მ. თევდორაძე, ნ. პატიაშვილი

მენეჯმენტის მათემატიკური მოდელები

„ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მ. თევდორაძე, ნ. პატიაშვილი

მენეჯმენტის მათემატიკური მოდელები

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 25.02.2009, ოქმი №2

თბილისი
2009

უაკ 65.012(075.8)

მოცემული სასწავლო სახელმძღვანელო განკუთვნილია იმ მათემატიკური მეთოდებისა და მოდელების შესასწავლად, რომელიც გამოიყენება მენეჯმენტში. თანამედროვე მენეჯმენტი წარმოუდგენელია შესაბამისი მათემატიკური აპარატის გამოეყენების გარეშე, რაც განპირობებულია თანამედროვე საწარმოო-ორგანიზაციების და მათი მართვის სისტემის სირთულით. აღნიშნული მეთოდები საშუალებას აძლევს მმართველებს წარმოქმნილი პრობლემები და მართვის ამოცანები გახადონ უფრო სტრუქტურირებადი და, შესაბამისად, სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებით მიიღონ ოპტიმალური გადაწყვეტილება. სასწავლო სახელმძღვანელო შედგება ექვსი ნაწილისგან, რომლებშიც წარმოდგენილია: დეტერმინირებული და სტოქასტიკური მეთოდები, თამაშთა თეორიის ელემენტები, ფინანსური მათემატიკის მეთოდები, იმიტაციური და დინამიკური მოდელირების საკითხები.

რეცენზენტი თ. ლომინაძე

ISBN 978-9941-14-617-6
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

სარჩევი

შესავალი..5

I ნაწილი. შესავალი მენეჯმენტის მათემატიკურ მოდელებში..6

მათემატიკური მოდელების არსის ზოგადი დახასიათება..6
მენეჯმენტში მათემატიკური მოდელების გამოყენება..7
გადაწყვეტილებათა მიღებაში...7

ნაწილი II. დეტერმინირებული მეთოდები...10

თავი 1. გრაფების თეორიის ელემენტები...10
1.1. გრაფები...10
1.2. ქსელები..11
1.3. მაქსიმალური ნაკადი...14
თავი 2. წრფივი პროგრამირება..15
2.1. ზოგადი დახასიათება..15
2.2. შემადგენლობის ამოცანა..16
2.3. წარმოების ამოცანა..17
2.4. სატრანსპორტო ამოცანა...19
2.5. წრფივი სისტემები..19
თავი 3. მარაგების მართვა..22
3.1. ამოცანის ზოგადი დახასიათება..22
3.2. ძირითადი მოდელი...22
3.3. საწარმოო მომარაგების მოდელი...24
3.4. მომარაგების მოდელი ფასდაკლებით..26
თავი 4. ლეონტიევის მოდელი...28
4.1. პროდუქტიული მატრიცები..28
4.2. შეზღუდვა რესურსებზე..31
4.3. მომგებიანობის მატრიცა...34
თავი 5. მრავალკრიტერიალური ამოცანები...36
5.1. პარეტოს სიმრავლე...36
5.2. ამოცანის დასმა..36
5.3. იდეალური წერტილის მეთოდი..38
თავი 6. იერარქიები და პრიორიტეტები..41
6.1. განზომილება და შეთანხმებულობა..41
6.2. იდეალური განზომილება..42
6.3. უკუსიმეტრიული და შეთანხმებული მატრიცები..42
6.4. შეთანხმებულობის ინდექსი..43
6.5. უკუსიმეტრიული მატრიცის საკუთარი მახასიათებლის გამოთვლა............................44
6.6. სკალირება..45
6.7. იერარქია..46

ნაწილი III. სტოქასტიკური მეთოდები..50

თავი 7. მათემატიკური სტატისტიკა..50
7.1. საშუალო არითმეტიკული, მოდა, მედიანა..50
7.2. ვარიაცია...52
7.3. საშუალო კვადრატული გადახრა..53
7.4. დისპერსია, ვარიაციის კოეფიციენტი, ასიმეტრიის მაჩვენებელი.................................54
თავი 8. პროგნოზირების მეთოდები..56
8.1. ზოგადი დახასიათება...56
8.2. დროითი რიგების ანალიზი...57
8.2.1. მცოცავი საშუალოს მეთოდი...58
8.2.2. ექსპონენციალური გასწორების მეთოდი..60
8.2.3. წრფივი ტრენდის პროეცირების მეთოდი..62

8.3. პროგნოზირების კაუზალური მეთოდები ... *63*
8.4. პროგნოზირების ხარისხობრივი მეთოდები ... *64*
თავი 9. ორგანიზაციული სისტემების მართვა და ... 66
რესურსების განაწილება ... 66
9.1. ორგანიზაციული სისტემის დახასიათება ... *66*
9.2. პირდაპირი პრიორიტეტების მექანიზმი ... *67*
9.3 უკუპრიორიტეტების მექანიზმი ... *68*
9.4. საკონკურსო მექანიზმი ... *70*
9.5. ღია მართვის მექანიზმი ... *70*
9.6. ღია მართვა და ექსპერტთა გამოკითხვა ... *72*

ნაწილი IV. თამაშთა თეორია ... 73

თავი 10. თამაშთა თეორიის საფუძვლები ... 73
10.1. თამაშთა თეორიის გამოყენების საკითხები ... *73*
10.2. მატრიცული თამაშები ... *74*
10.3. წონასწორობა ... *75*
10.4. შერეული სტრატეგიები ... *76*
10.5. მატრიცული თამაშების ამოხსნის მეთოდები ... *78*
10.5.1. თამაში **2 X n** ... 78
10.5..2. თამაში **n X 2** ... 81
10.5.3. **m x n** თამაშები ... 83
თავი 11. პოზიციური თამაშები ... 84
11.1. პოზიციური თამაშის სტრუქტურა ... *84*
11.2. პოზიციური თამაშის ნორმალიზაცია ... *85*
თავი 12. ბიმატრიცული თამაშები ... 90
12.1. შესავალი ბიმატრიცულ თამაშში ... *90*
12.2. ბრძოლა ბაზრებისათვის ... *90*
12.3. პატიმართა დილემა ... *91*
12.4 შერეული სტრატეგიები ... *91*
12.5. 2 X 2 ბიმატრიცული თამაში: ... *92*
წონასწორობის სიტუაცია ... *92*
12.6. ბრძოლა ბაზრისათვის ... *93*

ნაწილი V. ფინანსური მათემატიკის მეთოდები ... 96

თავი 13. ფინანსური მათემატიკის ძირითადი ამოცანები ... 96
13.1. საპროცენტო განაკვეთი წლიური დაანგარიშებით ... *96*
13.2. წმინდა დისკონტური ღირებულება ... *97*
13.3. ამორტიზაცია ... *98*
13.4. ანუიტეტი და დაფარვის ფონდი ... *98*
13.5. ინვესტიციების შეფასება ... *99*

ნაწილი VI. იმიტაციური და დინამიკური მოდელირება ... 101

თავი 14. მოდელების ზოგადი დახასიათება ... 101
თავი 15. იმიტაციური მოდელების დამუშავება ... 103
თავი 16. დინამიკური მოდელირების მაგალითები ... 105
16.1. მოსახლეობის მოდელი ... *105*
16.2. მობილიზაციის მოდელი ... *106*
16.3. შეიარაღების მოდელი ... *107*

დასკვნა ... 109

გამოყენებული ლიტერატურა ... 110

შესავალი

მოცემული სასწავლო სახელმძღვანელო განკუთვნილია იმ მათემატიკური მოდელების შესასწავლად, რომელიც გამოიყენება მენეჯმენტში.

თანამედროვე მენეჯმენტში ფრიად მნიშვნელოვანია მათემატიკური მეთოდების გამოყენება, ვინაიდან თანამედროვე საწარმოო-ორგანიზაციები გამოირჩევა სტრუქტურისა და მართვის სირთულით. აღნიშნული მეთოდები საშუალებას გვაძლევს წარმოების პროცესში წარმოქმნილი პრობლემები და მართვის ამოცანები გავხადოთ უფრო სტრუქტურირებადი, და სხვადასხვა მეთოდების გამოყენება საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ ოპტიმალური გადაწყვეტილებები.

სასწავლო სახელმძღვანელო დაყოფილია ექვს ძირითად ნაწილად.

პირველ ნაწილში მოკლედ დახასიათებულია მათემატიკური მოდელების გამოყენების საკითხი და როლი.

მეორე ნაწილში წარმოდგენილია დეტერმინირებული მოდელები. მოყვანილია გრაფების თეორიის ელემენტები, წრფივი პროგრამორების ამოცანები, საწარმოში მარაგების მართვის მოდელები და ლეონტიევის მოდელი. განხილულია მათი ამოხსნის ხერხები.

მესამე ნაწილში განხილულია სტოქასტიკური მოდელები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება მათემატიკურ სტატისტიკასა და პროგნოზირებაში. დახასიათებულია ორგანიზაციული სისტემების მართვის და რესურსების გამოყენების ამოცანა.

მეოთხე ნაწილში მოცემულია თამაშთა თეორიის საფუძვლები. განხილულია მატრიცული, ბიმატრიცული და პოზიციური თამაშები.

მეხუთე ნაწილში განხიულია ფინანხური მათემატიკის საკითხები. კერძოდ, მოყვანილია საპროცენტო განაკვეთის, დისკონტური ღირებულების, ამორტიზაციის გაანგარიშების მეთოდები, შემოტანილია ანუიტეტისა და დაფარვის ფონდის ცნება და დახასიათებულია ინვესტიციების შეფასების მეთოდი.

მეექვსე ნაწილი მოიცავს იმიტაციური და დინამიკური პროგრამირების მეთოდებს.

I ნაწილი. შესავალი მენეჯმენტის მათემატიკურ მოდელებში

მათემატიკური მოდელების არსის ზოგადი დახასიათება

მათემატიკური მეთოდები შეიძლება განხილულ იქნას როგორც არსებული მონაცემების კომპაქტური და სტრუქტურირებადი წარმოდგენის შედარებით უფრო ეფექტური საშუალება. ეს განსაკუთრებით ეხება ისეთ შემთხვევებს, როდესაც მონაცემები წარმოდგენილია რიცხობრივი მასივების სახით, გრაფიკული ფორმით და სხვ. გარდა ამისა, არსებობს მთელი რიგი ტიპიური მმართველობითი სიტუაციებისა, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას, რის შედეგად სწორედ მათემატიკური მეთოდები ხდება გადამწყვეტი ინსტრუმენტი პრობლემის გადასაჭრელად. ამოცანის ამოხსნის დონეს დიდად განსაზღვრავს მისი ამონახსნის ძებნის მეთოდიკაც. არსებობს სტრუქტურირებადი, ნაკლებსტრუქტურირებადი და არასტრუქტურირებადი ამოცანები. მათ შორის მკაცრი საზღვრის გავლება შეუძლებელია. გარდა ამისა, ზოგიერთი ნაკლებსტრუქტურირებადი პრობლემა შემდგომში შეიძლება სტრუქტურირებადი ან სულაც სტანდარტული გახდეს, ანუ ისეთი, რომლის ამოხსნისათვის არის შემუშავებული გარკვეული სქემები.

ოპერაციის კვლევა ეს არის მეცნიერული მეთოდის გამოყენება რთული პრობლემის გადასაჭრელად. მისი დამახასიათებელი თავისებურება არის სისტემისათვის შესაბამისი მოდელის აგება, რომელიც მოიცავს ალბათობისა და რისკის ფაქტორებს და რომლის დახმარებითაც შესაძლებელია განსხვავებული გადაწყვეტილებების, სტრატეგიების და მართვის მეთოდების გამოყენება და შედეგების შედარება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპერაციების კვლევა ეს არის გადაწყვეტილების მიღების პრობლემისადმი მეცნიერული მიდგომა, ხოლო პრობლემა ეს ამა თუ იმ სისტემაში სასურველ და არსებულ მდგომარეობას შორის არსებული წყვეტაა.

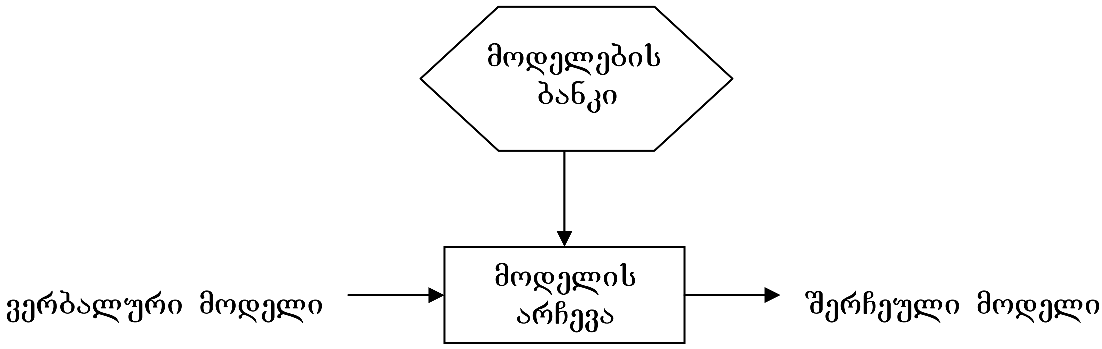
მენეჯმენტში მათემატიკური მოდელების გამოყენება გადაწყვეტილებათა მიღებაში

იმისათვის რომ განვსაზღვროთ, თუ რა ადგილს იკავებს მათემატიკა ოპერაციების კვლევაში, განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების ეტაპები:

1. პრობლემის განსაზღვრა (სურ.1) :

სურ.1. პრობლემის განსაზღვრა

2. მოდელის არჩევა (სურ.2):

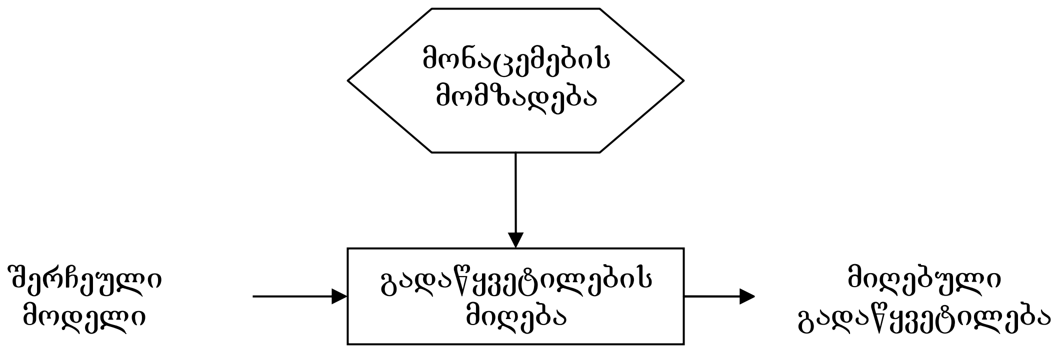


სურ.2. მოდელის არჩევა

არსებობს ძალიან ბევრი მრავალფეროვანი მათემატიკური მოდელი, რომლებიც საკმაოდ კარგად აღწერენ გადაწყვეტილების მიღებასთან დაკავშირებულ სხვადასხვა სიტუაციას. მათ შორის გამოიყოფა სამი ძირითადი კლასი: დეტერმინირებული, სტოქასტიკური და სათამაშო მოდელები. დეტერმინირებული მოდელის გამოყენების დროს ის ძირითადი ფაქტორები, რომლებიც ახასიათებენ სიტუაციას წინასწარ განსაზღვრულია. ამ შემთხვევაში, როგორც წესი, ისმევა გარკვეული მათემატიკური სიდიდის ოპტიმიზაციის ამოცანა (მაგალითად: დანახარჯების მინიმიზაცია და სხვა). სტოქასტიკური მოდელების გამოყენების დროს კი ზოგიერთი ფაქტორი შემთხვევითი

ხასიათისაა და, ბოლოს, კონკურენტების ან მოკავშირეების არსებობის შემთხვევაში გამოიყენება თეორიულ–სათამაშო მოდელი;

3. გადაწყვეტილების მიღება, რომლის დროსაც ხდება კონკრეტული მონაცემების გარდაქმნა, რათა ისინი შესაბამისობაში იქნას მოყვანილი არჩეულ მოდელთან (სურ.3).

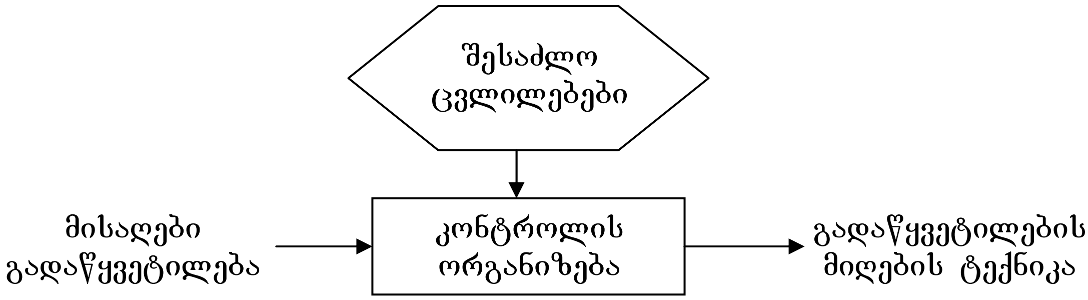


სურ.3. გადაწყვეტილების მიღება

4. გადაწყვეტილების ტესტირება – მიღებული გადაწყვეტილება უნდა შემოწმდეს შესაბამისი ტესტების მეშვეობით, თუ მიღებული შედეგი დამაკმაყოფილებელი არ არის, მაშინ მოდელი საკმარისად არ ასახავს პრობლემის არსს. ასეთ შემთხვევაში უნდა მოხდეს მისი სრულყოფა ან სხვა, უფრო რეალური მოდელის შემუშავება (სურ.4).

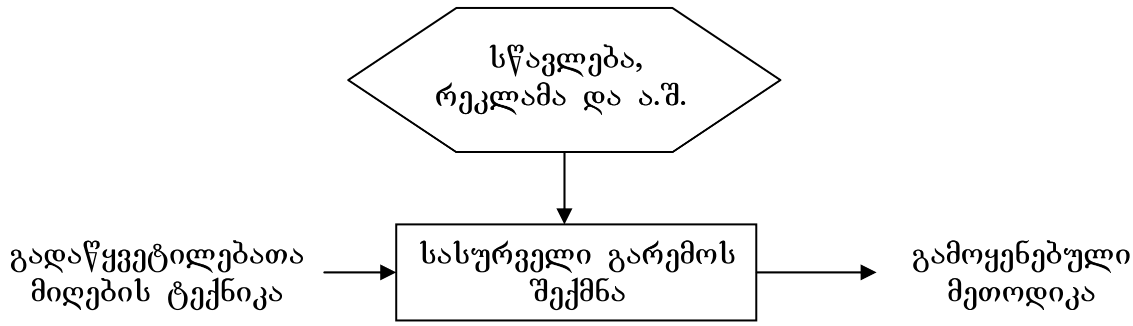
სურ.4. გადაწყვეტილების ტესტირება

5. კონროლის ორგანიზება – თუკი გადაწყვეტილება მისაღებია, უნდა მოხდეს კონტროლის მექანიზმის შექმნა მოდელის სწორი გამოყენების უზრუნველსაყოფად (სურ. 5).



სურ.5. კონტროლის ორგანიზება

6. შესაფერისი გარემოს შექმნა – ეს ხშირად გადაწყვეტილების მიღების ყველაზე რთული ეტაპია, რადგანაც ნოვაციების დანერგვა უმეტესწილად ეჯახება არასაკმარის დაინტერესებას და ზოგჯერ წინააღმდეგობასაც კი (სურ.6).



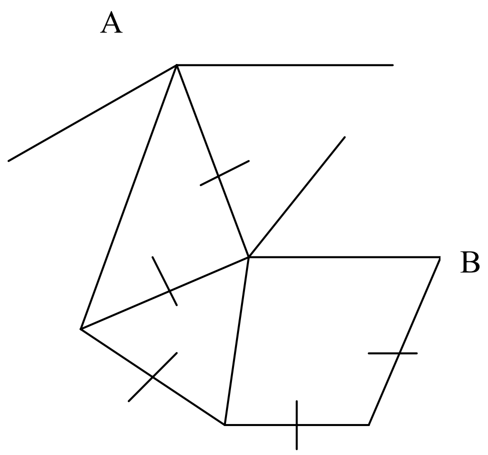
სურ.6. შესაფერისი გარემოს შექმნა

ნაწილი II. დეტერმინირებული მეთოდები

თავი 1. გრაფების თეორიის ელემენტები

1.1. გრაფები

ფიგურას, რომელიც შედგება წერტილების (წვეროების) და მათი შემაერთებელი მონაკვეთებისაგან (წიბოებისაგან) ეწოდება გრაფი. მარშრუტი ანუ გზა, რომელიც აერთიანებს გრაფის ორ წვეროს, ეწოდება მისი წიბოების ისეთ თანმიმდევრობას, რომელშიც თითოეულ ორ წიბოს აქვს საერთო დამასრულებელი წვერო და, ამასთანავე, პირველი წიბო გამოდის I წვეროდან, ხოლო ბოლო შედის მეორე წვეროში (სურ.7).



სურ.7. გრაფის მარშრუტი

გრაფი დაკავშირებულია, თუკი მისი წვეროების ნებისმიერი წყვილი ერთმანეთს უკავშირდება. მარშრუტს ეწოდება ჯაჭვი, თუკი მისი თითოეული წიბო მასში მონაწილეობს მხოლოდ ერთხელ. ჯაჭვს, რომლის საწყისი და საბოლოო წვერო ერთმანეთს ემთხვევა, ეწოდება ციკლი. გრაფის წვეროს ეწოდება ლუწი, თუკი მასში შემავალი წიბოების რიცხვი ლუწია. წიბოების რიცხვი, რომლებიც გრაფის წვეროში ერთიანდება არის ამ წვეროს ხარისხი და, ბოლოს, გრაფი სასრულია, თუ მისი წიბოების რიცხვი სასრულია.

ეილერის თეორემა – ნებისმიერ სასრულ დაკავშირებულ გრაფში, რომლის წვეროები ლუწია, არსებობს ციკლი, რომელშიც გრაფის თითოეული წიბო მონაწილეობს მხოლოდ ერთხელ. ასეთ ციკლს ეწოდება ეილერის ციკლი, ხოლო გრაფს, რომლის ყველა წვერო ლუწია, ეწოდება ეილერის გრაფი.

მაგალითი: სამხატვრო გამოფენის მოწყობისას დათვალიერების ორგანიზება უნდა მოხდეს ისე, რომ თითოეული დამთვალიერებელი ცალკეულ სურათთან მოხდეს მხოლოდ ერთხელ. თუკი შესასვლელი და გასასვლელი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ექსპონატები უნდა განლაგდეს ისე, რომ ექსპოზიციის სქემა წარმოადგენდეს ეილერის გრაფს, ხოლო თუ შესასვლელი და გასასვლელი სხვადასხვაა, მაშინ ექსპონატების განლაგების სქემა იქნება გრაფი, რომლის მხოლოდ ორი წვერო (ანუ შესასვლელი და გასასვლელი) არის კენტი.

ციკლს ეწოდება **ჰამილტონის ციკლი**, თუკი ის გადის გრაფის თითოეულ წვეროზე მხოლოდ ერთხელ, თუმცა დღეისათვის არ არსებობს რაიმე კრიტერიუმი ან ალგორითმი მისი პოვნისა.

გრაფის მნიშვნელოვან ნაირსახეობას წარმოადგენს ხე. დაკავშირებულ გრაფს ეწოდება ხე, თუკი მასში არ არსებობს ციკლი და მისი წვეროების რიცხვი ერთით მეტია წიბოების რიცხვზე.

სპეციალურ ლიტერატურაში გრაფს ეწოდება ქსელი, ხოლო მის წვეროებს კი კვანძები.

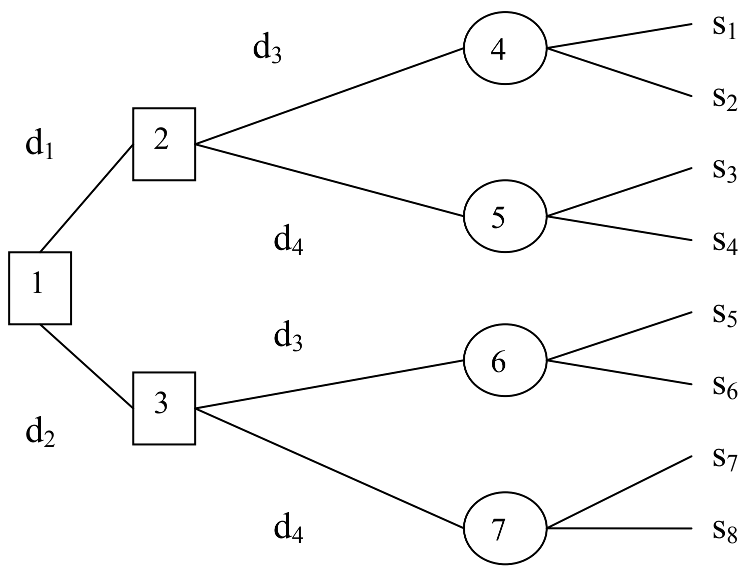
1.2. ქსელები

მნიშვნელოვანი გადაწყვეტილების მიღებისას, არსებული ვარიანტებიდან საუკეთესოს არჩევის მიზნით გამოიყენება ე.წ. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების სქემატურ აღწერას.

მაგალითი: სკოლის კურსდამთავრებული აგრძელებს სწავლას უნივერსიტეტში. მას არჩეული აქვს მოღვაწეობის ორი სავარაუდო სფერო: ბიზნესი და ინჟინერია. სწავლის გაგრძელება შესაძლებელია ორ უნივერსიტეტში: იორკის და შტატის. წარმატების ალბათობა დამოკიდებულია როგორც უნივერსიტეტის არჩევაზე, ისე მომავალ სპეციალობაზე:

1. შტატის უნივერს. + ბიზნესი = 0.60 (წარმატებით დამთავრების ალბათობა),
2. შტატის უნივერს. + ინჟ = 0.70,
3. იორკის უნივერს. + ბიზნესი = 0.90,
4. იორკის უნივერს. + ინჟ = 0.95,
5. წლიური საშუალო შემოსავალი + შტატ. უნივ. + ბიზნ. = 35 000 $,
6. წლიური საშუალო შემოსავალი + შტატ. უნივ. + ინჟ. = 30 000 $,
7. წლიური საშუალო შემოსავალი + იორკ. უნივ. + ბიზნ. = 24 000 $,
8. წლიური საშუალო შემოსავალი + იორკ. უნივ. + ინჟ. = 25 000 $,
9. სწავლის შეწყვეტის შემთხვევაში შემოსავალი = 18 000 $.

გადაწყვეტილების მიღების ერთადერთი კრიტერიუმი არის მოსალოდნელი შემოსავალი. ავაგოთ გადაწყვეტილებათა მიღების ხე (სურ.8).



სურ.8. გადაწყვეტილების მიღების ხე

მიღებულ ხეზე გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

d_1 – შტატის უნ. არჩევა,

d_2 – იორკის უნ. არჩევა,

d_3 – ბისნესის არჩევა,

d_4 – ინჟინერიის არჩევა,

s_1 – ბისნესი + შტატის უნ. + წარმატებით დამთავრება,

s_2 – ბისნესი + შტატის უნ. + სწავლის მიტოვება,

s_3 – ინჟ + შტატის უნ. + წარმატებით დამთავრება,

s_4 – ინჟ + შტატის უნ. + სწავლის მიტოვება,

s_5 – ბისნესი + იორკის უნ. + წარმატებით დამთავრება,

s_6 – ბისნესი + იორკის უნ. + სწავლის მიტოვება,

s_7 – ინჟ + იორკის უნ. + წარმატებით დამთავრება,

s_8 – ინჟ + იორკის უნ. + სწავლის მიტოვება.

