

ნ. ლაჩხელიძე

უმაღლესი მათემატიკის
ეპოხანათა კრებული

II ნაწილი

71
801

ბანათლაბა

ნ. ღურგლიშვილი

უმაღლესი მათემატიკის ემოსანათა კრებული

II ნაწილი

მორე ბადამუზავიბული ბამოცემა

სსრ კავშირის უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების
სამინისტროს მიერ დაშეებულია დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღ-
ლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

ბამოცემლობა „ბანათლება“
თბილისი — 1980

7(075.34)

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო შეიცავს შემდეგ თავებს: მრავალი ცვლადის ფუნქციები, ჯერადი და წირითი ინტეგრალები, მწკრივები, დიფერენციალური განტოლებები, მატრიცები, ველის თეორიის ელემენტები, ალბათობის თეორიის ელემენტები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები, ოპერაციული აღრიცხვის ელემენტები და მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება. კრებულში 2100-ზე მეტი მაგალითი და ამოცანაა. ისევე, როგორც I ნაწილში, აქაც ყოველ პარაგრაფს წინ უძღვის მოკლე თეორიული შესავალი. ყოველ სავარჯიშოს აქვს პასუხი და ზოგ შემთხვევაში — სათანადო მითითება.



ბ
ს
ს

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. ორი და რამდენიმე ცვლადის ფუნქციები

z ცვლადს ეწოდება x და y ცვლადების ცალსახა ფუნქცია, თუ x -ისა და y -ის ყოველ მნიშვნელობათა წყვილს მათი ცვლილების არიდან შეესაბამება z ცვლადის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. ამ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ასე აღნიშნავენ:

$$z=f(x,y).$$

x და y ცვლადებს ეწოდება არგუმენტები ანუ დამოუკიდებელი ცვლადები.

ანალოგიურად განიშარტება სამი და უფრო მეტი არგუმენტის ფუნქცია.

ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება xOy სიბრტყის იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელზედაც ეს ფუნქცია განსაზღვრულია. ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არე გეომეტრიულად წარმოადგენს სიბრტყის სასრულ ან უსასრულო ნაწილს.

1. მოცემულია სამკუთხედის პერიმეტრი $2p$. გამოსახეთ სამკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი ორი x და y გვერდის ფუნქცია.

2. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და y სიმაღლის ფუნქცია.

3. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და ფუძის y რადიუსის ფუნქცია.

4. გამოსახეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი x სიმაღლისა და y გვერდითი წიბოს ფუნქცია.

5. 1) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$. იპოვეთ $f(\frac{1}{2}; 3)$, $f(1; -1)$;

2) $F(x, y) = \frac{x-2y}{2x-y}$. იპოვეთ $F(3; 1)$, $F(5; 3)$;

3) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f(2; -3)$, $f(1; \frac{y}{x})$;

4) $z = e^{\sin(x+y)}$. იპოვეთ z , თუ $x=y = \frac{\pi}{2}$.

§ 2. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარი $P_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ ყოველი $P(x, y)$ წერტილისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \eta^2$ უტოლობებს, რასაც ასე ჩაეწერათ:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \text{ანუ} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

$z = f(x, y)$ ფუნქციის ეწოდება უწყვეტი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow x_0$, $y \rightarrow y_0$, უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილზე:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

$$27. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}.$$

$$28. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$$

$$29. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x.$$

$$30. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$31. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

$$32. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$33. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{xy}.$$

$$34. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

$$35. 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y - 2)^2}.$$

$$36. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$37. 1) z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}; \quad 2) z = \frac{1}{x^2 - y^2};$$

6. 1) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$. იპოვეთ z , თუ $x=2, y=2; x=1, y=2;$

2) $F(x, y) = \frac{x}{x-y}$. აჩვენეთ, რომ $F(a, b) + F(b, a) = 1$;

3) $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \frac{1}{f(x,y)}$.

იპოვეთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისა:

7. $z = x^2 + y^2$.

8. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

9. $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

10. $z = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}$.

11. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

12. $z = \frac{xy}{y-x}$.

13. $z = \ln(x+y)$.

14. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

15. $z = \sqrt{xy}$.

16. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$.

17. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2}$.

18. $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4}$.

19. $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

20. $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+x^2y^2}$.

21. 1) $u = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$;

2) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

22. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

$z = f(x, y)$ ფუნქციის დონის წირი ეწოდება ისეთ $f(x, y) = c$ წირს xOy სიბრტყეზე, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ლეზულობს ერთსა და იმავე $z = c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის წირები შემდეგი ფუნქციებისა:

23. 1) $z = x + y$; 2) $z = x^2 - y^2$; 3) $z = \ln(x^2 + y)$; 4) $z = \sqrt{xy}$.

24. 1) $z = x^2 + y^2$; 2) $z = x^2y$; 3) $z = \frac{x}{y^2}$; 4) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.

$u = f(x, y, z)$ ფუნქციის დონის ზედაპირი ეწოდება ისეთ $f(x, y, z) = c$ ზედაპირს, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ლეზულობს ერთსა და იმავე $u = c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის ზედაპირები შემდეგი ფუნქციებისა:

25. 1) $u = x + y + z$; 2) $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$; 3) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

26. 1) $u = 5^{2x+3y-z}$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

§ 2. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

რაიმე A რიცხვს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარი $P_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ ყოველი $P(x, y)$ წერტილისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \eta^2$ უტოლობებს, რასაც ასე ჩაწერთ:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \text{ანუ} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

$z = f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას ამ წერტილზე:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

$$27. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$$

$$28. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$$

$$29. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$$

$$30. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$81. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$$82. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$33. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{xy}$$

$$34. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

$$85. 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y - 2)^2}$$

$$86. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$$

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$87. 1) z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}; \quad 2) z = \frac{1}{x^2 - y^2};$$

$$3) z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 4) u = \frac{1}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

$$88. 1) z = \frac{1}{x-y}; \quad 2) z = \frac{3}{x^2 + y^2}; \quad 3) z = \frac{x^2 + 2y + 4}{y - x^2}; \quad 4) z = \cos \frac{1}{xy}.$$

§ 8. ფუნქციის კერძო ნაზრდები და წარმოებულება

$z = f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდები x -ითა და y -ით (x, y) წერტილში ეწოდება შესაბამისად შემდეგ სხვაობებს:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

თუ $z = f(x, y)$ და მივიღებთ, რომ y მუდმივი სიდიდეა, მაშინ z ფუნქციის კერძო წარმოებულები x -ით (x, y) წერტილში ეწოდება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს; ანალოგიურად, თუ მივიღებთ, რომ x მუდმივი სიდიდეა, მაშინ კერძო წარმოებულები y -ით (x, y) წერტილში იქნება:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს.

ასევე განიმარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

იბოვეთ კერძო წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$39. z = x^2 \sin^2 y.$$

$$40. z = \frac{y}{x}.$$

$$41. z = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$42. z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$43. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$44. z = \ln \sin(x - 2y).$$

$$45. z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3.$$

$$46. z = x^3 + 3x^2 y - y^3.$$

$$47. z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$48. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$49. z = x^y.$$

$$50. z = e^{-\frac{x}{y}}.$$

$$51. z = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$59. z = \arcsin \frac{y}{x}.$$

$$53. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$54. u = xy + yz + zx.$$

$$55. u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5.$$

$$56. u = e^{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$57. u = (xy)^z.$$

$$58. u = z^{x^y}.$$

$$59. f(x, y) = x^2 + y^3.$$

იბოვეთ $f'_x(2;3)$, $f'_y(2;3)$.

60. $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$. იპოვეთ $f'_x(2; 1)$, $f'_y(2; 1)$.

61. $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$. იპოვეთ $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$, $f'_z(1; 2; 0)$.

62. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$. იპოვეთ $f'_x(0; 0; 1)$, $f'_y(0; 0; 1)$, $f'_z(0; 0; 1)$.

63. $z = e^{\frac{x}{y}}$. აჩვენეთ, რომ $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

64. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$. აჩვენეთ, რომ $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

65. $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. იპოვეთ $u'_x + u'_y + u'_z$, როცა $x = y = z = 1$.

66. $u = x + \frac{x-y}{y-z}$. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

67. $z = xy$. გამოთვალეთ Δ_{xz} და Δ_{yz} , თუ $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0,2$, $\Delta y=0,3$.

68. $z = x^2 - xy + y^2$. გამოთვალეთ Δ_{xz} და Δ_{yz} , თუ x იცვლება 2-დან 2,1-მდე, y იცვლება 2-დან 1,9-მდე.

ეილერის ფორმულა. $z = f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება n -ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია x და y ცვლადების მიმართ, თუ ნებისმიერი t -სათვის მართებულია

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

იგივეობა. n -ური რიგის ერთგვაროვანი წარმოებადი ფუნქციისათვის მართებულია ეილერის შემდეგი ფორმულა:

$$x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = n f(x, y).$$

შემოწმეთ ეილერის ფორმულა შემდეგ მაგალითებზე:

69. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$.

70. $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$.

71. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

72. $f(x, y) = \frac{x^3}{x-y}$.

73. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

74. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

§ 4. ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი

$z=f(x, y)$ ფუნქციის სრული ნაზრდი ეწოდება

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

სხვაობას. თუ $f(x, y)$ ფუნქციას (x, y) წერტილზე აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ მისი სრული ნაზრდა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

სადაც $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, როცა $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Δz ნაზრდის მთავარ ნაწილს z ფუნქციის სრული დიფერენციალი ეწოდება და ასე აღინიშნება:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y).$$

თუ Δx და Δy საკმაოდ მცირეა, მაშინ $\Delta z \approx dz$.

ანალოგიურად განიზარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი. კერძოდ, თუ $u=f(x, y, z)$, მაშინ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

იპოვეთ სრული დიფერენციალები შემდეგი ფუნქციებისა:

75. $z = x^2 y^3$.

76. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

77. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$.

78. $z = \ln xy$.

79. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

80. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

81. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

82. $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

83. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

84. $u = xyz$.

85. $u = x^{yz}$.

86. $u = e^{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 z$.

87. იპოვეთ dz , თუ $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$, $y = \frac{u^2 - v^2}{2}$, $z = uv$.

88. იპოვეთ dz , თუ $x = \sqrt{a} (\sin u + \cos v)$, $y = \sqrt{a} (\cos u - \sin v)$, $z = 1 + \sin(u - v)$.

89. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. გამოთვალეთ $df(x, y)$, როცა $x=1$, $y=0$,
 $dx = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{1}{4}$.

90. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$. გამოთვალეთ $df(1; 1)$.

91. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^2y$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=3$, $y=4$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0,5$.

92. გამოთვალეთ $f(x,y)=\frac{y}{x}$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,2$.

93. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=2$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=2+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

94. გამოთვალეთ $f(x,y)=x^2y$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=1$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=1+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

გამოთვალეთ მიახლოებით:

95. $(1,02)^{3,01}$.

96. $\sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2}$.

97. $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$.

98. $\operatorname{arctg} \frac{5,01}{4,98}$.

99. მართკუთხედის ერთი გვერდი $a=10$ სმ, ხოლო მეორე — $b=24$ სმ. როგორ შეიცვლება მართკუთხედის l დიაგონალი, თუ a გვერდს გავადიდებთ 4 მმ-ით, ხოლო b გვერდს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

100. კონუსის სიმაღლე $H=30$ სმ, ფუძის რადიუსი $R=10$ სმ. როგორ შეიცვლება კონუსის მოცულობა, თუ H -ს გავადიდებთ 3 მმ-ით, ხოლო R -ს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

§ 5. რთული ფუნქციის გაწარმოება. სრული წარმოებული

1°. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ z ფუნქციის წარმოებული t -თი (სრული წარმოებული) გამოითვლება

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ფორმულით. კერძოდ, თუ t ემთხვევა ერთ-ერთ არგუმენტს, მაგალითად, x -ს, მაშინ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

აქ F , f და φ წარმოებადი ფუნქციებია.

2°. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ და თუ F , f და φ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

აქ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია.

101. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z = \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$.

102. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

103. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z = \arctg \frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

104. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z = e^{2x^2 - 2y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

105. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$.

106. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z = \arctg \frac{y}{x}$, $y = x^2$.

107. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u = xyz$, $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

108. იპოვეთ $\frac{du}{dt}$, თუ $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = H$.

109. იპოვეთ $\frac{du}{dx}$, თუ $u = \operatorname{tg}(3x + 2y^2 - z)$, $y = \frac{1}{x}$, $z = \sqrt{x}$.

110. იპოვეთ $\frac{dz}{dx}$, თუ $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = 2x$.

111. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = v + 2u$.

112. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z = \arctg \frac{x}{y}$, $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

113. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$.

114. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$.

115. $\frac{\partial z}{\partial x}$ და $\frac{\partial z}{\partial y}$ გამოსახეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$ -ს საშუალებით, თუ

$z = f(x, y)$, სადაც $u = x + 2y$, $v = x - y$.

116. $\frac{\partial u}{\partial r}$ და $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ გამოსახეთ $\frac{\partial u}{\partial x}$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$ -ის საშუალებით, თუ

$u = f(x, y)$, სადაც $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

117. აჩვენეთ, რომ $z=f(x+ay)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$ განტოლებას.

118. $z=y+f(u)$, სადაც $u=x^2-y^2$. აჩვენეთ, რომ $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x$.

119. აჩვენეთ, რომ $z=y \cdot \varphi(x^2-y^2)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ განტოლებას.

120. აჩვენეთ, რომ $z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy+z$ განტოლებას.

§ 6. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულავი და სრული დიფერენციალავი

1°. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულავი. ვთქვათ, მოცემულია $z=f(x, y)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y)$ და $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y)$ პირველი რიგის კერძო წარმოებულავი. ამ წარმოებულავის კერძო წარმოებულავს ეწოდება მეორე რიგის კერძო წარმოებულავი და ასე აღინიშნება:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

ანალოგიურად განიშარტება და აღინიშნება მესამე და უფრო მაღალი რიგის კერძო წარმოებულავი.

2°. მაღალი რიგის დიფერენციალავი. $z=f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი ეწოდება მისი პირველი რიგის სრული დიფერენციალის დიფერენციალს და ასე აღინიშნება: $d^2z=d(dz)$. ანალოგიურად, $d^3z=d(d^2z)$ და, საზოგადოდ, $d^n z=d(d^{n-1}z)$. თუ x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, მაშინ z ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი მოიძებნება

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

ფორმულით, რომელიც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$.

ანალოგიურად, $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z$ და ა. შ.

თუ $z=f(x, y)$, სადაც x და y ერთი ან რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია, მაშინ

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y.$$

იპოვეთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

121. $z = \ln(x^2 + y)$.

122. $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

123. $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy$.

124. $z = \frac{x^2}{1-2y}$.

125. $z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$.

126. $z = \cos xy$.

127. $z = x^y$. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

128. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$. აჩვენეთ, რომ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

129. იპოვეთ $f''_{xx}(0;0)$, $f''_{xy}(0;0)$, $f''_{yy}(0;0)$, თუ $f(x,y) = (1+x)^m (1+y)^n$.

130. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. იპოვეთ $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$.

131. $u = xy + yz + zx$. იპოვეთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

132. იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, თუ $z = \sin xy$.

133. იპოვეთ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, თუ $z = e^{xy^2}$.

134. იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, თუ $u = x^a y^b z^c$.

135. იპოვეთ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, თუ $u = e^{xy} \sin z$.

136. იპოვეთ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, თუ $u = z^2 e^{x+y^2}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

137. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

138. $z = \arctg \frac{y}{x}$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი ფუნქციები აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

139. $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$, სადაც φ და ψ მეორე რიგამდე წარმოებელი ნებისმიერი ფუნქციებია.

140. $u = A \sin(a\lambda t + \varphi) \cdot \sin x$.

141. იპოვეთ d^2z , თუ $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$.

142. იპოვეთ d^2z , თუ $z = x(\ln y - \ln x)$.

143. იპოვეთ d^2z , თუ $z = \ln(x-y)$.

144. იპოვეთ d^2z , თუ $z = e^{xy}$.

145. იპოვეთ dz და d^2z , თუ $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

146. იპოვეთ dz და d^2z , თუ $z = x \sin^2 y$.

147. $u = \sin(x+y+z)$. $d^2u = ?$ 148. $u = xyz$. $d^2u = ?$

149. $z = \sin(2x+y)$. იპოვეთ d^3z , როცა $x=0$, $y=\pi$.

150. $z = e^x \cos y$. $d^3z = ?$

151. $u = \varphi(t)$, $t = xy$. იპოვეთ du და d^2u .

152. $u = \varphi(t)$, $t = x^2 + y^2$. იპოვეთ du და d^2u .

153. იპოვეთ d^2z , თუ $z = f(u, v)$, სადაც $u = ax$, $v = by$.

154. იპოვეთ du და d^2u , თუ: 1) $u = \varphi(\xi, \eta)$, სადაც $\xi = x+y$, $\eta = x-y$;

2) $u = \varphi(\xi, \eta)$, სადაც $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

§ 7. არასახლი ფუნქციის გაწარმოება

1°. თუ $f(x, y) = 0$ განტოლება, სადაც $f(x, y)$ არის x -ითა და y -ით წარმოებელი ფუნქცია, განსაზღვრავს y -ს, როგორც x -ის ფუნქციას და $f'_y(x, y) \neq 0$, მაშინ ამ არასახლი ფუნქციის წარმოებულნი გამოითვლება

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad (1)$$

ფორმულით. მაღალი რიგის წარმოებულები მოიძებნება (1) ტოლობის მიმდევრობითი გაწარმოებით. ამასთან, მხედველობაში მიიღება, რომ y არის x -ის ფუნქცია.

2°. ანალოგიურად, თუ $f(x, y, z) = 0$ განტოლება, სადაც $f(x, y, z)$ არის x, y, z ცვლადების მიმართ წარმოებელი ფუნქცია, განსაზღვრავს z -ს, როგორც x და y დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციას და $f'_z(x, y, z) \neq 0$, მაშინ ამ არასახლი ფუნქციის კერძო წარმოებულები მოიძებნება

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)} \quad (2)$$

ფორმულებით.

თუ ორი განტოლების სისტემა

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

განსაზღვრავს u -სა და v -ს, როგორც x და y ცვლადების ფუნქციებს და ლეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ ამ ფუნქციების სრული დიფერენციალების მოსაძებნად საჭიროა გავადიფერენციროთ (3) განტოლებები და მიღებული სისტემა ამოვხსნათ du -სა და dv -ს მიმართ; ამით ვიპოვოთ u და v ფუნქციების სრულ დიფერენციალებს, ხოლო dx -ისა და dy -ის კოეფიციენტები მოგვცემს შესაბამის კერძო წარმოებულებს.

იპოვეთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი არაბ-ხადი ფუნქციებისა:

155. $ye^x + e^y = 0.$

156. $x = y - a \sin y.$

157. $x + y = e^x - y.$

158. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

159. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$

160. $x^2 + y^3 + e^{xy} = 0$; იპოვეთ y' , როცა $x = 0.$

161. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$; იპოვეთ y'' , როცა $x = 1, y = 1.$

162. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$; იპოვეთ y'' , როცა $x = 1.$

163. იპოვეთ $y^2 - xy = 4$ წირის მხედის კუთხური კოეფიციენტი $x = 3$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილებში.

164. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0.$ იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

165. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$ იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

166. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$ იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

167. $e^z - xyz = 0.$ იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

168. $e^{-xy} - 2z + e^z = 0.$ იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

169. 1) $z^3 - 3xyz = a^3.$ იპოვეთ dz ;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; იპოვეთ dz და $d^2z.$

170. $\ln z = x + y + z - 1.$ იპოვეთ dz და $d^2z.$

171. 1) $xyz = a^3.$ აჩვენეთ, რომ $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z.$

2) $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}.$ აჩვენეთ, რომ $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}.$

იპოვეთ სრული დიფერენციალები და კერძო წარმოებულები u და v არაბ-ხადი ფუნქციებისა:

172. 1) $\begin{cases} x + y + u + v = 0, \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - u - v = 0, \\ xu + yv = 1. \end{cases}$

ზოგიერთ შემთხვევაში საჭირო ხდება დამოუკიდებელი ცვლადების შეცვლა ახალი ცვლადებით. ასეთი გარდაქმნა სრულდება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესების მიხედვით.

173. გარდაქმენით $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$ განტოლება, თუ $x = e^t$.

174. გარდაქმენით $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0$ განტოლება, თუ $x = \frac{1}{t}$.

არგუმენტად მიიღეთ y და გარდაქმენით შემდეგი განტოლებები:

175. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$. 176. $x \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0$.

177. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გარდაქმენით $\frac{x+yy'}{xy'-y}$ გამოსახულება.

178. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გარდაქმენით $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

განტოლება.

გამოსახეთ ახალი დამოუკიდებელი u და v ცვლადებით:

179. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ განტოლება, თუ $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

180. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ განტოლება, თუ $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

181. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ განტოლება, თუ $u = y + ax$, $v = y - ax$.

182. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ განტოლება, თუ $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

183. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ განტოლება, თუ $u = y$, $v = \frac{y}{x}$.

184. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ განტოლება, თუ $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

§ 9. ტეილორის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

თუ $z = f(x, y)$ ფუნქციას (a, b) წერტილის მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (უკანასკნელის ჩათვლით), მაშინ ამ წერტილის მიდამოში მართებულია ტეილორის შემდეგი ფორმულა:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \\
 & + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a,b) + R_n(x,y), \quad (1)
 \end{aligned}$$

სადაც

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f[a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)] \quad (0 < \theta < 1).$$

სხვა აღნიშვნებით:

$$\begin{aligned}
 f(x+h, y+k) &= f(x,y) + \frac{1}{1!} [hf'_x(x,y) + kf'_y(x,y)] + \frac{1}{2!} [h^2f''_{xx}(x,y) + \\
 & + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2f''_{yy}(x,y)] + \dots + \frac{1}{n!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x,y) + \\
 & + \frac{1}{(n+1)!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k). \quad (2)
 \end{aligned}$$

(1) ფორმულის კერძო შემთხვევას, როცა $a=b=0$, ეწოდება მაკლორენის ფორმულა.

185. დაშალეთ $f(x+h, y+k)$ ფუნქცია h -ისა და k -ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - xy$.

186. დაშალეთ $f(x+h, y+k)$ ფუნქცია h -ისა და k -ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

187. დაშალეთ $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$. ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(-2; 1)$ წერტილის მიდამოში.

188. დაშალეთ $f(x,y) = e^{x+y}$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(1; -1)$ წერტილის მიდამოში მე-3 ხარისხის წევრებამდე (უკანასკნელის ჩათვლით).

189. დაშალეთ $f(x,y) = e^x \sin y$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

190. დაშალეთ $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

§ 10. არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმი

$F(x,y) = 0$ განტოლებით განსაზღვრული არაცხადი y ფუნქციის ექსტრემუმის მოსაძებნად საჭიროა ამოცხადო

$$F(x,y) = 0, \quad F'_x(x,y) = 0 \quad (1)$$

განტოლებათა სისტემა და განვიხილოთ მისი ისეთი ამონახსნები, რომელთათვისაც $F'_y(x,y) \neq 0$. თუ (1) სისტემის რომელიმე (x_0, y_0) ამონახსნისათვის $F''_{xx}(x_0, y_0)$ და $F''_{yy}(x_0, y_0)$ გამოსახულებებს აქვს ერთნაირი ნიშანი, მაშინ x_0 წერტილზე არაცხადი y ფუნქციის ექნება მაქსიმუმი, თუ სხვადასხვა ნიშანი — მინიმუმი.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

191. $x^2 - xy + y^2 - x = 0$.

192. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$.

193. $y^2 + 2x^2y - 4x - 3 = 0$.

194. $x^3 + y^3 - a^2x = 0 \quad (a > 0)$.

195. $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

196. $a^3x^2 - 2abxy^2 - y^5 = 0 \quad (a > 0, b > 0)$.

§ 11. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

$f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ M_0 წერტილის საკმარის მცირე მიდამოს ყოველი $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ წერტილისათვის შესრულებულია $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ უტოლობა (ან შესაბამისად $f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

$f(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობებია:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0. \quad (1)$$

იმ (x_0, y_0) წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებათა სისტემას, სტაციონარული წერტილი ეწოდება. ზოგად შემთხვევაში $f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის (x_0, y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ასეთია: აღვნიშნოთ $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, სადაც (x_0, y_0) სტაციონარული წერტილია; თუ:

1) $\Delta > 0$, მაშინ $\begin{cases} f(x_0, y_0) = z_{max}, & \text{როცა } A < 0, \\ f(x_0, y_0) = z_{min}, & \text{როცა } A > 0; \end{cases}$

2) $\Delta < 0$, არა გვაქვს ექსტრემუმი;

3) $\Delta = 0$, მაშინ გვაქვს საჭევო შემთხვევა, რომელიც დამატებით შესწავლას მოითხოვს.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

197. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

198. $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

199. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

200. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 2$.

201. $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

202. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

203. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

204. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 27$.

205. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

206. $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1$.

207. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

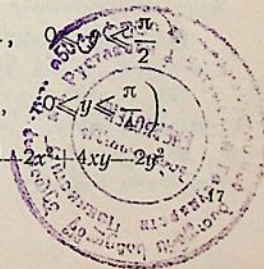
208. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

209. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \right.$

$210. z = \sin x + \sin y + \cos(x+y), \quad \left. \left(0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \right. \right.$

$211. z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

$212. z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 4xy - 2y^3$



პირობითი ექსტრემუმი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z=f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x, y)=0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

სადაც λ უცნობი მამრავლია, და მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმი. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა დაიყვანება სამი განტოლების სისტემაში:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi(x, y) = 0,$$

საიდანაც განისაზღვრება x , y და λ .

იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

213. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x+y=2$ პირობით.

214. $z = 6 - 4x - 3y$, $x^2 + y^2 = 1$ პირობით.

215. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ პირობით.

216. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ პირობით ($a > 0$).

თუ $f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია შემოსაზღვრულ დახურულ არეში, მაშინ ის თავის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას მიაღწევს არის შიგა წერტილში, ან არის საზღვარზე.

217. იპოვეთ $z = 1 + x + 2y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ არეში.

218. იპოვეთ $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში.

219. იპოვეთ $z = x^2y(2-x-y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x=0$, $y=0$, $x+y=6$ წრფეებით შემოსაზღვრულ სამკუთხედში.

220. იპოვეთ $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$ არეში.

221. იპოვეთ $z = x^2 - y^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეში.

222. იპოვეთ $z = x + y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leq 1$ წრეში.

223. დადებითი a რიცხვი დამალეთ სამ ისეთ დადებით შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

224. $2p$ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედებიდან იპოვეთ ისეთი სამკუთხედი, რომელსაც უდიდესი ფართობი აქვს.

225. $y^2=4x$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც უმცირესი მანძილით არის დაშორებული $x-y+4=0$ წრფიდან.

226. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილები, რომლებიც უმცირესი და უდიდესი მანძილებით იქნებიან დაშორებული $2x + 3y - 6 = 0$ წრფიდან.

227. ყველა იმ მართკუთხა პარალელეპიპედიდან, რომელთაც მოცემული V მოცულობა აქვს, იპოვეთ ისეთი, რომლის სრული ზედაპირის ფართობი უმცირესია.

228. თუნუქის ფურცელს აქვს მართკუთხედის ფორმა, რომლის სიგანე 24 სმ-ია. რა ზომაზე უნდა გადავღუნოთ ფურცელი და რა დახრილობა უნდა მიეცეთ მას, რომ მიღებული პრიზმული ქურქელი უდიდესი მოცულობისა იყოს?

§ 12. ზედაპირის მხები სიბრტე და ნორმალი

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია $F(x, y, z) = 0$ სახით, სადაც $F(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M(x, y, z)$ წერტილში, მაშინ ზედაპირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გაეღებული მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებებია:

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0, \quad \frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z},$$

სადაც X, Y, Z მხები სიბრტეის ან ნორმალის მიმდინარე კოორდინატებია.

თუ ზედაპირის რომელიმე წერტილზე $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, მაშინ ამ წერტილზე (განსაკუთრებული წერტილი) ზედაპირს არ ექნება არც მხები სიბრტე და არც ნორმალი.

229. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ზედაპირის მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 2; 3)$ წერტილში.

230. იპოვეთ $z = x^2 + 2y^2$ ელიფსური პარაბოლოიდის მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 1; 3)$ წერტილში.

231. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ კონუსის მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებები $M(4; 3; 4)$ წერტილში.

232. იპოვეთ $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ ელიფსოიდის მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილში, სადაც $x=2, y=1, z>0$.

233. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის მხები სიბრტეისა და ნორმალის განტოლებები $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილში.

234. იპოვეთ $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ ზედაპირის მხეები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 2; -1)$ წერტილში.

235. იპოვეთ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ ზედაპირის მხეები სიბრტყე, რომელიც $x + 4y + 6z = 0$ სიბრტყის პარალელურია.

236. იპოვეთ $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ ზედაპირის მხეები სიბრტყე, რომელიც $x + y - z = 0$ სიბრტყის პარალელურია.

237. დაწერეთ $x^2 + y^2 = z^2$ ზედაპირის ნორმალის განტოლება $M(3; 4; 5)$ წერტილში. ზედაპირის რომელ წერტილში არ არის ნორმალი განსაზღვრული?

238. იპოვეთ $2z = x^2 - y^2$ ზედაპირის $M(2; 2; 0)$ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

239. იპოვეთ $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ ზედაპირის მხეები სიბრტყე $M(2; 2; 2)$ წერტილში.

240. იპოვეთ $z = xy$ ზედაპირის მხეები სიბრტყე, რომელიც $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ წრფის მართობულია.

241. დაამტკიცეთ, რომ $xyz = a^3$ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხეები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო სიბრტყეებთან შედგენილი ტეტრაედრის მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. იპოვეთ ეს მოცულობა.

242. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ზედაპირის ყოველ წერტილზე გავლებული მხეები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების ჯამი არის მუდმივი a სიდიდე.

243. რა კუთხით იკვეთება $x^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრი და $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფერო $M\left(\frac{R}{2}; \frac{R\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ წერტილში?

244. აჩვენეთ, რომ $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$ ზედაპირები ორთოგონალურია.

§ 13. ბრტყელი წირის განსაკუთრებული წერტილები

$M(x_0, y_0)$ წერტილს ეწოდება $f(x, y) = 0$ წირის განსაკუთრებული წერტილი, თუ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს შემდეგ სამ განტოლებას:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

ეთქვათ, განსაკუთრებულ $M(x_0, y_0)$ წერტილზე მეორე რიგის

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

წარმოებულები ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის და $\Delta = AC - B^2$. ამ შემთხვევაში:

- 1) თუ $\Delta > 0$, მაშინ M არის განმხილველ უღიწერტილი;
 2) თუ $\Delta < 0$, მაშინ M არის ორჯერადი კვანძითი წერტილი;
 3) თუ $\Delta = 0$, მაშინ M არის პირველი ან მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი, ან განმხილველ უღიწერტილი, ან კიდევ თანახეზის წერტილი.

უკუქცევისა და თანახეზის წერტილში მრუდის ორი შტოს მიმართ არსებობს ერთი საერთო მხეზი. წირს ორჯერად წერტილზე აქვს ორი მხეზი, რომელთა კუთხური კოეფიციენტები მოიძებნება

$$f''_{yy}y'^2 + 2f''_{xy}y' + f''_{xx} = 0$$

განტოლებიდან.

შეისწავლეთ განსაკუთრებული წერტილები შემდეგი წირებისა:

$$245. x^2 - x^2 - y^2 = 0,$$

$$247. y^2 = x^3 - 2x^2 + x.$$

$$| 249. x^2 + y^2 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$$

$$251. (2a - x)y^2 = x^3.$$

$$253. x^5 - (y - x^2)^2 = 0.$$

$$255. y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

$$246. x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0.$$

$$248. y^2 = x^3 + x^2.$$

$$250. y^2 + x^4 - x^2 = 0.$$

$$252. y^2 = (x + 2)^2.$$

$$254. (y - x)^2 - x^3 = 0.$$

$$256. y^2 - x^3(2 - x) = 0.$$

§ 14. ბრტყელ წირთა ოჯახის მომვლენა

ბრტყელ წირთა ოჯახის მომვლენები ეწოდება იმ წირს, რომელიც ეხება მოცემული ოჯახის ყოველ წირს, მასთან მისი ყოველი წერტილი განსახილველი ოჯახის რომელიმე წირის შეხების წერტილია.

$f(x, y, \alpha) = 0$ წირთა ოჯახის მომვლენები, თუ იგი არსებობს, მოიძებნება α პარამეტრის გამორიცხვით

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან, რაც მოგვცემს $F(x, y) = 0$ სახის განტოლებას.

შეიძლება ისიც მოხდეს, რომ ამ გზით მიღებული წირი არ წარმოადგენდეს მომვლენას, არამედ იყოს წირთა ოჯახის განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლე.

იპოვეთ მომვლენები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

$$257. x \cos \alpha + y \sin \alpha - 3 = 0.$$

$$259. (x - \alpha)^2 + y^2 = R^2.$$

$$261. \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{(5 - \alpha)^2} = 1.$$

$$263. y - 1 = (x - \alpha)^2.$$

$$265. x^2 - (y - \alpha)^3 = 0.$$

$$267. y^2 = (x - \alpha)^2.$$

$$258. y = \alpha x + \alpha^2.$$

$$260. (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2.$$

$$262. y = \alpha x - \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

$$264. y = (x - \alpha)^3.$$

$$266. (y - 1)^2 = (x - \alpha)^3.$$

$$268. (y - \alpha)^2 = x^3.$$

269. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლენები, რომელთა მიერ კოორდინატთა ლერძებზე ჩამოჭრილი მონაკვეთების ჯამი მუდმივი a სიდიდეა.

270. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლელი, რომელთა მონაკვეთები კოორდინატთა ღერძებს შორის მოთავსებული, არის მუდმივი a სიდიდე.

271. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის მომვლელი, რომლებიც კოორდინატთა ღერძებთან ადგენს მუდმივი S ფართობის სამკუთხედს.

272. იპოვეთ იმ ელიფსების ოჯახის მომვლელი, რომელთა სიმეტრიის ღერძები ემთხვევა კოორდინატთა ღერძებს, ხოლო ფართობი მუდმივი S სიდიდეა.

§ 15. სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

ვექტორული $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ ცნობილია მისი $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$ ვეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$\vec{r} = r_x(t) \vec{i} + r_y(t) \vec{j} + r_z(t) \vec{k},$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} კოორდინატთა ღერძების მგზავებია.

ვექტორული ფუნქციის წარმოებელი t სკალარული არგუმენტით ასე გამოითვლება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dr_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z(t)}{dt} \vec{k}.$$

ვექტორული ფუნქციის წარმოებულის მოდული

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_z}{dt} \right)^2}.$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ ცვლადი ვექტორის ბოლო წერტილი სივრცეში აღწერს წიხს, რომელსაც \vec{r} ვექტორის პოლოგრაფი ეწოდება

თუ t აღნიშნავს დროს, მაშინ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ არის \vec{r} ვექტორის ბოლო წერტილის

სიჩქარე, ხოლო $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$ — ბოლო წერტილის აჩქარება.

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის გაწარმოების ძირითადი წესებია:

$$1) \frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} - \frac{d\vec{c}}{dt};$$

$$2) \frac{d}{dt} (m\vec{a}) = m \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ სადაც } m \text{ მუდმივი სკალარია;}$$

$$3) \frac{d}{dt} [\varphi(t)\vec{a}] = \frac{d\varphi}{dt} \vec{a} + \varphi \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ სადაც } \varphi(t) \text{ არის } t\text{-ს სკალარული ფუნქცია;}$$

$$4) \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}; \quad 5) \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$6) \frac{d}{dt} \vec{a}[\varphi(t)] = \frac{d\vec{a}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}; \quad 7) \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} = 0, \quad \text{თუ } |\vec{a}| = \text{const.}$$

273. იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ვექტორებისა:

$$1) \vec{r} = \text{ctgt} \cdot \vec{i} + \text{arctgt} \cdot \vec{j}; \quad 2) \vec{r} = e^{-t} \cdot \vec{i} + 2t\vec{j} + \ln t \cdot \vec{k}; \quad 3) \vec{r} = t^2 \vec{i} - \frac{1}{t} \vec{j} + \frac{1}{t^2} \vec{k}.$$

274. მოძრაი წერტილის რადიუს-ვექტორი ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r} = 4t\vec{i} - 3t\vec{j}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

275. მოძრაი წერტილის რადიუს-ვექტორი დროის ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r} = \vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

276. მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$. განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t = \frac{\pi}{2}$; $t = \pi$.

277. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = 3t\vec{i} + (4t - t^2)\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარის ვექტორები, როცა $t = 0$; 1; 2; 3.

278. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = 3\cos t \cdot \vec{i} + 4\sin t \cdot \vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t = 0$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$.

279. განსაზღვრეთ, რომელი წირებია შემდეგი ვექტორული ფუნქციების პოდოგრაფები: 1) $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$; 2) $\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$; 3) $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$, სადაც \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} მუდმივი ვექტორებია, მასთან $\vec{a} \perp \vec{b}$.

280. მოცემულია $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, სადაც ω , \vec{a} და \vec{b} მუდმივებია. აჩვენეთ, რომ:

$$1) \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b}); \quad 2) \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0.$$

281. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{r} = \vec{a}e^{\omega t} + \vec{b}e^{-\omega t}$, სადაც \vec{a} და \vec{b} მუდმივი ვექტორებია, მაშინ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = 0.$$

282. დაამტკიცეთ, რომ თუ \vec{e} არის \vec{E} ვექტორის მგზავი, მაშინ

$$\vec{e} \times d\vec{e} = \frac{\vec{E} \times d\vec{E}}{E^2}.$$

§ 16. სივრცის წირის ელემენტები

სივრცის წირის განტოლებები პარამეტრული სახით ასეთია:

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

სადაც $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ წარმოადგენს t პარამეტრის მოცემულ ფუნქციებს. სივრცის წირის განტოლებები ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r}=f(t)\vec{i}+\varphi(t)\vec{j}+\psi(t)\vec{k}.$$

სივრცის წირის რკალის დიფერენციალი გამოითვლება

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

ფორმულით.

1°. სივრცის წირის მხები წრფე და ნორმალური სიბრტყე. სივრცის წირის მხები წრფე $M(x, y, z)$ წერტილში ეწოდება წირის MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როდესაც M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ მოცემული წირის გასწვრივ. სივრცის წირის M წერტილში მხები წრფის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს ეწოდება ნორმალური სიბრტყე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}, \quad x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0,$$

სადაც X, Y , და Z მხები წრფის ან ნორმალური სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

მხები წრფის მიმართულების კოსინუსები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი შემდეგი წირებისა:

283. $x=t-\sin t, \quad y=1-\cos t, \quad z=4 \sin \frac{t}{2}.$

284. $x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=\ln \cos t.$

285. $x=e^t, \quad y=e^{-t}, \quad z=t\sqrt{2}.$

286. $x=e^t \cos t, \quad y=e^t \sin t, \quad z=e^t.$

შეადგინეთ შემდეგი წირების მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები ნაჩვენებ წერტილებში და იპოვეთ მხების მიმართულების კოსინუსები:

287. $x=t, y=t^2, z=t^3$, როცა $t=1$.

288. $x=R\cos^2 t, y=R \sin t \cos t, z=R \sin t$, როცა $t = \frac{\pi}{4}$.

289. იპოვეთ $x=R \cos t, y=R \sin t, z=kt$ ხრახნწირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t = \frac{\pi}{2}$.

290. იპოვეთ $x=2t, y=\ln t, z=t^2$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=1$.

291. იპოვეთ $x^2+y^2=10, y^2+z^2=25$ წირის მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები $M(1; 3; 4)$ წერტილში.

292. იგივე $z=x^2+y^2, x=y$ წირისათვის $M(1; 1; 2)$ წერტილში.

2°. სივრცის წირის მიმხები სიბრტყე, ბინორმალი, მთავარი ნორმალი, გამწრფევი სიბრტყე. ბუნებრივი სამწახნავა.

აეილოთ სივრცის წირის განტოლება ვექტორული სახით

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + \varphi(t)\vec{j} + \psi(t)\vec{k}.$$

1) წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე და წირზე მდებარე მის ორ მახლობელ წერტილზე გამავალი სიბრტყის ზღვრულ მდებარეობას, როცა მახლობელი წერტილები M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში. მიმხები სიბრტყე შეიცავს $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ და $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ვექტორებს.

2) წირის M წერტილზე გამავალი მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს ეწოდება წირის ბინორმალი M წერტილში. ბინორმალის ვექტორია $\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

3) წირის M წერტილზე გამავალი მხები წრფის მართობულ წრფეს, რომელიც მოთავსებულია მიმხებ სიბრტყეში, ეწოდება წირის მთავარი ნორმალი M წერტილში. მთავარი ნორმალის ვექტორია $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$.

4) წირის M წერტილზე გამავალი მთავარი ნორმალის მართობულ სიბრტყეს ეწოდება წირის გამწრფევი სიბრტყე M წერტილში. ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{B_x} = \frac{Y-y}{B_y} = \frac{Z-z}{B_z}, \quad B_x(X-x) + B_y(Y-y) + B_z(Z-z) = 0,$$

ხოლო მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის განტოლებები —

$$\frac{X-x}{N_x} = \frac{Y-y}{N_y} = \frac{Z-z}{N_z}, \quad N_x(X-x) + N_y(Y-y) + N_z(Z-z) = 0,$$

სადაც X, Y, Z ბინორმალის, მიმხები სიბრტყის, მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

სამი ურთიერთმართობული სიბრტყე (ნორმალური, მიმხები და გამწრფევი) ქმნის ე. წ. ბუნებრივ სამწახნაგას. სამ ურთიერთმართობულ წრფეს

(მხები, ბინორმალის და მთავარი ნორმალის), რომლებიც სამწახნაგას წიბოვებია, ხშირად ღებულობენ კოორდინატთა ღერძებად. მათ ერთობლიობას უწოდებენ ბუნებრივ კოორდინატთა სისტემას.

293. იპოვეთ $x=t^2$, $y=1-t$, $z=t^3$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1; 0; 1)$ წერტილში.

294. იპოვეთ $y^2=x$, $x^2=z$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1; 1; 1)$ წერტილში.

295. იპოვეთ $x=t$, $y=-t$, $z=\frac{t^2}{2}$ წირის მთავარი ნორმალის და გამწვევი სიბრტყე $t=2$ წერტილში.

296. იპოვეთ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ წირის მთავარი ნორმალის და გამწვევი სიბრტყე $t=0$ წერტილში.

297. იპოვეთ $\vec{r} = \frac{t^4}{4}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$ წირის მხები წრფე, რომელიც $x+3y+2z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

298. შეადგინეთ $\vec{r} = \frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \ln \sin t \cdot \vec{k}$ წირის ბუნებრივი სამწახნაგას წახნაგების განტოლებები $t = \frac{\pi}{2}$ წერტილში.

§ 17. სივრცის წირის სიმრუდე და გრება

თუ სივრცის წირის განტოლება მოცემულია ვექტორული სახით:

$$\vec{r} = r(t) = f(t)\vec{i} + \varphi(t)\vec{j} + \psi(t)\vec{k},$$

მაშინ წირის სიმრუდე და გრება შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$K = \frac{1}{R} \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3},$$

$$T = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^2},$$

სადაც R სიმრუდის რადიუსია, ხოლო ρ — გრების რადიუსი.

იპოვეთ სიმრუდე და გრება შემდეგი წირებისა:

299. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=0$ წერტილში.

300. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=1$ წერტილში.

301. $x = acost$, $y = asint$, $z = bt$ მის ნებისმიერ წერტილში.

302. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$, $t = 0$ წერტილში.

303. იპოვეთ $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ წირის სიმრუდე.

304. იპოვეთ $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ წირის სიმრუდე და გრეხა.

305. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{3}$ წირის სიმრუდე და გრეხა,

როცა $x = 1$.

306. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$ წირის სიმრუდე და გრეხა.

II თავი

ჯგერადი და წირითი ინტეგრალები

§ 1. ორჯგერადი ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია xOy სიბრტყის დახურულ D არეზე. დავეთვოთ ეს არე ნებისმიერი წესით n ნაწილად: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, რომელთა ფართობები შესაბამისად იყოს $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. ყოველ ელემენტარულ σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) არეზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ არეების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც D არის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x, y)$ ფუნქციის ორჯგერადი ინტეგრალი, გავრცელებული D არეზე და აღინიშნება

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ ან } \iint_D f(x, y) dx dy$$

სიმბოლოთი, სადაც $d\sigma$ ან $dx dy$ წარმოადგენს ფართობის ელემენტს. ამგვარად,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

გეომეტრიულად ორჯგერადი ინტეგრალი იმ სხეულის მოცულობაა, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z = f(x, y)$ ზედაპირით, ქვემოდან — D არით, გვერდებიდან — ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მიმართველი წირია D არის კონტური, ხოლო მსახველი dz ღერძის პარალელურია, ე. ი.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

თუ $f(x, y) = 1$, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი რიცხობრივად უდრის D არის ფართობს:

$$S = \iint_D dx dy.$$

ორჯერადი ინტეგრალის თვისებები

1) თუ D არე გაყოფილია ორ D_1 და D_2 არედ, რომლებსაც არა აქვს საერთო შიგა წერტილები, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy;$$

$$2) \iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] dx dy = \iint_{D_1} f_1(x, y) dx dy \pm \iint_{D_2} f_2(x, y) dx dy;$$

$$3) \iint_D m f(x, y) dx dy = m \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ სადაც } m \text{ მუდმივია.}$$

ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

თუ D არე განსაზღვრულია $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ უტოლობებით, მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება ერთ-ერთი შემდეგი ფორმულით:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \text{ ან } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

თუ D არე განსაზღვრულია $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$307. \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx.$$

$$308. \int_0^1 dy \int_1^2 (x^2 + y^2) dx.$$

$$309. \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1 + y^2}.$$

$$310. \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x+xy} dy.$$

$$311. \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}.$$

$$312. \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2 y - 2y^3) dx.$$

$$-313. \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2 dy}{y^2},$$

$$314. \int_1^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} xy dy.$$

$$315. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy.$$

$$316. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

$$317. \int_0^a dx \int_{\frac{x}{a}}^x \frac{xdy}{x^2+y^2}.$$

$$318. \int_0^a dy \int_{y-a}^{2y} xy dx.$$

იპოვეთ ინტეგრების საზღვრები $\iint_D f(x, y) dx dy$ ინტეგრალისათვის,

თუ D არე შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

-319. D არე შემოსაზღვრულია $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$ წრფეებით.

320. D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ წრფეებით.

-321. D არე შემოსაზღვრულია $y=0$, $y=1-x^2$ წირებით.

322. D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$, $y=4-x^2$ წირებით.

323. D არე შემოსაზღვრულია $x^2-y^2=1$ ჰიპერბოლითა და $y=-3$, $y=3$ წრფეებით.

324. D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$, $y=\frac{2}{1+x^2}$ წირებით.

325. D არე შემოსაზღვრულია $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ წრეწირით.

326. D არე შემოსაზღვრულია $y^2-x^2=1$ ჰიპერბოლითა და $x^2+y^2=9$ წრეწირით (D არე შეიცავს კოორდინატთა სათავეს).

შეცვალეთ ინტეგრების რიგი შემდეგ ინტეგრალებში:

$$-327. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$328. \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy.$$

$$329. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$330. \int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}}} f(x, y) dy.$$

$$331. \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy.$$

$$332. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

333. $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$,

$x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ წრფეებით.

334. $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x$, $y=0$, $x=1$ წრფეებით.

335. $\iint_D \cos(x+y)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=\pi$ და $y=x$ წრფეებით.

336. $\iint_D \sqrt{x^2-y^2} dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$ წერტილები.

337. $\iint_D x dxdy$, სადაც: 1) D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$ წერტილები; 2) D არე შემოსაზღვრულია $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ წირებით.

338. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=1$, $y^2=x$ წირებით.

339. $\iint_D (y^2+x)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლებით.

340. $\iint_D xy dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ პარაბოლითა და კოორდინატთა ღერძებით.

341. $\iint_D y dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია Ox ღერძითა და $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი რკალით ($0 \leq t \leq 2\pi$).

342. $\iint_D xy dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $x=R \cos^3 t$, $y=R \sin^3 t$ ასტროიდის რკალით ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

$f(x, y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე ეწოდება $\bar{f} = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$ რიცხვს, სადაც S გამოსახავს D არის ფართობს.

343. იპოვეთ $f(x, y) = xy^2$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ უტოლობებით.

344. იპოვეთ $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$ და $y = 0$ წრფეებით.

345. იპოვეთ $f(x, y) = 2x + y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა საკოორდინატო ღერძებითა და $x + y = 3$ წრფით შემოსაზღვრულ სამკუთხედზე.

346. იპოვეთ $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $x^2 + y^2 = R^2$ წრის შიგნით.

თუ m და M წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს D არეზე, მაშინ

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS.$$

სადაც S აღნიშნავს D არის ფართობს.

შეაფასეთ მოცემული ინტეგრალები:

347. $\iint_D (x + y + 1) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

348. $\iint_D (x^2 y + xy^2) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს კვადრატს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

349. $\iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

350. $\iint_D (x + y + 10) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში

თუ x და y ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u და v ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

(1)

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

333. $\iint_D (4-x^2-y^2) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$,

$x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ წრფეებით.

334. $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომე-

ლიც შემოსაზღვრულია $y=x$, $y=0$, $x=1$ წრფეებით.

335. $\iint_D \cos(x+y) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$,
 $y=\pi$ და $y=x$ წრფეებით.

336. $\iint_D \sqrt{x^2-y^2} dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს,
რომლის წვეროებია $O(0; 0)$, $A(1; -1)$, $B(1; 1)$ წერტილები.

337. $\iint_D x dx dy$, სადაც: 1) D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომ-
ლის წვეროებია $O(0; 0)$, $A(1; 1)$, $B(0; 1)$ წერტილები;

2) D არე შემოსაზღვრულია $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ წირებით.

338. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=1$,
 $y^2=x$ წირებით.

339. $\iint_D (y^2+x) dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და
 $y^2=x$ პარაბოლებით.

340. $\iint_D xy dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
პარაბოლითა და კოორდინატთა ღერძებით.

341. $\iint_D y dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია Ox ღერძითა და
 $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი რკალით ($0 \leq t \leq 2\pi$).

342. $\iint_D xy dx dy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა
ღერძებითა და $x=R \cos^3 t$, $y=R \sin^3 t$ ასტროიდის რკალით ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

$$f(x, y) \text{ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა } D \text{ არეზე ეწოდება } \bar{f} = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy \text{ რიცხვს, სადაც } S \text{ გამოსახავს } D \text{ არის ფართობს.}$$

343. იპოვეთ $f(x, y) = xy^2$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ უტოლობებით.

344. იპოვეთ $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$ და $y = 0$ წრფეებით.

345. იპოვეთ $f(x, y) = 2x + y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა საკოორდინატო ღერძებითა და $x + y = 3$ წრფით შემოსაზღვრულ სამკუთხედზე.

346. იპოვეთ $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $x^2 + y^2 = R^2$ წრის შიგნით.

თუ m და M წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს D არეზე, მაშინ

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS.$$

სადაც S აღნიშნავს D არის ფართობს.

შეაფასეთ მოცემული ინტეგრალები:

347. $\iint_D (x+y+1) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

348. $\iint_D (x^2y + xy^2) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს კვადრატს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

349. $\iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

350. $\iint_D (x+y+10) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში

თუ x და y ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u და v ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

(1)

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

333. $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$,

$x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ წრფეებით.

334. $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომე-

ლიც შემოსაზღვრულია $y=x$, $y=0$, $x=1$ წრფეებით.

335. $\iint_D \cos(x+y)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$,

$y=\pi$ და $y=x$ წრფეებით.

336. $\iint_D \sqrt{x^2-y^2} dxdy$, სადაც D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$ წერტილები.

337. $\iint_D x dxdy$, სადაც: 1) D არე წარმოადგენს სამკუთხედს, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$ წერტილები;

2) D არე შემოსაზღვრულია $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ წირებით.

338. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $x=0$, $y=1$, $y^2=x$ წირებით.

339. $\iint_D (y^2+x)dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $y=x^2$ და $y^2=x$ პარაბოლებით.

340. $\iint_D xy dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ პარაბოლითა და კოორდინატთა ღერძებით.

341. $\iint_D y dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია Ox ღერძითა და $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$ ციკლოიდის ერთი რკალით ($0 \leq t \leq 2\pi$).

342. $\iint_D xy dxdy$, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $x=R \cos^3 t$, $y=R \sin^3 t$ ასტროიდის რკალით ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

$f(x, y)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე ეწოდება $\bar{f} = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$ რიცხვს, სადაც S გამოსახავს D არის ფართობს.

343. იპოვეთ $f(x, y) = xy^2$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ უტოლობებით.

344. იპოვეთ $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა D არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$ და $y = 0$ წრფეებით.

345. იპოვეთ $f(x, y) = 2x + y$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა საკოორდინატო ღერძებითა და $x + y = 3$ წრფით შემოსაზღვრულ სამკუთხედზე.

346. იპოვეთ $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $x^2 + y^2 = R^2$ წრის შიგნით.

თუ m და M წარმოადგენს $f(x, y)$ ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს D არეზე, მაშინ

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS.$$

სადაც S აღნიშნავს D არის ფართობს.

შეათვისეთ მოცემული ინტეგრალები:

347. $\iint_D (x + y + 1) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

348. $\iint_D (x^2 y + x y^2) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს კვადრატს, რომელიც განსაზღვრულია $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ უტოლობებით.

349. $\iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

350. $\iint_D (x + y + 10) dx dy$, სადაც D არე წარმოადგენს $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეს.

§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა ორჯერად ინტეგრალში

თუ x და y ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u და v ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (1)$$

ტოლობებით, სადაც φ და ψ ცალსახა და უწყვეტად წარმოებალი ფუნქციებია D' არეში, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (2)$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

გამოსახულებას ეწოდება (1) გარდაქმნის იაკობიანი.

კერძოდ, თუ გადავალთ $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$ პოლარულ კოორდინატებზე, მაშინ $|J|=r$, და (2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (3)$$

თუ D' არე განსაზღვრულია $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (4)$$

თუ D არე მოიცავს კოორდინატთა სათავეს, მაშინ

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (5)$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$351. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{b}{2}}^b r dr. \quad 352. \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin\varphi dr.$$

$$353. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi dr.$$

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$354. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy. \quad 355. \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy.$$

$$356. \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy. \quad 357. \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy.$$

358. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$. ინტეგრალი, თუ D არე წარმოადგენს $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ წრიული რგოლის მეოთხედ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია პირველ კვადრანტში.

359. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D y dx dy$ ინტეგრალი, სადაც D წარმოადგენს a დიამეტრისა და $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ ცენტრის მქონე ნახევარწრეს.

360. პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ $\iint_D (h - 2x - 3y) dx dy$ ინტეგრალი, სადაც D წარმოადგენს $x^2+y^2 \leq R^2$ წრეს.

361. გამოთვალეთ $\iint_D r^2 dr d\varphi$ ინტეგრალი, სადაც D არე შემოსაზღვრულია $r = a(1 + \cos\varphi)$ კარდიოიდიითა და $r = a$ წრეწირით (D არე არ შეიცავს პოლუსს).

362. გამოთვალეთ $\iint_D xy dx dy$ ინტეგრალი, სადაც D არე შემოსაზღვრულია კოორდინატთა ღერძებითა და $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის პირველ კვადრანტში მოთავსებული რკალით.

§ 3. ფართობთა გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალებით

ბრტყელი D არის ფართობი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = \iint_D dx dy.$$

თუ D არე განსაზღვრულია $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ უტოლობებით, მაშინ

$$S = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

თუ D არე პოლარულ კოორდინატებში განსაზღვრულია $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$ უტოლობებით, მაშინ

$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

363. გამოთვალეთ $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

364. გამოთვალეთ $y=x$, $y=5x$, $x=1$ წრფეებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

365. გამოთვალეთ $y^2=2x$ პარაბოლითა და $y=x$ წრფით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

366. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $3y^2=25x$ და $5x^2=9y$ პარაბოლებს შორის.

367. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

368. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული არეების ფართობები:

369. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ (პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილი).

370. 1) $xy=4$, $x+y-5=0$; 2) $y=2-x^2$, $y=x$.

371. $y^2=4x+4$, $y=2-x$. **372.** $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$.

373. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $x+y=a$. **374.** $y = \frac{8}{x^2+4}$, $2y=x$, $x=0$.

375. გამოთვალეთ $r \cos \varphi = 1$ წრფითა და $r=2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი (გამოსათვლელი ფართობი არ შეიცავს პოლუსს).

376. გამოთვალეთ $r = a \cos \varphi$ და $r = b \cos \varphi$ ($b > a$) წრეწირებს შორის მოთავსებულ არის ფართობი.

377. იპოვეთ $r = a \sin 2\varphi$ წირის ერთი მარჯვით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

378. იპოვეთ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით იპოვეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული არეების ფართობები:

379. $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $x = a$.

380. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ($a > 0$).

381. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

382. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$.

383. გამოთვალეთ $xy = \frac{1}{2}$, $xy = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ წირებით შემო-

საზღვრული არის ფართობი.

384. გამოთვალეთ $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

§ 4. მოცულობათა გამოთვლა ორჯერადი ინტეგრალებით

385. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით.

386. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, ზემოდან $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ ელიფსური პარაბოლიდით, ხოლო გვერდებიდან $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ სიბრტყეებით.

387. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, ზემოდან $z = 4 - x^2 - y^2$ პარაბოლიდით, ხოლო გვერდებიდან $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ სიბრტყეებით.

388. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2 + z^2 = R^2$ ზედაპირითა და $y=0$, $y=H$, $z=0$ სიბრტყეებით.

389. იპოვეთ $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ ცილინდრებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

390. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z^2 = xy$, $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$ ზედაპირებით.

391. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y=0$, $y = \frac{b}{a}x$, $z=0$ ზედაპირებით.

392. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z = x^2 - y^2$ ჰიპერბოლური პარაბოლიდითა და $x=1$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით.

393. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z = 1 - 4x^2 - y^2$ ზედაპირითა და xOy სიბრტყით.

394. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$ და $z=0$ ზედაპირებით.

395. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

396. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$, $x+y+z=3a$ და $z=0$ ზედაპირებით.

397. გამოთვალეთ $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

398. გამოთვალეთ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ცილინდრითა და $z=xy$ ჰიპერბოლური პარაბოლიდით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა, რომელიც პირველ ოქტანტშია მოთავსებული.

399. იპოვეთ $y^2=az$, $x^2+y^2=R^2$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

400. იპოვეთ $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ ცილინდრული ზედაპირებითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ პოლარული და განზოგადებული პოლარული კოორდინატებით.

401. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=R^2$ ცილინდრით, $Rz=2R^2+x^2+y^2$ პარაბოლიდითა და $z=0$ სიბრტყით.

402. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=4a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (იგულისხმება ცილინდრის გარე ნაწილი).

403. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრსა და $x^2+y^2-z^2=-a^2$ ორკალთა ჰიპერბოლიდს შორის.

404. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $2az=x^2+y^2$ პარაბოლიდსა, $x^2+y^2-z=a^2$ ცალკალთა ჰიპერბოლიდსა და $z=0$ სიბრტყეს შორის.

405. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ და $z=bx$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

406. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრით, $x^2+y^2=z^2$ კონუსითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

407. გამოთვალეთ $z=\frac{4}{x^2+y^2}$, $z=0$, $x^2+y^2=1$ და $x^2+y^2=4$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

408. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2=ax$ ცილინდრით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (ვივიანის ამოცანა).

409. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ პარაბოლოიდით, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a}$ ცილინდრითა და $z=0$ სიბრტყით.

410. გამოთვალეთ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

§ 5. ზედაპირთა ფართობების გამოთვლა

$z=f(x, y)$ ცალსახა ზედაპირის S ფართობი, რომლის გეგმილი xOy სიბრტყეზე D არეა, გამოითვლება

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

ფორმულით.

411. იპოვეთ $6x+3y+2z=12$ სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

412. იპოვეთ $x+y+z=2a$ სიბრტყის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრით.

413. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

414. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=100$ სფეროს ზედაპირის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x=-8$ და $x=6$ სიბრტყეებს შორის.

415. 1) გამოთვალეთ $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდის იმ ნაწილის ფართობი, რომელსაც ჩამოჭრის $x^2+y^2=1$ ცილინდრი.

2) იპოვეთ $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ ცილინდრების საერთო ნაწილის ზედაპირის ფართობი.

416. იპოვეთ $z^2=2xy$ კონუსის ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის $x=a$ და $y=a$ სიბრტყეები ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

417. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც ამოჭრილია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსური ცილინდრით ($b < a$).

418. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროდან $x^2+y^2=ax$ ცილინდრით ამოჭრილი ზედაპირის ფართობი (ვივიანის ზედაპირის ფართობი).

419. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელსაც ამოჭრის $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფერო $x^2+y^2=ax$ ცილინდრიდან.

420. გამოთვალეთ $y^2+z^2=x^2$ კონუსური ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $y+z=a$ სიბრტყით.

421. გამოთვალეთ $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ და $z=mx$ სიბრტყეებს შორის.

422. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ სიბრტყესა და $x^2+y^2=z^2$ კონუსს შორის.

423. იპოვეთ $az=xy$ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის შიგნით.

424. იპოვეთ $y^2+z^2=x^2$ კონუსის ზედაპირის იმ ნაწილის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრის შიგნით.

§ 6. ორჯერადი ინტეგრალის გამოყენება მანძილში

თუ D არის xOy სიბრტყეზე ფირფიტის მიერ დაკავებული არე, ხოლო $\rho(x, y)$ (x, y) წერტილში—ფირფიტის ზედაპირულ სიმკვრივე, მაშინ Ox და Oy ღერძების მიმართ ფირფიტის M მასა და სტატუკური M_x და M_y მომენტები შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy, \quad M_x = \iint_D \rho(x, y) y dx dy, \quad M_y = \iint_D \rho(x, y) x dx dy.$$

ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}$$

ფორმულებით.

ფირფიტის ინერციის მომენტები Ox , Oy ღერძებისა და კოორდინატთა სათავეს მიმართ შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$I_x = \iint_D \rho(x, y) y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_D \rho(x, y) x^2 dx dy, \quad I_0 = \iint_D \rho(x, y) (x^2 + y^2) dx dy.$$

როცა ფირფიტა ერთგვაროვანია, მაშინ $\rho(x, y) = \text{const}$. თუ დავუშვებთ, რომ $\rho(x, y) = 1$, მივიღებთ ბრტყელი ფიგურის მომენტებს.

425. იპოვეთ იმ ფირფიტის მასა, რომელსაც აქვს a -რადიუსიანი წრის ფორმა, თუ მისი სიმკვრივე ცენტრიდან მანძილის უკუპროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი k).

426. იპოვეთ იმ ფირფიტის მასა, რომელსაც აქვს a -რადიუსიანი წრის ფორმა, თუ მისი სიმკვრივე ცენტრიდან მანძილის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი k).

427. იპოვეთ a და b გვერდების მქონე მართკუთხედის სტატიკური მომენტი a გვერდის მიმართ.

428. იპოვეთ R -რადიუსიანი ნახევარწრის სტატიკური მომენტი დიამეტრის მიმართ.

429. იპოვეთ a -გვერდიანი ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ სამკუთხედის სიმაღლე ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო წვერო-კოორდინატთა სათავეს.

430. იპოვეთ $x^2 + y^2 = a^2$ წრის ზედა ნახევრის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

431. იპოვეთ $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$ და $y = 0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

432. იპოვეთ a -რადიუსიანი წრული სექტორის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი ბისექტრისა ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხეა 2α .

433. იპოვეთ Ox ღერძითა და $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის ერთი თალით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

434. იპოვეთ $r = a(1 + \cos \varphi)$ კარდიოიდი შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

435. გამოთვალეთ სამკუთხედის ინერციის მომენტი Ox ღერძის მიმართ, თუ მისი გვერდების განტოლებებია: $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$.

436. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსით შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი Oy ღერძის მიმართ.

437. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეს მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2 = 4ax$ პარაბოლით, $y = 2a$ წრფითა და Oy ღერძით.

438. გამოთვალეთ მართკუთხედის ინერციის მომენტი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ, თუ მისი გვერდებია a და b .

439. იპოვეთ d და D დიამეტრების ($d < D$) წრიული რგოლის ინერციის მომენტი: 1) ცენტრის მიმართ; 2) დიამეტრის მიმართ.

440. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფუტეა a , ხოლო სიმაღლე h . იპოვეთ მისი ინერციის მომენტი წვეროს მიმართ.

441. იპოვეთ $r = a \sin 2\varphi$ წირის ერთი მარყუჟით შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი პოლუსის მიმართ.

442. იპოვეთ $r = a(1 - \cos \varphi)$ კარდიოიდი შემოსაზღვრული ფიგურის ინერციის მომენტი პოლუსის მიმართ.

