური სარგებლიანობის მისაღებად?

ამოხსნა. ბუნების მდგომარეობათა სიხშირეებიდან ვიპოვით ამ მდგომარეობების ალბათობათა შეფასებებს:

$$q_1 = 0,1; q_2 = 0,2; q_3 = 0,5; q_4 = 0,2.$$

მაშასადამე, ბუნების მდგომარეობათა ალბათობების განაწილების ვექტორია $Q(\omega) = (0,1;0,2;0,5;0,2)$.

სტატისტიკური დაკვირვებიდან გამომდინარე, დადგენილი გვაქვს, აგრეთვე, ბუნების $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ მდგომარეობათა სიმრავლიდან ცალკეული სტრატეგიისათვის და ჩვენი სტრატეგიების $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ სიმრავლიდან კონკრეტული გადაწყვეტილების მიღებისას რა სარგებლიანობას მივიღებთ აღნიშნული მიწის ერთი ჰექტარი ნაკვეთიდან. ყველა აღნიშნული მონაცემი მოვათავსოთ (4.9.1) სტატისტიკური თამაშის მოგების მატრიცაში:

$H_u(Q) =$

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
x_1	4	3	6	5
x_2	2	1	8	6
x_3	3	2	5	1
Q	0,1	0,2	0,5	0,2

გამოვთვალოთ თითოეული სტრატეგიისათვის საშუალო მოსალოდნელი სარგებლიანობა:

$$u(x_1) = 0,1.4 + 0,2.3 + 0,5.6 + 0,2.5 = 5;$$

$$u(x_2) = 0,1.2 + 0,2.1 + 0,5.8 + 0,2.6 = 5,6;$$

$$u(x_3) = 0{,}1.3 + 0{,}2.2 + 0{,}5.5 + 0{,}2.1 = 3{,}4\,.$$

ამრიგად, მაქსიმალური საშუალო $u(x_2^*) = 5{,}6$ სარგებლიანობა მივიღეთ x_2 სტრატეგიისათვის და, აქედან გამომდინარე, მიწის მოცემულ ნაკვეთზე უნდა გავაშენოთ კარტოფილი.

ახლა განვიხილოთ მოცემული ამოცანისათვის რისკების თამაში (4.9.2), რომლის მოგების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$R_u(Q) =$

	ω_1	ω_2	ω_3	4
x_1	0	0	2	1
x_2	2	2	0	0
x_3	1	1	3	5
Q	0,1	0,2	0,5	0,2

.

გამოვთვალოთ საშუალო რისკის მნიშვნელობა თითოეული სტრატეგიისათვის:

$$r(x_1) = 0{,}1.0 + 0{,}2.0 + 0{,}5.2 + 0{,}2.1 = 1{,}2;$$

$$r(x_2) = 0{,}1.2 + 0{,}2.2 + 0{,}5.0 + 0{,}2.0 = 0{,}6;$$

$$r(x_3) = 0{,}1.1 + 0{,}2.1 + 0{,}5.3 + 0{,}2.5 = 2{,}8.$$

მაშასადამე, მინიმალური საშუალო რისკი მივიღეთ იმავე x_2 სტრატეგიისათვის, რომელმაც მოგვცა მაქსიმალური საშუალო სარგებლიანობა. საბოლოო გადაწყვეტილების თანახმად, უნდა გავაშენოთ კარტოფილი.

4.9.3. გადაწყვეტილების მიღება სრული განუზღვრელობის პირობებში. ოპტიმალურობის ძირითადი კრიტერიუმები (წესები)

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სრული განუზღვრელობის პირობებში არაა ცნობილი როგორც ჭეშმარიტი ბუნების მდგომარეობები, ისე შესაძლო მდგომარეობების ალბათური განაწილება. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია ფრთხილი დაშვება, რომ ასეთი ალბათუ-

რი განაწილება შეიძლება ყველაზე ნაკლებ ხელსაყრელი აღმოჩნდეს მოთამაშისათვის (გმპ-სთვის). კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ ბუნება არაა აქტიური მოთამაშე, იგი არაფერს უხდის მოთამაშეს და არ ცდილობს მისი სარგებლიანობის შემცირებას. ბუნების სტრატეგიების ჭეშმარიტი განაწილება იშვიათადაა ოპტიმალური მათემატიკური გაგებით, ე.ი. ჭეშმარიტი პირობები შეიძლება აღმოჩნდეს უფრო ხელსაყრელი, ვიდრე ისინი, რომლებზეც ორიენტირებს მოთამაშე. ამიტომ უკეთესის გათვალისწინებამ და მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიისაგან გადახრამ უფრო დიდი მოგების იმედით, შეიძლება მიიყვანოს ის კატასტროფულ შედეგამდე.

მეორე კლასის თამაშში ანუ სრული განუზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღებისათვის უნდა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ იმ ინფორმაციებით, რომლებიც მოცემულია შესაბამისი თამაშის მოგების მატრიცაში:

$$H_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
 & \omega_1 & \omega_2 & . & \omega_n \\
\hline
x_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\
\hline
x_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\
\hline
. & . & . & . & . \\
\hline
x_n & u_{m1} & u_{m2} & . & u_{mn} \\
\hline
\end{array}\,. \tag{4.9.3}$$

მოცემულ თამაშში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად ვისწრაფვით რაიმე გარანტირებული მოგების მიღებისათვის. ყოველივე ეს ხორციელდება ოპტიმალურობის კრიტერიუმის გამოყენებით. ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევას წინ უძღვის ოპტიმალურობის პრინციპის განსაზღვრა, რაც, თავისთავად, არაა მარტივი ამოცანა და იგი თამაშთა თეორიის დამოუკიდებელი შესწავლის საგანია.

აქ განვიხილავთ ოპტიმალურობის ძირითად კრიტერიუმებს (ძირითად წესებს), რომლებსაც ყველაზე მეტად ვიყენებთ (4.9.3) თამაშში გადაწყვეტილების მისაღებად.

ლაპლასის კრიტერიუმი

ლაპლასის კრიტერიუმი ეყრდნობა ი. ბერნულის მიერ ჩამოყალიბებულ არასაკმარისი საფუძვლის პრინციპს, რომელიც გვეუბნება: ვინაიდან ბუნების მდგომარეობათა ალბათობები $Q(\omega)=(q_1,q_2,...,q_n)$ უცნობია, ამიტომ არ გვაქვს საფუძველი იმისა, რომ ისინი ჩავთვალოთ განსხვავებულად. მაშასადამე, ლაპლასის კრიტერიუმი იყენებს ოპტიმისტურ დაშვებას იმის შესახებ, რომ ბუნების ყველა მდგომარეობის ალბათობა ერთნაირია, ე.ი.

$$q_1=q_2=...=q_n=\frac{1}{n}.$$

მაშინ მოთამაშის საუკეთესო გადაწყვეტილება იქნება ისეთი სტრატეგია x_{i^*}, რომელიც უზრუნველყოფს საშუალო სარგებლიანობებიდან მაქსიმუმის მიღებას

$$\max_{x_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j}.$$

ცხადია, ასე განსაზღვრული H_u მატრიცის $x_{i^*}=i^*$ სტრიქონი იგივე იქნება, რომელშიც ელემენტების ჯამი იქნება უდიდესი. ამიტომ ლაპლასის კრიტერიუმით ოპტიმალურ $x_{i^*}=i^*$ გადაწყვეტილებას ვპოულობთ ასე:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n}u_{1j},\sum_{j=1}^{n}u_{2j},...,\sum_{j=1}^{n}u_{mj}\right\}=\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j},$$

ხოლო შესაბამისი საშუალო მოგება იქნება

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}u_{i^*j}.$$

მაქსიმაქსის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი გულისხმობს მაქსიმალური მოგებების მაქსიმიზაციას. იგი გვეხმარება ავირჩიოთ ისეთი სტრატეგია, რომლითაც მივიღებთ ბუნების თითოეული მდგომარეობისათვის მაქსიმალური სარგებლიანობებიდან

მაქსიმუმს. ასეთი x_{i^*} სტრატეგია გამოითვლება ფორმულით

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \max_{\omega_j} u_{ij},$$

რომელსაც მაქსიმაქსის კრიტერიუმი ეწოდება. მას კიდევ, მეტისმეტად ოპტიმისტის კრიტერიუმს უწოდებენ.

ვალდის კრიტერიუმი

ვალდის კრიტერიუმით მოთამაშე ორიენტირებს უარეს პირობებზე და ირჩევს ისეთ გადაწყვეტილებას, რომლითაც ყველაზე ცუდ პირობებში სარგებლიანობა მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამ კრიტერიუმის თანახმად, ოპტიმალური x_{i^*} სტრატეგიის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \min_{\omega_j} u_{ij}.$$

ამ კრიტერიუმით მოთამაშე ყოველთვის ხელმძღვანელობს ბუნების უარესი მდგომარეობისათვის. გადაწყვეტილების მიღებისას ასეთი მიდგომა განპირობებულია მეტისმეტი პესიმიზმით. ამიტომ ვალდის კრიტერიუმს, მეტისმეტად პესიმისტის კრიტერიუმს უწოდებენ.

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი საშუალებას გვაძლევს (4.9.3) თამაშში ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად, მისი შესაბამისი რისკების თამაშში

$R_u =$

	ω_1	ω_2	.	ω_n
x_1	r_{11}	r_{12}	.	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	.	r_{2n}
.	.	.	.	.
x_m	r_{m1}	r_{m2}	.	r_{mn}

ავირჩიოთ ისეთი სტრატეგია, რომლისთვისაც ყველაზე უარეს და არახელსაყრელ პირობებში რისკის სიდიდე

იქნება მინიმალური. ასეთი სტრატეგია გამოითვლება ფორმულით

$$r(x_{i^*}) = \min_{x_i} \max_{\omega_j} r_{ij}, \text{ სადაც } r_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij} = u_j - u_{ij}.$$

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმი, როგორც ვალდის კრიტერიუმი, მეტისმეტად პესიმისტის კრიტერიუმია. ამასთან, აქ პესიმიზმი იმით გამოიხატება, რომ მცირდება არა მინიმალური სარგებლიანობა, არამედ სარგებლიანობის მაქსიმალური დანაკარგი.

ჰურვიცის კრიტერიუმი

ამ კრიტერიუმს ეწოდება ოპტიმიზმ-პესიმიზმის კრიტერიუმი და იგი ემყარება შემდეგ ორ დაშვებას: 1) ბუნება შეიძლება იმყოფებოდეს ყველაზე უკეთეს მდგომარეობაში α ალბათობით და 2) ბუნება შეიძლება იმყოფებოდეს ყველაზე უარეს მდგომარეობაში $1-\alpha$ ალბათობით, სადაც α ოპტიმიზმის კოეფიციენტია. ამ კრიტერიუმით (4.9.3) თამაშის მოგების მატრიცის ყოველი სტრიქონისათვის $i\,(i=1,2,...,m)$ ვანგარიშობთ სიდიდეს

$$\alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha) \min_{\omega_j} u_{ij},$$

შემდეგ კი, ამ სიდიდეებიდან მაქსიმალურის შესაბამისი სტრატეგია $x_{i^*} = i^*$ იქნება ოპტიმალური:

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \left\{ \alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha) \min_{\omega_j} u_{ij} \right\}.$$

α სიდიდეს, ოპტიმიზმის ზომასაც უწოდებენ. იგი აირჩევა სუბიექტურად და დამოკიდებულია სიტუაციის შეფასებაზე. რაც უფრო თავის დაზღვევა სურს მოთამაშეს, მით უფრო ახლოს უნდა იყოს ნულთან, ხოლო რაც უფრო ოპტიმისტია, მით უფრო ახლოსაა ერთთან. როცა $\alpha=1$, მაშინ ჰურვიცის კრიტერიუმი ემთხვევა მაქსიმაქსის კრიტერიუმს, ხოლო როცა $\alpha=0$, მაშინ გვაძლევს ვალდის კრიტერიუმს.

შენიშვნა 4.9.1. ბუნების წინააღმდეგ თამაშში ოპტიმალურობის კრიტერიუმის არჩევა ეყრდნობა სუბიექტურ

მოსაზრებებს. ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებამდე, მოცემული თამაში უნდა გაეაანალიზოთ რამდენიმე კრიტერიუმის გამოყენებით. თუ ყველა კრიტერიუმი მოგვცემს ერთსა და იმავე ოპტიმალურ სტრატეგიას, მაშინ ასეთი გადაწყვეტილება შეგვიძლია ავირჩიოთ დამაჯერებლად. თუ მიღებული გადაწყვეტილებები განსხვავდება, მაშინ ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება მოითხოვს პრობლემური სიტუაციის უფრო ღრმა ანალიზს.

ამოცანა 4.9.2. უნდა მივიღოთ გადაწყვეტილება მოცემულ ადგილზე კონკრეტული ტიპის უფრო ეფექტური ელექტროსადგურის აშენების თაობაზე. არსებობს ოთხი განსხვავებული ტიპის ელექტროსადგურის აშენების შესაძლებლობა: x_1- ნახშირზე, x_2- გაზზე, x_3- ჰიდრო და x_4- ატომური. თითოეული ტიპის ელექტროსადგურის ფუნქციონირების ეფექტურობა დამოკიდებულია სხვადასხვა ფაქტორზე, რომლებიც ჩაითვლება ბუნების მდგომარეობად: ω_1- სათბობის ღირებულება, ω_2- სათბობის მიწოდება, ω_3- ეკოლოგიური ღონისძიებების შესრულებისათვის გაწეული დანახარჯები, ω_4- დაქირავებული მუშახელის ხელფასები და ა.შ. აქედან გამოვყოფთ რამდენიმე ძირითად მდგომარეობას და მათ კომბინაციებს, რომლებიც ქმნის ბუნების მდგომარეობათა სიმრავლეს, და ეს სიმრავლე იყოს $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$. გადაწყვეტილების მიმღები პირის - მოთამაშის სტრატეგიების სიმრაელეა $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული თამაშის მოგების მატრიცის ელემენტი (x_i,ω_j) სიტუაციაში გამოსახავს x_i ტიპის ელექტროსადგურის ფუნქციონირების ეფექტურობას ω_j მდგომარეობისათვის და ამ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$H_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\
\hline
x_1 & 5 & 2 & 8 & 4 \\
\hline
x_2 & 2 & 3 & 4 & 12 \\
\hline
x_3 & 8 & 5 & 3 & 10 \\
\hline
x_4 & 1 & 4 & 2 & 8 \\
\hline
\end{array}.$$

გამოვიყენოთ ზენოთ ჩამოთვლილი კრიტერიუმები.

ლაპლასის კრიტერიუმის მიხედვით უნდა გამოვთვალოთ სიდიდეები

$$5+2+8+4=19;\ 2+3+4+12=21;\ 8+5+3+10=26;$$
$$1+4+2+8=15.$$

მათგან უდიდესია 26 და იგი მიიღება x_3 სტრატეგიის არჩევით. ამიტომ ლაპლასის კრიტერიუმით ოპტიმალურია $x_{3^*}=3$ სტრატეგია, ხოლო შესაბამისი საშუალო სარგებლიანობაა $\dfrac{1}{4}.26=6{,}5$.

მაქსიმაქსის კრიტერიუმით

$u(x_{i^*}) = \max\limits_{x_i} \max\limits_{\omega_j} u_{ij} =$

$= \max\left\{\max u_{1j}, \max u_{2j}, \max u_{3j}, \max u_{4j}\right\} = \max\{8,12,10,8\} = 12$

და იგი მიიღწევა $x_{2^*}=2$ სტრატეგიისათვის.

ვალდის კრიტერიუმით

$$u(x_{i^*}) = \max_{x_i} \min_{\omega_j} u_{ij} =$$

$= \max\left\{\min u_{1j}, \min u_{2j}, \min u_{3j}, \min u_{4j}\right\} = \max\{2,2,3,1\} = 3,$

რომელიც შეესაბამება $x_{3^*}=3$ სტრატეგიას.

სევიჯის მინიმაქსური რისკის კრიტერიუმის გამოსაყენებლად განვიხილოთ მოცემული თამაშის შესაბამისი რისკების თამაში

$$R_u = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \hline x_1 & 3 & 3 & 0 & 8 \\ \hline x_2 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ \hline x_4 & 7 & 1 & 6 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

აქ,

$$r(x_i.) = \min_{x_i} \max_{\omega_j} r_{ij} =$$

$$= \min\{\max r_{1j}, \max r_{2j}, \max r_{3j}, \max r_{4j}\} = \min\{8,6,5,6\} = 5$$

და იგი შეესაბამება $x_3. = 3$ სტრატეგიას.

ჰურვიცის კრიტერიუმი გამოვიყენოთ ოპტიმიზმის სამი კოეფიციენტისათვის - $\alpha = 0{,}3; \alpha = 0{,}5; \alpha = 0{,}9$:

1) როცა $\alpha = 0{,}3$, მაშინ

$$u(x_i.) = \max_{x_i}\left\{\alpha \max_{\omega_j} u_{ij} + (1-\alpha)\min_{\omega_j} u_{ij}\right\} =$$

$$= \max\{0{,}3.8 + 0{,}7.2; 0{,}3.12 + 0{,}7.2; 0{,}3.10 + 0{,}7.3; 0{,}3.8 + 0{,}7.1\} =$$

$$= \max\{3{,}8; 5{,}0; 5{,}1; 3{,}1\} = 5{,}1 \text{ და } x_3. = 3;$$

2) როცა $\alpha = 0{,}5$, მაშინ

$$u(x_i.) = \max\{0{,}5.8+0{,}5.2;\ 0{,}5.12+0{,}5.2;\ 0{,}5.10+0{,}5.3;$$

$$0{,}5.8+0{,}5.1\} = \max\{5;7;6{,}5;4{,}5\} = 7 \text{ და } x_2. = 2;$$

3) როცა $\alpha = 0{,}9$, მაშინ

$$u(x_i.) = \max\{0{,}9.8+0{,}1.2;\ 0{,}9.12+0{,}1.2;\ 0{,}9.10+0{,}1.3;$$

$$0{,}9.8+0{,}1.1\} = \max\{7{,}4;11;9{,}3;7{,}3\} = 11 \text{ და } x_2. = 2.$$

ამრიგად, ჰურვიცის კრიტერიუმით პესიმისტური ოპტიმალური გადაწყვეტილებაა მესამე ტიპის ანუ ჰიდროელექტროსადგურის აშენება, ხოლო ოპტიმისტური ოპტიმალური გადაწყვეტილებაა მეორე ტიპის - გაზზე მომუშავე ელექტროსადგურის აშენება.

V თავი

კოლექტიური გადაწყვეტილებები. კენჭისყრის მოდელები

5.1. კოლექტიური გადაწყვეტილების მოდელი და კოლექტიური შეფასების წესები

ვთქვათ, $N=\{1,2,...,n\}$ სიმრავლე არის კოლექტივი (საზოგადოება, ჯგუფი, ინდივიდთა სიმრავლე, ამომრჩევ-ელთა სიმრავლე, მოთამაშეთა სიმრავლე), ხოლო X-ალტერნატივების (ვარიანტების, ობიექტების, კანდიდატ-ბის) სიმრავლე, საიდანაც $i \in N$ აკეთებს არჩევანს. ვთქვათ, P_i (ან $\succ_i$) აღნიშნავს $i \in N$ ინდივიდის უპირა-ტესობის ბინარულ მიმართებას X-ზე. მაშასადამე, P_i წე-სია, რომლის საფუძველზეც i ინდივიდი განსაზღვრავს ორი ნებისმიერი $x \in X$ და $y \in X$ ალტერნატივიდან რომელია მისთვის უპირატესი. ეს წესი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ ინდივიდმა უნდა შეძლოს დადგენა ნებისმიერი ორი x და y ალტერნატივიდან რომელია მისთვის უპირატესი - $x\mathrm{P}y$ $(x \succ y)$, თუ $y\mathrm{P}x$ $(y \succ x)$. ასეთი წესი უკვე ნიშნავს i ინდი-ვიდის მიერ X-ის დალაგებას (რანჟირებას) უკეთესობიდან უარესობისაკენ. ასეთ პირობებში კოლექტიური გადაწყვე-ტილების მიღების (ან კოლექტიური არჩევის) მათემატიკუ-რი მოდელი მოიცემა შემდეგი სისტემით:

$$\sum=<N,X,\{\mathrm{P}_i\}_{i\in\mathrm{N}},\mathrm{P}(N)> \text{ ან } \sum=<N,X,\{\succ_i\}_{i\in\mathrm{N}},\mathrm{P}(N)>,$$

სადაც $\mathrm{P}(N)$ კოლექტიური გადაწყვეტილების ანუ კოლექ-ტიური უპირატესობის წესია (ფუნქციაა) X-ზე.

პირველ რიგში, განვიხილოთ X სიმრავლეზე უპირა-ტესობათა განსაზღვრის ზოგიერთი წესი. ყველაზე მარ-ტივი შემთხვევაა ინდივიდის მიერ ალტერნატივების რან-ჟირება მათი უპირატესობების კლებით, შეფასების გა-რეშე. ამის შემდეგ, ალტერნატივებს შორის უპირატესო-

ბათა განსაზღვრის პირველი და ყველაზე მისაღები ხერხია განსახილველი მაჩვენებლის (უპირატესობის ნიშნის ან კრიტერიუმის) მიხედვით ალტერნატივის რიცხვითი შეფასება, როცა შეგვიძლია, ვთქვათ, რამდენით ან რამდენჯერ მეტია ერთის შეფასება მეორეზე. თუ ეს შევძელით ანუ მოვძებნეთ X სიმრავლეზე განსაზღვრული სარგებლიანობის ფუნქცია, მაშინ შეგვიძლია ალტერნატივების რანჟირება ანუ მათი დალაგება უპირატესობების კლების მიმდევრობის სახით, როცა წინა ალტერნატივა უპირატესია მომდევნოზე. მაგალითად, ვთქვათ, სამი x_1, x_2, x_3 ალტერნატივის შეფასებას აწარმოებს რამდენიმე ექსპერტი. i-ური ექსპერტის მიერ წარმოდგენილი შეფასებები მოცემულია ასეთი ფუნქციით:

$$u_i(x_1)=2, \quad u_i(x_2)=0{,}9, \quad u_i(x_3)=1{,}5.$$

მაშასადამე, i ალტერნატივების რანჟირებას $\succ_i$ უპირატესობის წესით ახდენს შემდეგნაირად $x_1 \succ_i x_3 \succ_i x_2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\succ_i$ უპირატესობა ტრანზიტულია და i-ური ექსპერტის მიერ ალტერნატივების ასეთ დალაგებას აღვნიშნავთ $P_i = [x_1, x_3, x_2]$. ასევე შეუძლია სხვა ექსპერტს ალტერნატივების რანჟირება თავისი უპირატესობებით. მაშასადამე, ექსპერტთა $N = \{1,2,...,n\}$ კოლექტივისათვის გადაწყვეტილების მიღების (არჩევის) ამოცანაა ინდივიდუალური $u_1,...,u_n$ უპირატესობების ერთიან (ანუ კოლექტიურ) u უპირატესობაში გაერთიანება.

