



უმადლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

1 ნაწილი

საქართველოს სსრ სახალხო განათლების
სამინისტრომ დამტკიცა დამხმარე
სახელმძღვანელოდ უმაღლესი
სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი მოიცავს ვექტორულ ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს, ერთ ცვლადის, მრავალი ცვლადისა და სკალარული არგუმენტის ვექტორულ ფუნქციებს, მეორე რიგის ზედაპირებს, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

რეცენზენტები: პროფესორი ს. შათაშვილი,
დოცენტი ვ. ბალაბანოვი,
დოცენტი ა. ბენდუქიძე



წინასიტყვაობა

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო („უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, I ნაწილი“) შედგენილია უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

კრებული შეიცავს წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მიწებებს, ხოლო მათემატიკური ანალიზიდან მასში შევიდა ერთი და ათავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები.

პროგრამით გათვალისწინებული ყველა სხვა საკითხი აისახება წიგნის მეორე ნაწილში.

ყოველ პარაგრაფს უძღვის მოკლე საცნობარო მასალა და ტიპური ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები. წიგნში წინა პლანზეა წამოწეული დიფერენციალური მეთოდები და მათი დაპროგრამება ალგორითმულ ენა „ფორტრანზე“, რაც მასწავლებელს საშუალებას აძლევს ბევრი მეცადინეობა-სატაროს ეგზ-ის გამოყენებით. ამით ამაღლდება მასალის ათვისების სისწი და გაღრმავდება ინტერესი მათემატიკისადმი.

კრებული დაზღვეული ვერ იქნება ხარვეზებისაგან. ავტორთა კოლექტივი სიამოვნებით მიიღებს ყველა საქმიან შენიშვნას.



წიგნი განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი მოიცავს ვექტორულა ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტებს, ერთ ცვლადის, მრავალი ცვლადისა და სკალარული არგუმენტის ვექტორულ ფუნქციებს, მეორე რიგის ზედაპირებს, დიფერენციალურ და ინტეგრალურ აღრიცხვას, ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს.

რეცენზენტები: პროფესორი ს. შათაშვილი,
დოცენტი ვ. ბალაზანოვი,
დოცენტი ა. ბენდუქიძე



წინასიტყვაობა

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო („უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, I ნაწილი“) შედგენილია უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

კრებული შეიცავს წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მიხედვით, ხოლო მათემატიკური ანალიზიდან მასში შევიდა ერთი და ათავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა, ერთი ცვლადის ფუნქციის ინტეგრალური აღრიცხვა და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები.

პროგრამით გათვალისწინებული ყველა სხვა საკითხი აისახება წიგნის მეორე ნაწილში.

ყოველ პარაგრაფს უძღვის მოკლე საცნობარო მასალა და ტიპური ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები. წიგნში წინა პლანზეა წამოწეული რიცხვითი მეთოდები და მათი დაპროგრამება ალგორითმულ ენა „ფორტრანზე“, რაც მასწავლებელს საშუალებას აძლევს ბევრი მეცადინეობისათვის ეგზ-ის გამოყენებით. ამით ამაღლდება მასალის ათვისების ხარისხი და გაღრმავდება ინტერესი მათემატიკისადმი.

კრებული დაზღვეული ვერ იქნება ხარვეზებისაგან. ავტორთა კოლექტივი სიამოვნებით მიიღებს ყველა საქმიან შენიშვნას.



მატრიცები და ლებერმიანანები

§ 1. მატრიცების შეკრება და გამრავლება

რიცხვთა ერთობლიობას, მოთავსებულს n სტრიქონისა და m სვეტის მართკუთხა ცხრილში, მართკუთხა მატრიცა ეწოდება. იგი ასე აღინიშნება.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ან მოკლედ $A = (a_{ij})$, ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$). a_{ij} რიცხვებს მატრიცის ელემენტები ეწოდება. როცა $m = n$, მაშინ მატრიცა კვადრატულია; ამ შემთხვევაში n არის მატრიცის რიგი.

კვადრატული მატრიცებიდან აღსანიშნავია:

1. დიაგონალური მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. ერთეულოვანი მატრიცა (აღინიშნება E ასოთი):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. სანკუთხა მატრიცა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის ნამრავლი k სკალარზე განმარტებულია შემდეგი ტოლობით:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nm} \end{pmatrix}$$

ერთი და იგივე განზომილების A და B მატრიცების $A+B$ ჯამი არის ისეთი მესამე მატრიცა, რომლის ელემენტები უდრის მოცემული მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს.

თუ მოცემულია ორი მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

ადაც A მატრიცის სვეტების რაოდენობა უდრის B მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას, მაშინ ამ მატრიცების AB ნამრავლი არის ისეთი C მატრიცა, რომლის c_{ij} ელემენტი წარმოადგენს A მატრიცის i -ური სტრიქონისა და B მატრიცის j -ური სვეტის ელემენტების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ $AB=C$ და

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, p).$$

თუ A კვადრატული მატრიცაა, ხოლო E იმავე რივის ერთეულოვანი მატრიცა, მაშინ

$$AE = EA = A.$$

მაგალითი. გამოთვალეთ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

რიცხვითა ნამრავლი. ვეაქვს

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ -3 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

მატიც მოხდეს, რომ ერთ-ერთ ნამრავლს აზრი აქვს. იმ დროს, როდესაც მეორეს აზრი არ აქვს.

მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

მაშინ, როდესაც

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

მაშასადამე, $AB \neq BA$.

მაგალითი. თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{pmatrix};$$

იმ დროს, როდესაც BA ნამრავლი განსაზღვრული არ არის, რადგან B მატრიცის სვეტების რიცხვი არ უდრის A მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.

მაგალითი. მოცემულია მრავალწევრი $p(x) = x^2 - 5x + 6$ და A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $p(A)$.

▷. ჯერ ვიპოვოთ A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},$$

ე. ი.

$$p(A) = A^2 - 5A + 6E = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

ხეარჯიშოები:

1. $k = 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, იპოვეთ kA .

2. $k = -2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, იპოვეთ kA .

იპოვეთ $A + B$, თუ:

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

იპოვეთ $A - B$, თუ:

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB ნამრავლი, თუ:

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

იპოვეთ AB და BA ნამრავლები, თუ:

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. 14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (3 \ 4 \ 1 \ 5)$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AB = ?$

$$17. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, AB = ?$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AE = ? EA = ?$$

$$21. A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, AB = ? BA = ?$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -10 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & -21 & 28 \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}, AB = ?, BA = ?$$

$$25. A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (AB)C = ? A(BC) = ?$$

$$26. A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A(B+C) = ? AB+AC = ?$$

დაამტკიცეთ, რომ:

$$27. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};$$

$$28. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$$29. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \dots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \dots & a_{2n}d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \dots & a_{mn}d_n \end{pmatrix}.$$

$$30. \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \dots & d_m a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$31. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$32. A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix};$$

$$33. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB - BA =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$34. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA;$$

§ 2. დეტერმინანტი

მეორე რივის $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამისი მეორე რივის ლეტერმინანტი აღინიშნება სიმბოლოთი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ან $\det A$ და განისაზღვრება ტოლობით;

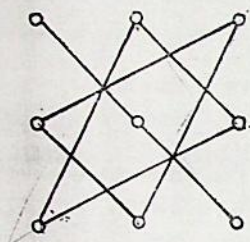
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

მესამე რივის $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ მატრიცის შესაბამისი მესამე რივის

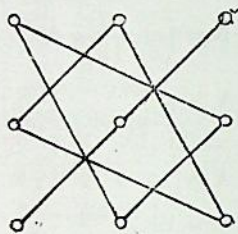
ლეტერმინანტი აღინიშნება სიმბოლოთი $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ და განისაზღვრება ტოლობით;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - \\ - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}.$$

ეს გამოსახულება ამავე დროს მიუთითებს მე-3 რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის წესზე, რომლის შინაარსი გადმოცემულია ა) და ბ) სქემებზე (ნახ. 1).



ა (+)



ბ (-)

ნახ. 1

მაგალითი. გამოვთვალოთ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

სქემების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (-1) \cdot (-2) &= 2 & 6 \cdot (-1) \cdot 3 &= -18 \\ 2 \cdot 5 \cdot 6 &= 60 & 5 \cdot (-7) \cdot 1 &= -35 \\ 4 \cdot (-7) \cdot 3 &= -84 & 2 \cdot 4 \cdot (-2) &= -16 \\ \Delta &= 2 + 60 - 84 + 18 + 35 + 16 = 47 \end{aligned}$$

ინდუქციით შეიძლება განისაზღვროს n -ური რიგის დეტერმინანტი. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს n -ური რიგის კვადრატული მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

თუ ამ მატრიცაში i -ურ სტრიქონს და j -ურ სვეტს ამოვშლით, მივიღებთ $n-1$ რიგის კვადრატულ მატრიცას. აღვნიშნოთ ის M_{ij} -ით. $\det M_{ij}$ -ს ეწოდება A მატრიცის a_{ij} ელემენტის მინორი, ხოლო $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ -ს კი A მატრიცის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება.

განსაზღვრება. A მატრიცის დეტერმინანტი (n -უბი რიგის დეტერმინანტი) ეწოდება რიცხვს

$$\det A = a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n}.$$

შენიშვნა. A კვადრატული მატრიცის a_{ij} ელემენტის მინორს (აღებრულ დამატებას) ეწოდებენ აგრეთვე $\det A$ -ს a_{ij} ელემენტის მინორს (აღებრულ დამატებას).

A მატრიცის დეტერმინანტი ასევე აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\Delta \text{ ან } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგალითი; გამოვთვალოთ.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \\ &- (-2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -220. \end{aligned}$$

დეტერმინანტის თვისებები:

I თვისება. დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების მათ შესაბამ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი უდრის მოცემულ დეტერმინანტს.

II თვისება. დეტერმინანტი არ იცვლება მისი ტრანსპონირების შედეგად.

III თვისება. დეტერმინანტში ორი სტრიქონის (სვეტის) გადანაცვლება ამ დეტერმინანტის -1 -ზე გამრავლების ტოლფასია.

IV თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან რომელიმე სვეტის ელემენტები ყველა ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტიც ნულია.

V თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტები შეიცავენ საერთო თანამამრავლს, ის შეიძლება გამოვიტანოთ დეტერმინანტის სიმბოლოს გარეთ.

VI თვისება. დეტერმინანტი, რომლის ორი სტრიქონი (ან სვეტი) ერთმანეთის ტოლია, უდრის ნულს.

VII თვისება. დეტერმინანტი, რომელიც შეიცავს ორ პროპორციულ სტრიქონს (სვეტს), ნულის ტოლია.

VIII თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი წარმოადგენს ორი შესაკრების ჯამს, მაშინ ეს დეტერმინანტი ორი დეტერმინანტის ჯამის სახით შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

შედეგი. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულთ ერთსა და იმავე რიცხვზე.

IX თვისება. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ შესაბამისად სხვა სტრიქონის ან სვეტის ალგებრულ დამატებებზე და ამ ნამრავლებს შევკრებთ, მიღებული ჯამი ნულის ტოლი იქნება.

X თვისება. თუ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B),$$

ე. ი. მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი უდრის თანამამრავლი მატრიცების დეტერმინანტთა ნამრავლს.

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ თუ დეტერმინანტის ყველა ელემენტი, რომელიც მთავარი დიაგონალიდან ერთ მხარეს მდებარეობს, ნულის ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი მთავარ დიაგონალზე მდებარე ელემენტების ნამრავლის ტოლია (ასეთ დეტერმინანტს სამკუთხა ეწოდება).

მეორე რიგის დეტერმინანტისათვის ეს დებულება ცხადია, ამიტომ მას დავამტკიცებთ ინდუქციით, ე. ი. დავუშვებთ, რომ $(n-1)$ რიგის დეტერმინანტისათვის ის უკვე დამტკიცებულია და განვიხილოთ n -ური რიგის დეტერმინანტს

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ დავშლით პირველი სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მაგრამ მინორისათვის, რომელიც მარჯვენა ნაწილში დგას, ინდექსური დაშვება გამოიყენება. ე. ი. ის $a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$ ნამრავლის ტოლია, და ამიტომ

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

მაგალითი. გამოვთვალოთ ვანდერმონდის¹ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

VII თვისებიდან გამომდინარე შედეგის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = \\ &= (y-x)(z-x)(z-y). \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ შემდეგი დეტერმინანტები:

(X)

$$35. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$36. \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$37. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$38. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$39. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$40. \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$41. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$42. \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$43. \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$44. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

$$45. \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

$$46. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

¹ ა. ვანდერმონდი (1735—1796) — ფრანგი მათემატიკოსი.

$$47. \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$$

$$48. \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

$$49. \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 + 1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 + 1 \end{vmatrix}.$$

$$50. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 i - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 i - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 i - b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$51. \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}.$$

$$52. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.$$

$$53. \begin{vmatrix} 1 & 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha \\ 1 & 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$54. \begin{vmatrix} 1 & \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ 1 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

$$55. \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} & \sin \alpha & 1 \\ 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} & \sin \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$56. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta & \sin \beta \\ \cos^2(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 1 \end{vmatrix}.$$

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

$$57. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 x + b_1 y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 x + b_2 y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 x + b_3 y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$58. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$59. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 i + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 i + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 i + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$60. \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

$$61. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

$$62. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

$$63. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$64. \begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

$$65. \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$66. \begin{vmatrix} x^2 & 3 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$67. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$68. \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$69. \begin{vmatrix} 3 & z & 1 \\ z & 1 & -z \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5z & 1 \\ 3 & 2-z \end{vmatrix}$$

$$70. \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 7 \\ \cos x & -\sin x & 9 \\ 0 & 0 & 2\cos x \end{vmatrix} = 1.$$

ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

$$71. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

$$72. \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

73. დაამტკიცეთ, რომ მეთე რივის კვადრატული A მატრიცისათვის

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 \\ 10^{-10} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^{10} - 10^{-10}.$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

74. თუ n -ური რივის ($n \geq 3$) დეტერმინანტის ელემენტებია 1 ან -1 , მაშინ დაამტკიცეთ, რომ $|\Delta| \leq (n-1) \cdot (n-1)!$.

4. როცა $n = 3$. მაშინ აღნიშნული ტიპის ყოველი დეტერმინანტი მისი აბსოლუტური სიდიდის შეუცვლელად (როცა ის ნულის ტოლი არ არის) სტრიქონების (სვეტების) ადგილების გადანაცვლებითა და -1 -ზე გამრავლებით მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{ან} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

მაშასადამე, $|\Delta| \leq 4 = (3-1)(3-1)!$ და როცა $n = 3$ დასამტკიცებელი უტოლობა კემპარტია.

ვთქვათ, ახლა დასამტკიცებელი წინადადება კემპარტია ყოველი $n-1$ რიგის დეტერმინანტისათვის და ვთქვათ Δ არის n -ური რიგის დეტერმინანტი, რომლის ელემენტებია ± 1 . თუ ვავშლით Δ დეტერმინანტს რომელიმე სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ;

$$|\Delta| = |\pm M_{i1} + M_{i2} \pm \dots \pm M_{in}| \leq |M_{i1}| + |M_{i2}| + \dots + |M_{in}| \leq n(n-2)(n-2)! < (n-1)(n-1)!, \quad \text{ვინაიდან } n(n-2) < (n-1)^2 \quad \Delta$$

75. იპოვეთ მესამე რიგის დეტერმინანტის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლის ორი ელემენტი უდრის 4 -ს, ხოლო დანარჩენები 1 და -1 -ს.

$$\triangleright \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 25, \quad \text{ვაჩვენოთ, რომ აღნიშნული თვისების მესამე}$$

რიგის დეტერმინანტი 25 -ზე მეტი არ შეიძლება იყოს. მართლაც, თუ 4 -იანები ერთ სტრიქონში (სვეტში) მდებარეობენ, მაშინ ვავშლით რა იმ სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ, რომ აღნიშნული დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ აღემატება $4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$ -ს. თუ 4 -იანები მდებარეობენ განსხვავებულ სტრიქონში და სვეტში, მაშინ დეტერმინანტი უდრის წევრების ჯამს, რომელთაგან ერთის აბსოლუტური მნიშვნელობაა 6 , ორის -4 , სამის -1 . თუ ერთი წევრი უდრის -16 ან -4 -ს, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა ნაკლებია 25 -ზე. ამიტომ წევრების გადასმით მაქსიმალური მნიშვნელობის მქონე დეტერმინანტი დებულობს სახეს

$$\begin{vmatrix} 4 & \varepsilon & \gamma \\ -\varepsilon & 1 & \delta \\ \nu & -\delta & 4 \end{vmatrix}$$

სადაც $\varepsilon, \delta, \gamma, \nu \in \{1, +1\}$, უდიდესი მნიშვნელობა ასეთი დეტერმინანტისა ცხადია უდრის 25 -ს.

$$76. \quad \text{ვთქვათ } f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}.$$

დაამტკიცეთ, რომ $\exists c \in [0, 1] : f'(c) = 0$.

77. გამოვთვალოთ $\lim_{a \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - I) \right)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\triangleright A = a \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

სადაც

$$a = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

გვაქვს:

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}. \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a^n \rightarrow 1, \quad \sin \varphi =$$

$$= \sin \left(\frac{nx}{\sqrt{n^2 + x^2}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sin x + o(1), \quad \cos n\varphi = \cos x + o(1),$$

ასე, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^n - I^n) = \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix},$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (A^n - I) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

78. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს მესამე რიგის კვადრატული A მატრიცა, რომლისთვისაც

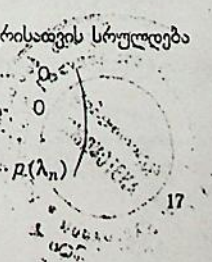
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

79. A და B მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობებს: $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. დაამტკიცეთ, რომ $\det(A - B)$ -ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ -1 ; 0 ; $+1$ მნიშვნელობები.

80. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $p(x)$ მრავალწევრისათვის სრულდება

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

შემალღესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული



Δ. დამტკიცება ჩავატაროთ იმ შემთხვევაში, როცა $n=3$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \wedge \dots D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}.$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k \Rightarrow p(D) = \alpha_0 E + \alpha_1 D + \dots + \alpha_k D^k = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \lambda_3 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_k \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_k \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k \lambda_3^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_k \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \dots + \alpha_k \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_3 + \dots + \alpha_k \lambda_3^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_3) \end{pmatrix}. \triangleleft \end{aligned}$$

81. დამტკიცეთ, რომ $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ არის $p(x) = x^2 - 2x + 2$

მრავალწევრის ფესვი.

82. $p(x) = x^3 - 3x$. იპოვეთ $p(A)$ და $p(B)$, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

83. დამტკიცეთ, რომ მატრიცა

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

არის

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 9$$

მრავალწევრის ფესვი.

§ 8. მატრიცის რანგი. უპარკუნაშული მატრიცა

თუ A მატრიცაში სტრიქონებს შესაბამისი სვეტებით შევცვლით, მიღებულ მატრიცს A მატრიცის ტრანსპონირებულს უწოდებენ და აღნიშნავენ სიმბოლოთი A^T .

r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის რანგი, თუ ამ მატრიცის r -ზე მაღალი რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, ხოლო r რიგის მინორებს შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. A მატრიცის რანგს აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\text{rang } A$. ნულოვანი მატრიცის რანგად მიღებულია ნული. მატრიცის რანგი არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ შემდეგ ვარდაქმნებს:

- 1) მატრიცის ტრანსპონირებას, ე. ი. $\text{rang } A = \text{rang } A^T$;
- 2) სტრიქონების (სვეტების) გადანაცვლებას;
- 3) იმ სვეტის (სტრიქონის) ამოშლას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია;
- 4) სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის ნულისგან განსხვავებულ რიცხვზე გამრავლებას;
- 5) თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე.

მაგალითი. გამოვფალოთ $\text{rang } A$.
განვიხილოთ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ერთადერთი მეოთხე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ხოლო მესამე რიგის მინორებს შორის ერთ-ერთი:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

ამიტომ

$$\text{rang } A = 3.$$

კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არაგანსაკუთრებული, თუ მისი დეტერმინანტი არ უდრის ნულს. თუ A მატრიცა არაგანსაკუთრებულია, მაშინ B მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$AB = BA = E$$

პირობას, ეწოდება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა და აღინიშნება A^{-1} -ით, ე. ი.

$$A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E.$$

თუ $A = (a_{ij})$ კვადრატული მატრიცაა, ხოლო A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება, მაშინ

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება A მატრიცის მიკავშირებელი მატრიცა. როცა A არაგანსაკუთრებული მატრიცაა, გვაქვს:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}.$$

მაგალითი. ვაჩვენოთ, რომ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არის

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

შათლაც, გვაქვს

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

მაგალითი. ვთქვათ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ შებრუნებული მატრიცა. ვინაიდან

$$|A| = -1 \neq 0, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = A_{13} = 0, \quad A_{21} = A_{23} = -1, \quad A_{22} = 1;$$

$$A_{31} = 1, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 0,$$

ამიტომ A მატრიცის შიკავშირებული მატრიცაა

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა იქნება

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

84. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

85. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

86. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$

87. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

88. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

89. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

90. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

91. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

92. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$

93. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$

94. $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$

95. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

96. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$

97. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

98. $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ \lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}.$

99. იპოვეთ A^{-1} , თუ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

ვინაიდან სისტემის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, ამიტომ განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ამ ამონახსნის საპოვნელად გამოვთვალოთ Δ_1 , Δ_2 და Δ_3 .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_3 = 6.$$

კრამერის ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$$

ამოხსენით შემდეგი სისტემები (კრამერის წესის გამოყენებით):

$$103. \begin{cases} x + y + 3z = 6, \\ 5x + 4y + 3z = 22, \\ 10x + 5y + z = 23. \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$105. \begin{cases} x + y - z = 2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

$$106. \begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

$$107. \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$108. \begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 3z - 16 = 0, \\ 5y - z - 10 = 0. \end{cases}$$

$$109. \begin{cases} x + y - 2z = -8, \\ 3x + 2y = -6, \\ y + z = 3 \end{cases}$$

$$110. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$111. \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$112. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

$$113. \begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$$

$$114. \begin{cases} 7x - 5y = 31, \\ 4x + 11z = -43, \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$$

$$115. \begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

$$116. \begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$$

$$117. \begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$$

$$118. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$119. \begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases}$$

ერთგვაროვანი სისტემა. თუ ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, თუკი $\Delta = 0$, მაშინ ერთგვაროვან სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

ამოხსენით ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები:

$$120. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 5x - 7y + 8z = 0. \end{cases}$$

$$121. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$122. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$123. \begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$124. \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x - 2y + 2z = 0, \\ 3x - 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$125. \begin{cases} 3x - 3y + 12z = 0, \\ 2x - 2y + 8z = 0, \\ x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

სამი ორუცნობიანი განტოლებისაგან შემდგენილი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = c_3. \end{cases}$$

სისტემა თავსებადია, თუ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

და სისტემა არ შეიცავს წყვილ-წყვილად საწინააღმდეგო განტოლებებს.

ამოხსენით შემდეგი სისტემები:

$$126. \begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 3x + y = 9, \\ x + 4y = 3. \end{cases}$$

$$127. \begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x + y = 3, \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

128. განსაზღვრეთ, a -ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება არანულოვანი ამონახსნი შემდეგ ერთგვაროვან სისტემას:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

129. განსაზღვრეთ, a -სა და b -ს რა მნიშვნელობებისათვის: 1) ექნება ერთადერთი ამონახსნი, 2) არ ექნება ამონახსნი, 3) ექნება უამრავი ამონახსნი განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1. \end{cases}$$

ამონახსნთა შემდეგი სისტემები:

$$130. \begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ x + 3y - z = 1, \\ 3x + 4y - z = 5. \end{cases}$$

$$131. \begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 3y - 2z = 2, \\ 3x + 2y + z = 5. \end{cases}$$

$$132. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 2x - 8y + 5z = 5. \end{cases}$$

$$133. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + 5z = 9. \end{cases}$$

$$134. \begin{cases} 5x + 5y + 3z = 2, \\ x - 3y + z = -1, \\ 4x - y + z = 7. \end{cases}$$

2. გაუსის მეთოდი

მოცემულია სისტემა:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

გარდაექმნათ იგი ტოლფას სისტემად ისე, რომ პირველ განტოლებაში x -ის კოეფიციენტი იყოს 1, ხოლო მეორე და მესამე განტოლებებში ეს ცვლადი სრულიად არ შედიოდეს. ამისათვის სისტემის პირველი განტოლება წევრ-წევრად გავყოთ x -ის კოეფიციენტზე, ე. ი. 2-ზე. მივიღებთ ახალი სისტემის პირველ განტოლებას:

$$x - 2y + 2z = 5.$$

თუ ამ განტოლებას გავაპრავლებთ 3-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ ამოსავალი სისტემის მეორე განტოლებას, ხოლო შემდეგ ამავე ($x - 2y + 2z = 5$) განტოლებას გავაპრავლებთ — 4-ზე და წევრ-წევრად მივუმატებთ სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, რომელშიც x ცვლადი გამორიცხული იქნება მეორე და მესამე განტოლებებიდან.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ 2y - 4z = -10, \\ 5y - 7z = -19 \end{cases}$$

მივიღებთ მეორე განტოლებას შეიცავს მხოლოდ y და z -ს. მათგან $y - 2z = -5$ ვაქცავთ 2 -ზე,

$$y - 2z = -5$$

განტოლებას, სადაც y -ის კოეფიციენტი 1 ; -5 -ზე გამრავლებული ეს განტოლება წევრ-წევრად მივუმატოთ წინა სისტემის მესამე განტოლებას, მივიღებთ:

$$3z = 6.$$

შემდეგ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

უქანსკენელი განტოლების 3 -ზე გავყოფთ მივიღებთ სისტემამდე

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

რომელშიც დიაგონალზე დაწერილი კოეფიციენტები 1 -ის ტოლია, ხოლო დიაგონალის მარცხნივ დაწერილი კოეფიციენტები -1 -ის ტოლია. ასეთი სისტემა ადვილად ამოიხსნება:

$$z = 2, \quad y = 2z - 5 = -1, \quad x = 2y - 2z + 5 = -1.$$

პასუხი: $(-1; -1; 2)$.

გაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} x + y - z - 2t = 1 \\ 2x + 2y - z - 2t = 4 \\ -x - y + 2z + 3t = 3 \\ 3x + 3y + z = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z - 2t = 1 \\ z + 2t = 2 \\ z + t = 4 \\ 4z + 6t = 12 \end{cases}$$

მეორე ადგილზე დაწეროთ z და გავაგრძელოთ გამოთვლები:

$$\iff \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ z + t = 4 \\ 4z + 6t = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ -t = 2 \\ -2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - 2t + y = 1 \\ z + 2t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

მეოთხე, $0=0$ სახის განტოლება არ არის ჩაწერილი. ჩავთვლით რა y -ს ნებისმიერად, მივიღებთ სისტემის ზოგად ამონახსნს:

$$t = -2, \quad z = 2 - 2t = 6, \quad x = 1 + z + 2t - y = 3 - y.$$

პასუხი; $\{(3 - y; y; 6; -2) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

მაგალითი. ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -7 \\ 3x + 3y - 7z = 2. \end{cases}$$

x ცვლადი გამოვრიცხოთ სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 5z = -7 \\ 6y - 10z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 5z = -7 \\ 0 \cdot z = 16 \end{cases}.$$

უკანასკნელი განტოლება ტოლფასია $0=16$ განტოლებისა, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამიტომ ამოსაეალ სისტემას არა აქვს ამონახსნი.

გაუხსი მეთოდით ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$185. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3, \end{cases}$$

$$186. \begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$187. \begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ x - z + 2t = 6, \\ 3x - y + z - t = 0, \\ 2x - y + 3z - 2t = 1. \end{cases}$$

$$188. \begin{cases} 3x - y + z + 2u = 18, \\ 2x - 5y + t + u = -7, \\ x - t + 5u = 8, \\ 2y + z + t - u = 10, \\ x + y - 3z + t = 1. \end{cases}$$

$$189. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

მაგალითი. ამოხსენით სისტემა

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

▷. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix},$$

მაშინ სისტემა ასე ჩაიწერება: $AX = B$. ამ სისტემის ამონახსნია

$$X = A^{-1}B.$$

ვიპოვოთ A^{-1} . ვაკვს:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

ვიპოვოთ ამ დეტერმინანტის ალგებრული დამატებები:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = -13, \quad A_{12} = -10.$$

$$A_{22} = -4, \quad A_{32} = 8, \quad A_{13} = -2, \quad A_{23} = 1, \quad A_{33} = 1.$$

ამიტომ

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 - 120 \\ 18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

მაშასადამე $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$. \triangleleft

მაგალითი. ამოხსენით მატრიცული განტოლებანი:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{სადაც } X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

\triangleright . ვიპოვოთ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა;

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = 1; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

(1) განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ A^{-1} -ზე, მივიღებთ:

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ამოხსნით:

$$140. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$141. X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$142. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$143. X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$144. X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$145. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

146. იპოვეთ $XA=O$ განტოლების ყველა ამონახსნი, სადაც A მეორე რიგის მოცემული მატრიცაა, X მეორე რიგის საძიებელი მატრიცაა, ხოლო O მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცა.

147: იპოვეთ $X(t)$ მატრიცა, თუ $X(t) = AX(t) - X(t)A$,

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

148. ვთქვათ $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ნამდვილი ფუნქციებია და $[a, b]$ სეგმენტზე არიან წრფივად დამოუკიდებელი. დამტკიცეთ, რომ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს წერტილები a_1, a_2, \dots, a_n , რომელთათვისაც

$$\det (f_i(a_j))_1^n \neq 0.$$

შითითება! ისარგებლეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

149. გამოიკვლიეთ სისტემის თავსებადობა და იპოვეთ სისტემის ამონახსნი

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n, \\ \dots \\ \frac{1}{2} x_n = a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n, \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას, სადაც a_{ij} მთელი რიცხვებია, აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

II თავი

ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§ 1. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი

ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს ან, რაც იგივეა, წერტილთა დალაგებულ წყვილს, მასთან, პირველ წერტილს ვექტორის სათავე ეწოდება, ხოლო მეორეს — მისი ბოლო. ვექტორი, რომლის სათავეა A წერტილი, ხოლო ბოლო B წერტილი, აღნიშნავენ \vec{AB} სიმბოლოთი. ვექტორი აღნიშნება აგრეთვე ერთი ასოთი, რომელსაც ზემოთ ისარი აქვს დასმული, მაგალითად \vec{a} .

ისეთ ვექტორებს, რომლებიც პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ, კოლინეარული ვექტორები ეწოდებათ, ხოლო პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე ვექტორებს — კომპლანარული. ვექტორის სათავესა და ბოლო წერტილებს შორის მანძილს ეწოდება ვექტორის სიგრძე.

\vec{AB} ან \vec{a} ვექტორის სიგრძისათვის იხმარება აღნიშვნა $|\vec{AB}|$ ან $|\vec{a}|$.

რაიმე \vec{e} ვექტორს, რომლის სიგრძეც ერთის ტოლია ($|\vec{e}| = 1$), ეწოდება ერთეულ-ვექტორი, თუ \vec{e} ვექტორს მოცემული \vec{a} ვექტორის მიმართულება აქვს, მაშინ მას \vec{a} ვექტორის მგვზავი, ანუ ორტი ეწოდება.

\vec{a} ვექტორის ნამრავლი m სკალარზე ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძეც არის $|m| \cdot |\vec{a}|$ და აქვს \vec{a} ვექტორის მიმართულება, როცა $m > 0$, ხოლო საწინააღმდეგო, როცა $m < 0$.

თუ \vec{a} ვექტორი რაიმე Δ ღერძთან ადგენს φ კუთხეს, მაშინ ამ ვექტორის გეგმილი ღერძზე, როგორც რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\text{გეგ}_\Delta \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi.$$

ორი არანულოვანი \vec{a} და \vec{b} ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს¹.

\vec{a} და \vec{b} ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a} \cdot \vec{b}$ სიმბოლოთი, ან კიდევ (\vec{a}, \vec{b}) სიმბოლოთი. განსაზღვრის ძალით გვაქვს:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

სადაც φ არის კუთხე \vec{a} და \vec{b} ვექტორებს შორის. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$|\vec{a}| \cos \varphi = \text{გეგ}_{\vec{b}} \vec{a} \quad \text{და} \quad |\vec{b}| \cos \varphi = \text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{b},$$

მაშინ \vec{a} და \vec{b} ვექტორების სკალარული ნამრავლი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{გეგ}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{გეგ}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

ერთეულოვან ვექტორთა $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ სამეულს, რომლებიც შესაბამისად თანამიმართულია Ox, Oy და Oz ღერძების, ორთონორმიზებული ბაზისს უწოდებენ. მაშინ $X = (\vec{a}, \vec{i}), Y = (\vec{a}, \vec{j}), Z = (\vec{a}, \vec{k})$ რიცხვებს \vec{a} ვექტორის კოორდინატებს უწოდებენ და ჩაწერენ ასე: $\vec{a}(X, Y, Z)$. ცხადია, რომ $X = \text{გეგ}_{Ox} \vec{a}, Y = \text{გეგ}_{Oy} \vec{a}, z = \text{გეგ}_{Oz} \vec{a}$, ამასთან, \vec{a} ვექტორი წარმოიღვინება შემდეგნაირად:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

\vec{a} ვექტორის სიგრძე მისი კოორდინატების საშუალებით გამოითვლება ფორმულით:

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

¹ როცა $\vec{a} = 0$ ან $\vec{b} = 0$ მაშინ ამ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მიღებულია 0-ის ტოლად.

$a(X_1, Y_1, Z_1)$ და $b(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2,$$

ხოლო მათ შორის კუთხე კი:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

მაგალითი. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს \vec{a} და \vec{b} ვექტორები, რომ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, ($\vec{a} \neq 0 \wedge \vec{b} \neq 0$).

▷ ვინაიდან, $|\vec{a} + \vec{b}|$ და $|\vec{a} - \vec{b}|$ წარმოადგენენ იმ პარალელოგრამის დიაგონალებს, რომლის ვერტეხები \vec{a} და \vec{b} , ამიტომ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ტოლობა შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს პარალელოგრამი მართკუთხედიანია. მაშასადამე, $\vec{a} \perp \vec{b}$. ◁

მაგალითი. ცნობილია $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების კოორდინატები. $M \in (M_1, M_2)$ და $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$. ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები.

▷ აღვნიშნოთ M წერტილის კოორდინატები x, y და z -ით. მაშინ გვაქვს:

$$\vec{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \lambda \vec{MM_2} = (\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y), \lambda(z_2 - z)).$$

პირობის ძალით გვაქვს:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

აქედან

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1.$$

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ თუ AB მონაკვეთი C წერტილით გაყოფილია $m : n$ შეფარდებით, მაშინ ნებისმიერი O წერტილისათვის

$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}. \quad (1)$$

თუ ნებისმიერი O წერტილისათვის (1) ტოლობა გვაქვს, მაშინ AB მონაკვეთი C წერტილით $m : n$ შეფარდებით იყოფა.

▷. ვთქვათ, AB მოცემული მონაკვეთია და C წერტილი მას $m:n$ შეფარდებით ყოფს (ნახ. 2). მაშინ

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$$

და მაშასადამე,

$$\vec{AC} = \frac{m}{n} \vec{CB}.$$

მაგრამ

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}, \quad \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$$

და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ;

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{m}{n} (\vec{OB} - \vec{OC}).$$

აქედან უკვე სულ მარტივად მიიღება (1).

ახლა, ვთქვათ, ნებისმიერი O წერტილისათვის მართებულია (1). გადავწეროთ ეს ტოლობა ასე:

$$m(\vec{OC} - \vec{OB}) = n(\vec{OA} - \vec{OC}).$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\vec{OC} - \vec{OB} = \vec{BC}, \quad \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{CA},$$

მაშინ გვექნება $n\vec{AC} = m\vec{CB}$ ან, რაც იგივეა,

$$\vec{AC} = \frac{m}{n} \vec{CB}.$$

რადგან m და n ნატურალური რიცხვებია. უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს:

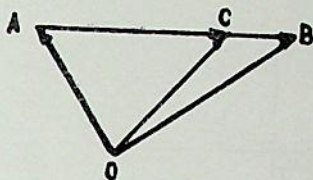
$$C \in [AB], \quad |AC| : |CB| = m : n \triangleleft.$$

შედეგი. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ AB მონაკვეთი C წერტილით შუაზე იყოფოდეს, შემდეგში მდგომარეობს: ნებისმიერი O წერტილისათვის

$$\vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) \quad (2)$$

ტოლობა ჰემშარიტი უნდა იყოს.

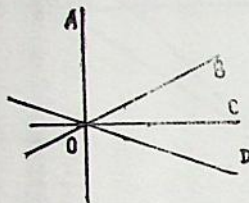
მაგალითი. წრფეზე აღებულ წერტილზე გავლებულია სამი წრფე. თითოეული გავლებული წრფე პერპენდიკულარულია მოცემუ-



ნახ. 2

ლი წრფისა. დაამტკიცეთ, რომ გავლებული წრფეები ერთ სიბრტყეს ეკუთვნიან.

◁. ვთქვათ, (O, A) წრფის მიმართ გავლებულია წრფეები (ნახ. 3):
 $(OB) \perp (OA)$, $(OC) \perp (OA)$, $(OD) \perp (OA)$.



ნახ. 3

გავშალოთ \vec{OD} ვექტორი \vec{OA} , \vec{OB} და \vec{OC} ვექტორების მიხედვით.

$\vec{OD} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$. მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად \vec{OA} -ზე; გვექნება, $0 = x \cdot \vec{OA}^2$. აქედან $x = 0$, მაშინ

$$\vec{OD} = y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}.$$

ე. ი. \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} ვექტორები კომპლანარულია. მაშასადამე, O, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეს ეკუთვნიან ◁.

ამოხსენით ამოცანები:

151. A და B წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთი C წერტილით იყოფა $\lambda = 5 : 2$ ფარდობით. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ A და C წერტილების კოორდინატებია $A(3; 7; 4)$, $C(8; 2; 3)$.

152. იპოვეთ მონაკვეთის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატები, თუ ის $C(2; 0; 2)$ და $D(5; -2; 0)$ წერტილებით გაყოფილია 3 ტოლ ნაწილად.

153. იპოვეთ სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი, თუ მისი წვეროებია:
 1) $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$; 2) $A(2; 5; 0)$; $B(11; 3; 8)$, $C(5; 1; 12)$.

154. იპოვეთ ტეტრაედრის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ მისი წვეროებია: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

155. განსაზღვრეთ $\vec{P}(2; -3; -1)$ ვექტორის საწყისი A წერტილი, თუ მისი ბოლო წერტილია $B(1; -1; 2)$.

156. მოცემულია $A(2; 2; 0)$ და $B(0; -2; 5)$ წერტილები. პავეთ $\vec{AB} = \vec{P}$ ვექტორი და იპოვეთ მისი სიგრძე და მიმართულების კოსინუსები.

✕ 157. იპოვეთ \vec{P} ვექტორი, თუ ის Ox და Oy ღერძებთან ადგენს $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ კუთხეებს და მისი სიგრძეა 2.

158. ვექტორი Ox და Oz ღერძებთან ადგენს $\alpha = 120^\circ$ და $\gamma = 45^\circ$ კუთხეებს. რა კუთხეს ადგენს ის Oy ღერძთან?

159. M წერტილის რადიუს-ვექტორი საკოორდინატო ღერძებთან ტოლ კუთხეებს ადგენს, იპოვეთ M წერტილის კოორდინატები, თუ მისი რადიუს-ვექტორის სიგრძეა 3.

160. განსაზღვრეთ $\vec{P}(6; -2; -3)$ და $\vec{Q}(3; 4; -12)$ ვექტორების მგეზავები.

161. \vec{Q} ვექტორი, რომლის სიგრძეა 75, $\vec{P} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ ვექტორის პარალელურია. იპოვეთ \vec{Q} ვექტორი.

162. პარალელოგრამის სამი მიმდევრობითი წვეროა: $A(1; 1)$, $B(2; -1)$ და $C(6; 3)$. იპოვეთ მეოთხე წვერო.

163. $A(2; 1; -1)$ წერტილზე მოდებულია $|\vec{R}| = 7$ ძალა. განსაზღვრეთ ძალის გამომსახველი ვექტორის მიმართულება და ბოლო წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია მისი ორი კოორდინატი $X = 2$ და $Y = -3$.

164. $\vec{R}(X, Y, Z)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა $3\sqrt{42}$, ემთხვევა $P(2; -3; 6)$ და $\vec{Q}(-1; 2; -2)$ ვექტორების კუთხის ბისექტრისას. იპოვეთ $\vec{R}(X, Y, Z)$ ვექტორი.

165. მოცემულია $\vec{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ და $\vec{BC} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$ ვექტორები. იპოვეთ ABC სამკუთხედის \vec{AD} ბისექტრისის მგეზავი.

166. დაამტკიცეთ, რომ თუ M ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია და O სივრცის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ შესრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

167. M_1 და M_2 წერტილები A_1B_1 და A_2B_2 მონაკვეთების შუა წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2}).$$

168. M_1 და M_2 $A_1B_1C_1$ და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2})$$

169. ABC სამკუთხედში A_1, B_1, C_1 წერტილები BC, AC, AB გვერდების შუაწერტილებია და O — სივრცის ნებისმიერი წერტილი; დაამტკიცეთ, რომ შესრულდება ტოლობა

$$\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

170. $ABCD$ ტეტრაედრში M_1 და M_2 შესაბამისად ADB და BDC წახნაგების მედიანების გადაკვეთის წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{M_1M_2} \parallel \vec{AC}$. იპოვეთ ამ ვექტორების სიგრძეების შეფარდება.

171. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფს, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

172. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილები და ფერდობის გადაკვეთის წერტილი ერთ და იმავე წრფეს ეკუთვნის.

173. მოცემულია: $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15, |\vec{a} + \vec{b}| = 20$ გამოთვალეთ $|\vec{a} - \vec{b}|$.

174. ABC სამკუთხედში AM მონაკვეთი A კუთხის ბისექტრისაა. იპოვეთ \vec{AM} , თუ $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$.

175. იპოვეთ \vec{p} ვექტორს გეგმილები ox და oy ღერძებზე, თუ $|\vec{p}| = 2$ და \vec{p} ვექტორი ox ღერძთან შეადგენს 30° -იან კუთხეს.

176. მოცემულია ერთეული სიგრძის a, b და c კომპლანარული ვექტორები. მასთან $(a, b) = 30^\circ$ და $(b, c) = 60^\circ$.

გამოთვალეთ $|\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}|$.

177. ABC სამკუთხედი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის პარალელური გეგმილია სიბრტყეზე. ცნობილია:

$$|AA_1| = a, |BB_1| = b, |CC_1| = c.$$

იპოვეთ ამ სამკუთხედების მედიანების გადაკვეთის წერტილებს შორის მანძილი.

178. მოცემულია ნებისმიერი ხუთკუთხედი. არსებობს თუ არა ხუთკუთხედი, რომლის გვერდები მისი დიაგონალების პარალელური და ტოლია.

179. \vec{a} და \vec{b} ვექტორებს შორის კუთხე $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 2$,

გამოთვალეთ:

$$1) (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) \quad 2) (2\vec{a} - 5\vec{b})^2.$$

180. იპოვეთ \vec{a} და \vec{b} ვექტორების სკალარული ნამრავლი,

თუ 1) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \parallel \vec{b}$; 2) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \perp \vec{b}$.

181. მოცემულია სამი \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ერთეულოვანი ვექტორი, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. გამოთვალეთ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

182. განსაზღვრეთ α -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან $8\vec{a} + \alpha\vec{b}$ და $\vec{a} - 2\vec{b}$ ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარული, თუ

$$|\vec{a}| = 7\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4 \text{ და } (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

183. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$. გამოთვალეთ მისი შიგა კუთხეები.

184. გამოთვალეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი ორი გვერდი ემთხვევა $\vec{AB}(2; 1; -2)$ და $\vec{BC}(3; 2; 6)$ ვექტორებს.

185. იპოვეთ $\vec{R}(X, Y, Z)$ ვექტორი, თუ მისი სიგრძეა 16 და Ox და Oz ღერძებთან ადგენს ტოლ კუთხეებს $\alpha = \gamma = 45^\circ$.

186. იპოვეთ $\vec{P}(X, Y, Z)$ ვექტორი, თუ ის მოთავსებულია xOy სიბრტყეზე; ამასთან $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$, სადაც $\vec{Q}(5; -3; 4)$ და $\vec{P} \perp \vec{Q}$.

187. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, თუ ის ერთდროულად მართობულია $\vec{P}(3; 6; 8)$ ვექტორისა და Ox ღერძისა.

188. იპოვეთ ერთეული სიგრძის ვექტორი, რომელიც პარალელურია $\vec{P}(6; 7; -6)$ ვექტორისა.

189. $\vec{R}(X, Y, Z)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 26, მართობულია $\vec{P}(4; -2; -3)$ და $\vec{Q}(0; 1; 3)$ ვექტორებისა და Oy ღერძთან ადგენს ბლაგვ კუთხეს. იპოვეთ $\vec{R}(X, Y, Z)$ ვექტორი.

190. $\vec{P}(X, Y)$ ვექტორი, რომლის სიგრძეა 2, $\vec{Q}(3; 4)$ ვექტორთან ადგენს 60° -იან კუთხეს; იპოვეთ $\vec{P}(X, Y)$ ვექტორი.

191. გამოთვალეთ ABC სამკუთხედის \vec{CD} სიმაღლის სიგრძე, თუ მისი ორი გვერდი ემთხვევა $\vec{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ და $\vec{BC} = \vec{i} + 5\vec{j}$ ვექტორებს.

192. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(2; -4; 3)$, $B(1; -7; 2)$ და $C(2; -2; 1)$. იპოვეთ \vec{CD} სიმაღლის სიგრძე.

193. 1) იპოვეთ $\vec{P}(5; 2; 5)$ ვექტორის გვემილი $\vec{Q}(2; -1; 2)$ ვექტორის მიმართულებაზე;

2) მოცემულია $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ და $D(0; 2; -4)$ წერტილები. გამოთვალეთ ვეგ $\frac{\vec{CD}}{\vec{AB}}$.

194. მოცემულია სამი ვექტორი: $\vec{a}(1; -3; 4)$, $\vec{b}(3; -4; 2)$ და $\vec{c}(-1; 1; 4)$. გამოთვალეთ ვეგ $\frac{2\vec{a}}{\vec{b} + \vec{c}}$.

195. მოცემულია $A(1; 1; 1)$ და $B(4; 5; -3)$ წერტილები. იპოვეთ \vec{AB} ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს ტოლ მახვილ კუთხეებს.

196. მოცემულია $A(3; -4; -2)$ და $B(2; 5; -2)$ წერტილები. იპოვეთ \vec{AB} ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც Ox და Oy ღერძებთან ადგენს $\alpha = 60^\circ$ და $\beta = 120^\circ$ კუთხეებს, ხოლო Oz ღერძთან — ბლაგვ კუთხეს.

197. იპოვეთ $\vec{P}(\sqrt{2}; -3; -5)$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, რომელიც Ox და Oz ღერძებთან ადგენს $\alpha = 45^\circ$ და $\gamma = 60^\circ$ კუთხეებს, ხოლო Oy ღერძთან — მახვილ კუთხეს.

198. \vec{m} და \vec{n} ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 120° -ია. იპოვეთ $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ და $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

199. \vec{m} და \vec{n} ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 60° -ია. იპოვეთ $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ და $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები.

200. იპოვეთ $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ და $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ და $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

§ 2. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი და სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი

\vec{a} ვექტორის ვექტორული ნამრავლი \vec{b} ვექტორზე ($\vec{a} \times \vec{b}$) ეწოდება ისეთ \vec{c} ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სამი პირობით:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, სადაც $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

2) $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$,

3) \vec{c} ვექტორი მიმართულია ისე, რომ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} არის მარჯვენა.

თუ $\vec{a} \parallel \vec{b}$, მაშინ \vec{a} ვექტორის ვექტორული ნამრავლი \vec{b} ვექტორზე მიღებულია ნულოვან ვექტორად. \vec{a} ვექტორის \vec{b} ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a} \times \vec{b}$ ან $[\vec{a}, \vec{b}]$ სიმბოლოთი.

თუ $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, მაშინ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

\vec{a} და \vec{b} ვექტორების ვექტორული $\vec{a} \times \vec{b}$ ნამრავლის \vec{c} ვექტორზე სკალარულ ნამრავლს ეწოდება \vec{a} , \vec{b} , და \vec{c} ვექტორების შერეული ნამრავლი და იგი $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\vec{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$, მაშინ

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

მაგალითი. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, ვიპოვოთ $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

▷. $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 3} = 4$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$. ◁.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\vec{a} + 3\vec{b}$ და $3\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, თუ \vec{a} და \vec{b} ერთეულოვანი ვექტორებია და მათ შორის კუთხე უდრის $\frac{\pi}{6}$.

$$\triangleright. (3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 8(\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$S = |(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b})| = 8|\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{6} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \triangleleft.$$

მაგალითი. დაამტკიცეთ რომ ოთხი წერტილი $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ და $D(2; 1; 3)$ მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში.

▷. დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ \vec{AB} , \vec{AC} და \vec{AD} ვექტორების კომპლანარობა, რადგანაც

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ამიტომ \vec{AB} , \vec{AC} და \vec{AD} ვექტორები კომპლანარულია, რის გამოც A , B , C და D წერტილები ძეგს ერთ სიბრტყეში. ◁.

ამოხსენით ამოცანები:

201. მოცემულია $|\vec{P}|=8$, $|\vec{Q}|=4$ და $\vec{P} \cdot \vec{Q}=16$. გამოთვალეთ $|\vec{P} \times \vec{Q}|$.

202. მოცემულია $|\vec{P}|=6$, $|\vec{Q}|=10$ და $|\vec{P} \times \vec{Q}|=48$. გამოთვალეთ $\vec{P} \cdot \vec{Q}$.

203. k კოეფიციენტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $\vec{P}=k\vec{a}+5\vec{b}$ და $\vec{Q}=3\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები პარალელური, თუ \vec{a} და \vec{b} ვექტორები არ არის პარალელური?

204. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს \vec{a} და \vec{b} ვექტორები, რომ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორები იყოს პარალელური?

205. აჩვენეთ, რომ $(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a} \times \vec{b})$ და გამოარკვეეთ ამ ტოლობის გეომეტრიული მნიშვნელობა, თუ $\vec{a}-\vec{b}$ და $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორები გამოსახავს პარალელოგრამის დიაგონალებს.

206. გამოთვალეთ $\vec{P}(1; -2; 4)$ და $\vec{Q}(3; 1; -2)$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი.

207. გამოთვალეთ $\vec{P}=-\vec{j}+\vec{k}$ და $\vec{Q}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი და დიაგონალების სიგრძეები.

208. გამოთვალეთ $\vec{P}=2\vec{a}+3\vec{b}$ და $\vec{Q}=\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, სადაც \vec{a} და \vec{b} ურთიერთმართობული მგეზავებია.

209. ააგეთ პარალელოგრამი $\vec{P} = 2\vec{j} + \vec{k}$ და $\vec{Q} = \vec{i} + 2\vec{k}$ ვექტორებზე და გამოთვალეთ მისი ფართობი და სიმაღლე.

210. გამოთვალეთ $\vec{P} = \vec{a} + 2\vec{b}$ და $\vec{Q} = \vec{a} - 3\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი. თუ $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

211. \vec{m} და \vec{n} ერთეული სიგრძის ვექტორებს შორის კუთხე 45° -ია. გამოთვალეთ იმ პარალელოგრამის ფართობი, რომლის დიაგონალებია $2\vec{m} - \vec{n}$ და $4\vec{m} - 5\vec{n}$ ვექტორები.

212. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. გამოთვალეთ მისი ფართობი და \vec{BD} სიმაღლის სიგრძე.

213. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ და $C(1; 3; -1)$. გამოთვალეთ მისი ფართობი და \vec{BD} სიმაღლის სიგრძე.

214. მოცემულია $\vec{a}(3; 0; -1)$, $\vec{b}(2; 4; 3)$, $\vec{c}(-1; 3; 2)$, $\vec{d}(2; 0; 1)$ ვექტორები. გამოთვალეთ: 1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$; 2) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$.

215. მოცემულია $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(-3; 1; 2)$, $\vec{c}(1; 2; 3)$ ვექტორები. გამოთვალეთ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

იპოვეთ შემდეგ ვექტორებზე აგებული პარალელებიპედის მოცულობა:

216. $\vec{P}_1(1; -1; 3)$, $\vec{P}_2(2; -2; 1)$, $\vec{P}_3(3; -2; 5)$.

217. $\vec{P}_1(5; -3; 2)$, $\vec{P}_2(-6; 3; 4)$, $\vec{P}_3(-8; 6; -5)$.
კომპლანარულია თუ არა შემდეგი ვექტორები:

218. $\vec{P}_1(-2; -1; -3)$, $\vec{P}_2(-1; 4; 6)$, $\vec{P}_3(1; 5; 9)$.

219. $\vec{P}_1(2; 1; 3)$, $\vec{P}_2(3; -2; 1)$, $\vec{P}_3(1; 1; 2)$.

აჩვენეთ, რომ შემდეგი წერტილები მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე:

220. $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

221. $A(1; 2; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(2; 1; 1)$, $D(-3; 0; 7)$.

222. მოცემულია პირამიდის წვეროები: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. იპოვეთ მისი მოცულობა და D წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

223. მოცემულია პირამიდის წვეროები: $A(0; 0; 0)$, $B(3; 4; -1)$, $C(2; 3; 5)$, $D(6; 0; -3)$. [იპოვეთ მისი მოცულობა და A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.]

139 ნიუსსეტუ 2, ABC ნახვის ფორ
3.02 და 3C ნუიხობის ხუთი
4.0 ნუიხონ დაშვებული სიმაღლე



224. \vec{OA} , \vec{OB} და \vec{OC} ვექტორები მოთავსებულია საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე. იპოვეთ ამ ვექტორებზე აგებული პირამიდის მოცულობა, თუ თითოეული მათგანის სიგრძე უდრის 2-ს.

225. გამოთვალეთ $OABCO_1A_1B_1C_1$ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მოცემულია ქვედა ფუძის სამი წვერო $O(0; 0; 0)$, $A(2; -3; 0)$, $C(3; 2; 0)$ და ზედა ფუძის ერთი წვერო $B_1(3; 0; 4)$.

226. პირამიდის წვეროებია $A(-1; -3; 4)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 1)$ და $D(4; -1; 3)$. იპოვეთ 1) BD წიბოს სიგრძე; 2) ABC წახნაგის ფართობი; 3) BD და BC წიბოებს შორის კუთხე; 4) D წვეროდან დაშვებული პირამიდის სიმაღლე.

227. ერთ წერტილზე მოდებულია სამი არაკომპლანური \vec{a} , \vec{b} და \vec{c} ვექტორი. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყე, რომელიც ამ სამი ვექტორის ბოლოზე გადის, $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ ვექტორის მართობულია.

მითითება. საკმარისია აჩვენოთ, რომ $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ პერპენდიკულარულია $\vec{b} - \vec{a}$ და $\vec{c} - \vec{a}$ ვექტორების. გვაქვს

$$(\vec{b} - \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \\ = (\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}) = 0.$$

ანალოგიურად $(\vec{c} - \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) = 0$.

228. დავამტკიცოთ, რომ

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{a}, \vec{z}) \\ (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{z}) \\ (\vec{c}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{z}) \end{vmatrix}$$

229. $SABC$ ტეტრაედრის ყოველ წიბოსა და მის მოპირდაპირე წიბოს შუა წერტილზე გავლებულია სიბრტყეები. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ამ სიბრტყეს აქვს საერთო წერტილი; აღვნიშნოთ ეს წერტილი K -თი. \vec{SK} ვექტორი გამოსახეთ $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$ და $\vec{SC} = \vec{c}$ ვექტორების საშუალებით.

მითითება. SA , SB და SC წიბოებზე გავავალ სიბრტყეზე მდებარე

წერტილების რადიუს-ვექტორებს აქვს სახე $\lambda_1 \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \lambda_2 \vec{a}$.

$$\lambda_1 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} + \lambda_2 \vec{b}, \lambda_1 \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \lambda_2 \vec{c}.$$

მაგალითი. იპოვეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(2; -1; 4)$ და $B(3; 2; -1)$ წერტილებზე გადის და $x+y+2z-3=0$ სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

▷. საძიებელი სიბრტყის \vec{Q} ნორმალ-ვექტორი მართობული უნდა იყოს $\vec{AB}(1; 3; -5)$ და $\vec{n}=(1; 1; 2)$ ვექტორების. ამიტომაც \vec{Q} ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ;

$$\vec{Q} = \vec{AB} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$A(2; -1; 4)$ წერტილზე გამავალი და \vec{Q} ვექტორის მართობული სიბრტყის განტოლებაა

$$11(x-2) - 7(y+1) - 2(z-4) = 0 \text{ ან } 11x - 7y - 2z - 21 = 0. \triangleleft$$

მაგალითი. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $M(3; -1; -5)$ წერტილზე გადის და პერპენდიკულარულია $3x-2y+2z+7=0$ და $5x-4y+3z+1=0$ სიბრტყეების.

▷. ადვილი შესაძინებია, რომ საძიებელი სიბრტყის \vec{n} ნორმალ-ვექტორად შეგვიძლია ავიღოთ $\vec{n}_1=(3; -2; 2)$ და $\vec{n}_2=(5; -4; 3)$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი, ე. ი.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

$M(3; -1; -5)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{n}=(2; 1; -2)$ ვექტორის მართობული სიბრტყის განტოლებაა:

$$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0, \text{ ან } 2x + y - 2z - 15 = 0. \triangleleft$$

მაგალითი. $M(2; -1; -2)$ წერტილი წარმოადგენს სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებულ მართობის ფუძეს. იპოვეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

▷ პირობით $\vec{r} = \vec{OM}$ რადიუს-ვექტორი სიბრტყის მართობული ვექტორია, რომლის კოორდინატები იგივეა, რაც M წერტილის კოორდინატები, ე. ი. $\vec{r}=(2; -1; -2)$. პირობით \vec{r} პერპენდიკულარულია საძიებელი სიბრტყის და M წერტილი ძვეს მასზე; ამიტომ გვექნება:

$$2(x-2) - 1(y+1) + 2(z-2) = 0 \text{ ან } 2x - y + 2z - 9 = 0. \triangleleft$$

მაგალითი. ვიპოვოთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2; -3; -7)$ წერტილზე და პარალელურია $2x-6y-3z+5=0$ სიბრტყის.

▷ ვექტორია $\vec{N}(2; -6; -8)$ პერპენდიკულარულია მოცემული სიბრტყის ნებისმიერი პარალელური სიბრტყისა. \vec{N} ვექტორი საძიებელი სიბრტყის მართობულია, რომელიც გადის $M_0(2; -3; -7)$ წერტილზე, ე. ი. გვექნება

$$2(x-2) - 6(y+3) - 3(z+7) = 0. \triangleleft$$

ამოხსენით ამოცანები:

231. შეამოწმეთ, გადის თუ არა $4x - y + 3z + 1 = 0$ სიბრტყე შემდეგ წერტილებზე: $A(-1; 6; 3)$, $B(2; 0; 5)$, $C(3; -2; -5)$.

ააგეთ შემდეგი სიბრტყეები:

232. 1) $x - 2y - z + 1 = 0$; 2) $y + 2z - 4 = 0$; 3) $2x - 3y + 12 = 0$;
4) $x + z = 1$; 5) $2x - 5 = 0$.

233. 1) $2x + y - z - 6 = 0$; 2) $x - y + 2z = 0$; 3) $x - y = 0$;
4) $2z - 7 = 0$.

234. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები მონაკვეთებში:

1) $2x - 3y - z + 12 = 0$; 2) $x - 4z + 6 = 0$; 3) $5x - 2y = 7$;
4) $x - 7 = 0$.

235. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები ნორმალური სახით:

1) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$; 2) $5y - 12z + 26 = 0$; 3) $y + 2 = 0$;
4) $2z - 1 = 0$.

236. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $2x + 3y - 6z - 42 = 0$ სიბრტყემდე.

იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:

237. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ და $8x + 6y - 10z + 9 = 0$.

238. $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ და $11x - 2y - 10z - 45 = 0$

239. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; 2; 1)$ წერტილზე $3x + y - z + 2 = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

240. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-2; 7; 3)$ წერტილზე $x - 4y + 5z - 1 = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

241. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(5; -7; 4)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრის ტოლ მონაკვეთებს.

242. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-4; 0; 4)$ წერტილზე და Ox და Oy ღერძებზე შესაბამისად ჩამოჭრის $a=4$ და $b=3$ მონაკვეთებს.

243. მოცემულია $M_1(-7; 2; -1)$ და $M_2(3; 4; 10)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_2 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

244. მოცემულია $M_1(8; -7; 5)$ და $M_2(2; -1; -2)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

შეადგინეთ შემდეგ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება:

245. $M_1(7; 6; 7)$, $M_2(5; 10; 5)$, $M_3(-1; 8; 9)$.

246. $M_1(2; 0; 4)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(0; -3; -1)$.

247. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(2; -5; 3)$ წერტილზე; 2) გადის Oz ღერძზე და $(-3; 1; -2)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Ox ღერძისა და გადის $(4; 0; -2)$ და $(5; 1; 7)$ წერტილებზე.

248. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(3; 2; -7)$ წერტილზე; 2) გადის Ox ღერძზე და $(4; -3; -1)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Oy ღერძისა და გადის $(1; -5; 1)$ და $(3; 2; -2)$ წერტილებზე.

გამოთვალეთ კუთხე შემდეგ სიბრტყეებს შორის:

249. 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ და $x + z - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ და $x + 2y + 2z - 7 = 0$; 3) $3x - y + 2z + 15 = 0$ და $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

250. 1) $y - \sqrt{3}x - 7 = 0$ და $y = 0$; 2) $x + 2z - 6 = 0$ და $x + 2y - 4 = 0$; 3) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ და $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

251. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $2x + 2y + z - 8 = 0$ სიბრტყისა და მისგან დაშორებულია $h = 4$ მანძილით.

252. იპოვეთ იმ მართობის სივრცე და მიმართულება, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათაეიდან $2x + 3y + 6z - 35 = 0$ სიბრტყეზე.

253. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $3x + y - 2z - 5 = 0$ და $6x + 2y - 4z + 1 = 0$ პარალელური სიბრტყეებისა და თანაბრადაა დაშორებული თითოეული მათგანიდან.

254. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი ორი წახნაგი მოთავსებულია $2x - 2y + z - 1 = 0$ და $2x - 2y + z + 5 = 0$ პარალელურ სიბრტყეებზე.

255. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული $A(1; 2; 3)$ და $B(2; -1; 4)$ წერტილებიდან.

256. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული $A\left(a; -\frac{a}{2}; a\right)$ და $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$ წერტილებიდან.

▷. ვექტორია $\vec{N}(2; -6; -8)$ პერპენდიკულარულია მოცემული სიბრტყის ნებისმიერი პარალელური სიბრტყისა. \vec{N} ვექტორი საძიებელი სიბრტყის მართობულია, რომელიც გადის $M_0(2; -3; -7)$ წერტილზე, ე. ი. გვექნება

$$2(x-2) - 6(y+3) - 3(z+7) = 0. \triangleleft$$

ამოხსენით ამოცანები:

231. შეამოწმეთ, გადის თუ არა $4x - y + 3z + 1 = 0$ სიბრტყე შემდეგ წერტილებზე: $A(-1; 6; 3)$, $B(2; 0; 5)$, $C(3; -2; -5)$.

ააგეთ შემდეგი სიბრტყეები:

232. 1) $x - 2y - z + 1 = 0$; 2) $y + 2z - 4 = 0$; 3) $2x - 3y + 12 = 0$;
4) $x + z = 1$; 5) $2x - 5 = 0$.

233. 1) $2x + y - z - 6 = 0$; 2) $x - y + 2z = 0$; 3) $x - y = 0$;
4) $2z - 7 = 0$.

234. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები მონაკვეთებში:

1) $2x - 3y - z + 12 = 0$; 2) $x - 4z + 6 = 0$; 3) $5x - 2y = 7$;
4) $x - 7 = 0$.

235. დაწერეთ შემდეგი სიბრტყეთა განტოლებები ნორმალური სახით:

1) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$; 2) $5y - 12z + 26 = 0$; 3) $y + 2 = 0$;
4) $2z - 1 = 0$.

236. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $2x + 3y - 6z - 42 = 0$ სიბრტყემდე.

იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:

237. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ და $8x + 6y - 10z + 9 = 0$.

238. $11x - 2y - 10z + 15 = 0$ და $11x - 2y - 10z - 45 = 0$

239. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; 2; 1)$ წერტილზე $3x + y - z + 2 = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

240. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-2; 7; 3)$ წერტილზე $x - 4y + 5z - 1 = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

241. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(5; -7; 4)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრის ტოლ მონაკვეთებს.

242. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-4; 0; 4)$ წერტილზე და Ox და Oy ღერძებზე შესაბამისად ჩამოჭრის $a=4$ და $b=3$ მონაკვეთებს.

243. მოცემულია $M_1(-7; 2; -1)$ და $M_2(3; 4; 10)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_2 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

244. მოცემულია $M_1(8; -7; 5)$ და $M_2(2; -1; -2)$ წერტილები. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის M_1 წერტილზე M_1M_2 მონაკვეთის მართობულად.

შეადგინეთ შემდეგ სამ წერტილზე გავალი სიბრტყის განტოლება:

245. $M_1(7; 6; 7)$, $M_2(5; 10; 5)$, $M_3(-1; 8; 9)$.

246. $M_1(2; 0; 4)$, $M_2(3; 1; -2)$, $M_3(0; -3; -1)$.

247. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(2; -5; 3)$ წერტილზე; 2) გადის Oz ღერძზე და $(-3; 1; -2)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Ox ღერძისა და გადის $(4; 0; -2)$ და $(5; 1; 7)$ წერტილებზე.

248. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც: 1) პარალელურია xOz სიბრტყისა და გადის $(3; 2; -7)$ წერტილზე; 2) გადის Ox ღერძზე და $(4; -3; -1)$ წერტილზე; 3) პარალელურია Oy ღერძისა და გადის $(1; -5; 1)$ და $(3; 2; -2)$ წერტილებზე.

გამოთვალეთ კუთხე შემდეგ სიბრტყეებს შორის:

249. 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ და $x + z - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ და $x + 2y + 2z - 7 = 0$; 3) $3x - y + 2z + 15 = 0$ და $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

250. 1) $y - \sqrt{3}x - 7 = 0$ და $y = 0$; 2) $x + 2z - 6 = 0$ და $x + 2y - 4 = 0$; 3) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ და $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

251. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $2x + 2y + z - 8 = 0$ სიბრტყისა და მისგან დაშორებულია $h = 4$ მანძილით.

252. იპოვეთ იმ მართობის სივრცე და მიმართულება, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათაეიდან $2x + 3y + 6z - 35 = 0$ სიბრტყეზე.

253. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც პარალელურია $3x + y - 2z - 5 = 0$ და $6x + 2y - 4z + 1 = 0$ პარალელური სიბრტყეებისა და თანაბრადა დაშორებული თითოეული მათგანიდან.

254. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი ორი წახნაგი მოთავსებულია $2x - 2y + z - 1 = 0$ და $2x - 2y + z + 5 = 0$ პარალელურ სიბრტყეებზე.

255. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადა დაშორებულია $A(1; 2; 3)$ და $B(2; -1; 4)$ წერტილებიდან.

256. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადა დაშორებულია $A\left(a; -\frac{a}{2}; a\right)$ და $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$ წერტილებიდან.

257. დაწერეთ სიბრტყის განტოლება, თუ $M(3; -6; 2)$ წერტილი კოორდინატთა სათავედან ამ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეა.

258. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის Ox ღერძზე და $M(5; 4; 13)$ წერტილიდან დაშორებულია $h=8$ ერთეულით.

259. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(3; -3; 1)$ და $M_2(4; 7; 2)$ წერტილებზე $3x+5y-7z-21=0$ სიბრტყის მართობულად.

260. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(1; 2; 3)$ და $M_2(2; 1; 1)$ წერტილებზე $3x+4y+z-6=0$ სიბრტყის მართობულად.

261. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(-1; -1; 2)$ წერტილზე $x-2y+z-4=0$ და $x+2y-2z+4=0$ სიბრტყეების მართობულად.

262. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M(1; 3; 2)$ წერტილზე $x+2y+z-4=0$ და $2x+y+3z+5=0$ სიბრტყეების მართობულად.

იპოვეთ შემდეგი სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილები:

$$263. \quad 1) \begin{cases} 2x - y + 3z - 9 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 3x + y - 4z + 6 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x - 3y + z - 6 = 0, \\ 14x - 6y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - 5z = 0. \end{cases}$$

$$264. \quad 1) \begin{cases} 5x + 8y - z - 7 = 0, \\ x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 9 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - 2y - 3z = 5, \\ 2x - y - 2z = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - 2y - 3z = 5, \\ 2x - y - 2z = 6; \end{cases}$$

265. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $2x-y+3z-6=0$, $x+2y-z+3=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე და $M(1; 2; 4)$ წერტილზე.

266. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $4x-y+3z-1=0$ და $x+5y-z+2=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე $2x-y+5z-3=0$ სიბრტყის მართობულად.

267. $x+3y-5+z(x-y-2z+4)=0$ სიბრტყეთა კონაში იპოვეთ ის სიბრტყე, რომელიც Ox და Oy ღერძებზე ტოლ მონაკვეთებს ჩამოჭრის.

268. $x + 5y + z = 0$ და $x - z + 4 = 0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე გააუღეთ სიბრტყე, რომელიც $x - 4y - 5z + 12 = 0$ სიბრტყესთან ადგენს $\frac{\pi}{4}$ კუთხეს.

269. გამოთვალეთ პირამიდის h , სიმაღლის სიგრძე, თუ მისი წვერობებია: $S(0; 6; 4)$, $A(3; 5; 3)$, $B(-2; 11; -5)$, $C(1; -1; 4)$.

270. დაწერეთ ამ სიბრტყეთა განტოლებები, რომლებიც შეაზღუოთ $3x - y + 7z - 4 = 0$ და $5x + 3y - 5z + 2 = 0$ სიბრტყეებს შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხეებს.

271. $4x - 7y + 5z - 20 = 0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ OM მონაკვეთმა საკოორდინატო ღერძებთან შეადგინოს ტოლი კუთხეები.

272. $y + z - 2 = 0$ სიბრტყეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ OM მონაკვეთმა Oy და Oz ღერძებთან შეადგინოს 60° -იანი კუთხეები.

273. სიბრტყე გადის Ox ღერძზე და $y = x$ სიბრტყესთან ადგენს 60° -იან კუთხეს. დაწერეთ ამ სიბრტყის განტოლება.

274. Oy ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრად დაშორებული $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ და $8x + 9y - 72z + 73 = 0$ სიბრტყეებიდან.

275. შეადგინეთ ამ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $x - y = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილზე და $O(0; 0; 0)$ და $M(2; 1; 7)$ წერტილებზე.

276. შეადგინეთ ამ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $2x + y - z - 2 = 0$, $x - 3y + z + 1 = 0$ და $x + y + z - 3 = 0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილზე $x + y + 2z = 0$ სიბრტყის პარალელურად.

§ 2. 1680

წრფის განტოლებათა სახეებია:

1) წრფის ზოგადი განტოლებები:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2) ვექტორული განტოლება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}.$$

3) პარამეტრული სახის განტოლებები R^3 -ში

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

თუ წრფე ძეკს oxy სიბრტყეზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$$

4) კანონიკური სახის განტოლებები R^3 -ში

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

სადაც $\vec{Q}(m, n, p)$ წრფის მიმართული ვექტორია, ხოლო $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — წრფის ფიქსირებული წერტილი.

კანონიკური განტოლება R^2 მიიღებს სახეს

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

აქედან, როცა $m \neq 0$, ვღებულობთ:

$$y = kx + b,$$

სადაც k არის იმ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც წრფე ადგენს ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. k -ს უწოდებენ წრფის კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო განტოლებას — წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით. თუ (l_1) წრფის განტოლებაა $y = k_1x + b_1$, (l_2) წრფის კი $y = k_2x + b_2$, მაშინ ამ ორ წრფეს შორის φ კუთხე შეიძლება ასე გამოითვალოს:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

R^2 -ში ორი წრფის პარალელობის პირობაა $k_1 = k_2$, მართობულობისა კი — $k_1 k_2 = -1$.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებებია:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

კუთხე ორ

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

კუთხე ორ წრფეს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

აქედან ვამოქმედნარეობს, რომ ორი წრფე ს პარალელობის პირობაა

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \text{ მართობულობის კი } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

მაგალითი. R^2 -ში მოცემულია წრფე $2x + 3y + 6 = 0$. ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(2; 1)$ წერტილზე და: 1) პარალელურია მოცემული წრფის, 2) პერპენდიკულარულია მოცემული წრფის.

