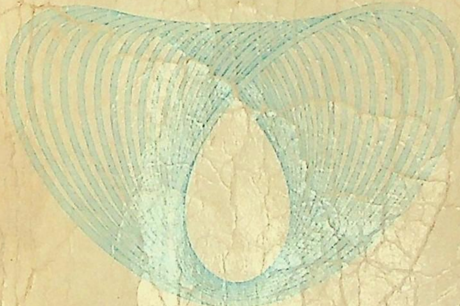
ლ. მძინარიშვილი, ა. დავითაძე,
გ. მჭედლიძე, გ. ჯავახიშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნაწილი II



თბილისი 2002

ლ. მძინარიშვილი, ა. დავითაძე,
გ. მჭედლიძე, გ. ჯავახიშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნაწილი II

რიცხვითი მიმდევრობისა და ფუნქციის ზღვართა თეორია, ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული და მისი გამოყენება, განუსაზღვრელი ინტეგრალი

საქართველოს რესპუბლიკის განათლების სამინისტრომ დაამტკიცა დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ლ. მძინარიშვილის რედაქციით

თბილისი 2002

წინამდებარე კრებული განკუთვნილია საქ. ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინერო და ეკონომიკური სპეციალობების სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე სხვა უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებსაც. კრებული შედგენილია უმაღლესი მათემატიკის მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს შემდეგ საკითხებს: რიცხვითი მიმდევრობისა და ფუნქციის ზღვარი, ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, განუსაზღვრელი ინტეგრალი. კრებულში შეტანილია ამოცანები, რომლებიც შეიცავენ მათემატიკური მოდელირების ელემენტებს. კრებულის თემატიკა ითვალისწინებს იმ ცვლილებებს სასწავლო პროგრამებში, რაც დაკავშირებულია სტუ-ში სწავლების ''მანჩესტერულ სისტემის'' დანერგვასთან.

რეცენზენტები:

1. საქ. მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის წამყვანი მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი **ვ. პაატაშვილი;**

2. საქ. ტექნიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის №3 კათედრის დოცენტი, ი. ბეჟუაშვილი.

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს ''უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებულის'' მეორე ნაწილს, რომელიც შედგენილია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში სწავლების მოქმედი ''მანჩესტერული სისტემის'' მიხედვით. მოიცავს შემდეგ საკითხებს: რიცხვითი მიმდევრობისა და ფუნქციის ზღვარი, ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული და მისი გამოყენება, განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

ყოველ პარაგრაფს წინ უძღვის თეორიული მასალა ძირითადი ცნებებისა და თვისებების სახით. ამ მასალას მოსდევს შესაბამისი ამოცანებისა და მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები მეთოდური მითითებებით და სავარჯიშო მაგალითები პასუხებით. კრებულს თან ერთვის მაგალითები და ამოცანები, რომლებიც გამიზნულია სემესტრის განმავლობაში საკონტროლო რეიტინგების ჩასატარებლად.

კრებული შედგენილია სტუ-ს საინჟინერო და ეკონომიკური სპეციალობების სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე სხვა უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

კრებულში შეტანილია ამოცანები, რომლებიც შეიცავენ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელირების ელემენტებს, რაც ავტორთა აზრით გამოუმუშავებს სტუდენტებს მათემატიკური აპარატის გამოყენების ჩვევებს შემდეგ სწავლებაში.

გვინდა აღვნიშნოთ გულისხმიერება და შრომატევადი სამუშაო კრებულის კომპიუტერული აწყობისას, რომელიც შეასრუ-

ლეს გამომცემლობა ''დარასის'' თანამშრომლებმა გ. დარასელიამ და მ. ფეიქრიშვილმა.

მადლობას ვუხდით სტუ-ს უმაღლესი მათემატიკის №3 კათედრის თანამშრომლებს იმ ხარვეზების მითითებისათვის, რომლებიც გამოვლინდა კრებულის წინა ნაწილის პრაქტიკული გამოყენებისას სასწავლო პროცესში და გათვალისწინებულ იქნა წინამდებარე კრებულში.

ავტორები გულწრფელ მადლობას უხდიან რეცენზენტებს: საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის წამყვან მეცნიერ-თანამშრომელს, პროფესორ ვ. პაატაშვილს და სტუ-ს უმაღლესი მათემატიკის №3 კათედრის დოცენტს ი. ბეჟუაშვილს.

განსაკუთრებულ პატივისცემას და მადლიერებას გამოვხატავთ საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის რექტორის, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტის რ. ხუროძის მიმართ ყოველმხრივი მხარდაჭერისათვის.

ავტორები

§1. ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია

ვთქვათ მოცემული გვაქვს X სიმრავლე. თუ ამ სიმრავლის ყოველ x ელემენტს რაიმე f წესით შეესაბამება Y სიმრავლის ერთი გარკვეული y ელემენტი, მაშინ ვიტყვით, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია f ფუნქცია, რომელსაც ასე ჩავწერთ $f: X \to Y$. $D(f)=X$ სიმრავლეს ეწოდება f ფუნქციის განსაზღვრის არე, ხოლო $E(f)=\{y \in Y \mid y=f(x), x \in X\}$-ს – მნიშვნელობათა სიმრავლე. თუ f ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლებია ან მათ ქვესიმრავლეები, მაშინ ფუნქციას ეწოდება ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია.

f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება xOy სიბრტყის ყველა იმ $(x;y)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y=f(x),\ x \in D(f)$ შესაბამისობას.

ფუნქცია მოიცემა ძირითადად ანალიზური სახით, გრაფიკული სახით და ცხრილების საშუალებით.

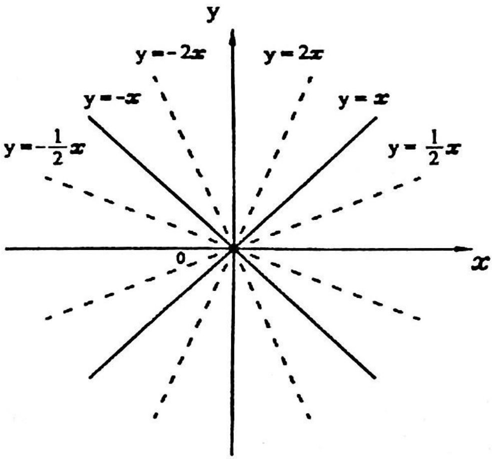
ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$.

ამ ფუნქციების gf კომპოზიცია, ანუ რთული ფუნქცია ეწოდება $\mathrm{h}: X \to Z$ ფუნქციას, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი წესით $\mathrm{h}(x)=g(f(x)), x \in X$.

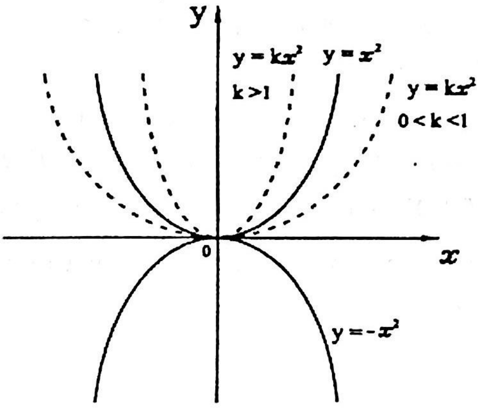
ვთქვათ $f: X \to Y$ ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$ რიცხვებისათვის $f(x_1) \neq f(x_2)$ და $E(f)=Y$, მაშინ არსებობს $f^{-1}: Y \to X$ ფუნქცია, რომელსაც ეწოდება f ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და განისაზღვრება შემდეგი წესით $f^{-1}(y)=x$, თუ $f(x)=y$.

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გრაფიკი

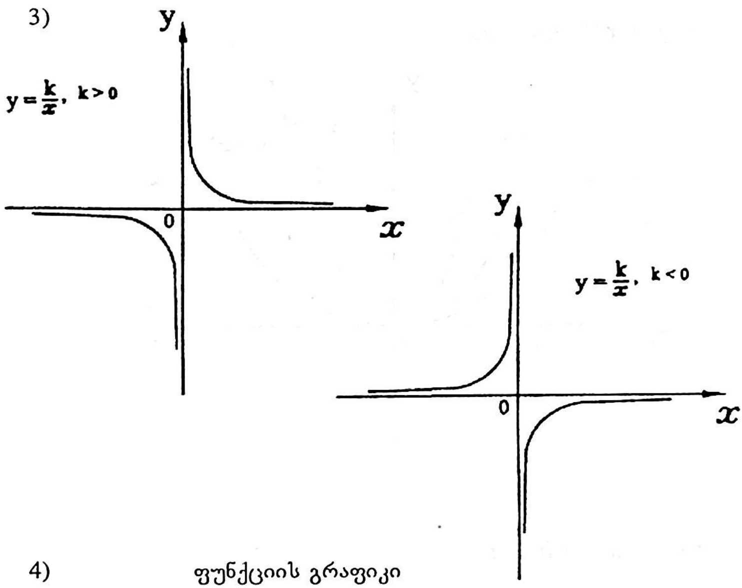
1) წრფივი ფუნქცია



2) კვადრატული ფუნქცია

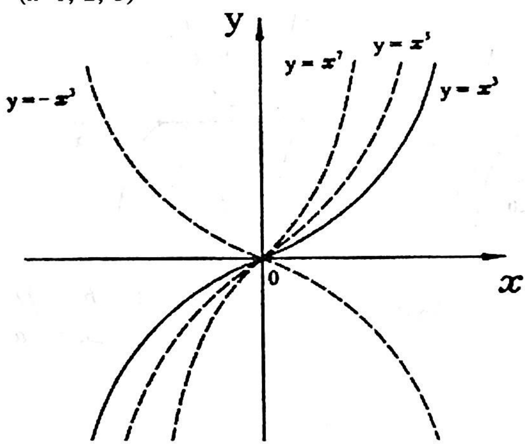


3)

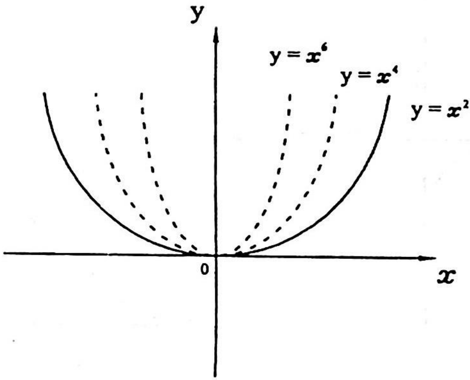


4) ფუნქციის გრაფიკი

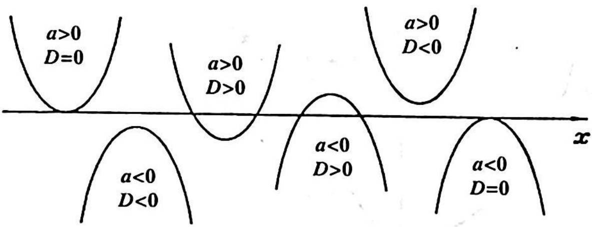
(n=1; 2; 3)



5) $y = x^{2n}$ ფუნქცია



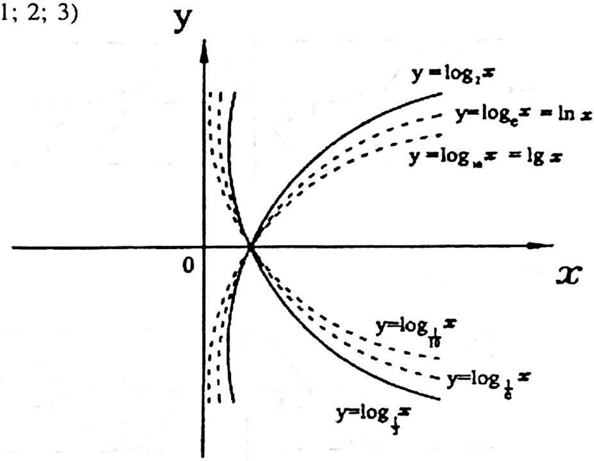
6) $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია.



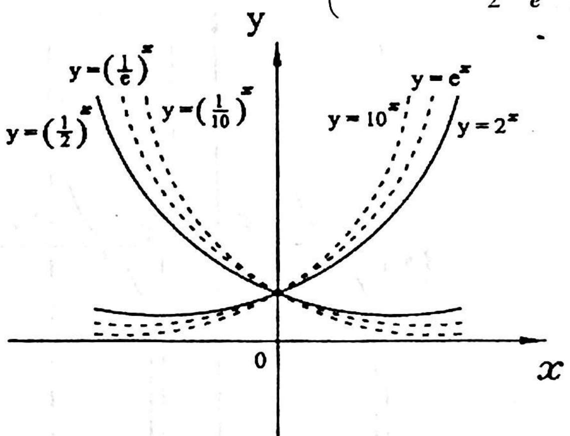
ფუნქციის გრაფიკის წვეროს კოორდინატებია $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$,

$D = b^2 - 4ac$.

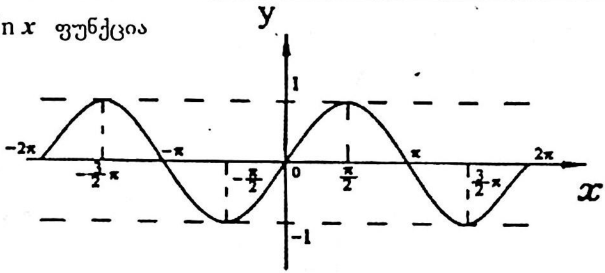
7) $y = \log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი
(n=1; 2; 3)



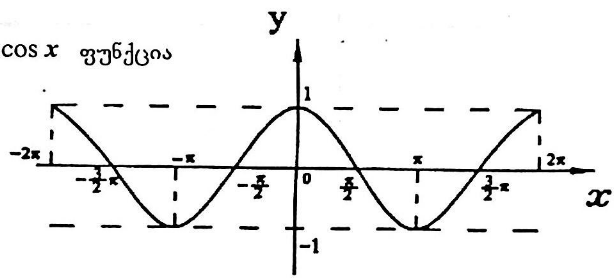
8) $y = a^x$ ფუნქციის გრაფიკი $\left(a = 2,\ e,\ 10, \frac{1}{2},\ \frac{1}{e},\ \frac{1}{10}\right)$.



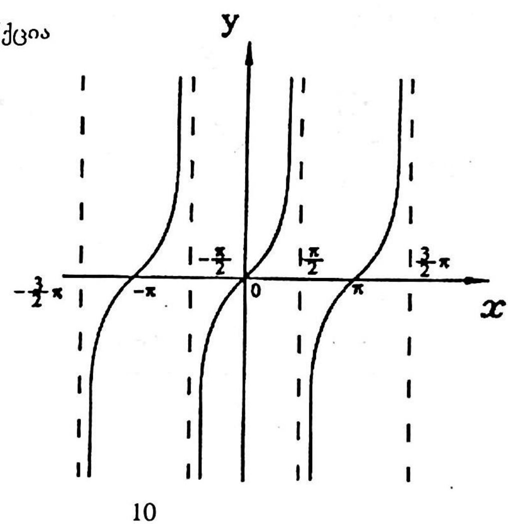
9) $y = \sin x$ ფუნქცია



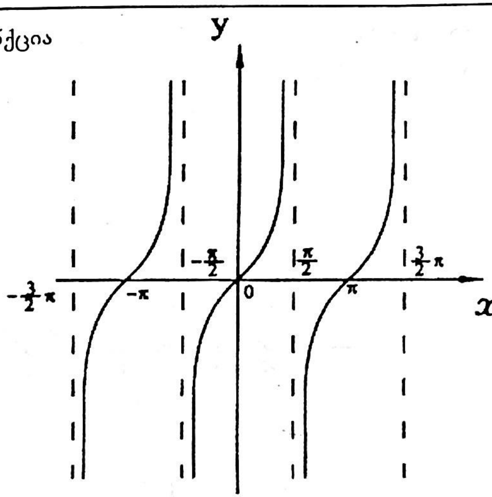
10) $y = \cos x$ ფუნქცია



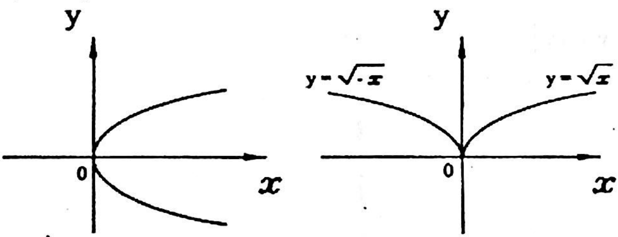
11) $y = tgx$ ფუნქცია



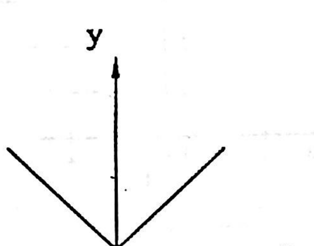
12) $y = tgx$ ფუნქცია



13) $x = y^2$

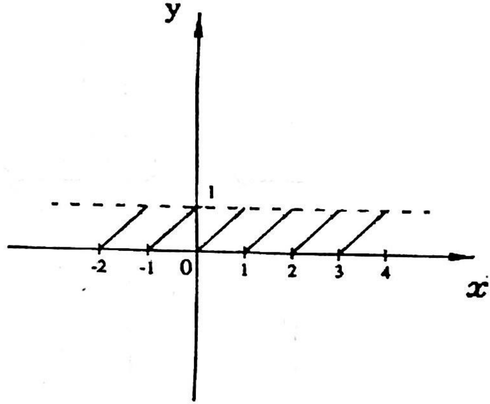


14) $y = |x|$



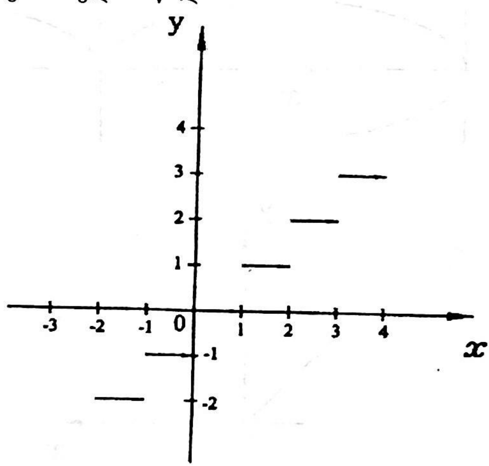
15) $y=\{x\}$

x - რიცხვის წილადური ნაწილი



16) $y=[x]$

x - რიცხვის მთელი ნაწილი



მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ *f(1), f(-2)* და *f(3)*, თუ ა) $f(x)=x^3-2x+1$;

ბ) $f(x)=\dfrac{10}{x-3}$; გ) $f(x)=2^{1-x}+\log_2(2-x)$.

ამოხსნა. ა) როცა $x=1$, მაშინ $f(1)=1^3-2\cdot1+1=0$;

როცა $x=-2$, მაშინ $f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)+1=-3$;

როცა $x=3$, მაშინ $f(3)=3^3-2\cdot3+1=22$.

ბ) $f(1)=\dfrac{10}{1-3}=-5$; $f(-2)=\dfrac{10}{-2-3}=-2$; $f(3)$ არ არსებობს, რადგან $3\notin D(f)$.

გ) $f(1)=2^{1-1}+\lg_2(2-1)=1$; $f(-2)=2^3+\log_2(2+2)=10$; $f(3)$ არ არსებობს, რადგან $\log_2(2-x)$-თვის $3\notin D(f)$.

2. ვიპოვოთ $f(-3)$, $f(0)$ და $f(2)$, თუ $f(x)=\begin{cases}x^2+2, -\infty\le x\le0,\\ 3^x, 0<x<+\infty.\end{cases}$

ამოხსნა. როცა $x=-3$, მაშინ $f(-3)=(-3)^2+2=11$;

როცა $x=0$, $f(0)=0^2+2=2$, ხოლო როცა $x=2$, $f(2)=3^2=9$.

3. ვიპოვოთ: ა) $y=3x-4$; ბ) $y=10^x+1$; გ) $y=x^2-6x$, $x\ge3$; დ) $y=x^2-6x$, $x\le2$ ფუნქციების შექცეული ფუნქციები და მათი განსაზღვრის არეები.

ამოხსნა. ა) $y=3x-4\Rightarrow x=\dfrac{y+4}{3}, y\in(-\infty;+\infty)$;

ბ) $y=10^x+1\Rightarrow 10^x=y-1\Rightarrow x=\lg(y-1), y\in(1;+\infty)$;

გ) $y=x^2-6x, x\ge3\Rightarrow y+9=x^2-6x+9\Rightarrow y+9=(x-3)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=3+\sqrt{y+9}, y\in[-9;+\infty)$;

დ) $y = x^2 - 6x, x \le 2 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{y+9}, y \in [-8;+\infty)$.

4. შევადგინოთ $f(g(y))$ და $g(f(x))$ რთული ფუნქციები და ვიპოვოთ მათი განსაზღვრის არეები.

ა) $f(x) = x^4,\ g(y) = \sqrt[4]{y}$;

ბ) $f(x) = \lg x, g(y) = \sin y$;

გ) $f(x) = \lg x, g(y) = \sin y - 1$.

ამოხსნა. ა) $f(g(y)) = f(\sqrt[4]{y}) = (\sqrt[4]{y})^4 = y, y \in [0;+\infty)$;

$$g(f(x)) = g(x^4) = \sqrt[4]{x^4} = |x|,\ x \in (-\infty,+\infty).$$

ბ) $f(g(y)) = \lg \sin y, y \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$;

$g(f(x)) = \sin \lg x, x \in (0;+\infty)$.

გ) $f(g(y)) = \lg(\sin y - 1)$. ეს ფუნქცია არ არსებობს, რადგან $\sin y - 1 \le 0, y \in (-\infty;+\infty)$.

$g(f(x)) = \sin \lg x - 1, x \in (0;+\infty)$.

5. ამოვწეროთ მოცემული რთული ფუნქციების შემადგენელი ელემენტარული ფუნქციები

ა) $y = (10x^2 - 4x + 3)^3$; ბ) $y = \sqrt[6]{\sin 6x}$; გ) $y = \lg \cos (x^2 + 4)^5$.

ამოხსნა. ა) $u = 10x^2 - 4x + 3, y = u^3$;

ბ) $u = 6x, v = \sin u, y = \sqrt[6]{v}$;

გ) $u = x^2 + 4, v = u^5, w = \cos v, y = \lg w$.

ვიპოვოთ შემდეგ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები

6. $y = \sqrt{2 - x}$.

ამოხსნა. ფუნქციის განსაზღვრის არის მოსაძებნად ამოვხსნათ უტოლობა $2 - x \ge 0$, განსაზღვრის არეა $(-\infty;2]$ სიმრავლე.

7. $y = \dfrac{x}{x-2}$.

ამოხსნა. ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, განსაზღვრის არეა $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$.

ამოხსნა. ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ $3x-12 > 0 \Rightarrow x > 4$ განსაზღვრის არეა $(4;+\infty)$.

9. $y = \lg(x^2-1)$.

ამოხსნა. ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ $x^2-1>0 \Rightarrow x<-1; x>1$, განსაზღვრის არეა $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

10. $y = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x-1}}$.

ამოხსნა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ x-1>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x>1. \end{cases} \Rightarrow x \in (1;2].$$

11. $y = \lg(x^2-5x+4) + \sqrt{25-x^2}$.

ამოხსნა. ფუნქციის განსაზღვრის არე რომ ვიპოვოთ, ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x^2-5x+4>0, \\ 25-x^2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1; x>4, \\ -5 \leq x \leq 5. \end{cases} \Rightarrow x \in [-5;1) \cup (4;5].$$

მაგალითები

1.1. იპოვეთ $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ და $f(-3)$, თუ $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$.

1.2. იპოვეთ $f(0)$, $f\left(\sqrt{5}\right)$ და $f\left(2\sqrt{3}\right)$, თუ $f(x)=\sqrt{4+x^2}$.

1.3. იპოვეთ $f(\lg 2)$, $f(2\lg 3)$, $f(0)$ და $f(-2)$, თუ

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2, -\infty<x\le 0,\\ 10^x, 0<x<+\infty.\end{cases}$$

1.4. იპოვეთ $f(-3)$, $f(-\log_2 3)$, $f(0)$ და $f(4)$, თუ

$$f(x)=\begin{cases}2^x, -\infty<x\le 0,\\ \sqrt{x}, 0<x<+\infty.\end{cases}$$

იპოვეთ მოცემული ფუნქციათა შექცეული ფუნქციები და მათი განსაზღვრის არეები.

1.5. $y=5x+2$. **1.6.** $y=arctg\,\dfrac{x}{3}$. **1.7.** $y=2^{x-3}$.

1.8. $y=x^2-8x, x\ge 5$. **1.9.** $y=x^2+3x, x\le -2$.

1.10. $y=x^2-5x, x\le 2$. **1.11.** $y=x^2+10x, x\ge 2$.

1.12. $y=\sin x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. **1.13.** $y=\sin x, x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1.14. $y=\cos^2 x, x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. **1.15.** $y=\begin{cases}x/2, & x\in(-\infty;0],\\ 4x, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$

1.16. $y=\begin{cases}2x-1, & x\in\left(-\infty;1/2\right],\\ x/3, & x\in(1/2;+\infty).\end{cases}$

იპოვეთ რთული ფუნქციები $f(g(y))$, $g(f(x))$ და დაადგინეთ მათი განსაზღვრის არეები.

1.17. $f(x)=x^2, g(y)=\sqrt{y}$. **1.18.** $f(x)=4-x, g(y)=y^2$.

1.19. $f(x)=10^{3x}, g(y)=\lg y$.

1.20. $f(x)=\sin x,\ x\in[-\pi;\pi],\ g(y)=\arcsin y$.

1.21. ა) $f(x)=\sqrt{x}, g(y)=\lg\cos y$;

ბ) $f(x)=\sqrt{x}, g(y)=\sin\sqrt{y}$;

გ) $f(x)=\lg x, g(y)=\cos y-1$.

1.22. $f(x)=\begin{cases}0, x\in(-\infty;0],\\ x, x\in(0;+\infty).\end{cases}$ $g(y)=\begin{cases}0, y\in(-\infty;0],\\ -y^2, y\in(0;+\infty)\end{cases}$.

ამოწერეთ მოცემული რთული ფუნქციის შემადგენელი ელემენტარული ფუნქციები.

1.23. $y=(5x+7)^6$. **1.24.** $y=3^{\sin x}$. **1.25.** $y=\cos^2 x$.

1.26. $y=tg5x$. **1.27.** $y=\lg^3(x+5)$. **1.28.** $y=2^{\cos 4x}$.

1.29. $y=ctg\sqrt[5]{(3x^2+1)^2}$. **1.30.** $y=\sqrt[9]{\sin^4(x^3+3x)}$.

1.31. $y=\sqrt[10]{\arcsin^3(4x-1)^2}$. **1.32.** $y=\lg tg\sqrt{4x-1}$.

1.33. $y=\sqrt{arctg\dfrac{\sin 3x}{3}}$. **1.34.** $y=\arccos^8\left(5^{-x^3}\right)$.

იპოვეთ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები.

1.35. $y=\sqrt{x+1}$. **1.36.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. **1.37.** $y=\sqrt{x^2-2}$.

1.38. $y=\sqrt{8-x^2}$. **1.39.** $y=\lg(4x-1)$.

1.40. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$. **1.41.** $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-1}$.

1.42. $y=\log_2(7-x)+\sqrt{x^2-3}$. **1.43.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x-1}+\lg(5-x^2)$.

1.44. $y=\sqrt{x^2-9}+\dfrac{x}{x-4}$. **1.45.** $y=\sqrt{x^2-12}+\dfrac{\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt{16-x^2}}$.

1.46. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}+\lg\left(8-2x-x^2\right)$.

1.47. $y=\lg\dfrac{3-x}{x+2}+\sqrt{10-3x-x^2}$.

1.48. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{7x-2x^2-3}}$.

1.49. $y=\sqrt{x^3-4x}+\lg\left(4+3x-x^3\right)$.

1.50. $y=\sqrt{3x-x^3}+\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$.

1.51. $y=\sqrt{x^2-6}+\sqrt{x+3}$.

პასუხები

1.1. $-\frac{2}{3}$; 0; $\frac{1}{6}$; არ არსებობს. **1.2.** 2; 3; 4. **1.3.** 2; 9; 4; 0.

1.4. $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$; 1; 2. **1.5.** $x=\dfrac{y-2}{5}$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

1.6. $x = 3tgy,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. **1.7.** $x = 3 + \log_2 y,\ y \in (0;+\infty)$.

1.8. $x = 4 + \sqrt{y+16},\ y \in [-15;+\infty)$.

1.9. $x = (-3 - \sqrt{4y+9})/2,\ y \in [-2;+\infty)$.

1.10. $x = \left(5 - \sqrt{4y+25}\right)/2,\ y \in [-6;+\infty)$.

1.11. $x = -5 + \sqrt{y+25},\ y \in [24;+\infty)$.

1.12. $x = \arcsin y,\ y \in [-1;1]$. **1.13.** $x = \pi + \arcsin y,\ y \in [-1;1]$.

1.14. $x = \frac{1}{2}\arccos(2y-1),\ y \in [0;1]$.

1.15. $x = \begin{cases} 2y, & y \le 0, \\ y/4, & y > 0. \end{cases}$ **1.16.** $x = \begin{cases} (y+1)/2, & y \le 0, \\ 3y, & y > \frac{1}{6}. \end{cases}$

1.17. $f(g(y)) = y,\ y \in [0;+\infty),\ g(f(x)) = |x|,\ x \in (-\infty;+\infty)$.

1.18. $f(g(y)) = 4 - y^2,\ y \in (-\infty;+\infty),\ g(f(x)) = (4-x)^2,\ x \in (-\infty;+\infty)$.

1.19. $f(g(y)) = y^3,\ y \in (0;+\infty),\ g(f(x)) = 3x$.

1.20. $f(g(y)) = y,\ y \in [-1;1],\ g(f(x)) = \begin{cases} -x-\pi, & x \in \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right), \\ x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ -x+\pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]. \end{cases}$

1.21. ა) $f(g(y))=\sqrt{\lg\cos y}$, $y=2\pi k, k\in Z$;

$$g(f(x))=\lg\cos\sqrt{x},\ x\in\left[4\pi^2k^2;\frac{\pi^2}{4}(4k+1)^2\right),\ k=0,1,2,\ldots .$$

ბ) $f(g(y))=\sqrt{\sin\sqrt{y}}$, $y\in\left[4\pi^2k^2;\pi^2(2k+1)^2\right]$, $k=0,1,2,\ldots$;

$g(f(x))=\sin\sqrt[4]{x}$, $[0;+\infty)$.

გ) $f(g(y))=\lg(\cos y-1)$ არ არსებობს;

$g(f(x))=\cos\lg x-1$, $(0;+\infty)$.

1.22. $f(g(y))=0$, $g(f(x))=g(x)$. **1.23.** $u=5x+7, y=u^6$.

1.24. $u=\sin x, y=3^u$. **1.25.** $u=\cos x, y=u^2$.

1.26. $u=5x, y=tgu$. **1.27.** $v=x+5, u=\lg u, y=u^3$.

1.28. $v=4x, u=\cos v, y=2^u$. **1.29.** $v=3x^2+1, u=\sqrt[5]{v^2}, y=ctgu$.

1.30. $v=x^3+3x, u=\sin v, y=\sqrt[9]{u^4}$.

1.31. $w=4x-1, v=w^2, u=\arcsin v, y=\sqrt[10]{u^3}$.

1.32. $w=4x-1, v=\sqrt{w}, u=tgv, y=\lg u$.

1.33. $w=3x, v=\dfrac{\sin w}{3}, u=arctgv, y=\sqrt{u}$.

1.34. $w=-x^3, v=5^w, u=\arccos v, y=u^8$.

1.35. $[-1;+\infty)$. **1.36.** $(1;+\infty)$. **1.37.** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$.

1.38. $[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]$. **1.39.** $(1/4;+\infty)$. **1.40.** $[3;5)$.

1.41. $(-3;-1]\cup[1;+\infty)$. **1.42.** $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};7)$.

1.43. $(-\sqrt{5};1]\cup[1;\sqrt{5})$. **1.44.** $(-\infty;-3]\cup[3;4)\cup(4;+\infty)$.

1.45. $(-4;-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3};4)$. **1.46.** $(-4;-3)\cup[1;2)$.

1.47. $(-2;2]$. **1.48.** $(1/2;1]\cup[2;3)$. **1.49.** $(-1;0]\cup[2;4)$.

1.50. $[-2;-\sqrt{3}]\cup[0;1)$. **1.51.** $[-3;-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6};+\infty)$.

§2. რიცხვითი მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ $y=f(n), n\in N$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობა. ამ შემთხვევაში $E(f)=\{f(1), f(2),\dots,f(n),\dots\}$. თუ აღვნიშნავთ $a_n=f(n)$, გვექნება $f:n\to a_n$. რიცხვით მიმდევრობას აღნიშნავენ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ან (a_n).

a რიცხვს ეწოდება (a_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n_0, რომ, როცა $n>n_0$ სრულდება უტოლობა $|a_n-a|<\varepsilon$. მიმდევრობის ზღვარი აღინიშნება შემდეგნაირად $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრება ლოგიკური სიმბოლოებით ($\forall$ -ყოველი, $\exists$ -არსებობა, $\Leftrightarrow$ -ექვივალენტობა, $\Rightarrow$ -გამომდინარეობს) ასე ჩაიწერება

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0 \forall n>n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon.$$

ვიტყვით, რომ a_n მიმდევრობის ზღვარია ∞, რომელსაც ასე აღნიშ-

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{1+2+3+\ldots+n}$.

წილადის მნიშვნელი წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, ამიტომ $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$. შევიტანოთ იგი წილადის მნიშვნელში და გამოვთვალოთ ზღვარი. გვექნება

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{\dfrac{n^2+n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+5/n^2}{1+1/n}=2\cdot\frac{1+0}{1+0}=2.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!((n+2)(n+3)-1)}{(n+1)!((n+2)(n+3)+1)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+2/n)(1+3/n)-1/n^2]}{[(1+2/n)(1+3/n)+1/n^2]}=\frac{(1+0)(1+0)-0}{(1+0)(1+0)+0}=1.$$

5. $$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+2-n^2+2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{1+2/n^2}+\sqrt{1-2/n^2})}=2.$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\\=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)\end{array}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}.$$

მაგალითები

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{3n^2+n-3}$. **2.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^3-4n}$. **2.3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-4n+1}{n^4-1}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{n-1}$. **2.5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n}$. **2.6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n^4-1}$.

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4}{n^2+2n-1}$. **2.8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-1}{4n^2+3n-2}$. **2.9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n-1}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+2}{3n^2+1}$. **2.11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+4)!+(n+2)!}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+3)!-(n+2)!}{3(n+3)!+(n+2)!}$. **2.13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}\right)$. **2.15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+3n-1}$. **2.17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n}-5}{2+5+8+\ldots+(3n-1)}$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$. **2.19.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)n}\right)$.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{n^2-7}-\sqrt{n^2-15}\right)$ **2.23.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+4n^2}-\sqrt{1-8n+4n^2}\right)$

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n(n^3-6)}-\sqrt{n^4-4}\right)$ **2.25.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{7+n^2}-\sqrt{2n+n^2+1}\right)$

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{5+n^2}\right)$ **2.27.** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2-5}\right)$

პასუხები

2.1. 0. **2.2.** 0. **2.3.** 0. **2.4.** 3. **2.5.** 2/5. **2.6.** 2. **2.7.** 3. **2.8.** 1. **2.9.** 1/2. **2.10.** 1. **2.11.** 1. **2.12.** 2/3. **2.13.** 1/3. **2.14.** 1/4. **2.15.** 1/2. **2.16.** 1/2. **2.17.** 2/3. **2.18.** 0. **2.19.** 1. **2.20.** 1/2. **2.21.** 1/3. **2.22.** 4. **2.23.** 2. **2.24.** -3. **2.25.** -1. **2.26.** 5/2. **2.27.** 1.

§3. ფუნქციის ზღვარი

a რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon>0$-თვის არსებობს ისეთი რიცხვი $\delta>0$, რომ ყველა იმ $x\in D(f)$-თვის, რომლებისთვისაც $0<|x-x_0|<\delta$, სრულდება უტოლობა $|f(x)-a|<\varepsilon$.

თუ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის a-ს ტოლი, მაშინ ფუნქციის ზღვარი აღინიშნება ასე $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში ლოგიკური სიმბოლოებით ასე ჩაიწერება

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in D(f), 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის ∞ და მას ასე ჩავწერთ

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, თუ $\forall M>0, \exists\delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში მარცხნიდან (მარჯვნიდან) არის a რიცხვი, თუ $\forall\varepsilon>0$-თვის $\exists\delta>0$, რომ $\forall x\in D(f)$-თვის, რომლებისთვისაც $-\delta<x-x_0<0$ $(0<x-x_0<\delta)$ სრულდება უტოლობა $|f(x)-a|<\varepsilon$. მათ ეწოდებათ ცალმხრივი ზღვრები, რომელთაც შესაბამისად ასე აღვნიშნავთ

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a\right).$$

ფუნქციის ზღვარი $+\infty$-ში ასე განისაზღვრება

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x>\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

ფუნქციის ზღვარი $-\infty$ -ში ასე

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x<-\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$,

ხოლო ზღვარი ∞-ში ასე

$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, |x|>\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

$\alpha(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე (უსასრულოდ დიდი) x_0 წერტილში, თუ $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $\left(\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\infty\right)$.

თუ $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ და x_0 წერტილს რაიმე მიდამოში $f(x)>0$, ($f(x)<0$) მაშინ მას ასე წერენ $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)$.

თუ ფუნქციებს გააჩნიათ ზღვრები, როცა $x\to x_0$, $x\to x_0\pm0$, $x\to\pm\infty$, მაშინ მათი თვისებები ანალოგიურია (2.1) ფორმულებისა.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის საფუძველზე დავამტკიცოთ, რომ

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$, 2. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{6-x}=2$ და ვიპოვოთ δ.

1. ნებისმიერი $\varepsilon>0$ -სთვის განვიხილოთ უტოლობა

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x-1}+1\right|<\varepsilon$$

და ამოვხსნათ იგი. გვექნება

$$\left|\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}+1\right|=|x-2+1|=|x-1|<\varepsilon$$

ე.ი. $\delta=\varepsilon$ და მაშასადამე პირველი ტოლობა დამტკიცებულია.

2. აქაც ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის ამოვხსნათ უტოლობა

$$\left|\sqrt{6-x}-2\right|<\varepsilon.$$

გვექნება

$$|\sqrt{6-x}-2|<\varepsilon\Rightarrow 2-\varepsilon<\sqrt{6-x}<\varepsilon+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-6>-(\varepsilon+2)^2,\\ x-6<-(2-\varepsilon)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2>-(\varepsilon^2+4\varepsilon),\\ x-2<4\varepsilon-\varepsilon^2.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\text{რადგან } 4\varepsilon-\varepsilon^2<4\varepsilon+\varepsilon^2|\Rightarrow|x-2|<\varepsilon^2+4\varepsilon.$$

ამგვარად, მეორე ტოლობა დამტკიცებულია,
$\delta=\varepsilon^2+4\varepsilon$.

გამოვთვალოთ ზღვრები

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)}=\dfrac{0}{3}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+5)}=\dfrac{5}{6}$. **5.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$.

როცა მოცემული წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ზღვრები ნულის ტოლია (გვაქვს 0/0 სახის განუსაზღვრელობა), ამიტომ ამ ზღვრის გამოსათვლელად საჭიროა შევკვეცოთ ისინი ($x+1$)-ზე და გამოვთვალოთ მიღებული წილადის ზღვარი.

გვექნება

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)}=\frac{-4}{-2}=2.$$

6. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x+4}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x-3+7}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+0}\left(1+\dfrac{7}{x-3}\right)=$

$$=1+7\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty.$$

7. $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{x-3+8}{x-3}=1+8\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x-3}=-\infty.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x}$

ამ შემთხვევაში გვაქვს ∞/∞ სახის განუსაზღვრელობა. გავყოთ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი x^2-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა თვისების თანახმად გვექნება

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-3/x+1/x^2}{3+4/x}=\frac{2-3\lim\limits_{x\to\infty}1/x+\lim\limits_{x\to\infty}1/x^2}{3+4\lim\limits_{x\to\infty}1/x}=\frac{2-3\cdot 0+0}{3+4\cdot 0}=\frac{2}{3}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3})=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+3-x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x(\sqrt{1+3/x^2}+\sqrt{1-3/x^2})}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{6}{2}=3.$$

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{6+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x^2-4x+3}-\dfrac{1}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-x+1}{(x-1)(x-3)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

მაგალითები

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები

3.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+3}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{x-3}$. **3.3.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{x-3}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. 3.5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$. 3.7. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-8x+12}{2x^2-5x+2}$. 3.9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{2x-7}$. 3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{5x+1}$. 3.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x}{2x^2+5x-1}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x^2+3}{4x^3-5x}$. 3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+2}{x^4+2x^2}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-1}{3x^2+x+2}$. 3.16. $\lim\limits_{x\to81}\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$. 3.17. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$. 3.19. $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$. 3.20. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-1}-2}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\sqrt{x-3}-3}{2x-24}$. 3.22. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{12-x}-3}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+15}-4}$. 3.24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{25+x}-5}{\sqrt{x+4}-2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+3x+2}$. 3.26. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

3.27. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$. 3.28. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

3.29. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$. 3.30. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3})=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+3-x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x(\sqrt{1+3/x^2}+\sqrt{1-3/x^2})}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{6}{2}=3.$$

10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{6+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

11. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2}{x^2-4x+3}-\dfrac{1}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2-x+1}{(x-1)(x-3)}=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

მაგალითები

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები

3.1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x+3}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x+2}{x-3}$. **3.3.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+4}{x-3}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. **3.5.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$. **3.7.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{2x^2-5x+2}$. **3.9.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x+3}{2x-7}$. **3.11.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{5x+1}$. **3.12.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x}{2x^2+5x-1}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3-4x^2+3}{4x^3-5x}$. **3.14.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-5x^3+2}{x^4+2x^2}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9x^2-1}{3x^2+x+2}$. **3.16.** $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$. **3.19.** $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{x-11}$. **3.20.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-1}-2}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt{x-3}-3}{2x-24}$. **3.22.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{12-x}-3}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+15}-4}$. **3.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x}-5}{\sqrt{x+4}-2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+3x+2}$. **3.26.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$. **3.28.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

3.29. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$. **3.30.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}\right)$.

3.31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^2+x-2}-\frac{1}{x-1}\right)$. **3.32.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{5}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}\right)$.

3.33. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+4}-x)$. **3.34.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$.

3.35. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+3}-x)$. **3.36.** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3-4})$.

3.37. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-3})$. **3.38.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4})$.

3.39. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3-4}-\sqrt{x^3-7})$.

პასუხები

3.1. 0. **3.2.** 6. **3.3.** ∞. **3.4.** -1/2. **3.5.** -1. **3.6.** 3. **3.7.** 0. **3.8.** -4/3. **3.9.** 2. **3.10.** 2. **3.11.** 2. **3.12.** 3/2. **3.13.** 2. **3.14.** 3. **3.15.** 3. **3.16.** 6. **3.17.** 4. **3.18.** 4. **3.19.** 1/6. **3.20.** 16. **3.21.** 1/12. **3.22.** -3/2. **3.23.** 4/3. **3.24.** 2/5. **3.25.** -1/2. **3.26.** -1. **3.27.** -1/4. **3.28.** 1/2. **3.29.** -1/6. **3.30.** -1/4. **3.31.** -1/3. **3.32.** 1. **3.33.** 2. **3.34.** 2. **3.35.** 3/2. **3.36.** 4. **3.37.** 0; **3.38.** 0. **3.39.** 0.

§4. უწყვეტი ფუნქციები. წყვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილში;

2. x_0 წერტილში არსებობენ ფუნქციის სასრული ცალმხრივი ზღვრები;

3. ცალმხრივი ზღვრები ტოლია

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=C$;

4. $C=f(x_0)$

თუ ამ პირობებიდან დარღვეულია ერთი მაინც, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება წყვეტილი x_0 წერტილში.

x_0 წერტილს ეწოდება აცილებადი წყვეტის წერტილი, თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C$, მაგრამ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული x_0 წერტილში (დარღვეულია 1-ლი პირობა) ან $f(x_0)\neq C$ (დარღვეულია მე-4 პირობა).

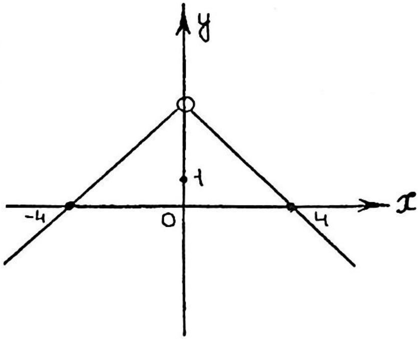
x_0 წერტილს ეწოდება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, თუ არსებობს ორივე ცალმხრივი ზღვარი, მაგრამ ერთმანეთის ტოლი არ არის (დარღვეულია მე-3 პირობა).

x_0 წერტილს ეწოდება მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ ერთი მაინც ცალმხრივი ზღვარი ან არ არსებობს ანდა უსასრულობის ტოლია (დარღვეულია მე-2 პირობა).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

ვიპოვოთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები, დავადგინოთ მათი გვარობა და ავაგოთ ნახაზი.

1. $$f(x)=\begin{cases} x+4, x<0, \\ 1, \quad x=0, \\ 4-x, x>0. \end{cases}$$



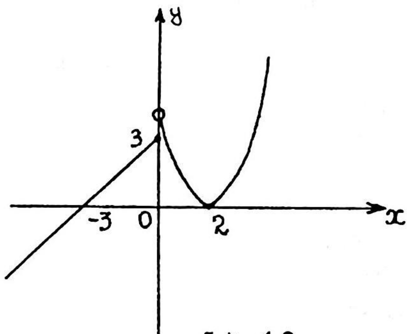
ნახ. 4.1.

ამ შემთხვევაში

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=4,$$

ხოლო $f(0)=1$, ე.ი. $x=1$ არის აცილებადი წყვეტის წერტილი. თუ ჩვენ $f(x)$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში მივანიჭებთ მნიშვნელობას $f(0)=4$, მაშინ მოცემული ფუნქცია გახდება უწყვეტი.

2. $$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ (x-2)^2, & x>0. \end{cases}$$



ნახ. 4.2.

ამ შემთხვევაში

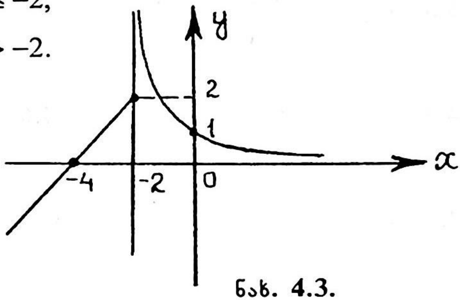
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)=3,$$

ხოლო

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x-2)^2=4$$

ე.ი. დარღვეულია მე-3 პირობა. მაშასადამე, $x=0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

3. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -2, \\ \dfrac{2}{x+2}, & x>-2. \end{cases}$



ნახ. **4.3.**

ამ შემთხვევაში

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) =$

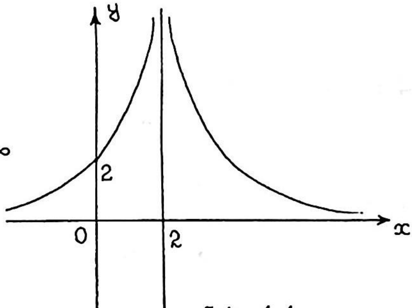
$= \lim\limits_{x\to -2-0} (x+4) = 2$,

ხოლო

$\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{2}{x+2} = +\infty$ ე.ი. დარღვეულია მე-2 პირობა,

მაშასადამე $x=-2$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

4. $f(x)=\dfrac{1}{|x-2|}$



ნახ. **4.4.**

ამ შემთხვევაში

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = +\infty$

ე.ი. დარღვეულია მე-2 პირობა, მაშასადამე $x=2$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

მაგალითები

იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები, დაადგინეთ მათი გვარობა და ააგეთ ნახაზი.

4.1. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x<0; \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$

4.2. $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x\le -1; \\ 1, & x>-1. \end{cases}$

4.3. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 1; \\ 3-x, & x>1. \end{cases}$

4.4. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>-1; \\ x+2, & x\le -1. \end{cases}$

4.5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x>1; \\ x+1, & x\le 1. \end{cases}$

4.6. $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & x\le 2; \\ 5-x, & x>2. \end{cases}$

4.7. $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x>2; \\ -x-1, & x\le 2. \end{cases}$

4.8. $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x>0; \\ x+2, & x\le 0. \end{cases}$

4.9. $f(x)=\begin{cases} 3+x, & x<-1; \\ -x^2, & x\ge -1. \end{cases}$

4.10. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ -\sqrt{x}, & x>0. \end{cases}$

4.11. $f(x)=\begin{cases} x+5, & x\le -3; \\ \dfrac{4}{x+3}, & x>-3. \end{cases}$

4.12. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-2}, & x<2; \\ x-5, & x\ge 2. \end{cases}$

4.13. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x\le -4; \\ x+4, & x>-4. \end{cases}$

4.14. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0; \\ x-2, & x>0. \end{cases}$

4.15. $f(x)=\begin{cases} x+5, & x<0; \\ 2, & x=0; \\ 5-x, & x>0. \end{cases}$

4.16. $f(x)=\begin{cases} -x-3, & x<0; \\ 1, & x=0; \\ x-3, & x>0. \end{cases}$

4.17. $f(x)=\begin{cases} x, & x<2; \\ 0, & x=2; \\ 4-x, & x>2. \end{cases}$

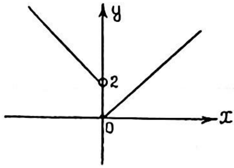
4.18. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ 2, & x=0; \\ 1-x, & x>0. \end{cases}$

4.19. $f(x)=\begin{cases} x+5, & x\le -3; \\ \dfrac{6}{x+3}, & x>-3. \end{cases}$

4.20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-2}, & x<2; \\ 6-2x, & x\ge 2. \end{cases}$

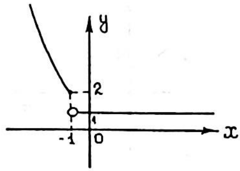
პასუხები

4.1.