რეალურ სიტუაციებში საბოლოო კოლექტიური გადაწყვეტილება დამოკიდებულია ისეთ უამრავ, ძნელად ასახსნელ ფაქტორზე, რომელთა გათვალისწინება შესაბამის მათემატიკურ მოდელში შეუძლებელია. მაგალითად, კენჭისყრის პროცესში ამომრჩევლებზე ფსიქოლოგიური თუ სხვა სახის ზემოქმედება, დისკუსიაში კომისიის წევრთა გამოსვლების რიგი და სხვა, რომლებიც არსებითად მოქმედებს საბოლოო გადაწყვეტილების შედეგზე. ამის გამო, კოლექტიური გადაწყვეტილების შესაბამის

$\sum = < N, X, \{P_i\}_{i \in N}, P(N) >$ მათემატიკურ მოდელში ვითვალისწინებთ, თუ რა ძირითადი თვისებები უნდა ჰქონდეს (თუ არ ჰქონდეს) ამ პროცესის საბოლოო შედეგს: რომელი გადაწყვეტილებაა სამართლიანი და რომელი არა, რომელია ჭკვიანური და რომელი არა და ა.შ.

ასეთ მიდგომას ტერმინებში "რა არის კარგი და რა არის ცუდი", ჩვეულებრივ ნორმატიულს უწოდებენ, განსხვავებით აღწერითი, დესკრიფციული მიდგომისაგან.

კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების პრობლემა ხშირად გაიაზრება, როგორც კეთილდღეობის თეორიის პრობლემა: როგორი სახითაა მიზანშეწონილი კოლექტივის წევრთა ინდივიდუალური უპირატესობების გაერთიანება ერთიან "კოლექტიურ" უპირატესობაში, ანუ როგორი უნდა იყოს კეთილდღეობის ფუნქცია. ამავე დროს, აქ გასათვალისწინებელია ის ფაქტი, რომ ინდივიდების უპირატესობები და მათი ბუნება ალტერნატივების შეფასებისას შეიძლება იყოს განსხვავებული, რასაც თავისი გავლენა აქვს კოლექტიური გადაწყვეტილების ამოცანაზე გადაწყვეტილების მიღების ყოველი პროცედურის გამოყენებისას და, შესაბამისად, გარკვეული სახის სირთულეებთან გვაქვს საქმე. ეს კი იწვევს ამოცანის ირგვლივ განსხვავებულ მოსაზრებებს.

ახლა შევეხოთ კოლექტიური შეფასების ზოგიერთ გავრცელებულ წესს და ვნახოთ, თუ რა სახის წინააღმდეგობებთან შეიძლება გვქონდეს საქმე ამ წესებში.

საშუალო ქულის წესი

ამ წესის გამოყენება განვიხილოთ შემდეგ მაგალითზე.

მაგალითი 5.1.1. ვთქვათ, ორი ინდივიდი სამ $x_1, x_2, x_3 \in X$ ობიექტს აფასებს u_1 და u_2 ფუნქციებით, შესაბამისად:

$$u_1(x_1) = 10, \quad u_1(x_2) = 6, \quad u_1(x_3) = 0;$$
$$u_2(x_1) = 0, \ u_2(x_2) = 6, \ u_2(x_3) = 10.$$

ობიექტების კოლექტიური შეფასება საშუალო ქულებით ტოლია:

$$x_1\text{-ის } \frac{10+0}{2}=5;\ \ x_2\text{-ის } \frac{6+6}{2}=6;\ \ x_3\text{-ის } \frac{0+10}{2}=5.$$

თავიდანვე მოცემული შეფასებებიდან ნათლად ჩანს, რომ ობიექტი x_2 თითოეული ინდივიდისათვის უპირატესობით საშუალოა $P_1=[x_1,x_2,x_3]$, $P_2=[x_3,x_2,x_1]$, ხოლო მისი საშუალო შეფასებაა 6, მაშინ როცა დანარჩენი ობიექტების საშუალო შეფასებებია 5. ამრიგად, კოლექტიური გადაწყვეტილებით იმარჯვებს "საშუალო" ობიექტი x_2.

ერთიანი მასშტაბისა და ნულის წესი

განსხვავებული ინდივიდების მიერ განსხვავებული ნიშნების თუ უპირატესობების თანაზომადობისათვის ზოგიერთის აზრით საჭიროა ყველა უპირატესობა დავიყვანოთ ერთიან მასშტაბზე და ათვლის სათავეზე. ამისათვის გვთავაზობენ შეფასებათა წრფივ გარდაქმნას, რომლის დროსაც ყველაზე უპირატესი ობიექტი ღებულობს შეფასება 1-ს, ყველაზე ნაკლებ უპირატესი ობიექტი ღებულობს შეფასება 0-ს, ხოლო დანარჩენი ობიექტების შეფასებები მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის.

ვთქვათ, $u(a)$, $a\in X$ ობიექტის ძველი შეფასებაა, ხოლო u^* და u_* იყოს ყველა $a\in X$-სთვის $u(a)$ შეფასებებიდან მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები შესაბამისად. ახალი ტიპის სასურველ გარდაქმნას აქვს სახე:

$$F(a)=(u(a)-u_*)/(u^*-u_*).$$

ასეთი წესით მიღებული ობიექტების შეფასებათა ჯამის გამოყენებას უპირატესობის თვალსაზრისით მივყავართ საწინააღმდეგო შედეგამდე. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 5.1.2. ვთქვათ, სამ $x_1,x_2,x_3\in X$ ობიექტს სამწევრიანი კოლექტივი $N=\{1,2,3\}$ აფასებს ასე:

$$u_1(x_1)=u_2(x_1)=50,\ \ u_1(x_2)=u_2(x_2)=40,\ \ u_1(x_3)=u_2(x_3)=0,$$
$$u_3(x_1)=20,\ \ u_3(x_2)=50,\ \ u_3(x_3)=0.$$

$F(a)$ შეფასებით ვიპოვოთ ახალი შეფასებები. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$u_1^* = 90,\ u_{*1}=0;\quad u_2^* = 50,\ u_{*2}=0;\quad u_3^* = 50,\ u_{3*}=0.$$

ამიტომ,

$$F_1(x_1)=\frac{50-0}{50-0}=1;\ F_1(x_2)=\frac{40-0}{50-0}=0{,}8;\ F_1(x_3)=\frac{0-0}{50-0}=0;$$

$$F_2(x_1)=1; \qquad F_2(x_2)=0{,}8; \qquad F_2(x_3)=0;$$

$$F_3(x_1)=\frac{20-0}{50-0}=0{,}4;\ F_3(x_2)=\frac{50-0}{50-0}=1;\ F_3(x_3)=\frac{0-0}{50-0}=0.$$

ამრიგად, ინდივიდთა მიერ x_1-ის შეფასებებია შესაბამისად 1; 1; 0,4; x_2-ის შეფასებებია 0,8; 0,8; 1; ხოლო x_3-ის შეფასებები - 0; 0; 0. ამიტომ ცხადია, x_1-ის შეფასებების ჯამი 1+1+0,4=2,4 ნაკლებია x_2-ის შეფასასებების ჯამზე 0,8+0,8+1=2,6; რაც ნიშნავს, რომ x_1-ის საშუალო შეფასება ნაკლებია x_2-ის საშუალო შეფასებაზე.

ინდივიდთა მიერ ობიექტების თავდაპირველი შეფასებებიდან ჩანს, რომ x_3 ობიექტი ყველაზე უარესია, ამიტომ შეგვიძლია მისი გამორიცხვა საერთოდ. განვიხილოთ x_1 და x_2 ობიექტის ახალი შეფასებები $F(a)$ გარდაქმნით. აქ,

$$u_1^* = 50,\ u_{*1}=40;\quad u_2^* = 50,\ u_{*2}=40;\quad u_3^* = 50,\ u_{3*}=40.$$

ამიტომ მივიღებთ

$$F_1(x_1)=\frac{50-40}{50-40}=1,\quad F_1(x_2)=\frac{40-40}{50-40}=0;$$

$$F_2(x_1)=1, \qquad F_2(x_2)=0;$$

$$F_3(x_1)=\frac{20-20}{50-20}=0,\quad F_3(x_2)=\frac{50-20}{50-20}=1.$$

მაშასადამე, $F_1(x_1)=F_2(x_1)=F_3(x_2)=1$, $F_1(x_2)=F_2(x_2)=F_3(x_1)=0$. ამიტომ x_1-ის და x_2-ის შეფასებების ჯამი იქნება შესაბამისად

$$F_1(x_1)+F_2(x_1)+F_3(x_1)=1+1+0=2,$$

$$F_1(x_2)+F_2(x_2)+F_3(x_2)=0+0+1=1.$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ x_1-ის საშუალო შეფასება მეტია x_2-ის საშუალო შეფასებაზე. ამრიგად, ყველაზე ნაკლებ

უპირატესი x_3-ის გათვალისწინების შემთხვევაში, საწინააღმდეგო სურათი გვაქვს; რაც გვაძლევს შემდეგი დასკვნის გაკეთების საშუალებას: ობიექტების შეფასების ერთიანი მასშტაბის შემოღებამ შესაძლოა მნიშვნელოვნად იმოქმედოს კოლექტიური გადაწყვეტილების შედეგზე.

5.2. კოლექტივის წევრთა უპირატესობების პროფილი. კენჭისყრის ეროუს აქსიომები და პარადოქსი

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების ამოცანაში ძირითადია შემდეგი საკითხი: როგორი უნდა იყოს ინდივიდუალური უპირატესობების კოლექტიურ უპირატესობაზე გადასვლის და შეთანხმების წესი? სწორედ ასეთი სახით დაისვა ამოცანა ალტერნატივის არჩევის უმრავლესობის წესის შემთხვევაში, უფრო კონკრეტულად კენჭისყრის ამოცანაში, რომელმაც დასაბამი მისცა კოლექტიური გადაწყვეტილების თანამედროვე თეორიის ჩამოყალიბებას. უმრავლესობის წესის მათემატიკური ანალიზის განხილვა დაიწყო მე-18 საუკუნის ოთხმოციანი წლების დასაწყისში ფრანგი მკვლევარების ბორდას, კონდორსეს და ლაპლასის მიერ. ყოველივე ამის საფუძველს წარმოადგენდა მათთვის ცნობილი ფაქტი - კოლექტიური არჩევის უმრავლესობის წესის წინააღმდეგობა ინდივიდუალურ გადაწყვეტილებებთან. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 5.2.1. სამი წევრისაგან შემდგარმა კოლექტივმა $N=\{1,2,3\}$ უნდა აირჩიოს $X=\{a,b,c\}$ კანდიდატებიდან ერთი უმრავლესობის წესით, ანუ ისეთი, რომელიც კოლექტივის ორი წევრისათვის მაინც იქნება საუკეთესო.

დავუშვათ, პირველი ინდივიდისათვის a უკეთესია b-ზე, ხოლო b უკეთესია c-ზე. მაშასადამე, იგი კანდიდატების რანჟირებას ახდენს $P_1=[a,b,c]$ წესით. მეორე განიხილავს წესს $P_2=[b,c,a]$, ხოლო მესამე კი - $P_3=[c,a,b]$ წესს. ჩავთვალოთ, რომ რანგი ყველაზე უპირატესი კანდიდა-

ტისა, რომელიც ასეთ დალაგებაში პირველ ადგილზეა, არის 1. მასზე ნაკლებ უპირატესი შემდეგი კანდიდატის რანგი იყოს 2, მესამე ადგილზე მდგომი კანდიდატის რანგი იყოს 3. N-ის წევრების მიერ კანდიდატების ასეთ რანჟირებას შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$\Pi_1=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	b	c	a
P_3	c	a	b

ასეთი სახის ჩანაწერს შემდეგში ინდივიდუალურ უპირატესობათა პროფილს ვუწოდებთ.

Π_1 პროფილის თანახმად, ორი ინდივიდისათვის a უკეთესია b-ზე, b უკეთესია c-ზე, ხოლო c უკეთესია a-ზე. მაშასადამე, N კოლექტივისათვის a კანდიდატი უნდა იყოს ერთდროულად კარგიც და ცუდიც, ვიდრე ორი სხვა კანდიდატი. ეს კი ნიშნავს, რომ N კოლექტივს არ შეუძლია Π_1 პროფილის შემთხვევაში მიიღოს საუკეთესო გადაწყვეტილება ანუ აირჩიოს უმრავლესობისათვის მისაღები კანდიდატი.

სწორედ ასეთი ტიპის წინააღმდეგობამ მიიღო სახელწოდება "ეროუს პარადოქსი", დაკავშირებული ნობელის პრემიის ლაურეატის, მათემატიკოსისა და ეკონომისტის კ. ეროუს სახელთან. მან 1951 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში დეტალურად შეისწავლა აღნიშნული წინააღმდეგობა. ჩამოაყალიბა ხუთი აქსიომა ინდივიდთა დემოკრატიული ქცევის შემთხვევისათვის და აჩვენა, რომ ასეთი ბუნებრივი მოთხოვნები შეუთავსებადია კენჭისყრის ისეთ პროცედურასთან, რომელიც ინდივიდუალურ უპირატესობებს გააერთიანებს კოლექტიურ უპირატესობასთან.

ეროუს აქსიომატიკური მიდგომის წინააღმდეგობას ნაშრომი მიეძღვნა მრავალი, რომლებშიც ცდილობდნენ ეროუს აქსიომები ახალი აქსიომებით შეეცვალათ აღნიშნული წინააღმდეგობის დასაძლევად. ასეთი აქსიომები

უფრო "ნაკლებ დემოკრატიულობას" გამოსახავდა. ამ საქმეში უდიდესი როლი შეასრულა თამაშთა თეორიამ.

წინა მაგალითში განსაზღვრული კენჭისყრის უმრავლესობის წესი კოლექტიური შეთანხმების ერთ-ერთი პრინციპია. ჩვენი მიზანია შეთანხმების ისეთი კოლექტიური უპირატესობის სხვადასხვა P(*N*) პრინციპის ფორმულირება, წარმოადგენს, რომელთა მეშვეობით დალაგდება კანდიდატების *X* სიმრავლე.

წინასწარ ჩამოვაყალიბოთ ეროუს აქსიომები, რომლებიც გამოსახავს კოლექტიური არჩევის ამოცანაში (კერძოდ, კენჭისყრის შემთხვევაშიც) დემოკრატიულ მოთხოვნებს. ამ მოთხოვნების თანახმად, P(*N*) წესმა უნდა დააკმაყოფილოს ეროუს შემდეგი აქსიომები.

ე1. უნივერსალერობა. კოლექტიური არჩევის წესი P(*N*) განსაზღვრულია ინდივიდუალურ უპირატესობათა ყოველი პროფილისათვის. ვთვლით, რომ კანდიდატების რიცხვი *X* სიმრავლეში არაა სამზე ნაკლები, ხოლო ინდივიდთა რიცხვი *N*-ში არაა ორზე ნაკლები;

ე2. მონოტონურობა. თუ მოცემული პროფილისათვის, P(*N*) წესის თანახმად, *x* ალტერნატივა უპირატესია *y*-ზე ანუ *x*P(*N*)*y*, მაშინ ეს მიმართება დარჩება იგივე, თუ პროფილი შეიცვლება შემდეგი სახით: *x*-ის შემცველი ინდივიდუალური უპირატესობები წყვილობითი შედარებისას ან არ იცვლება, ან იცვლება *x*-ის სასარგებლოდ. დანარჩენი შედარებები არ იცვლება;

ე3. გვერდითი ალტერნატივებისაგან დამოუკიდებლობა. თუ X^1 არის X სიმრავლის ქვესიმრავლე $\left(X^1 \subset X\right)$ და ინდივიდუალური უპირატესობების ყველა წყვილობითი შედარება X და X^1-ის შესაბამის ალტერნატივებს შორის პროფილებში უცვლელია, მაშინ კოლექტიური უპირატესობა ორივე პროფილში ერთი და იგივეა;

ე4. ამომრჩეველთა სუვერენულობა (იგივე ერთხმივობა). ალტერნატივების ყოველი (*x*,*y*) წყვილისათვის მოცემულ პროფილში არსებობს ისეთი ინდივიდუალურ უპირა-

ტესობათა ერთობლიობა $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$, რომ კოლექტიური უპირატესობის წესით $xP(N)y$;

ე5. **დიქტატორის არარსებობა.** N-ში არ უნდა არსებობდეს ისეთი ინდივიდი i, რომ, როცა ნებისმიერი (x,y) წყვილიდან ის უპირატესობას ანიჭებს x კანდიდატს და არა y-ს ანუ xP_iy, მაშინ კოლექტივიც უპირატესობას ანიჭებს x-ს, ე.ი. $xP(N)y$.

ავხსნათ ზოგიერთი აქსიომის შინაარსი.

პირველი აქსიომის თანახმად, ნებისმიერი პროფილის შემთხვევაში არჩევის $P(N)$ წესმა უნდა მოგვცეს რაიმე შედეგი. თუ კენჭისყრაში მონაწილეობს ერთი ამომრჩეველი, მაშინ არჩევის პრობლემა არ არსებობს. თუ ალტერნატივების რიცხვი სამია, აქ უკვე შეიძლება დაირღვეს ტრანზიტულობის თვისება და ამიტომ მის განხილვას აქვს აზრი.

მეორე აქსიომა ამბობს, რომ ალტერნატივაზე დიდმა მხარდაჭერამ არ უნდა შეამციროს მისი კოლექტიური უპირატესობის შანსი.

მეოთხე აქსიომის თანახმად, თუ კოლექტივის ყოველი წევრისათვის x უპირატესია y-ზე ანუ ყველა $i \in N$-სთვის xP_iy, მაშინ იგივე გადაწყვეტილება უნდა მიიღოს კოლექტივმაც: $xP(N)y$.

მეხუთე აქსიომა ამბობს, რომ კოლექტიური გადაწყვეტილება დამოკიდებულია მხოლოდ ინდივიდუალურ უპირატესობებზე და არ შეიძლება მათი უპირატესობების შეცვლა ნებისმიერი სახის ჩარევით.

გამოყენების თვალსაზრისით, ზოგჯერ სადაეოა მესამე აქსიომა. იგი აღნიშნავს, რომ ნებისმიერი (x,y) წყვილისათვის კოლექტიური გადაწყვეტილების წესი $P(N)$ დამოკიდებული უნდა იყოს მხოლოდ ამ კანდიდატების შესახებ ინდივიდუალურ P_i უპირატესობებზე. პრაქტიკაში კი გვხვდება ამ აქსიომის პირობების ანალოგიური სიტუაციები და მათი არგათვალისწინება ართულებს არჩევის პროცესს. გათვალისწინება კი ამარტივებს არჩევის საბოლოო პროცესს. მაგალითად, ხომ შეიძლება კენჭისყრის

შემთხვევაში კანდიდატთა რიცხვი სხვადასხვა მიზეზის გამო შემცირდეს? თუ კენჭისყრის წესი არ დააკმაყოფილებს მესამე აქსიომას, მაშინ საჭიროა დაინიშნოს ახალი არჩევნები. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 5.2.2. არჩევნებში მონაწილეობს სამი ამომრჩეველი $N=\{1,2,3\}$ და ოთხი კანდიდატი $X=\{a,b,c,d\}$. P(N) წესი ასეთია: თითოეული ამომრჩეველი უპირატესობებით ალაგებს კანდიდატებს; ამ რიგში ყველაზე ცუდ კანდიდატს მიენიჭება 1 ქულა (ანუ მე-4 რანგს ენიჭება 1 ქულა), მის წინას - 2 ქულა, მის წინას - 3 ქულა, ხოლო ყველაზე უპირატესს - 4 ქულა. საბოლოოდ აირჩევა ის კანდიდატი, რომლის მიერ დაგროვილი იქნება ყველაზე მეტი ქულათა რაოდენობა.

დავუშვათ, 1-ელი და მე-2 ამომრჩეველი კანდიდატებს ალაგებს ერთნაირად $P_{12}=[a,b,c,d]$ რანჟირებით, ხოლო მე-3 ამომრჩევლისათვის $P_3=[c,d,a,b]$. ჩავწეროთ ინდივიდუალურ უპირატესობათა პროფილი ქულების მინიჭების შემთხვევაში, შემდეგი სახით:

$\Pi_2=$

რანგი	1	2	3	4
P_{12}	a	b	c	d
P_3	c	d	a	b
ქ	4	3	2	1

აქ a კანდიდატი აგროვებს $2\cdot4+2=10$ ქულას, b - $2\cdot3+1=7$ ქულას, c კი - $2\cdot3+4=10$ ქულას, ხოლო d - $2\cdot1+3=5$ ქულას. ამიტომ მოცემული არჩევნების მოდელით იმარჯვებს a კანდიდატი.

ახლა გამოვრიცხოთ X-დან b კანდიდატი და განვიხილოთ კანდიდატთა ქვესიმრავლე $X^1=\{a,c,d\}$, რომელთა მიმართ ამომრჩეველთა უპირატესობები Π_2 პროფილში შენარჩუნებულია:

$\Pi=$

რანგი	1	2	3
P_{12}	a	c	d
P_3	c	d	a
ქ	3	2	1

აქ a აგროვებს $2\cdot3+1=7$ ქულას, c კი - $2\cdot2+3=7$ ქულას, ხოლო d - $2\cdot1+2=4$ ქულას. მესამე აქსიომის თანახმად, X^1 სიმრავლეზე კენჭისყრის მოცემულ წესს უნდა აერჩია იგივე a კანდიდატი, მით უმეტეს, რომ გამორიცხული b კანდიდატი ყველა ამომრჩევლის მიერ უფრო ნაკლებად ფასდება, ვიდრე a. ეს კი ასე არ მოხდა - მოცემული წესი a და c კანდიდატებს ერთნაირი ქულებით აფასებს. მაშასადამე, ე3 აქსიომა კენჭისყრის აღნიშნული წესის შემთხვევაში Π_2 პროფილისათვის არ სრულდება და საჭიროა ახალი არჩევნების დანიშვნა.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ეროუს თეორემა, რომელიც ცნობილია ეროუს პარადოქსის სახელწოდებით.

თეორემა 5.2.1 (ეროუს). თუ ინდივიდთა რიცხვი არაა ორზე ნაკლები, ხოლო ალტერნატივების რიცხვი არაა სამზე ნაკლები, მაშინ ე1 - ე5 აქსიომები არათავსებადია, რაც ნიშნავს, რომ არ არსებობს კოლექტიური არჩევის წესი P(N), რომელიც დააკმაყოფილებს ხუთივე აქსიომას.