სურათზე ოვალით მოცემულია გადაწყვეტილებები, რომელთა გაკონტროლება შეუძლებელია:

$N_7 = 0.95 * 25\,000 + 0.05 * 18\,000 = 24\,650$,

$N_6 = 0.90 * 24\,000 + 0.10 * 18\,000 = 23\,400$,

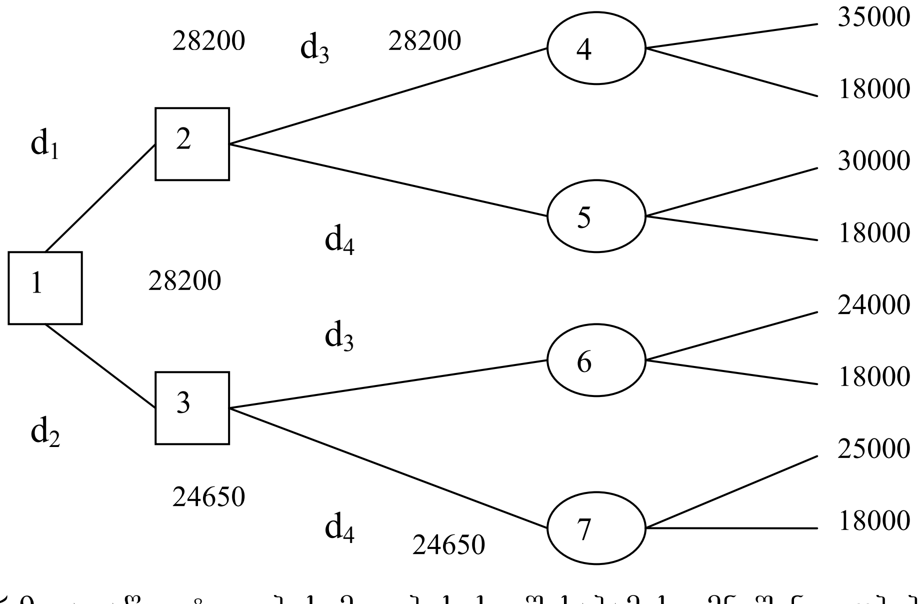
$N_5 = 0.70 * 30\,000 + 0.30 * 18\,000 = 26\,400$,

$N_4 = 0.60 * 35\,000 + 0.40 * 18\,000 = 28\,200$.

N_3 –ის მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება ანალიზის საფუძველზე: $N_7 > N_6$, შესაბამისად , $N_3 = N_7$ და d_4 ჯობია d_3–ს. ამიტომ $N_3 = 24\,650$ \$.

იმავე მეთოდით გამოითვლება N_2 –ის და N_1 –ის მნიშვნელობები.

$N_2 = 28\,200$ \$, $N_1 = 28\,200$ \$ (სურ.9).



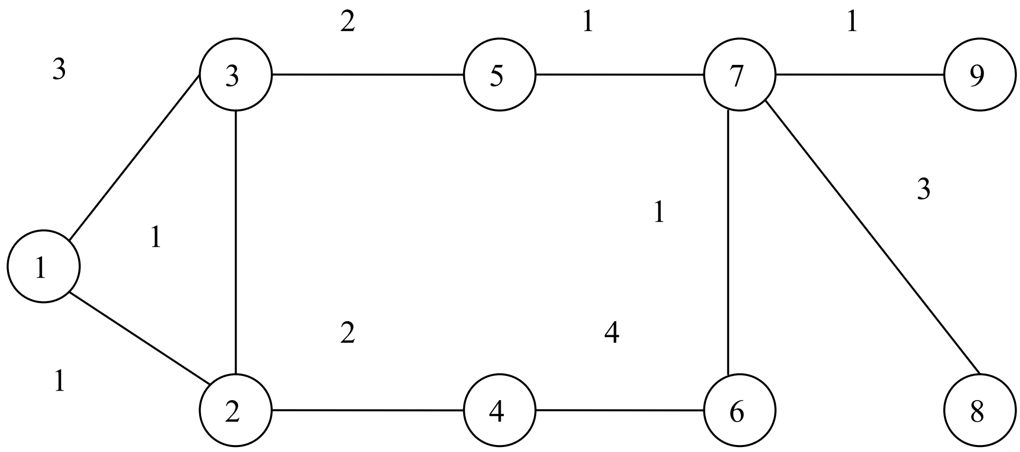
სურ.9. გადაწყვეტილების მიღების ხე შესაბამისი მნიშვნელობებით

1.3. მაქსიმალური ნაკადი

მოცემულია ქსელი, რომლის თითოეულ წიბოს აქვს შეზღუდული გამტარუნარიანობა. უნდა განისაზღვროს მაქსიმალური შესაძლო ნაკადი ერთი ქვექსელიდან მეორეში.

მაგალითი: დავუშვათ, რომ საწყისი და საბოლოო პუნქტები (A,B) მდებარეობენ მდინარის სხვადასხვა ნაპირებზე. ხიდების სიმრავლე წარმოქმნის ე.წ. გამყოფ ხაზს. გასაგებია, რომ ქსელის გამტარუნარიანობა ემთხვევა ხიდებისას, ანუ მაქსიმალური შესაძლო ნაკადი არ უნდა აღემატებოდეს ამ ხიდების გამტარუნარიანობას ცალ-ცალკე.

განვიხილოთ ქსელი, რომელიც მოცემულია შემდეგ სურათზე (სურ.10). უნდა ვიპოვოთ მაქსიმალური ნაკადი პირველი კვანძიდან მეშვიდეში.



სურ.10. ქსელის გამტარუნარიანობის სქემა

გამოვთვალოთ საკვანძო კვეთების გამტარუნარიანობა:

$$(1,2),\ (1,3) = 4,$$
$$(2,4),\ (3,5) = 4,$$
$$(1,3),\ (2,3),\ (6,7) = 5,$$
$$(5,7),\ (6,7) = 2.$$

აქედან ვხვდებით, რომ მაქსიმალური ნაკადი არ უნდა აღემატებოდეს 2–ს.

თავი 2. წრფივი პროგრამირება

2.1. ზოგადი დახასიათება

წრფივი მოდელი ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული, შედარებით ადვილი, კარგად დამუშავებული და საკმაოდ ეფექტური მათემატიკური მოდელია.

წრფივი პროგრამირების მეთოდი ერთ – ერთი ყველაზე ცნობილი და ხშირად გამოყენებადია მენეჯმენტში. ეს არის ამოცანის ამოხსნის მათემატიკური მეთოდი, რომელიც ოპტიმალურად ანაწილებს არსებულ რესურსებს და აღწევს დასახულ მიზანს (მაქსიმალური შემოსავალი ან მინიმალური დანახარჯი).

განვმარტოთ, თუ რას ნიშნავს წრფივი პროგრამირება. სიტყვაში «პროგრამირება» იგულისხმება დაგეგმვა, ხოლო წრფივი გულისხმობს წრფივი შეზღუდვების დროს წრფივი მიზნობრივი ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნას. შესაბამისად, წრფივ პროგრამირებას არავითარი კავშირი არა აქვს პროგრამირებასთან, რომელიც გამოიყენება კომპიუტერულ მეცნიერებაში.

არსებობს რამდენიმე სტანდარტული სიტუაცია, რომელშიც წრფივი პროგრამირება ხშირად და საკმაოდ ეფექტურად გამოიყენება:

- **შემადგენლობის ამოცანა** – მისი მიზანია ყველაზე ეკონომიური ინგრედიენტების ნაკრების არჩევა არსებული შეზღუდვების გათვალისწინებით;
- **წარმოების ამოცანა;**
- **განაწილების ამოცანა** – ხშირად მას სატრანსპორტო ამოცანის სახე აქვს;
- **კომბინირებული ამოცანა.**

წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის ყველაზე გავრცელებული მეთოდია სიმპლექს-მეთოდი, ხოლო ყველაზე ეფექტური – ელიპსოიდების მეთოდი. უმარტივეს შემთხვევაში გამოიყენება გრაფიკული მეთოდი.

2.2. შემადგენლობის ამოცანა

გახდომის მსურველებს ურჩევენ რაციონალურ კვებას, რომელიც შედგება ორი პროდუქტისაგან P და Q. კვების დღიური ნორმა უნდა შეიცავდეს არაუმეტეს 14 ერთეული ცხიმისა და არანაკლებ 300 კალორიისა. P პროდუქტში არის 15 ერთეული ცხიმი და 150 კალორია, ხოლო Q–ში – 4 ერთეული ცხიმი და 200 კალორია. 1კილოგრამის P პროდუქტის ფასი არის 15, ხოლო 1კილოგრამის Q–ს ფასი კი – 25. რა პროპორციებში უნდა მივიღოთ P და Q პროდუქტები, იმისათვის, რომ დავიცვათ დიეტის პირობები და დავხარჯოთ რაც შეიძლება ნაკლები თანხა?

აღვნიშნოთ x–ით P პროდუქტის რაოდენობა, y–ით კი Q-სი. შემდეგ:

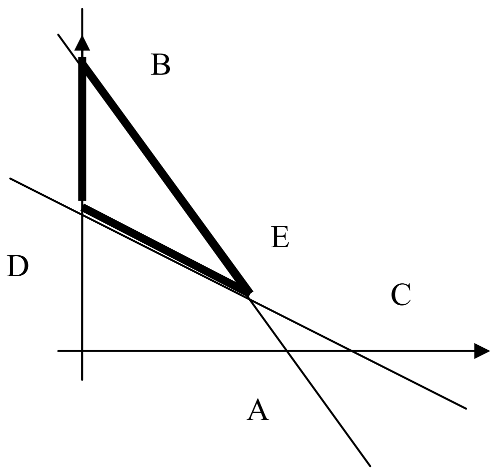
ცხიმების ოდენობა – $15x + 4y \le 14$,

კალორიების ოდენობა – $150x + 200\,y \ge 300$,

სადაც, $x \ge 0$, $y \ge 0$,

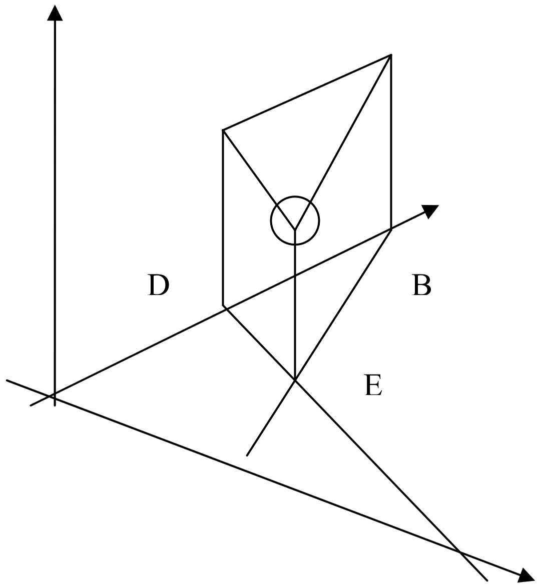
ფულადი დანახარჯი – $z = 15x + 25y \to \min$.

შესაძლო ამონახსენთა სიმრავლე მდებარეობს კოორდინატთა სიბრტყის პირველ მეოთხედში. ავაგოთ თითოეული უტოლობის შესაბამისი წრფე (სურ.11).



სურ.11. ამონახსენთა სიმრავლე

სურ.11-ზე BDE სამკუთხედი წარმოადგენს შესაძლო ამონახსენთა სირავლეს.



სურ.12. ამონახსენთა სიმრავლე სივრცეში

გამოვთვალოთ Z-ის მნიშვნელობები სამკუთხედის სამივე წვეროში:

$Z_D = 37.5, \quad Z_B = 87.5, \quad Z_E = 35.$

E წვეროში Z-ის მნიშვნელობა ყველაზე მცირეა (სურ.12), შესაბამისად X= 2/3 y= 1, ხოლო პროპორცია ასეთია - 2/3.

2.3. წარმოების ამოცანა

ფირმა უშვებს ორი სახის პროდუქციას: ჩვეულებრივს და გაუმჯობესებულს. წარმოების პროცესში ძირითადად სრულდება ორი ოპერაცია: დაპრესვა და დამუშავება. რა რაოდენობის პროდუქცია უნდა ვაწარმოოთ იმისათვის, რომ მივიღოთ მაქსიმალური მოგება არსებული შეზღუდვების პირობებში (ცხრილი 1)?

ცხრილი 1. პროდუქციის გამოშვების არსებული შეზღუდვები

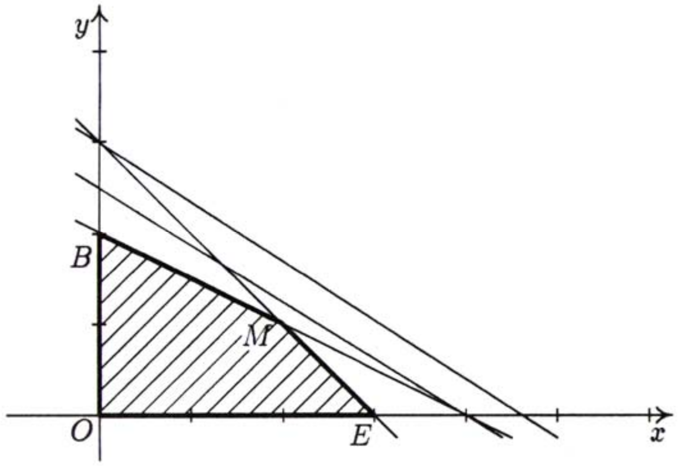
დანახარჯი	ჩვეულებრივი	გაუმჯობესებული	არსებული რესურსები
მასალა	20	40	4000
დრო დაპრესვისათვის	4	6	900
დრო დამუშავებისათვის	4	4	600
ფულადი სახსრები	30	50	6000

ჩვეულებრივი პროდუქციის მოგება ერთეულზე არის 80$, გაუმჯობესებულის 100$.

x–ით აღვნიშნოთ ჩვეულებრივი პარტიის მოცულობა, y–ით გაუმჯობესებულის:

$$z = 80x + 100\,y \rightarrow \max,$$
$$20x + 40\,y \le 4000,$$
$$4x + 6\,y \le 900,$$
$$4x + 4\,y \le 600,$$
$$30x + 50\,y \le 6000,$$
$$x \ge 0 \text{ და } y \ge 0.$$

ავაგოთ თითოეული უტოლობის შესაბამისი წრფე და დავიტანოთ ერთ კოორდინატთა სიბრტყეზე (სურ.13).



სურ.13. ამონახსენთა სიმრავლე

მიღებული ნახევარსიბრტყეების გადაკვეთით მიიღება ოთხკუთხედი. ვიპოვოთ M წერტილის მნიშვნელობა (B და E ვიპოვეთ მონაკვეთების აგებისას):

$$20x + 40y = 4000,$$
$$4x + 4y = 600,$$
$$x = 100, \quad y = 50.$$

გამოვთვალოთ Z-ის მნიშვნელობა სამივე წერტილში:

$Z_B = 10\,000, \quad Z_E = 12\,000, \quad Z_M = 13\,000.$

პასუხი: $x = 100, \; y = 50, \; Z_{MAX} = 13\,000.$

2.4. სატრანსპორტო ამოცანა

კომპანიას აქვს 2 საწყობი და ჰყავს 3 საბითუმო მყიდველი. პროდუქციის მარაგის საერთო მოცულობა არის 300 000 ერთეული და ემთხვევა მოთხოვნათა საერთო მოცულობას (ცხრილი 2).

ცხრილი 2. მოთხოვნათა მოცულობა

		გადაზიდვის ღირებულება			საწყობში არსებული პროდუქციის ოდენობა
		B_1	B_2	B_3	
საწყობები	A_1	8	5	6	120
	A_2	4	9	7	180
მოთხოვნა		70	140	90	300

X_{ik}–ით აღინიშნება საქონლის რაოდენობა, რომელიც მიეწოდება A_i საწყობიდან B_k მყიდველს.

გადაზიდვების ღირებულების მინიმიზაციის ფუნქცია:

$$Z = 8x_{11} + 5\,x_{12} + 6\,x_{13} + 4\,x_{21} + 9\,x_{22} + 7\,x_{23} \rightarrow \min$$

იმ პირობით, რომ

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180,$$
$$x_{11} + x_{21} = 70,$$
$$x_{12} + x_{22} = 140,$$
$$x_{13} + x_{23} = 90.$$

მივიღეთ წრფივი პროგრამირების განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნა ხდება ზემოდ მოცემული ამოცანების მსგავსად.

შენიშვნა: თუკი წრფივი პროგრამირების ამოცანაში ცვლადები შეესაბამება მანქანების, დაზგების, ადამიანების რიცხვს, მაშინ საქმე გვაქვს ამ სიდიდეების მთელრიცხვა მნიშვნელობებთან.

2.5. წრფივი სისტემები

განვიხილოთ ზოგადი ამოცანა.

მაგალითი: ქარხანას ჰყავს ოთხი მომხმარებელი, რომლებსაც ყოველდღიურად ეგზავნებათ მზა პროდუქცია. ტვირთის მიწოდება ხდება

სატვირთო მანქანების საშუალებით, რომლებიც დატვირთულია ყუთებით. ყუთები მარკირებულია მათში მოთავსებული პროდუქციის სახეობის შესაბამისად (ცხრილი 3).

განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც სატვირთო მანქანებმა უკვე დატოვეს ქარხნის ტერიტორია და გაირკვა, რომ ტვირთის ერთ–ერთი სახეობა გაიგზავნა შეცდომით და საჭიროა მისი დაბრუნება. ამავე დროს, ცნობილი გახდა, რომ მომსახურე პერსონალის შეცდომის გამო არ დარჩა არავითარი ჩანაწერი საჭირო ყუთების მარკირების სახეობის შესახებ.

ცხრილი 3. პროდუქციის განაწილების ცხრილი

მანქანის ნომერი	ყუთების რაოდენობა				
	I ტიპი	II ტიპი	III ტიპი	IV ტიპი	საერთო წონა
1	1	4	9	8	51
2	2	9	8	3	45
3	2	6	8	6	48
4	3	5	7	8	51

ერთადერთი რაც არის ცნობილი არი ის, რომ ყუთი, რომელიც უნდა დაბრუნებულ იქნას, სხვებზე უფრო მძიმეა.

შესაძლებელია თუ არა ტვირთის დაბრუნება ყუთის გახსნისა და დამატებითი აწონვის გარეშე?

აღვნიშნოთ x_k–თი k–ური ტიპის ტვირთის შემცველობის მქონე ყუთის წონა. მაშინ თითოეული მანქანის საერთო წონა გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= 51, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 45, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 6x_4 &= 48, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 51. \end{aligned}$$

ასე მიიღება წრფივი განტოლებების სისტემა ოთხი უცნობით, რომლის ამონახსნის პოვნა ხდება უცნობის გამორიცხვის მეთოდით:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ x_3 = 2,\ \ x_4 = 3.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ქარხანაში უნდა დაბრუნდეს ყუთები ოთხი ტიპის პროდუქციით, ანუ $8 + 3 + 6 + 8 = 25$ ყუთი.

შენიშვნა: *ნებისმიერი წრფივი სისტემის ამონახსნი ეწოდება ისეთი რიცხვების ნაკრებს, რომლეთა მეშვეობითაც განტოლება გადაიქცევა ტოლობად. სისტემის კვლევის დროს შეიძლება შეგვხვდეს სამი ვარიანტი:*

- *სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი;*
- *სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი;*
- *სისტემა არათავსებადია (ამონახსნი არა აქვს).*

თავი 3. მარაგების მართვა

3.1. ამოცანის ზოგადი დახასიათება

საწარმოებს ძალიან ხშირად გააჩნიათ მარაგები (ნახევარფაბრიკატები, ნედლეული, მზა პროდუქცია და ა.შ.). მარაგის ოდენობა უნდა იყოს საკმარისი. იმ შემთხვევაში, თუ მარაგი არის დიდი მოცულობის, ჩნდება დაუსაბუთებელი შენახვისა და ამორტიზაციის დანახარჯები. მარაგების უკმარისობის პირობებში კი შეიძლება საწარმოო პროცესს საფრთხე დაემუქროს. გარდა ამისა, არასაკმარისი მარაგი გულისხმობს მის ხშირ შევსებას, რაც, აგრეთვე, დაკავშირებულია დანახარჯებთან. მარაგების მართვის ამოცანა მდგომარეობს ორივე უკიდურესობის თავიდან აცილებაში და იმაში, რომ საერთო დანახარჯი რაც შეიძლება მეტად შემცირდეს. მეცნიერების ეს ნაწილი საკმაოდ განვითარებულია, შემუშავებულია მრავალრიცხოვანი მეთოდები განსხვავებული მათემატიკური მოდელების გამოყენებით. ქვემოთ განვიხილავთ მარაგების მართვის რამდენიმე მარტივ დეტერმინირებულ მეთოდს.

3.2. ძირითადი მოდელი

მარაგების მართვაში მთავარ როლს ასრულებს მარაგის ცვლილების ფუნქცია. ეს არის კავშირი საქონლის ერთეულების რაოდენობასა (Q) და დროს (t) შორის. თუკი საქონელზე მოთხოვნა არსებობს, მაშინ მარაგის ცვლილების ფუნქცია $Q= Q(t)$ კლებულობს. ჩავთვალოთ, რომ საწყობში არის ერთი ტიპის საქონელი.

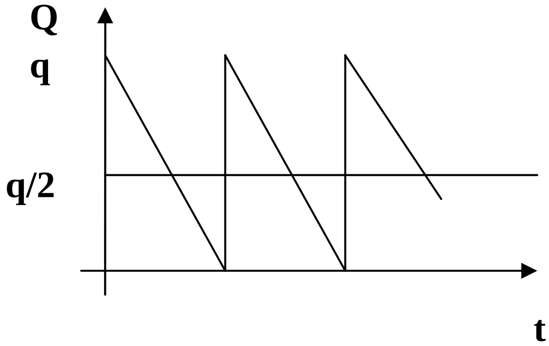
მარაგებთან დაკავშირებული დანახარჯები იყოფა სამ ნაწილად:

1. საქონლის ღირებულება;
2. საორგანიზაციო დანახარჯები (დაკავშირებული საქონლის გაფორმებასთან, მის მოწიდებასთან, გადატვირთვასთან და ა.შ.);
3. დანახარჯები საქონლის შენახვაზე (საწყობის არენდა, ამორტიზაცია, შენახვის პროცესი და სხვა).

განვიხილოთ სიდიდეები, რომლებიც მიღებულია ძირითადი მოდელის ჩარჩოებში:

1. საქონლის ერთეულის ფასი – C,
2. მოთხოვნის ინტენსივობა – d ერთეული საქონელი წელიწადში,
3. საორგანიზაციო დანახარჯები – S ლარი საქონლის ერთ პარტიაზე,
4. შენახვის დანახარჯი – h ლარი ერთეულ საქონელზე წელიწადში,
5. საქონლის ერთი პარტიის ზომა – q ერთეული.

მარაგის ცვლილების გრაფიკი (სურ.14) შედგება განმეორებადი ციკლებისაგან ორ მეზობელ დეფიციტს შორის. ვერტიკალური ხაზი აღნიშნავს მარაგების წამიერ შევსებას.



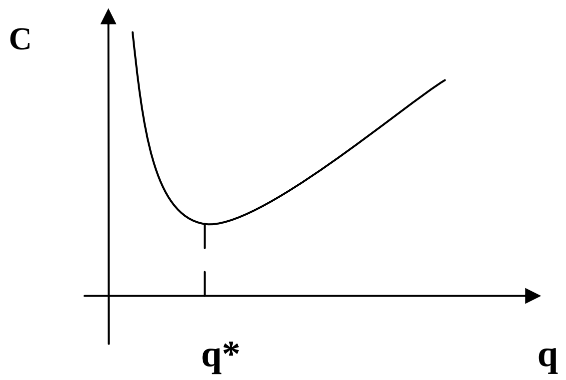
სურ.14. მარაგის ცვლილებების გრაფიკი

მარაგების მართვის ამოცანა გულისხმობს q პარამეტრის ისეთი ოდენობის განსაზღვრას, როცა წლიური დანახარჯები მინიმალურია. ამოცანის ამოხსნისათვის, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა დანახარჯების გამოსახვა c, d, s, h პარამეტრების მეშვეობით:

1. საქონლის საერთო ღირებულება წელიწადში – $c * d$;
2. მოწოდებების რიცხვი უდრის d/q, სწორედ ამიტომ, წლის განმავლობაში საორგანიზაციო დანახარჯი შეადგენს - $(d * s)/q$;
3. მარაგის საშუალო დონე უდრის $q/2$, ხოლო მარაგების შენახვის წლიური საერთო დანახარჯი - $(q * h)/2$.

შესაბამისად, საერთო C დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით:

$$C = cd + sd/q + qh/2.$$



სურ.15. მარაგების მართვის ფუნქციის გრაფიკი

როგორც უკვე ვთქვით, მარაგების მართვის ფუნქცია თავის მინიმუმს მიაღწევს q* წერტილში (სურ.15). მისი განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული:

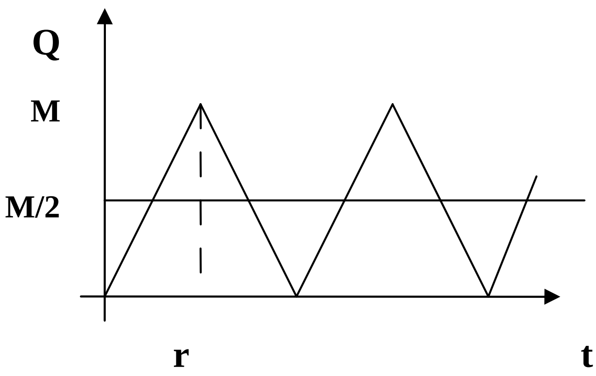
$$C'(q) = -sd/q^2 + h/2,$$
$$-sd/q^2 + h/2 = 0,$$
$$q^* = \sqrt{2sd/h}\,.$$

შედეგად მიიღება ოპტიმალური მარაგის ანუ ჰარისის ფორმულა.

3.3. საწარმოო მომარაგების მოდელი

ძირითად მოდელში საქონლის მომარაგება ხდება წამიერად, მაგრამ თუ საქონლის მომარაგება ხდება მომუშავე საწარმოო ბაზაზე, აუცილებელი ხდება ძირითადი მოდელის მოდიფიცირება. ამ შემთხვევაში, c, d, s, h პარამეტრებს ემატებათ კიდეც ერთი – საწარმოო ხაზის წარმადობა p ერთეული წელიწადში.

ამ ახალ მოდელს ეწოდება საწარმოო მომარაგების მოდელი. თითოეული ციკლის დასაწყისში ხდება საწარმოო ხაზთან მიერთება, რომელიც გრძელდება q ოდენობის საქონლის დაგროვებამდე. ამის შემდეგ, მარაგების შევსება არ ხდება მანამ, სანამ არ შეიქმნება დეფიციტი (სურ.16).



სურ.16. მარაგების შევსების სქემა

საერთო დანახარჯები C(q) შედგება სამი კომპონენტისაგან:

1. საქონლის საერთო ფასი წელიწადში - cd;
2. საორგანიზაციო დანახარჯი - sd/q;
3. მოწოდების დრო - r, ამ დროის განმავლობაში ხდება როგორც შევსება (p ინტენსივობით), ისე დახარჯვა (d ინტენსივობით). მარაგის ზრდა ხდება p-d სიჩქარით, ამიტომ მარაგის M დონე გამოითვლება ფორმულით:

$$M= (p-d)*r ,$$

სადაც (M<q) და pr = q (r დროში p ინტენსივობით იწარმოება q ერთეული).

ბოლო ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$M = (p-d) * q / p.$$

მარაგის საშუალო დონე არის M/2, ამიტომ შენახვის დანახარჯი იქნება:

$$(p-d)qh / 2p.$$

საბოლოოდ, საერთო დანახარჯი გამოითვლება ფორმულით:

$$C = cd + sd/q + (p-d)qh/2p,$$

$$C^{|} (q) = -sd/q^2 + (p-d)h/2p = 0,$$

$$q^* = \sqrt{2psd/(p-d)h} .$$

3.4. მომარაგების მოდელი ფასდაკლებით

განვიხილოთ სიტუაცია, რომელიც შეესაბამება ძირითად მოდელს, ოღონდ ერთი განსხვავებით, რომელიც გულისხმობს იმას, რომ საქონლის მიწოდება ხდება ფასდაკლებით, თუ პარტიის ზომა საკმარისად დიდია. სხვა სიტყვებით, თუკი პარტიის ზომა q არ არის q_0 რიცხვზე ნაკლები, მაშინ საქონელს აწოდებენ c_0 ფასით, სადაც $c_0 < c$. $C(q)$ ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად:

$$C(q) = \begin{cases} cd + sd/q + qh/2, \text{ როცა } q<q_0, \\ c_0d + sd/q + qh/2, \text{ როცა } q\geq q_0. \end{cases}$$

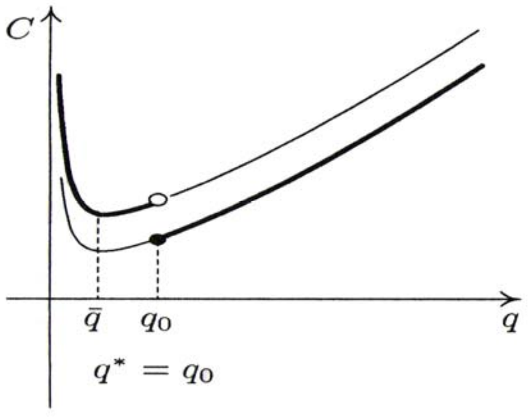
ფუნქცია $q= q_0$ წერტილში განიცდის წყვეტას. ორივე ფუნქციას $f(q) = cd+ sd/q +qh/2$ და $f_0(q) = c_0d +sd/q + qh/2$ აქვს მინიმუმი წერტილში, სადაც :

$$f'(q) = f'_0(q) =0$$

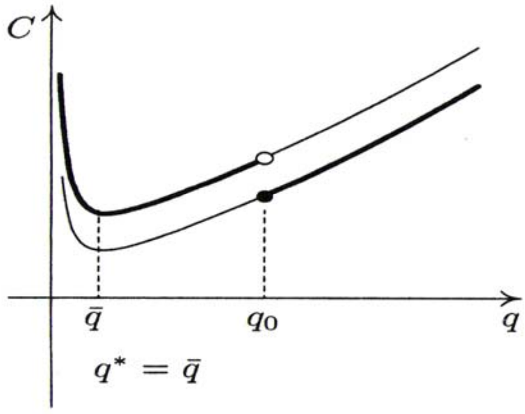
ანუ

$$q^- = \sqrt{2sd/h} \text{ წერტილში.}$$

ოპტიმალური პარტიის ოდენობის განსასაზღვრავად უნდა შეედაროს ერთმანეთს $C(q)$ ფუნქციის მნიშვნელობა q^- და q_0 წერტილებში (სურ. 17.1 და 17.2). იქ, სადაც $C(q)$ ფუნქცია მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, იქნება პარტიის ოპტიმალური ოდენობა q^*, რომელიც ფასდაკლებას ითვალისწინებს. იმ შემთხვევაში, თუ $C(q^-) = C(q^0)$, მაშინ q^* სახით შეიძლება ავიღოთ q^--სა და q_0 –ს შორის ნებისმიერი.