▷. ვიპოვოთ მოცემული წრფის კუთხური კოეფიციენტი. ამისათვის მოცემული წრფის განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = -\frac{2}{3}x - 2, \text{ ე. ი. } k_1 = -\frac{2}{3}. \text{ საძიებელი წრფის განტოლება ვე-}$$

$$\text{ძებოთ შემდეგი სახით: } y = kx + b, \text{ 1) შემთხვევაში } k = k_1 = -\frac{2}{3},$$

ამიტომ $y = -\frac{2}{3}x + b$. b -ს საპოვნელად ვისარგებლოთ პირობით, რომ საძიებელი წრფე გადის $M_0(2; 1)$ წერტილზე, ე. ი.

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b, \quad b = \frac{7}{3}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \text{ ანუ } 2x + 3y - 7 = 0.$$

2) შემთხვევაში $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}$. საბოლოოდ, $3x - 2y - 4 = 0$. ◁.

მაგალითი. შეადგინეთ $M_0(-1; 0; 5)$ წერტილზე გავსული წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც საკოორდინატო ღერძებთან ადგენენ $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ და $\gamma = \frac{2}{3}\pi$

კუთხეებს.

▷. წრფის მიმმართველ ვექტორად შევვიძლია ავიღოთ

$$\vec{Q} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

ამიტომ წრფის საძიებელი კანონიკური სახის განტოლება იქნება

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{\sqrt{2}} = \frac{z-5}{-1}, \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z-5}{-1}.$$

თუ ამ ტოლობის თითოეულ წევრს გავუტოლებთ t -ს, მივიღებთ წრფის საძიებელ პარამეტრულ სახის განტოლებას.

$$x = -1 + t, \quad y = \sqrt{2}t, \quad z = 5 - t. \quad \triangleleft.$$

მაგალითი. შეადგინეთ $M_0(2; -3; 4)$ წერტილზე გაშვებული წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია წრფის

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

▷. ცხადია, რომ მოცემული წრფის მიმართველი ვექტორი იქნება

$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \text{ე. ი. } \vec{Q} = (1, -3, -2).$$

პირობის თანახმად ეს ვექტორი იქნება აგრეთვე საძიებელი წრფის მიმართველი ვექტორი. ამიტომ საძიებელი წრფის კანონიკური განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+4}{-2}. \quad \triangleleft.$$

მაგალითი. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2} \quad \text{და} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$$

წრფეები იკვეთებიან. იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

◁. წერტილი $M_1(1; -2; 0)$ ძვეს პირველ წრფეზე, ხოლო წერტილი $M_2(-1; -11; -6)$ მეორეზე. გამოეთვალოთ $\vec{M_1M_2} = (-2, -9, -6)$, $\vec{Q}_1 = (2, -1, -2)$ და $\vec{Q}_2 = (1, 2, 1)$ ვექტორების შერეული ნამრავლი

$$\begin{vmatrix} -2 & -9 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ე. ი. ეს ვექტორები კომპლანარულია და მამსახდამე, მოცემული წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ. ვინაიდან \vec{Q}_1 და \vec{Q}_2 ვექტორება არაკოლინეარულია, ამიტომ ეს წრფეები იკვეთებიან.

გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად პირველი წრფის განტოლება დაწეროთ პარამეტრული სახით:

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 - t, \quad z = -2t.$$

თუ x , y და z -ის ნაცვლად ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ მეორე წრფის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{2 + 2t}{1} = \frac{9 - t}{2} = \frac{6 - 2t}{1}, \quad \text{საიდანაც } t = 1.$$

მამსახდამე, მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია

$$x = 1 + 2 \cdot 1 = 3, \quad y = -2 - 1 = -3, \quad z = -2 \cdot 1 = -2. \quad \triangleleft$$

ამოხსენით ამოცანები:

277. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(3, 2)$ წერტილზე: 1) $B(-2; 4)$ და $C(5; 7)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურად; 2) იმავე წერტილებზე გამავალი წრფის მართობულად.

278. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადევბულია $x + 2y + 1 = 0$ და $x - y + 1 = 0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე $2x - y + 5 = 0$ წრფის მართობულად.

279. დაწერეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებიც გადევბულია $2x - 5y - 10 = 0$ წრფის მართობულად მის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებში.

280. იპოვეთ სამკუთხედის წვერობები, თუ მისი გვერდების განტოლებებია:

$$4x + 3y - 21 = 0, \quad 3x + y - 7 = 0, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

281. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ მისი წვერობებია:

$$A(2; -1), \quad B\left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right), \quad C(3; 3).$$

282. იპოვეთ მანძილი: 1) $M(4; -2)$ წერტილიდან $8x - 15y - 11 = 0$ წრფემდე; 2) $N(8; 5)$ წერტილიდან $3x - 4y - 15 = 0$ წრფემდე.

283. იპოვეთ მანძილი: 1) $M(2; 7)$ წერტილიდან $12x + 5y - 7 = 0$ წრფემდე; 2) $N(-3; 5)$ წერტილიდან $9x - 12y + 2 = 0$ წრფემდე.

284. იპოვეთ მანძილი შემდეგ წრფეებს შორის:

1) $3x + 4y - 6 = 0$ და $6x + 8y - 7 = 0$.

2) $2x - 3y - 6 = 0$ და $4x - 6y - 25 = 0$.

მიეცათ ნორმალური სახე წრფეთა შემდეგ განტოლებებს:

285. 1) $8x + 6y + 15 = 0$; 2) $x + y - 3 = 0$; 3) $3x - 4y = 0$.

286. 1) $5x + 12y - 39 = 0$; 2) $2x + 3y + 2 = 0$; 3) $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$.

287. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $5x - 3y - 15 = 0$, $10x - 6y + 21 = 0$ წრფეებისა და მათ შორის მანძილს ყოფს 2 : 3 ფარდობით.

288. იპოვეთ წრფე, რომელიც პარალელურია $12x + 5y - 52 = 0$ წრფისა და მისგან დაშორებულია $d = 2$ მანძილით.

289. რომბის დიაგონალები, რომელთა სიგრძეებია 10 და 6, მიღებულია საკოორდინატო ღერძებად. მოახებთ რომბის გვერდების განტოლებები, თუ დიდი დიაგონალი ემთხვევა Ox ღერძს, ხოლო მცირე დიაგონალი — Oy ღერძს.

290. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ფუძეები შესაბამისად ტოლია 8-ისა და 2-ის; ფერდები ფუძესთან ადგენს $\alpha = 45^\circ$ -იან კუთხეს, მასთან Ox ღერძი ემთხვევა ტრაპეციის დიდ ფუძეს, ხოლო Oy ღერძი — ტრაპეციის სიპეტრიის ღერძს.

291. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებსა და მოცემულ წრფეს შორის:

1) $3x + 2y - 6 = 0$; 2) $5x - 3y - 8 = 0$.

292. იპოვეთ იმ მართობის სიგრძე, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავიდან $3x + 4y - 25 = 0$ წრფეზე. მოძებნეთ აგრეთვე ამ მართობის ფუძის კოორდინატები.

293. იპოვეთ წრფე, რომელიც სათავიდან დაშორებულია 5 ერთეულით, ხოლო კუთხე Ox ღერძსა და სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებულ მართობს შორის არის 60° .

294. იპოვეთ წრფე, რომელიც სათავიდან დაშორებულია 7 ერთეულით, ხოლო კუთხე Ox ღერძსა და სათავიდან ამ წრფეზე დაშვებულ მართობს შორის არის 120° .

295. 1) $\begin{cases} y = 3x, \\ y = -2x + 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 5x - 3, \\ y = 5x + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ 6x - 2y + 7 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ \sqrt{3}x - y + 1 = 0; \end{cases}$

296. 1) $\begin{cases} y = 4x - 7, \\ y = -\frac{x}{4} + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 7x - 2, \\ y = x - \sqrt{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y - 5 = 0, \\ \sqrt{3}x + y - 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$

297. $A(2; 3)$ წერტილზე გაავლეთ წრფეთა კონა. ამ კონიდან გამოყავით ის წრფეები, რომლებიც Ox ღერძთან ადგენენ კუთხეებს: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 135° ;

298. $A(3; -5)$ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელიც $3x - 2y + 7 = 0$ წრფესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს.

299. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$, $C(3; 2)$. იპოვეთ BD სიმაღლის სიგრძე.

300. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(2; 1)$, $B(4; -5)$, $C(1; -1)$. გამოთვალეთ A წერტილზე გავლებულ მედიანზე B წვეროდან დაშვებული მართობის სიგრძე.

301. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(0; -4)$, $B(3; 0)$, $C(0; 6)$. იპოვეთ მანძილი C წერტილიდან A კუთხის ბისექტრისადე.

302. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები: $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$. იპოვეთ AE მედიანისა და AD სიმაღლის განტოლებები.

303. წრფე პარალელურია $x + 4y - 11 = 0$ წრფესა და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს სამკუთხედს, რომლის ფართობი 2 კვ. ერთეულის ტოლია. იპოვეთ ეს წრფე.

304. იპოვეთ წრფე, რომელიც მართობულია $5x + 12y - 1 = 0$ წრფის და $M(3; 1)$ წერტილიდან დაშორებულია 2 ერთეულით.

305. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $5x - y + 10 = 0$ და $8x + 4y + 9 = 0$ წრფეთა გადაკვეთის M წერტილზე $x + 3y = 0$ წრფის პარალელურად (M წერტილის მოძებნის გარეშე).

306. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $2x - 3y + 5 = 0$ და $3x + y - 7 = 0$ წრფეთა გადაკვეთის M წერტილზე $y = 2x$ წრფის მართობულად (M წერტილის მოძებნის გარეშე).

307. იპოვეთ $A(-2; -9)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x + 5y - 38 = 0$ წრფის მიმართ.

308. იპოვეთ A ($-5; 13$) წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x-3y-3=0$ წრფის მიმართ.

309. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $3x-2y+1=0$ წრფისა M ($5; 1$) წერტილის მიმართ.

310. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების $3x+y=0$, $x-3y=0$ განტოლებები და $(5; 0)$ წერტილი მის ფუძეზე. იპოვეთ მესამე გვერდის განტოლება.

311. ორღიანატა ღერძზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული კოორდინატთა სათაეიდან და $3x-4y+12=0$ წრფიდან.

312. $2x+y-3=0$ წრფეზე აღებულია A ($1; 1$) წერტილი. ამავე წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც A წერტილიდან დაშორებულია $d = \sqrt{5}$ მანძილით.

313. A ($5; 2$) წერტილიდან რაკუთხით უნდა დაეცეს სხივი Ox ღერძს, რომ არეკვლილმა სხივმა გაიაროს B ($-1; 4$) წერტილზე?

314. M ($-2; 3$) წერტილიდან სინათლის სხივი ეცემა Ox ღერძს α კუთხით და არეკლება. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები, თუ $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

315. A ($2; 3$) წერტილიდან სინათლის სხივი ეცემა $x-2y+8=0$ წრფეს 45° -იანი კუთხით და არეკლება. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები.

316. სინათლის სხივი, რომელიც გადის A ($2; 3$) წერტილზე, აირეკლება $x+y+1=0$ წრფიდან და გადის B ($1; 1$) წერტილზე. იპოვეთ დაცემული და არეკვლილი სხივების განტოლებები.

317. მოცემულია პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებანი: $x-3y-2=0$, $2x-y+5=0$ და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი M ($1; 2$). იპოვეთ დანარჩენი ორი გვერდის განტოლება.

318. მოცემულია ოთხკუთხედის წვეროები: A ($0; 7$), B ($6; 2$), C ($6; -5$), D ($-9; 5$). აჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედი ტრაპეციაა და გამოთვალეთ მისი სიმაღლე.

319. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები A ($2; 3; -1$), B ($1; -2; 0$) და C ($-3; 2; 2$). დაწერეთ AP მედიანის კანონიკური განტოლება.

320. დაწერეთ იმ წრფის კანონიკური და პარამეტრული სახის განტოლებები, რომელიც გადის M_0 ($-1; 1; -3$) წერტილზე და პარალელურია $\vec{s} = (1; -3; 4)$ ვექტორის.

321. შეადგინეთ იმ პარალელოგრამის დიაგონალების კანონიკური განტოლებები, რომლის სამი წვეროა A ($2; 4; 6$), B ($-3; 5; 4$) და C ($8; -6; 2$).

322. მოცემულია სამკუთხედის წვეროები $A(-5; 7; 1)$, $B(2; 4; -1)$, $C(-1; 3; 5)$. დაწერეთ B წერტილიდან AC გვერდზე დაშვებული მედიანის განტოლება.

323. მოცემულია წრფის განტოლებები ზოგადი სახით:

$$x + 2y + 3z - 13 = 0, \quad 3x + y + 4z - 14 = 0.$$

ჩაწერეთ ისინი უმარტივესი, კანონიკური და პარამეტრული სახით.

324. მოცემულია წრფის განტოლებები ზოგადი სახით:

$$2x - 3y - 3z - 9 = 0, \quad x - 2y + z + 3 = 0.$$

ჩაწერეთ ისინი კანონიკური სახით და იპოვეთ წრფის მიმართულების კოსინუსები.

325. დაწერეთ $M_1(-1; 2; 3)$ და $M_2(2; 6; -2)$ წერტილებზე გაშვებული წრფის განტოლებები და იპოვეთ მისი მიმართულების კოსინუსები.

326. დაწერეთ შემდეგ წრფეთა განტოლებები კანონიკური სახით:

$$1) x = 2z - 5, \quad y = 6z + 7; \quad 2) y = 4, \quad z = 3x + 12.$$

იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეებს შორის:

$$327. 1) \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \quad \text{და} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1};$$

$$2) x = 5z + 1, \quad y = 2 \quad \text{და} \quad x = z + 3, \quad y = 4z - 3.$$

$$328. 1) y = \frac{3}{2}x + 8, \quad z = 3x \quad \text{და} \quad y = 6, \quad z = \frac{15}{8}x + 6;$$

$$2) \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{და} \quad x + 2y - z = 0, \quad x - 2y + 3z - 3 = 0.$$

329. $A(2; -3; -8)$ წერტილზე გაყვლით წრფე; 1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{5}$ წრფის პარალელურად; 2) Oz ღერძის პარალელურად.

330. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(5; 4; 0)$ წერტილზე $y=9x-1$, $z=2x+5$ წრფის პარალელურად.

331. შეამოწმეთ, მდებარეობს თუ არა შემდეგი სამი წერტილი ერთ წრფეზე: 1) $A(3; 0; 1)$, $B(0; 2; 4)$, $C\left(1; \frac{4}{3}; 3\right)$; 2) $A(2; -1; 3)$, $B(4; 2; -3)$, $C(1; 2; 5)$.

332. იპოვეთ მახვილი γ კუთხე, რომელსაც ადგენს $x=z+2$,
 $y=-2z+3$ წრფე Oz ღერძთან.

333. დაწერეთ იმ წრფის პარამეტრული განტოლებები, რომელიც
გაღის $A(-2; 1; -1)$ წერტილზე $\vec{P}(1; -2; 3)$ ვექტორის პარალელურად.

334. დაწერეთ $M(x, y, z)$ წერტილის ტრანექტორიის განტოლებები, თუ ის გამოვიდა საწყისი $A(4; -3; 1)$ წერტილიდან და მოძრაობს
 $\vec{v}(2; 3; 1)$ სიჩქარით.

335. წრფე გაღის $A(2; -3; 4)$ წერტილზე Oz ღერძის მართობულად და კვეთს თვით ამ ღერძს. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

336. დაწერეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გაღის $A(a, b, c)$
წერტილზე Oz ღერძის მართობულად.

337. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გაღის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ და $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$
წრფეების მართობულად.

338. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც გაღის
 $A(2; -1; 3)$ წერტილზე $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ და $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$
წრფეების მართობულად.

339. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც მოთავსებულია
 xOy სიბრტყეზე და გაღის $A(-2; 1; 0)$ წერტილზე $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+6}{2} = \frac{z}{1}$ წრფის მართობულად.

340. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლებები, რომელიც მოთავსებულია
 xOz სიბრტყეზე და გაღის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$ წრფის მართობულად.

341. წრფე გაღის $A(1; -5; 3)$ წერტილზე და საკოორდინატო ღერძებთან ადგენს $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=120^\circ$ კუთხეებს; დაწერეთ ამ
წრფის განტოლებები.

342. წრფე გაღის $A(3; 1; -1)$ წერტილზე და Ox და Oy ღერძებთან ადგენს შესაბამისად 45° და 60° კუთხეებს. დაწერეთ ამ წრფის
განტოლებები.

313. დამტკიცეთ, რომ

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

აცდენილი წრფეებია.

314. დამტკიცეთ, რომ:

$$\begin{cases} x + y - z + 4 = 0; \\ 2x - 3y - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{და} \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

წრფეები იკვეთებიან და იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი.

§ 5. სიბრტყე და წრფე

φ კუთხე $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ წრფესა და $Ax + By + Cz + D = 0$ სიბრტყეს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

წრფისა და სიბრტყის პარალელობის პირობაა:

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

ხოლო მართობულობისა:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

თუ წრფე სიბრტყეზე ძევს, მაშინ

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad \text{და} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

ორი

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{და} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

წრფის ერთ სიბრტყეზე მდებარეობის (ან მათი გადაკვეთის) პირობაა:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

მოცემულ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ წრფეზე გამავალი სიბრტყეთა კონის განტოლებაა:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

სადაც λ პარამეტრია.

11111111. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც xy ღერძის პარალელურია და გადის $x+3y+5z-4=0$ და $x-y-2z+7=0$ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეზე.

▷. სიბრტყეთა კონის განტოლებაა:

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z - 4 + \lambda(x - y - 2z + 7) &= 0; \\ (1 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z + (7\lambda - 4) &= 0. \end{aligned}$$

ვინაიდან საძიებელი სიბრტყე xy ღერძის პარალელურია, ამიტომ y -ის კოეფიციენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი: $3 - \lambda = 0$, ე. ი. $\lambda = 3$. λ -ს ამ მნიშვნელობას თუ შევიტანთ სიბრტყის განტოლებაში, მივიღებთ: $4x - z + 17 = 0$. ◀

მაგალითი. იპოვეთ კუთხე $A(-1; 0; -5)$ და $B(1; 2; 0)$ წერტილებზე გაშვალ წრფესა და $x - 3y + z + 5 = 0$ სიბრტყეს შორის.

▷. წრფის მიმართველ ვექტორულ შეიძლება ავიღოთ $\vec{Q} = \vec{AB} = (2; 2; 5)$. რადგან სიბრტყის ნორმალური ვექტორია $\vec{N}(1; -3; 1)$ ამიტომ

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{Q}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{Q}|} = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{1 + 9 + 1} \cdot \sqrt{4 + 4 + 25}} = \frac{1}{11\sqrt{3}} \quad \triangleleft$$

მაგალითი. იპოვეთ $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ წრფისა და $3x + 5y - z - 2 = 0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

◀. მოცემული წრფის განტოლება დავწეროთ პარამეტრული სახით: $x = 12 + 4t$, $y = 9 + 3t$, $z = 1 + t$. ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ სიბრტყის განტოლებაში

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0$$

საიდანაც $t = -3$. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია:

$$x = 12 + 4(-3) = 0, \quad y = 9 + 3(-3) = 0, \quad z = 1 - 3 = -2. \quad \triangleleft$$

მაგალითი. დაწერეთ იმ პერპენდიკულარის კანონიკური სახის განტოლება, რომელიც დაშვებულია კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე

$$4x - y + 2z - 3 = 0.$$

▷. $\vec{N} = (4; -1; 2)$ ვექტორი პერპენდიკულარულია მოცემული სიბრტყის, პარალელურია საძიებელ წრფეს; ამიტომ იგი შეგვიძლია ჩავთვალოთ საძიებელ წრფის მიმართველ ვექტორად; გვექნება:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}. \quad \triangleleft$$

345. იპოვეთ კუთხე: 1) $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-4}{3}$ წრფეს და $2x+y+z+5=0$ სიბრტყეს შორის; 2) $3x-2y=24$, $3x-z=-4$ წრფეს და $6x+15y-10z+31=0$ სიბრტყეს შორის.

346. იპოვეთ კუთხე $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ წრფესა და $2x+y+z-4=0$ სიბრტყეს შორის.

347. აჩვენეთ, რომ $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ წრფე $4x-3y-6z-5=0$ სიბრტყის პარალელურია.

348. k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $x=kz+2$, $y=2kz+4$ წრფე $x+y+z=0$ სიბრტყის პარალელური?

349. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ წრფის მართობულად.

350. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $(-1; -5; 8)$ წერტილზე $\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$ წრფის მართობულად.

351. იპოვეთ წრფე, რომელიც გადის $(1; 1; 1)$ წერტილზე $x+2y+z-1=0$ სიბრტყის მართობულად.

352. A და B კოეფიციენტების რა მნიშვნელობისათვის იქნება $Ax+By+6z-7=0$ სიბრტყე $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$ წრფის მართობული?

იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

353. 1) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ წრფისა $2x+5y-z-2=0$

სიბრტყესთან;

2) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ წრფისა $x+3y-5z+2=0$

სიბრტყესთან.

354. 1) $y=-2x+9$, $z=9x-43$ წრფისა $3x-4y+7z-33=0$ სიბრტყესთან;

2) $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$ წრფისა $3x+y-4z=0$ სიბრტყესთან.

355. იპოვეთ $A(5; 2; -1)$ წერტილის გეგმილი $2x-y+3z+23=0$ სიბრტყეზე.

256. იპოვეთ კუთხე $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-1}{-3}$ წრფესა და $6x-3y+$
 $+2z=0$ სიბრტყეს შორის.

257. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(3; -2; 4)$ წერტილზე და პერპენდიკულარულია $5x+3y-7z+1=0$ სიბრტყის.

258. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $4x-3z+$
 $+20=0$, $4y-z-8=0$ წრფეზე $x+y-z+15=0$ სიბრტყის მართობულად.

259. იპოვეთ $3x+2y-4z-5=0$, $6x-y-2z+4=0$ წრფის გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

260. იპოვეთ $2x-3y=0$, $x+y-4=0$ წრფის გეგმილები საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

261. იპოვეთ $3x-2y-z+4=0$, $x-4y-3z-2=0$ წრფის გეგმილი $5x+2y+2z-7=0$ სიბრტყეზე.

262. იპოვეთ $2x+3y+4z+5=0$, $x-6y+3z-7=0$ წრფის გეგმილი $2x+2y+z-15=0$ სიბრტყეზე.

263. იპოვეთ $A(4; -3; 1)$ წერტილის გეგმილი $x+2y-z-3=0$ სიბრტყეზე.

264. იპოვეთ $A(2; -1; 3)$ წერტილის გეგმილი $x=3t$, $y=5t-7$,
 $z=2t+2$ წრფეზე.

265. $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{3}$ წრფეზე იპოვეთ $A(0; 4; 1)$ წერტილის უახლოესი წერტილი.

266. განსაზღვრეთ λ ისე, რომ $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$ და $4x-y-2z+\lambda=0$ სიბრტყეები გადაკვეთოს ერთ წრფეზე.

267. აჩვენეთ, რომ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$, $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ წრფეები ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს; იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

268. განსაზღვრეთ, L -ის რა მნიშვნელობისათვის იკვეთება შემდეგი წრფეები:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{L} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

369. წრფე გადის $M(1; 1; 1)$ წერტილზე და კვეთს ორ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$,

$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{4}$ წრფეს. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

370. წრფე გადის $M(1; 2; 3)$ წერტილზე, კვეთს Oz ღერძს და მართობულია $x = y = z$ წრფისა. დაწერეთ ამ წრფის განტოლებები.

§ 4. მართობი რივის ალგებრული წირები

მეორე რივის ალგებრული წირის განტოლებას ზოგადად აქვს სახე:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

სადაც A , B და C კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. საზოგადოდ შეიძლება (1) განტოლებით განისაზღვროს ე. წ. გადაგვარებული წირი (ცარიელი სიმრავლე, წერტილი, წრფე ან წრფეთა წყვილი).

თუ L წირი არაგადაგვარებულია, მაშინ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით (1) დაიყვანება ერთ-ერთ შემდეგ სახის უმარტივეს (კანონიკურ) განტოლებამდე:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ ელიფსი,} \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \text{ ჰიპერბოლა,} \quad (3)$$

$$y^2 = 2px, \quad \text{პარაბოლა.} \quad (4)$$

თუ (2) განტოლებაში $a = b = R$, მაშინ მიიღება წრეწირის განტოლება ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

თუ წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია წერტილში (x_0, y_0) , მაშინ მის განტოლებას ექნება სახე:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

ელიფსს, რომლის კანონიკური განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

აქვს მე-4 ნახაზზე მოცემული ფორმა.

a და b მონაკვეთები ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძებია. ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$. ამ შემთხვევაში $a > b$. a , b და c პარამეტრებს შორის არსებობს ასეთი დამოკიდებულება: $b^2 = a^2 - c^2$.

ელიფსის ეკსცენტრისიტეტი $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$), რადგან $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\text{ამიტომ } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ და } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

ელიფსის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილებია:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.$$

ელიფსის დირექტრისების განტოლებებია: $x = \pm \frac{a}{e}$.

თუ $b > a$, მაშინ ელიფსის ფოკუსები მოთავსებული იქნება Oy ღერძზე. ამ შემთხვევაში:

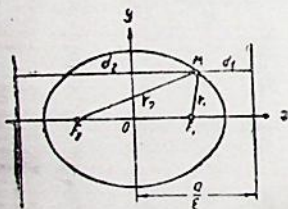
$$a^2 = b^2 - c^2, \quad e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 - e^2}, \quad r_1 = b - ey,$$

$$r_2 = b + ey, \text{ ხოლო დირექტრისების განტოლებები იქნება: } y = \pm \frac{b}{e}.$$

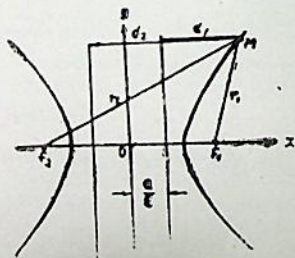
პიპერბოლას, რომლის კანონიკური სახის განტოლებაა

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

აქვს მე-5 ნახაზზე მოცემული ფორმა



ნახ. 4



ნახ. 5

a და b მონაკვეთები ჰიპერბოლის წამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია. ფოკუსების კოორდინატებია: $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$. a , b და c პარამეტრებს შორის არსებული დამოკიდებულება გამოისახება ტოლობით: $b^2 = c^2 - a^2$.

თუ ჰიპერბოლის წარმოსახვითი ღერძი $2a$ მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ, ხოლო წამდვილი ღერძი $2b$ ემთხვევა Oy ღერძს, მაშინ ჰიპერბოლის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ ანუ } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (შეუღლებული ჰიპერ}$$

ბოლა). თუ $a = b$, მაშინ გვაქვს ტოლფერდა ჰიპერბოლა:

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ ან } y^2 - x^2 = a^2.$$

ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$), რადგან $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

ამიტომ $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ და $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$. შეუღლებული ჰიპერბოლისათვის

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{e^2 - 1}.$$

ჰიპერბოლის დირექტრისების განტოლებებია: $x = \pm \frac{a}{e}$ ან $y = \pm \frac{b}{e}$,

ხოლო ასიმპტოტებისა: $y = \pm \frac{b}{a}x$. ჰიპერბოლის ფოკალური რადიუს-

ექტორები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$r_1 = |ex - a|, \quad r_2 = |ex + a|.$$

პარაბოლა, რომლის კანონიკური სახის განტოლებაა:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

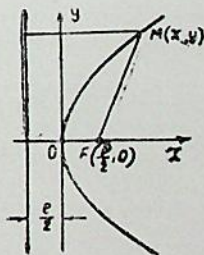
აქვს მე-6 ნახაზზე მოცემული ფორმა.

სადაც p პარამეტრი გამოისახავს მანძილს ფოკუსიდან დირექტრისამდე.

პარაბოლის დირექტრისის განტოლება არის $x = -\frac{p}{2}$, ხოლო ფოკუსის

5. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული

ნახ. 6



კოორდინატები — $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. პარაბოლის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორი $r = x + \frac{p}{2}$.

$x^2 = 2py$ განტოლება გამოსახავს აგრეთვე პარაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძია Oy . ამ პარაბოლის ფოკუსია $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, ხოლო დირექტრისის განტოლება $y = -\frac{p}{2}$; $M(x, y)$ წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორია $r = y + \frac{p}{2}$.

მაგალითი. $x + y = 0$ წრფის პარალელური წრფეებიდან გამოყავით ისეთები, რომლებიც ეხებიან $x^2 + y^2 = 1$ წრეწირს.

◁. მოცემული წრფის ყოველი პარალელური წრფის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ამ სახით: $x + y + c = 0$. მხებ წრფეს წრეწირთან გააჩნია მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი: ამიტომ წრფისა და წრეწირის განტოლებებისაგან შედგენილ სისტემას უნდა ჰქონდეს ერთი ამონახსნი. წრფის განტოლებიდან განსაზღვრულა y -ის მნიშვნელობა შევიტანოთ წრეწირის განტოლებაში

$$x^2 + (-x - c)^2 = 1,$$

ი. ი.

$$2x^2 + 2cx + c^2 - 1 = 0$$

ზემოთ მოთხოვნილი პირობის გამო, მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$(2c)^2 - 4 \cdot 2(c^2 - 1) = 0. \text{ ან } -c^2 + 2 = 0, \text{ } c = \pm \sqrt{2}.$$

მაშასადამე, საძიებელი მხებების განტოლებებია:

$$x + y + \sqrt{2} = 0 \text{ და } x + y - \sqrt{2} = 0. \triangleleft.$$

მაგალითი. გამოიკვლიეთ განტოლება $x^2 + y^2 = 2ax$.

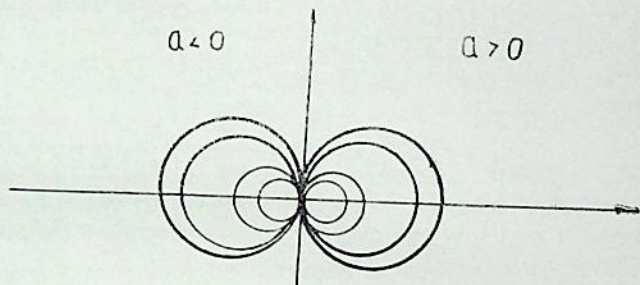
▷. a -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ეს განტოლება განსაზღვრავს წრეწირს, რადგან ცვლადების კვადრატებთან მდგომი კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია, ცვლადების წამრავლიანი წევრი არ შედის. რადგან განტოლება თავისუფალ წევრს არ შეიცავს, წრეწირი გადის კოორდინატთა სათავეზე.

დავუყვანოთ მოცემული განტოლება კანონიკურ სახეს:

$$x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

მაშასადამე, გამოსაკვლევი წრეწირის ცენტრი Ox ღერძის $C(a; 0)$ წერტილი, $R = |a|$, ე. ი. ეხება Oy ღერძს კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 7).



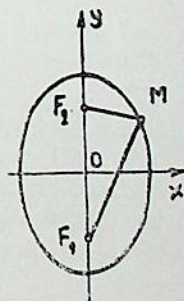
ნახ. 7

სხვადასხვა a -თვის მოცემული განტოლება განსახლდრავს ამ წრეწირთა სიმრავლეს, რომელთა ცენტრი Ox ღერძზეა და ეხებიან Oy ღერძს. როცა $a > 0$, შესაბამისი წრეწირი მარჯვენა ნახევარსიბრტყეშია, ხოლო როცა $a < 0$ — მარცხენაში. როცა $a = 0$ წრეწირი გადაგვარდება $(0, 0)$ წერტილად.

მაგალითი. იპოვეთ ნახევარღერძები, ფოკუსების კოორდინატები და ექსცენტრისიტეტი $16x^2 + 4y^2 = 64$ ელიფსისა.

▷ დავუყვანოთ მოცემული განტოლება კანონიკურ სახეზე:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$



ნახ. 8

ე. ი. ელიფსის დიდი ნახევარღერძი $a = 2$, მცირე $b = 4$. ამასთან ელიფსის დიდი ღერძი და ფოკუსები მოთავსებულია Oy ღერძზე (ნახ. 8).

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 2\sqrt{3}. \text{ მაშასადამე, ფოკუსების კოორდინატებია } (0; -2\sqrt{3}) \text{ და } (0; 2\sqrt{3}), \text{ ხოლო ექსცენტრისიტეტი } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \triangleleft.$$

მაგალითი. ჰიპერბოლის ასიმპტოტების განტოლებებია $4x \pm 3y = 0$, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი ტოლია 20-ის. დაწერეთ მისი კანონიკური განტოლება.

▷. ამოვხსნათ y -ის მიმართ ასიმპტოტების განტოლებები, მივიღებთ:

$$y = \pm \frac{3}{4}x, \text{ ე. ი. } \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

ამასთან, $F_1 F_2 = 2c = 20$, $c = 10$. რადგან ჰიპერბოლისათვის $c^2 = a^2 + b^2$, ამიტომ a და b -ს საპოვნელად მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

საიდანაც $a = 8$, $b = 6$. მაშასადამე, ჰიპერბოლის საძიებელ კანონიკურ განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \triangleleft.$$

ამოხსენით ამოცანები:

× 371. დაწერეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია $A(4; 5)$ და $B(-2; 1)$.

+ 372. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $5x - 12y - 24 = 0$ წრფეს და რომლის ცენტრია $C(6; 7)$ წერტილი.

× 373. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც Oy ღერძს ეხება კოორდინატთა სათავეში, ხოლო Ox ღერძს კვეთს $A(-6; 0)$ წერტილში.

იპოვეთ რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები შემდეგი წრეწირებისა:

γ 374. 1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 3y = 0$.

χ 375. 1) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + x = 0$; 3) $3x^2 + 3y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$.

376. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის Oy ღერძს ეხება $A(0; -3)$ წერტილში და რადიუსი უდრის 2-ს.

377. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის Ox ღერძს ეხება კოორდინატთა სათავეში და ვადის $A(0; -4)$ წერტილზე. იპოვეთ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებთან.

378. მოცემულია $(x-1)^2 + y^2 = 4$ წრეწირი. $A\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ წერტილზე კაავლეთ ქორდა, რომელიც ამ წერტილიდან მუხზე იყოფა.

379. შეადგინეთ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 30$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+2y-13=0$ წრფისა.

380. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება საკოორდინატო ღერძებს და ვადის $A(1; 2)$ წერტილზე.

381. შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ვადის $A(3; 0)$, $B(-1; 2)$ წერტილებზე და რომლის ცენტრი მდებარეობს $x-y+2=0$ წრფეზე.

შეადგინეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომელიც ვადის მოცემულ სამ წერტილზე.

382. $A(9; 3)$, $B(-3; 3)$, $C(11; 1)$.

383. $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$, $C(1; -1)$.

384. როგორ არის განლაგებული $M_1(3; 4)$, $M_2(-1; 2)$ და $M_3(-5; 4)$ წერტილები $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ წრეწირის მიმართ?

385. დაამტკიცეთ, რომ $y=2x+5$ წრფე და $x^2+y^2=1$ წრეწირი არ იკვეთებიან.

386. როგორ არის განლაგებული $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$ წრეწირის მიმართ შემდეგი წრფეები: 1) $4x-3y-1=0$; 2) $3x-y-5=0$; 3) $3x-4y+12=0$.

387. რა მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ განტოლების კოეფიციენტებს, რომ ის განსაზღვრავდეს წრეწირის ცენტრით $C(3; 2)$ წერტილში და $R=5$ რადიუსით?

388. იპოვეთ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ წრეწირისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1) $x - y - 4 = 0$; 2) $3x - 4y + 36 = 0$; 3) $x - y - 5 = 0$.

389. შეადგინეთ $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ და $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$ წრეწირების საერთო ქორდის განტოლება.

390. შეადგინეთ $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ და $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$ წრეწირების საერთო ქორდისა და მათ ცენტრებზე გავიანი წრფის განტოლებები.

391. წრეწირი ეხება $2x+y-5=0$ და $2x+y+15=0$ პარალელურ წრფეებს, მასთან ერთ-ერთ მათგანს — $A(2; 1)$ წერტილში. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

392. წრეწირი, რომლის ცენტრიც მდებარეობს $2x+y=0$ წრფეზე, ეხება $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ წრფეებს. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

393. იპოვეთ მანძილი $A(6; -8)$ წერტილიდან $x^2+y^2=9$ წრეწირამდე.

394. იპოვეთ მანძილი $A(-7; 2)$ წერტილიდან $(x-5)^2+(y-7)^2=225$ წრეწირამდე.

395. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი $A(-4; 4)$ წერტილამდე ორჯერ აღემატება $B(-1; 1)$ წერტილამდე მანძილს;

2) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებამდე მანძილთა კვადრატების ჯამი უდრის a^2 -ს.

396. მოცემულია $x^2+y^2=a^2$ წრეწირი. იპოვეთ მისი $A(a; 0)$ წერტილიდან გავლებული ქორდების შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

397. მოცემულია $A(-6; 0)$ და $B(2; 0)$ წერტილები. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიდანაც OA და OB მონაკვეთები მოიხანს ტოლი კუთხეებით.

398. მოცემულია $x^2+y^2=2ax$ წრეწირი. კოორდინატთა სათავიდან გავლებული ყოველი ON ქორდა გაგრძელებულია და მასზე გადაზომილია $NM=ON$ მონაკვეთი. იპოვეთ M წერტილების გეომეტრიული ადგილი.

399. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის 6-ს, ხოლო დიდი ნახევარღერძია 5; 2) დიდი ნახევარღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e=0,8$.

400. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ: 1) მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) ნახევარღერძების ჯამია 10,

ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი — $4\sqrt{5}$.

იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსებისა:

39 401. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$; 2) $16x^2 + y^2 = 16$.

40 402. 1) $25x^2 + 169y^2 = 4225$; 2) $9x^2 + y^2 = 36$.

403. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი ფოკუსიდან ელიფსის დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 7 და 1.

404. იპოვეთ შემდეგი წრეწევებისა და ელიფსების გადაკვეთის წერტილები: 1) $2x - y - 9 = 0$, $x^2 + 3y^2 = 36$; 2) $3x + 10y - 25 = 0$, $4x^2 + 25y^2 = 100$; 3) $3x - 4y - 40 = 0$, $9x^2 + 16y^2 = 144$.

405. განსაზღვრეთ $A(6; -3)$ $B(-2; 5)$ და $C(3; -6)$ წერტილების მდებარეობა $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ ელიფსის მიმართ.

406. აავეთ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსის ფოკუსები ისე, რომ არ გამოთვალეთ მათი კოორდინატები.

407. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ: 1) მისი მცირე ღერძი ფოკუსიდან მოჩანს მართი კუთხით; 2) ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის დიდი და მცირე ღერძების ბოლოებს შორის მანძილს.

408. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ: 1) მისი დიდი ღერძი 3-ჯერ აღემატება მცირე ღერძს; 2) ღერძების ფარდობაა 5 : 3.

409. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ეს ვადის შემდეგ ორ წერტილზე: $A(\sqrt{3}; -2)$ და $B(-2\sqrt{3}; 1)$.

410. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ეს ვადის შემდეგ ორ წერტილზე: $A(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ და $B(6; 0)$. იპოვეთ ექსცენტრისიტეტი და A წერტილის რადიუს-ვექტორები.

411. იპოვეთ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ ელიფსის იმ დიამეტრის სიგრძე, რომელიც ემთხვევა მეორე საკოორდინატო კუთხის ბისექტორას.

412. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის იმ ქონდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია $F_1(c; 0)$ ფოკუსზე დიდი ღერძის მართობულად.

413. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორებული მცირე ღერძიდან.

414. $x = -5$ წრეწევზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული $x^2 + 5y^2 = 20$ ელიფსის მარცხენა ფოკუსიდან და ზედა წვეროდან.

415. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადაა.

416. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც

4-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენადას.

417. $x^2 + 4y^2 = 4$ ელიფსში ჩახსულია წესიერი სამკუთხედი, რომლის ერთი წვეროს დიდი ღერძის მარჯვენა ბოლოა. იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი წვეროს კოორდინატები.

418. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვეროს $9x^2 + 5y^2 = 1$ ელიფსის ფოკუსებია. ხოლო დანარჩენი ორი წვერო ემთხვევა მცირე ღერძის ბოლოებს.

419. დაწერეთ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ელიფსის ღირექტრისების განტოლებები.

420. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ფოკუსებს შორის მანძილია 2, ღირექტრისებს შორის კი — 10.

421. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის მცირე ნახევარღერძია $2\sqrt{6}$, ხოლო ღირექტრისების განტოლებებია $x = \pm 10$.

422. დაწერეთ იმ ელიფსის განტოლება, რომლის ღირექტრისებს შორის მანძილია 36, ხოლო რომელიმე წერტილის ფოკალური რადიუს-ვექტორებია 9 და 15.

423. იპოვეთ $x^2 + 4y^2 = 4$ ელიფსისა და იმ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები, რომელიც ვადის ელიფსის ფოკუსებზე; წრეწირის ცენტრი ელიფსის ზედა წვეროა.

424. $x^2 + 5y^2 = 20$ ელიფსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ურთიერთმართობულია.

425. $y = -x + m$ წრფე m -ის რა მნიშვნელობისათვის: 1) კვეთს $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ელიფსს; 2) ეხება მას; 3) ვადის მის გარეთ.

426. გამოიყვანეთ პირობა იმისა, რომ $y = kx + m$ წრფე ეხებოდეს $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსს.

427. P და Q სიბრტყეებს შორის კუთხე $\varphi = 30^\circ$. განსაზღვრეთ იმ ელიფსის ნახევარღერძები, რომელიც მიიღება P სიბრტყეზე მდებარე $R = 10$ რადიუსიანი წრეწირის Q სიბრტყეზე დავეგმილებით.

428. ელიფსი, რომლის მცირე ნახევარღერძია 6, $R = 12$ რადიუსიანი წრეწირის გვეგმილია. განსაზღვრეთ კუთხე იმ სიბრტყეებს შორის, რომელზედაც წრეწირი და ელიფსია მოთავსებული.

429. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა $F_1(2; 0)$ და $F_2(-2; 0)$ წერტილებამდე მანძილების ჯამია $2\sqrt{5}$.

430. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 3-ჯერ მეტი მანძილია დაშორებულა $x=9$ წრფიდან, ვიდრე $A(1; 0)$ წერტილიდან.

431. მუდმივი სიგრძის AB მონაკვეთი თავისი ბოლოებით სრიალებს მართი კუთხის გვერდების გასწვრივ. განსაზღვრეთ წირი, რომელსაც აღწერს AB მონაკვეთის ნებისმიერი M წერტილი.

432. იპოვეთ იმ მართობთა შეაწერტლებას გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც დაშვებულია $x^2 + y^2 = R^2$ წრეწირის წერტილებიდან Ox ღერძზე.

433. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილია 10 და წარმოსახვითი ნახევარღერძი $b=4$; 2) ნამდვილი ნახევარღერძი $a=2\sqrt{5}$ და ექსცენტრისიტეტი $e=\sqrt{1,2}$.

434. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{4}{3}$; 2) წარმოსახვითი ნახევარღერძი $b=5$ და ექსცენტრისიტეტი $e=\frac{3}{2}$.

435. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლებისა: 1) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 2) $9y^2 - 16x^2 = 144$.

436. იპოვეთ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი: 2) შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსები მოთავსებულია Oy ღერძზე სათავეს სიმეტრიულად, ხოლო ნახევარღერძებია $a=6$ და $b=12$.

437. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ის გადის $M(-5; 3)$ წერტილზე და მისი ექსცენტრისიტეტი $e=\sqrt{2}$.

438. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ის გადის შემდეგ ორ წერტილზე: $M_1(6; -1)$ და $M_2(-8; 2\sqrt{2})$.

439. მოცემულია $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ ჰიპერბოლა. ავეთ მისი ფოკუსები და ასიმპტოტები.

440. მოცემულია $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლა. დაწერეთ მისი ასიმპტოტების განტოლებები და იპოვეთ შეუღლებულა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

441. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ ჰიპერბოლაზე მოცემულია $M(10; -\sqrt{5})$ წერტი-

ლი. იპოვეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებზეც მოთავსებულია M წერტილის ფოკალური რადიუსები.

✓ 442. შეამოწმეთ, რომ $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ წერტილი ძვეს $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

ჰიპერბოლაზე და იპოვეთ M წერტილის ფოკალური რადიუსები.

443. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე და კუთხე ასიმპტოტებს შორის.

444. იპოვეთ ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი ასიმპტოტი ნამდვილ ღერძთან ადგენს: 1) 60° -იან კუთხეს; 2) α კუთხეს.

445. $A(2; -5)$ წერტილზე გაავლეთ წრფეები $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების პარალელურად.

446. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ასიმპტოტებამდე მანძილების ნამრავლი არის მუდმივი სიდიდე.

447. $x^2 - y^2 = 4$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორები ჭრთიერთმართობულია.

448. იპოვეთ $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ ჰიპერბოლისა და შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილები: 1) $x - 5y = 0$; 2) $2x + y - 18 = 0$; 3) $x - y + 5 = 0$.

449. დაწერეთ იმ ჰიპერბოლას განტოლება, რომლის წვეროები ემთხვევა $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ელიფსის ფოკუსებს, ხოლო ფოკუსები — ელიფსის წვეროებს.

450. ჰიპერბოლას, რომლის ექსცენტრისიტეტია 1,25, $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ელიფსთან აქვს საერთო ფოკუსები. იპოვეთ მისი განტოლება.

451. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) იგი გადის $M(12; 3\sqrt{3})$ წერტილზე, ხოლო ასიმპტოტების განტოლებებია $y = \pm \frac{x}{2}$; 2) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{8}{3}$ და ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{3}{2}$.

452. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ: 1) ასიმპტოტების

განტოლებებია $y = \pm \frac{4}{3}x$, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი $2c = 20$;

2) დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{32}{5}$ და $b = 3$.

453. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც

მარჯვენა ფოკუსიდან დაშორებულია 4,5 ერთეულით.

454. $9x^2 - 16y^2 = 144$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც მარცხენა ფოკუსიდან დაშორებულია 2-ჯერ მეტი მანძილით, ვიდრე მარჯვენადას.

455. ჰიპერბოლა გადის $M\left(6; \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ წერტილზე საკოორდინატო

ღერძების სიმეტრიულად. იპოვეთ მარცხენა ფოკუსიდან ასიმპტოტებზე დაშვებული მართობების განტოლებები, თუ ჰიპერბოლის ნახევლი ნახევარღერძია 4.

456. იპოვეთ $x^2 - 3y^2 = 12$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტების გადაკვეთის წერტილები იმ წრეწირთან, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე; წრეწირის ცენტრი მოთავსებულია ჰიპერბოლის მარჯვენა ფოკუსში.

457. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული $F(-8; 0)$ წერტილიდან, ვიდრე $x = -2$ წრფიდან.

458. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული $F(4; 0)$ წერტილიდან, ვიდრე $x = 1$ წრფიდან.

459. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: 1) სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(1; -4)$ წერტილზე; 2) სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია $F(0; 2)$ წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

460. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: 1) სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(6; -2)$ წერტილზე; 2) სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ, ფოკუსი მოთავსებულია $F(3; 0)$ წერტილში, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

461. იპოვეთ $y^2 = 24x$ პარაბოლის ფოკუსი და დირექტრისის განტოლება.

462. დაწერეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია $F(-7, 0)$ წერტილი, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x - 7 = 0$.

463. $y^2 = 6x$ პარაბოლსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუს-ვექტორია 4.5.

464. $y^2 = 16x$ პარაბოლსზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლის ფოკალურა რადიუს-ვექტორია 13.

465. იპოვეთ $y^2 = 20x$ პარაბოლის ამ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისა $x = 7$.

466. იპოვეთ $y^2 = 12x$ პარაბოლის ამ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატა $y = 6$.

467. $y^2 = 4.5x$ პარაბოლსზე აღებულია $M(x, y)$ წერტილი; M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილი $d = 9,125$. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

468. იპოვეთ $y^2 = 2px$ პარაბოლის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია ფოკუსზე Ox ღერძის მართობულად.

469. იპოვეთ შემდეგი წრფეებისა და პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები:

1) $x + y - 3 = 0$, $y^2 = 4y$; 2) $3x + 4y - 12 = 0$, $y^2 = -9x$;
3) $3x - 2y + 6 = 0$, $y^2 = -6x$.

470. $y = kx + 2$ წრფე k -ს რა მნიშვნელობისათვის: 1) კვეთს $y^2 = 4x$ პარაბოლს; 2) ეხება მას; 3) ვადის მის ვარეთ.

471. გამოიყვანეთ პარაბა იმისა, რომ $y = kx + b$ წრფე ეხებოდეს $y^2 = 2px$ პარაბოლს.

472. იპოვეთ $y^2 = 18x$ პარაბოლისა და $(x+6)^2 + y^2 = 100$ წრეწირის საერთო ქორდის განტოლება.

473. პარაბოლა სიმეტრიულია Ox ღერძისა და ვადის $y = x$ წრფისა და $x^2 + y^2 + 6x = 0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილებზე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

474. პარაბოლა სიმეტრიულია Oy ღერძისა და ვადის $x + y = 0$ წრფისა და $x^2 + y^2 + 4y = 0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილებზე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

475. იპოვეთ $y^2 = 2px$ პარაბოლაში ჩახახული წესიერი სამკუთხედის გვერდის სიგრძე.

476. იპოვეთ $y^2 = 2x$ პარაბოლაში ჩახახული წესიერი სამკუთხედის წვეროები.

477. პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, სიმეტრიის ღერძი ემთხვევა Ox ღერძის უარყოფით მიმართულებას, ხოლო p პარამეტრი უდრის მანძილს $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე; შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

478. პარაბოლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, სიმეტრიის ღერძი ემთხვევა Oy ღერძის უარყოფით მიმართულებას,

ხოლო p პარამეტრი უდრის მანძილს $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ ელიფსის დირექტორსებს შორის. შეადგინეთ ამ პარაბოლის განტოლება.

479. $y^2 = -4x$ პარაბოლის ფოკუსზე ვაკლებულია წრფე, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 120° -იან კუთხეს. იპოვეთ წრფის განტოლება და მიღებული ქორდის სიგრძე.

480. მოცემულია $y^2 = 4x$ პარაბოლი. $A(2; 1)$ წერტილზე გაავლეთ ისეთი ქორდა, რომელიც ამ წერტილით შეახე იყოფა.

481. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული Oy ღერძთან და $F(4; 0)$ წერტილიდან:

2) იპოვეთ $y^2 = 2px$ პარაბოლის ორდინატების შეწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

482. 1) იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული $y = 4$ წრფიდან და $F(0; 2)$ წერტილიდან.

2) იპოვეთ $y^2 = 2px$ პარაბოლის წვეროდან გაკლებული ქორდების შეწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

§ 5. წრფივი სივრცე, ევკლიდეს სივრცე

ნებისმიერ ობიექტთა X სიმრავლეს ეწოდება წრფივი ნამდვილი სივრცე¹, თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1. მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით X სიმრავლის ყოველი x და y ელემენტი შეესაბამება ამ სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელსაც x და y ელემენტების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x + y$ სიმბოლოთი.

2. მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს და ყოველ $\alpha \in R$ რიცხვს შეესაბამება X სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, რომელსაც α რიცხვის x ელემენტზე ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება αx სიმბოლოთი.

3. ეს ოპერაციები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ აქსიომებს:

- 1) $\forall x, y \in X: x + y = y + x,$
- 2) $\forall x, y, z \in X: (x + y) + z = x + (y + z),$
- 3) $\exists 0 \in X, \forall x \in X: 0 + x = x,$
- 4) $\forall x \in X: 1 \cdot x = x,$
- 5) $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in X: (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
- 6) $\forall \alpha \in R, \forall x, y \in X: \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
- 7) $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in X: (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$

¹ შემდგომში წრფივი ნამდვილი სივრცის ნაცვლად გამოიყენება ტერმინი წრფივი სივრცე, რადგან ჩვენ მხოლოდ ასეთ სივრცეებს განვიხილავთ.

წრფივ E სივრცეს ეწოდება ვექლოდური ნამდვილი სივრცე, თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვით E სივრცის ყოველ x და y ელემენტს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ამ ელემენტის სკალარული ნამრავლი ეწოდება და აღინიშნება (x, y) სიმბოლოთი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $\forall x, y \in E : (x, y) = (y, x)$,
2. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in R ; (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$,
3. $\forall x, y, z \in E : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
4. $\forall x \in E : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \iff x = 0$.

წრფივი სივრცის e_1, e_2, \dots, e_n ელემენტთა სასრულ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ელემენტთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

n რიცხვს ეწოდება წრფივი სივრცის განზომილება, თუ მასში წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა მაქსიმალური რიცხვია n .

n განზომილებიანი წრფივი სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა დალაგებულ სისტემას

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

ეწოდება ამ სივრცის ბაზისი და ამ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ასე:

$$X = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ რიცხვებს ეწოდება ელემენტის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში.

ამოხსენით ამოცანები:

483. მოცემული სიმრავლე, რომლის ყოველი a და b ელემენტის ჯამი და აგრეთვე a ელემენტის a რიცხვზე ნამრავლი განსაზღვრულია მითითებული წესით, ადგენს თუ არა წრფივ სივრცეს?

1. სამგანზომილებიანი სივრცის ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები მთელი რიცხვია; ჯამი $a+b$, ნამდვილი aa .

2. ერთ წრფეზე მდებარე ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი aa .

3. სიბრტყის ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომელთაგან თითო-ეული ძვეს რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი ab .

4. სამკვანზომილებიანი სივრცის ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $[a, b]$, ნამრავლი aa .

5. ერთ ღერძზე მდებარე ყველა ვექტორთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი $a|a|$.

6. ყველა ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც x, y, z ვექტორების წრფივი კომბინაციაა; ჯამი $a+b$, ნამრავლი aa .

7. ყველა ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც ლებულობენ დადებით მნიშვნელობებს. ($a = f(t), b = g(t)$); ჯამი $f(t)g(t)$, ნამრავლი $f^a(t)$.

8. $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ყველა ფუნქციათა სიმრავლე, ($a = f(t), b = g(t)$); ჯამი $f(t)+g(t)$, ნამრავლი $a|f(t)$.

9. $[-1, 1]$ სეგმენტზე მოცემული ყველა ლუწ ფუნქციათა სიმრავლე ($a = f(t), b = g(t)$); ჯამი $f(t)+g(t)$, ნამრავლი $a|f(t)$.

10. $[-1; 1]$ სეგმენტზე მოცემული ყველა კენტ ფუნქციათა სიმრავლე ($a = f(t), b = g(t)$), ჯამი $f(t)+g(t)$, ნამრავლი $a|f(t)$.

11. მესამე რიგის (x ცვლადის მიმართ) ყველა პოლინომთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი aa .

12. ყველა დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა n -ყულების სიმრავლე, ($a = (x_1, \dots, x_n), b = (y_1, \dots, y_n)$); ჯამი $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, ნამრავლი $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

13. ყველა დალაგებულ ნამდვილ რიცხვთა n -ყულების სიმრავლე; ($a = (x_1, \dots, x_n), b = (y_1, \dots, y_n)$); ჯამი: $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$, ნამრავლი $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

14. ყველა კვადრი მიმდევრობების სიმრავლე ($a = (a_n), b = (b_n)$); ჯამი $(a_n + b_n)$, ნამრავლი (αa_n) .

15. ერთი ცვლადის ყველა პოლინომთა სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება n -ს; ჯამი $a+b$, ნამრავლი aa .

16. n -ხარისხის ერთი ცვლადის ყველა პოლინომთა სიმრავლე; ჯამი $a+b$, ნამრავლი aa .

17. ყველა დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე ($a = (a_{ik})_1^n, b = (b_{ik})_1^n$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

18. ყველა ვედაუკვარებელ მატრიცთა სიმრავლე ($a = (a_{ik})_1^n, b = (b_{ik})_1^n$); ჯამი $(a_{ik})_1^n \cdot (b_{ik})_1^n$; ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

19. ყველა კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე ($a = (a_{ik})_1^n, b = (b_{ik})_1^n$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

20. ყველა n -ური რიგის დიაგონალურ მატრიცთა სიმრავლე ($a = (a_{ik})_1^n, b = (b_{ik})_1^n$); ჯამი $(a_{ik})_1^n \cdot (b_{ik})_1^n$, ნამრავლი $(\alpha a_{ik})_1^n$.

21. ყველა ერთი და იგივე განზომილების მატრიცთა სიმრავლე ($\mathbf{a} = (a_{ik}), \mathbf{b} = (b_{ik}); i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})$, ნამრავლი (αa_{ik}) .

22. ყველა სიმეტრიულ მატრიცთა სიმრავლე ($\mathbf{a} = (a_{ik})_n^s, \mathbf{b} = (b_{ik})_n^s$); ჯამი $(a_{ik} + b_{ik})$, ნამრავლი (αa_{ik}) .

23. ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ნამრავლი $[\alpha \mathbf{a}]$.

24. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ნამრავლი $\alpha \mathbf{a}$.

25. ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ნამრავლი \mathbf{a}^α .

26. ყველა უარყოფით რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი — $|a| \cdot |b|$, ნამრავლი — $|a|^\alpha$.

27. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე; ჯამი $\mathbf{a} \mathbf{b}$, ნამრავლი $\alpha \mathbf{a}$.

28. ყველა დიფერენცირებადი ფუნქციათა სიმრავლე ($\mathbf{a} = f(t), \mathbf{b} = g(t)$); ჯამი $f(t) + g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

29. ყველა დიფერენცირებადი ფუნქციათა სიმრავლე ($\mathbf{a} = f(t), \mathbf{b} = g(t)$); ჯამი $f(t) \cdot g(t)$, ნამრავლი $\alpha f(t)$.

484. გამოივსოთ არს თუ არა წრფივად დამოკიდებული ძველ-მენტთა სისტემა:

1. $\mathbf{a} = (1, 4, 6), \mathbf{b} = (1, -1, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 3)$.

2. $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x \quad] - \pi/2, \pi/2 [-$ ზე.

3. $\mathbf{a} = (2, -3, 1), \mathbf{b} = (3, -1, 5), \mathbf{c} = (1, -4, 3)$.

4. $2, \sin x, \sin^2 x, \cos^2 x \quad (-\infty, +\infty)$ -ზე.

5. $\mathbf{a} = (5, 4, 3), \mathbf{b} = (3, 3, 2), \mathbf{c} = (8, 1, 3)$.

6. $1, x, \sin x \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

7. $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (0, 0, 1)$.

8. $e^x, e^{2x}, e^{3x} \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

9. $\mathbf{a} = (1, -1, 2), \mathbf{b} = (-1, 1, -1), \mathbf{c} = (2, -1, 1)$.

10. $x, x^2, (1+x)^2, \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

11. $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (4, 5, 6), \mathbf{c} = (7, 8, 9)$.

12. $1, x, x^2, (1+x)^2 \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

13. $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 3), \mathbf{c} = (1, 3, 6)$.

14. $\cos x, \sin x, \sin 2x, \quad] -\pi/2, \pi/2 [-$ ზე.

15. $\mathbf{a} = (3, 4, -5), \mathbf{b} = (8, 7, -2), \mathbf{c} = (2, -1, 8)$.

16. $e^x, e^{-x}, e^{2x} \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

17. $\mathbf{a} = (3, 2, -4), \mathbf{b} = (4, 1, -2), \mathbf{c} = (5, 2, -3)$.

18. $1+x+x^2, 1+2x+x^2, 1+3x+x^2 \quad] -\infty, +\infty [-$ ზე.

19. $\mathbf{a} = (0, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 0, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 0)$.

20. $1, e^x, \operatorname{sh} x \mid -\infty, +\infty \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 21. $a = (5, -6, 1), b = (2, -5, -2), c = (2, -1, 3).$
 22. $1/x, x, 1 \mid 0, 1 \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 23. $a = (7, 1, -3), b = (2, 2, -4), c = (5, -3, 5).$
 24. $1, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x \mid 0, \pi/2 \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 25. $a = (1, 2, 3), b = (6, 5, 9), c = (7, 8, 9).$
 26. $x, 1+x, (1+x)^2 \mid -\infty, +\infty \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 27. $a = (2, 1, 0), b = (-5, 0, 3), c = (3, 4, 3).$
 28. $e^x, x e^x, x^2 e^x \mid -\infty, +\infty \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 29. $a = (2, 0, 2), b = (1, -1, 0), c = (0, -1, -2).$
 30. $e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x \mid -\infty, +\infty \mid \cdot^{\text{ხე}}.$
 31. $a = (-2, 1, 5), b = (4, -3, 0), c = (6, -1, 10).$

იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სივრცის რომელიმე ბაზისი და განსწორება:

$$485. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$486. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$487. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$488. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$489. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$490. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$491. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 23x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

492.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
493.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$
494.
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$$
495.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$
496.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$
497.
$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$
498.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
499.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
500.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$
501.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$
502.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$503. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$504. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$505. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$506. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$507. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$508. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$509. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$510. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$511. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$512. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$513. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$514. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$492. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$493. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$494. \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$495. \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$496. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$497. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$498. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$499. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$500. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$501. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$502. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$503. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$504. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$505. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$506. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$507. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$508. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$509. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$510. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$511. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$512. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$513. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$514. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$515. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

იპოვეთ x ვექტორის კოორდინატები (e_1, e_2, e_3) ბაზისში, თუ ის ცნობილია (e_1, e_2, e_3) ბაზისში.

$$516. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (6, -1, 3). \end{cases}$$

$$517. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e_2' = (3/2)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, 2, 4). \end{cases}$$

$$518. \begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + 4e_3, \\ e_2' = (4/3)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, 3, 6). \end{cases}$$

$$519. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (3/2)e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2, 4, 1). \end{cases}$$

$$520. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (4/3)e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (6, 3, 1). \end{cases}$$

$$521. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2' = (5/4)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, 4, 8). \end{cases}$$

$$522. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (5/4)e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (8, 4, 1). \end{cases}$$

$$523. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = (6/5)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2, 5, 10). \end{cases}$$

$$524. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (6/5)e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (10, 5, 1). \end{cases}$$

$$525. \begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = (7/6)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, 6, 12). \end{cases}$$

526.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (7/6)e_3, \\ e'_2 = 7e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-12, 6, 1). \end{cases}$$
527.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e'_2 = (8/7)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-1, 7, 14). \end{cases}$$
528.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3, \\ e'_2 = (1/2)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (-3, 2, 4). \end{cases}$$
529.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (1/2)e_3, \\ e'_2 = -e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2, 4, 3). \end{cases}$$
530.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e'_2 = (2/3)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (2, 6, -3). \end{cases}$$
531.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (2/3)e_3, \\ e'_2 = -2e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (12, 3, -1). \end{cases}$$
532.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e'_2 = (3/4)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, -4, 8). \end{cases}$$
533.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3, \\ e'_2 = (3/4)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, 4, -8). \end{cases}$$
534.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ e'_2 = (4/5)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (7, -5, 10). \end{cases}$$
535.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (4/5)e_3, \\ e'_2 = -4e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (5, -5, -4). \end{cases}$$
535.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 5e_3, \\ e'_2 = (5/6)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (1, -6, 6). \end{cases}$$
537.
$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (5/6)e_3, \\ e'_2 = -5e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad x = (6, 6, 2). \end{cases}$$

$$588. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 6e_3, \\ e'_2 = (6/7)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (1, 7, -7).$$

$$589. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (6/7)e_3, \\ e'_2 = -6e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (7, 7, 2).$$

$$540. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 7e_3, \\ e'_2 = (7/8)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (3, -8, 8).$$

$$541. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 8e_3, \\ e'_2 = (8/9)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (1, -9, 9).$$

$$542. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (8/9)e_3, \\ e'_2 = -8e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (9, 9, 2).$$

$$543. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 9e_3, \\ e'_2 = (9/10)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (3, -10, 10).$$

$$544. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + (9/10)e_3, \\ e'_2 = -9e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (10, 10, 7).$$

$$545. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 10e_3, \\ e'_2 = (10/9)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (1, 9, 18).$$

$$546. \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 11e_3, \\ e'_2 = (11/10)e_1 - e_2, \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3, \end{cases} x = (1, 10, 10).$$

ვთქვათ $x = (x_1, x_2, x_3)$. არის თუ არა წრფივი შემდეგი გარდაქმნა:

$$547. \begin{aligned} Ax &= (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3), \\ Bx &= (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2), \\ Cx &= (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

$$548. \begin{aligned} Ax &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2), \\ Bx &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3), \\ Cx &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

$$549. \begin{aligned} Ax &= (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^2 + 3x_3), \\ Bx &= (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3), \\ Cx &= (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3). \end{aligned}$$

550. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$
 $Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4),$
 $Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^2 - 3x_2 - 4x_3).$
551. $Ax = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3, 4x_1 - 5x_2 - 6),$
 $Bx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^2 - 5x_2 - 6x_3),$
 $Cx = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3).$
552. $Ax = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3),$
 $Bx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3),$
 $Cx = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5).$
553. $Ax = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
 $Bx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$
 $Cx = (x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^2 + 5x_2 + 6x_3).$
554. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3),$
 $Bx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
555. $Ax = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3^2),$
 $Bx = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Cx = (2x_1 - x_2, 1, x_1 + 2x_2 + 3).$
556. $Ax = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$
 $Bx = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7),$
 $Cx = (x_3, 0, 5x_1^2 + 6x_2 + 7x_3).$
557. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$
 $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0),$
 $Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3^2, 0).$
558. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_2^2),$
 $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, 1),$
 $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_3).$
559. $Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3),$
 $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3),$
 $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1, x_2 + 2).$
560. $Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3),$
 $Bx = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_1 - 2x_2 - 3),$
 $Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_1^2 - 2x_2 - 3x_3).$
561. $Ax = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$
 $Bx = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5),$
 $Cx = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3).$
562. $Ax = (2x_1 + x_2, x_2^2, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$
 $Bx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$
 $Cx = (2x_1 + x_2, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4).$

563. $Ax = (x_1, x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
 $Bx = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5),$
 $Cx = (x_1, x_2^2 - 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3).$
564. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Bx = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0),$
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
565. $Ax = (2x_1^2 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$
 $Bx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3),$
 $Cx = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3).$
566. $Ax = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
 $Bx = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6),$
 $Cx = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$
567. $Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
 $Bx = (6x_1 - 5x_2 - 4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2),$
 $Cx = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^2, 3x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$
568. $Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3),$
 $Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
569. $Ax = (4x_1 - 3x_2^2 - 2x_3, x_1 + x_3, 0),$
 $Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3),$
 $Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3).$
570. $Ax = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 9x_2 + x_3),$
 $Bx = (3x_1 + 4x_2 + 5, 6x_1 + 7x_2 + 8, 9x_1 + x_3),$
 $Cx = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^2, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3, 0).$
571. $Ax = (2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7, 8x_1 + x_3),$
 $Bx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^2, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 0),$
 $Cx = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3, 8x_1 + x_3).$
572. $Ax = (x_1^2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 0),$
 $Bx = (x_1 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3),$
 $Cx = (x_1 + 1, 2x_1 + 3x_2 + 4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3).$
573. $Ax = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 3x_3, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
 $Bx = (3x_1 - 2x_2 - 1, x_2 + 2, 3x_1 + 4x_2 + 5x_3),$
 $Cx = (3x_1 - 2x_2 - x_3^2, x_2 + 2x_3, 0).$
574. $Ax = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3),$
 $Bx = (2x_1 - x_2^2, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 0),$
 $Cx = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3).$
575. $Ax = (x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$
 $Bx = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2),$
 $Cx = (x_1 + 2x_2 + 3, 4x_1 + 5x_2 + 6, 7x_1 + 8x_2).$

576. ვთქვათ $X = (x_1, x_2, x_3)$, $AX = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$
 $BX = (x_2, 2x_3, x_1)$. იპოვეთ:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1. ABx | 2. A^2x . | 3. $(A^2 - B)x$. |
| 4. B^2x . | 5. B^2x . | 6. $(2A + 3B^2)x$. |
| 7. $(A^2 + B^2)x$. | 8. $(B^2 + A)x$. | 9. BAX . |
| 10. $B(2A - B)x$. | 11. $A(2B - A)x$. | 12. $2(AB + 2A)x$. |
| 13. $(A - B)^2x$. | 14. $(B - 2A^2)x$. | 15. BA^2x . |
| 16. $(3A^2 + B)x$. | 17. $(A^2 + B)x$. | 18. $(A^2 - B^2)x$. |
| 19. $(2B - A^2)x$. | 20. B^3x . | 21. $(B^2 - 2Ax)$. |
| 22. $(A(B + A))x$. | 23. $(AB^2)x$. | 24. $(A(B - A))x$. |
| 25. $2(B + 2A^2 + B^2)x$ | 26. $(B(A - B))x$. | 27. $(B - A + B^2)x$. |
| 28. $(B(A + B))x$. | 29. $(A + BA - B)x$. | 30. $(3B + 2A^2)x$. |
| 31. $(B(2A + B))x$. | | |

577. იპოვეთ მატრიცა (e'_1, e'_2, e'_3) ბაზისში, სადაც $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$,
 $e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$, თუ ის ცნობილია
 (e_1, e_2, e_3) ბაზისში.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. | 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. | 3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. |
| 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. | 5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. | 6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. |
| 7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. | 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. | 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. | 11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. | 12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. |
| 13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. | 14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. | 15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. | 17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. | 18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. | 20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. | 21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. |

$$22. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 23. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 24. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$25. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 26. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad 27. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$28. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 29. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 30. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$31. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

578. დაამტკიცეთ ოპერატორის წრფივობა, იპოვეთ მისი მატრიცა, მნიშვნელობათა სიბრტყე და ბირთვი:

1. ox ღერძზე დაგვეგმილებს;
2. $z=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
3. oz ღერძზე დაგვეგმილებს;
4. oyz სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
5. oy ღერძზე დაგვეგმილებს;
6. $y=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
7. $x-y=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
8. $y+z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
9. $y-z=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
10. $y = \sqrt{3} x$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
11. oyz სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
12. $x-z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
13. oxy სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
14. ox ღერძის მიმართ დადებითი მხმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
15. $x-y=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
16. $y+z=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
17. $x+y=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
18. $y-z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
19. $x+y=0$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
20. $x=z$ სიბრტყეზე დაგვეგმილებს;
21. $x+z=0$ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;

22. oz ღერძის მიმართ დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
23. $z = -\sqrt{3}y$ სიბრტყეზე დაგვემიღებინ;
24. oxz სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული ასახვის;
25. oy ღერძის მიმართ დადებითი მიმართულებით $\frac{\pi}{2}$ კუთხით მობრუნების;
26. $x+z=0$ სიბრტყეზე დაგვემიღებინ;
27. $y + \sqrt{3}z = 0$ სიბრტყეზე დაგვემიღებინ;
28. $\sqrt{3}x + z = 0$ სიბრტყეზე დაგვემიღებინ.
29. $A(x) = [x, a]$ (სადაც a არანულოვანი ფიქსირებული ვექტორია, ხოლო $[x, a]$ აღნიშნავს x და a ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს) ოპერატორის.

579. იპოვეთ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, 17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
 19. \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 20. \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{0}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}. \\
 21. \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{0}{3} & \frac{0}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}, \quad 22. \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}. \\
 23. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 24. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 25. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\
 26. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad 27. \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \\
 28. \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}, \quad 29. \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}. \\
 30. \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad 31. \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

580. კვადრატული ფორმები მოყვანეთ კანონიკურ სახეში.

- $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$
- $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$
- $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3 - 3x_2x_3.$
- $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$
- $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$
- $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3.$
- $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$
- $3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3.$
- $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$

10. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
11. $\frac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
12. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.
13. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 - \sqrt{2}x_2x_3$.
14. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
15. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
16. $(-1/2)x_1^2 + 5x_2^2 - (1/2)x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.
17. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
18. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.
19. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.
20. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
21. $10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$.
22. $(3/2)x_1^2 - 5x_2^2 + (3/2)x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.
23. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
24. $2x_1^2 - 3x_2^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.
25. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
26. $x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
27. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.
28. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.
29. $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.
30. $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
31. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.
581. გამოიკვლიეთ მეორე რიგის წიბო და ახვეთ მისი გრაფიკი.
- $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$.
 - $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
 - $4xy + 4x - 4y = 0$.
 - $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.
 - $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.
 - $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

7. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0.$
8. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0.$
9. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0.$
10. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0.$
11. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0.$
12. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0.$
13. $2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$
14. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0.$
15. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0.$
16. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0.$
17. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0.$
18. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$
19. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0.$
20. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0.$
21. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0.$
22. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$
23. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0.$
24. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0.$
25. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0.$
26. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0.$
27. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0.$
28. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0.$
29. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0.$
30. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$
31. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$

§ 6. წრფივი ალგებრის გამოთვლითი მეთოდების დაკროგრამება

1. ოპერაციები მატრიცებზე.

582. შეადგინეთ ფორტრანზე $M \times N$ განზომილების ორი მატრიცის შეკრების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, C, M, N , სადაც A და B მოცემული მატრიცებია, C კი $M \times N$ — განზომილების მატრიცა შედეგისათვის.

583. შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: $B, M, N, BETA$, სადაც B არის $M \times N$ განზომილების მატრიცა, რომელშიც ივსახნება გამრავლების შედეგად

მიღებული მატრიცა, $BETA = \beta$ რიცხვია, რომელზედაც ვამრავლებთ მატრიცას.

584. შეადგინეთ ფორტრანზე კვადრატული მატრიცის ტრანსპონირების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: B, M , სადაც B არის $M \times M$ განზომილების საწყისი მატრიცა, აქვე მიიღება ტრანსპონირების შედეგად მიღებული მატრიცა.

585. შეადგინეთ ფორტრანზე ორი მატრიცის გამრავლების ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, C, M, N, K , სადაც A, B, C არის შესაბამისად $M \times N, N \times K$ და $M \times K$ განზომილების მატრიცები, რომლებიც შეიცავენ საწყის მონაცემებს და შედეგს.

586. მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით შევადგინოთ ფორტრანზე შემდეგი მაგალითების ამოხსნის პროგრამა:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1,2 & 1,6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,725 & 2,71 \\ -1,5 & 0 \\ -3,2 & 1,25 \\ 2,4 & 5 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $5A, AB, BA$.

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

იპოვეთ $A + B, A + C, A^T, A^T, B^T$.

2. მატრიცის შებრუნება

ელემენტარული გარდაქმნის შედეგად მატრიცის შებრუნება შეიძლება აღწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & | & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & a_{1k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & | & b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots & b_{1n}^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & a_{2k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & | & b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \dots & b_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & a_{nk+1}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & | & b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \dots & b_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \dots & b_{2n}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & | & b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \dots & b_{nn}^{(n)} \end{pmatrix},$$

სადაც b_{ij} არის ერთეულოვანი მატრიცა და $a_{ij}^{(k)}$ და $b_{ij}^{(k)}$ მატრიცის ელემენტები ასე დაკავშირებული

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n;$$

$$b_{kj}^{(k)} = \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

$$a_{ik}^{(0)} = a_{ik}; \quad j = k+1, \dots, n,$$

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - \frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

$$b_{ij}^{(0)} = b_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ამოხსენით ამოცანები:

587. შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცის შებრუნების ქვეპროგრამა აღწერილი მეთოდის გამოყენებით. მარამეტრებია: A, B, M , სადაც A არის $M \times M$ განზომილების მატრიცა, B — კი $M \times M$ განზომილების შებრუნების შედეგად მიღებული მატრიცა.

588. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით შეადგინეთ მატრიცის შებრუნების პროგრამა ფორტრანზე

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{იპოვეთ } A^{-1}.$$

589. 585 და 587 ამოცანაში მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით შეადგინეთ ფორტრანზე მატრიცული განტოლების ამოხსნის პროგრამა:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

590. A_k (k მატრიცის ნომერია, $k=1,2,\dots$) მატრიცათა ელემენტები განისაზღვრება (1) ან (2) ფორმულით:

$$a_{ij}^{(k)} = (-1)^{|J_i - J_j| + K} \sqrt{\frac{K^2 + J_i^2}{J_i K (J_i + J_j)}} \sin \frac{J_i J_j}{K}, \quad (1)$$

$$a_{ij}^{(k)} = (-1)^{|J_i - J_j| + K} \sqrt{\frac{K^2 + J_i^2}{J_i K (J_i + J_j)}} \cos \frac{J_i J_j}{K}, \quad (2)$$

სადაც $[a]$ აღნიშნავს a რიცხვის მთელ ნაწილს, ხოლო $J_i = K + i$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $J_j = \frac{J_i + 1}{K} + j$ $j = 0, 1, \dots, n$.

სიმარტივისათვის ქვემოთ მოყვანილ დავალებებში $n=6$.

591. 1) შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მრავლენს $A_k^{(n)}$ ($k = 1, 2$) მატრიცების ფორმირებას (1) ფორმულების მიხედვით. დაბეჭდეთ $A_1, A_2, A_1 + A_2$ მატრიცები.

2) შეასრულეთ წინა დავალება (2) ფორმულის შემთხვევაში.

3) მოცემულია $m \times n$ განზომილების მატრიცა. იპოვეთ მისი უდიდესი ელემენტი და დაბეჭდეთ. პროგრამას, როცა $m=7, n=12$ აქვს სახე

1...5	6	7
		DIMENSION T (7, 12)
		A = T (1, 1)
		DO 1 I = 1, 7
1		DO 1 J = 1, 12
		IF (T (I, J) - GT - A) A = T (I, J)
1		PRINT 2, A
		FORMAT (11 E 15.7)
		STOP
		END

ამ პროგრამის ანალოგიურად შეადგინეთ მატრიცის უდიდესი (უმცირესი) ელემენტის პოვნის ქვეპროგრამა.

3. დეტერმინანტის გამოთვლა

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ სადაც } a_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}; \Delta_n = a_{11} \Delta_{n-1}$$

$\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ დეტერმინანტის ელემენტები ასეა დაკავშირებული

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n.$$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $\Delta_1 = a_{nn}^{(n-1)}$, $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ყველა k -სათვის, ამიტომ $\Delta_n = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$. თუ $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, მაშინ დეტერმინანტში სტრიქონებს ადგილები უნდა შეეუცვალოთ ისე, რომ მარცხენა ზედა ელემენტი არ იყოს ნულის ტოლი. ამ ელემენტს უწოდებენ მთავარ ელემენტს. მაღალი სიზუსტის მისაღებად მიზანშეწონილია მთავარ ელემენტად ავიღოთ აბსოლუტური სიდიდით უდიდესი. ყველა დეტერმინანტში სტრიქონების ადგილების შეცვლის დროს უნდა გავითვალისწინოთ ნიშანი.

მაგალითად, გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 1 & -14 \end{vmatrix}.$$

▷.

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & -3 \\ -3 & 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -2,5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 8 & -4,4 \\ -0,6 & -3 & 4,4 \end{vmatrix} = -2,5 \begin{vmatrix} 8 & -4,4 \\ -3 & 4,4 \end{vmatrix} = \\ &= -2,5 \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0,375 & 2,75 \end{vmatrix} = -2,5 \cdot 8 \cdot 2,75 = -55. \quad \triangleleft. \end{aligned}$$

ამოხსენით ამოცანები:

592. შეადგინეთ ფორტრანზე დეტერმინანტის გამოთვლის ქვეპროგრამა ფუნქციად. პარამეტრებია: A , M , სადაც A არის m -ური რიგის დეტერმინანტი.

593. მიღებული ქვეპროგრამა ფუნქციის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

$$\text{ა) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{ბ) } \begin{vmatrix} 0,2 & 0,4 & 3,1 & 5 \\ -2 & 4,5 & 3,7 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \\ -2,3 & 7,2 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

4. ბანძოლუბათა სისტემის ამოხსნა შორღანი-გაუსის მეთოდით მოცემულია განტოლბათა სისტემა:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

უცნობთა თანღათანობით გამოორიცხვის შედეგად მიღებთ:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \cdot x_j = b_i^{(k)}, \quad i = k, k+1, \dots, n,$$

საღაც

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij};$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad b_i^{(0)} = b_i.$$

როცა $k=n$, მიღებთ ერთი განტოლბათა და გამოთვლბათა x_n . ამით ღამთაფრღა ბირღაბირი სვღა მეთოღისა. უკუსვღის შედეგად ხღებთ $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ უცნობბების გამოთვღა.

594. შეადღენეთ ფორტრანზე განტოლბათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა. პარამეტრბობა: A, B, M , საღაც A არის სისტემის მატრიცის ეღეშენტბები, რომღის განზომიღებთა $M \times M$, B — კი თავისუფალა წევერბებისღან შედღენიღი ერთგანზომიღებთიანი მატრიცა, რომელშიღ მიღებთ სისტემის ამონახსნი. M კი სისტემის რიგი.

$\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_1$ დეტერმინანტის ელემენტები ასეა დაკავშირებული

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n.$$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $\Delta_1 = a_{nn}^{(n-1)}$, $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ყველა k -სათვის, ამიტომ $\Delta_n = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}$. თუ $a_{kk}^{(k-1)} = 0$, მაშინ დეტერმინანტში სტრიქონებს ადგილები უნდა შევეუცვალოთ ისე, რომ მარცხენა ზედა ელემენტი არ იყოს ნულის ტოლი. ამ ელემენტს უწოდებენ მთავარ ელემენტს. მაღალი სიზუსტის მისაღებად მიზანშეწონილია მთავარ ელემენტად ავიღოთ აბსოლუტური სიდიდით უდიდესი. ყველა დეტერმინანტში სტრიქონების ადგილების შეცვლის დროს უნდა გავითვალისწინოთ ნიშანი.

მაგალითად, გამოვთვალოთ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 1 & -14 \end{vmatrix}.$$

▷.

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & -3 \\ -3 & 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2,5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 8 & -4,4 \\ -0,6 & -3 & 4,4 \end{vmatrix} = -2,5 \begin{vmatrix} 8 & -4,4 \\ -3 & 4,4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2,5 \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0,375 & 2,75 \end{vmatrix} = -2,5 \cdot 8 \cdot 2,75 = -55. \quad \triangleleft.$$

ამოხსენით ამოცანები:

592. შეადგინეთ ფორტრანზე დეტერმინანტის გამოთვლის ქვეპროგრამა ფუნქციად. პარამეტრებია: A , M , სადაც A არის m -ური რიგის დეტერმინანტი.

593. მიღებული ქვეპროგრამა — ფუნქციის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

$$\text{ა) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{ბ) } \begin{vmatrix} 0,2 & 0,4 & 3,1 & 5 \\ -2 & 4,5 & 3,7 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -2,3 & 7,2 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

4. განხილვათა სისტემის ამოხსნა შორანი-გაუსის მეთოდით მოცემულია განტოლებათა სისტემა:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

უცნობთა თანდათანობით გამორიცხვის შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \cdot x_j = b_i^{(k)}, \quad i = k, k+1, \dots, n,$$

სადაც

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij};$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad b_i^{(0)} = b_i.$$

როცა $k=n$, მიიღება ერთი განტოლება და გამოითვლება x_n . ამით დაშთავრდა პირდაპირი სვლა მეთოდისა. უკუსვლის შედეგად ხდება $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ უცნობების გამოთვლა.

594. შეადგინეთ ფორტრანზე განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა. პარამეტრებია: A, B, M , სადაც A არის სისტემის მატრიცის ელემენტები, რომლის განზომილებაა $M \times M$, B — კი თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი ერთგანზომილებიანი მატრიცა, რომელშიც მსაღება სისტემის ამონახსნი. M კი სისტემის რაივი.

595. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

№	A					B
1	13,5192	2,1714	— 1,5213	3,1493	— 5,8871	79,6402
	1,2219	—17,2372	4,5319	—2,9760	1,1714	15,5794
	4,9261	2,1917	—15,8025	—1,4412	— 3,5128	— 5,2636
	2,1945	3,7736	0,3581	—9,4826	0,1282	—53,8744
	4,1953	— 5,9660	3,5858	—1,4933	—10,2872	46,4854
2	4,5123	— 0,1591	— 0,0017	2,1937	— 1,0251	— 8,0620
	2,9327	6,9901	— 3,6424	— 1,1285	0,1279	42,6558
	4,3790	—12,1021	25,0019	— 1,2311	2,0357	— 1,4706
	3,1214	2,4919	1,1021	—14,2513	2,8880	15,8482
	0,2375	1,5533	— 1,2446	— 5,8877	— 8,5781	25,1934
3	7,7623	— 0,4971	1,0023	— 0,1021	1,1891	— 12,2150
	1,5213	17,5380	— 3,2121	5,0762	1,2573	120,9205
	2,5346	0,2116	9,2549	— 1,0151	3,5781	— 29,0227
	3,5464	2,1731	— 1,6585	— 8,2573	— 2,0159	— 15,2327
	1,9606	2,5323	— 5,7606	4,1317	—15,2517	62,2397
4	4,4110	— 0,2519	1,0134	2,0003	— 1,2503	34,6505
	1,2342	6,9872	— 1,2305	0,4669	1,8120	— 40,4833
	4,5857	— 1,3726	—14,4096	0,2931	— 5,2635	2,6276
	1,1397	— 2,6469	— 4,7012	13,2641	2,6951	6,3186
	1,8112	4,9102	— 6,0351	— 2,3105	22,3597	— 87,6727
5	14,3565	5,6237	— 2,4671	— 1,2635	1,9922	— 11,2531
	5,4612	26,3296	— 2,6317	6,6441	— 4,7819	—178,7776
	1,4210	4,3454	—33,2642	—17,9214	3,2632	— 85,4599
	2,6035	—12,3296	— 6,9707	32,1525	— 2,9324	318,9663
	4,2688	— 2,5006	8,6607	— 1,6993	20,8644	59,9434
6	3,9440	8,7460	— 6,1489	1,5237	— 4,0523	87,3082
	15,9708	6,1021	— 3,4486	2,5411	1,3391	159,6527
	1,5142	3,7621	— 2,5220	— 1,3881	— 6,4672	16,5282
	12,5316	1,6125	— 1,5314	6,4892	— 1,5807	111,5178
	3,9327	7,2957	2,7942	— 3,2532	9,7209	102,6294
7	1,6452	4,6913	8,2431	— 7,9273	6,0972	— 40,6705
	4,4514	— 1,6480	— 4,9425	— 8,4523	11,8165	— 62,5388
	6,0606	— 4,2276	— 7,8074	— 6,1162	— 8,6658	— 66,1834
	16,9135	2,8594	— 9,3780	5,8823	— 0,3840	14,6459
	2,7889	— 9,8017	— 1,7889	8,0441	9,7227	— 6,7936

№	A					B
8	8,7752	2,2626	- 1,0514	- 3,0019	1,2257	- 24,7092
	2,3561	-11,3960	3,5907	- 1,2959	1,1392	49,4743
	3,9471	2,8782	12,6174	- 2,4314	- 2,2156	- 74,4141
	6,3544	- 3,7813	21,1524	-87,6315	- 8,7951	-700,8516
	11,2093	6,2549	8,7861	3,4112	-53,9543	77,4683
9	20,8008	- 7,8924	4,8288	- 1,3214	1,0285	59,6691
	8,5824	46,4279	- 9,7134	5,4641	- 7,3934	-234,0058
	17,4329	- 6,5063	54,6408	- 7,4005	9,7285	619,5332
	9,4526	- 7,4992	- 4,3470	34,1008	10,2901	298,4693
	1,0240	- 5,8292	- 7,0473	- 6,4042	-43,4708	217,2679
10	34,1030	9,1831	- 1,5878	- 4,6914	3,9623	363,8320
	5,9928	15,9000	- 3,2843	- 2,4849	- 1,9595	4,3095
	15,8982	24,9452	66,9148	4,5447	3,9192	-337,4977
	6,2851	- 2,4850	4,3978	-36,1539	1,5929	-130,9675
	9,5762	- 3,8529	- 5,9171	-33,9281	- 5,9737	91,4876
11	28,7302	4,1372	- 9,3249	5,8270	2,3470	-162,0875
	9,1134	59,2718	- 4,9042	- 2,3105	8,0049	-322,2199
	10,5899	9,1138	60,0932	- 5,8997	-30,2271	206,7599
	17,4123	-19,2051	- 5,8878	59,3471	- 9,4217	669,4626
	4,8956	21,8928	34,1905	8,9962	-88,7844	-106,9569
12	39,9231	- 5,8997	3,4673	- 4,9042	- 9,2671	313,6460
	8,9492	-29,9207	4,5885	- 6,0060	- 3,5844	- 28,8464
	9,5324	15,9031	-38,9971	-11,0023	7,1153	839,6039
	7,7562	-21,6243	- 8,0151	-53,7835	-13,2324	820,4039
	16,9399	-35,8423	7,7506	-21,4849	77,7842	-548,4084
13	26,4208	5,9121	-14,0031	- 4,1235	2,6316	- 638,0542
	10,6441	-61,4226	15,9669	-21,0025	11,2296	1829,7026
	6,0498	26,3159	-54,9778	2,6428	- 4,8332	-1440,1079
	9,8061	6,3529	24,2959	48,7249	- 3,6047	- 337,7144
	15,4906	-26,3643	5,8884	-12,5706	-68,6186	-1186,2867
14	47,2732	16,2215	- 3,9056	- 0,5567	10,2537	- 0,5905
	2,3917	-34,2517	15,0014	16,5789	- 5,1935	-280,5809
	14,1727	5,1057	26,1391	- 4,9228	3,1973	-362,9100
	12,9817	-16,2213	- 3,1777	-42,9817	11,2531	-808,4014
	13,4951	- 7,2935	- 3,4463	29,0527	7,2931	-484,3552

596. შეადგინეთ ქვედა სამკუთხოვანი სისტემის

$$a_{11} x_1 = b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2,$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3,$$

$$\dots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

ამოხსნის ქვეპროგრამა. მოღებულ ქვეპროგრამა გამოიყენეთ

$$5x_1 = 100,$$

$$4x_1 + 8x_2 = 200,$$

$$-2x_1 - x_2 + 6x_3 = 300,$$

$$10x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 400,$$

$$8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 500,$$

სისტემის ამოხსნელად. ამობეჭდეთ სისტემის მატრიცა, თავისუფალი სვეტი და პასუხები.

▷ ამოხსნა

```

C  |  ПОДПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
    |  SUBROUTINE SIST (A, B, X, N)
    |  DIMENSION A (N, N), B (N), X (N)
    |  X (1) = B (1) / A (1, 1)
    |  DO 1 I = 2, N
    |  K = I - 1
    |  C = 0
    |  DO 2 J = 1, K
2   |  C = C + A (I, J) * X (J)
1   |  X (I) = (B (I) - C) / A (I, I)
    |  RETURN
    |  END
C  |  ОСНОВНАЯ ПРОГРАММА
    |  DIMENSION A (5,5), B (5), X (5)
    |  READ 10, ((A (I, J), J = 1,5), I = 1, 5)
10  |  FORMAT (5 F 3.0)
    |  DATA B / 100., 200., 300., 400., 500./
    |  CALL SIST (A, B, X, 5)
    |  PRINT 20 ( (A (I, J), J = 1,5), I = 1,5), B, X
    |  .. 20  |  FORMAT (7 (1X, 5F 15.4), / 15)
    |  STOP
    |  END
    
```

პროგრამის მუშაობის შემდეგ დაიბეჭდება:

5.0000	0.0	0.0	0.0	0.0
4.0000	8.0000	0.0	0.0	0.0
-2.0000	1.0000	6.0000	0.0	0.0
10.0000	9.0000	1.0000	2.0000	0.0
8.0000	7.0000	2.0000	5.0000	-1.0000
100.0000	200.0000	300.0000	400.0000	500.0000
20.0000	15.0000	59.1667	2.9167	-102.083

597. წინა დავალების მსგავსად ამოხსენით სამკუთხოვანი სისტემა.

$$\begin{aligned} 3,20 x_1 - 52,71 x_2 + 3,00 x_3 - x_4 &= 9,25, \\ 5,23 x_1 + 7,62 x_2 + 2,00 x_3 &= 9,43, \\ -2,57 x_1 + 2,03 x_2 &= -2,57, \\ 1,05 x_1 &= 1,05. \end{aligned}$$

5. იტერაციის მეთოდი

მოცემულია განტოლებათა სისტემა,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

თუ შესრულებულია უტოლობა

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

მაშინ სისტემის ამონახსენი

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ აკმაყოფილებს პირობას } \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X, \text{ ე. ი. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i,$$

$i = 1, 2, \dots, n$. აქ სვეტ-ვექტორის ელემენტები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_k^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)}, \quad a_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}.$$

598. შეადგინეთ ფორტრანზე განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა იტერაციის მეთოდის გამოყენებით. პარამეტრებია: A, B, X, M, EPS , სადაც A — არის ორგანზომილებიანი სისტემის მატრიცა, B — ერთგანზომილებიანი თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი მატრიცა, X — ერთგანზომილებიანი მასივი ამონახსნებისათვის, M — სისტემის რიგი, EPS — აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება.

599. მიღებული ქვეპროგრამის გამოყენებით ამოვხსნათ სისტემა:

$$a) \begin{cases} 5x_1 + 0,12x_2 + 0,08x_3 = 15, \\ 0,02x_1 + 4x_2 - 0,25x_3 = 20, \\ 0,24x_1 - 0,12x_2 + 3x_3 = -3,9. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4,5x_1 - 0,1x_2 + 0,3x_3 - 0,4x_4 = 23,2, \\ 0,12x_1 + 5,4x_2 - 0,16x_3 + 0,2x_4 = -14,3, \\ 0,24x_1 - 0,1x_2 + 6,4x_3 - 0,2x_4 = 12, \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 5x_4 = 8. \end{cases}$$

6. ალგებრული განტოლების ნამდვილი ფესვების მოძებნა

n -ური რიგის ნამდვილკოეფიციენტებიან ალგებრულ განტოლებას ზოგადად აქვს სახე:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 1.$$

ადგილი აქვს თეორემას: ყოველი n -ური რიგის ალგებრულ განტოლებას აქვს n ფესვი (ამონახსენი), ნამდვილი ერთმანეთისაგან განსხვავებული, ნამდვილი ჯერადი და წყვილწყვილად შეუღლებული კომპლექსური.

ჩვენ შემოვიფარვლებით განტოლების ნამდვილი ფესვების მოძებნით.

განტოლებას ეწოდება სრული, თუ მისი ყველა კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან.

ალგებრული განტოლებების დადებითი და უარყოფითი ფესვების რაოდენობის დასადგენად არსებობს დეკარტეს შემდეგი წესი:

განტოლების დადებით ფესვთა რაოდენობა ტოლია კოეფიციენტთა მმდევრობაში $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ნიშნთა ცვლის რაოდენობისა ან უფრო რიცხვით ნაკლებია მასზე, ამასთან ნულოვანი კოეფიციენტები მხედველობაში არ მიიღება.

უარყოფით ფესვთა რაოდენობა ტოლია $f(-x)=0$ განტოლებაში კოეფიციენტთა ნიშნის ცვლილებათა რაოდენობისა ან მასზე ნაკლებია ლუწი რიცხვით. ხოლო თუ განტოლება სრულია, მაშინ უარყოფით ფესვთა რაოდენობა უდრის მის კოეფიციენტთა მიმდევრობაში ნიშანშეცვლილების რაოდენობას ან ნაკლებია მასზე ლუწი რიცხვით.

მაგალითად, ა) $f(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^2 + 5 = 0$, გვაქვს ერთი ნიშნის ცვლილება $++--$, ხოლო $f(-x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 + 5 = 0$, გვაქვს ორი ნიშნის ცვლილება $--+---$, ამიტომ მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი დადებითი და უარყოფითი ფესვი ორი ან არც ერთი.

ბ) $x^4 - x^8 - 7x^2 + x + 6 = 0$ სრული განტოლებაა. $+-+--+$ გვაქვს ორი ნიშნის ცვლილება და ორი ნიშანშეცვლილება. ამიტომ ორი ფესვი დადებითია და ორი უარყოფითი, ან არც ერთი ნამდვილი ფესვი განტოლებას არა აქვს.

ფესვების განცალგება შეიძლება ჩავატაროთ გრაფიკულად. ამასთან თუ Ox ღერძი ფუნქციის გრაფიკის მხები აღმოჩნდა, მაშინ შეხების წერტილის აბსცისა განტოლების ორჯერადი ფესვია, ხოლო თუ გრაფიკის Ox ღერძთან თანაკვეთის წერტილი გადაღუნვის წერტილია, მაშინ ამ წერტილის აბსცისა განტოლების სამჯერადი ფესვია.

ეთქვათ, განცალგებული ნამდვილი ფესვი x^* მოთავსებულია $[a, b]$ შუალედში. ავაგოთ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა ორი მიმდევრობა

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \quad (\text{ნიუტონის ფორმულა})$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - f(\underline{x}_n) \frac{\underline{x}_n - c}{f(\underline{x}_n) - f(c)}, \quad (\text{ქორდათა ფორმულა})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

\bar{x}_0 -ად უნდა ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტის ის ბოლო, რომელზეც ფუნქციის ნიშანი ემთხვევა მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანს, ხოლო \underline{x}_0 — საწინააღმდეგო ბოლო. ქორდათა ფორმულაში $c = \bar{x}_0$.

ამ ორი ფორმულის ერთდროულად გამოყენების შემთხვევაში $\forall n$ -სათვის $\bar{x}_{n+1} < x^* < \underline{x}_{n+1}$ (ან $\underline{x}_{n+1} < x^* < \bar{x}_{n+1}$) და ცხადია გამოყენებას შევწყვეტთ, როგორც კი $|\bar{x}_{n+1} - \underline{x}_{n+1}| < \varepsilon$, სადაც ε წინასწარ დასახელებული სიზუსტეა. $x^* = \frac{\bar{x}_{n+1} + \underline{x}_{n+1}}{2}$, ε სიზუსტით.

შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მოძებნის $f(x)=0$ განტოლების ნამდვილ ფესვს მოთავსებულს $[a, b]$ სეგმენტზე, ε სიზუსტით. წინას-

წარ დარწმუნდით, რომ მიითითებულ შუალედში ასეთი ფესვი ერთად-ერთია.

600. $0,125x^4 - 7,351x^3 - 2,001x^2 + 0,0125 = 0$; $[-1, 0]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 601. $3,2576x^5 - 2,701x^2 - 0,5678x + 1,005 = 0$; $[-4; -3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 602. $1,206x^3 - 2,125x^2 - 3,5678x - 5,134 = 0$; $[2; 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 603. $x^3 - 4x^2 - 1 = 0$; $[4; 5]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
 604. $x^5 - 5x^3 - 6x - 10 = 0$; $[2; 3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 605. $x^3 - 1,3x^2 - 7x + 91 = 0$; $[-5; -4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 606. $x^3 + 3,112x^2 + 2,0003x + 6,1598 = 0$; $[-4; -3]$; $\varepsilon = 10^{-8}$.
 607. $x^3 + 0,7x^2 - 0,9x - 13,8 = 0$; $[2; 3]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
 608. $x^5 + 13,12x^4 - 15,6x - 18,72 = 0$; $[1; 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 609. $x^5 + 3,0912x^4 + 0,9978x^2 + 5,0956x + 6,3012 = 0$;
 $[-4; -3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 610. $x^3 - 3,5x^2 - 0,34x + 3,72 = 0$; $[3; 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 611. $x^3 - 2,9978x^2 + 1,4524x - 3,2345 = 0$; $[3; 4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 612. $0,34x^4 + 0,11x^3 - 0,45x^2 - 0,22x - 0,46 = 0$; $[1; 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 613. $x^4 - 6,4x^3 + 10,4x^2 - 6,4x + 9,43 = 0$; $[2; 3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 614. $x^3 + 4,1005x^2 + 3,0124x + 12,3056 = 0$; $[-5; -4]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 615. $1,2536x^3 + 0,6939x^2 - 0,8799x - 13,6489 = 0$; $[2; 3]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 616. $1,2145x^5 + 13,1204x^4 - 15,5991x - 18,72 = 0$; $[-11; -9]$;
 $\varepsilon = 10^{-4}$.
 617. $x^4 - 1,668x^3 - 0,8577x^2 - 3,336x - 5,7154 = 0$; $[-2; -1]$;
 $\varepsilon = 10^{-4}$.
 618. $x^3 + 2,605x^2 - 7,975x - 9,580 = 0$; $[2,3]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
 619. $0,9786x^5 - 19,9465x^2 - 0,2097x + 0,6369 = 0$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 620. $0,9687x^3 - 26,9916x^2 - 10,1435x - 19,1698 = 0$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 621. $1,0143x^4 - 2,9781x^2 + 4,0032x - 0,9978 = 0$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 622. $1,0025x^3 - 4,9897x^2 + 6,0132x - 0,0991 = 0$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
 623. $0,9657x^4 - 2,0021x^2 + 4,9967x - 0,9897 = 0$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

624—633 ამოცანებისათვის შეადგინეთ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლის პროგრამა ფორტრანზე. პროგრამა გააფორმეთ, როგორც ქვეპროგრამა ფუნქცია. მაგალითად, $\varphi(x) = 2x^3 \sin^2 x + \lg x - 5\sqrt{x} + 7$.

1...5 | 6 | 7

FUNCTION FI (X)

A = 2. * * * ↑ 3 * SIN (X) ↑ 2

FI = A + ALOG (X) - 5. * SQRT (X) + 7

RETURN

END

$$624. y = x \sin^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - x \right) + 1.$$

$$625. f(x) = 2 \sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}.$$

$$626. F(x) = \arccos \frac{2x + 3}{5} + \lg^2 x.$$

$$627. e(x) = x^3 \ln^3 (e^x + 1).$$

$$628. \xi(x) = x \sqrt[3]{x^3 + 1} - \log_2 (1 + x)$$

$$629. \tau(x) = |x| \arcsin \frac{x + 3}{5} + \frac{1}{\ln(x + 1)}.$$

$$630. z = \begin{cases} x^2, & \text{თუ } x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{თუ } x > 1. \end{cases}$$

$$631. f(x) = \begin{cases} \arcsin^2 x, & \text{თუ } |x| \leq 1, \\ x^2, & \text{თუ } |x| > 1. \end{cases}$$

$$632. \psi(x) = \pi \sin \sqrt{1 + x^2} - 10x.$$

$$633. \varphi(x) = e^x - \cos \frac{\pi x}{8} - 1.$$

დაატაბულეთ 634—644 ფუნქციები მითითებულ შუალედში, მითითებული ბიჯით. ძირითად პროგრამაში გამოიყენეთ ქვეპროგრამა—ფუნქციის მოდულზე მიმართვის ოპერატორი. მაგალითად, $\eta(x) = 2,3x^8 e^{5x} + \sin x$, $0,6 \leq x \leq 1,7$, $h = 0,1$.

1...5 | 6 | 7

	C	ТАБУЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ X = 0.6 S = ETA (X)
2		WRITE (3,1) X, S FORMAT ('ETA ('F.2') = 'F6.4)
1	C	ПРИ X=0.6 БУДЕТ НАПЕЧАТАНА
	C	ВЫРАЖЕНИЕ ETA (0.6) = X = X + 0.1 IF (X-L1-1.8) GOTO 2 STOP END FUNCTION ETA (X) ETA = 2.3 * X ↑ 3 * EXP (5. * X) + sin (X) RETURN END

$$634. y = 5(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 1, \quad -0,3 \leq x \leq 0,75, \quad h = 0,5.$$

$$635. y = \sin 2x + 3x^2 + 11, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad h = 0,05.$$

$$636. y = (x-1) \ln^3 x + 1, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad h = 0,1.$$

$$637. z = \sin x + 2x^2 - 3, \quad -2 \leq x \leq -1; \quad h = 0,1.$$

$$638. f(x) = \frac{6x^3 - 18x + 13}{6(x-1)^2}, \quad 1,1 \leq x < 2; \quad h = 0,1.$$

$$639. \varphi(x) = \frac{(\sin x + \cos^2 x)^3}{x^4 + \ln x + 1}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}; \quad h = \frac{\pi}{12}.$$

$$640. F(x) = \sqrt[3]{x \cos^2 x} + \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad h = 0,05.$$

$$641. \psi(x) = \sqrt{\sin x} \cdot \sin^3 \frac{x}{2} + x; \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad h = \frac{\pi}{24}.$$

$$642. \tau(x) = e^{\sqrt{\sin x}} \ln(5 + 4 \cos x); \quad \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi; \quad h = \frac{\pi}{20}.$$

$$643. \xi(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{როცა } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1, & \text{როცა } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad h = 0,1.$$

$$644. f(x) = \begin{cases} \cos x + \sin(\sqrt{3}x), & \text{როცა } -1 \leq x \leq 0, \\ \ln x + 1, & \text{როცა } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad h = 0,1.$$

$$645. \text{მოცემულია } f(x) = 3 \ln^2(x^5 + 1) \sin^8 x + x.$$

$$\text{გამოთვალეთ } F(x) = 4 \cdot f(x + \sin x) + 3f(x - \sin x), \quad 2 \leq x \leq 3, \\ h = 0,05.$$

IV თავი

შეორე რიგის ზედპიკრება

შეორე რიგის ზედპიკრებას შორის შეიძლება შეგვეხედეს ისეთი ზედპიკრები, რომლებსაც აქვთ სიმეტრიის ცენტრი და ამ ცენტრზე გაშვებული სამი ურთიფერობათობული სიმეტრიის სიბრტყე. ასეთებია:

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ელიფსოიდი; ნახ. 9.}$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი; ნახ. 10.}$$

$$3. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{ორკალთა ჰიპერბოლოიდი; ნახ. 11.}$$

$$4. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{მეორე რიგის კონუსი; ნახ. 12.}$$

$$5. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ელიფსური ცილინდრი; ნახ. 13.}$$

$$6. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ჰიპერბოლური ცილინდრი. ნახ. 14.}$$

მეორე რიგის დანარჩენ ზედაპირებს არა აქვთ არც ცენტრი და არც სიმეტრიის საში სიბრტყე, მაგრამ მათ აქვთ სიმეტრიის ორი ურთიერთმართობული სიბრტყე. ესენია:

$$7. y^2 = 2px \quad \text{პარაბოლური ცილინდრი; ნახ. 15.}$$

$$8. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{ელიფსური პარაბოლოიდი; ნახ. 16.}$$

$$9. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი; ნახ. 17.}$$

როცა მეორე რიგის ზედაპირს განტოლებას მარცხენა მხარე იშლება პირველი ხარისხის ორ ნამდვილ მამრავლად, მაშინ ასეთ განტოლებას შეესაბამება ორი სიბრტყის ერთობლიობა. შესაძლებელია მეორე რიგის განტოლება იძლეოდეს ორ თანამხვეველ სიბრტყეს, წერტილს, ან წარმოსახვით გეომეტრიულ ადგილს. ასეთ შემთხვევებს უწოდებენ მეორე რიგის ზედაპირის გადაკვარძებს; ასეთი ზედაპირებია:

$$10. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ურთიერთგადასკვეთი სიბრტყეების წყვილი;}$$

$$11. \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{პარალელური სიბრტყეების წყვილი;}$$

$$12. x^2 = 0 \quad \text{თანამხვეველი სიბრტყეების წყვილი;}$$

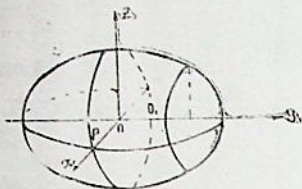
$$13. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{წარმოსახვითი ელიფსოიდი;}$$

$$14. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{წარმოსახვითი კონუსი;}$$

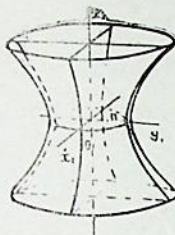
$$15. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{წარმოსახვითი ცილინდრი;}$$

$$16. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ურთიერთგადასკვეთი წარმოსახვითი სიბრტყეების წყვილი;}$$

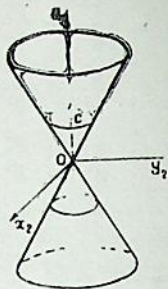
$$17. \frac{x^2}{a^2} = -1 \quad \text{წარმოსახვითი პარალელური სიბრტყეების წყვილი.}$$



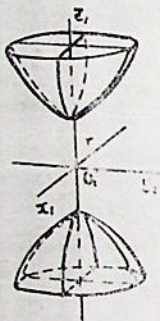
Боб. 9



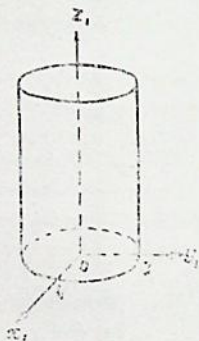
Боб. 10



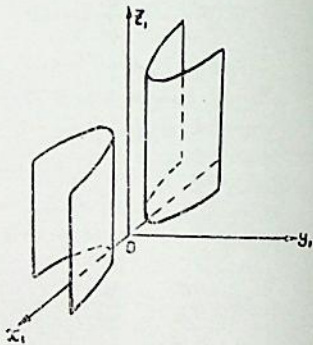
Боб. 11



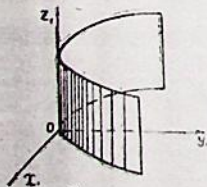
Боб. 12



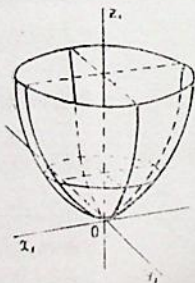
Боб. 13



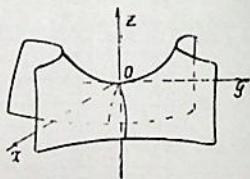
Боб. 14



Боб. 15



Боб. 16



Боб. 17

სფერული ზედაპირის განტოლება:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

სადაც a , b და c სფერული ზედაპირის ცენტრის კოორდინატებია, ხოლო R — რადიუსი. თუ ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ სფერული ზედაპირის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

646. შეადგინეთ სფერული ზედაპირის განტოლება, თუ: 1) ცენტრი მოთავსებულია C (2; -1; 3) წერტილში, ხოლო რადიუსია 4; 2) ცენტრი მოთავსებულია C (1; 4; -7) წერტილში და ეხება $6x + 6y - 7z + 42 = 0$ სიბრტყეს.

647. შეადგინეთ სფერული ზედაპირის განტოლება, თუ: 1) A (2; -3; 5) და B (4; 1; -3) წერტილები სფეროს ერთ-ერთი დამეტრის ბოლოებია;

2) ცენტრი მოთავსებულია C (6; -8; 3) წერტილში და ეხება Oz ღერძს.

648. იპოვეთ შემდეგი სფეროების რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები: 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$; 2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5y - 8 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

649. იპოვეთ იმ სფერული ზედაპირის რადიუსი, რომელიც ეხება შემდეგ პარალელურ სიბრტყეებს: $3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$.

650. გამიარკვიეთ A (4; -3; 1), B (4; 6; $2\sqrt{3}$) და C (5; 6; 3) წერტილების მდებარეობა $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ სფეროს მიმართ.

651. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს $Ax + By + Cz + D$ სიბრტყის კოეფიციენტები, რომ ის ეხებოდეს $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფეროს?

652. a -ს რა მნიშვნელობისათვის ეხება $x + y + z - a = 0$ სიბრტყე $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ სფეროს?

653. დაწერეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ სფეროს C ცენტრზე OC წრფის მართობულად.

654. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის შემდეგ ოთხ წერტილზე: O (0; 0; 0), M_1 (2; 0; 0), M_2 (1; 1; 0), M_3 (1; 0; -1).

655. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის M_1 (3; 1; -3), M_2 (-2; 4; 1), M_3 (-5; 0; 0) წერტილებზე, ხოლო ცენტრი ძევს $2x + y - z + 3 = 0$ სიბრტყეზე.

656. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = z$ წრეწირის გეგმილები xOy და xOz სიბრტყეებზე.

657. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $(x + 3a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = 4a^2$ წრეწირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე.

658. იპოვეთ იმ წერტილთა ვეოქტორული ადგილი, რომელთა მანძილები $A(2; 0; 0)$ წერტილამდე 2-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე $B(-4; 0; 0)$ წერტილამდე.

659. იპოვეთ იმ წერტილთა ვეოქტორული ადგილი, რომელთა მანძილები $A(3; -1; 0)$ წერტილამდე 3-ჯერ მეტია, ვიდრე $B(0; 1; 0)$ წერტილამდე.

იპოვეთ შემდეგი წრეწირების რადიუსები და ცენტრის კოორდინატები:

660. $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36$, $3x + y - z - 9 = 0$.

661. $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$, $2x + 2y + z + 1 = 0$.

662. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომლებიც გადის $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = a$ წრეწირზე და $(a; a; a)$ წერტილზე.

663. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 11 = 0$, $4x + y - z - 9 = 0$ წრეწირზე და $(7; -3; 1)$ წერტილზე.

664. დაწერეთ იმ სფერული ზედაპირის განტოლება, რომელიც გადის შემდეგ ორ წრეწირზე: $x^2 + z^2 = 25$, $y = 2$ და $x^2 + z^2 = 16$, $y = 3$.

665. სფერული ზედაპირი გადის $(0; -3; 1)$ წერტილზე და xOy სიბრტყესთან კვეთაში გვაძლევს $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ წრეწირს. დაწერეთ ამ ზედაპირის განტოლება.

§ 2. ცილინდრული ზედაპირი

თუ

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

ცილინდრული ზედაპირის მიმხართველი წირის განტოლებებია, ხოლო

$$\frac{X - x}{L} = \frac{Y - y}{M} = \frac{Z - z}{N} \tag{2}$$

— მსახველის განტოლებები, მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან x, y, z სიდიდეებს ვამოხივებთ მოგვეცემს ცილინდრული ზედაპირის განტოლებას.

666. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $x = y = z$ წრფისა, ხოლო მიმხართველი წირია $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ წრეწირი.

667. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმართველი წირია $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$ წრეწირი, ხოლო მსახველის მიმართულების კოორდინატები აკმაყოფილებს პირობას: $L : M : N = 5 : 3 : 2$.

668. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $P(2; -3; 4)$ ვექტორისა, ხოლო მიმართველი წირია $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$ წრეწირი.

669. შეადგინეთ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველები პარალელურია $x = y = z$ წრფისა, ხოლო მიმართველი წირია $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$ წრეწირი.

670. დაწერეთ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, თუ მისი მიმართველი წირია $x = y^2 + z^2$, $x = 2z$, ხოლო მსახველი მიმართველი წირის სიბრტყის მართობულია.

671. 1) იპოვეთ $x^2 + z^2 + 3yz - 2x + 3z - 3 = 0$, $y - z + 1 = 0$ წირის გეგმილი xOz სიბრტყეზე;

2) იპოვეთ იმ ცილინდრული ზედაპირების განტოლებები, რომლებიც $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ წრეწირს აგეგმილებენ საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

§ 3. კონუსური ზედაპირი

თუ

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

კონუსური ზედაპირის მიმართველი წირის განტოლებებია, (x_0, y_0, z_0) — წვეროს კოორდინატები, ხოლო

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0} \quad (2)$$

— ზედაპირის მსახველის განტოლებები, მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან x, y, z სიდიდეების გამოორცხვა მოგვცემს კონუსური ზედაპირის განტოლებას.

672. შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვეროა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმართველი წირია $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$ ელიფსი.

673. 1) შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვეროა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმართველი წირია $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$;

2) შეადგინეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვე-
როა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2 + y^2 + (z -$
 $-5)^2 = 9, z = 4$.

674. დაწერეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვე-
როა $(-3; 0; 0)$ წერტილი, ხოლო მიმმართველი წირია $3x^2 + 6y^2 - z = 0,$
 $x + y + z = 0$.

675. დაწერეთ იმ კონუსური ზედაპირის განტოლება, რომლის წვე-
როა $(0; -a; 0)$ წერტილი, ხოლო მიმმართველი წირია $x^2 = 2py, z = h$.

676. Ox ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კო-
ორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ მისი
მსახველები Ox ღერძისადმი დახრილია 45° -ით.

677. Oy ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კო-
ორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ მისი
მსახველები Oy ღერძისადმი დახრილია 60° -ით.

678. Oz ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო კო-
ორდინატთა სათავეშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ $M(3;$
 $-4; 7)$ წერტილი ძვეს კონუსურ ზედაპირზე.

679. Ox ღერძი იმ წრიული კონუსის ღერძია, რომლის წვერო
 $A(2; 0; 0)$ წერტილშია. შეადგინეთ კონუსის განტოლება, თუ $M(5;$
 $2; 6)$ წერტილი ძვეს კონუსურ ზედაპირზე.

§ 4. ბრუნვის ზედაპირი

თუ $F(x, y) = 0, z = 0$ იმ წირის განტოლებაა, რომელიც ბრუნავს
 Ox ღერძის გარშემო, მაშინ ბრუნვის ზედაპირის განტოლება იქნება:

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

ასევე გვექნება სხვა შემთხვევებშიც, რაც ჩანს შემდეგი ცხრი-
ლიდან:

წირის განტოლებები	ბრუნვის ღერძი	ბრუნვის ზედაპირის განტოლება
$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$	Ox	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	Oy	$F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	Ox	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	Oz	$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	Oy	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
	Oz	$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

680. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $z=y$, $x=0$ წრფის ბრუნვით: 1) Oy ღერძის გარშემო; 2) Oz ღერძის გარშემო.

681. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $z=x^2$, $y=0$ წრფის ბრუნვით: 1) Ox ღერძის გარშემო; 2) Oz ღერძის გარშემო.

682. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z=0$ ელიფსის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

683. დაწერეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x=0$ ელიფსის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

684. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y=0$ ჰიპერბოლის ბრუნვით: 1) Oz ღერძის გარშემო; 2) Ox ღერძის გარშემო.

685. შეადგინეთ იმ ზედაპირის განტოლება, რომელიც მიიღება $x^2=2pz$ პარაბოლის ბრუნვით Oz ღერძის გარშემო.

§ 5. ელიფსოიდი, ჰიპერბოლოიდავი და პარაბოლოიდავი

ელიფსოიდის კანონიკური სახის განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

ცალკალთა და ორკალთა ჰიპერბოლოიდების განტოლებებია:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{და} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი არის წრფოვანი ზედაპირი. მას აქვს წრფოვანი მსახველების ორი წყვილი:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

და

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

სადაც k და l პარამეტრებია.

ელიფსური და ჰიპერბოლური პარაბოლოიდების განტოლებებია:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{და} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი წრფოვანი შედაპირია. მას აქვს წრფოვანი მსახველების ორი წყვილი:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2kz, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}$$

და

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{l}, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2lz.$$

686. იპოვეთ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ ელიფსოიდის მთავარი კვეთები, წვეროები და ღერძები.

687. აჩვენეთ, რომ $x - 2 = 0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ ელიფსოიდს კვეთს ელიფსზე. იპოვეთ კვეთის ნახევარღერძები და წვეროები.

688. ააგეთ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ შედაპირი და იპოვეთ მისი კვეთის ფართობი: 1) $z = 3$ სიბრტყესთან; 2) $y = 1$ სიბრტყესთან.

689. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ ელიფსოიდისა და $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z+2}{2}$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

690. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების ფარდობა $x = 2a$ სიბრტყემდე და $F(a; 0; 0)$ წერტილამდე არის $\sqrt{2}$.

691. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ ელიფსოიდისა და $x + 4z - 4 = 0$ სიბრტყის გადაკვეთის წირის გეგმილი xOy სიბრტყეზე.

692. იპოვეთ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთის წირები საკოორდინატო სიბრტყეებთან.

693. იპოვეთ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის გადაკვეთის წირები საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებთან,

რომლებიც საკოორდინატო სიბრტყეებს ორივე მხრიდან დაშორებულია $h=2$ მანძილით.

694. შეამოწმეთ, რომ $z+1=0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ ცალკე-

თა ჰიპერბოლოიდს კვეთს ჰიპერბოლაზე. იპოვეთ ამ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები და წვეროები.

695. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილების ფარდობა $F(0; 0; 2a)$ წერტილამდე და $z=a$ სიბრტყემდე არის $\sqrt{2}$.

696. იპოვეთ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = -1$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდისა

და $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$ წრფის გადაკვეთის წერტილები.

697. განსაზღვრეთ შემდეგი ზედაპირების სახე: 1) $x^2-4y^2-4z^2+16a^2=0$; 2) $4x^2-5y^2+2z^2+30a^2=0$; 3) $x^2+2y^2+20y-z^2+35=0$; 4) $4x^2-9y^2-9z^2-16x+18y-18z+34=0$; 5) $4x^2+z^2+8x+y+16y+6z-3=0$.

698. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ ჰიპერბოლოიდის მსახველები,

რომლებიც გადის $M(4; 1; -3)$ წერტილზე.

699. იპოვეთ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლოიდის მსახველები,

რომლებიც გადის $M(6; 2; 8)$ წერტილზე.

700. იპოვეთ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = z$ ელიფსური პარაბოლოიდის საკოორდინატო

სიბრტყეებთან გადაკვეთის წირები.

701. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრად დაშორებული $F(0, 0; \frac{a}{2})$ წერტილიდან და $z = -\frac{a}{2}$ სიბრტყიდან.

702. იპოვეთ $y^2+z^2=x$ ელიფსური პარაბოლოიდისა და $x+2y-z=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წირის გეგმილება საკოორდინატო სიბრტყეებზე.

703. აჩვენეთ, რომ $y+6=0$ სიბრტყე $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ ჰიპერბოლურ

პარაბოლოიდს კვეთს პარაბოლაზე. იპოვეთ ამ პარაბოლის პარამეტრი და წვერო.

704. დაწერეთ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის იმ

მსახველების განტოლებები, რომლებიც გადის $M(4; 3; 0)$ წერტილზე.

705. დაწერეთ $4x^2 - z^2 = y$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის იმ მსახველების განტოლებები, რომლებიც გადის $M(1; 3; -1)$ წერტილზე.

განსაზღვრეთ, რომელ წირებსა და ზედაპირებს გამოსახავს შემდეგი განტოლებები:

706. 1) $y^2 + z^2 = 25, x = 0$; 2) $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, x - 2 = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 1$; 4) $x^2 = 1$; 5) $x^2 - y^2 = 0$; 6) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

7) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; 8) $xyz = 0$; 9) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 10) $x^2 - xy = 0$;

11) $y^2 + z^2 = 0$; 12) $x^2 + 4y^2 + 4 = 0$.

707. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = c$; 2) $x = 0, y = 0$; 3) $x^2 = y^2 + z^2$;

4) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$; 5) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$; 6) $x^2 + y^2 = 2az$;

7) $x^2 - y^2 = 2az$; 8) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$; 9) $x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0$;

10) $z = 2 + x^2 + y^2$; 11) $x^2 = 2yz$; 12) $x^2 + z^2 = 2z$.

V თავი

ფუნქციები

§ 1. ფუნქცია და მათი გრაფიკა

ორ A და B სიმრავლეს შორის ისეთ f შესაბამისობას, როცა A სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი y ელემენტი, ფუნქცია ეწოდება. ამ ელემენტს $f(x)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ და ეწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობას x -ზე.

თუ A და B სიმრავლეს შორის f შესაბამისობა არის ფუნქცია,

მაშინ წერენ: $f: A \rightarrow B$ ან $A \xrightarrow{f} B$. A სიმრავლეს ეწოდებენ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ სიმრავლეს ეწოდებენ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს. ფუნქციის ნაცვლად ასევე ხმა-რობენ ტერმინს „ასახვა“.

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებია:

1) ხარისხოვანი ფუნქცია: $y = x^\alpha, \alpha \in R$.

2) მაჩვენებლიანი ფუნქცია: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.

3) ლოგარითმული ფუნქცია: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$,
 $y = \operatorname{ctg} x$.

5) შებენიანი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $y = \arcsin x$, $y =$
 $= \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოიღგენება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციითა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება სიმრავლეს $F = \{(x, y) \in R^2 | x \in A, y = f(x)\}$, სადა R^2 სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეა.

დეკარტეს კოორდინატთა xOy სისტემაში $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოიღგენება ისეთ $M(x, y)$ წერტილთა სიმრავლით, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებენ $y = f(x)$ ტოლობას.

ამოხსენით ამოცანები:

708. შეადგინეთ დამოკიდებულება, რომელიც წრის r რადიუსს გამოსახავს, როგორც მისი S ფართობის ფუნქციას.

709. მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის c ჰიპოტენუსა მუდმივი ზოდიღვა. გამოსახეთ მისი b კათეტი მეორე a კათეტის საშუალებით.

710. მოცემულია ტოლფერდა ტრაპეციის a და b ფუძეები. იპოვეთ ფუნქციონალური დამოკიდებულება ამ ტრაპეციის S ფართობსა და a ფუძესთან შიდაარე a კუთხეს შორის.

711. მოცემულია ცილინდრის V მოცულობა. შეადგინეთ დამოკიდებულება, რომელიც ცილინდრის ფუძის r რადიუსს გამოსახავს, როგორც მისი h სიმაღლის ფუნქციას.

712. 1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 12$. გამოთვალეთ: $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$;

2) $\varphi(x) = \frac{7x + 4}{2x^2 + 3}$. გამოთვალეთ: $\varphi(0)$; $\varphi(-1)$; $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$; $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

713. 1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. გამოთვალეთ: $f(0)$; $f\left(-\frac{3}{4}\right)$; $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

2) $\varphi(x) = 4^x + 3x - 1$. გამოთვალეთ: $\varphi(0)$; $\varphi(-1)$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

714. იპოვეთ წრფივი $f(x)$ ფუნქცია, თუ $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$.

715. იპოვეთ მეორე ხარისხის $f(x)$ ფუნქცია, თუ $f(0) = 1$, $f(1) = 0$,
 $f(3) = 5$.

716. $f(x) = x^2 - 2x + 3$. იპოვეთ: 1) $f(x) = f(0)$ და 2) $f(x) = f(-1)$ განტოლების ფესვები.

717. $f(x) = x^3 - 7x + 6$. იპოვეთ $f(x) = f(1)$ განტოლების ყველა ფესვი.

718. მოცემულია $F(x) = a^x$. აჩვენეთ, რომ $F(y) \cdot F(z) = F(y+z)$.

719. დაწერეთ გამოსახულებები: 1) $f[\varphi(2)]$; 2) $f[\varphi(a)]$; 3) $\varphi[f(a)]$, თუ $f(x) = \lg x$, $\varphi(x) = x^3$.

720. იპოვეთ $f[\varphi(x)]$ და $\varphi[f(x)]$, თუ $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$.

721. $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x+1}$, $x = a^t$. გამოსახეთ y , როგორც t -ს ფუნქცია.

722. იპოვეთ $f(x+1)$, თუ $f(x-1) = x^2$.

წარმოიდგინეთ არაცხადი სახით შემდეგი რთული ფუნქციები:

723. 1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = 5^{(3x+1)^2}$ 3) $y = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

724. 1) $y = 2^{\cos x}$; 2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y = \arcsin(3-x^2)$.

შემდეგ მაგალითში y ფუნქცია ჩაწერეთ ცხადი სახით:

725. 1) $x^2 + y^2 = 3$; 2) $2^{xy} = 5$; 3) $x^2 - \arccos y = \pi$; 4) $10^x + 10^y = 10$.

726. 1) $2^{x+y}(x^2-2) = x^3+7$; 2) $\lg x + \lg(y+1) = 4$; 3) $x + |y| = 2y$.

იპოვეთ მოცემული y ფუნქციების შექცეული ფუნქციები.

727. 1) $y = 2x+3$; 2) $y = \arctg 3x$; 3) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = 10^{x+1}$;
5) $y = \log_2^2$

728. 1) $y = \sqrt{1-x^2}$; 2) $y = 1 - 2^{-x}$; 3) $y = 1 + \lg(x+2)$;

4) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$.

შემდეგ ფუნქციებიდან რომელია ლუწი, რომელი კენტი და რომელია არც ლუწი და არც კენტი.

729. 1) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 2) $f(x) = x + \frac{x^3}{2}$; 3) $f(x) = 2^x$;

4) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$; 5) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$).

730. 1) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$; 2) $f(x) = \sin x - \cos x$;

3) $f(x) = 2^{-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x}$.

იპოვეთ უმცირესი დადებითი პერიოდი შემდეგი ფუნქციებისა:

731. 1) $\sin 3x$; 2) $\cos 2x$; 3) $\sin \frac{2x+3}{6\pi}$; 4) $\sin \frac{5x}{8}$.

732. 1) $\cos 2\pi x$; 2) $\sin \frac{3\pi x}{4}$; 3) $-\cos \frac{x-1}{2}$; 4) $\sin^2 x$.

გამორიცხეთ t პარამეტრი შემდეგი განტოლებებიდან:

$$733. \quad 1) \begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = R \sin 2t, \\ y = 2R \sin^2 t. \end{cases}$$

$$734. \quad 1) \begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{t}{t+1}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = a \sec t, \\ y = b \operatorname{tg} t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2p \operatorname{ctg}^2 t, \\ y = 2p \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

$$735. \quad 1) \begin{cases} x = 3t, \\ y = 6t - t^2. \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } x(0), y(0); x(1), y(1);$$

$$2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t. \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } x(0), y(0); x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$736. \quad 1) \begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 - 1. \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } x(3), y(3); x\left(-\frac{1}{2}\right), y\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$2) \begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = t + \cos 2t. \end{cases} \quad \text{იპოვეთ } x\left(\frac{\pi}{6}\right), y\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

იპოვეთ t პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება x -ისა და y -ის მოცემულ მნიშვნელობებს:

$$737. \quad 1) \begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 + 3t - 1, \end{cases} \quad (3; 9); \quad 2) \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t. \end{cases} \quad (2; 2)$$

$$738. \quad 1) \begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = 3t - 2t^2. \end{cases} \quad (1; -5); \quad 2) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases} \quad (\pi - 2; 2).$$

იპოვეთ განსაზღვრის არე შემდეგი ფუნქციებისა:

$$739. \quad 1) y = \sqrt{x+1}; \quad 2) y = \sqrt{x^2+3}; \quad 3) y = \sqrt{\sin x - 1}.$$

$$740. \quad 1) y = \sqrt{9-x^2}; \quad 2) y = \sqrt{x^2-4}; \quad 3) y = \sqrt{\cos x}.$$

$$741. \quad 1) y = \frac{1}{4-x^2}; \quad 2) y = \frac{x+1}{x^2-3x-4}.$$

$$742. \quad 1) y = \frac{2}{x^3-x}; \quad 2) y = \frac{x-4}{x^2+2x-3}.$$

$$743. \quad 1) y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}; \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{x^4-16}}.$$

$$744. \quad 1) y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}; \quad 2) y = \sqrt{x-1} - \frac{3}{\sqrt{5-x}}.$$

745. 1) $y = \sqrt{4x - x^2}$; 2) $x = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$.

746. 1) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; 2) $y = \sqrt{5x^2 - 4x - 1}$.

747. 1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}$; 2) $y = \lg(x^2 - 1)$.

748. 1) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$; 2) $y = \lg \frac{2+x}{2-x}$.

749. $y = \lg \frac{x^2 - 4x}{2x - 7}$. 750. $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$.

751. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$. 752. $y = \arcsin \frac{x^2 + 1}{5}$.

753. $y = \arcsin \frac{3-2x}{5} + \sqrt{3-x}$. 754. $y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$.

755. $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$. 756. $y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{\lg(1-x)}$.

757. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$. 758. $y = \arcsin \frac{x-2}{2x}$.

759. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2+2}$.

760. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$.

761. $y = \lg[2 - \lg(x^2 - 8x + 115)]$. 762. $y = \lg(\sqrt{x-8} + \sqrt{10-x})$.

763. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

764. $y = \lg \frac{x-5}{x^2 - 10x + 24} - \sqrt[3]{x+5}$.

ააგეთ გრაფიკები შემდეგი ფუნქციებისა:

765. 1) $y = 2x - 3$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^2 + 2x - 1$; 4) $y = 2 + x - x^2$.

766. 1) $y = -3x + 4$; 2) $y = 3 - 2x^2$; 3) $y = x^2 + 2x + 3$;

4) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$.

767. 1) $y = x^3$; 2) $y = \frac{x^3}{3} + 1$; 3) $y = x^3 - 3x + 2$;

4) $y = \frac{4}{x}$; 5) $y = \frac{x-1}{x-2}$.

$$768. 1) y = 2 + (x-1)^3; 2) y = x^3 - x - 1; 3) y = \frac{1}{x^2}.$$

$$4) y = \frac{2}{x^2 + 1}; 5) y = \frac{2x-3}{3x+2}.$$

$$769. 1) y = \sqrt{x}; 2) y = -x\sqrt{x}; 3) y = -\sqrt{25-x^2}.$$

$$770. 1) y = \sqrt[3]{x}; 2) y = \sqrt{x^2}; 3) y = -\sqrt{x^2-1}.$$

$$771. 1) y = 2^x; 2) y = \log_2 x; 3) y = 1 - 2^x;$$

$$4) y = \log_3(1+x) + 2; 5) y = \log_2 \frac{1}{x}.$$

$$772. 1) y = 3^x; 2) y = 3^{x+3}; 3) y = 2^{-x^2}; 4) y = \lg(-x);$$

$$5) y = x^2 + 2^x.$$

$$773. 1) y = \sin x; 2) y = \operatorname{tg} x; 3) y = \sin kx, \text{ როცა } k = 2,$$

$$k = \frac{1}{2}; 4) y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; 5) y = 2 \sin(2x + 2).$$

$$774. 1) y = \cos x; 2) y = \operatorname{ctg} x; 3) y = \cos 2x; 4) y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$5) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$775. 1) y = \sin x + \cos x; 2) y = \arcsin x; 3) y = \arcsin \operatorname{tg} x.$$

$$776. 1) y = \arcsin x; 2) y = \arcsin \operatorname{ctg} x.$$

$$777. 1) y = |x|; 2) y = \sin x + |\sin x|; 3) y = \lg x^2; 4) y = |-x^2 + 4|;$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ x, & \text{როცა } 1 < x < 2. \end{cases}$$

ააგეთ შემდეგი წირები პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში და დაწერეთ მათი განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში:

$$778. 1) r = 1; 2) r = \frac{1}{2} \varphi; 3) r = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

$$779. 1) r = \frac{\pi}{\varphi}; 2) r = e^\varphi; 3) r = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

$$780. 1) r = a \sin \varphi; 2) r = a \sin 2\varphi; 3) r = a \sin 3\varphi. \quad (a > 0).$$

$$781. 1) r = a \cos \varphi; 2) r = a \cos 2\varphi; 3) r = a \cos 3\varphi. \quad (a > 0).$$

$$782. 1) r = a(1 + \cos \varphi); 2) r^2 = a^2 \cos 2\varphi. \quad (a > 0).$$

$$783. 1) r = a(1 - \cos \varphi); 2) r^2 = a^2 \sin 2\varphi. \quad (a > 0).$$

745. 1) $y = \sqrt{4x - x^2}$; 2) $x = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$.
746. 1) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; 2) $y = \sqrt{5x^2 - 4x - 1}$.
747. 1) $y = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}$; 2) $y = \lg(x^2 - 1)$.
748. 1) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$; 2) $y = \lg \frac{2+x}{2-x}$.
749. $y = \lg \frac{x^2 - 4x}{2x - 7}$.
750. $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$.
751. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$.
752. $y = \arcsin \frac{x^2 + 1}{5}$.
753. $y = \arccos \frac{3-2x}{5} + \sqrt{3-x}$.
754. $y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$.
755. $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$.
756. $y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{\lg(1-x)}$.
757. $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$.
758. $y = \arccos \frac{x-2}{2x}$.
759. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2+2}$.
760. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$.
761. $y = \lg[2 - \lg(x^2 - 8x + 115)]$.
762. $y = \lg(\sqrt{x-8} + \sqrt{10-x})$.
763. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.
764. $y = \lg \frac{x-5}{x^2 - 10x + 24} - \sqrt[3]{x+5}$.

ამეთ გრადიენტები შემდეგი ფუნქციებისა:

765. 1) $y = 2x - 3$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^2 + 2x - 1$; 4) $y = 2 + x - x^2$.
766. 1) $y = -3x + 4$; 2) $y = 3 - 2x^2$; 3) $y = x^2 + 2x + 3$;
4) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}$.
767. 1) $y = x^3$; 2) $y = \frac{x^3}{3} + 1$; 3) $y = x^3 - 3x + 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$; 5) $y = \frac{x-1}{x-2}$.

$$768. 1) y = 2 + (x-1)^3; 2) y = x^3 - x - 1; 3) y = \frac{1}{x^2}.$$

$$4) y = \frac{2}{x^2 + 1}; 5) y = \frac{2x-3}{3x+2}.$$

$$769. 1) y = \sqrt{x}; 2) y = -x\sqrt{x}; 3) y = -\sqrt{25-x^2}.$$

$$770. 1) y = \sqrt[3]{x}; 2) y = \sqrt{x^2}; 3) y = -\sqrt{x^2-1}.$$

$$771. 1) y = 2^x; 2) y = \log_2 x; 3) y = 1 - 2^x;$$

$$4) y = \log_3(1+x) + 2; 5) y = \log_2 \frac{1}{x}.$$

$$772. 1) y = 3^x; 2) y = 3^{x+3}; 3) y = 2^{-x^2}; 4) y = \lg(-x);$$

$$5) y = x^2 + 2^x.$$

$$773. 1) y = \sin x; 2) y = \operatorname{tg} x; 3) y = \sin kx, \text{ როცა } k = 2,$$

$$k = \frac{1}{2}; 4) y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; 5) y = 2 \sin(2x + 2).$$

$$774. 1) y = \cos x; 2) y = \operatorname{ctg} x; 3) y = \cos 2x; 4) y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$5) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$775. 1) y = \sin x + \cos x; 2) y = \arcsin x; 3) y = \arcsin \operatorname{tg} x.$$

$$776. 1) y = \arcsin x; 2) y = \arcsin \operatorname{ctg} x.$$

$$777. 1) y = |x|; 2) y = \sin x + |\sin x|; 3) y = \lg x^2; 4) y = |-x^2 + 4|;$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } 0 < x < 1, \\ x, & \text{როცა } 1 < x < 2. \end{cases}$$

ააგეთ შემდეგი წირები პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში და დაწერეთ მათი განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში:

$$778. 1) r = 1; 2) r = \frac{1}{2} \varphi; 3) r = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

$$779. 1) r = \frac{\pi}{\varphi}; 2) r = c^\varphi; 3) r = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

$$780. 1) r = a \sin \varphi; 2) r = a \sin 2\varphi; 3) r = a \sin 3\varphi. \quad (a > 0).$$

$$781. 1) r = a \cos \varphi; 2) r = a \cos 2\varphi; 3) r = a \cos 3\varphi. \quad (a > 0).$$

$$782. 1) r = a(1 + \cos \varphi); 2) r^2 = a^2 \cos 2\varphi. \quad (a > 0).$$

$$783. 1) r = a(1 - \cos \varphi); 2) r^2 = a^2 \sin 2\varphi. \quad (a > 0).$$

დაწერეთ პარამეტრული კოორდინატაში შემდეგი წირების განტოლებები:

$$784. 1) (x^2 + y^2)^2 = xy; \quad 2) x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$785. 1) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}; \quad 2) (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

დაწერეთ პარამეტრული სახით შემდეგი წირების განტოლებები (პარამეტრად მიიღეთ φ კუთხე);

$$786. 1) r = 2a \cos \varphi; \quad 2) r = \frac{a}{\varphi}.$$

$$787. 1) r = 2a \sin \varphi; \quad 2) r = 2p \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

ააგეთ გრაფიკები პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციებისა:

$$788. 1) x = t^3, y = t^2; \quad 2) x = a \cos t, y = a \sin t; \quad 3) x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t.$$

$$789. 1) x = 3 \cos t, y = 4 \sin t; \quad 2) x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2};$$

$$3) x = 2 \cos^2 t, y = 2 \sin^2 t.$$

§ 2. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა და მისი ზღვარი

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას რიცხვთა მიმდევრობას უწოდებენ და ჩაწერენ ასე:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

მიმდევრობა მოკლედ (x_n) სიმბოლოთი აღინიშნება. x_n -ს მიმდევრობის ზოგადი წევრი ეწოდება.

a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ასეთი $n_0(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ როცა $n > n_0(\varepsilon)$ ადგილი აქვს უტოლობას: $|x_n - a| < \varepsilon$. ამას ასე ჩაწერენ: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ან $x_n \rightarrow a$, როცა $n \rightarrow \infty$ ან $x_n - a \rightarrow 0$, როცა

$n \rightarrow \infty$.

დაწერეთ მიმდევრობები მათი ზოგადი წევრების მიხედვით:

$$790. 1) x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n; \quad 2) x_n = (-1)^n(2n+1); \quad 3) x_n = \cos n\pi.$$

$$791. 1) x_n = n + (-1)^n; \quad 2) x_n = \frac{3 + (-1)^n}{n}; \quad 3) x_n = \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}.$$

დაწერეთ ზოგადი წევრები შემდეგი მიმდევრობებისა:

792. 1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots$; 2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$;

3) $\frac{7}{3}, \frac{11}{5}, \frac{15}{7}, \frac{19}{9}, \dots$

793. 1) $\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \dots$; 2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16},$

$\frac{1}{32}, \dots$; 3) $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}, \frac{8}{9}, \frac{11}{11}, \frac{14}{13}, \dots$

794. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$,

არის 2. იპოვეთ N , თუ $\varepsilon = 0,1$.

795. აჩვენეთ, რომ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$,

არის 1. იპოვეთ N , თუ $\varepsilon = 0,01$.

796. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{1}{n^2}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$,

არის 0. როგორი n -ისათვის შესრულდება $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ უტოლობა, თუ:

1) $\varepsilon = 0,01$; 2) $\varepsilon = 0,001$.

797. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{n}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \rightarrow \infty$,

არის 1. იპოვეთ N , თუ: 1) $\varepsilon = 0,1$; 2) $\varepsilon = 0,01$.

იპოვეთ ზღვრები შემდეგი მიმდევრობებისა:

798. $x_n = \frac{3n-1}{n}$.

799. $x_n = \frac{2^n-1}{2^n}$.

800. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

801. $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

802. $x_n = \frac{n}{2n+1}$.

803. $x_n = \frac{2n+1}{3n-4}$.

804. $x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$.

805. $x_n = \frac{n^2+3}{3n^2+5}$.

806. ავიღოთ წესიერი წილადი $\frac{3}{4}$. თუ მრიცხველს და მნიშვნელს

$\frac{4n+1}{4n+1}$

$\frac{4n+1}{4n+1}$ 125

მივუმატებთ ერთსა და იმავე n რიცხვს, მივიღებთ $x_n = \frac{3+n}{4+n}$ წილადს,

იპოვეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

807. ავიღოთ არაწესიერი წილადი $\frac{6}{5}$. თუ შრიცხველსა და მნიშვნელს

მივუმატებთ ერთსა და იმავე n რიცხვს. მივიღებთ $x_n = \frac{6+n}{5+n}$ წილადს.

იპოვეთ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

$$808. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 5}{1 + 2 + 3 + \dots + n}, \quad 809. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 3} - \frac{n}{2} \right).$$

$$810. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$811. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$812. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+4)! + (n+2)!}{(n+5)!}, \quad 813. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)! - (n+1)!}{(n+3)! + (n+1)!}.$$

$$814. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n+1} + 5^{n+1}}{4^n + 5^n}, \quad 815. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}.$$

$$816. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)}{1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3)}.$$

$$817. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

$$818. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

$$819. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2}.$$

§ 4. უწყვეტობის ზღვარი

A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ როცა $0 < |x - x_0| < \eta$, შესრულდება უტოლობა:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

ამ ფაქტს ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, +\infty[$ შუალედში, მაშინ b რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x \rightarrow +\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ ყველა იმ x -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x > M$ უტოლობას, სრულდება $|f(x) - b| < \varepsilon$ უტოლობა. ასეთ შემთხვევაში წერენ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, ან

$f(x) \rightarrow b$, როცა $x \rightarrow +\infty$. თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია $] -\infty, a[$ შუალედში, მაშინ b რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი როცა $x \rightarrow -\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $M < 0$ რიცხვი, რომ ყველა იმ x -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x < M$ უტოლობას, სრულდება $|f(x) - b| < \varepsilon$ უტოლობა. ასეთ შემთხვევაში წერენ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, ან $f(x) \rightarrow b$, როცა $x \rightarrow -\infty$.

$x \rightarrow -\infty$

ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ ნებისმიერი $M > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ როცა $0 < |x - a| < \delta$, სრულდება $f(x) > M$. ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

ფუნქციას ეწოდება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ $(-f)$ ფუნქცია არის დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი a წერტილში თუ $|f(x)|$ არის დადებითი უსასრულოდ დიდი a წერტილში. ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

ვთქვათ, $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, როცა $x \rightarrow a$, ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0.$$

1. თუ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, მაშინ α -ს ეწოდება მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე β -ს მიმართ.

2. თუ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$, მაშინ α დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β -ს მიმართ.

3. თუ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A (A \neq 0)$, მაშინ α და β ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

4. β უსასრულოდ მცირეს ცნობდება n -ური რიგის უსასრულოდ მცირე α უსასრულოდ მცირის მიმართ, თუ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha^n} = A (A \neq 0)$.

5. თუ α და β უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია და $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, მაშინ α -სა და β -ს უწოდებენ ტოლფას უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს და აღნიშნავენ $\alpha \sim \beta$.

6. ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდის ფართობის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ სიდიდეებს შევცვლით მათი ტოლფასი უსასრულოდ მცირეებით.

თუ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $x \rightarrow a$, მაშინ:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{arcsin} \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \\ e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \ln |1 + \alpha(x)| \sim \alpha(x), a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a.$$

განვიხილოთ a წერტილის რაიმე მიდამოში (გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა) განსაზღვრული f და g ფუნქციები (a წერტილი შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულობა). ვიგულისხმებთ, რომ ამ მიდამოში $g(x) \neq 0$.

თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

მაშინ ამ ფაქტს აღნიშნავენ ასე:

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

ამბობენ, რომ $f \in E$ სიმრავლეზე არის O — დიდი φ -დან და აღნიშნავენ $f(x) = O(\varphi(x))$ E -ზე თუ არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი რიცხვი C , რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე ადგილი აქვს პირობას

$$|f(x)| \leq C \cdot |\varphi(x)|$$

ე. ი.

$$(f(x) = O(\varphi(x)) \text{ } E\text{-ზე}) \iff (|f(x)| \leq C \cdot |\varphi(x)|, \forall x \in E),$$

კერძოდ, $f(x) = O(1)$ -ზე, ნიშნავს რომ f შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

თუ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, მაშინ მართებულია შემდეგი

ტოლობები:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (C \text{ მუდმივი სიდიდე}).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}, \quad \text{თუ } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0.$$

თუ $f(x)$ ელემენტარული ფუნქციაა და $f(x)$ x_0 წერტილში განსაზღვრულია, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრები $x = x_0$ წერტილზე ერთდროულად ნული არ არის, მაშინ ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ უშუალოდ მოიძებნება.

თუ არსებობს სასრული ზღვრები $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = A^B.$$

თუ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 1$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \pm \infty$, მაშინ ზღვარი უშუალოდ მოიძებნება.

თუ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ და $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, მაშინ დავეშვებით, რომ $f(x) = 1 + \alpha(x)$, სადაც $\alpha(x) \rightarrow 0$, როცა $x \rightarrow x_0$, ამიტომ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x) \cdot \varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] \varphi(x)}, \quad \text{სადაც}$$

$e = 2,718 \dots$ ნეპერის რიცხვია.

თუ არსებობს და დადებითია ზღვარი $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)].$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad (a > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{k}.$$

820. აჩვენეთ, რომ $f(x) = 2x + 3$ ფუნქციის ზღვარი $x = 1$ წერტილზე არის 5.

821. აჩვენეთ, რომ $f(x) = 4x - 1$ ფუნქციის ზღვარი $x = 3$ წერტილზე არის 11.

822. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 0,01$.

823. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x - x^2) = 4$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 0,0001$.

824. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$.

825. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x) = 6$.

826. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$.

827. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$.

828. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

829. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = 1$.

830. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. როგორი უნდა იყოს N ,

რომ $|x| > N$ უტოლობიდან გამომდინარეობდეს $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$ უტოლობა?

831. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{2 + 4x^2} = -\frac{1}{2}$. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობები, თუ $\varepsilon = 0,01$.

832. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$.

833. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} = \infty$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 10$;

$\varepsilon = 100$.

შეისწავლეთ x ცვლადის მიმართ შემდეგი უსასრულო მცირე სიდიდეები, როცა $x \rightarrow 0$:

834. 1) x^2 ; 2) $\sin 3x$; 3) $2x \cos x \sqrt[3]{\lg^3 x}$; 4) $x e^{2x}$.

835. 1) $x - 3x^2$; 2) $x^3 + 3x^4$; 3) $5 \sqrt[3]{x^2}$; 3) $\frac{1}{2} \lg 2x$.

განსაზღვრეთ x უსასრულო მცირის მიმართ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

836. 1) $1 - \cos x$; 2) $x - 3x^2 + 4x^3$; 3) $\frac{2x^3}{1+x}$; 4) $e^x - \cos x$.

837. 1) $e^{\sin x} - 1$; 2) $\lg^3 x + \sin^3 x$; 3) $\lg^2 x (1 - \cos x)$.

მიიღეთ x პირველი რიგის უსასრულო დიდ სიდიდე და განსაზღვრეთ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

838. 1) $x^2 - 10x + 100$; 2) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

839. 1) $\frac{x^5}{x+2}$; 2) $\sqrt[3]{x-2x^2}$.

840. x უსასრულო მცირეა, აჩვენეთ, რომელია უსასრულო მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულო დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან: $2x^2$; $3-x$; $\frac{2}{x}$; $\sqrt{9-x}$; $1-\cos x$; e^x ; $\ln x$; $\sin x$; $\operatorname{ctg} x$.

841. x უსასრულო დიდია; აჩვენეთ, რომელია უსასრულო მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულო დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან:

$\sqrt[3]{x}$; $3 - \frac{1}{x}$; $\sin \frac{3}{x}$; $\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$; $e^{\frac{1}{x}}$; e^{x^2} ; $\frac{\sin x}{x}$;

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

842. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$

843. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 5}$

844. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

845. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

846. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

847. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3}{x^2 - 9}$

848. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$

849. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

850. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$

851. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + x - 12}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad (a > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{k}.$$

820. აჩვენეთ, რომ $f(x) = 2x + 3$ ფუნქციის ზღვარი $x=1$ წერტილზე არის 5.

821. აჩვენეთ, რომ $f(x) = 4x - 1$ ფუნქციის ზღვარი $x=3$ წერტილზე არის 11.

822. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 0,01$.

823. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 2x - x^2) = 4$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 0,0001$.

824. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$.

825. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x) = 6$.

826. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$.

827. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$.

828. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

829. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} = 1$.

830. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. როგორი უნდა იყოს N ,

რომ $|x| > N$ უტოლობიდან გამომდინარეობდეს $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$ უტოლობა?

831. დამტკიცეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{2 + 4x^2} = -\frac{1}{2}$. იპოვეთ x -ის მნიშვნელობები, თუ $\varepsilon = 0,01$.

832. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

833. აჩვენეთ, რომ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$. იპოვეთ η , თუ $\varepsilon = 10$;

$\varepsilon = 100$.

შეისწავლეთ x ცვლადის მიმართ შემდეგი უსასრულოდ მცირე სიდიდეები, როცა $x \rightarrow 0$:

834. 1) x^2 ; 2) $\sin 3x$; 3) $2x \cos x \sqrt[3]{\lg^3 x}$; 4) $x e^{2x}$.

835. 1) $x - 3x^2$; 2) $x^3 + 3x^4$; 3) $5 \sqrt[3]{x^2}$; 3) $\frac{1}{2} \lg 2x$.

განსაზღვრეთ x უსასრულოდ მცირის მიმართ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

836. 1) $1 - \cos x$; 2) $x - 3x^2 + 4x^3$; 3) $\frac{2x^2}{1+x}$; 4) $e^x - \cos x$.

837. 1) $e^{\sin x} - 1$; 2) $\operatorname{tg}^3 x + \sin^3 x$; 3) $\operatorname{tg}^2 x (1 - \cos x)$.

მიიღეთ x პირველი რიგის უსასრულოდ დიდ სიდიდეს და განსაზღვრეთ შემდეგი სიდიდეების რიგი:

838. 1) $x^2 - 10x + 100$; 2) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

839. 1) $\frac{x^5}{x+2}$; 2) $\sqrt[3]{x - 2x^2}$.

840. x უსასრულოდ მცირეა, აჩვენეთ, რომელია უსასრულოდ მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულოდ დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან: $2x^2$; $3 - x$; $\frac{2}{x}$; $\sqrt{9 - x}$; $1 - \cos x$; e^x ; $\ln x$; $\sin x$; $\operatorname{ctg} x$.

841. x უსასრულოდ დიდია; აჩვენეთ, რომელია უსასრულოდ მცირე, სასრული სიდიდე და უსასრულოდ დიდი შემდეგი ფუნქციებიდან:

$\sqrt[3]{x}$; $3 - \frac{1}{x}$; $\sin \frac{3}{x}$; $\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$; $e^{\frac{1}{x}}$; e^{x^2} ; $\frac{\sin x}{x}$;

გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

842. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$.

843. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 5}$.

844. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$.

845. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

846. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$.

847. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3}{x^2 - 9}$.

848. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$.

849. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

850. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$.

851. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + x - 12}$.

$$852. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$854. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 - 5x}{3x^2 + 2x}$$

$$856. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$858. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ და } n \text{ მთელი რიცხვებია}).$$

$$859. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}; \quad (x^n - a^n); \quad (n \text{ მთელი რიცხვია}).$$

$$860. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

$$861. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{x^4 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$862. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{6x^2 + 2x + 1}$$

$$863. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1}$$

$$864. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}$$

$$865. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

$$866. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 8}$$

$$867. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^4 + 7x - 1}$$

$$868. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x-1)(3x+7)(2x+3)}{2x^3 + x^2 - 9}$$

$$869. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+2)^2(2x-5)^3}{27x^7 + 4x + 3}$$

$$870. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$$

$$871. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{4x+1} - \frac{2x^3}{8x^2 - 1} \right)$$

$$872. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{3x+3}}{\sqrt{6x-5} - 7x^2}$$

$$873. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 11}{\sqrt{x^4 - 2}}$$

$$874. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

$$875. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$876. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3 + 4x + 5x^2}}{2x + 9}$$

$$877. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$878. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$879. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x - 3}$$

$$880. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$$

$$881. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$$

$$882. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}$$

$$883. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$$

$$\sqrt{884.} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$\sqrt{883.} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+9}}{x+3}$$

$$\sqrt{886.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}). \quad \sqrt{887.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}).$$

$$\sqrt{888.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x). \quad \sqrt{889.} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x).$$

$$890. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$$

$$891. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$892. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$893. 1) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

$$894. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2};$$

$$895. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$896. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$897. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} 4x}{\sin 7x}.$$

$$898. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x \sin 2x}.$$

$$899. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$900. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 4x}{2x + \sin 5x}.$$

$$901. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin \operatorname{tg} 3x}{x + \arcsin 6x}.$$

$$902. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$903. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \right).$$

$$904. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$905. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x-3}$$

$$906. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$907. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{4-x^2}$$

$$908. \lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}.$$

$$909. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$910. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x} \quad 911. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$912. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x^2 + x^4}{6x + x^3} \quad 913. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x + x^3 - x^2}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 7x + x^2}$$

$$914. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} - 1}{\operatorname{tg}^2 2x} \quad 915. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 - 2x} - 1}{\sqrt[3]{1 + 3x} - 1}$$

$$916. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - 3}{\operatorname{arc} \sin \frac{x}{9}} \quad 917. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16 - x^2} - 2}{1 - \cos x}$$

$$918. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\sin^2 x} \quad 919. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{3 + x} - \sqrt[5]{3 - x}}{x}$$

$$920. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}{\operatorname{arc} \sin 4x} \quad 921. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^4}}{\ln(1 + \sin 5x)}$$

$$922. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} \quad 923. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{lg}(1 + 3x)}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$924. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x} \quad 925. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3x + 5) - \ln(x + 4)]$$

$$926. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) [\ln(x - 2) - \ln(x + 1)]$$

$$927. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4) [\ln(2 - 3x) - \ln(5 - 3x)]$$

$$928. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a + x}{a + x} \quad 929. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos mx)}{\ln(\cos nx)}$$

$$930. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - b^{\operatorname{tg} x}}{x} \quad (a > 0, b > 0) \quad 931. \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt[x]{a} - 1) \quad (a > 0)$$

$$932. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad 933. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

$$934. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{\ln(1 + x)} \quad 935. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$$

$$936. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad 937. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

$$938. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x}{2} \right)^{x^3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 - x}{7 + x} \right)^x$$

$$939. 1) \lim_{x \rightarrow 10} \left(\frac{1}{5} x^2 \right)^{\lg x};$$

$$940. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-1}{5x+6} \right)^x.$$

$$942. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x.$$

$$944. \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{x}{1-x}}.$$

$$946. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x.$$

$$948. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^4}.$$

$$950. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x - 3} \right)^x.$$

$$952. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{2 \sec x}.$$

$$954. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}.$$

$$956. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} \right)^x.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x-3}{3x+1} \right)^{x+2}.$$

$$941. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{3x+2} \right)^x.$$

$$943. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$945. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}.$$

$$947. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$949. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)^{\sqrt{x}}.$$

$$951. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 + 8x^4 + 3}{x^5 + 5x^4 - 2} \right)^x.$$

$$953. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)^{3 \operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$955. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$957. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

§ 4. 662026633 923660

$$958. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} bx}.$$

$$960. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x + x^4)}{\operatorname{tg}(x^2 + x^3)}.$$

$$962. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\operatorname{arctg} x - 1)}{\operatorname{arctg} x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + 1)}.$$

$$964. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}.$$

$$959. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}.$$

$$961. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1+x)}{2x - \ln(1+x)}.$$

$$963. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arcsin}(1-2x)}{4x^2 - 1}.$$

$$965. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right).$$

$$966. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2 \frac{1}{(x-2)^2} \right]$$

$$967. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$$

$$968. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$969. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$$

$$970. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$971. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$$

$$972. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$$

$$973. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$$

$$974. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$$

$$975. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$976. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln^2(1-2x^2)} - 1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$$

$$977. \lim_{n \rightarrow +\infty} n [\ln n - \ln(n+2)]$$

$$978. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{x} \right)$$

$$979. \lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$980. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha+x) - \sin(\alpha-x)}{\operatorname{tg}(\alpha+x) - \operatorname{tg}(\alpha-x)}$$

$$981. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - e^{nx}}{a^{mx} - a^{nx}}, (a > 0)$$

$$982. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$983. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{a^x + b^x - 1}, (a > 0, b > 0)$$

$$984. \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2 \right), (a > 0)$$

$$985. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n, (a > 0, b > 0)$$

$$986. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - \ln(1-x+x^2)}{1 - \cos x}$$

$$987. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{1 - \sin x}}$$

$$988. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$989. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}, (a > 0)$$

$$990. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, (a > 0)$$

991. დაამტკიცეთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. მართებულია

თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

992. დაამტკიცეთ, რომ (n^3) მიმდევრობა განშლადია.

993. „ε—δ“ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „ x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არ არის A რიცხვი“.

994. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტია, მაშინ $|f(x)|$ -იც უწყვეტია. სამართლიანია თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

995. „ε—δ“ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „ x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არაა უწყვეტი ამავე წერტილში“.

996. ვთქვათ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, ხოლო $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ არ არსებობს. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$.

997. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ზღვარი, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას კი ამ წერტილში არა აქვს ზღვარი. იარსებებს თუ არა ზღვრება:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)); \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)?$$

განიხილეთ მაგალითი:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

998. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს შეუღებავი განსხვავებული ზღვარი, ხოლო $g(x)$ უსასრულოდ დიდია x_0 წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)g(x)$ უსასრულოდ დიდი ფუნქციაა x_0 წერტილში.

999. არის თუ არა უსასრულოდ დიდი $x=0$ წერტილში $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ფუნქცია?

1000. ვთქვათ $\alpha_1(x) \sim \alpha(x)$, $\beta_1(x) \sim \beta(x)$. დაამტკიცეთ, რომ თუ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, მაშინ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ზღვარიც.

§ 5. უწყვეტი საღმრთო ფუნქციები, უწყვეტი და უწყვეტილი ფუნქციები

A_1 რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$, ყოველი x -სათვის, როკე-

966. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2 \frac{1}{(x-2)^2} \right]$.
967. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.
968. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.
969. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\sin \frac{x}{2}}{\pi-x}$.
970. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2 \cos x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}$.
971. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$.
972. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2 \cos x}{\pi-3x}$.
973. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$.
974. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$.
975. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.
976. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln^2(1-2x^2)} - 1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$.
977. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n [\ln n - \ln(n+2)]$.
978. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{x} \right)$.
979. $\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x+1}}$.
980. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha+x) - \sin(\alpha-x)}{\operatorname{tg}(\alpha+x) - \operatorname{tg}(\alpha-x)}$.
981. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - e^{nx}}{a^{mx} - a^{nx}}, (a > 0)$.
982. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.
983. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{a^x + b^x - 1}, (a > 0, b > 0)$.
984. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2 \right), (a > 0)$.
985. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n, (a > 0, b > 0)$.
986. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - \ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$.
987. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$.
988. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.
989. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, (a > 0)$.
990. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, (a > 0)$.

991. დაამტკიცეთ, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. მართებულია

თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

992. დაამტკიცეთ, რომ (n^2) მიმდევრობა განშლულია.

993. „ ε - δ “ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „ x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არ არის A რიცხვი“.

994. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ უწყვეტია, მაშინ $|f(x)|$ -იც უწყვეტია. სამართლიანია თუ არა შებრუნებული მტკიცება?

995. „ ε - δ “ ენაზე ჩამოაყალიბეთ მტკიცება: „ x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია არაა უწყვეტი ამავე წერტილში“.

996. ვთქვათ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, ხოლო $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ არ არსებობს. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$.

997. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ზღვარი, ხოლო $g(x)$ ფუნქციას კი ამ წერტილში არა აქვს ზღვარი. იარსებებს თუ არა ზღვრები:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)); \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)?$$

განიხილეთ მაგალითი:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

998. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი, ხოლო $g(x)$ უსასრულოდ დიდი x_0 წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $f(x)g(x)$ უსასრულოდ დიდი ფუნქციაა x_0 წერტილში.

999. არის თუ არა უსასრულოდ დიდი $x=0$ წერტილში $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ფუნქცია?

1000. ვთქვათ $\alpha_1(x) \sim_{x_0} \alpha(x)$, $\beta_1(x) \sim_{x_0} \beta(x)$. დაამტკიცეთ, რომ თუ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, მაშინ არ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ზღვარიც.

§ 5. უწყვეტი საღმსრინო ზღვრები, უწყვეტი და წყვეტილი უწყვეტიანი

A_1 რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$, ყოველი x -სათვის, რომე-

ლიც აკმაყოფილებს $x_0 < x < x_0 + \eta$ უტოლობებს. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A_1 = f(x_0+).$$

A_2 რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან x_0 წერტილზე, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x) - A_2| < \varepsilon$, ყოველი x -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $x_0 - \eta < x < x_0$ უტოლობებს. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A_2 = f(x_0-).$$

აღნიშნულ ზღვრებს უწოდებენ აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს x_0 წერტილზე.

$f(x)$ ფუნქციის ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ ამ წერტილზე ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ან ასე: $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე, თუ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე $\Delta x = x - x_0$ ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ ნაზრდი, რასაც ასე ჩაწეროთ:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, როცა არსებობს x_0 წერტილზე ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$, მაგრამ $f(x_0+) \neq f(x_0-)$; ამ შემთხვევაში $\omega = |f(x_0+) - f(x_0-)|$ სხვაობას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილზე.

f ფუნქციის წყვეტის x_0 წერტილს, რომელიც არ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, ეწოდება ამ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის აცილებადი წყვეტის წერტილი, თუ არსებობს $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, მაგრამ ის არ უდრის $f(x_0)$ -ს, ან ეს უკანასკნელი არაა განსაზღვრული.

1001. იპოვეთ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=0$ წერტილზე.

1002. იპოვეთ $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x=0$ წერტილზე.

იპოვეთ ცალმხრივი ზღვრები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1003. \lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{3}{x-2}$$

$$1004. \lim_{x \rightarrow -3 \pm} \frac{x+3}{|x+3|} x.$$

$$1005. \lim_{x \rightarrow 1 \pm} 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$1006. \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$1007. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm} \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$$

$$1008. \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$1009. \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$$

$$1010. \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}$$

აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების უწყვეტობა x არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის:

1011. 1) $y = x^2$; 2) $y = \sin x$. 1012. 1) $y = x^3$; 2) $y = \cos x$

1013. 1) $y = \sqrt{x}$, ($x \geq 0$); 2) $y = e^x$. 1014. 1) $y = \sqrt[3]{x}$; 2) $y = |x|$.

ააგეთ გრაფიკები, გამოარკვიეთ წყვეტის წერტილები და იპოვეთ ნახტომი (სადაც არსებობს) ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებისა:

1015. 1) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; 2) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

1016. 1) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$; 3) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

1017. 1) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 2) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$.

1018. 1) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{x^3+x}{2|x|}$.

აბოვეო წყვეტის წერტილები შემდეგ ფუნქციებისა:

$$1019. 1) y = \frac{x+3}{x(x^2-4)}; \quad 2) y = \frac{x+1}{x^2+1}; \quad 3) y = \operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$4) y = \sin \frac{\pi}{x}; \quad 5) y = \frac{1}{\lg x}; \quad 6) y = \ln |\sin x|.$$

$$1020. 1) y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-2)}; \quad 2) y = \frac{x}{x^2+3}; \quad 3) y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x};$$

$$4) y = e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad 5) y = \ln \ln (1+x^2); \quad 6) y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$f(x)$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული ნაჩვენებ წერტილზე. ამ წერტილზე ფუნქცია განსაზღვრეთ ისე, რომ იგი იყოს უწყვეტი:

$$1021. f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}, x=-1. \quad 1022. f(x) = \frac{\sqrt{5x}-x}{x-5}, x=5.$$

$$1023. f(x) = \frac{1-\cos 3x}{x^2}, x=0. \quad 1024. f(x) = \frac{\ln(2+x)-\ln(2-x)}{x},$$

$x=0.$

1025. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა } x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{როცა } x = 1 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტის განიცილის $x=1$ წერტილზე.

1026. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 2, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტის განიცილის $x=0$ წერტილზე.

1027. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{როცა } x < -1; \\ x+2, & \text{როცა } x \geq -1. \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტის განიცილის $x=-1$ წერტილზე.

1028. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როცა } x \leq 3, \\ 2x + 1, & \text{როცა } x > 3 \end{cases}$$

ფუნქცია წყვეტას განიკდის $x=3$ წერტილზე.

1029. მოცემულია ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{როცა } x < 0, \\ a+x, & \text{როცა } x \geq 0. \end{cases}$$

a -ს როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1030. მოცემულია

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{როცა } x \neq 2 \\ a, & \text{როცა } x = 2 \end{cases}$$

ფუნქცია a -ს როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

იპოვეთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1031. f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{როცა } x \leq -1, \\ x^2 + 1, & \text{როცა } -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & \text{როცა } x > 1. \end{cases}$$

$$1032. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{როცა } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{როცა } x > \pi. \end{cases}$$

1033. 1) აჩვენეთ, რომ დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია,} \end{cases}$$

წყვეტას განიკდის x -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

2) აჩვენეთ, რომ $f(x) = xD(x)$ ფუნქცია უწყვეტია მხოლოდ $x=0$ წერტილზე.

1034. გამოიკვლიეთ $f(x) = \text{sign } x$ ფუნქციის უწყვეტობა, სადაც $\text{sign } x$ (სიგნუმი x) შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x > 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \\ -1, & \text{როცა } x < 0. \end{cases}$$

1035. გამოიყვლიეთ $f(x) = x \operatorname{sign} x$ ფუნქციის უწყვეტობა.

1036. $E(x)$ არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x -ს. გამოიყვლიეთ $f(x) = E(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა.

VI ტაკტი

დიფერენციალური აღრიცხვა

§ 1. ფუნქციის წარმოებული

$y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულს x წერტილზე ეწოდება ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნულისაკენ მიისწრაფის, იგი ასე აღინიშნება:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ფუნქციის წარმოებული გეომეტრიულად წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკის $M(x, f(x))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

მექანიკურად $x = f(t)$ ფუნქციის წარმოებული იმ წერტილის სიჩქარეა t მომენტში, რომლის მოძრაობის განტოლებაა $x = f(t)$; ეს ასე გამოითქმის: სიჩქარე მანძილის წარმოებულაა დროით.

წარმოებულის მოძებნის ძირითადი წესები. თუ C მუდმივი სიდიდეა, ხოლო $u = u(x)$ და $v = v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ:

1) $C' = 0,$

5) $(uv)' = u'v + v'u$

2) $x' = 1,$

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (v \neq 0),$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v',$

7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, (v \neq 0).$

4) $(Cu)' = Cu',$

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი:

1) $(x^a)' = ax^{a-1},$

2) $(a^x)' = a^x \ln a,$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. (e^x)' = e^x;$

3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, (x > 0, a > 0);$ 4) $(\sin x)' = \cos x;$

$(\ln x)' = \frac{1}{x};$

5) $(\cos x)' = -\sin x$;

6) $(\lg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

—თუ $y=f(u)$, ხოლო $u=\varphi(x)$, მაშინ $y=f[\varphi(x)]$ არის x -ის რთული ფუნქცია. თუ y და u წარმოებელი ფუნქციებია, მაშინ

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{ანუ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

თუ $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებელი $y'_x \neq 0$, მაშინ შექცეული $x=\varphi(y)$ ფუნქციის წარმოებელი იქნება:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \quad \text{ანუ} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

$y=f(x)$ ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებელი ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

ფუნქციის წინასწარი გალოგარითმება ბევრ შემთხვევაში აპარტივებს მისი წარმოებულის მოძებნას.

თუ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}, \quad y'''_x = \frac{(y'_t)''_t}{x'_t} \text{ და ა. შ.}$$

მეორე რიგის წარმოებული ასეც გამოითვლება:

$$y''_x = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

თუ $F(x, y) = 0$ განტოლება განსაზღვრავს y -ს, როგორც x -ის არა-ცხად ფუნქციას, მაშინ y' -ის მოსაძებნად საკმარისია მოცემული განტოლების x -ით კაწარმოება (y უნდა ჩავთვალოთ x -ის ფუნქციად) და მიღებული ტოლობიდან y' -ის პოვნა. y'' -ის მისაღებად საჭიროა მოცემული განტოლების x -ით ორჯერ კაწარმოება, და ა. შ.

$y = f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება მეორე რიგის წარმოებულის და მას ასე აღნიშნავენ:

$$y'' \text{ ან } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ან } f''(x).$$

საზოგადოდ, $f(x)$ ფუნქციის $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება n -ური რიგის წარმოებულის, რასაც ასე ჩაწერენ:

$$y^{(n)} \text{ ან } \frac{d^n y}{dx^n} \text{ ან } f^{(n)}(x).$$

წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1037. 1) $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sin x$; 4) $y = \operatorname{tg} x$;

5) $y = \sqrt{1 + 2x}$.

1038. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = 2x^2 - x$; 3) $y = \sin^2 x$; 4) $y = e^x$;

5) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1039. $y = x^2 - 5x + 6$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ Δx და Δy , თუ x იცვლება: 1) 1-დან 1.1-მდე; 2) 2-დან 1-მდე.

1040. $y = x^2 + 3x + 1$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ Δx და Δy , თუ x იცვლება 3-დან 8-მდე.

1041. $y = \sqrt{x}$ ფუნქციისათვის იპოვეთ Δy , თუ: 1) $x = 0$, $\Delta x = 0,001$; 2) $x = 8$, $\Delta x = -9$.

1042. იპოვეთ Δy ნაზრდი და $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა შემდეგი ფუნქციებისათვის; 1) $y = \sqrt{x}$, როცა $x = 0$ და $\Delta x = 0,01$; 2) $y = \lg x$, როცა $x = 100$ და $\Delta x = -90$.

1043. იპოვეთ $y = \frac{1}{x}$ ჰიპერბოლის მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი,

თუ გადაკვეთის წერტილებია $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ და $N\left(4; \frac{1}{4}\right)$.

1044. იპოვეთ $y = 2x - x^2$ პარაბოლის მკვეთის კუთხური კოეფიციენტი, თუ გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია $x_1 = 1$ და $x_2 = 2$.

1045. იპოვეთ $y = x^3$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ $x = \pm 1$.

1046. იპოვეთ $v = \frac{1}{x}$ წირის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ;

1) $x = \frac{1}{2}$; 2) $x = 1$.

1047. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა, თუ $y = x^2 + 3x + 2$ და $1 \leq x \leq 3$.

1048. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა, თუ $y = 3^x - 2x$ და $0 \leq x \leq 2$.

1049. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $s = t^2 + 2t + 4$. იპოვეთ მოძრაობის საშუალო სიჩქარე $t = 2$ წამიდან $t = 6$ წამამდე.

1050. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $s = 3t^2$. როგორია მისი მოძრაობის სიჩქარე $t = 4$ მნიშვნელობასათვის?

1051. წერტილის მოძრაობის განტოლება Ox ღერძის გასწვრივ არის $x = 3t - t^3$. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე $t = 0$; $t = 1$; $t = 2$ მომენტებისათვის.

1052. წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ ისე, რომ t წამის შემდეგ მისი დაშორება საწყისი წერტილიდან არის:

$$s = \frac{1}{4} t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

განსაზღვრეთ, როდის იქნება მისი სიჩქარე ნულის ტოლი.

იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

1053. $y = x^4 + 3x^2 - 6$.

1054. $y = x^6 + 2x^4 - 5x + 2$.

1055. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$.

1056. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 3x$.

1057. $y = x^3 + 2\sqrt{x}$.

1058. $y = \frac{7}{a} x^2 + 3\sqrt[3]{x}$.

1059. $y = ax^n + bx^m$.

1060. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b}$.

1061. $y = 3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{4}{5}} + x - \frac{1}{2}$.

1062. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 2x$.

1063. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$.

1064. $y = \frac{3}{\sqrt{x^2}} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$.

1065. $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$. 1066. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$.
1067. 1) $y = x^2 \cos x$; 2) $y = 3^x \arcsin x$.
1068. 1) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$; 2) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
1069. $f(x) = \frac{3}{x} + \ln x$. 1070. $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$.
1071. $y = \frac{3x - 2}{x^2 + 4x - 7}$. 1072. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.
1073. $f(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$. 1074. $f(t) = \frac{1 + e^t}{1 - e^t}$.
1075. $s = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$. 1076. $s = (1 + t^2) \operatorname{arctg} t - t$.
1077. $y = \arcsin x + \arccos x$. 1078. $y = \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$.
1079. $y = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4}$. 1080. $y = 3 \ln x - \frac{1 + \ln x}{x}$.
1081. $y = e^x \operatorname{arctg} x$. 1082. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.
1083. $y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$. 1084. $y = 3^x \cdot x^5$.
1085. $y = x^2 e^x \sin x$. 1086. $y = x^3 a^x \ln x$.
1087. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$. одроби $f'(1)$ та $f'(-1)$.
1088. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$. одроби $f'(0)$.
1089. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$. одроби $f'(3)$.
1090. $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$. одроби $f'(4)$.
1091. $y = \sin 6x$. 1092. $y = \cos^3 x$.
1093. $y = (x^4 - 2x^2 + 3)^4$. 1094. $y = (5x^2 - 2x + 4)^2$.
1095. $y = \sin^2 2x$. 1096. $y = \operatorname{tg}^2 3x$.
1097. $y = \sin 2x \cdot \cos 3x$. 1098. $y = 2x + 5 \sin^3 x$.
1099. $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$. 1100. $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$.
1101. $y = \left(\frac{1}{6}x^{12} + 4\sqrt[3]{x^5} - 3\right)^3$. 1102. $y = \sqrt[4]{x^2 + 3x} - \sqrt[5]{(6x - 1)^3}$.
1103. $y = a \sin^3 \frac{x}{3}$. 1104. $y = \arcsin(e^{x^2})$.
1105. $y = \sin(\ln x)$. 1106. $y = \ln(\ln \operatorname{tg} x)$.

1107. $y = e^{\cos x} \cdot \sin x.$

1109. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$

1111. $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}.$

1113. $y = \ln \operatorname{tg} x - \frac{1}{2 \sin^2 x}.$

1115. 1) $y = e^{\sqrt{x}};$

1116. 1) $y = x^3 \cdot 7^{5x}.$

1117. $y = \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1}.$

1119. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}.$

1121. $y = 5^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}}$

1123. $y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$

1125. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$

1127. $y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x) e^{-x}.$

1129. $y = \ln \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \cos^2 4x \right).$

1131. $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg} 3x.$

1133. $y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3).$

1135. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$

1137. $y = \sqrt{4x-x^2} + 4 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{x}}{2}.$

1139. $y = x \ln(x^2+1) - 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$

1140. $y = (2x^2-1) \operatorname{arc} \sin x + x \sqrt{1-x^2}.$

1141. $y = \sin^3 5x \cdot \cos^5 3x.$

1108. $y = e^x \ln \sin x.$

1110. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$

1112. $y = \ln \frac{e^x}{e^x+1}.$

1114. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x.$

2) $y = \sqrt{e^x}.$

2) $y = x^2 \cdot \sin 3^{2x}.$

1118. $y = \ln \sin \frac{2x+3}{x+1}.$

1120. $y = \operatorname{arc} \sin \frac{x^2-1}{x^2}.$

1122. $y = e^{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}.$

1124. $y = 7^{x \cos^3 x}.$

1126. $y = \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 x}.$

1128. $y = 3^{\sqrt{x}} - x^2 \cos 2x.$

1130. $y = x \operatorname{arc} \sin 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg}^3 3x.$

1132. $y = (1 + \operatorname{tg}^2 x) e^{\operatorname{arctg}^2 x}.$

1134. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1136. $y = \sqrt{1-9x^2} + \operatorname{arcsin} 3x.$

1138. $y = 3 \sin x \cos^2 x + \sin^3 x.$

1142. $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} + 2\sqrt{x}.$

$$1145. y = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$1146. y = \frac{1}{13} e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x).$$

$$1147. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$1148. y = 2 \operatorname{arcsin} \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}.$$

$$1149. y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3.$$

$$1150. y = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$1151. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}.$$

$$1152. y = \ln \cos \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$1153. y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{2}{2(x+1)}.$$

$$1154. y = \frac{3x+2}{4x^2} \sqrt{x-1} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$1155. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}. \quad \text{იპოვეთ } f'(0) \text{ და } f'(-3).$$

$$1156. f(x) = \frac{2+x^2}{\sqrt{2-x^2}}. \quad \text{იპოვეთ } f'(0) \text{ და } f'(1).$$

$$1157. f(x) = \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{x}. \quad \text{იპოვეთ } f'(5).$$

$$1158. f(x) = \ln(1+2^x). \quad \text{იპოვეთ } f'(2).$$

$$1159. f(x) = \ln \sin x. \quad \text{იპოვეთ } f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$1160. f(x) = \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{6}. \quad \text{იპოვეთ } f'(2).$$

$$1161. f(t) = e^{-t}. \quad \text{იპოვეთ } f(0) + t f'(0).$$

$$1162. f(x) = \sqrt{x^2+3x-9}. \quad \text{იპოვეთ } f(3) + 4x f'(3).$$

$$1163. f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}. \text{ აჩვენეთ, რომ } f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

$$1164. f(x) = 1 - x^3, \varphi(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}. \text{ იპოვეთ } \frac{\varphi'(1)}{f'(1)}.$$

$$1165. y = x^x.$$

$$1166. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$1167. y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$$

$$1168. y = (\sin x)^{\lg x}.$$

$$1169. y = x^{\arctg x}$$

$$1170. y = (\ln x)^x.$$

$$1171. y_1' = (\lg x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1172. y = (\arctg 2x)^{\sin 3x}.$$

$$1173. y = (x^2 + 3)\sqrt{x}.$$

$$1174. y = (1-x^2)^{\arccos x}.$$

$$1175. y = x^{x^x}.$$

$$1176. y = e^{x^x}.$$

$$1177. y = \log_x \cos x.$$

$$1178. y = \log_{\sin x} \lg x.$$

$$1179. y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2.$$

$$1180. y = x^6(x^2+1)^{10}(x^3+1)^5.$$

$$1181. y = \frac{(x+2)^3}{(x+1)^3(x+3)^4}.$$

$$1182. y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

$$1183. y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$$

$$1184. y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{\sin^2 x}}.$$

$$1185. y_1' = \operatorname{sh} x$$

$$1186. y = \operatorname{ch} x.$$

$$1187. y = \operatorname{th} x.$$

$$1188. y = \operatorname{cth} x.$$

$$1189. y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$$

$$1190. y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}.$$

$$1191. y = \operatorname{sh}^3 2x.$$

$$1192. y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x.$$

$$1193. y = \ln \operatorname{sh} 2x.$$

$$1194. y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}.$$

$$1195. y = e^{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$1196. y = \ln(\operatorname{th} x).$$

იპოვეთ x_y' , თუ:

$$1197. y = \frac{2x+3}{5x-2}.$$

$$1198. y = \frac{1-x^4}{1+x^4}.$$

$$1199. y = \sin x + \ln \cos x.$$

$$1200. y = \frac{1}{2}x^2 + 2e^{\frac{x}{2}}.$$

$$1201. y = \arcsin 2^x.$$

$$1202. y = \arctg \sqrt{1+x^2}.$$

$$1203. y = 3x^2 - 2x^2 + 5x - 1, y''' = ?$$

$$1204. y = x^5 - 5x^3 + 6x^2 + 11, y^{IV} = ?$$

$$1143. y = \arccos 2x - \sqrt{1 - 4x^2}. \quad 1144. y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}).$$

$$1145. y = \sqrt{1 + x^2} \arctg x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$1146. y = \frac{1}{13} e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x).$$

$$1147. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$1148. y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}.$$

$$1149. y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \arctg x^3.$$

$$1150. y = \sqrt{1+x^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$1151. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3}.$$

$$1152. y = \ln \cos \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$1153. y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{2}{2(x+1)}.$$

$$1154. y = \frac{3x+2}{4x^2} \sqrt{x-1} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$1155. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}. \quad \text{იპოვეთ } f'(0) \text{ და } f'(-3).$$

$$1156. f(x) = \frac{2+x^2}{\sqrt{2-x^2}}. \quad \text{იპოვეთ } f'(0) \text{ და } f'(1).$$

$$1157. f(x) = \arcsin \frac{x-1}{x}. \quad \text{იპოვეთ } f'(5).$$

$$1158. f(x) = \ln(1+2^x). \quad \text{იპოვეთ } f'(2).$$

$$1159. f(x) = \ln \sin x. \quad \text{იპოვეთ } f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$1160. f(x) = \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{6}. \quad \text{იპოვეთ } f'(2).$$

$$1161. f(t) = e^{-t}. \quad \text{იპოვეთ } f(0) + t f'(0).$$

$$1162. f(x) = \sqrt{x^2+3x-9}. \quad \text{იპოვეთ } f(3) + 4x f'(3).$$

$$1163. f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}. \text{ သိရအောင်, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

$$1164. f(x) = 1 - x^3, \varphi(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}. \text{ ဝေလအောင် } \frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$$

$$1165. y = x^x.$$

$$1166. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$1167. y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$$

$$1168. y = (\sin x)^{\lg x}.$$

$$1169. y = x^{\arctg x}$$

$$1170. y = (\ln x)^x.$$

$$1171. y_i = (\lg x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1172. y = (\arctg 2x)^{\sin 3x}.$$

$$1173. y = (x^2 + 3)\sqrt{x}.$$

$$1174. y = (1 - x^2)^{\arccos x}.$$

$$1175. y = x^{x^x}.$$

$$1176. y = e^{x^x}.$$

$$1177. y = \log_x \cos x.$$

$$1178. y = \log_{\sin x} \lg x.$$

$$1179. y = x^5(a + 3x)^3(a - 2x)^2.$$

$$1180. y = x^6(x^2 + 1)^{10}(x^3 + 1)^5.$$

$$1181. y = \frac{(x + 2)^2}{(x + 1)^3(x + 3)^4}.$$

$$1182. y = \frac{x^3(x^2 + 1)^4}{\sqrt{x}(x - 1)}.$$

$$1183. y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}.$$

$$1184. y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x - 1)}{\sin^2 x}}.$$

$$1185. y_j = sh x$$

$$1186. y = ch x.$$

$$1187. y = th x.$$

$$1188. y = cth x.$$

$$1189. y = \frac{x^2}{ch x}.$$

$$1190. y = \frac{3cth x}{\ln x}.$$

$$1191. y = sh^3 2x.$$

$$1192. y = th x + cth x.$$

$$1193. y = \ln sh 2x.$$

$$1194. y = \sqrt{1 + sh^2 4x}.$$

$$1195. y = e^{ch^2 x}.$$

$$1196. y = \ln(th x).$$

ဝေလအောင် x'_y , တာ့:

$$1197. y = \frac{2x + 3}{5x - 2}.$$

$$1198. y = \frac{1 - x^4}{1 + x^4}.$$

$$1199. y = \sin x + \ln \cos x.$$

$$1200. y = \frac{1}{2} x^2 + 2e^{\frac{x}{2}}.$$

$$1201. y = \arcsin 2^x.$$

$$1202. y = \arctg \sqrt{1 + x^2}.$$

$$1203. y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1, y''' = ?$$

$$1204. y = x^5 - 5x^3 + 6x^2 + 11, y^{IV} = ?$$

1205. $y = \sin^2 3x$, $y'' = ?$ 1206. $y = e^{x^2}$, $y' = ?$
 1207. $y = x \ln x$, $y''' = ?$ 1208. $y = \operatorname{tg} x$, $y''' = ?$
 1209. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y'' = ?$ 1210. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $y'' = ?$
 1211. $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$, $y'' = ?$
 1212. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2}$, $y'' = ?$ 1213. $y = x^2 \sin 2x$, $y''' = ?$
 1214. $y = x^4 \ln x$, $y^{IV} = ?$ 1215. $f(x) = (2x-3)^5$, $f'''(2) = ?$
 1216. $f(x) = e^{2x^2-1}$, $f''(0) = ?$ 1217. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'''(1) = ?$
 1218. $f(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{x}$, $f''(2) = ?$

იპოვეთ $y^{(n)}$, თუ:

1219. $y = \cos ax$. 1220. $y = \sin ax$.
 1221. $y = \cos^2 ax$. 1222. $y = \sin^2 ax$.
 1223. $y = a^{kx}$. 1224. $y = x^n$.
 1225. $y = \frac{1}{1-x}$. 1226. $y = \frac{1}{1+x}$.
 1227. $y = \ln(ax+b)$. 1228. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

იპოვეთ პარამეტრი და მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

1229. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ 1230. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$
 1231. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3. \end{cases}$ 1232. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$
 1233. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ 1234. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
 1235. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2 \ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$ 1236. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$
 1237. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x . 1238. $\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x .

239. $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x , როცა $t = 1$.

240. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$ იპოვეთ y'_x , როცა $t = 2$.

241. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ იპოვეთ y''_x .

242. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases}$ იპოვეთ y'''_x .

იპოვეთ პირველი რიგის წარმოებულები შემდეგი არაეხადი ფუნქციებისა:

243. $3x - 2y + 6 = 0$.

1244. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$.

245. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

~~1246. $x^2 + y^2 - 3axy = 0$.~~

247. $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1248. $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = C$.

249. $y = \cos(x + y)$.

1250. $x^y = y^x$.

251. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$.

იპოვეთ y' , როცა $x = 0$.

252. $ye^y = e^{x+1}$.

იპოვეთ y' , როცა $x = 0, y = 1$.

იპოვეთ მეორე რიგის წარმოებულები შემდეგი არაეხადი ფუნქციებისა:

253. $y^2 = 4ax$.

1254. $y = x + \ln y$.

255. $y = x + \arctg y$.

1256. $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$.

257. $x^4 - xy + y^4 = 0$.

იპოვეთ y'' , როცა $x = 1, y = 0$.

258. $x^2 + y^2 = a^2$.

იპოვეთ y''' .

★ § 2. პირველი და მაღალი რიგის დიფერენციალური ★

$y = f(x)$ ფუნქციის ეწოდება დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ წერტილში მისი წარმოებული Δy შეიძლება წარმოვარდინოთ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x),$$

დაც A არ არის დამოკიდებული Δx -ზე. ფუნქციის წარმოების მთავარ წილს $A \Delta x$ -ს ეწოდება ამ ფუნქციის დიფერენციალი და აღინიშნება მბოლოთი dy . $y = f(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადი სათვის x

ი კვირა	1246	1248	1249	1250	151
	1251		1252	1253	

არსებობა x წერტილში. ამასთან, $1 = f'(x)$.

$y = f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს, რასაც ასე ჩაეწერო:

$$dy = f'(x) dx;$$

თუ x არგუმენტის Δx ნაზრდი მცირე სიდიდეა, მაშინ $\Delta y \approx dy$. ე. ი.

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x; \text{ აქედან } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

$f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს მეორე რიგის დიფერენციალი ეწოდება, რასაც ასე აღვნიშნავთ:

$$d^2 y = d(dy).$$

ასევე განიზარტება მესამე რიგის დიფერენციალი და ა. შ.

თუ $y = f(x)$ და x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ:

$$d^2 y = y'' dx^2, \quad d^3 y = y''' dx^3, \dots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

დიფერენცირების ძირითადი წესებია:

1) $dC = 0, C = \text{const};$

5) $d(uv) = u dv + v du;$

2) $dx = \Delta x, x$ დამოუკიდებელი ცვლადია;

3) $d(Cu) = C du;$

6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, (v \neq 0);$

4) $d(u \pm v) = du \pm dv;$

7) $df(u) = f'(u) du.$

იპოვეთ დიფერენციალები:

1259. $y = (a^2 - x^2)^5.$

1260. $y = (1 + \operatorname{tg} x)^4.$

1261. $y = x \ln x - x.$

1262. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$

1263. $r = 2\varphi - \sin 2\varphi.$

1264. $s = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$

1265. $d(\sin^2 t).$

1266. $d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right).$

1267. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$

1268. $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x).$

1269. $y = 3^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

1270. $y = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

1271. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$

1272. $x^3 y^2 + 5xy + 3 = 0.$

1273. $y = e^{\frac{x}{y}}.$

1274. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

1275. $y = \ln(\ln^n mx)$
1277. $y = \log_2 \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$
1279. $y = \log_x c$
1281. $y = \sqrt{x} \sin^2 x$
1283. $y = \ln(\operatorname{sh} x) + \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}$
1285. $y = e^{-x} \operatorname{sh} ax$
1287. $y = \ln|x|$
1289. $y = \lg_3(4x - 2)$
1291. $y = \ln(3x^2 - 5x + 6)$
1293. $y = \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$
1295. $y = \ln(\ln x)$
1297. $y = \frac{2x + 1}{\operatorname{tg}_2 x}$
1299. $y = x^{\cos x}$
1301. $y = x(1 + x)\sqrt{1 - x}$
1303. $y = \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^x$
1305. $y = xe^{-x^2}$
1307. $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$
1309. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
1311. $y = e^{x^2+3}$
1313. $y = \cos 5x, d^2y = ?$
1276. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
1278. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^3 x$
1280. $y = (\sin x)^{\cos x}$
1282. $y = \sqrt{\cos x} \cdot a \sqrt{\cos x}$
1284. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th} x)$
1286. $y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$
1288. $y = \ln(ax + b)$
1290. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
1292. $y = \ln \sin x$
1294. $y = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})$
1296. $y = x^2 \lg_3 \lambda$
1298. $y = x^3 \ln x - \cos^3 x$
1300. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$
1302. $y = x^{\operatorname{ctg} x}$
1304. $y = e^{\sin x}$
1306. $y = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}$
1308. $y = e^{-x^2} (\cos x + \sin x)$
1310. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
1312. $y = (e^{xx} - e^{2x})^2$
1314. $y = \sqrt[3]{x^2}, d^2y = ?$

წერტილში აეცილებულია და საკმარისი ამ ფუნქციის წარმოებულის არსებობა x წერტილში. ამასთან, $A = f'(x)$.

$y=f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ამ ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს, რასაც ასე ჩაწეროთ:

$$dy = f'(x) dx;$$

თუ x არგუმენტის Δx ნაზრდი მცირე სიდიდეა, მაშინ $\Delta y \approx dy$. ე. ი. $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$; აქედან $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$.

$f(x)$ ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს მეორე რიგის დიფერენციალი ეწოდება, რასაც ასე აღვნიშნავთ:

$$d^2 y = d(dy).$$

ასევე განიზარტება მესამე რიგის დიფერენციალი და ა. შ.

თუ $y=f(x)$ და x დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ:

$$d^2 y = y'' dx^2, \quad d^3 y = y''' dx^3, \dots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

● დიფერენცირების ძირითადი წესებია:

1) $dC = 0, C = \text{const};$

5) $d(uv) = u dv + v du;$

2) $dx = \Delta x, x$ დამოუკიდებელი ცვლადია;

3) $d(Cu) = C du;$

6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, (v \neq 0);$

4) $d(u \pm v) = du \pm dv;$

7) $df(u) = f'(u) du.$

იპოვეთ დიფერენციალები:

1259. $y = (a^2 - x^2)^5.$

1260. $y = (1 + \operatorname{tg} x)^4.$

1261. $y = x \ln x - x.$

1262. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$

1263. $r = 2\varphi - \sin 2\varphi.$

1264. $s = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$

1265. $d(\sin^2 t).$

1266. $d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right).$

1267. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$

1268. $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x).$

1269. $y = 3^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

1270. $y = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^2}}.$

1271. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$

1272. $x^3 y^2 + 5xy + 3 = 0.$

1273. $y = e^{-\frac{x}{y}}.$

1274. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

$\sin y = u \operatorname{arctg} a$

1275. $y = \ln(\ln^m mx)$
1276. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
1277. $y = \log_2 \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$
1278. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^4 x$
1279. $y = \log_x c$
1280. $y = (\sin x)^{\cos x}$
1281. $y = \sqrt{x}^{-\sin^2 x}$
1282. $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$
1283. $y = \ln(\operatorname{sh} x) + \frac{1}{2 \operatorname{sh} x}$
1284. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th} x)$
1285. $y = e^{-x} \operatorname{sh} ax$
1286. $y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$
1287. $y = \ln|x|$
1288. $y = \ln(ax + b)$
1289. $y = \lg_a(4x - 2)$
1290. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
1291. $y = \ln(3x^2 - 5x + 6)$
1292. $y = \ln \sin x$
1293. $y = \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$
1294. $y = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})$
1295. $y = \ln(\ln x)$
1296. $y = x^2 \lg_3 \lambda$
1297. $y = \frac{2x+1}{\operatorname{tg}_2 x}$
1298. $y = x^3 \ln x - \cos^3 x$
1299. $y = x^{\cos x}$
1300. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$
1301. $y = x(1+x)\sqrt{1-x}$
1302. $y = x^{\operatorname{ctg} x}$
1303. $y = \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^x$
1304. $y = e^{\sin x}$
1305. $y = xe^{-x^2}$
1306. $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$
1307. $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$
1308. $y = e^{-x^2}(\cos x + \sin x)$
1309. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
1310. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
1311. $y = e^{x^2+3}$
1312. $y = (e^{xx} - e^{2x})^2$
1313. $y = \cos 5x, d^2y = ?$
1314. $y = \sqrt[3]{x^2}, d^2y = ?$

$$1315. y = \sin 3x, \quad d^n y = ? \quad 1316. y = x \ln \sin x, \quad d^2 y = ?$$

$$1317. y = 2^{x^2}, \quad d^2 y = ? \quad 1318. y = \frac{\ln x}{x}, \quad d^2 y = ?$$

$$1319. y = \cos^2 2x, \quad d^3 y = ? \quad 1320. y = x^2 e^x, \quad d^3 y = ?$$

1321. 1) $y = x^2 + x + 1$. იპოვეთ dy , როცა $x = 2$ და $\Delta y = 0,1$;
2) $y = x^3$. იპოვეთ dy , როცა $x = 4$.

1322. 1) $y = \sqrt{x}$. იპოვეთ dy , როცა $\Delta x = 0,01$; 2) $y = 8x^2$. იპოვეთ dy .

1323. იპოვეთ $y = 3x^2 - x$ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი, როცა $x = 1$ და $\Delta x = 0,1$.

1324. იპოვეთ $y = 5x + x^2$ ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი, როცა $x = 2$ და $\Delta x = 0,1$.

$$1325. 1) y = \sin x. \text{ იპოვეთ } dy, \text{ თუ } x = \frac{\pi}{3} \text{ და } \Delta x = \frac{\pi}{18};$$

$$2) y = \frac{2}{\sqrt{x}}. \text{ იპოვეთ } dy, \text{ თუ } x = 9 \text{ და } \Delta x = -0,01,$$

$$1326. y = \operatorname{tg} x. \text{ იპოვეთ } dy, \text{ როცა } x = \frac{\pi}{3}, \Delta x = \frac{\pi}{180}.$$

დიფერენციალის საშუალებით იპოვეთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა x -ის მითითებული მნიშვნელობისათვის.

$$1327. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$$

$$1328. y = \sqrt{x^2 + 7x}, \quad x = 1,012.$$

$$1329. y = (x + \sqrt{5-x^2})/2, \quad x = 0,88.$$

$$1330. y = \sqrt{x}, \quad x = 27,54.$$

$$1331. y = \arcsin x, \quad x = 0,05.$$

$$1332. y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97.$$

$$1333. y = \sqrt{x}, \quad x = 26,46.$$

$$1334. y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97.$$

$$1335. y = x^{11}, \quad x = 1,021.$$

$$1336. y = \sqrt{x}, \quad x = 1,21.$$

$$1337. y = x^{21}, \quad x = 0,998.$$

$$1338. y = \sqrt{x^2}, \quad x = 1,03.$$

$$1339. y = x^6, \quad x = 2,01.$$

$$1340. y = \sqrt{x}, \quad x = 8,24.$$

$$1341. y = x^7, \quad x = 1,996.$$

$$1342. y = \sqrt{x}, \quad x = 7,64.$$

$$1343. y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2,56.$$

$$1344. y = 1/\sqrt{2y^2+x+1}, \quad x = 1,016.$$

$$1345. y = \sqrt{x}, \quad x = 8,36.$$

$$1346. y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4,16.$$

$$1347. y = x^7, \quad x = 2,002.$$

$$1348. y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78.$$

$$1349. y = \sqrt{x^5}, \quad x = 0,98.$$

$$1350. y = x^5, \quad x = 2,997.$$

$$1351. y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$$

$$1352. y = x^3, \quad x = 3,998.$$

1353. წარმოებულის განსაზღვრის საფუძველზე დაამტკიცეთ, რომ:
- წარმოებადი პერიოდული ფუნქციის წარმოებული პერიოდული ფუნქციაა.
 - წარმოებადი კენტი ფუნქციის წარმოებული ლუწი ფუნქციაა;
 - წარმოებადი ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა.

1354. დაამტკიცეთ, რომ $f'(0)$ არ არსებობს, თუ

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1355. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული წყვეტილია $x=0$ წერტილში.

1356. დაამტკიცეთ შიახლოებითი ფორმულა

$$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}, \quad x > 0, \quad |x| \ll a.$$

1357. რა შეიძლება ითქვას $f(x) + g(x)$ ჯამის x_0 წერტილში დიფერენცირებადობის შესახებ. თუ ამ წერტილში:

ა) $f(x)$ დიფერენცირებადია, ხოლო $g(x)$ არაა დიფერენცირებადი;

ბ) $f(x)$ და $g(x)$ არადიფერენცირებადი ფუნქციებია.

1358. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, $f(x_0) = 0$ და $g(x)$ არაა დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, მაშინ $f(x)g(x)$ ნამრავლი არაა დიფერენცირებადი ამ წერტილში.

1359. იბოვეთ $f'(0)$, თუ $f(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n)$.

1360. რთული $y = y(u(x))$ ფუნქციის d^2y დიფერენციალი გამოსახეთ $y(u)$ ფუნქციის წარმოებულებითა და $u(x)$ ფუნქციის დიფერენციალების საშუალებით.

1361. ვთქვათ $y(x)$ და $x(y)$ ორჯერ წარმოებადი ურთიერთშეკეცილი ფუნქციებია. x'' გამოსახეთ y' და y'' -ის საშუალებით.

1362. 1357 ამოცანის პირობებში რა შეიძლება ითქვას $f(x)g(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის შესახებ?

ვანიხილეთ მკვადრატები :

ა) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

ბ) $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0$;

გ) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

დ) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 1$, $x_0 = 0$.

1363. დამტკიცეთ, რომ $f(x) = 2x - \sin x$ მონოტონურად ზრდადი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

1364. დამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია $[a; b]$ სეგმენტზე. $f'(x) > g'(x)$ ყოველი $x \in]a; b[$ და $f(a) = g(a)$, მაშინ $f(x) > g(x)$ ყოველი $x \in]a, b[$ -სათვის.

1365. დამტკიცეთ, რომ $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \frac{2x}{\pi} \leq \sin x$.

1366. ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის განსაზღვრის საფუძველზე დამტკიცეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{„ } x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი, ხოლო

$$g(x) = \begin{cases} x \exp(-1/x^2), & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{„ } x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

1367. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე x_0 წერტილში $f(x) = (x-x_0) \times \varphi(x)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია რომ $\varphi'(x_0)$ არ არსებობს, $\varphi(x)$ x_0 წერტილში უწყვეტია, $\varphi(x_0) \neq 0$ და n ნატურალური რიცხვია.

1368. გამოიკვლიეთ $y = x^3 - 3x + q$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ნიშანი და დაადგინეთ პირობა, რომლის დროსაც $x^3 - 3x + q = 0$ განტოლებას აქვს: ა) სამი ნამდვილი განსხვავებული ფესვი; ბ) ერთი ნამდვილი ფესვი.

1369. $[0; 3]$ სეგმენტზე იპოვეთ $f(x) = |6x^3 - 27x^2 + 36x - 14|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

1370. დაადგინეთ რაციონალური ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის არსებობის პირობა.

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციათა გამოკვლევასი

§ 1. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

როლის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $[a, b]$ ინტერვალში და $f(a) = f(b)$, მაშინ არსებობს ერთი მანძი ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi) = 0$, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის AB რკალზე მოძებნება ერთი მანძი ისეთი შიგა წერტილი, რომელზეც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია. როცა $f(b) \neq f(a)$, მაშინ როლის თეორემას ასეც გამოთქვამენ: $f(x)$ ფუნქციის ორ a და b ფესვს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ერთი ფესვი მანძი.

ლაგრანჟის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია (a, b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მანძი ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

კოშის თეორემა. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში აქვთ სასრული წარმოებულება, ამასთან, $\varphi'(x)$ წარმოებული სეგმენტის შიგნით ნულის ტოლი არ ხდება, მაშინ $[a, b]$ ინტერვალში არსებობს ერთი მანძი ისეთი ξ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

1371. შეამოწმეთ, რომ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ფუნქციის ფესვებს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ფესვი.

1372. როლის თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $x^4 + 4x + 3 = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ნამდვილი ფესვი.

1373. აჩვენეთ, რომ $x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი, მასთან, ნამდვილი და მარტივი ფესვი.

1374. მოცემულია $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ფუნქცია. წარმოებულის მოძებნის გარეშე გამოარკვიეთ, რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს $f'(x) = 0$ განტოლებას; აჩვენეთ, რომელ შეუღლებულა ეს ფესვები მოთავსებული.

1375. შეამოწმეთ როლის თეორემა $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ფუნქციისათვის. მოძებნეთ ξ -ს სათანადო მნიშვნელობა.

1376. აჩვენეთ, რომ $f(x) = x - x^3$ ფუნქცია აქვს ყოველგვარ ფესვს როლის თეორემის პირობებს $[-1; 0]$ და $[0; 1]$ სეგმენტებზე. იპოვეთ ξ -ს სათანადო მნიშვნელობები.

ვანიხილეთ მკვლელობა:

ა) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

ბ) $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0$;

გ) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

დ) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 1$, $x_0 = 0$.

1363. დამტკიცეთ, რომ $f(x) = 2x - \sin x$ მონოტონურად ზრდადია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

1364. დამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია $[a; b]$ სეგმენტზე. $f'(x) > g'(x)$ ყოველი $x \in]a; b[$ და $f(a) = g(a)$, მაშინ $f(x) > g(x)$ ყოველი $x \in]a; b[$ -სათვის.

1365. დამტკიცეთ, რომ $x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \frac{2x}{\pi} \leq \sin x$.

1366. ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის განსაზღვრის საფუძველზე დამტკიცეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი, ხოლო

$$g(x) = \begin{cases} x \exp(-1/x^2), & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

1367. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე x_0 წერტილში $f(x) = (x-x_0) \times \varphi(x)$ ფუნქცია, თუ ცნობილია რომ $\varphi'(x_0)$ არ არსებობს, $\varphi(x)$ x_0 წერტილში უწყვეტია, $\varphi(x_0) \neq 0$ და n ნატურალური რიცხვია.

1368. გამოიკვლიეთ $y = x^3 - 3x + q$ ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის ნიშანი და დაადგინეთ პირობა, რომლის დროსაც $x^3 - 3x + q = 0$ განტოლებას აქვს: ა) სამი ნამდვილი განსხვავებული ფესვი; ბ) ერთი ნამდვილი ფესვი.

1369. $[0; 3]$ სეგმენტზე იპოვეთ $f(x) = |6x^3 - 27x^2 + 36x - 14|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

1370. დაადგინეთ რაციონალური ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტის არსებობის პირობა.

წარმოებულის გამოყენება ფუნქციათა გამოკვლევასში

§ 1. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

როლის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $[a, b]$ ინტერვალში და $f(a) = f(b)$, მაშინ არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ $f'(\xi) = 0$, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის AB რკალზე მოძებნება ერთი მაინც ისეთი შიგა წერტილი, რომელზეც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია. როცა $f(b) \neq f(a) = 0$, მაშინ როლის თეორემას ასეც გამოთქვამენ: $f(x)$ ფუნქციის ორ a და b ფესვს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ერთი ფესვი მაინც.

ლაგრანჟის თეორემა. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია (a, b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

კოშის თეორემა. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ შიგა წერტილში აქვთ სასრული წარმოებულება, ამასთან, $\varphi'(x)$ წარმოებული სეგმენტის შიგნით ნულის ტოლი არ ხდება, მაშინ $[a, b]$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

1371. შეამოწმეთ, რომ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ფუნქციის ფესვებს შორის მოთავსებულია მისი წარმოებულის ფესვი.

1372. როლის თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $x^4 + 4x + 3 = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ნამდვილი ფესვი.

1373. აჩვენეთ, რომ $x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0$ განტოლებას აქვს ერთადერთი, მასთან, ნამდვილი და მარტივი ფესვი.

1374. მოცემულია $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ფუნქცია. წარმოებულის მოძებნის გარეშე გამოარკვიეთ, რამდენა ნამდვილი ფესვი აქვს $f'(x) = 0$ განტოლებას; აჩვენეთ, რომელ შეაღწევაში ეს ფესვები მოთავსებული.

1375. შეამოწმეთ როლის თეორემა $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ფუნქციისათვის. მოძებნეთ ξ -ს სათანადო მნიშვნელობა.

1376. აჩვენეთ, რომ $f(x) = x - x^3$ ფუნქცია ავსაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს $[-1; 0]$ და $[0; 1]$ სეგმენტებზე. იპოვეთ ξ -ს სათანადო მნიშვნელობები.

1377. $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ ფუნქცია $[0; 4]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე ლებულობს ტოლ მნიშვნელობებს; $f(0) = f(4) = \sqrt{4}$. მართებულია თუ არა ამ ფუნქციისათვის როლის თეორემა მოცემულ სეგმენტზე?

1378. $f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$ ფუნქცია $[-1; 1]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე ლებულობს ტოლ მნიშვნელობებს; $f(-1) = f(1) = 0$. მართებულია თუ არა ამ ფუნქციისათვის როლის თეორემა მოცემულ სეგმენტზე?

შეამოწმეთ ლავრანის თეორემის მართებულობა ნაჩვენებ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

1379. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1; 4]$ სეგმენტზე.

1380. $f(x) = \ln x$, $[1; 2]$ სეგმენტზე.

1381. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[\frac{1}{2}; 2]$ სეგმენტზე.

1382. $f(x) = \arctg x$, $[0; 1]$ სეგმენტზე.

1383. $y = x^2$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები $A(1; 1)$ და $B(3; 9)$ წერტილებზე გამავალი ქორდის პარალელურად?

1384. $y = 4 - x^2$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები $A(-2; 0)$ და $B(1; 3)$ წერტილებზე გამავალი ქორდის პარალელურად?

1385. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x) = x^2 + 2$ და $\varphi(x) = x^3 - 1$ ფუნქციებისათვის $[1; 2]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ .

1386. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x) = \sin x$ და $\varphi(x) = \cos x$ ფუნქციებისათვის $[0; \frac{\pi}{2}]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ .

1387. მართებულია თუ არა კოშის თეორემა $f(x) = \cos x$ და $\varphi(x) = x^3$ ფუნქციებისათვის $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ სეგმენტზე?

1388. დაწერეთ კოშის ფორმულა $f(x) = x^3$ და $\varphi(x) = x^2$ ფუნქციებისათვის $[0; 2]$ სეგმენტზე და იპოვეთ ξ .

§ 2. ბანუხაზვრელობათა ბახსნის ლოიბტალის წახი

თუ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, ან $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$,

მაშინ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ფარლობა $x = a$ წერტილზე მოგვეცემს $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ სახის

განუსაზღვრელობებს. განუსაზღვრელობათა გახსნის ლოპიტალის წესის თანახმად მართებულია

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ტოლობა, თუ წარმოებულთა ფარდობის ზღვარი არსებობს. ეს წესი მაშინაც გამოდგება, როცა $a \rightarrow \infty$. თუ $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ფარდობა კვლავ იძლევა განუსაზღვრელობას $x=a$ წერტილზე, მაშინ შეიძლება გადავიდეთ მეორე რივის წარმოებულების ფარდობის ზღვარზე და ა. შ.

0, ∞ , $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები დაიყვანება $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობებზე ალგებრული გარდაქმნების საშუალებით.

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

1°. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა.

1389. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

1390. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

1391. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{2} - 1}{x - 1}$

1392. $\lim_{x \rightarrow i} \frac{x - 1}{\ln x}$

1393. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

1394. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

1395. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 4x + 3}{3x^4 + 4x^3 + 1}$

1396. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

1397. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

1398. $\lim_{x \rightarrow \varphi} \frac{\sin x - \sin \varphi}{x - \varphi}$

1399. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 2}{\ln(1 + y)}$

1400. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$

1401. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$

1402. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \sin x}$

1403. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

1404. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(ax^{-1})}{x^{-1}}$

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა.

$$1405. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$1407. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 6}{2x^2 - 5x + 7}.$$

$$1409. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1411. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$1413. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$1415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$1406. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

$$1408. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 2}{3x - 8x^2}.$$

$$1410. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

$$1412. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}{\frac{1}{x-2}}.$$

$$1414. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$1416. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(e^x - e^a)}{\ln(x-a)}, \quad (x > a).$$

3. $0 \cdot \infty$ სახის განუსაზღვრელობა

$$1417. \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x.$$

$$1419. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$1421. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x}.$$

$$1423. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arc} \sin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$1425. \lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$1418. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}.$$

$$1420. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$1422. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

$$1424. \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

$$1426. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot (2 \operatorname{arctg} x - \pi).$$

4°. $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობა

$$1427. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right).$$

$$1429. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

$$1428. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$1430. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - x - 2} \right).$$

$$1431. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$1432. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$1433. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$1434. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$1435. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right].$$

$$1436. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right].$$

5°. 1^∞ , 0^0 , ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები

$$1437. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1438. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$1439. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

$$1440. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x-1}.$$

$$1441. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$1442. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$1443. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$1444. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$1445. \lim_{x \rightarrow 0+} x^x.$$

$$1446. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}.$$

$$1447. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{5}{3 - \ln x}}.$$

$$1448. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi - 2x}{2}}.$$

$$1449. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2}.$$

$$1450. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1451. \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1452. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$1453. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - a^2)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$1454. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x-2}.$$

11) სკალარული ფორმის ფარდობის არა აქვს ზღვარი, ფუნქციის ფარდობის ზღვარი უშუალოდ უნდა მოიძებნოს.

$$1455. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$1456. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$$

$$1467. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$1458. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

§ 3. ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები

თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქციის აქვს უწყვეტი წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (მათელით), მაშინ ამ მიდამოში მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

არის ტეილორის ფორმულის ნაშთი ლაგრანჟის სახით.

აქ $\xi = a + \theta(x-a)$, სადაც $0 < \theta < 1$. კერძოდ, როცა $a=0$, მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია n -ური ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

1459. დაშალეთ $(x+1)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ მრავალწევრი.

1460. დაშალეთ $(x-2)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ მრავალწევრი.

1461. დაშალეთ $(x-1)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 4$ მრავალწევრი.

1462. დაშალეთ $(x-4)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ მრავალწევრი.

გამოიყენეთ ჰაკლორენის ფორმულა შემდეგ ფუნქციების დასაშლელად:

1463. $f(x) = e^x$.

1464. $f(x) = \ln(1+x)$.

1465. $f(x) = \sin x$.

1466. $f(x) = \cos x$.

1467. $f(x) = (1+x)^m$

(m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია)

1468. $f(x) = \sqrt{1+x}$

(x -ის მესამე ხარისხამდე).

1469. $f(x) = e^{2x-x^2}$

(x -ის მეორე ხარისხამდე).

1470. $f(x) = \arcsin x$

(x -ის მესამე ხარისხამდე).

1471. $f(x) = \ln \cos x$

(x -ის მეოთხე ხარისხამდე).

1472. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

(x -ის მეორე ხარისხამდე).

1473. შეაფასეთ $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ მიახლოებითი ტოლობის ცდომილება.

1474. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ მიახლოებითი ტოლობის საშუალებით იპოვეთ $\ln 1,5$ და შეაფასეთ ცდომილება;

§ 4. უწყვეტიანთა ინტეგრირება

ვთქვათ, სხვადასხვა x_0, x_1, \dots, x_n წერტილებში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები y_0, y_1, \dots, y_n . ინტერპოლაციის უმარტივესი ანოცანა შემდეგში მდგომარეობს: შევადგინოთ გამოთვლებისათვის ისეთი მარტივი ფუნქცია, რომელიც მოცემულ წერტილებში მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობებს. კერძოდ, თუ $f(x)$ ფუნქცია პოლინომია, ინტერპოლირებას პარაბოლურს უწოდებენ, ხოლო თვით $f(x)$ ფუნქციას საინტერპოლაციო პოლინომს.

x_0, x_1, \dots, x_n წერტილებს საინტერპოლაციო კვანძები ეწოდება. საინტერპოლაციო პოლინომით ფართოდ სარგებლობენ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად x -ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც $[x_0, x_n]$ შუალედის როგორც შიგნით, ისე გარეთ მდებარეო-

იმ შემთხვევაში, როცა წარმოებულთა ფარდობას არა აქვს ზღვარი, ფუნქციათა ფარდობის ზღვარი უშუალოდ უნდა მოიძებნოს.

$$1455. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$1456. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$$

$$1467. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$1458. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

§ 3. ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები

თუ a წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (ჩათვლით), მაშინ ამ მიდამოში მართებულია ტეილორის ფორმულა:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

არის ტეილორის ფორმულის ნაშთი ლაგრანჟის სახით.

აქ $\xi = a + \theta(x-a)$, სადაც $0 < \theta < 1$. კერძოდ, როცა $a=0$, მივიღებთ მაკლორენის ფორმულას:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

სადაც

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია n -ური ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ტეილორისა და მაკლორენის ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

1459. დაშალეთ $(x+1)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ მრავალწევრი.

1460. დაშალეთ $(x-2)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ მრავალწევრი.

1461. დაშალეთ $(x-1)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 4$ მრავალწევრი.

1462. დაშალეთ $(x-4)$ -ის ხარისხებად $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ მრავალწევრი.

გაპოიყენეთ მაკლორენის ფორმულა შემდეგი ფუნქციების დასაშლელად:

1463. $f(x) = e^x$.

1464. $f(x) = \ln(1+x)$.

1465. $f(x) = \sin x$.

1466. $f(x) = \cos x$.

1467. $f(x) = (1+x)^m$

(m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია)

1468. $f(x) = \sqrt{1+x}$

(x -ის მესამე ხარისხამდე).

1469. $f(x) = e^{2x-x^2}$

(x -ის მეორე ხარისხამდე).

1470. $f(x) = \arcsin x$

(x -ის მესამე ხარისხამდე).

1471. $f(x) = \ln \cos x$

(x -ის მეოთხე ხარისხამდე).

1472. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

(x -ის მეორე ხარისხამდე).

1473. შეაფასეთ $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ მიახლოებითი ტოლობის ცდომილება.

1474. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ მიახლოებითი ტოლობის საშუალებით იპოვეთ $\ln 1,5$ და შეაფასეთ ცდომილება;

§ 4. ფუნქციათა ინტერპოლაცია

ვთქვათ, სხვადასხვა x_0, x_1, \dots, x_n წერტილებში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები y_0, y_1, \dots, y_n . ინტერპოლაციის უმარტივესი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: შევადგინოთ გამოთვლებისათვის ისეთი მარტივი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულ წერტილებში მიიღებს მოცემულ მნიშვნელობებს. კერძოდ, თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია პოლინომია, ინტერპოლირებას პარაბოლურს უწოდებენ, ხოლო თვით $\varphi(x)$ ფუნქციას საინტერპოლაციო პოლინომს.

x_0, x_1, \dots, x_n წერტილებს საინტერპოლაციო კვანძები ეწოდება. საინტერპოლაციო პოლინომით ფართოდ სარგებლობენ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად x -ის იმ მნიშვნელობათათვის, რომლებიც $[x_0, x_n]$ შუალედის როგორც შიგნით, ისე გარეთ მდებარეო-

ბენ. პირველ შემთხვევაში საქმე გვექნება ინტერპოლირებასთან, ხოლო მეორე შემთხვევაში — ექსტრაპოლირებასთან. აღვნიშნოთ

$$R(x) = f(x) - \varphi(x).$$

ცხადია,

$$R(x_0) = R(x_1) = \dots = R(x_n) = 0.$$

ხოლო დანარჩენ წერტილში $R(x)$ ფუნქცია ახასიათებს $\varphi(x)$ -ის $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობისაგან გადახრას: $R(x)$ ფუნქციას ნაშთითი წევრი ეწოდება.

