

როინ პარია

**ფიზიკური პროცესების კომპიუტერული
ემულირება MATLAB-ის გამოყენებით**



გამომცემლობა „ენივერსალი“
თბილისი 2020

რედაქტორისაგან

ნაშრომი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს ფიზიკის სპეციალობის ბაკალავრების, მაგისტრებისა და დოქტორანტებისათვის ფიზიკური პროცესების კომპიუტერული მოდელირების შესასწავლად პროგრამული პაკეტის MATLAB-ის გამოყენებით.

რედაქტორი: სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის მიმართულების პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ვლადიმერ კირცხალია

რეცენზენტი: სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიოსამედიცინო ინჟინერიის მიმართულების პროფესორი, ფიზიკის დოქტორი
ალექსანდრე მიმინოშვილი

რეცენზენტი: სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ინფორმატიკის მიმართულების ასოცირებული პროფესორი, ფიზიკის დოქტორი
კონსტანტინე ნინიძე

© რ. ბერია, 2020

გამომცემლობა „**უნივერსალი**“

თბილისი, 0186, ა. ჯორჯიაშვილის №4, ☎: 5(99) 33 52 02, 5(99) 17 22 30
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

ISBN 978-9941-26-670-6

შესავალი

მოცემული ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს ზოგადად ფიზიკური პროცესების კომპიუტერული მოდელირების ასპექტების განხილვა პროგრამული პაკეტის *MATLAB*-ის გამოყენებით. ნაშრომში განხილულია პროგრამული პაკეტი *MATLAB*-ის ელემენტები, მისი ფუნქციები და ბრძანებები, მათი გამოყენების მაგალითები და შესაძლებლობები; დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა საშუალებითაც ძირითადად აღინერება გარდამავალი ფიზიკური პროცესები; მოცემულია ამ განტოლებების კლასიფიკაცია და მათი ამოხსნის მეთოდები; რიცხვითი ინტეგრირება და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების და კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა *MATLAB*-ის გამოყენებით; ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავება და ფუნქციათა ინტერპოლაციის ამოცანები.

ნაშრომში ასევე განხილულია გამოყენებითი ელექტროდინამიკის ამოცანების გადასაწყვეტად ახალი კომბინირებული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია დროით არეში სასრული სხვაობებისა და კირხჰოფის მეთოდების ერთობლივ გამოყენებაზე. აღნიშნული კომბინირებული მეთოდის გამოყენება განპირობებულია მანქანური რესურსების შეზღუდულობის გამო დროით არეში სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებით გამოთვლების შედარებით მცირე, შეზღუდულ მოცულობაში წარმოების შესაძლებლობით, რაც არ იძლევა შორ ზონაში ველების გამოთვლისა და ამის საფუძველზე მოცემული ამოცანების სრული ანალიზის შესაძლებლობას.

როგორც ცნობილია, სივრცეში ელექტრომაგნიტური ველები აღინერება მაქსველის განტოლებებით, რომლებიც კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას წარმოადგენენ. ნაშრომში წარმოდგენილია კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის თანამედროვე მეთოდები და მიდგომები. მოყვანილია სასრული სხვაობებისა და კირხჰოფის მეთოდების საფუძვლები და ამ მეთოდების ეფექტურად, ეკონომიური ალგორითმების საშუალებით გამოყენების შესაძლებლობები. განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა სხვაობითი სქემების გამოყენებისას მიღებული შედეგების მდგრადობას შერჩეული სივრცულ-დროითი ბიჯების საშუალებით.

მოკლედ მიმოვიხილოთ გამოყენებითი ელექტროდინამიკის ამოცანები, ძირითადი წინააღმდეგობები, ამოცანების გადანყვეტის ისტორია და ამ ამოცანების გადასაწყვეტად გამოყენებული ძირითადი მეთოდები.

მე-XX-ე საუკუნის შუა ხანებიდან პორტატული ტექნიკისა და ციფრული ტექნოლოგიების განვითარებამ გამოიწვია სივრცეში ელექტრომაგნიტური ველების ფონის გაზრდა, ე.წ. სივრცის ელექტრომაგნიტური დაბინძურება. როგორც ცნობილია, ყველა ელექტრონული მოწყობილობა მისი მუშაობის და განსაკუთრებით ამოქმედების დროს გამოასხივებს ელექტრომაგნიტურ ველს, რომელიც ზემოქმედებს, როგორც ცოცხალ ორგანიზმებზე, ასევე ელექტრომაგნიტური ველის მიმართ მგრძობიარე მოწყობილობებზე. ამიტომ აუცილებელი გახდა ელექტრონულ მოწყობილობათა ელექტრომაგნიტური გამოსხივების არასასურველი ურთიერთგავლენის შესწავლა მგრძობიარე მოწყობილობებსა და მათთან მომუშავე მომხმარებელზე ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედების კონტროლისა და მინიმიზაციის მიზნით.

ამ საკითხის შესასწავლად ელექტროდინამიკაში ჩამოყალიბდა სპეციალური, შედარებით ახალი მიმართულება, რომელსაც ელექტრომაგნიტურ შემთავსებლობას უწოდებენ. ელექტრომაგნიტური შემთავსებლობის ამოცანებში, როგორც აღვნიშნეთ, ყურადღება ექცევა პრობლემის ორ ასპექტს: პირველი, ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედება ადამიანზე და მეორე, ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედება თანამედროვე მაღალმგრძობიარე ციფრულ ელექტრონულ მოწყობილობებზე. ადამიანზე ელექტრომაგნიტური ველების მავნე ზემოქმედებით განსაკუთრებით დაინტერესდნენ კომუნიკაციურ საშუალებათა რაოდენობისა და სიმძლავრის გაზრდასთან დაკავშირებით. სხვადასხვაგვარი გადამცემები, პორტატიული ტელეფონები, მძლავრი რადიო და ტელესადგურები, ენერგეტიკული ხაზები და ა.შ. გარემოში ქმნიან ფართოსიხშირულ ელექტრომაგნიტურ ველებს, რომელთა ზემოქმედებას ადამიანზე, მის ნერვულ სისტემაზე და სხვა ფუნქციონალურ სისტემებზე არასასურველი შედეგები მოაქვს. სწორედ ამით არის გამოწვეული ელექტრომაგნიტური ზემოქმედების კონტროლი და მინიმიზაცია ადამიანზე მისი შემცირების მიზნით.

ამოცანის მეორე ასპექტს წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველების არასასურველი ზემოქმედება ელექტრონულ მოწყობილობებზე. ბოლო წლებში ციფრული მოწყობილობების მგრძობიარობისა და სიზუსტის გაზრდასთან ერთად აქტუალური გახდა მათი ეკრანირება არასასურველი გარე ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედებისაგან. მაგალითად, ატომური ელექტროსადგურების, თვითმფრინავების, კოსმოსური ხომალდების ან რეამინაციული აპარატურის მცირე შეშფოთებასაც კი შეიძლება მოყვეს სავალალო შედეგები. ამ შეშფოთებების კონტროლს ბოლო წლებში სამეცნიერო ლიტერატურაში სულ უფრო მეტი ადგილი უჭირავს.

თანამედროვე ციფრული მოწყობილობები მგრძობიარე არიან არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების მიმართ. ცნობილია, რომ გარეშე და თვით სისტემის შემადგენელი ნაწილების (გენერატორების, მიმღებების, გადამცემი ხაზების) მიერ გამოსხივებულმა ველებმა შეიძლება გამოიწვიონ ზოგიერთი მოწყობილობის მუშაობის რეჟიმის დარღვევა და მწყობრიდან გამოსვლაც კი, რასაც შეიძლება მოყვეს მთელი აპარატურის გათიშვა.

ასეთი მძლავრი, არასასურველი ელექტრომაგნიტური გამოსხივების წყაროს ხშირ შემთხვევაში წარმოადგენენ სპონტანური ხასიათის მოვლენები, როგორცაა მაგალითად, სხვადასხვა პროცესების შედეგად დამუხტული სხეულების სხვა სხეულთან მიახლოების შედეგად განმუხტვა. მიუხედავად იმისა, რომ განმუხტვის არეში დენის ძალა შეიძლება იყოს მცირე სიდიდე, დენის ძალის ცვლილების სიჩქარე იმდენად დიდია, რომ განმუხტვას შეიძლება თან ახლდეს მძლავრი არასტაციონარული გამოსხივება. დაკვირვებებმა უჩვენა, რომ ელექტრონული აპარატურის მომსახურე პერსონალი და მომხმარებელი ხშირად წარმოადგენენ ელექტროსტატიკური განმუხტვის მიზეზს და მათდა უნებურად იწვევენ მგრძობიარე ციფრული მოწყობილობების ნორმალური მუშაობის რეჟიმის დარღვევას და ზოგჯერ მწყობრიდან გამოსვლასაც კი.

არასტაციონარული, ანუ ფართოზოლოვანი სიგნალების გამოსხივებისა და გავრცელების ამოცანების რიცხვითი ექსპერიმენტებით შესწავლას უკანასკნელ პერიოდში დიდი ყურადღება ეთმობა. პირველი გამოკვლევები ამ მიმართულებით ტარდებოდა ანალიზური მეთოდებით და შემოსისაზღვრებოდა მაქსველის განტოლებე-

ბიდან მიღებული ასიმპტოტური ინტეგრალური წარმოდგენების ჩანერით და ანალიზით. ამ მიმართულებით მნიშვნელოვანი შედეგების მიღება შესაძლებელი გახდა XX-ე საუკუნის მეორე ნახევრის დასაწყისისთვის. ეს წარმატებები დაკავშირებული იყო კომპიუტერის შექმნასა და გამოთვლითი მეთოდების განვითარებასთან, იმპულსური ტექნიკის სრულყოფასთან და ა.შ.

არასტაციონარული ელექტროდინამიკური პროცესების ინტენსიურ შესწავლას, გარდა ელექტრომაგნიტური შემთავსებლობისა, მოითხოვს თანამედროვე რადიოლოკაცია: გაბნეული არასტაციონარული სიგნალებით რადიოლოკაციური ობიექტების ამოცნობა და რადიოლოკაციური გამოსახულების აგება. უნდა აღინიშნოს, რომ რადიოლოკაციაში ფართოზოლოვანი სიგნალების გამოყენება მნიშვნელოვნად აფართოებს მის შესაძლებლობებს და იძლევა მრავალპოზიციური (რადიოგოლოგრაფია) რადიოლოკაციის ალტერნატიული მეთოდების შექმნის საშუალებას.

არასტაციონარული სიგნალები ასევე გამოიყენება სამყაროს თვისებების გამოსაკვლევად. დედამიწის შიგნით მყოფი საგნების აღმოსაჩენად, ობიექტების ადგილმდებარეობის ზუსტად დასადგენად და სხვა.

საერთოდ, არასტაციონარული ელექტროდინამიკური პროცესების თეორიული გამოკვლევის აქტუალობა დაკავშირებულია ელექტრომაგნიტური მოვლენების შესახებ ცოდნის გაღრმავების აუცილებლობასთან.

ასეთი ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია როგორც დროით, ისე სიხშირულ არეში. ამის შედეგად მიღებულ შედეგებს შორის ურთიერთცალსახა კავშირის არსებობა საშუალებას გვაძლევს ავირჩიოთ ისეთი მიდგომა, რომელიც უფრო უფრო შეესაბამება კონკრეტულ ამოცანას და მოვახდინოთ სხვადასხვა მეთოდებით მიღებული შედეგების შედარება. გარდამავალი პროცესების ანალიზისათვის პირველი გამოკვლევები ტარდებოდა სიხშირულ არეში, რადგან დროით არეში ამონახსნის მიღება ცალკეული შემთხვევების გარდა თითქმის შეუძლებელი იყო. მაღალი სიხშირეებისათვის სიხშირული მეთოდებით პროცესის ანალიზი და შემდეგ სიხშირული არიდან დროით არეში გადასვლა დაკავშირებული იყო დიდ სიძნელებებ-

თან. ამ პროცესების შესწავლის პირველი შედეგები მიღებულ იქნა აკუსტიკაში.

რაც შეეხება ელექტრომაგნიტური ტალღების დიფრაქციას, გარდამავალი პროცესების ანალიზი ჩატარებულ იქნა ორგანზომილებიანი ამოცანებისათვის, რადგანაც სამგანზომილებიან სხეულებთან შედარებით ისინი უფრო მარტივ სხეულებს წარმოადგენენ. ამის შემდეგ მოხდა სამგანზომილებიანი ამოცანების გარდამავალი პროცესების შესწავლა სიხშირულ არეში.

პირდაპირი დროითი მეთოდით გარდამავალი პროცესების შესწავლა სიხშირულ მეთოდთან შედარებით იძლევა მთელ რიგ უპირატესობებს. ეს უპირატესობები მდგომარეობს რიგი ამოცანების ამოხსნის სიმარტივეში; ამოცანის არანრფივობის უფრო მოხერხებულად გათვალისწინების შესაძლებლობაში; მიღებული შედეგების ფიზიკური ანალიზის სიმარტივეში, ერთი გამოთვლით სიხშირის ფართო დიაპაზონში მახასიათებლების მიღების შესაძლებლობაში.

დროითი მეთოდის გამოყენების დროს სიძნელები იმაში მდგომარეობს, რომ მისი გამოყენებისათვის საჭიროა რთული კომპიუტერული პრიგრამების შედგენა და გამოთვლებისათვის აუცილებელია გაცილებით დიდი მეხსიერება, ვიდრე სიხშირული მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში. ეს მეთოდი პირველად გამოყენებული იქნა ფიზიკური ოპტიკის საფუძველზე, კერძოდ, უკან გაბნეული იმპულსის მეშვეობით მიახლოებით შესწავლილ იქნა ბრტყელი ფირფიტისა და სფეროიდის მახასიათებლები]. ამის შემდეგ მიღებული შედეგების განზოგადება მოხდა სხვა ობიექტებისთვისაც. შემდგომ ნაშრომებში პირდაპირი დროითი მეთოდი დაფუძნებულ იქნა ინტეგრალურ განტოლებებზე.

70-იან წლების ბოლოს დაიწყო დიფრაქციის გარდამავალი პროცესების შესწავლა რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. დასაწყისში განიხილებოდა ელექტრომაგნიტური იმპულსის დიფრაქციის ამოცანა ორგანზომილებიან იდეალურად გამტარ სხეულებზე. გამოკვლევები ტარდებოდა დამხმარე გამომსხვივებლების მეთოდით დროით არეში. ამ მეთოდის გამოყენებისათვის ამრეკლი ზედაპირის მოდელირება ხდებოდა ბადური ზედაპირით, რომელიც შედგებოდა მცირე რადიუსის მქონე მავრთულებისაგან. გათვალისწინებული იყო მათ შორის ურთიერთქმედება. ამ მავრთულების ოპტიმალური

რაოდენობა დამოკიდებული იყო, როგორც სისტემის პარამეტრებზე, ასევე დაცემული ელექტრომაგნიტური ველის სპექტრალურ შემადგენლობაზე. ელექტრომაგნიტური ველის წარმოდგენა ხდებოდა ორგანზომილებიანი ტალღური განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით. გაშლის კოეფიციენტები მოინახებოდა სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებით და მათ ზედაპირზე დენის მნიშვნელობის ფიზიკური აზრი გააჩნდათ. დაცემული რადიოიმპულსისთვის (სინუსოიდით შევსებული იმპულსისათვის) ბაზისურ ფუნქციებად არჩეულ იქნა ჰენკელის ფუნქციები. ამ მეთოდის საფუძველზე ტარდებოდა არასტაციონარული ველების გამოთვლა სხვადასხვა განივკვეთზე განლაგებული მავრთულების მესერზე, როგორც ნახევრად უსასრულო, ასევე სასრული სანგრძლივობის რადიოიმპულსის დიფრაქციის შემთხვევაში. შეისწავლებოდა გამბნევი ზედაპირის შესაბამისი მესრის შიგნით რეზონანსის ფორმირების და მიღების პროცესი.

მომდევნო ეტაპზე გამოიყენებოდა ნებისმიერი დროითი დამოკიდებულების მქონე E -პოლარიზებული ვიდეოიმპულსების იდეალურად გამტარ, ორგანზომილებიან სხეულებზე (როგორც ღია, ასევე დახურული) გაბნევის ამოცანების ამოხსნის ეფექტური მეთოდი, რომელიც ეფუძნებოდა ველების წარმოდგენას დაგვიანებული პოტენციალების საშუალებით. ჩატარებულ იქნა გამოკვლევები ცილინდრზე, ზოლზე და ორი ზოლისაგან შემდგარ სისტემაზე სხვადასხვა ვიდეო და რადიო იმპულსების დასხივებისას გარდამავალი პროცესების შესასწავლად. დროითი გამოთვლების მონაცემების სიხშირულ არეში გადაყვანის შედეგად მიღებული ინფორმაციის საფუძველზე შემუშავებულ იქნა იდეალურად გამტარი სხეულების იდენტიფიცირების ალგორითმი. მოდელური ამოცანის მაგალითზე გამოკვლეულ იქნა მუხტებისა და დენების სივრცულ-დროითი განაწილება, რამაც შესაძლებელი გახადა გარდამავალი პროცესების უფრო ეფექტური წარმოდგენა, შესაძლებელი გახდა სამგანზომილებიანი გამბნევებისათვის ფურიე სინთეზის მეთოდის გაუმჯობესება, რისთვისაც დროით ჰარმონიული ამოცანებისათვის გამოყენებულ იქნა დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი.

ბოლო წლებში შეიქმნა მოცულობითი ბრუნვითი სხეულების ელექტროსტატიკური განმუხტვის კომპიუტერული მოდელი, რაც

ასევე გამოწვეულია უკანასკნელ პერიოდში ამ პრობლემისადმი დიდი დაინტერესებით. კერძოდ ელექტროსტატიკური განმუხტვისათვის შეიქმნა ელექტროსტატიკური განმუხტვისათვის ექსპერიმენტული დანადგარი, რომელზეც ტარდებოდა ნატურალური ექსპერიმენტები. ამავდროულად შესაძლებელი გახდა ექსპერიმენტული მოდელის ადეკვატური მათემატიკური და ფიზიკური მოდელების შექმნა. მათ საფუძველზე მოხდა ამ პროცესის კომპიუტერული მოდელირება.

კომპიუტერული მოდელირების აქტუალობა უკავშირდება ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ველების ელექტრონულ აპარატურაზე ზემოქმედების შესწავლის აუცილებლობას. კომპიუტერული მოდელირება ცვლის ძვირად ღირებულ ექსპერიმენტებს და იძლევა ისეთი ფიზიკური სიდიდეების (ზედაპირილი დენების, მუხტების და ა.შ.) გამოთვლის საშუალებას, რომელთა ექსპერიმენტულად გაზომვა ძალიან ძნელია და ზოგჯერ შეუძლებელიცაა. გარდა ამისა კომპიუტერული მოდელირება იძლევა იმის საშუალებას, რომ წინასწარ დავადგინოთ ელექტრონული აპარატურისათვის საშიში არეები, რათა შესაძლებელი გახდეს მაღალმდგნობიარე ელექტრონული მოწყობილობების ისეთ არეებში განთავსება, სადაც მათზე ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედების გამო მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა მინიმალური იქნება.

ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანის მოდელი წარმოდგენილია შემდეგი სახით: მოცემულია V_0 პოტენციალამდე დამუხტული სხეული, რომელიც უახლოვდება იდეალურად გამტარ დამინებულ სიბრტყეს. სიბრტყიდან რაღაც h მანძილზე იწყება განმუხტვა. სხეულის სიჩქარე იმდენად მცირეა, რომ მოძრაობით გამოწვეული ელექტროდინამიკური პროცესები შეიძლება უგულვებელვყოთ და შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ განმუხტვის პროცესის უშუალო დაწყებამდე საწყისი მდგომარეობა განისაზღვრება სხეულზე მუხტების ელექტროსტატიკური განაწილებით. $t=0$ მომენტში იწყება ელექტროსტატიკური განმუხტვა. განმუხტვის არხში მიმდინარე ფიზიკური პროცესები დამოკიდებულია სხეულის გეომეტრიაზე, განმუხტვის არხის h სიმაღლეზე, V_0 პოტენციალზე, ჰაერ-

ის მდგომარეობაზე (ტენიანობა, ტემპერატურა, იონიზაცია და სხვა), სხეულის ზედაპირულ იმპედანსზე და ა.შ.

დასმული ფიზიკური ამოცანის ამოხსნა შედეგება რამდენიმე ეტაპისაგან, რაც წარმოადგენს ამოცანის ამოხსნის მეთოდს. პირველ ეტაპზე აუცილებელია ამოიხსნას ელექტროსტატიკის ამოცანა, ანუ გამოითვალოს ელექტროსტატიკური ველი არხში. ეს ველი განსაზღვრავს განმუხტვის არასტაციონარული პროცესის სანყის მდგომარეობას. სხეულის მიერ არხში შექმნილი ელექტრული ველი იწვევს არხში ჰაერის იონიზაციას, რის შედეგადაც არხში გადის ელექტრული დენი. ამ დენის გამოსათვლელად საჭიროა განმუხტვის არხის მოდელირება. არხში დენის გავლის შედეგად სხეულის ზედაპირზე იცვლება მუხტის განაწილება და იცვლება სხეულის მიერ შექმნილი ველის დაძაბულობის ვერტორი არხში. სხეულის ზედაპირზე მუხტების განაწილების დასადგენად აუცილებელია ამოიხსნას არასტაციონარული დიფრაქციის ამოცანა.

ესეიგი, ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ როგორც აგზნების ამოცანა უკუკავშირით. ბოლო ეტაპზე ხდება განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის პოვნა. როგორც ჩატარებული გამოთვლების შედეგებიდან ჩანს, ზემოთ აღნიშნულ ელექტროდინამიკურ პროცესს თან ახლავს მძლავრი ელექტრომაგნიტური ველების გამოსხივება.

ამ ველებისაგან მგძნობიარე ელექტრონული აპარატურის ეკრანირებისათვის გამოიყენება სხვადასხვა ტიპის ეკრანები, რომლების იძლევა აპარატურის ნაწილობრივი ეკრანირების საშუალებას. უმეტეს შემთხვევაში ეკრანებად გამოიყენება იდეალურად გამტარი ზედაპირები.

ელექტრონული აპარატურის ეკრანირებისათვის გამოიყენებული ეკრანი ყოველთვის არ შეიძლება იყოს ჩაკეტილი ზედაპირი, რადგანაც ელექტრონული აპარატურა საჭიროებს კავშირს გარე პერიფერიულ სისტემებთან, ვენტილაციას და ა.შ., რისთვისაც ეკრანებზე საჭიროა გარკვეული ტექნოლოგიური ჭრილების (აპერტურების) არსებობა. ამ აპარატურებიდან გარე ელექტრომაგნიტური ველი აღწევს ეკრანირებულ არეში და ამ არეში მოთავსებულ მგრძნობიარე ელექტრონულ მონყობილობებზე ზემოქმედების შე-

დეგად ინვესს მათი მუშაობის რეჟიმის დარღვევას და აპარატურის მწყობრიდან გამოსვლას.

ბოლო წლებში ელექტრომაგნიტური ველებისაგან აპარატურის ეკრანირებას მიეძღვნა რიგი სამეცნიერო პუბლიკაციებისა, რომლებშიც კიდევ ერთხელ ხაზი გაესვა იმ პრობლემის აქტუალობას თანამედროვე წამყვან სამეცნიერო წრეებში. ამ პუბლიკაციებში ანალიზური გამოთვლები გაკეთდა სამგანზომილებიანი მართკუთხა ეკრანებით ელექტრონული აპარატურის ეკრანირების ეფექტურობის დასადგენად. გაირკვა, რომ ელექტრომაგნიტური ველებისაგან ეკრანირების ეფექტურობა დამოკიდებულია აპარატურის და ეკრანის ზომებზე, დაცემული ელექტრომაგნიტური ველის სპექტრულ შემადგენლობასა და ელექტრონული მოწყობილობის მდებარეობაზე ეკრანის შიგნით. აღმოჩნდა, რომ ეკრანირების ეფექტურობა დამოკიდებულია ეკრანების ფორმასა და აპარატურის ზომებზე. თეორია ასევე განვითარდა წრიული და ერთზე მეტი რაოდენობის აპარატურის შემთხვევისთვისაც.

ნაშრომის მე-9-11 თავებში განხილულია არასტაციონარული ელექტროდინამიკური პროცესების ფიზიკური და მათემატიკური ასპექტები და კვლევის მეთოდები. ელექტრული და მაგნიტური ველებისათვის ჩანერილია ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები, კერძოდ მაქსველის განტოლებები ინტეგრალური და დიფერენციალური ფორმით; დიფერენციალური განტოლებების მათემატიკური კლასიფიკაცია; ჰიპერბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლება (ტალღური განტოლება); პარაბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლება (თბოგამტარობის განტოლება); ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლება (პუასონის განტოლება); სხვადასხვა ამოცანებისთვის განხილულია ამ განტოლებების გამოყენების ფარდობითი უპირატესობა; წარმოდგენილია არასტაციონარული ელექტროდინამიკური პროცესების ფიზიკური მოდელი.

წარმოდგენილი ნაშრომის ერთერთ მიზანს წარმოადგენს სასრული სხვაობების მეთოდის შესწავლა და გამოყენება სხვადასხვა პროცესებისათვის. ამ მიდგომით უწყვეტი გარემო იცვლება დისკრეტული სივრცით. დიფერენციალურ განტოლებებში დიფერენციალები შეცვლილია სხვაობითი სქემებით, რომლებიც გვაძლევს დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი რეკურენტული განტოლებ-

ებით შეცვლის შესაძლებლობას. სივრცეში და დროში წანაცვლება ხდება გარკვეული დროით სივრცული ბიჯების გამოყენებით, რომელთა ურთიერთდამოკიდებულება იძლევა ამონახსნის კრებადობას ამოცანაში მოცემული სასაზღვრო და საწყისი პირობების გათვალისწინებით. გამოყენებულია, როგორც ცხადი, ასევე არაცხადი სხვაობითი სქემები, რომელთაც გააჩნიათ თავისი ნაკლები და უპირატესობები, რომელთა გათვალისწინებითაც ხდება ცალკეული სქემის შერჩევა კონკრეტული ამოცანების გადასაწყვეტად.

სხვაობითი მეთოდები ძირითადად გამოიყენება ისეთი პროცესების აღწერისათვის, რომლებიც მოიცემა კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებით. ფიზიკაში ასეთი პროცესებია, მაგალითად სივრცეში ტალღის გავრცელების პროცესი, ნივთიერებაში თბოგამტარობის პროცესი, მყარ სხეულებში სითბოს გავრცელების პროცესი და ა.შ.

სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებით კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის პირველი წარმატებული მცდელობა მოცემულია კურანტის, ფრიდრიხსის და ლევის ნაშრომში რომელიც 1928 წელს გამოქვეყნდა, ანუ ჯერ კიდევ ელექტრონული გამოთვლითი მანქანის გამოგონებამდე. ამ ნაშრომში მოცემულია პარაბოლური, ჰიპერბოლური და ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებით.

კომპიუტერული ტექნიკის და ტექნოლოგიების განვითარებასა და სიმძლავრეების გაზრდესათან ერთად მნიშვნელოვნად გაფართოვდა სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობები. შედარებით მარტივი ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნიდან გადავიდნენ ორ და სამგანზომილებიანი არანრფივი განტოლებების გადაწყვეტამდე. მნიშვნელოვნად გაფართოვდა ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებული სხვაობითი ბადეების ტოპოლოგიაც. თანამედროვე რიცხვითი ექსპერიმენტების საშუალებით შესაძლებელია ისეთი პროცესების მოდელირებაც კი, რომლებიც არავითარი კლასიკური ექსპერიმენტის ჩატარებას არ ექვემდებარება.

რაც შეეხება ნაშრომში გამოყენებითი ელექტროდინამიკის ამოცანების გადასაწყვეტად გამოყენებულ მეთოდებს, დეტალურად განხილულია დროით და სიხშირულ არეში ისეთი ძირითდი მე-

თოდები, როგორებიცაა: კირხჰოფის მეთოდი; სასრული სხვაობების მეთოდი დროით არეში იდეალურად შეთანხმებული ფენების გამოყენებით; სასრული სხვაობების მეთოდი სინშირულ არეში; დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი; მომენტების მეთოდი; მომენტების მეთოდი დროით არეში. ნაჩვენებია რომ ეს მეთოდები იძლევა ფართო კლასის ელექტროდინამიკური ამოცანების შესწავლის საშუალებას.

ნაშრომში განხილული მეთოდების გარდა ასევე აღწერილია კომბინირებული მეთოდი, რომელიც სიახლეა ელექტროდინამიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდებში. ეს მეთოდი წარმოადგენს სასრული სხვაობებისა და კირხჰოფის მეთოდის ერთობლიობას, რომელიც სასრული სხვაობების მეთოდისაგან განსხვავებით იძლევა შორ ზონაში გადასხივებული ველების გამოთვლის საშუალებას.

თავი 1. ზოგადი ცნებები

ყველაფერს, რაც სამყაროში რეალურად არსებობს მეცნიერება მატერიას უწოდებს. მატერია ჩვენი ცნობიერებისგან დამოუკიდებლად არსებობს და იგი მოქმედებს, ან შეუძლია იმოქმედოს ჩვენი შეგრძნების ორგანოებზე.

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებს შორის ფიზიკა ბუნების შემსწავლელი ერთ-ერთი ძირითადი მეცნიერებაა და შეისწავლის მატერიის თვისებებს, მის ცვლილებას, მატერიისათვის დამახასიათებელი მოვლენების კანონზომიერებებს და კავშირს ამ მოვლენებს შორის, ამდენად ცდილობს გასცეს პასუხი კითხვას: რას წარმოადგენს სამყარო, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ და რა კანონზომიერებებს ემორჩილება მასში მიმდინარე პროცესები?

ფიზიკის მიერ დადგენილი კანონები ზოგადი ხასიათისაა. ქიმია, ბიოლოგია, ასტრონომია და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები შეისწავლიან მოვლენების გარკვეულ ჯგუფებს და აყალიბებენ კერძო სახის ცნებებსა და კანონებს, ხოლო ფიზიკა ამ კანონებზე დაყრდნობით, მათ საფუძველზე ლეზულობს ზოგად ცნებებსა და კანონებს, რითაც უდიდესი წვლილი შეაქვს სამყაროს შესახებ ერთიანი შეხედულებების ფორმირებაში.

კიდევ უფრო გამოიკვეთა ფიზიკის ძირითადი როლი მეცნიერების განვითარების თანამედროვე ეტაპზე, როცა სულ უფრო მეტად ვულრმავდებით ბუნების აქამდე უცნობ კანონზომიერებებსა და თვისებებს, რაც სამყაროს შესახებ მანამ არსებული წარმოდგენების ძირეულ შეცვლას იწვევს. სწორედ თანამედროვე ფიზიკის მონაცემთა ბაზაზე ხდება ჩვენს გარშემო არსებული ობიექტური რეალობის, სამყაროს აღქმის თანამედროვე, ახალი მსოფლმხედველობის ჩამოყალიბება.

ზემოთ აღნიშნულის თვალსაჩინო მაგალითს დროის, სივრცისა და მატერიის შესახებ არსებული წარმოდგენების განვითარება წარმოადგენს, რაც იმაში გამოიხატება, რომ აინშტაინის მიერ ფარდობითობის თეორიის ჩამოყალიბებამ გამოიწვია ნიუტონისეული უნივერსალური დროისა და აბსოლუტური სივრცის უარყოფა და, ასევე, კლასიკური ფიზიკის ძირითადი დებულებების შეცვლა, რამაც დროსთან, სივრცესთან და მატერიასთან მიმართებაში ახალი მსოფლმხედველობის ჩამოყალიბება განაპირობა.

ამ თავში განხილულია ზოგადი მათემატიკური ცნებები და თეორემები, რომლებიც საჭიროა მომდევნო თავებში მოცემული ფიზიკური პროცესებისა და მათემატიკური განტოლებების ამოსახსნელად. ასევე განხილულია ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები.

ფუნქციის ზღვარი და წარმოებული. განსაზღვრული ინტეგრალი. ასევე განხილულია მაღალი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები, რომლებიც მოცემულია ფიზიკური პროცესების აღსაწერად გამოყენებულ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში.

განსაკუთრებული მნიშვნელობა გამახვილებულია ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის საკითხზე, რომელიც აუცილებელია სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებისას. ხშირად კომბინირებული მეთოდის გამოყენებისას საჭირო წერტილები და სასრული სხვაობების მეთოდში კვანძების წერტილები არ ემთხვევა ერთმანეთს. ეს კი მოითხოვს ამ წერტილებში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელოვნების განსაზღვრას მის გარშემო არსებულ კვანძებში ფუნქციის მნიშვნელობების საშუალებით.

§1.1 ზოგადი ცნებები

იმისათვის, რომ განისაზღვროს სხეულის მდებარეობა სივრცეში აუცილებელია მივუთითოთ სხეული, ან სხეულთა ჯგუფი, რომლის მიმართ განიხილება სხეულის მდებარეობა სივრცეში. ეს იმითაა გამოწვეული, რომ თვით წერტილებს ან სივრცის ნაწილებს არ ახასიათებთ რაიმე ერთმანეთისაგან განმასხვავებელი ნიშნები, რომელთა საშუალებით შევძლებთ მათ გარჩევას. თუ არ მივუთითებთ ათვლის სხეულს ან სხეულთა ჯგუფს, მაშინ სივრცეში წერტილის ან სხეულის მდებარეობის მითითება ყოველგვარ აზრსაა მოკლებული.

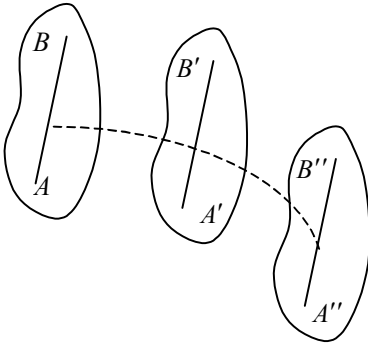
ერთი და იგივე სხეულის მოძრაობას სხვადასხვა სხეულის მიმართ შეიძლება გააჩნდეს სხვადასხვა ხასიათი. მაგალითად, თუ a სხეული ჩვენს მიმართ უძრავია, ხოლო b და c სხეულები მოძრაობენ ერთი და იგივე მიმართულებით ერთნაირი მუდმივი სიჩქარეებით, მაშინ c სხეული მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით a სხეულის მიმართ, ხოლო უძრავია b სხეულის მიმართ. ამიტომ, სხეულის მოძრაობის აღსაწერად აუცილებელია შევთანხმდეთ იმაზე, თუ რომელი სხეულის ან სხეულთა ჯგუფის მიმართ განიხილება აღნიშნული სხეულის მოძრაობა.

სხეულს ან სხეულთა ჯგუფს, რომლის მიმართაც განიხილება სივრცეში სხეულის მდებარეობა, ათვლის სხეული ან ათვლის სხეულთა სისტემა ეწოდება.

ათვლის სხვადასხვა სხეულის ან სისტემის მიმართ ერთი და იგივე ნერტილი შეიძლება იყოს უძრავი, მოძრაობდეს წრფივად და თანაბრად, ასრულებდეს მრუდწირულ მოძრაობას და ა.შ. ათვლის სისტემად შესაძლებელია შეირჩეს ნებისმიერი სხეული ან სხეულთა ჯგუფი.

სივრცეში სხეულის მოძრაობის აღსაწერად აუცილებელია ამ სხეულის მდებარეობის განსაზღვრა, მაგრამ ყველა სხეულს გააჩნია ზომა და ამიტომ მისი სხვადასხვა ნერტილი სივრცის სხვადასხვა ადგილასაა განლაგებული. ზოგადად, სხეულის მდებარეობის განსაზღვრა სივრცეში საკმაოდ რთულია, მითუმეტეს, თუ სხეულის სხვადასხვა ნაწილი ერთმანეთისაგან განსხვავებული სახის მოძრაობას ასრულებს. მოცემული ნაშრომის ფარგლებში ჩვენ არ ჩავუღრმავდებით ნივთიერების თვისებებს, ამიტომ განვიხილავთ აბსოლუტურად მყარი სხეულის¹ მოძრაობის შემთხვევას და ამ სხეულს წარმოვადგენთ, როგორც მატერიალურ ნერტილთა ერთობლიობას.

მყარი სხეულის მოძრაობის უმარტივეს სახეს გადატანითი მოძრაობა წარმოადგენს.



ნახ.1.1

გადატანითი მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როდესაც სხეულის ნებისმიერი ორი ნერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი სხეულის მოძრაობისას თავისი თავის პარალელური რჩება (ნახ.1.1).

სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს ყველა ნერტილი ერთნაირი ფორმისა და სიგრძის გზას გადის. ამიტომ, აბსოლუტურად მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია მისი ნებისმიერი ერთი ნერტილის მოძრაობის შესწავლა.

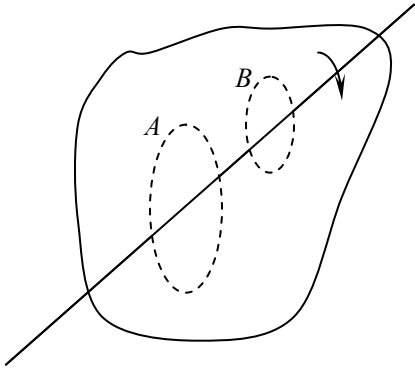
აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობის ერთ-ერთი კერძო სახეა ბრუნვითი მოძრაობა,

როცა სხეულის ყოველი ნერტილი ბრუნავს წრეწირზე, რომელთა ცენტრები ერთსა და იმავე წრფეზე არის განლაგებული.

როცა სხეულის ყოველი ნერტილი ბრუნავს წრეწირზე, რომელთა ცენტრები ერთსა და იმავე წრფეზე არის განლაგებული.

¹ ისეთ იდეალურ სხეულს, რომლის ნერტილებს შორის მანძილის შეცვლა შეუძლებელია, აბსოლუტურად მყარი სხეული ეწოდება.

ამასთან, ეს წრფე შეიძლება კვეთდეს მოცემულ სხეულს, ეხებოდეს მას ერთ წერტილში ან სხეულის გარეთ მდებარეობდეს (ნახ.1.2). ზოგადად სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა შეიძლება ორ მოძრაობად – გადატანით და ბრუნვით მოძრაობად დაიშალოს.

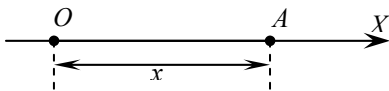


ნახ.1.2

იტაზე მზის გარშემო. ასევე შესაძლებელია ავტომობილის ზომების უგულვებელყოფა, თუ განვიხილავთ ავტომობილის მოძრაობას ორ დასახლებულ პუნქტს შორის და ა.შ.

სხეულს, რომლის ხაზოვანი ზომების უგულვებელყოფა შესაძლებელია მოცემული ამოცანის პირობებში, მატერიალური (ნივთიერი) წერტილი ეწოდება.

მათემატიკური წერტილისაგან განსხვავებით მატერიალურ წერტილს გააჩნია მასა და იგულისხმება, რომ განსახილველი სხეულის მასა მთლინად თავმოყრილია მოცემულ წერტილში. მატერიალური წერტილის სივრცეში მდებარეობისა და მოძრაობის შესწავლა ასევე მოითხოვს ათვლის სახეულის ან სისტემის შემოტანას.



ნახ.1.3

მატერიალური A წერტილი მოძრაობს წრფეზე (ნახ.1.3) და ის ყოველთვის ამ წრფეზე მდებარეობს.

ზოგჯერ სხეულთა მოძრაობის განხილვისას შესაძლებელია მათი ხაზოვანი ზომების უგულვებელყოფა. ეს დასაშვებია იმ შემთხვევაში, როცა სხეულის ზომა გაცილებით ნაკლებია იმ ზომებთან შედარებით, რომლებთანაც საქმე გვაქვს მოცემული ამოცანის პირობებში.

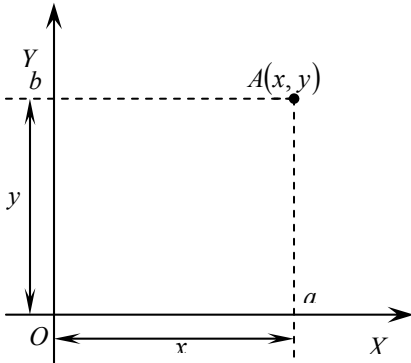
მაგალითად, დედამიწის ზომების უგულვებელყოფა შესაძლებელია, თუ განვიხილავთ დედამიწის მოძრაობას თავის ორბ-

ათვლის სისტემის არჩევის შემდეგ მატერიალური წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის საკითხი განიხილება. აღნიშნული საკითხის განხილვა დავიწყოთ მარტივი შემთხვევით, როცა მა-

მატერიალური A წერტილის წრფეზე მდებარეობის განსასაზღვრად საჭიროა ამ წრფეზე ავირჩიოთ რაიმე O წერტილი, რომელიც იქნება ათვლის სისტემის სათავე, ან ათვლის წერტილი და წრფეზე A წერტილის მდებარეობა განვსაზღვროთ მისი ერთი მონაცემის, კოორდინატის საშუალებით.

წრფე და მასზე არჩეული O წერტილი ათვლის სისტემას წარმოადგენს. A წერტილის O წერტილის მიმართ მდებარეობის განსაზღვრისთვის საკმარისია OA მანძილის განსაზღვრა და იმის დადგენა თუ O წერტილის რომელ მხარესაა განლაგებული A წერტილი. მივმართოთ OA მონაკვეთის გასწვრივ OX რიცხვითი ღერძი, ხოლო OA მანძილი ჩავთვალოთ დადებითად თუ A წერტილი O წერტილიდან ისრის მხარესაა (ნახ.1.3), ხოლო უარყოფითად, თუ საპირისპირო მხარესაა. OA მანძილს ვუწოდოთ მატერიალური A წერტილის x კოორდინატი. როგორც ვხედავთ, ათვლის სისტემის შემოტანის შემდეგ წრფეზე ნებისმიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია სათანადო ნიშნით აღებული OA მანძილის ანუ x კოორდინატის ცოდნა. ამიტომ ამბობენ, რომ წრფეზე მოძრაობა ერთგანზომილებიანია.

განვსაზღვროთ მატერიალური A წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე (ნახ.1.4). ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში A წერტილის მდებარეობის განსასაზღვრავად ერთი OX რიცხვითი ღერძი მასზე აღებული O სათავეთ არ არის საკმარისი. მართლაც, ჩვენ შეგვიძ-



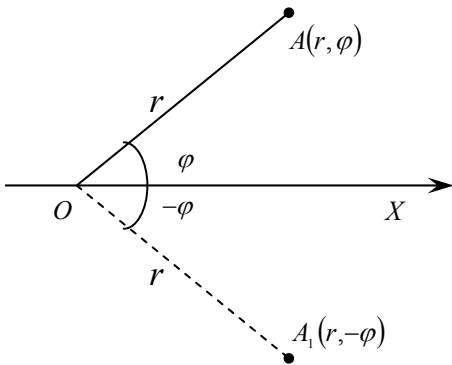
ნახ.1.4

ლია განვსაზღვროთ მანძილი A წერტილის a პროექციასა და O წერტილს შორის და გამოვთვალოთ შესაბამისი ნიშნით აღებული Oa მანძილი, ანუ x კოორდინატი, მაგრამ ეს არ განსაზღვრავს ცალსახად A წერტილის მდებარეობას XOY სიბრტყეზე, რადგან A და a წერტილებზე გავლებულ წრფეზე მდებარე ნებისმიერ წერტილს და თვით a წერტილსაც, იგივე x კოორდინატი შეესაბამება.

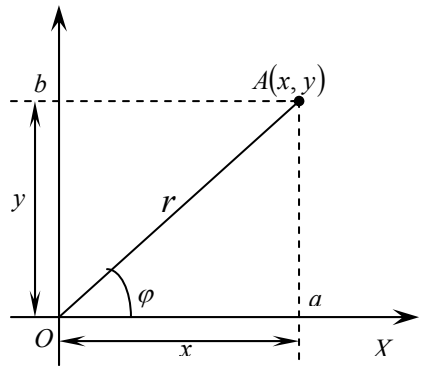
მაშასადამე, x კოორდინატის გარდა საჭიროა კიდევ დამატებით სხვა სიდიდე იმისათვის, რომ ცალსახად განისაზღვროს A წერტილის მდებარეობა XOY სიბრტყეზე. ასეთი სიდიდის შემოტანა სხვადასხვა წესით არის შესაძლებელი. მაგალითად, O წერტილზე გავავლოთ OX რიცხვითი ღე-

რძის მართობი წრფე, შევარჩიოთ რომელიმე მიმართულება, რომელსაც მოვნიშნავთ ისრით და მას OY ღერძი ვუწოდოთ. დავუშვათ A წერტილიდან ღერძზე მართობი და განვსაზღვროთ A წერტილის b პროექცია OY ღერძზე. Ob მანძილს აღებულს სათანადო ნიშნით ვუწოდოთ A წერტილის y კოორდინატი. OX და OY ღერძები მათი გადაკვეთის O წერტილით ათვლის სისტემას წარმოადგენს და თუ ცნობილია x და y კოორდინატები, მაშინ A წერტილის მდებარეობა XOY სიბრტყეზე ცალსახადაა განსაზღვრული. OX და OY ერთიერთმართობული ღერძების სისტემას, დეკარტის ორგანზომილებიან მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, ხოლო x და y სიდიდეებს დეკარტის კოორდინატებს უწოდებენ.

მეორე წესი, რომლითაც შესაძლებელია A წერტილის სიბრტყეზე მდებარეობის ცალსახად განსაზღვრა შემდეგში მდგომარეობს: განვიხილოთ OA მონაკვეთის r სიგრძე და OA მონაკვეთსა და OX ღერძს შორის φ კუთხე (ნახ.1.5). ეს ორი სიდიდე ცალსახად განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე, თუ მივუთითებთ φ კუთხის ნიშანს. წინააღმდეგ შემთხვევაში A და A_1 წერტილებს ერთნაირი r და φ კოორდინატები ექნება. ჩვეულებრივ თვლიან, რომ φ კუთხე დადებითია, თუ იგი გაზომილია OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო უარყოფითია, თუ იგი გასაზომილია OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. r ყოველთვის არაუარყოფითი სიდიდეა, ანუ $r \geq 0$, ხოლო φ იცვლება $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ საზღვრებში.



ნახ.1.5



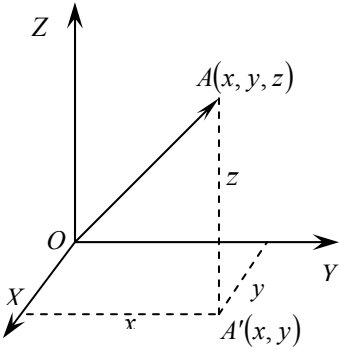
ნახ.1.6

r და φ კოორდინატებს პოლარული კოორდინატები ეწოდება და ისინი ისევე ხშირად გამოიყენება წერტილის სიბრტყეზე მდებარეო-

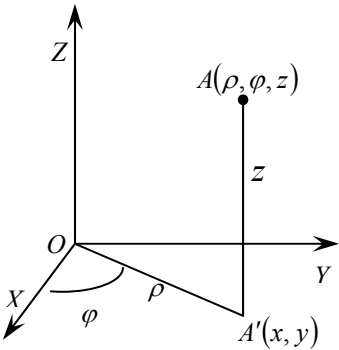
ბის განსაზღვრისათვის, როგორც დეკარტის x და y კოორდინატები. კავშირი დეკარტის კოორდინატებსა და პოლარულ კოორდინატებს შორის მარტივად გამოისახება (ნახ.1.6):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (1.1.1)$$

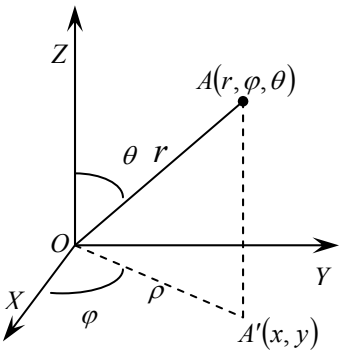
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



ნახ.1.7.ა



ნახ.1.7.ბ



ნახ.1.7.გ

სიბრტყეზე ნერტილის კოორდინატების განსაზღვრა სხვა წესითაც არის შესაძლებელი, მაგრამ როგორი კოორდინატებიც არ უნდა გამოვიყენოთ, ყოველ შემთხვევაში საჭიროა ორი დამოუკიდებელი კოორდინატი და ამიტომ ამბობენ, რომ სიბრტყე ორგანზომილებიანია.

და ბოლოს, განვსაზღვროთ A ნერტილის მდებარეობა სივრცეში. ამ შემთხვევაშიც ნერტილის მდებარეობა შეიძლება სხვადასხვა წესით განისაზღვროს. ჩვეულებრივ, ამ შემთხვევაში ირჩევენ სივრცეში O სათავეს და მას უკავშირებენ კოორდინატთა სისტემას. ნახ.1.7-ზე მოცემულია ა) დეკარტის სამგანზომილებიანი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა; ბ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა; გ) სფერული კოორდინატთა სისტემა.

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (ნახ.1.7.ა). ამ შემთხვევაში ათვლის სისტემის O სათავედან გავავლოთ ურთიერთმართობი სამი OX , OY და OZ ღერძი და A ნერტილის მდებარეობა განვსაზღვროთ სამი x , y და z კოორდინატით, რომლებიც A ნერტილიდან შესაბამის ღერძებზე დაშვებულ მართობთა ღერძების გადაკვეთის წერტილებიდან O სათავემდე გავლებული

მონაკვეთების სიგრძეებია, სათანადო ნიშნით. ცხადია, რომ სამი x , y და z კოორდინატი ცალსახად განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სივრცეში. ასევე ცალსახად განისაზღვრება A წერტილის მდებარეობა სივრცეში ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ρ , φ და z (ნახ.1.7.ბ) და სფერულ კოორდინატთა სისტემაში r , φ და θ (ნახ.1.7.გ) სიდიდეებით.

ნახაზიდან ჩანს, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემიდან ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის და უკუგადასვლის ფორმულები შემდეგნაირად მოიცემა:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, & z &= z, \\ x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

დეკარტულ კოორდინატთა სისტემიდან სფერულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის და უკუგადასვლის ფორმულები:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, & \theta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ x &= r \cos \varphi \sin \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

კოორდინატთა სისტემის შერჩევა ხდება კონკრეტული ამოცანის გათვალისწინებით. როგორც ვხედავთ, სივრცეში წერტილის მდებარეობის ცალსახად განსაზღვრისათვის კოორდინატთა სისტემის არჩევისაგან დამოუკიდებლად საჭიროა სამი რიცხვი (კოორდინატი), რომელთაგან ერთს მაინც უნდა ჰქონდეს სიგრძის განზომილება, ამიტომ ამბობენ, რომ სივრცე სამგანზომილებიანია.

ბუნების ყველა მოვლენა და მათ შორის წერტილის მდებარეობის ცვლილება, ანუ მოძრაობა სადღაც (სად?) და ოდესღაც (როდის?) ხდება, ანუ ბუნების ყველა მოვლენა სივრცეში და დროში მიმდინარეობს. სივრცე და დრო მატერიის არსებობის განუყოფელი ფორმებია, ამიტომ ბუნებრივი მოვლენის აღსაწერად აუცილებელია ასევე დროის ათვლა. ისევე, როგორც სივრცეში სხეულის მდებარეობის განსაზღვრის შემთხვევაში, დროის მომენტის განსაზღვრა მოითხოვს დროის საწყისი მომენტის არჩევას. დროის ამ მომენტს ნულოვანი დრო ეწოდება. იმის შემდეგ, რაც არჩეულია დროის საწყისი მომენტი, დროის სხვა მომენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ თუ რა დრო გავიდა დროის საწყისი მომენტიდან დროის განსახილველ მომენტამდე. დროის საწყისი მომენტიდან დროის განსახილველ მომენტამდე გავლილ დროს t ასოთი აღნიშნავენ და თვლიან დროს დადებითად, თუ განსახილველი დროის მომენტი საწყისი მომენტის შემდეგაა და უარყოფითად, თუ განსახილველი

დროის მომენტი საწყის მომენტამდეა. t სიდიდე სავსებით საკმარისია დროის მომენტის ცალსახად განსზღვრისათვის თუ არჩეულია დროის საწყისი მომენტი, ამიტომ ამბობენ, რომ დრო ერთგანზომილებიანია. სივრცის წერტილების მსგავსად დროის მომენტები არაფრით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ამიტომ დროის საწყისი მომენტის არჩევა ნებისმიერად ხდება.

§1.2 . ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ფუნქციის ზღვარი და წარმოებული. განსაზღვრული ინტეგრალი.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ნიშნით გაერთიანებული ობიექტების ერთობლიობა, მაგალითად წრფეზე წერტილთა ერთობლიობა, მზის სისტემის პლანეტათა ერთობლიობა, ქართული ანბანის ასოების ერთობლიობა და ა.შ.

ერთნაირი ნიშნის ან თვისებების მიხედვით გაერთიანებულ სიდიდეთა ან საგანთა ერთობლიობას სიმრავლე, ხოლო ამ სიმრავლის შემადგენელ ობიექტებს – მისი ელემენტები ეწოდება

სიდიდეთა ან საგანთა სიმრავლეებს ლათინური ანბანის დიდი ასოებით A, B, C, D, \dots , ხოლო სიმრავლის ელემენტებს ლათინური ანბანის მცირე ასოებით a, b, c, d, \dots აღნიშნავენ. სიმრავლე მოცემულია, თუ ნებისმიერ ობიექტზე შეიძლება ითქვას წარმოადგენს თუ არა იგი ამ სიმრავლის ელემენტს. სიმრავლისა და მისი ელემენტების მაგალითად ფიზიკაში გამოდგება მატერიალური წერტილის ტრაექტორია. მატერიალური წერტილი სივრცეში თავისი მოძრაობისას შემოწერს წილს, რომელსაც ტრაექტორია ან გავლილი გზა ეწოდება. ტრაექტორია – იმ წერტილთა ერთობლიობას ანუ სიმრავლეს წარმოადგენს, რომელშიც მოცემული მატერიალური წერტილი ერთხელ მაინც იმყოფებოდა.

ვთქვათ მოცემულია ორი X და Y სიმრავლე. მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა სახის შესაბამისობა, რომლებსაც f, g, h, \dots ასოებით აღნიშნავენ.

X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი და სრულიად განსაზღვრული ელემენტი შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის ჩასაწერად, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას X და Y სიმრავლის x და y ელემენტებს შორის რაიმე f წესით, მიღებულია აღნიშვნა $y = f(x)$, სადაც $x \in X$ და $y \in Y$. x -ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს ანუ არგუმენტს, ხოლო $y = f(x)$ -ს ფუნქციის მნიშვნელობას.

X სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და ის $D(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ან ცვლილების არე ეწოდება და $E(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. f ფუნქციას, რომლისთვისაც $X \xrightarrow{f} Y$, სადაც $X \in D(f)$ და $Y \in E(f)$ $D(f)$ სიმრავლის $E(f)$ სიმრავლეზე ასახვა ეწოდება. ამრიგად, ფუნქცია არის ერთი სიმრავლის ასახვა მეორე სიმრავლეზე.

ფიზიკაში გამოიყენება რიცხვითი და ვექტორული ფუნქციები.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითად, წრფეზე A წერტილის x მდებარეობის დამოკიდებულება t დროსთან, ანუ f შესაბამისობა

$$x = f_1(t) \tag{1.2.1}$$

რიცხვით ფუნქციას წარმოადგენს.

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე რიცხვითი სიმრავლეა, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ვექტორული სიდიდეთა სიმრავლეა, ვექტორული ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითად, თუ მატერიალური წერტილის დროის ნებისმიერ t მომენტში სივრცის $A(x, y, z)$ წერტილში მდებარეობა მოიცემა

$$\vec{r} = \vec{F}(t) \tag{1.2.2}$$

დამოკიდებულებით, მაშინ \vec{F} ფუნქცია ვექტორულ ფუნქციას წარმოადგენს.

განსაზღვრების თანახმად ფუნქცია ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ფუნქციის განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამასთან, ამ წესის მოცემის ხერხი შეზღუდული არ არის.

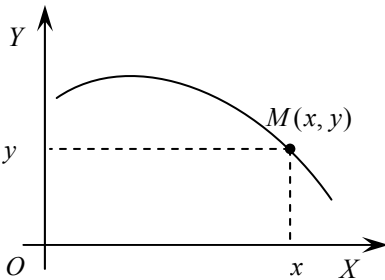
განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

ცხრილური ხერხი. ბუნების მოვლენათა შესწავლის დროს ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცვლადებთან, რომელთა შორის არსებულ დამოკიდებულებას ადგენენ ცდის საფუძველზე. ასეთ შემთხვევაში ცდათა შედეგების მიხედვით ადგენენ ცხრილს, რომელშიც მოცემულია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობები, მაგალითად ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულება ყოველ ერთ საათში:

ცხრილი 1.

დრო(სთ)	9 ⁰⁰	10 ⁰⁰	11 ⁰⁰	12 ⁰⁰	13 ⁰⁰	14 ⁰⁰
ტემპერატურა (°C)	10	12	13	14	14	12

ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს ცხრილური ხერხი ეწოდება და ის ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში.



ნახ.1.8

გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ სიბრტყეზე აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ სისტემაში მოცემულია $M(x, y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან არც ერთი ორი წერტილი არ ძევს OY ღერძის პარალელურ ერთსა და იმავე წრფეზე. წერტილთა ასეთი სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე შესაბამისად მო-

ცემულ წერტილთა სიმრავლის აბსცისათა და ორდინატთა სიმრავლეებია. მართლაც, ნებისმიერ x რიცხვს განსაზღვრის არიდან შესაბამეობა ერთადერთი y რიცხვი, ისეთი, რომ $M(x, y)$ წერტილი მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ.1.8). ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს გრაფიკული ხერხი ეწოდება.

ანალიზური ხერხი. უმეტეს შემთხვევაში ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა შევასრულოთ არგუმენტზე, რომ მივიღოთ ფუნქციის შესაბა-

მისი მნიშვნელობა. ასეთ ფორმულას ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, ხოლო ხერხს – ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი ეწოდება. მაგალითად,

$$y = 2x^2 - 3; y = \frac{x-1}{x+1}; f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < +\infty \end{cases} \quad (1.2.3)$$

ფუნქციები ანალიზურადაა მოცემული.

თუ ფუნქცია მოცემული ფორმულით და არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს. მაგალითად $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) = [0, +\infty[$, ხოლო $y = \frac{x-1}{x+1}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(y) =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

ფიზიკური პროცესების შესწავლისთვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა გააჩნია ფუნქციის ზღვარისა და წარმოებულის განსაზღვრას, რამე თუ ისინი გამოიყენებიან სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეების განსაზღვრისათვის, როგორებიცაა მაგალითად მყისი სიჩქარე, აჩქარება, კუთხური სიჩქარე, კუთხური აჩქარება და სხვ.

განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი რაიმე a წერტილში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1 . b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ როცა

$$|x - a| < \delta \text{ და } x \neq 0$$

სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ b რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ასე ჩაინერება

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (1.2.4)$$

მაგალითად, $f(x) = 3x - 1$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow 1$ არის 2. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის გვაქვს

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ამრიგად, თუ $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, მაშინ, როცა $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ სრულდება უტოლობა

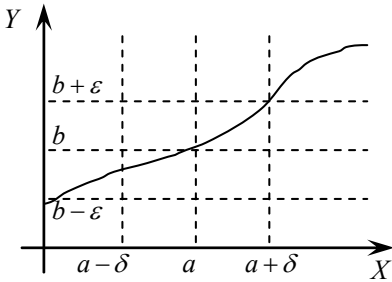
$$|(3x-1)-2| < \varepsilon,$$

ე.ი.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x-1) = 2.$$

რადგან $|x-a| < \delta$ უტოლობა $a-\delta < x < a+\delta$ ორმაგი უტოლობის ტოლფასია, ხოლო $|f(x)-b| < \varepsilon$ უტოლობა $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ ორმაგი უტოლობის ტოლფასია, ამიტომ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრება შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩამოყალიბდეს (ნახ.1.9).

b რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში, თუ b რიცხვის ნებისმიერი ε მიდამოსათვის მოიძებნება a წერტილის ისეთი δ მიდამო, რომ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება δ მიდამოს წერტილებს, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა, არ გამოვა $b-\varepsilon, b+\varepsilon$ ზოლიდან.



ნახ.1.9

ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ a წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის აუცილებელია $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს a წერტილის რაიმე მიდამოს ყველა წერტილში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული რაიმე a წერტილში, მაგრამ გააჩნდეს ზღვარი ამ წერტილში. მაგალი-

თად, $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ფუნქცია არ

არის განსაზღვრული $x=-1$ წერტილში, მაგრამ

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2.$$

მართლაც, როცა $x \neq -1$

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -2,$$

ამიტომ

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| = |x - 1 + 2| = |x + 1|.$$

ამრიგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის, თუ $\delta = \varepsilon$, მაშინ, როცა $|x + 1| < \delta$ და $x \neq -1$, სრულდება უტოლობა

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| < \varepsilon,$$

ე.ი.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$$

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ რამოდენიმე თეორემა, რომლებიც შემდგომში გამოგვადგება.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ზღვარი a ნერტილში, მაშინ ეს ზღვარი ერთადერთია.

თეორემა 2. მუდმივი ფუნქციის ზღვარი ამავე მუდმივის ტოლია.

თეორემა 3. თუ არსებობენ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვრები a ნერტილში, მაშინ არსებობს ამ ფუნქციათა ჯამის ზღვარიც a ნერტილში და ეს ზღვარი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვართა ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (1.2.5)$$

თეორემა 4. თუ არსებობენ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვრები a ნერტილში, მაშინ არსებობს ამ ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარიც a ნერტილში და ეს ზღვარი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვართა ნამრავლის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (1.2.6)$$

ამ თეორემის შედეგია ის, რომ მუდმივი მამრავლი შეიძლება ზღვრის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ, ანუ თუ $c = \text{const}$ მაშინ,

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x). \quad (1.2.7)$$

თეორემა 5. თუ არსებობენ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვრები a ნერტილში, ამასთან $g(x)$ ფუნქციის ზღვარი ნულისგან განსხვავებ-

ულია, მაშინ არსებობს $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი და ეს ზღვარი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვართა შეფარდების ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}. \quad (1.2.8)$$

ეხლა გადავიდეთ ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრებასა და წარმოებულის თვისებების განხილვაზე. ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 ნერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო x წარმოადგენს ამ მიდამოს x_0 ნერტილისაგან განსხვავებულ ნებისმიერ ნერტილს.

$x - x_0$ სხვაობას ეწოდება არგუმენტის ნაზრდი x_0 ნერტილში და Δx სიმბოლოთი აღინიშნება.

ე.ი. $\Delta x = x - x_0$, საიდანაც

$$x = x_0 + \Delta x. \quad (1.2.9.ა)$$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი x_0 ნერტილში და $\Delta f(x_0)$ ან Δy სიმბოლოთი აღინიშნება.

ე.ი.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (1.2.9.ბ)$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ არგუმენტის ნაზრდი Δx შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი, მაგრამ არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ფუნქციის $\Delta f(x_0)$ ნაზრდი კი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნადვილი რიცხვი.

გ ა ნ ს ა ზ ჳ რ ე ბ ა 2. x_0 ნერტილში $y = f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან ფარდობის ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისაკენ, ამ ნერტილში ფუნქციის წარმოებული ეწოდება და y' , $f'(x_0)$ ან $\frac{df(x_0)}{dx}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.2.10)$$

მაგალითად, $y = x^2$ ფუნქციის წარმოებული ნებისმიერ x ნერტილში შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

ნებისმიერი მუდმივის წარმოებულისთვის, ანუ თუ $c = const$ მივიღებთ:

$$c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

აქვე მოვიყვანოთ წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი, ხოლო მექანიკურ შინაარსზე მომდევნო პარაგრაფებში ვისაუბროთ:

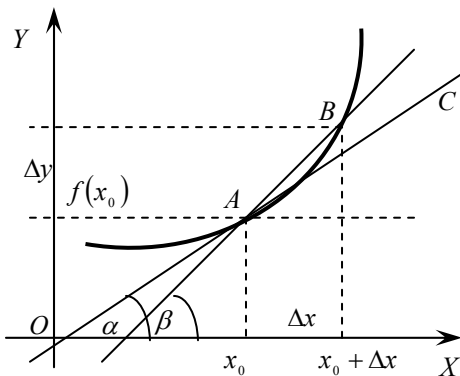
$f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილში გამავალი მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

გავავლოთ მკვეთი AB (ნახ.1.10). როგორც ნახაზიდან ჩანს $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$. მივასწრაფოთ B წერტილი A წერტილისაკენ. მაშინ ცხადია, რომ $\Delta x \rightarrow 0$ და AB მკვეთი მიისწრაფის AC მხებისკენ, ე.ი.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} tg\beta = tg\alpha = f'(x_0). \quad (1.2.11)$$

$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის (x_0, y_0) წერტილში გამავალი მხების განტოლებას აქვს სახე:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (1.2.12)$$



ნახ.1.10.

სადაც, $y_0 = f(x_0)$. მართლაც, ცხადია, რომ (1.2.12) წარმოადგენს (x_0, y_0) წერტილში გამავალი წრფის განტოლებას, რადგანაც ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1.2.12) განტოლებას, და მისი კუთხური კოეფიციენტია $f'(x_0)$.

თუ რაიმე წერტილში ფუნქციას გააჩნია წარმოებული, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში წარმოებული ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება შუალედში, თუ იგი წარმოებადია ამ შუალედის თითოეულ წერტილში.

ლემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მაშინ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \quad (1.2.13)$$

დამტკიცება.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა, რომლებსაც შემდგომში გამოვიყენებთ.

თეორემა 6. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ მათი ჯამიც წარმოებადია ამ წერტილში და

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1.2.14)$$

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი რაოდენობისთვის

თეორემა 7. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ მათი ნამრავლიც წარმოებადია ამ წერტილში და

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad (1.2.15)$$

ამ თეორემის შედეგია ის, რომ მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ, ანუ თუ $c = const$ და $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში, მაშინ

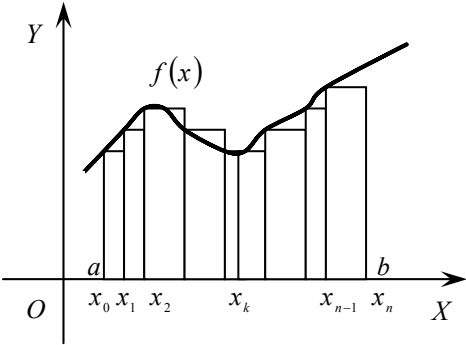
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x). \quad (1.2.16)$$

მართლაც, $(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$, რადგან $c' = 0$.

თეორემა 8. თუ $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, ამასთან $g(x) \neq 0$, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ფარდობაც წარმოებადია ამ წერტილში და

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad (1.2.17)$$

განსაზღვრული ინტეგრალი. ვთქვათ $f(x)$ არის $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული უწყვეტი არაუარყოფითი ფუნქცია. $[a, b]$ მონაკვეთზე $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით განსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, შეიძლება შემდეგნაირადაც გამოვთვალოთ: დავყოთ $[a, b]$ მონაკვეთი n ნაწილად ნებისმიერი წესით,



ნახ.1.11

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
 ნერტილებით $[x_n, x_{n+1}]$ მონაკვეთის სიგრძე აღვნიშნოთ Δx_n -ით, სადაც $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ცხადია $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. ავლნიშნოთ λ -ით უდიდესი Δx_n რიცხვებს შორის. თითოეულ $[x_n, x_{n+1}]$ მონაკვეთზე ავაგოთ მართკუთხედის Δx_n ფუძით და $f(x_n)$ სიმაღლით. ყოველი ასეთი მართკუთხედის ფართობი აღვნიშნოთ

ნათ S_n -თი. ცხადია, რომ

$$S_n = f(x_n)\Delta x_n, \tag{1.2.18}$$

ხოლო ყველა ასეთი მართკუთხედის ფართობთა ჯამი იქნება:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k. \tag{1.2.19}$$

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო აგებული მართკუთხედების გაერთიანება მცირე λ -სათვის, ე.ი. საკმარისად დიდი n -სათვის „თითქმის ემთხვევა“ განსახილველ მრუდწირულ ტრაპეციას. ეს გვაფიქრებინებს, რომ არსებობს აგებული მართკუთხედების ფართობთა ჯამის ზღვარი, როდესაც $\lambda \rightarrow 0$ და იგი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ტოლია, ე.ი.

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k. \tag{1.2.20}$$

მტკიცდება, რომ $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის არსებობს ასეთი სახის ზღვარი, რომელიც არ არის დამოკიდებული მონაკვეთის დაყოფის წესზე. ამ ზღვარს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრულ ინტეგრალს a -დან b -მდე და

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1.2.21}$$

სიმბოლოთი აღნიშნავენ, ე.ი.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (1.2.22)$$

a და b რიცხვებს ინტეგრების საზღვრები ეწოდება: a -ს ქვედა საზღვარი, b -ს კი – ზედა. $f(x)$ -ს ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ეწოდება, ხოლო x -ს საინტეგრო ცვლადი.

ამრიგად, $[a, b]$ მონაკვეთზე, განსაზღვრული უწყვეტი არაუ-არყოფითი $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.2.23)$$

ასეთია, მოკლედ ფუნქციის, ფუნქციის ზღვრისა და ფუნქციის წარმოებულის და განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები, რომელთა მოყვანა ნაშრომის წინაშე დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად სრულეხით საკმარისად მიგვაჩნია.

§1.3. ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და მისი გამოყენება

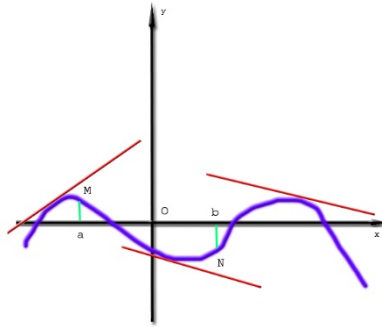
ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოებდა რაიმე D სიმრავლეზე. მაშინ ცხადია, რომ $f'(x)$ აგრეთვე წარმოადგენს ფუნქციას D სიმრავლეზე და შესაძლებელია საუბარი ამ ფუნქციის წარმოებულზე.

$y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის წარმოებულს ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ეწოდება და y'' , y_{xx} ან $f''(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად $y = \sin^2 x$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული $y' = y_x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$, ხოლო მეორე რიგის წარმოებული $y'' = y_{xx} = 2 \cos 2x$.

თეორემა 9. თუ $f''(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, $f'(x_0) = 0$ და $f''(x_0) \neq 0$, მაშინ x_0 წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილს, ამასთან თუ $f''(x_0) < 0$, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო თუ $f''(x_0) > 0$, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია.

მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებით ფუნქციის გამოკვლევის უფრო სრულყოფილად ჩატარება. კერძოდ შეიძლება დავა-

დგინოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა ჩაზნექილობის უბნები და გადაღუნვის წერტილები (ნახ. 1.12).



ნახ.1.12

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ამოზნექილი რაიმე შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x წერტილისათვის ფუნქციის გრაფიკის ამ შუალედის შესაბამისი ნაწილი $(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ მდებარეობს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ჩაზნექილი რაიმე შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x წერტილისათვის ფუნქციის გრაფიკის ამ შუალედის შესაბამისი ნაწილი $(x, f(x))$ წერტილში გავლებული მხების ზემოთ მდებარეობს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5. $(x_0, f(x_0))$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, თუ ამ წერტილში გრაფიკის ამოზნექილობა იცვლება ჩაზნექილობით, ან ჩაზნექილობა ამოზნექილობით.