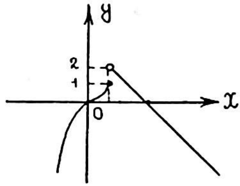
$x=0$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.2.



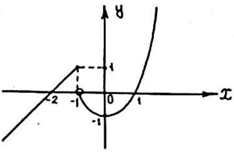
$x=-1$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.3.



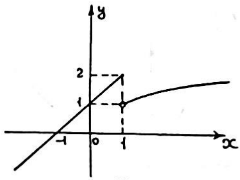
$x=1$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.4.



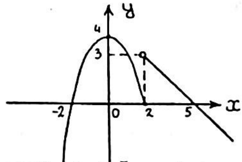
$x=-1$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.5.



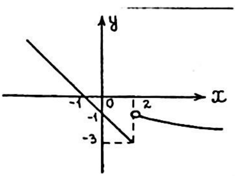
$x=1$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.6.



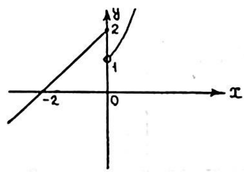
$x=2$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.7.



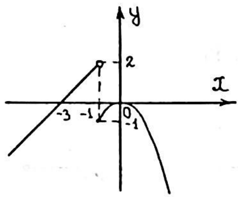
$x=2$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.8.



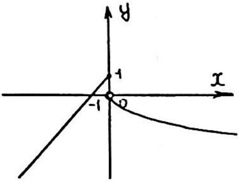
$x=0$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.9.



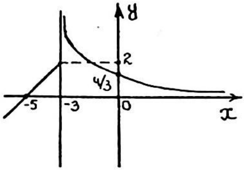
$x=-1$ არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.10.



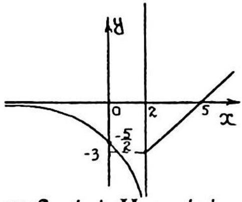
x=0 არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.11.



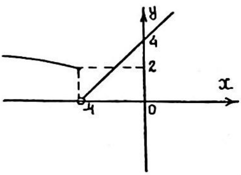
x=-3 არის II გვარის წყვეტის წერტილი

4.12.



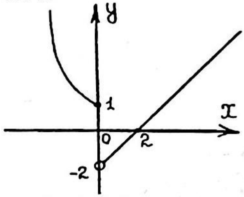
x=2 არის II გვარის წყვეტის წერტილი

4.13.



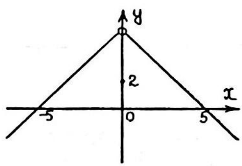
x=-4 არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.14.



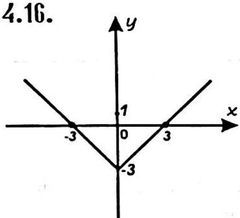
x=0 არის I გვარის წყვეტის წერტილი

4.15.



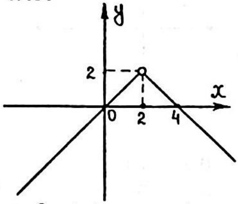
x=0 არის აცილებადი წყვეტის წერტილი

4.16.



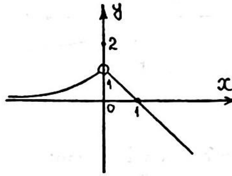
x=0 არის აცილებადი წყვეტის წერტილი

4.17.



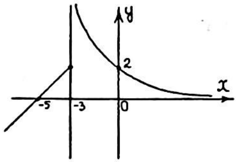
x=2 არის აცილებადი წყვეტის წერტილი

4.18.



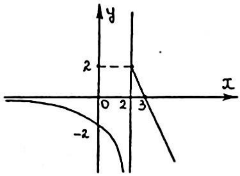
x=0 არის აცილებადი წყვეტის წერტილი

4.19.



x=-3 არის II გვარის წყვეტის წერტილი

4.20.



x=2 არის II გვარის წყვეტის წერტილი

§5. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შედარება შესანიშნავი ზღვრები

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია როცა $x \to x_0$, მაშინ:

თუ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, $\alpha(x)$-ს უწოდებენ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციას $\beta(x)$-თან შედარებით, როცა $x \to x_0$ და წერენ $\alpha(x)=0(\beta(x))$, რომელიც ასე იკითხება $\alpha(x)$ არის *0*-მცირე $\beta(x)$, როცა $x \to x_0$.

თუ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C \quad (C\neq 0)$, $\alpha(x)$-ს და $\beta(x)$-ს უწოდებენ ერთი და იგივე რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციებს, როცა $x \to x_0$, თუ ***C=1*** მაშინ მათ ეწოდებათ ექვივალენტური უსასრულოდ მცირე ფუ-

ნქციები, როცა $x \to x_0$ და ასე წერენ $\alpha(x) \sim \beta(x)$. თუ $\alpha(x) \sim \beta(x)$ და $\beta(x) \sim \gamma(x)$, მაშინ $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

თუ არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი $k>0$, რომ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} \neq 0$, $\alpha(x)$-ს უწოდებენ k რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციას $\beta(x)$-თან შედარებით, როცა $x \to x_0$.

განსხვავებული რიგის უსასრულოდ მცირე (დიდი) ფუნქციათა ალგებრული ჯამი, როცა $x \to x_0$, ექვივალენტურია ყველაზე დაბალი (მაღალი) რიგის შესაკრებისა.

თუ $\alpha(x)$, უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა, როცა $x \to x_0$, მაშინ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ექვივალენტურ ფუნქციათა ცხრილით

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

3. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.

6. $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$.

7. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

8. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a$.

9. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$.

10. $(1+\alpha(x))^k-1 \sim k\alpha(x)$.

11. $\sqrt[k]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{k}$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 9x}{x} = \left|\sin 9x \sim 9x\right| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9x}{x} = 9.$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}=\left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}2x\sim 2x\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot 2x}{\dfrac{x^2}{2}}=4.$$

3. $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)^2}{\sqrt[4]{1+2x}-1}=\left|\begin{array}{c}\ln(1+4x)\sim 4x\\ \sqrt[4]{1+2x}-1\sim\dfrac{2x}{4}\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot 4x}{\dfrac{2x}{4}}=16.$$

4. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{27-x}-3}{e^{x/9}-1}=\lim_{x\to0}\frac{3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{-x}{27}}-1\right)}{e^{x/9}-1}=\left|\begin{array}{c}\sqrt[3]{1+\dfrac{-x}{27}}-1\sim\dfrac{-x}{3\cdot27}\\ e^{x/9}-1\sim\dfrac{x}{9}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\dfrac{-x}{3\cdot27}}{\dfrac{x}{9}}=-\frac{1}{3}.$$

5. $$\lim_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{\sqrt{6-x}-2}=\lim_{x\to2}\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{\sqrt{4-(x-2)}-2}=e^2\lim_{x\to2}\frac{(e^{x-2}-1)}{2\left(\sqrt{1+\dfrac{2-x}{4}}-1\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}e^{x-2}-1\sim x-2\\ \sqrt{1+\dfrac{2-x}{4}}-1\sim\dfrac{2-x}{8}\end{array}\right|=\frac{e^2}{2}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\dfrac{2-x}{8}}=-4e^2.$$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\ln(4-x)}=\left|\begin{array}{c}\text{აქ}\quad \operatorname{tg}\pi x\to 0,\ \text{როცა}\ x\to 3,\\ \text{მაგრამ}\ \pi x\to 3\pi,\ \text{როცა}\ x\to 3,\\ \text{ამიტომ იგი ასე გადავწეროთ}\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}\pi(x-3)}{\ln(1+(3-x))}=$

$$=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\pi(x-3)\sim\pi(x-3)\\ \ln(1+(3-x))\sim 3-x\end{array}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{\pi(x-3)}{3-x}=-\pi.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}4x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x+\sin^2 3x}{e^{3x}-1-4x^2}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}4x+\sin^2 3x\sim \operatorname{tg}4x\sim 4x\\ e^{3x}-1-4x^2\sim 3x-4x^2\sim 3x\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3x}=\dfrac{4}{3}.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{\frac{2x}{5}}$ = (ამ ზღვრის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ფო

რმულას $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot\varphi(x)}$, სადაც

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=1,\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}-1\right)\cdot\frac{2x}{5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5}{2x+4}\cdot\frac{2x}{5}}=e^{-1}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+5x}{2+x}\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+5x}{2+x}-1\right)\cdot\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{2+x}\cdot\frac{2}{x}}=e^{4}.$

მაგალითები

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}2x}$. **5.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\arcsin 3x}$. **5.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\operatorname{arctg}2x}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{8x}-1}{e^{2x}-1}$. 5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^4-1}{\arcsin 6x}$. 5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x^2)^3-1}{1-\cos 3x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+3x}-1}{e^{6x}-1}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x^2}-2}{1-\cos\dfrac{x}{3}}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32-3x}-2}{\ln(1+3x+2x^2)}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x+3x)}{\sqrt[4]{81-9x}-3}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{\sqrt[3]{33-2x}-3}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4\,\mathrm{tg}\,x^2+x^3)}{1-\cos 2x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{80+x}-3}{\ln(2-x)}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{\sqrt[4]{18-x}-2}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x-e^5}{\ln(6-x)}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+4x^3)}{\sqrt[3]{27-x^2}-3}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt[4]{16-x}-2}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+8\sin x^2+3x^3)}{1-\cos 4x}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+3x)^4\,\mathrm{ctg}\,4x$

5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+9x^2)\,\mathrm{ctg}\,3x^2$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}(x2^{\frac{1}{x}}-x)$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\cos 2x-e^{x^2}}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x^2}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\cos\pi x}{2x-1}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\cos\dfrac{3\pi x}{2}}{3x-1}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x}-e^{3}}{\sin\pi x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg\pi x}{\ln(3-x)}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{12-x}-3}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{\sqrt{10-x}-3}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt[3]{27-x^2}-3}$.

5.31. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^2+\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$

5.32. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\ln(1+x^3+\sin x^2)}$

5.33. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{x+2}+x}$

5.34. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt{6+x}}{\sqrt[3]{1+x}+1}$

5.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1+\sin x^4}{arctg2x+\sin x^3}$

5.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16-x^2}+tg3x}{\cos 2x+\sin 3x-1}$

5.37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+7x^2}{5-2x^2}\right)^{\frac{5}{x^2}}$.

5.38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-9}\right)^{\frac{15x}{12}}$.

5.39. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-3x}{2+4x}\right)^{\frac{4}{x}}$.

5.40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-4}{7x+5}\right)^{\frac{14x}{9}}$.

5.41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-5x}{3+6x}\right)^{\frac{9}{11x}}$.

5.42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x^2+3}{10x^2-17}\right)^{x^2}$.

5.43. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{5+8x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

5.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+6}{5x^2+1}\right)^{2x^2}$.

5.45. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-2x}{1-7x}\right)^{\frac{3}{5x}}$.

5.46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-5}{2x^2+3}\right)^{\frac{3x^2}{8}}$.

5.47. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{4/x^2}$.

5.48. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin 3x)^{1/x}$.

5.49. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{x^2}\ln\sqrt{\dfrac{3+4x^2}{3-2x^2}}$

5.50. $\lim\limits_{x\to\infty}4x^2\ln\sqrt{\dfrac{5x^2+6}{5x^2+1}}$.

5.51. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3x^2}\left(\ln(3+4x^2)-\ln(3-2x)\right)$.

პასუხები

5.1. 2.	**5.2.** 5/3.	**5.3.** 3.	**5.4.** 4ln3.
5.5. 2.	**5.6.** 4/3.	**5.7.** 1/8.	**5.8.** -3/2.
5.9. -1/80.	**5.10.** -36.	**5.11.** $-27e^3/2$.	**5.12.** 2.
5.13. -1/108.	**5.14.** $-32e^2$.	**5.15.** $-e^5$.	**5.16.** -27.
5.17. -8.	**5.18.** 1.	**5.19.** 3.	**5.20.** 3.
5.21. ln2.	**5.22.** -2.	**5.23.** 3/2.	**5.24.** $-\pi/2$.
5.25. $-\pi/2$.	**5.26.** $-e^3/\pi$.	**5.27.** $-\pi$.	**5.28.** 6.
5.29. -6e.	**5.30.** -54.	**5.31.** -2/3.	**5.32.** 2.
5.33. 4/9.	**5.34.** 15/4.	**5.35.** 3.	**5.36.** 64.
5.37. e^9.	**5.38.** e.	**5.39.** e^{-14}.	**5.40.** e^{-2}.
5.41. e^{-3}.	**5.42.** e^2.	**5.43.** e^{-4}.	**5.44.** e^2.
5.45. e^3.	**5.46.** $e^{-3/2}$.	**5.47.** e^{-2}.	**5.48.** e^3.
5.49. 4.	**5.50.** 2.	**5.51.** -4.	

§6. ფუნქციის წარმოებული

$y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $x=x_0$ წერტილში ეწოდება $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ფუნქციის ნაზრდისა და $\Delta x=x-x_0$ არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფის (იმ პირობებში თუ ეს ზღვარი არსებობს).

წარმოებული x_0 წერტილში აღინიშნება $f'(x_0)$ სიმბოლოთი. განსაზღვრის თანახმად

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad \textbf{(6.1)}$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე ვიპოვოთ შემდეგ ფუნქციათა წარმოებულები:

1. $f(x)=x^2-x^3-5x+1$, **2.** $f(x)=2\sin(2x+30^0)$,

3. $f(x)=e^{3x}+x^3-\ln 2x$, **4.** $f(x)=\operatorname{tg}3x$,

5. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

ამოხსნა.

1. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)^3-5(x_0+\Delta x)+1-$$

$$-(x_0^2-x_0^3-5x_0+1)=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^3-3x_0^2\Delta x-$$

$$-3x_0(\Delta x)^2-(\Delta x)^3-5x_0-5\Delta x+1-x_0^2+x_0^3+5x_0-1=$$

$$=\Delta x(2x_0+\Delta x-3x_0^2-3x_0\Delta x-(\Delta x)^2-5).$$

განვიხილოთ შემდეგი შეფარდება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x-3{x_0}^2-3x_0\Delta x-(\Delta x)^2-5)}{\Delta x}=$$

$$=2x_0+\Delta x-3{x_0}^2-3x_0\Delta x-(\Delta x)^2-5,$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3{x_0}^2-3x_0\Delta x-$$

$$-(\Delta x)^2-5)=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0)-\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x-\lim_{\Delta x\to 0}3{x_0}^2-$$

$$-\lim_{\Delta x\to 0}3x_0\Delta x-\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2-\lim_{\Delta x\to 0}5=2x_0-3{x_0}^2-5$$

მაშასადამე $y=x^2-x^3-5x+1$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში არის $2x_0-3{x_0}^2-5$.

2. ვიპოვოთ ფუნქციის ნაზრდი

$$\Delta y=2\sin\left[2(x_0+\Delta x)-30^0\right]-2\sin(2x_0+30^0)=$$

$$=2\left[\sin\frac{2x_0+2\Delta x+30^0-2x_0-30^0}{2}\cdot\cos\frac{2x_0+2\Delta x+30^0+2x_0+30^0}{2}\right]=$$

$$=4\sin\Delta x\cos(2x_0+\Delta x+30^0).$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\sin\Delta x\cos(2x_0+\Delta x+30^0)}{\Delta x}=$$

$$=|\sin\Delta x\sim\Delta x|=4\lim_{\Delta x\to 0}\cos(2x_0+\Delta x+30^0)=4\cos(2x_0+30^0).$$

(აქ გამოვიყენეთ $y=\cos x$ ფუნქციის უწყვეტობის ფაქტი:

$\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos(\lim\limits_{x\to a} x)$.)

3. $\Delta y = e^{3(x_0+\Delta x)} + (x_0+\Delta x)^3 - \ln 2(x_0+\Delta x) - e^{3x_0} - x_0{}^3 +$
$+\ln 2x_0 = e^{3x_0+3\Delta x} + x_0{}^3 + 3x_0{}^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 -$
$-\ln(2x_0+2\Delta x) - e^{3x_0} - x_0{}^3 + \ln 2x_0 = e^{3x_0+3\Delta x} + 3x_0{}^2\Delta x +$
$+3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \ln\dfrac{2x_0+2\Delta x}{2x_0} - e^{3x_0} =$
$= e^{3x_0}(e^{3\Delta x}-1) + \Delta x(3x_0{}^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2) - \ln(1+\dfrac{\Delta x}{x_0})$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{3x_0}(e^{3\Delta x}-1) + \Delta x(3x_0{}^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2) - \ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \left| e^{3\Delta x} - 1 \sim 3\Delta x,\quad \ln(1+\frac{\Delta x}{x_0}) \sim \frac{\Delta x}{x_0}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{3x_0}\cdot 3\Delta x}{\Delta x} +$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0{}^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x/x_0}{\Delta x} = 3e^{3x_0} + 3x_0{}^2 - \frac{1}{x_0}.$$

4. $\Delta y = \mathrm{tg}[3(x_0+\Delta x)] - \mathrm{tg}\,3x_0 = \dfrac{\sin(3x_0+3\Delta x-3x_0)}{\cos(3x_0+3\Delta x)\cos 3x_0} =$
$= \dfrac{\sin 3\Delta x}{\cos(3x_0+3\Delta x)\cos 3x_0}$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin 3\Delta x)/(\cos(3x_0+3\Delta x)\cos 3x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 3\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos 3x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos(3x_0+3\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos 3x_0\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(3x_0+3\Delta x)}=3\frac{1}{\cos 3x_0\cdot\cos 3x_0}=\frac{3}{\cos^2 3x_0}.$$

5. $\Delta y=\dfrac{1}{\cos(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{\cos x_0}=\dfrac{\cos x_0-\cos(x_0+\Delta x)}{\cos(x_0+\Delta x)\cos x_0}=$

$$=\frac{-2\sin\dfrac{x_0-x_0-\Delta x}{2}\sin\dfrac{x_0+x_0+\Delta x}{2}}{\cos(x_0+\Delta x)\cos x_0}=\frac{2\sin\Delta x/2\sin(x_0+\Delta x/2)}{\cos(x_0+\Delta x)\cos x_0}.$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\Delta x/2\cdot\sin(x_0+\Delta x/2)}{\Delta x\cos(x_0+\Delta x)\cdot\cos x_0}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x/2)\cdot\sin(x_0+\Delta x/2)}{\Delta x\cos(x_0+\Delta x)\cdot\cos x_0}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(x_0+\Delta x/2)}{\cos x_0\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x_0+\Delta x)}=\frac{\sin x_0}{\cos^2 x_0}$$

მაგალითები

წარმოებულის განსაზღვრის გამოყენებით დაამტკიცეთ

6.1. $(kx)'=k$.

6.2. $(x^2)'=2x$.

6.3. $(\sin 5x)'=5\cos 5x$.

6.4. $(\ln 2x)'=1/x$.

6.5. $(x^3-5x^2)'=3x^2-10x$.

6.6. $(3x^2-4)'=6x$.

6.7. $(\sin(5x+35^0))'=5\cos(5x+35^0)$.

6.8. $(7\cos(2x-1))'=-14\sin(2x-1)$.

6.9. $(4\sin 5x-3\cos 7x)'=20\cos 5x+21\sin 7x$.

6.10. $(3x^2-5\cos(2x-8))'=6x+10\sin(2x-8)$.

6.11. $(5x^3-\sin(\alpha-2x))'=15x^2+2\cos(\alpha-2x)$.

6.12. $(e^{5x}-2x^3)'=5e^{5x}-6x^2$.

6.13. $(2^{3x}-3e^{3x})'=3\cdot 2^{3x}\ln 2-9e^{3x}$.

6.14. $(x^3-\ln 4x)'=3x^2-1/x$.

6.15. $(\mathrm{tg}(5x+2))'=\dfrac{5}{\cos^2(5x+2)}$.

6.16. $(\mathrm{ctg}(4x-2)+3)'=-\dfrac{4}{\sin^2(4x-2)}$.

6.17. $(1/\cos 2x)'=\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

6.18. $\left(\dfrac{5}{\sin 4x}+2^x\right)'=-\dfrac{20\cos 4x}{\sin^2 4x}+2^x\ln 2$.

§7. ᲒᲐᲬᲐᲠᲛᲝᲔᲑᲘᲡ ᲬᲔᲡᲔᲑᲘ

თუ f, g, φ თავისი არგუმენტების წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

I. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g(x)'$; II. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$;

III. $(kf(x))'=kf'(x)$; IV. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$;

V. $[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

1. $(C)'=0$, $C=\text{const}$. 2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in R$.

3. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$. 4. $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}, \quad x \in R_+, \quad m \in Z.$

5. $(e^x)' = e^x$. 6. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1.$

7. $(\ln x)' = 1/x,\ x \in R_+.$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1.$

9. $(\sin x)' = \cos x$. 10. $(\cos x)' = -\sin x$.

11. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 12. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$. 16. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული

1. $y = 3x^3 + 5x + e^x + \ln x$; 2. $y = 2^x \sin x$; 3. $y = \frac{\arcsin x}{3^x + x^3}$:

4. $y = \sin(6x - e^x)$; 5. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$; 6. $y = \sqrt[3]{2^{x^2-5} - \mathrm{arctg}\, 5x}$;

7. $y = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$; 8. $y = \mathrm{tg}^3(3x-1)$; 9. $y = 2^{\mathrm{arctg}^3(5x-6)}$;

10. $y = \mathrm{ctg}^5 x^3$.

ამოხსნა.

1. $y' = (3x^3 + 5x + e^x + \ln x)' = 3(x^3)' + 5(x)' + (e^x)' + (\ln x)' =$
$= 9x^2 + 5 + e^x + 1/x.$

2. $y' = (2^x \sin x)' = (2^x)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot 2^x =$
$= 2^x \ln 2 \sin x + \cos x \cdot 2^x.$

3. $$y' = \left(\frac{\arcsin x}{3^x + x^3}\right)' = \frac{(\arcsin x)' \cdot (3^x + x^3) - (3^x + x^3)' \arcsin x}{(3^x + x^3)^2} =$$
$$= \frac{\dfrac{3^x + x^3}{\sqrt{1 - x^2}} - (3^x \ln 3 + 3x^2) \arcsin x}{(3^x + x^3)^2}.$$

4. $y' = (\sin(6x - e^x))' = \cos(6x - e^x)(6x - e^x)' =$
$= \cos(6x - e^x)(6 - e^x).$

5. $$y' = (\sqrt{2x - \sin 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{2x - \sin 2x}} \cdot (2x - \sin 2x)' =$$
$$= \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sqrt{2x - \sin 2x}} = \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2x - \sin 2x}} = \frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}.$$

6. $$y' = \left(\sqrt[3]{2^{x^2-5} - \operatorname{arctg} 5x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2^{x^2-5} - \operatorname{arctg} 5x)^2}} \cdot (2^{x^2-5} - \operatorname{arctg} 5x)' =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2^{x^2-5} - \operatorname{arctg} 5x)^2}} \cdot \left(2^{x^2-5} \ln 2 \cdot (x^2 - 5)' - \frac{1}{1 + (5x)^2}(5x)'\right) =$$
$$= \frac{2x \cdot 2^{x^2-5} \ln 2 - \dfrac{5}{1 + 25x^2}}{3\sqrt[3]{(2^{x^2-5} - \operatorname{arctg} 5x)^2}}.$$

7. $$y' = \left(\ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}\right)' = \frac{1}{1/\sqrt{1 - x^4}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}\right)' = \sqrt{1 - x^4}\left(-\frac{1}{1 - x^4}(\sqrt{1 - x^4})'\right) =$$
$$= \sqrt{1 - x^4}\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^4}} \cdot (1 - x^4)'\right) = \frac{4x^3}{2(1 - x^4)} = \frac{2x^3}{1 - x^4}.$$

8. $y' = \left(\mathrm{tg}^3(3x-1)\right)' = 3\,\mathrm{tg}^2(3x-1)\left(\mathrm{tg}(3x-1)\right)' =$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2(3x-1)\cdot\frac{1}{\cos^2(3x-1)}\cdot(3x-1)' = \frac{9\,\mathrm{tg}^2(3x-1)}{\cos^2(3x-1)}.$$

9. $y' = \left(2^{\mathrm{arctg}^3(5x-6)}\right)' = 2^{\mathrm{arctg}^3(5x-1)}\ln 2\cdot\left(\mathrm{arctg}^3(5x-1)\right)' =$

$$= 2^{\mathrm{arctg}^3(5x-1)}\ln 2\cdot 3\,\mathrm{arctg}^2(5x-1)\cdot\left(\mathrm{arctg}(5x-1)\right)' =$$

$$= 2^{\mathrm{arctg}^3(5x-1)}\ln 2\cdot 3\,\mathrm{arctg}^2(5x-1)\frac{5}{1+(5x-1)^2} =$$

$$= \frac{15\ln 2\cdot 2^{\mathrm{arctg}^3(5x-1)}\,\mathrm{arctg}^2(5x-1)}{1+(5x-1)^2}.$$

10. $y' = \left(\mathrm{ctg}^5 x^3\right)' = 5\,\mathrm{ctg}^4 x^3\left(\mathrm{ctg}\, x^3\right)' = 5\,\mathrm{ctg}^4 x^3\left(-\frac{1}{\sin^2 x^3}\right)(x^3)' =$

$$= -\frac{15x^2\cos^4 x^3}{\sin^6 x^3}.$$

მაგალითები

იპოვეთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული

7.1. $y = x^3 + 2\sqrt{x}$.

7.2. $y = 3x^{2/3} + 5x^{4/5} + x^{-1/2}$.

7.3. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 3x$.

7.4. $y = x^2\cos x$.

7.5. $y = \frac{3x-2}{x^2+4x-7}$.

7.6. $y = \sin 7x$.

7.7. $y = \cos(x^2 - 20x)$.

7.8. $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}$.

7.9. $y = 5\cos\frac{x}{3} + \mathrm{arctg}(7x+4)$.

7.10. $y = \arcsin^2(3x+5)$.

7.11. $y = \sin^3 x$.

7.12. $y = \mathrm{tg}^2 2x$.

7.13. $y=\cos^3(4x+e^x)$.

7.14. $y=\operatorname{tg}^3 x-3e^{3x}+\sin 4x$.

7.15. $y=\sin\sqrt[3]{x}$.

7.16. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt[3]{1-3\cos^2 x}$.

7.17. $y=\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$.

7.18. $y=\sin^2 x\cos(5x+7)$.

7.19. $y=\sqrt{\cos^5 x+\sin^3 4x}$.

7.20. $y=\sin(\ln x)$.

7.21. $y=e^{3x+1}\cdot\ln(\cos^2 x)$.

7.22. $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

7.23. $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x})$.

7.24. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

7.25. $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$.

7.26. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

7.27. $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$.

7.28. $y=\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}e^x$.

7.29. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln(\cos x)$.

7.30. $y=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$.

7.31. $y=\ln x\lg x$.

7.32. $y=\frac{\sin^4 x+4x}{\cos^3 2x}$.

7.33. $y=\sqrt[3]{1+\cos^2 4x}-3^{\cos x}$.

7.34. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\ln\operatorname{tg}^2 x$.

7.35. $y=(1-5x)^4$.

7.36. $y=(3x^2-5x)^{10}$.

7.37. $y=(\sin x+2^{3x})^{10}$.

7.38. $y=(2^{7x+4}-3^{5x+4})^2$.

7.39. $y=e^{\sqrt{x}}+2^{\cos^2 x}$.

7.40. $y=\sin(3^{2x+5})$.

7.41. $y=(x^2+e^x+\ln x)^{20}$.

7.42. $y=(2^{3x}+\sin^2 5x)^7$.

7.43. $y=\arcsin(e^{3x})\cdot\ln(\ln x)$.

7.44. $y=e^{2x}(3\sin x+\cos^3 2x)$.

7.45. $y=2^{5x}(\ln 3x+\ln^2 3x)$.

7.46. $y=3^{7x+4}(\ln 5x+\operatorname{arctg} 2x)$.

7.47. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, იპოვეთ $f'(-3)$.

7.48. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{x}$, იპოვეთ $f'(5)$.

7.49. $f(x)=\ln(1+x^2)$, იპოვეთ $f'(2)$.

7.50. $f(x)=\mathrm{tg}^3\dfrac{\pi x}{6}$, იპოვეთ $f'(2)$.

7.51. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-9}$, იპოვეთ $f(3)+4x\cdot f'(3)$.

7.52. $f(x)=1-x^3$, $\varphi(x)=1-\sin\dfrac{\pi x}{2}$, იპოვეთ $\dfrac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

7.53. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$, იპოვეთ $f'(1)$.

7.54. $f(x)=\ln(1+a^{-2x})$, იპოვეთ $f'(0)$.

7.55. $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}-\ln\sqrt[4]{x^4-81}$, იპოვეთ $f'(6)$.

7.56. $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$, იპოვეთ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7.57. $f(x)=5x^3-2x^2+1$, $g(x)=4x^3-15x^2+1$,

ამოხსენით განტოლება $f'(x)-g'(x)=3x^2+260$.

7.58. $f(x)=2x^3-18x^2+5$, $g(x)=\dfrac{5}{x}+7$,

ამოხსენით განტოლება $f'(x)-g'(1/\sqrt{6})=0$.

7.59. $f(x)=4x^3+\dfrac{5}{2}x^2-7x+1$, ამოხსენით უტოლობა $-f'(x)+\dfrac{7}{5}f(1)\geq 0.7$.

7.60. $g(x)=2x^3-x^2-8x+1$, ამოხსენით უტოლობა $g'(x)-0{,}4g'(0)\leq 3{,}2$.

7.61. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x$, ამოხსენით უტოლობა $f'(x)-\dfrac{6}{37}f(1)\leq 1$.

პასუხები

7.1. $3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$. **7.2.** $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{\sqrt[5]{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **7.3.** x^4-2x^2-3.

7.4. $2x\cos x-x^2\sin x$. **7.5** $\frac{-3x^2+4x-13}{(x^2+4x-7)^2}$. **7.6.** $7\cos 7x$.

7.7. $-\sin(x^2-20x)(2x-20)$. **7.8.** $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{3x}{2}\right)$.

7.9. $-\frac{5}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{7}{1+(7x+4)^2}$. **7.10.** $\frac{6\arcsin(3x+5)}{\sqrt{1-(3x+5)^2}}$. **7.11.** $3\sin^2 x\cos x$

7.12. $\frac{4\operatorname{tg}2x}{\cos^2 2x}$. **7.13.** $-3\cos^2(4x+e^x)\sin(4x+e^x)(4+e^x)$.

7.14. $\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}-9e^{3x}+4\cos 4x$. **7.15.** $\frac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **7.16.** $\frac{2\cos 4x}{\sqrt{1-\sin 4x}}-\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{(1-\cos^2 x)^2}}$

7.17. $-\frac{ctg^2 x/3}{\sin^2 x/3}$. **7.18.** $\sin 2x\cos(5x+7)-5\sin^2 x\sin(5x+7)$.

7.19. $\frac{-5\cos^4 x\sin x+12\sin^2 4x\cos 4x}{2\sqrt{\cos^5 x+\sin^3 4x}}$. **7.20.** $\frac{\cos(\ln x)}{x}$.

7.21. $3e^{3x+1}\ln(\cos^2 x)-2\operatorname{tg}x\cdot e^{3x+1}$. **7.22.** $\operatorname{ctg}x-\frac{\sin 2x}{2}$.

7.23. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)$. **7.24.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$.

7.25. $2e^{-x}\cos x$. **7.26.** $-\frac{x}{1+x}$. **7.27.** $\frac{2}{\sqrt{4x-1}}+\frac{1}{x}$.

7.28. $\frac{2e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}$. **7.29.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}$. **7.30.** $2\cos(\ln x)$.

7.31. $\frac{\lg x}{x}+\frac{\ln x}{x\ln 10}-\frac{1}{x}$. **7.32.** $\frac{(4\sin^3 x\cos x+4)\cos^3 2x+6\cos^2 2x\sin 2x(\sin^4 x+4x)}{\cos^6 2x}$.

7.33. $-\frac{4\sin 8x}{3\sqrt[3]{(1+\cos^2 4x)^2}}+3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x$ **7.34.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}+\frac{4}{\sin 2x}$. **7.35.** $-20(1-5x)^3$.

7.36. $10(3x^2-5x)^9(6x-5)$. **7.37.** $10(\sin x+2^{3x})^9(\cos x+3\cdot 2^{3x}\ln 2)$.

7.38. $2(2^{7x+4}-3^{5x+4})\cdot(7\cdot 2^{7x+4}\ln 2-5\cdot 3^{5x+4}\cdot\ln 3)$. **7.39.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-2^{\cos^2 x}\ln 2\cdot\sin 2x$.

7.40. $2\cos 3^{2x+5}\cdot 3^{2x+5}\cdot\ln 3$. **7.41.** $20(x^2+e^x+\ln x)^{19}(2x+e^x+1/x)$.

7.42. $7(2^{3x}+\sin^2 5x)^6(3\cdot 2^{3x}\ln 2+5\sin 10x)$. **7.43.** $\dfrac{3e^{3x}\ln(\ln x)}{\sqrt{1-e^{6x}}}+\dfrac{\arcsin e^{3x}}{x\ln x}$.

7.44. $e^{2x}(6\sin x+2\cos^3 2x+3\cos x-6\cos^2 2x\cdot\sin 2x)$.

7.45. $2^{5x}\left[5\ln 2(\ln 3x+\ln^2 3x)+\dfrac{1+2\ln 3x}{x}\right]$. **7.46.** $3^{7x+4}\left[7\ln 3(\ln 5x+\operatorname{arctg} 2x)+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1+4x^2}\right]$

7.47. $\frac{1}{12}\sqrt{2}$. **7.48.** $1/15$. **7.49.** $4/5$. **7.50.** 6π. **7.51.** $3(2x+1)$.

7.52. **0.** **7.53.** $1/\sqrt{3}$. **7.54.** $-\ln a$. **7.55.** $-1/9$. **7.56.** **3.** **7.57.** $x=10$. **7.58.** $x=1$, $x=5$. **7.59.** $[-1;7/12]$ **7.60.** $[-1;4/3]$ **7.61.** $[-2;3]$

§8. პარამეტრული და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციების წარმოებული. ლოგარითმული წარმოებული

ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, მაშინ ასეთი ფუნქციის წარმოებული რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გამოითვლება ფორმულით

$$y_x'=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} \tag{8.1}$$

თუ $f(x,y)=0$ განტოლება განსაზღვრავს y-ს, როგორც x-ის არაცხად ფუნქციას, მაშინ y'-ის მოსაძებნად საკმარისია მოცემული განტოლების x-ით გაწარმოება (y უნდა ჩავთვალოთ x-ის ფუნქციად) და მიღებული ტოლობიდან y'-ის პოვნა.

ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია

$$y=[f(x)]^{g(x)},\ f(x)>0, \tag{8.2}$$

ასეთი სახის ფუნქციის გაწარმოება ხდება წინასწარი გალოგარითმების გზით $\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\cdot\ln(f(x))$. გავაწარმოოთ ეს უკანასკნელი იმის გათვალისწინებით, რომ y არის x არგუმენტის ფუნქცია, მივიღებთ:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=g'(x)\cdot\ln(f(x))+(\ln(f(x))'\cdot g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=y\left[g'(x)\cdot\ln(f(x))+\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)g(x)\right]$$

თუ აქ შევიტანთ y-ის მნიშვნელობას (19.2)-დან მივიღებთ

$$y'=[f(x)]^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+\frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right) \tag{8.3}$$

შენიშვნა: $y=[f(x)]^{g(x)}$ ტიპის ფუნქციების გაწარმოებისას უმჯობესია გამოვიყენოთ არა უშუალოდ (8.3) ფორმულა, არამედ ის მსვლელობა, რითაც მივიღეთ ეს ფორმულა.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. გავაწარმოოთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციები და ვიპოვოთ მათი მნიშვნელობანი $t=t_0$ წერტილში.

ა. $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},\ 0\le t\le\pi, t_0=\pi/3,$ ბ. $\begin{cases}x=3\cos^3 t\\ y=3\sin^2 t\end{cases},\ t_0=\pi/6,$

გ. $\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\dfrac{\ln t}{t}\end{cases},\ t=1.$

ამოხსნა.

ა. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(2\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t.\ \ y'_x\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -ctg(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

ბ. რადგან $x'_t = 9\cos^2 t(-\sin t)$ და $y'_t = 3\cdot 2\sin t\cos t$, ამიტომ (8.1) ფორმულის ძალით გვექნება

$$y'_x = \frac{3\cdot 2\sin t\cos t_t}{-9\cos^2 t\sin t} = -\frac{2}{3\cos t}.\quad y'_x\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{2}{3\cos\pi/6} = -\frac{2}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{გ}\cdot\ y'_x = \frac{\left(\frac{\ln t}{t}\right)'}{(t\ln t)'} = \frac{\frac{1}{t}\cdot t - \ln t}{t^2\left(\ln t + t\cdot\frac{1}{t}\right)} = \frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}.\quad y'_x\big|_{t=1} = \frac{1-\ln 1}{1\cdot(\ln 1+1)} = 1.$$

2. ვიპოვოთ არაცხადი ფუნქციების წარმოებული

ა. $x^2+y^2-9=0$, ბ. $x^3+y^3-5xy=0$, გ· $xy^2=4$, $x=1, y>0$

დ· $t\ln x - x\ln t = 0$.

ამოხსნა. ა. ჩავთვალოთ y როგორც x-ის ფუნქცია და გავაწარმოოთ მოცემული ტოლობა რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით. გვექნება

$(x^2+y^2-9)' = 0 \Rightarrow 2x + 2y\cdot y' = 0$, საიდანაც $y' = -x/y$.

ბ. გაწარმოებით მივიღებთ

$$3x^2+3y^2\cdot y' - 5(x'y + y'x) = 0 \Rightarrow 3x^2+3y^2\cdot y' - 5(y+y'x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2\cdot y' - 5y - 5y'x = 0 \Rightarrow y'(3y^2-5x) = 5y-3x^2 \Rightarrow y' = \frac{5y-3x^2}{3y^2-5x}.$$

გ· გაწარმოებით მივიღებთ

$$x'y^2 + (y^2)'x = 4' \Rightarrow y^2 + 2y\cdot y'\cdot x = 0 \Rightarrow 2y\cdot x\cdot y' = -y^2 \Rightarrow y' = -\frac{y}{2x}.$$

როცა $x=1$, მაშინ მოცემული განტოლებიდან $y=2$-ს, ამიტომ

$$y'\big|_{x=1} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1.$$

დ. აქ x ჩავთვალოთ, როგორც დამოუკიდებელი t ცვლადის ფუნქცი და მოვძებნოთ წარმოებული.

$$\ln x + t\cdot\frac{1}{x}\cdot x'_t - \left(x'_t\cdot\ln t + x\cdot\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \ln x + \frac{t}{x}\cdot x'_t - x'_t\cdot\ln t - \frac{x}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'_t\left(\frac{t}{x} - \ln t\right) = \frac{x}{t} - \ln x \Rightarrow x'_t = \frac{\frac{x}{t} - \ln x}{\frac{t}{x} - \ln t}.$$

3. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები

ა) $y = x^{x^2}$, ბ) $y = x^{\sin^2 x}$, გ) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

ამოხსნა: ა) გავალოგარითმოთ ტოლობის ორივე მხარე e-ს ფუძით, მივიღებთ $\ln y = x^2 \ln x$. და გავაწარმოოთ იგი, იმის გათვალისწინებით, რომ y რთული ფუნქციაა, მივიღებთ:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(2x\ln x + x).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y = x^{x^2}$ საბოლოოდ მივიღებთ:

$y' = x^{x^2}(2x\ln x + x)$.

ბ) $\ln y = \sin^2 x \ln x$. გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{1}{y}y' = 2\sin x\cos x\ln x + \frac{\sin^2 x}{x} \Rightarrow y' = y\left(\sin 2x\ln x + \frac{\sin^2 x}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin^2 x}\left(\sin 2x\ln x + \frac{\sin^2 x}{x}\right).$$

გ) რადგან $\ln y = \operatorname{arctg} x \ln x$, ამიტომ მისი გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{1}{y}y' = (\operatorname{arctg} x)'\ln x + (\ln x)'\operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = y\left(\frac{1}{1+x^2}\ln x + \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right).$$

მაგალითები

იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული

8.1. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2\ln\operatorname{ctg} t \ . \end{cases}$ **8.2.** $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}. \end{cases}$ **8.3.** $\begin{cases} x = \dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$ **8.5.** $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$ **8.6.** $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 1 + t^3. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ **8.8.** $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$ **8.9.** $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

8.10. $xy + \sin y = 0.$ **8.11.** $xy^2 + x^2 y = 2.$

8.12. $y^2 + x^4 = x^2.$ **8.13.** $\ln y - 2x = 0.$

8.14. $e^y + x = y.$ **8.15.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

8.16. $x^2 + y^2 - 4xy = 0.$

იპოვეთ ფუნქციის წარმოებული

8.17. $y = (\ln x)^x.$ **8.18.** $y = (1 - x^2)^{\arccos x}.$

8.19. $y = (x^2 + 3)^{\sqrt{x}}.$ **8.20.** $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$

8.21. $y = x^{\cos x}.$ **8.22.** $y = (\sin x)^x.$

8.23. $y = x^{\frac{1}{x}}.$ **8.24.** $y = x^{\sqrt{x}}.$

8.25. $y = x^{x^3}.$

პასუხები

8.1. $\operatorname{tg} 2t$.

8.2. $\dfrac{2t}{1-t^2}$.

8.3. $\dfrac{4t}{t^2-4t-2}$.

8.4. $-\operatorname{tg} t$.

8.5. e^{t^2}.

8.6. $\dfrac{3t}{2}$.

8.7. $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

8.8. $-2\operatorname{tg}^3 t$.

8.9. $\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$.

8.10. $-\dfrac{y}{x+\cos y}$.

8.11. $-\dfrac{y(y+2x)}{x(x+2y)}$.

8.12. $\dfrac{x(1-2x^2)}{y}$.

8.13. $2y$.

8.14. $\dfrac{1}{1-e^y}$.

8.15. $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$.

8.16. $\dfrac{x-2y}{2x-y}$.

8.17. $(\ln x)^x\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

8.18. $-(1-x^2)^{\arccos x}\left(\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2x\arccos x}{1-x^2}\right)$.

8.19. $(x^2+3)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x^2+3)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+3}\right)$.

8.20. $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(1+\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

8.21. $x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

8.22. $y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg} x)$.

8.23. $y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

8.24. $x^{\sqrt{x}-1/2}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$.

8.25. $x^{x^3+2}(3\ln x+1)$.

§9. ჰიპერბოლური ფუნქციების გაწარმოება

ჰიპერბოლური სინუსი $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ჰიპერბოლური კოსინუსი $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, ჰიპერბოლური ტანგენსი $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, ჰიპერბოლური კოტანგესი $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

ჰიპერბოლური ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1$, $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$,

$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$.

შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციებია:

ჰიპერბოლური არკსინუსი $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

ჰიპერბოლური არკკოსინუსი

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad (x \geq 1),$$

ჰიპერბოლური არკტანგენსი $\operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $(|x| < 1)$,

ჰიპერბოლური არკკოტანგენსი $\operatorname{Arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$, $(|x| > 1)$,

ჰიპერბოლური ფუნქციების წარმოებულები:

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,

$(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $(x > 1)$, $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $(|x| < 1)$,

$(\operatorname{Arcth} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $(|x| > 1)$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული

1. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x$; 2. $y=\operatorname{ch}(\ln x)$; 3. $y=\arcsin(\operatorname{cth}x)$;

4. $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{ch}^2 x}$; 5. $y=\ln\frac{1-\operatorname{ch}x}{x}$; 6. $y=\ln\operatorname{sh}^3(x^2+\operatorname{th}x)$;

7. $y=\frac{\operatorname{ch}x-3\operatorname{sh}2x}{5\ln(\operatorname{th}x)}$; 8. $y=\operatorname{Arch}^3(\operatorname{sh}^2 x)$; 9. $y=\frac{\ln(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{th}^3 x}$.

ამოხსნა.

1. $$y'=\frac{1}{2}(\operatorname{th}x/3)'-\frac{1}{3}(\operatorname{cth}^3 x)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x/3}(x/3)'-\frac{1}{3}\cdot 3\operatorname{cth}^2 x(\operatorname{cth}x)'=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x/3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\operatorname{cth}^2 x\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)=\frac{1}{6\operatorname{ch}^2 x/3}+\frac{\operatorname{cth}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2. $$y'=\operatorname{sh}(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{\operatorname{sh}(\ln x)}{x}.$$

3. $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{cth}^2 x}}\cdot(\operatorname{cth}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{cth}^2 x}}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4. $$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}}\cdot(1+\operatorname{ch}^2 x)'=\frac{2\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}x}{3\sqrt[3]{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}}=\frac{\operatorname{sh}2x}{3\sqrt[3]{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}}.$$

5. $$y'=\frac{1}{\frac{1-\operatorname{ch}x}{x}}\cdot\left(\frac{1-\operatorname{ch}x}{x}\right)'=\frac{x}{1-\operatorname{ch}x}\cdot\frac{-\operatorname{sh}x\cdot x-1+\operatorname{ch}x}{x^2}=\frac{-x\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x-1}{x(1-\operatorname{ch}x)}.$$

6. $$y'=\frac{1}{\operatorname{sh}^3(x^2+\operatorname{th}x)}\left(\operatorname{sh}^3(x^2+\operatorname{th}x)\right)'=\frac{3\operatorname{sh}^2(x^2+\operatorname{th}x)}{\operatorname{sh}^3(x^2+\operatorname{th}x)}\cdot\left(\operatorname{sh}(x^2+\operatorname{th}x)\right)'=$$
$$=\frac{3\operatorname{sh}^2(x^2+\operatorname{th}x)}{\operatorname{sh}^3(x^2+\operatorname{th}x)}\operatorname{ch}(x^2+\operatorname{th}x)\left(2x+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)=\frac{3\operatorname{ch}(x^2+\operatorname{th}x)\left(2x+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)}{\operatorname{sh}(x^2+\operatorname{th}x)}.$$

7. $y' = \dfrac{5(\operatorname{sh} x - 6\operatorname{ch} 2x)\cdot \ln(\operatorname{th} x) - \dfrac{5}{\operatorname{th} x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\cdot(\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} 2x)}{25\ln^2(\operatorname{th} x)} =$

$= \dfrac{(\operatorname{sh} x - 6\operatorname{ch} 2x)\cdot \ln(\operatorname{th} x) - \dfrac{(\operatorname{ch} x - 3\operatorname{sh} 2x)\cdot 2}{\operatorname{sh} 2x}}{5\ln^2(\operatorname{th} x)}.$

8. $y' = \left(\operatorname{Arch}^3(\operatorname{sh}^2 x)\right)' = 3\operatorname{Arch}^2(\operatorname{sh}^2 x)\cdot\left(\operatorname{Arch}(\operatorname{sh}^2 x)\right)' =$

$= 3\operatorname{Arch}^2(\operatorname{sh}^2 x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x - 1}}\cdot 2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x = \dfrac{3\operatorname{Arch}^2(\operatorname{sh}^2 x)\cdot\operatorname{sh} 2x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x - 1}}.$

9. $y' = \left(\dfrac{\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{th}^3 x}\right)' = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x\operatorname{th}^3 x - \dfrac{3\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{th}^6 x} =$

$= \dfrac{\operatorname{th}^2 x\left(1 - \dfrac{3\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x}\right)}{\operatorname{th}^6 x} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - 3\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x\operatorname{th}^4 x} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - 3\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{th}^2 x}.$

მაგალითები

იპოვეთ წარმოებული

9.1. $y = x - \operatorname{th} x.$

9.2. $y = 2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}.$

9.3. $y = \ln(\operatorname{ch} x).$

9.4. $y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x.$

9.5. $y = \arccos(\operatorname{th} x).$

9.6. $y = \ln(\operatorname{sh} x) - \operatorname{cth}^2 x.$

9.7. $y = \ln(\operatorname{th} x).$

9.8. $y = \arcsin(\operatorname{th} x).$

9.9. $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}.$

9.10. $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$

9.11. $y=\dfrac{3\operatorname{cth}x}{\ln x}$. **9.12.** $y=\operatorname{sh}^3 2x$.

9.13. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$. **9.14.** $y=\ln(\operatorname{ch}^3 x)+e^{\operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}$.

9.15. $y=2^{\operatorname{cth}^2 x}+\sqrt[3]{3\operatorname{sh}^2 2x}$. **9.16.** $y=\ln(\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^3 x)$.

9.17. $y=\operatorname{Arth}^3(5x+e^x)$. **9.18.** $y=\ln(\operatorname{Arth}^3 3x)$.

