

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თ. თბაქაძე

მათემატიკური მოდელირების კურსი
(რხვეითი პროცესები)

IV ტომი

თბილისი
2010

უაკ 517.958

განხილულია მათემატიკური მოდელირების რთული და პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი პრობლემები, რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების თავისებურებები, მათემატიკური მოდელირების სხვადასხვა მეთოდები. მოყვანილია შესაბამისი მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა მექანიკის, ელექტრომაგნიტური ქსელების, ეკონომიკის, ეკოლოგიისა და ფსიქოლოგიის სხვადასხვა სფეროებში. განკუთვნილია მაგისტრანტებისათვის.

რეცენზენტი სრული პროფესორი ზ. გასიტაშვილი

© საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2010
ISBN 99940-57-16-2 (ყველა ტომი)
ISBN (IV ტომი)

ეძღვნება ჩემი მასწავლებლის,
შესანიშნავი ადამიანისა
და მეცნიერის, პროფესორ, ტ.მ.დ.
თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის
ნათელ სსოვნას

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებულ კურსს მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), IV ტომი, ავტორი წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსი-ტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში; ამჟამად კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდის მიხედვით, ნაშრომი წარმოადგენს ავტორის სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. სახელმძღვანელო მოიცავს კურსის ორ ნაწილს, რომელიც შეესაბამება ორი სემესტრის მასალას მაგისტრანტებისათვის.

ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია განსხვავებული ვარიანტები მაგისტრანტების ინდივიდუალური მუშაობისათვის. თითოეულმა მაგისტრანტმა უნდა შეასრულოს სამუშაოს თავისი ვარიანტი და ჩააბაროს ანგარიში თითოეულ სამუშაოზე შესაბამისი განმარტებებით. მოყვანილია ასევე ლიტერატურის სია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, რათა წარმოდგენილი მასალა უფრო ღრმად იქნეს შესწავლილი.

ავტორი მადლობას უხდის ლაბორანტ ვერა ქორთიევას სახელმძღვანელოს აკრეფისა და რედაქტირებისათვის, რომლის თავდაუზოგავი მუშაობის გარეშე წიგნი ვერ იხილავდა სინათლეს.

ნაწილი I. წრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

ადამიანი ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში აგროვებს გარკვეულ გამოცდილებას, რომელიც თავიდან **ცოდნის მოუწესრიგებელ მარაგს ქმნის**. შემდეგ ხდება შეგროვილი ინფორმაციის სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია. ამ ეტაპზე დაგროვილი ცოდნა არის – **მოძღვრება**, კარლ ლინეის ტიპთა შესახებ მოძღვრების ანალოგიურად.

ამის შემდეგ, შეისწავლება მოძღვრებაში განხილულ ობიექტთა განვითარებისა და ურთიერთქმედების ძირითადი კანონზომიერებები, რომლებიც დაკავშირებულია ცოდნის სხვა უფრო ღრმად შესწავლილ სფეროებთან, ანალოგიისა და ინტუიციის გზით, ამიტომ ხშირად ატარებს სუბიექტურ-შემოქმედებით ხასიათს. ცოდნის განვითარების ამ ეტაპს – **ხელოვნება ეწოდება**.

შემდეგ ეტაპზე, ხდება ძირითად ცნებათა და კანონზომიერებათა მწყობრ, აქსიომატურ სისტემად ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას გვაძლევს, ცოდნის მოცემული სფეროს ფარგლებში, ვაწარმოთ შესაბამის მოვლენათა პროგნოზირება. ამით ჩვენი ცოდნათა მარაგი იძენს **მეცნიერულ დონეს**.

თანამედროვე მათემატიკის მიღწევებმა (**მანდელბროტის ფრაქტალების თეორია**) საშუალება მოგვცა აგვეხსნა „მშენიერების“ არსიც.

აღმოჩნდა, რომ მოგვწონს ხელოვნების ესა თუ ის ნიმუში, ფორმისა და შინაარსის ჰარმონიის შერწყმით, „შემთხვევით-გამოუცნობთან“ (**ოქროს კვეთის ფარგლებში**), რაც დამალულია უცხო დამკვირვებლის თვალისგან.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც (**სამყაროს მოდელები**) იცვლება.

განასხვავებენ მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას:

- ა) ფიზიკური;
- ბ) იმიტაციური;
- გ) მათემატიკური.

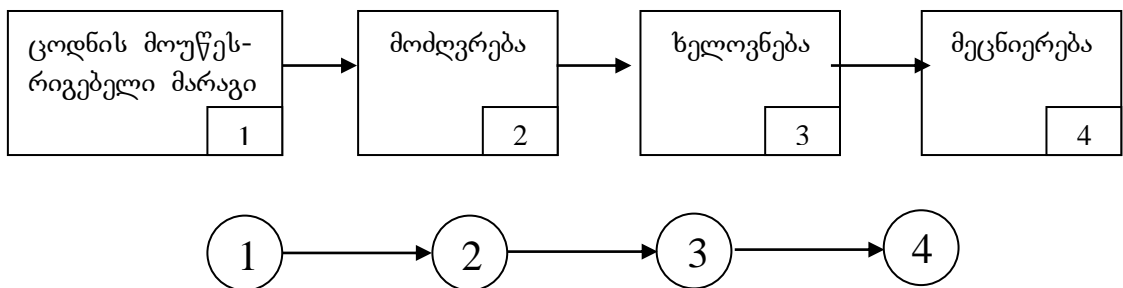
განსაზღვრება. მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები, მოდელირება ეწოდება.

ა) ფიზიკური მოდელი – არის ნატურალურ ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტულად;

ბ) იმიტაციური მოდელი – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც შეისწავლის მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ რეალიზაციებს;

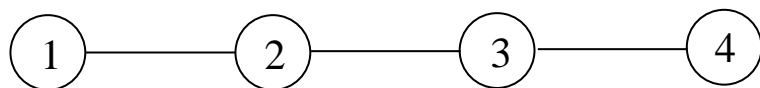
გ) მათემატიკური მოდელი – არის მათემატიკური მეთოდებით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი, ამ პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, მოცემული სიზუსტით.

უმარტივესი მათემატიკური მოდელის მაგალითია პროცესის ბლოკ-სქემა. განვიხილოთ ცოდნის ევოლუციის მოდელი გრაფის მეშვეობით.



ნახ. 1. ცოდნის ევოლუციის ბლოკ-სქემა და გრაფი

ცხადია, რომ მოყვანილი გრაფი არის გამარტივებული, სქემატური, რადგან, ყოველ ეტაპზე, ხდება შებრუნებული პროცესიც ანუ, ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მოძღვრებად გადაქცევის პარალელურად, ხდება ცოდნის მოცულობის გაფართოებაც და ა.შ. ასე, რომ ცოდნის ევოლუციის გრაფი ორიენტირებული არ უნდა იყოს.



ნახ. 2. ცოდნის ევოლუციის არაორიენტირებული გრაფი

მათემატიკური მოდელები, მოდელირების მეთოდების მიხედვით, იყოფა ორ ძირითად ჯგუფად: ა) უწყვეტი და

ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები; არსებობს ასევე
გ) შერეული ტიპის, რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც.

ამ ტომში განვიხილავთ რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელების თავისებურებებს. ჩვენ გარშემო არსებული მოვლენების უმრავლესობა ხასიათდება განმსაზღვრელი პარამეტრების რხევითი ცვალებადობით, რაიმე მონოტონურად ცვლადი პარამეტრის(დროის) მიმართ. ასეთ პროცესებს რხევითი პროცესები ეწოდება. რხევით სისტემებს, ზოგჯერ, ოსცილატორებს უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხასიათდება თავისუფლების ხარისხით ანუ სისტემის განმსაზღვრელი პარამეტრების აუცილებელი რაოდენობით. მაგალითად, თუ ვსწავლობთ მყარი სხეულის ბრუნვით რხევებს სიმეტრიის ღერძის გარშემო, მაშინ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია ერთი პარამეტრი - მობრუნების კუთხე. რაც ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. რხევითი სისტემების ძირითადი თავისებურებები ნათლად ჩანს ისეთი ოსცილატორების მაგალითზეც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. ამიტომ სიმარტივისათვის, განვიხილავთ რხევითი სისტემების ძირითად ცნებებს სწორედ ასეთი მარტივი ოსცილატორების მაგალითზე, თუმცა არსებობს ისეთი რხევითი სისტემებიც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთზე მეტია.

რხევითი სისტემების დახასიათება ხდება ასევე ორი ძირითადი მიმართულებით. ესენია: წრფივი და არაწრფივი რხევითი სისტემები, იმის მიხედვით, თუ როგორ ტიპს მიეკუთვნება ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერენ შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს. რეალური რხევითი სისტემები ყოველთვის არაწრფივია, თუმცა მიახლოებით, კვლევის გამარტივების მიზნით, ისინი შეიძლება შეიცვალოს შესაბამისი წრფივი სისტემებით.

ვთქვათ, განვიხილება რხევითი სისტემა ერთი განმსაზღვრელი $x(t)$ პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია მონოტონურად ცვლად t პარამეტრზე.

განსაზღვრება. ისეთ რხევით სისტემებს, რომელთათვისაც ადგილი აქვს $x(t) = x(t+T)$ ტოლობას პერიოდული რხევითი სისტემა ეწოდება. ხოლო ისეთ T მინიმალურ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ ტოლობას აქვს ადგილი რხევის პერიოდი ეწოდება.

განსაზღვრება. რხევის პერიოდის $f = \frac{1}{T}$ შებრუნებულ სიდიდეს რხევის სიხშირე ეწოდება. რხევის სიხშირე გვიჩვენებს სრულ რხევათა რაოდენობას მონოტონური პარამეტრის(დროის) ერთი ერთეულით ცვლილებისას. თუ რხევის პერიოდს, წამებში გავზომავთ, მაშინ რხევის სიხშირის ერთეული იქნება ჰერცი (რხევათა რიცხვი ერთ წამში) .

რხევის სიხშირის დასახასიათებლად, ზოგჯერ, იყენებენ ω კუთხურ სიხშირეს, რომელიც გამოხატავს რხევათა რაოდენობას 2π წამის (მონოტონური პარამეტრის მნიშვნელობის) განმავლობაში, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

ქვემოთ, მოცემულია იმ რხევითი პროცესების რხევის სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობები (გამოსახული წმ^{-1} ერთეულებში), რაც ბუნებაში გვხვდება:

- 10^{-10} – პლანეტების საუკუნებრივი შეშფოთებების სიხშირე;
- 10^{-8} – პლანეტების ბრუნვის სიხშირე;
- 10^{-5} – მოქცევა-უკუქცევის სიხშირე;
- 10^1 – რხევის სიხშირე მანქანებში;
- 10^0 – წამების ქანქარა;
- 10^4 – აკუსტიკური რხევები;
- $10^5 - 10^8$ – ულტრაბგერითი მექანიკური რხევები;
- 50 – ცვლადი დენი;
- 10^{12} – ინფრაწითელი გამოსხივება;
- 10^{15} – ხილული ოპტიკური სპექტრი;
- 10^{18} – რენტგენის სხივები;
- 10^{20} - γ სხივები;
- 10^{23} – კოსმოსური სხივები.

რხევითი პროცესები ასევე ხასიათდება A ამპლიტუდით.

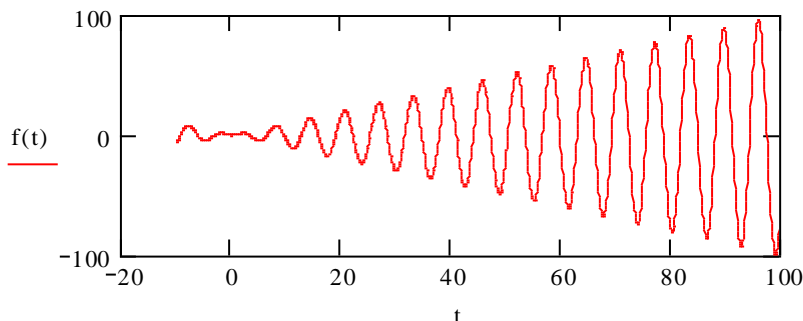
განსაზღვრება. ერთი სრული რხევის განმავლობაში გადახრის ნახევრის სიგრძეს ამპლიტუდა ეწოდება.

თუ x_{\max} უდიდესი და x_{\min} უმცირესი მნიშვნელობებია $x(t)$ გადახრისას რხევის ერთი პერიოდში განმავლობაში, მაშინ რხევის ამპლიტუდა $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$.

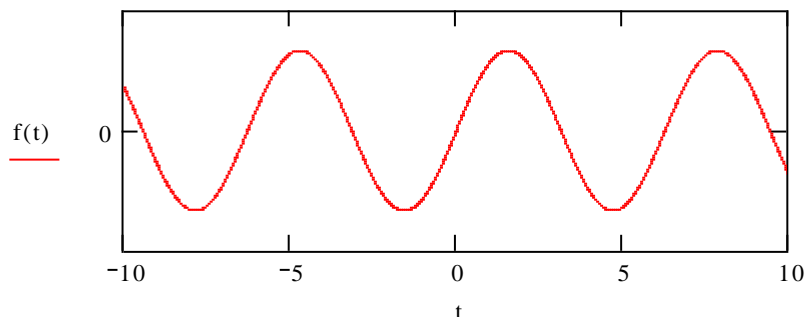
პერიოდული რხევისას გადახრის განზოგადებული კოორდინატი $x(t)$ ასრულებს რხევებს x_0 საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში $x_0 = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min})$. სიმეტრიული რხევების შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობა შეესაბამება აგრეთვე წონასწორობის ან უძრაობის მდგომარეობას.

განსაზღვრება. თუ $x(t)$ ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებითაა პერიოდული ანუ $|x(t) - x(t+T)| \leq \varepsilon$ წინასწარ არჩეული ε მცირე სიდიდისათვის, მაშინ $x(t)$ ფუნქციას თითქმის პერიოდული ფუნქცია ეწოდება.

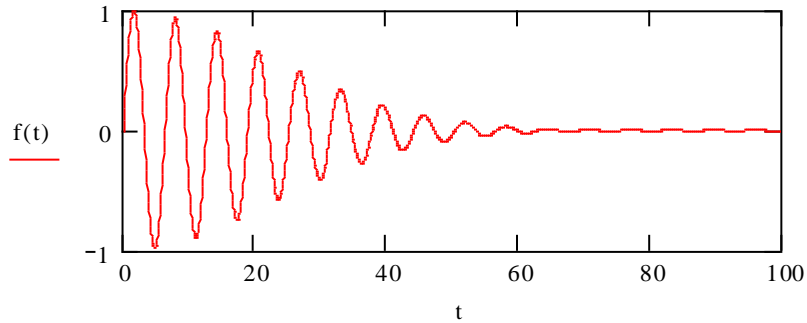
რხევითი სისტემები ხასიათდება რხევის ამპლიტუდის ცვლილებით რაიმე მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით. განასხვავებენ: რხევებს ზრდადი ამპლიტუდით (ნგრევადი სისტემები) (ნახ. 3), მუდმივი ამპლიტუდით(პერიოდული) (ნახ. 4) და კლებადი ამპლიტუდით (მილევადი) (ნახ 5).



ნახ. 3. რხევები ზრდადი ამპლიტუდით



ნახ. 4. რხევები მუდმივი ამპლიტუდით



ნახ. 5. რხევები მიღევადი ამპლიტუდით

რხევითი სისტემები, წარმოქმნის მექანიზმიდან გამომდინარე, შემდეგ ტიპებად იყოფა:

1. საკუთრივი რხევითი სისტემები (თავისუფალი რხევები);
2. ავტორხევითი სისტემები (თვითაგზნებადი რხევები);
3. პარამეტრული რხევითი სისტემები (პარამეტრით აგზნებადი რხევები);
4. იძულებითი რხევითი სისტემები (მაიძულებელი ძალის გავლენით წარმოშობილი რხევები);
5. ბმული რხევითი სისტემები (ერთმანეთთან შეკავშირებული რამდენიმე რხევითი სისტემა).

განვიხილოთ რხევითი სისტემის თითოეული ტიპი.

საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემების დინამიკა მთლიანად ემყარება საწყის ბიძგს და შემდეგ აღარ იღებს გარე ზემოქმედებას. ე.ი. ენერჯის გაზრდა არ ხდება სისტემის გარედან. განვიხილება ორი ტიპის საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემები: არადემპფირებული და დემპფირებული. დემპფირებული რხევითი სისტემები იმით გამოირჩევა, რომ ადგილი აქვს ენერჯის დახარჯვას წინააღმდეგობის ძალების დაძლევაზე.

მაგალითად, გრავიტაციული ქანქარა საწყისი ბიძგის შემდეგ თავისუფალ რხევას იწყებს. თავისუფალი რხევითი სისტემების დინამიკა აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისაგან განსხვავებით, ავტორხევით სისტემებში ადგილი აქვს ენერჯის გარედან შემოდინებას. ამასთან, ენერჯის წყარო არაა თვითონ რხევითი სისტემა. სისტემა გარედან იღებს ზუსტად იმდენ ენერჯიას, რამდენსაც ხარჯავს.

მაგალითი განვიხილოთ საათი, რომელშიც ენერჯის წყარო აწეული ტვირთი ან შეკუმშული ზამბარაა. ასეთი საათი ავტორხევით სისტემას წარმოადგენს. ავტორხევები აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისა და ავტორხევითი სისტემების შემთხვევაში რხევის სიხშირე განისაზღვრება თვით რხევითი სისტემის ხასიათიდან გამომდინარე, ამიტომ ასეთ სისტემებს ავტონომიურ სისტემებს უწოდებენ.

მათგან განსხვავებით, პარამეტრულ და იძულებით რხევით სისტემებს ჰეტერონომიულ სისტემებს უწოდებენ, რადგან ასეთ სისტემებში რხევის სიხშირე განისაზღვრება გარე ზემოქმედებიდან გამომდინარე. პარამეტრული აგზნებადობის სისტემებში, გარე ზემოქმედება იწვევს სისტემის შიდა პარამეტრების პერიოდულ ცვალებადობას. *მაგალითად*, მათემატიკური ქანქარა ძაფზე ჩამოკიდული ტვირთით, როცა ძაფის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. პარამეტრული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელები იმით გამოირჩევა, რომ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ზოგიერთი კოეფიციენტი არის მონოტონური პარამეტრის(დროის) პერიოდული ფუნქცია.

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე ასევე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს კი განსაზღვრავს არა პერიოდული პარამეტრები, არამედ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელებში, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

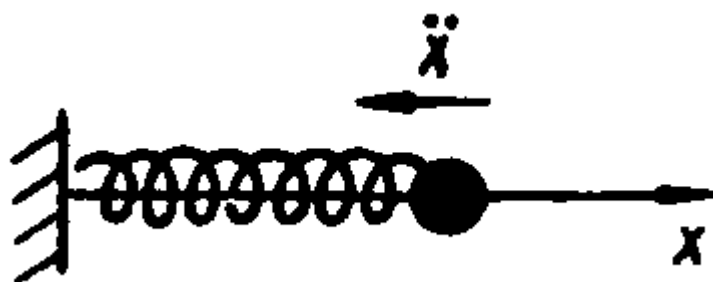
ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორ ან მეტ რხევით სისტემასთან, რომლებიც ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

P.S. არსებობს შერეული ტიპის სისტემებიც, რომლებიც ერთდროულად იძულებითი და ავტორხვეითი სისტემებია და ა.შ. ამ ნაწილში განვიხილავთ წრფივ რხევით პროცესებს. ანუ ისეთ რხევით პროცესებს, რომელთა შესაბამისი მათემატიკური მოდელები წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისი საწყისი პირობებით.

თავი I. არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავისუფალი რხევითი პროცესები წარმოიშობა, როცა სისტემაზე საწყის მომენტში მოქმედებს ამძრავი ძალები, რომლებიც შემდეგ ქრება და სისტემას საშუალებას აძლევს გამოაჩინოს თავისი შინაგანი ბუნება. თავისუფალი რხევითი პროცესების დროს, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს. თუ სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით არ იცვლება (მუდმივია), მაშინ ამ სისტემას კონსერვატიული ეწოდება. კონსერვატიულ სისტემებში გვაქვს არადემპფირებული (არამილევადი) რხევები.