§ 7. სამკვრალი ინტეგრალი

ვთქვათ, $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია სივრცის დახურულ V არეზე. დაეყოთ ეს არე ნებისმიერი წესით n ნაწილად: v_1, v_2, \dots, v_n , რომელთა მოცულობები შესაბამისად იყოს $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. ყოველ ელემენტარულ v_i ($i=1, 2, \dots, n$) არეში ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ v_1, v_2, \dots, v_n არეების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც V არის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევანზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x, y, z)$ ფუნქციის სამკვრალი ინტეგრალი, ვაერცვლებული V არეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\iiint_V f(x, y, z) dv \quad \text{ან} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

სადაც dv ან $dx dy dz$ მოცულობის ელემენტია. ამგვარად,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

თუ V არე განსაზღვრულია $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ უტოლობებით, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

როცა V არე $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=l$, $z=k$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული მართკუთხა პარალელებიპედიია და $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy \cdot \int_l^k f_3(z) dz.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

443. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz.$

444. $\int_0^3 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{y^2} dz.$

445. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz.$

446. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz.$

$$447. \int_0^1 dx \int_2^4 dy \int_0^3 (x+y+z) dz. \quad 448. \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{4x-y^2}} x dz.$$

$$449. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} (x+2z) dz. \quad 450. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$$

მოძებნეთ ინტეგრების საზღვრები $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ ინტეგრალი-სათვის, თუ V არე შემდეგნაირადაა განსაზღვრული.

451. V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=2$, $z=0$ ზედაპირებით.

452. V არე $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z=c$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული კონუსია ($c>0$).

453. V არე შემოსაზღვრულია $z=0$ და $z=1-x^2-y^2$ ზედაპირებით.

454. V არე $2az \geq x^2+y^2$ პარაბოლოიდისა და $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$ სფეროს საერთო ნაწილია.

455. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ და $z=0$ სიბრტყეებით.

456. გამოთვალეთ $\iiint_V xy dx dy dz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $z=xy$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის ზედა ნაწილითა და $x+y=1$, $z=0$ სიბრტყეებით.

457. გამოთვალეთ $\iiint_V z dx dy dz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს ზედა ნახევრითა და $z=0$ სიბრტყით.

458. გამოთვალეთ $\iiint_V z dx dy dz$ ინტეგრალი, სადაც V არე შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყითა და $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის ზედა ნახევრით.

§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა სამჯერად ინტეგრალში

თუ x , y და z ცვლადების ნაცვლად შემოვიღებთ u , v და w ახალ ცვლადებს, რომლებიც მოცემულ ცვლადებთან დაკავშირებულია

$$x=\varphi(u, v, w), \quad y=\psi(u, v, w), \quad z=\omega(u, v, w) \quad (1)$$

ტილობებით, სადაც φ , ψ და ω ცალსახა და უწყვეტად წარმოებალი ფუნქციებია V' არეში, მაშინ

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u, v, \omega), \psi(u, v, \omega), \omega(u, v, \omega)) |J| du dv d\omega. \quad (2)$$

$$J(u, v, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{vmatrix}$$

გამოსახულებას ეწოდება (1) გ ა რ დ ა ქ მ ნ ი ს ი ა კ ო ბ ი ა ნ ი.

ყერძოდ, თუ გადავალთ ცილინდრულ კოორდინატებზე $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$, $z=z$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r < +\infty$, $-\infty < r < +\infty$), მაშინ $|J|=r$ და (2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi r dr dz. \quad (3)$$

სილო თუ გადავალთ სფერულ კოორდინატებზე $x=r \cos \varphi \sin \theta$, $y=r \sin \varphi \sin \theta$, $z=r \cos \theta$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r < +\infty$), მაშინ $|J|=r^2 \sin \theta$ და (2) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr. \quad (4)$$

ცილინდრულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$459. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz. \quad 460. \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz.$$

461. $\iiint_V z dx dy dz$, სადაც V წარმოადგენს $z=6-x^2-y^2$, $x^2+y^2=$
 $=z^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრულ არეს.

462. $\iiint_V dx dy dz$, სადაც V წარმოადგენს $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2+z^2=$
 $=z^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრულ არეს, რომელიც შეიცავს $(0;$
 $0; R)$ წერტილს.

463. სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალეთ ინტეგრალი:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz.$$

464. სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით გამოთვალო
 $\iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz$ ინტეგრალი, სადაც V არე განსაზღვრულია $z \geq 0$,
 $R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2$ უტოლობებით.

§ 9. მოცულობათა გამოთვლა სამკუთხედი ინტეგრალით

სივრცითი სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

ფორმულით. ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში შესაბამისად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$V = \iiint_V r dr d\varphi dz, \quad V = \iiint_V r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr.$$

465. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=a^2$ ცილინდრითა და $z=0$, $z=2x$ სიბრტყეებით ($z \geq 0$).

466. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0$, $x=2a$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ზედაპირებით.

467. იპოვეთ $x^2+y^2-z=1$ პარაბოლოიდითა და $z=0$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

468. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2=2ax$, $z=ax$, $z=\beta x$ ($\alpha > \beta$) ზედაპირებით.

469. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=4-y^2$, $z=2+y^2$ ცილინდრებითა და $x=-1$, $x=2$ სიბრტყეებით.

470. იპოვეთ $(x-1)^2+y^2=z$ პარაბოლოიდითა და $2x+z=2$ სიბრტყით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

471. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $z=0$ სიბრტყით, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ცილინდრითა და $xy=cz$ პიპერბოლური პარაბოლოიდით ($a > 0$, $b > 0$, $a > R$, $b > R$).

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ ცილინდრული კოორდინატებით.

472. გამოთვალეთ $x^2+y^2=2ax$ ცილინდრის იმ ნაწილის მოცულობა, რომელიც მოთავსებულია $z=0$ სიბრტყესა და $x^2+y^2=2az$ პარაბოლოიდს შორის.

473. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2+y^2+z^2=4$ სფეროთი და $x^2+y^2=3z$ პარაბოლოიდით (პარაბოლოიდის შიგა ნაწილი).

474. იპოვეთ $z=x^2+y^2$ პარაბოლოიდითა და $z^2=xy$ კონუსით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სფერული კოორდინატებით.

475. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=R^2$ სფეროს მოცულობა.

476. გამოთვალეთ $x^2+y^2+z^2=a^2$ სფეროთი და $x^2+y^2-z^2=0$ კონუსით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა (კონუსის გარეთ მოთავსებული ნაწილი).

477. იპოვეთ $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

478. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

479. გამოთვალეთ $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($a > 0$).

480. გამოთვალეთ $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2(x^2+y^2)^2$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($a > 0$).

481. გამოთვალეთ $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

482. გამოთვალეთ $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

§ 10. ნაშვარადი ინტეგრალის გამოყენება მჟანგიაში

იმ სხეულის მასა, რომელსაც V არე უკავია, გამოითვლება

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

ფორმულით, სადაც $\rho(x, y, z)$ სხეულის სიმკვრივეა (x, y, z) წერტილში.

საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ სხეულის სტატიკური მომენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$M_{xy} = \iiint_V \rho z dx dy dz, \quad M_{yz} = \iiint_V \rho x dx dy dz, \quad M_{zx} = \iiint_V \rho y dx dy dz.$$

სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{M}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M}.$$

თუ სხეული ერთგვაროვანია ($\rho=1$), მაშინ

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz.$$

ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და სიბრტყეების მიმართ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_V (z^2 + x^2) dx dy dz, \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V x^2 dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V y^2 dx dy dz,$$

ხოლო ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეს მიმართ არის

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

483. განსაზღვრეთ იმ პირამიდის მასა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ტოლია ამ წერტილის z აბლიცატისა.

484. განსაზღვრეთ $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მასა, თუ მის ყოველ წერტილში სიმკვრივე $\rho = x+y+z$.

485. მოცემულია R -რადიუსიანი ნახევარსფერო, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. განსაზღვრეთ მისი მასა, თუ სიმკვრივე ყოველ (x, y, z) წერტილში ამ წერტილიდან ფუქემდე მანძილის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი k).

486. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ და $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის მასა, თუ სიმკვრივე მის ყოველ წერტილში ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილის უკუპროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი k).

487. იპოვეთ R -რადიუსიანი სფეროს სტატიკური მომენტი მისი მხეზი სიბრტყის მიმართ.

488. სხეული შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდითა და xOy სიბრტყით. იპოვეთ მისი სტატიკური მომენტი ამ სიბრტყის მიმართ.

489. იპოვეთ $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

490. იპოვეთ იმ სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ნახევარსფეროთი და $z=0$ სიბრტყით ($z \geq 0$).

491. იპოვეთ $az = a^2 - x^2 - y^2$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

492. იპოვეთ $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ პარაბოლოიდითა და $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

($z \geq 0$) სფეროთი შემოსაზღვრული სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები (პარაბოლოიდის შიგა ნაწილი).

493. წრიული ცილინდრის ფუძის რადიუსია a , ხოლო სიმაღლე — h . იპოვეთ ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი ფუძის დიამეტრის მიმართ.

494. გამოთვალეთ $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$ და $z=0$ ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

§ 11. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები

არასაკუთრივი კერადი ინტეგრალები

1°. ინტეგრალის გაწარმოება პარამეტრით. თუ ორ ცვლადზე დამოკიდებული $f(x, \alpha)$ ფუნქცია უწყვეტია x -ის მიმართ $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო α -ს მიმართ — $[c, d]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

ეს ფორმულა მართებულია მაშინაც, როცა ინტეგრების ერთ-ერთი საზღვარი უსასრულოდ დიდია.

თუკი a და b საზღვრები დამოკიდებულაა α -ზე, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}.$$

გაწარმოეთ პარამეტრით შემდეგი ინტეგრალები:

$$495. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}$$

$$496. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{arctg} \alpha x)^2 dx.$$

$$497. 1) \int_a^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (\alpha > 0); \quad 2) \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

$$498. \int_{\alpha^2}^{3\alpha^2+1} \frac{e^{\alpha x}}{x} dx.$$

499. ისარგებლეთ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$ ტოლობით და გამოთვალეთ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} \text{ ინტეგრალი.}$$

500. ისარგებლეთ $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln |1+ab|$ ტოლობით და გა-

$$\text{მოთვალეთ } \int_0^b \frac{xdx}{(1+ax)^2} \text{ ინტეგრალი.}$$

501. ისარგებლეთ $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ ტოლობით და გამოთვალეთ

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx \text{ ინტეგრალი, სადაც } n \text{ მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო } \alpha > 0.$$

502. ისარგებლეთ $\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{1+a}$ ტოლობით და გამოთვალეთ

$$\int_0^1 x^a \ln^k x dx \text{ ინტეგრალი, სადაც } k \text{ მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო } \alpha > 0.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$503. \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx.$$

$$504. \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

$$505. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$506. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

2°. არასაკუთრივი ჯერადი ინტეგრალები. ა) უსასრულო არის შემთხვევა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოესაზღვრელ S არეში, მაშინ

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\sigma \rightarrow S} \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy,$$

სადაც σ წარმოადგენს S არეში მოთავსებულ სასრულ არეს. $\sigma \rightarrow S$ აღნიშნავს იმას, რომ σ -ს ნებისმიერი კანონით გაფართოებისას, მასში მოთავსდება S არის ყოველი წერტილი. თუ მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ზღვარი არსებობს და არ არის დამოკიდებული σ არის არჩევაზე, მაშინ შესაბამის არასაკუთრივ ინტეგრალს უწოდებენ კრებულს, წინააღმდეგ შემთხვევაში—განსვლადს.

ანალოგიურად განიმარტება არასაკუთრივი სამჯერადი ინტეგრალი სივრცის შემთხვევაში.

გამოთვალეთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალები:

$$507. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(a^2 + x^2 + y^2)^2}. \quad 508. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x y e^{-(x^2 + y^2)} dx dy.$$

$$509. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy. \quad 510. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$511. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}.$$

$$512. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xy dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^3}.$$

ბ) წყვეტილი ფუნქციის შემთხვევა. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრული დახურული S არის ყოველ წერტილზე, გარდა $P(a, b)$ წერტილისა, მაშინ

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} f(x, y) dx dy,$$

სადაც S_ε არე მიიღება S არიდან ε -რადიუსიანი ისეთი წრის ამოღებით, რომელიც შეიცავს P წერტილს. თუ მარჯვენა ნაწილში მოთავსებული ზღვარი არსებობს, მაშინ განსახილავ არასაკუთრივ ინტეგრალს უწოდებენ კრებულს, წინააღმდეგ შემთხვევაში—განსვლადს.

ასევე განიმარტება არასაკუთრივი სამჯერადი ინტეგრალი წყვეტილი ფუნქციისათვის.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

513. $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, სადაც S არე $x^2+y^2 \leq 1$ წრეა.

514. $\iint_S \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, სადაც S არე $x^2+y^2 \leq 1$ წრეა.

515. $\iiint_V \frac{\ln \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, სადაც V წარმოადგენს R -რადიუსიან სფეროს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

516. $\iiint_V \ln(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, სადაც V წარმოადგენს R -რადიუსიან სფეროს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

§ 12. წირითი ინტეგრალები

1°. პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია გლუვი L წირი, მასზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი. $P(x, y)$ იყოს L წირის წერტილების უწყვეტი ფუნქცია. L წირის AB რკალი დავეთო რაიმე წესით n ნაწილად $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n=B$ წერტილებით. ვთქვამ $A_{i-1}A_i = \Delta s_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

d ასეთი აღნიშნით Δs_i რკალების სიგრძეთა შორის უდიდესი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც L წირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $P(x, y)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი AB წირზე და აღინიშნება ასე:

$$\int_{AB} P(x, y) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

სადაც ds რკალის დიფერენციალია.

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int_{AB} P(x, y) ds = \int_{BA} P(x, y) ds$$

როცა წირის განტოლება მოცემულია $y=\varphi(x)$ სახით, მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y) ds = \int_a^b P[x, \varphi(x)] \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx,$$

სადაც a და b წირის A და B წერტილების აბსცისებია.

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r=r(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

ანალოგიურად განიშარტება წირითი ინტეგრალი სივრცითი წირის შემთხვევაში. კერძოდ, თუ სივრცითი წირის განტოლებებია $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, ($t_1 \leq t \leq t_2$), მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

517. $\int_L \frac{ds}{x-y}$, სადაც L არის $y = \frac{x}{2} - 2$ წრფის მონაკვეთი მოთავსებული $A(0; -2)$ და $B(4; 0)$ წერტილებს შორის.

518. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი მოთავსებული $O(0; 0)$ და $A(1; 2)$ წერტილებს შორის.

519. $\int_L \frac{y}{x} ds$, სადაც L არის $y = \frac{1}{2} x^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული $A(1; \frac{1}{2})$ და $B(2; 2)$ წერტილებს შორის.

520. $\int_L x^2 ds$, სადაც L არის $y = \ln x$ წირის რკალი, როცა $1 \leq x \leq 2$.

521. $\int_L xy ds$, სადაც: 1) L არის $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის რკალი მო-

თავსებული პირველ მეოთხედში;

2) L არის იმ მართკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$ წერტილები.

522. $\int_L y ds$, სადაც L არის $y^2=2px$ პარაბოლის რკალი, რომელსაც ჩამოჭრის $x^2=2py$ პარაბოლა.

523. $\int_L xy ds$, სადაც L არის $x=acost$, $y=bsint$ ელიფსის რკალი მოთავსებული პირველ მეოთხედში.

524. $\int_L y^2 ds$, სადაც L არის $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 2\pi$.

525. $\int_L ye^{-x} ds$, სადაც L არის $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\arctgt-t$ წირის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 1$.

526. $\int_L \sqrt{x^2+y^2} ds$, სადაც L არის $x=a(\cos t+tsint)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ წირის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 2\pi$.

527. $\int_L (x+y) ds$, სადაც L არის $r^2=a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატის მარჯვენა ფოთოლი.

528. $\int_L (x^2+y^2)^2 ds$, სადაც L არის $r=ae^{\varphi}$ ლოგარიტმული ხევის რკალი $A(a;0)$ წერტილიდან $O(0;-\infty)$ წერტილამდე.

529. $\int_L \sqrt{x^2+y^2} ds$, სადაც L არის $x^2+y^2=ax$ წრეწირის კონტური.

530. $\int_L (x^2+y^2)^n ds$, სადაც L არის $x^2+y^2=a^2$ წრეწირის კონტური.

531. $\int_L xyz ds$, სადაც L არის $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$ წირის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 1$.

532. $\int_L (x^2+y^2+z^2) ds$, სადაც L არის $x=acost$, $y=asint$, $z=bt$ წირის რკალი, როცა $0 \leq t \leq 2\pi$.

533. $\int_L \sqrt{2y^2+z^2} ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$ წრეწირის ის ნახევარი, რომელშიც $z \geq 0$.

534. $\int_L (x+y)ds$, სადაც L არის $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$ წრეწირის მეოთხედი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

2°. მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი. ვთქვათ, xOy სიბრტყეზე მოცემულია გლუვი L წირი. მასზე ავიღოთ ორი A და B წერტილი. $P(x, y)$ იყოს L წირის წერტილების უწყვეტ ფუნქცია. L წირის AB რკალი დავყოთ რაიმე წესით n ნაწილად $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n=B$ წერტილებით. ვთქვათ, A_i , წერტილის კოორდინატებია (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$). ყოველ $A_{i-1}A_i$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი:

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \text{ სადაც } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ $\max|\Delta x_i|$. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის სასრული ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც L წირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევანზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $P(x, y)$ ფუნქციის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი x -ით AB წირზე და აღინიშნება ასე:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

მეორე გვარის წირითი ინტეგრალისათვის გვაქვს:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx.$$

ანალოგიურად განიზარტება $\int_{AB} Q(x, y) dy$ და $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

წირითი ინტეგრალები.

თუ $y=\varphi(x)$ არის L წირის განტოლება, მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)]\varphi'(x)\} dx,$$

სადაც a და b წარმოადგენს A და B წერტილების აბსცისებს.

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

თუ AB სივრცითი წიხის რკალია, მაშინ ანალოგიურად განიმარტება წიხითი ინტეგრალი

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

535. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $O(0; 0)$ და $A(2; 1)$ წერტილებს.

536. $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, სადაც L არის $A(1; 1)$ და $B(2; 2)$ წერტილების შემაერთებელი $y=x$ წრფის მონაკვეთი.

537. $\int_L \cos y dx - \sin x dy$, სადაც L არის $A(2; -2)$ და $B(-2; 2)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

538. $\int_L -x \cos y dx + y \sin x dy$, სადაც L არის $O(0; 0)$ და $M(\pi; 2\pi)$ წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

539. $\int_L (x^2 - y^2) dy$, სადაც L არის $y=x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0; 0)$ და $A(2; 4)$ წერტილებს შორის.

540. $\int_L 2xy dx - y^4 dy$, სადაც L არის $x=2y^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული $O(0; 0)$ და $A(2; 1)$ წერტილებს შორის.

541. $\int_L (4x - y) dx + 5x^2 y dy$, სადაც L არის $y=3x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0; 0)$ და $A(1; 3)$ წერტილებს შორის.

542. $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, სადაც L არის $y=x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $A(-1; 1)$ და $B(1; 1)$ წერტილებს შორის.

543. $\int_L x dy - y dx$, სადაც L არის $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ წრეწირის ხე-დანახევარი, აღებული საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

544. $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, სადაც L არის $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ელიფსის ზედა ნახევარი, აღებული საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

545. $\int_L (2a - y) dx + x dy$, სადაც L არის $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალი, აღებული $0 \leq t \leq 2\pi$ მნიშვნელობისათვის.

546. $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, სადაც L არის $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ ას-

ტროიდის რკალი, მოთავსებული $A(R; 0)$ და $B(0; R)$ წერტილებს შორის.

547. მოცემულია $A(2; 0)$ და $B(2; 2)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int_L (x+y) dx$ ინტეგრალი: 1) OB წრფის გასწვრივ; 2) $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლის OB რკალის გასწვრივ; 3) OAB ტენილის გასწვრივ.

548. მოცემულია $O(0; 0)$ და $A(1; 1)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int_L xy dx + (y-x) dy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $y = x^2$ პარაბოლის OA რკალის გასწვრივ; 3) $y = x^3$ წირის OA რკალის გასწვრივ.

549. გამოთვალეთ $\int_L (x-y^2) dx + 2xy dy$ ინტეგრალი, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ და $B(1; 1)$ წერტილები.

550. გამოთვალეთ $\int_L x dy$ ინტეგრალი, სადაც L არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომელიც შედგენილია საკოორდინატო ღერძებითა და $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ წრფით.

551. გამოთვალეთ ინტეგრალი: 1) $\int_L x dx + y dy + (x+y-1) dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, მოთავსებული $A(1; 1; 1)$ და $B(2; 3; 4)$ წერტილებს შორის;

2) $\int_L x^2 dx - yz dy + z dz$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, მოთავსებული $A(1; 2; -1)$ და $B(3; 3; 2)$ წერტილებს შორის.

552. მოცემულია $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$ და $C(a; a; a)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int_L ydx + zdy + xdz$ ინტეგრალი: 1) OC წრფის გასწვრივ;

2) $OABC$ ტეხილის გასწვრივ.

553. გამოთვალეთ $\int_L yzdx + zx dy + xydz$ ინტეგრალი $x = a \cos t$, $y = \sin t$, $z = kt$ ხრახნწირის გასწვრივ, სადაც $0 \leq t \leq 2\pi$.

554. გამოთვალეთ $\int_L yzdx + z \sqrt{R^2 - y^2} dy + xydz$ ინტეგრალი, სადაც

L არის $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ ხრახნწირის რკალი მისი $z=0$

სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილიდან $z=a$ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილამდე.

§ 13. გრინის ფორმულა

გრინის ფორმულა ამყარებს კვადრატის ბრტყელ D არეზე გავრცელებულ ორჯერად ინტეგრალსა და ამ არის L კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალს შორის.

ვთქვათ, D არის L კონტურით შემოსაზღვრული ბრტყელი არე. თუ $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ ფუნქციები $\frac{\partial P}{\partial y}$ და $\frac{\partial Q}{\partial x}$ კვადრატის წარმოებულებთან ერთად უწყვეტია დახურულ D არეზე, მაშინ მართებულია გრინის ფორმულა:

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

როცა $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, მივიღებთ

$$S = \frac{1}{2} \int_L xdy - ydx$$

ფორმულას, რომლითაც გამოითვლება L კონტურით შემოსაზღვრული არის ფართობი. თუ D არის ყოველ წერტილზე შესრულებულია

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ტოლობა, მაშინ $\int_L Pdx + Qdy$ წირითი ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ინტეგრირების გზისაგან.

გრინის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით შემდეგი წირითი ინტეგრალები:

$$555. \int_L (y+x^2)dx + (3x+y^2)dy. \quad 556. \int_L \cos 2ydx + 2x\sin 2ydy.$$

$$557. \int_L (e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2\sin y)dy.$$

$$558. \int_L \sqrt{x^2+y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]dy.$$

გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ წირითი ინტეგრალები და შედეგი შეამოწმეთ მოცემული ინტეგრალების უშუალო გამოთვლით:

$$559. \int_L y^2 dx + (x+y)^2 dy, \text{ სადა } L \text{ არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია } A(a; 0), B(a; a) \text{ და } C(0; a) \text{ წერტილები.}$$

$$560. \int_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy, \text{ სადა } L \text{ არის იმ სამკუთხედის კონტური, რომლის წვეროებია } A(1; 1), B(2; 2) \text{ და } C(1; 3) \text{ წერტილები.}$$

გრინის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$561. \int_L \frac{xdy + ydy}{x^2 + y^2}, \text{ სადა } L \text{ არის } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ წრეწირი.}$$

$$562. \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \text{ სადა } L \text{ არის } x^2 + y^2 = ax \text{ წრეწირი.}$$

$$563. \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \text{ სადა } L \text{ არის } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ელფსი.

$$564. 1) \text{ გამოიკვლიეთ, არის თუ არა დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე ინტეგრალი } \int_L (x^2 + y^2) (xdx + ydy);$$

$$2) \text{ რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს } f(x, y) \text{ ფუნქცია, რომ } \int_L f(x, y) (xdx + ydy) \text{ ინტეგრალი არ იყოს დამოკიდებული ინტეგრების გზაზე.}$$

565. მოცემულია $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ და $B(1; 0)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int_L ydx + xdy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $x=y^2$

პარაბოლის გასწვრივ; 3) OBA ტეხილის გასწვრივ.

566. მოცემულია $O(0; 0)$, $A(2; 1)$ და $B(2; 0)$ წერტილები. გამოთვალეთ $\int_L 2xydx + x^2dy$ ინტეგრალი: 1) OA წრფის გასწვრივ; 2) $y = \frac{x^2}{4}$

პარაბოლის გასწვრივ; 3) OBA ტეხილის გასწვრივ.

თუ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის ინტეგრალზევა გამოსახულება D არეში რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია, ე. ი.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y).$$

მაშინ წირითი ინტეგრალი დამოუკიდებელია ინტეგრირების გზისაგან და მართებულია ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა:

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} du(x, y) = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1),$$

სადაც (x_1, y_1) და (x_2, y_2) ინტეგრირების გზის საწყისი და ბოლო წერტილებია. კერძოდ, თუ ინტეგრირების L კონტური ჩაკეტილია, მაშინ

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$567. \int_{(-1; 2)}^{(2; 3)} ydx + xdy. \quad 568. \int_{(1; 2)}^{(2; 1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

$$569. \int_{(3; 4)}^{(5; 12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}. \quad 570. \int_{(0; 0)}^{(2; 1)} 2xydx + x^2dy.$$

$$571. \int_{(0; 0)}^{(1; 1)} x(1 + 2y^3)dx + 3y^2(x^2 - 1)dy.$$

$$572. \int_{(-2; -1)}^{(3; 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^3 - 5y^4)dy.$$

$$573. \int_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx + zxdy + xydz. \quad 574. \int_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

575. გამოთვალეთ $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

576. გამოთვალეთ $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ასტროიდიტ შემოსაზღვრული არის ფართობი ($0 \leq t \leq 2\pi$).

577. გამოთვალეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის პირველი თაღითა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი (t იცვლება 2π -დან 0 -მდე).

578. გამოთვალეთ $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ კარდიოიდიტ შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი ($0 \leq t \leq 2\pi$).

579. გამოთვალეთ $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ დეკარტის ფოთლის მარჯუეთ შემოსაზღვრული არის ფართობი.

580. გამოთვალეთ $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ წირის მარჯუეთ შემოსაზღვრული არის ფართობი.

§ 14. წირითი ინტეგრალის გამოყენება მქანიაში

თუ L ბრტყელი წირია, რომლის სიძვერივე ყოველ წერტილში არის $\rho(x, y)$, მაშინ წირის მასა გამოითვლება

$$M = \int_L \rho(x, y) ds$$

ფორმულით. როცა $\rho(x, y) = 1$, მივიღებთ L წირის სიგრძეს: $l = \int_L ds$.

საკოორდინატო ღერძების მიმართ L წირის სტატიკური მომენტებია:

$$M_x = \int_L y \rho(x, y) ds, \quad M_y = \int_L x \rho(x, y) ds.$$

L წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}.$$

საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავეს მიმართ L წირის ინერციის მომენტებია:

$$I_x = \int_L y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_y = \int_L x^2 \rho(x, y) ds, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y) ds.$$

თუ $\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ არის ცვლადი ძალა, სადაც $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია L წირზე, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა L წირის გასწვრივ გამოითვლება

$$W = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ფორმულით.

581. იპოვეთ $y = \ln x$ წირის იმ წერტილებს შორის მოთავსებული ნაწილის მასა, რომელთა აბსცისებია $\sqrt{3}$ და $\sqrt{8}$, თუ ყოველ წერტილში მისი სიმკვრივე $\rho = x^2$.

582. იპოვეთ $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ ელიფსის იმ ნაწილის მასა, რომელიც მოთავსებულია პირველ კვადრანტში, თუ ყოველ წერტილში მისი სიმკვრივე $\rho = y$.

583. იპოვეთ $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ ხრახნწირის რკალის სიგრძე $O(0; 0; 0)$ წერტილიდან $A(a; 0; a)$ წერტილამდე.

584. იპოვეთ $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ხრახნწირის მასა, თუ მისი სიმკვრივე ყოველ წერტილში ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის ტოლია ($0 \leq t \leq 2\pi$).

585. იპოვეთ $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ასტროიდის პირველ მეოთხედში მოთავსებული რკალის სტატიკური მომენტი Ox ღერძის მიმართ და ინერციის მომენტი Oy ღერძის მიმართ.

586. იპოვეთ $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ნახევარწრეწირის სტატიკური და ინერციის მომენტები მისი მომკიმავე დიამეტრის მიმართ.

587. იპოვეთ $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ წრეწირის პირველ მეოთხედში მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ.

588. იპოვეთ $y = -2x + 1$ წრფის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძებისა და კოორდინატთა სათავის მიმართ.

589. იპოვეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის ნახევარ-რკალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ($0 \leq t \leq \pi$).

590. იპოვეთ $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ხრახნწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ($0 \leq t \leq \pi$).

591. გამოთვალეთ $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც დაიხარჯება ერთეული მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $O(0; 0)$ წერტილიდან $A(1; 1)$ წერტილამდე: 1) $y = x$ წრფის გასწვრივ; 2) $y = x^2$ პარაბოლის გასწვრივ.

592. გამოთვალეთ $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც დაიხარჯება ერთეული მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ წრეწირის გასწვრივ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

593. სიბრტყის ყოველ წერტილზე მოქმედებს მუდმივი \vec{F} სიდიდის ტოლი ძალა, რომელიც ემთხვევა Ox ღერძის დადებით მიმართულებას.

გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც საჭიროა პირველ მეოთხედში m მასის მქონე წერტილის "საათის ისრის მოძრაობის მიმართულეებით გადასაადგილებლად $x^2 + y^2 = R^2$ წრეწირის გასწვრივ.

594. გამოთვალეთ F ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, რომელიც საჭიროა m მასის მქონე წერტილის გადასაადგილებლად $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილამდე.

§ 15. ზედაპირული ინტეგრალი

1°. პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი. ვთქვათ, S გლუვი ზედაპირია და $f(x, y, z)$ ფუნქცია უწყვეტია S ზედაპირზე. დაეყოთ რაიმე წესით მოცემული ზედაპირი n ნაწილად: S_1, S_2, \dots, S_n , რომელთა ფართობები იყოს $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. ყოველ $S_i (i=1, 2, \dots, n)$ დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

d ასოთი აღვნიშნოთ S_1, S_2, \dots, S_n დანაყოფების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$ და ის არ არის დამოკიდებული არც S ზედაპირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილებზე არჩევანზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x, y, z)$ ფუნქციის პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალი გაგრძელებული S ზედაპირზე და აღვნიშნება ასე:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

თუ $z = \varphi(x, y)$ არის S ზედაპირის განტოლება, ხოლო D არე S ზედაპირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე და Oz ღერძის პარალელური წრფე ამ ზედაპირს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2 + \varphi'_y{}^2} dx dy,$$

სადაც $ds = \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2 + \varphi'_y{}^2} dx dy$ ზედაპირის ელემენტია (φ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები უწყვეტია დასტურულ D არეზე).

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გამოხატავს ზედაპირის $\rho(x, y, z)$ სიმკვრივეს, მაშინ ზედაპირის მასა გამოითვლება

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) ds$$

ფორმულით.

ერთგვაროვანი ზედაპირის ($\rho=1$) სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_S x ds, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_S y ds, \quad z_c = \frac{1}{S} \iint_S z ds,$$

სადაც $S = \iint_S ds$ არის ზედაპირის მოცემული ნაწილის ფართობი, ხოლო $\iint_S x ds$,

$\iint_S y ds$, $\iint_S z ds$ ინტეგრალები—სტატისტიკური მომენტები შესაბამისად yOz , zOx და

xOy სიბრტყეების მიმართ.

ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) ds, \quad I_y = \iint_S (z^2 + x^2) ds, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2) ds.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

595. $\iint_S (2x + \frac{4}{3}y + z) ds$, სადაც S არის $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

სიბრტყის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

596. $\iint_S (x + y + z) ds$, სადაც S არის $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ კუ-

ბის ზედაპირი.

597. $\iint_S x ds$, სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედაპირის ნა-

წილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

598. $\iint_S (x^2 + y^2) ds$, სადაც S არის $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფე-

როს ზედაპირი ($z > 0$).

599. $\iint_S z ds$, სადაც S არის $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ კონუსის ზედაპირის ნა-

წილი, რომელიც მოთავსებულია $z = 1$ და $z = 2$ სიბრტყეებს შორის.

600. $\iint_S \frac{z ds}{x^2 + y^2}$, სადაც S არის $z = x^2 + y^2$ პარაბოლოიდის ნაწი-

ლი, რომელიც მასზე ამოიკვეთება $x^2 + y^2 = 2$ ცილინდრით.

601. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$, სადაც S არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$ კონუსის გვერ-

დითი ზედაპირი ($0 \leq z \leq b$).

602. $\iint_S \frac{ds}{r^2}$, სადაც S არის $z = 0$, $z = H$ სიბრტყეებით შემოსაზღვ-

რული $x^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრის ზედაპირი, ხოლო r — მანძილი ზედაპირის წერტილიდან სათავემდე.

603. იპოვეთ $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ კუბის ზედაპირის მასა, თუ მისი ზედაპირული სიმკვრივე (x, y, z) წერტილში არის xyz .

604. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედაპირის მასა, თუ მისი ზედაპირული სიმკვრივე ყოველ წერტილში უდრის ამ წერტილის დაშორებას ვერტიკალური დიამეტრიდან.

605. იპოვეთ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq h$) კონუსის ზედაპირის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

606. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროს ზედაპირის პირველ ოქტანტში მოთავსებული ნაწილის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ.

607. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

608. იპოვეთ $az = x^2 + y^2$ პარაბოლოიდის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები ($0 \leq z \leq a$).

2°. მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი. ვთქვათ, S რაიმე ზედაპირია, რომელზედაც არჩეულა ერთ-ერთი მხარე, განსაზღვრული $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ნორმალის მიმართულებით. $R(x, y, z)$ იყოს S ზედაპირის წერტილების უწყვეტი ფუნქცია. დავყოთ რაიმე წესით მოცემული ზედაპირი n ნაწილად: S_1, S_2, \dots, S_n , რომელთა ფართობები იყოს $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. ყოველ S_i ($i=1, 2, \dots, n$) დანაყოფზე ავიღოთ ნებისმიერი $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ წერტილი და შევადგინოთ ინტეგრალური ჯამი

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

სადაც ΔS_i იმ ბრტყელი არის ფართობია, რომელიც მიიღება S_i დანაყოფის დაგეგმვლებით xOy სიბრტყეზე. d ასოთი აღვნიშნოთ S_1, S_2, \dots, S_n დანაყოფების უდიდესი დიამეტრი. თუ არსებობს აღნიშნული ჯამის ზღვარი, როცა $d \rightarrow 0$, და ის არ არის დამოკიდებული არც S ზედაპირის დაყოფის წესზე და არც M_i წერტილების არჩევანზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $R(x, y, z)$ ფუნქციის მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი, გავრცელებული S ზედაპირზე; იგი აღნიშნება ასე:

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

თუ $z = \varphi(x, y)$ არის S ზედაპირის განტოლება, ხოლო D ამ ზედაპირის გეგმილია xOy სიბრტყეზე, მაშინ

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D R[x, y, \varphi(x, y)] dx dy,$$

სადაც დადებითი ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა ზედაპირის არჩეულ მხარეზე $\cos \gamma > 0$, ხოლო უარყოფითი ნიშანი, როცა $\cos \gamma < 0$. ანალოგიურად განიხილავთ ზედაპირული ინტეგრალს:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz, \iint_S Q(x, y, z) dx dz,$$

სადაც $P(x, y, z)$ და $Q(x, y, z)$ წარმოადგენს S ზედაპირზე განსაზღვრულ ფუნქციებს. ხშირად განიხილება სამივე ინტეგრალის ქაში

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy.$$

მეორე გვარის ზედაპირული ინტეგრალი პირველი გვარის ზედაპირული ინტეგრალის საშუალებით ასე გამოისახება:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

609. $\iint_S (x^2 + y^2) dxdy$, სადაც S არის $x^2 + y^2 = R^2$ წრის ზედა მხარე.

610. $\iint_S z dxdy$, სადაც S არის $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედაპირის

გარე მხარე.

611. $\iint_S (z - R)^2 dxdy$, სადაც S არის $z = R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ზედა-

პირის ზედა მხარე.

612. $\iint_S x^2 y^2 z dxdy$, სადაც S არის $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ზედაპირის

დადებითი მხარე.

613. $\iint_S xdydz + ydzdx + z dxdy$, სადაც S არის $x + 2z = 2$ სიბრტყის

ზედა მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და ჩამოჭრილია $y = 4$ სიბრტყით.

614. $\iint_S xz dxdy + xy dydz + yz dzdx$, სადაც S არის $x = 0, y = 0, z =$

$= 0, x + y + z = 1$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის ზედაპირის გარე მხარე.

615. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, სადაც S არის $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

ზედაპირის ზედა მხარე.

616. $\iint_S yz dxdy + zx dydz + xy dzdx$, სადაც S არის $x = 0, y = 0,$

$z = 0, z = H$ სიბრტყეებითა და $x^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრით შემოსაზღვრუ-

ლი სხეულის ზედაპირის გარე მხარე, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.

3°. გაუსის ფორმულა. გაუსის ფორმულა ამყარებს კავშირს სივრცის არეზე გავრცელებულ სამყაროდ ინტეგრალსა და ამ არის შემოსაზღვრულ ზედაპირზე გავრცელებულ ზედაპირულ ინტეგრალს შორის.

თუ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ ფუნქციები და $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტია დახურულ V არეში, მაშინ მართებულია გაუსის ფორმულა:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

სადაც S წარმოადგენს V არის შემოსაზღვრულ ზედაპირს და ინტეგრაცია ხდება ზედაპირის გარე მხარეზე.

გაუსის ფორმულა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

თუ გაუსის ფორმულაში დაეშვებით, რომ $P=x$, $Q=y$, $R=z$, მაშინ მივიღებთ ფორმულას:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

რომლითაც გამოითვლება S ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის მოცულობა.

იმისათვის, რომ ზედაპირული ინტეგრალი $\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ არ იყოს

დამოკიდებული ინტეგრანდის ზედაპირისაგან. აუცილებელი და საჭიროა, რომ დახურულ V არეში მართებული იყოს შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

გაუსის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალები:

$$617. \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds.$$

$$618. \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

$$619. \iint_S yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy.$$

$$620. \iint_S \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy.$$

გაუსის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალები:

$$621. \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } x=0, y=0, z=0,$$

$x+y+z=a$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის ზედაპირის გარე მხარე.

$$622. \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a,$$

$0 \leq z \leq a$ კუბის ზედაპირის გარე მხარე.

$$623. \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy, \text{ სადაც } S \text{ არის } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

სფეროს ზედაპირის გარე მხარე.

$$624. \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds, \text{ სადაც } S \text{ არის } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ელიფსოიდის გარე მხარე.

625. იპოვეთ $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ სიბრტყეებით შემოსაზღვრული პირამიდის მოცულობა.

626. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ სფეროს მოცულობა.

4°. სტოქსის ფორმულა. სტოქსის ფორმულა ამყარებს კავშირს არაშეკრულ ზედაპირზე გავრცელებულ ინტეგრალსა და ამ ზედაპირის შემოსაზღვრულ კონტურზე აღებულ წირით ინტეგრალს შორის.

თუ $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია S ზედაპირზე, ხოლო L — ამ ზედაპირის საზღვარი, მაშინ მართებულია სტოქსის ფორმულა:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] ds,$$

სადაც $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ზედაპირის იმ ნორმალის მიმართულების კოსინუსებია, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.

სტოქსის ფორმულა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

თუ P, Q და R უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია სივრცის შერეულ L წირზე, მაშინ $\int_L P dx + Q dy + R dz$ წირითი ინტეგრალის ინტეგრების გზისაგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობებია:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმნით შემდეგი ინტეგრალები:

$$627. \int_L ydx + zdy + xdz. \quad 628. \int_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz.$$

$$629. \int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz.$$

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული ინტეგრალები და შედეგები შეამოწმეთ უშუალო ინტეგრირებით:

$$630. \int_L x^2 y^2 dx + dy + z dz, \text{ სადაც } L \text{ კონტური არის } x^2 + y^2 = a^2, z = 0$$

წრეწირი, ხოლო S წარმოადგენს $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ნახევარსფეროს ზედაპირის ზედა მხარეს.

$$631. \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ სადაც } L \text{ არის } A(a; 0; 0), B(0; a; 0),$$

$C(0; 0; a)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის $ABCA$ კონტური.

$$632. \text{ სტოქსის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ } \int_L ydx + y^2 dy +$$

$+ z dz$ ინტეგრალი, სადაც L არის $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ წრეწირი, ხოლო S ზედაპირი — წრეწირზე გადაჭიმული $z = 2 - (x^2 + y^2)$ პარაბოლოიდი.

$$633. \text{ სტოქსის ფორმულის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ}$$

$$\int_L yz dx + zxdy + xydz$$

ინტეგრალი ნულის ტოლია ნებისმიერი შეკრული კონტურის გასწვრივ. შეამოწმეთ ეს ინტეგრალის გამოთვლით OAB სამკუთხედის კონტურის გასწვრივ, სადაც სამკუთხედის წვეროებია $O(0; 0; 0), A(1; 1; 0), B(1; 1; 1)$ წერტილები.

$$634. \text{ იგივე } \int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \text{ ინტეგრალისათვის (იხ.}$$

ამოცანა №633).

მწკრივები

§ 1. რიცხვითი მწკრივი

1°. ძირითადი ცნებები. უსასრულო $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ მიმდევრობის წევრებისაგან შედგენილ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

გამოსახულებას ეწოდება რიცხვითი მწკრივი. u_n -ს ეწოდება მწკრივის n -ე წევრი, ხოლო $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ჯამს — მწკრივის n -ური კერძო ჯამი. როცა n გაიზარდნს 1, 2, 3, ... მნიშვნელობებს, მიიღება კერძო ჯამების მიმდევრობა: $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$; თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

მაშინ (1) მწკრივს ეწოდება კრებადი, S რიცხვს კი — მისი ჯამი. თუკი $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდება, მაშინ (1) მწკრივს ეწოდება განშლადი და მას ჯამი არა აქვს.

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

სხვაობას მწკრივის ნაშთი ეწოდება.

თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

ეს არის მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.

იპოვეთ ზოგადი წევრი შემდეგი მწკრივებისა:

$$635. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad 636. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$637. 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots \quad 638. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

$$639. \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{5}{4^2} + \frac{6}{5^2} + \dots \quad 640. \frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \dots$$

$$641. \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots \quad 642. 1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$$

ზოგადი წევრის მიხედვით დაწერეთ მწკრივის პირველი ოთხი წევრი:

~~643.~~ $u_n = \frac{n^3}{n+1}$

644. $u_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$

~~645.~~ $u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$

646. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n^k}$

~~647.~~ $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (პირველი სამი წევრი).

648. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$ (პირველი სამი წევრი).

შეამოწმეთ, შესრულებულია თუ არა მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა შემდეგი მწკრივებისათვის:

649. $1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{3^2} + \dots$

650. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

~~651.~~ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$

652. $\frac{1}{13} + \frac{2}{23} + \frac{3}{33} + \dots$

653. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \dots$

654. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots$

იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამები:

~~655.~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

656. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

657. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

658. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

~~659.~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

660. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

661. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

662. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$

~~663.~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2°. დადებითი მწკრივის კრებადობისა და განშლადობის საკმარისი პირობები.
 (ა) შედარების პირველი ნიშანი. ვთქვათ,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

და

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

დადებითი მწკრივებია. თუ რომელიმე წევრიდან დაწყებული $u_n \leq v_n$ და (v) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება აგრეთვე (u) მწკრივი. პირიქით, თუ რომელიმე წევრიდან დაწყებული $u_n \geq v_n$ და (v) მწკრივი განშლადია, მაშინ განშლადი იქნება (u) მწკრივიც.

ბ) შედარების მეორე ნიშანი. თუ არსებობს სასრული და ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$, მაშინ (u) და (v) მწკრივები ერთდროულად კრებადია ან განშლადი:

შედარების პირველი ნიშნით სარგებლობისას უფრო მოხერხებულია გამოვიყენოთ გეომეტრიული პროგრესია

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0),$$

რომელიც კრებადია, როცა $|q| < 1$ და განშლადია, როცა $|q| \geq 1$, და

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

მწკრივი, რომელიც კრებადია, როცა $a > 1$ და განშლადია, როცა $a \leq 1$.

შედარების პირველი ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

665. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

666. $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots$

667. $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \dots$

668. $\frac{\sin 3}{3} + \frac{\sin 3^2}{3^2} + \frac{\sin 3^3}{3^3} + \dots + \frac{\sin 3^n}{3^n} + \dots$

669. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

$$670. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

$$671. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sin^2 n\alpha}$$

$$672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1 - \cos^2 n\alpha}$$

$$673. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$$

$$674. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

$$675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

$$676. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

შედარების მეორე ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$677. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

$$678. \frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{10n+1} + \dots$$

$$679. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$680. \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2^2-2} + \frac{1}{2^3-3} + \dots + \frac{1}{2^n-n} + \dots$$

$$681. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$682. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+2}{n^2+1}$$

გ) და ლამბერის ნიშანი. თუ მოცემულია დადებითი მწკრივი

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

(1)

და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q,$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებადია, როცა $q < 1$, განშლადია, როცა $q > 1$; თუკი $q = 1$, გვაქვს საჭევო შემთხვევა.

დ) კოშის ნიშანი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებალია, როცა $q < 1$, განშლადია, როცა $q > 1$; თუკი $q = 1$, გვაქვს საეჭვო შემთხვევა.

ე) კოშიის ინტეგრალური ნიშანი. თუ $u_n = f(n)$, სადაც $f(x)$ არის დადებითი, მონოტონურად კლებადი და უწყვეტი ფუნქცია, როცა $x \geq a \geq 1$, მაშინ (1) მწკრივი და

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

ინტეგრალი ერთდროულად კრებალია ან განშლადი.

დალაშქრის ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებადიობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

$$684. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$686. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$$

$$687. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

$$688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$$

$$689. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$$

$$691. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$$

$$692. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$693. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$$

$$694. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$695. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

$$696. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n \sqrt{n}}$$

$$697. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$698. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$$

კოშის ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებალობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$699. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

$$700. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

$$701. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$702. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}.$$

$$703. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}.$$

$$704. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$705. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}.$$

$$706. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}.$$

$$707. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$708. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$709. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

$$710. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}.$$

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით გამოიკვლიეთ კრებალობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$711. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

$$712. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

$$713. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}.$$

$$714. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}.$$

$$715. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

$$716. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

$$717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$$

$$718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}.$$

$$719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$$

$$720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$$

$$721. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$$

$$722. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

$$723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

$$724. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

3. ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივები. აბსოლუტური კრებადობა.
ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი ასე ჩაიწერება:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (1)$$

სადაც u_1, u_2, u_3, \dots დადებითი რიცხვებია.

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივისათვის მართებულია ლაიბნიციის თეორემა: თუ $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ და $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; მაშინ (1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S < u_1$,

ხოლო ნაშთის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია უკუგდებული პირველი წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობაზე, ე. ი.

$$|R_n| < u_{n+1}$$

ვთქვათ, მოცემულია

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

მწკრივი, რომლის წევრებს ნებისმიერი ნიშნები აქვს. ამ მწკრივის წევრთა აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შევადგინოთ დადებითი მწკრივი:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (3)$$

თუ (3) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადია (2) მწკრივიც და ამ უკანასკნელს აბსოლუტურად კრებადი ეწოდება. თუ (2) მწკრივი კრებადია, ხოლო (3) განშლადი, მაშინ (2) მწკრივის პირობით კრებადი ეწოდება.

გამოიკვლიეთ აბსოლუტურად კრებადია თუ პირობით კრებადი შემდეგი მწკრივები:

$$725. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$726. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

$$727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$$

$$728. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$$

$$729. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

$$780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}.$$

$$782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n}.$$

$$783. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}.$$

$$784. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$785. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$786. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

იბოვეთ მიახლოებითი ჯამი (სიზუსტით 0,01) შემდეგი მწკრივებისა:

$$787. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

$$788. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^3}.$$

4°. მოქმედებანი მწკრივებზე. კრებადი მწკრივი შეიძლება წვერ-წვერად გავაშ-
რავლოთ ნებისმიერ k რიცხვზე, ე. ი. თუ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S,$$

მაშინ

$$ku_1 + ku_2 + ku_3 + \dots + ku_n + \dots = kS.$$

თუ მოცემულია ორი კრებადი მწკრივი

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S_1, \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = S_2, \quad (v)$$

მაშინ მათი ჯამი და სხვაობა ასე განისაზღვრება:

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots = S_1 \pm S_2.$$

(u) და (v) მწკრივების ნამრავლი ეწოდება

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots \quad (c)$$

მწკრივს, სადაც

$$c_1 = u_1 v_1, \quad c_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \quad c_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1, \dots, \quad c_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1.$$

თუ (u) და (v) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ (c) მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამი არის $S_1 S_2$.

739. შეამოწმეთ, კრებადია თუ არა ჯამი შემდეგი მწკრივებისა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}.$$

740. შეამოწმეთ, კრებადია თუ არა სხვაობა შემდეგი მწკრივებისა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

741. შეადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ განშლადი მწკრივების

სხვაობა და გამოიკვლიეთ მისი კრებადობა.

742. შეადგინეთ შემდეგი ორი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის ნამრავლი და იპოვეთ მისი ჯამი:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{და} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

743. შეადგინეთ $\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{n-1}} + \dots\right)^2$ მწკრივი და იპოვეთ მისი ჯამი.

744. შეადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ მწკრივების ნამრავლი და გამოიკვლიეთ მისი კრებადობა.

§ 2. ფუნქციათა მწკრივი

თუ

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ფუნქციათა მწკრივში x ცვლადს მიეცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ სხვადასხვა რიცხვით მწკრივს, რომლებიც შეიძლება კრებადი იყოს ან განშლადი. x არგუმენტის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელთათვის (1) მწკრივი კრებადაა, უწოდებენ ამ მწკრივის კრებადობის არეს.

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

ფუნქციას, სადაც

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

ხოლო x ეკუთვნის კრებადობის არეს, ეწოდება (1) მწკრივის ჯამი.

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

სხვაობას ეწოდება მწკრივის ნაშთი.

უმარტივეს შემთხვევაში (1) მწკრივის კრებადობის არის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყენოთ კრებადობის ცნობილი ნიშნები.

განსახვდრეთ კრებადობის არე შემდეგი მწკრივებისა:

745. $\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots$ 746. $e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots$

747. $\frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^{2x}} + \dots + \frac{nx}{e^{nx}} + \dots$

748. $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$

749. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

750. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$

751. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

752. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$

753. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n$

754. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n$

§ 3. თანაბარი კრებადობა

ფუნქციათა მწკრივი

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

თანაბრად კრებადია რაიმე შუალედში, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება x -ისგან დამოუკიდებელი ისეთი N რიცხვი, რომ აღებული შუალედის ყოველი x წერტილისათვის

$$|R_n(x)| < \varepsilon, \text{ როცა } n > N.$$

ფუნქციათა მწკრივისათვის მართებულია თანაბრად კრებადობის შემდეგი პირობა (ვაიერშტრასის ნიშანი): თუ ფუნქციათა (1) მწკრივის წევრები $[a, b]$ სეგმენტის ყველა x წერტილისათვის აკმაყოფილებს

$$|u_n(x)| \leq A_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

პირობას, სადაც

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

კრებადი მწკრივია, მაშინ (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ვაიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით აჩვენეთ თანაბარი კრებადობა შემდეგი მწკრივებისა ნაჩვენებ შუალედებში:

755. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}, (-\infty, +\infty)$. 756. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, (-\infty, +\infty)$.

$$757. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad [-1; 1].$$

$$758. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}, \quad [0; 1].$$

$$759. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}, \quad (-\infty, +\infty).$$

$$760. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad (-\infty, +\infty).$$

$$761. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{1+nx}}, \quad [0, +\infty).$$

$$762. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-2} + nx}}, \quad [0, +\infty).$$

თანაბრად კრებადობის განმარტების საფუძველზე აჩვენეთ თანაბარი კრებადობა შემდეგი ორი მწკრივისა:

$$763. 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots, \quad \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ სეგმენტზე.}$$

$$764. (1-x) + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1}x^{n-1} - \frac{1}{n}x^n\right) + \dots, \quad (-1, +1) \text{ ინტერვალში.}$$

$$765. \text{ აჩვენეთ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ მწკრივის თანაბრად კრებადობა } [0; 1]$$

სეგმენტზე. n -ის რომელი მნიშვნელობიდან შესრულდება $|R_n(x)| < 0,1$ უტოლობა ამ სეგმენტის ნებისმიერი x -ისათვის?

$$766. \text{ აჩვენეთ, რომ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^{n-1}} \text{ მწკრივი თანაბრად კრებადია,}$$

როცა $x \geq 0$. n -ის რომელი მნიშვნელობიდან შესრულდება $|R_n(x)| < 0,001$ უტოლობა ნებისმიერი $x \geq 1$ -ისათვის?

§ 4. ხარისხოვანი მწკრივები

ხარისხოვან მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (1)$$

სადაც $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ მუდმივებია, რომლებსაც ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება.

ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისათვის არსებობს ისეთი დადებითი R რიცხვი, რომ $(-R, +R)$ შუალედის შიგნით მწკრივი კრებადია, ხოლო მის გარეთ—განშლადი. $x = \pm R$ წერტილებზე მწკრივი შეიძლება კრებადი ან განშლადი იყოს. ასეთ R რიცხვს ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი ეწოდება, ხოლო $(-R, +R)$ შუალედს—კრებადობის შუალედი. თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში, მაშინ $R=0$, თუკი მწკრივი კრებადია ყველგან, მაშინ $R=+\infty$.

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება დალამბერის ან კოშის ნიშნებით. თუ ყველა a_n კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{და} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|a_n|}}$$

ფორმულებით.

(i) ხარისხოვანი მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე, რომელიც კრებადობის შუალედში მდებარეობს. ამ სეგმენტზე შეიძლება მისი წევრ-წევრა გაწარმოება და ინტეგრება, ე. ი. თუ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = S(x),$$

მაშინ

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = S'(x)$$

და

$$\int_{x_0}^x a_0 dx + \int_{x_0}^x a_1 x dx + \dots + \int_{x_0}^x a_n x^n dx + \dots = \int_{x_0}^x S(x) dx,$$

სადაც x_0 მიეკუთვნება მწკრივის კრებადობის შუალედს.

განსაზღვრეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის შუალედები და გამოიკვლიეთ მათი კრებადობა შუალედის ბოლოებზე:

767. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

768. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \dots$

769. $x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$

770. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots$

771. $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} n} + \dots$

772. $x + \frac{x^2}{2 \cdot 10} + \frac{x^3}{3 \cdot 10^2} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \dots$

773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

774. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

$$775. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n+1)}. \quad \rightarrow \quad 776. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}.$$

$$777. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \quad 778. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$779. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2+1}. \quad 780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{(n+1)^2-1}.$$

$$781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \quad 782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$783. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{3^{n-1} n \sqrt{n}}. \quad 784. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^{3n}}{3^n}.$$

$$785. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}. \quad 786. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$$

$$787. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}. \quad 788. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}.$$

იპოვეთ კრებულობის რადიუსი შემდეგი მწკრივებისა:

$$789. \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)3^{n-1}x^{n-1}. \quad 790. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}.$$

$$791. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n. \quad 792. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n^2}.$$

$$793. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}. \quad 794. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

წევრ-წევრა გაწარმოებისა და ინტეგრების გამოყენებით იპოვეთ ჯამები შემდეგი მწკრივებისა:

$$795. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad 796. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$797. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

$$798. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

$$799. \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

$$800. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}.$$

$$801. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

$$802. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n.$$

$$803. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}.$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}.$$

$$804. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}.$$

$$805. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

$$806. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1}.$$

807. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots$$

აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[1, +\infty)$ შუალედში და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx.$$

808. მოცემულია ფუნქცია

$$f(x) = 1 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 3^2 x^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} x^{n-1} + \dots$$

აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ შუალედში და გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^{0,125} f(x) dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და a წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს უწყვეტი წარმობებულება $(n+1)$ რიგამდე (ჩათვლით), მაშინ ამ მიდამოში მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \quad 0 < \theta < 1.$$

თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, მაშინ მივიღებთ ტეილორის მწკრივს:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

რთა $a=0$, გვექნება მაკლორენის მწკრივი:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

809. დაშალეთ $f(x) = a^x$ ფუნქცია x -ის მთელ დადებით ხარისხებად და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის შუალედი.

810. დაშალეთ $f(x) = e^x$ ფუნქცია $(x-2)$ -ის ხარისხებად და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებადობის შუალედი.

811. დაშალეთ $f(x) = \cos x$ ფუნქცია $(x - \frac{\pi}{4})$ -ის ხარისხებად.

812. დაშალეთ $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ფუნქცია x -ის ხარისხებად.

813. დაშალეთ $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ფუნქცია $(x - \frac{\pi}{2})$ -ის ხარისხებად.

814. დაშალეთ $f(x) = \sin^2 x$ ფუნქცია x -ის ხარისხებად.

815. დაშალეთ $f(x) = \ln x$ ფუნქცია $(x-1)$ -ის ხარისხებად.

816. 1) დაშალეთ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ ფუნქცია $(x+4)$ -ის ხარისხებად;

2) დაშალეთ $f(x) = x^4 - 4x^2$ ფუნქცია $(x+2)$ -ის ხარისხებად.

იპოვეთ x -ის ხარისხებად დაშლის პირველი სამი წევრი შემდეგი ფუნქციებისა:

817. $f(x) = \ln(1+e^x)$.

818. $f(x) = e^{a \operatorname{arctg} x}$

819. $f(x) = e^{\sin x}$.

820. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

ფუნქციის მწკრივად დაშლისას ხშირად გამოიყენება შემდეგი ფორ-
მულები:

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$2. \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$(-\infty < x < +\infty);$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$4. (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1);$$

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$6. \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$(-1 \leq x \leq 1);$$

$$7. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$821. f(x) = e^{x^2}.$$

$$822. f(x) = xe^{-2x}.$$

$$823. f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$824. f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$825. f(x) = e^x \sin x.$$

$$826. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

$$827. f(x) = \cos^2 x.$$

$$828. f(x) = \operatorname{arctg}^2 x.$$

$$829. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$830. f(x) = \sqrt[3]{8+x}.$$

$$831. f(x) = \frac{x}{2-x}.$$

$$832. f(x) = \frac{x}{9+x^2}.$$

$$833. f(x) = \ln(1-x+x^2).$$

$$834. f(x) = \ln(2-3x+x^2).$$

$$835. f(x) = \frac{1-x}{1-x-2x^2}.$$

$$836. f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2}.$$

837. დაშალეთ $f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქცია $(x+2)$ -ის ხარისხებად.

838. დაშალეთ $f(x) = \frac{1}{5-x}$ ფუნქცია $(x-2)$ -ის ხარისხებად.

839. დაშალეთ $f(x) = e^{3x}$ ფუნქცია $(x-1)$ -ის ხარისხებად.

840. დაშალეთ $f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქცია $(x-4)$ -ის ხარისხებად.

მწკრივის წევრ-წევრა ინტეგრების გამოყენებით დაშალეთ x -ის ხარისხობან მწკრივებად შემდეგი ფუნქციები:

841. $f(x) = \arctg x$.

842. $f(x) = \arcsin x$.

843. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

844. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

დაშალეთ x -ის ხარისხებად შემდეგი ფუნქციები:

845. $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$.

846. 1) $\int_0^x e^{-x^2} dx$; 2) $\int_0^x \frac{e^x dx}{x^2}$.

847. $\int_0^x \frac{\arctg x}{x} dx$.

848. $\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

849. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^3}$.

850. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

851. აიღეთ e^x ფუნქციის მაკლორენის მწკრივად დაშლის პირველი სამი წევრი და გამოთვალეთ $\sqrt[3]{e}$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

852. იგივე (იხ. №851 ამოცანა) e^2 რიცხვისათვის (აიღეთ პირველი ექვსი წევრი).

853. აიღეთ $(1+x)^m$ ფუნქციის მწკრივად დაშლის პირველი ორი წევრი და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\sqrt{0,992}$; 2) $\sqrt{90}$; 3) $\sqrt[3]{130}$; 4) $\sqrt[3]{0,997}$.

854. იგივე (იხ. №853 ამოცანა) რიცხვებისათვის: 1) $\sqrt{1,005}$; 2) $\sqrt{23}$; 3) $\sqrt[3]{70}$; 4) $\sqrt[5]{40}$.

855. აიღეთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების მწკრივად დაშლის პირველი ორი წევრი და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\sin 18^\circ$; 2) $\cos 12^\circ$.

856. იგივე (იხ. №855 ამოცანა) რიცხვებისათვის: 1) $\sin 10^\circ$; 2) $\cos 15^\circ$.

857. ისარგებლეთ

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

ფორმულით და გამოთვალეთ მიახლოებით: 1) $\ln 2$; 2) $\ln 3$; 3) $\ln 4$; 4) $\ln 6$.

858. გამოთვალეთ მიახლოებით $\ln 5$ და $\ln 10$, თუ $\ln 2 \approx 0,6931$ და აჩვენეთ, რომ მოდული

$$M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343.$$

859. $f(x) = \arctg x$ ფუნქციის დაშლაში დაუშვით, რომ $x=1$ და იპოვეთ π რიცხვის მწკრივად დაშლა.

860. $f(x) = \arcsin x$ ფუნქციის დაშლაში დაუშვით, რომ $x = \frac{1}{2}$ და გამოთვალეთ π რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა (აიღეთ სამი წევრი).

გამოთვალეთ მიახლოებითი მნიშვნელობები შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$861. \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \quad (3 \text{ წევრი}).$$

$$862. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \quad (3 \text{ წევრი}).$$

$$863. \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad (3 \text{ წევრი}).$$

$$864. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (2 \text{ წევრი}).$$

$$865. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (2 \text{ წევრი}).$$

$$866. \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3} dx \quad (2 \text{ წევრი}).$$

§ 6. ბეილტორის მჟარივი ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

$f(x, y)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივს (a, b) წერტილის მიდამოში აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] + \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b) + \dots \end{aligned}$$

როცა $a=b=0$, ვღებულობთ მაკლორენის მწკრივს:

$$f(x, y) = f(0; 0) + \frac{1}{1!} [f'_x(0; 0)x + f'_y(0; 0)y] + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(0; 0)x^2 + 2f''_{xy}(0; 0)xy + f''_{yy}(0; 0)y^2] + \dots + \frac{1}{n!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(0; 0) + \dots$$

867. დაშალეთ $f(x, y) = x^2y$ ფუნქცია $(x-1)$ -ისა და $(y+1)$ -ის ხარისხებად.

868. დაშალეთ $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ ფუნქცია $(x-1)$ -ისა და $(y-2)$ -ის ხარისხებად.

869. დაშალეთ $f(x, y) = y^x$ ფუნქცია $(x-2)$ -ისა და $(y-1)$ -ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე და გამოთვალეთ $(1, 1)^{2, 1}$.

870. დაშალეთ $f(x, y) = \sin(x+y)$ ფუნქცია x -ისა და $(y - \frac{\pi}{2})$ -ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

871. დაშალეთ $f(x, y) = \ln(x-y)$ ფუნქცია x -ისა და $(y+1)$ -ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

872. დაშალეთ $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ ფუნქცია $(x-1)$ -ისა და y -ის ხარისხებად მეორე ხარისხის წევრებამდე.

873. დაწერეთ $f(x, y) = e^x \cos y$ ფუნქციის x -ისა და y -ის ხარისხებად მწკრივად დაშლის პირველი ოთხი წევრი.

874. დაწერეთ $f(x, y) = (1+x)^{1+y}$ ფუნქციის x -ისა და y -ის ხარისხებად მწკრივად დაშლის პირველი სამი წევრი.

§ 7. ფურიეს მწკრივი და ფურიეს ინაბერალი

1°. ფურიეს მწკრივი. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციის პერიოდია 2π . ამ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ეწოდება ტრიგონომეტრიულ მწკრივს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

სადაც დაშლის კოეფიციენტები ასე განისაზღვრება:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

არსებობს სხვადასხვა სახის საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა შეიძლება ფორმის მწკრივით. ამ მხრივ აღსანიშნავია დირიხლეს შემდეგი თეორემა: ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში, გარდა, შესაძლოა, ზოგიერთი წერტილისა, რომლებშიც ფუნქცია პირველი გვარის წყვეტას განიცდის. თუ ამ სეგმენტზე ფუნქციას აქვს ექსტრემუმის სასრული რიცხვი, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ფორმის მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციისავე ყველგან, სადაც $f(x)$ უწყვეტია. თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ

ფორმის მწკრივი კრებადია $\frac{f(x_{0-}) + f(x_{0+})}{2}$ მნიშვნელობისავე, ხოლო $\pm \pi$ წერტილებში მწკრივი კრებადია $\frac{f(-\pi_+) + f(\pi_-)}{2}$ მნიშვნელობისავე.

როცა $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს, მაშინ დავწერთ:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

თუ $f(x)$ ლუწი პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

სადაც

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

თუ $f(x)$ კენტია პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{სადაც} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დირიხლეს თეორემის პირობებს $[-l, l]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

დაშალეთ ფურიეს მწკრივებად 2π -პერიოდის ფუნქციები:

875. $f(x) = x$ ($-\pi, \pi$) ინტერვალში.

876. $f(x) = x^2$ ($-\pi, \pi$) ინტერვალში.

877. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } -\pi < x \leq 0, \\ -2, & \text{როცა } 0 < x < \pi. \end{cases}$

878. $f(x) = \begin{cases} -c, & \text{როცა } -\pi < x < 0, \\ c, & \text{როცა } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

879. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } -\pi < x \leq 0, \\ x, & \text{როცა } 0 < x < \pi. \end{cases}$

880. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } -\pi < x \leq 0, \\ 2x, & \text{როცა } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

881. $f(x) = |x|$ ($-\pi, \pi$) ინტერვალში.