პასუხები

9.1. $\operatorname{th}^2 x$. **9.2.** $\sqrt{\operatorname{ch}x+1}$. **9.3.** $\operatorname{th}x$. **9.4.** $-\dfrac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}$.

9.5. $-\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$ **9.6.** $\operatorname{cth}x+\dfrac{2\operatorname{cth}x}{\operatorname{sh}^2 x}$. **9.7.** $\dfrac{2}{\operatorname{sh}2x}$. **9.8.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$.

9.9. $4\operatorname{sh}4x$. **9.10.** $\dfrac{2x\operatorname{ch}x-x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}$. **9.11.** $-\dfrac{3(x\ln x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x)}{x\ln^2 x\operatorname{sh}^2 x}$.

9.12. $6\operatorname{sh}^2 2x\operatorname{ch}2x$. **9.13.** $\operatorname{sh}2x\, e^{\operatorname{ch}^2 x}$. **9.14.** $3\operatorname{th}x+\dfrac{1}{3}e^{\operatorname{sh}^2\frac{x}{3}}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{2x}{3}$.

9.15. $\dfrac{-2\operatorname{cth}x\cdot 2^{\operatorname{ch}^2 x}\cdot\ln 2}{\operatorname{sh}^2 x}+\dfrac{2\operatorname{sh}4x}{\sqrt[3]{9\operatorname{sh}^4 2x}}$ **9.16.** $\dfrac{\operatorname{sh}2x+3\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^3 x}$.

9.17. $3\operatorname{Arth}^2(5x+e^x)\cdot\dfrac{5+e^x}{1-(5x+e^x)^2}$. **9.18.** $\dfrac{9}{(1-9x^2)\operatorname{Arth}^3 3x}$.

§10. მაღალი რიგის წარმოებულები

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული წარმოებადია x წერტილში, მაშინ პირველი რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $f''(x)$. მაშასადამე,

$$f''(x)=(f'(x))' \tag{10.1}$$

ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულები აღინიშნებიან ასეც: $f^{(2)}(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

საზოგადოდ: $f'''(x)=(f''(x))', f^{(4)}(x)=(f'''(x))',\ldots, f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით $y=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in(a,b)$, მაშინ

$$y''_{x^2}=\frac{x'_t\cdot y''_{t^2}-y'_t\cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3} \tag{10.2}$$

თუ x ცვლადის u და v ფუნქციებს გააჩნიათ ნებისმიერი რიგის წარმოებულები და $y=uv$ მაშინ ადგილი აქვს ლეიბნიცის შემდეგ ფორმულას

$$y^{(n)}=(uv)^n=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\cdot v''+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}\cdot v'''+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\times$$

$$\times u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}. \tag{10.3}$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. $y=\sin^2 x$. ვიპოვოთ მესამე რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. რადგან $y'=(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$, ამიტომ y'-ის გაწარმოებით მივიღებთ მეორე რიგის წარმოებულს $y''=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$, ხოლო y''-ის გაწარმოებით კი მივიღებთ საძიებელი მესამე რიგის წარმოებულს

$$y'''=(2\cos 2x)'=-2\sin 2x\cdot(2x)'=-4\sin 2x.$$

2. ვიპოვოთ $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-5x+2$ ფუნქციის მეოთხე რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. რადგან

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x+2\right)'=x^2-x-5,$$

$$y''=(x^2-x-5)'=2x-1,\quad y'''=(2x-1)'=2,\quad \text{ამიტომ}\quad y^{(4)}=2'=0.$$

3. ვიპოვოთ $e^{x-y}=x+y$ არაცხადი ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული.

ამოხსნა. თავდაპირველად მოცემული განტოლება გავალოგარითმოთ e-ს ფუძით, მივიღებთ:

$$x-y=\ln(x+y)$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა და განვსაზღვროთ y'. გვექნება

$$1-y'=\frac{1}{x+y}(1+y')\Rightarrow 1-y'=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y}y'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{x+y}=\left(1+\frac{1}{x+y}\right)y'\Rightarrow y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}.$$

გავაწარმოოთ კიდევ ერთხელ მიღებული გამოსახულება. გვექნება

$$y''=\frac{(1+y')(x+y+1)-(1+y')(x+y-1)}{(x+y+1)^2}=$$

$$=\frac{(1+y')(x+y+1-x-y+1)}{(x+y+1)^2} \Rightarrow y''=\frac{2(1+y')}{(x+y+1)^2}.$$

ჩავსვათ y'-ის მნიშვნელობა მიღებულ გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y''=\frac{2\left(1+\dfrac{x+y-1}{x+y+1}\right)}{(x+y+1)^2}=\frac{2(x+y+1+x+y-1)}{(x+y+1)^3}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$$

4. ვაჩვენოთ, რომ $y=\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{-x}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $y'''-13y'-12y=0$ განტოლებას.

ამოხსნა. მოვნახოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულები მესამე რიგის ჩათვლით.

$y'=4\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{-x}$, $y''=16\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{-x}$, $y'''=64\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{-x}$.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები მოცემული განტოლების მარცხენა მხარეში და გავამარტივოთ. გვექნება:

$$y'''-13y'-12y=64\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{-x}-13(4\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{-x})-12(\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{-x})=$$
$$=64\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{-x}-52\mathrm{e}^{4x}+26\mathrm{e}^{-x}-12\mathrm{e}^{4x}-24\mathrm{e}^{-x}=$$
$$=\mathrm{e}^{4x}(64-52-12)-\mathrm{e}^{-x}(2-26+24)=\mathrm{e}^{4x}\cdot 0+\mathrm{e}^{-x}\cdot 0=0,$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $y=\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{-x}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

5. მოცემულია $y=\sin x\cdot 2^x$ ფუნქცია, ვიპოვოთ $y^{(5)}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (10.3) ფორმულა, ჩავთვალოთ, რომ $u=\sin x$, $v=2^x$.

რადგან

$$u'=\sin(x+\pi/2),\ u''=\sin(x+2\cdot\pi/2),\ u'''=\sin(x+3\cdot\pi/2),$$
$$u^{(4)}=\sin(x+4\cdot\pi/2),\ u^{(5)}=\sin(x+5\cdot\pi/2),\ v'=2^x\ln 2,$$
$$v''=2^x\ln^2 2,\ v'''=2^x\ln^3 2,\ v^{(4)}=2^x\ln^4 2,\ v^{(5)}=2^x\ln^5 2,$$

ამიტომ

$$(\sin x\cdot 2^x)^{(5)}=\sin(x+5\cdot\pi/2)\cdot 2^x+5\sin(x+4\cdot\pi/2)\cdot 2^x\ln 2+$$
$$+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\sin(x+3\cdot\pi/2)\cdot 2^x\ln^2 2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(x+2\cdot\pi/2)\cdot 2^x\ln^3 2+$$
$$+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin(x+\pi/2)\cdot 2^x\ln^4 2+\sin x\cdot 2^x\ln^5 2=$$
$$=2^x(\cos x+5\sin x\cdot\ln 2-10\cos x\cdot\ln^2 2-10\sin x\ln^3 2+$$
$$+5\cos x\cdot\ln^4 2+\sin x\cdot\ln^5 2).$$

6. $y=f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც მოცემულია $y^3+2xy^2-3x^2+9=0$ განტოლების სახით, მოვძებნოთ მეორე რიგის წარმოებულის მნიშვნელობა $x=2$ წერტილში (შევნიშნოთ, რომ $y(2)=-1$).

ამოხსნა. არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ:

$$3y^2\cdot y'+2y^2+4xy\cdot y'-6x=0 \tag{10.4}$$

ჩავსვათ (10.4)-ში $x=2$, $y=-1$ და გავამარტივოთ

$$3(-1)^2\cdot y'+2(-1)^2+4\cdot 2(-1)\cdot y'-6\cdot 2=0,\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y'+2-8y'-12=0\Rightarrow y'=-2. \tag{10.5}$$

ახლა გავაწარმოოთ (10.4) ტოლობა. გვექნება

$$6y\cdot y'\cdot y'+3y^2\cdot y''+4y\cdot y'+4(y\cdot y'+x(y'\cdot y'+y\cdot y''))-6=0.$$

ამ ტოლობაში ჩავსვათ $x=2$, $y=-1$, $y'=-2$ მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$6(-1)(-2)^2+3(-1)^2y''+4(-1)(-2)+$$
$$+4\left[(-1)(-2)+2(-2)^2+2(-1)\cdot y''\right]-6=0$$
$$-24+3y''+8+40-8y''-6=0\Rightarrow -5y''=-18\Rightarrow y''=\frac{18}{5}.$$

7. $y=f(x)$ მოცემულია პარამეტრული განტოლებებით

$$\begin{cases} x = \ln\cos t \\ y = \ln\cos 2t \end{cases} \text{ ვიპოვოთ } y''_{x^2}.$$

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებულები

$$x'_t = -\frac{1}{\cos t}\sin t = -\operatorname{tg} t, \qquad x''_{t^2} = (-\operatorname{tg} t)' = -\frac{1}{\cos^2 t}.$$

$$y'_t = -\frac{1}{\cos 2t}(-2\sin 2t) = -2\operatorname{tg} 2t, \qquad y''_{t^2} = -\frac{4}{\cos^2 2t}.$$

(10.2) ფორმულის ძალით

$$y''_{x^2} = \frac{x'_t \cdot y''_{t^2} - y'_t \cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3} = \frac{(-\operatorname{tg} t)\left(-\frac{4}{\cos^2 2t}\right) - (-2\operatorname{tg} 2t)\left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right)}{(-\operatorname{tg} t)^3} =$$

$$= \frac{4\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t - 2\operatorname{tg} 2t \cdot \cos^2 2t}{-\operatorname{tg}^3 t \cdot \cos^2 2t \cdot \cos^2 t} = \frac{4\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos^2 t - 2\frac{\sin 2t}{\cos 2t}\cdot\cos^2 2t}{-\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}\cdot\cos^2 2t\cdot\cos^2 t} =$$

$$= \frac{(4\sin t\cos t - 4\sin t\cos t\cos 2t)\cos t}{-\sin^3 t\cos^2 2t} = \frac{4\sin t\cos t(1-\cos 2t)\cos t}{-\sin^3 t\cos^2 2t} =$$

$$= \frac{8\sin^3 t\cos^2 t}{-\sin^3 t\cos^2 2t} = -\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}. \quad \text{ე.ი. } y''_{x^2} = -\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}.$$

მაგალითები

იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები

10.1. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, y'''. **10.2.** $y = x^6$, $y^{(6)}$.

10.3. $y = \ln(x+1)$, $y^{(4)}$. **10.4.** $y = \ln\sin x$, y'''.

10.5. $y = 2\sqrt{x}$, $y^{(4)}$. **10.6.** $y = \sqrt{4-x^2}$, y''.

10.7. $y = \sqrt[5]{x^2}$, y'''. **10.8.** $y = e^x\cos x$, y'''.

10.9. $y = x e^{-x}$, y'''.

10.10. $y = x \ln x$, y'''.

10.11. $y = x^3 2^x$, y'''.

10.12. $y = 4^{-x^2}$, y''.

10.13. $y = \dfrac{x^3}{1-x}$, $y^{(4)}$.

10.14. $y = x^3 \ln x$, y'''.

10.15. $y = x e^x$, $y^{(n)}$.

10.16. $y = \ln(1+x)$, $y^{(n)}$.

10.17. $y = e^{x/2}$, $y^{(n)}$.

10.18. $y = \sin 3x$, $y^{(n)}$.

10.19. $y = 2^{3x}$, $y^{(n)}$.

10.20. $y = \cos ax$, $y^{(n)}$.

10.21. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $y^{(n)}$.

10.22. $y = x^{n-1} \cdot \ln x$, $y^{(n)}$.

10.23. $y = x \sin x$, $y^{(n)}$.

10.24. $y = \sin^2 x$, $y^{(n)}$.

იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებული შესაბამის წერტილში

10.25. $y = \sin 5x + 3\cos 2x + e^{3x}$, $y^{(4)}(\pi)$.

10.26. $y = x^2 e^{ax}$, $y'''(0)$.

10.27. $y = \cos^2 x$, $y'''(\pi/4)$.

10.28. $y = \dfrac{1}{x - x^2}$, $y^{(4)}(2)$.

10.29. $y = x \operatorname{sh} x$, $y^{(100)}(0)$.

იპოვეთ პარამეტრული და არაცხადი ფუნქციების მითითებული რიგის წარმოებული

10.30 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10.31. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10.32. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

10.33. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10.34. $x^2 + y^2 = 4$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10.35. $y^2 - 2xy = 0$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10.36. $\rho = \operatorname{tg}(\varphi + \rho)$, $\dfrac{d^2 \rho}{d\varphi^2}$.

10.37. $e^x + x = e^y + y$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. **10.38.** $y^3 + x^3 = 3axy$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

10.39. $e^{xy} - xy = 0$, y''. **10.40.** $x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0$, y''.

10.41. $x^2 + xy + y^2 + 3 = 0$, y''. **10.42.** $x^2 + y^3 + y = 0$, y''.

შეამოწმეთ, რომ ფუნქცია აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას

10.43. $y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, $y'' - \alpha^2 y = 0$.

10.44. $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{x}$, $y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}$.

10.45. $y = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{-x}$, $y'' + 2y' + 10y = 0$.

10.46. $y = A\cos e^x + B\sin e^x$, $y'' - y' + e^{2x} y = 0$.

10.47. $y = e^{10\arcsin x}$, $(1 - x^2)y'' - xy' - 100y = 0$.

10.48. $y = \cos(10\arccos x)$, $(1 - x^2)y'' - xy' + 100y = 0$.

10.49. $y = e^x \sin x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$.

10.50. $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$, $y'' + k^2 y = 0$.

10.51. $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$, $y'' - k^2 y = 0$.

10.52. $y = e^{-\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$.

10.53. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$, $y^{(4)} - y = 0$.

ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებული

10.54. $y = e^{\alpha x} \cdot x^2$, $y^{(n)}$. **10.55.** $y = e^{\alpha x}(x^3 + 5x^2 + 2x)$, $y^{(n)}$.

10.56. $y = x^2 \cos x$, $y^{(n)}$. **10.57.** $y = x^5 e^x$, $y^{(5)}$.

10.58. $y = (x^4 + 3x^3)e^x$, $y^{(4)}$.

პასუხები

10.1. 18. **10.2.** 6!. **10.3.** $-\dfrac{6}{(x+1)^4}$. **10.4.** $\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$.

10.5. $-\dfrac{15}{8\sqrt{x^7}}$. **10.6.** $-\dfrac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$. **10.7.** $\dfrac{48}{125\sqrt[5]{x^{13}}}$.

10.8. $-2e^x(\cos x+\sin x)$. **10.9.** $e^{-x}(3-x)$. **10.10.** $-1/x^2$.

10.11. $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$.

10.12. $4^{-x^2}(2\ln 4)(2x^2\ln 4-1)$. **10.13.** $\dfrac{4!}{(1-x)^5}$.

10.14. $6\ln x+11$. **10.15.** $e^x(x+n)$. **10.16.** $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

10.17. $e^{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2^n}$. **10.18.** $3^n\sin(3x+n\dfrac{\pi}{2})$. **10.19.** $2^{3x}(3\ln 2)^n$.

10.20. $a^n\cos(ax+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$. **10.21.** $2(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. **10.22.** $\dfrac{(n-1)!}{x}$.

10.23. $x\sin(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})-n\cos(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$. **10.24.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10.25. $48+81e^{3\pi}$. **10.26.** 6α. **10.27.** 4. **10.28.** $-\dfrac{93}{4}$.

10.29. 100. **10.30.** $-\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$. **10.31.** 0. **10.32.** $-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$.

10.33. $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$. **10.34.** $-\dfrac{4}{y^3}$. **10.35.** 0. **10.36.** $-\dfrac{2(1+\rho^2)}{\rho^5}$.

10.37. $\dfrac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$. **10.38.** $-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **10.39.** $\dfrac{2y}{x^2}$.

10.40. $\dfrac{2}{(x-y)^3}$. **10.41.** $\dfrac{18}{(x+2y)^3}$. **10.42.** $-\dfrac{18y^4+12y^2+24x^2y+2}{(3y^2+1)^3}$.

10.54. $e^{\alpha x}(\alpha^n x^2+2n\alpha^{n-1}x+n(n-1)\alpha^{n-2})$.

10.55. $e^{\alpha x}[\alpha^n(x^3+5x^2+2x)+n\alpha^{n-1}(3x^2+10x+2)+$

$+n(n-1)\alpha^{n-2}(3x+5)+n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}]$.

10.56. $\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)x^2+2n\cos\left(x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)x+n(n-1)\cos\left(x+(n-2)\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10.57. $e^x(120+600x+600x^2+200x^3+25x^4+x^5)$.

10.58. $e^x(96+204x+108x^2+19x^3+x^4)$.

§11. ფუნქციის დიფერენციალი. მისი გამოყენება. მაღალი რიგის დიფერენციალები

$y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში, რომელიც აღინიშნება dy ან $df(x)$ სიმბოლოთი, გამოითვლება ფორმულით

$$dy=f'(x)dx. \tag{11.1}$$

დიფერენცირების ძირითადი თვისებებია

1. $dc=0$; 2. $d(cf(x))=cdf(x)$; 3. $d(f_1(x)\pm f_2(x))=df_1(x)\pm df_2(x)$;
4. $d(f_1(x)\cdot f_2(x))=f_1(x)df_2(x)+f_2(x)df_1(x)$;
5. $d\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{f_2(x)df_1(x)-f_1(x)df_2(x)}{f_2^{\,2}(x)}$; 6. $df_1(f_2(x))=f_1'(f_2(x))df_2(x)$.

$y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების მიახლოებითი გამოთვლებისათვის გამოიყენება შემდეგი ფორმულები

$$\Delta y\approx dy \tag{11.2}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{11.3}$$

$y = f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, რომელიც აღინიშნება d^2y სიმბოლოთი, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$d^2y = d(dy) \qquad (11.4)$$

ადგილი აქვს ტოლობას $d^2y = f''(x)dx^2$, საზოგადოდ, n-რი რიგის დიფერენციალი მოიძებნება ფორმულით:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n \qquad (11.5)$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ფუნქციათა პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალები
ა) $y = \sin(3x+5)$; ბ) $y = \operatorname{arctg} 4x$; გ) $y = x\ln(5x-3)$.

ამოხსნა. ა) ვიპოვოთ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები.

გვექნება $y' = 3\cos(3x+5)$, $y'' = -9\sin(3x+5)$, მაშინ (11.1) და (11.4) ფორმულების თანახმად $dy = 3\cos(3x+5)dx$, $d^2y = -9\sin(3x+5)dx^2$.

ბ) რადგან $y' = \dfrac{4}{1+16x^2}$ და $y'' = -\dfrac{128x}{(1+16x^2)^2}$, , ამიტომ $dy = \dfrac{4dx}{1+16x^2}$,

$d^2y = -\dfrac{128x dx^2}{(1+16x^2)^2}$;

გ) რადგან $y' = \ln(5x-3) + \dfrac{5x}{5x-3} = \ln(5x-3) + 1 + \dfrac{3}{5x-3}$;

$y'' = \dfrac{5}{5x-3} - \dfrac{15}{(5x-3)^2} = \dfrac{5(5x-6)}{(5x-3)^2}$, ამიტომ

$$dy = \left(\ln(5x-3) + \frac{5x}{5x-3}\right)dx, \; d^2y = \frac{5(5x-6)}{(5x-3)^2}dx^2.$$

2. გამოვთვალოთ მიახლოებით: ა) $\sin 29^0$; ბ) $e^{0.3}$; გ) $\operatorname{arctg} 0,98$; დ) $\sqrt[4]{17}$.

ამოხსნა. ა) განვიხილოთ ფუნქცია $y = \sin x$ და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა $x = 29^0$-ზე, რისთვისაც ვიგულისხმოთ, რომ $x_0 = 30^0$ და $\Delta x = -1^0 \approx -0{,}02$, მაშინ

$$f(x_0) = \sin 30^0 = 0{,}5; f'(x_0) = f'(30^0) = \cos x\Big|_{x=30^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86.$$

(11.3) ფორმულის თანახმად $x = 29^0 \approx 0{,}5 - 0{,}85 \cdot 0{,}02 = 0{,}483$.

ბ) განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = e^x$ და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა $x = 0{,}3$-ში. ამ შემთხვევაში მივიღოთ $x_0 = 0$ და $\Delta x = 0{,}3$, ამიტომ $f(x_0) = e^0 = 1, f'(x_0) = e^x\Big|_{x=0} = 1$. მაშასადამე $e^{0,3} \approx 1 + 1 \cdot 0{,}3 = 1{,}3$.

გ) განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \operatorname{arctg} x$, ხოლო $x = 0{,}98$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}02$, მაშინ $f(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$; $f'(x_0) = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = 0{,}5$. მაშასადამე $\operatorname{arctg} 0{,}98 \approx 0{,}79 - 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}78$.

დ) ავიღოთ $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x = 17$, $x_0 = 16$, $\Delta x = 1$; მაშინ

$f(x_0) = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\Big|_{x=16} = \frac{1}{32} \approx 0{,}03$, მაშასადამე

$\sqrt[4]{17} \approx 2 + 0{,}03 \cdot 1 = 2{,}03$.

მაგალითები

იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალები

11.1. $y = \cos(7 - 5x)$. **11.2.** $y = \arcsin 2x$. **11.3.** $y = 3^{4x}$.

11.4. $y = \sqrt[5]{3 - 2x} + 2/x^3$. **11.5.** $y = \operatorname{tg} 3x - \sqrt[5]{(2+x)^2}$.

11.6. $y = e^{5x} - 2/x^5$. **11.7.** $y = \operatorname{arctg}(1 - 4x) + \frac{4}{\sqrt{x}}$.

11.8. $y=\ln(5+7x)-\dfrac{4}{x^4}$. **11.9.** $y=(2x+1)\ln(3-2x)$.

11.10. $y=\sin^3(5x-1)$. **11.11.** $y=\sin(2x-x^3)$.

11.12. $y=(2-5x)6^{7x}$. **11.13.** $y=\ln(x^2-5x)$.

11.14. $y=\dfrac{3x-4}{2x+1}$. **11.15.** $y=\dfrac{x+3}{x+5}$.

მიახლოებით გამოთვალეთ:

11.16. $\cos 61^0$. **11.17.** $e^{0,2}$. **11.18.** $\operatorname{arctg} 0,96$. **11.19.** $\sqrt[5]{33}$.

11.20. $10^{2,1}$. **11.21.** $\sqrt[4]{82}$. **11.22.** $\sqrt{(2,02)^4+9}$. **11.23.** $\ln 1,2$.

11.24. $\ln 0,9$. **11.25.** $\operatorname{arctg} 1,04$. **11.26.** $\sqrt{(3,01)^2-5}$.

11.27. $\sqrt{(1,97)^3+1}$. **11.28.** $\arcsin 0,54$. **11.29.** $\sqrt{(3,03)^2-5}$.

11.30. $\sqrt[4]{(4,95)^2-9}$.

პასუხები

11.1. $dy=5\sin(7-5x)dx,\ d^2y=-25\cos(7-5x)dx^2$.

11.2. $dy=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx,\ d^2y=\dfrac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}dx^2$.

11.3. $dy=4\ln 3\cdot 3^{4x}dx,\ d^2y=16\ln^2 3\cdot 3^{4x}dx^2$.

11.4. $dy=\left(-\dfrac{2}{5\sqrt[5]{(3-2x)^4}}-\dfrac{6}{x^4}\right)dx,\quad d^2y=\left(-\dfrac{16}{25(3-2x)\sqrt[5]{(3-2x)^4}}+\dfrac{24}{x^5}\right)dx^2$.

11.5. $dy=\left(\dfrac{3}{\cos^2 3x}-\dfrac{2}{5\sqrt[5]{(2+x)^3}}\right)dx,\ d^2y=\left(\dfrac{18\sin 3x}{\cos^3 3x}+\dfrac{6}{25(2+x)\sqrt[5]{(2+x)^3}}\right)dx^2$.

11.6. $dy=\left(5e^{5x}+\dfrac{10}{x^6}\right)dx,\ d^2y=\left(25e^{5x}-\dfrac{60}{x^7}\right)dx^2$.

11.7. $dy=\left(\frac{-2}{8x^2-4x+1}-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)dx,\quad d^2y=\left(\frac{32x-8}{(8x^2-4x+1)^2}+\frac{3}{x^2\sqrt{x}}\right)dx^2.$

11.8. $dy=\left(\frac{7}{5+7x}+\frac{16}{x^5}\right)dx,\ d^2y=\left(-\frac{49}{(5+7x)^2}-\frac{80}{x^6}\right)dx^2.$

11.9. $dy=\left(2\ln(3-2x)-\frac{4x+2}{3-2x}\right)dx,\ d^2y=\frac{8x-28}{(3-2x)^2}dx^2.$

11.10. $dy=15\sin^2(5x-1)\cos(5x-1)dx,$
$d^2y=(150\sin(5x-1)-225\sin^3(5x-1))dx^2.$

11.11. $dy=(2-3x^2)\cos(2x-x^3)dx,$
$d^2y=(-6x\cos(2x-x^3)-(2-3x^2)^2\sin(2x-x^3))dx^2.$

11.12. $dy=(7\ln 6(2-5x)-5)6^{7x}dx,$
$d^2y=(-70\ln 6+49\ln^2 6(2-5x))6^{7x}dx^2.$

11.13. $dy=\frac{2x-5}{x^2-5x}dx,\ d^2y=\frac{-2x^2+10x-25}{(x^2-5x)^2}dx^2.$

11.14. $dy=\frac{11}{(2x+1)^2}dx,\ d^2y=-\frac{44}{(2x+1)^3}dx^2.$

11.15. $dy=\frac{2}{(x+5)^2}dx,\ d^2y=-\frac{4}{(x+5)^3}dx^2.$

11.16. 0,483. **11.17.** 1,2. **11.18.** 0,77. **11.19.** 2,013. **11.20.** 123.
11.21. 3,009. **11.22.** 5,064. **11.23.** 0,2. **11.24.** -0,1. **11.25.** 0,805.
11.26. 2,01. **11.27.** 2,94. **11.28.** 0,57. **11.29.** 2,045. **11.30.** 1,984.

§12. ბრტყელი წირის მხები და ნორმალი. კუთხე წირებს შორის. ბრტყელი წირის სიმრუდე. სიმრუდის რადიუსი.

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხები მის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში ეწოდება M_0M მკვეთის ზღვრულ მდგომარეობას, როცა M წერტილი წირის გასწვრივ მიისწრაფვის M_0-კენ.

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხების განტოლებას $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში აქვს შემდეგი სახე

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (12.1)$$

წირის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში ნორმალი ეწოდება წრფეს, რომელიც გავლებულია ამ წერტილზე გამავალი მხები წრფის მართობულად.

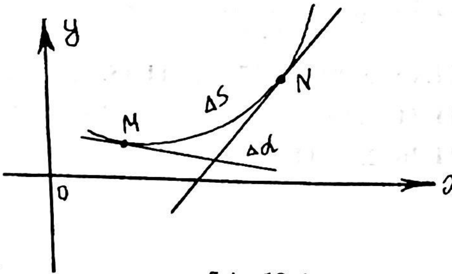
$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $M_0(x_0;y_0)$ წერტილში გამავალი ნორმალის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (12.2)$$

თუ $\Delta\alpha$-თი ავღნიშნავთ კუთხეს M და N წერტილებში გავლებულ მხებებს შორის (იხ. ნახ. 12.1), ხოლო $\overset{\frown}{MN}$-ის სიგრძეს ΔS-ით, მაშინ წირის სიმრუდე k ეწოდება სიდიდეს

$$k=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \text{ სადაც}$$

α კუთხე გამოსახულია რადიანებში.



ნახ. **12.1.**

$y = f(x)$ ფუნქციით მოცემული წირის სიმრუდე გამოითვლება ფორმულით

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (12.3)$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, მაშინ წირის სიმრუდე გამოითვლება ფორმულით

$$k = \frac{x_t' \cdot y_t'' - x_t'' \cdot y_t'}{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}} \qquad (12.4)$$

თუ წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho = \rho(\varphi)$ სახით, მაშინ

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} \qquad (12.5)$$

მოცემულ წერტილში წირის სიმრუდის შებრუნებულ სიდიდეს ეწოდება ამ წერტილში სიმრუდის რადიუსი და აღინიშნება R-ით ე.ი.

$$R = \frac{1}{|k|} \qquad (12.3)$$

კუთხე მრუდ წირსა და წრფეს შორის ეწოდება კუთხეს, ამ წრფესა და წრფისა და მრუდის გადაკვეთის წერტილზე გავლებულ წირის მხებს შორის.

ორ წირს შორის კუთხე მათი გადაკვეთის წერტილში ეწოდება ამ წერტილში გავლებულ მხებებს შორის კუთხეს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. შევადგინოთ $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის მხებისა და ნორმალის განტოლებები წერტილში, რომლის აბსცისაა $x = 4$.

ამოხსნა. მხებისა და ნორმალის განტოლებების შესადგენად რო-

გორც (12.1) და (12.2) ფორმულებიდან ჩანს უნდა ვიცოდეთ სამი რიცხვი: x_0 – შეხების წერტილის აბსცისა, $y_0 = f(x_0)$ – შეხების წერტილის ორდინატა და $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ – მხების კუთხური კოეფიციენტი.

ამოცანის პირობით $x_0 = 4$, ამიტომ $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

$f'(x_0) = f'(4) = \dfrac{1}{2\cdot 2} = \dfrac{1}{4}$.

მოძებნილი რიცხვების (12.1) და (12.2) ფორმულებში ჩასმა მოგვცემს $y-2 = \dfrac{1}{4}(x-4)$ ანუ $y = \dfrac{1}{4}x+1$.

ხოლო ნორმალის განტოლება იქნება

$y-2 = -4(x-4)$ ანუ $y = -4x+18$.

2. შევადგინოთ მხებისა და ნორმალის განტოლებები $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ელიფსისა წერტილში, რომლის აბსცისაა 3.

ამოხსნა. y_0-ის საპოვნელად $x_0 = 3$ ჩავსვათ ელიფსის განტოლებაში.

$$\frac{9}{18}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2.$$

მაშასადამე, მხებისა და ნორმალის განტოლებები მოსაძებნი გვაქვს ორ წერტილში $M_1(3;2)$ და $M_2(3;-2)$.

$f'(x_0)$-ის მოსაძებნად განვიხილოთ $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}-1=0$ ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქცია და გამოვიყენოთ არაცხადი ფუნქციის გაწარმოების წესი.

$$\frac{2x}{18}+\frac{2y\cdot y'}{8}=0 \Rightarrow \frac{x}{9}+\frac{y\cdot y'}{4}=0 \Rightarrow y'=\frac{-4x}{9y}.$$

$M_1(3;2)$ წერტილისათვის $f'(x_0) = -\frac{4x_0}{9y_0} = -\frac{4\cdot 3}{9\cdot 2} = -\frac{2}{3}$, ხოლო

$M_2(3;-2)$ წერტილისათვის $f'(x_0) = -\frac{4x_0}{9y_0} = -\frac{4\cdot 3}{9\cdot(-2)} = \frac{2}{3}$.

(12.1)-ის ძალით $y-2 = -\frac{2}{3}(x-3) \Rightarrow y = 2-\frac{2}{3}x+2 \Rightarrow 2x+3y-12=0$

ხოლო (12.2)-ის ძალით:

$$y-2 = -\frac{1}{-\frac{2}{3}}(x-3) \Rightarrow y-2 = \frac{3}{2}x-\frac{9}{2} \Rightarrow 3x-2y-5=0$$

M_2 წერტილისათვის კი

$$y+2 = \frac{2}{3}(x-3) \Rightarrow 2x-3y-12=0$$

$$y+2 = -\frac{1}{2/3}(x-3) \Rightarrow 3x+2y-5=0$$

მაშასადამე, M_1 წერტილში მხების განტოლებაა $2x+3y-12=0$, ხოლო ნორმალისა $3x-2y-5=0$. M_2 წერტილში კი მხების განტოლება იქნება $2x-3y-12=0$, ნორმალისა კი $3x+2y-5=0$.

3. შევადგინოთ მხებისა და ნორმალის განტოლებები $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ წირისა წერტილში, რომლის აბსცისაა $x=2a$.

ამოხსნა.

$$y_0 = f(2a) = \frac{8a^3}{4a^2+4a^2} = a. \quad f'(x) = -\frac{8a^3}{(4a^2+x^2)^2}2x = -\frac{16a^3x}{(4a^2+x^2)^2}.$$

$f'(2a) = -\frac{16a^3\cdot 2a}{(4a^2+4a^2)^2} = -\frac{32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$. მაშინ (12.1)-ის ძალით. მხების განტოლება იქნება $y-a = -1/2(x-2a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y-2a=-x+2a \Rightarrow x+2y-4a=0$. (23.2)-ის თანახმად, ვპოულობთ ნორმალის განტოლებას $y-a=2(x-2a) \Rightarrow 2x-y=3a$.

4. შევადგინოთ მხების განტოლება წირისა, რომელიც მოცემულია პარამეტრულად $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$:

ა) ნებისმიერ $(x(t_0);y(t_0))=(x_0;y_0)$ წერტილში,

ბ) $t=\dfrac{\pi}{2}$ წერტილში.

ამოხსნა. მხების განტოლება დავწეროთ შემდეგი სახით $y-y_0=y'_x(x-x_0)$, სადაც $(x_0;y_0)$ წირის ფიქსირებული ნებისმიერი წერტილია.

პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2\sin t}{2(1-\cos t)}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$. (12.1) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$y-2(1-\cos t)=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}(x-2(t-\sin t))$. ეს იქნება მხების განტოლება ნებისმიერ $(x(t_0),y(t_0))$ წერტილში, ხოლო როცა $t=\dfrac{\pi}{2}$, მივიღებთ:

$$y-2\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\left(x-2\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow y-2(1-0)=1\cdot(x-\pi+2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-y-\pi+4=0.$$

5. რა კუთხით იკვეთებიან $y=x^2$ და $y^2=x$ წირები.

ამოხსნა. პირველ რიგში მოვნახოთ მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილები.

ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$, ამ სისტემის ამოხსნით ვპო-

ულობთ, რომ თანაკვეთის წერტილებია $M_1(0;0)$ და $M_2(1;1)$.

პირველი წირის მხების განტოლება $(x_0;y_0)$ წერტილში იქნება $y-y_0=2x_0(x-x_0)$, მეორე წირისა კი $x-x_0=x'_y(y_0)(y-y_0)$.

$M_1(0;0)$ წერტილის შემთხვევაში პირველი მხები ემთხვევა აბსცისთა ღერძს, მეორე კი ორდინატთა ღერძს, ამიტომ მათ შორის კუთხეა 90^0.

$M_2(1;1)$ წეტილისათვის კი მივიღებთ:

$$y-1=2(x-1),\ (k_1=2),\ y-1=\frac{1}{2}(x-1),\ (k_2=\frac{1}{2}).$$

მაშინ (8.11)-ის ძალით $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{2-1/2}{1+2\cdot 1/2}=\frac{3}{4}$. $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

6. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ და $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსებისათვის მოვნახოთ გადაკვეთის წერტილები და კუთხე მათ შორის.

ამოხსნა. ელიფსები განლაგებული არიან საკოორდინატო ღერძების სიმეტრიულად, ამიტომ განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყის მხოლოდ პირველი კვადრანტი.

გადაკვეთის წერტილების საპოვნელად ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\end{cases}.$$

ამ სისტემის პირველ კვადრანტში მოთავსებული ამონახსნია $M\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$. მოვძებნოთ გადაკვეთის წერტილში გავლებული თითოეული ელიფსის მხები. პირველი ელიფსის განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$\frac{2x}{16}+\frac{2y\cdot y'}{9}=0\Rightarrow\frac{x}{8}+\frac{2y\cdot y'}{9}=0\Rightarrow y'=-\frac{9x}{16y}.$$

$$y'\left(\frac{12}{5}\right)=-\frac{9\cdot 12/5}{16\cdot 12/5}=-\frac{9}{16}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ მეორე ელიფსისათვის $y'\left(\frac{12}{5}\right)=-\frac{16}{9}$. ე.ი.

$k_1=-\frac{9}{16}$, $k_2=-\frac{16}{9}$, მაშინ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{-9/16-(-16/9)}{1+9/16\cdot 16/9}=\frac{175}{288}$.

$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{175}{288}$.

7. გამოვთვალოთ $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის სიმრუდე.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (12.3) ფორმულა. $x^2+y^2-R^2=0$ ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი ფუნქციისათვის ვიპოვოთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები

$$2x+2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.\ y''=\left(-\frac{x}{y}\right)'=-\frac{x'\cdot y-xy'}{y^2}=$$

$$=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{R^2}{y^3}.$$

მაშინ,

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\left|-R^2/y^3\right|}{\left[1+(-x/y)^2\right]^{3/2}}=\frac{R^2/|y|^3}{\left((y^2+x^2)/y^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{R^2}{|y|^3}:\frac{(R^2)^{3/2}}{(y^2)^{3/2}}=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}.$$

მაშასადამე, $x^2+y^2=R^2$ წრეწირის სიმრუდე მუდმივი სიდიდეა და უდრის $\frac{1}{R}$-ს. ამავე წრეწირის სიმრუდის რადიუსი კი იქნება

$\frac{1}{K}=\frac{1}{1/R}=R.$

8. ვიპოვოთ $\rho = a(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდის სიმრუდის რადიუსი.

ამოხსნა. რადგან წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში, ამიტომ სიმრუდის R რადიუსის მოსაძებად გამოვიყენებთ (12.5) ფორმულას. ვიპოვოთ წარმოებულები: $\rho' = -a\sin\varphi$, $\rho'' = -a\cos\varphi$.

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\left|\rho^2 - 2\rho'^2 - \rho\cdot\rho''\right|} = \frac{\left[a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2\right]^{3/2}}{\left|a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2(-a\sin\varphi)^2 - a(1+\cos\varphi)(-a\cos\varphi)\right|} =$$

$$= \frac{\left[a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}{\left|a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)\right|} =$$

$$= \frac{\left[a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\right]^{3/2}}{\left|a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi+\cos\varphi+\cos^2\varphi)\right|} = \frac{a^3(2+2\cos\varphi)^{3/2}}{\left|a^2(3+3\cos\varphi)\right|} =$$

$$= \frac{a^3\left(2\cdot 2\cdot\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)^{3/2}}{3a^2\cdot 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{a\sqrt{64}\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|}{6} = \frac{4}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

მაგალითები

შეადგინეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მხები წრფისა და ნორმალის განტოლება იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა x_0, ორდინატა კი y_0.

12.1. $y = x^2,\ x_0 = 1.$

12.2. $y = x^2,\ x_0 = -1.$

12.3. $y = \dfrac{x}{x^2+1},\ x_0 = 1.$

12.4. $y = \dfrac{x^2}{x-2},\ x_0 = 4.$

12.5. $y = \dfrac{1}{x},\ y_0 = 2.$

12.6. $y = \dfrac{1}{x},\ y_0 = -1.$

12.7. $y = \sqrt{x},\quad y_0 = 1/2.$

12.8. $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1,\ M(1;6).$

12.9. $x^3+y^2+2x-6=0, \quad M(-1;3).$

12.10. $y^4-4x^4-6xy=0, \quad M(1;2).$

12.11. $x^5+y^5-2xy=0, \quad M(1;1).$

12.12. $x^2+y^2+2x+6y=0, \quad y>-3;\ x_0=0.$

12.13. $x=t^2,\ y=t^3,\ M(4;8).$

12.14. $x=t\cos t,\ y=t\sin t, \quad M\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8};\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$

12.15. $x=\sqrt{2}\cos^3 t,\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \quad M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

12.16. $x=\frac{1+t}{t^3},\ y=\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t}, \quad M(2;2).$

12.17. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1, \quad M(4\sqrt{2};2\sqrt{2}).$ **12.18.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1,\ M(5;2\sqrt{2}).$

12.19. $y^2=6x,\ M(2;2\sqrt{3}).$ **12.20.** $y=3x^3-5x^2-2x+1,\ x_0=2.$

12.21. $x^3+y^3-3xy-13=0,\ M(-1;2).$

12.22. $2x^2-4y^3+5xy-2=0, \quad M(1;0).$

განსაზღვრეთ რომელ წერტილებში იკვეთებიან წირები და იპოვეთ კუთხე მოცემულ წირებს შორის.

12.23. $y=x-x^3,\ y=5x.$ **12.24.** $y=\sqrt{2}\sin x,\ y=\sqrt{2}\cos x.$

12.25. $y=x^2,\ y=x^3.$ **12.26.** $y=\frac{1}{x},\ y=\sqrt{x}.$

12.27. $y=x^3,\ y=\frac{1}{x^2}.$ **12.28.** $y=\ln x,\ y=\frac{x^2}{2e}.$

12.29. $y=x^2-4x+4,\ y=-x^2+6x-4.$ **12.30.** $y=4x^2+2x-8,\ y=x^3-x+10.$

12.31. $y = x^2,\ x = y^2.$ **12.32.** $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3,\ x = 1.$

12.33. $y = e^{x/2},\ x = 2.$ **12.34.** $x^2 + y^2 = 5,\ y^2 = 4x.$

12.35. $y^2 = 2x^3, \quad 64x - 48y - 11 = 0.$

12.36. $x^3 + y^2 - xy - 3 = 0, \quad y = x + 1.$

იპოვეთ წირის სიმრუდის რადიუსი.

12.37. $y = ax^2.$ **12.38.** $y = x^3.$

12.39. $y = \sin x.$ **12.40.** $y = 3\ln\cos\frac{x}{3}.$

12.41. $3ay^2 = 2x^3.$ **12.42.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

12.43. $y = a\ln\cos\frac{x}{a}.$ **12.44.** $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (ჰიპერბოლური ხვია).

12.45. $\rho = a\varphi$ (არქიმედეს ხვია).

12.46. $\rho = a e^{b\varphi}$ (ლოგარითმული ხვია).

იპოვეთ წირის სიმრუდე მოცემულ x_0 წერტილში.

12.47. $y = e^x,\ x_0 = 0.$ **12.48.** $y = x^2 - 3x + 1,\ x_0 = 1.$

12.49. $y = 3^{2x},\ x_0 = 0.$ **12.50.** $y = x^3 - 2,\ x_0 = 1.$

პასუხები

12.1. $y = 2x - 1, \quad y = -1/2 \cdot x + 3/2$; **12.2.** $y = -2x - 1, \quad y = 1/2 \cdot x + 3/2$;
12.3. $y = 0{,}5,\ x = 1$; **12.4.** $y = 8,\ x = 4$; **12.5.** $y = -4x + 4,\ y = 1/4 \cdot x - 15/8$;
12.6. $y = -x - 2,\ y = x$; **12.7.** $y = x + 0{,}25,\ y = -x + 3/4$;
12.8. $6x - y = 0,\ x + 6y - 37 = 0$; **12.9.** $5x + 6y - 13 = 0, \quad 6x - 5y + 21 = 0$;

12.10. $14x-13y+12=0,\ 13x+14y-41=0;$

12.11. $x+y-2=0,\ y=x;$ **12.12.** $x+3y=0,\ 3x-y=0;$

12.13. $3x-y-4=0,\ x+3y-28=0;$

12.14. $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0, (\pi-4)x-(\pi+4)y+\pi\sqrt{2}=0;$

12.15. $x+y-1=0,\ x-y=0;$

12.16. $7x-10y+6=0,\ \ 10x+7y-34=0;$

12.17. $x-y-2\sqrt{2}=0,\ x+y-6\sqrt{2}=0;$

12.18. $x-\sqrt{2}y+3=0,\ \ \sqrt{2}x+y-7\sqrt{2}=0;$

12.19. $3x-2\sqrt{3}y+6=0,\ 2\sqrt{3}x+3y-10\sqrt{3}=0;$

12.20. $14x-y-27=0,\ x+14y-16=0;$

2.21. $x-5y+11=0,\ 5x+y+3=0;$

12.22. $4x+5y-4=0,\ 5x-4y-5=0;$ **12.23.** $(0;0),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3};$

12.24. $\left(\frac{\pi}{4}-\pi k,(-1)^k\right),\ \varphi=\frac{\pi}{2};$ **12.25.** $(0;0),\ \varphi=0,\ (1;1),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{7};$

23.26. $(1;1),\ \varphi=\operatorname{arctg}3;$ **12.27.** $(1;1),\ \varphi=\frac{\pi}{4};$

12.28. $\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right),\ \varphi=0.$ **12.29.** $(1;1)\quad (4;4),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{6}{7};$

12.30. $(3;34),\ \varphi=0,\ (-2;4),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{25}{153};$

12.31. $(0;0),\ \varphi=\pi/2,\ (1;1),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4};$ **12.32.** $(1;5/9),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{3};$

12.33. $(2;e),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{e};$ **12.34.** $(1;\pm2),\ \varphi=\operatorname{arctg}3;$

12.35. $(1/8;-1/16),\ \varphi=\frac{\pi}{2};$ **12.36.** $(1;2),\quad \varphi=\operatorname{arctg}2;$

12.37. $R=\dfrac{(1+4a^2x^2)^{3/2}}{2|a|}$; **12.38.** $R=\dfrac{(1+9x^4)^{3/2}}{6|x|}$;

12.39. $R=\dfrac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{|\sin x|}$; **12.40.** $R=\dfrac{|\cos x/3|}{3}$;

12.41. $R=\sqrt{\dfrac{x(2a+3x)^3}{3a^2}}$; **12.42.** $R=3\sqrt[3]{|ax|}$;

12.43. $R=\dfrac{a}{|\cos x/a|}$; **12.44.** $R=\dfrac{a(1+\varphi^2)^{3/2}}{\varphi^4}$;

12.45. $R=\dfrac{a(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$; **12.46.** $R=\rho\sqrt{1+b^2}$;

12.47. $K=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; **12.48.** $K=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

12.49. $K=\dfrac{4\ln^2 3}{(1+4\ln^2 3)^{3/2}}$; **12.50.** $K=\dfrac{3}{5\sqrt{10}}$.

§13. განუსაზღვრელობების გახსნა ლოპიტალის წესით

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადი უსასრულოდ მცირე ან უსასრულოდ დიდი ფუნქციებია x_0 წერტილის მიდამოში, $g'(x)\neq 0$ და $f(x)/g(x)$ ფარდობა $x=x_0$ წერტილში გვაძლევს $0/0$ ან ∞/∞ ტიპის განუსაზღვრელობებს, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.1}$$

იმ პირობით, რომ წარმოებულების ფარდობის ზღვარი არსებობს. განუსაზღვრელობის გახსნის ამ წესს ლოპიტალის წესს უწოდებენ.

თუ განაყოფი $f'(x)/g'(x)$ $x=x_0$ წერტილში კვლავ გვაძლევს მითითებული ტიპებიდან ერთ-ერთ განუსაზღვრელობას და $f'(x)$ და $g'(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ზემოთ მოყვანილ პირობებს, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \tag{13.2}$$

და ა.შ.

სხვა ტიპის განუსაზღვრელობები ალგებრული გარდაქმნებით მიიყვანებიან $0/0$ ან ∞/∞ სახის განუსაზღვრელობებზე, კერძოდ თუ $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, მაშინ გარდაქმნა $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ მიგვიყვანს $0/0$ სახის განუსაზღვრელობაზე, ხოლო გარდაქმნა $f(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ მიგვიყვანს ∞/∞ ტიპის განუსაზღვრელობაზე.

$\infty-\infty$ ტიპის განუსაზღვრელობის შემთხვევაში $f(x)$-$g(x)$ სხვაობა გარდავქმნათ შემდეგნაირად

$$f(x)-g(x)=\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)} \tag{13.3}$$

და მივიღებთ $0/0$ ტიპის განუსაზღვრელობას.

$0^0, \infty^0, 1^\infty$ ტიპის განუსაზღვრელობანი გაიხსნებიან წინასწარი გალოგარითმების გზით თუ გამოვიყენებთ იგივეობას

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)} \quad . \tag{13.4}$$

მაშინ აღნიშნული ტიპის განუსაზღვრელობები დაიყვანებიან $0\cdot\infty$ ტიპის განუსაზღვრელობებზე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{\ln^3(1+x)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{x^2}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}$; 6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-1/x)$; 9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

ამოხსნა.