1.1. არადემპფირებული, თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ.1.1. წრფივი ოსცილატორის მექანიკური მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი ოსცილატორის მექანიკური რხევები 1.1 ნახ-ის მაგალითზე. m მასის სხეული c სიხისტის ზამბარით დაკავშირებულია კედელთან, სადაც ზამბარის მეორე მხარე მჭიდროდაა ჩამაგრებული. ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის მეორე კანონს ჩავწერთ m მასის სხეულისათვის

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx. \quad (1.1)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1.3)$$

სადაც

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ რხევის კუთხური სიხშირეა.}$$

კოშის (1.2)-(1.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1.4)$$

ან ფორმულით

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (1.5)$$

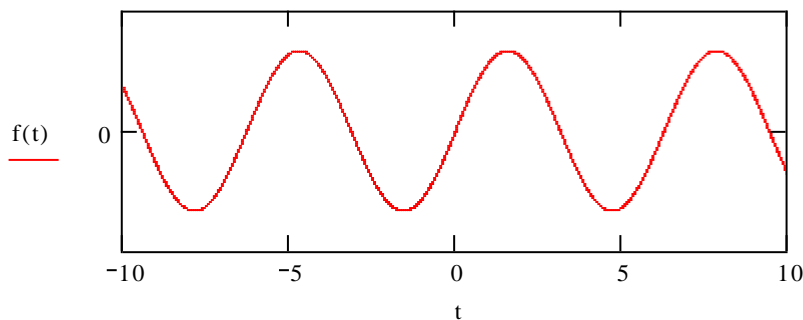
სადაც φ რხევის საწყისი ფაზაა და

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (1.6)$$

რხევის პერიოდი და სიხშირე შესაბამისად იქნება:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad f = \frac{1}{T}. \quad (1.7)$$

ასეთ რხევებს შეესაბამება 1.2. ნახაზი.



ნახ.1.2. თავისუფალი არადამპფირებული რხევითი სისტემის დინამიკა

როგორც ვხედავთ, გვაქვს პერიოდული რხევები მუდმივი a ამპლიტუდით, რომელიც დამოკიდებულია რხევითი სისტემის საწყის მდგომარეობაზე, ზამბარის სიხისტესა და მერხევი სხეულის m მასაზე.

თეორემა. თავისუფალი რხევითი სისტემის სრული მექანიკური ენერჯიის სიდიდე არ იცვლება დროის მიხედვით.

დამტკიცება. მართლაც, განვიხილოთ დინამიკის განტოლება, გავამრავლოთ ორივე ნაწილი \dot{x} სიჩქარეზე და ვაინტეგრიროთ, მივიღებთ

$$m\ddot{x} + cx = 0 \Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}x^2\right) = \frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} + E_{pot} = const$$

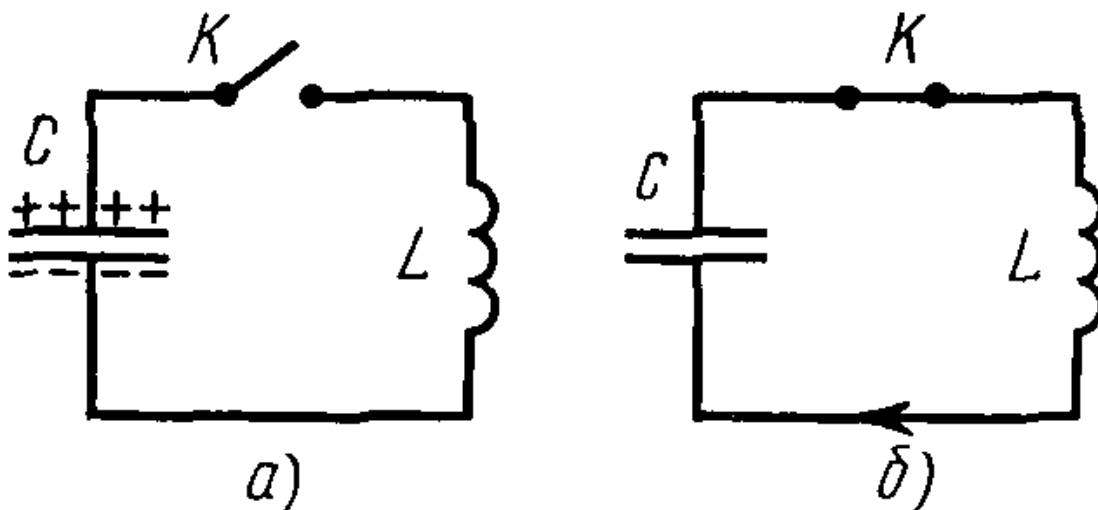
რ.დ.გ.

თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერჯია

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2$$

ანუ სისტემის ენერჯია პირდაპირპროპორციულია რხევის ამპლიტუდის კვადრატისა.

1.2. არადემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ.1.3. რხევითი კონტური

თუ ელექტრული წრედი შეიცავს C ტევადობის კონდენსატორსა და L ინდუქციურობის მქონე კოჭას, მაშინ ამ

წრედში შეიძლება აღიძვრას ელექტრული რხევები. ასეთ წრედს **რხევით კონტურს უწოდებენ** (ნახ.1.3). ვთქვათ, კონდენსატორის ზედა ფირფიტა დამუხტულია დადებითად, ხოლო ქვედა – უარყოფითად (ნახ.1.3, ა). რხევითი კონტურის მთელი ენერგია თავმოყრილია კონდენსატორში. ჩავრთოთ K ჩამრთველი, მაშინ კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და L კოჭაში დენი გავა. კონდენსატორის ელექტრული ენერგია დაიწყებს კოჭას მაგნიტურ ენერგიად გარდაიქმნას. ეს პროცესი დამთავრდება, როცა მოხდება კონდენსატორის მთლიანი განმუხტვა და წრედში გვექნება მაქსიმალური დენის ძალა (ნახ.1.3, ბ). ამ მომენტიდან დენის ძალა დაიწყებს შემცირებას ისე, რომ არ შეიცვლის მიმართულებას. მაგრამ შემცირება თანდათან მოხდება, ვინაიდან მის შემცირებას ეწინააღმდეგება კოჭას თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალა. დენის ხარჯზე დაიწყება კონდენსატორის დამუხტვა, წარმოიქმნება ელექტრული ველი, რომელიც შეამცირებს დენის ძალას. ბოლოს და ბოლოს კონდენსატორი მიიღებს მაქსიმალურ მუხტს, ხოლო დენი გათავდება. ამის შემდეგ, კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და დენი დაიძვრება საპირისპირო მიმართულებით და ა. შ. კონტურში თუ წინააღმდეგობა არ იქნება, მაშინ მივიღებთ პერიოდულ რხევებს.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}. \quad (1.8)$$

ასევე, თუ I არის დენის ძალა და U_L კოჭაზე მოდებული ძაბვა

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.9)$$

კირხოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_c = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.10)$$

დენის ძალა არის მუხტის ცვლილების სიჩქარე ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.11)$$

(1.10),(1.11) ტოლობებიდან გვექნება:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.12)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1.13)$$

მაშინ რხევითი კონტურის განტოლება (1.12) გადაიწერება თავისუფალი რხევების კანონიკური განტოლების სახით:

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (1.14)$$

მიიღება $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ სიხშირის ჰარმონიული ელექტრული რხევები, ხოლო რხევის პერიოდი იქნება: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$. ამ ფორმულას ელექტროდინამიკაში ტომპსონის ფორმულას უწოდებენ.

რხევითი სისტემის დინამიკა ისეთივეა, როგორც 1.2 ნახაზზეა გამოსახული.

P.S. როგორც ვხედავთ, მივიღეთ იგივე სახის მათემატიკური მოდელი, როგორც თავისუფალი მექანიკური რხევების დროს. რაც ნიშნავს, რომ ბუნება ერთიანია და თავისუფალი რხევითი სისტემები ელექტრული სისტემებისათვის ემორჩილება იგივე კანონზომიერებას, რასაც მექანიკური სისტემებისათვის.

1.3. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, ორი სახეობის ცხოველია. აქედან, ერთი სახეობის ცხოველი იკვებება მეორე სახეობის ცხოველით. ხოლო მეორე სახეობის ცხოველი იკვებება ბალახით. ისმის კითხვა, მოსალოდნელია თუ არა, რომ პირველმა სახეობამ მთლიანად გაანადგუროს მეორე სახეობის ცხოველი ?

ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად ავაგოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მტაცებლების) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მსხვერპლის შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება და

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2, \quad (1.15)$$

სადაც ε_2 ზრდის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ასევე, თუ მტაცებლები მარტო აღმოჩნდებიან, მაშინ მათი რაოდენობა შიმშილის გამო განადგურდება. შესაბამის კანონს აქვს სახე:

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1, \quad (1.16)$$

სადაც ε_1 არის მტაცებლების სიკვდილიანობის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ეხლა განვიხილოთ, ამ ორი სახეობის ერთდროული თანაცხოვრება შესაბამის არეალზე. მაშინ მტაცებლების გამრავლების სისწრაფე დამოკიდებული იქნება მსხვერპლთან მათი შეხვედრების რაოდენობაზე, რომელიც $N_1 \cdot N_2$ სიდიდის პროპორციულია. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ ვოლტერას მოდელს

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2, \quad (1.17)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2, \quad (1.18)$$

სადაც γ_1 მსხვერპლის სიკვდილიანობის კოეფიციენტი მტაცებლებთან შეხვედრის გამო; γ_2 - მტაცებლების გამრავლების კოეფიციენტი.

ეხლა, განვიხილოთ ამ მოდელის წონასწორობის წერტილები ანუ ის მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც სისტემა სტაციონარულია

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 = 0, \quad (1.19)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 = 0. \quad (1.20)$$

ამ სისტემის არატრივიალური ამონახსნია

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}. \quad (1.21)$$

სახეობათა რაოდენობების წონასწორობის მნიშვნელობების მცირე მიდამოში ანუ, როცა $n_1(t)$ და $n_2(t)$ მცირე სიდიდეებია, გვაქვს თანაფარდობები:

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (1.22)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ვოლტერას (1.19),(1.20) მოდელში და მოვახდენთ მიღებული განტოლებების ლინეარიზაციას, მივიღებთ სისტემას:

$$\dot{n}_1 = \frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} n_2, \quad (1.23)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} n_1. \quad (1.24)$$

თუ (1.23) განტოლებას დროით გავაწარმოებთ და გავითვალისწინებთ (1.24) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\ddot{n}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 = 0. \quad (1.25)$$

სადაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (1.26)$$

მივიღებთ თავისუფალი სისტემების რხევის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (1.27)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, აქაც მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემების რხევის მათემატიკური მოდელი. ნათლად ჩანს, ორი სახეობის თანაცხოვრების შედეგი დამოკიდებულია მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის სიჩქარეთა კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.

1.4. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელი)

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.28)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები,

$X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot X(t), \quad (1.29)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

$C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.30)$$

თუ (1.29) და (1.30) გამოსახულებებს შევიტანთ (1.28) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (1.31)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t]. \quad (1.32)$$

ანუ მივიღებთ დინამიკის ფრანგიშვილ-ობგაძის დიფერენცი-
ალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (1.33)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (1.33) განტოლება გავეყოთ $\beta(t)$ -ზე.
მივიღებთ დინამიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (1.34)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (1.34) განზოგადებულ განტოლება-
ში მოვახდენთ ჩასმას:

$$\beta(t) = t \text{ და } F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega^2 \cdot X(t), \quad (1.35)$$

მაშინ დინამიკის (1.34) განტოლებიდან მივიღებთ თავისუფალი
რხევითი სისტემების კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0. \quad (1.36)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ თავისუფალი რხევითი
სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ
თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი
უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის
ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. შეადგინეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური
მოდელი და გამოიკვლიეთ მიღებული სისტემის რხევის
პერიოდი, სიხშირე, ფაზა და ამპლიტუდა, სისტემის საწყისი
მდგომარეობიდან გამომდინარე.
2. შეისწავლეთ ენერჯის შენახვის კანონი თავისუფალი რხევითი
სისტემებისათვის.
3. გამოიკვლიეთ თავისუფალი რხევითი სისტემა ფაზურ
სიბრტყეზე. იპოვეთ ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეზე.
4. შეადგინეთ მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური
მოდელი (ზამბარაზე გამობმული ტვირთი, ნახ.1.1) იმ
შემთხვევაში, როცა m მასის ტვირთზე მოქმედებს ხახუნის
ძალაც. იქნება თუ არა ასეთი სისტემა თავისუფალი? რხევები
იქნება დემპფირებული, თუ არა?
5. ჩამოთვალეთ რხევითი სისტემების ტიპები.

ლიტერატურა

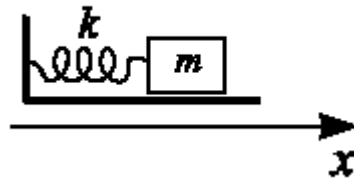
1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джanelidze Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მ. მირიანაშვილი. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. თ. ოზაძე. მათემატიკური მოდელების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. თ. ოზაძე, ლ. ოზაძე, ნ. მჭედლიშვილი, ი. დავითაშვილი,
ბ. თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი; სტუ, 2007.
12. თ. ოზაძე მათემატიკური მოდელების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973.

თავი 2. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თუ რხევითი სისტემის მთლიანი ენერგია მცირდება (წინააღმდეგობის ძალების გადალახვაზე შესრულებული მუშაობის გამო), მაშინ ასეთ სისტემას დემპფირებული სისტემა ეწოდება. დემპფირებულ თავისუფალ სისტემებში გვაქვს დემპფირებული (პერიოდულ-მილევადი ან არაპერიოდულ-მილევადი) რხევები.

2.1. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული საკუთრივი (თავისუფალი) მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი (ნახ. 2.1). როცა ზამბარის სიხისტეა c , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი k , მაშინ $F_{\text{xxx}} = -kx$.



ნახ. 2.1. დემპფირებული საკუთრივი რხევები m მასის ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის გათვალისწინებით

შევადგინოთ m მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის მათემატიკური მოდელი ხახუნის ძალის გათვალისწინებით

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx - kx. \quad (2.1)$$

თუ (2.1) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ m მასის მნიშვნელობაზე და შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{c}{m} = 2\gamma, \quad (2.2)$$

მივიღებთ დემპფირებული თავისუფალი (საკუთარი) რხევითი სისტემის მოდელს:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (2.3)$$

სადაც ω_0 სისტემის თავისუფალი რხევების სიხშირეა, γ - მილევის კოეფიციენტი.

თუ (2.3) დიფერენციალურ განტოლებაში მოვახდენთ ეილერის ჩასმას $x(t) = e^{rt}$, მაშინ მივიღებთ შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (2.4)$$

რაც ნიშნავს, რომ (2.3) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (2.5)$$

აქ უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) თუ $\gamma < \omega_0$, მაშინ (2.5) ტოლობიდან გამომდინარე, გვაქვს მახასიათებელი ალგებრული განტოლების ორი კომპლექსური ურთიერთშეუღლებული r ამონახსნი. ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შემდეგია:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.6)$$

რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \text{ხოლო } A_0 \text{ და } \varphi \text{ მუდმივი რიცხვები განისაზღვრება}$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე.

$$x(0) = 0 \quad (2.7)$$

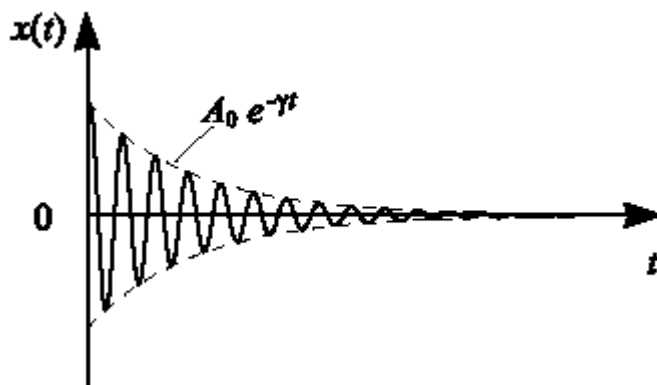
$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (2.8)$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე.

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2} \quad (2.9)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0) \quad (2.10)$$

ეს შემთხვევა შეესაბამება მიღვეად რხევით პროცესებს.



ნახ. 2.2. მიღვეადი რხევები

ამპლიტუდის მიღვეადობის სისწრაფე რეგულირდება γ პარამეტრით, ხოლო დემპფირებული (2.3) სისტემის რხევების სიხშირე $\omega < \omega_0$. რაც ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ამცირებს

სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირეს ანუ დემპფირებული სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირე ნაკლებია შესაბამისი არადემპფირებული სისტემის რხევების სიხშირეზე.

$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ სიდიდეს მიღვევადი რხევების ამპლიტუდას უწოდებენ. როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რხევის ამპლიტუდა, ასეთ შემთხვევაში, კლებულობს ექსპონენციალურად. შემოვიღოთ აღნიშვნა: A_n -ით აღვნიშნოთ წრფივი თავისუფალი დემპფირებული სისტემის, წონასწორობის მდგომარეობიდან დადებითი მიმართულებით მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრის სიდიდეები. ცხადია, რომ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებს რეკურენტულ თანადობას

$$A_{n+1} = e^{-\gamma T} A_n. \quad (2.11)$$

გამოვთვალოთ რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში, მივიღებთ:

$$(A_{t+T} = A_0 \cdot e^{-\gamma(t+T)}, \quad A_t = A_0 \cdot e^{-\gamma t}), \Rightarrow \frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\gamma T} \Rightarrow d = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \gamma \cdot T.$$

განსაზღვრება. $d = \gamma T$ სიდიდეს ოსცილატორის მიღვევადობის (ჩაქრობის) **ლოგარითმულ დეკრემენტს** უწოდებენ.

d -ლოგარითმული დეკრემენტის $N = \frac{1}{d}$ შებრუნებული სიდიდე გვიჩვენებს იმ რხევათა რიცხვს, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს.

T - რხევის პერიოდის განმავლობაში ამპლიტუდა e^{-d} -ჯერ მცირდება.

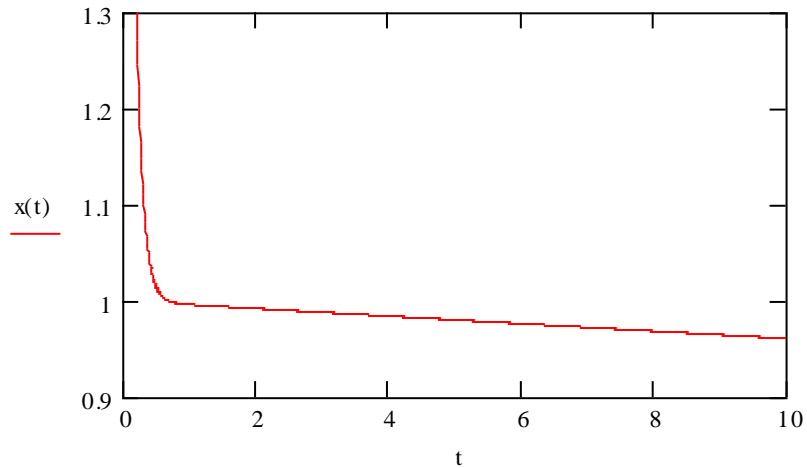
როგორც ვიცით, ენერგია რხევით სისტემაში რხევის ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ, ამ შემთხვევაში, მთლიანი მექანიკური ენერგია მცირდება (ხახუნის გამო სითბოში გარდაიქმნება)

$$E = E_0 \cdot e^{-2\gamma t}.$$

2)თუ $\gamma > \omega_0$, მაშინ r -ის ორივე მნიშვნელობა ნამდვილ რიცხვს წარმოადგენს და ამავე დროს, ორივე მნიშვნელობა უარყოფითია. დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (2.12)$$

ეს მოძრაობის აპერიოდული ჩაქრობაა ნახ. 2.3.

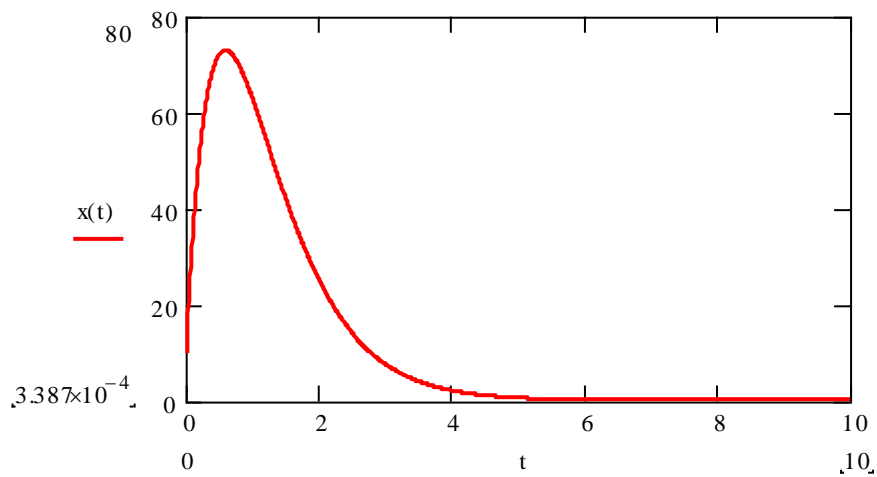


ნახ. 2.3. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა

3) თუ $\gamma = \omega_0$, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი $r = -\gamma$. როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}. \quad (2.13)$$

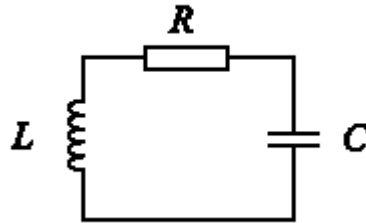
ესეც აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევაა (ნახ. 2.4).