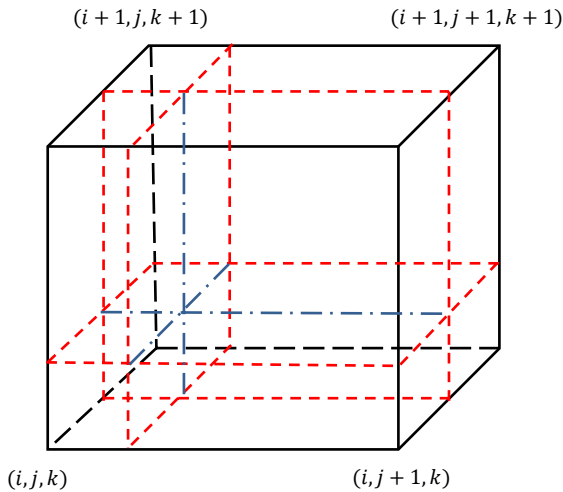
მაგალითად, ნახ.1.12-ზე გამოსახული ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $] -\infty, a[$ და $] b, +\infty[$ შუალედებში, ხოლო $] a, b[$ შუალედში ჩაზნექილია. ამ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილებია M და N .

თ ე ო რ ე მ ა 10. თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული დადებითია რაიმე უაღრესში, მაშინ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ხოლო თუ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული უარყოფითია რაიმე უაღრესში, მაშინ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია.

§1.4. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა

დროით არეში სასრული სხვაობებისა და კორხოფის კომბინირებული მეთოდის გამოყენებისას უმეტეს შემთხვევაში კორხოფის მეთოდში გამოთვლებებისათვის საჭირო $M(x, y, z)$ წერტილები არ ემთხვევა კვანძებში ველის კომპონენტების განლაგების წერტილებს. შორ ზონაში ველის დიაგრამის გამოსათვლელად ველის კომპონენტების მნიშვნელობები უნდა ვიპოვოთ სწორედ $M(x, y, z)$ წერტილებში. მათი პოვნა შესაძლებელია მიახლოებითი მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის საჭირო მეთოდების გამოყენებით. მოცემულ პარაგრაფში ველის კომპონენტების განსასაზღვრავად განხილულია ერთ-ერთი ასეთი მეთოდი.

ველის კომპონენტების საპოვნელად გამოვიყენოთ $M(x, y, z)$ წერტილის გარშემო სასრული სხვაობების მეთოდში კუბის წვეროებში 8 კვანძში განლაგებული გამოთვლილი ველის შესაბამის კომპონენტის მნიშვნელობები (ნახ. 1.13).



ნახ.1.13. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა $M(x, y, z)$ წერტილში

ვთქვათ, $M(x, y, z)$ წერტილი კუბში, ისე რომ $M(x, y, z)$ წერტილი ნახ.1.13-ზე მოცემული (i, j, k) კვანძის წერტილიდან OX ღერძის გასწვრივ წანაცვლებულია $\Delta x'$ მანძილით, რომელიც ნაკლებია ან ტოლია კუბის წახნაგზე. OY ღერძის გასწვრივ წანაცვლებულია $\Delta y'$ მანძილით. OZ ღერძის გასწვრივ წანაცვლებულია $\Delta z'$ მანძილ-

ით. კუბის წახნაგი წარმოადგენს სასრული სხვაობების მეთოდში სივრცით ბიჯს და ამასთან $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

მოცემულ $M(x, y, z)$ ნერტილში ველის კომპონენტის (შესაბამისი f ფუნქციის) მიახლოებითი მნიშვნელობის საპოვნელად ჯერ ვიპოვოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა (i, j, k) ნერტილში გამავალ YOZ სიბრტყეზე $M(x, y, z)$ ნერტილის გეგმილში – M' ნერტილში, ხოლო შემდეგ $(i + 1, j, k)$ ნერტილში გამავალი YOZ პარალელურ სიბრტყეზე $M(x, y, z)$ ნერტილის გეგმილში – M'' ნერტილში. ამისათვის გამოვიყენოთ ე.წ. წრფივი მიახლოება და ვიპოვოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა M' ნერტილში.

$$\begin{aligned} f_z^0 &= f(i, j, k) + (f(i, j, k + 1) - f(i, j, k)) \cdot \Delta z' / \Delta z, \\ f_z^1 &= f(i, j + 1, k) + (f(i, j + 1, k + 1) - f(i, j + 1, k)) \cdot \Delta z' / \Delta z, \\ f_x^0 &= f_z^0 + (f_z^1 - f_z^0) \cdot \Delta y' / \Delta y. \end{aligned}$$

შესაბამისად, ხოლო შემდეგ $(i + 1, j, k)$ ნერტილში გამავალი YOZ პარალელურ სიბრტყეზე $M(x, y, z)$ ნერტილის გეგმილში – M'' ნერტილში გვექნება:

$$\begin{aligned} f_z^{01} &= f(i + 1, j, k) + (f(i + 1, j, k + 1) - f(i + 1, j, k)) \cdot \Delta z' / \Delta z, \\ f_z^{11} &= f(i + 1, j + 1, k) + (f(i + 1, j + 1, k + 1) - f(i + 1, j + 1, k)) \cdot \Delta z' / \Delta z, \\ f_x^1 &= f_z^{01} + (f_z^{11} - f_z^{01}) \cdot \Delta y' / \Delta y. \end{aligned}$$

ამ სიდიდეების გამოყენებით $M(x, y, z)$ ნერტილში ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება OX ღერძის გასწვრივ წრფივი მიახლოებით:

$$f(M) = f_x^0 + (f_x^1 - f_x^0) \cdot \Delta x' / \Delta x.$$

ზემოთ მოყვანილი პროცედურების შედეგად მიღებული $f(M)$ ფუნქცია წარმოადგენს ველის შესაბამის კომპონენტს მოცემულ $M(x, y, z)$ ნერტილში.

ტესტირების შედეგად აღმოჩნდა, რომ ამ ხერხით ნაპოვნი ველის კომპონენტის მიახლოებითი მნიშვნელობა მაღალი სიზუსტით ემთხვევა ნამდვილ მნიშვნელობას $M(x, y, z)$ ნერტილში.

აქვე აღვნიშნავთ, რომ $M(x, y, z)$ ნერტილში ველის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად შესაძლებელია სხვა მეთოდების გამოყენებაც, მაგრამ ზემოთ მოყვანილი მეთოდი საკმაოდ მარტივია და იძლევა ველის მიახლოებითი მნიშვნელობისათვის კარგ შედეგს.

თავი 2. დიფერენციალური განტოლებები და მათი კლასიფიკაცია

დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების თეორია განვითარდა მეცნიერების იმ დარგების პარალელურად, რომლებშიც ჩნდება და გამოიყენება დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები. ამ მხრივ განსაკუთრებით აღსანიშნავია ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის და ეკონომიკის ის ამოცანები, რომლების შეიძლება ჩაიწეროს დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების ტერმინებში.

განარჩევნ ჩვეულებრივ და კერძონარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთა შორის განსხვავება ისაა, რომ ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლება შეიცავს ერთი ცვლადის ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს, ხოლო კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება შეიცავს მრავალი ცვლადის ფუნქციებს და მათ კერძო წარმოებულებს.

როგორც აღვნიშნეთ, ფიზიკაში ინტეგრო-დიფერენციალურმა განტოლებებმა ფართო გამოყენება პოვა, რადგანაც მრავალი მოვლენა ფიზიკის სხვადასხვა დარგში აღინერება სწორედ ამ განტოლებების საშუალებით. ამის მაგალითი უამრავია, მაგალითად, სითბოს გავრცელების განტოლება, ტალღური განტოლება, კერძოდ ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელება, ლაპლასის განტოლება და ა.შ.

ფიზიკური კლასიფიკაციის მიხედვით ფიზიკური ამოცანები შეიძლება დაიყოს ორ კლასად: სტაციონარული და არასტაციონარული ფიზიკური ამოცანები.

ამოცანას ეწოდება სტაციონარული ფიზიკური ამოცანა, თუ რაღაც მოცულობის შიგნით ამოცანის დამახასიათებელი კერძონარმოებულებიანი განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება მხოლოდ ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე მოცემული სასაზღვრო პირობებით.

ფიზიკურად სტაციონარული ფიზიკური ამოცანა აღწერს უკვე დამყარებულ ფიზიკურ პროცესს. მათემატიკურად ეს ამოცანა დაიყვანება კერძონარმოებულებიანი ამოცანის ამოხსნამდე ცნობილი სასაზღვრო პირობით. ზოგჯერ სტაციონარულ ფიზიკურ ამოცანებს დეტერმინირებულ ამოცანებსაც უწოდებენ, რადგან შემოსაზღვრული Σ მოცულობის ნებისმიერ შიდა წერტილში ამონახსნის მნიშვნელობა განისაზღვრება ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ Γ ზედაპირზე მოცემული პირობებით, ანუ სასაზღვრო პირობები

სრულად განსაზღვრავენ ამონახსნის ქცევას Σ მოცულობის შიგნით.

არასტაციონარული ფიზიკური ამოცანა ეწოდება ამოცანას, რომლის ამონახსნი უნდა განისაზღვროს კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით შემოუსაზღვრავ (არაშემოსაზღვრული) ღია სივრცეში მოცემული სასაზღვრო და საწყისი პირობებით.

მათემატიკურად ამ ტიპის ამოცანები წარმოადგენენ ამოცანებს საწყისი ან საწყისი და სასაზღვრო პირობებით. მათ ამონახსნს ეძებენ ამ ზედაპირიდან გარეთ თანმიმდევრული მოძრაობით დროში მოცულობაში მოცემული საწყისი პირობებით, ისე რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობები. არასტაციონარული ამოცანებისათვის შეშფოთებების გავრცელების ამოცანები ამოიხსნება დროში თანდათანობითი გადაადგილებით დროითი ბიჯების გამოყენებით. ძირითადად არასტაციონარული ამოცანები საწყისი და სასაზღვრო პირობებით წარმოადგენენ ჰიპერბოლური ან პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს.

§2.1 დიფერენციალური განტოლებების მათემატიკური კლასიფიკაცია

განვიხილოთ მეორე რიგის კერძონარმოებულებიან წრფივი დიფერენციალური განტოლება:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y), \quad (2.1.1)$$

სადაც a, b, c, d, e, f კოეფიციენტები (x, y) ცვლადების რალაც ფუნქციებს წარმოადგენენ. კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ტიპი მოცემულ ნერტილში განისაზღვრება a, b, c ფუნქციების მნიშვნელობებით. თუ სივრცის მოცემულ (x_0, y_0) ნერტილში სრულდება უტოლობა

$$b^2 - 4ac > 0, \quad (2.1.2)$$

მაშინ წრფივ კერძონარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას (2.1.1) ჰიპერბოლური ტიპის განტოლება ეწოდება.

ჰიპერბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების პირველი კანონიკური სახე შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$u_{\xi\eta} = h_1(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (2.1.3)$$

მეორე კანონიკური ფორმა შემდეგი სახისაა:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = h_2(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta). \quad (2.1.4)$$

თუ სივრცის მოცემულ (x_0, y_0) ნერტილში სრულდება ტოლობა

$$b^2 - 4ac = 0, \quad (2.1.5)$$

მაშინ წრფივ კერძონარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას (2.1.1) პარაბოლური ტიპის განტოლება ეწოდება.

პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების კანონიკური სახე შემდეგნაირად ჩაინერება:

$$u_{\xi\xi} = h_3(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta). \quad (2.1.6)$$

თუ სივრცის მოცემულ (x_0, y_0) ნერტილში სრულდება უტოლობა

$$b^2 - 4ac < 0, \quad (2.1.7)$$

მაშინ წრფივ კერძონარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას (2.1.1) ელიფსური ტიპის განტოლება ეწოდება.

ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების კანონიკური სახე შემდეგნაირად ჩაინერება:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = h_4(u_{\xi}, u_{\eta}, u, \xi, \eta). \quad (2.1.8)$$

მოვიყვანოთ ამ განტოლებების შესაბამისი ფიზიკური პროცესების აღმწერი განტოლებები:

1.ჰიპერბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებით აღინერება შემფოთებების გავრცელება სივრცეში და შესაბამისად ამ ტიპის განტოლებებს ტალღურ განტოლებებს უწოდებენ. მაგალითად x ღერძის გასწვრივ ტალღის გავრცელება აღინერება შემდეგი განტოლებით:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (2.1.9)$$

სადაც c - შემფოთების გავრცელების სიჩქარეა.

2.პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებით აღინერება ნივთიერებაში თბოგამტარობის პროცესი, რომლის შესაბამისი განტოლება შემდეგნაირად ჩაინერება:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.1.10)$$

სადაც λ - თბოგამტარობის კოეფიციენტი.

3.ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მაგალითია ე.წ. პუასონის განტოლება, რომელიც აღწერს მყარ სხეულებში სითბოს გავრცელების პროცესს. ეს პროცესი აღინერება შემდეგი განტოლებით:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (2.1.11)$$

სადაც $f(x, y)$ - სითბოს წყაროს წარმოადგენს.

ჰიპერბოლური, პარაბოლური და ელიფსური განტოლებებისათვის შესაბამისი კანონიკური სახით ჩასაწერად უნდა მივმართოთ ცვლადთა გარდაქმნას:

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \eta). \quad (2.1.12)$$

დავუშვათ, რომ (x, y) და (ξ, η) ცვლადებს შორის არსებობს ურთიერთცალხაზა შესაბამისობა, ანუ ცვლადთა გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნოლისაგან (გადაუგვარებელი გარდაქმნა)

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \quad (2.1.13)$$

კოორდინატთა (2.1.12) გარდაქმნის დროს (2.1.1) განტოლებებში შემავალი ყველა წარმოებული გამოითვლება რთული ფუნქციის დიფერენცირების წესით, ანუ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \xi_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \xi_{xx} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

ჩავსვათ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი მნიშვნელობები (2.1.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \dots = g(\xi, \eta), \quad (2.1.14.ა)$$

სადაც

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ B &= 2a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + 2c\xi_y\eta_y, \\ C &= a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned} \quad (2.1.14.ბ)$$

(2.1.14) განტოლების დისკრიმინანტისათვის მივიღებთ:

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2. \quad (121.15)$$

აქედან გამომდინარე, ცვლადთა ნებისმიერი გადაუგვარებელი გარდაქმნა არ ცვლის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ტიპს.

§2.2 ჰიპერბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

დავიყვანოთ ჰიპერბოლური კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება (2.1.3) კანონიკურ სახემდე. გადავიდეთ ξ და η ცვლადებზე ისე, რომ ისინი წარმოადგენდნენ $A = C = 0$ განტოლების ფესვებს. პირველ განტოლება $A = 0$ შემდეგნაირად ჩაინერება:

$$a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \quad (2.2.1)$$

გავყოთ (2.2.1) განტოლება $\xi_y \neq 0$ სიდიდეზე, მივიღებთ:

$$a \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + b \frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0. \quad (2.2.2)$$

ზედაპირზე $\xi(x, y) = const$, ამიტომ

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{dy}{dx}. \quad (2.2.3)$$

ჩავსვათ მიღებული (2.2.3) გამოსახულება (2.2.2) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.2.4)$$

$\xi(x, y) = const$ და $\eta(x, y) = const$ ზედაპირები განისაზღვრება (2.2.4) განტოლებიდან. ამგვარად ნაპოვნ ξ და η ფუნქციებს (2.1.1) კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებლები ეწოდებათ. სწორედ ეს ცვლადები უნდა შეირჩეს ჰიპერბოლური დიფერენციალური განტოლების პირველ კანონიკურ (მახასიათებელ) ფორმამდე დასაყვანად.

პირველი რიგის წარმოებულის შემცველი წევრების გამოსარიცხად საჭიროა უცნობი $u(\xi, \eta)$ ფუნქციის შეცვლა

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda \xi + \mu \eta} V(\xi, \eta),$$

ფუნქციით, სადაც $V(\xi, \eta)$ - ახლი უცნობი ფუნქციაა, λ და μ პარამეტრებია, რომლებიც დამატებითი პირობებით უნდა განისაზღვროს. უცნობი ფუნქციის (2.1.3) განტოლებაში ჩასმით λ და μ პარამეტრები შეიძლება შეირჩეს ისე, რომ განტოლებაში პირველი რიგის წარმოებულები გამოირიცხოს. ე.ი. საბოლოოდ მივიღებთ ჰიპერბოლური დიფერენციალური განტოლების შემდეგი სახით გარდაქმნილ ფორმას:

$$V_{\xi\eta} + f_1 V = g_1(\xi, \eta). \quad (2.2.5)$$

ზემოთ მოყვანილი თეორიული მასალის გასამყარებლად მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ, მოცემულია ტალღური განტოლება

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2.2.6)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (2.2.7)$$

შემოვიტანოთ მახასიათებელი ცვლადები $\xi = x + ct$ და $\eta = x - ct$ მივიღებთ:

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (2.2.8)$$

მიღებული განტოლების ამონახსნი, რომელსაც დალამბერის ამონახსნს უწოდებენ, შემდეგი სახით ჩაინერება:

$$u(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \quad (2.2.9)$$

\mathcal{F}_1 და \mathcal{F}_2 ფუნქციები უნდა ვიპოვოთ (2.2.7) საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x) + \mathcal{F}_2(x) &= f(x), \\ c\mathcal{F}_1'(x) - c\mathcal{F}_2'(x) &= g(x),\end{aligned}$$

ამის გათვალისწინებით (2.2.9) განტოლება შემდეგნაირად გადაინერება:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

ფუნქციის მახასიათებელი წირები გაივლიან (x_0, y_0) წერტილში. პირველი მახასიათებლის დახრის კუთხის ტანგენსი $1/c$ ტოლია, ხოლო მეორე მახასიათებლის დახრის კუთხის ტანგენსი კი $(-1/c)$. $u(x, t)$ ფუნქციის მნიშვნელობა (x_0, t_0) წერტილში დამოკიდებულია მხოლოდ საწყისი პირობებზე $x \in [x_0 + ct_0, x_0 - ct_0]$ ინტერვალში. (2.2.10) გამოსახულებაში პირველი შესაკრები აღწერს საწყისი მონაცემების გადატანას მახასიათებლის გასწვრივ, ხოლო მეორე შესაკრები საწყისი განაწილების წვლილს სასრულ შეკრულ ინტერვალზე.

(2.2.10) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ (x_0, t_0) წერტილში ამონახსნის მნიშვნელობაზე აღნიშნულ ინტერვალს გარეთ აღძრული შემფოთებები არავითარ ზეგავლენას არ ახდენს. შემფოთების გავრცელების სიჩქარე სასრულია. ამონახსნის ეს თვისება ახასიათებს ჰიპერბოლური ტიპის ყველა კერძონარმოებულებიან განტოლებას. ჰიპერბოლური განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება დროში (ან დროის შესაბამისი კოორდინატით) თანდათანობითი გადანაცვლების საშუალებით.

§2.3 პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების დისკრიმინანტი

$$b^2 - 4ac = 0,$$

შესაბამისად (2.2.4) განტოლება გადაინერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}. \quad (2.3.1)$$

(2.1.1) განტოლების (2.1.6) კანონიკურ სახემდე დასაყვანად მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $\xi = x - \lambda_1 y$, $\eta = x - \lambda_2 y$. კოეფიციენტი λ_1 განისაზღვრება (2.3.1) განტოლებიდან. პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი განტოლებებისათვის არსებობს გა-

ნტოლების მახასიათებლების მხოლოდ ერთი ოჯახი. კოეფიციენტად უნდა შეირჩეს ნებისმიერი ორჯერ დიფერენცირებადი $\eta = \psi(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც არ გამოისახება $\xi = \varphi(x, y)$ ფუნქციის საშუალებით. ეს მოთხოვნა ეკვივალენტურია განტოლების იაკობიანის ნოლისაგან განსხვავების პირობის

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = f(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0. \quad (2.3.2)$$

λ_2 კოეფიციენტის ასეთი შერჩევით ξ და η ცვლადებზე გადასვლისას მივიღებთ (2.1.6) კანონიკურ სახეს. დაბალი რიგის წარმოებულების გამოსარიცხად ჰიპერბოლური ტიპის განტოლების განხილვისას ჩატარებული პროცედურებით (2.1.6) კანონიკური ფორმა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$V_{\eta\eta} + d_2 V_\xi = g_2(\xi, \eta). \quad (2.3.3)$$

პარაბოლური განტოლებები ჩვეულებრივ აღწერენ დიფუზიურ პროცესებს. ეს ამოცანები წარმოადგენენ არასტაციონარულ ამოცანებს რმელთა ამონახსნი უნდა მოიძებნოს მოცემული სასაზღვრო და საწყისი პირობების გათვალისწინებით. პარაბოლური ტიპის განტოლებებისაგან განსხვავებით ამონახსნის მნიშვნელობაზე ზეგავლენის არე არ არის შეზღუდული. პარაბოლური განტოლების ამონახსნი დროის ნებისმიერ t მომენტში დამოკიდებულია გამოთვლების წარმოების მთელ არეში მოცემული პარამეტრებისაგან დროის წინა მომენტში და სასაზღვრო სასაზღვრო პირობებისაგან მოცემული არის საზღვარზე.

პარაბოლური ტიპის ამოცანების გადაჭრა განვიხილოთ შემდეგი პარაბოლური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებით აღწერილი ამოცანის მაგალითზე:

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x. \quad (2.3.4)$$

კოეფიციენტებისა და დეტერმინანტისათვის გვექნება:

$$a = x^2, b = -2xy, c = y^2, g(x, y), \Delta = (-2xy)^2 - 4x^2 y^2 = 0$$

და განტოლება პარაბოლურია x და y -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მახასიათებელი განტოლება

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{2x^2} = -\frac{y}{x}, \text{ ან } \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \quad (2.3.5)$$

არის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება განცალკეადი ცვლადებით. მისი ამონახსნებია

$$\ln y + \ln x = C.$$

რადგან ამოცანა აღიწერება პარაბოლური დიფერენციალური განტოლებებით, არსებობს მახასიათებელ წირთა ერთადერთი ოჯახი, რომლის საშუალებითაც განიმარტება ახალი ცვლადი ξ , ხოლო η ცვლადი შეირჩევა ისე რომ ის აკმაყოფილებდეს ერთად-

ერთ პირობას: ცვლადთა გარდაქმნის იაკობიანი არ გახდეს ნოლის ტოლი:

$$\xi = \ln y + \ln x, \quad \eta = x, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -y^{-1} \neq 0$$

და ξ და η ცვლადების წარმოებულებისათვის მივიღებთ:

$$\xi_x = x^{-1}, \quad \xi_y = y^{-1}, \quad \xi_{xx} = -x^{-2}, \quad \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = -y^{-2},$$

$$\eta_x = 1, \quad \eta_y = \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0.$$

ზემოთ მოყვანილი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შეტანით კოეფიციენტების გამოსათვლელ (2.1.14.ბ) გამოსახულებაში და იმის გათვალისწინებით, რომ $x = \eta$, $A = B = 0$ მივიღებთ (2.1.6) $\eta^2 u_{\eta\eta} = u_\xi + e^\eta$ პირველ კანონიკურ ფორმას ან η^2 კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{\eta^2} u_\xi + \frac{1}{\eta^2} e^\eta. \quad (2.3.6)$$

§2.4 ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების დისკრიმინანტი (2.1.7) უარყოფითი სიდიდეა, რაც იმას ნიშნავს რომ, (2.1.1) განტოლების ფესვები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\lambda_{1,2} = \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad (2.4.1)$$

ე.ი განტოლების მახასიათებლის ორივე ოჯახი კომპლექსურმნიშვნელობიანია.

ელიფსური განტოლების (2.1.8) კანონიკურ სახემდე დასაყვანად ცვლადთა გარდაქმნა მოვახდინოთ შემდეგი სახით:

$$y - \lambda_1 x = \xi + i\eta, \quad y - \lambda_2 = \xi - i\eta. \quad (2.4.2)$$

u ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$u = \omega_{\eta\eta} e^{-(\alpha\xi + \beta\eta)}. \quad (2.4.3)$$

ჩავსვათ (2.4.2) და (2.4.3) გამოსახულებები (2.1.1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta} + g(\omega) = f(\xi, \eta). \quad (2.4.4)$$

მიღებული განტოლება (2.1.8) კანონიკური ფორმის ანალოგიურია. დაბალი რიგის წარმოებულების გამორიცხვის შემდეგ (2.4.4) კანონიკური ფორმა შემდეგი სახით გადაინერება:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + f_3 V = g_3(\xi, \eta). \quad (2.4.5)$$

არსებობს (2.4.4) კანონიკურ ფორმაზე დაყვანის ალტერნატიული მეთოდი რომელიც არ მიმართავს კომპლექსურ ცვლადებს.

თუ (2.1.1) განტოლების a, b, c, \dots კოეფიციენტები არიან მუდმივი სიდიდეები განსახილველ არეზე, ეს განტოლება შესაძლებელია განვიხილოთ მთელს \mathbb{R}^2 სიბრტყეზე. ზემოთ მიღებული კანონიკური ფორმები ჰიპერბოლური, პარაბოლური და ელიფსური განტოლებებისათვის სამართლიანია მთელ \mathbb{R}^2 სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში ცვლადთა ახალი გარდაქმნით შესაძლებელია კანონიკური ფორმის კიდევ უფრო გამარტივება.

კერძონარმოებულებიანი ელიფსური განტოლებები პრინციპულად განსხვავდება ანალოგიური ჰიპერბოლური და პარაბოლური განტოლებებისაგან. ელიფსური განტოლებებისათვის შეშფოთება, რომელიც აღიძვრება განსახილველი სივრცის ნებისმიერ ნერტილში გავლენას ახდენს გამოთვლითი არის ნებისმიერ ნერტილზე. ანუ ელიფსური განტოლებების რიცხვითი ამონახსნების ძიებისას აუცილებელია გლობალური არის განხილვა, რომელშიც შეისწავლება ელიფსური განტოლებებით აღწერილი პროცესი, მაშინ როდესაც კერძონარმოებულებიანი ჰიპერბოლური და პარაბოლური განტოლებებით აღწერილი პროცესის ამონახსნის ძიება შესაძლებელია დროში გადანაცვლების მეთოდით სანყისი პირობების გათვალისწინებით. მათემატიკური განტოლებების ასეთი თავისებურებები განაპირობებს კონკრეტული პროცესების შესაბამისი განტოლებებისათვის კონკრეტული მოხერხებული მეთოდის შერჩევას.

განვიხილოთ ელიფსური განტოლების კანონიკურ ფორმამდე დაყვანის მაგალითი. დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u \tag{2.4.6}$$

გვექნება:

$$a = e^x, \quad b = 0, \quad c = e^y, \quad \Delta = 0^2 - 4e^x e^y < 0$$

და ამ სახით მოცემული განტოლება ელიფსურია ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.

მახასიათებელი განტოლებები იქნება:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm i\sqrt{4e^x e^y}}{2e^x} = \pm i e^{\frac{1}{2}(y-x)} \quad \text{ან} \quad e^{-\frac{1}{2}y} dy = e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

არიან გაცალკეებადი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები და მათი ამონახსნი იწერება ცხადად

$$-2e^{-\frac{1}{2}y} - 2e^{-\frac{1}{2}x} = cost, \quad -2e^{-\frac{1}{2}y} + 2e^{-\frac{1}{2}x} = cost. \tag{2.4.7}$$

პირველი მათგანი წარმოადგენს ჰიპერბოლებიდ ოჯახს, ხოლო მეორე წრეწირების ოჯახს. გამოვიყენოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა:

$$\xi = -2e^{-\frac{1}{2}y} - 2e^{-\frac{1}{2}x} \text{ და } \eta = -2e^{-\frac{1}{2}y} + 2e^{-\frac{1}{2}x} \quad (2.4.8)$$

და მეორე ეტაპზე განვსაზღვრავთ ახალ ცვლადებს როგორც ξ და η ცვლადების ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს

$$\alpha = -2e^{-\frac{1}{2}y}, \quad \beta = -2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

მათი ξ და η წარმოებულებისათვის მივიღებთ:

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = e^{-\frac{1}{2}y}, \quad \alpha_{xx} = 0, \quad \alpha_{xy} = 0, \quad \alpha_{yy} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y},$$

$$\beta_x = e^{-\frac{1}{2}x}, \quad \beta_y = 0, \quad \beta_{xx} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, \quad \beta_{xy} = 0, \quad \beta_{yy} = 0.$$

შევნიშნოთ რომ გამოთვლების ორჯერ ჩატარების ნაცვლად (2.1.14.ბ) ფორმულები α და β ცვლადებისათვის სამართლიანია ისევე, როგორც ξ და η ცვლადებისათვის. ამის გათვალისწინებით A , B და C კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ:

$$A = a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\beta_x + c\beta_x^2 = 0 + 0 + e^y \left(e^{-\frac{1}{2}y} \right)^2 = 1$$

$$B = 2a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + 2c\alpha_y\beta_y = 0$$

$$C = a\beta_y^2 + 2b\alpha_y\beta_y + c\beta_y^2 = e^x \left(e^{-\frac{1}{2}x} \right)^2 + 0 + 0 = 1$$

და პირველი რიგის წარმოებულებისა და u ფუნქციის კოეფიციენტების გამოთვლის, შემდეგ კი (2.1.14.ა) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ ელიფსური განტოლების შესაბამის კანონიკურ ფორმას:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{\alpha}{4}u_\alpha + \frac{\beta}{4}u_\beta - u = 0. \quad (2.4.9)$$

§2.5 კორექტულად დასმული ამოცანები

კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას სანყისი მონაცემებით ეწოდება კორექტულად დასმული თუ ის აკმაყოფილებს სამ პირობას:

1. თუ არსებობს ამონახსნი ფუნქციათა რაიმე \mathbb{X}_1 კლასში.
2. თუ ამონახსნი ერთადერთია ფუნქციათა რომელიღაც \mathbb{X}_2 კლასში.
3. თუ ამონახსნი უწყვეტად დამოკიდებულია ამოცანის საწყისი და სასაზღვრო პირობებისაგან, თავისუფალი წევრებისაგან, განტოლების კოეფიციენტებისაგან და ა.შ.

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისთვის არსებობს სამი ტიპის სასაზღვრო პირობა:

ღირიხლეს ამოცანა. საჭიროა ამოცანის ამონახსნის პოვნა სივრცის რაიმე შემოსაზღვრულ Σ უბანში, თუ ამ სივრცის Γ საზღვარზე მოცემულია საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა

$$f|_{\Gamma} = \varphi. \quad (2.5.1)$$

ნეიმანის ამოცანა. საჭიროა ამოცანის ამონახსნის პოვნა სივრცის რაიმე შემოსაზღვრულ Σ უბანში, თუ მის საზღვარზე მოცემულია არა თვითონ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა, არამედ საძიებელი ფუნქციის ნარმოებული Γ საზღვარის გარე ნორმალის გასწვრივ

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g. \quad (2.5.2)$$

შერეული სასაზღვრო ამოცანა. ხშირად ასეთ ამოცანებს მესამე ტიპის სასაზღვრო ამოცანას უწოდებენ და მის სასაზღვრო პირობას შემდეგი სახე აქვს:

$$\left[a_1 \frac{\partial f}{\partial n} + a_2 f \right]_{\Gamma} = h. \quad (2.5.3)$$

არაკორექტულად დასმული ენოდება ამოცანებს:

1. თუ ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი საწყისი მონაცემებისათვის.
2. თუ ამოცანას გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსნი.
3. თუ ამოცანის ამოხსნისა და საწყისი მონაცემებისათვის შეუძლებელია შეირჩეს ისეთი პირობები, რომ ამ პირობების ფარგლებში ამონახსნი უწყვეტად იქნება დამოკიდებული საწყის პირობებზე.

ლაპლასის განტოლებისთვის მესამე მოთხოვნას ამონახსნის საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულების შესახებ აკმაყოფილებს არაკორექტულად დასმული ამოცანა:

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

სასაზღვრო პირობით

$$u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad n > 0.$$

ზოგიერთ შემთხვევაში დგება არაკორექტულად დასმული ამოცანების განხილვის აუცილებლობა, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია გარკვეულ სპეციფიურ შემთხვევებში, მაგრამ ამ ამოცანების ამოხსნის თავისებურებებს ჩვენ არ შევხებით, რამეთუ ეს სცდება ნაშრომში განხილული ფიზიკური პროცესებისათვის დამახასიათებელი განტოლებების ფარგლებს.

თავი 3. პროგრამული პაკეტი MATLAB-ის ელემენტები. ფუნქციები და ბრძანებები MATLAB-ში

MATLAB-ი ერთერთი მძლავრი კომპიუტერული სისტემაა, რომელიც განკუთვნილია მათემატიკური, ფიზიკური, ინჟინერული და ეკონომიკური ამოცანების ამოსახსნელად.

ამ თავში განხილულია MATLAB-ის ელემენტარული ფუნქციები, რომლებიც გამოიყენება გამოთვლებისა და მონაცემთა ვიზუალიზაციისათვის. განხილულია ციკლები და ციკლის ოპერატორები, რომლებიც აქტიურად გამოიყენება ფიზიკური ამოცანების ამოსახსნელად. ნაჩვენებია, რომ პროგრამული პაკეტი MATLAB-ი იძლევა ფიზიკური პროცესების და განსაკუთრებით გარდამავალი ფიზიკური პროცესების კომპიუტერული მოდელირების კარგ შესაძლებლობას.

MATLAB-ი განკუთვნილია ასევე შემდეგი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად:

- ფორმულებით მარტივი გამოთვლები;
- არანრფივი განტოლებების და სისტემების ამოხსნა;
- წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნა;
- ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნა;
- დიფერენცირება და ინტეგრირება;
- ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების ამოცანა;
- ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოხსნა;
- კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა.

MATLAB-ს გააჩნია ე.წ. ჩაშენებული ფუნქციებისა და ოპერატორების უზარმაზარი რაოდენობა. ასევე შესაძლებელია მომხმარებლის მიერ ახალი ფუნქციებისა და ბრძანებების შექმნა. ამასთან MATLAB-ს გააჩნია საკმაოდ მძლავრი პროგრამირების საკუთარი ენა, რომელიც იძლევა ახალი მათემატიკური და ფიზიკური ამოცანების ამოხსნის შესაძლებლობას.

§3.1 ელემენტარული მათემატიკური გამოთვლები

MATLAB-ში მარტივი მათემატიკური გამოთვლების ჩასატარებლად გამოიყენება შემდეგი ოპერატორები:

- + შეკრება;
- - გამოკლება;
- * გამრავლება;
- / გაყოფა მარცხნიდან მარჯვნივ;
- \ გაყოფა მარჯვნიდან მარცხნივ;
- ^ ხარისხში აყვანა.

მათემატიკური გამოსახულების გამოსათვლელად საჭიროა შესაბამისი გამოსახულების ჩანერით ბრძანებების სტრიქონში და *Enter* კლავიშზე დაჭერით. მიღებული მნიშვნელობა გამოისახება ეკრანზე, როგორც ეს ნაჩვენებია მაგალით 3.1.1-ზე.

მაგალითი 3.1.1.

```
>> 2.35*(1.8-0.25)+1.34^2/3.12  
ans =  
4.2180
```

თუ გამოსათვლელი გამოსახულება ძალიან დიდია მაშინ *Enter* კლავიშზე დაჭერამდე უნდა ავკრიბოთ სამი ან მეტი წერტილი და შერმდეგ *Enter* კლავიშზე დაჭერით გავაგრძელებთ გამოსახულების აკრებას ახალ სტრიქონზე, როგორც ესაა მოცემული მაგალით 3.1.2-ზე.

მაგალითი 3.1.2.

```
>> 1+2+3+4+5+6+7....  
+8+9+10+11+12+13+14  
ans =  
105
```

ბრძანების ბოლოს „;“ სიმბოლოს გამოყენებისა ეკრანზე მონაცემი არ გამოისახება, სრულდება მოქმედება და მოქმედება გადადის შემდეგ სტრიქონზე.

მაგალითი 3.1.3.

```
>> 1+2;  
>> 1+2  
ans =  
3
```

MATLAB-ში შესაძლებელია ნებისმიერი ცვლადის განსაზღვრა და შემდეგ მისი გამოყენება გამოთვლებში. ნებისმიერი ცვლადი ფორმულებში ან გამოსახულებებში მის გამოყენებამდე უნდა განსაზღვროთ და შემდეგ გამოვიყენოთ. ცვლადი განსაზღვრავად საჭიროა ამ ცვლადის აკრება და შემდეგ მინიჭების ოპერატორის „=“ გამოყენებით და მისი მნიშვნელობის აკრებით ცვლადის განსაზღვრა. აქ ტოლობის ნიშანი „=“ წარმოადგენს მინიჭების ოპერატორს და ის ისეთივეა, როგორცაა სხვა პროგრამირების ენების შემთხვევაში. ცვლადის სახელი არ უნდა ემთხვეოდეს პროგრამაში ჩაშენებულ პროცედურას, ოპერატორს, ფუნქციას და შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ 19-მდე სიმბოლოს. სისტემა განასხვავებს დიდ და პატარა ასოებს ცვლადის დასახელებაში, მაგალითად *abc*, *Abc*, *aBc*, *abC* და *ABC* სხვადასხვა ცვლადებია.

მინიჭების ოპერატორის მარჯვენა მხარეს შეიძლება გვექონდეს რიცხვი, არითმეტიკული გამოსახულება, სიმბოლოების სტრიქონი ან სიმბოლური გამოსახულება. აქვე აღვნიშნოთ, რომ სიმბოლოების სტრიქონის ან სიმბოლური გამოსახულების შემთხვევაში მოცემული გამოსახულება უნდა ჩავსვათ ერთსიმბოლოიან ბრჭყალებში.

მინიჭების ოპერატორის გამოყენების რამდენიმე შემთხვევა მოყვანილია მაგალით 3.1.4-ში. ყარადღება უნდა მიექცეს იმას, რომ თუ სტრიქონის ბოლოს არ არის დასმული „;“ სიმბოლო მაშინ ეკრანზე გამოდის ცვლადის სიმბოლო და მისი მნიშვნელობა. თუ „;“ სიმბოლო დასმულია სტრიქონის ბოლოს, მაშინ ცვლადის მნიშვნელობა გამოითვლება და მისი მნიშვნელობა ჩაინერება კომპიუტერის მენსიერებაში და მართვა გადაეცემა შემდეგ სტრიქონს.

მაგალითი 3.1.4.

```
>> a=1.3
a=
1.3000
>> b=-2.6
b=
-2.6000
>> x=1;y=2;
>> z=(x+y)-a/b
z=
2.5000
>>%-----
>>% შეცდომის შეტყობინება, ცვლადი c არ არის
>>% განსაზღვრული
>> c+2/3
```

```

??? Undefined function or variable 'c'.
>>%-----
>>% სიმბოლური ცვლადის განსაზღვრა
>> c='a'
c =
a
>>%-----
>>% სიმბოლოების სტრიქონის განსაზღვრა
>> h='ფუნქციის გრაფიკი'
h =
ფუნქციის გრაფიკი

```

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ თუ ბრძანებაში არ ფიგურირებს მინიჭების ოპერატორი, მაშინ გამოთვლების შედეგი მიენიჭება სიმბოლურ ცვლადს *ans*, ამასთან მიჭებული მნიშვნელობა შესაძლებელია გამოვიყენოთ შემდგომ გამოთვლებში. აქვე უნდა გავითვალისწინოთ ის, რომ სიმბოლური ცვლადის მნიშვნელობა იცვლება მინიჭების ოპერატორის ყოველი გამოყენებლობის შემდეგ. სიმბოლური ცვლადის *ans* გამოყენების მაგალითები მოყვანილია მაგალით 3.1.5-ში.

მაგალითი 3.1.5.

```

>> 25.7-3.14
ans =
22.5600
>>% სისტემური ცვლადის მნიშვნელობა 22.5600-ის ტოლია
>> 2*ans
ans =
45.1200
>>% სისტემური ცვლადის მნიშვნელობა 45.1200-ის ტოლია
>> x=ans^0.3
x =
3.1355
>>% სისტემური ცვლადის მნიშვნელობა 45.1200-ის ტოლია
>> ans
ans =
45.1200

```

ans ცვლადის გარდა *MATLAB*-ში გამოიყენება სხვა სისტემური ცვლადებიც:

- *ans* - მინიჭების ოპერატორის გარეშე ბოლო ოპერაციის შედეგი;
- *i,j* - წარმოსახვითი ერთიანი $\sqrt{-1}$;
- *pi* - π მნიშვნელობა (3.1415922653589793);
- *inf* - ∞ -ის მანქანური სიმბოლო;
- *NaN* - განუსაზღვრელი შედეგი (0/0, ∞/∞ , 1^∞ და სხვ.);
- *realmin* - უმცირესი რიცხვი (2.2251e-308);
- *realmax* - უმცირესი რიცხვი (1.7977e+308);

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ცვლადი შეიძლება გამოვიყენოთ მათემატიკურ გამოსახულებებში. ყველა ცვლადს *MATLAB*-ში გააჩნია თავისი ადგილი მეხსიერებაში, რომელსაც სამუშაო სივრცე *Workspase* ეწოდება. ასევე შესაძლებელია მეხსიერების განმენდა ზედმეტი მონაცემებისაგან. ამისათვის გამოვიყენება შემდეგი ბრძანება:

```
clear var1 [, var2, ..., varN]
```

ამ ბრძანების გამოყენების მაგალითი მოყვანილია ქვემოთ.

მაგალითი 3.1.6.

```
>>% x და y ცვლადების განსაზღვრა
>> x=3; y=-1;
>>% x ცვლადის მნიშვნელობის გაუქმება
>> clear x
>>% x ცვლადი არ არის განსაზღვრული
>> x
??? Undefined function or variable 'x'.
>>% y ცვლადი განსაზღვრულია
>> y
y =
-1
```

§3.2 ფუნქციები MATLAB-ში

პროგრამულ პაკეტ *MATLAB*-ში გამოყენებული ყველა ფუნქცია შეგვიძლია დავაჯგუფოთ ორ კლასად:

- ჩაშენებული ფუნქციები;
- მომხმარებლის მიერ განსაზღვრული ფუნქციები;

ზოგადად *MATLAB*-ში ფუნქციებისადმი მიმართვა შემდეგნაირია:

$[name1, name2, \dots] = fun(var1 [,var2, \dots])$,

ამასთან

- *namr1, name2, ...* - ცვლადების სახელების სიაა, რომლებშიც ჩაინერება ფუნქციის მუშაობის შედეგები. თუ ეს ჩამონათვალი არ ფიგურირებს, მაშინ სისტემურ *ans* ცვლადს მიენიჭება პირველი გამოთვლილი შედეგის მნიშვნელობა;
- *fun* - ფუნქციის სახელია;
- *var1, var2, ...* - ფუნქციის არგუმენტების ჩამონათვალია; განვიხილოთ ელემენტარული ჩამენებული ფუნქციები, რომლებიც გამოიყენება *MATLAB*-ში:

ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები:

ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები. ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები მოცემულია ცხრილი 3.1-ში

ცხრილი 3.1. *MATLAB*-ის ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები

ფუნქცია	ფუნქციის აღწერა
ტრიგონომეტრული ფუნქციები	
<i>sin(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის სინუსი
<i>cos(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის კოსინუსი
<i>tan(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ტანგენსი
<i>cot(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის კოტანგენსი
<i>sec(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის სეკანსი
<i>csc(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის კოსეკანსი
<i>asin(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკსინუსი
<i>acos(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკკოსინუსი
<i>atan(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკტანგენსი
<i>acot(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკკოტანგენსი
<i>asec(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკსეკანსი
<i>acsc(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის არკკოსეკანსი
ჰიპერბოლური ფუნქციები	
<i>sinh(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური სინუსი
<i>cosh(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური კოსინუსი
<i>tanh(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური ტანგენსი
<i>coth(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური კოტანგენსი
<i>sech(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური სეკანსი
<i>csch(x)</i>	<i>x</i> რიცხვის ჰიპერბოლური კოსეკანსი

ექსპოტენციური ფუნქციები

$exp(x)$	x რიცხვის ექსპონენტა
$log(x)$	x რიცხვის ლოგარითმი

მთელირიცხვიანი ფუნქციები

$fin(x)$	x რიცხვის დამრგვალება ნოლის მხარეს უახლოეს მთელამდე
$floor(x)$	x რიცხვის დამრგვალება უახლოეს მთელამდე $-\infty$ - კენ
$ceil(x)$	x რიცხვის დამრგვალება უახლოეს მთელამდე $+\infty$ - კენ
$round(x)$	x რიცხვის ჩვეულებრივი დამრგვალება უახლოეს მთელამდე
$rem(x,y)$	x/y ფარდობის ნაშთის გამოთვლა
$sign(x)$	x რიცხვის სიგნუმ-ფუნქცია, $0, x=0$; $-1, x<0$; $1, x>0$;

სხვა ფუნქციები

$sqrt(x)$	კვადრატული ფესვი x რიცხვიდან
$abs(x)$	x რიცხვის მოდული
$log10(x)$	x რიცხვის ათობითი ლოგარითმი
$log2(x)$	x რიცხვის ორობითი ლოგარითმი
$pow2(x)$	რიცხვი ორის აყვანა x ხარისხში
$gcd(x, y)$	x და y რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი
$lcm(x, y)$	x და y რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი
$rats(x)$	x რიცხვის წარმოდგენა რაციონალური წილადის სახით

კომპლექსური რიცხვები. კომპლექსური არგუმენტის ფუნქციები. წარმოდგენილი მათემატიკური ფუნქციების უმრავლესობა ითვალისწინებს კომპლექსურ არგუმენტთან მუშაობას. ამიტომ განვიხილოთ დეტალურად *MATLAB*-ში კომპლექსური არითმეტიკის რეალიზაცია. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ წარმოსახვითი $\sqrt{-1}$ ერთეულის აღსანიშნავად გამოიყენება ორი სიდიდე - i და j , ამიტომ კომპლექსური რიცხვის შეყვანა ხდება შემდეგ ფორმატში:

მაგალითი 3.2.1.

```
>> 7+i*2
ans =
7.0000+2.0000i
>> -5+i
ans =
-5.0000+1.0000i
```

გარდა ზემოთ მოყვანილი მაგალითისა კომპლექსურ რიცხვებზე გამოიყენება ელემენტარული მათემატიკური ოპერაციები: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა მარჯვნიდან და მარცხნიდან და ახარისხება (მაგალითი 3.2.2)

მაგალითი 3.2.2.

```
>>a=2+3*i;b=-3+2*i;  
>>(a+b)^2/(a-b)*(2-a)  
ans =  
-3.000 + 15.0000i
```

კომპლექსურ რიცხვებთან სამუშაო ფუნქციები მოცემულია ცხრილი 3.2-ში

ცხრილი 3.2. MATLAB-ის კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები

ფუნქცია	ფუნქციის აღწერა
<i>კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები</i>	
<i>real(z)</i>	ეკრანზე გამოაქვს z რიცხვის ნამდვილი ნაწილი
<i>imag(z)</i>	ეკრანზე გამოაქვს z რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი
<i>angle(z)</i>	გამოთვლის z რიცხვის შესაბამის მნიშვნელობას რადიანებში
<i>conj(z)</i>	გამოაქვს z კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი

3.2 ცხრილში მოყვანილი ფუნქციების გამოყენების მაგალიტები მოყვანილია ქვემოთ:

მაგალითი 3.2.3.

```
>>a=2+3*I;  
>>real (a)  
ans =  
2  
>>imag (a)  
ans =  
3  
>>angle (a)  
ans =  
0.9828  
>>conj (a)  
ans =  
2.0000 - 3.0000i
```

მაგალითი 3.2.4.

```
>>x=1.3 + 0.1*i  
>>sin(x)  
ans =
```

```

0.9684 + 0.0268i
>>exp (x)
ans =
3.6510 + 0.3663i
>>sqrt (-2)
ans =
0 + 1.4142i

```

§3.4 პარაგრაფში განვიხილავთ მომხმარებლის მიერ განსაზღვრული ფუნქციებს, რისთვისაც დაგჭირდება ე.წ. m -ფაილები, ამიტომ მომდევნო პარაგრაფში განვიხილოთ m -ფაილების შექმნა, რედაქტირება და გამართვა.

§3.3 m -ფაილების შექმნა რედაქტირება და გამართვა

ამ პარაგრაფში ვისაუბრებთ *MATLAB* პროგრამების შექმნაზე. არსებობს *MATLAB*-ის პროგრამული მოდულების ორი სახეობა: სკრიპტ ფაილი და ფუნქცია. ასეთ ფაილებს ეწოდება m -ფაილები, რადგან მათი გაფართოება არის „. m “.

სკრიპტ ფაილი წარმოადგენს ტექსტურ ფაილში განლაგებულ *MATLAB*-ის ბრძანებათა ჯგუფს. *MATLAB*-დან შეგვიძლია სკრიპტ ფაილის გამოძახება, გახსნა და მასში ჩანერილი ბრძანებების თანმიმდევრულად შესრულება ზუსტად ისე, როგორც ის ასრულებს სტრიქონში შეტანილ ბრძანებების კოდს. ე.ი. *MATLAB*-ი კითხულობს სკრიპტ ფაილში მოთავსებულ ბრძანებებს და თანმიმდევრულად ასრულებს მათ. პროგრამული ალგორითმის მრავალჯერადად გამოყენების საჭიროების შემთხვევაში მოუხერხებელია ბრძანებათა თანმიმდევრობის ხშირად აკრეფა სამუშაო არეში, ამიტომ ამ შემთხვევაში ჯობს სკრიპტ m -ფაილის ან ფუნქციის გამოყენება.

m -ფაილების მომზადებას, რედაქტირებას და გამართვას ემსახურება სპეციალური რედაქტორი, რომლის გამოძახება ხდება მთავარი მენიუს ბრძანებით *File\New\m-file*. სკრიპტ ფაილის გაფორმება დასაშვებია ნებისმიერ ტექსტურ რედაქტორში, თუმცა *MATLAB*-ი ალჭურვილია საკუთარი რედაქტორით *Editor*, რომლის გამოძახება ასევე შესაძებელია ბრძანებათა სტრიქონში *Edit* ბრძანების შეტანით.

გახსნილი m -ფაილი შესრულდება, თუ რედაქტორის ფანჯარაში ავირჩევთ *Debug\Save File and Run* ან უბრალოდ აკრეფთ m -ფაილის სახელს ბრძანების სახით *MATLAB*-ის ბრძანებათა სტრიქონში. *Editor* რედაქტორი სხვა რედაქტორებისაგან განსხვავებით, შეუძლია პროგრამის სინტაქსის შემოწმება, ცვლდების, კომენტარების, ბრძანებების და სისტემის საკვანძო სიტყვების სხვადასხვა ფერის შრიფტით გამოტანა და ა.შ.

m -ფაილის შექმნის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ კვადრატული განტოლების $2x^2 + 5x - 3 = 0$ ფესვების პოვნის პროგრამა:

მაგალითი 3.3.1.

```
%test_1
a=2;b=5;c=-5;
x=-b/(2*a);
y=sqrt(b^2-4*a*c)/2/a;
f1=x+y
f2=x-y
```

მივაქციოთ ყურადღება პირველ სტრიქონს, როგორც ვხედავთ პროცენტის % ნიშნის შემდეგ იწერება კომენტარი, რომელიც ჩვენ სხვა მაგალითებშიც გამოვიყენეთ. *MATLAB*-ი ასეთ სტრიქონებს არ ასრულებს, ახდენს მათ იგნორირებას. მათი დანიშნულებაა პროგრამის შესახებ ინფორმაციის დაფიქსირება და მომხმარებლისათვის კოდის აღწერის გასაადვილებლად ინსტრუქციების მითითება. ზემოთ მოყვანილი მაგალითის კომენტარებში ჩანწერილია სკრიპტის სახელი, რომლითაც მისი დამახსოვრება მოხდება *MATLAB*-ის რომელიმე დირექტორიაში, ვთქვათ, ბრძანებით *File\Save as\My Documenta\Matlab\test_1*. *MATLAB*-ი ინახავს ფაილს „.m“ გაფართოებით: *test_1.m*. პროგრამის გასაშვებად *Command Window*-ში უნდა შევიტანოთ *test_1* (გაფართოების გარეშე) და დავაჭიროთ კლავიშზე *Enter*.

სკრიპტ ფაილის სახელის შერჩევის დროს უნდა გავითვალისწინოთ რომ:

- სახელი უნდა იწყებოდეს ასოთი და შეიძლება შეიცავდეს ციფრებსა და ქვედა ტირებს;
- არ შეიძლება ფაილსა და მასში შემავალ ცვლადს ერთი და იგივე სახელი მიენიჭოს, რადგან *MATLAB*-ი ვერ შეასრულებს სკრიპტს ერთზე მეტჯერ, თუ ყოველი შესრულების შემდეგ ცვლადი არ წაიშლება. განმეორებითი მიმა-

რთვა ფაილის სახელის ჩაბეჭდვით ბრძანებათა სტრიქონში გამოიწვევს ამ ცვლადის მნიშვნელობის ეკრანზე გამოტანას და არა ამ ფაილის შესრულებას. *MATLAB*-ი ეძებს მითითებული სახელის მქონე სკრიპტს მხოლოდ მას შემდეგ, რაც ამ სახელის ცვლადი არ მოიძებნება ცვლადების *workspace* დირექტორიაში. ცვლადის პოვნის შემთხვევაში ის უბრალოდ წყვეტს შემდგომ ძიებას;

- არ შეიძლება შექმნილ ფაილსა და *MATLAB*-ის ბრძანებას ან ფუნქციას ერთი და იგივე სახელი მიენიჭოს. სასურველია წინასწარ შეამოწმოთ, არსებობს თუ არა მსგავსი დასახელების ფაილი, ფუნქცია ან ბრძანება პროგრამული პაკეტის *MATLAB*-ის რომელიმე დირექტორიაში. ამისათვის გამოიყენება ბრძანება *which*. მაგალითად შემოწმოთ არსებობს თუ არა სახელი *test_1* რომელიმე დირექტორიაში:

მაგალითი 3.3.2.

```
>>which test_1
test_1' not found.
```

რადგან ასეთი დასახელების ფაილი, ფუნქცია ან ბრძანება არ არსებობს ჩვენ შეგვიძლია ჩვენი ფაილის *test_1* სახელით დამახსოვრება;

- სკრიპტ ფაილის შესრულების შედეგად შექმნილი ცვლადები განსაზღვრულია და ინახება *workspace* დირექტორიაში. თუ სკრიპტ ფაილის შესრულების შემდეგ შევიტანთ ბრძანებას *who* ან *whos*, ეკრანზე გამოჩნდება ინფორმაცია ამ ცვლადების სახელების, ტიპისა და ზომის შესახებ;
- ბრძანება *tipe*-ს გამოყენების შემთხვევაში შესაძლებელია ბრძანებათა ფანჯარაში შესაბამისი ფაილის გამოტანა, მაგალითად:

მაგალითი 3.3.3.

```
>> tipe test_1
% test_1
a=2;b=5;c=-5;
x=-b/(2*a);
y=sqrt(b^2-4*a*c)/2/a;
f1=x+y
f2=x-y
```

ცნობილია, რომ მიუხედავად პროგრამისტის ან მომხმარებლის კვალიფიკაციისა პროგრამის პირველსავე გაშვებაზე პროგრამის კორექტული შესრულება პრაქტიკულად შეუძლებელია. ჩვეულებრივ საჭიროა პროგრამის კორექტირება და გამართვა, რაც განპირობებულია სკრიპტ ფაილში, ბრძანებებში ან ფუნქციებში გაპარული შეცდომებით. ეს შეცდომები ძირითადად შემდეგი ხასიათისაა:

- სინტაქსური შეცდომები;
- ლოგიკური შეცდომები;
- შესრულების შეცდომები;

განვიხილოთ ეს შეცდომები და შეცდომების გამართვის მაგალითები:

სინტაქსური შეცდომები. შეცდომების ყველაზე გავრცელებული ტიპია სინტაქსური ანუ ბეჭდვითი შეცდომები. ამგვარ შეცდომებს ფატალური შეცდომები ეწოდება, იმიტომ რომ ასეთი შეცდომის მიგნებისას *MATLAB*-ი წყვეტს მუშაობას და ეკრანზე გამოდის შეცდომის შეტყობინება. ჩვენი ამოცანაა გავიაზროთ ეს შეცდომა და შევასწოროთ პროგრამული კოდი. ამ პროცესს პროგრამის გამართვა ეწოდება. მოვიყვანოთ სინტაქსური შეცდომის მაგალითები:

მაგალითი 3.3.4.

```
>>sin(2x)
??? sin(2x)
```

Error: Unexpected Matlab expression.

გამოტოვებულია ოპერაციის ნიშანი „*“;

მაგალითი 3.3.5.

```
>>epx(5)
??? Undefined function or method 'epx' for input arguments of
type 'double'.
```

არასწორადაა მითითებული *exp* ფუნქციის სახელი;

მაგალითი 3.3.6.

```
>>x=5(3-1)
??? x=5(3-1)
```

Error: Unbalanced or unexpected parenthesis or bracket.

გამოტოვებულია გამრავლების ოპერაციის ნიშანი „*“;

ლოგიკური შეცდომები. ლოგიკური ტიპის შეცდომები არ იწვევს პროგრამის შესრულების შეწყვეტას, სკრიპტი სრულდება კორექტულად, მაგრამ მიღებული შედეგი მოულოდნელია. ასეთ შემთხვე-

ვებში შეცდომაზე ეჭვი უნდა შევიტანოთ პროგრამის ალგორითმთან შესაბამისობაში და უნდა მოხდეს პროგრამის გადამოწმება.

შესრულების შეცდომები. სინტაქსური და ლოგიკური შეცდომების გასწორების შემდეგ სკრიპტი ამუშავდება, მაგრამ მიღებული პასუხი ან გამოტანილი შედეგი შეიძლება ისევე არასწორი იყოს. ასეთი რამ, როგორც წესი, ხდება მაშინ, როცა ზოგიერთი ოპერაციის შედეგია ან *NoN* (*not a number* სისტემური ცვლადი, სიტყვასიტყვით „არა ცვლადი“), ან *Inf* (*infinity* - უსასრულობა) ცარიელი მასივი. მსგავსი პრობლემის დაძლევა შესაძლებელია შემდეგი რჩევების გათვალისწინებით:

- შევასრულოთ სკრიპტის ყველაზე მარტივი ვარიანტი ტესტური მონაცემებით, რომლის პასუხი წინასწარაა ცნობილი;
- ამოვიღოთ ნერთილ-მძიმეები შუალედური შედეგების დისპლეიზე გამოსატანად;
- ჩავართოთ ბრძანება *keyboard* საეჭვო ადგილებში. ეს ბრძანება აჩერებს პროგრამას და ელოდება მაუსის ღილაკის ან კლავიატურის კლავიშის დაჭერას მუშაობის გასაგრძელებლად, ეს კი მოგვცემს დისპლეიზე გამოტანილი შუალედური შედეგების სრულად გააზრების შესაძლებლობას;

§3.4 მომხმარებლის მიერ განსაზღვრული ფუნქციები

ზოგადად *m*-ფაილები შეიძლება იყოს ორი ტიპის: *m*-პროგრამები და *m*-ფუნქციები. ორივე მათგანს გააჩნია „*m*“ გაფართოება და ამიტომ მათი ერთმანეთისაგან განსხვავება შეუძლებელია. განვსაზღვროთ ცალცალკე ორივე მათგანი:

***m*-პროგრამა** არის დამოუკიდებლად შესრულებადი ოპერატორებისა და ბრძანებების ერთობლიობა და მისდამი მიმართვა არ სჭიროებს შესაყვანი ცვლადების მითითებას. ყველა ცვლადი ფორმირდება პროგრამის შესრულების პროცესში ან შესრულებამდე და ეკუთვნის *workspace* სამუშაო არეს. *workspace* სამუშაო არე საერთოა ყველა *m*-პროგრამისათვის. აქედან გამომდინარე უნდა გვახსოვდეს, რომ *m*-პროგრამებში ცვლადების სახელები უნდა იყოს ურთიერთმეთანხმებული. *m*-პროგრამებში არ გვაქვს პროგრამის სახელი - განსაზღვრული სახის პირველი სტრიქონი.

***m*-ფუნქცია**, როგორც წესი, განკუთვნილია მრავალჯერადი გამოყენებისათვის, მას გააჩნია შესაყვანი პარამეტრები და ის არ სრულდ-

ება წინასწარი დავალების გარეშე. m -ფუნქციას გააჩნია განსაზღვრული სახის სახელი - პირველი სტრიქონი და ის შემდეგი სახისაა:

Function name1 [, name2, ...]=fun (var1 [,var2, ...]),

სადაც *name1 [, name2, ...]* გამოსატანი პარამეტრების ჩამონათვალია, ანუ ცვლადების ჩამონათვალია, რომლებსაც მიენიჭებათ გამოთვლების საბოლოო შედეგები. *fun* - ფუნქციის (m -ფაილის) სახელია, ხოლო *var1 [,var2, ...]* შესაყვანი პარამეტრებია. ამრიგად, m -ფუნქციის პირველი სტრიქონის უმარტივესი მაგალითია:

მაგალითი 3.4.1.

Function name = fun (var)

m -ფუნქციაში გამოყენებული ცვლადების სახელები და ასევე შესაყვანი და გამოსატანი პარამეტრების სახელები სისტემის მიერ აღიქმება როგორც ლოკალური, ანუ ეს ცვლადები ითვლებიან განსაზღვრულად მხოლოდ m -ფუნქციის შიგნით.

m -ფუნქციისადმი მიმართვა ხორციელდება ისევე, როგორც სისტემაში ჩაშენებულ ნებისმიერი ფუნქციისადმი, ანუ ბრძანებათა სტრიქონის გამოყენებით.

მომხმებლის მიერ შექმნილი ფუნქციის მაგალითად მოვიყვანოთ კუბური განტოლების ფესვების პოვნის მაგალითი:

ამოცანა 3.4.1.

ამოვხსნათ კუბური განტოლება:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) განტოლება a კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$x^3 + rx + sx + t = 0, \quad (3.4.2)$$

სადაც

$$r = \frac{b}{a}, \quad s = \frac{c}{a}, \quad t = \frac{d}{a}.$$

(3.4.2) განტოლებაში შევცვალოთ x ცვლადი შემდეგნაირად:

$$x = y - \frac{r}{3},$$

მივიღებთ

$$y^3 + py + q = 0, \quad (3.4.3)$$

სადაც

$$p = \frac{3x-r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t.$$

(3.4.3) განტოლების ნამდვილი ფესვების რაოდენობა დამოკიდებულია $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ დისკრიმინანტის ნიშანზე (ცხრილი 3.3).

ცხრილი 3.3. კუბური განტოლების ფესვების რაოდენობა

დისკრიმინანტი	ნამდვილი ფესვები	წარმოსახვითი ფესვები
$D \geq 0$	1	2
$D < 0$	3	-

ზემოთ მოყვანილი განტოლების ფესვები შეიძლება გამოვთვალოთ კარდანოს ფორმულების საშუალებით:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= u + v, \\
 y_2 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}i\sqrt{3}, \\
 y_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}i\sqrt{3},
 \end{aligned}
 \tag{3.4.3}$$

სადაც

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

ბრძანებების ერთობლიობა, რომელიც კუბური განტოლების ფესვების პოვნის რეალიზაციის საშუალებას მოგცემს m -ფუნქციის გამოყენებით წარმოდგენილია მაგალით 3.4.2-ზე, ხოლო მაგალით 3.4.3-ზე მოყვანილია სამუშაო არის ის უბანი, რომელიც გამოიძახებს ამ ფუნქციას და ეკრანზე გამოიტანს m -ფუნქციის მუშაობის შედეგს:

მაგალითი 3.4.2.

Function [x1, x2, x3] = cub (a, b, c, d)

$r=b/a;$

$s=c/a;$

$t=d/a;$

$p=(3*s-r^2)/3;$

$q=2*r^3+r*s/3+t;$

$D=(p/3)^3+(q/2)^2;$

$u=(-q/2+sqrt(D))^{1/3};$

$v=(-q/2-sqrt(D))^{1/3};$

$y1=u+v;$

$y2=-(u+v)/2+(u-v)/2*i*sqrt(3);$

$y3=-(u+v)/2-(u-v)/2*i*sqrt(3);$

$x1=y1-r/3;$

$x2=y2-r/3;$

$x3=y3-r/3;$

მაგალითი 3.4.3.

[x1, x2, x3] = cub (3, -20, -3, 4)

$x1 =$
 6.7851
 $x2 =$
 -0.5064
 $x3 =$
 0.3880

§3.5 მასივები *MATLAB*-ში

ხშირად *MATLAB*-ში საჭიროა დიდი რაოდენობის მონაცემების გამოყენება. ამისათვის ხელსაყრელია მასივების გამოყენება, რომელიც მნიშვნელოვნად ამარტივებს პროგრამირებას. მაგალითად, შესაძლებელია რიცხვითი და სიმბოლური მონაცემების შესანახად მასივების შექმნა. ამ შემთხვევაში ყოველი მონაცემის შესანახად შესაბამისი ცვლადების გამოყენების მაგივრად საკმარისია ერთი მასივის შექმნა, რომლის ელემენტებს მიენიჭება შესაბამისი რიგითი ნომერი. ამგვარად, მასივი წარმოადგენს მრავალმხრივი მონაცემების ერთობლიობას, რომელიც შედგება ელემენტების ფიქსირებული რაოდენობით. ისევე რიგორც ნებისმიერ ცვლადს, მასივსაც უნდა მიენიჭოს თავისი სახელი.

ცვლადს, რომელიც უბრალოდ მონაცემების ჩამონათვალს წარმოადგენს, ერთგანზომილებიანი მასივი ან ვექტორი ეწოდება. მასივში შენახული მოცემული ელემენტისადმი მისამართად საჭიროა მიუთითოთ მასივის სახელი და ელემენტის როგითი ნომერი, რომელსაც მასივის ელემენტის ინდექსი ეწოდება.

თუ საჭიროა მონაცემების შენახვა სტრიქონისა და სვეტის ფორმატის ცხრილის სახით, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ, ე.წ. ორგანზომილებიანი მასივი (მატრიცა). ამ შემთხვევაში მასივის ელემენტისადმი მიმართვა ხდება მასივის სახელისა და ორი ინდექსის გამოყენებით, რომელთაგან პირველი შეესაბამება ელემენტის განლაგების სტრიქონის რიგით ნომერს, ხოლო მეორე ელემენტის განლაგების სვეტის რიგით ნომერს.

MATLAB-ში გამოყენებული მასივის მოცემის უმარტივესი ფორმა ჩაინერება შემდეგი სახით:

$$[name] = Xn:dX:Xk,$$

სადაც *name* - მასივის სახელია, რომელშიც ჩაინერება მასივის ელემენტები, *Xn* - მასივის პირველი ელემენტის მნიშვნელობაა, *Xk* - მასივის ბოლო ელემენტის მნიშვნელობაა, ხოლო *dX* - ბიჯია, რომლის საშუალებით ყალიბდება მასივის ყოველი მომდევნო ელემენტი, ანუ

მასივის მეორე ელემენტია $Xn+dX$, მესამე ელემენტია $Xn+dX+dX$ და ა.შ. თუ მასივის წარმოდგენილ ჩანაწერში dX ბიჯი არ არის მითითებული

$$[name]=Xn:Xk,$$

მაშინ ბიჯი არის ერთის ტოლი, ანუ მასივის ყოველი მომდევნო ელემენტი მიიღება წინა ელემენტზე ერთიანის მიმატებით. ერთგანზომილებიანი მასივების შექმნის მაგალითები წარმოდგენილია მაგალით 3.5.1-ში:

მაგალითი 3.5.1.

$$>>Xn=-3.5; dX=1.5; Xk=4.5;$$

$$>>X=Xn:dX:Xk$$

$$X =$$

$$-3.5000 \ -2.0000 \ -0.5000 \ 1.000 \ 2.5000 \ 4.0000$$

$$>>Y=\sin(X/2)$$

$$Y =$$

$$-0.9840 \ -0.8415 \ -0.2474 \ 0.4794 \ 0.9490 \ 0.9093$$

$$>>A=0:5$$

$$A =$$

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

მასივის შექმნა ასევე შესაძლებელია მისი ელემენტების თანმიმდევრული შეყვანით, რომელიც მოცემულია მაგალითი 3.5.2-ში:

მაგალითი 3.5.2.

$$>>V=[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$$

$$V =$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

$$>>W=[1.2,3.1,2,5.5,-8.2]$$

$$W =$$

$$1.2 \ 3.1 \ 2 \ 5.5 \ -8.2$$

მატრიცის სვეტის ელემენტების შეყვანა ხდება წერტილ მიძიმის გამოყენებით:

მაგალითი 3.5.3.

$$>>V=[1;2;3]$$

$$V =$$

$$1$$

$$2$$

$$3$$

ვექტორის ელემენტისადმი მიმართვა შესაძლებელია მასივის სახელისა და ელემენტის რიგითი ნომრის მითითებით ჩვეულებრივ, მრგვალ ფრჩხილებში:

მაგალითი 3.5.4.

```
>> V=[1,2,3,4,5];
```

```
>> V(2)+2*V(4)
```

```
ans =
```

```
10.0000
```

მატრიცის ელემენტების შეყვანა ასევე შესაძლებელია კვადრატული ფრჩხილების გამოყენებით, ამასთან სტრიქონის ელემენტები და სვეტის ელემენტები ერთმანეთისაგან გამოიყოფა წერტილ მძიმით. მატრიცის ელემენტისადმი მიმართვა ხდება მატრიცის სახელის შემდეგ მრგვალ ფრჩხილებში ელემენტის შესაბამისი სტრიქონისა და სვეტის რიგითი ნომრის მითითებით, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფილია მძიმით:

მაგალითი 3.5.5.

```
>> V=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
V =
```

```
1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9
```

```
>> V(1,2)^V(1,3)-V(3,2)+V(2,3)
```

```
ans =
```

```
6.0000
```

§3.6 პირობითი ოპერატორები და ციკლები MATLAB-ში

ერთერთ ძირითად ოპერატორს, რომელიც ახდენს პროგრამირებაში პროგრამის შესრულების თანმიმდევრობის განშტოებას, პროგრამირების ენების დიდ უმრავლესობაში წარმოადგენს პირობითი ოპერატორი *if*. MATLAB-ში არსებობს ამ ოპერატორის ჩვეულებრივი და გაფართოებული ფორმა. *if* ოპერატორის ჩვეულებრივი ფორმა MATLAB-ში შემდეგი სახისაა:

```
if expression1
```

```
statements1
```

```
else
```

```
statements2
```

```
end
```

აქ *expression1* ლოგიკური გამოსახულებაა, *statements1*, *statements2* *MATLAB*-ის ოპერატორები ან *m*-ფუნქციებია. ჩვეულებრივი *if* ოპერატორის მუშაობის პრინციპი შემდეგშია: თუ *expression1* ლოგიკური გამოსახულებაა ჭეშმარიტია, მაშინ სრულდება *statements1*, ხოლო თუ *expression1* მცდარია სრულდება *statements2*.