1. $f(x)=x^2-1+\ln x$ და $g(x)=e^x-e$ განსაზღვრულნი არიან $x=1$ წერტილის მიდამოში, ამასთან $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$ ე.ი. გვაქვს $0/0$ ტიპის განუსაზღვრელობა, ამიტომ (13.1)-ის ძალით

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x+e}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x+e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{2+1}{e}=3/e.$$

2. გვაქვს $0/0$ ტიპის განუსაზღვრელობა, ამიტომ (13.1)-ის ძალით

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin xe^x-5x}{4x^2+7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-5}{8x+7}=-\frac{4}{7}.$$

3. (13.1) ფორმულის ძალით

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{\ln^3(1+x)}=|\ln(1+x)\sim x|=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos^2 x\cdot 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x\cdot 3}=\frac{1}{3}.$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\alpha x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\alpha\sin\alpha x/\cos\alpha x}{2x}=|\sin\alpha x\sim\alpha x|=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\alpha x}{\cos\alpha x\cdot 2x}=-\frac{\alpha^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\alpha x}=-\frac{\alpha^2}{2}.$$

5. $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}=|\text{გვაქვს } \infty/\infty \text{ სახის განუსაზღვრელობა}|=$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x/(1-\cos x)}{1/tgx\cdot 1/\cos^2 x}=\left|\begin{matrix}\sin x\sim x\\ 1-\cos x\sim x^2/2\\ \operatorname{tg} x\sim x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot x\cdot\cos^2 x}{x^2/2}=2.$$

6. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1/\cos^2 x}{3/\cos^2 3x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=|(24.1)\text{-ის ძალით}|=$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 6x}{2\sin 2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

7. $$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\left|\begin{matrix}\text{გვაქვს } 0\cdot\infty \text{ სახის}\\ \text{განუსაზღვრელობა}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\dfrac{\pi x}{2}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{ეს კი არის } 0/0 \text{ სახის}\\ \text{განუსაზღვრელობა}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2(\pi x/2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

8. გვაქვს $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა, ამიტომ გარდავქმნათ მოცემული გამოსახულება და შემდეგ გამოვიყენოთ (13.1) ფორმულა

$$\lim_{x\to 0}(ctgx-1/x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=|\sin x\sim x|=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\sin x=0.$$

9. ამ შემთხვევაში გვაქვს 1^∞ სახის განუსაზღვრელობა. (13.4) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{e^x-1-x}\cdot\ln(1+x^2)}=\left|\begin{matrix}\text{მაჩვენებლიანი ფუნქციის}\\ \text{უწყვეტობის თანახმად}\end{matrix}\right|=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=|\ln(1+x^2)\sim x^2|=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1-x}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{გამოვიყენოთ}\\ \text{(13.1) ფორმულა}\end{matrix}\right|=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{e^x-1}}=|e^x-1\sim x|=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}}=e^2.$$

10. გვაქვს 0^0 სახის განუსაზღვრელობა. აქაც გამოვიყენოთ (13.4) ფორმულა და შემდეგ ლოპიტალის წესი. გვექნება

$$\lim_{x\to\Pi/2}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=e^{\lim\limits_{x\to\Pi/2}(\pi/2-x)\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\Pi/2}\frac{\ln\cos x}{2/(\Pi-2x)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{-\sin x/\cos x}{\frac{4}{(\pi-2x)^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{-\sin x(\pi-2x)^2}{4\cos x}}=\left|\lim_{x\to\pi/2}\sin x=1\right|=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{-(\pi-2x)^2}{4\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{4(\pi-2x)}{-4\sin x}}=e^0=1.$$

მაგალითები

ლოპიტალის წესის გამოყენებით იპოვეთ ზღვარი

13.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **13.2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; **13.3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$;

13.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$; **13.5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$;

13.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+7x-5}{x^3+2x^2-9x+6}$; **13.7.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$;

13.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$; **13.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; **13.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

13.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$; **13.12.** $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$; **13.13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

13.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg} x}$; **13.15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$;

13.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$; **13.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$;

13.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$; **13.19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;

13.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; **13.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{x^2}$; **13.22.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$;

13.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin xe^{2x}-x}{5x^2+x^3}$; **13.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x}$;

13.25. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$; **13.26.** $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{8\sin^2 x-6\sin x+1}{6\sin^2 x+5\sin x-4}$;

13.27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$; 13.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[3]{x^2}-1}$;

13.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\ln^3(1+x)}$; 13.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}$; 13.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos^2 x}$;

13.32. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; 13.33. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$; 13.34. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln(x-\pi/2)}{\operatorname{tg} x}$;

13.35. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln 3x}$; 13.36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; 13.37. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}$;

13.38. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$; 13.39. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$; 13.40. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot x}{\ln(1-x)}$;

13.41. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x}$; 13.42. $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; 13.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{2x+5}$;

13.44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^3-5x^2+1}{x^3-2x^2+3}$; 13.45. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}, n\in R+$;

13.46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arctg} x}$; 13.47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln((x+1)/x)}{\ln((x-1)/x)}$;

13.48. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; 13.49. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\operatorname{tg} 7x}{\ln\operatorname{tg} 2x}$;

13.50. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}(\pi/2x)}$; 13.51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}{x^2\cos^2 2x}$;

13.52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-e^{-3x})^2}{x^2\cos^3 3x}$; 13.53. $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln\operatorname{ctg} x$;

13.54. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$; 13.55. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$;

13.56. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x$; **13.57.** $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

13.58. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; **13.59.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$;

13.60. $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{\ln x}$; **13.61.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$; **13.62.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$;

13.63. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$; **13.64.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; **13.65.** $\lim\limits_{x\to 0+}(2x^2+x)^{3x^2+x}$;

13.66. $\lim\limits_{x\to 0+}(1/x)^{tgx}$; **13.67.** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+a/x)^x$; **13.68.** $\lim\limits_{x\to 0+}(\mathrm{ctg}\,x)^{1/\ln x}$;

13.69. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$; **13.70.** $\lim\limits_{x\to\pi/2+}(tgx)^{2\cos x}$.

პასუხები

13.1. 1/2; **13.2.** 3/5; **13.3.** 9/2; **13.4.** 10/7; **13.5.** -6; **13.6.** -2; **13.7.** -1/6; **13.8.** 49/198; **13.9.** 2; **13.10.** 1; **13.11.** 1; **13.12.** -1; **13.13.** 1/6; **13.14.** 0; **13.15.** 2/3; **13.16.** 1/3; **13.17.** 1/5; **13.18.** 3; **13.19.** 1/9; **13.20.** 6/7; **13.21.** 2; **13.22.** α/β; **13.23.** 2/5; **13.24.** -1/2; **13.25.** -1; **13.26.** $2/\pi$; **13.27.** 2; **13.28.** 9/2; **13.29.** 1/3; **13.30.** 3; **13.31.** 4; **13.32.** 1; **13.33.** 0; **13.34.** 0; **13.35.** -1/3; **13.36.** 0; **13.37.** 0; **13.38.** ∞; **13.39.** 0; **13.40.** ∞; **13.41.** ∞; **13.42.** 1; **13.43.** 3/2; **13.44.** -3; **13.45.** 0; **13.46.** 0; **13.47.** -1; **13.48.** 1; **13.49.** 1; **13.50.** 0; **13.51.** 16; **13.52.** 36; **13.53.** 0; **13.54.** $-2/\pi$; **13.55.** 0; **13.56.** $2/\pi$; **13.57.** 0; **13.58.** -1/2; **13.59.** 0; **13.60.** 1; **13.61.** $e^{-1/2}$: **13.62.** $1/e$; **13.63.** e; **13.64.** 1; **13.65.** 1; **13.66.** 1; **13.67.** e^a; **13.68.** $1/e$; **13.69.** $1/e$; **13.70.** 1.

§ 14. ფუნქციის მონოტონურობა. ფუნქციის ექსტრემუმი.

თუ მოცემულ შუალედში ფუნქციის წარმოებული დადებითია (უარყოფითია), მაშინ ეს ფუნქცია ამ შუალედში ზრდადია (კლებადია).

x_0 წერტილს ეწოდება ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ x_0 წერტილის რაიმე δ მიდამოში ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$, როცა $x \neq x_0$ და აღინიშნება სიმბოლოთი $x_{max}(x_{min})$.

ლოკალური მაქსიმუმისა და ლოკალური მინიმუმის წერტილებს ერთად ჰქვიათ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

$f'(x)=0$ განტოლების ფესვებს სტაციონარული წერტილი ეწოდება, ხოლო სტაციონარულ წერტილებსა და იმ წერტილებს, სადაც წარმოებული არ არსებობს, ეწოდება კრიტიკული წერტილები.

ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობებს ეწოდება ფუნქციის ექსტრემუმები: $y_{max}=f(x_{max})$, $y_{min}=f(x_{min})$

ექსტრემუმის წერტილები (x_{min} და x_{max}) მოიძებნებიან ექსტრემუმის არსებობის შემდეგი საკმარისი პირობის ძალით:

თუ კრიტიკულ x_0 წერტილზე გადასვლისას წარმოებული ნიშანს იცვლის „–“-დან „+“-კენ, ან რაც იგივეა x_0 წერტილში ფუნქციის კლებადობა იცვლება ზრდადობით, მაშინ x_0 მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ x_0 წერტილზე გადასვლისას წარმოებული ნიშანს იცვლის „+“-დან „–“-კენ, ან რაც იგივეა, x_0 წერტილში ფუნქციის ზრდადობა იცვლება კლებადობით, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია.

ექსტრემუმის წერტილები შეგვიძლია ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის გამოყენებითაც, კერძოდ:

თუ x_0 არის $y=f(x)$ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი და $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$ მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. დავადგინოთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:

ა) $f(x) = x^3 - 3/2\, x^2 - 6x + 4$; ბ) $f(x) = 1/5\, x^5 - 2/3\, x^3 + x + 3$;

გ) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$; დ) $f(x) = \begin{cases} 1/e\text{, როცა } x < e \\ \ln x/x\text{, როცა } x \ge e \end{cases}$.

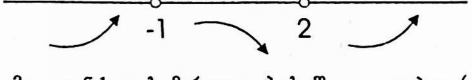
ამოხსნა. ა). ვიპოვოთ წარმოებული $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$. სტაციონარული წერტილების დასადგენად ამოვხსნათ განტოლება

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$.

რიცხვითი ღერძი სტაციონარული წერტილებით დაიყოფა $(-\infty;-1)$, $(-1;2)$ და $(2;+\infty)$ ინტერვალებად.

დავადგინოთ თითოეულ ინტერვალში წარმოებულის ნიშანი. $(-\infty;-1)$ ინტერვალიდან ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი, ვთქვათ, $x=-2$, მაშინ $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3(-2) - 6 = 12 + 6 - 6 > 0$; ეს კი ნიშნავს, რომ $(-\infty;-1)$ შუალედის ნებისმიერ წერტილში წარმოებულს ექნება ნიშანი „+“, მაშასადამე ამ შუალედში ფუნქცია ზრდადია.

$(-1;2)$ ინტერვალიდან ავიღოთ წერტილი $x=0$, $f(0) = 3\cdot 0 - 3\cdot 0 - 6 = -6 < 0$ ე.ი. ამ ინტერვალში ფუნქცია კლებადია, ხოლო $(2;+\infty)$ შუალედიდან თუ ავიღებთ, მაგალითად, წერტილს $x=3$, მაშინ $f'(3) = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 - 6 = 12 > 0$ ე.ი. ამ შუალედში ფუნქცია ზრდადია. სქემატურად მას ასე წარმოვადგენთ:



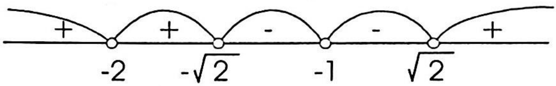
მაშასადამე, ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;-1)$ და $(2;+\infty)$, ხოლო კლებადობის შუალედია $(-1;2)$.

ბ) $y' = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \ge 0$. აქედან ვასკვნით, რომ ფუნქცია ზრდადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში.

გ) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x^2+3x+2)-(2x+3)(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)^2} = \dfrac{6x^2-12}{(x^2+3x+2)^2}$.

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები. $y(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1' = -\sqrt{2}, x_2' = \sqrt{2}$. $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1'' = -1; x_2'' = -2$, ე.ი. კრიტიკული წერტილებია $-2, -\sqrt{2}, -1, \ \sqrt{2}$.

კრიტიკული წერტილებით რიცხვითი ღერძი დავყოთ ინტერვალებად და ა)-ში მოცემული წესით დავადგინოთ თითოეულ მათგანში წარმოებულის ნიშანი



ე.ი. ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;-2)$, $(-2;-\sqrt{2})$ და $(\sqrt{2};+\infty)$, კლებადობის კი $(-\sqrt{2};-1)$ და $(-1;\sqrt{2})$.

დ) გავაწარმოოთ მოცემული ფუნქცია: $f'(x) = \begin{cases} 0, \text{ როცა } x < e \\ \dfrac{1-\ln x}{x^2}, \text{ როცა } x \ge e \end{cases}$.

$(-\infty;e)$ შუალედში ფუნქცია მუდმივია. დავადგინოთ წარმოებულის ნიშანი $x \ge e$ შუალედში; ვთქვათ, $x = e^2$, მაშინ $f'(e^2) = \dfrac{1-\ln e^2}{(e^2)^2} =$ $= -1/e^4 < 0$ ე.ი. $(-\infty;e)$ ინტერვალში ფუნქცია მუდმივია, ხოლო $(e;-\infty)$ შუალედში – კლებადი.

2. დავადგინოთ შემდეგი ფუნქციების მონოტონურობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები:

ა) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 2\dfrac{2}{3}$ ბ) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$.

ამოხსნა. ა. $y' = x^2 - x - 6$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$; $x = 3$.

შევადგინოთ შემდეგი სახის ტაბულა:

		x_{max}		x_{min}	
	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-10\frac{5}{6}$	$\nearrow$
		y_{max}		y_{min}	

შევნიშნოთ, რომ $x=-2$ წერტილში წარმოებულმა ნიშანი შეიცვალა „+“-დან „–“-კენ, ამიტომ $x_{\max} = -2$, $y_{\max} = f(x_{\max}) = f(-2) = 1/3(-2)^3 - 1/2(-2)^2 - 6(-2) + 2\frac{2}{3} = 10$. ანალოგიურად $x=3$-თვის $y_{\min} = y(3) = -10\frac{5}{6}$.

პასუხი. კლებადობის შუალედია (- 2; 3), ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;-2)$ და $(3;+\infty)$, $x_{\max} = -2, y_{\max} = 10, x_{\min} = 3, y_{\min} = -10\frac{5}{6}$.

ბ. $f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$

წარმოებული გახდება ნული, როცა $5x-4=0$ ანუ $x = 4/5$, ხოლო $x=0$ წერტილში წარმოებული არ არსებობს. ე.ი. კრიტიკული წერტილებია 0 და 4/5.

ღერძი დავყოთ $(-\infty;0)$, $(0;4/5)$ და $(4/5;+\infty)$ შუალედებად, და-

ვადგინოთ თითოეულ შუალედში წარმოებულის ნიშანი.

შევადგინოთ ტაბულა:

		x_{max}		x_{min}	
	$(-\infty;0)$	0	$(0;4/5)$	$4/5$	$(4/5;+\infty)$
y'	$+$	არ არსებობს	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$	$\nearrow$
		y_{max}		y_{min}	

$$y_{\max} = y(x_{\max}) = y(0) = 0,$$

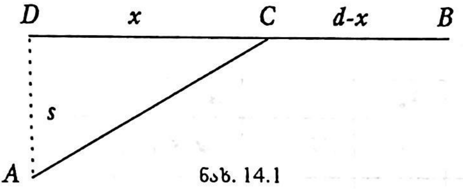
$$y_{\min} = y(4/5) = (4/5-2)\sqrt[3]{16/25} = -6/5\sqrt[3]{16/25}\ .$$

პასუხი: კლებადობის შუალედია(0;4/5), ზრდადობის შუალედე-ბია $(-\infty;0)$ და $(4/5;+\infty)$.

$$x_{\max} = 0,\ y_{\max} = 0,\ x_{\min} = 4/5,\ y_{\min} = -6/5\sqrt[3]{16/25}$$

3. რომელი გზით უნდა გადავზიდოთ ტვირთი, რკინიგზიდან s მანძილით დაშორებული A პუნქტიდან რკინიგზამდე ავტოტრანსპორტით და შემდეგ რკინიგზით B პუნქტამდე, რომ დანახარჯი იყოს მინიმალური, თუ ცნობილია, რომ 1 ტ. ტვირთის გადაზიდვა 1 კმ მანძილზე ავტოტრანსპორტით n-ჯერ მეტი ღირს, ვიდრე რკინიგზით ($n>1$). ამასთანავე, ავტოტრანსპორტით გადაზიდვის ხარჯები მანძილის პროპორციულია.

ამოხსნა. გავატაროთ $AD\perp DC$ და აღვნიშნოთ $DB=d$. ვთქვათ, ტვირთი ავტომობილით უნდა მივიტანოთ C პუნქტამდე, რომელიც დაშორებულია D პუნქტიდან x კმ მანძილით.



ნახ. 14.1

ნახაზიდან ჩანს, რომ $AC=\sqrt{s^2+x^2}$, $CB=d-x$. თუ რკინიგზის ერთ კილომეტრზე დანახარჯს ჩავთვლით ერთ ერთეულად, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ სატრანსპორტო დანახარჯია $K(x)=n\sqrt{s^2+x^2}+d-x$. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მინიმუმი. გვექნება

$$K'(x)=\frac{nx-\sqrt{s^2+x^2}}{\sqrt{s^2+x^2}}=0\Rightarrow x=\frac{s}{\sqrt{n^2-1}}.$$

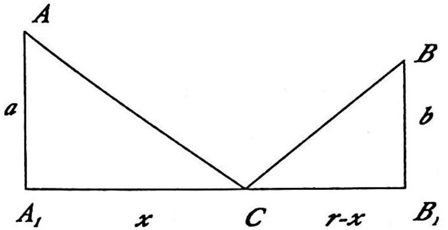
ვინაიდან $K''(x)=\dfrac{ns^2}{\sqrt{(s^2+x^2)^3}}>0$, ამიტომ $K(x)$ ფუნქციას $x=s/\sqrt{n^2-1}$ წერტილში გააჩნია მინიმუმი.

ამგვარად, იმისათვის, რომ გადაზიდვის დანახარჯი იყოს მინიმალური, ტვირთი A პუნქტიდან უნდა გადავიტანოთ C პუნქტში, რომელიც დაშორებულია D პუნქტიდან $s/\sqrt{n^2-1}$ კილომეტრით.

4. სამრეწველო ნედლეულის ბაზა დაშორებულია მდინარის ნაპირიდან a კმ მანძილით, ხოლო მოხმარების პუნქტიდან b კმ მანძილით. მდინარის სანაპიროს რომელ წერტილში უნდა აშენდეს საწარმო, რომ სატრანსპორტო დანახარჯები იყოს მინიმალური.

ამოხსნა:

ვთქვათ საწარმო უნდა აშენდეს C წერტილში (იხ. ნახ. 14.2.). ავღნიშნოთ $A_1B_1=r$, $A_1C=x$, მაშინ $CB_1=r-x$.



ნახ. 14.2

როგორც ნახ. 14.2-დან ჩანს, $AC=\sqrt{a^2+x^2}$, $CB=\sqrt{b^2+(r-x)^2}$. რადგან სატრანსპორტო დანახარჯი მანძილის პროპორციულია, ამიტომ $K(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(r-x)^2}$. მოვძებნოთ ამ ფუნქციის მინიმუმი. გვექნება $K'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\dfrac{r-x}{\sqrt{b^2+(r-x)^2}}=0$.

ამოვხსნათ ეს განტოლება. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{r-x}{\sqrt{b^2+(r-x)^2}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2(b^2+r^2-2rx+x^2)=(a^2+x^2)(r^2-2rx+x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2-a^2)x^2+2a^2rx-a^2r^2=0.\ D=4a^4r^2+4(b^2-a^2)a^2r^2=$$

$$=4a^2b^2r^2\cdot\ \ x=\frac{-2a^2r+2abr}{2(b^2-a^2)}=\frac{ar}{a+b}.$$

ვინაიდან $K''(x)=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{[b^2+(r-x)^2]^3}}>0$,

ამიტომ $K(x)$ ფუნქცია $x=ar/(a+b)$ წერტილში მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. მაშასადამე საწარმო უნდა აშენდეს C წერტილში, რომელიც დაშორებულია A წერტილიდან $ar/(a+b)$ კმ მანძილით.

მაგალითები

იპოვეთ მოცემული ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.

14.1. $f(x)=4x^3-21x^2+18x+7$; **14.2.** $f(x)=8x^3-x^4$;

14.3. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-1$; **14.4.** $f(x)=(x-1)^3(2x+3)^2$;

14.5. $f(x)=xe^{-3x}$; **14.6.** $f(x)=e^x/x$; **14.7.** $f(x)=x^2e^{-x^2}$;

14.8. $f(x)=x^2-10\ln x$; **14.9.** $f(x)=x^2\ln x$; **14.10.** $f(x)=x/\ln x$;

14.11. $f(x)=3^{1/(x-3)}$; **14.12.** $f(x)=x^4-2x^2$;

14.13. $f(x)=x^2-\ln x^2$; **14.14.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$;

14.15. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}$; **14.16.** $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{3^x}$;

14.17. $f(x)=x^7e^{-x^2+5x}$; **14.18.** $f(x)=1/2\,x\ln x-x\ln 2$;

14.19. $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; **14.20.** $f(x)=e^x\cos x$,

იპოვეთ მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები.

14.21. $y=x^2-2x+3$; **14.22.** $y=x^3/3-2x^2+3x+1$;

14.23. $y=-x^4+2x^2$; **14.24.** $y=x^3-9x^2+15x+3$;

14.25. $y=x^4-8x^2+2$; **14.26.** $y=3-2\sqrt{x+1}$;

14.27. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; **14.28.** $y=\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$;

14.29. $y=\dfrac{x}{\ln x}$; **14.30.** $y=2e^x+e^{-x}$; **14.31.** $y=x\ln^2 x$,

14.32. $y=x^4-2x^2+2$; **14.33.** $y=x+1/x$;

14.34. $y=(x-1)e^{3x}$; **14.35.** $y=(3-x^2)e^x$;

14.36. $y=x^3e^{-4x}$; **14.37.** $y=(x+2)e^{1/x}$;

14.38. $y=x+\sqrt{1-x}$; **14.39.** $y=x\sqrt{1-x}, |x|\leq 1$;

14.40. $y=\sqrt{x}\ln x$, **14.41.** $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+x}$;

14.42. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$, **14.43.** $y=x\sqrt[3]{x-1}$;

14.44. $y=\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{a-x}$; **14.45.** $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

14.46. $y=\dfrac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$;

პასუხები

№	ზრდადობის შუალედი	კლებადობის შუალედი	№	ზრდადობის შუალედი	კლებადობის შუალედი
14.1.	$(-\infty;1/2)$ $(3;+\infty)$	$(1/2;3)$	**14.2.**	$(-\infty;6)$	$(6;+\infty)$
14.3.	$(-\infty;1)$ $(3;+\infty)$	$(1;3)$	**14.4.**	$(-\infty;-3/2)$ $(-1/2;+\infty)$	$(-3/2;-1/2)$
14.5.	$(-\infty;1/3)$	$(1/3;+\infty)$	**14.6.**	$(1;+\infty)$	$(-\infty;0)$, $(0;1)$
14.7.	$(-\infty;-1)$ $(0;1)$	$(-1;0)$ $(1;+\infty)$	**14.8.**	$(\sqrt{5};+\infty)$	$(0;\sqrt{5})$
14.9.	$(1/\sqrt{e};+\infty)$	$(0;1/\sqrt{e})$	**14.10.**	$(e;+\infty)$	$(0;1)$, $(1;e)$
14.11.	-	$(-\infty;3)$ $(3;+\infty)$	**14.12.**	$(-1;0)$ $(1;+\infty)$	$(-\infty;-1)$ $(0;1)$

14.13. $(-1;0)$ $(-\infty;-1)$
$(1;+\infty)$ $(0;1)$

14.14. $(-\infty;-2)$ $(-\sqrt{2};-1)$
$(-2;-\sqrt{2})$ $(-1;\sqrt{2})$
$(\sqrt{2};+\infty)$

14.15. - $(-\infty;-1)$,
$(-1,0)$,
$(0;1)$,
$(1;+\infty)$

14.16. $\left(0;\dfrac{2}{\ln 3-1}\right)$ $(-\infty;0)$
$(\dfrac{2}{\ln 3-1};+\infty)$

14.17. $(-1;7/2)$ $(-\infty;-1)$
$(7/2;+\infty)$

14.18. $(4/e;+\infty)$ $(0;4/e)$

14.19. $(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi K,$ $(\dfrac{\pi}{6}+2\pi K,$
$\dfrac{\pi}{6}+2\pi K)$ $\dfrac{\pi}{2}+2\pi K),$
$(\dfrac{\pi}{2}+2\pi K,$ $(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi K,$
$\dfrac{5\pi}{6}+2\pi K)$ $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi K)$

14.20. $(\dfrac{\pi}{4}(8K-3);$ $(\dfrac{\pi}{4}(8K+1),$
$\dfrac{\pi}{4}(8K+1))$ $\dfrac{\pi}{4}(8K+5))$
$K\in z$

14.21. $x_{min}=1$; $y_{min}=2$; **14.22.** $x_{max}=1$; $y_{max}=7/3$. $x_{min}=3$, $y_{min}=1$.
14.23. $x_{min}=0, y_{min}=0, x_{max}=\pm 1$, $y_{max}=1$. **14.24.** $x_{max}=1$, $y_{max}=10$, $x_{min}=5$, $y_{min}=-22$; **14.25.** $x_{max}=0$, $y_{max}=2$, $x_{min}=\pm 2$, $y_{min}=-14$;
14.26. $x_{max}=-1$, $y_{max}=3$; **14.27.** $x_{min}=\sqrt{2}$, $y_{min}=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$,

$x_{max}=-\sqrt{2}$, $y_{max}=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$. **14.28.** $x_{max}=12/5$, $y_{max}=1/24$;

14.29. $x_{min}=e$; $y_{min}=e$; **14.30.** $x_{min}=-\dfrac{\ln 2}{2}$, $y_{min}=2\sqrt{2}$;

14.31. $x_{max} = e^{-2}$, $y_{max} = 4e^{-2}$, $x_{min}=1$, $y_{min}=0$; **14.32.** $x_{max}=0$, $y_{max}=2$, $x_{min} = \pm 1$, $y_{min}=1$. **14.33.** $x_{min}=1$, $y_{min}=2$, $x_{max}=-1$, $y_{max}=-2$; **14.34.** $x_{min}=2/3$, $y_{min}=-e^2/3$; **14.35.** $x_{min}=-3$, $y_{min} = -6e^{-3}$, $x_{max}=1$, $y_{max}=2e$; **14.36.** $x_{max}=3/4$, $y_{max} = 27e^{-3}/64$, **14.37.** $x_{max}=-1$, $y_{max}=1/e$, $x_{min}=2$, $y_{min} = 4\sqrt{e}$; **14.38.** $x_{max}=3/4$, $y_{max}=5/4$, $x_{min}=1$, $y_{min}=1$; **14.39.** $x_{max}=2/3$, $y_{max} = 2/3\sqrt{1/3}$; **14.40.** $x_{min} = e^{-2}$, $y_{min}=-2/e$; **14.41.** $x_{min}=1$, $y_{min}=0$, $x_{max}=1/3$, $y_{max} = \sqrt[3]{4}/3$; **14.42.** $x_{min}=0$, $y_{min}=0$, $x_{max}=8/27$, $y_{max}=4/27$; **14.43.** $x_{min}=3/4$, $y_{min} = -3\sqrt[3]{2}/8$, **14.44.** $x_{min} = a^2/(a+b)$, $x_{max} = a^2/(a-b)$; **14.45.** $x_{min}=1$, $y_{min}=0$, $x_{max}=e^2$, $y_{max}=4e^{-2}$; **14.46.** $x_{max}=-3$, $y_{max}=1/\ln 3$.

§15. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები სეგმენტზე (გლობალური ექსტრემუმი)

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე და ფუნქციის ყველა იმ სტაციონარულ წერტილებზე, რომელიც მოცემულ სეგმენტს ეკუთვნის. გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა (f უდ), ხოლო უმცირესი კი ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა (f უმც).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ $f(x)=2x^3-6x+5$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა $\left[-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right]$ შუალედში.

ამოხსნა. $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$ სტაციონარული წერტილებია $f'(x)=0$ განტოლების ამონახსნები. $6(x^2-1)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1.$

მოვძებნოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში და შუალედის ბოლოებზე.

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)=2\left(-\frac{5}{2}\right)^3-6\left(-\frac{5}{2}\right)+5=-11\frac{1}{4},\quad f(-1)=2(-1)^3-6(-1)+5=9,$$

$$f(1)=2\cdot 1^3-6\cdot 1+5=1,\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\frac{3}{2}+5=2\frac{3}{4}.$$

პასუხი: $f_{\text{უდ}}=f(-1)=9,\quad f_{\text{უმ}}=f\left(-\frac{5}{2}\right)=-11\frac{1}{4}.$

2. ვიპოვოთ $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^2+2x+5}$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა [-1;1] შუალედში.

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებული:

$$f'(x)=\frac{3x^2+2x+5-(x+1)(6x+2)}{(3x^2+2x+5)^2}=\frac{-3x^2-6x+3}{(3x^2+2x+5)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -3x^2-6x+3=0\Rightarrow 3x^2+6x-3=0\Rightarrow x_1=-1+\sqrt{2},x_2=-1-\sqrt{2}.$$

$x=-1-\sqrt{2}$ არ ეკუთვნის [-1;1]-ს, ხოლო $-1+\sqrt{2}\in[-1;1]$, ამიტომ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოსაძებნად ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები წერტილებში $x=-1,\quad x=-1+\sqrt{2},\quad x=1.$

$$f(-1)=\frac{-1+1}{3-2+5}=0;\quad f(1)=\frac{1+1}{3\cdot 1+2\cdot 1+5}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

$f(-1+\sqrt{2})=\dfrac{-1+\sqrt{2}+1}{3(1-2\sqrt{2}+2)+2(-1+\sqrt{2})+5}=\dfrac{\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}$. რადგან $\dfrac{\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}>\dfrac{1}{5}$ ამიტომ

$$f_{უდ}=\frac{\sqrt{2}}{12-4\sqrt{2}}, \quad f_{უმც}=0.$$

3. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[-\sqrt{19};8]$ შუალედში.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $100-x^2\geq 0$ უტოლობის ამონახსნი, ანუ $[-10;10]$ სეგმენტი. ვიპოვოთ წარმოებული

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}. \quad y'=0\Rightarrow x=0.$$

$f(-\sqrt{19})=\sqrt{100-19}=9$, $f(8)=\sqrt{100-64}=6$, $f(0)=\sqrt{100-0}=10$.

ე.ი. $f_{უდ}=10$, $f_{უმც}=6$.

4. ვიპოვოთ ფუნქციათა გლობალური ექსტრემუმი $[0;2]$ შუალედში: ა) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+4x$; ბ) $y=3x+5$; გ) $y=4-9x$.

ამოხსნა. 1) გავუტოლოთ ნულს ფუნქციის წარმოებული და მოვძებნოთ სტაციონარული წერტილები. გვექნება

$$y'=x^2-5x+4=0\Rightarrow x_1=1; x_2=4.$$

$x_2=4$-ს მოცემულ შუალედს არ მიეკუთვნება, ამიტომ გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები $x=1$, $x=0$ და $x=2$ წერტილებში.

$$y(1)=\frac{11}{6}, \quad y(0)=0, \quad y(2)=\frac{2}{3}.$$

მიღებული შედეგების შედარება კი მოგვცემს:

$$y_{უმც}=y(0)=0, \quad y_{უდ}=y(1)=\frac{11}{6}.$$

ბ) რადგან ფუნქციის წარმოებული $y'=3>0$, ამიტომ ფუნქცია ზრდადია მოცემულ შუალედზე და იგი მიიღებს უმცირეს მნიშვნელო-

ბას $x=0$ წერტილში, ხოლო უდიდეს მნიშვნელობას $x=2$ წერტილში. მაშასადამე

$$y_{\text{უმც}} = y(0) = 5, \quad y_{\text{უდ}} = y(2) = 11.$$

გ) ამ შემთხვევაში $y' = -9 < 0$, ე.ი. ფუნქცია კლებადია მოცემულ შუალედში. ამიტომ

$$y_{\text{უდ}} = y(0) = 4, \quad y_{\text{უმც}} = y(2) = -14.$$

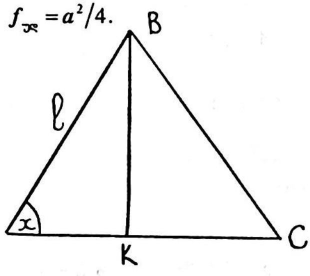
5. მოცემული დადებითი a რიცხვი დავშალოთ ორ ისეთ დადებით შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

ამოხსნა. პირველი შესაკრები აღვნიშნოთ x-ით, მაშინ მეორე იქნება a-x. მათი ნამრავლია $f(x) = x(a-x)$. ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ მიღებული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[0;a]$ შუალედში.

$$f'(x) = (ax - x^2)' = a - 2x. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow a - 2x = 0 \Rightarrow x = a/2.$$

$$f(0) = 0, \quad f(a/2) = a^2/4, \quad f(a) = 0, \text{ ე.ი. } f_{\text{უდ}} = a^2/4.$$

მაშასადამე პირველი შესაკრები ყოფილა $x = a/2$, მეორე შესაკრები კი იქნება $a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$.



ნახ. 15.1

6. ყველა იმ ტოლფერდა სამკუთხედიდან, რომელთა ფერდი l-ის ტოლია, ამოვარჩიოთ ის სამკუთხედი, რომლის ფართობიც უდიდესია.

ამოხსნა. საძიებელი სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე ავღნიშნოთ x-ით, მაშინ ნახ. 15.1-დან ჩანს, რომ

$$BK = l\sin x, \quad AK = l\cos x, \quad AC = 2l\cos x.$$

$$S(x) = \frac{2l\cos x \cdot l\sin x}{2} = \frac{l^2 \sin 2x}{2}.$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მაქსიმუმი. პირველ რიგში, ვიპოვოთ წარმოებული და სტაციონარული წერტილები.

$$S'(x)=\frac{l^2}{2}\cos 2x\cdot 2=l^2\cos 2x.\ S'(x)=0\Rightarrow \cos 2x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in z.$$

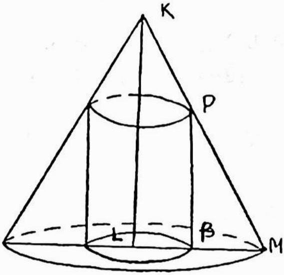
რადგან $0<x<\pi/2$ ამიტომ $x=\pi/4+\pi k$ ამონახსნებიდან ჩვენი ამოცანისათვის დაგვრჩება ერთადერთი კრიტიკული წერტილი $x=\pi/4$ -ს.

როცა $0<x<\pi/4$, მაშინ $S'(x)>0$, ხოლო როცა $\pi/4<x<\pi/2$, მაშინ $S'(x)<0$ ე.ი. $x=\pi/4$ მაქსიმუმის წერტილია.

$$S_{\max}=S(\pi/4)=\frac{l^2\sin 2\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{l^2}{2}.$$ აქედან გამომდინარე, უდიდესი ფართობი აქვს იმ ტოლფერდა სამკუთხედს, რომელშიც ფერდი დახრილია ფუძისადმი 45^0-ით, ე.ი. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედს და ეს ფართობი ტოლია $l^2/2$ -ის.

7. მოცემულ კონუსში ჩავხაზოთ უდიდესი მოცულობის მქონე ცილინდრი.

ამოხსნა. ვთქვათ, კონუსის სიმაღლეა H, ხოლო ფუძის რადიუსი კი R. აღვნიშნოთ h-ით კონუსში ჩახაზული ცილინდრის სიმაღლე, ხოლო r-ით ცილინდრის ფუძის რადიუსი.



ნახ. 15.2

შემოვიტანოთ ცვლადი $BM=x$ (იხ. ნახ. 15.2), მაშინ

$$h=PB=x\,\mathrm{tg}\angle KML=x\frac{H}{R}$$ და $r=R-x$.

ცილინდრის მოცულობა იქნება

$$V(x)=\pi r^2h=\pi(R-x)^2\frac{xH}{R}.$$ ვიპოვოთ x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ეს ფუნქცია მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას.

$$V'(x)=\frac{\pi H}{R}(R-x)^2+\frac{\pi H}{R}x\cdot 2(R-x)(-1)=\frac{\pi H}{R}(R-x)(R-3x).$$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{R}{3}$ ან $x = R$.

როცა $x < \dfrac{R}{3}$, მაშინ ადვილი დასადგენია, რომ $V'(x) > 0$, ხოლო, როცა $x > \dfrac{R}{3}$, მაშინ $V'(x) < 0$, მაშასადამე, $x = \dfrac{R}{3}$ წერტილში $V(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. $V_{\max} = V\left(\dfrac{R}{3}\right) = \dfrac{4}{27}\pi H R^2 > 0$, $V(0) = V(R) = 0$, ე.ი. $x \neq 0$ და $x \neq R$, ამიტომ $0<x<R$ და ზემოთ მიღებული მაქსიმუმი იქნება ჩახაზული ცილინდრის მოცულობის უდიდესი მნიშვნელობა.

8. ქვემეხიდან V_0 საწყისი სიჩქარით გასროლილი ჭურვი გადაადგილდება R მანძილზე. განვსაზღვროთ ქვემეხის ჰორიზონტისადმი დახრის φ კუთხე, რომლისთვისაც R დაშორება იქნება უდიდესი, თუ ცნობილია, რომ R მოიძებნება ფორმულით $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

ამოხსნა. მოცემული ფორმულიდან ჩანს, რომ R არის φ კუთხის ფუნქცია, ამასთან, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. მოვნახოთ წარმოებული: $R' = \dfrac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}$.

$R' = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$. რადგან $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, გვრჩება $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. $R\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{v_0^2}{g}$. შუალედის ბოლოებზე $R\big|_{\varphi=0} = 0$, $R\big|_{\varphi=\pi/2} = 0$,

ე.ი. $R_{\text{უდ}} = \dfrac{v_0^2}{g}$ და საძებნი კუთხეა 45^0.

მაგალითები

მონახეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედში

15.1. $f(x)=-x^2,\ [-2;2]$.

15.2. $f(x)=\frac{1}{2}x^3-9x^2+48x,\ [0;9]$.

15.3. $f(x)=x^4-8x^2+3,\ [-1;2]$.

15.4. $f(x)=\frac{3}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2-1,\ [-4;2]$.

15.5. $f(x)=x^3-6x^2+9,\ [-1;2]$.

15.6. $g(t)=t^4-8t^2+13,\ [-2;3]$.

15.7. $V(\alpha)=\alpha^4-9\alpha^2+4,\ [0;3]$.

15.8. $p(h)=h^3-5h^2+7h-3,\ [0;2]$.

15.9. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1},\ x\in R$.

15.10. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2},\ [-1;1]$.

15.11. $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\ [0;1)$.

15.11. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2},\ [-4;0]$.

15.13. $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+1},\ [-1;1)$.

15.14. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x-1},\ [-3;0)$.

15.15. $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4},\ [-2;1)$.

15.16. $p(\alpha)=2^{5-\alpha^2},\ [-2;1)$.

15.17. $V(h)=3(h^2-2h+2)^{-1},\ [0;6)$.

15.18. $S(t)=\sqrt{t^2+4t+7},\ (-3;0)$

15.19. $g(x)=\sqrt{x^2-4x+2},\ [4;6)$.

15.20. $f(x)=\sqrt{10x-x^2},\ [0;10)$.

15.21. $f(x)=x-2\sqrt{x},\ 0<x<5$.

15.22. $f(x)=\ln(-x^2+10x+1),\ [0;6)$.

15.23. $H(t)=\log_{0,7}(-t^2+6t+1),\ [-4;-1]$.

15.24. $f(x)=\ln(x^2-2x-1),\ [-3;-1)$.

15.25. $f(x)=x^2\ln x,\ [1;e)$.

15.26. $f(x)=x-2\ln x,\ [3/2;e)$.

15.27. $f(x)=x\ln\frac{x}{5},\ [1;5)$.

15.28. $f(x)=2\sin x-\sin 2x,\ [0;\frac{3\pi}{2}]$.

15.29. $f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x,\ [\pi;2\pi]$.

15.30. $f(x)=\sin 2x-1,\ [-\pi/2;\pi/2)$.

იპოვეთ ფუნქციათა გლობალური ექსტრემუმი მოცემულ შუალედში

15.31. ა) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+6x$; ბ) $y=5x-1$; $[0;3)$.

15.32. ა) $y=x^3-6x^2+4$; ბ) $y=5-7x$; $[-1;1)$.

15.33. ა) $y=x^3-5x^2+3x+6$; ბ) $y=11+3x$; $[1;3)$.

15.34. ა) $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x-5$; ბ) $y=8-9x$; $[0;3)$.

15.35. ა) $y=x^3-\frac{9x^2}{2}+4$; ბ) $y=3+4x$; $[-1;2)$.

15.36. ა) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3$; ბ) $y=4-7x$; $[0;3)$.

15.37. ა) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-5$; ბ) $y=5x-2$; $[-1;2)$.

15.38. ა) $y=x^3-\frac{21x^2}{2}-24x$; ბ) $y=11-3x$; $[-2;0)$.

15.39. ა) $y=x^3+6x^2-15x$; ბ) $y=10+6x$; $[0;2)$.

15.40. ა) $y=x^3+2x^2+8$; ბ) $y=15-2x$; $[-1;1)$.

15.41. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზაა l.

15.42. იპოვეთ უდიდესი მოცულობის მქონე იმ ცილინდრის სიმაღლე, რომელიც შეიძლება ჩაიხაზოს R რადიუსიან სფეროში.

15.43. იპოვეთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე იმ ცილინდრის სიმაღლე, რომელიც შეიძლება ჩაიხაზოს R რადიუსიან სფეროში.

15.44. იპოვეთ უმცირესი სრული ზედაპირის ფართობის მქონე იმ ცილინდრის ფუძის რადიუსი, რომლის მოცულობაც არის V.

15.45. იპოვეთ უმცირესი მოცულობის მქონე იმ კონუსის სიმაღლე, რომელიც შეიძლება შემოიხაზოს R რადიუსიან სფეროზე.

15.46. R რადიუსიან მოცემულ სფეროში ჩახაზეთ უდიდესი მოცულობის მქონე წესიერი სამკუთხა პრიზმა, იპოვეთ მისი სიმაღლე.

პასუხები

15.1. $f_{\text{უდ}}=0,\ f_{\text{უმც}}=-4.$ **15.2.** $f_{\text{უდ}}=80,\ f_{\text{უმც}}=0.$

15.3. $f_{\text{უდ}}=3,\ f_{\text{უმც}}=-13.$ **15.4.** $f_{\text{უდ}}=9,\ f_{\text{უმც}}=-34\frac{3}{4}.$

15.5. $f_{\text{უდ}}=9,\ f_{\text{უმც}}=-7.$ **15.6.** $f_{\text{უდ}}=22,\ f_{\text{უმც}}=-3.$

15.7. $f_{\text{უდ}}=4,\ f_{\text{უმც}}=-\frac{65}{4}.$ **15.8.** $f_{\text{უდ}}=0,\ f_{\text{უმც}}=-3.$

15.9. $f_{\text{უდ}}=2,\ f_{\text{უმც}}=2/3.$ **15.10.** $f_{\text{უდ}}=1/2,\ f_{\text{უმც}}=0.$

15.11. $f_{\text{უდ}}=1,\ f_{\text{უმც}}=3/5.$ **15.12.** $f_{\text{უდ}}=13/17,\ f_{\text{უმც}}=-3.$

15.13. $f_{\text{უდ}}=1,\ f_{\text{უმც}}=2\sqrt{2}-2.$ **15.14.** $f_{\text{უდ}}=3,\ f_{\text{უმც}}=-1/4.$

15.15. $f_{\text{უდ}}=1/16,\ f_{\text{უმც}}=1/256.$ **15.16.** $f_{\text{უდ}}=32,\ f_{\text{უმც}}=2.$

15.17. $f_{\text{უდ}}=3,\ f_{\text{უმც}}=3/26.$ **15.18.** $f_{\text{უდ}}=\sqrt{7},\ f_{\text{უმც}}=\sqrt{3}.$

15.19. $f_{\text{უდ}}=\sqrt{14},\ f_{\text{უმც}}=\sqrt{2}.$ **15.20.** $f_{\text{უდ}}=5,\ f_{\text{უმც}}=0.$

15.21. $f_{\text{უდ}}=5-2\sqrt{5},\ f_{\text{უმც}}=-1.$ **15.22.** $f_{\text{უდ}}=\ln 26,\ f_{\text{უმც}}=0.$

15.23. $f_{\text{უდ}}=\log_{0.7}10,\ f_{\text{უმც}}=\log_{0.7}6.$ **15.24.** $f_{\text{უდ}}=\ln 14,\ f_{\text{უმც}}=\ln 2.$

15.25. $f_{\text{უდ}}=e^2,\ f_{\text{უმც}}=0.$ **15.26.** $f_{\text{უდ}}=e-2,\ f_{\text{უმც}}=2-2\ln 2.$

15.27. $f_{\text{უდ}}=0,\ f_{\text{უმც}}=-5/e.$ **15.28.** $f_{\text{უდ}}=0,\ f_{\text{უმც}}=-2.$

15.29. $f_{\text{უდ}}=13\pi,\ f_{\text{უმც}}=12\pi-1.$ **15.30.** $f_{\text{უდ}}=0,\ f_{\text{უმც}}=-2.$

15.31. ა) $f_{\text{უმც}}=-4{,}5,\ f_{\text{უდ}}=17/6.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-1,\ f_{\text{უდ}}=14.$

15.32. ა) $f_{\text{უმც}}=-3,\ f_{\text{უდ}}=4.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-2,\ f_{\text{უდ}}=12.$

15.33. ა) $f_{\text{უმც}}=-3,\ f_{\text{უდ}}=5.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=14,\ f_{\text{უდ}}=20.$

15.34. ა) $f_{\text{უმც}}=-\frac{17}{3},\ f_{\text{უდ}}=-3{,}5.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-19,\ f_{\text{უდ}}=8.$

15.35. ა) $f_{\text{უმც}}=-6,\ f_{\text{უდ}}=4.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-1,\ f_{\text{უდ}}=11.$

15.36. ა) $f_{\text{უმც}}=-13/3,\ f_{\text{უდ}}=-3.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-17,\ f_{\text{უდ}}=4.$

15.37. ა) $f_{\text{უმც}}=-35/6,\ f_{\text{უდ}}=-13/3.$ ბ) $f_{\text{უმც}}=-7,\ f_{\text{უდ}}=8.$

§ 16. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის შუალედები, გადაღუნვის წერტილები, ასიმპტოტები

$y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია (ჩაზნექილია) (a,b) შუალედში, თუ გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც (a,b) შუალედს შეესაბამება, მოთავსებულია ამ რკალის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხების ქვემოთ (ზემოთ).

იმ წერტილს, რომელშიც წირის ამოზნექილობა გადადის ჩაზნექილობაში, ან პირიქით, ეწოდება გადაღუნვის წერტილი.

თუ ორჯერ დიფერენცირებადი $y=f(x)$ ფუნქციისათვის (a,b) შუალედში სრულდება პირობა $f''(x)>0$, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია მოცემულ შუალედში და ამოზნექილია, თუ $f''(x)<0$.

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული არგუმენტის x_0 წერტილზე გადასვლისას იცვლის ნიშანს საპირისპიროზე, მაშინ $M(x_0, f(x_0))$ წერტილი არის ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

შენიშვნა. იმ წერტილებს, სადაც $y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის, წარმოებული უდრის ნულს ან არ არსებობს, უწოდებენ მეორე რიგის კრიტიკულ წერტილებს. ამის გათვალისწინებით, ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილების აბსცისები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის მეორე რიგის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

თუ მანძილი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის $M(x,y)$ წერტილიდან რაიმე წრფემდე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც M წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს, მაშინ ამ წრფეს გრაფიკის ასიმპტოტი ეწოდება.

თუ $y=f(x)$ ფუნქციისათვის, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$ ან $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$, მაშინ $x=a$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

$y=kx+b$ არის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, სადაც

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

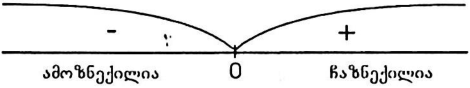
თუ $f(x)=kx+b+f_1(x)$, სადაც $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)=0$, მაშინ $y=kx+b$ წრფე იქნება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.

ამოხსნა. $f(x)=3x^2, f''(x)=6x, 6x=0, \Rightarrow x=0$.

დავადგინოთ $f(x)$-ის ნიშნები $(-\infty;0)$ და $(0;+\infty)$ შუალედებში



$f(0)=0'=0$, ე.ი. $(-\infty;0)$ ამოზნექილობის შუალედია, $(0;+\infty)$ ჩაზნექილობის შუალედია, $O(0;0)$ გადაღუნვის წერტილია.

2. ვიპოვოთ $y=e^{-x^2}$ (გაუსის წირი) ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.

ამოხსნა.

$$y'=-2xe^{-x^2}, y''=2e^{-x^2}(2x^2-1), y''=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}/2$$

f''-ის ნიშანი

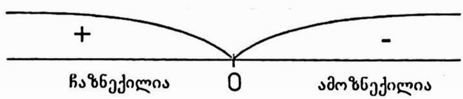
$f(-\sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/2) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$. ე.ი. გრაფიკის ამოზნექილობის შუალედია $\left(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right)$, ჩაზნექილობის შუალედებია $\left(-\infty;-\sqrt{2}/2\right)$ და $\left(\sqrt{2}/2;+\infty\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $M_1(-\sqrt{2}/2;1/\sqrt{e})$ და $M_2(\sqrt{2}/2;1/\sqrt{e})$.

3. ვიპოვოთ $y=\sqrt[3]{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკის ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.

ამოხსნა. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$.