ნახ. 2.4. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევა

2.2. დემპფირებული, საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული ელექტრული რხევითი სისტემა.



ნახ. 2.5. დემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი სისტემა

ამ სისტემაში (ნახ.2.5) არადემპფირებული რხევითი კონტურისაგან განსხვავებით, ჩართულია R წინაღობა, რაც იწვევს ენერჯის დანაკარგებს და თავისუფალი სისტემა დემპფირებული ხდება.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c - კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}, \quad (2.14)$$

ასევე, თუ I არის დენის ძალა და U_L - კოჭაზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (2.15)$$

ძაბვის ვარდნა R წინაღობაზე

$$U_r = R \cdot I. \quad (2.16)$$

კირჰოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.17)$$

დენის ძალა მუხტის ცვლილების სიჩქარეა ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.18)$$

(2.17)-(2.18) ტოლობებიდან

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.19)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad (2.20)$$

მაშინ განტოლება (2.19) მიიღებს სახეს:

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (2.21)$$

სადაც ω_0 სისტემის საკუთარი (თავისუფალი) რხევების სიხშირეა, ხოლო γ -მიღევის კოეფიციენტი.

P.S. როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის (2.21) განტოლება იდენტურია შესაბამისი დემპფირებული, თავისუფალი, მექანიკური სისტემის დინამიკის (2.3) განტოლებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ერთნაირად ეხება როგორც მექანიკურ, ასევე ელექტრულ რხევით სისტემებს.

2.3. დემპფირებული, საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, არის ორი სახის ცხოველი. აქედან, მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან პირველი სახის ცხოველებით. ხოლო პირველი სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. შევისწავლოთ ამ სისტემის შესაბამისი დინამიკა. ამისათვის აუცილებელია სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა.

ავაგოთ, ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მსხვერპლის) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მტაცებლების შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება მუდმივი k_0 სიჩქარით, მაგრამ მტაცებლებთან შეხვედრა იწვევს მათი ზრდის სიჩქარის შემცირებას k_2 სიჩქარის კოეფიციენტით. მტაცებლებისა და მსხვერპლის შეხვედრის სიხშირე დამოკიდებულია მათი რაოდენობების ნამრავლზე და, მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება:

$$N_1(t) = k_0 - k_1 N_1 N_2. \quad (2.22)$$

ანალოგიურად, მტაცებლების რაოდენობის ზრდა დამოკიდებულია მსხვერპლთან შეხვედრების რაოდენობაზე, რაც პირდა-

პირპროპორციულია მათი რაოდენობების ნამრავლისა. მაგრამ, მტაცებლებიც იღუპებიან სიბერით, ავადმყოფობით ან უფრო ძლიერ მტაცებელთან ბრძოლაში. მათი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია k_2 . მაშინ შესაბამისი დინამიკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\dot{N}_2 = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_2. \quad (2.23)$$

სტაციონარული წერტილის გამოსათვლელად ნულს გავუტოლოთ (2.22),(2.23) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები. მიღებული სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$N_1^0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad N_2^0 = \frac{k_0}{k_2}. \quad (2.24)$$

შევისწავლოთ (2.22),(2.23) სისტემა სტაციონარული (2.24) ამონახსნის მიდამოში. ამისათვის საძიებელ რაოდენობებს მივცეთ მცირე ნაზარდები $n_1(t)$ და $n_2(t)$. ანუ (2.22), (2.23) განტოლებებში შევიტანოთ ახალი სიდიდეები და უკუვაგლოთ კვადრატული წევრები მცირე ნაზარდების მიმართ

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad (2.25)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (2.26)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\dot{n}_1(t) = -k_2 n_2 - \frac{k_1 k_0}{k_2} n_1, \quad (2.27)$$

$$\dot{n}_2(t) = \frac{k_0 k_1}{k_2} n_1. \quad (2.28)$$

თუ გავაწარმოებთ (2.27) განტოლებას და შევიტანოთ $\dot{n}_2(t)$ -ს მნიშვნელობას (2.28) განტოლებიდან, მაშინ

$$\ddot{n}_1 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{n}_1 + k_0 k_1 n_1 = 0. \quad (2.29)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2 \cdot \gamma \quad \text{და} \quad k_0 k_1 = \omega_0^2,$$

მაშინ განტოლება (2.29) გადაიწერება დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკური სახით:

$$\ddot{n}_1 + 2\gamma \dot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (2.30)$$

ეს სისტემა კი უკვე შესწავლილი გვაქვს.

P.S. როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა გვხვდება სოციალურ სისტემებშიც. რაც იძლევა იმის საფუძველს, რომ ჩაუუღრმავდეთ სხვადასხვა პროცესის აღწერას და ნაკლებად დავიხარჯოთ მიღებული მონაცემების აღმწერი განტოლებების გამოკვლევაზე.

2.4. დემპფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (2.31)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ -ინვესტიციები, $X(t)$ -ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება:

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (2.32)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (2.33)$$

თუ (2.32) და (2.33) განტოლებებს შევიტანთ (2.31) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (2.34)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (2.35)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (2.36)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, (2.36) განტოლება შეიძლება გააყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ შემდეგი სახის დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (2.37)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (2.37) განზოგადებულ განტოლებაში მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left(\frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega_0^2 X(t) \quad (2.38)$$

მივიღებთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (2.39)$$

რომელიც უკვე შევისწავლეთ სხვა შინაარსის პროცესებისათვის.

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც მოწმობს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორ სისტემებს უწოდებენ დემპფირებულს?
2. როგორ გამოითვლება დემპფირებული საკუთრივი რხევითი სისტემის მიღევადი რხევების პერიოდი, რა არის ლოგარითმული დეკრემენტი და რისთვისაა საჭირო?
3. რა შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალ, დემპფირებულ სისტემაში არაპერიოდული მიღევადი რხევები?
4. შეადგინეთ ელექტრული, დემპფირებული რხევითი სისტემის სქემა და ააგეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.
5. მოიყვანეთ სოციალური დემპფირებული სისტემის მაგალითი და აჩვენეთ კოეფიციენტების რა მნიშვნელობებისთვისაა მოსალოდნელი მიღევადი რხევითი პროცესები და რა შინაარსი შეესაბამება ამ შემთხვევას.

ლიტერატურა

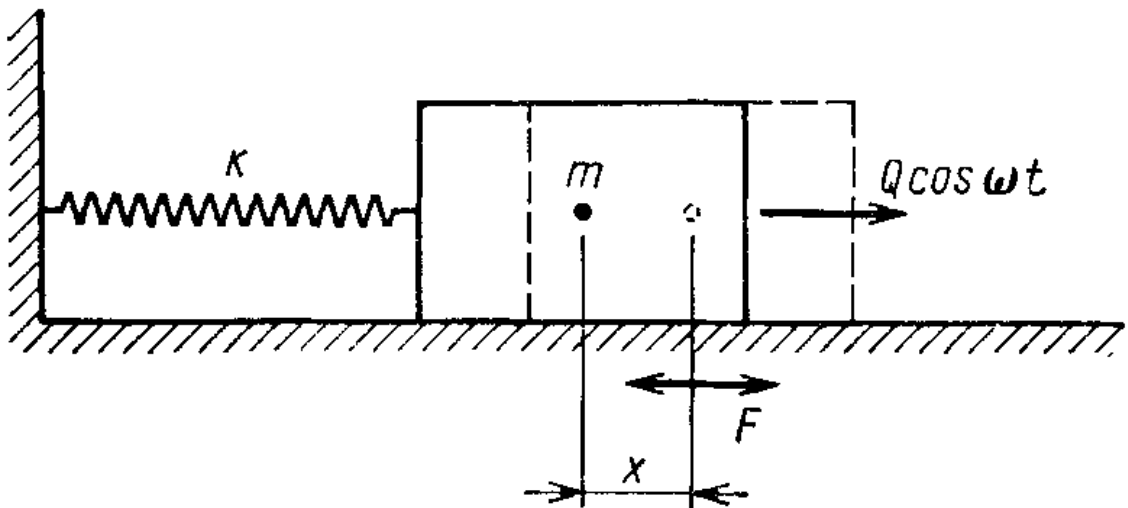
1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование Москва: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. Москва: Мир, 1982.
5. Постников Л.В., Королев В.И. Сборник задач по теории колебаний. Москва: Наука, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: изд-во Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. Москва: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Москва: Наука, 1972.
9. მ. მირიანაშვილი. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: სტუ, 1973.
10. თ. ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. თ. ობგაძე, ლ. ობგაძე, ნ. მჭედლიშვილი, ი. დავითაშვილი, ნ. თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
12. თ. ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос Москва: МГУ, 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973.

თავი 3. იძულებითი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

იძულებით რხევით სისტემებში სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ შესაბამის მათემატიკურ მოდელში რხევით პროცესებს განსაზღვრავს დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

3.1. იძულებითი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ მექანიკური რხევითი სისტემა იმ პირობებში, როცა გვაქვს მაიძულებელი ძალის მოქმედება.



ნახ. 3.1. იძულებითი მექანიკური რხევითი სისტემა $f = Q \cos \omega t$ მაიძულებელი პერიოდული ძალის მოქმედების პირობებში

გვაქვს რხევითი სისტემა (ნახ.3.1), რომელიც შედგება m მასის სხეულისაგან, როცა ზამბარის სიხისტეა c , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი k ანუ $F_{\text{max}} = -kx$. თუ მოძრაობის გამომწვევი გარე პერიოდული ძალაა $f = Q \cos \omega t$, ადვილი მისახვედრია, რომ ნიუტონის დინამიკის კანონიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება m მასის სხეულის x გადაადგილების შესასწავლად:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + Q\cos(\omega \cdot t). \quad (3.1)$$

გავეყოს ამ განტოლების ორივე მხარე m მასის სიდიდებზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\gamma, \quad \frac{Q}{m} = H. \quad (3.2)$$

მაშინ განტოლება (3.1) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = H\cos(\omega \cdot t). \quad (3.3)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

ეხლა შევისწავლოთ ამ სისტემის თავისებურებები. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- 1) იძულებითი რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული;
- 2) დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემა.

1) თუ რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული, მაშინ $\gamma = 0$ და დინამიკის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = H\cos(\omega \cdot t). \quad (3.4)$$

როგორც ცნობილია, წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ჯამისა

$$x = x_{\text{ertg var. zogadi}} + x_{\text{araertg ker dzo}}. \quad (3.5)$$

(3.4) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ამონახსნისა

$$x_{\text{ertg var. zogadi}} = a \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (3.6)$$

სადაც $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, $\text{tg}\varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$.

არაერთგვაროვანი (3.4) სისტემის კერძო ამონახსნი

$$x_{\text{araertg ker dzo}} = h\cos(\omega \cdot t). \quad (3.7)$$

(3.7) გამოსახულება ჩავსვათ (3.4) განტოლებაში, მივიღებთ $-h\omega^2 \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 h \cos(\omega \cdot t) = H \cos(\omega \cdot t)$,

საიდანაც

$$h = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

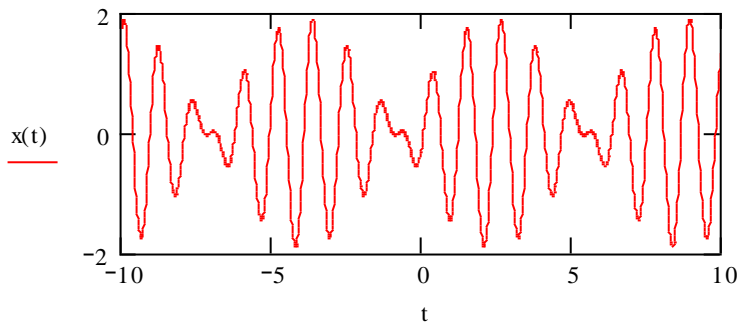
რაც ნიშნავს, რომ (3.4) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე:

$$x_{\text{araertg. ker dzo}} = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.8)$$

მივიღეთ არაერთგვაროვანი (3.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი (3.5), რომელიც გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.9)$$

ფორმულა (3.9) ძალაშია, თუ $\omega_0 \neq \omega$. ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს ორი სხვადასხვა სიხშირის რხევათა ჯამი. სისტემის დინამიკა გამოსახულია 3.2 ნახაზზე.



ნახ. 3.2. ორი სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევების ჯამი

თუ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე ω_0 ემთხვევა, მაიძულებელი პერიოდული ძალის რხევის ω სიხშირეს იქმნება რეზონანსი.

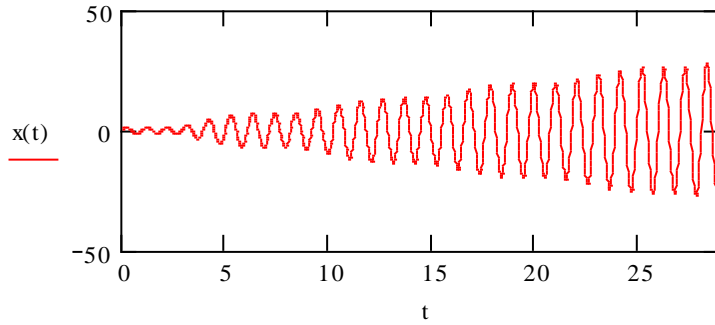
ასეთ შემთხვევაში (3.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნის გამოსათვლელად (3.9) ამონახსნი გადაიწერება სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_0 \cdot t)). \quad (3.10)$$

თუ (3.10) ფორმულაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\omega \rightarrow \omega_0$, ლოპიტალის წესის გამოყენებით, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (3.11)$$

როგორც (3.11) ამონახსნიდან ჩანს, რეზონანსის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდა წრფივი კანონით იზრდება (ნახ.3.3).



ნახ.3.3. რეზონანსული რხევების დინამიკა

თუ მაიძულებელი ძალის რხევის სიხშირე ახლოსაა სისტემის საკუთრივი რხევების სიხშირესთან, ადგილი აქვს რხევების ცემას ორი მახლობელი სიხშირით.

2) ახლა განვიხილოთ წრფივი, დემპფირებული იძულებითი რხევითი სისტემის შემთხვევა. გვაქვს მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.12)$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი

$$x = \xi \cos(\omega \cdot t) + \eta \sin(\omega \cdot t). \quad (3.13)$$

(3.13) ფორმულა შევიტანოთ (3.12) განტოლებაში, მაშინ ξ და η კოეფიციენტების გამოსათვლელად მივიღებთ განტოლებას:

$$-\xi \cdot \omega^2 \cos(\omega \cdot t) - \eta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \xi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \eta \cdot \sin(\omega \cdot t) = H \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.14)$$

თუ (3.14) განტოლების, კოეფიციენტებს გავუტოლებთ შესაბამის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot \omega^2 + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega + \xi \cdot \omega_0^2 &= H, \\ -\eta \omega^2 - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$\xi = \frac{H \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}, \quad (3.16)$$

$$\eta = \frac{2\gamma \cdot \omega \cdot H}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}. \quad (3.17)$$

გამოსახულებაში (3.13) შემოვიღოთ დამატებითი კუთხე, მაშინ (3.16)-(3.17) თანაფარდობების გათვალისწინებით, მივიღებთ (3.12) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$x_{\text{araertg var. Krdzo}} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{H}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi^*). \quad (3.18)$$

შევისწავლეთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემების შესწავლის დროს. გექონდა სამი შემთხვევა:

ა) თუ $\gamma < \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$;

ბ) თუ $\gamma > \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$;

გ) თუ $\gamma = \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$.

მაშასადამე, არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

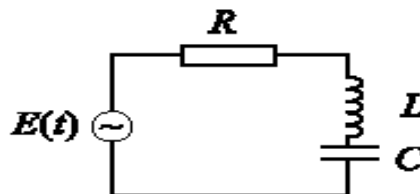
$$x(t) = x_{araertgv\ ker\ dzo} + x_{ertg\ var} \cdot \tag{3.20}$$

ცხადია, რომ აქაც გვექნება სამი სხვადასხვა შემთხვევა.

P.S. დავალება სტუდენტებს: **Mathcad** -ის ბაზაზე შეისწავლეთ ამ სამი შემთხვევის შესაბამისი რხევითი სისტემების დინამიკა.

3.2. იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესი (ნახ 3.4)



ნახ.3.4. რხევითი კონტური ელექტრული დენის წყაროთი, რომლის ელექტრომამოძრავებელი ძალაა $E(t)$

კირხოფის კანონი ამ წრედისათვის

$$U_L + U_r + U_C = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t), \tag{3.21}$$

სადაც Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c – კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა. $U_c = \frac{Q}{C}$. I – დენის ძალა, U_L – კოჭაზე მოდებული ძაბვა, ამასთან $U_L = L \frac{dI}{dt}$. ძაბვის ვარდნა R

წინააღმდეგე $U_r = R \cdot I$; $E(t)$ ელექტრული დენის მამოძრავებელი ძალაა. მაშასადამე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.22)$$

თუ (3.22) ფორმულაში გავითვალისწინებთ, რომ დენის ძალა მუხტების მოწესრიგებული ნაკადია

$$I = \dot{Q}, \quad (3.23)$$

მაშინ მივიღებთ დენის წყაროს შემცველი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის განტოლებას

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.24)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad F(t) = \frac{E(t)}{L}, \quad (3.25)$$

მაშინ (3.24) განტოლება მიიღებს იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის სახეს, რომელზეც ვისაუბრეთ წინა თავში:

$$\ddot{Q} + 2\gamma \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = F(t). \quad (3.26)$$

P.C. როგორც ვხედავთ, იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ემთხვევა შესაბამისი მექანიკური სისტემის მათემატიკურ მოდელს.

3.3. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ სოციუმის დინამიკა დროში. ვთქვათ, $N(t)$ არის სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონი დროში. m ამ სოციუმის საარსებო არეალია, ხოლო $f_1(t)$ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალაა. ამიტომ, სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონის საპოვნელად განვიხილოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$m\ddot{N} = f_1(t). \quad (3.27)$$

ცხადია, რომ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა სამი ნაწილისაგან შედგება: ა) დადებითი წევრი, რომელიც გამოწვეულია გარე მიგრაციით მოცემულ სოციუმში $f(t)$;

ბ) $-kN$ უარყოფითი წევრით, რაც შეესაბამება სოციუმის შემცირების გამომწვევ ძალას ბუნებრივი სიკვდილიანობის გამო. k შესაბამისი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი; გ) $-2\lambda \dot{N}$ ძალაა, რომელიც იწვევს სოციუმის შემცირებას სხვა სოციუმებთან ბრძოლაში მარცხის გამო. ეს ნიშნავს, რომ

$$f_1(t) = f_2(t) - 2\lambda \dot{N} - kN. \quad (3.28)$$

თუ (3.28) გამოსახულებას შევიტანთ (3.27)-ში, მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$m\ddot{N} + 2\lambda \dot{N} + kN = f_2(t). \quad (3.29)$$

ამ განტოლების m არეალის სიდიდეზე გაყოფით და შესაბამისი აღნიშვნებით მივიღებთ:

$$\frac{\lambda}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{f_2(t)}{m} = f(t). \quad (3.30)$$

განტოლება (3.28) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{N} + 2\gamma \dot{N} + \omega_0^2 N = f(t). \quad (3.31)$$

ეს განტოლება ემთხვევა წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს. რაც იმას ნიშნავს, რომ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და აღწერს სრულიად სხვადასხვა შინაარსის პროცესებს.

3.4. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.32)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot X(t), \quad (3.33)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტი.

გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება არის ეროვნული შემოსავლის ფუნქცია და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.34)$$

თუ (3.33) და (3.34) თანაფარდობებს შევიტანთ (3.32) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt \quad (3.35)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (3.36)$$

ანუ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (3.37)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, (3.37) განტოლება შეიძლება გავეყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (3.38)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგადის განზოგადებულ განტოლებაში (3.38) მოვახდენთ ჩასმას, მივიღებთ:

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left(\frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot [\omega_0^2 X(t) - f(t)]. \quad (3.39)$$

ე.ი. წრფივი, იძულებითი, თავისუფალი რხევითი სისტემის დინამიკის მათემატიკური მოდელი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = f(t). \quad (3.40)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი პერიოდული, არა აუცილებლად ჰარმონიული ფუნქციაა.
2. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი, საზოგადოდ - არაპერიოდული ფუნქციაა.

3. შეადგინეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოსაკვლევი პროგრამა Mathcad -ის ბაზაზე.
4. რა თავისებურებები ახასიათებს არადემპფირებულ, იძულებით რხევით სისტემებს?
5. რით განსხვავდება იძულებითი, წრფივი, რეზონანსული დემპფირებული და არადემპფირებული რხევითი სისტემები?