ვთქვათ, საინტერპოლაციო კვანძები $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, თანა-სწორადაა ერთმანეთისაგან დაშორებული. $f(x_i) = y_i$. სხვაობას $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_i - \Delta^{k-1} y_{i-1}$ ეწოდება k -ური რიგის სასრული სხვაობა, $k = 1, 2, \dots, n$. ფუნქციის სხვაობათა ცხრილს ასე ჩასწერენ:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$...
x_0	y_0						
x_1	y_1	Δy_0					
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$			
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$		
x_5	y_5	Δy_4	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^2 y_{n-4}$	$\Delta^3 y_{n-5}$	
x_n	y_n						

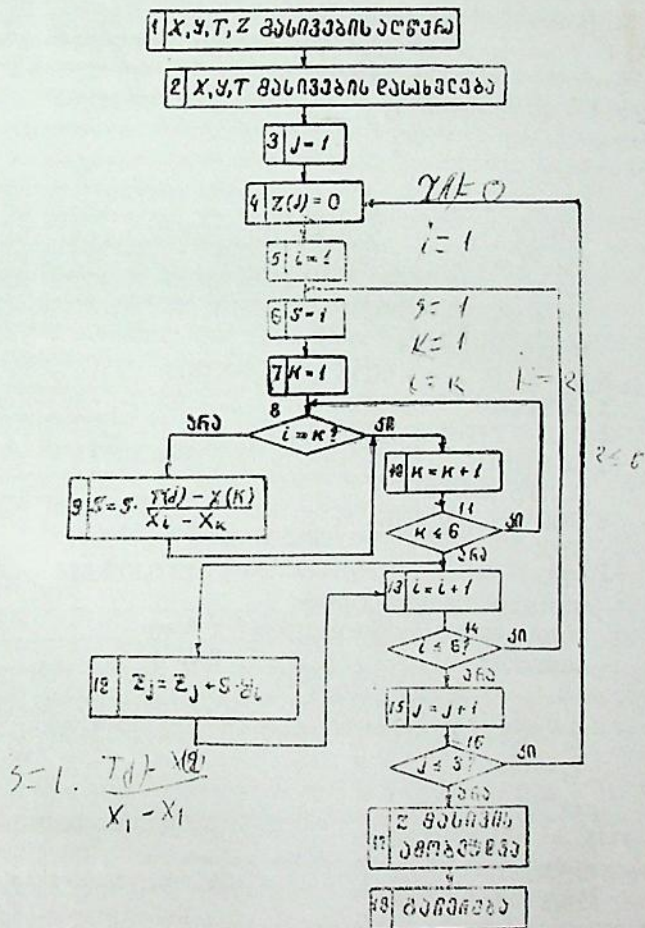
თვით სხვაობის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სვეტში მოთავსებულ რიცხვთა ჯამი უნდა უდრიდეს წინა სვეტის ბოლო და პირველი რიცხვების სხვაობას. სხვაობათა ეს თვისება შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სხვაობათა ცხრილის კონტროლიზათვის. ფორმულებს

$$f(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))}{n!} \Delta^n y_0 + R_1(x), \quad (1)$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \quad R_1(x) = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi);$$

$$f(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{-3} + \dots$$

ვიზოვით ამავე ფუნქციის მნიშვნელობები 0.24; 0.29; 0.33 წერტ-
ლებზე. არგუმენტის მნიშვნელობათა ახალი მასივი აღვიწინოთ T -ით,
ხოლო ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებს მასივი Z -ით. გამოვი-
ყენოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომი. ალგორითმის შესაბა-
მის ბლოკ-სქემას შემდეგი სახე ექნება:



ფორტრან-პროგრამა კი შემდეგნაირად დაიწერება:

DIMENSION X(6), Y(6), T(3), Z(3),

სადაც X, Y, T წარმოადგენს მოცემულ მასივებს, Z-სამიეზელი მასივია.

READ (1,1) X, Y, T

1. FORMAT (F5.4/F3.2)

X, Y, T მასივების დაბეჭდვა იწყება ახალი ბარათებიდან, ყოველ X-ს დათმობილი აქვს სამი პოზიცია, აქედან, ორი ათწილად ნაწილს. ყოველ Y-ს დათმობილი აქვს ხუთი პოზიცია, რომელთაგან ოთხი ათწილადი ნაწილია, ხოლო T-ს სამ მნიშვნელობას დათმობილი აქვს ცხრა პოზიცია

DO 2J = 1,3

Z(J)=0

DO 3I = 1,6

S = 1

DO 4K = 1,6

IF (I-K) 4, 5, 4

5 S = S * (T(J) - X(K)) / (X(I) - X(K))

3 CONTINUE

4 Z(J) = Z(J) + S * Y(I)

2 CONTINUE

WRITE (3,6) Z

6 FORMAT (1X, F 10. 5)

STOP

END

01015023030031038 X მასივი

009980149402280029550305109287 Y მასივი

024029033

T მასივი

პასუხი

Z₁ = 0,24314

Z₂ = 0,29928

Z₃ = 0,34985

1475. მოცემულია ფუნქციის დისკრეტული მნიშვნელობები თანაბრად დაცილებულ $n+1$ წერტილში (იხ. ცხრილები).

1. შეადგინეთ ქვეპროგრამა — ოპერატორი მოცემულ წერტილებში ფუნქციის პირველი რიგის სხვაობების გამოსათვლელად. შედეგების მიღება გაითვალისწინეთ n -ვანზომილებიან მასივის სახით.

მიღებული პროგრამით შეადგინეთ სხვაობათა ცხრილები. ფუნქციებისათვის, რომლებიც მოცემულია მე-2 და მე-3 ცხრილებით. ჩაატარეთ მიღებული შედეგების კონტროლი ზემოთ მოცემული წესის მიხედვით.

2. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის თანაბრად დაცილებულ $n+1$ წერტილში მოცემული ფუნქციის i -ური რიგის სასრულო სხვაობებს ($i \leq n$). შედეგების მიღება ვაითვალისწინეთ $n-i+1$ — განზომილებიანი მასივის სახით.

მიღებული პროგრამით შეადგინეთ სასრულ სხვაობათა ცხრილი, როცა $i=3$, $n=11$, სადაც ფუნქცია მოცემულია მე-4, მე-5, მე-6, მე-7 ცხრილებით.

3. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის ცხრილში მოცემული ფუნქციის ყველა შესაძლო რიგის სასრულ სხვაობებს თანაბრად დაცილებული $n+1$ წერტილში მოცემული ფუნქციისათვის. სასრული სხვაობების მიღება ვაითვალისწინეთ ერთიანი მასივის სახით. ამ მასივის პირველი n ელემენტი უნდა უდრავდეს პირველი რიგის სასრულ სხვაობებს, მომდევნო $(n-1)$ ელემენტი — მეორე რიგის სასრულ სხვაობებს, და ა. შ. ხოლო მასივის უკანასკნელი ელემენტი უნდა შეესაბამებოდეს n -ური რიგის სხვაობას.

მიღებული პროგრამით ამოხსენით კონკრეტული ამოცანა მე-8 ცხრილისათვის.

4. შეადგინეთ ქვეპროგრამა—ოპერატორი, რომელიც გამოთვლის დასახელებულ x მნიშვნელობიდან დაღმავალ სხვაობებს. ვაითვალისწინეთ შედეგის მიღება მასივის სახით.

ქვეპროგრამის პირველ ინსტრუქციას მიეცით სახე

SUBROUTINE დაღმ. სხვაობები (X, Y, N, X1, DELTA, M),

სადაც x, y ცხრილით მოცემული მასივებია, N — მათი განზომილება, x_1 წერტილი, სადაც სათივეს იღებს დაღმავალ სხვაობები, DELTA პასუხების მასივია, M — ამ მასივის განზომილება. ისარგებლეთ პირველი ცხრილის მონაცემებით და მიღებული ქვეპროგრამით, ამოხსენით კონკრეტული ამოცანა, როცა: ა) $x_1=0,18$, ბ) $x_1=0,211$, გ) $x_1=0,215$.

5. შეადგინეთ ქვეპროგრამა მე-4 დავალების ანალიტიკურად x დასახელებული მნიშვნელობიდან გამოსული აღმავალ სხვაობათა ცხრილის მისაღებად.

6. შეადგინეთ პროგრამა ნიტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულის მიხედვით.

მოცემული პროგრამით გამოთვალეთ მე-8 ცხრილით მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობები წერტილებში $x=0,725$; $x=0,745$; $x=763$.

7. მე-5 დავალებასი ინტერპოლირება ჩაატარეთ ნიუტონის მეორე ფორმულით. სხვაობების გამოთვლის პროგრამა შეცვალეთ მე-5 დავალების ქვეპროგრამით.

გამოთვლები ჩაატარეთ პირველი და მეორე ცხრილებით მოცემული ფუნქციებისათვის წერტილებში $x=0.271$; $x=0.279$; $x=0.261$; $x=0.265$.

8. შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც მოახდენს ინტერპოლირებას ნიუტონის პირველი და მეორე საინტერპოლაციო ფორმულებით. იმისდა მიხედვით საინტერპოლაციო წერტილები ეყუთვნის მოცემულ შუალედის პირველ ნახევარს თუ მეორეს. ვალიდაისწინეთ სხვაობების გამოთვლის სტანდარტული ქვეპროგრამების გამოყენება.

გამოთვლები ჩაატარეთ მე-4, მე-6, მე-8 ცხრილებით მოცემული ფუნქციისათვის წერტილებში: $x=0.506$; $x=0.705$; $x=0.805$.

9. შეადგინეთ ქვეპროგრამა ფუნქცია, რომელიც მოახდენს ინტერპოლირებას დავრანაჟის ფორმულის მიხედვით. ქვეპროგრამის ფორმალურ პარამეტრებად აღეთ x , n . სადაც x საინტერპოლაციო კვანძია n ინტერპოლირების რიგი. ქვეპროგრამის მასივების სახით მიაწოდეთ არგუმენტებისა და ფუნქციის სათანადო მნიშვნელობების მიმღვერობები.

10. შეასრულეთ მე-9 დავალება ცხრ ლებისათვის სადაც მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის არათანასწორად დაშორებულ მნიშვნელობებისათვის. ინტერპოლირება ჩაატარეთ ცხრილში მითითებული x^* წერტილებში. ($n=14$ ცხრილებისათვის).

ცხრილი № 1—8

№	1	2	3	4	5	6	7	8
x	$y(x)$	$y'(x)$	x	$y(x)$	$y'(x)$	x	$y(x)$	$y'(x)$
0,20	0,2013	1,0201	0,50	0,5211	1,1276	0,61	0,6485	1,1919
0,21	0,2115	1,0221	0,51	0,5324	1,1329	0,62	0,6698	1,1984
0,22	0,2218	1,0243	0,52	0,05437	1,1383	0,63	0,6725	1,2051
0,23	0,2329	1,0266	0,53	0,5552	1,1438	0,64	0,6846	1,2119
0,24	0,2423	1,0289	0,54	0,5666	1,1474	0,65	0,06967	1,2188
0,25	0,2526	1,0314	0,55	0,5782	1,1551	0,66	0,7090	1,2258
0,26	0,2629	1,0340	0,56	0,5897	1,1609	0,67	0,7213	1,2330
0,27	0,2733	1,0367	0,57	0,6014	1,1667	0,68	0,7336	1,2402
0,28	0,2837	1,0395	0,58	0,6131	1,1730	0,69	0,7461	1,2476
0,29	0,2941	1,0423	0,59	0,6248	1,1792	0,70	0,17586	1,2552
0,30	0,3045	1,0453	0,60	0,6367	1,1854	0,71	0,7712	1,2628
						0,82	0,9150	1,3555

ცხრილი № 9			ცხრილი № 10			ცხრილი № 11		
x	$y(x)$	x^*	x	$y(x)$	x^*	x	$y(x)$	x^*
0,759	0,47237	0,752	0,854	0,3490	0,856	0,980	1,4710	0,983
0,759	0,46813		0,870	2,3869		0,990	1,5237	
0,775	0,46070	0,760	0,879	2,4085	0,875	2,020	1,6281	1,023
0,800	0,44933	0,777	0,900	2,4596		1,080	1,8712	
0,850	0,41741		0,909	2,4818		1,095	1,9407	
0,865	0,42106		0,955	2,5987	0,910	1,200	2,5722	
						1,215	2,6910	

ცხრილი № 12			ცხრილი № 13			ცხრილი № 14		
x	$y(x)$	x^*	x	$y(x)$	x^*	x	$y(x)$	x^*
1,350	1,7091	1,315	1,460	2,2691	1,466	1,800	0,94681	1,801
1,400	1,9043		1,475	2,2999		1,815	0,94834	
1,410	1,9259	1,405	1,515	2,3846	1,476	1,850	0,95175	1,851
1,445	2,0031	1,546	2,4506	1,516		1,860	0,95268	
1,460	2,0369	1,465	1,635	2,6622		1,905	0,95666	1,906
1,495	2,1175		1,660	2,7247	1,960	0,96032		
			1,715	2,8683				

§ 6. რიცხვითი ბანაროზა

თუ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის საშუალებით. წარმოებულის მოძებნა ჩვეულებრივი წესის მიხედვით შეუძლებელია, ფორმულებს, რომელთა საშუალებით ცხრილის სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული გამოითვლება, რიცხვითი გაწარმოების ფორმულები ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი. არგუმენტის მოცემული მნიშვნელობები განვიხილოთ როგორც საინტერპოლაციო კვანძები და დავწეროთ ლაგრანჟის ან ნიუტონის საინტერპოლაციო ფორმულები. ამ ფორმულებს გაწარმოებით მივიღებთ ფორმულებს, რომელთა საშუალებით შეგვიძლია $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული გამოვთვალოთ როგორც კვანძებს შორის ნებისმიერ წერტილში, ისე თვით კვანძებში.

თუ საინტერპოლაციო კვანძები დაშორებულია თანასწორად, შეგვიძლია მივმართოთ სასრული სხვაობების შემცველ საინტერპოლაციო ფორმულებს. მაგალითისათვის განვიხილოთ ნიუტონის პირველი საინტერპოლაციო ფორმულა

$$y(x) = y(x_0 + th) = y(x_0) + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots,$$

სადაც $t = \frac{x-x_0}{h}$.

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა x -ით; გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dt},$$

მივიღებთ

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right].$$

1476. იპოვეთ ქვემოთ მოყვანილ ცხრილებში მოცემული ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობები კვანძით წერტილებში, შესაბამისი საინტერპოლაციო ფორმულის არჩევით.

x	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$	$y_4(x)$	$y_5(x)$
0,455	0,43946	0,89826	0,48924	0,63445	1,5762
0,457	0,44126	0,89738	0,49172	0,63318	1,5793
0,460	0,44395	0,89605	0,49545	0,63128	1,5841
0,464	0,44753	0,99427	0,50044	0,62876	1,5904
9,469	0,45199	0,89202	0,50671	0,62563	1,5984
0,472	0,45467	0,89066	0,51048	0,62375	1,6032
0,475	0,45734	0,88929	0,51427	0,62189	1,6080
0,477	0,45912	0,88838	0,51680	0,62064	0,6128
0,481	0,46267	0,88653	0,52188	0,61816	1,6177

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ამ სეგმენტის ორი ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისათვის, სადაც $x_1 < x_2$, ადგილი აქვს $f(x_1) < f(x_2)$ უტოლობას; თუკი $x_1 < x_2$, ხოლო $f(x_1) > f(x_2)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია კლებადი $[a, b]$ სეგმენტზე.

თუ $[a, b]$ სეგმენტზე $f'(x) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია ზრდადი ამავე სეგმენტზე, ხოლო თუ $f'(x) < 0$, მაშინ ფუნქცია კლებადი $[a, b]$ სეგმენტზე.

$y = f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ნებისმიერი x -ისათვის ამ მიდამოდან შესრულებულია

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

უტოლობა. x_0 წერტილის ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, ხოლო $f(x_0)$ რიცხვს — ფუნქციის მაქსიმუმი (მინიმუმი). მაქსიმუმსა და მინიმუმს ფუნქციის ექსტრემუმი ეწოდება.

თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციის $f'(x_0)$ წარმოებულ ან ნულის ტოლია, ან უსასრულოდ დიდი, ან არ არსებობს (ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა).

x_0 წერტილს, რომელზეც $f'(x_0) = 0$, ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება. წერტილებს, რომლებზეც უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილები ეწოდება.

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები:

1°. ა) თუ $f'(x_0 - \varepsilon) > 0$, $f'(x_0 + \varepsilon) < 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი;

ბ) თუ $f'(x_0 - \varepsilon) < 0$, $f'(x_0 + \varepsilon) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მინიმუმი;

გ) თუკი $f'(x_0 - \varepsilon)$ და $f'(x_0 + \varepsilon)$ ერთნაირი ნიშნისაა, მაშინ x_0 წერტილზე ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი.

აქ ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია.

2°. ა) თუ $f'(x_0) = 0$ და $f''(x_0) < 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მაქსიმუმი;

ბ) თუ $f'(x_0) = 0$, და $f''(x_0) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს მინიმუმი;

გ) თუ $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, ხოლო $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, მაშინ: 1) როცა k ლუწი რიცხვია და $f^{(k)}(x_0) < 0$, $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი, თუ $f^{(k)}(x_0) > 0$; 2) როცა k კენტი რიცხვია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი.

$y=f(x)$ ფუნქცია თავის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს $[a, b]$ სეგმენტზე მიაღწევს ან კრიტიკულ წერტილებზე, ან $[a, b]$ სეგმენტის ბოლო წერტილებზე.

განსაზღვრეთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1477. y = x^2 - 2x + 5.$$

$$1478. y = x - \frac{1}{2}x^2.$$

$$1479. y = x^3.$$

$$1480. y = \ln x, (x > 0).$$

$$1481. y = \frac{1}{x+2}.$$

$$1482. y = x + \sin x.$$

$$1483. y = x \ln x.$$

$$1484. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$1485. y = x^2(x-3).$$

$$1486. y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}.$$

$$1487. y = e^{x^2-4x}.$$

$$1488. y = (x-3)\sqrt{x}, (x > 0).$$

პირველი რიგის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1489. y = x^2 - 2x + 3.$$

$$1490. y = 2 + x - x^2.$$

$$1491. y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}.$$

$$1492. y = \sqrt[3]{x^2} - 1.$$

$$1493. y = x\sqrt{1-x}.$$

$$1494. y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}. (x^2-1)$$

$$1495. y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

$$1496. y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}. x$$

$$1497. y = \sqrt[3]{x}.$$

$$1498. y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7.$$

მალალი რიგის წარმოებულის გამოყენებით იპოვეთ ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

$$1499. y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1.$$

$$1500. y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}.$$

$$1501. y = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

$$1502. y = x^3 - 12x^2 + 36x + 1.$$

$$1503. y = x^2 - 9x^2 + 15x - 3.$$

$$1504. y = (x-1)(x+1)^2.$$

$$1505. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}.$$

$$1506. y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x-3}.$$

$$1507. y = x^6 + 1.$$

$$1508. y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

$$1509. y = e^x + 2.$$

$$1510. y = (x-2)^3 + 1.$$

1511. $y = x + \cos 2x$, $(0; \pi)$ ინტერვალში.

1512. $y = 2x + \operatorname{ctg} x$, $(0; \pi)$ ინტერვალში.

1513. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$.

1514. $y = x \ln^2 x$.

1515. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

1516. $y = x - \ln(1 + x)$.

1517. $y = 2e^x + e^{-x}$.

1518. $y = x^2 e^{-x}$.

1519. $y = \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

1520. $y = x(\ln^2 x - 3 \ln x + 3)$.

ნახევრებ შუალედში იპოვეთ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციებისა:

1521. $y = x^3 - 3x + 3$. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

1522. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $[-1; 5]$.

1523. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$, $[-2; 2]$.

1524. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1; 2]$.

1525. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[-1; 1]$.

1526. $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$.

1527. $y = x - \sin x$, $[0; 2\pi]$.

1528. $y = 2 \sin x - \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

1529. $y = 2 \lg x - \operatorname{tg}^2 x$. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1530. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$, $[0; 1]$.

1531. $y = \frac{(x-1)^3}{x^3+1}$, $[0; 2]$.

1532. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0; 1]$.

ვსაუბრობთ აიხვეო იუი ნაიოე მუი
ვეყოფი და დაქოიოიბა ამოსი
ბეზ ამოსიხიცი ვეპაი იეიანხვეიბი

§ 7. ამოსაწავი ფუნქციათა ექსტრემუმის მოძიება

1533. მოცემული დაღებთი a რიცხვი დაშალეთ ორ შესაკრებად ისე, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

1534. რიცხვი 36 დაშალეთ ორ ისეთ დაღებთი მამრავლად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი.

სისათვის ექნება ყვავილნარს უდიდესი ფართობი? უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე 200 მეტრია, ხოლო მიწის ნაკვეთი საბი მხრიდანაა შემოღობილი?

1536. მდინარის ვასწვრივ უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე 200 მეტრია, ხოლო მიწის ნაკვეთი საბი მხრიდანაა შემოღობილი?

1537. მოცემულია კვადრატული ფორმის მუყაოს ფურცელი, რომლის გვერდის სიგრძეა 36 სმ. ოთხივე კუთხიდან ჩამოაჭერით მას ისეთი ზომის ტოლი კვადრატები, რომ დარჩენილი მუყაოდან უდიდესი მოცულობის ყუთი გაკეთდეს.

1538. თუნუქის ფირფიტიდან უნდა დაამზადონ კვადრატული პარალელეპიპედის ფორმის ყუთი, რომლის ზედა ფუძე ახდლია, ხოლო მოცულობა 32 კუბ. ერთეულის ტოლია. რა ზომისა უნდა იყოს პარალელეპიპედის ფუძის გვერდი და სიმაღლე, რომ მასალის ხარჯი იყოს უმცირესი?

1539. კვადრატის ფუძის მქონე ღია აუზის მოცულობაა V. რა და მოკიდებულება უნდა იყოს აუზის ფუძის გვერდსა და სიმაღლეს შორის, რომ აუზის კედლებისა და ფუძის მოსაპირკეთებლად დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1540. უნდა დამზადდეს 72 სმ³ მოცულობის სახურავიანი ყუთი, რომლის ფუძის (მართკუთხედის) გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2. რა ზომების უნდა იყოს ყუთი, რომ მის დამზადებაზე დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1541. გვირგვინის კვეთი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც ბოლოვდება ნახევარწრით; კვეთის პერიმეტრი 18 მ-ია. რას უნდა უდრიოდეს ნახევარწრის რადიუსი, რომ კვეთის ფართობი იყოს უდიდესი?

1542. ტრაპეციის მცირე ფუძე და ფერდები თანატოლია და უდრის 10 სმ-ს. რას უნდა უდრიოდეს ტრაპეციის დიდი ფუძე, რომ ტრაპეციის ფართობი იყოს უდიდესი?

1543. 1) $y = x^2$ პარაბოლზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული $y = 2x - 4$ წრფიდან.

2) $3x - y + 5 = 0$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც A (2; 5) და B (3; 5) წერტილებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია.

1544. მოცემულია A (0; 3) და B (4; 5) წერტილები. Ox ღერძზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $S = AM + MB$ მანძილი იყოს უმცირესი.

1545. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუსაა h.

1546. R -რადიუსიან წრეში ჩახაზეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

1547. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა უდრის 8 სმ-ს, ხოლო კუთხე 60° -ს; მასში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფუძე ძვეს ჰიპოტენუზაზე. რას უნდა უდრიდეს მართკუთხედის გვერდები, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

1548. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის პარამეტრია $2p$, ბრუნავს სიმაღლის გარშემო. რას უნდა უდრიდეს სამკუთხედის გვერდები, რომ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა იყოს უდიდესი?

1549. ნახევარწრეში ჩახაზულია ტრაპეცია, რომლის ფუძე ემთხვევა ნახევარწრის დიამეტრს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხე ისე, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი.

1550. იპოვეთ იმ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი, რომელსაც მოცემული S ფართობის შემთხვევაში ექნება უმცირესი პერიმეტრი, თუ კუთხე ტრაპეციის ფუძესთან უდრის α -ს.

1551. წრიული ფორმის თუნუქის ფურცლიდან ამოჭერით ისეთი სექტორი, რომლისაგან გაკეთებული ძაბრი უდიდესი მოცულობისა იქნება.

1552. მოცემული $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებიდან იპოვეთ ისეთი, რომელსაც უმცირესი დიაგონალი აქვს.

1553. R -რადიუსიან სფეროში: 1) ჩახაზეთ უდიდესი მოცულობის ცილინდრი; 2) იპოვეთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე ჩახაზული ცილინდრის სიმაღლე.

1554. იპოვეთ: 1) R -რადიუსიან სფეროში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის კონუსი; 2) R -რადიუსიან სფეროზე შემოხაზული უმცირესი მოცულობის კონუსი.

1555. იპოვეთ კონუსში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის ცილინდრი, თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R , ხოლო სიმაღლე — H . გამოთვალეთ მოცულობა, როცა $R=4$, $H=6$.

1556. r -რადიუსიან ცილინდრზე შემოხაზეთ უმცირესი მოცულობის მქონე კონუსი.

1557. R -რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის წესიერი სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მისი ზომები.

1558. კუბის გვერდია a ; მასში ჩახაზულია წრიული ცილინდრი ისე, რომ ცილინდრის ღერძი ემთხვევა კუბის დიაგონალს, ფუძეების წრეწირები კი ეხება კუბის წახნაგებს. განსაზღვრეთ ცილინდრის სიმაღლე ისე, რომ მას ჰქონდეს უდიდესი მოცულობა.

1559. ძელის გამძლეობა გასწვრივი კუმშვის მიმართ ძელის განივი კვეთის ფართობის პროპორციულია. რას უნდა უდრიდეს უდიდესი

1535. 40 მეტრი სიგრძის მავთული უნდა შემოავლონ ყვავილნარს, რომელსაც წრის სექტორის ფორმა უნდა ჰქონდეს. როგორი რადიუსისათვის ექნება ყვავილნარს უდიდესი ფართობი?

1536. მღინარის ვასწვრივ უნდა შემოიღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი. როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი, თუ ღობის სიგრძე 200 მეტრია, ხოლო მიწის ნაკვეთი სავი მხრიდანაა შემოღობილი?

1537. მოცემულია კვადრატული ფორმის მუყაოს ფურცელი, რომლის გვერდის სიგრძეა 36 სმ. ოთხივე კუთხიდან ჩამოაჭერთ მას ისეთი ზომის ტოლი კვადრატები, რომ დარჩენილი მუყაოდან უდიდესი მოცულობის ყუთი გაკეთდეს.

1538. თუნუქის ფორფიტოდან უნდა დაამზადონ კვადრატული პარალელეპიპედის ფორმის ყუთი, რომლის ზედა ფუძე ახდლია, ხოლო მოცულობა 32 კუბ. ერთეულის ტოლია. რა ზომისა უნდა იყოს პარალელეპიპედის ფუძის გვერდი და სიმაღლე, რომ მასალის ხარჯი იყოს უმცირესი?

1539. კვადრატის ფუძის მქონე ღია აუზის მოცულობაა V . რა დამოკიდებულება უნდა იყოს აუზის ფუძის გვერდსა და სიმაღლეს შორის, რომ აუზის კედლებისა და ფუძის მოსაპირკეთებლად დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1540. უნდა დამზადდეს 72 სმ³ მოცულობის სახურავიანი ყუთი, რომლის ფუძის (მართკუთხედის) გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2, რა ზომების უნდა იყოს ყუთი, რომ მის დამზადებაზე დაიხარჯოს მასალის უმცირესი რაოდენობა?

1541. გვირახის კვეთი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომელიც ბოლოვდება ნახევარწრით; კვეთის პერიმეტრი 18 მ-ია. რას უნდა უდრიდეს ნახევარწრის რადიუსი, რომ კვეთის ფართობი იყოს უდიდესი?

1542. ტრაპეციის მცირე ფუძე და ფერდები თანატოლია და უდრის 10 სმ-ს. რას უნდა უდრიდეს ტრაპეციის დიდი ფუძე, რომ ტრაპეციის ფართობი იყოს უდიდესი?

1543. 1) $y = x^2$ პარაბოლაზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომელიც უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული $y = 2x - 4$ წრფიდან.

2) $3x - y + 5 = 0$ წრფეზე იპოვეთ ისეთი წერტილი, რომლიდანაც $A(2; 5)$ და $B(3; 5)$ წერტილებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი უმცირესია.

1544. მოცემულია $A(0; 3)$ და $B(4; 5)$ წერტილები. Ox ღერძზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $S = AM + MB$ მანძილი იყოს უმცირესი.

1545. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუსაა h .

1546. R -რადიუსიან წრეში ჩახაზეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

1547. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა უდრის 8 სმ-ს, ხოლო კუთხე 60° -ს; მასში ჩახაზულობა მართკუთხედი, რომლის ფუძე ძვეს ჰიპოტენუზაზე. რას უნდა უდრიდეს მართკუთხედის გვერდები, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

1548. ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის პარამეტრია $2p$, ბრუნავს სიმაღლის გარშემო. რას უნდა უდრიდეს სამკუთხედის გვერდები, რომ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა იყოს უდიდესი?

1549. ნახევარწრეში ჩახაზულობა ტრაპეცია, რომლის ფუძე ემთხვევა ნახევარწრის დიამეტრს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხე ისე, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი.

1550. იპოვეთ იმ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი, რომელსაც მოცემული S ფართობის შემთხვევაში ექნება უმცირესი პერიმეტრი, თუ კუთხე ტრაპეციის ფუძესთან უდრის α -ს.

1551. წრიული ფორმის თუნუქის ფურცლიდან ამოჭერით ისეთი სექტორი, რომლისაგან გაკეთებული ძაბრი უდიდესი მოცულობისა იქნება.

1552. მოცემული $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედებიდან იპოვეთ ისეთი, რომელსაც უმცირესი დიაგონალი აქვს.

1553. R -რადიუსიან სფეროში: 1) ჩახაზეთ უდიდესი მოცულობის ცილინდრი; 2) იპოვეთ უდიდესი გვერდითი ზედაპირის მქონე ჩახაზული ცილინდრის სიმაღლე.

1554. იპოვეთ: 1) R -რადიუსიან სფეროში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის კონუსი; 2) R -რადიუსიან სფეროზე შემოხაზული უმცირესი მოცულობის კონუსი.

1555. იპოვეთ კონუსში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის ცილინდრი, თუ კონუსის ფუძის რადიუსია R , ხოლო სიმაღლე — H . გამოთვალეთ მოცულობა, როცა $R=4$, $H=6$.

1556. r -რადიუსიან ცილინდრზე შემოხაზეთ უმცირესი მოცულობის მქონე კონუსი.

1557. R -რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის წესიერი სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მისი ზომები.

1558. კუბის გვერდია a ; მასში ჩახაზულია წრიული ცილინდრი ისე, რომ ცილინდრის ღერძი ემთხვევა კუბის დიაგონალს, ფუძეების წრეწირები კი ეხება კუბის წახანაგებს. განსაზღვრეთ ცილინდრის სიმაღლე ისე, რომ მას ჰქონდეს უდიდესი მოცულობა.

1559. ძელის გამძლეობა გასწვრივი კუმშვის მიმართ ძელის განივი კვეთის ფართობის პროპორციულია. რას უნდა უდრიდეს უდიდესი

ხოს D დიამეტრის მქონე მორისაგან?

1560. ძელის გამძლეობა პირდაპირპროპორციულია სივანისა და სიმაღლის კუბისა. რა სივანისაა უდიდესი გამძლეობის ძელი, რომელიც შეიძლება გამოიხერხოს 20-სანტიმეტრიანი დიამეტრის მორისაგან.

1561. იატაკიდან რა მანძილზე უნდა ჩამოვკიდოთ ნათურა, რომ იატაკის მოცემული A წერტილი მაქსიმალურად განათდეს?

1562. 1 და 125 სანთლიანი ნათურების შემაერთებელ წრფეზე რომელი წერტილია ყველაზე ნაკლებად განათებული, თუ ნათურები ერთმანეთისაგან დაშორებულია 7 მეტრით (განათება მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია)?

§ 8. წირის ამოზნეილობა და ჩაზნეილობა.. გადაღუნვის წერტილები

$y=f(x)$ წირი ამოზნეილია (ჩაზნეილია) (a, b) შუალედში, თუ წირის ის მონაკვეთი, რომელიც (a, b) შუალედს შეესაბამება, მოთავსებულია ამ მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხების ქვემოთ (ზემოთ).

თუ (a, b) შუალედში $f''(x) > 0$, წირი ჩაზნეილია.

იმ წერტილს, რომელშიც წირის ამოზნეილობა გადადის ჩაზნეილობაში, ან პირიქით, ეწოდება გადაღუნვის წერტილი. გადაღუნვის წერტილის x_0 აბსცისისათვის ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $f''(x_0)$ ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს, ან უსასრულოდ დიდია; ასეთ წერტილს ეწოდება მეორე გვარის კრიტიკული წერტილი.

x_0 არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა, თუ $f''(x)$ ინარჩუნებს მუდმივ ნიშნებს $x_0 - \delta > x > x_0$ და $x_0 < x < x_0 + \delta$ შუალედებში (δ ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია) და, მასთან, ეს ნიშნები მოპირდაპირეა; x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა, თუ $f''(x)$ -ის ნიშნები აღნიშნულ შუალედში ერთნაირია.

იპოვეთ ამოზნეილობისა და ჩაზნეილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები შემდეგი წირებისა:

1563. $y = 1 - x^2$.

1564. $y = x^3$.

1565. $y = e^x$.

1566. $y = \ln x, (x > 0)$.

1567. $y = \sin x, (-\pi; \pi)$ შუალედში.

1568. $y = \operatorname{tg} x, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში.

1569. $y = x^4 + 3$.

1570. $y = x + 2x^4$.

1571. $y = \frac{1}{x+3}$.

1572. $y = e^{-x^2}$.

1573. $y = -\sqrt[3]{x}$.

1574. $y = \sqrt{x+2}$.

1575. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

1576. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

1577. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

1578. $y = \ln(1+x^2)$.

§ 9. ასიმპტოტები

თუ მანძილი $y=f(x)$ წირის $M(x, y)$ წერტილიდან რაიმე წრფემდე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც M წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს, მაშინ ამ წრფეს მოცემული წირის ასიმპტოტი ეწოდება.

თუ არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty,$$

მაშინ $x=a$ წრფე წირის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

თუ არსებობს ზღვრები

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{და} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b,$$

მაშინ $y=kx+b$ წრფე წირის დახრილი ასიმპტოტია (როცა $k=0$, გვექნება პორიზონტალური ასიმპტოტი).

თუ k და b სიდიდეებიდან ერთ-ერთი უსასრულოდ დიდია, მაშინ წირს ასიმპტოტი არა აქვს.

იპოვეთ ასიმპტოტები შემდეგი წირებისა:

1579. $y = \frac{1}{x-1}$.

1580. $y_1' = \frac{1}{(x+2)^2}$.

1581. $y = 1 + e^x$.

1582. $y = \ln x$.

1583. $y = x + \frac{1}{x-1}$.

1584. $y = \frac{2x}{x^2-1}$.

1585. $y = \operatorname{arctg} x$.

1586. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

1587. $y = e^{-x^2} + 2$.

1588. $y = \frac{1}{1-e^x}$.

1589. $y = \sqrt{2px}$.

1590. $y = \frac{x^2}{2-2x}$.

$$1591. y = \frac{x^2}{2(x+1)^2} \quad 1592. y = \frac{\sin x}{x}$$

$$1593. x = \frac{1}{t}, y = \frac{t}{t+1} \quad 1594. x = t, x = t + 2 \arctg t$$

§ 10. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

ფუნქციის გამოკვლევა და მისი გრაფიკის აგება შეიძლება შემდეგი სქემის მიხედვით შევასრულოთ:

- 1) განისაზღვროს ფუნქციის არსებობის შუალედები და გაირკვეს აქვს თუ არა ფუნქციას წყვეტის წერტილები;
- 2) გაირკვეს არის თუ არა ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიული ან პერიოდული;
- 3) განისაზღვროს გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ის შუალედები, სადაც ფუნქცია დადებითია ან უარყოფითი;
- 4) განისაზღვროს ექსტრემუმის წერტილები, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;
- 5) განისაზღვროს გადაღუნვის წერტილები და ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები;
- 6) განისაზღვროს წირის ასიმპტოტები და წირის მდებარეობა მათ მიმართ.

მაგალითი გამოვიკვლიოთ $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

▷.1) მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $R \setminus \{0\}$. 0 წერტილი არის ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

2) $0x$ ღერძთან ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი $(1; 0)$ (მართლაც, $f(x) = 0$. განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $x=1$). რადგან $x=0$ წერტილში ფუნქცია არაა განსაზღვრული, ამიტომ Oy ღერძს ამ ფუნქციის გრაფიკი არ კვეთს:

3) ფუნქციის ექსტრემუმის საპოვნელად ვიპოვოთ წარმოებული

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3}, & \text{როცა } x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, \\ \frac{2-x}{x^3}, & \text{როცა } x \in]1; +\infty[. \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$. თუ გავითვალისწინებთ რომ $x=1$ წერტილში ფუნქციას არა აქვს წარმოებული, $x_1=0$ წერტილში ფუნქცია არაა განსაზღვრული, ამიტომ $x_2=1$ და $x_3=2$ იქნება ამ ფუნქციის კრიტიკული

წერტილები. ამ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა 0 (მას იგი ლე-ბულოვს $x=1$ წერტილში). მას არა აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, რადგან $f(x) \rightarrow +\infty$, როცა $x \rightarrow 0$.

4) $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$ წერტილები f ფუნქციის განსაზღვრის არეს ყოფს ოთხ ნაწილად, $]-\infty; 0[$; $]0; 1[$; $]1; 2[$ და $]2; +\infty[$. ვინაიდან $f'(x) > 0$, როცა $x \in]-\infty; 0[$; $]0; 1[$ და $]2; +\infty[$, ამიტომ f ზრდადია $]-\infty; 0[$ და $]2; +\infty[$ შუალედებში, $f'(x) < 0$, როცა $x \in]0; 1[$ და $]1; 2[$ შუალედებში. $x_3=2$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი ($f(2)=0,25$), ხოლო $x_2=1$ წერტილში მინიმუმი ($f(1)=0$).

5) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები.
ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(3-x)}{x^4}, & \text{როცა } x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[; \\ \frac{2(x-3)}{x^4}, & \text{როცა } x \in]1; +\infty[. \end{cases}$$

ე. ი. $f''(x) > 0$, როცა $x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]3; +\infty[$ და $f''(x) < 0$, როცა $x \in]1; 3[$.

მაშასადამე, $]-\infty; 0[$; $]0; 1[$ და $]3; +\infty[$ შუალედებში ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ხოლო $]1; 3[$ -ში კი ამოზნექილი.

ადვილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ $x=1$ და $x=4$ წერტილები არის ამ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი.

6. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

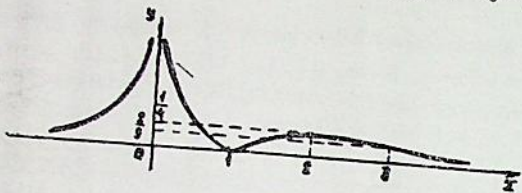
ვინაიდან f ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა, ამიტომ ვერტიკალური ასიმპტოტი შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ $x=0$ წერტილში.

ვინაიდან ეს ფუნქცია დადებითი უსასრულოდ დიდია 0 წერტილში, ამიტომ $x=0$ წრფე არის ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი. გარდა ამისა, ვინაიდან

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{x^2} = 0 = k; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x-1}{x^2} - 0 \cdot x \right| = 0 = b$$

ამიტომ $y=0 \cdot x + 0 = 0$ წრფე არის ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, როცა $x \rightarrow +\infty$. სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ იგივე $y=0$ წრფე არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტი, როცა $x \rightarrow -\infty$.

ამ ცხრილში მითითებული შუალედების მიხედვით ფუნქციის გრაფიკის აგება მოსახერხებელია შესრულდეს. ეს



ნახ. 18

საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. მას აქვს სახე (იხ. ნახ. 18).

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$]2; 3[$	3	$]3; +\infty[$
$f'(x)$	+	არ არსებობს	-	არ არსებობს	+	0	-		-
$f''(x)$	+	არ არსებობს	+	არ არსებობს	-	-	-	0	+
$f'''(x)$		არ არსებობს		არ არსებობს					
$f(x)$	↗		↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$	
	ჩაზნე- ქილია		ჩაზნე- ქილია		ამოზ- ნეჭი- ლია		ამოზ- ნეჭი- ლია		ჩაზნე- ქილია

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1595. $y = \frac{1}{1+x^2}$

1596. $y = \frac{1}{1-x^2}$

1597. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1598. $y = \frac{x}{1+x^2}$

$$1599. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1. \quad 1600. y = x^3 + 9x^2 + 15x - 25.$$

$$1601. y = \frac{x^2}{x^2 - 4}. \quad 1602. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$1603. y = \frac{x}{(x-1)^2}. \quad 1604. y = x^3 + \frac{x^4}{4}.$$

$$1605. y = \frac{x^3}{3 - x^2}. \quad 1606. y = \frac{x^2}{1 + x}.$$

$$1607. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 1608. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

$$1609. y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}. \quad 1610. y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

$$1611. y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}. \quad 1612. y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

$$1613. y = x \ln x. \quad 1614. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$1615. y = \ln(x^2 - 1). \quad 1616. y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$1617. y = \sin x + \cos x. \quad 1618. y = 2 \sin x + \cos x.$$

$$1619. x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}. \quad 1620. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$1621. x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad 1622. x = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}, y = \frac{1}{t+1}.$$

§ 11. ბრტყელი წირის მხები და ნორმალი

$y=f(x)$ ან $F(x, y)=0$ წირის მხების განტოლებას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს შემდეგი სახე:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

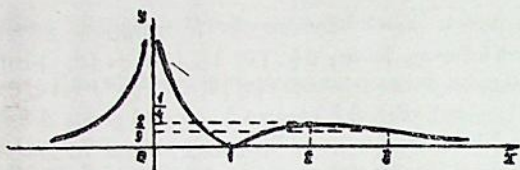
სადაც y'_0 აღნიშნავს ფუნქციის წარმოებულს M_0 წერტილში. აქ იგულისხმება, რომ ფუნქციის y'_0 წარმოებული სასრული სიდიდეა ყველგან. თუკი $y'_0 = \infty$, მაშინ მხების განტოლება იქნება:

$$x - x_0 = 0.$$

წრფეს, რომელიც გადის შეხების წერტილში მხების მართობულად, ეწოდება ნორმალი. ნორმალის განტოლებაა:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x_0 - x_0) \text{ ანუ } x - x_0 = -y'_0(y - y_0),$$

შევადგინოთ ცხრილი. ფუნქციის გრაფიკის აგება მოსახერხებელია ამ ცხრილში მითითებული შუალედების მიხედვით შესრულდეს. ეს



ნახ. 18

საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი. მას აქვს სახე (იხ. ნახ. 18).

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; 1[$	1	$]1; 2[$	2	$]2; 3[$	3	$]3; +\infty[$
$f'(x)$	+	არ არსებობს	-	არ არსებობს	+	0	-		-
$f''(x)$	+	არ არსებობს	+	არ არსებობს	-	-	-	0	+
$f'''(x)$		არ არსებობს		არ არსებობს					
$f(x)$	↗		↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$	
	ჩაზნექილია		ჩაზნექილია		ამოზნექილია		ამოზნექილია		ჩაზნექილია

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1595. $y = \frac{1}{1+x^2}$

1596. $y = \frac{1}{1-x^2}$

1597. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1598. $y = \frac{x}{1+x^2}$

$$1599. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1. \quad 1600. y = x^3 + 9x^2 + 15x - 25.$$

$$1601. y = \frac{x^2}{x^2 - 4}. \quad 1602. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$1603. y = \frac{x}{(x-1)^2}. \quad 1604. y = x^3 + \frac{x^4}{4}.$$

$$1605. y = \frac{x^3}{3 - x^2}. \quad 1606. y = \frac{x^2}{1 + x}.$$

$$1607. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 1608. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

$$1609. y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}. \quad 1610. y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

$$1611. y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}. \quad 1612. y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

$$1613. y = x \ln x. \quad 1614. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$1615. y = \ln(x^2 - 1). \quad 1616. y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$1617. y = \sin x + \cos x. \quad 1618. y = 2 \sin x + \cos x.$$

$$1619. x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^5}{1+t^2}. \quad 1620. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$1621. x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad 1622. x = \frac{t^2 + 1}{4(1-t)}, y = \frac{1}{t+1}.$$

§ 11. ბრტყელი წირის მხაზი და ნორმალი

$y=f(x)$ ან $F(x, y)=C$ წირის მხეზის განტოლებას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს შემდეგი სახე:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

სადაც y'_0 აღნიშნავს ფუნქციის წარმოებულს M_0 წერტილში. აქ იგულისხმება, რომ ფუნქციის y'_0 წარმოებული სასრული სიდიდეა ყველგან. თუკი $y'_0 = \infty$, მაშინ მხეზის განტოლება იქნება:

$$x - x_0 = 0.$$

წრფეს, რომელიც გადის შეხების წერტილში მხეზის მართობულად, ეწოდება ნორმალი. ნორმალის განტოლებაა:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \quad \text{ანუ} \quad x - x_0 = -y'_0(y - y_0),$$

როცა $y_0' = 0$, მაშინ ნორმალი Ox ღერძის მართობული იქნება და მისი განტოლება ასე დაიწერება:

$$x - x_0 = 0.$$

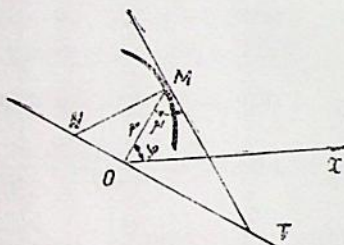
კუთხე ω მოცემულ ორ $y = f_1(x)$ და $y = f_2(x)$ წირს შორის $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r = f(\varphi)$, მაშინ μ კუთხე MT მხებისა და $r = OM$ პორალურ რადიუსს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (ნახ. 19).

$$\operatorname{tg} \mu = r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}, \quad \left(r \frac{d\varphi}{dr} = r \frac{1}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'} \right).$$

მხები და ნორმალი განსაზღვრავს შემდეგ მონაკვეთებს (ნახ. 20).



ნახ. 20

მხების მონაკვეთი $TM =$

$$= \left| \frac{y_0}{y_0'} \sqrt{1 + y_0'^2} \right|,$$

ნორმალის მონაკვეთი

$$MN = |y_0 \sqrt{1 + y_0'^2}|,$$

$$\text{მხებქვეშა } TK = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right|,$$

$$\text{ნორმალქვეშა } KN = |y_0 y_0'|.$$

პოლარული მხებას მონაკვე-

$$\text{თი } TM = \frac{r^2}{|r'|} \sqrt{r'^2 + r''^2},$$

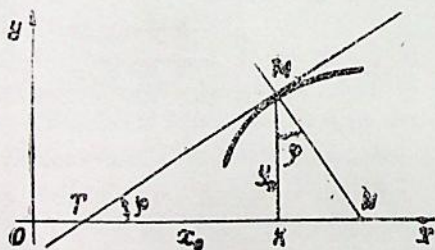
პოლარული ნორმალის მონაკვეთი $MN = \sqrt{r'^2 + r''^2}$,

პოლარული მხებქვეშა $OT =$

$$= \frac{r^2}{|r'|},$$

პოლარული ნორმალქვეშა

$$ON = |r'|.$$



ნახ. 19

1623. იპოვეთ $y = x^2 - 3x + 2$ პარაბოლის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(0; 2)$ წერტილისათვის.

1624. იპოვეთ $y = 4 - x^2$ პარაბოლის მხებისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილისათვის, სადაც პარაბოლა კვეთს Ox ღერძს ($x > 0$).

1625. იპოვეთ $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(-1; 0)$ წერტილისათვის.

1626. იპოვეთ $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(3; 2)$ წერტილისათვის.

შეადგინეთ მხებისა და ნორმალის განტოლებები შემდეგი წირებისა:

1627. 1) $y = \lg 2x$, $M(0; 0)$ წერტილისათვის; 2) $y = \ln x$, Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილისათვის.

1628. $y = e^{1-x^3}$, $y = 1$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილებისათვის.

1629. 1) $x^2 + y^2 = R^2$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$

წერტილისათვის.

1630. 1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^2 = 2px$ ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$

წერტილისათვის

1631. იპოვეთ $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ჯაჭვწირის მხებისა და ნორ-

მალის განტოლებები $M(0; a)$ წერტილისათვის ($a > 0$).

1632. იპოვეთ $y^2 = x^3$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები $M(0; 0)$ წერტილისათვის.

1633. იპოვეთ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ წრეწირის მხების განტოლება მისი ნებისმიერი $M(x_0, y_0)$ წერტილისათვის.

1634. იპოვეთ $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$ წრეწირის მხების განტოლება $M(3; 6)$ წერტილისათვის.

1635. იპოვეთ $x = 5\sqrt{2} \cos t$, $y = 3\sqrt{2} \sin t$ ელიფსის მხების განტოლება $M(-5; 3)$ წერტილისათვის.

1636. იპოვეთ $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$ ელიფსის მხების განტოლება $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$ წერტილისათვის.

1637. იპოვეთ $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ წირის მხები, რომელიც გადის:

1) კოორდინატა სათავეზე; 2) $t = \frac{\pi}{4}$ წერტილზე.

1638. იპოვეთ $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t=0$.

1639. იპოვეთ $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t = \frac{\pi}{6}$.

1640. იპოვეთ $x = \sin t$, $y = a^t$ წირის მხებისა და ნორმალის განტოლებები, როცა $t=0$.

1641. იპოვეთ $x^2 + y^2 = 52$ წრეწირის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $2x + 3y = 6$ წრფის პარალელურია.

1642. იპოვეთ $y^2 = 20x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც Ox ღერძთან ადგენს 45° -იან კუთხეს.

1648. შეადგინეთ $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ ჰიპერბოლის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $2x + 4y - 3 = 0$ წრფის მართობულია.

1644. $y = x^2 - 2x + 5$ პარაბოლის რომელ წერტილზე უნდა გავავლოთ მხები, რომ ის პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის მართობული იყოს?

იპოვეთ კუთხე შემდეგ წირებს შორის:

1645. $y = 0$ და $y = \sin x$ (კოორდინატა სათავეში).

1646. $y = \cos x$ და $y = \sin x$, ($0 \leq x \leq \pi$).

1647. $y = x^2$ და $y = x^3$.

1548. $2y = x^2$ და $2y = 8 - x^2$.

1649. $y = a^x$ და $y = b^x$.

1650. $y = x^2$ და $x = \frac{5}{3} \cos t$,

$$y = \frac{5}{4} \sin t.$$

1651. $x^2 + y^2 = 8$ და $y^2 = 2x$. 1652. $x^2 - y^2 = 5$ და $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

1653. გამოთვალეთ $y^2 = 4x$ პარაბოლის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები $M(1; 2)$ წერტილში.

1654. გამოთვალეთ მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები $y = \frac{2}{1+x^2}$ წირისათვის, როცა $x = 1$.

მის ნებისმიერ წერტილში.

1656. აჩვენეთ, რომ $x^2 - y^2 = a^2$ ჰიპერბოლის ნორმალქვეშა მონაკვეთის სიგრძე მის ნებისმიერ წერტილში უდრის ამ წერტილის აბსცისას.

1657. იპოვეთ $M(a; a)$ წერტილში $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ცისოიდის მხების,

ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე მხებისა და ნორმალის განტოლებები.

1658. იპოვეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები

$t = \frac{\pi}{2}$ წერტილში.

1659. აჩვენეთ, რომ: 1) $xy = a^2$ ჰიპერბოლის მხების მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა;

2) $x^2 - y^2 = a^2$ ჰიპერბოლის ნებისმიერ $M(x_0, y_0)$ წერტილში გავლებული ნორმალის სიგრძე უდრის ამ წერტილის პოლარულ რადიუსს.

1660. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის იმ მხების განტოლება, რომლის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთი შეხების წერტილით შუაზე იყოფა.

1661. აჩვენეთ, რომ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ასტროიდის მხების იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია საკოორდინატო ღერძებს შორის, არის a .

1662. აჩვენეთ, რომ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ პარაბოლის მხების მიერ საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოჭრილი მონაკვეთების ჯამი უდრის a -ს.

1663. იპოვეთ კუთხე $r = ae^{k\varphi}$ ლოგარითმული ხეის მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის.

1664. იპოვეთ კუთხე $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატის მხებსა და პოლარულ რადიუსს შორის.

1665. იპოვეთ $r = \frac{a}{\varphi}$ ჰიპერბოლური ხეის მხების, ნორმალის, მხებქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე კუ-

თხე მხეგბსა და პოლარულ რადიუსს შორის მის ნებისმიერ $M(r_0; \varphi_0)$ წერტილში.

1666. იპოვეთ $r = ap$ არქიმედეს ხეიის მხეგბის, ნორმალის, მხეგბ-ქვეშა და ნორმალქვეშა მონაკვეთების სიგრძეები, აგრეთვე კუთხე მხეგბსა და პოლარულ რადიუსს შორის $\varphi = 2\pi$ წერტილში.

§ 12. არტუული წირის რკალის დიფერენციალი

თუ ბრტყელი წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში, მაშინ s რკალის დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

თუ წირის განტოლებას აქვს სახე:

$$1) y = f(x), \text{ მაშინ } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx;$$

$$2) x = f_1(y), \text{ მაშინ } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy;$$

$$3) x = f(t), y = \varphi(t), \text{ მაშინ } ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r = f(\varphi)$, მაშინ

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

თუ α აღნიშნავს მხეგბის მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულე-ბასთან შედგენილ კუთხეს (მხეგბი მიმართულია წირის s რკალის ზრდის მხარეს), მაშინ

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}.$$

თუ β აღნიშნავს წირის პოლარულ რადიუსსა და წირის მხეგბს შორის კუთხეს, მაშინ

$$\cos \beta = \frac{dr}{ds}, \quad \sin \beta = r \frac{d\varphi}{ds}.$$

შემდეგ მაგალითებში იპოვეთ რკალის დიფერენციალი, აგრეთვე იმ კუთხის კოსინუსი და სინუსი, რომელსაც წირის მხეგბი ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულეებასთან:

$$1667. x^2 + y^2 = a^2.$$

$$1668. y^2 = 2px.$$

$$1669. y = ax^3.$$

$$1670. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$1671. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t. \quad 1372. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი, აგრეთვე იმ კუთხის კოსინუსი და სინუსი, რომელსაც წირის მხები ადგენს პოლარულ რადიუსთან:

$$1673. r = a\varphi. \quad 1674. r = \frac{a}{\varphi}.$$

$$1675. r = a^\varphi. \quad 1676. 1) r = a \sin \varphi; 2) r = a(1 - \cos \varphi).$$

§ 18. პრატული წირის სიმრუდე, სიმრუდის რადიუსი, სიმრუდის წრე და ცენტრი. წირის ეპოლუტი

1°. წირის სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი. თუ წირი მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, მაშინ მისი სიმრუდე გამოითვლება ფორმულით:

$$K = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

თუ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ

$$K = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

როცა წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}, \quad \text{სადაც } r' = \frac{dr}{d\varphi}, \quad r'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}.$$

წირის სიმრუდის რადიუსი $R = \frac{1}{|K|}$.

იპოვეთ სიმრუდე და სიმრუდის რადიუსი შემდეგი წირებისა:

1677. $xy=12$, $M(3; 4)$ წერტილში.

1678. $y=4x-x^2$ პარაბოლისა მის წვეროში.

1679. 1) $y=3x+4$; 2) $x^2+y^2=25$ წირებისა მათ ნებისმიერ წერტილში.

1680. $x^2+4y^2=4$ ელიფსისა მის წვეროებში.

1681. 1) $y=x^3$; 2) $x^2=4ay$ წირებისა მათ ნებისმიერ წერტილში.

1682. $y^2=x^3$ წირისა $M(4; 8)$ წერტილში.

1683. 1) $y=\ln x$ წირისა $M(1; 0)$ წერტილში; 2) $y=\sin x$ წირისა

$M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ წერტილში.

1684. $y = \ln \sec x$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1685. $x = t^2, y = t^3$ წირისა $M(1; 1)$ წერტილში.

1686. $x = 3t^2, y = 3t - t^3$ წირისა, როცა $t = 1$.

1687. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდისა $M(\pi a; 2a)$ წერტილში.

1688. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ასტროიდისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1689. $r = e^\varphi$ წირისა $r = 1, \varphi = 0$ წერტილში.

1690. $r = a\varphi$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1691. $r = a \sin \varphi$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

1692. $r = a(1 + \cos \varphi)$ წირისა მის ნებისმიერ წერტილში.

შემდეგ ორ მაგალითში იპოვეთ წირების იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებშიც სიმრუდის რადიუსს უმცირესი მნიშვნელობა აქვს:

1693. $y = \ln x, (x > 0)$.

1694. $y = e^x$.

2°. სიმრუდის წრე და ცენტრი. წირის ევოლუტი. თუ წირი მოცემულია $y = f(x)$ განტოლებით, მაშინ სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$X = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x = x(t), y = y(t)$, მაშინ

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

განსაზღვრეთ სიმრუდის ცენტრის კოორდინატები. დაწერეთ სიმრუდის წრეწირის განტოლება, ააგეთ წირი და მისი სიმრუდის წრეწირი:

1695. $xy = 4, M(2; 2)$ წერტილში.

1696. $y = x^2 - 6x + 10, M(3; 1)$ წერტილში.

1697. $y = e^x, M(0; 1)$ წერტილში.

1698. $y = \ln x, M(1; 0)$ წერტილში.

იპოვეთ ევოლუტის განტოლება შემდეგი წირებისათვის:

1699. $y^2 = 2px$.

1700. $x^2 + y^2 = a^2$.

1701. $xy = a^2$.

1702. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1703. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

$$1704. x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

$$1705. x = a \cos t, \quad y = b \sin t. \quad 1706. x = a \cos^2 t, \quad y = a \sin^2 t.$$

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$, მაშინ:

$$X = r \frac{r' r - r'^2}{r'' r - r^2 - 2r'^2}, \quad Y = r' \frac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - r' r}.$$

1707. იპოვეთ $r = a(1 + \cos \varphi)$ კარდიოიდის ევოლუტი.

1708. იპოვეთ: 1) $r = a\varphi$ არქიმედეს ხეის ევოლუტი;

2) $r = e^{a\varphi}$ ლოგარიტმული ხეის ევოლუტი.

VIII თავი

კომპლექსური რიცხვები. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ $z = (x, y)$ წყვილს ეწოდება კომპლექსური რიცხვი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $(x, 0)$ წყვილი არის x ნამდვილი რიცხვი, ე. ი. $(x, 0) = x$.

2. ორი $z_1 = (x_1, y_1)$ და $z_2 = (x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1 = x_2$ და $y_1 = y_2$.

3. ორი $z_1 = (x_1, y_1)$ და $z_2 = (x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვის ჯამია $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ წყვილი, ე. ი.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

4. ორი $z_1 = (x_1, y_1)$ და $z_2 = (x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვი ნამრავლია $(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ წყვილი, ე. ი.

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

პირველი პირობიდან ჩანს, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ნაწილს.

$i = (0, 1)$ კომპლექსურ რიცხვს წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება. მტკიცდება, რომ $z = (x, y) = x + iy$. ამ უკანასკნელს კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე ეწოდება.

ცხადია, რომ $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

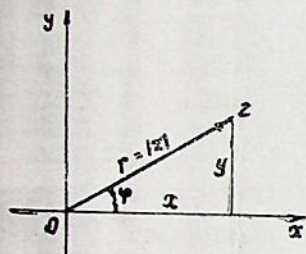
3. თუ $z_1 = x_1 + iy_1$ და $z_2 = x_2 + iy_2$, მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

$\bar{z} = x - iy$ ეწოდება $z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვის შუედლებული რიცხვი.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - |y^2|.$$

$z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვი xOy სიბრტყეზე გამოისახება წერტილით, რომლის კოორდინატებია (x, y) . z რიცხვს შეიძლება შევუსაბამოთ ვექტორი, რომელიც მიმართულია O წერტილიდან z წერტილისაკენ (ნახ. 21). ამ ვექტორის r სიგრძეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მოდული და აღინიშნება $r = |z|$ სიმბოლოთი. φ კუთხეს, რომელსაც \vec{r} რადიუს-ვექტორი ადგენს Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან, ეწოდება z რიცხვის არგუმენტი და აღინიშნება ასე;



ნახ. 21

$\varphi = \text{Arg } z$. არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა $\arg z$ განისაზღვრება — $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ უტოლობებით და მაშინ

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ამასთან

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{თუ } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{თუ } x < 0, y > 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{თუ } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{თუ } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{თუ } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (z \neq 0)$$

სადაც

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{Arg} z.$$

თუ კომპლექსური რიცხვები მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

ნებისმიერი $z \neq 0$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ე. წ. მაჩვენებლიანი ფორმით; $z = |z|e^{i\varphi}$, სადაც $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. თუ n ნატურალური რიცხვია, მაშინ $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, საიდანაც მიიღება მუავრის ფორმულა

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

ვთქვათ, n ნატურალური რიცხვია. n -ური ხარისხის ფესვი z კომპლექსური რიცხვიდან ეწოდება W კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც დააკმაყოფილებს ტოლობას

$$W^n = z.$$

მტკიცდება, რომ n -ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებულ z კომპლექსურ რიცხვიდან გვაძლევს n სხვადასხვა მნიშვნელობას ეს მნიშვნელობები მიიღება ფორმულიდან:

$$W_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

სადაც $k = 0, 1, \dots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \text{arg} z$.

მაგალითი. შევასრულოთ მოქმედებანი:

$$(1 - 2i)(2 + i) - 5i$$

►. თუ ვისარგებლებთ კომპლექსურ რიცხვებზე მოქმედების წესებით, მივიღებთ:

$$(1 - 2i)(2 + i) + 5i = 2 + i - 4i + 2 + 5i = 4 + 2i \quad \blacktriangleright.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ განტოლების ნამდვილი ამონახსნები:

$$(1 + i)x + (2 - 3i)y = 3 + 2i.$$

▷. გამოვყოთ ვანტოლების მარცხენა მხარეში ნამდვილი და წარ-
ქოსახელი ნაწილები:

$$(x + 2y) + (x - 3y)i = 3 + 2i$$

ორი კომპლექსური რიცხვის ტოლობის პირობის თანახმად, გვაქვს

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - 3y = 2. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია $x = 2.6$; $y = 0.2$. ▷

მაგალითი. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვი:

$$z = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

$$\triangleright. \text{ გვაქვს } |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

$$\cos \varphi = -0,5; \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ამიტომ არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობაა $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ და, მაშასადა-

$$\text{მე, } z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right). \triangleleft$$

მაგალითი. გამოთვალეთ:

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{45}.$$

▷. წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით კომპლექსური რიცხვი

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

შეჯერის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$z = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{45} = \cos 30\pi + i \sin 30\pi = 1. \triangleleft$$

შეასრულეთ მოკმედებანა:

$$1709. (2 + i)(3 - 2i) \quad 1710. \frac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \frac{i(1 - i)(3 - i)}{3 + i}.$$

$$1711. (1 + 5i)^2 - (3 - i)^2 \quad 1712. \left(\frac{i^5 + 2}{i^{13} + 1} \right)^2$$

$$1713. \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^2$$

იპოვეთ განტოლებების ნამდვილი ამონახსნები:

$$1714. (1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i;$$

$$1715. 12((2x+i)(1+i) + (x+y)(3-2i)) = 17+6i;$$

$$1716. (3+2i)x + (5+i)y = -2+3i;$$

$$1717. (x_1 - iy)(a - ib) = i.$$

ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი წრფივი სისტემები:

$$1718. \begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7. \end{cases}$$

$$1719. \begin{cases} (2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 6, \\ (3+2i)z_1 + (3-2i)z_2 = 8. \end{cases}$$

წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

$$1720. 1+i.$$

$$1721. -1-i.$$

$$1722. -1 + \sqrt{3}i.$$

$$1723. \frac{1-i}{1+i}.$$

გამოთვალეთ:

$$1724. (1+i)^{20}; \quad 1725. \left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n; \quad 1726. (1-i)^{40};$$

გამოთვალეთ:

1727. კუბური ფესვი 1-დან;

1728. მეოთხე ხარისხის ფესვი — 1-დან.

1729. კვადრატული ფესვი i -დან;

1730. კვადრატული ფესვი $1+i$ -დან.

1731. ვთქვათ, φ ნამდვილი რიცხვია ($\varphi \neq 0$). დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

▷. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ორი მაიმუცრობა

$$r_n = \left| \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n \right| = \left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{n/2},$$

$$\varphi_n = \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n = n \arg \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right) = n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{n}.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}} \right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{n} = \varphi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

აქედან მიიღება დასამტყიცებელი ტოლობა.

IX ტ ა 3 0

განუსაზღვრელი ინტეგრალი

§ 1. უსაზღვრო ინტეგრაციის ხეობი

თუ $F(x)$ მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა ($F'(x) = f(x)$), მაშინ $F(x) + C$ გამოსახულებას, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება ასე:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვისებები:

1) $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$, სადაც A მუდმივია ($A \neq 0$);

2) $\int [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx$;

3) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$;

4) $d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$;

5) $\int d f(x) = f(x) + C$.

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, ($\alpha \neq -1$); 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$-3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1); \quad 4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$-7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$-9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1;$$

$$-10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{1} + C = -\operatorname{arccos} x + C_1.$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C;$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$15) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C; \quad 16) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$17) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \quad 18) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნას ძირითადი ინტეგრების ცხრილის მიშვეობითა და იგივეური გარდაქმნების გამოყენებით უწოდებენ უშუალო ინტეგრების ხერხს. მაგალითი.

$$\int \frac{\sqrt{3} x^2}{x^2+1} dx = \sqrt{3} \int \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} dx = \sqrt{3} \left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \sqrt{3} x - \sqrt{3} \operatorname{arctg} x + C.$$

+ იხილეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1732. \int 2x^5 dx. \quad 1733. \int 5a^2 x^4 dx.$$

$$1734. \int (x^2 + 2x + 3) dx. \quad 1735. \int \left(6x^2 + 4x + \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$1736. \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx. \quad 1737. \int \frac{2-x+x^3}{x} dx.$$

1738. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx.$ 1739. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2}} dx.$
1740. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$ 1741. $\int \frac{2\sqrt[3]{x} + 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
1742. $\int \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} dx.$ 1743. $\int \sqrt{x}\sqrt{x} dx.$
1744. $\int a^x e^x dx.$ 1745. $\int \frac{x e^x - x}{x} dx.$
1746. $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{x^2} \right) dx.$ 1747. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx.$
1748. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ 1749. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$
1750. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$ 1751. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$
1752. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx.$ 1753. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$
1754. $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx.$ 1755. $\int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx.$
1756. $\int \frac{\cos 2t dt}{\sin^2 t \cos^2 t}.$ 1757. $\int \frac{dt}{\sin^2 t \cos^2 t}.$
1758. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$ 1759. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$
1760. $\int \frac{3x+5}{3x+x^2} dx.$ 1761. $\int \frac{4x dx}{x-7}.$

§ 2. დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ უბანა

თუ $F'(x) = f(x)$ მაშინ $f(x) dx = dF(x)$. ამ ტოლობაში მარცხნიდან მარჯვნივ გადავლას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ შეტანა. ამიტომ

$$\int f(x) dx = \int dF(x).$$

მაგალითი. $\int \sqrt{2x-1} dx.$ ამოხსნა: $\int \sqrt{2x-1} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3} + C.$$

მაგალითი. $\int \frac{dx}{6x-7}$, ამოხსნა: $\int \frac{dx}{6x-7} = \frac{1}{6} \int \frac{d(6x-7)}{6x-7} = \frac{1}{6} \ln |6x-7| + c.$

იხილეთ შემდეგი ინტეგრალები:

- | | |
|---|---|
| 1762. $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$ | 1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ |
| 1764. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ | 1765. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ |
| 1766. $\int e^{5x} dx$ | 1767. $\int \frac{2x dx}{1+x^2}$ |
| 1768. $\int 2^{5x+3} dx$ | 1769. $\int \cos \frac{x+1}{3} dx$ |
| 1770. $\int \operatorname{tg} x dx$ | 1771. $\int \operatorname{ctg} x dx$ |
| 1772. $\int (e^x + e^{-x}) dx$ | 1773. $\int 3^{\sin x} \cos x dx$ |
| 1774. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx$ | 1775. $\int \sqrt{1+4 \sin x \cos x} dx$ |
| 1776. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$ | 1777. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$ |
| 1778. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ | 1779. $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$ |
| 1780. $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$ | 1781. $\int \frac{e^x dx}{x^2}$ |
| 1782. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$ | 1783. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos 2x)^2}$ |
| 1784. $\int \frac{\sin x \cos^2 x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$ | 1785. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ |
| 1786. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^5 x}$ | 1787. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ |
| 1788. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$ | 1789. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ |
| 1790. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ | 1791. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ |

$$1792. \int \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$1794. \int x^2 \sin(1+x^3) dx.$$

$$1796. \int \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$1798. \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$$

$$1800. \int \frac{\cos 2x dx}{\sin x \cos x}.$$

$$1802. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1804. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

$$1806. \int e^{x^3} \cdot x^2 dx.$$

$$1808. \int \cos(x^2 + 3)x dx.$$

$$1810. \int x \sqrt[3]{x^2+4} dx.$$

$$1812. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$1814. \int \frac{x^3 dx}{x^3+5}.$$

$$1816. \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1818. \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}.$$

~~$$1793. \int \frac{3^x dx}{1+3^{2x}}.$$~~

$$1795. \int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx.$$

$$1797. \int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$$

$$1799. \int \frac{5x dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

$$1801. \int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x}.$$

$$1803. \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1805. \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx.$$

$$1807. \int x(4x^2-1)^5 dx.$$

$$1809. \int \cos^2 x \sin 2x dx.$$

$$1811. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{7+x^4}}.$$

$$1813. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$1815. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}.$$

$$1817. \int 2^{-x^3} x^2 dx.$$

$$1819. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x dx.$$

§ 3. ჩანების ხერხი

თუ $\int f(x) dx$ ინტეგრალში დავუშვებთ, რომ $x = \varphi(t)$, სადაც t არის ახალი ცვლადი, ხოლო $\varphi(t)$ — უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\int f(x) dx = \int [f(\varphi(t))] \varphi'(t) dt.$$

ინტეგრალის ასეთ გარდაქმნას ეწოდება ინტეგრება ჩანების ხერხით.

მოძებნეთ ჩასმის ხერხით შემდეგი ინტეგრალები:

$$+ 1820. \int e^{ax+b} dx.$$

$$1821. \int \cos(ax+b) dx.$$

$$1822. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$

$$1823. \int \operatorname{tg} \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$1824. \int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx.$$

$$1825. \int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx.$$

$$1826. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1827. \int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx.$$

$$1828. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1829. \int a^{\sin x} \cos x dx.$$

$$1830. \int \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2}$$

$$1831. \int \frac{dx}{9x^2 + 4}$$

$$1832. \int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2}$$

$$1833. \int \frac{dx}{25 - 36x^2}$$

$$1834. \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - b^2 x^2}}$$

$$1835. \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$$

$$1836. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$1837. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$$

$$1838. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$1839. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

$$1840. \int \frac{x dx}{a^4 + x^4}$$

$$1841. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$1842. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$1843. \int x \sqrt{a+x} dx.$$

$$1844. \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx.$$

$$1845. \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}.$$

თუ ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{a^2 - x^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $a \sin t$ (ან $x = a \cos t$) ჩასმა;

თუ ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2 - a^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $\frac{a}{\cos t}$ (ან $x = \frac{a}{\sin t}$) ჩასმა;

თუკი ინტეგრალი შეიცავს $\sqrt{x^2 + a^2}$ რადიკალს, მაშინ გამოდგება $x = a \operatorname{tg} t$ (ან $x = a \operatorname{ctg} t$) ჩასმა.

$$+ 1846. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1847. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1848. \int \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$$

$$1849. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$1850. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx.$$

$$1851. \int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx.$$

$$+ 1852. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$$

$$1853. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

§ 4. ნაწილობითი ინტეგრირების ხერხი

თუ $u(x)$ და $v(x)$ x -ის უწყვეტად წარმოებალი ფუნქციებია, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრირების ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

ამ ფორმულას ძირითადად მაშინ იყენებენ, როცა ინტეგრალქვეშ აღებულია ალგებრული და ტრანსცენდენტური (ან მხოლოდ ტრანსცენდენტური) ფუნქციების ნამრავლი. მაგალითად, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^2 \sin x dx$ ინტეგრალებში u -თი აღიზიშნება x^2 , ხოლო dv -თი — დანარჩენი ნაწილი, რომლიდანაც ინტეგრალი ადვილად მოიძებნება.