მეორე რიგის წარმოებული ნულს არ გაუტოლდება, მაგრამ გვაქვს კრიტიკული წერტილი $x=1$, სადაც მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს.

y''-ის ნიშანი



$$0\in(-\infty;1),\ y''(0) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(-1)^5}} = \frac{2}{9} > 0,\ 2\in(1;+\infty),\ y''(2) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(2-1)^5}} = -\frac{2}{9} < 0$$

ე.ი. გრაფიკი ამოზნექილია $(1;+\infty)$-ში, ჩაზნექილია $(-\infty;1)$-ში, $x=1$ არის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა.

4. ვიპოვოთ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x}=\infty$, ამიტომ $x=0$ არის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$, რადგან $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, ამიტომ $y=x$ იქნება დახრილი ასიმპტოტი.

5. ვიპოვოთ $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\infty$, ამიტომ $x=\pm 1$ წრფეები ვერტიკალური ასიმპტოტებია.

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}=\frac{x^3-x+x}{1-x^2}=\frac{x(x^2-1)+x}{1-x^2}=-x+\frac{x}{1-x^2}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=0$, ამიტომ $y=-x$ არის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი.

6. ვიპოვოთ $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. $x=\pm 1$ ვერტიკალური ასიმპტოტებია.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}}=\pm 1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0,$$

ე.ი. $y=1\cdot x+0=x$ წრფე არის დახრილი ასიმპტოტი.

7. ვიპოვოთ $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. როცა $x\to 0$, მაშინ $y\to\infty$, ამიტომ $x=0$ არის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

რადგან $\dfrac{x^2+2x-3}{x}=x+2-\dfrac{3}{x}$ და რადგან $\lim\limits_{x\to\infty}(-3/x)=0$, ამიტომ $y=x+2$ არის დახრილი ასიმპტოტი.

8. დავამტკიცოთ, რომ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია

$y=\pm\dfrac{b}{a}x$ წრფეები.

ამოხსნა. ჰიპერბოლის განტოლებიდან $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-(a/x)^2}\right]=\pm\frac{b}{a},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\right]=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2}=0$$

ე.ი. $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ არის ჰიპერბოლის დახრილი ასიმპტოტები.

შენიშვნა. მეორე რიგის წირებიდან ასიმპტოტები მხოლოდ ჰიპერბოლას გააჩნია.

მაგალითები

იპოვეთ ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადალუნვის წერტილები.

16.1. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$. **16.2.** $f(x) = x^3 - 10x^2 + 3x$.

16.3. $f(x) = 1/(1 - x^2)$. **16.4.** $f(x) = x^3/(12 + x^2)$.

16.5. $f(x) = \sqrt{x}/(x + 1)$. **16.6.** $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$.

16.7. $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$. **16.8.** $f(x) = e^{1/x}$. **16.9.** $f(x) = \frac{10}{x}\ln\frac{x}{10}$.

იპოვეთ ფუნქციის გადალუნვის წერტილები

16.10. $f(x) = 36(x - 1)^3$. **16.11.** $f(x) = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

16.12. $f(x) = 1 + x^2 - x^4/2$. **16.13.** $f(x) = x^5/20 - x^4 + 8x^3 - 32x^2$.

16.14. $f(x) = 4x^2 + 1/x$. **16.15.** $f(x) = x^2/(x - 1)^3$.

16.16. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. **16.17.** $f(x) = x^3e^{-4x}$.

16.18. $f(x) = x^2\ln x$. **16.19.** $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

16.20. $y = 1/(x - 1)$. **16.21.** $y = 2/(x + 3)$. **16.22.** $y = x^2/(x + 4)$.

16.23. $y = 6/(x^2 - 16)$. **16.24.** $y = 1/(x + 2)^3$.

16.25. $y = C + a^3/(x - b)^2$. **16.26.** $y = (x^2 + 8x - 6)/x$.

16.27. $y = 1/(x^2 - 6x + 10)$. **16.28.** $y = x^2/(x^2 - 4)$.

16.29. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. **16.30.** $y = xe^{1/x}$. **16.31.** $y = e^{1/x}$.

16.32. $y = e^{1/x} - 1$. **16.33.** $y = \ln x$.

16.34. $y = e^{-x^2}$. **16.35.** $y = \frac{1}{1 - e^x}$.

პასუხები

16.1. ჩაზნექილია $(-\infty;-1/2)$ და $(1/2;+\infty)$ შუალედებზე, ამოზნექილია $(-1/2;1/2)$-ზე, $M_1(1/2;-9/8)$, $_2(-1/2;-17/8)$.
16.2. ჩაზნექილია $(1;+\infty)$-ზე, ამოზნექილია $(-\infty;1)$ შუალედზე, $M(1;-6)$. **16.3.** ჩაზნექილია $(-1;1)$-ზე, ამოზნექილია $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებზე, გადაღუნვის წერტილები არა აქვს. **16.4.** ჩაზნექილია $(-\infty;-6)$ და $(0;6)$ შუალედებზე, ამოზნექილია $(-6;0)$ და $(6;+\infty)$ შუალედებზე, $O(0;0)$ $M_1(6;3/4)$ $M_2(-6;3/4)$. **16.5.** ჩაზნექილია $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ შუალედზე, ამოზნექილია $\left(0;\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$-ზე, $M\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$.
16.6. ჩაზნექილია $(-\infty;-3)$ შუალედზე, ამოზნექილია $(-3;+\infty)$-ზე, $M(-3;0)$. **16.7.** ჩაზნექილია $(-\sqrt{3};0)$ და $(\sqrt{3};+\infty)$ შუალედებზე, ამოზნექილია $(-\infty;-\sqrt{3})$ და $(0;\sqrt{3})$ შუალედებზე, $O(0;0)$ $M_1(\sqrt{3};0)$ $M_2(-\sqrt{3};0)$.
16.8. ჩაზნექილია $(-1/2;0)$ და $(0;+\infty)$ შუალედებზე, ამოზნექილია $(-\infty;-1/2)$-ზე, $M(-1/2;1/e^2)$. **16.9.** ჩაზნექილია $(10e\sqrt{e};+\infty)$-ზე, ამოზნექილია $(0;10e\sqrt{e})$-ზე, $M\left(10e\sqrt{e};\frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$. **16.10.** $M(1;0)$.

16.11. $M_1(-3;294)$, $M_2(2;114)$.
16.12. $M_1(1/\sqrt{3};23/18)$, $M_2(-1/\sqrt{3};23/18)$

16.13. $M(4;-1024/5)$. **16.14.** $M\left(-\sqrt{2}/2;0\right)$.

16.15. $M_1(-2+\sqrt{3};(7-4\sqrt{3})/(\sqrt{3}-3)^3)$, $_2(-2-\sqrt{3};-(7+4\sqrt{3})/(3+\sqrt{3})^3)$
16.16. $M_1(-3;10/e^3)$, $_2(-1;2/e)$.

16.17. $O(0;0)$, $\left((3\pm\sqrt{3})/4;\left(\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{-(3\pm\sqrt{3})/4}\right)$.

16.18. $M\left(1/e\sqrt{e};-3/2e^{-3}\right)$. **16.19.** $M\left(e^{8/3};\dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)$. **16.20.** $x=1$, $y=0$. **16.21.** $x=3$, $y=0$. **16.22.** $y=x-4$, $x=-4$. **16.23.** $x=-4$, $x=4$, $y=0$. **16.24.** $x=-2$, $y=0$. **16.25.** $x=b$, $y=c$. **16.26.** $x=0$, $y=x+8$. **16.27.** $y=0$. **16.28.** $x=\pm 2$, $y=1$. **16.29.** $y=\pm x$. **16.30.** $x=0$, $y=x+1$. **16.31.** $y=1$, $x=0$. **16.32.** $x=0$, $y=0$. **16.33.** $x=0$. **16.34.** $y=0$. **16.35.** $x=0$, $y=0$.

§17. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

ფუნქციის გამოკვლევას ჩავატარებთ შემდეგი სქემის მიხედვით:

1. განსაზღვრის არის დადგენა;

2. ფუნქციის გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების პოვნა;

$y''<0$ [illegible] $y''>0$ [illegible]

3. მონოტონურობის შუალედების, ექსტრემუმის წერტილების და ექსტრემუმების პოვნა;

$-$ [illegible] $+$ [illegible] $+$ [illegible] $-$ [illegible]

$f''(x)<0$ $f''(x)>0$

4. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედების და გადაღუნვის წერტილების პოვნა;

5. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების პოვნა; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ [illegible] $x=$

6. ფუნქციის გრაფიკის აგება. $y=kx+b$ $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$

ზოგჯერ ფუნქციის გამოკვლევის თანმიმდევრობა უნდა ავარჩიოთ ამ ფუნქციის კონკრეტული თვისებების გათვალისწინებით. გარდა ამისა, ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას, რომ

ა) თუ ფუნქციას აქვს პერიოდი $2l$, მაშინ უნდა ავაგოთ გრაფიკი $[-l;l]$ შუალედზე და შემდეგ გავაგრძელოთ ის მთელ რიცხვით ღერძზე;

ბ) თუ დავადგენთ, რომ ფუნქცია უწყვეტია და დიფერენცირებადი და ვიპოვეთ ამ ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილები, ამით უკვე განსაზღვრულია მონოტონურობის შუალედები;

გ) ფუნქციის გამოკვლევის დაწყების წინ სასარგებლოა შევამოწმოთ მოცემული ფუნქცია ლუწია თუ კენტი, რადგან გრაფიკის აგებისას გამოვიყენებთ მის სიმეტრიულობას ორდინატთა ღერძის, თუ კოორდინატთა სათავის მიმართ.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. გამოვიკვლიოთ და ავაგოთ $f(x)=x^3-3x$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$-ზე.

ვიპოვოთ საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები

როცა $y=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}.$

როცა $x=0 \Rightarrow y=0.$

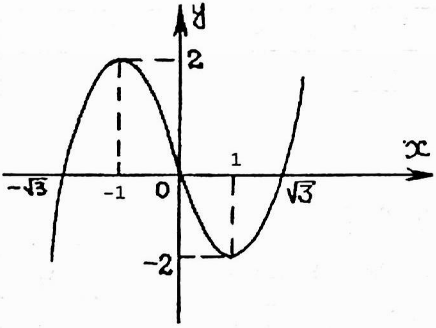
აქედან გამომდინარე, ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს წერტილებში $M_1(-\sqrt{3};0), M_2(0;0), M_3(\sqrt{3};0)$, ხოლო Oy ღერძს კვეთს M_2 წერტილში. ვიპოვოთ წარმოებული და სტაციონარული წერტილები

$f'(x)=3x^2-3,\ 3x^2-3=0,\ x^2=1,\ x=\pm 1.$

		x_{max}		x_{min}	
	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;1)	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	2	↓	-2	↑
		y_{max}		y_{min}	

$f''(x) = 6x$

$6x > 0 \Rightarrow x > 0$ $(0;\infty)$ შუალედში გრაფიკი ჩაზნექილია, ხოლო $(-\infty;0)$ შუალედში ამოზნექილი. $x = 0$ წერტილი არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა. მოცემულ წირს ასიმპტოტები არ გააჩნია. გრაფიკს აქვს სახე



ნახ. 17.1.

2. ავაგოთ $y = 4x^2 - x^4 - 3$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა.

1. ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში.

2. როცა x=0 მივიღებთ y=-3, ე.ი. ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს $M(0;-3)$ წერტილში. როცა y=0, მივიღებთ ბიკვადრატულ განტოლებას $y = 4x^2 - x^4 - 3$, ამ განტოლების ფესვებია $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = \sqrt{3}$, ამრიგად, გრაფიკი Ox ღერძს კვეთს წერტილებში $M_1(\sqrt{3};0), M_2(-1;0), M_3(1;0), M_4(\sqrt{3};0)$.

3. $y' = 8x - 4x^3$

$$8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}.$$

		$x_{\max}$		$x_{\min}$		$x_{\max}$	
	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};+\infty)$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	↑	1	↓	-3	↑	1	↓
		$y_{\max}$		$y_{\min}$		$Y_{\max}$	

$$y_{\max} = y(x_{\max}) = y(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2})^4 - 3 = 4\cdot 2 - 4 - 3 = 1 = y(\sqrt{2})$$

$$y_{\min} = y(0) = 0 - 0 - 3 = -3$$

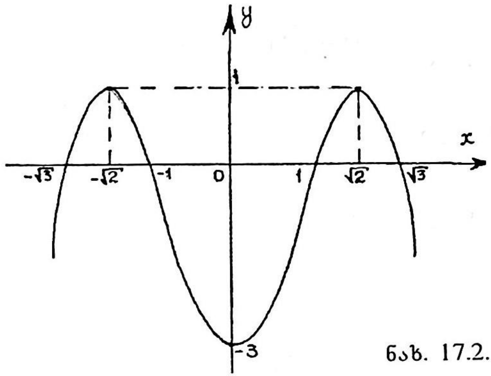
4. $f''(x) = 8 - 12x^2 \Rightarrow 8 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

როცა $x < -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ და $x > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, მაშინ $f''(x) < 0$ და ფუნქცია ამ შუალედებში ამოზნექილია.

როცა $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, მაშინ $f''(x) > 0$ და გრაფიკი ამ შუალედში ჩაზნექილია.

ე.ი. $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ და $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ წერტილები გადაღუნვის წერტილების აბსცისებია. გადაღუნვის წერტილებია $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{9}\right)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{9}\right)$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წირს ასიმპტოტები არ გააჩნია.

გრაფიკს აქვს სახე:



ნახ. 17.2.

3. გამოვიკვლიოთ და ავაგოთ $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა.

1. განსაზღვრის არეა $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. როცა $x=0$, $y=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$ და გრაფიკი Oy ღერძს გადაკვეთს $M_1(0;-1)$ წერტილში, როცა $y=0 \Rightarrow x^2+1=0$ ამ განტოლებას ფესვები არ აქვს, ამიტომ გრაფიკი Ox ღერძს არ კვეთს.

3. $y'=\dfrac{2x(x-1)-1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

$y'=0 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_1=1-\sqrt{2}, x_2=1+\sqrt{2}$.

		x_{max}				x_{min}	
	$(-\infty;1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};1)$	1	$(1;1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2};+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y	↑	$2-2\sqrt{2}$	↓		↓	$2+2\sqrt{2}$	↑
		y_{max}				y_{min}	

$$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2-2\sqrt{2}$$

$$y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}\,.$$

4. $$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

როცა $x<1$, მაშინ $y''<0$, ამიტომ $(-\infty;1)$ შუალედში გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო $(1;\infty)$ შუალედში $y''>0$, ამიტომ გრაფიკი ჩაზნექილია.

5. შევისწავლოთ ფუნქციის ქცევა $x=1$ წერტილის მახლობლობაში.

როცა $x \to 1-$, მაშინ $y \to -\infty$, ხოლო, როცა $x \to 1+$, მაშინ $y \to +\infty$, აქედან გამომდინარე, $x=1$ არის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

როცა $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, მაშინ $y \to +\infty$ $(y \to -\infty)$, მაშასადამე, გრაფიკს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი არ გააჩნია.

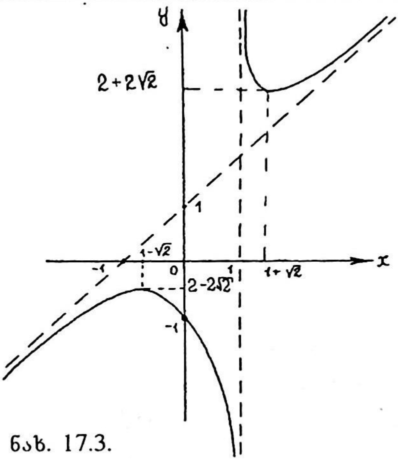
ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი.

$$K = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x)-kx] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{1+x}{x-1} = 1.$$

ე.ი. დახრილი ასიმპტოტი ყოფილა $y=x+1$ წრფე.

ზემოთქმულის გათვალისწინებით, ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი



ნახ. 17.3.

4. გამოვიკვლიოთ და ავაგოთ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ფუნქციის განსაზღვრის არეა x-ის ის მნიშვნელობანი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $x^2-1\geq 0$ ანუ $|x|\geq 1$ ე.ი. ფუნქცია განსაზღვრულია სიმრავლეზე $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

რადგან $x\neq 0$ და $y\neq 0$, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს არ კვეთს.

$$f'(x)=(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^4-1}}.$$

განსაზღვრის არეში $f'(x)\neq 0$, ამიტომ ფუნქციას სტაციონარული წერტილები არა აქვს.

$$f''(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}})}{x^2-1}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{(x^2-1)^{3/2}-(x^2+1)^{3/2}}{(x^4-1)\sqrt{x^4-1}}.$$

$f'(x)$-ის ნიშანი	კლებადია $-$		განსაზღვრული არ არის		ზრდადია $+$
		-1		1	
$f''(x)$-ის ნიშანი	$-$ ამოზნექილია				$-$ ამოზნექილია

$$f(\pm 1)=\sqrt{(\pm 1)^2+1}+\sqrt{(\pm 1)^2-1}=\sqrt{2}+\sqrt{0}=\sqrt{2}.$$

ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი.

$$K=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x}=1+1=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2-1}-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=$$

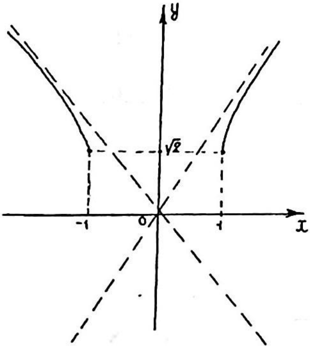
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=0-0=0.$$

ე.ი. დახრილი ასიმპტოტია $y=2x$ წრფე.

ზუსტად ანალოგიურად თუ მოვძებნით დახრილ ასიმპტოტს. როცა $x\to-\infty$, მივიღებთ k=-2, b=0. ე.ი. გრაფიკს გააჩნია ორი განსხვავებული დახრილი ასიმპტოტი $y=2x$, როცა $x\to+\infty$ და $y=-2x$ როცა $x\to-\infty$.

ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე



ნახ. 17.4.

მაგალითები

გამოიკვლიეთ და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი

17.1. $y = x^3 - 12x.$

17.2. $y = 3x - x^3.$

17.3. $y = x^4 - 4x^2 + 5.$

17.4. $y = 1 + x^2 - 0{,}5x^4.$

17.5. $y = x^2(2 - x)^2.$

17.6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}.$

17.7. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}.$

17.8. $y = \dfrac{x}{1 + x}.$

17.9. $y = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 1}.$

17.10. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}.$

17.11. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}.$

17.12. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}.$

17.13. $y = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2}.$

17.14. $y = \dfrac{(1 + x)^4}{(1 - x)^4}.$

17.15. $y = x\ln x.$

17.16. $y = x^2\ln x.$

17.17. $y = \ln(x^2-1).$

17.18. $y = x - \ln x.$

17.19. $y = x - \ln(x+1).$

17.20. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}.$

17.21. $y = 3xe^x.$

17.22. $y = x^2e^{\frac{1}{x}}.$

17.23. $y = (1-x)e^x.$

17.24. $y = \dfrac{e^x}{x}.$

17.25. $y = \cos x\cdot\cos 2x.$

17.26. $y = \dfrac{x}{2} - \operatorname{arctg} x.$

17.27. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}.$

17.28. $y = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}.$

17.29. $y = \dfrac{\sin 2x}{2} + \cos x.$

პასუხები

17.1. $D(y) = (-\infty;+\infty)$, $x_{max} = -2$, $y_{max} = y(-2) = 16$, $x_{min} = 2$, $y_{min} = y(2) = -16$, ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;-2)$ და $(2;+\infty)$, კლებადობის შუალედია (-2;2), ასიმპტოტები არა აქვს.

17.2. $D(y) = (-\infty;+\infty)$, ფუნქცია კენტია, წყვეტის წერტილები არა აქვს, საკოორდინატო ღერძებს კვეთს $M_1(-\sqrt{3};0)$, $M_2(0;0)$, $M_3(\sqrt{3};0)$ წერტილებში. $y_{min}=y(-1)=-2$, $y_{max} = y(1) = 2$. გადაღუნვის წერტილია $M_2(0;0)$.

17.3. $D(y) = (-\infty;+\infty)$, ფუნქცია ლუწია, Ox ღერძს არ გადაკვეთს, Oy ღერძს გადაკვეთს წერტილში $M(0;5)$, $x_{min} = \pm\sqrt{2}$, $y_{min} = y(-\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = 1$, ზრდადობის შუალედებია $(-\sqrt{2};0)$ და $(\sqrt{2};+\infty)$, კლებადობისა $(-\infty;-\sqrt{2})$ და $(0;\sqrt{2})$, ასიმპტოტები არა აქვს.

17.4. $D(y)=(-\infty;+\infty)$, ფუნქცია ლუწია, საკოორდინატო ღერძებს კვეთს წერტილებში $M_1(-\sqrt{1-\sqrt{3}};0)$, $M_2(\sqrt{1+\sqrt{3}};0)$, $M_3(0;1)$, $x_{max}=\pm1$, $y_{max}=y(\pm1)=\frac{3}{2}$, $x_{min}=0$, $y_{min}=y(0)=1$, ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;-1)$ და $(0;1)$, კლებადობისა $(-1;0)$ და $(1;+\infty)$. გრაფიკი ამოზნექილია შუალედებში $\left(-\infty;\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ და $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, ჩაზნექილია $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია $N_1\left(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{23}{18}\right)$ და $N_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$. ასიმპტოტები არ გააჩნია.

17.5. $D(y)=(-\infty;+\infty)$. ფუნქცია არაუარყოფითია. საკოორდინატო ღერძებს კვეთს წერტილებში $O(0;0)$, $M(2;0)$. $y_{min}=y(2)=0$, $y_{max}=y(1)=1$. ზრდადობის შუალედებია $(-\infty;1)$ და $(2;+\infty)$, კლებადობის კი $(1;2)$. გადაღუნვის წერტილებია $N_1\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4}{9}\right)$ და $N_2(1+\sqrt{3}/3;4/9)$. ასიმპტოტები არ გააჩნია.

17.6. $D(y)=(-\infty;+\infty)$, გრაფიკი გაივლის კოორდინატთა სათავეში. $y_{max}=y(1)=1/2$, $y_{min}=y(-1)=-1/2$, ზრდადობის შუალედია (-1;1) კლებადობის შუალედებია $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$, $y=0$ ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

17.7. $D(y)=(-\infty;+\infty)$, ლუწია და ამიტომ გრაფიკი Oy ღერძის სიმეტრიულია. გაივლის $O(0;0)$-ში $y_{min}=y(0)=0$, გადაღუნვის წერტილებია $N_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{4}\right)$, $N_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{4}\right)$. $y=1$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

17.8. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; წირი გაივლის კოორდინატთა სათავეში. ექსტრემუმის წერტილები არა აქვს.

17.9. $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, საკოორდინატო ღერძებს კვეთს $O(0;0)$ და $M(2;0)$ წერტილებში, ექსტრემუმის წერტილები არ გააჩნია, არ გააჩნია გადაღუნვის წერტილები, $x=1$ წრფე ვერტიკალური ასიმპტოტია, დახრილი ასიმპტოტია $y=3x-3$.

17.10. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, Oy ღერძს არ კვეთს, Ox ღერძს კვეთს $M(-\sqrt[3]{2};0)$ წერტილში, $x_{\min}=1, y_{\min}=y(1)=3/2$. ზრდადობის შუალედია $(1;+\infty)$ კლებადობის შუალედებია $(-\infty;0)$ და $(0;1)$, ჩაზნექილია შუალედებში $(-\infty;-\sqrt[3]{2})$ და $(0;+\infty)$, ამოზნექილია $(-\sqrt[3]{2};0)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $N(-\sqrt[3]{2};0)$.

17.11. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. Ox ღერძს კვეთს $M(1/2;0)$ წერტილში, ექსტრემუმის წერტილები არ გააჩნია. ჩაზნექილობის შუალედებია $(-\infty;0)$ და $(0;1/2)$, ამოზნექილობისა $(1/2;1)$ და $(1;+\infty)$; გადაღუნვის წერტილია $N(1/2;0)$.

17.12. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.. საკოორდინატო ღერძებს არ კვეთს. $x_{\min}=0, y_{\min}=y(0)=1$, ზრდადობის შუალედებია $(0;1)$ და $(1;+\infty)$, კლებადობისა კი $(-\infty;-1)$ და $(-1;0)$. გრაფიკი ამოზნექილია $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებში, ჩაზნექილია $(-1;1)$-ში. გადაღუნვის წერტილი არა აქვს; $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია, $x=-1$ და $x=1$ კი ვერტიკალური ასიმპტოტებია.

17.13. $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$. Ox ღერძს კვეთს $\left(\frac{2}{3};0\right)$ წერტილში, Oy ღერძს $(0;-1)$ წერტილში. ზრდადობის შუალედებია $[0;1)$ და $\left(1;\frac{4}{3}\right]$, კლებადობისა კი $(-\infty;0]$, $\left[\frac{4}{3};2\right)$ და $(2;+\infty)$.

$x_{\min}=0,\ y_{\min}=y(0)=-1,\ x_{\max}=\frac{4}{3},\ y_{\max}=y\left(\frac{4}{3}\right)=-9.$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y=0$, ვერტიკალური ასიმპტოტებია $x=1$ და $x=2$. გადაღუნვის წერტილია $M(-0,7024;0,8928)$. ამოზნექილია

$(-\infty;-0{,}7024)$ და $(1{,}2)$ შუალედებში, ჩაზნექილია $[-0{,}7024;1)$ და $(2;+\infty)$ შუალედებში.

17.14. $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. ფუნქცია არაუარყოფითია და Ox ღერძს კვეთს წერტილში $M(-1;0)$, ხოლო Oy ღერძს $N(0;1)$ წერტილში. $x_{\min}=-1$, $y_{\min}=y(-1)=0$. ზრდადობის შუალედია $(-1;1)$, კლებადობის კი $(-\infty;-1)$ და $(1;+\infty)$; ამოზნექილია $(-\infty;-4)$-ში. ჩაზნექილია $(-4;1)$ და $(1;+\infty)$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილია $N(-4;81/625)$, $x=1$ არის ვერტიკალური ასიმპტოტი, ხოლო $y=1$ ჰორიზონტალური.

17.15. $D(y)=(0;+\infty)$, Ox ღერძს კვეთს $M(1;0)$ წერტილში, $x_{\min}=1/e$, $y_{\min}=-1/e$, ზრდადობის შუადედია $(1/e;\infty)$, კლებადობისა კი $(0;1/e)$. გრაფიკი ჩაზნექილია.

17.16. $D(y)=(0;+\infty)$, Ox ღერძს კვეთს $M(1;0)$ წერტილში. კლებადობის შუალედია $(0;1/\sqrt{e})$, ზრდადობას $(1/\sqrt{e};+\infty)$, $x_{\min}=1/\sqrt{e}$. $y_{\min}=y(1/\sqrt{e})=-1/2e$. გრაფიკი ამოზნექილია $(0;1/\sqrt{e^3})$, ჩაზნექილია $(1/\sqrt{e^3};+\infty)$-ში. გადაღუნვის წერტილია $M(1/\sqrt{e^3};3/2e^3)$.

17.17 $D(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, Ox ღერძს კვეთს წერტილებში $M_1(-\sqrt{2};0)$ da $M_2(\sqrt{2};0)$ ექსტრემუმის წერტილები არა აქვს. გრაფიკი ამოზნექილია.

17.18. $D(y)=(0;+\infty)$, $x_{\min}=1$, $y_{\min}=y(1)=1$; $x=0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.

17.19. $D(y)=(-1;+\infty)$, გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეში, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს, $x=-1$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.

17.20. $D(y)=(0;+\infty)$, Ox ღერძს კვეთს $M(1/e;0)$ წერტილში, $x_{\max}=1$, $y_{\max}=y(1)=1$, გადაღუნვის წერტილია $N\left(e^{\frac{1}{2}};\dfrac{3}{2e^{1/2}}\right)$, $x=0$ ვე-

რტიკალური ასიმპტოტია, ხოლო $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

17.21. $D(y)=(-\infty;+\infty)$. გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეში, $x_{\min}=-1$, $y_{\min}=-3/e$, გადაღუნვის წერტილია $M_0(-2;-6/e^2)$, $y=0$ წრფე ჰორიზონტალური ასიმტოტია.

17.22. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. საკოორდინატო ღერძებს არ კვეთს. $x_{\min}=1/2$, $y_{\min}=1/4e^2$, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს. $x=0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.

17.23. $D(y)=(-\infty;+\infty)$, Ox ღერძს კვეთს $M_1(1;0)$ წერტილში, Oy ღერძს კი $M_2(0;1)$ წერტილში. $x_{\min}=0$, $y_{\min}=1$. გადაღუნვის წერტილია $M(-1;2/e)$, $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

17.24. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. საკოორდინატო ღერძებს არ კვეთს. $x_{\min}=1$, $y_{\min}=e$; გადაღუნვის წერტილი არა აქვს, $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი, ხოლო x=0 ვერტიკალური ასიმტოტია.

17.25. გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi n-1,\ n\in Z,\ y_{\min}=y\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)=\frac{3\pi}{2}+2\pi n+1,\ n\in Z,$ პერიოდია 2π. გადაღუნვის წერტილებია $(\pi n, 2\pi n),\ n\in Z$, ასიმპტოტია $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

17.26. გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, $y_{\max}=y\left(\frac{2-\pi}{4}\right)=1$, $y_{\min}=y\left(\frac{\pi-2}{4}\right)=-1$. გადაღუნვის წერტილია (0;0), ასიმპტოტები $y=\frac{x-\pi}{2}$ და $y=\frac{x+\pi}{2}$ როცა $x\to-\infty$.

17.27. $D(y)=[1;5]$, $x_{\max}=3$, $y_{\max}=2\sqrt{2}$, გრაფიკი კოორდინატთა ღერძებს არ კვეთს. გადაღუნვის წერტილები არა აქვს, ასიმპტოტები არა აქვს.

17.28. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. ექსტრემუმისა და ღუნვის წერტილები არა აქვს. $y=0$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტია.

17.29. $D(y)=R,\ E(y)=\left[\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right],\ T=2\pi$ პერიოდია, ამიტომ შევისწავლოთ $[-\pi;\pi]$-ზე. $x_{\max}=\frac{\pi}{6},\ y_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4},\ x_{\min}=\frac{5\pi}{6}.\ y_{\min}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}.$ Ox ღერძს კვეთს $M_1\left(-\frac{\pi}{2};0\right),\ M_2\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ წერტილებში.

§18. ტეილორის ფორმულა. ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (a,b) ინტერვალზე და $x_0\in(a,b)$ წერტილის რაიმე მიდამოში გააჩნია წარმოებულები n რიგამდე ჩათვლით, მაშინ ამ მიდამოში

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0((x-x_0)^{n+1}). \qquad (18.1)$$

ან მოკლედ,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+0((x-x_0)^{n+1}).$$

ამ ტოლობას ეწოდება ტეილორის n-რი რიგის ფორმულა პეანოს ფორმის ნაშთითი წევრით.

$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ მრავალწევრს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ტეილორის მრავალწევრი.

როცა x_0=0-ს (18.1) ფორმულიდან მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0(x^{n+1}) \quad (18.2)$$

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების მაკლორენის ფორმულით გაშლისას ზოგჯერ ვისარგებლებთ შემდეგი ფორმულებითაც:

როცა $y=f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი $n\in N$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}), \quad (18.3)$$

ხოლო, როცა $f(x)$ კენტია, მაშინ ნებისმიერი $n\in N$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}). \quad (18.4)$$

ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოდგენა მაკლორენის ფორმულით

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+0(x^{n+1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+0(x^{n+1}), \quad (18.5)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}), \quad (18.6)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}), \quad (18.7)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^{n}+0(x^{n+1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}x^{k}+0(x^{n+1}),\ \text{სადაც}\ C_{\alpha}^{0}=1, C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad (18.8)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+0(x^{n+1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{k}}{k}+0(x^{n+1}), \quad (18.9)$$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0(x^{2n+2})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+0(x^{2n+2}), \quad (18.10)$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n+1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+0(x^{2n+1}). \quad (18.11)$$

ვთქვათ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ და განვიხილოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$. გავშალოთ $y=f(x)$ და $y=g(x)$ ფუნქციები მაკლორენის ფორმულით $x=0$ წერტილის მიდამოში და შემოვიფარგლოთ პირველი რამდენიმე ნულისაგან განსხვავებული წევრით ამ გაშლაში:

$f(x)=ax^{n}+o(x^{n+1}),\ a\neq 0,\ g(x)=bx^{m}+o(x^{m+1}),\ b\neq 0,$

მაშინ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{n}+0(x^{n+1})}{bx^{m}+0(x^{m+1})}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}x^{n-m}=\begin{cases}0 & \text{თუ } n>m\\ a/b & \text{თუ } n=m\\ \infty & \text{თუ } n<m\ .\end{cases}$$

სხვა სახის განუსაზღვრელობანი მარტივი გარდაქმნებით შეგვიძლია დავიყვანოთ 0/0 სახის განუსაზღვრელობებზე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. გავშალოთ $f(x)=2x^5-3x^4+12x^3-5x^2-3x+2$ მრავალწევრი ტეილორის ფორმულით $x_0=1$ წერტილში.

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებულები:

$$f'(x)=10x^4-12x^3+36x^2-10x-3,$$

$$f''(x)=40x^3-36x^2+72x-10,\ \ f'''(x)=120x^2-72x+72,$$

$$f^{(4)}(x)=240x-72,\quad f^{(5)}(x)=240,\quad f^{(6)}(x)=0.$$

ვიპოვოთ ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობა $x_0=1$ წერტილში

$$f(1)=2-3+12-5-3+2=5,\ \ f'(1)=10-12+36-10-3=21,$$

$$f''(1)=40-36+72-10=66,\ \ f'''(1)=120-72+72=120,$$

$$f^{(4)}(1)=240-72=168,\quad f^{(5)}(1)=240.$$

იმის გამო, რომ მე-5 რიგის ზემოთ ყველა რიგის წარმოებული 0-ის ტოლია შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ტეილორის მწკრივის ნაშთითი წევრი იგივურად 0-ის ტოლია. ამიტომ ტეილორის ფორმულის გამოყენებით

$$f(x)=5+\frac{21}{1!}(x-1)+\frac{66}{2!}(x-1)^2+\frac{120}{3!}(x-1)^3+\frac{168}{4!}(x-1)^4+\frac{240}{5!}(x-1)^5=$$
$$=5+21(x-1)+33(x-1)^2+20(x-1)^3+7(x-1)^4+2(x-1)^5.$$

2. გავშალოთ $y=\operatorname{tg}x$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით x^3 წევრის ჩათვლით.

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებულები

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x,\ f''(x)=2\cos^{-3}x\sin x,$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\sin^2 x+2\cos^{-2}x.$$

ვიპოვოთ წარმოებულების მნიშვნელობები x=0 წერტილში.

$$f(0)=\operatorname{tg}0=0, f'(0)=\cos^{-2}0=1,\ f''(0)=2\cos^{-3}0\sin 0=0,$$

$$f'''(0)=6\cos^{-4}0\sin^2 0+2\cos^{-2}0=0+2=2.$$

მაშინ (18.2)-ის ძალით

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{2x^3}{3!}+o(x^4)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

3. გავშალოთ $f(x)=(x+5)e^{2x}$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით x^3-ის შენარჩუნებით.

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებულები.

$$f'(x)=e^{2x}+2(x+5)e^{2x},\ f''(x)=4e^{2x}+4(x+5)e^{2x},$$

$$f'''(x)=8e^{2x}+4e^{2x}+8(x+5)e^{2x},$$ მაშინ $f(0)=5$,

$$f'(0)=11,\ f''(0)=24,\ f'''(0)=52,$$

(18.2)-ის ძალით:

$$f(x)=5+\frac{11}{1!}x+\frac{24}{2!}x^2+\frac{52}{3!}x^3+0\left(x^4\right)=5+11x+12x^2+\frac{26}{3}x^3+0\left(x^4\right)$$

4. გავშალოთ $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{2-x}$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით x^2 წევრის შენარჩუნებით.

ამოხსნა.

$$f'(x)=\frac{2-x}{3+x}\cdot\left(\frac{3+x}{2-x}\right)'=\frac{5}{(3+x)(2-x)},$$

$$f''(x)=\frac{5(2x+1)}{(6-x-x^2)^2}.$$

$$f(0)=\ln\frac{3}{2},\ f'(0)=\frac{5}{6},\ f''(0)=\frac{5}{36}.$$

მაშინ

$$f(x)=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{6}x+\frac{5}{72}x^2+0(x^3)$$

5. გავშალოთ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $x_0=2$ წერტილში.

ამოხსნა. ვიპოვოთ წარმოებულები

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=\frac{2!}{x^3},\ f'''(x)=-\frac{3!}{x^4},\dots,f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}},$$

მაშინ

$$f(2)=\frac{1}{2},\ f'(2)=-\frac{1}{2^2},\ f''(2)=\frac{2!}{2^3},\ f'''(2)=-\frac{3!}{2^4},\dots,f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}},$$

(18.1) ფორმულით ძალით

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 1!}(x-2)+\frac{2!}{2!2^3}(x-2)^2-\frac{3!}{3!2^4}(x-2)^3+\dots+$$

$$+(-1)^n\frac{n!}{n!2^{n+1}}(x-2)^n+0[(x-2)^n]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+$$

$$+\frac{1}{2^3}(x-2)^2-\frac{1}{2^4}(x-2)^3+\dots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n+0[(x-2)^{n+1}]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+0[(x-2)^{n+1}].$$

6. მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

ამოხსნა. n=3-თვის 0 წერტილის მიდამოში (18.5)-ის ძალით

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+0(x^3),\ e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+0(x^4),$$

ხოლო (18.6)-ის ძალით

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3),\ \text{მაშინ}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 0(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 0(x^3) - 2x}{x - x + \frac{x^3}{6} + 0(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{6} + 0(x^3)}{\frac{x^3}{6} + 0(x^3)} = \frac{2/6}{1/6} = 2.$$

7. ვიპოვოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

ამოხსნა. წილადის მრიცხველში და მნიშვნელში მყოფი ფუნქციები, როცა $x \to 0$ წარმოადგენენ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, გავშალოთ ისინი მაკლორენის ფორმულით x^3 წევრის შენარჩუნებით.

(18.3) და (18.4) ფორმულების ძალით

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 0(x^3),\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3);$$

ადვილად გამოვთვლით, რომ $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + 0(x^{3+1})$, ხოლო მაგალითი 2-ის ძალით $\mathrm{tg}\,x = x + \dfrac{x^3}{3} + 0(x^{3+1})$, (18.8) ფორმულის ძალით კი $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + 0(t^{3+1})$. მაშინ $\arcsin x - \sin x = x + \dfrac{x^3}{6} -$

$- x + \dfrac{x^3}{6} + 0(x^{3+1}) = \dfrac{x^3}{3} + 0(x^3)$, ხოლო $\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}\,x} = 1 + \dfrac{1}{2}(2\,\mathrm{tg}\,x) - \dfrac{1}{8}(2\,\mathrm{tg}\,x)^2 +$

$$+\frac{1}{16}(2\operatorname{tg}x)^3+0(\operatorname{tg}^{3+1}x)=1+\frac{1}{2}\left(2x+\frac{2}{3}x^3\right)-\frac{4}{8}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}\right)+$$

$$+\frac{8}{16}\left(x^3+3x^2\frac{x^3}{3}+3x\frac{x^6}{9}+\frac{x^9}{27}\right)+0(x^{3+1})=1+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+0(x^3)=$$

$$=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+0(x^4).$$

მაშინ, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+0(x^4)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+0(x^4)\right)+x^2}{\frac{x^3}{3}+0(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^3+0(x^4)}{\frac{x^3}{3}+0(x^4)}=\frac{2/3}{1/3}=2.$$

მაგალითები

გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით n რიგამდე და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ პეანოს სახით.

18.1. $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+x+2.$ **18.2.** $f(x)=e^{-x}.$

18.3. $f(x)=\sqrt{1+x},\ n=2.$ **18.4.** $f(x)=(x+3)e^{3x},\ n=3.$

18.5. $f(x)=\cos(\sin x),\ n=4.$ **18.6.** $f(x)=\sin(\sin x),\ n=3.$

18.7. $f(x)=e^{2x-x^2},\ n=5.$ **18.8.** $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x},\ n=6.$

18.9. $f(x)=e^{5x-1}.$ **18.10.** $f(x)=\sin(2x+3).$

18.11. $f(x)=\cos(x/2+2)$. **18.12.** $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$.

18.13. $f(x)=\dfrac{1}{3x+4}$. **18.14.** $f(x)=\ln(ex+2)$.

18.15. $f(x)=3^{2-x}$. **18.16.** $f(x)=(x-1)e^{x/2}$.

18.17. $f(x)=(x-1)(x+\ln(1+x))$.

18.18. $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. **18.19.** $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ ზღვარი.

18.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$. **18.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+2\sin x-3x}{x^4}$.

18.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. **18.23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)}{x^5}$.

18.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$. **18.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

18.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$. **18.27.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

18.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$. **18.29.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$.

18.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+x^2/2)}{x(\sin x-x)}$. **18.31.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

18.32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-x^2/2}$.

პასუხები

18.1. $2+x+5x^2-5x^3+x^4$.

18.2. $1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

18.3. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^3)$.

18.4. $f(x)=3+10x+\frac{33}{2}x^2+18x^3+o(x^4)$.

18.5. $1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)$. **18.6.** $x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$.

18.7. $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^{10})$.

18.8. $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^7)$. **18.9.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{5^k}{k!e}x^k+o(x^{n+1})$.

18.10. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin(3+k\cdot\pi/2)}{k!}x^k+o(x^{n+1})$.

18.11. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos(2+k\cdot\pi/2)}{2^k k!}x^k+o(x^{n+1})$. **18.12.** $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k x^k+o(x^{n+1})$.

18.13. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{4^{k+1}}x^k+o(x^{n+1})$.

18.14. $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^k x^k+o(x^{n+1})$.

18.15. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{9(\ln 3)^k}{k!}x^k+o(x^{n+1})$. **18.16.** $-1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k k!}x^k+o(x^{n+1})$.

18.17. $-2x+x^2+\sum\limits_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}x^{k+1}+0(x^{n+1})$.

18.18. $-\sum\limits_{k=3}^{n}x^k+o(x^{n+1})$. **18.19.** $-3+\sum\limits_{k=1}^{n}5(-1)^{k-1}x^k+o(x^{n+1})$.

18.20. 1. **18.21.** 0. **18.22.** 0. **18.23.** $1/4$. **18.24.** $1/3$.

18.25. $2/3$. **18.26.** $-1/6$. **18.27.** 0. **18.28.** $-1/12$. **18.29.** $1/3$.

18.30. $-1/4$. **18.31.** $-1/6$. **18.32.** 1.

§19. მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით რთული პროცენტების გამოთვლა.

ვთქვათ K არის ფულადი რაოდენობა, P – პროცენტის სიდიდე, n – წელთა რაოდენობა, t – ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი, ანუ ის თანხა, რომელიც მოაქვს 1 ლარს 1 წელიწადში, მაშინ

$$t = \frac{P}{Kn}, \tag{19.1}$$

K_n – n წლის შემდეგ მარტივ პროცენტად მიღებული დაგროვება, ე.ი. K თანხის საბოლოო სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$K_n = K(1+nt), \tag{19.2}$$

ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში

$$K_n = K(1+t)^n. \tag{19.3}$$

იმ შემთხვევაში, თუ შეტანილ თანხაზე წელიწადში დარიცხვა ხდება m-ჯერ, მაშინ (19.3) ფორმულის ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა

$$K_n = K\left(1+t/m\right)^{mn} \tag{19.4}$$

თუ დარიცხვა ხდება უწყვეტად, ე.ი. $m \to \infty$, მაშინ

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K\left(1+t/m\right)^{mn} = Ke^{\lim\limits_{m\to\infty}(t/m)mn} = Ke^{tn} \tag{19.5}$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. განვსაზღვროთ 5 წლის განმავლობაში დაგროვებული თანხა, თუ 10000 ლარი გაცემულია წელიწადში 30%-ად.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, $K=10000$, $n=5$, $t=0,3$ (30.2) ფო-

რმულის გამოყენებით გვექნება

$K_5=10000(1+5\cdot 0,3)=25000$ (ლარი).

2. 9000 ლარის როგორი ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი მოგვცემს 360 ლარს, თუ დარიცხვა ხდება 8 თვეზე.

ამოხსნა. (19.2) ფორმულიდან განვსაზღვროთ t და გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობა, რადგან $K=9000$, $K_n-K=360$, $n=8/12=2/3$, ამიტომ $t=(K_n-K)/(K\cdot n)=360/(9000\cdot 2/3)=0,06$ ე.ი. პროცენტული განაკვეთია 6%.

3. რამდენი წლის შემდეგ მოგვცემს 20000 ლარი 40000 ლარს მოგებას, თუ იგი გაცემულია ყოველწლიურად 10%-ად.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, $K=20000$, $K_n=40000$, $t=0,1$ განვსაზღვროთ (19.2) ფორმულიდან საძიებელი სიდიდე n და გამოვთვალოთ მისი სიდიდე. მივიღებთ

$n=(K_n-K)/(K\cdot t)=(40000-20000)/(20000\cdot 0,1)=10$ (წელი)

4. ბანკში შეტანილია 10000 ლარი 5 წლით, 5%-იანი დარიცხვით. გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობით $K=10000$, $n=5$, $t=0,05$ ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ (19.3) ფორმულა.

$K_5=10000\cdot(1+0,05)^5$, ხოლო $(1+0,05)^5$ თანამამრავლის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულით (იხ. (18.8) ფორმულა).

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2. \qquad (19.6)$$

გვექნება $(1+0,05)^5=1+5\cdot 0,05+\frac{5\cdot 4}{2}0,0025=1,275.$

მაშასადამე

$K_5 = 10000 \cdot 1,275 = 12750$ (ლარი).

5. საწარმოს მფლობელმა მიიღო გადაწყვეტილება, რომ 3 წლის განმავლობაში პროდუქციის მოცულობა გაზარდოს 75%-ით. როგორი უნდა იყოს პროდუქციის ზრდის დინამიკა?

ამოხსნა. ვთქვათ, პროდუქციის საწყისი რაოდენობა არის K, მაშინ 3 წლის შემდეგ იგი იქნება $K_3=K(1+t)^3$. მეორეს მხრივ, $K_3=1,75 \cdot K$. გავუტოლოთ K_3-ის მნიშვნელობები ერთმანეთს და მიღებული განტოლებიდან განვსაზღვროთ t. გვექნება

$$K(1+t)^3 = 1,75 \cdot K \Rightarrow 1+t = \sqrt[3]{1+0,75} \Rightarrow 1+t = 1+0,25 -$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75^2 = 1,19 \Rightarrow t = 0,19$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ პროდუქციის ზრდის ყოველწლიური მატება უნდა იყოს 19%.

6. 5000 ლარი დაბანდებულია 2 წლით 3%-ად. დარიცხვა ხდება ყოველი ორი თვის ბოლოს. გამოვთვალოთ საბოლოო თანხა.

ამოხსნა. ამოცანის პირობით $K=5000$, $n=2$, $m=6$, $t=0,03$ ვისარგებლოთ (30.4) და (30.6) ფორმულებით და გამოვთვალოთ საძიებელი თანხა. გვექნება

$$K_2 = 5000 \cdot (1+0,03/6)^{12} = 5000 \cdot (1+0,005)^{12} = 5308$$

7. გამოვთვალოთ 1000 ლარის საბოლოო სიდიდე, რომელიც დაბანდებულია 2%-ად. თუ დარიცხვა ხდება უწყვეტად, 5 წლის განმავლობაში.

ამოხსნა. პირობის თანახმად, $K=1000$, $t=0,02$, $n=5$ ვისარგებლოთ (30.5) ფორმულით

$$K_5 = 1000 \cdot e^{0,1}.$$

$e^{0,1}$ თანამამრავლის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ მიახლოებით ფორმულა (იხ. (18.5) ფორმულა)

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2\,. \tag{19.7}$$

გვექნება $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + 0,01/2 = 1,105$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$K_5 = 1105$ (ლარი).

მაგალითები

19.1. განსაზღვრეთ n წლის განმავლობაში დაგროვებული თანხა, თუ K ლარი გაცემულია წელიწადში $P\%$-ად.

#	n	K	P	#	n	K	P
1	10	1000	5	6	9	1200	3
2	8	500	3	7	12	300	1.5
3	15	250	2	8	7	400	30
4	4	3000	20	9	5	350	6
5	6	1500	4	10	3	4000	4

19.2. K ლარის როგორი ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი მოგვცემს A ლარს, თუ დარიცხვა ხდება n თვეზე.

#	n	K	A	#	n	K	A
1	7	1200	490	6	15	4000	450
2	8	2700	900	7	13	4800	520
3	14	6000	140	8	16	6000	800
4	11	600	242	9	9	1600	480
5	6	5000	350	10	18	2000	210

19.3. ბანკში შეტანილია K ლარი n წლით, P%-იანი დარიცხვით. გამოთვალეთ საბოლოო თანხა.

#	K	n	P	#	K	n	P
1	1000	7	3	6	3000	5	4
2	2000	9	4	7	1200	10	3
3	1500	12	3	8	950	12	6
4	500	10	5	9	600	14	2
5	800	8	3	10	2400	6	5

19.4. განსაზღვრეთ პროდუქციის ზრდის დინამიკა, თუ ცნობილია, რომ n წლის განმავლობაში იგი უნდა გაიზარდოს P%-ით.