ლიტერატურა

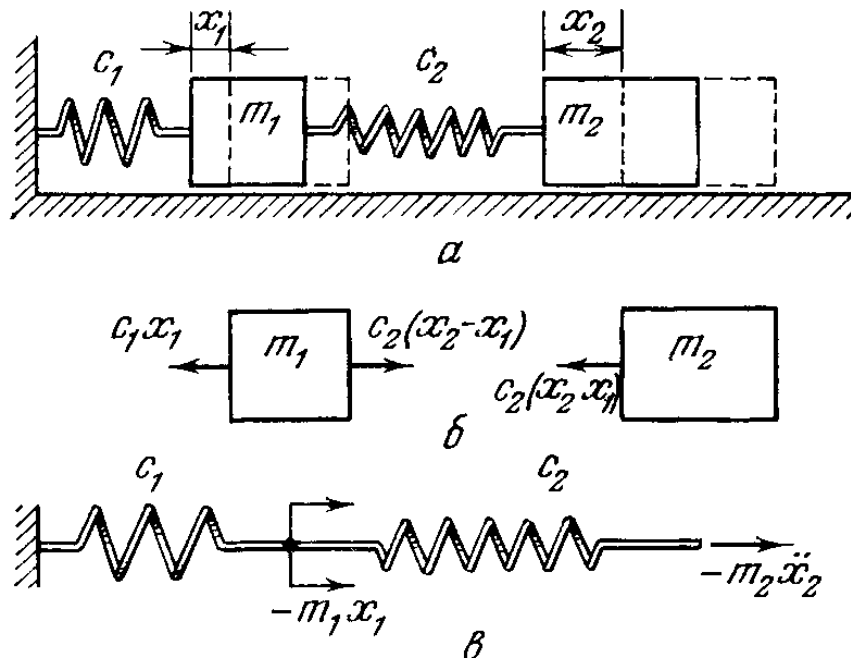
1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. Москва: Мир, 1982.
5. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Издательство Саратовского ГУ, 2002.
6. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. Москва: Мир, 1979.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2, Москва: Наука, 1972.
8. მ. მირიანაშვილი. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ 1973.
9. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1 თბილისი: სტუ, 2006.
10. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიკისი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
11. თ.ობგაძე, მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
12. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос. МГУ, Москва: 2001.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. Наука, Москва: 1973.
14. Obgadze T.A., Prangishvili A.I., Sakvarelidze N., Iashvili L. Mathematical modelling of excessive demand for essential commodities dynamics at periodic, panic PR-exciter, transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi, 2009.

თავი 4. ბმული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირება

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორი ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან, რომლებიც ერთმანეთზე ახდენენ გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

4.1. ბმული მექანიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

განვიხილოთ წრფივი, ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითები (ნახ. 4.1, 4.2).



ნახ.4.1. ბმული მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი

ა) ეს სისტემა შედგება ორი m_1 და m_2 მასის სხეულებისაგან, რომლებიც კედელთან და ერთმანეთთან დაკავშირებულია, შესაბამისად, c_1 და c_2 სიხისტის მქონე ზამბარებით და ჰუკის კანონს ემორჩილება.

პირველი სხეულის საწყისი მდგომარეობიდან გადაადგილება აღვნიშნოთ x_1 , ხოლო მეორე სხეულის გადაადგილება, შესაბამისად, x_2 . მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot (x_2 - x_1), \quad (4.1)$$

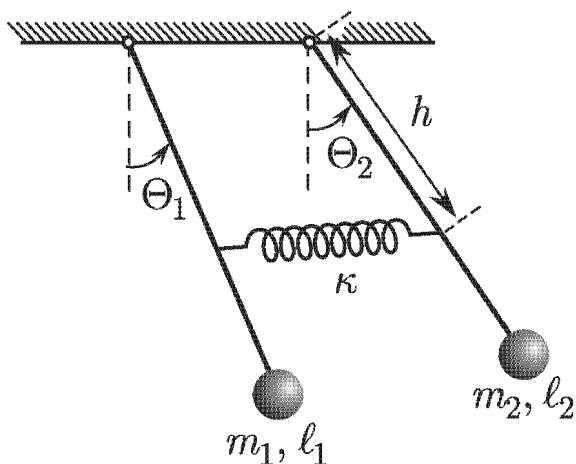
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (x_2 - x_1). \quad (4.2)$$

$$x_1(0) = x_1^0; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0, \quad (4.3)$$

$$x_2(0) = x_2^0; \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0. \quad (4.4)$$

დავალება სტუდენტებს: Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

ბ) ახლა განვიხილოთ ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ორი ზამბარით დაკავშირებული მათემატიკური ქანქარისაგან (ნახ.4.2). თუ დავწერთ ნიუტონის დინამიკურ განტოლებას თითოეული ქანქარისათვის, ზამბარიანი კავშირის გათვალისწინებით და მოვახდენთ სტანდარტულ გარდაქმნებს, მივიღებთ ბმული მექანიკური (ნახ.4.2) რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს.



ნახ.4.2. ბმული მექანიკური სისტემა ზამბარით დაკავშირებული ორი ქანქარით

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_{01}^2 \cdot \Theta_1 = -\sigma_1^2 \cdot (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (4.5)$$

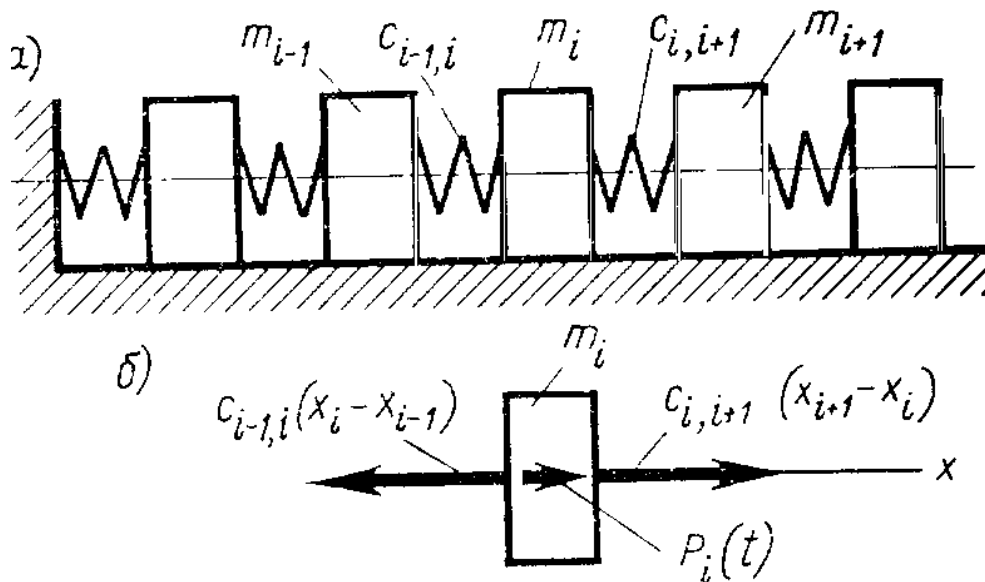
$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_{02}^2 \cdot \Theta_2 = -\sigma_2^2 \cdot (\Theta_2 - \Theta_1), \quad (4.6)$$

სადაც $\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ და $\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$ ქანქარების საკუთარი რხევის სიხშირეებია, ხოლო σ_1 და σ_2 კოეფიციენტები ასახავს ქანქარების ურთიერთქმედებას, რომელიც განპირობებულია k სისისტის მქონე ზამბარით

$$\sigma_1^2 = \frac{kh^2}{m_1 \cdot l_1}, \quad \sigma_2^2 = \frac{kh^2}{m_2 \cdot l_2}. \quad (4.7)$$

დავალება სტუდენტებს: Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

გ) განვიხილოთ ბმული მექანიკური სისტემა, შედგენილი N რხევითი სისტემისაგან (ნახ.4.3).



ნახ.4.3. N რხევითი სისტემისაგან შედგენილი ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება N რხევითი სისტემისაგან. თითოეული რხევითი სისტემა შედგება შესაბამისი m_i მასის სხეულისაგან და ეს სხეულები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზამბარებით ისე, რომ m_i და m_{i+1} მასის სხეულები დაკავშირებულია სისისტის მქონე $c_{i,i+1}$ დრეკადი ზამბარით. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ჩავწერთ ნიუტონის დინამიკის განტოლებას m_i მასის სხეულისათვის ამ სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = -c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) + c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) + F_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.8)$$

სადაც $F_i(t)$ არის i -ურ სხეულზე მოქმედი გარე ძალა.

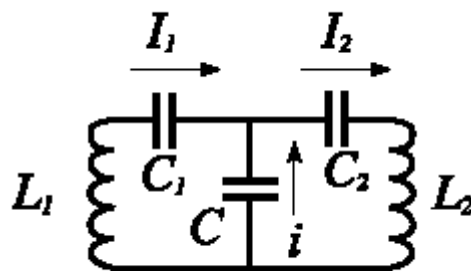
P.S. როცა უნდათ შეისწავლონ დრეკადი მყარი სხეულის რხევები, მას განიხილავენ, როგორც N ერთნაირი მასის სხეულს, დაკავშირებულს ერთნაირი c სიხისტის ზამბარებით. მაშინ მყარი, დრეკადი სხეულის რხევები განიხილება, როგორც შესაბამისი ბმული, წრფივი, დისკრეტული, მექანიკური რხევითი სისტემის რხევები და შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$m \cdot \ddot{x}_i = c \cdot (-2 \cdot x_i + x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = \overline{1, N} \quad (4.9)$$

დავალება სტუდენტებს: Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა, როცა $N=3$.

4.2. ბმული ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

განვიხილოთ, ბმული რხევითი ელექტრული სისტემა, რომლის შედგენილობაში კონდენსატორით ერთმანეთთან დაკავშირებული ორი რხევითი კონტურია.



ნახ. 4.4. ბმული ელექტრული რხევითი სისტემა

ჩავწეროთ კირჰოფის კანონები 4.4 ნახ-ზე გამოსახული რხევითი კონტურებისათვის

$$i = I_1 - I_2 \Rightarrow q = q_1 - q_2 \Rightarrow q = q_1 - q_2. \quad (4.10)$$

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot q_1 + \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (4.11)$$

$$L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot q_2 - \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (4.12)$$

სადაც $I_1 = q_1$ და $I_2 = q_2$.

(4.11) და (4.12) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 = \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \quad (4.13)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 = -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \quad (4.14)$$

P.S. ბმული რხევითი ელექტრული სისტემები გამოიყენება ელექტროტექნიკაში, სიგნალების გასაფილტრად.

4.3. ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ, ორი ურთიერთმოქმედი სოციალური ჯგუფი, რომელთა მოცულობებს აღვნიშნავთ, შესაბამისად, N_1 და N_2 . ამ ორი სოციუმის მოქმედების არეალები აღვნიშნოთ m_1 და m_2 . თუ გავითვალისწინებთ, რომ სოციალური ჯგუფები ურთიერთქმედებს ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც პირდაპირპროპორციულია მათი მოცულობების სხვაობისა ანუ $k_2 \cdot (N_2 - N_1)$; ამასთან, თუ ჩავთვლით, რომ ჯგუფების მოქმედების m_1 და m_2 არეალები შეზღუდულია და, მაშასადამე, რაც უფრო გაიზრდება სოციუმის N_1 და N_2 მოცულობები, მით უფრო ნაკლები იქნება ამ სოციუმის ზრდის სიჩქარე, მივიღებთ ბმული სოციალური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{N}_1 = -k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot (N_2 - N_1), \quad (4.15)$$

$$m_2 \cdot \ddot{N}_2 = -k_3 \cdot N_2 - k_2 \cdot (N_2 - N_1). \quad (4.16)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა.

4.4. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ორი, ურთიერთკონკურენტუნარიანი პროდუქციის, ბაზარზე რეალიზებულ მოცულობათა X_1 და X_2 დინამიკა. ცხადია, რაც უფრო დიდია რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა, მით უფრო ნაკლებია რეალიზებული პროდუქციის ზრდის სიჩქარის ცვლილება, ბაზრის გაჯერების გამო. ასევე, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია მოცულობათა სხვაობისა. ამავე დროს, მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო. თუ m_1 და m_2 შესაბამისი პროდუქციის ფასებია, მივიღებთ ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{X}_1 = -k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot (X_2 - X_1), \quad (4.17)$$

$$m_2 \cdot \ddot{X}_2 = -k_3 \cdot X_2 - k_2 \cdot (X_2 - X_1). \quad (4.18)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა. ამ მოდელის აგება შესაძლებელია ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზეც.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. განსახლვრეთ წრფივი, ბმული რხევითი სისტემა და ააგეთ შესაბამისი მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
2. გამოიკვლიეთ ბმული რხევითი სისტემა Mathcad პროგრამის საშუალებით.
3. ააგეთ ბმული რხევითი სოციალური სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
4. ააგეთ ბმული რხევითი ეკონომიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილ-ობგაძის (2.37) მოდელის ბაზაზე და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
5. ააგეთ ბმული რხევითი ფსიქოლოგიური სისტემის მათემატიკური მოდელი.

ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Москва: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. Москва: Мир, 1982.
5. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во Саратовского ГУ, 2002.
6. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. Москва: Мир, 1979.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Москва: Наука, 1972.
8. მ.მირიანაშვილი.ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
9. თ.ობგაძე.მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
10. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი.მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
11. თ.ობგაძე.მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
12. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос. Москва: МГУ, 2001.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973.
14. Obgadze T.A., Prangishvili A.I., Sakvarelidze N., Iashvili L. Mathematical modelling of excessive demand for essential commodities dynamics at periodic, panic PR-exciter, transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009.

თავი 5. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს, რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია ანუ მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები ანალოგიურია მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასხვა ინტელექტუალურ სფეროში.

5.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი, ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის $Q(t)$ მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია. შესაბამისად, Q წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციურ ენერგიებს შორის

$$L(Q, \frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p. \quad (5.1)$$

სადაც E_k და E_p , შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიებია.

განვიხილოთ სიდიდე, რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და ჩაწერენ ფორმულით:

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (5.2)$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ყოფაქცევა. ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპი ამბობს, თუ სისტემა რეალურია, მაშინ $Q(t)$ არის $S(Q)$ ფუნქციონალის სტაციონარული ფუნქცია ანუ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(Q + \varepsilon p)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (5.3)$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი $\varphi(t)$ ფუნქცია საცდელი ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოილ ხდება დროის t_1 და t_2 მომენტებში. $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ფუნქციას $Q(t)$ ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემული გვაქვს ზამბარა m მასის ტვირთით. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია c . მაშინ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{m \left(\frac{dX}{dt} \right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2}. \quad (5.4)$$

მოქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X, \frac{dX}{dt}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 - \frac{c}{2} X^2 \right] dt. \quad (5.5)$$

გამოვითვალოთ მოქმედება $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d(X + \varepsilon\varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{c}{2} (X + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt. \quad (5.6)$$

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია ε ცვლადით, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X\varphi + \varepsilon\varphi^2 \} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\varepsilon = 0$, მაშინ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - cX\varphi \right] dt = 0. \quad (5.8)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX \right] dt = 0. \quad (5.9)$$

რადგან $\varphi(t)$ ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX = 0. \quad (5.10)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (5.11)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (5.12)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის მიყვავართ იგივე მათემატიკურ მოდელამდე.

5.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი ძალა F_0 , იცვლება პოტენციური ენერჯიის მხოლოდ ფორმულა

$$E_p = c \frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c \frac{X^2}{2} + F_0 X, \quad (5.13)$$

ხოლო კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება უცვლელი რჩება

$$E_k = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2}. \quad (5.14)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$L = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \frac{X^2}{2} - F_0 X. \quad (5.15)$$

თუ განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0. \quad (5.16)$$

დავალება სტუდენტებს: ააგეთ იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ვარიაციული მეთოდით.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.
3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.
4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.
5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის განმასხვავებელი თვისებები.

ლიტერატურა

1. თ.ობგაძე, მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1, თბილისი: სტუ, 2006.
2. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი, მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2., თბილისი: სტუ, 2007.
3. თ.ობგაძე, მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001.
5. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества. Москва, 2005.

ნაწილი II. არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავი 6. ზოგადი მეთოდები

6.1. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერება არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები უკვე განვიხილეთ და ეხლა შევისწავლოთ არაწრფივი სისტემები.

განვიხილოთ თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე ანუ გვაქვს $f(x)$ დამოკიდებულება. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0. \quad (6.1)$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, საზოგადოდ, შეუძლებელია. შესაძლებელია ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა ენერგეტიკული მეთოდის მეშვეობით.

(6.1) განტოლება გაგამრავლოთ x სიდიდეზე და გავაინტეგრროთ, მაშინ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int f(x) \cdot x dt = const = E_0. \quad (6.2)$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot x dt = \int f(x) dx = E_{pot}, \quad (6.3)$$

ე.ი. (6.2) განტოლება წარმოადგენს ენერგიის შენახვის კანონს:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0. \quad (6.4)$$

ცხადია, (6.2) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot}. \quad (6.5)$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ რხევის სიჩქარე

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}. \quad (6.6)$$

ფაზურ სიბრტყეზე x_0 წერტილიდან x წერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.7)$$

შესაბამისად, რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მიიღება ფორმულა:

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.8)$$

ფორმულა (6.8) მართებულია მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.

6.2. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, & \text{if } x > 0 \\ -h, & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (6.9)$$

ასეთი სიტუაციაა რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა $x > 0$ და როცა $x < 0$.

როცა $x > 0$, მაშინ

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \quad (6.10)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0, \quad (6.11)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (6.12)$$

თუ ჩავთვლით, რომ რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს

$$x_0(0) = A, \quad (6.13)$$

$$v_0(0) = 0. \quad (6.14)$$

თუ (6.11) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ t პარამეტრს და ჩავსვამთ (6.13) ტოლობაში, მივიღებთ ფაზური ტრაექტორიების

$(x; \dot{x})$ განტოლებას

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)}. \quad (6.15)$$

6.3. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დემპფირებისას რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინააღობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში წინააღობის ძალა დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის x წარმოებულზე.

ზოგადად დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{x} + g(x) + f(x) = 0. \quad (6.16)$$

ზოგჯერ, დემპფირების და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (6.17)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = v$, მაშინ $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$. აქედან გამომდინარე, (6.17) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}. \quad (6.18)$$

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

ახლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (6.16) განტოლება x სიდიდეზე და გავაინტეგრროთ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(x) \cdot x dt + \int_0^x f(x) dx = E_0. \quad (6.19)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას E_D დემპფირების ძალების გადალახვაზე დახარჯული ენერგიისათვის, მივიღებთ ენერგიის განტოლებას

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - E_D. \quad (6.20)$$

ამ განტოლებიდან ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ თავისუფალ რხევით სისტემაში ადგილი აქვს ენერჯიის დისიპაციას.

6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მყარ სხეულებს შორის მშრალ ხახუნს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული, რომლებიც გადაადგილდება ერთმანეთის მიმართ ისე, რომ მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არის დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოებით შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{if } v > 0, \\ +r & \text{if } v < 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

ასე, რომ

$$K_r = -r \cdot \text{sgn } \dot{x}. \quad (6.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \text{sgn } \dot{x} + f(x) = 0. \quad (6.23)$$

ეს განტოლება ცალ-ცალკე განიხილება იმ შემთხვევებისათვის, როცა $v > 0$ და $v < 0$.

თუ $v > 0$, მაშინ (6.23) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = -r. \quad (6.24)$$

მისი შესაბამისი ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - r \cdot x = \bar{E}_0. \quad (6.25)$$

ამ რხევითი სისტემისათვის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება შემდეგია:

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v > 0, \quad (6.26)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 + r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v < 0. \quad (6.27)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.
3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე მშრალი ხახუნის შემთხვევაში.
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

ლიტერატურა

1. თ.ობგაძე, მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
2. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი, მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
3. თ.ობგაძე, მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001.
5. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества. Москва, 2005.
6. Магнус К. Колебания. Пер. с англ. Москва: Мир, 1982.

თავი 7. ავტორხვეითი სისტემები

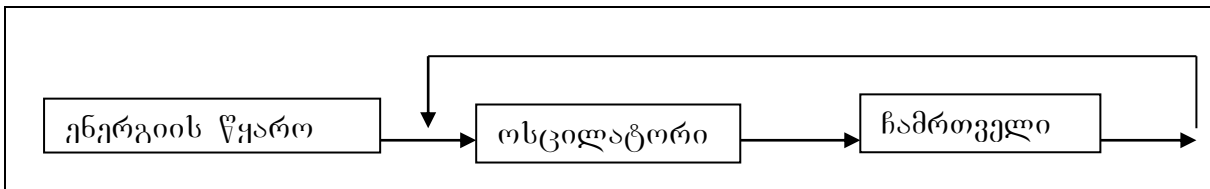
ავტორხვეები - განსაკუთრებული ტიპის რხევებია. ამ ტიპის რხევებისთვის დამახასიათებელია ენერგიის წყაროს არსებობა, რომელიც ავსებს სისტემის ენერგეტიკულ დანაკარგებს.

