სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

რომეო გალდავა, მალხაზ კუცია

წრფივი დაპროგრამება ეკონომიკასა და ბიზნესში
რეალიზაცია „MS Excel“ - ში

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი

2008

რომეო გალდავა, მალხაზ კუცია

წრფივი დაპროგრამება ეკონომიკასა და ბიზნესში რეალიზაცია MS Excel – ში

წიგნში განხილულია მათემატიკური დაპროგრამების ერთ-ერთი განშტოების, წრფივი დაპროგრამების ისეთი თეორიული და პრაქტიკული საკითხები, რომლებსაც დიდი გამოყენება აქვს ეკონომიკასა და ბიზნესში. აღწერილია წრფივი დაპროგრამების ამოცანების წარმოდგენის სხვადასხვა კონსტრუქციები და მათი ამოხსნებისა და ერთმანეთში გადაყვანის მეთოდები. გარკვევით და მარტივად არის გადმოცემული საკმაოდ რთული დებულებები, რომლებიც დაკავშირებულია მათემატიკური დაპროგრამირების განსაკუთრებით მნიშვნელოვან საკითხებთან – ორადულობის კონცეპციასთან. გამახვილებულია ყურადღება ამონახსნების მდგრადობის საკითხებზე. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის გამარტივების მიზნით, მოყვანილია ინსტრუქციები საოპტიმიზაციო ინსტრუმენტალური პროგრამა **Solver**–იდან, რომელიც ჩართულია ელექტრონული ცხრილების პროგრამაში **MS Excel.**

ნაშრომი, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, განკუთვნილია მათემატიკური, საინჟინრო, ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტების ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის. ის საინტერესო იქნება, აგრეთვე, დოქტორანტებისთვის, მეცნიერ-თანამშრომლებისთვის და პრაქტიკოსებისათვისაც, ვისაც თავისი საქმიანობიდან გამომდინარე, უწევს ოპტიმალური გადაწყვეტილებების მიღება დაგეგმვისა თუ მართვის სფეროში.

რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი **ჯემალ როგავა**

რეცენზენტები: ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი **რევაზ (ივერი) კაკუბავა**

ეკონომიკურ მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი **ევგენი ბარათაშვილი**

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2008

Galdava R., Kucia M.

Linear Programming in Economics and Business

Realization in MS Excel

The book reviews some theoretical and practical aspects of **Linear Programming** (one of the branches of **Mathematical Programming**), which are widely used in Economics and Business. Different constructions of presentation of Linear programming problems and methods of their solving are described in this book as well.
For the purpose of simplification of solving practical problems, the book is supported with instructions from the optimization instrumental tool - ***Solver***, which is included in ***MS Excel*** electronic program.

Editor: **Doctor of Mathematics, Professor Jemal Rogava**
Reviewers: **Doctor of Mathematics, Professor Revaz(Iveri) Kakubava**
Doctor of Economic, Professor Evgeni Baratashvili

Sokhumi State University Press, Tbilisi, 2008

წ ი ნ ა ს ი ტ ყ ვ ა ო ბ ა

მათემატიკური მოდელირება, მათემატიკური მოდელი. რეალური ობიექტი, როგორც წესი, საკმაოდ რთულია, ამიტომ მისი შესწავლის მიზნით ქმნიან მოდელს – გამოსაკვლევი რეალური ობიექტის მათემატიკურ ანალოგს, რომელიც, ერთის მხრივ, უნდა იყოს მარტივი და გასაგები, მეორეს მხრივ, კი - მისი გამოკვლევის შედეგები უნდა გავრცელდეს მოცემული კლასის სხვა რთულ ობიექტებზეც, შესაბამისად, მათემატიკური მოდელი ნათლად უნდა ასახავდეს გამოსაკვლევი რეალური ობიექტის არსებითად დამახასიათებელ თვისებებსა და ზემოქმედ ფაქტორებს.

ორადული ხასიათის გამო, ადეკვატური მოდელების აგება-შედგენა წარმოადგენს საკმაოდ რთულ ამოცანას. რაც უფრო კარგად იქნება შერჩეული, აგებული მოდელი, რაც უფრო ზუსტად გამოიხატება მასში რეალური ობიექტის დამახასიათებელი თვისებები, მით უფრო წარმატებული და სასარგებლო იქნება შესაბამისი გამოკვლევები და ამ გამოკვლევებიდან გამომდინარე შედეგები და რეკომენდაციები.

მეცნიერულ კვლევებში გამოიყენება სხვადასხვა სახის მოდელები. მათ შორის გამორჩეულია მათემატიკური მოდელები, რომელთა შემადგენელი ელემენტები ცვლადები, ფუნქციები, სხვადასხვა ტიპის დამოკიდებულებები და ა.შ. ასახავენ შესასწავლი რეალური ობიექტების ძირითად, მახასიათებელ ფაქტორებს და მათ კავშირებს. მათემატიკური მოდელების შედგენა-აგება წარმოადგენს მათემატიკური მოდელირების საგანს. მათემატიკური მოდელები ხელს უწყობენ მეცნიერების სხვადასსხვა დარგებში მათემატიკის გამოყენებას და ამით, როგორც ამ მეცნიერების, ასევე მათემატიკის განვითარებას.

შემოთავაზებულ ნაშრომში განხილულია დაგეგმვის (დაპროგრამების) ამოცანები ეკონომიკაში. კერძოდ, ისეთი მათემატიკურ მოდელები, რომლებიც წარმოადგენენ წრფივ განტოლებათა ან უტოლობათა სისტემებს, ხოლო

ეფექტურობის მაჩვენებელი (მიზნის ფუნქცია) - წრფივი ფორმაა. წრფივი დაპროგრამირება არის მათემატიკის დარგი, რომლის შეისწავლის ძირითად მიზანს წარმოადგენს წრფივი მრავალგანზომილებიანი ექსტრემალური ამოცანების ანალიზისა და ამოხსნის მეთოდების შექმნა და გამოკვლევა. დიდი პრაქტიკული გამოყენების გამო, მათემატიკური დაპროგრამება და კერძოდ, წრფივი დაპროგრამება შეტანილია უმაღლესი სასწავლებლების როგორც საბაკალავრო, ასევე სამაგისტრო საგანმანათლებლო პროგრამებში.

ამ წიგნის გამოყენება შეუძლიათ, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, ტექნიკური და ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებსა და აგრეთვე, მათ ვისაც თავისი საქმიანობიდან გამომდინარე, შეხება აქვთ ისეთ პროცესებთან, სადაც ოპტიმალური გადაწყვეტილებებია მისაღები.

წიგნის ძირითადი ნაწილი შედგება ათი პარაგრაფისაგან. პირველი პარაგრაფი შეიძლება ჩაითვალოს როგორც შესავალი. მასში განხილულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ნიმუშები. მეორე პარაგრაფი ეძღვნება წრფივი დაპროგრამების ამოცანების სხვადასხვა ფორმებს და მათი გარდაქმნის მეთოდებს. მესამე პარაგრაფი ეძღვნება წრფივი დაპროგრამირების თეორიას სიბრტყეზე. მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე პარაგრაფებში გადმოცემულია წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის სიმპლექსური, როგორც ალგებრული, ისე ცხრილური, მეთოდები. მეშვიდე პარაგრაფი ეძღვნება ორადულობის თეორიას წრფივ დაპროგრამებაში. მერვე პარაგრაფში განხილულია წრფივი დაპროგრამების ორადულობის თეორიის კონცეფცია დაგეგმვის ეკონომიკურ ამოცანებში. მეცხრე პარაგრაფი ეძღვნება წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის კომპიუტერულ მეთოდებს. მოყვანილია ინსტრუქციები საოპტიმიზაციო პროგრამა "Solver" – დან, რომელიც ჩართულია ელექტრონული ცხრილების პროგრამა "MS Excel"-ში. ასეთი მიდგომა ძალიან ამარტივებს ამოცანის ამოხსნას, ამავე დროს იზოგება დრო და სახსრები. მეათე პარაგრაფი მთლიანად

ეძღვნება სატრანსპორტო ამოცანას. ამ მოდელის ცალკე პარაგრაფად გამოყოფა იმითაა განპირობებული, რომ მისი ამოხსნის მეთოდები სპეციფიკურია და მის ორადულ ამოცანას აქვს კონკრეტული ეკონომიკური შინაარსი.

წიგნში თეორიული მასალა გამყარებულია შესაბამისი ამოცანების ამოხსნით. ამასთან, ყოველ პარაგრაფს დართული აქვს პრაქტიკული ამოცანები, რომელთა ამოხსნა ხელს შეუწყობს საგნის ღრმა და შეგნებულ ათვისებას.

ავტორებს ეძლევათ საშუალება მადლიერების გრძნობა გამოხატონ წიგნის რედაქტორის, პროფესორ **ჯ. როგავასა** და რეცენზენტების, **ე. ბარათაშვილისა** და **რ.კაკუბავას** მიმართ, რომელთა რჩევების გათვალისწინებამ უდაოდ გაამდიდრა წიგნის შინაარსობრივი მხარე.

§ 1. წრფივი დაპროგრამების ამოცანათა ნიმუშები

მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდებით პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის პროცესი მოიცავს ორ ძირითად ეტაპს:

- ამოცანის მათემატიკური მოდელის აგება (ამოცანის მათემატიკური აღწერა);
- ექსტრემალური (ოპტიმალური) ამონახსნის პოვნა.

მათემატიკური მოდელის აგების დროს ცვლადებით აღინიშნება დასმული ამოცანის განმსაზღვრელი ფაქტორები. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე უნდა განისაზღვროს ამ ცვლადებს შორის დამოკიდებულება, შეირჩეს მიზნის ფუნქციის სახე და ეს ფუნქცია გამოისახოს შემოტანილი ცვლადების საშუალებით. ამოცანის მათემატიკური მოდელის აგების შემდეგ უნდა მოიძებნოს ოპტიმალური ამონახსნი შესაბამისი მათემატიკური მეთოდებით.

განვიხილოთ რამდენიმე პრაქტიკული ამოცანის მათემატიკური მოდელის აგების მაგალითი.

1. წარმოების დაგეგმვის ამოცანა.

სამი სხვადასხვა სახის P_1, P_2, P_3 პროდუქციის დასამზადებლად საწარმოში გამოიყენება S_1 და S_2 სახის ნედლეული. ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, შემოსავალი და მათი მარაგები მოცემულია ცხრილში (ცხრ. 1.1.). საჭიროა დაიგეგმოს პროდუქციის ისეთი წარმოება (ე.ი. P_i ($i=1,2,3$) სახის რამდენი პროდუქცია უნდა დაამზადოს საწარმომ), რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ შემოსავალს. P_i სვეტისა და S_j სტრიქონის გადაკვეთაზე მდებარე რიცხვი გვიჩვენებს, თუ S_j ნედლეულის რამდენი ერთეულია საჭირო P_i პროდუქციის ერთი ერთეულის დასამზადებლად ($i=1,2,3;\ j=1,2$).

ცხრილი 1.1.

პროდუქცია / ნედლეული	P_1	P_2	P_3	**მარაგი**
S_1	5	1	12	1500
S_2	2	3	1	1000
ერთეული პროდუქციის გასაყიდი ფასი	12	5	10	

აღვნიშნოთ x_i ცვლადით P_i პროდუქციის რაოდენობა (i=1,2,3), რომელიც უნდა დაამზადოს საწარმომ. ამისათვის საჭირო იქნება S_1 სახის ნედლეულის $5x_1+x_2+12x_3$ ერთეული. ვინაიდან S_1 სახის ნედლეულის მარაგი 1500 ერთეულია, ამიტომ უნდა შესრულდეს უტოლობა $5x_1+x_2+12x_3\leq1500$. შევნიშნოთ, რომ შესაძლოა საწარმომ მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი მაშინაც, როდესაც S_1 სახის ნედლეული მთლიანად არ იქნება დახარჯული, რასაც ითვალისწინებს დაწერილი უტოლობა.

ანალოგიური მსჯელობით S_2 სახის ნედლეულის მიმართ მივიღებთ შემდეგ უტოლობას: $2x_1+3x_2+x_3\leq1000$. ამ პირობებში საწარმოს შემოსავალი F შეადგენს $F=12x_1+5x_2+10x_3$ ფულად ერთეულს.

ამრიგად, ჩვენ შევქმენით დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი და შეგვიძლია ეს ამოცანა მათემატიკურად ასე ჩამოვაყალიბოთ:

მოცემულია ორი წრფივი უტოლობისაგან შემდგარი სისტემა

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 12x_3 &\leq 1500 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 1000 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

და წრფივი ფუნქცია

$$F=12x_1+5x_2+10x_3. \tag{1.2}$$

ვიპოვოთ x_j (j=1,2,3) ცვლადების ისეთი არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (1.1) უტოლობათა სისტემას და F ფუნქციას მიანიჭებენ უდიდეს (მაქსიმალურ) მნიშვნელობას.

დაგეგმვის ამოცანას ზოგად შემთხვევაში, როდესაც გამოსაშვები სხვადასხვა პროდუქციის რაოდენობა n-ის ტოლია, ხოლო სხვადასხვა ნედლეულის (რესურსის) რაოდენობა – m. ამასთან x_j (j=1,2,…,n) აღნიშნულია P_j პროდუქციის გამოსაშვები რაოდენობა; b_i (i=1,2,…,m) - S_i ნედლეულის (რესურსის) მარაგი; a_{ij} (ე.წ. ტექნოლოგიური კოეფიციენტი), S_i ნედლეულის (რესურსის) რაოდენობა, რომელიც დაიხარჯება P_j პროდუქციის ერთი ერთეულის საწარმოებლად; c_j , P_j პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციით მიღებული შემოსავალი, ექნება შემდეგი სახე:

ვიპოვოთ $F(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, ფუნქციის მაქსიმუმი, თუ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i = \overline{1,m}, \qquad (1.1^*)$$

2. **რაციონის (ნარევის, შენადნობის, დიეტის) ამოცანა.**

პირუტყვის კვების დღიური რაციონი უნდა შეიცავდეს არანაკლებ 200 გრ. A ნივთიერებას, 120 გრ. B ნივთიერებას და 40 გრ. C ნივთიერებას. პირუტყვის გამოსაკვებად ფერმაში გამოიყენება P, Q, R სახის პროდუქტები. ცხრილში (ცხრ.1.2) მოცემულია პროდუქტების ერთ კილოგრამში ნივთიერებების შემცველობა და ამ პროდუქტების ფასი (ფულადი ერთეული/კგ).

უნდა განისაზღვროს კვების ისეთი რაციონი, რომელიც შეცავს ყველა ნივთიერებას საჭირო რაოდენობით და ამავე დროს, მისი ღირებულება იქნება მინიმალური.

ცხრილი 1.2.

ნივთიერება / პროდუქტი	A	B	C	ღირებულება
P	5	6	2	3
Q	2	4	1	2
R	18	3	1	5

აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3-ით შესაბამისად P, Q, R პროდუქტების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედიოდეს პირუტყვის კვების რაციონში. ამ შემთხვევაში A ნივთიერების მარაგი, რომელსაც მიიღებს პირუტყვი ყველა პროდუქტისაგან, გამოითვლება $5x_1+2x_2+18x_3$ ფორმულით. პირობის თანახმად ის არ უნდა იყოს 200 გრ-ზე ნაკლები. თუ ანალოგიურად ვიმსჯელებთ B და C ნივთიერებების მიმართ, საბოლოოდ მივიღებთ უტოლობათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &5x_1 + 2x_2 + 18x_3 \geq 200 \\ &6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 120 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

ამასთან რაციონის ღირებულება F ტოლი იქნება:

$$F = 3x_1+2x_2+5x_3 . \qquad (1.4)$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი მათემატიკური ამოცანა: მოცემულია უტოლობათა (1.3) სისტემა და მიზნის ფუნქცია (1.4). (1.3) სისტემის ამონახსნებს შორის უნდა ვიპოვოთ ისეთი ამონახსნი, რომელიც მიანიჭებს F ფუნქციას მინიმალურ მნიშვნელობას. ამ ამოცანას ზოგად შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

ვიპოვოთ $F(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, ფუნქციის მინიმუმი, თუ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ \ i = \overline{1, m}, \qquad (1.3^*)$$

სადაც n განსხვავებულ P_j $(j=1,2,\ldots,n)$ პროდუქტთა რაოდენობაა; m – განსხვავებულ S_i $(i=1,2,\ldots,m)$ ნივთიერებათა რაოდენობა; b_i არის S_i ნივთიერების აუცილებელი მინიმუმი, რომელიც გათვალისწინებულია რაციონში; a_{ij} არის S_i ნივთიერების რაოდენობა P_j პროდუქტის ერთ ერთეულში; c_j არის P_j პროდუქტის ერთი ერთეულის ფასი.

3. სატრანსპორტო ამოცანა.

A_1 და A_2 ქარხანა აწარმოებს ბეტონს B_1, B_2, და B_3 სამშენებლო უბნებისათვის. ქარხნების წარმადობა და სამშენებლო უბნების მოთხოვნილება ბეტონზე პირობით ერთეულებში მოცემულია ცხრილში (ცხრ.1.3). ცხრილში, აგრეთვე, მოცემულია ბეტონის ერთი ერთეულის გადაზიდვის ფასი ქარხნებიდან სამშენებლო უბნებზე.

ცხრილი 1.3.

სამშენებლო უბანი / ქარხანა	B_1	B_2	B_3	ქარხნის წარმადობა
A_1	1	1.1	1.8	400
A_2	1.7	2.3	1.5	300
მოთხოვნა	300	250	150	700=700

შევადგინოთ ქარხნებიდან სამშენებლო უბნებზე ბეტონის გადაზიდვის ისეთი გეგმა, რომლის შედეგად ყველა სამშენებლო უბნის მოთხოვნა დაკმაყოფილდება ბეტონის საჭირო რაოდენობით, ხოლო გადაზიდვების საერთო დანახარჯი იქნება მინიმალური.

აღვნიშნოთ x_{ij}–ით ბეტონის რაოდენობა, რომელიც უნდა გადაიზიდოს A_i ქარხნიდან B_j სამშენებლო უბანზე ($i=1,2$; $j=1,2,3$). მაშინ ბეტონის რაოდენობა, რომელიც გადაიზიდება A_1 და A_2 ქარხნებიდან B_1 უბანზე ტოლი იქნება $x_{11}+x_{21}$. მაგრამ B_1 უბანზე მოიხმარება ბეტონის 300 ერთეული, შესაბამისად, აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი ტოლობა:

$$x_{11}+x_{21}=300.$$

ანალოგიურად მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$x_{12}+x_{22}=250, \quad x_{13}+x_{23}=150.$$

მეორეს მხრივ, ბეტონის მთელი რაოდენობა, რომელიც A_1 ქარხნიდან იქნება გადაზიდული, გამოითვლება ფორმულით: $x_{11}+x_{12}+x_{13}$, რომელიც ცხადია ტოლი უნდა იყოს A_1 ქარხნის წარმადობის: $x_{11}+x_{12}+x_{13}=400$. ანალოგიური

მსჯელობით A_2 ქარხნისთვის მივიღებთ $x_{21}+x_{22}+x_{23}=300$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, გადაზიდვების საერთო ღირებულება F ტოლი იქნება:

$$F=x_{11}+1.7x_{21}+1.1x_{12}+2.3x_{22}+1,8x_{13}+1.5x_{23}. \qquad (1.5)$$

მაშასადამე, სატრანსპორტო ამოცანას ექნება შემდეგი მათემატიკური ფორმულირება:

მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} & x_{11}+x_{21}=300 \\ & x_{12}+x_{22}=250 \\ & x_{13}+x_{23}=150 \\ & x_{11}+x_{12}+x_{13}=400 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}=300 \\ & x_{ij}\geq 0,\ i=1.2;\ j=1,2,3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

და (1.5)-ით განსაზღვრული მიზნის ფუნქცია.

ვიპოვოთ (1.6) განტოლებათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც (1.5)-ით განსაზღვრულ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

სატრანსპორტო ამოცანის განზოგადოებული სახე და მისი ამოხსნის მეთოდები მოცემულია ცალკე პარაგრაფში (იხ. §10).

4. გამოჭრის ამოცანა.

ხის დამმუშავებელმა საამქრომ დამკვეთისათვის უნდა დაამზადოს ნაკრები სხვადასხვა ზომის ფიცრებისაგან. ყოველ ნაკრებში უნდა შედიოდეს სამი 30 სმ, ორი 75 სმ და ერთი 125 სმ სიგრძის ფიცარი. საამქროს გააჩნია ფიცრების ორი სახეობა: 1. 150 სმ სიგრძის 100 ცალი ფიცარი; 2. 140 სმ სიგრძის 200 ცალი ფიცარი.

ისმის კითხვა. როგორ უნდა დაიჭრას თითოეული ფიცარი (ჩამოყალიბდეს თარგი), რომ დამკვეთმა მიიღოს ნაკრებების მაქსიმალური რაოდენობა?

პირველი და მეორე სახეობის ფიცრების დაჭრის ყველა შესაძლო ვარიანტი, რომლის შედეგადაც მიიღება ნაკრებისათვის გათვალისწინებული ზომების ფიცრები, მოცემულია შესაბამის ცხრილებში (ცხრ. 1.4, ა,ბ).

x_i $(i = 1,2,3,4)$ ცვლადით აღნიშნულია პირველი სახეობიდან i-ური წესით დაჭრილი ფიცრების რაოდენობა, ხოლო y_j $(j = 1,2,3)$ კი - მეორე სახეობიდან j-ური წესით დაჭრილი ფიცრების რაოდენობა. ცხადია, რომ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=100,$$
$$y_1+y_2+y_3=200.$$

ცხრილი 1.4 ა

№	30	75	125	
1	5	–	–	x_1
2	2	1	–	x_2
3	–	2	–	x_3
4	–	–	1	x_4

ცხრილი 1.4 ბ

№	30	75	125	
1	4	–	–	y_1
2	2	1	–	y_2
3	–	–	1	y_3

დავთვალოთ პირველი სახეობის ფიცრების დაჭრის შედეგად მიღებული საჭირო ზომის ფიცრების რაოდენობა, მივიღებთ:

30 სმ: $5x_1+2x_2$; 75 სმ: x_2+2x_3; 125 სმ: x_4.

მეორე სახეობის ფიცრებიდან კი - გვექნება:

30სმ: $4y_1+2y_2$; 75სმ: y_2 ; 125სმ: y_3.

ვინაიდან ნაკრების აწყობისას არა აქვს მნიშვნელობა, თუ რომელი სახეობის ფიცრებია გამოყენებული, ამიტომ ჯამში გვექნება:

30სმ: $5x_1+2x_2+4y_1+2y_2$; 75სმ: $x_2+2x_3+y_2$; 125 სმ: x_4+y_3.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, სამართლიანია განტოლებები:

$$\frac{5x_1+2x_2+4y_1+2y_2}{3}=\frac{x_2+2x_3+y_2}{2}=x_4+y_3$$

თუ F-ით აღვნიშნოთ კომპლექტების საერთო რაოდენობას, მაშინ ცხადია, რომ

$$F=x_4+y_3. \qquad (1.7)$$

ამრიგად, გვექნება შემდეგი მათემატიკური ამოცანა: ვიპოვოთ (1.7)-ით მოცემული F წრფივი ფუნქციის მაქსიმუმი, თუ გვაქვს შეზღუდვათა შემდეგი პირობები:

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{5x_1 + 2x_2 + 4y_1 + 2y_2}{3} = x_4 + y_3 \\
\dfrac{x_2 + 2x_3 + y_2}{2} = x_4 + y_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\
y_1 + y_2 + y_3 = 200 \\
x_i \geq 0,\ y_j \geq 0,\ i = \overline{1,4};\ \ j = 1,2,3
\end{array}\right\} \qquad (1.8)
$$

ბუნებრივია, რომ ზემოთ განხილული ამოცანები არ ამოწურავენ პრაქტიკული ამოცანების ყველა ტიპებს, რომელთა ამოხსნაც შესაძლებელია მათემატიკური დაპროგრამების მეთოდებით, მაგრამ ისინი მაინც იძლევიან ზოგად წარმოდგენას ასეთი ამოცანების შესახებ. მიუხედავად ამ ამოცანების განსხვავებისა (განსაკუთრებით შინაარსით), ნათლად ჩანს მათი შესაბამისი მათემატიკური მოდელების მსგავსება. კერძოდ, ყველა შემთხვევაში დამოკიდებულება შემოღებულ ცვლადებს შორის წრფივია, ისევე როგორც საოპტიმიზაციო (მიზნის) ფუნქცია არის წრფივი.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის ძირითად პრინციპებში უკეთ გარკვევისათვის განვიხილოთ ერთი მარტივი ამოცანა.

განვიხილოთ მე-4 ამოცანის მსგავსი ამოცანა.

65 ცალი ერთ მეტრიანი ფიცრისაგან დასამზადებელია ნაკრებები, რომელშიც უნდა შედიოდეს 30 სმ ზომის ორი და 50 სმ ზომის სამი ფიცარი. ვიპოვოთ შესაძლო ნაკრებების მაქსიმალური რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აიწყოს.

ცხრ. 1.5-ში მოცემულია ფიცრების დაჭრის ყველა შესაძლო ვარიანტი, რომლის დროსაც მიიღება საჭირო ზომის ფიცრები. x_1, x_2, x_3-ით აღნიშნულია შესაბამისი წესით დაჭრილი ფიცრების რაოდენობა.

ცხრილი 1.5

№	30	50	
1	3	–	x_1
2	1	1	x_2
3	–	2	x_3

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად (მე-4 ამოცანა) და ამოცანის პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_2+2x_3}{3}\\ x_1+x_2+x_3=65\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{array}\right\} \qquad (1.9)$$

$$F=\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3. \qquad (1.10)$$

დასმული ამოცანის ამოხსნა მათემატიკურად ნიშნავს შემდეგს: ვიპოვოთ (1.9) სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც F ფუნქციას მიანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

(1.9) და (1.10)-დან მარტივად ვღებულობთ

$$\left.\begin{array}{l}9x_1+x_2-4x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=65\end{array}\right\} \qquad (1.11)$$

$$F=\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2. \qquad (1.12)$$

განტოლებათა (1.11) სისტემაში ორი სამცვლადიანი წრფივი განტოლებაა. განტოლებათა კოეფიციენტების მნიშვნელობები ისეთია, რომ ნებისმიერი ორი ცვლადი და მიზნის ფუნქცია შესაძლებელია გამოისახოს მე-3 ცვლადის საშუალებით. ეს გარდაქმნები საკმაოდ მარტივია. შესაძლებელია სამი შემთხვევა, კერძოდ:

1) $x_2=52-\dfrac{13}{5}x_1;\quad x_3=13+\dfrac{8}{5}x_1;\quad F=26+\dfrac{1}{5}x_1;$

2) $x_1=20-\dfrac{5}{13}x_2;\quad x_3=45-\dfrac{8}{13}x_2;\quad F=30-\dfrac{1}{13}x_2;$

3) $x_1=-\dfrac{65}{8}+\dfrac{5}{8}x_3;\quad x_2=\dfrac{585}{8}-\dfrac{13}{8}x_3;\quad F=\dfrac{195}{8}+\dfrac{1}{8}x_3;$

განვიხილოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე.

1) F ფუნქციის გამოსახულებიდან ჩანს, რომ x_1 ცვლადის უსასრულოდ ზრდა გამოიწვევს მის უსასრულოდ ზრდას, მაგრამ ვინაიდან $x_i\ge 0$ $(i=1,2,3)$, x_2-

ის შესაბამისი განტოლებიდან მივიღებთ: $x_1 \le 20$, ამიტომ $\max F = 26 + \frac{1}{5} \cdot 20 = 30$, ხოლო $x_2 = 0;\ x_3 = 45.$

2) პირდაპირ ჩანს, რომ F მიიღებს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას x_2 ცვლადის ნულოვანი მნიშვნელობისათვის $\max F = 30$, ხოლო $x_1 = 20;\ x_3 = 45$.

3) ამ შემთხვევაში ანალოგიურად პირველისა, გვექნება $13 \le x_3 \le 45,$ და $\max F = \frac{195}{8} + \frac{1}{8} \cdot 45 = 30$, როდესაც $x_3 = 45,$ ხოლო $x_1 = 20;\ x_2 = 0$.

ანალიზი გვიჩვენებს, რომ F ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა და x_1, x_2, x_3 ცვლადების მნიშვნელობები ყველა შემთხვევაში ერთნაირია. თუ პირველ და მესამე შემთხვევებში საჭირო იყო დამატებითი გამოკვლევის ჩატარება, მე-2 შემთხვევაში ეს მნიშვნელობები პირდაპირ მიიღება F ფუნქციის გამოსახულებიდან. ჩვენ შემდგომში ვნახავთ, რომ თუ მიზნის ფუნქციას გააჩნია მაქსიმალური (მინიმალური) მნიშვნელობა შესაბამის შეზღუდვათა პირობებში, მაშინ შესაძლებელია მისი წარმოდგენა უარყოფითი (დადებითი) კოეფიციენტებიანი გარკვეული ცვლადების საშუალებით. ამიტომ მიზნის F ფუნქცია მიიღებს თავის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას ამ ცვლადების ნულოვანი მნიშვნელობებისათვის. და თუ ამ დროს დანარჩენი ცვლადები მიიღებენ არაუარყოფით მნიშვნელობებს, მაშინ ეს იქნება ამოცანის ამონახსნიც.

ნაკრებების მაქსიმალური რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აიწყოს, 30-ის ტოლია. ამასთან პირველი წესით უნდა დაიჭრას 20 ფიცარი, ხოლო დანარჩენი 45 ფიცარი კი მესამე წესით. მეორე წესით არ უნდა დაიჭრას არცერთი ფიცარი.

თუ მოცემულ ამოცანაში დამატებით მოვითხოვთ, რომ ნარჩენები იყოს მინიმალური, მაშინ შეიცვლება მხოლოდ მიზნის ფუნქცია, შეზღუდვათა (1.11) პირობები იგივე დარჩება.

ვიპოვოთ ამ შემთხვევის შესაბამისი Φ მიზნის ფუნქციის გამოსახულება. ცხრ. 1.5-დან ჩანს, რომ ფიცრების დაჭრის პირველი წესის გამოყენებისას ყოველი ფიცრიდან დარჩება 10 სმ სიგრძის ნარჩენი, მე-2 წესით დაჭრისას - 20 სმ სიგრძის ნარჩენი, ხოლო მე-3 წესით დაჭრა უნარჩენოა. მაშასადამე, მიზნის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Phi = 10x_1 + 20x_2 \tag{1.13}$$

ამრიგად, ახალი პირობების გათვალისწინებით გვექნება შემდეგი მათემატიკური ამოცანა: ვიპოვოთ (1.11) განტოლებათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც Φ ფუნქცია მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

განხილული სამივე შემთხვევისათვის მიზნის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$1)\quad \Phi = 1040 - 42x_1;\ 2)\quad \Phi = 200 + \frac{210}{13}x_2;\quad 3)\quad \Phi = \frac{5525}{4} - \frac{105}{4}x_3;$$

პირველი და მესამე შემთხვევებიდან ჩანს, რომ Φ-ის მნიშვნელობა შემცირდება, თუ შესაბამისი ცვლადები გაიზრდება, ხოლო მეორე შემთხვევაში x_2 ცვლადის ზრდა გამოიწვევს Φ ფუნქციის გაზრდას, ამიტომ $\min \Phi = 200$, როდესაც $x_2 = 0$.

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ ზემოთ აღნიშნული წესებით ფიცრების დაჭრის შემთხვევაში აიწყობა არა მარტო ნაკრებების მაქსიმალური რაოდენობა, არამედ ნარჩენებიც იქნება მინიმალური 2 მ (10 სმ სიგრძის ფიცრის ფიცრის 20 ნაჭერი).

ამ ამოცანის განხილვისას ჩვენ შევეხეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნის სიმპლექს მეთოდს, რომელსაც უფრო ღრმად განვიხილავთ შემდეგში.

ჩამოვაყალიბოთ გამოჭრის ამოცანა ზოგადი შემთხვევისათვის.

საწარმომ დამკვეთისათვის უნდა ააწყოს k სხვადასხვა ნამზადებისაგან ნაკრებები მის განკარგულებაში არსებული სხვადასხვა სახის m მასალისაგან (მასალები განსხვავდებიან ფიზიკური ზომებით, ფორმით და სხვა). ყოველი

მასალა შესაძლებელია დაიჭრას n წესით, ამასთან i წესით დაჭრილი j-ური მასალისაგან (i=1,2,…,n; j=1,2,…,m) მიიღება k-ური სახის ნამზადის (k=1,2,…,l) a_{ij} რაოდენობა. საწარმოს გააჩნია j-ური მასალის მარაგი a_j რაოდენობით, ყოველ ნაკრებში უნდა შედიოდეს b_k რაოდენობის k სახის ნამზადი. თუ აღვნიშნავთ x-ით ასაწყობ ნაკრებთა რაოდენობას, ხოლო x_{ij}-ით i-ური წესით დაჭრილი j-ური სახის მასალების რაოდენობას, მაშინ გამოჭრის ამოცანის მათემატიკურ მოდელს ექნება შემდეგი სახე: ვიპოვოთ $F = x$ ფუნქციის მაქსიმუმი, თუ

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le a_j, \qquad j = \overline{1,\ m}; \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} a_{ijk} = b_k x, \quad k = \overline{1, l}; \end{aligned}\right\}. \tag{1.8*}$$

სავარჯიშოები

შეადგინეთ მათემატიკური მოდელი და ჩამოაყალიბეთ მათემატიკური არსი.

1.1 ორი A და B ტიპის პროდუქციის საწარმოებლად ქარხანა იყენებს S_1, S_2 და S_3 დასახელების ნედლეულს. სხვა პირობები მოცემულია ცხრილში:

ნედლეული	ერთი ერთეული პროდუქციისათვის საჭირო ნედლეულის რ-ბა, კგ		ნედლეულის რაოდენობა, კგ
	A	**B**	
S_1	12	4	300
S_2	4	4	120
S_3	3	12	252
ერთი ერთეულის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შემოსავალი, ლარი	3	4	

1.2 სამი A, B და C ტიპის პროდუქციის საწარმოებლად ქარხანა იყენებს S_1, S_2 და S_3 დასახელების ნედლეულს. სხვა პირობები მოცემულია ცხრილში:

ნედლეული	ერთი ერთეული პროდუქციისათვის საჭირო ნედლეულის რ-ბა, კგ			ნედლეულის რაოდენობა, კგ
	A	B	C	
S_1	18	15	12	360
S_2	6	4	8	192
S_3	5	3	3	180
ერთი ერთეულის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შემოსავალი, ლარი	9	10	11	

1.3 სამ პუნქტში განთავსებულია ერთი დასახელების პროდუქცია **450, 350** და **400** ტონის ოდენობით. აღნიშნული ტვირთი გადასაზიდია სამ პუნქტში შემდეგი მოთხოვნის შესაბამისად – **260** ტ, **520** ტ. და **420** ტ. ერთი ტონა ტვირთის გადაზიდვის ტარიფები მოცემულია შემდეგი მატრიცის სახით:

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

შეადგინეთ გადაზიდვის ოპტიმალური (მინიმალური დანახარჯებით) გეგმა.

1.4 შენობის გათბობისათვის გამოიყენება ოთხი აგრეგატი, რომელთაც შეუძლიათ იმუშაონ ხუთი სახეობის საწვავზე. მათი მარაგი შეადგენს შესაბამისად **90, 110, 70, 80** და **150** ტონას. ცნობილია თითოეული აგრეგატის მუშაობისათვის საჭირო საწვავის რაოდენობა – **80, 120, 140** და **160** ტონა შესაბამისად. ცნობილია, აგრეთვე, j-ური აგრეგატის მიერ i-ური საწვავის გამოყენების შედეგად გამომუშავებული სითბოს რაოდენობა, რომელიც მოცემულია შემდეგი მატრიცის სახით:

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

შეადგინეთ ნედლეულის ოპტიმალური გამოყენებისა და მაქსიმალური ენერგიის (სითბოს) მისაღები გეგმა.

§ 2. ᲬᲠᲤᲘᲕᲘ ᲓᲐᲞᲠᲝᲒᲠᲐᲛᲔᲑᲘᲡ ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲔᲑᲘᲡ ᲡᲮᲕᲐᲓᲐᲡᲮᲕᲐ ᲤᲝᲠᲛᲐ

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ეკონომიკური ხასიათის ამოცანები სხვადასხვა სფეროდან. ყველა მათგანში მოთხოვნილი იყო, მოგვეძებნა ოპტიმალური ამონახსნი.

დაგეგმვის ამოცანაში საჭირო იყო ისეთი ასორტიმენტის დაგეგმვა, რომელიც საწარმოს მისცემდა მაქსიმალურ შემოსავალს. დიეტის ამოცანაში საჭირო იყო მინიმალური დანახარჯებით საჭირო რაციონის შედგენა და ა.შ.

მიუხედავად ამ ამოცანების განსხვავებული შინაარსისა, მათი მათემატიკური მოდელები მსგავსი იყო. ყველგან შეზღუდვათა პირობები იყო წრფივი განტოლებები ან უტოლობები და ეფექტურობის მაჩვენებელი - მიზნის ფუნქციაც, აგრეთვე, იყო წრფივი.

ამ ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური არსი კი მდგომარეობს შემდეგში: მოცემულ შეზღუდვათა პირობებში უნდა ვიპოვოთ ცვლადთა ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც მიზნის ფუნქციას მიანიჭებენ ექსტრემუმს.

ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შექმნა და შესწავლა წარმოადგენს წრფივი დაპროგრამების საგანს. უფრო ზუსტად, წრფივი დაპროგრამება - ეს არის მათემატიკური დისციპლინა, რომელიც შეისწავლის ისეთ მეთოდებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელი ხდება მოიძებნოს მრავალი ცვლადის წრფივი ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები იმ პირობით, რომ ეს ცვლადები აკმაყოფილებენ სასრული რაოდენობის წრფივ განტოლებებს ან უტოლობებს. ცხადია, რომ ცვლადთა და პირობათა რაოდენობები შეიძლება იყოს ნებისმიერი. პრაქტიკულ ამოცანებში ისინი აღწევენ რამოდენიმე ათეულს ან ასეულს.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა (ᲬᲓᲐ) ყველაზე ზოგად შემთხვევაში შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

ვიპოვოთ ნამდვილი $(x_1, x_2, ... x_n)$ ვექტორის ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებათა ან უტოლობათა შემდეგ სისტემას:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j R_i b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

და მიანიჭებენ

$$F(x_1, x_2, ... x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.2}$$

წრფივ ფუნქციას ექსტრემალურ (მაქსიმალურ ან მინიმალურ) მნიშვნელობას, სადაც a_{ij}, b_i, c_j ნამდვილი რიცხვებია; R_i არის ერთ-ერთი "≤","≥","=" ნიშანი.

(2.1) სისტემას შეზღუდვათა სისტემა ეწოდება, ხოლო (2.2)-ით განსაზღვრულ $F = F(x_1, x_2, ... x_n)$ ფუნქციას – მიზნის ფუნქცია.