სწორედ ამ თეორემამ მისცა დასაბამი კოლექტიური გადაწყვეტილების მათემატიკური მოდელირების აქსიომატიკური თეორიის შექმნას, სადაც ალტერნატიული აქსიომები განიხილება იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ აღნიშნული წინააღმდეგობა. ქვემოთ განვიხილავთ კენჭისყრის რამდენიმე ცნობილ მოდელს, რომელთა გამოყენება ხშირ შემთხვევაში გვაძლევს სხვადასხვა სახის გაურკვევლობებს. მივუთითებთ კიდევაც ასეთ ფაქტებს.

5.3. კენჭისყრის შედარებითი უმრავლესობის და უმრავლესობის წესები

კენჭისყრის შედარებითი უმრავლესობის წესი მეტად მარტივია და, ამავე დროს, პოპულარული. მას დიდი ხნის განმავლობაში იყენებდნენ და, შესაძლოა, ახლაც კი იყენებენ სხვადასხვა დონის არჩევნებში. ამ წესით არჩევნებში იგებს ის კანდიდატი, რომელიც მიიღებს უფრო მეტ ხმას. რაც შეეხება უმრავლესობის წესს, არსებობს მისი

სხვადასხვა მოდიფიკაცია და იგი უფრო ხშირად გამოიყენება. განვსაზღვროთ აღნიშნული წესი.

შედარებითი უმრავლესობის წესი

კოლექტიური გადაწყვეტილების შედარებითი უმრავლესობის წესი $P(N)$ ასეთია: თითოეული ამომრჩეველი ახდენს კანდიდატების რანჟირებას და ირჩევს პირველ ადგილზე მდგომ კანდიდატს (ანუ ირჩევს 1-ელი რანგის კანდიდატს), სხვას გადაშლის. კოლექტივი აირჩევს იმ კანდიდატს, რომელიც მიიღებს ხმათა ყველაზე მეტ რაოდენობას (ხმათა ტოლობის შემთხვევაში, სხვადასხვა ვარიანტია შესაძლებელი).

მაგალითი 5.3.1. კენჭისყრაში მონაწილეობს 21 ამომრჩეველი და ოთხი კანდიდატი $X=\{a,b,c,d\}$. ვიგულისხმოთ, რომ ამომრჩეველთა უპირატესობების პროფილს აქვს სახე:

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

ამ პროფილში, მაგალითად, P(3) გვეუბნება, რომ სამი ამომრჩევლისათვის *a* უკეთესია *b*-ზე, *b* უკეთესია *c*-ზე და *c* უკეთესია *d*-ზე. სამივე ამომრჩეველი ბიულეტენში ჩაინიშნავს *a* კანდიდატს, სხვებს კი გადაშლის. ამავე დროს, პროფილში უპირატესობათა მიმართებები ტრანზიტულია ყველა შემთხვევისათვის.

შედარებითი უმრავლესობის წესით, აქ: 3+5=8 ამომრჩეველი ბიულეტენში ჩაიწერს *a* კანდიდატს და სხვებს გადაშლის; 7 ამომრჩეველი ხმას აძლევს *b* კანდიდატს, 6 კი - *c* კანდიდატს. მაშასადამე, 8 ხმით იმარჯვებს *a* კანდიდატი.

კენჭისყრის ამ წესმა დიდი კრიტიკა განიცადა კონდორსესა და ბორდას მიერ. მათ შენიშნეს, რომ შედარებითი უმრავლესობის წესით შეიძლება არჩეულ იქნეს ყველაზე ცუდი კანდიდატი ანუ ისეთი, რომელიც უმრავლესობის წესით წყვილობით შედარებაში აგებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატთან. ამრიგად, ეს წესი შეიძლება ეწინააღმდეგებოდეს უმრავლესობის პრინციპს, რომელიც გადაწყვეტილებათა მიღების დემოკრატიული პროცესის გამოსავალ პუნქტს წარმოადგენს. განვიხილოთ კონდორსეს და ბორდას მოსაზრებები Π_3 პროფილთან დაკავშირებით.

კონდორსეს აზრით, *a* კანდიდატი ყველაზე ცუდია. მართლაც, Π_3 პროფილის თანახმად, 7+6=13 ამომრჩევლისათვის, რომელიც 21 ამომრჩევლიდან ნახევარზე მეტია და, მაშასადამე, იგი უმრავლესობას წარმოადგენს, *a* კანდიდატი ყველაზე ცუდი ვარიანტია უმრავლესობისათვის. ეს უმრავლესობა უპირატესობას ანიჭებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატს, ვიდრე *a*-ს. უფრო მეტიც, 14-კაციანი უმრავლესობა თვლის, რომ *c* უკეთესია *d*-ზე და ასევე, უმრავლესობა (11 კაცით) თვლის, რომ *c* უკეთესია, ვიდრე *b*. ამრიგად, კონდორსე ასკვნის, რომ, თუ გვინდა დავეთანხმოთ უმრაველესობის აზრს, მაშინ უნდა ავირჩიოთ *c* კანდიდატი.

იმავე პროფილისათვის ბორდა ეთანხმება კონდორსეს იმაში, რომ *a* ცუდი კანდიდატია არჩევისათვის, მაგრამ გვთავაზობს სხვა გამარჯვებულ კანდიდატს, კერძოდ, *b*-ს. მისი აზრით, მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული ყველა კანდიდატის რანგი ამომრჩეველთა უპირატესობებში. თუ კანდიდატი უპირატესობაში პირველ ადგილზეა, მაშინ ეს უნდა მიეხმაროს მას მეტად, ვიდრე იმ შემთხვევაში, თუ ის იქნება მეორე ადგილზე, ან უფრო მეტად, თუ ის იქნება მესამე ადგილზე და ა.შ.

ჩვენს პროფილში *b* და *c* შევადაროთ ამ თვალსაზრისით. *b*-ს აქვს 1 რანგი 7 ამომრჩევლისათვის, ხოლო *c*-ს აქვს 1 რანგი 6 ამომრჩევლისათვის; *b*-ს აქვს 1 ან 2 რანგი 7+3+6=16 ამომრჩეველისათვის, როცა *c*-ს აქვს იგივე რანგი 6+5=11 ამომრჩევლისათვის; *b*-ს აქვს 1, 2 ან 3 რან-

გი 7+3+6+5=21 ყველა ამომრჩევლისათვის, რაც ემთხვევა იმავე რანგს *c*-ს შემთხვევაში. მაშასადამე, ბორდას აზრით, *b*-ს უნდა მივანიჭოთ უპირატესობა *c*-სთან შედარებით.

ასეთი მოსაზრება აქვს განხორციელებული ბორდას კენჭისყრის წესში, რომლითაც იგი შეეცადა შედარებითი უმრავლესობის წესის დიდი ნაკლის გამოსწორებას. ასევე აუარა გვერდი კონდორსემ შედარებითი უმრავლესობის წესს კენჭისყრის პროფილისათვის უმრავლესობის წესზე დაყრდნობით. კონდორსეს და ბორდას წესებს ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ.

უმრავლესობის წესი

უმრავლესობის წესი მისი სხვადასხვა მოდიფიკაციით ყველაზე გავრცელებული კოლექტიური არჩევის წესია. მათგან პრაქტიკაში უფრო გამოიყენება უბრალო უმრავლესობის და ორი მესამედით უმრავლესობის წესები. აქედან პირველ წესს, ზოგჯერ, უმრავლესობის წესით მოვიხსენიებთ. უმრავლესობის წესი მარტივია და ეფექტური, თუმცა მას ზოგჯერ მივყავართ კოლექტიური გადაწყვეტილების არატრანზიტულ უპირატესობასთან. ასეთია, მაგალითად, Π_1 პროფილით მოცემული კენჭისყრის შემთხვევა. ამჟამად ცნობილია ისეთი ეფექტური პირობები, რომელთა დროსაც კოლექტიური გადაწყვეტილება ტრანზიტულია. აქვე შევნიშნავთ, რომ, როცა კანდიდატების რიცხვი ორია, მაშინ ტრანზიტულობის პრობლემა უმრავლესობის წესისათვის საერთოდ არ დგას პრაქტიკული გამოყენების არც ერთ სფეროში.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა. ნებისმიერი $x,y \in X$ კანდიდატისათვის $n(x,y)$-ით აღვნიშნოთ იმ ამომრჩეველთა რიცხვი, რომლებისთვისაც x უპირატესია y-ზე. მაშინ კოლექტიური გადაწყვეტილების უმრავლესობის წესი $P(N)$ შემდეგში მდგომარეობს:

კოლექტიური გადაწყვეტილების $P(N)$ წესს ეწოდება **უმრავლესობის წესი**, თუ ყველა x და y კანდიდატისათვის $xP(N)y \Leftrightarrow n(x,y)>n/2$.

უმრავლესობის წესის თანახმად, უპირატესობათა პროფილისათვის კოლექტივი უპირატესობას ანიჭებს x კანდიდატს y-თან შედარებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამომრჩეველთა უმრავლესობა უპირატესობას ანიჭებს x-ს და არა y-ს. $P(N)$ წესს, აგრეთვე, მაჟორიტარულ ტურნირსაც უწოდებენ.

ქვემოთ გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს: 1) $a \underset{(ij)}{\succ} b$ ნიშნავს, რომ i და j ამომრჩევლებისათვის a უპირატესია b-ზე; 2) $a \overset{k}{\succ} b$ ნიშნავს, რომ k რაოდენობის ამომრჩევლისათვის a უპირატესია b-ზე; 3) $a \succ b$ ნიშნავს, რომ a უპირატესია b-ზე.

მაგალითი 5.3.2. ვთქვათ, სამი ამომრჩევლისა და სამი კანდიდატისათვის უპირატესობის პროფილს აქვს სახე:

$\Pi=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	c	b	a
P_3	b	a	c

აქ $b \underset{(23)}{\succ} a$, $b \underset{(13)}{\succ} c$ და $a \underset{(13)}{\succ} c$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში უმრავლესობის გადაწყვეტილება ემთხვევა მესამე ამომრჩევლის ინტერესებს - $P(N)=P_3=[b,a,c]$ და იმარჯვებს b კანდიდატი.

აღვნიშნოთ, რომ უმრავლესობის წესის გამოყენების პროცედურაა წყვილი ობიექტების მიმდევრობით შედარება, როცა ნაკლებ უპირატეს ობიექტს ახლით ვცვლით.

უმრავლესობის წესი მართებულიცაა და ადვილად გამოსაყენებელი, მაგრამ მას ახასიათებს არსებითი ნაკლი: კოლექტიური უპირატესობა შეიძლება აღმოჩნდეს არატრანზიტული იმ შემთხვევაშიც კი, როცა ინდივიდუალური უპირატესობები წრფივი, რეფლექსური და ტრანზიტულია.

მიუხედავად ასეთი ნაკლისა, ეს წესი ყურადღებას იქცევდა სხვადასხვა მკვლევართა მიერ. ამ წესის პირითა-

დი განსაკუთრებულობაა ეროუს მესამე აქსიომის შესრულება. მაშასადამე, კოლექტივის მიერ წყვილი კანდიდატებიდან ერთის არჩევა დამოკიდებულია მხოლოდ ამ წყვილის უპირატესობების პროფილზე. კ. მეი მიუთითებს, რომ უმრავლესობის წესი აკმაყოფილებს შემდეგ ოთხ აქსიომას:

მ1. განსაზღვრულობა. ინდივიდუალურ უპირატესობათა ნებისმიერი პროფილისათვის წესი მიუთითებს ერთადერთ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას ალტერნატივების ყოველი წყვილისაათვის;

მ2. ანონიმურობა. კოლექტიური გადაწყვეტილება არაა დამოკიდებული ამომრჩეველთა სახელებზე, ე.ი. თუ ორი ინდივიდი გაცვლის ხმებს, იგი არ შეიცვლება;

მ3. ნეიტრალობა. კოლექტიური გადაწყვეტილება არაა დამოკიდებული კანდიდატების სახელებზე, ე.ი. თუ ადგილებს შევუცვლით x და y კანდიდატებს ყოველი ამომრჩევლის უპირატესობებში, მაშინ კოლექტიური გადაწყვეტილების შედეგიც შესაბამისად შეიცვლება: თუ ადრე აირჩეოდა x, ახლა აირჩევა y და პირიქით. თუ ადრე აირჩეოდა სხვა რომელიმე კანდიდატი, განსხვავებული x და y-საგან, ახლაც იგივე აირჩევა;

მ4. დადებითი რეაქცია. თუ რაიმე პროფილისაოვის $xP(N)y$, ხოლო ახალი პროფილისათვის, რომელიც წინასაგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ აქ რომელიმე ამომრჩეველი ცვლის თავის უპირატესობას x და y-ს შორის x-ის სასარგებლოდ, მაშინ ახალი პროფილისათვისაც $xP(N)y$.

მ2 და მ3 აქსიომებს ზოგჯერ თანაბრობის აქსიომებს უწოდებენ, რადგან ამომრჩეველთა და კანდიდატთა თანაბრობას მოითხოვს.

თეორემა 5.3.1 (მეის). უმრავლესობის წესი ერთადერთია, რომელიც აკმაყოფილებს მ1 - მ4 აქსიომებს.

ზოგიერთ სიტუაციაში შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ უმრავლესობის წესით მიღებული კოლექტიური გადაწყვე-

ტილების არატრანზიტულობა სრულიად მისაღებია, რადგან ინდივიდუალურ უპირატესობებშიც დასაშვებია არატრანზიტულობა. ამასთან, ეს სრულიადაც არაა ასე. მაგალითად, სახელმწიფო სამართლის თეორეტიკოსებს დიდად არ აწუხებთ უმრავლესობის წესის არატრანზიტულობა, რადგან მრავალ საკანონმდებლო ორგანოში ინდივიდებისაგან მოითხოვება ერთი ალტერნატივის არჩევა და არა ყველა ალტერნატივის უპირატესობებით რანჟირება. ხშირად შემოაქვთ ერთი ალტერნატიული კანონპროექტი არსებულის ნაცვლად; ხოლო თუ სახეზე გვექნება რამდენიმე ალტერნატიული კანონი, მაშინ მათზე კენჭისყრას სთავაზობენ მიმდევრობით. ამასთან, თითოეული კანონპროექტი განკუთვნილია არსებული სიტუაციის გაუმჯობესებისათვის. ამიტომ, ზოგიერთმა შეიძლება იფიქროს, რომ არსებულ პრაქტიკაში არატრანზიტულობა არ შეიძლება წარმოიშვას, რაც მცდარი აზრია. განვიხილოთ ასეთი მაგალითი.

მაგალითი 5.3.3. ვთქვათ, a არსებული კანონია, ხოლო b და c ახალი განსახილველი კანონპროექტებია a-ს სანაცვლოდ. ვიგულისხმოთ, რომ კანონმდებელთა ორგანო იყოფა სამ თანაბარ ფრაქციად (ჯგუფად), რომლებმაც გამოკითხვის შედეგად მიუთითეს შემდეგი პროფილი:

$\Pi_4=$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	b	c	a
P_3	c	a	b

სხდომის თავმჯდომარე ითხოვს, რომ უმრავლესობის წესის მიხედვით თავიდან b უნდა შევადაროთ a-ს, ხოლო შემდეგ მათგან გამარჯვებული უნდა შევადაროთ c-ს. რადგან უმრავლესობისათვის $a \overset{2}{\succ} b$, ამიტომ a უნდა შევადაროთ c-ს - $a \overset{1}{\succ} c$, ხოლო $c \overset{2}{\succ} a$. ამრიგად, $c \overset{2}{\succ} a$, $a \overset{2}{\succ} b$ და

გადის კანონ-პროექტი c. მაგრამ c არაა უპირატესი b-ზე უმრავლესობით, რადგან $c \overset{1}{\succ} b$, ანუ ტრანზიტულობა დარღვეულია.

ახლა დავუშვათ, რომ კანონპროექტები წარმოდგენილია c, b რიგით, რომლითაც ისინი უნდა შევადაროთ a-ს. c და a-ს შედარება გვაძლევს $c \overset{2}{\succ} a$, ხოლო c და b-ს შედარებიდან $b \overset{2}{\succ} c$, ე.ი. გაიმარჯვა b კანონპროექტმა.

ამრიგად, განსახილველი კანონპროექტების რიგს აქვს არსებითი მნიშვნელობა საბოლოო გადაწყვეტილების მისაღებად. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ეს ნიშნავს, რომ, თუ სხდომის თავმჯდომარე გვთავაზობს კანონპროექტების განხილვას მისთვის სასურველი $P_0^1=[a,b,c]$ რიგით, ხოლო კანონმდებელთა ჯგუფებს აქვს Π_4 პროფილი, მაშინ უმრაველესობის წესით გადის c, ხოლო თუ თავმჯდომარე შემოგვთავაზებს კანონპროექტებს $P_0^2=[a,c,b]$ რიგით, მაშინ უმრავლესობის წესით გავა b. ამრიგად, $P_0^3=[b,a,c]$ რიგის შემთხვევაში $a \overset{2}{\succ} b$, $c \overset{2}{\succ} a$ და გამარჯვებულია c.

ვის აზრს იზიარებს ასეთი წესით მიღებული კანონპროექტი? ალბათ სხდომის თავმჯდომარისას, თუ ის გარკვეულია ასეთ თამაშებში; თუ ის გაურკვეველ სიტუაციაშია, მაშინ, რა თქმა უნდა, მიღებული კანონი შეიძლება ვერ გამოდგეს ოპტიმალური.

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში უმრავლესობის წესის გაძლიერება იმ აზრით, რომ ხმათა უმრავლესობის ქვედა საზღვრად ჩავთვალოთ არა $n/2$, არამედ $2n/3$, $3n/4$ ან მეტი, ვერ გვეხმარება.

5.4. კენჭისყრის კონდორსეს და შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესები

აქ განვიხილავთ კენჭისყრის ორ წესს. პირველია კონდორსეს წესი, რომელშიც მისი მოსაზრებებია განხორციელებული. მეორე არის შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესი. ეს წესი ძალიან მოსწონთ მის მომხრეებს და განსაკუთრებით ამომრჩევლებს, რადგან იგი ძალიან მარტივია. ამ წესში ამომრჩეველს არ მოეთხოვება კანდიდატთა უპირატესობებით დალაგება, მთავარია მან შეარჩიოს მისთვის უპირატესი კანდიდატი. ეს წესი მრავალ ქვეყანაში გამოიყენება და პატივს სცემენ მას, განსაკუთრებით საფრანგეთში. იგი ხასიათდება ერთი მნიშვნელოვანი ნაკლით - არ სრულდება მონოტონურობის აქსიომა.

კონდორსეს წესი

უპირატესობათა მოცემული Π პროფილისათვის კოლექტიური გადაწყვეტილების P(*N*) წესს ეწოდება **კონდორსეს წესი,** თუ ის ირჩევს ისეთ *a* კანდიდატს (აუცილებლად ერთს), რომელიც იმარჯვებს ნებისმიერ სხვა კანდიდატთან წყვილობით შედარებაში უმრავლესობის წესით: ყოველი *x* კანდიდატისათვის, რომელიც განსხვავებულია *a*-საგან, სრულდება უტოლობა $n(a,x)>n/2$.

აღნიშნული განსაზღვრიდან გამომდინარე, კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი, ამავე დროს, იქნება გამარჯვებული უმრავლესობის წესით, თუ ასეთი არსებობს. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ზოგიერთი პროფილისათვის კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი შეიძლება არ არსებობდეს. ამ შემთხვევაში გვაქვს კონდორსეს პარადოქსი ანუ პროფილში უმრავლესობის წესით კანდიდატების წყვილობითი შედარება ქმნის ციკლს.

მაგალითი 5.4.1. განვიხილოთ პროფილი, რომელშიც მონაწილეობს 21 ამომრჩეველი და 3 კანდიდატი

$\Pi_5=$

რანგი	1	2	3
P(8)	*a*	*b*	*c*
P(7)	*b*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*a*	*b*

ვიპოვოთ კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი.

კანდიდატების წყვილობითი შედარებისას გამარჯვებულმა კანდიდატმა უნდა მიიღოს 11-ზე მეტი ან ტოლი ხმა. აქ $a \overset{14}{\succ} b$ და რადგან 14 ამომრჩეველთა ნახევარზე მეტია, ამიტომ გამოვრიცხოთ b. თუ a-ს შევადარებთ c-ს, მივიღებთ $a \overset{8}{\succ} c$. მაშასადამე, a არაა გამარჯვებული უმრავლესობით. ახლა შევადაროთ b სხვას. რადგან $b \overset{7}{\succ} a$, ეს ნიშნავს, რომ ვერც b იქნება გამარჯვებული. რადგან $c \overset{13}{\succ} a$, ამიტომ შევცვალოთ აქ a სხვა კანდიდატით, ვთქვათ, b-თი: $c \overset{6}{\succ} b$. ამრიგად, ვერც c იქნება გამარჯვებული კონდორსეს წესით. მივიღეთ, რომ Π_5 პროფილში კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი არ არსებობს და გვაქვს კონდორსეს ანუ კენჭისყრის პარადოქსი, რაც მოიცემა შემდეგი არატრანზიტული უპირატესობების ციკლით: $a \overset{14}{\succ} b, b \overset{15}{\succ} c, c \overset{13}{\succ} a$.

მაგალითი 5.4.2. კონდორსეს წესით განვამტკიცოთ კონდორსეს მსჯელობა ზემოთ განხილული Π_3 პროფილისათვის

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	a	b	c	d
P(5)	a	c	b	d
P(7)	b	d	c	a
P(6)	c	b	d	a

აქ უმრავლესობა იწყება 11 ამომრჩევლიდან. ამიტომ $a \overset{8}{\succ} b$ უპირატესობიდან გამოირიცხა a; $b \overset{13}{\succ} a$, $b \overset{10}{\succ} c$ - გამოირიცხა b. რადგან $d \overset{0}{\succ} b$ - ანუ არც ერთისათვის არაა d უკეთესი b-ზე, ამიტომ გამოირიცხა d. ხოლო $c \overset{13}{\succ} a$, $c \overset{11}{\succ} b$, $c \overset{14}{\succ} d$ და ამიტომ გაიმარჯვა c კანდიდატმა. ამრიგად, ამ პროფილში კონდორსეს წესით გამარჯვებულია ერთადერთი კანდიდატი c.