სურ.17.1 მომარაგების მოდელი 1



სურ.17. 2 მომარაგების მოდელი 2

<u>მაგალითი</u>: ზომიერი მოთხოვნის ინტენსივობა უდრის 1000 ერთეულს,

წელიწადში საორგანიზაციო დანახარჯები – 10 ერთეული,

შენახვის დანახარჯები – 4 ერთეული,

ერთეულის ფასი – 5,

თუ პარტიის ზომა $\geq$ 500, მაშინ ფასი მცირდება 4-მდე.

ვიპოვოთ პარტიის ოპტიმალური ზომა.

აღნიშნული პირობებისათვის:

$$C(q) = \begin{cases} f(q) = 5000 + 10000/q + 2q, & \text{როცა } q<500, \\ f_0(q) = 4000 + 10000/q + 2q, & \text{როცა } q \geq 500. \end{cases}$$

ვიპოვოთ ლოკალური მინიმუმის წერტილი:

$$f'(q) = f_0'(q) = -1000/q^2 = 0;$$
$$q^{-} = \sqrt{5000} \approx 7.$$

რადგანაც $q^{-} < 500$, მაშინ

$$C(q^{-}) = f(q^{-}) = f(71) \approx 5000 + 10000/71 + 2 * 71 \approx 5283$$

და

$$C(q_0) = f_0(q_0) = f_0(500) \approx 4000 + 10000/500 + 2 * 500 \approx 5020.$$

შესაბამისად, $q^* = 500$.

თავი 4. ლეონტიევის მოდელი

4.1. პროდუქტიული მატრიცები

ლეონტიევის მოდელი საშუალებას იძლევა განისაზღვროს ეკონომიკური სისტემის წარმოების ეფექტურობა აუცილებელი დანახარჯის მოცულობის შესახებ არსებული ინფორმაციის მეშვეობით.

დავუშვათ, რომ არსებობს ეკონომიკური სისტემა, რომელიც შედგება n დარგისაგან, რომლებიც უშვებენ n სახის პროდუქციას (თითოეული დარგი უშვებს ზუსტად ერთი სახის პროდუქციას).

გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ k დარგის მიერ k–ური პროდუქციის წარმოებისათვის საჭიროა a_{ik} ერთეული i–ური პროდუქცია, რომელსაც უშვებს i–ური დარგი. დანახარჯების ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

	I პროდუქც.	....	K პროდუქც.	....	n პროდუქც.
1 დარგი	a_{11}	....	a_{1k}	....	a_{1n}
....	....	....	....	....	....
i-ური დარგი	a_{i1}	....	a_{ik}	....	a_{in}
....	....	....	....	....	....
n-ური დარგი	a_{n1}	....	a_{nk}	....	a_{nn}

იგივე ცხრილი მატრიცის სახით:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ik} \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

მიღებული მატრიცა არის მატერიალური დანახარჯების ანუ ტექნოლოგიური მატრიცა.

A მატრიცა გვაწვდის ინფორმაციას დარგთაშორისი კავშირის სტრუქტურის შესახებ, არსებულ საზოგადოებრივი წარმოების ტექნოლოგიაზე და გამოიყენება მიმდინარე და ხანგრძლივ ვადიან დაგეგმვაში.

დავუშვათ, რომ ტექნოლოგია უცვლელია (სტაციონარულია) და წარმოება კი - წრფივი. უკანასკნელი ნიშნავს, რომ თუ k-ური პროდუქციის ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა a_{ik} ერთეული i-ური პროდუქტი, მაშინ x_k ერთეული k-ური პროდუქტის საწარმოებლად საჭიროა $a_{ik}*x_k$ ერთეული i-ური პროდუქტი. დავუშვათ, რომ დროის რაღაც შუალედში უშვებენ x_1 ერთეულ ერთი სახის პროდუქციას, x_2 ერთეულ ორი სახის პროდუქციას და ა.შ. x_n ერთეულ n სახის პროდუქციას.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ამ სვეტს ეწოდება წარმოების სვეტი ანუ სხვა სიტყვებით დარგთა მუშაობის რეჟიმი. მოცემული სვეტის დროს i-ური პროდუქციის წარმოების დანახარჯები არის:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\text{, სადაც } i=1,\ldots,n.$$

ამ სიდიდეებისაგან შედგება მატერიალური დანახარჯების სვეტი წარმოების სფეროში.

მატერიალური დანახარჯების მატრიცა $A\geq 0$ პროდუქტიულია, თუკი არსებობს ისეთი წარმოების სვეტი $x>0$, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა:

$$Ax<x.$$

$$Ax=\begin{pmatrix} \sum a_{1k}x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum a_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

ეს უტოლობა ნიშნავს, რომ არსებობს მუშაობის თუნდაც ერთი რეჟიმი მოცემულ ეკონომიკურ სისტემაში, რომლის დროსაც თითოეული პროდუქტი იწარმოება უფრო მეტი, ვიდრე იხარჯება მის წარმოებაზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ რეჟიმში წარმოების სფერო ქმნის დამატებითი პროდუქტის დადებით სვეტს, რომელიც შემდეგნაირად გამოისახება:

$$x - Ax > 0.$$

განვიხილოთ შემდეგი თეორემა.

<u>**თეორემა**</u>: ნებისმიერი არაუარყოფითი კვადრატული მატრიცისათვის $A \geq 0$ არსებობს შემდეგი პირობები, რომლებსაც ის აკმაყოფილებს:

1. მატრიცა პროდუქტიულია;
2. ნებისმიერი სვეტისათვის $c>0$ არსებობს მხოლოდ ერთიწარმოების სვეტი $x>0$ და მასთან ისეთი, რომ $x-Ax= c$;
3. წარმოების სვეტი $x>0$, რომლის შექმნის დანახარჯები აკმაყოფილებს პირობას $Ax \geq x$, არ არსებობს;
4. A მატრიცის უდიდესი საკუთარი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\lambda_A = \lambda_{max} < 1.$$

ზემოთ ნათქვამი აღნიშნავს, რომ ერთ-ერთი პირობის შესრულების შემთხვევაში სრულდება დანარჩენი სამიც. $\lambda_A < 1$ უტოლობის შესრულება გულისხმობს, რომ მატრიცა პროდუქტიულია.

<u>***მაგალითი***</u>: მოცემულია მატრიცა (ცხრილის სახით):

A =	1/3	1/2
	1/12	1/4

უნდა ვუპასუხოთ შემდეგ შეკითხვას: არის თუ არა მატრიცა პროდუქტიული?

ვიპოვოთ მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობა :

$$(1/3 - \lambda)(1/4 - \lambda)=1/24,$$
$$\lambda^2 -7/12\lambda + 1/24 = 0,$$
$$\lambda_1=1/12 \quad \lambda_2=1/2.$$

$\lambda_{max}=1/2<1$, ანუ მატრიცა პროდუქტიულია.

იმავე თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუკი მატერიალური დამახარჯების მატრიცა პროდუქტიულია, მაშინ დამატებითი პროდუქტის

ნებისმიერი სვეტი შეიძლება წარმოებულ იქნას დარგების მუშაობის შესაბამისი რეჟიმის დროს:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ვთქვათ, მატრიცა A პროდუქტიულია, ხოლო c არის საბოლოო პროდუქტის სვეტი. ამ შემთხვევაში როგორ უნდა ვიპოვოთ მუშაობის ისეთი რეჟიმი, რომელიც უზრუნველყოფს ამ პროდუქციას? ამის გასაგებად შევადგინოთ მატრიცული განტოლება:

$$x - Ax = c,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

გადამრავლების შედეგად მიიღება განტოლებათა სისტემა:

$$(1- a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = c_1,$$
$$-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = c_2.$$

მოცემულ მაგალითს აქვს ამონახსნი ნებისმიერი c_1 და c_2-თვის.

4.2. შეზღუდვა რესურსებზე

რეალურ სიტუაციაში საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ წარმოების ისეთი შეზღუდული ფაქტორები, როგორც თითოეული დარგის სიმძლავრე (მატერიალური რესურსები) და სამუშაო ძალის საერთო რაოდენობა სისტემაში (შრომითი რესურსები):

L - არის მუშათა საერთო რიცხვი,

$l = (l_1 \ \ l_2 \ \ .... \ \ l_n)$ - არის სამუშაო ძალის დანახარჯების სტრიქონული მატრიცა. თითოეული მისი ელემენტი $l_k>0$ გვიჩვენებს მუშათა რაოდენობას, რომელიც აუცილებელია k-ური ერთეული პროდუქციის საწარმოებლად.

$$lx = (l_1 \ \ l_2 \ \ .... \ \ l_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} l_k x_k .$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს სამუშაო ძალის რაოდენობას, რომელიც აუცილებელია წარმოების სფეროში X სამუშაო რეჟიმის დროს. რა თქმა უნდა, ის არ უნდა აღემატებოდეს მუშების საერთო რიცხვს

$$lx \le L.$$

დარგების სიმძლავრის შეზღუდვა აღიწერება სვეტით m, ამასთან ის წარმოების სვეტს არ უნდა აღემატებოდეს – $x \le m$. შეზღუდული რესურსების დროს $c>0$ საბოლოო მოთხოვნა უკვე აღარ არის ნებისმიერი, თუმცა პროდუქტიულ სისტემას შეუძლია დამატებითი პროდუქტის ნებისმიერი

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix}$$

სტრუქტურა უზრუნველყოს, ე.ი. თანაფარდობა I და II დარგის დამატებითი პროდუქციის რაოდენობას შორის.

<u>**თეორემა**</u>: მოცემულია პროდუქტიული მატრიცა $A>0$, სვეტები $C>0$ და $m>0$, სტრიქონი $l>0$ და რიცხვი $L>0$, მაშინ უტოლობათა სისტემას აქვს ამონახსნი და მასთან მხოლოდ ერთი.

$$\begin{cases} x - Ax \le \alpha\, c, \\ lx \le L, \\ x \le m, \\ x \ge 0, \quad \text{როდესაც} \quad \alpha \to \max \end{cases}$$

<u>მაგალითი:</u> მოცემულია

A	1/3	½	C	4		m	4
	1/12	¼		5			3

$l = (4\ ;4)$ და $L = 40.$

ამოვხსნათ სისტემა:

$$x - Ax = \alpha\, c,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

შესაბამისი არითმეტიკული მოქმედებების შემდეგ ვიღებთ:

$$2/3\, x_1 - 1/2\, x_2 = 4\,\alpha,$$
$$-\,1/12\, x_1 + 3/4\, x_2 = 5\,\alpha,$$
$$x_1 = 12\,\alpha, \quad x_2 = 8\alpha.$$

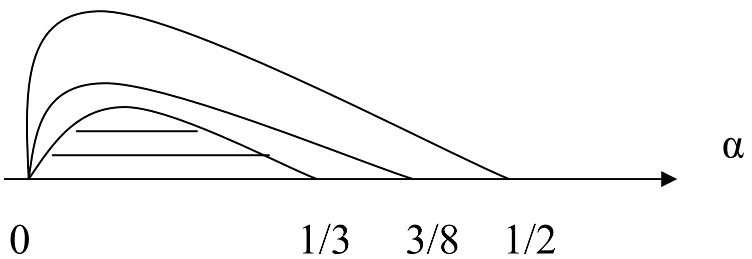
$$x = \begin{pmatrix} 12\,\alpha \\ 8\,\alpha \end{pmatrix}$$

მიღებული სვეტი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$lx \le L\ ,\ x \le m.$$

შესაბამისი ოპერაციის ჩატარების შემდეგ მიიღება უტოლობათა სისტემა:

$$\alpha \le 1/2,$$
$$\alpha \le 1/3,$$
$$\alpha \le 3/8.$$



სურ.18. მატრიცის უდიდესი საკუთარი მნიშვნელობა

α–ს უდიდესი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს სამივე პირობას არის 1/3 (სურ.18).

$\alpha_{max} = 1/3$, წარმოების სვეტს კი ექნება შემდეგი სახე:

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

საბოლოო პროდუქტი:

$$\alpha_{max}\, c = \begin{bmatrix} 4/3 \\ \end{bmatrix}$$

4.3. მომგებიანი მატრიცა

ეხლა დავუშვათ, რომ დარგები ყიდულობენ სისტემის შიდა ბაზარზე (ანუ ერთმანეთისაგან) მასალებს, რომელიც ესაჭიროებათ როგორც წარმოების საშუალებები. $p_i > 0$ არის i–ური პროდუქციის ერთეულის ფასი:

$p = (p_1 \quad p_2 \quad ..... \quad p_n)$ – ფასების სტრიქონული მატრიცა, რომლის თითოეული ელემენტი არის შესაბამისი პროდუქციის ერთეულის ფასი.

დავუშვათ, რომ $A = (a_{ik})$ არის მატერიალური დანახარჯების მატრიცა, მაშინ k-ური პროდუქციის ერთეულის წარმოების ფულადი დანახარჯი შეადგენს:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{ik}\,, \qquad k = 1, ..., n.$$

ამ სიდიდეებისაგან ეწყობა წარმოების დანახარჯების pA სტრიქონული მატრიცა:

$$pA = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{i1} \;.......\; \sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{in}\right).$$

კვადრატული მატრიცა $A \geq 0$ მომგებიანია, თუ არსებობს ისეთი სტრიქონი $p>0$, როცა $pA<p$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ფასების თუნდაც ისეთი სისტემა p, რომლის დროსაც თითოეული პროდუქტის ფასი მეტია მისი

წარმოების დანახარჯებზე და, შესაბამისად, ყველა დარგში უზრუნველყოფილია დადებითი მოგება, რომელიც გამოიხატება სხვაობით:

$$p - pA.$$

მატრიცის მომგებიანობის და პროდუქტიულობის პირობები ტოლფასია:

$$p\,(x - Ax) = (p - pA)\,x,$$

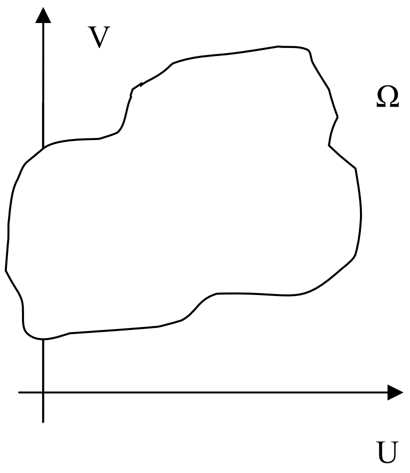
რაც ნიშნავს, რომ მოგება არის დამატებითი პროდუქციის ფულადი გამოხატულება, ხოლო დამატებითი პროდუქტი არის მოგების მატერიალური გამოხატულება.

თავი 5. მრავალკრიტერიალური ამოცანები

5.1. პარეტოს სიმრავლე

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას ხშირად გვაქვს საქმე ისეთ შემთხვევასთან, როდესაც საჭიროა ერთდროულად რამდენიმე პირობის შესრულება და, თითქმის ყოველთვის, ეს პირობები ურთიერთგამომრიცხავია.

განვიხილოთ (U,V) სიბრტყეზე სიმრავლე Ω (სურ.19).



სურ.19 სიმრავლე Ω

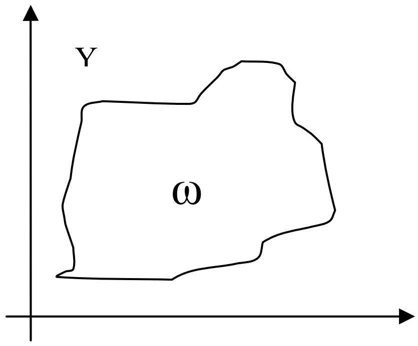
ამ სიმრავლის თითოეულ წერტილს ახასიათებს შემდეგი რამ: ან მასთან სიახლოვეში მყოფი ყველა წერტილი ეკუთვნის სიმრავლეს (მას ეწოდება სიმრავლის შიდა წერტილი), ან არ ეკუთვნის. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევებს, როდესაც საზღვრისპირა წერტილი სიმრავლეს ეკუთვნის. საზღვრისპირა წერტილების სიმრავლეს ეწოდება საზღვარი. Ω სიმრავლის წერტილები იყოფა სამ კლასად:

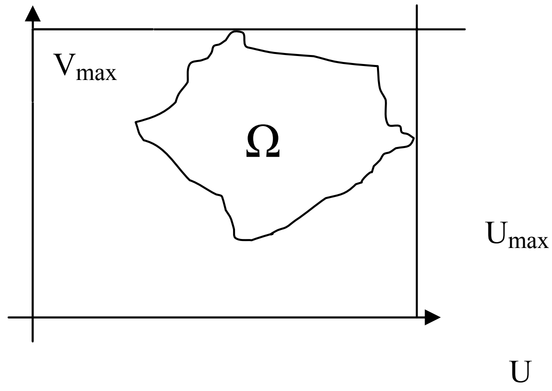
1. წერტილები, რომლებიც შეიძლება ისე გადავაადგილოთ, რომ ერთდროულად გავზარდოთ ორივე კოორდინატის მნიშვნელობა და თან წერტილები დავტოვოთ სიმრავლეში;
2. წერტილები, რომელთა გადაადგილებით იზრდება ერთი კოორდინატა და მეორე რჩება უცვლელი;
3. წერტილები, რომელთა გადაადგილებით მცირდება ერთი კოორდინატა მაინც.

მესამე კლასის წერტილების სიმრავლეს ეწოდება მოცემული სიმრავლის პარეტოს საზღვარი.

5.2. ამოცანის დასმა

მოცემულია ω სიმრავლე (x, y) სიბრტყეზე (სურ.20).





სურ.20. სიმრავლე ω

სურ.21. სიმრავლე Ω

ამ სიმრავლის თითოეულ წერტილში განსაზღვრულია ორი უწყვეტი ფუნქცია:

$$U = \Phi (x, y) \quad \text{და } V = \Psi (x, y).$$

ვიპოვოთ ω სიმრავლეზე წერტილი (x^0, y^0), რომელშიც

$$\Phi (x^0, y^0) = \max \quad \text{და } \Psi (x^0, y^0) = \max.$$

მცირეოდენი ანალიზის შემდეგ ნათელი ხდება, რომ მოცემულ ამოცანას ამონახსნი არა აქვს. გამოვსახოთ (U,V) სიბრტყეზე ყველა წერტილი, რომელთა კოორდინატები გამოითვლება ფორმულით:

$$U = \Phi (x, y), \quad V = \Psi (x, y), \text{ სადაც } \quad (x, y) \in \omega.$$

მიღებული სიმრავლე აღვნიშნოთ Ω–ით (სურ.21). სურათზე ნათლად ჩანს, რომ U და V-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა წერტილში, რომელიც მოთავსებულია სიმრავლის გარეთ. ასე რომ, ორივე მოთხოვნის ერთდროული შესრულება შეუძლებელია, შესაბამისად, საჭიროა კომპრომისული გადაწყვეტილების მიღება. ამის გაკეთება შესაძლებელია ორი არსებული მეთოდით:

1. **დათმობის მეთოდი** – მდგომარეობს იმაში, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირი აანალიზებს პარეტოს საზღვრისპირა წერტილებს და, ბოლოს და ბოლოს, თავის არჩევანს აჩერებს ერთ–ერთ მათგანზე;
2. **იდეალური წერტილის მეთოდი** – ამ დროს პოულობენ წერტილს, რომელიც ყველაზე ახლოს მდებარეობს უტოპიის წერტილთან (ამ წერტილის მიღწევა ვერ ხერხდება მიმდინარე შეზღუდვების პირობებში).

5.3. იდეალური წერტილის მეთოდი

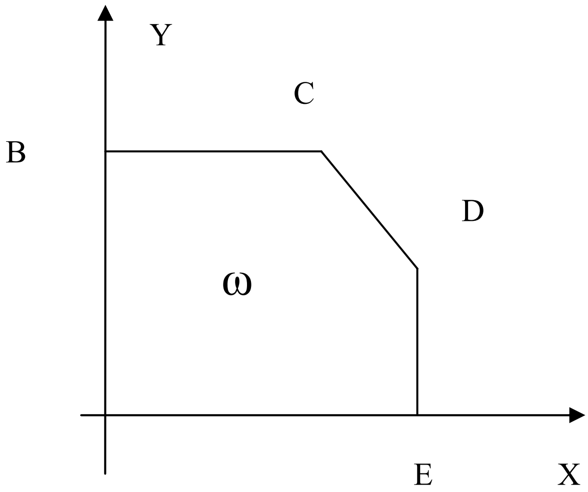
მოცემულია ω სიმრავლე (x, y) სიბრტყეზე, რომელიც განისაზღვრება უტოლობათა სისტემით (სურ.22):

$$0 \le x \le 4;$$
$$0 \le y \le 2;$$
$$x + 2y \le 6.$$

გარდა ამისა, მოცემულია ორი წრფივი ფუნქცია:

$$U = x + y + 2, \qquad V = x - y + 6. \qquad (5.1)$$

ვიპოვოთ $U \rightarrow \max$ და $V \rightarrow \max$.



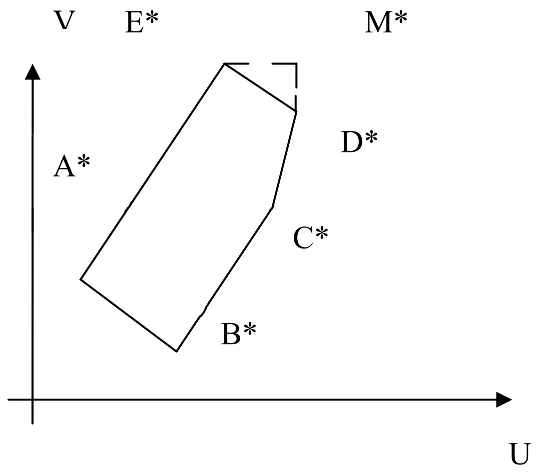
სურ.22. სიმრავლე ω

ω სიმრავლე წარმოადგენს ხუთკუთხედს, რომლის წვეროებსაც აქვთ შემდეგი კოორდინატები:

A(0,0); B(0,2); C (2,2); D (4,1); E (4,0).

U და V კრიტერიუმების წრფივობის გათვალისწინებით ABCDE ხუთკუთხედი გადადის A*B*C*D*E* ხუთკუთხედში (5.1) ფორმულის მიხედვით (სურ.23):

A*(2,6); B*(4,4); C* (6,6); D* (7,9); E* (6,10).



სურ.23. უტოპიის წერტილი

მოცემულ სურათზე პარეტოს საზღვარი არის D*E* მონაკვეთი. უტოპიის წერტილი მოცემულია და მდებარეობს M* (7,10) წერტილში. ჩვენი მიზანია ისეთი წერტილის პოვნა, რომელიც ყველაზე ახლოს მდებარეობს M* წერტილთან. გავატაროთ D*E* მონაკვეთზე წრფე, რომლის ტოლობა ასე გამოიხატება:

$$\alpha U + \beta V = \gamma.$$

α, β, γ პარამეტრების მოსაძებნად ჩავსვათ ტოლობაში ორივე წერტილის კოორდინატები:

$$6\alpha + 10\beta = \gamma,$$

$$7\alpha + 9\beta = \gamma.$$

გამოვაკლებთ რა პირველ ტოლობას მეორეს მივიღებთ:

$$-\alpha + \beta = 0.$$

დავუშვათ, რომ $\alpha = \beta = 1$, მაშინ $\gamma = 16$ და

$$U + V = 16$$

არის მონაკვეთის ტოლობა.

როგორც ცნობილია, ორ წერტილს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით (ჰიპოტენუზა):

$$\sqrt{(U_1 - U_2)^2 + (V_1 - V_2)^2}\,.$$

ჩავსვათ ჩვენი უტოპიის წერტილის კოორდინატები მოცემულ ფორმულაში:

$$Z = (U - 7)^2 + (V - 10)^2 \rightarrow \min.$$

რადგანაც $U = 16 - V$, ეს შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$Z = (9 - V)^2 + (V - 10)^2 \rightarrow \min.$$

კვადრატში აყვანით ვიღებთ:

$$Z = 2V^2 - 38V + 181.$$

მიღებული ტოლობა აღწერს პარაბოლას, რომლის წვეროა $V^0 = 19/2$, $Z^0 = 1/2$ (წვეროს კოორდინატებს ვპოულობთ Z ფუნქციის გაწარმოებით), მაშინ $U^0 = 16-19/2=13/2$. იდეალური წერტილია $M^0(13/2,\ 19/2)$. ხოლო X და Y მნიშვნელობებს ვპოულობთ წრფივი ტოლობებიდან:

$$X + Y + 2 = 13/2,$$

$$X - Y + 6 = 1/2,$$

$$X = 4, \quad Y = 1/2.$$

თავი 6. იერარქიები და პრიორიტეტები

6.1. განზომილება და შეთანხმებულობა

დავუშვათ, გვაქვს რაღაც საგნები (მაგალითად: ქვები) $S_1, \ldots, S_n$, მათი წონა ძალიან უმნიშვნელოა და საჭიროა მათი წონის შეფასება ასაწონი საშუაელებების გარეშე. არსებობს ამ პრობლემის გადაჭრის ბევრი მეთოდი. განვიხილოთ ორი მათგანი:

1. საგნებიდან ყველაზე მსუბუქი გამოვაცხადოთ ეტალონად, შევადაროთ მას ყველა დანარჩენი საგანი და გავყოთ თითოეულის მიახლოებითი წონა S_i n საგნების წონების ჯამზე და ვიპოვოთ მისი შედარებითი წონა. ამისათვის დაგვჭირდება $(n-1)$ შედარება;
2. მეორე მეთოდი მდგომარეობს საგანთა წყვილების შედარებაში. ჯერ ვადარებთ S_1 საგანს $S_2, \ldots, S_n$ საგნებს ცალ-ცალკე, შენდეგ S_2–ს $S_3, \ldots, S_n$–ს და ა.შ. მანამ, სანამ არ შეგვექმნება აზრი თითოეული წყვილი საგნის შედარებით წონაზე. ცდების რაოდენობა იქნება:

$$n\,(n-1)/2.$$

ამ დროს თითოეული საგანი მეთოდურად ედარება ყველა დანარჩენს. რა თქმა უნდა, მეორე მეთოდი უფრო მეტ დროს მოითხოვს, მაგრამ ის უფრო ზუსტია.

ნებისმიერ განზომილებას ახასიათებს შეცდომები, ყველაზე მძიმე შედეგი ამისა შეიძლება იყოს დასკვნების არაშეთანხმებულობა.

შედარების პრობლემა იქმნება ყველგან – ფიზიკური სიდიდეების გაზომვისა და ჩადენილი საქციელის შეფასების დროს. შედარებისას კარგი შედეგის მისაღებათ საჭიროა:

1. შესაფერის შედარებათა რიცხობრივი სკალის პოვნა,
2. შეუთანხმებლობის ხარისხის განსაზღვრა.

6.2. იდეალური განზომილება

დავუშვათ, რომ საჭიროა ერთმანეთს შევადაროთ $S_1, \ldots, S_n$ ქვების წონა. ჩვენთვის ცნობილია მათი იდეალურად ზუსტი წონა.