882. $f(x) = |\sin x|$ ($-\pi, \pi$) ინტერვალში.

883. დაშალეთ $f(x) = \cos ax$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად ($-\pi, \pi$) ინტერვალში (a მთელი არ არის).

884. დაშალეთ $f(x) = \operatorname{sh} ax$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად ($-\pi, \pi$) ინტერვალში.

885. დაშალეთ $f(x) = x \cos x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; 2\pi)$ ინტერვალში.

886. დაშალეთ $f(x) = e^x - 1$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; 2\pi)$ ინტერვალში.

887. დაშალეთ $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(0; 2\pi)$ ინტერვალში.

888. დაშალეთ ფურიეს მწკრივად

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{როცა } \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

ფუნქცია.

889. დაშალეთ $f(x) = e^x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად $(-l, l)$ ინტერვალში.

დაშალეთ ფურიეს მწკრივებად ნაჩვენებ შუალედებში შემდეგი ფუნქციები:

890. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } -l < x \leq 0, \\ x, & \text{როცა } 0 \leq x < l. \end{cases}$

$$891. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } -1 < x < 0, \\ x, & \text{როცა } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

892. დაშალეთ $f(x) = 10 - x$ ფუნქცია ფურიეს მწკრივად (5; 15) შუალედში.

893. დაშალეთ $f(x) = \sin x$ ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად (0; π) ინტერვალში.

894. დაშალეთ $f(x) = \cos 2x$ ფუნქცია სინუსების მწკრივად (0; π) ინტერვალში.

895. დაშალეთ $f(x) = x(\pi - x)$ ფუნქცია სინუსების მწკრივად (0; π) ინტერვალში და მიღებული შედეგი გამოიყენეთ შემდეგი მწკრივის ჯამის მოსაძებნად:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$$

896. დაშალეთ $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ ფუნქცია კოსინუსების მწკრივად (0; π) ინტერვალში.

2°. ფურიეს ინტეგრალი. თუ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია ამ შუალედში, ე. ი. არსებობს $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$

ინტეგრალი და ყოველ სასრულ არეზე აკმაყოფილებს ღირისლეს თეორემის პირობებს, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფურიეს ინტეგრალის სახით:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right] d\alpha.$$

დაწერეთ ფურიეს ინტეგრალები შემდეგი ფუნქციებისათვის:

$$897. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{როცა } x > 1 \text{ და } f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

$$898. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{როცა } |x| > 1. \end{cases}$$

$$899. f(x) = e^{-\beta x}, \text{ როცა } x \geq 0 \text{ და } f(-x) = f(x).$$

$$900. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{როცა } x < 0 \text{ და } x > \pi. \end{cases}$$

$$901. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } x = 0 \text{ და } x = 1, \\ 0, & \text{როცა } x < 0 \text{ და } x > 1. \end{cases}$$

$$902. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -e^x, & \text{როცა } x < 0, \end{cases} f(-x) = -f(x).$$

იპოვეთ ფურცელს გარდაქმნა შემდეგი ფუნქციებისათვის:

$$903. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{როცა } |x| > \pi. \end{cases}$$

$$904. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$905. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } |x| > 2, \\ 1, & \text{როცა } 1 < |x| \leq 2, \\ -x^2 + 2, & \text{როცა } |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$906. f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ -x-1, & \text{როცა } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{როცა } |x| > 1. \end{cases}$$

IV თავი

დიფერენციალური განტოლებები

§ 1. ძირითადი ცნებები

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება ეწოდება ისეთ განტოლებას, რომელიც შეიცავს დამოუკიდებელ x ცვლადს. ამ ცვლადს უწოდებენ $y=f(x)$ ფუნქციას და მის $y', y'', \dots, y^{(n)}$ წარმოებულებს.

ჩვეულებრივი n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

$y=f(x)$ ფუნქციას, რომელიც (1) განტოლებას იგივეობად გადააკცევს, ეწოდება ამ განტოლების ამონახსნი, ამ ფუნქციის გრაფიკს კი — დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი. თუ განტოლების ამონახსნი მოცემულია არაიხადი $\Phi(x, y) = 0$ სახით, მაშინ მას დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალს ეწოდებენ.

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქციები აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$907. y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}, \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$908. y = \frac{c^2 - x^2}{2x}, \quad x + y + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$909. x^2 - xy + y^2 = c^2, \quad (x - 2y)y' = 2x - y.$$

$$910. y = x + ce^y, \quad (x - y + 1)y' = 1.$$

$$911. y = c_1x + c_2x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$$

$$912. y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3, \quad y''' + \frac{3}{x}y'' = 0.$$

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლებები წირთა მოცემული ოჯახებისათვის:

$$913. y = ax.$$

$$914. x^2 + y^2 = a^2.$$

$$915. y^2 = 2px.$$

$$916. y = ax + a^2.$$

$$917. y = ae^{\frac{x}{a}}.$$

$$918. \ln \frac{x}{y} = 1 + ay.$$

$$919. y = c_1(x - c_2)^2.$$

$$920. y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}.$$

921. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

922. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე იმ პარაბოლების ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, რომელთა ღერძები Oy ღერძის პარალელურია.

923. შეადგინეთ xOy სიბრტყეზე მდებარე წრფეწირთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება.

924. იპოვეთ იმ წრფეთა ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, რომლებიც საკოორდინატო ღერძებიდან მოჰკვეთს მუდმივი S ფართობის სამკუთხედს.

**§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება.
განსაზღვრავს ვალდებულებანი დიფერენციალური განტოლება**

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

თუ ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას y' -ის მიმართ, მაშინ

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

სადაც $f(x, y)$ მოცემული ფუნქციაა. (2) სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩაწეროს სიმეტრიული ფორმით:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული ფუნქციებია.

$y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c)$ ფუნქციას, რომელიც ერთ ნებისმიერ c მუდმივს შეიცავს და c -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას, როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაწერილია არაცხადი $\Phi(x, y, c) = 0$ სახით, მაშინ მას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

დიფერენციალური განტოლებების კერძო ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c_0)$ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზოგადი $y = \varphi(x, c)$ ამონახსნიდან ნებისმიერი c მუდმივის კერძო $c = c_0$ მნიშვნელობისათვის; $\Phi(x, y, c_0) = 0$ დამოკიდებულებას კერძო ინტეგრალი ეწოდება.

ღგ $\alpha = f(x, y)$ მიმართულებათა ერთობლიობას ეწოდება (2) განტოლების მ. ი. მ. ა. რ. თ. უ. ლ. ე. ბ. ა. თ. ა. ველი. $f(x, y) = k$ წირებს, რომელთა წერტილებშიც ველის დახრილობას აქვს მუდმივი k -ს ტოლი მნიშვნელობა, ეწოდება ი. ს. ო. კ. ლ. ი. ნ. ე. ბ. ი.

იზოკლინების მეთოდით მიახლოებით ააგეთ ინტეგრალური წირების ველი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებისათვის:

$$925. y' = x.$$

$$926. y' = -\frac{x}{y}.$$

$$927. y' = \frac{y}{x}.$$

$$928. y' = -\frac{y}{x}.$$

ვილერის მეთოდი. (2) განტოლების იმ ინტეგრალური წირის მიახლოებით აგებასათვის, რომელიც გაივლის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე, ააგებენ ტეხილ წირს, რომლის წვეროები მოთავსებულია $M_i(x_i, y_i)$ წერტილებში, სადაც

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta x_i = h \quad (\text{ბიჯი}),$$

$$\Delta y_i = h f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

ვილერის მეთოდით იპოვეთ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებათა კერძო ამონახსნები x -ის ნაჩვენები მნიშვნელობებისათვის:

$$929. y' = \frac{xy}{2}, \quad y(0) = 1. \quad \text{იპოვეთ } y(1), \quad (h = 0,1).$$

$$930. y' = y, \quad y(0) = 1. \quad \text{იპოვეთ } y(1), \quad (h = 0,1).$$

$$931. y' = x + y, \quad y(0) = 1. \quad \text{იპოვეთ } y(1), \quad (h = 0,1).$$

$$932. y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1. \quad \text{იპოვეთ } y(1), \quad (h = 0,2).$$

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განცალკებადელადებაიანი განტოლება, მისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

განტოლებას ეწოდება განცალკებადელადებაიანი დიფერენციალური განტოლება, მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = c.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია იპოვეთ ის კერძო ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს:

$$\leftarrow 933. yy' + x = 0; \quad x=1, \quad y=\sqrt{3}.$$

$$934. y' = 3x^2 - 2x + 1; \quad x=1, \quad y=2.$$

$$\leftarrow 935. xy' - y = 0; \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 2.$$

$$936. y' = y; \quad x = -2, \quad y = 4.$$

$$\leftarrow 937. (1+y)dx - (1-x)dy = 0. \quad \sim 938. (1+y^2)dx + xydy = 0.$$

$$939. xyy' = 1 - x^2.$$

$$940. y'tgx = y.$$

$$\leftarrow 941. \sqrt{1-y^2} dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0. \quad 942. x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$$

$$\leftarrow 943. (t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + x^2t = 0. \quad 944. zdt - (t^2 - a^2)dz = 0.$$

$$945. r^2 dr + (r-a)dr = 0.$$

$$946. \sec^2 \theta \operatorname{ctg} \theta d\theta + \sec^2 \theta \operatorname{ctg} \theta d\theta = 0$$

$$947. 3e^{x \operatorname{ctg} y} dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0. \quad 948. \sec^2 x \operatorname{ctg} y dx + \sec^2 y \operatorname{ctg} x dy = 0.$$

$$949. y' \sin x = y \ln y; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 1.$$

$$950. (1 + e^x)yy' = e^x; \quad x=1, \quad y=1.$$

$$951. y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x; \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

$$952. y' = 10^{x+y}.$$

$$953. xy' + 2y = xyy'.$$

$$954. y' = (x-y)^2 + 1.$$

$$955. y' = \sin(x-y).$$

$$956. y' = (8x + 2y + 1)^2.$$

ერთგვაროვანი განტოლება

დოქტორენტალურ

$$M(x, y)dx + N(x, y) dy = 0$$

განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი განტოლება, თუ $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. $y=ux$ ან $x=uy$ ჩასმით, სადაც u ახალი უცვლელი ფუნქციაა. ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება განტოლებად u -ს მიმართ განტოლებად.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$\leftarrow 957. (y-x)ydx + x^2 dy = 0.$$

$$\leftarrow 958. (x-y)dx + xdy = 0.$$

$$\leftarrow 959. ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$$

$$\leftarrow 960. y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

$$\leftarrow 961. xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

$$\leftarrow 962. xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx.$$

$$\leftarrow 963. (x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0. \quad \leftarrow 964. y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$965. y' = 2y - x. \quad 966. x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$967. (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0; \quad x=2, \quad y=1.$$

$$968. xydy - (x^2 + y^2)dx = 0; \quad x=-1, \quad y=0.$$

$$969. (x-y)dx + (x+y)dy = 0; \quad x=1, \quad y=0.$$

$$970. y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}; \quad x=-1, \quad y=1.$$

თუ მოცემულია $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ განტოლება და $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, მაშინ $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ ჩასმით, სადა α და β მუდმივები განისაზღვრება

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან, მივიღებთ ერთგვარულ დიფერენციალურ განტოლებას u და v ცვლადებს მიმართ.

თუ $\Delta = 0$, მაშინ $u = a_1x + b_1y$ ჩასმით მივიღებთ განტოლებადგებადიან განტოლებას.

ამოხსენით განტოლებები:

$$971. (x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

$$972. (3x-4y-2)dx - (3x-4y-3)dy = 0.$$

$$973. (2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0.$$

$$974. (x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0.$$

$$975. \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x-3}.$$

$$976. \frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y+5}{2x-y+4}.$$

§ 4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

დიფერენციალურ

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

განტოლებას, სადა $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენს x -ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს. ამოღება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = e^{-\int P dx} (c + \int Q e^{\int P dx} dx)$$

ფორმულით.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$977. y' - \frac{y}{x} = x.$$

$$978. y' + y = e^{-x}.$$

$$979. (1+x^2)y' - xy = x+x^3.$$

$$980. \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$$

$$981. y' - \frac{ny}{x} = e^x x^n.$$

$$982. y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$$

$$983. \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x. \quad - 984. \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

$$\rightarrow 985. xy' + y = x+1; \quad x=2, \quad y=3. \quad - 986. xy' + 2y = 3x; \quad x=-2, \quad y=0.$$

$$\rightarrow 987. y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; \quad x=0, \quad y=0.$$

$$- 988. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1; \quad x=1, \quad y=0.$$

$$\hookrightarrow 989. y' + y \cos x = \sin x \cos x; \quad x=0, \quad y=1.$$

$$- 990. (1-x^2)y' + xy = 1; \quad x=0; \quad y=1.$$

შემდეგ განტოლებები წრფივია, თუ y -ს მივიღებთ დამოუკიდებელ ცვლადად. ხოლო x -ს — ფუნქციად.

$$991. (y^2 - 6x)y' + 2y = 0.$$

$$992. (x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

§ 5. ბერნულის განტოლება

ბერნულის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

სადაც $n \neq 0$ და $n \neq 1$; $z = y^{1-n}$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებად.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$993. \frac{dy}{dx} + xy = xy^3.$$

$$994. \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = -x^3 y^2.$$

$$995. \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}.$$

$$996. ny^{n-1} \frac{dy}{dx} + y^n = x.$$

$$997. \frac{dy}{dx} - \frac{\sin x}{3} y = -y^3 \sin x.$$

$$998. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^2.$$

$$999. (1-x^2)y' - xy = xy^2; \quad x=0, \quad y=0,5.$$

$$1000. \frac{dy}{dx} - \frac{x}{2(x^2-1)} y = \frac{x}{2y}; \quad x=0, \quad y=1.$$

შემდეგ ორ მაგალითში x მიიღეთ ფუნქციად, ხოლო y — არგუმენტად:

$$1001. (x^2 y^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy^3 = 0.$$

$$1002. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy(1+xy^2)}.$$

§ 6. განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

პირველი რიგის

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

თუ მისი მარცხენა ნაწილი რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du.$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ამ შემთხვევაში $u(x, y) = c$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.
 $u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

განტოლებათა სისტემიდან.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1003. $(7x + 3y)dx + (3x - 5y)dy = 0.$

1004. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0.$

1005. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$

1006. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$

1007. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$

1008. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$

1009. $yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0.$

1010. $\frac{x}{(x+y)^2} dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2} dy = 0.$

1011. $\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = 0; \quad x=1, \quad y=1.$

1012. $(x + e^y) dx + e^y \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0; \quad x=0, \quad y=2.$

იპოვეთ $u(x, y)$ ფუნქცია, თუ:

1013. $du = 4(x^3 - xy^2)dx + 4(y^3 - x^2y)dy.$

1014. $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy.$

1015. $du = (x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y\right)dy.$

1016. $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

იმისათვის, რომ $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ გამოსახულება იყოს რაიმე $u(x, y, z)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი, აუცილებელია და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

შეამოწმეთ, რომ მოცემული გამოსახულებები რაიმე ფუნქციების სრული დიფერენციალებია და იპოვეთ ეს ფუნქციები:

1017. $(3x^2 + 3y - 1)dx + (3x + z^2)dy + (2yz + 1)dz.$

1018. $(yz - 2x)dx + (xz + y)dy + (xy - z)dz.$

$$1019. (\ln y - \cos 2z)dx + \left(\frac{x}{y} + z\right)dy + (y + 2x \sin 2z)dz.$$

$$1020. \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz.$$

§ 7. მაინტეგრირებადი მაშრავლი

თუ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ განტოლებაში $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ და არსებობს ისეთი

$\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

აბრ განტოლება სრულ დიფერენციალურში, მაშინ $\mu(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მ ა - ინტეგრირებადი მაშრავლი.

მაინტეგრირებადი მაშრავლი ადვილად მოიძებნება შემდეგ შემთხვევებში:

1) როცა $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \Phi(x)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi(x) dx}$;

2) როცა $-\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \Phi_1(y)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi_1(y) dy}$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1021. $(2+2x-y^2) dx - 2y dy = 0$. 1022. $(\sin x + e^y) dx + \cos x dy = 0$.

1023. $(x^2-y) dx + (x^2 y^2 + x) dy = 0$.

1024. $(x \sin y + y) dx + (x^2 \cos y + x \ln x) dy = 0$.

1025. $2xy^3 dx + (x^2 y^2 - 1) dy = 0$. 1026. $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$.

1027. $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$. 1028. $(y \operatorname{tg} x + \cos x) dx - dy = 0$.

§ 8. პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები

თუ $F(x, y, y') = 0$ დიფერენციალური განტოლება არ არის პირველი ხარისხის y' წარმოებულის მიმართ, მაშინ ზოგჯერ შემთხვევაში შესაძლებელია ასეთი განტოლებას ინტეგრება.

1°. განტოლება ეხებად არ შეიცავს y ფუნქციას, ე. ი. $F(x, y') = 0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოხსნება y' -ის მიმართ, მივიღებთ $y' = q(x)$ საიდანაც $y = \int q(x) dx + C$;

ბ) თუ განტოლება ამოხსნება x -ის მიმართ, მაშინ $x = f(y')$ და $x = f(p)$, $y = \int p f'(p) dp + C$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p = y'$. წარმოადგენს მოცემულ განტოლებას პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1029. $xy' = \sqrt{1+y^2}$.

1030. $x^2 + y^2 = x^2$.

1031. $x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$.

1032. $x = \sin y' + \ln y'$.

1033. $x = ay' + by'^2$.

1034. $e^{y'} + y' = x$.

2°. მოცემული განტოლება ცხადად არ შეიძლება x (ველადს

$$F(y, y')=0.$$

ა) თუ ეს განტოლება ამოხსნება y' -ის მიმართ, ე. ი. თუ $y'=\varphi(y)$, მაშინ

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C \text{ იქნება ზოგადი ამონახსნი;}$$

ბ) თუ განტოლება ამოხსნება y -ის მიმართ, მაშინ $y=f(y')$ და $x = \int \frac{f'(p)dp}{p} +$

$+C$, $y=f(p)$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1035. $e^y(y'+1)=1.$

1036. $y'^2 = \frac{1-y^2}{y^4}.$

1037. $y=y'^2+y'^3.$

1038. $y=y'^2+2\ln y'.$

1039. $y=y'\ln y'.$

1040. $y=e^{y'} \cdot y'^2.$

განსაზღვრეთ y' და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1041. $yy'+y'^2=x^2+xy.$

1042. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0.$

1043. $y'^2 - \frac{xy}{a^2} = 0.$

1044. $y'^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0.$

§ 9. განსაკუთრებული წარტილები და ამონახსნები

1°. განსაკუთრებული წარტილები. $y'=f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წარტილები უნდა ვეძებოთ $f(x, y)$ ფუნქციის წყვეტის წარტილებსა და იმ წარტილებს შორის, სადაც არ არსებობს $\frac{\partial f}{\partial y}$ კერძო წარმოებული.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების განსაკუთრებული წარტილები:

1045. 1) $y' = \frac{2y}{x}$; 2) $y' = \frac{y}{x}.$

1046. $y' = -\frac{x}{y}.$

1047. $y' = -\frac{y}{x}.$

1048. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

2°. განსაკუთრებული ამონახსნები. $F(x, y, y')=0$ განტოლებას, ზოგადი $\Phi(x, y, C)=0$ ინტეგრალისა და კერძო ინტეგრალის გარდა, შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებული ინტეგრალი, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან მუდმივის არაერთი კერძო მნიშვნელობისათვის.

განსაკუთრებული ამონახსნი გეომეტრიულად $\Phi(x, y, C)=0$ წირთა ოჯახის მომვლდება. ის მიიღება C -ს გამორიცხვით

$$\Phi(x, y, C)=0, \Phi'_C(x, y, C)=0$$

განტოლებათა სისტემიდან, ან კიდევ $p=y'$ -ის გამორიცხვით

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან.

იპოვეთ ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

$$1049. y^2 = 4(y-1). \quad 1050. 9yy'^2 - 4 = 0.$$

$$1051. y^2(1+y^2) = a^2. \quad 1052. y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

1053. იპოვეთ $y'^2 + y^2 = 1$ განტოლების ინტეგრალური წირი, რო-

მელიც გადის $M(0; \frac{1}{2})$ წერტილზე.

1054. იპოვეთ $y'^2 + y = 1$ განტოლების ორი ინტეგრალური წირი, რომლებიც გადიან $M(1; \frac{3}{4})$ წერტილზე.

§ 10. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

1°. ლაგრანჟის განტოლება. ლაგრანჟის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

სადაც $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ წარმოადგენს y' წარმოებულის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, რომელთაგან $\varphi(y') \neq y'$. $y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიჯანება წრფივ განტოლებამდე.

2°. კლეროს განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = xy' + \psi(y').$$

$y = Cx + \psi(C)$ წარმოადგენს კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს;

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან p -ს გამორიცხვა ვეძღვევს კლეროს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლებები:

$$1055. y = 2xy' - y'^2. \quad 1056. y = 2xy' + \frac{1}{y'}.$$

$$1057. y = x(1+y') + y'^2. \quad 1058. y = 2xy' + \sin y'.$$

$$1059. y = xy'^2 + y'^2. \quad 1060. 2y(y'+2) = xy'^2.$$

იპოვეთ კლეროს განტოლების ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

$$1061. y = xy' + y'^2. \quad 1062. y = xy' + \frac{1}{y'}.$$

$$1063. y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}. \quad 1064. y = xy' + \frac{1}{2y'^2}.$$

$$1065. y = xy' + y' - y'^2. \quad 1066. y = xy' + y' + e^{y'}.$$

§ 11. იზოგონალური და ორთოგონალური კონფორმები.
 ევოლვენტები

თუ მოცემულია წირთა ოჯახი

$$F(x, y, a) = 0 \quad (1)$$

სადაც a პარამეტრია, მაშინ ისეთ წირთა ოჯახს, რომლის ყოველი წირი მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს ერთი და იმავე α კუთხით, ეწოდება მოცემული ოჯახის იზოგონალური ტრანსექტორიები. კერძოდ, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, მივიღებთ ორთოგონალურ ტრანსექტორიებს.

თუ $\Phi(x, y, y') = 0$ არის (1) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრანსექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისად არის:

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \quad \Phi\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0 \quad (k = \lg \alpha).$$

ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე წირის ევოლენტის განტოლება

$$y_c = f(x_c)$$

და საძიებელია თვით წირი, ე. ი. ევოლვენტა. თუ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f'(x_c)}, \quad \frac{y - f(x_c)}{x - x_c} = f'(x_c)$$

განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხავთ x_c პარამეტრს, მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ამონახსნი მოგვცემს ევოლვენტების ოჯახს.

იპოვეთ ორთოგონალური ტრანსექტორიები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

1067. $y^2 = ax$.

1068. $xy = a$.

1069. $x^2 + y^2 = a^2$.

1070. $ay^2 = x^3$.

1071. $x^2 + 2y^2 = a^2$.

1072. $x^2 + y^2 + 2ay = 0$.

1073. იპოვეთ $\frac{x^2}{1+a} + \frac{y^2}{a} = 1$ კონფოკალური ელიფსების ორთოგონალური ტრანსექტორიები ($a > 0$, ფოკუსები მოთავსებულია $F(\pm 1; 0)$ წერტილებში).

1074. იპოვეთ ისეთი ელიფსების ორთოგონალური ტრანსექტორიები, რომლებსაც საერთო აქვთ დიდი ღერძი ($2a$ -ს ტოლი).

1075. იპოვეთ $r = 2a \sin \varphi$ ოჯახის ორთოგონალური ტრანსექტორიები.

1076. იპოვეთ $r = a(1 + \cos \varphi)$ კარდიოიდების ოჯახის ორთოგონალური ტრანსექტორიები.

1077. იპოვეთ $y = Cx$ წრფეთა ოჯახის იზოგონალური ტრანსექტორიები, რომლებიც მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს α კუთხით, სადაც $\lg \alpha = k$.

1078. იპოვეთ წირები, რომლებიც $r = ae^{\varphi}$ ლოგარითმული სვეების ოჯახის წირებს კვეთს $\alpha = \frac{\pi}{4}$ კუთხით.

1079. იპოვეთ $4x^2 - 27 - x^2 = 0$ წირის ევოლვენტა.

1080. იპოვეთ $y_c = \frac{x^2 c}{2h}$ წირის ევოლვენტა, სადაც h მუდმივია.

1081. იპოვეთ $x_c^2 + y_c^2 = a^2$ წრეწირის ევოლვენტა.

1082. იპოვეთ $8(x_c - 1)^3 - 27y_c^2 = 0$, წირის ევოლვენტა.

§ 12. ამოცანები კირველი რივის დიფერენციალურ
ანგოლაჟათა შედეგებაზე

1083. იპოვეთ წირი, რომლის მხების სიგრძე შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორის ტოლია.

1084. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა უდრის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის ჯამს.

1085. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა არის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის საშუალო არითმეტიკული.

1086. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის აბსცისათა ღერძზე ჩამოჭრის $\frac{y^2}{x}$ სიდიდის მონაკვეთს.

1087. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a -ს ტოლია.

1088. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a -ს ტოლია.

1089. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, მუდმივი a სიდიდეა.

1090. იპოვეთ წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი უდრის ამ წერტილის რადიუს-ვექტორს.

1091. იპოვეთ წირი, თუ მხებქვეშას და ნორმალქვეშას ნახევარსხვაობა უდრის შეხების წერტილის აბსცისას.

1092. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის $M_0(3; 2)$ წერტილზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) მისი მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა; 2) მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე ორჯერ აღემატება შეხების წერტილის ორდინატს.

1093. იპოვეთ წირი, თუ მისი მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთია $a \sec \varphi$, სადაც φ არის კუთხე რადიუსვექტორსა და Ox ღერძს შორის.

1094. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე, თუ მისი ნორმალის მონაკვეთის შუაწერტილი მოთავსებულია $y^2 = ax$ პარაბოლაზე.

1095. იპოვეთ წირი, ა.უ ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია საკოორდინატო ღერძებით, საძიებელი წერტილის მახლობლად შეხების წერტილის ორდინატით, უღრის a^2 -ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(a; a)$ წერტილზე.

1096. იპოვეთ წირი, თუ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის OM რადიუსით, ამ წერტილზე გავლებული მხებითა და Ox ღერძით, უღრის 2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(2; -2)$ წერტილზე.

1097. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: თუ წირის ნებისმიერ $M(x, y)$ წერტილზე გავავლებთ კოორდინატთა ღერძების პარალელურ წრფეებს ამ ღერძების გადაკვეთამდე, მაშინ მიღებული მართკუთხედი გაიყოფა ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთის ფართობი (Ox ღერძთან მიმდებარე ნაწილის) ორჯერ მეტი იქნება მეორეზე. გამოყავით ის წირი, რომელიც გადის $M_0(2; 4)$ წერტილზე.

1098. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირის ნებისმიერი რკალთ, ორი ორდინატითა და Ox ღერძით, ამ რკალის სიგრძის პროპორციულია. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(0; a)$ წერტილზე.

1099. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი, ამასთან, არევის საშუალებით კონცენტრაცია თანაბარი რჩება მთელ რეზერვუარში. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 საათის შემდეგ?

1100. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში ჭურჭელში ჩადის b ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

1101. განსაზღვრეთ, რა დროის განმავლობაში დაიცვება წყლით სავსე კონუსური ჭურჭელი, რომლის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო კუთხე წვეროსთან $\alpha = 60^\circ$. კონუსის ძირში გაკეთებულია ხვრელი, რომლის ფართობიც უღრის $0,5$ სმ²-ს.

1102. D დიამეტრისა და H სიმაღლის მქონე წრიული ცილინდრული ჭურჭელი ავსებულია წყლით. გაიგეთ, რა დროის შემდეგ დაიცვება ჭურჭელი მის ძირში გაკეთებული ხვრელის საშუალებით, თუ ხვრელის დიამეტრია a ($D=18$, $H=1,5$ მ, $a=0,05$ მ).

§ 13. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

1°. $F(x, y^{(n)})=0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს უცნობ y ფუნქციასა და მის წარმოებულებს $(n-1)$ რიგამდე. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) როცა განტოლება ამოხსნება $y^{(n)}$ -ის მიმართ, მაშინ $y^{(n)} = f(x)$. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y = \overset{n\text{-ჯერ}}{\int} dx \dots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

ბ) როცა განტოლება ამოხსნება x -ის მიმართ, გვექნება $x = \varphi(y^{(n)})$. აღვნიშნოთ $y^{(n)} = p$, მაშინ $x = \varphi(p)$, ხოლო $y^{(n-1)} = \int p \varphi'(p) dp + C_1$. აქედან $(n-1)$ -ჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება მოგვცემს $y = f(p, C_1, C_2, \dots, C_n)$. ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება:

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1103. $y'' - x = 0$; $x=1, y=1, y'=2$.

1104. $y'' - 4 \cos 2x = 0$; $x=0, y=0, y'=0$.

1105. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x = \frac{\pi}{4}, y = \ln \sqrt{2}, y' = 1$.

1106. $y'' = \frac{6}{x^3}$; $x=1, y=2, y'=1, y''=1$.

1107. $y'' = e^{-x}$; $x=0, y=0, y'=0, y''=0$.

1108. $y'' = e^{2x+1}$. 1109. $y'' = \sin x - \cos x$.

1110. $y'' \sin^4 x = \sin 2x$. 1111. $y'' = \ln x$.

1112. $y''^2 - 3y'' + 2 = 0$. 1113. $x = y''^3 + 1$.

1114. $x = e^{y''} + y''$.

2°. $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას. ამ შემთხვევაში $y' = p$ ჩასმით განტოლების რიგი ერთი ერთეულით დაიწევს:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

ასევე, $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ განტოლებაში $y^{(k)} = p$ ჩასმით განტოლების რიგი k ერთეულით დაიწევს:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

ბოლოს, თუ მოცემულია $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ განტოლება, მაშინ $y^{(n-1)} = p$ ჩასმით მიიღება პირველი რიგის განტოლება

$$F(x, p, p') = 0.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1115. $xy'' + y' = x^2$. 1116. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

1117. $x^2 y'' + xy' = 1$. 1118. $y'' + y' \lg x = \sin 2x$.

1119. $y''(x^2+1) = 2xy'$; $x=0, y=1, y'=3$.

1120. $xy'' + xy'^2 - y' = 0$; $x=2, y=2, y'=1$.

1121. $x y'' + y' = 3x + 1$. 1122. $x^2 y'' = y''^2$.

4°. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ სახის განტოლება. $y^{(n-1)}=p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებამდე.

ამონხენით განტოლებები:

$$1123. y''^2 = y'.$$

$$1124. y^{IV} + y'' = 0.$$

$$1125. y''' = y''^3.$$

$$1126. y'' = (1 + y')^{\frac{3}{2}}.$$

4°. $F(y, y', y'')=0$ სახის განტოლება. $y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

იბოვეთ ზოგადი და კერძო ამონახსნები (იქ, სადაც მოცემულია საწყისი პირობები) შემდეგი განტოლებებისა:

$$1127. yy'' + y'^2 = 0.$$

$$1128. yy'' - y^2 y' - y'^2 = 0.$$

$$1129. (y-1)y'' - 2y'^2 = 0.$$

$$1130. 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$$

$$1131. 2yy'' - y'^2 = 0; \quad x = -1, \quad y = 4, \quad y' = 1.$$

$$1132. yy'' + y'^2 = 1; \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y' = 1.$$

5°. თუ $F(x, y, y', y'')=0$ განტოლებაში F ფუნქცია ერთგვაროვანია y უცნობი ფუნქციისა და მისი y', y'' წარმოებულების მიმართ, მაშინ $y' = yz$ ჩასმით განტოლების რიგი დაიწვეს ერთი ერთეულით.

$$1133. xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

$$1134. x^2 yy'' = (y - xy')^2.$$

$$1135. yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1136. xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

6°. მარტივი გარდაქმნებით დასწიეთ რიგი შემდეგ მავალითებში:

$$1137. yy'' = 2y'^2.$$

$$1138. \frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0.$$

$$1139. yy'' - y'^2 - y^2 = 0.$$

$$1140. yy'' - y'y'' = 0.$$

1141. იბოვეთ წირი, რომლის სიმრუდის რადიუსი მუდმივი a სიდიდის ტოლია.

1142. იბოვეთ წირი, რომლის სიმრუდის ρ რადიუსსა და ნორმალის A' მონაკვეთს შორის არსებობს დამოკიდებულება $\rho = \frac{N^3}{h}$, სადაც h მუდმივია.

§ 14. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

1°. ერთგვაროვანი განტოლება. n -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ ის პირველი ხარისხისაა უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. ამ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

სადაც $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — უწყვეტი ფუნქციები რაიმე ინტერვალში.

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x) = 0$, განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(x) \neq 0$, მაშინ განტოლებას არაერთგვაროვანი.

წრფივი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (3)$$

სადაც y_1, y_2, \dots, y_n (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია (ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა), ხოლო C_1, C_2, \dots, C_n — ნებისმიერი მუდმივები.

y_1, y_2, \dots, y_n ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი C_1, C_2, \dots, C_n მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ყოველი x -ისათვის აღნიშნულ შუალედში მართებულია ტოლობა:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \neq 0;$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

კერძოდ, მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (4)$$

დიფერენციალური განტოლების ორ y_1 და y_2 ამონახსნს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი λ რიცხვი, რომ

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{ანუ} \quad y_1 = \lambda y_2.$$

თუკი ფარდობა $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$, მაშინ აღნიშნულ ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი.

თუ ცნობილია (4) განტოლების კერძო ამონახსნი y_1 , მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

სადაც

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

გამოიკვლიეთ წრფივად დამოუკიდებელია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემები:

1143. $y_1 = x, y_2 = x + 1.$

1144. $y_1 = e^{ax} \sin bx, y_2 = e^{ax} \cos bx.$

1145. $y_1 = x, y_2 = x + 1, y_3 = x + 2.$

1146. $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 1.$

1147. $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3.$

1148. $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}.$

შეადგინეთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფუნდამენტური ამონახსნა:

1149. $y_1 = x, y_2 = x^2.$

1150. $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x.$

1151. $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x.$

1152. $y_1 = e^x, y_2 = xe^x.$

1153. $y_1=x^2$ და $y_2=x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=1$, $y'=0$.

1154. $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მესამე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=0$, $y'=-1$, $y''=2$.

ამოხსენით განტოლებები, თუ ცნობილია მათი თითო კერძო ამონახსნი:

$$1155. y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0; \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}.$$

$$1156. y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0; \quad y_1 = x.$$

$$1157. x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x.$$

$$1158. y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0; \quad y_1 = \sin x.$$

$$1159. y'' \sin^2 x - 2y = 0; \quad y_1 = \operatorname{ctg} x.$$

$$1160. x(1-x^2)y'' = 2y; \quad y_1 = \frac{x}{1-x}.$$

2°. არაერთგვაროვანი განტოლება. წრფივი არაერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \bar{y} + V$$

ფორმულით, სადაც \bar{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

თუ ცნობილია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა y_1, y_2, \dots, y_n , მაშინ შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$$

ფორმულით, სადაც $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან (ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

იპოვეთ შემდეგ არაერთგვაროვან განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი, თუ ცნობილია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი:

$$1161. x^2 y'' + xy' - y = x^2; \quad y_1 = x.$$

$$1162. x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3; \quad y_1 = x.$$

$$1163. xy'' - y' = x^2; \quad y_1 = x^2.$$

$$1164. y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = x - 1; \quad y_1 = e^x.$$

§ 15. მორა რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი
დიფერენციალური განტოლება

I. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (1)$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. კერძო ამონახსნებს მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (2)$$

აღვლი აქვს შემდეგ სამ შემთხვევას:

I. მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულა, ე. ი. $k_1 \neq k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ყრადი ფესვები: $k_1 = k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax}.$$

ამოხსენით განტოლებები:

$$1165. y'' - y' - 2y = 0.$$

$$1166. y'' - 4y' + 3y = 0.$$

$$1167. y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$1168. y'' - 9y = 0.$$

$$1169. y'' - y' = 0.$$

$$1170. y'' + 3y' = 0.$$

$$1171. 3y'' - 2y' - 8y = 0.$$

$$1172. \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

$$1173. y'' - 5y' + 4y = 0; \quad x=0, \quad y=5, \quad y'=8.$$

$$1174. 8y'' + 2y' - 3y = 0; \quad x=0, \quad y=-6, \quad y'=7.$$

$$1175. y'' + 2y' + y = 0.$$

$$1176. 4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

$$1177. 16y'' - 24y' + 9y = 0.$$

$$1178. 16y'' + 8y' + y = 0.$$

$$1179. y'' + 4y' + 4y = 0; \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad y' = -4$$

$$1180. y'' - 6y' + 9y = 0; \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 2.$$

$$1181. y'' + 2y' + 5y = 0. \quad 1182. y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$1183. y'' + y' + y = 0. \quad 1184. y'' + 4y' + 8y = 0.$$

$$1185. \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad 1186. y'' + y = 0.$$

$$1187. y'' + 4y = 0; \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 2.$$

$$1188. y'' + 2y' + 2y = 0; \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y' = 1.$$

პ. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება $y = \bar{y} + V$ ფორმულით, სადაც \bar{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

კერძო ამონახსნი მოიძებნება მუდმივების ვარიაციის მეთოდით. ზოგ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილი m -ური ხარისხის მრავალწევრია: $f(x) = P_m(x)$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ნულოვანი ფესვები. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომელსაც კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) მახასიათებელ განტოლებას აქვს l კერძადობის ნულოვანი ფესვა ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = x^l Q_m(x)$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ აგრეთვე m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია.

ამოხსენით განტოლებები:

$$1189. y'' - 4y' + 4y = x^2. \quad 1190. y'' - y = x^2 - x + 1.$$

$$1191. 3y'' - 2y' - y = x^2 + 1. \quad 1192. y'' + y' + y = 3x - 2.$$

$$1193. y'' + y' = 3. \quad 1194. y'' - 3y' = 2 - 6x.$$

$$1195. y'' - 2y' = x^2 - 1. \quad 1196. 2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

II. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = P_m(x)e^{ax},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m -ური ხარისხის მოცემული მრავალწევრი, ხოლო a მუდმივია. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = Q_m(x)e^{ax}$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, მისი უცნობა კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) a არის მახასიათებელი განტოლების l კერძადი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = x^l Q_m(x)e^{ax}$ სახით.

ამოხსენით განტოლებები:

1197. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

1198. $y'' + y = 4e^x$.

1199. $y'' - 2y' - y = 6xe^x$.

1200. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.

1201. $y'' - 2y' + y = e^x$.

1202. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

III. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = e^{ax} [P_p(x) \cos bx + Q_q(x) \sin bx],$$

სადაც $P_p(x)$ და $Q_q(x)$ შესაბამისად p და q ხარისხების მოცემული მრავალწევრებია, ხოლო a და b — ნამდვილი რიცხვები. მივიღოთ, რომ $p \geq q$, აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) $a \pm ib$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$V = e^{ax} [M_p(x) \cos bx + N_p(x) \sin bx]$$

სახით, სადაც $M_p(x)$ და $N_p(x)$ უცნობკოეფიციენტებიანი p ხარისხის მრავალწევრებია;

2) $a \pm ib$ არის მახასიათებელი განტოლების l წერადი ფესვი (შეორე რიგის განტოლებისათვის $l=1$), მაშინ

$$V = x^l e^{ax} [M_p(x) \cos bx + N_p(x) \sin bx].$$

ამოხსენით განტოლებები:

1203. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

1204. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.

1205. $y'' + y = 10e^x \sin 2x$.

1206. $y'' + 4y = 5 \sin 3x - 10 \cos 3x$.

1207. $y'' + y = \cos x$.

1208. $y'' + 4y = \sin 2x$.

თუ მოცემულია

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x),$$

განტოლება და V_1, V_2, \dots, V_n კერძო ამონახსნებია

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$\vdots$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_n(x)$$

განტოლებებისა, მაშინ $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ ჯამი იქნება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1209. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.

1210. $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

1211. $y'' - y = \cos x \cos 3x$.

1212. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

1213. $y'' - y' = 2(1-x); x=0, y=1, y'=1$.

1214. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}; x=0, y=0, y'=0$.

1215. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x; x=0, y=2, y'=2$.

1216. $y'' + y = -\sin 2x; x=\pi, y=1, y'=1$.

როდესაც $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ერთ-ერთი ზემოთ აღნიშნული სახე, საჭიროა მივმართოთ ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდს.

ამოსხენით შემდეგი განტოლებები:

$$1217. y'' + y = 1 \lg x.$$

$$1218. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$1219. y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$1220. y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

1221. იპოვეთ $y'' - y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x$ წრფეს (0; 0) წერტილში.

1222. იპოვეთ $y'' + 2y' + 2y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x + 1$ წრფეს (0; 1) წერტილში.

1223. იპოვეთ $y'' - 4y' + 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x + 2$ წრფეს (0; 2) წერტილში.

1224. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w = -\frac{5}{4}s - v$, როცა $t = 0$, მაშინ $s = 0$ და $v = 2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

1225. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w = -4s + 2$ და $v = 2t$, როცა $t = 0$, მაშინ $s = 0$ და $v = 2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

1226. მატერიალური m წერტილი თავისუფლად ვარდება სიმძიმის ძალის გავლენით. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, თუ ჰაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში არ მივიღებთ. საწყისი $t = 0$ მომენტში წერტილის სიჩქარეა v_0 , ათვლის ადგილიდან მისი დაშორება კი y_0 .

1227. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ვარდება 10 მ სიმაღლიდან $v_0 = 0$ საწყისი სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ დაეარდება სხეული მიწაზე?

1228. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ზემოთ $v_0 = 1$ მ წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 16. n -ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

1°. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

სადაც a_1, a_2, \dots, a_n მუდმივებია.

თუ $y_1, y_2, \dots, y_n(1)$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_n ნებისმიერი მუდმივებია. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოიხსნას მახასიათებელი განტოლება:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3)$$

ადგოლი აქვს შემდეგ შემოხვევებს:

I. მახასიათებელი განტოლების k_1, k_2, \dots, k_n ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ (I) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი წერადი ფესვები; ვთქვათ, k_1 არის p წერადობის ფესვი ($p < n$, ე. ი. $k_1 = k_2 = \dots = k_p$), ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნა იქნება:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}) e^{k_1 x} + C_{p+1} e^{k_{p+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ, $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივია და ნამდვილია, მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნა იქნება:

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax} + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

IV. მახასიათებელ განტოლებას აქვს წერადი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$ არის მახასიათებელი განტოლების p წერადობის ფესვები ($2p < n$), ხოლო დანარჩენი ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნა იქნება:

$$y = e^{ax} (A_1 + A_2 x + \dots + A_p x^{p-1}) \cos bx + e^{ax} (B_1 + B_2 x + \dots + B_p x^{p-1}) \sin bx + C_{2p+1} e^{k_{2p+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1229. $y''' - 5y'' + 6y' = 0.$

1230. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

1231. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

1232. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

1233. $y''' - 13y'' - 12y = 0.$

1234. $y''' - y' = 0.$

1235. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$

1236. $y^V - 10y''' + 9y' = 0.$

1237. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$

1238. $y''' - 3y'' + 4y = 0.$

1239. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

1240. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

1241. $y^{IV} + 2y'' + y' = 0.$

1242. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0.$

1243. $y''' - 8y = 0.$

1244. $y''' + y = 0.$

1245. $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0.$

1246. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

1247. $y^{IV} - 16y = 0.$

1248. $y^{IV} + y' = 0.$

1249. $y^{IV} + 4y = 0.$

1250. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

1251. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0.$

1252. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

1253. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

1254. $y^{IV} + 6y'' + 9y = 0.$

1255. $y^V + 8y''' + 16y' = 0.$

1256. $y^{IV} + 2y'' + 3y' + 2y + y = 0.$

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

1257. $y'' + y' = 0; x=0, y=2, y'=0, y''=-1.$

1258. $y''' - y' = 0; x=2, y=1, y'=0, y''=0.$

$$1259. y^{IV} - y = 0; \quad x=0, \quad y=1, \quad y'=1, \quad y''=1, \quad y'''=1.$$

$$1260. y^V - y' = 0; \quad x=0, \quad y=0, \quad y'=1, \quad y''=0, \quad y'''=1, \quad y^{IV}=2.$$

2°. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \overline{y} + V$$

ფორმულით, სადაც \overline{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებას ზოგადი ამონახსნი, ხოლო V — მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$1261. y'' - y = x^3 - 1.$$

$$1262. y'' - y'' = -3x + 1.$$

$$1263. y'' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$$

$$1264. y^{IV} - 2y'' + y = x^2.$$

$$1265. y'' + y'' + y' + y = xe^x.$$

$$1266. y'' - 3y' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}.$$

$$1267. y'' - 2y'' + y' = e^x.$$

$$1268. y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$$

$$1269. y^{IV} + 4y = \sin 2x.$$

$$1270. y^{IV} + y'' = \cos 4x.$$

$$1271. y'' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

$$1272. y^{IV} - y = xe^x + \cos x.$$

$$1273. y'' + y' = \lg x \cdot \sec x.$$

{ ლაგრანჟის მეთოდით.

$$1274. y''' + y'' = x^2.$$

$$1275. y'' - y' = 3(2 - x^2); \quad x=0, \quad y=1, \quad y'=1, \quad y''=1.$$

$$1276. y'' + 2y'' + 2y' + y = x; \quad x=0, \quad y=0, \quad y'=0, \quad y''=1.$$

§ 17. ეილერის განტოლება

ეილერის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

სადაც a_1, a_2, \dots, a_n მუდმივებია. $x = e^t$ ჩასმით ეილერის განტოლება დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებთან დიფერენციალურ განტოლებად.

ამოხსენით განტოლებები:

$$1277. x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

$$1278. x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

$$1279. x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

$$1280. x^2 y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

$$1281. x^2 y'' - xy' + y = 2x.$$

$$1282. x^2 y'' - 2y = 2x \ln x.$$

$$1283. (x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$$

$$1284. (x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 4y = (x+1)^3.$$

თუ გვაქვს მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

მაშინ $y = e^{-\int \frac{a_1(x)}{2} dx}$ ჩასმით მივიღებთ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს

უცნობი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულს. იგივე ჩასმა გამოდგება აგრეთვე არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის.

ამოხსენით განტოლებები:

1285. $y'' - 2xy' + x^2y = 0$.

1286. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$.

1287. $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2$.

1288. $xy'' + 2y' - xy = e^x$.

§ 18. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება
ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით

თუ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შეუძლებელია ან დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, მაშინ მისი ამონახსნი ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n. \quad (1)$$

განუსაზღვრელი C_n ($n=0, 1, 2, \dots$) კოეფიციენტების მოსაძებნად საკმარისია (1) მწკრივი შევიტანოთ სათანადო დიფერენციალურ განტოლებაში და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილში ერთმანეთს გავუტოლოთ $(x-x_0)$ ორწევრის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები.

ამოხსენით განტოლებები:

1289. $y' = x + y; x=0, y=1$.

1290. $y' = y + x^2; x=0, y=-2$.

1291. $y' = x^2 + y^2; x=0, y=1$ (პირველი ოთხი წევრი).

1292. $y'' = 2xy' + 4y; x=0, y=0, y'=1$.

1293. $y'' - xy = 0; x=0, y=1, y'=0$.

1294. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0; x=0, y=1, y'=0$.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ აგრეთვე ტელიორის ან მაკლორენის მწკრივის საშუალებით:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \text{ან} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ამოხსენით განტოლებები:

1295. $y' = y^3 - x; x=0, y=1$.

1296. $y' = x^2y^2 - 1; x=0, y=1$.

1297. $y' = e^y + xy; x=0, y=0$.

1298. $y' = x^2 - y^2; x=0, y=0$ (პირველი ორი წევრი).

1299. $y'' = yy' - x^2; x=0, y=1, y'=0$.

1300. $y'' = e^y + x; x=0, y=1, y'=0$.

$$1807. \begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}; \end{cases} \quad y = -1, \quad z = 1, \quad \text{როცა } x = 0.$$

$$1808. \begin{cases} y' = \frac{y^2}{z}, \\ z' = y; \end{cases} \quad y = 1, \quad z = 1, \quad \text{როცა } x = 0.$$

$$1809. \begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0; \end{cases} \quad y = 1, \quad y' = 1, \quad z = 1, \quad z' = 0, \quad \text{როცა } x = 0.$$

$$1810. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases} \quad 1811. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases}$$

$$1812. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \quad 1813. \begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases} \quad 1814. \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + z, \\ z' = x + z - 4t. \end{cases}$$

ზოგ შემთხვევაში საჭიროა მოცემული სისტემა ჩაწეროთ სიმეტრიული ფორმით და ინტეგრება შევასრულოთ ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით.

ამოხსენით სისტემები:

$$1815. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

$$1816. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{xy}.$$

$$1817. \quad 1) \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\frac{1}{2}};$$

$$2) \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

$$1818. \quad \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

$$1819. \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}.$$

$$1820. \quad \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

დაიყვანეთ ნორმალურ სისტემაზე მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები:

$$1821. \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

$$1822. y'' = -\frac{y'}{x} - y.$$

$$1823. y''' = y.$$

$$1824. y^{IV} = -x^2y.$$

ამოხსენით მულტიკოეფიციენტებიანი სისტემები:

$$1825. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -6y - 3z. \end{cases}$$

$$1826. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - z, \\ \frac{dz}{dx} = 10y - 4z. \end{cases}$$

$$1827. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, & y = -1, z = 2, \text{ როცა } x = 0. \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z; \end{cases}$$

$$1828. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 2z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z; \end{cases} \quad y = 1, z = 1, \text{ როცა } x = 0.$$

$$1829. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$1830. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x}. \end{cases}$$

$$1831. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases}$$

$$1832. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$$

$$1833. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$$

$$1834. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y + 3z, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y - 4z, \\ \frac{dz}{dt} = -x - y - 2z. \end{cases}$$

მატრიცები

§ 1. მატრიცების შეკრება და გამრავლება

რიცხვთა ერთობლიობას, მოთავსებულს n სტრიქონისა და m სვეტის მართკუთხა ცხრილში, მართკუთხა მატრიცა ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ან მოკლედ $A = (a_{ij})$, ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$). a_{ij} რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ეწოდება. როცა $m=n$, მაშინ მატრიცა კვადრატულია; ამ შემთხვევაში n არის მატრიცის რიგი.

კვადრატული მატრიცებიდან აღსანიშნავია:

1. დიაგონალური მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. ერთეულოვანი მატრიცა (აღინიშნება E ასოთი):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. სამკუთხა მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის ნამრავლი k სკალარზე განმარტებულია შემდეგი ტოლობით:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

A და B მატრიცების $A+B$ ჯამი არის ისეთი შესავე მატრიცა, რომლის ელემენტები უდრის მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს.

თუ მოცემულია ორი მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

სადაც A მატრიცის სვეტების რაოდენობა უდრის B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას, მაშინ ამ მატრიცების AB ნამრავლი არის ისეთი C მატრიცა, რომლის c_{ij} ელემენ-

ტი წარმოადგენს A მატრიცის i -ური სტრიქონისა და B მატრიცის j -ური სვეტის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $AB=C$ და

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, p).$$

თუ A კვადრატული მატრიცაა, ხოლო E იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, მაშინ

$$AE = EA = A. \text{ საზოგადოდ } AB \neq BA. \quad -$$

$$1335. k=4, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ იპოვეთ } kA.$$

$$1336. k=-2, A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ იპოვეთ } kA.$$

იპოვეთ $A+B$, თუ:

$$1337. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1338. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $A-B$, თუ:

$$1339. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1340. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

$$1341. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1342. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1343. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad 1344. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1345. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \quad 1346. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ AB და BA ნამრავლები, თუ:

$$1347. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad 1348. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1349. A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (3 \ 4 \ 1 \ 5).$$

$$1350. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$1351. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$1352. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$1353. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$1354. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AE = ? \quad EA = ?$$

$$1355. A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$1356. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$1357. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -10 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & -21 & 28 \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$1358. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$1359. A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (AB)C = ?, A(BC) = ?$$

$$1360. A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A(B+C) = ?, AB+AC = ?$$

თუ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

მატრიცაში სტრიქონებს გადავანაცვლებთ სვეტებში და, პირიქით, სვეტებს — სტრიქონებში. მივიღებთ A მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

•დგლი აქვს შემდეგ ტოლობებს;

$$E' = E, (A')' = A, (AB)' = B' A'.$$

კვადრატულ $A = (a_{ij})$ მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ $a_{ij} = a_{ji}$. სიმეტრიული მატრიცის შემთხვევაში $A = A'$.

კვადრატული $A = (a_{ij})$ მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება ამ მატრიცის ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს და აღინიშნება $|A|$ სიმბოლოთი.

თუ A მატრიცა არ არის ვექტორ-სვეტი ან ვექტორ-სტრიქონი, მაშინ მისი ელემენტებისაგან შეიძლება შედგეს სხვადასხვა რიგის კვადრატული ქვემატრიცები. A მატრიცის რანგი არის იმ უდიდესი კვადრატული ქვემატრიცის რიგი, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ B მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$A \cdot B = E$$

პირობას, ეწოდება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და აღინიშნება A^{-1} -ით, ე. ი.

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

თუ $A = (a_{ij})$ კვადრატული მატრიცაა, ხოლო A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება, მაშინ

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება A მატრიცის მიკავშირებული მატრიცა. როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, გვაქვს:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

1361. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. აჩვენეთ, რომ $(AB)' = B' A'$.

$$1362. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ აჩვენეთ, რომ } (AB)' = B'A'.$$

$$1363. \text{ იპოვეთ } A^{-1}, \text{ თუ } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1364. \text{ იპოვეთ } A^{-1}, \text{ თუ } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1365. \text{ იპოვეთ } A^{-1}, \text{ თუ } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1366. \text{ იპოვეთ } A^{-1}, \text{ თუ } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

$$1367. 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1368. 1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1369. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad 1370. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1371. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1372. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1373. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \quad 1374. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1375. \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 4 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}. \quad 1376. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

მატრიცული სახით ასე ჩაიწერება:

$$AX=B,$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

სისტემის მატრიცაა, ხოლო

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

— ვექტორ-სვეტები როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, მაშინ (1) სისტემის ამონახსნია.

$$X = A^{-1}B = \frac{A^*B}{|A|}.$$

ამოსხენით შემდეგი სისტემები:

$$1377. \begin{cases} x+y+z=6, \\ 5x+4y+3z=22, \\ 10x+5y+z=23. \end{cases}$$

$$1378. \begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$$

$$1379. \begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$$

$$1380. \begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$$

$$1381. \begin{cases} x+y-z=-2, \\ 4x-3y+z=1, \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

$$1382. \begin{cases} 7x-5y=31, \\ 4x+11z=-43, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$$

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. A მატრიცას (1) სისტემის ძირითადი მატრიცა ეწოდება, ხოლო

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

მატრიცას — ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცა. კრონეკერ-კაპელის თეორემა შემდეგში მდგომარეობს: წრფივ განტოლებათა (1) სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძირითადი მატრიცის რანგი უდრიდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს: $r(A)=r(B)$.

თუ $r(A)=3$, მაშინ სისტემა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიძებნება მატრიცული მეთოდით ან კრამერის ფორმულებით.

თუ $r(A)=2$, მაშინ ადგილი აქვს ორ შემთხვევას:

ა) $r(B)=3$, ამ შემთხვევაში სისტემა არათავსებადია,

ბ) $r(B)=2$, ამ შემთხვევაში სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

თუ სისტემა თავსებადია, მაშინ მისი დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი უდრის A მატრიცის რანგს.

გამოიკვლიეთ შემდეგი სისტემები:

$$\begin{array}{l}
 1383. \begin{cases} x-2y+z=3, \\ x+3y-z=1, \\ 3x+4y-z=5. \end{cases} \\
 1385. \begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 2x-8y+5z=5. \end{cases} \\
 1387. \begin{cases} 5x-y+3z=2, \\ x-3y+2z=-1, \\ 4x+2y+z=7. \end{cases} \\
 1384. \begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+3y-2z=2, \\ 3x+2y+z=5. \end{cases} \\
 1386. \begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+5z=9. \end{cases} \\
 1388. \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x-7y+2z=6. \end{cases}
 \end{array}$$

ვთქვათ, მოცემულია ორი წრფივი გარდაქმნა:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z', \\ y'' = b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z', \\ z'' = b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z'. \end{cases}$$

წრფივი გარდაქმნა, რომელიც x'' , y'' , z'' -ს გამოსახავს x , y , z -ის საშუალებით, ასე ჩაიწერება:

$$X'' = BAX,$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ წრფივი გარდაქმნა, რომელიც x'' , y'' , z'' -ს გამოსახავს x , y , z -ის საშუალებით:

$$1389. \begin{cases} x' = 2x - y + 5z, \\ y' = x + 4y - z, \\ z' = 3x - 5y + 2z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = x' + 4y' + 3z', \\ y'' = 5x' - y' - z', \\ z'' = 3x' + 6y' + 7z'. \end{cases}$$

$$1390. \begin{cases} x' = 5x - y + 3z, \\ y' = x - 2y, \\ z' = 7y - z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = 2x' + z', \\ y'' = y' - 5z', \\ z'' = 2z'. \end{cases}$$

$$1391. \begin{cases} x' = x + 2y + 2z, \\ y' = -3y + z, \\ z' = 2x + 3z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = 3x' + y', \\ y'' = x' - 2y' - z', \\ z'' = 3y' + 2z'. \end{cases}$$

$$1392. \begin{cases} x' = x - 3y + 4z, \\ y' = 2x + y - 5z, \\ z' = -3x + 5y + z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = 4x' + 5y' - 3z', \\ y'' = x' - y' - z', \\ z'' = 7x' + 4z'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

წრფივი გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა ასე მოიძებნება:

$$X = A^{-1}X',$$

სადაც

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

იპოვეთ შებრუნებული გარდაქმნები შემდეგი წრფივი გარდაქმნებისა:

$$1898. \begin{cases} x' = 3x - y - z, \\ y' = 2x + y + 2z, \\ z' = x + 3y - 2z. \end{cases} \quad 1894. \begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = -x + 4y + 7z, \\ z' = 8x + y - z. \end{cases}$$

x , y და z გამოსახეთ x'' , y'' და z'' -ის საშუალებით (აქ $X = A^{-1} B^{-1} X''$):

$$1895. \begin{cases} x' = 4x + 3y + 2z, \\ y' = -2x + y - z, \\ z' = 3x + y + z \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = x' - 2y' - z', \\ y'' = 3x' + y' + 2z', \\ z'' = x' + 2y' + 2z'. \end{cases}$$

$$1896. \begin{cases} x' = 7x + 4z, \\ y' = 4y - 9z, \\ z' = 3x + y \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x'' = y' - 6z', \\ y'' = 3x' + 7z', \\ z'' = x' + y' - z'. \end{cases}$$

§ 3. კვადრატული მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები. მატრიცის მახასიათებელი განტოლება

რაიმე არანულოვან \vec{a} ვექტორს ეწოდება წრფივი A გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი, თუ

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}, \quad (1)$$

სადაც λ რაიმე ნამდვილი რიცხვია, რომელსაც წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი რიცხვი ეწოდება.

თუ A და \vec{a} მოცემულია შემდეგნაირად:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

მაშინ (1) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)l+a_{12}m+a_{13}n=0, \\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m+a_{23}n=0, \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)n=0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

განტოლებას ეწოდება A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება. ამ განტოლების ყოველი ნამდვილი λ ფესვი A გარდაქმნის საკუთრივი რიცხვია. λ რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კოორდინატები მოიძებნება (2) სისტემიდან. (2) სისტემის ამონახსნს ეწოდება ნორმირებული, თუ $l^2+m^2+n^2=1$; ამ შემთხვევაში

$\vec{a}(l, m, n)$ ერთეულოვანი ვექტორია.

თუ A მატრიცა სიმეტრიულია, მაშინ მისი საკუთრივი რიცხვები ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ურთიერთმართობულია. თუ ამ ვექტორებს მივიღებთ ბაზისურ ვექტორებად, მაშინ A მატრიცა მიიღებს დიაგონალურ სახეს

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

1397. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი ვექტორები.

1398. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი ვექტორები, სადაც $0 < \alpha < \pi$.

1399. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები.

1400. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

1401. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

1402. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ მატრიცა. განსაზღვრეთ, $\vec{P}_1(0; 1)$,

$\vec{P}_2(1; 0)$, $\vec{P}_3(1; -1)$, $\vec{P}_4(-1; -1)$ ვექტორებიდან რომელია A მატრიცის საკუთრივი ვექტორი და იპოვეთ შესაბამისი საკუთრივი რიცხვები.

1403. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები.

იპოვეთ ნორმირებული საკუთრივი ვექტორები შემდეგი მატრიცებისა:

1404. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 1405. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 1406. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

თუ $xOyz$ სისტემაში x, y, z ცვლადების მიმართ გვაქვს კვადრატული ფორმა

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

მაშინ ეს უკანასკნელი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

მატრიცის ნორმირებულ საკუთრივ ვექტორთა სისტემაში მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო x', y', z' — წერტილის ახალი კოორდინატები.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახემდე მეორე რიგის წირების განტოლებები:

1407. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 24$. 1408. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 20$.

1409. $11x^2 + 24xy + 4y^2 = 20$. 1410. $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$.

1411. $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 8x + 10y - 4 = 0$.

1412. $2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$.

1413. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

1414. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$.

დაიყვანეთ კანონიკურ სახემდე მეორე რიგის ზედაპირების განტოლებები:

1415. $5x^2 + 7y^2 + 6z^2 - 4xz - 4yz - 9 = 0$.

1416. $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz - 32 = 0$.

1417. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 24 = 0$.

1418. $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 5 = 0$.

1419. $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$.

1420. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 28 = 0$.

1421. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + x + y + 2z = 0$.

1422. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

ველის თეორიის ელემენტები

§ 1. წარმოებული მოცემული მიმართულებით. გრადიენტი

სკალარული $U=f(x, y, z)$ ფუნქციის წარმოებული l მიმართულებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

სადაც α , β და γ აღნიშნავს კუთხეებს l მიმართულებასა და საკოორდინატო ღერძებს შორის.

$z=f(x, y)$ ფუნქციის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

სადაც α არის კუთხე l მიმართულებასა და Ox ღერძს შორის.

$U=f(x, y, z)$ ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომლის გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე არის $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$; იგი აღინიშნება ასე:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

ეს ტოლობა ასეც ჩაიწერება:

$$\text{grad } U = \nabla U,$$

სადაც $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ არის ნაბლა ოპერატორი.

ფუნქციის წარმოებული მოცემული l მიმართულებით ფუნქციის გრადიენტთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad } U \cdot \vec{n} = |\text{grad } U| \cos \theta,$$

სადაც \vec{n} ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) არის l მიმართულების მგეზავი, ხოლო θ — კუთხე გრადიენტსა და \vec{n} მგეზავს შორის. ცხადია, რომ

$$\max \frac{\partial U}{\partial l} = |\text{grad } U|.$$

1428. იპოვეთ $z=3x^4-xy^3+y^3$ ფუნქციის წარმოებული $M(1;2)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 60° -იან კუთხეს.

1424. იპოვეთ $z=2x^2-3y^2$ ფუნქციის წარმოებული $M(1; 0)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 120° -იან კუთხეს.

1425. იპოვეთ $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ ფუნქციის წარმოებულ $M(1; 2)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს $Q(4; 6)$ წერტილთან.

1426. იპოვეთ $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ ფუნქციის წარმოებულ $M(2; 1)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს $Q(5; 5)$ წერტილთან.

1427. იპოვეთ $u = x^2 + y^2 + z^2$ ფუნქციის წარმოებულ $M(1; 1; 1)$ წერტილში \vec{i} ($\cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos 60^\circ$) მიმართულებით.

1428. იპოვეთ $u = x^2 - 3yz + 5$ ფუნქციის წარმოებულ $M(1; 2; -1)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც კოორდინატთა ღერძებთან ტოლ მახვილ კუთხეებს ადგენს.

1429. იპოვეთ $u = xy + yz + zx$ ფუნქციის წარმოებულ $M(2; 1; 3)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც ამ წერტილს აერთებს $Q(5; 5; 15)$ წერტილთან.

1430. იპოვეთ $u = xyz$ ფუნქციის წარმოებულ $M(5; 1; -8)$ წერტილში იმ მიმართულებით, რომელიც ამ წერტილს აერთებს $Q(9; 4; 4)$ წერტილთან.

1431. იპოვეთ $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ ფუნქციის წარმოებულ $M(1; 1; 1)$ წერტილში $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ვექტორის მიმართულებით.

იმ წერტილს, რომელშიაც ფუნქციის წარმოებულ ნულის ტოლია ნებისმიერი მიმართულებით, ეწოდება ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილი.