მაგალითი 5.4.3. განვიხილოთ პროფილი 3 ამომრჩევლისათვის და 3 კანდიდატისათვის

$\Pi =$

რანგი	1	2	3
P_1	a	b	c
P_2	a	c	b
P_3	c	b	a

აქ $a \overset{2}{\succ} b$, $a \overset{2}{\succ} c$, ე.ი. კონდორსეს წესით გამარჯვებულია a კანდიდატი. ამავე დროს, $c \overset{2}{\succ} b$, რაც ნიშნავს, რომ უმრავლესობის წესით მიღებული კოლექტიური გადაწყვეტილება $P(N)=[a,c,b]=P_2$ და კონდორსეს წესით გამარჯვებული ერთი და იგივე კანდიდატია.

როგორც აღვნიშნეთ, კონდორსეს წესით გამარჯვებული კანდიდატი შეიძლება არ არსებობდეს. როგორი სიხშირით შეიმჩნევა იგი? პოლიტოლოგები ასეთ შემთხვევას თვლიან იშვიათ მოვლენად, თუმცა ცნობილია მთელი რიგი ისტორიული სიტუაციები, როცა იგი სახეზე იყო. როცა ამომრჩევლების რიცხვი n საკმაოდ დიდია, ასევე, კანდიდატების ფიქსირებული დიდი k რიცხვისათვის ($k \leq n$); მაშინ ალბათობა იმისა, რომ პარადოქსი გახდება აუცილებელ ხდომილობად, გამოთვლილ იქნა პ. ფიშბერნის მიერ და მას აქვს სახე:

$$\Pi(\mathrm{k})=\frac{k+0{,}2}{k+9{,}53}-(0{,}63)^{\frac{k-3}{2}},$$

რომელიც მართებულია ნახევარ პროცენტამდე სიზუსტით.

შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესი

შედარებითი უმრაელესობით გამორიცხვის წესი ძალიან მარტივია. მას იყენებენ და პატივს სცემენ მრავალ ქვეყანაში, განსაკუთრებით საფრანგეთში. მას აქვს ერთი მნიშვნელოვანი ნაკლი - არ სრულდება მონოტონურობის აქსიომა.

კოლექტიური გადაწყვეტილების **შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის P(N)** წესის თანახმად, თუ კანდიდატი დააგროვებს ხმათა მკაცრ უმრავლესობას (ამომრჩეველთა ხმების ნახევარზე მეტს, ან ორ მესამედს და ა.შ. წინასწარი შეთანხმებით), მაშინ ის აირჩევა. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩატარდება არჩევნების მეორე ტური უმრავლესობის წესით იმ ორ კანდიდატს შორის, რომლებიც დააგროვებენ პირველ ტურში ხმათა მეტ რაოდენობას.

როგორც ვთქვით, იგი არ აკმაყოფილებს მონოტონურობის აქსიომას. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 5.4.4. მოცემულია კენჭისყრის პროფილი 17 ამომრჩევლისა და 3 კანდიდატის შემთხვევაში

$\Pi_6=$

რანგი	1	2	3
P(6)	a	b	c
P(5)	c	a	b
P(4)	b	c	a
P(2)	b	a	c

ვიპოვოთ გამარჯვებული კანდიდატი შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესით.

მოცემული პროფილის თანახმად, a კანდიდატი აგროვებს 6 ხმას, b კი - 6 ხმას, ხოლო c - 5 ხმას. მაშასადამე, პირველი ტურით ვერც ერთი ვერ იგებს (ვერც ერთი ვერ აგროვებს 9 ან მეტ ხმას). არჩევნების მეორე ტური შედგება a და b კანდიდატს შორის გამარჯვებუ-

ლის საპოვნელად, c კი გამოირიცხება. თუ ამომრჩევლები შეინარჩუნებენ კანდიდატების მიმართ იმავე უპირატესობებს, მაშინ მეორე ტურში კენჭისყრის პროფილი იქნება ასეთი:

Π=

რანგი	1	2
P(6)	a	b
P(5)	a	b
P(4)	b	a
P(2)	b	a

აქ კი a იმარჯვებს b-სთან 11 ხმით 6-ის წინააღმდეგ.

ახლა დავუშვათ, ორმა ამომრჩეველმა გაითვალისწინა საზოგადოებრივი აზრი იმის შესახებ, რომ პირველ ტურში a კანდიდატს მეტი მხარდამჭერები ჰყავს ვიდრე b-ს (ჩვენი აღნიშვნით $a \succ b$) და კენჭისყრის მომენტისათვის მათ Π_6 პროფილში უპირატესობები $b \succ a \succ c$ შეცვალეს a კანდიდატის სასარგებლოდ: $a \succ b \succ c$. ამრიგად, გვაქვს შეცვლილი პროფილი

Π=

რანგი	1	2	3
P(6)	a	b	c
P(5)	c	a	b
P(4)	b	c	a
P(2)	a	b	c

პირველ ტურში ამ პროფილით a კანდიდატი აგროვებს 8 ხმას, c აგროვებს 5 ხმას, b კი - 4 ხმას. ამიტომ გამოირიცხება b და მეორე ტურში a და c მონაწილეობას მიიღებენ უპირატესობებით

Π=

რანგი	1	2
P(6)	a	c
P(5)	c	a
P(4)	c	a
P(2)	a	c

სადაც იმარჯვებს c კანდიდატი 9 ხმით.

მაშასადამე, გამარჯვებისათვის თავიდანვე აღიარებული a კანდიდატისთვის ახალი მხარდამჭერების მიერ მისი პოზიციის გაუმჯობესებამ გამოიწვია მისი დამარცხება. ეს კი ნიშნავს, რომ დაირღვა მონოტონურობის აქსიომა.

5.5. კანდიდატთა რანჟირების ბორდას და კოპლენდის წესები

მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში, სადაც უნდა გადაწყდეს კოლექტივის (ექსპერტთა ჯგუფის, ჟიურის) მიერ გამარჯვებული კანდიდატების (პროექტების) ქვესიმრავლის პოვნა, ყველაზე ხელსაყრელია გამოვიყენოთ ბორდას და კოპლენდის წესები. ორივეს საფუძვლად უდევს კანდიდატთა რაოდენობრივი შეფასებების პოვნის და მათი შედარების პრინციპი. ეს წესები, არც ისე ხშირად, იძლევა შეფასებების ტოლობას. თუ საჭირო იქნება ტოლი შეფასებების შემთხვევაში მათგან ერთადერთის არჩევა, უნდა გამოვიყენოთ ანონიმური წესი (ვთქვათ, ავირჩიოთ მათგან ისეთი, რომელიც ყველაზე მეტად მოსწონს პირველ ამომრჩეველს) ან არანეიტრალური წესი (მათგან ავირჩიოთ ალფაბეტის რიგით პირველი). განვიხილოთ ორივე წესი.

ბორდას წესი

კოლექტიური P(N) გადაწყვეტილების ბორდას წესით ყოველი $x \in X$ კანდიდატისათვის გამოითვლება სიდიდე

$$\mathbf{b}(x) = \sum_{y \in X} \left(n(x,y) - n(y,x) \right),$$

ხოლო ამ სიდიდეებიდან ბორდას ფუნქცია

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n) = \left\{ z \,\middle|\, \mathbf{b}(z) = \max_{x \in X} \mathbf{b}(x) \right\}$$

განსაზღვრავს გამარჯვებულ z კანდიდატს.

მაგალითი 5.5.1. განვიხილოთ ისევ Π_3 პროფილი 21 ამომრჩევლისათვის და 4 კანდიდატისათვის

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

გამოვთვალოთ $b(x)$-ის მნიშვნელობები ყოველი კანდიდატისათვის $x\in\{a,b,c,d\}$:

$$b(a)=(n(a,b)-n(b,a))+(n(a,c)-n(c,a))+(n(a,d)-n(d,a))=(8-13)+$$
$$+(8-13)+(8-13)==24-39=-15;$$
$$b(b)=(n(b,a)-n(a,b))+(n(b,c)-n(c,b))+(n(b,d)-n(d,b))=(13-8)+$$
$$+(10-11)+(21-0)==44-19=25;$$
$$b(c)=(n(c,a)-n(a,c))+(n(c,b)-n(b,c))+(n(c,d)-n(d,c))=(13-8)+$$
$$+(11-10)+(14-7)==38-25=13;$$
$$b(d)=(n(d,a)-n(a,d))+(n(d,b)-n(b,d))+(n(d,c)-n(c,d))=(13-8+$$
$$+(0-21)+(7-14)==20-43=-23.$$

აქედან, ბორდას ფუნქცია ირჩევს b კანდიდატს, რადგან

$$\max\{-15,25,13,-23\}=25=b(b)$$

მიიღწევა ერთადერთი b კანდიდატისათვის.

შევნიშნოთ, რომ ბორდას წესი კანდიდატების სიმრავლეს $X=\{a,b,c,d\}$ შეუსაბამებს აგრეთვე, კოლექტიურ გადაწყვეტილებას კანდიდატების რანჟირების სახით

$$P(N)=[b,c,a,d],$$

რაც უკვე ყველაზე ზოგადი და კარგი გადაწყვეტილებაა რამდენიმე საუკეთესო კანდიდატის გამოვლენისათვის.

ბორდას წესში გათვალისწინებულია კონდორსესთან კამათის დროს მის მიერ გამოთქმული მოსაზრება. ამ პრინციპით იგი კიდევ უფრო შორს წავიდა - კანდიდატთა სიმრავლიდან გამოყოფს გამარჯვებულ კანდიდატთა ქვესიმრავლეს.

ბორდას ეკუთვნის, აგრეთვე, ქულების წესის გამოყენება გამარჯვებული კანდიდატის პოვნისათვის. ამ წესის თანახმად, თუ $N=\{1,\ldots,n\}$ ამომრჩევლებია, ხოლო $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ კანდიდატები, მაშინ უპირატესობათა პროფილში k-ური რანგის კანდიდატი ღებულობს 0 ქულას, მისი წინა, ბოლოდან მეორე, კანდიდატი ღებულობს 1 ქულას, მისი წინა 3 ქულას და ა.შ., პირველი რანგის შესაბამისი კანდიდატი ღებულობს $k-1$ ქულას. იანგარიშება ყველა კანდიდატის ქულათა ჯამი და გაიმარჯვებს ის კანდიდატი, რომელიც მიიღებს ყველაზე მეტ ქულას.

მაგალითისათვის განვიხილოთ Π_3 პროფილი ქულების მინიჭების შემთხვევაში

$\Pi=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*
ქ	3	2	1	0

აქ a ღებულობს $3\cdot3+5\cdot3=24$ ქულას, b - $3\cdot2+5\cdot1+7\cdot3+6\cdot2=44$ ქულას, c - $3\cdot1+5\cdot2+7\cdot1+6\cdot3=38$ ქულას, ხოლო d - $7\cdot2+6\cdot1=20$ ქულას. მაშასადამე, b ღებულობს მაქსიმალურ ქულას სხვებთან შედარებით და ის არის გამარჯვებული. ამავე დროს, ბორდას ქულების წესით მივიღეთ კანდიდატების იგივე რანჟირება, რაც ბორდას ფუნქციის საშუალებით - $P(N)=[b,c,a,d]$.

კოპლენდის წესი

კოპლენდმა ამ წესით აგვაცილა არატრანზიტულობის თვისება, რაც მოახერხა ეროუს მესამე აქსიომის უგულებელყოფით.

კოლექტიური P(*N*) გადაწყვეტილების კოპლენდის წესით ყოველი $x \in X$ კანდიდატისათვის და ყოველი $i \in N$ ამომრჩევლისათვის შემოგვაქვს $a_i(x)$ და $b_i(x)$ რიცხვითი შეფასებები, რომლებიც შესაბამისად, იმ კანდიდატების რიცხვია, რომლებზეც უპირატესია x და რომლებიც უპირატესია x-ზე. $x \in X$ კანდიდატის შეფასება განისაზღვრება ასე:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x) - b_i(x) \right).$$

x და y კანდიდატებიდან $x\mathrm{P}(N)y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.

$u(x)$ სიდიდეს, კოპლენდის შეფასება ეწოდება. კოპლენდის მიერ დამტკიცებულია, რომ მის წესს ყოველთვის მივყავართ ტრანზიტულ კოლექტიურ უპირატესობასთან.

მაგალითი 5.5.2. ისევ განვიხილოთ რამდენიმეჯერ განხილული პროფილი

$\Pi_3=$

რანგი	1	2	3	4
P(3)	*a*	*b*	*c*	*d*
P(5)	*a*	*c*	*b*	*d*
P(7)	*b*	*d*	*c*	*a*
P(6)	*c*	*b*	*d*	*a*

გამოვთვალოთ კოპლენდის შეფასებები $u(a)$, $u(b)$, $u(c)$ და $u(d)$. ჩვენი პროფილის შემთხვევაში, $u(x)$ გამოსახულება ჯამში შეიცავს n=21 შესაკრებს (იგი ამომრჩეველთა რიცხვია). იმის გამო, რომ მათგან რამდენიმეს აქვს ერთნაირი უპირატესობები, მივიღებთ:

$$u(a)=3(3-0)+5(3-0)+7(0-3)+6(0-3)=24-39=-15,$$
$$u(b)=3(2-1)+5(1-2)+7(3-0)+6(2-1)=44-19=25,$$
$$u(c)=3(1-2)+5(2-1)+7(1-2)+6(3-0)=38-25=13,$$

$u(d)$=3(0–3)+5(0–3)+7(2–1)+6(1–2)=20–43=–23.

კოპლენდის წესის მიხედვით

$$bP(N)a \Leftrightarrow 25>-15,$$

$$bP(N)c \Leftrightarrow 25>13,$$

$$bP(N)d \Leftrightarrow 25>-23.$$

ამავე დროს, გვაქვს $cP(N)a$, $cP(N)d$, $aP(N)d$. მაშასადამე, კოლექტიური კოპლენდის წესი გვაძლევს ტრანზიტულ უპირატესობას და $P(N)=[b,c,a,d]$, რაც ემთხვევა ბორდას წესით მიღებულ კოლექტიურ გადაწყვეტილებას. ამ პროფილში კონდორსეს წესით კი გამარჯვებულია c კანდიდატი.

აღვნიშნავთ, რომ კოპლენდის წესი, ისევე როგორც ბორდას წესი, გვაძლევს გამარჯვებული კანდიდატების ქვესიმრავლეს. კანდიდატების ტოლი შეფასებების შემთხვევაში, საჭიროა დასაწყისში აღნიშნული დამატებითი პროცედურის განხორციელება.

5.6. პარეტოს აზრით გამარჯვებული კანდიდატი და მისი ადგილი ნორმატიულ აქსიომებში

განვიხილოთ კენჭისყრის კიდევ ერთი წესი $P(N)$, რომელიც იყენებს კანდიდატთა რიცხვითი და ვექტორული შეფასებების და მათი შედარებების წესს; ასე გამარჯვებული კანდიდატი იქნება პარეტოს გამარჯვებული.

ამ წესის თანახმად, თუ $N=\{1,...,n\}$ ამომრჩევლებია, ხოლო $X=\{x_1,x_2,...,x_k\}$ - კანდიდატთა სიმრავლე, მაშინ თითოეულ a კანდიდატს შევუსაბამებთ $k-1$ განზომილებიან ვექტორს $r(a)=(r_1(a),r_2(a),...,r_{k-1}(a))$, სადაც:

- $r_1(a)$ იმ ამომრჩეველთა რიცხვია, რომლებისთვისაც a კანდიდატს აქვს 1 რანგი (პროფილში პირველ ადგილზეა);

- $r_2(a)$ იმ ამომრჩეველთა რიცხვია, რომლებისთვისაც a-ს აქვს 1-2 რანგი (პროფილში ან პირველ ადგილზეა, ან მეორეზე);

- $r_3(a)$ იმ ამომრჩეველთა რიცხვია, რომლებისთვისაც a-ს აქვს 1-3 რანგი (პროფილში ან პირველ ადგილზეა, ან მეორეზე, ან მესამეზე);

....

- $r_{k-1}(a)$ იმ ამომრჩეველთა რიცხვია, რომლებისთვისაც a-ს აქვს 1-(k−1) რანგი (პროფილში იგი არის ყველგან, გარდა ბოლო ადგილისა).

თუ $r(a)$ ვექტორი თითოეული კოორდინატით პარეტოს აზრით დომინირდება სხვა b კანდიდატის შესაბამისი $r(b)$ ვექტორით, მაშინ a კანდიდატმა არ შეიძლება გაიმარჯვოს. ასეთი წესით გამოვრიცხავთ k რაოდენობის ვექტორიდან დომინირებულ ვექტორებს და შესაბამის კანდიდატებს, რომლებიც არ შეიძლება იყვნენ გამარჯვებულნი ქულების დათვლის წესით. საბოლოოდ დაგვრჩება გამარჯვებული კანდიდატები.

მაგალითი 5.6.1. მოცემულია უპირატესობათა პროფილი 7 ამომრჩევლისა და 3 კანდიდატისათვის

Π_7=

რანგი	1	2	3
P(3)	c	a	b
P(2)	a	b	c
P(1)	a	c	b
P(1)	b	c	a

ვიპოვოთ პარეტოს გამარჯვებული კანდიდატი.

ამ პროფილისათვის

$$r_1(a)=3,\quad r_2(a)=6 \quad \text{და} \quad r(a)=(3,6),$$
$$r_1(b)=1,\quad r_2(b)=3 \quad \text{და} \quad r(b)=(1,3),$$
$$r_1(c)=3,\quad r_2(c)=5 \quad \text{და} \quad r(c)=(3,5).$$

მიღებული სამი ვექტორიდან $r(b)$ და $r(c)$ დომინირდება $r(a)$ ვექტორით, ამიტომ b და c არ იქნება გამარჯვებული. მაშასადამე, Π_7 პროფილში გაიმარჯვა a კანდიდატმა.

განვიხილოთ კიდევ ერთი პროფილი

$\Pi_8=$

რანგი	1	2	3
P(6)	a	b	c
P(3)	c	a	b
P(4)	b	a	c
P(4)	b	c	a

აქ

$$r_1(a)=6,\ \ r_2(a)=13 \ \text{ და } \ r(a)=(6,13),$$
$$r_1(b)=8,\ \ r_2(b)=14 \ \text{ და } \ r(b)=(8,14),$$
$$r_1(c)=3,\ \ r_2(c)=7 \ \text{ და } \ r(c)=(3,7).$$

რადგან $r(a)$ და $r(c)$ დომინირდება $r(b)$ ვექტორით, ამიტომ Π_8 პროფილში იმარჯვებს b კანდიდატი.

ახლა გავაკეთოთ რამდენიმე ზოგადი შენიშვნა კენჭისყრის წესების შესახებ. ბორდას და კოპლენდის წესები ქულობრივი შეფასების ერთი და იმავე პრინციპით ხასიათდება და ირჩევენ გამარჯვებულ კანდიდატთა ქვესიმრავლეს ერთნაირი რანჟირებით. ამიტომ ბუნებრივია, მათ, აქსიომების თვალსაზრისითაც, მრავალი საერთო უნდა ჰქონდეს.

პირველ რიგში, საჭიროა და ბუნებრივიცაა კენჭისყრისა და, საერთოდ, კოლექტიური არჩევის ყველა მოდელისათვის მოვითხოვოთ, რომ ზემოთ ჩამოთვლილი აქსიომებიდან შესრულდეს შემდეგი: 1. პარეტოს ოპტიმალურობა (ოპტიმალურობა პარეტოს აზრით); 2. ანონიმურობა; 3. ნეიტრალობა; 4. მონოტონურობა. აქედან 1-3 აქსიომებს, კოლექტიური არჩევის ნორმატიულ თვისებებს უწოდებენ.

I აქსიომის თანახმად, უნდა გაიმარჯვოს ისეთმა კანდიდატმა, რომელზეც უპირატესი კოლექტიური თვალ-

საზრისით არ იარსებებს; 2 და 3 აქსიომით მოითხოვება როგორც ამომრჩეველთა, ასევე კანდიდატთა თანაბრობა არჩევნებში. მე-4 აქსიომა კი გვეუბნება, რომ თუ მოცემული კანდიდატის პოზიცია ამომრჩეველთა გარკვეული ნაწილის უპირატესობებში უმჯობესდება, ხოლო დანარჩენი კანდიდატების პოზიცია უცვლელია, მაშინ აღნიშნულმა კანდიდატმა აუცილებლად უნდა გაიმარჯვოს. ეს აქსიომა კი, როგორც 5.4.4 მაგალითში ვნახეთ, შედარებითი უმრავლესობით გამორიცხვის წესში შეიძლება არ სრულდებოდეს. ყოველივე აქედან გამომდინარე, კენჭისყრის მოდელის შერჩევისას უპირატესობა ენიჭება ისეთს, რომლისთვისაც შესრულდება აქ ჩამოთვლილი აქსიომები.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ქულობრივი წესის გამოყენებისას განსხვავებულმა ორმა ან მეტმა კანდიდატმა შესაძლოა მიიღოს ერთნაირი შეფასებები და მათგან გამარჯვებულის გამოსავლენად დამატებითი პრინციპის გამოყენებაა საჭირო. აღმოჩნდა, რომ ამას ისე ვერ გავაკეთებთ, თუ არ დაირღვა ერთ-ერთი 1-3 აქსიომებიდან, გარდა ერთი გამონაკლისი შემთხვევისა. ეს ფაქტი ჩამოყალიბებულია შემდეგ თეორემაში. რაც შეეხება მე-4 აქსიომას, იგი ყოველთვის შესრულდება, მოვითხოვთ გამარჯვებულთა ქვესიმრავლის თუ მათგან ერთადერთის პოვნას.

თეორემა 5.6.1. არ არსებობს ერთადერთი კანდიდატის არჩევის ისეთი წესი, რომელიც დააკმაყოფილებს 1-3 აქსიომებს ამომრჩეველთა n და კანდიდატთა k ნებისმიერი რიცხვების შემთხვევაში. ასეთი წესი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n-ს არა აქვს მარტივი გამყოფები k-ზე ნაკლები ან ტოლი.

დასკვნა 5.6.1. სასურველია, რომ ამომრჩეველთა რაოდენობა იყოს საკმაოდ დიდი მარტივი რიცხვი.

სწორედ ეს დასკვნაა ძირითადი მიზეზი იმისა, რომ სხვადასხვა ჟიურის, კომიტეტის თუ საექსპერტო კომისიის წევრთა რიცხვი უნდა იყოს ორზე მეტი მარტივი რიცხვი.

5.7. კონდორსეს თეორემა ნაფიც მსაჯულთა გადაწყვეტილების შესახებ

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: როგორია ალბათობა იმისა, რომ ნაფიც მსაჯულთა სასამართლო უმრავლესობით მიიღებს სამართლიან გადაწყვეტილებას? აღნიშნული ამოცანის გადაწყვეტა ეკუთვნის კონდორსეს. ჩამოვაყალიბოთ ამოცანის პირობები.