#	n	P	#	n	P
1	4	25	6	8	55
2	5	30	7	5	65
3	3	15	8	8	90
4	6	75	9	4	60
5	5	85	10	6	80

19.5. K ლარი დაბანდებულია n წლით P%-ად. დარიცხვა ხდება ყოველი m თვის ბოლოს. გამოთვალეთ საბოლოო თანხა.

#	K	n	P	m	#	K	n	P	m
1	3000	2	4	3	6	2000	5	6	5
2	1500	3	6	2	7	800	3	15	8
3	1000	6	3	4	8	6000	3	8	6
4	1200	4	3	5	9	500	8	12	4
5	4000	3	2	3	10	1500	2	18	8

19.6. გამოთვალეთ K ლარის საბოლოო სიდიდე, რომელიც დაბანდებულია P%-ად, თუ დარიცხვა ხდება უწყვეტად n წლის განმავლობაში.

#	K	P	n	#	K	P	n
1	500	4	5	6	400	5	12
2	1000	5	8	7	3000	20	5
3	1500	15	6	8	2500	5	6
4	800	10	3	9	600	14	5
5	2000	6	5	10	1200	15	4

პასუხები

19.1. 1) 1500. 2) 620. 3) 325. 4) 5400. 5) 1860. 6) 1524. 7) 354. 8) 1240. 9) 455. 10) 4480.

19.2. 1) 70. 2) 50. 3) 2. 4) 44. 5) 14. 6) 9. 7) 10. 8) 10. 9) 40. 10) 7.

19.3. 1) 1228,9. 2) 2835,2. 3) 2129,1. 4) 806,25. 5) 1012,16. 6) 3648. 7) 1608,6. 8) 1859,72. 9) 789,84. 10) 3210.

19.4. 1) 5,7%. 2) 5,3%. 3) 4,8%. 4) 8,6%. 5) 11,2%. 6) 5,2%. 7) 9,6%. 8) 6,8%. 9) 11,6%. 10) 8,9%.

19.5. 1) 3184,5. 2) 1592,25. 3) 1267,6. 4) 1535,61. 5) 4183,6. 6) 3625. 7) 4928. 8) 1 1788,8. 9) 1536,8. 10) 6972.

19.6. 1) 610. 2) 1480. 3) 3457,5. 4) 1076. 5) 2690. 6) 712. 7) 8100. 8) 3362,5. 9) 1167. 10) 2136.

განუსაზღვრელი ინტეგრალები

1. ფუნქციის პირველადი. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველადი მოცემულ შუალედში, თუ ამ შუალედის ყოველ წერტილში სრულდება ტოლობა

$$F'(x) = f(x).$$

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალი. $f(x)$ ფუნქციის ყველა $F(x)+C$ პირველადთა ერთობლიობას მოცემულ შუალედში ეწოდება ამ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება $\int f(x)dx$. ე.ი

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

ამ ფორმულაში $f(x)$ ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა, x – ინტეგრების ცვლადია, ხოლო C –ნებისმიერი მუდმივი.

ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

I. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ სადაც k მუდმივია.

II. $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx.$

III. $\int df(x) = f(x) + C.$

IV. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (a \neq 0)$

განუსაზღვრელი ინტეგრალების ცხრილი:

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \in R, \ \alpha \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \ (a > 0, a \neq 1)$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

§20. უშუალო ინტეგრება

უშუალო ინტეგრებაში იგულისხმება: ინტეგრალის I-IV თვისებების გამოყენებით, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის იგივური გარდაქმნებით ან მისი რაიმე ნაწილის დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით მივიყვანოთ ცხრილის ინტეგრალამდე.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\left(5\cos x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}-3x^2+2\right)dx.$

ამოხსნა. თუ ვისარგებლებთ ინტეგრალის I და II თვისებებით, მოცემული ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I=5\int\cos x dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}-3\int x^2dx+2\int dx.$$

მიღებული ინტეგრალები წარმოადგენენ ცხრილის ინტეგრალებს, ამიტომ

$$I=5\sin x+\ln|x|-4arctgx-x^3+2x+C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx.$

ამოხსნა. გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$\frac{2\sqrt[3]{x}+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}+\frac{3x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}=2x^{\frac{1}{12}}+3x^{\frac{5}{4}}.$$

მაშინ:

$$I=\int\left(2x^{\frac{1}{12}}+3x^{\frac{5}{4}}\right)dx=2\int x^{\frac{1}{12}}dx+3\int x^{\frac{5}{4}}dx=\frac{24}{13}x^{\frac{13}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}}+C.$$

საბოლოოდ: $I=\frac{24}{13}x\sqrt[12]{x}+\frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x}+C.$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int \frac{4x}{2x-7}dx.$

ამოხსნა. რადგან

$$\frac{4x}{2x-7}=2\frac{2x}{2x-7}=2\frac{2x-7+7}{2x-7}=2\left(1+\frac{7}{2x-7}\right)$$

ამიტომ:

$$I=2\int\left(1+\frac{7}{2x-7}\right)dx=2\int dx+14\int\frac{dx}{2x-7}.$$

თუ მეორე შესაკრების მიმართ გამოვიყენებთ IV თვისებას მივიღებთ საბოლოოდ

$$I=2x+7\ln|2x-7|+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx.$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა გამოსახულების იგივური გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\frac{2^x+5^x}{10^x}=\frac{2^x}{10^x}+\frac{5^x}{10^x}=\left(\frac{2}{10}\right)^x+\left(\frac{5}{10}\right)^x=\frac{1}{5^x}+\frac{1}{2^x}=5^{-x}+2^{-x}.$$

მაშინ, თუ ვისარგებლებთ IV თვისებით, მივიღებთ:

$$I=\int\left(5^{-x}+2^{-x}\right)dx=\int 5^{-x}dx+\int 2^{-x}dx=-\frac{1}{5^x\ln 5}-\frac{1}{2^x\ln 2}+C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{x^6}{x-1}dx.$

ამოხსნა. ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს რაციონალურ წილადს, რომლის მრიცხველის ხარისხი აღემატება მნიშვნელის ხარისხს. თუ გავყოფთ მრიცხველს მნიშვნელზე, მივიღებთ:

$$\frac{x^6}{x-1}=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}.$$

მაშინ:

$$I=\int x^5dx+\int x^4dx+\int x^3dx+\int x^2dx+\int xdx+\int dx+\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

6. ვიპოვოთ ინტეგრალი

$$I=\int\left(4\sin 4x+\frac{3}{4x-1}+\frac{5}{2x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right)dx .$$

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ინტეგრალის I, II და IV თვისებებით. გვექნება

$$I=4\int\sin 4xdx+3\int\frac{dx}{4x-1}+5\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+9}+\int\frac{dx}{\sqrt{4-5x^2}}=$$

$$=-\cos 4x+\frac{3}{4}\ln|4x-1|+\frac{5}{3\sqrt{2}}arctg\,\frac{\sqrt{2}x}{3}+\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{2}+C .$$

7. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{2xdx}{x^2+1}$.

ამოხსნა. რადგან $I=\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$, ამიტომ ცხრილის მესამე ფორმულის თანახმად გვექნება $I=\ln\left(x^2+1\right)+C$.

8. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{x^2dx}{3x^3+5}$.

ამოხსნა. შევიტანოთ x^2 დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შემდეგი სახით $I=\frac{1}{9}\int\frac{d(3x^3+5)}{3x^3+5}$, რომლის ინტეგრებაც მოგვცემს $I=\frac{1}{9}\ln\left|3x^3+5\right|+C$.

9. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int x\cos(3x^2+4)dx$.

ამოხსნა. მერვე მაგალითის ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ $I=\frac{1}{6}\int\cos(3x^2+4)d(3x^2+4)=\frac{1}{6}\sin(3x^2+4)+C\cdot$

10. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

ამოხსნა. გადავწეროთ მოცემული ინტეგრალი შემდეგი სახით

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

და ვაინტეგროთ, გვექნება

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}+2\arcsin\frac{x}{2}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

11. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{dx}{\sin 2x}$.

ამოხსნა. რადგან $\sin2x=2\sin x\cos x$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$I=\int\frac{dx}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{tgx\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{dtgx}{tgx}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|tgx|+C.$$

12. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\sin^3 x\cos xdx$.

ამოხსნა. $I=\int\sin^3 xd\sin x\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

მაგალითები

იპოვეთ ინტეგრალები:

20.1. $\int\left(4+x+\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$.

20.2. $\int\left(3x^2+\sqrt[4]{x}-\frac{4}{x^5}\right)dx$.

20.3. $\int\left(5x^4+\frac{6}{x}-\frac{1}{2+x}\right)dx$.

20.4. $\int\left(2^x+\cos 2x-\frac{4}{\cos^2 x}+6\right)dx$.

20.5. $\int\left(e^{4x}-\sin 3x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

20.6. $\int\left(\frac{2}{(x-4)^3}+\frac{1}{4x-1}+3^{5x}\right)dx$.

20.7. $\int\left(\cos(2-3x)+\frac{3}{3x+2}+5\right)dx$.

20.8. $\int\left((3-5x)^6+\frac{2}{(7x+2)^4}+\sqrt[9]{(5x+1)^7}\right)dx$.

20.9. $\int\left(\frac{8}{(1-8x)^3}-(10x-3)^{11}+\sqrt[8]{(1-3x)^5}\right)dx$.

20.10. $\int\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-\frac{2}{x^2+4}+7x^6\right)dx$.

20.11. $\int\left(\frac{5}{5x+2}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{\sin^2 6x}\right)dx$.

20.12. $\int\left(\frac{1}{4x^2+9}-\frac{3}{x^2-9}+e^{8x}\right)dx$.

20.13. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{6-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{4+x^2}}+5^{2x}\right)dx$.

20.14. $\int\left(\frac{3}{(3x+1)^2+4}+\frac{1}{\sqrt{4-7x^2}}+e^2\right)dx$.

20.15. $\int\left(\frac{5}{5+(4x-3)^2}-\frac{3}{\sqrt{3+x^2}}+\frac{1}{2x-7}\right)dx$.

20.16. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}+\frac{4}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}}\right)dx$.

20.17. $\int\left(\cos(4x-5)+\frac{8}{16+(2x+5)^2}\right)dx$.

20.18. $\int\left(\sin(5+3x)-\frac{\sqrt[5]{(6x-1)^2}}{5}\right)dx$.

20.19. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{25-2x^2}}-\frac{3}{5-3x}+\frac{1}{5x^2+10}\right)dx$.

20.20. $\int\left(\frac{4}{(2x+9)^9}+\sin 7x+e^3\right)dx$.

20.21. $\int\frac{4-x^2}{3+x^2}dx$.

20.22. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$.

20.23. $\int\frac{1+3x^2}{x^2(1+2x^2)}dx$.

20.24. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$.

20.25. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{x}-1}dx$.

20.26. $\int tg^{2}xdx$.

20.27. $\int ctg^{2}xdx$.

20.28. $\int \frac{x^{4}}{1+x^{2}}dx$.

20.29. $\int \frac{3xdx}{4x+1}$.

20.30. $\int \frac{4xdx}{5x-2}$.

20.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$.

20.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-3}}$.

20.33. $\int \frac{(2x+1)}{3x-4}dx$.

20.34. $\int \frac{(3x-2)}{5x+3}dx$.

20.35. $\int \frac{(4x+5)dx}{2x-3}$. 20.36. $\int \frac{4xdx}{3x^{2}+2}$. 20.37. $\int \frac{x^{3}dx}{2x^{4}-1}$.

20.38. $\int \frac{\sin xdx}{1+2\cos x}$.

20.39. $\int \frac{\cos 2xdx}{4+\sin 2x}$.

20.40. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

20.41. $\int x\cdot 2^{3x^{2}}dx$.

20.42. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^{3}x}$.

20.43. $\int \frac{\cos 3xdx}{\sin^{5}3x}$.

20.44. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^{2}+3}}$.

20.45. $\int \frac{2x^{2}dx}{\sqrt{3-x^{3}}}$.

20.46. $\int \frac{tgxdx}{\cos^{2}x}$.

20.47. $\int \frac{ctg^{2}xdx}{\sin^{2}x}$.

20.48. $\int \frac{xdx}{4x^{4}+9}$.

20.49. $\int \frac{4xdx}{3+16x^{4}}$.

20.50. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

20.51. $\int \frac{\arccos^2 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

20.52. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20.53. $\int \frac{\ln^5 x dx}{3x}$.

20.54. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+5}$.

20.55. $\int \frac{(3x^2+2)dx}{x^3+2x-7}$.

20.56. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

20.57. $\int \frac{(4-3x)dx}{\sqrt{16-3x^2}}$.

20.58. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3\ln x}}$.

20.59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

20.60. $\int \frac{e^{\arcsin x}+3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

20.61. $\int \frac{3^{\arccos x}+4}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

20.62. $\int \frac{e^x dx}{4e^{2x}+3}$.

20.63. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-9}$.

20.64. $\int \frac{x+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

20.65. $\int \frac{x^2+\sin\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$.

20.66. $\int \frac{\cos x-2}{tgx} dx$.

20.67. $\int \frac{dx}{\sin x/2}$.

20.68. $\int \frac{dx}{\cos 2x}$.

20.69. $\int \frac{dx}{\cos(x/2-\pi/4)}$.

20.70. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{5-4\cos^2 x}}$.

20.71. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{7-3\cos^4 x}}$.

პასუხები

20.1. $4x+\frac{x^2}{2}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{3}{x}+C$. 20.2. $x^3+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\frac{1}{x^4}+C$.

20.3. $x^5+6\ln|x|-\ln|x+2|+C$. 20.4. $6x+\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\sin 2x}{2}-4tgx+C$.

20.5. $\frac{e^{4x}}{4}+\frac{\cos 3x}{3}-ctgx+C$. 20.6. $C-\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{1}{4}\ln|4x-1|+\frac{3^{5x}}{5\ln 3}$.

20.7. $C-\frac{\sin(2-3x)}{3}+\ln|3x+2|+5x$.

20.8. $C-\frac{(3-5x)^7}{35}-\frac{2}{21(7x+2)^3}+\frac{9\sqrt[9]{(5x+1)^{16}}}{80}$.

20.9. $\frac{1}{2(1-8x)^2}-\frac{(10x-3)^{12}}{120}-\frac{8\sqrt[8]{(1-3x)^{13}}}{39}+C$.

20.10. $\frac{1}{3}tg\,3x-arctg\,\frac{x}{2}+x^7+C$.

20.11. $\ln|5x+2|+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{1}{6}ctg\,6x+C$.

20.12. $\frac{1}{6}arctg\,\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\frac{e^{8x}}{8}+C$.

20.13. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}+4\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+C$.

20.14. $\frac{1}{6}arctg\,\frac{3x+1}{2}+\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{\sqrt{7}x}{2}+e^2x+C$.

20.15. $\frac{\sqrt{5}}{4} arctg \frac{4x-3}{\sqrt{5}} - 3\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right| + \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$.

20.16. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{3x+1} + C$.

20.17. $\frac{1}{4}\sin(4x-5) + arctg\frac{2x+5}{4} + C$.

20.18. $C - \frac{\cos(5+3x)}{3} - \frac{\sqrt[5]{(6x-1)^7}}{42}$.

20.19. $\frac{5}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{5} + \ln|5-3x| + \frac{1}{4\sqrt{5}} arctg\frac{\sqrt{5}x}{4} + C$.

20.20. $C - \frac{1}{4(2x+9)^8} - \frac{\cos 7x}{7} + e^3 x$.

20.21. $C - x + \frac{7}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}}$.

20.22. $C - x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

20.23. $C - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\sqrt{2}x$.

20.24. $e^x - x + C$.

20.25. $\frac{e^{3x}}{2} + e^x + x + C$.

20.26. $tgx - x + C$.

20.27. $C - \frac{1}{2}ctg 2x - x$.

20.28. $\frac{x^3}{3} - x + arctgx + C$.

20.29. $\frac{3x}{4} - \frac{3}{16}\ln|4x+1| + C$.

20.30. $\frac{4}{5}x + \frac{8}{25}\ln|5x-2| + C$.

20.31. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{x^3}\right) + C$.

20.32. $\frac{1}{12}\left(\sqrt{(2x+1)^3}-\sqrt{(2x-3)^3}\right)+C$.

20.33. $\frac{2}{3}x+\frac{11}{9}\ln|3x-4|+C$. 20.34. $\frac{3}{5}x-\frac{19}{25}\ln|5x+3|+C$.

20.35. $2x+\frac{11}{2}\ln|2x-3|+C$. 20.36. $\frac{2}{3}\ln|3x^2+2|+C$.

20.37. $\frac{1}{8}\ln|2x^4-1|+C$. 20.38. $-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+C$.

20.39. $\frac{1}{2}\ln|4+\sin 2x|+C$. 20.40. $2e^{\sqrt{x}}+C$.

20.41. $\frac{2^{3x^2}}{6\ln 2}+C$. 20.42. $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$.

20.43. $-\frac{1}{12\sin^4 3x}+C$. 20.44. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$.

20.45. $-\frac{4}{3}\sqrt{3-x^3}+C$. 20.46. $\frac{1}{2}tg^2 x+C$.

20.47. $-\frac{ctg^3 x}{3}+C$. 20.48. $\frac{1}{12}arctg\frac{2x^2}{3}+C$.

20.49. $\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{4x^2}{\sqrt{3}}+C$. 20.50. $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$.

20.51. $-\frac{1}{8}\arccos^4 2x+C$. 20.52. $-\frac{1}{\ln|x|}+C$.

20.53. $\frac{\ln^6|x|}{18}+C$. 20.54. $\ln(x^2-x+5)+C$.

20.55. $\ln\left|x^3+2x-7\right|+C$. 20.56. $-\frac{\sqrt{5-4x^2}}{4}-\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$.

20.57. $\frac{4}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4}+\sqrt{16-3x^2}+C$. 20.58. $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3\ln x}+C$.

20.59. $\arcsin\frac{\ln x}{2}+C$. 20.60. $e^{\arcsin x}-3\sqrt{1-x^2}+C$.

20.61. $-\frac{1}{\ln 3}3^{\arccos x}+4\arcsin x+C$. 20.62. $\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\,\frac{2e^x}{\sqrt{3}}+C$.

20.63. $\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C$. 20.64. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sin\sqrt{x}+C$.

20.65. $\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}-4\cos\sqrt[4]{x}+C$.

20.66. $\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+\cos x-2\ln\left|\sin x\right|+C$. 20.67. $2\ln\left|tg\,\frac{x}{4}\right|+C$.

20.68. $-\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C$. 20.69. $-2\ln\left|tg\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{x}{4}\right)\right|+C$.

20.70. $\frac{1}{2}\sqrt{5-4\cos^2 x}+C$. 20.71. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\cos^2 x}{\sqrt{7}}+C$.

§21. ჩასმის ხერხი განუსაზღვრელ ინტეგრალში

ვთქვათ, მოსაძებნია ინტეგრალი $\int f(x)dx$. ჩასმის ხერხი მდგომარეობს იმაში, რომ ინტეგრალში x ცვლადის მაგივრად შემოგვაქვს დამხმარე t ცვლადი ფორმულით $x=\varphi(t)$, რომელიც მკაცრად მონოტონურია და უწყვეტად დიფერენცირებადი, საიდანაც $dx=\varphi'(t)dt$,

მაშინ:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (21.1)$$

ამ ხერხით მიღებულ პასუხში უნდა განვახორციელოთ შებრუნებული ჩასმა, ანუ დავუბრუნდეთ x ცვლადს.

ჩასმის საერთო წესი არ არსებობს, მაგრამ ცნობილია რამოდენიმე სტანდარტული ჩასმა:

თუ, ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{a^2-x^2}$ რადიკალს, მაშინ იყენებენ $x=a\sin t$ (ან $x=a\cos t$) ჩასმას.

თუ, ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2-a^2}$ რადიკალს, მაშინ იყენებენ $x=\dfrac{a}{\cos t}$ (ან $x=\dfrac{a}{\sin t}$) ჩასმას.

თუ, ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2+a^2}$ რადიკალს, მაშინ იყენებენ $x=atgt$ (ან $x=actgt$) ჩასმას.

ვთქვათ მოცემულია შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\cdots\right)dx,$$

სადაც R წარმოადგენს თავისი არგუმენტების რაციონალურ ფუნქციას, $m_1,n_1,m_2,n_2\cdots$ მთელი რიცხვებია.

ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ $x=t^s$ ჩასმა, სადაც s არის $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\cdots$ წილადების საერთო მნიშვნელი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int(3x-5)^{10}dx$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $3x-5=t$, მაშინ $dx=\frac{1}{3}dt$

და $I=\frac{1}{3}\int t^{10}dt=\frac{1}{33}t^{11}+C=\frac{1}{33}(3x-5)^{11}+C$.

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

ამოხსნა.

$$I=\left|\begin{matrix}\sqrt{x+1}=t\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=2\int\frac{tdt}{t+1}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)+C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{\ln^3 xdx}{x}$.

ამოხსნა. პირველი ხერხი: გამოვიყენოთ ჩასმა $\ln x=t$.

$$I=\left|\begin{matrix}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{matrix}\right|=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\ln^4 x+C.$$

მეორე ხერხი: თუ ვისარგებლებთ დიფერენციალის განმარტებით, მაშინ

$$\frac{1}{x}dx=d\ln x$$

და საძიებელი ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I=\int\ln^3 xd\ln x.$$

ეს ინტეგრალი ცხრილის ინტეგრალია, ვინაიდან არა აქვს მნიშვნელობა იმას ინტეგრების ცვლადი დამოუკიდებელი ცვლადია თუ რაიმე ფუნქცია, ამიტომ უშუალო ინტეგრებით ვპოულობთ

$$I = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

ინტეგრების ამ ხერხს უწოდებენ ინტეგრებას დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანით (იხ. §20).

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \sqrt{\sin x} \cos x dx.$

ამოხსნა. პირველი ხერხი:

$$I = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} t\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x} + C$$

მეორე ხერხი: შევიტანოთ $\cos x$ დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ და ვაინტეგროთ. გვექნება:

$$I = \left|\cos x dx = d \sin x\right| = \int \sqrt{\sin x} d \sin x = \int (\sin x)^{\frac{1}{2}} d \sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x} + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I = \int \frac{xdx}{1+x^4}.$

ამოხსნა. პირველი ხერხი:

$$I = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt + C = \frac{1}{2} arctgx^2 + C.$$

მეორე ხერხი:

$$I = \left|xdx = \frac{1}{2}dx^2\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^4} = arctgx^2 + C.$$

6. ვიპოვოთ ინტეგრალი $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

ამოხსნა. რადგან $\frac{1}{2}$ და $\frac{1}{3}$ წილადების საერთო მნიშვნელი არის 6, გამოვიყენოთ ჩასმა $x=t^6$ და §20-ში განხილული მაგალითის ამონახსნი. გვექნება:

$$I=\left|\begin{matrix} x=t^6, & \sqrt{x}=t^3 \\ dx=6t^5dt, & \sqrt[3]{x}=t^2\end{matrix}\right|=\int\frac{t^3\cdot 6t^5\cdot dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^6}{t-1}dt=$$

$$=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

7. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

ამოხსნა. ინტეგრალის საპოვნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც ტრიგონომეტრიული ჩასმა $x=2\cos t$, ასევე ჩასმა $z=\frac{1}{x}$. გვექნება:

$$\text{ა)}\quad I=\left|\begin{matrix} x=2\cos t \\ t=\arccos\frac{x}{2} \\ dx=-2\sin t dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-2\sin t dt}{4\cos^2 t\cdot 2\sin t}=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{4}tgt+C=-\frac{1}{4}tg\arccos\frac{x}{2}+C=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C.$$

$$\text{ბ)}\ I=\left|\begin{matrix} z=\frac{1}{x} \\ dz=-\frac{1}{x^2}dx\end{matrix}\right|=-\int\frac{z^2dz}{z^2\sqrt{4-\frac{1}{z^2}}}=-\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^2-1}}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4z^2-1=t \\ 8zdz=dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\sqrt{t}+C = -\frac{1}{4}\sqrt{4z^2-1}+C =$$

$$=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C.$$

8. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $I=\int\frac{\sqrt{x^2-4}dx}{x^3}$.

ამოხსნა.

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}\cdot dx}{x^3} = \begin{vmatrix} x=\dfrac{2}{\cos t} \\ dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t} \end{vmatrix} = \int\frac{\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t}-4}\cdot\cos^3 t\cdot 2\sin t}{8\cos^2 t}dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin^2 tdt = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+C.$$

რადგან $t=\arccos\frac{2}{x}$,

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cos t = 2\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}\cdot\frac{2}{x} = \frac{4}{x^2}\sqrt{x^2-4},$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I=\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}+C.$$

მაგალითები

იპოვეთ ინტეგრალები:

21.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. 21.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+3}}$. 21.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

21.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3}}$. 21.5. $\int \frac{dx}{e^x+8}$. 21.6. $\int \frac{dx}{e^x-7}$.

21.7. $\int \frac{dx}{e^{4x}+3}$. 21.8. $\int \frac{dx}{e^{2x}-6}$. 21.9. $\int \frac{dx}{(\sqrt[5]{x}+6)\sqrt[10]{x^9}}$.

21.10. $\int \frac{dx}{(4\sqrt[4]{x}+7)\sqrt[8]{x}}$. 21.11. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{1+5x}}$. 21.12. $\int \frac{dx}{5-\sqrt{2x-3}}$.

21.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}-4}$. 21.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+2}$. 21.15. $\int x\sqrt{4x+3}\,dx$.

21.16. $\int x\sqrt{8-x}\,dx$. 21.17. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}-16)\sqrt[6]{x^5}}$. 21.18. $\int \frac{x^{-3/4}dx}{\sqrt{x}-4}$.

21.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+e^x}}$. 21.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+9}}$. 21.21. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-5}}$.

21.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-4}}$. 21.23. $\int \frac{dx}{(6+x)\sqrt{2+x}}$. 21.24. $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x-5}}$.

21.25. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 21.26. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}dx$. 21.27. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}dx$.

21.28. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. 21.29. $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx$. 21.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

21.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-5x^2)^3}}$. 21.32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+3x^2}}$. 21.33. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+2x^2)^3}}$.

პასუხები

21.1. $\ln\frac{\left|\sqrt{x+1}-1\right|}{\sqrt{x+1}+1}+C$. 21.2. $\frac{1}{3}\ln\frac{\left|\sqrt{4x+9}-1\right|}{\sqrt{4x+9}+1}+C$.

21.3. $\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C$. 21.4. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}}+C$.

21.5. $\frac{1}{8}\left(x-\ln\left(e^x+8\right)\right)+C$. 21.6. $\frac{1}{7}\left(\ln\left|e^x-7\right|-x\right)+C$.

21.7. $\frac{1}{12}\left(4x-\ln\left(e^{4x}+3\right)\right)+C$. 21.8. $\frac{1}{12}\left(\ln\left|e^{2x}-6\right|-2x\right)+C$.

21.9. $\frac{10}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt{6}}+C$. 21.10. $\frac{4}{\sqrt{7}}arctg\frac{2\sqrt[8]{x}}{\sqrt{7}}+C$.

21.11. $-\frac{2}{5}\sqrt{1+5x}-\frac{2}{5}\ln\left|\sqrt{1+5x}-1\right|+C$.

21.12. $-\sqrt{2x-3}-\ln\left|\sqrt{2x-3}-5\right|+C$.

21.13. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}+\frac{8}{3}\ln\left|3\sqrt{2x-1}-4\right|+C$.

21.14. $2\sqrt{x+2}-4\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+C$.

21.15. $\frac{1}{40}\sqrt{(4x+3)^5}-\frac{1}{8}\sqrt{(4x+3)^3}+C$.

21.16. $\frac{2}{5}\sqrt{(8-x)^5}-\frac{16}{3}\sqrt{(8-x)^3}+C$.

21.17. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-4}{\sqrt[6]{x}+4}\right|+C$. 21.18. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[4]{x}+2}\right|+C$.

21.19. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+e^x}-2}{\sqrt{4+e^x}+2}\right|+C$. 21.20. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+e^x}-3}{\sqrt{9+e^x}+3}\right|+C$.

21.21. $\frac{2}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{\sqrt{e^x-5}}{\sqrt{5}}+C$. 21.22. $arctg\,\frac{\sqrt{e^x-4}}{2}+C$.

21.23. $arctg\sqrt{2+x}+C$. 21.24. $\frac{2}{3}\,arctg\,\frac{\sqrt{x-5}}{3}+C$.

21.25. $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$.

21.26. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-3}}{2x^2}+C$.

21.27. $-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}+C$. 21.28. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

21.29. $\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{3-4x^2}+C$. 21.30. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$.

21.31. $\frac{x}{4\sqrt{4-5x}}+C$. 21.32. $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}x}{2+\sqrt{4+3x^2}}+C$.

21.33. $\frac{x}{9\sqrt{9+2x^2}}+C$.

§22. ნაწილობითი ინტეგრება

ვთქვათ, $u(x)$ და $\upsilon(x)$ განსაზღვრული და დიფერენცირებადი არიან რაიმე X შუალედზე და ვთქვათ, $u'(x)$ და $\upsilon'(x)$-ს გააჩნიათ პირველადები ამავე შუალედზე, მაშინ სამართლიანია ფორმულა:

$$\int u(x)\cdot\upsilon'(x)dx = u(x)\cdot\upsilon(x) - \int \upsilon(x)\,u'(x)dx.$$

რადგან $\upsilon'(x)dx = d\upsilon(x)$ და $u'(x)dx = du(x)$, ამიტომ ზედა ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du\,. \qquad (22.1)$$

ამ ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და საშუალებას იძლევა $\int u d\upsilon$ შევცვალოთ ინტეგრალით $\int \upsilon du$, რომლის პოვნა შეიძლება აღმოჩნდეს შედარებით მარტივი.

განვიხილოთ ინტეგრალი $\int p(x)\cdot f(x)dx$ და მივუთითოთ ზოგიერთი ის შემთხვევა, როცა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი ეფექტურად გამოიყენება.

1) თუ $f(x)$ ერთ–ერთია შემდეგი ფუნქციებიდან: $e^{\lambda x}$, $a^{\lambda x}(a>0)$, $\sin\lambda x$, $\cos\lambda x$, ხოლო $p(x)$ მრავალწევრია, მაშინ u-თი ავღნიშნოთ $p(x)$, $d\upsilon$-თი კი $f(x)dx$.

2) თუ $f(x)$ ერთ–ერთია შემდეგი ფუნქციებიდან: $\ln x$, $arc\sin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, ხოლო $p(x)$ მრავალწევრია, მაშინ u-თი ავღნიშნოთ $f(x)$, $d\upsilon$-თი კი $p(x)dx$.

3) თუ $p(x)=e^{\lambda x}$, $f(x)=\sin\beta x$, ან $f(x)=\cos\beta x$, მაშინ ინტეგრალი ამოიხსნება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ორჯერადი გამოყენებით, ამასთან u და $d\upsilon$-ს საწყისი არჩევები ნებისმიერია.

შენიშვნა: 1) შემთხვევაში ნაწილობითი ინტეგრების ხერხის გამოყენება მოგვიწევს იმდენჯერ, რამდენი რიგიც აქვს $p(x)$ მრავალწევრს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int xe^x dx$.

ამოხსნა.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ d\upsilon = e^x dx, & \upsilon = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int x^2 \cos x dx$.

ამოხსნა. რადგანაც $p(x)$ მეორე რიგის მრავალწევრია, ამიტომ (22.1) ფორმულის გამოყენება მოგვიწევს ორჯერ:

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2x dx \\ d\upsilon = \cos x dx, & \upsilon = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ d\upsilon = \sin x dx, & \upsilon = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x + 2\cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2\cos x - 2\sin x + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int (x^2 - 3x + 5)\ln 7x dx$.

ამოხსნა. გამოსათვლელი ინტეგრალი მე-2 ტიპისაა, ამიტომ

$$\int \left(x^2 - 3x + 5\right)\ln 7x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln 7x, & du = \frac{1}{x} dx \\ d\upsilon = \left(x^2 - 3x + 5\right)dx, & \upsilon = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right)\ln 7x - \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right)\ln 7x - \int \frac{x^2}{3} dx + \int \frac{3x}{2} dx - \int 5 dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right)\ln 7x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 5x + C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \arcsin 6x dx$.

ამოხსნა. საძებნი ინტეგრალი მე–2 ტიპისაა, ამასთან $p(x)=1$, მაშინ გამოვიყენებთ რა (22.1) ფორმულას მივიღებთ:

$$\int \arcsin 6x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin 6x, & du = \dfrac{6}{\sqrt{1-36x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x \arcsin 6x -$$

$$-\int \frac{6x dx}{\sqrt{1-36x^2}} = x \arcsin 6x - \frac{6}{72}\int \left(1-36x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-36x^2\right) =$$

$$= x \arcsin 6x - \frac{1}{6}\sqrt{1-36x^2} + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int e^x \cos 2x dx$.

ამოხსნა.

$$\int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ d\upsilon = \cos 2x dx, & \upsilon = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \sin 2x - \int e^x \sin 2x dx\right) = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ d\upsilon = \sin 2x dx, & \upsilon = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\left(-e^x \cos 2x + \int e^x \cos 2x dx\right)\right).$$

ამრიგად

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx.$$

აქედან

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5}e^x\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

მაგალითები

იპოვეთ ინტეგრალები:

22.1. $\int x\sin x dx$. 22.2. $\int x\cos x dx$. 22.3. $\int x2^x dx$.

22.4. $\int x\ln x dx$. 22.5. $\int arctgx dx$. 22.6. $\int x\sin 5x dx$.

22.7. $\int x\cos(3x-1)dx$. 22.8. $\int x4^{6x} dx$. 22.9. $\int xe^{3x} dx$.

22.10. $\int x^2\ln x dx$. 22.11. $\int x^5\ln x dx$. 22.12. $\int (2x+1)\sin 3x dx$.

22.13. $\int (2-3x)\cos 4x dx$. 22.14. $\int (1+4x)e^{5x} dx$.

22.15. $\int (5-2x)3^{2x} dx$. 22.16. $\int xarctgx dx$. 22.17. $\int x\arcsin x dx$.

22.18. $\int x^2e^x dx$. 22.19. $\int x^3e^{-x^2} dx$. 22.20. $\int x^2\sin x dx$.

22.21. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$. 22.22. $\int \ln(x^2+1)dx$. 22.23. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

22.24. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$. 22.25. $\int x\ln(x-1)dx$. 22.26. $\int x^2 arctg 3x dx$.

22.27. $\int \arcsin^2 x dx$. 22.28. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$. 22.29. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}dx$.

22.30. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. 22.31. $\int e^{2x}\sin 3x dx$. 22.32. $\int 3^x\cos x dx$.

22.33. $\int e^{4x}\cos 5x dx$. 22.34. $\int \frac{\arccos 1/\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx$.

პასუხები

22.1. $\sin x - x\cos x + C$.

22.2. $x\sin x + \cos x + C$.

22.3. $\dfrac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2 - 1) + C$.

22.4. $\dfrac{x^2}{2}\ln|x| - \dfrac{x^2}{4} + C$.

22.5. $x\,arctgx - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$.

22.6. $\dfrac{1}{25}(\sin 5x - 5x\cos 5x) + C$.

22.7. $\dfrac{1}{9}(3x\sin(3x-1) + \cos(3x-1)) + C$.

22.8. $\dfrac{4^{6x}}{36\ln^2 4}(6x\ln 4 - 1) + C$.

22.9. $\dfrac{e^{3x}}{9}(3x - 1) + C$.

22.10. $\dfrac{x^3}{9}(3\ln|x| - 1) + C$.

22.11. $\dfrac{x^6}{36}(6\ln|x| - 1) + C$.

22.12. $\dfrac{2}{9}\sin 3x - \dfrac{2x+1}{3}\cos 3x + C$.

22.13. $\dfrac{2-3x}{4}\sin 4x - \dfrac{3}{16}\cos 4x + C$.

22.14. $\dfrac{1+4x}{5}e^{5x} - \dfrac{4}{25}e^{5x} + C$.

22.15. $\dfrac{3^{2x}}{2\ln^2 3}(1 + (5-2x)\ln 3) + C$.

22.16. $\dfrac{x^2+1}{2}arctgx - \dfrac{x}{2} + C$.

22.17. $\dfrac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$.

22.18. $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$.

22.19. $C - \dfrac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$.

22.20. $C - x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$.

22.21. $\frac{2}{3}\left(\ln^2|x| - \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{8}{9}\right)\sqrt{x^3} + C$.

22.22. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C$.

22.23. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$.

22.24. $e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right) + C$.

22.25. $\frac{x^2}{2}\ln|x-1| - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + C$.

22.26. $\frac{x}{3}arctg3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\ln(9x^2+1) + C$.

22.27. $x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + C$.

22.28. $C - \frac{\arcsin x}{x} + \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

22.29. $\frac{1}{10e^x}\left(\cos 2x - 2\sin 2x - 5\right) + C$.

22.30. $C - 2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$.

22.31. $\frac{e^{2x}}{13}\left(2\sin 3x - 3\cos 3x\right) + C$.

22.32. $\frac{3^x}{1+\ln^2 3}\left(\sin x + \cos x\cdot\ln 3\right) + C$.

22.33. $\frac{e^{4x}}{41}\left(5\sin 5x + 4\cos 5x\right) + C$.

22.34. $2\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} - \ln|x| + C$.

§ 23. კომპლექსური რიცხვები

$z = a + bi$ სახის რიცხვებს, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i = \sqrt{-1}$ (ე.წ. წარმოსახვითი ერთეული) ეწოდება კომპლექსური რიცხვი. a–ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და აღინიშნება ასე: $a = \mathrm{Re}\,z$, ხოლო b–ს კი წარმოსახვითი ნაწილი და აღინიშნება ასე: $b = \mathrm{Im}\,z$.

ორი კომპლექსური რიცხვი ითვლება ტოლად თუ მათ ტოლი აქვთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. კომპლექსური რიცხვებისათვის მეტ–ნაკლებობა არ განისაზღვრება.

$z_1 = a + bi$ და $z_2 = c + di$ ორი კომპლექსური რიცხვისათვის, იმის გათვალისწინებით, რომ $i^2 = -1$, არითმეტიკული ოპერაციები განიმარტებიან შემდეგნაირად:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \tag{23.1}$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i \tag{23.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{23.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \tag{23.4}$$

$z = a + bi$ და $\bar{z} = a - bi$ კომპლექსურ რიცხვებს ეწოდებათ შეუღლებულები და მათი ნამრავლი $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$ ნამდვილი რიცხვია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

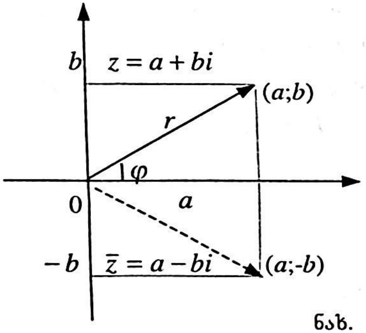
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

თუ z არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვი, მაშინ ამავე განტოლების ფესვია აგრეთვე $\bar{z}$.

ყოველ $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვს სიბრტყეზე შეესაბამება წერტილი, რომლის კოორდინატებია (a,b) და ამ სიბრტყეს ეწოდება კომპლექსური სიბრტყე.

z და $\bar{z}$ წერტილები სიმეტრიულნი არიან აბსცისთა ღერძის მიმართ, ხოლო z და $-z = -a - bi$ წერტილები კი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ყოველ კომპლექსურ $z = a + bi$ რიცხვს სიბრტყეზე შეესაბამება ვექტორი, რომლის სათავეა $0(0;0)$ წერტილში, ხოლო ბოლო კი, $(a;b)$ წერტილში (ნახ. 23.1).



ნახ. 23.1.

კომპლექსური რიცხვებისათვის შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციები შეგვიძლია განვმარტოთ ვექტორული ალგებრის საშუალებით.

თუ სიბრტყეზე განვიხილავთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემას, მაშინ $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი წარმოდგება ტრიგონომეტრიული ფორმით

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (23.5),$$

სადაც $(r;\varphi)$ პოლარული კოორდინატებიდან r –ს ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის მოდული, ხოლო $\varphi = \arg z$ –ს კი - არგუმენტი.

ნახ. 23.1-დან $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

არგუმენტის მნიშვნელობანი მოცემული კომპლექსური რიცხვისათვის განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π -ს ჯერადობით. ჩვეულებრივ გამოიყენება არგუმენტის მნიშვნელობა განსაზღვრული დამატებითი პირობით $-\pi < \arg z \le \pi$.

ეილერის ფორმულები: $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. (23.6)

(23.6) ფორმულების გამოყენებით კომპლექსური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ მაჩვენებლიანი სახით

$$z = re^{i\varphi} \tag{23.7}$$

(23.5) ფორმის გამოყენებით კომპლექსური რიცხვების გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \tag{23.8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right],\ r_2 > 0, \tag{23.9}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{23.10}$$

(23.10) ფორმულას მუავრის ფორმულა ეწოდება.

თუ $z \ne 0$, მაშინ არსებობს n განსხვავებული $z_0, z_1, \cdots z_{n-1}$, კომპლექსური რიცხვი, რომლის n-ური ხარისხი ტოლია z -ის. ამ რიცხვების ერთობლიობას უწოდებენ n-ური ხარისხის ფესვს z -იდან. ზოგჯერ აღნიშნავენ ასე: $z_k = (\sqrt[n]{z})_k$, $k = 0,1,\ldots, n$

თუ z არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ არსებობს ერთადერთი არაუარყოფითი რიცხვი, რომლის n-ური ხარისხია z. მას უწოდებენ არითმეტიკულ ფესვს z -დან; და აღნიშნავენ სიმბოლოთი: $_+\sqrt[n]{z}$ ან ზოგჯერ $\sqrt[n]{z}$ -ით. ნებისმიერი $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვების მნიშვნელობები გამოითვლება ფორმულით:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$

$$k = 0,1,\cdots n-1. \qquad (23.11)$$

(23.11) ტოლობით მოცემულ ერთობლიობას აღნიშნავენ ერთიანი სიმბოლოთი $\sqrt[n]{z}$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. შევასრულოთ მოქმედება:

$$\frac{4+3i}{3-4i}+\frac{7-2i}{2+7i}-\frac{2}{i}.$$

ამოხსნა. სიმარტივისათვის პირველი ორი წილადი გავამრავლოთ და გავყოთ მათი მნიშვნელების შეუღლებულებზე, მესამე წილადი კი i-ზე. (23.1)-(23.4) ფორმულების თანახმად გვექნები

$$\frac{4+3i}{3-4i}+\frac{7-2i}{2+7i}-\frac{2}{i}=\frac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(7-2i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)}-\frac{2i}{i\cdot i}=$$

$$=\frac{12+16i+9i+12i^2}{9-16i^2}+\frac{14-49i-4i+14i^2}{4-49i^2}-\frac{2i}{i^2}=$$

$$=\frac{25i}{25}+\frac{-53i}{53}+2i=i-i+2i=2i.$$

2. გავამარტივოთ:

$$\frac{3+7i}{4+2i}-\frac{5-3i}{7-2i}+\frac{4-3i}{i}.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$\frac{3+7i}{4+2i}-\frac{5-3i}{7-2i}+\frac{4-3i}{i}=\frac{(3+7i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}-\frac{(5-3i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)}+\frac{(4-3i)i}{i\cdot i}=$$

$$=\frac{26+22i}{20}-\frac{41-11i}{53}-(4-3i)i=\frac{1378+1166i-820+220i-4240i-3180}{1060}=$$

$$=\frac{-2622-2854i}{1060}=-\frac{2622}{1060}-\frac{2854}{1060}i=-\frac{1311}{530}-\frac{1427}{530}i.$$

3. ვისარგებლოთ მუავრის ფომულით და ჩავწეროთ ალგებრული ფორმით რიცხვი

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{18}.$$

ამოხსნა. პირველ რიგში $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ კომპლექსურ რიცხვი წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1.$$

$$\varphi=arctg\,\frac{b}{a}=arctg\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6},$$

ამიტომ:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}.$$

(23.10) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{18}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}=\cos18\frac{\pi}{6}+i\sin18\frac{\pi}{6}=$$

$$=\cos3\pi+i\sin3\pi=-1+0i.$$

4. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით $z=-4$ კომპლექსური რიცხვი.

ამოხსნა. რადგან $z=-4=-4+0i$, ამიტომ $a=-4$, და $b=0$, ამიტომ:

$$r=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4,\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{0}{-4}=0,\quad \cos\varphi=\frac{-4}{4}=-1.$$

$$\begin{cases}\sin\varphi=0\\ \cos\varphi=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \varphi=\pi.$$

მაშინ:

$$z=4(\cos\pi+i\sin\pi)\quad \text{და}\quad z=4e^{i\pi}.$$

5. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით $z+\bar{z}$ კომპლექსური რიცხვი, თუ $z=(5-3i)e^{2i}$.

ამოხსნა. ეილერის ფორმულით $e^{2i}=\cos2+i\sin2$,

მაშინ:

$$z=(5-3i)(\cos2+i\sin2)=(5\cos2+3\sin2)-(3\cos2-5\sin2)i.$$

$$\bar{z}=(5\cos2+3\sin2)+(3\cos2-5\sin2)i.$$

$$z+\bar{z}=(5\cos2+3\sin2)-(3\cos2-5\sin2)i+(5\cos2+3\sin2)+$$
$$+(3\cos2-5\sin2)i=2(5\cos2+3\sin2)$$

$$r=|z+\bar{z}|=\sqrt{\left[2(5\cos2+3\sin2)\right]^2+0^2}=2|5\cos2+3\sin2|$$

$$tg\varphi=\frac{0}{r}=0,\quad \varphi=0,\ \text{ან}\ \varphi=\pi\ \text{-ს}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $5\cos2+3\sin2>0$, ამიტომ:

$r=|z+\bar{z}|=10\cos2+6\sin2.$

მაშინ: $z+\bar{z}=(10\cos2+6\sin2)(\cos0+i\sin0)$ და

$$z+\bar{z}=(10\cos2+6\sin2)e^{io}.$$

6. ვიპოვოთ $\sqrt[4]{-4}$ –ის ყველა მნიშვნელობა.

ამოხსნა. მაგალითი 4–ის ძალით $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$, ამიტომ (23.11) თანახმად

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i.$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i.$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 6\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

მაშასადამე:

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

7. ამოვხსნათ განტოლება:

$$x^2 + 3x + 3 = 0.$$

ამოხსნა.

$$D = 9 - 12 = -3, \qquad \sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i.$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

8. ამოვხსნათ განტოლება: $x^4 + 1 = 0.$

ამოხსნა. $x^4 = -1, \quad x = \sqrt[4]{-1}.$

$$-1 = -1 + 0i, \quad r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \left[\begin{array}{l} \cos\varphi = -1 \\ \sin\varphi = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \varphi = \pi.$$

$$x_0 = 1\left(\cos\frac{\pi + 0}{4} + i\sin\frac{\pi + 0}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

$$x_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i).$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi + 3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i).$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

შენიშვნა: მაგალითი 7 შეგვეძლო ამოგვეხსნა მაგალითი ამოხსნის ანალოგიურად.

2) ჩაწერეთ $1+itg\alpha$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული ფორმით, თუ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

23.25. მოძებნეთ x და y ნამდვილი რიცხვები, თუ

1) $(2+i)x+(3-4i)y=1+6i$.

2) $(5+3i)x-(2-4i)y=-1+15i$.

23.26. დაამტკიცეთ, რომ 1) $\sqrt[3]{-2-2i}+\sqrt[3]{-2+2i}=2$.

2) $\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=4$.

23.27. დაამტკიცეთ, რომ n ნატურალური რიცხვისათვის

1) $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}$.

2) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$.

ამოხსენით განტოლება:

23.28. $x^2+5x+8=0$.

23.29. $x^2+9=0$.

23.30. $x^2-3x+12=0$.

23.31. $2x^2+2x+9=0$.

23.32. $x^4+5=0$.

23.33. $x^5+3=0$.

პასუხები

23.1. $-\frac{84}{145}+\frac{877}{145}i$. 23.2. $-\frac{102}{185}+\frac{239}{185}i$. 23.3. $-\frac{58}{15}+\frac{94}{15}i$.

23.4. $\frac{45}{221}-\frac{4809}{2210}i$. 23.5. i. 23.6. $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$.

23.7. $-2^6\cdot 3^3$. 23.8. 2^{24}. 23.9. $-117+44i$.

23.10. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 23.11. 2^{12}. 23.12. $2^9(1-\sqrt{3}i)$.

23.13. $\dfrac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$. 23.14. $\dfrac{(2+\sqrt{3})^4}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$.

23.15. $2^7\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^4\cdot\left(-1-\sqrt{3}i\right)$. **23.16.** $-\left(2+\sqrt{2}\right)^6\cdot i$.

23.17. $2\cdot(-1)^n$. **23.18.** 2^{-10}.

23.19. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi+8\pi k}{12}+i\sin\dfrac{\pi+8\pi k}{12}\right)$, $k=0,1,2$.

23.20. $\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi+8\pi k}{16}+i\sin\dfrac{3\pi+8\pi k}{16}\right)$, $k=0,1,2,3$.

23.21. $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\pi+6\pi k}{9}+i\sin\dfrac{\pi+6\pi k}{9}\right)$, $k=0,1,2$.

23.22. $\cos\dfrac{\pi+4\pi k}{6}+i\sin\dfrac{\pi+4\pi k}{6}$, $k=0,1,2$.

23.23. $\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}$, $k=0,1,2,3$.

23.24. 1) $-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$.

2) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi))$.

23.25. 1) $x=2$, $y=-1$. 2) $x=1$, $y=3$.