იპოვეთ სტაციონარული წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1432. z = x^3 + y^3 - 3xy. \quad 1433. z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y.$$

1434. აჩვენეთ, რომ $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ ფუნქციის წარმოებულ $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ წერტილში ნულის ტოლია ნებისმიერი მიმართულებით.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა, სადაც U და V წარმოებადი ფუნქციებია, ხოლო C მუდმივია:

$$1435. 1) \operatorname{grad}(U+V) = \operatorname{grad}U + \operatorname{grad}V; \quad 2) \operatorname{grad}(CU) = C \operatorname{grad}U; \\ 3) \operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad}V + V \operatorname{grad}U; \quad 4) \operatorname{grad}(U^n) = nU^{n-1} \operatorname{grad}U.$$

$$1436. 1) \operatorname{grad}(C+U) = \operatorname{grad}U; \quad 2) \operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \operatorname{grad}U - U \operatorname{grad}V}{V^2};$$

$$3) \operatorname{grad}[\varphi(U)] = \frac{d\varphi}{dU} \operatorname{grad}U.$$

$$1437. \text{იპოვეთ: } 1) \operatorname{grad} r; \quad 2) \operatorname{grad} r^2; \quad 3) \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \text{ თუ}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1438. იპოვეთ $\text{grad } z$, თუ $z = \varphi(u, v)$, ხოლო $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

1439. იპოვეთ და ააგეთ $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$ ფუნქციის გრადიენტი $M(1; 2)$ წერტილში.

1440. იპოვეთ და ააგეთ $z = x^2y$ ფუნქციის გრადიენტი $M(1; 1)$ წერტილში.

1441. იპოვეთ $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ფუნქციის გრადიენტი $M(5; 3)$ წერტილში.

1442. იპოვეთ $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ ფუნქციის გრადიენტი $M(2; 1)$ წერტილში.

1443. იპოვეთ $|\text{grad } U|$ $M(1; 2; 3)$ წერტილში, თუ $U = xyz$.

1444. იპოვეთ $|\text{grad } U|$ $M(2; 2; 4)$ წერტილში, თუ $U = x^y - z$.

1445. იპოვეთ $u = x^2 + y^2 + z^2$ ფუნქციის წარმოებული $M(1; 1; 1)$ წერტილში ამ ფუნქციის გრადიენტის მიმართულებით.

1446. იპოვეთ კუთხე $U = \sqrt{x^2 + y^2}$ და $V = x - 3y + \sqrt{3xy}$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M(3; 4)$ წერტილში.

1447. იპოვეთ კუთხე $U = x^2 + y^2 - z^2$ და $V = \arcsin \frac{x}{x+y}$ ფუნქციების გრადიენტებს შორის $M(1; 1; \sqrt{7})$ წერტილში.

1448. იპოვეთ კუთხე $z = \ln \frac{y}{x}$ ფუნქციის გრადიენტებს შორის $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ და $M_2(1; 1)$ წერტილებში.

§ 2. ვექტორული ველის დივიდენცია და როტორი

ვექტორული $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ ველის დივიდენცია ეწოდება $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ გამს და ასე ჩაიწერება:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

∇ ოპერატორის გამოყენებით გვექნება:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

ამ აღნიშვნებში გაუსის ფორმულა

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv,$$

სადაც $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ წარმოადგენს S ზედაპირის გარე ნორმალის მგებავს.

\vec{F} ვექტორის როტორი ასე აღინიშნება:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

∇ ოპერატორის გამოყენებით დაწვრივთ

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

ხოლო სტოქსის ფორმულა

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] ds$$

მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds.$$

\vec{F} ვექტორის წირითი ინტეგრალი L კონტურის გასწვრივ $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ გამოსახავს \vec{F}

ვექტორის ველის მუშაობას. თუ L შეკრული წირია, მაშინ $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ინტეგრალს

ეწოდება \vec{F} ვექტორის ველის ცირკულაცია L კონტურის გასწვრივ.

\vec{F} ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციური, თუ ველის ყოველ წერტილზე $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. ამ შემთხვევაში არსებობს U პოტენციალი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$U = \int_{M_0}^{M_1} P dx + Q dy + R dz,$$

სადაც $M_0(x_0, y_0, z_0)$ რომელიმე ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $M(x, y, z)$ — ცვალებადი წერტილი.

\vec{F} ვექტორულ ველს ეწოდება სოლენოიდური, თუ ყოველ წერტილზე ველის ვექტორი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

თუ ველი ერთდროულად პოტენციალური და სოლენოიდურია, მაშინ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = 0$ და პოტენციალური U ფუნქცია წარმოადგენს ჰარმონიულ ფუნქციას, ე. ი. აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

ანუ $\Delta U = 0$, სადაც $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ლაპლასის ოპერატორია.

დამტკიცეთ მართებულობა შემდეგი ტოლობებისა:

1449. 1) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{\Phi}) = \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{div}\vec{\Phi}$, სადაც \vec{F} და $\vec{\Phi}$ ვექტორული ფუნქციებია;

2) $\operatorname{div}(U\vec{c}) = \operatorname{grad}U \cdot \vec{c}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა, ხოლო \vec{c} მუდმივი ვექტორია;

3) $\operatorname{div}\vec{F}(f) = \operatorname{grad}f \cdot \frac{d\vec{F}}{df}$, სადაც \vec{F} არის f სკალარული ფუნქციის ვექტორული ფუნქცია.

1450. 1) $\operatorname{div}(U \cdot \vec{F}) = U \operatorname{div}\vec{F} + \operatorname{grad}U \cdot \vec{F}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა:

2) $\operatorname{div}(r\vec{c}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{r}}{r}$, სადაც \vec{c} მუდმივი ვექტორია, $\vec{r} = xi + yj + zk$, ხოლო $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

3) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{\Phi}) = \vec{\Phi} \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \operatorname{rot}\vec{\Phi}$.

1451. 1) $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{\Phi}) = \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{\Phi}$;

2) $\operatorname{rot}(U \cdot \vec{c}) = \operatorname{grad}U \times \vec{c}$, სადაც \vec{c} მუდმივი ვექტორია;

3) $\operatorname{rot}\vec{F}(f) = \operatorname{grad}f \times \frac{d\vec{F}}{df}$.

1452. 1) $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}U \times \vec{F}$, სადაც U სკალარული ფუნქციაა;

2) $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$; სადაც $\vec{r} = xi + yj + zk$;

3) $\operatorname{rot}(r\vec{c}) = \frac{\vec{r} \times \vec{c}}{r}$, სადაც \vec{c} მუდმივი ვექტორია, ხოლო $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

იპოვეთ მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორები:

1453. 1) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})$;

2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U)$.

1454. 1) $\Delta(U \cdot V)$;

2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})$.

გამოთვალეთ:

1455. 1) $\operatorname{div} \vec{r}$; 2) $\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$; 3) $\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{r} \right)$, სადაც $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, ხოლო $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1456. 1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^2)$; 2) $\operatorname{div} f(r) \cdot \vec{r}$; 3) $\operatorname{div} f(r) \cdot \vec{c}$, სადაც \vec{c} მუდმივი ვექტორია.1457. იპოვეთ $\vec{F} = \vec{b} \times \vec{r}$ ველის დივერგენცია, სადაც $\vec{b} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.1458. იპოვეთ $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ ვექტორული ველის როტორი.1459. მოცემულია $U = xyz$ ფუნქცია და $\vec{F} = x^2\vec{i} - xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ვექტორი. $M(x, y, z)$ წერტილში გამოთვალეთ: 1) $\operatorname{grad} U$; 2) $|\operatorname{grad} U|$; 3) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$; 4) $\operatorname{rot} \vec{F}$.1460. მოცემულია სკალარული ველი $U = \operatorname{div}(xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k})$. იჩვენეთ, რომ $|\operatorname{grad} U| M(x, y, z)$ წერტილში უდრის ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე გორაკეცებულ მანძილს.1461. იპოვეთ $\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ სამკუთხედის გასწვრივ, რომელსაც ამოკვეთს საკოორდინატო სიბრტყეები $x + y + z = 1$ სიბრტყიდან, სიბრტყის იმ ნორმალის მიმართულებით, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.1462. იპოვეთ $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (z + y)\vec{j} + (2x + y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ სამკუთხედის გასწვრივ, რომელსაც ამოკვეთს საკოორდინატო სიბრტყეები $2x + y - z - 1 = 0$ სიბრტყიდან, სიბრტყის იმ ნორმალის მიმართულებით, რომელიც Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს.1463. იპოვეთ $\vec{F} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $y = x^2 + z^2$ ბრუნვის პარაბოლოიდის გარე ნაწილის გასწვრივ, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში და შემოსაზღვრულია $y = 1$ სიბრტყით ($0 \leq y \leq 1$).1464. იპოვეთ $\vec{F} = x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ სფეროს ზედაპირის იმ ნაწილის გასწვრივ, რომელიც მოთავსებულია პირველ ოქტანტში.1465. იპოვეთ $\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x^2 + y)\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ პირამიდის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომლის წვერობია $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ და $C(0; 0; 1)$ წერტილები.

1466. იპოვეთ $\vec{F} = x^2\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი იმ პირამიდის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომელსაც ქმნის $2x + y + z = 2$ სიბრტყე საკოორდინატო სიბრტყეებთან.

1467. გაუსის ფორმულის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი ნებისმიერი შეკრული S ზედაპირის გასწვრივ უდრის ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული სხეულის გასამკვცებულ მოცულობას.

1468. იპოვეთ $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$ ცილინდრის სრული ზედაპირის გასწვრივ.

1469. იპოვეთ $\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{j}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 = 9$, $z=0$, $z=y$ ($z \geq 0$) შეკრული ზედაპირის გასწვრივ.

1470. იპოვეთ $\vec{F} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ კონუსის სრული ზედაპირის გასწვრივ, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $z=1$ სიბრტყით ($0 \leq z \leq 1$).

1471. იპოვეთ $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ სფეროს ზედაპირის გასწვრივ.

1472. იპოვეთ $\vec{F} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ ვექტორის ველის ნაკადი $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს ზედაპირის გასწვრივ.

1473. გამოთვალეთ $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ვექტორის წირითი ინტეგრალი $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = ht$ ხრახნწირის გასწვრივ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

1474. გამოთვალეთ $\vec{F} = (x^2 + y^2 - 2Rx)\vec{i} + R(x + y)\vec{j}$ ვექტორის წირითი ინტეგრალი $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ წრეწირის გასწვრივ $O(0; 0; 0)$ წერტილიდან $A(R; R; 0)$ წერტილამდე.

1475. გამოთვალეთ $\vec{F} = -a \cos t \cdot \vec{i} - b \sin t \cdot \vec{j}$ ვექტორის ველის მუშაობა $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ელიფსის რკალის გასწვრივ, სადაც $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

1476. გამოთვალეთ $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ ვექტორის ველის მუშაობა $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალის გასწვრივ სადაც $0 \leq t \leq 2\pi$.

შემდეგ ორ ამოცანაში მოცემულია \vec{F} ვექტორი და (π) სიბრტყე, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეებთან ერთად ქმნის რაიმე პირამიდას. გამოთვალეთ \vec{F} ვექტორის ველის ცირკულაცია (π) სიბრტყის საკოორდინატო სიბრტყეებთან გადაკვეთის წრფეების გასწვრივ უშუალოდ და სტოქსის ფორმულის გამოყენებით. ამასთან, სტოქსის ფორმულაში

ინტეგრების ზედაპირად მიიღეთ სამი წახნაგი, რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეებზეა მოთავსებული.

$$1477. \vec{F} = x^2 \vec{i} - z^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}, \quad 2x + y + z = 2. \quad (\pi)$$

$$1478. \vec{F} = (x + z^2) \vec{i} + xz \vec{j} + 2xy \vec{k}, \quad 3x + 2y + z = 6. \quad (\pi)$$

1479. გამოთვალეთ $\vec{F} = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ შეკრული წირის გასწვრივ.

1480. გამოთვალეთ $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j} + z \vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$) შეკრული წირის გასწვრივ.

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სტოქსის ფორმულით.

1481. გამოთვალეთ $\vec{F} = x^2 y^2 \vec{i} + \vec{j} + z \vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ წრეწირის გასწვრივ; ზედაპირად მიიღეთ $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ნახევარსფერო.

1482. გამოთვალეთ $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც შედგება საკოორდინატო ღერძების მონაკვეთებისა და $x = R \cos^2 t$, $y = R \sin^2 t$ ასტროიდის რკალისაგან ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 0$).

1483. გამოთვალეთ $\vec{F} = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც მიიღება $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ ზედაპირისა და xOy სიბრტყის გადაკვეთით.

1484. გამოთვალეთ $\vec{F} = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$ ვექტორის ველის ცირკულაცია იმ შეკრული L წირის გასწვრივ, რომელიც მიიღება $x^2 + y^2 = 1$ და $x + y + z = 1$ ზედაპირების გადაკვეთით.

გამოარკვეთ, აქვს თუ არა მოცემულ ველს \vec{F} პოტენციალი და იპოვეთ U თუ იგი არსებობს:

$$1485. 1) \vec{F} = 6xy \vec{i} + (3x^2 - 2y) \vec{j}; \quad 2) \vec{F} = yz \vec{i} + zx \vec{j} + xy \vec{k}.$$

$$1486. 1) \vec{F} = (5x^2y - 4xy) \vec{i} + (3x^2 - 2y) \vec{j}; \quad 2) \vec{F} = (y+z) \vec{i} + (z+x) \vec{j} + (x+y) \vec{k}.$$

1487. აჩვენეთ, რომ $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია. იპოვეთ მისი პოტენციალი.

1488. აჩვენეთ, რომ $\vec{F} = f(r) \vec{r}$ ვექტორული ველი პოტენციალურია. იპოვეთ მისი პოტენციალი.

1489. აჩვენეთ, რომ $\vec{F} = \frac{2l}{r^2} (-y \vec{i} + x \vec{j})$ ვექტორული ველი სოლენოიდურია.

1490. იქნება თუ არა $\vec{F} = r(c \vec{\times} r)$ ვექტორული ველი სოლენოიდურია, სადაც c მუდმივი ვექტორია.

1491. აჩვენეთ, რომ $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ ვექტორული ველი იქნება სოლენოიდური მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $f(r) = \frac{c}{r^3}$, სადაც c მუდმივია.

1492. აჩვენეთ, რომ $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ ვექტორული ველი არის პოტენციალური და სოლენოიდური, ხოლო მისი პოტენციალი ჰარმონიული ფუნქციაა.

VII თ ა ვ ი

ალბათობის თეორიის ელემენტები

§ 1. ალბათობის უზუსალო გაითვალ

ალბათობის თეორიაში რაიმე მოვლენის მოხდენის ფაქტს ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა ეწოდება.

ხდომილობანი შეიძლება შემდეგ სამ სახედ დაიყოს: აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ყოველი ცდის ან დაკვირვების დროს მას ადგილი ექნება, მაშინ ასეთ ხდომილობას აუცილებელს უწოდებენ.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ცდის ან დაკვირვების გამეორებისას მას არასოდეს არ ექნება ადგილი, მაშინ ასეთ ხდომილობას შეუძლებელს უწოდებენ.

თუ ხდომილობა ისეთია, რომ ამა თუ იმ ცდის ან დაკვირვების დროს მას შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი, მაშინ მას შემთხვევითი ხდომილობა ეწოდება.

ხდომილობის შემთხვევითის მიმართ არათავსებადი ეწოდება, თუ მათი ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია. პირიქით, თუ ხდომილობათა ერთდროულად მოხდენა შესაძლებელია, მაშინ მათ უწოდებთ თავსებადი ხდომილობანი.

თუ რომელიმე ხდომილობის მოხდენას ან არმოხდენას არაერთგვაროვანად გავლენა არა აქვს მეორის მოხდენაზე, მაშინ ასეთი ხდომილობანი ურთიერთდამოუკიდებელია. წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდომილობანი ურთიერთდამოკიდებულია.

რომელიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა ნიშნავს \bar{A} ხდომილობას არმოხდენას და აღინიშნება \bar{A} -თი.

თუ გვაქვს რამდენიმე ხდომილობა, რომელთაგან ერთ-ერთს აუცილებლად ექნება ადგილი, ხოლო ნებისმიერი ორის ერთდროულად მოხდენა შეუძლებელია, მაშინ ასეთი ხდომილობები ქმნიან წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობათა სრულ სისტემას.

ორი A და B ხდომილობის $A+B$ ჯამს მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ერთ-ერთი შესაყრება: ხდომილობა მაინც გვაქვს.

ორი A და B ხდომილობის AB ნამრავლს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ორივე ხდომილობა ერთდროულად გვაქვს.

A ხდომილობის ალბათობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

სადაც m არის ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვი, ხოლო n — ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი.

აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა ერთის ტოლია:

$$P(U) = 1.$$

შუქლებელი ხდომილობის ალბათობა ნულის ტოლია:

$$P(V) = 0$$

შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა არის დადებითი რიცხვი, რომელიც მოთაყვებულია 0-სა და 1-ს შორის:

$$0 < P(A) < 1.$$

A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე განისაზღვრება ფორმულით:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

სადაც m არის ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი, ხოლო n — ცდათა საერთო რიცხვი.

1493. ყუთში მოთავსებულია 50 ერთნაირი ბირთვი, რომელთაგან 5 წითელია. აქედან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი ფერის?

1494. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქალაქიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული კარტი იქნება ტუზი?

1495. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას ზედა მხარეზე გამოჩნდება ქულების ლუწი რიცხვი?

1496. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ორივეზე გამოჩნდება ქულების ერთნაირი რიცხვი?

1497. ყუთში მოთავსებულია 60 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 60-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვის ნომერი არ შეიცავს 5-იანს.

1498. პირველი ასი რიცხვიდან (1, 2, 3, ..., 100) შემთხვევით იღებენ ერთ რიცხვს; ხდომილობა A მდგომარეობს იმაში, რომ ამოღებული რიცხვი გაიყოფა 3-ზე, ხდომილობა B — იმაში, რომ ამოღებული რიცხვი გაიყოფა 4-ზე. გამოთვალეთ $P(A)$ და $P(B)$.

1499. ყუთში მოთავსებულია 80 ბირთვი, რომლებიც დანომრილია 1-დან 80-მდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვის ნომერი არ გაიყოფა არც 2-ზე და არც 3-ზე.

1500. ასაწყობად მიღებულია პირველ ავტომატზე დამზადებული 300 დეტალი და მეორე ავტომატზე დამზადებული 200 დეტალი. პირველი ავტომატი იძლევა 2% წუნდებულ დეტალს, ხოლო მეორე, — 3%-ს.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი იქნება წუნდებული.

1501. ყუთში მოთავსებულია 6 ერთნაირი კუბი. ყოველი კუბის ყველა წახნაგზე დაწერილია ერთ-ერთი შემდეგი ასო: ო, პ, რ, ს, ტ, ი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თითო-თითოდ ამოღებულ და ერთ ხაზზე დალაგებულ კუბებზე შეიძლება წავიკითხოთ სიტყვა „სპორტი“.

1502. ყუთში მოთავსებულია 5 ერთნაირი ქალაღი. თითოეულ ქალაღზე დაბეჭდილია ერთ-ერთი შემდეგი ასო: ა, კ, ი, დ, ც. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თითო-თითოდ ამოღებულ და ერთ ხაზზე დალაგებულ ქალაღებზე შეიძლება წავიკითხოთ სიტყვა „კაცი“.

1503. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა ერთი ციფრი და იგი შემთხვევით აკრიფა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სწორედ საჭირო ციფრია აკრეფილი.

1504. ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა ორი უკანასკნელი ციფრი და, ახსოვდა რა, რომ ეს ციფრები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, აკრიფა ისინი შემთხვევით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილია საჭირო ციფრები.

1505. წრეში ჩახაზულია კვადრატი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი კვადრატის შიგნით მოხვდება?

1506. ამოხსენით იგივე ამოცანა წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედისა და წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში (იხ. წინა ამოცანა).

1507. გაგორებულია ორი კამათელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ერთ-ერთ კამათელზე მაინც შაში (ექვსი წერტილი) გამოჩნდება.

1508. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქალაღიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი აუცილებლად რვიანი იქნება?

1509. საგამოცდო ბილეთებში შედის 40 საკითხი, რომელთაგან სტუდენტმა მოამზადა 30. რას უდრის ალბათობა იმისა, სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთი, რომელიც ორ საკითხს შეიცავს, შედგენილი იქნება მის მიერ მომზადებული საკითხებისაგან?

1510. ჭგუფში, რომელშიც 17 სტუდენტია და აქედან 8 ვაჟია, გათამაშდა 7 ბილეთი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ გათამაშებული ბილეთებიდან 4 შეხვდებოდა ვაჟებს?

1511. ყუთში 10 ერთნაირი ზომის ბირთვია, რომლებიც დანომრილია 1-დან 10-მდე. ყუთიდან რიგრიგობით იღებენ 5 ბირთვს ისე, რომ ერთხელ ამოღებულს უკან აღარ აბრუნებენ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ხუთივე ამოღებული ბირთვი იქნება ლუწი ნომრის?

1512. ყუთში 25 ბირთვია, რომელთაგან 10 შავია და 15 თეთრი. მათგან შემთხვევით იღებენ რომელიმე 5 ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აქედან 2 იქნება შავი?

1513. შემოწმებისას აღმოჩნდა, რომ შემთხვევით არჩეულ 100 დეტალში 5 იყო არასტანდარტული. რას უდრის არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე?

1514. მიზანში სროლისას მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე უდრის 0,85. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვი, თუ სულ 120-ჯერ გაისროლეს.

§ 2. ალბათობათა შეკრების თეორემა

თუ A_1, A_2, \dots, A_n წყვილ-წყვილად არათავსებადი ხდომილობანია, მაშინ

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

A და \bar{A} ურთიერთსაწინააღმდეგო ხდომილობათა ალბათობების ჯამი ერთის ტოლია, ე. ი.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ აქედან } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

ანუ $p + q = 1$, სადაც $p = P(A)$, $q = P(\bar{A})$.

თუ A_1, A_2, \dots, A_n არის ხდომილობათა სრული სისტემა, მაშინ

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$$

1515. ყუთში მოთავსებულია 60 ბირთვი, რომელთაგან 20 წითელია, 10 — ლურჯი და 30 — თეთრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი ან წითელი, ან ლურჯი ფერისაა.

1516. ყუთში 50 ბირთვია, რომელთაგან 30 წითელია, 10 — ყვითელი, 6 — შავი და 4 — თეთრი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი ან წითელი, ან შავი ფერისაა?

1517. A, B, C და D ხდომილობანი ადგენს სრულ სისტემას. A, B და C ხდომილობათა ალბათობანია: $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,3$. რას უდრის D ხდომილობის ალბათობა?

1518. A, B, C, D და E ხდომილობანი ადგენს სრულ სისტემას. A, B, C და D ხდომილობათა ალბათობანი შესაბამისად არის: 0,2; 0,1; 0,25 და 0,15. რას უდრის E ხდომილობის ალბათობა?

1519. მსროლელი ისვრის მიზანში, რომელიც სამ ნაწილად არის გაყოფილი. პირველ ნაწილში მოხვედრის ალბათობა არის 0,45, მეორეში — 0,35. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი გასროლით მსროლელი მოახვედრებს ან პირველ, ან მეორე ნაწილს.

1520. საომარ იარაღთა სამი საწყობის ასაფეთქებლად ისვრიან ერთ ყუმბარას. პირველ საწყობში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,01-ს, მეორეში — 0,008-ს, მესამეში — 0,025-ს. ერთ-ერთ საწყობში მოხვედრით მოხდება სამივე საწყობის აფეთქება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საწყობები აფეთქებული იქნება.

1521. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოაგროვებს 10 ქულას, უდრის 0,1-ს, 9 ქულას — 0,3-ს, 8 ქულას ან ნაკლებს — 0,6-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი გასროლით მსროლელი 9 ქულაზე ნაკლებს არ მოაგროვებს.

1522. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოაგროვებს 10 ქულას, უდრის 0,2-ს, 9 ქულას — 0,4-ს, 8 ქულას — 0,2-ს, 7 ქულას — 0,1-ს, 6 ქულას და უფრო ნაკლებს — 0,1-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით 8 ქულაზე ნაკლებს არ მოაგროვებს.

1523. ლატარიაში 10 000 ბილეთია. აქედან, 150 არის ნივთების მომგებიანი, ხოლო 50 — ფულის მომგებიანი. რომელიმე პიროვნება ყიდულობს ერთ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბილეთი იქნება მომგებიანი (სულ ერთია, ნივთების თუ ფულის)?

1524. ლატარიაში 1000 ბილეთია. ამათგან 1 ბილეთი ივებს 500 მანეთს, 10 ბილეთი — 100 მანეთს თითოეული, 50 ბილეთი — 20 მანეთს თითოეული, 100 ბილეთი — 5 მანეთს თითოეული, დანარჩენი ბილეთები არამომგებიანია. რომელიმე პიროვნება ყიდულობს ერთ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი 20 მანეთზე ნაკლებს არ მოიგებს?

1525. სახარატო დაზგის 20 გაჩერებიდან 10 გაჩერება გამოწვეულია საჭრისის გამოცვლის გამო. 3 — ამძრავის უწყესივრობის და 2 — ნამზადის არადროული მიწოდების გამო. სხვა გაჩერებები ხდება სხვადასხვა ტექნიკური მიზეზით. იპოვეთ დაზგის გაჩერების ალბათობა ამ უკანასკნელი შემთხვევისათვის.

1526. წრიული სამიზნე შედგება სამი ზონისაგან. პირველ ზონაში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას არის 0,15, მეორე ზონაში — 0,23, მესამეში — 0,17. რას უდრის აცდენის ალბათობა?

1527. სათამაშო ქალაქიდან (36 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი მაინც იქნება ტუზი?

1528. სათამაშო ქალაქიდან (52 კარტი) შემთხვევით იღებენ 3 კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ერთი მაინც იქნება ტუზი?

§ 3. ალბათობათა გამრავლების თეორემა

თუ A_1, A_2, \dots, A_n დამოუკიდებელი ხდომილობანია, მაშინ

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n),$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ამ ხდომილობებიდან ერთ-ერთს მაინც ექნება ადგილი (აღნიშნოთ ეს ხდომილობა A ასოთი), გამოითვლება ფორმულით:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots q_n,$$

სადაც q_1, q_2, \dots, q_n შესაბამისად $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ სწინააღმდეგო ხდომილობათა ალბათობებია.

კერძოდ, თუ A_1, A_2, \dots, A_n ხდომილობათა ალბათობები ერთმანეთის ტოლია და უდრის p -ს, მაშინ

$$P(A) = 1 - q^n.$$

თუ A და B ხდომილობანი დამოკიდებულია, მაშინ პირობითი ალბათობა $P_A(B)$ ეწოდება B ხდომილობის ალბათობას იმ დაშვებით, რომ A ხდომილობას უკვე ჰქონდა ადგილი.

ორი დამოკიდებული ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

სამი დამოკიდებული ხდომილობის შემთხვევაში გვაქვს:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

1529. ორი კომპლექტიდან თითო კარტს ვიღებთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე კარტი ჯვრისა იქნება (კომპლექტში 52 კარტია)?

1530. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ლითონის ორი ფულის აგდებისას ორივეზე ღერბი გამოჩნდება.

1531. აგდებულია ლითონის ფული და გაგორებულია კამათელი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად ლითონის ფულზე გამოჩნდება ღერბი, ხოლო კამათელზე — შაში.

1532. ორ ყუთში მოთავსებულია დეტალები: პირველში — 10, რომელთაგან 3 სტანდარტულია, მეორეში — 15, რომელთაგან 6 სტანდარტულია. ორივე ყუთიდან შემთხვევით იღებენ თითო დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დეტალი იქნება სტანდარტული.

1533. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მოახვედრებს მიზანში, უდრის 0,9-ს. მსროლელმა გაისროლა სამჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამივე გასროლა მოხვდება მიზანში?

1534. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი ერთი გასროლით მოახვედრებს მიზანში, უდრის 0,8-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მეორე მსროლელი მოახვედრებს მიზანში — 0,9-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი მოახვედრებს მიზანში.

1535. მიმდინარეობს სამხედრო ობიექტის დაბომბვა. მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,7-ს, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ბომბი არ აფეთქდება — 0,08-ს. იპოვეთ ობიექტის დანგრევის ალბათობა, თუ ჩამოგდებულია ერთი ბომბი.

1536. ორი მსროლელი ისვრის მიზანში თითოჯერ. პირველი მსროლელის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,7-ს, მეორის — 0,8-ს, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოახვედრებს: 1) ორივე; 2) მხოლოდ ერთი; 3) არც ერთი.

1537. საწარმოს მიერ დამზადებულ ნაკეთობათა 95% სტანდარტულია, აქედან 86% პირველი ხარისხისაა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ საწარმოს მიერ დამზადებული ნებისმიერი ნაკეთობა იქნება პირველი ხარისხის?

1538. ხელსაწყო შედგება სამი კვანძისაგან, რომელთაგან თითოეული სხვებისაგან დამოუკიდებლად, t დროის განმავლობაში შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან და ამით მწყობრიდან გამოვა მთელი ხელსაწყო. t დროის განმავლობაში პირველი კვანძის შეუფერხებელი მუშაობის ალბათობა $p_1 = 0,8$, მეორისა — $p_2 = 0,9$ და მესამის — $p_3 = 0,7$. იპოვეთ ხელსაწყოს შეუფერხებლად მუშაობის ალბათობა.

1539. მუშა ემსახურება ოთხ დაზგას. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში დაზგებს არ დასჭირდება მუშის ჩარევა, პირველი დაზგისათვის უდრის 0,3-ს, მეორისათვის — 0,4-ს, მესამისათვის — 0,7-ს, ხოლო მეოთხისათვის — 0,4-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში არც ერთი დაზგა არ მოითხოვდეს მუშის ჩარევას.

1540. სტამბაში ოთხი საბეჭდი მანქანაა. ყოველი მანქანისათვის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ის მუშაობს, უდრის 0,9-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში ერთი მანქანა მაინც იმუშაებს.

1541. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი კამათლის გაგორებისას ერთზე მაინც შაში მოვა?

1542. სამი მსროლელი ისვრის ერთსა და იმავე მიზანში. მოხვედრის ალბათობები შესაბამისად არის: $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,7$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში ერთ მოხვედრას მაინც ექნება ადგილი.

1543. მუშა ემსახურება სამ დაზგას, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მუშაობენ. ალბათობა იმისა, რომ ერთი საათის განმავლობაში დაზგებს არ დასჭირდება მუშის ჩარევა, პირველი დაზგისათვის უდრის 0,9-ს, მეორისათვის — 0,8-ს და მესამისათვის — 0,7-ს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამი დაზგიდან ერთი მაინც არ მოითხოვს მუშის ჩარევას ერთი საათის განმავლობაში.

1544. რაციონალური წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი დაწერილია შემთხვევით. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს წილადი არ შეიკვეცება 5-ზე?

1545. ყუთში მოთავსებულია ძაფები, რომელთა შორის 30% თეთრია, დანარჩენი კი — წითელი. იპოვეთ: 1) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი ძაფი ერთნაირი ფერისა იქნება; 2) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი ძაფი სხვადასხვა ფერისა იქნება.

1546. ყუთში 5 თეთრი და 7 შავი ბირთვია. აქედან შემთხვევით ორჯერ იღებენ თითო ბირთვს და უკან აღარ აბრუნებენ. იპოვეთ თეთრი ბირთვის ამოღების ალბათობა მეორე ცდისას, თუ პირველი ცდისას ამოღებული იყო შავი ბირთვი.

1547. 1) ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. აქედან რიგრიგობით იღებენ ნებისმიერ ორ ბირთვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბირთვი იქნება თეთრი; 2) იგივე პირობები, რაც წინა ამოცანაში, მხოლოდ პირველი ამოღების შემდეგ ბირთვი უკანვე ბრუნდება.

1548. ყუთში 2 თეთრი და 2 შავი ბირთვია. აქედან რიგრიგობით იღებენ ორ ბირთვს. განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ბირთვი იქნება თეთრი, ხოლო მეორე — შავი. განიხილეთ ორი შემთხვევა: 1) როცა ამოღებული ბირთვი უკანვე ბრუნდება; 2) როცა ამოღებული ბირთვი უკან აღარ ბრუნდება.

1549. ყუთში 100 თეთრი და 200 შავი ბირთვია. 100 თეთრი ბირთვიდან დაშტრიხულია 60, 200 შავი ბირთვიდან კი — 50. 1) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვი დაშტრიხულია, თუ ცნობილია, რომ იგი არის თეთრი; 2) ცნობილია, რომ ამოღებული ბირთვი დაშტრიხულია; რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ იგი არის თეთრი?

1550. 50 ნათურიდან 3 არასტანდარტულია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად აღებული ორი ნათურა არასტანდარტული იქნება.

1551. ერთი კომპლექტი სათამაშო ქალაღიდან (52 კარტი) შემთხვევით რიგრიგობით იღებენ ორ კარტს. ამოღებული კარტი უკან აღარ ბრუნდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ამოღებული კარტი ჯვრისა იქნება?

1552. ამწყობს 3 კონუსური და 7 ელიფსური ლილეაკი აქვს. მან შემთხვევით აიღო 2 ლილეაკი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღებული ლილეაკებიდან ერთი კონუსურია, ხოლო მეორე — ელიფსური.

1553. ფეხსაცმელების ფაბრიკაში დამზადებული ყოველი 100 წყვილი ფეხსაცმლიდან საშუალოდ 97 არის ვარგისი და მათგან 68 პირველი ხარისხისა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ვარგისი წყვილი ფეხსაცმელი იქნება პირველი ხარისხისა?

1554. 1) რომელიღაც ადგილზე მზიანი დღეების საშუალო რიცხვი ივლისის თვეში უდრის 25-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ივლისის პირველი ორი დღე იქნება მზიანი.

2) რომელიღაც ადგილზე წვიმიანი დღეების საშუალო რიცხვი აგვისტოს თვეში უდრის 11-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აგვისტოს პირველი ორი დღე იქნება წვიმიანი.

1555. ყუთში 5 თეთრი, 4 შავი და 3 ლურჯი ბირთვია. აქედან შემთ-

ხვევით იღებენ ერთ ბირთვს და უკან აღარ აბრუნებენ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველი ცდისას გამოჩნდება თეთრი, მეორე ცდისას — შავი და მესამე ცდისას — ლურჯი ბირთვი.

1556. უთუში 5 თეთრი და 20 შავი ბირთვია. აქედან ბირთვებს იღებენ მანამდე, სანამ არ გამოჩნდება თეთრი ბირთვი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ თეთრ ბირთვამდე ამოღებული იქნება 2 შავი ბირთვი.

§ 4. ნაბისმიერ ხდომილობათა ჯამის ალბათობა, სრული ალბათობა, აბისის ფორმულა

ორი ნებისმიერი ხდომილობის ჯამის ალბათობა უდრის შესაჯრებ ხდომილობათა ალბათობების ჯამს მინუს ორივეს ერთდროულად მოხდენის ალბათობა:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

თუ ხდომილობანი დამოუკიდებელია, მაშინ

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

დამოკიდებული ხდომილობებისათვის

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

თუ A და B ხდომილობანი არათავსებადია, მაშინ $P(AB) = 0$, რის გამოც

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

ვთქვათ, B_1, B_2, \dots, B_n არის ხდომილობათა სრული სისტემა, ხოლო A — ნებისმიერი ხდომილობა. თუ A ხდომილობას ადგილი ექნება, ის მოხდება მოცემული სისტემის ერთ-ერთ ხდომილობასთან ერთად. თუ ცნობილია ამ ხდომილობათა ალბათობები და პირობითი ალბათობები $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

ამ ფორმულას სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

ვთქვათ, B_1, B_2, \dots, B_n არის ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ A ხდომილობას ადგილი ჰქონდა ყოველ B_i ($i=1, 2, \dots, n$) ხდომილობასთან ერთად და ცნობილია ამ ხდომილობათა ალბათობები და $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ პირობითი ალბათობები, მაშინ B_i ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდა A ხდომილობას, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

ამ ფორმულას ბაიესის ფორმულა ეწოდება.

1557. ორი მსროლელი თითოჯერ ისვრის მიზანში. პირველი მსროლელის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,7, მეორე მსროლელისა კი — 0,6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი მსროლელი მაინც მოახვედრებს მიზანში.

1558. ერთი მსროლელი ყოველი 100 გასროლიდან საშუალოდ 90-ჯერ ახვედრებს მიზანში, მეორე კი იმავე პირობებში — 80-ჯერ. რას უდრის ორივე მსროლელის მიერ ერთდროული სროლისას მიზანში მიხვედრის ალბათობა?

1559. ორი კომპლექტი სათამაშო ქაღალდიდან (კომპლექტში 52 კარტია) შემთხვევით იღებენ თითო კარტს თითოეულიდან. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი მათგანი ჯვრის ათიანი იქნება?

1560. ყუთში 20 დეტალია: აქედან 16 დამზადებულია №1 ქარხანაში, ხოლო 4—№2 ქარხანაში. შემთხვევით ამოღებულია 2 დეტალი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი დეტალი მაინც დამზადებული იქნება №1 ქარხანაში.

1561. ყუთში 20 დეტალია: აქედან 6 დამზადებულია №1 ქარხანაში, 10—№2 ქარხანაში, ხოლო 4—№3 ქარხანაში. შემთხვევით ამოღებულია 2 დეტალი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი დეტალი მაინც აღმოჩნდება №1 ან №2 ქარხანაში დამზადებული?

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ სრული ალბათობის ფორმულით.

1562. ორი დაზვა ამზადებს ერთი და იმავე ტიპის დეტალებს. პირველი დაზვის წუნდებულობის ალბათობა უდრის 0,03-ს, მეორისა კი — 0,02-ს. დამუშავებულ დეტალებს ერთად აწყობენ; ამასთან, პირველ დაზვაზე ორჯერ მეტი დეტალია დამზადებული, ვიდრე მეორეზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად აღებული დეტალი არ იქნება წუნდებული.

1563. ორი ავტომატი ამზადებს დეტალებს, რომლებიც იგზავნება საერთო კონვეიერზე. პირველ ავტომატზე არასტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა უდრის 0,06-ს, მეორეზე კი — 0,09-ს. მეორე ავტომატი ორჯერ მეტ დეტალს ამზადებს, ვიდრე პირველი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კონვეიერიდან შემთხვევით აღებული დეტალი არასტანდარტული იქნება.

1564. ქარხანაში მოცემული სახის დეტალებს ამზადებს სამი ტიპის დაზგები. პირველი ტიპის დაზგები ამზადებს დეტალების 10 %, მეორე ტიპისა — 30 %-ს, ხოლო მესამე ტიპისა — 60 %-ს. პირველი ტიპის დაზგების წუნდებულობა 3 %-ია, მეორე ტიპისა — 1 %, ხოლო მესამე ტიპისა — 0,5 %. ერთ დღეში დამზადებულია 1000 დეტალი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად აღებული დეტალი იქნება წუნდებული?

1565. პირველი ავტომატიდან ასაწყობად მიღებულია დეტალების 40 %, მეორიდან — 30 %, მესამიდან — 20 %, მეოთხიდან — 10 %. პირველი ავტომატი იძლევა 0,1% წუნდებულ დეტალს, მეორე—0,2%-ს, მესამე — 0,25%-ს, ხოლო მეოთხე — 0,5%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი იქნება წუნდებული.

1566. მოცემულია დეტალების სამი პარტია: პირველ პარტიაში წუნდებული დეტალები 25%-ია, მეორე და მესამე პარტიაში ყველა დეტალი ვარგისია. ნებისმიერად არჩეული პარტიიდან შემთხვევით იღებენ ერთ დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დეტალი წუნდებულია.

1567. მოცემულია ორი ყუთი, რომელთაგან თითოეულში 20 დეტალია; ამასთან, პირველ ყუთში 15 და მეორეში 14 სტანდარტული დეტალია. პირველი ყუთიდან შემთხვევით ამოღებულია ერთი დეტალი და ჩადებულია მეორე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული დეტალი იქნება სტანდარტული.

1568. ჯგუფში 30 სპორტსმენია; აქედან 20 მეთხილამურეა, 6 — ველოსიპედისტი და 4 — მორბენალი. საკვალიფიკაციო ნორმის შესრულების ალბათობა მეთხილამურესათვის უდრის 0,9-ს, ველოსიპედისტისათვის — 0,8-ს და მორბენლისათვის — 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერად გამოძახებული სპორტსმენი შეასრულებს ნორმას.

1569. მოცემულია 5 ყუთი, რომელთაგან:

- 2 არის B_1 შედგენილობისა (2 თეთრი და 1 შავი ბირთვი),
- 1 არის B_2 შედგენილობისა (10 შავი და არც ერთი თეთრი ბირთვი),
- 2 არის B_3 შედგენილობისა (3 თეთრი და 1 შავი ბირთვი).

შემთხვევით ირჩევენ ყუთს და იქიდან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი იქნება თეთრი?

1570. მოცემულია 10 ყუთი, რომელთაგან:

- 4 არის B_1 შედგენილობისა (6 თეთრი და 2 შავი ბირთვი),
- 3 არის B_2 შედგენილობისა (5 თეთრი და 4 შავი ბირთვი),
- 2 არის B_3 შედგენილობისა (4 შავი და არც ერთი თეთრი ბირთვი),
- 1 არის B_4 შედგენილობისა (2 თეთრი და 2 შავი ბირთვი).

შემთხვევით ირჩევენ ყუთს და იქიდან შემთხვევით იღებენ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბირთვი იქნება თეთრი?

შემდეგ ამოცანებში ისარგებლეთ ბაიესის ფორმულით.

1571. მოცემულია 5 ყუთი, რომელთაგან:

- 2 არის B_1 შედგენილობისა (2 თეთრი და 3 შავი ბირთვი),
- 2 არის B_2 შედგენილობისა (1 თეთრი და 4 შავი ბირთვი),
- 1 არის B_3 შედგენილობისა (4 თეთრი 1 შავი ბირთვი).

შემთხვევით არჩეული ყუთიდან ამოღებული ბირთვი თეთრია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი ამოღებულია მესამე შედგენილობიდან?

1572. ესვრიან B_1 ტიპის 5 მიზანს, B_2 ტიპის 3 მიზანს და B_3 ტიპის 2 მიზანს. B_1 ტიპის მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს, B_2 ტიპის მიზანში მოხვედრისა — 0,1-ს, ხოლო B_3 ტიპის მიზანში მოხვედრისა — 0,15-ს. გასროლისას მოახვედრეს ერთ-ერთ მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანებულია B_1 ტიპის მიზანი.

1573. ორი მსროლელი ერთმანეთის დამოუკიდებლად ისვრის ერთსა და იმავე მიზანში თითოჯერ. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანს მოახვედრებს არის 0,8, მეორე რომ მოახვედრებს — 0,4. მიზანში მოახვედრეს ერთხელ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს მოხვედრა ეკუთვნის პირველ მსროლელს.

1574. პირველი ავტომატიდან ასაწყობად მიღებულია დეტალების 20%, მეორიდან — 30%, მესამიდან — 50%. პირველი ავტომატი საშუალოდ იძლევა 0,2% წუნდებულ დეტალებს, მეორე — 0,3%-ს, მესამე — 0,1%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული წუნდებული დეტალი დამზადებულია მეორე ავტომატზე.

§ 5. ცლათა გამორება

1. ბერნულის ფორმულა. ალბათობა იმისა, რომ n -ჯერ ჩატარებული დამოუკიდებელი ცდის დროს ჩვენთვის სასურველ ხდომილობას ადგილი ექნება k -ჯერ. გამოითვლება ბერნულის ფორმულით:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ ანუ } P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

სადაც p არის A ხდომილობის ალბათობა, ხოლო $q=1-p$.

$k=k_0$ რიცხვს, რომლისთვისაც $P_n(k)$ გველაზე დიდ მნიშვნელობას ღებულობს, უალბათესი რიცხვი ეწოდება. ეს რიცხვი შემდეგი უტოლობებით განისაზღვრება:

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

როდესაც $np - q$ არამთელი რიცხვია, k_0 -სათვის გვექნება ერთადერთი უალბათესი მნიშვნელობა, ხოლო როდესაც $np - q$ მთელი რიცხვია, მაშინ k -ს ექნება ორი უალბათესი მნიშვნელობა.

1575. ლითონის ფულს ვაგდებთ 7-ჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ღერბი გამოჩნდება ზუსტად 3-ჯერ?

1576. მსროლელი მიზანში ისვრის 5-ჯერ. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას უდრის 0,8-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი მიზანში მოახვედრებს 4-ჯერ?

1577. ყუთში 8 ბირთვია, აქედან 5 — თეთრი და 3 — შავი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 ცდისას თეთრი ბირთვი ამოღებული იქნება 3-ჯერ. ამოღებული ბირთვები უკანვე ბრუნდება.

1578. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში 10 ბავშვიდან ქალ-ვაჟთა რაოდენობა თანაბარი იქნება, თუკი ვაჭიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია?

1579. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,05-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული 5 დეტალიდან 4 სტანდარტული იქნება.

1580. ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე პიროვნება გარდაიცვლება 71 წლის ასაკში, უდრის 0,04-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 3 პიროვნებიდან, რომელთაგან თითოეული 70 წლისაა, 2 იცოცხლებს 71 წლამდე?

1581. ორი ტოლძალოვანი მოთამაშე თამაშობს ქადრაკს; რომელი ალბათობა იქნება უფრო მეტი: ერთი მეორეს რომ 4 პარტიიდან 3-ს მოუგებს, თუ 8 პარტიიდან 5-ს?

1582. რომელიმე მცენარის თესლის აღმოცენების უნარი უდრის 90%-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დათესილი 4 თესლიდან აღმოცენდება: 1) სამი; 2) სამზე არანაკლები.

1583. საამქროში 6 მოტორია, თითოეული მოტორისათვის ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ მომენტში იქნება ჩართული, უდრის 0,8-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული მომენტისათვის: 1) ჩართული იქნება 4 მოტორი; 2) ჩართული იქნება ყველა მოტორი; 3) გამორთული იქნება ყველა მოტორი.

1584. ალბათობა იმისა, რომ ლატარიის ბილეთი მოიგებს, უდრის $\frac{1}{7}$ -ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 6 ბილეთიდან მოიგებს 2 ბილეთზე არანაკლები.

1585. იპოვეთ A ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი 10 ცდაში, თუ ყოველი ცდისას $P(A) = \frac{2}{3}$.

1586. 1) იპოვეთ A ხდომილობის მოსვლის უალბათესი რიცხვი 6 ცდაში, თუ ყოველი ცდისას $P(A) = 0,2$.

2) კამათელს აგორებენ 100-ჯერ. იპოვეთ შაშის მოსვლის უალბათესი რიცხვი.

1587. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას $p = \frac{4}{7}$.

იპოვეთ 13 გასროლის შემთხვევაში მოხვედრათა უალბათესი რიცხვი.

1588. მიზანში მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას $p = 0,8$. იპოვეთ 19 გასროლის შემთხვევაში მოხვედრათა უალბათესი რიცხვი.

1589. ვთქვათ, ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტს დაავიანდება ლექციაზე, უდრის 0,02-ს. იპოვეთ დაავიანებული სტუდენტების უალბათესი რიცხვი 800 სტუდენტიდან.

1590. საწყობში მიღებულია 30 ყუთი მინის ნაკეთობა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ ყუთში ნაკეთობა აღმოჩნდება მთელი, უდრის 0,9-ს. იპოვეთ იმ ყუთების უალბათესი რიცხვი, რომლებშიაც ყველა ნაკეთობა იქნება მთელი.

1591. მიზანში ისვრიან 14-ჯერ. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა 0,2-ის ტოლია. განსაზღვრეთ უაღბათესი რიცხვი და იპოვეთ ამ უაღბათესი რიცხვის ალბათობა.

1592. მიმდინარეობს 10 დამოუკიდებელი ცდა; ყოველ ცდაში A ხდომილობის ალბათობა უდრის 0,1-ს. იპოვეთ: 1) A ხდომილობის მოხდენათა უაღბათესი რიცხვი; 2) ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობას ადგილი ექნება უაღბათეს რიცხვჯერ.

1593. რას უდრის A ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში, თუ მისი უაღბათესი რიცხვი 100 ცდაში უდრის 20-ს?

1594. A ხდომილობის ალბათობა ყოველ ცდაში $p=0,3$. რამდენი დამოუკიდებელი ცდის ჩატარებაა საჭირო, რომ A ხდომილობის მოხდენის უაღბათესი რიცხვი იყოს 60?

1595. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული დეტალი წუნდებულა, უდრის 0,1-ს. რამდენი დეტალი უნდა ავიღოთ, რომ ვარვისი დეტალების უაღბათესი რიცხვი იყოს 50?

II. ლაპლასის ლოკალური თეორემა. თუ A ხდომილობის მოხდენის p ალბათობა ყოველი ცდის დროს მუდმივია და განსხვავდება ნულისა და ერთსაგან ($0 < p < 1$), მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n ცდის დროს k -ჯერ მოხდება, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{სადაც } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{ხოლო } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი მოიძებნება ცხრილებიდან. როცა $x > 5$, მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ $\varphi(x) = 0$.

1596. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 400 ცდის დროს მოხდება ზუსტად 80-ჯერ, თუ ყოველი ცდისას მისი მოხდენის ალბათობა $p = 0,2$.

1597. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა 400 ცდისას მოხდება ზუსტად 104-ჯერ, თუ ყოველი ცდისას $P(A) = 0,2$.

1598. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი 10 გასროლიდან მიზანში მოახვედრებს 8-ჯერ, თუ ერთი გასროლით მოხვედრის ალბათობა $p = 0,75$.

III. პუასონის ფორმულა. თუ A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p ყოველი ცდის დროს ერთი და იგივეა და ძალიან მცირეა, ხოლო ცდათა რიცხვი n საკმაოდ დიდია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობას ადგილი ექნება k -ჯერ, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

სადაც $\lambda = np$ ამ ფორმულით სარგებლობისას უნდა გამოვიყენოთ სათანადო ცხრილები.

1599. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 200 კაციდან 4 აღმოჩნდება ცაცია, თუ ცაციები საშუალოდ შეადგენენ 1% -ს.

1600. ალბათობა იმისა, რომ პიროვნება გარდაიცვლება 21 წლის ასაკში, უდრის 0,006-ს. დაზღვეულია 1000 კაცი 20 წლის ასაკში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთი წლის განმავლობაში გარდაიცვლება 5 დაზღვეული პიროვნება?

1601. წუნდებული დეტალის დამზადების ალბათობა უდრის 0,008-ს. იპოვეთ წუნდებული დეტალების უალბათესი რიცხვი 1000 დეტალიდან და ასეთი რიცხვის ალბათობა მოცემულ პარტიაში.

IV. ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა. თუ A ხდომილობის მოხდენის p ალბათობა ყოველი ცდის დროს ერთი და იგივეა და განსხვავდება ნულისა და ერთისაგან, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა n ცდის დროს მოხდება არანაკლებ k_1 -ჯერ და არაუმეტეს k_2 -ჯერ, მიახლოებით უდრის

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

სადაც

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

ხოლო $\Phi(x)$ ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

ამ ფუნქციას ლაპლასის ფუნქცია ეწოდება. მისი მნიშვნელობანი მოიძებნება ცხრილებიდან, როცა $x > 5$, მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ $\Phi(x) = 0,5$.

V. ფარდობითი სიხშირის გადახრის ალბათობა მუდმივი ალბათობიდან დამოუკიდებელი ცდების დროს. თუ ვატარებთ n დამოუკიდებელ ცდას და თითოეული ცდის დროს A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ერთი და იგივეა და უდრის p -ს ($0 < p < 1$), მაშინ ალბათობა იმისა, რომ $\frac{m}{n}$ ფარდობითი სიხშირის გადახრა მუდმივი p ალბათობიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ გადააჭარბებს წინასწარ მოცემულ $\varepsilon > 0$ რიცხვს, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

1602. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არ არის შემოწმებული, უდრის 0,2-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული 400 დეტალიდან შემოწმებული იქნება 70-დან 100-მდე.

1603. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მიზანში მოახვედრებს არის 0,75. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 1000 გასროლისას მსროლელი მიზანში მოახვედრებს: 1) არანაკლებ 71-ჯერ და არა უმეტეს 80-ჯერ; 2) არანაკლებ 81-ჯერ.

1604. ალბათობა იმისა, რომ მსროლელი ერთი გასროლით მიზანში მოახვედრებს უდრის 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 100 გასროლისას მსროლელი მიზანში მოახვედრებს: 1) არანაკლებ 70-ჯერ და არა უმეტეს 80-ჯერ; 2) არა უმეტეს 80-ჯერ.

1605. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველი 10 000 დამოუკიდებელი ცდისას მუდმივია და უდრის 0,75-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხდომილობის მოხდენის ფარდობითი სიხშირე მისი ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,001-ისა.

1606. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,1-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 400 დეტალიდან არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე მისი 0,1 ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,03-ისა.

1607. ალბათობა იმისა, რომ დეტალი არასტანდარტულია, უდრის 0,1-ს. განსაზღვრეთ, რამდენი დეტალი უნდა ავარჩიოთ, რომ $P=0,9544$ ალბათობით არასტანდარტული დეტალების გამოჩენის ფარდობითი სიხშირე მუდმივი 0,1 ალბათობიდან გადაიხრება არა უმეტეს 0,03-ისა.

1608. ლითონის ფულის აგდებისას ღერბის მოსვლის ალბათობა $p=0,5$. რამდენჯერ უნდა ავაგდოთ ლითონის ფული, რომ $P=0,6$ ალბათობით ღერბის მოსვლათა ფარდობითი სიხშირე $p=0,5$ ალბათობიდან გადაიხაროს არა უმეტეს 0,01-ისა.

1609. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ცდაში მუდმივია და უდრის 0,64-ს. განსაზღვრეთ $P=0,997$ ალბათობით რომელ საზღვრებში იქნება მოთავსებული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, თუ ცდათა რიცხვი $n=2500$.

1610. ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველ დამოუკიდებელ ცდაში მუდმივია და უდრის 0,2-ს. განსაზღვრეთ $P=0,9128$ ალბათობით რომელ საზღვრებში იქნება მოთავსებული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე, თუ ცდათა რიცხვი $n=5000$.

§ 6. შემთხვევითი სიდიდეები და განაწილების ფუნქცია

სიდიდეს, რომლსაც მოცემულ პირობებში შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობა სათანადო ალბათობებით, ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევითი სიდიდეები ორი ტიპისაა: დისკრეტული (წყვეტილი) შემთხვევითი სიდიდეები და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები.

დისკრეტული ეწოდება ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ცალკეული, იზოლირებული მნიშვნელობები განსაზღვრული ალბათობებით.

უწყვეტი ეწოდება ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც შეუძლია მიიღოს ყველა მნიშვნელობა რომელიმე სასრული ან უსასრულო შუალედიდან.

კანონს, რომლის მიხედვით შემთხვევითი სიდიდის ყოველ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას შეესაბამება სათანადო ალბათობა, ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. განაწილების კანონი შედგება ცხრილისაგან, რომლის პირველ სტრიქონში მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი, ხოლო მეორე სტრიქონში — მათი შესაბამისი ალბათობანი:

$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n. \end{cases}$$

აქ p_1, p_2, \dots, p_n ალბათობანი სრულ სისტემაში შემაჯავალ ხდომილობათა ალბათობებია, ამიტომ

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების $F(x)$ ფუნქცია არის ალბათობა იმისა, რომ ეს შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს რომელიმე ფიქსირებულ x რიცხვზე უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას, ე. ი.

$$F(x) = P(X < x).$$

განაწილების ფუნქციის თვისებებია:

$$1) 0 \leq F(x) \leq 1; \quad 2) F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1;$$

3) თუ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობა ავსებს მხოლოდ სასრულ (a, b) ინტერვალს, მაშინ $F(x) = 0$, როცა $x < a$, და $F(x) = 1$, როცა $x > b$. ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდის მიერ მიღებული შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები მოთავსებული იქნება (a, b) ინტერვალში, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი X და Y სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ნებისმიერი i -ისა და j -ისათვის დამოუკიდებელია $X = x_i$ და $Y = y_j$ ხდომილობანი. ვთქვათ, X და Y სიდიდეების განაწილების კანონებია

$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{cases} \quad \text{და} \quad Y \begin{cases} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m. \end{cases}$$

ამ სიდიდეების $X+Y$ წამი არის ახალი შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ღებულობს შემდეგი სახის ყველა მნიშვნელობას:

$$x_i + y_j \quad (i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m),$$

რომელთა ალბათობებია $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ (X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია). განაწილების ფუნქციის წარმოებულს ეწოდება განაწილების სიმკვრივე:

$$F'(x) = f(x) \quad (f(x) \geq 0).$$

მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$1) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a); \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

3) თუ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა ერთობლიობა აკმაყოფილებს სასრულ

$$(a, b) \text{ ინტერვალს, მაშინ } \int_a^b f(x) dx = 1.$$

ალბათობა იმისა, რომ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი X სიდიდის მიერ მიღებული შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობანი მოთავსებული იქნება (a, b) ინტერვალში, გამოითვლება ფორმულით:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

თუ ცნობილია განაწილების სიმკვრივე $f(x)$, მაშინ განაწილების ფუნქცია ასე განისაზღვრება:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

1611. მიზანში ისერიან ერთხელ; მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. შემთხვევითი X სიდიდე არის მიზანში მოხვედრათა რიცხვი. დაწერეთ X სიდიდის განაწილების კანონი.

1612. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. ცნობილია პირველი ორი შესაძლო მნიშვნელობის ალბათობები: $p_1=0,4$, $p_2=0,15$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

1613. ლატარიაში გამოშვებულია 1000 ბილეთი. აქედან გათამაშდება ერთი მოგება 1000-მანეთიანი, ოთხი მოგება — თითო 500-მანეთიანი, ხუთი მოგება — თითო 400-მანეთიანი და 10 მოგება — თითო 100-მანეთიანი. იპოვეთ ერთი ბილეთის მოგების განაწილების კანონი.

1614. მსროლელი მიზანში ისერის 3-ჯერ; ყოველი გასროლის მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,4-ს. ყოველი მოხვედრისას მსროლელს ეთვლება 5 ქულა. დაწერეთ მიღებული ქულების განაწილების კანონი.

1615. კამათელს აგორებენ 3-ჯერ. დაწერეთ შაშის მოსვლათა განაწილების კანონი.

1616. ლითონის ფულს აგდებენ 4-ჯერ. დაწერეთ ღერბის მოსვლათა განაწილების კანონი.

1617. მსროლელი, რომელსაც 3 ვაზნა აქვს, ესერის მიზანში პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,8-ს. იპოვეთ დახარჯული ვაზნების განაწილების კანონი.

1618. მსროლელი, რომელსაც 4 ვაზნა აქვს, მიზანში ისერის, პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,6-ს. იპოვეთ დაუხარჯავი ვაზნების განაწილების კანონი.

1619. ორი მსროლელი ისვრის ერთ მიზანში. ალბათობა იმისა, რომ პირველი მსროლელი მიზანში მოხვედრებს არის 0,5, მეორე რომ მოხვედრებს — 0,4. შეადგინეთ მიზანში მოხვედრათა განაწილების კანონი.

1620. მონადირე ესვრის ნადირს პირველ მოხვედრამდე და 4-ზე მეტ გასროლას ვერ ასწრებს. შეადგინეთ გასროლათა რიცხვის განაწილების კანონი, თუ მოხვედრის ალბათობა ერთი გასროლისას უდრის 0,7-ს.

1621. ალბათობა იმისა, რომ ბიბლიოთეკაში სტუდენტისათვის საჭირო წიგნი თავისუფალია, უდრის 0,4-ს. შეადგინეთ იმ ბიბლიოთეკების განაწილების კანონი, რომლებიც უნდა ინახულოს სტუდენტმა, თუ ქალაქში 4 ბიბლიოთეკაა.

1622. ოჯახში 4 ბავშვია. შეადგინეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც გამოსახავს ვაჟთა რაოდენობას, თუ ვაჟიშვილებისა და ქალიშვილების დაბადება ტოლალბათია.

1623. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X \begin{cases} 1 & 3 \\ 0,4 & 0,6 \end{cases} \quad \text{და} \quad Y \begin{cases} 2 & 4 \\ 0,2 & 0,8 \end{cases}.$$

შეადგინეთ $X+Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1624. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X \begin{cases} 4 & 6 \\ 0,3 & 0,7 \end{cases} \quad \text{და} \quad Y \begin{cases} 1 & 2 \\ 0,8 & 0,2 \end{cases}.$$

შეადგინეთ $X-Y$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1625. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X \begin{cases} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{cases}.$$

შეადგინეთ X^2 და $3X$ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

1626. მოცემულია ორი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

$$X \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{cases} \quad \text{და} \quad Y \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{cases}.$$

შეადგინეთ XY შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

1627. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,3-ს. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია.

1628. მიზანში ისვრიან 4-ჯერ; ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,3. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია და განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვედრათა რიცხვი მოთავსებული იქნება $1 \leq X \leq 4$ შუალედში.

1629. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < -1, \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \text{როცა } -1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{როცა } x > 2. \end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(0; 1)$ შუალედში.

1630. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{როცა } 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{როცა } x > 4. \end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(2; 3)$ შუალედში.

1631. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \leq 0, \\ \frac{x}{3}, & \text{როცა } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{როცა } x > 3. \end{cases}$$

იპოვეთ: 1) განაწილების $f(x)$ სიმკვრივე, 2) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(\frac{1}{2}, 1)$ შუალედში. აავეთ $F(x)$ და $f(x)$ ფუნქციების გრაფიკები.

1632. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < -\frac{\pi}{2}, \\ a \cos x, & \text{როცა } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

იპოვეთ: 1) კოეფიციენტი a ; 2) განაწილების $F(x)$ ფუნქცია; 3) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(0; \frac{\pi}{4})$ შუალედში.

1633. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0, \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{როცა } x > \pi. \end{cases}$$

იპოვეთ: 1) განაწილების ფუნქცია; 2) ალბათობა იმისა, რომ X სიდიდე მოხვდება $(0; \frac{\pi}{4})$ შუალედში.

1634. 1) მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

იპოვეთ კოეფიციენტი A და X სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

2) შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია თანაბრად, ე. ი. მისი განაწილების სიმკვრივე $f(x) = A$, როცა $a \leq x \leq b$ და $f(x) = 0$, როცა $x < a$ და $x > b$. განსაზღვრეთ კოეფიციენტი A .

§ 7. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

თუ შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია

$$X \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n, \end{cases}$$

მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი არის

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

თუ X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივე არის $f(x)$, მაშინ მისი მათემატიკური ლოდინი ასე გამოისახება:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

თუკი ამ ინტეგრალს აქვს აზრი.

თუ შემთხვევითი X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა მოთავსებულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებებია:

- 1) $M(C) = C,$
 2) $M(CX) = CM(X),$ } C მუდმივი სიდიდეა.

$$3) M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y),$$

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია,

5) $X - M(X)$ სხვაობას ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა თავისი საშუალო მნიშვნელობიდან. გადახრის მათემატიკური ლოდინი ნულის ტოლია

$$M[X - M(X)] = 0.$$

გადახრის კვადრატის მათემატიკური ლოდინს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

დისპერსიის გამოსათვლელად შეგვიძლია ვისარგებლოთ აგრეთვე შემდეგი ფორმულით:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

თუ X უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ დისპერსიისათვის გვექნება:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx,$$

სადაც

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

დისპერსიის თვისებებია:

$$\left. \begin{array}{l} 1) D(C) = 0, \\ 2) D(CX) = C^2 D(X) \end{array} \right\} C \text{ მუდმივი სიდიდეა,}$$

$$3) D(X \pm Y) = D(X) + D(Y), \text{ კერძოდ, } D(C+X) = D(X),$$

სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.

კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1635. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მისი განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 6 & 3 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5. \end{cases}$$

1636. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მისი განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 3 & 5 & 2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3. \end{cases}$$

1637. იპოვეთ A ხლომილობის მოხდენათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი ერთი ცდისას, თუ $P(A) = p$.

1638. ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობა უდრის 0,9-ს. ისერიან პირველ მოხვედრამდე; ერთხელ მოხვედრისათვის გასროლათა რიცხვი არ უნდა აღემატებოდეს 3-ს. იპოვეთ გასროლათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1639. 3 გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობებია $p_1=0,4$, $p_2=0,3$ და $p_3=0,6$. იპოვეთ მოხვედრათა საერთო რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1640. 4 გასროლის მიზანში მოხვედრის ალბათობებია: $p_1=0,6$, $p_2=0,4$, $p_3=0,5$, $p_4=0,7$. იპოვეთ მოხვედრათა საერთო რიცხვის მათემატიკური ლოდინი.

1641. იპოვეთ ერთი კამათლის გაგორებისას მიღებული ქულის ლოდინი და დისპერსია.

1642. იპოვეთ ორი კამათლის ერთდროული გაგორებისას ჯამში მიღებული ქულის მათემატიკური ლოდინი და ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი.

1643. მოცემულია დამოუკიდებელი შემთხვევითი X და Y სიდიდეების განაწილების კანონები:

$$X \begin{cases} 5 & 2 & 4 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3, \end{cases} \quad Y \begin{cases} 7 & 9 \\ 0,8 & 0,2. \end{cases}$$

იპოვეთ შემთხვევითი XY სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

1644. შემთხვევითი X სიდიდე ლეზულობს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას $+c$ და $-c$, რომელთაგან თითოეულის ალბათობაა 0,5. იპოვეთ ამ სიდიდის დისპერსია.

1645. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია, თუ ამ სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 1 & 2 & 5 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2. \end{cases}$$

1646. იპოვეთ შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია, თუ ამ სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 0,1 & 2 & 10 & 20 \\ 0,4 & 0,2 & 0,15 & 0,25. \end{cases}$$

1647. 1) ცნობილია ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია: $D(X)=4$ და $D(Y)=3$. იპოვეთ ამ სიდიდეთა ჯამის დისპერსია.

2) შემთხვევითი X სიდიდის დისპერსია $D(X)=5$. იპოვეთ შემდეგი სიდიდეების დისპერსია: ა) $X-1$; ბ) $-2X$; გ) $3X+6$.