ვთქვათ, ნაფიც მსაჯულთა სასამართლო შედგება n წევრისაგან - $N=\{1,2,...,n\}$. ალბათობა იმისა, რომ თითოეული i $(i=1,...,n)$ მსაჯული მიიღებს სამართლიან გადაწყვეტილებას არის p_i $(i=1,...,n)$ და იგი მუდმივია. ასეთი ალბათობის მიღების მეთოდს არა აქვს მნიშვნელობა. თითოეულ ნაფიც მსაჯულს აქვს ორი გადაწყვეტილება {კი, არა} ან {დამნაშავეა, არაა დამნაშავე} და მათგან ისინი ირჩევენ საბოლოო გადაწყვეტილებას ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა. პირველ შემთხვევაში ვიგულისხმოთ, რომ $p_1=p_2=...=p_n\equiv p$. კოლექტიური გადაწყვეტილება გულისხმობს უმრავლესობის მიერ მიღებულ ერთნაირ გადაწყვეტილებას და ასეთი გადაწყვეტილების ალბათობა აღვნიშნოთ P-ით. დამტკიცების გარეშე ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.7.1 (კონდორსეს). P ალბათობა იმისა, რომ უმრავლესობა მიიღებს სამართლიან გადაწყვეტილებას, ინდივიდუალური გადაწყვეტილებების ალბათობებზე დამოკიდებულია შემდეგნაირად:

1. თუ $0,5<p<1$ და $n>2$, მაშინ $P>p$ და P იზრდება n-თან ერთად, ამასთან, როცა $n\to\infty$, $P\to 1$;
2. თუ $0<p<0,5$ და $n>2$, მაშინ $P<p$ და P კლებულობს n-ის გაზრდით, ამასთან, როცა $n\to\infty$, $P\to 0$;
3. თუ $p=0,5$, მაშინ $P=0,5$ ყველა n-სთვის.

დასკვნები 5.7.1

1. სწორი გადაწყვეტილების მიღებისათვის უმრავლესობა უფრო საიმედო ინსტრუმენტია, ვიდრე რიგითი ამომრჩეველი იმ პირობით, როცა ის სწორია ნახევარზე მეტ შემთხვევაში (ანუ $p > 0{,}5$) და ეს სიდიდე ყველა ამომრჩევლისათვის ერთნაირია;

2. თუ $p < 0{,}5$, მაშინ უმრავლესობით მიღებულ გადაწყვეტილებას შეუძლია ძლიერ გააუარესოს სიტუაცია.

მეორე შემთხვევა. ვთქვათ, $i \in N$ წევრს შეესაბამება თავისი p_i ალბათობა იმისა, რომ მისი გადაწყვეტილება სწორია. აღვნიშნოთ

$$\overline{p} = \frac{\sum p_i}{n},$$

ანუ $\overline{p}$ არის მოცემული კოლექტივის კომპეტენტურობა. ამ შემთხვევაში კონდორსეს თეორემა მართებულია, თუ p-ს შევცვლით $\overline{p}$-ით.

მაგალითი 5.7.1. ვთქვათ, სამი წევრისაგან შემდგარი ნაფიც მსაჯულთა კოლექტივია $N = \{1,2,3\}$ და მის წევრთა შესაბამისი ალბათობებია $p_1 = 0{,}6; p_2 = 0{,}7; p_3 = 0{,}9$. აქ უმრავლესობას ქმნის ჯგუფები {1,2}, {1,3}, {2,3} და {1,2,3}. ამიტომ,

$$P = 0{,}6.0{,}7.0{,}1 + 0{,}6.0{,}9.0{,}3 + 0{,}7.0{,}9.0{,}4 + 0{,}6.0{,}7.0{,}9 = 0{,}834.$$

რაც შეეხება კოლექტივის საშუალო კომპეტენტურობას, იგი ტოლია $\overline{p} = \dfrac{0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}9}{3} = 0{,}73$. ამასთან, უმრავლესობა არაა უფრო კომპეტენტური, ვიდრე მესამე მსაჯული, რომლისთვისაც $p_3 = 0{,}9$.

5.8. ექსპერტული შეფასების მეთოდების ძირითადი იდეები

როგორც დავრწმუნდით, ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება შესაძლებელია ან ობიექტურ გარემოში, რისთვისაც ვიყენებთ ოპტიმიზაციის მეთოდებს და ალბათურ-სტატისტიკურ მოდელებს, ან სუბიექტურ გარემოში და ვიყენებთ მოცემულ დარგში სპეციალისტების - ექსპერტების, შეხედულებებს. სტრატეგიული და ოპერაციული მართვის, ტექნიკურ-ეკონომიკური ანალიზის, ეკოლოგიური უსაფრთხოების, პოლიტიკის და მრავალ სხვა ამოცანებში გადაწყვეტილების მისაღებად მუდმივად გამოიყენება ექსპერტული მეთოდები, რაც გულისხმობს ექსპერტულ შეფასებებს სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებით. ასეთებია, კერძოდ, კოლექტიური გადაწყვეტილების მიღების ზემოთ მოყვანილი მეთოდები - კენჭისყრის მეთოდები. თუმცა, მათ გარდა, არსებობს კიდევ სხვადასხვა დანიშნულების უამრავი მეთოდი, რომელთაგან აქ განვიხილავთ ზოგიერთს. სიტყვა "ექსპერტი" ინგლისურად სპეციალისტს ნიშნავს, რომელიც თანამედროვე გაგებით გულისხმობს საკმაოდ გამოცდილ მაღალკვალიფიციურ სპეციალისტს, რომელსაც აქვს იმის უნარ-ჩვევები, რომ თავისი ინტუიცია გამოიყენოს გადაწყვეტილების მიღებისას.

მაშასადამე, კენჭისყრ, ექსპერტთა კომისიის მიერ გადაწყვეტილების მიღების ერთ-ერთი მეთოდია. კენჭისყრის ორგანიზაციაზე, ანუ კენჭისყრის წესზეა დამოკიდებული მრავალი გადაწყვეტილების შედეგი. მაგალითად, ტრადიციულად ითვლება გადაწყვეტილების მიღების უმრავლესობის წესი: ორი კონკურენტული გადაწყვეტილებიდან მიიღება ისეთი, რომელმაც მოაგროვა თუნდაც 50% ხმა და კიდევ ერთი ხმა. საიდან იანგარიშება 50% - დამსწრეთაგან თუ ხმის მიმცემთა სრული შემადგენლობიდან? თითოეულ შემთხვევას აქვს თავისი როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მხარე. თუ მას ვიანგარიშებთ დამსწრეთაგან, მაშინ ერთ-ერთი გადაწყვეტილება ორი-

დან თითქმის აუცილებლად იქნება მიღებული (გამონაკლისია, როცა ხმები გაიყოფა თანაბრად). ამასთან, ის, ვინც არ იყო შეკრებაზე, შეიძლება აღმოჩნდეს უკმაყოფილო. თუ გამოვალთ ხმის მიმცემთა სიის სრული შემადგენლობიდან, მაშინ წარმოიშობა კენჭისყრაზე ხმის მიმცემი წევრის გამოცხადების პრობლემა. თუ გამოცხადება იქნება სუსტი (გამოცხადდა მცირე), მაშინ გადაწყვეტილება მათ უნდა მიიღონ ერთხმად. მაშასადამე, ზოგიერთ შემთხვევაში არც ერთი კონკურენტული გადაწყვეტილება არ იქნება მიღებული. თუ გამოცხადდება სიითი შემადგენლობის 50%-ზე ნაკლები, მაშინ გადაწყვეტილების მიღება საერთოდ შეუძლებელი გახდება. ჩამოთვლილი სირთულეები იზრდება, თუ კენჭისყრის რეგლამენტით გათვალისწინებულია კვალიფიციური უმრავლესობა - 2/3 და კიდევ ერთი ხმა.

კიდევ ერთი პრობლემა - რა ხდება თავის შეკავების შემთხვევაში? რომელს მივაკუთვნოთ იგი - "თანახმაა" თუ "მოწინააღმდეგე"? განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 5.8.1 (დირექტორთა საბჭოში არჩევა). დირექტორთა საბჭოს შემადგენლობაში წევრთა შეყვანისათვის ხმის მიცემაში მონაწილეობს 400 წევრი. კენჭს იყრის სამი კანდიდატი $X=\{x_1,x_2,x_3\}$. ვთქვათ, კენჭისყრის შედეგებს აქვს შემდეგი სახე (ცხრილი 5.8.1).

ცხრილი 5.8.1

	თანახმაა	წინააღმდეგია	თავი შეიკავა
x_1	200	100	100
x_2	150	50	200
x_3	0	0	400

პირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საბჭოს წევრად უნდა ავირჩიოთ ერთი; თუ სხდომის თავმჯდომარე დასვამს კითხვას: "ვინაა თანახმა", მაშინ გაეა x_1. თუ ის წინა საკითხების განხილვით შეამჩნევს ხმის მიმცემთა დაღლას და დასვამს კითხვას: "ვინაა წინააღმდეგი", მაშინ აირჩევა x_3.

თუ საბჭოში ასარჩევია ორი წევრი, მაშინ კითხვაზე - "ვინაა თანახმა", აირჩევა x_1 და x_2, ხოლო კითხვაზე - "ვინაა წინააღმდეგი", აირჩევა x_2 და x_3. ამიტომ, თუ თავმჯდომარეს სურს ჩამოიცილოს ყველაზე აქტიური და გამოცდილი მენეჯერი x_1, მაშინ ის თამაშში აირჩევს სტრატეგიას - "ვინაა წინაღმდეგი".

ადვილი შესამჩნევია, რომ კითხვით - "ვინაა თანახმა", ყველა თავშეკავებული მიეკუთვნება მოწინააღმდეგეს. ხოლო კითხვით - "ვინაა წინააღმდეგი", თავშეკავებული მიეკუთვნება მომხრეს.

ექსპერტული შეფასებების თეორია და პრაქტიკა წარმოადგენს გადაწყვეტილებათა მიღების განვითარებულ მეცნიერულ და პრაქტიკულ დარგს დიდი რაოდენობის მიდგომებით, იდეებით, ალგორითმებით, თეორემებით და მათი პრაქტიკული გამოყენების ხერხებით. აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ გმპ პასუხს აგებს მიღებულ გადაწყვეტილებაზე და არა აქვს უფლება პასუხისმგებლობა ექსპერტებზე გადაიტანოს.

ექსპერტიზაში ვიგულისხმობთ ექსპერტთა ჯგუფის მიერ ობიექტის ზოგიერთი მახასიათებლის გაზომვას გადაწყვეტილების მიღების მოსამზადებლად. ექსპერტიზის, როგორც გაზომვის პროცედურის განმასხვავებელ განსაკუთრებულობას წარმოადგენს ის, რომ ამ შემთხვევაში საზომ მოწყობილობას წარმოადგენს ადამიანი, ან იმიტომ, რომ თვით ობიექტები ან მათი მახასიათებლები არის სუბიექტური, ან იმიტომ, რომ შესაძლოა არ გვქონდეს გაზომვისათვის საჭირო ობიექტური ხელსაწყო.

საექსპერტო კომისიის ამოცანებში ხშირად შედის არა მხოლოდ მოცემული ობიექტების შეფასება, ასევე შე-

დის თვით ობიექტების ან მათი მახასიათებლების აგება. მაგალითად, სოციალური პროგნოსტიკის ექსპერტები ადგენენ ამა თუ იმ სისტემის განვითარების სცენარებს გარემოს შესაძლო მდგომარეობებზე დამოკიდებულებით. ეს სცენარები განიხილება, როგორც ობიექტები. ამრიგად, საექსპერტო კომისიის მიერ გადასაწყვეტი ამოცანებიდან გამოიყოფა სამი ძირითადი კლასი:

1. მოცემული ობიექტების შეფასება (გაზომვა). ასეთებია, მაგალითად, მოცემული სახის სამომხმარებლო ნაწარმის ხარისხის შეფასება; კონკურსში მონაწილე კანდიდატების, პროექტების შეფასება; იმის დადგენა, რომ მოცემული ხელნაწერის ტექსტი შეიძლება თუ არა ეკუთვნოდეს განსაზღვრულ პიროვნებას და სხვ.

უნდა აღინიშნოს, რომ ექსპერტული შეფასების შედეგი შეიძლება ყოველთვის არ ატარებდეს სკალარულ ხასიათს, იგი შეიძლება იყოს ხარისხობრივი ან არ გამოისახებოდეს ერთი რიცხვით - ექსპერტულ შეფასებას შესაძლოა ჰქონდეს ვექტორული სახე;

2. ობიექტების აგება. ამ ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება, მაგალითად, სისტემის განვითარების სცენარი;

3. ობიექტების აგება და მათი შეფასება. ხშირად საექსპერტო კომისიის მუშაობის მიზანი ასე გამოისახება: გარკვეული ტიპის სისტემის შეფასებისათვის დამუშავდეს ნიშანთა (კრიტერიუმების) სისტემა და შეფასდეს თითოეული კრიტერიუმის წონა.

ზოგჯერ ობიექტების აგება არ შედის კომისიის ამოცანებში. მაგალითად, ექსპერტებმა უნდა გააკეთონ პროგნოზი - რომელ წელს მოხდება აღმოჩენილი მეცნიერული იდეის ტექნიკური რეალიზაცია. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად კომისიას შეუძლია დაამუშაოს დამხმარე ობიექტების სისტემა - ტექნიკური დამუშავებები, რომლებმაც მიგვიყვანა საპროგნოზო გამოგონებამდე. ამით ძირითადი ამოცანა დაიყვანება უფრო მარტივი ობიექტების შეფასებამდე. საზოგადოდ, ყოველი ექსპერტიზა, რომელიც დაკავშირებულია პროგნოზთან, მოითხოვს დამხმარე ობიექტების აგებას. ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ

პირველი ტიპის ამოცანებს - მოცემული ობიექტების შეფასებას.

ახლა განვიხილოთ ექსპერტული შეფასებების ძირითადი ეტაპები. მას შემდეგ, რაც გამოიყოფა შესაფასებელი ობიექტები, წარმოიშობა საექსპერტო კომისიის ფორმირების პრობლემა. აქ განსაკუთრებული მეცნიერული რეკომენდაცია არ გვაქვს, ამიტომ ექსპერტიზის ხელმძღვანელობის მიერ მიზანთა დამოკიდებულებაში გამოიყენება მხოლოდ საღი აზრი. ამიტომ საექსპერტო კომისიაში იწვევენ მოცემულ დარგში ყველაზე მეტად კვალიფიციურ სპეციალისტებს, რომლებსაც პროფესიული დამოკიდებულება აქვთ განსახილველ პრობლემასთან. ექსპერტის კომპეტენტურობა ეფუძნება მისი პროფესიული მახასიათებლების შესწავლას: სტაჟს და სამუშაოს ხარისხს მოცემულ დარგში, ან კიდევ მისი კომპეტენტურობის შეფასებას სხვების მიერ. ამ საკითხის ფორმალიზაციას, როცა ექსპერტის კომპეტენტურობა ფასდება საექსპერტო კომისიის წევრთა ურთიერთშეფასებებით, განვიხილავთ ამ თავის ბოლო პარაგრაფში.

ამასთან, შესაძლოა ძალიან კვალიფიციურმა ექსპერტმა გამოავლინოს არაკომპეტენტურობა მოცემულ კონკრეტულ ექსპერტიზაში, რაც შესაძლოა სხვადასხვა გარემოებამ გამოიწვიოს.

მას შემდეგ, რაც შედგება საექსპერტო კომისია, ფორმირდება მისი მუშაობის პროცედურა, ე.ი. დგინდება ექსპერტთა მიერ შეფასებების გამოსახვის და ექსპერტული შეფასებების ხერხები. ეს უკანასკნელი ხერხი შეიძლება გულისხმობდეს ანონიმურ შეფასებას - კომისიის არც ერთმა წევრმა არ იცის დანარჩენების მიერ გაკეთებული შეფასებები, ან გულისხმობდეს ღია განხილვას. ამის შემდეგ, თითოეული ექსპერტი აფასებს ობიექტს (ან ობიექტებს) და შემდეგ კი წარმოებს ამ შედეგების დამუშავება და ანალიზი.

პირველ რიგში, ფასდება ექსპერტთა შეფასებების შეთანხმებულობა. თუ ყველა შეფასება ერთნაირია, მაშინ გაზომვის პრობლემა გადაწყვეტილია - ექსპერტთა კომი-

სიამ თავისი საქმე შეასრულა. შესაძლოა ყველა შეფასება არ იყოს ერთნაირი, უფრო მეტიც, ისინი შეიძლება ძლიერ განსხვავდებოდნენ. მაშინ ამოცანის ანალიზში შედის იმ ექსპერტთა შეხედულებების წარმოჩენა, ვისი შეფასებებიც განსაკუთრებულია. ამ შემთხვევაში ასეთმა ექსპერტებმა უნდა დაასაბუთონ თავიანთი შეფასებები.

თუ მოცემული შეფასებებით შეუძლებელი იქნება გადაწყვეტილების მიღება, მაშინ ექსპერტთა კომისია ექსპერტიზას ჩაატარებს გამეორებით მანამ, სანამ ორგანიზატორები არ იქნებიან დაკმაყოფილებულნი. ამასთან, თითოეულ განსაკუთრებულ შემთხვევაში ექსპერტს მოუწევს ახსნა-განმარტების მიცემა კომისიისათვის. ასე მუშაობს, მაგალითად, ექსპერტიზა - "დელფი", რომლის განხორციელების პროცედურა სამ ტურს მოითხოვს.

5.9. ექსპერტულ შეფასებათა სკალები

ექსპერტული შეფასების პრობლემის სრული განხილვისათვის გვჭირდება ზოგიერთი განსაზღვრება გაზომვათა თეორიიდან, რომელიც წარმოადგენს ექსპერტული შეფასებების საფუძველს მის იმ ნაწილში, რომელიც დაკავშირებულია ექსპერტთა მიერ ხარისხობრივი და რაოდენობრივი სახის დასკვნების ანალიზთან და მათი აგრეგირებასთან, განზოგადებული მაჩვენებლების აგებასთან.

ექსპერტებისაგან მიღებული დასკვნები ხშირად განიხილება რიგობრივ სკალაში, ე.ი. ექსპერტს, როგორც ნებისმიერ ადამიანს, უფრო სწორად და ნაკლები სირთულით შეუძლია უპასუხოს ხარისხობრივი ხასიათის კითხვებს, ვიდრე რაოდენობითისას. მაგალითად, მას შეუძლია თქვას და დაასაბუთოს, რომ ერთი ობიექტი უფრო მიმზიდველია მოხმარებისათვის, ვიდრე მეორე. ასეთი შეფასება გამოისახება რანგით და იგი გამოიყენება საექსპერტო ობიექტების რანჟირებისათვის. მაშასადამე, რანგი არის ექსპერტირებული ობიექტის ნომერი დალაგებულ მწკრივში. ფორმალურად რანგი გამოისახება რიცხვებით

1,2,3,.... (რანგის ცნება ჩვენ გამოვიყენეთ კენჭისყრის მეთოდებში) და იგი წარმოადგენს რიგობრივ სკალას. ამრიგად, რიგობრივ სკალას ვიყენებთ ობიექტებს შორის რიგის დადგენისათვის. შევთანხმდეთ იმაში, რომ, რაც უფრო კარგად იქნება შერჩეული რანგები, მით უფრო კარგი იქნება შესაბამისი გადაწყვეტილება. ამასთან, რაც უფრო ნაკლებია რანგის გამომსახველი რიცხვი, მით უპირატესია შესაბამისი ობიექტი. მაშასადამე, რანგების რიცხვების ზრდას შესაბამება ობიექტების უპირატესობების კლება. ობიექტების ასეთი რანჟირება წარმოადგენს ექსპერტული გადაწყვეტილების მიღების ამოცანას. ამავე დროს, რანჟირებაში დასაშვებია ტოლფასი ანუ ერთნაირი უპირატესობების მქონე ობიექტების მითითება. მაგალითად, ექსპერტმა ხუთი $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ობიექტის რანჟირება შესაძლოა ასე მოახდინოს:

$$x_2, x_1 \approx x_3, x_4 \approx x_5,$$

რაც აღნიშნავს, რომ მეორე ობიექტი ყველაზე უპირატესია, შემდეგ მოდის ტოლფასი პირველი და მესამე ობიექტები, ხოლო მეოთხე და მეხუთე ობიექტები ტოლფასებია და ყველაზე ცუდები. აღნიშნული რანჟირების ჩასაწერად გამოვიყენებთ ასეთ სახესაც:

$$x_2 \succ \{x_1, x_3\} \succ \{x_4, x_5\}.$$

მაშასადამე, x_2-ს აქვს 1-ელი რანგი, x_1 და x_3-ს აქვს მე-2 რანგი, ხოლო x_4 და x_5-ს - მე-3 რანგი.

ექსპერტული შეფასებებისათვის გამოიყენება, აგრეთვე, რაოდენობრივი და ბალური სკალები. შეფასების რაოდენობრივი სკალა გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა გაზომვას აქვს აზრი და ობიექტურად იზომება ობიექტური მაჩვენებლები ანუ შეგვიძლია ვთქვათ, ერთი შეფასება რამდენჯერ ან რამდენით მეტია მეორის შეფასებაზე.

რაც შეეხება ბალურ სკალას და შეფასებებს, მისი საშუალებით ახასიათებენ სუბიექტურს და ნაწილობრივ, ობიექტურ მოსაზრებებსაც. ეს სკალა გამოსახავს ე.წ. ინტენსივობის საზომ ერთეულებს, ნიშნებს. ასეთია, მაგა-

ლითად, ცოდნის შეფასების სკალა ხუთბალიან $\{1,2,3,4,5\}$ ან ასბალიან [0,100] სისტემაში. თითოეულ გამოსაცდელს კონკრეტულ საგანში დაესმის მათგან ერთი შეფასება. ექსპერტული შეფასება ხშირად წარმოებს, აგრეთვე, ბალური სკალით. შეფასებისათვის ბალური სკალის ტიპის არჩევა საკმაოდ რთული საკითხია. ზოგიერთ პირობებში ასეთი სკალა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც რაოდენობრივი. სუბიექტური შეფასებები წარმოადგენს ჩვენთვის კარგად ცნობილი ნეიმან-მორგენშტერნის სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობებს.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბალური შეფასებები - შუალედური შეფასებებია რანგობრივ და რაოდენობრივ გაზომვებს შორის. ამიტომ, ბალური შეფასებების ანალიზი შეგვიძლია ვაწარმოოთ როგორც რაოდენობრივი, ისე ხარისხობრივი მეთოდებით.