§24. უმარტივესი წილადების ინტეგრება

უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის წესიერ რაციონალურ წილადებს

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, (k–მთელი დადებითი რიცხვია)

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, (მნიშვნელის ფესვები კომპლექსურია, ე.ი. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$)

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, (მნიშვნელის ფესვები კომპლექსურია, $k \geq 2$)

განვიხილოთ ინტეგრალები პირველი სამი უმარტივესი წილადიდან. (ინტეგრებას წილადის მნიშვნელის ჯერადი კომპლექსური ფესვების შემთხვევაში არ განვიხილავთ).

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III}.\ \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\, arctg\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

შენიშვნა: III ინტეგრალის ამოხსნისას გამოვიყენეთ კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის წესი, კერძოდ,

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

სადაც შემოტანილია აღნიშვნა $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$, აქ ნიშანი პლიუსი აიღება მაშინ, როცა სამწევრის ფესვები კომპლექსურია, მინუსი კი მაშინ როცა სამწევრის ფესვები ნამდვილია.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{(\sqrt{7}-1)dx}{(\sqrt{5}+1)x-1}$.

ამოხსნა. საპოვნი ინტეგრალი I ტიპისაა, ამიტომ

$$\int \frac{(\sqrt{7}-1)dx}{(\sqrt{5}+1)x-1} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}+1} \ln\left|(\sqrt{5}+1)x-1\right| + C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{100dx}{(3-50x)^7}$.

ამოხსნა.

შემოვიღოთ ჩასმა: $3-50x = t$, $x = \frac{3-t}{50}$, $dx = -\frac{1}{50}dt$.

მაშინ მოცემული ინტეგრალი დაიყვანება II ტიპის ინტეგრალზე

$$\int \frac{100dx}{(3-50x)^7} = 100\int \frac{-\frac{1}{50}dt}{t^7} = -2\int t^{-7}dt = -2\frac{t^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{3t^6} + C =$$

$$= \frac{1}{3(3-50x)^6} + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int \frac{5dx}{5x^2-6x+8}$.

ამოხსნა. იმისათვის, რომ ადვილად გამოვყოთ სრული კვადრატი მნიშვნელიდან, წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ x^2 –ის კოეფიციენტის გაოთხკეცებულ ნამრავლზე

$$\int \frac{dx}{5x^2-6x+8} = \int \frac{20dx}{100x^2-120x+160} = \int \frac{20dx}{(10x-6)^2+160-36}.$$

შემოვიღოთ ჩასმა: $10x-6=t$, აქედან $x=\frac{t+6}{10}$, $dx=\frac{1}{10}dt$,

მაშინ

$$\int\frac{dx}{5x^2-6x+8}=20\int\frac{\frac{1}{10}dt}{t^2+124}=2\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{124}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{124}}arctg\frac{t}{\sqrt{124}}+C=\frac{2}{\sqrt{124}}arctg\frac{10x-6}{\sqrt{124}}+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx.$

ამოხსნა. პირველი ხერხი:

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}=\int\frac{3x+5}{(x+1)^2+10-1}dx=\int\frac{3x+5}{(x+1)^2+9}dx.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა: $x+1=t$, მაშინ $x=t-1$, $dx=dt$ და

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3(t-1)+5}{t^2+3^2}dt=\int\frac{3t+2}{t^2+3^2}dx=\int\frac{3tdt}{t^2+3^2}+$$

$$+\int\frac{2dt}{t^2+3^2}=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9}+2\int\frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|+$$

$$+\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right|+\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

მეორე ხერხი:

$$\int\frac{(3x+5)dx}{x^2+2x+10}=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{10}{3}+2-2}{x^2+2x+10}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+10}+$$

$$+2\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+10)}{x^2+2x+10}+2\int\frac{dx}{(x+1)^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right|+\frac{2}{3}arctg\,\frac{x+1}{3}+C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი: $\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx.$

ამოხსნა.

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=$$

$$\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+48-25}dx=\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}.$$

შემოვიტანოთ ჩასმა: $6x-5=t$, აქედან $x=\frac{t+5}{6}$, $dx=\frac{1}{6}dt$, მაშინ

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84\cdot\frac{t+5}{6}-24}{t^2+23}\cdot\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}\int\frac{14t+46}{t^2+23}dt=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{14tdt}{t^2+23}+\frac{46}{6}\int\frac{dt}{t^2+23}=\frac{14}{2\cdot6}\int\frac{d(t^2+23)}{t^2+23}+\frac{23}{3}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{23})^2}=$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|t^2+23\right|+\frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{23}}+C=\frac{7}{6}\ln\left|3x^2-5x+4\right|+$$

$$+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\,\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

მაგალითები

24.1. $\int \frac{3dx}{x-\sqrt{2}}$. 24.2. $\int \frac{3dx}{5x+8}$. 24.3. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{\sqrt{5}x-12}$. 24.4. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{8}x-3}$.

24.5. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}$. 24.6. $\int \frac{(\sqrt{3}-1)dx}{(\sqrt{3}+1)x-1}$. 24.7. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{5\sqrt{5}x-3\sqrt{3}}$.

24.1. $\int \frac{dx}{(3x-5)^4}$. 24.9. $\int \frac{6dx}{(2-10x)^5}$. 24.10. $\int \frac{42dx}{(7x-4)^7}$.

24.11. $\int \frac{50dx}{(10x-4)^6}$. 24.12. $\int \frac{100dx}{(2x-50x)^3}$. 24.13. $\int \frac{20dx}{(2-10x)^3}$.

24.14. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$. 24.15. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+2}$.

24.16. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$. 24.17. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+7}$.

24.18. $\int \frac{dx}{16x^2-8x+3}$. 24.19. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

24.20. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$. 24.21. $\int \frac{dx}{3x^2-5x+4}$.

24.22. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 24.23. $\int \frac{dx}{25x^2+10x+7}$.

24.24. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$. 24.25. $\int \frac{8x+3}{2x^2-6x+7}dx$.

24.26. $\int \frac{x-3}{x^2+4x+7}dx$. 24.27. $\int \frac{8x+3}{4x^2+12x+11}dx$.

24.28. $\int \frac{5x+3}{3x^2-6x+7}dx$. 24.29. $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$.

24.30. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx.$

24.31. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx.$

24.32. $\int \frac{3x+1}{x^2-x+2}dx.$

24.33. $\int \frac{5x+2}{x^2-3x+3}dx.$

24.34. $\int \frac{x+4}{x^2+5x+7}dx.$

24.35. $\int \frac{4x-3}{x^2+4x+8}dx.$

პასუხები

24.1. $3\ln\left|x-\sqrt{2}\right|+C.$

24.2. $\frac{3}{5}\ln|5x+8|+C.$

24.3. $\sqrt{\frac{3}{5}}\ln\left|\sqrt{5}x-12\right|+C.$

24.4. $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{8}x-3\right|+C.$

24.5. $\sqrt{5}\ln\left|\sqrt{5}x-\sqrt{3}\right|+C.$

24.6. $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}\ln\left|(\sqrt{3}+1)x-1\right|+C.$

24.7. $\frac{1}{5}\ln\left|5\sqrt{5}x-3\sqrt{3}\right|+C.$

24.8. $-\frac{1}{9(3x-5)^3}+C.$

24.9. $-\frac{1}{4(6x-3)^4}+C.$

24.10. $-\frac{1}{(7x-4)^6}+C.$

24.11. $-\frac{1}{(10x-4)^5}+C.$

24.12. $\frac{1}{(2-50x)^2}+C.$

24.13. $\frac{1}{(2-10x)^2}+C.$

24.14. $\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C.$

24.15. $\frac{1}{3}arctg(3x-1)+C.$

24.16. $arctg(x-3)+C.$

24.17. $\frac{2}{\sqrt{47}} arctg \frac{4x-3}{\sqrt{47}} + C.$ 24.18. $\frac{1}{4\sqrt{2}} arctg \frac{4x-1}{\sqrt{2}} + C.$

24.19. $\frac{2}{\sqrt{31}} arctg \frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.$ 24.20. $\frac{2}{\sqrt{11}} arctg \frac{6x-1}{\sqrt{11}} + C.$

24.21. $\frac{2}{\sqrt{23}} arctg \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$ 24.22. $\frac{1}{2} arctg(2x+1) + C.$

24.23. $\frac{1}{5\sqrt{6}} arctg \frac{5x+1}{\sqrt{6}} + C.$ 24.24. $\frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$

24.25. $3\sqrt{5} arctg \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + 2\ln|2x^2-6x+7| + C.$

24.26. $\frac{1}{6}\ln|x^2+4x+7| - \frac{5}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$

24.27. $\ln|4x^2+12x+11| - \frac{9}{2\sqrt{2}} arctg \frac{2x+3}{\sqrt{2}} + C.$

24.28. $\frac{5}{6}\ln|3x^2-6x+7| + \frac{7}{\sqrt{13}} arctg \frac{\sqrt{3}(x-1)}{2} + C.$

24.29. $3\ln|x^2+4x+9| - \frac{7}{\sqrt{5}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$

24.30. $\frac{5}{2}\ln|x^2+2x+10| - arctg \frac{x+1}{3} + C.$

24.31. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C.$

24.32. $\frac{3}{2}\ln|x^2-x+2| + \frac{5}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$

24.33. $\frac{5}{2}\ln|x^2-3x+3| + \frac{19}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$

24.34. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5x+7\right|+\sqrt{3}arctg\frac{2x+5}{\sqrt{3}}+C.$

24.35. $2\ln\left|x^2+4x+8\right|+\frac{11}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$

§25. რაციონალური წილადები და მათი დაშლა უმარტივეს წილადებად

ფუნქციას $\frac{P(x)}{Q(x)}$, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია, ეწოდება რაციონალური ფუნქცია. თუ, $P(x)$ მრავალწევრის რიგი (x-ის უმაღლესი ხარისხი) მეტია ან ტოლი $Q(x)$ მრავალწევრის რიგზე, მაშინ მოვახდენთ მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფას და მივიღებთ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

სადაც $W(x)$ იქნება რაიმე მრავალწევრი, ხოლო $\frac{R(x)}{Q(x)}$ კი წესიერი რაციონალური წილადი (ე.ი. მრიცხველის რიგი ნაკლები იქნება მნიშვნელის რიგზე).

მაგალითად: $$\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\frac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}.$$

გაუსის და ბეზუს თეორემების თანახმად, ყოველი n-ური ხარისხის $Q(x)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ნამრავლის სახით:

$$Q(x) = A(x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \cdots (x^2+px+q)^{\lambda} \ldots (x^2+rx+s)^{\mu} \qquad (25.1)$$

სადაც $\alpha + \beta + \ldots + 2\lambda + \ldots + 2\mu = n,\ \dfrac{p^2}{4} - q < 0, \ldots, \dfrac{r^2}{4} - s < 0$,

A არის $Q(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი.

თუ $Q(x)$ მრავალწევრს გააჩნია მხოლოდ ნამდვილი ჯერადი $a_1, a_2, \ldots, a_q$ ფესვები, მაშინ

$$Q(x) = A(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_q)^{\alpha_q}, \qquad (25.2)$$

სადაც $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q = n.$

თუ $Q(x)$ მრავალწევრს გააჩნია მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, რომელთა ჯერადობა ერთის ტოლია, მაშინ

$$Q(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \qquad (25.3)$$

მაგალითად: $Q(x) = 3(x-2)^3(x+4)^2$ არის მეხუთე რიგის მრავალწევრი, ამასთან $a=2$ ფესვის ჯერადობა არის 3, ხოლო $b=-4$ ფესვის ჯერადობა კი 2.

წილადებს:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{B}{(x-b)^n}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

სადაც $n>1$ და $p^2-4q<0$, ეწოდებათ უმარტივესი წილადები.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თუ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ წესიერი რაციონალური ფუნქციაა და მისი მნიშვნელი წარმოდგება (25.1) სახით, მაშინ ეს ფუნქცია ერთადერთი სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}, \qquad (25.4)$$

სადაც $A_1,\cdots,A_\alpha,B_1,\ldots,B_\beta,\ldots,R_1,S_1,\ldots,R_\mu,S_\mu$ – ნამდვილი რიცხვებია. (25.4) წარმოდგენას უწოდებენ რაციონალური ფუნქციის დაშლას უმარტივეს წილადებად.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $A_1,A_2,\cdots R_\mu,S_\mu$ რიცხვები, საჭიროა (25.4) დაშლის ორივე მხარე გავამრავლოთ $Q(x)$-ზე. მივიღებთ ორი მრავალწევრის ტოლობას. შემდეგ ვუტოლებთ ორივე მრავალწევრის უცნობის ერთნაირ ხარისხებიან წევრთა კოეფიციენტებს და ვიღებთ წრფივ თავსებად განტოლებათა სისტემას, საიდანაც ვიპოვით საძიებელ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებს. ამ მეთოდს ეწოდება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. წარმოვადგინოთ $\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად.

ამოხსნა.

(25.4) ფორმულის ძალით $\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+7}$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-5)(x+7)$ –ზე, მივიღებთ:

$$x-3=A(x+7)+B(x-5).$$

ანუ

$$x-3=(A+B)x+7A-5B,$$

საიდანაც დავწერთ სისტემას

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 7A-5B=-3 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{6}, \quad B=\frac{5}{6}, \quad \text{მაშინ}$$

$$\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}=\frac{\frac{1}{6}}{x-5}+\frac{\frac{5}{6}}{x+7}$$

2. დავშალოთ $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივეს წილადების ჯამად.

ამოხსნა. რადგან

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3),$$

ამიტომ

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

ტოლობის ორივე მხარის $(x-2)(x-3)$ –ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$2x-1=A(x-3)+B(x-2)$$

ანუ

$$2x-1=(A+B)x+(-3A-2B)$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \quad \text{საიდანაც} \quad A=-3, \quad B=5.$$

ამრიგად

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

3. დავშალოთ $\dfrac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$ რაციონალური წილადი უმარტივესი წილადების ჯამად.

ამოხსნა. რადგან მოცემული რაციონალური წილადი არაწესიერია, ამიტომ ჩავატაროთ მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}=x+1+\frac{-3x+4}{2x^2+3x-2}$$

$$2x^2+3x-2=0, \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}, \quad x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=-2$$

ამიტომ

$$2x^2+3x-2=2(x-\frac{1}{2})(x+2)=(2x-1)(x+2)\,.$$

დავშალოთ უმარტივეს წილადებად ფუნქცია $\dfrac{-3x+4}{(2x-1)(x+2)}$.

$$\frac{-3x+4}{(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2}$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $(2x-1)(x+2)$ – ზე

$$-3x+4=A(x+2)+B(2x-1)$$

ანუ

$$-3x+4=(A+2B)x+(2A-B)$$

აქედან

$$\begin{cases} A+2B=-3 \\ 2A-B=4 \end{cases} \Rightarrow A=-1, \quad B=-2$$

და საბოლოოდ,

$$\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}=x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}.$$

4. დავშალოთ $\dfrac{x}{x^3+1}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად.

ამოხსნა.

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ x^3+1–ზე მივიღებთ:

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$x=(A+B)x^2+(C+B-A)x+A+C$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C+B-A=1, \\ A+C=0. \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{3}, \quad B=\frac{1}{3}, \quad C=\frac{1}{3}.$$

მაშინ

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}.$$

5. დავშალოთ $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ რაციონალური ფუნქცია უმარტივესი წილადების ჯამად

x^2+1 ორწევრს აქვს კომპლექსური ფესვები, ამიტომ (25.4) ფორმულის ძალით: $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $x(x^2+1)^2$-ზე, მივიღებთ:

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x,$$

ანუ

$$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$$

კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 2A+B+D=0, \\ C+E=0, \\ A=-1. \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=1,\quad E=0,$$

ამიტომ საძებნ დაშლას ექნება სახე:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\ .$$

მაგალითები:

დავშალოთ უმარტივეს წილადების ჯამად შემდეგი რაციონალური ფუნქციები:

25.1. $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$.

25.2. $\dfrac{5x^2+23x-19}{(x+1)(2x-1)(x+2)}$.

25.3. $\dfrac{7x-4}{(x-7)(x+8)}$.

25.4. $\dfrac{6x^2-44x+28}{(x-3)(x+2)(x-5)}$.

25.5. $\dfrac{-2x^2-3}{x^2(x+1)}$.

25.6. $\dfrac{6x^2-27x+8}{(x^2-1)(x-3)}$.

25.7. $\dfrac{-7x^2+8x+7}{(x-1)^2(x+3)}$.

25.8. $\dfrac{-2x^2+19x-51}{(x-2)^2(x+5)}$.

25.9. $\dfrac{5x^2-59x+62}{(x^2-x-20)(x-2)}$.

25.10. $\dfrac{10x^2+x-24}{x^3+x^2-12x}$.

25.11. $\dfrac{17x^2+2}{x^3-4x}$.

25.12. $\dfrac{x^3-5x+7}{x^2-5x+6}$.

25.13. $\dfrac{16x^3+11x^2+8x+3}{(x^2+x)(x^2+1)}$.

25.14. $\dfrac{-3x^4-7x^3+4x^2-15x+25}{(x+1)(x^2+3)(x^2+2)}$.

25.15. $\dfrac{8x^3+34x^2+35x+25}{x(x+5)(x^2+5)}$.

25.16. $\dfrac{3x^3-31x^2-31x-24}{(x+2)(x-3)(2x^2-3)}$.

25.17. $\dfrac{4x^2+5x+14}{x(2x^2+7)}$.

25.18. $\dfrac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}$.

პასუხები

25.1. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$.

25.2. $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{2x-1}-\dfrac{3}{x+2}$.

25.3. $\dfrac{3}{x-7}+\dfrac{4}{x+8}$.

25.4. $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{x-5}$.

25.5. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x+1}$.

25.6. $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{-2}{x-3}$.

25.7. $\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{-5}{x+3}$.

25.8. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{(x-2)^2}+\dfrac{4}{x-5}$.

25.9. $\dfrac{7}{x+4}-\dfrac{4}{x-5}+\dfrac{2}{x-2}$.

25.10. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{5}{x+4}$.

25.11. $5x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{33}{2(x-2)}+\dfrac{33}{2(x+2)}$.

25.12. $x+5+\dfrac{10}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$.

25.13. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{8x}{x^2+1}$.

25.14. $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{5x+1}{x^2+3}-\dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

25.15. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{5x+4}{x^2+5}$.

25.16. $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{5x-2}{2x^2+5}$.

25.17. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{2x^2+7}$.

25.18. $\dfrac{3x+2}{x^2+4}-\dfrac{5x+2}{x^2+5}$.

§26. რაციონალური წილადების ინტეგრება

§25-ში განხილულია რაციონალური წილადის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად, ხოლო §24-ში კი ინტეგრება უმარტივესი წილადებიდან. ამიტომ როცა ვიხილავთ ინტეგრებას რაციონალური წილადიდან, პირველ რიგში მას დავშლით უმარტივესი წილადების ჯამად და გამოვიყენებთ §24-ში განხილულ წესებს უმარტივესი წილადების ინტეგრების შესახებ.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \dfrac{x-3}{(x-5)(x+7)}dx$.

ამოხსნა. §25-ის ნიმუშის 1-ლი მაგალითის გამოყენებით

გვექნება: $$\frac{x-3}{(x-5)(x+7)} = \frac{\frac{1}{6}}{(x-5)}+\frac{\frac{5}{6}}{(x+7)}$$

ამიტომ

$$\int\frac{x-3}{(x-5)(x+7)}dx=\int\frac{\frac{1}{6}}{(x-5)}dx+\int\frac{\frac{5}{6}}{(x+7)}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x-5)}{x-5}+\frac{5}{6}\int\frac{d(x+7)}{x+7}=\frac{1}{6}\ln|x-5|+\frac{5}{6}\ln|x+7|+C.$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}dx$

ამოხსნა. §25-ის ნიმუშის მე-2 მაგალითის გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}=\frac{5}{x-3}-\frac{5}{x-2}$$

ამიტომ

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{5dx}{x-3} - \int \frac{3dx}{x-2} = 5\ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}dx$.

ამოხსნა. §25-ის ნიმუშის მე-3 მაგალითის გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2} = x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}$$

ამიტომ

$$\int \frac{2x^3+5x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}dx = \int \left(x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|-2\ln|x+2|+C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{x}{x^3+1}dx$

ამოხსნა. §25-ის ნიმუშის მე-4 მაგალითის გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1},$$ ამიტომ

$$\int \frac{x}{x^3+1}dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1} =$$ [§24-ის III ტიპის ინტეგრალის გამოთვლის

წესით] $= -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|\right)+\frac{1}{3}\frac{2+1}{\sqrt{4-1}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{4-1}} =$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+1.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}dx$.

ამოხსნა.

დავშალოთ $\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}$ რაციონალური წილადი უმარტივესი წილადების ჯამად. (25.4)–ის ძალით

$$\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+5},$$

აქედან

$$-2x^3-5x+2=(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+4)$$

ანუ

$$-2x^3-5x+2=(A+C)x^3+(B-D)x^2+(5A+4C)x+(5B+4D),$$

საიდანაც ვღებულობთ სისტემას, რომლის ამოხსნაც მოგვცემს

$$\begin{cases} A+C=-2, \\ B+D=0, \\ 5A+4C=-5, \\ 5B+4D=2. \end{cases} \Rightarrow A=3,\quad B=2,\quad C=-5,\quad D=-2.$$

ამგვარად

$$\int\frac{-2x^3-5x+2}{(x^2+4)(x^2+5)}dx=\int\frac{3x+2}{x^2+4}dx-\int\frac{5x+2}{x^2+2}dx=$$

$$=3\int\frac{xdx}{x^2+4}+2\int\frac{dx}{x^2+4}-5\int\frac{xdx}{x^2+5}-2\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+4|+arctg\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln|x^2+5|-\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

მაგალითები

იპოვეთ ინტეგრალები:

26.1. $\int \frac{(10x+2)dx}{(x+5)(x-7)}$.

26.2. $\int \frac{(x+12)dx}{(x+3)(x-2)}$.

26.3. $\int \frac{(2x-7)dx}{(x+4)(x-1)}$.

26.4. $\int \frac{(x-13)dx}{(3x+1)(x-3)}$.

26.5. $\int \frac{(8x-5)dx}{(x+2)(2x-3)}$.

26.6. $\int \frac{(2x-5)dx}{(4x+1)(3x-2)}$.

26.7. $\int \frac{(11-x)dx}{(5x+2)(3x+5)}$.

26.8. $\int \frac{(2x-11)dx}{(7x-1)(3x-4)}$.

26.9. $\int \frac{(18x-1)dx}{(6x-7)(2x+5)}$.

26.10. $\int \frac{(10x+2)dx}{(x+5)(x^2-4x+3)}$.

26.11. $\int \frac{(2x-22)dx}{(x-3)^2(3x-1)}$.

26.12. $\int \frac{(3x-11)dx}{(2x-1)(x^2+6)}$.

26.13. $\int \frac{(x+11)dx}{(x+1)(x^2-5x+4)}$.

26.14. $\int \frac{(33x-1)dx}{(3x-1)^2(x+3)}$.

26.15. $\int \frac{(x+9)dx}{(2x-3)(x^2+3)}$.

26.16. $\int \frac{(26-12x)dx}{(x+7)(x^2-7x+12)}$.

26.17. $\int \frac{(7x-1)dx}{(x-1)^2(2x+1)}$.

26.18. $\int \frac{(3x-9)dx}{(x-1)(x^2+5)}$.

26.19. $\int \frac{(18x+58)dx}{(x-4)(x^2+10x+9)}$.

26.20. $\int \frac{(x+1)dx}{(x-2)^2(2x-3)}$.

26.21. $\int \frac{(6x+7)dx}{(3x-2)(x^2+2)}$.

26.22. $\int \frac{(2x+28)dx}{(x+2)(x^2-7x+6)}$.

26.23. $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

26.24. $\int \frac{(7x-15)dx}{(2x+1)(x^2+9)}$.

26.25. $\int \frac{(x+2)^2 dx}{x(x-1)^2}$.

26.26. $\int \frac{(5x+9)dx}{(x-6)(x^2+3)}$.

26.27. $\int \frac{(x^3-1)dx}{4x^3-x}$.

26.28. $\int \frac{(x^5-x+1)dx}{x^6-x^5}$.

26.29. $\int \frac{(2x^4-x^2+1)dx}{x^3-x}$.

26.30. $\int \frac{(x^5+x^4-8)dx}{x^3-4x}$.

26.31. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

26.32. $\int \frac{x^3dx}{(x^2+3)(x^2-1)}$.

26.33. $\int \frac{x^3-7x^2-3}{x^2(x^2+4)}dx$.

26.34. $\int \frac{(7x^3-9)dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

26.35. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$.

26.36. $\int \frac{(3-7x)dx}{(x^2+3)(6x^2+7x+15)}$.

პასუხები

26.1. $\ln\left|(x+5)^4(x-7)^6\right|+C$.

26.2. $\ln\frac{\left|(x+3)^3\right|}{(x-2)^2}+C$.

26.3. $\ln\left|\frac{(x+4)^3}{x-1}\right|+C$.

26.4. $\frac{4}{3}\ln|3x+1|-\ln|x-3|+C$.

26.5. $\ln\left|(x+2)^3(2x-3)\right|+C$.

26.6. $\ln\frac{\sqrt{4x+1}}{\left|\sqrt[3]{3x-2}\right|}+C$.

26.7. $\frac{3}{5}\ln|5x+2|-\frac{2}{3}\ln|3x+5|+C$.

26.8. $\frac{3}{5}\ln|7x-1|-\frac{1}{3}\ln|3x-4|+C$. **26.9.** $\ln\sqrt{6x-7}|2x+5|+C$.

26.10. $\ln\frac{(x-3)^2}{|(x+5)(x-1)|}+C$. **26.11.** $\frac{2}{x-3}+\ln\left|\frac{x-3}{3x+1}\right|+C$.

26.12. $\ln\frac{|2x-1|}{\sqrt{x^2+6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{x}{\sqrt{6}}+C$.

26.13. $\ln\frac{|(x+1)(x-4)|}{(x-1)^2}+C$. **26.14.** $C-\frac{1}{3x-1}+\ln\left|\frac{3x+1}{x+3}\right|$.

26.15. $\ln\frac{|2x-3|}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

26.16. $\ln\frac{|(x+7)(x-3)|}{(x-4)^2}+C$. **26.17.** $C-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|$.

26.18. $\ln\frac{\sqrt{x^5+5}}{|x-1|}+\frac{4}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

26.19. $\ln\frac{(x-4)^2}{|x^2+10x+9|}+C$. **26.20.** $\frac{3}{2-x}+5\ln\left|\frac{2x-3}{x-2}\right|+C$.

26.21. $\frac{3}{2}\ln\frac{|3x-2|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

26.22. $\ln\frac{|x^2-4x-12|}{(x-1)^2}+C$.

26.23. $\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-1)^3|+C$.

26.24. $\ln\frac{\sqrt{x^2+9}}{|2x+1|}+arctg\,\frac{x}{3}+C$. 26.25. $C-\frac{9}{x-1}+\ln\frac{x^4}{|(x-1)^3|}$.

26.26. $\ln\frac{|x-6|}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

26.27. $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{1}{16}\ln\left|(2x-1)^7(2x+1)^9\right|+C$.

26.28. $\frac{1}{4x^4}+\ln|x-1|+C$. 26.29. $x^2+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$.

26.30. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

26.31. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+arctgx+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

26.32. $\ln\sqrt[8]{\frac{x^2+1}{(x^2+3)^3}}+C$.

26.33. $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{25}{8}arctg\,\frac{x}{2}+C$.

26.34. $\frac{3}{2x}+20\ln(x-3)-\frac{1}{4}\ln\left|x^5(x-2)^{47}\right|+C$.

26.35. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2-1}\right|+C$.

26.36. $\frac{12}{\sqrt{311}}arctg\,\frac{12x+7}{\sqrt{311}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

§27. ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა ინტეგრება.

1. $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ სახის ინტეგრალები დაიყვანება ცხრილის ინტეგრალებზე, თუ ვისარგებლებთ შემდეგი ტრიგონომეტრიული ფორმულებით:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right], \qquad (27.1)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right], \qquad (27.2)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] \qquad (27.3)$$

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$, სადაც R წარმოადგენს $\sin x$-ს და $\cos x$-ს რაციონალურ ფუნქციას.

ამ ტიპის ინტეგრალების მოძებნა შეიძლება დაყვანილ იქნეს t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებაზე $tg\frac{x}{2} = t$ ჩასმით, რომელსაც უნივერსალურ ჩასმას უწოდებენ, ამ შემთხვევაში:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (27.4)$$

3. $\int sin^m x \cos^n x dx$ სახის ინტეგრალის გამოთვლა დამოკიდებულია m და n ხარისხის მაჩვენებლებზე.

ა) m და n რიცხვებიდან ერთ-ერთი დადებითი და კენტი რიცხვია; მაშინ თუ ეს რიცხვი m-ია გამოიყენება ჩასმა $\cos x=t$, ხოლო თუ ეს n-ია, მაშინ $\sin x=t$.

ბ) თუ m და n არაუარყოფითი ლუწი რიცხვებია, მაშინ გამოიყენება ხარისხის დაწევის ფორმულები

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x\,,\ \ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x\,,$$

$$2\sin x\cos x = \sin 2x\,, \qquad (27.5)$$

გ) თუ $m+n$ უარყოფითი ლუწი რიცხვია, მაშინ გამოიყენება ჩასმა $tgx=t$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები

1. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin 9x \sin x dx$.

ამოხსნა. (27.2) ფორმულის თანახმად

$$\sin 9x \sin x = \frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 10x),$$

მაშინ,

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2}\int \cos 8x dx - \frac{1}{2}\int \cos 10x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$$

2. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$.

ამოხსნა. წარმოვადგინოთ $\cos^3 x$ შემდეგი სახით

$$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\cos x.$$

და გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x = t$, მაშინ $\cos x dx = dt$, ამიტომ

$$\int \sin^{10} x \cos^3 x dx = \int \sin^{10} x (1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int t^{10}(1 - t^2)dt =$$

$$= \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

3. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ჩასმა $\sin x = t$, მაშინ $\cos x dx = dt$, და

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

4. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ (27.5) ფორმულით

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

5. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \sin^5 x dx$.

ამოხსნა. გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x = (1-\cos^2 x)^2 \sin x$,

და გამოვიყენოთ ჩასმა $\cos x = t$, მაშინ $-\sin x dx = dt$, და

$$\int \sin^5 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx = -\int (1-t^2)^2 dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4) dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x +$$

$$+ \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

6. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$.

ამოხსნა. გარდავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx}{2+\cos x}$$

გამოვიყენოთ ჩასმა $\cos x = t$, მაშინ $-\sin x dx = dt$,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{1-t^2}{t+2}(-dt) = \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int (t-2+\frac{3}{t+2})dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

7. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

ამოხსნა. გადავქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და ვაინტეგროთ, გვექნება:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x(1+tg^2 x)d(tgx) =$$

$$= \int tg^2 x d(tgx) + \int tg^4 x d(tgx) = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

8. ვიპოვოთ ინტეგრალი $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ უნივერსალური ჩასმა $tg\frac{x}{2} = t$, მაშინ dx, $sinx$ და $cosx$ გამოვსახოთ (27.4)–დან და შევიტანოთ ინტეგრალში:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \ln|1+t| + C = \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

მაგალითები

იპოვეთ ინტეგრალები:

27.1. $\int \cos^3 x dx.$

27.2. $\int \sin^3 x dx.$

27.3. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

27.4. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

27.5. $\int \sin^4 x dx.$

27.6. $\int \cos^4 x dx.$

27.7. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx.$

27.8. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

27.9. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$

27.10. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$

27.11. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}.$

27.12. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}.$

27.13. $\int \cos 4x \cos 7x dx.$

27.14. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx.$

27.15. $\int \sin x \sin 3x dx.$

27.16. $\int \sin 3x \cos 5x dx.$

27.17. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx.$

27.18. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

27.19. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$

27.20. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$

27.21. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

27.22. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

27.23. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx.$

27.24. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$

27.25. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

27.26. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$.

27.27. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

27.28. $\int tg^3 x dx$.

27.29. $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$.

27.30. $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.

27.31. $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$.

27.32. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

27.33. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$.

პასუხები

27.1. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

27.2. $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

27.3. $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$.

27.4. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

27.5. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

27.6. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

27.7. $\frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C$.

27.8. $\frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$.

27.9. $\frac{1}{\cos x} + C$.

27.10. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$.

27.11. $\frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C$.

27.12. $\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+C.$ 27.13. $\dfrac{\sin 3x}{6}+\dfrac{\sin 11x}{22}+C.$

27.14. $3\sin\dfrac{x}{6}+\dfrac{3}{5}\sin\dfrac{5x}{6}+C.$ 27.15. $\dfrac{\sin 2x}{4}-\dfrac{\sin 4x}{8}+C.$

27.16. $-\dfrac{\cos 8x}{16}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C.$ 27.17. $\dfrac{tg^5 x}{5}+\dfrac{tg^7 x}{7}+C.$

27.18. $\dfrac{1}{2}tg^2 x+C.$ 27.19. $C-\dfrac{ctg^3 x}{3}.$ 27.20. $C+\dfrac{tg^4 x}{4}.$

27.21. $\dfrac{1}{2}\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+C.$

27.22. $C-\dfrac{\cos x}{4\sin^4 x}-\dfrac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\dfrac{3}{8}\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|.$

27.23. $x-\cos x+C.$ 27.24. $\dfrac{1}{2}(tgx+x)+C.$

27.25. $-ctgx-tgx+C.$ 27.26. $3tgx+2ctgx+C.$

27.27. $tgx+\dfrac{tg^3 x}{3}+C.$ 27.28. $\ln|\cos x|+\dfrac{1}{2\cos^2 x}+C.$

27.29. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{3tg\dfrac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+C.$ 27.30. $-\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{tg\dfrac{x}{2}-3}{tg\dfrac{x}{2}+3}\right|+C.$

27.31. $\dfrac{1}{2}\ln|tgx|+\dfrac{1}{2}tgx+C.$ 27.32. $\left(2-tg\dfrac{x}{2}\right)^{-1}+C.$

27.33. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{4tg\dfrac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+C.$

მაგალითები პირველი რეიტინგისათვის

ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПЕРВОГО РЕЙТИНГА

EXAMPLES FOR FIRST RATING

1. გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:
Вычислить следующие пределы:
Find the limits.

а) **1.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16-x}-2}{\ln(1+x^2+\sin 2x)}$. **1.2.** $2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2x}-e^4}{\sqrt[3]{31-2x}-3}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt[3]{27+x^2}}{x\,arctg 9x}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt[5]{32+x^2}}{arctg\dfrac{x^2}{80}}$. **1.5.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+20}}{tg\pi x}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{2x^2\sin x^2}$. **1.7.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x-4)}{\sqrt[4]{x+11}-2}$. **1.8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x^2-5x+4}$. **1.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{tgx\cdot\sin\sqrt{3}x}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt[3]{11-x}-2}$. **1.12.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\cos 2\pi x}{\ln(2-4x)}$. **1.13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x\cdot tg3x}{1-\cos 3x}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1+\sin 3x)}$. **1.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sin 3x^2}$. **1.16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 10x^2}{\ln(1+tg4x^2)}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x^2+28}-2}{\ln(x^2-3)}$. **1.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x^2}-3}{\arcsin\dfrac{x^2}{27}}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2+\sin\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}-\sqrt{5+x}}$. **1.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{\sqrt[4]{16+tg^2 x}-2}$.

b) 1.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-4}{5x^2+7}\right)^{\frac{10x^2}{11}}$. **1.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-3x}{2+5x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{x/(1-x)}$. **1.4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-5}{2x^2+6}\right)^{\frac{2x^2}{11}}$. **1.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+4x}{5-2x}\right)^{\frac{4}{9x}}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{4x^2-13}\right)^{\frac{x^2}{2}}$. **1.7.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9-4x}{9+3x}\right)^{\frac{3}{7x}}$. **1.8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{2x}{5}}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x^2}{1-3x^2}\right)^{\frac{x^2}{3}}$. **1.10.** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{7-x}{3}\right)^{\frac{5}{x-4}}$. **1.11.** $\lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{3/(x-2)}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-4}{3x^2-14}\right)^{\frac{3x^2}{10}}$. **1.13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-7}\right)^{\frac{2x}{9}}$. **1.14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{\frac{6x}{7}}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-10x^2}{7-10x^2}\right)^{\frac{3x^2}{4}}$. **1.16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+9}\right)^{\frac{5x}{4}}$. **1.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7+x^2}{7-x^2}\right)^{\frac{21}{2x^2}}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{5x/(3-x)}$. **1.19.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+9}{5x^2+3}\right)^{\frac{5x^2}{6}}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{8-x}{2}\right)^{\frac{3}{x-6}}$.

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული.

Найти производную данной функции.

Find the derivative of the giver function.

а) 2.1. $y = e^{3x} \cdot \sqrt{1-x^2}$; 2.2. $y = \sqrt[5]{1+\cos 6x} \cdot 2^{5x}$;

2.3. $y = \dfrac{e^x + \sqrt[4]{e}}{x^2+4x}$; 2.4. $y = x^2 \cdot \ln(4x+1)$; 2.5. $y = \dfrac{\sin 2x + 3^x}{\ln x + 1}$;

2.6. $y = \sqrt[5]{(3-2x)^2} \cdot \ln x$; 2.7. $y = \dfrac{x^2 - \sqrt[4]{x}}{e^x + 3}$;

2.8. $y = \sqrt[5]{x^2} \cdot tg^4(2-x)$; 2.9. $y = \dfrac{3^{5x} - \dfrac{2}{x^3}}{\ln x + 4}$;

2.10. $y = \dfrac{tg 2x - 4^x}{\arcsin 5x}$; 2.11. $y = \sqrt[5]{(4-3x)^3} \cdot \log_2 x$;

2.12. $y = \dfrac{\sin 2x + \sqrt{e}}{1 + \cos 3x}$; 2.13. $y = (2x+1)^{10} \cdot tg^2 4x$;

2.14. $y = (tgx + ctgx) \cdot \sqrt[5]{(1-x)^3}$; 2.15. $y = e^{x^2} - \cos(7x-1)$;

2.16. $y = \dfrac{\arcsin 5x}{\sqrt{x} + 2^x}$; 2.17. $y = \dfrac{\sin 3x + 1}{e^x + \sqrt[5]{x}}$;

2.18. $y = \dfrac{e^3}{(4x-1)^4} \cdot \sqrt[8]{(x+5)^5}$; 2.19. $y = \dfrac{x^2 - 4^{5x}}{tg^3 x - e^x}$;

2.20. $y = 3^{\sin 5x} \cdot arctg\sqrt{x}$.

b) 2.1. $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 - 1. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = 3\sin^2 t + 7. \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} x = 2tgt, \\ y = \sqrt{t} + \sin 2t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x = 3\sin 4t, \\ y = 6\cos^2 2t. \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = e^t + t. \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} x = 1 + \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} x = 2 + 3t^2, \\ y = t + e^{3t}. \end{cases}$ 2.9. $\begin{cases} x = 6tg^2 t, \\ y = 2t - 3. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = \sin 4t - e^{5t}. \end{cases}$ 2.11. $\begin{cases} x = 3(t^2 - \sin t), \\ y = 3(t - \cos^2 t). \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^3 + 1}. \end{cases}$ 2.13. $\begin{cases} x = 5\sin^2 t, \\ y = 5\cos^3 t. \end{cases}$ 2.14. $\begin{cases} x = 3\sin 4t + t^3, \\ y = \dfrac{2}{t^3} - \cos 2t. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x = tg\,2t - \dfrac{1}{t^4}, \\ y = arctgt^2. \end{cases}$ 2.16. $\begin{cases} x = tgt + e^{3t}, \\ y = 3\ln(2 - t). \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x = \log_2 t + t^3, \\ y = \cos^3 t + 5. \end{cases}$ 2.18. $\begin{cases} x = 3t^2 - 2^t, \\ y = tg^3 3t. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = t^4 - \sqrt{t}. \end{cases}$ 2.20. $\begin{cases} x = 2ctg^3 4t, \\ y = \dfrac{5}{t^7} - 1. \end{cases}$

c) 2.1. $y = x^{\sin x}$; 2.2. $y = x^{3x}$; 2.3. $y = (1 - x)^{\arcsin x}$; 2.4. $y = (tgx)^{\sqrt{x}}$; 2.5. $y = (ctgx)^{x^2}$; 2.6. $y = (2x - 1)^{e^x}$; 2.7. $y = (\ln x)^{\arccos 3x}$;

2.8. $y=(\cos 2x)^{\ln x}$; 2.9. $y=(\sin 3x)^{x^2}$; 2.10. $y=(3x^3-x)^{\sqrt{x}}$;

2.11. $y=(x+1)^{arctg 2x}$; 2.12. $y=x^{3tg 2x}$; 2.13. $y=(1-x^2)^{\arcsin 2x}$;

2.14. $y=(\sin 4x)^{x^4}$; 2.15. $y=(tg 5x)^{x^5}$; 2.16. $y=(3x+1)^{\sqrt[5]{x^2}}$;

2.17. $y=(3x^2-5x)^{\sin 7x}$; 2.18. $y=(x^3+1)^{ctg 4x}$;

2.19. $y=(2x)^{\cos 8x}$; 2.20. $y=(5x^2-1)^{\sqrt[6]{x}}$.

3. იპოვეთ ფუნქციის დიფერენციალი.
Найти дифференциал функции.
Find the differential of the function.

3.1. $y=\sin^3\left(4x^2-\sqrt[3]{1-2x}\right)$; 3.2. $y=\ln^5\left(\sin\frac{1}{x^2}-\sqrt[4]{5-3^{2x}}\right)$;

3.3. $y=e^{\arcsin x^2}\cdot\sqrt[4]{5-3x}$; 3.4. $y=\arccos\sqrt{x}\cdot\ln\left(2^{x^3}-tg 3x\right)$;

3.5. $y=ctg^2\sqrt[4]{x}\cdot\left(\frac{3}{x^2}-\ln(1-x)\right)$; 3.6. $y=\frac{e^{\sqrt{x^2+3}}}{\arccos 5x}$;

3.7. $y=\arcsin^3\sqrt[5]{x^2}\cdot\left(2^{7x}-\frac{5}{x^4}\right)$; 3.8. $y=\frac{arctg^5\sqrt[8]{x}}{x^2}$;

3.9. $y=\sqrt{3-7x^2}\cdot ctg^3 4x$; 3.10. $y=\sin^3 4x\cdot\sqrt{e^x-3^{2x}}$;

3.11. $y=arctg\sqrt[5]{3-2x}\cdot\ln(10-x^2)$; 3.12. $y=tg^3\left(10-\sqrt[5]{e^3+\cos 3x}\right)$;

3.13. $y=tg^5 3x\cdot\sqrt[3]{3-4x}$; 3.14. $y=\ln^5\left(\frac{1}{x^4}-\cos^3 2x\right)$;

3.15. $y = arctg^3 \sqrt{x} \cdot \left(\frac{3}{x^3} + \ln^2 x \right)$; **3.16.** $y = \cos^6\left(\sqrt{4-3x} - \frac{5}{x^5} \right)$;

3.17. $y = arctg x^3 \cdot \sqrt[4]{7^x - \frac{8}{x}}$; **3.18.** $y = 3^{\sqrt{1-2x}} \cdot ctg^6 3x$;

3.19. $y = \ln^7 \left(3 \sin x - \sqrt[9]{2^x - x^2}\right)$;

3.20. $y = \arcsin \sqrt[4]{x^3 - e^x} \cdot \ln^3(x^2 + 1)$.

4. **a)** იპოვეთ წირის მხები და ნორმალი წერტილში, რომლის აბსცისია x_0;

b) იპოვეთ წირის მხები მოცემულ წერტილში;

c) იპოვეთ კუთხე ორ წირს შორის;

d) იპოვეთ წირის სიმრუდის რადიუსი ნებისმიერ წერტილში.

a) Найти касательную и нормаль к кривой в точке с абсциссой x_0;

b) Найти касательную к кривой в заданной точке;

c) Найти угол между двумя кривыми;

d) Найти радиус кривизны кривой в произвольной точке.

a) Find the equation of the tangent line and normal to the circle at the point with abscissa x_0;

b) Find the equation of the tangent line to the curve at the giver point;

c) Find the angle at which the giver two curved interect;

d) Find the radius of curvature of the curve at the arbitrary point.

a) **4.1.** $y = 3x^2 - 5x + 7,\ x_0 = 1$; **4.2.** $y = 5x^3 - 3x^2 + 2,\ x_0 = 2$;

4.3. $y = 3x^3 - 4x + 5,\ x_0 = 1$; **4.4.** $y = 3x^4 - 4x^2 + 2x + 1,\ x_0 = 1$;

4.5. $y=7x^2-x^3+2x-5,\ x_0=3$; **4.6.** $y=4x^2+2x+1,\ x_0=3$;

4.7. $y=x^5-4x^2+1,\ x_0=2$; **4.8.** $y=x^3-3x^2+2x+1,\ x_0=3$;

4.9. $y=3x^2-2x+5,\ x_0=2$; **4.10.** $y=2x^3-5x^2+2x+1,\ x_0=4$;

4.11. $y=4x^3-3x^2+x-5,\ x_0=2$; **4.12.** $y=5x^3-4x^2+x+1,\ x_0=3$;

4.13. $y=x^4-3x^2+2x-15,\ x_0=3$; **4.14.** $y=3x^5+2x^4+x-5,\ x_0=1$;

4.15. $y=5x^4-3x^2+2x-15,\ x_0=2$; **4.16.** $y=5x^2-2x^4+3x-4,\ x_0=2$;

4.17. $y=7x^2-5x+4,\ x_0=2$; **4.18.** $y=5x^3-4x^2+2x-7,\ x_0=1$;

4.19. $y=x^4-5x^2-3x+1,\ x_0=4$; **4.20.** $y=10x-15x^3-5x^2+1,\ x_0=1$.

b) **4.1.** $5x^2+6y^2=25,\ M\left(1;\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$; **4.2.** $3x^2+7y^2=320,\ M\left(2;2\sqrt{11}\right)$;

4.3. $x^2+3y^2=40,\ M\left(4;2\sqrt{2}\right)$; **4.4.** $4x^2+9y^2=72,\ M\left(4;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$;

4.5. $4x^2+5y^2=60,\ M\left(3;\frac{\sqrt{24}}{5}\right)$; **4.6.** $3x^2+7y^2=110,\ M\left(2;\sqrt{14}\right)$;

4.7. $x^2-8y^2=-18,\ M\left(5;\frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{2}}\right)$; **4.8.** $9x^2-16y^2=576,\ M\left(10;\frac{9}{2}\right)$;

4.9. $y^2=2x,\ M\left(3;\sqrt{6}\right)$; **4.10.** $y^2=3x+5,\ M\left(2;\sqrt{11}\right)$;

4.11. $4x^2+5y^2=60,\ M\left(3;\sqrt{\frac{24}{5}}\right)$; **4.12.** $3x^2+7y^2=110,\ M\left(2;\sqrt{14}\right)$;

4.13. $3x^2+7y^2=320$, $M(2;2\sqrt{11})$; **4.14.** $4x^2+9y^2=72$, $M\left(4;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$;

4.15. $5x^2+6y^2=25$, $M\left(1;\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$; **4.16.** $x^2-8y^2=-18$, $M\left(5;\frac{\sqrt{43}}{2\sqrt{2}}\right)$;

4.17. $9x^2-16y^2=576$, $M\left(10;\frac{9}{2}\right)$; **4.18.** $x^2+3y^2=40$, $M(4;2\sqrt{2})$;

4.19. $y^2=2x$, $M(3;\sqrt{6})$; **4.20.** $y^2=3x+5$, $M(2;\sqrt{11})$.

c) **4.1.** $y=x^2-3x+2$, $y=2x$; **4.2.** $y=x^3-3x^2+27$, $y=x^3$;

4.3. $y=x^4$, $y=x^3$; **4.4.** $x^2+y^2=2$, $y^2=4x-3$;

4.5. $y=x^3-3x+2$, $x=2$; **4.6.** $x^2+y^2=3$, $y^2=4x-2$;

4.7. $x^2+y^2=1$, $y^2=4x-4$; **4.8.** $y=x^4$, $y=6-5x^2$;

4.9. $y=x^2-4x$, $y=-x^2+6x-8$; **4.10.** $y=x^3-x$, $y=5x$;

4.11. $y=2x^2-4x$, $y=6x-8$; **4.12.** $y=3x^2-4x$, $y=x^2+6x-8$;

4.13. $y=4x^2+6x-8$, $y=3x$; **4.14.** $y=8-4x$, $y=-2x^2+6x$;

4.15. $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=4$; **4.16.** $y=2x^2$, $y=5x^2$;

4.17. $y=5x^3$, $y=\frac{25}{x^2}$; **4.18.** $y=\frac{2}{x}$, $y=\sqrt{x}$;

4.19. $y=x^4-3x+27$, $y=x^4$; **4.20.** $y=5x^3-9x^2+81$, $y=5x^3$.

d) **4.1.** $y=3x^2$; **4.2.** $y=5\sin x$; **4.3.** $4y^2=3x^3$;

4.4. $2y^2=3x^5$; **4.5.** $3y^2=5x^3$; **4.6.** $y=2\ln\cos\dfrac{x}{2}$;

4.7. $y=5\ln\cos\dfrac{x}{5}$; **4.8.** $y=4x^3$; **4.9.** $y=3\ln\sin\dfrac{x}{3}$;

4.10. $y=e^{2x}$; **4.11.** $y=5x^3$; **4.12.** $y=x^2-3x+2$;

4.13. $y=5^{2x}$; **4.14.** $y=3x^2-2x$; **4.15.** $y=4x^3-2x$;

4.16. $y=x^3+4x$; **4.17.** $y=3^{4x}$; **4.18.** $y=7x^2+2$;

4.19. $y=5x^2-3$; **4.20.** $y=5^{4x}$.