1648. მიზანში ისერიან ერთხელ, მოხვედრის ალბათობა უდრის p -ს

იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1649. შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 2 & 3 & 10 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.

1650. შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების კანონია:

$$X \begin{cases} 2 & 4 & 8 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.

შემდეგ ორ ამოცანაში იპოვეთ განაწილების კანონი შემთხვევითი X სიდიდისა, რომელიც მხოლოდ ორ მნიშვნელობას ღებულობს: x_1 -ს (p_1 ალბათობით) და x_2 -ს. ამასთან $x_1 < x_2$. ცნობილია X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $M(X)$ და დისპერსია $D(X)$.

1651. $p_1=0,5, \quad M(X)=3, \quad D(X)=1.$

1652. $p_1=0,9, \quad M(X)=4,1, \quad D(X)=0,09.$

1653. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0, \\ x, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

1654. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{როცა } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{როცა } x > \pi. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1655. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0, \\ ax, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$$

იპოვეთ კოეფიციენტი a , მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1656. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \leq -2, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & \text{როცა } -2 < x < 2, \\ 0, & \text{როცა } x \geq 2. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა.

1657. შემთხვევითი X სიდიდე განაწილებულია თანაბრად. მისი განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 1, \\ a, & \text{როცა } 1 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{როცა } x > 10. \end{cases}$$

განსაზღვრეთ X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

1658. მოცემულია შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

$$f(x) = ae^{-ix}.$$

იპოვეთ კოეფიციენტი a , მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და საშუალო კვადრატული გადახრა.

§ 8. შემთხვევითი სიდიდის ბინომური და ნორმალური განაწილების კანონი

შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც აკმაყოფილებს ბერნულის ფორმულას

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

გვორჩილება ბინომური განაწილების კანონს. ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ q^n & C_n^1 p q^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \dots & C_n^{n-1} p^{n-1} q & p^n \end{cases}$$

ბინომური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით, თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

სადაც a შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინია, ხოლო σ^2 — დისპერსია.

თუ შემთხვევითა X სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ: 1) ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს რაიმე მნიშვნელობას (α , β) ინტერვალთან, უდრის

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

სადაც σ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრაა, ხოლო $\Phi(x)$ — ლაპლასის ფუნქცია;

2) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება მოცემულ დადებით α რიცხვს, უდრის

$$P(|X - \mu| \leq \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

1659. მიზანში მოხვედრის ალბათობა $p = 0,4$. იპოვეთ მოხვედრათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ გაისროლეს სამჯერ.

1660. იპოვეთ ყოველი გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა და გასროლათა რიცხვი, თუ მოხვედრათა საშუალო რიცხვი უდრის 72-ს, ხოლო შემთხვევითი X სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა — 6-ს (X აღნიშნავს მოხვედრათა რიცხვს).

1661. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 6-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 8-ს იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია (10; 12) ინტერვალში.

1662. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 1-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 3-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია (4; 7) ინტერვალში.

1663. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 20-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 10-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იქნება 3-ზე.

1664. ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი უდრის 0-ს, საშუალო კვადრატული გადახრა — 4-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით ნაკლები იქნება 2-ზე.

§ 9. დიდ რიცხვთა კანონი

1. მარკოვის უტოლობა. თუ შემთხვევითი X სიდიდე არ ღებულობს უარყოფით მნიშვნელობებს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს რაიმე დადებით A რიცხვზე მეტ მნიშვნელობას, არ აღემატება $\frac{M(X)}{A}$ წილადს. ე. ი.

$$P(X > A) \leq \frac{M(X)}{A},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ იგი მიიღებს A რიცხვზე არაუმეტეს მნიშვნელობას, ნაკლები არ არის $1 - \frac{M(X)}{A}$ რიცხვზე, ე. ი.

$$P(X \leq A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}.$$

1665. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ უახლოესი დღის განმავლობაში წყლის მოთხოვნილება დასახლებულ პუნქტში გადააჭარბებს 100 000 ლიტრს, თუ საშუალო სადღეღამისო მოთხოვნილებაა 10 000 ლიტრი.

1666. დედამიწის მოცემულ ადგილზე ნალექების საშუალო რაოდენობა შეადგენს 300 მმ წელიწადში. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ადგილზე ერთი წლის განმავლობაში ნალექების რაოდენობა აღემატება 800 მმ-ს.

1667. ქარის საშუალო სიჩქარე დედამიწის მოცემულ ადგილზე უდრის 15 კმ/სთ. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ადგილზე ქარის სიჩქარე არ გადააჭარბებს 60 კმ/სთ.

1668. მსროლელი ისვრის მიზანში და მიზნის ცენტრიდან გადახრის მათემატიკური ლოდინი უდრის 5 სმ-ს. შეაფასეთ მოხვედრის ალბათობა წრიულ სამიზნეში, რომლის რადიუსი 25 სმ-ია.

II. ჩებიშევის უტოლობა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური a ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით გადააჭარბებს მუდმივ $\varepsilon > 0$ რიცხვს, არ აღემატება $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ წილადს, ე. ი.

$$P(|X - a| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის გადახრა მისი მათემატიკური a ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება $\varepsilon > 0$ რიცხვს, ნაკლები არ არის $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ -ზე, ე. ი.

$$P(|X - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

1669. რომელიმე ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ყოველი ცდისას არის 0,3. ცდათა რიცხვი $n = 1000$. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის გადახრა მათემატიკური ლოდინიდან მეტი იქნება 30-ზე.

1670. დასახლებულ პუნქტში ელექტროენერგიის დანახარჯი დღე-ღამის განმავლობაში შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის საშუალო კვადრატული გადახრა უდრის 10 000 კვტ. სთ. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ პუნქტში ერთი დღის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯის გადახრა მისი მათემატიკური ლოდინიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით მეტი იქნება 25000 კვტ. საათზე.

1671. მოცემულ სიმაღლეზე ქარის სიჩქარის მათემატიკური ლოდინი უდრის 25 კმ/სთ-ს, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა — 4,5 კმ/სთ-ს. 0,9-ზე არანაკლები ალბათობის რა სიჩქარის ქარებს უნდა მოველოდეთ ამ სიმაღლეზე?

1672. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ 1200 ახალშობილ ბავშვს შორის ვაჟები იქნება 550-დან 650-მდე (ჩათვლით), თუ ქალებისა და ვაჟების დაბადება ტოლალბათია.

1673. ისარგებლეთ ჩებიშევის უტოლობით და იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $|X - M(X)| < 0,1$, თუ $D(X) = 0,001$.

1674. მოცემულია $P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 0,9$, $D(X) = 0,004$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იპოვეთ ε .

VIII თავი

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები

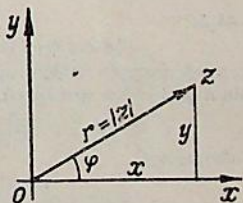
§ 1. კომპლექსური რიცხვები

კომპლექსური რიცხვი ეწოდება $z = x + iy$ სახის გამოსახულებას, სადაც x და y ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $i = \sqrt{-1}$ — წარმოსახვითი ერთეული. x -სა და y -ს შესაბამისად ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები და აღინიშნება ასე:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

$z = x + iy$ და $\bar{z} = x - iy$ სახის რიცხვებს ეწოდება ურთიერთ შებრუნებული კომპლექსური რიცხვები. $z_1 = x_1 + iy_1$ და $z_2 = x_2 + iy_2$ ორ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება ტოლი, თუ $x_1 = x_2$ და $y_1 = y_2$. კომპლექსური რიცხვი $z = x + iy = 0$, როცა $x = 0$ და $y = 0$.

$z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვი xOy სიბრტყეზე გამოისახება წერტილით, რომლის კოორდინატებია (x, y) . z რიცხვს შეიძლება შევესაბამოთ ვექტორი, რომელიც მიმართულია O წერტილიდან z წერტილისაკენ (ნახ. 1). ამ ვექტორის r სიგრძეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული და აღინიშნება $r = |z|$ სიმბოლოთი. ფ კუთხეს, რომელსაც r რადიუს-ვექტორი ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ეწოდება z რიცხვის არგუმენტი და აღინიშნება ასე: $\varphi = \operatorname{Arg} z$. არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\operatorname{arg} z$ განისაზღვრება — $\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$ უტოლობებით და მასინ



ნახ. 1.

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმაა

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (z \neq 0)$$

სადაც

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

კომპლექსური რიცხვების შეკრება—გამოკლება:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

გამრავლება:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების შემთხვევაში გვაქვს:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

გაყოფა:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

ახარისხება:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია. კერძოდ, როცა $r=1$, მაშინ $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ (მუავერის ფორმულა). შევნიშნოთ, რომ

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

და, საზოგადოდ,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

ამოფესვა: თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

სადაც $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi = \operatorname{arg} z$.

კომპლექსური z რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ასე გამოისახება.

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i \frac{\bar{z} - z}{2}.$$

შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედებები:

1675. $(3+5i)(4-i)$. 1676. $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$.

1677. $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\right)$.

1678. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

1679. $\frac{1+i}{1-i}$. 1680. $\frac{2i}{1+i}$. 1681. $\frac{3-i}{4+5i}$.

1682. $\frac{4-3i}{4+3i}$. 1683. $(1+i)^3$. 1684. $(1+i)^4$.

1685. $(\sqrt{9+40i} + \sqrt{9-40i})^2$. 1686. იპოვეთ i^{69} , i^{82} , i^{-39} , i^{-45} .

წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი რიცხვები:

1687. $1+i$. 1688. $1-i$. 1689. $-1+i\sqrt{3}$. 1690. $-\sqrt{3}+i$.

1691. 1) $-2i$; 2) m . 1692. $-45-15i\sqrt{3}$. 1693. $\sin \alpha + i(1-\cos \alpha)$.

1694. $1+\sin \alpha - i \cos \alpha$.

წარმოადგინეთ ალგებრული ფორმით შემდეგი რიცხვები:

1695. $6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$. 1696. $2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.

1697. $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. 1698. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$.

შეასრულეთ ნაჩვენები მოქმედებები:

1699. $4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

1700. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \cdot 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

1701. $3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ) \cdot 4(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$.

1702. $12(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ) \cdot 3(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$.

1703. $2(1+i\sqrt{3}) \cdot (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$.

1704. $2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \cdot 5(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ) \cdot 3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$.

1705. $8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) : 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$.

1706. $2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) : (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$.

1707. $\sqrt{3}(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ) : 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$.

1708. $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) : (1+i)$.

იპოვეთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები შემდეგი კომპლექსური რიცხვებისა:

1709. $\frac{1}{1-i}$.

1710. $\frac{2}{1-3i}$,

1711. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1712. $(1+i\sqrt{3})^3$.

1713. $\left(\frac{i^5+1}{i^{19}+1}\right)^2$.

1714. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1715. 1) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$; 2) $\overline{(z)}=\bar{z}$; 3) $\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

1716. 1) $|\bar{z}|=|z|$; 2) $\overline{(z_1 \cdot z_2)}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; 3) $\bar{z} \cdot z=|z|^2$.

მუავრის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი რიცხვები:

1717. $(1-i)^6$. 1718. $(-1+i)^5$. 1719. $(1+i\sqrt{3})^9$.

1720. $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$. 1721. $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$.

1722. $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$.

გამოსახეთ \sin ფ-სა და \cos ფ-ს საშუალებით შემდეგი ფუნქციები:

1723. $\cos 3\varphi$ და $\sin 3\varphi$. 1724. $\cos 4\varphi$ და $\sin 4\varphi$.

წერადი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით გამოსახეთ შემდეგი ფუნქციები:

1725. $\cos^3\varphi$ და $\sin^3\varphi$. 1726. $\cos^4\varphi$ და $\sin^4\varphi$.

1727. დაამტკიცეთ, რომ $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

1728. თუ $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$, მაშინ აჩვენეთ, რომ $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\alpha$.

იპოვეთ მნიშვნელობები შემდეგი რიცხვებისა:

1729. 1) \sqrt{i} ; 2) $\sqrt[3]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

1730. 1) $\sqrt[4]{16(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

1731. $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$. 1732. $4x+2ix-2y-3iy=5+4i$.

1733. $(x+iy)y+xi=6+5i$. 1734. $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

1735. $z^2+(1-2i)z-2i=0$. 1736. $z^3+8=0$.

1737. $z^3-2i=0$. 1738. $z^4+4=0$. 1739. $z^6-1=0$.

1740. $\sqrt{a+ib}=x+iy$.

წინა მაგალითის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ორი ფესვი:

1741. $\sqrt{3+4i}$.

1742. $\sqrt{-7+24i}$.

სად მდებარეობს წერტილები, რომელთათვისაც ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

1743. 1) $1 \leq \operatorname{Re}z < 3$; 2) $\operatorname{Im}z \geq 3$; 3) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{arg}z < \frac{\pi}{3}$;

4) $|z| = \operatorname{Re}z + 1$;

5) $\operatorname{Re}(z^2) = a$;

6) $|z| \leq 2$;

7) $|z| > 1$; 8) $|z-i| \leq 1$;

9) $2 < |z| < 4$; $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$.

1744. 1) $0 \leq \operatorname{Re}z \leq 2$, $-1 < \operatorname{Im}z \leq 3$; 2) $\operatorname{Re}z \geq \frac{1}{2}$; 3) $|z+i| > 1$;

4) $|z+1-i| \leq 2$; 5) $1 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$;

6) $1 \leq |z-1-i| \leq 2$; 7) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$; 8) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$;

9) $|z^2-1| = 2$.

გამოარკვეით, როგორ წირებს გამოსახავს შემდეგი განტოლებები:

1745. 1) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$; 2) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$; 3) $|z-2| - |z+2| = 2$.

1746. 1) $\operatorname{Im}(z^2) = a$; 2) $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$, $a > 0$; 3) $|z-i| + |z+i| = 4$.

დაწერეთ კომპლექსური სახით განტოლებები შემდეგი წირებისა:

1747. $Ax + By + C = 0$.

1748. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

1749. $x^2 - y^2 = a^2$.

1750. რა წირს გამოსახავს xOy სიბრტყეზე $\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$ განტოლება?

§ 2. ელემენტარული ფუნქციები

თუ $z = x + iy$ ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას D არიდან შეესაბამება ა ცვლადის ერთი ან რამდენიმე მნიშვნელობა, მაშინ D არეში განსაზღვრულია კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

სადაც $u(x, y)$ და $v(x, y)$ წარმოადგენს $f(z)$ ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. თუ ყოველ z -ს შეესაბამება ა-ს ერთი მნიშვნელობა, მაშინ ფუნქციას ეწოდება ცალსახა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — მრავალსახა.

კომპლექსური ცვლადის ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

კომპლექსური რიცხვი მაჩვენებლიანი ფორმით ასე ჩაიწერება:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

$\cos z$, $\sin z$ ფუნქციების ძირითადი პერიოდია 2π , $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ ფუნქციებისა π , e^z , $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ -ისა $2\pi i$, ხოლო $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ -ისა πi .

კომპლექსური რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი განისაზღვრება ასე:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \quad (z \neq 0),$$

სადაც $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ლოგარითმის მთავარი მნიშვნელობა არის

$$\ln z = \ln r + i\varphi.$$

ლოგარითმული ფუნქციის საშუალებით განისაზღვრება მაჩვენებლიანი და ხარისხობანი ფუნქციები:

$$z \operatorname{Ln} \alpha \quad \alpha \quad \alpha \operatorname{Ln} z$$

$$a^z = e^{\quad}, \quad z = e^{\quad},$$

სადაც a , α და z ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან, $a \neq 0$, $z \neq 0$.

ჩაწერეთ $re^{i\varphi}$ სახით შემდეგი რიცხვები:

1751. 1) $1+i$; 2) $1+i\sqrt{3}$; 3) 5 ; 4) $-i$.

1752. 1) -1 ; 2) $4+4i$; 3) $-1+i\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

იპოვეთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები შემდეგი კომპლექსური რიცხვებისა:

1758. 1) $e^{\frac{2-\pi}{3}i}$; 2) $e^{\frac{1}{2}-3i}$; 3) $\cos(2+i)$; 4) $\sin(1-5i)$.

1754. 1) $e^{\frac{1-\pi}{2}i}$; 2) $\cos(1-i)$; 3) $\sin i$; 4) $\operatorname{ch}(1+2i)$.

დაამტკიცეთ მართებულობა შემდეგი ტოლობებისა:

1755. 1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
3) $\cos iz = \operatorname{ch} z$; 4) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

1756. 1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; 2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
3) $\sin iz = i \operatorname{sh} z$; 4) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$.

1757. იპოვეთ $Re(\sin z)$, $Im(\sin z)$, $|\sin z|$.

1758. იპოვეთ $Re(ze^z)$, $Im(ze^z)$.

1759. აჩვენეთ, რომ $\sin 2i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული მეტია 1-ზე.

1760. აჩვენეთ, რომ $\cos 3i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული მეტია 1-ზე.

იპოვეთ შემდეგი ჯამები:

1761. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$,

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$.

1762. 1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n-1)x$,

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x$.

გამოთვალეთ:

1763. 1) $\text{Ln } 4$; 2) $\text{Ln}(-i)$; 3) $\text{Ln}(1+7i)$.

1764. 1) $\text{Ln}(-1+i)$; 2) $\text{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 3) $\text{Ln}(2-3i)$.

1765. 1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) i^i ; 3) $(1+i)^i$.

1766. 1) 1^{-i} ; 2) 2^i ; 3) 3^{2+i} .

განმარტების ძალით, $w = \text{Arc sin } z$ ეკვივალენტურია $z = \sin w$ ტოლობისა. ასევე განმარტება $\text{Arc cos } z$, $\text{Arc tg } z$ და შექცეული ჰიპერბოლური $\text{Ar sh } z$, $\text{Ar ch } z$, $\text{Ar th } z$ ფუნქციები.

დამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1767. 1) $\text{Arc sin } z = -i \text{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2})$,

2) $\text{Arc cos } z = -i \text{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$,

3) $\text{Arc tg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{i-z}{i+z}$, $z \neq \pm i$.

1768. 1) $\text{Arsh } z = \ln(z \pm \sqrt{z^2+1})$;

2) $\text{Ar ch } z = \text{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$,

3) $\text{Ar th } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}$, $z \neq \pm 1$.

გამოთვალეთ:

1769. 1) $\text{Arc sin } i$; 2) $\text{Arc cos} \frac{1}{2}$; 3) $\text{Arc tg } 2i$.

1770. 1) $\text{Ar sh}(-1)$; 2) $\text{Arch } 2i$; 3) Ar th .

§ 3. კომპლექსური ფუნქციის გეომეტრიული შინაარსი

ვთქვათ, $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ ფუნქცია z სიბრტყეზე მოცემულ $F(x, y)=0$ წირს ასახავს w სიბრტყეში რომელიმე $\Phi(u, v)=0$ წირში. იმისათვის რომ ვიპოვოთ მიღებული წირის განტოლება, საჭიროა x და y სიდიდეები გამოვრიცხოთ შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან:

$$F(x, y)=0, \quad u=u(x, y), \quad v=v(x, y).$$

განსაზღვრეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული წირები (t ნამდვილი პარამეტრია):

1771. 1) $z = e^{it}$; 2) $z = 6e^{it} + 2e^{-it}$; 3) $z = t + it^2$.

1772. 1) $z - a = re^{it}$, $a = \alpha + i\beta$, $r > 0$; 2) $z = t + \frac{i}{t}$;

3) $z = a(t + i - ie^{-it})$.

1773. z სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $x = 2$; 2) $y = 1$; 3) $xy = 1$; 4) $x^2 + y^2 = 4$. $w = z^2$ გარდაქმნით ეს წირები ასახულია w სიბრტყეზე. იპოვეთ მიღებული წირების განტოლებები.

1774. z სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $y = x$; 2) $x^2 + y^2 = R^2$; 3) $y = 4$. $w = \frac{1}{z}$. გარდაქმნით ეს წირები ასახულია w სიბრტყეზე. იპოვეთ მიღებული წირების განტოლებები.

1775. w სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $u = 2$; 2) $v = 3$. იპოვეთ მათი წინა სახე $w = z^2$ გარდაქმნისას.

1776. w სიბრტყეზე მოცემულია წირები: 1) $u = -1$; 2) $v = 5$. იპოვეთ მათი წინა სახე $w = \frac{1}{z}$ გარდაქმნისას.

1777. იპოვეთ $|z| = R$ წრეწირის ასახვა $w = z + \frac{1}{z}$ ფუნქციის საშუალებით.

1778. იპოვეთ $|z| = R$ წრეწირის ასახვა $w = z - \frac{1}{z}$ ფუნქციის საშუალებით.

§ 4. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის წარმოებულნი

1°. კოში-რიმანის პირობები. $w = f(z)$ ცალსახა ფუნქციის წარმოებული განისაზღვრება ასე:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

გაწარმოების ყველა წესი და თვისება, რომლებიც ცნობილია ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისათვის, გამოდგება აგრეთვე კომპლექსური ცვლადის შემთხვევაში. ზემოთ განხილული ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები წარმოებადია მათი განსაზღვრის არეში, ამასთან ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

იმისათვის, რომ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ფუნქცია წარმოებადი იყოს $z = x + iy$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ფუნქციები დიფერენც-

ცირებადი იყოს z წერტილზე და ამ წერტილზე შესრულდეს კონი-რიმანის პირობები:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ამ შემთხვევაში $f(z)$ ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება ასე:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

ცალსახა $f(z)$ ფუნქციას, რომელიც წარმოებადია D არის ყოველ წერტილზე, ეწოდება ანალიტიკური ფუნქცია (ან რეგულარული) ამ არეში.

შეამოწმეთ, შესრულებულია თუ არა კონი-რიმანის პირობები, შემდეგი ფუნქციებისათვის და იპოვეთ მათი წარმოებულები, თუ ისინი არსებობს:

1779. 1) $w=z$; 2) $w=\bar{z}$; 3) $w=z^2$; 4) $w=e^z$; 5) $w=\sin z$.

1780. 1) $w=|z|$; 2) $w=z^2$; 3) $w=\frac{1}{z}$; 4) $w=\cos z$; 5) $w=\ln z$.

1781. თუ $f'(z)=0$ რაიმე არის ყოველ წერტილზე, მაშინ აჩვენეთ, რომ $f(z)$ მუდმივი სიდიდეა ამ არეში.

1782. დაამტკიცეთ, რომ $w=z \operatorname{Re} z$ ფუნქცია წარმოებადია მხოლოდ $z=0$ წერტილზე და აჩვენეთ, რომ $w'(0)=0$.

1783. აჩვენეთ, რომ კონი-რიმანის პირობებს პოლარულ კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

1784. შეამოწმეთ წინა ამოცანის პირობები

$$f(r, \varphi) = r^2 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

ფუნქციისათვის.

2°. **ჰარმონიული ფუნქციები.** $u(x, y)$ ფუნქციას, რომელსაც რაიმე არეში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით და აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

ეწოდება ჰარმონიული ფუნქცია. $u(x, y)$ და $v(x, y)$ ჰარმონიულ ფუნქციებს ეწოდება ურთიერთშეუღლებული, თუ ისინი დაკავშირებულია კონი-რიმანის პირობებით. იმ ჰარმონიული ფუნქციის მოძებნა, რომელიც მოცემულა ჰარმონიული ფუნქციის შეუღლებულია, წარმოადგენს ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალის ინტეგრების ცნობილ ამოცანას.

იპოვეთ მოცემული ჰარმონიული ფუნქციების შეუღლებული ფუნქციები:

1785. $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$. 1786. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

იპოვეთ $f(z)$ ანალიზური ფუნქცია მისი მოცემული ნამდვილი ან არმოსახვითი ნაწილის მიხედვით:

$$1787. v(x, y) = x + y - 3.$$

$$1788. u(x, y) = x^3 - 2xy - 3xy^2.$$

$$1789. v(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{3y}{2}, f(0) = 0. \quad 1790. v(x, y) = x^3 - 3xy^2, f(i) = i.$$

$$1791. u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y, f(1) = 0.$$

$$1792. u(x, y) = x^2 - y^2 + xy, f(0) = 0.$$

§ 5. კონფორმული ასახვები

1°. ანალიზური ფუნქციით განხორციელებული ასახვა. თუ $w = f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეზე, მაშინ ამ ფუნქციით განხორციელებულ ასახვას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. z სიბრტყის ყოველ D არეს $w = f(z)$ ფუნქცია ასახავს w სიბრტყის D' არეში შემოვლის მიმართულების შენარჩუნებით.

2. D არის ყოველი უწყვეტი γ წირი აისახება D' არის უწყვეტ γ' წირში.

3. ვთქვათ, $w_0 = f(z_0)$ და z_0 წერტილიდან გამოსული γ_1 და γ_2 წირები აისახა w_0 წერტილიდან გამოსულ γ'_1 და γ'_2 წირებში, მაშინ კუთხე γ_1 და γ_2 წირებს შორის z_0 წერტილში უდრის კუთხეს γ'_1 და γ'_2 წირებს შორის w_0 წერტილში.

4. ვთქვათ, γ წირი, რომელიც აერთებს z_0 და z წერტილებს, $w = f(z)$ ფუნქციით აისახა γ' წირში, რომელიც შესაბამისად აერთებს w_0 და w წერტილებს. ამ შემთხვევაში გაკვირვის კოეფიციენტი z_0 წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$k = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|.$$

როცა $k > 1$, მაშინ ადგილი აქვს გაკვირვებს, ხოლო როცა $k < 1$, — შეეკუმშვას. ანალიზური $f(z)$ ფუნქციისათვის $k = |f'(z_0)|$, სადაც $f'(z_0) \neq 0$.

ასახვას, რომელიც ხსიათდება მე-3 და მე-4 თვისებებით, ეწოდება კონფორმული ასახვა. ამრიგად, ანალიზური ფუნქცია, რომლის წარმოებული განსხვავდება ნულისაგან, ახორციელებს კონფორმულ ასახვას. ამასთან, $f'(z_0)$ წარმოებულის მოდული გაკვირვის კოეფიციენტი z_0 წერტილში, ხოლო $\theta = \arg f'(z_0)$ წარმოადგენს ამ წერტილიდან გამოსული სხივების მობრუნების კუთხეს.

იპოვეთ მობრუნების θ კუთხე და გაკვირვის k კოეფიციენტი $w = f(z)$ ფუნქციით განხორციელებული ასახვისას ნაჩვენებ წერტილებში:

$$1793. w = z^3, \quad 1) z = 1; \quad 2) z = -\frac{1}{4}; \quad 3) z = 1 + i.$$

$$1794. w = 2z^2 + z, \quad 1) z = 5; \quad 2) z = -\frac{i}{4}; \quad 3) z = -\frac{1}{4} + i.$$

z სიბრტყის რომელი ნაწილი იკუმშება და რომელი ნაწილი იჭიმება შემდეგი ფუნქციებით განხორციელებული ასახვისას:

$$1795. \quad 1) w = z^2; \quad 2) w = 2z^2 - 8z - 1; \quad 3) w = \frac{1}{z}.$$

1796. 1) $w=3z^2$; 2) $w=z^2+2z$; 3) $w=e^z$.

აჩვენეთ სიბრტყის ის წერტილები, რომლებშიც დარღვეულია შემდეგ ასახვათა კონფორმულობა:

1797. 1) $w=z^3-3z^2-9z+2$; 2) $w=\sin z$.

1798. 1) $w=z^4+4z$; 2) $w=\cos 2z$.

2°. წილად-წრფივი და წრფივი ასახვა. $w=\frac{az+b}{cz+d}$ ($ad \neq bc$) წილად-წრფივი ფუნქცია z სიბრტყეს კონფორმულად ასახავს w სიბრტყეზე, ამასთან $z=\infty$ წერტილი ასახება $w=\frac{a}{c}$ წერტილში, ხოლო $z=-\frac{d}{c}$ წერტილი — $w=\infty$ წერტილში. წილად-წრფივი ასახვას შემდეგი თვისებები ახასიათებს:

1. z სიბრტყის ყოველი წრფე და ყოველი წრეწირი ასახება w სიბრტყის წრფეში ან წრეწირში.

2. ორი ნებისმიერი z_1 და z_2 წერტილი, რომლებიც სიმეტრიულია z სიბრტყეზე მდებარე l წრეწირის მიმართ, ასახება w სიბრტყის w_1 და w_2 წერტილებში, რომლებიც სიმეტრიულია ამ სიბრტყეზე მდებარე λ წრეწირის მიმართ, სადაც λ წარმოადგენს l წრეწირის სახეს w სიბრტყეზე.

3. არსებობს ერთადერთი წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც z სიბრტყეს ასახავს w სიბრტყეზე ისე, რომ სამი მოცემული z_1, z_2 და z_3 წერტილი შესაბამისად ასახება სამ მოცემულ w_1, w_2 და w_3 წერტილში. ეს ასახვა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad (1)$$

თუ z_k ან w_k ($k=1, 2, 3$) წერტილებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდია, მაშინ (1) ფორმულაში ის სხვაობები, რომლებშიც ეს წერტილები მონაწილეობს, უნდა შეიცვალოს ერთიანებით.

$w=az+b$ წრფივი ფუნქცია წარმოადგენს წილად-წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევას (როცა $c=0, d=1$). $z=\infty$ წერტილს ეს ფუნქცია ასახავს $w=\infty$ წერტილში. ამიტომ წრფივი ფუნქცია წრფეს ასახავს წრფეში, ხოლო წრეწირს — წრეწირში.

1799. გამოარკვეთ $w=az+b$ წრფივი ასახვის a და b პარამეტრების გეომეტრიული მნიშვნელობა.

1800. იპოვეთ უძრავი წერტილები შემდეგი ასახვებისა:

1) $w=az+b$; 2) $w=iz+3$; 3) $w=(3i+1)z-i$.

1801. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0=1-i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z=2-i$ წერტილს გადაიყვანს $w=i$ წერტილში.

1802. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0=-2i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z=1$ წერტილს გადაიყვანს $w=1+i$ წერტილში.

1803. იპოვეთ წრფივი $w=f(z)$ ფუნქცია, რომელიც სამკუთხედს (წვეროებით $0; 1; i$ წერტილებში) ასახავს მის მსგავს სამკუთხედში (წვეროებით $0; 2; 1+i$ წერტილებში).

1804. იპოვეთ წრფივი $w=f(z)$ ფუნქცია, რომელიც $-7 \leq \operatorname{Re} z \leq -3, 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ მართკუთხედს ასახავს — $4 \leq \operatorname{Re} w \leq 0, -8 \leq \operatorname{Im} w \leq 0$ მართკუთხედში.

იპოვეთ $f(z)$ ანალიზური ფუნქცია მისი მოცემული ნამდვილი ან არმოსახვითი ნაწილის მიხედვით:

1787. $v(x, y) = x + y - 3$. 1788. $u(x, y) = x^2 - 2xy - 3xy^2$.

1789. $v(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{3y}{2}$, $f(0) = 0$. 1790. $v(x, y) = x^2 - 3xy^2$, $f(i) = i$.

1791. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $f(1) = 0$.

1792. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.

§ 5. კონფორმული ასახვები

1°. ანალიზური ფუნქციით განხორციელებული ასახვა. თუ $w = f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეზე, მაშინ ამ ფუნქციით განხორციელებულ ასახვას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. z სიბრტყის ყოველ D არეს $w = f(z)$ ფუნქცია ასახავს w სიბრტყის D' არეში შემოვლის მიმართულების შენარჩუნებით.

2. D არის ყოველი უწყვეტი γ წირი ასახება D' არის უწყვეტ γ' წირში.

3. ვთქვათ, $w_0 = f(z_0)$ და z_0 წერტილიდან გამოსული γ_1 და γ_2 წირები ასახა w_0 წერტილიდან გამოსულ γ'_1 და γ'_2 წირებში, მაშინ კუთხე γ_1 და γ_2 წირებს შორის z_0 წერტილში უდრის კუთხეს γ'_1 და γ'_2 წირებს შორის w_0 წერტილში.

4. ვთქვათ, γ წირი, რომელიც აერთებს z_0 და z წერტილებს, $w = f(z)$ ფუნქციით ასახა γ' წირში, რომელიც შესაბამისად აერთებს w_0 და w წერტილებს. ამ შემთხვევაში გაჭიმვის კოეფიციენტი z_0 წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$k = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|.$$

როცა $k > 1$, მაშინ ადგილი აქვს გაჭიმვას, ხოლო როცა $k < 1$, — შეკუმშვას. ანალიზური $f(z)$ ფუნქციისათვის $k = |f'(z_0)|$, სადაც $f'(z_0) \neq 0$.

ასახვას, რომელიც ხასიათდება მე-3 და მე-4 თვისებებით, ეწოდება კონფორმული ასახვა. ამრიგად, ანალიზური ფუნქცია, რომლის წარმოებული განსხვავდება ნულისაგან, ახორციელებს კონფორმულ ასახვას. ამასთან, $f'(z_0)$ წარმოებულის მოდული გაჭიმვის კოეფიციენტია z_0 წერტილში, ხოლო $\Theta = \arg f'(z_0)$ წარმოადგენს ამ წერტილიდან გამოსული სხივების მობრუნების კუთხეს.

იპოვეთ მობრუნების Θ კუთხე და გაჭიმვის k კოეფიციენტი $w = f(z)$ ფუნქციით განხორციელებული ასახვისას ნაჩვენებ წერტილებში:

1793. $w = z^2$, 1) $z = 1$; 2) $z = -\frac{1}{4}$; 3) $z = 1 + i$.

1794. $w = 2z^2 + z$, 1) $z = 5$; 2) $z = -\frac{i}{4}$; 3) $z = -\frac{1}{4} + i$.

z სიბრტყის რომელი ნაწილი იკუმშება და რომელი ნაწილი იჭიმება შემდეგი ფუნქციებით განხორციელებული ასახვისას:

1795. 1) $w = z^2$; 2) $w = 2z^2 - 8z - 1$; 3) $w = \frac{1}{z}$.

1796. 1) $w=3z^2$; 2) $w=z^2+2z$; 3) $w=e^z$.

აჩვენეთ სიბრტყის ის წერტილები, რომლებშიც დარღვეულია შემდეგ ასახვათა კონფორმულობა:

1797. 1) $w=z^2-3z^2-9z+2$; 2) $w=\sin z$.

1798. 1) $w=z^4+4z$; 2) $w=\cos 2z$.

9°. წილად-წრფივი და წრფივი ასახვა. $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad \neq bc$) წილად-წრფივი ფუნქცია z სიბრტყეს კონფორმულად ასახავს w სიბრტყეზე, ამასთან $z = \infty$ წერტილი ასახება $w = \frac{a}{c}$ წერტილში, ხოლო $z = -\frac{d}{c}$ წერტილი — $w = \infty$ წერტილში. წილად-წრფივ ასახვას შემდეგი თვისებები ახასიათებს:

1. z სიბრტყის ყოველი წრფე და ყოველი წრეწირი ასახება w სიბრტყის წრფეში ან წრეწირში.

2. ორი ნებისმიერი z_1 და z_2 წერტილი, რომლებიც სიმეტრიულია z სიბრტყეზე მდებარე l წრეწირის მიმართ, ასახება w სიბრტყის w_1 და w_2 წერტილებში, რომლებიც სიმეტრიულია ამ სიბრტყეზე მდებარე l წრეწირის მიმართ, სადაც l წარმოადგენს l წრეწირის სახეს w სიბრტყეზე.

3. არსებობს ერთადერთი წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც z სიბრტყეს ასახავს w სიბრტყეზე ისე, რომ სამი მოცემული z_1, z_2 და z_3 წერტილი შესაბამისად ასახება სამ მოცემულ w_1, w_2 და w_3 წერტილში. ეს ასახვა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad (1)$$

თუ z_k ან w_k ($k=1, 2, 3$) წერტილებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდია, მაშინ (1) ფორმულაში ის სხვაობები, რომლებშიც ეს წერტილები მონაწილეობს, უნდა შეიცვალოს ერთიანებით.

$w = az + b$ წრფივი ფუნქცია წარმოადგენს წილად-წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევას (როცა $c=0, d=1$). $z = \infty$ წერტილს ეს ფუნქცია ასახავს $w = \infty$ წერტილში. ამიტომ წრფივი ფუნქცია წრფეს ასახავს წრფეში, ხოლო წრეწირს — წრეწირში.

1799. გამოარკვეთ $w = az + b$ წრფივი ასახვის a და b პარამეტრების გეომეტრიული მნიშვნელობა.

1800. იპოვეთ უძრავი წერტილები შემდეგი ასახვებისა:

1) $w = az + b$; 2) $w = iz + 3$; 3) $w = (3i+1)z - i$.

1801. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0 = 1 - i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z = 2 - i$ წერტილს გადაიყვანს $w = i$ წერტილში.

1802. იპოვეთ ის წრფივი ასახვა $z_0 = -2i$ უძრავი წერტილით, რომელიც $z = 1$ წერტილს გადაიყვანს $w = 1 + i$ წერტილში.

1803. იპოვეთ წრფივი $w = f(z)$ ფუნქცია, რომელიც სამკუთხედს (წვეროებით 0; 1; i წერტილებში) ასახავს მის მსგავს სამკუთხედში (წვეროებით 0; 2; $1+i$ წერტილებში).

1804. იპოვეთ წრფივი $w = f(z)$ ფუნქცია, რომელიც $-7 \leq \operatorname{Re} z \leq -3, 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ მართკუთხედს ასახავს — $4 \leq \operatorname{Re} w \leq 0, -8 \leq \operatorname{Im} w \leq 0$ მართკუთხედში.

1805. იპოვეთ წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z+i| < 1$ წრეს ასახავს $|w-1| < 3$ წრეში.

1806. იპოვეთ წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z| < 1$ წრეს ასახავს $|w-1+i| < 1$ წრეში.

1807. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $z_1=i$, $z_2=1$, $z_3=\infty$ წერტილებს ასახავს შესაბამისად $w_1=0$, $w_2=\infty$, $w_3=1-i$ წერტილებში.

1808. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $z_1=-1$, $z_2=\infty$, $z_3=i$ წერტილებს ასახავს შესაბამისად $w_1=\infty$, $w_2=i$, $w_3=1$ წერტილებში.

1809. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z| < 1$ წრეს ასახავს $|w-i| < 3$ წრეში ისე, რომ $|z|=1$ წრეწირის $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1$ წერტილები აისახოს შესაბამისად $|w-i|=3$ წრეწირის $w_1=-3+i$, $w_2=4i$, $w_3=3+i$ წერტილებში.

1810. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $|z| < 1$ წრეს ასახავს $Im w > 0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ -1 ; 1 ; i წერტილები აისახოს ∞ ; -1 ; 2 წერტილებში.

გამოარკვიეთ, რომელ არეებში აისახება ნახევრები არეები მოცემული გარდაქმნებით:

1811. $|z| < 1$, $Im z > 0$ ნახევარწრე; $w = i \frac{1-z}{1+z}$.

1812. $Re z > 0$, $Im z > 0$ კვადრანტი; $w = \frac{z-i}{z+i}$.

1813. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $Im z > 0$ ნახევარსიბრტყეს ასახავს $Re w > 0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ $Im z > 0$ არის საზღვრის ∞ ; 0 ; 1 წერტილები აისახოს $Re w > 0$ არის საზღვრის 0 ; $-i$; ∞ წერტილებში.

1814. იპოვეთ წილად-წრფივი ფუნქცია, რომელიც $Re z < 0$ ნახევარსიბრტყეს ასახავს $Im w < 0$ ნახევარსიბრტყეზე ისე, რომ i , $-i$; $-2i$ წერტილები აისახოს -1 ; 0 ; 2 წერტილებში.

1815. იპოვეთ წერტილი, რომელიც სიმეტრიულია მოცემული z წერტილისა $|z|=1$ წრეწირის მიმართ.

1816. იპოვეთ წერტილი, რომელიც სიმეტრიულია $2+i$ წერტილისა: 1) $|z|=1$ წრეწირის მიმართ; 2) $|z-i|=3$ წრეწირის მიმართ.

3. ასახვა ხარისხოვანი ფუნქციის მეშვეობით. ვთქვათ, z სიბრტყეზე მოცემულია სექტორი, რომლის წვერო მთავსებულია $z=a$ წერტილში, ხოლო Θ კუთხე არ აღემატება $\frac{2\pi}{n}$ -ს; $w=(z-a)^n$ ხარისხოვანი ფუნქცია ამ სექტორის შიგა ნაწილს ურთი-

ერთ ცალსახად და კონფორმულად ასახავს w სიბრტყეზე მთავსებული იმ სექტორის შიგა ნაწილში, რომლის წვეროც კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო კუთხე უდრის $n\Theta$ -ს.

1817. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ არეს ასახავს $Im w > 0$ ნახევარსიბრტყეში.

1818. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ არეს ასახავს $Re w > 0$ ნახევარსიბრტყეში.

1819. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $-\frac{\pi}{8} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{8}$ არეს ასახავს $-\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4}$ არეში.

1820. იპოვეთ ხარისხოვანი ფუნქცია, რომელიც $0 < \arg(z+2) < \frac{\pi}{8}$ არეს ასახავს $-\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4}$ არეში.

1821. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z| < 1$, $Im z \geq 0$ ნახევარწრეს ასახავს $Im w > 0$ ნახევარსიბრტყეში შემდეგი პირობების მიხედვით: $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$, $w(1) = \infty$.

1822. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z| < 2$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ სექტორს ასახავს $Im w > 0$ ნახევარსიბრტყეში.

4°. ასახვა მაჩვენებლიანი ფუნქციის მეშვეობით. $w = e^z$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია ნამდვილი ღერძის პარალელურ ნებისმიერ ზოლს, რომლის სიგანე $h < 2\pi$, ურთიერთ-ცალსახად და კონფორმულად ასახავს იმ კუთხეში, რომლის წვერო მოთავსებულია კორდინატთა სათავეში, ხოლო სიდიდე h -ის ტოლია.

1823. იპოვეთ $x = C$, $y = C$ მართკუთხა ბადის სახე $w = e^z$ ასახვისას.

1824. იპოვეთ $y = kx + b$ წრფეების სახე $w = e^z$ ასახვისას. იპოვეთ შემდეგი არეების სახე $w = e^z$ ასახვისას.

1825. $0 < x < +\infty$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ნახევარზოლის.

1826. 1) $0 < x < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ნახევარზოლის;

2) $-\infty < x < 0$, $0 < y < \pi$ ნახევარზოლის.

1827. $0 < x < 1$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{4}$ მართკუთხედის.

1828. $1 < x < 2$, $-\frac{\pi}{3} < y < \pi$ მართკუთხედის.

1829. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $1 < \operatorname{Re} z < 2$ ვერტიკალურ ზოლს ასახავს $\operatorname{Im} w > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1830. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $y = x$, $y = x + h$ ზოლს ასახავს $\operatorname{Im} w > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1831. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $0 < x < 2$, $y > 0$ ნახევარზოლს ასახავს $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ ნახევარწრეში.

1832. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $-1 < x < 0$, $y < 0$ ნახევარზოლს ასახავს $|w| < 2$, $\operatorname{Im} w < 0$ ნახევარსიბრტყეში.

5°. ასახვა შუკოვსკის ფუნქციის მეშვეობით. $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქცია $|z| < 1$ წრის როგორც შიგა, ისე გარე ნაწილს ურთიერთცალსახად და კონფორმულად ასახავს $| \operatorname{Re} w | \leq 1$ სეგმენტის გარე ნაწილში. ამასთან, ყოველი $|z| = r < 1$ წრეწირი აისახება ელიფსში, რომლის ცენტრია $w = 0$ წერტილი, ნახევარღერძები კი $a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right)$, ხოლო $|z| = r > 1$ წრეწირები აისახება ელიფსში, რომლის ცენტრია $w = 0$ წერტილი, ხოლო ნახევარღერძები $a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$.

1833. $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქციის მეშვეობით იპოვეთ $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ პოლარული ბადის ასახვა.

1834. რომელ არეში ასახავს $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქცია $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ კუთხეს?

1835. აჩვენეთ, რომ $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქცია $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ ნახევარწრეს ასახავს $\operatorname{Im} w < 0$ ქვედა ნახევარსიბრტყეში.

1836. აჩვენეთ, რომ $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქცია ზედა ნახევარსიბრტყეს, რომლიდანაც ამოღებულია $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ ნახევარწრე, ასახავს $\operatorname{Im} w > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1837. აჩვენეთ, რომ $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ფუნქცია $\operatorname{Im} z > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეს ასახავს მთელ w სიბრტყეზე $(-\infty, -1]$ და $[1, +\infty)$ კრივებით.

1838. იპოვეთ ფუნქციები, რომლებიც ზედა ნახევარსიბრტყეზე ასახავს შემდეგ არეებს: 1) $|z-1| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$; 2) $|z+2| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$.

6°. ასახეები რადიკალის, ლოგარითმის და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

1839. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $Imz > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეს (ჭრილით $z_1 = 0$ წერტილიდან $z_2 = i$ წერტილამდე) ასახავს $Imw > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1840. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც სიბრტყეს (ჭრილით $z_1 = -1$ წერტილიდან $z_2 = 1$ წერტილამდე) ასახავს $Imw > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1841. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $|z| < 1$ წრეს (ჭრილით $z_1 = 0$ წერტილიდან $z_2 = 1$ წერტილამდე) ასახავს $Imw > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში.

1842. იპოვეთ ფუნქცია, რომელიც $0 < Imz < \pi$ ზოლს $-\infty < Re z \leq 0$ ($Imz = \frac{\pi}{2}$ ჭრილით) ასახავს $0 < Imw < \pi$ ზოლში.

1843. იპოვეთ $0 < Re z < \pi$ ზოლის სახე $w = \cos z$ ასახვისას.

1844. იპოვეთ $0 < Re z < \pi$, $Imz < 0$ ზოლის სახე $w = \cos z$ ასახვისას.

§ 6. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციითა ინტეგრება

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალი I წირის გასწვრივ განისაზღვრება ინტეგრალური ჯამის ზღვრის საშუალებით და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} \int_I f(z) dz &= \int_I u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_I v(x, y) dx + u(x, y) dy = \\ &= \int_I (u + i v)(dx + i dy). \end{aligned}$$

ინტეგრალის ძირითადი თვისებებია:

$$1) \int_I [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_I f_1(z) dz + \int_I f_2(z) dz;$$

$$2) \int_I a f(z) dz = a \int_I f(z) dz, \text{ სადაც } a \text{ მუდმივია};$$

$$3) \int_I f(z) dz = - \int_{I^-} f(z) dz, \text{ სადაც } I^- \text{ აღნიშნავს } I \text{ წირის გველას საწინააღმდეგო მიმართულებით};$$

აღმდეგო მიმართულებით;

$$4) \int_{I_1 + I_2} f(z) dz = \int_{I_1} f(z) dz + \int_{I_2} f(z) dz, \text{ სადაც } I_1 + I_2 \text{ აღნიშნავს } I_1 \text{ და } I_2 \text{ ნაწილებიდან შედგენილ წირს.}$$

ლებიდან შედგენილ წირს.

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მარტივად ბმულ D არეში, მაშინ მართებულია ნიუტონ-ლაიბნიცის

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

ფორმულა, სადაც $F'(z) = f(z)$, ხოლო z_1 და z_2 არის D არის ორი ნებისმიერი წერტილი.

თუ $f(z)$ და $\varphi(z)$ ფუნქციები ანალიზურია მარტივად ბმულ D არეში, ხოლო z_1 და z_2 ამ არის ნებისმიერი წერტილებია, მაშინ მართებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z) dz = \left[f(z)\varphi(z) \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)f'(z) dz.$$

1845. გამოთვალეთ შეჯამების საშუალებით შემდეგი ინტეგრალები:

$$1) \int_{z_0}^z dz; \quad 2) \int_{z_0}^z z dz.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1846. $\int_l |z| dz$, სადაც l არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $z_1=0$ და $z_2=2+i$ წერტილებს.

1847. $\int_l \operatorname{Re} z dz$, სადაც l არის $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ ნახევარწრეწილი.

1848. $\int_l (2z+1)\bar{z} dz$, სადაც l არის $|z|=1$ წრეწილი.

1849. $\int_0^{\operatorname{Re} e^{\frac{\pi i}{4}}} |z|^2 dz$, თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს მონაკვეთს,

რომელიც აერთებს $z_1=0$ და $z_2 = \operatorname{Re} e^{\frac{\pi i}{4}}$ წერტილებს.

1850. $\int_0^{1+i} e^z dz$, თუ ინტეგრების გზა წარმოადგენს ტეხილს, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ წერტილები.

1851. $\int_i^{\bar{z}} z dz$, სადაც l არის ტეხილი, რომლის წვეროებია $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$ წერტილები.

1852. $\int_l |z| \bar{z} dz$, სადაც l შეკრული კონტურია, რომელიც შედგება $|z|=1$ ზედა ნახევარწრეწირისა და $-1 \leq x \leq 1$ მონაკვეთისაგან.

1853. $\int (z-z_0)^m dz$, თუ ინტეგრების გზა წრეწირია, რომლის ცენტრია z_0 წერტილი, ხოლო რადიუსი R (m მთელი რიცხვია).

1854. დაამტკიცეთ, რომ ინტეგრალი $\int_l \bar{z} dz = 2iS$, სადაც l მარტივი შეკრული კონტურია, რომელიც შემოსაზღვრავს S ფართობს. გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1855. \int_0^{1+i} z^2 dz.$$

$$1856. \int_i^1 (iz^2 - 2z) dz.$$

$$1857. \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

$$1858. \int_0^i z \cos z dz.$$

$$1859. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (z-1) \cos z dz.$$

$$1860. \int_0^{\frac{\pi}{2}i} ze^z dz.$$

§ 7. კოშის თეორემა და კოშის ფორმულა

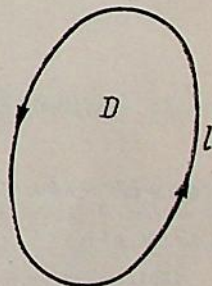
კოშის თეორემა (მარტივადმული არისათვის). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მარტივადმულ დახურულ \bar{D} არეში, მაშინ ამ ფუნქციის ინტეგრალი l კონტურის გასწვრივ, რომელიც D არეს შემოსაზღვრავს, უდრის ნულს (ნახ. 2):

$$\int_l f(z) dz = 0.$$

კოშის თეორემა (მრავლადმული არისათვის). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მრავლადმულ დახურულ D არეში ($m-3$ ნახაზზე აღებული საშაბდმული არე), რომელიც გარედან შემოსაზღვრულია l კონტურით, ხოლო შიგნიდან — l_1 და l_2 კონტურებით, მაშინ

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_l f(z) dz + \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz = 0,$$

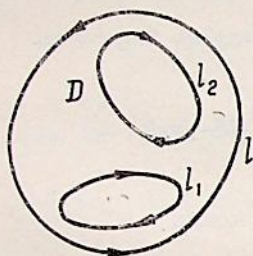
სადაც Γ წარმოადგენს D არის სრულ საზღვარს. აქ გარე l კონტურის შემოვლა ზღვება საათის ისრის მომ-



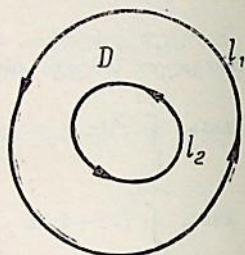
ნახ. 2.

რაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო შიგა I_1 და I_2 კონტურებისა — საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. თუ I_1 და I_2 კონტურების შემოვლის მიმართულებას შევცვლით, მაშინ:

$$\int_l f(z) dz = \int_{I_1} f(z) dz + \int_{I_2} f(z) dz,$$



ნახ. 3.



ნახ. 4.

სადაც ყველა კონტურის შემოვლა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. კერძოდ, თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია I_1 და I_2 კონტურებით შემოსაზღვრულ რეგულში და თვით ამ კონტურებზე (ნახ. 4), მაშინ

$$\int_{I_1} f(z) dz = \int_{I_2} f(z) dz.$$

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია უბან-უბან გლუვი შეკრული I კონტურის შიგნით და I -ზე, მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{z-a},$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

სადაც a წერტილი მოთავსებულია I კონტურის შიგნით, რომლის შემოვლა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ამ ფორმულებს ეწოდება კოშის ინტეგრალური ფორმულები.

1861. გამოთვალეთ ინტეგრალი $\int_l \frac{dz}{(z-a)^n}$ შეკრული I კონტურის

გასწვრივ, სადაც n მთელი რიცხვია, ხოლო a — მუდმივი.

1862. ისარგებლეთ კოშის თეორემითა და წინა მაგალითის შედეგით და გამოთვალეთ $I = \int_l \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$ ინტეგრალი, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც არ გადის $z=1$ და $z=2$ წერტილებზე.

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1863. $\int_l \frac{dz}{1-z^2}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=1$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

1864. $\int_l \frac{dz}{z^3(z^2+1)}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=i$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

1865. $\int_l \frac{dz}{z^2+1}$, სადაც l აღნიშნავს შემდეგ წრეწირებს: 1) $|z-1|=1$; 2) $|z+i|=1$; 3) $|z|=2$.

1866. $\int_l \frac{zdz}{z^4-1}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=2$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1867. $\int_l \frac{\cos z dz}{z+2i}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=-i$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1868. $\int_l \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2-1} dz$, სადაც l არის $|z-1|=1$ წრეწირი.

1869. $\int_l \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=2$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho = \frac{3}{2}$.

1870. $\int_l \frac{e^{z^2} dz}{z-\pi i}$, სადაც l არის: 1) $|z|=4$ წრეწირი; 2) $|z+i|=1$ წრეწირი.

1871. $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, სადაც l კონტური თავის შიგნით მოიცავს

$|z| \leq a$ წრეს.

1872. $\int \frac{chz}{z^2+4z+3} dz$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია

$z=0$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

შემდეგ მაგალითებში ისარგებლოთ ფორმულით:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

1873. $\int \frac{z^4 dz}{(z+1)^3}$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია $z=0$

წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=2$.

1874. $\int \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც მოიცავს $z=i$ წერტილს.

1875. $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია,

რომელიც მოიცავს $z=a$ წერტილს.

1876. $\int \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$, სადაც l არის წრეწირი, რომლის ცენტრია

$z=1$ წერტილი, ხოლო რადიუსი $\rho=1$.

§ 8. კომპლექსურწერტილთა მწკრივები

1°. კომპლექსურწერტილთა რიცხვა მწკრივები. $c_1 = a_1 + ib_1, c_2 = a_2 + ib_2, \dots, c_n = a_n + ib_n, \dots$ კომპლექსურ რიცხვა მიმდევრობას ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი, ხოლო $c = a + ib$ რიცხვს — მისი ზღვარი ($c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$), თუ არსებობს სასრული ზღვრები $a =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

კომპლექსურ რიცხვა მწკრივს

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

ეწოდება კ რ ე ბ ა დ ი, თუ არსებობს სასრული ზღვარი $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, სადაც

$$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \sum_{k=1}^n c_k$$

მწკრივის პირველი n წევრის ჯამია. S რიცხვს მწკრივის ჯ ა მ ი ეწოდება. კომპლექსურ-წევრებიან რიცხვთა მწკრივს ეწოდება ა ბ ს ო ლ უ ტ უ რ ა დ კ რ ე ბ ა დ ი, თუ

კრებალია $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ მწკრივი.

კომპლექსურწევრებიანი რიცხვთა მწკრივისათვის მართებულია კრებალობის შემდეგი ნიშნები:

1) თუ კრებალია დადებითწევრებიანი $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ მწკრივი და ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $|c_n| \leq A_n$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

2) თუ არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = q$, მაშინ როცა $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, ხოლო როცა $q > 1$, — ვანშლადი (დალამბერის ნიშანი).

3) თუ არსებობს ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = q$, მაშინ როცა $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, ხოლო როცა $q > 1$, — ვანშლადი (კოშის ნიშანი).

გამოიკვლიეთ კრებალობა შემდეგი მწკრივებისა:

1877. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$.

1878. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$.

1879. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

1880. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}}$.

1881. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

1882. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$.

$$1883. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}.$$

$$1884. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

$$1885. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i(2n+i)}{4n} \right]^n.$$

$$1886. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}.$$

2°. კომპლექსურწვერებიანი ხარისხოვანი მწკრივები. კომპლექსურწვერებიანი ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება შემდეგი სახის მწკრივს:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

სადაც $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადია, ხოლო c_n ($n=0, 1, \dots$) და a — კომპლექსური რიცხვები. როცა $a=0$, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის მწკრივს:

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n.$$

ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისათვის, არსებობს წრე, რომლის შიგნითაც მწკრივი კრებადია, ხოლო მის გარეთ — განშლადი. წრის საზღვარზე მწკრივი შეიძლება იყოს კრებადი ან განშლადი. ამ წრეს ეწოდება კრებადობის წრე, ხოლო მის R რადიუსს — კრებადობის რადიუსი ($R=\infty$, თუ მწკრივი კრებადია მთელს სიბრტყეზე, $R=0$, როცა იგი კრებადია მხოლოდ წრის ცენტრში).

კრებადობის წრეს ჩვეულებრივად განსაზღვრვენ დალამბერის ან კოშის ნიშნებით. კრებადობის რადიუსი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

განსაზღვრეთ კრებადობის წრე და რადიუსა შემდეგი მწკრივებისა:

$$1887. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$$1888. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

$$1889. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

$$1890. \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

$$1891. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}.$$

$$1892. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{2^n}.$$

$$1893. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s=0; 1; 2.$$

$$1894. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}.$$

$$1895. \sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)z^n.$$

$$1896. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i} \right)^n z^n.$$

$$1897. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$1898. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2}.$$

$$1899. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n \cdot 3^n}.$$

$$1900. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}.$$

$$1901. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}.$$

$$1902. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

იპოვეთ მწკრივის კრებადობის არე შემდეგ მაგალითებში:

$$1903. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n.$$

$$1904. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

3°. ტეილორის მწკრივი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $|z-a| < R$ $0 \leq R < \infty$ წრეში, მაშინ იგი ამავე წრეში დაიშლება ხარისხოვან მწკრივად

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (1)$$

და ასეთი დაშლა ერთადერთია. დაშლის c_n კოეფიციენტებს აქვს შემდეგი სახე:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

სადაც $0 < r < R$. (1) მწკრივის ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივი. იმ შემთხვევაში, როდესაც წრის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე. ი. $a=0$, მაშინ $f(z)$ ფუნქცია ამავე წრეში იშლება ხარისხოვან მწკრივად

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (3)$$

რომელსაც მაკლორენის მწკრივი ეწოდება. ტეილორის მწკრივი შეიძლება წევრ-წევრად ვაწარმოოთ და ვაინტეგროთ მისი კრებალობის არეში.

დამალეთ მაკლორენის მწკრივად შემდეგი ფუნქციები და განსაზღვრეთ მიღებული მწკრივის კრებალობის რადიუსი;

1905. 1) e^z ; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$.

1906. 1) $\operatorname{sh} z$; 2) $\operatorname{ch} z$;

1907. დამალეთ $f(z) = \ln z$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად $z=1$ წერტილის მიდამოში და იპოვეთ მისი კრებალობის წრე.

1908. დამალეთ $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად და იპოვეთ მისი კრებალობის რადიუსი.

დამალეთ მაკლორენის მწკრივად შემდეგი ფუნქციები:

1909. $f(z) = \cos 2z$. 1910. $f(z) = \sin 2z$.

1911. $f(z) = \sin^2 z$. 1912. $f(z) = \cos^2 z$.

1913. დამალეთ ხარისხოვან მწკრივად $f(z) = \sqrt[m]{z}$ ფუნქციის მთავარი მნიშვნელობა $z=1$ წერტილის მიდამოში; გამოთვალეთ შედეგი, როცა $m=2$.

1914. გამოთვალეთ $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ ფუნქციის ხარისხოვანი მწკრივის პირველი სამი წევრი.

1915. დამალეთ $f(z) = \frac{1}{z-2}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად $|z| < 2$ წრეში.

1916. დამალეთ $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ ფუნქცია მაკლორენის მწკრივად $|z| < 1$ წრეში.

იპოვეთ მთავარი მნიშვნელობის ხარისხოვანი მწკრივი $z=0$ წერტილის მიდამოში და მწკრივის კრებალობის რადიუსი შემდეგი ფუნქციებისა:

1917. $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

1918. $f(z) = \operatorname{arcsin} z$.

დამალეთ ხარისხოვან მწკრივად შემდეგი ფუნქციები:

1919. $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$.

1920. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$.

1921. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$.

1922. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

4°. ლორანის მწკრივი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $r < |z-a| < R$ წრიულ რგოლში, მაშინ ამ რგოლში ეს ფუნქცია დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

სადაც $r < \rho < R$ და ეს დაშლა ერთადერთია.

ლორანის მწკრივის პირველი ნაწილი $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ წარმოადგენს მწკრივს $(z-a)$ -ს დადებითი ხარისხების მიხედვით და მას ეწოდება ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი; მეორე ნაწილი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ წარმოადგენს

მწკრივს $(z-a)$ -ს უარყოფითი ხარისხების მიხედვით. მას ეწოდება ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი.

ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი კრებადია R -რადიუსიანი წრის შიგნით, ხოლო მთავარი ნაწილი — r -რადიუსიანი წრის გარეთ. მთელი მწკრივი კრებადია $r < |z-a| < R$ წრიულ რგოლში.

დაშალეთ ლორანის მწკრივად ნაჩვენებ რგოლში ან ნაჩვენები წერტილის მიდამოში შემდეგი ფუნქციები და განსაზღვრეთ კრებადობის არე უკანასკნელ შემთხვევაში:

1923. $f(z) = \frac{1}{z-3}, \quad z=0.$ 1924. $f(z) = \frac{1}{z-2}, \quad z=\infty.$

1925. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad z=0, z=1, z=\infty.$

1926. $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}, \quad z=0, z=-2, z=\infty.$

1927. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}, \quad 1 < |z| < 2$ და $2 < |z| < \infty$ რგოლებში.

1928. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, \quad 1 < |z| < 2$ რგოლში.

1929. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad z=i.$ 1930. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

$$1931. f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, \quad 0 < |z-1| < \infty.$$

$$1932. f(z) = (1-z) \sin \frac{1}{z^2}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

$$1933. f(z) = \sin \frac{1}{(z-i)^3}, \quad z = i.$$

$$1934. f(z) = (z+i)^2 \cos \frac{1}{z+i}, \quad z = -i.$$

§ 9. ანალიზური ფუნქციის ნულები და განსაკუთრებული წერტილები

$z = a$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის n -ური რიგის ნული, თუ

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

იმისათვის, რომ $z = a$ წერტილი იყოს $f(z)$ ფუნქციის n -ური რიგის ნული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ a წერტილის მიდამოში ადგილი ჰქონდეს ტოლობას:

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad (1)$$

სადაც $\varphi(z)$ ანალიზური ფუნქციაა a წერტილის მიდამოში და $\varphi(a) \neq 0$. როცა $n=1$, მაშინ ვეაქვს მარტივი ნული, ხოლო როცა $n > 1$, — ჯერადი.

იმ წერტილებს, რომლებშიაც დარღვეულია ფუნქციის ანალიზურობა, ეწოდება განსაკუთრებული წერტილი.

$z = a$ წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ამ წერტილის რომელიმე მიდამოში, გარდა თვით a წერტილისა. a წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (2)$$

ადგილი აქვს სამ შემთხვევას:

1) a წერტილს ეწოდება ასაცილებელი განსაკუთრებული წერტილი, თუ (2) მწკრივი არ შეიცავს მთავარ ნაწილს, ე. ი. $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$. ამ შემთხვევაში განსაკუთრებულობა შეიძლება ავიცილოთ, თუ დავუშვებთ, რომ $z = a$ წერტილზე $f(a) = c_0$. მიღებული ფუნქცია ანალიზური იქნება როგორც a წერტილის მიდამოში, ასევე თვით a წერტილზე ასაცილებელი წერტილის მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია შემოსახლვრულია.

2) a წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის პოლუსი, თუ (2) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაქრებთა სასრულ რაოდენობას. ამასთან, თუ $c_{-n} \neq 0$, ხოლო $c_{-(n+1)} = c_{-(n+2)} = \dots = 0$, მაშინ a წერტილს ეწოდება n -ური რიგის პოლუსი. როცა $n=1$, მაშინ პოლუსს ეწოდება მარტივი. პოლუსის საკმარისად მცირე მიდამოში $f(z)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდა.

3) a წერტილს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, თუ ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაქრებთა

უსასრულო რაოდენობას. არსებითად განსაკუთრებულ წერტილზე ფუნქცია განუსაზღვრელია.

თუ $z=a$ წერტილი $f(z)$ ფუნქციის n -ური რიგის წერტილია, მაშინ იგივე წერტილი $\frac{1}{f(z)}$ ფუნქციის n -ური რიგის პოლუსია და, პირიქით.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ნულები და განსაზღვრეთ მათი რიგი:
1935. 1) $z^2(1-z)$; 2) $(z^2+1)^2$; 3) $\cos z$; 4) $\sin^2 z$.

1936. 1) $(z^2+2z+1)^2$; 2) $\frac{z^2+1}{z+1}$; 3) $\operatorname{tg}^2 z$; 4) $\operatorname{ctg}^2 z$.

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების განსაკუთრებული წერტილები, განსაზღვრეთ მათი ხასიათი, პოლუსების შემთხვევაში განსაზღვრეთ რიგი:

1937. 1) $\frac{1}{z-z^3}$; 2) $\frac{3}{z^4(z^2+4)^2}$; 3) $e^{\frac{z}{1-z}}$;
 4) $\sin \frac{1}{z}$; 5) $\frac{\sin z}{z}$; 6) $\frac{1-\cos z}{z^4}$.