მაგალითი 3.6.1.

```
x=5;
if x<0
y=x+7
else
y=3*x
end
y =
15
```

ლოგიკური მნიშვნელობებისათვის *MATLAB*-ში გამოიყენება 1 - („ჭეშმარიტი“) და 0 - („მცდარი“). ლოგიკური გამოსახულება შეიძლება შედგებოდეს ლოგიკური ოპერაციებისა და თანაფარდობებისაგან. განვიხილოთ *if* ოპერატორის გამოყენების მაგალითი კვადრატული განტოლების ფესვების პოვნის მაგალითზე. დავწეროთ კვადრატული $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ნამდვილი ფესვების გამოთვლის პროგრამა:

მაგალითი 3.6.2.

```
a=input('a=');
b=input('b=');
c=input('c=');
% დისკრიმინანტის გამოთვლა
d=b*b-4*a*c
if d<0
% ნამდვილი ფესვები არ არსებობს
disp('დისკრიმინანტი უარყოფითია! ფესვები არ არსებობს')
else
% ინფორმაციის ფესვების არსებობაზე
disp('განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი ფესვი')
% ამ ფესვების გამოთვლა
x1=(-b+sqrt(d))/2/a
x2=(-b+sqrt(d))/2/a
end
```

ამ პროგრამის თვლაზე გაშვების შემდეგ დისპლეიზე გამოჩნდება შემდეგი მონაცემები:

$a=1$

$b=2$

$c=-1$

$d =$

8.0000

განტოლებას გააჩნია ორი ნამდვილი ფესვი

$x1=$

0.4142

$x2 =$

-2.4241

ხშირად პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას არ არის საკმარისი ერთი პირობის შესრულება. ამ შემთხვევაში *else* ოპერატორის შემდეგ შეგვიძლია ჩავწეროთ ახალი *if* ოპერატორი.

if expression1

statements1

else if expression2

statements2

else if expression3

statements3

...

else if expressionN

statementsN

else

statements(N+1)

end

ამ შემთხვევაში გაფართოებული *if* ოპერატორი შემდეგნაირად მუშაობს: თუ პირველი პირობა ჭეშმარიტია მაშინ სრულდება პირველი ოპერატორი; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოწმდება მეორე პირობა, თუ ის ჭეშმარიტია მაშინ სრულდება მეორე ოპერატორი და ა.შ. თუ არცერთი პირობა არ სრულდება მაშინ შესრულდება $(N+1)$ ოპერატორი.

if ოპერატორის გაფართოებული ვარიანტი განვიხილოთ ბიკვადრატული $ax^4 + bx^2 + c = 0$ განტოლების ფესვების პოვნის შესაბამისი პროგრამის მაგალითზე. ამ განტოლების ამოსახსნელად შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $y = x^2$ და ბიკვადრატული განტოლება დავიყვანოთ კვადრატულ განტოლებამდე და ვიპოვოთ ამ განტოლების ფესვები. ამ პროგრამაში შესაყვანი მონაცემები წარმოადგენენ ბიკვადრატული განტოლების a, b, c კოეფიციენტებს, გამოსატან მონაცემებს წარმოადგენენ ბიკვადრატული განტოლების x_1, x_2, x_3, x_4 ფესვები. პროგრამის ალგორითმი შედგება შემდეგი ეტაპებისგან:

1. განტოლების a, b, c კოეფიციენტების შეყვანა;
2. განტოლების d დისკრიმინანტის გამოთვლა;
3. თუ $d \geq 0$, განისაზღვრება y_1 და y_2 , წინააღმდეგ შემთხვევაში ფესვები არ არსებობს;
4. თუ $y_1, y_2 < 0$, მაშინ ფესვები არ არსებობს;
5. თუ $y_1, y_2 \geq 0$, მაშინ გამოითვლება ოთხი ფესვი $\pm\sqrt{y_1}$, $\pm\sqrt{y_2}$ ფორმულით და გამოგვაქვს ეკრანზე;
6. თუ 4 და 5 პირობები არ სრულდება, მაშინ უნდა შემოწმდეს y_1 ფესვის ნიშანი. თუ $y_1 \geq 0$, მაშინ გამოითვლება ორი $\pm\sqrt{y_1}$ ფესვი. თუ $y_2 \geq 0$, მაშინ გამოითვლება ორი $\pm\sqrt{y_2}$ ფესვი. ფესვების გამოთვლილი მნიშვნელობები გამოგვაქვს ეკრანზე;

ბიკვადრატული განტოლების ფესვების გამოსათვლელი პროგრამა მოცემულია ქვემოთ:

მაგალითი 3.6.3.

```

a=input ('a=');
b=input ('b=');
c=input ('c=');
% დისკრიმინანტის გამოთვლა
d=b*b-4*a*c
% თუ დისკრიმინანტი უარყოფითია
if d<0
% ნამდვილი ფესვები არ არსებობს
disp ('ნამდვილი ფესვები არ არსებობს')
else
% წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიპოვოთ კვადრატული

```

```

% განტოლების ფესვები
y1 = (-b + sqrt(d))/2/a;
y2 = (-b - sqrt(d))/2/a;
% თუ ორივე ფესვი უარყოფითია
if (y1 < 0) & (y2 < 0)
% ნამდვილი ფესვები არ არსებობს
disp ('ნამდვილი ფესვები არ არსებობს')
% წინააღმდეგ შემთხვევაში თუ ორივე ფესვი დადებითია
elseif (y1 >= 0) & (y2 >= 0)
% ოთხი ფესვის გამოთვლა
disp ('ოთხი ნამდვილი ფესვის გამოთვლა')
x1 = sqrt(y1)
x2 = -x1
x3=sqrt(y2)
x4 = -x3
% წინააღმდეგ შემთხვევაში
else
disp ('ორი ნამდვილი ფესვი')
% y1 ნიშნის შემოწმება
if (y1 >= 0)
% ორი ნამდვილი ფესვის პოვნა
x1 = sqrt(y1)
x2 = -x1
% წინააღმდეგ შემთხვევაში
else
% ორი ნამდვილი ფესვის პოვნა
x1 = sqrt(y2)
x2 = -x1
end
end
end
end

```

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ x_1, x_2, x_3, x_4 ფესვებთან წერტილ მძიმის არ არსებობა განაპირობებს მონაცემების ეკრანზე გამოტანას *disp* ოპერატორის გამოყენების გარეშე.

განშტოების ოპერაციის განხორციელების ერთერთ ფორმას წარმოადგენს ალტერნატიული შერჩევის ოპერატორი *switch*. მისი სტრუქტურა და შესრულების შედეგი განვიხილოთ თვის დღეების

დასახელების ეკრანზე გამოსახვის მაგალითზე. ჯერ განვიხილოთ ამ ოპერატორის სტრუქტურა.

```
switch პარამეტრი
  case მნიშვნელობა 1
    ოპერატორი 1
  case მნიშვნელობა 2
    ოპერატორი 2
  case მნიშვნელობა 3
    ოპერატორი 3
  ...
  otherwise
    ოპერატორი
end
```

ამ ოპერატორის მუშაობის პრინციპი შემდეგია: თუ პარამეტრი ტოლია მნიშვნელობა 1-ის, მაშინ სრულდება ოპერატორი 1, თუ პარამეტრი ტოლია მნიშვნელობა 2-ის, მაშინ სრულდება ოპერატორი 2 და ა.შ. თუ პარამეტრი არ ემთხვევა *case* ჯგუფის არცერთ მნიშვნელობას, მაშინ სრულდება ოპერატორები, რომლებიც პროგრამაში განთავსებულია *otherwise* ბრძანების შემდეგ. ცხადია, რომ ნებისმიერი ალგორითმი შეიძლება განვახორციელოთ *switch* ბრძანების გამოყენების გარეშე მარტო *if* ოპერატორის გამოყენებით, მაგრამ *otherwise* ბრძანების გამოყენებით პროგრამა უფრო კომპაქტურია.

დავწეროთ შემდეგი ამოცანის პროგრამა: გამოვიტანოთ ეკრანზე მოცემული რიცხვის შესაბამისი დღის დასახელება იმ პირობით, რომ თვე შედგება 31 დღისაგან და 1 რიცხვი არის ორშაბათი.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიუყენოთ ფუნქცია *mod*, რომელიც იძლევა ორი რიცხვის გაყოფის ნაშთის პოვნის საშუალებას, ამასთან გავითვალისწინოთ, ისიც რომ მოცემული თვის 1 რიცხვი ორშაბათია

მაგალითი 3.6.4.

```
K=input('შეიყვანე რიცხვი 1-დან 31-მდე');
% K რიცხვის 7-ზე გაყოფის ნაშთის და მისი შედარება
% 0-დან 6-მდე
switch mod(K,7)
case 1
  disp('ორშაბათი')
```

```

case 2
    disp('სამშაბათი')
case 3
    disp('ოთხშაბათი')
case 4
    disp('ხუთშაბათი')
case 5
    disp('პარასკევი')
case 1
    disp('შაბათი')
otherwase
    disp('კვირა')
end

```

MATLAB-ში არსებობს ორი სახის ციკლის ოპერატორი: *while* და *for* ოპერეატორები. განვიხილოთ ეს ოპერატორები ცალცალკე. *while* ოპერეატორი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

```

while პირობა
    ოპერეატორები
end

```

აქ პირობა ლოგიკური გამოსახულებაა. ოპერატორები სრულდება მანამ, სანამ ლოგიკური გამოისახულება ჭეშმარიტია. ციკლის ოპერატორი *while* საკმაოდ მოქნილი ოპერატორია, მაგრამ ის მოუხერხებელია ე.წ. „მკაცრი“ ციკლების შემთხვევაში, როცა ციკლი უნდა შესრულდეს განსაზღვრული რაოდენობით. *for* ოპერეატორი გამოიყენებს ანორედ ასეთ შემთხვევაში.

```

for ოპერეატორი შემდეგნაირად ჩაიწერება:
for x=xn:hx:zk
    ოპერეატორები
end

```

ამ შემთხვევაში *x* სკალარული ცვლადის სახელია, *xn* ციკლის პარამეტრის საწყისი მნიშვნელობაა, *zk* ციკლის პარამეტრის საბოლოო მნიშვნელობაა, ხოლო *hx* ციკლის ბიჯია. თუ ციკლის ბიჯი 1-ის ტოლია, მაშინ *hx* შეგვიძლია გამოვტოვოთ და ციკლის ოპერატორი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

```

for x=xn:zk

```

ოპერატორები

end

ციკლის ოპერატორის შესრულება იწყება x სკალარული ცვლადისათვის xn მნიშვნელობა მინიჭებით. შემდეგ მოწმდება ხომ არ აღემატება ეს სკალარული ცვლადი xk პარამეტრს. თუ x სკალარული ცვლადი მეტია xk პარამეტრზე მაშინ ციკლი დასრულებულად ითვლება და მართვა გადაეცემა ციკლის შემდგომ ბრძანებებს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ციკლში მოცემული ოპერატორები. ამის შემდეგ ციკლის ცვლადი იცვლის თავის მნიშვნელობას და $x = x + hx$. ამის შემდეგ ისევ იწყება ცვლადის მნიშვნელობის შემოწმება და ალგორითმი მეორდება.

MATLAB-ში არსებობს ოპერატორი *break* რომელიც წყვეტს ციკლის შესრულებას. ასევე გვაქვს ოპერატორი *continue* რომელიც წყვეტს ციკლის მინდინარე ბიჯის შესრულებას.

მოვიყვანოთ ციკლის ოპერატორის გამოყენების მაგალითი შემდეგი ამოცანით:

ამოცანა 3.6.1.

მოცემულია ნატურალური რიცხვი N . განვსაზღვროთ ეს რიცხვი მარტივია თუ რთულია (N რიცხვს ეწოდება მარტივი თუ ის უნაშთოდ იყოფა ერთიანზე და N რიცხვზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში რიცხვი რთულია).

ამ შემთხვევაში პროგრამაში უნდა შევიყვანოთ შემდეგი მონაცემები:

- შესაყვანი მონაცემები: ნატურალური რიცხვი N ;
- გამოსატანი მონაცემები: შეტყობინება N რიცხვზე;
- შუალედური მონაცემები: i ციკლის პარამეტრი, N რიცხვის შესაძლო გამყოფები.

ამ ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი შემდეგია: N რიცხვი იყოფა ციკლის i პარამეტრზე, რომელიც იცვლება 2-დან $N/2$ -მდე. თუ ამ დიაპაზონში არ მოიძებნება არცერთი რტიციხვი, რომელზეც იყოფა N რიცხვი უნაშთოდ, მაშინ ეს რიცხვი მარტივია, ხოლო თუ აღმოჩნდა ერთი უნაშთოდ გამყოფი რიცხვი, მაშინ ეს რიცხვი რთულია. ალგორითმში ციკლისან ორი გამოსასვლელი შეტყობინება. ერთი როცა გადამოწმდება ციკლის პარამეტრის ყველა შესაძლო მონაცემი და მეორე, როცა გამოსვლა ხდება ციკლის დასრულებამდე და აზრი არა აქვს ციკლის გაგრძელებას, რამეთუ ვიპოვეთ

ერთი გამყოფი და ციკლიდან გამოსვლა ხდება *break* ოპერატორის გამოყენებით.

ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამა მოცემულია ქვემოთ:

მაგალითი 3.6.5.

```
N=input('შეიყვანეთ რიცხვი');
% დავუშვათ რომ N რიცხვი მარტივია (pr = 1)
pr=1;
% შევამოწმოთ ყველა გამყოფი 2-დან N/2-მდე.
for 2: N/2
% თუ N რიცხვი იყოფა i-ზე უნაშთოდ
if mod(N,i)==0
% მაშინ N რიცხვი არ არის მარტივი (pr = 0)
pr=0;
% და ციკლის შესრულება წყდება
break;
end
end
% თუ pr=1 მაშინ N მარტივი რიცხვია
if pr==1
disp('მარტივი რიცხვია')
% თუ pr=0, მაშინ N არ არის მარტივი რიცხვი
else
disp('არ არის მარტივი რიცხვი')
end
```

თავი 4. ორგანოზომილებიანი გრაფიკა MATLAB-ში

ამ თავში განხილულია *MATLAB*-ის გრაფიკული შესაძლებლობები ორგანოზომილებიან გრაფიკაში. დეკარტულ და პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში გრაფიკების აგება და გაფორმება. ნაჩვენებია, რომ პროგრამული პაკეტი *MATLAB*-ი იძლევა შესაძლებლობებს ფიზიკური პროცესების და განსაკუთრებით გარდამავალი ფიზიკური პროცესების კომპიუტერული მოდელირებისათვის და ამ ამოცანების ვიზუალიზაციისათვის.

განხილულია გრაფიკების აგების შესაძლებლობები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში; გრაფიკების აგება პოლარულ კოორდინატებში; პარამეტრული ფორმით მოცემული გრაფიკის აგება და გაფორმება; ორგანოზომილებიანი გრაფიკების ფორმატირების საკითხები.

§4.1 ორგანზომილებიანი გრაფიკების აგება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში

ორგანზომილებიანად ითვლება ისეთი გრაფიკები, რომლებშიც მოცემული ნერტილის განლაგება განისაზღვრება ორი სიდიდით. *MATLAB*-ში ორგანზომილებიანი გრაფიკის აგება შესაძლებელია დეკარტულ და პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

ორგანზომილებიანი დეკარტის, ანუ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა წარმოადგენს ორ პერპენდიკულარულ წრფეს სიბრტყეზე, რომელთაც კოორდინატთა ღერძები ეწოდებათ. ჰორიზონტალური წრფე *OX* - აბცისათა ღერძია, ხოლო ვერტიკალური *OY* - ორდინატთა ღერძია. ღერძების გადაკვეთის *O* ნერტილს კოორდინატთა სათავე ეწოდება. ნერტილის მდებარეობა მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში განისაზღვრება ორი სიდიდის მნიშვნელობით, რომელთაც ნერტილის კოორდინატები ეწოდებათ. თუ ნერტილს გააჩნია ორი x და y კოორდინატი, მაშინ x - ნერტილის აბცისაა, ხოლო y - ნერტილის ორდინატაა. x და y კოორდინატების დამაკავშირებელი განტოლება განისაზღვრება როგორც იმ წირის განტოლება, რომლის ნებისმიერი ნერტილი აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. y სიდიდეს x სიდიდის ფუნქცია ეწოდება, თუ x -ის ნებისმიერ მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან, შეესაბამება ერთი y მნიშვნელობა. ამასთან x სიდიდეს $y = f(x)$ ფუნქციის არგუმენტი ეწოდება. ფუნქცია მოცემულად ითვლება, თუ არგუმენტის ნებისმიერ მნიშვნელობას შეესაბამება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ყველა მნიშვნელობის ერთობლიობას, რომელიც მოცემულ ამოცანაში შეუძლია მიიღოს $y = f(x)$ ფუნქციის x არგუმენტმა ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.

განვიხილოთ ორგანზომილებიან მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში გრაფიკების აგების საკითხზე. ამისათვის უნდა მოხდეს x და y მასივების ფორმირება და შემდეგ *MATLAB*-ის *plot* ფუნქციის სადმი მიმართვა.

ამოცანა 4.1.1. ავაგოთ $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cos(5x)/2$ ფუნქციის გრაფიკი $[-10; 10]$ ინტერვალში. ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამა მოცემულია მაგალით 4.1.1-ში

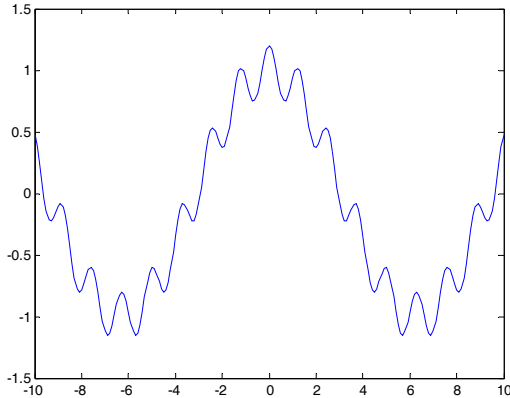
მაგალითი 4.1.1.

```
>> x=-10:0.1:15;
```

```
>> y=cos(x/3)+cos(5*x)/2
```

```
>> plot(x,y)
```

plot ფუნქციისადმი მიმართვის შედეგად იქმნება *Figure 1* დასახელების ფანჯარა, სადაც აიგება შესაბამისი გრაფიკი (სურ. 3.1).



სურ. 4.1. $y = \cos(x/3) + \cos(5x) / 2$ ფუნქციის გრაფიკი

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ფუნქციის გრაფიკის ფორმირება ხდება მეზობელი წერტილების უწყვეტი წირით შეერთებისას. თუ *plot* ფუნქციას განმეორებით მივმართავთ, მაშინ შეიქმნება ახალი გრაფიკული ფანჯარა და მასში აიგება ახალი გრაფიკი. ერთ კოორდინატთა სისტემაში რამოდენიმე გრაფიკის ასაგებად უნდა ვისარგებლოთ ორი მეთოდისგან ერთერთით:

- *plot* ფუნქციას უნდა მივმართოთ შემდეგნაირად:
 $plot(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$, სადაც x_1, y_1 პირველი გრაფიკის აბცისათა და ორდინატათა მასივებია, x_2, y_2 მეორე გრაფიკის აბცისათა და ორდინატათა მასივებია და ა.შ.
- ყოველი გრაფიკი გამოვსახოთ $plot(x, y)$ ფუნქციის საშუალებით, მაგრამ ყოველი მომდევნო $plot(x, y)$ ფუნქციისადმი მიმართვამდე გამოვიცხადოთ *hold on* ბრძანება, რაც უზრუნველყოფს ახალი ფანჯრის შექმნის ბლოკირებას;

გავცხიბილოთ რამოდენიმე გრაფიკის ერთ კოორდინატთა სისტემაში აგების მაგალითები ორივე მეთოდის გამოყენებით:

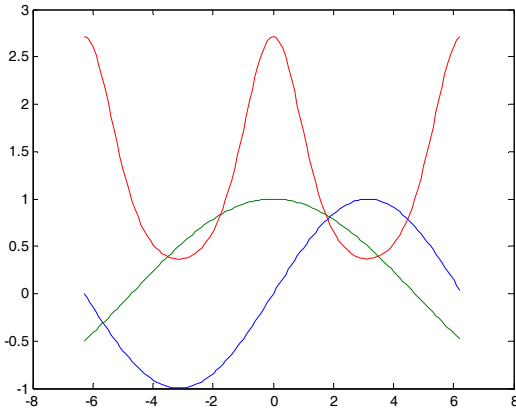
ამოცანა 4.1.2. ავაგოთ $y = \sin(x/2)$, $z = \cos(x/3)$, $u = \exp(\cos(x))$ ფუნქციების გრაფიკები ერთ კოორდინატთა სისტემაში $x \in [-2\pi; 2\pi]$ ინტერვალში. ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამა მოცემულია მაგალით 4.1.2-ში

მაგალითი 4.1.2.

```
>> x=-6.29:0.1:6.29;  
>> y=sin(x/2);  
>> z=cos(x/3);  
>> u=exp(cos(x));  
>> plot(x,y,x,z,x,u);
```

მაგალითი 4.1.3.

```
>> x=-6.29:0.1:6.29;  
>> y=sin(x/2);  
>> plot(x,y);  
>> hold on;  
>> z=cos(x/3);  
>> plot(x,z);  
>> hold on;  
>> u=exp(cos(x));  
>> plot(x,u);
```



სურ. 4.2. $y = \sin(x/2)$, $z = \cos(x/3)$, $u = \exp(\cos(x))$
ფუნქციების გრაფიკი

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ერთ კოორდინატთა სისტემაში გრაფიკების აგებისას პროგრამა ავტომატურად ცვლის გრაფიკების ფერებს. ფერების შერჩევა შესაძლებელია ასევე მომხმარებლის მიერ პროგრამულად, რისთვისაც გამოიყენება *plot* ფუნქციის განსხვავებული ვარიანტი: *plot* ($x_1, y_1, s_1, x_2, y_2, s_2, \dots$

x_n, y_n, s_n), სადაც (x_1, x_2, \dots, x_n) გრაფიკების აბცისების მასივებია, (y_1, y_2, \dots, y_n) გრაფიკების ორდინატების მასივებია, (s_1, s_2, \dots, s_n) სტრიქონია, რომელიც შედგება სამი სიმბოლოსაგან, რომლებიც განსაზღვრავენ გრაფიკის წირის ფერს, მარკერის ტიპს და წირის ტიპს (ცხრილი 4.1). მასში გამოიყენება ერთი ან ორი სიმბოლო.

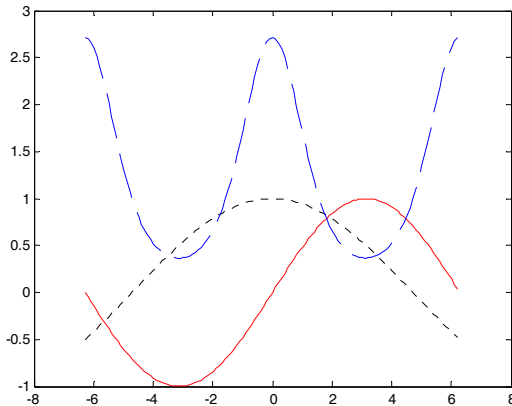
ცხრილი 4.1. გრაფიკის წირების თვისებები

სიმბოლო	სიმბოლოს აღწერა
წირის ფერი	
<i>y</i>	ყვითელი
<i>m</i>	ვარდისფერი
<i>c</i>	ციისფერი
<i>r</i>	წითელი
<i>g</i>	მწვანე
<i>b</i>	ლურჯი
<i>w</i>	თეთრი
<i>k</i>	შავი
მარკერის ტიპი	
.	წერტილი
<i>o</i>	წრეწირი
<i>x</i>	ჯვარი
+	ნიშანი „პლიუსი“
*	ვარსკვლავი
<i>s</i>	კვადრატი
<i>d</i>	რომბი
<i>v</i>	სამკუთხედი ქვედა წვეროთი
^	სამკუთხედი ზედა წვეროთი
<	სამკუთხედი მარცხენა წვეროთი
>	სამკუთხედი მარჯვენა წვეროთი
<i>p</i>	ხუთქიმიანი ვარსკვლავი
<i>h</i>	ექვსქიმიანი ვარსკვლავი
წირის ტიპი	
-	უწყვერი წირი
:	პუნქტირი
-.	შტრიხ-პუნქტირი
--	შტრიხი

შემდეგ მაგალითში მოყვანილია ამოცანა 4.2-ის პროგრამა გრაფიკის წირების თვისებების და მარკერების გამოყენებით. აგებულია შესაბამისი გრაფიკები (სურ.4.3).

მაგალითი 4.1.4.

```
>> x=-6.29:0.1:6.29;  
>> y=sin(x/2);  
>>% y ფუნქციის გრაფიკი წითელი ფერის უწყვეტი წილით  
>>plot(x,y, 'r-');  
>>hold on;  
>> z=cos(x/3);  
>>% z ფუნქციის გრაფიკი შავი ფერის პუნქტირია წილით  
>>plot(x,z, 'k:');  
>>hold on;  
>> u=exp(cos(x));  
>>% u ფუნქციის გრაფიკი ლურჯი ფერის შტრიხიანი წილით  
>> plot(x,u, 'b--');
```



სურ. 4.3. $y = \sin(x/2)$, $z = \cos(x/3)$, $u = \exp(\cos(x))$
ფუნქციების გრაფიკები განსხვავებული წილებით

MATLAB-ი იძლევა ფუნქციის გრაფიკის გაფორმების დამატებით შესაძლებლობებს:

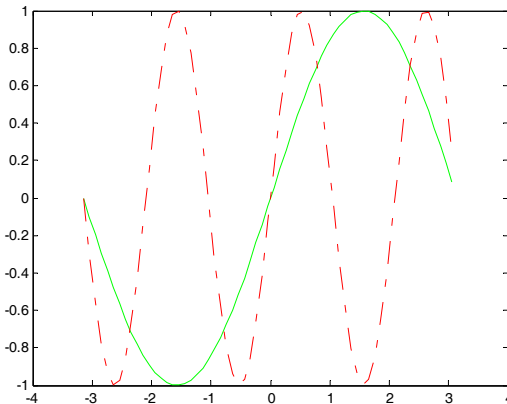
- ბრძანება *grid on* ადებს გრაფიკზე ბადეს;
- ფუნქცია *title* ('*saxeli*') განკუთვნილია გრაფიკზე გრაფიკის სახელის გამოსატანად;
- ფუნქცია *xlabel* ('წარწერა x ღერძის ქვეშ') და *ylabel* ('წარწერა y ღერძის ქვეშ') განკუთვნილია ამ ღერძების ქვეშ სახელის გამოსატანად;

- ფუნქცია *legend* ('ლეგენდა 1', 'ლეგენდა 2', ... 'ლეგენდა n', k) გამოყავს გრაფიკზე ლეგენდა n-ური გრაფიკისათვის, პარამეტრი k განსაზღვრავს ლეგენდის გრაფიკულ ფანჯარაში ლეგენდის ადგილმდებარეობას: -1 გრაფიკის გარეთ გრაფიკული ფანჯრის მარჯვენა ზედა კუთხეში; 0 - ავტომატურად ირჩევს ლეგენდის საუკეთესო მდებარეობას; 1 - გრაფიკის მარჯვენა ზედა კუთხეში; 2 - გრაფიკის მარცხენა ზედა კუთხეში; 3 - გრაფიკის მარცხენა ქვედა კუთხეში; 4 - გრაფიკის მარჯვენა ქვედა კუთხეში.

გრაფიკის სათაურის გამოყვანა ხდება სხვადასხვა ფორმატით. ყველაზე გაფართოებული ფორმატი იძლევა სახელის, ფონტის ზომისა და კონკრეტული ფონტის შერჩევის შესაძლებლობას. განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი ფუნქციებისა და ბრძანებების გამოყენების მაგალითები:

მაგალითი 4.1.5.

```
>> x=-pi:0.1:pi;
>> f=sin(x);
>> g=sin(3*x);
>> plot(x,f,'g-','x,g','r-.');
```



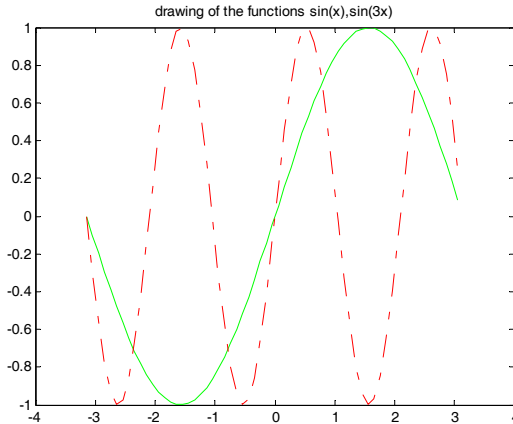
სურ. 4.4. $f = \sin(x)$, $g = \sin(3x)$ ფუნქციების გრაფიკები განსხვავებული წირებით

მიღებული გრაფიკები ქმნიან ნათელ წარმოდგენას ფუნქციების ქცევაზე ამ ინტერვალში. არ არის აუცილებელი, რომ ორივე ფუნქცია იყოს განსაზღვრული ერთსა და იმავე ინტერვალში. ამ

შემთხვევაში გრაფიკის აგებისას *MATLAB*-ი ირჩევს მაქსიმალურ მონაკვეთს, რომელიც მოიცავს დანარჩენებს. ანალოგიურად აიგება სამი, ოთხი და მეტი გრაფიკები. ესლა გადავიდეთ გრაფიკის სახელისა და ლერძებზე წარწერების გამოტანაზე.

მაგ.4.1.5-ზე მოყვანილ პროგრამას დავამატოთ ფუნქცია:
`>>title ('drawing of the function sin(x), sin(3x)')`

გრაფიკის თავზე გამოჩნდება შესაბამისი წარწერა:



სურ. 4.5. $f = \sin(x)$, $g = \sin(3x)$ ფუნქციების გრაფიკები სათაურით

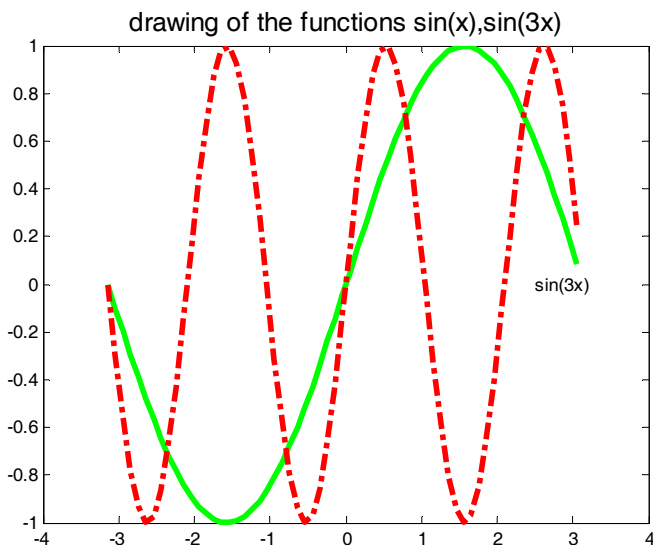
გრაფიკის სათაური შეიძლება შედგებოდეს ორი და მეტი სტრიქონისაგან. ამ შემთხვევაში ბრძანება უნდა გაფორმდეს შემდეგი სახით:

`title ({'პირველი სტრიქონი'; 'მეორე სტრიქონი'})`

ბრძანება *text* ქმნის ტექსტურ ობიექტს მიმდინარე ლერძებში, ანუ აქტიურ გრაფიკულ ფანჯარაში. მაგალითად დავუმატოთ ტექსტი წინამდებარე გრაფიკს:

მაგალითი 4.1.6.

```
>> x=-pi:0.1:pi;
>> f=sin(x);
>> g=sin(3*x);
>> plot(x,f,'g-',x,g,'r-.','LineWidth',3);
>> text(2.5,0,'sin(3x)')
>> title('drawing of the function sin(x), sin(3x)', 'FontSize', 14)
```



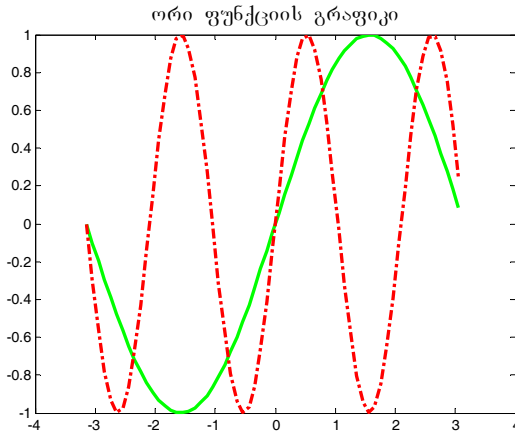
სურ. 4.6. $f = \sin(x)$, $g = \sin(3x)$ ფუნქციების გრაფიკები სათაურით და ტექსტით

text ბრძანების პირველი ორი არგუმენტი გრაფიკული ფანჯრის იმ წერტილის კოორდინატებია, საიდანაც იწყება ტექსტური სტრიქონი. ბრძანება *text*-ში ასევე მითითებულია შრიფტის ზომა - *FontSize*, ხოლო *plot* ბრძანებაში მითითებულია გრაფიკის წილების სისქე - *LineWidth*.

გრაფიკის სათაურისა და ტექსტის გამოყვანა ასევე შესაძლებელია ქართული შრიფტით, ამისთვის საჭიროა *title* ან/და *text* ფუნქციის არგუმენტებში მივუთითოთ შესაბამისი ფონტი, მაგალითად გრაფიკის სათაურში შეგვიძლია შევცვალოთ პროგრამა და სათაური გამოვიტანოთ ქართულად:

მაგალითი 4.1.7.

```
>> x=-pi:0.1:pi;
>> f=sin(x);
>> g=sin(3*x);
>> plot(x,f,'g-',x,g,'r-.','LineWidth',2);
>> text(2.5,0,'sin(3x)')
>> title('drawing of the function sin(x), sin(3x)', 'FontSize', 14, ...
'fontName', 'AcadNusx')
```



სურ. 4.7. $f = \sin(x)$, $g = \sin(3x)$ ფუნქციების გრაფიკები ქართული სათაურით

ინგლისური და ქართული ფონტების ერთდროული გამოყენება გარკვეულ სირთულეებთანაა დაკავშირებული, მაგრამ ამის გარკვეული შესაძლებლობა არსებობს, მხოლოდ ერთი პირობით: ორენოვანი წარწერა უნდა იყოს განლაგებული სხვადასხვა სტრიქონში.

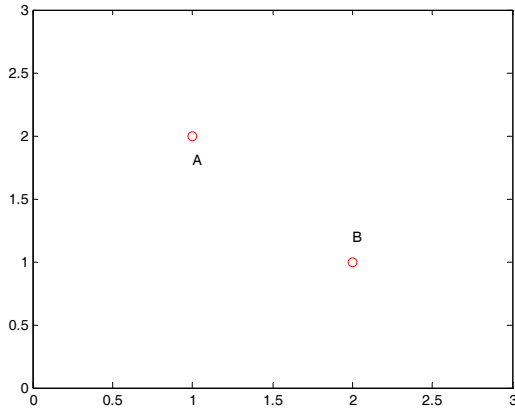
ახლა განვიხილოთორი წერტილით შენოსაზღვრული მონაკვეთ აგების საკითხს. ვთქვათ სიბტყეზე მოცემულია ორი $A = [x_1, y_1]$ და $B = [x_2, y_2]$ წერტილი და უნდა ავაგოთ ამ წერტილებზე გამავალი წრფის მონაკვეთის გრაფიკი. ამ ამოცანის რელიზაცია *MATLAB*-ში შესაძლებელია შემდეგი კოდის საშუალებით:

მაგალითი 4.1.8.

```
>> x1=1;x2=2;y1=2;y2=1;
>> plot(x1,y1,'ro',x2,y2,'ro')
>> axis([0 3,0 3])
>> text(1,1.8,'A')
>> text(2,1.2,'B')
```

შედეგად მივიღებთ გრაფიკულ ფანჯარას, რომელზეც გამოსახება ორი წითელი ფერის რგოლი $A = [1,2]$ და $B = [2,1]$ კოორდინატებით. მაგალით 4.1.8-ში გამოყენებული ბრძანება *axis* იძლევა კოორდინატთა ლერძების დიაპაზონის განსაზღვრის შესაძლებლ-

ობას. ღერძების დიაპაზონი ამ შემთხვევაში არის OX ღერძის გასწვრივ $[1,2]$, ხოლო OY ღერძის გასწვრივ $[2,1]$.



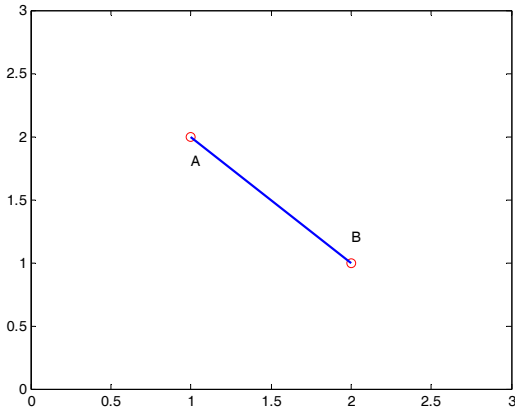
სურ. 4.8. $A = [1, 2]$ და $B = [2, 1]$ წერტილების გამოსახვა წითელი რგოლების სახით

წინა კოდს დავამატოთ შემდეგი ორი ბრძანება და მივიღებთ გრაფიკზე გამოსახულ მონაკვეთს:

მაგალითი 4.1.9.

```
>> hold on
```

```
>> plot([x1,x2],[y1,y2],'LineWidth',2)
```

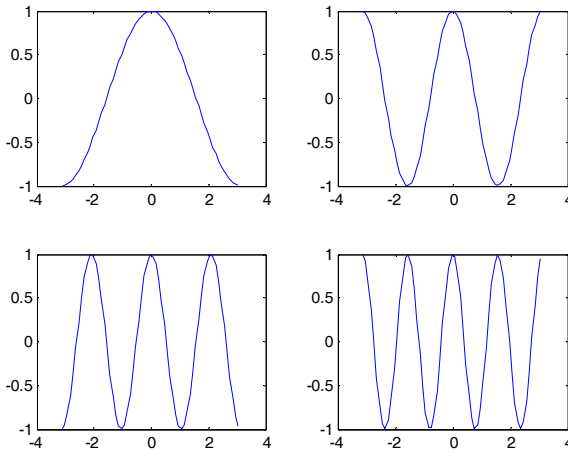


სურ. 4.9. $A = [1, 2]$ და $B = [2, 1]$ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი

ამ პარაგრაფში ასევე განვიხილოთ *subplot* ბრძანება, რომელიც ყოფს გრაფიკულ ფანჯარას უფრო მცირე ფანჯრების „მასივებად“. ამ ბრძანების პირველი ორი არგუმენტი განსაზღვრავს „ქვე-გრაფიკების“ მასივის განზომილებას, ხოლო მესამე არგუმენტი კი მიუთითებს კონკრეტული „ქვეგრაფიკის“ ნომერს, რომელიც აითვლება სტრიქონების მიხედვით. განვიხილოთ შემდეგი პროგრამული კოდი:

მაგალითი 4.1.10.

```
>> x=-pi:0.1:pi;
>> for j=1:4,subplot(2,2,j)
plot(x,cos(j*x))
end
```



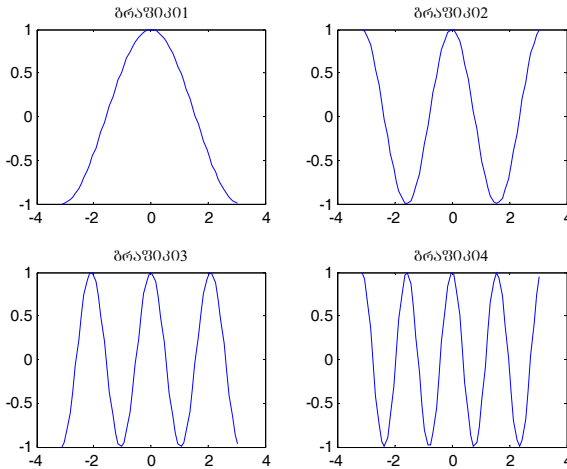
სურ. 4.10. გრაფიკული ფანჯარის დაყოფა ოთხ დამოუკიდებელ ქვეფანჯარად

ბრძანების შესრულების შედეგად მივიღებთ 2×2 განზომილების გრაფიკების მასივს (სურ.4.10)., რომელზეც გამოსახულია $x \in [-\pi, \pi]$ შუალედში $\cos jx$, როცა $j = 1:4$ ანუ იცვლება 1-დან 4-მდე. პირველი სტრიქონის პირველ გრაფიკზე გამოსახულია $\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი, პირველი სტრიქონის მეორე გრაფიკზე გამოსახულია $\cos 2x$ ფუნქციის გრაფიკი, მეორე სტრიქონის პირველ გრაფიკზე გამოსახულია $\cos 3x$ ფუნქციის გრაფიკი, ხოლო მეორე სტრიქონის მეორე გრაფიკზე გამოსახულია $\cos 4x$ ფუნქციის გრა-

ფიკი. სათაურების შექმნის *text* ბრძანების გამოყენებით შევეცადოთ თითოეული გრაფიკის სათაურის გამოყენა ქართულად. შევცვალოთ მაგალით 4.1.9-ში მოცემული კოდი და გამოვიყენოთ *text* ბრძანება:

მაგალითი 4.1.11.

```
>> x=-pi:0.1:pi;
>> for j=1:4,subplot(2,2,j)
plot(x,cos(j*x))
k=num2str(j);
s=strcat('grafiki',k);
title(s,'FontName','AcadMtavr')
end
```



სურ. 4.11. გრაფიკული ფანჯარის დაყოფა ოთხ დამოუკიდებელ ფანჯარად და ქართულად სათაურის გამოტანა

მივაქციოთ ყურადღება ციკლის მესამე ბრძანებას, რომელსაც *num2str* ფუნქციის გამოყენებით გადაყავს ციკლის რიცხვითი ცვლადი „j“ სტრიქონის ტიპის ცვლად „k“-ში მისი შემდგომი გამოყენებისთვის *strcat* ბრძანებაში, რომელიც ახდენს სტრიქონების მიერთებას და უზრუნველყოფს ციკლში შემდეგი სტრიქონების ფორმირებას: ბრაზიკი01, ბრაზიკი02, ბრაზიკი03 და ბრაზიკი04.

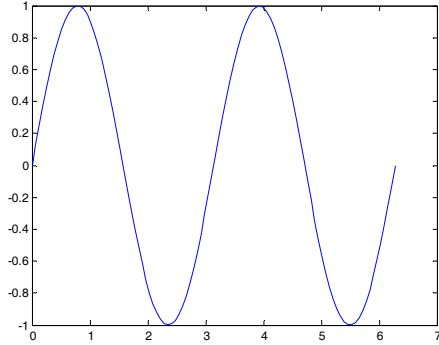
სშირად გრაფიკების გაფორმებისას საჭიროა აბცისათა თუ ორდინატათა ღერძების ერთეულების სპეციფიური შერჩევა. ამის

მიღწევა შესაძლებელია ღერძების ჭდეების შეცვლის გზით. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი ფუნქციის გრაფიკი:

მაგალითი 4.1.12.

```
>> t=linspace(0,2*pi);  
>> plot(t,sin(2*t))
```

გრაფიკულ ფანჯარაში გამოისახება შემდეგი სურათი:

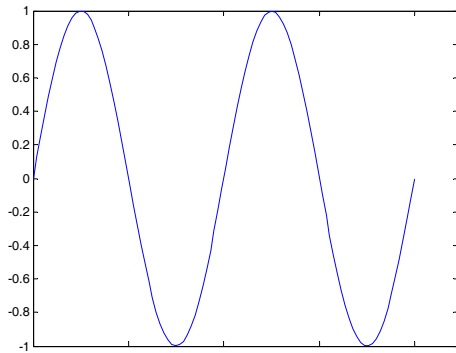


სურ. 4.12. $\sin(2t)$ ფუნქციის გრაფიკი $t \in [0, 2\pi]$ შუალედში

ეხლა შევცვალოთ ჭდეები აბცისათა ღერძზე შემდეგი ფუნქციის გამოყენებით:

მაგალითი 4.1.13.

```
>> set(gca, 'XTick', (0:0.5:2)*pi)
```



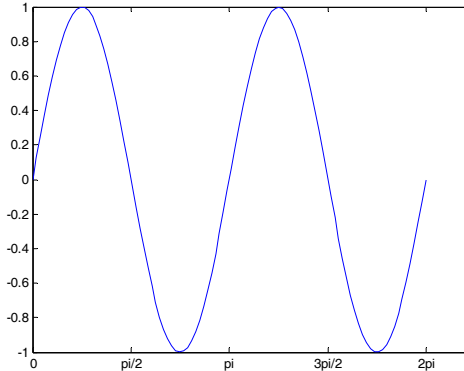
სურ. 4.13. $\sin(2t)$ ფუნქციის გრაფიკი $t \in [0, 2\pi]$ შუალედში აბცისათა ღერძზე შეცვლილი რიცხვითი ჭდეებით

როგორც ვხედავთ აბცისათა ღერძზე გაჩნდა ახალი რიცხვითი ჭდეები: 0 1.5708 3.1416 4.7124 6.2832. ეხლა კი გამოვსახოთ ახლადმიღებული ნიშნულები π სიმბოლოს გამოყენებით:

მაგალითი 4.1.14.

```
>> set(gca,'XTickLabel','0|pi/2|pi|3pi/2|2pi')
```

გრაფიკულ ფანჯარაში გამოისახება შემდეგი სურათი 4.14, რომელიც მოყვანილია ქვემოთ.



სურ. 4.14. $\sin(2t)$ ფუნქციის გრაფიკი $t \in [0, 2\pi]$ შუალედში აბცისათა ღერძზე π აღნიშვნით

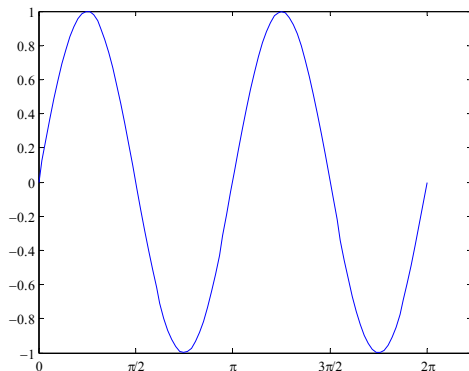
ასევე შესაძლებელია π სიმბოლოს ნაცვლად π ბერძნული ასოს გამოყენებაც, თუ შევიტანთ ბრძანებებს:

მაგალითი 4.1.15.

```
>> t=linspace(0,2*pi);
>> plot(t,sin(2*t))
>> set(gca,'XTick',(0:0.5:2)*pi)
>> set(gca,'XTickLabel','0|pi/2|pi|3pi/2|2pi')
>> set(gca,'FontName','Symbol')
>> set(gca,'XTickLabel','0|p/2|p|3p/2|2p')
```

ზემოთ მოყვანილი პროგრამული კოდის შესრულების შედეგად გრაფიკულ ფანჯარაში გამოისახება ახალი გრაფიკი რომლის აბცისათა ღერძზე ახალი ჭდე, რომელზეც გამოსახულია რიცხვების ნაცვლად π ბერძნული ასო.

გრაფიკულ ფანჯარა გამოსახულია შემდეგ სურათზე 4.14.



სურ. 4.15. $\sin(2t)$ ფუნქციის გრაფიკი $t \in [0, 2\pi]$ შუალედში აბცისთა ღერძზე π აღნიშნვით

გარდა ზემოთ მოყვანილი მაგალითებისა *MATLAB*-ში არსებობს ორგანზომილებიანი გრაფიკების გაფორმების მრავალი ასპექტი, რომლებსაც ამ ნაშრომში არ შევეხებით, რამეთუ მოყვანილი მაგალითები საკმარისია ამ ნაშრომში დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად.

§4.2 ორგანზომილებიანი გრაფიკების აგება პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში

პოლარული კოორდინატთა სისტემა ხშირად გამოიყენება ფიზიკური ამოცანების გადაწყვეტის დროს. განსაკუთრებით დიდი ინფორმაციის შემცველია პოლარულ კოორდინატებში მოცემული გრაფიკები ელექტროდინამიკის ამოცანების შემთხვევაში, როცა საჭიროა გამოსხივებული ველების დიაგრამის პოვნა შორ ზონაში.

პოლარული კოორდინატთა სისტემა შედგება ფიქსირებული O წერტილისაგან, რომელსაც პოლუსი ეწოდება, კონცენტრული წრეწირებისაგან, რომელთა ცენტრები ემთხვევა სისტემის პოლუსს და O პოლუსიდან გამომავალი სხივებისაგან, რომელთაგან ერთერთი, OX ღერძი, პოლარულ ღერძს წარმოადგენს.

ნებისმიერი M წერტილს პოლარულ კოორდინატებში შეგვიძლია ცალსახად შევუსაბამოთ ორი დამოუკიდებელი სიდიდე $\rho = [OM]$, რომელიც პოლარულ რადიუსს წარმოადგენს და φ , რომელიც XOM კუთხის ტოლია და მას პოლარულ კუთხეს უწოდებენ.

ρ და φ სიდიდეებს M ნერტილის პოლარული კოორდინატები ეწოდება და ეს ნერტილი $M(\rho, \varphi)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში გრაფიკის ფორმირებისათვის საჭიროა პოლარული რადიუსისა და პოლარული კუთხის მასივების შექმნა და *polar* ფუნქციისადმი მიმართვა. *polar* ფუნქცია შემდეგი სახით ჩაინერება:

polar(phi, ro, s),

სადაც *phi* - პოლარული კუთხის მასივია; *ro* - პოლარული რადიუსის მასივია; *s* - სტრიქონია, რომელიც სამი სიმბოლოსაგან შედგება: ეს სიმბოლოები განსაზღვრავენ წირის ფერს, მარკერს და წირის ტიპს.

polar ფუნქცია გამოვიყენოთ შემდეგი ამოცანის რეალიზაციისათვის:

ამოცანა 4.2.1. ავაგოთ $\rho = 2\cos(3\varphi)$ ფუნქციის გრაფიკი

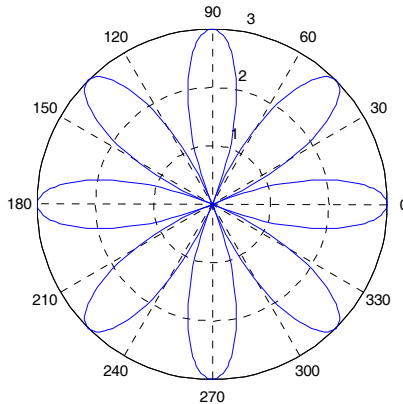
პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში;

ამ ამოცანის შესაბამის პროგრამული კოდი მოყვანილია მაგალით 4.2.1-ში.

მაგალითი 4.2.1.

```
>> fi=0:pi/200:2*pi;
>> ro=3*cos(4*fi);
>> plot(fi,ro);
```

გრაფიკულ ფანჯარაში გამოჩნდება გრაფიკი:

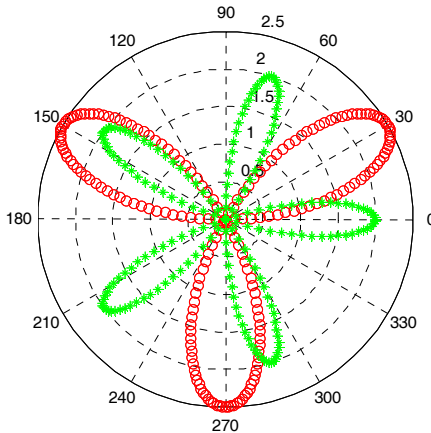


სურ. 4.16. $3\cos(4\varphi)$ ფუნქციის გრაფიკი პოლარულ კოორდინატებში

როგორც აღვნიშნეთ, პოლარულ კოორდინატებში მოცემულ გრაფიკებზე შესაძლებელია ფერის, მარკერის და გრაფიკის წირის ტიპის შერჩევა, ასევე ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში რამოდენიმე ფუნქციის წირის განთავსება. მაგალითად მოვიყვანოთ შემდეგი პროგრამული კოდი და მისი შესრულების შედეგი:

მაგალითი 4.2.2.

```
>>% პოლარული კუთხის მასივის ფორმირება
>> fi=0:pi/200:2*pi;
>>% ro1=2.5sin(3φ) ფუნქციის მასივის ფორმირება
>> ro1=2.5*sin(3*fi);
>>% გრაფიკზე წითელი წრეებით ფუნქციის გამოტანა
>> polar(fi,ro1,'ro')
>>% ro2=2cos(5φ) ფუნქციის მასივის ფორმირება
>> ro2=2*cos(5*fi);
>>% ახალი ფანჯრის შექმნის ბლოკირება
>> hold on
>>% გრაფიკზე მწვანე ვარსკვლავებით
>>% ფუნქციის გამოტანა
>> polar(fi,ro2,'g*')
```



სურ. 4.17. $2.5\sin(3\varphi)$ და $2\cos(5\varphi)$ ფუნქციის გრაფიკი ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში მოცემული მარკერების გამოყენებით

პროგრამის გაშვების შემდეგ გრაფიკულ ფანჯარაში გამოჩნდება გრაფიკი პოლარულ კოორდინატებში, რომელზეც გამოსახულია $2.5\sin(3\varphi)$ და $2\cos(5\varphi)$ ფუნქციების გრაფიკები შესაბამისი მარკერებითა და ფერებით (სურ.4.17):

შემდეგი ამოცანის მაგალითზე განვიხილოთ ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში ორი სხვადასხვა ფუნქციის „ქვეგრავიკების“ გამოსახვის შესაძლებლობა.

ამოცანა 4.2.2. ავაგოთ $\rho(\varphi) = 3.5\cos(4\varphi)$ და $\rho(\varphi) = 2.2\sin(x) + 1$ ფუნქციის გრაფიკები პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში;

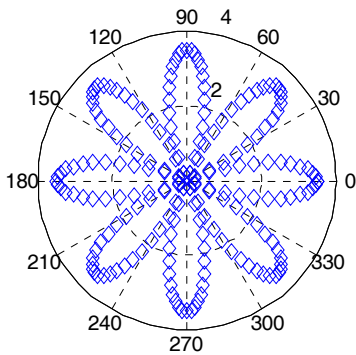
ამ ამოცანის შესაბამის პროგრამული კოდი მოყვანილია მაგალით 4.2.3-ში.

მაგალითი 4.2.3

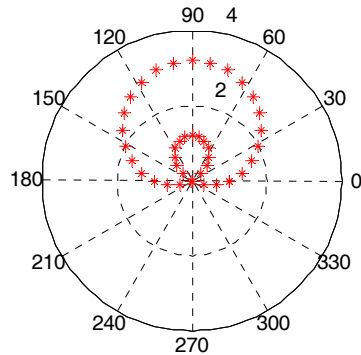
```
>>% ვაგებთ პოლარული fi კუთხის მასივს
>> fi=0:pi/100:2*pi;
>> ro=3.5*cos(4*fi);
>> ro1=2.2*sin(fi)+1;
>>% გრაფიკულ ფანჯარას ვყოფთ ორ ნაწილად
>> subplot(1,2,1);
>>% გრაფიკულ ქვეფანჯარაში ვაგებთ პირველ გრაფიკს
>> polar(fi,ro,'d')
>>% პირველ გრაფიკზე გამოგვყავს სათაური
>> title('drawing of the function \rho(\phi)=3.5cos(4\phi)');
>> subplot(1,2,2);
>>% ვაგებთ პოლარული fi1 კუთხის მასივს
>> fi1=0:pi/20:2*pi;
>> ro1=2.2*sin(fi)+1;
>>% გრაფიკულ ქვეფანჯარაში ვაგებთ მეორე გრაფიკს
>> polar(fi,ro1,'r*')
>>% მეორე გრაფიკზე გამოგვყავს სათაური
>> title('drawing of the function \rho(\phi)=2.2sin(\phi)+1');
```

პროგრამის შესრულების შემდეგ გრაფიკულ ფანჯარაში გამოისახება ორი ქვეფანჯარა ცალკეული გრაფიკისათვის თავისი ნარწერებით. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ პირველ შემთხვევაში გამოთვლები ხდება 201 ნერტილში ხოლო მეორეში 41 ნერტილში.

drawing of the function $\rho(\phi)=3.5\cos(4\phi)$



drawing of the function $\rho(\phi)=2.2\sin(\phi)+1$



სურ. 4.18. $3.5\cos(4\phi)$ და $2.2\sin(\phi) + 1$ ფუნქციის გრაფიკები ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში ცალცალკე

აქვე აღვნიშნოთ, რომ კონცენტრული წრეწირების რადიუსების შესაბამისი მნიშვნელობები მითითებულია გრაფიკის ზედა ნაწილში O პოლუსიდან გამომავალი ვერტიკალური სხივის მარჯვენა მხარეს.

§4.3 პარამეტრული ფორმით მოცემული გრაფიკების აგება

$x = f(t)$ და $y = g(t)$ ტოლობებით მოცემულ $y(x)$ ფუნქციას პარამეტრული სახით ჩანერილი ფუნქცია, ხოლო t ცვლადს დამხმარე პარამეტრი ეწოდება. ასეთი ფორმით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება შეიძლება შემდეგი თანმიმდევრული მოქმედებებით განხორციელდეს:

- განვსაზღვროთ t დამხმარე პარამეტრის მასივი;
- განვსაზღვროთ $x = f(t)$ და $y = g(t)$ ფუნქციების მასივები;
- ავაგოთ $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკი *plot* ფუნქციის გამოყენებით;

ფიზიკაში პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს მექანიკაში ჰოტიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის შემთხვევა, რომელსაც ანიმაციის განხილვისას შევხვებ-

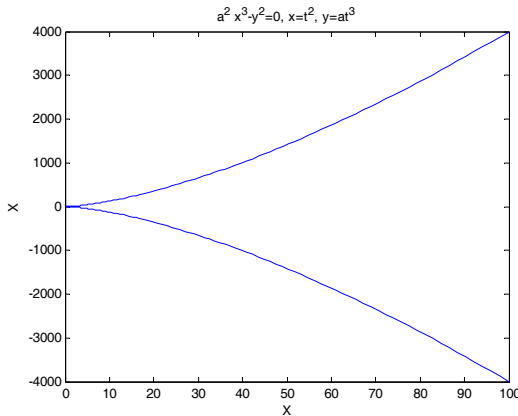
ით. განვიხილოთ პარამეტრული გრაფიკების აგების მაგალითები შემდეგი ამოცანების საშუალებით:

ამოცანა 4.3.1. ავაგოთ $a^2 x^3 - y^2 = 0$ ($a > 0$) ნახევრადკუბური პარაბოლის გრაფიკი. მისი პარამეტრული წარმოდგენა გაცილებით მარტივია: $x = t^2$, $y = at^3$, $-\infty < t < \infty$.

ამ ამოცანის შესაბამის პროგრამული კოდი მოყვანილია მაგალით 4.3.1-ში.

მაგალითი 4.3.1.

```
>> a=4;
>> t=-10:0.1:10;
>> x=t.^2;
>> y=a*t.^3;
>> plot(x,y);
>> title('a^2 x^3-y^2=0, x=t^2, y=at^3');
>> xlabel('X');
>> ylabel('Y');
```



სურ. 4.19. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გრაფიკი

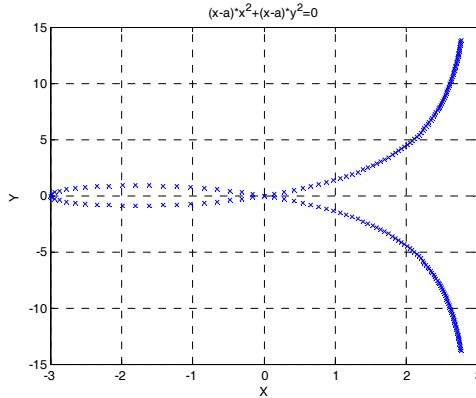
პარამეტრულად მოცემული გრაფიკების აგების შემთხვევაში *plot* ფუნქციას გააჩნია იგივე თვისებები, რისი მაგალითებიც განხილული იყო წინა პარაგრაფებში. ზოგიერთი მათთაგანი გამოვიყენოთ მომდევნო ამოცანაში:

ამოცანა 4.3.2. ავაგოთ $(x + a)a^2 + (x - a)y^2 = 0$, ($a > 0$) სტროფოიდის გრაფიკი. მისი პარამეტრული წარმოდგენა მოცემულია შემდეგი სახით: $x(t) = a \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y(t) = a \frac{t(t^2-1)}{t^2+1}$, ($-\infty < t < \infty$).

ამ ამოცანის შესაბამის პროგრამული კოდი მოყვანილია მაგალით 4.3.2-ში.

მაგალითი 4.3.2.

```
>> a=3;  
>> t=-5:0.05:5;  
>> x=a*(t.^2-1)/(t.^2+1);  
>> y=a*t.*(t.^2-1)/(t.^2+1);  
>> plot(x,y,'bx')  
>> title('(x-a)*x^2+(x-a)*y^2=0');  
>> grid on  
>> xlabel('X');  
>> ylabel('Y');
```



სურ. 4.20. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მარკერის და გრაფიკული ბადის გამოყენებით

გრაფიკზე გრაფიკული ბადე დადებულია *grid on* ფუნქციის მოქმედების შედეგად.

ეს არის მოკლედ პარამეტრული ფუნქციების აგების მაგალითები, რომლებიც შემდგომში გამოგვადგება ფიზიკური პროცესების მოდელირების ამოცანების განხილვისას.

თავი 5. სამგანზომილებიანი გრაფიკა MATLAB-ში

ამ თავში განხილულია *MATLAB*-ის გრაფიკული შესაძლებლობები სამგანზომილებიან გრაფიკაში. დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში სამგანზომილებიანი წირებისა და ზედაპირების გრაფიკების აგება და გაფორმება.

ნაჩვენებია, რომ პროგრამული პაკეტი *MATLAB*-ი ფლობს მძლავრ შესაძლებლობებს გრაფიკული წირებისა და ზედაპირების ასაგებად და იძლევა ამ ზედაპირების რედაქტირებისა და გრაფიკების გაფორმების შესაძლებლობას.

ამისათვის გამოყენებულია მრავალი ბრძანება და ფუნქცია, რომელიც იძლევა გრაფიკების აგების შესაძლებლობას პარამეტრულად მოცემული ფუნქციების შემთხვევაში. ასევე განხილულია *MATLAB*-ის ანიმაციური შესაძლებლობები, რაც იძლევა ფართო შესაძლებლობებს გარდამავალი პროცესების ვიზუალიზაციისათვის.

განხილულია გრაფიკების აგების შესაძლებლობები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში; სამგანზომილებიანი წირების აგება; პარამეტრულ ფორმაში მოცემული გრაფიკის აგება; სამგანზომილებიანი გრაფიკების ფორმატირების საკითხები. გრაფიკული ზედაპირების აგების, ფორმატირების და გაფორმების საკითხები; პარამეტრულად მოცემული გრაფიკული ზედაპირების აგება; პროგრამული პაკეტის ანიმაცია.

§5.1 სამანზომილებიანი წირების აგება

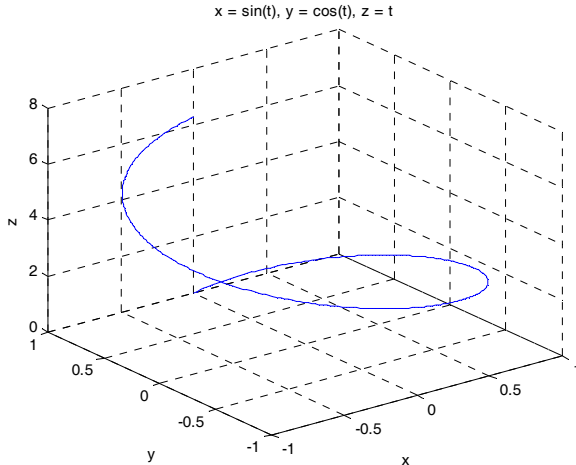
აღწერით სამანზომილებიანი გრაფიკის (ვიზუალიზაციის) ფუნქციები, რომლებიც იძლევა სამანზომილებიანი წირების აგების შესაძლებლობას. ორი განზომილებისაგან განსხვავებით პროგრამულ პაკეტ *MATLAB*-ში ასეთი ფუნქციები ფართოდაა წარმოდგენილი *ez* ტიპის ფუნქციითაა სახით, რომლებიც იძლევა წირებისა და ზედაპირების აგების ფართო შესაძლებლობას.

განხილვა დავინყოთ *ezplot3* ფუნქციის განხილვით, რომელიც აგებს პარამეტრულად მოცემულ სამანზომილებიან წირებს. ფუნქციის სინტაქსი შემდეგი: *ezplot3(x(t),y(t),z(t))*, სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ სამანზომილებიანი წირის პარამეტრულად მოცემული განტოლებებია. ნახაზი ავაგოთ $t \in [0, 2\pi]$ ინტერვალში.

ამოცანა 5.1.1. ავაგოთ $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = t$ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გრაფიკი.

მაგალითი 5.1.1.

```
>> ezplot3('sin(t)', 'cos(t)', 't')
```



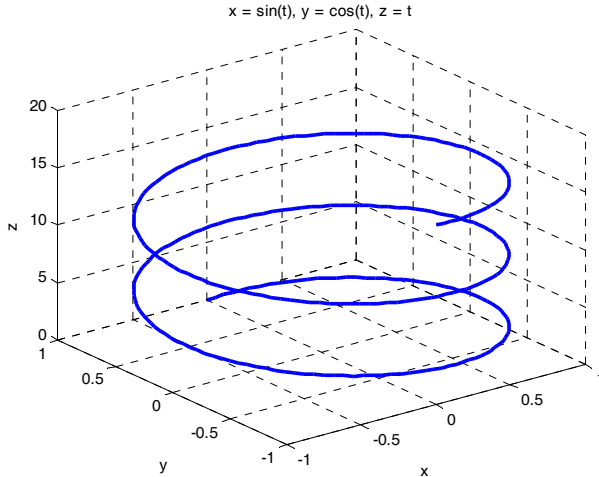
სურ. 5.1. $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = t$ პარამეტრული ფუნქციის გრაფიკი

აქ გამოსახულია სივრცითი წირის - სპირალის ერთი ხვია. თუ გვინდა უფრო მეტი რაოდენობის ხვიების მიღება, მაშინ საჭიროა პარამეტრის ცვლილების მარჯვენა საზღვრის შეცვლა, მაგალითად, ინტერვალის ავილოთ პარამეტრის ცვლილების $0 < t < 5\pi$

დიაპაზონში. ეს საზღვრები შევიტანოთ ორგანზომილებიანი ვექტორის სახით `ezplot3` ფუნქციაში. შევასრულოთ ბრძანება:

მაგალითი 5.1.2.

```
>> h=ezplot3('sin(t)','cos(t)', 't',[0,5*pi]);
>> set(h,'LineWidth',2.5)
```



სურ. 5.2. $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = t$ პარამეტრული ფუნქციის გრაფიკი სქელი წირით

ამ შემთხვევაში არა მარტო გავზარდეთ ხვეების რაოდენობა, არამედ შევცვალოთ წირის სისქეც. ამის საშუალება მოგვცა ოპერატორის `h=ezplot3('sin(t)','cos(t)', 't',[0,5*pi])` ფორმით ჩანერამ. ჩვენ ამ შემთხვევაში გამოვთვალეთ მიღებული წირის დესკრიპტორი `h` და ისევე როგორც ორგანზომილებიან შემთხვევაში შევცვალეთ წირის თვისებები.

აქვე განვიხილოთ `plot3(x,y,z)` ფუნქცია, რომელიც თავისი ორგანზომილებიანი ანალოგის მსგავსად აგებს წირს, რომლის ყოველი წერტილის კოორდინატი შეესაბამება x , y და z ვექტორების ელემენტებს. თუ ფუნქციის არგუმენტები ერთნაირი ზომის მატრიცებია, მაშინ აიგება ამ მატრიცების შესაბამისი წირები.

ამოცანა 5.1.2. შევიტანოთ `plot3(x,y,z)` ფუნქციაში $x = |t \sin t|$, $y = t \cos t$, $z = t$ არგუმენტები, სადაც $t \in [1,25]$.

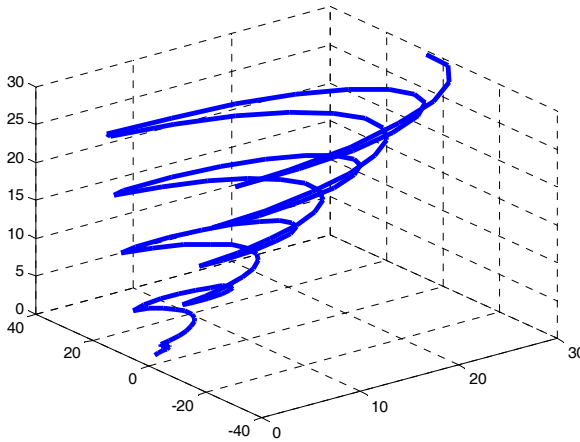
მაგალითი 5.1.3.

```
>> t=1:.25:30;
```

```

>> x=abs(t.*sin(t));
>> y=t.*cos(t);
>> z=t;
>> h=plot3(x,y,z);
>> set(h,'LineWidth',2)
>> grid

```



**სურ. 5.3. $x = |t \sin t|$, $y = t \cos t$, $z = t$
პარამეტრული ფუნქციის გრაფიკი სქელი წირით**

როგორც სურათი 5.3-დან ჩანს ეს ფრაფიკი განსხვავებულ-
ლია წინა გრაფიკებისაგან პირველ რიგში იმით, რომ აქ არ არის
გამოტანილი გრაფიკის სახელი და ღერძების სახელები, რომელიც
ezplot3 ფუნქციის გამოყენებისას ავტომატურად ჩნდებოდა გრაფიკ-
ზე. ასევე მითითების გარეშე ხდებოდა პარამეტრის მასივის ფორმ-
ირება $t \in [0, 2\pi]$ ინტერვალში. როგორც ვხედავთ ამ ოპერატორის
გამოყენება უფრო მოხერხებულია ასეთი წერებია ასაგებად ვიდრე
plot3 ფუნქცია. მიუხედავად ამისა *plot3* ფუნქციას გააჩნია თავისი
დადებითი მხარეები.

ზედაპირების აგების „ez“ ტიპის ფუნქციათა გამოყენებას
დეტალურად შევხებით მომდევნო პარაგრაფში *mesh*, *surf*, *azmesh*
და *ezsurf* ფუნქციების მაგალითზე.

§5.2 სამგანზომილებიანი ზედაპირების აგება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში

სამგანზომილებიანი გრაფიკები, 3D-გრაფიკა, ან უბრალოდ სამგანზომილებიანი ზედაპირი არის გრაფიკი, რომელშიც მოცემული ნერტილის მდებარეობა სამი კოორდინატის ანუ სამგანზომილებიანი ვექტორის საშუალებით განისაზღვრება. სამგანზომილებიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა ჩვენ განვმარტეთ პირველ თავში და აქ უბრალოდ გავიხსენებთ ამ განმარტების ძირითად საკითხებს.

სამგანზომილებიანი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა წარმოადგენს კოორდინატთა O სათავეს და კოორდინატთა სამ ურთიერთმართობულ ღერძს, რომლებიც კოორდინატთა სათავეში იკვეთებიან. ეს ღერძებია OX - აბცისა, OY - ორდინატა და OZ — აპლიკატა. თუ ნერტილს გააჩნია სამი x , y და z კოორდინატი, მაშინ x - ნერტილის აბცისაა, y - ნერტილის ორდინატაა, ხოლო z - ნერტილის აპლიკატაა. x , y და z კოორდინატების დამაკავშირებელი განტოლება განისაზღვრება როგორც იმ ზედაპირის განტოლება, რომლის ნებისმიერი ნერტილი აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. z სიდიდეს x და y სიდიდეების ფუნქცია ეწოდება, თუ x -ის და y -ის ნებისმიერ მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან, შეესაბამება ერთი z მნიშვნელობა. ამასთან x და y სიდიდეებს $z = f(x, y)$ ფუნქციის არგუმენტები ეწოდებათ.