თუ ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში მონაწილეობს $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ მაშინ ეს ფუნქციები აღიზიშნება u -თი.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$+ 1854. \int x e^x dx.$$

$$1855. \int x 2^x dx.$$

$$1856. \int \ln x dx.$$

$$1857. \int x \ln x dx.$$

$$1858. \int x \cos 3x dx.$$

$$1859. \int x \sin 2x dx.$$

$$1860. \int \arcsin x dx.$$

$$1861. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$1862. \int x^n \ln x dx,$$

$$1863. \int \ln(x^2 + 1) dx.$$

1864. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

1865. $\int x \arcsin x dx.$

1866. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1867. $\int x^3 e^x dx. \quad \times$

1868. $\int \ln^2 x dx.$

1869. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

1870. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

1871. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

1872. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{1+x^2}} +$

1873. $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1874. $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$

1875. $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}.$

1876. $\int \sin \sqrt{x} dx$

1877. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

1878. $\int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}.$

1879. $\int \cos(\ln x) dx.$

1880. $\int e^{2x} \cos 3x dx.$

1881. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

1882. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$

1883. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx.$

§ 5. კვადრატული სამწევრის შემცველი უპარბოლასი ინტეგრალები

შემდეგი სახის ინტეგრალებისათვის

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$$

საჭიროა კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, რის შემდეგაც მარტივი გარდაქმნებით ისინი დაიყვანება ცხრილის

ინტეგრალამდე, ხოლო $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ინტეგრალისათვის

უნდა ვისარგებლოთ $mx+n = \frac{1}{t}$ ჩასმით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\times 1884. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$$

$$1885. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\lambda 1886. \int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

$$1887. \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$$

$$1888. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$$

$$1889. \int \frac{3x-2}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

$$1890. \int \frac{4x+8}{3x^2 + 2x + 5} dx.$$

$$1891. \int \frac{x+5}{2x^2 + 2x + 3} dx.$$

$$\chi 1892. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$1893. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$

$$1894. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

$$1895. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$$

$$1896. \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx.$$

$$\lambda 1897. \int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

$$1898. \int \sqrt{x^2 + 4x - 3} dx.$$

$$1899. \int \sqrt{x-x^2} dx.$$

$$1900. \int \sqrt{1-2x-x^2} dx.$$

$$1901. \int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx.$$

$$1902. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$1903. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\chi 1904. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$1905. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$$

§ 8. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება ნიშნავს $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$ ანუ ინტეგრალის მოძებნას, სადაც $f(x)$ და $F(x)$ პოლინომებია. იგულისხმება, რომ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

1) $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი არის უკვეთი;

2) მრიცხველის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე;

3) მნიშვნელის უდიდესი ხარისხის კოეფიციენტი არის ერთი.

თუ ინტეგრალქვეშა წილადი არაწესიერია, მაშინ მისგან უნდა გამოვყოთ მთელი ნაწილი; ადგილი აქვს შემდეგ ოთხ შემთხვევას:

რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და მარტივი ფესვები: a, b, c, \dots, l . ამ შემთხვევაში $\frac{f(x)}{F(x)}$ წილადი დაიშლება შემდეგი სახის უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l},$$

სადაც A, B, C, \dots, L კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ან განუსაზღვრელობათა გახსნის ხერხით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1906. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$

1907. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx.$

1908. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}.$

1909. $\int \frac{3x-2}{x(x+1)(x-2)} dx.$

1910. $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx.$

1911. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}.$

1912. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx.$

1913. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$

2. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს ნამდვილი და ჯერადი a, b, \dots, l ფესვები შესაბამისად $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ჯერადობისა. მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგ უმარტივეს წილადებად:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda},$$

სადაც $A_1, A_2, \dots, L_\lambda$ უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება კოეფიციენტთა შედარების ხერხით.

$$4 - 4 = 0$$

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1914. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$

1915. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

1916. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx.$

1917. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$

$$1918. \int \frac{dx}{x^4 - x^2}$$

$$1919. \int \frac{3x + 2}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} dx$$

$$1920. \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x^2 - 3)^2 (x + 1)^2} dx$$

$$1921. \int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 4)^2}$$

$$1922. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

$$1923. \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 25x - 1}{x^4 - 3x - 2} dx$$

3. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები: $a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \dots, a_k \pm b_k i$, მაშინ რაციონალური წილადი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \frac{M_2 x + N_2}{(x - a_2)^2 + b_2^2} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{(x - a_k)^2 + b_k^2};$$

$M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ მუდმივები მოიძებნება კოეფიციენტების შედარების მეთოდით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$1924. \int \frac{dx}{x^3 + x}$$

$$1925. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$1926. \int \frac{dx}{(x^2 - 3)(x^2 + 2)}$$

$$1927. \int \frac{dx}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)}$$

$$1928. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$1929. \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$$

$$1930. \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$1931. \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$1932. \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$$

$$1933. \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 5)}$$

4. რაციონალური წილადის მნიშვნელს აქვს k ჯერადობის კომპლექსური ფესვი $a \pm bi$, მაშინ რაციონალური წილადი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{M_2 x + N_2}{[(x - a)^2 + b^2]^2} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{[(x - a)^2 + b^2]^k},$$

სადაც $M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება შედარების მეთოდით.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1934. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

1936. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx$

1938. $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} dx$

1940. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2} dx$

1942. $\int \frac{3x+5}{x^5+2x^3+x} dx$

1944. $\int \frac{dx}{x^3(1+x^2)^2}$

1946. $\int \frac{x^2 dx}{(x-2)^2(x+1)}$

1935. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$

1937. $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2} dx$

1939. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$ ★

1941. $\int \frac{5x^2-12}{(x^3-6x+13)^2} dx$ ★

1943. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ ★

1945. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} dx$ ★

1947. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$ ★

§ 7. ირაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

1. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება. თუ მოცემულია შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx,$$

სადა R არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, m, n, \dots, r, s — მთელი რიცხვები, ხოლო $ad - bc \neq 0$, მაშინ მისი მოძებნა დაიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის მოძებნამდე $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ ჩამოსაყვანით.

სადაც k არის $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ წილადების საერთო მნიშვნელი.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1948. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

1949. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

1950. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+2}$

1951. $\int \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{\sqrt{x}}$

$$1954. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$1956. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{5-x}}.$$

$$1958. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$1955. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$1957. \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$$

$$1959. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x}}$$

2. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

ინტეგრალის მოძებნა, სადაც R არის x -ისა და $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რაციონალის რაციონალური ფუნქცია, ეილერის ჩასმების საშუალებით დაიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის მოძებნად (აქ ყველგან $ax^2+bx+c > 0$).

1) თუ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რაციონალში $a > 0$, მაშინ გამოდგება ეილერის პირველი ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x.$$

1960. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

1961. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$

1962. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

1963. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

2) თუ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ რაციონალში $c > 0$, მაშინ გამოდგება ეილერის მეორე ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}.$$

1964. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x-4x^2}}$

1965. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$

1966. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$

1967. $\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$

3) თუ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევროს აქვს ნამდვილი ფესვები α და β , მაშინ გამოდგება ეილერის მესამე ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \quad \text{ან} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t.$$

$$1968. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}} \quad 1969. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$$

$$1970. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} \quad 1971. \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+7x-12}}$$

$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ სახის ინტეგრალსაგან, სადაც $P_n(x)$ არის n -ური ხარისხის მრავალწევრი, შეგვიძლია გამოვყოთ ალგებრული ნაწილი შემდეგი ფორმულით:

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (A)$$

აქ $Q_{n-1}(x)$ არის $n-1$ ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, ხოლო λ — უცნობი მამრავლი. $Q_{n-1}(x)$ მრავალწევრი და λ უცნობი განისაზღვრება (A) იგივეობის ვაწარმოებით.

თუ მოცემულია $\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ ინტეგრალი, მაშინ გამოდგება $x-a = \frac{1}{t}$ ჩასმა, ხოლო $\int \frac{xdx}{(ax^2+b)\sqrt{Ax^2+B}}$ და $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{Ax^2+B}}$ სახის ინტეგრალებისათვის გამოიყენება შესაბამისად შემდეგი ჩასმები:

$$t = \sqrt{Ax^2+B}, \quad x^2 = \frac{Bt^2}{1-At^2}$$

$$1972. \int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx; \quad 1973. \int \frac{x^4+2x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx.$$

$$1974. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-1}} \quad 1975. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

$$1976. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} \quad 1977. \int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

$$1978. \int \frac{xdx}{(8x^2+1)\sqrt{5x^2-2}} \quad 1979. \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}$$

3. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება. $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ ინ-

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

ტეგრალი. სადაც m , n და p რაციონალური რიცხვებია. ხოლო a და b — ნულისაგან განსხვავებული მუდმივები, ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით გამოისახება შემდეგ სამ შემთხვევაში: 1) როცა p მთელი რიცხვია; 2) როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია; 3) როცა $\frac{m+1}{n} + p$

მთელი რიცხვია.

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) როცა p მთელი რიცხვია, გამოდგება $x=z^s$ ჩასმა, სადაც s არის m -ისა და n -ის საერთო მნიშვნელი.

1980. $\int \sqrt{x} (1 + 3\sqrt{x}) dx$ 1981. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} + 1)^2}$ ✕

2) როცა $\frac{m+1}{n}$ მთელი რიცხვია, გამოდგება $a + bx^n = z^s$ ჩასმა,

სადაც s არის p -ს მნიშვნელი.

1982. $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1983. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

1984. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$

1985. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x} + 1}}$

1986. $\int x^{\frac{1}{5}} (3 - 2x^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{2}} dx$

1987. $\int x^{-\frac{1}{2}} (1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$

3) როცა $\frac{m+1}{n} + p$ მთელი რიცხვია, გამოდგება $a + bx^n = z^s$

ჩასმა, სადაც s არის p -ს მნიშვნელი.

1988. $\int x^{-6} (1 + 2x^3)^{\frac{2}{3}} dx$

1989. $\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2 - 1}}$

1990. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$

1991. $\int x^2 (2 + x^2)^{-\frac{5}{2}} dx$

§ 8. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ინტეგრება

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n მთელი დადებითი რიცხვებია. როცა m კენტი რიცხვია, მაშინ გამოდგება

$\cos x = t$ ჩასმა, ხოლო როცა n არის კენტი რიცხვი, მაშინ $\sin x = t$ ჩასმა; როცა m და n ლუწი რიცხვებია, მაშინ ვისარგებლებთ შემდეგ ფორმულებით:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

1992. $\int \cos^3 x dx.$

1993. $\int \sin^2 x dx.$

1994. $\int \sin^5 x dx.$

1995. $\int \cos^7 x dx.$

1996. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

1997. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

1998. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

1999. $\int \sin^5 x \cos^6 x dx.$

2000. $\int \cos^2 3x dx.$

2001. $\int \cos^4 x dx.$

2002. $\int \sin^4 x dx.$

2003. $\int \sin^6 x dx.$

2004. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

2005. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

2006. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx.$

2007. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

2. $\int \frac{\cos^n x dx}{\sin^m x}, \int \frac{\sin^n x dx}{\cos^m x}$ ინტეგრალების მოძებნა, სადაც m და n

არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. როცა n კენტია, ხოლო $m - n$ - ბისმეორე რიცხვი, მაშინ პირველი ინტეგრალისათვის გამოდგება $\sin x = t$ ჩასმა, ხოლო მეორე ინტეგრალისათვის $\cos x = t$ ჩასმა. იმ შემთხვევაში, როცა n ლუწია, ხოლო $m - n$ - ნებისმიერი რიცხვი, შეიძლება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება.

2008. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$

2009. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

2010. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$

2011. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$

2012. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$

2013. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$

2014. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$

2015. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$

3. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$ ინტეგრალის მოძებნა, სადაც m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. როცა $m+n$ ლუწი რიცხვია, მაშინ გამოდგება $\operatorname{tg} x = t$ ჩასმა. ხოლო როცა — კენტი, მაშინ მრიცხველში 1 შეიცვლება $\sin^2 x + \cos^2 x$ -ით:

2016. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$. 2017. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$.

2018. 1) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. 2019. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$. 2021. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

2022. 1) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. 2023. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.

4. $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, $\int \sec^n x dx$, $\int \operatorname{cosec}^n x dx$ ინტეგრალების მოძებნა. ამ ინტეგრალების მოსაძებნად უფრო მოხერხებულია გამოვიყოს შესაბამისად $\operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{ctg}^2 x$, $\sec^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$ მამრავლები და ვისარგებლოთ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ ფორმულებით.

2024. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$. 2025. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.

2026. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx$. 2027. $\int \operatorname{ctg}^5 x \operatorname{cosec}^4 x dx$.

2028. $\int \operatorname{cosec}^6 x dx$. 2029. $\int \operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} x \sec^4 x dx$.

5. $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ ინტეგრალების მოძებნა. ამ ინტეგრალებისათვის ვისარგებლებთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)], \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) -$$

$$- \cos (\alpha + \beta)], \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

2030. $\int \cos 4x \cos 7x dx.$ 2031. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx.$
2032. $\int \sin x \sin 3x dx.$ 2033. $\int \sin(5x+8) \cdot \sin(3x-7) dx.$
2034. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x dx.$ 2035. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$
2036. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ 2037. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

6. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ინტეგრალისათვის, [სადაც R არის თავისი რეკურენტების რაციონალური ფუნქცია, უნივერსალური $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ჩასმა ვაძლევს:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \left. \begin{array}{l} \text{სადა} \\ \text{სადა} \end{array} \right\}$$

2038. $\int \frac{dx}{\sin x}.$ 2039. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
2040. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}.$ 2041. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$
2042. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}.$ 2043. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$
2044. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}.$ 2045. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}.$
2046. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x} dx.$ 2047. $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}.$

თუ ადგილი აქვს $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ იგივეობას, ამინ შეიძლება ვისარგებლოთ $\operatorname{tg} x = t$ ჩასმით.

2048. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$ 2049. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$
2050. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$ 2051. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

იმავე $\operatorname{tg} x = t$ ჩასმით მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2052. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$ 2053. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

$$2054. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + \cos^4 x}$$

$$2056. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$$

$$2058. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

$$2060. \int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx.$$

$$2055. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2}$$

$$2057. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$2059. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$$

$$2061. \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$$

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$2062. \int \operatorname{sh}^2 x dx.$$

$$2064. \int \operatorname{th} x dx.$$

$$2066. \int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x dx.$$

$$2068. \int (1 + \operatorname{sh} 2x)^2 dx.$$

$$2070. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}$$

$$2072. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx$$

$$2063. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$$

$$2065. \int \operatorname{ch}^3 x dx.$$

$$2067. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$$

$$2069. \int \operatorname{th}^3 x dx.$$

$$2071. \int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} dx.$$

$$2073. \int \frac{1 + 2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

§ 9. სხვადასხვა ინტეგრალი

$$2074. \int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$2076. \int \sqrt{1 + \sin x} dx.$$

$$2078. \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$$

$$2080. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}}$$

$$2082. \int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

$$2075. \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$2077. \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx.$$

$$2079. \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

$$2081. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx. \quad \checkmark$$

$$2083. \int (x+1) \sqrt{x^2+2x} dx.$$

$$284. \int \frac{x dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$286. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$288. \int e^{e^x + x} dx.$$

$$290. \int \frac{2^x dx}{1 - 4^x}$$

$$292. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$$

$$294. \int \frac{dx}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$296. \int \frac{e^{3x} dx}{e^x - 1}$$

$$298. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$$

$$300. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$302. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2 - x^2)^3}}$$

$$304. \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx.$$

$$306. \int \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - 4)^5}}$$

$$308. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

$$310. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$$

$$312. \int \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}} dx.$$

$$314. \int \frac{\ln \cos x dx}{\cos^2 x}$$

$$316. \int \frac{x e^x dx}{(x+1)^2}$$

$$2085. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 2}}$$

$$2087. \int \sin(\lg x) \frac{dx}{x}$$

$$2089. \int e^{2x^2 + \ln x} dx.$$

$$2091. \int a^{3x} b^{2x} dx.$$

$$2093. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 2x^2 - x^4}}$$

$$2095. \int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\ln \sin x}$$

$$2097. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 12}$$

$$2099. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx.$$

$$2101. \int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$$

$$2103. \int \frac{dx}{(x^2 + 16)\sqrt{9 - x^2}}$$

$$2105. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$$

$$2107. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$2109. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$$

$$2111. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

$$2113. \int \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}} \frac{dx}{x}$$

$$2115. \int x^3 e^{x^2} dx.$$

$$2117. \int \frac{x \ln x dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

2118. $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx.$
2119. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x}}.$
2120. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$
2121. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$
2122. $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}.$
2123. $\int \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 2}.$
2124. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$
2125. $\int \frac{dx}{x(x^3 + 1)}.$
2126. $\int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2}.$
2127. $\int \frac{dx}{(x-1)^4(x+1)^4}.$
2128. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}.$
2129. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
2130. $\int \frac{dx}{\sqrt{3} \cos x + \sin x}.$
2131. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$
2132. $\int \frac{\sqrt{\lg x}}{\sin 2x} dx.$
2133. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x}.$
2134. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin 4x}.$
2135. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sin^5 x}.$
2136. $\int \frac{\cos x dx}{\cos 3x}.$
2137. $\int \frac{\sin x dx}{\sin 3x}.$
2138. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}.$
2139. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$
2140. $\int \frac{3 \cos x + 7 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx.$
2141. $\int \frac{dx}{1 + \lg x}.$

x. თ ა ვ ი

განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოთვლა

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. დავყოთ ეს სეგმენტი ნებისმიერად $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ წერტილებით n ნაწილად; ყოველ $[x_{i-1}, x_i]$ დანაყოფში ავიღოთ ნებისმიერი ξ_i წერტი-

ლი და შევადგინოთ $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ჯამი, სადაც $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

ამ ჯამს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც დანაყოფებს შორის უდიდესის საგრძნობ ნულისაკენ მიისწრაფვის და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული არც $[a, b]$ სეგმენტის დაყოფის წესზე და არც ξ_i წერტილების არჩევაზე. ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი a -დან b -მდე და ასე აღინიშნება:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ სადაც } \lambda = \max |\Delta x_i|.$$

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები:

$$1) \int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx, \quad (A = \text{const});$$

$$2) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad 4) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

თუ $F(x)$ ფუნქცია $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტია $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა ($F'(x) = f(x)$), მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

რომელსაც ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა ეწოდება.

გამოთვალეთ $\int_1^2 x dx$, როგორც ინტეგრალური ჯამის ზღვარი.

პირველი ხერხი. დავყოთ $[1, 2]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად, $\Delta x = \frac{1}{n}$. დავოფის წერტილები: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = 1 + \frac{2}{n}$, ..., $x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}$, $x_n = 2$. ξ_i წერტილებად შევაჩიოთ, მაგალითად, თითოეული ქვესეგმენტის მარჯვენა ბოლო, მაშინ

$$f(x_1) = 1 + \frac{1}{n}, f(x_2) = 1 + \frac{2}{n}, \dots, f(x_{n-1}) = 1 + \frac{n-1}{n}, f(x_n) = 2.$$

ამრიგად,

$$S_n = 1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{2}{n} + \dots + 1 + \frac{n-1}{n} + 2 = n + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + 1 \right) = n + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+1}{2}.$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{3n+1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\int_1^2 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}.$$

მეორე ხერხი დავყოთ $[1, 2]$ სეგმენტი n ნაწილად ისე, რომ დავოფის წერტილებს ამსჯისებში შეადგინონ გეომეტრიული პროგრესია:

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_{n-1} = q^{n-1}, x_n = q^n = 2, \text{ სადაც } q = 2^{\frac{1}{n}}.$$

ξ_i წერტილებად შევაჩიოთ ისევ თითოეული ქვესეგმენტის მარჯვენა ბოლო, მაშინ:

$$f(x_1) = q, f(x_2) = q^2, \dots, f(x_n) = q^n;$$

$$\Delta x_1 = q - 1, \Delta x_2 = q^2 - q = q(q - 1), \dots, \Delta x_n = q^n - q^{n-1} = q^{n-1}(q - 1).$$

$$S_n = q(q - 1) + q^2 \cdot q(q - 1) + \dots + q^n q^{n-1} (q - 1) =$$

$$= q(q-1)(1+q^2+q^4+\dots+q^{2n}) = q^n \frac{q^{2n}-1}{q+1}.$$

$$\int_2^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \frac{q^{2n}-1}{q+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2/n}(2^2-1)}{2^{1/n}+1} = \frac{3}{2}.$$

ინტეგრალური ჯამის შედეგით და ზღვარზე გადასვლით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$2142. \int_1^{10} 2x dx.$$

$$2143. \int_0^a x^2 dx.$$

$$2144. \int_0^1 e^x dx.$$

$$2145. \int_0^{10} 2^x dx.$$

ნიუტონ—ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$2146. \int_0^1 x^4 dx.$$

$$2147. \int_1^4 \sqrt{x} dx.$$

$$2148. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

$$2149. \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$$

$$2150. \int_{-2}^3 3x^2 dx.$$

$$2151. \int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$$2152. \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

$$2153. \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2164. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2155. \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$$

$$2156. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$$

$$2158. \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

$$2160. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$2162. \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy.$$

$$2164. \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$$

$$2157. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx.$$

$$2159. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2161. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx.$$

$$2163. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$2165. \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$$

§ 2. პანსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ჩასმის ხერხით

თუ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო $x = \varphi(t)$ უწყვეტად წარმოებული ფუნქცია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, რომლის მნიშვნელობები არ გამოდის $[a, b]$ სეგმენტიდან, ამასთან $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$2166. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$2168. \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}.$$

$$2167. \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}.$$

$$2169. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$$

$$2170. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$2172. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$2174. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$2176. \int_0^1 \frac{z^3 dz}{z^9+1}$$

$$2178. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$2180. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$$

$$2182. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$$

$$2184. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx.$$

$$2186. \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx.$$

$$2171. \int_0^a y^2 \sqrt{a^2-y^2} dy.$$

$$2173. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$2175. \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{x^6+4}}$$

$$2177. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$2179. \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

$$2181. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$$

$$2183. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$2185. \int_3^{20} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-7)^2+3}} dx.$$

$$2187. \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$$

თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

2188. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$

2189. $\int_0^1 x e^x dx.$

2190. $\int_1^e \ln x dx.$

2191. $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

2192. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x}.$

2193. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

2194. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$

2195. $\int_1^2 x \log_2 x dx.$

2196. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

2197. $\int_0^1 \sqrt{2x + x^2} dx.$

§ 4. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

1. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტში არსებობს ისეთი ξ წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi).$$

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე.

განსახილვეთ საშუალო მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციებისა:

2198. $y = \sin x$, $[0; \pi]$ სეგმენტზე. 2199. $y = \sin^2 x$, $[0; \pi]$ სეგმენტზე.

2200. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $[-1; 1]$ სეგმენტზე.

2201. $y = (x-2)^2$, $[1; 4]$ სეგმენტზე.

2202. $y = \ln x$, $[1; e]$ სეგმენტზე. 2203. $y = \frac{1}{e^x+1}$, $[0; 2]$ სეგმენტზე.

2. ინტეგრალის შეფასება. თუ m და M $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობებია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

შეაფასეთ ინტეგრალები:

2204. $\int_4^6 2x dx.$

2205. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2} dx.$

2206. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx.$

2207. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x) dx.$

2208. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3 \cos x}.$

2209. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+x^2}.$

3. თუ $f(x) \leq F(x)$, როცა $a \leq x \leq b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b F(x) dx.$$

გამოთვლის ვარსებზე გამოარკვევით, რომელი ინტეგრალია შეტი:

$$2210. \int_0^1 x^2 dx \text{ თუ } \int_0^1 x^3 dx.$$

$$2211. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \text{ თუ } \int_0^1 x dx.$$

$$2212. \int_1^2 2x^2 dx \text{ თუ } \int_1^2 2x^3 dx.$$

$$2213. \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \text{ თუ } \int_0^1 x \sin^2 x dx.$$

§ 5. ინტეგრალის განარჩობა ზედა საზღვრით

თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო x სეგმენტის შიგნით წერტილია, მაშინ $\int_a^x f(t) dt$ ინტეგრალი ზედა x საზღვრის ფუნქციაა და მართებულაა ტოლობა:

$$\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x).$$

იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ფუნქციებისა:

$$2214. F(x) = \int_1^x \ln t dt.$$

$$2215. F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt.$$

$$2216. F(x) = \int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt.$$

$$2217. F(x) = \int_x^{2x} \ln^2 t dt.$$

$$2218. F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

$$2219. F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt.$$

$$2220. y = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} dt.$$

იპოვეთ y' , როცა $x = 1$.

2221. $y = \int_x^5 \sqrt{1+t^2} dt$. იპოვეთ y' , როცა $x = \frac{3}{4}$.

2222. იპოვეთ $y = \int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

ით, როცა $x = 1$.

2223. იპოვეთ $y = \int_0^x t e^{-t^2} dt$, ფუნქციის ექსტრემუმი.

55 34 4 | 3 4 4

§ 6. აბრეშული ფიგურის ფართობის გამოთვლა

თუ $y=f(x)$ უწყვეტი წირის განტოლებაა ($f(x) > 0$), მაშინ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წირის რკალით, Ox ღერძის ab მონაკვეთითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით, გამოითვლება

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad a < b$$

ფორმულით. თუ $f(x)$ უარყოფითია, ან ნიშანს იცვლის $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ წირებსა და $x=a$, $x=b$ წრფეებს შორის, იმ შემთხვევაში, როცა, $f(x) \geq \varphi(x)$, გამოითვლება

$$S = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx$$

ფორმულით.

თუ ფართობი შემოსაზღვრულია $x=f(y)$ წირის რკალით, $y=c$, $y=d$ წრფეებითა და Oy ღერძის cd მონაკვეთით, მაშინ

$$| S = \int_c^d f(y) dy. |$$

როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x=x(t)$, $y=y(t)$, მაშინ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ წირით, $x=a$, $x=b$ წრფეებითა და Ox ღერძის ab მონაკვეთით, გამოითვლება

$$| S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt |$$

ფორმულით, სადაც t_1 და t_2 განისაზღვრება $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ განტოლებებიდან.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r=f(\varphi)$, მაშინ იმ სექტორის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $r=f(\varphi)$ წირითა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ სხივებით, გამოითვლება

$$| S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi |$$

ფორმულით.

2224. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2x^2$ პარაბოლით, $x=4$ წრფითა და Ox ღერძით.

2225. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=4-x^2$ პარაბოლითა და $y=0$ წრფით.

2226. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $xy=4$, $x=1$, $x=3$ და $y=0$ წირებით.

2227. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\ln x$ წირით, Ox ღერძითა და $x=e$ წრფით.

2228. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\sin x$ წირითა და $y=0$ წრფით ($0 \leq x \leq \pi$).

2229. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y=\lg x$ წირსა, Ox ღერძსა და $x=\frac{\pi}{3}$ წრფეს შორის.

2230 იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფარ-

თობი.

2231. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$

წიგნისა, $x = a$ წრფესა და Ox და Oy ღერძებს შორის.

2232. იპოვეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2$ და $y = 2 - x^2$ პარაბოლებით.

2233. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y^2 = 2px$ და $x^2 = 2py$ პარაბოლებს შორის.

2234. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = e^x$; $y = e^{-x}$ წირებითა და $x = 1$ წრფით.

2235. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^3 = x$ წირითა და $y = 1$, $x = 8$ წრფეებით.

2236. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^3$ კუბური პარაბოლით, $y = 8$ წრფითა და Oy ღერძით.

2237. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $ay^2 = x^3$ ნახევრად კუბური პარაბოლით, Oy ღერძითა და $y = a$, $y = 2a$ წრფეებით.

2238. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = \frac{1}{1+x^2}$

და $y = \frac{x^2}{2}$ წირებს შორის.

2239. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = 2 - x^2$ და $y^3 = x^2$ წირებს შორის.

2240. $x^2 + y^2 = 8$ წრეწირით შემოსაზღვრული არე $y = -\frac{x^2}{2}$ პარა-

ბოლით გაყოფილია ორ ნაწილად. იპოვეთ ორივე ნაწილის ფართობი.

2241. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = 2 - y - y^2$ წირითა და Oy ღერძით.

2242. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = x^2$ და $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლებსა და $y = 2x$ წრფეს შორის.

2243. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2 + 4x$ პარაბოლითა და $y = x + 4$ წრფით.

2244. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = \frac{1}{1+x^2}$

წირსა და მის ასიმპტოტს შორის.

2245. იპოვეთ ფართობი $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ცისოიდსა და მის $x=2a$

ასიმპტოტებს შორის ($a>0$).

2246. იპოვეთ $x=R \cos t$, $y=R \sin t$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2247. იპოვეთ $x=5 \cos t$, $y=3 \sin t$ ელიფსით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2248. იპოვეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძსა და $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ციკლოიდის რკალს შორის ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2249. იპოვეთ $x=a \cos^3 t$, $y=a \sin^3 t$ ასტროიდიტ შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2250. იპოვეთ $r=a(1+\cos \varphi)$ კარდიოიდიტ შემოსაზღვრული არის ფართობი.

2251. იპოვეთ $r^2=a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული არის ფართობი.

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფართობები:

2252. 1) $r=a \cos \varphi$; 2) $r=a \cos 2\varphi$; 3) $r=a \cos 3\varphi$.

2253. 1) $r=a \sin \varphi$; 2) $r=a \sin 2\varphi$; 3) $r=a \sin 3\varphi$.

2254. 1) იპოვეთ $r = \frac{a}{\varphi}$ ჰიპერბოლური სვით შემოსაზღვრული

ფართობი, სადაც $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$;

2) იპოვეთ $r=ae^{\varphi}$ ლოგარითმული სვით შემოსაზღვრული ფართობი, სადაც $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

2255. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $r=a\varphi$ არქიმედეს სვის პირველსა და მეორე ხვეულებს შორის.

2256. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^4+y^4=x^2+y^2$ წირით.

2257. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $x^3+y^3-3axy=0$ წირით (დეკარტის ფოთოლი).

§ 7. წირის რკალის სიგრძე

$y=f(x)$ განტოლებით მოცემული წირის AB რკალის სიგრძე გამოითვლება

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

ფორმულით, სადაც a და b არის A და B წერტილების აბსცისები.

როცა წირის განტოლებანი მოცემულია პარამეტრული სახით
 $x = x(t)$, $y = y(t)$, მაშინ

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება წირის A და B წერტილებს.

თუკი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში
 $r = r(\varphi)$, მაშინ

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$$

სადაც φ_1 და φ_2 A და B წერტილების შესაბამისი პოლარული კოორდინატებია.

2258. იპოვეთ $y^2 = x^3$ ნახევრად კუბური პარაბოლის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მოკვეთს $x = \frac{4}{3}$ წრფე.

2259. იპოვეთ $x^2 + y^2 = 25$ წრეწირის სიგრძე.

2260. იპოვეთ $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ჯაჭვწირის რკალის სიგრძე, როცა $0 \leq x \leq a$.

2261. იპოვეთ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ასტროიდის რკალის სიგრძე.

2262. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2} - 1$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც მოკვეთს Ox ღერძი.

2263. იპოვეთ $y = \ln x$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

2264. იპოვეთ $y = 2\sqrt{x}$ პარაბოლის რკალის სიგრძე, როცა $0 \leq x \leq 1$.

2265. იპოვეთ $y = e^x$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია $A(0; 1)$ და $B(1; e)$ წერტილებს შორის.

2266. იპოვეთ $9y^2 = x(x-3)^2$ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს შორის (მარჯუ-ეიანი პარაბოლა).

2267. იპოვეთ: 1) $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$ წირის რკალის სიგრძე, როცა

$1 \leq y \leq e$;

2) $x = \ln \cos y$ წირის რკალის სიგრძე, როცა $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$.

2268. გამოთვალეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალის სიგრძე ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2269. გამოთვალეთ $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$ წრე-წირის ევოლუტის რკალის სიგრძე $t=0$ -დან $t=\pi$ -მდე.

2270. გამოთვალეთ $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ელიფსის ევოლუტის რკალის სიგრძე.

2271. გამოთვალეთ $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ კარდიოიდის რკალის სიგრძე ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2272. იპოვეთ $r = a(1 - \cos \varphi)$ კარდიოიდის რკალის სიგრძე.

2273. იპოვეთ $r = 2a \sin \varphi$ წირის რკალის სიგრძე.

2274. იპოვეთ $r = a\rho$ არქიმედეს ხეის ერთი ხვეულის სიგრძე.

2275. იპოვეთ $r = e^{a\rho}$ ლოგარითმული ხეის რკალის სიგრძე პოლუსიდან $M(r, \varphi)$ წერტილამდე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, მაშინ წირის AB რკალის სიგრძე გამოითვლება

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

ფორმულით, სადაც t_1 და t_2 წარმოადგენს t პარამეტრის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც შეესაბამება წირის A და B წერტილებს.

2276. იპოვეთ $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ხრახნწირის რკალის სიგრძე $t=0$ -დან $t=2\pi$ -მდე.

2277. იპოვეთ $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$ წირის რკალის სიგრძე $t=0$ -დან $t=3$ -მდე.

2278. იპოვეთ $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ წირის რკალის სიგრძე, თუ $0 \leq t \leq 1$.

2279. იპოვეთ $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ წირის რკალის სიგრძე $t=0$ -დან ნებისმიერ t -მდე.

2280. გამოთვალეთ $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ წირის რკალის სიგრძე $O(0; 0; 0)$ წერტილიდან $M(3; 3; 2)$ წერტილამდე.

281. გამოთვალეთ $y = \frac{\ln x}{2}$, $z = \frac{x^2}{2}$ წიბის რკალის სიგრძე

1-დან $x = 2$ -მდე.

§ 8. ბრუნვის სხეულის მოცულობა

თუ მრუდწირული ტრაპეცია, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ ღერძითა და $x=a$, $x=b$ წრფეებით, ბრუნავს Ox და Oy ღერძების გარშემო, მაშინ ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობა შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$

თუ მრუდწირული ტრაპეცია შემოსაზღვრულია $x=g(y)$ წიბით, ღერძითა და $y=c$ და $y=d$ წრფეებით, მაშინ Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

რმულით.

როცა წიბის კანტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით ან ლარულ კოორდინატებში, მაშინ საჭიროა ინტეგრების ცვლადის სახელი გარდაქმნა.

თუ $r=l(\varphi)$ წიბის რკალითა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ პოლარული რადიუსით შემოსაზღვრული სექტორი ბრუნავს პოლარული ღერძის გარშემო, მაშინ მიღებული სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V_p = \frac{2}{3} \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin \varphi d\varphi$$

რმულით.

282. გამოთვალეთ ამ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=4x$, $x=4$ წიბებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

283. გამოთვალეთ ამ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ წიბებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2284. იპოვეთ ელიფსისთვის მოცულობა, რომელიც მიიღება $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2285. იპოვეთ $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, $y=0$, $x=0$, $x=a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2286. იპოვეთ $y^2 = x^3$, $y=0$, $x=1$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები.

2287. იპოვეთ $y = \sin x$ და $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები ($0 \leq x \leq \pi$).

2288. გამოთვალეთ $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x=-1$, $x=1$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2289. წრფის მონაკვეთი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს აერთებს $M(a; b)$ წერტილთან, ბრუნავს Ox ღერძის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული კონუსის მოცულობა.

2290. გამოთვალეთ $y = x^3$, $x=0$, $y=8$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2291. გამოთვალეთ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ და $y = \pm b$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2292. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y = x^2$ და $y^2 = x$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2293. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $y^2 = 4ax$ და $x=a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ბრუნვით Oy ღერძის გარშემო.

2294. იპოვეთ იმ ბრუნვის პარაბოლიდის მოცულობა, რომლის სიმაღლეა H , ხოლო ფუძის რადიუსი — R .

2295. იპოვეთ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2296. იპოვეთ $y = \frac{a}{x}$ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ $1 \leq x < +\infty$, ($a > 0$).

2297. იპოვეთ $y = e^x$, $x=0$, $y=0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა ($-\infty < x \leq 0$).

2298. იპოვეთ $x = a \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$ ასტროიდის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2299. იპოვეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალთა და Ox ღერძით შემოსაზღვრული ფიგურის საკოორდინატო ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2300. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r = a(1 + \cos \varphi)$ კარდიოიდის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

2301. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $r = a \sin 2\varphi$ წირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით პოლარული ღერძის გარშემო.

2302. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო ($b \geq a$).

2303. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირით შემოსაზღვრული არის ბრუნვით $x = b > a$ წრფის გარშემო.

2304. იპოვეთ $y = x^2$ და $y = 4$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის $x = 2$ წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

2305. იპოვეთ $y^2 = 2ax$ და $x = a$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის $x = a$ წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

§ 9. მოცულობის გამოთვლა ურთიერთპარალელური კვეთების ფართობების საშუალებით

თუ ცნობილია სხეულის Ox ღერძის პერპენდიკულარული კვეთის ფართობი ყოველ წერტილში, მაშინ ამ სხეულის მოცულობა გამოითვლება

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

ფორმულით, სადაც $S(x)$ ვევის ფართობია, ხოლო a და b — სხეულის Ox ღერძის მიმართულებაზე მოთავსებული კიდური წერტილების აბსცისები.

2306. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ელიფსოიდის მოცულობა.

2307. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელსაც $x=a$ სიბრტყე მოკვეთს $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ ელიფსური პარაბოლოიდიდან.

2308. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ ცალკეულია ჰიპერბოლოიდითა და $z = -1, z = 2$ სიბრტყეებით.

2309. ორი ტოლი ცილინდრი $x^2 + y^2 = a^2$ და $y^2 + z^2 = a^2$ იკვეთება მართი კუთხით. იპოვეთ ორივე ცილინდრის საერთო ნაწილის მოცულობა.

2310. R -რადიუსიანი ცილინდრი გადაკვეთილია მისი ფუძის დიამეტრზე გამავალი სიბრტყით, რომელიც ფუძესთან a კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მოკვეთილი ნაწილის მოცულობა.

2311. წრე გადაადგილდება ისე, რომ მისი ცენტრი აღწერს $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის დიდ ღერძს, ამასთან, წრის სიბრტყე იმავე ღერძის მართობულია. ხოლო წრის რადიუსი — ყოველ მომენტში ელიფსის გადაკვეთის წერტილის ორდინატის ტოლი. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება წრის გადაადგილებით ელიფსის ერთი წვეროდან მეორემდე.

§ 10. ბრუნვის ზედაპირის ფართობის გამოთვლა

$y=f(x)$ წრის AB რკალის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ფორმულით, სადაც a და b შესაბამისად A და B წერტილების აბსცისებია.

როცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით:
 $x = x(t)$, $y = y(t)$, მაშინ

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$$

სადაც t_1 და t_2 პარამეტრის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

2312. იპოვეთ $x^2 + y^2 = R^2$ წრეწირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2313. იპოვეთ $y = x^3$ წირის Ox ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, თუ $0 \leq x \leq 1$.

2314. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = \sin x$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0 \leq x \leq \pi$.

2315. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ჯაჭვწირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო, თუ $0 \leq x \leq a$.

2316. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2}$ პარაბოლის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, თუ $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$.

2317. იპოვეთ $4x^2 + y^2 = 4$ ელიფსის Oy ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2318. გამოთვალეთ იმ ზედაპირების ფართობები, რომლებიც მიიღება $y = 2x$ წრფის ბრუნვით Ox და Oy ღერძების გარშემო, თუ $0 \leq x \leq 2$.

2319. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $9y^2 = x(x-3)^2$ წირის მარჯულის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2320. იპოვეთ ტორის ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ წრეწირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო ($b > a$).

2321. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ასტროიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2322. გამოთვალეთ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალის Ox და Oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირების ფართობები ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2323. გამოთვალეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ კარდიოიდის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო.

2324. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = \lg x$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. თუ $0 \leq x \leq \frac{x}{4}$.

2325. იპოვეთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება $y = e^{-x}$ წირის ბრუნვით Ox ღერძის გარშემო. თუ $0 \leq x < +\infty$.

2326. გამოთვალეთ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ლემნისკატის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

2327. გამოთვალეთ $r = 2a \sin \varphi$ წრეწირის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

§ 11. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება მკანასკნელში

1. სტატიკური მომენტები. სიმძიმის ცენტრი. $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) წირის AB რკალის M_x და M_y სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ გამოითვლება

$$M_x = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{და} \quad M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ფორმულებით, ხოლო იმავე რკალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_y}{s} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{s} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}.$$

თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ წირით, Ox ღერძითა და $x = a$, $x = b$ წრფეებით. მაშინ მისი M_x და M_y სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ გამოითვლება

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \quad \text{და} \quad M_y = \int_a^b xy dx$$

ფორმულებით; იმავე ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx},$$

თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $x=a$, $x=b$ წირებით, მაშინ

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f(x) - \varphi(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx}, \quad y_c = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] [f(x) - \varphi(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx}.$$

2. წერტილის მიერ გავლილი მანძილი. თუ წერტილი მოძრაობს რობელიმე წირის გასწვრივ და მისი სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობაა $v=l(t)$, სადაც $l(t)$ არის t ცვლადის მოცემული ფუნქცია, მაშინ $[t_1, t_2]$ დროის განმავლობაში წერტილის მიერ გავლილი მანძილი გამოითვლება

$$S = \int_{t_1}^{t_2} l(t) dt$$

ფორმულით.

3. ძალის მუშაობა. თუ ცვლადი $X=l(x)$ ძალა მოქმედებს Ox ღერძის გასწვრივ, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა $[x_1, x_2]$ მონაკვეთზე გამოითვლება

$$A = \int_{x_1}^{x_2} l(x) dx$$

ფორმულით.

2328. იპოვეთ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ წრფის საკოორდინატო ღერძებს შორის მოთავსებული მონაკვეთის სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ ($a>0$, $b>0$).

2329. იპოვეთ $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის ზედა ნახევრის სტატიკური მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ ($y \geq 0$).

2330. გამოთვალეთ მართკუთხედის სტატიკური მომენტი მისი ფუძის მიმართ, თუ ფუძე უდრის a -ს, ხოლო სიმაღლე — h -ს.

2331. გამოთვალეთ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ წრფეებით შემოსაზღვრული სამკუთხედის სტატიკური მომენტები Ox და Oy ღერძების მიმართ.

2332. იპოვეთ $x^2 + y^2 = a^2$ წრეწირის პირველ კვადრანტში მოთავსებული ნაწილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

2333. იპოვეთ $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ ჯაჭვწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ $-a \leq x \leq a$.

2334. იპოვეთ $x = a(t - t \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ციკლოიდის რკალის სიმძიმის ცენტრი ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2335. იპოვეთ $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ასტროიდის პირველ კვადრანტში მოთავსებული ნაწილის სიმძიმის ცენტრი.

2336. იპოვეთ იმ ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = \sin x$ წირითა და Ox ღერძით ($0 \leq x \leq \pi$).

2337. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის ფართობის იმ ნაწილის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

2338. იპოვეთ იმ ფიგურის სიმძიმის ცენტრი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y^2 = x$, $y = 0$ წირებითა და $M(1; 1)$ წერტილის ორდინატით.

2339. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძებითა და $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ პარაბოლით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრი.

2340. გამოთვალეთ $y^2 = ax$ პარაბოლითა და $x = a$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

2341. გამოთვალეთ $y^2 = 20x$ და $x^2 = 20y$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

თუ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში: $r = f(\varphi)$, მაშინ მისი რკალის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi}, \quad y_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi}.$$

თუ სექტორი შემოსაზღვრულია $r=1$ (φ) წიროთა და $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ პოლარული რადიუსებით, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები გამოითვლება

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \cos \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}, \quad y_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}$$

ფორმულებით.

2342. გამოთვალეთ $r=e^{\varphi}$ ლოგარითმული სექტორის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \pi$.

2343. გამოთვალეთ $r=a(1+\cos \varphi)$ კარდოილის რკალის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$.

2344. გამოთვალეთ R -რადიუსიანი წრის სექტორის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, თუ მისი ცენტრალური კუთხეა 2α .

2345. გამოთვალეთ $r=a \varphi$ არქიმედეს ხეივითა და $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$ პოლარული რადიუსებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები.

2346. მოძრაი წერტილის სიჩქარე $v=0,1t^2 - \frac{8}{\sqrt{t}}$. იპოვეთ მას მქონე ვეღლი s მანძილი პირველი 10 წამის განმავლობაში და განსაზღვრეთ ამ შუალედში მოძრაობის საშუალო სიჩქარე.

2347. მატერიალური წერტილის სიჩქარე იზრდება დროის პროპორციულად $v=mt$ კახონის მიხედვით. იპოვეთ მანძილი რომელსაც წერტილი გაივლის საწყისი დროიდან T დრომდე.

2348. s_0 საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად შემოთ ასროლილი

სხეულის მოძრაობა (საერთო წინადადება მსეველიობაში არ მიიღება) განისაზღვრება ფორმულით:

$$v = v_0 - gt,$$

სადაც t მოძრაობის დროა, ხოლო g — სიმძიმის ძალის აჩქარება. საწყისი მდებარეობიდან რა სიმაღლეზე ქნება სხეული ასროლის მომენტიდან T წამის შემდეგ?

2349. წერტილის მოძრაობის სიჩქარე $v = te^{-0.01t}$ $\frac{მ}{წმ}$. იპოვეთ მის

მეორე გავლილი მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან სრულ გაჩერებამდე.

2350. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს ზამბარის გასაჭიმად 6 სმ-ით, თუ 1 კგ ძალა მის წიკვს 1 სმ-ით?

2351. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს სპილენძის მავთულის გასაჭიმად 0.001 მ-ით, თუ მისი სიგრძეა 1 მ, ხოლო განივი კვეთის რადიუსი 2 მმ.

2352. გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ვერტიკალური ცილინდრული კასრიდან წყლის ამოსატუმბავად, თუ კასრის ფუძის რადიუსია R , ხოლო სიმაღლე — H .

2353. რა მუშაობა უნდა დაიხარჯოს წყლის ამოსატუმბავად წახევარსფერული ქურჭლიდან, რომლის რადიუსი $R = 10$ მ?

§ 12. მანსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა

განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლისათვის მიზანშეწონილია ქვემოთოცენილი ფორმულების გამოყენება.

1. მართკუთხედების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

სადაც n არის $[a, b]$ სეგმენტის დანაყოფთა რიცხვი, $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ სიდიდეები კი $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) წერტილებში; $h = \frac{b-a}{n}$. თუ $f'(x)$ წარმოებული არსებობს და

შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულების ნაშთითი წევრის მართებულია შეფასება:

$$|R| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1, \text{ სადაც } M_1 = \max |f'(x)| [a, b] \text{ სეგმენტზე.}$$

2. ტრაპეციების ფორმულა:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

სადაც y_0, y_1, \dots, y_n $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია $x_i = a + ih$ წერტილებში ($i=0, 1, 2, \dots, n$); $h = \frac{b-a}{n}$. თუ $f''(x)$ წარმოებული არსებობს და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულის ცდომილება განისაზღვრება $|R| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$ უტოლობით, სადაც $M_2 = \max |f''(x)| [a, b]$ სეგმენტზე.

3. სიმპსონის ფორმულა:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}].$$

აქ ინტეგრების $[a, b]$ შუალედი დაყოფილია $2n$ ტოლ ნაწილად. y_0, y_1, \dots, y_{2n} $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობებია დაყოფის წერტილებში.

ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის ბიჯი $h = \frac{b-a}{2n}$. თუ $f^{IV}(x)$ არსებობს და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ამ ფორმულის ცდომილება განისაზღვრება უტოლობით:

$$|R| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4, \text{ სადაც } M_4 = \max |f^{IV}(x)| [a, b] \text{ სეგმენტზე.}$$

ცხადია, ტრაპეციების ფორმულის ნაშთითა წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება წინასწარ ალებულ დადებით ε -ს, თუ

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

$$n \rightarrow \sqrt{\frac{(b-a)^n M_2}{12\varepsilon}}$$

ამ უკანასკნელი უტოლობიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ინტეგრების შედეგის დანაყოფთა n რიცხვი ისე, რომ $|R| \leq \varepsilon$. როგორც ვხედავთ, ცდომილების შეფასებისათვის საჭიროა $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ცოდნა. მაგრამ ზოგჯერ $f(x)$ ფუნქცია არ არის მოცემული ანალიზური სახით ან $f''(x)$ -ის გამოთვლა საკმაოდ რთულია. ასეთ შემთხვევაში ტრაპეციების ფორმულის ცდომილება შეიძლება გამოსახულ იქნეს ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილის საშუალებით.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავადგინოთ დასახელებული ε -ის შესაბამისი n მართკუთხედებისა და სიმპსონის ფორმულებისათვის.

გამოთვალეთ მიახლოებით შემდეგი ინტეგრალები:

1) მართკუთხედების ფორმულით:

$$2354. \int_0^4 x^2 dx, \quad (n = 10).$$

$$2355. \int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad (n = 10).$$

2) ტრაპეციების ფორმულით:

$$2356. \int_{-1}^1 (3x^2 - x - 2) dx, \quad (n = 10).$$

$$2357. \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 4x) dx, \quad (n = 10).$$

$$2358. \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad (n = 6).$$

$$2359. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx, \quad (n = 6).$$

3) სიმპსონის ფორმულით:

$$2360. \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad (2n = 2).$$

$$2361. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad (2n = 10).$$

$$2362. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad (2n = 10).$$

$$2363. \int_0^1 \frac{xdx}{x+1}, \quad (2n = 10).$$

ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] dx, \quad \text{სიზუსტით } \varepsilon = 0,005.$$

ტრაპეციების ფორმულით.

$$f''(x) = \operatorname{arctg} x;$$

$$m_2 = \max |f''(x)| = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{ამიტომ}$$

ზემოთ მოყვანილი უტოლობების თანახმად მივიღებთ

$$n \geq 3,618.$$

ჩავთვალოთ $n=4$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ტრაპეციების ფორმულით გამოთვლების ჩატარებისას $\varepsilon=0,005$ სიზუსტის უზრუნველსაყოფად საკმარისია საინტეგრირებელი ფუნქციის ოთხ თანახმა ნაწილად დაყოფა. თუ გამოთვლებს ჩავატარებთ დავრწმუნდებით, რომ $I \approx 0,1573$.

ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში დაადგინეთ რამდენ ნაწილად უნდა დაიყოს ინტეგრების შუალედი, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა მივიღოთ $\varepsilon=0,005$ სიზუსტით, ტრაპეციების ფორმულით.

$$2364. \int_0^1 5(x+1) \ln(x+1) dx.$$

$$2365. \int_0^1 \frac{1}{3} e^{x^2} dx.$$

$$2366. \int_0^1 x e^x dx.$$

$$2367. \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x)^3}.$$

$$2368. \int_0^1 \left[\frac{2}{(1+x)^2} - 3x^2 - 5 \right] dx.$$

$$2369. \int_0^1 \left[\frac{1}{6(x+1)^3} + 2x^2 - 6x \right] dx.$$

$$2370. \int_{2,2}^3 \frac{(x-3)^2}{x-1} dx.$$

$$2371. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2x^2 - 3) dx.$$

$$2372. \int_{2,2}^{3,5} \frac{6x^3 - 18x + 13}{6(x-1)^2} dx.$$

$$2373. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + 3x^2 + 11) dx.$$

$$2374. \int_0^1 [(x+1) \ln(x+1) + x^2 + 3x] dx.$$

$$2375. \int_2^3 [(x-1) \ln(x-1) + 2x^2 - 7] dx.$$

$$2376. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x^2 + x - 1) dx.$$

$$2377. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + x^2 - x + 1) dx.$$

$$2378. \int_0^1 \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] dx.$$

$$2379. \int_2^3 5(x-1) \ln(x-1) dx.$$

$$2380. \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin 2x dx.$$

$$2381. \int_0^1 \left(\frac{1}{3(x+1)^3} + x^2 + 1 \right) dx.$$

$$2382. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + x^2 + x - 1) dx.$$

$$2383. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + 2x^2 - x) dx.$$

$$2384. \int_1^2 x \ln x dx.$$

$$2385. \int_0^1 \frac{dx}{4(1+x)^4}.$$

გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი ინტეგრალები სიმპსონის ფორმულით მითითებულ ε სიზუსტით:

$$2386. \int_0^1 \frac{x^2 \sqrt{1+x^5}}{1+x^4} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$2387. \int_0^2 x^3 (1+x^6)^{2/3} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$2388. \int_3^4 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 2}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}. \quad 2389. \int_1^{2,6} \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + 3,26} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2390. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^3 x - 3 \sin^4 x}{1 + \sin^2 x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$2391. \int_{4,2}^{6,4} \frac{x^2 + \sqrt{3^x}}{\sqrt{4 + \ln^2(x^2 + 1)}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$2392. \int_3^5 \frac{x^4 e^x}{\sqrt{5 + 2^x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}. \quad 2393. \int_2^{4,12} \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x^3 \sin x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2394. \int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x} + 1,2}}{x \cdot 10^{x^2}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5}. \quad 2395. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x e^{4 - 2,6 \cos x}}{e^{x \sin x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

ქვემოთ მოყვანილია ინტეგრალის გამოთვლის ფორტან-პროგრამა გაფორმებული, როგორც ქვეპროგრამა—ფუნქცია. ტრაპეციების მეთოდით:

1...5 | 6 | 7

		FUNCTION INTEGR (A, B, N, FONC)
	C	A, B ინტეგრების საზღვრებია, N დაყოფის რიცხვი, FONC ინტეგრალქვეშა ფუნქციის გამოსათვლელი ქვეპროგრამა — ფუნქცია
		H = (B - A) / X
		M = N - 1
		X = A
		S = (FONC(A) + FONC(B)) / 2
	C	ციკლის დაწყებამდე გამოვთვალეთ შესაქრები (y ₀ + y _n) / 2
		DO 1 I = 1, M
		X = X + H
1		S = S + FONC(X)
		INTEGR = S * H
		RETURN
		END

2396. ამ პროგრამის სამუდამო გამოთვალეთ ეგმ-ზე 2364—2395 ნომრებში მოყვანილი ინტეგრალები. გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის გამოსათვლელ ქვეპროგრამა — ფუნქციის აღწერა ძირითად პროგრამაში და შედეგის ამობეჭდვა. ნიმუშად აქ მოგვყავს

$$I = \int_0^{10} \sqrt{100 - x^2} dx \text{ ინტეგრალის გამოთვლა მნიშვნელობებისათვის}$$

$n = 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400.$

1...5	6	7
		EXTERNAL FONC
		DO 1 I = 100, 400, 50
		RESULT=INTEGR (0, 10., I, FONC) = 4.
2		PRINT 2; I; RESULT
		FORMAT (15, E 15.7)
1		CONTINUE
		STOP
		END
		FUNCTION FONC (X)
		FONC=SQRT (100. - X * X)
		RETURN
		END

შედეგად მანქანა დაბეჭდავს ცხრილს

100	0.3140396E 03
150	0.3140913E 03
200	0.3141169E 03
250	0.3141257E 03
300	0.3141360E 03
350	0.3141394E 03
400	0.3141430E 03

2397. 2396 დავალების მსგავსად შეადგინეთ ინტეგრალის გამოთვლის ქვეპროგრამა — ფუნქცია მართკუთხედების ფორმულით და ამოხსენით 2364—2395 ნომრებით მოცემული ინტეგრალები.

2398. 2397 ნომრით მოცემული დავალება შეადგინეთ სიმპსონის ფორმულისათვის.

ინტეგრალებს, რომელთა საზღვრები უსასრულოა ან რომელთა ინტეგრალქვეშა ფუნქციები შემოუსაზღვრელია, ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალები.

1. უსასრულოსაზღვრებიანი ინტეგრალი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \leq x < +\infty$ შუალედში და არსებობს

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

ზღვარი, მაშინ მას უწოდებენ არასაკუთრივი ინტეგრალის მნიშვნელობას და ასე აღნიშნავენ:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

როცა აღნიშნული ზღვარი სასრულია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — განშლადი. ანალოგიურად განიმარტება ინტეგრალები:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა შეიძლება დავადგინოთ აგრეთვე შედარების მეთოდით. თუ $x > a$ -სათვის $|f(x)| \leq F(x)$ და

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx \text{ ინტეგრალი კრებადია, მაშინ კრებადი იქნება } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ ინტეგ-}$$

რალიც.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

2399. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

2400. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$.

2401. $\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx$.

2402. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$2403. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$2405. 1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}; 2) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$2407. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

$$2409. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

$$2404. \int_0^{+\infty} x \sin x dx =$$

$$2406. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$$

$$2408. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$$

$$2410. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$2411. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$2413. \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$2415. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}$$

$$2417. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$2419. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$2412. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$$

$$2414. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$2416. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$$

$$2418. \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$$

$$2420. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

შემოთხაზღვრული ფუნქციის ინტეგრალი. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a \leq x < b$ შუალედში, ხოლო $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty$, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

ასევე, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $a < x \leq b$ შუალედში, ხოლო $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$, მაშინ ინტეგრალი

$x \rightarrow a+$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

ბოლოს, თუ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, ($a < c < b$), მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

როცა აღნიშნული ზღვრები არსებობს და სასრულია, მაშინ არასაკუთრივ ინტეგრალს ეწოდება კრებადი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — გაწევი.

თუ $|f(x)| \leq F(x)$, როცა $a \leq x \leq b$ და $\int_a^b F(x) dx$ ინტეგრალი

კრებალია, მაშინ კრებალია $\int_a^b f(x) dx$ ინტეგრალიც.

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$2421. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2422. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2423. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx.$$

$$2424. \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$2425. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2426. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2427. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$2428. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$2429. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$2430. \int_2^3 \frac{3x dx}{2\sqrt[3]{x^2-4}}$$

$$2431. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$2432. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$2433. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3}} dx$$

$$2434. \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$2435. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$2436. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{4-x}^2} \text{ ჰეილიმა}$$

გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$2437. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$$

$$2438. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^4}}$$

$$2439. 1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}; 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$$

$$2440. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt[3]{1-x^3}}$$

XI თავი

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

§ 1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება, ზღვარი და უწყვეტობა

R^n სივრცის $x = (x_1, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, \dots, y_n)$ წერტილებს შორის მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

როცა $n=2$, ე. ი. R^2 სიბრტყის შემთხვევაში

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, $x \in R^n$ და $\delta > 0$. სიმრავლეს $U(x, \delta) = \{y | y \in R^n \wedge \rho(x, y) < \delta\}$ ეწოდება n — განზომილებიანი სფერო ცენტრით $x \in R^n$, წერტილში და $\delta > 0$ რადიუსით ან x წერტილის δ — მიდამო. ($x \in R^n$ წერტილის ნებისმიერ $\delta > 0$ მიდამოს უწოდებენ უბრალოდ x წერტილის მიდამოს და აღნიშნავენ აგრეთვე $u(x)$ -ით). როცა $n=2$, ე. ი. სიბრტყის შემთხვევაში $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ და $U(x, \delta) = \{y | y \in R^2 \wedge (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < \delta^2\}$.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $E \subset R^n$. $f: E \rightarrow R$ ასახვას ეწოდება n ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია. თუ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ ნებისმიერი წერტილია, მაშინ ამ ფუნქციას აღნიშნავენ აგრეთვე $f(x)$ -ით ან $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ან კიდევ $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ით. E სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არეს უწოდებენ.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რაიმე $U(M)$ მიდამოში, გარდა შესაძლოა, თვით M_0 წერტილისა. A რიცხვს უწოდებენ $f(x, y)$ ფუნქციის ზღვარს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში, თუ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) (0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon).$$

ასეთ შემთხვევაში წერენ:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

მაგალითი. განვიხილოთ $f(x, y) = x^2 + y^2$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მთელ რიცხვით სიბრტყეზე და $M = (1; 2)$ წერტილი წერტილთა ნებისმიერი (x_k, y_k) , $k=1, 2, \dots$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებალია $(1; 2)$ წერტილისაკენ გვაქვს

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) = 1^2 + 2^2 = 5.$$

ამგვარად,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} f(x, y) = 5,$$

მაგალითი. გამოთვალეთ $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{2(x^2 + y^2)}$ ფუნქციის ზღვარი

$(0, 0)$ წერტილში

▷. ვინაიდან $|x|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$, $|y|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$, ამიტომ

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{2(x^2 + y^2)} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{2(x^2 + y^2)} \leq (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

თუ ახლა $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის დავუშვებთ $\delta = \varepsilon$, მაშინ ყოველი (x, y) -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. შესრულდება უტოლობა $|f(x, y)| < \varepsilon$. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0. \triangleleft$$

$$(x, y) \rightarrow (0, 0)$$

განსახილველია. ვთქვათ, $z = f(x, y)$ ფუნქცია განსახილველია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე U მიდამოში. f ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი (x_0, y_0) წერტილში, თუ:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

მაგალითი. გამოარკვეთ უწყვეტია თუ არა $(0, 0)$ წერტილში ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = y = 0. \end{cases}$$

▷. ვინაიდან $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ (იხ. წინა მაგალითი) და $f(0, 0) = 0$,

$$(x, y) \rightarrow (0, 0)$$

ამიტომ $f(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია $(0, 0)$ წერტილში. \triangleleft

2441. მოცემულია სამკუთხედის პერიმეტრი $2p$. გამოსახეთ სამკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი ორი x და y გვერდის ფუნქცია.

2442. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და y სიმაღლის ფუნქცია.

2443. გამოსახეთ კონუსის V მოცულობა, როგორც მისი x მსახველისა და ფუძის y რადიუსის ფუნქცია.

2444. გამოსახეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის V მოცულობა, როგორც მისი x სიმაღლისა და y გვერდითი წიბოს ფუნქცია.

2445. 1) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$. იპოვეთ $f\left(\frac{1}{2}; 3\right)$, $f(1; -1)$;

2) $F(x, y) = \frac{x - 2y}{2x - y}$. იპოვეთ $F(3; 1)$, $F(5; 3)$;

3) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f(2; -3)$, $f\left(1; \frac{y}{x}\right)$;

4) $z = e^{\sin(x+y)}$. იპოვეთ z , თუ $x = y = \frac{\pi}{2}$.

2446. 1) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$. იპოვეთ z , თუ $x=2, y=2; x=1, y=2;$

2) $F(x, y) = \frac{x}{x-y}$. აჩვენეთ, რომ $F(a, b) + F(b, a) = 1;$

3) $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$. იპოვეთ $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \frac{1}{f(x, y)}$.

იპოვეთ განსაზღვრის არეები შემდეგი ფუნქციებისა:

2447. $z = x^2 + y^2,$

2448. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}.$

2449. $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$

2450. $z = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}.$

2451. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$

2452. $z = \frac{xy}{y-x}.$

2453. $z = \ln(x+y).$

2454. $z = \ln(y^2 - 4x + 8).$

2455. $z = \sqrt{xy}.$

2456. $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2).$

2457. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2}.$

2458. $z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{y^2-4}.$

2459. $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$

2460. $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+x^2y^2}.$

2461. 1) $u = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2};$ 2) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$

2462. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$ 2463. $z = \sqrt{y - |x - 1|}.$

2464. $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$ 2465. $z = \arccos \frac{y-1}{x-1}.$

2466. $z = \sqrt{x-y} + \ln(9-x^2-y^2).$ 2467. $z = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}\right).$

$z = l(x, y)$ ფუნქციის დონის წირი ეწოდება ისეთ $l(x, y) = c$ წირს xOy სიბრტყეზე, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ღებულობს ერთსა და იმავე $z=c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის წირები შემდეგი ფუნქციებისა:

2468. 1) $z = x + y;$ 2) $z = x^2 - y^2;$ 3) $z = \ln(x^2 + y);$ 4) $z = \sqrt{xy}.$

2469. 1) $z = x^2 + y^2;$ 2) $z = x^2 y;$ 3) $z = \frac{x}{y^2};$ 4) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$

$u = f(x, y, z)$ ფუნქციის დონის ზედაპირი ეწოდება ისეთ $f(x, y, z) = c$ ზედაპირს, რომლის წერტილებზეც ფუნქცია ლეზულობს ერთსა და იმავე $u = c$ მნიშვნელობას.

იპოვეთ დონის ზედაპირები შემდეგი ფუნქციებისა:

2470. 1) $u = x + y + z$; 2) $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$; 3) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

2471. 1) $u = 5^{2x+3y-z}$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

იპოვეთ შემდეგი ზღვრები:

2472. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$

2473. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$

2474. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

2475. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2476. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

2477. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

2478. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{xy}$

2479. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

2480. 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 (y-2)^2}$

2481. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

იპოვეთ წვერების წერტილები შემდეგი ფუნქციებისა:

2482. 1) $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$;

3) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; 4) $u = \frac{1}{z^2 - x^2 - y^2}$.

$$2483. \quad 1) z = \frac{1}{x-y}; \quad 2) z = \frac{3}{x^2+y^2};$$

$$3) z = \frac{x^2+2y+4}{y-x^2}; \quad 4) z = \cos \frac{1}{xy}.$$

§ 2. ფუნქციის კერძო ნაზრდები და წარმოებული
სრული დიფერენციალი

$z=f(x, y)$ ფუნქციის კერძო ნაზრდები x -ითა და y -ით (x, y) წერტილში ეწოდება შესაბამისად შემდეგ სხვაობებს:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

თუ $z=f(x, y)$ და მივიღებთ, რომ y მუდმივი სიდიდეა, მაშინ z ფუნქციის კერძო წარმოებული x -ით (x, y) წერტილში ეწოდება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$$

ზღვარს, როცა ეს ზღვარი არსებობს; ანალოგიურად, თუ მივიღებთ, რომ x მუდმივი სიდიდეა, მაშინ კერძო წარმოებული y -ით (x, y) წერტილში იქნება:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს.

ასევე განიმარტება საში და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

ვთქვათ, $z=f(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M=(x, y)$ წერტილის რაიმე $U(M, \delta)$ მიდამოში. ავიღოთ ამ მიდამოს $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ წერტილი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Δz -ს უწოდებენ $z=f(x, y)$ ფუნქციის სრულ ნაზრდს.

განსაზღვრა. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი (x, y) წერტილში, თუ მისი Δz სრული ნაზრდი ამ წერტილში შეიძლება წარმოვსაზღვროთ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha' \Delta x + \beta \Delta y,$$

სადაც A და B არაა დამოკიდებული Δx და Δy -ზე და

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta = 0, \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

განსახილვეთ. (x, y) წერტილში დიფერენცირებადი f ფუნქციის სრული დიფერენციალი ამ წერტილში ეწოდება Δx და Δy ცვლადების წრფივ ფუნქციას $A\Delta x + B\Delta y$ და აღინიშნება dz -ით ან $df(x, y)$ -ით.

ამგვარად,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Δx და Δy -ს, რომლებიც წარმოადგენენ შესაბამისად x და y ცვლადების ნაზრდებს, უწოდებენ აგრეთვე ამ ცვლადების დიფერენციალებს და აღნიშნავენ შესაბამისად dx -ით და dy -ით. ამგვარად, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. ამ აღნიშვნებში dz სრული დიფერენციალი მიიღებს სახეს

$$dz = A dx + B dy.$$

ამასთან, მტკიცდება, რომ

$$A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

შ. ი.

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

როცა Δx და Δy საკმარისად მცირეა, მაშასადამე, როცა $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ საკმარისად მცირეა, დიფერენცირებადი $z = f(x, y)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს შემდეგ მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

ანალოგიურად განიხარტება სამი და მეტი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი. თუ $u = f(x, y, z)$, მაშინ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

მაგალითი. იპოვეთ $z = \ln \cos \frac{x}{y}$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები.

▷. ჩავთვლით რა y -ს მუდმივად, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos \frac{x}{y}} \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y} \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

ახლა ჩავთვლით რა x -ს მუდმივად, მივიღებთ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos \frac{x}{y}} \cdot \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{x}{y^2} \operatorname{tg} \frac{x}{y}. \quad \triangleleft$$

მაგალითი. იპოვეთ $l(x, y) = x^2 + xy + y^2$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი.

$$\begin{aligned} \triangleright. f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2, \\ \Delta f(x, y) &= [(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + xy + y^2) = \\ &= (2x + y)\Delta x + (x + 2y)\Delta y + \Delta x^2 + \Delta x\Delta y + \Delta y^2. \end{aligned}$$

გამოსახულება $(2x + y)\Delta x + (x + 2y)\Delta y$ არის სრული დიფერენციალი, ხოლო $\Delta x^2 + \Delta x\Delta y + \Delta y^2 = o(\rho)$, როცა $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$. \triangleleft

მაგალითი. იპოვეთ $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$\triangleleft. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} dy. \quad \triangleleft$$

მაგალითი. გამოთვალეთ მიხრობებით $1,02^{3,01}$.

▷. განვიხილოთ $f(x, y) = x^y$ ფუნქცია. მისი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ უწყვეტია (1; 3) წერტილში, ამიტომ ამ წერტილში f ფუნქცია დიფერენცირებალია. თუ დავუშვებთ $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,01$, გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= df(x, y) = \frac{\partial f(1; 3)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(1; 3)}{\partial y} \Delta y = \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 0,02 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0,01 = 0,06. \end{aligned}$$

მაშასადამე, $1,02^{3,01} \approx 1 + 0,06 = 1,06$. \triangleleft

იპოვეთ ყოველი წარმოდგენის შემდეგ ფუნქციებისა:

2484. $z = x^2 + y^2 + 3x^2y - 2xy^2 + 3.$

2485. $z = \frac{y}{x}.$

2486. $z = x^2 \sin^2 y$

2487. $z = \frac{5}{x + 2y}.$

2488. $z = \frac{x - y}{x + y}.$

2489. $z = \sqrt{x^2 - y^2}.$

2490. $z = \ln(x^2 + y^2).$

2491. $z = \ln \sin(x - 2y).$

2492. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3.$

2493. $z = x^3 + 3x^2y - y^3.$

2494. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

2495. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

2496. $z = x^y.$

2497. $z = e^{-\frac{x}{y}}.$ + 1

2498. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

2499. $z = \arcsin \frac{y}{x}.$ 5+

2500. $z = \sqrt{x^2 - y^2}.$

2501. $z = \sin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

2502. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x - 1}.$

2503. $z = e^{\arcsin \frac{y}{x^2}}.$

2504. $z = \ln \operatorname{tg}(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

2505. $z = \left(xy + \frac{y}{x}\right)^7.$ $\frac{1}{3} +$

2506. $z = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{xy}.$

2507. $z = (x^2 + 1)^{\sin y}.$ $\frac{e-1}{3}$

2508. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

2509. $u = xy + yz + zx.$

2510. $u = x^2y^2z + 2x - 3y + z + 5.$

2511. $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}.$

2512. $u = (xy)z.$

2513. $u = z^{xy}.$

2514. $u = \arccos^2 \frac{x + y}{z}.$

2515. $u = \operatorname{ctg} \frac{z + \sqrt{y}}{z - \sqrt{y}}.$

2516. $u = \ln^3 \left(\sqrt{xyz} + \frac{1}{x + z} \right).$

2517. $u = \cos^2 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

2518. $f(x, y) = x^2 + y^2.$

იპოვეთ $f'_x(2; 3), f'_y(2; 3).$

2519. $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}.$

იპოვეთ $f'_x(2; 1), f'_y(2; 1).$

2520. $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$. იპოვეთ $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$,
 $f'_z(1; 2; 0)$.

2521. $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$,
 იპოვეთ $f'_x(0; 0; 1)$, $f'_y(0; 0; 1)$, $f'_z(0; 0; 1)$.

იპოვეთ სრული დიფერენციალები შემდეგი ფუნქციებისა:

(2522. $z = x^2 y^3$. 2523. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

2524. $z = x^2 + xy^2 + \sin y$. 2525. $z = \ln xy$.

2526. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. 2527. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

2528. $z = \sin(x^2 + y^2)$. 2529. $z = \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y}$.

2530. $z = \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. 2531. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

2532. $z = \frac{y^2 + x^2}{x^3}$. 2533. $z = \left(x^2 y + \frac{y}{x}\right)^3$.

2534. $z = x \cdot y^x$. 2535. $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 3xy}$.

2536. $z = 2 \arctg \frac{y}{x}$. 2537. $z = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x} + 1\right)$.

2538. $z = \operatorname{ctg} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$. 2539. $z = \ln \cos \frac{x}{y}$.

2540. $u = xyz$. 2541. $u = xy^z$.

2542. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 2543. $u = 3^{xy} \cdot \operatorname{tg} z$.

2544. $u = z^{\cos x + \cos y}$. 2545. $u = (\cos x + \cos y)^z$.

2546. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^2 y$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=3$, $y=4$, $\Delta x=1$, $\Delta y=0.5$.

2547. გამოთვალეთ $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ფუნქციის სრული ნაზრდი და დიფერენციალი, თუ $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.2$.

2548. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=2$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=2+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

2549. გამოთვალეთ $f(x, y) = x^2 y$ ფუნქციის ნაზრდი, რომელსაც იგი მიიღებს $x=1$, $y=1$ მნიშვნელობებიდან $x_1=1+h$, $y_1=1+k$ მნიშვნელობებზე გადასვლისას.

გამოთვალეთ მოახლოებით:

$$2550. (1,02)^{3,01}.$$

$$2551. \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}.$$

$$2552. (1,02)^3 \cdot (0,97)^2.$$

$$2553. \arctg \frac{5,01}{4,98}.$$

2554. მართკუთხედის ერთი გვერდი $a=10$ სმ, ხოლო მეორე — $b=24$ სმ. როგორ შეიცვლება მართკუთხედის l დიაგონალი, თუ a გვერდს გავაღიდეტო 4 მმ-ით, ხოლო b გვერდს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

2555. კონუსის სიმაღლე $H=30$ სმ, ფუძის რადიუსი $R=10$ სმ. როგორ შეიცვლება კონუსის მოცულობა, თუ H -ს გავაღიდეტო 3 მმ-ით, ხოლო R -ს შევამცირებთ 1 მმ-ით?