შეზღუდვათა (2.1) სისტემის ისეთ $(x_1, x_2, ... x_n)$ ამონახსნს, რომელიც (2.2)-ით განსაზღვრულ მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას, ეწოდება ოპტიმალური ამონახსნი, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას ოპტიმალურ ამონახსნზე კი – ოპტიმუმი. შესაბამისად, წდა-ის ამოხსნა ნიშნავს, მოიძებნოს მისი ოპტიმალური ამონახსნი და შესაბამისი ოპტიმუმი.

გარკვეული გარდაქმნების შედეგად (2.1)-(2.2) ᲬᲓᲐ შეიძლება დავიყვანოთ ისეთ ᲬᲓᲐ-ზე, რომელშიც ყველა ცვლადი ($(x_1, x_2, ... x_n)$ ვექტორის კომპონენტი) მიიღებს არაუარყოფით მნიშვნელობებს, ხოლო ყველა R_i იქნება ერთნაირი. ვაჩვენოთ ამ დებულებათა სამართლიანობა.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ, x_1 ცვლადს შეუძლია მიიღოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი მნიშვნელობა. ვინაიდან ნებისმიერი რიცხვი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი არაუარყოფითი რიცხვის სხვაობით, ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$x_1 = y - z, \tag{2.3}$$

სადაც $y \geq 0, z \geq 0$. თუ გავითვალისწინებთ (2.3)-ს, (2.1)-(2.2)-დან მივიღებთ:

$$(a_{i1}y - a_{i1}z + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j)R_i b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.4}$$

$$F = c_1 y - c_1 z + \sum_{j=2}^{n} c_j x_j. \tag{2.5}$$

ვთქვათ, ვექტორი $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ არის (2.1) სისტემის ამონახსნი, ე.ი.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j R_i b_i, \ \ i = \overline{1,m}. \tag{2.6}$$

თუ α_1-ს შევცვლით ორი არაუარყოფითი β და ν რიცხვების სხვაობით:

$$\alpha_1 = \beta - \nu, \tag{2.7}$$

მაშინ ვექტორი $(\beta, \nu, \alpha_2, ...\alpha_n)$იქნება (2.4) სისტემის ამონახსნი. მართლაც,

$$a_{i1}\beta - a_{i1}\nu + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}\alpha_j = a_{i1}(\beta - \nu) + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j R_i b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ ვექტორი $(\beta, \nu, \alpha_2, ...\alpha_n)$, სადაც $\beta \geq 0, \nu \geq 0$, არის (2.4) სისტემის ამონახსნი, მაშინ, თუ შემოვიტანთ α_1-ს (2.7)-ის ანალოგიურად, ვექტორი $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ იქნება (2.1)-ის ამონახსნი.

ასეთივე წესით შეგვიძლია დავამყაროთ შესაბამისობა (2.1)-სა და (2.4)-ის ოპტიმალურ ამონახსნებს შორის. ცხადია, ასეთი გარდაქმნების შედეგად ოპტიმუმი არ შეიცვლება.

თუ (2.3)-ის შესაბამისად გარდავქმნით ყველა ისეთ ცვლადს, რომელიც ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს (2.1)-ში, მაშინ ჶᲓᲐ დაიყვანება ისეთ ახალ ჶᲓᲐ-ზე, რომელშიც ყველა ცვლადი არაუარყოფითადაა განსაზღვრული და ოპტიმალური ამონახსნისა და ოპტიმუმის თვალსაზრისით ის ეკვივალენტურია (2.1)-(2.2) ამოცანის.

ვაჩვენოთ, როგორ შეიძლება (2.1) შეზღუდვათა სისტემა გარდაიქმნას ოპტიმალური ამონახსნის თვალსაზრისით ისეთ ეკვივალენტურ სისტემად, რომელშიც ყველა R_i ნიშანი იქნება ერთნაირი.

თუ (2.1.) სისტემაში საჭიროა, რომ ყველა R_i იყოს ერთი და იგივე მიმათულების უტოლობები, მაგალითად "≤" სახის, ამ შემთხვევაში ყველა სხვა მიმართულების უტოლობების ორივე მხარეს გავამრავლებთ (-1)-ზე, ხოლო განტოლებები შეიძლება შეიცვალოს უტოლობათა სისტემებით შემდეგი წესით: მაგალითად, განტოლება

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

შეიძლება შეიცვალოს უტოლობათა შემდეგი სისტემით:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \qquad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le -b.$$

ცხადია, ასეთი გარდაქმნით ოპტიმალური ამონახსნი, თუ ის არსებოს, არ შეიცვლება.

თუ (2.1.) სისტემაში საჭიროა, რომ ყველა R_i იყოს "=", უტოლობების გარდასაქმნელად გამოვიყენოთ ახალი ცვლადების შემოტანის შემდეგი მეთოდი: მაგალითად, უტოლობა

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

რომ გადავაქციოთ განტოლებად, შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი x_{n+1}, შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$x_{n+1} = b - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

საიდანაც

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + x_{n+1} = b.$$

ცხადია, რომ $x_{n+1} \ge 0.$

ანალოგიურად, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$ უტოლობის შემთხვევაში, არაუარყოფითი x_{n+1} ცვლადი უნდა განისაზღვროს შემდეგი დამოკიდებულებიდან:

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b.$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ: შეზღუდვათა (2.1) სისტემა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ ისეთ ფორმაზე, სადაც ყველა შეზღუდვას ექნება ერთი და იგივე სახე (განტოლებები ან ერთი ნიშნის უტოლობები), ხოლო ცვლადები მიიღებენ მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს. შემდგომში ჩვენი კვლევის ძირითადი საგანი იქნება ისეთი წრფივი დაპროგრამების ამოცანები, რომელშიც შეზღუდვებს ექნებათ ერთი და იგივე სახე, ხოლო ცვლადები მიიღებენ მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს. ამონახსნთა ისეთ სიმრავლეს, რომელთა კომპონენტები აკმაყოფილებენ არაუარყოფითობის პირობას, ეწოდება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე (დას).

ვინაიდან სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$\max F = -\min(-F),$$
$$\min F = -\max(-F),$$

ამიტომ მაქსიმუმის ამოცანა ყოველთვის შეიძლება შევცვალოთ მინიმუმის ამოცანით და პირიქით.

WDA-ს ეწოდება სტანდარტული თუ შეზღუდვები ერთი და იგივე ნიშნის უტოლობებია (WDSA), ამასთან თუ შეზღუდვები “$\leq$” ნიშნის უტოლობებია, გვექნება მაქსიმუმის ამოცანა, საწინააღმდეგო ნიშნის უტოლობებისათვის კი – მინიმუმის ამიცანა, ხოლო თუ შეზრუდვები განტოლებებია – წრფივი დაპროგარამების კანონიკური (ძირითადი) ამოცანა (WDKA ან WDZA), ამასთან შესაძლებელია ამ შემთხვევაში გვქონდეს, როგორ მაქსიმუმის, ისე მინიმუმის ამოცანა. სხვა შემთხვევაში გვექნება წრფივი დაპროგარამების ე.წ. ზოგადი ამოცანა (WDZA). ზემოთ მოყვანილი მეთოდებით WDA-ის ნებისმიერი კონსტრუქცია შესაძლებელია გარდაიქმნას სხვა ნებისმიერ კონსტრუქციად ისე, რომ ამონახსნთა სიმრავლეები იქნებიან ეკვივალენტური, ხოლო ოპტიმუმები კი – ტოლი, ამიტომ ნებისმიერი წინადადება, ან მსჯელობა, რომელიც

სამართლიანი არის რომელიმე კონსტრუქციის წდა-თვის, სამართლიანი იქნება მისი ეკვივალენტურისათვისაც.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ წრფივი დაპროგრამების **ძირითადი თეორემა.**

იმისათვის, რომ ᲬᲓᲙᲐ-ს ჰქონდეს ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ᲓᲐს არ იყოს ცარიელი და მიზნის ფუნქცია მასზე იყოს შემოსაზღვრული შესაბამისი მხრიდან (მინიმუმის ამოცანისათვის – ქვემოდან, ხოლო მაქსიმუმის ამოცანისათვის – ზემოდან).

ყოველ კონკტერულ შემთხვევაში ᲬᲓᲐ-ის ის ფორმა უნდა იყოს შერჩეული, რომელიც გამოთვლებისათვის და მიღებული შედეგის ანალიზისათვის უფრო მოსახერხებელი იქნება. მაგალითად, სიმპლექს მეთოდში, რომელიც წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე უფრო გავრცელებულ ანალიზურ მეთოდს ᲬᲓᲐ-ს ამოხსნისათვის, გამოიყენება განტოლებათა შეზღუდვები. ეს შემთხვევა განვიხილოთ უფრო დეტალურად.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \qquad i=\overline{1,m}. \tag{2.8}$$

და მიზნის ფუნქცია

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{2.9}$$

საპოვნელია F ფუნქციის მაქსიმუმი.

წრფივი ალგებრის მეთოდებით, თუ (2.8) სისტემა თავსებადია, ყოველთვის შეიძლება გამოიყოს $r \le \min(m,n)$ წრფივად დამოუკიდებელი განტოლებები (ე.ი. განტოლებათა ისეთი ქვესისტემა, რომელშიაც არცერთი განტოლება არ იქნება დანარჩენების წრფივი კომბინაცია), რომლებიც შექმნიან მოცემული (2.8) სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას. ზოგადობის შეუზღუდავად, ჩავთვალოთ, რომ $r=m,$ ე.ი. $m \le n.$ თუ $m=n$ და ამონახსნი დასაშვებია, ის იქნება ოპტიმალური, ხოლო თუ ამონახსნი არ არის დასაშვები, მაშინ ᲬᲓᲐ არ იქნება ამოხსნადი.

ამრიგად, საინტერესო ხდება მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც $m<n.$ ამ შემთხვევაში (2.8) განტოლებათა სისტემას ექნება ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, რომ (2.8) განტოლებათა სისტემაში არსებობს $r=m$ ბაზისური (ძირითადი) ცვლადები, რომლებიც წრფივად გამოისახებიან დანარჩენი $n-m=k$ თავისუფალი (დამხმარე) ცვლადების საშუალებით.

ცვლადები (2.8) სისტემაში ყოველთვის შესაძლებელია ისე გადაინომროს, რომ ბაზისური იყოს პირველი m ცვლადი, ხოლო დანარჩენი კი – თავისუფალი. ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ (2.8) სისტემის ეკვივალენტური სისტემა:

$$x_i = p_i - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j, \qquad i=\overline{1,m}; \tag{2.10}$$

თუ (2.10) სისტემას გავითვალისწინებთ F ფუნქციის (2.9) წარმოდგენაში, გვექნება:

$$F = p_0 - \sum_{j=m+1}^{n} q_j x_j. \tag{2.11}$$

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ $(2.1)-(2.2)$ ᲬᲓᲐ შეიძლება დავიყვანოთ მის ეკვივალენტურ $(2.8)-(2.9)$ ᲬᲓᲙᲐ-ზე. ვინაიდან $x_i \geq 0,$ (2.10) სისტემიდან შეგვიძლია მივიღოთ ᲬᲓᲐ უტოლობა შეზღუდვებით, ანუ ᲬᲓᲡᲐ:

$$\sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j \leq p_i, \qquad i=\overline{1,m}. \tag{2.12}$$

შევნიშნოთ, რომ ᲬᲓᲙᲐ შესაძლებელია ჩაიწეროს მატრიცული ფორმითაც:

$$F = CX \to \max(\min), \tag{2.13}$$

$$AX(R)B, \;\; X \geq 0, \tag{2.14}$$

სადაც

$$C=(c_1,c_2,...,c_n);\; A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ...\;...\;...... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

(R) არის ერთერთი $=, \leq, \geq$ ნიშანი.

აქ $(R)-$ით აღნიშნული ნიშანი ერთმანეთთან აკავშირებს მატრიცების შესაბამის კომპონენტებს. $X \geq 0$ ნიშნავს, რომ X ვექტორის ყველა კომპონენტი არაუარყოფითია.

სავარჯიშოები

ჩაწერეთ კანონიკური სახით შემდეგი ამოცანები.

2.1 $F=x_1+6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \geq 9 \\ -x_1+2x_2 \geq 7 \\ 3x_1+2x_2 \leq 17 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.2 $F=2x_1+x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_1+x_2 \geq 9 \\ x_1+2x_2 \leq 12 \\ 2x_1+x_2 \geq 3 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.3 $F=x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \leq 13 \\ -4x_1 \leq 8 \\ 3x_2 \geq 9 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.4 $F=2x_1+x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+7x_2 \geq 9 \\ 2x_1+x_2 \leq 7 \\ x_1-9x_2 \geq 11 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.5 $F=x_1+x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \leq 11 \\ -5x_1-x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.6 $F=x_1+7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 \geq 12 \\ 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1-x_2 \leq 5 \\ x_1,x_2 \geq 0. \end{cases}$$

§ 3. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების გეომეტრიული არსი

წრფივი დაპროგრამების ამოცანის (წდა) გეომეტრიული თვალსაჩინოებისა და შემდეგი საკითხების გადმოცემის სიმარტივისათვის დეტალურად განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც (2.8) განტოლებათა სისტემაში m=n-2, ე.ი. როდესაც თავისუფალ ცვლადთა რაოდენობა ორის ტოლია $(k = m - n = 2)$. ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ წრფივი დაპროგრამების სტანდარტული ამოცანის (წდსა) ფორმა მინიმუმის საპოვნელად:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \qquad i = \overline{1, m} \tag{3.1}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{3.2}$$

თუ x_1 და x_2 აღვნიშნავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ღერძებს სიბრტყეზე, მაშინ ცხადია, რომ **დას** იქნება რაღაც ბრტყელი სიმრავლე (ფიგურა), რომელიც მოთავსებულია I მეოთხედში.

სიბრტყის რაიმე სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი მთლიანად მდებარეობს ამ სიმრავლეში.

ამოზნექილი სიმრავლის მაგალითებია: წერტილი, წრფე, წრფის მონაკვეთი, სიბრტყე, ნახევარსიბრტყე, წრე, ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედი და სხვა. თუ ჩავთვლით, რომ ცარიელი სიმრავლეც ამოზნექილია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ამოზნექილ სიმრავლეთა თანაკვეთა ამოზნექილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A და B ამოზნექილი სიმრავლეებია. თუ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ცარიელია, მაშინ ის ამოზნექილია შეთანხმების გამო. ასევე $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ იქნება ამოზნექილი, თუ ის ერთი წერტილისაგან შედგება. დავუშვათ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ შეიცავს ორ წერტილს მაინც. ვთქვათ, M_1, M_2 ორი განსხვავებული წერტილია $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$-დან $(\mathrm{M_i} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{i} = 1{,}2)$. მაშინ გადაკვეთის ოპერაციის შინაარსიდან გამომდინარე, $\mathrm{M_i} \in \mathrm{A}$ და $\mathrm{M_i} \in \mathrm{B}, \mathrm{i} = 1{,}2$. ვინაიდან A და B ამოზნექილი

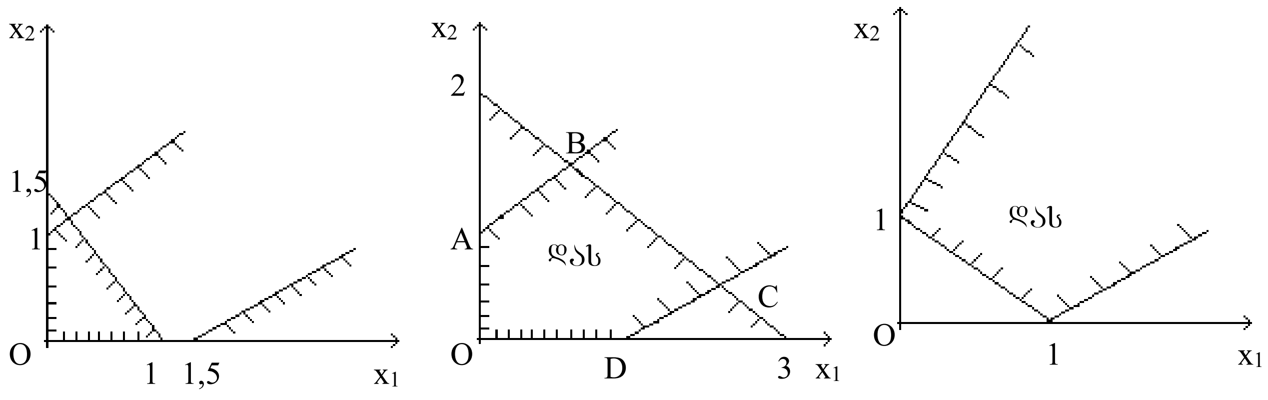
სიმრავლეებია, ამიტომ M_1M_2 მონაკვეთი მდებარეობს ორივე სიმრავლეში: $M_1M_2 \subset A$ და $M_1M_2 \subset B$. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ $M_1M_2 \subset A \cap B$ (M_1M_2 მონაკვეთი მდებარეობს A და B სიმრავლეების თანაკვეთაში). შესაბამისად, თეორემა დამტკიცებულია. ცხადია, რომ თეორემა იქნება სამართლიანი ნებისმიერი სასრული რაოდენობა სიმრავლეთა თანაკვეთისათვისაც.

როგორც ცნობილია, წრფის ზოგად განტოლებას სიბრტყეზე აქვს შემდეგი სახე $ax_1 + bx_2 = c, \ (a^2 + b^2 \neq 0)$. ის სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად. ერთ ნახევარ- სიბრტყეში წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ $ax_1 + bx_2 < c$ უტოლობას, ხოლო მეორეში კი $ax_1 + bx_2 > c$ უტოლობას. იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ რო-მელ ნახევარსიბრტყეს ქმნის $ax_1 + bx_2 < c$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე, საკმარისია რომელიმე წერტილის კოორდინატებისათვის გამოვთვალოთ $ax_1 + bx_2$ გამოსახულების მნიშვნელობა. თუ ეს მნიშვნელობა ნაკლები იქნება c-ზე, მაშინ ამონახსნთა სიმრავლე იქნება ის ნახევარსიბრტყე, რომელშიაც ეს წერტილი მდებარეობს, ხოლო თუ ის აღმოჩნდება მეტი c-ზე, მაშინ ამონახსნთა სიმრავლე იქნება წრფის მეორე მხარეს მდებარე ნახევარსიბრტყე, ხოლო თუ ის c-ს ტოლი იქნება, მაშინ წერტილი ამ წრფეზე მდებარეობს. გამოთვლების გამარტივების მიზნით, თუ $c \neq 0$, საცდელ წერტილად უმჯობესია გამოვიყენოთ კოორდინატთა სათავე.

ზემოთ თქმულიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ (3.1) შეზღუდვათა შესაბამისი დპს არის ბრტყელი ამოზნექილი სიმრავლე, რომელიც ზოგადად სასრული ან უსასრულო მრავალკუთხედი იქნება. ამ მრავალკუთხედის საზღვრები (გვერდები) იქნება (3.1) სისტემით მოცემული ზოგიერთი წრფის სასრული მონაკვეთი ან სხივი. მაგალითად:

ა) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3; \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 3; \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 - x_2 \leq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ -2x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 - 2x_2 \leq 1; \end{cases}$

უტოლობათა სისტემების შესაბამისი დას-ები მოცემულია ნახ. 3.1 ა,ბ,გ.



ა. ბ. გ.

ნახ. 3.1.

ნახაზებიდან ჩანს, რომ

ა) უტოლობათა სისტემის შესაბამისი **დას** არის ცარიელი სიმრავლე;

ბ) უტოლობათა სისტემის შესაბამისი **დას** არის OABCD ამოზნექილი ხუთკუთხედი;

გ) უტოლობათა სისტემის შესაბამისი **დას** არის უსასრულო სიმრავლე.

(3.2) ფორმულით მოცემული მიზნის ფუნქცია ნებისმიერი c რიცხვითი მნიშვნელობისათვის $(F = c)$ წარმოადგენს წრფეს, რომელსაც ეწოდება ფუნქციის დონის წრფე c-ს შესაბამისი მნიშვნელობით

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = c \tag{3.3}$$

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ $\vec{N}(c_1, c_2)$ ვექტორი არის (3.3.) განტოლებით განსაზღვრული ყველა წრფის მართობი და მისი მიმართულება ემთხვევა F ფუნქციის ზრდის მიმართულებას (ის არის F ფუნქციის გრადიენტი).

ცხადია, რომ **დას** და (3.3) განტოლებით მოცემული დონის წრფის საერთო ნაწილზე ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ c-ს ტოლ მნიშვნელობას. სამართლიანია, აგრეთვე, შებრუნებული დებულებაც.

თეორემა. თუ (3.1) უტოლობათა სისტემის შესაბამისი ᲓᲐᲡ-ის განსხვავებულ ორ წერტილზე მიზნის ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაშინ ამ წერტილებზე გამავალი წრფე იქნება ფუნქციის დონის წრფე.

მართლაც, ვთქვათ $\mathrm{A}(\alpha_1,\alpha_2)$ და $\mathrm{B}(\beta_1,\beta_2)$ ორი განსხვავებული წერტილია ᲓᲐᲡ-ში ($\alpha_1 \neq \beta_1$ ან $\alpha_2 \neq \beta_2$ ჩავთვალოთ, რომ $\alpha_1 \neq \beta_1$) და $F(A)=F(B)=c$ ანუ

$$\left.\begin{aligned} c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 &= c \\ c_1\beta_1 + c_2\beta_2 &= c \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

(3.4) სისტემის განტოლებებიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$c_1(\beta_1-\alpha_1)+c_2(\beta_2-\alpha_2)=0,$$

ანუ

$$\frac{c_1}{c_2}=-\frac{\beta_2-\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}. \tag{3.5}$$

A და B წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{x_2-\alpha_2}{x_1-\alpha_1}=-\frac{\beta_2-\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}.$$

(3.6)

თუ (3.6) განტოლებაში გავითვალისწინებთ (3.5) განტოლებას, მივიღებთ

$$c_1(x_1-\alpha_1)+c_2(x_2-\alpha_2)=0,$$

ანუ

$$c_1x_1+c_2x_2=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=c. \tag{3.7}$$

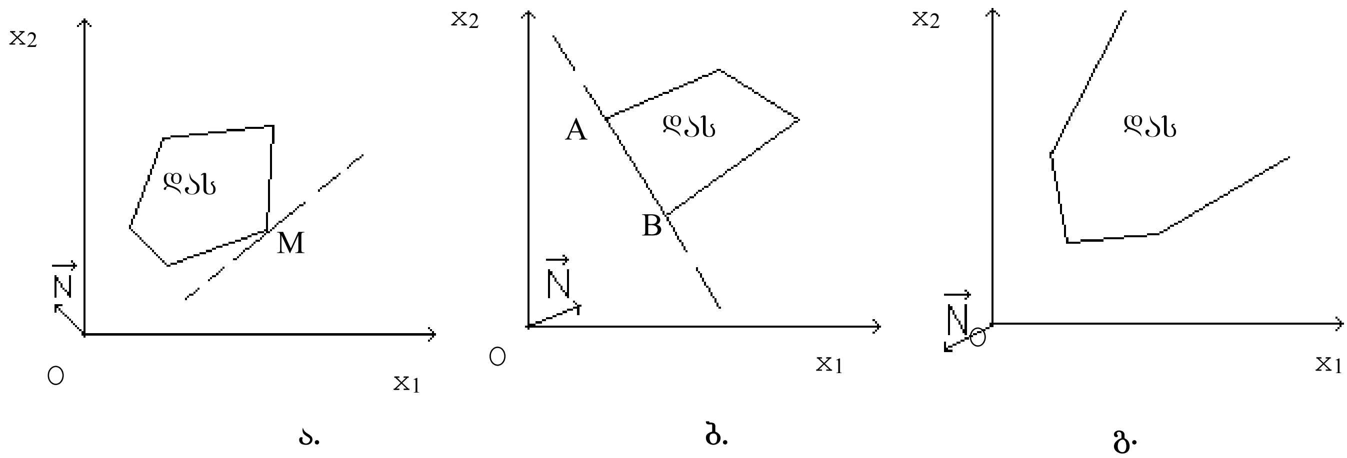
(3.7) და (3.3) განტოლებების შედარებით, ვრწმუნდებით, რომ A და B წერტილებზე გამავალი წრფე მართლაც არის F ფუნქციის დონის წრფე c მნიშვნელობით.

შენიშვნა. (3.5) განტოლებაში იგულისხმებოდა, რომ $c_2 \neq 0$. თუ $c_2=0$ მაშინ $F=c_1x_1$, $c_1 \neq 0$ და შესაბამისი მსჯელობით მივიღებთ იგივე შედეგს.

ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, ცხადი ხდება, რომ თუ დონის წრფეს გადავაადგილებთ $\vec{N}$ ვექტორის მიმართულებით, მაშინ F მიზნის ფუნქცია მიიღებს თავის უმცირეს მნიშვნელობას **დას**-ის იმ ნაწილში, რომელიც პირველად გადაიკვეთება დონის წრფესთან და ეს მნიშვნელობა ტოლი იქნება c პარამეტრის შესაბამისი მნიშვნელობის $(\min F = c)$.

დას-ის სტრუქტურიდან გამომდინარე, მისი ეს ნაწილი იქნება საზღვარზე განლაგებული წერტილები (თუ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი).

ნახ. 3.2 ა,ბ,გ-ზე შესაბამისად ნაჩვენებია ის შემთხვევები, როდესაც **წდზა** აქვს ერთადერთი ამონახსნი (M წერტილი), ამოხსნათა უსასრულო სიმრავლე (AB მონაკვეთი) და ამონახსნი რომ არ გააჩნია.



ნახ. 3.2.

ამოზნექილი სიმრავლის წერტილს ეწოდება კიდურა წერტილი, თუ ის არ წარმოადგენს არც ერთი წრფივი მონაკვეთის შიგა წერტილს, რომელიც მთლიანად მდებარეობს ამ სიმრავლეში. მაგალითად, ცალკე აღებული წერტილი თვითონ კიდურაა, წრფის მონაკვეთისათვის კიდურა იქნებიან მისი საწყისი და ბოლოო წერტილები, ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალკუთხედისათვის მისი წვეროები იქნებიან კიდურა წერტილები, წრის კიდურა წერტილებია მისი შემომსაზღვრელი წრეწირის წერტილები და სხვა. ცხადია, რომ ცარიელ სიმრავლეს კიდურა წერტილები არ გააჩნია.

თეორემა. თუ ᲬᲓᲡᲐ-ს აქვს ამონახსნი, მაშინ ის მიიღწევა ᲓᲐᲡ-ის რომელიმე კიდურა წერტილში

ეს თეორემა დავამტკიცოთ ჯერ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ამონახსნი ერთადერთია. ვთქვათ, $\mathrm{A}(\alpha_1,\alpha_2)$ არის ᲬᲓᲖᲐ-ს ერთადერთი ამონახსნი. ე.ი. ნებისმიერი $M(x_1,x_2)$ წერტილისათვის, რომელიც განსხვავდება A წერტილისაგან $\mathrm{F}(\mathrm{A})<\mathrm{F}(\mathrm{M})$. ვაჩვენოთ, რომ A კიდურა წერტილია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაშინ ᲓᲐᲡ-ში არსებობს ისეთი ორი $\mathrm{M}_1(\beta_1,\beta_2), \mathrm{M}_2(\gamma_1,\gamma_2)$ წერტილი, რომ A წერტილი იქნება $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ მონაკვეთის შიგნით ე.ი. სამართლიანი შემდეგი განტოლებები:

$$\alpha_\mathrm{i} = \lambda\beta_\mathrm{i} + (1-\lambda)\gamma_\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}=1,2.$$

(3.8)

სადაც $\lambda \in (0,1)$.

გამოვთვალოთ F ფუნქციის მნიშვნელობა A წერტილზე. (3.8) განტოლების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\begin{aligned} F(A) &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = c_1(\lambda\beta_1 + (1-\lambda)\gamma_1) + c_2(\lambda\beta_2 + (1-\lambda)\gamma_2) = \\ &= \lambda(c_1\beta_1 + c_2\beta_2) + (1-\lambda)(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2) = \\ &= \lambda F(M_1) + (1-\lambda)F(M_2) > \lambda F(A) + (1-\lambda)F(A) = F(A) \end{aligned}$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომ $F(A) > F(A)$. ეს წინააღმდეგობა კი ამტკიცებს ჩვენს თეორემას.

იმ შემთხვევაში, თუ ᲬᲓᲡᲐ-ს აქვს ერთზე მეტი ამონახსნი, მაშინ ისინი ᲓᲐᲡ-ის საზღვარზე მდებარე წრფის მონაკვეთებზე ან სხივზე მდებარეობენ, რომელზედაც მიზნის ფუნქციას ერთნაირი მნიშვნელობები აქვს. მაგრამ მონაკვეთსაც და სხივსაც გააჩნია კიდურა წერტილები და მაშასადამე, თეორემა ამ შემთხვევაშიც სამართლიანი იქნება.

წრფეს, რომელსაც ᲓᲐᲡ-თან აქვს ერთი საერთო წერტილი მაინც და ᲓᲐᲡ მთლიანად ამ წრფის ერთ მხარეს მდებარეობს, ეწოდება ᲓᲐᲡ-ის საყრდენი წრფე.

ცხადია, რომ თუ ᲬᲓᲡᲐ აქვს ამონახსნი, მაშინ ის დონის წრფე, რომელიც შეესაბამება მიზნის ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას, იქნება, აგრეთვე, საყრდენი წრფე.

ზემოთ ნათქვამის გათვალისწინებით, ᲬᲓᲡᲐ-ს სიბრტყეზე შეიძლება მიეცეს შემდეგი ფორმულირება:

F მიზნის ფუნქციის დონის წრფეებს შორის ვიპოვოთ ის საყრდენი წრფე, რომლის მიმართ დას მთლიანად მდებარეობს F ფუნქციის დიდ მნიშვნელობათა მხარეს.

თუ ᲓᲐᲡ შემოსაზღვრულია, მაშინ F ფუნქციის დონის წრფეებს შორის იქნება ორი საყრდენი წრფე. ერთი მათ შორის იქნება F-ის მინიმალური მნიშვნელობის შესაბამისი, მეორე კი - მაქსიმალურის.

ზემოთ მოყვანილი დებულებები ფაქტობრივად გვაძლევენ წესს, თუ როგორ ვიპოვოთ ᲬᲓᲡᲐ-ს ამონახსნი სიბრტყეზე. დონის წრფეებს შორის უნდა ვიპივოთ ის საყრდენი წრფე, რომელიც მიანიჭებს F-ს მინიმალურ მნიშვნელობას. თუ ასეთი წრფე არ არსებობს, ეს ნიშნავს, რომ მოცემულ ᲬᲓᲡᲐ-ს ამონახსნი არ გააჩნია. ჩვენი მოქმედების კონტროლის მიზნით შეგვიძლია ᲓᲐᲡ-ის ,,საეჭვო" კიდურა წერტილებში (მრავალკუთხედის ,,საეჭვო" წვეროები) გამოვთვალოთ F-ის მნიშვნელობები და ამოვარჩიოთ უმცირესის შესაბამისი წერტილი. თუ ჩვენ სწორად ვიმოქმედებთ, მაშინ ასეთი წესით ნაპოვნი წერტილი უნდა დაემთხვეს საყრდენი წრფით ნაპოვნ წერტილს.

ამოვხსნათ გეომეტრიული მეთოდით სატრანსპორტო ამოცანა (§ 1, მე-3 ამოცანა). თავიდან შევნიშნოთ, რომ (1.6) სისტემაში განტოლებები წრფივად დამოკიდებულია. მართლაც, თუ შევკრიბავთ პირველ სამ განტოლებას და შემდეგ მას გამოვაკლებთ მე-4 განტოლებას, მივიღებთ ამ სისტემის ბოლო განტოლებას. მაშასადამე, (1.6) არის ეკვივალენტური შემდეგი განტოლებათა სისტემის:

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 300 \\ x_{12} + x_{22} &= 250 \\ x_{13} + x_{23} &= 150 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 400 \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

(3.9) განტოლებათა სისტემაში ექვსი ცვლადია და ოთხი განტოლება. მაშასადამე, გვექნება ოთხი ბაზისური და ორი თავისუფალი ცვლადი. თავისუფალ ცვლადებად ავირჩიოთ x_{11} და x_{12} ცვლადები, მაშინ ბაზისური იქნებიან $x_{21}, x_{22}, x_{13}, x_{23}$ ცვლადები. (3.9)-დან მარტივად მივიღებთ მის ეკვივალენტურ განტოლებათა სისტემას

$$\left.\begin{aligned} x_{21} &= 300 - x_{11} \\ x_{22} &= 250 - x_{12} \\ x_{23} &= 400 - x_{11} - x_{12} \\ x_{23} &= -250 + x_{11} + x_{12} \end{aligned}\right\}$$

(3.10)

თავისუფალ ცვლადებში (1.5) განსაზღვრული F მიზნის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

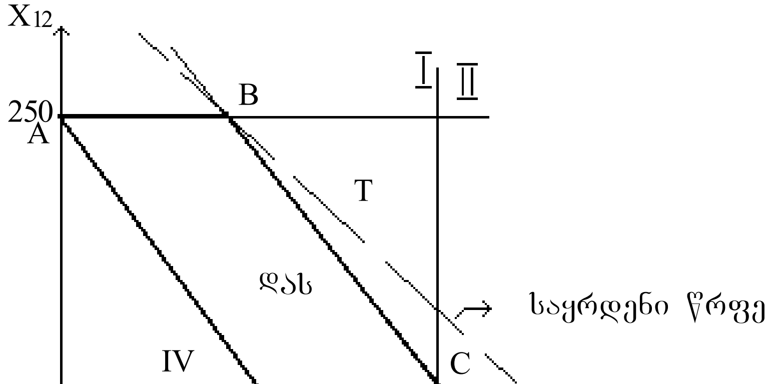
$$F = 1430 - x_{11} - 1{,}5x_{12}\,. \qquad (3.11)$$

ვინაიდან (3.10) განტოლებათა სისტემაში შემავალი ყველა ცვლადი არაუარყოფითია, ამიტომ ვღებულობთ უტოლობათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x_{11} \le 300 \\ \mathrm{II} & x_{12} \le 250 \\ \mathrm{III} & x_{11} + x_{12} \le 400 \\ \mathrm{I}V & -(x_{11} + x_{12}) \le -250 \end{array}\right\}. \qquad (3.12)$$

ამრიგად, ჩვენი ამოცანა შეიძენს შემდეგ შინაარსს:

ვიპოვოთ (3.12) სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც (3.11) განსაზღვრულ F მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამ ამოცანის ამოხსნა მოცემულია ნახ. 3.3-ზე.



ნახ. 3.3.

ნახაზზე I, II, III და IV აღნიშნავენ წრფეებს, რომელთა განტოლებები მიიღებიან (3.12) სისტემიდან, როდესაც შესაბამის უტოლობაში განიხილება მხოლოდ ტოლობა. ᲓᲐᲡ წარმოადგენს ABCDE ხუთკუთხედს. $\vec{N}$ ვექტორი, რომლის საწყისი წერტილი კოორდინატთა სისტემის სათავეს წარმოადგენს უჩვენებს F ფუნქციის ზრდის მიმართულებას.

BT არის F ფუნქციის დონის წრფე, რომელიც ამავე დროს წარმოადგენს დას-ის მიმართ საყრდენ წრფეს. მაშასადამე B წერტილზე F ფუნქცია აღწევს თავის მინიმალურ მნიშვნელობას. გამოვთვალოთ ეს მნიშვნელობა. ამისათვის ვიპოვოთ B წერტილის კოორდინატები. ვინაიდან B არის II და III წრფეების გადაკვეთის წერტილი, ამიტომ უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l} x_{12} = 250 \\ x_{11} + x_{12} = 400 \end{array}\right\}. \tag{3.13}$$

(3.13)-დან ვღებულობთ, რომ B წერტილის კოორდინატებია (150;250) ამიტომ

$$\min F = F(B) = 1430 - 150 - 375 = 905.$$

იგივე წესით შეგვიძლია ვიპოვოთ ABCDE ხუთკუთხედის ყველა წერტილის კოორდინატები და მათზე გამოვთვალოთ F ფუნქციის მნიშვნელობები, შესაბამისად, მივიღებთ:

$$\begin{array}{llll} A(0,250); & C(300,100); & D(300,0); & E(250,0); \\ F(A) = 1055; & F(C) = 980; & F(D) = 1130; & F(E) = 1180. \end{array}$$

F ფუნქციის ამ მნიშვნელობების შედარება, გვარწმუნებს იმაში, რომ ჩვენ სწორად ვიპოვეთ ამონახსნი.

(3.10) განტოლებათა სისტემიდან შეგვიძლია გამოვთვალოთ ბაზისური ცვლადების მნიშვნელობები:

$$x_{21} = 150;\ x_{22} = 0;\ x_{13} = 0;\ x_{23} = 150. \tag{3.14}$$

თუ გავიხსენებთ ამ ცვლადების თავდაპირველ შინაარსს, შეგვიძლია დავასკვნათ: იმისათვის რომ ბეტონის გადაზიდვებზე გაწეული ხარჯი იყოს მინიმალური, აუცილებელია A_1 ქარხნიდან ბეტონის 150 ერთეული გადაიზიდოს B_1 სამშენებლო უბნებზე, ხოლო დარჩენილი 250 ერთეული B_2 უბანზე. A_2 ქარხნიდან B_1 უბანს უნდა მიეწოდოს მისთვის კიდევ საჭირო 150 ერთეული, ხოლო დარჩენილი ბეტონის 150 ერთეული უნდა გადაიზიდოს B_3 უბანზე. გადაზიდვების ამ გრაფიკში ნებისმიერი ცვლილებების შეტანა შესაბამისად გამოიწვევს საერთო ხარჯის გაზრდას.

ყველაზე ,,უარესი" გადაზიდვების გეგმა შეესაბამება E(250,0) წერტილს. ამ შემთხვევაში გადაზიდვების საერთო ხარჯი მაქსიმალურია $\max F = 1180$. მკითხველს არ გაუჭირდება შეადგინოს გადაზიდვების შესაბამისი გეგმა.

სავარჯიშოები

ამოხსენით გეომეტრიული მეთოდით შემდეგი ამოცანები:

3.1. $F = 2x_1 + 6x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2. $F = 2x_1 + x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3. $F = x_1 + x_2 \to \max(\min)$

3.4. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.5. $F = x_1 + x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.6. $F = x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.7. $F = x_1 - x_2 \to \max, (\min)$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3.8. $F = x_1 + x_2 \to \max, (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

§ 4. სიმპლექს მეთოდის ალგებრა

წინა პარაგრაფში ჩვენ გავეცანით ԽԴԱ ამოხსნის გეომეტრიულ მეთოდს სიბრტყეზე. პრინციპში, ასეთივე მეთოდით შესაძლებელია ამოიხსნას ԽԴԱ სივრცეშიც. ამ შემთხვევაში (2.8) შეზღუდვათა სისტემაში $m = n - 3$ და ԴԱՍ იქნება სივრცითი სხეული (მრავალწახნაგა). ვინაიდან ბრტყელ ნახაზზე საკმაოდ რთულია აისახოს მრავალწახნაგა არე საკოორდინატო ღერძების მიმართ და რთულია, აგრეთვე, დონის სიბრტყეებისა და ԴԱՍ ურთიერთგანლაგების დეტალებში გარკვევა, ამიტომ ԽԴԱ-ს ამოხსნის გეომეტრიული მეთოდი სამგანზომილებიან სივრცეში, როგორც წესი, არ გამოუყენება როგორც ამოხსნის ძირითადი მეთოდი. უკეთეს შემთხვევაში, ის შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც დამხმარე საშუალება.