თანაფარდობა

$$a_{ik} = w_i / w_k \text{ , სადაც } \quad i, k = 1, \ldots, n,$$

გვიჩვენებს, რამდენად მეტია i-ური ქვის წონა k-ური ქვის წონაზე.

ჩავწეროთ თანაფარდობები კვადრატული მატრიცის სახით:

A	w_1/w_1	w_1/w_2	....	w_1/w_n
	w_2/w_1	w_2/w_2	....	w_2/w_n
	....	....	....	....
	w_n/w_1	w_n/w_2	....	w_n/w_n

გავაანალიზოთ ამ იდეალური შედარებითი მატრიცის ზოგიერთი მახასიათებელი:

1. ნებისმიერი i-სთვის ჭეშმარიტია ტოლობა $a_{ii} = 1$,
2. ნებისმიერი i და k-თვის ჭეშმარიტია ტოლობა $a_{ki} = 1/ a_{ik}$,
3. ნებისმიერი i, k და l-თვის ჭეშმარიტია ტოლობა $a_{ik} * a_{kl} = a_{il}$,
4. სვეტი:

w	w_1
	w_2
	......
	w_n

არის მატრიცის საკუთარი სვეტი საკუთარი მნიშვნელობით $\lambda = n$.

6.3. უკუსიმეტრიული და შეთანხმებული მატრიცები

განვიხილოთ n რიგის დადებითი კვადრატული მატრიცა:

A	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
	...	...	...	...	...
	a_{i1}	...	a_{ik}	...	a_{in}
	...	...	...	...	...
	a_{n1}	...	a_{nk}	...	a_{nn}

A მატრიცას ეწოდება უკუსიმეტრიული, თუ ნებისმიერი i და k-თვის სრულდება თანაფარდობა:

$$a_{ki} = 1/\, a_{ik}\,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $a_{ii} = 1$.

მატრიცას ეწოდება შეთანხმებული, თუ ნებისმიერი i, k და l–თვის სრულდება ტოლობა:

$$a_{ik} * a_{kl} = a_{il}.$$

შესაბამისად, შედარების იდეალური მატრიცა უკუსიმეტრიული და შეთანხმებულია.

<u>**თეორემა**</u>: დადებითი, უკუსიმეტრიული მატრიცა შეთანხმებულია მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი რიგი და უდიდესი საკუთარი მნიშვნელობა ერთმანეთს ემთხვევა ანუ $\lambda_{max} = n$.

6.4. შეთანხმებულობის ინდექსი

უკუსიმეტრიული შეთანხმებული მატრიცის უმნიშვნელოდ შეცვლით მისი მაქსიმალური საკუთარი მნიშვნელობაც უმნიშვნელოდ შეიცვლება. თუ A არის შეცვლილი დადებითი უკუსიმეტრიული მატრიცა, λ_{max} არის მისი უდიდესი საკუთარი მნიშვნელობა და, ამასთან ერთად, $\lambda_{max} = n$, მაშინ A მატრიცა შეთანხმებულია.

თუ $\lambda_{max} \neq n$, მაშინ გადახრის ხარისხად შეიძლება ავიღოთ თანაფარდობა:

$$(\lambda_{max} - n)/\,(n - 1).$$

მას ეწოდება მატრიცის შეთანხმებულობის ინდექსი. თუ შეთანხმებულობის ინდექსი არ აღემატება 0.1–ს, მაშინ ამბობენ, რომ არსებობს შეთანხმება.

6.5. უკუსიმეტრიული მატრიცის საკუთარი მახასიათებლის გამოთვლა

დადებითი უკუსიმეტრიული მატრიცის უდიდესი საკუთარი მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა მიახლოებითი საკუთარი სვეტის განსაზღვრა. ამისათვის არსებობს ოთხი გზა. განვიხილოთ მათგან ყველაზე მარტივი:

1. დავაჯამოთ თითოეული სტრიქონის ელემენტები და შედეგები ჩავწეროთ სვეტის სახით,
2. გავყოთ ამ სვეტის თითოეული ელემენტი მიღებულ ჯამზე.

შედეგად მიღებული X სვეტი არის მატრიცის საკუთარი სვეტი. მისი მეშვეობით შესაძლებელია მატრიცის შესაბამისი საკუთარი მნიშვნელობის პოვნა. ამისათვის საჭიროა:

1. გავამრავლოთ A მატრიცა x სვეტზე

$$Ax = y;$$

2. გავყოთ მიღებული y სვეტის ელემენტები X სვეტის შესაბამის ელემენტებზე

$$y_1 / x_1, \ldots, y_n / x_n,$$

და თუ

$$y_1 / x_1 = \ldots = y_n / x_n,$$

მაშინ ეს თანაფარდობა არის A მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება შესაბამის X სვეტს.

ჩვენს შემთხვევაში, საკუთარი მნიშვნელობის სახით ვიღებთ მის საშუალო არითმეტიკულს:

$$\bar{\lambda}_{max} = 1/n \sum_{i=1}^{n} y_i / x_i.$$

6.6. სკალირება

ამოცანის ამოხსნისას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს სკალის არჩევას.

მაგალითი: დავუშვათ, რომ A, B, C, D ობიექტების შეფასებისას მივიღეთ შედარებითი ცხრილი (ცხრილი 4), რომელსაც მივყავართ უკუსიმეტრიულ მატრიცამდე.

ცხრილი 4. შედარებითი ცხრილი

	A	B	C	D
A	1	5	6	7
B	1/5	1	4	6
C	1/6	1/4	1	4
D	1/7	1/6	¼	1

გამოთვლების შემდეგ ვიღებთ მის საკუთარ სვეტს, საკუთარ მნიშვნელობას და შედარების ინდექსს:

0.68
0.16
0.09
0.06

$$\overline{\lambda}^{p}{}_{\max} = 4.05,$$

$$\text{ინდექსი} = (4.05 - 4) / (4-1) = 0.017.$$

ამ სვეტის ელემენტების ჯამი უდრის 1-ს, ხოლო თვით სვეტს უწოდებენ პრიორიტეტების სვეტს, რომლის მნიშვნელობებია:

$$A = 68\% , \quad B = 16\% , \quad C = 9\% , \quad D = 6\%.$$

6.7. იერარქია

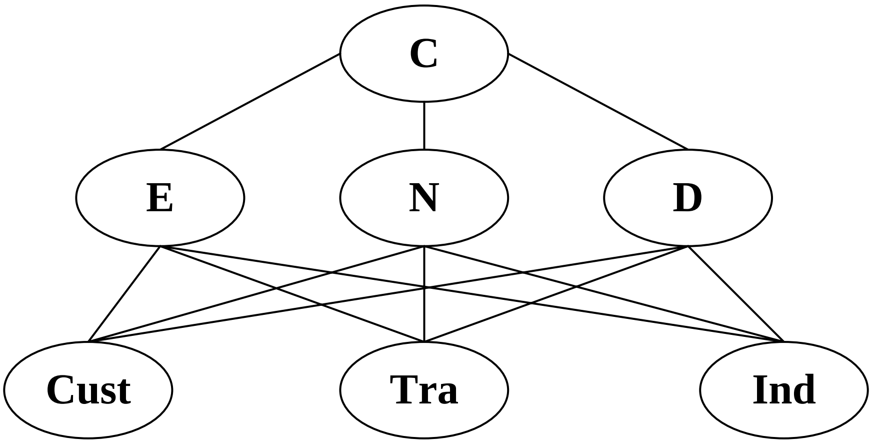
ანალიზის გაკეთებისას ელემენტების და მათი ურთიერთქმედების რიცხვი იმდენად დიდია, რომ სისტემა იყოფა ქვესისტემებად ანუ ხდება დაყოფა იერარქიებად.

იერარქია არის სისტემის განსაზღვრული სახე, რომელიც ეფუძნება აზრს, რომ მისი ელემენტები შეიძლება დაჯგუფდეს არადაკავშირებულ სიმრავლეებად. ითვლება, რომ იერარქიის თითოეულ ჯგუფში ელემენტები დამოუკიდებელია.

პირველი მოთხოვნა ფუნქციონალური სისტემის ანალიზისას არის იერარქიის აგება, ამისათვის ჯერ უნდა განისაზღვროს ყველა ელემენტი, რომელიც ეხება იერარქიას. შემდეგ ისინი იყოფა ჯგუფებად. ასე იქმნება იერარქიის დონეები, განისაზღვრება მიზნები, რომლისთვისაც ხდება ამოცანის შესწავლა და იგება იერარქია. ამის შემდეგ ხდება ელემენტების წყვილ-წყვილად შედარება და დგება შესაბამისი მატრიცები, ხოლო შედგენის კრიტერიუმი არის ელემენტის დონის მაჩვენებელი.

მაგალითი : ენერგიის გადანაწილება

დავუშვათ, რომ ქვეყანაში უნდა ჩატარდეს ენერგიის განაწილება მომხმარებლებს, ტრანსპორტსა და მრეწველობას შორის (სურ.24). ჩამოთვლილი ელემენტები წარმოადგენენ იერარქიის უდაბლეს დონეს. მიზნები, რომლითაც ფასდება ეს დონეები, არის წვლილი ეკონომიკის განვითარებაში (E), წვლილი გარემოს პირობების გაუმჯობესებაში (N) და წვლილი ნაციონალურ უშიშროებაში (D). ეს მიზნები იერარქიის მეორე დონეა. საერთო მიზანი არის შესაფერისი სოციალური და პოლიტიკური მდგომარეობა (C). ეს იერარქიის პირველი დონეა.



სურ.24. იერარქიის დონეები

შევადგინოთ სამი მიზნის წყვილი შედარების მატრიცა:

C	E	N	D
E	1	5	3
N	1/5	1	3/5
D	1/3	5/3	1

$$\lambda_{max} = 3,$$
$$\text{index} = 0.0$$

პრიორიტეტების სვეტს ექნება შემდეგი სახე:

w	0.65
	0.13
	0.22

ეხლა მოვახდინოთ ანალიზი თითოეული ობიექტის თვალთახედვიდან:

1. ეკონომიკის განვითარების თვალთახედვიდან -

E	cust	tra	ind
cust	1	3	5
tra	1/3	1	2
ind	1/5	1/2	1

w	0.65
	0.23
	0.12

$$\lambda_{max} = 3,$$
$$\text{index} = 0.0;$$

2. გარემოს პირობების თვალთახედვიდან -

N	cust	tra	ind
cust	1	2	7
tra	1/2	1	5
ind	1/7	1/2	1

w	0.59
	0.33
	0.08

$$\lambda_{max} = 3.01,$$
$$\text{index} = 0.01;$$

3. ნაციონალური უშიშროების თვალთახედვიდან -

D	cust	tra	ind
cust	1	2	3
tra	½	1	2
ind	1/3	1/2	1

w	0.54
	0.30
	0.16

$$\lambda_{max} = 3.0,$$
$$\text{index} = 0.01.$$

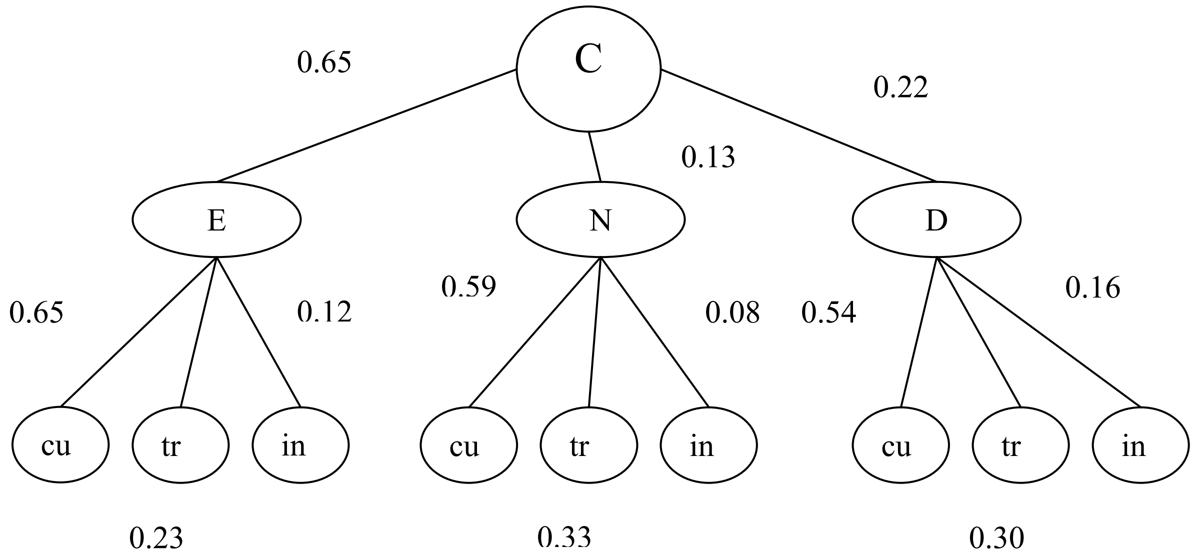
ჩავწეროთ მიღებული სვეტები ცხრილის სახით:

0.65	0.59	0.54
0.23	0.33	0.30
0.12	0.08	0.16

გავამრავლებთ რა ამ მატრიცას W სვეტზე, ვიპოვით იერარქიის მესამე დონის პრიორიტეტების სვეტს:

0.62
0.26
0.12

გამოთვლების საფუძველზე ვღებულობთ, რომ მომხმარებლებზე უნდა გამოიყოს ენერგიის 62%, ტრანსპორტზე - 26% და მრეწველობაზე - 12% (სურ.25).



სურ.25. რესურსების გადანაწილება

ნაწილი III. სტოქასტიკური მეთოდები

თავი 7. მათემატიკური სტატისტიკა

ნებისმიერი რაოდენობრივი ანალიზის პირველი ეტაპი მდგომარეობს საჭირო ინფორმაციის მოპოვებაში. მონაცემთა შეგროვებისათვის კი არსებობს მრავალი მეთოდი: არსებული მასალების გამოყენება, გამოკითხვა, დაკვირვება. მიღებული შედეგები შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ცხრილების მეშვეობით, გრაფიკულად (ჰისტოგრამების, სვეტური დიაგრამების, წრფივი გრაფიკების, სექტორული დიაგრამების სახით). მიღებული მონაცემების დამუშავება ხდება სხვადასხვა სახის სტატისტიკური მაჩვენებლების მეშვეობით. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

7.1. საშუალო არითმეტიკული, მოდა, მედიანა

საშუალო მაჩვენებელი არის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი სტატისტიკური მაჩვენებელი, რომელიც წარმოდგენას იძლევა რაიმე ცვლადის ცენტრალური, ტიპური მნიშვნელობის შესახებ (მაგალითად: საშუალო ხელფასი, წარმოების საშუალო მოცულობა და ა.შ.).

ყველაზე ფართოდ გავრცელებული საშუალო სტატისტიკური მაჩვენებელი არის **საშუალო არითმეტიკული**, რომელიც მიიღება ცვლადის ყველა მნიშვნელობის ჯამის გაყოფით მათ რაოდენობაზე (თუმცა მისი სიმარტივის გამო ამჯერად მასზე არ შევჩერდებით):

$$\bar{X} = \sum X / n .$$

კიდევ ერთი მაჩვენებელი არის **მოდა**, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს როგორც მნიშვნელობა, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება მონაცემთა ნაკრებში. მოცემულ მნიშვნელობა უფრო წარმომადგენლობითად და საიმედოდ მიჩნეულია, ვიდრე საშუალო არითმეტიკული.

<u>მაგალითი 1</u>: ცხრილში (ცხრილი 5) მოცემულია ორგანიზაციაში მომუშავეთა პირთა გაცდენათა რაოდენობა სამი კვირის განმავლობაში.

ცხრილი 5. ორგანიზაციაში გაცდენათა რაოდენობები

მუშათა ოდენობა, რომლებიც არ გამოცხადდნენ სამუშაოზე	0	1	2	3	4
გაცდენილი დღეების რაოდენობა	2	8	6	3	2

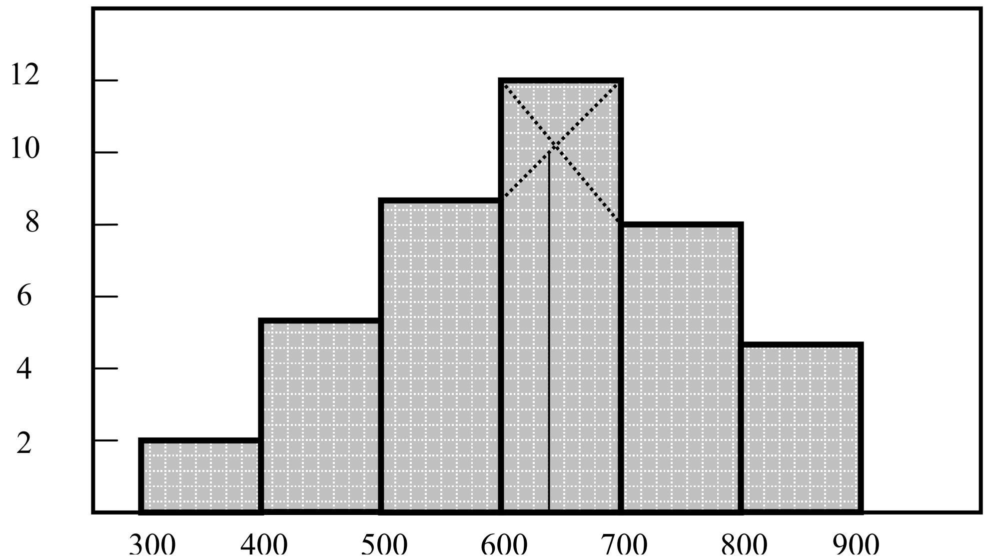
სიხშირეთა ცხრილიდან ჩანს, რომ ყველაზე ხშირად სამუშაოზე არ ცხადდება თითო მუშა. შესაბამისად მოდა 1-ის ტოლია. მოცემულ შემთხვევაში ცხრილი საკმაოდ მარტივია და მოდის პოვნაც სირთულეს არ წარმოადგენს, მაგრამ როგორ მოვიქცეთ ისეთ შემთვევაში, როდესაც ცხრილი შეიცავს დაჯგუფების ინტერვალებს?

მ*აგალითი 2*: განვიხილოთ 40 მუშაკისგან შემდგარი ჯგუფების კვირის შემოსავალი (ცხრილი 6):

ცხრილი 6. ყოველკვირეული შემოსავლები

კვირის შემოსავალი	300- 400 – 500 – 600 - 700 - 800 - 900				
მუშაკების რაოდენობა	2	5	9	12	8	4

ცხრილი 6-დან ჩანს, რომ ყველაზე ხშირად მეორდება ინტერვალი 600 - 700. აქედან შეიძლება გამოვითვალოთ მოდის საშუალო მნიშვნელობა, რომელიც იქნება 650-ის ტოლი, თუმცა ეს მნიშვნელობა არ იქნება ზუსტი. უფრო საიმედო მნიშვნელობის მისაღებად გამოიყენება ე.წ. ჰისტოგრამები (სურ.26)



სურ.26. მოდის მნიშვნელობა

როგორც სურ.26-დან ჩანს, მოდის ზუსტი მნიშვნელობა არის დაახლოებით 643. რაც შეეხება **მედიანას**, ეს არის საშუალო მაჩვენებელი, რომელიც მიიღება კლებადობის ან ზრდადობის მიხედვით დალაგებული მონაცემებიდან ცენტრალურის ამორჩევით. იმისათვის, რომ გავიგოთ რიგით მერამდენე მონაცემია მედიანა, გამოიყენება მარტივი ფორმულა:

$$(n + 1) \ / \ 2.$$

შესაბამისად, თუ მონაცემთა ჩამონათვალი შედგება ხუთი ელემენტისაგან, მაშინ მედიანა არის ელემენტი ნომერი (5+1)/2=3.

ახლა კი დავუბრუნდეთ პირველ მაგალითს და გამოვთვალოთ მისი მედიანა. ცხრილის მიხედვით, დღეების საერთო რაოდენობა არის 21–ის ტოლი, აქედან მედიანა არის (21 + 1) / 2 = 11. განვსაზღვროთ, რომელი მაჩვენებელი შეესაბამება 11-ს. ჩვენ ვიცით, რომ 100%-იანი დასწრება სამუშაო ადგილზე იყო ორი დღის განმავლობაში, ხოლო 8 დღის განმავლობაში კოლექტივს აკლდა თითო მუშაკი, შესაბამისად 11-ს შეესაბამება 2-ის ტოლი მაჩვენებელი ანუ მედიანა უდრის 2 მუშაკს.

ჩამოთვლილი სამი საშუალო მაჩვენებლიდან თითოეულს გააჩნია თავისი უპირატესობები და ნაკლოვანებები.

7.2. ვარიაცია

ვარიაცია ეს არის მაჩვენებელი, რომლის მეშვეობითაც შეიძლება განისაზღვროს მონაცემთა გაფანტულობის დონე, ანუ ეს არის სხვაობა მონაცემთა განაწილების ყველაზე უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის.

<u>მაგალითი</u> 1: მოცემულია საწარმოს ყოველკვირეული შემოსავალი 10 კვირის განმავლობაში: 12, 20, 15, 8, 5, 14, 22, 13, 10, 17. ვარიაციის გასარკვევად ვიღებთ მაქსიმალურ (22) და მინიმალურ (5) მნიშვნელობებს და ვიგებთ მათ შორის სხვაობას 22 - 5 = 17.

<u>მაგალითი</u> 2: ცხრილში (ცხრილი 7) მოყვანილია 15 სხვადასხვა აქცია, რომლის კოტირება ხდება ლონდონის საფონდო ბირჟაზე:

ცხრილი 7 აქციების კოტირებების ცხრილი

2.20	1.50	3.00	5.55	4.42
3.17	0.96	7.83	1.65	2.58
2.10	0.58	1.75	1.20	3.74

დავალაგოთ ეს მაჩვენებლები ზრდადობის მიხედვით:

0.58, 0.96, 1.20, 1.50, 1.65, 1.75, 2.10, 2.20, 2.58, 3.00, 3.17, 3.74, 4.42, 5.55, 7.83.

მოცემულ შემთხვევაში უფრო მიზანშეწონილი იქნება გამოვიყენოთ ვარიაციის ერთ-ერთი სახეობა - **“შუა კვარტილი”,** ანუ სხვაობა უდიდეს და უმცირეს კვარტილებს შორის (კვარტილი არის მონაცემთა სიმრავლის ერთი მეოთხედი ნაწილი). მოცემული მნიშვნელობა გვიჩვენებს ვარიაციას მონაცემთა ცენტრალური 50%-ისათვის:

ქვედა კვარტილი $Q_1= (n+1)/4 = (15+1)/4=4$ ელემენტი,

ზედა კვარტილი $Q_2= 3/4\ (n+1)= 3/4\ (15+1)= 12$ ელემენტი,

ანუ

$Q_1=1.50$,

$Q_2=3.74$,

$Q_1 - Q_2 =3.74 – 1.50 = 2.24$.

7.3. საშუალო კვადრატული გადახრა

საშუალო კვადრატული გადახრა არის ვარიაციის სახე, რომელიც მიიღება საშუალო არითმეტიკულსა და თითოეულ მნიშვნელობას შორის არსებული გადახრის კვადრატების საშუალო მნიშვნელობის ჯამის კვადრატული ხარისხის ფესვიდან ამოღებით:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}},$$

ხოლო მნიშვნელობათა განმეორების სიხშირეთა ცხრილის არსებობის შემთხვევაში:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - (\bar{x})^2}\ .$$

მაგალითი: მონაცემები წარმოდგენილია ცხრილის სახით (ცხრილი 8).

ცხრილი 8 სასაქონლო მარაგები

სასაქონლო მარაგების ერთეულები	3	4	5	6	7	8	9	10
დღეების რაოდენობა	4	12	22	20	16	12	8	6

მოცემული ცხრილის (ცხრილი 8) მეშვეობით ვიპოვოთ საშუალო კვადრატული გადახრა:

x	f	fx	fx^2
3	4	12	36
4	12	48	192
5	22	110	550
6	20	120	720
7	16	112	784
8	12	96	768
9	8	72	648
10	6	60	600
სულ	100	630	4298

საიდანაც

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{630}{100} = 6.3\,,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4298}{100} - (6.3)^2} = 1.81\,.$$

7.4. დისპერსია, ვარიაციის კოეფიციენტი, ასიმეტრიის მაჩვენებელი

დისპერსია ეს არის ვარიაციის სახე, რომელიც მიიღება საშუალო კვადრატული გადახრის მაჩვენებლის კვადრატში აყვანით.

ვარიაციის კოეფიციენტი არის ვარიაციის განსაკუთრებული მაჩვენებელი, რომელიც მიიღება საშუალო კვადრატული გადახრის და საშუალო არითმეტიკულის შეფარდებით და გამოიხატება პროცენტებში.

ცნობილია, რომ საშუალო მაჩვენებლების მნიშვნელობები იცვლება განაწილების ფორმის მიხედვით. მაგალითად, თუ მონაცემები სიმეტრიულია, მაშინ საშუალო არითმეტიკულის, მოდისა და მედიანის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა. თუ განაწილება დადებითად სიმეტრიულია, მაშინ

საშუალო არითმეტიკული არის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო მოდა უმცირესი. ასიმეტრიის განსაზღვრა შემდეგნაირად არის შესაძლებელი:

ასიმეტრია = (საშუალო არითმეტიკული - მოდა)/ საშ.კვადრატული გადახრა

ან

ასიმეტრია = 3*(საშუალო არითმეტიკული - მედიანა)/საშ.კვადრატული გადახრა.

თუ მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ განაწილება სიმეტრიულია. დადებითი მნიშვნელობის დროს ადგილი აქვს დადებით ასიმეტრიას, უაყოფითის შემთხვევაში – უარყოფით ასიმეტრიას.

თავი 8. პროგნოზირების მეთოდები

8.1. ზოგადი დახასიათება

პროგნოზირება თავისი ხასიათით დაკავშირებულია დროსთან – მისი მეშვეობით ჩვენ ვცდილობთ განვსაზღვროთ მომავალი აწმყოში. ასეთი „განსაზღვრის" მეთოდები ძალიან მრავალფეროვანია – ინტუიციიდან და ისტორიული ანალოგიებიდან დაწყებული და ექსპერტული შეფასებებით და რთული ეკონომეტრიკული მოდელებით დამთავრებული. ამიტომ ამა თუ იმ სიტუაციის განვითარების პროგნოზირების აუცილებლობა ქმნის პრობლემას, რომელიც დაკავშირებულია პროგნოზირების კონკრეტული მეთოდის არჩევასთან. ეს არჩევანი დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე: მონაცემების არსებობა (წარსული გამოცდილების რიცხობრივი გამოხატულება), შესრულების დასაგეგმი მომენტი და პროგნოზის სასურველი სიზუსტე, გარდა ამისა, დროითი და ღირებულებითი დანახარჯები მის შედგენაზე.

სწორედ ამიტომ, იმის მიხედვით, თუ რა დროის პერიოდზე დგება პროგნოზი, არსებობს:

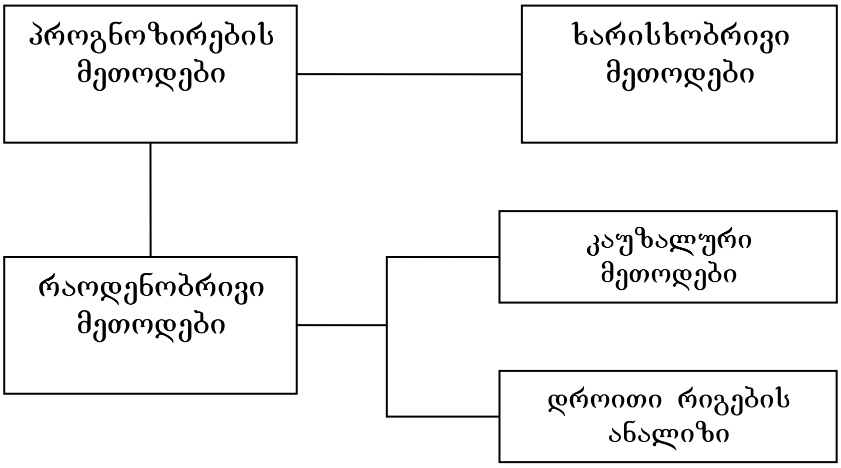
- მოკლევადიანი პროგნოზი (ერთი კვარტლიდან ერთ წლამდე);
- საშუალოვადიანი პროგნოზი (ერთი წლიდან სამ წლამდე);
- გრძელვადიანი პროგნოზი (სამი წელი და მეტი).