1938. 1) $\frac{z^4}{1+z^4}$; 2) $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$; 3) $\sin \frac{1}{1-z}$;
 4) $ze^{\frac{1}{z}}$; 5) $\frac{\sin z}{z+\pi}$; 6) $\frac{\cos z}{z^2}$.

ანალიზური ფუნქციის ყოფაქცევა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $z=\infty$ წერტილის მიდამოში, $z=\frac{1}{\zeta}$ გარდაქმნა ამ მიდამოს გადასახავს $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში და $f(z)$ ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა დაიყვანება $f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$ ფუნქციის შესწავლაზე $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში. ამ შემთხვევაში $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში დაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\zeta^n}. \quad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\zeta = \frac{1}{z}$, მივიღებთ $f(z)$ ფუნქციის დაშლას ლორანის მწკრივად $z=\infty$ წერტილის მიდამოში:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n. \quad (4)$$

ასეთი გარდაქმნისას ლორანის მწკრივის წესიერი ნაწილი შეიცვლება მთავარი ნაწილი და პირიქით.

შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1) $z = \infty$ იქნება ასაცილებელი განსაკუთრებული წერტილი, თუ (4) მწკრივი არ სშეიცავს z -ის დადებით ხარისხებს, ე. ი.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

თუ დაეშვებო, რომ $f(\infty) = c_0$, მაშინ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზური იქნება $z = \infty$ წერტილში.

2) $z = \infty$ წერტილის ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის პოლუსი, თუ (4) მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შესაქრებთა სასრულ რაოდენობას. ამასთან თუ $c_{-n} \neq 0$, ხოლო $c_{-(n+1)} = c_{-(n+2)} = \dots = 0$, მაშინ $z = \infty$ წერტილის ეწოდება n -ური რიგის პოლუსი.

3) $z = \infty$ წერტილის ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, თუ ლორანის მწკრივის მთავარი ნაწილი შეიცავს შეაქრებთა უსასრულო რაოდენობას.

თუ

$$f(z) = \frac{c_n}{z^n} + \frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} + \dots, \quad (c_n \neq 0)$$

მაშინ $z = \infty$ წერტილის ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის n -ური რიგის წესი, როცა $n = 1$, მას ეწოდება მარტივი წესი. $z = \infty$ წერტილში მართებულია თეორემა ნელსა და პოლუსს შორის კავშირის შესახებ.

თუ $z = \infty$ არის ასაცილებელი წერტილი, პოლუსი ან არსებითად განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ ზღვარი $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ შესაბამისად იქნება სასრული, უსასრულოდ დიდი

ან ეს ზღვარი არ იარსებებს.

შეისწავლეთ უსასრულოდ დამორებული წერტილის მიდამოში შემდეგ ფუნქციათა ყოფაქცევა.

1939. 1) $\frac{1}{z+i}$; 2) $\frac{z^2+4}{e^z}$; 3) $1 + \frac{1}{z}$;

4) $\frac{1}{\cos z}$; 5) $\sin z$; 6) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$.

1940. 1) $\sin \frac{1}{1-z}$; 2) $e^{z - \frac{1}{z}}$; 3) $e^{-\frac{1}{z^2}}$;

4) $\frac{1}{\sin z}$; 5) $\frac{\sin z}{z}$; 6) $\cos z - \sin z$.

§ 10. ნაშთები და მათი გამოყვანება

1°. ნაშთები. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი $z=a$ ობლივირებულ განსაკუთრებულ წერტილზე ეწოდება ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივის c_{-1} კოეფიციენტს და აღინიშნება ასე:

$$\operatorname{res} f(a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(z) dz,$$

სადაც l ნებისმიერი შეკრული კონტურია, რომელიც მოიცავს a წერტილს, ხოლო $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია ამ კონტურის შიგნით, გარდა $z=a$ წერტილისა.

ნაშთები გამოითვლება შემდეგი ფორმულების მიხედვით: თუ a არის $f(z)$ ფუნქციის მარტივი პოლუსი, მაშინ

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) f(z)].$$

კერძოდ, თუ $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$, სადაც $\varphi(z)$ და $g(z)$ ანალიზური ფუნქციებია a წერტილზე, ამასთან, $\varphi(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, მაგრამ $g'(a) \neq 0$, მაშინ

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{g'(a)}.$$

n -ური რიგის პოლუსის შემთხვევაში

$$\operatorname{res} f(a) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)],$$

ანუ

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

გამოთვალეთ ნაშთები ყოველ განსაკუთრებულ წერტილზე შემდეგი ფუნქციებისა:

1941. 1) $\frac{z^3}{z^2-1}$; 2) $\frac{z}{(z-3)(z-4)^2}$; 3) $\frac{z^6}{(z-1)^4}$;

4) $e^{\frac{z}{1-z}}$; 5) $\frac{\sin z}{z}$; 6) $\lg z$.

1942. 1) $\frac{2z-3}{z^2(z-3)}$; 2) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$; 3) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

4) $e^{\frac{1}{z}}$; 5) $\frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$; 6) $\frac{1}{\sin z}$.

2°. ფუნქციის ნაშთი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში. ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $z = \infty$ წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით ამ წერტილისა. $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი $z = \infty$ წერტილში უდრის ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივად დაშლაში შემავალ $\frac{1}{z}$ წევრთან მდგომ კოეფიციენტს შებრუნებული ნიშნით და აღინიშნება ასე:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_1.$$

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია z ცვლადის მთელს სიბრტყეზე, გარდა a_1, a_2, \dots, a_n განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ ამ ფუნქციის ნაშთების ჯამი ყველა განსაკუთრებული წერტილის მიმართ, უსასრულოდ დაშორებულ წერტილის ჩათვლით, ნულის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0.$$

იპოვეთ ნაშთები უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1943. \quad 1) \quad 1 + \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}; \quad 2) \quad \frac{3}{z+i}; \quad 3) \quad \frac{z^5}{z^2-1}; \quad 4) \quad e^{\frac{1}{z}}.$$

$$1944. \quad 1) \quad \frac{z^5}{(z-1)^3}; \quad 2) \quad \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}; \quad 3) \quad \frac{z^2}{(z^2+1)^2}; \quad 4) \quad \sin \frac{1}{z}.$$

3°. ინტეგრალების გამოთვლა ნაშთების მეშვეობით (ძირითადი თეორემა ნაშთების შესახებ). თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია D არეში და შეკრულ l კონტურზე, რომელიც D არეს შემოსაზღვრავს, გარდა D არეში მდებარე a_1, a_2, \dots, a_n სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ მართებულია ტოლობა.

$$\int_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k).$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1945. \quad \int_l \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z-2| = \frac{1}{2} \text{ წრეწირი.}$$

$$1946. \quad \int_l \frac{dz}{z^3(z^2-1)}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z|=3 \text{ წრეწირი.}$$

$$1947. \quad \int_l \frac{dz}{z^3+1}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z-1-i|=1 \text{ წრეწირი.}$$

$$1948. \int_l \frac{dz}{z^2+1}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z-1|=1 \text{ წრეწირი.}$$

$$1949. \int_l \frac{\operatorname{ctg} z dz}{4z-\pi}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z|=1 \text{ წრეწირი.}$$

$$1950. \int_l \frac{\operatorname{tg} z dz}{z-1}, \text{ სადაც } l \text{ არის რომბი, რომლის წვეროები მო-}$$

თავსებულა $z_1=2, z_2=i, z_3=-2, z_4=-i$ წერტილებში.

$$1951. \int_l e^{\frac{z}{1-z}} dz, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z|=2 \text{ წრეწირი.}$$

$$1952. 1) \int_l \sin \frac{1}{z} dz, 2) \int_l \sin^2 \frac{1}{z} dz, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z|=r \text{ წრე-}$$

წირი.

$$1953. \int_l \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \text{ სადაც } l \text{ არის } |z|=1 \text{ წრეწირი.}$$

ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში ისარგებლეთ შემდეგი თეორემით: თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია მთელს z სიბრტყეზე. გარდა რამდენიმე იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილისა, ამასთან, ყველა სსრული განსაკუთრებული წერტილი მოთავსებულია შეკრული l კონტურის შიგნით, მაშინ

$$\int_l f(z) dz = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

$$1954. \text{ გამოთვალეთ } \int_l \frac{z^3 dz}{2z^4+1} \text{ ინტეგრალი, სადაც } l \text{ არის } |z|=1$$

წრეწირი.

$$1955. \text{ გამოთვალეთ } \int_l \frac{z^{20} dz}{(2z^3+1)^2(z^4-1)^3} \text{ ინტეგრალი, სადაც } l \text{ არის}$$

$|z|=2$ წრეწირი.

$$1956. \text{ გამოთვალეთ } \int_l \frac{z^{15} dz}{(z^2+1)^2(z^4+1)^3} \text{ ინტეგრალი, სადაც } l \text{ არის}$$

$|z|=4$ წრეწირი.

4°. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნაშთების მეშვეობით. ნამდვილი ცვლადის ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალი შეიძლება გამოვსახოთ კომპლექსური ცვლადის ინტეგრალის საშუალებით შეკრული კონტურის გასწვრივ, რაც საშუალებას მოვ-

ვცემს ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ძირითადი თეორემა ნაშთების შესახებ.

ნაშთების თეორია შეიძლება გამოვიყენოთ აგრეთვე ზოგიერთი არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოსათვლელად. ამასთან დაკავშირებით ვისარგებლებთ შემდეგი თეორემებით:

თეორემა 1. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას: 1) $z = \infty$ წერტილი წარმოადგენს $f(z)$ ფუნქციის ნულს, რომლის რიგი 2-ზე ნაკლები არ არის ე. ი. ამ ფუნქციის ლორანის მწკრივის $z = \infty$ წერტილის მიდამოში აქვს შემდეგი სახე:

$$f(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

($c_2 = 0$ შემთხვევაში გამორიცხული არ არის), 2) $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა ნამდვილ ღერძზე, 3) $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია $\text{Im}z > 0$ ზედა ნახევარსიბრტყეში, გარდა a_1, a_2, \dots, a_n სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res} f(a_k).$$

თეორემა 2. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სამ პირობას: 1) $f(z) = e^{iaz} g(z)$, სადაც $a > 0$ და $g(z) \rightarrow 0$, როცა $z \rightarrow \infty$, ამასთან, $\text{Im}z \geq 0$, 2) $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა ნამდვილ ღერძზე, 3) $f(z)$ ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში, გარდა a_1, a_2, \dots, a_n სასრული რიცხვი განსაკუთრებული წერტილებისა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res} f(a_k).$$

თეორემა 3. თუ $f(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს წინა თეორემის 1) და 3) პირობებს Γ ნამდვილ ღერძზე, აქვს მარტივი პოლუსების სასრული რიცხვი, x_1, x_2, \dots, x_m , მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \text{res} f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{res} f(x_k) \right].$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1957. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1). \quad 1958. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$1959. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}. \quad 1960. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$1961. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}. \quad 1962. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}.$$

$$1963. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4}, \quad 1964. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}.$$

$$1965. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)}, \quad 1966. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}.$$

§ 11. ლოგარითმული ნაშთი. არგუმენტის პრინციპი.
რუშეს თეორემა

თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია შეკრულ L კონტურზე, მაშინ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

სიდიდეს ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის ლოგარითმული ნაშთი ამ კონტურის მიმართ.

არგუმენტის პრინციპი. თუ $f(z)$ ფუნქცია ანალიზურია L კონტურით შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში, გარდა სასრული რაოდენობის პოლუსებისა D -ში, და კონტურზე არა აქვს არც ერთი ნული და პოლუსი, მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

სადაც N არის $f(z)$ ფუნქციის ნულების რიცხვი, ხოლო P — პოლუსების რიცხვი. ყოველი ნული და პოლუსი აიღება იმდენჯერ, რამდენიც მათი წერადობაა.

რუშეს თეორემა. თუ $f(z)$ და $\varphi(z)$ ფუნქციები ანალიზურია L კონტურით შემოსაზღვრულ დახურულ D არეში და ამ კონტურის ყოველ წერტილზე მართებულია $|f(z)| > |\varphi(z)|$ უტოლობა, მაშინ $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ და $f(z)$ ფუნქციებს D არეში აქვს ნულების ერთი და იგივე რიცხვი. ყოველი ნული იმდენჯერ აიღება, რამდენიც არის მისი წერადობა.

იპოვეთ მოცემული ფუნქციების ლოგარითმული ნაშთები ნაჩვენები კონტურების მიმართ:

$$1967. f(z) = \frac{z}{1+z^3}, \quad |z|=2.$$

$$1968. f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z^3+8)(z+4)}, \quad |z|=3.$$

$$1969. f(z) = \cos z + \sin z, \quad |z|=4.$$

$$1970. f(z) = (e^z - 2)^2, \quad |z|=8.$$

$$1971. f(z) = \operatorname{tg}^3 z, \quad |z|=6.$$

$$1972. f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}, \quad |z|=\pi.$$

$$1978. f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2(e^{iz} - 1)}, \quad |z| = 8.$$

$$1974. f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad |z| = 8.$$

1975. იპოვეთ $F(z) = z^5 + 5z - 1$ ფუნქციის ნულების რიცხვი $|z| < 1$ წრეში.

1976. იპოვეთ $F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ფუნქციის ნულების რიცხვი $|z| < 1$ წრეში.

1977. იპოვეთ $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z| < 2$ წრეში.

1978. იპოვეთ $z^5 + z^2 + 1 = 0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z| < 2$ წრეში.

1979. იპოვეთ $z^3 + z + 1 = 0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z| < \frac{1}{2}$ წრეში.

1980. იპოვეთ $z^6 - 6z + 10 = 0$ განტოლების ფესვების რიცხვი $|z| < 1$ წრეში.

IX თ ა 3 0

ოპერაციული ალრიცხვის ელემენტები

§ 1 ორიგინალი და მათი გამოსახულებანი. ლაპლასის ბარლაჟნა

ორიგინალი ეწოდება ისეთ $f(t)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1. $f(t)$ ფუნქცია უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად $0 \leq t < +\infty$ შუალედში, ცალკეული წერტილების გარდა, რომლებშიც $f(t)$ ან მისი წარმოებულები განიცდის პირველი გვარის წყვეტას. ამასთან, ფუნქციას ყოველ სასრულ შუალედში შეიძლება ჰქონდეს წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა.

2. $f(t) = 0$, როცა $t < 0$.

3. $f(t)$ იზრდება უფრო ნელა, ვიდრე მაჩვენებლიანი ფუნქცია, ე. ი. არსებობს ისეთი $M > 0$ და $t_0 \geq 0$ მუდმივები, რომ t -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის $|f(t)| < M e^{s_0 t}$. s_0 რიცხვს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ზრდის მაჩვენებელი.

$f(t)$ ორიგინალის გამოსახულება ეწოდება $p = s + i\omega$ კომპლექსური ცვლადის $F(p)$ ფუნქციას, რომელიც შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ლაპლასის ინტეგრალი. $F(p)$ ფუნქციას ეწოდება $f(t)$ ორიგინალის ლაპლასის გამოსახულება. იმ ფაქტს, რომ $F(p)$ წარმოადგენს $f(t)$ ფუნქციის გამოსახულებას, ასე აღნიშნავენ:

$$F(p) \doteq f(t), \text{ ან } f(t) \doteq F(p).$$

დაადგინეთ, რომელი ფუნქციებია ორიგინალები და იპოვეთ მათი ზრდის მაჩვენებელი შემდეგ მაგალითებში:

1981. $f(t) = e^{(3+t)t}$.

1982. $f(t) = e^{(2+3t)t}$.

1983. $f(t) = t$.

1984. $f(t) = \sin \frac{1}{t}$.

1985. $f(t) = e^{t^3}$.

1986. $f(t)$ ფუნქცია ნებისმიერი t -სათვის აკმაყოფილებს $|f(t)| < Me^{at}$, სადაც $M > 0$, $a \geq 0$.

იპოვეთ შემდეგ ორიგინალთა გამოსახულებანი:

1987. $f(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < 0, \\ 1, & \text{როცა } t \geq 0. \end{cases}$

1988. $f(t) = C = \text{const}$.

1989. $f(t) = t$.

1990. 1) $f(t) = e^{at}$; 2) $f(t) = a^t$.

1991. $f(t) = \sin t$.

1992. $f(t) = \cos t$. 1993. $f(t) = \sin t$. 1994. $f(t) = \cos t$.

§ 2. ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები

1. წრფივობის თვისება. თუ $f_1(t) \doteq F_1(p)$ და $f_2(t) \doteq F_2(p)$, მაშინ

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \doteq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p),$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია.

2. მსგავსების თეორემა. თუ $f(t) \doteq F(p)$ და $a > 0$ მუდმივია, მაშინ

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

3. დაგვიანების თეორემა. თუ $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი τ -სათვის

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

4. ძვრის თეორემა. თუ $f(t) \doteq F(p)$, მაშინ ნებისმიერი კომპლექსური p_0 -სათვის

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p-p_0).$$

5. გამოსახულების გაწარმოება. თუ $F(p) \doteq f(t)$, მაშინ

$$F'(p) \doteq -t f(t), \quad F''(p) \doteq (-t)^2 f(t), \dots, \quad F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t).$$

6. გამოსახულების ინტეგრება. თუ $f(t) \doteq F(p)$ და არსებობს $\int_p^\infty F(p) dp$ ინტეგრალი, მაშინ ის წარმოადგენს $\frac{f(t)}{t}$ ფუნქციის გამოსახულებას, ე. ი.

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp.$$

7. ორიგინალის გაწარმოება. თუ $f(t) \doteq F(p)$ და $f'(t)$ წარმოადგენს ორიგინალს, მაშინ

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf'(0) - f''(0),$$

$$f'''(t) \doteq p^3 F(p) - p^2 f'(0) - pf''(0) - f'''(0) \text{ და, საზოგადოდ,}$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

თუ $f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$, მაშინ

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p).$$

8. ორიგინალის ინტეგრება. თუ $f(t) \div F(p)$, მაშინ

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p}.$$

ზოგიერთი გამოსახულების ცხრილი

№	$f(t), t > 0$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
6	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
7	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
8	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
9	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
10	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}$
11	$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
12	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$

იპოვეთ უმცირეს ორიგინალთა გამოსახულებანი:

1995. $f(t) = 4 - 5e^{2t}$.

1996. $f(t) = \frac{1}{3} \sin 3t - 5$.

1997. $f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$.

1998. $f(t) = 2\sin 2t + 3\operatorname{sh} 2t$.

1999. $f(t) = \sin t \cdot \sin 2t$.

2000. $f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t$.

2001. $f(t) = \operatorname{ch} 2t + 2e^{-3t} + 1$.

2002. $f(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} + t$.

2003. $f(t) = \cos^2 t$.

2004. $f(t) = \sin^2 t$.

2005. $f(t) = 3t^2 + 2t - 5$.

2006. $f(t) = 3t^3 e^{-t} + 2t^2 - 1$.

2007. $f(t) = t^2 e^t + 2te^{-t} + 4\operatorname{ch} 2t$.

2008. $f(t) = t \operatorname{ch} bt$.

2009. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

2010. $f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$.

2011. $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

2012. $f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.

2013. $f(t) = t^3 e^{2t}$.

2014. $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \sin t$.

2015. $f(t) = e^{-at} \operatorname{sh} bt$.

2016. $f(t) = e^{at} \operatorname{ch} bt$.

2017. $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < a, \\ 1, & \text{როცა } t > a. \end{cases}$

2018. $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t < 2, t > 3, \\ 1, & \text{როცა } 2 < t < 3. \end{cases}$

2019. $f(t) = \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$.

2020. $f(t) = (t-2)^3$.

2021. $f(t) = \operatorname{ch}(t-3)$.

2022. $f(t) = \sin^2(t-a)$.

§ 8. ორიგინალთა ნახვევი. გამრავლების თეორემა. დიუკამელის ფორმულა. მულტიპლიკაციური ინტეგრირების წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი და სისტემები

წინა $f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალთა ნახვევი აღინიშნება $f_1(t) * f_2(t)$ სიმბოლოთი და ასე განიშარტება:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau,$$

ამასთან,

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

გამრავლების თეორემა. $f_1(t)$ და $f_2(t)$ ორიგინალთა $f_1(t) * f_2(t)$ ნახვევის გამოსახულება ამ ორიგინალების გამოსახულებების ნამრავლის ტოლია, ე.ი. თუ $f_1(t) \doteq F_1(p)$ და $f_2(t) \doteq F_2(p)$, მაშინ

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p).$$

დიუჰამელის ფორმულა. თუ $[0, +\infty)$ შუალედში $f_1(t)$ ორიგინალი უწყვეტია, ხოლო $f_2(t)$ ორიგინალი უწყვეტად წარმოებადი, მაშინ მართებულია დიუჰამელის ფორმულა:

$$pF_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau,$$

სადაც $F_1(p) \rightarrow f_1(t)$, $F_2(p) \rightarrow f_2(t)$.

იპოვეთ მოცემული ორიგინალების ნახვევი და ნახვევის გამოსახულება:

2023. $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \cos t$.

2024. $f_1(t) = t$, $f_2(t) = e^t$.

2025. $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{-t}$.

2026. $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \cos t$.

მოცემულ გამოსახულებათა მიხედვით იპოვეთ ორიგინალები:

2027. $F(p) = \frac{12}{p^2 + 16}$.

2028. $F(p) = \frac{10}{p^2 - 25}$.

2029. $F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$.

2030. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p}$.

2031. $F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$.

2032. $F(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 5}$.

2033. $F(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 10}$.

2034. $F(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 6p + 11}$.

2035. $F(p) = \frac{3p - 1}{p^2 - 4p + 7}$.

2036. $F(p) = \frac{p + 1}{p^2 - 7p + 6}$.

2037. $F(p) = \frac{p + 1}{(p - 1)(p + 2)(p - 3)}$.

2038. $F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$.

2039. $F(p) = \frac{1}{(p - 1)^2(p + 2)}$.

2040. $F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p - 1)(p + 1)^2}$.

2041. $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$.

2042. $F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p - 2)^2(p^2 + 4)}$.

გამრავლების თეორემის გამოყენებით მოცემულ გამოსახულებათა მიხედვით იპოვეთ შემდეგი ორიგინალები:

2043. $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$.

2044. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$.

2045. $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

2046. $F(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2}$.

ლიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ორიგინალები მათი გამოსახულების მიხედვით:

$$2047. F(p) = \frac{1}{p^2 - 1}.$$

$$2048. F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)p^3}.$$

ამოხსენით დიფერენციალური განტოლებები საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$2049. x' + x = 1, \quad x(0) = 0. \quad 2050. x' - 2x = 0, \quad x(0) = 1.$$

$$2051. x'' + 9x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0. \quad 2052. x'' - x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2053. x'' - 4x' + 5x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$2054. x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

$$2055. x'' - 2x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

$$2056. x'' + 3x' + 2x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2057. x'' - x' = t^2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2058. x'' + x' = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = -2.$$

$$2059. x'' + x' - 2x - e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$2060. x'' - 2x' - 3x = e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2061. x'' + x = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2062. x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2063. x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2064. x'' + x = t \cos 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2065. x'' + 4x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$2066. x'' - 6x' + 11x - 6x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$$

$$2067. x'' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$2068. x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$2069. x^{IV} + x'' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = 2.$$

$$2070. x^{IV} - 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

ლიუჰამელის ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$2071. x'' - x' = t - 2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2072. x'' + x = 5t^2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2073. x'' - 5x' + 6x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$2074. x'' + x' = e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

ამოხსენით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$2075. \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$2076. \begin{cases} x' - x - 2y = 0, \\ y' - 2x - y = 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$$

$$2077. \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, & x(0) = 1, & y(0) = 3. \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$$

$$2078. \begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, & x(0) = y(0) = 0. \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases}$$

$$2079. \begin{cases} x'' + y = 1, & x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \\ y'' + x = 0, \end{cases}$$

$$2080. \begin{cases} x'' + 3y'' - x = 0, & x(0) = x'(0) = y(0) = 0, & y'(0) = -\frac{2}{3}. \\ x' + 3y' - 2y = 0, \end{cases}$$

$$2081. \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, & x(0) = 1, & y(0) = 0, & z(0) = 0. \\ z' = x + y, \end{cases}$$

$$2082. \begin{cases} x' = x + y - x, \\ y' = z + x - y, & x(0) = 1, & y(0) = z(0) = 0. \\ z' = x + y + z, \end{cases}$$

X თავი

პირველი რიგის წრფივი კარძოწარმოებულეზიანი დიფერენციალური განტოლუზუბი. მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლუზა

§ 1. პირველი რიგის წრფივი კარძოწარმოებულეზიანი დიფერენციალური განტოლუზა

პირველი რიგის წრფივი კარძოწარმოებულეზიანი დიფერენციალური განტოლუზის ზოგადი სხუვა:

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \quad (*)$$

სადაც x_1, x_2, \dots, x_n დამოუკიდებელი ცვლადებია, z — მათზე დამოკიდებული უცნობაა ფუნქცია, ხოლო a_1, a_2, \dots, a_n, b — მოცემული ფუნქციები. თუ a_1, a_2, \dots, a_n კოეფიციენტებში z ფუნქცია არ მონაწილეობს და მარჯვენა ნაწილი ივითვრად ნულის ტოლია, მაშინ ასეთ განტოლუზას ეწოდება ერთგვაროვანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ეწოდება არაერთგვაროვანი.

(*) განტოლუზის ამოსახსნელად საჭიროა დაწეროთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლუზათა სისტემა

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}$$

და ვიპოვოთ ამ სისტემის n დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_2, \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_n. \end{cases}$$

(*) განტოლების ზოგადი ამონახსნი არაცხადი სახით ასე დაიწერება:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0,$$

სადაც F ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები, და სადაც ნაჩვენებია, იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებენ:

$$2083. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad x=0, \quad z=2y.$$

$$2084. \quad (1+x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad x=0, \quad z=y^2.$$

$$2085. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad x=1, \quad u=y+z^2.$$

$$2086. \quad \sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad x=1, \quad u=y-z.$$

$$2087. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad z=1, \quad u=x^y.$$

$$2088. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad x=1, \quad u = \ln z - \frac{1}{y}.$$

$$2089. \quad (z-y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$2090. \quad (mz-ny) \frac{\partial u}{\partial x} + (nx-lz) \frac{\partial u}{\partial y} + (ly-mx) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$2091. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + (y+x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad x=2, \quad z=y-4.$$

$$2092. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, \quad x=1, \quad z=y.$$

$$2093. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$2094. \quad (z-y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x-z) \frac{\partial z}{\partial y} = y-x.$$

$$2095. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = z. \quad z=z(x,y); \quad x=1, \quad z=y,$$

$$2096. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad y=1, \quad z=x^2.$$

$$2097. \quad (1 + \sqrt{z-x-y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2; \quad y=0, \quad z=2x.$$

$$2098. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u; \quad x=2, \quad u = \frac{1}{2}(y+z).$$

§ 2. მეორე რიგის კერძო წარმოებულეზიან განტოლებათა ტიპები. კანონიკურ სახეზე დაყვანა

მეორე რიგის კერძო წარმოებულეზიან დიფერენციალური განტოლება

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

არის ჰიპერბოლური ტიპისა, თუ $b^2 - ac > 0$, — პარაბოლური ტიპისა, თუ $b^2 - ac = 0$ და — ელიფსური ტიპისა, თუ $b^2 - ac < 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას ეწოდება ჰიპერბოლური ტიპის კანონიკური განტოლება,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას — პარაბოლური ტიპის კანონიკური განტოლება, ხოლო

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

განტოლებას — ელიფსური ტიპის კანონიკური განტოლება. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$2099. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad 2100. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2101. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

$$2102. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2103. \quad y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad 2104. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2105. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad 2106. \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2107. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2108. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2109. \operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$2110. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

იპოვეთ შემდეგ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნი და კერძო ამონახსნები, თუ მოცემულია საწყისი პირობები:

$$2111. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2112. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8y.$$

$$2113. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$2114. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1.$$

$$2115. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y} + 1.$$

$$2116. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2117. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad u \Big|_{x=1} = y^3, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = y^2.$$

$$2118. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u \Big|_{x=0} = \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = y.$$

$$2119. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2120. t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$2121. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -y - 1.$$

$$2122. x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad u \Big|_{x=1} = 2y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = y.$$

§ 8. სივრცის რხევის განტოლება

1°. სივრცის რხევის განტოლების ამონახსნი დღამხერის მეთოდით

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც, აკმაყოფილებს

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$$

საწყის პირობებს, მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$2123. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u \Big|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

$$2124. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u \Big|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -x.$$

$$2125. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = x.$$

$$2126. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos x.$$

2127. იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლებით განსაზღვრული სი-

მის ფორმა $t = \frac{\pi}{2a}$ მომენტში, თუ $u \Big|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1$.

2128. იპოვეთ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლებით განსაზღვრული სიმის

ფორმა $t = \pi$ მომენტში, თუ $u \Big|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \cos x$.

2° სიმის რხევის განტოლების ამოხსნა ფურიეს მეთოდით.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x)$$

საწყის პირობებს და

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0$$

სასაზღვრო პირობებს, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი მწკრივის საშუალებით:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

მოცემული სასაზღვრო პირობებისა და საწყისი პირობების გათვალისწინებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$2129. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1.$$

$$2130. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

$$2131. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

$$2132. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2x}{l}, & \text{როცა } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2(l-x)}{l}, & \text{როცა } \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

$$2133. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \frac{4x(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

$$2134. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{თუ } u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

§ 4. სითბოგამტარობის განტოლება

თუ სხეული წარმოადგენს ღეროს, რომელიც მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ მაშინ სითბოგამტარობის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

1°. უსასრულო ღეროს შემთხვევა. უნდა მოიძებნოს (1) განტოლების $u(x, t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (t > 0)$$

საწყის პირობას. ფურიეს მეთოდის გამოყენებით ვლებულობთ ამ განტოლების ამონახსნს:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

2°. ერთი მხრიდან შემოსაზღვრული ღეროს შემთხვევა. (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $u(x,0)=f(x)$ საწყის პირობასა და $u(0,t)=\varphi(x)$ სასაზღვრო პირობას, მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \varphi(\eta) \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}} \cdot (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} d\eta.$$

3°. ორივე მხრიდან შემოსაზღვრული ღეროს შემთხვევა. უნდა მოიძებნოს (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $u|_{t=0}=f(x)$ საწყის პირობასა და $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$ სასაზღვრო პირობებს. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება შემდეგი მწყრივის სახით:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l},$$

სადაც

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

2185. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{როცა } x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{როცა } x < x_1 \text{ და } x > x_2. \end{cases}$$

2186. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < -l, \\ u_0, & \text{როცა } -l < x < l, \\ 0, & \text{როცა } x > l. \end{cases}$$

2137. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x, 0) = f(x) = u_0 \quad \text{და} \quad u(0, t) = \varphi(t) = 0.$$

2138. ამოხსენით $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლება, თუ

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \quad \text{და} \quad u(0, t) = \varphi(t) = u_0.$$

2139. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმა-
ყოფილებს

$$u \Big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ l-x, & \text{როცა } \frac{l}{2} \leq x < l. \end{cases}$$

საწყის პირობებსა და $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ სასაზღვრო პირობებს.

2140. იპოვეთ $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც

აკმაყოფილებს $u \Big|_{t=0} = f(x) = \frac{x(l-x)}{l^2}$ საწყის პირობასა და $u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=l} = 0$
სასაზღვრო პირობებს.

1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. 2. $V = \frac{\pi}{3} y(x^2 - y^2)$.

3. $\frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$. 4. $\frac{2}{3} x(y^2 - x^2)$. 5. 1) $\frac{5}{3}$; -2 ; 2) $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{7}$;

3) $-\frac{13}{12}$; $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$; 4) 1.6. 1) 16; 2; 3) $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$; $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$. 7. გან-

საზღვრულია ყველგან. 8. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $O(0; 0)$ წერტილისა. 9. განსაზღვრულია $x^2 + y^2 = 4$ წრეწირის შიგნით. 10. განსაზღვრულია, როცა $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \neq x$. 11. განსაზღვრულია, როცა $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 12. განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $y = x$ წრფის წერ-

ტილებსა. 13. განსაზღვრულია, როცა $y > -x$. 14. განსაზღვრულია, როცა $x < \frac{y^2}{4} + 2$. 15. განსაზღვრულია პირველ და მესამე საკოორდი-

ნატო კუთხეებში. 16. განსაზღვრულია $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ წრიულ რგოლში.

17. განსაზღვრულია $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$ მართკუთხედში. 18. განსაზღვრულია, როცა $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$. 19. განსაზღვრის არეები: 1) $-2 \leq x \leq 0$, $-\infty < y \leq 0$; 2) $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y < +\infty$. 20. განსაზღვრულია ყველგან.

21. 1) განსაზღვრულია $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ სფეროს ზედაპირზე და მის შიგნით; 2) განსაზღვრულია პირველ ოქტანტში. 22. განსაზღვრულია, როცა $x^2 + y^2 + z^2 > 1$. 23. 1) $x + y = c$ ($y = -x$ წრფის პარალელური წრფეები); 2) $x^2 - y^2 = c$ (ტოლფერდა ჰიპერბოლები); 3) $y = c - x^2$ ($c > 0$, პარაბოლები); 4) $xy = c$ ($c > 0$, ტოლფერდა ჰიპერბოლები).

24. 1) $x^2 + y^2 = c$ (კონცენტრული წრეწირები); $y = \frac{c}{x^2}$; 3) $x = cy^2$ (პა-

რაბოლები); 4) $\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$ (წრეწირები). 25. 1) $x + y +$

$z = c$ ($x + y + z = 0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები);

2) $x^2 + y^2 = cz$ (ბრუნვის პარაბოლოიდები); 3) $x^2 + y^2 = c$ (ცილინდრე-

ბი); 4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c$ (ელიფსოიდები). 26. 1) $2x + 3y - z = c$; 2) $x^2 +$

$$+y^2+z^2=c \text{ (კონცენტრული სფეროები); } 3) x^2+y^2=\frac{z^2}{c^2} \text{ (კონუსური$$

ზედაპირები). 27. — $\frac{1}{4}$. ა მ ო ხ ს ნ ა: აღვნიშნოთ $xy=a$; როცა $x \rightarrow 0$,

$$y \rightarrow 0, \text{ მაშინ } a \rightarrow 0, \text{ რის გამოც საკითხი დაიყვანება } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{\alpha + 4}}{\alpha}$$

ზღვრის მოძებნამდე; ეს ზღვარი უდრის $-\frac{1}{4}$ -ს. 28. 2. 29. e^k .

30. $\ln 2$ (ზღვარი გამოითვლება უშუალო ჩასმით). 31. 0. მ ი თ ი თ ე ბ ა. შემოიღეთ პოლარული კოორდინატები; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;

როცა $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, მაშინ $r \rightarrow \infty$ და მივიღებთ $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{r}$

ზღვარს, რაც ნულის ტოლია. 32. არ არსებობს. 33. 0. 34. 0. 35. 1)

2; 2) $\frac{1}{2}$. 36. 1. 37. 1) წყვეტას განიცილის $x^2+y^2=9$ წრეწირის

წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცილის $y=x$ და $y=-x$ წრფეების წერტილებზე;

3) წყვეტას განიცილის კოორდინატთა სათავეზე; 4) წყვეტის ზედაპირია $z^2=x^2+y^2$ კონუსი. 38. 1) წყვეტას განიცილის $y=x$ წრფის

წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცილის კოორდინატთა სათავეზე; 3) წყვეტას

განიცილის $y=x^2$ პარაბოლის წერტილებზე; 4) წყვეტას განიცილის $x=0$, $y=0$ ღერძებზე] 39. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$. 40. $\frac{\partial z}{\partial x} = -$

$\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$. 41. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$. 42. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 43. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

44. $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{ctg}(x-2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2 \operatorname{ctg}(x-2y)$. 45. $\frac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2y -$

$-y^3+7)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$. 46. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x(x+2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$= 3(x^2-y^2)$. 47. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 48. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. 49. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

50. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$. 51. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

14. 6. დურგლიშვილი

52. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y|x|}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{|x|}{x\sqrt{x^2+y^2}}$. 53. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 54. $\frac{\partial u}{\partial x} = y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x+z$;
 $\frac{\partial u}{\partial z} = y+x$. 55. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z+2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz-3$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2+1$.
 56. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$. 57. $\frac{\partial u}{\partial x} =$
 $= yz(xy)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$. 58. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z$; $\frac{\partial u}{\partial y} =$
 $= xz^{xy} \ln z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xy \cdot z^{xy-1}$. 59. $f'_x(2; 3) = 4$; $f'_y(2; 3) = 27$. 60. $f'_x(2; 1) =$
 $= \frac{1}{2}$; $f'_y(2; 1) = 0$. 61. $f'_x(1; 2; 0) = 1$; $f'_y(1; 2; 0) = \frac{1}{2}$; $f'_z(1; 2; 0) =$
 $= \frac{1}{2}$. 62. $f'_x(0; 0; 1) = -2$; $f'_y(0; 0; 1) = 0$; $f'_z(0; 0; 1) = -6$. 65. $\frac{3}{2}$.
 67. $\Delta_x z = 0,4$; $\Delta_y z = 0,3$. 68. $\Delta_x z = 0,21$; $\Delta_y z = -0,19$. 75. $dz =$
 $= 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$. 76. $dz = 3(x^2 - y) dx + 3(y^2 - x) dy$. 77. $dz =$
 $= (2x + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy$. 78. $dz = \frac{y dx + x dy}{xy}$. 79. $dz = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$.
 80. $dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy$. 81. $dz = 0$. 82. $dz = |y| \frac{y dx - x dy}{y^2 \sqrt{y^2 - x^2}}$.
 83. $dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) dy$. 84. $du = yz dx + xz dy + xy dz$.
 85. $du = x^{y^z-1} (yz dx + z \ln x dy + xy \ln x dz)$. 86. $du = e^{x^2+y^2} (2x \sin^2 z dx +$
 $+ 2y \sin^2 z dy + \sin 2z dz)$. 87. $dz = \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. 88. $dz = \frac{x dx + y dy}{a}$.
 89. $\frac{1}{2}$. 90. $2x - 2dy$. 91. $\Delta f = 36$; $df = 28,5$. 92. $\Delta f \approx 0,071$; $df =$
 $= 0,075$. 93. $\Delta f(x, y) = 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3$. 94.
 $\Delta f(x, y) = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2 k$. 95. $\approx 1,06$. 96. $\approx 4,998$. 97. ≈ 1 .
 98. $\approx 0,788$. 99. $\Delta l \approx 0,062$ სმ (გადიორეობა). 100. $\Delta v \approx -31,4$ სმ³
 (შეშტობილობა). 101. $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(\ln t - 1)}{t \ln^2 t}$. 102. $\frac{dz}{dt} = \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.
 103. $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}$. 104. $\frac{dz}{dt} = -4e^{2 \cos 2t} \sin 2t$. 105. $\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

106. $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$; 107. $\frac{du}{dt} = 2t \ln t \cdot t g t + \frac{(t^2+1)t g t}{t} + \frac{(t^2+1) \ln t}{\cos^2 t}$.

108. 0. 109. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2(3x + \frac{2}{x^2} - \sqrt{x})} \left(3 - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$. 110. $\frac{dz}{dx} =$
 $= 2(\sin x)^{2x} (x \cot x + \ln \sin x)$. 111. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y} \right)$; $\frac{\partial z}{\partial v} = -$
 $-\frac{x}{y} \left(4 + \frac{x}{y} \right)$. 112. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. 113. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2v}{x+y}$;
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \frac{2v}{x+y}$. 114. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{u-2v} (\cos x - 6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -4ye^{u-2v}$.

115. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$. 116. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi$;
 $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi \right) r$. 121. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$
 $= \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$. 122. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x$;
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$. 123. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$
 $= 2x^3 - 18xy$. 124. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$
 $= \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. 125. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}$;
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} - \sin y \cdot \ln x$. 126. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin xy -$
 $-xy \cos xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$. 129. $f''_{xx}(0; 0) = m(m-1)$; $f''_{xy}(0; 0) =$
 $= mn$; $f''_{yy}(0; 0) = n(n-1)$. 130. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$. 131. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$
 $= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 1$. 132. $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x(2 \sin xy +$
 $+ xy \cos xy)$. 133. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial y} = 2y^2 e^{xy} (2 + xy^2)$. 134. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} =$
 $= abcx^{a-1} y^{b-1} z^{c-1}$. 135. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1+xy)e^{xy} \cos z$. 136. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} =$
 $= 4yze^{x+y^2}$. 141. $d^2 z = 6y dx^2 + 4(3x-1) dx dy + 2dy^2$. 142. $d^2 z = -$
 $-\frac{(y dx - x dy)^2}{xy^2}$. 143. $d^2 z = -\frac{(dx - dy)^2}{(x-y)^2}$. 144. $d^2 z = e^{xy} [(y dx +$

$+xdy)^2 + 2dxdy]$. 145. $dz = (4x - 3y)dx - (3x + 2y)dy$; $d^2z = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$. 146. $dz = \sin^2 y dx + x \sin 2y dy$; $d^2z = 2 \sin 2y dx dy + 2x \cos 2y dy^2$. 147. $d^2u = -\sin(x+y+z) \cdot (dx+dy+dz)^2$. 148. $d^2u = 2(zdxdy + ydx dz + xdy dz)$. 149. $(2dx+dy)^3$. 150. $d^2z = e^x(\cos y dx^3 - 3 \sin y dx^2 dy - 3 \cos y dx dy^2 + \sin y dy^3)$. 151. $du = \varphi'(t)(ydx + xdy)$; $d^2u = \varphi''(t)(ydx + xdy)^2 + 2\varphi'(t)dxdy$. 152. $du = 2\varphi'(t)(xdx + ydy)$; $d^2u = 4\varphi''(t)(xdx + ydy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$. 153. $d^2z = a^2 f''_{uu}(u, v) dx^2 + 2ab f''_{uv}(u, v) dxdy + b^2 f''_{vv}(u, v) dy^2$. 154. 1) $du = \frac{\partial u}{\partial \xi}(dx + dy) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(dx - dy)$; $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(dx + dy)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(dx^2 - dy^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(dx - dy)^2$; 2) $du = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi}(xdx + ydy) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(ydx + xdy)$; $d^2u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(xdx + ydy)^2 + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(xdx + ydy)(ydx + xdy) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(ydx + xdy)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial \xi}(dx^2 + dy^2) + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} dxdy$. 155. $y' = \frac{y}{y-1}$; $y'' = -\frac{y}{(y-1)^3}$. 156. $y' = \frac{1}{1 - a \cos y}$; $y'' = -\frac{a \sin y}{(1 - a \cos y)^3}$. 157. $y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$; $y'' = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. 158. $y' = \frac{x+b}{x-y}$; $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 159. $y' = -\frac{y}{x}$; $y'' = \frac{2y}{x^2}$. 160. $\frac{1}{3}$. 161. $-\frac{1}{3}$. 162. $8 \infty - 8$. 163. $\frac{1}{5} \infty \frac{4}{5}$. 164. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. 165. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y-6z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-4y-z}{y-6z}$. 166. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$. 167. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}$. 168. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y e^{-xy}}{e^z - 2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x e^{-xy}}{e^z - 2}$. 169. 1) $dz = \frac{yz}{z^2 - xy} dx + \frac{xz}{z^2 - xy} dy$; 2) $dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$; $d^2z = \frac{y^2 - a^2}{z^3} dx^2 - 2 \frac{xy}{z^3} dxdy + \frac{x^2 - a^2}{z^3} dy^2$. 170. $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx+dy)^2$. 172. 1) $du = \frac{(v-x)dx + (v-y)dy}{u-v}$; $dv = \frac{(u-x)dx + (u-y)dy}{v-u}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v-x}{u-v}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v-y}{v-u}$

$$= \frac{v-y}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u-x}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u-y}{v-u}; \quad 2) \quad du = -\frac{(u+y)dx + (v+y)dy}{x-y}, \quad dv =$$

$$= \frac{(u+x)dx + (v+x)dy}{x-y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}. \quad 173. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0. \quad 174. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0. \quad 175.$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} - 2y\frac{dx}{dy} = 0. \quad 176. \quad x\frac{d^2x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 1 = 0. \quad 177. \quad \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}. \quad 178.$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r. \quad 179. \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0. \quad 180. \quad u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0. \quad 181. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0. \quad 182. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} =$$

$$= \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad 183. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \quad 184. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad 185.$$

$$f(x+h, y+k) = x^3 + 2y^3 - xy + h(3x^2 - y) + k(6y^2 - x) + 3xh^2 - hk + 6yk^2 +$$

$$+ h^3 + 2k^3. \quad 186. \quad f(x+h, y+k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax+by)h + 2(bx^2 +$$

$$+ cy)k + ah^2 + 2bhk + ck^2. \quad 187. \quad f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) +$$

$$+ 3(y-1)^2. \quad 188. \quad 1 + [(x-1) + (y+1)] + \frac{[(x-1) + (y+1)]^2}{2!} +$$

$$+ \frac{[(x-1) + (y+1)]^3}{3!}. \quad 189. \quad y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}. \quad 190. \quad y + \frac{1}{2!} (2xy - y^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (3x^2y - 3xy^2 + 2y^3). \quad 191. \quad y(1) = 1 \text{ მაქსიმუმი; } y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \text{ მინი-}$$

$$\text{მუმი. } 192. \quad y(a\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4} \text{ მაქსიმუმი. } 193. \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ მაქსი-}$$

$$\text{მუმი. } 194. \quad y\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ მაქსიმუმი; } y\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -$$

$$-a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \text{ მინიმუმი. } 195. \quad y(\sqrt[8]{3}) = \sqrt[8]{27} \text{ მაქსიმუმი; } y(-\sqrt[8]{3}) =$$

$$= -\sqrt[8]{27} \text{ მინიმუმი. } 196. \quad y\left(\frac{b^5}{a^4}\right) = -\frac{b^2}{a} \text{ მინიმუმი. } 197. \quad z(4;$$

$$-2) = 13 \text{ მაქსიმუმი. } 198. \quad z(1; 2) = -1 \text{ მინიმუმი. } 199. \quad z(1; 0) = -1$$

$$\text{მინიმუმი. } 200. \quad z\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right) = -\frac{13}{3} \text{ მინიმუმი. } 201. \quad z(-1; -1) = 1$$

$$\text{მაქსიმუმი. } 202. \quad z(4; 4) = 12 \text{ მაქსიმუმი. } 203. \text{ არა აქვს ექსტრემუმი.}$$

$$204. \text{ არა აქვს ექსტრემუმი. } 205. \quad z(2; 1) = -28 \text{ მინიმუმი; } z(-2;$$

$$-1) = 28 \text{ მაქსიმუმი. } 206. \quad z(1; 1) = 4 \text{ მინიმუმი. } 207. \quad z\left(\frac{1}{2}; -1\right) =$$

$$= -\frac{e}{2} \text{ მინიმუმი. } 208. z(-2; 0) = -\frac{2}{e} \text{ მინიმუმი. } 209.$$

$$z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ მაქსიმუმი. } 210. z\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \text{ მაქსიმუმი.}$$

$$211. \text{ არა აქვს ექსტრემუმი. } 212. z(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}) = -8 \text{ მინიმუმი.}$$

$$213. z(1; 1) = 2 \text{ მინიმუმი. } 214. z\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11. \text{ მაქსიმუმი;}$$

$$z\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1 \text{ მინიმუმი. } 215. z\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13} \text{ მინიმუმი. } 216.$$

$$z(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a} \text{ მაქსიმუმი; } z(-a\sqrt{2}; -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$\text{მინიმუმი. } 217. z(0; 1) = 3 \text{ უდიდესი მნიშვნელობა. } 218. z(1; 2) = 17 \text{ უდიდესი მნიშვნელობა; } z(1; 0) = -3 \text{ უმცირესი მნიშვნელობა; } (-4; 6)$$

$$\text{სტაციონარული წერტილი ძვეს მართკუთხედის გარეთ. } 219. z\left(1; \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \text{ უდიდესი მნიშვნელობა; } z(4; 2) = -128 \text{ უმცირესი მნიშვნელობა.}$$

$$220. z(-3; 0) = z(0; -3) = 6 \text{ უდიდესი მნიშვნელობა; } z(-1; -1) = -1 \text{ უმცირესი მნიშვნელობა. } 221. z(\pm 2; 0) = 4 \text{ უდიდესი მნიშვნელობა;}$$

$$z(0; \pm 2) = -4 \text{ უმცირესი მნიშვნელობა; სტაციონარული წერტილი } (0; 0) \text{ არ იძლევა ექსტრემუმს. } 222. z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \text{ უდიდესი მნიშვნელობა; } z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \text{ უმცირესი მნიშვნელობა. } 223. \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \text{ და } \frac{a}{3}. 224. \text{ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდია } \frac{2p}{3}. 225. (1; 2); h_{\text{პოვ.}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. 226. \left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right); \left(-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5}\right); h_{\text{პოვ.}} = \frac{1}{\sqrt{13}}; h_{\text{საღვ.}} = \frac{11}{\sqrt{13}}. 227. \text{ კუბი, რომლის წიბო არის } \sqrt[3]{V}; S_{\text{პოვ.}} = 6\sqrt[3]{V}. 228. \text{ უდიდესი, როცა } x=8 \text{ სმ; } \alpha=60^\circ, \text{ სადაც } x\text{-ით აღნიშნულია თუნუქის ფურცლის გადაღუნული ნაწილის სიგანე, ხოლო } \alpha\text{-თი — დახრილობის კუთხე. } 229. x+2y+3z-14=0; \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}. 230. 2x+4y-z-3=0; \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$231. 3x+4y-6z=0; \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}. \quad 232. 8x+9y+6\sqrt{11}z -$$

$$-36=0; \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{9} = \frac{6z-\sqrt{11}}{36\sqrt{11}}. \quad 233. \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1;$$

$$\frac{x-x_1}{a^2} = \frac{y-y_1}{b^2} = \frac{z-z_1}{c^2}. \quad 234. x+11y+5z-18=0; \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} =$$

$$\frac{z+1}{5}. \quad 235. x+4y+6z+21=0. \quad 236. x+y-z+9=0. \quad 237. \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} =$$

$$\frac{z-5}{-5}. \text{ ნორმალი განსაზღვრული არ არის } O(0; 0; 0) \text{ წერტილში.}$$

$$238. \cos \alpha = \frac{2}{3}; \cos \beta = -\frac{2}{3}; \cos \gamma = -\frac{1}{3}. \quad 239. 3x-3y+z-$$

$$-2=0. \text{ მ ი თ ი თ ე ბ ა. } u \text{ და } v \text{ პარამეტრების გამორიცხვა გვაძლევს}$$

$$x^3-3xy+2z=0 \text{ განტოლებას. } \quad 240. 2x+y-z-2=0. \quad 241. \frac{9}{2}a^3. \quad 243.$$

60° ან 120° . მ ი თ ი თ ე ბ ა. კუთხე ორ ზედაპირს შორის ეწოდება ამ ზედაპირების გადაკვეთის წირის წერტილში მათდამი გავლებულ მხებ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ კუთხეს. 244. ზედაპირებს ეწოდება ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი, თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთება მათი გადაკვეთის წირის ყოველ წერტილში. 245. (0; 0) განმხოლოებული წერტილი. 246. (0; 0) განმხოლოებული წერტილი. 247. (1; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y = \pm(x-1)$. 248. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y = \pm x$. 249. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $x=0, y=0$. 250. (0; 0) ორჯერადი წერტილი; მხებები: $y = \pm x$. 251. (0; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 252. (-2; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 253. (0; 0) მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 254. (0; 0) მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=x$. 255. (0; 0) თანახმების წერტილი; მხებია $y=0$. 256. (0; 0) პირველი გვარის უკუქცევის წერტილი; მხებია $y=0$. 257. $x^2+y^2=9$. 258. $y = -\frac{x^2}{4}$. 259. $y = \pm R$.

$$260. x=0, y=0. \quad 261. x^{\frac{2}{n}} + y^{\frac{2}{n}} = 5^{\frac{2}{n}}. \quad 262. x^2+y^2 = 1. \quad 263. y=1$$

(მომკლები წრფე). 264. $y=0$ წრფე არის გადაღუნვის წერტილთა სიმრავლე და მომკლები. 265. $x=0$ წრფე არის უკუქცევის წერტილთა სიმრავლე და მომკლები. 266. $y=1$ წრფე არის უკუქცევის წერტილთა სიმრავლე და მომკლები. 267. Ox ღერძის წერტილები უკუქცევის წერტილი;

ტილებია; მომვლები არა აქვს. 268. *Oy* ღერძის წერტილები უკუქცევის წერტილებია; მომვლები არა აქვს. 269. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. 270. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$. 271. $xy = \frac{s}{2}$. 272. $xy = \pm \frac{s}{2\pi}$. 273. 1) $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t} \vec{i} + \frac{1}{1+t^2} \vec{j}$; 2) $\frac{d\vec{r}}{dt} = -e^{-t} \vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k}$; 3) $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t \vec{i} + \frac{1}{t^2} \vec{j} - \frac{2}{t^3} \vec{k}$. 274. $3x + 4y = 0$ — ტრეკტორია; $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{w} = 0$; $|\vec{v}| = 5$; $|\vec{w}| = 0$. 275. $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}$; $\vec{v} = -8t\vec{j} + 6t\vec{k}$; $\vec{w} = -8\vec{j} + 6\vec{k}$; $|\vec{v}| = 10|t|$; $|\vec{w}| = 10$. 276. $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\vec{i} + a\vec{j}$; $\vec{v}(\pi) = 2a\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\vec{i}$; $\vec{w}(\pi) = -a\vec{j}$. 277. $y = \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{9}$ — ტრეკტორია; $\vec{v} = 3\vec{i} + 2(2-t)\vec{j}$; $\vec{v}(0) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v}(1) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v}(2) = 3\vec{i}$; $\vec{v}(3) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. 278. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ — ტრეკტორია; $\vec{v} = -3 \sin t \cdot \vec{i} + 4 \cos t \cdot \vec{j}$; $\vec{w} = -3 \cos t \cdot \vec{i} - 4 \sin t \cdot \vec{j}$; $\vec{v}(0) = 4\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\vec{i}$; $\vec{w}(0) = -3\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\vec{j}$. 279. 1) $\frac{x-c_x}{a_x} = \frac{y-c_y}{a_y}$ (წრფე); 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x = \frac{a}{b^2} y^2$. 283. $ds = 2dt$. 284. $ds = \sec t dt$. 285. $ds = (e^t + e^{-t}) dt$. 286. $ds = \sqrt{3} e^t dt$. 287. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$; $x+2y+3z-6=0$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$. 288. $\frac{x - \frac{R}{2}}{2} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$; $2x - \sqrt{2}z = 0$; $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos \beta = 0$; $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 289. $\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} =$

$$= \frac{z - \frac{k\pi}{2}}{k}; xR - zk + \frac{k^2\pi}{2} = 0. \quad 290. \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}; 2x+y +$$

$$+ 2z - 6 = 0. \quad 291. \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}; 12x - 4y + 3z - 12 = 0. \quad 292.$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}; x+y+4z-10=0. \quad 293. \frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

(ბინორმალური); $3x + 3y - z - 2 = 0$ (მიმხები სიბრტყე). $294. \frac{x-1}{-1}$

$$= \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{1}; 6x - 8y - z + 3 = 0. \quad 295. \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

(მთავარი ნორმალური); $x - y - z - 2 = 0$ (გამწვრთველი სიბრტყე). $296. \frac{x-1}{1}$

$$= \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}; x+y-2=0. \quad 297. \frac{4x-1}{4} = \frac{3y+1}{-3} = \frac{2z-1}{2};$$

$$\frac{x-4}{4} = \frac{3y+8}{-6} = \frac{z-2}{1}. \quad 298. x+y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(ნორმალური სიბრტყე); $x-y=0$ მიმხები სიბრტყე; $z=0$ (გამწვრთველი სიბრტყე). $299. K =$

$$= \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\sqrt{(9t^4+4t^2+1)^3}}; T = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}; K(0)=2; T(0)=3. \quad 300.$$

$$K = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}; T = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}; K(1) = \frac{2}{9}; T(1) = -\frac{2}{9}. \quad 301. K =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}; T = \frac{b}{a^2+b^2}. \quad 302. K = \frac{\sqrt{2}}{3}; T = -\frac{1}{3}. \quad 303. K =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}. \quad 304. K = \frac{a}{a^2+ab+t^2} \sqrt{\frac{a(a+b)}{a^2+ab+t^2}}; T = 0. \quad 305. K =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}; T = \frac{1}{3}. \quad 306. K = T = \frac{a}{(a+y)^2}.$$

II ს 3 8 0

$$307. \frac{14}{3}. \quad 308. \frac{8}{3}. \quad 309. \frac{\pi}{12}. \quad 310. (e-1)^2. \quad 311. \ln \frac{25}{24}. \quad 312. 660.$$

$$313. \frac{9}{4}. \quad 314. \frac{15}{4}. \quad 315. 9. \quad 316. \frac{1}{2}. \quad 317. \frac{\pi a}{5} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$$

318. $\frac{11a^4}{24}$. 319. $\int_2^3 dx \int_{-1}^5 f(x,y)dy$. 320. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$. 321.
- $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y)dy$. 322. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$. 323. $\int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx$.
324. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)dy$. 325. $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$. 326.
- $\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.
327. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. 328. $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. 329. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.
330. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx$. 331. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{3}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{3}} f(x,y)dx$.
332. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$. 333. $\frac{35}{8}$. 334. $\frac{e-1}{2}$.
335. -2 . 336. $\frac{\pi}{6}$. 337. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. 338. $\frac{1}{2}$. 339. $\frac{33}{140}$.
340. $\frac{1}{280}$. 341. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 342. $\frac{R^4}{80}$. 343. $\frac{1}{6}$. 344. 4. 345. 3. 346. $\frac{2}{3}R$.
347. $2 < I < 8$, სადაც I აღნიშნავს მოცემულ ინტეგრალს. 348. $0 < I < 64$.
349. $36\pi < I < 100\pi$. 350. $8\pi(5-\sqrt{2}) < I < 8\pi(5+\sqrt{2})$. 351. $\frac{3\pi b^2}{16}$.
352. $\frac{4a^3}{3}$. 353. $\frac{12}{5}$. 354. $\frac{\pi a^3}{6}$. 355. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 356. $\frac{\pi}{4}$. 357.
- $\frac{\pi a^2}{2}$. 358. $\frac{\pi e(e^2-1)}{4}$. 359. $\frac{a^3}{12}$. 360. $\pi R^2 h$. 361. $a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{22}{9} \right)$.

362. $\frac{a^2 b^2}{8}$. მითითებულია. $x = \arccos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. 363. $\frac{1}{2}$.
364. 2. 365. $\frac{2}{3}$. 366. 5. 367. πa^2 . 368. πab . 369. $\sqrt{2} - 1$. 370.
- 1) $\frac{1}{2} (15 - 8 \ln 4)$; 2) $\frac{9}{2}$. 371. $\frac{64}{3}$. 372. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 373. $\frac{a^2}{3}$.
374. $\pi - 1$. 375. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. 376. $\frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)$. 377. $\frac{\pi a^2}{8}$. 378. a^2 .
379. $3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$. 380. $\frac{5}{8} \pi a^2$. 381. $\frac{3}{4} \pi$. 382. $\frac{a^2 b^2}{c^2}$. მითითებულია. $x = \arccos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. 383. $\frac{3}{2} \ln 2$. მითითებულია. შემოიღეთ ახალი ცვლადები: $xy = u$, $y = ux$. 384. $\frac{1}{3}$. მითითებულია. შემოიღეთ ახალი ცვლადები: $x^2 = uy$, $y^2 = ux$. 385. $\frac{abc}{6}$. 386.
- $\frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right)$. 387. $13 \frac{1}{3}$. 388. $\frac{\pi R^2 H}{2}$. 389. $\frac{16}{3} a^3$. 390. $\frac{8}{9} a^3$.
391. $\frac{abc}{3}$. 392. $\frac{1}{6}$. 393. $\frac{\pi}{4}$. 394. $\frac{88}{105}$. 395. $\frac{4}{3} \pi abc$. 396.
- $3\pi a^3$. 397. $\frac{48}{5} \sqrt{6}$. 398. π . 399. $\frac{\pi R^1}{4a}$. 400. $12 \frac{4}{21}$. 401. $\frac{5}{2} \pi R^3$.
402. $4\sqrt{3} \pi a^3$. 403. $\frac{4}{3} \pi a^3 (2\sqrt{2} - 1)$. 404. $\frac{\pi a^3}{4}$. 405. $\frac{4}{3} a^3 b$. 406.
- $\frac{32}{9} a^3$. 407. $8\pi \ln 2$. 408. $\frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$. 409. $\frac{3}{2} \pi ab$. 410. $\frac{4}{35} \pi a^3$.
- მითითებულია. შემოიღეთ კოორდინატები: $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$.
411. 14. 412. $\frac{\sqrt{3}}{4} \pi a^2$. 413. $4\pi a^2$. 414. 280. π . 415. 1) $\frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$;
- 2) $16a^2$. 416. $\frac{8\sqrt{2}}{3} a^2$. 417. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 418. $2a^2 (\pi - 2)$. 419. $4a^2$.
420. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. 421. $2a^2 m$. 422. $8a^2$. 423. $\frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$. 424. $2\pi a^2$. 425.
- $2\pi ak$. 426. $\frac{2}{3} \pi a^3 k$. 427. $\frac{ab^2}{2}$. მითითებულია. $\rho = 1$; a გვერდი შემოვიღეთ Ox ღერძს, ხოლო b გვერდი — Oy ღერძს. 428. $\frac{2}{3} R^3$. მითითებულია.

თ ი თ ე ბ ა . დიამეტრი შეუთავსეთ ერთ-ერთ ღერძს. 429. $x_c = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$y_c = 0$. 430. $x_c = 0$; $y_c = \frac{4a}{3\pi}$. 431. $x_c = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (\sqrt{2} + 1)$; $y_c =$

$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (\sqrt{2} + 1)$. 432. $x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$; $y_c = 0$. 433. $x_c = \pi a$;

$y_c = \frac{5}{6} a$. 434. $x_c = \frac{5}{6} a$; $y_c = 0$. 435. $I_x = 4$. 436. $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$.

437. $I_0 = \frac{178}{105} a^4$. 438. $\frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა . დიაგონალე-

ბის გადაკვეთის წერტილი შეუთავსეთ კოორდინატთა სათავეს. 439.

1) $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$; 2) $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$. 440. $\frac{ah}{48} (a^2 + 12h^2)$. მ ი თ ი თ ე ბ ა .

.სამკუთხედის წვერო მოათავსეთ კოორდინატთა სათავეში. 441.

$I_p = \frac{3\pi a^4}{64}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა . როცა წირის განტოლება მოცემულია

პოლარულ კოორდინატებში $r = f(\varphi)$, მაშინ ინერციის მომენტებია:

$I_x = \iint_D r^3 \sin^2 \varphi d\varphi dr$; $I_y = \iint_D r^3 \cos^2 \varphi d\varphi dr$; $I_0 = I_p = \iint_D r^3 d\varphi dr$. 442.

$I_p = \frac{35}{16} \pi a^4$. 443. 6. 444. $\frac{5}{4}$. 445. $\frac{a^6}{48}$. 446. $\frac{a^{11}}{110}$. 447. 30.

448. $\frac{8}{3} \pi$. 449. $\frac{19}{12}$. 450. $\frac{8}{15} (31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})$. 451.

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz$. 452. $\int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}}}^c f(x,y,z) dz$.

453. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z) dz$. 454. $\int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} dx \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z) dz$.

455. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. 456. $\frac{1}{180}$. 457. $\frac{\pi R^4}{4}$. 458. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 459.

$\frac{\pi a}{2}$. 460. $\frac{8}{9} a^2$. 461. $\frac{92}{3} \pi$. 462. πR^3 . 463. $\frac{\pi}{8}$. 464. $\frac{4\pi}{15} (R^5_2 - R^5_1)$

318. $\frac{11a^4}{24}$. 319. $\int_2^3 dx \int_{-1}^5 f(x,y)dy$. 320. $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$. 321. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y)dy$. 322. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$. 323. $\int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx$.
324. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{1+x^2} f(x,y)dy$. 325. $\int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$. 326. $\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.
327. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. 328. $\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. 329. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.
330. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)dx$. 331. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{3}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{3}} f(x,y)dx$.
332. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$. 333. $\frac{35}{8}$. 334. $\frac{e-1}{2}$.
335. -2 . 336. $\frac{\pi}{6}$. 337. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. 338. $\frac{1}{2}$. 339. $\frac{33}{140}$.
340. $\frac{1}{280}$. 341. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 342. $\frac{R^4}{80}$. 343. $\frac{1}{6}$. 344. 4. 345. 3. 346. $\frac{2}{3}R$.
347. $2 < I < 8$, სადაც I აღნიშნავს მოცემულ ინტეგრალს. 348. $0 < I < 64$.
349. $36\pi < I < 100\pi$. 350. $8\pi(5-\sqrt{2}) < I < 8\pi(5+\sqrt{2})$. 351. $\frac{3\pi b^2}{16}$.
352. $\frac{4a^3}{3}$. 353. $\frac{12}{5}$. 354. $\frac{\pi a^3}{6}$. 355. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 356. $\frac{\pi}{4}$. 357. $\frac{\pi a^2}{2}$.
358. $\frac{\pi e(e^3-1)}{4}$. 359. $\frac{a^3}{12}$. 360. $\pi R^2 h$. 361. $a^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{22}{9} \right)$.

362. $\frac{a^2 b^2}{8}$. მითითებულია. $x = \arccos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. 363. $\frac{1}{2}$.

364. 2. 365. $\frac{2}{3}$. 366. 5. 367. πa^2 . 368. πab . 369. $\sqrt{2} - 1$. 370.