თითოეულ ექსპერტს, ექსპერტიზის პროცედურის შესაბამისად, შეუძლია ერთდროულად შეაფასოს როგორც ყველა ობიექტი, ისე მათი ნაწილი (მაგალითად, ის, რომელშიც იგი უფრო კომპეტენტურია). პრაქტიკაში ძირითადად გამოიყენება შეფასების ორი წესი: 1) როცა ექსპერტი ყველა ობიექტს ერთდროულად ადარებს ერთმანეთს უპირატესობებით და 2) როცა ექსპერტი აწარმოებს ყველა ობიექტის ყველასთან ერთდროულ შედარებას (ესაა ჩვენთვის კარგად ცნობილი წყვილობითი შედარება). პირველ შემთხვევაში ობიექტების შეფასება წარმოებს რანჟირების სახით, ხოლო მეორე შემთხვევაში - ბალური სახით.

შევნიშნოთ, რომ რანგობრივ და ბალურ შეფასებებზე ჩვეულებრივი არითმეტიკული ოპერაციების შესრულება არ შეიძლება. მაგალითად, რანგების შემთხვევაში არ შეიძლება დავწეროთ 2+3=5, რადგან რანჟირებაში მეორე და მესამე ადგილზე მდგომი ობიექტების მახასიათებლების შეფასებები ან მათი ჯამი არ შეიძლება მეხუთე ადგილზე მდგომი ობიექტის მახასიათებლის შეფასების ტოლი იყოს. ასევე, არ შეიძლება კონკრეტულ საგანში 40-ბალიანი და 50-ბალიანი შეფასებების მქონე სტუდენტთა ცოდნა ტოლი იყოს 40+50=90-ბალიანი სტუდენტის ცოდ-

ნის. ამიტომ ცხადია, რანგობრივი და ბალური მონაცემების ანალიზისათვის აუცილებელია არითმეტიკის განსხვავებული თეორია.

ასევე, მნიშვნელობა აქვს ექსპერტების რაოდენობას. მათი რიცხვი უმჯობესია იყოს 7,8,9,10. ზოგჯერ მათგან შესაძლოა კენჭისყრის საჭიროებაც დადგეს, ამიტომ ექსპერტთა ოპტიმალური რიცხვია 7 ან 9.

5.10. ექსპერტული შეფასების ანალიზის მათემატიკური მეთოდები

დღეისათვის გავრცელებულია ექსპერტული, მარკეტინგული, სოციალური და სხვა გამოკითხვები, რომლებშიც გამოსაცდელებს თხოვენ რანგები, ბალები დაუწერონ: ობიექტებს, ნაწარმოებებს, ტექნიკურ პროექტებს, იდეებს, პრობლემებს, პროგრამებს, პოლიტიკოსებს და ა.შ. ამის შემდეგ ანგარიშობენ საშუალო რანგებს და საშუალო ბალებს, განიხილავენ მათ, როგორც ინტეგრალურ (საბოლოო) შეფასებებს. როგორი ფორმულით ვისარგებლოთ საშუალო სიდიდეების გამოსათვლელად, როცა ზემოთ აღნიშნულის თანახმად ასეთ სიდიდეებზე ჩვეულებრივი არითმეტიკული ოპერაციების შესრულება არაკორექტულია? ქვემოთ შევისწავლით ზოგიერთ ასეთ მეთოდს.

აქ განვიხილავთ ექსპერტთა მიერ კონკურსში მონაწილე ობიექტთა (პროექტთა, კანდიდატთა) რანჟირების ორ მეთოდს როგორც რანგების სკალის შემთხვევაში, ისე ბალური სკალისათვის ცალ-ცალკე. ამ მეთოდებით დადგენილი რანჟირებების ერთმანეთთან შეპირისპირებით დავაზუსტებთ რანჟირებულ კანდიდატთა საბოლოო რიგს. ეს მეთოდებია; 1) საშუალო რანგების მეთოდი და 2) რანგების მედიანების მეთოდი. "საშუალოში" აქ ვგულისხმობთ ჩვეულებრივ საშუალო არითმეტიკულს. აქედან პი-

რველი მეთოდი ნაკლები საიმედოობით გამოირჩევა, მაგრამ მისი უგულებელყოფა არ შეიძლება, რადგან იგი ტრადიციული და საკმაოდ გავრცელებული მეთოდია. ამიტომ ექსპერტები სარგებლობენ იმ რეკომენდაციით, რომლის თანახმად უმჯობესია ერთდროულად ორივე მეთოდის შეთანხმებულად გამოყენება.

მოცემულ მეთოდებში იგულისხმება, რომ ყოველი ექსპერტი ახდენს თითოეული კანდიდატის ერთდროულ შეფასებას ცალ-ცალკე. აქვე შემოვიღოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, ექსპერტთა სიმრავლეა $E=\{e_1,e_2,...,e_k\}$, ხოლო კონკურსში მონაწილე კანდიდატების სიმრავლე $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. ექსპერტები აფასებენ კანდიდატებს წინასწარ დადგენილი $f_1,f_2,...,f_m$ კრიტერიუმების (ნიშნების) შესაბამისად.

ქვემოთ გამოვიყენებთ, აგრეთვე, შემდეგი სახის ხარისხობრივ და შესაბამის ბალურ სკალას:

1) სუსტი - - - - - - - - - - - - 1;
2) საშუალო - - - - - - - - - 2;
3) საშუალოზე უკეთესი – 3; (5.10.1)
4) კარგი - - - - - - - - - - - - 4;
5) ძალიან კარგი - - - - - - 5.

5.10.1. საშუალო რანგების და რანგების მედიანების მეთოდები

ორივე მეთოდის ახსნისათვის განვიხილოთ ცხრილი 5.10.1. მეთოდებს ავხსნით კონკრეტული მაგალითების საშუალებით. პირველად განვიხილავთ საშუალო რანგების მეთოდს.

ცხრილი 5.10.1

კანდიდატები / ექსპერტები	x_1	x_2	. . .	x_n
e_1				
e_2				
.				
e_k				
რანგების ჯამი				
საშუალო რანგები				
საბოლოო საშუ-ალო რანგები				
რანგების მედიანები				
საბოლოო რანგე-ბი მედიანით				

საშუალო რანგების მეთოდი

მაგალითი 5.10.1. ექსპერტთა 7-კაციანმა კომისიამ $E=\{e_1,e_2,...,e_7\}$ უნდა გააკეთოს 5 წარმოდგენილი პროექტის (კანდიდატის) $X=\{x_1,x_2,...,x_5\}$ ექსპერტული ანალიზი რანგების სკალის გამოყენებით. თითოეული ექსპერტისაგან მოითხოვება მხოლოდ პროექტების რანჟირება და მათზე პასუხისმგებლობა ნებისმიერი კითხვის გაჩენის შემთხვევაში. ამასთან, ექსპერტი ანიჭებს 1 რანგს ყველაზე საუკეთესო პროექტს, 2-ს ანიჭებს მასზე ნაკლებ უპირატეს პროექტს და ა.შ., 5-ს ანიჭებს ყველაზე ნაკლებ უპირატესს.

დავუშვათ, e_1 (პირველმა) ექსპერტმა პროექტების რანგები გაანაწილა (4; 1; 2; 5; 3) ვექტორის სახით, ანუ 1 რანგი მან მიანიჭა x_2-ს, 2 მიანიჭა x_3-ს, 3 - x_5-ს, 4 - x_1-ს, 5 - x_4-ს. e_2 (მეორე) ექსპერტი თვლის, რომ x_2 და x_3 პროექტები ტოლფასია, მაგრამ ჩამორჩება მხოლოდ x_4-ს, რომლის რანგია 1. მაშასადამე, რანგების რიგში x_4 იქნება პირველ ადგილზე, ხოლო x_2 და x_3 დაიკავებს მე-2 ან მე-3 ადგილებს ანუ თითოეული მათგანი მიიღებს 2 ან 3 რანგს. ვინაიდან ისინი ტოლფასებია, ამიტომ თითოეული მიიღებს საშუალო რანგს

$$\frac{2+3}{2}=2{,}5\,.$$

ამით ისინი ერთ დონეზე აღმოჩნდებიან. აღნიშნული გარემოებების გამო, e_2 ექსპერტი რანგებს ანაწილებს ვექტორის სახით (5; 2,5; 2; 1; 4). დანარჩენმა ექსპერტებმა ცალსახად დაადგინეს პროექტების რანგები და ამის შემდეგ, ყველა მიღებული შედეგი შეგვაქვს 5.10.1 ცხრილში. მივიღებთ ცხრილს (ცხრილი 5.10.2).

თითოეული პროექტის რანგების შეკრებით მივიღებთ რანგების ჯამს. თითოეული ეს რიცხვი გავყოთ ექსპერტთა რაოდენობაზე და ასე მივიღებთ პროექტის საშუალო რანგს. ჩვენს შემთხვევაში ეს სიდიდეებია

(3,28; 2,36; 2,5; 3,42; 3,28).

ამ სიდიდეებიდან უნდა დავადგინოთ საბოლოო საშუალო რანგები. აქ მოგვიწევს გარკვეული წესების გამოყენება. კერძოდ, მათგან ზოგიერთი უნდა დავამრგვალოთ მაქსიმალურ მთელ რიცხვამდე, ზოგიერთი კი - უმცირეს მთელ რიცხვამდე. მაგალითად, ამ რიცხვებიდან უდიდესია 3,42, რომელიც შეესაბამება x_4-ს. დავამრგვალოთ 3,42 უდიდეს მთელ 4 რიცხვამდე. ამიტომ x_4-ის საბოლოო საშუალო რანგი იქნება 4. ცხადია, x_2-ს აქვს უმცირესი საშუალო რანგი

ცხრილი 5.10.2

კანდიდატები. ექსპერტები	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	4	1	2	5	3
e_2	5	2,5	2,5	1	4
e_3	3	2	1	4	5
e_4	3	5	4	2	1
e_5	5	1	4	3	1
e_6	1	2	3	4	5
e_7	2	3	1	5	4
რანგების ჯამი	2,3	16,5	17,5	24	23
საშუალო რანგები	3,28	2,36	2,5	3,42	3,28
საბოლოო საშუ-ალო რანგები	3,5	1	2	5	3,5
რანგების მედიანები	3	2	2,5	4	4
საბოლოო რანგები მედია-ნით	3	1	2	4,5	4,5

2,26, ამიტომ მისი საბოლოო საშუალო რანგი იქნება 1. 2,5 საშუალო რანგი დავამრგვალოთ 2-მდე და x_3-ის საბოლოო რანგი იქნება 2. რაც შეეხება ორ ტოლ საშუალო რანგს - 3,28-ს, იგი მიუთითებს, რომ x_1 და x_5 პროექტები ტოლფასია. ისინი უნდა იყვნენ მე-3 ან მე-4 ადგი-

ლზე ანუ მათი საბოლოო საშუალო რანგი უნდა იყოს 3 ან 4. ამიტომ ისინი მიიღებენ თანაბარ საბოლოო საშუალო რანგს $\frac{3+4}{2}=3{,}5$. მაშასადამე, x_1 და x_5 რანჟირებაში აღმოჩნდება ერთ დონეზე და საბოლოო საშუალო რანგები შემდეგნაირად განაწილება

3,5; 1; 2; 5; 3,5,

რომლის, შესაბამისად, პროექტების ექსპერტიზით ვღებულობთ მათ შემდეგნაირ რანჟირებას:

$$x_2 \succ x_3 \succ \{x_1, x_5\} \succ x_4 .$$

ეს კი გვეუბნება, რომ x_2-ს აქვს 1-ლი რანგი, x_3-ს აქვს მე-2 რანგი, x_1 და x_5-ს - მე-3 რანგი, ხოლო x_4-ს - მე-4 რანგი.

რანგების მედიანების მეთოდი

რადგან ექსპერტთა პასუხები რიგობრივი სკალითაა მოცემული, ამიტომ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის თანახმად მათზე არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარება არაა მიზანშეწონილი. აქ უმჯობესია გამოვიყენოთ რანგების მედიანების მეთოდი. ამ მეთოდის არსი შემდეგია: უნდა ავიღოთ ექსპერტთა პასუხები თითოეული პროექტისათვის; მაგალითად, ჩვენ მაგალითში x_1-ის შეფასებები მოიცემა ვექტორით

(4; 5; 3; 3; 5; 1; 2).

დავალაგოთ ისინი არაკლებადობით ანუ შევადგინოთ მათგან ვარიაციული მწკრივი

1; 2; 3; 3; 4; 5.

ამ მწკრივის შუაში დგას 3 და მოცემული x_1 პროექტის რანგების მედიანაა 3.

x_2-ის შემთხვევაში გვაქვს

(1; 2,5; 2; 5; 1; 2; 3),

რომლის დალაგებით მიღებული მწკრივის

1; 1; 2; 2; 2,5; 3; 5

ცენტრში დგას 2. მაშასადამე, x_2-ის რანგების მედიანაა 2. ასე ვიპოვით ყველა პროექტის რანგების მედიანებს

3; 2; 2,5; 4; 4.

რანგების მედიანებიდან დაეადგენთ მათ საბოლოო რანგებს მედიანით. თუ მათგან ზოგიერთი იქნება ათწილადი, მაშინ საჭიროა შესაბამისი დამრგვალება. თუ რამდენიმე პროექტს ექნება ერთნაირი რანგი, მაშინ უნდა გავითვალოთ თუ რომელ ადგილებზე შეიძლება მოხვდეს ასეთი პროექტები ანუ როგორი შეიძლება იყოს მათი საბოლოო ობიექტური რანგები. ამიტომ, ასეთი პროექტების მედიანით საბოლოო რანგების როლში ავიღებთ ყველასათვის ერთნაირს - იმ სავარაუდო ადგილების საშუალო არითმეტიკულს. მაგალითად, ჩვენ შემთხვევაში: x_2 მიიღებს 1 რანგს; x_3-ის რანგების მედიანა 2,5 დამრგვალდება 2-მდე და, მაშასადამე, x_3 მიიღებს მე-2 რანგს; x_1-ს აქვს მე-3 რანგი; x_4 და x_5-ის რანგების მედიანები ორივესათვის ერთნაირია. ამიტომ x_4 და x_5 აღმოჩნდება მე-4 ან მე-5 ადგილებზე და მათგან თითოეულის საბოლოო რანგი მედიანით იქნება $\frac{4+5}{2}=4{,}5$. მაშასადამე, ყველა პროექტის საბოლოო რანგები მედიანით იქნება

3; 1; 2; 4,5; 4,5,

რომლის შესაბამისად პროექტები შემდეგნაირადაა რანჟირებული

$$x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ \{x_4, x_5\}.$$

შენიშვნა 5.10.1. თუ ექსპერტთა რიცხვი ლუწია, მაშინ პროექტების შეფასებების ვარიაციული მწკრივების შუა ადგილზე იგულისხმება ორი შეფასება და ამიტომ მედიანის როლში უნდა ავიღოთ ამ შეფასებების საშუალო არითმეტიკული. მაგალითად, ვთქვათ, 8 ექსპერტმა მოგვეცა x^0 კანდიდატის შემდეგი შეფასებები:

$$(6,\ 3,\ 2,\ 5,\ 5,\ 2,\ 3,\ 6,\ 4,\ 3).$$

აქედან ვადგენთ ვარიაციულ მწკრივს 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6. ამიტომ x^0 კანდიდატის რანგების მედიანა იქნება თავიდან და ბოლოდან ტოლად დაშორებული 3 და 4 რანგების საშუალო არითმეტიკული - $\dfrac{3+4}{2}=3{,}5$.

დასკვნა 5.10.1. დავადგენთ ორივე მეთოდით პროექტთა რანჟირებას და შემდეგ შევისწავლით პროექტებს, რომელთა უპირატესობები განსხვავდება მოცემულ რანჟირებებში. თუ პროექტის შეფასებებში აღმოჩნდება მნიშვნელოვანი გადახრები, მაშინ ეს შემთხვევა განხილულ უნდა იქნეს საექსპერტო კომისიის ხელმძღვანელის მიერ.

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, პირველი და მეორე მეთოდი გვაძლევს რანჟირებებს შესაბამისად:

$$x_2 \succ x_3 \succ \{x_1, x_5\} \succ x_4,$$

$$x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ \{x_4, x_5\}.$$

მათი შედარებიდან ჩანს, რომ $x_1 \succ x_4$ და ხუთი პროექტიდან სამის უპირატესობა დადგენილია რიგით $x_2 \succ x_3 \succ x_1$. ამიტომ გაურკვეველი რჩება დამოკიდებულება ყველაზე ცუდ ორ x_4 და x_5 პროექტს შორის და მესამე ადგილზე გასულ x_1 და ცუდ x_5-ს შორის. ამიტომ ხუთი პროექტიდან პირველ და მეორე ადგილებზე x_2 და x_3-ის გასვლა, შესაბამისად, ობიექტურია, x_1-ის მესამე ადგილზე გასვლა იოლად დასადგენია, ხოლო რაც შეეხება ყველაზე ცუდ x_4 და x_5 პროექტს, შეიძლება არც კი განვიხილოთ.

აღწერილი მეთოდების ანალოგიურად განვიხილავთ, ასევე ერთდროულად საშუალო ბალებისა და ბალების მედიანების მეთოდებს. ბალური სკალის როლში განვიხილავთ (5.10.1) ხარისხობრივი სისტემის საშუალებით

განსაზღვრულ სკალას {1,2,3,4,5}. ზოგადად, ეს სკალაც რანგების როლს ასრულებს, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ ამ სკალით უფრო უპირატეს ობიექტს უფრო მეტი შეფასება აქვს.

5.10.2. საშუალო ბალებისა და ბალების მედიანების მეთოდები

მაგალითი 5.10.2. ექსპერტთა 7-კაციანმა კომისიამ $E=\{e_1,e_2,...,e_7\}$ უნდა გააკეთოს 5 წარმოდგენილი პროექტის (კანდიდატის) $X=\{x_1,x_2,...,x_5\}$ ექსპერტული ანალიზი ბალური $\{1,2,3,4,5\}$ სკალის გამოყენებით. თითოეული ექსპერტი აფასებს ყველა პროექტს, ამასთან, ტოლფას პროექტებს ერთნაირი ქულით აფასებს. ვთქვათ, ასეთი შეფასებები მოცემულია ცხრილში (ცხრილი 5.10.3).

პირველ რიგში, შევნიშნოთ, რომ ბალებით შეფასებების ცხრილში ყველა შეფასება მთელი რიცხვია. ვიპოვით ბალების ჯამს და საშუალო ბალებს. დავამრგვალებთ ყველა საშუალო ბალს მთელ რიცხვამდე. კერძოდ, 4,28 უნდა დავამრგვალოთ 5-მდე; 1,85 დამრგვალდება 1-მდე. მაშასადამე, x_5 რანჟირებაში იქნება პირველ ადგილზე (იგი ყველაზე უპირატესია); x_4 იქნება ბოლო, მეხუთე ადგილზე; 2,28 დამრგვალდება 2-მდე და x_2 იქნება მეოთხე ადგილზე. x_1 და x_3 ტოლფასებია და მათი შეფასებები დამრგვალდება 4-მდე. საშუალო ბალების მეთოდით გვაქვს პროექტების შემდეგი რანჟირება:

$$x_5 \succ \{x_1,x_3\} \succ x_2 \succ x_4 .$$

ცხრილი 5.10.3

კანდიდატები. / ექსპერტები	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	5	2	4	1	4
e_2	5	1	3	1	4
e_3	3	2	4	2	3
e_4	4	4	5	3	5
e_5	3	3	5	3	5
e_6	2	3	3	2	5
e_7	5	1	3	1	5
ბალების ჯამი	27	16	27	13	30
საშუალო ბალები	3,86	2,28	3,86	1,85	4,28
საბოლოო საშუ-ალო ბალები	4	2	4	1	5
ბალების მედიანები	4	2	4	2	5
საბოლოო ბალები მედია-ნით	4	2	4	2	5

ახლა ვიპოვოთ თითოეული პროექტის ბალების მედიანა. რადგან ყველა შეფასება მთელია, ამიტომ ყველა პროექტის მედიანა, ასევე მთელი იქნება. ამის გამო, საბოლოო ბალები მედიანით იგივე იქნება. x_1-ის ბალური შეფასებებია ვექტორი

$$(5;\ 5;\ 3;\ 4;\ 3;\ 2,\ 5).$$

შესაბამის ვარიაციულ მწკრივს აქვს სახე

$$2;\ 3;\ 3;\ 4;\ 5;\ 5;\ 5.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ x_1-ის ბალების მედიანაა 4. ასევე ვიპოვით სხვა პროექტების ბალების მედიანებს და მივიღებთ

$$4;\ 2;\ 4;\ 2;\ 2;\ 5.$$

იგივე იქნება საბოლოო ბალები მედიანით.

მაშასადამე, ბალების მედიანით პროექტებს აქვს ასეთი რანჟირება:

$$x_5 \succ \{x_1, x_3\} \succ \{x_2, x_4\}.$$

ბალების მეთოდებიდან მიღებული რანჟირებების შედარებიდან ნათლად ჩანს, რომ x_5 პროექტი ყველაზე უპირატესია. მეორე ადგილზე გავა x_1 ან x_3 დამატებითი კრიტერიუმის გამოყენებით. მესამე ადგილზე გავა x_2 ან x_4. ეს გადაწყდება დამატებითი კრიტერიუმით, რომელიც გაითვალისწინებს მათგან x_2-ის უპირატესობას.

5.10.3. ჯ. კემენის მედიანის მეთოდი

აღნიშნული მათემატიკური მეთოდი იმავე ამოცანის გადასაწყვეტად გამოიყენება, რასაც ვწყვეტთ წინა მეთოდებით. ამრიგად, პროექტთა $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ სიმრავლეს საექსპერტო კომისია $E = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, აფასებს აგრეგირებული $f_1, f_2, ..., f_m$ კრიტერიუმებით. ეს კიდევ ნიშნავს, რომ ექსპერტები კანდიდატებს აფასებენ მთლიანობაში ერთდროულად ყველა კრიტერიუმის გათვალისწინებით. ბუნებრივია, აქ რომელიმე ერთმა კრიტერიუმმაც კი შეიძლება გადაფაროს დარჩენილი ნაკლებ მნიშვნელოვანი ნიშან-თვისებები და ამით კანდიდატი შეიძლება გახდეს გამარჯვებული. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს მეთოდი სხვა წინა მეთოდებთან შედარებით მარტივია, იგი საკმაოდ

ბუნებრივია და ოპტიმალური, რასაც ადასტურებს მისი მნიშვნელოვანი ცნობილი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

ჯ. კემენის (ჯონ ფონ ნეიმანის მოსწავლე) მეთოდი განვიხილოთ ერთი კონკრეტული მაგალითისათვის.