კიდევ უფრო რთულადაა საქმე, როდესაც თავისუფალ ცვლადთა რაოდენობა სამზე მეტია. ვინაიდან ამ შემთხვევაში ყოველგვარი აგებები კარგავენ თვალსაჩინოებას.

ԽԴԿԱ შეზღუდვათა (2.8) სისტემის ისეთ დასაშვებ ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება თავისუფალი ცვლადების ნულოვან მნიშვნელობებს, ეწოდება ბაზისური (საყრდენი) ამონახსნი.

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევეხებით ԽԴԿԱ ამოხსნის ერთ-ერთ ანალიზურ მეთოდს - სიმპლექს მეთოდს, რომლის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ერთი რომელიმე ბაზისური ამონახსნიდან გარკვეული გარდაქმნებით გადადიან ახალ ბაზისურ ამონახსნზე ისე, რომ ახალი ამონახსნის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა არ აღემატება წინა ამონახსნის შესაბამისი მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ბაზისურ ამონახსნთა სიმრავლე სასრულია, ამიტომ ასეთ იტერაციათა რაოდენობაც იქნება სასრული და თუ წდკა ამოხსნადია, მაშინ სასრული რაოდენობა გარდაქმნების შემდეგ მიიღება ოპტიმალური ამონახსნი.

მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად შემდეგი **თეორემა:**

თუ ჩდკა ამოხსნადია, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ოპტიმალური ბაზისური (საყრდენი) ამონახსნი.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ჩდკა-ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ ის აუცილებლად ბაზისური ამონახსნი იქნება.

როგორც ვნახეთ, ჩდკა-ის შეზღუდვათა პირობები და მიზნის ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს თავისუფალი ცვლადებით:

$$x_i = p_i - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_{j,} \qquad i = \overline{1, m}; \tag{4.1}$$

$$F = p_0 - \sum_{j=m+1}^{n} q_j x_j \tag{4.2}$$

სადაც $x_1, x_2, ..., x_m$ – ბაზისური ცვლადებია, ხოლო $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ - თავისუფალი. თუ (4.1) განტოლებათა სისტემაში თავისუფალ ცვლადებს მივანიჭებთ ნულოვან მნიშვნელობებს, მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$\left.\begin{array}{ll} x_i = p_i, & i = \overline{1,\ m}; \\ x_j = 0, & j = \overline{(m+1), n}; \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

ცხადია, რომ თუ (4.3) სისტემაში $p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$, მაშინ (4.3) იქნება ბაზისური ამონახსნი.

შემდეგ ჩვენ გავეცნობით მეთოდს, რომელიც მოგვცემს საშუალებას ვიპოვოთ (2.1) სისტემის ბაზისური ამონახსნი (თუ ის არსებობს). ახლა კი ჩავთვალოთ, რომ (4.3) სისტემა არის (4.1) განტოლებათა სისტემის ბაზისური ამონახსნი. ვინაიდან ბაზისურ ამონახსნში თავისუფალი ცვლადები ყოველთვის ღებულობენ ნულოვან მნიშვნელობებს, ამიტომ შემდეგში ჩვენ ბაზისური ამონახსნი შეიძლება ჩავწეროთ მხოლოდ ბაზისური ცვლადების მნიშვნელობებით.

გამოვიკვლიოთ ბაზისური ცვლადებისა და F ფუნქციის ყოფაქცევა თავისუფალი ცვლადებისაგან დამოკიდებლად.

თუ (4.1) სისტემის მარჯვენა მხარეში ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ k-ური ცვლადი $x_k \neq 0$, მაშინ

$$x_i = p_i - q_{i,k} x_k, \quad i = \overline{1, m} \tag{4.4}$$

(4.4) განტოლებებიდან ჩანს, რომ თუ ყველა $q_{i,k} \le 0$ $(i = \overline{1, m})$, მაშინ x_k ცვლადს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობა, ამიტომ ᲓᲐᲡ იქნება შემოუსაზღვრავი. მაგრამ, თუ რომელიმე $q_{i,k} > 0$ $(i = \overline{1, m})$, მაშინ x_k ცვლადის ცვლილების არე ზემოდან შემოსაზღვრული იქნება, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში x_k-ს საკმაოდ დიდი დადებითი მნიშვენოლობებისათვის (4.4) სისტემის იმ x_i ცვლადებმა, რომელთათვისაც $q_{i,k} > 0$, შეიძლება მიიღონ უარყოფითი მნიშვნელობები, რაც ეწინააღმდეგება ცვლადების არაუარყოფითობის პირობას. თუ რომელიმე $q_{i,k} = 0$, მაშინ სათანადო ცვლადი ინარჩუნებს შესაბამის p_i მნიშვნელობას x_k-ს ცვლილების მიუხედავად.

თუ (4.2) განტოლებით განსაზღვრულ F ფუნქციაში რომელიმე $q_k < 0$, მაშინ შესაბამისი x_k ცვლადის ზრდა ᲓᲐᲡ-ში გამოიწვევს F ფუნქციის გაზრდას, ხოლო თუ $q_k = 0$, მაშინ x_k ცვლადი არავითარ გავლენას არ მოახდენს F ფუნქციაზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ყველა $q_k \le 0$, მაშინ (4.3) ბაზისური ამონახსნი იქნება, აგრეთვე, ოპტიმალურიც და $\min F = P_0$.

თუ F ფუნქციის (4.2) გამოსახულებაში რომელიმე $q_k > 0$, მაშინ გვექნება ორი განსხვავებული შემთხვევა:

I. (4.1) განტოლებათა სისტემაში $q_{i,k} \le 0$ $(i = \overline{1, m})$.

II. (4.1) განტოლებათა სისტემაში ერთი მაინც $q_{i,k} > 0$ $(i = \overline{1, m})$.

I. შემთხვევაში x_k ცვლადის ცვლილების არე ზემოდან შემოუსაზღვრა-

ვია, ამიტომ მას შეუძლია F ფუნქციას მიანიჭოს ნებისმიერად დიდი აბსოლუტური სიდიდით უარყოფითი მნიშვნელობა $\min F = -\infty$. ამ შემთხვევაში ᲬᲓᲙᲐ -ს ამონახსნი არ გააჩნია.

II. შემთხვევაში x_k-ს ცვლილებას ᲓᲐᲡ-ში შეუძლია F ფუნქციის მნიშვნელობა შეამციროს. განვიხილოთ ეს უფრო დეტალურად.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ შემთხვევაში x_k ცვლადი ზემოდან შემოსაზღვრულია. მისი ზედა საზღვარი აღვნიშნოთ $\bar{x}_k$, ე.ი $x_k \le \bar{x}_k$; ადვილი მისახვედრია, რომ $\bar{x}_k$ უნდა განისაზღვროს შემდეგი პირობიდან

$$\bar{x}_k = \min_{1\le i\le m} \frac{p_i}{q_{i,k}}, \tag{4.5}$$

სადაც $q_{i,k} > 0$.

ვთქვათ, (4.4.) სისტემაში ℓ არის იმ განტოლებებიდან ერთ-ერთის ნომერი, რომლისთვისაც სრულდება (4.5) პირობა.

$$\bar{x}_k = \frac{p_\ell}{q_{\ell,k}} = \min_{1\le i\le m} \frac{p_i}{q_{i,k}}, \tag{4.6}$$

$q_{\ell,k}$ კოეფიციენტს ვუწოდოთ წამყვანი ელემენტი.

(4.4) განტოლებათა სისტემიდან ჩანს, რომ როდესაც $x_k = \bar{x}_k$, მაშინ x_ℓ ბაზისური ცვლადი მიიღებს ნულოვან მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენი ბაზისური ცვლადები - არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

x_k თავისუფალი ცვლადი შევიტანოთ ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში, ხოლო x_ℓ ცვლადი კი - თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეში.

ამის შედეგად $x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_k, x_{\ell+1}, ..., x_m$ იქნებიან ბაზისური ცვლადები, ხოლო $x_{m+1}, ..., x_{k-1}, x_\ell, x_{k+1}, ..., x_n$ თავისუფალი ცვლადები.

ახალი ბაზისური ცვლადები და F ფუნქცია გამოვსახოთ ახალი თავისუფალი ცვლადების საშუალებით.

(4.1) განტოლებათა სისტემის ℓ-ური განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_k ცვლადი :

$$x_k = \frac{1}{q_{\ell,k}}\left(p_\ell - q_{\ell,m+1}x_{m+1} - ... - q_{\ell,k-1}x_{k-1} - x_\ell - ... - q_{\ell,n}x_n\right), \tag{4.7}$$

(4.7) განტოლება გავითვალისწინოთ განტოლებათა (4.1) სისტემაში:

$$x_i = \left(p_i - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} p_\ell\right) - \left\{\left(q_{i,m+1} - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} q_{\ell,m+1}\right)x_{m+1} + \ldots + \left(q_{i,k-1} - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} q_{\ell,k-1}\right)x_{k-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} x_\ell + \left(q_{i,k+1} - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} q_{\ell,k+1}\right)x_{k+1} + \ldots + \left(q_{i,n} - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} q_{\ell,n}\right)\right\}, \qquad \begin{pmatrix} i = \overline{1,m} \\ i \neq \ell \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$F = P_0 - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} P_\ell - \left\{\left(q_{m+1} - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} q_{\ell,m+1}\right)x_{m+1} + \ldots + \left(q_{k-1} - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} q_{\ell,k-1}\right)x_{k-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} x_\ell + \left(q_{k+1} - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} q_{\ell,k+1}\right)x_{k+1} + \ldots + \left(q_n - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} q_{\ell,n}\right)x_n\right\} \tag{4.9}$$

(4.7), (4.8) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ბაზისური ამონახსნი იქნება:

$$\left.\begin{aligned} & x_i = p_i - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} P_\ell \qquad i = \overline{1,m},\ i \neq \ell \\ & x_k = \frac{P_\ell}{q_{\ell,k}}, \\ & x_{m+1} = \ldots = x_{k-1} = x_\ell = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

ხოლო F ფუნქციის მნიშვნელობა კი -

$$F = p_0 - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} p_\ell \tag{4.11}$$

ვაჩვენოთ, რომ (4.10) წარმოადგენს, აგრეთვე, ბაზისურ ამონახსნს. ვინაიდან $q_{\ell,k} > 0$ და $p_\ell \geq 0$, ამიტომ $x_k = P_\ell / q_{\ell,k} \geq 0$. თუ $q_{i,k} \leq 0$, მაშინ $\frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} p_\ell \leq 0$ და ვინაიდან ყველა $p_i \geq 0$, ამიტომ ამ შემთხვევაში $x_i = p_i - \frac{q_{i,k}}{q_{\ell,k}} p_\ell \geq 0$. ხოლო, თუ $q_{ik} > 0$ მაშინ $x_i = q_{i,k}\left(\frac{P_i}{q_{i,k}} - \frac{P_\ell}{q_{\ell,k}}\right) \geq 0$ წამყვანი $q_{\ell,k}$ ელემენტის შერჩევის (4.6) პირობის გამო.

(4.11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $F = p_0 - \frac{q_k}{q_{\ell,k}} p_\ell \leq p_0$. ე.ი. ახალ ბაზისურ ამონახსნზე გადასვლის დროს F ფუნქციის მნიშვნელობა არ გაიზარდა.

ჩატარებული მსჯელობიდან შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

1) წამყვანი ელემენტის შერჩევის (4.6) პირობა უზრუნველყოფს იმას, რომ ახალი ამონახსნი, აგრეთვე, ბაზისური ამონახსნი იქნება;

2) q_k კოეფიციენტის დადებითობა განაპირობებს იმის, რომ F ფუნქცია არ გაიზრდება ახალ ბაზისურ ამონახსნზე გადასვლის დროს. თუ კი $q_k < 0$, მაშინ შესაძლებელია, რომ F ფუნქცია გაიზარდოს და ბოლოს, თუ $q_k = 0$, მაშინ ახალ ბაზისურ ამონახსნზე გადასვლა არ გამოიწვევს ფუნქციის ცვლილებას;

3) თუ $p_\ell = 0$, მაშინ F არ შეიცვლის თავის მნიშვნელობას, როგორიც არ უნდა იყოს კოეფიციენტი q_k.

სიმპლექს მეთოდით პირველი იტერაციის შემდეგ გამოთვლების პროცესი შეიძლება შეწყდეს მხოლოდ ორ შემთხვევაში: 1) თუ დადგინდა, რომ (4.10) არის ოპტიმალური ამონახსნი, ე.ი. მოცემული ႼႣႩႠ-ს ამონახსნი. მაშინ F მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა გამოითვლება (4.11) ფორმულით. 2) თუ დადგინდა, რომ მოცემულ ႼႣႩႠ-ს არ გააჩნია ამონახსნი.

სხვა შემთხვევაში სიმპლექს მეთოდით იტერაცია უნდა გაგრძელდეს. ვაჩვენოთ, რომ იტერაციათა მიმდევრობა სასრულია.

B_i-თი აღვნიშნოთ ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლე i-ური იტერაციის დროს, ხოლო F_i-თი - F მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება B_i ბაზისურ ამონახსნს.

თუ სიმპლექს მეთოდით იტერაციის პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდა, ე.ი. გვაქვს $B_1, B_2, \ldots$. სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობა, მაშინ გვექნება არაზრდადი რიცხვითი მიმდევრობა.

$$F_1 \geq F_2 \geq \ldots \qquad (4.12)$$

მაგრამ ვინაიდან ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეთა რაოდენობა სასრულია (ის არ აღემატება $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$), ამიტომ ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეთა მიმდევრობაში აუცილებლად გამნეორდება ზოგიერთი წევრი, ე.ი. იარსებებს

$$B_k, B_{k+1}, \ldots B_{k+\ell}. \qquad (4.13)$$

ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეთა ისეთი (4.13) მიმდევრობა, რომელშიც საწყისი და ბოლო ბაზისური სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა ($B_k = B_{k+\ell}$). ამიტომ (4.12)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$F_k = F_{k+1} = \cdots = F_{k+\ell}.$$

ბაზისურ ცვლადთა (4.13) სახის მიმდევრობას ციკლი ეწოდება. ამრიგად, სიმპლექს მეთოდით იტერაციის პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, თუ მასში წარმოიქმნება ციკლი.

ახალ ბაზისურ ცვლადებზე გადასვლისას მიზნის ფუნქცია, როგორც (4.11) ფორმულიდან ჩანს, არ შეიცვლის თავის მნიშვნელობას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $q_k = 0$ ან $p_\ell = 0$. მაგრამ, სიმპლექს მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ შევარჩიოთ ისეთი x_k ცვლადი, რომელსაც F მიზნის ფუნქციის (4.2) წარმოდგენაში დადებითი q_k კოეფიციენტი აქვს, ამიტომ ციკლის წარმოშობის ძირითადი მიზეზი იქნება $p_\ell = 0$. ასეთ შემთხვევას გადაგვარებული ეწოდება. მაშასადამე, თუ გადაგვარებული შემთხვევები ერთმანეთს მოსდევს, ეს გამოიწვევს ციკლურ პროცესს.

როგორც პრაქტიკა გვიჩვენებს, თუ ამოცანა კორექტულადაა დასმული, ციკლის წარმოშობა თითქმის გამორიცხულია, ის უფრო თეორიული გააზრების შედეგია.

ციკლის თავიდან აცილების მიზნით საკმარისია მისი წარმოქმნისას შევცვალოთ წამყვანი ელემენტი. ის ამოვარჩიოთ სხვა სვეტიდან, რომლისთვისაც ეს შესაძლებელია.

ბოლოს დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ მნიშვნელოვანი **თეორემა:**

თუ ᲬᲓᲙᲐ გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის შეიძლება ვიპოვოთ სიმპლექს მეთოდით, ამასთან მნიშვნელობა არა აქვს რომელი ბაზისური ამონახსნით დაიწყება იტერაციის პროცესი.

ამ თეორემას ხშირად უწოდებენ **სიმპლექს მეთოდის სასრულობის თეორემას**. მასში მტკიცდება, რომ თუ ᲬᲓᲐ ამოხსნადია, მაშინ ნებისმიერი საწყისი ბაზისური ამონახსნით და წამყვანი ელემენტების სათანადოდ შერჩევით, ყოველთვის იტერაციათა სასრული მიმდევრობის შემდეგ, ყოველთვის მიიღწევა ოპტიმალური ამონახსნი.

განხილული სიმპლექს მეთოდით ამოვხსნათ წარმოების დაგეგმვის ამოცანა, რომელიც §1-ში იყო მოყვანილი.

უპირველეს ყოვლისა (1.1) განტოლებათა სისტემის და (1.2) განსაზღვრული მიზნის ფუნქციას მივცეთ ᲬᲓᲙᲐ სახე. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი x_4 და x_5 ცვლადები და ახალი მიზნის ფუნქცია F_1 შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 12x_3 + x_4 &= 1500 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 1000 \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

$$F_1 = -F = -(12x_1 + 5x_2 + 10x_3) \tag{4.15}$$

გვაქვს შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ (4.14) განტოლებათა სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომლისთვისაც F_1 ფუნქცია მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას (ცხადია, რომ $\max F = -\min F_1$).

(4.14) ჩანს, რომ თუ ბაზისურ ცვლადებად ამოვარჩევთ x_4 და x_5, მაშინ შესაბამისი ამონახსნი ბაზისური ამონახსნიც იქნება. ჩავწეროთ (4.14) სისტემა (4.1) სისტემის სახით, ვინაიდან F_1-ის გამოსახულებას აქვს (4.2) სახე, ამიტომ მას უცვლელად ვიტოვებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 1500 - (5x_1 + x_2 + 12x_3) \\ x_5 &= 1000 - (2x_1 + 3x_2 + x_3) \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

(4.15)-დან და (4.16) სისტემიდან წამყვანი ელემენტის საპოვნელად შეგვიძლია ამოვარჩიოთ ნებისმიერი თავისუფალი x_1, x_2, x_3 ცვლადი, ვინაიდან მათ ყველგან დადებითი კოეფიციენტები აქვთ. შევჩერდეთ x_1 ცვლადზე. (4.16)-ის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ წამყვანი ელემენტი უნდა იყოს 5 (პირველ

განტოლებაში x_1-ის კოეფიციენტი). x_4 ცვლადის შესაბამისი განტოლებიდან განვსაზღვროთ x_1 და მისი მნიშვნელობა ჩავსვათ x_5-ისა და $F$1-ის შესაბამის გამოსახულებებში, გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 300 - \left(\frac{1}{5}x_2 + \frac{12}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4\right) \\ x_5 &= 400 - \left(\frac{13}{5}x_2 - \frac{19}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$$F_1 = -3600 - \left(\frac{13}{5}x_2 - \frac{94}{5}x_3 - \frac{12}{5}x_4\right) \tag{4.18}$$

(4.17) სისტემიდან $x_1 = 300;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 400$ არის ბაზისური ამონახსნი. F1-ის მნიშვნელობა კი ამ დროს – 3600 ტოლია. მაშასადამე ახალ (x_1, x_5) ბაზისზე გადასვლისას შევინარჩუნეთ ის, რომ ბაზისური ამონახსნი დარჩა ისევ ბაზისურ ამონახსნად და *F1* მიზნის ფუნქცია 0-დან -3600 შემცირდა.

(4.18) -დან ჩანს, რომ დადებითი კოეფიციენტი აქვს მხოლოდ x_2 ცვლადს, ე.ი. მხოლოდ მის ზრდას შეუძლია გამოიწვიოს *F1*-ის შემდგომი შემცირება. (4.17) სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ წამყვანი ელემენტი იქნება $\frac{13}{5}$ (x_5-ის შესაბამის განტოლებაში x_2-ის კოეფიციენტი). ანალოგიური გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3500}{13} - \left(\frac{35}{13}x_3 + \frac{3}{13}x_4 - \frac{1}{13}x_5\right) \\ x_2 &= \frac{2000}{13} - \left(-\frac{19}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4 + \frac{5}{13}x_5\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

$$F_1 = -4000 - \left(-15x_3 - 2x_4 - x_5\right) \tag{4.20}$$

(4.20) გვიჩვენებს, რომ *F1* ფუნქციის შემდგომი შემცირება შეუძლებელია. ვინაიდან ყველა თავისუფალ ცვლადთან მდგარი კოეფიციენტი უარყოფითია, $\min F_1 = -4000$.

(4.19) სისტემიდან ვღებულობთ, რომ ოპტიმალური ამონახსნი იქნება:

$$x_1 = \frac{3500}{13}; \quad x_2 = \frac{2000}{13}; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 0.$$

თუ გავიხსენებთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამის საწყის ამოცანას, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ საწარმო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს $\max F = 4000$ ფულად ერთეულს თუ ის P_1 და P_2 პროდუქციის შესაბამისად $\frac{3500}{13}$ და $\frac{2000}{13}$ ერთეულის დამზადებას დაგეგმავს, ხოლო P_3 სახის პროდუქციას საერთოდ არ დაამზადებს.

დავთვალოთ ნედლეულის ხარჯის რაოდენობა ასეთი გეგმით მუშაობის შემთხვევაში:

S_1 – სახის ნედლეულისათვის: $\frac{3500}{13} + 1 \cdot \frac{2000}{13} = 1500$ ერთეული.

S_2 – სახის ნედლეულისათვის: $2 \cdot \frac{3500}{13} + 3 \cdot \frac{2000}{13} = 1000$ ერთეულს.

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ასეთი გეგმით მუშაობის შემთხვევაში საწარმო მიიღებს არა მარტო მაქსიმალურ მოგებას, არამედ ნედლეულს გამოიყენებს სრულად, არ ექნება ნედლეულის დანაკარგები.

სავარჯიშოები

სიმპლექს მეთოდით იპოვეთ 4.1 – 4.4 ამოცანების ამონახსნები.

(4.1). $F = 18x_1 + 16x_2 + 5x_3 + 21x_4 \to \min.$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

(4.2) $F = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le -1 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

(4.3) $F = 4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 0 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

(4.4) $F = x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

§ 5. სიმპლექს ცხრილი

ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნობით წდკა ამოხსნის სიმპლექს ცხრილების მეთოდს. ამ მეთოდით მუშაობისას საგრძნობლად მცირდება ალგებრულ გარდაქმნათა ის გრძელი მიმდევრობა, რომელიც დამახასიათებელია ალგებრული სიმპლექს მეთოდისათვის. გარდა ამისა ეს მეთოდი ხასიათდება თვალსაჩინოებით, რაც აადვილებს მიღებული შედეგების აღქმასა და ანალიზს, რაც თავის მხრივ იძლევა შემდგომი მოქმედების ისეთი სტრატეგიის გამომუშავებას, რომელსაც საკმაოდ ჩქარა მივყევართ დასმული ამოცანის ამონახსნთან.

პირველ ყოვლისა უნდა შევადგინოთ სიმპლექს-ცხრილი (ცხრ. 5.1).

ცხრილი 5.1.

	P	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n
x_1	P_1 $-\lambda q_{1,k}P_\ell$	$q_{1,m+1}$ $-\lambda q_{1,k}q_{\ell,m+1}$	…	$q_{1,j}$ $-\lambda q_{1,k}q_{\ell,j}$	…	$q_{1,k}$ $-\lambda q_{1,k}$	…	$q_{1,k}$ $-\lambda q_{1,k}q_{\ell,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	P_i $-\lambda q_{i,k}P_\ell$	$q_{i,m+1}$ $-\lambda q_{i,k}q_{\ell,m+1}$	…	$q_{i,j}$ $-\lambda q_{i,k}q_{\ell,j}$	…	$q_{i,k}$ $-\lambda q_{i,k}$	…	$q_{i,n}$ $-\lambda q_{i,k}q_{\ell,n}$
…	…	…		…		…		…
x_e	P_e λP_ℓ	$q_{\ell,m+1}$ $\lambda q_{\ell,m+1}$	…	$q_{\ell,j}$ $\lambda q_{\ell,j}$	…	$q_{\ell,k}$ $\lambda = \frac{1}{q_{\ell,k}}$	…	$q_{\ell,n}$ $\lambda q_{\ell,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_m	P_m $-\lambda q_{m,k}P_\ell$	$q_{m,m+1}$ $-\lambda q_{m,k}q_{\ell,m+1}$	…	$q_{m,j}$ $-\lambda q_{m,k}q_{\ell,j}$	…	$q_{m,k}$ $-\lambda q_{m,k}$	…	$q_{m,n}$ $-\lambda q_{m,k}q_{\ell,n}$
F	P_0 $-\lambda q_k P_\ell$	q_{m+1} $-\lambda q_k q_{\ell,m+1}$	…	q_j $-\lambda q_k q_{\ell,j}$	…	q_k $-\lambda q_k$	…	q_n $-\lambda q_k q_{\ell,n}$

ცხრილის ყველა სტრიქონში (პირველი და ბოლო სტრიქონების გარდა) ჩაწერილია (4.1) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები თავისი ნიშნებით,

იგულისხმება, რომ ყველა $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$, ე.ი. (4.3) ბაზისური ამონახსნია. ბოლო სტრიქონში ჩაწერილია (4.2) განსაზღვრული F მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები თავისი ნიშნებით. კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ სიმპლექს-ცხრილებით მუშაობა და საერთოდ სიმპლექს მეთოდი გულისხმობს შეზღუდვათა პირობებისა და მიზნის ფუნქციის (4.1) და (4.2) სახით ჩაწერას. პირველ სტრიქონში ჩაწერილია თავისუფალი ცვლადების აღნიშვნები. ცხრილიდან ნათელია მისი სვეტების დანიშნულება. ყველა რიცხვითი კოეფიციენტი უნდა იყოს ჩაწერილი შესაბამისი უჯრედის ზედა ნაწილში. შევნიშნოთ, რომ ბოლო სტრიქონი შეიძლება განთავსდეს მე-2 სტრიქონში და ცხრილის დანარჩენი ნაწილები ერთი სტრიქონით ჩამოიწევიან ქვევით, ხოლო ცხრილის შევსების წესი იგივე რჩება.

მას შემდეგ როდესაც მოვამზადებთ ცხრილს, უნდა ვიმოქმედოთ შემდეგი წესებით:

1. ჩავატაროთ მიზნის ფუნქციის შესაბამისი სტრიქონის (ბოლო სტრიქონის) ანალიზი. თუ ყველა $q_j \leq 0$, მაშინ ბაზისური ამონახსნი ოპტიმალურია და ის მოცემულია P-ს შესაბამის სვეტში $\min F = p_0$. ხოლო თუ j-ის რომელიმე k-ური მნიშვნელობისათვის $q_k > 0$ და k სვეტში ყველა $q_{ik} \leq 0$, მაშინ წდა არ გააჩნია ამონახსნი და გამოთვლები უნდა შეწყდეს.

2. თუ ბოლო სტრიქონში j-ს რომელიმე $j = k$ მნიშვნელობისათვის $q_k > 0$ და k-ურ სვეტში არსებობენ $q_{i,k} > 0$ კოეფიციენტები, მაშინ P სვეტის ყველა ის ელემენტი, რომელიც მოთავსებულია დადებითი $q_{i,k}$-ს შესაბამის სტრიქონში უნდა გავყოთ $q_{i,k}$ ელემენტზე (ბოლო სტრიქონის გარდა). ამ განაყოფებს შორის შევარჩიოთ უმცირესი. თუ ასეთი რამდენიმეა, მაშინ მომდევნო სვეტის შესაბამისი ელემენტები გავყოთ შესაბამის $q_{i,k}$-ზე და შევარჩიოთ ის სტრიქონი, რომელშიაც ეს განაყოფი იქნება უმცირესი. თუ აქაც რამდენიმე იქნება ერთნაირი, მაშინ იგივე წესით უნდა შევარჩიოთ მომდევნო სვეტიდან და ა.შ.

სანამ არ შევარჩევთ საჭირო სტრიქონს. ასეთი შერჩევა რეკომენდებულია ციკლური პროცესის ასაცილებლად. ვთქვათ, შერჩეული სტრიქონის ნომერია ℓ. $q_{\ell,k}$ ელემენტი არის წამყვანი ელემენტი და ის რაიმე წესით გამოვყოთ სხვა ელემენტისაგან, ჩვენს ცხრილში ის აღნიშნულია ქვემოდან გასმული ხაზით. ℓ-ურ სტრიქონსა და k-ურ სვეტს, შესაბამისად, წამყვანი სვეტი და სტრიქონი ეწოდებათ. სხვა სტრიქონებისა და სვეტებისაგან ისინიც გამოვყოთ რაიმე წესით. ჩვენს ცხრილში ისინი გამუქებული ხაზებითაა გამოყოფილი.

3. წამყვანი ელემენტის უჯრედის ქვედა ნაწილში ჩავწეროთ რიცხვი $\lambda = \dfrac{1}{q_{\ell,k}}$.

4. წამყვანი სტრიქონის ყველა ელემენტი (გარდა $q_{\ell,k}$) გავამრავლოთ λ-ზე და ჩავწეროთ შესაბამისი უჯრედის ქვედა ნაწილში.

5. წამყვანი სვეტის ყველა ელემენტი (გარდა $q_{\ell,k}$) გავამრავლოთ $-\lambda$-ზე და ჩავწეროთ შესაბამისი უჯრედის ქვედა ნაწილში.

6. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ($i \neq \ell, j \neq k$) გადაკვეთაზე მდებარე (i, j) უჯრედის ქვედა ნაწილში უნდა ჩავწეროთ წამყვანი სტრიქონის (ℓ, j) უჯრედის ზედა ნაწილში მდებარე რიცხვისა და წამყვანი სვეტის (i, k) უჯრედის ქვედა ნაწილში მდებარე რიცხვების ნამრავლი. ე.ი. $-\lambda q_{i,k} q_{\ell,j}$ რიცხვი.

7. შევადგინოთ ახალი ცხრილი (ცხრ. 5.2). x_ℓ ბაზისური ცვლადის მაგივრად, ბაზისურ სვეტში ჩავწეროთ x_k თავისუფალი ცვლადი, ხოლო x_k თავისუფალი ცვლადის მაგივრად თავისუფალ ცვლადთა სტრიქონში ჩავწეროთ x_ℓ ბაზისური ცვლადი (ადგილები შევუცვალეთ x_ℓ და x_k ცვლადებს). პირველი ცხრილის (ცხრ. 5.1) წამყვანი სტრიქონისა და წამყვანი სვეტის ახალი ცხრილის (ცხრ. 5.2) შესაბამისი სტრიქონისა და სვეტის უჯრედის ზედა ნაწილებში ჩავწეროთ პირველი ცხრილის (ცხრ. 5.1) შესაბამისი უჯრედების ქვედა ნაწილებში ჩაწერილი რიცხვები. ხოლო დანარჩენ უჯრედების ზედა ნაწილებში — პირველი

ცხრილის (ცხრ. 5.1) შესაბამის უჯრედებში ჩაწერილი რიცხვების ალგებრული ჯამი.

ცხრილი 5.2.

	P	x_{m+1}	…	x_j	…	x_ℓ	…	x_n
x_1	$P_1 - \lambda q_{1,k} P_\ell$	$q_{1,m+1} - \lambda q_{1,k} q_{\ell,m+1}$	…	$q_{1,j} - \lambda q_{1,k} q_{\ell,j}$	…	$\lambda q_{1,k}$	…	$q_{1,k} - \lambda q_{1,k} q_{\ell,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	$P_i - \lambda q_{i,k} P_\ell$	$q_{i,m+1} - \lambda q_{i,k} q_{\ell,m+1}$	…	$q_{i,j} - \lambda q_{i,k} q_{\ell,j}$	…	$\lambda q_{i,k}$	…	$q_{i,n} - \lambda q_{i,k} q_{\ell,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_k ⋮	λP_ℓ ⋮	$\lambda q_{\ell,m+1}$ ⋮	… ⋮	$\lambda q_{\ell,j}$ ⋮	… ⋮	λ ⋮	… ⋮	$\lambda q_{\ell,n}$ ⋮
x_m	$P_m - \lambda q_{m,k} P_\ell$	$q_{m,m+1} - \lambda q_{m,k} q_{\ell,m+1}$	…	$q_{m,j} - \lambda q_{m,k} q_{\ell,j}$	…	$\lambda q_{m,k}$	…	$q_{m,n} - \lambda q_{m,k} q_{\ell,n}$
F	$P_0 - \lambda q_k P_\ell$	$q_{m+1} - \lambda q_k q_{\ell,m+1}$	…	$q_j - \lambda q_k q_{\ell,j}$	…	λq_k	…	$q_n - \lambda q_k q_{\ell,n}$

ცხადია, რომ ცხრილი 5.2. (4.8) სისტემისა და (4.9) განტოლების მიმართ ისეთივე მნიშვნელობისაა, როგორიც ცხრილი 5.1 (4.1) და (4.2)-ის მიმართ. ამიტომ მის მიმართაც ისეთივე მსჯელობა უნდა ჩატარდეს, როგორც ცხრილი 5.1-ის მიმართ ჩატარდა (1-7 წესი).

თუ ØÃÊ ამოხსნადია, მაშინ სიმპლექს ცხრილების სასრული რაოდენობა მიგვიყვანს ოპტიმალურ ამოხსნამდე.

ამოვხსნათ რაციონის ამოცანა, რომელიც მოყვანილი იყო პირველ პარაგრაფში. შემოვიტანოთ დამატებითი ცვლადები x_4, x_5, x_6 და დავწეროთ ØÃÊ:

$$\left.\begin{aligned} &5x_1 + 2x_2 + 18x_3 - x_4 = 200 \\ &6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5 = 120 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 4 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \tag{5.2}$$

შესაბამისი სიმპლექს ცხრილის შედგენამდე (5.1)-(5.2) უნდა მივცეთ (4.1)-(4.2) სახე.

თუ x_2, x_3, x_4 ჩავთვლით ბაზისურ ცვლადებად, ხოლო x_1, x_5, x_6 თავისუფალ ცვლადებად, მაშინ განტოლებათა (5.1)-(5.2)-ის შესაბამისი ექვივალენტური გამოსახულება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -(-x_5 + 3x_6) \\ x_3 &= 40 - (2x_1 + x_5 - 4x_6) \\ x_4 &= 520 - (31x_1 + 16x_5 - 66x_6) \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

$$F = 200 - (7x_1 + 3x_5 - 14x_6) \qquad (5.4)$$

შევადგინოთ სიმპლეს ცხრილი (ცხრ 5.3).

ცხრილი 5.3

	P	x_1	x_5	x_6
x_2	0 0	0 0	-1 0	3 0
x_3	40 $-\frac{1040}{31}$	2 $-\frac{2}{31}$	1 $-\frac{32}{31}$	-4 $\frac{132}{31}$
x_4	520 $\frac{520}{31}$	31 $\frac{1}{31}$	16 $\frac{16}{31}$	-66 $-\frac{66}{31}$
F	200 $-\frac{3640}{31}$	7 $-\frac{7}{31}$	3 $-\frac{112}{31}$	-14 $\frac{462}{31}$

ცხრილი (5.3)-ის ბოლო სტრიქონის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ წამყვანი ელემენტი შეიძლება შევარჩიოთ x_1 და x_5 ცვლადების შესაბამის სვეტებში (ეს ცვლადები F-ის სტრიქონში წარმოდგენილი არიან დადებითი ელემენტებით). თუ ავირჩევთ x_1-ის შესაბამის სვეტს, მაშინ წამყვანი ელემენტი იქნება რიცხვი 31 (x_1 – სვეტისა და x_4 სტრიქონის გადაკვეთაზე). მაშინ $\lambda = \frac{1}{31}$. შევავსოთ ეს ცხრილი ზემოთ მოყვანილი წესების დაცვით. ცხრილი 5.3 შევსების შემდეგ, მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ მომდევნო ცხრილში (ცხრ. 5.4)

ცხრილი 5.4

	P	x_4	x_5	x_6
x_2	0 0	0 0	-1 $-\frac{1}{3}$	3 $\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{200}{31}$ 0	$-\frac{2}{31}$ 0	$-\frac{1}{31}$ $-\frac{8}{93}$	$-\frac{8}{31}$ $\frac{8}{93}$
x_1	$\frac{520}{31}$ 0	$\frac{1}{31}$ 0	$\frac{16}{31}$ $-\frac{22}{31}$	$-\frac{66}{31}$ $\frac{22}{31}$
F	$\frac{2560}{31}$ 0	$-\frac{7}{31}$ 0	$-\frac{19}{31}$ $\frac{28}{93}$	$\frac{28}{31}$ $-\frac{28}{93}$

ცხრილი 5.5

	P	x_4	x_5	x_2
x_6	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{200}{31}$	$-\frac{2}{31}$	$-\frac{11}{93}$	$\frac{8}{93}$
x_1	$\frac{520}{31}$	$\frac{1}{31}$	$-\frac{6}{31}$	$\frac{22}{31}$
F	$\frac{2560}{31}$	$-\frac{7}{31}$	$-\frac{29}{93}$	$-\frac{28}{93}$

ცხრ. 5.4-ის ბოლო სტრიქონის ანალიზის შემდეგ წამყვან ელემენტად შეიძლება შევარჩიოთ მხოლოდ x_2 სტრიქონისა და x_6 სვეტის გადაკვეთაზე მდგარი რიცხვი 3. x_2-ის სტრიქონში თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია, ამიტომ x_2 და x_6 ცვლადების ურთიერთშენაცვლება არ შეცვლის F ფუნქციის მნიშვნელობას. გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა. საბოლოო გამოთვლები შეტანილია ცხრილში (ცხრ. 5.5). ამ ცხრილის ბოლო სტრიქონის ანალიზი

გვიჩვენებს, რომ F ფუნქციის მნიშვნელობის შემდგომი შემცირება შეუძლებელია და $\min F = \frac{2560}{31}$ ფულადი ერთეულის.

ბაზისური ამონახსნი ამ შემთხვევაში იქნება:

$$x_1 = \frac{520}{31}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{200}{31}; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 0; \quad x_6 = 0. \tag{5.5}$$

თუ გავიხსენებთ, რომ ცვლადები აღნიშნავენ სხვადასხვა პროდუქტების რაოდენობას კვების რაციონში. მივიღებთ, რომ პირუტყვის კვების რაციონში უნდა შედიოდეს P და R პროდუქტები, ხოლო Q პროდუქტი საერთოდ არ უნდა შედიოდეს. ამასთან უნდა შედიოდეს P პროდუქტის $\frac{520}{31}$ ერთეული, ხოლო R პროდუქტის $-\frac{200}{31}$ ერთეული, ეს მნიშვნელობები მიღებულია კვების რაციონის მინიმალური ღირებულების მოთხოვნით.

დავთვალოთ რამდენ საჭირო ნივთიერებას მიიღებს პირუტყვი კვების ასეთი რაციონის დროს.

$$\begin{aligned} A &\quad - \quad 5 \cdot \frac{520}{31} + 18 \cdot \frac{200}{31} = 200; \\ B &\quad - \quad 6 \cdot \frac{520}{31} + 3 \cdot \frac{200}{31} = 120; \\ C &\quad - \quad 2 \cdot \frac{520}{31} + \frac{200}{31} = 40. \end{aligned}$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ასეთი რაციონის შემთხვევაში პირუტყვი საჭირო ნივთიერებებს მიიღებს ნორმით გათვალისწინებული რაოდენობით.