ფუნქცია მოცემულად ითვლება, თუ არგუმენტების ნებისმიერ მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ყველა მნიშვნელობის ერთობლიობას, რომელიც მოცემულ ამოცანაში შეუძლია მიიღოს $z = f(x, y)$ ფუნქციის x და y არგუმენტებმა, ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება. $z = f(x, y)$ ფუნქციას ორი ცვლადის ფუნქცია ეწოდება.

სამ ზედაპირს რომელიც XOY , XOZ და YOZ სიბრტყეებს წარმოადგენს კოორდინატთა ღერძები ეწოდებათ. ამ სიბრტყეებისა და $z = f(x, y)$ ფუნქციის თანაკვეთა წირს წარმოსდგენს და მისი ფორმა ფუნქციის სახეზეა დამოკიდებული.

MATLAB-ში სამგანზომილებიანი გრაფიკის აგება შესაძლებელია დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში. ორი ცვლადის $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად უნდა შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

- შევექმნათ გრაფიკის აგების არეში მართკუთხა ბადე, მივმართოთ OX და OY ღერძების პარალელურად წირები $y = y_j$ და $x = x_i$, სადაც $x_i = x_0 + i\Delta_x$, $\Delta_x = x_n - x_{n-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ და $y_j = y_0 + j\Delta_y$, $\Delta_y = y_k - y_{k-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$;
- გამოვთვალოთ $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ მნიშვნელობები ბადის გადაკვეთის ყველა კვანძში;
- მივმართოთ $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ ზედაპირის აგების ფუნქციას მასზე პარამეტრებად კვანძებისა და ფუნქციის მნიშვნელობებად ამ კვანძებში $Z = (z_{ij})$ მნიშვნელობების მინიჭებით;

მართკუთხა ბადის ფორმირება *MATLAB*-ში შესაძლებელია ფუნქცია *meshgrid*-ის გამოყენებით. განვიხილოთ სამგანზომილებიანი გრაფიკის აგება შემდეგი მაგალითის საშუალებით:

ამოცანა 5.2.1. ავაგოთ $z(x, y) = y^2 - x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც $x \in [-3, 3]$ და $y \in [-2, 2]$ ინტერვალს.

ბადის ფორმირება ხდება *meshgrid* ფუნქციის გამოყენებით (*mesh* - უჯრედი, *grid* - ბადე):

მაგალითი 5.2.1.

```
>> [x y]=meshgrid(-3:3,-2:2)
```

x =

```
-3 -2 -1 0 1 2 3
-3 -2 -1 0 1 2 3
-3 -2 -1 0 1 2 3
-3 -2 -1 0 1 2 3
-3 -2 -1 0 1 2 3
```

y =

```
-2 -2 -2 -2 -2 -2 -2
-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1
```

2 2 2 2 2 2 2

meshgrid ფუნქციის შესრულების შედეგად ბადე ფორმირებულია და საჭიროა მის კვანძებში ფუნქციის მნიშვნელობების განსაზღვრა:

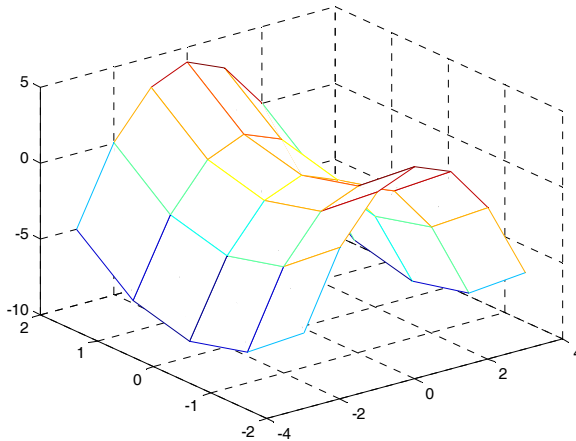
```
>> z=y.^2-x.^2
```

z =

```
-5  0  3  4  3  0 -5  
-8 -3  0  1  0 -3 -8  
-9 -4 -1  0 -1 -4 -9  
-8 -3  0  1  0 -3 -8  
-5  0  3  4  3  0 -5
```

მიმართოთ *mesh* ფუნქციას და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი:

```
>> mesh(x,y,z);
```



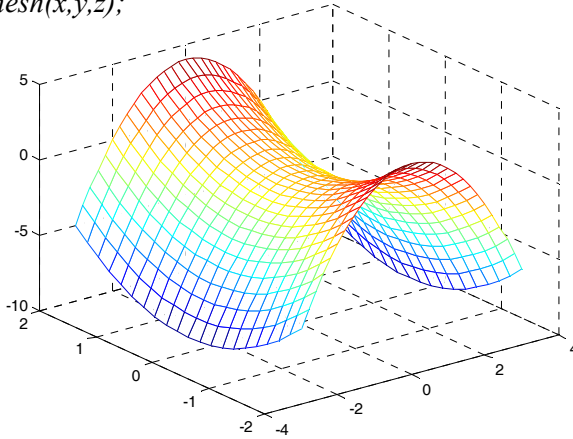
სურ. 5.4. $z(x, y) = y^2 - x^2$ ფუნქციის გრაფიკი

მოცემული გრაფიკის აგება შესაძლებელია უფრო მჭიდრო ბადის შემთხვევაში როცა ხდება გაცილებით მცირე ბიჯის მითითება ბადის ფორმირებისას:

მაგალითი 5.2.2.

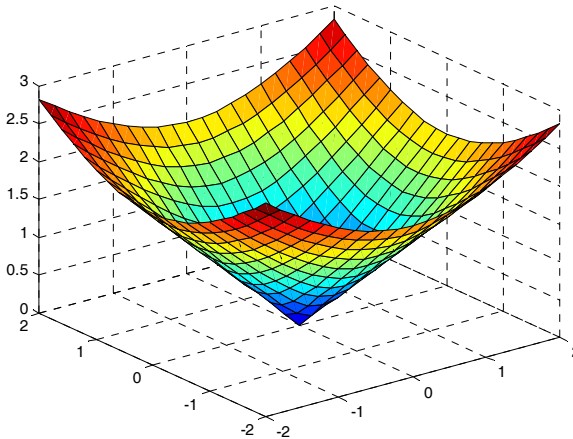
```
>> [x y]=meshgrid(-3:0.2:3,-2:0.2:2);
```

```
>> z=y.^2-x.^2;
>> mesh(x,y,z);
```



სურ. 5.5. $z(x, y) = y^2 - x^2$ ფუნქციის გრაფიკი
უფრო მჭიდრო ბადით

MATLAB-ში *mesh* ფუნქციის საშუალებით მივიღეთ ე.წ კარკ-ასულად აგებული გრაფიკი. ამის გარდა შესაძლებელია ასევე *surf* ფუნქციის გამოყენება, რომელიც კარკასული ფუნქციის უჯრებს აფერადებს სხვადასხვა ფერებით უჯრების კვანძებში ფუნქციის მნიშვნელობის მიხედვით:



სურ. 5.6. $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ფუნქციის გრაფიკი

surf ფუნქციის გამოყენებით

სურათ 5.6-ზე მოყვანილია შემდეგი პროგრამული კოდის მუშაობის შედეგად მიღებული გრაფიკი:

მაგალითი 5.2.3.

```
>> [x y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);  
>> z=sqrt(x.^2+y.^2);  
>> surf(x,y,z);
```

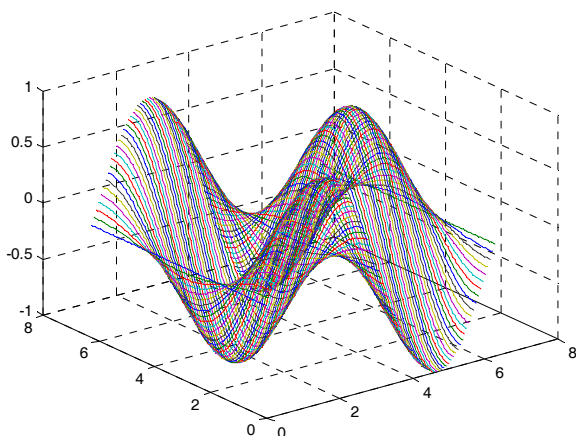
ამოცანა 5.2.2. ავაგოთ $z(x, y) = \sin x \cos y$ ფუნქციის გრაფიკი, სადაც $x \in [0, 2\pi]$ და $y \in [0, 2\pi]$ ინტერვალს.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ $plot3(X, Y, Z)$ ფუნქცია. ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი ჩავენროთ შემდეგი სახით:

მაგალითი 5.2.4.

```
>> x=linspace(0,2*pi);  
>> y=linspace(0,2*pi);  
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);  
>> Z=sin(X).*cos(Y);  
>> h=plot3(X,Y,Z);  
>> grid on
```

პროგრამის გაშვების შემდეგ გრაფიკულ ფანჯარაში გამოჩნდება ქვემოთ მოყვანილი სურათი:



სურ. 5.7. $z(x, y) = \sin x \cos y$ ფუნქციის გრაფიკი

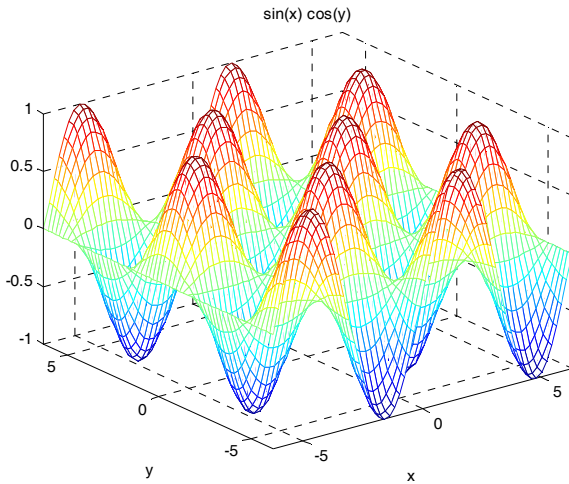
plot3(X,Y,Z) ფუნქციის გამოყენებით

ზემოთ მოყვანილი კოდის მესამე სტრიქონში ყალიბდება დისკრეტული ბადის კვანძების X და Y მატრიცები, ხოლო მეოთხე სტრიქონში Z მატრიცა, რომელიც წარმოადგენს კვანძებში ფუნქციის მნიშვნელობებს და ბოლო სტრიქონში ხდება გრაფიკის აგება. ამ მატრიცების ზომებია $[100 \times 100]$ და შესაბამისად გრაფიკზე გამოსახულია 100 წირი, თითოეული მათგანი წარმოადგენს მატრიცების სვეტების სივრცით გრაფიკს.

გადავიდეთ ფუნქციის მოქმედების განხილვაზე, რომელიც იძლევა გრაფიკზე სათაურის გამოტანის შესაძლებლობას. ავაგოთ ამოცანა 5.2.2-ს უფრო „მარტივი“ ფუნქცია *ezmesh*-ის გამოყენებით. ასაგები ფუნქციის ფორმულა სიმბოლური სახით აპოსტროფებში ჩაინერება:

მაგალითი 5.2.5.

```
>> ezmesh('sin(x)*cos(y)')
```



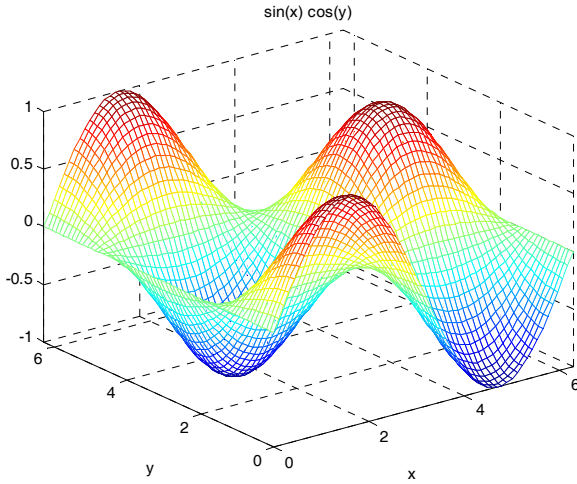
სურ. 5.8. $z(x, y) = \sin x \cos y$ ფუნქციის გრაფიკი *ezmesh* ფუნქციის გამოყენებით

ბოლო ორ ნახაზს შორის განსხვავება გამოწვეულია სხვადასხვა არეების გამოყენებით: სურათ 5.7-ზე ზედაპირი აგებულია $x \in [0, 2\pi]$ და $y \in [0, 2\pi]$ ინტერვალში, ხოლო სურათ 5.8-ზე *ezmesh* ფუნქცია გაჩუმებით იყენებს $x \in [-2\pi, 2\pi]$ და $y \in [-2\pi, 2\pi]$ ინტერვალს.

თუ მივითითებთ *ezmesh* ფუნქციაში წინა ინტერვალს მივიღებთ სურათ 5.7-ის ანალოგიურ გრაფიკს:

მაგალითი 5.2.6.

```
>> ezmesh('sin(x)*cos(y)',[0,2*pi,0,2*pi])
```



სურ. 5.9. $z(x, y) = \sin x \cos y$ ფუნქციის გრაფიკი *ezmesh* ფუნქციის გამოყენებით

ისევე როგორც ორგანოზომილებიანი გრაფიკების შემთხვევაში აქაც შესაძლებელია ორი ზედაპირის აგება ერთ კოორდინატთა სისტემაში, აქაც გამოიყენება *hold on* ბრძანება, რომელიც ახდენს მეორე გრაფიკული ფანჯრის გახსნის ბლოკირებას:

ამოცანა 5.2.3. ავაგოთ $z(x, y) = \pm(x^2 + y^2) - 1$ ფუნქციის

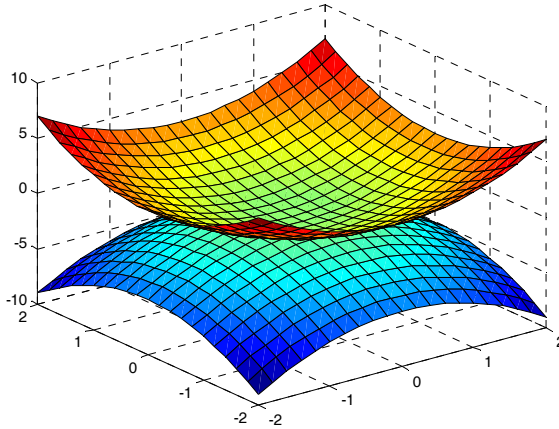
გრაფიკი, სადაც $x \in [-2, 2]$ და $y \in [-2, 2]$ ინტერვალს.

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენოთ *surf* ფუნქცია. ჩავენერთ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი:

მაგალითი 5.2.7.

```
>> [x y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);
>> z1=x.^2+y.^2-1;
>> z2=-x.^2-y.^2-1;
>> surf(x,y,z);
>> surf(x,y,z1);
>> hold on
```

>> surf(x,y,z2);



სურ. 5.10. $z(x, y) = \pm(x^2 + y^2) - 1$ ფუნქციის ორი გრაფიკი ერთ ფანჯარაში *ezmesh* ფუნქციის გამოყენებით

§5.3 პარამეტრულად მოცემული სამანზომილებიანი ზედაპირების აგება

პარამეტრულად მოცემული $x(u, v)$, $y = (u, v)$ და $z = (u, v)$ ზედაპირის გრაფიკის ასაგებად აუცილებელია ავაგოთ ერთი და იგივე ზომის X , Y და Z მატრიცები. ამისათვის უნდა ავაგოთ ერთნაირი ზომების u და v მასივები. ამის შემდეგ უნდა გამოვყოთ x , y და z სიდიდეების ძირითადი წარმოდგენა ზედაპირების პარამეტრულად გამოსახვის შემთხვევაში:

- თუ x , y და z სიდიდეები წარმოდგენილია $f(u)g(v)$ სახით, მაშინ მათი შესაბამისი X , Y და Z მატრიცების ფორმირება უნდა მოხდეს $f(u)$ და $g(v)$ მეტრული ნამრავლის სახით;
- თუ x , y და z სიდიდეები წარმოდგენილია $f(u)$ ან $g(v)$ სახით, მაშინ მათი შესაბამისი X , Y და Z მატრიცების ფორმირება უნდა მოხდეს ერთი $f(u)ones(size(v))$ ან მეორე $g(v)ones(u)$ სახით შესაბამისად:

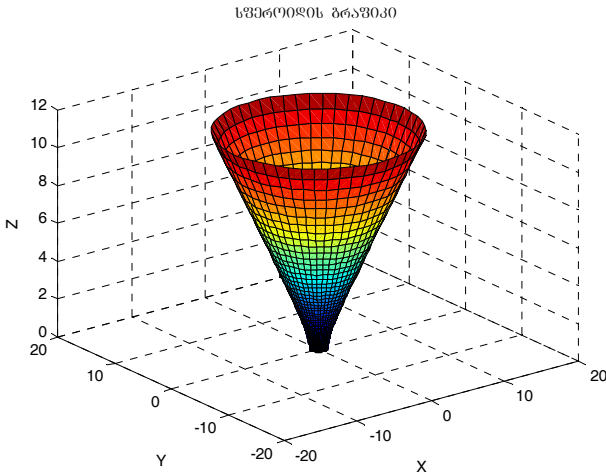
განვიხილოთ პარამეტრულად მოცემული ზედაპირების გრაფიკების აგების ამოცანა შემდეგი ორი ამოცანის მაგალითზე.

ამოცანა 5.3.1. ავაგოთ ერთღრუიანი ჰიპერპოლოიდის $x(u, v) = ch(u)\cos(v)$ გრაფიკი, რომელიც მოცემულია პარამეტრული $x(u, v) = ch(u)\cos(v)$, $y(u, v) = ch(u)\sin(v)$, $z(u, v) = sh(u)$ სახით:

ჩვენერთ ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი:

მაგალითი 5.3.1.

```
>> h=3.14/50;
>> u=(0:h:3.14)';
>> v=(0:2*h:2*3.14);
>> X=cosh(u)*cos(v);
>> Y=cosh(u)*sin(v);
>> Z=sinh(u)*ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);
>> grid on;
>> s=strcat('sferoidis grafiki');
>> title(s,'FontName','AcadMtavr');
>> xlabel('X');
>> ylabel('Y');
>> zlabel('Z');
```



სურ. 5.11. $x(u, v) = ch(u)\cos(v)$, $y(u, v) = ch(u)\sin(v)$,
 $z(u, v) = sh(u)$ პარამეტრული ფუნქციის გრაფიკი

მომდევნო მაგალითში განვიხილოთ სფეროს გრაფიკის აგების ამოცანა:

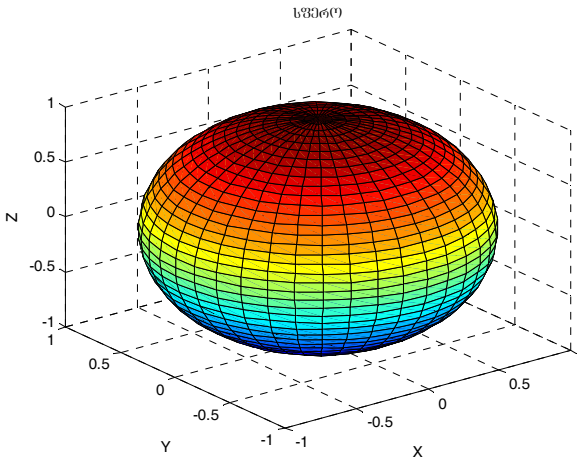
ამოცანა 5.3.2. ავაგოთ სფეროს ზედაპირი, რომლის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით:

$$x(u, v) = \sin(u) \cos(v), \quad y(u, v) = \sin(u) \sin(v), \quad z(u, v) = \cos(u).$$

ჩვენერთ ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი:

მაგალითი 5.3.2.

```
>> h=pi/40;
>> u=(0:h:pi)';
>> v=(0:2*h:2*pi);
>> x=sin(u)*cos(v);
>> y=sin(u)*sin(v);
>> z=cos(u)*ones(size(v));
>> surf(x,y,z);
>> grid on;
>> s=strcat('სფერო');
>> title(s,'FontName','AcadMtavr');
>> xlabel('X');
>> ylabel('Y');
>> zlabel('Z');
```



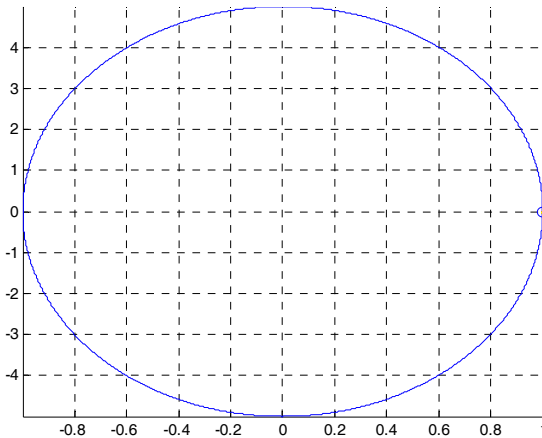
სურ. 5.12. $x(u, v) = \sin(u) \cos(v)$, $y(u, v) = \sin(u) \sin(v)$, $z(u, v) = \cos(u)$ პარამეტრული ფუნქციის გრაფიკი

სფეროს აგება შესაძლებელია სხვა პროგრამული კოდის გამოყენებითაც პარამეტრული ფორმის გამოყენების გარეშე, მაგრამ მას მოიგვიანებით შევეხებით, როცა განვიხილავთ ფიზიკური პროცესების კვლევის მეთოდებს, კერძოდ ელექტროდინამიკის ამოცანების ამხსნის კომბინირებულ მეთოდს.

§5.4 ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ანიმაცია

სიბრტყეში ან სივრცეში მატერიალური წერტილის ან სხეულის მოძრაობის შესასწავლად *MATLAB*-ში შესაძლებელია მისი მოძრაობის შესაბამისი გრაფიკის აგება და მის მოძრაობაზე თვალის დევნება. ანიმაციური რგოლის ასაგებად გვაქვს ორი ფუნქცია: *comet(x,y)* და *comet3(x,y,z)*. *comet(x,y)* ფუნქცია გვაძლევს სიბრტყეზე $y(x)$ წირის გასწვრივ წერტილის მოძრაობაზე თვალის დევნების საშუალებას, ხოლო *comet3(x,y,z)* ფუნქცია წერტილის მოძრაობას სივრცეში $z(x, y)$ წირის გასწვრივ.

მაგალითად, $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = 5\sin(t)$ განტოლებით მოცემული ელიფსის გასწვრივ წერტილის მოძრაობის შესასწავლად საკმარისი შემდეგი პროგრამული კოდის შედგენა, რომლის შესრულების შემდეგ გრაფიკძე გამოისახება შემდეგი სურათი (სურ. 5.13):



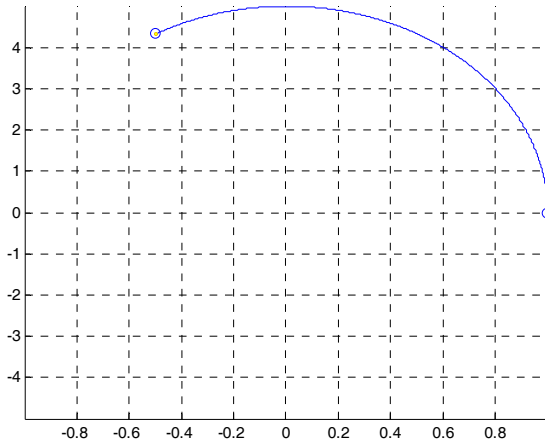
სურ. 5.13. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = 5\sin(t)$ განტოლებით მოცემული

ელიფსის გასწვრივ წერტილის მოძრაობა

მაგალითი 5.4.1.

```
>> t=0:0.001:2*pi;  
>> x=cos(t);  
>> y=5*sin(t);  
>> comet(x,y);
```

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გრაფიკზე ვაკვირდებით წერტილის მოძრაობას. მაგალითად, დროის $t = 2\pi/3$ მომენტში გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე (სურ. 5.14):



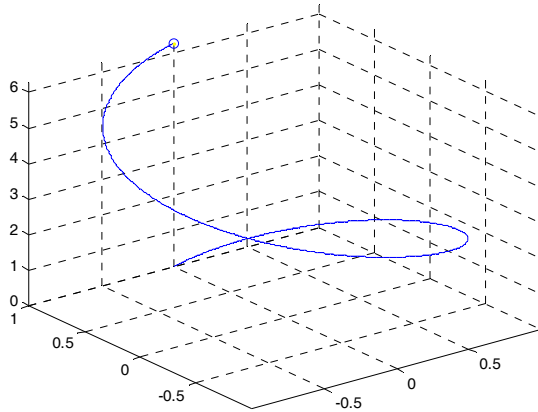
სურ. 5.14. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = 5\sin(t)$ განტოლებით მოცემული ელიფსის გასწვრივ წერტილის მოძრაობა

სივრცეში სპირალურ წირზე წერტილის მოძრაობის შესასწავლად განვიხილოთ პარამეტრულად მოცემული განტოლების $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = t$ შემთხვევა. ამისათვის გამოვიყენოთ ანიმაციის სამგანზომილებიანი ოპერატორი:

მაგალითი 5.4.2.

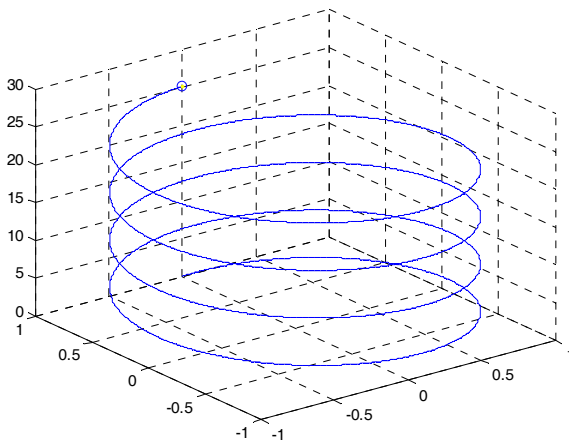
```
>> t=0:0.001:2*pi;  
>> comet3(sin(t),cos(t),t)
```

პროგრამის გაშვების და დასრულების შემდეგ გრაფიკზე გამოისახება პარამეტრულად მოცემული განტოლების შესაბამისი წირი, რომლის წვერში მოძრაობს წერტილი:



სურ. 5.15. $x(t) = \sin(t), y(t) = \cos(t), z(t) = t$ განტოლებით მოცემული სპირალის გასწვრივ ნერტილის მოძრაობა

ამ სურათზე გამოსახულია გრაფიკის ერთი ხვია. გრაფიკის სრულად გამოსახვისათვის გავზარდოთ პარამეტრის ცვლადის ზედა საზღვარი და ავგოთ შესაბამისი სურათი. ამისათვის შევცვალოთ მაგალით 5.4.2-ის კოდი შემდეგი მაგალით 5.4.3 კოდით:



სურ. 5.16. სპირალის გასწვრივ ნერტილის მოძრაობა

მაგალითი 5.4.3.

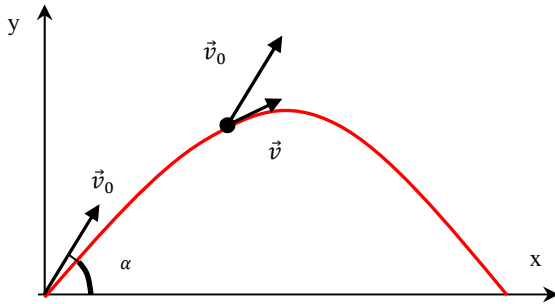
```
>> t=0:0.001:8*pi;  
>> x=sin(t);  
>> y=cos(t);  
>> z=t;  
>> comet3(x,y,z)
```

პროგრამის გაშვების და დასრულების შემდეგ გრაფიკზე გამოისახება სურ.5.16-ზე მოცემული წირი.

ანიმაციის გამოყენება შესაძლებელია მრავალი სახის ფიზიკური ამოცანის მოდელირებისა და ვიზუალიზაციისათვის, მათ შორის ერთერთია ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა, რომლის შესაბამისი წირი წარმოადგენს წირს სიბრტყეზე, ანუ ორგანზომილებიანი ანიმაციის შემთხვევას.

$comet(x,y)$ ფუნქციის გამოყენების მაგალითად მოვიყვანოთ საწყისი სიჩქარით ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის ამოცანა.

ამოცანა 5.4.1. ვიპოვოთ ჰორიზონტისადმი α კუთხით და v_0 საწყისი სიჩქარით გასროლილი სხეულის ფრენის დრო, სიშორე, მაქსიმალური სიმაღლე და ავაგოთ სხეულის მოძრაობის გრაფიკი.



სურ. 5.17. ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად სხეულის მოძრაობის განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრულად, ანუ გამოვსახოთ სხეულის მდებარეობის კოორდინატების დამოკიდებულება დროზე.

როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (5.4.1)$$

სხეულის მოძრაობის მაქსიმალურ სიმაღლეზე $v_y = 0$. ამ სიმაღლეს სხეული აღწევს $t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ დროში, ამასთან სხეულის ფრენის სრული დრო $t = 2t' = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.

სხეულის მოძრაობის განტოლება OX ღერძის გასწვრივ ტოლია:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (5.4.2)$$

ხოლო სხეულის მოძრაობის განტოლება OY ღერძის გასწვრივ

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (5.4.3)$$

სხეულის ფრენის სიშორე ტოლია:

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad (5.4.4)$$

ხოლო სხეულის ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე ტოლია:

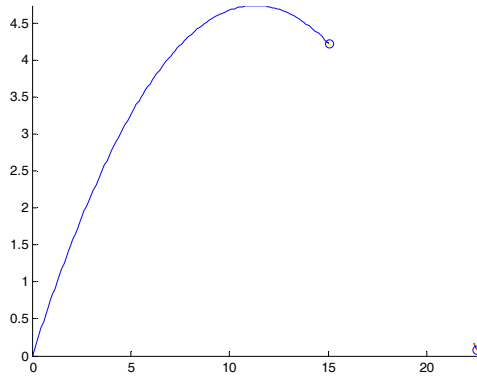
$$y_{max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}. \quad (5.4.5)$$

ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი მოცემულია მაგალით 5.4.4-ში.

მაგალითი 5.4.4.

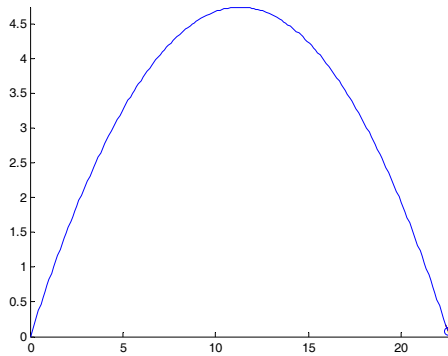
```
>> alpha=input('alpha=');
alpha=2*pi/9;
>> V0=input('V0=');
V0=15;
>> g=9.8;
>> k=2*V0*sin(alpha)/g;
>> t=0:0.01:k;
>> x=V0*t*cos(alpha);
>> y=V0*t*sin(alpha)-g*t.^2/2;
>> Xmax=(V0^2*sin(2*alpha))/g
Xmax =
    22.6104
>> Ymax=(V0*sin(alpha))^2/2/g
Ymax =
    4.7431
>> Tmax=k
Tmax =
    1.9677
>> comet(x,y);
```

სურათ 5.18-ზე მოცემულია სხეულის მდებარეობა ფრენის სრული დროის $\frac{2}{3}$ მომენტში, როდესაც სხეულმა გაიარა ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე და ეშვება ქვემოთ.



სურ. 5.18. *ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის ანიმაცია*

მომდევნო სურათ 5.19-ზე მოცემულია სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია, გრაფიკზე მოცემულია ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე და ფრენის სიშორე.



სურ. 5.19. *ჰორიზონტისადმი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია*

გრაფიკის გაფორმება შესაძლებელია ყველა იმ პროცედურების გამოყენებით, რაც მოყვანილია წინა პარაგრაფებში; მარკერით, წირის ფერით, წირის სისქით და ა.შ.

ამოცანა 5.4.2. ვიპოვოთ თავისუფლად ვარდნილი სხეულის ვარდნის დრო და კოორდინატი დროის მოცემულ მომენტში.

ვთქვათ m მასის სხეული თავისუფლად ვარდება h სიმაღლიდან v_0 საწყისი სიჩქარით. ამ სხეულზე მოქმედებს $F = mg$ სიმძიმის ძალა და $F_c = k_1v + k_2v^2$ გარემოს წინააღმდეგობის ძალა. სხეულის ვარდნა აღინერება ნიუტონის მეორე კანონით: $ma = mg - F_c$ ერთგანზომილებიან კოორდინატთა სისტემაში x ღერძით, რომელიც მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ და კოორდინატთა სათავით სხეულის ვარდნის საწყის წერტილში.

გარემოს წინააღმდეგობის ძალა $F_c = k_1v + k_2v^2$ დამოკიდებულია სხეულის სიჩქარეზე და სხეულის განივკვეთზე. k_1 –სტოქსის კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია გარემოს სიბლანტეზე. k_2 –წინააღმდეგობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია სხეულის განივკვეთის ფართობზე და წარმოადგენს სტოქსის კოეფიციენტთან შედარებით მცირე სიდიდეს. თუ სხეულის მოძრაობის სიჩქარე არ არის დიდი, მაშინ წინააღმდეგობის ძალაში დომინირებს წრფივი წევრი და კვადრატული წევრი შეიძლება უგულვებელვყოთ, ხოლო თუ მოძრაობის სიჩქარე დიდია მაშინ მკვეთრად იზრდება კვადრატული წევრი და წრფივი წევრი შეგვიძლია უგულვებელვყოთ.

სხეულის მოძრაობის მოდელირება გულისხმობს დროის ნებისმიერ t_i მომენტში სხეულის მდებარეობის x_i და სიჩქარის v_i და a_i ცოდნას. ცხადია, რომ ეს სიდიდეების დროის ფუნქციას წარმოადგენენ.

დროის საწყის მომენტში

$$t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 = 0, a_0 = 0. \quad (5.4.6)$$

გამოსათვლელი მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად დავუშვათ, რომ დროის მცირე $\Delta t = \tau$ მონაკვეთში სხეულის მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წრფივი თანაბარაჩქარებული მოძრაობის ცნობილი კანონები:

$$x = x_0 + v_0\tau + \frac{at^2}{2}, v = v_0 + a\tau, a = const. \quad (5.4.7)$$

(5.4.6) საწყისი პირობების გათვალისწინებით გამოთვლითი პროცესისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი სქემა:

$$t_0 = 0, x_0 = 0, v_0 = 0, a_0 = 0.$$

დროის t_i მომენტში საძიებელი სიდიდეებისათვის მივიღებთ:

$$t_i = t_0 + i\tau$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{i-1} + a_{i-1}\tau^2/2$$

$$v_i = v_{i-1} + a_{i-1}\tau$$

$$a_i = (mg - k_1v_i - k_2v_i^2)/2m$$

$$h_i = h - x_i$$

გამოთვლები იწყება $i = 1$ -დან და გრძელდება მანამ, სანამ x_i გახდება h -ის ტოლი.

თავი 6. რიცხვითი ინტეგრირება და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ში

რიცხვით ინტეგრირებასა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნას *MATLAB*-ში ძალიან დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია ფიზიკური ამოცანების გადასაჭრელად, რამე თუ ფიზიკური ამოცანების დიდი ჯგუფი სწორედ ინტეგრალური და დიფერენციალური განტოლებებით აღინერება.

ამ თავში განხილულია რიცხვითი ინტეგრირების საკითხები, ინტეგრირება ტრაპეციის მეთოდის გამოყენებით და ინტეგრირება სიმპსონის მეთოდით. ასევე განხილულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ამოცანები, პირველი რიგის და მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებებისა და განტოლებთა სისტემის ამოხსნის ამოცანები.

§6.1 რიცხვითი ინტეგრირება

ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია და ცნობილია, რომ ეს ფუნქცია უწყვეტია $x \in [a, b]$ ინტერვალზე და განსაზღვრულია ამ ფუნქციის პირველადი $F(x)$ ფუნქცია. ცნობილია, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი მოცემულ ინტერვალში გამოითვლება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (6.1.1)$$

სადაც, $F'(x) = f(x)$.

სშირად პრაქტიკაში საქმე გვაქვს ისეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციებთან, რომელთა პირველადები არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით ან წარმოადგენს ძალიან რთული სახის გამოსახულებას, რაც მნიშვნელოვნად ართულებს (6.1.1) ფორმულით ინტეგრალის გამოთვლის შესაძლებლობას. გარდა ამისა ხშირად ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მოცემულია ცხრილური წესით ან გრაფიკით, რაც გამორიცხავს პირველადი ფუნქციის შესაძლებლობას. ამ შემთხვევაში დიდი მნიშვნელობა გააჩნია ინტეგრირების რიცხვითი მეთოდების გამოყენებას, რომლის მთავარ ამოცანას ინტეგრალქვეშა ფუნქციის საშუალებით ინტეგრალის გამოთვლა წარმოადგენს.

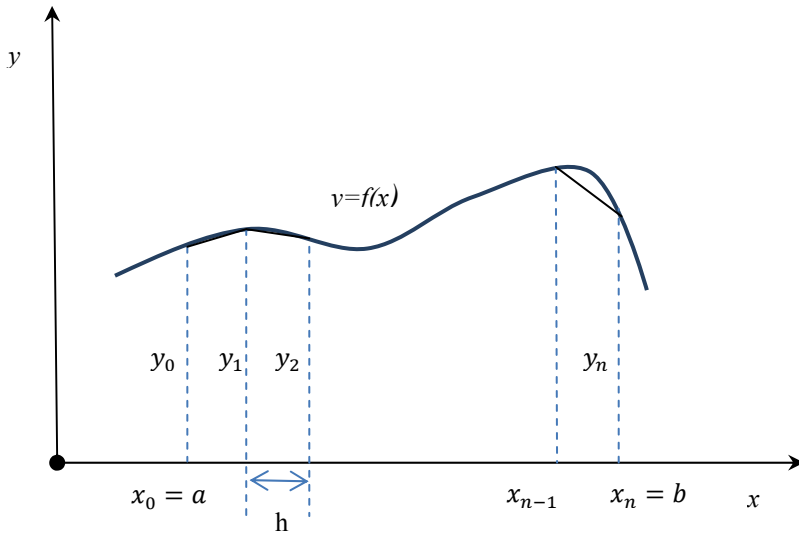
რიცხვითი ინტეგრალის გამოთვლას ხშირად მექანიკურ კვადრატურას უწოდებენ. ამა თუ იმ მიახლოებითი რიცხვითი ინტეგრირების მეთოდის შესაბამის ფორმულებს კვადრატურულ ფგორმულებს უწოდებენ. ამ ფორმულების ამგვარი დასახელება დაკავშირებულია განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიულ აზრთან:

$$y = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) \geq 0, \quad (6.1.2)$$

განსაზღვრული ინტეგრალი იმ მართკუთხედის ფართობის ტოლია, რომელიც თავის მხრივ უტოლდება ფართობით იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომლის ფუძეები $[a, b]$ მონაკვეთი და $f(x)$ ფუნქციაა.

ინტეგრირების ფუნქციები *MATLAB*-ში რეალიზებულია რამოდენიმე განსხვავებული რიცხვითი ალგორითმით. ზოგადად რიცხვითი მათემატიკის კლასიკური სახელმძღვანელოები გვთავაზობს რიცხვითი ინტეგრირების მრავალ მეთოდს, მაგრამ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იმ მეთოდებს, რომელთაც უშუალო კავშირი გააჩნიათ *MATLAB*-ის ფუნქციებთან.

განვიხილოთ ტრაპეციის მეთოდით რიცხვითი ინტეგრირების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია (ნახ. 6.1)



სურ. 6.1. ტრაპეციის მეთოდის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ამისათვის იტეგრირების $[a, b]$ მონაკვეთი დავყოთ n ტოლ ნაწილებად, ამასთან $x_0 = a$, $x_n = b$. დავოფის შედეგად ყოველი მონაკვეთის სიგრძე $h = (b - a)/n$, ხოლო ყოველი დანაყოფის აბცისა გამოითვლება ფორმულით:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (6.1.3)$$

გავავლოთ ყოველი x_i წერტილიდან მართობი $y = f(x)$ წირის გადაკვეთამდე, ხოლო შემდეგ ყოველი მიღებული მრუდწირული ტრაპეცია შევცვალოთ შესაბამისი წრფივი ტრაპეციით. ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობად ჩავთვალოთ ყველა მიღებული ტრაპეციის ფართობების ჯამი, ამასთანავე ცალკეული ტრაპეციის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h, \quad (6.1.4)$$

აქედან გამომდინარე საძიებელი ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n S_i = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (6.1.5)$$

ამრიგად მივიღეთ რიცხვითი ინტეგრალის გამოთვლის ტრაპეციის კვადრატურული ფორმულა:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right). \quad (6.1.5)$$

MATLAB-ში რიცხვითი ინტეგრალის გამოთვლა ხდება *trapz* და *cumtrapz* ფუნქციების გამოყენებით. განვიხილოთ ორივე მათგანის გამოყენების მაგალითები.

trapz ფუნქციის მოცემა შეიძლება სხვადასხვა ხერხით:

- *trapz(x,y)* გამოთვლის $y(x)$ ფუნქციის ქვემოთ განთავსებული ფიგურის ფართობს, რომელშიც ყველა წერტილი მოცემულია x და y ვექტორებით, მაგალითად ისე როგორც ესაა გამოსახული 6.1 ცხრილში;

ცხრილი 6.1. *trapz(x,y)* ფუნქციის მოცემის პირველი ხერხი

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

- *trapz(y)* გამოთვლის $y(x)$ ფუნქციის ქვემოთ განთავსებული ფიგურის ფართობს, რომელშიც ყველა წერტილი მოცემულია x და y ვექტორებით, ამასთან x ვექტორის ელემენტები ღებულობს შესაბამისი y ვექტორის რიგითი ნომრის მნიშვნელობას (ცხრ.6.2);

ცხრილი 6.2. *trapz(x,y)* ფუნქციის მოცემის მეორე ხერხი

x	1	2	3	...	n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

- *trapz(x, Y [, k])* გამოთვლის $y_1(x), y_2, \dots, y_n$ ფუნქციების ქვემოთ განთავსებული ფიგურის ფართობს, რომელშიც ყველა წერტილი მოცემულია x ვექტორით და Y მატრიცით (ცხრ.6.3). k არ არის აუცილებელი პარამეტრი, ის გვიჩვენებს როგორ წარმოებს Y მატრიცის გამოთვლა სტრიქონით თუ სვეტით. თუ ბრძანებაში ეს პარამეტრი არ არის, მაშინ გამოთვლები წარმოებს სვეტების მიხედვით და შედეგად მივიღებთ სტრიქონ-ვექტორს;

ცხრილი 6.3. $trapz(x,y)$ ფუნქციის მოცემის მესამე ხერხი

x	y_1	y_2	y_3	\dots	y_m
x_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	\dots	y_{1m}
x_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	\dots	y_{2m}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	y_{n1}	y_{n2}	y_{n3}	\dots	y_{nm}

cumtrapz ფუნქცია ასრულებს ტრაპეციის მეთოდათ ე.წ. „ინტეგრირებას დაგროვებით“. ეს იმას ნიშნავს, რომ ის ისევე როგორც *trapz* ბრძანება გამოთვლის $y(x)$ ფუნქციის ქვემოთ განთავსებული ფიგურის ფართობს, მისი მოქმედების შედეგს წარმოადგენს შუალედური გამოთვლების შედეგებს, ე.ი. თუ საერთო ფართობი S შედგება ცალკეული ტრაპეციების $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ფართობების ჯამისაგან, მაშინ ვექტორის ელემენტები წარმოადგენს მიმდევრობას:

$$S_1 = 0, S_2 = S_1 + S_2, S_3 = S_1 + S_2 + S_3, \dots, S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

ამგვარად, ვექტორის ბოლო ელემენტი საძიებელი ფიგურის S ფართობის ტოლია. აქვე აღვნიშნოთ, რომ ამ ბრძანების გამოყენება შესაძლებელია ყველა იმ ფორმატით, რაც განვიხილეთ წინა ბრძანების გარჩევისას.

განვიხილოთ ამ ბრძანების გამოყენების რამდენიმე შემთხვევა შემდეგი ამოცანების მაგალითზე:

ამოცანა 6.1.1. გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$I = \int_5^3 \sqrt{2x-1} \tag{6.1.6}$$

ეს ინტეგრალი მარტივად დაიყვანება მოცემულ ცხრილით ინტეგრალზე

$$\int \sqrt{2x-1} = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3}, \tag{6.1.7}$$

ამიტომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით მისი გამოთვლა მარტივია და მისი შესაბანისი პროგრამული კოდი მოცემულია შემდეგ მაგალითზე:

მაგალითი 6.1.1.

>> a=5; b=13;

>> I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)

I =

32.6667

ესლა გამოვთვალოთ იგივე ინტეგრალი ტრაპეციის მეთოდის გამოყენებით. შემდეგი მაგალითი შეიცავს ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად რამოდენიმე ვარიანტს, რომლებშიც გამოთვლები ტარდება სხვადასხვა ბიჯით. პირველ შემთხვევაში ბიჯი ერთის ტოლია, მეორეში 0.5-ის, ხოლო მესამე შემთხვევაში 0.1-ის. როგორც შედეგებიდან ჩანს გამოთვლების სიზუსტე იზრდება ბიჯის შემცირებასთან ერთად:

მაგალითი 6.1.2.

```
>> x=a:b
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=trapz(x,y)
S =
    32.6556
>>%-----
>> h=0.5;
>> x=a:h:b;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=trapz(x,y)
S =
    32.6639
>>%-----
>> h=0.1;
>> x=a:h:b;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=trapz(x,y)
S =
    32.6666
```

შემდეგ მაგალითში მოყვანილია იგივე ბრძანების გამოყენების ერთ არგუმენტიანი ვარიანტი:

მაგალითი 6.1.3.

```
>> x=a:b;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=trapz(y)
S =
    32.6556
>>%-----
```

```
>> h=0.1;
>> x=a:h:b;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=trapz(y)
S =
    326.6656
```

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ აბსოლუტურად განსხვავებული შედეგი, რადგანაც მეორე შემთხვევაში ჩვენ თითქოს შევცვალეთ არგუმენტის ბიჯი, მაგრამ ბრძანებამ გაჩუმებით მიანიჭა არგუმენტს Y მატრიცის ელემენტის რიგითი ნომერი, ბიჯი დარჩა ერთის ტოლი, ხოლო გამოთვლები ჩატარდა პირველ შემთხვევაში რვა ნერტილის ნაცვლად ოთხმოც ნერტილში $h=1$ ფუძიანი ტრაპეციებისათვის. შედეგად გამოვთვალეთ სხვა ფიგურის ფართობი ვიდრე პირველი პროგრამული კოდით გამოთვლილი ფიგურაა და შესაბამისად მივიღეთ პირველისაგან განსხვავებული შედეგი.

მომდევნო მაგალითში განხილულია ინტეგრალის გამოსათვლელი მეორე ბრძანების გამოყენება იგივე ამოცანის შემთხვევაში:

მაგალითი 6.1.4.

```
>> x=5:0.5:13;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S=cumtrapz(x,y)
S =
    Columns 1 through 9
    0 1.5406  3.1603  4.8555  6.6229  8.4597 10.3634 12.3316 14.3624
    Columns 10 through 17
    16.4538 18.6042 20.8120 23.0756 25.3939 27.7654 30.1891 32.6639
>>% -----
>> x=5:0.5:5.5;
>> S1=0;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S2=S1+trapz(x,y)
S2 =
    1.5406
>> x=5.5:0.5:6;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S3=S2+trapz(x,y)
S3 =
```

```

3.1603
>> x=6:0.5:6.5;
>> y=sqrt(2*x-1);
>> S4=S3+trapz(x,y)
S4 =
4.8555

```

როგორც ვხედავთ S ვექტორის ელემენტები წარმოადგენენ გამოთვლების შუალედურ შედეგებს.

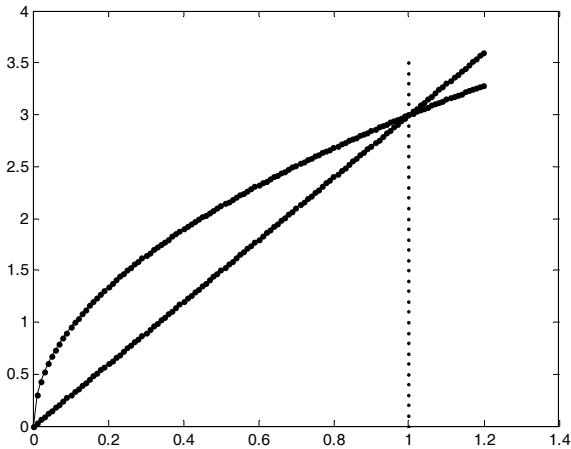
ამოცანა 6.1.2. გამოვთვალოთ $y^2 = 9x$ და $y = 3x$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის გრაფიკი.

როგორც ვხედავთ ეს ფიგურა შემოსაზღვრულია წირით და აბცისის ღერძის გასწვრივ მიმართული პარაბოლით. ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული კოდი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

```

მაგალითი 6.1.5.
>> x=0:0.01:1.2;
>> y1=3*sqrt(x);
>> y2=3*x;
>> y3=0:0.1:3.5;
>> plot(x,y1,'-k.',x,y2,'-k.',1,y3,'-k')

```



სურ. 6.2. ამოცანა 6.1.2-ის გრაფიკული ამოხსნა

სურათი 6.2-დან ჩანს, რომ ფიგურის ფართობი უნდა ვეძიოთ ორი ფართობის სხვაობის სახით, სადაც პირველი წარმოადგენს $y^2 = 9x$ ფუნქციით, $y = 0$ და $x = 1$ წირებით, ხოლო მეორე $y = 3x$ ფუნქციით, $y = 0$ და $x = 1$ წირებით. ამრიგად ინტეგრირების ინტეგრალი შემოსაზღვრულია $x \in [0,1]$ მონაკვეთით.

ამ ამოცანის ამოხსნის კოდი მოცემულია მაგალით 6.1.6=ში.

მაგალითი 6.1.5.

```
>> x=0:0.01:1;
>> Y(:,1)=3*sqrt(x);
>> Y(:,2)=3*x;
>> I=trapz(x,Y)
I =
    1.9994    1.5000
>> s=I(1)-I(2)
s =
    0.4994
```

აქ ფუნქციათა მნიშვნელობები რომლებიც აღწერენ მოცემულ ფიგურას წარმოდგენილია მატრიცის ორ სვეტად. $trapz(x,y)$ ფუნქციის გამოძახება ხდება ერთხელ და მისი გამოძახების შედეგს წარმოადგენს ორი ინტეგრალის მნიშვნელობის პოვნა. ეს ინტეგრალებია $\int 3\sqrt{x}dx$ და $\int 3xdx$.

§6.2 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა

n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ჩაინერება შემდეგი სახით:

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \tag{6.2.1}$$

(6.2.1) განტოლების ამონახსნი ეწოდება $x(t)$ ფუნქციას, რომელიც მას აქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად.

n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა ეწოდება შემდეგი სახის სისტემას:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{6.2.2}$$

რაც შეეხება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ის შემდეგი სახით მოიციემა:

$$\begin{cases} x'_1 = \sum_{j=1}^n a_{1,j} + b_1, \\ x'_2 = \sum_{j=1}^n a_{2,j} + b_2, \\ \vdots \\ x'_n = \sum_{j=1}^n a_{n,j} + b_n. \end{cases} \quad (6.2.3)$$

(6.2.2), (6.2.3) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება

ვექტორს $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, რომელიც ამ განტოლებათა სისტემას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს.

ყოველ დიფერენციალურ განტოლებას, ისევე როგორც დიფერენციალური განტოლებების სისტემას გააჩნიათ ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა, რომლებიც ერთმანეთისაგან კონსტანტებით განსხვავდებიან. ამონახსნის ცალსახად განსასაზღვრავად საჭიროა დამატებითი საწყისი ან სასაზღვრო პირობები. ასეთი დამატებითი პირობების რაოდენობა უნდა ემთხვეოდეს დიფერენციალური განტოლების ან განტოლებათა სისტემის რიგს. დიფერენციალური განტოლებისათვის განსახვავებენ დამატებითი პირობების შემდეგ სახეს:

- კოშის ამოცანა - ყველა დამატებითი პირობა მოცემულია ინერვალის ერთ წერტილში (უმეტეს შემთხვევაში საწყის მომენტში);
- სასაზღვრო ამოცანა - დამატებითი პირობები მოცემულია ინტერვალის საზღვრებზე;

განსახვავებენ ერთმანეთისაგან დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ზუსტ (ანალიტიკური) და მიახლოებით (რიცხვითი) მეთოდებს. დიფერენციალური განტოლებების დიდი ნაწილი შესაძლოა ამოიხსნას ზუსტად, ანუ ანალიტიკურად. მიუხედავად ამისა არსებობს ფიზიკური პროცესების აღსაწერად გამოყენებული დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც შეუძლებელია ამოიხსნას ანალიტიკური მეთოდით. ამის გამო საჭირო გახდა დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად რიცხვითი მეთოდების შექმნა და განვითარება, რის შედეგადაც ეს მეთოდები დიდი პოპულარობით სარგებლობს მკვლევარებში. ჩვენ განვიხილავთ რიცხვით მეთოდებს, რომელთა რეალიზება შესაძლებელია პროგრამულ პაკეტ MATLAB-ში სპეციალური ფუნქციების გამოყენებით.

§6.3 დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

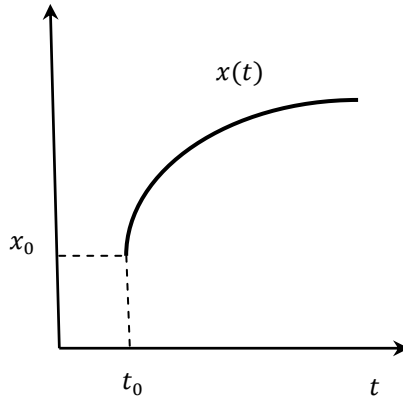
პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები განვიხილოთ კოშის შემდეგი ამოცანის მაგალითზე:

$$x' = f(x, t), \quad (6.3.1)$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.3.2)$$

ანუ უნდა ვიპოვოთ ინტეგრალური წირი $x = x(t)$ რომელიც გაივლის $M_0(t_0, x_0)$ წერტილში.



სურ. 6.3. ინტეგრალური წირი $x = x(t)$ რომელიც გაივლის $M_0(t_0, x_0)$ წერტილში

n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}), \quad (6.3.3)$$

კოშის ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს - უნდა ვიპოვოთ ინტეგრალური წირი $x = x(t)$, რომელიც აკმაყოფილებს (6.3.3) განტოლებას და საწყის პირობებს:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (6.3.4)$$

განვიხილოთ კოშის ამოცანის ამოხსნის ძირითადი რიცხვითი მეთოდები.

ეილერის მეთოდი. კოშის (6.31)-(6.3.2) ამოცანის $[t_0; t_n]$ ინტერვალში ამოხსნისას საკმაოდ მცირე h ბიჯის შერჩევით ავადგოთ ერთმანეთისაგან თანაბრად დაშორებული წერტილთა სისტემა:

$$h = \frac{t_n - t_0}{n}, t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

მაშინ:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6.3.5)$$

t_i კვანძის წერტილებში (6.3.5) ფორმულით ფუნქციის x_i მნიშვნელობების პოვნის პროცესს *ეილერის მეთოდი* ეწოდება. ამ მეთოდის არასაკმარისი სიზუსტის გამო შეიმუშავეს სხვა არაერთი რიცხვითი მეთოდი, რომელიც წარმოადგენენ ზემოთ მოყვანილი მეთოდის მოდიფიკაციას.

ეს მოდიფიცირებული მეთოდებია: *ეილერის მოდიფიცირებული მეთოდი, რუნგე-კუტის მეთოდი, რუნგე-კუტის მეთოდი პირველი რიგის ამოცანებისათვის, რუნგე-კუტის მეთოდი მეორე რიგის ამოცანებისათვის, რუნგე-კუტის მეთოდი მეოთხე რიგის ამოცანებისათვის, ადამსის მეთოდი და ა.შ.*

§6.4 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა

MATLAB-ის გამოყენებით პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა განვიხილოთ შემდეგი ამოცანის მაგალითზე:

ამოცანა 6.4.1.

ამოხსნათ კოშის ამოცანა:

$$\frac{dx}{dt} + x = \sin xt, \quad (6.4.1)$$

რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$x(0) = 1.5. \quad (6.4.2)$$

$\varphi(t, x, x') = 0$ სახით ჩანერილი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად პროგრამული პაკეტი MATLAB-ის გამოყენებით საჭიროა მისი იგივე გარდაქმნა $x' = f(t, x)$ სახით. ამისათვის (6.4.1)-(6.4.2) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} y_1' = \cos(y_1 \cdot y_2) \\ y_2' = \sin(y_1 + t \cdot y_2) \end{cases}, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \quad (6.4.3)$$

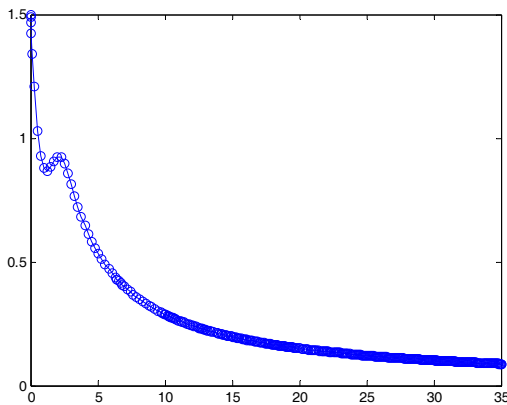
მომდევნო ეტაპზე ეს განტოლება უნდა წარმოვადგინოთ m -ფუნქციის სახით, როგორც ეს გამოსახულია (6.4.1) მაგალითზე. (6.4.3) ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ `ode113` ფუნქციას, რომლის პარამეტრები იქნება:

- `@D` - წინასწარ შექმნილი m -ფუნქციის $D(t,x)$ -სადმი მიმართვა;
- `[0 35]` - (6.4.3) განტოლების ინტეგრების ინტერვალი;
- `1.5` - საწყისი პირობა $x(0) = 1.5$.

მივაქცევით ყურადღება იმას, რომ ფუნქციის გამოძახების ფორმატში გამოსატანი პარამეტრები ცხადად არაა მითითებული. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გამოძახების შედეგად (6.4.3) ამოცანით აღწერილი პროცესის შესაბამისი გრაფიკი მიიღება:

მაგალითი 6.4.1.

```
function y=D(x,t)
y=-x+sin(x*t);
end
>> %-
>> ode113(@D,[0 35],1.5)
```



სურ. 6.4. (6.4.1)-(6.4.2) განტოლების ამოსხნა

ცხადია, რომ გამოსატანი პარამეტრების მითითებით შესაძლებელია ამ პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოტანა, მათი შემდგომი გამოყენებისათვის. ასევე შესაძლებელია ნახაზზე

გარკვეული მითითებების შედეგად წირის ზომის, მარკერის, წირის ფერის და ა.შ. შეცვლა.

შემდეგ პარაგრაფში განვიხილოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის მაგალითები.

§6.5 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა

MATLAB-ის გამოყენებით ასევე შესაძლებელია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

ამოცანა 6.5.1.

ამოხსნათ კოშის ამოცანა:

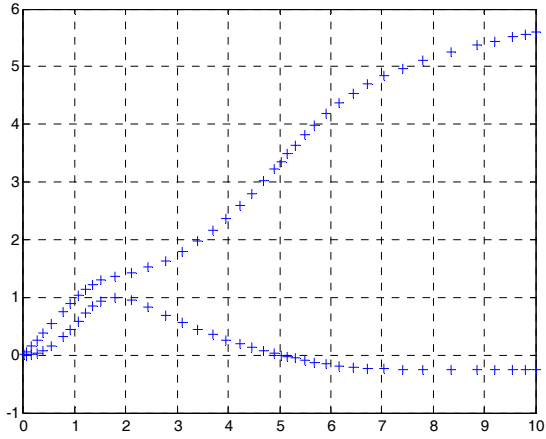
$$\begin{cases} y_1' = \cos(y_1 \cdot y_2) \\ y_2' = \sin(y_1 + t \cdot y_2) \end{cases}, y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \quad (6.5.1)$$

[0;15] ინტერვალზე.

მაგალითი 6.5.1.

```
function dy=sist(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=cos(y(1)*y(2));
dy(2)=sin(y(1)+y(2)*t);
end
>>%დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა
>>[T,Y]=ode23(@sist,[0,15],[0 0]);
>>%გრაფიკული ამონახსნის ფორმირება
>>plot(T,Y,'-k')
>>grid;
```

მაგალით (6.5.1)-ზე მოყვანილია ფუნქცია, რომელიც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მოცემული სისტემას აღწერს და MATLAB-ის ბრძანება, რომელიც საჭიროა ამ სისტემის რიცხვითი და გრაფიკული ამოხსნისათვის. ფუნქცია *ode23*-ის გამოძახება ხდება გამოსატანი პარამეტრების T-ვექტორისა და Y-მატრიცის ცხადად მითითებით, მაგრამ მათი ზომების სიდიდის გამო ისინი წარმოდგენილია გრაფიკის სახით (სურ.6.5).



სურ. 6.5. (6.4.1)-(6.4.2) განტოლების ამოხსნა

თავი 7. ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით

ხშირ შემთხვევაში საქმე გვაქვს რიცხვითი მეთოდებით გად-
ანწყვეტილი ამოცანის შედეგების შედარებასთან იმავე ფიზიკური ამ-
ოცანის შესაბამის ექსპერიმენტულ მონაცემებთან, რაც გარკვეულ
სიძნელეებთან არის დაკავშირებული.

ამ თავში განხილულია ექსპერიმენტული მონაცემების დამუ-
შავების საკითხი უცირესი კვადრატების მეთოდის გამოყენებით. უმ-
ცირესი კვადრატების მეთოდი იძლევა იმის საშუალებას, რომ ექსპე-
რიმენტული მონაცემების ბაზაზე შეირჩეს ისეთი ანალიზური ფუნქ-
ცია, რომლის შესაბამის წირი რაც შეიძლება ახლოს ჩაივლის ექსპე-
რიმენტის მონაცემების წერტილებთან. ასევე განხილულია ექსპერი-
მენტული მონაცემების საფუძველზე პოლინომური დამოკიდებულე-
ბის აგების საკითხი.

§7.1 უმცირესი კვადრატების მეთოდი

ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული მონაცემები მოცემულია ცხრილის სახით (ცხრ.7.1).

ცხრილი 1.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_n
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	...	y_n

საჭიროა შეირჩეს ისეთი ანალიტიკური დამოკიდებულება, რომელიც ყველაზე მიახლოებულად აღწერს ექსპერიმენტით მიღებულ მონაცემებს.

უმცირესი კვადრატების მეთოდის იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ ფუნქცია:

$$Y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$$

უნდა შეირჩეს ისე, რომ გამოთვლილ Y_i და y_i გაზომილ მონაცემებს შორის გადახრის კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი სიდიდე:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k)]^2 \rightarrow \min. \quad (7.1.1)$$

ზემოთ მოყვანილი ამოცანა დაიყვანება (7.1.1) პირობის გამოყენებით a_i კოეფიციენტების განსაზღვრის ამოცანამდე. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა შემდეგი განტოლებათა სისტემის შედგენა:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \end{cases} \quad (7.1.2)$$

თუ $Y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$ გამოსახულებაში a_i პარამეტრები შედიან წრფივი დამოკიდებულებით, მაშინ მივიღებთ $k + 1$ რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემას $k + 1$ უცნობით:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n -2 (y_i - f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)) \frac{\partial f}{\partial a_0} = 0, \\ \sum_{i=1}^n -2 (y_i - f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)) \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n -2 (y_i - f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0. \end{cases} \quad (7.1.3)$$

ერთერთ ყველაზე ხშირად გამოყენებად ფუნქციას, რომელიც გამოიყენება უმცირესი კვადრატების მეთოდში წარმოადგენს

$y = a_0 + a_1x$ სახით აღწერილი წირი და მას რეგრესიის წირი, ხოლო a_0 და a_1 სიდიდეებს რეგრესიის კოეფიციენტები ეწოდება.

x -სა და y -ს შორის კავშირის სიმჭიდროვის მახასიათებელ სიდიდეს სიდიდეს კორელაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს და ის გამოითვლება ფორმულით:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)(y_i - M_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - M_y)^2}}, \quad M_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad M_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad (7.1.4)$$

კორელაციის კოეფიციენტი აკმაყოფილება $-1 \leq r \leq 1$ უტოლობას. რაც უფრო მცირედ განსხვავდება კორელაციის კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა ერთისაგან, მით უფრო ახლოსაა განლაგებული რეგრესიის წრფისაგან ექსპერიმენტული წერტილები. თუ კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ახლოსაა ნულთან, მაშინ x -სა და y -ს შორის კავშირი არ არის წრფივი, მაგრამ შესაძლებელია მათ შორის არსებობდეს სხვა, არანრფივი კავშირი.

x -სა და y -ს შორის არანრფივი კავშირის შემთხვევაში კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგს წარმოადგენს კორელაციის ინდექსი რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - M_y)^2}}, \quad (7.1.5)$$

სადაც γ - ექსპერიმენტული მონაცემია, Y - უმცირესი კვადრატების მეთოდით გამოთვლილი სიდიდეა, ხოლო M_y - y -ის საშუალო მნიშვნელობაა. კორელაციის ინდექსის მნიშვნელობა იცვლება 0-დან 1-მდე შუალედში.

§7.2 პოლინომური დამოკიდებულების აგება

k -რიგის პოლინომის კოეფიციენტების შესარჩევად უნცირესი კვადრატის მეთოდის საშუალებით *MATLAB*-ში გამოიყენება *polyfit(x,y,k)* ფუნქცია, სადაც:

- x - ექსპერიმენტული წერტილების აბციხების მასივია;
- y - ექსპერიმენტული წერტილების ორდინატების მასივია;
- k - პოლინომის ხარისხია.

polyfit(x,y,k) ფუნქციის გაშვების შედეგად მიიღება პოლინომის კოეფიციენტების მასივი. ცხადია, თუ ცნობილია პოლინომის კოეფიციენტები, მაშინ შესაძლებელია ნებისმიერ წერტილში პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლა. ამ მიზნის მისაღწევად გამოიყენე-

ბა $polyval(k,t)$ ფუნქცია, სადაც k - პოლინომის კოეფიციენტებია, ხოლო t - პოლინომის გამოთვლის წერტილია. განვიხილოთ $polyfit(x,y,k)$ და $polyval(k,t)$ ფუნქციების გამოყენება აპროქსიმაციის კონკრეტული ამოცანის მაგალითზე.

ამოცანა 7.2.1. ცხრილში (7.1) მოცემულია 100 ნილ წყალში ნატრიუმის აზოტმჟავას $NaNO_3$ ხსნადობის ნილის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე:

ცხრილი 7.1. აზოტმჟავას $NaNO_3$ ხსნადობის ნილის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე

t	0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	51°	68°
$NaNO_3$	66,7	71.3	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.6	125.1

ვიპოვოთ აზოტმჟავას ხსნადობის ნილი $t = 32^{\circ}$ ტემპერატურაზე და კორელაციის კოეფიციენტი წრფივი დამოკიდებულების შემთხვევაში

ამ ამოცანის ამოხსნა შესაბამისი კომენტარებით მოცემულია მაგალით (7.2.1)-ზე. სურ.7.1-ზე მოცემულია ამ ამოცანის გრაფიკული ამონახსნი, რომელზეც გამოსახულია პირობაში მოცემული ექსპერიმენტული წერტილები და გამოთვლილი $y = a_1x + a_2$ პოლინომის შესაბამისი გრაფიკი, რომელზეც აღნიშნულია $t = 32^{\circ}$ წერტილი

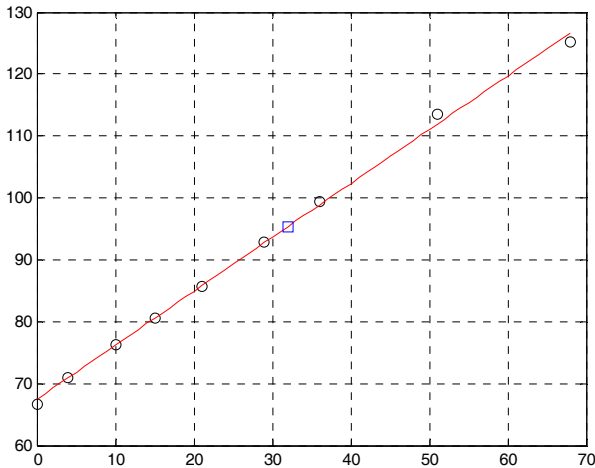
მაგალითი 7.2.1.

```
>> % ექსპერიმენტული მონაცემების შეყვანა
>> X=[0 4 10 15 21 29 36 51 68];
>> Y=[66.7 71.0 76.3 80.6 85.7 92.9 99.4 113.6 125.1]
>> % y = a1x + a2 პოლინომის კოეფიციენტების ვექტორის
>> %გამოთვლა
>> [a]=polyfit(X,Y,1)
a =
    0.8706    67.5078
>> % y = a1x + a2 პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლა
>> %t = 32o წერტილიში
>> t=32;
>> yt=a(1)*t+a(2)
```

```

yt =
95.3683
>> % ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში  $y = a_1x + a_2$  პოლინომის
>> %გრაფიკის, ექსპერიმენტული მონაცემებისა და
>> % $t = 32^0$  ნერტილიში მნიშვნელობის აგება
>> x=0:68;
>> y=a(1)*x+a(2);
>> plot(X,Y,'ok',x,y,'-r',t,yt,'sb')
>> grid
>> % (7.1.4) ფორმულით კორელაციის კოეფიციენტის
>> % გამოთვლა
>> mx=mean(X);
>> my=mean(Y);
>> k=sum((x-xm).*(y-ym))./sqrt(sum(x-xm).^2*sum(y-ym).^2)
k =
1.0000

```



სურ. 7.1. ამოცანა 7.2.1-ს გრაფიკული ამოხსნა

სურ.7.1-ზე ლურჯი ფერის კუბი არის აზოტმჟავას ხსნადობის წილის მნიშვნელობა $t = 32^0$ ტემპერატურაზე.

ამოცანა 7.2.1. ცხრილურ დამოკიდებულებას x -სა და y -ს შორის აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 7.2. დამოკიდებულება x-სა და y-ს შორი

x	10.1	10.2	10.3	10.8	10.9	11	11.1	11.4	12.2	13.3	13.8	14	14.4	15	15.6	15.8	17	18.1	19
y	24	36	26	45	34	37	55	51	75	84	74	91	85	94	92	96	97	98	99

მოვახდინოთ ამ დამოკიდებულების აპროქსიმაცია უმცირესი კვადრატების მეთოდით შემდეგი ფუნქციების საშუალებით:

ა) $y = a_1 + a_2x + a_3x^2$;

ბ) $y = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3$;

შევადაროთ ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში მიღებული შედეგები.

ამ ამოცანის შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა მოცემულია მაგალით (7.2.2)-ზე, გრაფიკული ამონახსნი გამოსახულია სურ. 7.2-ზე.