მაგალითი 5.10.3. ვთქვათ, ოთხმა ექსპერტმა ხუთი პროექტიდან უნდა გამოავლინოს სამი საუკეთესო პროექტი.

თითოეული ექსპერტი პროექტებს ანიჭებს რანგებს ანუ გაანაწილებს თითოეული პროექტის ადგილს რანჟირებაში. ვთქვათ, ასეთ განაწილებას აქვს სახე (ცხრილი 5.10.4):

ცხრილი 5.10.4

ექსპერტები	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	1	3	5	2	4
e_2	1	2	3	4	5
e_3	2	1	3	5	4
e_4	1	3	4	5	2

თითოეული ექსპერტის მიერ დალაგებული პროექტები ითვლება მის გადაწყვეტილებად და იგი, როგორც ზემოთ ვნახეთ, წარმოადგენს ვექტორს. მაგალითად, 5.10.4 ცხრილის თანახმად, e_1 ექსპერტის გადაწყვეტილებაა (1, 3, 5, 2, 4), e_2-ის კი - (1, 2, 3, 4 ,5).

გამოვთვალოთ r_{ij} სიდიდეს, რომელიც არის $i\,(e_i)$ და $j\,(e_j)$ ექსპერტების გადაწყვეტილებებს შორის მანძილი. ასეთი მანძილის როლში ხშირად აიღება, მაგალითად, მანჰეტენის ნორმა, რომელიც წარმოადგენს i და j ექსპერტების გადაწყვეტილებების კოორდინატებს შორის სხვაობათა მოდულების ჯამს. მაგალითად,

$$r_{12} = |1-1| + |3-2| + |5-3| + |2-4| + |4-5| = 6.$$

r_{ij} სიდიდეებს მოვათავსებთ შემდეგ ცხრილში (ცხრილი 5.10.5):

ცხრილი 5.10.5

	e_1	e_2	e_3	e_4	R_i
e_1	0	r_{12}	r_{13}	r_{14}	$0+r_{12}+r_{13}+r_{14}=R_1$
e_2	r_{21}	0	r_{23}	r_{24}	$r_{21}+0+r_{23}+r_{24}=R_2$
e_3	r_{31}	r_{32}	0	r_{34}	$r_{31}+r_{32}+0+r_{34}=R_3$
e_4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	0	$r_{41}+r_{42}+r_{43}+0=R_4$

ცხადია, $r_{ii}=0$ და $r_{ij}=r_{ji}$. ამ ცხრილის ბოლო R_i სვეტში მოვათავსებთ თითოეული სტრიქონის მანძილების ჯამს. ესენია R_1, R_2, R_3, R_4. ავიღოთ ამ რიცხვებიდან ყველაზე მცირე - $\min\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$. მიღებული სიდიდის შესაბამისი ექსპერტის გადაწყვეტილება იქნება საშუალო ანუ მედიანა და ის გამოცხადდება ექსპერტიზის საბოლოო შედეგად.

დავუბრუნდეთ ჩვენს მაგალითს. ცხრილი 5.10.4-დან ვღებულობთ:

$$r_{12}=6,\ r_{13}=|1-2|+|3-1|+|5-3|+|2-5|+|4-4|=8,$$

$$r_{14}=|1-1|+|3-3|+|5-4|+|2-5|+|4-2|=6,$$

$$r_{21}=r_{12}=6,\ r_{22}=0,\ r_{23}=|1-2|+|2-1|+|3-3|+|4-5|+$$
$$+|5-4|=4.$$

ასე ვიპოვით დანარჩენებსაც და მოვათავსოთ ისინი 5.10..5 ცხრილში.

აქედან მივიღებთ, რომ $\min\{20,16,17,17\}=16$, რომელიც შეესაბამება e_2-ის გადაწყვეტილებას და ამიტომ საექსპერტო კომისიის გადაწყვეტილებად მიიღება მისი გადაწყვეტილება 5.10.4 ცხრილიდან:

(1, 2, 3, 4, 5).

ეს ნიშნავს, რომ პროექტები რანჟირებულია შემდეგნაირად: $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	R_i
e_1	0	6	8	6	20
e_2	6	0	4	6	16
e_3	8	4	0	5	17
e_4	6	6	5	0	17

ამრიგად, გამარჯვებულია x_1, x_2 და x_3 პროექტები.

5.11. ექსპერტთა კომპეტენტურობის მათემატიკური მოდელი

როგორც ვნახეთ, ექსპერტული ანალიზის ძირითადი ამოცანაა ობიექტთა რანჟირება მათი უპირატესობების გათვალისწინებით. რადგან ყველა ექსპერტი არ შეიძლება იყოს ერთნაირი კვალიფიკაციის, ამიტომ ბუნებრივია დაისვას საკითხი მათი კომპეტენტურობის შესახებაც, ე.ი. მათი რანჟირება კომპეტენტურობის გათვალისწინებით. ეს უნდა მოხდეს ექსპერტთა ქცევის მოდელირების საფუძველზე. მოდელირებისათვის არსებობს რამდენიმე მეთოდი; მათგან განვიხილავთ ერთადერთს, რომლითაც ექსპერტთა კომპეტენტურობას გავაანალიზებთ, მათ მიერ ობიექტების შეფასებების საფუძველზე.

ძალიან ხშირად ექსპერტიზის ამოცანებში გამოითქმება მოსაზრება იმის შესახებ, რომ ექსპერტის კომპეტენტურობა საჭიროა შეფასდეს იმის შესაბამისად, თუ რამდენადაა მისი შეფასებები შეთანხმებული უმრავლესობის

შეფასებებთან. ასეთი მოსაზრება განვახორციელოთ კონკრეტული ექსპერტიზის მაგალითის შემთხვევაში.

მაგალითი 5.11.1. სამი ექსპერტი $\{e_1, e_2, e_3\}$ ანაწილებს კაპიტალდაბანდებებს 1 მლნ ლარის ფარგლებში ორ ტექნიკურ-ეკონომიკურ $\{x_1, x_2\}$ პროექტზე და ასეთი განაწილება მოცემულია მატრიცით

$X =$

	e_1	e_2	e_3
x_1	800000	400000	700000
x_2	200000	600000	300000

.

აქ $X = (x_{ij})$ მატრიცის x_{ij} ელემენტი არის x_i პროექტის შეფასება e_j ექსპერტის მიერ.

ჩავატაროთ X-ის ელემენტების ნორმირება:

$X =$

	e_1	e_2	e_3
x_1	0,8	0,4	0,7
x_2	0,2	0,6	0,3

.

თავიდანვე ვგულისხმობთ, რომ სამივე ექსპერტი ერთნაირად კომპეტენტურია ანუ მათი კომპეტენციის საწყისი კოეფიციენტები მოიცემა ვექტორით $q^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ამ პირობებში გამოვთვალოთ პროექტთა საშუალო შეფასებები:

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(0{,}8 + 0{,}4 + 0{,}7) = 0{,}63; \quad x_2^1 = \frac{1}{3}(0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}3) = 0{,}37 .$$

ამრიგად, პროექტების პირველი საშუალო შეფასებების ვექტორია $x^1 = (x_1^1, x_2^1) = (0{,}63; 0{,}37)$. ამ შეფასებებით გამოვთვალოთ ექსპერტთა კომპეტენტურობის ახალი კოეფიციენტები. ამისათვის, პროექტთა პირველი საშუალო შეფასებებით გამოვთვალოთ თითოეული ექსპერტის შეფასებების აწონილი საშუალოები:

$$q_1^1 = 0{,}8.0{,}63 + 0{,}2.0{,}37 = 0{,}58;$$
$$q_2^1 = 0{,}4.0{,}63 + 0{,}6.0{,}37 = 0{,}47;$$
$$q_3^1 = 0{,}7.0{,}63 + 0{,}3.0{,}37 = 0{,}55.$$

გავყოთ თითოეული ეს სიდიდე მათ ჯამზე, რომელიც ტოლია 0,58+0,47+0,55=1,6. მივიღებთ ექსპერტთა კომპეტენტურობის ფარდობითი მაჩვენებლების ვექტორს

$$q^1 = \left(\frac{0{,}58}{1{,}6}; \frac{0{,}47}{1{,}6}; \frac{0{,}55}{1{,}6}\right) = (0{,}36;\ 0{,}30; 0{,}34).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ q^1 ვექტორი წარმოადგენს $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ ვექტორის X მატრიცაზე ნამრავლით მიღებული ვექტორის ნორმირებულ ვექტორს.

ექსპერტთა კომპეტენტურობის $q^1 = (q_1^1, q_2^1, q_3^1)$ ვექტორით პროექტთა ახალ საშუალო შეფასებებს გამოვთვლით ფორმულით

$$x_i^2 = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} q_j^1, \quad i = 1,2.$$

აქედან,

$$x_1^2 = 0{,}8.0{,}58 + 0{,}4.0{,}47 + 0{,}7.0{,}55 = 0{,}65;$$
$$x_2^2 = 0{,}2.0{,}58 + 0{,}6.0{,}47 + 0{,}3.0{,}55 = 0{,}35.$$

ახლა პროექტთა $x^2 = (0{,}65; 0{,}35)$ საშუალო შეფასებებით გამოვთვალოთ ექსპერტთა შეფასებების აწონილი საშუალოები:

$$q_1^2 = 0{,}8.0{,}65 + 0{,}2.0{,}35 = 0{,}59;$$
$$q_2^2 = 0{,}4.0{,}65 + 0{,}6.0{,}35 = 0{,}47;$$
$$q_3^2 = 0{,}7.0{,}65 + 0{,}3.0{,}35 = 0{,}56.$$

ეს სიდიდეები გავყოთ 0,59+0,47+0,56=1,62 რიცხვზე, მივიღებთ ექსპერტთა კომპეტენტურობის ფარდობითი მაჩვენებლების ახალ ვექტორს:

$$q^2 = \left(\frac{0,59}{1,62}; \frac{0,47}{1,62}; \frac{0,56}{1,62}\right) = (0,364;\ 0,290; 0,345).$$

შემდეგ ვიპოვით

$$x_i^3 = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} q_j^2, \quad i = 1,2$$

სიდიდეებს და მათი საშუალებით ვიპოვით q^3-ს და ა.შ. ამ გამოთვლებს არ ჩავატარებთ, რადგან ექსპერტთა შეფასებები უკვე უცვლელია. მაშასადამე, ექსპერტების რანჟირება კომპეტენტურობის უპირატესობების კლებით ასეთია: $e_1 \succ e_3 \succ e_2$.

შენიშვნა 5.11.1. თუ X მატრიცა გვექნება $m \times n$ განზომილების (m პროექტი და n ექსპერტი), მოყვანილი მეთოდი იქნება იგივე, ოღონდ ექსპერტთა კომპეტენტურობის საწყისი შეფასებების ვექტორის როლში ავიღებთ $q^0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

დამატება

ადამიანის სიცოცხლისა და ცხოვრების არსია წონასწორული გადაწყვეტილებების მუდმივი ძიება

ვინც კი ჩვენი წიგნის ორივე ნაწილში სრულად გაერკვა, დარწმუნებული უნდა იყოს იმაში, რომ ადამიანი მთელ ცხოვრებას გადაწყვეტილებების მიღებას ანდომებს და თამამად თქვას, რომ ადამიანის სიცოცხლისა და ცხოვრების არსი გადაწყვეტილებების მუდმივ ძიებაშია.

ბევრს ვსაუბრობთ მეცნიერებაზე, მის დარგებზე, ჩვენს წიგნში - მართვის დარგებსა და ოპტიმალურ გადაწყვეტილებებზე, მაგრამ ნაკლები ყურადღება ეთმობა საერთოდ, ადამიანის, როგორც რთული სისტემის არსებობის მიზეზებს, მიზნებსა და დანიშნულებას. ამიტომ

გადავწყვიტეთ წინამდებარე წიგნის ერთი პარაგრაფი მივუძღვნათ აღნიშნულ საკითხს, მით უმეტეს, რომ ჩვენი დარგი ეხმარება ადამიანს და საზოგადოებას სიცოცხლის მთავარი მიზნის - მაქსიმალურად მოსალოდნელი სარგებლიანობის მიღებაში, საზოგადოებაში მშვიდი გარემოების შექმნასა და სასურველი ურთიერთობების მოგვარებაში.

სიცოცხლისა და ცხოვრების მნიშვნელობის საკითხი ძირითადია ადამიანის გონიერული არსებობისათვის: რა აზრს ხედავს ადამიანი ამჟამად თავის სიცოცხლეში და როგორი იქნება მისი შემდგომი ცხოვრებისეული ქმედებები? კითხვაზე, თუ რა არის სიცოცხლის არსი მრავალი მოაზროვნე და მკვლევარი შეეცადა პასუხის გაცემას და ასე დაგროვდა ამ საკითხის ირგვლივ მრავალი შეხედულება. თუმცა, ცალსახად პასუხი მასზე მაინც არ არსებობს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ფსიქოლოგიურ-თერაპიულ პრაქტიკაში არსებული აზრის მიხედვით ითვლება, რომ სიცოცხლის არსის შესახებ საკითხს ადამიანი სვამს კრიზისულ სიტუაციებში. ცხოვრების დაძაბული რიტმის გამო ან სხვა მიზეზით ადამიანი აღმოჩნდება სტრესულ მდგომარეობაში, რაც მასში წარმოშობს მღელვარებას, დეპრესიას, ნევროზულ განწყობას. შემეცნების დონეზე ეს გამომჟღავნდება, როგორც სიცოცხლის აზრის დაკარგვა და ადამიანი ამ დროს იწყებს სიცოცხლის აზრის ძიებას. ასე რომ, სიცოცხლის აზრის შესახებ საკითხი ჩვეულებრივია ყოველი ადამიანის ცხოვრებაში და ამიტომ, სურს თუ არა მას ეს, შეგნებით უნდა უპასუხოს თავისთავს ამ კითხვაზე. ყველაზე სასურველია, თუ ადამიანი ამ კითხვაზე პასუხს მოძებნის თავისი სიცოცხლის ბედნიერ პერიოდში. სხვანაირად, ცხოვრებამ შეიძლება იგი მაინც აიძულოს ამ კითხვას პასუხი გასცეს ცხოვრებისეულ კრიზისულ სიტუაციებში. ამ საკითხში მუდმივ ჩაღრმავებასაც ვერ მოაქვს დადებითი შედეგი - იგი გამოიწვევს ფსიქიკურ დარღვევებს.

თავიდანვე დავაზუსტოთ, რომ უნდა გავარჩიოთ ცხოვრების აზრი და ცხოვრების მიზანი. ცხოვრების მიზანი ისაა, რის მიღებასაც გეგმავს ადამიანი თავისი შემოქმედების პროცესში, ძალიან ფართო გლობალური გაგებით. მიზანი არის ცხოვრებისეული გზის საბოლოო წერტილი. მაშასადამე, ცხოვრების მიზანი პასუხობს კითხვაზე "რა". ცხოვრების აზრი კი არის ის, რისთვისაც ცხოვრობს ადამიანი და ესაა უმაღლესი რიგის ღირებულების (სარგებლიანობის) მნიშვნელობის მიღება. ეს აზრი განსაზღვრავს იმ მიმართულებას, რომლითაც უნდა იმოძრაოს ადამიანმა მიზნის მისაღწევად. ამრიგად, ცხოვრების აზრის ცნება პასუხობს კითხვებს - "საით" და "რისთვის". გარდა ამისა, თუ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის პოზიციიდან განვიხილავთ სისტემას ბუნება-ადამიანი-საზოგადოება, როგორც იერარქიულ სტრუქტურას, მაშინ ერთ დონეზე აზრი წარმოადგენს მეორე დონეზე მიზანს. ქვედა დონის ქვესისტემის მიზანი მოიცემა ზედა დონის სისტემით და ამ ზედა დონეზე ცნობილია აზრი, რომელიც განსაზღვრავს მიზანს. ამავე დროს, ზედა დონის სისტემას აქვს თავისი მიზანი, რომელიც მოიცემა მისი ზედა მაღალი დონის სისტემით, რომელზეც ცნობილია ამ მაღალი დონის სისტემის მიზნის აზრი და ა.შ. ადამიანთან მიმართებაში აქ უნდა დავაზუსტოთ, რომ ადამიანი არის რთული თვითორგანიზებადი სისტემა ან, სხვანაირად რომ ვთქვათ, არის ცნობიერი არსება, რომელიც ფლობს თავისუფალ არჩევანს, აქვს შესაძლებლობა თვითონ განსაზღვროს თავისი ფუნქციონირების, იგივე ცხოვრების მიზანი.

განვიხილოთ ცხოვრების არსის განსხვავებული ეტაპები.

1. კაცობრიობის ცხოვრების არსი მთელი მსოფლიოს თვალსაზრისით. ამ ეტაპზე სრულ გაურკვევლობასთან გვაქვს საქმე. კაცობრიობის ცხოვრების არსია მთელი მსოფლიოს იმ გლობალური პრობლემების გადაწყ-

ვეტა, რომლებზეც თითოეულმა ჩვენგანმა არაფერი ვიცით.

უფრო "მიწიერი" პოზიციით კაცობრიობის ცხოვრების არსის საკითხი დაიყვანება ყველა ადამიანისათვის საერთო საქმის არჩევის საკითხზე ანუ იმ მიზნის დასმაზე, რომლის შესრულებით კაცობრიობაც დაწყნარდება და თითოეულიც გაიცნობიერებს თავის არსებობას საერთო საქმის შესრულებისათვის. რადგან მოცემულ სიტუაციაში კაცობრიობის ყველა ნააზრები წარმოადგენს საკმაოდ გაურკვეველს და გლობალურს, ამიტომ ჩვეულებრივ რიგით ადამიანს ცხადია, არა აქვს განსაკუთრებული პასუხისმგებლობა ამ თვალსაზრისით იფიქროს ცხოვრების არსზე.

2. ადამიანის ცხოვრების არსი კაცობრიობის თვალსაზრისით. მოცემული სიტუაცია ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველ ნაწილში იგულისხმება, რომ ადამიანს ცხოვრების მიზანი ენიჭება კონკრეტული საზოგადოებისა და სახელმწიფოსაგან. აქ, ფაქტობრივად, ადამიანის შესაბამისი აღზრდის გზით, მისი პირადი ინტერესების სანაცვლოდ წარმოებს მასზე ზემოქმედება, რათა იგი ემსახუროს საზოგადოების ინტერესებს. ამის შედეგად ადამიანი თავისი ცხოვრების აზრს ხედავს საზოგადოებისათვის თავდადებულ და ერთგულ სამსახურში, აუცილებლობის შემთხვევაში კი, თავგანწირვაშიც. ამ ნაწილის განვითარებას მივყავართ მეორე ნაწილთან - გეოპოლიტიკისა და გლობალური ცივილიზაციის პრობლემებთან. აქ ბუნებრივად არსებობს განსხვავებული პოზიციები. კერძოდ, არსებობს მიდგომა, რომელშიც მტკიცდება, რომ პირადი ინტერესები უნდა დაექვემდებაროს საზოგადოების ინტერესებს, ხოლო საზოგადოების ინტერესები უნდა დაექვემდებაროს ბუნების ინტერესებს. მეორე მხრივ, საყოველთაოდაა მიღებული თანამედროვე დემოკრატიის ლოზუნგი "ცალკეული ინდივიდის ინტერესები უფრო მაღალია მთელი საზოგადოების ინტერესებზე". ამრიგად, მოცემულ სიტუაციაში ადამიანის ცხოვრების არსი განისაზღვრება საზოგადოების და რიგითი ადამიანის მიზნებით, როდესაც ადამიანი საკუთარი ცხოვრებისეული მიზნების

განსაზღვრისას ითვალისწინებს მხოლოდ საზოგადოების მიერ განსაზღვრულ რეკომენდაციებს შეზღუდვებზე.

3. ადამიანის ცხოვრების არსი თვით ადამიანის თვალსაზრისით. ეს სიტუაცია ყველაზე საინტერესოა. აქ მოვიყვანთ რამდენიმე მიდგომას, რომლებიც ნაწილობრივ მონაწილეობს ზემოთ ჩამოთვლილ სიტუაციებში.

3.1. სინერგეტიკულ-სისტემურ-კიბერნეტიკული მიდგომა. სინერგეტიკა განსაზღვრავს ღია-ჩაკეტილი სისტემის ფუნქციონირების კანონებს. სისტემური ანალიზი სწავლობს რთული სისტემის იერარქიულ სტრუქტურას და მის ურთიერთკავშირს სხვა სისტემებთან. კიბერნეტიკა ადგენს მართვის დინამიკური სისტემების მუშაობის პრინციპებს. ადამიანი და კაცობრიობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რთული სისტემა ყველა ჩამოთვლილი დარგის ცოდნათა თვალსაზრისით. ამიტომ, ადამიანის ცხოვრების არსი ყველაზე ზოგადი, ფუნდამენტური პოზიციიდან განისაზღვრება სამყაროს იმ კანონებით, რომლებიც შეისწავლება აღნიშნულ მეცნიერებებში.

ცხადია, მითითებულ მეცნიერებათა სპეციალური შესწავლა და მათი პოზიციებიდან საკუთარი ცხოვრების გააზრება ნაკლებად დაეხმარება რიგით ადამიანს წარმატებით განახორციელოს თავისი სურვილები და მოთხოვნები. ამასთან სასურველია, ადამიანი თავისი საქმიანობის პროცესში იხსენებდეს, რომ მის სიცოცხლეს მნიშვნელოვნად განსაზღვრავს სხვადასხვა სისტემის ფუნქციონირების ფუნდამენტური კანონები.

3.2. ბიოლოგიურ-ფიზიოლოგიური მიდგომა. კაცობრიობის, როგორც ცოცხალი ბუნების ნაწილის, ყოველი წევრის სიცოცხლის აზრი განისაზღვრება გადარჩენის და მთელი ბიოლოგიური საზოგადოების განვითარების მიზნებით. რაც მეტად წარმატებულად იარსებებს ბიოლოგიური საზოგადოება, მით მეტად გადარჩება ცალკეულ ინდივიდთა მნიშვნელოვანი ნაწილი. ამ შემთხვევაში ცალკეული ადამიანის სიცოცხლე შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფიზიოლოგიური მოვლენა, რომლის მნიშვნელობა განისაზღვრება თავდაცვის ინსტიქტით. შესაბამისად, სიცოცხლის არსი უნდა ვეძებოთ ორგანიზმის ფიზიკური

მოთხოვნილების დაკმაყოფილებაში. ეს მიდგომა ყველაზე ახლოსაა კონკრეტული ადამიანის ცხოვრებასთან, ვიდრე წინა ვარიანტები.