სავარჯიშოები

სიმპლექს მეთოდის (სიმპლექს ცხრილის) გამოყენებით იპოვეთ 5.1 – 5.6 ამოცანების ამონახსნები.

5.1. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5.2. $F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5.3. $F = 8x_2 + 7x_4 - x_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 43x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5.4. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5.5. $F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases}$$

5.6. $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

§ 6. ბაზისური ამონახსნის მოძებნის მეთოდი

წინა პარაგრაფებში აღწერილი სიმპლექს (ალგებრული და ცხრილური) მეთოდით ჶდპა-ს ამოხსნის სქემა საწყის ეტაპზე ითვალისწინებს, რომ უნდა გვქონდეს ბაზისური ამონახსნი.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ხშირად რთულია შევარჩიოთ ისეთი ბაზისური ცვლადები, რომელთა შესაბამისი ამონახსნი იმავე დროს იქნება დასაშვები ამონახსნი. ეს საკითხი განსაკუთრებით პრობლემურია, როდესაც განტოლებათა და ცვლადთა რაოდენობა სამზე მეტია. ამ პარაგრაფში გავეცნობით ბაზისური ამონახსნის მოძებნის საკმაოდ ეფექტურ წესს, რომელსაც საფუძვლად უდევს სიმპლექს მეთოდი.

ვიგულისხმოთ, რომ (2.8) განტოლებათა სისტემაში $\mathrm{b_i} \geq 0 \ \left(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}\right)$. თუ რომელიმე განტოლებაში ეს პირობა არ სრულდება, საკმარისია ამ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ (-1)-ზე და ეს პირობა შესრულებული აღმოჩნდება.

განტოლებათა (2.8) სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j {}_{i} = 0, \qquad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{6.1}$$

ამ განტოლებებიდან სიმპლექს მეთოდით, რომელიც აღწერილი იყო წინა თავებში, ის ცვლადები უნდა გადავიტანოთ ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში, რომელთაც განტოლებათა (6.1) სისტემაში დადებითი კოეფიციენტები აქვთ, მიუხედავად იმისა თუ როგორი კოეფიციენტები აქვთ მათ F ფუნქციის გამოსახულებაში.

თუ ამ დროს გამოვიყენებთ ცხრილურ მეთოდს, მაშინ პირველი სვეტი, რომელშიაც უნდა ჩაიწეროს ბაზისური ცვლადები, უნდა იყოს ცარიელი, რომელიც ნაბიჯ-ნაბიჯ შეივსება. მიზანშეწონილია, რომ F ფუნქცია ჩაიწეროს ბოლო სტრიქონში, ვინაიდან ბოლოს, როდესაც შერჩეული იქნება ბაზისური ცვლადები, ის აღმოჩნდება წარმოდგენილი თავისუფალი ცვლადების საშუალებით. კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში წამყვანი

ელემენტის შერჩევისას F-ის გამოსახულებას გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ ენიჭება, ის უნდა შეირჩეს მხოლოდ $a_{ij} > 0$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ კოეფიციენტებს შორის.

თუ რომელიმე ცვლადი პირველად გადადის ბაზისურ ცვლადთა სიაში, მაშინ ის სვეტი, რომლის თავშიც ის იყო ჩაწერილი, უქმდება, ხოლო სხვა მოქმედებები ისეთივეა, რომელიც ზემოთ იყო აღწერილი. თუ სიმპლექს პროცესის დროს რომელიმე სტრიქონში, რომელიც ჯერ არ შეესაბამება ბაზისურ ცვლადს, თავისუფალი წევრი დადებითი იქნება, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი უარყოფითი. ეს ნიშნავს, რომ მოცემულ განტოლებათა სისტემას არ გააჩნია დასაშვები ამონახსნი. თუ განტოლებათა სისტემაში ზოგიერთი განტოლება წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას, ე.ი. გვაქვს განტოლებათა წრფივად დამოკიდებული სისტემა, ეს გამოჩნდება სიმპლექს პროცესის დროს. სახელდობრ, გვექნება ისეთი სტრიქონები, რომელშიც ყველა ელემენტი ნულის ტოლი იქნება. ცხადია ასეთი სტრიქონი შემდგომი გამოთვლებიდან უნდა გამოვრიცხოთ.

ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ პირველ პარაგრაფში დასმული თარგის ამოცანა. მივცეთ (1.7) და (1.8) შესაბამისი სახე:

$$\left.\begin{array}{r} 0-\left(5x_1+2x_2-3x_4+4y_1+2y_2-3y_3\right)=0 \\ 0-\left(x_2+3x_3-2x_4+y_2-2y_3\right)=0 \\ 100-\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)=0 \\ 200-\left(y_1+y_2+y_3\right)=0 \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

$$F_1 = -F = -\left(x_4 + y_3\right) \tag{6.2}$$

ცხადია, რომ ჩვენს აღნიშვნებში $\max F = -\min F_1$

შევადგინოთ სიმპლექს ცხრილი (ცხრ. 6.1). ცხრილი 6.1-ის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა. მხოლოდ x_4 და y_3 ცვლადების შესაბამის სვეტში შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი წამყვანი ელემენტი, რომ შემდეგ ეტაპზე მივიღოთ გადაუგვარებელი შემთხვევა ან ისეთი შემთხვევა,

როდესაც განტოლებათა უფრო ნაკლებ რაოდენობას ექნება ნულოვანი თავისუფალი წევრი.

ცხრილი 6.1

	P	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	0 600	5 0	2 0	0 0	-3 0	4 3	2 3	-3 3
	0 400	0 0	1 0	2 0	-2 0	0 2	1 2	-2 2
	100 0	1 0	1 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0
	200 200	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	1 1
F_1	0 -200	0 0	0 0	0 0	1 0	0 -1	0 -1	1 -1

შევჩერდეთ y_3 ცვლადზე. მაშინ წამყვანი ელემენტი იქნება 1. ცხრილის შევსება ხდება იმ წესების დაცვით, რომელიც ადრე გვქონდა ჩამოყალიბებული. ამ ცხრილის შედეგები შევიტანოთ მომდევნო ცხრილში (ცხრ. 6.2). ამ დროს უკვე y_3-ის შესაბამისი სვეტი გაუქმებულია და y_3 ცვლადი გადავა ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში.

ცხრილი 6.2

	P	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
	600 - 500	5 -5	2 -5	0 -5	-3 -5	7 0	5 0
	400 0	0 0	1 0	2 0	-2 0	2 0	3 0
	100 100	1 1	1 1	1 1	1 1	0 0	0 0
y_3	200 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0
F_1	-200 0	0 0	0 0	0 0	1 0	-1 0	-1 0

ცხრილი 6.2 მოწმობს, რომ y_3-ის გადაყვანით ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში ჩვენ მივიღეთ გადაუგვარებელი შემთხვევა. შემდგომი ცხრილების შედგენა სირთულეს არ წარმოადგენს.

ცხრილი 6.3

	P	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
	100 20	-3 $-\frac{3}{5}$	-5 -1	-8 $-\frac{8}{5}$	7 $\frac{7}{5}$	5 $\frac{1}{5}$
	400 -60	1 $\frac{9}{5}$	2 3	-2 $\frac{24}{5}$	2 $-\frac{21}{5}$	3 $-\frac{3}{5}$
	100 0	1 0	1 0	1 0	0 0	0 0
y_3	200 -20	0 $\frac{3}{5}$	0 1	0 $\frac{8}{5}$	0 $-\frac{7}{5}$	1 $-\frac{1}{5}$
F_1	-200 20	0 $-\frac{3}{5}$	0 -1	1 $-\frac{8}{5}$	-1 $\frac{7}{5}$	-1 $\frac{1}{5}$

ცხრილი 6.4

	P	x_2	x_3	x_4	y_1
y_2	20 68	$-\frac{3}{5}$ $\frac{14}{25}$	-1 $\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$ $\frac{14}{25}$	$\frac{7}{5}$ $-\frac{11}{25}$
	340 68	$\frac{14}{5}$ $\frac{14}{25}$	5 $\frac{1}{5}$	$\frac{14}{5}$ $\frac{14}{25}$	$-\frac{11}{5}$ $-\frac{11}{25}$
x_1	100 -68	1 $-\frac{14}{25}$	1 $-\frac{1}{5}$	1 $-\frac{14}{25}$	0 $\frac{11}{25}$
y_3	180 -68	$\frac{3}{5}$ $-\frac{14}{25}$	1 $-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$ $-\frac{14}{25}$	$-\frac{2}{5}$ $\frac{11}{25}$
F_1	-180 68	$-\frac{3}{5}$ $\frac{14}{25}$	-1 $\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$ $\frac{14}{25}$	$\frac{2}{5}$ $-\frac{11}{25}$

ცხრილი 6.5

	P	x_2	x_4	y_1
y_2	88	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{26}{25}$	$\frac{24}{25}$
x_3	68	$\frac{14}{25}$	$\frac{14}{25}$	$-\frac{11}{25}$
x_1	32	$\frac{11}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{11}{25}$
y_3	112	$\frac{1}{25}$	$\frac{26}{25}$	$\frac{1}{25}$
F_1	-112	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$

ცხრილი 6.5-ის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ჩვენ ვიპოვეთ არა მარტო ბაზისური ამონახსნი, არამედ ეს ამონახსნი არის, აგრეთვე, ოპტიმალურიც. ამას მოწმობს F_1-ის სტრიქონში ჩაწერილი უარყოფითი კოეფიციენტები.

$$x_1 = 32;\ \ x_2 = 0;\ \ x_3 = 68;\ \ x_4 = 0;\ \ y_1 = 0;\ \ y_2 = 88;\ \ y_3 = 112;\ \ \min F_1 = -112 \qquad (6.3)$$

მაგრამ ვინაიდან ჩვენ ვეძებდით F მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმს, ამიტომ

$$\max F \equiv \min F_1 = 112 \qquad (6.5)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ *F* მიზნის ფუნქცია აღნიშნავდა ნაკრებების რაოდენობას, რომელიც უნდა აეწყო საამქროს, შეგვიძლია დავასკვნათ: ნაკრებების მაქსიმალური რაოდენობა, რომელიც შეუძლია ააწყოს საამქრომ, 112-ის ტოლია. ამასთან, 150 სმ. ფიცრებიდან 32 ფიცარი უნდა დაიჭრას პირველი წესით, ხოლო დანარჩენი 68 ფიცარი კი მე-3 წესით, ხოლო დაჭრის მე-2 და მე-4 წესით არც ერთი ფიცარი არ უნდა დაიჭრას. ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება ჩატარდეს 140 სმ. ფიცრების მიმართაც. 88 ფიცარი უნდა დაიჭრას მეორე წესით, 112 ფიცარი მესამე წესით, ხოლო პირველი წესით არ უნდა დაიჭრას არც ერთი ფიცარი.

სავარჯიშოები

იპოვეთ 6.1 – 6.6 ამოცანების ბაზისური ამონახსნები.

(6.1). $F = 4x_1 + 6x_2 \to \min.$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(6.2) $F = -2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(6.3) $F = x_1 + 3x_2 \to \min.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 7x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(6.4) $F = -x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 11 \\ -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(6.5) $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(6.6) $F = x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \leq 0 \\ 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

§7. ორადული ამოცანები წრფივ დაპროგრამებაში

განვიხილოთ სტანდარტული სახით ჩაწერილი წრფივი დაპროგრამების ამოცანა (წდა), რომელსაც პირდაპირი ან საწყისი წდა ვუწოდოთ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = \overline{1,m} \ , \tag{7.1}$$

$$F = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ . \tag{7.2}$$

ამ ამოცანის მიმართ ორადული (შეუღლებული) ეწოდება სტანდარტული სახით ჩაწერილ შემდეგ წდა-ს:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{7.3}$$

$$\Phi = c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \tag{7.4}$$

სადაც (7.1) სისტემის i-ურ უტოლობას შეესაბამება y_i ცვლადი, ამიტომ ორადულ ამოცანაში იმდენი ცვლადია, რამდენი შეზღუდვაცაა საწყის ამოცანაში. აღნიშნული ამოცანების შედარებით ვრწმუნდებით, რომ შეზღუდვები მოპირდაპირე მიმართულების უტოლობებია (იგულისხმება, რომ თავისუფალი ცვლადები უტოლობათა ნიშნის მარჯვენა მხარესაა) და თვით ამოცანის მოთხოვნები საწინააღმდეგო აზრის: პირდაპირი ამოცანა არის მინიმუმის ამოცანა, ხოლო ორადული – მაქსიმუმის. გარდა ამისა, შეზღუდვებში ცვლადებთან მდგარი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცები ურთიერთტრანსპონირებულია; ორადული ამოცანის შეზღუდვებში j-ური უტოლობის თავისუფალი წევრი ტოლია პირდაპირი ამოცანის მიზნის ფუნქციაში x_j ცვლადთან მდგარი კოეფიციენტის. ორადული ამოცანის მიზნის ფუნქციის ცვლადებთან მდგარი კოეფიციენტები ტოლია პირდაპირი ამოცანის შეზღუდვების შესაბამისი უტოლობების თავისუფალი წევრების; მიზნის ფუნქციის თავისუფალი წევრები ორივე ამოცანაში ერთმანეთის ტოლია.

წარმოვადგინოთ (7.3)–(7.4) ამოცანა მისი ეკვივალენტური სახით:

$$-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq -c_j, \qquad j=\overline{1,n} \qquad (7.3^*)$$

$$-\Phi = -c_0 - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \qquad (7.4^*)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ (7.3*)–(7.4*) არის პირდაპირი ამოცანა, მაშინ მისი ორადული ამოცანა იქნება:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq -b_j, \qquad i=\overline{1,m}, \qquad (7.1^*)$$

$$f = -c_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \,. \qquad (7.2^*)$$

თუ (7.1*) სისტემის ყველა უტოლობას და (7.2*) მიზნის ფუნქციის ორივე მხარეს გავამრავლებთ (-1)-ზე, მივიღებთ ისეთ ՞ᲓᲐ-ს, რომელიც (7.1)-(7.2) ՞ᲓᲐ-გან მხოლოდ ცვლადებისა და მიზნის ფუნქციის აღნიშვნებით განსხვავდება. ეს კი ნიშნავს, რომ (7.1)–(7.2) ამოცანა წარმოადგენს (7.3)–(7.4) ამოცანის ორადულ ამოცანას. ე. ი. (7.1)–(7.2) და (7.3)–(7.4) ამოცანები ურთიერთორადული წრფივი დაპროგრამირების ამოცანებია. მათ წრფივი დაპროგრამირების სიმეტრიული ორადული ამოცანები ეწოდებათ.

ვნახოთ, როგორი სახე აქვს ორადულ ამოცანას ՞ᲓᲙᲐ-თვის.

ვთქვათ, მოცემულია ՞Დ მაქსიმუმის კანონიკური სახით ჩაწერილი ამოცანა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \qquad i=\overline{1,m} \,, \qquad (7.5)$$

$$F = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,. \qquad (7.6)$$

თუ (7.5) სისტემის ყველა განტოლებას შევცვლით ეკვივალენტურ უტოლობათა სისტემები:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, & i = \overline{1,m} \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_j, & i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{7.5*}$$

მაშინ (7.5)–(7.6) ჶᲓპᲐ-ს ორადული იქნება მინიმუმის შემდეგი ჶᲓᲐ:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} (y_i^{'} - y_i^{''}) \ge c_j, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{7.7}$$

$$\Phi = c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i (y_i^{'} - y_i^{''}). \tag{7.8}$$

აქ $y_i^{'}$ ცვლადი შეესაბამება (7.5*) სისტემის პირველ უტოლობას, ხოლო $y_i^{''}$ კი – მეორეს. თუ (7.7)–(7.8) ჶᲓᲐ-ში შემოვიტანთ ახალ ცვლადებს შემდეგი დამოკიდებულებებიდან:

$$y_i = y_i^{'} - y_i^{''}, \qquad j = \overline{1,n} \tag{7.8*}$$

მაშინ (7.5)–(7.6) ჶᲓპᲐ-ს ორადულ ამოცანას ექნება შემდეგი სახე:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{7.9}$$

$$\Phi = c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{7.10}$$

ცხადია, რომ (7.8*) პირობით შემოტანილი y_i ცვლადები, ზოგადად, ვერ დააკმაყოფილებენ არაუარყოფითობის პირობას, ამიტომ ჶᲓ ორადული (7.9)–(7.10) ამოცანა არ არის სტანდარტული ფორმის.

ისევე როგორც ზემოთ, აქაც შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (7.5)–(7.6) და (7.9)-(7.10) ურთიერთორადულ ჶᲓᲐ-ს წარმოადგენენ. ასეთ ამოცანებს წრფივი დაპროგრამების არასიმეტრიული ორადული ამოცანები ეწოდებათ. არასიმეტრიულ ორადულ ამოცანებშიც, ისევე როგორც სიმეტრიულ ორადულ ამოცანებში, ერთი არის მაქსიმუმის, ხოლო მეორე – მინიმუმის ამოცანა.

თუ ჶᲓᲐ მოცემულია ყველაზე ზოგადი (2.1)-(2.2) სახით, მაშინ ის უნდა დავიყვანოთ ან სტანდარტულ ან კანონიკურ სახეზე (იხ. §2) და შევადგინოთ

მიღებული ამოცანის ორადული ამოცანა. ასე მიღებულ ამოცანას დავარქვათ (2.1)–(2.2) ЊДА-ს ორადული ამოცანა.

გამოვიკვლიოთ, თუ როგორ კავშირში არიან ЊД ორადული ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნები და მათი ოპტიმუმები. ამისათვის ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი **თეორემა**: ЊД ორადული ამოცანების მაქსიმუმის ამოცანის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა ნებისმიერ ამონახსნზე არ აღემატება მინიმუმის ამოცანის მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობას ნებისმიერ ამონახსნზე. ე. ი. სამართლიანია შემდეგი უტოლობები. კერძოდ: სიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის -

$$F(x) \geq \Phi(y) \tag{7.11}$$

სადაც $F(x)$ და $\Phi(y)$ შესაბამისად მინიმუმის და მაქსიმუმის ЊДА-ს მიზნის ფუნქციებია.

და არასიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის -

$$F(x) \leq \Phi(y). \tag{7.12}$$

სადაც $F(x)$ და $\Phi(y)$ შესაბამისად მაქსიმუმის და მინიმუმის ЊДА-ს ამოცანების მიზნის ფუნქციებია.

აქ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ და $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ შესაბამისი ამოცანების ამონახსნებია.

ამ უტოლობებიდან დავამტკიცოთ ერთ-ერთი. მაგალითად (7.11) უტოლობა, ვინაიდან (7.12) უტოლობაც ანალოგიურად დამტკიცდება.

(7.1)-(7.2) და (7.3)-(7.4)-ის მარტივი გარდაქმნებით, ვღებულობთ

$$F(x) - c_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \Phi(y) - c_0, \tag{7.13}$$

ანუ $F(x) - c_0 \geq \Phi(y) - c_0$.

ეს უტოლობა კი ტოლფასია (7.11) უტოლობის.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი, კერძოდ:

– იმისათვის, რომ ЊДА-ს ჰქონდეს ოპტიმალური ამონახსნი, აუცილებელი და

საკმარისია, რომ ამ ამოცანისა და მისი ორადული ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე არ იყოს ცარიელი. მას ეწოდება **ორადულობის მცირე თეორემა.** (ამ დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს კანონიკური სახის წდა-ის ოპტიმალური ამონახსნის არსებობის თეორემიდან (იხ. §2) და (7.11) ან (7.12) უტოლობიდან).

– თუ ჩდ ორადული ამოცანებიდან ერთ-ერთის მიზნის ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული შესაბამისი მხრიდან (მაქსიმუმის ამოცანის შემთხვევაში ზემოდან, ხოლო მინიმუმის ამოცანის შემთხვევაში – ქვემოდან), მაშინ მეორე ამოცანის **დას** ცარიელია. შევნიშნოთ, რომ ზოგადად, შებრუნებული დებულება არ არის სამართლიანი. შესაძლებელია პირდაპირი ამოცანის **დას** იყოს ცარიელი და ამავე დროს მისი ორადული ამოცანის **დას** იყოს, აგრეთვე, ცარიელი.

(7.11) და (7.12) უტოლობებს ორადულობის ძირითად უტოლობებს უწოდებენ. კავშირს პირდაპირი და მისი ორადული ამოცანის ოპტიმუმებს შორის ამყარებს დებულება, რომელიც ცნობილია, როგორც ორადულობის **პირველი ძირითადი თეორემა -** თუ ჩდ ორადული ამოცანებიდან ერთ-ერთს აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ მეორე ამოცანასაც აქვს ოპტიმალური ამონახსნი და ამ ამოცანების ოპტიმუმები ერთმანეთის ტოლია.

ეს თეორემა დავამტკიცოთ სიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის, ვინაიდან იგივე მსჯელობით ის დამტკიცდება არასიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვისაც.

თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ სიმპლექს მეთოდი. ამისათვის (7.1) და (7.3) შეზღუდვებს მივცეთ შესაბამისი სახე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{7.14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{7.15}$$

ცხადია, რომ x_{n+i} და y_{m+j} ცვლადები არაუარყოფითებია. ჩავთვალოთ ისინი ბაზისურ ცვლადებად და ჩავწეროთ შესაბამის სიმპლექს ცხრილებში §2-ში

აღწერილი წესებით (ცხრ. 7.1, ცხრ 7.2). ცხრ. 7.2-ს ეწოდება ცხრ 7.1-ის თანმხლები.

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში შერჩეული ბაზისების შესაბამისი ამონახსნები შესაძლებელია არც იყოს დასაშვები, მაგრამ ეს არ არის არსებითი, ჩვენი მიზანია გამოვიკვლიოთ ის ცვლილებები რომელსაც გამოიწვევს სიმპლექსური გარდაქმნები (ბაზისების შეცვლა) ორივე ცხრილში.

ცხრილი 7.1

	b	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
$-F$	$-c_0$ $-\lambda c_j b_i$	c_1 $-\lambda c_j a_{i1}$	$\cdots$	c_j $-\lambda c_j$	$\cdots$	c_n $-\lambda c_j a_{in}$
x_{n+1} $\vdots$	b_1 $-\lambda a_{ij} b_i$ $\vdots$	a_{11} $-\lambda a_{1j} a_{i1}$ $\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	a_{1j} $-\lambda a_{1j}$ $\vdots$	$\cdots$ $\vdots$	a_{1n} $-\lambda a_{1j} a_{in}$ $\vdots$
x_{n+i}	b_i λb_i	a_{l1} λa_{i1}	$\cdots$	$\underline{a_{ij}}$ $\lambda = \dfrac{1}{a_{ij}}$	$\cdots$	a_{in} λa_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	b_m $-\lambda a_{mj} b_i$	a_{m1} $-\lambda a_{mj} a_{i1}$	$\cdots$	a_{mj} $-\lambda a_{mj}$	$\cdots$	a_{mn} $-\lambda a_{mj} a_{in}$

ცხრილი 7.2

ცხრილი 7.1-სა და ცხრილი 7.2-ის შედარებით (იგულისხმება, რომ უნდა შევადაროთ ამ ცხრილების უჯრედების მარცნივ ჩაწერილი გამოსახულებები).

	c	y_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_m
Φ	c_0 $\lambda c_j b_i$	$-b_1$ $\lambda a_{1j} b_i$	$\cdots$	$-b_i$ $-\lambda b_i$	$\cdots$	$-b_m$ $\lambda a_{mj} b_i$
y_{m+1}	$-c_1$ $\lambda c_j a_{i1}$	$-a_{11}$ $\lambda a_{1j} a_{i1}$	$\cdots$	$-a_{i1}$ $-\lambda a_{i1}$	$\cdots$	$-a_{m1}$ $\lambda a_{mj} a_{i1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{m+j}	$-c_j$ λc_j	$-a_{1j}$ λa_{1j}	$\cdots$	$-\underline{a_{ij}}$ $-\lambda = -\dfrac{1}{a_{ij}}$	$\cdots$	$-a_{mj}$ λa_{mj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{m+n}	$-c_n$ $\lambda c_j a_{in}$	$-a_{1n}$ $\lambda a_{1j} a_{in}$	$\cdots$	$-a_{in}$ $-\lambda a_{in}$	$\cdots$	$-a_{mn}$ $\lambda a_{mj} a_{in}$

ვრწმუნდებით, რომ თუ ცხრილებს განვიხილავთ როგორც მატრიცებს, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტრანსპონირებული და ნიშნით განსხვავებული მატრიცებია. ამიტომ $-F$-ის შესაბამისი სტრიქონის ელემენტები მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან ცხრილი

7.2-ის თავისუფალი წევრების შესაბამისი სვეტის ელემენტებისაგან; ანალოგიურ თანაფარდობას აქვს ადგილი Φ-ის შესაბამისი სტრიქონის ელემენტებსა და ცხრილი 7.1-ის თავისუფალი წევრების შესაბამისი სვეტის ელემენტებს შორის; გარდა ამისა, ასეთივე თანაფარდობაში არიან x_{n+i}- ბაზისური ცვლადის (x_j - თავისუფალი ცვლადის) შესაბამისი სტრიქონის (სვეტის) და y_i-თავისუფალი ცვლადის (y_{m+j}- ბაზისური ცვლადის) შესაბამისი სვეტის (სტრიქონის) ელემენტები, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

ზემოთ აღწერილი თვისებების გათვალსწინებით დავამყაროთ შესაბამისობა ორადული ამოცანების ცვლადებს შორის შემდეგი წესით:

$$x_j \leftrightarrow y_{m+j};\ x_{n+i} \leftrightarrow y_i;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}. \tag{7.16}$$

კოეფიციენტი, რომელიც აქვს x_j-თავისუფალ ცვლადს x_{n+i}-ბაზისური ცვლადის შესაბამის სტრიქონში, მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება იმ კოეფიციენტისაგან, რომელიც აქვს y_i-თავისუფალ ცვლადს y_{m+j}-ბაზისური ცვლადის შესაბამის სტრიქონში.

ვთქვათ, $a_{ij} \neq 0$. ცხრილი 7.1-ში x_j თავისუფალი ცვლადი გადავიტანოთ ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში (ამ შემთხვევაში x_{n+i} ბაზისური ცვლადი გადავა თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეში), ხოლო ცხრილი 7.2-ში კი y_{m+j} ბაზისურ ცვლადსა და y_i თავისუფალ ცვლადებს შევუცვალოთ ადგილები შესაბამის სიმრავლეებში. ე.ი. (7.16)-ის შესაბამისად მოვახდინოთ ამ ცხრილების სიმპლექსური გარდაქმნები. ცხრილი 7.2-ში ასეთ გარდაქმნას თანმხლები სიმპლექსური გარდაქმნა ეწოდება.

სიმპლექსური გარდაქმნები განხორციელებულია §2-ში აღწერილი წესებით, ხოლო საბოლოო შედეგები მოცემულია შესაბამის ახალ ცხრილებში (ცხრ. 7.3 და ცხრ. 7.4).

კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში სიმპლექს-გარდაქმნები ტარდება არა ოპტიმალური ამონახსნის მოსაძებნად, არამედ იმ ცვლილებების

გამოსარკვევად, რასაც გამოიწვევს ეს გარდაქმნები მოცემულ სიმპლექს ცხრილებში.

თუ შევადარებთ ახალ სიმპლექს ცხრილებს (ცხრ. 7.3 და ცხრ 7.4) დავრწმუნდებით, რომ ყველა ის თანაფარდობა, რომელიც არსებობდა საწყის სიმპლექს ცხრილებს შორის (ცხრ. 7.1 და ცხრ. 7.2) შენარჩუნებულია ამ ცხრილებშიც. კერძოდ, კოეფიციენტი, რომელიც აქვს ცხრილ 7.3-ში რომელიმე თავისუფალ ცვლადს ნებისმიერი ბაზისური ცვლადის სტრიქონში, მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება ცხრილ 7.4-ში (7.16) შესაბამისობით განსაზღვრული თავისუფალი ცვლადის კოეფციენტისაგან სათანადო ბაზისური ცვლადის სტრიქონში.

ცხადია, რომ თუ გავაგრძელებთ ორადული ამოცანების შესაბამისი სიმპლექს ცხრილების ასეთ გარდამქნებს, ამ ცხრილებს შორის ყოველთვის იქნება ზემოთ აღწერილი შესაბამისობა.

ცხრილი 7.3

	b	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
$-F$	$-(c_0+\lambda c_j b_i)$	$c_1-\lambda c_j a_{i1}$	$\cdots$	$-\lambda c_j$	$\cdots$	$c_n-\lambda c_j a_{in}$
x_{n+1}	$b_1-\lambda a_{ij} b_i$	$a_{11}-\lambda a_{1j} a_{i1}$	$\cdots$	$-\lambda a_{1j}$	$\cdots$	$a_{1n}-\lambda a_{1j} a_{in}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+i}	λb_i	λa_{i1}	$\cdots$	λ	$\cdots$	λa_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	$b_m-\lambda a_{mj} b_i$	$a_{m1}-\lambda a_{mj} a_{i1}$	$\cdots$	$-\lambda a_{mj}$	$\cdots$	$a_{mn}-\lambda a_{mj} a_{in}$

ცხრილი 7.4

	c	y_1	$\cdots$	y_{m+j}	$\cdots$	y_m
Φ	$c_0+\lambda c_j b_i$	$-(b_1-\lambda a_{1j}b_i)$	$\ldots$	$-\lambda b_i$	$\ldots$	$-(b_m-\lambda a_{mj}b_i$
y_{m+1}	$-(c_1-\lambda c_j a_{i1})$	$-(a_{11}-\lambda a_{1j}a_{i1})$	$\cdots$	$-\lambda a_{i1}$	$\cdots$	$-(a_{m1}-\lambda a_{mj}a_{i1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_i	λc_j	λa_{1j}	$\cdots$	$-\lambda$	$\cdots$	λa_{mj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{m+n}	$-(c_n-\lambda c_j a_{in})$	$-(a_{1n}-\lambda a_{1j}a_{in})$	$\cdots$	$-\lambda a_{in}$	$\cdots$	$-(a_{mn}-\lambda a_{mj}a_{in})$

გამოვიყენოთ ორადული ამოცანების სიმპლექს ცხრილების ეს თვისება და დავამტკიცოთ ზემოთ მოყანილი ორადულობის პირველი ძირითადი თეორემა.

თუ (7.1)-(7.2) წდ პირდაპირ ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ სასრული რაოდენობა სიმპლექს გარდაქმენბის შემდეგ მიიღება საბოლოო სიმპლექს ცხრილი, რომელშიაც პირველი სტრიქონის არც ერთი ელემენტი არ იქნება დადებითი, გარდა, შესაძლებელია, თავისუფალი წევრისა, ხოლო თავისუფალ წევრთა სვეტში კი – არც ერთი უარყოფითი (გარდა, შესაძლებელია, $-F$-ის შესაბამისი თავისუფალი წევრი). ამ ცხრილს შეესაბამება ორადული (7.3)-(7.4) ამოცანის ისეთი ცხრილი, რომელშიაც ორადული ამოცანების სიმპლექს ცხრილების ზემოთ აღწერილი თვისებების თანახმად, თავისუფალი წევრების შესაბამის სვეტში არ იქნება არც ერთი უარყოფითი, ხოლო მიზნის ფუნქციის შესაბამის სტრიქონში (პირველი სტრიქონი) არც ერთი დადებითი ელემენტი, გარდა, შესაძლებელია, თავისუფალი წევრისა. ეს კი ნიშნავს, რომ ნაპოვნია ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი (იხ. §2). ამასთან, $-F$ მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა მხოლოდ ნიშნით განსხვავდება Φ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობისაგან, ამიტომ $\max F=-\min(-F)=\min\Phi$ და ორადულობის პირველი ძირითადი თეორემა დამტკიცებულია.

წდ კონკრეტული ორადული ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნების პოვნისთვის ხშირად სასარგებლო ხდება შემდეგი თეორემა: იმისათვის, რომ წდ ორადული ამოცანების შეზღუდვების $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ და $\bar{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_m})$ ამონახსნები იყვნენ ოპტიმალური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$F(\overline{x}) = \Phi(\bar{y}) \tag{7.17}$$

პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს ბოლოს დამტკიცებული თეორემიდან. ხოლო პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ (7.11) ან (7.12) პირობა იმის მიხედვით, თუ როგორი სახის ორადულ ამოცანებს განვიხილავთ.
ვთქვათ, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (7.1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნია, მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი უტოლობა:

$$F(x) \le F(\bar{x}).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ ვექტორი მართლაც ოპტიმალური ამონახსნია. იგივე მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\bar{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_m})$ ვექტორი იქნება (7.3)-(7.4) წდ ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი.
მსჯელობა რომ წავვემართა არასიმეტრიული ორადული ამოცანების მიმართ, ანალოგიურად დავამტკიცებდით (7.17) პირობის საკმარისობასაც.
დამტკიცებული თეორემები და წდ ორადული ამოცანების სიმპლექს ცხრილებს შორის ზემოთ აღწერილი დამოკიდებულება საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ წდა ე. წ. ორადული სიმპლექს მეთოდით. ეს მეთოდი გულისხმობს მოცემული წდა–ს ამოხნის დაყვანას მისი ორადული ამოცანის სიმპლექს მეთოდით ამოხსნაზე. თუ მოცემულ წდა–ს აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ ორადული სიმპლექს მეთოდით ნაპოვნი ოპტიმუმი ტოლი იქნება მოცემული წდა წდა-ს ოპტიმუმის, ხოლო თუ მოცემულ ამოცანას არ აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ არც მის ორადულ ამოცანას ექნება ამონახსნი, რასაც ორადული სიმპლექს მეთოდით გამოვარკვევთ. შევნიშნოთ, რომ ასეთი მეთოდით

მიზანშეწონილია ისეთი ᲬᲓᲐ-ს ამოხსნა, რომელთა შეზღუდვები გაცილებით მეტია ცვლადთა რაოდენობაზე.

გამოვიყენოთ ორადული სიმპლექს მეთოდი ᲬᲓᲐ სიმეტრიული ორადული ამოცანების მიმართ. ჩავთვალოთ, რომ (7.1)-(7.2) არის პირდაპირი ᲬᲓᲐ. ვიგულისმოთ, რომ b_i და c_j არაუარყოფითი რიცხვებია, რაც სავსებით ბუნებრივი მოთხოვნაა პრაქტიკულ ამოცანებში, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

ორადული (7.3)-(7.4) ᲬᲓᲐ ამოვხსნათ არა ისეთი სიმპლექს მეოთდით, რომელიც საწყის ეტაპზე ითვალიწისნებს ისეთი ბაზისის ქონას, რომლის შესაბამისი ამოანახსნი არის დასაშვები, ხოლო მიზნის ფუნქციაში შემავალი კოეფიციენტები, შესაძლოა, არ აკმაყოფილებდნენ ოპტიმალური ამონახსნის პირობას, არამედ ისეთი სიმპლექს მეთოდით, როდესაც საწყის ეტაპზე გვაქვს ისეთი ბაზისი, რომლის შესაბამისი ამონახსნი, შესაძლოა, არ არის დასაშვები, მაგრამ მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ოპტიმალურობის პირობას. ყოველი სიმპლექსური გარდაქმნა ისე უნდა წარიმართოს, რომ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალურობის პირობა შენარჩუნებული იყოს, ხოლო ბაზისური ამონახსნი ნაბიჯ-ნაბიჯ გახდეს დასაშვები.

თუ (7.3) შეზღუდვებს მივცემთ (7.15) სისტემის სახეს, მაშინ $y_{m+j}\ (j=\overline{1,n})$ ცვლადები შექმნიან ისეთ ბაზისს, რომელზედაც იყო საუბარი. ასეთი სახით ჩამოყალიბებული ამოცანის სიმპლექს ცხრილი ჩვენ უკვე ავაგეთ (იხ. ცხრ 7.2). თუ ჩვეულებრივ სიმპლექს მეთოდში წამყვანი ელემენტით განისაზღვრებოდა წამყვანი სტრიქონი და წამყვანი სვეტი, ამ შემთხვევაში წამყვანი ელემენტი განისაზღვრება უკვე განსაზღვრული წამყვანი სტრიქონით ან წამყვანი სვეტით.

იმისათვის, რომ სიპლექს გარდაქმნის შემდეგ მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებმა შეინარჩუნონ ოპტიმალურობის პირობა, წამყვანი სტრიქონი უნდა იყოს ისეთი ბაზისური ცვლადის შესაბამისი, რომლის თავისუფალი წევრი იქნება მინიმალური ყველა უარყოფით თავისუფალ წევრებს შორის (მიზნის ფუნქციის

თავისუფალი წევრის გარდა). ვთქვათ, ეს ცვლადია y_{m+j} (ე.ი. $-c_j$ არის უარყოფით თავისუფალ წევრებს შორის მინიმალური). წამყვანი სვეტი უნდა შევარჩიოთ ისეთ სვეტებს შორის, რომელთა ელემენტები წამყვან სტრიქონში უარყოფითია (იგულისხმება თავისუფალი წევრების სვეტის გარდა). ვიპოვოთ ამ სვეტებში მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტებსა და წამყვანი სტქრიქონის ელემენტების შეფარდებებს შორის მინიმალური. ამ მინიმალური შეფარდების შესაბამისი სვეტი იქნება წამყვანი სვეტი. ვთქვათ, ეს არის i-ური სვეტი. მაშასადამე, მივიღეთ, რომ წამყვანი ელემენტი არის a_{ij}. შემდეგ ვიმოქმედოთ ისეთივე წესებით, რომელიც შეესაბამება ჩვეულებრივ სიმპლექს მეთოდს (იხ. §2).

ასეთი სიმპლექს გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ ახალ ცხრილს (იხ. ცხრ. 7.4). ამ ცხრილის ანალიზით ვრწმუნდებით. რომ ახალი ბაზისის შესაბამისი მიზნის ფუნქციების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ოპტიმალურობის პირობას, ხოლო ბაზისურ ამონახსნში ერთი წევრი მაინც გახდა დადებითი (y_i-ის შესაბამისი λc_j).

თუ მოცემულ wდა-ს აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ ის მიიღწევა ასეთი სახის სასრული რაოდენობა სიმპლექს გარდაქმნების შედეგად, ხოლო თუ არ აქვს ოპტიმალური ამონახსნი, ეს გამოჩნდება სიმპლექს გარდაქმნების რომელიმე ეტაპზე.

იმ შემთხვევაში თუ რომელიმე ეტაპზე წამყვანი სტრიქონის ან წამყვანი სვეტის ამოსარჩევად გვექნება რამდენიმე ვარიანტი, ვიმოქმედოთ იგივე წესებით, რომლებიც მოცემულია სიმპლექს-მეთოდში წამყვანი ელემენტის ამოსარჩევად (იხ. §2).