ბუნებრივია, რომ რაც უფრო მცირეა დროის შუალედი არსებულ და პროგნოზირებად მდგომარეობას შორის, მით უფრო რეალური იქნება მონაცემები. არსებობს პროგნოზების შედგენის მეთოდების ორი ჯგუფი: რაოდენობრივი და ხარისხობრივი (სურ.27).

ხარისხობრივი ანუ ექსპერტული მეთოდები (Qualitative Methods) დგება სპეციალისტების შეხედულებების მიხედვით.

რაოდენობრივი მეთოდები (Quantative Methods) ეფუძნება მონაცემთა მასივების დამუშავებას და, თავის მხრივ, იყოფა **კაუზალურ** ანუ მიზეზ – შედეგობრივ (Causal) და **დროითი რიგების ანალიზის** (Time Series Methods) მეთოდებად.

იმ დაშვებით, რომ წარსულში მომხდარი ფაქტი გვაძლევს მომავლის შეფასების შესაძლებლობას, დროითი რიგების ანალიზი წარმოადგენს წარსულის ტენდენციების გამოვლენის და მათი მომავალში გაგრძელების საშუალებას.



სურ.27. პროგნოზირების მეთოდები

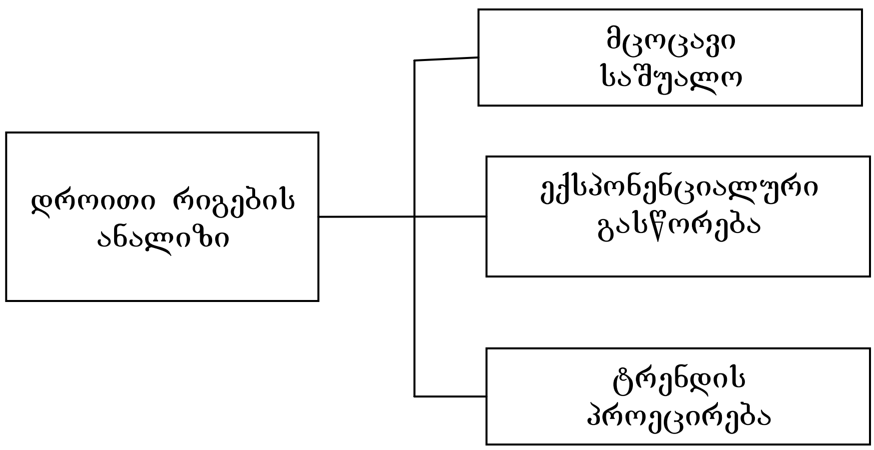
კაუზალური მეთოდები გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც მოსაძებნი მდგომარეობა დამოკიდებულია არა მარტო დროზე, არამედ სხვადასხვა ცვლადზე. მათემატიკური კავშირების მოძებნა ამ ცვლადებს შორის წარმოადგენს პროგნოზირების კაუზალური მეთოდის არსს.

8.2. დროითი რიგების ანალიზი

დროითი (ქრონოლოგიური, დინამიკური) რიგი ეწოდება გარკვეული მაჩვენებლის მნიშვნელობების თანმიმდევრობას დროში (მაგალითად, გაყიდვების მოცულობა). განასხვავებენ დროითი რიგის ორ ტიპს: მომენტალური, როდესაც მაჩვენებლის მნიშვნელობა ეკუთვნის დროის გარკვეულ პერიოდს, და ინტერვალური, როდესაც მითითებულია შესაბამისი დროითი ინტერვალები.

დროითი რიგები, როგორც წესი, მოცემულია ცხრილების სახით ან გრაფიკულად. პროგნოზირების ამოცანებში მათი გამოყენება ხდება რეალური მონაცემების არსებობისას და იმ პირობით, რომ წარსულში არსებული ტენდენცია შედარებით სტაბილურია. დროითი რიგი საშუალებას იძლევა განისაზღვროს რა მოხდება გარე ჩარევის გარეშე და, შესაბამისად, არ შეუძლია იწინასწარმეტყველოს ტენდენციის ცვლილება. ამიტომაც, ამ მეთოდს იყენებენ მოკლევადიანი პროგნოზის შედგენისას.

პროცესების განვითარება დგება გარკვეული მდგრადი ტენდენციებისაგან (ტრენდის) და ზოგიერთი შემთხვევითი შემადგენელისაგან, რომელიც გამოხატავს მაჩვენებლის გადახრას ტრენდიდან. ტრენდის წრფე მაჩვენებლის საფუძვლველზე გამოყოფს საერთო ტენდენციას. უმრავლეს შემთხვევაში, დინამიკური რიგი, გარდა ტრენდისა და შემთხვევითი გადახრებისა, ხასიათდება სეზონური ანუ ციკლური შემადგენელებით. ციკლური შემადგენელები განსხვავდებიან სეზონურისაგან ხანგრძლივობით და ამპლიტუდის არამდგრადობით. სეზონური კომპონენტის ხანგრძლივობა იზომება დღეებით, კვირეებით, თვეებით, ხოლო ციკლური – წლობით ან ათწლეულობით. შემდგომში გათვალისწინებული არ იქნება ციკლური შემადგენელი და სიმარტივისათვის შემოღებული იქნება დაშვება, რომ ტრენდი წრფივია. განვიხილოთ დროითი რიგების ანალიზის სამი მეთოდი (სურ.28).



სურ.28 დროითი რიგები

8.2.1. მცოცავი საშუალოს მეთოდი

მარტივი მცოცავი საშუალოს (Simple Moving Average) მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ პროგნოზირებადი დროისათვის მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება მაჩვენებლის უკვე არსებული მონაცემების გასაშუალოების ხარჯზე.

<u>მაგალითი</u>: დავუშვათ, რომ საქონლის გაყიდვათა მოცულობა აღწერილია დროითი რიგის მეშვეობით (ცხრილი 9):

ცხრილი 9. გაყიდული საქონლის მოცულობა

კვირის დღე	ორშაბ.	სამშაბ.	ოთხშაბ.	ხუთშაბ.	პარასკ.	შაბათი	კვირა
გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა	10	6	5	11	9	8	7

ხუთშაბათის დღისათვის პროგნოზის გასაკეთებლად, უნდა ავიღოთ წინა სამი დღის ფაქტობრივი მონაცემები და ვიპოვოთ საშუალო არითმეტიკული:

$$f_4 = (10 + 6 + 5) / 3 = 7.$$

შესაბამისად, მომდევნო დღეების პროგნოზი ასე გამოიყურება:

$$f_5 = 7.33,$$

$$f_6 = 8.33,$$

$$f_7 = 9.33,$$

$$f_8 = 8.$$

გამოსათვლელ ფორმულას კი ექნება შემდეგი სახე:

$$f_k = (X_{k-N} + X_{k-N+1} + ... + X_{k-1}) / N,$$

ან უფრო მოკლედ:

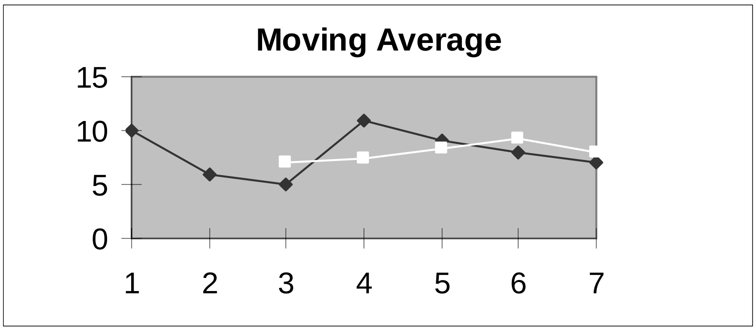
$$f_k = 1/N * \sum_{i=1}^{N} X_{k-i}, \qquad (8.1)$$

სადაც X_{k-i} არის რეალური მაჩვენებელი t_{k-i} დროისათვის;

N – გამოთვლებისას გამოყენებული წინამორბედი დღეების რიცხვი;

f_k - პროგნოზი დროის t_k მომენტისათვის.

განსხვავება რეალურ და პროგნოზირებულ მონაცემებს შორის მოცემულია გრაფიკზე. შავი მონაკვეთით აღნიშნულია ფაქტობრივი მონაცემები, თეთრით – პროგნოზირებული (სურ.29):



სურ.29. მცოცავი საშუალო

გაწონასწორებული მცოცავი საშუალოს (Weighted Moving Average) მეთოდით პროგნოზის გაკეთებისას მხედველობაში მიიღება თითოეული მაჩვენებლის წონა ანუ გავლენა მოვლენების განვითარებაზე. ეს მეთოდი მათემატიკურად ასე გამოისახება:

$$f_k = \sum_{i=1}^{N} W_{k-i} * X_{k-i} \Big/ \sum_{i=1}^{N} W_{k-i}\,,$$

სადაც X_{k-i} - არის რეალური მაჩვენებელი t_{k-i} დროისათვის;

N – გამოთვლებისას გამოყენებული წინამორბედი დღეების რიცხვი;

f_k - პროგნოზი დროის t_k მომენტისათვის;

W_{k-i} - წონა, რომელთანაც ერთად გამოთვლებისას გამოიყენება X_{k-i} მაჩვენებელი.

შენიშვნა: *მაჩვენებლის წონა ყოველთვის დადებითი რიცხვია. იმ შემთხვევაში, თუ ყველა წონა ერთნაირია, გამოთვლებისას გამოიყენება* (8.1) *ფორმულა.*

8.2.2. ექსპონენციალური გასწორების მეთოდი (Exponential Smoothing)

ამ მეთოდით პროგნოზის გაკეთებისას გაითვალისწინება წინა პროგნოზის გადახრა რეალური მაჩვენებლიდან (სურ.30):

$$f_k = f_{k-1} + \alpha\,(X_{k-1} - f_{k-1}),$$

სადაც X_{k-1} არის მაჩვენებლის რეალური მნიშვნელობა დროის t_{k-1} მომენტისათვის;

f_k - პროგნოზი დროის t_k მომენტისათვის;

α – გასწორების მუდმივა.

შენიშვნა: *α–ს მნიშვნელობა მერყეობს $0<\alpha<1$ დიაპაზონში. იგი განსაზღვრავს გასწორების ხარისხს და, როგორც წესი, მას ირჩევენ ცდებისა და შეცდომების უნივერსალური მეთოდით.*

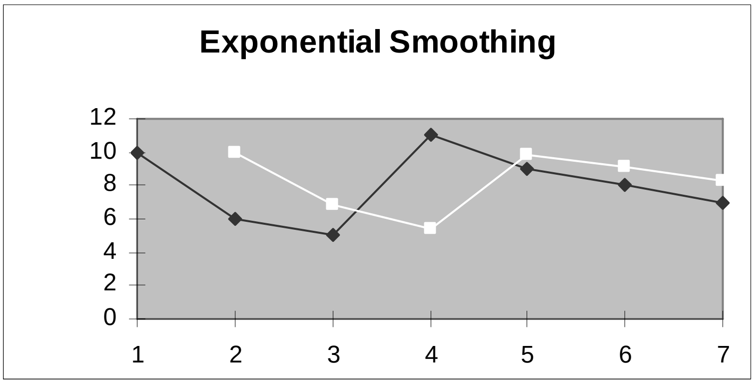
განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი მაგალითი იმ დაშვებით, რომ $\alpha = 0.2$:

$$f_2 = 8 + 0.2\,(10 - 8) = 8.40,$$
$$f_3 = 8.4 + 0.2\,(6 - 8.4) \approx 7.92,$$
$$f_4 = 7.92 + 0.2\,(5 - 7.92) \approx 7.34$$ და ა.შ.

შედეგად მივიღეთ ცხრილი 10.

ცხრილი 10. პროგნოზირებული მაჩვენებლები

t	1	2	3	4	5	6	7	8
X	10	6	5	11	9	8	7	-
f	-	8.4	7.92	7.34	8.07	8.26	8.21	7.93



სურ.30. ექსპონენციალური გასწორება

განსხვავება რეალურ და პროგნოზირებულ მონაცემებს შორის მოცემულია გრაფიკზე. შავი მონაკვეთით აღნიშნულია ფაქტობრივი მონაცემები, თეთრით – პროგნოზირებული (სურ.30).

8.2.3. წრფივი ტრენდის პროეცირების მეთოდი
(Trend Projection)

ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს წრფის აგებაში, რომელიც საშუალოდ ყველაზე ნაკლებად გადაიხრება წერტილების მასივიდან, რომელიც მოცემულია დროითი რიგების მეშვეობით:

$$X= a*t + b, \qquad (8.2)$$

სადაც, a და b – მუდმივებია. მათ საპოვნელად უნდა შესრულდეს შემდეგი მოქმედებები:

ცვლადი t-ს თითოეული მნიშვნელობისათვის (8.2) ფორმულის გამოყენებით გამოითვლება X ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობა, შემდეგ ხდება სხვაობის განსაზღვრა, მისი კვადრატში აყვანა და დაჯამება. მიღებული ფორმულით განისაზღვრება ფუნქცია:

$$\varphi\ (a,b) = \sum_{i=1}^{n} (a * t_i + b - X_i)^2 \rightarrow \min.$$

ფუნქცია მინიმალურ მნიშვნელობას იღებს იმ შემთხვევაში, თუ a და b სიდიდეები აკმაყოფილებენ შემდეგ წრფივ სისტემას, რომელსაც მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს:

$$a \sum_{i=1}^{n} t_i + bn = \sum_{i=1}^{n} X_{i,}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i * x_{i.}$$

განვიხილოთ მაგალითი (ცხრილი 11).

ცხრილი.11 დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ცვლადების ცხრილი

t_i	x_i	$t_i * x_i$	t_i^2
1	10	10	1
2	6	12	4
3	5	15	9
4	11	44	16
5	9	45	25
6	8	48	36
7	7	49	49
$\sum t_i=28$	$\sum x_i=56$	$\sum t_i x_i=223$	$\sum t_i^2=140$

შესაბამისი სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$28 * a + 7 * b = 56,$$
$$140 * a + 28 * b = 223,$$
$$a \approx - 0.04; \quad b \approx 8.14;$$

საძიებო ტრენდის განტოლება:

$$X = - 0.04 * t + 8.14,$$
$$t_8 = - 0.04 * 8 + 8.14 = 7. 82.$$

შენიშვნა: *პროგნოზის სიზუსტე შეიძლება შემოწმდეს კორელაციის კოეფიციენტის მეშვეობით.*

8.3. პროგნოზირების კაუზალური მეთოდები

ძალიან დიდი მონაცემთა ბაზის არსებობის შემთხვევაში გამოიყენება კაუზალური ანუ მიზეზ–შედეგობრივი მოდელი, რომელშიც პროგნოზირებადი სიდიდე არის ცვლადების ფუნქცია. მაგალითად: გაყიდვების მოცულობა შეიძლება დამოკიდებული იყოს პროდუქციის ფასზე, რეკლამის დანახარჯებზე, კონკურენტების მოქმედებაზე, შემოსავლის დონეზე და სხვა დამოუკიდებელ ცვლადებზე. თუკი შესაძლებელია ამ ცვლადებს შორის არსებული კავშირის მათემატიკურად კორექტულად ასახვა, მაშინ კაუზალური პროგნოზირების სიზუსტე საკმაოდ მაღალი იქნება.

განიხილავენ კაუზალური მეთოდის სხვადასხვა სახეობებს.

მრავლობით რეგრესიული მეთოდები (Multiple Regression Models) – რეგრესიული დამოკიდებულება სიდიდეებს შორის დგინდება სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე. ეს არის პროგნოზირების ყველაზე გავრცელებული რაოდენობრივი მეთოდი. რეგრესიული მეთოდების მეშვეობით ხდება ტრენდის პროეცირება, რომელშიც დგინდება დამოკიდებულება პროგნოზირებად მაჩვენებელსა და დროს შორის.

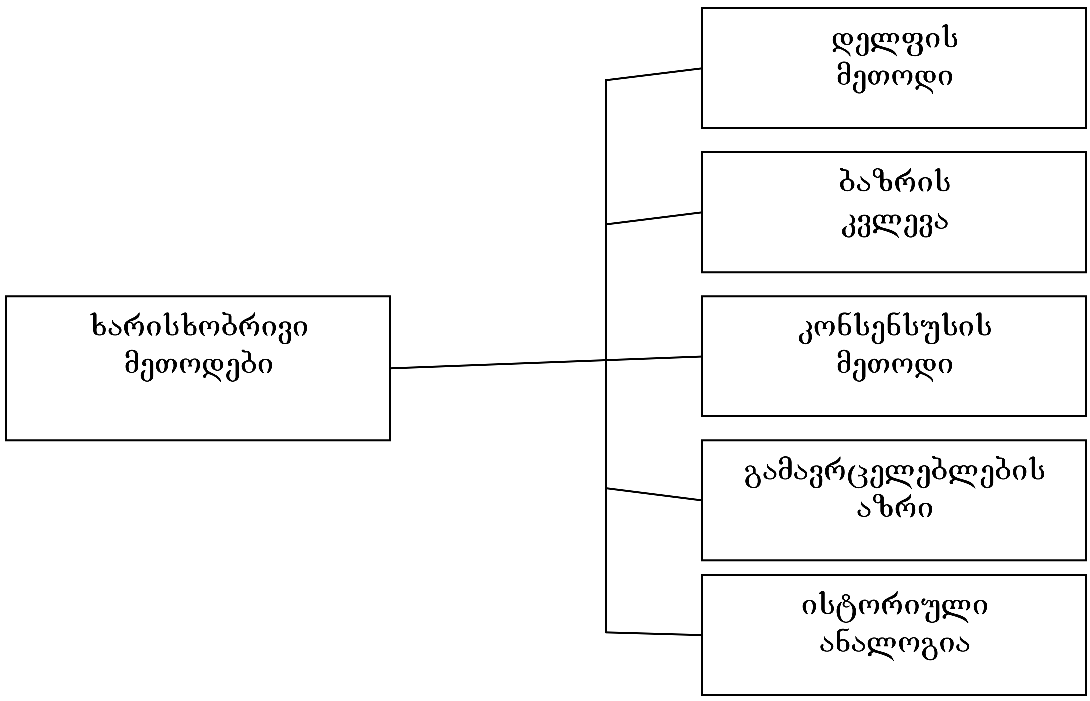
ეკონომეტრიკული მოდელი (Econometric Models) – იძლევა ეკონომიკურ ობიექტებსა და პროცესებს შორის კავშირის რაოდენობრივ აღწერას და გამოიყენება ეკონომიკის დინამიკის პროგნოზირებისათვის.

კომპიუტერული იმიტაცია (Computer Simulation) – ეს მოდელი არის შუამავალი რგოლი რეალობასა და ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელებს შორის. ამ მეთოდის გამოყენება მდებარეობს გამოთვლითი ტექნიკის და სისტემური პროგრამირების ზღვარზე.

შენიშვნა: *ყოველთვის არსებობს ისეთი მოდელები, რომლებიც არ ექვემდებარებიან მათემატიკური მოდელით შესწავლას. მათ განიხილავენ როგორც ჰუმანიტარულ მეთოდებს და სწორედ იმიტაციურ მოდელებზე გადის მოძრავი ზღვარი რეალობის შემსწავლელ ჰუმანიტარულ მეთოდებსა და მათემატიკურ მოდელებს შორის.*

8.4. პროგნოზირების ხარისხობრივი მეთოდები

იმ შემთხვევაში, თუკი რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენება შეუძლებელია ან ძალიან ძვირი ჯდება, გამოიყენება ხარისხობრივი მეთოდები, რომლებიც დგება ექსპერტული შეფასებების საფუძველზე (სურ.31).



სურ.31. ხარისხობრივი მეთოდები

დელფის მეთოდი (Delphi Method) ანუ ექსპერტული შეფასების მეთოდი წარმოადგენს პროცედურას, რომელიც საშუალებას იძლევა შეთანხმება იქნას მიღწეული განსხვავებული, მაგრამ ურთიერთდაკავშირებული სფეროების ექსპერტებს შორის. ეს ასე ხდება: თითოეულ ექსპერტს დამოუკიდებლად ეგზავნება კითხვარი შესაბამის თემაზე, ექსპერტების პასუხები და მათი მოსაზრებები საფუძვლად ედება შემდგომ კითხვარს, ის კვლავ ეგზავნება ექსპერტებს და ა.შ. მანამ, სანამ ისინი არ მივლენ საერთო შეთანხმებამდე.

ბაზრის კვლევა (Market Research) ანუ მომხმარებლის მოლოდინის მეთოდის დროს პროგნოზი დგება მომხმარებლის გამოკითხვის და შემდგომი სტატისტიკური დამუშავების საფუძველზე.

კონსენსუსის მეთოდი (Panel Consensus) – ამ შემთხვევაში ჟიურის მოსაზრება დგება ექსპერტთა ჯგუფის მოსაზრებების გაერთიანების და გასაშუალოების ხარჯზე.

გამავრცელებლების მოსაზრებები (Grass-roots forecasting) მეთოდი ეყრდნობა სავაჭრო აგენტების აზრს, რომლებიც უშუალოდ ურთიერთქმედებენ მყიდველთან.

ისტორიული ანალოგია (Historical Analogy) გამოიყენება მაშინ, როდესაც კეთდება საქონლის გაყიდვის პროგნოზი, რომელიც თავისი მახასიათებლებით ახლოა ადრე გამოშვებულთან (მაგალითად: პროდუქციის მოდიფიკაცია).

თავი 9. ორგანიზაციული სისტემების მართვა და რესურსების განაწილება

9.1. ორგანიზაციული სისტემის დახასიათება

ორგანიზაციული სისტემა ეს არის სისტემა, რომელიც შეიცავს ტექნიკას და ხალხის კოლექტივს, რომელთა ინტერესები დაკავშირებულია სისტემის ფუნქციონირებასთან. ერთი მხრივ, სისტემა არსებობს გარკვეული მიზნის მისაღწევად, მეორე მხრივ, სისტემის ელემენტებს ხშირად გააჩნიათ საკუთარი ინტერესები, რომლებიც არ ემთხვევა სისტემის ინტერესებს. ამის მიხედვით შეიძლება ორგანიზაციული სისტემის ფუნქციონირების ასპექტების ფორმალიზაცია თამაშთა თეორიის საზღვრებში.

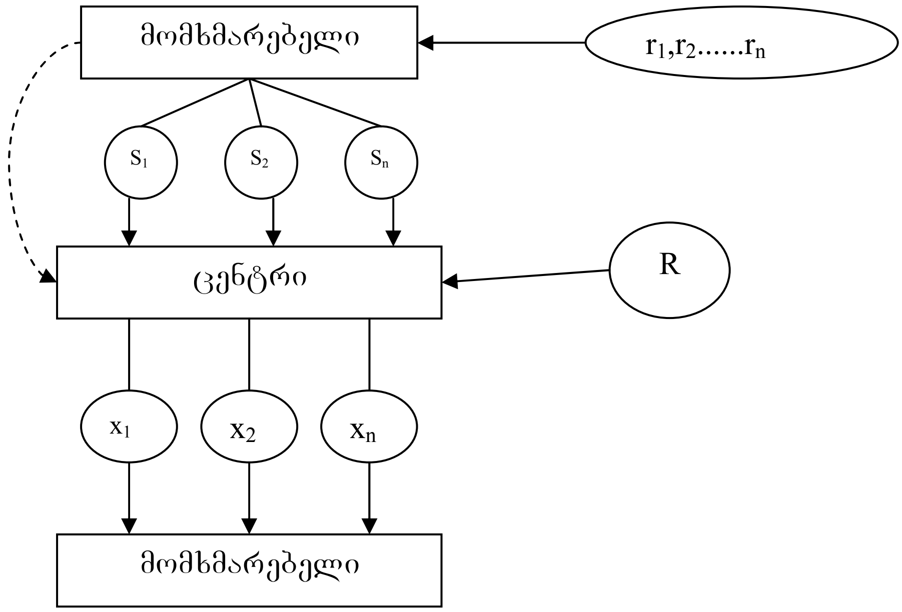
ამ თავში განიხილება უმარტივესი ორდონიანი ორგანიზაციული სისტემის მოდელი, რომელიც შედგება ცენტრისა და რამდენიმე ელემენტისაგან. ელემენტები (მომხმარებლები) წარუდგენენ ცენტრს მოთხოვნებს რაიმე რესურსის მისაღებად, ხოლო ცენტრი ამ მოთხოვნების გადახედვის საფუძველზე ანაწილებს მის მფლობელობაში მყოფ რესურსებს. თუ ყველა მოთხოვნის დაკმაყოფილება შეუძლებელია, საქმე გვაქვს **დეფიციტთან**.

მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია: ჩავთვალოთ, რომ არსებობს n რაოდენობის მომხმარებელი, რომელიც ცენტრისაგან ითხოვს S_i რაოდენობის რესურსს და, შესაძლოა, საჭირო ინფორმაციას ამ რესურსის შესახებ (რაც სურ.32-ზე აღნიშნულია პუნქტირით). შემდეგ ცენტრი, რომელსაც აქვს R რესურსი და დამატებითი ინფორმაცია მომხმარებლის შესახებ, ანაწილებს Xi-ურ რესურსს i-ურ მომხმარებელზე:

თუ $\sum_{i=1}^{n} S_i \le R$ (დეფიციტის არარსებობა),

მაშინ $X_1=S_1$, $X_2=S_2$, . . . , $X_n=S_n$.

მომხმარებლები ადგენენ საკუთარ მოთხოვნას რეალური r_i მოთხოვნილების საფუძველზე, რომლებიც უცნობია ცენტრისათვის. შეიძლება ითქვას, რომ Si არის მომხმარებელთა, როგორც იერარქიული თამაშის მონაწილეთა სტრატეგიები, თავის მხრივ, ცენტრის სტრატეგია არის Xn.



სურ.32. ორგანიზაციული სისტემა

9.2. პირდაპირი პრიორიტეტების მექანიზმი

აღნიშნული მექანიზმი გულისხმობს თითოეული მომხმარებლისათვის გარკვეული პრიორიტეტის მინიჭებას (Ai), მაშინ რესურსების განაწილება ხორციელდება შემდეგნაირად:

$$X_i = \min\{S_i, \gamma A_i S_i\},$$

სადაც γ არის საერთო პარამეტრი ყველა მომხმარებლისათვის.

თუ $A_1 = A_2 = \ldots\ldots = A_n = 1$, მაშინ:

$$X_i = \min\{S_i, \gamma S_i\} = \gamma S_i$$

(შემთხვევა Xi=Si არ არსებობს, რადგანაც მაშინ გამოვა, რომ დეფიციტი არ არსებობს).

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = R$$

ანუ

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda S_i = R,$$

საიდანაც

$$\lambda = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} S_i}.$$

მაგალითი: ხუთი მომხმარებლის მოთხოვნა: 5, 8, 12, 7, 8. ცენტრის ხელთ არსებული რესურსი R=32. როგორ უნდა განაწილდეს რესურსი პირდაპირი პრიორიტეტების მექანიზმის მიხედვით, როდესაც

$$\sum_{i=1}^{5} S_i = 5 + 8 + 12 + 7 + 8 = 40 > 32 = R\ ?$$

როგორც ჩანს პირობიდან, სახეზეა დეფიციტი, ანუ

$$\lambda = \frac{32}{40} = 0.8,$$
$$x_1 = 0.8 * 5 = 4,$$
$$x_2 = 0.8 * 8 = 6.4,$$
$$x_3 = 0.8 * 12 = 9.6,$$
$$x_4 = 0.8 * 7 = 5.6,$$
$$x_5 = 0.8 * 8 = 6.4.$$

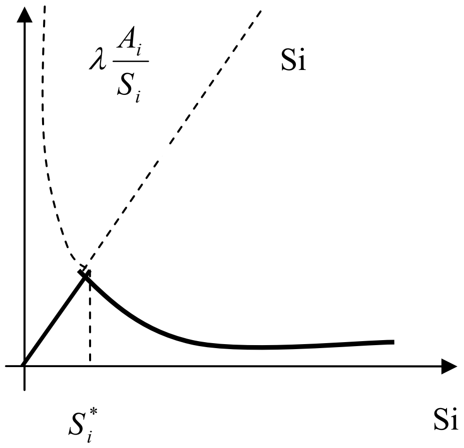
ამ მეთოდს გააჩნია ორი ნაკლი:

1. თითოეული მომხმარებელი იღებს იმაზე ნაკლებს ვიდრე სჭირდება;
2. დეფიციტის პირობებში მომხმარებელი იძულებულია ხელოვნურად გაზარდოს თავისი მოთხოვნა.