3.3. მატერიალისტურ-რაციონალური მიდგომა. ადამიანს აქვს ცნობიერებით გამოხატული თავისუფლება და, მაშასადამე, ის თავისუფალია აირჩიოს საკუთარი ცხოვრების აზრი და იცხოვროს იმით. ცხოვრებისეული წარმატების მიღწევისა და ბედნიერებისათვის დემოკრატიულ საზოგადოებაში ადამიანს აქვს მრავალი შესაძლებლობა. კერძოდ:

ა) თავისი თავის პატივისცემა - ფიზიკური და ემოციური კმაყოფილების მიღების გზა, როცა ადამიანის ძირითადი ძალები მიმართულია საბაზისო მოთხოვნილებების დაკმაყოფილებისათვის ანუ ადამიანი ძირითადად მოქმედებს მატერიალური მოხმარების სფეროში. სიცოცხლის არსის ასეთი ვარიანტი ადამიანის ფიზიკური არსებობის დარგში არგუმენტირებულია "კარგი-ცუდი" სკალის საშუალებით. ადამიანთა უმრავლესობა, ჩვეულებრივი "საშუალო" ადამიანები ხელმძღვანელობენ სწორედ ამ ვარიანტით;

ბ) თვითამაღლება - ძლევამოსილების და ძალაუფლების გზა, როცა ადამიანი აღწევს სიმაღლეს და უმაღლეს სოციალურ სტატუსს. ამ ვარიანტის საფუძველში დევს, აგრეთვე, ეგოისტური მიმარულება. ამასთან, იგი განსხვავდება ; წინასგან, პირველ რიგში, თავისი აქტიურობით;

გ) თვითგანვითარება - ესაა ცნობიერების და შემოქმედების გზა, როდესაც ადამიანი აქცენტს აკეთებს თავისი ინტელექტუალური და სულიერი უნარ-ჩვევების განვითარებაზე. ცხადია, იგი არ გამორიცხავს ერთდროულად ფიზიკური და სულიერი უნარ-ჩვევების და, აგრეთვე, სოციალური შესაძლებლობების განვითარებას. ამ ვარიანტში ადამიანი ვერ ღებულობს სიამოვნებას მოხმარებისაგან, მხოლოდ განიცდის სიხარულს ცნობიერებისა და შემოქმედებისაგან. აქ ადამიანის ქმედებები ძირითადად მიეკუთვნება მატერიალური შემოქმედების სფეროს, რადგან ადამიანები, რომლებიც მიდიან ცნობიერებისა და შე-

მოქმედების გზით, ხშირად არიან სამეცნიერო და საინჟინრო დარგების წარმომადგენლები, ან ხელოვნებისა და კულტურის მოღვაწეები. მათი შრომის ძირითად შედეგებს წარმოადგენს ახალი მატერიალურ-კულტურული ფასეულობების შექმნა. აქ წარმოშობილი ბუნებრივი ადამიანური ეგოიზმი მნიშვნელოვანწილად კონტროლდება დანარჩენ ადამიანებთან ჰარმონიული ურთიერთობების საჭიროების გაცნობიერებით. ამრიგად, ამ ვარიანტის ღადებით მხარეს წარმოადგენს პირადი უნარ-ჩვევების გაძლიერებული განვითარება, გარემომცველი სამყაროს გამდიდრება ახალი ღირებულებებით და ჰარმონიული ურთიერთობების სურვილი.

ამასთან, ცხოვრების არსის როლში თვითგანვითარების სრული რეკომენდაცია არ შეიძლება თავისი მნიშვნელოვანი პასიურობის გამო. თვითგანვითარებაში აქცენტი გაკეთებულია თვით ადამიანის უკეთესად ცვლილებაზე და არა მისი გარემომცველი გარემოს ცვლილებაზე. ამასთან, აბსოლუტურად არაა გარანტირებული ადამიანის პოტენციალური შესაძლებლობების რეალიზაცია. ადამიანმა შეიძლება მუდმივად აიმაღლოს თავისი პიროვნელი პოტენციალი, მაგრამ ვერასდროს მოახდინოს მისი სრული რეალიზება, მიუხედავად მატერიალური შემოქმედების სფეროში თავისი საქმიანობისა. არსებობს მტკიცებულება, რომ, თუ ადამიანი მიდის ცნობიერებისა და შემოქმედების გზით, მაშინ იგი სრულ ბედნიერებას ვერ მიაღწევს, ხოლო ამ გზით მის მიერ მიღებულ სიამოვნებას მხოლოდ სევდის დროებითი გაქარვება შეუძლია;

დ) თვითრეალიზება - პიროვნების გზა, როდესაც ადამიანი აქტიურად იყენებს თავის შესაძლებლობებს და გარდაქმნის მის გარემომცველ რეალობას. ეს ვარიანტი განსხვავდება წინასგან იმით, რომ აქ ადგილი აქვს მიზანმიმართულ და მრავლისმომცველ აქტიურობას, თავისი შესაძლებლობების და სურვილების სრულ რეალიზაციას. ამასთან, თვითრეალიზება შეიძლება შეიცავდეს თვითგანვითარებას, როგორც შემადგენელ ნაწილს. ადამიანი ისწრაფვის იყოს "ჰარმონიულად განვითარებული პიროვნება" და აბსოლუტურად წარმატებული ყველა სახის საქ-

მიანობაში (სოციალური, ინტელექტუალური და ა.შ.). ასეთი ქმედებების შედეგების ნაწილი მიეკუთვნება მატერიალური შემოქმედების სფეროს, ნაწილი კი - სულიერი განწყობის სფეროს.

ვფიქრობთ, ეს ვარიანტი არის სოციალური არჩევანი ცხოვრების არსის როლში საკმაოდ ინტელექტუალურ-სულიერად განვითარებული ადამიანისთვის - ვგულისხმობთ ჩვეულებრივ ადამიანებს, რომლებსაც აქვთ სურვილი იცხოვრონ აქტიური სოციალური ცხოვრებით თანამედროვე საზოგადოებაში;

ე) თვითინტეგრაცია - გზა სიბრძნისა და ბედნიერების, როდესაც ადამიანი ხდება სრულად თვითსაკმარისი და ერთიანი პიროვნება. ეს ვარიანტი მიუთითებს იმაზე, რომ ცხოვრების არსია ბედნიერება და სიბრძნე. თუ იცხოვრე ბედნიერად - მაშასადამე, შენს ცხოვრებას ჰქონდა აზრი. რჩება პასუხი გასაცემი მხოლოდ კითხვაზე - როგორ უნდა გახდე ბედნიერი. აქ პასუხის ორი ვარიანტია შესაძლებელი.

პასუხის პირველი ვარიანტი ეფუძნება აღმოსავლურ ფილოსოფიას და მდგომარეობს შემდეგში: ბედნიერება - ესაა ტანჯვა-წამებათა არარსებობა, რომლებიც წარმოიშობა სურვილებით ან შიშებით. მაშასადამე, ბედნიერება წარმოიშობა გარემომცველ რეალობასთან ჰარმონიის საფუძველზე. აქედან დასკვნა: თავიდან უნდა გახდე ბედნიერი, ხოლო შემდეგ, როგორც ბედხიერი მდგომარეობის შედეგი, ადამიანი აღწევს წარმატებებს ცხოვრების სხვადასხვა სფეროში. ამასთან, წარმოიშობა შემდეგი კითხვები: როგორი ხერხით მოვიცილოთ საკუთარი ცხოვრებიდან ყველა სურვილი - შიშები და მივაღწიოთ ჰარმონიულ-ბედნიერ მდგომარეობას, აგრეთვე, რაში მდგომარეობს ცხოვრებისეული წარმატებები და უნდა კი იგი ადამიანს, თუ მას არ დარჩება არავითარი სურვილი? ამ კითხვებზე პასუხები გულისხმობს აღმოსავლური ფილოსოფიის უფრო ღრმად გაცნობას.

რა თქმა უნდა, ბედნიერების განმსაზღვრელ ამ პირველი ვარიანტის სარგებლიანობას გვერდს ვერ ავუვლით, თუმცა, ასევე მნიშვნელოვანია პასუხის მეორე ვარიანტი,

რომელიც ეფუძნება ტრადიციულ დასავლურ კულტურას. აქ სიბრძნე და ბედნიერება წარმოადგენს თვითრეალიზაციის პროცესის ლოგიკურ დასასრულს. ამასთან, რადგან ახლანდელი დრო უფრო პრაგმატიზმის ეპოქაა, ამიტომ თანამედროვე სოციალურ გარემოში ადამიანის ეფექტური ფუნქციონირებისათვის აუცილებლად უნდა გაეითვალისწინოთ მოთხოვნათა იერარქია ანუ ადამიანმა აუცილებლად უნდა მოახდინოს ჩამოთვლილ მიზანთა შემდეგი მიმდევრობით რეალიზება: ა) თავისი თავის პატივისცემა; ბ) თვითამაღლება; გ) თვითგანვითარება; დ) თვითრეალიზება.

რაც შეეხება ე) თვითინტეგრაციის მიზანს, ამ დონეზე ადამიანი აბსოლუტურად წარმატებულია თავის ყველა საქმიანობაში. ამის შედეგად ის უფრო სრული თვითანალიზისათვის და თავისი ცხოვრების გააზრებისათვის ღებულობს თავის თავში ჩაღრმავების შესაძლებლობას. თუ ასეთი თვითანალიზი ჩატარდება კონსტრუქციულად, მაშინ ინტელექტუალურ დონეზე ამას მივყავართ სიბრძნესთან, ემოციურ დონეზე კი - ბედნიერების გრძნობასთან. რა თქმა უნდა, ადამიანი, რომელმაც წარმატებით იცხოვრა რომელიმე დონეზე (მიზნით) ა) - დ)-დან და დაინახა ცხოვრების არსი მასში, ასევე შეუძლია განიცადოს ბედნიერების გრძნობა, რადგან იგი განსაკუთრებით ინდივიდუალურია. ამასთან, ეს იქნება ნაწილობრივი ბედნიერება, რომლითაც ეუფლება ადამიანური ცხოვრების მხოლოდ ცალკეულ მხარეებს, განსხვავებით ყოვლისმომცველი ბედნიერებისაგან, რომლის მიღწევა შესაძლებელია მხოლოდ ე) დონეზე.

ასე რომ, მუდმივად წარმოებს მსჯელობა დილემაზე: ადამიანს უნდა "ჰქონდეს" თუ იგი უნდა "იყოს". უფრო მეტად კეთდება დასკვნა, რომ ადამიანი უნდა "იყოს". მაშასადამე, ადამიანი თავის ცხოვრებაში არ უნდა გაჩერდეს ა) ან ბ) დონეზე, რომლებიც აღნიშნავს "ჰქონდეს". მაშასადამე, ადამიანი უნდა ცხოვრობდეს გ), დ), ე) მიზნებითაც.

ამრიგად, სიცოცხლის აზრის სისტემური ანალიზი ასაბუთებს, რომ ადამიანი მთელი სიცოცხლის მანძილზე მუდმივად იმყოფება ძიებაში - რა ქნას, როგორ მოიქცეს, რა აირჩიოს მისი ცხოვრების ძირითად მიზნად, რისი შესაძლებლობები აქვს მას ღმერთისაგან ბოძებული და როგორ მოახდინოს თავისი თავის რეალიზება. მაშასადამე, ადამიანი მუდმივი გადაწყვეტილებების ძიების პროცესში იმყოფება და თავისი არჩევანი მანვე უნდა გადაწყვიტოს, თანაც, ეს არჩევანი უნდა იყოს ოპტიმალური. ამავე დროს, აქ მოყვანილი დონეებიც უნდა გაითვალისწინოს და შეეცადოს ყველა ნაბიჯზე გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის შესაბამისი პრინციპები და დებულებები გამოიყენოს. ადამიანს ყოველი მიზნის განხორციელებისათვის ადამიანებთან უწევს ურთიერთობები ანუ ცხოვრება თამაშია და მისი გადაწყვეტილების ოპტიმალურობა უნდა გულისხმობდეს მის მონაწილეობას წესიერ თამაშებში და ასეთ თამაშებში, ნეშის აზრით, სამართლიან და წონასწორულ ურთიერთობებს. თითოეული ადამიანი ასეთი ქმედებით უნდა ცდილობდეს მის გარშემო შექმნას ისეთი გაწონასწორებული გარემო, სადაც ადამიანები ერთმანეთს პატივს სცემენ და მათ შორის სასიამოვნო დამოკიდებულებებია, რომლის შედეგად მათ უნდა მიიღონ ყოველდღიური სარგებლიანობა (სიამოვნება და სიხარული). თუ ადამიანის გამიზნული გამეორებითი ქმედებები არ დაექვემდებარება ამ პრინციპს, მაშინ მან უნდა იცოდეს, რომ ახლა წესების დარღვევისათვის იგი დაისჯება მომავალში - ამას ამბობს თამაშთა თეორიის დარგში ნობელის პრემიის ლაურეატის, რ. აუმანის მიერ დამტკიცებლი მათემატიკური დებულება, რომელიც "სახალხო თეორემის" სახელითაა ცნობილი. ყველა ადამიანისათვის სიმართლე და სამართლიანობა უნდა იყოს უპირველესი მოთხოვნა. უნდა გვახსოვდეს, რომ ტყუილი - მხოლოდ გონებაშეზღუდული ადამიანისთვისაა ერთადერთი საუკეთესო სტრატეგია.

ლიტერატურა

1. ბელთაძე გ. ვექტორული ოპტიმიზაციის თეორიულ-თამაშური მოდელი დაპროექტების ამოცანებში. ქუთაისის ტექნიკური უნივერსიტეტის სამეცნიერო შრომები, № 6, 1998. გვ. 189-191.
2. Белтадзе Г.Н. Математическая модель конфликта с ранжированными исходами. Научные и педагогические известия университета Одлар Юрду. Серия физических, технических, математических и естественных наук, № 6, Баку, 2001, с. 28-33.
3. ბელთაძე გ., აკობიძე ბ. ოპტიმიზაცია იერარქიულ სისტემებში რანჟირებული კრიტერიუმების შემთხვევაში. ქუთაისის ტექნიკური უნივერსიტეტის სამეცნიერო შრომები, № 1 (10), 2002, გვ. 9-12.
4. ბელთაძე გ., მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის საფუძვლები და მათი გამოყენება საზოგადოებრივ მეცნიერებებში. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2003. –478 გვ.
5. ბელთაძე გ., აკობიძე ბ. სტუდენტთა ცოდნის შეფასების ინდივიდუალურ-კოოპერატიული მოდელები. საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, № 7, თბილისი, 2004, გვ. 109-116.
6. ბელთაძე გ. კენჭისყრის ლექსიკოგრაფიული სტრატეგიული მოდელის შესახებ ნეშის წონასწორობით უმრავლესობისათვის. საქართველოს მათემატიკოსთა IV ყრილობა. 14-16 ნოემბერი, 2005, მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2005, გვ. 19.
7. Beltadze G.N. Model of strategic decision in the case of the round table. Proceedings of the International scientific conference “information technologies in control”. Georgia, Tbilisi, GTU, 10.10-12.10. 2007, pp. 134-138.
8. ბელთაძე გ. კონფლიქტური თამაშის მოდელი ორი პარტიის არჩევნებში. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი "ინტელექტი", 1(30), 2008, გვ. 11-14.

9. ბელთაძე გ. უმაღლეს სკოლაში საგნის სწავლების ორგანიზაციის სტრატეგიული მოდელირება. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის "ინფორმაციული ტექნოლოგიები 2008", მოხსენებათა კრებული. თბილისი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2008, გვ. 71-76.
10. Beltadze G.N., Giorgobiani J.A. Metastrategic extensions of Lexicographic Noncooperative Game in case of two players. Bulleten of the Georgian National Academy of Sciences, vol. 2, no 2, 2008, pp. 9-13.
11. Белтадзе Г.Н., Подиновский В.В. Проблема теоретического обеспечения поддержки принятия решений о выборе нескольких лучших объектов при неполной информации о предпочтениях. Труды XXXV юбилейной международной конференции "Информационные технологии в науке, образовании, телекомуникации и бизнесе". Украина, Крым, Ялта-Гурзуф, Запорожский государственный университет, 20-30 мая, 2008, с. 197- 198.
12. ბელთაძე გ., ჯიბლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია, I ნაწილი. თეორიის საწყისები, პრიორიტეტების და სარგებლიანობების ანალიზი. თბილისი: საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2009. –196 გვ.
13. ბელთაძე გ. მრავალრიცხოვანი არჩევის ამოცანა მრავალკრიტერიუმიანი კანდიდატების შემთხვევაში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის შრომები № 4 (474), 2009, გვ. 66-80.
14. ბელთაძე გ. რისკი და სარისკო გადაწყვეტილება ბუნების წინალმდეგ თამაშში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის შრომები, მართვის ავტომატიზებული სისტემები, № 1(8), 2010, გვ. 21-29.
15. ბელთაძე გ., ფრანგიშვილი ა., ობგაძე თ. კონფლიქტების მოდელირება და ანალიზი თანამედროვე თამაშთა თეორიის გამოყენებით. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის შრომები, მართვის ავტომატიზებული სისტემები № 1(8), 2010, გვ. 7-20.
16. Beltadze G.N. Matrix game with the preference changing in time.

Management research and practice. Vol. 2, Issue 2 (2010), pp. 179-190.

17. Brams S., Kilgour D. Game Theory and National Security. Basil Blackwell, INC, New York, 1988. –199 pp.
18. Brams S. Game Theory and Politics. Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2004. –312 pp.
19. Брамс Стисен Дж., Тейлор Алан Д. Делим по справедливости, или гарантия выигрыша каждому. М.: СИНТЕГ, 2002. –196 с.
20. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005. –272 с.
21. გუგუშვილი ა., თოფჩიშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ., ჯიბლაძე ნ. ოპტიმიზაციის მეთოდები. თბილისი: "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2002. –606 გვ.
22. Жуковский В.И.,Салуквадзе М.Е. Некоторые игровые задачи управления и их приложения. Тбилиси: Мецниереба, 1998. –462 с.
23. Жуковский В.И.,Салуквадзе М.Е. Риски в конфликтных системах управления. Москва-Тбилиси,"Интеллект", 2008. –456 с.
24. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. –560 с.
25 Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979. –200 с.
26. Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решений. М.: Наука, 1996. –208 с.
27. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. М.: Университетская книга, Логос, 2006. –392 с.
28. Меньшиков И.С. Лексии по теории игр и экономическому моделированию. М.: Мзпресс, 2007. –208 с.
29. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. –256 с.
30. Нейман Д.фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. –707 с.

31. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. М.: Физматлит, 2002. –144 с.
32. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, книжный дом Университет, 1998. –304 с.
33. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс. Европейский университет в Санкт-Петербурге, Санкт-Петербург, 2001. –342 с.
34. Подиновский В.В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. –256 с.
35. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев. М.: Физматлит, 2007. –64 с.
36. Розен В.В. Цель - оптимальность - решение. Математические модели принятия оптимальных решений. М.: Радио и связь, 1982. –169 с.
37. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Высшая школа, 2002. –288 с.
38. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. –278 с.
39. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси, "Мецниереба", 1975. –201 с.
40. Salukvadze M., Beltadze G., F. Criado. Dyadic theoretical games models of decision - making for the lexicographic vector payoffs. International Journal of Information Technology and Decision Making, Vol. 8, Issue 2, 2009, pp. 193-216.
41. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2005. –416 с.
42. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. М.: КомКнига, 2006. –112 с.
43. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций. М.: Проспект, 2006. –280 с.

საგნობრივი საძიებელი

ი

კ

მ

ნ

ო

პ

რ

ს

ა ვ ტ ო რ ე ბ ი

გურამ ბელთაძე

სამეცნიერო ხარისხი და აკადემიური თანამდებობა: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1992, სანქტ-პეტერბურგის სახელმწიფო უნივერსიტეტი); ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1982, ლენინგრადის სახელმწიფო უნივერსიტეტი); პროფესორი (1995, უმაღლესი მათემატიკის); საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სრული პროფესორი.
განათლება და სამეცნიერო სკოლა: თბილისის სახ. უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი მათემატიკის სპეციალობით (ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის კათედრა); საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამოთვლითი ცენტრი; სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ცენტრალური ეკონომიკა-მათემატიკის ინსტიტუტის ლენინგრადის განყოფილება; სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის სოციალურ-ეკონომიკური პრობლემების ინსტიტუტი (ქ. ლენინგრადი); რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის სანქტ-პეტერბურგის ეკონომიკა-მათემატიკის ინსტიტუტი).
პედაგოგიური მუშაობა: ლენინგრადის სახ. უნივერსიტეტი (ასისტენტი); ქუთაისის პოლიტექნიკური ინსტიტუტი (ასისტენტი, უფროსი მასწავლებელი, დოცენტი); ქუთაისის ტექნიკური უნივერსიტეტი (პროფესორი); ქუთაისის სახ. უნივერსიტეტი (პროფესორი); თბილისის სახ. უნივერსიტეტი (პროფესორი).
სამეცნიერო ინტერესების სფერო: გადაწყვეტილებათა მიღების თეორია, თამაშთა თეორიისა და ოპერაციათა კვლევის მათემატიკური თეორია. არის 90-ზე მეტი პუბლიკაციის ავტორი.

ნოდარ ჯიბლაძე

სამეცნიერო ხარისხი და აკადემიური თანამდებობა: ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1999, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი), ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1971, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტი), პროფესორი (2002), საქართველოს სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (1986), საქართველოს საინჟინრო აკადემიის ნამდვილი წევრი (2005), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სრული პროფესორი, ავტომატიზაციისა და მართვის სისტემების მიმართულების ხელმძღვანელი.

განათლება და სამეცნიერო სკოლა: საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის ავტომატიკისა და გამოთვლითი ტექნიკის ფაკულტეტი სპეციალობით ავტომატიკა და ტელემექანიკა; საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ელექტრონიკის, ავტომატიკისა და ტელემექანიკის ინსტიტუტის ასპირანტურა; სსრ კავშირის ელექტრონული მრეწველობის სამინისტროს სამეცნიერო-საწარმოო გაერთიანება „მიონი"; საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის არჩილ ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტი.
პედაგოგიური მუშაობა: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი (დოცენტი, პროფესორი, კათედრის გამგე, სრული პროფესორი).
სამეცნიერო ინტერესების სფერო: მართვა ტექნიკურ სისტემებში, ოპტიმალური დაპროექტების სისტემები, ოპტიმიზაცია. არის 100-ზე მეტი პუბლიკაციის ავტორი.

რედაქტორი ი. სემიკინა

გადაეცა წარმოებას 01.07.2011. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.09.2011. ქაღალდის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 23,5. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant, scripta manent