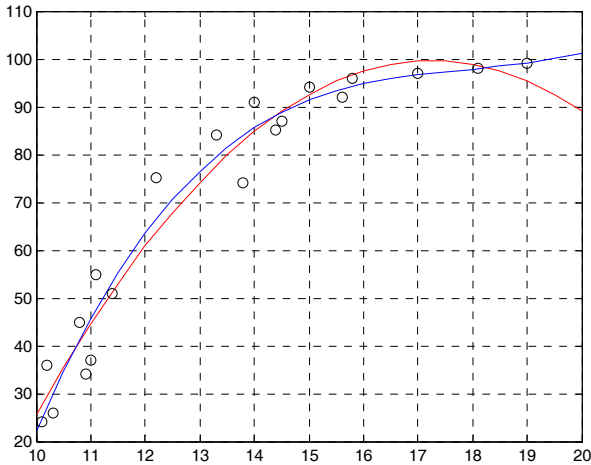
მაგალითი 7.2.2.

```
>> % ექსპერიმენტული მონაცემების შეყვანა
>> X=[10.1 10.2 10.3 10.8 10.9 11 11.1 11.4 12.2 13.3 13.8 14
      14.4 14.5 15 15.6 15.8 17 18.1 19];
>> Y=[24 36 26 45 34 37 55 51 75 84 74 91 85 87 94 92
      96 97 98 99];
>> % ა) პოლინომის კოეფიციენტების გამოთვლა
>> a=polyfit(X,Y,2)
a =
   -1.4066  48.5515 -319.2648
>> % ბ) პოლინომის კოეფიციენტების გამოთვლა
>> b=polyfit(X,Y,3)
b =
    0.1359  -7.3034  131.8384 -701.7599
>> % [10;20] ინტერვალზე პოლინომის მნიშვნელობების
>> % გამოთვლა
>> x=10:0.5:20;
>> y1=polyval(a,x);
>> y2=polyval(b,x);
>> % ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში პოლინომების
>> %გრაფიკის და ექსპერიმენტული მონაცემების
>> მნიშვნელობის აგება
>> plot(x,y1,'-r',x,y2,'-b',X,Y,'ok')
>>grid
>> % ა) პოლინომის რეგრესიის ინდექსის გამოთვლა
```

```

>> gam=sqrt(1-(sum((Y-polyval(a,X)).^2)/(sum((Y-mean(Y)).^2))))
gam =
    0.9767
>> % ა) პოლინომის რეგრესიის ინდექსის გამოთვლა
>> gam=sqrt(1-(sum((Y-polyval(b,X)).^2)/(sum((Y-mean(Y)).^2))))
gam =
    0.9793
>> % ა) და ბ) პოლინომის გადახრის კვადრატების
>> % გამოთვლა
>> S=sqrt(sum((Y-polyval(a,X)).^2))
S =
    25.4685
>> S=sqrt(sum((Y-polyval(b,X)).^2))
S =
    24.0312

```



სურ. 7.2. ამოცანა 7.2.1-ს გრაფიკული ამოხსნა

სურ.7.2-ზე წითელი ფერის გრაფიკი შეესაბამება ა) პოლინომურ დამოკიდებულებას, ხოლო ლურჯი ფერის გრაფიკი ბ) პოლინომურ დამოკიდებულებას.

თავი 8. კერძონარმოვლებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ის გამოყენებით

ფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელები ხშირად აღინერება კერძონარმოვლებიანი დიფერენციალური განტოლებებით. ამ განტოლებების შესაბამისი ფუნქციები წარმოადგენენ სივრცითი x, y, z და დროითი t არგუმენტების ფუნქციებს. კერძონარმოვლებიანი დიფერენციალური განტოლებების შესახებ ზოგადი საკითხები განხილულია მეორე თავში.

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ კერძონარმოვლებიანი დიფერენციალური განტოლებების ფიზიკურ კლასიფიკაციას და მათი გადაწყვეტის საკითხებს ე.წ. *ბადეთა მეთოდის* გამოყენებით. ამოცანის რეალიზაცია ხდება პროგრამული პაკეტი **MATLAB**-ის შესაბამისი ფუნქციების გამოყენებით.

§8.1 კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ფიზიკური კლასიფიკაცია

როგორც აღვნიშნეთ კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი დახასიათება და მათემატიკური კლასიფიკაცია ჩვენს მიერ განხილულია მეორე თავში. ამ პარაფრაფში განვიხილოთ კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების კერძო შემთხვევები რომლებიც აღწერენ ფიზიკურ პროცესებს და მოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია შესაბამისი ფიზიკური პროცესების შესაბამისად.

ფიზიკური პროცესების აღსაწერად გამოიყენება შემდეგი კლასიკური ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები:

- ლაპლასის განტოლება $\Delta u = 0$, რომელიც ხშირად გამოიყენება მაგნიტური და სტაციონარული სითბური ველების აღსაწერად;
- პუასონის განტოლება $\Delta u = f$, რომელიც გამოიყენება ელექტროსტატიკაში, დრეკადობის თეორიაში და სხვ.;
- ჰელმჰოლცის განტოლება $\Delta u + cu = f$, რომლითაც აღიწერება რხევითი პროცესები.

ჰიპერბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლებები:

- ტალღური განტოლება: ერთგანზომილებიანი ტალღური განტოლება $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$ აღწერს სიმის იძულებითი რხევას; ტალღური განტოლების ორგანზომილებიანი შემთხვევა $\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t)$ აღწერს მემბრანის იძულებით რხევას. თავისუფალი რხევებს $f(x,t) = 0$ და $f(x,y,t) = 0$ შემთხვევა შეესაბამება;
- ტელეგრაფული განტოლება: კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC+LG}{LC} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC} u - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ განტოლება აღწერს u პოტენციალის ცვლილებას ელექტროგადამცემ ხაზებში. L, C, R, G შესაბამისად თვითინდუქციის კოეფიციენტი, ტევადობა, წინაღობა და ელექტროგადამცემი ხაზის ერთეულზე დანაკარგის მახასიათებელია.

პარაბოლური ტიპის კლასიკურ განტოლებას წარმოადგენს:

➤ თბოგამტარობის განტოლება: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f$.

როგორც §2.5-ში აღვნიშნეთ, კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ერთადერთი მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო პირობები. ელიფსური ტიპის განტოლებებისათვის მოიცემა მხოლოდ სასაზღვრო პირობები, რომლებიც სამ კლასად იყოფა:

- დირიხლეს პირობა: საჭიროა ამოცანის ამონახსნის პოვნა სივრცის რაიმე შემოსაზღვრულ Σ უბანში, თუ ამ სივრცის Γ საზღვარზე მოცემულია საძიებელი u ფუნქციის მნიშვნელობა.

$$u|_{\Gamma} = \varphi. \quad (8.1.1)$$

მაგალითად, ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში $u(0, t) = \varphi_1(t)$; $u(L, t) = \varphi_2(t)$, ფუნქციის საძიებელ $[0, L]$ ინტერვალზე;

- ნეიმანის ამოცანა: საჭიროა ამოცანის ამონახსნის პოვნა სივრცის რაიმე შემოსაზღვრულ Σ უბანში, თუ მის საზღვარზე მოცემულია არა თვითონ საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობა, არამედ საძიებელი ფუნქციის წარმოებული Γ საზღვარის გარე ნორმალის გასწვრივ

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g. \quad (8.1.2)$$

- შერეული სასაზღვრო ამოცანა: ხშირად ასეთ ამოცანებს მესამე ტიპის სასაზღვრო ამოცანას უწოდებენ და მის სასაზღვრო პირობას შემდეგი სახე აქვს:

$$[a_1 \frac{\partial u}{\partial n} + a_2 u]_{\Gamma} = h. \quad (8.1.3)$$

პარაბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის სასაზღვრო პირობის გარდა, აუცილებელია ერთი საწყისი პირობა, რომელის შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$u(x, y, z, t_0) = \psi(x, y, z). \quad (8.1.4)$$

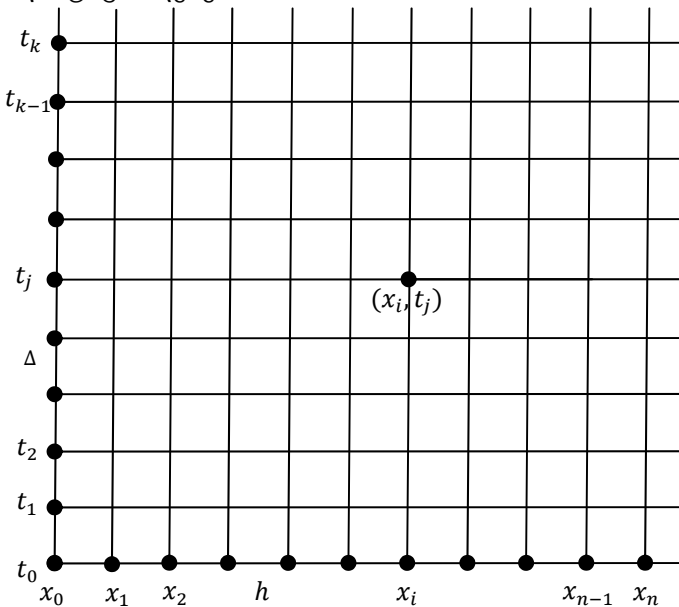
ჰიპერბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის საწყისი პირობები შეიძლება იყოს შემდეგი სახის:

$$u(x, y, z, t_0) = \psi_1(x, y, z), \quad \partial u(x, y, z, t_0) / \partial t = \psi_2(x, y, z). \quad (8.1.5)$$

დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში ცნობილია კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები, მაგალითად ცვლადების განცალკების ფურიეს ანალიზური მეთოდი როდესაც ამონახსნი ჩაიწერება საკმაოდ რთული სტრუქტურის უსასრულო მწკრივის ფაშის სახით და მოცემულ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა წარმოადგენს ცალკე აღებულ მათემატიკურ ამოცანას. ამიტომ ასეთი ამოცანების გადასწყვეტად ხშირად გამოიყენება კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები. ერთერთი მათგანი განვიხილოთ მომდევნო პარაგრაფში.

§8.2 ბადეთა მეთოდი და მისი რეალიზაცია MATLAB-ში

კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ერთერთ ყველაზე გავრცელებულ რიცხვით მეთოდს ბადეთა მეთოდი წარმოადგენს, რომელსაც ხშირად სასრული სხვაობების მეთოდსაც უწოდებენ.



სურ. 8.1. Σ_h^A ბადე Σ არისათვის Γ საზღვრით

ბადეთა მეთოდის გამოყენებისას Σ არე Γ საზღვრით, რომელიც უნდა ვიპოვოთ განტოლების ამონახსნი, დაყოფილია მართკუთხა არეში ღერძების პარალელური $t = t_j$ და $x = x_i$ მონაკვეთებით (სურ.8.1), სადაც $x_i = x_0 + ih$, $h = x_i - x_{i-1}$ და $t_i = t_0 + j\Delta$, $\Delta = t_j - t_{j-1}$. შედეგად ვღებულობთ ბადეს რომელსაც Σ_h^A ბადე ეწოდება. h და Δ სიდიდეებს შესაბამისად x და t ღერძების გასწვრივი ბიჯები ეწოდებათ.

ბადეთა მეთოდის იდეა შემდეგში მდგომარეობს: ნებისმიერ უწყვეტ $u(x, t)$ ფუნქციას წარმოვადგენთ $0 \leq x \leq L$ Σ_h^A ბადის (x_i, t_j) კვანძში როგორც $u_i^j = u(x_i, t_j)$ სადიდენს, რომელიც განსაზღვრულია ბადის კვანძებში, ხოლო კვანძებში წარმოებულებს განვიხილავთ როგორც მათ სხვაობით აპროქსიმაციას. ამგვარად, კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ნაცვლად ვღებულობთ ალგებრულ განტოლებას სისტემას.

რაც ნაკლებია h და Δ სიდიდეები მით უფრო ზუსტია მიღებულ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის გამოყენებით საწყისი კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მოდელირება. მე-VIII თავის მომდევნო პარაგრაფებში ჩვერნს მიერ განხილულია ბადეთა მეთოდი სამივე ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების გადასაწყვეტად. ბადეთა მეთოდის (დროით არეში სასრული სხვაობების *FTTD* მეთოდი) გამოყენების მაგალითები სამგანზომილებიან სივრცეში მოყვანილია ელექტროდინამიკის გარდამავალი პროცესების განხილვისას XI თავში, როდესაც რიცხვითად გადაწყვეტილია ე.წ. ელექტრომაგნიტური შემთავსებლობის ამოცანების კონკრეტული შემთხვევები.

§8.3 ბადეთა მეთოდის გამოყენება *MATLAB*-ში პარაბოლური განტოლებების ამოსახსნელად

კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი მეთოდებით ამოსხნა განვიხილოთ პარაბოლური ტიპის განტოლების ამოხსნით. სხვაობითი სქემები გამოვიყენოთ შემდეგი ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლების მაგალითზე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad u(L,t) = \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

განვიხილოთ Σ_h^Δ ბადე (სურ.8.1). ბადის კვანძებში რიცხვითი (რეკურენტული) განტოლებების მისაღებად მეორე რიგის სივრცითი წარმოებულ $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ შევცვალოთ მიახლოებითი სხვაობითი სქემით:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (8.3.2)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ დროითი წარმოებულის შესაცვლელად გამოვიყენოთ ერთ-ერთი შემდეგი სხვაობითი სქემებიდან:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta}, \quad (8.3.3)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta}. \quad (8.3.4)$$

გარდა ამისა შევცვალოთ საწყისი და სასაზღვრო პირობები მათი სხვაობითი აპროქსიმაციით:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (8.3.5)$$

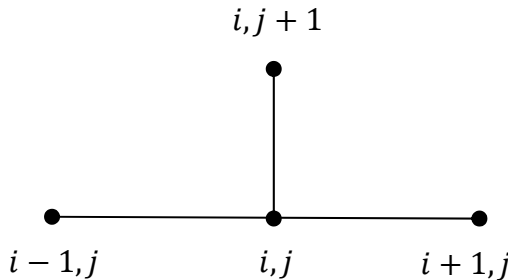
$$u_{0,j} = \mu(t_j) = \mu_j, \quad u_{n,j} = \rho(t_j) = \rho_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (8.3.6)$$

(8.3.1) განტოლებაში კერძო წარმოებულების (8.3.2) და (8.3.3) თანაფარდობებით შეცვლით მივიღებთ Σ_h^Δ ბადის კვანძებში u ფუნქციის გამოსათვლელ რეკურენტულ ფორმულებს:

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i+1,j} + (1 - 2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i-1,j} + \Delta f_{i,j}, \quad (8.3.7)$$

$$u_{0,j} = \mu_j, \quad u_{n,j} = \rho_j, \quad u_{i,0} = \varphi_i, \quad \gamma = (a^2 \Delta) / h^2. \quad (8.3.8)$$

(8.3.7) განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენება ორშრიანი ცხადი სხვაობითი სქემა, რომელიც გამოსახულია სურ.8.2-ზე.



სურ. 8.2. ორშრიანი ცხადი სხვაობითი სქემა

ფუნქციის მნიშვნელობა დროის ყოველ მომდევნო მომენტში კვანძში მოიცემა კვანძში და მის მეზობელ კვანძებში დროის წინა მომენტში ფუნქციის მნიშვნელობებით. ეს იძლევა იმის საშუალებას, რომ ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები კვანძებში მთელი

დროის განმავლობაში დროის სანყისი მომენტიდან დროითი ბიჯით ნანაცვლებისას, რადგან ცნობილია საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები დროის სანყისი მომენტისათვის. სხვაობითი სქემის მდგრადობისთვის x და t ლერძების გასწვრივი ბიჯები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას:

$$\Delta \leq (h^2)/2a^2. \quad (8.3.9)$$

განვიხილოთ **MATLAB**-ის გამოყენებით პარაბოლური კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა თბოგამტარობის ამოცანის მაგალითზე:

ამოცანა 8.3.1. ვიპოვოთ სპილენძის L ($0 \leq x \leq L$) სირძის ღეროში ტემპერატურის განაწილება, თუ ღეროს სანყისი ტემპერატურის განაწილებაა $\varphi(x) = 20^\circ\text{C}$. სასაზღვრო პირობა კი მოიცემა შემდეგნაირად: ტემპერატურა $u(0, t)$ იცვლება 20°C -დან 100°C -მდე, ხოლო ღეროს ბოლოში $u(L, t)$ იცვლება 20°C -დან 50°C -მდე.

ამ ამოცანის ამოხსნის შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა მოყვანილია მაგალით (8.3.1)-ზე. სურ.8.3-ზე მოცემულია ამ ამოცანის გრაფიკული ამონახსნი, რომელზეც გამოსახულია ღეროში ტემპერატურის განაწილება მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში.

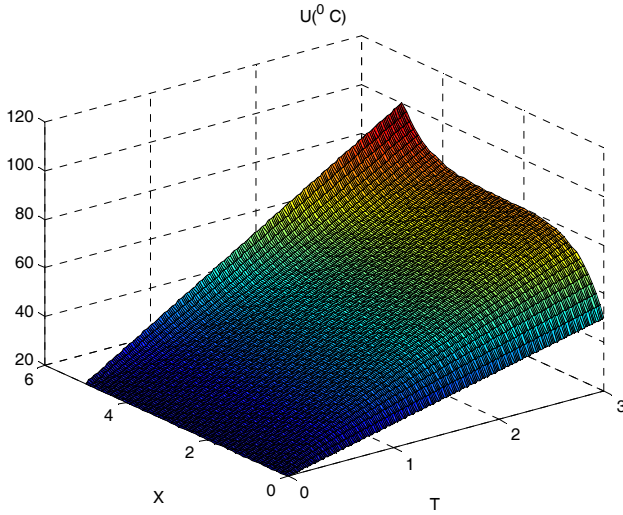
მაგალითი 8.3.1.

```
>> a=0.4;N=50;K=200;L=5;T=3;
>> h=L/N;delta=T/K;gam=a^2*delta/h^2;
>> for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*h;
u(i,1)=20;
end
>> for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
u(1,j)=20+(j-1)/K*30;
u(N+1,j)=20+(j-1)/K*80;
end
>> for j=1:K
for i=2:N
u(i,j+1)=gam*u(i-1,j)+(1-2*gam)*u(i,j)+
gam*u(i+1,j)+delta*fi(i,j);
end
end
```

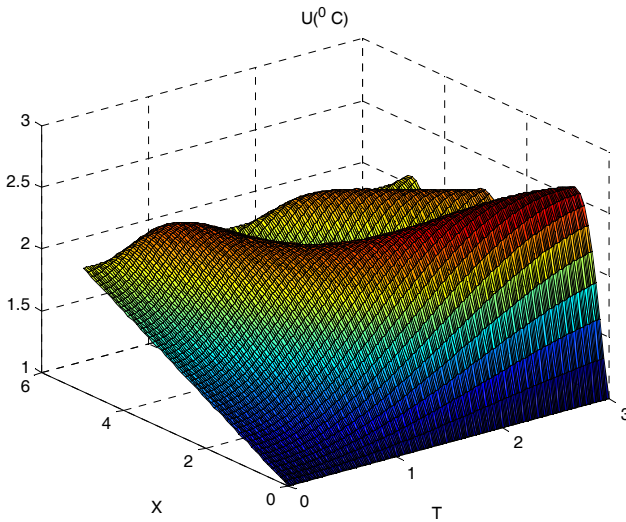
```

>> surf(t,x,u);
>> title ('U(^0 C)');
>> xlabel('T');
>> ylabel('X');

```



სურ. 8.3. ამოცანა 8.3.1-ს გრაფიკული ამოხსნა

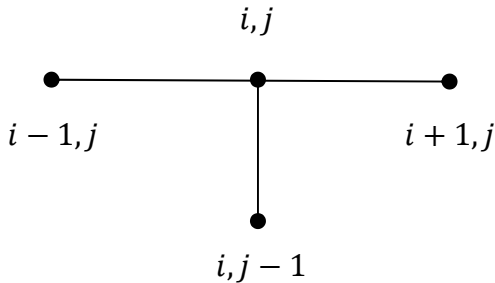


სურ. 8.4. ამოცანა 8.3.2-ს გრაფიკული ამოხსნა

ამოცანა 8.3.2. ვიპოვოთ სპილენძის L ($0 \leq x \leq L$) სიძის ღეროში ტემპერატურის განაწილება, თუ ღეროს საწყისი ტემპერატურის განაწილებაა $\varphi(x) = \sin xt$. სასაზღვრო პირობა კი მოიცემა შემდეგნაირად: ტემპერატურა $u(0, t)$ იცვლება 1°C -დან 2°C -მდე, ხოლო ღეროს ბოლოში $u(L, t)$ იცვლება 1°C -დან $2.5\sin x^{\circ}\text{C}$ -მდე.

სურ.8.4-ზე მოცემულია ამ (8.3.2) ამოცანის გრაფიკული ამონახსნი, რომელზეც გამოსახულია ღეროში ტემპერატურის განაწილება მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში.

ზემოთ განხილული ამოცანები გადაწყვეტილია ცხადი სხვაობითი სქემის გამოყენებით, რომლის მთავარი ნაკლი ამოცანის ამონახსნის მდგრადობა წარმოადგენს. მთავარი პრობლემა დროითი ბიჯის შერჩევაა, რომელიც აკმაყოფილებს (8.3.9) პირობას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად შემოთავაზებულ იქნა ე.წ. არაცხადი სხვაობითი სქემები. ისინი აბსოლუტურად მდგრადი ამონახსნის მიღებას უზრუნველყოფენ, მაგრამ ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი გაცილებით რთულია ცხადი სხვაობითი სქემის გამოყენებისას მიყვანილ ალგორითმთან შედარებით.



სურ. 8.4. ორშრიანი არაცხადი სხვაობითი სქემა

არაცხადი სხვაობითი სქემის ასაგებად (8.3.1) ამოცანაში კერძო წარმოებულების შევცვალეთ (8.3.2) , (8.3.4) გამოსახულებებით და (8.3.5)-(8.3.6) პირობების გათვალისწინებით U ფუნქციის გამოსათვლელად კვანძებში მივიღებთ გამოსათვლელ რეკურენტულ ფორმულას:

$$u_{i,j} = \frac{1}{1 + 2\gamma + \Delta h} u_{i,j-1} + \frac{\gamma}{1 + 2\gamma + \Delta h} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta h}{1+2\gamma+\Delta h} u_0, \quad i=1,2,\dots,n-1, j=1,2,\dots,k, \\
\gamma u_{i-1,j} - (1+2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i+1,j} & = -u_{i,j-1} - \Delta f_{i,j}, \\
& i=1,2,\dots,n-1, j=1,2,\dots,k.
\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

(8.3.10) განტოლება (8.3.8) პირობასთან ერთად წარმოადგენს ე.წ. ორშრიან არაცხად სხვაობით სქემას ორშრიანი არაცხადი სხვაობითი სქემის გამოყენებით, როცა $f(x, t) \neq 0$, ამოვხსნათ თბოგამტარობის კიდევ ერთი ამოცანა:

ამოცანა 8.3.3. ვიპოვოთ L ($0 \leq x \leq L$) სირძის ღეროში ტემპერატურის განაწილება, თუ ღეროს საწყისი ტემპერატურის განაწილებაა მოცემულია ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციით. ღეროს ბოლოებზე ტემპერატურა $u(0, t) = U_1 = \text{const}$ და $u(L, t) = U_2 = \text{const}$. ღეროს გვერდით ზედაპირზე სითბოცვლა ხდება ნიუტონის კანონით გარემოსთან, რომლის ტემპერატურა u_0 -ის ტოლია.

მოცემული ამოცანა აღინერება შემდეგი განტოლებით:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} & = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - h(u - u_0), h = \frac{\alpha p}{c \rho \sigma} \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T; \\
u(0,t) & = U_1, \quad u(L,t) = U_2, \quad 0 \leq t \leq \infty; \\
u(x,0) & = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,
\end{aligned} \tag{8.3.11}$$

სადაც, α - სითბოცვლის კოეფიციენტი, σ - ღეროს განივკვეთის ფართობია, ხოლო p - ღეროს განივკვეთის პერიმეტრია.

ამ ამოცანის ამოხსნის შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა მოყვანილია მაგალით (8.3.2)-ზე.

მაგალითი 8.3.2.

```

>> a=0.8;h=0.01;K=50;N=200;T=3;L=5;u0=20;
>> hx=L/N;delta=T/K;
>> gam=a^2*hx^2/h^2;
>> for i=1:N+1
x(i)=(i-1)*hx;
u(i,1)=0.25+(i-1)/N;
end
>> for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
u(1,j)=0.25; u(N+1,j)=1.25;
end
>> for j=2:K+1

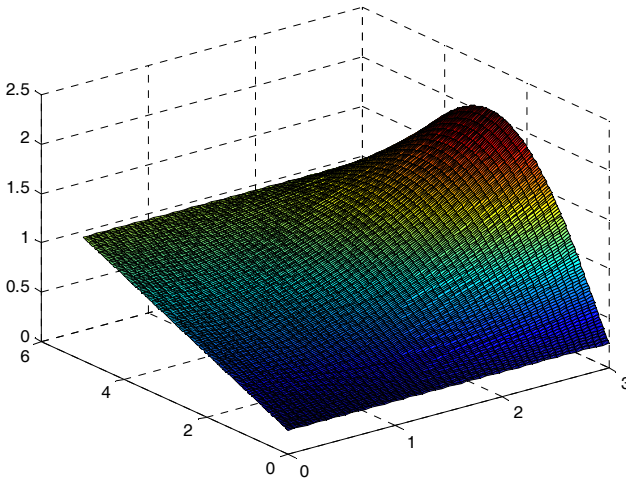
```

```

for i=2:N
    u(i,j)=gam*(u(i-1,j)+u(i+1,j))/(1+2*gam+delta*hx)+u(i,j-
1)/(1+2*gam+delta*hx)+delta*h*u0/(1+2*gam+delta*hx);
end
end

```

სურ.8.5-ზე მოცემულია ამ (8.3.3) ამოცანის გრაფიკული ამონახსნი, რომელზეც გამოსახულია ლეროში ტემპერატურის განაწილება მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში.



სურ. 8.5. ამოცანა 8.3.3-ს გრაფიკული ამოხსნა

§8.4 ბადეთა მეთოდის გამოყენება MATLAB-ში ჰიპერბოლური განტოლებების ამოსახსნელად

ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად ასევე გამოიყენება სხვაობითი სქემები, როგორც ერთგანზომილებიანი, ასევე ორი და სამგანზომილებიანი განტოლებების ამოსახსნელად გამოიყენება. ჰიპერბოლური ტიპის სამგანზომილებიანი განტოლებების ამოსახსნას ჩვენ დავუბრუნდებით მე-11-ე თავში, როდესაც განვიხილავთ გამოყენებითი ელექტროდინამიკის კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნას, რომლების აღინერება მაქსველის განტოლებების საშუალებით. ამ პარაგრაფში განვიხილოთ სხვაობითი სქემის

გამოყენება ერთგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განტოლებებისათვის შემდეგი განტოლების მაგალითზე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(0,t) &= \mu(t), \quad u(L,t) = \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

ავაგოთ Σ_h^A ბადე (სურ.8.1), რომლის საშუალებით ვეძებთ (8.4.1) განტოლების ამონახსნს. ბადის კვანძებში რიცხვითი განტოლებების მისაღებად მეორე რიგის დროითი წარმოებული $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ შევცვალოთ მიახლოებითი სხვაობითი სქემით:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta^2}. \quad (8.4.2)$$

(8.4.2), (8.3.2) და (8.3.3) გამოსახულებების (8.4.1) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ (8.4.1) განტოლების ამონახსნულად ცხად სხვაობით სქემას:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= -u_{i,j-1} + \gamma(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (2 - 2\gamma)u_{i,j} + \Delta^2 f_{i,j}, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, K-1, \\ u_{i,0} &= \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\Delta} = \psi(x_i) = \psi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ u_{0,j} &= \mu_j, \quad u_{n,j} = \rho_j, \quad u_{i,0} = \varphi_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, K, \\ \gamma &= (a^2 \Delta) / h^2, \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

რომელიც მდგრადია (8.3.7), (8.3.8) სხვაობითი სქემის ანალოგიურად და შესაძლებელია მატრტივად მოხდეს ამ ამოცანის შესაბამისი ალგორითმის შექმნა *MATLAB*-ში.

ამოცანა 8.4.1. ამოვხსნათ შემდეგი ჰიპერბოლური ტიპის განტოლება სანყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sin xt, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T; \\ u(0,t) &= \mu_1, \quad u(L,t) = \rho_1, \\ u(x,0) &= \varphi_1, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

ამ განტოლების შესაბამისი ალგორითმი მოცემულია შემდეგ მაგალითში:

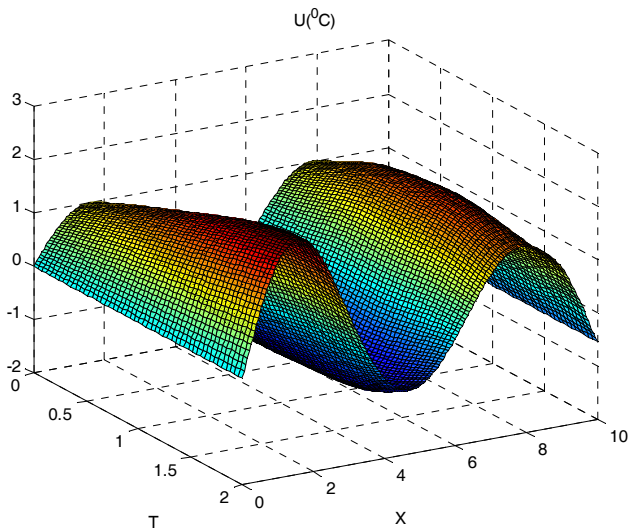
მაგალითი 8.4.1.

```
>> a=0.8;K=50;N=200;T=2;L=10;
>> h=L/N; delta=T/K;
>> for i=1:N+1
```

```

x(i)=(i-1)*h;
u(i,1)=sin(x(i)); u(i,2)=u(i,1)+delta*sin(x(i));
end
>> for j=1:K+1
t(j)=(j-1)*delta;
end
>> for j=2:K+1
u(1,j)=0; u(N+1,j)=sin(L);
end
>> gam=a^2*delta^2/h^2;
>> for j=2:K
for i=2:N
u(i,j+1)=-u(i,j-1)+gam*u(i-1,j)+(2-2*gam)*u(i,j)+
gam*u(i+1,j)+delta^2*sin(x(i)*t(j));
end
end
>> surf(t,x,u)
>> title('U(^0C)')
>> xlabel('T')
>> ylabel('X')

```



სურ. 8.6. ამოცანა 8.4.1-ს გრაფიკული ამოხსნა

სურ.8.6-ზე მოცემულია ამოცანა 8.4.1-ის გრაფიკული ამონახსნი. ჰიპერბოლური განტოლებების ამოსახსნელად ასევე შესაძლებელია აიგოს არაცხადი სხვაობითი სქემა, მაგრამ იმის გამო რომ მას არ გააჩნია ისეთი უპირატესობები, როგორც პარაბოლური განტოლებების შემთხვევაში, მათი გამოყენება ხდება მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა შეუძლებელია კონკრეტული ამოცანის განხილვისას ცხადი სხვაობითი სქემის აგება. ძირითადად ეს ხდება ამოცანებისათვის, რომლებიც მოცემულია განსახილველი არის საზღვარზე შერეული სასაზღვრო პირობებით.

§8.5 ბადეთა მეთოდის გამოყენება MATLAB-ში ელიფსური განტოლებების ამოსახსნელად

როგორც §8.1 აღვნიშნეთ ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებით აღინერება ფიზიკური პროცესების ფართო სპექტრი, როგორებიცაა: მაგნიტური და სტაციონარული სითბური ველები; ელექტროსტატიკის ამოცანები; დრეკადობის თეორიის ამოცანები; დამყარებული რხევითი პროცესები და სხვა.

ამოცანა 8.5.1. განვიხილოთ სხვაობითი სქემა ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის მართკუთხა $\Sigma(R - b \leq x \leq R + b; -a \leq y \leq a)$ არეში Γ საზღვრით და დირიხლეს სასაზღვრო პირობებით საზღვარზე ქვემოთ მოყვანილი განტოლების მაგალითზე:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{5\partial u}{x\partial x} = -2, \quad (8.5.1)$$

$$u(x,y)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0.$$

განვიხილოთ ბადე $\Sigma_{h_x}^{h_y}$, რისთვისაც გავავლოთ Σ არეში ღერძების პარალელური წრფეები $y = y_i$ და $x = x_i$, სადაც $x_i = R - b + i \cdot h_x$, $h_x = 2b/n$, $i = 0, 1, \dots, n$ და $y_j = -a + j \cdot h_y$, $h_y = 2a/k$, $j = 0, 1, \dots, k$.

სხვაობითი განტოლების მისაღებად შევცვალოთ კერძო ნარმოებულები და სასაზღვრო პირობები შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{h_y^2},$$
(8.5.2)

$$u_{i,0} = u_{i, N_y} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N_x,$$

$$u_{0, j} = u_{N_x, j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$
(8.5.3)

(8.5.2) და (8.5.3) გამოსახულებების გამოყენებით გარდაქმნათ ელიფსური (8.5.1) სასაზღვრო ამოცანა შემდეგ სხვაობით განტოლებათა სისტემად:

$$u_{i, j} = \frac{1}{A} (B_i u_{i+1, j} + C_i u_{i-1, j} + D(u_{i, j-1} + u_{i, j+1}) + 2),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, j = 1, 2, \dots, N_y - 1,$$

$$u_{i, 0} = u_{i, N_y} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_x,$$

$$u_{0, j} = u_{N_x, j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_y,$$
(8.5.4)

სადაც

$$A = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right), B_i = \frac{1}{h_x^2} + \frac{5}{2h_x x_i}, C_i = \frac{1}{h_x^2} - \frac{5}{2h_x x_i}, D = \frac{1}{h_y^2}.$$

განტოლებათა (8.5.4) სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია ზეიდელის იტერაციული მეთოდით. ამ განტოლებათა სისტემის ბადეთა მეთოდით ამოხსნის შესაბამისი ალგორითმი მოცემულია შემდეგ მაგალითში:

მაგალითი 8.5.1.

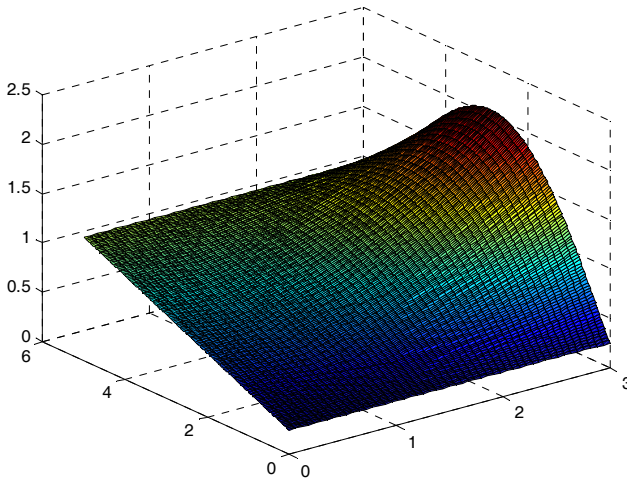
```
>> a=3;b=6;R=18;Nx=200;Ny=100;
>> hx=2*b/Nx;
>> hy=2*a/Ny;
>> for i=1:Nx+1
x(i)=R-b+(i-1)*hx;
u(i,1)=0;
u(i,Ny+1)=0;
end
>> for j=1:Ny+1
y(j)=-a+(j-1)*hy;
u(1,j)=0;
u(Nx+1,j)=0;
```

```

end
>> A=2/hy^2+2/hx^2;
>> D=1/hy^2;
>> for i=2:Nx+1
B(i)=1/hx^2+5/(2*hx*x(i));
C(i)=1/hx^2-5/(2*hx*x(i));
end
>> for i=2:Nx
for j=2:Ny
u(i,j)=1/A*(B(i)*u(i-1,j)+C(i)*u(i+1,j)+D*(u(i,j-1)+u(i,j+1))+2);
end
end
>> surf(y,x,u)

```

სურ.8.7-ზე მოცემულია ამ (8.5.1) ამოცანის გრაფიკული ამონახსნი.



სურ. 8.7. ამოცანა 8.5.1-ს გრაფიკული ამონახსნი

ვიმედოვნებთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ამოცანის გამოყენებით მარტივად გავერკვევით სხვაობითი სქემების აგებაში ლაპლასისა და პუასონის განტოლებებისათვის.

როგორც ამ თავში განხილული ამოცანებისა და მაგალითების ფართო კლასი გვიჩვენებს, რომ ბადეთა მეთოდის გამოყენებით

შესაძლებელია კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი უამრავი ფიზიკური პროცესის აღწერა. მომდევნო თავებში განხილულია ელექტროდინამიკის გარდამავალი პროცესების კვლევის მათემატიკური მეთოდები და მათი გადანწყვეტის ალგორითმები.

თავი 9. ელექტროდინამიკის გარდამავალი პროცესების აღწერის მათემატიკური მეთოდები და ზოგადი ალგორითმები

მოცემულ თავში განხილულია არასტაციონარული დიფრაქციისა და აგზნების ზოგადი ფიზიკური და მათემატიკური ასპექტები. პირველ პარაგრაფში ჩანერილია ცნობილი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ მუხტებს, დენებსა და გამოსხვებულ ელექტრომაგნიტურ ველებს. ეს დამოკიდებულებები დაფუძნებულია ელექტრომაგნიტური ველების წარმოდგენაზე დაგვიანებული პოტენციალების სახით. გაკეთებულია დასკვნები ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებიდან რომლის გამოყენებაა ხელსაყრელი კონკრეტული დიფრაქციის ამოცანის გადასაწყვეტად. წარმოდგენილია არასტაციონარული დიფრაქციის ფიზიკური მოდელი. გაანალიზებულია ენერჯის ნაკადის ყოფაქცევა, როგორც ახლო ისე შორ ზონაში.

განხილულია არასტაციონარული დიფრაქციის ამოცანების გადასაწყვეტად გამოყენებული რიცხვითი მეთოდები. კერძოდ, სასრული სხვაობების მეთოდი დიფრაქციის ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ამოცანებისათვის, დამხმარე გამომსხვივებლების მეთოდი და მომენტების მეთოდი. ნაჩვენებია ამ მეთოდების შესაძლებლობები და მათი გამოყენების საზღვრები. მანქანური რესურსების შეზღუდულობის გამო, იმისათვის, რომ შესაძლებელი გავხადოთ სასრული სხვაობების მეთოდით სასრულ მოცულობაში ხანგრძლივი დროის განმავლობაში ველების მანქანური რესურსების შეზღუდულობის გამო, იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს მოქმედების დაკვირვება ამ სქემაზე დამატებულია ე.წ. იდეალურად შეთანხმებული დიელექტრიკული ფენები. ეს ფენები თანდათანობით შთანთქავენ შემოსაზღვრული მოცულობის კედლებამდე მიღწეულ ველს და ამცირებენ ამ კედლებიდან დაცემული ველის არეკვლის კოეფიციენტს. ეს ფენები იძლევა სასრული სხვაობების მეთოდის ეკრანირების ამოცანებში ეფექტურად გამოყენების საშუალებას. ორგანზომილებიან ზოლზე გაბნევის ამოცანისათვის გამოკვლეულია იდეალურად შეთანხმებული ფენების გამოყენებისას დაცემული ველის ამ ფენებიდან არეკვლის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ფენების რაოდენობაზე.

არასტაციონარული დიფრაქციის შემთხვევისათვის გაბნეული ველი წარმოდგენილია კირხჰოფის მეთოდით დაგვიანებული პოტენციალების საშუალებით. ამგვარი წარმოდგენის გამოყენება სასაზღვრო პირობებში გვაძლევს ელექტრული და მაგნიტური ველების ინტეგრალურ განტოლებებს. გამოკვლევები აჩვენებს, რომ სხვა-

დასხვა ტიპის გამბზევების შემთხვევაში მათი რიცხვითი ამოხსნისათვის უპირატესობა გააჩნია ზოგიერთ შემთხვევაში ერთ, ხოლო სხვა შემთხვევაში მეორე ინტეგრალურ განტოლებას. მაგალითად, მაგნიტური ველის ინტეგრალური განტოლება წარმოადგენს მეორე გვარის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებას, მასში არ შედის არცერთი სივრცითი წარმოებული და რიცხვითი რეალიზაციისათვის უფრო ხელსაყრელია გამოყენებულ იქნას ამობურცული გლუვი ზედაპირის მქონე გამბზევების შემთხვევაში, მაშინ როდესაც ელექტრული ველის ინტეგრალური განტოლება წარმოადგენს პირველი გვარის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებას, ამ განტოლებაში

დიფერენციის ოპერატორის $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ სახით შედის ზედაპირზე სივრცული წარმოებული, ამიტომ ამ განტოლების რიცხვითი ამოხსნა მოსახერხებელია ისეთი „ნულოვანი სისქის“ მქონე სხეულებისათვის, როგორებიცაა წვრილი მავრთული და თხელი ჩაუკეტავი ზედაპირი.

მოყვანილია არასტაციონარული დიფრაქციის ფიზიკური მოდელი, რომელიც დაფუძნებულია ზედაპირზე მუხტებისა და დენების ცვლილების ხასიათზე. მიღებული შედეგების მიხედვით დადგენილია, რომ მთელი ენერგია, რომელიც გააჩნია დაცემულ ელექტრომაგნიტურ ველს, გადანაწილდება გამბზევ სტრუქტურასთან დაკავშირებულ ახლო ველსა და შორ ზონაში გადასხივებულ ველს შორის. გარე ზემოქმედების შეწყვეტის შემდეგ გამბზევში მიმდინარეობს პროცესები, რომლებიც დაკავშირებულია გამბზევის ფიზიკურ მახასიათებლებთან.

§9.1 არასტაციონარული დიფრაქციის ზოგადი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ არასტაციონარული დიფრაქციის კლასიკური ამოცანა. ვთქვათ, ელექტრომაგნიტური ტალღა ცნობილი სივრცული და დროითი მახასიათებლებით $\{\vec{E}^{inc}(\vec{r}, t), \vec{H}^{inc}(\vec{r}, t)\}$ დიფრარგირებს S_0 ზედაპირით შემოსაზღვრულ სხეულზე (სურ.9.1). ამ S_0 ზედაპირზე ინდუცირდება დენები და მუხტები $\vec{j}(\vec{r}', t)$ და $\rho(\vec{r}', t)$ სიმკვრივეებით შესაბამისად. აქ $\vec{r}' \in V_0$, სადაც V_0 არის S_0 ზედაპირით შემოსაზღვრული მოცულობა. სივრცეში სხეულის მიერ გამოსხივებულ არასტაციონარულ ველებს $\{\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t), \vec{H}^{sc}(\vec{r}, t)\}$ გაბნეულ ველებს

ან უბრალოდ გამოძახილებს უწოდებენ. არასტაციონარული დიფრაქციის ამოცანას სხეულზე დაცემული ველით ინდუცირებული დენებისა და მუხტების, ან მათ მიერ გამოსხივებული ველების პოვნა წარმოადგენს.

კავშირი ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების ვექტორებსა და მათ შემქმნელ წყაროებს შორის აისახება მაქსველის განტოლებებში:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}^{sc} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E}^{sc} &= -\frac{\partial \vec{B}^{sc}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.1.1)$$

სადაც, \vec{H}^{sc} და \vec{B}^{sc} გაბნეული მაგნიტური ველის დაძაბულობისა და მაგნიტური ველის ინდუქციის ვექტორებია შესაბამისად, \vec{E}^{sc} და \vec{D}^{sc} გაბნეული ელექტრული ველის დაძაბულობისა და ელექტრული ველის ინდუქციის ვექტორებია, ხოლო \vec{J} და ρ ელექტრული დენის სიმკვრივე და ელექტრული მუხტის სიმკვრივეა.

(9.1.1)-ის მეორე განტოლებაზე rot ოპერაციის ჩატარებისას მივიღებთ:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}^{sc} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}^{sc} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}^{sc}}{\partial t^2}.$$

ანალოგიური ოპერაციის მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორზე ((9.1.1)-ის პირველ განტოლებაზე) ჩატარებით გაბნეული ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობების ვექტორებისათვის მარტივად ჩაინერბა შემდეგი არაერთგვაროვანი ტალღური განტოლებები

$$\nabla^2 \vec{E}^{sc} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^{sc}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (9.1.2.ა)$$

$$\nabla^2 \vec{H}^{sc} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}^{sc}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{J}. \quad (9.1.2.ბ)$$

ამ განტოლებების ამოხსნა ვექტორით კირხჰოფის¹ ცნობილი მეთოდით, რომლის თანახმადაც V_0 მოცულობის ნებისმიერ \vec{r} წერტილში ელექტრული ან მაგნიტური ველი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ინტეგრალის ჯამის სახით: პირველი მათგანი წარმოადგენს მოცულობით ინტეგრალს V_0 მოცულობის შიგნით მოთავსებული ნებისმიერი წყაროსა და გრინის ფუნქციის ნამრავლისა; მეორე კი არის ზედაპირული ინტეგრალი V_0 მოცულობის შემომსაზღვრელ S ზედაპირზე და ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს გრინის ფუნქციის, S ზედაპირზე ველის ნორმალური წარმოებულის, S ზედაპირზე ველისა და გრინის ფუნქციის ნორმალური წარმოებულის კომბინაციას.

ზოგადი შემთხვევისათვის განტოლებების მარჯვენა წევრი აღვნიშნოთ \vec{P} -ით, ხოლო ველის დაძაბულობის ვექტორი \vec{F} -ით. მაშინ, როგორც ცნობილია, არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი ჩაინერება არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნისა და ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის ჯამის სახით:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}', t')}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} ((\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{F})_r - \left(\vec{F} \frac{\partial}{\partial \hat{n}_s} \frac{1}{R} + \frac{1}{Rc} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \tau} \frac{\partial R}{\partial \hat{n}_s} \right)_r \right\} ds, \quad (9.1.3)$$

სადაც \vec{r} დაკვირვების წერტილია, \vec{r}' - ინტეგრების წერტილია, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $R = |\vec{R}|$ მანძილია წყაროდან დაკვირვების წერტილამდე, t - დაკვირვების დროა, $\tau = t - r/c$ - დაგვიანების დროა, c - სინათლის სიჩქარეა, \hat{n}_s - S ზედაპირის გარე ნორმალია, grad_s -ის ინდექსი მიუთითებს, რომ გრადიენტი აიღება S ზედაპირზე. თავდაპირველად ჩავატაროთ (9.1.2.ა) განტოლების ამოხსნა. ამისათვის (9.1.3) მოცემული განტოლებისათვის ჩაინერება შემდეგნაირად:

$$\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V (\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad}_s \rho) \frac{dV}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} ((\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{E}^{sc})_r - \left(\vec{E}^{sc} \frac{\partial}{\partial \hat{n}_s} \frac{1}{R} + \frac{1}{Rc} \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \frac{\partial R}{\partial \hat{n}_s} \right)_r \right\} ds, \quad (9.1.4)$$

¹ გუსტავ რობერტ კირხჰოფი, გერმანელი ფიზიკოსი, დაიბადა 1824 წელს.

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში ამოღებულია არგუმენტი (\vec{r}', τ) . შეძლებისდაგვარად (9.1.4) განტოლებაში გამოვრიცხოთ \vec{E}^{sc} სივრცული წარმოებულები და ზედაპირული ინტეგრალი გადავწეროთ ელექტრომაგნიტური ველების ტანგენციალური მდგენელების გამოყენებით. ცნობილია, რომ

$$(\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{E}^{sc}(\vec{r}', \tau) = \left((\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \hat{n}_s \text{grad}_s R$$

და ჩაკეტილი ზედაპირისათვის

$$\oint_s \{ (\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{a} + \hat{n}_s \times \text{rot}_s \vec{a} - \hat{n}_s \text{div}_s \vec{a} \} ds = 0.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $\vec{a} = \vec{E}^{sc} / R$, რაც მოგვცემს:

$$\oint_s \frac{1}{R} \left\{ (\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{E}^{sc} + \left(\hat{n}_s \text{grad}_s \frac{1}{R} \right) \times \vec{E}^{sc} + \frac{1}{R} \hat{n}_s \times \text{rot}_s \vec{E}^{sc} - \frac{\hat{n}_s}{R} \text{div}_s \vec{E}^{sc} \right\} ds = 0.$$

გარდა ამისა, რამდენადაც

$$\left. \begin{aligned} \text{div}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', \tau) &= \left(\text{div}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \text{grad}_s R \\ \text{rot}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', \tau) &= \left(\text{rot}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r - \frac{1}{c} \text{grad}_s R \times \frac{\partial \vec{E}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \end{aligned} \right\},$$

და

$$\left(\text{rot}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}, t) \right)_r = - \frac{\partial \vec{B}^{sc}}{\partial t},$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \oint_s \frac{1}{R} \left((\hat{n}_s \text{grad}_s) \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r ds = \\ & = \oint_s \left\{ \frac{1}{cR} \left(\hat{n}_s \times \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \right) \times \text{grad}_s R + \frac{1}{R} \hat{n}_s \times \frac{\partial \vec{B}^{sc}}{\partial \tau} + \frac{1}{cR} \hat{n}_s \times \left(\text{grad}_s R \times \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\hat{n}_s \times \text{grad}_s \frac{1}{R} \right) \times \vec{E}^{sc} + \frac{\hat{n}_s}{R} \left(\text{div}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r \right\} ds, \end{aligned}$$

საიდანაც (9.1.4) განტოლების ზედაპირული ინტეგრალი შემდეგნაირად ჩაინერება:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint_s \left\{ \frac{\hat{n}_s}{R} \left(\text{div}_s \vec{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r - \left(\hat{n}_s \times \vec{E}^{sc} \right) \times \text{grad}_s \frac{1}{R} + \frac{1}{cR} \left(\hat{n}_s \times \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \right) \times \text{grad}_s R - \right. \\ & \quad \left. - \hat{n}_s \vec{E}^{sc} \text{grad}_s \frac{1}{R} + \frac{1}{cR} \hat{n}_s \frac{\partial \vec{E}^{sc}}{\partial \tau} \text{grad}_s R + \frac{1}{R} \hat{n}_s \times \frac{\partial \vec{B}^{sc}}{\partial \tau} \right\}. \end{aligned}$$

ცნობილია, რომ

$$\operatorname{rot} \oint_s \hat{n}_s \bar{E}^{sc} \frac{1}{R} ds = \oint_s \left\{ (\hat{n}_s \times \bar{E}^{sc}) \times \operatorname{grad}_s \frac{1}{R} - \frac{1}{cR} (\hat{n}_s \times \frac{\partial \bar{E}^{sc}}{\partial \tau}) \right\} ds,$$

ხოლო

$$\operatorname{grad} \oint_s \hat{n}_s \bar{E}^{sc} \frac{ds}{R} = \oint_s \left\{ \frac{1}{cR} \hat{n}_s \frac{\partial \bar{E}^{sc}}{\partial \tau} \operatorname{grad}_s R - \hat{n}_s \bar{E}^{sc} \operatorname{grad}_s \frac{1}{R} \right\} ds$$

და

$$\left(\operatorname{div}_s \bar{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r = \rho(\vec{r}', \tau) / \varepsilon_0,$$

$$\oint_s \frac{\hat{n}_s}{R} \left(\operatorname{div}_s \bar{E}^{sc}(\vec{r}', t) \right)_r ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \operatorname{grad}_s \frac{\rho}{R} dv.$$

ამის გათვალისწინებით (9.1.4) საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \bar{E}^{sc}(\vec{r}, t) = & -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} dv - \operatorname{grad} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{R} dv - \\ & - \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \bar{E}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds + \operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \bar{E}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \bar{B}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds. \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

მაგნიტური ველის $\vec{H}(\vec{r}, t)$ დაძაბულობისათვის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{sc}(\vec{r}, t) = & \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} dv - \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \vec{H}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds + \\ & + \operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \vec{H}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\hat{n}_s \times \vec{D}^{sc}(\vec{r}', \tau)}{R} ds. \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

როგორც ვხედავთ, (9.1.5) და (9.1.6) ფორმულები ჯერ კიდევ არ არიან გამოსახული S ზედაპირზე ელექტრომაგნიტური ველების ტანგენციალური მდგენელებით, მაგრამ შემდგომი განხილვისათვის ამას პრინციპული მნიშვნელობა არ გააჩნია.

ცნობილია, რომ რეალური დენები და მუხტები არსებობენ მხოლოდ V_0 მოცულობის შიგნით, ამიტომ (9.1.5) და (9.1.6)-ში ინტეგრება უნდა მოვახდინოთ V_0 -ით. ამისათვის S ზედაპირი ავიღოთ უსასრულობაში და მასზე გაბნეული ველებისათვის გამოვიყენოთ გამოსხივების პირობები. რამდენადაც არასტაციონარული დიფრაქციისას გაბნეულ ველებში დაგვიანებული დროითი ცვლადის მეშვეობით ცხადად შედის მანძილი წყაროდან დაკვირვების წე-

რტილამდე, ამიტომ ამ შემთხვევაში ველების ხასიათი უსასრულობაში არც თუ ისე ცხადია, როგორს დროით ჰარმონიული დაცემული ველის დიფრაქციისას. თუ დავუშვებთ, რომ მოცემული სისტემის სათავიდან ყველა წყარო მოთავსებულია სასრული მანძილით და ასხივებს სასრული დროის განმავლობაში, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ S ზედაპირი გადატანილია ისეთ მანძილზე, რომელიც გაცილებით უფრო შორსაა, ვიდრე მანძილი სათავიდან პირველ ტალღურ ფრონტამდე. ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ S ზედაპირამდე t მომენტისათვის შემფოთება ჯერ არ მისულა, რის გამოც S ზედაპირზე $(\vec{E}^{sc}, \vec{H}^{sc})$ ველები და მათი ყველა წარმოებული ნულის ტოლია. ე.ი.

$$\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} dV - \text{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{R} dV, \quad (9.1.7)$$

$$\vec{H}^{sc}(\vec{r}, t) = \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} dV. \quad (9.1.8)$$

იდეალური გამტარისათვის (9.1.7) და (9.1.8) განტოლებები შესაძლებელია ჩაინეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{E}^{sc}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ -\frac{\mu_o}{R} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} + \left[\frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right] \frac{\vec{R}}{\epsilon_o R^2} \right\} ds, \quad (9.1.9)$$

$$\vec{H}^{sc}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right\} \times \frac{\vec{R}}{R^2} ds, \quad (9.1.10)$$

სადაც $\vec{J}(\vec{r}', \tau)$ და $\rho(\vec{r}', \tau)$ სახეულის ზედაპირზე დაცემული ველით ინდუცირებული ელექტრული დენისა და მუხტების სიმკვრივეებია შესაბამისად.

იდეალურად გამტარ სხეულზე ელექტრომაგნიტური ტალღის დიფრაქციისას სრული ელექტრული ველის ტანგენციალური მდგენელისათვის სასაზღვრო პირობის გამოყენებით მივიღებთ ელექტრული ველის ინტეგრალურ განტოლებას (ე.ვ.ი.გ):

$$\hat{n} \times \vec{E}^{inc}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_s \left\{ \frac{\mu_o}{R} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} - \left[\frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right] \frac{\vec{R}}{\epsilon_o R^2} \right\} ds = 0, \quad (9.1.11)$$

ხოლო სრული მაგნიტური ველის ტანგენციალური მდგენელი განიცდის წყვეტას, რომელიც ზედაპირზე ინდუცირებული ელექტრული დენის სიმკვრივის ტოლია. ამ სასაზღვრო პირობის გამოყენებით მივიღებთ მაგნიტური ველის ინტეგრალურ განტოლებას (მ.ვ.ი.გ):

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 2\hat{n} \times \vec{H}^{inc}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \int_s \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right\} \times \frac{\vec{R}}{R^2} ds. \quad (9.1.12)$$

ორივე განტოლებაში $\vec{r} \in S_o$, \hat{n} - ამ ზედაპირის გარე ნორმალია და ინტეგრალები აიღება მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

(9.1.12) განტოლება არის მეორე გვარის განტოლება და მასში არ შედის ზედაპირზე არც ერთი სივრცითი წარმოებულნი. ეს განტოლება რიცხვითი ამოხსნის თვალსაზრისით მოსახერხებელია ჩაკეტილი გლუვი ზედაპირის მქონე იდეალურად გამტარი სხეულებისათვის. ელექტრული ველის ინტეგრალურ განტოლება ე.ვ.ი.გ. (9.1.11) კი წარმოადგენს პირველი გვარის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლებაში დივერგენციის ოპერატორის $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ სახით შედის ზედაპირზე სივრცული წარმოებულნი. ამ-

ის გამო ამ განტოლების რიცხვითი ამოხსნა მოსახერხებელია ისეთი ნულოლოვანი სისქის მქონე სხეულებისათვის, როგორებიცაა წვრილი მავრთული და თხელი ჩაუკეტავი ზედაპირი. უნდა აღინიშნოს, რომ ელექტრული ველის ინტეგრალურ განტოლების გამოყენება მოსახერხებელია ისეთ ამოცანებში, სადაც ზედაპირული მუხტის სიმკვრივე რაღაც მიზეზების გამო ხდება ნულოვანი. კერძოდ ასეთ შემთხვევას ადგილი აქვს OZ ღერძის გასწვრივ უსასრულო ერთგვაროვან სტრუქტურებზე ამავე ღერძის გასწვრივ პოლარიზებული ელექტრული ველის დაცემისას. ცხადია, რომ ამ დროს სხეულზე აღიძვრება დენი $\vec{j} = \hat{n}_s j$, სადაც $\frac{\partial j}{\partial z} = 0$ და გაბნეული ველიც

პოლარიზირებული იქნება OZ ღერძის გასწვრივ და $\frac{\partial E^{sc}}{\partial z} = 0$. ამის შედეგად მივიღებთ, რომ

$$\text{div} \vec{E}^{sc} = \frac{\partial E_x^{sc}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{sc}}{\partial y} + \frac{\partial E_z^{sc}}{\partial z} = 0 \quad \text{და} \quad \text{div} \vec{j} = \frac{\partial j}{\partial z} = 0,$$

ამიტომ $\rho = 0$ და $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. ამ შემთხვევაში (ე.ვ.ი.გ) გამოყენება უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე მ.ვ.ი.გ., რადგანაც ეს უკანასკნელი უფრო რთული სახისაა.

მაგნიტური ველის ინტეგრალური განტოლების გამოყენებისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ (9.1.12) გამოსახულების მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები აღწერს დაცემული ველის უშუალო ზემოქმედებას დენზე დაკვირვების (\vec{r}, t) წერტილში. გარდა ამისა, თუ განვიხილავთ მხოლოდ გამბნევი სხეულის განათებ-

ულ არეს, მაშინ იგი იძლევა დენის სიდიდეს ცნობილ ფიზიკა-ოპტიკურ მიახლოებაში. (9.1.12) განტოლების მარჯვენა მხარის ინტეგრალი აღწერს ზედაპირის სხვადასხვა დენების ზემოქმედებას დაკვირვების წერტილის დენზე. ეს ზემოქმედება აკვიანებს $\frac{R}{c}$ დროით, რაც იძლევა (9.1.12) განტოლების ამოხსნის საშუალებას დროში თანმიმდევრულად გადაადგილების მეთოდით.

როგორც ჩანს, (9.1.11) და (9.1.12) განტოლებები იმ შემთხვევაში, როცა დაკვირვების უბანი ემთხვევა ინტეგრების უბანს ხდებიან სინგულარული. ამ უბნის წვლილი შესაძლებელია გამოითვალოს ანალიზურად. შრომებში სინგულარული უბნის წვლილის აპროქსიმირება ხდება წრიული სეგმენტით, რომელზეც ველი ითვლება მუდმივ სიდიდედ. მ.ვ.ი.გ.-ში სინგულარული სინგულარული უბნის წვლილი ხშირ შემთხვევაში მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ ამ განტოლების ამოხსნა ზედაპირული ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის აზრით აპროქსიმირდება ყველა უბნის ჯამით, გარდა იმ უბნისა სადაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გააჩნია სინგულარობა. ხშირად ინტეგრალის გამოთვლა ყველა უბნის უფრო მცირე ქვეუბნებად დაყოფით. რაც შეეხება ე.ვ.ი.გ. გამოთვლისას სინგულარული უბნის წვლილს, როგორც აღვნიშნეთ მისი უგულვებელყოფა არ შეიძლება და იგი უნდა გამოითვალოს ანალიზურად.

§9.2 კვლევის მეთოდები

9.2.1 სასრული სხვაობების მეთოდი.

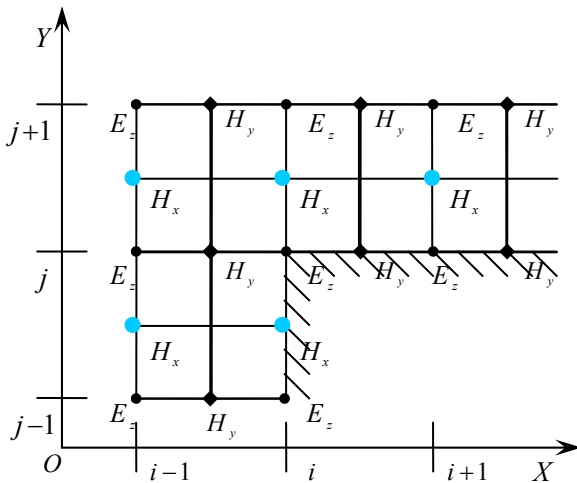
აპერტურის მქონე, იდეალურად გამტარ სხეულებში ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შელწევის ამოცანის შესწავლის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველების ეკრანირების ეფექტურობის განსაზღვრა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად არსებობს სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები. ერთერთ ასეთ მეთოდს წარმოადგენს სასრული სხვაობების მეთოდი დროით არეში (FDTD). თავისი არსითა და შესრულებით სასრული სხვაობების მეთოდი მარტივია, ამავედროულად მას ახასიათებს მაღალი მდგრადობა ელექტრომაგნიტურ ველებსა და ობიექტებს შორის ურთიერთქმედების ამოცანების მოდელირების უზრუნველყოფისათვის. აქედან გამომდინარე ეს მეთოდი წარმატებულად გამოიყენება ისეთი ტიპის ამოცანებისათვის, როგორებიცაა

1. კანონიკური ორგანზომილებიან სამიზნეები:

- მეტალური ღერო კვადრატული განივკვეთით, TM ტიპის ტალღა;
 - წრიული ცილინდრი, TE ტიპის ტალღა;
 - ერთგვაროვანი ანიზოტროპული ღერო კვადრატული განივკვეთით, TM ტიპის ტალღა;
 - კონფორმულ-მოდულირებადი წრიული მეტალური ცილინდრი;
 - ღია მეტალური ღრუ;
2. კანონიკური სამგანზომილებიანი სამიზნეები:
- მეტალური კუბი, ტალღის ნორმალური დაცემა;
 - ბრტყელი გამტარი ფენა, არეკვლის ეფექტური ზედაპირი, დაკვირვების სხვადასხვა კუთხეები;
 - T -მაგვარი გამტარი სამიზნეები, არეკვლის ეფექტური ზედაპირი, დაკვირვების სხვადასხვა კუთხეები;

9.2.1.ა სასრული სხვაობების მეთოდი დიფრაქციის ორგანზომილებიანი ამოცანებისათვის.

დიფრაქციის ორგანზომილებიანი ამოცანების შემთხვევაში ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს:



სურ.9.1. $z=0$ სიბრტყეზე ბადის კვანძებში ელექტრული და მაგნიტური ველის კომპონენტების განაწილება

გაბნეული ელექტრომაგნიტური ველის მოსაძებნად ჩაინერება მაქს-ველის განტოლებათა სისტემა E -პოლარიზაციის მქონე ველებისათვის:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (9.2.1)$$

სადაც ε და μ წარმოადგენს გარემოს დიელექტრულ და მაგნიტურ შეღწევადობას შესაბამისად.

სასრული სხვაობების მეთოდის თანახმად ვახდენთ დროისა და სივრცის დისკრეტიზაციას: XOY სიბრტყეში ხდება სპეციალური ტიპის ბადის არჩევა, რომლის კვანძებში განლაგებულია ველის სხვადასხვა კომპონენტები. ასეთი ბადე ნაჩვენებია სურ.9.1-ზე. ამ სქემაში დროით და სივრცულ ბიჯებს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი $\Delta x = \Delta y = 2c\Delta t$, სადაც c სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში. ასეთი დროით-სივრცითი სქემის გამოყენებით ველების სივრცული და დროითი წარმოებულებისათვის სხვაობითი სქემები ჩაინერება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} (i, j) &= (i\Delta x, j\Delta y), n = n\Delta t \\ F^n(i, j) &= F(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \\ \frac{\partial F^n(i, j)}{\partial x} &= \frac{F^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - F^n\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \\ \frac{\partial F^n(i, j)}{\partial t} &= \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.2)$$

(9.2.2) სხვაობითი სქემის გათვალისწინებით (9.1.1) განტოლებათა სისტემა შემდეგნაირად გადაინერება:

$$\left. \begin{aligned}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) &= H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_z^n(i, j) - E_z^n(i, j+1)}{\Delta y} \right) \\
 H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right) \\
 E_z^{n+1}(i, j) &= E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.3)$$

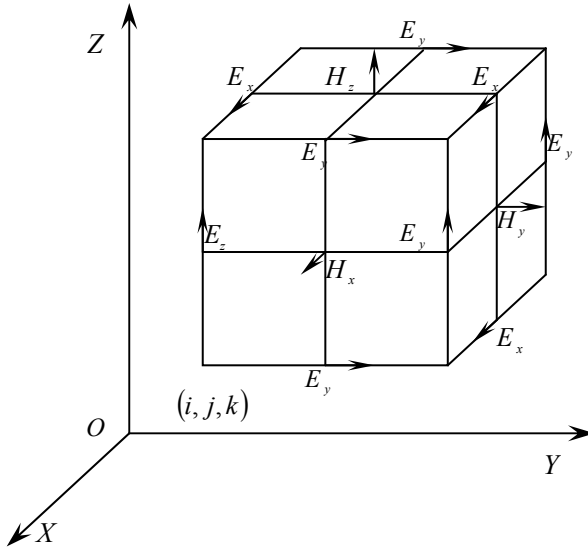
9.2.1.3 სასრული სხვაობების მეთოდი დიფრაქციის სამგანზომილებიანი ამოცანებისათვის. სამგანზომილებიანი ამოცანების შემთხვევაში ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: გაბნეული ველის მოსაძებნად ჩაინერება მაქსველის განტოლებათა სისტემა:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right), \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \\
 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho' H_y \right), \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho' H_z \right), \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.4)$$

სადაც ρ' და σ გარემოს მაგნიტური და ელექტრული თვისებების მახასიათებელი სიდიდეებია და მათ გარემოს მაგნიტური და ელექტრული გამტარებლობები ეწოდებათ. სასრული სხვაობების მეთოდის თანახმად ვახდენთ დროისა და სივრცის დისკრეტიზაციას:

სივრცეში ხდება სპეციალური ტიპის სამგანზომილებიანი ბადის არჩევა, რომლის კვანძებში განლაგებულია ელექტრული და მაგნიტური ველის სხვადასხვა კომპონენტები. ასეთი ბადე ნაჩვენებია სურ.9.2-ზე. ამ სქემაში დროით და სივრცულ ბიჯებს შორის არსებობს შემდეგი კავშირი $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c\Delta t$, სადაც c სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში. ასეთი დისკრეტიზაციისას ველების სივრცული

და დროითი წარმოებულებისათვის სხვაობითი სქემები ჩაინერება შემდეგი სახით:



სურ.9.2. სივრცის დისკრეტიზაცია ელექტრული და მაგნიტური ველების კომპონენტებისათვის

$$\left. \begin{aligned}
 (i, j, k) &= (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z), n = n\Delta t \\
 F^n(i, j, k) &= F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \\
 \frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} &= \frac{F^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - F^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} \\
 \frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} &= \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t}
 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.5)$$

(9.2.5) სხვაობითი სქემის გათვალისწინებით მაქსველის (9.1.1) განტოლებათა სისტემაში შეგვიძლია მივიღოთ ელექტრომაგნიტური ველის ვექტორების კომპონენტებისათვის შესაბამისი გამოსახულებები, რომლებშიც კვანძის მოცემულ წერტილში და დროის მოცემულ მომენტში ველის მნიშვნელობა ჩაინერება ველის კომპონენტების საშუალებით მიმდებარე კვანძებში და დროის წინა მომენტში. ეს გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ ვიპოვოთ ველის მნიშვნე-

ლობები დროის მომდევნო მომენტებში წინა მომენტებში ცნობილი კომპონენტების საშუალებით. მაგალითად, ელექტრომაგნიტური ველის H_x და E_z მდგენელებისათვის ზემოთ მოტანილი სხვაობითი სქემებისა და მაქსველის განტოლებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = \frac{1 - \frac{\rho'(i, j+1/2, k+1/2)\Delta t}{2\mu(i, j+1/2, k+1/2)}}{1 + \frac{\rho'(i, j+1/2, k+1/2)\Delta t}{2\mu(i, j+1/2, k+1/2)}} H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) + \frac{\Delta t}{\mu(i, j+1/2, k+1/2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho'(i, j+1/2, k+1/2)\Delta t}{2\mu(i, j+1/2, k+1/2)}} \times \left[\frac{E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k)}{\Delta z} + \frac{E_z^n(i, j, k+1/2) - E_z^n(i, j+1, k+1/2)}{\Delta y} \right],$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k+1/2)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k+1/2)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k+1/2)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k+1/2)}} E_z^n(i, j, k+1/2) + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j, k+1/2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma(i, j, k+1/2)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k+1/2)}} \times \left[\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2)}{\Delta x} + \frac{H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2)}{\Delta y} \right]$$

ზემოთ მოცემული სქემის შესაბამისად ჩაინერება ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების გამოსახულებები სხვა მდგენელებისათვისაც. ამ ფორმულებში მოცემული $\sigma, \rho', \varepsilon, \mu$ სიდიდეების შესაბამისი შერჩევა იძლევა საშუალებას სასრული სხვაობების მეთოდში გამოყენებული ბადის კვანძებში ჩაისვას სხვადასხვა ტიპის და ნივთიერების გამბნევები ზედაპირები ან მოცულობითი სხეულები.

§9.3 იდეალურად შეთანხმებული ფენები სასრული სხვაობების მეთოდში

როგორც ცნობილია, სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებისას, მანქანური რესურსების შეზღუდულობის გამო, ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მოდელირება ხდება სასრულ არეში. ამასთან რაც მცირეა მოდელირების არე მით უფრო მეტია შესაბამისი კომპიუტერული გამოთვლების ჩატარების სისწრაფე. დაკვირვების არის შეზღუდულობის გამო და გარდამავალი პროცესების სრული ანალიზისათვის აუცილებელია ისეთი იდეალურად შეთანხმებული ფენების სერჩევა, რომელიც მთლიანად გაატარებს მასზე დაცემულ ელექტრომაგნიტურ ტალღას, რათა არის კიდებიდან არეკვლილმა ტალღამ მნიშვნელოვნად არ იმოქმედოს გამოთვლებით მიღებულ შედეგებზე.