7.1. ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები

სტრუქტურისა და მოქმედების პრინციპის მიხედვით განასხვავებენ ავტორხვეითი სისტემების ორ ტიპს:

1. ოსცილატორული სისტემა;
2. დაგროვებითი სისტემა.

ოსცილატორული ტიპის სისტემისათვის დამახასიათებელია შემდეგი სტრუქტურული სქემა (ნახ. 7.1):



ნახ.7.1. ოსცილატორული ტიპის ავტორხვეითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

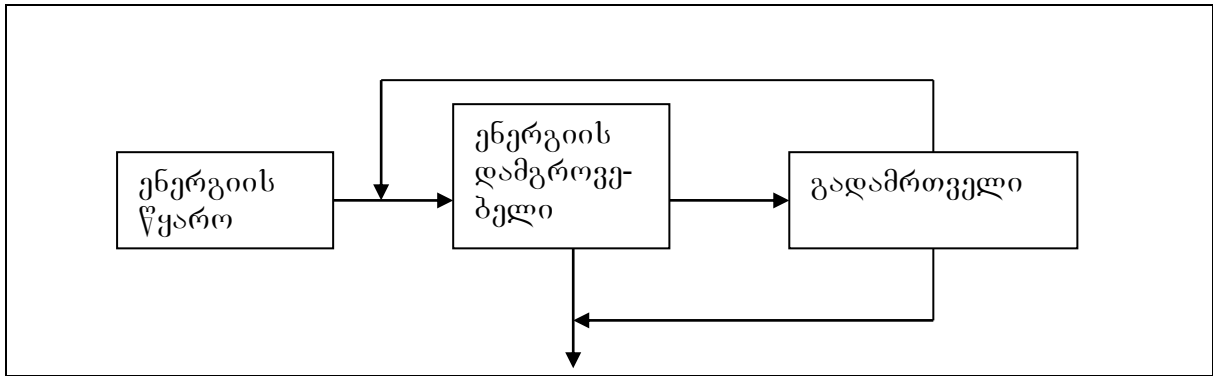
ოსცილატორული ტიპის სისტემებში ჩამრთველი მოქმედებს, როგორც უკუკავშირი რხევით სისტემასა და ენერგიის წყაროს შორის, რომელიც ჩაერთვება საჭირო მომენტში და სისტემას საჭირო ენერგიით ამარაგებს.

ცხრილში მოცემულია შესაბამისი ტიპის პრაქტიკული მაგალითები.

ცხრილი 7.1

№	ავტორხვეითი სისტემა	ენერგიის წყარო	ოსცილატორი	უკუკავშირის საშუალება
1	ზარი	ელექტრობატარეა	ჩაქუჩი	კონტაქტი
2	საათი	დეფორმირებული ზამბარა	ბალანსირი	ჩამომშვები რეგულატორი
3	ვიოლენხელოს სიმი	მოძრავი ხეში	სიმი	მშრალი ხახუნი ქრობადი მახასიათებლით
4	თვითმფრინავის მზიდი ფრთა	ჰაერის ნაკადი	დრეკადი ფრთა	ჰაერის ნაკადისა და ფრთის ურთიერთქმედების არასტაციონარული ძალები

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია 7.2 ნახ-ზე.

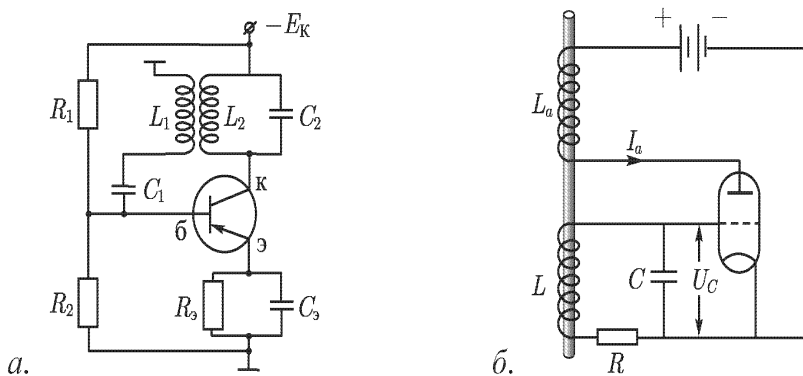


ნახ. 7.2. დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემა, ხშირად, ასრულებს წყვეტად(დისკრეტულ) რხევებს.

7.2. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის სქემა.



ნახ.7.3. ვან-დერ-პოლის გენერატორის სქემა

ა) ტრანზისტორზე; ბ) ელექტრონულ ლამფაზე

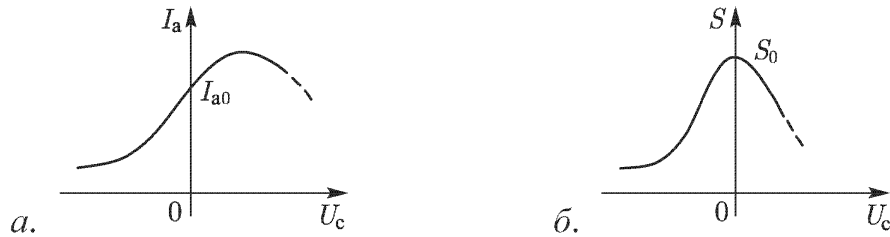
შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (7.1)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ელექტრონულ ლამფის ბადეზე U_a ძაბვის გაზრდა იწვევს ანოდური I_a დენის მატებას. იმისათვის, რომ მივიღოთ ანოდური დენის თვითაგზნება, უნდა გამოვთვალოთ დამოკიდებულება $I_a = I_a(U_c)$.

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c} \quad (7.2)$$

წარმოებულს ბადური მახასიათებლის სიმრუდე ეწოდება. შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია 7.4 ნახ-ზე.



ნახ.7.4. ა) ანოდური დენისა და ბ) ბადური სიმრუდის ბადურ ძაბვაზე დამოკიდებულების გრაფიკები

მუშა მდგომარეობაში ადგილი აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2, \quad (7.3)$$

$$I_a = I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \quad (7.4)$$

თუ (7.3) და (7.4) ფორმულებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (7.1) გადაიწერება სახით:

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (7.5)$$

$$\text{სადაც } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (7.6)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad (7.7)$$

მივიღებთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს ცნობილი ავტორხევითი სისტემის დინამიკას

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.8)$$

7.3. ავტორხვეითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები—დრეკადი კონსტრუქციებია, რომლებიც მოთავსებულია ჰაერის ან წყლის ნაკადებში და შესაბამის ურთიერთქმედებას განიცდის.

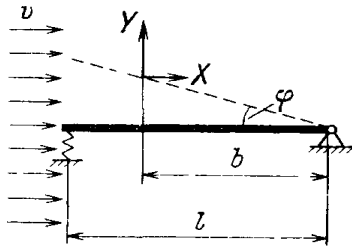
ჰიდროაეროდრეკადი სისტემების მაგალითს წარმოადგენს სამშენებლო ნაგებობები, რომლებიც მოთავსებულია ქარის ზემოქმედების ქვეშ. ჰაერის ნაკადის მოქმედების შედეგად ნაგებობებში აღიძრება რხევები და თუ ნაგებობას არ შეუძლია ქარის მიერ აღძრული რხევების ჩაქრობა, შესაძლოა ნაგებობის დანგრევაც, რაც არაერთხელ მომხდარა. ამიტომ, დაპროექტების ეტაპზე აუცილებელია ქარის დატვირთვის შესწავლა ნებისმიერი მადლივი შენობა-ნაგებობის ან კიდული-ვანტური ხიდებისათვის.

დატვირთვების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ ფლატერი ანუ მავნე, გამანადგურებელი რხევები და სწორად დავაპროექტოთ ესა თუ ის ნაგებობა.

ფლატერის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საფრენი აპარატების დაპროექტების დროსაც.

ჰაერის ზემოქმედების შედეგად, თვითმფრინავის ფრთა დეფორმაციას განიცდის და შედეგად იცვლება გარსდენის რეჟიმი. ამ მოვლენას დივერგენციას უწოდებენ. დივერგენციის შედეგად იცვლება ფრთის გეომეტრია, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაკადის პერიოდული მოწყვეტა და შესაბამისი სიხშირის რხევები. ასეთ შემთხვევაში შესაძლოა რეზონანსული რხევების წარმოქმნა და ფრთის დამსხვრევა გარკვეული, კრიტიკული სიჩქარის ფრენის შემთხვევაში. ამიტომ, ფრთის დაპროექტებისას აუცილებელია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარის დაანგარიშება, რათა თავიდან ავიცილოთ კონსტრუქციის არასაიმედოობა მუშა სიჩქარეების დიაპაზონში. ფლატერი შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის თავისებურებიდან გამომდინარე, გარე ზემოქმედების გარეშე, გარკვეული, ფლატერის კრიტიკული სიჩქარის გადამეტებისას ან სიჩქარეთა გარკვეული დიაპაზონის შემთხვევაშიც.

ა) დივერგენციის შესასწავლად, განვიხილოთ ფრთის სქემატური, გამარტივებული მოდელი (ნახ. 7.5)



ნახ.7.5. ფრთის დივერგენციის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტა, რომელიც მარცხენა მხარეს დრეკადადა ჩამაგრებული (ფრთის თავისუფალი მხარე), მარჯვენა მხარეს კი აქვს სახსრული ჩამაგრება (ფრთის ჩამაგრება ფუზელაჟთან). ფირფიტა მოთავსებულია v სიჩქარის მქონე ჰაერის ნაკადში. ვიპოვოთ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე.

ფრთის φ კუთხით გადახრისას წარმოიქმნება წნევის ძალები, რომლებიც ორ მდგენელად შეიძლება დავშალოთ (შუბლური წინაღობის და ამწევი ძალები).

$$X = C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi ; \quad Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi, \quad (7.9)$$

სადაც C_x შუბლური წინაღობის კოეფიციენტი; C_y -ამწევი ძალის კოეფიციენტი; ρ ჰაერის სიმკვრივე; l -ფრთის ქორდა; b -მანძილი სახსრული შეერთებიდან აეროდინამიკური წნევების ტოლქმედის მოდების წერტილამდე.

ფირფიტაზე (ფრთაზე) მოდებული ძალების მომენტების ჯამი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ არის:

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + X \cdot b \cdot \varphi + Y \cdot b, \quad (7.10)$$

სადაც c_0 დრეკადი ჩამაგრების ზამბარის სიხისტეა. გათვალისწინებულია, რომ φ მცირე კუთხეა, $\sin \varphi \approx \varphi$. ჩავსვათ (7.10) ფორმულაში (7.9), მაშინ

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi^2 + C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: I - ფირფიტის ინერციის მომენტი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ. თუ გავითვალისწინებთ შესაბამის განტოლებას ფირფიტისათვის

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M, \quad (7.12)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$I \cdot \ddot{\varphi} + (c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b) \cdot l \cdot \varphi = 0. \quad (7.13)$$

წინააღმდეგობის ძალის მომენტის შესაბამისი წევრი გამოტოვებულია, რადგან უსასრულოდ მცირეა.

ვინაიდან φ უსასრულოდ მცირე შემფოთებაა, სისტემის მდგრადობისათვის ანუ საწყისი შემფოთების ჩაქრობისათვის გვაქვს პირობა

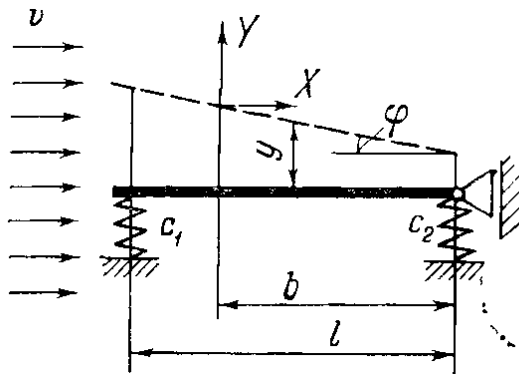
$$c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b > 0. \quad (7.14)$$

აქედან, ცხადია, რომ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{C_y \cdot \rho \cdot b}}. \quad (7.15)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც უფრო მეტია ფრთის სიხისტე, მით უფრო მეტია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეც. რაც მეტია დივერგენციის სიჩქარე, მით უკეთესია თვითმფრინავის ფრთისათვის.

ბ)ახლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის განიხილება გამარტივებული, სქემატური მოდელი (ნახ. 7.6).



ნახ. 7.6. თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ფირფიტის ორივე მხარეს გვაქვს დრეკადი ჩამაგრება. მოსალოდნელია სხვა ტიპის არამდგრადობაც, რომელიც დაკავშირებულია ორგანზომილებიანი სისტემის არაკონსერვატიულობასთან.

განვიხილოთ მცირე შემფოთებები ამ სისტემაში:

$y(t)$ - ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება;

$\varphi(t)$ - ფირფიტის მობრუნების კუთხე;

c_1 და c_2 - დრეკადი საყრდენების სიხისტეებია;

$\frac{m \cdot l^2}{12}$ - ფირფიტის ინერციის მომენტი, სიბრტყის პერპენდიკულარულად სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ;

l - ფირფიტის სიგრძე ნაკადის მიმართ;

b - მანძილია ამწევი ძალის მოდების წერტილიდან მის მარჯვენა ბოლომდე.

$$Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.16)$$

დრეკად რეაქციის ძალებს აქვს სახე:

$$R_1 = c_1 \cdot \left(y + \frac{\varphi \cdot l}{2}\right); \quad R_2 = c_2 \cdot \left(y - \frac{\varphi \cdot l}{2}\right). \quad (7.17)$$

შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებია:

$$-R_1 - R_2 + Y = m \cdot \ddot{y}; \quad (7.18)$$

$$-R_1 \cdot \frac{l}{2} + R_2 \cdot \frac{l}{2} + Y \cdot \left(b - \frac{l}{2}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \ddot{\varphi}. \quad (7.19)$$

თუ ამ განტოლებებში შევიტანთ (7.16) და (7.17) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$y + c_{11} \cdot \ddot{y} + c_{12} \cdot \ddot{\varphi} = 0; \quad (7.20)$$

$$\varphi + c_{21} \cdot \ddot{y} + c_{22} \cdot \ddot{\varphi} = 0, \quad (7.21)$$

სადაც

$$c_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \cdot l}{2 \cdot m} - \frac{C_y}{m} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l. \quad (7.22)$$

$$c_{21} = \frac{6 \cdot (c_1 - c_2)}{m \cdot l}; \quad c_{22} = \frac{3 \cdot (c_1 + c_2)}{m} + 6 \cdot \frac{C_y}{m \cdot l^2} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot (l - 2 \cdot b). \quad (7.23)$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.24)$$

ანუ

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (c_{11} + c_{22}) + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0. \quad (7.25)$$

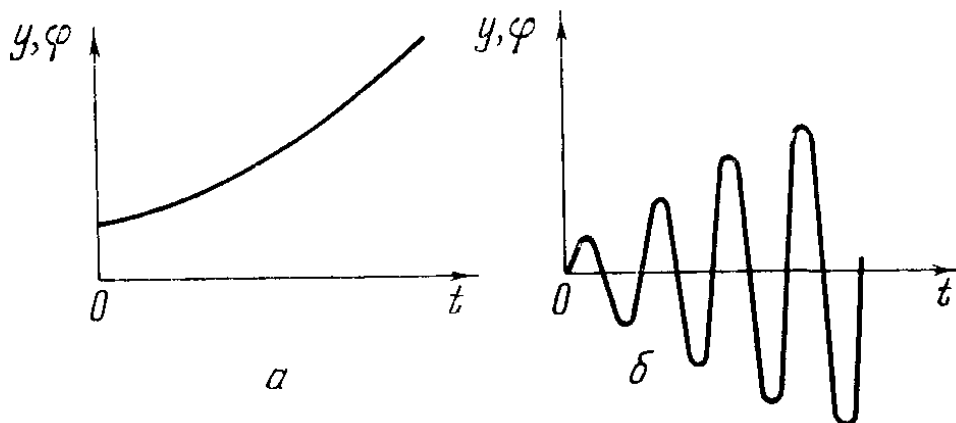
მახასიათებელი განტოლების ფესვებია

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21})}}. \quad (7.26)$$

სისტემის მდგრადობის პირობები შემდეგია:

$$0 < c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (7.27)$$

პირველი უტოლობის დარღვევისას ამ სისტემაში გვექნება დივერგენცია (ნახ. 7.7,a), მეორე უტოლობის დარღვევისას გვაქვს ფლატერი (ნახ. 7.7,ბ).



ნახ. 7.7. ფრთის მდგრადობის დაკარგვის გრაფიკები:

a) დივერგენცია; ბ) ფლატერი

მდგრადობის ზღვართი მნიშვნელობები (7.27) უტოლობებში გვაძლევს შესაბამისი კრიტიკული სიხქარების მნიშვნელობებს. თუ გავითვალისწინებთ (7.22) და (7.23) განტოლებებს მივიღებთ, რომ

დივერგენციის კრიტიკული სიხქარა

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot l}{\rho \cdot C_y [c_1 \cdot (b-l) + c_2 \cdot b]}} \quad (7.28)$$

ფლატერის კრიტიკული სიხქარა

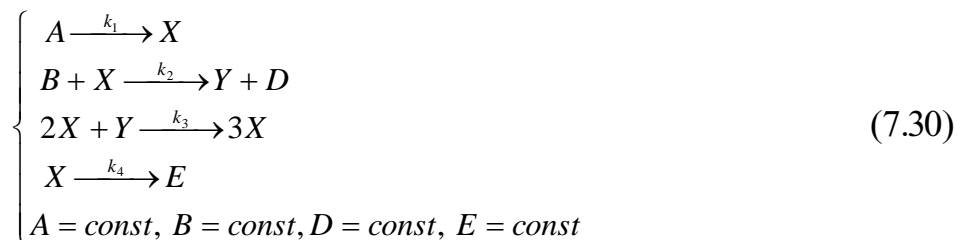
$$v_{flat} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\rho \cdot C_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1 \cdot c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}} \quad (7.29)$$

7.4. ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლევევერის მოდელი)

ავტორხევითი სისტემები გვხვდება ზოგიერთი ქიმიური რეაქციის შესწავლისას. ცნობილია, ბ. ბელოუსოვის მიერ 1950 წელს აღმოჩენილი, მოგვიანებით კი ა.ჟაბოტინსკის მიერ შესწავლილი ქიმიური რეაქცია. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია არის მალონის მჟავას დაჟანგვის პროცესი, იონების კატალიზატორის არსებობისას. ამ რეაქციის მიმდინარეობისას, ხდება კონცენტრაციული რხევები, რის გამოც, ნარევის ფერი იცვლება: ცისფერი-წითელი-ცისფერი . . . გარდა პერიოდული რხევებისა, ქიმიური პროცესების დინამიკა უფრო რთულია და ბოლომდე არაა შესწავლილი. არსებობს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, როგორცაა ფილდის, კერესის, ნოიესის და სხვა. მაგრამ ვერც ერთი ბოლომდე ვერ აღწერს ქიმიურ დინამიკას.

განვიხილოთ ჰიპოტეტური ქიმიური რეაქციის მოდელი, რომელსაც ბრიუსელატორი ჰქვია და შემუშავებულია ი. პრიგოჟინის სკოლის მიერ. პრიგოჟინ-ლევევერის მოდელი ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელია, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებულ იქნა ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით. ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლევევერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ც დიაა, ე.ი. ემატება ან აკლდება A, B, D, E ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შენარჩუნდება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლევევერის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (7.30) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1 A + k_3 X^2 Y - (k_2 B + k_4) X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{cases} \quad (7.31)$$

ჩავწეროთ (7.31) განტოლებები უგანზომილებო სახით. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადები ფორმულებით:

$$\tau = k_4 \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot Y, \quad (7.32)$$

მაშინ (7.31) გადაიწერება სახით:

$$\dot{x} = a - (b+1) \cdot x + x^2 \cdot y, \quad (7.33)$$

$$\dot{y} = b \cdot x - x^2 \cdot y, \quad (7.34)$$

სადაც

$$a = \sqrt{\frac{k_1^2 \cdot k_3}{k_4^3}} \cdot A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} \cdot B. \quad (7.35)$$

ამრიგად, მივიღეთ მეორე რიგის დინამიკური სისტემა ორი a და b მართვის პარამეტრებით.

წონასწორობის პირობებს აქვთ სახე:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (7.36)$$

წონასწორობის წერტილში არ ხდება x და y კონცენტრაციების ცვლილება.

ვიპოვოთ წონასწორობის მდგომარეობის არამდგრადობის პირობები ანუ პირობები, როცა სისტემაში ავტორხევები წარმოიქმნება.