5. იპოვეთ ფუნქციის გლობალური ექსტრემუმები
Найти глобальные экстремумы функции
Find the global extremum of the function.

a) 5.1. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x+10,\ \left[0;\dfrac{3}{2}\right]$;

5.2. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{7x^2}{2}+10x-4,\ [0;3]$;

5.3. $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x+5,\ [1;4]$;

5.4. $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7x^2}{2}-8x+5,\ [0;2]$;

5.5. $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x+5,\ [1;4]$;

5.6. $y=x^3-15x^2+27x-4,\ [0;2]$;

5.7. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+4,\ [-2;0]$;

5.8. $y=x^3-5x^2+3x+3,\ [0;2]$;

5.9. $y=x^3+6x^2-15x+6,\ [0;2]$;

5.10. $y=x^3-3x^2+x-7,\ \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$;

5.11. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}-6x+7,\ [-2;0]$;

5.12. $y=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+11,\ [-1;3]$;

5.13. $y=\dfrac{x^3}{3}-6x^2+20x-1,\ [0;3]$;

5.14. $y=x^3-6x^2+7,\ [-1;1]$;

5.15. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+15,\ [-1;1]$;

5.16. $y=3x^3-x+6,\ [0;1]$;

5.17. $y=\dfrac{x^3}{3}-6x^2+20x-1,\ [0;3]$;

5.18. $y=2x^3-\dfrac{7x^2}{2}+x-10,\ \left[0;\dfrac{1}{15}\right]$;

5.19. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-8x+3,\ [-3;0]$;

5.20. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+4x,\ [-2;0].$

b) **5.1.** $y=4-3x,\ [1;4];$

5.2. $y=5-x,\ [0;2];$

5.3. $y=2x-11,\ [0;3];$

5.4. $y=2x+8,\ \left[0;\frac{1}{2}\right];$

5.5. $y=7-8x,\ [0;1];$

5.6. $y=5x+12,\ [-1;1];$

5.7. $y=2x+11,\ [0;1];$

5.8. $y=5x+3,\ [0;3/2];$

5.9. $y=3x-17,\ [0;2];$

5.10. $y=5+3x,\ [-2;0];$

5.11. $y=10x+2,\ [0;3];$

5.12. $y=2x+1,\ [-1;1];$

5.13. $y=4x-3,\ [1;3];$

5.14. $y=9x+7,\ [-2;0];$

5.15. $y=12x-5,\ [-3;0];$

5.16. $y=7x+8,\ [0;3];$

5.17. $y=12-3x,\ [0;2];$

5.18. $y=7-x,\ [-1;3];$

5.19. $y=7+9x,\ [-2;0];$

5.20. $y=5-3x,\ [-1;1].$

6. გამოთვალეთ ზღვრები ლოპიტალის წესის გამოყენებით
Найти пределы с применением правила Лопиталя.
Find the limits by L'Hospital rule.

a) **6.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{\sin x};$

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{5^x-1};$

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-tgx};$

6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x};$

6.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{5^x-4^x};$

6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-e^x}{x\sqrt{1-x^2}};$

6.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{\sin x-x^4}$; 6.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; 6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{arctg5x}$;

6.10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 6.11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\sin 3x-1}{e^{3x}-\sin 2x-1}$; 6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-e^x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 6\pi x}$; 6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{5x^2}$;

6.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{ctg2x}$; 6.17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

6.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-1}{\ln x}$; 6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{\sin x}}{x^3}$; 6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\dfrac{5x}{3}}{x^2}$.

b) 6.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x-4)}{\ln(3e^x+2)}$; 6.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^4}$; 6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+41)}{\ln(13e^x+2)}$;

6.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^3 x}{x^7}$; 6.5. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$; 6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin\dfrac{7x}{5}}{\ln\sin x}$;

6.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{x^7}$; 6.8. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)+tg\dfrac{\pi x}{2}}{ctg\pi x}$;

6.9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; 6.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg3x}{tg27x}$; 6.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

6.12. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$; **6.13.** $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$;

6.14. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; **6.15.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+}\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{tgx}$; **6.16.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}$;

6.17. $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^{x-2}-1)+1}$; **6.18.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

6.19. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin\frac{3}{4}x}{\ln\sin x}$; **6.20.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

c) **6.1.** $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\ln x$; **6.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$;

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\ln x$; **6.4.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2arctgx)\ln x$;

6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; **6.6.** $\lim\limits_{x\to 4}\ln(5-x)tg\dfrac{\pi x}{8}$;

6.7. $\lim\limits_{x\to 4}\ln(5-x)tg\dfrac{\pi x}{8}$; **6.8.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

6.9. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)tg\dfrac{\pi x}{8}$; **6.10.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

6.11. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\cos\dfrac{1}{x}$; **6.12.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

6.13. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 6.14. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

6.15. $\lim\limits_{x\to0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; 6.16. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2^x-1}\right)$;

6.17. $\lim\limits_{x\to1+} \ln x\cdot\ln(x-1)$; 6.18. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\,arctgx}-\frac{1}{x^2}\right)$;

6.19. $\lim\limits_{x\to0} \sin x\cdot\ln(tgx)$; 6.20. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$.

d) 6.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{arctgx}{x}\right)^{x^2}$; 6.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 6.3. $\lim\limits_{x\to1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

6.4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(tgx)^{2x-\pi}$; 6.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$; 6.6. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{ctgx}$;

6.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$; 6.8. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$; 6.9. $\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\sin x}$;

6.10. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{2}{x}}$; 6.11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 6.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

6.13. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 6.14. $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$; 6.15. $\lim\limits_{x\to0+} x^{\sin x}$;

6.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; 6.17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^2+5^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

6.18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; 6.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; 6.20. $\lim\limits_{x\to0+}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.

7. საწარმოს მფლობელმა გადაწყვიტა *n* წლის განმავლობაში პროდუქციის მოცულობა გაზარდოს *p* პროცენტით. როგორი უნდა იყოს პროდუქციის ზრდის დინამიკა?

Владелец производства решил в течение *n* лет увеличить объем производства на *p* процентов. Какова должна быть динамика роста продукции.

The manufacturer is planning to increase the volume of production by *p* % during *n* years. Determine the change of productivity in the period.

7.1. $n=4,\ p=25$; **7.2.** $n=10,\ p=35$; **7.3.** $n=6,\ p=15$;

7.4. $n=9,\ p=30$; **7.5.** $n=3,\ p=5$; **7.6.** $n=10,\ p=45$;

7.7. $n=12,\ p=26$; **7.8.** $n=15,\ p=25$; **7.9.** $n=10,\ p=16$;

7.10. $n=25,\ p=35$; **7.11.** $n=7,\ p=15$; **7.12.** $n=3,\ p=20$;

7.13. $n=4,\ p=10$; **7.14.** $n=8,\ p=65$; **7.15.** $n=2,\ p=10$;

7.16. $n=5,\ p=90$; **7.17.** $n=3,\ p=15$; **7.18.** $n=10,\ p=80$;

7.19. $n=5,\ p=20$; **7.20.** $n=7,\ p=75$.

8. გამოთვალეთ *k* თანხის საბოლოო სიდიდე, რომელიც დაბანდებულია *p* %-ით, თუ დარიცხვა ხდება უწყვეტად *n* წლის განმავლობაში.

Сумма *k* вложена под *p* процет. Найти прирост этой суммы через *n* лет, если начисление производится непрерывно.

If the amount of money *k* is invested at *p* % compaunded continuously, to what amount will it grow after *n* years.

8.1. $k=10000,\ p=3,\ n=25$; **8.2.** $k=5000,\ p=5,\ n=9$;

8.3. $k=5000,\ p=4,\ n=5$; **8.4.** $k=2300,\ p=3,\ n=6$;

8.5. $k=2500,\ p=3,\ n=5$; **8.6.** $k=5000,\ p=5,\ n=9$;

8.7. $k=4000,\ p=2,\ n=8$; **8.8.** $k=2100,\ p=6,\ n=10$;

8.9. $k=2000,\ p=3,\ n=5$; **8.10.** $k=3700,\ p=4,\ n=8$;

8.11. $k=4500,\ p=4,\ n=7$; **8.12.** $k=5500,\ p=2,\ n=5$;

8.13. $k=3000,\ p=3,\ n=8$; **8.14.** $k=500,\ p=3,\ n=12$;

8.15. $k=3500,\ p=2,\ n=6$; **8.16.** $k=800,\ p=2,\ n=10$;

8.17. $k=2800,\ p=3,\ n=10$; **8.18.** $k=900,\ p=7,\ n=9$;

8.19. $k=2400,\ p=2,\ n=7$; **8.20.** $k=7000,\ p=2,\ n=4$.

9. *A* პუნქტიდან ტვირთი გადააქვთ რკინიგზამდე ავტოტრანსპორტით, ხოლო შემდეგ რკინიგზით *B* პუნქტამდე. მანძილი *A*-დან რკინიგზამდე *S* კმ-ია. იპოვეთ ტვირთის გადაზიდვის ის ოპტიმალური გზა, რომელიც მოგვცემს მინიმალურ დანახარჯებს, თუ ცნობილია, რომ **1** ტ ტვირთის გადატანა **1** კმ-ზე ავტოტრანსპორტით *n*-ჯერ მეტი ღირს, ვიდრე რკინიგზით.

Груз перевозится из пункта *A* до железной дороги на автотранспорте и затем по железной дороге до пункта *B*. Расстояние от *A* до железной дороги *S* км. Найти оптимальный путь перевозки груза, если известно, что перевозка автотранспортом одной тонны груза на 1 км стоит в *n* раз дороже, чем по железной дороге.

The freight is carried by lorry from the point *A* to the railway and then by rail - to the point *B*.

The distance from *A* to railway is *S* km. Find the way of trans-

portation providing minimal expenses if the price of transportation of 1 T per 1 km by lorry is *n* times as large then one by rail.

9.1. $S=40,\ n=20;$ **9.2.** $S=120,\ n=4;$

9.3. $S=50,\ n=3;$ **9.4.** $S=140,\ n=5;$

9.5. $S=60,\ n=4;$ **9.6.** $S=250,\ n=3;$

9.7. $S=100,\ n=6;$ **9.8.** $S=240,\ n=2;$

9.9. $S=80,\ n=2;$ **9.10.** $S=300,\ n=3;$

9.11. $S=70,\ n=5;$ **9.12.** $S=280,\ n=5;$

9.13. $S=180,\ n=3;$ **9.14.** $S=220,\ n=2;$

9.15. $S=160,\ n=2;$ **9.16.** $S=190,\ n=3;$

9.17. $S=200,\ n=4;$ **9.18.** $S=260,\ n=4;$

9.19. $S=170,\ n=3;$ **9.20.** $S=150,\ n=2.$

10. გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.
Исследуйте функцию и постройте ее график.
Investigate the function and construct its graph.

a) 10.1. $y=-\frac{2}{3}x^3+2x-4;$ **10.2.** $y=x^3-6x^2+9x-2;$

10.3. $y=x^4-2x^3+3;$ **10.4.** $y=x^3-3x^2;$

10.5. $y=-4x^4+4x^3-2x^2;$ **10.6.** $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2;$

10.7. $y=3x-x^3;$ **10.8.** $y=(x+2)(4-x^2);$

10.9. $y=x^3-3x^2-9x$;

10.10. $y=-3x^3+x+3$;

10.11. $y=(x-1)^2(x+2)$;

10.12. $y=\frac{1}{2}(x^4-x^2)$;

10.13. $y=(x-1)^3-3(x-1)$;

10.14. $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$;

10.15. $y=\frac{1}{6}x^3(x^2-5)$;

10.16. $y=6x^5+16x^4+10x^3$;

10.17. $y=32x^2(x^2-1)^3$;

10.18. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$;

10.19. $y=\frac{4}{3}x^3-4x$;

10.20. $y=6x-x^3$.

b) **10.1.** $y=x^2+\frac{2}{x}$;

10.2. $y=x+\frac{1}{x}$;

10.3. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$;

10.4. $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$;

10.5. $y=\frac{x^4+3}{x}$;

10.6. $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$;

10.7. $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

10.8. $y=\frac{x^4-3}{x}$;

10.9. $y=\frac{x^2+4x-1}{x-1}$;

10.10. $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

10.11. $y=\frac{x^2-1}{x^2-x+6}$;

10.12. $y=x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}$;

10.13. $y=\frac{1}{x^2+8x}$;

10.14. $y=\frac{x^5-8}{x^4}$;

10.15. $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$;

10.16. $y=\frac{x^5}{x^4-1}$;

10.17. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$;

10.18. $y=\frac{8}{x}+\frac{x}{8}$;

10.19. $y=\dfrac{x^3-3x}{x+1}$; 10.20. $y=x+\dfrac{5}{x}$.

c) 10.1. $y=x^2\cdot e^{-x}$; 10.2. $y=(2x-1)e^{3x}$; 10.3. $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

10.4. $y=\dfrac{e^x}{x}$; 10.5. $y=\dfrac{x}{\ln x}$; 10.6. $y=x^2\ln x$;

10.7. $y=x-\ln x$; 10.8. $y=x\ln x$; 10.9. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

10.10. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; 10.11. $y=2^{\frac{1}{3}x^2-x}$; 10.12. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

10.13. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}x^4-x^3}$; 10.14. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$;

10.15. $y=xe^x$; 10.16. $y=\dfrac{x}{\ln x-1}$; 10.17. $y=e^{4x-x^2}$;

10.18. $y=e^{1-x^2}$; 10.19. $y=3^{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2}$; 10.20. $y=e^{x^2-\frac{1}{2}x}$.

მაგალითები მეორე რეიტინგისათვის

ПРИМЕРЫ ДЛЯ ВТОРОГО РЕЙТИНГА

EXAMPLES FOR SECOND RATING

1. იპოვეთ ინტეგრალები უშუალო ინტეგრებით.
Найти интегралы непосредственным интегрированием.
Find the integrals by direct integration.

a) 1.1. $\int\left(\frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx;$ **1.2.** $\int\left(\frac{3}{13\sin^2 x}+\frac{2}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx;$

1.3. $\int\left(\frac{2}{x}+2e^x-\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx;$ **1.4.** $\int\left(\frac{3}{5x+4}+3\cdot 2^x-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx;$

1.5. $\int\left(\sin 3x+\frac{4}{3x^2+4}-5\right)dx;$ **1.6.** $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-3x^2}}+\frac{5}{\cos^2 2x}+3^{2x}\right)dx;$

1.7. $\int\left(\frac{3}{x^2-4}+\frac{4}{4x^2+7}+\sqrt[8]{(2+3x)^3}\right)dx;$

1.8. $\int\left(\frac{4}{(8x+3)^5}-\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{\sin^2 3x}\right)dx;$

1.9. $\int\left(\sqrt[5]{(4x+1)^3}+\cos(3x-1)+\frac{1}{9-x^2}\right)dx;$

1.10. $\int\left(\frac{1}{(5x+2)^4}+\frac{3}{2x^2+9}+3x^3\right)dx;$

1.11. $\int\left(\sin(2-5x)+\frac{5x}{x^2+4}+\frac{4}{\cos^2 4x}\right)dx;$

1.12. $\int\left(\frac{2}{4-3x}+\frac{3}{5x^2+3}+\sqrt[10]{(10x+1)^3}\right)dx;$

1.13. $\int\left(e^{10x}+\cos 7x+\frac{3}{(2x+5)^6}\right)dx;$

1.14. $\int\left(\sqrt[6]{(5x-2)^5}+\frac{5x^2}{x^3+2}+\frac{7}{\sin^2 7x}\right)dx;$

1.15. $\int\left(\frac{3}{(3x+1)^2}+\frac{4}{9x^2+5}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}}\right)dx;$

1.16. $\int\left(\frac{5}{5x+3}+\sin 4x+3^{5x}\right)dx;$

1.17. $\int\left(\frac{5}{(3-5x)^4}+\frac{7x}{4-x^2}+\cos 8x\right)dx;$

1.18. $\int\left(\frac{2}{5x^2+4}+\sqrt[8]{(2-3x)^5}+5^{3x}\right)dx;$

1.19. $\int\left(\frac{2}{x^2-16}+\sin 9x+\frac{2}{\sqrt{5-4x^2}}\right)dx;$

1.20. $\int\left(\frac{3}{5x+4}+\frac{3}{10x^2+9}+\frac{1}{(3x+2)^2}\right)dx.$

b) 1.1. $\int \frac{2x dx}{1+x^4}$; 1.2. $\int 2^{\sin x} \cdot \cos x dx$; 1.3. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cdot \cos x dx$;

1.4. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$; 1.5. $\int \ln^4 x \cdot \frac{dx}{x}$; 1.6. $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$;

1.7. $\int \sqrt[5]{\cos x} \sin x dx$; 1.8. $\int 3^{\cos x} \cdot \sin x dx$; 1.9. $\int \frac{\ln^7 x}{x} dx$;

1.10. $\int x^3 \cdot 4^{x^4} dx$; 1.11. $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$; 1.12. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;

1.13. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$; 1.14. $\int \frac{5 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 1.15. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}} dx$;

1.16. $\int \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$; 1.17. $\int \frac{\ln^8 x dx}{x}$; 1.18. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-4}$;

1.19. $\int \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 2x} dx$; 1.20. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-3\cos^2 2x}} dx$.

2. იპოვეთ ინტეგრალი ჩასმის ხერხით.
Найти интеграл методом подстановки.
Find the integral using integration by substitution.

2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+7}$; 2.2. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x+6}-8}$; 2.3. $\int \frac{2dx}{\sqrt{3x-4}-5}$;

2.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+1}$; 2.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$; 2.6. $\int \frac{dx}{e^{3x}-5}$;

2.7. $\int \frac{dx}{4-\sqrt{2x-7}}$; 2.8. $\int \frac{dx}{e^{5x}+3}$; 2.9. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-3}}$;

2.10. $\int x\sqrt{5+3x}\,dx$; 2.11. $\int x\sqrt{7-x}\,dx$; 2.12. $\int \frac{dx}{(3+x)\sqrt{4+x}}$;

2.13. $\int \frac{7dx}{\sqrt{3+e^{x}}}$; 2.14. $\int \frac{5dx}{\sqrt{e^{x}-3}}$; 2.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{x}-8}}$;

2.16. $\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{3x^2}dx$; 2.17. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; 2.18. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$;

2.19. $\int \frac{4x^2dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2.20. $\int \frac{5dx}{x^2\sqrt{3+2x^2}}$.

3. იპოვეთ ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით.
Найти интеграл методом интегрирования по частям.
Find the integral using integration by parts.

a) 3.1. $\int (x^2-x)e^{5x}dx$; 3.2. $\int x\sin 2x\,dx$;

3.3. $\int (2x+1)\cos 3x\,dx$; 3.4. $\int (3x-5)\sin 2x\,dx$;

3.5. $\int (x^2+1)\cos 2x\,dx$; 3.6. $\int (x^2+2x)\sin x\,dx$;

3.7. $\int (3x-7)e^{2x}dx$; 3.8. $\int (5x-8)\cos 3x\,dx$;

3.9. $\int (x^2-3x)e^{3x}dx$; 3.10. $\int (2x^2-5x)\cos 5x\,dx$;

3.11. $\int (3x^2-5x+4)e^{2x}dx$; 3.12. $\int (3x-5)\cos 7x\,dx$;

3.13. $\int (x^2+x)\sin 5x\,dx$; **3.14.** $\int (x^2-2x+3)\sin 7x\,dx$;

3.15. $\int (x^2-3x+2)\cos 2x\,dx$; **3.16.** $\int (x^2+2x+3)e^{5x}\,dx$;

3.17. $\int (3x-5)\cos 4x\,dx$; **3.18.** $\int (x^2-2x)e^{4x}\,dx$;

3.19. $\int (3x-7)\cos 8x\,dx$; **3.20.** $\int (5x-8)e^{3x}\,dx$.

b) 3.1. $\int (x^2-3x+2)\ln 7x\,dx$; **3.2.** $\int x^2\ln 2x\,dx$;

3.3. $\int (3x-5)\ln 5x\,dx$; **3.4.** $\int (3x-5)\ln 7x\,dx$;

3.5. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$; **3.6.** $\int \arcsin 2x\,dx$;

3.7. $\int \ln(x^2+1)\,dx$; **3.8.** $\int (x^2-3x+1)\ln 5x\,dx$;

3.9. $\int \arcsin 3x\,dx$; **3.10.** $\int \arcsin 5x\,dx$;

3.11. $\int \sqrt{x}\cdot\ln^2 x\,dx$; **3.12.** $\int (4x^3+5x^2+2)\ln x\,dx$;

3.13. $\int \arcsin 7x\,dx$; **3.14.** $\int \arccos 5x\,dx$;

3.15. $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)\ln x\,dx$; **3.16.** $\int \ln(3x^2+5)\,dx$;

3.17. $\int (3x^2-5x+1)\ln 5x\,dx$; **3.18.** $\int (5x^2-2x+1)\ln 3x\,dx$;

3.19. $\int (3x^3-5x^2+2x)\ln 4x\,dx$; **3.20.** $\int (x^2-4x+1)\ln 7x\,dx$.

c) **3.1.** $\int 5^{3x}\cos 2x dx$; **3.2.** $\int e^{2x}\sin x dx$;

3.3. $\int e^{3x}\cos 2x dx$; **3.4.** $\int 2^{x}\sin 9x dx$;

3.5. $\int 3^{x}\cos 2x dx$; **3.6.** $\int e^{2x}\sin 3x dx$;

3.7. $\int e^{5x}\cos 2x dx$; **3.8.** $\int 2^{3x}\sin 2x dx$;

3.9. $\int \sin 2x\cdot e^{7x} dx$; **3.10.** $\int \sin 2x\cdot e^{9x} dx$;

3.11. $\int 3^{x}\cos 2x dx$; **3.12.** $\int 3^{2x}\cos 3x dx$;

3.13. $\int e^{2x}\cos 7x dx$; **3.14.** $\int e^{4x}\sin 3x dx$;

3.15. $\int e^{2x}\cos 3x dx$; **3.16.** $\int e^{x+1}\cos 4x dx$;

3.17. $\int e^{3x+2}\sin 2x dx$; **3.18.** $\int e^{5x-3}\cos 3x dx$;

3.19. $\int 4^{x}\cdot\cos 7x dx$; **3.20.** $\int 3^{2x}\cos 2x dx$.

4. a, b) შეასრულეთ მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე;

c) წარმოადგინეთ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით;

d) ამოხსენით განტოლება.

a, b) Выполнить действия над комплексными числами;

c) Представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах;

d) Решить уравнение.

a, b) Perform the operations on complex numbers;

c) Represent the complex number in trigonometric and exponential form;

d) Solve the equation.

a) 4.1. $\frac{7-2i}{4+3i}+\frac{3-2i}{4-3i}+\frac{3+4i}{3-2i}$; 4.2. $\frac{3-2i}{2+4i}+\frac{4+2i}{3-2i}+\frac{1}{i}$;

4.3. $\frac{5+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{4-2i}+\frac{3-2i}{4+2i}$; 4.4. $\frac{3+2i}{4+3i}+\frac{4+5i}{3-2i}+\frac{1}{2i+3}$;

4.5. $\frac{3-2i}{2-3i}+\frac{4+5i}{5-4i}+\frac{5+4i}{7-3i}$; 4.6. $\frac{4-2i}{3-2i}+\frac{5+4i}{3+7i}+\frac{4i}{3-7i}$;

4.7. $\frac{5+2i}{3-2i}+\frac{3+2i}{4+2i}+\frac{5+4i}{2+7i}$; 4.8. $\frac{4+8i}{3-5i}+\frac{4+2i}{5+3i}+\frac{4+3i}{7-4i}$;

4.9. $\frac{3+4i}{3-2i}+\frac{5-4i}{2+7i}+\frac{4-3i}{5+2i}$; 4.10. $\frac{5+2i}{3-2i}+\frac{4+5i}{3+4i}+\frac{4+2i}{3+3i}$;

4.11. $\frac{5-4i}{3-2i}+\frac{5-4i}{2+7i}+\frac{4-3i}{5+2i}$; 4.12. $\frac{5+2i}{2+5i}+\frac{3+2i}{2-3i}+\frac{3+2i}{2+3i}$.

4.13. $\frac{5+4i}{3-i}+\frac{2+3i}{5i+2}+\frac{2-3i}{1-i}$; 4.14. $\frac{2-5i}{4+5i}+\frac{3+2i}{3+4i}+\frac{2+3i}{i}$;

4.15. $\frac{7-2i}{4+3i}+\frac{4+5i}{3+4i}+\frac{3-2i}{3-4i}$; 4.16. $\frac{3+2i}{2-3i}+\frac{5+2i}{3-2i}+\frac{1}{2i+3}$;

4.17. $\frac{3-2i}{4-5i}+\frac{3-4i}{5+2i}+\frac{1}{3i-2}$; 4.18. $\frac{3-2i}{2+3i}+\frac{3+2i}{4+5i}+\frac{3+4i}{3-2i}$;

4.19. $\frac{5+2i}{3-2i}+\frac{3-2i}{2+3i}+\frac{1+3i}{2i}$; 4.20. $\frac{3-2i}{4-5i}+\frac{4+2i}{3-2i}+\frac{1}{i}$.

b) **4.1.** $\left(\sqrt{2}-5i\right)^{13}$; **4.2.** $(8-3i)^{9}$; **4.3.** $(3-7i)^{15}$;

4.4. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}i\right)^{4}$; **4.5.** $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}i\right)^{5}$; **4.6.** $\left(\sqrt{2}-3i\right)^{7}$;

4.7. $\left(4-\sqrt{5}i\right)^{10}$; **4.8.** $\left(3-\sqrt{3}i\right)^{9}$; **4.9.** $\left(\sqrt{3}+4i\right)^{8}$;

4.10. $(3-4i)^{11}$; **4.11.** $\left(\sqrt{5}+2i\right)^{12}$; **4.12.** $(3-8i)^{10}$;

4.13. $\left(\sqrt{3}+2i\right)^{6}$; **4.14.** $\left(\sqrt{5}-3i\right)^{4}$; **4.15.** $\left(3-i\sqrt{3}\right)^{8}$;

4.16. $(5+2i)^{13}$; **4.17.** $\left(3-\sqrt{2}i\right)^{7}$; **4.18.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{10}$;

4.19. $\left(\sqrt{3}-5i\right)^{7}$; **4.20.** $\left(\sqrt{3}+5i\right)^{12}$.

c) **4.1.** $z=-4$; **4.2.** $z=-15$; **4.3.** $z=15$;
4.4. $z=-13$; **4.5.** $z=7$; **4.6.** $z=12$;
4.7. $z=-11$; **4.8.** $z=-6$; **4.9.** $z=5$;
4.10. $z=17$; **4.11.** $z=-3$; **4.12.** $z=-5$;
4.13. $z=6$; **4.14.** $z=9$; **4.15.** $z=-9$;
4.16. $z=10$; **4.17.** $z=11$; **4.18.** $z=20$;
4.19. $z=-12$; **4.20.** $z=20$.

d) **4.1.** $4x^2+81=0$; **4.2.** $x^3+64=0$; **4.3.** $x^4+5=0$;
4.4. $x^4+81=0$; **4.5.** $x^4+16=0$; **4.6.** $x^3+8=0$;
4.7. $x^5+32=0$; **4.8.** $x^4+25=0$; **4.9.** $x^3+27=0$;
4.10. $9x^2+16=0$; **4.11.** $2x^4+7=0$; **4.12.** $x^4+8=0$;
4.13. $x^2+4x+8=0$; **4.14.** $x^3+7=0$; **4.15.** $x^4+2=0$;
4.16. $x^3+3=0$; **4.17.** $x^4+1=0$; **4.18.** $2x^3+27=0$;
4.19. $x^4+3=0$; **4.20.** $3x^3+31=0$.

5. იპოვეთ ინტეგრალები უმარტივესი წილადებიდან.
Найти интегралы из простейших дробей.
Find the integrals of simplest fraction.

a) **5.1.** $\int \frac{3dx}{(x-2)^5}$; **5.2.** $\int \frac{dx}{(3x+2)^7}$; **5.3.** $\int \frac{3dx}{(x+2)^{5/3}}$;

5.4. $\int \frac{dx}{(5x-7)^4}$; **5.5.** $\int \frac{3dx}{(2x-2)^{4/5}}$; **5.6.** $\int \frac{20dx}{(5-4x)^8}$;

5.7. $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^5}}$; **5.8.** $\int \frac{60dx}{(3-2x)^7}$; **5.9.** $\int \frac{3dx}{(4-7x)^{3/4}}$;

5.10. $\int \frac{3dx}{(2+3x)^7}$; **5.11.** $\int \frac{3dx}{(3x-4)^7}$; **5.12.** $\int \frac{\sqrt{3}dx}{(3x-7)^{1/3}}$;

5.13. $\int \frac{4dx}{(3x-8)^2}$; **5.14.** $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3}x-11}$; **5.15.** $\int \frac{4dx}{\left(5x-\sqrt{3}\right)^3}$;

5.16. $\int \frac{3dx}{\left(3x-\sqrt{2}\right)^3}$; **5.17.** $\int \frac{\sqrt{3}dx}{(1-3x)^{4/3}}$; **5.18.** $\int \frac{3dx}{\left(\sqrt{3}-2x\right)^3}$;

5.19. $\int \frac{4dx}{\left(3-\sqrt{2}x\right)^{1/4}}$; **5.20.** $\int \frac{4dx}{\left(\sqrt{3}x+2\right)^{3/5}}$.

b) **5.1.** $\int \frac{dx}{(4x-1)(5x+2)}$; **5.2.** $\int \frac{dx}{(5-2x)(5x+8)}$;

5.3. $\int \frac{dx}{(3x+2)(6x+3)}$; **5.4.** $\int \frac{dx}{(4+3x)(3-8x)}$;

5.5. $\int \frac{dx}{(2x-5)(7x-4)}$; 5.6. $\int \frac{dx}{(7-x)(2x+5)}$;

5.7. $\int \frac{dx}{(5x+3)(3x-8)}$; 5.8. $\int \frac{dx}{(10x-7)(5-2x)}$;

5.9. $\int \frac{dx}{(2-x)(6x+1)}$; 5.10. $\int \frac{dx}{(3x+5)(4x-11)}$;

5.11. $\int \frac{dx}{(8x+3)(5-x)}$; 5.12. $\int \frac{dx}{(10+3x)(6-5x)}$;

5.13. $\int \frac{dx}{(x+4)(3x-2)}$; 5.14. $\int \frac{dx}{(2+5x)(4+3x)}$;

5.15. $\int \frac{dx}{(x-3)(6x-1)}$; 5.16. $\int \frac{dx}{(9x-5)(3-2x)}$;

5.17. $\int \frac{dx}{(2x+13)(7-2x)}$; 5.18. $\int \frac{dx}{(10x+1)(4x-5)}$;

5.19. $\int \frac{dx}{(11-2x)(3x-4)}$; 5.20. $\int \frac{dx}{(2-3x)(5-4x)}$.

c) 5.1. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$; 5.2. $\int \frac{dx}{3x^2-x+4}$; 5.3. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$;

5.4. $\int \frac{dx}{x^2-2x+10}$; 5.5. $\int \frac{dx}{x^2-5x+7}$; 5.6. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+9}$;

5.7. $\int \frac{dx}{5x^2-3x+7}$; 5.8. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+41}$; 5.9. $\int \frac{dx}{3x^2-x+5}$;

5.10. $\int \frac{dx}{5x^2-2x+12}$; 5.11. $\int \frac{dx}{4x^2-4x+7}$; 5.12. $\int \frac{dx}{3x^2-4x+7}$;

5.13. $\int \frac{dx}{3x^2-5x+12}$; 5.14. $\int \frac{dx}{5x^2-3x+7}$; 5.15. $\int \frac{dx}{x^2-4x+11}$;

5.16. $\int \frac{dx}{8x^2-2x+9}$; 5.17. $\int \frac{dx}{3x^2-4x+7}$; 5.18. $\int \frac{dx}{5x^2-2x+1}$;

5.19. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+9}$; 5.20. $\int \frac{dx}{3x^2-6x+8}$.

d) 5.1. $\int \frac{3x-5}{x^2+4x+10}dx$;

5.2. $\int \frac{7x-2}{x^2-3x+7}dx$;

5.3. $\int \frac{x-5}{x^2+3x+5}dx$;

5.4. $\int \frac{x-7}{4x^2+12x+13}dx$;

5.5. $\int \frac{2x-3}{x^2+3x+12}dx$;

5.6. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+12}dx$;

5.7. $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+9}dx$;

5.8. $\int \frac{3x+4}{x^2+2x+9}dx$;

5.9. $\int \frac{5-7x}{3x^2-4x+9}dx$;

5.10. $\int \frac{2-3x}{2x^2+4x+7}dx$;

5.11. $\int \frac{1-4x}{x^2-3x+5}dx$;

5.12. $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+10}dx$;

5.13. $\int \frac{4x-1}{x^2+3x+9}dx$;

5.14. $\int \frac{5x+2}{2x^2-6x+7}dx$;

5.15. $\int \frac{5x-1}{x^2-7x+21}dx$;

5.16. $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+10}dx$;

5.17. $\int \frac{3x-7}{x^2-5x+12}\,dx;$ **5.18.** $\int \frac{2x-9}{2x^2-3x+8}\,dx;$

5.19. $\int \frac{5x+1}{3x^2-5x+7}\,dx;$ **5.20.** $\int \frac{3x+2}{2x^2-2x+9}\,dx.$

6. იპოვეთ ინტეგრალი რაციონალური წილადიდან.
Найти интегралы от рациональных дробей.
Find the integrals of rational fractions.

a) 6.1. $\int \frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx;$ **6.2.** $\int \frac{x^2-3x-2}{(x-1)(x-3)(x+3)}\,dx;$

6.3. $\int \frac{5x+1}{(x+1)(3x+5)(x-3)}\,dx;$ **6.4.** $\int \frac{x^2-2x+5}{(x+2)(x-3)(x+5)}\,dx;$

6.5. $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x-3)(x+5)(x+7)}\,dx;$ **6.6.** $\int \frac{2x^2-4x-1}{(x-3)(x+2)(x+4)}\,dx;$

6.7. $\int \frac{3x-8}{x^2(x-2)}\,dx;$ **6.8.** $\int \frac{2x^2-3x+5}{x(x-2)(x+5)}\,dx;$

6.9. $\int \frac{x+3x^2}{(x-2)(x+3)^2}\,dx;$ **6.10.** $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-3)(x+5)(x+1)}\,dx;$

6.11. $\int \frac{2x^3-1}{x^2(x-3)}\,dx;$ **6.12.** $\int \frac{2x^2-5x+1}{(x+2)(x+4)^2}\,dx;$

6.13. $\int \frac{2x-7}{(x-3)(x+2)^2}\,dx;$ **6.14.** $\int \frac{2x^3-5}{(x-1)(x+4)^2}\,dx;$

6.15. $\int \frac{3x-7}{(x+2)(x-3)^2}\,dx;$ **6.16.** $\int \frac{5x-3}{(x+4)(x-7)^2}\,dx;$

6.17. $\int \frac{3x-11}{(x+1)(x+5)^2}dx$; 6.18. $\int \frac{3x+8}{(x+2)^2(x+3)}dx$;

6.19. $\int \frac{5x^2+2x+1}{(x+4)^2(x-1)}dx$; 6.20. $\int \frac{2x-1}{(x+2)(x-5)^2}dx$.

b) 6.1. $\int \frac{3x^4-4x+1}{x^2-3x}dx$; 6.2. $\int \frac{5x^3-4x+7}{x^2-2x}dx$;

6.3. $\int \frac{3x^4-5x^2+1}{x^2-4x}dx$; 6.4. $\int \frac{x^4-3x^2-5}{x^3+3x^2}dx$;

6.5. $\int \frac{x^4-2x^2+3}{x^2-5x}dx$; 6.6. $\int \frac{3x^3-3x+9}{x^3-3x^2+2x}dx$;

6.7. $\int \frac{3x^4-4x^3+1}{x^3-x}dx$; 6.8. $\int \frac{x^4-2x^3+12x+6}{x^3-6x^2}dx$;

6.9. $\int \frac{4x^5-3x^4-8}{x^3-4x}dx$; 6.10. $\int \frac{5x^4-x+2}{x^3-x^2}dx$;

6.11. $\int \frac{x^3-3x^2-1}{x^2-1}dx$; 6.12. $\int \frac{x^4-3x^2-2}{x^2-1}dx$;

6.13. $\int \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2-2x}dx$; 6.14. $\int \frac{2x^3-5x^2+4x}{3x^2-3x}dx$;

6.15. $\int \frac{4x^4-3x^3-5x+1}{x^3-2x^2}dx$; 6.16. $\int \frac{3x^3-2x+3}{x^3-3x^2+2x}dx$;

6.17. $\int \frac{2x^5-3x^4-1}{x^3-4x}dx$; 6.18. $\int \frac{5x^4-x^2+3}{x^3-3x}dx$;

6.19. $\int \frac{2x^3-3x-3}{x^3-3x^2+2x}\,dx$; **6.20.** $\int \frac{5x^5+5x+1}{6x^3-7x^2-3x}\,dx$.

c) **6.1.** $\int \frac{3x+1}{(x^2+2)(x-4)}\,dx$; **6.2.** $\int \frac{5x-2}{(x^2+3)(x-1)}\,dx$;

6.3. $\int \frac{3-4x}{(x+5)(3x^2+3x+15)}\,dx$; **6.4.** $\int \frac{5x^2+3x}{(x-3)(x^2+4x+11)}\,dx$;

6.5. $\int \frac{3x^2-2x+1}{(x^2+4)(x+1)}\,dx$; **6.6.** $\int \frac{4x-13}{(x+5)(x^2+3x+9)}\,dx$;

6.7. $\int \frac{2x-7}{(x-3)(x^2-2x+7)}\,dx$; **6.8.** $\int \frac{3x-5}{(x+1)(x^2+3)}\,dx$;

6.9. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2+5)(x-7)}\,dx$; **6.10.** $\int \frac{2x-5}{(x^2+3)(x-5)}\,dx$;

6.11. $\int \frac{3-5x}{(x^2+3)(6x-4)}\,dx$; **6.12.** $\int \frac{3x^2-5x+9}{(x-2)(x^2-4x+9)}\,dx$;

6.13. $\int \frac{3x+2}{(x+1)(x^2+4x+7)}\,dx$; **6.14.** $\int \frac{5x^2-3x+2}{(x-7)(x^2+3x+4)}\,dx$;

6.15. $\int \frac{2x^2-3x+1}{(x^2+2)(x-1)}\,dx$; **6.16.** $\int \frac{3x-8}{(x+4)(x^2+7)}\,dx$;

6.17. $\int \frac{7x-2}{(x-4)(x^2+3x+5)}\,dx$; **6.18.** $\int \frac{2x-7}{(x+2)(2x^2+5)}\,dx$;

6.19. $\int \frac{3x-7}{(x-5)(x^2+3x+7)}dx$; **6.20.** $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x^2+9)}dx$.

7. იპოვეთ ინტეგრალი ტრიგონომეტრიული გამოსახულებიდან.

Найти интеграл из тригонометрического выражения.

Find the integral of trigonometric expression.

7.1. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$; **7.2.** $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$;

7.3. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$; **7.4.** $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$;

7.5. $\int \cos^3 2x dx$; **7.6.** $\int \sin^3 2x dx$;

7.7. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; **7.8.** $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$;

7.9. $\int \sin 4x \cos 5x dx$; **7.10.** $\int \cos 8x \sin 7x dx$;

7.11. $\int \sin 11x \sin 9x dx$; **7.12.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$;

7.13. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 3x}dx$; **7.14.** $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$;

7.15. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}dx$; **7.16.** $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

7.17. $\int \cos^2 x \cos 2x dx$; **7.18.** $\int \frac{1-\sin x}{\sin^2 x}dx$;

7.19. $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; **7.20.** $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$.

კრებულში გამოყენებულ მათემატიკურ ტერმინთა ინგლისურ-ქართულ-რუსული ლექსიკონი

Англо-Грузинско-Русский словарь математических терминов, используемых в сборнике задач

English-Georgian-Russian Dictionary of Mathematical terms Used in Given Problem Book

Abscissa	აბსცისა	Абсцисса
Addition	მიმატება, შეკრება	Сложение
Altitude	სიმაღლე	Высота
Analysis	ანალიზი	Анализ
Analytic	ანალიზური	Аналитическое
Angle	კუთხე	Угол
Approximation	მიახლოება	Приближение
Arc cosine	არკკოსინუსი	Арккосинус
Arc cotangent	არკკოტანგენსი	Арккотангенс
Arc sine	არკსინუსი	Арксинус
Argument	არგუმენტი	Аргумент
Asymptote	ასიმპტოტი	Асимптота
Axis	ღერძი	Ось
Bisectrix	ბისექტრისა	Биссектриса
Boundary	საზღვარი	Граница
Calculation	გამოთვლა	Вычисление
Cancellation	შეკვეცა	Сокращение
Center	ცენტრი	Центр
Circle	წრე	Круг
Circumference	წრეწირი	Окружность

Computation	გამოთვლა	Вычисление
Concavity	ჩაზნექილობა	Вогнутость
Condition	პირობა	Условие
Continuity	უწყვეტობა	Непрерывность
Convexity	ამოზნექილობა	Выпуклость
Coordinate	კოორდინატი	Координата
Cosine	კოსინუსი	Косинус
Cosinusoid	კოსინუსოიდი	Косинусоида
Cotangent	კოტანგენსი	Котангенс
Cubic	კუბური	Кубический
Curvature	სიმრუდე	Кривизна
Curve	წირი	Линия
Decreasing	კლებადი	Убывающий
Definite	განსაზღვრული	Определенный
Definition	განსაზღვრება	Определение
Denominator	მნიშვნელი	Знаменатель
Dependence	დამოკიდებულება	Зависимость
Dependent	დამოკიდებული	Зависимый
Derivative	წარმოებული	Производная
Diameter	დიამეტრი	Диаметр
Difference	სხვაობა	Разность
Differentiability	დიფერენცირებადობა	Дифференцируемость
Differentiable	დიფერენცირებადი	Дифференцируемый
Differential	დიფერენციალი	Дифференциал
Differentiation	გაწარმოება	Дифференцирование
Dimension	განზომილება	Размерность
Discontinuous	წყვეტა	Разрыв

Discrete	დისკრეტული	Дискретный
Discriminant	დისკრიმინანტი	Дискриминант
Distance	მანძილი	Расстояние
Divergence	განშლადობა	Расходимость
Divergent	განშლადი	Расходящийся
Division	გაყოფა	Деление
Divisor	გამყოფი	Делитель
Dividend	გასაყოფი	Делимое
Ellipse	ელიფსი	Эллипс
Equal	ტოლი	Равный
Equality	ტოლობა	Равенство
Equation	განტოლება	Уравнение
Equilateral	ტოლგვერდა	Равносторонний
Equivalence	ეკვივალენტობა	Эквивалентность
Equivalent	ეკვივალენტური	Эквивалентный
Evaluation	შეფასება	Оценка
Even	ლუწი	Четный
Example	მაგალითი	Пример
Explicit	ცხადი	Явный
Exponent	ხარისხის მაჩვენებელი	Показатель степени
Exponential	ექსპონენციური	Экспоненциальный
Expression	გამოსახულება	Выражение
Extremum	ექსტრემუმი	Экстремум
Factor	თანამამრავლი	Сомножитель
Factorial	ფაქტორიალი	Факториал
Factorization	მამრავლებად დაშლა	Разложение на множители

Finite	სასრული	Конечный
Form	ფორმა	Форма
Formula	ფორმულა	Формула
Fraction	წილადი	Дробь
Function	ფუნქცია	Функция
Geometric	გეომეტრიული	Геометрический
Geometry	გეომეტრია	Геометрия
Graph	გრაფიკი	График
Height	სიმაღლე	Высота
Hypotenuse	ჰიპოტენუზა	Гипотенуза
Identical	იგივური	Идентичный
Identity	იგივეობა	Идентичность
Imaginary	წარმოსახვითი	Мнимый
Implicit	არაცხადი	Неявный
Increasing	ზრდადი	Возрастающий
Increment	ნაზრდი	Приращение
Indefinite	განუსაზღვრელი	Неопределенный
Independent	დამოუკიდებელი	Независимый
Indeterminacy	განუსაზღვრელობა	Неопределенность
Indeterminate	განუსაზღვრელი	Неопределенный
Infinite	უსასრულო	Бесконечный
Infinitesimal	უსასრულოდ მცირე	Бесконечно малый
Infinity	უსასრულობა	Бесконечность
Inflection	გადაღუნვა	Перегиб
Integer	მთელი რიცხვი	Целое число
Integrable	ინტეგრებადი	Интегрируемый
Integral	ინტეგრალი	Интеграл

Integration	ინტეგრება	Интегрирование
Inverse	შებრუნებული	Обратный
Irrational	ირაცინალური	Иррациональный
Irrationality	ირაციონალობა	Иррациональность
Leg	კათეტი	Катст
Length	სიგრძე	Длина
Limit	ზღვარი	Предел
Line	წირი; წრფე	Линия; прямая
Linearity	წრფივობა	Линейность
Local	ლოკალური	Локальный
Logarithm	ლოგარითმი	Логорифм
Logarithmic	ლოგარითმული	Логорифмический
Mathematics	მათემატიკა	Математика
Maximum	მაქსიმუმი	Максимум
Mean	საშუალო	Среднее
Meaning	მნიშვნელობა	Значение
Median	მედიანა	Медиана
Member	წევრი	Член
Method	მეთოდი	Метод
Minimal	მინიმალური	Минимальный
Minimum	მინიმუმი	Минимум
Monotonicity	მონოტონურობა	Монотонность
Multiple	ჯერადი	Кратный
Multiplicand	სამრავლი	Множимое
Multiplication	გამრავლება	Умножение
Multiplier	მამრავლი	Множитель
Necessary	აუცილებელი	Необходимый

Negative	უარყოფითი	Отрицательный
Neighbourhood	მიდამო	Окрестность
Number	რიცხვი	Число
Numerator	მრიცხველი	Числитель
Obtuse	ბლაგვი	Тупой
Odd	კენტი	Нечетный
One-sided	ცალმხრივი	Одностороний
Operation	მოქმედება	Действие
Order	რიგი	Порядок
Ordinate	ორდინატა	Ордината
Origin	სათავე	Начало
Parallel	პარალელური	Параллельный
Period	პერიოდი	Период
Periodic	პერიოდული	Периодический
Periodicity	პერიოდულობა	Периодичность
Perpendicular	პერპენდიკულარი	Перпендикуляр
Perpendicularity	პერპენდიკულარულობა	Перпендикулярность
Plane	სიბრტყე	Плоскость
Point	წერტილი	Точка
Polar	პოლარული	Полярный
Polynomial	მრავალწევრი	Многочлен
Positive	დადებითი	Положительный
Prime	შტრიხი	Штрих
Primitive	პირველადი	Первообразная
Problem	ამოცანა	Задача
Product	ნამრავლი	Произведение
Proof	დამტკიცება	Доказательство

Property	თვისება	Свойство
Proportion	პროპორცია	Пропорция
Quadratic	კვადრატული	Квадратный
Quantifier	კვანტორი	Квантор
Quotient	განაყოფი	Частное
Radian	რადიანი	Радиан
Radical	რადიკალი	Радикал
Radius	რადიუსი	Радиус
Ratio	ფარდობა	Отношение
Rational	რაციონალური	Рациональный
Real	ნამდვილი	Действительный
Rectangle	მართკუთხედი	Прямоугольник
Rectangular	მართკუთხა	Прямоугольный
Representation	წარმოდგენა	Представление
Restriction	შეზღუდვა	Ограничение
Root	ფესვი	Корень
Semi-axis	ნახევარღერძი	Полуось
Sequence	მიმდევრობა	Последовательность
Set	სიმრავლე	Множество
Simplification	გამარტივება	Упрощение
Sine	სინუსი	Синус
Sinusoid	სინუსოიდი	Синусоида
Slope	დახრილობა	Наклон
Solution	ამოხსნა	Решение
Sufficient	საკმარისი	Достаточный
Sum	ჯამი	Сумма
Symbol	სიმბოლი	Символ

Symmetry	სიმეტრია	Симметрия
System	სისტემა	Система
Table	ცხრილი	Таблица
Tangent	ტანგენსი; მხები	Тангенс; касательная
Term	წევრი	Член
Theorem	თეორემა	Теорема
Transcendental	ტრანსცენდენტული	Трансцендентный
Transformation	გარდაქმნა	Преобразование
Transposition	გადაადგილება	Перенос
Triangle	სამკუთხედი	Треугольник
Trigonometric	ტრიგონომეტრიული	Тригонометрический
Unique	ერთადერთი	Единственный
Unknown	უცნობი	Неизвестная
Variable	ცვლადი	Переменная
Vertex	წვერო	Вершина
Zero	ნული	Нуль

სარჩევი

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ფასი სახელშეკრულებო

წიგნი აეწყო და დაკაბადონდა
კომპიუტერულ ცენტრში „დარასი"

დაიბეჭდა სტუ-ს სტამბაში
თბილისი, კოსტავას 77