ორადული სიმპლექს მეთოდით ამოვხსნათ შემდეგი wდა:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ \qquad x_1 \le 5 \\ \quad\; 2x_2 \le 13 \end{cases} \tag{7.18}$$

$$F = 55x_1 + 33x_2 \qquad (7.19)$$

ამ ამოცანის შესაბამისი ორადული იქნება შემდეგი სახის:

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 55 \\ 2y_1 + 3y_2 + 2y_4 \ge 33 \end{cases} \qquad (7.20)$$

$$\Phi = 30y_1 + 24y_2 + 5y_3 + 13y_4 . \qquad (7.21)$$

მივცეთ (7.18)-(7.19) და (7.20)-(7.21) ორადულ ამოცანებს შესაბამისი ფორმა:

$$\begin{cases} x_3 = 30 - (5x_1 + 2x_2) \\ x_4 = 24 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_5 = 5 - x_1 \\ x_6 = 13 - 2x_2 \end{cases} \qquad (7.22)$$

$$-F = -55x_1 - 33x_2 ; \qquad (7.23)$$

$$\begin{cases} y_5 = -55 - (-5y_1 + 2y_2 + y_3) \\ y_6 = -33 - (-2y_1 - 3y_2 - 2y_4 \end{cases} \qquad (7.24)$$

$$\Phi = -(-30y_1 - 24y_2 - 5y_3 - 13y_4 \qquad (7.25)$$

და (7.34)-(7.35) სახის ჩავწეროთ სიმპლექს ცხრილში (ცხრ. 7.5):

ცხრილი 7.5

	c	y_1	y_2	y_3	y_4
Φ	0 275	-30 25	-24 10	-5 -5	-13 0
y_5	-55 55	-5 5	-2 2	-1 -1	0 0
y_6	-33 0	-2 0	-3 0	0 0	-2 0

ცხრილი 7.5-ის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ წამყვანი სტრიქონი უნდა იყოს y_5-ის შესაბამისი სტრიქონი, ხოლო წამყვანი სვეტი კი – y_3-ის შესაბამისი. (ე. ი. წამყვანი ელემენტი იქნება -1). შემდეგი მოქმედებები კი მიმდინარეობს სიმპლექს მეთოდის შესაბამისი წესების მიხედვით.

ცხრილი 7.6

	c	y_1	y_2	y_5	y_4
Φ	275 165/2	-5 -5/2	-14 15/2	-5 0	-13 5
y_3	-55 -165/2	-5 5/2	2 -15/2	-1 0	0 -5
y_6	-33 33/2	-2 -1/2	-3 3/2	0 0	-2 1

ცხრილი 7.7

	c	y_6	y_2	y_5	y_4
Φ	715/2 65/2	-5/2 -65/22	-5 13/11	-5 -5	-8 65/11
y_3	-55/2 5	5/2 -5/11	-11/2 -2/11	-1 2/11	-5 10/11
y_1	33/2 -15/2	-1/2 15/22	3/2 3/11	0 -3/11	1 -15/11

ცხრილი 7.8

	c	y_6	y_3	y_5	y_4
Φ	390	-60/11	-13/11	-42/11	-23/11
y_2	5	-5/11	-2/11	2/11	10/11
y_1	9	2/11	3/11	-3/11	-4/11

ცხრილი 7.8-დან გამომდინარეობს, რომ ორადული ამოცანისათვის (9;5;0;0) ვექტორი არის ოპტიმალური ამონახსნი, ხოლო Φ= 390 კი – ოპტიმუმი. ცხადია, რომ მოცემული (7.18)-(7.19) წდა-ს ოპტიმუმი იქნება $F=390$, ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი კი – (42/11;60/11) ვექტორი. ეს გამომდინარეობს წდ ორადული ამოცანების სიმპლექს ცხრილებს შორის დამოკიდებულებებიდან. წდა რომ იყოს მოცემული (7.3)-(7.4) სახით, მაშინ ის შეგვიძლია ჩავთვალოთ,

როგორც ორადული რომელიღაც სხვა ᲬᲓᲐ-ს მიმართ და ამოვხსნათ ზემოთ აღწერილი ორადული სიმპლექს მეთოდით.

ახლა დავამტკიცოთ ᲬᲓᲐ ორადული ამოცანების ე. წ. **მეორე ძირითადი თეორემა.** ეს თეორემა ამყარებს კავშირს ორადული ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს შორის.

იმისათვის, რომ ᲬᲓᲐ ორადული ამოცანების შეზღუდვების $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ და $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ ამონახსნები იყვნენ ოპტიმალური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სიმეტრიული ამოცანებისათვის შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$\overline{x_j}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i}-c_j)=0, \quad j=\overline{1,n} \tag{7.26}$$

$$\overline{y_i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j}-b_i)=0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{7.27}$$

ხოლო არასიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის კი მხოლოდ (7.26) ტოლობა (ასეთი ამოცანებისათვის (7.27) პირობა ყოველთვის სრულდება).

ჯერ დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ, $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ და $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ ვექტორები წარმოადგენენ სიმეტრიული ორადული ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს. ზემოთ დამტკიცებული ერთ-ერთი თეორემის თანახმად უნდა შესრულდეს (7.17) პირობა, საიდანაც

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x_j}=\sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y_i}. \tag{7.28}$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.13) უტოლობებს, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x_j}\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j y_i}\le\sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y_i}\ . \tag{7.29}$$

საიდანაც მივიღებთ ორ ტოლობას:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\overline{x_j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j y_i},$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\overline{y_i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j y_i}\ .$$

ანუ

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\overline{y_i}-c_j)=0, \tag{7.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{y_i}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_j}-b_i)=0. \tag{7.31}$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\overline{x_j}$, $\overline{y_i}$, $(j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m})$ - არაუარყოფითებია და (7.26) ფორმულაში ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არაუარყოფითი, ხოლო (7.27) ფორმულაში კი – არადადებითი, მივიღებთ (7.26) და (7.27) პირობებს. ამით დამტკიცდა პირობის აუცილებელობა.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. შევკრიბოთ (7.26) და (7.27) პირობებში შემავალი ყველა ტოლობა. მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_j y_i}=\sum_{j=1}^{n}c_j\overline{x_j}, \tag{7.32}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{x_j y_i}=\sum_{i=1}^{m}b_i\overline{y_i}\ . \tag{7.33}$$

ვინაიდან (7.32) და (7.33) ტოლობების მარცხენა მხარეები ტოლია, ამიტომ ტოლი უნდა იყოს მათი მარჯვენა მხარეებიც, ე. ი. $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ და $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ ვექტორებზე შესაბამის მიზნის ფუნქციებს აქვთ ტოლი მნიშვნელობები, ეს კი ნიშნავს, რომ ეს ვექტორები მართლაც წარმოადგენენ ორადული ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს. ამით დამტკიცდა პირობის საკმარისობა და მთლიანად თეორემაც.

თუ გავიმეორებთ ანალოგიურ მსჯელობას არასიმეტრიული ამოცანების მიმართ, მივიღებთ იგივე შედეგს.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორადული ამოცანების ერთ-ერთი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნში რომელიმე კომპონენტი არანულოვანია, მაშინ მისი შესაბამისი შეზღუდვა მეორე ამოცანაში ოპტიმალურ ამონახსნზე გადაიქცევა მკაცრ ტოლობად; ხოლო თუ რომელიმე შეზღუდვა ოპტიმალურ ამონახსნზე წარმოადგენს მკაცრ უტოლობას, მაშინ ამ შეზღუდვის

შესაბამისი კომპონენტი მეორე ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნში ნულის ტოლი იქნება.

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ შებრუნებული დებულება არ არის სამართლიანი. ე. ი. თუ ერთი ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნში რომელიმე კომპონენტი ნულის ტოლია, მაშინ ორადული ამოცანის შესაბამისი შეზღუდვა ოპტიმალურ ამონახსნზე შეიძლება გახდეს როგორც მკაცრი ტოლობა, ისე მკაცრი უტოლობაც; ან თუ ერთი ამოცანის რომელიმე შეზღუდვა ოპტიმალურ ამონახსნზე წარმოადგენს მკაცრ ტოლობას, მაშინ მისი შესაბამისი ცვლადის მნიშვნელობა მეორე ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნში შეიძლება იყოს როგორც ნულის ტოლი, ისევე ნულისაგან განსხვავებული. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ ჩვენს მიერ ამოხსნილი ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს.

წდ ორადული ამოცანების პირველი და მეორე ძირითადი თეორემებიდან გამომდინარეობს ოპტიმალური ამონახსნის განსაზღვრის კრიტერიუმები:

იმისათვის რომ წდა-ს შეზღუდვების $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ ამონახსნი იყოს ოპტიმალური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს მისი ორადული ამოცანის შეზღუდვების ისეთი $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ ამონახსნი, რომლისთვისაც სრულდებოდეს $F(\overline{x})=\Phi(\overline{y})$ პირობა ან (7.26), (7.27) პირობები.

სავარჯიშოები

ჩამოაყალიბეთ (7.1) – (7.4) ამოცანების ორადული ამოცანები:

(7.1) $F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3}). \end{cases}$$

(7.2) $F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max.$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 18 \\ 4x_1 + \quad\quad + 5x_3 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 14 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3}). \end{cases}$$

(7.3) $F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \min.$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 8 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 12 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3}). \end{cases}$$

(7.4) $F = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to \min.$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3}). \end{cases}$$

ორადული სიმპლექს მეთოდით ამოხსენით (7.5)-(7.8) ამოცანები.

(7.5) $F = x_1 + x_2 \to \max.$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -13 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2}). \end{cases}$$

(7.6) $F = 10x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

(7.7) $F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max.$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \quad\quad + 2x_4 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \quad\quad \ge 6 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3,4}). \end{cases}$$

(7.8) $F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min.$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18 \\ 3x_1 + \quad\quad + 2x_3 - 4x_4 \ge 24 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2,3,4}). \end{cases}$$

§ 8. ᲬᲠᲤᲘᲕᲘ ᲓᲐᲞᲠᲝᲒᲠᲐᲛᲔᲑᲘᲡ ᲝᲠᲐᲓᲣᲚᲘ ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲔᲑᲘᲡ ᲔᲙᲝᲜᲝᲛᲘᲙᲣᲠᲘ ᲐᲠᲡᲘ

ნებისმიერი საწარმოო პროცესი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გარკვეული სახის რესურსების ხარჯვა და რაიმე პროდუქციის შექმნა. რესურსები, როგორც წესი, ლიმიტირებულია, ხოლო მათი გამოყენების ეფექტურობა სხვადასხვა პროცესებში განსხვავებული. ამიტომ აუცილებელი ხდება დაგეგმვის ისეთი მეთოდების შექმნა, რომლებიც განაპირობებენ რესურსების ოპტიმალურ განაწილებას და ამასთან ერთად გაითვალისწინებენ მათ რეალურ ღირებულებას. ასეთი მეთოდებისათვის საფუძველს ხშირად წარმოადგენს ᲬᲓ ორადულობის თეორიის ძირითადი პრინციპები. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ წარმოების დაგეგმვის ამოცანა.

საწარმოს ძირითადი საქმიანობის შედეგად რჩება სხვადასხვა სახის ნედლეული. საწარმოს აქვს ორი შესაძლებლობა: ნარჩენი ნედლეულისაგანააწყოს ახალი პროდუქციის წარმოება ან გაყიდოს ეს ნედლეული.

ამ ამოცანის გადასაჭრელად საწარმომ უნდა შეიმუშაოს მოქმედების ისეთი სტრატეგია, რომელიც უზრუნველყოფს ნარჩენი ნედლეულის ყველაზე უფრო ეფექტურ გამოყენებას.

ვთქვათ, საწარმოს აქვს m სხვადასხვა სახის ნარჩენი ნედლეული. i-ური სახის ნედლეულის მარაგი იყოს b_i-ის $(i=\overline{1,m})$ ტოლი (გაზომილი შესაბამის ერთეულებში). საწარმოს განსაზღვრული აქვს ააწყოს n სხვადასხვა სახის პროდუქციის გამოშვება. a_{ij} იყოს i-ური სახის ნედლეულის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა j-ური სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის წარმოებისათვის (a_{ij}-არის ხარჯვის ნორმა), ხოლო c_j-კი სავარაუდო შემოსავალი, რომელსაც მიიღებს საწარმო $j-$ური სახის პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციიდან. საწარმოს მიზანია ისე დაგეგმოს წარმოება (რა რაოდენობის უნდა გამოუშვას ამა თუ იმ სახის პროდუქცია), რომ მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი.

აღვნიშნოთ x_j-ით $(j=\overline{1,n})$ $j-$ური სახის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც უნდა გამოუშვას საწარმომ. მაშინ i-ური სახის ნედლეულის მთლიანი დანახარჯი ტოლი იქნება $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $(i=\overline{1,m})$. ვინაიდან საწარმოს გააჩნია i-ური სახის ნედლეულის მხოლოდ b_i მარაგი, ამიტომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{8.1}$$

აქ უტოლობას (და არა ტოლობას) იმიტომ აქვს ადგილი, რომ საწარმომ შესაძლოა მიიღოს მაქსიმალური შემოსავლი მაშინაც, როდესაც ნედლეული სრულად არ იქნება გამოყენებული.

საწარმოს მთლიანი სავარაუდო შემოსავალი F ყველა პროდუქციის რეალიზაციიდან გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{8.2}$$

ამოცანის შინაარსიდან ცხადია, რომ x_j, a_{ij}, b_i, c_j - არაუარყოფითი სიდიდეებია.

ამრიგად, ჩვენს მიერ დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი (8.1) –(8.2) წარმოადგენს სტანდარტული სახით ჩაწერილ ᲬᲓᲐ-ს.

შემდგომში (8.1) სისტემის ამონახსნს, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ - ვექტორს, ვუწოდებთ წარმოების გეგმას.

იმ შემთხვევაში თუ საწარმო დააპირებს მის საკუთრებაში არსებული ნედლეულების რეალიზაციას (გაყიდვას), მაშინ მან ის უნდა შეაფასოს. ამასთან ფასში არ იგულისხმება ნედლეულის ის ღირებულება, რომელიც საწარმომ გადაიხადა მისი შეძენის დროს (ეს ღირებულება უნდა იგულისხმებოდეს მზა პროდუქციის ღირებულებაში), არამედ ეს უნდა იყოს პირობითი ფასი – ისეთი ღირებულება, რომელსაც მისცემს ნედლეული, როდესაც მისგან გადამუშავებით მიიღება მზა პროდუქცია. გარდა ამისა, ფასის პირობითობას განაპირობებს

ნედლეულის შეზღუდული მარაგი. როგორც შემდეგ ვნახავთ, ნედლეულის შესაძლო ღირებულება მჭიდროდაა დაკავშირებული მის მარაგთან.

აღვნიშნოთ y_i-ით $(i=\overline{1,m})$ $i-$ური სახის ნედლეულის ერთი ერთეულის ფასი (ღირებულება). მაშინ $a_{ij}y_i$ იქნება j-ური სახის პროდუქციის ერთ ერთეულზე დახარჯული $i-$ური სახის ნედლეულის ღირებულება $(j=\overline{1,n})$, ხოლო $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$,- იქნება j-ური სახის პროდუქციის ერთ ერთეულზე დახარჯული ყველა ნედლეულის მთლიანი ღირებულება.

საწარმოსათვის ნედლეულების პირდაპირი რეალიზაცია მაშინ იქნება მიზანშეწონილი, თუ j-ური სახის მზა პროდუქციის ერთ ერთეულზე დახარჯულ ნედლეულთა მთლიანი ღირებულება არ იქნება ნაკლები მზა პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციის შედეგად მიღებულ შემოსავალზე ე. ი. უნდა შესრულდეს შემდეგი უტლობები:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \;\; j=\overline{1,n}. \qquad (8.3)$$

ცხადია, რომ თუ საწარმო ძვირად შეაფასებს მის საკუთრებაში არსებულ ნედლეულს, ე. ი. y_i $(i=\overline{1,m})$ იქნება საკმაოდ დიდი, მაშინ (8.3) უტოლობები აღმოჩნდება შესრულებული, მაგრამ ამ შემთხვევშაი მყიდველისათვის არ იქნება მიზანშეწონილი ამ ნედლეულის შესყიდვა. კომპრომისი მიიღეწვა იმ შემთხვევაში თუ ნედლეულის შეფასება იქნება ისეთი, რომ მთლიანი ნედლეულის ჯამური ღირებულება იქნება მინიმალური ე. ი. უნდა ვიპოვოთ:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (8.4)$$

მიზნის ფუნქციის მინიმუმი.

გამოდის, რომ (8.3)-(8.4) ᲬᲓᲐ არის (8.1)-(8.2) ᲬᲓᲐ-ს ორადული.

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ, რომ წარმოების დაგეგმვის ამოცანა და ნედლეულების შეფასების ამოცანა ურთიერთორადული ამოცანები ყოფილა.

ვნახოთ რა შინაარსი აქვთ ჩვენს მიერ დამტკიცებულ თეორემებს ამ ამოცანებთან მიმართებაში.

(7.11) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ წარმოების ნებისმიერი $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ გეგმისათვის და ნედლეულთა ღირებულების ყოველი $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ ვექტორისათვის მთელი წარმოებული პროდუქციის რეალიზაციიდან სავარაუდო შემოსავალი არ აღემატება ნედლეულების მთლიან ღირებულებას. ამასთან თუ ეს ორი სიდიდე ერთმანეთს დაემთხვა რომელიმე $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ და $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ ვექტორებისათვის, მაშინ ეს ვექტორები იქნებიან შესაბამისი ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნები.

ᲬᲓᲐ ორადული ამოცანების პირველი ძირითადი თეორემიდან გვაქვს, რომ თუ წარმოების დაგეგმვის ამოცანას აქვს ოპტიმალური ამონახსნი (გეგმა), მაშინ არსებობს ნედლეულთა ღირებულების ოპტიმალური გეგმაც (ამონახსნი). ამასთან, მთლიანად გამოშვებული პროდუქციიდან მიღებული შემოსავალი უნდა დაემთხვეს ნედლეულის მთლიან ღირებულებას. უფრო მეტიც, როგორც §7-ში ვნახეთ, ეს არის საკმარისი პირობა, რომ ეს ამონახსნები წარმოადგენდნენ შესაბამისი ამოცანების ოპტიმალურ ამონახსნებს. ეს ნიშნავს, რომ წარმოების გეგმა და ნედლეულების ღირებულებათა ვექტორი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება ოპტიმალური, როდესაც მთლიანად გამოშვებული პროდუქციიდან მისაღები შემოსავალი და ნედლეულების მთლიანი ღირებულება ერთმანეთს დაემთხვევა. შეიძლება ითქვას, რომ ნედლეულების ღირებულება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც გამაწონასწორებელი ფაქტორი ნედლეულის დანახარჯებსა და შედეგებს შორის (იგულისხმება წარმოებული პროდუქციიდან მიღებული შემოსავალი).

გამოვარკვიოთ რა ეკონომიკურ შინაარსს ატარებს ᲬᲓᲐ ორადული ამოცანების მეორე ძირითადი თეორემა.

თუ წარმოების დაგეგმვის ამოცანაში რომელიმე ოპტიმალურ $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$ გეგმაში i-ური სახის ნედლეული არ არის მთლიანად დახარჯული, ე. ი. სამართლიანია უტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j} < b_i\,,$$

მაშინ ნედლეულის ღირებულებათა ამოცანაში ნებისმიერი ოპტიმალური $\overline{y}=(\overline{y_1},\overline{y_2},...,\overline{y_m})$ გეგმით i-ური სახის ნედლეულის ღირებულება ნულის ტოლი იქნება (ეს შედეგი კიდევ ერთხელ მეტყველებს, რომ ნედლეულის ღირებულება არ არის ნედლეულის რეალური ფასი, არამედ მისი პირობითი (ფიქტიური) ფასია), ხოლო თუ ნედლეულის ღირებულების რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში i-ური კომპონენტი $y_i > 0$, მაშინ წარმოების დაგეგმვის ყოველ ოპტიმალურ გეგმაში ამ ნედლეულის დანახარჯი მისი მარგის ტოლი იქნება (ეს ნედლეული მთლიანად დაიხარჯება). მაშასადამე, ნედლეულის ღირებულებათა ნებისმიერი ოპტიმალური ვექტორის ყოველი კომპონენტი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც შესაბამისი ნედლეულის დეფიციტურობის მაჩვენებელი. დეფიციტურ ნედლეულს (ნედლეული, რომელიც მთლიანად იხარჯება წარმოების რომელიმე ოპტიმალური გეგმის შემთხვევაში), აქვს დადებითი ფასი, ხოლო იმ ნედლეულის ღირებულებას, რომელიც იხარჯება ნაწილობრივ (არადეფიციტური ნედლეული) აქვს ნულოვანი ფასი.

შემდეგ, თუ ნედლეულთა ღირებულების ოპტმიალურ გეგმაში j-ური პროდუქციაზე დახარჯული ნედლეულების მთლიანი ღირებულება მეტია j-ური პროდუქციის ერთი ერთეულისაგან მისაღებ შემოსავალზე, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i} > c_j$, მაშინ $\overline{x_j}=0$. რაც ნიშნავს იმას, რომ წარმოების ნებისმიერ ოპტიმალურ გეგმაში j-ური სახის პროდუქციის წარმოება არ არის ნავარაუდევი. მაგრამ თუ წარმოების რომელიმე ოპტიმალურ გეგმაში j-ური სახის პროდუქციის წარმოება ნავარაუდევია, $\overline{x_j} > 0$, მაშინ ამ პროდუქციის ერთ ერთეულზე

დახარჯული ყველა ნედლეულის ღირებულება ტოლი იქნება ამ პროდუქციის ერთი ერთეულის რეალიზაციიდან მიღებული შემოსავალის $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i} = c_j$, ეს კი ნიშნავს, რომ ნედლეულთა ღირებულების შეფასების ოპტიმალური ვექტორის ყოველი კომპონენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც შესაბამისი სახის ნედლეულის გამოყენების ეფექტიანობის მაჩვენებელი. თუ წარმოების ოპტიმალურ გეგმაში ნავარაუდევია j-ური სახის პროდუქციის გამოშვება ($\overline{x_j} > 0$), მაშინ შემოსავალი, რომელიც ნავარაუდევია მისი ერთი ერთეულის რეალიზაციიდან, ტოლი უნდა იყოს მის ერთ ერთეულზე დახარჯული ყველა ნედლეულის მთლიანი ღირებულების.

თუ ჩვენს მიერ ამოხსნილ ორადულ (7.18)-(7.19) და (7.20)-(7.21) ამოცანებში რიცხვითი მაჩვენებლებისა და ცვლადების ქვეშ ვიგულისხმებთ (8.1)-(8.2) და (8.3)-(8.4) ორადული ამოცანების შესაბამის მაჩვენებლებსა და ცვლადების შინაარსს, მაშინ ზემოთ აღწერილი თანაფარდობები მიიღებენ კონკრეტულ მნიშვნელობებს. აღვნიშნოთ, რომ (7.22)-ში შემოტანლი x_3, x_4, x_5, x_6 ცვლადები წარმოადგენენ შესაბმისად პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე სახის ნედლეულის გამოუყენებელ რაოდენობას (რეზერვს) წარმოების (x_1, x_2) გეგმის მიხედვით.

წარმოების (42/11;60/11) გეგმა არის ოპტიმალური და ის უზრუნველყოფს საწარმოსათვის მაქსიმალურ შემოსავალს 390 ფულადი ერთეულის ოდენობით. ამასთან, პირველი და მეორე სახის ნედლეული დაიხარჯება სრულად $x_3 = x_4 = 0$, ხოლო მესამე და მეოთხე სახის ნედლეული - არა, მათგან კიდევ დარჩება შესაბამისად x_5=52/11 და x_6=46/11 ერთეული.

ნედლეულის ღირებულებათა ოპტიმალური ვექტორი (9;5;0;0) გვიჩვენებს, რომ იმ ნედლეულის ღირებულება, რომელიც სრულად დაიხარჯა წარმოების ოპტიმალური გეგმის შემთხვევაში, წარმოადგენს დადებით რიცხვებს

($y_1 = 9; y_2 = 5$), ხოლო ნაწილობრივ დახარჯული ნედლეულის ღირებულება კი – ნულის ტოლია ($y_3 = y_4 = 0$).

გარდა ამისა, ვინაიდან წარმოების ოპტიმალური გეგმის შემთხვევაში ორივე სახის პროდუქციაა საწარმოებული ($x_1 > 0; x_2 > 0$), ამიტომ (7.20) შეზღუდვათა სისტემაში გვაქვს მკაცრი ტოლობები. ეს, როგორც ზემოთ ვნახეთ ნიშნავს, რომ ორივე სახის პროდუქციის ერთ ერთეულზე დახარჯული ყველა ნედლეულის ჯამური ღირებულება უნდა დაემთხვეს ორივე პროდუქციის თითო ერთეულიდან მისაღებ შემოსავალს.

დავუბრუნდეთ ისევ ზოგად შემთხვევას. ორადულობის პირველი ძირითადი თეორემიდან, როგორც ვნახეთ, გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x_j} = \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y_i}, \tag{8.5}$$

სადაც $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ და $\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_m})$ შესაბამისი ამოცანების ნებისმიერი ოპტიმალური ამონახსნებია.

თუ (8.5)-ში ვიგულისხმებთ, რომ ყველა $b_i, i = \overline{1,m}$ უწყვეტი ცვლადებია, მაშინ ადვილად მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან ტოლობებს:

$$\frac{\partial(\max F)}{\partial b_i} = \overline{y_i}, \quad i = \overline{1,m} \tag{8.6}$$

სიმეტრიული ორადული და

$$\frac{\partial(\min F)}{\partial b_i} = \overline{y_i}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{8.7}$$

არასიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის.

(8.6) და (8.7) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ ორადული ამოცანის ოპტიმალური ფასების ვექტორის კომპონენტები წარმოადგენენ ნედლეულის მარაგების ზემოქმედების შეფასების კრიტერიუმებს პირდაპირი ამოცანის ნებისმიერ ოპტიმალურ გეგმაში.

ვთქვათ, მოცემულია ₾₯ ორადული არასიმეტრიული ამოცანები (7.5)–(7.6) და (7.9)-(7.10) და ვთქვათ $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$ არის (7.5) სისტემის ბაზისური

ცვლადები (იგულისხმება, რომ (7.5) სისტემის რანგი m-ის ტოლია), მაშინ როგორც წრფივ განტოლებათა თეორიიდან ცნობილია, ადგილი აქვს შემდეგ სისტემას:

$$x_{j_i} = f_i + \sum_{l=1}^{m} k_{j_i l} b_l, \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.8}$$

სადაც f_i წარმოადგენს თავისუფალი ცვლადების წრფივ ფორმას; ხოლო $k_{j_2 l} -$ b_l - თავისუფალი წევრებისაგან დამოუკიდებელ კოეფიციენტებს.

ვთქვათ

$$\sum_{l=1}^{m} k_{j_i l} b_l \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{8.9}$$

მაშინ თუ გავითვალისწინებთ, რომ თავისუფალი ცვლადების ნულოვანი მნიშვნელობებისათვის $f_i = 0$, (8.8) სისტემით განსაზღვრული ბაზისური ამონახსნი იქნება დასაშვები. ეს ამონახსნი აღვნიშნოთ $(\overline{x_{j_1}}, \overline{x_{j_2}}, ..., \overline{x_{j_m}})$ ვექტორით, სადაც

$$\overline{x}_{j_i} = \sum_{l=1}^{m} k_{j_i l} b_l, \quad i = \overline{1,m}. \tag{8.10}$$

ჩავთვალოთ, რომ (8.10) ფორმულებით განსაზღვრული დასაშვები ამონახსნი ოპტიმალურია. თუ ამ ფორმულებში ჩავსვამთ ახალ $b_l^{'}$ თავისუფალ წევრებს, მივიღებთ ახალ ბაზისურ ამონახსნს $(x_{j_1}^{'}, x_{j_2}^{'}, ..., x_{j_m}^{'})$, სადაც

$$x_{j_i}^{'} = \sum_{l=1}^{m} k_{j_i l} b_l^{'}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{8.11}$$

(8.10) და (8.11) ფორმულებიდან მარტივად მივიღებთ უტოლობათა შემდეგ სისტემას:

$$\left|\overline{x}_{j_i} - x_{j_i}^{'}\right| \leq \sum_{l=1}^{m} \left|k_{j_i l}\right| \left|b_l - b_l^{'}\right|, \quad i = \overline{1,m}. \tag{8.12}$$

ვთქვათ, $(b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_m^{'})$ ვექტორი ეკუთვნის $(b_1, b_2, ..., b_m)$ ვექტორის ისეთ მიდამოს, რომელშიც სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\left|b_l - b_l^{'}\right| < \frac{\varepsilon}{m\left|k_{j_i l}\right|}, \quad i = \overline{1,m}, \ l = \overline{1,m}, \tag{8.13}$$

სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. შესაბამისად, (8.12) უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\left|\overline{x}_{j_i}-x'_{j_i}\right|<\varepsilon, \quad i=\overline{1,m}. \tag{8.14}$$

თუ (8.10) ფორმულებით განსაზღვრული ოპტიმალური ამონახსნი არაგადაგვარებულია, მაშინ (8.14)-ში ε ყოველთვის ისეთი შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $(x'_{j_1}, x'_{j_2}, ..., x'_{j_m})$ ვექტორიც იქნება დასაშვები ამონახსნი.

ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი აღვნიშნოთ $\overline{y}=(\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_m})$ ვექტორით. ორადულობის მეორე ძირითადი თეორემიდან, ვინაიდან $x_{j_i}>0$, გვექნება:

$$\sum_{l=1}^{m} a_{lj_i}\overline{y}_l=c_{j_i}, \quad i=\overline{1,m}. \tag{8.15}$$

დანარჩენ შემთხვევაში კი –

$$\sum_{l=1}^{m} a_{lj_i}\overline{y}_l \ge c_j, \quad j=\overline{1,n},\ j\ne j_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{8.16}$$

როგორც ვხედავთ, (8.15) და (8.16) პირობები არ არის დამოკიდებული $(b_1, b_2, ..., b_m)$ ვექტორზე. ამიტომ ისევ მეორე ძირითადი თეორემიდან გამოდმინარეობს, რომ $(x'_{j_1}, x'_{j_2}, ..., x'_{j_m})$ ვექტორი იქნება $b'_1, b'_2, ..., b'_m$ - თავისუფალი წევრების შესაბამისი ოპტიმალური ამონახსნი, ხოლო $\overline{y}=(\overline{y_1}, \overline{y_2}, ..., \overline{y_m})$ კვლავ ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი. ე.ი. ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი არის მდგრადი პირდაპირი ამოცანის თავისუფალი წევრების გარკვეულ საზღვრებში ცვლილების მიუხედავად.

შევნიშნოთ, რომ გადაგვარებულ შემთხვევაში, ე. ი. როდესაც რომელიმე $\overline{x}_{j_i}=0$, მაშინ ახალი თავისუფალი წევრების შესაბამისი ამონახსნებიც შესაძლებელია იყოს გადაგვარებული; იმ ბაზისურმა ცვლადებმა, რომლებსაც ჰქონდათ ნულოვანი მნიშვნელობები, ძველ ოპტიმალურ ამონახსნში, შესაძლებელია შეინარჩუნონ თავიანთი ნულოვანი მნიშვნელობები ახალ ოპტიმალურ ამონახსნშიც. მაგრამ მიუხედავად ამისა, პირდაპირი ამოცანის ახალი

ოპტიმალური ამონახსნი მაინც იქნება განსხვავებული ძველი ოპტიმალური ამონახსნისაგან ერთი და იგივე ბაზისური ცვლადების შემადგენლობისათვის.
თუ $(b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_m^{'})$ ვექტორი ეკუთვნის $(b_1, b_2, ..., b_m)$ ვექტორის ისეთ მიდამოს, რომ შესაბამისი პირდაპირი ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნები განისაზღვრებიან ერთი და იგივე ბაზისური ცვლადებით, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\min F(b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_m^{'}) = \min F(b_1, b_2, ..., b_m) + \sum_{j=1}^{m} (b_j^{'} - b_j)\overline{y}_j. \qquad (8.17)$$

ფორმულა (8.17) გამომდინარეობს ზემოთ დამტკიცებული (8.5) და (8.7) დამოკიდებულებებიდან. ის გვაძლევს საშუალებას ავიცდინოთ ყველა გამოთვლა, რომელიც დაკაშვირებულია **WDA-ს** ამოხსნასთან, მთავარია ახალი თავისუფალი წევრები ეკუთვნოდნენ ძველი თავისუფალი წევრების ისეთ მიდამოს, რომ ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი იყოს მდგრადი.
შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ჩატარებული მსჯელობა სამართლიანი იქნება, აგრეთვე, **WD** სიმეტრიული ორადული ამოცანებისათვის. მაგალითად, პირდაპირ ამოცანად რომ განგვეხილა (7.1)-(7.2) **WDA**, მაშინ ახალი x_{n+i} ცვლადების შემოტანით (8.1) შეზღუდვათა პირობები მიიღებდნენ განტოლებათა შემდეგ სახეს:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (8.18)$$

სადაც x_{n+i} დამატებით ცვლადს i-ური სახის ნედლეულის რეზერვის ეკონომიკური შინაარსი აქვს. ცხადია, რომ ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ შესაბამის შედეგებს. (8.17) ფორმულას სიმეტრიული ამოცანებისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$\max F(b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_m^{'}) = \max F(b_1, b_2, ..., b_m) + \sum_{j=1}^{m} (b_j^{'} - b_j)\overline{y}_j. \qquad (8.19)$$

დავუბრუნდეთ ისევ (7.18)–(7.19) ამოცანას. როგორც ვნახეთ გეგმის (42/11;60/11) ვექტორისათვის საწარმო მიიღებს მაქსიმალურ შემოსავალს

(ვინაიდან ეს გეგმა არის ოპტიმალური) 390 ფულად ერთეულს. ამავე დროს (9;5;0;0) წარმოადგენს ორადული ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს. ცხადია, რომ საწარმო კიდევ უფრო გაზრდის თავის შემოსავალს, თუ ის გაადიდებს მოცემული ნედლეულის მარაგს, განსაკუთრებით პირველი და მეორე სახის ნედლეულის მარაგს. ასეთი დასკვნის გაკეთების უფლებას გვაძლევს ორადული ამოცანის ოპტიმალური ვექტორის მნიშვნელობა. ამასთან, პირველ რიგში მან უნდა გაიზარდოს პირველი სახის ნედლეულის მარაგი, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ამ სახის ნედლეულის ყოველი ერთეულის გაზრდა გამოიწვევს შემოსავლის 9 ფულადი ერთეულით გაზრდას, მაშინ როდესაც მეორე სახის ნედლეულის ერთი ერთეულით გაზრდა გამოიწვევს შემოსავლის მხოლოდ 5 ფულადი ერთეულით გაზრდას.

ცხადია, რომ ასეთ ვითარებას ადგილი ექნება მანამ, სანამ ნედლეულის მარაგის რაოდენობა იცვლება გარკვეულ საზღვრებში (სანამ ორადული ამოცანის ოპტმიალური ამონახსნი (9;5;0;0) ინარჩუნებს მდგრადობას).

ვნახოთ, რა გავლენას მოახდენს პირველი და მეორე სახის ნედლეულის მარაგის შესაბამისად, s_1 და s_2 ერთეულით გაზრდა ან შეცმირება, მაშინ როდესაც მესამე და მეოთხე სახის ნედლეულის მარაგი იგივე რაოდენობის დარჩება. ასეთ შემთხვევაში შეზღუდვების პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 + s_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 + s_2 \\ x_1 + x_5 = 5 \\ 2x_2 + x_6 = 13 \end{cases}, \qquad (8.20)$$

ხოლო მიზნის ფუნქციას ექნება ისევ (7.19) სახე:

$$F = 55x_1 + 33x_2 \qquad (8.21)$$

თუ (8.20)-(8.21) ᲬᲓᲐ ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი იქნება (9;5;0;0) ვექტორი, მაშინ თავისუფალი იქნება x_3, x_4 ცვლადები და (8.20) სისტემიდან მივიღებთ შემდეგ ბაზისურ ამონახსნს:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{42}{11} + \dfrac{3s_1 - 2s_2}{11} \\ x_2 = \dfrac{60}{11} + \dfrac{-2s_1 + 5s_2}{11} \\ x_5 = \dfrac{13}{11} + \dfrac{-3s_1 + 2s_2}{11} \\ x_6 = \dfrac{23}{11} + \dfrac{4s_1 - 10s_2}{11} \end{cases} \tag{8.22}$$

ხოლო (8.19) ფორმულის გათვალისწინებით მიზნის ფუნქციის ოპტიმუმი ტოლი იქნება:

$$F = 390 + 9s_1 + 5s_2 \tag{8.23}$$

იმისათვის, რომ (8.23) იყოს დასაშვები ამონახსნი, უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,$$

ანუ

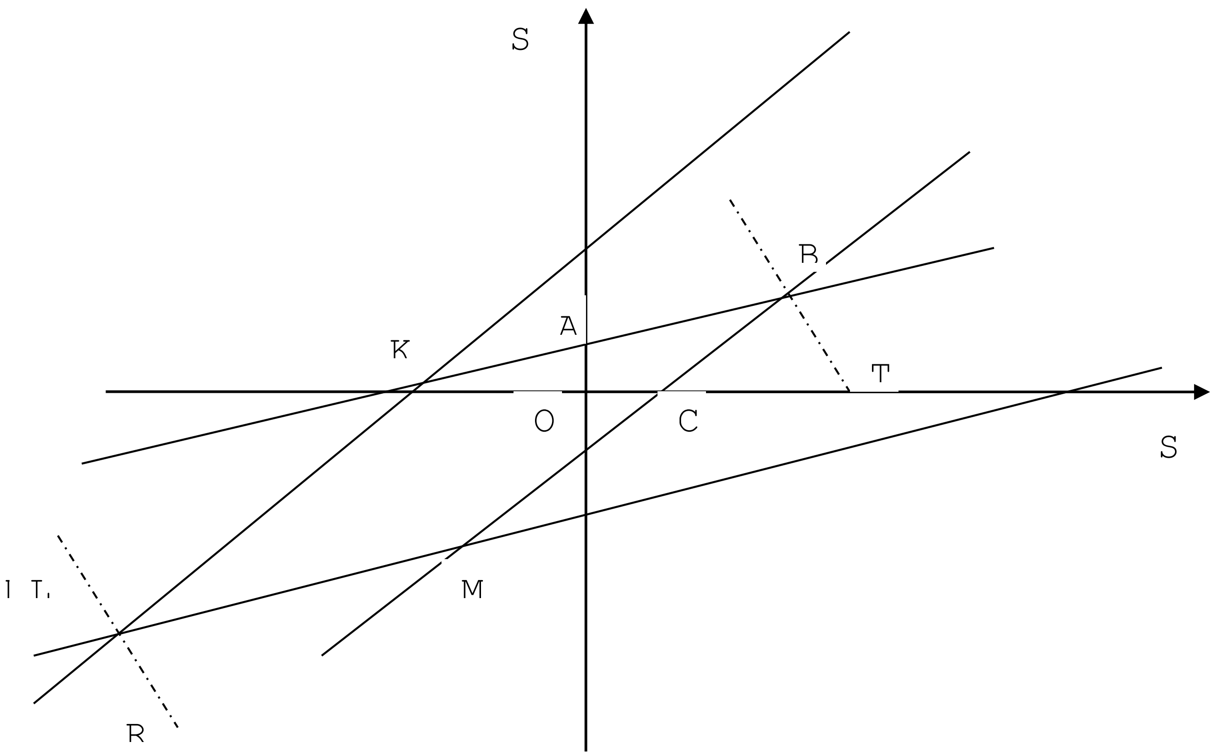
$$\begin{cases} -3s_1 + 2s_2 \leq 42 & (I) \\ 2s_1 - 5s_2 \leq 60 & (II) \\ 3s_1 - 2s_2 \leq 13 & (III) \\ -4s_1 + 10s_2 \leq 23 & (IV) \end{cases} \tag{8.24}$$

(8.23)-(8.24) ᲬᲓᲐ ამოვხსნათ გეომეტრიული მეთოდით, რომელიც მოცემულია ნახ. 8.1-ზე. თუ $s_i \geq 0,\ (i = 1,2)$, მაშინ ᲓᲐᲡ-ს წარმოადგენს $OABC$ ოთხკუთხედი (ამ შემთხვევაში გვაქვს პირველი და მეორე სახის ნედლეულის მარაგის მომატება). მაგრამ თუ s_1 და s_2 ღებულობენ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, მაშინ ᲓᲐᲡ-ს წარმოადგენს $LKBM$ პარალელოგრამს. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ორივე ნედლეულის მარაგის შემცირებაც.