ამისათვის, წონასწორობის წერტილს მივცეთ მცირე შეშფოთებები და ვნახოთ როდის შორდება სისტემა წონასწორობის წერტილს. განვიხილოთ შეშფოთებული მდგომარეობა

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta. \quad (7.37)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (7.33),(7.34) განტოლებებში

$$\dot{\xi} = a - (b+1)a - (b+1) \cdot \xi + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right), \quad (7.38)$$

$$\dot{\eta} = b \cdot (a + \xi) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right). \quad (7.39)$$

ამ სისტემის ლინეარიზაცია გვაძლევს

$$\dot{\xi} = (b-1) \cdot \xi + a^2 \cdot \eta, \quad (7.40)$$

$$\dot{\eta} = -b \cdot \xi - a^2 \cdot \eta. \quad (7.41)$$

ამ სისტემის ყოფაქცევის გამოსაკვლევად შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება, რისთვისაც უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi \rightarrow e^{p\tau}, \quad \eta \rightarrow e^{p\tau}. \quad (7.42)$$

მაშინ

$$(p-b+1) \cdot (p+a^2) = -a^2 \cdot b. \quad (7.43)$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$p^2 + p \cdot (a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (7.44)$$

მისი ფესვებია:

$$p = -\frac{a^2 + 1 - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 1 - b)^2}{4} - a^2}. \quad (7.45)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ წერტილში

$$b_{kr} = a^2 + 1 \quad (7.46)$$

სისტემა კარგავს მდგრადობას და იწყება ავტორხევები პრიგოჟინ-ლუფფერის ჰიპოტეტიურ ქიმიურ სისტემაში.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორი ავტორხევითი სისტემებია თქვენთვის ცნობილი? აღწერეთ მათი მუშაობის პრინციპები.
2. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი.
3. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
4. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის დივერგენციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
5. პრიგოჟინ-ლუფფერის მათემატიკური მოდელი და ავტორხევების წარმოქმნის პირობა.

ლიტერატურა

1. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
2. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლი, შვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
3. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.

თავი 8. პარამეტრული რხევითი სისტემები

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. სისტემაში პარამეტრული რხევები არ აღიძვრება, თუ ის წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

8.1. ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა (სხეული), რომელსაც შეუძლია ბრუნვა A ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძის მიმართ. მოძრაობა ხასიათდება ბრუნვის φ კუთხით ღერძის მიმართ. დავუშვათ, რომ ბრუნვის A ღერძი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში გარკვეული $a = a(t)$ კანონით. ქანქარას მოძრაობის განტოლების შედგენისას ღერძთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც სიმძიმის ძალის მომენტი

$$M_s = -mgs \cdot \sin \varphi, \quad (8.1)$$

ასევე ინერციის ძალის მომენტიც

$$M_b = -m \cdot \ddot{a} \cdot s \cdot \sin \varphi. \quad (8.2)$$

აქედან გამომდინარე, ფიზიკური ქანქარას მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi \quad (8.3)$$

ან სხვანაირად

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0, \quad (8.4)$$

შედაც $a(t)$ დროის პერიოდული ფუნქციაა; I -ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი; s -მანძილი ქანქარას მოცემული წერტილიდან ბრუნვის A ღერძამდე.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $a = A \cdot \cos \Omega \cdot t$, მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + A \cdot \cos \Omega \cdot t) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.5)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $\omega^2 = \frac{mgs}{I}$ და $\varepsilon = \frac{mAs}{I}$, მაშინ (8.5)

მოდელი გადადის მათივე მოდელში

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.6)$$

ამრიგად, მივიღეთ პარამეტრული რხევითი სისტემა.

8.2. ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)

ელექტრული რხევითი სისტემისათვის, რომელიც შედგება C ტევადობის კონდენსატორისა და L ინდუქციურობის მაგნიტური კოჭასაგან, გვაქვს თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0. \quad (8.5)$$

თუ კონდენსატორის ტევადობა დროის პერიოდული ფუნქციაა $C = C(t)$, მაშინ მიიღება პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლის დროსაც პარამეტრული რხევები წარმოიქმნება. ასეთი რხევები, როგორც წესი, მავნეა რხევითი სისტემისათვის და ცდილობენ სისტემა ისე დააპროექტონ, რომ აიცილონ პარამეტრული რხევები.

თუმცა, ზოგი ჭირი მარგებელიაო და ლ. მანდელშტამმა და ნ. პაპალეკსმა დააპროექტეს ცვლადი დენის გენერატორი, რომლის მუშაობის პრინციპი დამყარებულია კონდენსატორის ტევადობის ცვლილებაზე. ტევადობის ცვლილება ხდება იმის ხარჯზე, რომ კონდენსატორის ფირფიტების ნაწილი შეადგენს მბრუნავ კბილანა ბორბალს.

$$\text{თუ } \frac{1}{L \cdot C} = P_0 + \Delta P \cdot \text{sign} \cos \Omega \cdot t, \quad \tau = \Omega \cdot t, \quad \lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2}, \quad \text{მაშინ (8.5)}$$

გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{Q} + (\lambda + \gamma \cdot \text{sign}(\cos \tau)) \cdot Q = 0. \quad (8.6)$$

პარამეტრული რხევითი სისტემის მოდელი (8.6) მეისნერის განტოლებას წარმოადგენს.

8.3. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილ-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$\dot{X}(t) = C(t) + I(t), \quad (8.7)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ – ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (8.8)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.9)$$

(8.8)-ისა და (8.9)-ის (8.7)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.10)$$

(8.10) განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (8.11)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (8.12)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (8.12) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t)] = 0. \quad (8.13)$$

თუ (8.13)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ და $F[X(t)]$

$$\beta(t) = t \quad (8.14)$$

$$F[X(t)] = t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) \quad ,$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) = 0. \quad (8.15)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატიეს განტოლება, რომლის-თვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. რით განსხვავდება პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან?
2. გამოიყვანეთ ფიზიკური საქანის პარამეტრული რხევების განტოლება.
3. გამოიყვანეთ მატის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.
4. გამოიყვანეთ ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
5. გამოიყვანეთ მესნერის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.

ლიტერატურა

1. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
2. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
3. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
4. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания Москва, 2002.
5. Магнус К. Колебания. Пер. с англ. Москва: Мир, 1982.

თავი 9. არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები

იძულებით რხევით სისტემებზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს განსაზღვრავს შესაბამისი მათემატიკური მოდელის დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემებისგან განსხვავებით, არაწრფივი, იძულებით რხევით სისტემებში ადგილი აქვს არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას. ამ მოვლენის სახელწოდებით ერთიანდება ის მოვლენები, რომელთაც ადგილი აქვს არაწრფივ სისტემებში, გარე პერიოდული ზემოქმედების დროს და რომლებიც მუდგანდება რხევების თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებით, გარე ზემოქმედების ამპლიტუდისა და სიხშირის მიხედვით.

9.1. ამოცანის ზოგადი დასმა

ინერციის კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ზოგად შემთხვევაში, ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = \psi(t). \quad (9.1)$$

შადაც $\psi(t)$ გარე მაიძულებელი ძალაა; $g(q)$ -აღმდგენი ძალა; $f(q, \dot{q})$ -დისიპაციისა და ამაჩქარებელი ძალების კომბინაცია; პირველი მიმართულია q სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მეორე – სიჩქარის მიმართულებით.

ზოგად შემთხვევაში, (9.1) განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია, თუმცა, კერძო შემთხვევებში, ეს შესაძლებელია. ზოგად შემთხვევაში, განტოლება შეიძლება გამოკვეთულ იქნეს კომპიუტერის დახმარებით.

9.2. ფრანგიშვილ-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა მიწოდების ტოლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი $X(t)$, რამდენიც სჭირდება ბაზარს $Y(t)$.

$$X(t) = Y(t). \quad (9.2)$$

$X(t)$ არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა), $Y(t)$ - მოთხოვნა.

(9.2) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (9.3)$$

სადაც $C(t)$ მოთხოვნის ფუნქციაა, $I(t)$ – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ხიკის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \quad (9.4)$$

სადაც β აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება არის წარმოების მოცულობის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ t დროში. სხვანაირად,

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (9.5)$$

წონასწორობის (9.3) განტოლებაში (9.4) და (9.5) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (9.6)$$

(9.6) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)] \quad (9.7)$$

ანუ მივიღებთ ფრანგიშვილ-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta} F[X(t)] = 0. \quad (9.8)$$

ვთქვათ,

$$\beta = -\frac{1}{e}; \quad (9.9)$$

მაშინ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \quad (9.10)$$

სადაც: $e = const$, ხოლო $F_1[X(t)]$ მოხმარების სიმკვრივეა.
 თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (9.11)$$

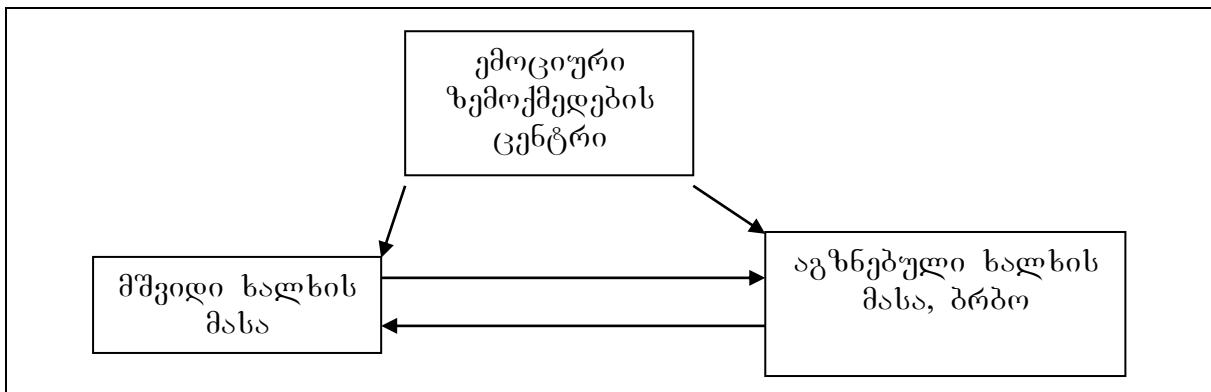
მაშინ (9.11)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A \cos(\omega \cdot t), \quad (9.12)$$

რომელიც აღწერს არაწრფივ, იძულებით რხევებს ფრანგიშვილ-ობაძის ეკონომიკურ სისტემაში.

9.3. ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, პერიოდული გარე PR - გამდიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ ხალხის მასის ემოციური მოქმედების მათემატიკური მოდელი. ხალხის მასისათვის დამახასიათებელია გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, გარე ემოციური ზემოქმედების გავლენით, რომლის როლს შეიძლება ასრულებდეს საეკლესიო პირი, პოლიტიკოსი, ავანტიურისტი ან ტელეჟურნალისტი. ამ ზემოქმედებათა ერთობლიობას PR-გამდი-ზიანებლის ზემოქმედებას უწოდებენ. განვიხილოთ ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი (ნახ.9.1):



ნახ. 9.1. ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი

ხალხის მასის ემოციური დინამიკის მათემატიკური მოდელი დგება ნიუტონის მეორე კანონის ბაზაზე

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.13)$$

სადაც n ბრბოს შემადგენელი ხალხის რაოდენობაა;

P_2 -იმის ალბათობა, რომ ხალხის მასა აღზნებულ მდგომარეობაშია; f -ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდეა; ε -ხალხის ემოციური აგზნების სიდიდის მახასიათებელი პარამეტრი; P_1 -იმის ალბათობა, რომ ხალხის მასა მშვიდ მდგომარეობაშია.

ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდე პირდაპირპროპორციულია მათი ორმაგი მოცულობისა და იმის ალბათობისა, რომ მასა მშვიდ მდგომარეობაშია. როცა აგზნებადობის ალბათობა იზრდება, ემოციური ზემოქმედების ძალა მცირდება. ასე, რომ

$$f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2. \quad (9.14)$$

დავუშვათ, რომ $\gamma = 1$.

(9.13) და (9.14) იძლევა მოდელს:

$$\ddot{P}_2 = -2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2. \quad (9.15)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემაზე მოქმედებს პერიოდული PR-გამღიზიანებელი. მაშინ (9.13) და (9.14) გამოსახულების ნაცვლად გვექნება:

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f + n \cdot A \cdot \sin \omega \cdot \varepsilon, \quad f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2, \quad \gamma = 1, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.16)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = -2n P_1 \dot{P}_2 + n \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon), \quad (9.17)$$

$$\text{სადაც } P_1 = 1 - P_2 \quad (9.18)$$

ე.ი. გვაქვს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{P}_2 + 2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon). \quad (9.19)$$

ამრიგად, მივიღეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი, პერიოდული გარე PR-გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში. ეს კი არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის აშკარა მაგალითია.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. არაწრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის ზოგადი სახე.
2. გამოიყვანეთ არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე (დიუფინგის განტოლება).
3. **Mathcad**-ის ბაზაზე ამოხსენით დიუფინგის განტოლება და შეისწავლეთ ამონახსნების ყოფაქცევა ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ **Mathcad**-ის ბაზაზე.
5. გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი გარე, პერიოდული PR -გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში.

ლიტერატურა

1. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
2. თ.ობგაძე, ლ.ობგაძე, ნ.მჭედლიშვილი, ი.დავითაშვილი, ნ.თუშიშვილი. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი **Mathcad**-ისა და **Matlab**-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
3. თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. Москва: Наука, 1972.
5. Prangishvili A., Obgadze T., Sakvarelidze N., Iashvili L. Mathematical modelling of excessive demand for essential commodities dynamics at periodic, panic PR-exciter, transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi, 2009.
6. Obgadze T., Sakvarelidze N., Modebadze T. Mathematical modelling people masses emotional behaviour dynamics at periodic PR-exciter, Transactions automated control systems № 1(6), Tbilisi, 2009.

თავი 10. ვეივლეტები და სიგნალების მათემატიკური მოდელირება

შესავალი

რხევითი პროცესების შესწავლისას, ხშირად, საჭიროა სიგნალების ან რხევის კანონის მოდელირება. ამ ამოცანის გადასაჭრელად, ძირითადად, იყენებდნენ ფურიეს გარდაქმნას და ჰარმონიული ბალანსის ცნებებს, მაგრამ მოგვიანებით, შემუშავებულ იქნა ვეივლეტ ანალიზის მეთოდი, რამაც გაამარტივა და დააზუსტა რხევითი პროცესებისა და სიგნალების დამუშავების მეთოდები. ვეივლეტები (wavelets) - თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი, ყველაზე წარმატებული მიღწევაა. მათი საშუალებით შესაძლებელი გახდა რთული ფუნქციებისა და სიგნალების უფრო დეტალური და ზუსტი წარმოდგენა, ვიდრე მათემატიკის კლასიკური მეთოდებით, როგორცაა ტეილორის მწკრივები, ფურიეს მწკრივები, ფურიეს გარდაქმნები და ა.შ.

ახალი მეთოდი ემყარება პრინციპულად ახალი ტიპის ბაზისისა და ფუნქციათა კლასის განხილვას, რომლებიც საშუალებას იძლევა რთულ ფუნქციებს გავუკეთოთ დეკომპოზიცია და სიგნალების რეკონსტრუქცია. შემუშავებულია შესაბამისი პროგრამული და ინსტრუმენტული აპარატი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე.

ვეივლეტები - არის გარკვეული ზოგადი დასახელება განსაკუთრებული ტიპის ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ მოკლე, ტალღათა პაკეტის სახე, ნულოვანი ინტეგრალური მნიშვნელობით და გარკვეული, ზოგჯერ რთული ფორმით, რომელსაც ახასიათებს ლოკალური ძვრა და მასშტაბირება.

ვეივლეტები იგება სპეციალური ბაზისური ფუნქციების მეშვეობით, რომლებიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს. ვეივლეტების ერთობლიობას შეუძლია ფუნქციისა და სიგნალების მიახლოება ზუსტად ან გარკვეული სიზუსტით. ვეივლეტები საშუალებას იძლევა გამოსახულებები დავამუშაოთ, გავუკეთოთ დეკომპოზიცია, რესტავრაცია და იდენტიფიკაცია; ასევე გავფილტროთ ხმაურისაგან, შევკუმშოთ ფაილები, რომლებიც შეიცავენ რიცხვით მონაცემებსა და გამოსახულებებს.

ვეივლეტების ცნება შემოღებულ იქნა გროსმანისა და მორლეს მიერ 80-იანი წლებში [1]. ამჟამად, ვეივლეტები ფართოდ გამოიყენება სახეთა ამოცნობის ამოცანებში; სხვადასხვა ტიპის სიგნალების დამუშავებისა და სინთეზის ამოცანებში; ტურბულენტური ველების თვისებების შესწავლისათვის და ა.შ.

ვეივლეტ-გარდაქმნა მდგომარეობს იმაში, რომ სიგნალს დაშლიან სოლიტონისებრი ფუნქციებისაგან შემდგარი, მასშტაბური და წანაცვლებული ბაზისის მიმართ. ბაზისის თითოეული ფუნქცია ახასიათებს როგორც გარკვეულ სივრცით (დროით) სიხშირეს, ასევე მის ლოკალიზაციას ფიზიკურ სივრცეში (დროში).

სიგნალების ანალიზის ტრადიციული ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით, ვეივლეტ-გარდაქმნა გვაძლევს ერთგანზომილებიანი სიგნალის ორგანზომილებიან სიხშირე-კოორდინატად წარმოდგენას. ამის შედეგად, საშუალება გვქვია შევისწავლოთ სიგნალი, ერთდროულად, ფიზიკურ და სპექტრულ სივრცეში.

ცნობილია მოკლე, მაღალსიხშირიანი ან ლოკალიზებულ მაღალსიხშირიანი სიგნალების დამუშავების სირთულე. ასეთი მონაცემების ადეკვატური გაშიფრვისათვის საჭიროა ისეთი ბაზისი, რომლის ელემენტები წარმოადგენს მაღალ სიხშირეებს და ასევე კარგად ლოკალიზებულია სივრცეში (დროში). ვეივლეტები საშუალებას გვაძლევს დავამუშაოთ ასეთი სიგნალები მოძრავი სიხშირე-დროის ფანჯრით. ამის გამო, ზოგჯერ ვეივლეტებს მათემატიკურ მიკროსკოპსაც უწოდებენ. სიგნალების წარმოდგენისას მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ ისეთი წარმოდგენა, რომელიც გარკვეული აზრით ოპტიმალური იქნება. სასურველია სიგნალის ისეთი წარმოდგენა, რომელიც შეინარჩუნებს სიგნალის ყველა თვისებას. ასეთი წარმოდგენა შეიძლება x სიგნალის დეკომპოზიციით, ელემენტარული x_i სიგნალებით:

$$x = \sum_i x_i, \tag{10.1}$$

სადაც x_i ელემენტარული ფუნქციებია. უფრო მეტიც, სასურველია, რომ ამ ფუნქციებს ჰქონდეთ გარკვეული ფიზიკური ინტერპრეტაცია. სიგნალის დეკომპოზიცია უნდა შესრულდეს სწრაფი ალგორითმით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მას მხოლოდ თეორიული ღირებულება ექნებოდა. დეკომპოზიციისას უნდა ამოიხსნას აპროქსიმაციის ამოცანა ანუ დეკომპოზიციის შედეგი, რაც შეიძლება ახლოს უნდა იყოს საწყის სიგნალთან. ეს უნდა განხორციელდეს, რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის ელემენტარული ბლოკების გამოყენებით. სხვადასხვა “ოპტიკური დაშვებით”, ანალიზის კონცეფცია საშუალებას მოგვცემს შევასრულოთ ეს მოთხოვნები ბუნებრივად, საწყისი უხეში აპროქსიმაციის თანდათანობითი დაზუსტებით, დეტალების მიმდევრობითი დამატებით. ასეთი ამოცანის კლასიკურ გადაწყვეტას გვაძლევს ფურიეს გარდაქმნა როგორც უწყვეტი,

ასევე წყვეტილი დროით. შემუშავებულია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მრავალი ალგორითმი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს სხვადასხვა ალგორითმით ამოიხსნება, თითოეულისთვის დამახასიათებელია ერთი და იგივე მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

თუ მოცემულია ერთსიხშირიანი სიგნალი $e^{i\omega t}$, მაშინ ფურიეს გარდაქმნაზე დამყარებული მეთოდები საშუალებას მოგვცემს ω სიხშირეზე ვიპოვოთ სიგნალის პიკი. თუ სიგნალი შეიცავს ორ სინუსოიდას მაინც, განსაზღვრულს სხვადასხვა დროით ინტერვალზე, მაშინ წარმოიშობა პრობლემა. მიიღება ორი პიკი დროის ლოკალიზაციის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს სიგნალის სიხშირე-დრო ცვლადებში წარმოდგენის აუცილებლობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა მიგველო ლოკალური ინფორმაცია სიგნალის შესახებ როგორც სიხშირით, ასევე დროის არეში. ცხადია, რომ საჭიროა უფრო ლოკალიზებული ბაზისური ფუნქციები, ვიდრე სინუსოიდაა. ამიტომ განიხილავენ ე.წ. ფანჯრებს

$$\omega(t) \sin t, \tag{10.2}$$

სადაც $\omega(t)$ ფანჯრის ფუნქციაა, რომელიც იძლევა დროის ლოკალიზაციას. ასეთ გარდაქმნას **ფანჯრულ ფურიეს გარდაქმნას** უწოდებენ. მიღებული ელემენტარული ბლოკები ყოფენ სიხშირე-დრო სიბრტყეს გარკვეულ ნაწილებად. ასეთ სიტუაციაში, **ჰეიზენბერგის პრინციპიდან** გამომდინარე, შეუძლებელია მივალწიოთ ერთნაირად კარგ, დროით და სიხშირით ლოკალიზაციას. სიხშირისა და დროის დაშვებები შემოიფარგლება **ჰეიზენბერგის უტოლობით**:

$$\Delta t \cdot \Delta f \leq \frac{1}{4\pi}. \tag{10.3}$$

გეივლეტ-ანალიზი შედარებით ახალი ცნებაა, ამიტომ მისი გადმოცემისას გამოიყენება ფურიე-ანალიზის პარალელური განხილვა.