§ 3. სრული უწყვეტილი განაჩროვება. სრული წარმოებული

1. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=l(t)$, $y=\varphi(t)$, მაშინ z ფუნქციის წარმოებული t -თი (სრული წარმოებული) გამოითვლება

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ფორმულით. კერძოდ, თუ t ემოსხევა ერთ-ერთ არგუმენტს, მაგალითად, x -ს, მაშინ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

აქ F , l და φ წარმოებადი ფუნქციებია.

2. თუ $z=F(x, y)$, სადაც $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$ და თუ F , f და φ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

აქ u და v დამოუკიდებელი ცვლადებია.

მაგალითი. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ $z = \frac{x}{y}$, სადაც $x=e^t$, $y=\ln t$.

$$\triangleright. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y} e^t - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{e^t}{\ln t} - \frac{e^t}{t \cdot \ln^2 t} = \frac{e^2 (t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}. \quad \triangleleft$$

შეგალოთ ი. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial u}$ და $\frac{\partial z}{\partial v}$, თუ $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = 2v + u$.

$$\triangleright. \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot 2 = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{y}(-2) - \frac{x^2}{y^2} = -\frac{x}{y} \left(4 + \frac{x}{y} \right). \triangleleft$$

2556. იპოვეთ $\frac{dz}{dt}$, თუ

1) $z = \frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$. 2) $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

3) $z = e^{2x^2 - 2y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$. 4) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

5) $z = \operatorname{arctg}(x + y)$, $x = t^3$, $y = \cos 2t$. 6) $z = \ln(x^3 + y^3)$, $x = 2t^2$, $y = t^4$.

7) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = \operatorname{tg} \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t}$.

8) $z = 3^{4x^2 + y^2}$, $x = \cos \frac{4}{t}$, $y = \ln t$.

9) $z = \cos \frac{x + 2y}{\sqrt{xy}}$, $x = \operatorname{sh} 2t$, $y = 2t$.

10) $z = (1 + x^2)^y$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin t$.

11) $z = \operatorname{tg}(x^2 - y^2)$, $x = 2^{1 - \cos t}$, $y = \ln t$.

12) $z = \frac{x + y - 1}{\ln(x + y)}$, $x = 4 \sin^2 t$, $y = \sin^2 2t$.

13) $z = \frac{y + \cos 3x}{xy}$, $x = t^3$, $y = (t^2 + 1)^5$.

14) $z = \left(1 - \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right)^3$, $x = e^{2t}$, $y = e^{t-1}$.

15) $z = \ln(1 + xy)$, $x = \ln^3 t$, $y = 1 + \sqrt{t}$.

16) $z = \ln \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.

17) $z = \operatorname{arctg} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $x = \operatorname{tg}^2 t$, $y = t^2$.

18) $z = \left(xy + \frac{y}{x} \right)^{1/3}$, $x = \sin^2 t$, $y = t^2$.

$$19) z = e^{\arcsin(x-y)}, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{2}{t^2}.$$

$$20) z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = t \sin^2 t, \quad y = \cos t$$

$$\sqrt{2557.} \quad \text{ဝဲဝဲဝဲဝဲဝဲ} \quad \frac{dz}{dx}, \quad \text{ဝဲဝဲ}$$

$$1) z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y = x^2. \quad 2) z = x^2 + \sqrt{y} = \sin x.$$

$$\sqrt{2558.} \quad \text{ဝဲဝဲဝဲဝဲဝဲ} \quad \frac{du}{dt}, \quad \text{ဝဲဝဲ}$$

$$1) u = xyz, \quad x = t^3 + 1, \quad y = \ln t, \quad z = \operatorname{tg} t.$$

$$2) u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = H.$$

$$\sqrt{2559.} \quad \text{ဝဲဝဲဝဲဝဲဝဲ} \quad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{လဲ} \quad \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{ဝဲဝဲ}$$

$$1) z = \frac{x^2}{y}, \quad x = u - 2v, \quad y = v + 2u,$$

$$2) z = x + y^2, \quad x = u^2 + \sin v, \quad y = \ln(u + v).$$

$$3) z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad x = u \sin v, \quad y = u \cos v.$$

$$4) z = e^{x-2y}, \quad x = \sin u, \quad y = u^3 + v^2.$$

$$5) z = e^{x^2-3y^2}, \quad x = \ln(u^2 + v), \quad y = \frac{u}{v}.$$

$$6) z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x = \frac{\sin v}{u}, \quad y = \frac{u^2}{v-1}. \quad 2$$

$$7) z = x^2 + y^3, \quad x = u^2 \sin v, \quad y = \ln(u + v).$$

$$8) z = x^2 + \sqrt{2y}, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = \sin \frac{u}{v}.$$

$$9) z = x \operatorname{arctg} y, \quad x = \frac{u^3}{1+v^2}, \quad y = \frac{v^3}{1+u^2}.$$

$$10) z = x^{y^2}, \quad x = u + \frac{v}{u}, \quad y = v + \frac{u}{v}.$$

$$11) z = \ln \sin \frac{x+y}{2}, \quad x = e^{uv}, \quad y = \frac{u}{v}.$$

$$12) z = (x+y)^y, \quad x = 2^{uv}, \quad y = uv.$$

$$13) z = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}, \quad x = \cos \frac{u}{v}, \quad y = u^2.$$

$$14) z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^3, \quad x = \ln \frac{u}{v}, \quad y = \frac{u}{v}.$$

$$15) z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}, \quad x = \frac{u}{\cos v}, \quad y = \frac{v}{\sin u}.$$

$$16) z = \cos \ln(x + y), \quad x = u^2 + v, \quad y = \frac{u}{v-2}.$$

$$17) z = y^{\ln x}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = 1 + u + v.$$

$$18) z = \frac{x^2 + xy}{y^2 - xy}, \quad x = \operatorname{tg} \frac{u}{v}, \quad y = \frac{\ln u}{v}.$$

§ 4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულავი და სრული დიფერენციალავი

განსაზღვრება: $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების პირველი რი-

გის კერძო წარმოებულავს x -ით (x, y) წერტილში, თუ ისინი არსებობენ, უწოდებენ $z = f(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულავს (x, y) წერტილში და აღნიშნავენ შესაბამისად

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = z''_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y) = z''_{yx}.$$

ანალოგიურად განსაზღვრება $\frac{\partial f}{\partial x}$ და $\frac{\partial f}{\partial y}$ ფუნქციების კერძო წარმო-

ებულავი y -ით (x, y) წერტილში (თუ ისინი არსებობენ)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y) = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = z''_{yy}.$$

თუ f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულავი (ყველა ან ერთი რომელიმე) არსებობს რაიმე არეში, მაშინ შეიძლება დაისვას სა-

კიბი მესამე რიგის კერძო წარმოებულების არსებობის შესახებ და ა. შ.

საზოგადოდ, $I(x, y)$ ფუნქციის $m-1$ ($m=1, 2, \dots$) რიგის კერძო წარმოებულის კერძო წარმოებულს (დამოუკიდებელი ცვლადებიდან ნებისმიერთ) ეწოდება ამ ფუნქციის m რიგის კერძო წარმოებული.

შენიშვნა. ფუნქციის ნულგანი რიგის კერძო წარმოებულის ქვეშ ვგულისხმობთ თვით ფუნქციას.

ფუნქციის კერძო წარმოებულს, რომლის რიგი მეტია ერთზე, ეწოდება მაღალი რიგის კერძო წარმოებული.

განსაზღვრება: $z=I(x, y)$ ფუნქციის მეორე რიგის სრული დიფერენციალი ეწოდება მისი პირველი რიგის სრული დიფერენციალის დიფერენციალს და ასე აღინიშნება: $d^2z = d(dz)$. ანალოგიურად, $d^3z = d(d^2z)$ და, საზოგადოდ $d^n z = d(d^{n-1}z)$. თუ x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, მაშინ z ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი მოიძებნება

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

ფორმულით, რომელიც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება: $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$.

ანალოგიურად, $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z$ და ა. შ.

თუ $z=I(x, y)$, სადაც x და y ერთი ან რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია, მაშინ

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $I(x, y) = xy + \cos(x-y)$ ფუნქციის მეორე რიგის ყველა წარმოებული და მეორე რიგის დიფერენციალი.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y - \sin(x-y), & \frac{\partial f}{\partial y} &= x + \sin(x-y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\cos(x-y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 1 + \cos(x-y), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\cos(x-y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1 + \cos(x-y). \end{aligned}$$

$$d^2z = -\cos(x-y) dx^2 + 2(1 + \cos(x-y)) dx dy - \cos(x-y) dy^2.$$

იპოვეთ მხოლოდ რიცხვს კონსტანტის წარმოებულები:

$$* 2560. z = \ln(x^2 + y).$$

$$2561. z = x^3 - 4x^2y + 5y^2.$$

$$* 2562. z = x^2y^2 - 3xy^2 - xy.$$

$$2563. z = \frac{x^2}{1 - 2y}.$$

$$* 2564. z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x.$$

$$2565. z = \cos xy.$$

$$* 2566. z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}.$$

$$2567. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$* 2568. z = \frac{y^2}{2x + y}.$$

$$2569. z = y^x.$$

$$* 2570. z = \operatorname{arctg} \frac{x - 2y}{x + 2y}.$$

$$2571. z = 2^{\sin(xy)}.$$

$$2572. z = \ln(x^3 + y^2).$$

$$2573. z = x \ln \frac{y}{x}.$$

$$2574. z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

$$2575. z = (x - 2)^{y+1}.$$

$$2576. z = e^{x^2 + y^2}.$$

$$2577. z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^2.$$

$$2578. z = (x^2 + xy) \cos \frac{x}{y}.$$

$$2579. z = \lg \frac{x + y}{y}.$$

$$2580. u = xy + yz + zx.$$

$$2581. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}, \text{ თუ } z = \sin xy.$$

$$2582. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}, \text{ თუ } z = e^{xy^2}.$$

$$2583. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ თუ } u = x^a y^b z^c.$$

$$2584. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ თუ } u = e^{xy} \sin z.$$

$$2585. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}, \text{ თუ } u = z^2 e^{x + y^2}.$$

$$2586. z = x^y. \text{ აჩვენეთ, რომ } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$$2587. z = e^x (\cos y + x \sin y). \text{ აჩვენეთ, რომ } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$$2588. \text{ იპოვეთ } f''_{xx}(0; 0), f''_{xy}(0; 0), f''_{yy}(0; 0), \text{ თუ } f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$$

$$2589. r = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z^2. \text{ იპოვეთ } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

$$f'_{xy} = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$\frac{1}{1} z^2$$

1. თუ $f(x, y) = 0$ განტოლება, სადაც $f(x, y)$ არის x -ითა და y -ით წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს y -ს, როგორც x -ის ფუნქციას და $f'_y(x, y) \neq 0$, მაშინ ამ არაბრუნადი ფუნქციის წარმოებულნი გამოითვლება

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad (1)$$

ფორმულით. მაგალითი რიგის წარმოებულები მოიძებნება (1) ტოლობის მიმდევრობითი გაწარმოებით. ამასთან, მხედველობაში მიიღება, რომ y არის x -ის ფუნქცია.

2. ანალოგიურად, თუ $f(x, y, z) = 0$ განტოლება, სადაც $f(x, y, z)$ არის x, y, z ცვლადების მიმართ წარმოებადი ფუნქცია, განსაზღვრავს z -ს, როგორც x და y დამოუკიდებელი ცვლადების ფუნქციას და $f'_z(x, y, z) \neq 0$, მაშინ ამ არაბრუნადი ფუნქციის კერძო წარმოებულები მოიძებნება

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)} \quad (2)$$

ფორმულებით.

თუ ორი განტოლების სისტემა

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

განსაზღვრავს u -სა და v -ს, როგორც x და y ცვლადების ფუნქციებს და დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

მაშინ ამ ფუნქციების სრული დიფერენციალების მოსაძებნად საჭიროა გავაღიფერენციროთ (3) განტოლებები და მიღებული სისტემა ამოვხსნათ du -სა და dv -ს მიმართ; ამით ვიპოვოთ u და v ფუნქციების სრულ დიფერენციალებს, ხოლო dx -ისა და dy -ის კოეფიციენტები მოგვეცემს შესაბამის კერძო წარმოებულებს.

მაგალითი 1. იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$, თუ $x^2 + y^3 + e^{xy} = 0$.

◁ მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილი აღვნიშნოთ $F(x, y)$ -ით. ვიპოვოთ კერძი წარმოებულები: $F'_x(x, y) = 2x + ye^{xy}$, $F'_y(x, y) = 3y^2 + xe^{xy}$. აქედან (1) ფორმულით ვეპებულობთ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x + ye^{xy}}{3y^2 + xe^{xy}}. \triangleright$$

მაგალითი. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

◁ მოცემული განტოლების მარცხენა ნაწილი აღვნიშნოთ $F(x, y, z)$ -ით. ვიპოვოთ კერძი წარმოებულები:

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{y - 6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}.$$

2590. იპოვეთ $\frac{dy}{dx}$, თუ

- 1) $x^2 - 2xy + y^2x + x + y - 2 = 0$ 2) $x^2 + 3xy - y^2x - 2x + 3y + 5 = 0$.
 3) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. 4) $x^2 - 2xy^2 + x + 2y - 2 = 0$.
 5) $y^2x^3 + \sqrt{x^2 + 3y} - 5 = 0$. 6) $y^3x^2 - \sqrt{x + 2y} - 7 = 0$.
 7) $yx^4 + \sqrt[3]{x + 5y} - 6 = 0$. 8) $xe^y - 2xy^2 + y - 10 = 0$.
 9) $e^y - e^x + xy = 0$. 10) $e^{y-1} - e^{x^2} + xy^2 = 0$.
 11) $e^{2y} - e^{x-3} + (x-3)y = 0$. 12) $(x+1)e^{y-1} + (x-1)^3y^2 - 2 = 0$.
 13) $x \ln y + y - x^3y^2 - 2 = 0$. 14) $x^2 \ln(y-1) + y - x^3y - 4 = 0$.
 15) $x^3 \cos y^2 - x^2 \sin(y-1) + 3y - 5x + 3 = 0$. 16) $e^{4y} - e^{x-2} + (x-2)y^3 = 0$.
 17) $x^5 \lg 3y - x^3y^2 - (1-x)e^y + 1 = 0$. 18) $y^3 \ln(1+x) - e^{xy} - y + 5 = 0$.
 19) $y^2 \ln(2 - e^{xy}) - xy - e^4 + 1 = 0$. 20) $y^3x^5 + \sqrt{x^2 + 4y} - 32 = 0$.
 21) $x^2 \ln y + y - xy^3 - 2 = 0$ 22) $(x-1)y^3 - x^5 \ln y + 1 = 0$.
 23) $(x+1)^2y^5 - x^4e^y + e^2 = 0$. 24) $x^2 \cos^2 y - x \ln y + 3y - 5x - 9 = 0$.
 25) $(x-2)e^{y^2} - (x-2)^2y^3 + 2y - 6 = 0$. 26) $x^2e^{2y} - 2xy^2 + y - 10 = 0$.
 27) $e^{2y} - e^{2x} + 4xy = 0$. 28) $e^{2y-1} - e^{4x^2} + 8xy^2 = 0$.
 29) $xe^{2y} - 8xy^2 + 2y - 10 = 0$. 30) $(x+1)e^{2y-1} + (x-3)^3y^2 - 4 = 0$.

2591. იპოვეთ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, თუ

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

2) $x^2 - 2y^2 + 3xz^3 - yz + y = 0$.

3) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.

4) $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$.

5) $e^z - x^3 y^2 z = 0$.

6) $\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

§ 6. ზედაპირის მხები სიბრტყე და ნორმალი

თუ ზედაპირის განტოლება მოცემულია $F(x, y, z) = 0$ სახით, სადაც $F(x, y, z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $M(x, y, z)$ წერტილში, მაშინ ზედაპირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებებია:

$$F'_x(X-x) + F'_y(Y-y) + F'_z(Z-z) = 0, \quad \frac{X-x}{F'_x} = \frac{Y-y}{F'_y} = \frac{Z-z}{F'_z},$$

სადაც X, Y, Z მხები სიბრტყის ან ნორმალის მიმდინარე კოორდინატებია.

თუ ზედაპირის რომელიმე წერტილზე $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, მაშინ ამ წერტილზე (განსაკუთრებული წერტილი) ზედაპირს არ ექნება არც მხები სიბრტყე და არც ნორმალი.

† 2592. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 2; 3)$ წერტილში.

2593. იპოვეთ $z = x^2 + y^2$ ელიფსური პარაბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 1; 3)$ წერტილში.

† 2594. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ კონუსის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(4; 3; 4)$ წერტილში.

2595. იპოვეთ $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ ელიფსოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები იმ წერტილში, სადაც $x=2, y=1, z>0$.

† 2596. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილში.

2597. იპოვეთ $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ ზედაპირის მხები სიბრტყისა და ნორმალის განტოლებები $M(1; 2; -1)$ წერტილში.

† 2598. იპოვეთ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x + 4y + 6z = 0$ სიბრტყის პარალელურია.

2599. იპოვეთ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც $x + y - z = 0$ სიბრტყის პარალელურია.

† 2600. დაწერეთ $x^2 + y^2 = z^2$ ზედაპირის ნორმალის განტოლება $M(3; 4; 5)$ წერტილში. ზედაპირის რომელ წერტილში არ არის ნორმალი განსაზღვრული?

2601. იპოვეთ $2z = x^2 - y^2$ ზედაპირის $M(2; 2; 0)$ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

† 2602. იპოვეთ $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ ზედაპირის მხები სიბრტყე $M(2; 2; 2)$ წერტილში.

2603. იპოვეთ $z = xy$ ზედაპირის მხები სიბრტყე, რომელიც

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

წრფის მართობულია.

† 2604. დამტკიცეთ, რომ $xyz = a^3$ ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო სიბრტყეებთან შედგენილი ტეტრაედრის მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. იპოვეთ ეს მოცულობა.

2605. დამტკიცეთ, რომ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ზედაპირის ყოველ წერტილზე გავლებული მხები სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე მოკვეთილი მონაკვეთების ჯამი არის მუდმივი a სიდიდე.

† 2606. რა კუთხით იკვეთება $x^2 + y^2 = R^2$ ცილინდრი და $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ სფერო $M\left(\frac{R}{2}; \frac{R\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ წერტილში?

2607. აჩვენეთ, რომ $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $z^2 + 2x^2 = c$ ($z^2 + 2y^2$) ზედაპირები ერთოვონალურია.

§ 7. ბიელინის ფორმულა ორი ცვლადის ფუნქციისათვის

თუ $z = f(x, y)$ ფუნქციას a, b წერტილის მიდამოში აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $(n+1)$ რიგამდე (ჟეანასკნელის ჩათვლით), მაშინ ამ წერტილის მიდამოში მართებულა ტეილორის შემდეგი ფორმულა:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] + \\ &+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1) \end{aligned}$$

სადაც

$$x + y = a + b, \quad x - y = c, \quad x = \frac{a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a+b-c}{2}.$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(a+b) + \Theta(x-a, b) + \Theta(y-b), \quad (0 < \Theta < 1).$$

სხვა აღნიშვნებით:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \frac{1}{1!} [h f'_x(x, y) + k f'_y(x, y)] + \frac{1}{2!} [h^2 f''_{xx}(x, y) + \\ &+ 2hk f''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \dots + \frac{1}{n!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x + \Theta h, y + \Theta k). \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ფორმულის კერძო შემთხვევებს, როცა $a=b=0$, ეწოდება მაკლორენის ფორმულა.

2608. დაშალეთ $f(x+h, y+k)$ ფუნქცია h -ისა და k -ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$.

2609. დაშალეთ $f(x+h, y+k)$ ფუნქცია h -ისა და k -ს მთელ და დადებით ხარისხებად, თუ $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

2610. დაშალეთ $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(-2; 1)$ წერტილის მიდამოში.

2611. დაშალეთ $f(x, y) = e^{x+y}$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით $(1; -1)$ წერტილის მიდამოში მე-3 ხარისხის წევრებამდე (უკანასკნელის ჩათვლით).

2612. დაშალეთ $f(x, y) = e^x \sin y$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

2613. დაშალეთ $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ ფუნქცია მე-3 ხარისხის წევრებამდე მაკლორენის ფორმულით.

§ 8. ორი ცვლადის უწყვეტი აქსიომატი

$f(x, y)$ ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი), თუ M_0 წერტილის საკმარის მცირე მიდამოს ყოველი $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ წერტილისათვის შესრულებულია $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ უტოლობა (ან შესაბამისად $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

$f(x, y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობებია:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0. \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} - 1 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

იმ (x_0, y_0) წერტილს, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებათა სისტემას, სტაციონარული წერტილი ეწოდება. ზოგად შემთხვევაში $f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის (x_0, y_0) წერტილში კერძო წარმოებულები ან ნულის ტოლია, ან არ არსებობს. ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ასეთია:

აღვნიშნოთ $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, სადაც (x_0, y_0) სტაციონარული წერტილია; თუ:

$$1) \Delta > 0, \text{ მაშინ } \begin{cases} f(x_0, y_0) = z_{\max}, & \text{როცა } A < 0, \\ f(x_0, y_0) = z_{\min}, & \text{როცა } A > 0. \end{cases} \quad \times -$$

2) $\Delta < 0$, არა გვაქვს ექსტრემუმი;

3) $\Delta = 0$, მაშინ გვაქვს საექვო შემთხვევა. რომელიც დამატებით შესწავლას მოითხოვს.

მაგალითი. იპოვეთ ექსტრემუმი ფუნქციისა: $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

▷, ვიპოვოთ პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} (y^2 - 4) = 0 \\ 2(x-1) = 0 \\ 2(y-2) = 0 \end{cases}$$

ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (1; 2). მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის სტაციონარული წერტილია (1; 2). ვიპოვოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 > 0 \text{ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ } M \text{ წერტილში ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, ვინაიდან}$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(1; 2)} = 2 > 0, \text{ ამიტომ } M(1; 2) \text{ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია. } z_{\min} = -1. \quad \triangleleft$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმები:

† 2614. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$,

2615. $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$.

2616. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2617. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 2$

2618. $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

2619. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

† 2620. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

2621. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 27$.

† 2622. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2623. $z = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2624. $z = (x-1)^2 + y^2$. 2625. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
 2626. $z = (x-2)^2 + 4y^2$. 2627. $z = xy^2(1-x-y), (x>0, y>0)$
 2628. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. 2629. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
 2630. $z = x^2y^2(b-x-y), (x>0, y>0)$. 2631. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
 2632. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. 2633. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
 2634. $z = x^3 + y^3 + 3xy$. 2635. $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$
 2636. $z = x^2 + 3xy - 17x - 12y$. 2637. $z = (2x^2 + y^2) e^{-(x^3 + y^2)}$.
 2638. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 2$. 2639. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.
 2640. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 10$. 2641. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
 2642. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 27$. 2643. $z = (x-2)^2 + 8(y-3)^2$.
 2644. $z = e^{x/2}(x + y^2)$. 2645. $z = x^4 + y^3 - 2x$.
 2646. $z = e^x(2x + y^2)$. 2647. $z = x^3 + y^3 + 9xy + 27$.
 2648. $z = 4x^2 + 2xy + y^2 - 4x + y$. 2649. $z = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}$.
 2650. $z = 4x^3y^2(6 - x - 2y)$. 2651. $z = x^3 - 3x + y^2$.
 2652. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$. 2653. $z = 3xy - x^3 - y^3$.
 2654. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$. 2655. $z = e^{x/2}(x + y^2)$.
 2656. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$.
 2657. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y), \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right)$.
 2658. $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$. 2659. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

პირობითი ექსტრემუმი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $z = f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი იმ პირობით, რომ $\varphi(x, y) = 0$, საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y),$$

სადაც λ უცნობი მამრავლია, და მოვძებნოთ ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი ექსტრემუმი. ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა დაიყვანება სამი განტოლების სისტემაზე:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

საიდანაც განისაზღვრება x , y და λ , ხოლო საკმარისი პირობაა

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

ამასთან, როცა $\Delta > 0$, მაშინ M_0 არის პირობითი მინიმუმის წერტილი, ხოლო, თუ $\Delta < 0$, მაშინ M_0 პირობითი მაქსიმუმის წერტილია.

მაგალითი. იპოვეთ $z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leq 1$ წრეში.

თავდაპირველად ვიპოვოთ z ფუნქციის სტაციონარული წერტილები წრის შიგნით. $z'_x = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $z'_y = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$.

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad x = y = \frac{1}{2}.$$

ამგვარად, z ფუნქციის აქვს ერთი სტაციონარული წერტილი $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = 0, \quad D(x, y) = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

მაშასადამე,

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0, \quad z''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0,$$

ამიტომ M_0 არის z ფუნქციის მინიმუმის წერტილი. რადგანაც z ფუნქციას არ აქვს სხვა სტაციონარული წერტილი, ამიტომ

$$\min_{x^2 + y^2 \leq 1} z = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0.$$

უდიდესი მნიშვნელობის მოსაძებნად ვიპოვოთ z ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმი L წრეწირზე, რომლის განტოლებაა $x^2 + y^2 - 1 = 0$. ამისათვის შევადგინოთ და ამოვხსნათ (1) სისტემა

$$F(x, y, \lambda) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$F'_x = 2(1 - \lambda)x - 1, \quad F'_y = 2(1 + \lambda)y - 1, \quad F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x = \frac{1}{2}, \\ (1 + \lambda)y = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

ამოხსნით რა მოცემულ სისტემას, მივიღებთ $x_0 = y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. მაშასადამე, z ფუნქციას L წრეწირზე აქვს ორი სტაციონარული წერტილი $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ და $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A წერტილი შეესაბამება $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ მნიშვნელობას, ხოლო B წერტილი შეესაბამება $\lambda = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ მნიშვნელობას. ვამოვიკვლიოთ ეს წერტილები.

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 1, \quad \varphi'_x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$\varphi'_y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2};$$

$$F(x, y, \lambda) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1),$$

$$F''_{xx}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$F''_{xy}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

$$F''_{yy}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} < 0.$$

მაშასადამე, A არის z ფუნქციის პირობითი მაქსიმუმის წერტილი წრის L საზღვარზე (წრეწირზე):

$$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

B წერტილში z ფუნქციას აქვს პირობითი მინიმუმი, რომელიც ტოლია $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$, რადგან $\Delta_B = 4\sqrt{2} > 0$. ამგვარად, z ფუნქციას უღივლესი მნიშვნელობა აქვს A წერტილში, რომელიც ტოლია $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$ -ის.

იპოვეთ პირობითი ექსტრემუმი შემდეგი ფუნქციებისა:

2660. $z = xy, x + y = 1.$ 2661. $z = x^2 + y^2, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4.$

2662. $z = \cos^2 x + \cos^2 y, y - x = \frac{\pi}{4}.$ 2663. $z = x + 2y, x^2 + y^2 = 5.$

2664. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x + y = 2.$ 2665. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}.$

2666. $z = \exp\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), x + y = 2.$ 2667. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

2668. $z = 6 - 4x - 3y, x^2 + y^2 = 1.$ 2669. $z = x^2 + y^2, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$

2670. იპოვეთ $z = 1 + x + 2y$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ არეში.

2671. იპოვეთ $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$ წრფეებით შემოსაზღვრულ მართკუთხედში.

2672. იპოვეთ $z = x^2 y (2 - x - y)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x = 0, y = 0, x + y = 6$ წრფეებით შემოსაზღვრულ სამკუთხედში.

2673. იპოვეთ $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ არეში.

2674. იპოვეთ $z = x^2 - y^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leq 4$ წრეში.

2675. იპოვეთ $z = x + y$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $x^2 + y^2 \leq 1$ წრეში.

2676. დადებითი a რიცხვი დაშაღეთ სამ ისეთ დადებით შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი.

XII თავი

დიფერენციული განტოლებები

§ 1 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

თუ ეს განტოლება შეიძლება ამოხსნას y' -ის მიმართ, მაშინ

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

სადაც $f(x, y)$ მოცემული ფუნქციაა. (2) სახის დიფერენციალური განტოლება შეიძლება ჩაწეროთ ფორმით:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (3)$$

სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ მოცემული ფუნქციებია.

$y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c)$ ფუნქციას, რომელიც ერთ ნებისმიერ c მუდმივს შეიცავს და c -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. როცა დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაწერილია არაცხადი $\Phi(x, y, c) = 0$ სახით, მაშინ მას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ეწოდება $y = \varphi(x, c_0)$ ამონახსნს. რომელიც მიიღება ზოგადი $y = \varphi(x, c)$ ამონახსნიდან ნებისმიერ c მუდმივის კერძო $c = c_0$ მნიშვნელობისათვის; $\Phi(x, y, c_0) = 0$ დამოკიდებულებას კერძო ინტეგრალი ეწოდება.

იგ $\alpha = f(x, y)$ მიმართულებათა ერთობლიობას ეწოდება (2) განტოლების მიმართულებათა ველი. $f(x, y) = k$ წირებს, რომელთა წერტილებშიც ველის დახრლობას აქვს მუდმივი k -ს ტოლი მნიშვნელობა, ეწოდება იზოკლინებს.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $y = Cx^3$ ფუნქცია წარმოადგენს $xy' - 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

◀. $y = Cx^3$ ფუნქციის გაწარმოებით ვლებულობთ $y' = 3Cx^2$. შევითვინოთ y -ისა და y' -ის მნიშვნელობები $xy' - 3y = 0$ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$3Cx^3 - 3Cx^3 = 0.$$

მაშასადამე, $y = Cx^3$ წარმოადგენს $xy' - 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს. მიღებული ზოგადი ამონახსნისაგან გამოყოთ ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(1) = 1$ საწყის პირობას. გვექნება: $1 = C$. მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნი იქნება: $y = x^3$.

მაგალითი 2. შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება $x^2 + y^2 = 2ax$ წირთა ოჯახისათვის.

გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ 2x + 2yy' = 2a. \end{cases}$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ $a = x + yy'$. თუ a -ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ სისტემის პირველ განტოლებაში, გვექნება:

$$x^2 + y^2 = 2x(x + yy') \text{ ანუ } y^2 - x^2 = 2xyy'.$$

ეს არის საძიებელი დიფერენციალური განტოლება.

აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$2677. y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}, \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$2678. y = \frac{c^2 - x^2}{2x}, \quad x + y + x \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$2679. x^2 - xy + y^2 = c^2, \quad (x - 2y)y' = 2x - y.$$

$$2680. y = x + ce^y, \quad (x - y + 1)y' = 1.$$

$$2681. y = c_1x + c_2x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$$

$$2682. y = c_1x + \frac{c_2}{x} + c_3, \quad y''' + \frac{3}{x}y'' = 0.$$

შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლებები წირთა მოცემული ოჯახებისათვის:

$$2683. y = ax.$$

$$2684. x^2 + y^2 = a^2.$$

$$2685. y^2 = 2px.$$

$$2686. y = ax + a^2.$$

$$2687. y = ae^{x/a}.$$

$$2688. \ln \frac{x}{y} = 1 + ay.$$

$$2689. y = c_1(x - c_2)^2.$$

$$2690. y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}.$$

§ 2. განსაზღვრადკვლადიანი დიფერენციალური განტოლება

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განცალგებულ ცვლად-ბიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C,$$

ხოლო

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y) dy = 0$$

ვანტოლებს ეწოდება განცალკევად ცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ინტეგრალია

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = c.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $yy' + x = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ის კერძო ინტეგრალი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(1) = \sqrt{3}$ საწყის პირობას.

$$\triangleright. ydy + xdx = 0,$$

$$\int ydy + \int xdx = C,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C.$$

$x^2 + y^2 = c^2$. C -ს ნებისმიერობის გამო $2c$ შევცვალოთ c^2 -ით. მივიღეთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. ეს არის კონცენტრირებულ წრეწირთა ოჯახი, რომელთა ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია. თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობას, მივიღებთ: $1+3=C^2$, $C^2=4$. მაშასადამე, საძიებელი კერძო ინტეგრალია $x^2 + y^2 = 4$.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია იპოვეთ ის კერძო ინტეგრალები, რომლებიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს:

• 2691. $y' = 3x^2 - 2x + 1$; $x = 1$, $y = 2$.

• 2692. $xy' - y = 0$; $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

• 2693. $y' = 1/y$; $x = -2$, $y = 4$. • 2694. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$.

• 2695. $(1+y^2)dx + xydy = 0$. • 2696. $xyy' = 1 - x^2$.

• 2697. $y' \lg x = y$. • 2698. $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$.

• 2699. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

• 2700. $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$. • 2701. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$.

• 2702. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$. • 2703. $ye^{2x}dx + (1+e^{2x})dy = 0$.

• 2704. $y' = \cos(x+y)$. 2705. $y' = \frac{1}{2x+y}$.

2706. $y' = 10^{x+y}$.

2707. $y' = e^{x+y}$.

2708. $xy' + 2y = xyy'$.

2709. $y' = (x-y)^2 + 1$.

2710. $y' = \sin(x-y)$.

2711. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

2712. $(t^2 - x t^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + x^2 t = 0$.

2713. $z dt - (t^2 - a^2) dz = 0$.

2714. $r^2 dr + (r-a) d\varphi = 0$.

2715. $\sec^2 \Theta \operatorname{tg} \varphi d\varphi + \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \Theta d\Theta = 0$.

2716. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$.

2717. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$

2718. $y' \sin x = y \ln y; x = \frac{\pi}{2}, y = 1$.

2719. $(1 + e^x) yy' = e^x; x = 1, y = 1$.

2720. $y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x; x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2}$.

§ 3 ერთგვაროვანი განტოლება

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი მიყვანა შეიძლება $y' = P\left(\frac{y}{x}\right) + N(x, y) dx + N(x, y) dy$ სახეზე, სადაც $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ერთდროივე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია, ე. ი. არსებობს ისეთი $k \in \mathbb{Z}$, რომ $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ და $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ ყოველი $t \neq 0$ -თვის. $\frac{y}{x} = u$ ჩასმით პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება განცალკევალად განტოლებად.

მაგალითი. ამოვსსნათ განტოლება

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

▷. დავუშვათ $\frac{y}{x} = u$ ანუ $y = ux$, მაშინ $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$.
თუ მოცემულ განტოლებაში გავითვალისწინებთ აღნიშნულად ჩასმას, მივიღებთ:

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u.$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა-განცალგებებს, მივიღებთ განცალგებულ ცვლადებიან შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x + \ln C,$$

$$\ln u - 1 = Cx.$$

თუ დაუვბრუნდებით y ფუნქციას, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს

$$\ln \frac{y}{x} = 1 + Cx,$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

- 2721. $(y - x) y dx + x^2 dy = 0$. 2722. $(x - y) dx + x dy = 0$.
 • 2723. $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$. 2724. $y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$.
 • 2725. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$. 2726. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$.
 • 2727. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$. 2728. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.
 • 2729. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$. 2730. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$.
 • 2731. $y' = \frac{x - y}{x + y}$. 2732. $yy' = 2y - x$.
 • 2733. $(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$; $y(2) = 1$.
 2734. $xy dy - (x^2 + y^2) dx = 0$; $y(-1) = 0$.
 2735. $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$; $y(1) = 0$.
 2736. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$; $y(-1) = 1$.
 2737. $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$; $y(1) = 1$.
 2738. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0$; $y(1) = 0$.

§ 4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

დიფერენციალურ

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

განტოლებას, სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენს x -ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს. ეწოდება პირველი რიგის წრფივი

დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = e^{-\int P dx} \left(c + \int Q e^{\int P dx} dx \right)$$

ფორმულით.

მაგალითი. ამოვხსნათ: $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$ განტოლება,

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \operatorname{tg} x dx} \left(C + \int \cos x e^{-\int \operatorname{tg} x dx} dx \right) = \\ &= e^{-\ln |\cos x|} \left(C + \int \cos^2 x dx \right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \left(C + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right). \end{aligned}$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2739. $y' - \frac{y}{x} = x.$

2740. $y' + y = e^{-x}.$

2741. $(1 + x^2) y' - xy = x + x^3.$ 2742. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$

2743. $y' - \frac{ny}{x} = e^x x^n.$ 2744. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$

2745. $y' + 2xy = x e^{-x^2}.$ 2746. $y' + 2y = e^{3x}.$

2747. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$ 2748. $(1+y^2) dx = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} y - x) dy.$

2749. $xy' + y = x + 1; y(2) = 3.$ 2750. $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1; y(1) = 0.$

2751. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; y(0) = 0.$ 2752. $y' + y \cos x = \sin x \cos x;$
 $y(0) = 1.$

2753. $xy' + 2y = 3x; y(-2) = 0.$ 2754. $(1-x^2)y' + xy = 1; y(0) = 1.$

§ 5. ბერნულის განტოლება

ბერნულის განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

სადაც $n \neq 0$ და $n \neq 1$; $z = y^{1-n}$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე.

მაგალითი. ამოვხსნათ $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} y^2$ განტოლება. $y' y^{-2} - y^{-2} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $y^{-2} = z$, მაშინ $-2y^{-3} y' = z'$.

გვექნება:

$$z' + 2z \operatorname{ctg} x = -\frac{2}{\sin x}$$

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{y'}{y^3} = \frac{z'}{z^2}$$

$$z = e^{-2 \int \operatorname{ctg} x dx} \left(C - 2 \int \frac{1}{\sin x} e^{2 \int \operatorname{ctg} x dx} dx \right) = \frac{1}{\sin^2 x} \left(C - 2 \int \sin x dx \right) = \frac{C + 2 \cos x}{\sin^2 x}$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ y ფუნქციას, მივიღებთ:

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{C + 2 \cos x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{C + 2 \cos x}}$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2755. $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$.

2756. $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = -x^3 y^2$.

2757. $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x \sqrt{y}$.

2758. $n y^{n-1} \frac{dy}{dx} + y^n = x$.

2759. $\frac{dy}{dx} - \frac{\sin x}{3} y = -y^4 \sin x$.

2760. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^2$.

2761. $(1-x^2) y' - xy = xy^2$; $y(0) = 0,5$.

2762. $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{2(x^2-1)} y = \frac{x}{2y}$; $y(0) = 1$.

2763. $3y' = (1-3y) y \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

§ 6. მანძილზე სრულ დიფერენციალებში

პირველი რიგის

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ

მისი მარცხენა ნაწილი რაიმე $u(x, y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალია:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du.$$

ე. ი.

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1)$$

ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2)$$

ამ შემთხვევაში $u(x, y) = c$ არის მოცემული განტოლების ზოგადი ინტეგრალი. $u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს (1) განტოლებათა სისტემიდან.

$u(x, y)$ ფუნქცია შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი ვითი: $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$

ტოლობა ვაინტეგრირებთ x ცვლადით ფიქსირებული y -თვის. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი მუდმივი შეიძლება დამოკიდებული იყოს y -ზე. გვექნება:

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (3)$$

შემდეგ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y), \quad (4)$$

ტოლობიდან ნაპოვნ $\varphi(y)$ ფუნქციას შევიტანთ რა (3)-ში, მივიღებთ $u(x, y)$ ფუნქციას.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ $(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ განტოლება. შევამოწმოთ (2) პირობა, გვექნება:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y) = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2y) = 1.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

ვაინტეგრირებთ x -ით ტოლობა

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2x + y,$$

შეექნება:

$$u(x, y) = \int (2x + y) dx + \varphi(y) = x^2 + yx + \varphi(y), \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

შე-(4) ტოლობის კათეგორიისწინებით მივიღებთ:

$$x + \varphi'(y) = x + 2y,$$

ე. ი.

$$\varphi'(y) = 2y, \quad \varphi(y) = y^2 + C_1.$$

შეშასადამე,

$$u(x, y) = x^2 + xy + y^2,$$

სადაც C_1 ნულს ტოლია მიღებული. მოცემული განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$x^2 + xy + y^2 = C \quad \Delta$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2764. $(7x + 3y) dx + (3x - 5y) dy = 0.$
2765. $(3x^2y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3) dy = 0.$
2766. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$
2767. $e^y dx + (x e^y - 2y) dy = 0.$
2768. $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$
2769. $(x \cos 2y + 1) dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$
2770. $y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0.$
2771. $\frac{x}{(x+y)^2} dx - \frac{2x+y}{(x+y)^2} dy = 0.$
2772. $\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = 0; \quad x=1, \quad y=1.$
2773. $(x + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0; \quad x=0, \quad y=2.$

იპოვეთ $u(x, y)$ ფუნქცია, თუ:

2774. $du = 4(x^3 - xy^2) dx + 4(y^3 - x^2y) dy.$
2775. $du = (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy.$

$$2776. du = (x + \ln y) dx + \left(\frac{x}{y} + \sin y \right) dy.$$

$$2777. du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

§ 7. მაინტეგრირებადი მამრავლი

თუ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ განტოლებაში $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ და აჩვენებს ისეთი $\mu(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ $\mu(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება მაინტეგრირებელი მამრავლი.

მაინტეგრირებელი მამრავლი ადვილად მოიძებნება შემდეგ შემთხვევებში:

1) როცა $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \Phi(x)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi(x) dx}$;

2) როცა $-\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \Phi_1(y)$, მაშინ $\mu = e^{\int \Phi_1(y) dy}$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2778. $(2 + 2x - y^2) dx - 2y dy = 0$. 2779. $(\sin x + e^y) dx + \cos x dy = 0$.

2780. $(x^2 - y) dx + (x^2 y^2 + x) dy = 0$.

2781. $(x \sin y + y) dx + (x^2 \cos y + x \ln x) dy = 0$.

2782. $2xy^3 dx + (x^2 y^2 - 1) dy = 0$. 2783. $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$.

2784. $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$. 2785. $(y \operatorname{tg} x + \cos x) dx - dy = 0$.

§ 8. პირველი რიგის არაწრფივი განტოლებები

თუ $F(x, y, y') = 0$ დიფერენციალური განტოლება არ არის პირველი ხარისხის y' წარმოებულის მიმართ, მაშინ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია ასეთი განტოლების ინტეგრირება.

1. განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას, ე. ი. $F(x, y') = 0$.

ა) თუ ეს განტოლება ამოხსნება y' -ის მიმართ, მივიღებთ $y' =$

$$= \varphi(x), \text{ საიდანაც } y = \int \varphi(x) dx + C;$$

ბ) თუ განტოლება ამოხსნება x -ის მიმართ, მაშინ $x=f(y')$ და $x=f(p)$, $y=\int p f'(p) dp + C$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

~~2786. $xy' = \sqrt{1+y^2}$.~~

2787. $x^3 + y'^2 = x^2$.

2788. $x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$.

2789. $x = \sin y' + \ln y'$.

2790. $x = ay' + by'^2$.

2791. $e^{y'} + y' = x$.

2. მოცემული განტოლება ცხადად არ შეიცავს x ცვლადს

$$F(y, y') = 0.$$

ა) თუ ეს განტოლება ამოხსნება y' -ის მიმართ, ე. ი. $y'=\varphi(y)$, მაშინ $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + c$ იქნება ზოგადი ამონახსნი;

ბ) თუ განტოლება ამოხსნება y -ის მიმართ, მაშინ $y=f(y')$ და $x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C$, $y=f(p)$ განტოლებათა სისტემა, სადაც $p=y'$, წარმოადგენს მოცემული განტოლების პარამეტრული სახის ზოგად ამონახსნს.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2792. $e^{y'}(y'+1) = 1$.

2793. $y'^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$.

2794. $y = y'^2 + y'^3$.

2795. $y = y'^2 + 2 \ln y'$.

2796. $y = y' \ln y'$.

2797. $y = e^{y'} \cdot y'^2$.

განსაზღვრეთ y' და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2798. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

2799. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

2800. $y'^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$.

2801. $y'^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0$.

§ 9. განსაკუთრებული წერტილები და ამონახსნები

1. განსაკუთრებული წერტილები. $y'=f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების განსაკუთრებული წერტილები უნდა ვეძებოთ $f(x, y)$

ფუნქციის წყვეტის წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, სადაც არ არსებობს $\frac{df}{dy}$ კერძო წარმოებული.

იპოვეთ შემდეგი განტოლებების განსაკუთრებული წერტილები:

2802. 1) $y' = \frac{2y}{x}$; 2) $y' = \frac{y}{x}$. 2803. $y' = -\frac{x}{y}$.

2804. $y' = -\frac{y}{x}$. 2805. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2. განსაკუთრებული ამონახსნები. $F(x, y, y') = 0$ განტოლებას, ზოგადი $\Phi(x, y, C) = 0$ ინტეგრალისა და კერძო ინტეგრალის გარდა, შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებული ინტეგრალი, რომელიც არ მიიღება ზოგადი ინტეგრალიდან მუდმივის არაერთარი კერძო მნიშვნელობისათვის.

განსაკუთრებული ამონახსნი გეომეტრიულად $\Phi(x, y, C) = 0$ წირთა ოჯახის მომვლეობა. ის მიიღება C -ს გამორიცხვით

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან, ან კიდევ $p = y'$ -ის გამორიცხვით

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0$$

განტოლებათა სისტემიდან.

იპოვეთ ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

2806. $y'^2 = 4(y - 1)$. 2807. $9yy'^2 - 4 = 0$.

2808. $y^2(1 + y'^2) = a^2$. 2809. $y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$.

2810. იპოვეთ $y'^2 + y^2 = 1$ განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$ წერტილზე

2811. იპოვეთ $y'^2 + y = 1$ განტოლების ორი ინტეგრალური წირი, რომლებიც გადის $M\left(1; \frac{3}{4}\right)$ წერტილზე.

§ 10. ლაგრანჟისა და კლეროს განოლომეზაი

1. ლაგრანჟის განტოლება. ლაგრანჟის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

სადაც $\varphi(y')$ და $\psi(y')$ წარმოადგენს y' წარმოებულის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს, რომელთაგან $\varphi(y') \neq y' \cdot y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება დაიყვანება წრფივ განტოლებად.

2. კლეროს განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = xy' + \psi(y').$$

$y = Cx + \psi(C)$ წარმოადგენს კლეროს განტოლების ზოგად ამონახსნს;

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0 \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან p -ს გამორიცხვა გვაძლევს კლეროს განტოლების განსაკუთრებულ ამონახსნს.

ამოხსენით ლაგრანჟის განტოლებები:

• 2812. $y = 2xy' - y'^2$.

2813. $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$.

2814. $y = x(1 + y') + y'^2$.

2815. $y = 2xy' + \sin y'$.

2816. $y = xy'^2 + y'^2$.

2817. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

იპოვეთ კლეროს განტოლების ზოგადი და განსაკუთრებული ამონახსნები:

• 2818. $y = xy' + y'^2$.

2819. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

2820. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

2821. $y = xy' + \frac{1}{2y'^2}$.

2822. $y = xy' + y' - y'^2$.

2823. $y = xy' + y' + e^{y'}$.

§ 11. ორთოგონალური და ორთოგონალური ტრანსკორივივი.
ვპოლვენებაი

თუ მოცემულია წირთა ოჯახი

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

სადაც a პარამეტრია, მაშინ ისეთ წირთა ოჯახს, რომლის ყოველი წირი მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს ერთი და იმავე α კუთხით, ეწოდება მოცემული ოჯახის ორთოგონალური ტრანსკორივივი.

კერძოდ, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, მივიღებთ ორთოგონალურ

ტრანსკორივივს.

თუ $\Phi(x, y, y') = 0$ არის (1) ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ორთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისად არის:

$$\Phi\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \quad \Phi\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \quad (k = \operatorname{tg} \alpha).$$

ექვთათ, მოცემულია რომელიმე წირის ევოლუტის განტოლება

$$y_c = f(x_c)$$

და საძიებელია თვით წირი, ე. ი. ევოლვენტა. თუ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x_c)}, \quad \frac{y - f(x_c)}{x - x_c} = f'(x_c)$$

განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხავთ x_c პარამეტრს, მივიღებთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას. მისი ზოგადი ამონახსნი მოგვცემს ევოლვენტების ოჯახს.

იპოვეთ ორთოგონალური ტრაექტორიები შემდეგ წირთა ოჯახისა:

2824. $y^2 = ax.$

2825. $xy = a,$

2826. $x^2 + y^2 = a^2.$

2827. $ay^2 = x^2.$

2828. $x^2 + 2y^2 = a^2.$

2829. $x^2 + y^2 + 2ay = 0.$ —

2830. იპოვეთ $\frac{x^2}{1+a} + \frac{y^2}{a} = 1$ კონფოკალური ელიფსების ორ-

თოგონალური ტრაექტორიები ($a > 0$, ფოკუსები მოთავსებულია $F(\pm 1; 0)$ წერტილებში).

2831. იპოვეთ ისეთი ელიფსების ორთოგონალური ტრაექტორიები, რომლებსაც საერთო აქვთ დიდი ღერძი ($2a$ -ს ტოლი).

2832. იპოვეთ $r = 2a \sin \varphi$ ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

2833. იპოვეთ $r = a(1 + \cos \varphi)$ კარდიოიდების ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.

2834. იპოვეთ $y = Cx$ წრფეთა ოჯახის იზოგონალური ტრაექტორიები, რომლებიც მოცემული ოჯახის წირებს გადაკვეთს α კუთხით, სადაც $\operatorname{tg} \alpha = k$.

2835. იპოვეთ წირები, რომლებიც $r = ae^{\varphi}$ ლოგარითმული ხეივების ოჯახის წირებს კვეთს $\alpha = \frac{\pi}{4}$ კუთხით.

2836. იპოვეთ $4y_c^2 - 27x_c^2 = 0$ წირის ევოლვენტა.

2837. იპოვეთ $y_c = \frac{x_c^2}{2h}$ წირის ევოლვენტა, სადაც h მუდმივია.

2838. იპოვეთ $x_c^2 + y_c^2 = a^2$ წრეწირის ევოლვენტა.

2839. იპოვეთ $8(x_c - 1)^3 - 28y_c^2 = 0$, წირის ევოლვენტა.

§ 12. ანოტანეაჲ პირველი რიგის ღიჯანეციალურ
განტოლუებათა შედგენაჲ

2840. იპოვეთ წირი, რომლის მხების სიგრძე შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორის ტოლია.

2841. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა უდრის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის ჯამს.

2842. იპოვეთ წირი, რომლის მხებქვეშა არის შეხების წერტილის აბსცისისა და ორდინატის საშუალო არითმეტიკული.

2843. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის აბსცისათა ღერძზე ჩამოჭრის $\frac{y^2}{x}$ სიდიდის მონაკვეთს.

2844. იპოვეთ წირი, რომლის ნორმალის მიერ Ox ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a -ს ტოლია.

2845. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფარდობა შეხების წერტილის რადიუს-ვექტორთან a -ს ტოლია.

2846. იპოვეთ წირი, რომლის მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, მუდმივი a სიდიდეა.

2847. იპოვეთ წირი, რომლის ნებისმიერ წერტილზე გავლებული ნორმალის მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთი უდრის ამ წერტილის რადიუს-ვექტორს.

2848. იპოვეთ წირი, თუ მხებქვეშას და ნორმალქვეშას ნახევარსხვაობა უდრის შეხების წერტილის აბსცისას.

2849. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის $M_0(3; 2)$ წერტილზე და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: 1) მისი მხების მონაკვეთი, მოთავსებული საკოორდინატო ღერძებს შორის, შეხების წერტილით შუაზე იყოფა; 2) მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის სიგრძე ორჯერ აღემატება შეხების წერტილის ორდინატს.

2850. იპოვეთ წირი, თუ მისი მხების მიერ Oy ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთია $a \sec \varphi$, სადაც φ არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და Ox ღერძს შორის.

2851. იპოვეთ წირი, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე. თუ მისი ნორმალის მონაკვეთის შუაწერტილი მოთავსებულია $y^2 = ax$ პარაბოლაზე.

2852. იპოვეთ წირი, თუ ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსასწორებულია საკოორდინატო ღერძებით, საძიებელი წირის მხებითა და შეხების წერტილის ორდინატით, უდრის a^2 -ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(a; a)$ წერტილზე.

2853. იპოვეთ წირი, თუ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოსასწორებულია წირის ნებისმიერი $M(x, y)$ წერტილის OM რადიუსით, ამ წერტილზე გავლებული მხებითა და Ox ღერძით, უდრის 2-ს. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(2; -2)$ წერტილზე.

2854. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: თუ წირის ნებისმიერ $M(x, y)$ წერტილზე გავვლებთ კოორდინატთა ღერძების პარალელურ წრფეებს ამ ღერძების გადაკვეთამდე, მაშინ მიღებული მართკუთხედი გაიყოფა ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთის ფართობი (Ox ღერძთან მიმდებარე ნაწილის) ორჯერ მეტი იქნება მეორეზე. გამოყავით ის წირი, რომელიც გადის $M_0(2; 4)$ წერტილზე.

2855. იპოვეთ წირი, რომელიც შემდეგი თვისებით ხასიათდება: მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსასწორებულია წირის ნებისმიერი რკალით, ორი ორდინატითა და Ox ღერძით, ამ რკალის სიგრძის პროპორციულია. გამოყავით წირი, რომელიც გადის $M_0(0; a)$ წერტილზე.

2856. რეზერვუარში მოთავსებულია 100 ლ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს 10 კგ გახსნილ მარილს. ყოველ წუთში რეზერვუარიდან გამოდის 2 ლ მარილხსნარი და ჩადის 3 ლ სუფთა წყალი, ამასთან, არევის საშუალებით კონცენტრაცია თანაბარი რჩება მთელ რეზერვუარში. რამდენი მარილი დარჩება რეზერვუარში 1 საათის შემდეგ?

2857. ჭურჭელი, რომლის მოცულობა a ლიტრია, ავსებულია მარილხსნარით. დროის ყოველ მომენტში, ჭურჭელში ჩადის x ლიტრი წყალი და გამოდის ამდენივე ხსნარი. განსაზღვრეთ, რა კანონის მიხედვით იცვლება მარილის რაოდენობა ჭურჭელში.

2858. განსაზღვრეთ, რა დროის განმავლობაში დაიცლება წყლით სავსე კონუსური ჭურჭელი, რომლის სიმაღლე 10 სმ-ია, ხოლო კუთხე წვეროსთან $\alpha = 60^\circ$. კონუსის ძირში ვაკეთებულია ხვრელი, რომლის ფართობიც უდრის $0,5$ სმ²-ს.

2859. D დიამეტრისა და H სიმაღლის მქონე წრიული ცილინდრული ჭურჭელი ავსებულია წყლით. ვაივით, რა დროის შემდეგ დაიცლება ჭურჭელი მის ძირში ვაკეთებული ხვრელის საშუალებით, თუ ხვრეტილის დიამეტრია a ($D=1$ მ, $H=1,5$ მ, $a=0,05$ მ).

1. $F(x, y^{(n)}) = 0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს უცნობ y ფუნქციასა და მის წარმოებულებს $(n-1)$ რიგამდე. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

ა) როცა განტოლება ამოიხსნება $y^{(n)}$ -ის მიმართ, მაშინ $y^{(n)} = f(x)$. მისი ზოგადი ამონახსნია

$$y = \int \overbrace{dx}^{n\text{-ჯერ}} \dots \int f(x) dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n.$$

ბ) როცა განტოლება ამოიხსნება x -ის მიმართ, გვექნება $x = \varphi(y^{(n)})$. აღვნიშნოთ $y^{(n)} = p$, მაშინ $x = \varphi(p)$, ხოლო $y^{(n-1)} = \int p\varphi'(p) dp + C_1$. აქედან $(n-1)$ -ჯერ მიმდევრობითი ინტეგრება მოგვცემს $y = f(p, C_1, C_2, \dots, C_n)$. ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით იქნება:

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $y'' = \sin x + x$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი და ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ საწყის პირობებს.

◁. ერთხელ ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1, \quad (1)$$

განმეორებითი ინტეგრება გვაძლევს ზოგად ამონახსნს:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2. \quad (2)$$

საძიებელი კერძო ამონახსნის საპოვნელად (1) და (2) გამოსახულებებში შევიტანოთ $x=0$, $y=0$ და $y'=0$ მნიშვნელობები. მივიღებთ:

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1 \\ 1 = C_2 \end{cases} \quad \text{ე. ი. } C_1 = 1, \quad C_2 = 1.$$

მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნი ექნება სახე:

$$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + x + 1. \quad \triangleleft$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

• 2860. $y'' - x = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

2861. $y'' - 4 \cos 2x = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2862. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \sqrt{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,

• 2863. $y''' = \frac{6}{x^3}$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

2864. $y''' = e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

2865. $y''' = e^{2x+1}$.

2866. $y''' = \sin x - \cos x$.

2867. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

2868. $y''' = \ln x$.

2869. $y''^2 - 3y'' + 2 = 0$.

2870. $x = y'^3 + 1$.

• 2871. $x = e^{y''} + y'$.

2. $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ სახის განტოლება. ეს განტოლება ცხადად არ შეიცავს y ფუნქციას. ამ შემთხვევაში $y' = p$ ჩასმით განტოლების რიგი ერთი ერთეულით დაიწევს:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

ასევე $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ განტოლებაში $y^{(k)} = p$ ჩასმით განტოლების რიგი k ერთეულით დაიწევს:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

ბოლოს, თუ მოცემულია $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ განტოლება, მაშინ $y^{(n-1)} = p$ ჩასმით მიიღება პირველი რიგის განტოლება

$$F(x, p, p') = 0.$$

მაგალითი. ვიპოვოთ $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$ განტოლების ის კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) =$

$$= \frac{1}{2}, \quad y''(1) = -1.$$

◁. დაუშვათ $y'' = p$, მაშინ $y''' = \frac{dp}{dx}$ და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^4 \frac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1 \quad \text{ანუ} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^4}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი განტოლება, რომლის ზოგადი ამონახსნია $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობას $y'(1) =$

$$= p(1) = -1, \text{ მივიღებთ } C_1 = 0, \text{ მაშასადამე, } y' = -\frac{1}{x^3}, \text{ საიდანაც}$$

$$y' = \frac{1}{2x^2} + C_2, \quad y'(1) = \frac{1}{2} \text{ საწყისი პირობის ძალით მივიღებთ}$$

$$C_2 = 0. \text{ ამიტომ } y' = \frac{1}{2x^2}. \text{ კიდევ ერთხელ ინტეგრება მოგვცემს:}$$

$$y = -\frac{1}{2x} + C_3, \text{ ხოლო } y(1) = \frac{1}{2} \text{ საწყისი პირობის ძალით მივი-}$$

$$\text{ღებთ } C_3 = 1, \text{ მაშასადამე, საძიებელი კერძო ამონახსნია } y = 1 - \frac{1}{2x}. \quad \triangleleft$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

$$2872. \quad xy'' + y' = x^2.$$

$$2873. \quad x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

$$2874. \quad x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$2875. \quad y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$2876. \quad y''(x^2 + 1) = 2xy';$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$2877. \quad xy'' + xy'^2 - y' = 0;$$

$$y(2) = 2, \quad y'(2) = 1.$$

$$2878. \quad xy''' + y'' = 3x + 1.$$

$$2879. \quad x^2 y''' = y''^2.$$

3. $F(y, y', y'') = 0$ სახის განტოლება. $y' = p$ ჩასმით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $yy'' + y + y'^2 = 0$.

▷. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y' = p$, მაშინ $y'' = p \frac{dp}{dy}$. მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$yp \frac{dp}{dy} + y - p^2 = 0, \text{ ანუ } p \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} p^2 = -1.$$

მივიღეთ ბერნულის განტოლება p -ს მიმართ. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$p^2 = z, \quad 2p \frac{dp}{dy} = z'.$$

$$\frac{z'}{2} - \frac{1}{y} z = -1,$$

$$z' - \frac{2}{y} z = -2,$$

$$z = e^{\int \frac{2dy}{y}} \left(C_1 + \int \left(-2e^{-2 \int \frac{dp}{dy}} dy \right) dy \right) = y^2 \left(C_1 + \frac{2}{y} \right), \text{ ვ. ი.}$$

$$p^2 = C_1 y^2 + 2y; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y^2 + 2y}.$$

ცვლადთა განცალგების შემდეგ ინტეგრება მოგვცემს:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 2y}} + C_2.$$

მაშასადამე, მოცემულ განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება სახე:

$$x = \ln \left| \sqrt{C_1 y + \frac{1}{C_1}} + \sqrt{C_1 y^2 + 2y} \right| + C_2. \quad \triangleright.$$

იპოვეთ ზოგადი და კერძო ამონახსნები (იქ, სადაც მოცემულია საწყისი პირობები) შემდეგი განტოლებებისა:

$$2880. \quad yy'' + y'^2 = 0.$$

$$2881. \quad yy'' - y^2 y' - y'^2 = 0.$$

$$2882. \quad (y-1)y'' - 2y'^2 = 0.$$

$$2883. \quad 2yy'' + y'^2 + y^4 = 0.$$

$$2884. \quad 2yy'' - y'^2 = 0; \quad y(-1) = 4, \quad y'(-1) = 1.$$

$$2885. \quad yy'' + y'^2 = 1; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

§ 11. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

1. ერთგვაროვანი განტოლება. n -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ ის პირველი ხარისხისა უცნობი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მიმართ. ამ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

სადაც $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x); f(x)$ არის x -ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე შუალედში, ხოლო y უცნობი ფუნქცია.

იმ შემთხვევაში, როცა $f(x) = 0$, განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუკი $f(x) \neq 0$, მაშინ განტოლება არაერთგვაროვანია.

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი (ვრონსკიანი) ეწოდება დეტერმინანტს:

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

y_1, y_2, \dots, y_n ფუნქციებს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი C_1, C_2, \dots, C_n მუდმივები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ყოველი x -ისათვის აღნიშნულ შუალედში მართებულია ტოლობა:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0;$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

თუ $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია $[a, b]$ შუალედში, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია ამ შუალედის ყოველ წერტილში. თუ რომელიმე ერთ $x_0 \in [a, b]$ წერტილში მაინც $W(x_0) \neq 0$, მაშინ მოცემული ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ამ შუალედში.

წრფივი ერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \quad (2)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3)$$

სადაც y_1, y_2, \dots, y_n (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენია (ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა), ხოლო C_1, C_2, \dots, C_n — ნებისმიერი მუდმივები.

კერძოდ, მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \quad (4)$$

დიფერენციალური განტოლების ორ y_1 და y_2 ამონახსნი იქნება წრფივად დამოკიდებული რაიმე შუალედში, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი λ რიცხვი, რომ

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{ანუ} \quad y_1 = \lambda y_2.$$

თუკი ფარდობა $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$, მაშინ აღნიშნული ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია.

თუ ცნობილია (4) განტოლების კერძო ამონახსნი y_1 , მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

სადაც

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

მაგალითი. გამოვიკვლიოთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემა:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, \dots, y_{n+1} = x^n.$$

▷. $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{n+1} x^n = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს n -ზე მეტი ფესვი. თუ C_1, C_2, \dots, C_{n+1} რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ე. ი. განხილულ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერ შუალედში. ◁

მაგალითი. ვახევნოთ, რომ ფუნქციათა სისტემა $x, \cos x, \sin x$ წრფივად დამოკიდებულია.

◁.

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = x.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

◁. აღვიღოთ დავრწმუნდებით, რომ ამ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $y_1 = x$ და $y_2 = x^2 - 1$. ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნებია

$$y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1) \quad \triangleright.$$

გამოვიკვლიოთ წრფივად დამოკიდებულია თუ არა შემდეგ ფუნქციათა სისტემები:

2886. $y_1 = x, y_2 = x + 1.$

2887. $y_1 = e^{ax} \sin bx, y_2 = e^{ax} \cos bx.$

2888. $y_1 = x, y_2 = x + 1, y_3 = x + 2.$

2889. $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 1.$

2890. $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3.$

2891. $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}.$

2892. $y_1 = x, y_2 = \ln x,$

2893. $y_1 = \sin 2x, y_2 = \sin x \cos x.$

2894. $y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x},$

2895. $y_1 = x, y_2 = 2x, y_3 = x^2.$

2896. $y_1 = e^x, y_2 = x e^x, y_3 = x^2 e^x.$

2897. $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin 2x.$

2898. $y_1 = \operatorname{ch} x, y_2 = \operatorname{sh} x.$

2899. $y_1 = e^x, y_2 = e^{x+1},$

2900. $y_1 = x, y_2 = 0, y_3 = e^x.$

2901. $y_1 = 1, y_2 = \sin x, y_3 = \cos 2x.$

შეადგინეთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, თუ ცნობილია მისი ფუნდამენტური ამონახსნი:

2902. $y_1 = x, y_2 = x^2$.

2903. $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$.

2904. $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x$.

2905. $y_1 = e^x, y_2 = x e^x$.

2906. $y_1 = x^2$ და $y_2 = x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=1$, $y'=0$.

2907. $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$ ფუნქციები წარმოადგენს მესამე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. იპოვეთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: როცა $x=1$, მაშინ $y=0, y'=-1, y''=2$.

მაგალითი. ვიპოვოთ $x^2 y'' + x y' - y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსენი, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსენი $y_1 = x$.

Δ დაუშვათ, $y = zx$. ვიპოვოთ $y' = z'x + z, y'' = z''x + 2z'$ და შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$z''x + 3z' = 0.$$

თუ დაუშვებთ, რომ $z' = u, z'' = u'$, მივიღებთ:

$$u'x + 3u = 0.$$

საიდანაც

$$u = \frac{C_2}{x^3},$$

ამრიგად,

$$z = -\frac{C_2}{2x^2} + C_1,$$

მაშასადამე,

$$y = x \left(-\frac{C_2}{2x^2} + C_1 \right) = -\frac{C_2}{2x} + C_1 x.$$

როგორც ზოგადი ამონახსნიდან ჩანს, მეორე კერძო ამონახსნი ყოფილა

$$y_2 = -\frac{1}{2x}.$$

ამოხსენით განტოლებები, თუ ცნობილია მათი თითო კერძო ამონახსნი:

$$2908. y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0; \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}.$$

$$2909. y'' + \frac{4}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0; \quad y_1 = x.$$

$$2910. x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x.$$

$$2911. y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x) y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0; \quad y_1 = \sin x.$$

$$2912. y'' \sin^2 x - 2y = 0; \quad y_1 = \operatorname{ctg} x.$$

$$2913. x(1-x^2) y'' = 2y; \quad y_1 = \frac{x}{1-x}.$$

2. არაერთგვაროვანი განტოლება. წრფივი არაერთგვაროვანი

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \bar{y} + y_0$$

ფორმულით, სადაც \bar{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

თუ ცნობილია ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა y_1, y_2, \dots, y_n , მაშინ შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n$$

ფორმულით, სადაც $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ ფუნქციები განისაზღვრება შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან (ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის ანუ ლაგრანჟის მეთოდი):

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \dots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \dots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$x^2 y'' + xy' - y = 1.$$

(1)

განტოლების ზოგადი ამონახსენია, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსენია $y_1 = x$.

◀. შინა მავალითა მივღებთ, რომ (1)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad (2)$$

განტოლების მეორე კერძო ამონახსენია $y_2 = -\frac{1}{2x}$,

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = -\frac{1}{2x}$ მე-(2) განტოლების ამონახსენია ფუნდამენტალური სისტემა. მე-(2) განტოლების ზოგადი ამონახსენია:

$$\bar{y} = C_1 x + C_2 \left(-\frac{1}{2x} \right).$$

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსენი ვეძებთ სახით:

$$y = C_1(x) \cdot x + C_2(x) \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right).$$

$C_1(x)$ და $C_2(x)$ -ის მოსაძებნად შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot x + C_2'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) = 0, \\ C_1'(x) \cdot (x)' + C_2'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right)' = \frac{1}{x^2}, \end{cases}$$

საიდანაც

$$C_1'(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad C_2'(x) = 1.$$

ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2x} + C_1,$$

$$C_2(x) = x + C_2.$$

მაშასადამე,

$$y = \left(-\frac{1}{2x} + C_1 \right) x + (x + C_2) \left(-\frac{1}{2x} \right),$$

ე. ი.

$$y = C_1 x + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) - 1. \quad \Delta$$

1. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (1)$$

სადაც a_1 და a_2 მუდმივებია.

თუ y_1 და y_2 ფუნქციები (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ არის ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოვხსნათ მახასიათებელი განტოლება:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (2)$$

ადგილი აქვს შემდეგ სამ შემთხვევას:

I. მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია, ე. ი. $k_1 \neq k_2$, მაშინ (1) განტოლებს ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს წერადი ფესვები: $k_1 = k_2$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს კომპლექსური ფესვები $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax}.$$

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $y'' - 7y' + 12y = 0$.

△. შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$k^2 - 7k + 12 = 0, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 4.$$

მაშასადამე, ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \quad \triangleleft$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' + 4y = 0.$$

△. მახასიათებელი განტოლება იქნება

$$k^2 + 4 = 0, \quad k = \pm 2i.$$

ზოგად ამონახსნის ექნება სახე:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

ამოხსენით განტოლებები:

2914. $y'' - y' - 2y = 0.$

2915. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

2916. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2917. $y'' - 9y = 0.$

2918. $y'' - y' = 0.$

2919. $y'' + 3y' = 0.$

2920. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

2921. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 0.$

2922. $y'' - 5y' + 4y = 0;$

$y(0) = 5, y'(0) = 8.$

2923. $8y'' + 2y' - 3y = 0;$

$y(0) = -6, y'(0) = 7.$

2924. $y'' + 2y' + y = 0.$

2925. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

2926. $16y'' - 24y' + 9y = 0.$

2927. $16y'' + 8y' + y = 0.$

2928. $y'' + 4y' + 4y = 0;$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{1}{2}\right) = -4.$

2929. $y'' - 6y' + 9y = 0;$

$y(0) = 0, y'(0) = 2.$

2930. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

2931. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

2932. $y'' + y' + y = 0.$

2933. $y'' + 4y' + 8y = 0.$

2934. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$

2935. $y'' + y = 0.$

2936. $y'' + 4y = 0;$

$y(0) = 0, y'(0) = 2.$

2937. $y'' + 2y' + 2y = 0;$

$y(0) = 1, y'(0) = 1.$

2. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება $y = \bar{y} + y_0$ ფორმულით, სადაც \bar{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

კერძო ამონახსნი მოიძებნება მულტიპლიკაციის მეთოდით. ზოგ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი მოიძებნება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდით.

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

1. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილი m -ური ხარისხის მრავალწევრია: $f(x) = P_m(x)$. აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) მახასიათებელ განტოლებას არა აქვს ნულოვანი ფესვები. ამ შემთხვევაში კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $y_0 = Q_m(x)$ მრავალწევრის სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, რომლის კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) მახასიათებელ განტოლებას აქვს l ჯერადობის ნულოვანი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $y_0 = x^l Q_m(x)$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ აგრეთვე m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ამოვხსნათ განტოლება

$$y'' - 3y' + 2y = x - 2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta. \quad y &= \bar{y} + y_0, \\ y'' - 3y' + 2y &= 0, \\ k^2 - 3k + 2 &= 0, \\ k_1 &= 1; \quad k_2 = 2, \\ \bar{y} &= C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

(1)-ის კერძო ამონახსენი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax + B, \\ y_0' &= A, \quad y_0'' = 0. \end{aligned}$$

A და B -ს საპოვნელად შევიტანოთ (1)-ში y_0 , y_0' და y_0'' შესაბამისად y , y' -სა და y'' -ის ნაცვლად. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} -3A + 2Ax + 2B &= x - 2, \\ 2Ax + (2B - 3A) &= x - 2. \end{aligned}$$

კოეფიციენტთა გატოლების წესის თანახმად გვექნება:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 3A = -2. \end{cases}$$
$$A = \frac{1}{2}; \quad B = -\frac{1}{4},$$

მაშასადამე,

$$y_0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

ამრიგად, (1) განტოლების ზოგადი ამონახსენი იქნება:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}. \triangleleft$$

ამოხსენით განტოლებები:

2938. $y'' - 4y' + 4y = x^2$. 2939. $y'' - y = x^2 - x + 1$.

2940. $3y'' - 2y' - y = x^2 + 1$, 2941. $y'' + y' + y = 3x - 2$.

2942. $y'' + y' = 3$. 2943. $y'' - 3y' = 2 - 6x$.

2944. $y'' - 2y' = x^2 - 1$. 2945. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

II. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = P_m(x) e^{ax},$$

სადაც $P_m(x)$ არის m -ური ხარისხის მოცემული მრავალწევრი, ხოლო a მუდმივია. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) a არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = Q_m(x) e^{ax}$ სახით, სადაც $Q_m(x)$ არის m -ური ხარისხის უცნობკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი, მისი უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა შედარების ხერხით;

2) a არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი ($l=1$ ან $l=2$), მაშინ კერძო ამონახსნი უნდა ვეძებოთ $V = x^l Q_m(x) e^{ax}$ სახით.

ამოხსენით განტოლებები:

2946. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$. 2947. $y'' + y = 4e^x$.

2948. $y'' - 2y' - y = 6xe^x$. 2949. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.