სასრული სხვაობების მეთოდის სწრაფი და ეფექტური მუშაობისათვის დაკვირვების არე იდეალურად შეთანხმებულ ფენებთან ერთად მოდელირებულია როგორც ერთიანი ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობის მქონე გარემო. ასეთ გარემოში მაქსველის განტოლებათა სისტემა დაშლილია თორმეტ განტოლებად შემდეგი სახით:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = - \frac{\partial H_x}{\partial x}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = - \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = - \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = - \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

სადაც σ და σ^* გარემოს ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობებია შესაბამისად; ε და μ გარემოს დიელექტრული და მაგნიტური შეღწევადობებია; ε_0 და μ_0 ელექტრული და მაგნიტური მუდმივებია; იდეალურად შეთანხმებული ფენებისათვის შეთანხმებ-

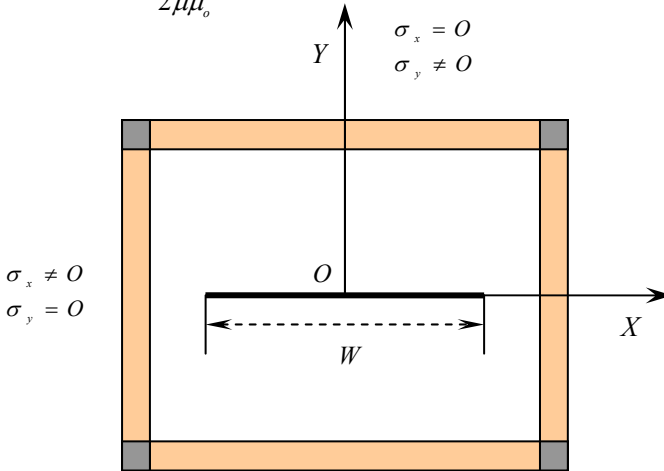
ის პირობა ჩაინერება, როგორც $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0}$. ელექტრული და მაგნიტური ველის მდგენელები გამოითვლება შემდეგი სახით:

$$E_x = E_{xy} + E_{xz}, \quad E_y = E_{yx} + E_{yz}, \quad E_z = E_{zx} + E_{zy},$$

$$H_x = H_{xy} + H_{xz}, \quad H_y = H_{yx} + H_{yz}, \quad H_z = H_{zx} + H_{zy}.$$

ველის თითოეული მდგენელისათვის მიიღება რეკურენტული ფორმულა, მაგალითად, მაგნიტური ველის x მდგენელი, რომელიც კუბის ნახნაგის ნორმალურია და მოთავსებულია $i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}$ წერტილში (სურ.9.2.) ყოველი $n + \frac{1}{2}$ დროის მომენტისათვის მიიღება შემდეგი გამოსახულება:

$$H_{xy}^{n+1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma^*(i, j + 1/2, k + 1/2)\Delta t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma^*(i, j + 1/2, k + 1/2)\Delta t}{2\mu\mu_0}} H_{xy}^{n-1/2}(i, j + 1/2, k + 1/2) - \frac{\Delta t}{\mu\mu_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma^*(i, j + 1/2, k + 1/2)\Delta t}{2\mu\mu_0}} \times \left[\frac{E_z^n(i, j, k + 1/2) - E_z^n(i, j + 1, k + 1/2)}{\Delta y} \right].$$



სურ.9.3. ამოცანის გეომეტრია

ანალოგიურად ჩაინერება ელექტრული და მაგნიტური ველების სხვა კომპონენტებიც.

ამ ალგორითმის ტესტირებისათვის შევისწავლოთ ორგანზომილებიან ზოლზე H პოლარიზირებული ბრტყელი გაუსის იმპულსის გაბნევის ამოცანა (სურ.9.3.). დაცემულ იმპულსს აქვს შემდეგი სახე:

$$H_z(t) = \exp(-\alpha^2 (y - ct - ct_0)^2), \text{ სადაც } \alpha = \frac{3.2}{ct_0}, ct_0 = 1.0 \text{ მ.}$$

ზოლის სიგანე $W = 1.0$ მ.

დაკვირვების არის იმ ნერტილებში, სადაც მოთავსებულია ზოლი, ვნერთ: $\sigma_x = \infty, \sigma_y = \infty$, სხვა ნერტილებში, გარდა იდეალურად შეთანხმებული ფენებისა, კი $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$. იდეალურად შეთანხმებულ ფენებში კი ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობები შერჩეულია შემდეგნაირად:

$$\sigma_i(d) = \sigma_{i \max} \left(\frac{d}{D} \right)^2,$$

სადაც i - არის იდეალურად შეთანხმებული ფენის ნომერი, d - არის იდეალურად შეთანხმებულ ფენაში შესვლის მანძილი, D - კი იდეალურად შეთანხმებული ფენის სრული სისქვა. $\sigma_{i \max}$ გამოითვლება

$$R = \exp\left(-2\sigma_{i \max} D \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\right) \text{ პირობიდან. აქ } R \text{ არეკვლის კოეფიციენტი}$$

იენტია ყოველი ფენიდან.

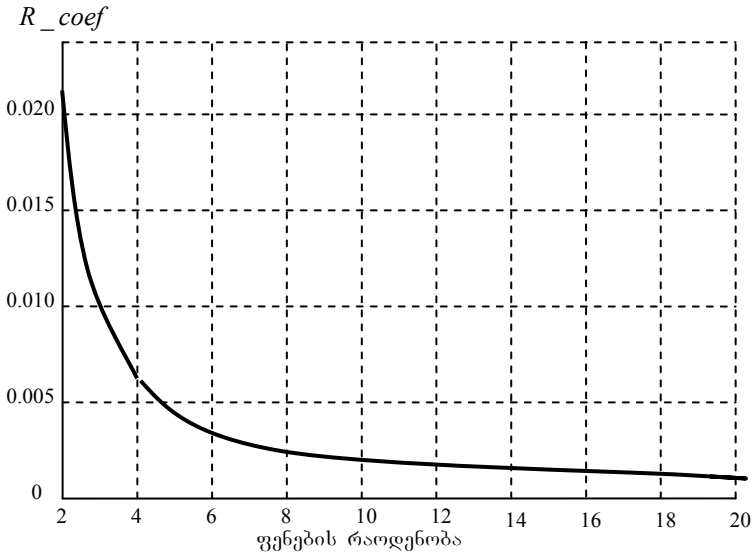
სურათ 9.4-ზე ნაჩვენებია $y = 0, x = W/2$ ნერტილში არეკვლის

$$\text{კოეფიციენტის } R_{\text{coef}} = \frac{\max(|E_x^{\text{cal}}(t) - E_x^{\text{ex}}(t)|)}{\max(E_x^{\text{ex}}(t))} \text{ სიდიდის დამოკიდებ}$$

ბულება იდეალურად შეთანხმებული ფენების რიცხვზე, სადაც $E_x^{\text{cal}}(t)$ არის გამოთვლილი ველის მნიშვნელობა, ხოლო $E_x^{\text{ex}}(t)$ ველის ზუსტი მნიშვნელობა მოცემულ ნერტილში.

როგორც ვხედავთ ფენების რაოდენობის გაზრდისას გამოთვლილი შედეგები მიისწრაფვიან ველის ზუსტი მნიშვნელობისაკენ. გრაფიკი გვიჩვენებს, რომ რამოდენიმე იდეალურად შეთანხმებული ფენაც კი საკმარისია საკმაოდ კარგი შედეგის მისაღწევად, მაგალითად როცა $n = 10$ ფენის შემთხვევაში $R_{\text{coef}} = 0.002\%$, რაც გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში პრაქტიკულად ადგილი არა აქვს იდეალურად შეთანხმებული ფენიდან არეკვლას, ანუ პრაქტიკული გამო-

თვლებისათვის 10 ფენაც კი საკმარისია სასურველი შედეგის მისაღწევად.



სურ.9.4. არეკვლის კოეფიციენტის დამოკიდებულება იდეალურად შეთანხმებული ფენების რაოდენობაზე

§9.4 დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი

ელექტრომაგნიტური ველების მოდელირებისათვის ერთერთ მძლავრ მეთოდს წარმოადგენს ე.წ. დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: წარმოვადგინოთ გაბნეული ველი, როგორც იმ ველების წრფივი კომბინაცია, რომლებიც შექმნილია გამბნევის შიგნით მოთავსებული და ჰელმჰოლცის განტოლებების ფუნდამენტური ამონახსნის მიხედვით აგებული გამომსხივებლების მიერ.

შევჩერდეთ არაორთოგონალური მწკრივების დაშლის მეთოდზე: ვთქვათ, G არის Γ ზედაპირით შემოსაზღვრული მრავალგანზომილებიანი მრავალკავშირიანი არე R^n - დან. განვიხილოთ საერთო სასაზღვრო ამოცანა:

$$\hat{L}U(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in G \tag{9.4.1}$$

$$\hat{U}(\vec{r})|_{\Gamma} = \psi(\vec{\rho}), \quad \vec{\rho} \in \Gamma \tag{9.4.2}$$

არაორთოგონალურ ფუნქციებად დაშლის მეთოდი (9.4.1) და (9.4.2) სასაზღვრო ამოცანებისათვის მდგომარეობს შემდეგში:

$\{\psi_i(\vec{r})\}_{i=1}^{\infty}$ არის ვექტორ-ფუნქციათა სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. ყოველი $\psi_i(\vec{r})$ ფუნქცია G -ში აკმაყოფილებს (9.4.1) განტოლებას;
2. Γ -ზე ყოველი $\psi_i(\vec{r})$ ფუნქციისათვის განსაზღვრულია ახალი $\hat{I}\psi_i(\vec{\rho})$ ფუნქცია, სადაც \hat{I} სასაზღვრო (9.4.2) პირობებში გამოყენებული ოპერატორია;
3. $\{\psi_i(\vec{r})\}_{i=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემა არის სრული და წრფივად დამოუკიდებელი $L_2(\vec{r})$ არეში და კვადრატულად ინტეგრებადი ფუნქცია Γ -ზე.

$U(\vec{r})$ გავშალოთ მწკრივად $\{\psi_i(\vec{r})\}_{i=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის მიხედვით:

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{r}), \tag{9.4.3}$$

სადაც a_i უცნობი კოეფიციენტებია, რომლებიც განისაზღვრება სასაზღვრო პირობებიდან და განთავსებულია $\{x_i, y_i, z_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Gamma$ წერტილებში. ასეთი სახით განსაზღვრული $U(\vec{r})$ ფუნქცია Γ ზედაპირთან მიახლოებისას საშუალო კვადრატულად უახლოვდება $\psi_i(\vec{\rho})$ ფუნქციის მნიშვნელობას, ე.ი. გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{r})|_{r \in \Gamma} \approx \psi(\vec{\rho}). \tag{9.4.4}$$

L_2 სივრცეში განვსაზღვროთ ფუნქციონალი

$$\sigma_{L_2} = \left\| \hat{I}U(\vec{\rho}) - \psi(\vec{\rho}) \right\|_{L_2}. \tag{9.4.5}$$

σ_{L_2} აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: ნებისმიერი უსასრულოდ მცირე დადებითი ε -სათვის არსებობს ისეთი N რიცხვი და a_i კოეფიციენტები, რომ σ_{L_2} შეიძლება გახდეს უსასრულოდ მცირე, ე.ი. $\sigma_{L_2} < \varepsilon$, ანუ ε სიზუსტით შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{r})|_{r \in \Gamma} - \psi(\vec{\rho}) \right\} = O. \tag{9.4.6}$$

როგორც ცნობილია ეს განტოლება კოლოკაციის მეთოდის გამოყენებით (სასაზღვრო პირობების დანერით M წერტილში Γ ზედაპირზე) ზოგადად დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტ-

ემის ამოხსნამდე, რაც თანამედროვე კომპიუტერული შესაძლებლობების გამოყენებით არც ისე რთულ ამოცანას წარმოადგენს.

§9.5 მომენტების (პროექციული) მეთოდი

დროით არეში (9.1.11) და (9.1.12) ინტეგრო დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად ერთ-ერთი ეფექტური მეთოდია მომენტების მეთოდი, რომელსაც ხშირად პროექციულ მეთოდსაც უწოდებენ. ამ მეთოდის დაწვრილებითი შესწავლისათვის (9.1.12) ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$L(t/t', \vec{r}/\vec{r}') \vec{J}(t', \vec{r}') = 2\hat{n} \times \vec{H}^{inc}(t, \vec{r}), \quad (9.5.1)$$

სადაც

$$L(t/t', \vec{r}/\vec{r}') = 1 - \hat{n} \times \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{R} + \frac{\partial}{c\partial\tau} \right] \times \frac{\vec{R}}{R^2} ds \quad (9.5.1')$$

წრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორია. $L(t/t', \vec{r}/\vec{r}')$ ოპერატორის შემოტანით ანალოგიურად ჩაინერება (9.1.11) ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება.

ზოგადად განვიხილოთ მომენტების მეთოდი ψ და ϕ სკალარული ფუნქციებისათვის. ვთქვათ, მოცემულია ψ და ϕ სკალარული ფუნქციები, რომლებიც (9.5.1) განტოლების ანალოგიურად აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\psi(t, \vec{r}) = L(t/t', \vec{r}/\vec{r}') \phi(t', \vec{r}'), \quad (9.5.2)$$

სადაც ϕ წარმოადგენს სკალარულ ფუნქციას L ოპერატორის განსაზღვრის არიდან. მოვახდინოთ დროისა და სივრცის დისკრეტიზაცია dt და dr ზომის ბიჯებით, ანუ $t = dt(m-1)$ და $r = dr(k-1)$. ვთქვათ, ϕ ფუნქციის აპროქსიმაცია ხდება შემდეგი მწკრივის მეშვეობით:

$$\phi(t', r') = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^N \Gamma(m, k) f_{m,k}(t', r'), \quad (9.5.3)$$

სადაც Γ წარმოადგენს ϕ ფუნქციის დაშლის კოეფიციენტებს, ხოლო $f_{m,k}(t', r')$ არის ϕ ფუნქციის მწკრივად დაშლის ბაზისური ფუნქციები. როგორც უკვე ვთქვით, L წრფივი ოპერატორია, ამიტომ (9.5.3) გამოსახულების გათვალისწინებით (9.5.2) განტოლება შემდგენიერად გადაინერება:

$$\psi(t', r') = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^N \Gamma(m, k) L(t/t', r/r') f_{m,k}(t', r'). \quad (9.5.4)$$

(t, \bar{r}) სივრცეში ყოველი m და k - თვის შემოვიტანოთ $S_{j,i}$ ნონითი ფუნქციების სისტემა და $\psi(t, \bar{r})$ და $S_{j,i}(t, \bar{r})$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\langle \psi(t, r), S_{j,i}(t, r) \rangle \equiv \int_0^{\infty} \int_{D(r)} \psi(t, r) S_{j,i}(t, r) dr dt. \quad (9.5.5)$$

(9.5.5) სკალარული ნამრავლის დახმარებით (9.5.4) გამოსახულება შეიძლება შემდეგნაირად გადაინეროს:

$$\langle \psi(t, r), S_{j,i}(t, r) \rangle \equiv G(\Gamma(m(j), k(l))) \langle Lf_{m,k}, S_{j,i} \rangle, \quad (9.5.6)$$

სადაც G რაღაც ფუნქციაა Γ_s -გან, ხოლო $m(j)$ და $k(l)$ ინდექსები ისეთია, რომ სრულდება (9.5.6) ტოლობა. მაგალითისათვის, თუ (9.5.5) სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების შესაბამისად $Lf_{m,k}$ და $S_{j,i}$ ორთოგონალურია სივრცეში და დროში, მაშინ (9.4.6) ბათილდება ყველა $m \neq j$ და $k \neq l$ ინდექსებისათვის.

G ფუნქციის პოვნა პრინციპში შესაძლებელია ყოველთვის, მაგრამ მისი პოვნის სიმარტივე დამოკიდებულია ბაზისური და ნონითი ფუნქციების არჩევაზე, L ოპერატორის სახეზე და სანყის და სასაზღვრო პირობებზე.

(9.5.1) განტოლების მარჯვენა მხარე გვიჩვენებს დაცემული ველის უშუალო ზემოქმედებას (\bar{r}, t) დაკვირვების ნერტილში გამავალ დენზე, ინტეგრალური წევრი კი ასახავს სხეულის ზედაპირის სხვა უბნებში გამავალი დენების ზემოქმედებას დაკვირვების ნერტილის დენზე. ეს ზემოქმედება აგვიანებს $t - \frac{R}{c}$ დროით. ამიტომაც შესაძლებელია (9.5.6) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დროში გადაადგილების მეთოდის გამოყენებით.

§9.6 მომენტების (პროექციული) მეთოდი დროით არეში

მომენტების (პროექციული) მეთოდი დროით არეში განვიხილოთ ცილინდრული სხეულის მიერ არამონოქრომატული ბრტყელი ტალღის გაბნევის ამოცანის მაგალითზე. დაცემულ ველში ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი ორიენტირებულია ცილინდრის მსახველის პარალელურად და დროზე ისევეა დამოკიდებული,

როგორც ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობა განმუხტვის არიდან რალაც ფიქსირებულ მანძილზე.

ორგანზომილებიან ამოცანაში, როდესაც გამბნევი ზედაპირის მსახველი z ღერძის პარალელურია, დაცემული ველი E -პოლარიზირებულია ($\vec{E} = \hat{n}_z E$) და არ არის დამოკიდებული z კოორდინატზე, მაშინ ჯამური ელექტრომაგნიტური ველი შეიძლება ჩაინეროს შემდეგნაირად:

$$E(\vec{\rho}, t) = E^{inc}(\vec{\rho}, t) - \int_L dL \int_0^\infty \frac{F(\vec{\rho}_L, t - R_L/c)}{R_L} dz_L, \quad (9.6.1)$$

სადაც L მოცემული ცილინდრის განივკვეთია, $R_L = \sqrt{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_L|^2 + z_L^2}$ და $F(\vec{\rho}_L, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial J_z(\vec{\rho}_L, t)}{\partial t}$, ხოლო J_z დენის ზედაპირული სიმკვრივეა.

იმის გათვალისწინებით, რომ სრული ელექტრული ველის ტანგენციალური მდგენელი იდეალურად გამტარი სხეულის ზედაპირზე ნულის ტოლია, უცნობი F ფუნქციის („წყაროს ფუნქციის“) პოვნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი ტიპის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნაზე:

$$0 = E^{inc}(\vec{\rho}_{L^*}, t) - \int_L dL \int_0^\infty \frac{F(\vec{\rho}_L, t - R_{LL^*}/c)}{R_{LL^*}} dz_L, \quad (9.6.2)$$

სადაც $R_{LL^*} = |\vec{\rho}_L - \vec{\rho}_{L^*}|$ მანძილია L კონტურის $M(x_L, y_L)$ წერტილიდან ამავე კონტურის $M(x_{L^*}, y_{L^*})$ წერტილამდე.

ამ განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის გამოყენებულია მომენტების მეთოდი. ამისათვის, ცილინდრის განივკვეთი L დავყოთ თანაბარი სიგრძის რკალეზად $\{L_m\}_{m=0}^M$, რომელთა შუა წერტილების კოორდინატებია $\{x_m, y_m\}_{m=0}^M$. ამით ცილინდრის ზედაპირი დაიყოფა მართკუთხა, $\Delta L_m \times \Delta z_L$ - ფართობის მქონე უჯრედებად ისე, რომ $\Delta L_m = 2\Delta L$; $\Delta z_L = 2\Delta z$; $\Delta t = 2\Delta L/c = 2\Delta z/t$. თითოეულ უჯრედში დაცემული ველი და საძიებელი ფუნქცია ჩათვლილია მუდმივად და ისეთად, როგორცაა ეს ფუნქცია უჯრედის ცენტრში.

გარდა ამისა (9.6.2) ინტეგრალურ განტოლებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციას გააჩნია განსაკუთრებულობა და რიცხვითი ალგორითმის ეფექტურობაზე დიდ გავლენას ახდენს ამ განტოლებაში თავის თავზე ზემოქმედების (წილი არასაკუთრივ ინტეგრალში იმ არისა, სადაც ინტეგრებისა და დაკვირვების წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა) კორექტულად გათვალისწინება. ამიტომ სასურველია

სათანადო ზედაპირული ინტეგრალის გამოითვალოს ანალიზურად. (9.6.2) განტოლებაში ინტეგრალის შემცველი შესაკრები მიახლოებით გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\iint_{L_m} \approx \sum_{\substack{m=0, \\ m=m}}^M \Delta L_m \sum_{n=0}^N \frac{F(\vec{\rho}_m, t_n)}{R^{n*}} \Delta z_n + F(\vec{\rho}_m, t_n) \int_{L_m}^{\Delta z} ,$$

სადაც ორმაგი ინტეგრალი $\iint_{L_m}^{\Delta z}$ ითვალისწინებს (9.6.2) ინტეგრალ-

ურ განტოლებაში მცირე $2\Delta L \times 2\Delta z$ ზომის ფართის თავის თავზე ელექტრომაგნიტურ ზემოქმედებას. ეს ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინდექსზე ზედაპირის თანაბარი ზომის უჯრებად დაყოფის გამო, თუ მათი რაოდენობა საკმარისად დიდია, ამოტომ მისი გამოთვლა შესაძლებელია შემდეგი ფორმულით:

$$\iint_{L_m}^{\Delta z} = \int_{-\Delta L}^{\Delta L} dl \int_0^{\Delta z} \frac{dz}{R} = 2\Delta L \ln \left(\frac{\Delta z}{\Delta L} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta L} \right)^2} \right) + 2\Delta z \ln \left(\frac{\Delta L}{\Delta z} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta L}{\Delta z} \right)^2} \right), \quad (9.6.3)$$

სადაც $R = \sqrt{l^2 + z^2}$.

გარდა ამისა, ორი, არამეზობელი უჯრედის ურთიერთქმედების დაგვიანების დრო ყოველთვის არ გამოისახება დროითი Δt ბიჯის მთელი რიცხვებით და ზოგადად ტოლია $\tau = t - \frac{R}{c} = (n + \gamma)\Delta t$,

სადაც $0 \leq \gamma < 1$, ამიტომ აუცილებელია საძიებელი ფუნქციის დროში ინტერპოლაცია მთელ ბიჯებს შორის. ამ მიზნით გამოიყენება შემდეგი სახის საინტერპოლაციო ფორმულა:

$$F(\tau) = \frac{F_{n-1} + F_{n+1} - 2F_n}{2\Delta t^2} (\tau - t_n)(\tau - t_{n+1}) + \frac{F_{n+1} - F_n}{\Delta t} (\tau - t_{n+1}) + F_{n+1}, \quad (9.6.4)$$

სადაც $t_n = \Delta t \times (n - 1)$.

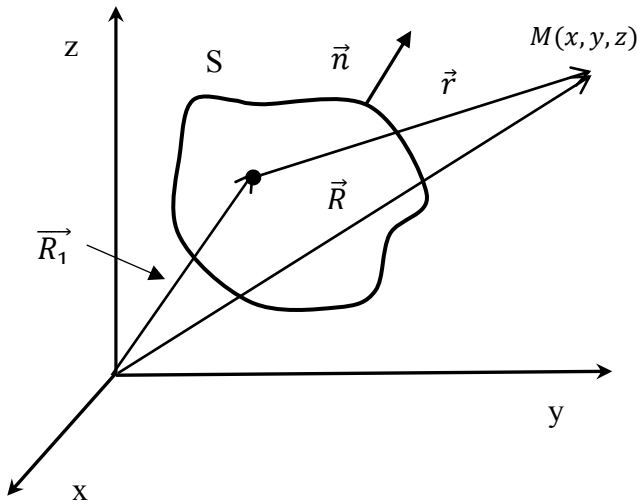
ნაშრომში ზემოთ აღწერილი ალგორითმის ტესტირება მოხდა სხვადასხვა ტიპის გეომეტრიის სხეულებისა და სხვადასხვა დაცემული ველებისათვის. რიცხვითმა ექსპერიმენტმა გვიჩვენა საკმაოდ კარგი თანხვედრა ლიტერატურაში ნარმოდგენილ შედეგებთან წრიული და ხაზოვანი კვების მქონე ცილინდრებისათვის, რომელთა აგზნება ხდება გაუსური, ვიდეო ან რადიო იმპულსებით.

§9.7 დროით არეში სასრული სხვაობებისა და კირხოფის კომბინირებული მეთოდი ელექტროდინამიკის ამოცანებში

ამ პარაგრაფში ელექტროდინამიკის ამოცანების ამოსახსნელად ჩვენს მიერ შექმნილია ახალი კომბინირებული მეთოდი. ეს მეთოდი წარმოადგენს დროით არეში სასრული სხვაობებისა (FDTD) და კირხოფის მეთოდის (KM) კომბინირებულ ვარიანტს, რომელთა კომბინირებული გამოყენება განპირობებულია ცალკე აღებული თითოეული მეთოდისათვის არსებული რიგი ნაკლოვანებით.

კერძოდ, (FDTD) მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია მხოლოდ სივრცის და დროის შეზღუდულ არეში, რაც არ იძლევა გამოთვლების საკმაოდ დიდ არეში ჩატარების საშუალებას. შესაბამისად შეუძლებელია სისტემის მიერ გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის დიაგრამის პოვნა შორ ზონაში. დიაგრამის პოვნა შეიძლება კირხოფის მეთოდის (KM) გამოყენებით, რომელიც ჰიუგენს-ფრენელის პრინციპის მათემატიკურ განზოგადობას წარმოადგენს. ზემოთ აღვწერეთ სასრული სხვაობების მეთოდი, ეხლა კი აღვწეროთ კირხოფის მეთოდი და სასრული სხვაობებისა და კირხოფის კომბინირებული მეთოდი (FDTD+ KM).

კირხოფის მეთოდი. როგორც აღვნიშნეთ, კირხოფის მეთოდი წარმოადგენს ჰიუგენს-ფრენელის პრინციპის მათემატიკურ განზოგად-



სურ.9.5 კირხოფის მეთოდის გეომეტრია

ებას, რომლის ძირითადი იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ სივრცის

რაიმე $M(x, y, z)$ ნერტილში ტალღური შეშფოთება წარმოადგენს მეორადი წყაროებიდან გამოსხივებული ველების ინტერფერენციის შედეგს. მეორადი წყაროები განლაგებულია რეალურ წყაროებსა და $M(x, y, z)$ ნერტილს შორის გამავალ შეკრულ S ზედაპირზე (სურ.9.7.5.)

ვთქვათ $U(M)$ და $G(M)$ წარმოადგენენ $M(x, y, z)$ ნერტილის კომპლექსურ ფუნქციებს, რომელთაც V მოცულობის შემომსაზღვრელ S ზედაპირზე გააჩნიათ უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. მაშინ გრინის თეორემის თანახმად

$$\int_V (G\Delta U - U\Delta G)dV = \int_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (9.7.1)$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial n}$ აღნიშნავს წარმოებულს S ზედაპირის \vec{n} გარე ნორმალის გასწვრივ. ვთქვათ, U ფუნქცია წარმოადგენს ტალღური ველის კომპლექსურ ამპლიტუდას და V მოცულობის შიგნით აკმაყოფილებს ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებას (ჩავთვალოთ, რომ დროზე დამოკიდებულებას აქვს $e^{-i\omega t}$ სახე):

$$\Delta U + k^2 U = 0. \quad (9.7.2)$$

G ფუნქციად ავირჩიოთ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\Delta G + k^2 U = -4\pi\delta(|\vec{R} - \vec{R}_1|) \quad (9.7.3)$$

განტოლებას, სადაც $\vec{R} - M(x, y, z)$ ნერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{R}_1 - V$ მოცულობის მიმდინარე O ნერტილუის რადიუს-ვექტორია. (9.7.3) განტოლების ერთერთ მნიშვნელოვან ამონახსნს წარმოადგენს

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}, \text{ სადაც } r = |\vec{R} - \vec{R}_1| \quad (9.7.4)$$

ფუნქცია, რომელიც აღწერს ერთეულოვანი ამპლიტუდის სფერულ ტალღას და რომელსაც ნერტილოვანი წყაროს ფუნქციას ან თავისუფალი გარემოს გრინის ფუნქციას უწოდებენ.

(9.7.2) და (9.7.3) განტოლებებიდან ΔU და ΔG სიდიდეების განსაზღვრითა და ამ სიდიდეების (9.7.1) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$4\pi \int_V U(\vec{R})\delta(|\vec{R} - \vec{R}_1|)dV = \int_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (9.7.5)$$

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (9.7.6)$$

ფორმალურად შესაძლებელია კირხოფის მეთოდი განვაზოგადოთ ვექტორული, მაგალითად \vec{E} და \vec{H} ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობებისათვის. მათი დეკარტული კოორდინატებისთვის (9.7.6) ფორმულის გამოყენებითა და შემდეგ ვექტორულად

შეკრებით მიიღება ვექტორული თეორემა, რომელიც საბოლოოდ შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ i \frac{\omega}{c} \mu [\vec{n}\vec{H}] G + [[\vec{n}\vec{E}]\text{grad}G] + (\vec{n}\vec{E})\text{grad}G \right\} ds, \quad (9.7.7)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ -i \frac{\omega}{c} \varepsilon [\vec{n}\vec{E}] G + [[\vec{n}\vec{H}]\text{grad}G] + (\vec{n}\vec{H})\text{grad}G \right\} ds, \quad (9.7.8)$$

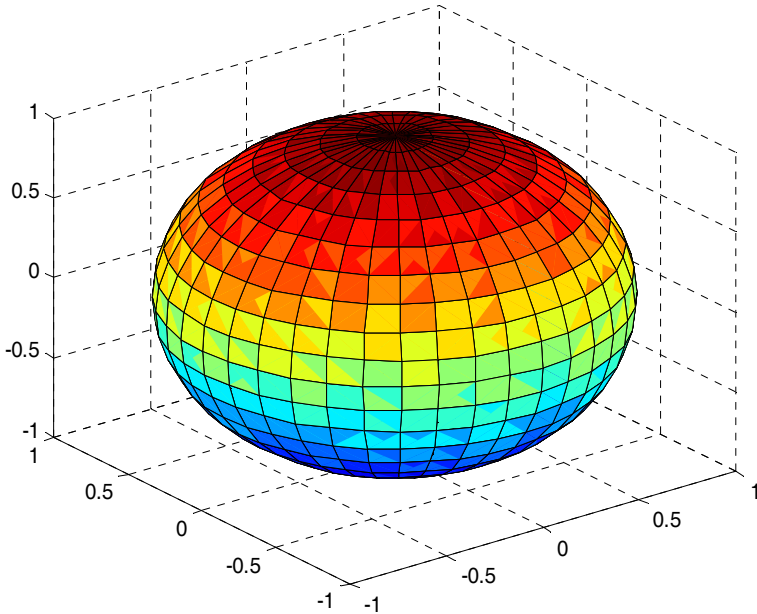
ანუ ზედაპირზე ველების, გრინის ფუნქციისა და ნორმალის საშუალებით შესაძლებელია ველის მნიშვნელობის პოვნა $M(x, y, z)$ ნერტილში.

FDTD + KM კომბინირებული მეთოდის აღწერა. როგორც აღვნიშნეთ, კომპიუტერული რესურსების შეზღუდვების გამო, (FDTD) მეთოდი არ იძლევა საკმაოდ დიდ არეში გამოთვლების ხანგრძლივად ჩატარების შესაძლებლობას, ამიტომ საჭიროა შორ ზონაში გამოსხივებული (გაბნეული) ველის დიაგრამის საპოვნელად კომბინირებული მეთოდის შექმნა. ერთერთი ასეთი მეთოდი შეიძლება იყოს ჩვენს მიერ ნაშრომში მოყვანილი (FDTD + KM) კომბინირებული მეთოდი რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

თავიდან გამოთვლები უნდა ჩავატაროთ FDTD მეთოდით სივრცის შეზღუდულ არეში, რომელიც მოგვცემს ამ არის შიგნით მოთავსებულ შეკრულ ზედაპირზე ველის დროითი $F(t)$ ფუნქციების პოვნის საშუალებას, გადავიყვანოთ დროითი შედეგები ფურიეს გარდაქმნის

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (9.7.9)$$

ფორმულის გამოყენებით ხოლო შემდეგ (9.7.7) და (9.7.8) ფორმულის საშუალებით ვიპოვოთ ველის მნიშვნელობები სივრცის ნებისმიერ $M(x, y, z)$ ნერტილში რაც მოგვცემს შორ ზონაში გამოსხივებული (გაბნეული) ველის დიაგრამის პოვნას საშუალებას. შორ ზონაში გაბნეული ველის პოვნა კირხოფის მეთოდით შესაძლებელია მხოლოდ შეკრული ზედაპირის გამოყენებით, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია სასრული სხვაობებით წარმოებული გამოთვლების არეში იდეალურად შეთანხმებული ფენების შიგნით. ჩვენს მიერ წარმოებული გამოთვლებისას ამისათვის გამოყენებულია სფერული ზედაპირი, რომელიც დაყოფილია ელემენტარულ ds ზედაპირებად (სურ.9.6) და რომელთა ცენტრებში შესაძლებელია ველის მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოთვლა ამ ნერტილის გარშემო არსებული კუბის კვანძებში განლაგებული ველის შესაბამისი კომპონენტის მნიშვნელობების გამოყენებით.



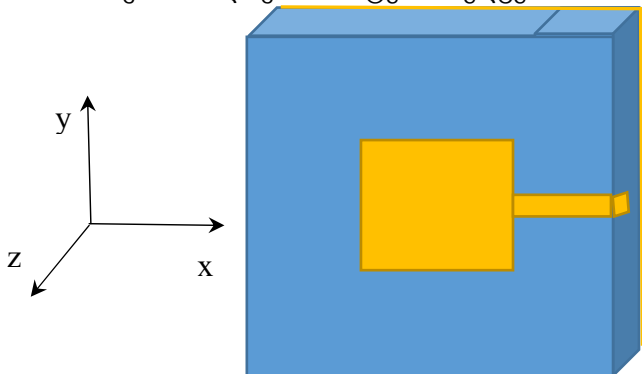
სურ.9.6. სფეროს S ზედაპირის დაყოფა მცირე ds ელემენტებად

ds ელემენტარული ზედაპირების ცენტრში გარე ნორმალის გამოთვლის, ამ მიმართულებაზე ველის შესაბამისი კომპონენტის წარმოებულის პოვნით და (9.7.7-9.7.8) გამოსახულების გამოყენებით შესაძლებელია სფეროს გარეთ ნებისმიერ წერტილში შესაბამისი კომპონენტის პოვნა.

მეთოდის ტესტირება. მეთოდის ტესტირება მოხდა სასრული ზომის მიკროზოლოვანი ანტენის მიერ შორ ზონაში გამოსხივებული ველის დიაგრამის შესასწავლად. ცნობილია, რომ მიკროზოლოვან ანტენებს გააჩნიათ რამდენიმე ისეთი განსაკუთრებული თვისება, რომელიც მათ ხდის ერთ-ერთ ალტერნატიულ ვარიანტად მრავალკავშირიანი მობილური კავშირგაბმულობიდან დაწყებული სამხედრო რადარული მოწყობილობებით დამთავრებული, ფაზირებული ანტენური მესრის ძირითად ელემენტად გამოყენების საქმეში. ფაზირებული ანტენების ეფექტური და უსაფრთხო გამოსხივების მიღება მოითხოვს თითოეული ელემენტის გამოსხივების ფუნდამენტურ შესწავლას.

ამ შემთხვევაში შესწავლილია სასრული ზომის მიკროზოლოვანი ანტენის (სურ.9.7) ელექტროდინამიკური თვისებები. როგორც აღვნიშნეთ ამ ამოცანით ხდება სასრული სხვაობებისა და კირხოფის კომბინირებული მეთოდის ტესტირება.

მიკროზოლოვანი ანტენა შედგება სასრული ზომის ერთი



ნახ.9.7 ანტენის გეომეტრია. XYZ კოორდინატა სისტემის სათავე მოთავსებულია ანტენის ცენტრში: $a=5\text{მმ}$, $b=3\text{მმ}$, $c=2\text{მმ}$, $d=15\text{მმ}$.

მხრიდან მეტალიზებული დამინებული დიელექტრიკისაგან, რომლის მეორე მხარეს მოთავსებულია მცირე ზომის მეტალური ფირფიტა. ამ ფირფიტის კვება შეიძლება მოხდეს ზოლოვანი ხაზით მინასა და ფირფიტას შორის ან კოაქსიალური კაბელით დამინებული მხრიდან. ზოგადად მეტალურ ფირფიტას შეიძლება ჰქონდეს მართკუთხა, წრიული ან სხვა ნებისმიერი ფორმა. ანტენის ფორმა დამოკიდებულია მისი გამოყენების საჭიროებაზე. მას შეიძლება ჰქონდეს კომპლექსური გეომეტრიაც.

ამ შემთხვევაში განხილულია კვადრატული ზომის მიკროზოლოვანი ანტენის აღგზნება ზოლოვანი ხაზით. ანტენის ზომები შემდეგია: კვადრატის გვერდი $a=5\text{მმ}$, ზოლის სიგრძე $b=3\text{მმ}$, დიელექტრიკის სისქე $c=2\text{მმ}$, დიელექტრიკის კვადრატის გვერდი $d=15\text{მმ}$. მიკროზოლოვანი ხაზის გასწვრივ მეტალურ ფირფიტასა და დამინებულ ფენას შორის ელექტრული ველის დაძაბულობის E_z მდგენელი იცვლება დროში შემდეგი სახით:

$$E_z^*(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} ct\right), \quad (9.7.10)$$

სადაც c სინათლის სიჩქარეა და ტალღის სიგრძე $\lambda = 3\text{სმ}$. აღგზნების არეში ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის z კომპონენტისათვის ვწერთ, რომ $E_z = E_z^{SC} + E_z^*$, სადაც E_z^{SC} ანტენის მიერ

შექმნილი ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის z მდგენელია. ამ სიდიდის მნიშვნელობა განსაზღვრავს იმას, თუ რამდენად ოპტიმიზირებულია ანტენის პარამეტრები.

ამოცანის ამოხსნა ხდება სასრული სხვაობების მეთოდით დროით არეში. ამ მეთოდის გამოყენებით დროის ყოველი მომენტი-სათვის განისაზღვრება ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორის მნიშვნელობები ანტენის შემომსაზღვრელი სასრული სივრცის, ამ შემთხვევაში სფერული ზედაპირის ელემენტარული ds ზედაპირების შუა წერტილებში.

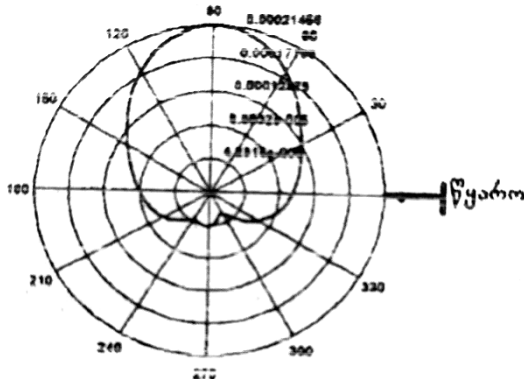
გამოსხივებული ველის მოსაძებნას შორ ზონაში ვიყენებთ კირხოფის მეთოდს. ამისათვის სფერული ზედაპირის ds ელემენტარული ზედაპირების შუა წერტილებში გამოთვლილი ელექტრული და მაგნიტური დაძაბულობის ვექტორების დროითი მნიშვნელობები დროითი არიდან სწრაფი ფურიე გარდაქმნით გადაგვყავს სინშირულ არეში (9.7.9) გამოსახულების გამოყენებით. ასეთი წარმოდგენით ელექტრული ველის დიაგრამა გამოითვლება ფორმულით:

$$E_{\theta}(\theta, \varphi) = \int_s -e^{-ik\rho} \left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} ([\vec{n}_{\theta} \times \vec{n}'] \cdot \vec{H}(\vec{r}', \omega) + [\vec{n}_{\varphi} \times \vec{n}'] \cdot \vec{E}(\vec{r}', \omega)) \right] ds'$$

$$E_{\varphi}(\theta, \varphi) = \int_s -e^{-ik\rho} \left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} ([\vec{n}_{\varphi} \times \vec{n}'] \cdot \vec{H}(\vec{r}', \omega) + [\vec{n}_{\theta} \times \vec{n}'] \cdot \vec{E}(\vec{r}', \omega)) \right] ds',$$

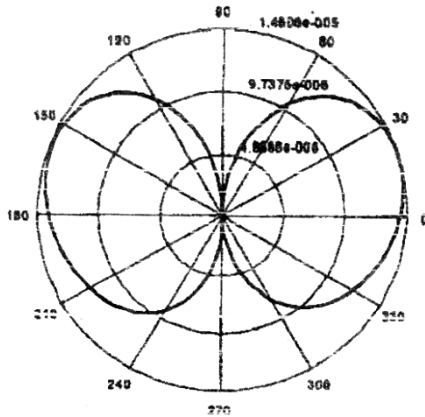
სადაც $\rho = x_0 \cos\varphi \sin\theta + y_0 \sin\varphi \cos\theta + z_0 \cos\theta$, (x_0, y_0, z_0) – საძიებელი ელექტრომაგნიტური ველის კოორდინატებია დიაგრამის საძიებელ ზედაპირზე, \vec{n}' არის s ზედაპირის გარე ნორმალი, ϵ_0 და μ_0 ელექტრული და მაგნიტური შეღწევადობაა, \vec{n}_{φ} და \vec{n}_{θ} დაკვირვების წერტილის ერთეულოვანი ვექტორებია, $\vec{E}(\vec{r}', \omega)$ და $\vec{H}(\vec{r}', \omega)$ ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობებია დამხმარე სფერულ s ზედაპირზე.

სურ.9.8-ზე გამოსახულია ანტენის (სურ.6) მიერ გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობის დიაგრამა \mathbf{xOz} სიბრტყეში, ანუ გამოსხივება ხდება ანტენის ფირფიტისადმი 90° -იანი კუთხით. გამოსხივებული ველის დიაგრამა 180° გრადუსზე მეტია და იძლევა დაფარვის კარგ დიაპაზონს ანტენის მხარეს.



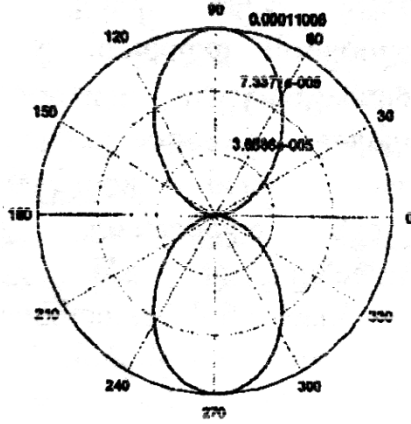
სურ.9.8. E_θ დიაგრამა $\varphi = 0$ სიბრტყეში

რაც შეერეება yOz სიბრტყეში ელექტრული ველის დიაგრამას (სურ.9.9), როგორც ვხედავთ გამოსხივებული ველის მაქსიმუმები მოდის 20° და 160° კუთხეებზე, ხოლო გამოსხივებული ველი მოიცავს ორივე მიმართულებით 120° მეტ დიაპაზონს.



სურ.9.9. E_θ დიაგრამა $\varphi = \frac{\pi}{2}$ სიბრტყეში

xOy სიბრტყეში გამოსხივებული ელექტრული ველის დიაგრამის (სურ.9.10), მაქსიმუმები მოდის 90° და 270° . გამოსხივებული ველის სიგანე 60° გრადუსზე მეტია ორივე მიმართულებით.



სურ.9.10. E_ϕ დიაგრამა $\theta = \frac{\pi}{2}$ სიბრტყეში

სხვა გეომეტრიის ანტენების შესწავლამ აჩვენა, რომ უფრო ვიწრო დიაგრამის მიღება შესაძლებელია მიკროანტენების განლაგებით ბრტყელ ან ცილინდრულ ზედაპირებზე.

მიღებული შედეგები შედარებულია იგივე ამოცანის ამოხსნის შედეგებთან, რომელიც მიღებულია დამხმარე გამომსხვივებლების მეთოდის (MAS) გამოყენებით. შედარებამ ცხადყო, რომ შედეგები კარგ თანხვედრაშია ერთმანეთთან და ცდომილება შეადგენს დაახლოებით 2 – 3%, ანუ მოცემული კომბინირებული მეთოდი შესაძლებელია წარმატებით გამოვიყენოთ ამ ტიპის გარდამავალი ელექტროდინამიკური ამოცანების ეფექტურად გადასაწყვეტად.

თავი 10. განმუხტვის არასტაციონარული პროცესის კომპიუტერული მოდელირება

როგორც ცნობილია, უკანასკნელ პერიოდში დიდი ყურადღება ექცევა კომპიუტერული სისტემებისა და ელექტრონული მოწყობილობების ეკრანირებას არასასურველი ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედებისაგან. ასეთი „მავნე“ ელექტრომაგნიტური გამოსხივების წყაროებს ხშირ შემთხვევაში წარმოადგენენ ამ მოწყობილობების ახლოს განლაგებული დამუხტული სხეულები, რომელთა განმუხტვის შედეგად გამოსხივდება მძლავრი ელექტრომაგნიტური ველები. მაგალითად, სხეულები სხვადასხვა ფიზიკური პროცესების შედეგად შეიძლება დაიმუხტოს. დამუხტული სხეულის სხვა სხეულთან მიახლოებისას ხდება ელექტროსტატიკური განმუხტვა. მიუხედავად იმისა, რომ განმუხტვის არეში ელექტრული დენის ძალა შეიძლება იყოს მცირე, დენის ძალის დროში ცვლილება იმდენად დიდია, რომ განმუხტვას თან ახლავს მძლავრი არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური გამოსხივება.

დაკვირვებებმა უჩვენა, რომ ელექტრონული აპარატურის მომსახურე პერსონალი ხშირ შემთხვევაში წარმოადგენს არასტაციონარული განმუხტვის მიზეზს და მისდა უნებურად ინვევს მგძნობიარე ციფრული მოწყობილობების ნორმალური მუშაობის რეჟიმის დარღვევას და ხშირ შემთხვევაში მწყობრიდან გამოსვლასაც კი.

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი ელექტროდინამიკის ლაბორატორიაში ამ საკითხებთან დაკავშირებით თავის დროზე ჩატარდა გამოკვლევები, რომლებიც შემოიფარგლებოდა სფეროიდის ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანებით და შეზღუდული იყო თავისი გამოყენების შესაძლებლობებით. ამ სამუშაოების შედეგები გამოქვეყნდა ადგილობრივ და საზღვარგარეთის ლეტერატურაში.

ნაშრომში გამოყენებული მიდგომა წინამდებარისაგან იმით განსხვავდება, რომ უფრო მეტი ყურადღება ექცევა განმუხტვის არხის მოდელირებას და გარდა ამისა ამოცანის ამოხსნის მეთოდში შეტანილია რიგი ცვლილებებისა, რომელიც იძლევა საშუალებას განხილულ იქნას განმუხტვის ამოცანების უფრო ფართო კლასი, მთავარია განმუხტვის ობიექტი წარმოადგენდეს ბრუნვით სხეულს. მოყვანილია უკანასკნელ პერიოდში ბერლინის ტექნიკურ უნივერსიტეტში ჩატარებული არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული ღირებულების მქონე ექსპერიმენტით (კონუსის, ადამიანის ხელში მოთავსებული მეტალური სხეულის არასტაციონარული განმუხტვა)

მიღებული შედეგებისა და კომპიუტერული მოდელირების შედეგად მიღებული შედეგების შედარება.

მოცემულია არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ფორმულირება და ფიზიკური და მათემატიკური მოდელი. ნაჩვენებია ამ მოდელის შესაბამისობა ექსპერიმენტულ მოდელთან. შესწავლილია არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანები, არასტაციონარული განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველების მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება დამუხტვის პოტენციალზე, განმუხტვის არხის სიგრძესა და რადიუსზე, განმუხტვისას გამოსხივებული ველების გავრცელების მიმართულებაზე.

განხილულია ელექტროსტატიკური ამოცანა, მიღებულია სფეროიდზე მუხტების განაწილება და სფეროიდისა და დამინებული სიბრტყისაგან შემდგარი სისტემის ტევადობის დამოკიდებულება განმუხტვის არხის სიგრძეზე. მიღებული შედეგები გამოიყენება სანყის მონაცემებად ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანებისათვის. მოყვანილია ბრუნვითი სხეულების არასტაციონარული განმუხტვის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას მიღებული შედეგები და მათი შედარება ექსპერიმენტით მიღებულ შედეგებთან.

§10.1 არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ზოგადი ფორმულირება

განვიხილოთ არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ფიზიკური მოდელი. მოცემული ამოცანა საკმაოდ რთულია რიცხვითი რეალიზაციისათვის. ჯერ ერთი, გარემოს გამტარებლობა ზოგად შემთხვევაში არანრფივადაა დამოკიდებული ელექტრული ველის დაძაბულობაზე, განმუხტვის არხში ჰაერის მდგომარეობაზე, განმუხტვის არხის სიგრძეზე და არხში მიმდინარე ფიზიკურ პროცესებზე. გარდა ზემოთ აღნიშნულისა ამოცანის სირთულე დაკავშირებულია იმასთანაც, რომ განმუხტვის ობიექტზე განმუხტვის დაწყებისას გადანაწილებული მუხტის ჩამოშლის დროს არხში გაივლის მუხტის ნაწილი, რომლის სიდიდე ასევე დამოკიდებულია ზემოთ აღნიშნულ სიდიდეებსა და ფიზიკურ პროცესებზე, ხოლო დანარჩენი ნაწილი წარმოქმნის დენის ტალღას, რომელიც მოძრაობს არხის სანინაალმგდეგო მიმართულებით და ზედა წვეროდან არეკვლისას ისევ დარჩენილი მუხტის ნაწილი გაივლის განმუხტვის არხში, ხოლო ნაწილი აირეკლება. აქედან გამომდინარე, თუ შესაძლებელი გახდება დასმული სანყის ამოცანის მათემატიკური მოდელის შექმნა, მაშინ ის დაკავშირებული იქნება უამრავ ინტეგრო-დიფერენციალურ

განტოლებათა სისტემის ამოხსნასთან. მოცემულ შემთხვევაში გამოყენებულია რთული ფიზიკური პროცესის შესწავლის სტანდარტული გზა.

პირველ ეტაპზე შეიქმნა გამარტივებული ფიზიკური მოდელი, რომელიც ინარჩუნებს სანყისი ამოცანის ყველა ძირითად თვისებას. ასეთი გამარტივების მიზანია მოცემული ფიზიკური ამოცანისთვის ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომლისათვისაც შესაძლებელი გახდება დასმული ამოცანის რეალურ მანქანურ დროში რიცხვითად ამოხსნა.

მეორე ეტაპზე უნდა დამზადდეს ექსპერიმენტული მოდელი, რომელიც მაქსიმალურად უნდა შეესაბამებოდეს, როგორც ფიზიკურ, ასევე მათემატიკურ მოდელს. თუ ეს არ ხერხდება, მაშინ საჭიროა სამივე ფიზიკური, მათემატიკური და ექსპერიმენტული მოდელის ურთიერთკორექტირება.

სამივე მოდელის ერთმანეთთან შესაბამისობაში მოსაყვანად კეთდება შემდეგი დაშვებები:

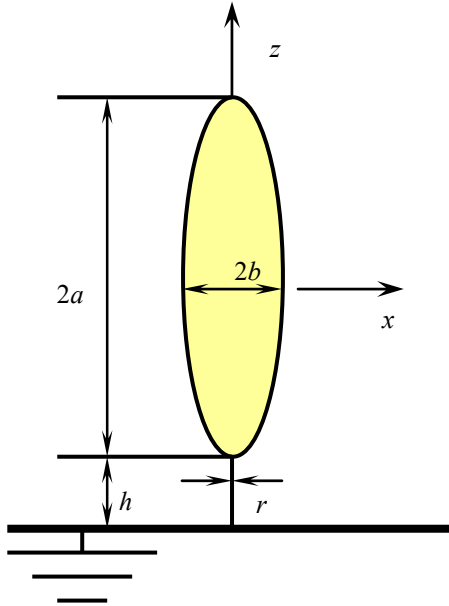
1. განიხილება იდეალურად გამტარი ბრუნვითი სხეულები, რომლებიც ამოზნექილია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ.
2. სხეულების ერთმანეთის მიმართ მოძრაობის სიჩქარე ჩათვლილია იმდენად მცირედ, რომ განმუხტვის დაწყებამდე სხეულზე მუხტების განაწილება შეიძლება ჩაითვალოს ელექტროსტატიკურად.
3. გარემოს გამტარებლობა წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის ცნობილ ფუნქციას.
4. განმუხტვა იწყება სხეულებს შორის ფიქსირებულ მანძილზე და დროის ფიქსირებულ მომენტში.
5. განმუხტვის არხის ზომა გაცილებით ნაკლებია დამუხტული სხეულის ზომებთან შედარებით.

ამ დაშვებების საფუძველზე სანყისი ფიზიკური ამოცანა გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ გამარტივებული გეომეტრიის მქონე სხეულების შემთხვევაში გაცილებით მცირდება გამოყენებული მანქანური მეხსიერების მოცულობა და გამოთვლის დრო.

განმუხტვის არხის გამტარებლობის ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობაზე და დროზე დამოკიდებულების დადგენა წარმოადგენს დამოუკუდებელ რთულ ამოცანას, რომლისათვისაც საჭიროა განმუხტვის არხის მოდელირება. არხის წინააღობის აღწერისათვის არსებობს სხვადასხვა ფენომენოლოგიური მოდელი. გამოკვლევების შედეგად დადგენილია, რომ განმუხტვის პროცესში არხის წინააღობის დროზე დამოკიდებულებას რომპესა და ვაიცზელის მოდელი ყველაზე უკეთ აღწერს.

§10.2 არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ფიზიკური დასმა

არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანა შემდეგნაირად დაისმის: გვაქვს წინასწარ V_0 პოტენციალამდე დამუხტული სხეული, რომელიც უახლოვდება იდეალურად გამტარ დამინებულ სიბრტყეს. სიბრტყიდან რაღაც h მანძილზე იწყება განმუხტვა (სურ.10.1).



სურ.10.1. ამოცანის გეომეტრია

h -ს შემდგომში ვუნოდებთ განმუხტვის არხის სიგრძეს. როგორც წესი, ელექტროდინამიკური პროცესების მიმდინარეობის სიჩქარე გაცილებით მეტია გამნმუხტვის ობიექტის სიჩქარეზე, ამიტომ შეგვიძლია სხეულის მოძრაობით გამოწვეული ელექტროდინამიკური პროცესების უგულვებელყოფა და განმუხტვის პროცესის უშუალოდ დაწყებამდე სისტემის სანყისი მდგომარეობა მთლიანად განისაზღვრება სიბრტყიდან h სიმაღლეზე მყოფ განმუხტვის ობიექტზე მუხტების ელექტროსტატიკური განაწილებით.

დროის $t = 0$ მომენტში იწყება ელექტროსტატიკური განმუხტვა. განმუხტვისას არხში მიმდინარე პროცესები დამოკიდებულია სხეულის გეომეტრიაზე, განმუხტვის არხის h სიგრძეზე, V_0 პოტენ-

ნციალზე, განმუხტვის არხში ჰაერის მდგომარეობაზე (ტენიანობა, ტემპერატურა, იონიზაცია და სხვ.), სხეულის ზედაპირულ იმპედანსზე და სხვ. აღწერილი ფიზიკური ამოცანის ამოხსნის პროცესი შეიძლება დაიყოს ორ ეტაპად:

1. საწყის ეტაპზე უნდა ამოიხსნას ელექტროსტატიკის ამოცანა ე.ი. გამოითვალოს გამტარი სიბრტყიდან h მანძილზე მოთავსებული სხეულის მიერ არხში შექმნილი ელექტროსტატიკური ველი, რომელიც განსაზღვრავს განმუხტვის არასტაციონარული პროცესის საწყის მდგომარეობას.
2. მეორე ეტაპზე უნდა მოხდეს განმუხტვის არხის მოდელირება.

ელექტროსტატიკური ამოცანის ამოხსნა მოცემულია მომდევნო პარაგრაფში. ამ პარაგრაფში კი ყურადღებას გავამახვილებთ განმუხტვის არხის მოდელირებაზე.

განმუხტვის დაწყებამდე სხეულის ზედაპირზე მუხტის სიმკვრივის განაწილება $\rho_{st}(\vec{r})$ (ცნობილია ელექტროსტატიკური ამოცანის ამოხსნის შედეგად. განმუხტვის პროცესში ხდება ამ მუხტის გადანაწილება სხეულის ზედაპირზე. სტატიკური მუხტის შემფოთება აღვნიშნოთ $\rho_{nst}(\vec{r}, t)$ —თი. ამ არასტაციონარული მუხტის მოძრაობასთან დაკავშირებულია ზედაპირული დენები $\vec{J}(\vec{r}, t)$. განმუხტვის არხში გვაქვს დენი, რომლის სიმკვრივეა $\vec{J}_0(\vec{r}, t)$. ამ დენების საპოვნელად ჩვენ ვახდენთ შემდეგი ამოცანის ფორმულირებას:

1. უცნობი ზედაპირული დენებისათვის $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ჩაიწერება ინტეგრალური განტოლება მაგნიტური ველისათვის:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 2\hat{n} \times \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \int_s \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}', \tau)}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right\} \times \frac{\vec{R}}{R^2} ds, \quad (10.2.1)$$

სადაც \vec{r} განლაგებულია სხეულის S ზედაპირზე.

2. არხის ნებისმიერ წერტილში სამართლიანია ომის დიფერენციალური კანონი:

$$\vec{J}_0(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}, t) \cdot (\vec{E}_{st}(\vec{r}) + \vec{E}_{nst}^0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{nst}^s(\vec{r}, t)). \quad (10.2.2)$$

განვიხილოთ ამ ფორმულებში შემავალი სიდიდეები. $\vec{H}_0(\vec{r}, t)$ წარმოადგენს არხის მიერ გამოსხივებული მაგნიტური ველის დაძაბულობას, \vec{r} - დაკვირვების წერტილია, ხოლო \vec{r}' - ინტეგრირების წერტილი. $\tau = t - \frac{R}{c}$ - დაგვიანების დრო, $R = |\vec{R}|$, სადაც $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, \vec{E}_{st}

- წარმოადგენს სხეულის მიერ წარმოქმნილ ელექტროსტატიკური ველის დაძაბულობას. \vec{E}_{nst}^0 - არის არხის მიერ წარმოქმნილი ელექტრული ველის დაძაბულობა, ხოლო \vec{E}_{nst}^s - წარმოადგენს სხეულის მიერ წარმოქმნილ ელექტრული ველის დაძაბულობას.

ინტეგრალური (10.2.1) განტოლების ამოხსნა წარმოებს მომენტების მეთოდით. განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით (10.2.2) განტოლება. გავაინტეგრიროთ ეს განტოლება არხის გასწვრივ:

$$R(t)I_0(t) = \int_{-h}^h E_{st}(z) dz + \int_{-h}^h E_{nst}^0(z, t) dz + \int_{-h}^h E_{nst}^s(z, t) dz, \quad (10.2.3)$$

სადაც $R(t)$ წარმოადგენს არხის დროზე არანრფივად დამოკიდებულ წინალობას $R(t) = \frac{2h}{S_0 \sigma(t)}$, ხოლო $I_0(t)$ - არხში გამავალ დენს.

არხის წინალობის გამოსათვლელად გამოყენებულია რომპესა და ვეიცზელის ემპირიული ფორმულა

$$R(t) = \frac{2h}{\sqrt{2a_r \int_0^t I_0^2(t') dt}}, \quad (10.2.4)$$

სადაც $R(t)$ - წინალობის განზომილებაა [ომი], h - არის არხის სიგრძე [მ], $I_0(t)$ - არხის დენია [ა]. a_r - პარამეტრია [მ²/ვ²წმ], რომელიც განისაზღვრება იონიზაციის პროცესის ანალიზით, t - დაკვირვების დროა [წმ]. პარამეტრი a_r - რომელიც თავის მხრივ დამოკიდებულია დამუხტული სხეულის საწყის დაბვასა და არხის სიმაღლეზე არ წარმოადგენს მუდმივას. ლიტერატურული მონაცემების თანახმად a_r პარამეტრის მნიშვნელობა იცვლება $0.5 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4}$ მ²/ვ²წმ საზღვრებში. a_r პარამეტრის მნიშვნელობების დასადგენად ჩატარდა განმუხტვის დენის გაზომვები 150 ომის TEM ხაზისათვის. ეს გაზომვები შედარებული იყო გადამცემი ხაზის მოდელთან, რომელშიც გამოყენებულია რომპესა და ვეიცზელის ემპირიული კანონი. ასეთი შედარების მეშვეობით დადგენილ იქნა a_r პარამეტრის დამოკიდებულება დაბვასა და არხის სიგრძეზე.

ზემოთ აღნიშნულ ალგორითმში E_{st} დაძაბულობის გამოთვლა ხდება ელექტროსტატიკური მეთოდებით. არხში შექმნილი არასტაციონარული ველისათვის გვექნება:

$$\int_{-h}^h E_{nst}^0(z, t) dz = 2h \cdot E_{nst}^0(z=0, t) = -L \frac{dI_0}{dt}, \quad (10.2.5)$$

სადაც არხის, როგორც დენის გამტარის ინდუქტივობა

$$L = \frac{2h \cdot \mu}{4\pi} \int_{-h}^h \frac{dz}{R}. \quad (10.2.6)$$

გამოვთვალოთ სხეულის მიერ წარმოქმნილი არასტაციონარული ველი:

$$E_{nst}^s(z, t) = \frac{\rho_{nst}^1(t - (t - z)/c)}{\epsilon_0}. \quad (10.2.7)$$

(10.2.7) გამოსახულებაში $(t - z)/c$ სიდიდე მიუთითებს, რომ ადგილი აქვს დროში დაგვიანების გათვალისწინებას. არასტაციონარული მუხტის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ მუხტის შენახვის კანონი:

$$\rho_{nst}^1 = \beta \frac{q_{nst}^1}{\Delta S_1}, \quad (10.2.8)$$

სადაც $q_{nst}^{(1)}(t) = \int_0^t (I_1(t) - I_0(t)) dt$. β სიდიდე მიუთითებს, რომ მუხტი არ არის თანაბრად განაწილებული ზედაპირზე. ჩავთვალოთ, რომ β არასტაციონარულ შემთხვევაში ისეთივეა განმუხტვის არხის მახლობლად, როგორც სტატიკურ შემთხვევაში

$$\rho_{st}^1 = \beta \frac{q_{st}^1}{\Delta S_1}. \quad (10.2.9)$$

ეს ვარაუდი სამართლიანია ინდენად, რამდენადაც სტატიკური მუხტის განაწილება განსაზღვრავს განმუხტვის სანყის და ყველაზე მნიშვნელოვან ეტაპს.

გადავწეროთ (10.2.3) განტოლების ორი წევრი შემდეგი სახით

$$E_{st} + E_{nst}^s = \frac{\beta}{\epsilon_0 \Delta S_1} (q_{st}^{(1)} + q_{nst}^{(1)}(t - (t - z)/c)). \quad (10.2.10)$$

სტატიკური ამოცანიდან ვპოულობთ, რომ

$$\int_{-h}^h E_{st}(z) dz = 2h \cdot \beta_1 \frac{\rho_{st}}{\epsilon_0}. \quad (10.2.11)$$

β_1 სიდიდე მიუთითებს, რომ სტატიკური ველი არ არის მუდმივი არხის გასწვრივ. ამის გათვალისწინებით (10.2.3) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$R(t)I_0(t) + L \frac{dI_0(t)}{dt} = \int_{-h}^h E_{st}(z) dz \left(1 + \frac{q_{nst}^{(1)}}{q_{st}^{(1)}} \right). \quad (10.2.12)$$

(10.2.12) გამოსახულებიდან არხის დენის მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$I_0(t) = \frac{\int_{-h}^h E_{st}(z) dz \left(1 + \frac{q_{nst}^{(1)}}{q_{st}^{(1)}} \right) + \frac{L}{\Delta t} I_0(t - \Delta t)}{R(t) + \frac{L}{\Delta t}}. \quad (10.2.13)$$

დასმული ამოცანის ამოხსნის პროცესში დადგენილ იქნა, რომ სხეულის ზედაპირის დაყოფა უნდა იყოს საკმაოდ დიდი, რადგანაც არხის მახლობლად ველებს და დენებს გააჩნიათ ძალიან დიდი ზედაპირული გრადიენტები. მაგრამ ასეთი დაყოფა მოითხოვს გამოთვლების არარეალისტურად მაღალ დროსა და დიდ მანქანურ რესურსებს, ამიტომ შემუშავებულ იქნა ალგორითმი, რომელიც იძლევა იმის საშუალებას, რომ ზედაპირის არც თუ ისე დიდი დაყოფისას მოხდეს მიღებული შეცდომის გასწორება. თუ ზედაპირი დაყოფილია არხის ზომებთან შედარებით დიდ უბნებად, არხის მიმდებარე უბნებიდან გამოსხივებული ველის მნიშვნელობა არ იქნება გამოთვლილი ზუსტად. მოვახდინოთ ამ მნიშვნელობის კორექტირება C_0 კოეფიციენტის მეშვეობით. გავამრავლოთ არხთან უახლოესი უბნიდან გამოსხივებული ველის მნიშვნელობა $1 + 2(C_0 - 1)$ სიდიდეზე. C_0 კოეფიციენტის მცირე ვარიანტით ერთის მახლობლად, ვანარმოოთ დაკვირვება იმაზე, თუ რა რაოდენობის მუხტი გაივლის არხში განმუხტვის მთელი პროცესის განმავლობაში. ამ მუხტის სიდიდე განმუხტვის პროცესის დაწყებამდე სხეულზე განლაგებული სტატიკური მუხტის ტოლი უნდა იყოს. C_0 კოეფიციენტის ცვლილებით (1.01 – 1.2 ფარგლებში) მივალწევთ სტატიკური და არასტატიკური მუხტების ერთმანეთთან ტოლობას. გამოთვლების შედეგების ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებამ ცხადყო, რომ ამ დროს მიიღება ექსპერიმენტულ შედეგთან საუკეთესო დამთხვევა.

ზედაპირული მუხტებისა და დენების სიმკვრივების პოვნა დაიყვანება სტანდარტული არასტაციონარული აგზნების ამოცანის ამოხსნამდე, სადაც ამგზნებს წარმოადგენს არხში გამავალი დენი.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება ზემოთ მოყვანილი მაგნიტური ველის ინტეგრალური განტოლება.

ამრიგად, განმუხტვის ამოცანა დაიყვანება არანრფივ არასტაციუნარულ აგზნების ამოცანამდე, რომელშიც სანყის მნიშვნელობად აღებულია სხეულის ზედაპირზე და სიბრტყეზე გადანანილებული ელექტროსტატიკური მუხტი. მომდევნო პარაგრაფებში განხილულია ზემოთ დასმული ფიზიკური ამოცანების ამოსხნა ცალცალკე.

§10.3 ელექტროსტატიკის ამოცანა

ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანის ამოსახსნელად პირველ ეტაპზე საჭიროა შესაბამისი ელექტროსტატიკის ამოცანის ამოსხნა, რათა განვსაზღვროთ დამუხტულ სხეულზე ზედაპირული მუხტების განანილება. ამ პარაგრაფში მოცემულია ელექტროსტატიკური ამოცანის ფიზიკური დასმა და დასმული ამოცანის ამოსხნა დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდის გამოყენებით.

განვიხილოთ იდეალურად გამტარი სხეული, რომელიც დამნიებული სიბრტყიდან მოთავსებულია h სიმაღლეზე (სურ.10.1). ეს სხეული დამუხტულია V_0 პოტენციალამდე. სხეულის ზედაპირზე ძაბვა განისაზღვრება სისტემის ტევადობით, რომელიც იცვლება სხეულის გეომეტრიისა და სხეულსა და სიბრტყეს შორის მანძილის ცვლილებით. ეს ტევადობა განისაზღვრება სხეულის ზედაპირზე მუხტების განანილებით ანუ ელექტროსტატიკური ამოცანა დაიყვანება სხეულის ზედაპირზე მუხტების განანილების პოვნაზე. ზემოთ დასმული ფიზიკური ამოცანა $\varphi(x, y, z)$ პოტენციალისათვის დაიყვანება ლაპლასის განტოლების ამოსხნაზე შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით. თუ გვაქვს ბრუნვითი სხეული, მაშინ პოტენციალი და ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი ცილინდრულ კოორდინატებში დამოკიდებულია მხოლოდ ρ და z კოორდინატებზე. ელექტრული ველის მდგენელებსა და სკალარულ პოტენციალს შორის ამ სისტემაში არსებობს შემდეგი კავშირი:

$$E_\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (10.3.1)$$

ხოლო $\varphi(\rho, z)$ პოტენციალისათვის ჩაინერება ლაპლასის განტოლება შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (10.3.2)$$

$$\varphi(\rho, z) = V_0, \quad M(\rho, z) \in S, \quad (10.3.3)$$

$$\varphi(\rho, z) = 0, \quad M(\rho, z) \in S', \quad (10.3.4)$$

სადაც S და S' სხეულისა და სიბრტყის ზედაპირებია შესაბამისად. დასმული ამოცანის ამოხსნა ხდება დამხმარე გამომსხვიებლების მეთოდით, რომლის თანახმად და ბრუნვითი სიმეტრიის გათვალისწინებით სივრცის ნებისმიერ ნერტილში პოტენციალი მოიძებნება შემდეგი სახით:

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1^s}^{z_2^s} \lambda(z') G(\rho, z, z') dz', \quad (10.3.5)$$

სადაც

$$G(\rho, z, z') = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + z')^2}}. \quad (10.3.6)$$

Z_1^s და Z_2^s სხეულის ბრუნვის ღერძზე მდებარე ნერტილებია. მათი მდებარეობა განისაზღვრება სხეულის გეომეტრიით და დაკავშირებულია სხეულის შიგნით ველის სინგულარობაზე. (10.3.6) გამოსახულებაში პირველი და მეორე ნევრი შეესაბამება სხეულის ზედაპირზე და სიბრტყეზე განაწილებული წყაროს გრინის ფუნქციებს. თუ ჩავთვლით, რომ ველი წარმოიქმნება არა სხეულის ბრუნვის ღერძზე უწყვეტად განაწილებული დამხმარე წყაროებით, არამედ ბრუნვის ღერძზე მდებარე Z_i^s ნერტილებში განლაგებული წყაროებით, მაშინ გვექნება:

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i G(\rho, z, z_i^s). \quad (10.3.7)$$

(10.3.7) გამოსახულების სასაზღვრო ამოცანაში ჩასმით მიიღება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i G(\rho, z, z_i^s) = V_0. \quad (10.3.8)$$

q_i უცნობ კოეფიციენტებს გააჩნიათ დამხმარე წყაროების ფიზიკური აზრი და ისინი მოიძებნებიან კოლოკაციის მეთოდით, რომლის თანახმად სხეულის მსახველზე ვარჩევთ M რაოდენობის ნერტილებს და ამ ნერტილებში ვწერთ სასაზღვრო პირობებს. ამ პროცედურის შედეგად ვღებულობთ $M \times N$ განტოლებათა სისტემას უცნობი q_i კოეფიციენტების მიმართ:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i G_{i,j} = V_0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (10.3.9)$$

სადაც

$$G_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_j - z'_i)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_j + z'_i)^2}}. \quad (10.3.10)$$

(10.3.9) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ q_i კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, ხოლო ამ კოეფიციენტების ცოდნა გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ სკალარული პოტენციალი და ელექტრული ველის დაძაბულობა სივრცის ნებისმიერ წერტილში:

$$\phi(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i G_i(\rho, z), \quad (10.3.11)$$

$$E(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i G_i^{\rho,z}(\rho, z, z_i), \quad (10.3.12)$$

სადაც

$$G_i = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_i - z'_i)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_i + z'_i)^2}}, \quad (10.3.13)$$

$$G_i^{\rho,z}(\rho, z, z_i) = \frac{\rho}{(\rho^2 + (z_i - z'_i)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho}{(\rho^2 + (z_i + z'_i)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (10.3.14)$$

როგორც აღვნიშნეთ, მუხტის განაწილების ცოდნა გვაძლევს სისტემის ტევადობის პოვნის საშუალებას. სისტემის ტევადობის გამოსათვლელად გამოიყენება შემდეგი ფორმულა:

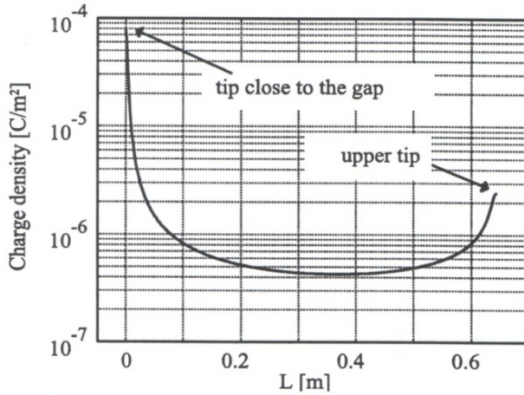
$$C = \frac{q}{2V_0}, \quad (10.3.15)$$

სადაც C - სფეროიდისა და დამინებული სიბრტყისაგან შემდგარი სისტემის ტევადობაა, q - სფეროიდის სრული მუხტია, ხოლო V_0 - სფეროიდზე მუხტის გადაცემის შემდეგ სფეროიდსა და დამინებულ სიბრტყეს შორის დამყარებული პოტენციალია.