1) $\frac{1}{2} (15 - 8 \ln 4)$; 2) $\frac{9}{2}$. 371. $\frac{64}{3}$. 372. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 373. $\frac{a^2}{3}$.

374. $\pi - 1$. 375. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. 376. $\frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)$. 377. $\frac{\pi a^2}{8}$. 378. a^2 .

379. $3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$. 380. $\frac{5}{8} \pi a^2$. 381. $\frac{3}{4} \pi$. 382. $\frac{a^2 b^2}{c^2}$. მითითებულია.

$x = \arccos \varphi$, $y = br \sin \varphi$. 383. $\frac{3}{2} \ln 2$. მითითებულია. შემოიღეთ

ახალი ცვლადები: $xy = u$, $y = vx$. 384. $\frac{1}{3}$. მითითებულია.

შემოიღეთ ახალი ცვლადები: $x^2 = uy$, $y^2 = vx$. 385. $\frac{abc}{6}$. 386.

$\frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right)$. 387. $13 \frac{1}{3}$. 388. $\frac{\pi R^2 H}{2}$. 389. $\frac{16}{3} a^3$. 390. $\frac{8}{9} a^3$.

391. $\frac{abc}{3}$. 392. $\frac{1}{6}$. 393. $\frac{\pi}{4}$. 394. $\frac{88}{105}$. 395. $\frac{4}{3} \pi abc$. 396.

$3\pi a^3$. 397. $\frac{48}{5} \sqrt{6}$. 398. π . 399. $\frac{\pi R^1}{4a}$. 400. $12 \frac{4}{21}$. 401. $\frac{5}{2} \pi R^3$.

402. $4\sqrt{3} \pi a^3$. 403. $\frac{4}{3} \pi a^3 (2\sqrt{2} - 1)$. 404. $\frac{\pi a^3}{4}$. 405. $\frac{4}{3} a^3 b$. 406.

$\frac{32}{9} a^3$. 407. $8\pi \ln 2$. 408. $\frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$. 409. $\frac{3}{2} \pi ab$. 410. $\frac{4}{35} \pi a^3$.

მითითებულია. შემოიღეთ კოორდინატები: $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$.

411. 14. 412. $\frac{\sqrt{3}}{4} \pi a^2$. 413. $4\pi a^2$. 414. 280. π . 415. 1) $\frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$;

2) $16a^2$. 416. $\frac{8\sqrt{2}}{3} a^2$. 417. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 418. $2a^2 (\pi - 2)$. 419. $4a^2$.

420. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. 421. $2a^2 m$. 422. $8a^2$. 423. $\frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$. 424. $2\pi a^2$. 425.

$2\pi ak$. 426. $\frac{2}{3} \pi a^3 k$. 427. $\frac{ab^2}{2}$. მითითებულია. $\rho = 1$; a გვერდი შემოიღეთ

Ox ღერძს, ხოლო b გვერდი — Oy ღერძს. 428. $\frac{2}{3} R^3$. მითითებულია.

თ ი თ ე ბ ა . დიამეტრი შეუთავსეთ ერთ-ერთ ღერძს. 429. $x_c = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$y_c = 0$. 430. $x_c = 0$; $y_c = \frac{4a}{3\pi}$. 431. $x_c = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (\sqrt{2} + 1)$; $y_c =$

$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (\sqrt{2} + 1)$. 432. $x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$; $y_c = 0$. 433. $x_c = \pi a$;

$y_c = \frac{5}{6} a$. 434. $x_c = \frac{5}{6} a$; $y_c = 0$. 435. $I_x = 4$. 436. $I_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$.

437. $I_0 = \frac{178}{105} a^4$. 438. $\frac{ab(a^2 + b^2)}{12}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა . დიაგონალე-

ბის გადაკვეთის წერტილი შეუთავსეთ კოორდინატთა სათავეს. 439.

1) $\frac{\pi(D^1 - d^1)}{32}$; 2) $\frac{\pi(D^1 - d^1)}{64}$. 440. $\frac{ah}{48} (a^2 + 12h^2)$. მ ი თ ი თ ე ბ ა .

.სამკუთხედის წვერო მოათავსეთ კოორდინატთა სათავეში. 441.

$I_p = \frac{3\pi a^4}{64}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა . როცა წირის განტოლება მოცემულია

პოლარულ კოორდინატებში $r = f(\varphi)$, მაშინ ინერციის მომენტებია:

$$I_x = \iint_D r^3 \sin^2 \varphi d\varphi dr; \quad I_y = \iint_D r^3 \cos^2 \varphi d\varphi dr; \quad I_c = I_p = \iint_D r^3 d\varphi dr. \quad 442.$$

$I_p = \frac{35}{16} \pi a^4$. 443. 6. 444. $\frac{5}{4}$. 445. $\frac{a^6}{48}$. 446. $\frac{a^{11}}{110}$. 447. 30.

448. $\frac{8}{3} \pi$. 449. $\frac{19}{12}$. 450. $\frac{8}{15} (31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3})$. 451.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz. \quad 452. \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}}}^c f(x,y,z) dz.$$

453. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z) dz$. 454. $\int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} dx \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z) dz$.

455. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. 456. $\frac{1}{180}$. 457. $\frac{\pi R^4}{4}$. 458. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 459.

$\frac{\pi a}{2}$. 460. $\frac{8}{9} a^2$. 461. $\frac{92}{3} \pi$. 462. πR^3 . 463. $\frac{\pi}{8}$. 464. $\frac{4\pi}{15} (R_2^5 - R_1^5)$

$$465. \frac{4}{3} a^3. \quad 466. 2\pi abc. \quad 467. \frac{\pi}{2}. \quad 468. \pi a^3 (\alpha - \beta). \quad 469. 8. \quad 470.$$

$$\frac{\pi}{2}. \quad 471. \frac{\pi ab R^2}{c}. \quad 472. \frac{3}{4} \pi a^3. \quad 473. \frac{19}{6} \pi. \quad 474. \frac{\pi}{96}. \quad 475. \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$476. \frac{2\pi a^3}{3} (2 - \sqrt{2}). \quad 477. \frac{21\pi}{4} (2 - \sqrt{2}). \quad 478. \frac{4}{3} \pi abc. \quad \text{მითითებული}$$

თეზა. ისარგებლეთ განზოგადებული სფერული კოორდინატებით:
 $x = a \cos \varphi \sin \Theta$, $y = b r \sin \varphi \sin \Theta$, $z = c r \cos \Theta$. 479. $\frac{\pi a^3}{3}$. მითითებული

თეზა. სხეული მოთავსებულია იმ ოქტანტებში, სადაც $z > 0$. 480. $\frac{64\pi a^3}{105}$. მითითებული. სხეული მოთავსებულია ყველა ოქტანტში.

$$481. \frac{\pi^2 abc}{4}. \quad 482. \frac{abc}{90}. \quad \text{მითითებული. შემოიღეთ ახალი კოორ-}$$

დინატები: $x = ar \cos^4 \varphi \sin^4 \Theta$, $y = br \sin^4 \varphi \sin^4 \Theta$, $z = cr \cos^4 \Theta$.

$$483. \frac{a^4}{24}. \quad 484. \frac{abc}{2} (a+b+c). \quad 485. \frac{k\pi R^4}{4}. \quad 486. 6k\pi a^2. \quad 487. \frac{4}{3} \pi R^4.$$

მითითებული. სფეროს ცენტრი მოთავსეთ $(0; 0; R)$ წერტილში, მაშინ მხები სიბრტყე იქნება xOy სიბრტყე. 488. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 489. $\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$.

$$490. \left(0; 0; \frac{3a}{8}\right). \quad 491. \left(0; 0; \frac{a}{3}\right). \quad 492. \left(0; 0; \frac{5a}{83} (6\sqrt{3} + 5)\right).$$

$$493. I_x = \frac{\pi a^2 h}{12} (3a^2 + 4h^2). \quad \text{მითითებული. ფუძის დიამეტრი შეუ-}$$

თავსეთ Ox ღერძს. 494. $I_z = \frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. 495. $-\frac{1}{2} \int_1^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+\alpha x^2)^3}}$.

$$496. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3x(\arctg \alpha x)^2 dx}{1+\alpha^2 x^2}. \quad 497. 1) - \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx - e^{-\alpha^3}; \quad 2) \frac{2\sin \alpha^2}{\alpha}.$$

$$498. e^{(3\alpha^2+1)\alpha}. \quad \frac{9\alpha^2+1}{(3\alpha^2+1)\alpha} - \frac{3}{\alpha} e^{\alpha^3}. \quad 499. \frac{\pi}{4\alpha^3}. \quad 500. \frac{1}{\alpha^2} \ln(1+\alpha b) -$$

$$-\frac{b}{\alpha(1+\alpha b)}. \quad 501. \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \quad 502. \frac{(-1)^k k!}{(1+\alpha)^{k+1}}. \quad 503. \ln(1+\alpha). \quad 504.$$

$\arctg \alpha$. 505. $\ln \frac{\beta}{\alpha}$. მითითებული. გააწარმოეთ α -თი ან β -თი.

506. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$. 507. $\frac{\pi}{4a^2}$. მითითებულ σ არედი მიიღეთ R -რადიუსიანი წრის მეოთხედი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული, და გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 508. $\frac{1}{4}$.
509. α . მითითებულ σ არედი მიიღეთ R -რადიუსიანი წრე (ცენტრით კოორდინატა სათავეში) და გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 510. 2π . 511. $\frac{\pi^2}{8}$. მითითებულ σ არედი მიიღეთ R -რადიუსიანი სფეროს მერვედი ნაწილი, რომელიც პირველ ოქტანტშია მოთავსებული, და გადადით სფერულ კოორდინატებზე. 512. $\frac{\pi}{16}$. 513. $\frac{3\pi}{2}$.
514. $\frac{\pi}{2}$. 515. $4\pi R(\ln R - 1)$. 516. $\frac{8}{3} \pi R^3 \left(\ln R - \frac{1}{3} \right)$. 517. $\sqrt{5} \ln 2$. 518. $\ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$. 519. $\frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. 520. $\frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. 521. 1) $\frac{a^3}{2}$; 2) 24. 522. $\frac{p^2}{3} (5\sqrt{5} - 1)$. 523. $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$.
524. $\frac{256}{15} a^3$. 525. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln 2}{2}$. 526. $\frac{a^2}{3} \left[\left(1 + 4\pi^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$. 527. $\sqrt{2} a^2$. 528. $\frac{\sqrt{2}}{5} a^5$. 529. $2a^2$. მითითებულ გადადით პოლარულ კოორდინატებზე. 530. $2\pi a^{2n+1}$. 531. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$. 532. $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2)$. 533. πa^2 . 534. $\sqrt{2} R^2$. 535. $\frac{4}{3}$. 536. $\ln 2$. 537. $-2\sin 2$.
538. 4π . 539. $-\frac{40}{3}$. 540. 3. 541. 16. 542. $-\frac{14}{15}$. 543. $-\pi a^2$. 544. $\frac{4}{3} ab^2$. 545. $-2\pi a^2$. 546. $\frac{3}{16} \pi R \sqrt[3]{R}$. 547. 1) 4; 2) $\frac{10}{3}$; 3) 2.
548. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $-\frac{1}{20}$. 549. $\frac{2}{3}$. 550. 3. 551. 1) 13; 2) $\frac{26}{3}$. 552. 1) $\frac{3}{2} a^2$; 2) a^2 . 553. 0. 554. 0. 555. $2 \iint_D dx dy$. 556.

- $4 \iint_D \sin 2y dx dy$. 557. $\iint_D (y-x)e^{xy} dx dy$. 558. $\iint_D y^2 dx dy$. 559.
- $\frac{2}{3} a^3$. 560. $-\frac{4}{3}$. 561. 0. 562. $-\frac{\pi a^3}{8}$. 563. 0. 564. 1) არა, 2) $\frac{f'_x}{x}$
- $= \frac{f'_y}{y}$. 565. 1. 566. 4. 567. 8. 568. $\frac{3}{2}$ (ინტეგრების გზა არ
- კვეთს Ox ღერძს). 569. $\ln \frac{13}{5}$ (კოორდინატთა სათავე არ ძეგს ინტეგ-
- რების გზაზე). 570. 4. 571. $\frac{1}{2}$. 572. 62. 573. 0. 574. $5\sqrt{2}$. 575. πab .
576. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 577. $3\pi a^2$. 578. $6\pi a^2$. 579. $\frac{3}{2} a^2$. მ ი თ ი თ ე ბ ა.
- გადადიოთ პარამეტრულ განტოლებებზე: $x = \frac{3at}{t^3+1}$, $y = \frac{3at^2}{t^3+1}$; $0 \leq t <$
- $< +\infty$. 580. $\frac{8}{15}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. გადადიოთ პარამეტრულ განტოლე-
- ბებზე: $x=t^2-1$, $y=t^3-t$; $0 \leq t \leq 1$. 581. $\frac{19}{3}$. 582. $2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(\sqrt{3}+2)$.
583. $a\sqrt{3}$. 584. $\sqrt{a^2+b^2} \left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2b^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \frac{2\pi b + \sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a} \right)$.
585. $M_x = \frac{3}{5} a^2$; $I_y = \frac{3}{8} a^3$. 586. $M_x = 2R^2$; $I_x = \frac{\pi R^3}{2}$. მ ი თ ი თ ე-
- ბ ა. დიამეტრი შეუთავსეთ Ox ღერძს. 587. $I_x = I_y = 2\pi$; $I_0 = 4\pi$.
588. $I_x = \frac{\sqrt{5}}{6}$; $I_y = \frac{\sqrt{5}}{24}$; $I_0 = \frac{5\sqrt{5}}{24}$. 589. $\left(\frac{4a}{3}; \frac{4a}{3} \right)$. 590.
- $\left(0; \frac{2a}{\pi}; \frac{b\pi}{2} \right)$. 591. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$. 592. πa^2 . 593. mFR . 594.
- $mg(z_1 - z_2)$. 595. $4\sqrt{61}$. 596. 9. 597. $\frac{\pi R^3}{4}$. 598. $\frac{4}{3} \pi a^4$.
599. $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$. 600. $\frac{13\pi}{3}$. 601. $\frac{2\pi a^2}{3} \sqrt{a^2+b^2}$. 602.
- $2\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}$. 603. $\frac{3}{4}$. 604. $\pi^2 R^3$. 605. $\frac{\pi h^4}{\sqrt{2}}$. 606. $\frac{\pi a^4}{3}$. 607.
- $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right)$. 608. $\left(0; 0; \frac{a(25\sqrt{5}+1)}{10(5\sqrt{5}-1)} \right)$. 609. $\frac{\pi R^4}{2}$. 610.

$$\frac{4}{3} \pi R^3. \quad 611. \frac{\pi R^4}{2}. \quad 612. -\frac{2\pi a^7}{105}. \quad 613. 8. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა.}$$

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + \Theta(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{yz}} P[x(y,z), y,z]dydz +$$

$$+ \iint_{D_{zx}} \Theta[x,y(x,z), z]dzdx + \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy. \quad 614. \frac{1}{8}. \quad 615. \frac{\pi a^4}{2}.$$

$$616. HR^2 \left(\frac{2R}{3} + \frac{H\pi}{8} \right). \quad 617. 3 \iiint_V dxdydz. \quad 618. 2 \iiint_V (x+y+$$

$$+z)dxdydz. \quad 619. 0. \quad 620. \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dxdydz. \quad 621.$$

$$\frac{a^3}{2}. \quad 622. 3a^4. \quad 623. \frac{12}{5} \pi a^3. \quad 624. 4\pi abc. \quad 625. \frac{1}{6}. \quad 626. \frac{4}{3} \pi a^3.$$

$$627. - \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds. \quad 628. 2 \iint_S [(y-z)\cos \alpha + (z-$$

$$-x)\cos \beta + (x-y)\cos \gamma] ds. \quad 629. 0. \quad 630. -\frac{\pi a^6}{8}. \quad 631. -a^3. \quad \text{მ ი -}$$

თ ი თ ე ბ ა. ორჯერადი ინტეგრალი შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერ ზედაპირზე, რომელიც ABC სამკუთხედის პერიმეტრზე გადის. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ $x+y+z=a$ სიბრტყე. 632. —.

III თ ა 3 0

$$635. \frac{1}{2n-1}. \quad 636. \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}. \quad 637. \frac{n}{2^{n-1}}. \quad 638. \frac{1}{n(n+1)}. \quad 639.$$

$$\frac{n+2}{(n+1)^2}. \quad 640. \frac{n}{100n+1}. \quad 641. \frac{2n}{3n+2}. \quad 642. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)}.$$

$$643. \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{27}{4} + \frac{64}{5} + \dots \quad 644. \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \dots \quad 645.$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} - \dots \quad 646. \frac{a}{1^k} - \frac{a^2}{2^k} + \frac{a^3}{3^k} - \frac{a^4}{4^k} + \dots \quad 647. \frac{1}{2} +$$

$$+\frac{4}{24} + \frac{36}{720} + \dots \quad 648. (\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}) + (\sqrt[3]{9} - \sqrt{5}) + (\sqrt[3]{28} - \sqrt{10}) + \dots$$

$$649. \text{კი.} \quad 650. \text{კი.} \quad 651. \text{არა.} \quad 652. \text{არა.} \quad 653. \text{კი.} \quad 654. \text{კი.} \quad 655. 1. \quad 656.$$

$$\frac{3}{4}. \quad 657. \frac{1}{2}. \quad 658. \frac{1}{3}. \quad 659. \frac{7}{24}. \quad 660. \frac{1}{4}. \quad 661. \frac{5}{2}. \quad 662. \frac{3}{4}.$$

663. $\frac{3}{2}$. 664. 1. 665. კრებადია. 666. კრებადია. 667. კრებადია. 668.

კრებადია. 669. განშლადია. 670. განშლადია. 671. კრებადია. 672. განშლადია. 673. განშლადია. 674. კრებადია. 675. კრებადია. 676. განშლადია. 677. განშლადია. 678. განშლადია. 679. კრებადია. 680. კრებადია. 681. განშლადია. 682. კრებადია. 683. კრებადია. 684. კრებადია. 685. კრებადია. 686. კრებადია. 687. განშლადია. 688. განშლადია. 689. კრებადია. 690. კრებადია. 691. განშლადია. 692. განშლადია. 693. კრებადია. 694. კრებადია. 695. კრებადია. 696. განშლადია. 697. განშლადია. 698. განშლადია. 699. კრებადია. 700. კრებადია. 701. კრებადია. 702. კრებადია. 703. განშლადია. 704. განშლადია. 705. კრებადია. 706. კრებადია. 707. კრებადია. 708. კრებადია. 709. განშლადია. 710. განშლადია. 711. კრებადია. 712. განშლადია. 713. განშლადია. 714. კრებადია. 715. განშლადია. 716. კრებადია. 717. კრებადია. 718. განშლადია. 719. კრებადია. 720. კრებადია. 721. განშლადია. 722. კრებადია. 723. კრებადია. 724. კრებადია. 725. აბსოლუტურად კრებადია. 726. აბსოლუტურად კრებადია. 727. აბსოლუტურად კრებადია. 728. აბსოლუტურად კრებადია. 729. პირობით კრებადია. 730. პირობით კრებადია. 731. განშლადია. 732. განშლადია. 733. აბსოლუტურად კრებადია. 734. აბსოლუტურად კრებადია. 735. პირობით კრებადია. 736. პირობით კრებადია. 737. 0,62. 738. 0,11.

739. კრებადია. 740. განშლადია. 741. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$; კრებადია. 742.

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \dots$; $S = \frac{4}{3}$. 743. $1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} +$

$+ \dots + \frac{n}{7^{n-1}} + \dots$; $S = \frac{49}{36}$. 744. $1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) +$

$+ \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) + \dots$;

კრებადია. 745. $\frac{1}{e} < x < e$. 746. $0 < x < +\infty$. 747. $0 \leq x < +\infty$. 748.

$-\infty < x < +\infty$. 749. $-\infty < x < +\infty$. 750. $-2 < x < 2$. 751. განშლადია ყველგან. 752. კრებადია, როცა $x \neq 0$. 753. $-\sqrt{3} < x < -1$,

$1 < x < \sqrt{3}$. 754. $|x| < 1$. 765. $n \geq 9$. 766. $n \geq 11$. 767. $-1 < x < 1$. 768. $-1 < x < 1$. 769. კრებადია მხოლოდ $x = 0$ წერტილზე. 770.

$-2 < x < 2$. 771. $-3 \leq x < 3$. 772. $-10 \leq x < 10$. 773. $-\infty < x < +\infty$. 774. $-\infty < x < +\infty$. 775. $-2 \leq x < 2$. 776. $-0,1 \leq x < 0,1$. 777.

$-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$. 778. $-1 \leq x < 1$. 779. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 780. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

781. $-1 < x < 1$. 782. $-1 \leq x \leq 1$. 783. $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. 784. $(-\sqrt{3}e; 15. 6. დერგლიშვილი$

$\sqrt[3]{3e}$). 785. $-5 \leq x < 3$. 786. $-2 \leq x < 8$. 787. $-1 \leq x < 0$. 788. $0 \leq x < 4$.

789. $\frac{1}{3}$. 790. 3. 791. 2. 792. 1. 793. e. 794. 4. 795. $S(x) = -$

$-\ln(1-x)$; $-1 \leq x < 1$. 796. $S(x) = \arctg x$; $-1 \leq x \leq 1$. 797. $S(x) =$
 $= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$; $|x| < 1$. 798. $S(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctg x$;

$|x| < 1$. 799. $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $|x| < 1$. 800. $S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $|x| < 1$. 801.

$S(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$; $|x| < 1$. 802. $S(x) = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$; $|x| < 1$. 803.

1) $\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ხარისხოვანი მწკრივი

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ და შემდეგ მიიღეთ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ხარისხოვანი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{3n-2}}{3n-2}$

და შემდეგ მიიღეთ $x = 1$. 804. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right]$. 805.

$\frac{\pi}{8}$. 806. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 807. $\frac{1}{2}$. 808. 0,2. 809. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$;

$(-\infty, +\infty)$. 810. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$; $(-\infty, +\infty)$. 811.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{4}$. 812. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4}$. 813.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n}{2^n n!} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{4}$. 814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$. 815.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}$. 816. 1) $-78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3$;

2) $-16(x+2) + 20(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$. 817. $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \dots$

$$818. 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots \quad 819. 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots \quad 820. x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots$$

$$821. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad 822. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} \quad 823. 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad 824.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \quad 825. x+x^2+\frac{x^3}{3}+\dots \quad 826. x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\dots$$

$$827. 1-x^2+\frac{x^4}{3}-\dots \quad 828. x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{23}{45}x^6-\frac{44}{105}x^8 \quad 829.$$

$$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6+\dots \quad 830. 2+\frac{x}{2^2 \cdot 3 \cdot 1!}-$$

$$-\frac{2x^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2!}+\frac{2 \cdot 5x^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 3!}-\dots \quad 831. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad 832. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$$

$$833. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n (x^{2n}-1)}{n} \quad 834. \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+2^{-n}\right) \frac{x^n}{n} \quad 835.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n 2}{3} x^n. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული წილადი დაშალეთ}$$

$$\text{უმატებელი წილადების ჯამად.} \quad 836. \sum_{n=0}^{\infty} [1+(-1)^n 2^{n+1}] x^n \quad 837.$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა.} \quad \frac{1}{x} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)} \quad 838.$$

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n \quad 839. e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!} \quad 840. 2 \left[1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 1!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(x-4)^2}{2^6 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3(x-4)^3}{2^9 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(x-4)^4}{2^{12} \cdot 4!} + \dots \right]. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა.}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{4+(x-4)} = 2 \sqrt{1+\frac{x-4}{4}} = 2 \left(1+\frac{x-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 841. x-$$

$$\sqrt[3]{3e}). 785. -5 \leq x < 3. 786. -2 \leq x < 8. 787. -1 \leq x < 0. 788. 0 \leq x < 4.$$

$$789. \frac{1}{3}. 790. 3. 791. 2. 792. 1. 793. e. 794. 4. 795. S(x) = -$$

$$-\ln(1-x); -1 \leq x < 1. 796. S(x) = \operatorname{arctg} x; -1 \leq x \leq 1. 797. S(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}; |x| < 1. 798. S(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$$

$$|x| < 1. 799. S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; |x| < 11. 800. S(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; |x| < 1. 801.$$

$$S(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}; |x| < 1. 802. S(x) = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}; |x| < 1. 803.$$

$$1) \frac{\pi \sqrt{3}}{6}. \text{ მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვ ა ნ ი ხ ი ლ ე თ ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ი მ წ კ რ ი ვ ი}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \text{ და შემდეგ მიიღეთ } x = \frac{1}{\sqrt{3}}; 2) \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right).$$

$$\text{მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვ ა ნ ი ხ ი ლ ე თ ხ ა რ ი ს ხ ო ვ ა ნ ი მ წ კ რ ი ვ ი} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{3n-2}}{3n-2}$$

$$\text{და შემდეგ მიიღეთ } x=1. 804. \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right]. 805.$$

$$\frac{\pi}{8}. 806. \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. 807. \frac{1}{2}. 808. 0,2. 809. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n;$$

$$(-\infty, +\infty). 810. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n; (-\infty, +\infty). 811.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{4}. 812. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sin \frac{(2n+1)\pi}{4}. 813.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n}{2^n n!} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{4}. 814. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}. 815.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}. 816. 1) -78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3;$$

$$2) -16(x+2) + 20(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4. 817. \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \dots$$

$$818. 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots \quad 819. 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots \quad 820. x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots$$

$$821. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad 822. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} \quad 823. 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad 824.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \quad 825. x+x^2+\frac{x^3}{3}+\dots \quad 826. x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\dots$$

$$827. 1-x^2+\frac{x^4}{3}-\dots \quad 828. x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{23}{45}x^6-\frac{44}{105}x^8 \quad 829.$$

$$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6+\dots \quad 830. 2+\frac{x}{2^2 \cdot 3 \cdot 1!}-$$

$$-\frac{2x^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2!}+\frac{2 \cdot 5x^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 3!}-\dots \quad 831. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad 832. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}.$$

$$833. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n(x^{2n}-1)}{n} \quad 834. \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+2^{-n}\right) \frac{x^n}{n} \quad 835.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n 2}{3} x^n. \text{ მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული წილადი დაშალეთ}$$

$$\text{უმარტივესი წილადების ჯამად. } 836. \sum_{n=0}^{\infty} [1+(-1)^n 2^{n+1}] x^n. \quad 837.$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n. \text{ მ ი თ ი თ ე ბ ა. } \frac{1}{x} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{x+2}{2}\right)}. \quad 838.$$

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n \quad 839. e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{n!} \quad 840. 2 \left[1 + \frac{x-4}{2^3 \cdot 1!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(x-4)^2}{2^6 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3(x-4)^3}{2^9 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(x-4)^4}{2^{12} \cdot 4!} + \dots \right]. \text{ მ ი თ ი თ ე ბ ა.}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{4+(x-4)} = 2 \sqrt{1+\frac{x-4}{4}} = 2 \left(1+\frac{x-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad 841. x-$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots; |x| \leq 1. \quad 842. \quad x + \frac{1}{2 \cdot 1!} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^7 + \dots;$$

$$|x| < 1. \quad 843. \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots; |x| < 1. \quad 844. \quad x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots; |x| \leq 1. \quad 845. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!};$$

$$(-\infty < x < +\infty). \quad 846. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}; \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$2) -\frac{1}{x} + \ln|x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1) \cdot n!}; \quad (-\infty < x < 0), \quad (0 < x < +\infty). \quad 847.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+12}}{(2n+1)^2}; \quad |x| \leq 1. \quad 848. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}; \quad |x| \leq 1. \quad 849.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}; \quad |x| < 1. \quad 850. \quad x + \frac{1}{2 \cdot 1!} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^7 + \dots;$$

$$|x| < 1. \quad 851. \quad 1, 39. \quad 852. \quad 7, 27. \quad 853. \quad 1) \quad 0, 996; \quad 2) \quad 9, 5; \quad 3) \quad 5, 07; \quad 4) \quad 0, 999. \quad 854. \quad 1) \quad 1, 0025; \quad 2) \quad 4, 8; \quad 3) \quad 4, 125; \quad 4) \quad 2, 1. \quad 855. \quad 1) \quad 0, 319; \quad 2) \quad 0, 978. \quad 856. \quad 1) \quad 0, 173; \quad 2) \quad 0, 966. \quad 857. \quad 1) \quad 0, 6931; \quad 2) \quad 1, 0984; \quad 3)$$

$$1, 3862; \quad 4) \quad 1, 7915. \quad \text{შეშორებულ ალნიშვნას: } \frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}, \text{ აქედან } x = -\frac{1}{2n+1}; \text{ როცა } n=0, \text{ მაშინ } 0 < x < 1, \text{ ამიტომ}$$

$$\text{გვექნება: } \ln(n+1) = \ln n + \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right].$$

$$858. \quad \ln 5 \approx 1, 6093; \quad \ln 10 \approx 2, 3024. \quad 859. \quad \pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad 860. \quad 3, 14. \quad 861. \quad 1, 92. \quad 862. \quad 0, 76. \quad 863. \quad \frac{23}{30}. \quad 864.$$

$$\frac{71}{144}. \quad 865. \quad \frac{159}{320}. \quad 866. \quad \frac{513}{2048}. \quad 867. \quad -1 - 2(x-1) + (y+1) -$$

$$-(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (x-1)^2(y+1). \quad 868. \quad 9 + 11(x-1) + 8(y-2) +$$

$$+ 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2. \quad 869.$$

$$1 + 2(y-1) + (x-2)(y-1) + (y-1)^2 + \dots; \approx 1, 22. \quad 870. \quad 1 - \frac{1}{2} \left[x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(y - \frac{\pi}{2} \right) \Big] + \dots \quad 871. \quad x - (y+1) - \frac{x^2}{2} + x(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} + \dots \\
872. \quad & y - (x-1)y + \dots \quad 873. \quad 1 + x + \frac{1}{2!}(x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 - 3xy^2) + \dots \\
874. \quad & 1 + x + xy + \dots \quad 875. \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}. \quad 876. \quad \frac{\pi^2}{3} + \\
& + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}. \quad 877. \quad -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad 878. \\
& \frac{4c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad 879. \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\
& + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad 880. \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + 3 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad 881. \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad 882. \quad \frac{2}{\pi} - \\
& - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \quad 883. \quad \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a \cos nx}{a^2 - n^2} \right]. \\
884. \quad & \frac{2 \operatorname{sh} \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin nx}{a^2 + n^2}. \quad 885. \quad -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1}. \\
886. \quad & \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2 + 1} - \frac{n \sin nx}{n^2 + 1} \right) \right] - 1. \quad 887. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \\
888. \quad & \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \quad 889. \quad \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\
& \left. \times \frac{l \cos \frac{n\pi x}{l} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2 \pi^2} \right]. \quad 890. \quad \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) + \\
& + \frac{l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right). \quad 891. \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots; |x| \leq 1. \quad \text{842. } x + \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots;$$

$$|x| < 1. \quad \text{843. } x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots; |x| < 1. \quad \text{844. } x - \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^3}{3} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots; |x| \leq 1. \quad \text{845. } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!};$$

$$(-\infty < x < +\infty). \quad \text{846. } 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}; \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$2) -\frac{1}{x} + \ln|x| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1) \cdot n!}; \quad (-\infty < x < 0), \quad (0 < x < +\infty). \quad \text{847.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+12}}{(2n+1)^2}; \quad |x| \leq 1. \quad \text{848. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}; \quad |x| \leq 1. \quad \text{849.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}; \quad |x| < 1. \quad \text{850. } x + \frac{1}{2 \cdot 1!} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^9}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^{13}}{13} + \dots;$$

$$|x| < 1. \quad \text{851. } 1, 39. \quad \text{852. } 7, 27. \quad \text{853. } 1) 0, 996; \quad 2) 9, 5; \quad 3) 5, 07; \quad 4) 0, 999. \quad \text{854. } 1) 1, 0025; \quad 2) 4, 8; \quad 3) 4, 125; \quad 4) 2, 1. \quad \text{855. } 1) 0, 319; \quad 2) 0, 978. \quad \text{856. } 1) 0, 173; \quad 2) 0, 966. \quad \text{857. } 1) 0, 6931; \quad 2) 1, 0984; \quad 3) 1, 3862; \quad 4) 1, 7915. \quad \text{შ ი თ ი თ ე ბ ა. } \text{შეშორეთ აღნიშვნა: } \frac{1+x}{1-x} =$$

$$= \frac{n+1}{n}, \text{ აქედან } x = -\frac{1}{2n+1}; \text{ როცა } n=0, \text{ მაშინ } 0 < x < 1, \text{ ამიტომ}$$

$$\text{გვექმედა: } \ln(n+1) = \ln n + \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right].$$

$$\text{858. } \ln 5 \approx 1, 6093; \quad \ln 10 \approx 2, 3024. \quad \text{859. } \pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad \text{860. } 3, 14. \quad \text{861. } 1, 92. \quad \text{862. } 0, 76. \quad \text{863. } \frac{23}{30}. \quad \text{864.}$$

$$\frac{71}{144}. \quad \text{865. } \frac{159}{320}. \quad \text{866. } \frac{513}{2048}. \quad \text{867. } -1 - 2(x-1) + (y+1) -$$

$$-(x-1)^2 + 2(x-1)(y+1) + (x-1)^2(y+1). \quad \text{868. } 9 + 11(x-1) + 8(y-2) +$$

$$+ 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2. \quad \text{869.}$$

$$1 + 2(y-1) + (x-2)(y-1) + (y-1)^2 + \dots; \approx 1, 22. \quad \text{870. } 1 - \frac{1}{2} \left[x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(y - \frac{\pi}{2} \right) \Big] + \dots \quad 871. \quad x - (y+1) - \frac{x^2}{2} + x(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} + \dots \\
872. \quad & y - (x-1)y + \dots \quad 873. \quad 1 + x + \frac{1}{2!}(x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 - 3xy^2) + \dots \\
874. \quad & 1 + x + xy + \dots \quad 875. \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}. \quad 876. \quad \frac{\pi^2}{3} + \\
& + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}. \quad 877. \quad -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad 878. \\
& \frac{4c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad 879. \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\
& + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad 880. \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + 3 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right. \\
& + \left. \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad 881. \quad \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \quad 882. \quad \frac{2}{\pi} - \\
& - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \quad 883. \quad \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a \cos nx}{a^2 - n^2} \right]. \\
884. \quad & \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin nx}{a^2 + n^2}. \quad 885. \quad -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1}. \\
886. \quad & \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2 + 1} - \frac{n \sin nx}{n^2 + 1} \right) \right] - 1. \quad 887. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \\
888. \quad & \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}. \quad 889. \quad \operatorname{sh} l \left[\frac{1}{l} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\
& \left. \times \frac{l \cos \frac{n\pi x}{l} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2 \pi^2} \right]. \quad 890. \quad \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) + \\
& + \frac{l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right). \quad 891. \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \dots \right). \quad 892. \quad \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}. \quad \text{მ ი თ ი -}$$

თ ე ბ ა. მოცემული შუალედი ასე ჩავწეროთ: (5; 5+10), მისი სიგრძე $2l=10$, საიდანაც $l=5$. ინტეგრების საზღვრები იქნება 5 და 15. 893.

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \dots \right). \quad 894. \quad -\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{2^2-1^2} + \frac{3\sin 3x}{2^2-3^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \dots \right). \quad 895. \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi}{(2n-1)^3}; \quad S = \frac{\pi^3}{32}. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა.}$$

დაუშვით, რომ $x = \frac{\pi}{2}$. 896. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 897. $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha}{\alpha} \times$

$\times \sin \alpha x d\alpha$. 898. $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha$. 899. $\frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$.

900. $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi \alpha}{2} \cos \frac{(\pi-2x)\alpha}{2}}{1-\alpha^2} d\alpha$. 901. $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha(1-2x)}{2}}{\alpha} d\alpha$.

902. $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha$. 903. $\frac{2i \sin \pi \alpha}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha^2)}$. მ ი თ ი თ ე ბ ა. $f(x)$

ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა ეწოდება $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$

ფუნქციას. 904. $\frac{2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha^2)}$. 905. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \alpha}{\alpha} \left(2 \cos \alpha - \frac{2i}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right)$.

906. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i}{\alpha} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$.

IV 7 3 0

913. $xy' - y = 0$. 914. $x + yy' = 0$. 915. $y - 2xy' = 0$. 916. $y = xy' + y'^2$. 917. $xy' - y \ln y' = 0$. 918. $y = xy' \ln \frac{x}{y}$. 919. $2yy'' - y'^2 = 0$. 920.

$$y'' - y' - 2y = 0. \quad 921. y'' = 0. \quad 922. y''' = 0. \quad 923. y''(1+y') - 3y'y'' = 0. \\ 924. (xy' - y)^2 + 2sy' = 0. \quad 929. y(1) = 1,2479. \quad 930. y(1) = 2,593. \quad 931. \\ y(1) = 3,188. \quad 932. y(1) = 1,826. \quad 933. x^2 + y^2 = C^2; \quad x^2 + y^2 = 4. \quad 934. y = \\ = x^3 - x^2 + x + C; \quad y = x^3 - x^2 + x + 1. \quad 935. y = Cx; \quad y = 4x. \quad 936. y = Ce^x; \\ y = 4e^{x+2}. \quad 937. (1-x)(1+y) = C. \quad 938. x^2(1+y^2) = C. \quad 939. x^2 + y^2 = \\ = \ln Cx^2. \quad 940. y = C \sin x. \quad 941. \arcsin x + \arcsin y = C. \quad 942. \sqrt{1+x^2} + \\ + \sqrt{1+y^2} = C. \quad 943. \frac{x+t}{xt} + \ln \frac{x}{t} = C. \quad 944. z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}. \quad 945.$$

$$\frac{1}{r}$$

$$r = Ce^{\frac{1}{r}} + a. \quad 946. \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta = C. \quad 947. \operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3. \quad 948. \operatorname{tg} x \times$$

$$\times \operatorname{tg} y = C. \quad 949. y = e^c \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}; \quad y = 1. \quad 950. \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C; \quad y^2 -$$

$$- 1 = 2 \ln \frac{1 + e^x}{1 + e}. \quad 951. 2y = C \sin^2 x - 1; \quad y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}. \quad 952.$$

$$10^x + 10^{-y} = C. \quad 953. x^2 y = Ce^y. \quad 954. y = x - \frac{1}{x - c}. \quad \text{д о о о о г д о .}$$

$$\text{д о о о о г о } x - y = u. \quad 955. x + C = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x - y}{2} \right). \quad 956. 8x + 2y + \\ + 1 = 2 \operatorname{tg} (4x + C). \quad \text{д о о о о г д о .} \quad \text{д о о о о г о } 8x + 2y + 1 = u. \quad 957.$$

$$\ln x - \frac{x}{y} = C. \quad 958. y = x \ln \frac{c}{x}. \quad 959. \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C. \quad 960. y = \\ = x \ln \frac{y}{c}. \quad 961. 1 + 2Cy - C^2 x^2 = 0. \quad 962. y = x \sqrt[3]{3 \ln Cx}. \quad 963.$$

$$\sin \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{x}. \quad 964. \ln Cx = -e^{-\frac{y}{x}}. \quad 965. y - x = Ce^{\frac{y}{y-x}}. \quad 966. y =$$

$$= xe^{1+cx}. \quad 967. x^3 = C(y^2 - x^2); \quad 3x^3 = 8(x^2 - y^2). \quad 968. y = x \sqrt{C + 2 \ln |x|};$$

$$y = x \sqrt{2 \ln |x|}. \quad 969. \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = e^{-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}.$$

$$970. y = \frac{2x}{1 - Cx^2}; \quad y = \frac{2x}{1 - 3x^2}. \quad 971. x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C. \quad 972.$$

$$\ln |3x - 4y + 1| = x - y + C. \quad 973. x + 2y + 3 \ln |2x + 3y - 7| = C. \quad 974. x^2 +$$

$$+ 2xy - y^2 - 4x + 8y = C. \quad 975. \ln |2x - 3| - \frac{4y + 5}{2x - 3} = C. \quad 976. (x + y -$$

$$- 1)^3 = C(x - y + 3). \quad 977. y = Cx + x^2. \quad 978. y = e^{-x}(C + x). \quad 979. y =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1+x^2} \cdot (C + \sqrt{1+x^2}). \quad 980. \quad y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}. \quad 981. \quad y = x^n(C \mp e^x). \quad 982. \\
&y = e^{-x^2} \left(C + \frac{2}{3} x^3 \right). \quad 983. \quad y = \frac{1}{\cos x} \left(C + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right). \quad 984. \quad y = \\
&= C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}. \quad 985. \quad y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + 1; \quad y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1. \quad 986. \\
&y = \frac{C}{x^2} + x; \quad y = \frac{8}{x^2} + x. \quad 987. \quad y = \frac{C+x}{\cos x}; \quad y = \frac{x}{\cos x}. \quad 988. \quad y = \frac{C}{x} + \\
&+ x \ln x; \quad y = x \ln x. \quad 989. \quad y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1; \quad y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1. \\
990. \quad y = C\sqrt{1-x^2} + x; \quad y = \sqrt{1-x^2} + x. \quad 991. \quad y^2 - 2x = Cy^3. \quad 992. \quad x = \\
&\frac{1}{y^2(Ce^{\frac{1}{y}} + 1)}. \quad 993. \quad y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1. \quad 994. \quad y \left(C + \frac{x^7}{7} \right) = x^3. \quad 995. \quad y = \\
&= x^4 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right)^2. \quad 996. \quad y^n = Ce^{-x} + x - 1. \quad 997. \quad y^3(Ce^{\cos x} + 3) = 1. \\
998. \quad y(Cx + \ln x + 1) = 1 \quad 999. \quad y = \frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}; \quad y = \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}. \\
1000. \quad y = \sqrt{C\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}; \quad y = \sqrt{2\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}. \quad 1001. \quad x^2 y^2 + \\
&+ 1 = Cy. \quad 1002. \quad x^{-1} = Ce^{-y^2 + 2}. \quad 1003. \quad 7x^2 + 6xy - 5y^2 = C. \quad 1004. \\
&x^3 y - 2x^2 y^2 + 3y^4 = C. \quad 1005. \quad x^3 e^y - y = C. \quad 1006. \quad x e^y - y^2 = C. \quad 1007. \quad x^2 + \\
&+ \cos^2 y + y^2 = C. \quad 1008. \quad \frac{x^2}{2} \cos 2y + x = C. \quad 1009. \quad x^y = C. \quad 1010. \quad \ln|x+y| + \\
&+ \frac{y}{x+y} = C. \quad 1011. \quad x+y + \frac{y}{x} = C; \quad x+y + \frac{y}{x} = 3. \quad 1012. \quad \frac{x^2}{2} + \\
&+ y e^{\frac{x}{y}} = C; \quad \frac{x^2}{2} + y e^{\frac{x}{y}} = 2. \quad 1013. \quad u = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + C. \quad 1014. \quad u = \\
&= x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3 + C. \quad 1015. \quad u = \frac{x^2}{2} + x \ln y - \cos y + C. \quad 1016. \quad u = \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} + C. \quad 1017. \quad u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C. \quad 1018. \quad u = xyz - \\
&- x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + C. \quad 1019. \quad u = x \ln y - x \cos 2z + yz + C. \quad 1020. \quad u = \frac{x}{y} + \\
&+ \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C. \quad 1021. \quad 2x e^x - y^2 e^x = C. \quad 1022. \quad e^{-y} \cos x = x + C. \quad 1023. \quad x +
\end{aligned}$$

$$+\frac{y}{x}+\frac{y^3}{3}=C. \quad 1024. \quad x \sin y+y \ln x=C. \quad 1025. \quad x^2 y+\frac{1}{y}=C. \quad 1026.$$

$$\frac{x}{\sin y}+x^3=C. \quad 1027. \quad \frac{\ln x}{y}+\frac{y^2}{2}=C. \quad 1028. \quad y \cos x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \sin x \cos x=C.$$

$$1029. \quad y+C \pm \ln|x+\sqrt{x^2-1}|=0. \quad 1030. \quad 15y+C=\pm[6\sqrt{(1-x)^3}-$$

$$-10\sqrt{(1-x)^3}]. \quad 1031. \quad x=2p-\frac{1}{p^2}, \quad y=p^2-\frac{2}{p}+C. \quad 1032. \quad x=$$

$$=\sin p+\ln p, \quad y=p \sin p+\cos p+p+C. \quad 1033. \quad x=ap+bp^2, \quad 6y=$$

$$=3ap^2+4bp^3+C. \quad 1034. \quad x=e^p+p, \quad y=e^p(p-1)+\frac{p^2}{2}+C. \quad 1035. \quad x=$$

$$=C-\ln|e^y-1|. \quad 1036. \quad x=\pm\frac{1}{2}(\arcsin y-y\sqrt{1-y^2})+C. \quad 1037.$$

$$x=2p+\frac{3}{2}p^2+C, \quad y=p^2+p^3. \quad 1038. \quad x=2p-\frac{2}{p}+C, \quad y=p^2+2\ln p.$$

$$1039. \quad x=\frac{1}{2}\ln^2 p+\ln p+C, \quad y=p \ln p. \quad 1040. \quad x=e^p(p+1)+C, \quad y=p^2 e^p.$$

$$1041. \quad (x^2-2y+C) \cdot (x+y-1-Ce^{-x})=0. \quad 1042. \quad (xy-C) \cdot (x^2 y-C)=0.$$

$$1043. \quad (\sqrt{y}-C)^2-\frac{x^3}{9a^2}=0. \quad 1044. \quad \left(y-\frac{c}{1+\cos x}\right)\left(y-\frac{c}{1-\cos x}\right)=0.$$

1045. 1) ზოგადი ამონახსნი $y=Cx^2$ წარმოადგენს იმ პარაბოლების ოჯახს, რომელთა წვეროები კოორდინატთა სათავეშია. გარდა ამისა, განტოლებას აქვს კიდევ ინტეგრალური წირი $x=0$. კოორდინატთა სათავეზე როგორც $f(x, y)=\frac{2y}{x}$, ასევე $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{x}$ განიცდის წყვეტას. ასეთ განსაკუთრებულ წერტილს კვანძითი წერტილი ეწოდება: 2) $y=Cx(x \neq 0)$ — ნახევარწრფეთა ოჯახი. $O(0; 0)$ წერტილი წარმოადგენს კვანძით წერტილს. 1046. $x^2+y^2=C^2$ — წრეწირთა ოჯახი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში). თვით განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი. ასეთ წერტილს ეწოდება ცენტრი. 1047. $xy=C$ — ჰიპერბოლების ოჯახი. როცა $C=0$, მივიღებთ საკოორდინატო ღერძებს $x=0$, $y=0$. ეს წირები გადის სათავეზე. დანარჩენი წირები განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის. ასეთი სახის განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება უნაგირა წერტილი. 1048.

$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctg \frac{y}{x}}$; პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ $r=Ce^{\varphi}$. $O(0; 0)$ განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება ფოკუსი. 1049. $y-1=(x-C)^2$; $y=1$. 1050. $y^3=(x+C)^2$; განსაკუთრებული ამონახსნი არა აქვს. $y=0$ წრფე არის მიღებულ წირთა ოჯახის

- უკუქცევის წერტილთა ვეომეტრიული ადგილი. 1051. $(x-C)^2 + y^2 = a^2$;
 $y = \pm a$. 1052. $(x + \sqrt{2C})^2 + y^2 = C^2$; $y = \pm x$. 1053. $y = \frac{1}{2} \cos x \pm$
 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$. 1054. $y = 1 - \frac{x^2}{4}$; $y = x - \frac{x^2}{4}$. 1055. $x = \frac{C}{p^2} + \frac{2p}{3}$, $y =$
 $= \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}$. 1056. $x = \frac{C + \ln p}{p^2}$, $y = \frac{2}{p}(C + \ln p) + \frac{1}{p}$. 1057. $x = Ce^{-p} +$
 $+ 2(1-p)$, $y = x(1+p) + p^2$. 1058. $x = \frac{1}{p^2}(C - p \sin p - \cos p)$, $y =$
 $= 2xp + \sin p$. 1059. $y = (C + \sqrt{x+1})^2$; $y=0$ განსაკუთრებული ამო-
 ნახსნი. 1060. $Cy = (x-C)^2$; $y=0$ და $y = -4x -$ განსაკუთრებული
 ამონახსნები. 1061. $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 1062. $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$.
 1063. $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$. 1064. $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$; $y^3 =$
 $= \frac{27}{8}x^2$. 1065. $y = Cx + C - C^2$; $y = \frac{(x+1)^2}{4}$. 1066. $y = Cx + C + e^x$;
 $y = (x+1) \ln|-x-1| - x - 1$. 1067. $2x^2 + y^2 = C$. 1068. $x^2 - y^2 = C$.
 1069. $y = Cx$. 1070. $2x^2 + 3y^2 = C$. 1071. $y = Cx^2$. 1072. $x^2 + y^2 -$
 $- 2Cx = 0$. 1073. კონფოკალური ჰიპერბოლები. 1074. $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln Cx$.
 მითითება. მოცემული ელიფსების ოჯახის განტოლებაა $\frac{x^2}{a^2} +$
 $+ \frac{y^2}{b^2} = 1$, სადაც a მუდმივია, ხოლო b — ცვლადი პარამეტრი. 1075.
 $r = 2C \cos \varphi$. მითითება. ჭოცა წირთა ოჯახი მოცემულია პოლა-
 რული კოორდინატებით $F(r, \varphi, a) = 0$ და $\Phi(r, \varphi, r') = 0$ არის ამ ოჯა-
 ხის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგო-
 ნალური ტრანქტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამი-
 სად არის: $\Phi\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$, $\Phi\left(r, \varphi, \frac{r' + kr}{r - kr'} r\right) = 0$ ($k = i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$).
 1076. $r = c(1 - \cos \varphi)$. 1077. $\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$, ან პოლარულ კო-
 ორდინატებში: $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$. 1078. $r = C$. 1079. $x = \frac{Cp}{\sqrt{p^2 + 1}} + 2p$, $y = p^2 -$
 $-\frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}} - 2$. 1080. $x = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \left[C + \frac{h}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{p^2 + 1} + 1}{p} - \right. \right.$

$$\left. -\frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2} \right], y = -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \left[C + \frac{h}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{p^2+1}+1}{p} - \frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2} \right) \right] -$$

$$-\frac{h}{2p^2}. \quad 1081. \quad x = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left[C + a \left(\frac{1}{p} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} p \right) \right], y = -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \left[C + a(\operatorname{arctg} p - p) \right]. \quad 1082. \quad x = -\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{1}{2p^2},$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{1}{p}. \quad 1083. \quad y = Cx \quad \text{და} \quad y = \frac{C}{x}. \quad 1084. \quad y = Ce^{\frac{x}{y}}. \quad 1085.$$

$$(x-y)^2 - Cy = 0. \quad 1086. \quad y^2 = 2x^2 \ln \frac{C}{x}. \quad 1087. \quad x^2 + y^2 = a^2(x-C)^2. \quad 1088.$$

$$y = \frac{x}{2} \left[\left(\frac{C}{x} \right)^a - \left(\frac{x}{C} \right)^a \right]. \quad 1089. \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}. \quad 1090. \quad x^2 =$$

$$= C(2y+C). \quad 1091. \quad 2Cx = y^2 - C^2. \quad 1092. \quad 1), \quad 2) \quad xy = 6. \quad 1093. \quad y =$$

$$= \frac{x}{2} \left(Ce^{\frac{a}{x}} - \frac{1}{C} e^{-\frac{a}{x}} \right). \quad 1094. \quad y^2 = 4ax + 4a^2 \left(1 - e^{\frac{x}{a}} \right). \quad 1095. \quad y =$$

$$= Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}. \quad 1096. \quad Cy^2 - xy + 2 = 0; \quad 3y^2 + 2xy - 4 = 0. \quad 1097. \quad y^2 =$$

$$= Cx; \quad y^2 = 8x. \quad 1098. \quad y = \frac{1}{2C} \left(C^2 e^{\pm \frac{x}{a}} + a^2 e^{\mp \frac{x}{a}} \right), \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\pm \frac{x}{a}} +$$

$$+ e^{\mp \frac{x}{a}} \right). \quad 1099. \quad \approx 3,9 \text{ კვ.} \quad 1100. \quad x = Ce^{-\frac{bt}{a}}, \text{ სადაც } x\text{-ით აღნიშნუ-$$

ლია მარლის რაოდენობა კურკელში მოცემული t მომენტისათვის.

1101. $t \approx 10$ წამს. მითითებულა ხერვლიდან გამოსული წყლის სიჩქარე გამოითვლება $V = 0,6\sqrt{2gh}$ სმ/წმ ფორმულით, სადაც g სიძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო h — მანძილი წყლის ზედაპირიდან ხერვ-

ლამდე. 1102. $t = \frac{D^2 \sqrt{H}}{0,3a^2 \sqrt{2g}}$; $t \approx 5$ წუთს და 56 წამს. 1103. $y =$

$$= \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2; \quad y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2} x - \frac{2}{3}. \quad 1104. \quad y = -\cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y = -\cos 2x + 1. \quad 1105. \quad y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2; \quad y = -\ln|\cos x|.$$

$$1106. \quad y = 3 \ln x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3; \quad y = 3 \ln x + 2x^2 - 6x + 6. \quad 1107. \quad y = -$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3; \quad y = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1. \quad 1108. \quad y = \frac{1}{8} e^{2x+1} + \\
& + C_1x^2 + C_2x + C_3. \quad 1109. \quad y = \cos x + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3. \quad 1110. \quad y = \\
& = \ln |\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3. \quad 1111. \quad y = \frac{x^3}{6} \ln x - \frac{11x^3}{36} + C_1x^2 + C_2x + C_3. \\
1112. & \left(y - \frac{x^2}{2} - C_1x - C_2 \right) \cdot (y - x^2 - C_1x - C_2) = 0. \quad 1113. \quad x = p^3 + 1; \\
y = & \frac{9}{28} p^7 + C_1p^3 + C_2. \quad 1114. \quad x = e^p + p; \quad y = \left(\frac{1}{2} p - \frac{3}{4} \right) e^{2p} + \left(\frac{1}{2} p^2 - \right. \\
& \left. - 1 + C_1 \right) e^p + \frac{p^3}{6} + C_1p + C_2. \quad 1115. \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2. \quad 1116. \quad y = \\
& = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2. \quad 1117. \quad y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C_1 \ln x + C_2. \quad 1118. \quad y = C_1 \sin x - \\
& - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2. \quad 1119. \quad y = \frac{C_1}{3} x^3 + C_1x + C_2; \quad y = x^3 + 3x + 1. \quad 1120. \\
y = & \ln(x^2 + 2C_1) + C_2; \quad y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}. \quad 1121. \quad y = C_1x \ln x + C_2x + C_3 + \frac{x^3}{4} + \\
& + \frac{x^3}{4}. \quad 1122. \quad y = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 - C_1^2(x + C_1)[\ln(x + C_1) - 1]. \quad 1123. \\
12y = & (x + C_1)^3 + C_2. \quad 1124. \quad y = -C_1e^{-x} + C_2x^2 + C_3x + C_4. \quad 1125. \quad y = \\
& = \frac{1}{3} \left(1 - 2x \right)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3. \quad 1126. \quad (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1. \quad 1127. \quad y^2 = \\
& = C_1x + C_2; \quad y = C. \quad 1128. \quad x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2; \quad y = C. \quad 1129. \quad (x + C_2) \times \\
& \times (y - 1) = C_1. \quad 1130. \quad \frac{3}{2} C_1x + C_2 = \left(C_1y - 1 \right)^{\frac{3}{2}}. \quad 1131. \quad y = \frac{(x + 9)^2}{16}. \\
1132. & y = x + 1. \quad 1133. \quad y = C_2 e^{C_1x^2}. \quad 1134. \quad y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}. \quad 1135. \quad \ln y = \\
& = C_1[x^2 + x \sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})] + C_2. \quad 1136. \quad y = C_2 \sqrt{C_1 + x^2}. \quad 1137. \\
y = & -\frac{1}{C_1x + C_2}. \quad \text{однако } \frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y}, \quad \frac{1}{y'} \frac{dy'}{dx} = \frac{2}{y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy'}{y'} = \\
& = 2 \frac{dy}{y}, \quad \ln y' = 2 \ln y + \ln C_1, \quad y' = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad -\frac{1}{y} =
\end{aligned}$$

$$\frac{(x+c_1)^2}{2}$$

$$=C_1x+C_2, y=-\frac{1}{C_1x+C_2}. \quad 1138. \operatorname{arctg} y=C_1x+C_2. \quad 1139. y=C_2e$$

$$1140. \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \left| \sqrt{C_1} y + \sqrt{C_1 y^2 + C_2} \right| = x + C_3. \quad 1141. (x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 =$$

$$= a^2. \quad 1142. C_1 y^2 - C_1^2 (x-C_2)^2 = h. \quad 1143. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1144. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1145. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1146. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1147. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1148. \text{წრფივად დამოუკიდებელია.} \quad 1149. x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. საძიებელი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება $y=C_1x+C_2x^2$, აქედან $y'=C_1+2C_2x$, $y''=2C_2$. მიღებული სისტემიდან C_1 და C_2 მუდმივების გამორიცხვა მოგვცემს საძიებელ განტოლებას.

$$1150. y''+y=0. \quad 1151. \sin 2x \cdot y'' - 2 \cos 2x \cdot y' = 0. \quad 1152. y'' - 2y' + y = 0. \quad 1153. y = 3x^2 - 2x^3. \quad 1154. y = 3x - 5x^2 + 2x^3. \quad 1155.$$

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}. \quad 1156. y = C_1 x + \frac{C_2}{x^4}. \quad 1157. y = C_1 x + C_2 \ln x.$$

$$1158. y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x. \quad 1159. y = C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x. \quad 1160. y(1-x) = C_1 x + C_2 (1-x^2 + 2x \ln x). \quad 1161. y = Ax + \frac{B}{x} + \frac{x^2}{3}. \quad 1162. y =$$

$$= Ax + Bx^2 + x^3. \quad 1163. y = Ax^2 + B + \frac{x^3}{3}. \quad 1164. y = Ae^x + Bx - x^2 - 1. \quad 1165. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \quad 1166. y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \quad 1167. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \quad 1168. y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}. \quad 1169. y = C_1 + C_2 e^x. \quad 1170.$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x}. \quad 1171. y = C_1 e^{-\frac{4x}{3}} + C_2 e^{2x}. \quad 1172. x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t.$$

$$1173. y = 4e^x + e^{1x}. \quad 1174. y = 2e^{\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{3}{4}x}. \quad 1175. y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}.$$

$$1176. y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2}x}. \quad 1177. y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{4}x}. \quad 1178. y = (C_1 +$$

$$+ C_2 x) e^{-\frac{x}{4}}. \quad 1179. y = (2-3x)e^{1-2x}. \quad 1180. y = 2xe^{3x}. \quad 1181. y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x}. \quad 1182. y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^{2x}. \quad 1183. y =$$

$$= \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}}. \quad 1184. y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-2x}.$$

$$1185. x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad 1186. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad 1187. y = \sin 2x. \quad 1188. y = (\cos x + 2 \sin x) e^{-x}. \quad 1189. y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} +$$

$$y = \frac{5}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x}. \quad 1224. \quad s = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin t. \quad \delta \circ \circ \circ \circ \circ \delta \circ. \quad v = \frac{ds}{dt},$$

$$\omega = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad 1225. \quad s = 1 + \frac{t}{2} \sin 2t. \quad 1226. \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \quad 1227.$$

$$y = 1000 - 490,5 t^2; \quad t \approx 1,43 \sqrt[3]{\delta}. \quad 1228. \quad y = y_0 + 100t - 490,5 t^2; \quad t \approx 0,1 \sqrt[3]{\delta}.$$

$$1229. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \quad 1230. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}. \quad 1231. \quad y =$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \quad 1232. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \quad 1233. \quad y = C_1 e^{-x} +$$

$$+ C_2 e^{4x} + C_3 e^{-3x}. \quad 1234. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}. \quad 1235. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$$

$$+ C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}. \quad 1236. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}. \quad 1237. \quad y =$$

$$= C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{2x}. \quad 1238. \quad y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) e^{2x}. \quad 1239. \quad y = (C_1 +$$

$$+ C_2 x + C_3 x^2) e^{2x}. \quad 1240. \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x. \quad 1241. \quad y = C_1 + C_2 x +$$

$$+ (C_3 + C_4 x) e^{-x}. \quad 1242. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}. \quad 1243. \quad y =$$

$$= C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x). \quad 1244. \quad y = C_1 e^{-x} +$$

$$+ e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \quad 1245. \quad y = C_1 e^x + e^{-2x} (C_2 \cos 3x +$$

$$+ C_3 \sin 3x). \quad 1246. \quad y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x). \quad 1247. \quad y = C_1 e^{2x} +$$

$$+ C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x. \quad 1248. \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x +$$

$$+ C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \quad 1249. \quad y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

$$1250. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x. \quad 1251. \quad y = C_1 e^{2x} +$$

$$+ C_2 e^{-2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x. \quad 1252. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

$$1253. \quad y = (C_1 + C_2 v) \cos x + (C_3 + C_4 v) \sin x. \quad 1254. \quad y = (C_1 + C_2 v) \times$$

$$\times \cos \sqrt{3} x + (C_3 + C_4 v) \sin \sqrt{3} x. \quad 1255. \quad y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos 2x +$$

$$+ (C_4 + C_5 v) \sin 2x. \quad 1256. \quad y = \left[(C_1 + C_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (C_3 + C_4 x) \times \right.$$

$$\times \left. \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] e^{-\frac{x}{2}}. \quad 1257. \quad y = 1 + \cos x. \quad 1258. \quad y = 1. \quad 1259. \quad y = e^x.$$

$$1260. \quad y = e^x + \cos x - 2. \quad 1261. \quad y = C_1 e^x + \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$$

$$+ \left. C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}} - x^3 - 5. \quad 1262. \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \frac{x^3}{2} + x^2.$$

1294. $y = \frac{\sin x^7}{x}$. 1295. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \dots$ 1296. $y = 1 -$
 $-x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \dots$ 1297. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11}{24}x^4 + \dots$ 1298. $y =$
 $= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 9} + \dots$ 1299. $y = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)!}$. 1300. $y = 1 +$
 $+ \frac{ex^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^2x^4}{4!} + \frac{ex^5}{5!} + \dots$ 1301. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; $z = C_2 \cos x -$
 $- C_1 \sin x$. 1302. $y = C_1 e^{abx} + C_2 e^{-abx}$; $z = -\frac{b}{a} (C_1 e^{abx} - C_2 e^{-abx})$.
 1303. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$; $z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x}$. 1304. $y = e^{-6x}(C_1 \cos x +$
 $+ C_2 \sin x)$; $z = e^{-6x}[(C_2 + C_1) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x]$. 1305. $x = C_1 e^{2t} +$
 $+ C_2 e^{-3t} - \frac{t^2}{2}$; $y = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t^2 + t$. 1306. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$;
 $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t$. 1307. $y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-c_1 x}$; $z = C_2 e^{c_1 x}$; $y =$
 $= x - e^x$; $z = e^{-x}$. 1308. $y = C_1 C_2 e^{c_1 x}$; $z = C_2 e^{c_1 x}$; $y = e^x$; $z = e^x$. 1309.
 $y = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$; $z = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$. 1310. $y =$
 $= C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x + e^x$; $z = -C_1 e^{\sqrt{2}x} - C_2 e^{-\sqrt{2}x} -$
 $- \frac{C_3}{4} \cos x - \frac{C_4}{4} \sin x + x - \frac{e^x}{2}$. 1311. $x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \right.$
 $+ C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \left. \right)$; $y = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{C_3 \sqrt{3} - C_2}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \right.$
 $- \frac{C_2 \sqrt{3} + C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \left. \right)$; $z = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{-C_3 \sqrt{3} - C_2}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \right.$
 $+ \frac{C_2 \sqrt{3} - C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \left. \right)$. 1312. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$; $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$;
 $z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$. 1313. $x = C_1 + 3C_2 e^{2t}$; $y = -2C_2 e^{2t} - \frac{C_3}{2} e^{-t}$;
 $z = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$. 1314. $x = -C_1 + e^t (C_3 \cos t - C_2 \sin t) + t^2 + 2t$;
 $y = -C_1 + e^t (C_2 \cos t + C_3 \sin t) + t^2 - 2$; $z = C_1 + e^t (C_2 \cos t + C_3 \sin t) - t^2$.