9.3 უკუპრიორიტეტების მექანიზმი

ეს მექანიზმი გულისხმობს, რომ რაც უფრო ნაკლები რესურსი ესაჭიროება მომხმარებელს, მით მეტია მისი გამოყენების ეფექტიანობა:

$$x_i = \min\{S_i, \lambda \frac{A_i}{S_i}\}$$



სურ.33. Xi ფუნქციის გრაფიკი

სურ.33-ზე გამოსახულია Xi ფუნქციის გრაფიკი, სადაც ჩანს, რომ მაქსიმუმი მიიღწევა S_i^* წერტილში, რომელიც წარმოადგენს ტოლობის ამონახსენს:

$$S_i^* = \lambda \frac{A_i}{S_i^*},$$

$$S_i^* = \sqrt{\lambda A_i},$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = \sqrt{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i},$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}}.$$

მაგალითი: მომხმარებლების პრიორიტეტებია: 8, 6, 12, 15, 11, რესურსი უდრის R=60. განსაზღვროთ მომხმარებელთა სტრატეგია უკუპრიორიტეტების მექანიზმის მიხედვით:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{60}{\sqrt{8} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{15} + \sqrt{11}} \approx 3.77,$$

$$S_1^* \approx 10.7,\ \ S_2^* \approx 9.2,\ S_3^* \approx 13.1,\ S_4^* \approx 14.6,\ S_5^* \approx 12.5.$$

ამ მექანიზმის დადებითი მხარეებია:

1. არ ხდება მოთხოვნების ხელოვნური გაზრდა;
2. მომხმარებელი იღებს იმდენს, რამდენსაც მოითხოვს.

ნაკლი კი შემდეგში მდგომარეობს:

S_i^*, როგორც წესი, ნაკლებია r_i , ამიტომ ცენტრი ვერ იღებს ინფორმაციას რეალურად არსებული დეფიციტის შესახებ.

9.4. საკონკურსო მექანიზმი

მას იყენებენ, როდესაც არ არის მიზანშეწონილი მოთხოვნების შეკვეცა. ასეთ დროს ცენტრი ატარებს კონკურსს. მომხმარებლები ატყობინებენ ცენტრს თავის Si მოთხოვნებს და Wi სიდიდეებს, რომლებიც ახასიათებენ ეფექტს, რომელთა მიღებასაც იმედოვნებენ მომხმარებლები. ამ მონაცემების მიხედვით დგება მომხმარებლის ეფექტიანობის მაჩვენებელი:

$$e_i = \frac{W_i}{S_i}.$$

ამის შემდეგ განიხილება მომხმარებელთა ყველაზე დიდი ეფექტიანობა. ყველაზე დიდი მაჩვენებლის მქონეს აძლევენ იმდენ რესურს, რამდენსაც მოითხოვს, შემდეგ სიდიდით მეორეს და ა.შ., სანამ რესურსი არ ამოიწურება.

მაგალითი: მომხმარებელთა მოთხოვნებია: 14, 18, 10, 15, 8, 14. ხოლო ეფექტიანობის მაჩვენებლები კი ასეთია: 36, 38, 25, 42, 28, 29. რესურსი R = 60. ეფექტიანობის მაჩვენებელი კი e_1 =2.57, e_2 =2.11, e_3 =2.5, e_4 =2.8, e_6 =3.5, e_6 =2.07:

$$e_5 > e_4 > e_1 > e_3 > e_2 > e_6\ ,$$

$$X_5 = 8 \quad 60-8=52,$$

$$X_4 = 15 \quad 52-15=37,$$

$$X_1 = 14 \quad 37-14=23,$$

$$X_3 = 10 \quad 23-10=13,$$

$$X_2 = X_6 = 0.$$

ამ მექანიზმის განხორციელებისას აუცილებელია კონტროლის მოქმედი სისტემის არსებობა.

9.5. ღია მართვის მექანიზმი

ყველა ზემოთხსენებული მექანიზმის შემთხვევაში მომხმარებლებს შეუძლიათ ინფორმაციის დამახინჯება. სწორედ ამიტომ, ღია მართვის მექანიზმი გულისხმობს სტიმულის არსებობას, რათა მომხმარებელმა ცენტრს მიაწოდოს რეალური ინფორმაცია. ამ შემთხვევაში რესურსების დანაწილება იყოფა რამოდენიმე ეტაპად:

1. რესურსი იყოფა ტოლ ნაწილებად: R/n, თუ $Si \leq R/n$, მაშინ ხდება მათი დაკმაყოფილება და მომხმარებელთა რიცხვი მცირდება n_1-მდე და რესურსი კი R_1-მდე;
2. ამ ეტაპზე ხდება რესურსი დანაწილება დარჩენილ მომხმარებლებს შორის და ა.შ. რესურსის ამოწურვამდე.

მაგალითი: მომხმარებელთა მოთხოვნებია: 12, 3, 6, 1, 5, 7, 10, 2. რესურსი R=40. მაშინ R/n=5.

$$(X_2 < 5) = 3,$$

$$(X_4 < 5) = 1,$$

$$(X_5 < 5) = 5,$$

$$(X_8 < 5) = 2,$$

$$R_1 = 40 - 3 - 1 - 5 - 2 = 29,$$

$$n_1 = 4.$$

შემდეგ ეტაპზე:

$$\frac{R_1}{n_1} = 7\frac{1}{4},$$

$$(X_3 < 7\frac{1}{4}) = 6,$$

$$(X_6 < 7\frac{1}{4}) = 7,$$

$$R_2 = 29 - 6 - 7 = 16,$$

$$n_2 = 2.$$

ამის მერე:

$$\frac{R_2}{n_2} = 8,$$

$$(X_1 > 8) = 12,$$

$$(X_7 > 8) = 10,$$

ამიტომ

$$X_1 = 8,$$

$$X_7 = 8.$$

9.6. ღია მართვა და ექსპერტთა გამოკითხვა

როდესაც საჭიროა მსხვილი პროექტის ფინანსირების მოცულობის განსაზღვრა, ტარდება ექსპერტთა გამოკითხვა. თითოეული ექსპერტი ასახელებს S რიცხვს [d; D] შუალედიდან. ამის მერე გამოითვლება საბოლოო X რიცხვი.

მაგალითი: ექსპერტებმა გამოთქვეს საკუთარი აზრი ყოველგვარი დამახინჯების გარეშე: $r_1=10$, $r_2=10$, $r_3=40$.

აქედან:

$$x=\frac{10+10+40}{3}=20 .$$

მაგრამ თუ მესამე ექსპერტი დაამახინჯებს საკუთარ აზრს $r_3=100$, მაშინ:

$$x=\frac{10+10+100}{3}=40 ,$$

რაც ემთხვევა მესამე ექსპერტის მიერ პირველად გამოთქმულ აზრს.

გადაწყვეტილებათა კოლექტიური მიღების თეორიაში ამ ქმედებას უწოდებენ **მანიპულაციას**.

ექსპერტმა, რომელიც ცდილობს მანიპულირებას, უნდა გადაჭრას ასეთი ამოცანა:

$$|x-r_i|\to \min ,$$

ანუ ის ცდილობს მინიმუმამდე დაიყვანოს სხვაობა თავის აზრსა და საშუალო მნიშვნელობას შორის. დავუშვათ, რომ ექსპერტთა მოსაზრებები დალაგებულია ზრდადობის მიხედვით:

$$S_1\le S_2\le ....\le S_n .$$

შემდეგ ხდება დამხმარე რიცხვების გამოთვლა:

$$v_i=D-(i-1)\frac{D-d}{n} ,$$

რის შემდეგადაც ყოველი i–თვის იღებენ ორ რიცხვს (Si ,Vi) შორის უმცირესს:

min {Si; Vi}.

და ბოლოს, ამ მინიმალურ მაჩვენებლებს შორის ამოირჩევა მაქსიმალური:

$$x^*=\max_{1\le i\le n}\min\{S_i;v_i\} .$$

ნაწილი IV. თამაშთა თეორია

თავი 10. თამაშთა თეორიის საფუძვლები

10.1. თამაშთა თეორიის გამოყენების საკითხები

მენეჯერს ხშირად უხდება გადაწყვეტილების მიღება განუსაზღვრელობის პირობებში, როდესაც ოპერაციის შესრულების პროცესი განუსაზღვრელია ან ოპერაციაში მონაწილეობს მოწინააღმდეგე. რეალურ ცხოვრებაში ხშირად ვხვდებით ისეთ სიტუაციებს, რომელშიც მონაწილეობს განსხვავებული ინტერესების მქონე ორი ან მეტი მხარე. მსგავს მოვლენას უწოდებენ **კონფლიქტურ სიტუაციას** ან, უბრალოდ, **კონფლიქტს**. კონფლიქტების შესწავლისა და ანალიზის აუცილებლობამ წარმოშვა სპეციალური მათემატიკური აპარატი – **თამაშთა თეორია**, რომელშიც დაინტერესებულ მხარეებს ეწოდებათ **მოთამაშეები. თამაში** არის რეალური კონფლიქტური სიტუაციის გამარტივებული, ფორმალიზებული მოდელი. მოთამაშეთა მიერ სვლების გაკეთების წინასწარ განსაზღვრული გეგმა არის მათი **სტრატეგია**. კონფლიქტის პირობებში თითოეული მოთამაშე ირჩევს თავის სტრატეგიას, რის შედეგადაც იქმნება სტრატეგიათა ნაკრები – **სიტუაცია.**

არსებობს მთელი რიგი ამოცანები, რომლებიც მოითხოვენ თამაშთა თეორიის გამოყენებას მათი ამოხსნის პროცესში:

- კონფლიქტური სიტუაციების ანალიზი სამხედრო და ეკონომიკურ სფეროებში,
- სავაჭრო და გაცვლითი ოპერაციები,
- ეკონომიკური მექანიზმებისა და მართვის იერარქიული სტრუქტურების პროექტირება და ანალიზი,
- კოალიციური მოქმედების ანალიზი,
- პირველი სვლის გაკეთების მიზანშეწონილობის ანალიზი და სხვა.

თამაშთა თეორიაში არსებობს სხვადასხვა ტიპის თამაში, რომლებიც განსხვავდებიან სხვადასხვა პარამეტრის მიხედვით:

მოთამაშეთა რიცხვი – თუ თამაშში მონაწილეობს ორი მხარე, მაშინ მას უწოდებენ 2 პირის თამაშს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – n პირის თამაშს;

თამაშის სტრატეგიების რაოდენობა – ამ კრიტერიუმის მიხედვით იქმნება სასრული და უსასრულო თამაშები. სასრულ თამაშში მოთამაშეს გააჩნია შესაძლო სტრატეგიების სასრული რიცხვი;

მხარეთა ურთიერთქმედება – ამ კრიტერიუმის მიხედვით თამაშები იყოფა კოოპერაციულ, კოალიციურ და არაკოალიციურ თამაშებად. თუ მოთამაშეებს არ აქვთ შეთანხმებების, კოალიციის შექმნის უფლება, მაშინ თამაში არაკოალიციურია. კოოპერატიულია თამაში, რომელშიც წინასწარ არის განსაზღვრული კოალიციები;

მოგება – არსებობს თამაში ნულოვანი და ნულისაგან განსხვავებული ჯამით. პირველი ითვალისწინებს იმას, რომ ყველა მოთამაშის მოგებათა ჯამი თითოეულ პარტიაში ნულის ტოლია. ასეთი თამაში **ანტაგონისტურია**;

მხარეთა ინფორმირებულობა – ამ კრიტერუმის მიხედვით განასხვავებენ თამაშებს სრული და არასრული ინფორმაციით. თუ თითოეულმა მოთამაშემ იცის სხვა მოთამაშეების მიერ წინა სვლებში გამოყენებული ყველა სტრატეგია, მაშინ ეს არის თამაში სრული ინფორმაციით;

ინფორმაციის სისრულის ხარისხი – ამ კრიტერიუმით თამაშები იყოფა სტატისტიკურ (ნაწილობრივი განუსაზღვრელობის პირობებში) და სტრატეგიულ (სრული განუსაზღვრელობის პირობებში) თამაშებად.

მოგებათა ფუნქციების მიხედვით თამაშები იყოფა **მატრიცულ, ბიმატრიცულ, უწყვეტ, სეპარაბელურ** და სხვ. თამაშებად.

10.2. მატრიცული თამაშები

განვიხილოთ თამაში, რომელშიც მონაწილეობს 2 მოთამაშე (A და B), რომელთაც გააჩნიათ სასრული ოდენობის სტრატეგიები ($A_1, A_2, \ldots A_m$ და $B_1, B_2, \ldots B_n$). A მოთამაშე ირჩევს A_i სტრატეგიას, ხოლო B – B_k-ს. მოთამაშეთა მიერ სტრატეგიების არჩევა განსაზღვრავს თამაშის შედეგს – $\mathbf{a_{ik}}$ არის **A** მოთამაშის მოგება და $\mathbf{b_{ik}}$ კი - **B**-ს:

$$b_{ik} = - a_{ik} .$$

თამაშის ანალიზისას განვიხილოთ მხოლოდ ერთი მოთამაშის (A) მოგება. ჩავწეროთ A_i , B_k წყვილი სტრატეგიბის მნიშვნელობები მატრიცის სახით (სურ.34).

მოცემული მატრიცა არის მოთამაშეთა m*n - ზომის **საგადასახადო მატრიცა.**

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{array}
$$

სურ.34. საგადასახადო მატრიცა

მატრიცულ თამაშებში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია **წონასწორობის** ცნებას, ამ დროს იქმნება ისეთი სიტუაცია, რომლის დარღვევაში არცერთი მხარე არ არის დაინტერესებული. ასეთ სიტუაციაში თითოეული მონაწილე იღებს უდიდეს მოგებას, რომელიც მასზე არის დამოკიდებული.

10.3. წონასწორობა

ორი მოთამაშის საგადასახადო მატრიცას აქვს შემდეგი სახე (სურ. 35):

ითვლება, რომ თამაში არაერთხელ მეორდება, ამიტომ საჭიროა თითოეული მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრა. A მოთამაშის მინიმალური მოგება თითოეულ სტრიქონში არის -2, 1, -3, ხოლო მაქსიმალური მოგება თითოეულ სვეტში კი 3, 2, 1.

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 2 & -1 \\
2 & 1 & 1 \\
3 & -3 & 1
\end{pmatrix}
$$

სურ. 35
ორი მოთამაშის
საგადასახადო მატრიცა

პირველ შემთხვევაში A მოთამაშე იყენებს სტრატეგიას **max min**, ანუ როდესაც მისი მინიმალური მოგება მაქსიმალურია $\alpha = 1$. მეორე შემთხვევაში B ანუ როდესაც მოთამაშის მაქსიმალური მოგება მინიმალურია $\beta = 1$:

$$\max\min = \min\max = 1 .$$
$$A_2 = A_{opt} \quad B_3 = B_{opt}$$

თამაშის განმეორებისას არჩეულ სტრატეგიაზე უარის თქმა ამცირებს მოთამაშის შანსს მოგებაზე, ამიტომ სიტუაცია A_2 , B_3 არის წონასწორული. α არის **თამაშის ქვედა ფასი**, ხოლო β – **თამაშის ზედა ფასი** ანუ A მოთამაშეს გარანტირებული აქვს მოგება არანაკლებ α–ს და არაუმეტეს β-სი. α და β დაკავშირებულია უტოლობით:

$$\alpha \le \beta.$$

თუ $\alpha = \beta$ ანუ $\max \min a_{ik} = a_{i^0k^0} = \min \max a_{ik}$, მაშინ სიტუაცია $\{A_{i0}, B_{k0}\}$ წონასწორულია, $\alpha = \beta$ და მას ეწოდება **თამაშის ფასი** (ν). $a_{i^0k^0}$ ელემენტს ეწოდება მატრიცის **წონასწორობის წერტილი**. A_{i0} და B_{k0} სტრატეგიებს ეწოდებათ **ოპტიმალური,** ხოლო ოპტიმალური სიტუაციებისა და ფასის ერთობლიობას უწოდებენ **მატრიცის ამონახსენს წონასწორული წერტილით** (ასეთი წერტილი მატრიცაში შეიძლება რამდენიმე იყოს, მაგრამ მათი მნიშვნელობები ერთმანეთს ყოველთვის ემთხვევა).

10.4. შერეული სტრატეგიები

წონასწორული სიტუაციის არარსებობის შემთხვევაში უნდა მოხდეს სტრატეგიის ცნების გაფართოება, რათა ახალი, განზოგადოებული სტრატეგიებისაგან შედგენილი სიტუაციიდან გამოინახოს წონასწორული. თუკი ასეთი სტრატეგიები არსებობს, ისინი წარმოადგენენ საწყისი სტრატეგიების კომბინაციებს. ამასთან საწყის სტრატეგიებს უწოდებენ **წმინდას**, ხოლო კომბინირებულს - **შერეულს**.

აქ წარმოიშვება შეკითხვა, როცა $\alpha<\beta$, როგორ უნდა განაწილდეს მოთამაშეებს შორის β-α სხვაობა? ამ სხვაობის კომპრომისული განაწილება და თითოეული მოთამაშის მიერ თავისი წილის მიღება თამაშის მრავალჯერადი განმეორების შედეგად ხდება წმინდა სტრატეგიების შემთხვევითი გამოყენების გზით. მოთამაშის შერეული სტრატეგია მდგომარეობს იმ ალბათობების მითითებაში, რომლითაც მოხდა მისი საწყისი სტრატეგიის შერჩევა.

განვიხილოთ m x n მატრიცა. A მოთამაშეს გააჩნია m წმინდა სტრატეგია, ხოლო მისი შერეული სტრატეგია აღიწერება m არაუარყოფითი რიცხვების ნაკრებით:

$$p_1 \ge 0\ ,\ \ p_2 \ge 0\ \ , ..., p_m \ge 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

სადაც $P = \{ p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m \}$.

B –ს შერეული სტრატეგია:

$$q_1 \geq 0 \ , \quad q_2 \geq 0 \ , \ldots\ldots , qn \geq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1,$$

სადაც $Q = \{ q_1, q_2, \ldots\ldots, qn)$.

ამ პირობებში თითოეული ჩვეულებრივი სიტუაცია $\{A_i \ , \ B_k\}$ არის შემთხვევითი მოვლენა და სრულდება $p_i * q_k$ – ი ალბათობით. შედეგად ვიღებთ მოთამაშის მოგების მათემატიკურ ლოდინს:

$$E\,(A, P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, p_i \ q_k \, .$$

ეს არის შერეული სტრატეგიების დროს მიღებული საშუალო მოგება. P^0 და Q^0 არის მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები:

$$P^0 = \{p^0{}_1, p^0{}_2, \ldots.., p^0{}_m\},$$

$$Q^0 = \{q^0{}_1, q^0{}_2, \ldots.., q^0{}_n\},$$

თუკი სრულდება შემდეგი პირობა:

$$E(A, P, Q^0) \leq E(A, P^0, Q^0) \ \leq E(A, P^0, Q)$$

ანუ

$$\max_{P} \min_{Q} E(A, P, Q) = E(A, P^0, Q^0) = \min_{Q} \max_{P} E(A, P, Q).$$

სიდიდე $v = E(A, P^0, Q^0)$ არის თამაშის ფასი. ნაკრები (v, P^0, Q^0), რომელიც შედგება A და B მოთამაშეების ოპტიმალური შერეული სტრატეგიებისაგან და თამაშის ფასისაგან, არის მატრიცული თამაშის ამონახსენი.

თეორემა: $P^0 = \{p^0_1, p^0_2, \ldots, p^0_m\}$ და $Q^0 = \{q^0_1, q^0_2, \ldots, q^0_n\}$ არის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები, ხოლო v - თამაშის ფასი. A მოთამაშის P^0 ოპტიმალური შერეული სტრატეგია იქმნება A_i–ს წმინდა სტრატეგიების ნაკრებისაგან, რომელთათვისაც სრულდება პირობა:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q^0_k = v.$$

ანალოგიურად, B მოთამაშის Q^0 ოპტიმალური შერეული სტრატეგია იქმნება B_i–ს წმინდა სტრატეგიების ნაკრებისაგან, რომელთათვისაც სრულდება პირობა:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, p^0_i = v.$$

აღნიშნულის საფუძველზე ადგილი აქვს მოთამაშეთა მოგებების წონასწორობას, რომელიც შემდეგნაირად გამოისახება:

$$v = \min \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, p^0_i = \max \min \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, p_i = \min \max \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q_k = \max \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q^0_k = v.$$

10.5. მატრიცული თამაშების ამოხსნის მეთოდები

10.5.1. თამაში 2 X n

მოცემულია (სურ.36) საგადასახადო მატრიცა 2 X n თამაშისათვის. ცნობილია, რომ თამაშის ფასის და P^0 ოპტიმალური მნიშვნელობის პოვნა იგივეა, რაც განტოლების ამონახსნის პოვნა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \;\ldots\ldots\; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \;\ldots\ldots\; a_{2n} \end{pmatrix}$$

სურ.36. საგადასახადო მატრიცა

$$v = \min_{1 \le k \le n} (a_{1k}\, p^0 + a_{2k}(1 - p^0)) = \max_{p} \min_{1 \le k \le n} (a_{1k}\, p + a_{2k}(1 - p)).$$

ტოლობის მარჯვენა მხარეს განთავსებული ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნა შესაძლებელია გრაფიკის აგებით. დავუშვათ, რომ A მოთამაშემ აირჩია შერეული

სტრატეგია $P = \{p, 1\text{-}p\}$, ხოლო B–მ k-ური წმინდა სტრატეგია ($k = 1, 2, \ldots , n$), მაშინ A მოთამაშის საშუალო მოგება სიტუაციაში P, k უდრის:

$$(k)\ :\ w = a_{1k}\, p + a_{2k}\, (1\text{-}p).$$

სიბრტყე pw-ზე B მოთამაშის თითოეულ წმინდა სტრატეგიას შეესაბამება წრფე. თითოეული მათგანის აგების შედეგად ვიზუალურად ხდება ყველაზე მინიმალური მნიშვნელობების შერჩევა. მიღებული ტეხილი არის ფუნქციის გრაფიკი და მას უწოდებენ ქვედა ზღვარს. ამ ტეხილის მაქსიმალური წერტილი განსაზღვრავს თამაშის ფასს და მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიას.

1. განვიხილოთ თამაში, რომლის მონაცემებიც მოცემულია სურ.37-ზე. არის თუ არა თამაშში წონასწორობის წერტილი?

$\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \alpha \neq \beta.$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

სურ.37.
თამაშის პირობები

2. გამოვთვალოთ მოთამაშის საშუალო მოგება:

p	6	4	3	1	-1	0
1- p	-2	-1	1	0	5	4

(1) : $w = 6p - 2\,(1 - p)$,

(2) : $w = 4p – (1\text{-}p)$,

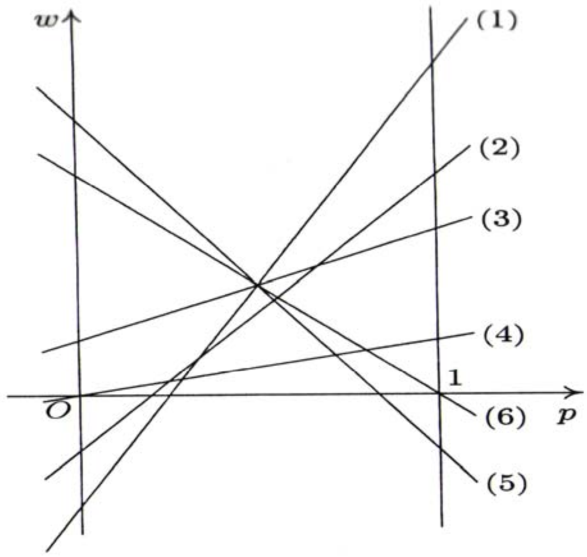
(3) : $w = 3p + (1\text{-}p)$,

(4) : $w = p$,

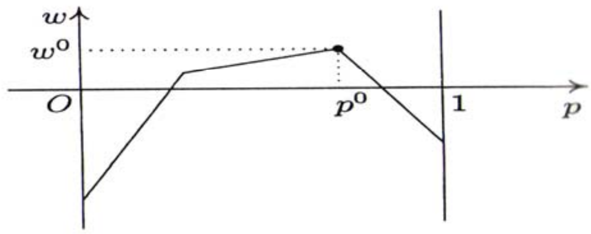
(5) : $w = -p + 5\,(1\text{-}p)$,

(6) : $w = 4\,(1\text{-}p)$.

3. ავაგოთ ქვედა საზღვარი (სურ. 38.1 და 38.2)



სურ.38.1. მოთამაშის სტრატეგიები



სურ.38.2. ქვედა საზღვარი

4. უნდა გავიგოთ თამაშის ფასი და მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია. მაქსიმალური წერტილი მდებარეობს 4 და 5 წრფეების გადაკვეთაზე. ამოვხსნათ სისტემა:

$$w = p,$$
$$w = - p + 5\ (1-p)\ ,$$
საიდანაც $p^0 = 5/7$, $w^0 = 5/7$.

ამით ჩვენ მოვახდინეთ A-მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის პოვნა.

ეხლა კი ისმევა შეკითხვა: როგორ ვიპოვოთ B–ს ოპტიმალური სტრატეგია?

ქვედა საზღვრის მიხედვით შეიძლება განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა:

ა) გვაქვს მხოლოდ ერთი ექსტრემუმი

1. $p^0 = 0$ მაშინ მოთამაშემ უნდა გამოიყენოს წმინდა სტრატეგია, რომელიც შეესაბამება წრფეს, რომელიც გადის $(0, w^0)$ წერტილში და გააჩნია ყველაზე დიდი უარყოფითი დახრილობა;
2. $p^0 = 1$ მოთამაშის სტრატეგიას შეესაბამება წრფე, რომელიც გადის $(1, w^0)$ წერტილში და აქვს ყველაზე მცირე დადებითი დახრილობა;
3. $0 < p^0 < 1$ მაშინ ქვედა საზღვრის უმაღლეს წერტილში გადაიკვეთება სულ მცირე 2 მონაკვეთი, ერთ-ერთ მათგანს აქვს დადებითი დახრა (k), ხოლო მეორეს უარყოფითი:

$$q_k = q\ , \quad q_l = 1 - q,$$

სადაც q არის ტოლობის ამნახსენი და

$$a_{1k}\, q + a_{1l}(1\text{-}q) = a_{2k}q + a_{2l}(1\text{-}q)\;;$$

ბ) ქვედა საზღვარი შეიცავს ჰორიზონტალურ მონაკვეთს, რომელც შეესაბამება მოთამაშის ოპტიმალურ წმინდა სტრატეგიას.

მაგალითი: ჩავთვალოთ, რომ B-მოთამაშის წმინდა სტრატეგიებია Q^0 = {$q_1{}^0$, $q_2{}^0$, $q_3{}^0$, $q_4{}^0$, $q_5{}^0$, $q_6{}^0$ }. ვინაიდან ამონახსენი მოიპოვება მე-4 და მე-5 წრფეების გადაკვეთაზე, აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$q_1{}^0 = 0,\quad q_2{}^0 = 0,\quad q_3{}^0 = 0,\quad q_4{}^0 = q,\quad q_5{}^0 = 1\text{-}q,\quad q_6{}^0 = 0$$

ანუ

0	0	0	q	1-q	0
6	4	3	1	-1	0
-2	-1	1	0	5	4

შედეგად ვიღებთ:

$$q - (1\text{-}q) = 5/7,$$

$$5\,(1\text{-}q) = 5/7,$$

$$q^0 = 6/7$$

ანუ

$$Q^0 = \{0, 0, 0, 6/7, 1/7, 0\}.$$

10.5..2. თამაში n X 2

ამ შემთხვევაში B–ს აქვს ორი წმინდა სტრატეგია (სურ.39).

ვთქვათ, Q = {q, 1-q} არის B მოთამაშის შერეული სტრატეგია, თუ A ირჩევს i-ურ წმინდა სტრატეგიას, მაშინ B-ს საშუალო მოგება i, Q სიტუაციაში იქნება:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\ \ .. \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

სურ.39.
B–ს წმინდა სტრატეგიები

$$(i) : w = q_{i1}q + a_{i2}(1-q),$$

$$\max_{1\le i\le m}(a_{i1}q + a_{i2}(1-q)).$$

მიღებული ტეხილის ქვედა წერტილის აბსცისა იქნება q^0 მნიშვნელობა, რომელიც განსაზღვრავს მოთამაშის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას, ხოლო w^0 თამაშის ფასს.