BT და LR წარმოადგენენ საყრდენ წრფეებს, ამიტომ (8.23) ფორმულით განსაზღვრული F მიზნის ფუნქცია მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას B წერტილში, ხოლო მინიმალურს - L წერტილში. (8.24) სისტემიდან ადვილად მივიღებთ ამ წერტილების კოორდინატებს: B(8;5;5), L (-30;-24) ხოლო F-ის შესაბამისი მნიშვნელობები კი იქნება:

$$F(B) = 489{,}5;\ \ F(L) = 0.$$

ოპტიმუმების მიღებული მნიშვნელობებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ საწარმო გაზრდის პირველი სახის ნედლეულის მარაგს 38 ერთეულამდე, ხოლო მეორე სახის ნედლეულს – 29,5-მდე, მაშინ წარმოების ოპტიმალური გეგმა იქნება (5;6,5) ვექტორი, ხოლო მაქსიმალური შემოსავალი კი – 489,5 ფულადი ერთეული. ამასთან ოპტიმალური გეგმის შემთხვევაში ყველა სახის ნედლეული სრულად დიახარჯება (ამ შემთხვევაში $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$).



ნახ. 8.1

ის, რომ L(-30;-24) წერტილში მიზნის ფუნქცია ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობას, მოსალოდნელი იყო, ვინაიდან ამ შემთხვევაში საწარმოს საერთოდ არ გააჩნია პირველი და მეორე სახის ნედლეულის მარაგი. რადგანაც ეს ნედლეული აუცილებლად გამოიყენება ორივე სახის პროდუქციის საწარმოებლად, ამიტომაც მათი არქონა არ მისცემს საწარმოს საშუალებას დაამზადოს რომელიმე სახის პროდუქციის სულ მცირე რაოდენობა მაინც. შევნიშნოთ, რომ მესამე და მეოთე სახის რომელიმე ნედლეულის არქონა არ

გამოიწვევს საწარმოს საქმიანობის გაჩერებას, ვინაიდან ერთ-ერთი სახის პროდუქციის რაღაც რაოდენობა მაინც შეიძლება დამზადდეს და ამიტომ საწარმოს ექნება გარკვეული შემოსავალი.

ჩდ ორაუდლობის ზოგიერთ საკითხში უკეთ გარკვევისათვის განვიხილოთ ეკონომიკური დაგეგმვის შემდეგი ამოცანა:

საამქრო სტანდარტული ფორმის მასალისაგან დამუშავების სხვადასხვა ტექნოლოგიით აწარმოებს განსხვავებული ფორმის სხვადასხვა რაოდენობის ნაწარმს. საჭიროა გაირკვეს, რამდენი მასალა უნდა დამუშავდეს ამა თუ იმ ტექნოლოგიით, რომ საამქრომ გამოუშვას გარკვეული ფორმის ნაწარმის განსაზღვრული რაოდენობა და ამასთან, ერთად დახარჯული მასალის რაოდენობა იყოს მინიმალური.

აღვნიშნოთ m-ით ნაწარმების ფორმების რაოდენობა; n-ით დამუშავების ტექნოლოგიების რაოდენობა; a_{ij}-ით i-ური ფორმის ნაწარმის რაოდენობა, რომელიც მიიღება მოცემული მასალის j-ური ტექნოლოგიით დამუშავების შედეგად; b_i-ით i-ური ფორმის ნაწარმთა რაოდენობა; x_j-ით მასალის რაოდენობა, რომელიც უნდა დამუშავდეს j-ური ტექნოლოგიით; მაშინ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ვექტორი იქნება გეგმა, რომლითაც უნდა იხელმძღვანელოს საამქრომ.

i-ური ფორმის ნაწარმის რაოდენობა, რომელიც მიიღება მოცემული მასალისაგან დამუშავების j-ური ტექნოლოგიით, ტოლია $a_{ij}x_j$; ვინაიდან ამ ფორმის ნაწარმის საერთო რაოდენობა არ უნდა იყოს b_i-ზე ნაკლები, ამიტომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (8.26)$$

სადაც მარცხენა მხარე წარმოადგენს i-ური ფორმის ნამზადის მთლიან რაოდენობას.

მასალების საერთო დანახარჯი F ტოლი იქნება:

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j . \qquad (8.27)$$

ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე (8.26)-(8.27) არის სტანდარტული სახით ჩაწერილი ჸდა.

მიღებული ჸდა-ს ორადულ ამოცანას წარმოადგენს შემდეგი ჸდა:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le 1, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (8.28)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} b_i y. \qquad (8.29)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ (8.28)-(8.29) ორადული ჸდ ამოცანის ეკონომიკური არსი, განვიხილოთ ეკონომიკური სისტემა: ქარხანა – საამქრო. ქარხანა თავის დაქვემდებარებულ საამქროს ამარაგებს სტანდარტული ფორმის მასალით. ამ მასალისაგან საამქრომ უნდა დაამზადოს გარკვეული ფორმის და რაოდენობის ნამზადი (ნაწარმი). ამასთან ქარხანა დაინტერესებულია, რომ მასალის დანახარჯი იყოს მინიმალური. საჭირო ფორმის ნამზადის მისაღებად ქარხანაში გამოიყენება მასალის დამუშავების სხვადასხვა ტექნოლოგია. ტექნოლოგიები, რომელიც უნდა გამოიყენოს საამქრომ საჭირო ფორმის და რაოდენობის ნამზადის საწარმოებლად, განისაზღვრება (8.26) - (8.27) ჸდა ამოხსნით, რითაც უზრუნველყოფილი იქნება მასალის მინიმალური დანახარჯი.

ვთქვათ, ქარხანასა და საამქროს შორის მოქმედებს „ფასთა საბაზრო მექანიზმი“. ამიტომ საამქრო ესწრაფვის შეაფასოს თავისი პროდუქცია რაც შეიძლება ძვირად, მაგრამ ისე, რომ ქარხნისათვის მისი შესყიდვა იყოს მომგებიანი. ასეთი სარფიანი და ამავე დროს გამართლებული შეფასების განსაზღვრა წარმოადგენს ორადული (8.28)-(8.29) ამოცანის ამოხსნის არსს, თუ y_i- ცვლადის ქვეშ ვიგულისხმებს i-ური ფორმის ნაწარმის ღირებულებას, ხოლო მასალის ფასს ჩავთვლით ერთეულის ტოლად (ასე განისაზღვრება შეფასებათა მასშტაბი).

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ საამქროში სამი სხვადასხვა ფორმის ნამზადების საწარმოებლად გამოიყენება ორი განსხვავებული ტექნოლოგია. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია მატრიცით:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

გამოვიკვლიოთ პირობები, რომლის დროსაც ორადული ამოცანის რომელიმე ოპტიმალური ამონახსნი იქნება მდგრადი, ამიტომ პირველი და მეორე ნამზადების რაოდენობები აღვნიშნოთ არაუარყოფითი ცვლადებით შესაბამისად b_1 და b_2. ამ შემთხვევაში პირდაპირ ამოცანას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq b_1 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq b_2 \end{cases}, \qquad (8.30)$$

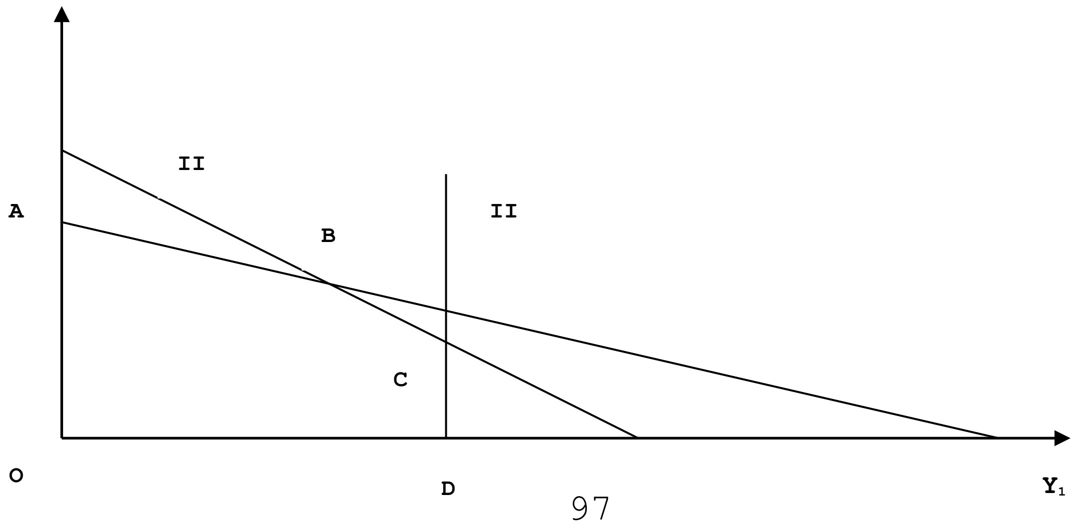
$$F = x_1 + x_2 + x_3 \qquad (8.31)$$

ხოლო მის ორადულ ამოცანას კი

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 \leq 1, & \text{I} \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 1, & \text{II} \\ 3y_1 \leq 1, & \text{III} \end{cases}, \qquad (8.32)$$

$$\Phi = b_1 y_1 + b_2 y_2. \qquad (8.33)$$

ორადული ამოცანის ამოხსნა გეომეტრიული მეთოდით მოცემულია ნახ. 8.2-ზე. დას არის OABCD ხუთკუთხედი. ამასთან წვეროების კოორდინატებია $A\,(0;1/5)$; $B\,(2/7;1/7)$; $C\,(1/3;1/9)$; $D\,(1/3;0)$ ვინაიდან Φ ფუნქციის ოპტიმუმი (მაქსიმუმი) გამოიანგარიშება ერთერთი წვეროს კოორდინატებზე, ჩავატაროთ ანალიზი ხუთკუთხედის ყველა წვეროზე.



ნახ. 8.2

1. $A\,(0;1/5)$ წერტილი რომ იყოს მაქსიმუმის წერტილი, ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\Phi(A) \geq \Phi(B)$$

ანუ
$$\frac{1}{5}b_2 \geq \frac{2}{7}b_1 + \frac{1}{7}b_2,$$

საიდანაც მივიღებთ: $b_2 \geq 5b_1$. ამასთან ტოლობის შემთხვევაში AB მონაკვეთის ყველა წერტილი იქნება ოპტიმალური ამონახსნი.

2. $B\,(2/7;1/7)$ რომ იყოს მაქსიმუმის წერტილი, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\begin{cases} \Phi(B) \geq \Phi(A) \\ \Phi(B) \geq \Phi(C) \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ: $\frac{3}{2}b_1 \leq b_2 \leq 5b_1$, ამასთან, მარცხენა მხარეში ტოლობის შემთხვევაში BC მონაკვეთის ყველა წერტილი იქნება ოპტიმალური ამონახსნი, ხოლო მარჯვენა მხარეში ტოლობის შემთხვევში კი – AB მონაკვეთი.

3. $C\,(1/3;1/9)$ რომ იყოს მაქსიმუმის წერტილი, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\begin{cases} \Phi(C) \geq \Phi(B) \\ \Phi(C) \geq \Phi(D) \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ: $0 \leq b_2 \leq \frac{3}{2}b_1$, ამასთან, $b_2 = 0$ შემთხვევაში DC მონაკვეთის ყველა წერტილი იქნება ოპტიმალური ამონახსნი, ხოლო მარჯვენა მხარეში ტოლობის შემთხვევაში კი - CB მონაკვეთის ყველა წერტილი.

4. $D\,(1/3;0)$ რომ იყოს მაქსიმუმის წერტილი, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\Phi(D) \geq \Phi(C),$$

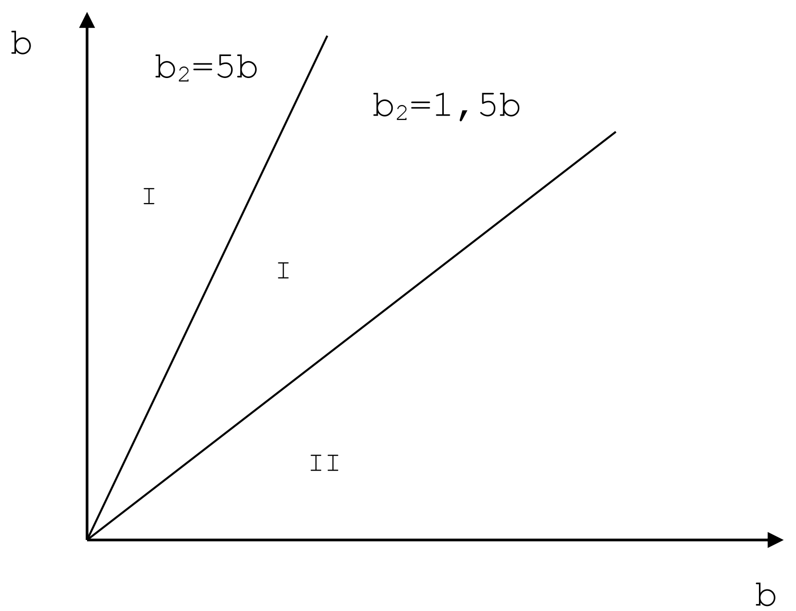
საიდანაც $b_2 \geq 0$, მაგრამ ეს პირობა ყოველთვის შესრულებადია, ამასთან როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ $b_2 = 0$, ოპტიმალური ამონახსნი იქნება DC მონაკვეთის ყველა წერტილი, ე. ი. D იქნება მაქსიმუმის წერტილი მხოლოდ მაშინ, როდესაც DC მონაკვეთი იქნება ოპტიმალურ ამონახსნთა სიმრავლე.

ჩატარებული ანალიზის შედეგი მოცემულია ნახ. 8.3-ზე. თუ (b_1, b_2) წერტილი ეკუთვნის I სექტორს, მაშინ მაქსმიუმის წერტილი იქნება A; ამ შემთხვევაში $y_1 = 0,\ y_2 = \dfrac{1}{5}$ იქნება მდგრადი ოპტიმალური ამონახსნი. შესაბამისად II სექტორში $y_1 = \dfrac{2}{7},\ y_2 = \dfrac{1}{7}$, ხოლო III სექტორში კი - $y_1 = \dfrac{1}{3},\ y_2 = \dfrac{1}{9}$.

შევნიშნოთ, რომ თუ (b_1, b_2) წერტილი იქნება საზღვრის რომელიმე წრფეზე, მაშინ როგორც ზემოთ ვნახეთ, ამოცანას ექნება ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე - AB, BC ან CD მონაკვეთებიდან რომელიმე ერთის შემადგენელი ყველა წერტილი.

რომელ სექტორშიც არ უნდა მდებარეობდეს (b_1, b_2) წერტილი ჩვენი ამოცანის ოპტიმუმი მარტივად გამოითვლება (8.33) ფორმულით. მაგრამ თუ საჭიროა ვიპოვოთ პირდაპირი ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი, მაშინ ზემოთ აღწერილი წესებით (იხ. § 3), შემოვიტანოთ არაუარყოფითი დამატებითი x_4, x_5 და y_3, y_4, y_5 ცვლადები და დავამყაროთ შესაბამისობა:

$$x_1 \leftrightarrow y_3;\ x_2 \leftrightarrow y_4;\ x_3 \leftrightarrow y_5;\ x_4 \leftrightarrow y_1;\ x_5 \leftrightarrow y_2. \qquad (8.34)$$



ნახ. 8.3

ამ შემთხვევაში პირდაპირი და ორადული ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი იქნება ხუთგანზომილებიანი ვექტორი. ამასთან, ორადული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამებიან A, B, C და D წერტილებს, შესაბამისად იქნებიან:

$A(0;\ 1/5;\ 0;\ 2/5;\ 1)$, $B(2/7;\ 1/7;\ 0;\ 0;\ 1)$, $C(1/3;\ 1/9;\ 1/9;\ 0;\ 0)$, $D(1/3;\ 0;\ 2/3;\ 1/3;\ 0)$,

ხოლო თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლე შესაბამისად იქნება:

$$(y_1, y_3),\ (y_3, y_4),\ (y_4, y_5),\ (y_2, y_5)\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ (8.34) შესაბამისობას, მივიღებთ რომ A წერტილის შესაბამისი ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლე პირდაპირ ამოცანაში იქნება (x_1, x_4), ხოლო ოპტიმალური ამონახსნი $(b_2/5; 0; 0)$ ვექტორი (განვიხილავთ (8.30)-ის სამგანზომილებიან ამონახსნს); შესაბამისად, B წერტილის – (x_1, x_4) და $((-3b_1 + 2b_2)/7; (5b_1 - b_2)/7; 0)$ ამონახსნი; C წერტილის (x_2, x_3) და – $(0; b_2/3; (3b_1 - 2b_2)/9)$; ხოლო D წერტილის - (x_3, x_5) და $(0; 0; b_1/3)$ ამონახსნი.

§9. წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამოხსნა პროგრამა "MS Excel"-ის საშუალებით

კონკრეტულ მაგალითებზე დაყრდნობით განვიხილოთ წდა-ს ამოხსნის მეთოდები პროგრამა "**MS Excel**"-ის საშუალებით.

მაგალითი 1. ამოხსენით შემდეგი წდა:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max \tag{9.1}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ \qquad x_2 \le 5 \\ 3x_1 \qquad \le 21 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,2}). \end{cases} \tag{9.2}$$

მივიყვანოთ მოცემული ამოცანა კანონიკურ სახემდე, მივიღებთ:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max \tag{9.3}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ \qquad x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 \qquad + x_6 = 21 \\ x_j \ge 0, (j = \overline{1,6}). \end{cases} \tag{9.4}$$

შესაბამისად, (9.1)-(9.2) ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით: ვიპოვოთ (9.4) განტოლებათა სისტემის ისეთი არაუარყოფითი ამონახსნი, რომელიც (9.3) მიზნის ფუნქციას მიანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ჩამოვაყალიბოთ დასმული ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი პროგრამა "Excel"-ს საშუალებით.

1. ავამუშავოთ პროგრამა **Excel (Start→Programs→Microsoft Office→ Microsoft Excel);**
2. გავააქტიუროთ (თუ არ არის გააქტიურებული) **Excel**-ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver (Tools→Add-ins→Solver);**
3. ამოცანის მონაცემები შევიტანოთ ცხრილში შემდეგი სახით:
   - **B3-G3** უჯრებში შევიტანოთ (9.4) სისტემის პირველი განტოლების

კოეფიციენტები, **B4-G4**-ში - მეორე, **B5-G5**-ში მესამე და **B6-G6**-ში კი მეოთხე განტოლების კოეფიციენტები შესაბამისად;

- **H3-H6** უჯრებში შევიტანოთ (9.4) სისტემის მარჯვენა მხარე;
- **B7-G7** უჯრებში შევიტანოთ (9.3) მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები;

4. **I3-I6** უჯრებში შევიყვანოთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება (9.4) სისტემის მარცხენა მხარის მნიშვნელობები, სტრიქონების მიხედვით, კერძოდ:

I3-ში - =B3*$B$8+C3*$C$8+D3*$D$8+E3*$E$8+F3*$F$8+G3*$G$8;

I4-ში - =B4*$B$8+C4*$C$8+D4*$D$8+E4*$E$8+F4*$F$8+G4*$G$8;

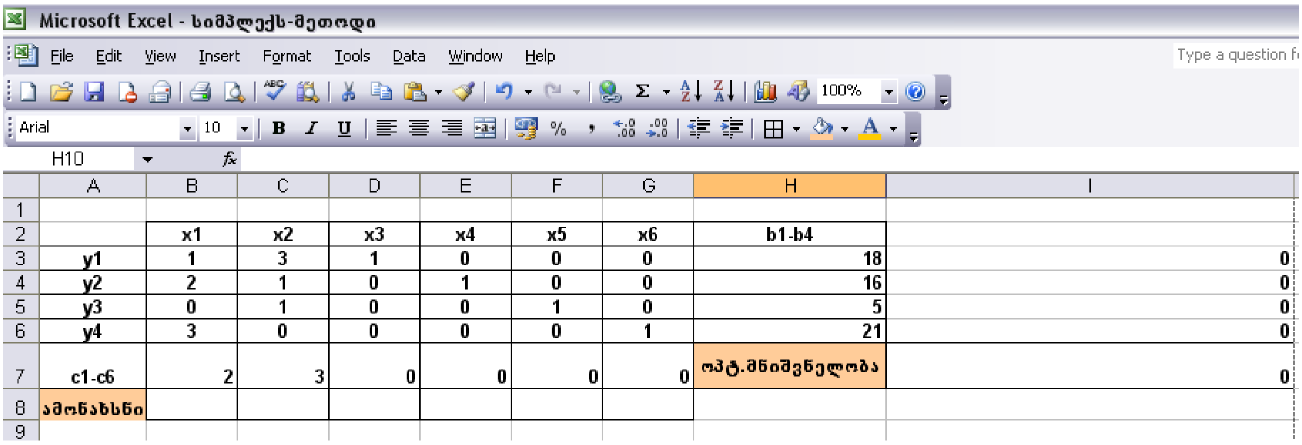
I5-ში - =B5*$B$8+C5*$C$8+D5*$D$8+E5*$E$8+F5*$F$8+G5*$G$8;

I6-ში - =B6*$B$8+C6*$C$8+D6*$D$8+E6*$E$8+F6*$F$8+G6*$G$8.

5. **I7** უჯრაში შევიყვანოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელი ფორმულა, ჩვენს შემთხვევაში:

=B7*$B$8+C7*$C$8+D7*$D$8+E7*$E$8+F7*$F$8+G7*$G$8

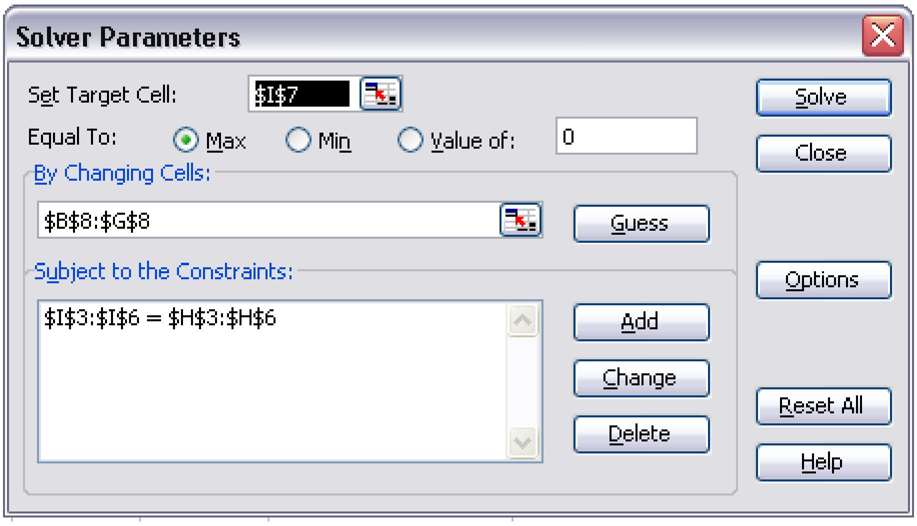
1-5 პუნქტების შესრულების შედეგად **Excel**-ის ფურცელს ექნება შემდეგი სახე:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b1-b4	
3	y1	1	3	1	0	0	0	18	0
4	y2	2	1	0	1	0	0	16	0
5	y3	0	1	0	0	1	0	5	0
6	y4	3	0	0	0	0	1	21	0
7	c1-c6	2	3	0	0	0	0	ოპტ.მნიშვნელობა	0
8	ამონახსნი								
9									

5. ავამუშავოთ **Excel**-ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver (Tools→Solver),**

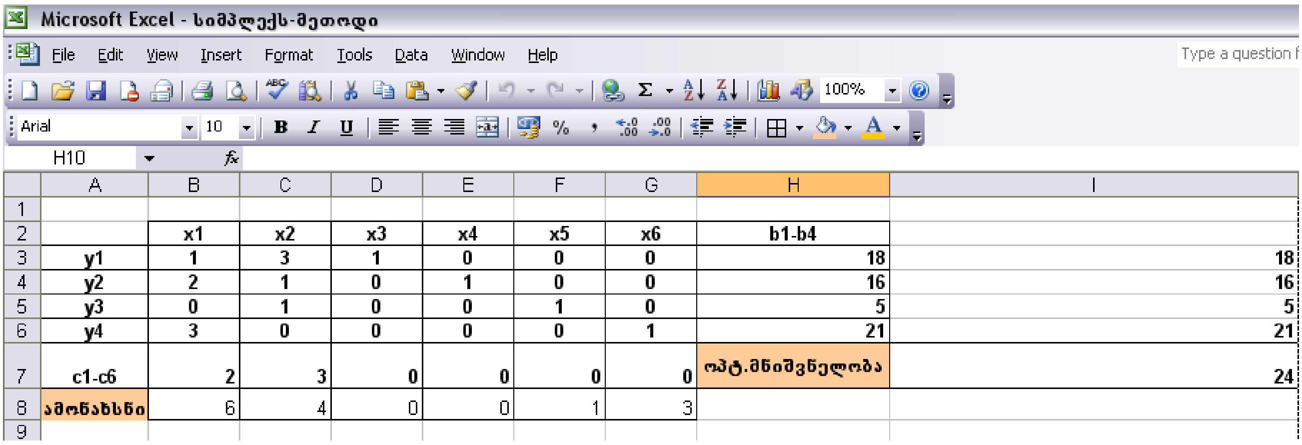
რის შედეგადაც გამოჩნდება შემდეგი დიალოგური ფანჯარა:



სადაც

- **“Set Target Cell”** (ქართ. - მიუთითეთ მიზნის უჯრა) გასწვრივ უნდა მივუთითოთ ის უჯრა, სადაც ფიქსირდება ოპტიმალური მნიშვნელობა, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრა არის **$I$7**;
- **“Equal To”** (ქართ. – რომელიც უდრის) გასწვრის უნდა ავირჩიოთ **Max** ან **Min,** ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ჩვენს შემთხვევაში –**Max;**
- **“By Changing cells”** (ქართ. – ცვალებადი უჯრებისათვის)-ში უნდა მივუთითოთ ის უჯრები, რომელთა მნიშვნელობები იცვლება და სადაც მიეთითება ამონახსნი, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრებია **$B$8:$G$8** უჯრები;
- **“Subject to the Constraints”** (ქართ. – შეზღუდვები) – ში უნდა მივუთითოთ შეზღუდვები. ჩვენს შემთხვევაში ეს არის **$I$3 - $I$6** უჯრებში არსებულ ფორმულებზე შეზღუდვები, კერძოდ მათი მნიშვნელობები არ უნდა აღემატებოდნენ **H3 - H6** უჯრებში დაფიქსირებულ მნიშვნელობებს შესაბამისად;
- **“Options”** (ქართ. – პარამეტრები) **–** ში ვირჩევთ “**Assume Linear Model**” (ქართ. – წრფივი მოდელი) და **“Assume Non-negative**” (ქართ. – არაუარყოფითი მნიშვნელობები) პუნქტებს;

6. ბოლოს ვაძლევთ ბრძანებას **Solve.** ოპტიმიზაციის წარმატებით დასრულების შემთხვევაში გამოჩნდება რეზულტატების ფანჯარა, სადაც მითითებული იქნება ამონახსნი. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b1-b4	
3	y1	1	3	1	0	0	0	18	18
4	y2	2	1	0	1	0	0	16	16
5	y3	0	1	0	0	1	0	5	5
6	y4	3	0	0	0	0	1	21	21
7	c1-c6	2	3	0	0	0	0	ოპტ.მნიშვნელობა	24
8	ამონახსნი	6	4	0	0	1	3		
9									

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი რეზულტატი: (9.1) - (9.2) ამოცანაში მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა $x_1 = 6,\ x_2 = 4$ მნიშვნელობებისათვის, ხოლო მიზნის ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობაა $F = 24$.

მაგალითი 2. პროგრამა **"Excel"**-ის საშუალებით იპოვეთ **1.1** ამოცანის ამონახსნი.

I ეტაპი. შევადგინოთ 1.1 ამოცანის მათემატიკურ-ეკონომიკური მოდელი. მივიღებთ შემდეგ **ჯდა-ს:**

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (9.5)$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max \qquad (9.6)$$

II ეტაპი. მოვახდინოთ მიღებული ამოცანის რეალიზაცია **"Excel"**-ზე, შემდეგი სქემის მიხედვით:

1. ავამუშავოთ პროგრამა **Excel (Start→Programs→Microsoft Office→Microsoft Excel);**
2. გავააქტიუროთ (თუ არ არის გააქტიურებული) **Excel**-ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver (Tools→Add-ins→Solver);**

3. ამოცანის მონაცემები შევიტანოთ ცხრილში შემდეგი სახით:
   - **B3-C3** უჯრებში შევიტანოთ (9.5) სისტემის პირველი განტოლების კოეფიციენტები, **B4-C4**-ში – მეორე და **B5-C5**-ში კი მესამე განტოლების კოეფიციენტები შესაბამისად, ანუ ერთი ერთეული პროდუქციისათვის საჭირო ნედლეულის რაოდენობა;
   - **D3-D5** უჯრებში შევიტანოთ (9.5) სისტემის მარჯვენა მხარე, ანუ ნედლეულის მარაგის რაოდენობა;
   - **B6-C6** უჯრებში შევიტანოთ (9.6) მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტები, ანუ პროდუქციის ფასი;
4. **E3-E5** უჯრებში შევიყვანოთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება (9.5) სისტემის მარცხენა მხარის მნიშვნელობები, სტრიქონების მიხედვით, ანუ ნედლეულის დანახარჯები, კერძოდ:

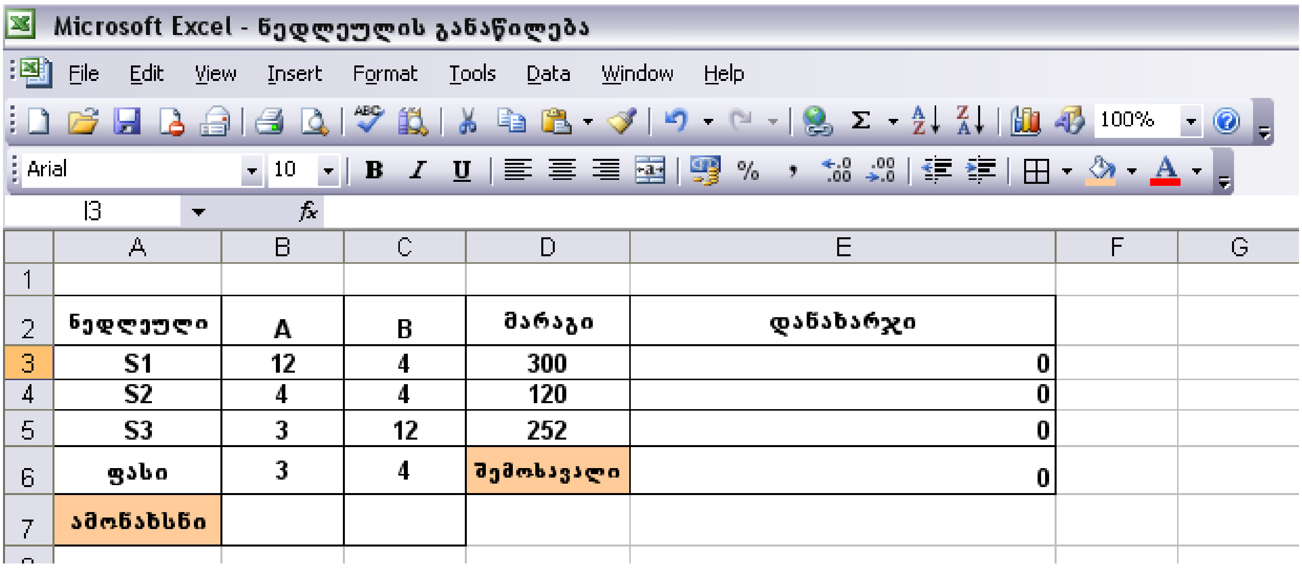
   E3-ში - = B3*$B$7+C3*$C$7;

   E4-ში - = B4*$B$7+C4*$C$7;

   E5-ში - =B5*$B$7+C5*$C$7.
5. **E6** უჯრაში შევიყვანოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელი ფორმულა, ანუ მთლიანი შემოსავალი. ჩვენს შემთხვევაში:

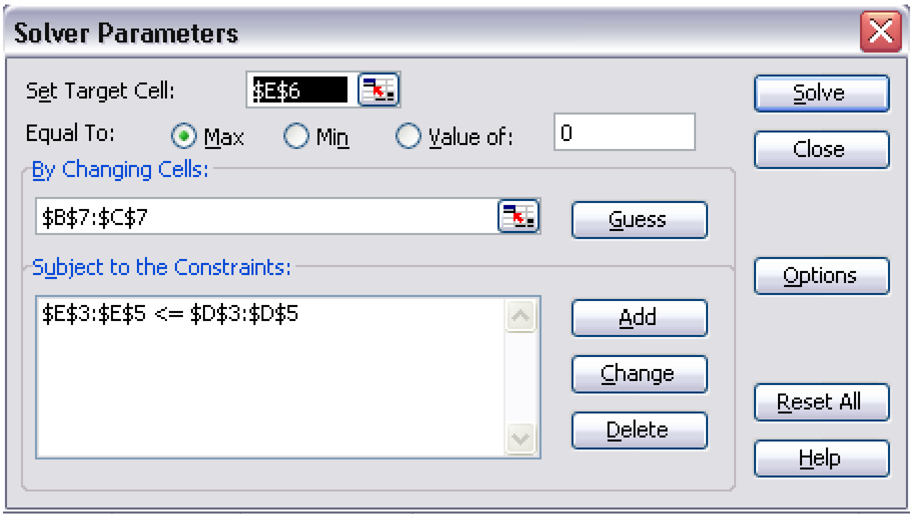
=B6*$B$7+C6*$C$7.

1-5 პუნქტების შესრულების შედეგად **Excel-**ის ფურცელს ექნება შემდეგი სახე:



6. ავამუშავოთ **Excel**-ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver** **(Tools→Solver),**

რის შედეგადაც გამოჩნდება შემდეგი დიალოგური ფანჯარა, რომლის პუნქტებს ვავსებთ ქვემოთ ნაჩვენები სქემის მიხედვით:

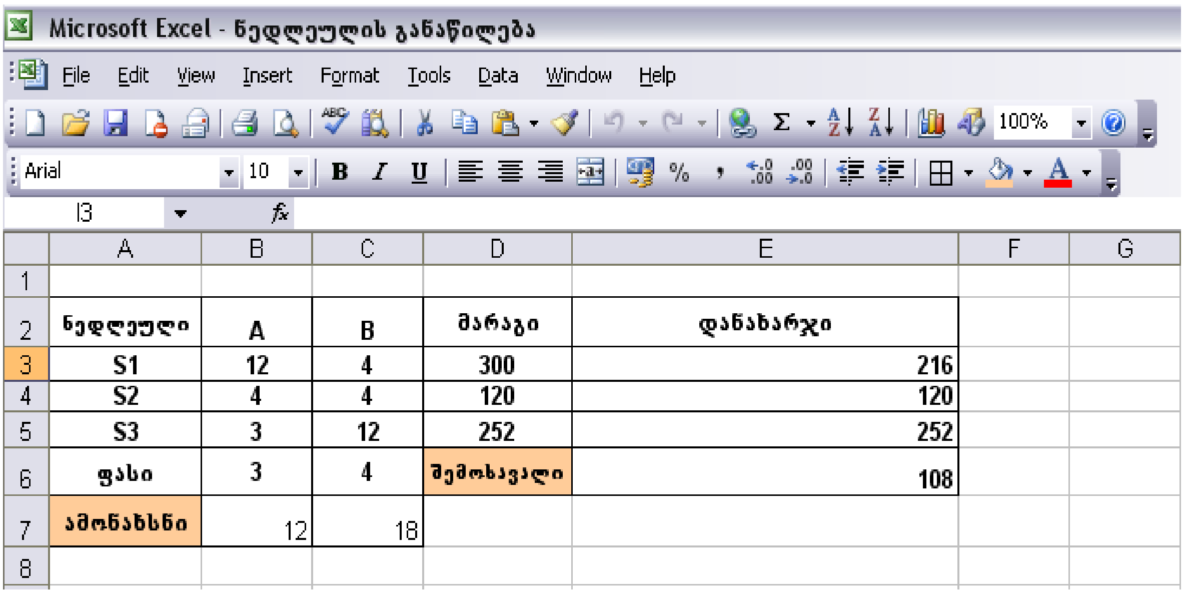


სადაც

- **"Set Target Cell"** (ქართ. - მიუთითეთ მიზნის უჯრა) გასწვრივ უნდა მივუთითოთ ის უჯრა, სადაც ფიქსირდება ოპტიმალური მნიშვნელობა, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრა არის **$E$6**;

- **“Equal To”** (ქართ. – რომელიც უდრის) გასწვრის უნდა ავირჩიოთ **Max** ან **Min,** ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ჩვენს შემთხვევაში –**Max;**
- **“By Changing cells”** (ქართ. – ცვალებადი უჯრებისათვის)-ში უნდა მივუთითოთ ის უჯრები, რომელთა მნიშვნელობები იცვლება და სადაც მიეთითება ამონახსნი, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრებია **$B$7:$C$7** უჯრები;
- **“Subject to the Constraints”** (ქართ. – შეზღუდვები) – ში უნდა მივუთითოთ შეზღუდვები. ჩვენს შემთხვევაში ეს არის **$E$3 - $E$5** უჯრებში არსებულ ფორმულებზე შეზღუდვები, ანუ მარაგზე შეზღუდვები. კერძოდ მათი მნიშვნელობები არ უნდა აღემატებოდნენ **D3 – D5** უჯრებში დაფიქსირებულ მნიშვნელობებს შესაბამისად;
- **“Options”** (ქართ. – პარამეტრები) – ში ვირჩევთ “**Assume Linear Model**” (ქართ. – წრფივი მოდელი) და “**Assume Non-negative**” (ქართ. – არაუარყოფითი მნიშვნელობები) პუნქტებს;

7. ბოლოს ვაძლევთ ბრძანებას **Solve.** ოპტიმიზაციის წარმატებით დასრულების შემთხვევაში გამოჩნდება რეზულტატების ფანჯარა, სადაც მითითებული იქნება ამონახსნი. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	ნედლეული	A	B	მარაგი	დანახარჯი		
3	S1	12	4	300	216		
4	S2	4	4	120	120		
5	S3	3	12	252	252		
6	ფასი	3	4	შემოსავალი	108		
7	ამონახსნი	12	18				
8							

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი რეზულტატი: 1.1 ამოცანაში მაქსიმალური მოგება მიიღწევა A პროდუქციის 12 და B პროდუქციის 18 ერთეულის წარმოებისას. ასეთ შემთხვევაში საწარმოს შესაძლო ყველაზე მაქსიმალური შემოსავალი იქნება $F = 108$.