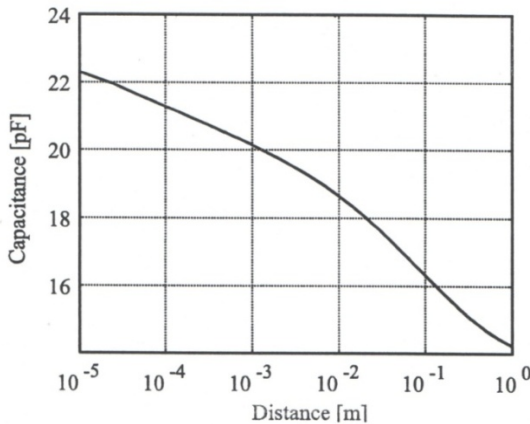
ზემოთ აღწერილი ალგორითმის გამოყენებით რიცხვითი გამოთვლები ჩატარებულ იქნა $a = 31$ სმ და $b = 5$ სმ ნახევარღერძების მქონე სფეროიდისათვის, რომელიც მოთავსებულია დამინებული იდეალურად გამტარი სიბრტყიდან h მანძილზე (სურ.10.1).

სურ.10.2-ზე მოცემულია $V_0 = 5$ კილოვოლტ პოტენციალამდე დამუხტული დამინებული ზედაპირიდან $h = 0.06$ სმ მანძილზე

მოთავსებული სფეროიდის ზედაპირის გასწვრივ მუხტის სიმკვრივის განაწილება.



სურ.10.2. $a = 31$ სმ და $b = 5$ სმ ნახევარღერძების მქონე სფეროიდის ზედაპირის გასწვრივ მუხტის სიმკვრივის განაწილება. $V_0 = 5$ კვ, $h = 0.06$ სმ.



სურ.10.3. $a = 31$ სმ და $b = 5$ სმ ნახევარღერძების მქონე სფეროიდისა და დამინებული სიბრტყის სისტემის ტევადობის დამოკიდებულება მათ შორის მანძილზე.

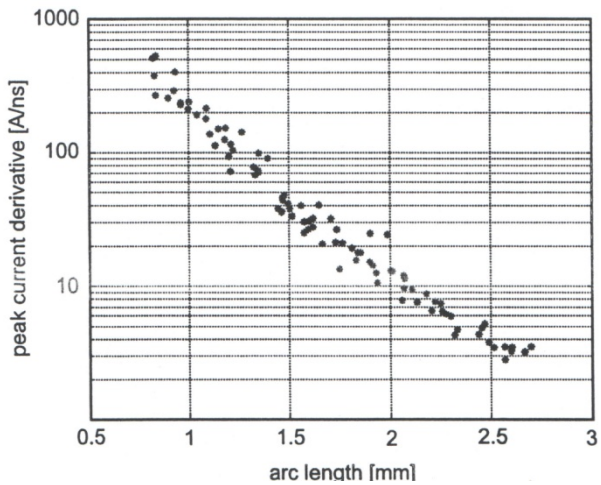
სურ.10.3-ზე მოყვანილია იგივე გეომეტრიისათვის სისტემის ტევადობის დამოკიდებულება სიბრტყესა და სფეროიდს შორის მანძილზე. როგორც ამ სურათიდან ჩანს სიბრტყიდან სფეროიდის დაშორებისას სისტემის ტევადობა მცირდება.

მიღებული შედეგები მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც ელექტროსტატიკის ამოცანის ამოხსნის შედეგად მიღებული მონაც-

ემების გამოყენება ხდება არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის საწყის მონაცემებად.

§10.4 ბრუნვითი სხეულების არასტაციონარული განმუხტვა

ამ პარაგრაფში შესწავლილია ბრუნვითი სხეულების არასტაციონარული განმუხტვის ელექტროდინამიკური პროცესი. ამ პროცესის შესასწავლად რიცხვითი გამოთვლები ჩატარებულია იდეალურად გამტარი სფეროიდისა და კონუსისათვის, რომელიც მოთავსებულია დამინებული იდეალურად გამტარი სიბრტყიდან h სიმაღლეზე (სურ.10.1) და დამუხტულია V_0 პოტენციალამდე. ექსპერიმენტული მონაცემები მიღებულია ბერლინის ტექნიკურ უნივერსიტეტში შექმნილ დანადგარზე. ექსპერიმენტი ჩატარდა $a = 31$ სმ და $b = 5$ სმ ნახევარდერძების მქონე სფეროიდის განმუხტვისათვის. განმუხტვის რიცხვითი მოდელირება ჩატარებულ იქნა იგივე ზომის მქონე იდეალურად გამტარი სფეროიდისათვის.



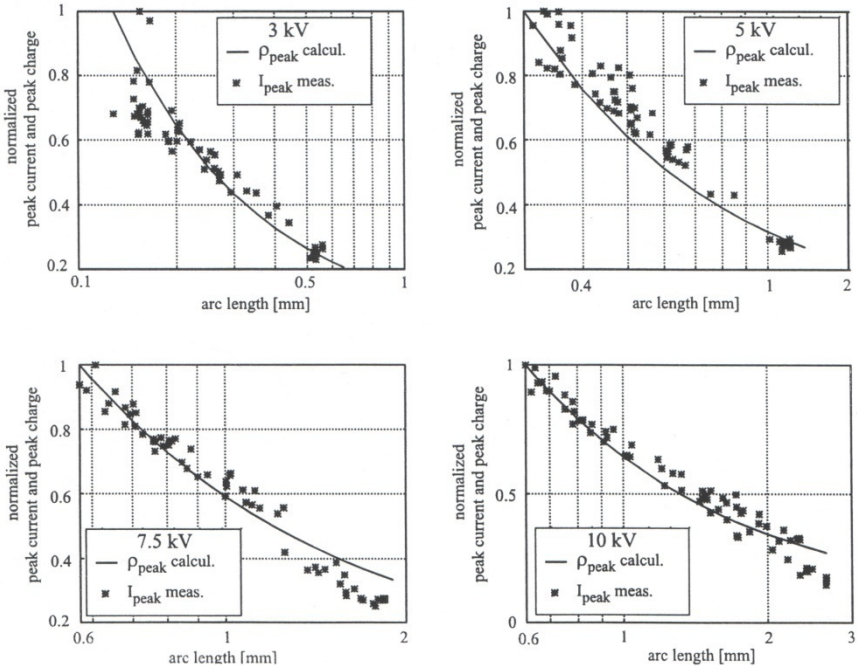
სურ.10.4. განმუხტვის არხში გამავალი დენის წარმოებულის მაქსიმალური მნიშვნელობის დამოკიდებულება არხის სიგრძეზე: $a = 31$ სმ, $b = 5$ სმ, $V_0 = 10$ კვ.

სურ.10.4-ზე მოყვანილია ექსპერიმენტულად გაზომილი განმუხტვის არხში გამავალი დენის წარმოებულის მაქსიმალური მნიშ-

ენელობის დამოკიდებულება არხის სიგრძეზე. განმუხტვა ხდება $V_0 = 10$ კილოვოლტზე.

ამ სურათზე ნათლად ჩანს თუ როგორი განსხვავებაა ერთი და იგივე ძაბვის დროს არხში გამავალი დენის წარმოებულის მაქსიმუმებს შორის სხვადასხვა არხის სიგრძეებისათვის.

არხში გამავალი დენის მაქსიმალური მნიშვნელობა დამოკიდებულია სფეროიდის ქვედა ბოლოში ელექტროსტატიკური მუხტის რაოდენობაზე. სურ.10.5-ზე წარმოდგენილია ექსპერიმენტულად გაზომილი არხის დენის ნორმირებული მაქსიმალური მნიშვნელობა და სფეროიდის ბოლოში რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული მუხტის სიმკვრივის ნორმირებული მნიშვნელობა.

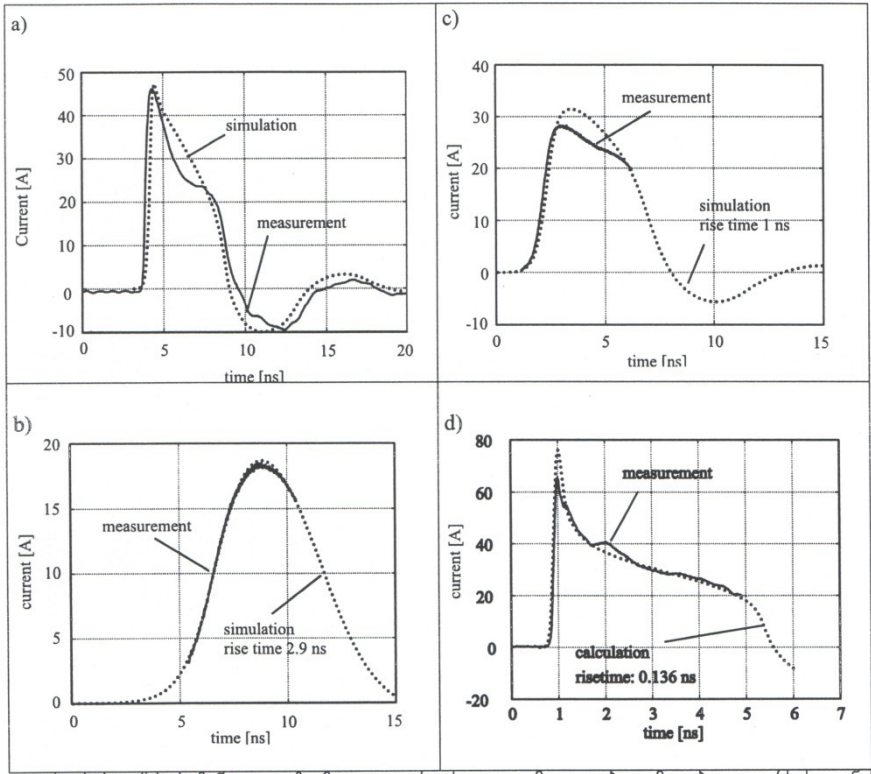


სურ.10.5. ექსპერიმენტულად გაზომილი არხის დენის ნორმირებული მაქსიმალური მნიშვნელობა და სფეროიდის ბოლოში რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული მუხტის სიმკვრივის ნორმირებული მნიშვნელობა.

წარმოდგენილი სურათები გვიჩვენებენ, რომ არხის დენის მაქსიმალური მნიშვნელობები სტატიკური მუხტის მნიშვნელობების პროპორციულია, რაც ადასტურებს რიცხვითი გამოთვლებისას გამ-

ოყენებული ალგორითმის სისინორეს. პროპორციულობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია დამუხტვის V_0 პოტენციალზე.

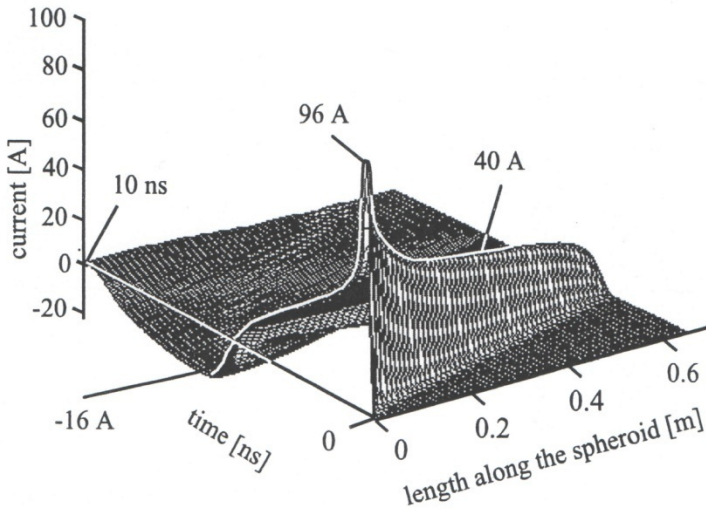
სურ.10.6-ზე გამოსახულია ექსპერიმენტით გაზომილი არხის დენისა და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული არხის დენის მნიშვნელობების შედარება სხვადასხვა არხის სიგრძეებისათვის. ამ სურათებიდან ნათლად ჩანს რომ ეს დენები ერთმანეთთან თვისობრივად და რაოდენობრივად კარგ თანხვედრაშია. რაც კიდევ ერთხელ გვარწმუნებს გამოყენებული ალგორითმის სისინორეში.



სურ.10.6. ექსპერიმენტით გაზომილი და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული არხის დენის მნიშვნელობები $V_0 = 5$ კვ. a) $h = 0.55$ მმ; b) $h = 1.116$ მმ; c) $h = 0.843$ მმ; d) $h = 0.55$ მმ;

სხვადასხვა შემთხვევებისათვის რომესა და ვეიცხელის კოეფიციენტის მნიშვნელობა განსხვავებულია:

- a) $a_r = 1.80 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{წმ}]$; b) $a_r = 0.70 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{წმ}]$;
 c) $a_r = 1.80 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{წმ}]$; d) $a_r = 0.70 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{წმ}]$;

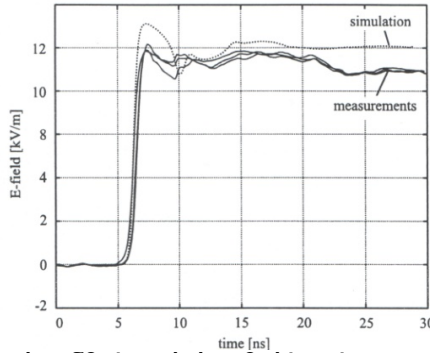


სურ.10.7. სფეროიდის ზედაპირული დენის სივრცულ-დროითი განაწილება $V_0 = 5$ კვ; $h = 0.314$ მმ; $a_r = 3.6 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{წმ}]$;

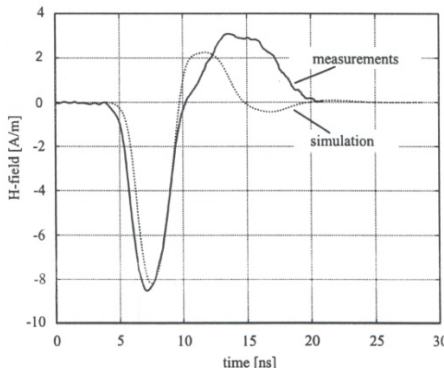
ელექტროსტატიკური განმუხტვის პროცესის მიმდინარეობის ანალიზისათვის ასევე მოყვანილია სფეროიდის ზედაპირზე დენების სივრცულ-დროითი განაწილება (სურ.10.7). ამ სურათიდან ჩანს, რომ მას შემდეგ რაც სფეროიდის ბოლოში მოთავსებული ელექტროსტატიკური მუხტის დიდი ნაწილი გაივლის არხში, განმუხტვის დენისათვის შეიმჩნევა პლატო. ამ პლატოს არსებობა გამომწვეულია დენის ტალღით, რომელიც გაირბენს სფეროიდის მსახველის გასწვრივ. განმუხტვის პროცესიდან 2.2 ნანონამში დენის ტალღა აღწევს სფეროიდის ზედა ბოლოს და აირეკლება მისგან. ამ მომენტში ხდება ტალღის მიმართულების შეცვლა და შესაბამისად გამოსხივდება ძლიერი ელექტრომაგნიტური ველი. ტალღა მოძრაობს არხის მიმართულებით და მიაღწევს რა სფეროიდის ქვედა ბოლოს მუხტის ნაწილი გაივლის განმუხტვის არხში, ხოლო დანარჩენი აირეკლება და დენის ტალღა ისევ დაიწყებს მოძრაობა სფეროიდის ზედა ბოლოს მიმართულებით.

მას შემდეგ, რაც ვიცით სფეროიდის ზედაპირზე დენებისა და მუხტების განაწილება შეგვიძლია გამოვთვალოთ არასტაციონარული განმუხტვისას გამოსხივებული ველები.

სურ.10.8-ზე გამოსახულია ელექტრული ველის დაძაბულობის მნიშვნელობები. როგორც სურათიდან ჩანს, ექსპერიმენტით გაზომილია ელექტრული ველის მნიშვნელობა ერთი და იგივე შემთხვევისათვის სამჯერ და მათთან არის შედარებული რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული ელექტრული ველის დაძაბულობა.



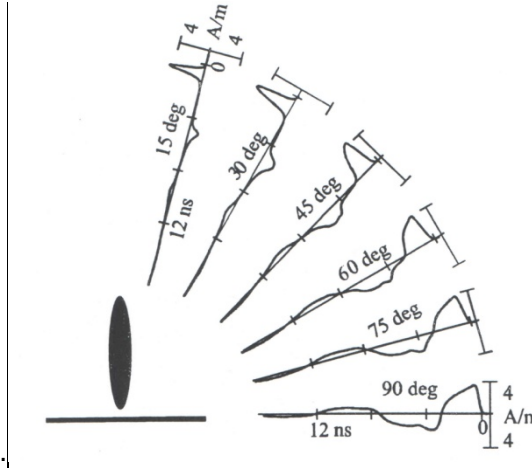
სურ.10.8. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობა განმუხტვის არხიდან 0.3 მ მანძილზე სიბრტყის გასწვრივ (სურ.1). $V_0 = 10$ კვ; $h = 1.5$ მმ; $a_R = 2.1 \cdot 10^{-4}$ [მ²/ვ²წმ];



სურ.10.9. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული მაგნიტური ველის დაძაბულობა განმუხტვის არხიდან 0.6 მ მანძილზე სიბრტყის გასწვრივ (სურ.1). $V_0 = 10$ კვ. $h = 2$ მმ; $a_R = 1.27 \cdot 10^{-4}$ [მ²/ვ²წმ];

სურ.10.9-ზე გამოსახულია მაგნიტური ველის დაძაბულობის მნიშვნელობების შედარება ექსპერიმენტული და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული შედეგებისათვის.

შემდეგ სურათზე ნაჩვენებია არასტაციონარული განმუხტვისას გამოსხივებული ველის მაგნიტური დაძაბულობის დამოკიდებულება გამოსხივების მიმართულებაზე.



სურ.10.10. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული მაგნიტური ველის დაძაბულობის დამოკიდებულება გამოსხივებული ველის მიმართულებაზე განმუხტვის არხიდან 1მ მანძილზე. $V_0 = 5$ კვ. $h = 0.6$ მმ;

$$a_r = 2.51 \cdot 10^{-4} \text{ მ}^2/\text{ვ}^2\text{ნმ};$$

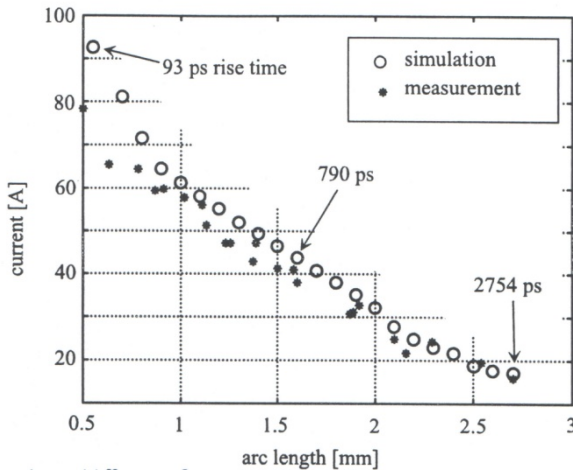
გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის ასეთი სახით გამოსახვა გვაძლევს საშუალებას დავაგდინოთ ამ კონკრეტული ამოცანის შემთხვევაში მაქსიმალური და მინიმალური გამოსხივების მიმართულება.

ზემოთ მითითებულ ექსპერიმენტულ დანადგარზე ბერლინის ტექნიკურ უნივერსიტეტში ასევე ჩატარებულ იქნა ექსპერიმენტი ადამიანის ხელში მოთავსებული d დიამეტრისა და l სიგრძის V_0 პოტენციალამდე დამუხტული მეტალური სხეულის ელექტროსტატიკური განმუხტვისათვის. ამ ექსპერიმენტის შესაბამისი ამოცანის მოდელირება მოხდა 20×2 სმ ნახევარსფეროების მქონე სფეროიდის გამოყენებით. ზემოთ აღწერილი ალგორითმის გამოყენებით მიღებულია შედეგები, რომლებიც მოყვანილია შემდეგ სურათებზე.

სურ.10.11-ზე გამოსახულია რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული არხში გამავალი ელექტრული დენის პიკური მნიშვნელობების შედარება ადამიანის ხელში მოთავსებული $d = 8$ მმ დიამეტრისა და $l = 75$ მმ სიგრძის $V_0 = 10$ კილოვოლტამდე დამუხტული მეტალური სხეულის განმუხტვისას არხში გამავალი დენის პიკურ მნიშვნელობასთან სხვადასხვა არხის სიგრძისათვის. ექსპერიმენტული დენის გასაზომად გამოყენებულია **Jon Barth Electronics**-ის ფირმის ხელსაწყო.

არხის სიგრძე იცვლება 0.55 მმ-დან 2.7 მმ-მდე, ხოლო რომბესა და ვეიცზელის კოეფიციენტები $a_r = 4 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{ნმ}]$ -დან $a_r = 1 \cdot 10^{-4} [\text{მ}^2/\text{ვ}^2\text{ნმ}]$ -მდე.

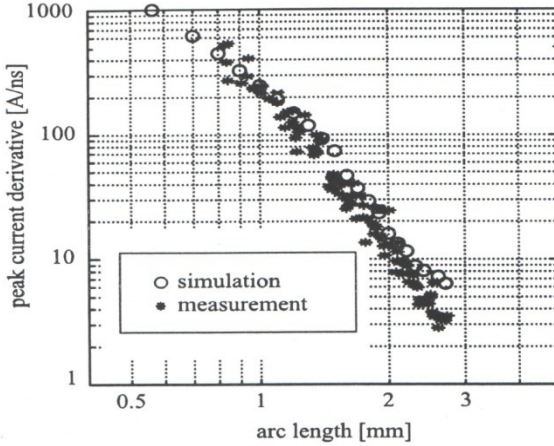
სურ.10.12-ზე გამოსახულია რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული არხის პიკური დენის დროითი წარმოებულის მნიშვნელობების შედარება ადამიანის ხელში მოთავსებული $d = 6$ მმ დიამეტრისა და $l = 80$ მმ სიგრძის $V_0 = 10$ კილოვოლტამდე დამუხტული მეტალური სხეულის განმუხტვისას არხში გამავალი დენის დროითი წარმოებულის პიკურ მნიშვნელობასთან სხვადასხვა არხის სიგრძისათვის.



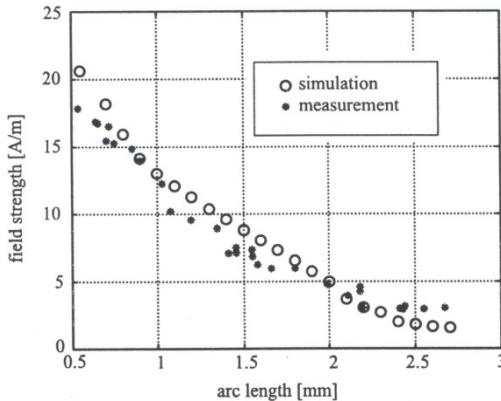
სურ.10.11. განმუხტვის არხში გამავალი დენის პიკური მნიშვნელობა არხის სხვადასხვა სიგრძეებისათვის. $V_0 = 10$ კვ; $d = 8$ მმ; $l = 75$ მმ.

სურ.10.13-ზე გამოსახულია ელექტროსტატიკური განმუხტვისას სიბრტყის გასწვრივ განმუხტვის არხიდან 0.5 მ მანძილზე რი-

ცხვითი გამოთვლებით მიღებული მაგნიტური ველის დაძაბულობის პიკური მნიშვნელობებისა და ექსპერიმენტით გაზომილ $d = 6$ მმ დიამეტრისა და $l = 80$ მმ სიგრძის $V_0 = 10$ კილოვოლტამდე დამუხტული მეტალური სხეულის განმუხტვისას გამოსხივებული მაგნიტური ველის დაძაბულობის მნიშვნელობების შედარება იგივე მანძი სხვადასხვა არხის სიგრძისათვის.



სურ.10.12. განმუხტვის არხში გამავალი დენის წარმოებულის პიკური მნიშვნელობა არხის სხვადასხვა სიგრძეებისათვის. $V_0 = 10$ კვ; $d = 6$ მმ; $l = 80$ მმ.

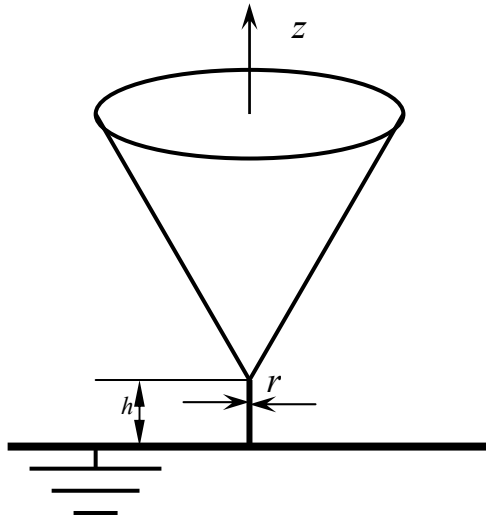


სურ.10.13. მაგნიტური ველის დაძაბულობის პიკური მნიშვნელობები დამინებული სიბრტყის გასწვრივ 0.5 მ მანძილზე არხის სხვადასხვა სიგრძეებისათვის. $V_0 = 10$ კვ; $d = 6$ მმ; $l = 80$ მმ.

ექსპერიმენტში დენის გასაზომად გამოყენებულია **Hewlett Packard**-ის ფორმის მიერ დამზადებული **HP54720D** ოსცილოსკოპი. როგორც ვხედავთ ექსპერიმენტული და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული შედეგები ერთმანეთთან კარგ თვისობრივ და რიცხვით თანხვედრაშია.

ზემოთ მოყვანილი შედეგების ანალიზი გვაძლევს შემდეგი დასკვნის გაკეთების საშუალებას:

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ადამიანის ხელის ან ადამიანის ხელში მოთავსებული სხეულის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველი სრულებით არ არის აუცილებელი ისეთი რთული გეომეტრიის მქონე სხეულის მოდელირება, როგორსაც წარმოადგენს ადამიანის ხელი. საკმარისია ამ ამოცანის უფრო მარტივი ფორმის განმუხტვის სხეულით მოდელირება, მთავარია ამ სხეულის განმუხტვისას საწყისი მონაცემები, როგორიცაა მოდელირებული სხეულის ტევადობა, დამუხტვის პოტენციალი და განმუხტვის არხის პარამეტრები (განმუხტვის არხის სიგრძე, განმუხტვის არხში ჰაერის მდგომარეობა და სხვ.) ემთხვეოდეს რეალურ პარამეტრებს.

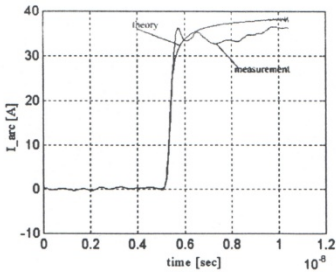


სურ.10.14. ამოცანის გეომეტრია

აქედან გამომდინარე შესაძლებელია ნებისმიერი რთული ფორმის სხეულის ელექტროსტატიკური განმუხტვის მოდელირება

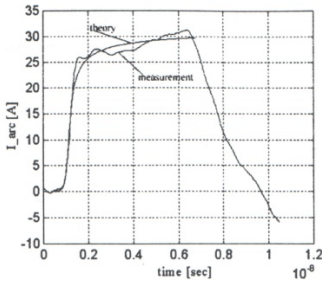
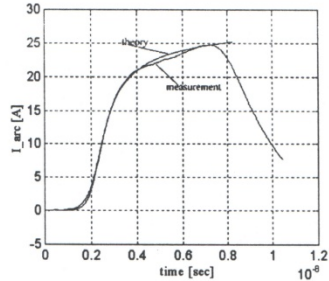
უფრო მარტივი, მოცულობითი ბრუნვითი სხეულის საშუალებით და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული შედეგები თვისობრივად და საკმაოდ კარგი სიზუსტით რაოდენობრივადაც დაემთხვევა რეალურ მონაცემებს.

ზემოთ აღნიშნულის გათვალისწინებით ჩატარებულ იქნა მოცულობითი ბრუნვითი სხეულის, კონუსის ელექტროსტატიკური განმუხტვის კომპიუტერული მოდელირება და განმუხტვის თეორიული და ექსპერიმენტული შედეგების ანალიზი. რიცხვით ალგორითმად გამოყენებულია მომენტების მეთოდი დროით არეში. განმუხტვის არხის წინააღობის არანრფივი მოდელი დაემატა მომენტების მეთოდის სქემას. ამოცანის გეომეტრია მოცემულია სურ.10.14-ზე. რიცხვითი გამოთვლები შედარებულია ექსპერიმენტით გაზომილ მონაცემებთან.



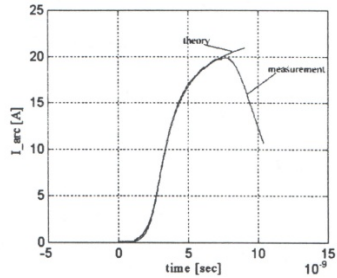
სურ.10.15.ა კონუსის დენები. $V_0 = 3$ კვ; $h = 0.199$ მმ.

სურ.10.15.ბ კონუსის დენები. $V_0 = 3$ კვ; $h = 0.572$ მმ.



სურ.10.15.გ კონუსის დენები. $V_0 = 5$ კვ; $h = 0.496$ მმ.

სურ.10.15.დ კონუსის დენები. $V_0 = 5$ კვ; $h = 1.062$ მმ.



სურ.10.15-ზე მოყვანილია განმუხტვის არხში დენის რიცხვითი გამოთვლებითა და ექსპერიმენტით მიღებული შედეგების

შედარება. ექსპერიმენტი და რიცხვითი გამოთვლები ჩატარდა 770 მმ სიგრძისა და 150 მმ ფუძის დიამეტრის მქონე კონუსისათვის. სურათებიდან ჩანს საკმაოდ კარგი თანხვედრა ექსპერიმენტსა და რიცხვითი გამოთვლებით მიღებულ შედეგებს შორის.

ზემოთ მოყვანილი ექსპერიმენტული მონაცემების სიზუსტე არის არა უმეტეს 20%, ზოგ შემთხვევაში კი 10–15%. რიცხვითი გამოთვლებით მიღებული შედეგები ექსპერიმენტულთან შედარებით მოთავსებულია ექსპერიმენტის ცდომილების ფარგლებში.

ექსპერიმენტით მიღებული მონაცემებისა და რიცხვითი გამოთვლების შედარება ცხადყოფს, რომ შემუშავებული ალგორითმი და შესაბამისი პროგრამული პაკეტი შეიძლება გამოყენებულ იქნას მოცულობითი ბრუნვითი სხეულების გამოყენებით ელექტროსტატიკური განმუხტვის ამოცანების მოდელირებისათვის.

როგორც ვხედავთ მე-10-ე თავში ჩატარებული გამოკვლევების ძირითადი შედეგები მოიცავს ელექტროსტატიკურ ამოცანას, არასტაციონარული განმუხტვის ექსპერიმენტული დანადგარის შესაბამისი ფიზიკური და მათემატიკური მოდელის შექმნას, ამ მოდელების საფუძველზე მოცულობითი ბრუნვითი სხეულების (სფეროიდი, კონუსი) არასტაციონარული განმუხტვის კომპიუტერულ მოდელირებას.

შექმნილი პროგრამული პაკეტი იძლევა ისეთი გამოთვლების ჩატარების საშუალებას, რომელთაც გააჩნიათ არა მარტო თეორიული, არამედ პრაქტიკული (ადამიანის ხელში მოთავსებული მეტალური სხეულის განმუხტვის მოდელირება) მნიშვნელობაც.

ჩატარებული ექსპერიმენტებისა და რიცხვითი გამოთვლების თვისობრივი და რიცხვითი თანხვედრა გვიჩვენებს, რომ პროგრამულ პაკეტში შემუშავებულია ისეთი ალგორითმი, რომელიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას ექსპერიმენტზე დაყრდნობის გარეშე.

მე-10-ე თავში მოყვანილი ამოცანების ამოსახსნელად შექმნილი პროგრამული პაკეტი წეარმოადგენს *Matlab*-ში შექმნილ პროგრამულ ალგორითმს, ის საკმაოდ მოცულობითია (ასეულობით პროგრამული სტრიქონი) და ამიტომ არ მივიჩნევთ საჭიროდ ნაშრომში მისი სრულად წარმოდგენა.

**თავი 11. არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური
ველეებისაგან ელექტრონული აპარატურის იდეალურად
გამტარი ეკრანებით ეკრანირება**

ცნობილია, რომ არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედებას შეუძლია გამოიწვიოს თანამედროვე მგრძნობიარე კომპიუტერული სისტემებისა და ელექტრონული მოწყობილობების მუშაობის რეჟიმის დარღვევა და ხშირ შემთხვევაში მწყობრიდან გამოყვანაც კი. ეს ველები შეიძლება გამოსხივდნენ როგორც ბუნებრივი მოვლენების შედეგად, ასევე ხელოვნურად შექმნილი ელექტრომაგნიტური ველების წყაროებისაგან. საჭიროა ამ ზემოქმედების ხასიათის შესწავლა და მისი მართვის ელექტროდინამიკური მექანიზმების შემუშავება, როგორც მისგან მოწყობილობების დაცვის, ასევე, საჭიროების შემთხვევაში, ამ ზემოქმედების სასარგებლოდ გამოყენების მიზნით, სამხედრო ან რაიმე სხვა სპეციფიკური დანიშნულების საკომუნიკაციო და საინფორმაციო სისტემების ლოკალურად დეზორიენტირებისა და იზოლირებისათვის. ეს კი, როგორც ცნობილია, თანამედროვე გამოყენებითი მეცნიერების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს, რომელსაც ყველაზე უფრო ცნობილი მიზეზების გამო, განვითარებულ ქვეყნებში სულ უფრო მზარდი ყურადღება ეთმობა.

შეზღუდული მანქანური რესურსების გამო, დროით არეში სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებისას გარდამავალი პროცესების სრული ანალიზისთვის აუცილებელი გახდა ისეთი იდეალურად შეთანხმებული ფენების გამოყენება, რომლებიც მთლიანად ან რაც შეიძლება მცირე არეკვლით გაატარებენ ამ ფენებზე დაცემულ ელექტრომაგნიტურ ტალღას.

სასრული სხვაობების მეთოდის სწრაფი და ეფექტური მუშაობისათვის დაკვირვების არე იდეალურად შეთანხმებულ ფენებთან ერთად მოდელირდება, როგორც ერთიანი ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობის მქონე გარემო და ნაჩვენებია იდეალურად შეთანხმებული ფენების გამოყენებისას არეკვლის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ფენების რაოდენობაზე.

კონკრეტული გამოსხივებისა და ეკრანების შემთხვევაში საჭიროა ამოიხსნას კონკრეტული ელექტროდინამიკური ამოცანა, რომელიც მოითხოვს შესაბამისი ალგორითმის შექმნას, მაგრამ შესაძლებელია განხილულ იქნას ისეთი ამოცანები, რომლებიც მოგვცემს ამ პროცესებისათვის დამახასიათებელი საერთო დასკვნების გაკეთების საშუალებას.

ამ მიზნის მისაღწევად მეთერთმეტე თავში შესწავლილია გაუსის ტიპის იმპულსის და დამინებული სიბრტყის მახლობლად განლაგებული ბრუნვითი სხეულების მიერ ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა აპერტურის (ჭრილის) მქონე იდეალურად გამტარ ეკრანებში.

მოყვანილია ამ სხეულების აპერტურებში ველების შეღწევის პროცესის კომპიუტერული მოდელირების შედეგად მიღებული არასტაციონარული პროცესების მიმდინარეობის სპეციფიკა, როგორც სიხშირულ, ასევე დროით არეში.

ნაჩვენებია ეკრანის შიგნით შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობის დამოკიდებულება გაუსის იმპულსის სიგრძესა და აპერტურის ზომაზე; თუ როგორ არის დამოკიდებული ეკრანირებული ველის სიდიდე აპერტურის ფორმაზე; აპერტურის ზოლების საშუალებით დაყოფისას ზოლების რაოდენობაზე.

განხილულია გრძივი აპერტურის მქონე იდეალურად გამტარი, წრიული განივკვეთის ეკრანებში დროით ჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ველის შეღწევა; ეკრანში ველის მნიშვნელობის დამოკიდებულება ტალღური რიცხვისა და ეკრანის რადიუსის ნამრავლზე აპერტურის სხვადასხვა ზომებისათვის; რეზონანსული სიხშირეებისათვის ახლო ველების განანილება.

სამგანზომილებიან შემთხვევაში: შესწავლილია რეალური სამგანზომილებიანი სხეულის განმუხტვისას გაამოსხივებული არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა აპერტურის მქონე მართკუთხა პარალელეპიპედის - კომპიუტერის ტიპის ყუთში, ველების განანილება ყუთის შიგნით დაკვირვების სხვადასხვა მომენტებში და ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განანილება ყუთის სხვადასხვა სიბრტყეში მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში, იმდენად, რამდენადაც საჭიროა ისეთი უბნების დადგენა მოცემული ტიპის ეკრანებისათვის, სადაც შესაძლებელია მეტად მგრძობიარე ელექტრონული მოწყობილობების მოთავსება.

ნაჩვენებია აგრეთვე, რომ ზოგად შემთხვევაში ერთი და იგივე აპერტურის შემთხვევაში ფირფიტებითა და მოწყობილობებით შევსებულ ყუთში შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა შესაძლებელია მეტი იყოს ვიდრე იგივე გეომეტრიის ცარიელ ყუთში. ამ შემთხვევებისათვის მოყვანილია ეკრანის შიგნით შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება აპერტურის ზომაზე და ორიენტაციაზე; მოყვანილია ეკრანის შიგნით შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება აპერტურის ზომაზე.

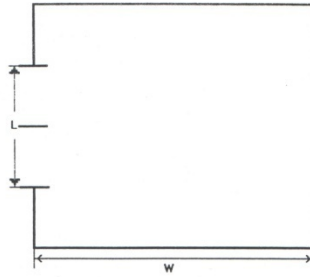
დადგენილია აღნიშნული ტიპის ეკრანებით არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების ეკრანირების ეფექტურობის დამოკიდებულება განმუხტვის არხის სიგრძეზე, ეკრანისა და აპერტურის ზომაზე, რაც მოგვცემს კონკრეტული შემოფოტების დროს უფრო ეფექტური ეკრანების გამოყენების შესაძლებლობას.

§11.1 მართკუთხა განივკვეთის მქონე ცილინდრული ეკრანებით ელექტრომაგნიტური ველებისაგან ელექტრონული აპარატურის ეკრანირება

ამ პარაგრაფში განხილულია ელექტრომაგნიტური ველების ეკრანირება გრძივი აპერტურის მქონე მართკუთხა განივკვეთის ორგანზომილებიანი ეკრანებით. კვლევის მეთოდად გამოყენებულია სასრული სხვაობების მეთოდი, რომელიც წარადაგენს ყველაზე ეფექტურ მეთოდს ასეთი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად. სასრული სხვაობების მეთოდის აღწერა მოყვანილია პირველი თავის მეორე პარაგრაფში.

გარეშე იმპულსური სიგნალების მავნე ზემოქმედებისაგან ელექტრონული აპარატურის დაცვის ერთ-ერთ გზას ამ მოწყობილობების სხვადასხვა ფორმის ეკრანებით ეკრანირება წარმოადგენს. ეკრანირებულ ელექტრონულ აპარატურას გააჩნია პერიფერიული კავშირები გარე ელექტრონულ სისტემებთან, რაც საჭიროებს გარკვეული ტექნოლოგიური ჭრილების (აპერტურების) არსებობას ეკრანებში. ამ აპერტურებიდან გარე ელექტრომაგნიტური ველები აღწევენ ეკრანირებულ ელექტრონულ მოწყობილობებამდე და ინვევენ მათი მუშაობის რეჟიმის შეფერხებას და ხშირ შემთხვევაში გათიშვასაც კი.

ცხადია როდესაც აპერტურის ზომები დიდია დაცემული იმპულსის სიგრძესთან შედარებით, ეკრანირებული არის შიგნით შეაღწევის მოსული ენერგიის დიდი ნაწილი. ამიტომაც, ეკრანირების ეფექტურობის გაზრდის მიზნით აპერტურის ფართობს იგივეს ტოვებენ და ახდენენ მის დაყოფას (ბადის სახით) უფრო მცირე ზომის ხვრელებად ან აპერტურას უმატებენ დამატებით ზოლებს, რის შედეგადაც ისინი გარდაიქმნებიან უფრო მცირე ზომის ტალღამტარებად (ზოლოვან აპერტურებად, იხ. სურ.11.1). ყოველი ტალღამტარი ინვევს მასზე დაცემული იმპულსის სპექტრის ჩამოჭრას, ამიტომ ზოლოვანი აპერტურის მქონე ეკრანის შიგნით უნდა მოხდეს დაცემული ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის საგრძნობი შემცირება.



სურ.11.1. ამოცანის გეომეტრია

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს მართკუთხა ფორმის იდეალურად გამტარი, ზოლოვანი აპერტურის მქონე ცილინდრული ზედაპირებით ფართოზოლოვანი ელექტრომაგნიტური იმპულსებისაგან ელექტრონული აპარატურის ეკრანილების ეფექტურობის შესწავლა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად შესწავლილია გაუსის ფორმის E -პოლარიზირებული ელექტრომაგნიტური იმპულსის გაბნევა სურ.1-ზე გამოსახული ტიპის ორგანზომილებიან სტრუქტურებზე. დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად არსებობს სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდი. ამ პარაგრაფში გამოიყენება სასრული სხვაობების მეთოდი დროით არეში, რომელზეც დამატებულია ე.წ. იდეალურად შეთანხმებული ფენები. ეს მეთოდი წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდს მოცემული ამოცანისათვის.

ამ ალგორითმის ტესტირება მოხდა მართკუთხა ფორმის გეომეტრიებისათვის და სხვადასხვა სიგრძის დაცემული იმპულსებისათვის. რიცხვითმა ექსპერიმენტმა გვიჩვენა, რომ როცა $\Delta x \rightarrow 0$, ფიზიკური სიდიდეები (ველები და დენები) კრებადია.

განვიხილოთ კონკრეტული შედეგები, რომლებიც მივიღეთ ზემოთ აღწერილი ალგორითმით. გამოთვლებში დაცემული ველი ჩანერილია შემდეგი სახით:

$$\vec{E}^{inc} = \vec{z} \exp(-\alpha^2(x/c - (t-t_0))^2), \quad (11.1.1)$$

სადაც \vec{z} არის z ღერძის პარალელური ერთეულოვანი ვექტორი, c - სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში, x - კოორდინატია, t_0 არის იმპულსის ხანგრძლივობის ნახევარი. რიცხვითი გამოთვლებისას მოხერხებულობისათვის ხდება გაუსის იმპულსის ჩამოჭრა მაქსიმუმიდან $5.2/(\alpha c)$ მანძილზე, ამიტომ α სიდიდისათვის ვლებულობთ $\alpha = 5.2/ct_0$.

შემოვიტანოთ ეკრანირების ეფექტურობის ცნება. აპერტურის მქონე ეკრანებზე ელექტრომაგნიტური იმპულსის გაბნევისას ეკრანის შიგნით შეღწეული სრული ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის მაქსიმალური მნიშვნელობის შეფარდებას დაცემული იმპულსის ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის სიდიდის მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან ვუნოდოთ ეკრანირების ეფექტურობა და აღვნიშნოთ σ -თი.

$$\sigma = \frac{\max|\vec{E}|}{\max|\vec{E}^{inc}|} \times 100\%, \quad (11.1.2)$$

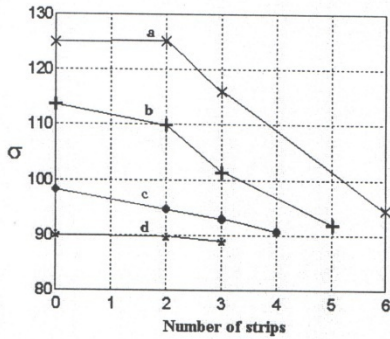
სადაც \vec{E} სრული ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორია ეკრანის შიგნით, ხოლო \vec{E}^{inc} არის დაცემული იმპულსის ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი.

სურ.11.2-ზე ნაჩვენებია იდეალურად გამტარ, აპერტურის მქონე, კვადრატული ფორმის ცილინდრულ სხეულზე სხვადასხვა სიგრძის იმპულსის დაცემისას ეკრანში შეღწეული სრული ელექტრული ველის დაძაბულობის მაქსიმალური მნიშვნელობის დამოკიდებულება ზოლების რიცხვზე.

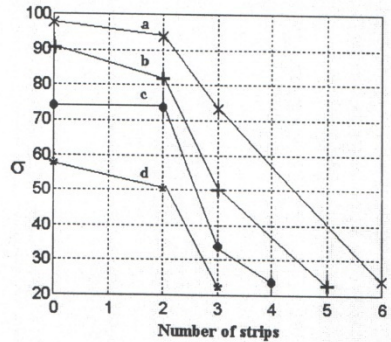
ა) როდესაც დაცემული იმპულსის სიგრძე $2ct_0 = 0.25\lambda$; ბ) $2ct_0 = 0.5\lambda$; გ) $2ct_0 = 1.0\lambda$; დ) $2ct_0 = 2.0\lambda$; a, b, c, d შეესაბამება სხვადასხვა ზომის აპერტურებს. კერძოდ ა) შეესაბამება შემთხვევას, როცა აპერტურის ზომა $L = 0.5\lambda$; ბ) როცა $L = 0.4\lambda$, გ) როცა $L = 0.3\lambda$; დ) როცა $L = 0.2\lambda$.

ამ სურათებიდან ჩანს, რომ იმპულსის სიგრძის შემცირებისას ეკრანში ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა იზრდება. ეს გასაგებობით, მაშინ დაცემული იმპულსი ვერ გრძნობს ხვრელის არსებობას და ელექტრომაგნიტური ველს დიდი ნაწილი შეაღწევს ეკრანის შიგნით. ასევე ჩანს, რომ ზოლების მქონე აპერტურაში (იხ. სურ. 11.2, როცა ზოლების რიცხვი $N = 2$ -ის ტოლია) შეღწეული ველის ენერჯიის მაქსიმალური მნიშვნელობა მცირეა ვიდრე ჩვეულებრივ აპერტურაში ($N = 0$) ეკრანში და მცირდება ზოლების რაოდენობის გაზრდისას (იხ. სურ.11.2 $N = 2,3,4,5,6$).

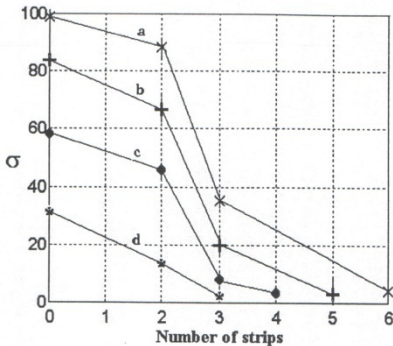
აპერტურის მქონე სტრუქტურებში ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევის დაწვრილებითი შესწავლისათვის მნიშვნელოვანია ახლო ველების განაწილების ცოდნა.



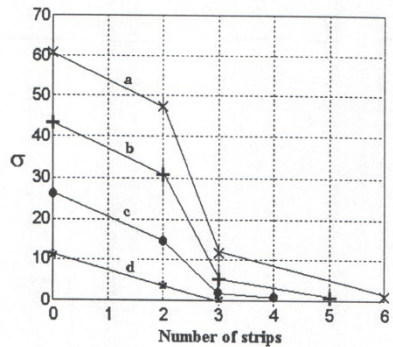
ა)



ბ)



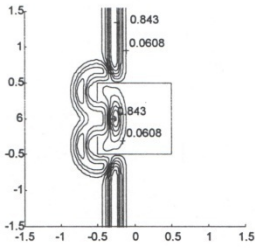
გ)



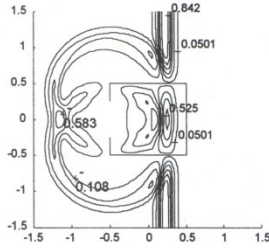
დ)

სურ.11.2. ეკრანიების ეფექტურობის დამოკიდებულება ზოლების რაოდენობაზე. კვადრატის გვერდის სიგრძე $w = 1.0\text{მ}$.

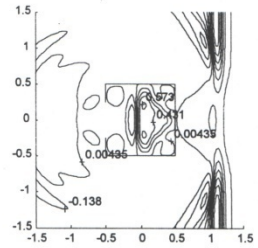
სურ.11.3-ზე ნაჩვენებია ახლო ველების განაწილება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც აპერტურის ზომა $L = 0.5\text{მ}$ და დაცემული იმპულსის სიგრძე $2ct_0 = 0.5\text{მ}$. სურათზე მოცემული ახლო ველების განაწილების პირველი სვეტი შეესაბამება $ct = 0.5\text{მ}$ მომენტს, მეორე სვეტი $ct = 1.0\text{მ}$ მომენტს, ხოლო მესამე სვეტი $ct = 1.75\text{მ}$ მომენტს. პირველი სტრიქონი შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც ზოლების რაოდენობა $N = 0$, მეორე სტრიქონი $N = 3$, ხოლო მესამე $N = 6$.



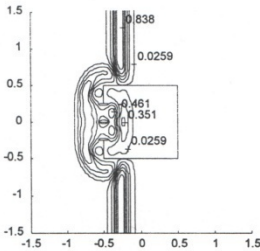
ა)



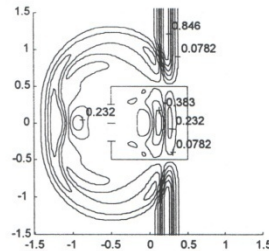
ბ)



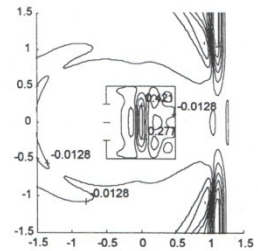
გ)



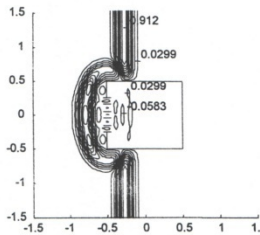
დ)



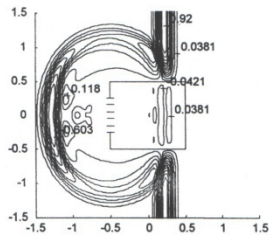
ე)



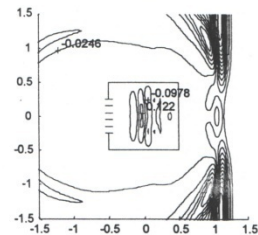
ვ)



ზ)



თ)

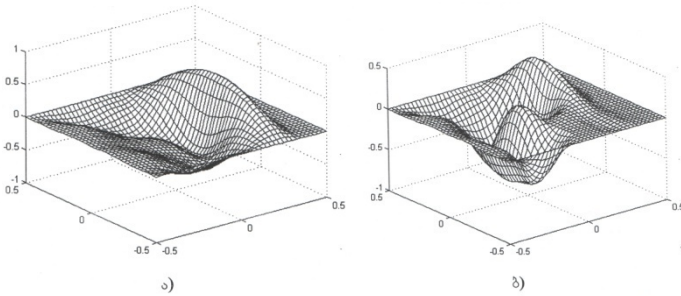


ი)

სურ.11.3. ელექტრული ველის დაძაბულობის განაწილება იდეალურად გამტარი, აპერტურის მქონე კვადრატული ფორმის ცილინდრული გარსის შიგნით. აპერტურის ზომაა 0.5მ, კვადრატის გვერდის სიგრძეა 1.0მ

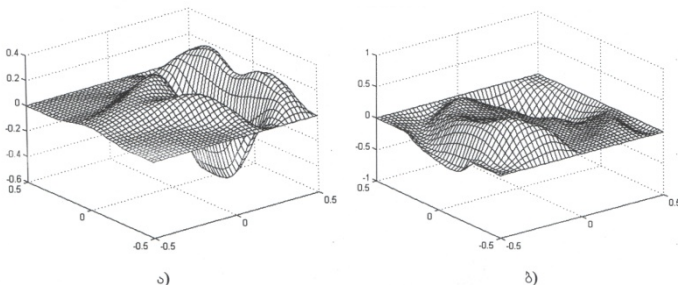
ასლო ველების განაწილებებიდან ჩანს, რომ $ct = 0.5\text{მ}$ (სურ. 11.3 ა,დ,ზ) მომენტისათვის დაცემული ველის ნაწილი შეაღწევს ეკრანში. როცა ზოლების რაოდენობა $N = 0$, (სურ.11.3ა) ეკრანის შიგნით მოძრავი და დაცემული ტალღა მოძრაობენ თითქმის ერთ ხაზზე, მაშინ, როდესაც ზოლების რაოდენობა $N = 3,6$ (სურ.11.3დ,ზ) ეკრანის შიგნით მოძრავი ტალღა ჩამორჩება დაცემულ ტალღას, ამასთან ეკრანის შიგნით შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა 0.843ვ/მ-დან (სურ.3ა) 0.0583ვ/მ-მდე (სურ.11.3ზ) იცვლება,

ე.ი. 93.09%-ით მცირდება. ეს შედეგი იმით აიხსნება, რომ ზოლოვან აპერტურას გააჩნია საკუთარი ტალღური ნინალობა, რომელიც ინვეს დაცემული იმპულსის სპექტრის ნაწილის ჩამოჭრას. შემდეგი სურათი გვიჩვენებს ელექტრონული ველის დაძაბულობის მნიშვნელობის განაწილებას ეკრანის შიგნით (სურ.3ბ,ე,თ) დროის $ct = 1.0$ მომენტისათვის. ეს ველი ვრცელდება ეკრანის შიგნით და აირეკვლება ეკრანის კედლებიდან (სურ.3გ,ვ,ი) დროის $ct = 1.75$ მომენტი.



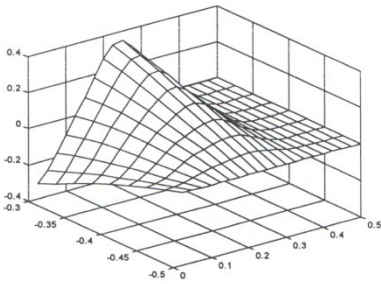
სურ.11.4. ელექტრული ველის დაძაბულობის განაწილება ეკრანში $ct = 1.0$ მომენტისათვის

სურ.11.4,5-ზე ნაჩვენებია ეკრანის შიგნით ელექტრული ველის განაწილება $ct = 1.0$ და $ct = 1.5$ მომენტებისათვის (აპერტურის ზომაა $L = 0.5$ მ და დაცემული იმპულსის სიგრძეა $2ct_0 = 0.5$ მ): ა) შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც გვაქვს სურ.11.5-ზე მოცემული სახის ეკრანი ზოლების გარეშე, ხოლო ბ) შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც ამ ეკრანზე დამატებულია იდეალურად გამტარი კედელი $x = 0, y = 0: -0.5$ მ.

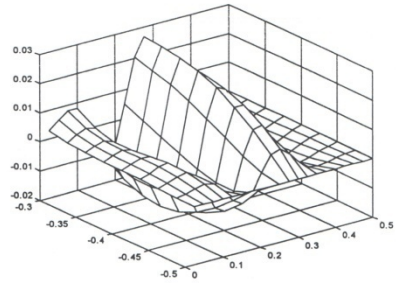


სურ.11.5. ელექტრული ველის დაძაბულობის განაწილება ეკრანში $ct = 1.5$ მომენტისათვის

ამ სურათებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეკრანში დამატებითი კედლის არსებობა იწვევს ეკრანის $x = 0: -0.5, y = -0.3: -0.5$ უბანში ეკრანიერებული ველის შემცირებას. ცხადია რომ ძალზე ეფექტურია დამატებითი იდეალურად გამტარი კედლების არსებობა ობიექტში ცალკეული უფრო ეკრანიერებული ზონების შესაქმნელად. ამ უბანში ეკრანიერების ეფექტურობის დამატებითი კედლის არსებობასთან დამოკიდებულებას უფრო თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად მოყვანილია სურ.11.6,7.

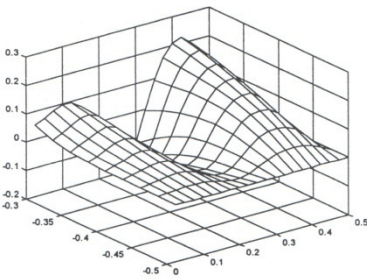


ა)

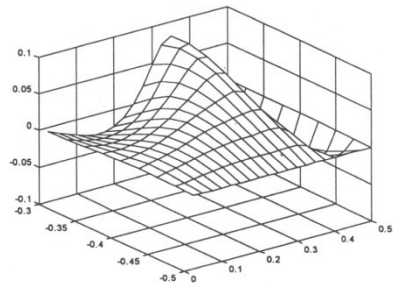


ბ)

სურ.11.6. ელექტრული ველის დაძაბულობის განაწილება ეკრანში $ct = 1.0$ მომენტისათვის



ა)



ბ)

სურ.11.7. ელექტრული ველის დაძაბულობის განაწილება ეკრანში $ct = 1.5$ მომენტისათვის

ამ სურათებზე შედარებულია ელექტრული ველის განაწილება $x = 0$: -0.5 , $y = -0.3$: -0.5 უბანში $ct = 1.0$ მ და $ct = 1.5$ მ მომენტისათვის: ა) ეკრანი დამატებითი კედლის გარეშე და ბ) ეკრანი დამატებითი კედლით.

როგორც სურათების ანალიზი გვიჩვენებს, ეკრანირების ეფექტურობა ეკრანში დამატებითი კედლის არსებობისას (სურ.11.6,7 ბ) ჩვეულებრივ ეკრანთან (სურ.11.6,7 ა) შედარებით საგრძნობლად იზრდება.

ამრიგად, ელექტრონულ აპარატურაზე ელექტრომაგნიტური ველების ზემოქმედების შესამცირებლად მიზანშეწონილია ამ აპარატურის ეკრანირება ზოლოვანი აპერტურის მქონე ეკრანებით. ასევე ეკრანირების ეფექტურობის გასაზრდელად შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას ეკრანის შიგნით დამატებითი კედლებიც. ეკრანირების ეფექტურობის დასადგენად აუცილებელია აპერტურაში ზოლების რაოდენობის, მათი სიგრძისა და ურთიერთგანლაგების დადგენა შესაძლო შემოფოტებების გათვალისწინებით. მიღებული შედეგები შეიძლება განვაზოგადოთ რეალური სამგანზომილებიანი სტრუქტურებისთვისაც.

§11.2 განმუხტვისას გამოსხივებული არასტაციონარული ველების შელწევა მართკუთხა ეკრანებში

მოცემულ პარაგრაფში წარმოდგენილია განმუხტვისას გამოსხივებული არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების შელწევა აპერტურის მქონე მართკუთხა განივკვეთის ცილინდრულ სხეულებში. იდეალურად გამტარ დამინებულ სიბრტყესთან მოთავსებული ბრუნვითი სხეულების არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანა ამოხსნილია პოირდაპირ დროით არეში მომენტების მეთოდის გამოყენებით. სპეციალურად შერჩეული გეომეტრიებისათვის (სფეროიდი, კონუსი, ცილინდრი) ადამიანის ხელის ელექტროსტატიკური განმუხტვის მოდელირებისას გამოთვლილია არხის დენები და გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველები და ისინი შედარებულია ექსპერიმენტულ მონაცემებთან. ნაჩვენებია ამ მეთოდის სიზუსტის საკმარისობა ელექტრომაგნიტური შემთავსებლობის საკითხების შესასწავლად.

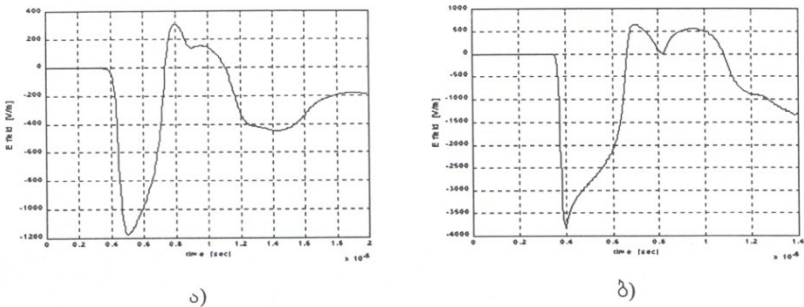
არასტაციონარული განმუხტვისას გამოსხივებული ველები-საგან მგძნობიარე აპარატურის ეკრანირების ეფექტურობა შესწავლილია ცილინდრული ფორმის იდეალურად გამტარი ეკრანებისათ-

ვის. ეკრანირების ეფექტურობის დროითი ანალიზისათვის გამოყენებულია სასრული სხვაობების მეთოდი დროით არეში.

სივრცეში განმუხტვისას გამოსხივებული ველების ანალიზი მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც ის იძლევა ინფორმაციას იმ არის შესახებ, სადაც მკანობიარე აპარატურა შეიძლება მწყობრიდან გამოვიდეს.

ქვემოთ მოყვანილ ყველა ამოცანაში განმუხტვის ობიექტად აღებულია $a = 31\text{სმ}$ და $b = 5\text{სმ}$ ნახევარღერძების მქონე იდეალურად გამტარი სფეროიდი. სფეროიდი დამუხტულია V_0 პოტენციალამდე. განმუხტვა იწყება დამინებული სიბრტყიდან h მანძილზე (თავი 10, სურ.10.1).

სურ.11.8-ზე ნაჩვენებია განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველები ორ შემთხვევაში ა) $V = 5\text{კვ}$, $h = 0.788$ და ბ) $V = 10\text{კვ}$, $h = 1.088$. დაკვირვების წერტილი აღებულია დამინებულ სიბრტყეზე. მანძილი დაკვირვების წერტილსა და არხს შორის 1მ -ია.

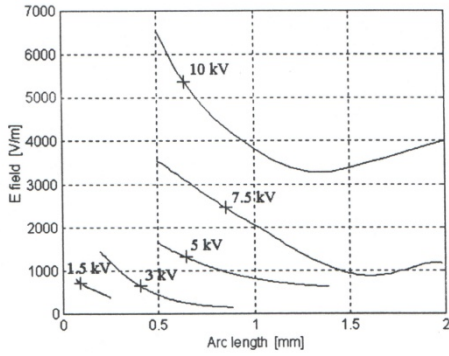


სურ.11.8. 0.318 და 0.058 ნახევარღერძების მქონე სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობა: ა) $V=5\text{კვ}$, $h=0.788$; ბ) $V=10\text{კვ}$, $h=1.088$.

სურ.11.9-ზე გამოსახულია სხვადასხვა პოტენციალამდე დამუხტული სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება არხის სიგრძეზე. დაკვირვების წერტილი აღებულია დამინებულ სიბრტყეზე განმუხტვის არხიდან 1მ . მანძილზე.

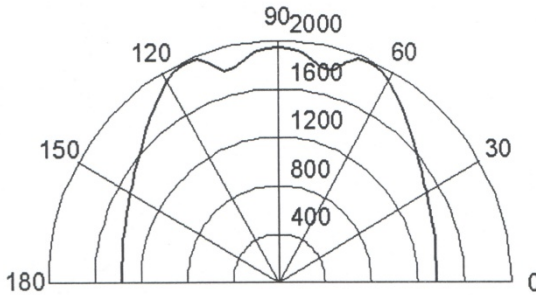
ყოველი ელექტრონული აპარატურისათვის ცნობილია ველის ის ზღვრული მნიშვნელობა, რომელიც უსაფრთხოა ამ მოწყობილობის ნორმალური ფუნქციონირებისათვის. ამდენად სურ.11.9 იმ-

ით არის მნიშვნელოვანი, რომ ის იძლევა ინფორმაციას იმ არეების შესახებ, თუ სად შეიძლება განთავსდეს მოცემული მოწყობილობა.



სურ.11.9. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების არხის სიგლძეზე დამოკიდებულება

ელექტროსტატიკური განმუხტვისას არხიდან სხვადასხვა მიმართულებით გამოსხივებულ ველებს შორის განსხვავების შესაფასებლად მოყვანილია სურ.11.10. ამ სურათზე ნაჩვენებია ($V=5$ კვ, $h=0.6$ მმ) სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ველები არხიდან 1მ მანძილზე სხვადასხვა მიმართულებით.



სურ.11.10. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობის დამოკიდებულება გამოსხივების მიმართულებაზე ($V=5$ კვ, $h=0.6$ მმ)

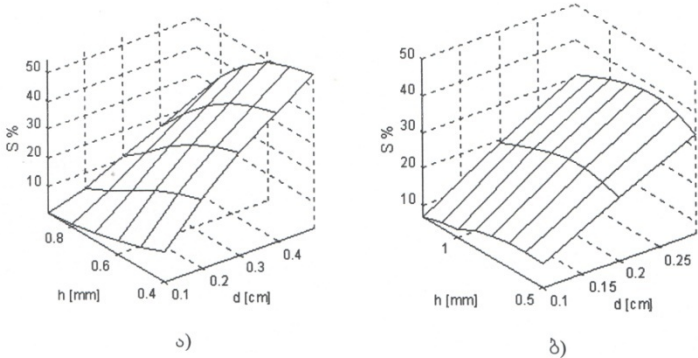
აპერტურის მქონე, იდეალურად გამტარ ცილინდრულ სხეულებში ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შეღწევის შესწავლის ძირითად მიზანს ელექტრომაგნიტური ველების ეკრანირების ეფექტურობის დადგენა წარმოადგენს. ნაშრო-

მში გამოყენებული მეთოდები საშუალებას იძლევა ეკრანში და ეკრანის გარშემო დროის ნებისმიერ მომენტში განისაზღვროს ელექტრომაგნიტური ველის მნიშვნელობა.

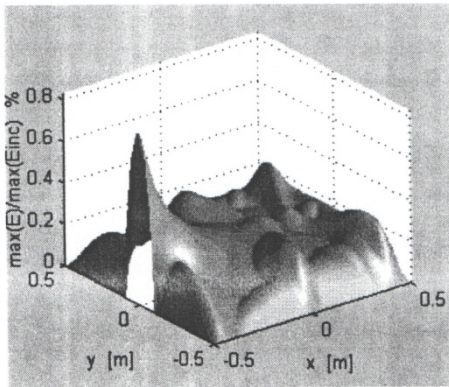
ელექტრომაგნიტური ველების ეკრანირების ეფექტურობის შეფასებისთვის ვითვლით შემდეგ სიდიდეს:

$$S = \frac{\int_{Area} \max|E^{total}|ds}{\int_{Area} \max|E^{inc}|ds} * 100\%, \quad (11.2.1)$$

სადაც „Area“ - აპერტურის ფართობია. ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა გამოთვლილია აპერტურის შიგნით ყოველ წერტილში მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში.



სურ.11.11. მართკუთხა ფორმის ცილინდრული ეკრანებით ეკრანირების ეფექტურობა, როგორც არხის h სიგრძისა და აპერტურის d ზომის ფუნქცია. განმუხტვა ხდება ა) $V=5$ კვ და ბ) $V=10$ კვ



სურ.11.12. მართკუთხა ფორმის აპერტურის მქონე ცილინდრის შიგნით მაქ-

სიმალური ელექტრული ველის დაძაბულობის ნორმირებული მნიშვნელობები. ელექტროსტატიკური განმუხტვა ხდება $V=5\text{კვ}$, $h=10\text{კვ}$, $d = 20\text{სმ}$.

სურ.11.11-ზე მართკუთხა ფორმის იდეალურად გამტარი ცილინდრული ფორმის სხეულებით ეკრანირების ეფექტურობა მოცემულია ორი შემთხვევისათვის: ა) $V=5\text{კვ}$ და ბ) $V=10\text{კვ}$.

აპერტურის მქონე სხეულის შიგნით ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება ნაჩვენებია სურ.11.12-ზე. ამ სურათიდან ჩანს, რომ აპერტურაში შეღწეული ელექტრული ველის მაქსიმუმი მოთავსებულია აპერტურის მახლობლად და მცირდება აპერტურიდან დაშორებისას. ამ სურათზე ნაჩვენებია ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების შეფასების საშუალებას იძლევა (11.2.1) ფორმულით გამოთვლილი N სიდიდე.

ეს სურათი საინტერესოა იმიტაც, რომ ამ კონკრეტული შემთხვევისათვის გვაძლევს საშუალებას დავადგინოთ ეკრანის შიგნით ის არეები, სადაც უნდა განვათავსოთ მგრძნობიარე ციფრული მონიშვნილობა, იმის გათვალისწინებით, თუ რა მაქსიმალური ზღვრული ელექტრომაგნიტური ზემოქმედების „გაძლება“ შეუძლია ამა თუ იმ მონიშვნილობას.

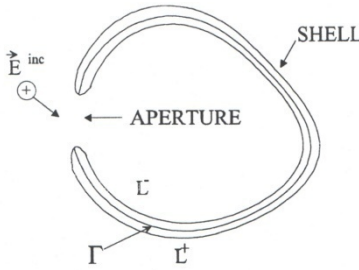
ზემოთ მოყვანილი ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებული ალგორითმი იძლევა საშუალებას ნებისმიერი მართკუთხა ფორმის ეკრანისათვის ამოიხსნას შესაბამისი ამოცანები, რათა შესაძლებელი გახდეს კონკრეტული გეომეტრიებისათვის შესაბამისი შედეგების მიღება გარანტირებული სიზუსტით და დადგენილ იქნას ეკრანის შიგნით ციფრული მონიშვნილობებისათვის საშიში ზონები მათი მდგრადობის გათვალისწინებით.

§11.3 ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა აპერტურის მქონე წრიული განივკვეთის ეკრანებში

ამ პარაგრაფში განხილულია გრძივი აპერტურის მქონე იდეალურად გამტარ ცილინდრულ ეკრანებში დროით ჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ველის შეღწევა; აპერტურის ცენტრში ველის მნიშვნელობის დამოკიდებულება ტალღურ რიცხვისა და ეკრანის რადიუსის ნამრავლზე აპერტურის სხვადასხვა ზომებისათვის; რეზონანსული ველებისათვის ახლო ველების განაწილება; ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ველების ეკრანირება ცილინდრული ეკრანებით და ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება ეკრანის შიგნით.