მაგალითი: მოცემულია შემდეგი მატრიცა და უნდა გავიგოთ:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. აქვს თუ არა თამაშს თანასწორობის წერტილი?
   გამოთვლების საფუძველზე ვიღებთ:
   $\alpha = 0$, $\beta = 3$.
   შესაბამისად, $\alpha \neq \beta$ და მატრიცას წონასწორობის წერტილი არ გააჩნია;
2. მოცემული მატრიცის საფუძველზე გამოვთვალოთ B-ს საშუალო მოგება:

q	1-q
3	-1
-1	3
1	0

$$(1): w = 3q - (1-q),$$
$$(2): w = -q + 3(1-q),$$
$$(3): w = q;$$

3. ვიპოვოთ ზედა ზღვარი. განტოლებების მიხედვით ეს არის პირველი და მეორე წრფე;

4. ვიპოვოთ თამაშის ფასი და B მოთამაშის ოპტიმალური შერეული მოგება:

$$w = 3q - (1-q),$$
$$w = -q + 3(1-q),$$
$$q^0 = \frac{1}{2},$$
$$w^0 = 1;$$

5. ვიპოვოთ მოთამაშის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია:

$$p_1^0 = p,$$
$$p_2^0 = 1 - p,$$
$$p_3 = 0,$$
$$3p - (1 - p) = -p + 3(1 - p),$$
$$p^0 = \frac{1}{2},$$
$$p^0 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\},$$
$$Q^0 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}.$$

10.5.3. **m x n** თამაშები

ნებისმიერი მატრიცული თამაშის ამოხსნა შეიძლება დავიყვანოთ წრფივი პროგრამირების სტანდარტული ამოცანის ამოხსნამდე. ამავე დროს, გამოთვლების მოცულობა პირდაპირ არის დამოკიდებული მოთამაშეთა წმინდა სტრატეგიების რიცხვზე. ამიტომ, თამაშის ნებისმიერი წინასწარი ანალიზი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევამციროთ ან გავამარტივოთ მატრიცა, ძალზე მნიშვნელოვანია. შემცირება/გამარტივება ხდება დომინირების საფუძველზე.

დომინირება: თუკი A მატრიცის i-ური სტრიქონი არ არის ამავე მატრიცის j-ურ სტრიქონზე უფრო მეტი, მაშინ ამბობენ, რომ j დომინირებს i-ს, ხოლო Aj სტრატეგია დომინირებს Ai-ს, რის გამოც, შესაძლებელი ხდება Ai –ის უგულებელყოფა.

თავი 11. პოზიციური თამაშები

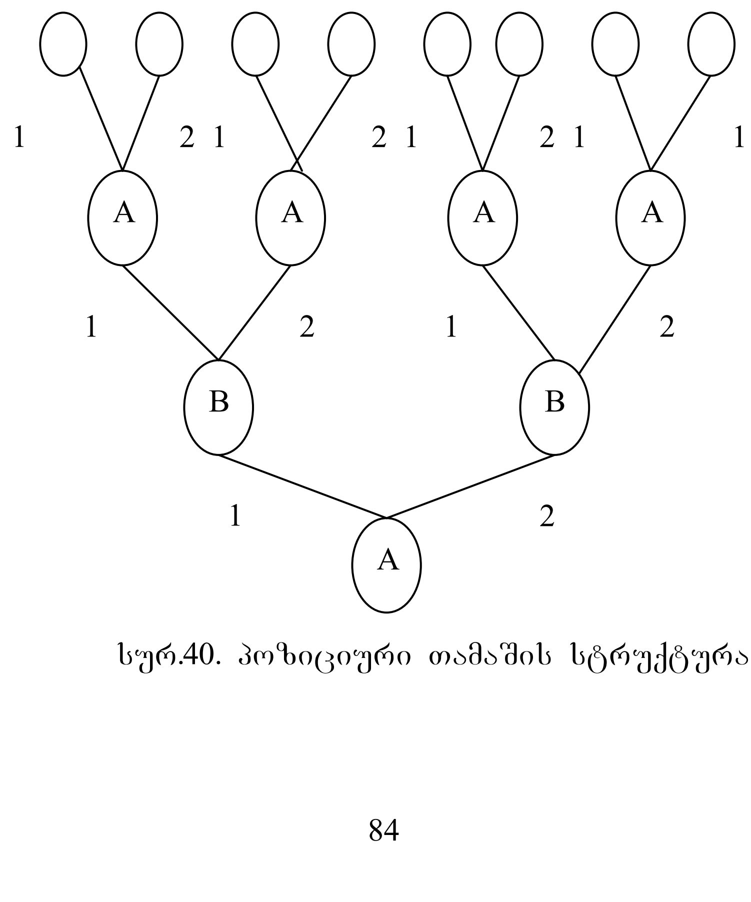
ბევრ კონფლიქტურ სიტუაციაში, გვაქვს რა ინფორმაცია მის ადრინდელ განვითარებაზე, მონაწილე მხარეები თავის არჩევანს აკეთებენ არა ერთხელ და სამუდამოდ, არამედ დროის მიხედვით, ნაბიჯ-ნაბიჯ. ამით ისინი იყენებენ სტრატეგიას, რომელიც ასახავს როგორც კონფლიქტის დინამიკას, ისე საკუთარი ინფორმირებულობის ხარისხს.

11.1. პოზიციური თამაშის სტრუქტურა

თამაშთა ერთ-ერთი კლასი, რომელიც აღწერს კონფლიქტებს, რომელთა დინამიკა მოთამაშეთა ქმედებაზე ახდენს გავლენას, არის პოზიციური თამაშები.

პოზიციური თამაში არის არაკოალიციური თამაში, რომელიც მოდელირებას უკეთებს მოთამაშეთა მიერ არასრული ინფორმაციის და დროის ცვლილების პირობებში გადაწყვეტილებათა თანმიმდევრული მიღების პროცესს. თამაშის პროცესი მდგომარეობს თამაშის ერთი მდგომარეობიდან მეორეში თანმიმდევრულ გადასვლაში. თამაშის მდგომარეობას ეწოდება **პოზიცია**, ხოლო შესაძლო არჩევანს თითოეულ პოზიციაში – **ალტერნატივა**.

განვიხილოთ ისეთი პოზიციური თამაში, სადაც თითოეულ პოზიციაში არსებობს ორი ალტერნატივა(სურ. 40).



სურ.40. პოზიციური თამაშის სტრუქტურა

თამაში მდგომარეობს საწყისი პოზიციიდან საბოლოო ბოზიციაში გადასვლაში. ყოველი საბოლოო წვერო განსაზღვრავს ერთადერთ ჯაჭვს, რომელიც აკავშირებს მას საწყის წვეროსთან. ასეთ ჯაჭვს ეწოდება **პარტია.** პარტიების რიცხვი თამაშში ტოლია საბოლოო წვეროების რიცხვის. არასრული ინფორმაციის დროს მოთამაშემ იცის რომელ სიმრავლეში მდებარეობს, მაგრამ არ იცის რომელ პოზიციაშია.

11.2. პოზიციური თამაშის ნორმალიზაცია

მოთამაშის სვლების წინასწარ განსაზღვრულ თანმიმდევრობას, რომელიც არჩეულია სხვა მოთამაშის სვლების ინფორმაციის შესაბამისად, ეწოდება ამ მოთამაშის **წმინდა სტრატეგია.** პოზიციური თამაშის დაყვანას მატრიცულ თამაშამდე ეწოდება **თამაშის ნორმალიზაცია.**

მაგალითი 1: A მოთამაშეს გააჩნია ორი წმინდა სტრატეგია: A_1 - აირჩიოს X=1 და A_2 - აირჩიოს X=2.

B–ს სტრატეგია, როდესაც მან იცის A–ს არჩევანი პირველ სვლაზე, ჩაიწერება ასე [y_1 , y_2]. აქ y_1 (y_1=1,2) არის ალტერნატივა, რომელსაც ირჩევს B მოთამაშე იმ პირობით, რომ A მოთამაშემ აირჩია პირველი ალტერნატივა X=1, ხოლო y_2 (y_2=1,2) არის ალტერნატივა, რომელსაც ირჩევს მოთამაშე იმ პირობით, რომ A მოთამაშემ აირჩია მეორე ალტერნატივა X=2.

მაგალითად B–ს მიერ [2,1] სტრატეგიის არჩევა ნიშნავს, რომ თუ A–მ პირველ სვლაზე აირჩია X=1, მაშინ B–მ უნდა აირჩიოს Y=2, ხოლო თუ A-მ აირჩია X=2, მაშინ B–მ უნდა აირჩიოს Y=1. ამის მიხედვით B-ს აქვს ოთხი სტრატეგია:

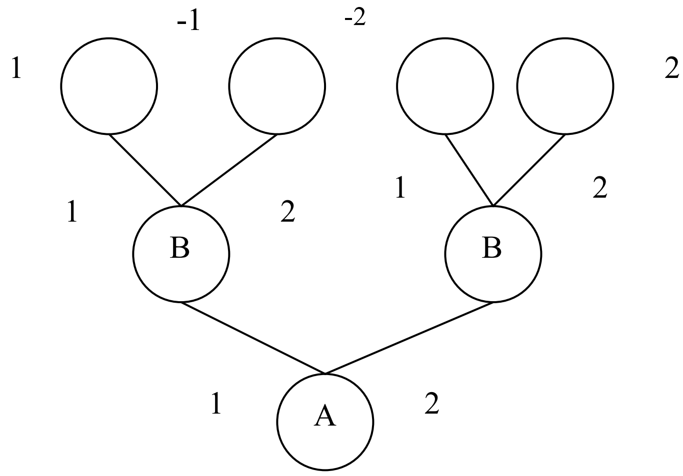
B_1 – [1,1], y=1, x – ნებისმიერია,

B_2 – [1,2], y=x, x – ნებისმიერია,

B_3 – [2,1], $y \neq x$, x – ნებისმიერია,

B_4 – [2,2], y=2, x – ნებისმიერია.

ეხლა ვნახოთ, როგორ გამოითვლება მოგება არჩეული სტრატეგიის მიხედვით.



ვთქვათ, A-მ აირჩია სტრატეგია $A_1(1)$, ხოლო B–მ სტრატეგია $B_2[1,2]$ ანუ X=1 და Y=1, მაშინ (სურ.41):

$$w(x, y) = w(1,1) = 1$$

შედეგად, A-ს მოგებები ჩაიწერება ცხრილის სახით (ცხრილი 12).

სურ.41. A და B მოთამაშეების სტრატეგიები

ცხრილი 12. A მოთამაშის მოგებები

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	x=1	w(1,1)	w(1,1)	w(1,2)	w(1,2)
A_2	x=2	w(2,1)	w(2,2)	w(2,1)	w(2,2)

ან მატრიცის სახით:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

მოცემულ მატრიცას აქვს წონასწორობის წერტილი. მოთამაშეთა ოპტიმალური სტრატეგიებია A_1 (1) და B_3 [2,1], ანუ A ირჩევს X=1, ხოლო B - Y=2, v = -1.

მაგალითი 2: A-ს ალტერნატივებია – x = 1 ან x = 2. B–სთვის A-ს არჩევანი უცნობია, ანუ მან არ იცის შესაძლო ორი პოზიციიდან რომელში იმყოფება, რაც ასახულია შემდეგ ცხრილში და მატრიცაში.

		B_1	B_2
		y=1	y=2
A_1	x=1	w(1,1)	w(1,2)
A_2	x=2	w(2,1)	w(2,2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

მოცემულ მატრიცას წონასწორობის წერტილი არ გააჩნია, მოთამაშეთა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები კი ასეთია:

$$p = \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\},$$

$$Q = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\},$$

$$v = 0 .$$

ამ ორ მაგალითზე ნათლად ჩანს, რომ პოზიციური თამაშის დაყვანა მატრიცულამდე დამოკიდებულია მოთამაშეთა ინფორმირებულობის დონეზე. კერძოდ, B მოთამაშის არაინფორმირებულობის შემთხვევაში, ხდება მისი შესაძლო სტრატეგიების რაოდენობის შემცირება.

<u>მაგალითი 3</u>: პირველ სვლას აკეთებს A მოთამაშე: X={1,2},

მეორე სვლას აკეთებს B მოთამაშე, იცის რა პირველი სვლის მნიშვნელობა: y={1,2},

მესამე სვლას აკეთებს A მოთამაშე. მან არ იცის B–ს სვლა და დაავიწყდა საკუთარი: Z={1,2}.

ამის შემდეგ A მოთამაშე იღებს მოგებას $W(x, y, z)$ ოდენობით:

$$w(1,1,1) = -2,$$
$$w(1,1,2) = 4,$$
$$w(1,2,1) = 1,$$
$$w(1,2,2) = -4,$$
$$w(2,1,1) = 3,$$
$$w(2,1,2) = 0,$$
$$w(2,2,1) = -3,$$
$$w(2,2,2) = 5.$$

მოვახდინოთ თამაშის ნორმალიზაცია. რადგანაც B–მ A-ს სვლა იცის, ამიტომ მას აქვს 4 სტრატეგია:

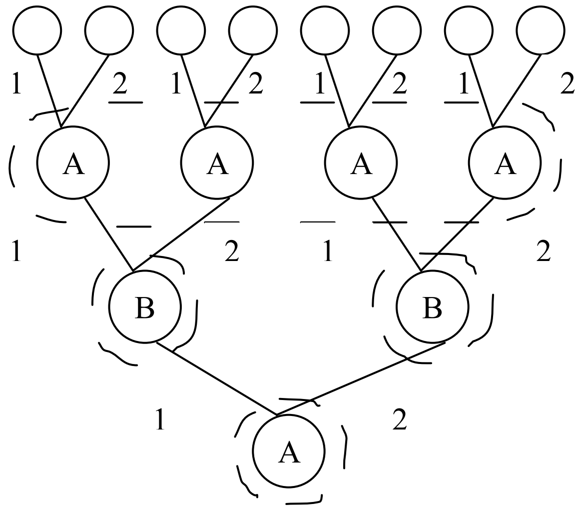
B1[1,1],

B2[1,2],

B3[2,1],

B4[2,2].

A–მ მესამე სვლაზე არაფერი იცის, ამიტომ თითოეული მისი სტრატეგია შედგება წყვილი რიცხვებისაგან(X,Z), სადაც X (X=1,2) ალტერნატივაა,



სურ.42. მოთამაშეთა ალტერნატივები

რომელსაც ირჩევს A პირველ სვლაზე და Z(Z=1,2) - A-ს მიერ არჩეული ალტერნატივაა.

მაგალითად: თუ A ირჩევს სტრატეგიას (2,1), ე.ი. პირველ სვლაზე მან აირჩია X=2 და მესამეზე Z=1.

A-ს აქვს ოთხი სტრატეგია: A_1=(1,1), A_2=(1,2), A_3=(2,1), A_4=(2,2).

ეხლა ვნახოთ როგორ გამოითვლება A-ს მოგება.

ვთქვათ, A-მ აირჩია A_2=(1,2) სტრატეგია, ხოლო B-მ - B_3[2,1], მაშინ X=1, ე.ი y=2, მნიშვნელობა z=2 A-მ აირჩია B-სგან დამოუკიდებლად:

$$w(x, y, z) = w(1,2,2) = -4\,.$$

მსგავსი გარჩევის შედეგად მიიღება თექვსმეტი მოგება (ცხრილი 13):

ცხრილი 13. მოთამაშეთა მოგებები

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
A_1	(1,1)	w(1,1,1)	w(1,1,1)	w(1,2,1)	w(1,2,1)
A_2	(1,2)	w(1,1,2)	w(1,1,2)	w(1,2,2)	w(1,2,2)
A_3	(2,1)	w(2,1,1)	w(2,2,1)	w(2,1,1)	w(2,2,1)
A_4	(2,2)	w(2,1,2)	w(2,2,2)	w(2,1,2)	w(2,2,2)

ანუ

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

__მაგალითი__:

პირველ სვლას აკეთებს A-მოთამაშე, რომელიც ირჩევს რიცხვს – X სიმრავლედან {1,2},

მეორე სვლას აკეთებს B მოთამაშე, რომელმაც არაფერი იცის A–ს წინა სვლაზე და ირჩევს y-ს სიმრავლიდან {1,2},

მესამე სვლას აკეთებს A, რომელმაც არაფერი იცის წინა სვლის შესახებ და ირჩევს – Z {1,2}.

A-ს სტრატეგიებია:

A_1 (1,1), A_2 (1,2), A_3 (2,1), A_1 (2,2),

B-ს ორი სტრატეგია აქვს:

B_1 (y = 1), B_2 (y = 2)

შესაბამისად ვიღებთ:

		B_1	B_2
		y=1	y=2
A_1	(1,1)	w(1,1,1)	w(1,2,1)
A_2	(1,2)	w(1,1,2)	w(1,2,2)
A_3	(2,1)	w(2,1,1)	w(2,2,1)
A_4	(2,2)	w(2,1,2)	w(2,2,2)

ანუ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \{0, \frac{9}{13}, 0, \frac{4}{13}\},$$

$$Q = \{\frac{5}{13}, \frac{8}{13}\},$$

$$v = \frac{20}{13}.$$

თავი 12. ბიმატრიცული თამაშები

12.1. შესავალი ბიმატრიცულ თამაშებში

განვიხილოთ კონფლიქტური სიტუაცია, რომელშიც თითოეულ მოთამაშეს აქვს თავისი ქცევის ხაზი:

A-ს შეუძლია შეარჩიოს ნებისმიერი სტრატეგია – $A_1, \ldots, A_m,$

B- ს ასევე შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი სტრატეგია - $B_1, \ldots, B_n$.

თუ A აირჩევს A_i სტრატეგიას, ხოლო B - B_k-ს, მაშინ A-ს მოგება იქნება a_{ik}, ხოლო B - b_{ik},, ანუ თითოეული მოთამაშე იღებს საკუთარ მოგებას, რომელიც გამოისახება ორი მატრიცის სახით:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1k}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ldots\ldots a_{ik}\ldots\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots a_{mk}\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}\ldots\ldots b_{1k}\ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i1}\ldots\ldots b_{ik}\ldots\ldots b_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}\ldots\ldots b_{mk}\ldots\ldots b_{mn} \end{pmatrix}$$

როცა მოთამაშეთა ინტერესები განსხვავებულია (მაგრამ არ არის აუცილებელი იყოს ანტაგონისტური), მაშინ ვიღებთ ორ საგადასახადო მატრიცას და, შესაბამისად, თამაშიც **ბიმატრიცულია**.

12.2. ბრძოლა ბაზრებისათვის

მცირე ფირმა (A) აპირებს საქონლის გაყიდვას ორი ბაზრიდან ერთ-ერთზე. ორივე მათგანი კონტროლირდება დიდი ფირმის (B) მიერ. ამისათვის A-მ უნდა მოახდინოს რომელიმე ბაზრის წინასწარი გამოკვლევა, ხოლო დიდმა ფირმა უნდა ხელი შეუშალოს ამას. B-ს მხრიდან წინააღმდეგობის შემთხვევაში A მარცხდება. A ფირმისათვის I ბაზარი უფრო მიმზიდველია ვიდრე II, მაგრამ მოითხოვს უფრო დიდ სახსრებს. I ბაზარზე გამარჯვება მოიტანს 2-ჯერ უფრო მეტ შემოსავალს, ვიდრე II-ზე, მაგრამ დამარცხების შემთხვევაში ფირმას ემუქრება გაკოტრება. II ბაზარზე გამარჯვება მას მოუტანს მცირე მოგებას, ხოლო დამარცხება არ გააკოტრებს. ე.ი.

აქედან A-ს აქვს ორი სტრატეგია:

A_1 სტრატეგია - I ბაზარზე გასვლა,

A_2 სტრატეგია - II ბაზარზე გასვლა.

ასეთივე სტრატეგიები აქვს B-ს:

B_1 – გასვლა I ბაზარზე,

B_2 – გასვლა II ბაზარზე.

საგადასახადო მატრიცებს აქვთ ასეთი სახე:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.3. პატიმართა დილემა

განვიხილოთ მაგალითი: ორი პატიმარი იმყოფება წინასწარი დაკავების საკანში. სამხილის არარსებობის გამო მათი გასამართლება დამოკიდებულია იმაზე, იტყვიან თუ არა სიმართლეს. თუკი ორივე გაჩუმდება, მაშინ სასჯელი ორივესათვის იქნება წინასწარი დაკავება, რომელიც მატრიცაში გამოისახება -1 სახით, თუ ორივე აღიარებს დანაშაულს, სასამართლო გაითვალისწინებს შემამსუბუქებელ გარემოებას (-6), თუ პირველი პატიმარი ალაპარაკდება და მეორე არა, მაშინ მეორეს დაიჭერენ (I-0, II-9) და პირიქით. ეს კონფლიქტური სიტუაცია არის ბიმატრიცული თამაში.

12.4 შერეული სტრატეგიები

მოცემულ ქვეთავში განხილულია ბიმატრიცული თამაშის ამოხსნის მეთოდი.

იმის მიხედვით, რომ მოთამაშეთა ინტერესები ერთმანეთს არ ემთხვევა, უნდა შედგეს ისეთი კომპრომისული გადაწყვეტილება, რომელიც ერთნაირად დააკმაყოფილებს ორივე მოთამაშეს ანუ უნდა ნაპოვნი იქნას ისეთი წონასწორული სიტუაცია, რომლიდანაც გადახრა ამცირებს ორივე მოთამაშის მოგებას. ბიმატრიცული თამაშების შერეულ სტრატეგიებში, რა თქმა უნდა, იქნება საშუალო მოგების ცნება, რომელიც ითვლება ისეთი წესების მიხედვით, სადაც ადგილი აღარ აქვს B მოთამაშის დისკრიმინაციას:

$$H_A = \sum_{i,k} a_{ik} p_i q_k,$$
$$H_B = \sum_{i,k} b_{ik} p_i q_k.$$

12.5. 2 X 2 ბიმატრიცული თამაში:

წონასწორობის სიტუაცია

ამ შემთხვევაში ორივე მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია m = n = 2:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{pmatrix}.$$

ქვემოთ მოცემულია მოთამაშეთა სტრატეგიების ალბათობების აღნიშვნები:

$$P_1 = p,$$
$$P_2 = 1 - p,$$
$$q_1 = q,$$
$$q_2 = 1 - q.$$

საშუალო მოგება გამოითვლება ფორმულით:

$$H_A(p,q) = a_{11} pq + a_{12} p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q),$$
$$H_B(p,q) = b_{11} pq + b_{12} p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q),$$

სადაც ალბათობები უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$0 \le p \le 1,$$
$$0 \le q \le 1.$$

ოპტიმალური წყვილი რიცხვები (p^*, q^*) განსაზღვრავენ წონასწორულ სიტუაციას, თუ ნებისმიერი p და q-თვის, რომლებიც ემორჩილებიან ზემოთ მოცემულ უტოლობებს, სრულდება:

$$H_A(p,q^*) \le H_A(p^*,q^*),$$
$$H_B(p^*,q) \le H_B(p^*,q^*),$$

რაც ნიშნავს, რომ სიტუაცია, რომელიც განისაზღვრება (p^*, q^*) შერეული სტრატეგიით, არის წონასწორული, თუ ერთ-ერთი მოთამაშის მიერ გადახრა ამ სტრატეგიიდან, იმ პირობით, რომ მეორე რჩება თავის ძველ არჩევანზე, ამცირებს პიტველის მოგებას.

განვიხილოთ ***<u>ნეშის თეორემა</u>***: თუ (p,q) არის წონასწორობის წერტილი, მაშინ

$$
\begin{aligned}
&(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0,\\
&p(Cq-\alpha)\ge 0,\\
&(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,\\
&q(Dp-\beta)\ge 0,
\end{aligned}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
&C = a_{11}+a_{12}-a_{21}+a_{22},\\
&\alpha = a_{22}-a_{12},\\
&D = b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22},\\
&\beta = b_{22}-b_{21}.
\end{aligned}
$$

12.6. ბრძოლა ბაზრისათვის

განვიხილოთ მაგალითი, რომლის პირობაც გამოისახება მატრიცების სახით:

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{და} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

ამავე დროს განსაზღვრულია შემდეგი პარამეტრები:

$$
\begin{aligned}
&C=-10-2-1-1=-14,\\
&\alpha=-1-2=-3,\\
&D=5+2+1+1=9,\\
&\beta=1+1=2.
\end{aligned}
$$

ნეშის თეორემის საფუძველზე ვიღებთ შემდეგ უტოლობებს:

$$
\begin{aligned}
&(p-1)(-14q-(-3))\ge 0,\\
&p(-14q-(-3))\ge 0,\\
&(q-1)(9p-2)\ge 0,\\
&q(9p-2)\ge 0.
\end{aligned}
$$

პირველი ორი უტოლობისათვის განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

ა)

$$p = 1,$$
$$-14q + 3 \geq 0,$$
$$q \leq \frac{3}{14};$$

ბ)

$$p = 0,$$
$$-(-14q + 3) \geq 0,$$
$$q \geq \frac{3}{14};$$

გ)

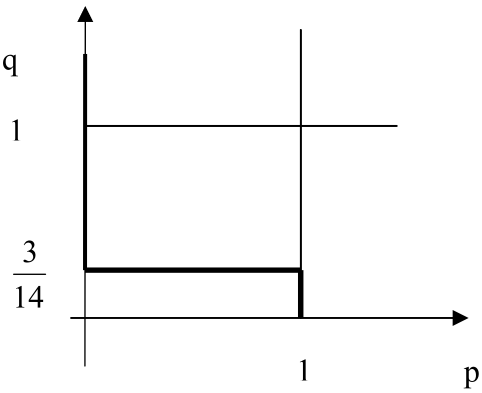
$$0 < p < 1,$$
$$-14q + 3 \geq 0,$$
$$-14q + 3 \leq 0,$$

რაც მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, თუ:

$$-14q + 3 = 0$$

და $$q = \frac{3}{14}.$$

ჩატარებული გამოთვლების საფუძველზე ავაგოთ კოორდინატთა სისტემა (p,q) და გადავიტანოთ მიღებული შედეგები ნახაზზე (სურ.42.1).



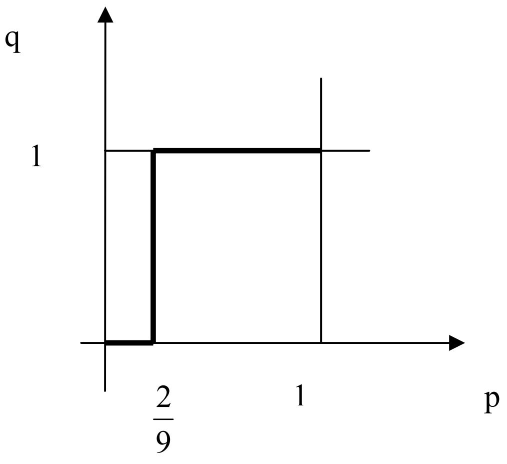
$p=1 \quad q \leq \frac{3}{14}$,

$p=0 \quad q \geq \frac{3}{14}$,

$0<p<1 \quad q=\frac{3}{14}$.

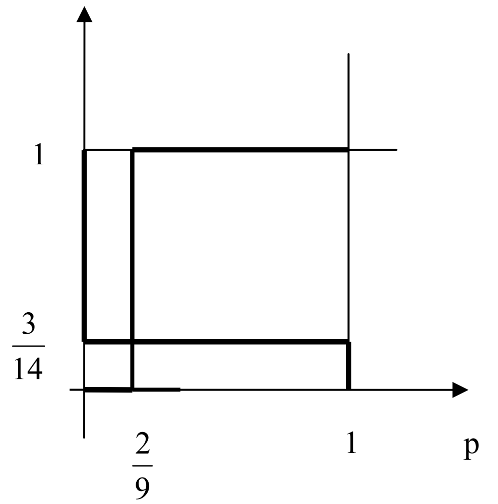
სურ.42.1. პირველი ორი უტოლობის შესაძლო ამონახსნები

მესამე და მეოთხე უტოლობებისათვის გავიმეოროთ იგივე მოქმედებები და შედეგები გამოვსახოთ კოორდინატთა სიბრტყეზე (სურ.42.2):



$$q=1 \quad p \geq \frac{2}{9},$$
$$q=0 \quad p \leq \frac{2}{9},$$
$$0<q<1 \quad p=\frac{2}{9}.$$

სურ.42.2 ბოლო ორი უტოლობის შესაძლო ამონახსნები



სურ.43. გაერთიანებული ამონახსნები ოთხივე უტოლობისათვის

ორივე მონაცემები გავაერთიანოთ ერთ სიბრტყეზე. ამ მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი არის წონასწორობის წერტილი (სურ.43). სტრატეგიები კი ასეთია:

$$P=\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\},$$
$$Q=\{\frac{3}{14},\frac{11}{14}\}.$$

ხოლო საშუალო მოგება კი ასეთია:

$$H^A(\frac{2}{9},\frac{3}{14})=-\frac{4}{7},$$
$$H^B(\frac{2}{9},\frac{3}{14})=\frac{1}{3}.$$

ნაწილი V. ფინანსური მათემატიკის მეთოდები

ფინანსური ინფორმაციის გამოყენებას ხშირად პირველხარისხოვანი მნიშვნელობა აქვს გადაწყვეტილებების მიღებისას. ეს გადაწყვეტილებები ვრცელდება ისეთ სფეროებზე, როგორიცაა: კაპიტალდაბანდებები, სესხი, ინფლაცია, საგადასახადო ფასდაკლება. მოცემულ ნაწილში განხილული იქნება ძირითადი მეთოდები (წმინდა დისკონტური ღირებულება, ანუიტეტი, დაფარვის ფონდი, რენტაბელობის შიდა ნორმა და სხვა), რომლებიც დაკავშირებულია ფინანსური კაპიტალდაბანდებების მომგებიანობის დინამიკის განსაზღვრასთან.