სავარჯიშოები

1.2-1.4, 2.1-2.6, 3.1-3.8, 4.1-4.4, 5.1-5.6, 6.1-6.6 და 7.1-7.8 მაგალითები ამოხსენით პროგრამა **"Excel"**-ის გამოყენებით.

§ 10. სატრანსპორტო ამოცანა და მისი ამოხსნის მეთოდები

სატრანსპორტო ამოცანებში უნდა განისაზღვროს მიმწოდებელი პუნქ-ტებიდან დანიშნულების პუნქტებში საქონლის გადაზიდვის ოპტიმალური გეგმა.

ჩვენ განვიხილავთ ისეთ სატრანსპორტო ამოცანებს, რომლებიც ცნობილია როგორც ამოცანები ღირებულების კრიტერიუმით. ჩამოვაყალიბოთ ზოგადად ასეთი ამოცანა:

$A_1, A_2, ..., A_m$ პუნქტებში (მიმწოდებელი, საწყობი) განთავსებულია ერთგვაროვანი საქონელი (ტვირთი, რესურსი) შესაბამისად $a_1, a_2, ..., a_m$ ერთეულის ოდენობით, რომელიც უნდა გადაიგზავნოს $B_1, B_2, ..., B_n$ დანიშნულების პუნქტებში (მომხმარებელი, მიმღები) შესაბამისად $b_1, b_2, ..., b_n$ ერთეულის ოდენობით (მოთხოვნა). მოცემულია A_i პუნქტიდან B_j პუნქტში საქონლის ერთი ერთეულის გადაზიდვის ღირებულება (ტარიფი, დანახარჯის კოეფიციენტი) $C_{ij} (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

საჭიროა ისე დაიგეგმოს საქონლის გადაზიდვა, ე.ი. განისაზღვროს A_i პუნქტიდან B_j პუნქტში გადასაგზავნი საქონლის რაოდენობა $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, რომ შესაძლებელი იყოს მოთხოვნების მთლიანად დაკმაყოფილება (თუ საქონლის მთლიანი რაოდენობა იძლევა ამის საშუალებას) და ამასთან გადაზიდვის ხარჯები იყოს მინიმალური.

განასხვავებენ ამოცანებს, რომლებშიც დაცულია ე.წ. ბალანსის პირობა

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ , \tag{10.1}$$

ე.ი. საქონლის მთლიანი რაოდენობა ტოლია მასზე მოთხოვნების ჯამური რაოდენობისა და რომლებშიაც ბალანსის პირობა დარღვეულია:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \tag{10.2}$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელშიაც დაცულია (10.1) პირობა, ეწოდება ჩაკეტილი, ხოლო თუ ადგილი აქვს (10.2) პირობას მაშინ ეწოდება ღია.

ვაჩვენოთ, რომ სატრანსპორტო ამოცანა ღია მათემატიკური მოდელით შეიძლება დავიყვანოთ მის ეკვივალენტურ ჩაკეტილი მათემატიკური მოდელის ამოცანაზე. ამისათვის განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{და} \quad 2)\ \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

პირველ შემთხვევაში გვაქვს საქონლის ჭარბი რაოდენობა და რომ აღვადგინოთ ბალანსის პირობა, ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს კიდევ ერთი დანიშნულების პუნქტი B_{n+1} რომლის მოთხოვნა საქონელზე b_{n+1} განისაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (10.2)$$

ხოლო ამ პუნქტის შესაბამისი ყველა ტარიფი $C_{i,n+1} = 0$.

მაშასადამე, ჩვენ უკვე გვექნება დანიშნულების $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ პუნქტი და (10.3) განტოლებიდან კი ბალანსის შემდეგი პირობა:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j .$$

ახლებურად ჩამოყალიბებული ამოცანის ნებისმიერ ამონახსნში საქონლის ის რაოდენობა, რომელიც უნდა გადაიზიდოს B_{n+1} პუნქტში ფაქტიურად დარჩება შესაბამის მიმწოდებელთან. პირიქით, მოცემული ამოცანის ნებისმიერ ამონახსნში მიმწოდებელ პუნქტებში დარჩენილი საქონელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ფიქტიურ B_{n+1} დანიშნულების პუნქტში გადაზიდული საქონელი. გარდა ამისა, ვინაიდან შესაბამისი ტარიფები ნულის ტოლია, ამიტომ B_{n+1} პუნქტში საქონლის გადაზიდვის ხარჯი მთლიან ხარჯზე გავლენას არ იქონიებს. ცხადია, რომ გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა

მოცემული ამოცანისათვის და ახლებურად ჩამოყალიბებული ამოცანისათვის იქნება ერთი და იგივე.

მეორე შემთხვევაში, ე.ი. როდესაც გვაქვს საქონლის დეფიციტი, რომ აღვადგინოთ ბალანსის პირობა, ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ არსებობს კიდევ ერთი მიმწოდებელი პუნქტი A_{m+1}, რომლის მარაგი a_{m+1} შემდეგი სხვაობის ტოლია:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i\ , \qquad (10.4)$$

ხოლო შესაბამისი ტარიფები $C_{m+1,i} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$.

მაშასადამე, ასეთი გარდაქმნით ჩვენი ამოცანა დაიყვანება ისეთ ამოცანაზე, სადაც უკვე $m+1$ მიმწოდებელი პუნქტია და იგივე რაოდენობის დანიშნულების პუნქტი, ამასთან დაცულია ბალანსის პირობა. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც გვაქვს მოცემული ამოცანის ეკვივალენტური გარდაქმნა. შემდგომში, თუ არ იქნება შესაბამისი მითითება, ყოველთვის შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ (10.1) ბალანსის პირობა დაცულია.

მოცემული ამოცანის საწყისი მონაცემები მიზანშეწონილია ჩავწეროთ ე.წ. განაწილების (გადაზიდვის) ცხრილში. ასეთ ცხრილებს ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგში, არა მარტო საწყისი მონაცემების შესატანად, არამედ ამოცანის ამოხსნის პროცესშიც.

ამოცანის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად შემოვიღოთ $x_{ij}\ \ (i = \overline{i,m};\ j = \overline{i,n})$ ცვლადები - საქონლის რაოდენობა, რომელიც უნდა გადაიზიდოს A_i პუნქტიდან B_j პუნქტში. ამოცანის ყველა მონაცემი შევიტანოთ განაწილების ცხრილში (ცხრ. 10.1).

ცხრილი 10.1

მიმწოდებელი	მომხმარებელი					მარაგი
	B_1	. . .	B_j	. . .	B_n	
A_1	C_{11} x_{11}	. . .	C_{1j} x_{1j}	. . .	C_{1n} x_{1n}	a_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_i	C_{i1} x_{i1}	. . .	C_{ij} x_{ij}	. . .	C_{in} x_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	C_{m1} x_{m1}	. . .	C_{ij} x_{ij}	. . .	C_{mn} x_{mn}	a_m
მოთხოვნა	b_1	. . .	b_j	. . .	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

შემდგომში ჩვენ არ განვასხვავებთ x_{ij} ცვლადსა და მის შესაბამის უჯრედს განაწილების ცხრილში.

ცხადია, რომ ჩვენს მიერ შემოტანილი ცვლადები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებათა შემდეგ სისტემას (შეზღუდვათა პირობები):

$$\left.\begin{aligned} &I. \quad x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i, \qquad i = \overline{1,m} \\ &II. \quad x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j, \qquad j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

გადაზიდვის საერთო ხარჯებისათვის (მიზნის ფუნქცია) კი - გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$F = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \cdots + C_{ij}x_{ij} + \cdots + C_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \ , \tag{10.6}$$

მაშასადამე, მივიღეთ წრფივი დაპროგრამების შემდეგი ამოცანა (ჩაწერილი კანონიკური ფორმით):

(8.5) განტოლებათა სისტემის არაუარყოფით ამონახსნებს შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც F ფუნქცია მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ასეთ სახით დასმულ ამოცანას ეწოდება სატრანსპორტო ამოცანა ღირებულების კრიტერიუმით.

ვაჩვენოთ, რომ სატრანსპორტო ამოცანის ᲓᲐᲡ არ არის ცარიელი. მართლაც, თუ (10.1) ბალანსის პირობაში მათ საერთო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ M-ით,

$$M=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\,,$$

მაშინ

$$X_{ij}=\frac{a_i b_j}{M},\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \tag{10.7}$$

არის ამონახსნი. მართლაც, შეზღუდვათა I ჯგუფის პირობებისათვის გვექნება:

$$\frac{a_i b_1}{M}+\frac{a_i b_2}{M}+\cdots+\frac{a_i b_n}{M}=\frac{a_i}{M}\sum_{j=1}^{n}b_j=\frac{a_i}{M}\cdot M=a_i,\ i=\overline{1,m}\,.$$

ანალოგიურად გვექნება შეზღუდვათა II ჯგუფის პირობებისათვის

$$\frac{a_1 b_j}{M}+\frac{a_2 b_j}{M}+\cdots+\frac{a_m b_j}{M}=\frac{b_j}{M}\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{b_j}{M}\cdot M=b_j,\ j=\overline{1,n}\,.$$

ე.ი. (10.7) მართლაც არის (10.5) სისტემის ამონახსნი. ცხადია, რომ ეს ამონახსნი უმეტეს შემთხვევაში, არ იქნება არა მარტო ოპტიმალური, არამედ ერთადერთიც.

შეზღუდვათა (10.5) განტოლებების კონსტრუქციიდან გამომდინარე (ყველა ცვლადი განტოლებებში შედის კოეფიციენტით – ერთი ან ნული, ამასთან ერთის ტოლი კოეფიციენტი აქვს მხოლოდ ორ განტოლებაში, ერთი რომელიც შედის განტოლებათა I ჯგუფში, ხოლო მეორე კი - განტოლებათა II ჯგუფში) შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ამ სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელია (m+n-1) განტოლება (m+n)-დან. ვაჩვენოთ, რომ (10.5) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც დანარჩენი განტოლებების ალგებრული ჯამი. მაგალითად, განვიხილოთ I ჯგუფის k-ური

განტოლება. შევკრიბოთ II ჯგუფის ყველა განტოლება და მას გამოვაკლოთ I ჯგუფის ყველა განტოლება გარდა k-ური განტოლებისა, მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1,\ i\neq k}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1,\ i\neq k}^{m} a_i$$

თუ ამ განტოლებაში პირველ შესაკრებში ადგილებს შევუცვლით აჯამვის მიმდევრობას და გავითვალისწინებთ ბალანსის (10.1) პირობას, მივიღებთ:

$$x_{k1} + x_{k2} + \cdots + x_{kn} = a_k .$$

ამით ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ განტოლებათა (10.5) სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელია (m+n-1) განტოლება მაინც. ვაჩვენოთ, რომ წრფივად დამოუკიდებელია ზუსტად (m+n-1) განტოლება. ამისათვის საკმარისია, მოვძებნოთ რომელიმე (m+n-1) ცვლადი, რომელიც დანარჩენი

mn-(m+n-1)=(m-1)(n-1)

ცვლადების საშუალებით წრფივად გამოისახებიან. ე.ი. (m+n-1) რაოდენობის ცვლადი იქნება ბაზისური, ხოლო დანარჩენი კი თავისუფალი. ბაზისურ ცვლადებად ავირჩიოთ განაწილების ცხრილში პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის შესაბამისი ცვლადები. I და II ჯგუფის ცვლადებისათვის (10.5) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} &I. \quad x_{i1} = a_i - x_{i2} - x_{i3} - \cdots - x_{in}, \quad i=\overline{1,m};\\ &II. \quad x_{ij} = b_j - x_{2j} - x_{3j} - \cdots - x_{mj}, \quad j=\overline{1,n} \end{aligned}\right\}$$

თუ (10.8) განტოლებათა სისტემის I ჯგუფის პირველ განტოლებაში (X_{11}-ის შესაბამის განტოლებაში) ჩავსვამთ II ჯგუფის განტოლებებს $j = 2,3,...,n$ მნიშვნელობებისათვის, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_1 - (b_2 - x_{22} - x_{32} - \cdots - x_{m2}) - \cdots - (b_n - x_{2n} - x_{3n} - \cdots - x_{mn}) = \\ &= (a_1 - b_2 - \cdots - b_n) + (x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{m2}) + \cdots + (x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn}) \end{aligned} \quad (10.9)$$

მაშასადამე, ჩვენ ფაქტობრივად პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის (m+n-1) ცვლადი გამოვსახეთ დანარჩენი mn-(m+n-1)=(m-1)(n-1) ცვლადების საშუალებით. ეს კი ნიშნავს იმას, რომ (10.5) განტოლებათა სისტემაში მართლაც (m+n-1) განტოლება წრფივად დამოუკიდებელია.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობისას ბაზისურ ცვლადებად ჩვენ შევარჩიეთ პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის შესაბამისი ცვლადები, რაც არ არის აუცილებელი. ასევე შეგვეძლო ბაზისურ ცვლადებად შეგვერჩია, ვთქვათ მე-2 სტრიქონისა და მე-2 სვეტის ცვლადები და ა.შ. მითუმეტეს, რომ ამ შემთხვევაში შესაბამისი ამონახსნი შეიძლება საერთოდ არ იყოს ბაზისური.

ვთქვათ, ვიპოვეთ ისეთი ბაზისი, რომლის შესაბამისი ამონახსნიც დასაშვებია. შევიტანოთ ეს ამონახსნი განაწილების ცხრილში ისე, რომ თავისუფალი ცვლადების ნულოვანი მნიშვნელობები არ ჩავწეროთ შესაბამის უჯრედებში. შევავსოთ მხოლოდ ბაზისური უჯრედები. ამასთან, თუ რომელიმე ბაზისურმა ცვლადმა მიიღო ნულოვანი მნიშვნელობა (გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა) მაინც უნდა შევიტანოთ ცხრილში, განსხვავებით თავისუფალი ცვლადების ნულებისაგან. ასეთი სახით შევსებული ცხრილიდან ყოველთვის ნათელი იქნება, ესა თუ ის ცვლადი (უჯრედი) რომელ სიმრავლეს ეკუთვნის, ბაზისურს თუ თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეს.

ისევე, როგორც ნებისმიერი **წდზა** ამოხსნისას სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნაც უნდა დაიწყოს საწყისი ბაზისური (საყრდენი) ამონახსნის პოვნით. ასეთი ამონახსნის ძებნის პროცესი შეიძლება დაიყოს რამდენიმე ეტაპად. ყოველ ეტაპზე უნდა შეივსოს განაწილების ცხრილის ერთი უჯრედი, თანაც ისე, რომ ან ბოლომდე იყოს დაკმაყოფილებული რომელიმე მოთხოვნა, ან საქონელი სრულიად გადაზიდული აღმოჩნდეს რომელიმე მომწოდებელთან.

პირველ შემთხვევაში განაწილების ცხრილიდან შეიძლება გამოირიცხოს ის სვეტი, რომელშიაც შეივსება ერთი უჯრედი, ხოლო მეორეში კი - სტრიქონი. ორივე შემთხვევაში მიიღება განაწილების ახალი ცხრილი რომელშიაც ან სვეტთა რაოდენობა, ან სტრიქონთა რაოდენობა ერთით ნაკლები იქნება წინა ცხრილთან შედარებით. თუ ასე ვიმოქმედებთ (m+n-2)-ჯერ, ცხადია, მივიღებთ ცხრილს, რომელშიაც იქნება მხოლოდ თითო-თითო სტრიქონი და სვეტი, ე.ი. იქნება ერთი ცარიელი უჯრედი. ბალანსის პირობის გამო

დარჩენილი მოთხოვნის შესაბამისი საქონლის რაოდენობა ტოლი იქნება საქონლის იმ რაოდენობისა, რომელიც დარჩენილი სტრიქონის შესაბამის მიმწოდებელს გააჩნია. ამ უჯრედის შევსების შემდეგ აღმოჩნდება, რომ მთელი საქონელი მიმწოდებლისაგან გადაზიდულია და ყველა მოთხოვნა ბოლომდე დაკმაყოფილებულია.

ამრიგად, თუ (m+n-1)-ჯერ გავიმეორებთ ზემოთ აღწერილ მოქმედებას, მივიღებთ საყრდენ ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება იმ x_{ij} უჯრედებს, რომლებიც აღმოჩნდებიან შევსებული, ცხადია მათი რაოდენობა (m+n-1)-ის ტოლი იქნება.

შევნიშნოთ, რომ საყრდენი ამონახსნის პოვნის ასეთი მეთოდის გამოყენების დროს შეიძლება რომელიმე ეტაპზე რომელიღაც მიმწოდებელთან აღმოჩნდეს საქონლის ისეთი რაოდენობა, რომელიც დარჩენილი მომხმარებლებიდან ერთ-ერთის მოთხოვნის ტოლია. მაშინ, თუ მივიღებთ გადაწყვეტილებას, რომ საქონელი გადაიზიდოს ხსენებული მიწოდებლიდან მითითებულ მომხმარებელთან, შესაბამისი უჯრედის შევსების შემდეგ, ცხრილის მოცულობა უნდა შემცირდეს როგორც ერთი სტრიქონით, ისე ერთი სვეტითაც. ამან კი შეიძლება გამოიწვიოს ერთი ბაზისური უჯრედის (ცვლადის) დაკარგვა. ამიტომ უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ცხრილის მოცულობა შემცირდება ერთი სვეტით ან ერთი სტრიქონით და შესაბამისად, დასახელებულ მიმწოდებელთან დარჩება კიდევ საქონლის ნაშთი, რომელიც, ცხადია, ნულის ტოლია, ან მითითებულ მომხმარებელთან კიდევ უნდა გადაიზიდოს საქონლის ნულოვანი რაოდენობა. ასეთი მოქმედების შედეგად ბაზისური უჯრედი არ დაიკარგება.

საყრდენი ამოხსნის პოვნის ამ ზოგად მეთოდთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ არ არის აუცილებელი ამოვწეროთ ყველა შუალედური განაწილების ცხრილი, რომელიც მიიღება სვეტებისა და სტრიქონების ამოშლით. ეს პროცესი უნდა ხდებოდეს აზრობრივად და სასურველია ერთი ცხრილის ფარგლებში.

განვიხილოთ ტრანსპორტის ამოცანის პირველი საყრდენი ამონახსნის პოვნის ორი კონკრეტული მეთოდი: დიაგონალური მეთოდი (ჩრდილო-დასავლეთის კუთხის მეთოდი) და უმცირესი ტარიფის მეთოდი (ცხრილის უმცირესი ელემენტის მეთოდი).

დიაგონალური მეთოდის გამოყენებით განაწილების ცხრილის შევსება იწყება x_{11} უჯრედის შევსებით და მთავრდება x_{mn} უჯრედის შევსებით. შევსების ყოველ ეტაპზე შეივსება უკიდურესი მარცხენა (ჩრდილო-დასავლეთი) უჯრედი.

განვიხილოთ ეს მეთოდი კონკრეტულ მაგალითზე. ამოცანის პირობა მოცემულია განაწილების ცხრილში (ცხრ. 10.2, რომელიც ფაქტიურად უკვე შევსებულია)

ცხრილი 10.2

მიმწოდებელი პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	2,5 **70**	3 **20**	4	3	**90**
A_2	4 ,5	3 **10**	1,5 **20**	1,5 **0**	**30**
A_3	2	1	3,5	2 **40**	**40**
მოთხოვნა	**70**	**30**	**20**	**40**	$\sum=160$

x_{11} უჯრედში უნდა ჩაიწეროს 70, ვინაიდან ეს არის B_1 მომხმარებლის მოთხოვნა და მისი დაკმაყოფილება შეუძლია A_1 მიმწოდებელს. ამის შემდეგ ცხრილი შემცირდება B_1-ის შესაბამისი სვეტით, ხოლო A_1 მიმწოდებლის ნაშთი იქნება საქონლის 20 ერთეული, რომელიც უნდა გადაიზიდოს B_2 მომხმარებელთან და ამის შემდეგ წაიშლება (წარმოსახვაში) A_1-ის შესაბამისი სტრიქონი. მაშასადამე ჩვენი ცხრილი უკვე შემცირებულია პირველი სვეტითა და პირველი სტრიქონით. B_2 მომხმარებლის მოთხოვნის დასაკმაყოფილებლად

საჭიროა კიდევ საქონლის 10 ერთეული, რომელიც შეიძლება გადმოიზიდოს A_2 მიმწოდებლიდან, ამის შემდეგ A_2-ს დარჩება საქონლის 20 ერთეული, ხოლო B_2 სვეტი კი წაიშლება.

B_3 მოთხოვნა არის საქონლის 20 ერთეული სწორედ იმდენი, რამდენიც დარჩა A_2 მარაგში, ამიტომ B_3 დაკმაყოფილების შემდეგ (x_{23} უჯრედის შევსება) და მისი სვეტის ამოშლის შემდეგ, A_2-ის ნულოვანი ნაშთი უნდა შევიტანოთ x_{24} უჯრედში. მაშასადამე, შესავსები დარჩა x_{34} უჯრედი, რომელიც შეივსება 40-ით (B_4-ის მოთხოვნა და A_3-ის მარაგი). ამგვარად, განაწილების ცხრილი საბოლოოდ შეივსო (ცხრ.10.2).

ცხრილიდან ჩანს, რომ ბაზისური ცვლადებია x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, ხოლო დანარჩენი ცვლადები კი წარმოადგენენ თავისუფალ ცვლადებს. ცხადია, რომ პირველი ბაზისური ამონახსნი (საყრდენი ამონახსნი) შემდეგია:

$$x_{11}=70,\ \ x_{12}=20,\ \ x_{22}=10,\ \ x_{23}=20,\ \ x_{24}=0,\ \ x_{34}=40,$$

ე.ი. გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა. მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა კი ტოლია

$$F=2{,}5\cdot 70+3\cdot 20+3\cdot 10+1{,}5\cdot 20+1{,}5\cdot 0+2\cdot 40=375.$$

უნდა ვივარაუდოთ, რომ მიზნის ფუნქციის ეს მნიშვნელობა არ იქნება მინიმალური, რაშიც შემდეგ დავრწმუნდებით.

ახლა გავეცნოთ პირველი საყრდენი ამონახსნის მოძებნის უმცირესი ტარიფის მეთოდს.

ამ მეთოდით სარგებლობისას, ყოველ ეტაპზე უნდა შეივსოს ცხრილის ის უჯრედი, რომლის შესაბამისი ტარიფიც უმცირესია, ამასთან, თუ დაკმაყოფილებულია შესაბამისი მოთხოვნა, უნდა ამოიშალოს შესაბამისი სვეტი, ხოლო თუ სრულიად გაიზიდება შესაბამისი მიმწოდებლის საქონელი, მაშინ უნდა ამოიშალოს შესაბამისი სტრიქონი. თუ უმცირესი ტარიფის შესაბამისი რამდენიმე უჯრედია, მაშინ შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერი მათ შორის. მაგალითად ის, რომლის მეორე ინდექსია უმცირესი, თუ ასეთებიც აღმოჩნდება რამდენიმე, მაშინ შევარჩიოთ მათ შორის ის, რომლის პირველი ინდექსიც

იქნება უმცირესი. გამოვიყენოთ ეს მეთოდი უკვე განხილულ ამოცანაში (ცხრილი 10.2-ის საწყისი მდგომარეობა).

ვინაიდან გადაზიდვების უმცირესი ტარიფი შეესაბამება X_{32} უჯრედს, ამიტომ პირველად ის უნდა შევავსოთ. ამ უჯრედის შესაბამისი B_2 მომხმარებლის მოთხოვნა 30 ერთეულის ტოლია, რაც გააჩნია A_3 მიმწოდებელს ($ა_3$=40). ამ უჯრედის შევსების შემდეგ უნდა ამოიშალოს B_2-ის შესაბამისი სვეტი. შემდეგ ეტაპზე უნდა შეივსოს X_{23} უჯრედი (უნდა ჩაიწეროს 20), მაშასადამე, ორი ეტაპის შემდეგ უკვე ამოშლილია B_2 და B_3 სვეტები, A_1-ის საქონლის მარაგი ხელშეუხებელია, ხოლო A_2 და A_3-ში დარჩენილია საქონლის 10 ერთეული თითოეულში. მომდევნო ეტაპზე უნდა შევავსოთ X_{24} უჯრედი (ჩავწეროთ 10) და ამოვშალოთ A_2-ის შესაბამისი სტრიქონი. ასეთი სახის მოქმედებების შედეგად ცხრილი საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს (ცხრ. 10.3)

ცხრილი 10.3

მიმწოდებელი პუნქტი	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	60			30	**90**
A_2			20	10	**30**
A_3	10	30			**40**
მოთხოვნა	**70**	**30**	**20**	**40**	**160**

როგორც ამ ცხრილიდან ჩანს, ბაზისური ცვლადებია $\{x_{11}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}\}$ და ეს სიმრავლე განსხვავებულია დიაგონალური მეთოდით ნაპოვნი ბაზისური სიმრავლიდან. ამასთან, შესაბამისი საყრდენი ამონახსნია –

$$x_{11}=60,\quad x_{14}=30,\quad x_{23}=20,\quad x_{24}=10,\quad x_{31}=10,\quad x_{32}=30,$$

ხოლო მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა ტოლია:

$$F=2{,}5\cdot 60+3\cdot 30+1{,}5\cdot 20+1{,}5\cdot 10+2\cdot 10+1\cdot 30=335.$$

როგორც ვხედავთ, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა უფრო ნაკლებია იმ საყრდენი ამონახსნისათვის, რომელიც ნაპოვნია უმცირესი ტარიფის მეთოდით.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ასეთი თანაფარდობა არ არის ყოველთვის სამართლიანი.

მას შემდეგ, როდესაც ვიპოვით პირველ საყრდენ ამონახსნს, ამოცანის საბოლოო ამოხსნისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიმპლექს მეთოდი, მაგრამ შეზღუდვათა (10.5) პირობების კონსტრუქციის გამო ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას უფრო მარტივი მეთოდებით - განაწილების ცხრილის განსაზღვრული წესებით გარდაქმნების საშუალებით. ჩვენ გავეცნობით ორ ასეთ მეთოდს: განაწილების მეთოდს და პოტენციალთა მეთოდს.

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ პირველი საყრდენი ამონახსნის პოვნის შედეგად ცვლადთა მთელი სიმრავლე დაიყოფა ორ ჯგუფად: $\{x_{ij}\}$ ბაზისურ და $\{x_{k\ell}\}$ თავისუფალ ცვლადებად. სამართლიანი იქნება შემდეგი განტოლებები:

$$x_{ij} = \gamma_{ij} + \sum_{k,\ell} \gamma_{k\ell} x_{k\ell}, \qquad (10.10)$$

$$F = S + \sum_{k,\ell} S_{k\ell} x_{k\ell}, \qquad (10.11)$$

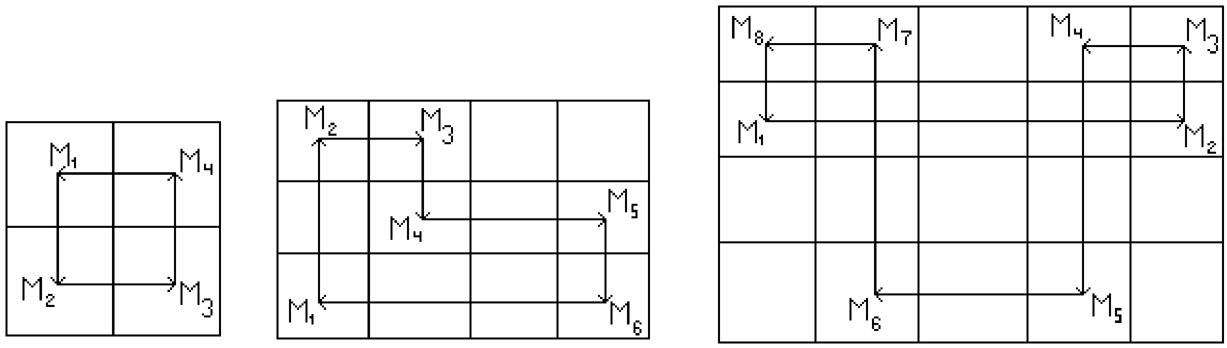
სადაც $\{\gamma_{ij}\}$ ბაზისური ამონახსნია, S არის F ფუნქციის ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $\{x_{k\ell}\}$ თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეს; $\{\gamma_{k\ell}\}$ და $\{S_{k\ell}\}$ არიან კოეფიციენტები, რომლებიც უნდა განისაზღვრონ. $S_{k\ell}$ არის $X_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის (უჯრედის) შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამი. მისი გამოთვლის მეთოდებს ჩვენ ქვემოთ გავეცნობით.

ცხადია, რომ თუ (10.11) განტოლებაში $S_{k\ell} \geq 0$, მაშინ შესაბამისი საყრდენი ამონახსნი იქნება ოპტიმალური და minF=S. ხოლო თუ რომელიმე $S_{k\ell} < 0$, მაშინ შესაძლებელია F მიზნის ფუნქციის კიდევ შემცირება. ამიტომ პირობა $S_{k\ell} \geq 0$, ყველა თავისუფალი ცვლადისათვის შეიძლება ჩაითვალოს ოპტიმალური ამონახსნის პირობად.

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ (10.10) და (10.11) გამოსახულებებში მონაწილე კოეფიციენტების მნიშვნელობები, შემოვიღოთ შემდეგი ცნება:

განაწილების ცხრილში ჩახაზულ ისეთ ჩაკეტილ ტეხილს, რომლის ორი მეზობელი გვერდიდან ერთი სტრიქონის გასწვრივაა მიმართული, ხოლო მეორე კი - სვეტის გასწვრივ და მისი ერთი წვერო თავისუფალ უჯრედშია, ხოლო დანარჩენები კი ბაზისურ უჯრედებში – ეწოდება გადათვლის ციკლი (ან უბრალოდ ციკლი).

შევნიშნოთ, რომ გადათვლის ციკლში მხოლოდ ერთი წვერო უნდა იყოს თავისუფალ უჯრედში, ხოლო დანარჩენები კი ბაზისურ უჯრედებში, ამასთან არ არის აუცილებელი, რომ ყველა ბაზისურ უჯრედში იყოს ციკლის წვერო. ნახ.10.1 წარმოადგენს ციკლის მაგალითებს.



ა. ბ. გ.

ნახ. 10.1.

როგორც ნახ.10.1(გ)-დან ჩანს, გადათვლის ციკლი შეიძლება იყოს თვითგადამკვეთი ტეხილიც, ოღონდ გადაკვეთის ეს წერტილები არ უნდა წარმოადგენდნენ ციკლის წვეროებს. შემდგომში, თუ ციკლი არ იქნება გადმოხაზული შესაბამის ცხრილში, ჩვენ უბრალოდ ჩამოვთვლით მის წვეროებს იმ რიგით, როგორც არიან ისინი წარმოდგენილი ციკლში. მაგალითად, ნახ.10.1 **ბ**–ში მოცემულ ციკლს ავღნიშნავთ ასე: $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ გადათვლის ციკლის რამდენიმე თვისება:

- ყოველი თავისუფალი უჯრედისათვის არსებობს გადათვლის ციკლი და მასთან ერთადერთი;
- გადათვლის ციკლის წვეროთა რაოდენობა ლუწია.

გადათვლის ციკლს ეწოდება მონიშნული, თუ მის წვეროებს მიწერილი აქვთ „+“ ან „-“ ნიშანი, ამასთან ორ მეზობელ წვეროს აქვს განსხვავებული ნიშნები. ვინაიდან გადათვლის ყოველ ციკლში წვეროთა რაოდენობა ლუწია, ამიტომ, ცხადია, ყოველთვის შეიძლება ნებისმიერი ციკლის მონიშვნა. ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ ციკლის ისეთ მონიშვნას, რომ თავისუფალი უჯრედის შესაბამისი წვერო იყოს დადებითი.

თუ გადათვლის მონიშნულ ციკლში დადებით უჯრედებში (უჯრედები, რომლებიც შეესაბამებიან დადებით წვეროებს) ჩაწერილ რიცხვებს (თავისუფალი უჯრედისათვის ვიგულისხმოთ ნული) დავუმატებთ რაიმე x რიცხვს, ხოლო უარყოფით უჯრედებში ჩაწერილ რიცხვებს გამოვაკლებთ იგივე x რიცხვს, მაშინ, თუ ციკლის გარეთ დარჩენილი ბაზისური ცვლადები შეინარჩუნებენ თავიანთ მნიშვნელობებს, ყველანი ერთად იქნებიან განტოლებათა (10.5) სისტემის ამონახსნი. ამ დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს (10.5) სისტემის განტოლებათა კონსტრუქციიდან. ცხადია, რომ ასე მიღებული ახალი ამონახსნი შეიძლება არ იყოს არა მარტო ბაზისური, არამედ დასაშვებიც კი. ეს ყველაფერი დამოკიდებულია x ცვლადის მნიშვნელობაზე. გადათვლის ცხრილში ასეთ მოქმედებას x მნიშვნელობით გადაწევა ეწოდება.

განვიხილოთ ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანაში (ცხრ.10.2) x გადაწევით ციკლში გამოწვეული ცვლილებები. თუ თავისუფალ უჯრედად (წვერო, ცვლადი) ავირჩევთ x_{13}, მაშინ მისი შესაბამისი გადათვლის ციკლის უჯრედები იქნება: $x_{13}, x_{23}, x_{22}, x_{12}$. ამ ციკლში x გადაწევით მივიღებთ:

$$x_{13}= x; \quad x_{23}=20- x; \quad x_{22}=10+ x; \quad x_{12}=20- x. \qquad (10.12)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ციკლის გარეთ დარჩენილი ცვლადების მნიშვნელობები და (10.12) განტოლებები ერთად აკმაყოფილებენ ამოცანის შეზღუდვათა პირობებს. ვაჩვენოთ ეს, მაგალითად, პირველი სტრიქონისა და მეორე სვეტისათვის:

$$x_{11}+ x_{12}+ x_{13}+ x_{14}=70+20- x + x +0=90;$$
$$x_{12}+ x_{22}+ x_{32}=20- x +10+x+0=30.$$

ანალოგიურად გამომდინარეობს დანარჩენი სტრიქონებისა და სვეტებისათვის.

დავუბრუნდეთ ისევ ზოგად შემთხვევას. თუ გადათვლის ციკლში x გადაწევისას x მივანიჭებთ ციკლის უარყოფითი წვეროების შესაბამის მნიშვნელობებს შორის უმცირესს, მაშინ ბაზისურ ცვლადებს შორის ერთი მაინც გახდება ნულის ტოლი. თუ ასეთი ბაზისური ცვლადებიდან ერთ-ერთს გადავაქცევთ თავისუფალ ცვლადად, ხოლო მის მაგივრად ბაზისურ ცვლადთა სიმრავლეში გადმოვიტანთ ციკლის ერთ-ერთ თავისუფალ ცვლადს, მაშინ მივიღებთ ახალ ბაზისს და შესაბამისად, ახალ ამონახსნს. x ცვლადის მნიშვნელობის შერჩევის პირობის გამო (მინიმალური მნიშვნელობა ციკლის უარყოფით წვეროების შესაბამის მნიშვნელობებს შორის) ახალი ამონახსნიც იქნება ბაზისური (იგულისხმება, რომ ციკლის გარეთ დარჩენილი ცვლადები ინარჩუნებენ თავიანთ ძველ მნიშვნელობებს). შემდგომში ჩვენ რომელიმე თავისუფალი ცვლადის შესაბამის გადათვლის ციკლს შევადგენთ ძირითადად იმისათვის, რომ ეს თავისუფალი ცვლადი გადავაქციოთ ბაზისურ ცვლადად.

ჩვენი ამოცანისათვის (10.12) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ

$x_{13}=20$; $x_{23}=0$; $x_{22}=30$; $x_{12}=0$, ვინაიდან $\min\{20,20\}=20$.

როგორც ვხედავთ, აქ ერთდროულად ორმა ცვლადმა x_{23} და x_{12} მიიღო ნულოვანი მნიშვნელობა. თუ ერთ-ერთს მათგანს, მაგალითად x_{23} გადავაქცევთ თავისუფალ ცვლადად, მაშინ მეორე x_{12} ცვლადი უნდა დარჩეს ბაზისურ ცვლადად. ამ შემთხვევაში ახალი ბაზისური ამონახსნი იქნება:

$$x_{11}=70;\ x_{12}=0;\ x_{13}=20;\ x_{22}=30;\ x_{24}=0;\ x_{34}=40.$$

გამოვთვალოთ F ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$F=2{,}5\cdot 70 + 3\cdot 0 + 4\cdot 20 + 3\cdot 30 + 1{,}5\cdot 0 + 2\cdot 40 = 425.$$

როგორც ვხედავთ, ახალ ბაზისზე გადასვლამ გამოიწვია F ფუნქციის მნიშვნელობების გაზრდა.

თუ იგივე ცხრილში განვიხილავთ b_{14} უჯრედის შესაბამის გადათვლის ციკლს: x_{14}, x_{24}, x_{22}, x_{12}, მაშინ x_{14} მიიღებს ნულოვან მნიშვნელობას და ის

გადაიქცევა ბაზისურ ცვლადად x_{24} ბაზისური ცვლადის მაგივრად. ცხადია, ამ შემთხვევაში არც ერთი სხვა ცვლადი არ შეიცვლის თავის მნიშვნელობას. თავის მნიშვნელობას არ შეიცვლის, აგრეთვე, F ფუნქციაც, ის შეინარჩუნებს თავის ძველ მნიშვნელობას F=375. ასეთ ვითარებას წავაწყდებით ყოველთვის, როდესაც გვექნება გადაგვარებული შემთხვევა (ერთ-ერთი ბაზისური ცვლადის მნიშვნელობა ნულის ტოლი იქნება) და გადათვლის ციკლის უარყოფით უჯრედებს შორის აღმოჩნდება ნულოვანი ბაზისური უჯრედი.

თუ ავირჩევთ x_{31}-ის შესაბამის გადათვლის ციკლს იგივე ცხრილში: x_{31}, x_{34}, x_{24}, x_{22}, x_{12}, x_{11}, მაშინ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა შემცირდება ათი ერთეულით: $F=365$, ხოლო ბაზისური ამონახსნი კი იქნება:

$$x_{11}=60;\ x_{12}=30;\ x_{23}=20;\ x_{24}=10;\ x_{31}=10;\ x_{34}=30.$$

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ მიზნის ფუნქცია შეიძლება გაიზარდოს, შემცირდეს ან იგივე დარჩეს იმის მიხედვით, თუ რომელი თავისუფალი ცვლადის შესაბამის გადათვლის ციკლს ავირჩევთ.