10.1. ვეივლეტ-გარდაქმნების ძირითადი ცნებები და მათემატიკური აპარატი

ვთქვათ, $L_2(0;2\pi)$ არის $(0;2\pi)$ -შუალედში განსაზღვრული, კვადრატით ინტეგრირებად ფუნქციათა სიმრავლე (ფუნქციონალური სივრცე) ანუ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (10.4)$$

ეს ალაგ-ალაგ უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლის განსაზღვრებაა. ის შეიძლება პერიოდულ ფუნქციამდე შევავსოთ ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} სიმრავლეში

$$f(x) = f(x - 2\pi), \quad \forall x. \quad (10.5)$$

ნებისმიერი 2π - პერიოდიანი კვადრატით ინტეგრირებადი $f(x) \in L_2(0;2\pi)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივით

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \quad (10.6)$$

სადაც C_n მუდმივი რიცხვებია და

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (10.7)$$

ამავე დროს (10.6) მწკრივი თანაბრად კრებადია ანუ

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=M}^N C_n e^{inx} \right|^2 dx = 0. \quad (10.8)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ

$$W_n(x) = e^{inx}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (10.9)$$

ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს $L_2(0;2\pi)$ სივრცეში. ბაზისური ფუნქციები მიიღება ერთადერთი $W(x) = e^{ix}$ ფუნქციის მასშტაბური ცვლილებებით ისე, რომ

$$W_n(x) = W(nx). \quad (10.10)$$

ამ მოქმედებას ინტეგრალურ გაფართოებას უწოდებენ.

P.S. ასე, რომ $L_2(0;2\pi)$ -ს ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ბაზისური $W(x) = e^{ix}$ ფუნქციის $W_n(x) = W(nx)$ ინტეგრალური გაფართოების სუპერპოზიციით.

რადგან (10.9) ბაზისი ორთონორმირებულია, ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (10.11)$$

ესეა განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა ვეივლეტების მეშვეობით. განვიხილოთ კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქციების $L_2(R)$ ფუნქციონალური სივრცე, სადაც

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (10.12)$$

$L_2(R)$ და $L_2(0;2\pi)$ ფუნქციონალური სივრცეები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან. კერძოდ, $L_2(R)$ სივრცის ნებისმიერი ფუნქციის საშუალო ლოკალური მნიშვნელობა მიისწრაფვის ნულისკენ. ამიტომ, სინუსოიდური ტალღა არ ეკუთვნის $L_2(R)$ -ს და, მაშასადამე, $W_n(x)$ არ შეიძლება იყოს ამ ფუნქციონალური სივრცის ბაზისი. ვიპოვოთ მარტივი ფუნქციები $L_2(R)$ ბაზისის კონსტრუირებისათვის. ბაზისის წარმომქმნელი ფუნქცია უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ ორივე მიმართულებით. ვეივლეტი-ნიშნავს პატარა ტალღას.

როგორც $L_2(0;2\pi)$ სივრცის შემთხვევაში, $L_2(R)$ -შიც შევეცადოთ ავაგოთ ბაზისი ერთი $\psi(x)$ წარმომქმნელი ფუნქციის მეშვეობით (ის შეიძლება იყოს რამდენიმე სიხშირიანი ან ერთსიხშირიანი ვეივლეტი). თუ ვეივლეტი სწრაფად მიისწრაფვის ნულისკენ, ამ ფუნქციებით როგორ დავფაროთ მთელი რიცხვითი ღერძი? ყველაზე მარტივად ეს შეიძლება გაგაკეთოთ \mathbf{k} სიდიდით წანაცვლების ოპერაციის საშუალებით ანუ გვექნება $\psi(x-k)$. ამ ოპერაციას ინტეგრალურ ძვრას უწოდებენ. განვიხილოთ სინუსოიდური სიხშირის ანალოგი სიმარტივისათვის, ის წარმოვადგინოთ ორის ხარისხით.

$$\psi(2^j \cdot x - k), \quad (10.13)$$

სადაც $j; k$ მთელი რიცხვებია.

რადგან

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}, \quad (10.14)$$

ამიტომ

$$\|\psi(2^j \cdot x - k)\| = 2^{-\frac{j}{2}} \|\psi(x)\|. \quad (10.15)$$

მაშინ ორთონორმირებულ ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \quad (10.16)$$

საზოგადოდ, ვეივლეტს ეწოდება ორთონორმალური, თუ შესაბამისი ვეივლეტ-ბაზისი ψ_{jk} აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\langle \psi_{jk} ; \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}. \quad (10.17)$$

მაშინ $\forall f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ადგილი აქვს ვეივლეტ-წარმოდგენას:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_{jk}(x). \quad (10.18)$$

ამ ჯერადი მწკრივის თანაბარი კრებადობა ჩაიწერება შემდეგი ზღვარით:

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{M_2}^{N_2} \sum_{M_1}^{N_1} C_{jk} \psi_{jk} \right\| = 0. \quad (10.19)$$

ვეელაზე მარტივი ორთოგონალური ვეივლეტი ხაარის ვეივლეტია $\psi^H(x)$:

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{if } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}; \quad (10.20)$$

10.2. ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა

ახლა განვიხილოთ ვეივლეტები ზოგად შემთხვევაში, როცა მასშტაბური ცვლილება არ არის აუცილებლად ორის ხარისხი. ასევე, განვიხილოთ ნებისმიერი წანაცვლება. ერთი წარმომქმნელი $\psi(x)$ -ვეივლეტ ფუნქციის ინტეგრალური a გაფართოებით და b წანაცვლებით შესაძლებელია კონსტრუირება გავუკეთოთ ნებისმიერ ფუნქციას $L_2(\mathbb{R})$ ფუნქციონალური სივრციდან.

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \psi \in L_2(\mathbb{R}). \quad (10.21)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა:

$$[W_\psi f](a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx, \quad (10.22)$$

სადაც ψ ფუნქციას ვეივლეტის დედაფუნქციას (წარმომქმნელს) უწოდებენ.

(10.22) ფორმულაში $\psi_{a,b}(x)$ ფუნქცია იგივე როლს ასრულებს, რასაც $e^{i\omega t}$ ფუნქცია ფურიეს გარდაქმნაში.

თუ გავაგრძელებთ ანალოგიის ძებნას ფურიეს გარდაქმნასთან, მაშინ (10.23) ფორმულაში $f(x)$ ფუნქციის ვეივლეტებით წარმოდგენის C_{jk} კოეფიციენტები

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k), \quad (10.23)$$

შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$C_{jk} = \langle f; \psi_{jk} \rangle. \quad (10.24)$$

ტოლობებიდან გამომდინარე, ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$C_{jk} = [W_{\psi} f] \left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right). \quad (10.25)$$

10.3. ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები

ვეივლეტ-გარდაქმნა საშუალებას გვაძლევს სიგნალი განვიხილოთ სოლიტონისებრივი ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისის მიმართ.

განვსაზღვროთ ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც უნდა ჰქონდეთ სოლიტონისებრ (წარმომქმნელ) $\psi(x)$ დედაფუნქციებს (ვეივლეტებს), რათა განხილულ იქნეს, როგორც ვეივლეტები.

ლოკალიზაცია

ვეივლეტ-გარდაქმნა ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით იყენებს ისეთ ბაზისურ (წარმომქმნელ) დედაფუნქციას, რომელიც ლოკალიზებულია სივრცის (დროის) შემოსაზღვრულ არეში. ვეივლეტი უნდა იყოს ლოკალიზებული როგორც ფიზიკურ, ასევე სპექტრულ სივრცეში, როგორც წესი, $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$.

ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა

რაც ნიშნავს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (10.26)$$

გამოყენებითი ამოცანების განხილვისას, ზოგჯერ, მოითხოვება უფრო მკაცრი პირობაც:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0. \quad (10.27)$$

ასეთ ვეივლეტს m რიგის ვეივლეტს უწოდებენ. ასეთი პირობა მაშინ განიხილება, როცა საჭიროა ვეივლეტის წარმოებულების განხილვა, m რიგის ჩათვლით.

შემოსაზღვრულობა მოიცემა პირობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (10.28)$$

კარგი ლოკალიზაცია და შემოსაზღვრულობა ზოგჯერ მოიცემა პირობებით

$$|\psi(x)| < \frac{1}{1+|x|^n} \quad (10.29)$$

ან შესაბამისი ფურიე-გარდაქმნისათვის

$$\left| \hat{\psi}(\omega) \right| < \frac{1}{1+|k-\omega_0|^n}, \quad (10.30)$$

სადაც ω_0 ვეივლეტის დომინანტური სიხშირეა.

ახლა განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები:

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$[W_\psi f](a,b) = w(f) = w(a,b). \quad (10.31)$$

ვეივლეტ-გარდაქმნის ოპერატორის წრფივობის თვისება

$$w[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha w(f_1) + \beta w(f_2) = \alpha w_1(a,b) + \beta w_2(a,b). \quad (10.32)$$

ინვარიანტულობა წანაცვლების ოპერაციის მიმართ

$$w[f(x-b_0)] = w(a,b-b_0). \quad (10.33)$$

ინვარიანტულობა მასშტაბის ცვლილების მიმართ

$$w\left[f\left(\frac{x}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} w\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \quad (10.34)$$

ენერჯიის შენახვის თვისება

ვეივლეტ-გარდაქმნისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობის ანალოგს:

$$\int f_1(x) \cdot f_2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w_1(a,b)w_2(a,b)dadb}{a^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int f^2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w^2(a,b)dadb}{a^2}. \quad (10.35)$$

10.4. ვეივლეტ-ფუნქციების კერძო შემთხვევები

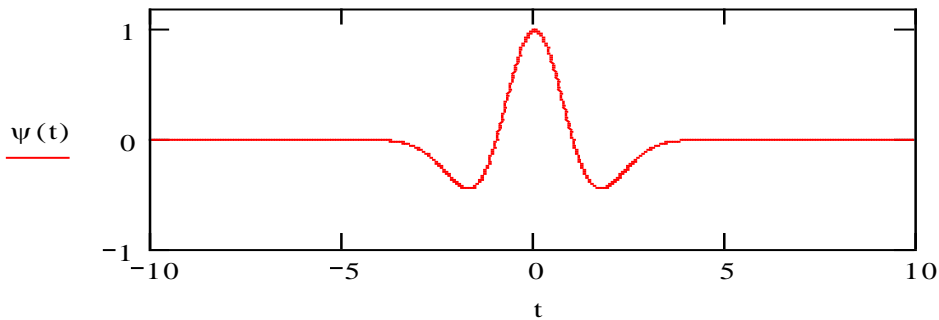
განვიხილოთ ვეივლეტ-ფუნქციების კონკრეტული სახეები:

მექსიკური ქული (მაარის ვეივლეტი)

ასე უწოდებენ ფუნქციას, რომელიც მიიღება გაუსის ფუნქციის ორჯერ გაწარმოებით

$$\psi(t) = (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (10.36)$$

მექსიკური ქულის გრაფიკი მოცემულია 10.1 ნახ-ზე.



ნახ.10.1. მაარის ვეივლეტი-მექსიკური ქული

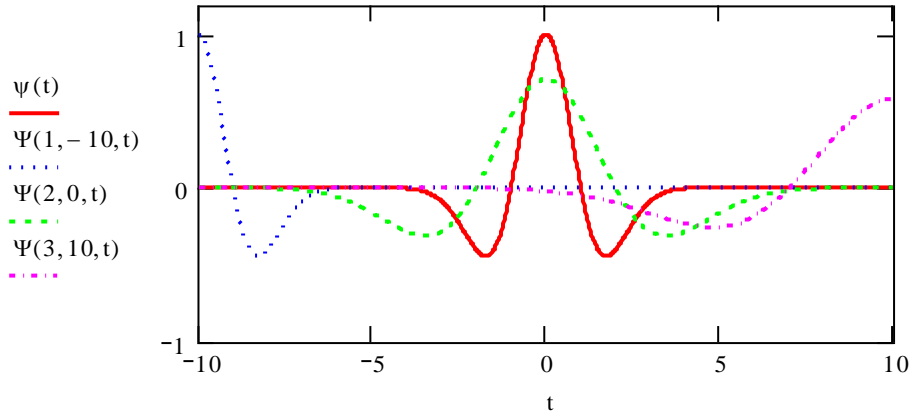
შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \quad (10.37)$$

დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია მაარის ვეივლეტისათვის მოცემულია 10.2 ნახ-ზე.

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right),$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

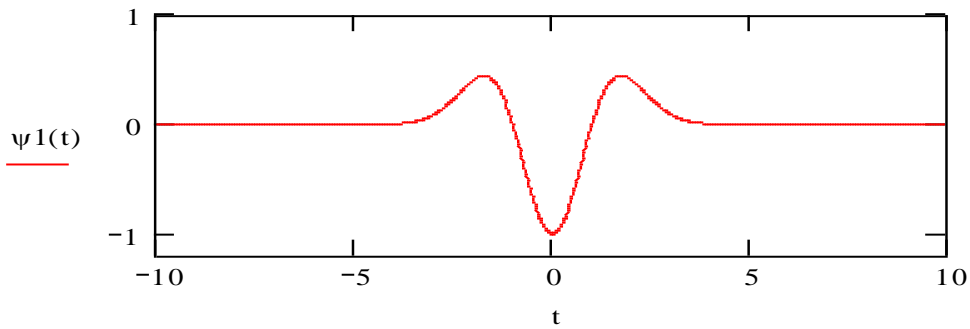


ნახ.10.2. დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია

ზოგჯერ იყენებენ გადაბრუნებულ მექსიკურ ქუდს, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\psi_1(t) = (1+t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (10.38)$$

გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი მოცემულია 10.3 ნახ-ზე.



ნახ.10.3. მაარის ვეივლეტი-გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

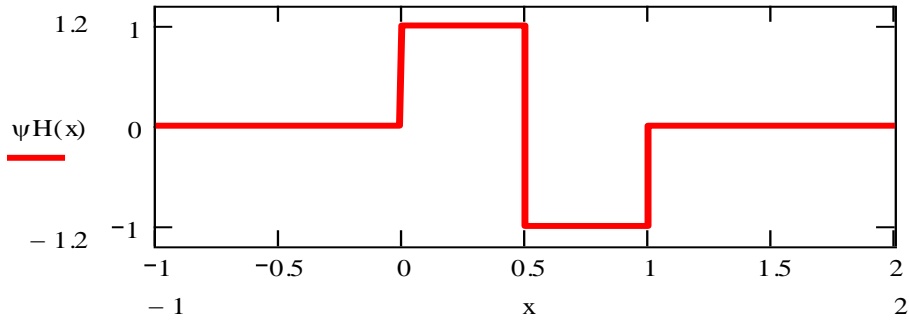
$$\psi_{1jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi_1(2^j \cdot x - k). \quad (10.39)$$

დავალება მაგისტრებისათვის: წინა პარაგრაფის მასალაზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ მექსიკური ქუდი და გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი აკმაყოფილებს ვეივლეტების ყველა აუცილებელ თვისებას.

ხაარის ვეივლეტი

სიგნალების დეკომპოზიციისა და რეკონსტრუქციისათვის, ხშირად, იყენებენ ხაარის ვეივლეტებს, რომელთა წარმომქმნელ (დედა) ფუნქციას აქვს სახე (ნახ.10.4):

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{if } (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0 & \text{if } ((x < 0) \vee (x > 1)) \end{cases} ; \quad (10.40)$$



ნახ.10.4. ხაარის ვეივლეტი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^H_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^H(2^j \cdot x - k). \quad (10.41)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი ორი $\psi^H_{jk} \wedge \psi^H_{mn}$ ფუნქცია ვეივლეტ-ბაზისიდან, რომლებიც მიიღება ხაარის დედა-ფუნქციიდან, $\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^m}$ -ინტეგრალური გაფართოებისა და $\frac{k}{2^j}, \frac{n}{2^m}$ -წანაცვლების შემდეგ ორთონორმალურია ერთმანეთის მიმართ ანუ ადვილი აქვს ტოლობას

$$\langle \psi^H_{jk}; \psi^H_{mn} \rangle = \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (10.42)$$

(დაამტკიცეთ!)

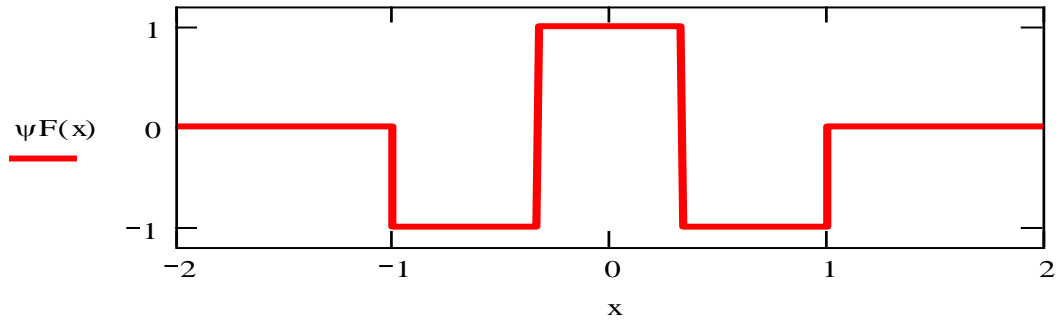
P.S. ხაარის ბაზისის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ეს ვეივლეტი არასიმეტრიულია და გლუვი, თუმცა ზოგიერთ ამოცანაში სიგნალების დამუშავებისას ეს უმნიშვნელოა. ამდენად, ხაარის ვეივლეტებს ხშირად იყენებენ პრაქტიკაში.

უფრო ხშირად იყენებენ ხაარის ვეივლეტის მსგავს, სიმეტრიულ წარმომქმნელ ვეივლეტს (დედაფუნქციას), რომელსაც **ფრანგულ ქუდს** უწოდებენ.

ფრანგულ ქუდი

ამ ვეივლეტს ჩაწერენ შემდეგი სახით:

$$\psi^F = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{3} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{3} < |x| \leq 1; \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases} \quad (10.43)$$



ნახ.10.5. ვეივლეტი-ფრანგული ქუდი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^F_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^F(2^j \cdot x - k). \quad (10.44)$$

უფრო რთული, ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის გარდა წანაცვლებისა და დამასშტაბებისა საჭიროა გავითვალისწინოთ მობრუნებაც.

ვეივლეტ-გარდაქმნები ფართოდ გამოიყენება სიგნალების ფილტრაციისა და შეკუმშვისათვის [1-5].

მაღალი რიგის ვეივლეტებისათვის, წარმომქმნელი-დედა ვეივლეტის ასაგებად, როგორც წესი, გამოიყენება შესაბამისი ფილტრაციის კოეფიციენტების გამოთვლის იტერაციული, ფუნქციური განტოლებები, რომელთათვისაც აუცილებელია შემქმნელი-მამა ვეივლეტების აგება. ასე აიგება, მაგალითად, დობეშის მეოთხე რიგის ვეივლეტი რომლსაც აქ არ ავაგებთ რადგან წინამდებარე სახელმძღვანელო მიზნად ისახავს ძირითადი იდეების გაცნობას, ხოლო ტექნიკური დეტალების გასაცნობად საჭიროა შესაბამისი სპეციალური ლიტერატურის [1-6] შესწავლა.

10.5. ვეივლეტ-ანალიზი Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემულია სიგნალი $s(t)$, რომლის ენერგია შემოსაზღვრულია ანუ

$$\int_R s^2(t) dt < \infty. \quad (10.45)$$

ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა, ფურიეს გარდაქმნის ანალოგიურად, მოიცემა შესაბამისი ვეივლეტ-კოეფიციენტების მეშვეობით:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_R s(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (10.46)$$

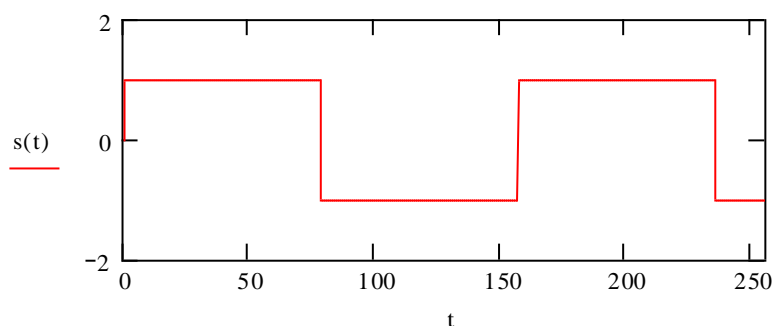
ასე, რომ ვეივლეტ-კოეფიციენტები მოიცემა სიგნალისა და მოცემული სახის ვეივლეტ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლით.

განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის მაგალითები:

1) მოცემულ სიგნალს აქვს სიმეტრიული მართკუთხა იმპულსების სახე - **მეანდრა**. მოიცემა ანალიზური ფორმულით:

$$s(t) = \text{sign}(\sin(0.04 \cdot t)). \quad (10.47)$$

გრაფიკულად, მეანდრას ტიპის სიგნალი მოცემულია 10.6 ნახ-ზე.



ნახ.10.6. მეანდრას გრაფიკული სახე

ავაგოთ, ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მათის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$N := 25\epsilon$$

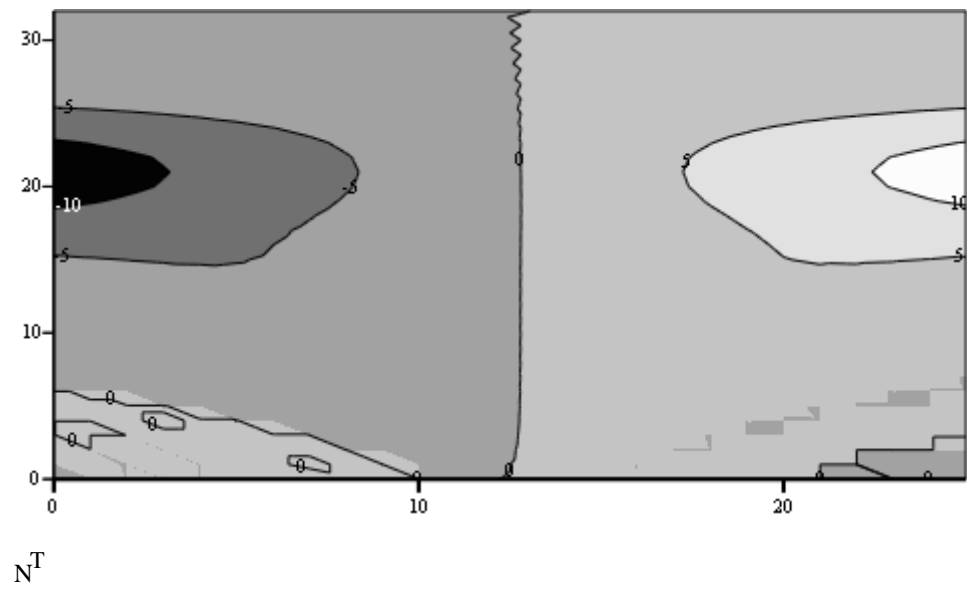
$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$$j := 0..32$$

$$b := 0, 1 \dots \frac{N}{10}$$

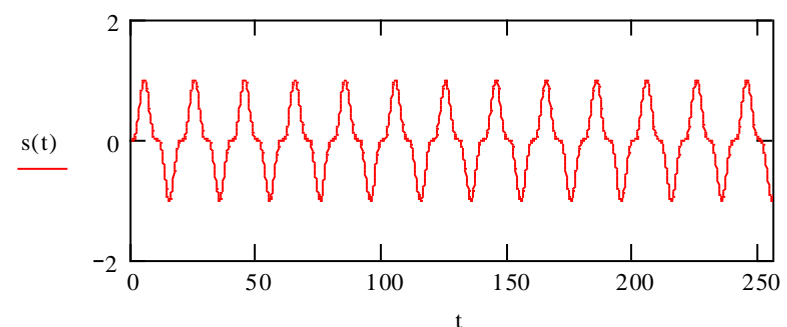
$$a_j := \frac{(j + 12)^4}{3 \cdot 10^4}$$

$$N_{j, b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



ნახ.10.7. მეანდრას ტიპის სიგნალის სპექტროგრამა

2) მოცემულ სიგნალს აქვს სინუსის კუბის სახე ანუ $s(t) = \sin(0.1 \cdot \pi t)^3$. (10.48)
 გრაფიკულად, ამ ტიპის სიგნალი მოცემულია 10.8 ნახ-ზე.



ნახ.10.8. სინუსკუბის გრაფიკული სახე

ავაგოთ ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მათის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad s(t) := \sin(0.1\pi \cdot t)^3$$

$$N := 256$$

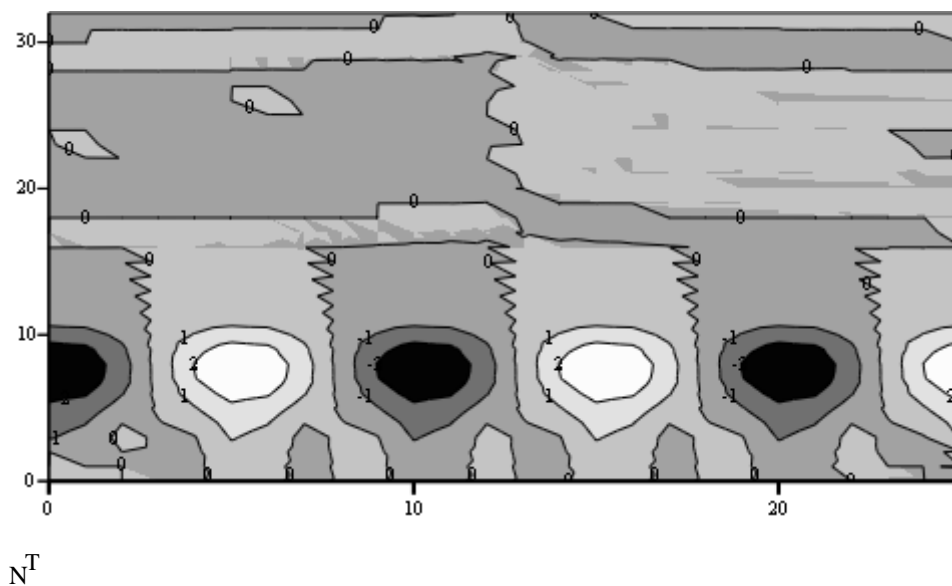
$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$$j := 0..32$$

$$b := 0, 1.. \frac{N}{10}$$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3 \cdot 10^4}$$

$$N_{j,b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



ნახ.10.9. სინუსკუბის სპექტროგრამა

იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს პერიოდული სიგნალი, უმჯობესია გამოვიყენოთ ფურიე-გარდაქმნები. თუმცა, როცა სიგნალი ხასიათდება სივრცითი ან დროითი ლოკალიზაციით, მაშინ ვეივლეტ-გარდაქმნა ყველაზე უფრო ზუსტია. ეს უპირატესობები მკვეთრად ჩანს ბგერითი და გამოსახულებათა სიგნალების შემთხვევებში.

10.6. ვეივლეტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტვრა Mathcad-ის ბაზაზე

სიგნალები შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მისი უხეში მიახლოებისა და დამაზუსტებელი (უფრო დეტალური) წარმოდგენათა ჯამი. ამ პროცესის რეალიზაციისათვის ორთოგონალური ვეივლეტები გამოიყენება, რომელთა ასაგებად, ხშირად, გამოიყენება მულტიმასშტაბური (multiresolution) ანალიზი. ეს ანალიზი ემყარება შემდეგ ძირითად ფაქტებს:

- სიგნალების V სივრცე შეიძლება დაიყოს ისეთ იერარქიულ V_j ქვესივრცეებად, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთს და რომელთა გაერთიანებაც ზღვარში $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეს იძლევა;
- ნებისმიერი $s(t) \in V_j$ ფუნქციისათვის, მისი შეკუმშული ვერსია ეკუთვნის V_{j-1} ქვესივრცეს;
- არსებობს ისეთი $\varphi(x) \in V_0$ ფუნქცია, რომლისთვისაც მისი წანაცვლება $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k)$ ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში.

რადგან $\varphi_{0,k}(t)$ ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \varphi(2^{-j} \cdot t - k) \quad (10.49)$$

ფუნქციები ადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეში. ამ ფუნქციებს **შემქმნელ-მამა ვეივლეტებს** უწოდებენ. ისინი მამასშტაბირებელი ფუნქციებია, რადგან ქმნიან თავისნაირ ფუნქციებს სხვადასხვა მასშტაბში. ე.ი. $s(t)$ სიგნალი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს, როგორც მისი V_j სუბქვესივრცეებში თანამიმდევრული მიახლოების ზღვარი

$$s(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j(t). \quad (10.50)$$

როგორც წესი, სიგნალის დეკომპოზიციის წესიდან გამომდინარე, j -ს დიდი მნიშვნელობისათვის მიიღება უხეში მიახლოებები, ხოლო მცირე მნიშვნელობისათვის-უფრო ზუსტი მიახლოებები.

სიგნალის აპროქსიმაციას შეესაბამება იტერაციული ფორმულა:

$$s_j(t) = \sum_k C(j,k) \cdot \varphi_{j,k}(t), \quad (10.51)$$

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \cdot \sum_k h_k \varphi(2 \cdot t - k). \quad (10.52)$$

ზოგად შემთხვევაში, სიგნალის რეკონსტრუქცია j_n დაშვების დონეზე ხორციელდება

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n, k} \cdot \varphi_{j_n, k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j, k} \cdot \psi_k(t), \quad (10.53)$$

სადაც $a_{j_n, k}$ აპროქსიმაციის კოეფიციენტებია; $d_{j, k}$ - დამაზუსტებელი კოეფიციენტები; $\varphi_{j_n, k}(t)$ - შემქმნელი-მამა ვეივლეტი; $\psi_k(t)$ - წარმომქმნელი-დედა ვეივლეტი. სიგნალის მთლიანი აღდგენა შესაძლებელია, თუ

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists \{h_k\} \left| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sum_k h_k \varphi(t-k) \right. \quad (10.54)$$

ამ განტოლებას დამაზუსტებელი (refinement) ეწოდება.

მაგალითი. ხაარის ვეივლეტისათვის $h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$s(t) = C_{0,0} \cdot \varphi(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (10.55)$$

სადაც $C_{0,0}$ არის სიგნალის დაბალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტი; $d_{j,k}$ - სიგნალის მაღალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტების მატრიცა; $\varphi(t)$ - მამა-ვეივლეტი; $\psi_{j,k}(t)$ - დედა-ვეივლეტი; ვთქვათ, გვაქვს სიგნალი $y = \{1; 0; -3; 2; 1; 0; 1; 2\}$, რომელიც განსაზღვრულია $L_2[0,1]$ სივრცეში.

თუ გამოვიყენებთ ხაარის ვეივლეტს და დეკომპოზიციის (10.55) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ მატრიცას:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{2,2} \\ d_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (10.56)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიდ მატრიცაში

- პირველი სვეტი არის მასშტაბირების $\varphi(t)$ ფუნქცია;
- მეორე სვეტი - ხაარის ვეივლეტი;
- მესამე და მეოთხე სვეტები სიგნალის პირველი დონის წარმოდგენის რიცხვითი მნიშვნელობები;
- მეხუთე-მეორვე სვეტები შეესაბამება სიგნალის მეორე დონის წარმოდგენას.

ასე, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უცნობი მატრიცის გამოსათვლელად საჭიროა (10.56) მატრიცული განტოლების ამოხსნა. როცა შემომავალი სიგნალის რიცხვითი მნიშვნელობების რაოდენობა საკმარის დიდია, ვეივლეტ-კოეფიციენტები გამოითვლება ფილტრაციის მეთოდებით.

განვიხილოთ შემომავალი სიგნალის დეკომპოზიციის (ფილტრაციის) ალგორითმი:

$$(Ha)_k = \sum_n h(n-2k) \cdot a_n, \quad (10.57)$$

$$(Ga)_k = \sum_n g(n-2k) \cdot a_n, \quad (10.58)$$

შადაც Ha -სიგნალის დაბალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორია; Ga -სიგნალის მაღალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორი; h -ვეივლეტ-ფილტრის დაბალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი; g -ვეივლეტ-ფილტრის მაღალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი.

ცნობილია, რომ ხაარის ვეივლეტ-ფილტრის შემთხვევაში

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad g_1 = -g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.59)$$

ამ ფაქტების გათვალისწინებით, მოვახდინოთ შემომავალი y სიგნალის დეკომპოზიცია

$y = c^{(3)}$	1	0	-3	2	1	0	1	2
$d^{(2)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$				
$c^{(2)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$				
$d^{(1)}$				1			-1	
$c^{(1)}$				0			2	
$d^{(0)}$						$-\sqrt{2}$		
$c^{(0)}$						$\sqrt{2}$		

დეკომპოზიციის პირველ დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის (10.57) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(Ha)_1 = \sum_{n=1}^8 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-3+2)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2)\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$$

ანალოგიურად, (10.58) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ სიგნალის შესაბამისი მაღალსიხშირიანი მდგენელიც.

შემდეგ, დეკომპოზიციის მეორე დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის მივიღებთ:

$$(Ha)_2 = \sum_{n=1}^4 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \{0; 2\}.$$

შესაბამისად, დეკომპოზიციის მესამე დონეზე მივიღებთ, რომ

$$(Ha)_3 = \sum_{n=1}^2 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0+2)\right) = \sqrt{2}.$$

ამრიგად, შემომავალი სიგნალი $y = \{1; 0; -3; 2; 1; 0; 1; 2\}$ გარდაიქმნება ახალ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ ვექტორად, რომლის კომპონენტების რაოდენობა ემთხვევა შემომავალი სიგნალის ელემენტების რაოდენობას, თუმცა, ენერჯის ძირითადი ნაწილი მოქცეულია კომპონენტების შედარებით მცირე რაოდენობის ელემენტებში. თუ შემთხვევითი შემფოთებების ზღვრულ მნიშვნელობად ავიღებთ 0.9, მივიღებთ რეზულტატის ახალ ვექტორს:

$$\left(0; -\frac{3}{\sqrt{2}}; 0; 0; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right).$$

რაც ნიშნავს, რომ კოეფიციენტების ნაწილი ატარებს უმნიშვნელო ინფორმაციას და მათი მნიშვნელობები შეგვიძლია ნულოვნად ჩავთვალოთ.

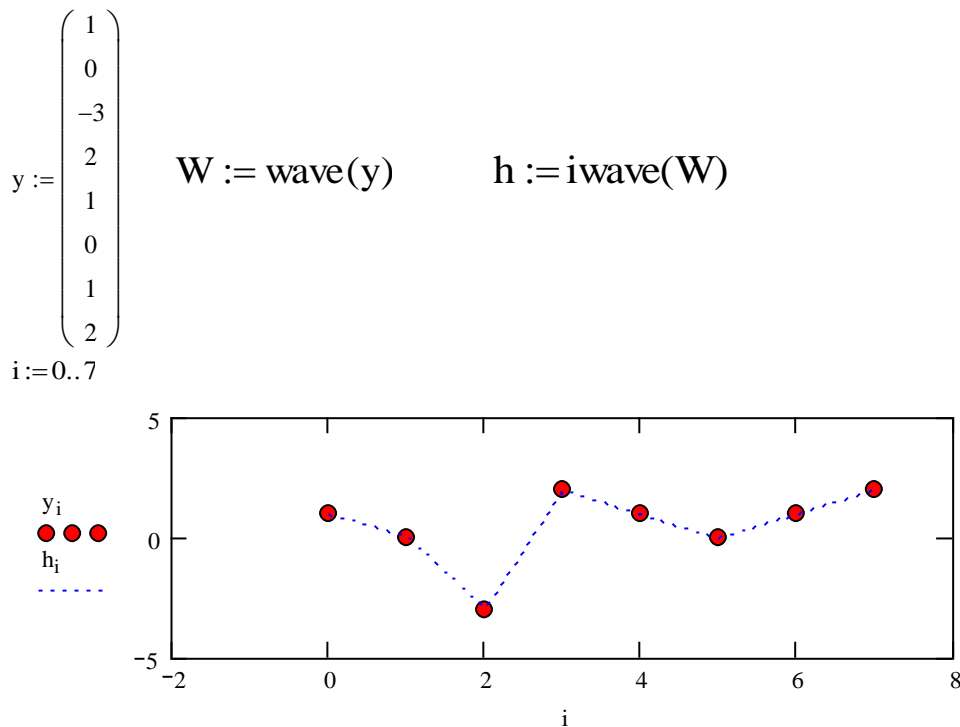
ამის შემდეგ, შესაბამისი შემომავალი სიგნალის აღსადგენად უნდა ვისარგებლოთ ოპერატორებით:

$$(Ha^*)_n = \sum_k h(n-2k)a_n, \quad (10.60)$$

$$(Ga^*)_n = \sum_k g(n-2k)a_n. \quad (10.61)$$

P.S. ეს ალგორითმი ამარტივებს სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმს.

განვიხილოთ ამ სიგნალის ვეივლეტ-გარდაქმნა და უკუგარდაქმნა Mathcad-ის ბაზაზე (ნახ.10.10).



ნახ. 10.10. სიგნალის ვეივლეტ-ფილტრაცია, ანალიზ-სინთეზი

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტული და ვეივლეტ-ფილტრით სინთეზირებული სიგნალები ერთმანეთს ემთხვევა.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა მაარის ვეივლეტებისათვის.
2. ააგეთ სინუსკუბის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა.
3. ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა ფრანგული ქუდისათვის.
4. ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა მეანდრასთვის.
5. შეადგინეთ $y = \{1;2;6;4;7;8;0;23;4;6;0.6;0.02;0.06;0.56\}$ სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმი ხაარის ვეივლეტის ბაზაზე. მოახდინეთ სიგნალის ანალიზი და სინთეზი.

ლიტერატურა

1. Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992
2. Shumaker L., Webb G., editor. Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press. 1993
3. Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П.Петухова. Москва, 2001.
5. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков// Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997.
6. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. Москва, 2002.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

წინასიტყვაობა	3
ნაწილი I. წრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	4
თავი I. არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	11
1.1. არადემპფირებული, თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	11
1.2. არადემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	13
1.3. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	15
1.4. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელი)	17
ამოცანები და სავარჯიშოები	18
ლიტერატურა.	19
თავი 2. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	20
2.1. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	20
2.2. დემპფირებული, საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	24
2.3. დემპფირებული, საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	25
2.4. დემპფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე	27
ამოცანები და სავარჯიშოები	28
ლიტერატურა.	29
თავი 3. იძულებითი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	30
3.1. იძულებითი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	30
3.2. იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	34

3.3. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	35
3.4. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	36
ამოცანები და სავარჯიშოები	37
ლიტერატურა.	38

თავი 4. ბმული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირება	39
4.1. ბმული მექანიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	39
4.2. ბმული ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	42
4.3 ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	43
4.4. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	44
ამოცანები და სავარჯიშოები	44
ლიტერატურა.	45

თავი 5. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები	46
5.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი, ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება	46
5.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით	48
ამოცანები და სავარჯიშოები	49
ლიტერატურა.	49

ნაწილი II. არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავი 6. ზოგადი მეთოდები	50
6.1. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	50
6.2. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით	51
6.3. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	52

6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით	53
ამოცანები და სავარჯიშოები	54
ლიტერატურა.	54
თავი 7. ავტორხევითი სისტემები	55
7.1. ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები	55
7.2. ვან-დერ-ვალის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი	56
7.3. ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)	58
7.4. ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლევერის მოდელი)	63
ამოცანები და სავარჯიშოები	65
ლიტერატურა.	65
თავი 8. პარამეტრული რხევითი სისტემები	66
8.1. ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას (მატიეს განტოლება)	66
8.2. ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)	67
8.3. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილ-ობგადის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში (მატიეს განტოლება)	68
ამოცანები და სავარჯიშოები	69
ლიტერატურა.	69
თავი 9. არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები	70
9.1. ამოცანის ზოგადი დასმა	70
9.2. ფრანგიშვილ-ობგადის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)	71
9.3. ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, პერიოდული გარე PR - გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში	72
ამოცანები და სავარჯიშოები	74
ლიტერატურა	74
თავი 10. ვეივლეტები და მათემატიკური მოდელირება შესავალი	75
10.1. ვეივლეტ-გარდაქმნების ძირითადი ცნებები და მათემატიკური აპარატი	78

10.2 ინტეგრალური ვეივლექტ-გარდაქმნა	80
10.3. ვეივლექტისა და ვეივლექტ-გარდაქმნის თვისებები . . .	81
10.4. ვეივლექტ ფუნქციების კერძო შემთხვევები	83
10.5. ვეივლექტ-ანალიზი Mathcad-ის ბაზაზე.	87
10.6. ვეივლექტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტრვა Mathcad-ის ბაზაზე	90
ამოცანები და სავარჯიშოები	94
ლიტერატურა	95