11.3.1 მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა აპერტურის მქონე წრიული განივკვეთის ეკრანებში. როგორც წესი, გარემოში სხვადასხვა პროცესებისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური იმპულსების სპექტრული შემადგენლობა ისეთია, რომ პრაქტიკულად საინტერესო აპერტურები შეიძლება ჩაითვალოს ელექტრომაგნიტურად მცირედ. დაბალ სიხშირეებზე (ტალღის სიგრძესთან შედარებით მცირე ზომის აპერტურების შემთხვევა) ველის შეღწევა აპერტურებში საკმაოდ კარგად არის შესწავლილი და გაანალიზებული. ამ შემთხვევაში აპერტურის გავლენა გადასხივებულ ველზე აღინერება აპერტურის ადგილას მოთავსებული ექვივალენტური მაგნიტური წყაროს საშუალებით, რომლის დიპოლური მომენტი ანალიზური გამოსახულებით ჩაინერება (ბეთეს თეორია), მაგრამ ეს მეთოდი არ იძლევა ველების სწორ განაწილებას აპერტურასთან ძალიან ახლოს მყოფ არეში.

აპერტურებში ველების შეღწევის შესასწავლად სასურველია გამოვიყენოთ მეთოდი, რომელიც იძლევა ახლო ველების კორექტულად აღწერის შესაძლებლობას. უფრო მეტიც, ეს მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ბეთეს თეორიაზე დაფუძნებული მარტივი ანალიზური ფორმულების გამოყენების საზღვრების დასადგენად.



სურ.11.13 აპერტურის მქონე ორგანოზომილებიანი გარსის გეომეტრია.

ამ პარაგრაფში მოცემულია დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდით z ღერძის პარალელური აპერტურის მქონე იდეალურად გამტარ ცილინდრულ ეკრანში შეღწეული ველის გამოთვლის პროცედურა. ჩათვლილია, რომ ეკრანი ყველგან თანაბარი სისქისაა, განივკვეთი შემოსაზღვრულია კონტურით $L = L^+ + L^-$ და მთელ განხილულ სიხშირულ დიაპაზონში მისი სისქე $d \leq 0.02\lambda$ (ნახ.11.13). დავუშვათ, რომ დაცემული ველი არის E -პოლარიზებული, ე.ი. $\vec{E}^{inc} = \hat{n}_z E^{inc}(x, y)$.

როგორც ცნობილია, გაბნეული ველი $\vec{E}^{sc} = \hat{n}_z E^{sc}(x, y)$ ეკრანით შემოსაზღვრული არის გარეთ აკმაყოფილებს ჰელმჰოლცის განტოლებას:

$$\Delta E^{sc}(x, y) + k^2 E^{sc}(x, y) = 0, \quad (11.3.1)$$

სადაც k ტალღური რიცხვია თავისუფალ გარემოში. (11.3.1) განტოლება აკმაყოფილებს გამოსხივების პირობას და L კონტურზე სასაზღვრო პირობას:

$$E^{inc}(x, y) + E^{sc}(x, y) = 0, \quad M(x, y) \in L. \quad (11.3.2)$$

(11.3.1)-(11.3.2) სასაზღვრო ამოცანა ამოვხსნათ დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდით.

ამ მეთოდის თანახმად L კონტურით შემოსაზღვრული არის შიგნით დამხმარე კონტურს Γ , რომელიც თანაბრადაა დაშორებული კონტურებიდან L^+ და L^- . Γ კონტურზე უწყვეტად ვანაწილებთ დამხმარე გამომსხივებლებს, რომელთა მიერ გამოსხივებულ ველს აღწერს (11.3.1) ტალღური განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნები $H_0^{(1)}(kR_\Gamma)$ (სადაც R_Γ - მანძილია Γ კონტურის $M(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ნერტილიდან დაკვირვების $M(x, y)$ ნერტილამდე) და გაბნეულ ველს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$E^{sc}(x, y) = \int_\Gamma J(\Gamma) H_0^{(1)}(kR_\Gamma) d\Gamma, \quad (11.3.3)$$

სადაც $M(x_\Gamma, y_\Gamma)$ -წყაროს ნერტილებია, $H_0^{(1)}(R)$ -ნულოვანი რიგის პირველი გვარის ჰენკელის ფუნქციაა. $J(\Gamma)$ -დამხმარე კონტურით განსაზღვრულ ზედაპირზე დენების სიმკვრივის პროპორციული სიდიდეა.

თუ ეკრანის მიერ გადასხივებული ელექტრული ველი წარმოდგენილია (11.3.3) სახით, მაშინ (11.3.1)-(11.3.2) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი, პირველი გვარის, არასინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნაზე:

$$\int_\Gamma J(\Gamma) H_0^{(1)}(kR_{\Gamma L}) d\Gamma = E^{inc}(x_L, y_L), \quad (11.3.4)$$

ამ შემთხვევაში გამოყენებულია (11.3.4) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის შემდეგი ალგორითმი.

საძიებელი $J(\Gamma)$ ფუნქციისაგან მოითხოვება ფუნქციონალურ სივრცეში L_2 შემდეგი კვადრატული ფორმის (ნორმის) მინიმუმის უზრუნველყოფა:

$$\|E^{sc}(x, y) - E^{inc}(x, y)\|_L = \left[\int_L \left| \int_\Gamma J(\Gamma) H_0^{(1)}(kR_{\Gamma L}) d\Gamma + E^{inc}(x_L, y_L) \right|^2 dL \right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon, \quad (11.3.5)$$

სადაც $R_{\Gamma L} = \sqrt{(X_L - X_{\Gamma})^2 + (Y_L - Y_{\Gamma})^2}$. ამისათვის (11.3.5) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალური ოპერატორები შევცვალოთ სასრული ჯამით მიახლოებითი ინტეგრების რომელიმე ფორმულის საშუალებით:

$$\sum_{m=1} \left| \sum_{n=1} J_n^M H_0^{(1)}(kR_n^m) + E^{inc}(X^m, Y^m) \right|^2 = \varepsilon_N^M, \quad (11.3.6)$$

სადაც $R_n^m = \sqrt{(X^m - X_n)^2 + (Y^m - Y_n)^2}$; ხოლო ზემოთ მოყვანილი წერტილები $\{X_n, Y_n\}_{n=1}^N, \{X^m, Y^m\}_{m=1}^M$ - კვანძითი წერტილებია ძირითადი L და დამხმარე Γ კონტურებზე შესაბამისად. $J_n^M = J(\Gamma_n) \Delta L_m \Delta \Gamma_n$ - უცნობი კოეფიციენტებია, რომლებიც აპროქსიმირებას უკეთებენ საძიებელ ფუნქციას დამხმარე კონტურის $\{X_n, Y_n\}_{n=1}^N$ წერტილებში.

რიცხვითი ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ მანქანური რესურსების (მეხსიერება, გამოთვლებისათვის საჭირო დრო) ეფექტურად გამოყენებისთვის საჭიროა ოპტიმალურია შემდეგი პროცედურა: მოვითხოვთ უცნობი კოეფიციენტებისაგან (11.3.6) გამოსახულების კვადრატულ ფორმულაში მოთავსებული გამოსახულების ნოლთან ტოლობა დასაშვები ε სიზუსტით, ე.ი. პრობლემა დავიყვანოთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა $M \times N$ სისტემის ფსევდოამონახსნების მოძებნაზე

$$\sum_{n=1} J_n^M H_0^{(1)}(kR_n^m) = E^{inc}(X^m, Y^m), \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad (11.3.7)$$

სადაც ცხადია, რომ მიახლოება $\varepsilon_N^M \approx \varepsilon$ მით უფრო კარგად სრულდება, რაც მეტია M და N .

და ბოლოს, (11.3.7) განტოლებათა სისტემის ფსევდოამონახსნების საშუალებით (11.3.1)-(11.3.2) სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი შემდეგნაირად ჩაინერება:

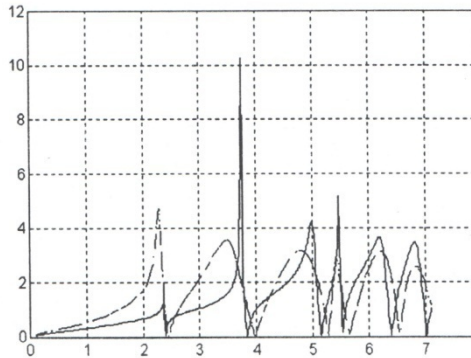
$$\begin{aligned} \tilde{E}^{tot}(x, y) &= \tilde{E}^{sc}(x, y) + E^{inc}(x, y) = \\ &= \sum_{n=1} J_n^M H_0^{(1)}(kR_n) + E^{inc}(x, y). \end{aligned} \quad (11.3.8)$$

აღწერილი მეთოდი გამოყენებულია აპერტურის მქონე ორგანზომილებიან სხეულებში დროით-ჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევის ანალიზისთვის.

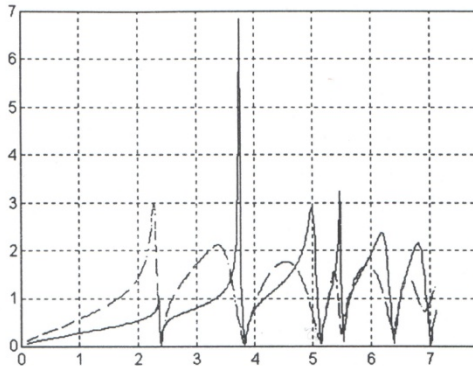
განვიხილოთ წრიული ცილინდრი, რომლის აპერტურა ცილინდრის z ღერძის პარალელურია და გაშლის კუთხე φ -ს ტოლია.

სურ.11.14-15-ზე მოცემულია ელექტრული ველის დამოკიდებულება ka პარამეტრზე აპერტურის ცენტრში, სადაც a ცილინდრის რადიუსია. სურ.11.14-ზე ნაჩვენებია ცილინდრის აგზნება 0^0 კუთხით დაცემული ველით, სადაც დაცემის კუთხე არის ათვლილი

ველის გავრცელების მიმართულებასა და x ღერძს შორის. გამოთვლილია ორი შემთხვევა, როცა აპერტურის ზომაა 30° (უწყვეტი ხაზი) და 60° (წყვეტილი ხაზი). იგივე აპერტურაა ნარმოდგენილი სურ.11.15-ზე როცა დაცემის კუთხეა 45° , აპერტურის ზომაა 30° (უწყვეტი ხაზი) და 60° (წყვეტილი ხაზი). ნარმოდგენილი სურათებიდან ჩანს, რომაპერტურის კუთხური ზომის გაზრდისას პირველი რეზონანსის ამპლიტუდა იზრდება, ხოლო მეორე და მესამე რეზონანსის ამპლიტუდები კლებულობს და რეზონანსი არ არის მკვეთრი. აქედან ცხადია, რომ მცირე აპერტურების შემთხვევაში დაცემის კუთხის ცვლილება არ იწვევს ველის მკვეთრ ცვლილებას.

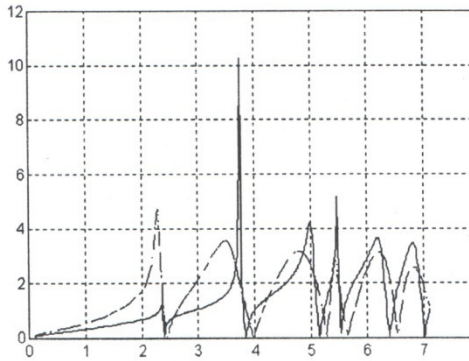


სურ.11.14. ელექტრული ველი აპერტურის ცენტრში. დაცემის კუთხეა 0° , აპერტურის ზომაა 30° (უწყვეტი ხაზი) და 60° (წყვეტილი ხაზი).



სურ.11.15. ელექტრული ველი აპერტურის ცენტრში. დაცემის კუთხეა 45° , აპერტურის ზომაა 45° (უწყვეტი ხაზი) და 60° (წყვეტილი ხაზი).

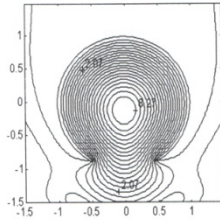
აპერტურისათვის, რომლის ზომა 60° რიგისაა, დაცემის კუთხე საგრძნობ გავლენას არ ახდენს ველის მაღალსიხშირული კომპონენტების ყოფაქცევაზე.



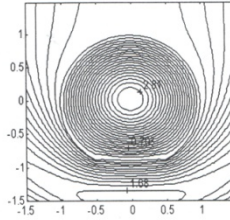
სურ.11.16. ელექტრული ველი აპერტურის ცენტრში. დაცემის კუთხეა 0° , აპერტურის ზომაა 30° .

სურ.11.16-ზე ნაჩვენებია აპერტურის ცენტრში ელექტრული ველის ამპლიტუდის დამოკიდებულება სიხშირეზე (ka) 30° აპერტურის შემთხვევაში.

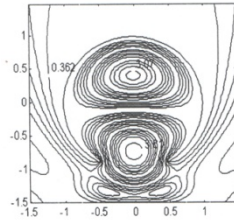
სურ.11.17-22-ზე მოცემულია ახლო ველების განაწილება სხვადასხვა სიხშირეებისათვის. $ka = 2.29$ სიდიდისათვის აპერტურის ცენტრში ველი მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო $ka = 2.46$ მნიშვნელობისათვის მიაღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას. შემდეგ $ka = 3.50$ გვაქვს მეორე მაქსიმუმი, ხოლო $ka = 3.98$ გვაქვს მეორე მინიმუმი და ა.შ. როგორც ჩანს, $ka = 2.29$ შეესაბამება ცილინდრის შიგნით განაწილებული ველის პირველი რეზონანსი. მიუხედავად იმისა, რომ $ka = 2.26$ მნიშვნელობისათვის (სურ. 11.18) ველის სტრუქტურა ცილინდრის შიგნით პრაქტიკულად არ არის შეცვლილი სურ.11.17-თან შედარებით, ცილინდრის გარეთ ველი შეიცვალა ისე, რომ აპერტურის არეში ველს გააჩნია მინიმუმი. ცილინდრის შიგნით ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა ამ სიხშირისათვის უფრო დაბალია, ვიდრე $ka = 2.29$ მნიშვნელობისათვის. სიხშირის შემდგომი ზრდა იწვევს ცილინდრში მეორე რეზონანსის ფორმირებას. ამ რეზონანსის შესაბამის ველები ნაჩვენებია სურ.11.19-ზე. როგორც ჩანს, სიხშირის ზრდასთან ერთად რეზონანსების რაოდენობაც მატულობს.



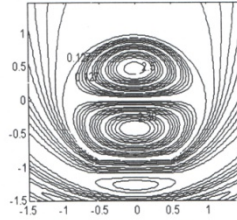
სურ. 17 $ka=2.29$



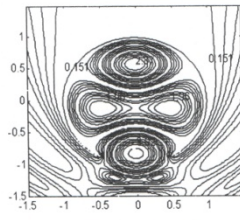
სურ. 18 $ka=2.46$



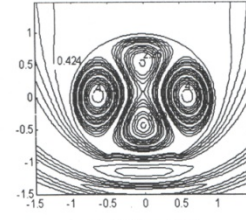
სურ. 19 $ka=3.50$



სურ. 20 $ka=3.98$



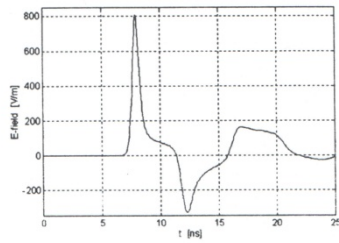
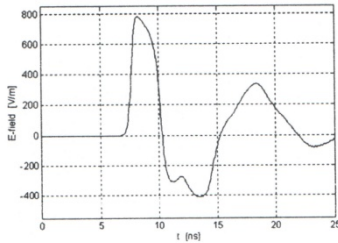
სურ. 21 $ka=4.80$



სურ. 22 $ka=5.27$

ამ ანალიზიდან ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მეთოდი იძლევა საშუალებას ეფექტურად გამოვთვალოთ სიხშირეები, რომელთათვისაც ხდება ეკრანის შიგნით ენერგიის აკუმულირება და დავაკვირდეთ რეზონანსული სიხშირეებისავის ახლო ველების სტრუქტურას.

11.3.2 განმუხტვის არასტაციონარული ველების შეღწევა აპერტურებში. როგორც ავლინებთ სივრცეში არასტაციონარული განმუხტვისას გამოსხივებული ველების ანალიზი ძალზე მნიშვნელოვანია, რადგანაც გვაძლევს ინფორმაციას სივრცის იმ ლოკალური არეების შესახებ, სადაც მგრძობიარე აპარატურა შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან. სურ.11.23-ზე ნაჩვენებია განმუხტვისას სხვადასხვა მიმართულებით გამოსხივებული ელექტრული ველების დროზე დამოკიდებულება.



სურ.11.23. განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობა. განმუხტვა ხდება 5კვ. დამუხტული 0.31მ - 0.058მ. ნახევარღერძების მქონე სფეროიდზე. არხის სიმაღლეა 0.6მმ. გამოსხივება ხდება ა) 90° მიმართულებით, ბ) 30° მიმართულებით. მანძილი განმუხტვის არხიდან დაკვირვების წერტილამდე 2მ-ის ტოლია.

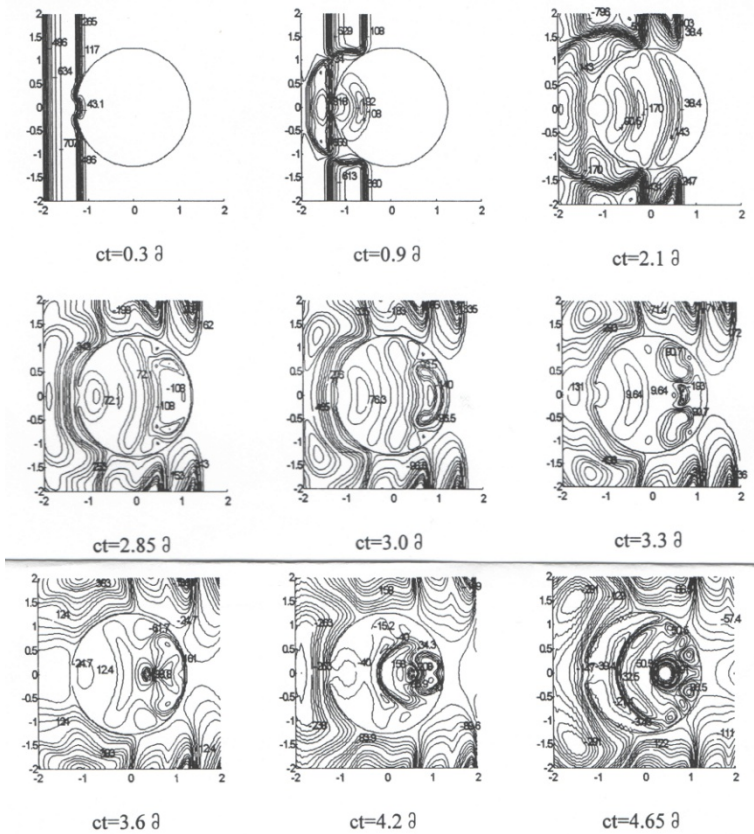
ამ პარაგრაფში შეისწავლება ცილინდრული სხეულის მიერ არამონოქრომატული ბრტყელი ტალღის გაბნევის ამოცანა. დაცემულ ველში ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორი ორიენტირებულია ცილინდრის მსახველის პარალელურად და დროზე ისევე დამოკიდებული, როგორც ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობა განმუხტვის არიდან რაღაც ფიქსირებულ მანძილზე.

როგორც სურ.11.23-დან ჩანს სფეროიდის განმუხტვისას სხვადასხვა მიმართულებით გამოსხივდება განსხვავებული ამპლიტუდისა და ფორმის ელექტრული ველი. ამ ველის მაქსიმალური გამოსხივების მიმართულება დამოკიდებულია დამუხტული სხეულის ფორმაზე. ამ კონკრეტულ შემთხვევაში გამოსხივება ხდება 90° მიმართულებით;

სურ.11.24-ზე გამოსახულია სფეროიდის ელექტროსტატიკური განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის შედენევა გრძივი აპერტურის მქონე წრიული განივკვეთის 1.26მ. რადიუსიან იდეალურად გამტარ ცილინდრულ სხეულში. აპერტურის გაშლის კუთხე 20°-ის ტოლია. განმუხტვა ხდება 5 კვ დამუხტული 0.31მ და 0.05მ ნახევარღერძების მქონე სფეროიდზე. ელექტროსტატიკური განმუხტვა იწყება დამინებული სიბრტყიდან 0.6მმ სიმაღლეზე.

აღგორითმი საშუალებას იძლევა გამოვითვალოთ ცილინდრის მიერ გადასხივებული ველი სივრცის ნებისმიერ წერტილში და დროის ნებისმიერ მომენტში, აგრეთვე ცილინდრის ზედაპირზე ინდუცირებული ელექტრული დენი. ინფორმაციის უზარმაზარი რაო-

დენობა, რომლის მიღებაც შეიძლება ამ დროს, აქ წარმოდგენილია ისეთი სახით, რომ რაც შეიძლება ღრმად ჩავწვდეთ მოვლენის არსში (სურ.11.24).

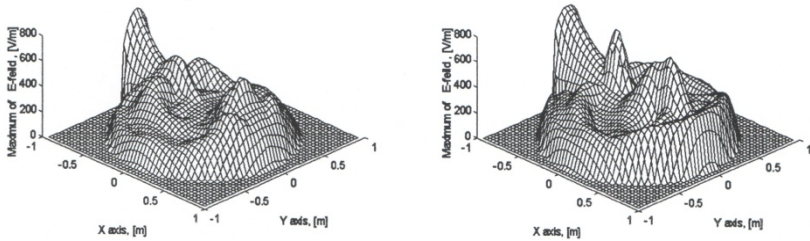


სურ.11.24. ელექტრული ველი ცილინდრული გარსის შიგნით ცილინდრის რადიუსია 1.2 მ. აპერტურის კუთხური ზომაა 20° .

ეს სურათები გვიჩვენებენ ელექტრული ველის გავრცელებას ცილინდრში და ცილინდრის ახლო ზონაში. $ct = 0.3$ მომენტისათვის ველი აღწევს ცილინდრს და იწყებს მასში შეღწევას, შემდეგი სურათები გვიჩვენებს ველის გავრცელებას ცილინდრის შიგნით ისე, რომ ველის გამოსხივების ცენტრი იმყოფება აპერტურის ცენტრში. დროითი მომენტისათვის $ct = 2.85$ მ ველი აღწევს ცილინდრის მარჯვენა საზღვარს. შემდეგ იწყება ამ ველის არეკვლა და მისი ფოკუსირება დაახლოებით რადიუსის ნახევარის ტოლ მანძილზე

ცენტრიდან მარჯვნივ. ცილინდრის რადიუსი ისეა შერჩეული, რომ დაცემული იმპულსური ველის სპექტრის ცენტრალური სიხშირე რეზონანსული იყოს. მიუხედავად ამისა, ველი სტრუქტურულად არ არის რეზონანსული ხასიათის. საკმარისად დიდი აპერტურისათვის, როგორც ნაჩვენებია სურ.11.24-ზე, დაცემული ველი შედის გარსის შიგნით და უშუალოდ ურთიერთქმედებს გარსის კედლებთან. გარსის საკუთარი სიხშირეების აღგზნება ხდება მხოლოდ მომდევნო დროითი მომენტებისათვის ამით აიხსნება, მაგალითად, ის ფაქტი, რომ რადიუსის მცირე ცვლილება ნაკლებ გავლენას ახდენს ველის განაწილების ხასიათზე გარსის შიგნით. ამის გარდა, იმპულსის სპექტრი ძირითადად დაბალსიხშიროვანია, და ერთი სიხშირისათვის ჩატარებული ანალიზი არ შეიძლება პირდაპირ იქნას გადატანილი სხვა სიხშირულ დიაპაზონზე.

იმისათვის, რომ გავაანალიზოთ ველის შეღწევა იდეალურად გამტარი გარსის შიგნით საჭიროა ამ გარსში ელექტრული ველის მაქსიმუმების განაწილების ცოდნა.



სურ.11.25. ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება წრიული კვეთის მქონე გარსისათვის. აპერტურის კუთხური ზომაა 30° , ცილინდრის რადიუსია $R = 0.890\lambda$. ა) განმუხტვისაგან 90° -ით გამოსხივებული ველი, ბ) განმუხტვისაგან 30° -ით გამოსხივებული ველი (იხ. სურ.11.23).

ეს განაწილება წარმოდგენილია სურ.11.25-ზე 30° -იანი აპერტურის მქონე ცილინდრისთვის. ასეთი აპერტურა არ შეიძლება ჩაითვალოს მცირედ, ამიტომაც მასში ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა თითქმის ისეთივეა, როგორც დაცემულ ველში 800 ვ/მ. როგორც ნაჩვენებია სურ.11.24-ზე, ველი ფოკუსირდება ცილინდრის ცენტრიდან მარჯვნივ დაახლოებით რადიუსის ნახევრის ტოლ მანძილზე.

აქ მისი მნიშვნელობა აღწევს 748 ვ/მ-ს, როდესაც ცილინდრს ეცემა სფეროიდისაგან 30° -ით გამოსხივებული ველი და 591 ვ/მ-ს,

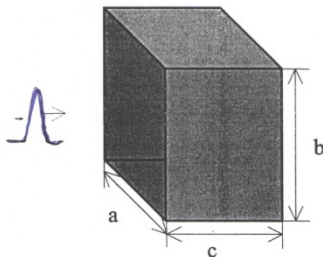
როდესაც ეცემა სფეროიდისაგან 90° -ით გამოსხივებული ველი. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ ასეთი დიდი აპერტურის მქონე გარსებით ეკრანილება ნაკლებად ეფექტურია.

ეკრანილების ხარისხზე დიდ გავლენას ახდენს თანაფარდობა ცილინდრის რადიუსსა და დაცემული ველის სივრცულ განფენილობას შორის. საკმარისად დიდი გარსებისათვის იმპულსის სპექტრის შემადგენელი სიხშირეების უმრავლესობა შესაძლებელია იყოს რეზონანსული.

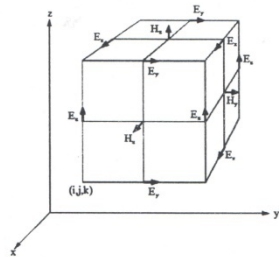
მიუხედავად იმისა, რომ ინფორმაცია მიღებული სიხშირულ არეში ძალზე მნიშვნელოვანია, ამ პარაგრაფში წარმოდგენილი შედეგები ცხადყოფენ დროით არეში ჩატარებული ანალიზის აუცილებლობას.

§11.4 სამგანზომილებიანი არასტაციონალური ველების მოდელირება სასრული სხვაობების მეთოდით

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს შესწავლილ იქნას განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შეღწევა რეალურ სტრუქტურებში. ამ მიზნის მისაღწევად საჭიროა ჩავატაროთ ელექტრომაგნიტური ველების მოდელირება სასრული სხვაობების მეთოდით სამგანზომილებიან ამოცანებისათვის. შევისწავლით მოდელირების შედეგად მიღებული სიდიდეების კრებადობის დამოკიდებულება სივრცით ბიჯზე, რათა დავრწმუნდეთ რიცხვითი გამოთვლებით მოღებულ შედეგების სისწორეში. ამ მიზნით შესწავლილია არასტაციონალური დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველების დიფრაქცია ღია ყუთზე (სურ. 11.26), ამოცანის ამოხსნის მეთოდად გამოყენებული სხვაობების მეთოდი, რომელშიც სივრცის ის არე, სადაც გამოთვლები წარმოებს, შემოსაზღვრულია ე.წ. იდეალურად შეთანხმებული ფენებით.



სურ.11.26 ამოცანის გეომეტრია .



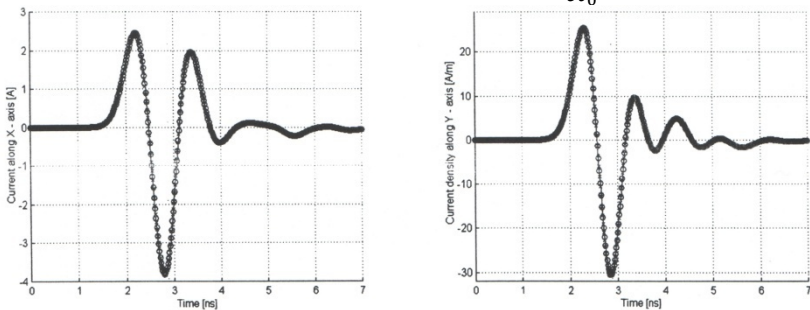
სურ.11.27. მეთოდის სქემა

ჩატარებული გამოთვლების შედეგად დადგინდა რომ ველე-ბისა და დენების კრებადობა მიიღწევა იმ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{\Delta}{\Delta t} \leq \sqrt{3c}$, სადაც Δt და Δ დროითი და სივრცული ბიჯებია შესაბამისად, ხოლო c სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში. ჩვემთ მოყვანილ ყველა გამოთვლაში $\Delta t = 0.016$ ნმ ტოლია.

ცხადია გამოთვლითი ტექნიკის შეზღუდული შესაძლებლობების გამო მაქსველის განტოლებათა სისტემა ჩაინერება სასრულ მოცულობაში. პროცესის დაკვირვებისათვის ხანგრძლივი დროის მანძილზე აუცილებელია დაკვირვების კედლების ისეთნაირი შერჩევა, რომ არ მოხდეს მათგან ელექტრომაგნიტური ველების არეკვლა. ამ პრობლემის თავიდან ასაცილებლად გამოყენებულია ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობის მქონე იდეალურად შეთანხმებულ ფენები. ამ არეში მაქსველის განტოლებათა სისტემა აღწერილია ელექტრული და მაგნიტური გამტარებლობების გათვალისწინებით, რომელთა შორის დამოკიდებულება შემდეგია: $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0}$ სადაც σ და σ^* ეფექტურად არ არეკვლავენ მისულ ტალღებს და იძლევიან სივრცის იმ არის შეზღუდვის შესაძლებლობას, სადაც გამოთვლები წარმოებს.

განვიხილოთ არასტაციონალური დიპლური წყაროს მიერ გამოსხივებული ველების შეღწევა ღია ყუთში (სურ.11.26) დიპოლური წყარო წარმოადგენს ელექტრონული მონყობილობისათვის არასასურველი გამოსხივების წყაროს მოდელს. დიპოლი განლაგებულია z ღერძის გასწვრივ ყუთის ღია ნაწილის მხარეს, $x = -50$ სმ, $y = 0$, $z = 0$ წერტილში. დიპოლის მომენტის დროისაგან დამოკიდებულება შემდეგი სახისაა:

$$P_z(t) = \exp(-\alpha^2(t - t_0)^2), \text{ სადაც } \alpha = \frac{4}{ct_0}, ct_0 = 0.5 \text{ მ.}$$

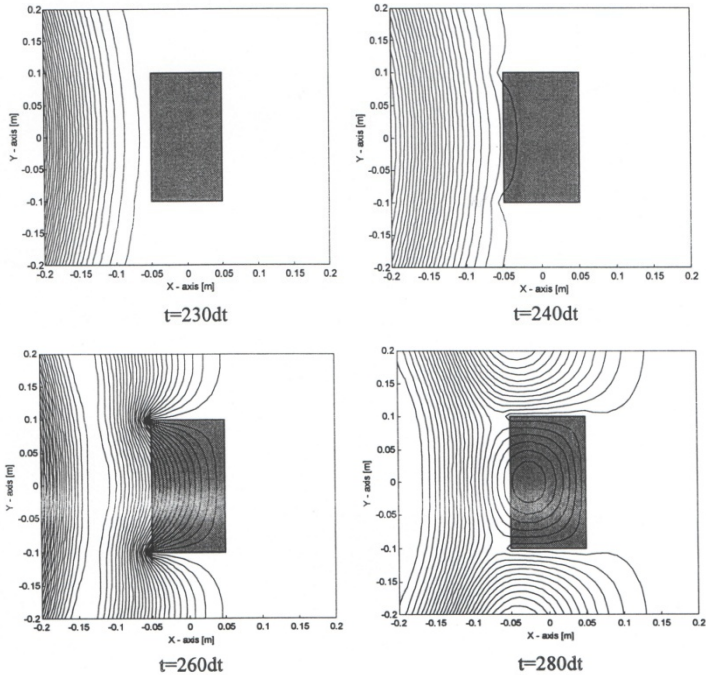


სურ.11.28. $x = y = 0, z = 10$ სმ წერტილში ზედაპირული დენისა და მაგნიტური ველის დაძაბულობის დროისაგან დამოკიდებულება 3-

შემთხვევაში 1) ——— შესაბამება $dx = dy = dz = 0.1/8$. 2) რგოლები $dx = dy = dz = 0.1/10$. 3) x-საზი $dx = dy = dz = 0.1/12$ შემთხვევას.

სურ.11.28-ზე ნაჩვენებია ზედაპირზე x და y მიმართულებით დენისა და მაგნიტური ველის დაძაბულობის დროისაგან დამოკიდებულება, როგორც ჩანს დაყოფის რიცხვის გაზრდისას ზედაპირული დენი და მაგნიტური ველის დაძაბულობა ნერტილში თითქმის არ იცვლება ე.ი. ამოხსნა კრებადია.

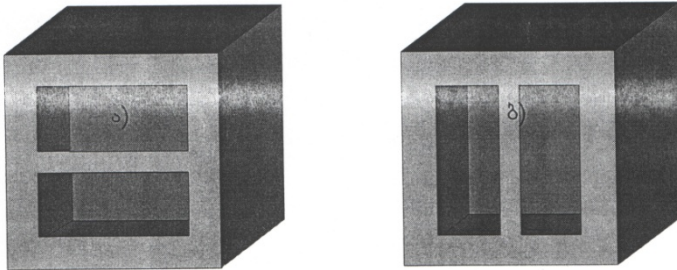
ელექტრული ველის E_z მდგენელის განაწილება ყუთის შუა ჭრილში დროის სხვადასხვა მომენტებისათვის ნაჩვენებია სურ.11.29-ზე. ეს სურათი იძლევა გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის ღია ყუთში შეღწევის დინამიკის უფრო თვალნათლივ გამოსახვის საშუალებას.



სურ.11.29 ელექტრული ველის E_z მდგენელის განაწილება xoy სიბრტყეში დროის სხვადასხვა მომენტში. $dt = 0.016658$.

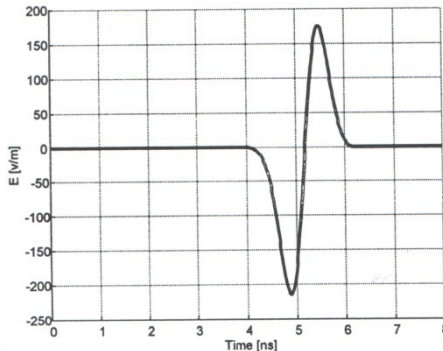
როგორც ჩანს $t = 240dt$ მომენტისათვის დაცემული ველი აღწევს ობიექტს; $t = 260dt$ მომენტისათვის ეხება ყუთის შიგა კედელს და იწყება არეკვლა; $t = 340dt$ მომენტის შემდეგ დაცემული ველი გადის დაკვირვების არიდან და სისტემა თვითონ იწყებს გამოსხივებას.

როგორც ვხედავთ სასრული სხვაობების მეთოდი საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ ახლო ველების განაწილება, ვიპოვოთ გამბზნევი ობიექტზე დაცემული ველით ინდუცირებული მუხტები და დენები და შესაბამისად განვსაზღვროთ ველი შორ ზონაში. განვიხილოთ დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველის აპერტურის მქონე მართკუთხა ყუთში შეღწევის ელექტროდინამიკური პროცესი. მართკუთხა ყუთის გეომეტრია მოცემულია სურ.11.30-ზე.



სურ.11.30. ა) ყუთი ორი ჰორიზონტალური აპერტურით; ბ) იგივე ფართობის ორი ვერტიკალური აპერტურით.

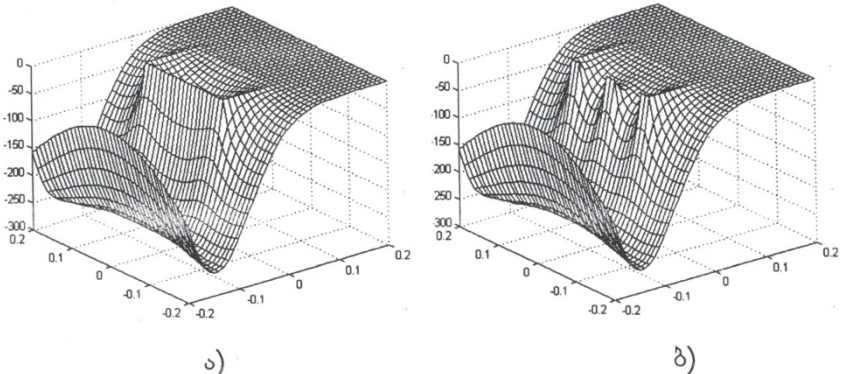
ყუთის ზომები შეესაბამება სურ.11.26-ზე გამოსახული ღია ყუთის ზომებს. ყუთის ნიბოებიდან აპერტურებამდე მანძილი და აპერტურებს შორის მოთავსებული ზოლის სიგანე 0.02λ —ია.



სურ.11.31. დიპოლის მიერ გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობის დროზე დამოკიდებულება დიპოლიდან 0.8λ მანძილზე.

სურ.11.31-ზე გამოსახულია დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველის ელექტრული დაძაბულობის მნიშვნელობა დიპოლიდან 0.8მ. მანძილზე. შემდეგ სურათებზე გამოსახულია დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველის ურთიერთქმედება ყუთის აპერტურიან კედელთან. ყუთი დიპოლიდან მოთავსებულია 0.95მ. მანძილზე.

დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველი მას შემდეგ რაც მიაღწევს ამ მანძილს დაიწყებს ყუთში შეღწევას. ჩვენს ამოცანას წარმოადენს იმის დადგენა, თუ როგორ არის დამოკიდებული ყუთში შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა აპერტურის ორიენტაციაზე.



სურ.32. დიპოლის მიერ გამოსხივებული ელექტრული ველის დაძაბულობის სივრცული განაწილება xoy სიბრტყეში. $t = 260dt$.

სურ.11.32-ზე გამოსახულია ელექტრული ველის განაწილება xoy სიბრტყეში დროის $t = 260dt$ მომენტისათვის ამ სურათის ა) და ბ) შემთხვევები შეესაბამებიან. სურ.11.30-ზე გამოსახული ა) და ბ) შემთხვევებს ჩატარებულმა რიცხვითმა გამოთვლებმა გვიჩვენა, რომ ა) შემთხვევაში უფრო მეტი ელექტრული ველი შეაღწევს ყუთის შიგნით ვიდრე ბ) შემთხვევაში.

ყუთის შიგნით შეღწეული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა მთელი დაკვირვების დროის განმავლობაში სურ.11.30-ზე გამოსახული ა) შემთხვევისათვის ტოლია 195.52ვ/მ, ხოლო ბ) შემთხვევისათვის 92.32ვ/მ მაშინ როდესაც გამოსხივებული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა 214.28ვ/მ-ია.

როგორც ვხედავთ ვერტიკალური ორიენტაციის მქონე ზოლით დიპოლის მიერ გამოსხივებული ველის ეკრანირება უფრო ეფექტურია, ვიდრე ჰორიზონტალური ზოლით. ეს დაკავშირებულია

დაცემული ველის ხასიათთან. დიპოლის მიერ გამოსხივებულ ველს გააჩნია ელექტრული ველის მხოლოდ ვერტიკალური მდგენელი. ასეთი ველი განაპირობებს ვერტიკალური ორიენტაციის მქონე ზოლზე გაცილებით უფრო დიდი დენის აღძვრას ვიდრე ჰორიზონტალურ ორიენტაციის ზოლზე. ეს ინვევს პირველ შემთხვევაში მეტი ველის არეკვლას ვიდრე მეორე შემთხვევაში.

შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევას სხვადასხვა ტიპის ტექნოლოგიური აპერტურის მქონე სხეულებში, მათ შორის მართკუთხა პარალელეპიპედის - კომპიუტერის ტიპის შევსებულ ყუთში.

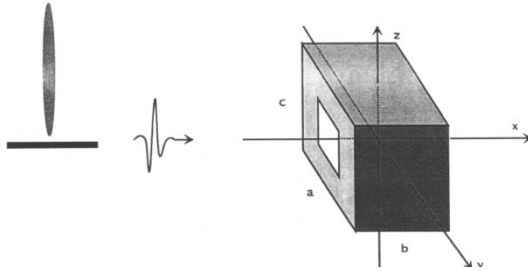
§11.5 სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შეღწევა აპერტურის მქონე ყუთში

როგორც ავლნიშნეთ მოცემული ნაშრომის ერთ-ერთი მიზანია შესწავლილ იქნას განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა რეალურ სამგანზომილებიან ელექტრონულ აპარატურაში. ამ პარაგრაფში ზემოთ აღნიშნული მიზნით მისაღწევად შესწავლილია სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შეღწევა სხვადასხვა ფორმის ტექნოლოგიური აპერტურების მქონე სტრუქტურებში, მათ შორის კომპიუტერის ტიპის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთში. საწყის ეტაპზე შევისწავლით თუ როგორ არის დამოკიდებული ეკრანში შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა აპერტურის ფორმაზე, ფართობზე და ჭრილების ორიენტაციაზე. ამისათვის შევისწავლით განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა სხვადასხვა აპერტურის მქონე ცარიელ ყუთში.

ამოცანის გეომეტრია მოცემულია სურ.11.33-ზე, დაცემულ ველად აღებულია $V_0 = 10$ კვ პოტენციალამდე დამუხტული $a = 0.2$ მ და $b = 0.02$ მ ნახევარღერძების მქონე სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველი, როდესაც განმუხტვის არხის სიგრძე $h = 0.1$ მ ტოლია. ეკრანის ეფექტურობის უფრო თვალსაჩინო სურათის მიღების მიზნით დაცემული ველი ნორმირებულია მაქსიმუმზე.

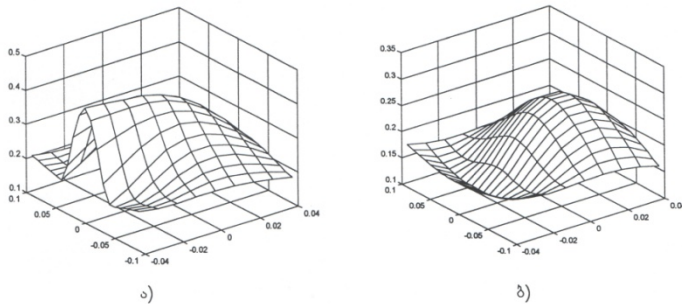
ჩატარებულ რიცხვით ექსპერიმენტში გამოყენებულ იქნა მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის იდეალურად გამტარი ყუთი (სურ.11.33), რომლის გეომეტრული ზომები შემდეგია: $a = 0.2$ მ,

$b = 0.1\text{მ}$, $c = 0.2\text{მ}$. ყუთს გააჩნია მართკუთხა ფორმის აპერტურა რომლის ზომებია: y ღერძის გასწვრივ 8სმ , z ღერძის გასწვრივ 8სმ . სფეროიდი მოთავსებულია $x = -50\text{სმ}$. წერტილში xoy სიბრტყის პერპენდიკულარულად.



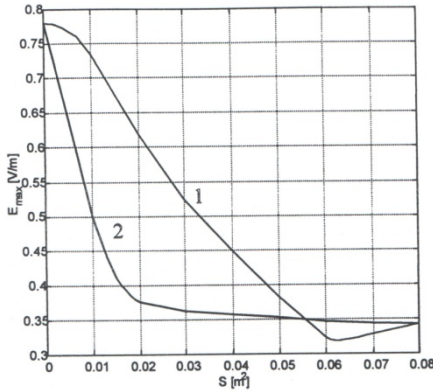
სურ.11.33. ამოცანის გეომეტრია

შესწავლილ იქნა გამოსხივებული ველის შეღწევა სურ.11.33-ზე გამოსახულ ყუთში. სურ.11.34-ზე მოყვანილია ელექტრული ველის მაქსიმუმების განაწილება ყუთის შიგნით ა) $z = 0\text{სმ}$ და $z = 8\text{სმ}$ სიბრტყის პარალელურად.



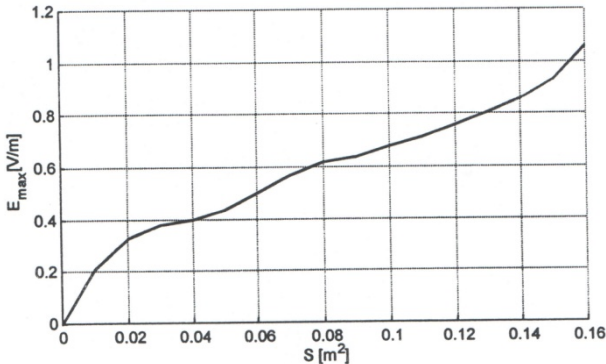
სურ.11.34. ელექტრული ველის განაწილება ყუთის შიგნით ა) $z = 0\text{სმ}$ და ბ) $z = 8\text{სმ}$ xoy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში

გარდა ამისა გამოკვლეულ იქნა სურ.11.30-ზე მოცემული ორივე შემთხვევაში ყუთის შიგნით $z = 0$ სიბრტყეში ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება ორ აპერტურას შორის მოთავსებული ზოლის ფართობზე და ორიენტაციაზე. მიღებული შედეგები მოყვანილია სურ.11.35-ზე.



სურ.11.35 ეკრანირებული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება აპერტურაში ზოლის ორიენტაციაზე 1-შეესაბამება ჰორიზონტალურ ზოლს, 2-ვერტიკალურ ზოლს.

ამ სურათიდან ჩანს, რომ ვერტიკალური ორიენტაციის მქონე ზოლის შემთხვევაში ეკრანირების ეფექტურობა უფრო მეტია ვიდრე ჰორიზონტალური ზოლის დროს. ეს დაკავშირებულია დაცემული ველის ხასიათთან. სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებულ ველს ეკრანის მახლობელ ზონაში ძირითადად გააჩნია ელექტრული ველის ვერტიკალური კომპონენტი, ხოლო სხვა კომპონენტები ნოლისაგან მცირედ განსხვავდება.



სურ.11.36. ეკრანირებული ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება აპერტურის ფართობზე.

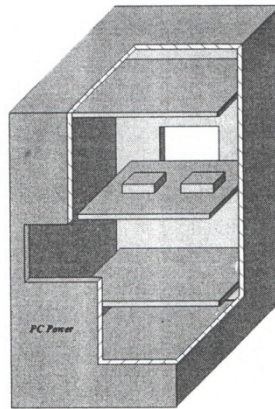
ასეთი ველი იწვევს ვერტიკალური ორიენტაციის მქონე ზოლზე გაცილებით უფრო დიდი დენის აღძვრას ვიდრე, ჰორიზონტა-

ლურ ზოლზე. ეს განაპირობებს პირველ შემთხვევაში დაცემული ველის უფრო მეტად არეკვლას ვიდრე მეორე შემთხვევაში.

სურ.11.36-ზე მოცემულია ყუთის მთელს მოცულობაში შეღწეული ველის გლობალური მაქსიმალური მნიშვნელობების დამოკიდებულება წინა ნახნაგის ცენტრში განლაგებული კვადრატული ფორმის აპერტურის ღია ნაწილის ფართობზე.

სურათზე ჩანს მცირე სიდიდის მაქსიმუმები რაც ალბათ განპირობებული უნდა იყოს თვით აპერტურის, როგორც დაბალი ვარგისიანობის მქონე რეზონატორის საქციელით.

როგორც ავლნიშნეთ, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს შევისწავლოთ რეალურ ელექტრონულ აპარატურაში გარეშე მავნე ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა. ამ მიზნით შესწავლილ იქნა სფეროიდის მიერ გამოსხივებული იმპულსის შეღწევა სურ.11.37-ზე გამოსახული გეომეტრიისათვის, რომელიც წარმოადგენს კომპიუტერში განლაგებული ფირფიტებისა და ელექტრონული მოწყობილობების მიახლოებით მოდელს.

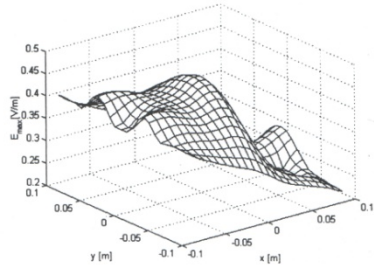
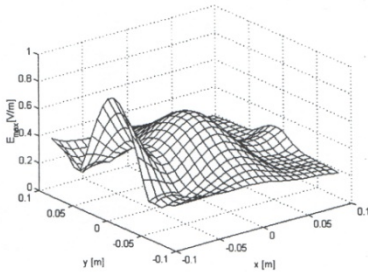


სურ.11.37. ამოცანის გეომეტრია. $a = 0.2\text{მ}$, $b = 0.3\text{მ}$, $c = 0.4\text{მ}$.

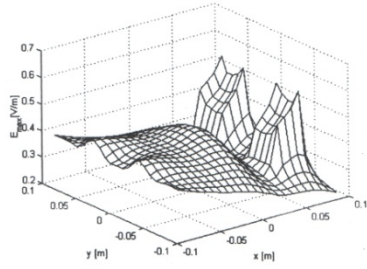
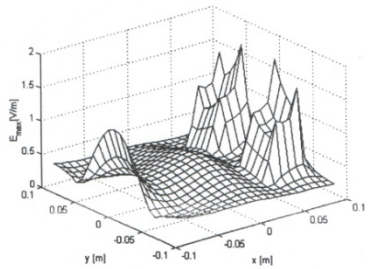
წინა სურათზე არსებული აპერტურის ზომებია ჰორიზონტალურად 0.12მ და ვერტიკალურად 0.08მ , უკანა ნახნაგზე არსებული აპერტურის ჰორიზონტალურად 0.10მ და ვერტიკალურად 0.06მ . უკანა ნახნაგზე მიმაგრებულია 3 ფირფიტა, რომლებიც, xOy სიბრტყის პარალელურია და განლაგებულია $z = -6\text{სმ}$, $z = 0\text{სმ}$ და $z = 6\text{სმ}$ სიმაღლეზე. $z = 0$ სიმაღლეზე განლაგებულ ფირფიტაზე მოთავსებულია ორი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ციფ-

რული ელექტრონული მოწყობილობის ფორმის სხეული. ამ სხეულის ხაზოვანი ზომები შემდეგია: ფუძე წარმოადგენს კვადრატს, რომლის გვერდი 0.032მ ტოლია, ხოლო სიმაღლე 0.024მ ეკრანიების ეფექტურობის გასაზრდელად გამოყენებულ იქნა. სურ.11.37-ის წინა კედელზე მოთავსებული აპერტურის შუაში დამატებითი ვერტიკალური ზოლი რომლის სიფართე 0.016მ-ია.

შემდეგ სურთებზე მოცემულია ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება xoy სიბრტყეში ა) $z = 0$ მ, ბ) $z = 0.024$ მ, გ) $z = 0.032$ მ დ) $z = 0.04$ მ. პირველ სვეტში მოცემულია ველების განაწილება უზოლო აპერტურისათვის, ხოლო მეორე სვეტში ზოლიანი აპერტურისათვის.



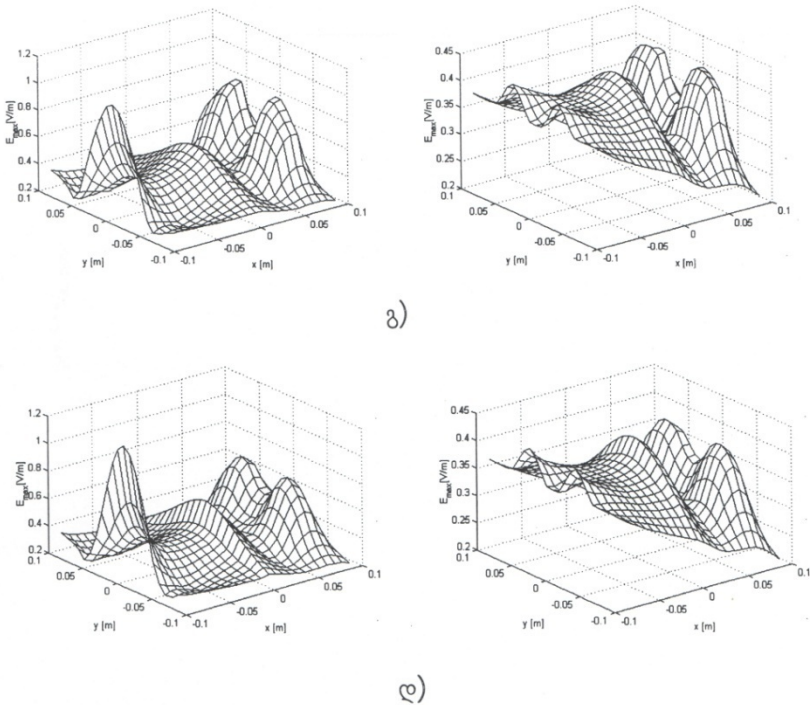
ა)



ბ)

სურ.11.38. ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება xoy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ა) $z = 0$ მ ბ) $z = 0.024$ მ პირველ სვეტში უზოლო აპერტურისათვის, მეორე სვეტში ზოლიანი აპერტურისათვის.

ეკრანირების ეფექტურობის გასაზრდელად ვერტიკალური ზოლის შერჩევა დაკავშირებულია გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის ელექტრული დაძაბულობის ვექტორის ორიენტაციასთან, რადგანაც ასეთი ორიენტაციის ზოლის გამოყენება ამ შემთხვევაში უფრო ეფექტურია. მარცხენა სვეტში მოყვანილ სურათებზე შეღწეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა 1.82 ვ/მ ტოლია, ხოლო მარჯვენა სვეტში მოყვანილ სურათებზე 0.54 ვ/მ როგორც ამ სურათებიდან ჩანს აპერტურაში ზოლის დამატება ეკრანირების ეფექტურობას სულ მცირე 2-3-ჯერ აუმჯობესებს.



სურ.11.39. ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება xy სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში გ) $z = 0.032$ მ დ) $z = 0.04$ მ პირველ სვეტში უზოლო აპერტურისათვის, მეორე სვეტში ზოლიანი აპერტურისათვის.

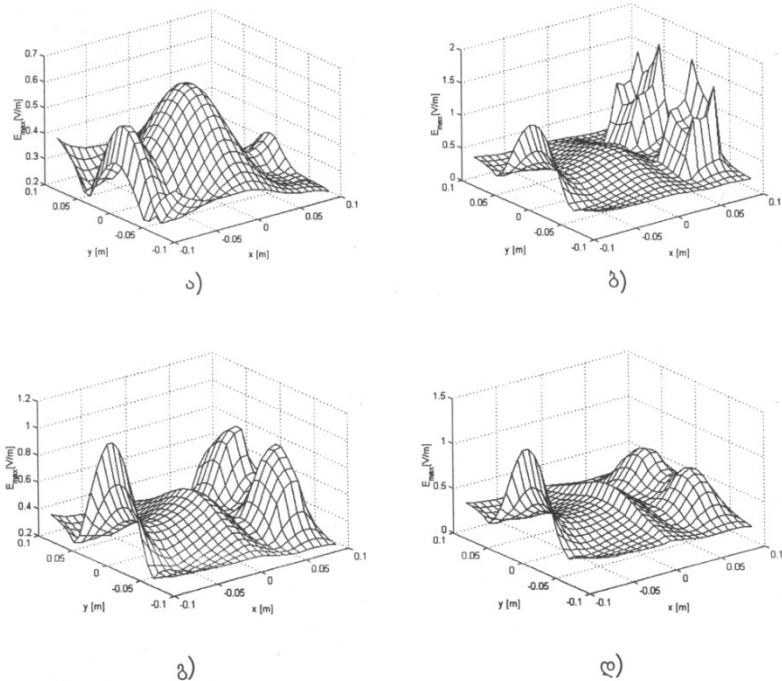
გარდა ამისა ჩატარებულმა რიცხვითმა გამოთვლებმა გვაჩვენა, რომ ზოგად შემთხვევაში ერთი და იგივე აპერტურის არსებობისას ფირფიტებითა და მონყობილობებით შევსებულ ყუთში შე-

ღნეული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობა შესაძლებელია მეტი იყოს ვიდრე იგივე გეომეტრიის ცარიელ ყუთში.

რაც კიდევ ერთხელ ადასტურებს იმ მოსაზრებას, რომ აუცილებელია ყველა კონკრეტული გეომეტრიისათვის კონკრეტული გამოთვლების ჩატარება ეკრანირებული ველის მინიმიზაციისათვის საუკეთესო ვარიანტის შერჩევის მიზნით.

ჩატარებულ იქნა ასევე გამოთვლები იგივე სიფართის ჰორიზონტალური ზოლის შემთხვევაშიც. რათა შეგვედარებინა ეკრანირებისათვის როგორი ორიენტაციის ზოლი იქნებოდა უფრო ეფექტური. ატარებული გამოთვლების შედეგები სურ.11.40-ზეა გამოსახული.

როგორც მოსალოდნელი იყო ამ შემთხვევაში ეკრანირების ეფექტურობა თითქმის არ შეცვლილა, ეს ადასტურებს იმ მოსაზრებას, რომ ეკრანირების ეფექტურობის გასაზრდელად დიდი ყურადღება უნდა მიექცეს გამოსხივებული ველის ხასიათს.



სურ.11.40. ელექტრული ველის მაქსიმალური მნიშვნელობების განაწილება ა) $z = 0$ ბ) $z = 0.024$ მ) $z = 0.032$ დ) $z = 0.04$ მ. დამატებით ზოლს გააჩნია ჰორიზონტალური ორიენტაცია.

ე.ი. ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის ვერტიკალური ორიენტაციის დროს ეს ველი ფაექტიურად ვერ გრძნობს დამატების ჰორიზონტალურ ზოლს და ასეთი შემთხვევისათვის რეკომენდირებულია ვერტიკალური დამატებითი ზოლების გამოყენება ეკრანილების ეფექტურობის გასაზრდელად.

ამ თავში მოყვანილი გამოთვლების სიზუსტის შემოწმება ხდება სასაზღაურო პირობების შემოწმებით და მიღებული შედეგების ცდომილება არ აღემატება 1 – 3%.

მიღებული შედეგებიდან შეიძლება შემდეგი დასკვნის გაკეთება: ყველა კონკრეტული შემთხვევაში საჭიროა გარემო ზემოქმედების ყველაზე ალბათური გამოსხივების პოლარიზაციის გათვალისწინება და ეკრანილების ეფექტურობის გასაზრდელად შესაბამისი ორიენტაციის დამატებითი ზოლების შერჩევა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Дорожкин Н.Н. Компьютерное моделирование физических процессов (вопросы и задачи к спецкурсу) Учеб. пособие. Мн.: БГУ, 1996, – 9с.
2. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: 2nd Ed., SpringerVerlag, 1999.
3. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. Technical Report AIAA-81-1259, 1981.
4. Лебедев А. С., Черный С. Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. – Учебное пособие / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. 136 с.
5. В. М. Ковеня Д. В. Чирков. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Новосибирск 2013., 206 с.
6. რ. დუდუჩავა. კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები. თბ., 2012 წ. 244 გვერდი.
7. დ. ნატროშვილი, გ. ბერიკელაშვილი, შ. ზაზაშვილი. გამოყენებითი რიცხვითი მეთოდები. თბ., 2015 წ., 125 გვერდი.
8. კ. ნინიძე. შესავალი *Matlab* დაპროგრამებაში. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა., თბ. 2009 წ. 256 გვერდი.
9. რ. ჯობავა, ფ. შუბითიძე, რ. ბერია, ნ. აძინბა. ელექტრონული აპარატურის ფართოზოლოვანი იმპულსებისგან დაეკრანება. მეცნიერება და ტექნიკა, №1-3, 1998წ.გვ45-49.
10. რ. ბერია, რ. ჯობავა, ფ. შუბითიძე. მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ველების შეღწევა აპერტურებში. მოამბე, თსუ სოხუმის ფილიალია გამომცემლობა, №1, 1998.გვ.50-53.
11. R. Jobava, R. Zaridze, P. Shubitidze, N. Adzinba, D. Karkashadze, **R. Beria**, M. Sukhiashvili, S. Frei, D. Pommerenke. "APERTURE PENETRATION OF FIELDS RADIATED BY ESD". Wroclaw, EMC '98 Symposium PROCEEDINGS. ISBN 83-901999-6-3. pp.491-495.
12. P. Shubitidze, R. Jobava, R. Zaridze, D. Karkashadze, **R. Beria**, D. Pommerenke S. Frei. "FDTD METHOD PROBLEMS OF PENETRATION OF TRANSIENT FIELDS OF ELECTROSTATIC DISCHARGE INTO A CAVITY". Kharkov, MMET '98 International Conference PROCEEDINGS. IEEE Catalog Number 98EX114. June 2-5, 1998. pp.327-329.

13. P. Shubitidze, R. Jobava, R. Zaridze, D. Karkashadze, **R. Beria**, D. Pommerenke, S. Frei. *"NUMERICAL STUDY OF THE COUPLING OF TRANSIENT FIELDS OF ESD INTO A CAVITY"*. Tbilisi, DIPED '98 PROCEEDINGS. IEEE Catalog Number 98EX163. November 2-5, 1998. pp.108-110.
14. R. Jobava, D. Pommerenke, D. Karkashadze, P. Shubitidze, R. Zaridze, S. Frei, **R. Beria**, A. Geonjian. *"COMPUTER SIMULATION OF ESD FROM CONE"*. Tbilisi, DIPED '98 PROCEEDINGS. IEEE Catalog Number 98EX163. November 2- 5, 1998. pp.111-113.
15. რ. ჯობავა, ფ. შუბითიძე, **რ. ბერია**, ა. გეონჯიანი. *კონუსის ელექტროსტატიკური განმუხტვის კომპიუტერული მოდელირება. მეცნიერება და ტექნიკა*, №3-4, 1999წ. გვ.38-40.
16. R. Jobava, P. Shubitidze, **R. Beria**, D. Karkashadze, R. Zaridze, A. Gheonjian. *"Aperture Penetration of Fields Radiated by ESD into a Rectangular Cavity"*. Bulletin of the Georgian Academy of sciences vol. 159,2, 1999, pp. 228-231.
17. P. Shubitidze, R. Jobava, **R. Beria**, D. Karkashadze, R. Zaridze, A. Gheonjian. *"Application of FDTD to dispersivemedia"*. DIPED'99, Lviv, Ukraine, 1999 y, IEEE, №99 TH8402, pp. 112-116.
18. რ. ჯობავა, დ. პომერენკე, ფ. შუბითიძე, **რ. ბერია**, ა. გეონჯიანი. *ელექტროსტატიკური განმუხტვის ელექტროდინამიკური მოდელი. თსუ სოხუმის ფილიალის ახალგაზრდა მეცნიერებისა და ასპირანტების შრომები*. №1, თბ., 1999. გვ. 43-46.
19. ი. შამათავა, ფ. შუბითიძე, **რ. ბერია**, რ. ჯობავა. *იდეალურად შეთანხმებული ფენები სასრული სხვაობების მეთოდში. თსუ სოხუმის ფილიალის მე-20 კონფერენციის მასალები*. №1, თბ., 1999. გვ. 40-43.
20. ფ. შუბითიძე, დ. ეკონომუ, **რ. ბერია**, ი. შამათავა. *სასრული ზომის მიკროზოლოვანი ანტენების გამოსხივება. თსუ სოხუმის ფილიალის მე-20 კონფერენციის მასალები*. №1, თბ., 1999. გვ. 36-39.
21. **რ. ბერია**. ფ. შუბითიძე, რ. ჯობავა. *მონოპოლური ანტენის მიერ გამოსხივებული ველების შეღწევა აპერტურის მქონე სამგანზომილებიან ეკრანებში. თსუ სოხუმის ფილიალის ახალგაზრდა მეცნიერებისა და ასპირანტების შრომები*. №1, თბ., 1999. გვ. 51-55.
22. **რ. ბერია**. *სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შეღწევა აპერტურის მქონე მართკუთხა ყუთში. თსუ სოხუმის ფილიალის ახალგაზრდა მეცნიერებისა და ასპირანტების შრომები*. №2, თბ., 2001. გვ. 13-16.

23. **რ. ბერია.** სასრული სხვაობების მეთოდი დროით არეში დიფერაციის სამგანზომილებიან ამოცანებში. თსუ სოხუმის ფილიალის ახალგაზრდა მეცნიერებისა და ასპირანტების შრომები. №3, თბ., 2003. გვ. 3-8.
24. **რ. ბერია.** რ. ჯობავა, ფ. შუბითიძე. სამგანზომილებიანი არასტაციონარული ველების მოდელირება სასრული სხვაობების მეთოდით. თსუ სოხუმის ფილიალი. მოამბე №2, თბ., 2005. გვ. 18-22.
25. **რ. ბერია.** ლეროში ტემპერატურის გამანილების ამოცანის კომპიუტერული მოდელირება Matlab-ის გამოყენებით. სოხუმის უნივერსიტეტი. მოამბე, №2, თბ., 2007. გვ. 9-14.
26. **რ. ბერია,** ვლადიმერ კირცხალია, ნატო თოლორაია. ზეახალი ვარსკვლავები და მათი გრავიტაციული ეფექტი. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი. მოამბე, №7, თბ., 2008. გვ. 9-14.
27. **რ. ბერია,** ნ. თოლორაია. კინემატიკა. სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „უნივერსალი“, თბ., 2009, 152 გვერდი.
28. **რ. ბერია.** იდეალურად შეთანხმებული ფენების კომპიუტერული მოდელირება სასრული სხვაობების მეთოდის გამოყენებით. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტით. მოამბე. №9, თბ., 2011. გვ. 34-47.
29. **რ. ბერია.** გამოყენებითი ელექტროდინამიკის არასტაციონარული ამოცანების კომპიუტერული მოდელირება. „უნივერსალი“ თბ., 2014. 136 გვერდი.
30. **რ. ბერია.** გამოყენებითი ელექტროდინამიკის ამოცანების კვლევის მეთოდები. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი. შრომები, №14, 2014. გვ. 29-44.
31. **რ. ბერია,** ნ. თოლორაია. დროით არეში სასრული სხვაობებისა და კირხჰოფის კომბინირებული მეთოდი ელექტროდინამიკის ამოცანებში. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი. შრომები, №17, 2018. გვ. 37-51.
32. **Н. Толораия, Р. Берия.** Компьютерное моделирование комбинированного метода Кирхгофа и конечных разностей во временной области. Международни научно-периодически журнал „Межкультурные Коммуникации“. №31, Тб., 2019. ст. 117-123.

შესავალი	5
თავი 1. ზოგადი ცნებები	16
§1.1 ზოგადი ცნებები	17
§1.2 ფუნქცია. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ფუნქციის ზღვარი და წარმოებული. განსაზღვრული ინტეგრალი	24
§1.3. ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და მისი გამოყენება	34
§1.4. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა	36
თავი 2. დიფერენციალური განტოლებები და მათი კლასიფიკაცია	38
§2.1 დიფერენციალური განტოლებების მათემატიკური კლასიფიკაცია	39
§2.2 შიპერბოლოური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება	41
§2.3 პარაბოლოური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება	43
§2.4 ელიფსური ტიპის კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება	45
§2.5 კორექტულად დასმული ამოცანები	47
თავი 3. პროგრამული პაკეტი <i>MATLAB</i> -ის ელემენტები. ფუნქციები და ბრძანებები <i>MATLAB</i> -ში	49
§3.1 ელემენტარული მათემატიკური გამოთვლები	50
§3.2 ფუნქციები <i>MATLAB</i> -ში	53
§3.3 <i>m</i> -ფაილების შექმნა რედაქტირება და გამართვა	57
§3.4 მომხმარებლის მიერ განსაზღვრული ფუნქციები	61
§3.5 მასივები <i>MATLAB</i> -ში	64
§3.6 პირობითი ოპერატორები და ციკლები <i>MATLAB</i> -ში	66
თავი 4. ორგანზომილებიანი გრაფიკა <i>MATLAB</i> -ში	75
§4.1 ორგანზომილებიანი გრაფიკების აგება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში	76
§4.2 ორგანზომილებიანი გრაფიკების აგება პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში	90
§4.3 პარამეტრული ფორმით მოცემული გრაფიკების აგება	94
თავი 5. სამგანზომილებიანი გრაფიკა <i>MATLAB</i> -ში	97
§5.1 სამგანზომილებიანი წირების აგება	98
§5.2 სამგანზომილებიანი ზედაპირების აგება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში	101

§5.3 პარამეტრულად მოცემული სამგანზომილებიანი ზედაპირების აგება	108
§5.4 ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ანიმაცია	111
თავი 6. რიცხვითი ინტეგრირება და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ში	119
§6.1 რიცხვითი ინტეგრირება	120
§6.2 ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა	127
§6.3 დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები	128
§6.4 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა	130
§6.5 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნა	131
თავი 7. ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავება უმცირესი კვადრატების მეთოდით	134
§7.1 უმცირესი კვადრატების მეთოდი	135
§7.2 პოლინომური დამოკიდებულების აგება	136
თავი 8. კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა MATLAB-ის გამოყენებით	141
§8.1 კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ფიზიკური კლასიფიკაცია	142
§8.2 ბადეთა მეთოდი და მისი რეალიზაცია MATLAB-ში	144
·	
§8.3 ბადეთა მეთოდის გამოყენება MATLAB-ში პარაბოლური განტოლებების ამოსახსნელად	145
§8.4 ბადეთა მეთოდის გამოყენება MATLAB-ში ჰიპერბოლური განტოლებების ამოსახსნელად	151
§8.5 ბადეთა მეთოდის გამოყენება MATLAB-ში ელიფსური განტოლებების ამოსახსნელად	154
თავი 9. . ელექტროდინამიკის გარდამავალი პროცესების აღწერის მათემატიკური მეთოდები და ზოგადი ალგორითმები	158
§9.1 არასტაციონარული დიფრაქციის ზოგადი ინტეგრო- დიფერენციალური განტოლებები	159
§9.2 კვლევის მეთოდები: სასრული სხვაობების მეთოდი	166
§9.3 იდეალურად შეთანხმებული ფენები სასრული სხვაობების მეთოდში	172
§9.4 დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი	175
§9.5 მომენტების (პროექციული) მეთოდი	177

§9.6 მომენტების (პროექციული) მეთოდი დროით არეში	178
§9.7 დროით არეში სასრული სხვაობებისა და კირხოფის კომბინ- ირებული მეთოდი ელექტროდინამიკის ამოცანებში	181
თავი 10. განმუხტვის არასტაციონარული პროცესის კომპიუტერული მოდელირება	189
§10.1 არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ზოგადი ფორმულირება	190
§10.2 არასტაციონარული განმუხტვის ამოცანის ფიზიკური დასმა	192
§10.3 ელექტროსტატიკის ამოცანა	197
§10.4 ბრუნვითი სხეულების არასტაციონარული განმუხტვა	201
თავი 11. არასტაციონარული ელექტრომაგნიტური ველებისაგან ელექტრონული აპარატურის იდეალურად გამტარი ეკრანებით ეკრანირება	212
§11.1 მართკუთხა განივკვეთის მქონე ცილინდრული ეკრანებით ელექტრომაგნიტური ველებისაგან ელექტრონული აპარატურის ეკრანირება	214
§11.2 განმუხტვისას გამოსხივებული რასტაციონარული ველების შელწევა მართკუთხა ეკრანებში	221
§11.3 ელექტრომაგნიტური ველების შელწევა აპერტურის მქონე წრიული განივკვეთის ეკრანებში	225
§11.4 სამგანზომილებიანი არასტაციონალური ველების მოდელირება სასრული სხვაობების მეთოდით	235
§11.5 სფეროიდის განმუხტვისას გამოსხივებული ველების შელწევა აპერტურის მქონე ყუთში	240
გამოყენებული ლიტერატურა	248
სარჩევი	251



გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 0186, ა. ჰოლიტაოვსკაიას №4. ☎: 5(99) 33 52 02, 5(99) 17 22 30
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com