მოვიყვანოთ დაუმტკიცებლად თეორემა (10.10) განტოლებების კოეფიციენტების შესახებ, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული გადათვლის ციკლის ცნებასთან.

თეორემა. (10.10) განტოლებათა სისტემაში $\gamma_{k\ell}$ კოეფიციენტები ღებულობენ ± 1-ის ტოლ მნიშვნელობებს იმის მიხედვით, თუ როგორია x_{ij} ბაზისური უჯრედები $x_{k\ell}$ თავისუფალი უჯრედის შესაბამის გადათვლის ციკლში. კერძოდ, თუ x_{ij} უჯრედი დადებითია, მაშინ $\gamma_{k\ell}=1$, თუ უარყოფითია $\gamma_{k\ell}=-1$, ხოლო თუ x_{ij} საერთოდ არ წარმოადგენს ამ გადათვლის ციკლის წვეროს, მაშინ $\gamma_{k\ell}=0$.

ამ თეორემაზე დაყრდნობით დავამტკიცოთ, რომ (10.11) გამოსახულებაში $x_{k\ell}$ ცვლადის შესაბამისი $S_{k\ell}$ კოეფიციენტი ($x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამი) შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$S_{k\ell} = C_{k\ell} - C_{kf} + C_{gf} - C_{gp} + C_{rp} - \cdots + C_{uv} - C_{u\ell}, \qquad (10.13)$$

სადაც $C_{k\ell}, C_{kf}, ..., C_{u\ell}$ წარმოადგენენ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის (უჯრედის) შესაბამისი გადათვლის ციკლის წვეროების (უჯრედების) შესაბამის ტარიფებს.

მაშასადამე ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ციკლია:

$$x_{k\ell}, x_{kf}, \ x_{gf}, x_{gp}, \ x_{rp}, \cdots, x_{uv}, x_{u\ell}, \qquad (10.14)$$

სადაც წვეროები (უჯრედები) იმ თანმიმდევრობითაა განლაგებული, რომლითაც შემოვუვლით ციკლს თუ ვიმოძრავებთ $x_{k\ell}$ წვეროდან (ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში x_{kf} და $x_{u\ell}$ აუცილებლად უარყოფითი წვეროები იქნებიან, როგორც $x_{k\ell}$ უჯრედის უშუალო მეზობლები ციკლში).

დავამტკიცოთ (10.13) ფორმულა.

ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადი მიიღებს მონაწილეობას, მხოლოდ და მხოლოდ (10.14) ციკლში მონაწილე ბაზისური ცვლადების (10.10) სახის დაშლაში. ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (10.14) გადათვლის ციკლში ბაზისური უჯრედების მიმდევრობას მხოლოდ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადისათვის, (10.10)-დან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left.\begin{array}{l} x_{kf} = \cdots - x_{k\ell} + \cdots \\ x_{gf} = \cdots + x_{k\ell} - \cdots \\ x_{gp} = \cdots - x_{k\ell} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{u\ell} = \cdots - x_{k\ell} + \cdots \end{array}\right\} \qquad (10.15)$$

თუ განტოლებათა (10.15) სისტემას გავითვალისწინებთ (10.6)-ში და ამოვწეროთ მხოლოდ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის შესაბამის გადათვლის ციკლში მონაწილე ცვლადებს (ვინაიდან მხოლოდ მათგან შეიძლება შემოვიდეს (10.6)-ში $x_{k\ell}$ ცვლადი), მივიღებთ:

$$F = \cdots + C_{k\ell} x_{k\ell} + C_{kf} x_{kf} + C_{gf} x_{gf} + C_{gp} x_{gp} + C_{rp} x_{rp} + \cdots + C_{uv} x_{uv} + C_{u\ell} x_{u\ell} + \cdots =$$
$$= \cdots + \left(C_{k\ell} - C_{kf} + C_{gf} - C_{gp} + C_{rp} - \cdots + C_{uv} - C_{u\ell}\right) x_{k\ell} + \cdots = \cdots + S_{k\ell} x_{k\ell} + \cdots$$

ე.ი. (10.13) ფორმულა სამართლიანი ყოფილა.

დამტკიცებული (10.13) ფორმულა გვაძლევს საშუალებას ჩამოვწეროთ წესების მიმდევრობა, რომელთა შესრულება მიგვიყვანს ტრანსპორტის ამოცანის ამოხსნამდე, თუ ცნობილია პირველი საყრდენი ამონახსნი. წესების ამ ერთობლიობას ეწოდება განაწილების მეთოდი. ჩამოვაყალიბოთ ეს მეთოდი.

1. გამოვთვალოთ ყველა თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამი (10.13) ფორმულით.

2. თუ ტარიფების ყველა ჯამი გამოვიდა არაუარყოფითი, მაშინ ნაპოვნი საყრდენი ამონახსნი ოპტიმალურია და გამოთვლები უნდა დამთავრდეს. თუ მათ შორის აღმოჩნდა უარყოფითები, ამოვარჩიოთ ნებისმიერი (შეგვიძლია გამოვიყენოთ ისეთივე წესი, რომელიც იყო მოცემული მინიმალური ტარიფის მეთოდით პირველი საყრდენი ამონახსნის საპოვნელად), ვთქვათ, $S_{k\ell} < 0$.

3. $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადი გადავაქციოთ ბაზისურ ცვლადად, ხოლო მის მაგივრად თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეში გადმოვიყვანოთ ერთ-ერთი იმ ბაზისური ცვლადებიდან, რომელიც მიიღებს ნულოვან მნიშვნელობას.

4. 1-3 პუნქტებში მითითებული პროცესი გავიმეოროთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ ისეთ საყრდენ ამონახსნს, რომლისთვისაც ნებისმიერი თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამი იქნება არაუარყოფითი, ანუ სანამ არ ვიპოვით ოპტიმალურ ამონახსნს.

ამ მეთოდით ამოვხსნათ ჩვენს მიერ მოყვანილი ამოცანა. მხოლოდ ახლა გამოვიყენოთ უმცირესი ტარიფის მეთოდით ნაპოვნი პირველი საყრდენი ამონახსნი (ცხრ.10.3), ვინაიდან ამ შემთხვევაში F ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლებია.

გამოვთვალოთ ყველა თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამი:

$$S_{12} = C_{12} - C_{11} + C_{31} - C_{32} = 3 - 2{,}5 + 2 - 1 = 1{,}5 > 0;$$

$$S_{13} = C_{13} - C_{23} + C_{24} - C_{14} = 4 - 1{,}5 + 1{,}5 - 3 = 1 > 0;$$

$$S_{21} = C_{21} - C_{11} + C_{14} - C_{24} = 4{,}5 - 2{,}5 + 3 - 1{,}5 = 3{,}5 > 0;$$

$$S_{22} = C_{22} - C_{32} + C_{31} - C_{11} + C_{14} - C_{24} = 3 - 1 + 2 - 2{,}5 + 3 - 2 = 2{,}5 > 0;$$

$$S_{33} = C_{33} - C_{23} + C_{24} - C_{14} + C_{11} - C_{31} = 3{,}5 - 1{,}5 + 1{,}5 - 3 + 2{,}5 - 2 = 1 > 0;$$

$$S_{34} = C_{34} - C_{31} + C_{11} - C_{14} = 2 - 2 + 2{,}5 - 3 = -0{,}5 < 0.$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ მხოლოდ x_{34} თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამია უარყოფითი. ამ ცვლადის შესაბამისი ციკლი იქნება: x_{34}, x_{31}, x_{11}, x_{14}, (ცხრილში ის პუნქტირითაა ნაჩვენები). ამასთან, უარყოფითი წვეროებია x_{31} და x_{14}. ამიტომ მინიმუმი მათ შესაბამის მნიშვნელობებს შორის უნდა მოიძებნოს, გვექნება:

$$\min\{10,30\}=10.$$

მაშინ ახალი საყრდენი ამონახსნი იქნება:

$$x_{11}=70;\ \ x_{14}=20;\ \ x_{23}=20;\ \ x_{24}=10;\ \ x_{32}=30;\ \ x_{34}=10, \qquad (10.16)$$

ხოლო F ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა კი

$$F = 2{,}5 \cdot 70 + 3 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 10 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 330. \qquad (10.17)$$

თუ ახალი თავისუფალი ცვლადებისათვის გამოვთვლით მათი შესაბამისი ტარიფების ალგებრულ ჯამებს, ვნახავთ, რომ ყველა არაუარყოფითია, მაშასადამე, (10.16) ყოფილა ოპტიმალური ამონახსნი, ხოლო (10.17) კი მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა.

ახლა განვიხილოთ $S_{k\ell}$ კოეფიციენტების გამოთვლის პოტენციალთა მეთოდი. პოტენციალთა მეთოდში A_i და B_j პუნქტებს მიეწერებათ, შესაბამისად, α_i და β_j პოტენციალები $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, რომლებიც დაკავშირებული არიან განტოლებით

$$\alpha_i + \beta_j = C_{ij}, \qquad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \qquad (10.18)$$

სადაც C_{ij} არის ბაზისური ცვლადის შესაბამისი ტარიფი.

ცხადია, რომ (10.18) არის (m+n-1) განტოლებებისაგან შემდგარი განტოლებათა სისტემა ცვლადთა (m+n) რაოდენობით. ცნობილია, რომ ამ განტოლებათა სისტემას ყოველთვის აქვს ამონახსნი, ამასთან თუ რომელიმე სიდიდეს მივანიჭებთ რაიმე საწყის მნიშვნელობას, დანარჩენი სიდიდეები ცალსახად განისაზღვრება.

ვთქვათ, $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ არის (10.18)-ის რაიმე ამონახსნი. $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი არაპირდაპირი ტარიფი ეწოდება $C'_{k\ell}$ სიდიდეს, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$C'_{k\ell} = \alpha_k + \beta_\ell. \tag{10.19}$$

დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$S_{k\ell} = C_{k\ell} - C'_{k\ell}, \tag{10.20}$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად (10.13) ფორმულაში ჩავსვათ $x_{k\ell}$ თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი გადათვლის ციკლში მონაწილე ბაზისური ცვლადების შესაბამისი ტარიფების (10.18) წარმოდგენა პოტენციალების საშუალებით:

$$\begin{aligned} S_{k\ell} &= C_{k\ell} - (\alpha_k + \beta_f) + (\alpha_g + \beta_f) - (\alpha_g + \beta_p) + (\alpha_r + \beta_p) - \cdots + \\ &+ (\alpha_u + \beta_v) - (\alpha_u + \beta_\ell) = C_{kl} - (\alpha_k + \beta_l). \end{aligned} \tag{10.21}$$

თუ (10.21) ფორმულაში გავითვალისწინებთ (10.19), მაშინ მივიღებთ (10.20) ტოლობას.

ამოვხსნათ პოტენციალთა მეთოდით ტრანსპორტის ამოცანა, რომელსაც შეესაბამება ღია მათემატიკური მოდელი. ამ ამოცანის მონაცემები ჩაწერილია ცხრილში (ცხრ.10.4)

ცხრილი 10.4.

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	2 60 40	7 10	4	0 30	**70**
A2	4	5 50 50	8	0	**50**
A3	3 20	6 15 25	2 35 35	0 30	**80**
მოთხოვნა	**60**	**75**	**35**	**30**	

ამ ცხრილში B4 ფიქტიური მიმხმარებელია, რომლის მოთხოვნა b4=200-170=30 (ჭარბი საქონელი). ცხრილის ქვედა მარცხენა კუთხეში ჩაწერილია პირველი საყრდენი ამონახსნი, რომელიც ნაპოვნია დიაგონალური მეთოდით, ხოლო ქვედა მარჯვენა კუთხეში კი - პირველი საყრდენი ამონახსნი, რომელიც ნაპოვნია უმცირესი ტარიფის მეთოდით. მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობები შესაბამისად ტოლია – 600 დიაგონალური მეთოდისათვის, 610 – უმცირესი ტარიფის მეთოდისათვის. გამოვიყენოთ დიაგონალური მეთოდით ნაპოვნი პირველი საყრდენი ამონახსნი. დავწეროთ პოტენციალების განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\beta_1=2;\ \alpha_1+\beta_2=7;\ \alpha_2+\beta_2=5;\ \alpha_3+\beta_2=6;\\&\alpha_3+\beta_3=2;\ \alpha_3+\beta_4=0\end{aligned}, \qquad (10.22)$$

მივანიჭოთ α_3-ს ნულოვანი მნიშვნელობა $\alpha_3=0$, მაშინ $\beta_2=6;\ \beta_3=2;\ \beta_4=0$; $\alpha_1=1;\ \beta_1=1;\ \alpha_2=-1$. ახლა გამოვთვალოთ თავისუფალი ცვლადების შესაბამისი არაპირდაპირი ტარიფები $C'_{13}=3$; $C'_{14}=1$; $C'_{21}=0$; $C'_{23}=1$; $C'_{24}=-1$; $C'_{31}=1$, ხოლო შესაბამისი ტარიფების ალგებრული ჯამები კი ტოლი იქნება:

$$S_{13}=1;\ S_{14}=-1;\ S_{21}=4;\ S_{23}=7;\ S_{24}=1;\ S_{31}=2. \qquad (10.23)$$

(10.23) სისტემაში მხოლოდ $S_{14}=-1<0$. შევადგინოთ x_{14} თავისუფალი ცვლადის შესაბამისი გადათვლის ციკლი. ცხადია ეს იქნება x_{14}, x_{34}, x_{32}, x_{12}

(ცხრილში ის პუნქტირითაა აღნიშნული). ვინაიდან ციკლის უარყოფითი უჯრედებიდან მინიმალური ელემენტი შეესაბამება x_{12} უჯრედს, ამიტომ მივიღებთ x_{14}=10; x_{34}=20; x_{32}=25, ხოლო x_{12} გადაიქცევა თავისუფალ ცვლადად. ამრიგად, ახალი საყრდენი ამონახსნი იქნება:

$$x_{11}=60;\ \ x_{14}=10;\ \ x_{22}=50;\ \ x_{32}=25;\ \ x_{33}=35;\ \ x_{34}=20, \tag{10.24}$$

ხოლო მიზნის ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა კი - F=590.

თუ შევადგენთ ახალი ბაზისური ცვლადების მიმართ პოტენციალთა განტოლებებს (განტოლებათა (10.22) სისტემის ნაცვლად გვექნება განტოლებათა ისეთი სისტემა, რომელშიც (10.22) სისტემის $\alpha_1+\beta_2=7$ განტოლების მაგივრად იქნება $\alpha_1+\beta_4=0$ განტოლება, დანარჩენი განტოლებები იგივე იქნებიან) და ჩავატარებთ პოტენციალთა მეთოდის შესაბამის დანარჩენ გამოთვლებს, დავრწმუნდებით, რომ (10.24) არის ოპტიმალური ამონახსნი და minF=590. გარდა ამისა, (10.24) სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ ჭარბი საქონლის 10 ერთეული უნდა დარჩეს A_1 პუნქტში და 20 ერთეული კი - A_2 პუნქტში.

გავაანალიზოთ სატრანსპორტო ამოცანის ორადული ამოცანა. უპირველეს ყოვლისა შევადგინოთ ორადული ამოცანა. ამისათვის (10.5) განტოლებათა სისტემას მივცეთ ისეთი სახე, რომ ორადული იყოს მაქსიმუმის ამოცანა.

$$\left.\begin{array}{l} I.\ -x_{i1}-x_{i2}-...-x_{in}\le -a_i,\ x_{i1}+x_{i2}+...+x_{in}\le a_i,\quad (\ i=\overline{1,m}) \\ II.\ \ x_{1j}+x_{2j}+...+x_{mj}\le b_j,-x_{1j}-x_{2j}-...-x_{mj}\le -b_j,\ \ (\ j=\overline{1,n}) \end{array}\right\} \tag{10.25}$$

აღვნიშნოთ შესაბამისად $-u_i'$ და u_i'' ცვლადებით (10.25) სისტემის I უტოლობების პირველი და მეორე ნაწილების i-ური უტოლობების მარცხენა მხარეები. ანალოგიურად, v_i' და $-v_i''$ ცვლადებით აღვნიშნოთ იგივე სისტემის II უტოლობების პირველი და მეორე ნაწილების j-ური უტოლობების მარცხენა მხარეები. გარდა ამისა, შემოვიტანოთ u_i და v_j ცვლადები შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u'_i - u''_i, \quad i = \overline{1,m} \\ v_j &= v'_j - v''_j, \quad j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\}. \tag{10.26}$$

შემოტანილი აღნიშვნებით (10.5) – (10.6) სატრანსპორტო ამოცანის ორადული იქნება მაქსიმუმის შემდეგი ამოცანა:

$$-u_i + v_j \le C_{ij}, \quad i = \overline{1,m}. \quad j = \overline{1,n}\}, \tag{10.27}$$

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j. \tag{10.28}$$

როგორც §7-ში იყო აღნიშნული, (10.27)-(10.28) ორადული ამოცანისათვის ცვლადები u_i და v_j ზოგადად არ აკმაყოფილებენ არაუარყოფითობის პირობებს, ამიტომ (10.27)-(10.28) არ წარმოადგენს ᲬᲓᲡᲐ-ს.

სატრანსპორტო ამოცანის ორადულ ამოცანას აქვს საკმაოდ მარტივი ეკონომიკური აზრი. ორადული ამოცანის u_i $(i = \overline{1.m})$ ცვლადი, რომლიც შეესაბამება პირდაპირი ამოცანის პირველი m განტოლებების i-ურ განტოლებას, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ერთეული საქონლის ფასი (საქონლის ღირებულების შეფასება), რომელიც გააჩნია i-ურ მომწოდებელს. მას i-ური მომწოდებლის პოტენციალს უწოდებენ. ცვლადი v_j $(j = \overline{1.n})$, რომელიც შეესაბამება პირდაპირი ამოცანის ბოლო n განტოლებების j-ურ განტოლებას, წარმოგვიდგება როგორც საქონლის ერთეულის ფასი (საქონლის ღირებულების შეფასება), რომელიც მიწოდებულია j-ური მომხმარებლისათვის. მას j-ური მომხმარებლის პოტენციალს უწოდებენ. ორადული ამოცანის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ მინიმუმამდე იყოს დაყვანილი სხვაობა საქონლის ჯამურ ღირებულებასა, რომელიც მიწოდებულია მომხმარებლისათვის და საქონლის ჯამურ ღირებულებას შორის, რომელიც გააჩნიათ მომწოდებლებს (მიზნის (10.28) ფუნქცია). ამასთან, დაცული უნდა იყოს პირობა: სხვაობა ერთეული საქონლის ფასსა, რომელიც მიწოდებულია მომხმარებლისათვის და ერთეული საქონლის ფასს შორის, რომელიც გააჩნია მომწოდებელს არ უნდა

აღემატებოდეს საქონლის ერთეულის გადაზიდვის ფასს, შესაბამისი მომწოდებლიდან მომხმარებლამდე (უტოლობათა (10.27) სისტემა).

ჩამოვაყალიბოთ **კანტოროვიჩის** კრიტერიუმი (10.5)-(10.6) სატრანსპორტო ამოცანის ამონახსნის ოპტიმალურობის შესახებ, ორადულობის თეორიაში განხილული თეორემებისა და შემოტანილი პოტენციალების გათვალისწინებით.

თეორემა. იმისათვის რომ $X(x_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n},$ გადაზიდვების გეგმა იყოს ოპტიმალური, აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს მომწოდებლებისა და მომხმარებლის ისეთი $u_i \quad (i=\overline{1.m})$ და $v_j \quad (j=\overline{1.n})$ პოტენციალები, რომ:

– პოტენციალთა სხვაობა ყოველ მომხმარებელსა და მომწოდებელს შორის არ უნდა აღემატებოდეს ერთეული საქონლის გადაზიდვის შესაბამის ტარიფს:

$$v_j - u_i \le C_{ij}, \quad i=\overline{1,m}. \quad j=\overline{1,n}\}. \tag{10.29}$$

– თუ X გეგმით ადგილი აქვს რომელიმე მომწოდებლიდან რომელიმე მომხმარებელზე საქონლის მიწოდებას, მაშინ მათ პოტენციალთა სხვაობა ერთეული საქონლის გადაზიდვის ტარიფის ტოლია, ე.ი.

$$\text{თუ } x_{ij} > 0, \text{ მაშინ } v_j - u_i = C_{ij}. \tag{10.30}$$

ამ დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს ორადულობის მეორე ძირითადი თეორემიდან (ფორმულა (7.26)).

აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ სატრანსპორტო ამოცანაში ორადული ფასები წარმოადგენენ ლოკალურ ფასებს (ან ფასთა ნამატებს ერთიან ტარიფებზე), რომელიც განისაზღვრება კონკრეტული მომწოდებლისა თუ მომხმარებლის მიხედვით, რაც თავისთავად განაპირობებს გადაზიდვების სწორი მიმართულებების დაგეგმვას. გადაზიდვების გეგმის ოპტიმალურობის ნიშნის ასეთი ინტერპრეტაცია წარმოადგენს მათემატიკურად დადასტურებულ შემდეგ დებულებას: თუ რომელიმე გადაზიდვა განხორციელდა, მაშინ საქონლის ერთეულის ფასი v_j მომხმარებელთან ტოლი იქნება ერთეული საქონლის ფასისა მომწოდებელთან u_i, რომელიც გაზრდილია ერთეულ საქონელზე სატრანსპორტო

ხარჯებით C_{ij}; სხვა შემთხვევებში ფასი v_j ვერ გადააჭარბებს $u_i + c_{ij}$, ჯამს, ვინაიდან საქონელი j-ურ მომხმარებელთან ასეთი ფასით შესაძლებელია გადაიზიდოს i-ური მომწოდებლიდან მხოლოდ სატრანსპორტო C_{ij} ხარჯით. მაშასადამე, $v_j \leq u_i + C_{ij}$, ე.ი. ორივე განხილულ შემთხვევაში ფასთა სხვაობები არ აჭარბებენ გადაზიდვის ხარჯებს.

კონკრეტულ მაგალითზე დაყრდნობით განვიხილოთ სატრანსპორტო ამოცანის ამოხსნის მეთოდი პროგრამა "**Excel**"-ის საშუალებით. კერძოდ განვიხილოთ შემდეგი სატრანსპორტო ამოცანა.

10.1

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები			მარაგი
	B1	**B2**	**B3**	
A1	1	2	3	**200**
A2	3	4	2	**200**
A3	1	2	1	**200**
მოთხოვნა	**180**	**180**	**240**	

მოვახდინოთ აღნიშნული ამოცანის რეალიზაცია "**Excel**"-ზე, შემდეგი სქემის მიხედვით:

2. ავამუშავოთ პროგრამა **Excel (Start→Programs→Microsoft Office→Microsoft Excel);**
8. გავააქტიუროთ (თუ არ არის გააქტიურებული) **Excel**−ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver (Tools→Add-ins→Solver);**
9. ამოცანის მონაცემები შევიტანოთ ცხრილში შემდეგი სახით:
   - **B3-D3** უჯრებში შევიტანოთ **(10.1)** ამოცანით მოცემული შესაბამისი გადაზიდვის ტარიფები;
   - **E3-E5** უჯრებში შევიტანოთ A1, A2 და A3 პუნქტებში არსებული მარაგის შესაბამისი რაოდენობა;

- **B6-D6** უჯრებში შევიტანოთ B1,B2 და B3 პუნქტებში არსებული მოთხოვნის რაოდენობა;

10. ამ ცხრილის ქვევით მოვათავსოთ ანალოგიური ცხრილი იმ განსხვავებით, რომ –

    ა. **E9-E11** უჯრებში შევიყვანოთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება A1, A2 და A3 პუნქტებიდან გატანილი პროდუქციის რაოდენობა, კერძოდ:

    E9 - ში - **= B9+C9+D9**;
    E10– ში – **= B10+C10+D10**;
    E11– ში – **= B11+C11+D11 .**

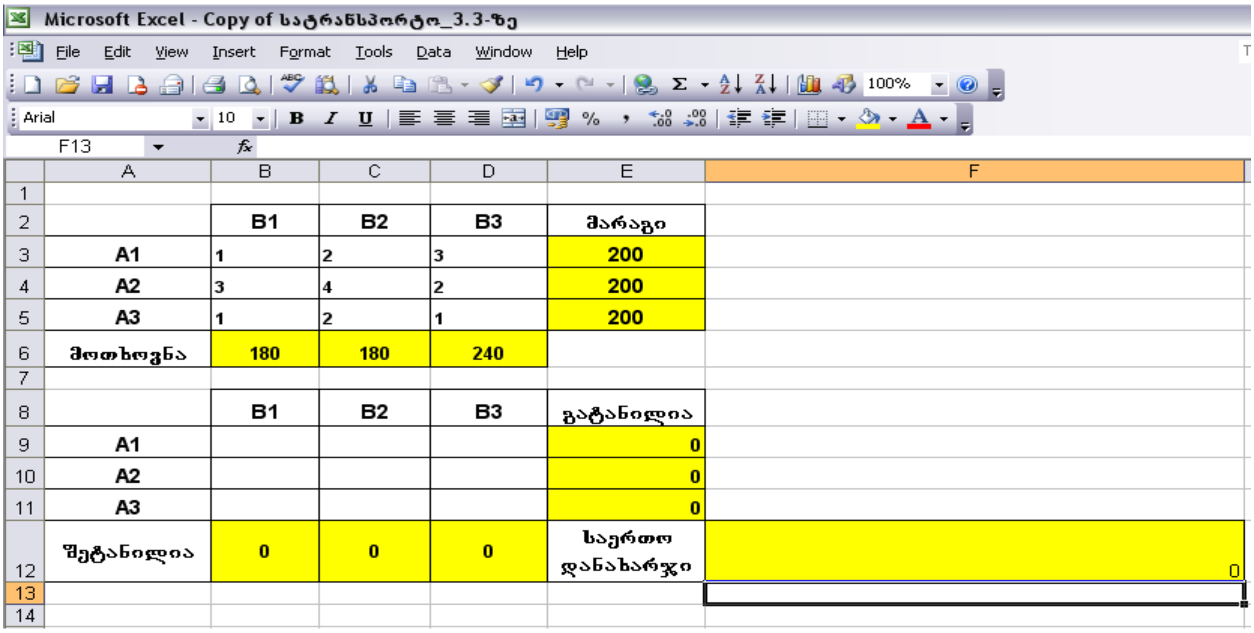
    ბ. **B12-D12** უჯრებში შევიყვანოთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება B1,B2 და B3 პუნქტებში შეტანილი პროდუქციის რაოდენობა, კერძოდ:

    B12 – ში - **= B9+B10+B11**;
    C12 – ში - **= C9+C10+C11 ;**
    D12 – ში - **= D9+D10+D11 .**

11. **F12** უჯრაში შევიყვანოთ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელი ფორმულა, ანუ ტრანსპორტირების მთლიანი დანახარჯი:

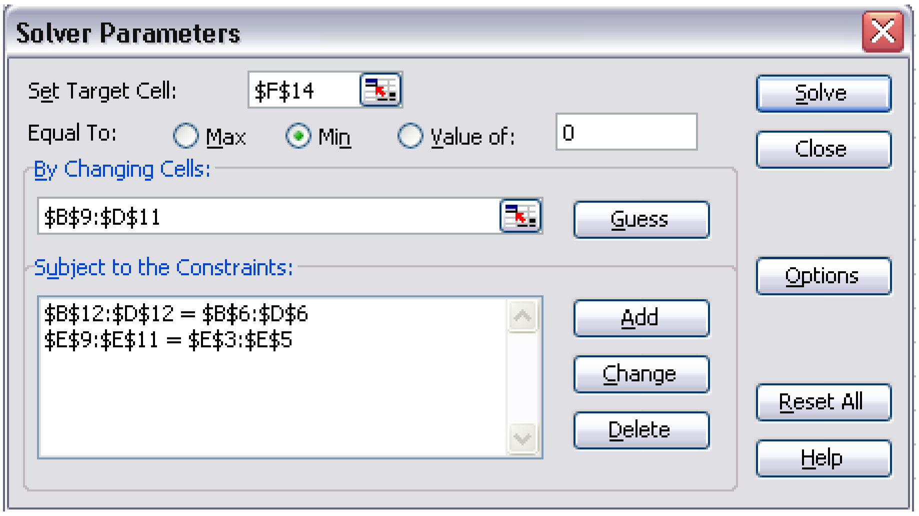
=B3*B9+C3*C9+D3*D9+B4*B10+C4*C10+D4*D10+B5*B11+C5*C11+D5*D11.

1-5 პუნქტების შესრულების შედეგად **Excel-**ის ფურცელს ექნება შემდეგი სახე:



	A	B	C	D	E	F
1						
2		B1	B2	B3	მარაგი	
3	A1	1	2	3	200	
4	A2	3	4	2	200	
5	A3	1	2	1	200	
6	მოთხოვნა	180	180	240		
7						
8		B1	B2	B3	გატანილია	
9	A1				0	
10	A2				0	
11	A3				0	
12	შეტანილია	0	0	0	საერთო დანახარჯი	0
13						
14						

12. ავამუშავოთ **Excel**−ის ინსტრუმენტული საშუალება **Solver** **(Tools→Solver),**
რის შედეგადაც გამოჩნდება დიალოგური ფანჯარა, რომლის პუნქტებსაც შევავსებთ ქვემოთ ნაჩვენები სქემის მიხედვით:



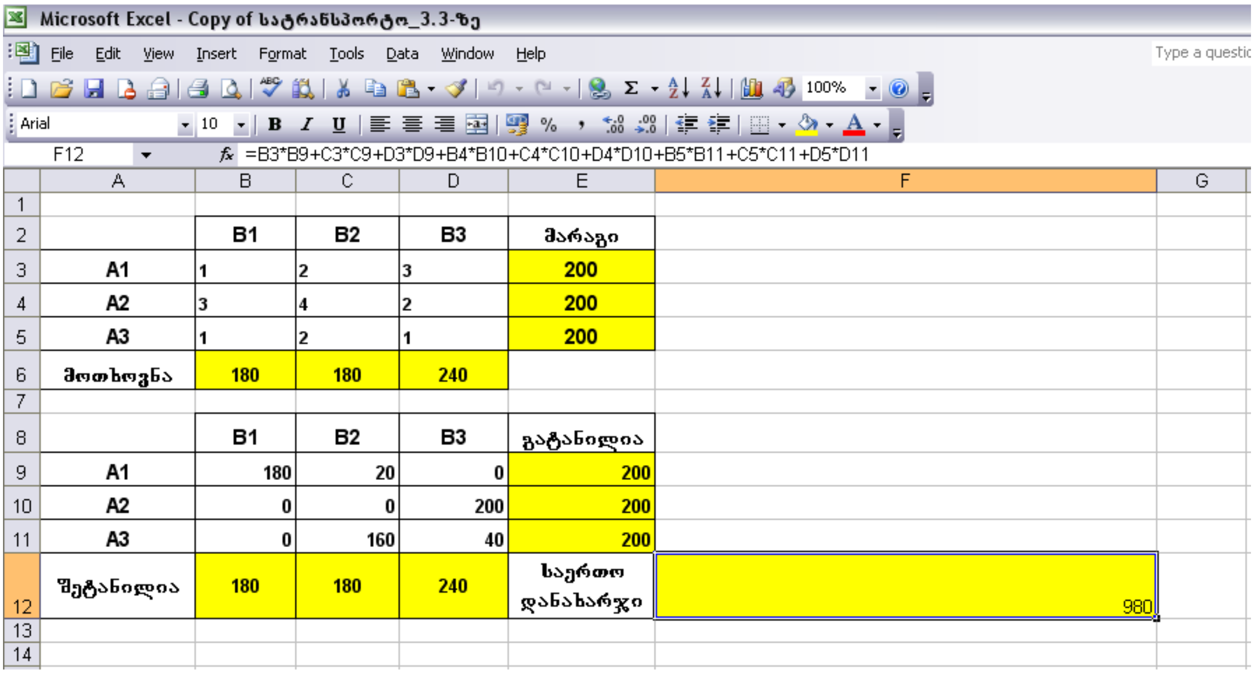
სადაც

- **“Set Target Cell”** (ქართ. - მიუთითეთ მიზნის უჯრა) გასწვრივ უნდა მივუთითოთ ის უჯრა, სადაც ფიქსირდება ოპტიმალური მნიშვნელობა, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრა არის **$F$12**;
- **“Equal To”** (ქართ. – რომელიც უდრის) გასწვრის უნდა ავირჩიოთ **Max** ან **Min,** ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ჩვენს შემთხვევაში – **Min** ;
- **“By Changing cells”** (ქართ. – ცვალებადი უჯრებისათვის)-ში უნდა მივუთითოთ ის უჯრები, რომელთა მნიშვნელობები იცვლება და სადაც მიეთითება ამონახსნი, ჩვენს შემთხვევაში ასეთი უჯრებია **$B$9:$D$11** უჯრები;
- **“Subject to the Constraints”** (ქართ. – შეზღუდვები) – ში უნდა მივუთითოთ შეზღუდვები. ჩვენს შემთხვევაში ეს არის **$E$9 - $E$11** უჯრებში არსებულ ფორმულებზე შეზღუდვები, ანუ მარაგზე შეზღუდვები და **$B$12 - $D$12** უჯრებში არსებულ ფორმულებზე

შეზღუდვები, ანუ მოთხოვნაზე შეზღუდვები. კერძოდ მათი მნიშვნელობები შესაბამისად არ უნდა აღემატებოდნენ **$E$3 - $E$5** და **$B$6 - $D$6** უჯრებში დაფიქსირებულ მნიშვნელობებს;

- **“Options”** (ქართ. – პარამეტრები) – ში ვირჩევთ “**Assume Linear Model**” (ქართ. – წრფივი მოდელი) და **“Assume Non-negative”** (ქართ. – არაუარყოფითი მნიშვნელობები) პუნქტებს;

13. ბოლოს ვაძლევთ ბრძანებას **Solve.** ოპტიმიზაციის წარმატებით დასრულების შემთხვევაში გამოჩნდება რეზულტატების ფანჯარა, სადაც მითითებული იქნება ამონახსნი. ჩვენს შემთხვევაში გვექნება:



	A	B	C	D	E	F
1						
2		B1	B2	B3	მარაგი	
3	A1	1	2	3	200	
4	A2	3	4	2	200	
5	A3	1	2	1	200	
6	მოთხოვნა	180	180	240		
7						
8		B1	B2	B3	გატანილია	
9	A1	180	20	0	200	
10	A2	0	0	200	200	
11	A3	0	160	40	200	
12	შეტანილია	180	180	240	საერთო დანახარჯი	980
13						
14						

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი რეზულტატი: 10.1 ამოცანაში ტრანსპორტირების მინიმალური დანახარჯი შეადგენს 980 ლარს, რომელიც მიიღწევა ზემოთ მიღებული ტრანსპორტირების გეგმის შედეგად.

ᲡᲐᲕᲐᲠᲯᲘᲨᲝᲔᲑᲘ

10.2-10.6 სატრანსპორტო ამოცანები ამოხსენით პროგრამა "Excel"-ის გამოყენებით.

10.2

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები			მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	
A_1	2	4	3	300
A_2	3	2	1	400
A_3	2	2	3	200
მოთხოვნა	**350**	**250**	**300**	

10.3

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები			მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	
A_1	3	1	4	750
A_2	2	3	1	700
A_3	4	2	3	750
მოთხოვნა	**1000**	**600**	**600**	

10.4

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	3	1	4	2	**1000**
A_2	2	3	1	3	**800**
A_3	4	2	3	4	**900**
მოთხოვნა	**650**	**750**	**750**	**550**	

10.5

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	4	5	5	5	**800**
A_2	3	2	4	4	**800**
A_3	3	2	1	3	**800**
მოთხოვნა	**600**	**600**	**600**	**600**	

10.6

მიწოდების პუნქტები	დანიშნულების პუნქტები				მარაგი
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	1	7	9	5	**700**
A_2	4	2	6	8	**700**
A_3	3	8	1	2	**700**
მოთხოვნა	**400**	**600**	**550**	**550**	

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. ედიბერიძე ა., ნაცვლიშვილი ზ., კვალიაშვილი ა. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1985.
2. ლურსმანაშვილი ა. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1967.
3. მანია გ. წრფივი პროგრამირება. - თბილისი, “განათლება”, 1967.
4. მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. – თბილისი, თსუ, 2000.
5. ნატროშვილი დ., გიორგაშვილი ლ., უსანეთაშვილი მ., ჯაშიაშვილი გ. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. – თბილისი, “გლობალ პრინცი”, 1999.
6. ფერცულიანი თ., კუცია მ., კაკუბავა რ. წრფივი დაპროგრამირება. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1999წ.
7. ჩილაჩავა თ., ძიძიგური ც. მათემატიკური მოდელირება. საგამომცემლო სახლი “ინოვაცია”, 2008.
8. ჭანია მ., კუცია მ., გალდავა რ.. ორადულობის ძირითადი პრინციპები წრფივ დაპროგრამებაში. – თბილისი, თსუ, 1999
9. **Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах. – Москва, “Высшая школа”, 1986.**
10. **Барсов А.С. Линейное программирование в технико-экономических задачах. М., Наука, 1964.**
11. **Биллинг. Офисное програмирование.М., «Русская редакция», 2002.**
12. **Васильев Ф.П. Иваницкий Д.Б. Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (Теория, методы и приложения). М. , Наука, 1969.**
13. **Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение. М., Наука, 1966.**
14. **Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. М., Наука,1969.**
15. **Замков О.О., Черемных Ю. А., Толстопятенко А. В. Математические методы в экономике. Москва, “Дело и Сервис”, 1999**
16. **Калихман И.Л. Сборник задач по линейной алгебре и программированию. М., Высшая школа, 1969.**
17. **Карлберг Конрад. Бизне-анализ с помощью Excel. М., «Вильямс», 2006.**
18. **Карпелевич Ф.И. , Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования.М.,Наука, 1967.**
19. **Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике. – Москва, “ЮНИТИ”, 2004**
20. **Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М.,**

Просвещение, 1966.

21. Юдин Д.Б. Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (Теория, методы и приложения). М., Наука, 1969.
22. Richard Thomas. Quantitative Nethods for Busines Stadies. – Prentice Hill ,New Jersey, USA, 1997.
23. Carter, Williamson, Quantitive Modeling for Management and Business,Pitman, London, 1996.
24. Mathur, Solow, Management Science – The Art of Decision Making, Prentice Hill ,New Jersey, USA, 1994.
25. Wisnievski, Quantitative Approaches for Decision Makers, Pitman, London, 1994.
26. Winston, Operations Reserch – Applications and Algoritms, Duxbury press, 1991.
27. Targett, Analytical Decision Making, Pirman, London, 1996.
28. John Llewellyn and Ramesh Sharda, "Linear Programming Software for Personal Computers: 1990 Survey". OR/MS Today, October 1990.
29. R. Sharda, "Mathematical Programming Software for the Microcomputer: recent Advance". In Decision-Aiding Software and Decision Analysis, ed. S. Nagel (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990).
30. Hamdy A. Taha, Operations Research (New York: Mac-millan, 1992).
31. Wayne L. Winston and S. Christian Albright, Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Application (Belmont, CA: Duxbury Press, 1997).
32. www.solver.com
33. www.exsolver.narod.ru

ს ა რ ჩ ე ვ ი