1315. $y=C_1x$; $z=C_2x$. 1316. $y=C_1x$; $xy=z^2+C_2$. 1317. 1) $\sqrt{y}-\sqrt{x}=C_1$; $z-\sqrt{x}=C_2$; 2) $y=C_1$; $z=C_2e^{\frac{x}{y}}$. 1318. $x+y+z=C_1$; $x^2+y^2+z^2=C_2$. 1319. $z-x=C_1(y-x)$; $(x+y+z)\cdot(x-y)^2=C_2$. 1320. $y^2-z^2=C_1$; $2x+(z-y)^2=C_2$. 1321. $\frac{dx_1}{dt}=x_2$, $\frac{dx_2}{dt}=-k^2x$, $\text{вход } x_1=x$, $x_2=\frac{dx}{dt}$. 1322. $y'_1=y_2$, $y'_2=-\frac{y_2}{x}-y_1$, $\text{вход } y_1=y$, $y_2=y'$. 1323. $y'_1=y_2$, $y'_2=y_3$, $y'_3=y_1$, $\text{вход } y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$. 1324. $y'_1=y_2$, $y'_2=y_3$, $y'_3=y_4$, $y'_4=-x^2y_1$, $\text{вход } y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$, $y_4=y'''$. 1325. $y=C_1+C_2e^{-x}$; $z=-2C_1-3C_2e^{-x}$. 1326. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; $z=2C_1e^x+5C_2e^{-2x}$. 1327. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; $z=-C_1e^x-\frac{3}{2}C_2e^{2x}$; $y=e^x-2e^{2x}$; $z=-e^x+3e^{2x}$. 1328. $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$; $z=-\frac{C_1}{2}e^x+C_2e^{4x}$; $y=e^{4x}$; $z=e^{4x}$. 1329. $x=D_1e^{2t}+3D_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t}$; $y=D_1e^{2t}+D_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$. 1330. $y=D_1e^x+D_2e^{2x}-2e^{-x}$; $z=-D_1e^x-\frac{3}{2}D_2e^{2x}+e^{-x}$. 1331. $x=D_1e^{-t}+D_2e^{2t}+D_3e^{-2t}$; $y=D_1e^{-t}+D_2e^{2t}-D_3e^{-2t}$; $z=-D_1e^{-t}+2D_2e^{2t}$. 1332. $x=D_1+D_2e^t+D_3e^{2t}$; $y=\frac{3}{2}D_1-2D_3e^{2t}$; $z=\frac{1}{2}D_1+D_2e^t+2D_3e^{2t}$. 1333. $x=-2D_1e^t-8D_2e^{2t}-3D_3e^{3t}$; $y=D_1e^t+3D_2e^{2t}+D_3e^{3t}$; $z=2D_1e^t+7D_2e^{2t}+3D_3e^{3t}$. 1334. $x=D_2e^{-3t}-D_3e^{3t}$; $y=D_1e^{-t}-2D_2e^{-3t}+D_3e^{3t}$; $z=-D_1e^{-t}-D_2e^{-3t}$.

V O D 3 O

1335. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. 1336. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. 1337. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 1338. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 1339. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. 1340. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -2 & 8 & -10 \end{pmatrix}$. 1341. $\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$. 1342. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. 1343. $\begin{pmatrix} 22 \\ 29 \end{pmatrix}$. 1344. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. 1345. $\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}$. 1346. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 1347. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$. 1348. $AB =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1349. AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, BA = (16).$$

$$1350. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad 1351. \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}. \quad 1352. \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$1353. \begin{pmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{pmatrix}. \quad 1354. AE = EA = A. \quad 1355. AB = BA =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \quad 1356. AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1357. AB = BA = 42 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1358. AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1359. (AB)C = A(BC) = (51 \ 6 \ 14). \quad 1360. A(B+C) = AB + AC = (9 \ 30).$$

$$1361. (AB') = B'A' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}. \quad 1362. (AB)' = B'A' = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1363. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad 1364. \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad 1365. \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1366. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \quad 1367. 1) 3; 2) 2. \quad 1368. 1) 3; 2) 2.$$

$$1369. 2. \quad 1370. 2. \quad 1371. 3. \quad 1372. 2. \quad 1373. 2. \quad 1374. 3. \quad 1375. 2.$$

$$1376. 3. \quad 1377. x=1, y=2, z=3. \quad 1378. x=8, y=4, z=2. \quad 1379.$$

$$x = \frac{53}{22}, y = -\frac{41}{44}, z = \frac{9}{4}. \quad 1380. x=3, y=-1, z=0. \quad 1381. x=1,$$

$$y=3, z=6. \quad 1382. x=3, y=-2, z=-5. \quad 1383. x = \frac{11-z}{5}, y =$$

$$= \frac{2(z-1)}{5}, \text{ სადაც } z \text{ ნებისმიერია. } \quad 1384. x = \frac{11-7z}{7}, y = \frac{1+7z}{7},$$

$$\text{სადაც } z \text{ ნებისმიერია. } \quad 1385. x = \frac{57-z}{26}, y = \frac{8z-1}{13}, \text{ სადაც } z \text{ ნების-}$$

$$\text{მიერია. } \quad 1386. x = \frac{4+10z}{11}, y = \frac{19-13z}{11}, \text{ სადაც } z \text{ ნებისმიერია.}$$

1423. $5 + \frac{11\sqrt{3}}{2}$. 1424. -2 . 1425. 1 . 1426. $9,4$. 1427. $2 + \sqrt{2}$.

1428. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1429. $\frac{68}{13}$. 1430. $-\frac{92}{13}$. 1431. 12 . 1432. $(0; 0)$ და

$(1; 1)$. 1433. $(2; 0)$. 1437. 1) $\frac{\vec{r}}{r}$; 2) $2\vec{r}$; 3) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$. 1438. $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \text{grad } u +$

$+\frac{\partial\varphi}{\partial v} \text{grad } v$. 1439. $-2\vec{i} + \vec{j}$. 1440. $2\vec{i} + \vec{j}$. 1441. $\frac{1}{4}(5\vec{i} - 3\vec{j})$. 1442.

$\frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$. 1443. 7 . 1444. $\sqrt{17+16\ln^2 2}$. 1445. $2\sqrt{3}$. 1446. $\cos \Theta =$

$= -\frac{12}{5\sqrt{145}}$. მითითებდა. $\cos \Theta = \frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } u| \cdot |\text{grad } v|}$. 1447. $\frac{\pi}{2}$.

1448. $\cos \Theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. 1453. 1) $\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} +$

$+\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$; 2) 0 . 1454. 1) $v\Delta u + u\Delta v +$

$+ 2(\text{grad } u \cdot \text{grad } v)$; 2) 0 . 1455. 1) 3 ; 2) $\frac{2}{r}$; 3) 0 . 1456. 1) 6 ;

2) $3f(r) + f'(r) \cdot r$; 3) $f'(r) \frac{\vec{r} \cdot \vec{c}}{r}$. 1457. 0 . 1458. 0 . 1459. 1) $yz\vec{i} +$

$+ zx\vec{j} + xy\vec{k}$; 2) $\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}$; 3) $(2-2y)\vec{i} - 2x\vec{j} + 2\vec{k}$; 4) $-y^2\vec{k}$.

1461. $\frac{5}{3}$. მითითებდა. ველის ნაკადი გამოითვლება

$$\iint_S \vec{F} n ds = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{F} n}{|\cos \gamma|} dx dy \text{ ფორმულით, სადაც } ds = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} \text{ ზედა-}$$

პირის ფართობის ელემენტია. 1462. $-\frac{1}{6}$. 1463. $\frac{1}{15}$. 1464. $\frac{27}{2}\pi$.

1465. $\frac{1}{6}$. მითითებდა. შეკრული S ზედაპირის შემთხვევაში

ველის ნაკადი გამოითვლება $\iiint_S \vec{F} n ds = \iiint_V \text{div } \vec{F} dv$ ფორმულით,

სადაც V მოცულობა შემოსაზღვრულია S ზედაპირით. 1466. $\frac{1}{3}$. 1468.

$3\pi R^2 H$. 1469. 36. 1470. 0. 1471. $\frac{64}{3}\pi$. 1472. $\frac{4}{5}\pi R^5$. 1473. $2h^2\pi^2$.

1474. $R^3 \frac{6-\pi}{4}$. 1475. $\frac{a^2-b^2}{2}$. 1476. πa^2 . 1477. $\frac{16}{3}$. 1478. 24.

1479. $-\frac{3\pi R^2}{4}$. 1480. -4π . 1481. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 1482. $-\frac{3\pi R^2}{16}$. მითითებულია.

S ზედაპირად მიიღეთ xOy სიბრტყის ის ნაწილი, რომელიც

L წირით არის შემოსაზღვრული, მისთვის $\vec{n}=\vec{k}$. 1483. $-\pi$. 1484.

$-\pi$. 1485. 1) $u=3x^2y-y^2+C$. მითითებულია. $u(x, y, z) =$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz; 2) u=xyz+C.$$

1486. 1) არა აქვს; 2) $u=xy+yz+zx+C$. 1487. $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 +$

$+z^2)+C$. 1488. $\int_{r_0}^r f(r) r dr$. 1490. არის.

VII თ ა 3 0

1493. $\frac{1}{10}$. 1494. $\frac{1}{9}$. 1495. $\frac{1}{2}$. 1496. $\frac{1}{6}$. 1497. $\frac{3}{4}$. 1498.

$P(A) = \frac{33}{100}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. 1499. $\frac{27}{80}$. 1500. 0,024. 1501. $\frac{1}{720}$.

1502. $\frac{1}{120}$. 1503. $\frac{1}{10}$. 1504. $\frac{1}{90}$. 1505. $\frac{2}{\pi}$. 1506. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

1507. $\frac{11}{36}$. 1508. $\approx 0,28$. 1509. $\approx 0,56$. 1510. $\approx 0,302$. 1511. $\frac{1}{252}$.

1512. $\approx 0,385$. 1513. 0,05. 1514. 102. 1515. $\frac{1}{2}$. 1516. $\frac{18}{25}$. 1517.

0,2. 1518. 0,3. 1519. 0,8. 1520. 0,043. 1521. 0,4. 1522. 0,8. 1523.

0,02. 1524. 0,061. 1525. 0,25. 1526. 0,45. 1527. $\approx 0,305$. 1528. $\approx 0,217$.

1529. $\frac{1}{16}$. 1530. $\frac{1}{4}$. 1531. $\frac{1}{12}$. 1532. 0,12. 1533. 0,729. 1534. 0,72.

1535. 0,644. 1536. 1) 0,56; 2) 0,38; 3) 0,06. 1537. 0,817. 1538.

0,504. 1539. 0,0336. 1540. 0,9999. 1541. $\frac{91}{216}$. 1542. 0,91. 1543.

- 0,994. 1544. 0,96. 1545. 1) 0,58; 2) 0,42. 1546. $\frac{5}{11}$. 1547.
- 1) 0,1; 2), 0,16. 1548. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$. 1549. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{6}{11}$. 1550.
- $\approx 0,0024$. 1551. $\frac{1}{17}$. 1552. $\frac{7}{30}$. 1553. $\frac{68}{97}$. 1554. 1) $\frac{20}{31}$; 2) $\frac{11}{93}$.
1555. $\frac{1}{22}$. 1556. $\frac{19}{138}$. 1557. 0,88. 1558. 0,98. 1559. $\approx 0,038$. 1560. 0,84.
1561. $\approx 0,642$. 1562. $\frac{73}{75}$. 1563. 0,08. 1564. 0,009. 1565. 0,002.
1566. $\frac{1}{12}$. 1567. $\approx 0,7024$. 1568. 0,86. 1569. $\frac{17}{30}$. 1570. $\frac{31}{60}$. 1571.
- $\frac{2}{5}$. 1572. $\frac{10}{13}$. 1573. $\frac{6}{7}$. 1574. $\frac{1}{2}$. 1575. $\frac{35}{128}$. 1576. $\approx 0,41$.
1577. $\approx 0,366$. 1578. $\approx 0,25$. 1579. $\approx 0,2036$. 1580. $\approx 0,1106$.
1581. $P_4(3) > P_8(5)$. 1582. 1) 0,2916; 2) 0,9477. 1583. 1) $\approx 0,246$;
2) $\approx 0,26$; 3) 0,000064. 1584. $\approx 0,2069$. 1585. 7. 1586. 1) 1; 2) 16.
1587. 7 და 8. 1588. 15 და 16. 1589. 16. 1590. 27. 1591. 2 და 3;
 $\approx 0,25$. 1592. 1) 1; 2) $\approx 0,3875$. 1593. $0,198 < p \leq 0,2079$. 1594.
- $n=200, 201, 202$. 1595. 55. 1596. 0,04986. 1597. 0,0006. 1598.
- 0,273. 1599. $\approx 0,090224$. 1600. $\approx 0,160623$. 1601. 8; $\approx 0,139587$.
1602. 0,8882. 1603. 1) 0,6961; 2) 0,0838. 1604. 1) 0,7498; 2) 0,8749.
1605. 0,182. 1606. 0,9544. 1607. 400. 1608. 1764. 1609. $0,61 \leq$
- $\leq \frac{m}{2500} \leq 0,67$. 1610. $0,1903 \leq \frac{m}{5000} \leq 0,2097$. 1611. $X \begin{cases} 0 & 1 \\ 0,7 & 0,3 \end{cases}$
1612. $X \begin{cases} 2 & 5 & 8 \\ 0,4 & 0,15 & 0,45 \end{cases}$. 1613. $X \begin{cases} 1000 & 500 & 400 & 100 & 0 \\ 0,001 & 0,004 & 0,005 & 0,01 & 0,98 \end{cases}$
1614. $X \begin{cases} 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \end{cases}$. 1615. $X \begin{cases} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 75 & 125 \\ \frac{1}{216} & \frac{1}{216} & \frac{1}{216} & \frac{1}{216} \end{cases}$
1616. $X \begin{cases} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{cases}$. 1617. $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0,8 & 0,16 & 0,04 \end{cases}$
1618. $X \begin{cases} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,064 \end{cases}$. 1619. $X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{cases}$
1620. $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,7 & 0,21 & 0,063 & 0,027 \end{cases}$. 1621. $X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,4 & 0,24 & 0,144 & 0,216 \end{cases}$

$$1622. X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,0625 & 0,25 & 0,375 & 0,25 & 0,0625. \end{cases} \quad 1623. X+Y \begin{cases} 3 & 5 & 7 \\ 0,08 & 0,44 & 0,48. \end{cases}$$

$$1624. X-Y \begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,06 & 0,24 & 0,14 & 0,56. \end{cases} \quad 1625. X^2 \begin{cases} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1, \end{cases}$$

$$3X \begin{cases} -6 & 0 & 3 & 9 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1. \end{cases}$$

$$1626. XY \begin{cases} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,08 & 0,06 & 0,04 & 0,37 & 0,10 & 0,15 & 0,20. \end{cases}$$

$$1627. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x \leq 0, \\ 0,7, & \text{հոգյա } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{հոգյա } x > 1, \end{cases}$$

$$\text{Ձ ո ս ո ս ո ս ղ ծ ս. } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x \leq 0, \\ \sum_{k < x} P_n(k), & \text{հոգյա } 0 < x \leq n, \\ 1, & \text{հոգյա } x > n. \end{cases}$$

$$1628. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x \leq 0; \\ 1, & 1 < x \leq 2; \\ 3, & 3 < x \leq 4; \\ 0,2401, & \text{հոգյա } 0 < x \leq 1; \\ 0,9163, & \text{հոգյա } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{հոգյա } x > 4. \end{cases} \quad 0,6517, \text{ հոգյա } \\ 0,9919, \text{ հոգյա } \end{cases}$$

$$P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = 0,7518. \quad 1629. \frac{1}{3}. \quad 1630. \frac{1}{2}.$$

$$1631. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x \leq 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{հոգյա } 0 < x \leq 3, \\ 0, & \text{հոգյա } x > 3. \end{cases} \quad P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \frac{1}{6}.$$

$$1632. 1) \frac{1}{2}. \quad 2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & \text{հոգյա } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{հոգյա } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$3) \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad 1633. 1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{հոգյա } x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{հոգյա } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{հոգյա } x > \pi; \end{cases}$$

$$2) \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \quad 1634. 1) A = \frac{1}{\pi}; F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x; \quad 2) A = \frac{1}{6-a}.$$

$$1635. 2,6. \quad 1636. 3,9. \quad 1637. p. \quad 1638. 1,11. \quad 1639. 1,3. \quad 1640. 2,2.$$

$$1641. 3\frac{1}{2}; \quad 2\frac{11}{12}. \quad 1642. 7; 12,25. \quad 1643. 32,56. \quad 1644. c^2. \quad 1645.$$

2,01. 1646. 67,64. 1647. 1) 7; 2) ω 5; δ) 20; δ) 46. 1648. pq ;
 \sqrt{pq} . 1649. $\approx 3,61$. 1650. 2,2. 1651. $X \begin{cases} 2 & 4 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$ 1652. $X \begin{cases} 4 & 5 \\ 0,9 & 0,1 \end{cases}$.
 1653. $M(X) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{12}$. 1654. $M(X) = \frac{\pi}{2}$; $\sigma(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}$.
 1655. $a=2$; $M(X) = \frac{2}{3}$; $D(X) = \frac{1}{18}$; $\sigma(X) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. 1656.
 $M(X) = 0$; $\sigma(X) = \sqrt{2}$. 1657. $M(X) = 5,5$; $D(X) = 6,75$. 1658. $a =$
 $= \frac{1}{2}$; $M(X) = 0$; $D(X) = 2$. $\sigma(X) = \sqrt{2}$. 1659. 1, 2; 0,72. 1660. $p =$
 $= \frac{1}{2}$, $n=144$. 1661. 0,0819. 1662. 0,1359. 1663. 0,2358. 1664.
 0,383. 1665. $\leq 0,1$. 1666. $\leq 0,375$. 1667. $\geq 0,375$. 1668. $\geq 0,8$.
 1669. $\leq 0,233$. 1670. $\leq 0,16$. 1671. $10,8 \leq X \leq 39,2$ β/ω . 1672.
 $P(550 \leq X \leq 650) = P(|X - 600| \leq 50) \geq 0,88$. 1673. $P \geq 0,9$. 1674.
 $\varepsilon = 0,2$.

VIII \cap 30

1675. $17+17i$. 1676. x^2+6 . 1677. $1\frac{1}{6} + \frac{5}{12}i$. 1678. $2\sqrt{10}$.
 1679. i . 1680. $1+i$. 1681. $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$. 1682. $\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$. 1683. $-2+2i$.
 1684. -4 . 1685. 100. 1686. i ; -1 ; i ; $-i$. 1687. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. 1688. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$. 1689. $2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. 1690. $2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$. 1691. 1) $2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$; 2) $m (\cos 0 + i \sin 0)$. 1692. $30\sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + \right.$
 $\left. + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$. 1693. $2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$. 1694. $2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \right.$
 $\left. - \frac{\pi}{4} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right)$. 1695. $3+3i\sqrt{3}$. 1696.
 $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ 1697. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1698. $-1-i$. 1699.

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right). \quad 1700. -1. \quad 1701. 6\sqrt{2}(1+i). \quad 1702.$$

$$36i. \quad 1703. 4(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ). \quad 1704. 30. \quad 1705. 4i. \quad 1706.$$

$$1+i\sqrt{3}. \quad 1707. \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i). \quad 1708. \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i). \quad 1709. \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}. \quad 1710. \frac{1}{5}; \frac{3}{5}. \quad 1711. 0; 1. \quad 1712. -8; 0. \quad 1713. -2; \frac{3}{2}.$$

$$1714. 2; 0. \quad 1717. 8i. \quad 1718. 4(1-i). \quad 1719. -2^9. \quad 1720. 1. \quad 1721.$$

$$2(3+2\sqrt{2})i. \quad 1722. -27. \quad 1723. \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \sin 3\varphi =$$

$$= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi. \quad 1724. \cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi. \quad 1725. \cos^3\varphi = \frac{1}{4}(3\cos\varphi +$$

$$+\cos 3\varphi), \sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi). \quad 1726. \cos^4\varphi = \frac{1}{8}(3 +$$

$$+4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi), \sin^4\varphi = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi). \quad 1729.$$

$$1) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i); \quad 2) -1; \quad \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sqrt[6]{2}(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

$$\varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ. \quad 1730. 1) \pm 2(\sqrt{3}+i); \quad 2) -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2};$$

$$3) \pm(\sqrt{3}+i), \pm(-1+i\sqrt{3}). \quad 1731. (4; 2). \quad 1732. \left(\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right).$$

$$.1733. (2; 3), (3; 2). \quad 1734. -2+i; -3+i. \quad 1735. 2i; -1.$$

$$1736. -2; 1 \pm i\sqrt{3}. \quad 1737. \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\pm\sqrt{3}+i); -i\sqrt[3]{2}. \quad 1738. \pm 1; \pm i$$

$$1739. \pm 1; \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 1740. x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. \quad 1741. \pm(2+i). \quad 1742. \pm(3+4i). \quad 1745.$$

$$1) x^2+y^2=ax \text{ (წრეწიბოლი); } 2) y=0 \text{ (Ox ღერძი); } 3) x^2-\frac{y^2}{3}=1 \text{ (ჰიპერბოლა). } \quad 1746. 1) xy=\frac{a}{2} \text{ (ჰიპერბოლა); } 2) x^2+y^2=a^2 \text{ (წრეწიბოლი); } 3) \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ (ელიფსი). } \quad 1747. \bar{a}z + a\bar{z} + 2C = 0, \text{ სადა } a =$$

$$=A+iB. \quad 1748. \quad z\bar{z}+(1-i)z+(1+i)\bar{z}=0. \quad 1749. \quad z^2+\bar{z}^3=2a^2.$$

$$1750. \quad x^2+(y-1)^2=3 \quad (\text{წრეწირი}). \quad 1751. \quad 1) \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}; \quad 2) 2e^{\frac{\pi}{3}i}; \quad 3) 5e^{9i},$$

$$4) e^{\frac{3\pi}{2}i}. \quad 1752. \quad 1) e^{\pi i}; \quad 2) 4\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}; \quad 3) 2e^{\frac{2\pi}{3}i}; \quad 4) 2e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

$$1753. \quad 1) \frac{1}{2}e^2; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}e^2; \quad 2) \sqrt{e}\cos 3; \quad -\sqrt{e}\sin 3; \quad 3) \operatorname{ch} 1 \cos 2;$$

$$-\operatorname{sh} 1 \sin 2; \quad 4) \operatorname{ch} 5 \sin 1; \quad -\operatorname{sh} 5 \cos 1. \quad 1754. \quad 1) 0; \quad -e; \quad 2) \operatorname{ch} 1 \cos 1;$$

$$\operatorname{sh} 1 \sin 1; \quad 3) 0; \quad \operatorname{sh} 1; \quad 4) \operatorname{ch} 1 \cos 2; \quad \operatorname{sh} 1 \sin 2. \quad 1757. \quad \sin x \operatorname{ch} y;$$

$$\cos x \operatorname{sh} y; \quad \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \quad 1758. \quad e^x(x \cos y - y \sin y); \quad e^x(x \sin y + y \cos y).$$

$$1761. \quad 1) \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}; \quad 2) \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad \text{მიითთება. იპოვეთ}$$

$$\text{ჯამი შემდეგი გეომეტრიული პროგრესიისა: } e^{xi} + e^{2xi} + \dots + e^{nxi}.$$

$$1762. \quad 1) \frac{\sin^2 nx}{\sin x}; \quad 2) \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \quad 1763. \quad 1) \ln 4 + 2k\pi i; \quad 2) \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i;$$

$$3) \frac{1}{2} \ln 50 + i(\operatorname{arctg} 7 + 2k\pi). \quad 1764. \quad 1) \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{3}{4} + 2k\right)\pi i;$$

$$2) \frac{\pi}{4}(8k+1)i; \quad 3) \frac{1}{2} \ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right)i. \quad 1765. \quad 1) e^{2\sqrt{2}k\pi i};$$

$$2) e^{-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}; \quad 3) e^{-\left(\frac{1}{4}+2k\right)\pi + i \ln \sqrt{2}}. \quad 1766. \quad 1) e^{2k\pi}; \quad 2) e^{-2k\pi + i \ln 2};$$

$$3) e^{2i \ln 3 - 2k\pi + i(\ln 3 + 4k\pi)}. \quad 1769. \quad 1) k\pi - i \ln[\sqrt{2} - (-1)^k]; \quad 2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3};$$

$$3) \frac{2k+1}{2}\pi + \frac{i \ln 3}{2}. \quad 1770. \quad 1) k\pi i + \ln[\sqrt{2} - (-1)^k];$$

$$2) \ln(\sqrt{5} \pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi i; \quad 3) \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i. \quad 1771. \quad 1) x^2 + y^2 = 1;$$

$$2) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad 3) y = x^2. \quad 1772. \quad 1) (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2; \quad 2) y = \frac{1}{x};$$

$$3) x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \quad 1773. \quad 1) 16u = 64 - v^2 \quad (\text{პარაბოლა});$$

$$2) 4u = v^2 - 4 \quad (\text{პარაბოლა}); \quad 3) v = 2 \quad (\text{წრე}); \quad 4) u^2 + v^2 = 16 \quad (\text{წრე-}$$

$$\text{წირი}). \quad 1774. \quad 1) u + v = 0 \quad (\text{წრე}); \quad 2) u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2} \quad (\text{წრეწირი});$$

3) $u^2 + \left(v + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ (წრეწირი). 1775. 1) $x^2 - y^2 = 2$; 2) $xy = \frac{3}{2}$.

1776. 1) $x^2 + x + y^2 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + \frac{y}{5} = 0$. 1777. $w = z + \frac{1}{z}$ ფუნქცია

ცია $|z| = R \neq 1$ წრეწირებს ასახავს $\frac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$

ელიფსებში, ხოლო $|z| = 1$ წრეწირის $v = 0$, $-2 \leq u \leq 2$ მონაკვეთში.

1778. $w = z - \frac{1}{z}$ ფუნქცია $|z| = R \neq 1$ წრეწირებს ასახავს $\frac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} +$

$+\frac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$ ელიფსებში, ხოლო $|z| = 1$ წრეწირის $u = 0$, $-2 \leq$

$\leq v \leq 2$ მონაკვეთში. 1779. 1) კი, 1; 2) არა; 3) კი, $2z$; 4) კი, e^z ; 5)

კი, $\cos z$. 1780. 1) არა; 2) კი, $3z^2$; 3) კი, $-\frac{1}{z^2}$; 4) კი, $-\sin z$; 5) კი,

$\frac{1}{z}$. 1785. $v(x, y) = 2xy + 2y + C$. 1786. $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C$.

1787. $f(z) = (1+i)z - 3i + C$. 1788. $f(z) = z^2(z+i) + Ci$. 1789. $f(z) = \frac{z}{2}(3+i)$.

1790. $f(z) = iz^3 + i - 1$. 1791. $f(z) = \frac{1}{z} + 2iz - 2i - 1$. 1792. $f(z) =$
 $= \frac{z^2}{2}(2-i)$. 1793. 1) 0; 3; 2) 0; $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 6. 1794. 1) 0; $2i$;

2) $-\frac{\pi}{4}$; $\sqrt{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4. 1795. 1) იკუმშება, როცა $|z| < \frac{1}{2}$, იჭიმება, როცა $|z| > \frac{1}{2}$; 2) იკუმშება, როცა $|z-2| < \frac{1}{4}$, იჭიმება, როცა $|z-2| > \frac{1}{4}$; 3) იკუმშება, როცა $|z| > 1$, იჭიმება, როცა $|z| < 1$.

1796. 1) იკუმშება, როცა $|z| < \frac{1}{3}$, იჭიმება, როცა $|z| > \frac{1}{3}$; 2) იკუმშება, როცა $|z+1| < \frac{1}{2}$, იჭიმება, როცა $|z+1| > \frac{1}{2}$; 3) იკუმშება, როცა $\operatorname{Re} z < 0$, იჭიმება, როცა $\operatorname{Re} z > 0$.

1797. 1) -1 ; 3; 2) $\frac{\pi}{2} + k\pi$. 1798. 1) $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; -1 ; 2) $\frac{k\pi}{2}$. 1799. რომ ვიპოვოთ z

წერტილის სახე $w = az + b$ გადასახვისას, საჭიროა \vec{z} ვექტორი მოვაბრუნოთ $\beta = \arg a$ კუთხით, შევცვალოთ მისი სიგრძე $\alpha = |a|$ -ჯერ და პარალელურად გადავიტანოთ \vec{b} ვექტორით. 1800. 1) როცა $a \neq 1$, მაშინ უძრავი წერტილია $z = \frac{b}{1-a}$; როცა $a = 1$, $b \neq 0$, მაშინ უძრავი

წერტილი არ არსებობს; როცა $a = 1$, $b = 0$, მაშინ ყველა წერტილი უძრავია; 2) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$; 3) $\frac{1}{3}$. მითითება, $w = f(z)$ გადასახვის უძრავი

წერტილი ეწოდება ისეთ სასრულო წერტილს, რომლისთვისაც შესრულებულია $w = z$ ტოლობა. 1801. $w = (-1 + 2i)z - 4i$. 1802.

$w = \frac{7+i}{5}z - \frac{2-4i}{5}$. 1803. $w = (1+i)(1-z)$. 1804. $w = 2zi + 6i + 4$.

1805. $w = 3e^{i\alpha}z + 1 + 3ie^{i\alpha}$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

1806. $w = e^{i\alpha}z + 1 - i$. 1807. $w = \frac{(1-i)z - 1 - i}{z - 1}$. 1808. $w = \frac{zi + 2 + i}{z + 1}$.

1809. $w = 3z + i$. 1810. $w = -\frac{(1+3i)z + 1 - 3i}{z + 1}$. 1811. $0 < \arg w <$

$< \frac{\pi}{2}$ სექტორი. 1812. $|w| < 1$, $Im w < 0$ ნახევარწრე. 1813. $w =$

$= \frac{1}{z - 1}$. 1814. $w = -2\frac{z+i}{z+3i}$. 1815. $\frac{1}{z}$. 1816. 1) $\frac{2+i}{5}$; 2) $\frac{9}{2} + i$.

1817. $w = z^6$. 1818. $w = z^4 e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 1819. $w = (z + i)^2$. 1820. $w =$

$= (z + 2)^4 e^{-i\frac{\pi}{4}}$. 1821. $w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 1822. $w = \left(\frac{z^2+4}{z^2-4}\right)^2$.

1823. პოლარული ბადე; $\rho = \text{const}$, $\Theta = \text{const}$, სადაც ρ და Θ წერტილის პოლარული კოორდინატებია. 1824. $\rho = e^{\frac{\theta-k}{b}}$ სპირალები.

1825. $|w| > 1$ წრის გარე ნაწილი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული. 1826. 1) $|w| > 1$, $Re w > 0$ ნახევარწრის გარე ნაწილი:

2) $|w| < 1$, $Im w > 0$ ნახევარწრე. 1827. $1 < |w| < e$, $-\frac{\pi}{2} < \arg w <$

$< \frac{\pi}{4}$. 1828. $e < |w| < e^2$, $-\frac{\pi}{3} < \arg w < \pi$. 1829. $w = e^{\pi i(z-1)}$. 1830.

$w = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$. 1831. $w = e^{\frac{\pi}{2}iz}$. 1832. $w = -2e^{-iz}$. 1833. $|z| = r$

$$\text{წრეწირებს შეესაბამება კონფოკალური ელიფსები } \frac{4u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} +$$

$$+ \frac{4v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \quad (|z|=1 \text{ წრეწირის შეესაბამება } v=0, -1 \leq u \leq 1 \text{ მო-}$$

ნაკვეთი); $\arg z = \varphi$ სხივებს შეესაბამება $\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$ კონფოკალური ჰიპერბოლების შტოები ($\arg z = 0$ სხივს შეესაბამება $v=0, u \geq 1$ სხივი, $\arg z = \pi$ სხივს შეესაბამება $v=0, u \leq -1$ სხივი, $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ სხივებს $u=0$ ღერძი). მ ი თ ი თ ე ბ ა. $w = u + iv, z = re^{i\varphi}$.

1834. $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ ჰიპერბოლის შტოებს შორის მოთავსებულ არეში.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგით.

1838. 1) $w = \frac{1}{2} \left(z - 1 + \frac{1}{z-1} \right)$; 2) $w = -\frac{1}{2} \left(z + 2 + \frac{1}{z+2} \right)$. 1839.

$w = \sqrt{z^2 + 1}$. 1840. $w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$. 1841. $w = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2$. 1842.

$w = \frac{1}{2} \ln(e^{2z} + 1)$. 1843. w სიბრტყე $(-\infty, -1]$ და $[1, +\infty)$ კრილებით ნამდვილი ღერძის გასწვრივ. 1844. ზედა ნახევარსიბრტყე.

1845. 1) $z - z_0$; 2) $\frac{1}{2}(z^2 - z_0^2)$. 1846. $\frac{\sqrt{5}}{2}(2+i)$. 1847. $\frac{\pi}{2}i$. 1848.

$2\pi i$. 1849. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. 1850. $2e - e^{1-i} - 1$. 1851. $\frac{5}{2} + 2i$. 1852. πi .

1853. 0, როცა $m \geq 0$ ან $m < -1$; $2\pi i$, როცა $m = -1$. 1855. $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$.

1856. $-\frac{7}{3} + \frac{i}{3}$. 1857. $7 + 19i$. 1858. $i \sin i + \cos i - 1$. 1859. -2 .

1860. $1 - \frac{\pi}{2} - i$. 1861. 0, როცა $n \neq 1$; $2\pi i$, როცა $n = 1$. 1862. რო-

ცა l კონტური თავის შიგნით არ მოიცავს $z=1$ და $z=2$ წერტილებს, მაშინ $I=0$; როცა l მოიცავს $z=1$ წერტილს და არ მოიცავს $z=2$ წერტილს, მაშინ $I=-2\pi i$; როცა მოიცავს $z=2$ წერტილს და არ მოიცავს $z=1$ წერტილს, მაშინ $I=4\pi i$; როცა l მოიცავს ორივე წერტილს, მაშინ

- $I=2\pi i$. 1863. $-\pi i$. 1864. πi . 1865. 1) π ; 2) $-\pi$; 3) 0. 1866. $\frac{\pi}{2}i$.
 1867. $\pi(e^2+e^{-2})i$. 1868. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}i$. 1869. $\frac{2}{3}\pi e^3i$. 1870. 1) $2\pi i$; 2) 0.
 1871. $\frac{\sin a}{a}$. 1872. $\pi i \cos 1$. 1873. $12\pi i$. 1874. $\pi(\cos 1 - \sin 1)$. 1875.
 $e^a \left(1 + \frac{a}{2}\right)$. 1876. $-\frac{\pi^2}{2}i$. 1877. აბსოლუტურად კრებადია. 1878.
 აბსოლუტურად კრებადია. 1879. განშლადია. 1880. განშლადია.
 1881. პირობით კრებადია. 1882. პირობით კრებადია. 1883. აბსოლუტურად
 კრებადია. 1884. აბსოლუტურად კრებადია. 1885. აბსოლუტურად
 კრებადია. 1886. აბსოლუტურად კრებადია. 1887. $R=\infty$. 1888. $|z|<1$,
 $R=1$. 1889. $R=0$. 1890. $|z|<1$, $R=1$. 1891. $|z|<\sqrt{2}$, $R=\sqrt{2}$.
 1892. $|z|<2$, $R=2$. 1893. $s=0$: $|z|<1$, $R=1$; $s=1$: $|z|<1$, $R=1$,
 $z=1$ წერტილზე განშლადია, $z=-1$ წერტილზე — კრებადი; $s=2$:
 $|z|\leq 1$, $R=1$. 1894. $|z|<e$, $R=e$. 1895. $|z|<1$, $R=1$. 1896. $|z|<$
 $\frac{1}{2}$, $R=\frac{1}{2}$. 1897. $|z+1|<2$, $R=2$. 1898. $|z-1|\leq 1$, $R=1$.
 1899. $|z-2i|<3$, $R=3$. 1900. $|z-i|\leq\sqrt{2}$, $R=\sqrt{2}$. 1901.
 $|z-1|<\frac{\sqrt{2}}{3}$, $R=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 1902. $|z-2|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 1903.
 $1 < |z| < 5$. 1904. $1 < |z-2i| < 2$. 1905. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R=\infty$;
 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 1906.
 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. 1907.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, $|z-1|<1$. 1908. 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.
 1909. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$. 1910. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$$1911. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}. \quad 1912. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}.$$

$$1913. 1 + \frac{1}{m}(z-1) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\frac{(z-1)^2}{2!} + \dots; \quad 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(z-1)^2 + \dots \quad 1914. e\left(1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \dots\right). \quad 1915.$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}. \quad 1916. \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}. \quad 1917. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$$

$$1918. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! z^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}, \quad R=1. \quad 1919. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}, \quad |z| < 1.$$

$$1920. \frac{1-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (i^{n+1} - 1) z^n, \quad |z| < 1. \quad 1921. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left\{ \frac{i^n}{2} [1 + \right.$$

$$\left. + i + (1-i)(-1)^n - 1 \right\}, \quad |z| < 1. \quad 1922. \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[n + 2 - \right.$$

$$\left. - i^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{2} \right], \quad |z| < 1. \quad 1923. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3.$$

$$1924. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2. \quad 1925. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1; \quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

$$|z| > 1; \quad - \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1. \quad 1926. \frac{1}{2z} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2^{n+2}}, \quad |z| < 2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+2}}, \quad |z| > 2;$$

$$- \frac{1}{2(z+2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}, \quad 0 < |z+2| < 2. \quad 1927. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$1928. 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \quad 1929. \frac{1}{2i} - \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(z-i)^n}{2^{n+1}},$$

$$0 < |z-i| < 2. \quad 1930. \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)z^n}.$$

$$1931. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(z-1)^n}. \quad 1932. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-z)^n}{(2n+1)!z^{4n+3}}$$

$$1933. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{3(2n-1)}}, \quad 0 < |z-i| < \infty.$$

$$1934. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+i)^{2n-2}}, \quad 0 < |z+i| < \infty. \quad 1935. 1) z=0 - \text{მეორე რიგის}$$

ნული, $z=1$ — მარტივი ნული; 2) $z=-1$, $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ — მეორე რიგის

ნულები; 3) $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — მარტივი ნულები;

4) $z = \frac{k\pi}{3}$ — მესამე რიგის ნულები. 1936 $z=-1$ — მე-6 რიგის ნული;

2) $z = \pm i$ — მარტივი ნულები; 3) $z = k\pi$ — მესამე რიგის ნულები; 4) $z =$

$= \frac{\pi}{2} + k\pi$ — მეორე რიგის ნულები. 1937. 1) $z=0$, $z = \pm 1$ — მარტივი

პოლუსები; 2) $z=0$ — მეოთხე რიგის პოლუსი, $z = \pm 2i$ — მეორე რიგის

პოლუსები; 3) $z=1$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 4) $z=0$ —

არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 5) $z=0$ — ასაცილებელი წერტი-

ლი; 6) $z=0$ — მეორე რიგის პოლუსი. 1938. 1) $z = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$ —

მარტივი პოლუსები; 2) $z=0$ — მეორე რიგის პოლუსი, $z = k\pi i$ — მარტივი

პოლუსები; 3) $z=1$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 4) $z=0$ —

არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 5) $z = -\pi$ — ასაცილებელი წერ-

ტილი; 6) $z=0$ — მეორე რიგის პოლუსი. 1939. 1) $z = \infty$ — წესიერი წერ-

ტილი; (მარტივი ნული); 2) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერ-

ტილი; 3) $z = \infty$ — ასაცილებელი წერტილი; 4) $z = \infty$ — პოლუსების ზღვა-

რითი წერტილი; 5) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი;

6) $z = \infty$ — მესამე რიგის პოლუსი. 1940. 1) $z = \infty$ — წესიერი წერტილი

(მარტივი ნული); 2) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი;

3) $z = \infty$ — ასაცილებელი წერტილი; 4) $z = \infty$ — პოლუსების ზღვართი წერტილი; 5) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 6) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი. 1941. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 3; -3;

3) 20; 4) $-e^{-1}$; 5) 0; 6) -1. 1942. 1) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 2) 1; -1; 3) $2\sin 2$;

4) 1; 5) 0; 6) $(-1)^k$, $k=0, \pm 1, \pm \dots$ 1943. 1) -2; 2) -3; 3) -1; 4) -1. 1944. 1) -10; 2) -1; 3) 0; 4) -1. 1945. $-2\pi i$. 1946. 0.

1947. $\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$. 1948. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 1949. $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$.

1950. $2\pi i\left(\operatorname{tg} 1 - \frac{8}{\pi^2 - 4}\right)$. 1951. $-\frac{2\pi i}{e}$. 1952. 1) $2\pi i$; 2) 0.

1953. $-\frac{2}{9}\pi i$. 1954. πi . 1955. $-\frac{\pi}{2}i$. 1956. $2\pi i$. 1957. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

მიითთება. შემოიღეთ აღნიშვნა $z=e^{ix}$. 1958. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. 1959. $-\frac{\pi}{2}$.

1960. $\frac{3}{8}\pi$. 1961. $\frac{\pi}{8}$. 1962. $-\frac{\pi}{27}$. 1963. $\frac{\pi}{e^2}$. 1964. $\frac{\pi}{2e}$.

1965. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 1966. π . 1967. -2. 1968. -1. 1969. 3. 1970. 6.

1971. -3. 1972. -12. 1973. 3. 1974. -3. 1975. 1. 1976. 5. 1977. 3. 1978. 5. 1979. არა აქვს. 1980. არა აქვს.

IX თავი

1981. $s_0=3$. 1982. $s_0=2$. 1983. $s_0=0$. 1984. $s_0=0$.

1985. არა, $s_0=+\infty$. 1986. $s_0=-\infty$. 1987. $\frac{1}{p}$. 1988. $\frac{c}{p}$.

1989. $\frac{1}{p^2}$. 1990. 1) $\frac{1}{p-\alpha}$; 2) $\frac{1}{p-\ln a}$. 1991. $\frac{1}{p^2+1}$. 1992. $\frac{p}{p^2+1}$.

1993. $\frac{1}{p^2-1}$. 1994. $\frac{p^2}{p^2-1}$. 1995. $\frac{8+p}{2p-p^2}$. 1996. $\frac{1}{p^2+9}-\frac{5}{p}$.

1997. $\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}$. 1998. $\frac{10p^2+8}{p^4-16}$. 1999. $\frac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

2000. $\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$. 2001. $\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{p+3}+\frac{1}{p}$. 2002. $\frac{1}{p+1}+$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{p+2} + \frac{1}{p^2} \cdot 2003. \frac{p^2+2}{p(p^2+4)} \cdot 2004. \frac{2}{p(p^2+4)} \cdot 2005. \frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2} - \\
& - \frac{5}{p} \cdot 2006. \frac{18}{(p+1)^4} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p} \cdot 2007. \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{4p}{p^2-4} \cdot \\
& 2008. \frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2} \cdot 2009. \operatorname{arcctg} p \cdot 2010. \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1} \cdot 2011. \ln \frac{p}{p-1} \cdot \\
& 2012. \ln \frac{p-b}{p-a} \cdot 2013. \frac{6}{(p-2)^4} \cdot 2014. \frac{p^2+2}{p^2+4} \cdot 2015. \frac{\beta}{(p+\alpha)^2 - \beta^2} \cdot \\
& 2016. \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 - \beta^2} \cdot 2017. \frac{e^{-ap}}{p} \cdot 2018. \frac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p} \cdot 2019. \frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} \cdot \\
& 2020. \frac{6e^{-2p}}{p^4} \cdot 2021. \frac{pe^{-3p}}{p^2-1} \cdot 2022. \frac{2e^{-ap}}{p(p^2+4)} \cdot 2023. 1 - \cos t; \frac{1}{p(p^2+1)} \cdot \\
& 2024. e^t - t - 1; \frac{1}{p^2(p-1)} \cdot 2025. \operatorname{Sh} t; \frac{1}{p^2-1} \cdot 2026. \frac{\operatorname{sin} t + t \cos t}{2}; \\
& \frac{p^2}{(p^2+1)^2} \cdot 2027. 3 \sin 4t \cdot 2028. 2 \operatorname{sh} 5t \cdot 2029. \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t \cdot \\
& 2030. e^{-t} \operatorname{sh} t \cdot 2031. \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t \cdot 2032. \frac{1}{2} e^t \sin 2t \cdot 2033. e^{-t} \cos 3t + \\
& + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t \cdot 2034. e^{-3t} \cos \sqrt{2} t \cdot 2035. 3e^{2t} \cos \sqrt{3} t + \frac{5}{\sqrt{3}} e^{2t} \sin \sqrt{3} t \cdot \\
& 2036. -\frac{2}{5} e^t + \frac{7}{5} e^{6t} \cdot 2037. -\frac{1}{3} e^t - \frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{2}{5} e^{3t} \cdot \\
& 2038. 1 - e^{-t} - te^{-t} \cdot 2039. \frac{1}{9} (e^{-2t} - e^t + 3te^t) \cdot 2040. \frac{3}{4} e^t + \\
& + \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t} \cdot 2041. \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{12} \cos 2t \cdot 2042. te^{2t} + \\
& + \frac{1}{2} \sin 2t \cdot 2043. 1 - \cos t \cdot 2044. t - \operatorname{sin} t \cdot 2045. \frac{\operatorname{sin} t + t \cos t}{2} \cdot \\
& 2046. \frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \cdot 2047. \operatorname{ch} t \cdot 2048. \frac{t^2}{2} + \cos t - 1 \cdot \\
& 2049. x = 1 - e^{-t} \cdot 2050. x = e^t \cdot 2051. x = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3t \cdot 2052. x = e^t - \\
& - t - 1 \cdot 2053. x = e^{2t} \operatorname{sin} t \cdot 2054. x = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \cdot 2055. x = e^t \cos t \cdot \\
& 2056. x = \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \cdot 2057. x = 2e^t - \frac{t^3}{3} - t^2 - 2t - 2 \cdot
\end{aligned}$$

3) $z = \infty$ — ასაკილებელი წერტილი; 4) $z = \infty$ — პოლუსების ზღვართი წერტილი; 5) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი; 6) $z = \infty$ — არსებითად განსაკუთრებული წერტილი. 1941. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 3; -3; 3) 20; 4) $-e^{-1}$; 5) 0; 6) -1. 1942. 1) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 2) 1; -1; 3) $2\sin 2$; 4) 1; 5) 0; 6) $(-1)^k$, $k=0, \pm 1, \pm \dots$. 1943. 1) -2; 2) -3; 3) -1; 4) -1. 1944. 1) -10; 2) -1; 3) 0; 4) -1. 1945. $-2\pi i$. 1946. 0. 1947. $\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$. 1948. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 1949. $2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$. 1950. $2\pi i\left(\operatorname{tg} 1 - \frac{8}{\pi^2-4}\right)$. 1951. $-\frac{2\pi i}{e}$. 1952. 1) $2\pi i$; 2) 0. 1953. $-\frac{2}{9}\pi i$. 1954. πi . 1955. $-\frac{\pi}{2}i$. 1956. $2\pi i$. 1957. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. მითითება. შემოიღეთ აღნიშვნა $z = e^{ix}$. 1958. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. 1959. $-\frac{\pi}{2}$. 1960. $\frac{3}{8}\pi$. 1961. $\frac{\pi}{8}$. 1962. $-\frac{\pi}{27}$. 1963. $\frac{\pi}{e^2}$. 1964. $\frac{\pi}{2e}$. 1965. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 1966. π . 1967. -2. 1968. -1. 1969. 3. 1970. 6. 1971. -3. 1972. -12. 1973. 3. 1974. -3. 1975. 1. 1976. 5. 1977. 3. 1978. 5. 1979. არა აქვს. 1980. არა აქვს.

IX თავი

1981. კი, $s_0=3$. 1982. კი, $s_0=2$. 1983. კი, $s_0=0$. 1984. კი, $s_0=0$. 1985. არა, $s_0=+\infty$. 1986. კი, $s_0=-\infty$. 1987. $\frac{1}{p}$. 1988. $\frac{c}{p}$. 1989. $\frac{1}{p^2}$. 1990. 1) $\frac{1}{p-\alpha}$; 2) $\frac{1}{p-\ln a}$. 1991. $\frac{1}{p^2+1}$. 1992. $\frac{p}{p^2+1}$. 1993. $\frac{1}{p^2-1}$. 1994. $\frac{p^2}{p^2-1}$. 1995. $\frac{8+p}{2p-p^2}$. 1996. $\frac{1}{p^2+9}-\frac{5}{p}$. 1997. $\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}$. 1998. $\frac{10p^2+8}{p^4-16}$. 1999. $\frac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$. 2000. $\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$. 2001. $\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{p+3}+\frac{1}{p}$. 2002. $\frac{1}{p+1}+$

- $+\frac{3}{p+2} + \frac{1}{p^2}$. 2003. $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. 2004. $\frac{2}{p(p^2+4)}$. 2005. $\frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2}$ -
 $-\frac{5}{p}$. 2006. $\frac{18}{(p+1)^4} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}$. 2007. $\frac{2}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{4p}{p^2-4}$.
 2008. $\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}$. 2009. $\text{arctg} p$. 2010. $\frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}$. 2011. $\ln \frac{p}{p-1}$.
 2012. $\ln \frac{p-b}{p-a}$. 2013. $\frac{6}{(p-2)^4}$. 2014. $\frac{p^2+2}{p^2+4}$. 2015. $\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$.
 2016. $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$. 2017. $\frac{e^{-ap}}{p}$. 2018. $\frac{e^{-2p}-e^{-3p}}{p}$. 2019. $\frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.
 2020. $\frac{6e^{-2p}}{p^4}$. 2021. $\frac{pe^{-3p}}{p^2-1}$. 2022. $\frac{2e^{-ap}}{p(p^2+4)}$. 2023. $1-\cos t; \frac{1}{p(p^2+1)}$.
 2024. $e^t-t-1; \frac{1}{p^2(p-1)}$. 2025. $\text{Sh}t; \frac{1}{p^2-1}$. 2026. $\frac{\text{sin}t+t\cos t}{2}$;
 $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$. 2027. $3 \sin 4t$. 2028. $2\text{sh}5t$. 2029. $\frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t$.
 2030. $e^{-t}\text{sh}t$. 2031. $\frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$. 2032. $\frac{1}{2} e^t \sin 2t$. 2033. $e^{-t} \cos 3t +$
 $+\frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t$. 2034. $e^{-3t} \cos \sqrt{2} t$. 2035. $3e^{2t} \cos \sqrt{3} t + \frac{5}{\sqrt{3}} e^{2t} \sin \sqrt{3} t$.
 2036. $-\frac{2}{5} e^t + \frac{7}{5} e^{6t}$. 2037. $-\frac{1}{3} e^t - \frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{2}{5} e^{3t}$.
 2038. $1-e^{-t}-te^{-t}$. 2039. $\frac{1}{9} (e^{-2t}-e^t+3te^t)$. 2040. $\frac{3}{4} e^t +$
 $+\frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t}$. 2041. $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{12} \cos 2t$. 2042. $te^{2t} +$
 $+\frac{1}{2} \sin 2t$. 2043. $1-\cos t$. 2044. $t-\text{sin}t$. 2045. $\frac{\text{sin}t+t\cos t}{2}$.
 2046. $\frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$. 2047. $\text{ch}t$. 2048. $\frac{t^2}{2} + \cos t - 1$.
 2049. $x=1-e^{-t}$. 2050. $x=e^t$. 2051. $x=\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3t$. 2052. $x=e^t -$
 $-t-1$. 2053. $x=e^{2t} \text{sin}t$. 2054. $x=4e^{-t}-3e^{-2t}$. 2055. $x=e^t \cos t$.
 2056. $x=\frac{1}{2} t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$. 2057. $x=2e^t - \frac{t^3}{3} - t^2 - 2t - 2$.

2058. $x = 2 + \frac{t^3}{3} + 2e^{-t}$. 2059. $x = \text{sh}t$. 2060. $x = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}$. 2061. $x = \frac{t}{2}\text{sh}t$. 2062. $x = \frac{1}{2}(\text{sh}t - t\text{cost})$. 2063. $x = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$. 2064. $x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right) + \frac{5}{18}\sin 2t - \frac{5}{9}\text{sh}t$. 2065. $x = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t$. 2066. $x = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}$.

2067. $x = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 2068. $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\text{sh}t$. 2069. $x = t^2 - t + 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\text{cost} - \frac{1}{2}\text{sh}t$.

2070. $x = \frac{1}{8}[e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2\text{sh}t]$. 2071. $x = 1 + t - \frac{t^2}{2} - e^t$.

2072. $x = 5(t^2 - 2 + 2\text{cost})$. 2073. $x = \frac{1}{10}(e^{3t} - 2e^{2t} + \text{sh}t + \text{cost})$.

2074. $x = \frac{1}{2}(e^t - \text{sh}t + \text{cost} - 2)$. 2075. $x = e^{-2t}(1 - 2t)$, $y = e^{-2t}(1 + 2t)$.

2076. $x = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{2t}$, $y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$. 2077. $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$. 2078. $x = 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t$, $y = 2\sin t - 2t$. 2079. $x = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\text{cost}$, $y = 1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\text{cost}$. 2080. $x = \frac{16}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}$, $y = -\frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}$. 2081. $x = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$, $y = z = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$. 2082. $x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t}$, $y = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t}$, $z = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$.

X 0 3 0

2083. $z = F(x^2 - y^2)$ (ზოგადი ამონახსნი); $z = 2\sqrt{y^2 - x^2}$. 2084. $z = F\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$; $z = \frac{y^2}{1+x^2}$. 2085. $u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right)$; $u = \frac{y+z^2}{x}$.

$$2086. u = F(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{x} - \sqrt{z}); u_x = y - z + 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{z} - \sqrt{y}). \quad 2087. u = F\left(y, \frac{x^y}{z}\right); u = \frac{x^y}{z}. \quad 2088. u = F\left(y, \ln z - \frac{x}{y}\right);$$

$$u = \ln z - \frac{x}{y}. \quad 2089. u = F[y^2 - z^2, 2x + (z - y)^2]. \quad 2090. u = F(lx +$$

$$+ my + nz, x^2 + y^2 + z^2). \quad 2091. F\left(\frac{y - x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0 \text{ ანუ } z = xf\left(\frac{y - x^2}{x}\right);$$

$$\overline{z = y - x^2}; \quad 2092. F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right) = 0 \text{ ანუ } z = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right); \overline{z = xy}.$$

$$2093. F\left(z, \ln x + \frac{y}{z}\right) = 0. \text{ მითითებულია ეს განტოლება } \overline{\text{არაერთგვაროვანია, რადგანაც უცნობი } z \text{ ფუნქცია მონაწილეობს განტოლების ერთ-ერთ კოეფიციენტში.}} \quad 2094. F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0. \quad 2095.$$

$$F\left(y, \frac{z}{x}\right) = 0, \text{ ანუ } z = xf(y); z = xy. \quad 2096. F(z, x^2 - y^2 z) = 0; z = \frac{x^2}{y^2}.$$

$$2097. F(z - 2y, y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0; 4y\sqrt{z - x - y} = 4x - 2z - y^2.$$

$$2098. F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0 \text{ ანუ } u = xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right); u = \frac{y + z}{2}.$$

$$2099. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \xi = x - y, \eta = x + y. \quad 2100. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \xi = xy,$$

$$\eta = \frac{y}{x}. \quad 2101. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0, \xi = x + y, \eta = y. \quad 2102.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \xi = \frac{y}{x}, \eta = y. \quad 2103. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \xi = y^2,$$

$$\eta = x^2. \quad 2104. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \xi = x + y, \eta = x. \quad 2105. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

$$\xi = x, \eta = 2\sqrt{y}, \text{ როცა } y > 0; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

$$\xi = x + 2\sqrt{-y}, \eta = x - 2\sqrt{-y}, \text{ როცა } y < 0. \quad 2106. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} -$$

$$- \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \xi = \sqrt{x}, \eta = \sqrt{y}, \text{ როცა } xy > 0; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} =$$

$$= \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \xi = \sqrt{y} + \sqrt{-x}, \eta = \sqrt{y} - \sqrt{-x}, \text{ როცა}$$

$$xy < 0. \quad 2107. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \xi = x + y, \eta = 3x - y. \quad 2108. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = x. \quad 2109. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \xi =$$

$$= y \sin x, \quad \eta = y. \quad 2110. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi = 2x + \sin x + y,$$

$$\eta = 2x - \sin x - y. \quad 2111. \quad u = y\varphi(x) + \psi(x), \text{ სადა } \varphi(x) \text{ და } \psi(x) \text{ ნების-}$$

$$\text{მიერი ფუნქციებია. } 2112. \quad u = \frac{4}{3}y^3 + y\varphi(x) + \psi(x), \text{ სადა } \varphi(x) \text{ და } \psi(x)$$

$$\text{ნებისმიერი ფუნქციებია. } 2113. \quad u = \varphi(x) + f(y). \quad 2114. \quad u = xy + \varphi(x) + f(y).$$

$$2115. \quad u = \frac{x^2}{2} \ln y + xy + \varphi(x) + f(y). \quad 2116. \quad u = xf(y) + \varphi(x). \quad \text{მ ი თ ი -}$$

$$\text{თ ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა: } \frac{\partial u}{\partial y} = z, \text{ მაშინ. } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}. \quad 2117.$$

$$u = xf(y) + \varphi(y); \quad u = y^2(x + y - 1). \quad 2118. \quad u = \varphi(x - y) + f(x + y);$$

$$u = xy + \sin x \cos y. \quad \text{მ ი თ ი თ ე ბ ა. მოცემული განტოლება დაიყვანეთ}$$

$$\text{კანონიკურ სახედზე: } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi = x - y, \quad \eta = x + y. \quad 2119. \quad u = \varphi(\xi) +$$

$$+ f(\eta) = \varphi(x + y) + f(3x + y). \quad 2120. \quad u = \sqrt{tx} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi(tx). \quad 2121. \quad u =$$

$$= e^{-y} \varphi(y - x) + \psi(y); \quad u = (y - x) e^{-x} - y. \quad 2122. \quad u = y \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(y);$$

$$u = y \ln x + 2y + 1. \quad 2123. \quad u = x^2 + t^2. \quad 2124. \quad u = x(1 - t). \quad 2125. \quad u = tx.$$

$$2126. \quad u = \frac{\cos x \sin 3t}{3}. \quad 2127. \quad u = \frac{\pi}{2a}, \text{ სიმი } Ox \text{ ღერძის პარა-}$$

$$\text{ლელებია. } 2128. \quad u = -\sin x. \quad 2129. \quad u(x, t) = \frac{2l}{\pi^2 a} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad 2130. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad 2131. \quad u(x, t) = A \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

$$2132. \quad u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi a t}{l}. \quad 2133. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}. \quad 2134. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad 2135. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{u_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}} \right) \right], \quad \text{სადაც } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu \quad \text{აღ-}$$

$$\text{ბათობის ინტეგრალია.} \quad 2136. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad 2137. \quad u(x, t) = u_0 \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

$$2138. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{x\sqrt{t}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$2139. \quad u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

$$2140. \quad u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2856	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	9,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	9,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	9,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	9,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	9,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

1	2	3	4	5	6	7	8
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ზ ი ნ ა ბ რ ს ი

I თ ა ვ ი მ რ ა ვ ა ლ ი ც ვ ლ ა დ ის ფუნქციები

§ 1. ორი და რამდენიმე ცვლადის ფუნქციები	3
§ 2. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა	5
§ 3. ფუნქციის კერძო ნაზრდები და წარმოებულები	6
§ 4. ფუნქციის სრული ნაზრდი და სრული დიფერენციალი	8
§ 5. რთული ფუნქციის გაწარმოება. სრული წარმოებული	9
§ 6. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალები	11
§ 7. არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება	13
§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა	15
§ 9. ტეილორის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის	15
§ 10. არაცხადი ფუნქციის ექსტრემუმი	16
§ 11. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი	17
§ 12. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი	19
§ 13. ბრტყელი წირის განსაკუთრებული წერტილები	20
§ 14. ბრტყელ წირთა ოჯახის მომვლები	21
§ 15. სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია	22
§ 16. სივრცის წირის ელემენტები	24
§ 17. სივრცის წირის სიმრუდე და გრეჯა	26

II თ ა ვ ი კ ე რ ა დ ი და წ ი რ ი თ ი ინტეგრალები

§ 1. ორჭერადი ინტეგრალი	27
§ 2. ცვლადთა გარდაქმნა ორჭერად ინტეგრალში	31
§ 3. ფართობთა გამოთვლა ორჭერადი ინტეგრალებით	33
§ 4. მოცულობათა გამოთვლა ორჭერადი ინტეგრალებით	35
§ 5. ზედაპირთა ფართობების გამოთვლა	37
§ 6. ორჭერადი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში	38
§ 7. სამჭერადი ინტეგრალი	40
§ 8. ცვლადთა გარდაქმნა სამჭერად ინტეგრალში	41
§ 9. მოცულობათა გამოთვლა სამჭერადი ინტეგრალებით	43
§ 10. სამჭერადი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში	44
§ 11. პარამეტრზე დამოკიდებული არასაკუთრივი ინტეგრალები. არასაკუთრივი ჭერადი ინტეგრალები	46
§ 12. წირითი ინტეგრალები	49
§ 13. გრინის ფორმულა	55
§ 14. წირითი ინტეგრალის გამოყენება მექანიკაში	58
§ 15. ზედაპირული ინტეგრალები	60

III თ ა ვ ი მ წ ყ რ ი ვ ე ბ ი

§ 1. რიცხვითი მწყრივი	67
§ 2. ფუნქციითა მწყრივი	75
§ 3. თანაბარი კრებადობა	76

4.	ხარისხოვანი მწკრივები	77
5.	ტელიორისა და მაკლორენის მწკრივები	81
§ 6.	ტელიორის მწკრივი ორი ცვლადის ფუნქციისათვის	84
§ 7.	ფურიეს მწკრივი და ფურიეს ინტეგრალი	85
IV	თ ა ვ ი დიფერენციალური განტოლებები	
§ 1.	ძირითადი ცნებები	89
§ 2.	პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება. განტოლება დცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება	90
§ 3.	ერთგვაროვანი განტოლება	92
§ 4.	პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება	93
§ 5.	ბერნულის განტოლება	94
§ 6.	განტოლებები სრულ დიფერენციალებში	94
§ 7.	მაინტეგრებული მამრავლი	96
§ 8.	პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები	96
§ 9.	განსაკუთრებული წერტილები და ამონახსნები	97
§ 10.	ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები	98
§ 11.	იზოგონალური და ორთოგონალური ტრაექტორიები. ევოლვენტები	99
§ 12.	ამოკანები პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენაზე	100
§ 13.	მთლიანი რიგის დიფერენციალური განტოლებები	101
§ 14.	მთლიანი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები	103
§ 15.	მეორე რიგის მულტიპლიციტივებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება	106
§ 16.	წ-ური რიგის მულტიპლიციტივებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება	109
§ 17.	ეილერის განტოლება	111
§ 18.	დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით	112
§ 19.	დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები	113
V	თ ა ვ ი მატრიცები	
§ 1.	მატრიცების შეკრება და გამრავლება	116
§ 2.	მატრიცის რანგი და წრფივი გარდაქმნები	119
§ 3.	კვადრატული მატრიცის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი რიცხვები. მატრიცის მახასიათებელი განტოლება	123
VI	თ ა ვ ი ველის თეორიის ელემენტები	
§ 1.	წარმოებული მოცემული მიმართულებით. გრადიენტი	126
§ 2.	ვექტორული ველის დივერგენცია და როტორი	128
VII	თ ა ვ ი ალბათობის თეორიის ელემენტები	
§ 1.	ალბათობის უშუალო გამოთვლა	134
§ 2.	ალბათობათა შეკრების თეორემა	137
§ 3.	ალბათობათა გამრავლების თეორემა	138
§ 4.	ნებისმიერ სდომილობათა ჯამის ალბათობა, სრული ალბათობა, ბაიესის ფორმულა	142
§ 5.	ცდათა გამორება	145
§ 6.	შემთხვევითი სიდიდეები და განაწილების ფუნქცია	149
§ 7.	შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია	154

§ 8.	შემთხვევითი სიდიდის ბინომური და ნორმალური განაწილების კანონი	158
§ 9.	დიდ რიცხვთა კანონი	159
VIII თავი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტები		
§ 1.	კომპლექსური რიცხვები	161
§ 2.	ელემენტარული ფუნქციები	165
§ 3.	კომპლექსური ფუნქციის გეომეტრიული შინაარსი	167
§ 4.	კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის წარმოებულნი	168
§ 5.	კონფორმული ასახვები	170
§ 6.	კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა ინტეგრება	175
§ 7.	კოშის თეორემა და კოშის ფორმულა	177
§ 8.	კომპლექსურწვერებიანი მწკრივები	180
§ 9.	ანალიზური ფუნქციის ნულები და განსაკუთრებული წერტილები	186
§ 10.	ნაშთები და მათი გამოყენება	189
§ 11.	ლოგარითმული ნაშთი. არგუმენტის პრინციპი. რუშეს თეორემა	193
IX თავი ოპერაციული აღრიცხვის ელემენტები		
§ 1.	ორიგინალები და მათი გამოსახულებანი. ლაპლასის გარდაქმნა.	194
§ 2.	ლაპლასის გარდაქმნის თვისებები	195
§ 3.	ორიგინალთა ნახვევი. გამრავლების თეორემა. დიუჰამელის ფორმულა. მულტიპლიკაციური წრფივი დიფერენციალური განტოლებანი და სისტემები	197
X თავი პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები. მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი განტოლება		
§ 1.	პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება	200
§ 2.	მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა ტიპები, კანონიკურ სახეზე დაყვანა	202
§ 3.	სიძის რხევის განტოლება	203
§ 4.	სითბოგამტარობის განტოლება	205
	პასუხები	208
	ცხრილები	264

რედაქტორები: მ. მრეღაშვილი, ზ. სუთიძე
მხატვრული რედაქტორი ე. ქიშმარაია
ტექნიკური რედაქტორი რ. ვოგიშვილი
კორექტორი ნ. ქაფიანიძე
უფროსი კორექტორი ნ. დოღბაძე
გამომწვეები ო. შაქავეარიანი

გადაეცა წარმოებას 4/XII-79 წ. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 28/VII-80 წ. ქა-
ლადის ზომა 60X90¹/₁₆ საბეჭდი ქაღალდი № 2. ნაბეჭდი თაბახი 17. სააღრიცხვო-
საგამომცემლო თაბახი 17,99.
უე № 04075. ტირაჟი 5000. შეკვ. № 1337.

ფასი 75 კპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Марджанишвили № 5.

1980

საქართველოს სსრ გამსახკომის საგამომცემლო-პოლიგრაფიული გა-
ერთიანება „განათლების“ კომბინატი, თბილისი, მარჯანიშვი-
ლის ქ. № 5

Комбинат издательско-полиграфического объединения
«Ганатлеба» Госкомиздата Грузинской ССР, Тбилиси,
ул. Марджанишвили, 5.

Дурглишвили Николай Егорович

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ЧАСТЬ II**

(на грузинском языке)

Page 7E 200