თავი 13. ფინანსური მათემატიკის ძირითადი ამოცანები

13.1. საპროცენტო განაკვეთი წლიური დაანგარიშებით

საპროცენტო განაკვეთი წლიური დაანგარიშებით არის პროცენტი, რომელიც უნდა გადახდილ ან მიღებულ იქნას კრედიტის გამოყენებისას ან ინვესტიციიდან, რომელშიც გათვალისწინებულია რამდენიმე დროითი პერიოდის პროცენტების ჯამი. უმრავლეს შემთხვევაში თანხა იზრდება ყოველთვიურად, თუმცა თავიდან მითითებულია მხოლოდ წლიური საპროცენტო განაკვეთი. მრავალი ქვეყნის კანონმდებლობის მიხედვით ფინანსურ დოკუმენტებში აუცილებელია წლიური დაანგარიშების საპროცენტო განაკვეთის ჩვენება, რათა რეალურად შესაძლებელი იყოს ინვესტიციებისა და კრედიტების შეფასება.

მაგალითი: განვიხილოთ შენატანი 100 ლარის ოდენობით 6% წლიური განაკვეთით პროცენტების ყოველთვიური დარიცხვით. მოცემული 6%-იანი მაჩვენებელი არის პროცენტის ე.წ. **ნომინალური განაკვეთი** და ის რეალურად არ გამოხატავს შემოსავალს თანხიდან.

ძირითადი თანხა p = 100, r = 6%, დარიცხვების რაოდენობა წელიწადში m=12.

ერთი წლის პერიოდისათვის დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$A = p(1+\frac{r}{100m})^{nm} = 100(1+\frac{6}{100*12})^{1*12} = 100(1.005)^{12} = 106.17\ .$$

შესაბამისად, საპროცენტო განაკვეთი წლიური დაანგარიშებით არის 6.17%.

13.2. წმინდა დისკონტური ღირებულება

განვიხილოთ ინვესტირებული თანხა, რომელიც აუცილებელია დაბანდების კონკრეტული მოცულობის დაგროვებისათვის მომავლის გარკვეულ დროის პერიოდში.

მაგალითად: თუკი ორი წლის შემდეგ თქვენ დაგჭირდებათ 500 ლარი, მაშინ რა ოდენობის თანხის ინვესტირება უნდა მოახდინოთ ეხლა, რათა მიიღოთ სასურველი შედეგი?

ამ თანხას უწოდებენ **მომავალი მოთხოვნილების მომდინარე ღირებულებას:**

$$P = A * \frac{1}{(1+\frac{r}{100})^n},$$

სადაც P – მიმდინარე ღირებულება,

A – მომავალი ღირებულება.

ფინანსურ სახელმძღვანელოებში ხშირად გამოიყენება წმინდა დისკონტური ღირებულების ცნება:

$$\text{წმინდა დისკონტური ღირებულება} = A * \frac{1}{(1+\frac{r}{100})^n} - p.$$

მიმდინარე ღირებულების ცნება დაკავშირებულია გამოთვლებთან დისკონტის გამოყენებით. დისკონტირების პროცესში ფულის ღირებულება განიხილება დროში უკუმიმართულებით მოძრაობაში.

მაგალითი: განვიხილოთ კაპიტალდაბანდება 1000 ლარის ოდენობით, რომელიც ოთხ წელიწადში გახდება 2000 ლარი. დისკონტის 8% წლიური განაკვეთის პირობით გამოვითვალოთ წმინდა დისკონტური ღირებულება (წ.დ.ღ.):

$$\text{წ.დ.ღ.} = 2000 * \frac{1}{(1+\frac{8}{100})^4} - 1000 = 1470.05 - 1000 = 470.05$$

13.3. ამორტიზაცია

საგნის ამორტიზაცია შეიძლება განსაზღვრულ იქნას რთული პროცენტის გამოთვლის მსგავსი მეთოდით. თუ აქტივის ღირებულება მცირდება ფიქსირებული საპროცენტო განაკვეთით (r) რაღაც პერიოდში, მაშინ ამ აქტივის ღირებულება n პერიოდის მერე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$A_n = A_0(1-\frac{r}{100})^n,$$

სადაც A_0 არის მიმდინარე ღირებულება, ხოლო A_n ღირებულება n პერიოდის მერე.

r - არის **ამორტიზაციის ნორმა,** რომლის გამოთვლა შესაძლებელია წინა ფორმულის გარდაქმნით:

$$r = 100[1-\sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}}].$$

მაგალითი: აგრეგატი, რომელიც შეძენილ იქნა ორი წლის წინ 2000 ლარად, ამჟამად ღირს 1200ლარი. განსაზღვრეთ ამორტიზაციის ნორმა.

ამორტიზაციის ნორმა უდრის:

$$r = 100[1-\sqrt[2]{\frac{1200}{2000}}] = 22.5\,.$$

13.4. ანუიტეტი და დაფარვის ფონდი

ანუიტეტი არის შეთანხმება, რომლის მიხედვითაც ხდება ფიქსირებული ერთჯერადი თანხის შეტანა, რომლის სანაცვლოდ, შეთანხმებული დროის პერიოდის განმავლობაში ან მისი გასვლის შემდეგ თანხის შემტანი პერიოდულად ან ერთჯერადი სახით იღებს გარკვეულ თანხას.

დაფარვის ფონდი არის ანუიტეტის ალტერნატიული ვარიანტი, როდესაც ხდება ფიქსირებული ფულადი თანხის პერიოდული შეტანა დროის გარკვეულ პერიოდში კონკრეტული მიზნის მისაღწევად.

განვიხილოთ ერთჯერადი თანხა A, შეტანილი დროის საწყის პერიოდში. თუკი I არის თანხა, რომელიც ემატება ან აკლდება გაკეთებულ შენატანს ყოველი წლის ბოლოს, მაშინ n წლის მერე დაგროვილი თანხა გამოითვლება ფორმულით:

$$S = A(1+\frac{r}{100})^n + \frac{I(1+\frac{r}{100})^n - I}{\frac{r}{100}}.$$

გამოსახულების პირველი ნაწილი გამოხატავს თანხას, რომელიც დაგროვდა საწყისი შენატანიდან, ხოლო მეორე ნაწილი გამოხატავს თანხას, რომელიც მიიღება პერიოდული დანარიცხებით, და რომლის ყოველწლიური მნიშვნელობის გამოთვლა შესაძლებელია შემდეგი ფორმულით:

$$I = \frac{\frac{r}{100}[S - A(1+\frac{r}{100})^n]}{A(1+\frac{r}{100})^n - 1}.$$

მაგალითი: საწყისი შენატანი შეადგენს 10 000 ლარს, ხოლო წლიური საპროცენტო განაკვეთი 6-ს. ყოველწლიურად ანგარიშიდან 1500 ლარის მოხსნის შემთხვევაში რა თანხა დარჩება 5 წლის შემდეგ?

გამოვითვალოთ:

$$S = 10000(1+6/100)^5 + \frac{-1500(1+6/100)^5 - (-1500)}{6/100} = 11382.30 - 8455.75 = 4926.55.$$

შესაბამისად 5 წლიანი პერიოდის გასვლის შემდეგ ანგარიშზე დარჩება 4926.55 ლარი. 13382.30 ლარი არის თანხა, რომელიც შეიძლებოდა ყოფილიყო ანგარიშზე, ხოლო 8455.75 ლარი - არის თანხა, რომლითაც ანგარიშზე არსებული დანაზოგი თანხის ყოველწლიური გამოტანისა და მიუღებელი პროცენტების გამო შემცირდა.

13.5. ინვესტიციების შეფასება

პროცენტების შეკრების, ამორტიზაციისა და მიმდინარე ღირებულების მეთოდები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ინვესტიციების შეფასებისას. გარდა ამისა, ინვესტიციების შეფასებისას ხდება **რენტაბელობის შიდა ნორმის** ცნების შემოღება. ეს არის შემოსავალი ინვესტირებული თანხიდან, გამოხატული პროცენტულად, რომელიც გამოითვლება წმინდა დისკონტური ღირებულებით. უფრო კონკრეტულად კი ეს არის პროექტის დისკონტის განაკვეთი, რომელიც იძლევა ნულის ტოლ წმინდა დისკონტურ ღირებულებას.

მაგალითი: განვიხილოთ 1000 ლარის ოდენობის ინვესტიცია დანადგარში, რომელმაც უნდა მოიტანოს 1600 ლარის მოგება ორი წლის მერე:

$$1000 = \frac{1600}{(1 + r/100)^2} \qquad \text{და}$$

$$r = 26.5.$$

შესაბამისად, მოცემული კაპიტალდაბანდების რენტაბელობის შიდა ნორმა არის 26.5%.

ნაწილი VI. იმიტაციური და დინამიკური მოდელირება

თავი 14. მოდელების ზოგადი დახასიათება

მოდელირება – არის S სისტემის {Ms} თვისებების სიმრავლის ასახვა სხვა M სისტემის {Mm} თვისებების სიმრავლეზე, რომელიც წარმოადგენს პირველის მოდელს. თავად მოდელები, ანუ M სისტემები წარმოადგენენ სხვადასხვა ფიზიკურ და ლოგიკურ არსს.

ზოგადად **მოდელირება** არის სამეცნიერო შესწავლის მეთოდი, რომლის დროსაც კვლევის ობიექტი იცვლება სხვა, უფრო მარტივი ობიექტით, რომელსაც უწოდებენ მოდელს. დღევანდელ დღეს ცნობილია და ფართოდ გამოიყენება მოდელირების მრავალრიცხოვანი მეთოდები და ხერხები. მაგრამ მოდელირების პროცესის ძირითად ნაირსახეობად შეგვიძლია ჩავთვალოთ: მათემატიკური და ფიზიკური.

ფიზიკური მოდელირების დროს კვლევის სისტემა იცვლება სხვა მატერიალური სისტემით, ხელსაწყოთი ან მოწყობილობით, რომლის საშუალებით შესაძლებელია შესასწავლი სისტემის (ობიექტის) თვისებების ასახვა მათი ფიზიკური ბუნების შენარჩუნებით.

ფიზიკურ მოდელს უწოდებენ სისტემის გადიდებულ ან შემცირებულ აღწერას. მისი დამახასიათებელი არის ის, რომ ფიზიკური მოდელი გამოიყურება როგორც მოდელირებადი ერთიანობა (მაგალითად, თვითმფრინავის კოპიო მასშტაბით 1:50).

უნდა აღინიშნოს, რომ ფიზიკური მოდელირების შესაძლებლობები შეზღუდულია.

მათემატიკურ მოდელირებაში გულისხმობენ სხვადასხვა პროცესების შესწავლის მეთოდს, რომლებიც აღიწერება ამა თუ იმ მათემატიკური გამოსახულებით. მისი გამოყენების დროს იგება მათემატიკური აღწერა ან მათემატიკური მოდელი.

მათემატიკური მოდელი არის მოდელი, რომელიც ობიექტის მახასიათებლების ან მოვლენების აღწერისათვის იყენებს მათემატიკურ სიმბოლოებსა და მეთოდებს. ნებისმიერი მათემატიკური ფორმულა წარმოადგენს მათემატიკური მოდელის აგების გარკვეულ ეტაპს. გამოცდილება გვიჩვენებს,

რომ მათემატიკური მოდელის აგება საკმაოდ მარტივია, მაგრამ, ამავე დროს, რთულია აღწერილი მოვლენის დედააზრის გადმოცემა.

მოდელირებადი პროცესებისა და სისტემების ხასიათიდან გამომდინარე შეირჩევა შესაბამისი მათემატიკური აპარატი, რომელიც განსაზღვრავს იმ ცნებების, პროცედურებისა და საწყისი შეფარდებების გარდაქმნის ფორმალური წესების სიმრავლეს, რომლებიც ითვალისწინებენ ობიექტის არსებით თავისებურებებს.

ასე მაგალითად, შეიძლება იყოს გამოყოფილი დეტერმინირებული და სტოქასტური (შემთხვევითი ცვლადებით, პარამეტრებით და ფუნქციებით) მოდელების კლასები, რომლებიც თავის მხრის შეიძლება იყოს დაყოფილი ორ სახეობათ – ანალოგური და დისკრეტული.

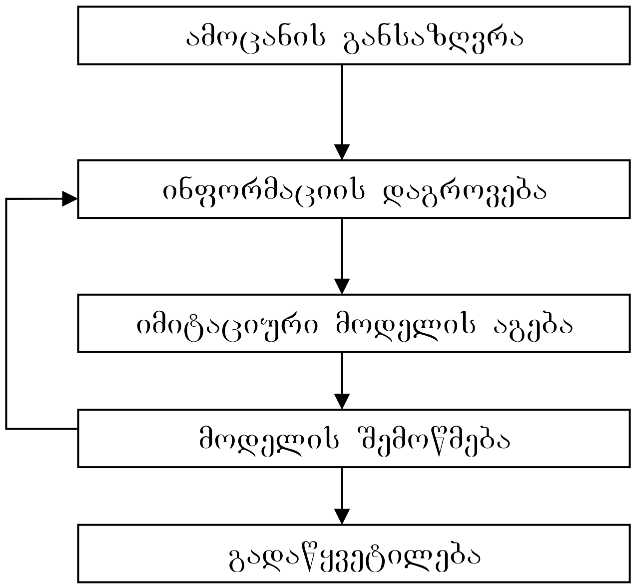
ანალოგური მოდელი არის ისეთი მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ობიექტს როგორც ანალოგს, რომელიც იქცევა როგორც რეალური ობიექტი, მაგრამ გარეგნულად მას არ ჰგავს (მაგალითად: გრაფიკი, რომელიც აჩვენებს დამოკიდებულებას ორ მაჩვენებელს შორის არის ანალოგური მოდელი).

გამოთვლითი ტექნიკის განვითარებასთან ერთად ჩამოაყალიბდა ახალი მიმართულება რთული პროცსების და სისტემების შესწავლაში – **იმიტაციური მოდელირება**. ასეთი სახის მოდელირება საშუალებას იძლევა შესწავლილ იქნას როგორც დეტერმინირებული, ასევე შემთხვევითი პროცესები და სისტემები.

თავი 15. იმიტაციური მოდელების დამუშავება

იმიტაციური მოდელირება – არის რიცხობრივი მეთოდების ერთობლიობა, რომელთა საშუალებით ტარდება ექსპერიმენტები მათემატიკურ მოდელებზე კომპიუტერის გამოყენებით.

იმიტაციური მოდელირების პროცესი (სურ.44) გულისხმობს შესაბამისი მოდელების შემუშავებასა და შემოწმებას.



სურ.44. იმიტაციური მოდელირების პროცესი

გადაწყვეტილების მიღების პროცესში შეიძლება გამოყენებულ იქნას მოდელირების სხვადასხვა ხერხები, მათ შორის ისეთი ძირითადი მიდგომები, რომლებიც იყენებენ ემპირიულ და ალბათურ მონაცემებს. ამ დროს გამოიყენება შემთხვევითი რიცხვები.

იმიტაციური მოდელების შემუშავებისა და მოდელირების პროცესის ზოგადი თანმიმდევრობა შეიძლება იყოს წარმოდგენილი შემდეგნაირად.

თავდაპირველად ხორციელდება პრობლემის ფორმულირება და ყალიბდება ის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია კვლევასთან.

შემდეგ მიმდინარეობს კვლევის ამოცანების ფორმალიზებული დასმა. ამ დროს ფართოდ გამოიყენებენ ცნობილ მათემატიკურ მოდელებს და შეფარდებებს.

შემდეგ ეტაპზე წარმოებს აპრიორი საწყისი მონაცემების განსაზღვრა და მათი დასაბუთება.

იმის შემდეგ, რაც საწყისი მოდელი და შერჩეული პარამეტრები აპრობირებულია მათი ვარირების დროს და გაკეთებულია დასკვნები მოდელის ვარგისიანობის შესახებ, იწყებენ პროგრამის შედგენას კომპიუტერზე იმიტაციის მიზნით.

უნდა აღინიშნოს, რომ იმიტაციური მოდელირების დროს სირთულეები წარმოიშვება საწყისი ფორმალიზებული აღწერის შედგენის, მათემატიკური უზრუნველყოფის შერჩევისა და პროპგრამირების ეტაპებზე. აქ სირთულეების გადასაჭრელად ეფექტური შეიძლება აღმოჩნდეს მოდელირების მოდულური პრინციპის გამოყენება.

თავი 16. დინამიკური მოდელირების მაგალითები

16.1. მოსახლეობის მოდელი

წარმოვიდგინოთ შემდეგი სურათი. XVIII საუკუნის ცენტრალური ევროპა, ეკლესია სავსეა მეზობელი სოფლებიდან ჩამოსული მრევლით. მღვდელი ამჩნევს, რომ ეკლესია პატარა არის იმისათვის, რომ დაიტიოს ყველა მსურველი. თუ მოსახლეობის რიცხვი კვლავ გაიზრდება, საჭირო იქნება ახალი ეკლესიის აშენება. დრო, რომლის განმავლობაშიც უნდა აშენდეს ტაძარი, დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა სიჩქარით გაიზრდება მოსახლეობის რიცხვი.

ავღნიშნოთ:

X_n – მრევლის რიცხვი n–ური წლის ბოლოს;

X_{n+1} – მრევლის რაოდენობა 1 წლის შემდეგ.

აქედან:

$$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n .$$

მოსახლეობის რიცხვი დამოკიდებულია დაბადებულთა და გარდაცვლილთა რაოდენობაზე (მიგრაციაზე საუბარი არ არის):

$b_1,....,b_k$ - ახლადდაბადებულები,

$d_1,....,d_k$ – გარდაცვლილები,

$X_1,.......,X_k$ - მრევლის საერთო რიცხვი.

ქვემოთ მოცემული თანაფარდობები წლების მანძილზე დიდად არ იცვლება:

$$\frac{b_1}{x_1}..........\frac{b_k}{x_k},$$

$$\frac{d_1}{x_1}..........\frac{d_k}{x_k}.$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ეს ფარდობები მუდმივია და, შესაბამისად, უდრის α–ს და β-ს. აქედან გამომდინარეობს, რომ n წელიწადში დაიბადა αx_n და გარდაიცვალა βx_n ადამიანი:

$$\Delta x_n = \alpha x_n - \beta x_n$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n .$$

დავუშვათ, რომ $\gamma = 1 + \alpha - \beta$, მაშინ

$$x_{n+1} = \gamma x_n ,$$

ამით მოსახლეობის დემოგრაფიული მოდელი აგებულია.

გამოვყოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1. $\gamma > 1$ (მოსახლეობა იზრდება),
2. $\gamma = 1$ (ცვლილება არ არის),
3. $\gamma < 1$ (მოსახლეობა კლებულობს).

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა: 1829 წელს ეკონომისტმა მალთუსმა გამოაქვეყნა ნაშრომი, რომლის მიხედვით ადამიანები მრავლდებიან გეომეტრიული პროგრესიით:

$$x_{n+1} = \gamma x_n,$$

სადაც $\gamma > 1$

მაშინ, როდესაც არსებობის წყაროები იზრდება მხოლოდ არითმეტიკული პროგრესიით:

$$y_{n+1} = y_n + d,$$

სადაც $d > 0$

თუმცა მოგვიანებით დამტკიცდა, რომ მსგავსი გათვლები მოქმედებს მხოლოდ 3-4 წელიწადს და მათზე გრძელვადიანი პროგნოზების გაკეთება არ შეიძლება.

შენიშვნა: მოდელის აგებისას აუცილებლად უნდა მითითებულ იქნას დროის პერიოდი, რომელშიც შეიძლება მისი გამოყენება, რათა მოდელის მომხმარებელმა არ დაუშვას შეცდომა.

16.2. მობილიზაციის მოდელი

პოლიტიკური ან სოციალური მობილიზაცია გულისხმობს ხალხის მოზიდვას პარტიაში ან მის მომხრეთა რიგებში, რაიმე მოძრაობაში და ა.შ. ამ დროს საჭიროა დროის ფაქტორის გათვალისწინება ანუ მობილიზაციის მოცემული მოდელი უნდა იყოს დინამიკური.

გამოვსახოთ რაიმე რეგიონში მობილიზაციის დონის ცვლილებების ლოგიკა ერთი თვის განმავლობაში. ერთეულად ავიღოთ მოსახლეობის ის ნაწილი, რომლისთვისაც ამ ტიპის მობილიზაციას აზრი აქვს:

M_n - არის დროის t_n მომენტისათვის მობილიზებული ხალხის წილი,

$1\text{-}M_n$ – არამობილიზებული ხალხის წილი,

ერთ თვეში მობილიზაციის დონე შეიძლება შეიცვალოს ორი მიზეზის გამო:

1. მოხდა მოსახლეობის ნაწილის მოზიდვა:

$$\alpha(1-M_n),\ \text{სადაც}$$

$\alpha > 0$ - არის აგიტაციის კოეფიციენტი;

2. მოსახლეობამ დატოვა მოძრაობის რიგები:

$$\beta M_n,\ \text{სადაც}$$

$\beta > 0$ არის გასვლის მუდმივი კოეფიციენტი.

ეს ორი პარამეტრი გამოსახავს მოსახლეობის ინტერესების, შეხედულებებისა და გეგმების პროპორციულ ცვლილებას :

$$\Delta M_n = M_{n+1} - M_n,$$

$$M_{n+1} - M_n = \alpha(1-M_n) - \beta M_n.$$

რაც ნიშნავს, რომ დროის გარკვეულ პერიოდში მობილიზაციის დონის ცვლილება უდრის სხვაობას მოზიდულ მოსახლეობის წილსა და გასულ მოსახლეობის წილს შორის. ეს არის მობილიზაციის პროცესის განტოლება, რომელიც სხვანაირად შეიძლება ასე ჩაიწეროს :

$$M_{n+1} = \alpha + \gamma M_n$$

სადაც

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta.$$

16.3. შეიარაღების მოდელი

განვიხილოთ კონფლიქტური სიტუაცია, რომელშიც ჩართულია ორი (x, y) მეზობელი ქვეყანა. X ქვეყნის სამილიტარიზაციო დანახარჯებია $X=x(t)$, ხოლო მეორე ქვეყნის – $Y=y(t)$.

განვიხილო მოდელის აგების თანმიმდევრობა:

1. X ქვეყანა იძენს იარაღს, რადგან ეშინია y-თან პოტენციური ომის. ამასთან, Y-მა იცის რა X-ის მილიტარიზაციის შესახებ, ისიც ზრდის სამხედრო დანახარჯებს. აქედან გამომდინარე, თითოეული ქვეყანა ზრდის ან ამცირებს სამხედრო დანახარჯებს მეორის პროპორციულად:

$$\begin{cases} x^1 = \alpha y, \\ y^1 = \beta x. \end{cases}$$

თუმცა, ასეთ შემთხვევაში, მოდელის ნაკლი არის შეიარაღების ლიმიტის არარსებობა;

2. რაც უფრო მეტია ქვეყნის სამხედრო დანახარჯები, მით ნაკლებია მისი ეკონომიკური ზრდის სიჩქარე:

$$\begin{cases} x^1 = \alpha y - \gamma x, \\ y^1 = \beta x - \delta y; \end{cases}$$

3. თითოეული ქვეყანა ზრდის თავის შეიარაღებას საკუთარი მტრული განწყობის მოხედვით, თუნდაც მეორე ქვეყანა მისთვის საფრთხეს არ წარმოადგენდეს. ავღნიშნოთ მოცემული პრეტენზიები a და b–თი. თუ ეს კოეფიციენტები უარყოფითია, მაშინ ჩავთვალოთ ისინი კეთილი ნების კოეფიციენტებად:

$$\begin{cases} x^1 = \alpha y - \gamma x + a, \\ y^1 = \beta x - \delta y + b. \end{cases}$$

ამით შეიარაღების მოდელი აგებულია.

დასკვნა

როგორც ჩანს წინამდებარე სახელმძღვანელოდან, გადაწყვეტილების მიღების, მისი ანალიზის და პროგნოზირების თეორიული საფუძველი და პრაქტიკული ინსტრუმენტები ეკონომიკასა და ბიზნესში არის ეკონომიკურ–მათემატიკური მოდელები და მათ საფუძველზე გაკეთებული გათვლები და ძირითადი სირთულე მდგომარეობს არა გათვლების წარმოებაში, არამედ რეალური გარემოს ადექვატური მოდელების აგებაში.

მოდელის აგება ეყრდნობა შესასწავლი სიტუაციის მნიშვნელოვან გამარტივებას და, შესაბამისად, მის საფუძველზე მიღებულ შედეგებს უნდა საკმაოდ ფრთხილად მივუდგეთ – მოდელს ყველა პრობლემის გადაწყვეტა არ შეუძლია. ამავე დროს, ერთი შეხედვით ყველაზე უხეში იდეალიზაციაც კი საშუალებას იძლევა უფრო ღრმად ჩავწვდეთ პრობლემის არსს. მოდელის პარამეტრებზე გავლენის მოხდენის მცდელობისას ჩვენ ვიღებთ შესაძლებლობას მოვახდინოთ ხარისხობრივი ანალიზი შესასწავლი მოვლენისა და საერთო ხასიათის დასკვნები გავაკეთოთ.

მათემატიკური მოდელების გამოყენება სახიფათოა მანამ, სანამ სიტუაცია ბოლომდე არ არის შესწავლილი. ხშირად საჭირო ხდება მოდელთან დაბრუნება და მასში ცვლილებების შეტანა მას შემდეგ, რაც გათვლების პირველი ეტაპი უკვე ჩატარებულია. გარდა ამისა, ხშირად სასარგებლოა ე.წ. “მოდელების კამათი” – როდესაც ერთი და იგივე მოვლენა აღწერილია არა ერთი, არამედ რამდენიმე მოდელით. რისკის და გაურკვევლობის პირობებში გადაწყვეტილების მიღების მათემატიკური საშუალებების სახით გამოიყენება: სტატისტიკური ანალიზი, იმიტაციური მოდელირება, სტრატეგიული თამაშების თეორია, მათემატიკური პროგრამირება, დინამიკური პროგრამირება, მასობრივი მომსახურების თეორია და სხვა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Акулич И.Л. «Математическое програмирование». Москва, Изд. «Высшая Школа», 1986
2. Аллен Р.Коэн. «MBA по Менеджменту». Москва, «Альпина Бизнес Букс», 2004
3. Ашманов С.А. «Линейное Программирование». Москва, «Наука», 1981
4. Б.Банди «Основы Линейного Программирования». Москва, «Радио и Связь», 1984
5. Вильям Дж. Стивенсон. «Управление Производством». Москва, «Бином». 2002
6. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю., Барановская Т.П.. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. Москва, «Финансы и статистика», 2003.
7. Майкл Мескон, Майкл Альберт, Франклин Хедоури. «Основы Менеджмента». Москва, «Дело», 2004.
8. Маманов С.А. «Линейное програмирование». Москва, Изд. «Наука», 1981
9. Новиков Г.И., Пермякова Э.И., Яковлев В.Б. «Сборник Задач по Вычислительной Технике и Программированию». Москва, «Финансы и Статистика», 1991
10. Пол Милгром, Джон Робертс. «Экономика, Организация и Менеджмент». Санкт-Петербург, «Экономическая Школа», 2004
11. Ричард Томас. «Количественный анализ хозяйственных операций и управленческих решений». Москва, Изд. «Дело и Сервис», 2003г.
12. Роджер Элкон. «Основы Менеджмента». Москва, «Финпресс», 1999
13. Трояновский В.М. «Математическое моделирование в менеджменте». Москва, Изд. «РДЛ», 2003г.
14. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. «Математические методы и модели в управлении». Москва, Изд. «Дело», 2002г.
15. Эльстер К.Х. «Введение в Нелинейное Программирование», Москва, «Наука», 1985
16. Brian D. Bunday. “Basic Linear Programming”. “Edward Arnold”, 1989

იბეჭდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 26.02.2009. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 16.06.2009. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 6. ტირაჟი 100 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent

ი.მ. „გოჩა დალაქიშვილი",
ქ. თბილისი, ვარკეთილი 3, კორპ. 333, ბინა 38