2950. $y'' - 2y' + y = e^x$. 2951. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

III. არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = e^{bx} [P_p(x) \cos bx + Q_q(x) \sin bx],$$

სადაც $P_p(x)$ და $Q_q(x)$ შესაბამისად p და q ხარისხების მოცემუ-

ლი მრავალწევრებია, ხოლო a და b — ნამდვილი რიცხვები. მივიღოთ, რომ $p \geq q$. აქ განიხილება ორი შემთხვევა:

1) $a \pm ib$ არ არის მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ კერძო ამონახსენი უნდა ვეძებოთ

$$y_0 = e^{ax} [M_p(x) \cos bx + N_p(x) \sin bx]$$

სახით, სადაც $M_p(x)$ და $N_p(x)$ უცნობკოეფიციენტებიანი p ხარისხის მრავალწევრებია;

2) $a \pm ib$ არის მახასიათებელი განტოლების l ჯერადი ფესვი (მეორე რიგის განტოლებისათვის $l=1$), მაშინ

$$y_0 = x^l e^{ax} [M_p(x) \cos bx + N_p(x) \sin bx].$$

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება:

$$y' + 9y = \cos 3x.$$

$$\triangleleft. y = \bar{y} + y_0,$$

$$y'' + 9y = 0,$$

$$k^2 + 9 = 0,$$

$$k = \pm 3i,$$

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x,$$

ვინაიდან, $\pm 3i$ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია, ამიტომ y_0 უნდა ვეძებოთ სახით:

$$y_0 = (A \cos 3x + B \sin 3x) x.$$

$$y_0' = A \cos 3x + B \sin 3x - 3Ax \sin 3x + 3Bx \cos 3x,$$

$$y_0'' = 6B \cos 3x - 6A \sin 3x - 9Ax \cos 3x - 9B \sin 3x,$$

$$- 6A \sin 3x + 6B \cos 3x - 9Ax \cos 3x - 9Bx \sin 3x +$$

$$+ 9Ax \cos 3x + 9Bx \sin 3x = \cos 3x;$$

$$\begin{cases} -6A = 0 \\ 6B = 1 \end{cases}, \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{6}.$$

მაშასადამე,

$$y_0 = \frac{1}{6} x \sin 3x.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{6} \sin 3x. \triangleleft$$

ამოხსენით განტოლებები:

- 2952. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. 2953. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.
 2954. $y'' + y = 10 e^x \sin 2x$. 2955. $y'' + 4y = 5 \sin 3x - 10 \cos 3x$.
 • 2956. $y'' + y = \cos x$. 2957. $y'' + 4y = \sin 2x$.

თუ მოცემულია

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x),$$

განტოლება და V_1, V_2, \dots, V_n კერძო ამონახსნები

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$\dots$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_n(x)$$

განტოლებებისა, მაშინ $y_0 = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ ჯამი იქნება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2958. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$. 2959. $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.

2960. $y'' - y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$. 2961. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

2962. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$;

2963. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$; $y(0) = 0, y'(0) = 0$;

2964. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x$. $y(0) = 2, y'(0) = 2$;

2965. $y'' + y = -\sin 2x$; $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 1$;

როდესაც $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ერთ-ერთი ზემოთ აღნიშნული სახე, საჭიროა მივიპოვოთ ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2966. $y'' + y = \operatorname{tg} x$. 2967. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

2968. $y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$. 2969. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

2970. იპოვეთ $y'' - y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x$ წრფეს $(0; 0)$ წერტილში.

2971. იპოვეთ $y'' + 2y' + 2y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x + 1$ წრფეს (0; 1) წერტილში.

2972. იპოვეთ $y'' - 4y' + 3y = 0$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც ეხება $y = x + 2$ წრფეს (0; 2) წერტილში.

2973. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w = -\frac{5}{4}s - v$, როცა $t = 0$, მაშინ $s = 0$ და $v = 2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

2974. მოცემულია წრფივი მოძრაობა $w = -4s + 2 \cos 2t$, როცა $t = 0$, მაშინ $s = 0$ და $v = 2$. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება.

2975. მატერიალური m წერტილი თავისუფლად ვარდება სიმაღლის h დალის ვაკუუმში. იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, თუ პაერის წინააღმდეგობას მხედველობაში არ მივიღებთ. საწყისი $t = 0$ მომენტში წერტილის სიჩქარეა v_0 , ათელის ადგილიდან მისი დაშორება კი y_0 .

2976. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ვარდება 10 მ სიმაღლიდან $v_0 = 0$ საწყისი სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ დაეარდება სხეული მიწაზე?

2977. იპოვეთ იმ სხეულის მოძრაობის განტოლება, რომელიც ასროლილია ზემოთ $v_0 = 1$ მ/წმ სიჩქარით. რამდენი წამის შემდეგ მიაწევს სხეული უმაღლეს მდებარეობას?

§ 16. n-ური რიგის ვადავიკოვანი განტოლება წარმოვიღოთ დიფერენციალური განტოლება

1. ერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

სადაც a_1, a_2, \dots, a_n მუდმივებია.

თუ y_1, y_2, \dots, y_n (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი კერძო ამონახსნებია, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_n ნებისმიერი მუდმივებია. კერძო ამონახსნების მოსაძებნად წინასწარ უნდა ამოიხსნას მახასიათებელი განტოლება:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3)$$

ადგილი აქვს შემდეგ შემთხვევებს:

I. მახასიათებელი განტოლების k_1, k_2, \dots, k_n ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

II. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ნამდვილი ჯერადი ფესვები; ვთქვათ, k_1 არის p ჯერადობის ფესვი ($p < n$, ე. ი. $k_1 = k_2 = \dots = k_p$), ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}) e^{k_1 x} + C_{p+1} e^{k_{p+1} x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

III. მახასიათებელ განტოლებას აქვს მარტივი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ, $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, ხოლო დანარჩენი ფესვები მარტივი და ნამდვილია, მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) e^{ax} + C_3 e^{k_3 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

IV. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი კომპლექსური ფესვები; ვთქვათ $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$ არის მახასიათებელი განტოლების p ჯერადობის ფესვები ($2p < n$), ხოლო დანარჩენი ფესვები ნამდვილი და მარტივია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y = e^{ax} (A_1 + A_2 x + \dots + A_p x^{p-1}) \cos bx + e^{ax} (B_1 + B_2 x + \dots + B_p x^{p-1}) \sin bx + C_{2p+1} e^{k_{2p+1} x} + C_n e^{k_n x}.$$

მაგალითი.

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

2978. $y''' - 5y'' + 6y' = 0.$ 2979. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

2980. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$ 2981. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

2982. $y''' - 13y'' - 12y = 0.$ 2983. $y''' - y' = 0.$

2984. $y^{IV} - 5y' + 4y = 0.$ 2985. $y^V - 10y''' + 9y' = 0.$

2986. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$ 2987. $y''' - 3y'' + 4y = 0.$

2988. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$. 2989. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
 2990. $y^{IV} + 3y''' + y'' = 0$. 2991. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.
~~2992. $y''' - 8y = 0$ 2993. $y''' + y = 0$~~
 2994. $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$. 2995. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.
 2996. $y^{IV} - 16y = 0$. 2997. $y^{IV} + y' = 0$.
 2998. $y^{IV} + 4y = 0$. 2999. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.
 3000. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$. 3001. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.
 3002. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$. 3003. $y^{IV} + 6y'' + 9y = 0$.
 3004. $y^V + 8y''' + 16y' = 0$. 3005. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

იპოვეთ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობებს:

3006. $y''' + y' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.
 3007. $y''' - y' = 0$; $y(2) = 1$; $y'(2) = 0$; $y''(2) = 0$.
 3008. $y^{IV} - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$.
 3009. $y^V - y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 2$.

2. არაერთგვაროვანი განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

მისი ზოგადი ამონახსნი მოიძებნება

$$y = \bar{y} + y_0$$

ფორმულით, სადაც \bar{y} არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ხოლო y_0 — მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნი.

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:

3010. $y''' - y = x^3 - 1$. 3011. $y''' - y'' = -3x + 1$.
 3012. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. 3013. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^2$.
 3014. $y''' + y'' + y' + y = xe^x$. 3015. $y''' - 3y'' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}$.
 3016. $y''' - 2y'' + y' = e^x$. 3017. $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}$.
 3018. $y^{IV} + 4y = \sin 2x$. 3019. $y^{IV} + y''' = \cos 4x$.

$$3020. y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x. \quad 3021. y^{IV} - y = xe^x + \cos x.$$

$$3022. y''' + y' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$$

$$3023. y''' + y'' = x^2.$$

$$3024. y''' - y' = 3(2 - x^2); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1.$$

$$3025. y''' + 2y'' + 2y' + y = x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

ლაგრანჟის მეთოდით.

§ 17. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება
ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით

თუ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შეუძლებელია ან დიდ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული, მაშინ მისი ამონახსნი ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n. \quad (1)$$

განუსაზღვრელი $C_n (n=0, 1, 2, \dots)$ კოეფიციენტების მოსაძებნად საჭიროა (1) მწკრივი შევიტანოთ სათანადო დიფერენციალურ განტოლებაში და მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილში ერთმანეთს გავუტოლოთ $(x - x_0)$ ორწევრის ერთნაირ ხარისხებთან მდგომი კოეფიციენტები.

ამოხსენით განტოლებები:

$$3026. y' = x + y; \quad y(0) = 1.$$

$$3027. y' = y + x^2; \quad y(0) = -2.$$

$$3028. y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = 1 \quad (\text{პირველი ოთხი წევრი})$$

$$3029. y'' = 2xy' + 4y; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$3030. y'' - xy = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$3031. y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ აგრეთვე ტეილორის ან მაკლორენის მწკრივის საშუალებით:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{ან} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ამოხსენით განტოლებები:

3032. $y' = y^3 - x$; $y(0) = 1$.

3033. $y' = x^2 y^2 - 1$; $y(0) = 1$.

3034. $y' = e^y + xy$; $y(0) = 0$.

3035. $y' = x^2 - y^2$; $y(0) = 1$ (პირველი ორი წევრი)

3036. $y'' = yy' - x^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3037. $y'' = e^y + x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

§ 18. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

ეტყვათ, მოცემულია პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{array} \right. \quad (1)$$

სადაც x არგუმენტია, y_1, y_2, \dots, y_n — უცნობი ფუნქციები, f_1, f_2, \dots, f_n კი x, y_1, y_2, \dots, y_n -ის მოცემული უწყვეტი ფუნქციები რაიმე არეში. n -ს ეწოდება მოცემული სისტემის რიგი.

(1) სისტემას, რომლის განტოლებათა მარცხენა ნაწილებში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებია, ხოლო მარჯვენა ნაწილები წარმოებულებს არ შეიცავენ, ეწოდება ნორმალური სისტემა.

(1) სისტემა შეიძლება ჩავწეროთ სიმეტრიული ფორმით:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} \quad (2)$$

ზოგიერთი ნორმალური სისტემის ინტეგრება ადვილად ხერხდება მოცემული n განტოლებისაგან შემდგარი სისტემის ერთი n -ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე დაყვანით. ამისათვის საჭიროა სისტემის ერთი განტოლება მიმდევრობით გავაწარმოოთ და გამოვრიცხოთ ყველა უცნობი ფუნქცია, გარდა ერთისა. მიღებული განტოლების ინტეგრებით ლეზულობენ მოცემული სისტემის ზოგად ამონახსნს.

$$3038. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y, \end{cases}$$

$$3039. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + a^2 z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + b^2 y = 0. \end{cases}$$

$$3040. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$$

$$3041. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 7y - z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$3042. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{3}{2} t^2, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y + 4t + 1. \end{cases}$$

$$3043. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = \cos t, \\ 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t. \end{cases}$$

$$3044. \begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}; \end{cases} \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 1.$$

$$3045. \begin{cases} y' = \frac{y^2}{z}, \\ z' = y; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

$$3046. \begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z''(0) = 0.$$

$$3047. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases} \quad 3048. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = x. \end{cases}$$

$$3049. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \quad 3050. \begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z, \\ z' = x - z. \end{cases} \quad 3051. \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + z, \\ z' = x + z - 4t. \end{cases}$$

ზოგ შემთხვევაში საჭიროა მოცემული სისტემა ჩაწეროს სიმეტრიული ფორმით და ინტეგრება შეეასრულოს ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით.

ამოხსენით სისტემები:

$$3052. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$3053. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{xy}$$

$$3054. 1) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\frac{1}{2}}$$

$$2) \frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}$$

$$3055. \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

$$3056. \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$$

$$3057. \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

დაიყვანეთ ნორმალურ სისტემამდე მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები:

$$3058. \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

$$3059. y'' = -\frac{y'}{x} - y.$$

$$3060. y''' = y.$$

$$3061. y^{IV} = -x^2y.$$

ამოხსენით მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემები:

$$3062. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -6y - 3z. \end{cases}$$

$$3063. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - z, \\ \frac{dz}{dx} = 10y - 4z. \end{cases}$$

$$3064. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z; \end{cases}$$

$$y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$$

$$3065. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 2z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z; \end{cases}$$

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

$$3066. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$3067. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x}. \end{cases}$$

ცდომილების დაგროვების შემცირების მიზნით იყენებენ y_1, y_2, \dots, y_n მნიშვნელობათა გადათვლის შემდეგ წესს. x_1 წერტილზე, ეილერის მეთოდით პოულობენ y_1 მნიშვნელობას. ამავე წერტილზე $y(x)$ ფუნქციის უკეთეს მიახლოებით მნიშვნელობად დებულობენ გამოსახულებას

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_0, y_1)}{2} h.$$

$y_1^{(1)}$ მნიშვნელობა შეიძლება კიდევ უფრო დაეახუსტოთ შემდეგი გამოსახულებით:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h$$

და საერთოდ

$$y_1^{(i)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(i-1)})}{2} h.$$

ანალოგიურად მიიღება x_2, x_3, \dots, x_n წერტილებზე $y(x)$ ფუნქციის დახუსტებული მნიშვნელობები.

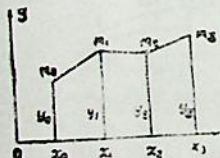
y_i -ის ყოველი დახუსტებული მნიშვნელობების მისაღებად გადათვლის ეს პროცესი მაშინ უნდა შევწყვიტოთ, როცა ორ მომდევნო მიახლოებაში მძიმის შემდეგ ერთმანეთს დაემთხვევა ათწილად ნიშანთა საჭირო რაოდენობა.

თუ y_i -ს მნიშვნელობაში სამი-ოთხი გადათვლის შემდეგ ერთმანეთს არ დაემთხვა ათწილადი ნიშანთა საჭირო რაოდენობა, უნდა შევამციროთ ცხრილის h ბიჯი.

ამგვარად მიიღება მოცემულ დიფერენციალური განტოლების იმ ამონახსნის მნიშვნელობათა ცხრილი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობას აკმაყოფილებს.

ამ მეთოდს ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდი ეწოდება. $[x_0, x]$ სეგმენტის დაყოფის $x_0, x_1, \dots, x_n = X$ წერტილებზე ავავთო y_0, y_1, \dots, y_n

ორდინატები და მიღებული $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ წერტილები შევეერთოთ ტეხილი (ნახ. 23). ამ ტეხილს ეილერის ტეხილი ეწოდება.



ნახ. 23

იგი მიასლოებით იძლევა დიფერენციალური განტოლების იმ ინტეგრალურ წივს, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის.

თუ

$$|f(x, y)| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M_3, \quad \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| \leq M_4,$$

მაშინ მეთოდის ცდომილების შეფასებისათვის გვაქვს შემდეგი უტოლობა:

$$|y_n - y(x_n)| \leq \frac{h^2}{12} \left[\frac{M_4}{L} + 3(M_2 + M_1 M_3) \right] \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2} hL}{1 - \frac{1}{2} hL} \right)^n - 1 \right],$$

სადაც L ლიფშიცის მუდმივაა.

როგორც ვხედავთ, ამ მეთოდს ნაშთითი წევრი მეორე რიგისაა h -ის მიმართ.

ii. რუნგე-კუტას მეთოდი

პირველ პარაგრაფში დასმული კოშის ამოცანის ამონახსნის რიცხვითი მნიშვნელობები წერტილებში $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$ შეიძლება გამოთვლილ იქნეს, რუნგე-კუტას შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

სადაც $\Delta y_i = \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$. ამ ფორმულის ნაშთითი წევრი მეოთხე რიგისაა h -ის მიმართ.

აქ

$$K_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$K_2 = hf \left(x_i + h/2, y_i + \frac{K_1}{2} \right),$$

$$K_3 = hf \left(x_i + h/2, y_i + \frac{K_2}{2} \right),$$

$$K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3), \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

ხოლო

$$h = \frac{x - x_0}{n}.$$

რუნგე-კუტას მეთოდის ცდომილების შეფასება დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ პრაქტიკული გამოთვლების დროს ყოველ x_i წერტილზე y_i მნიშვნელობას ითვლიან h და $h/2$ ბიჯით. თუ მიღებული მნიშვნელობები თანხვედრიან ერთმანეთს ციფრთა სასურველი რაოდენობით, მაშინ $h/2$ ბიჯი სწორადაა შერჩეული აღებული ეტაპზე.

ასევე შეირჩევა ბიჯი. დიფერენციალური განტოლების სხვა მეთოდით ამოხსნის დროსაც.

4. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნა რუნგე-კუტას მეთოდით

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამი განტოლებისაგან შემდგარი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, y_3); \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, y_3); \\ y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (4)$$

საწყისი პირობებით $y_1(x_0) = y_{1,0}$, $y_2(x_0) = y_{2,0}$, $y_3(x_0) = y_{3,0}$.

აღნიშნოთ $y_i(x_k) = y_{i,k}$, $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, 3$. საძიებელი ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს რუნგე-კუტას შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} y_{1k} &= y_{1, k-1} + \Delta y_{1, k-1}; \\ y_{2k} &= y_{2, k-1} + \Delta y_{2, k-1}; \\ y_{3k} &= y_{3, k-1} + \Delta y_{3, k-1}. \end{aligned}$$

სადაც

$$\Delta y_{1, k-1} = \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4);$$

$$\Delta y_{2, k-1} = \frac{1}{6} (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4);$$

$$\Delta y_{3, k-1} = \frac{1}{6} (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4);$$

აქ

$$l_1 = h f_1(x_{k-1}, y_{1, k-1});$$

$$l_2 = h f_1(x_{k-1} + h/2, y_{1, k-1} + l_1/2);$$

$$l_3 = h f_1(x_{k-1} + h/2, y_{1, k-1} + l_2/2);$$

$$l_4 = h f_3(x_{k-1} + h, y_{1, k-1} + l_3);$$

$$P_1 = h f_2(x_{k-1}, y_{2, k-1});$$

$$P_2 = h f_2(x_{k-1} + h/2, y_{2, k-1} + P_1/2);$$

$$P_3 = h f_2(x_{k-1} + h/2, y_{2, k-1} + P_2/2);$$

$$P_4 = h f_2(x_{k-1} + h, y_{2, k-1} + P_3);$$

$$q_1 = h f_3(x_{k-1}, y_{3, k-1});$$

$$q_2 = h f_3(x_{k-1} + h/2, y_{3, k-1} + q_1/2);$$

$$q_3 = h f_3(x_{k-1} + h/2, y_{3, k-1} + q_2/2);$$

$$q_4 = h f_3(x_{k-1} + h, y_{3, k-1} + q_3).$$

ანალოგიური ფორმულები არსებობს n -ური რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის რუნგე-კუტას მეთოდით.

რუნგე-კუტას მეთოდით აგრეთვე შეიძლება ამოხსნათ კოშის ამოცანა n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის მისი სისტემაზე დაყვანით, თუ იგი ამოხსნადია უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართ.

ეთქვათ, გვაქვს კოშის ამოცანა

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

შემოვიღოთ ახალი ფუნქციები

$$y' = y_1, \quad y'' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}, \quad \text{მაშინ}$$

ჩვენი ამოცანა დაიყვანება

$$\frac{dy}{dx} = y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\dots$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

სისტემის ამოხსნაზე, შემდეგი საწყისი პირობებით

$$y_1(x_0) = y_0', \quad y_2(x_0) = y_0'', \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3072. შეადგინეთ რუნგე-კუტას მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა. ფორმალური პარამეტრებია: $(XC, YO, F, H, Y, N, EPS)$. სადაც EPS — მოცემული სიზუსტეა, H — ინტეგრების ბიჯი, XO, YO — საწყისი მნიშვნელობები, F — ქვეპროგრამა — ფუნქციის სახელი, რომელიც გამოითვლის $f(x, y)$ ფუნქციის მნიშვნელობას, $N = y(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა რაოდენობა, Y კი N — განზომილებიანი მასივი.

3073. შეადგინეთ ეილერის მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორმალური პარამეტრებით (XO, YO, F, H, N, Y) , რომლებსაც იგივე მნიშვნელობები აქვთ, რაც წინა ამოცანაში.

3074. შეასრულეთ წინა დავალება, ეილერის მეთოდი შეცვალებით ეილერ-კოშის გაუმჯობესებული მეთოდით.

3075. შეადგინეთ მილნის მეთოდით დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორმალური პარამეტრებით (F, XO, N, H, Y, EPS) , სადაც EPS არის აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება. Y საქმენი ფუნქციის მნიშვნელობათა რაოდენობა საწყისი მნიშვნელობის ჩათვლით. საქმენი ფუნქციის პირველი ოთხი მნიშვნელობა წინასწარ უნდა იქნეს გამოთვლილი ქვეპროგრამის მიმართვამდე. დანარჩენი პარამეტრებს იგივე მნიშვნელობა აქვთ რაც წინა ამოცანებში.

შეადგინეთ პროგრამა, რომელიც ამოხსნის 3076—3097 მოყვანილ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის სათანადო ამოცანას რუნგე-კუტას, ან ეილერის, ან ეილერის გაუმჯობესებული, ან მილნის მეთოდით.

$$3076. y' = \frac{xy}{3 + \cos^2 x}, \quad y(0) = 1, \quad [0; 1, 5], \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

$$3077. y' = \sqrt{x^2 + y^2} / \left(4,563 + \operatorname{tg} \frac{x}{y}\right), \quad y(1) = 3, \quad [1; 2], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$3078. y' = 0, \quad (3) e^{x^2+y} / (2 \sin^2 x + y^2 x^4), \quad y(-1) = -4,652, \quad [-1; -0,9], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$3079. y' = \frac{0, (3) e^{x^2+y}}{2 \sin^2 x + y^2 x^4}, \quad y(1) = 0,5, \quad [1; 2], \quad \varepsilon = 10^{-4},$$

$$3080. y' = \frac{(\operatorname{tg} x^2) y^3}{4 + y \ln^2 x}, \quad y(1) = 0,5, \quad [1; 2,66], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$3081. y' = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y(2) = 3,058, \quad [2; 3], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

3082. $y' = \frac{\sqrt[3]{xy}}{y^2 + \ln^2 x}$, $y(1,23) = 2,34$, $[1,23; 2,56]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3083. $y' = \frac{(x + 2y)^3}{\sqrt[4]{x} + y^2}$, $y(2,125) = 1,152$, $[2,125; 3,17]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3084. $y' = e^y \sqrt[3]{x} \sin(x^2 + y)$, $y(0) = 3$, $[0; 1]$, $\varepsilon = 10^{-7}$.
3085. $y' = e^{-y} \sqrt[3]{x} \sin(x^2 + y)$, $y(0) = 3$, $[0; 1]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3086. $y' = \sin^3(x + \cos^2 y)^3$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$, $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3087. $y' = \frac{(x^2 + xy + y^3)^3}{\cos x + x^3 + y^3}$, $y(0) = \sqrt{3}$, $[0; 0,166]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3088. $y' = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}}}{(x^2 + y)^3}$, $y(\sqrt{\pi}) = 2$, $[\sqrt{\pi}; \sqrt{2\pi}]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3089. $y' = \left(\frac{3x^2 + 0,4xy + y^2}{2x^2 - 0,7xy + 3y^2}\right)^2$, $y(1,12) = 4,56$, $[1,12; 2,15]$,
 $\varepsilon = 10^{-5}$.
3090. $y' = \frac{\ln^2 x + \sqrt{y^2 + 1}}{x^3(y^4 + 1)}$, $y(2) = -3$, $[2; 4]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3091. $y' = \frac{\sin y + 2\cos^2 x}{\sqrt{0,4 + \cos^2 y \sin^2 x}}$, $y(0) = 1$, $[0; \pi]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3092. $y' = \frac{3^{\sin x} + y}{\sqrt{\cos^2 2x + y^2}}$, $y(1) = 0,5$, $[1,3]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.
3093. $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^3} \cos \frac{x}{1 + y^2}$, $y(0) = \sqrt{3}$, $[0; 2]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.
3094. $y' = \frac{\sin^2 x + \ln(1 + y^2)}{1 + e^x}$, $y(1) = 1$, $[1; 3]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3095. $y' = \frac{(3x^2 - 4y^3 + 1)^2}{x^4 y^2 + 3e^x \cos^2 y}$, $y(0) = 0,5$, $[0; 0,33]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3096. $y' = \frac{e^{x^2 y} + \sqrt{2} y^3}{(1 + x y^2)^3}$, $y(1) = 0,3157$, $[1; 2]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.
3097. $y' = \sin y - \ln\left(\frac{x}{y^2 + 1} + \sqrt{2}\right)$, $y(2) = 0,2$, $[2; 3]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

3098. შეადგინეთ ორ უცნობიანი ორი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = \varphi(x, y, z) \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორტრანზე რუნგე-კუტას მეთოდით. ფორმალური პარამეტრებია ($F1, F2, X0, Y0, Z0, N, H, Y, Z, EPS$), $F1, F2$ არის ქვეპროგრამა — ფუნქცია, რომელიც გამოითვლის $f(x, y, z)$ და $\varphi(x, y, z)$ ფუნქციებს, $X0, Y0, Z0$ საწყისი მნიშვნელობებია, H ინტეგრების ბიჯი, N საქებნი $y(t), z(t)$ ფუნქციების რაოდენობა, Y, Z, N — განზომილებიანი მასივი, რომელშიც მიიღება $y(x)$ და $z(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობები, EPS აბსოლუტური ზღვრული ცდომილება.

3099. შეადგინეთ სამ უცნობიანი დ სამი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ქვეპროგრამა ფორტრანზე რუნგე-კუტას მეთოდით.

3098, 3099 მიღებული ქვეპროგრამების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემები:

$$3100. \begin{cases} y' = \frac{z}{x} + 1, & y(1) = 0; \\ z' = \frac{3z^2}{x(y-1)} + \frac{x}{z}, & z(1) = 1. \end{cases} \quad [1, 2], \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$3101. \begin{cases} y' = \sin(x + 2z) + 3, & y(0) = 0; \\ z' = \frac{2}{x + 2y^2} + x + y, & z(0) = 1. \end{cases} \quad [0; 1], \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$3102. \begin{cases} y' = e^{-(x^2 + y^2)} + 1, & y(0) = 1; \\ z' = 3y^2 + z, & z(0) = 2. \end{cases} \quad [0; 0,5], \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

ქვემოთ მოყვანილი მაღალი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები დაიყვანეთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემად და ამოხსენით რუნგე-კუტას მეთოდით.

$$3103. 2y''' - xy'' + (x^2 - 6)(y' - y) = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \\ y''(0) = 0; \quad [0; 1]; \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$3104. (1 - x^2)(1 - x^2 - 6x)y''' + (7x^2 - 4)y'' + xy' - 64y = 0; \\ y(0) = 1; \quad y'(0) = 6; \quad y''(0) = -16; \quad y'''(0) = 0; \\ [0; 0,5]; \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

3105. $(9 - x^2)^2 y' + 4x(9 - x^2) y' + (2(9 - x^2) + (9 - x^2)^2 - 8x^2)y = 0$,
 $y(0) = 0$; $y'(0) = 9$; $[0; 1]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.
3106. $y''(1 + x^2) + y'^2 + 1 = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $[0; 1]$; $\varepsilon = 10^{-6}$.
3107. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$; $[1; 2]$; $\varepsilon = 10^{-6}$.
3108. $4y' + y'^2 = 4xy''$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$; $[0; 1]$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
3109. $2y'^2 = (y - 1)y''$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$; $[0; 0,75]$; $\varepsilon = 10^{-3}$.
3110. $y'^2 + 2yy' = 0$; $y(1) = y'(1) = 1$; $[1; 2]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
3111. $y'' = 2 \sin x + 4x \cos x - y$; $y(0) = y'(0) = 0$; $[0; 2]$; $\varepsilon = 10^{-6}$.
3112. $y'' = \frac{20y}{(x+1)^2}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 5$; $[0; 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
3113. $y'' = y' + \frac{2}{\cos^2 x} y + \frac{e^x}{\cos^2 x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $[0; 2]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
3114. $y'' = \frac{y - 2xy}{(1 + x^2)^2}$; $y(0) = y'(0) = 1$; $[0; 2]$; $\varepsilon = 10^{-4}$.
3115. $y'' = y' + \frac{2y}{x^2 + 1} + 2xe^x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $[0; 2]$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

XIII თავი

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

§ 1. ვექტორული ფუნქციის წარმოება

ვექტორული $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, თუ ცნობილია მისი $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$ გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე;

$$\vec{r} = r_x(t) \vec{i} + r_y(t) \vec{j} + r_z(t) \vec{k}.$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} კოორდინატთა ღერძების მგეზავებია.

ვექტორული ფუნქციის წარმოებულ t სკალარული არგუმენტით ასე გამოითვლება:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dr_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z(t)}{dt} \vec{k}.$$

ვექტორული ფუნქციის წარმოებულის მოდული

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dr_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_z}{dt} \right)^2}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ ცვლადი ვექტორის ბოლო წერტილი სივრცეში აღწერს წირს, რომელსაც \vec{r} ვექტორის მოდო გ რ ა ფ ი ეწოდება.

თუ t აღნიშნავს დროს, მაშინ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ არის \vec{r} ვექტორის ბოლო წერტილის სიჩქარე, ხოლო $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$ — ბოლო წერტილის აჩქარება.

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქციის გაწარმოების ძირითადი წესებია:

$$1) \frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} - \frac{d\vec{c}}{dt};$$

$$2) \frac{d}{dt} (m\vec{a}) = m \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ სადაც } m \text{ მუდმივი სკალარია};$$

$$3) \frac{d}{dt} [\varphi(t)\vec{a}] = \frac{d\varphi}{dt} \vec{a} + \varphi \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ სადაც } \varphi(t) \text{ არის } t\text{-ს სკალარული ფუნქცია};$$

$$4) \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$5) \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$6) \frac{d}{dt} \vec{a} [\varphi(t)] = \frac{d\vec{a}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}; \quad 7) \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} = 0, \text{ თუ } |\vec{a}| = \text{const.}$$

3116. იპოვეთ წარმოებულები შემდეგი ვექტორებისა:

$$1) \vec{r} = \text{ctg } t \cdot \vec{i} + \text{arctg } t \cdot \vec{j}; \quad 2) \vec{r} = e^{-t} \cdot \vec{i} + 2t\vec{j} + \ln t \cdot \vec{k};$$

$$3) \vec{r} = t^2 \vec{i} - \frac{1}{t} \vec{j} + \frac{1}{t^2} \vec{k}.$$

3117. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r} = 4t\vec{i} - 3t\vec{j}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

3118. მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი დროის ნებისმიერ t მომენტში განისაზღვრება $\vec{r} = \vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ განტოლებით. იპოვეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

3119. მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$. განსაზღვრეთ სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t = \frac{\pi}{2}$; $t = \pi$.

3120. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = 3t\vec{i} + (4t - t^2)\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარის ვექტორები, როცა $t = 0$; 1; 2; 3.

3121. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $\vec{r} = 3 \cos t \cdot \vec{i} + 4 \sin t \cdot \vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება. ააგეთ ტრაექტორია და სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, როცა $t = 0$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$.

3122. განსაზღვრეთ, რომელი წირებია შემდეგი ვექტორული ფუნქციების პოდოგრაფები; 1) $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$; 2) $\vec{r} = \vec{a} \cos t + b \sin t$; 3) $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$, სადაც \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} მუდმივი ვექტორებია, [მასთან $\vec{a} \perp \vec{b}$].

3123. მოცემულია $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$, სადაც ω , \vec{a} და \vec{b} მუდმივებია. აჩვენეთ, რომ:

$$1) \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega (\vec{a} \times \vec{b}); \quad 2) \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0.$$

3124. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{r} = \vec{a}e^{\omega t} + \vec{b}e^{-\omega t}$, სადაც \vec{a} და \vec{b} მუდმივი ვექტორებია, მაშინ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = 0.$$

3125. დაამტკიცეთ, რომ თუ \vec{e} არის \vec{E} ვექტორის მგეზავი, მაშინ

$$\vec{e} \times d\vec{e} = \frac{\vec{E} \times d\vec{E}}{E^2}.$$

§ 2. სივრცის წირის ელემენტები

სივრცის წირის განტოლებები პარამეტრული სახით ასეთია:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

სადაც $f(t)$, $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ წარმოადგენს t პარამეტრის მოცემულ

ფუნქციებს. სივრცის წირის განტოლებები ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r} = f(t) \vec{i} + \varphi(t) \vec{j} + \psi(t) \vec{k}.$$

სივრცის წირის რკალის დიფერენციალი გამოითვლება

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ფორმულით.

1. სივრცის წირის მხები წრფე და ნორმალური სიბრტყე. სივრცის წირის მხები წრფე $M(x, y, z)$ წერტილში ეწოდება წირის MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას. როდესაც M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ მოცემული წირის გასწვრივ. სივრცის წირის M წერტილში მხები წრფის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს ეწოდება ნორმალური სიბრტყე.

თუ სივრცის წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე გავლებული მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}, \quad x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0,$$

სადაც $X, Y,$ და Z მხებზე წრფის ან ნორმალური სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

მხები წრფის მიმართულების კოსინუსები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

იპოვეთ რკალის დიფერენციალი შემდეგი წირებისა:

3126. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$

8227. $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln \cos t.$

3128. $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t \sqrt{2}.$

3129. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$

შეადგინეთ შემდეგი წირების მხები წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები ნაჩვენებ წერტილებში და იპოვეთ მხების მიმართულების კოსინუსები:

3130. $y=t, x=t^2, z=t^3$, როცა $t=1$.

3131. $x=R \cos^2 t, y=R \sin t \cos t, z=R \sin t$, როცა $t = \frac{\pi}{4}$.

3132. იპოვეთ $x=R \cos t, y=R \sin t, z=kt$ სრახნწირის მსგებ
წრფისა და ნორმალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t = \frac{\pi}{2}$.

3133. იპოვეთ $x=2t, y=\ln t, z=t^2$ წირის მსგები წრფისა და ნორ-
მალური სიბრტყის განტოლებები, როცა $t=1$.

3134. იპოვეთ $x^2+y^2=10, y^2+z^2=25$ წირის მსგები წრფისა და
ნორმალური სიბრტყის განტოლებები $M(1; 3; 4)$ წერტილებში.

3135. იგვე $z=x^2+y^2, x=y$ წირისათვის $M(1; 1; 2)$ წერტილში.

2. სივრცის წირის მიმსგები სიბრტყე, ბინორმალის, მთავარი ნორმა-
ლი, გამწრფევი სიბრტყე. ბუნებრივი სამწახნაგა.

ავილოთ სივრცის წირის განტოლება ვექტორული სახით

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + \varphi(t)\vec{j} + \psi(t)\vec{k}.$$

1) წირის $M(x, y, z)$ წერტილზე და წირზე მდებარე მის ორ მახ-
ლობელ წერტილზე გამავალი სიბრტყის ზღვრულ მდებარეობას, როცა
მახლობელი წერტილები M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წი-
რის მიმსგები სიბრტყე M წერტილში. მიმსგები სიბრტყე შეიცავს

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ და } \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ ვექტორებს.}$$

2) წირის M წერტილზე გამავალი მიმსგები სიბრტყის მართობ
წრფეს ეწოდება წირის ბინორმალის M წერტილში. ბინორმალის

$$\text{ვექტორია } \vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

3) წირის M წერტილზე გამავალი მსგები წრფის მართობულ წრფეს,
რომელიც მოთავსებულია მიმსგებ სიბრტყეში, ეწოდება წირის მთა-
ვარი ნორმალის M წერტილში. მთავარი ნორმალის ვექტორია

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}.$$

4) წირის M წერტილზე გამავალი მთავარი ნორმალის მართობულ
სიბრტყეს ეწოდება წირის გამწრფევი სიბრტყე M წერ-
ტილში.

ბინორმალისა და მიმსგები სიბრტყის განტოლებებია:

$$\frac{X-x}{B_x} = \frac{Y-y}{B_y} = \frac{Z-z}{B_z}, B_x(X-x) + B_y(Y-y) + B_z(Z-z) = 0,$$

ხოლო მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის განტოლებები —

$$\frac{X-x}{N_x} = \frac{Y-y}{N_y} = \frac{Z-z}{N_z}, \quad N_x(X-x) + N_y(Y-y) + N_z(Z-z) = 0,$$

სადაც X, Y, Z ბინორმალის, მიმხები სიბრტყის, მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის მიმდინარე კოორდინატებია.

სამი ურთიერთმართობული სიბრტყე (ნორმალური, მიმხები და გამწრფევი) ქმნის ე. წ. ბუნებრივ სამწახნაგას. სამ ურთიერთმართობულ წრფეს (მხები, ბინორმალისა და მთავარი ნორმალის), რომლებიც სამწახნაგას წიბოებია, ხშირად ღებულობენ კოორდინატთა ღერძებად. მათ ერთობლიობას უწოდებენ ბუნებრივ კოორდინატთა სისტემას.

3136. იპოვეთ $x=t^2, y=1-t, z=t^3$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1; 0; 1)$ წერტილში.

3137. იპოვეთ $y^2=x, x^2=z$ წირის ბინორმალისა და მიმხები სიბრტყის განტოლებები $M(1; 1; 1)$ წერტილში.

1888. იპოვეთ $x=t, y=-t, z=\frac{t^2}{2}$ წირის მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყე $t=2$ წერტილში.

3139. იპოვეთ $x=e^t, y=e^{-t}, z=t$ წირის მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყე $t=0$ წერტილში.

3140. იპოვეთ $\vec{r} = \frac{t^4}{4}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$ წირის მხები წრფე, რომელიც $x+3y+2z=0$ სიბრტყის პარალელურია.

3141. შეადგინეთ $\vec{r} = \frac{t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{t}{\sqrt{2}}\vec{j} + \ln \sin t \cdot \vec{k}$ წირის ბუნებრივი სამწახნაგას წახნაგების განტოლებები $t = \frac{\pi}{2}$ წერტილში.

§ 3. სივრცის წირის სიგრძე და ზრუნა

თუ სივრცის წირის განტოლება მოცემულია ვექტორული სახით:

$$\vec{r} = r(t) = f(t)\vec{i} + \varphi(t)\vec{j} + \psi(t)\vec{k},$$

მშინ წირის სიმრუდე და გრება. შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$K = \frac{1}{R} \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3},$$

$$T = \frac{1}{v} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^2},$$

სადაც R სიმრუდის რადიუსია, ხოლო ρ — გრების რადიუსი.

იპოვეთ სიმრუდე და გრება შემდეგი წირებისა:

3142. $x=t, y=t^2, z=t^3$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=0$ წერტილში.

3143. $x=2t, y=\ln t, z=t^2$ ნებისმიერ t წერტილში და $t=1$ წერტილში.

3144. $x=a \cos t, y=a \sin t, z=bt$ მის ნებისმიერ წერტილში.

3145. $x=e^t \sin t, y=e^t \cos t, z=e^t, t=0$ წერტილში.

3146. იპოვეთ $x=e^t, y=e^{-t}, z=t\sqrt{2}$ წირის სიმრუდე.

3147. იპოვეთ $x^2=2az, y^2=2bz$ წირის სიმრუდე და გრება.

3148. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2}, z = \frac{x^3}{3}$ წირის სიმრუდე და გრება, როცა $x=1$.

3149. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{2a}, z = \frac{x^3}{6a^2}$ წირის სიმრუდე და გრება.

ფორმულა-IV უაჩივალაჲული ალფარა

სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად ყველაზე უფრო მეტად გამოიყენება ფორტრანი, რომელიც წარმოადგენს ორი ინგლისური სიტყვის „FOR mula TRAN slator-ის საწყისი მარცვლების გაერთიანებას, რაც ნიშნავს „ფორმულის მთარგმნელი“.

პროგრამები, რომლებიც დაწერილია ფორტრანის ენაზე, ჩაიწერება სპეციალურ ბლანკებზე. პროგრამა შესდგება ოპერატორების თანამიმდევრობებისაგან. ოპერატორი — ესაა გარკვეული სიტყვების მიმდევრობა. ფორტრანის ოპერატორების ჩასაწერად ენის ალფაბეტის გარდა კიდევ გამოიყენება შემდეგი სიტყვები:

IF — თუ, DO — კეთება, STOP — 'გაჩერება, END — ბოლო, DIMENSION — განზომილება, FUNCTION — ფუნქცია, WRITE — წერა, ბეჭდვა, READ — კითხვა, FORMAT — ფორმატი, GOTO — გადასვლა, RETURN — დაბრუნება, SUBROUTINE — განმეორებადი, CONTINUE — გაგრძელება და ა. შ.

ბლანკის თითოეულ სტრიქონში ჩაიწერება ერთი ოპერატორი. სტრიქონი შესდგება 80 პოზიციისაგან. 7—72 პოზიციაში იწერება ოპერატორი, ხოლო 1—5 პოზიცია კი გამოყოფილია ჭდისათვის. ჭდე არის ოპერატორის სახელი. ის არის უნიშნოდ აღებული მთელი რიცხვი და ჩაიწერება ნებისმიერად 1—5 პოზიციაში. ჭდის აღმნიშვნელ რიცხვებს შორის ინტერვალი უგულვებელყოფილი იქნება. მე-6 პოზიციას აქვს გარკვეული დანიშნულება. თუ ოპერატორი არ ეტევა ერთ სტრიქონში, მაშინ მისი გადატანა შეიძლება მეორე სტრიქონში, ოღონდ გადატანის დროს არითმეტიკული ოპერაციები არ მეორდება. ასეთ შემთხვევაში მე-6 პოზიციაში ჩაიწერება ნებისმიერი სიმბოლო ნულისა და L (ინტერვალის) ნიშნის გარდა. სშირად სტრიქონის გაგრძელების ნიშნად წერენ სტრიქონის ნომერს ან * სიმბოლოს. ოპერატორის გაგრძელება შეიძლება 19 სტრიქონში.

73—80 პოზიცია გამოიყენება დამატებითი ინფორმაციისათვის. კერძოდ: ოპერატორის დასაწარმოებლად, შენიშვნის გასაკეთებლად, და ა. შ.

კომენტარების ჩაწერა. პროგრამა შეიძლება შეიცავდეს სხვადასხვა სახის ახსნა-განმარტებებს, რომლებიც განსხვავდებიან ოპერატორული წინადადებებისაგან. კომენტარები გვიადვილებს პროგრამის წაკითხვას და მის გაგებას. იმისათვის, რომ მანქანამ გაარჩიოს კომენტარი ოპერატორისაგან, მისი სტრიქონის პირველი პოზიცია უნდა იწყებოდეს „C“ სიმბოლოთი. კომენტარების ჩასაწერად გამოიყენება ფორტრანის ნებისმიერი სიმბოლო და რუსული ბეჭდური ასოებიც.

ფორტრანის ძირითადი კონსტრუქციის ოპერატორები, რომლებიც იყოფა ორ კლასად: შემსრულებელი და აღწერითი (არა შემსრულებელი) ოპერატორებზე. შემსრულებელი ოპერატორები მიუთითებენ მოქმედებებს და მათი შესრულების რიგს. აღწერითი ოპერატორები კი გამოიყენება სიდიდეების აღწერისათვის, მიუთითებენ მათ ტიპს, სტრუქტურას და ა. შ.

ძირითადი სიმბოლოები. ძირითადი სიმბოლოებია ყველა ლათინური ასოები:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. ციფრები: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ციფრი 0 გადაიხსნება, რომ

განვასხვავოთ 0 სიმბოლოსაგან. გარდა ამისა გვაქვს სპეციალური სიმბოლოები:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| + — შეკრების ნიშანი, | , — მძიმე, |
| — — გამოკლების ნიშანი, | (— გახსნილი ფრჩხილი, |
| * — გამრავლების ნიშანი, |) — დახურული ფრჩხილი, |
| * * — ახარისხების ნიშანი, | — პრობელი, ინტერვალი. |
| / — გაყოფის ნიშანი, | = — მინიკების (ტოლობის) ნიშანი, |
| • — ათობით წერტილი, | § — დოლარის ნიშანი. |

მუდმივები და ცვლადები. არჩევენ 5 ტიპის მუდმივებს: მთელი, ნამდვილი, კომპლექსური, სიმბოლური, თექვსმეტობითი.

მთელი მუდმივი (ფორმა 1W) — ესაა ნებისმიერი რიცხვი, ჩაწერილი ათობითი წერტილის გარეშე. მაგ. —1, —15, 125, 0, 2, —224 და ა. შ. მთელი მუდმივის სიდიდე არ აღემატება $2^{31}-1 \approx 2 \cdot 10^9$ რიცხვს (რომელიც დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე).

ნამდვილი ტიპის მუდმივი (ფორმა F) — ესაა ათწილადები, რომელშიც თანრიგების მაქსიმალური რაოდენობა დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე. მაგ. 10. 5, —2.2, 0.005, 245.068, 56.0 და ა. შ.

ნამდვილი ტიპის ჩაწერა შეიძლება ექსპონენციალური ფორმით (ფორმა E), ასეთი სახით: ZEn , სადაც E გამოიყენება როგორც 10 ფუძე. Z შეიძლება იყოს მთელი ან ათწილადი რიცხვები, n კი მთელი რიცხვი. Z არ უნდა შეიცავდეს E სიმბოლოს. მაგ. 1.0E 25 — ესაა რიცხვი 10^{25} ; 10^{-3} ასე ჩაიწერება. 1E—2; 225 ასე შეგვიძლია ჩაწეროთ: 2.25E02 ან .225E03 და ა. შ. n არ აღემატება ორნიშნა მთელ რიცხვს, რომელიც შეიძლება აღებულ იქნას ნიშნით ან უნიშნოდ. ამ შემთხვევაშიც თანრიგების რაოდენობა დამოკიდებულია მანქანის ტიპზე. ES ტიპის მანქანებზე F და E ფორმაში თანრიგების რაოდენობაა 8.

უფრო მაღალი სიზუსტის მისაღებად გამოიყენება ფორმა D — მუდმივი ორმაგი სიზუსტით. თუ რიცხვი ჩაწერილია ათწილადის სახით, მაშინ თანრიგების რაოდენობა შესდგება 16-მდე ნიშნადი ციფრისაგან, ხოლო თუ რიცხვი ჩაწერილია ექსპონენციალური ფორმით, მაშინ მისი მანტისა შესდგება 16 ციფრისაგან; ოღონდ ჩაწერის დროს გამოიყენება D სიმბოლო E მაგივრად. აღწერისას უნდა ვიხმაროთ DOUBLE PRECISION (ორმაგი სიზუსტე) და ასე ჩაიწერება ZDn. მაგ. 0D0 ესაა ნული, 1.0D0 ესაა 1. რიცხვი 31,2 ასე შეიძლება ჩაწეროთ 3.12D1 ან .312D2. რიცხვი π 11 ნიშნის სიზუსტით ასე შეგვიძლია ჩაწეროთ 3.141592633581D0 და ა. შ.

ცვლადები. ესაა სიმბოლური სახელწოდებით აღებული სი-
დიდეები. სიმბოლური სახელი — ესაა ასოების ან ასოებისა და ციფ-
რების ერთობლიობა, რომელთა რაოდენობა სახელში უნდა იყოს 1-დან
6-მდე. სიმბოლური სახელი ყოველთვის იწყება ასოთი. ცვლადების
სახელწოდებად არ შეიძლება გამოიყენოთ სპეციალური სიმბოლოები,
როგორცაა SIN, COS, ATAN, π და ა. შ. მაგ ALPHA; A121.;
2A არ არის სწორი, რადგანაც იწყება ციფრი 2-ით. A₁B₂ — არც
ესაა სწორი, რადგანაც შეიცავს $_$ სიმბოლოს, PROGRAMMA — არც
ესაა სწორი, რადგანაც შესდგება 6-ზე მეტი სიმბოლოსაგან.

ცვლადების ტიპი. ცვლადების ტიპი შეესაბამება იმ მონა-
ცემებს, რომლებსაც ისინი აღწერენ. მთელი ტიპის ცვლადები აღწე-
რენ მთელ რიცხვებს, ნამდვილი ტიპის ცვლადები კი — ნამდვილ რი-
ცხვებს და ა. შ. ცვლადის ტიპის აღსაწერად გამოიყენება ოპერატორი
TUII a_1, a_2, \dots, a_n , სადაც TUII — შეიძლება იყოს ერთ-ერთი ამ სი-
ტყეებიდან: INTEGER (მთელი), REAL (ნამდვილი), DOUBLE
PRESION (ორმაგი სიზუსტე), LOGIGAL (ლოგიკური); ხოლო
 a_1, a_2, \dots, a_n — ესაა ცვლადების სახელები. თუ პროგრამაში წინასწარ
არ არის აღწერილი ცვლადების ტიპი, მაშინ იგულისხმება, რომ ცვლა-
დები, რომელთა სახელები იწყება I, J, K, L, M, N-ით არის მთელი
(INTEGER) ტიპის, დანარჩენი კი ნამდვილი (REAL) ტიპის.

ინდექსიანი ცვლადები. მასივი — ესაა სიდიდეების მო-
წესრიგებული ერთობლიობა, რომლებსაც მასივის ელემენტები ეწო-
დებათ. მასივი აღინიშნება ერთი სიმბოლური სახელით, რომელსაც
გააჩნია განზომილება და სივრძე. ფორტრანში დასაშვებია 1, 2, 3
განზომილებიანი მასივები. ერთგანზომილებიანი მასივი წარმოგვიდგე-
ბა ვექტორის სახით, 2 — განზომილებიანი კი — როგორც მატრიცა, 3 —
განზომილებიანი — მატრიცათა ერთობლიობა.

მასივის ყოველი ელემენტი განისაზღვრება მასივის სახელით და
მისი ადგილით მასივში, ე. ი. განისაზღვრება ინდექსების მნიშვნელო-
ბით. ინდექსები ჩაისმება მრგვალ ფრჩხილებში. მაგ. SUM (I, J).
ინდექსების რაოდენობა განსაზღვრავს მასივის განზომილებას. მაგ.
SUM (I, J) არის ორგანზომილებიანი მასივი. ინდექსებად შეიძლება
გამოყენებულ იქნას არითმეტიკული გამოსახულება, ცვლადები (მთე-
ლი ან ნამდვილი ტიპის). თუ ინდექსად გვაქვს ნამდვილი ტიპის გამო-
სახულება, მაშინ ინდექსად აიღება მისი მთელი ნაწილი, ე. ი. წილა-

დური ნაწილი გადაგდებულ იქნება. მასივში ინდექსების რაოდენობა ≥ 1 . მაგ. $A(I), C(I, J), B(I+5, J+1)$ და ა. შ.

მასივების აღწერა. პროგრამაში გამოყენებული მასივების აღწერა აუცილებელია. მათი აღწერა მოიცემა პროგრამის დასაწყისში და მოთავსდება პირველი შემსრულებელი ოპერატორამდე. მასივის აღსაწერად გამოიყენება აღწერილი ოპერატორი და ასეთი სახე აქვს DIMENSION $a_1(n_1, n_2, \dots, n_k), \dots, a_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$, სადაც a_1, \dots, a_n მასივების სახელწოდებაა. ინდექსების ცვლილების საზღვრები ზოგადად ასეთია: $1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 7$. ფორტრანში 3 განზომილებიანი მასივებზე მეტი არ გვაქვს.

ინდექსების ზედა საზღვრების ნამრავლი განსაზღვრავს მასივის სიგრძეს ან მასში ელემენტების რაოდენობას. მრავალ განზომილებიანი მასივის ელემენტები ჩაიწერება ერთმანეთის მიმდევრობით ისე, რომ უფრო სწრაფად იცვლება პირველი ინდექსი და უფრო ნელა შემდეგი ინდექსები. მაგ. DIMENSION $A(4), B(2, 3), C(3, 2, 2)$. A სიგრძეა 4, B -ს $2 \times 3 = 6$, C -ს კი $3 \times 2 \times 3 = 12$. თითოეული ელემენტი ასე შეიძლება ჩაეწეროს: $A(1), A(2), A(3), A(4); B(1,1), B(2,1), B(1,2), B(2,2), C(1,1,1), C(2,1,1), C(3,1,1), C(1,2,1)$ და ა. შ. ორგანზომილებიანი მასივის ელემენტები ფორტრან-IV-ში ჩაიწერება სვეტებისმიხედვით. სამგანზომილებიანი მასივში ჯერ იცვლება მარცხენა ინდექსი, შემდეგ საშუალო, ბოლოს კი მარჯვენა. თვით მასივი და მისი ელემენტები განსაზღვრული ტიპის სიდიდეებია: მთელი, ნამდვილი, ლოგიკური, ორმაგი სიზუსტით. თუ მასივის სახელწოდების აღწერა არ არის ტიპის აღწერის ოპერატორში, მაშინ მისი ტიპი განისაზღვრება მისი სახელწოდების პირველი ასოთი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მასივის სახელწოდება უნდა იქნეს აღწერილი. მაგ., INTEGER A, REAL K, COMPLEX U; DIMENSION $A(3), K(7,9)$ U(15), R(3). აქ A მთელი ტიპისაა, K, R ნამდვილი ტიპისაა, U კომპლექსური.

არითმეტიკული გამოსახულება. ფორტრანში არითმეტიკული გამოსახულება მსგავსია ჩვეულებრივი ალგებრული გამოსახულების. არითმეტიკული გამოსახულება შესდგება რიცხვების, ცვლადების (მარტივი ან ინდექსიანი), ფუნქციების ერთობლიობისაგან, რომლებიც შეერთებულია არითმეტიკული ოპერაციებით. თუ არითმეტიკულ გამოსახულებაში ფრჩხილები არ გვაქვს, მაშინ გამოთვლები სწარმოებს შემდეგნაირად: ჯერ სრულდება ** (ახარისხება), შემდეგ * ან / (გამრავლება ან გაყოფა), შემდეგ კი შეკრება ან გამოკლება. თუ გამოსახულება შეიცავს ფრჩხილებს, მაშინ ჯერ სრულდება ფრჩხილში მოთავსებული მოქმედება. თუ გამოსახულება შეიცავს სპე-

ციალურ ფუნქციებს ($\sin, \cos, \lg, \ln, \dots$), მაშინ ჯერ ხდება მათი არგუმენტისა და შემდეგ კი მნიშვნელობის გამოთვლა. არითმეტიკულ გამოსახულებაში შეიძლება შედიოდეს სხვადასხვა ტიპის მუდმივები, ცვლადები და სპეციალური ფუნქციები. ასეთ შემთხვევაში ჯერ მოხდება ყველა სიდიდების ერთი და იგივე ტიპზე დაყვანა და შემდეგ შესრულდება არითმეტიკული ოპერაცია, რისთვისაც საჭიროა უფრო მეტი დრო. დროის ეკონომიის მიზნით უკეთესია გვექონდეს ერთი და იგივე ტიპის სიდიდეები ერთ გამოსახულებაში. მაგ. უკეთესია $y + 5$. ვიდრე $y + 5 \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot (3 \cdot 5 + 1 \cdot 02 \cdot y \cdot 2)$; $x \cdot y/z$; $x/y \cdot z$, $x/(y \cdot z)$, არითმეტიკული გამოსახულების მაგალითებია.

ძირითადი ალწერითი ოპერატორები. ზოგი მათგანი უკვე განვიხილეთ ზემოთ: INTEGER, REAL, LOGICAL, DIMENSION. ახლა განვიხილოთ სხვა ოპერატორები: ოპერატორი EQUIVALENCE (ექვივალენტური), რომელსაც აქვს სახე: EQUIVALENCE (a, b, c, \dots), \dots , (d, l, f, \dots), სადაც $a, b, c, \dots, d, l, f, \dots$ ცვლადებია (მარტივი ან ინდექსიანი). ამ ოპერატორის არსი ისაა, რომ a, b, c, \dots ცვლადების მნიშვნელობებს მოათავსებს ერთ უჯრაში. ასევე d, l, f, \dots ცვლადების მნიშვნელობებს ერთ უჯრაში მოათავსებს. ცვლადებს, რომლებსაც ერთ უჯრაში ვწერთ უნდა ჰქონდეს ერთი და იგივე სიგრძე. ამავე დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ როცა მასივის ზოგიერთ ელემენტებს თუ ვუთანადებთ ერთმანეთს, მაშინ სხვა ელემენტებიც მოდიან თანადობაში.

EQUIVALENCE ოპერატორი გამოიყენება 2 შემთხვევაში: 1. როცა ორ ცვლადს აქვთ ერთი და იგივე მნიშვნელობა, მაგრამ მათთვის გამოყენებულია სხვადასხვა სახელი. ამ ოპერატორით მათი ჩაწერა შეგვიძლია ერთ უჯრაში. 2. როცა ორი ცვლადი პროგრამის სხვადასხვა ადგილასაა გამოყენებული. თუ ერთი პროგრამის დასაწყისშია და მერე არ გვხვდება ან მეორე დასაწყისში არ გვაქვს, მაგრამ ბოლოშია გამოყენებული, მაშინ EQUIVALENCE ოპერატორით შესაძლებელია ერთი უჯრედის გამოყოფა, რაც ხელს უწყობს მეხსიერების ეკონომიურად გამოყენებას. ეს უფრო თვალსაჩინოა მასივების შემთხვევაში. მაგ. I. EQUIVALENCE (A1, C1), (X, Y). II. DIMENSION C (100, 100), A (50, 50), B(100) EQUIVALENCE (C(1), A(1)), (C 2501), B(1)) I შემთხვევაში A1 და C1 ჩაწერს ერთ უჯრაში, X და Y კიდევ ერთ უჯრაში. II შემთხვევაში A-ს ჩაწერს C-ს ადგილას 1-დან 2500-მდე, ხოლო შემდეგ 2501 უჯრიდან დაიწყებს B-ს ჩაწერას. ამით მოხდება მანქანის მეხსიერების ეკონომია.

ოპერატორი COMMON-ს (ზოგადი) აქვს შემდეგი სახე:

COMMON A, B, C...

სადაც A, B, C, \dots ცვლადების სახელებია (მარტივი ან ინდექსიანი). ქვეპროგრამაში გამოყენებული ცვლადები დამოკიდებულია ძირითადი პროგრამის ცვლადების დასახელებისაგან. ძირითად პროგრამასა და ქვეპროგრამაში გამოყენებული ცვლადები საზოგადოდ არ არის აუცილებელი გამოსახადდეს ერთსა და იმავე სიდიდეს. თუ ეს აუცილებელია, მაშინ გამოვიყენებთ COMMON ოპერატორს. მაგ. ძირითადი პროგრამა COMMON X, Y, I ქვეპროგრამა COMMON A, B, J.

აქ X და A ჩაიწერება ერთი და იგივე უჯრაში, ასევე Y და B, I და J. ამ დროს ადგილი აქვს არა მარტო უჯრედების ეკონომიას, არამედ შესაბამისობის დამყარებას ძირითადი პროგრამისა და ქვეპროგრამის ცვლადებს შორის.

COMMON-ის არე ისეთი არეა, რომელშიც ინახება ორი ან მეტი ქვეპროგრამების საერთო მონაცემები ან ქვეპროგრამისა და ძირითადი პროგრამის საერთო — მონაცემები. ფორტრან — IV-ში COMMON არე შეიძლება დავყოთ ბლოკებად. ასეთ შემთხვევაში ოპერატორი COMMON-ის სტრუქტურა ასეთია:

COMMON (ბლოკის სახელი) a_1, a_2, \dots

მაგ. COMMON |AM| A (25 20), B, C (15)//K, L, M.

აქ მოცემულია ორი ბლოკი: დაქდეებული AM ბლოკი შეიცავს A მასივს, B ცვლადს, C მასივს, რომელთა სიგრძეა 516 უჯრა. მეორე ბლოკი დაქდეებული არაა, ამიტომ // (ორი დახრილი ხაზი). თუ სხვა პროგრამაში გვხვდება ასეთი ოპერატორი

COMMON//S(5)/AM/F(10), D(435), E(6), Q(2,7).

ასე უნდა გავიგოთ: S მასივი ისე განაწილდება მეხსიერებაში, რომ მისი პირველი სამი ელემენტი ჩაიწერება K, L, M-ის უჯრაში. F მასივის 10 ელემენტი ჩაიწერება A მასივის პირველ ათ უჯრაში, შემდეგ A-ში ჩაიწერება D მასივი, რომლის ჩაწერა დაიწყება მეთერთმეტე უჯრიდან. B-ში ჩაიწერება E მასივის მეექვსე ელემენტი, ხოლო Q და C ჩაწერა მოხდა ერთი და იგივე უჯრაში.

ოპერატორი FUNCTION (ფუნქცია) აქვს შემდეგი სახე: FUNCTION სახელი (არგუმენტი₁, ..., არგუმენტი_n).

მოცემული ოპერატორი არის ქვეპროგრამის სათაურია. ოპერატორში შემავალი არგუმენტები ფიქტიურია, რომლებიც გამოიყენება ფუნქციის გამოთვლების აღსაწერად. არგუმენტი შეიძლება იყოს მარტივი ან ინდექსიანი ცვლადი, მასივი ან ფუნქციის სახელი. ქვეპროგრამაში ერთხელ მაინც უნდა შეგვხვდეს ქვეპროგრამა — ფუნქციის სახელი მარჯვნივ მინიჭების ოპერატორით. ქვეპროგრამა ფუნქციის ბოლოს წინა ოპერატორი უნდა იყოს RETURN (დაბრუნება) ოპერატორი.

რი, რომელიც უხრუნველყოფს მათთვის გადაცემას ძირითად პროგრამაში. უკანასკნელი ოპერატორი კი უნდა იყოს END (ბოლო).

ქვეპროგრამა-ფუნქციაზე მიმართვის დროს უნდა იყოს დაცული ფიქტიური და ფაქტიური პარამეტრების შესაბამისობა. მაგალითად. ქვეპროგრამა—ფუნქცია: EUNCTION ADD (X, Y) ძირითადი RES = =ADD (A, B). ოპერატორი SUBROUTINE (განმეორებადი) აქვს შემდეგ სახე: SUBROUTINE სახელი (არგუმენტი₁, ..., არგუმენტი_n).

ეს ოპერატორიც არის ქვეპროგრამის სათაური, რომელიც გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა გვინდა მივიღოთ რამდენიმე შედეგი. ცვლადები, რომელთა მნიშვნელობას მიღება ხდება, ჩაწერილ იქნება არგუმენტთა სიაში. SUBROUTINE არის დამოუკიდებელი პროგრამა თავისი ლოკალიზებული ცვლადებით.

მასზე ძირითადი პროგრამიდან მიმართვა ხდება ასე:

CALL სახელი (არგუმენტი₁, ..., არგუმენტი_n), სადაც არგუმენტი₁, ..., არგუმენტი_n არის ფაქტიური შემავალი და გამოსავალი პარამეტრები. არგუმენტად შეიძლება გამოიყენებულ იქნას ნებისმიერი ქვეპროგრამის სახელი, ასეთ შემთხვევაში ძირითად პროგრამაში უნდა გვქონდეს ასეთი ოპერატორი:

EXTERNAL სახელი₁, სახელი₂, ..., რომელიც მიუთითებს, რომ ფუნქციის ან ქვეპროგრამის სახელი შეიძლება გადაეცეს როგორც ფაქტიური პარამეტრი.

თუ FUNCTION-ისა და SUBROUTINE-ს ქვეპროგრამებში გამოიყენებულია მასივები, მაშინ ისინი უნდა აღიწეროს DIMENSION ოპერატორით.

SUBROUTINE ოპერატორი უნდა შეიცავდეს ერთს მაინც RETURN ოპერატორს და ბოლოში კი END-ს.

მანქანაში ინფორმაციის შესატანად და გამოსატანად გამოიყენება FORMAT ოპერატორი: შეტანის დროს ეს ოპერატორი მიუთითებს თუ რომელი პოზიციიდან უნდა იქნეს წაკითხული ცვლადები, რომელიც ჩამოთვლილია შემყვან-გამომყვან ოპერატორების სიაში და როგორი ფორმით. როცა ინფორმაცია გამოვყავს მანქანის მესხიერებიდან, მაშინ FORMAT ოპერატორი მიუთითებს რომელი პოზიციიდან და როგორი ფორმით ხდება მისი გამოყვანა. წასაკითხი ან დასაბუქდი ცვლადის ან რიცხვის ფორმა განისაზღვრება FORMAT ოპერატორის სპეციფიკაციით. ყველაზე მარტივი შემთხვევის დროს FORMAT ოპერატორში სპეციფიკაციების რაოდენობა უნდა ემთხვეოდეს შემყვან-გამომყვან ოპერატორების სიაში ცვლადების რაოდენობას. FORMAT ოპერატორი ასე ჩაიწერება:

FORMAT (S₁, S₂, ..., S_n),

სადაც W მთელი რიცხვია უნიშნოდ, S_1, S_2, \dots, S_n სპეციფიკაციაა. სპეციფიკაციის სახეობა: $IW, FW \cdot d, EW \cdot d, WX, WH, \dots, IW$ — გამოიყენება მთელი ტიპის მუდმივებისათვის, სადაც W არის პოზიციების რაოდენობას $+1$ პოზიცია ნიშნისათვის. მაგალითად, 215-თვის გვექნება 14, 12-თვის 12. $FW \cdot d$ სპეციფიკაციაში W გვიჩვენებს იმ პოზიციების რაოდენობას, რომელიც დათმობილი აქვს ერთ რიცხვს, რიცხვის ნიშანს და ათობით წერტილს. d კი გვიჩვენებს ათწილად ნაწილში პოზიციების რაოდენობას. მაგ. გვაქვს ასეთი რიცხვი 225.35. ბარათზე კი ასეა, დაბეჭდილი b 22535, წასაკითხად უნდა მივუთითოთ: $F6.2$ და ასე წაიკითხავს 225.35; იმავე რიცხვის დასაბეჭდად უნდა მივუთითოთ: $F7.2$, რადგან ერთი პოზიცია წერტილისთვისაა საჭირო. თუ ბარათზე დაბეჭდილია წერტილი, მაშინ $FW \cdot d$ -ში წაიკითხვისას d ყურადღება არ მიექცევა. მაგ. ვთქვათ, დაბეჭდილია — 325.543. თუ მივუთითებთ $F8.1$ წაიკითხულ იქნება — 322.543. თუ ამოსაბეჭდი რიცხვის მთელი ნაწილი შეიცავს K რაოდენობის მთელ ციფრს, მაშინ $W > k + d + 2$, რადგანაც რიცხვის ნიშანს და ათობით წერტილს სჭირდება პოზიცია. მაგ. — 121,25 რიცხვის ამოსაბეჭდად $W \geq 3 + 2 + 2 = 7$, ამიტომ ასეთი სპეციფიკაციით უნდა ამოვბეჭდოთ $F7.2$. თუ მითითებულ პოზიციაში არ დაეტევა რიცხვი, მაშინ დაიბეჭდება * სიმბოლო. $FW \cdot d$ სპეციფიკაციის გამოყენების დროს უნდა ვიცოდეთ დაახლოებით მთელ ნაწილში ციფრების რაოდენობა.

თუ რიცხვი ჩაწერილია ექპონენციალური ფორმით, მაშინ გვაქვს $EW \cdot d$ სპეციფიკაცია. წაიკითხვის დროს უნდა გავითვალისწინოთ რიცხვის ნიშანი, E ასო, 2 პოზიცია რეგისათვის, ერთი პოზიცია მისი ნიშნისათვის, ე. ი. $W \geq d + 5$. მაგ. — 225E—02 შეგვიძლია წაიკითხოთ ასეთი სპეციფიკაციით $F8.3$ და მანქანაში ჩაიწერება — 2.25. დაბეჭდვის დროს ერთი პოზიცია უნდა გავითვალისწინოთ წერტილისათვის. იგივე რიცხვი $E8.3$ სპეციფიკაციით ასეთი სახით ამოიბეჭდება — 225 E 01.

თუ რომელიმე სპეციფიკაცია შეორდება, მაშინ მის წინ შეგვიძლია დავწეროთ რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს გამეორებათა რაოდენობას. მაგ. $nFW \cdot d$ ან $nEW \cdot d$, $n \in \mathbb{N}$, $3FW \cdot d$ ან $2F \cdot W \cdot d$.

შეგვიძლია ვავიმეოროთ სპეციფიკაციათა ჯგუფებიც. ამისათვის ისინი უნდა ჩავსვათ ფრჩხილებში და წინ დავსვათ რიცხვი, რომელიც იქნება გამეორებათა რაოდენობის ტოლი. მაგ. $n(FW \cdot d, EW \cdot d)$, $2(I2, F10 \cdot 3, E10 \cdot 3, E12 \cdot 5)$, $n \in \mathbb{N}$.

კომენტარებისა და ტექსტური ინფორმაციების დასაბეჭდად გამოიყენება WH სპეციფიკაცია ან ლიტერალი. აქ W გვიჩვენებს იმ სიმბო-

ლოების რაოდენობას, რომელიც უშუალოდ წერია H -ს შემდეგ. მაგ. 5H SUMMA. , ლიტერალის დროს იბეჭდება ასოითი ციფრული ინფორმაცია და მას WH სპეციფიკაციასთან ის უპირატესობა აქვს, რომ არაა საჭირო სიმბოლოების რაოდენობის მითითება. მაგ. 'SUMMA' =, =E10.5.

შედგების ერთმანეთისაგან კარგად გარჩევის მიზნით გამოიყენება WX სპეციფიკაცია, რომელიც W რაოდენობის ინტეგრალს გააკეთებს.

მაგ, 2X, 'C = ', E 1 0.3, 3X, F15.2

FORMAT ოპერატორის მოთავსება შეიძლება ნებისმიერ ადგილას. FORMAT ოპერატორი გამოიყენება READ (კითხვა) და WRITE (წაკითხვა) ოპერატორებთან ერთად. FORMAT ოპერატორი ყოველთვის დაქვევებულია.

READ (i, n_1) a_1, a_2, \dots, a_n

WRITE (i, n_2) a_1, a_2, \dots, a_n

სადაც i აღნიშნავს იმ მოწყობილობის ნომერს, თუ საიდან ხდება წაკითხვა ან სად ვახდენთ ამობეჭდვას. კერძოდ: ES ტიპის მანქანებში $i=1$ READ ოპერატორში, როცა წაკითხვა ხდება პერფორატებით, $i=3$, როცა დაბეჭდვა ხდება АЦПУ-ზე. n_1, n_2 კი შესაბამისად FORMAT ოპერატორის კლეა. a_1, a_2, \dots, a_n შეიძლება იყოს მარტივი ან ინდექსიანი ცვლადები, მასივის სახელები, DO-ს არაცხადი ფორმა, რომელიც გამოიყენება მაშინ, როცა საჭიროა წაკითხვა ან ამობეჭდვა მასივის ნაწილისა, ან როცა საჭიროა მასივის გამოყვანა სტრიქონებად.

1...5	6	7
		WRITE (3, 1) (A (I, J), J=1, 3), I=1, 3)
1		FORMAT (1X, 3F6.1)
...
		DO 7 I = 1, N
		WRITE (3,5) (C (I, J), J = 1, N) } I
5		FORMAT (1X, 7 F 15.3)
		PRINT 6 } II
6		FORMAT (1H □
7		CONTINUE

აქ გამოყენებულია DO-ს არაცხადი ფორმა ორი სახით: I-ში ხდება მატრიცის ამობეჭდვა სტრიქონებად, II კი ახდენს ერთი სტრიქონის გამოტოვებას.

ინფორმაციის პერფორაციის დროს გამოიყენება პერფორატორის ყველა 80-ვე პოზიცია. ინფორმაციის გამოტანის დროს ჩანაწერი არ უნდა აღემატებოდეს 120 სიმბოლოს. ერთ სტრიქონში დასაბეჭდად შეიძლება გამოვიყენოთ PRINT n_1 ოპერატორიც.

ძირითადი შეხსრულვადი ოპერატორები

მინიჭების არითმეტიკულ ოპერატორს აქვს სახე: ცვლადი=გამოსახულება. აქ ტოლობის ნიშანი განსხვავდება ჩვეულებრივი ტოლობის ნიშნისაგან. ამას აქვს შემდეგი მნიშვნელობა: „შეეცვალო...“. ე. ი. ჯერ გამოითვლება მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულების მნიშვნელობა, შემდეგ ხდება მისი მარცხნივ მდგომი ცვლადისათვის მინიჭება, როგორც მიმდინარე მნიშვნელობა. ამიტომ ფორტრანში დასაშვებია ასეთი ჩანაწერი: $I=I+1$, ე. ი. ხდება I ცვლადის მნიშვნელობის გაზრდა ერთი ერთეულით.

ფორტრანზე დაწერილი პროგრამის შესრულება ხდება თანმიმდევრობით, თუ მათ შორის არ არის ისეთი ოპერატორი, რომელიც დაარღვევს მათი შესრულების მიმდევრობას. მიმდევრობის რიგს არღვევს ოპერატორები:

GOTO (გადასვლა) და არითმეტიკული IF (თუ) ოპერატორი. GOTO n ოპერატორი არის უპირობო გადასვლის ოპერატორი, რომელიც უზრუნველყოფს გადასვლას n ჭდიან ოპერატორზე. პროგრამაში არ უნდა გვხვდებოდეს ორი ერთნაირ ჭდიანი ოპერატორი. GOTO ოპერატორის მოთავსება შეიძლება ყველგან, ოღონდ მისი მომდევნო ოპერატორი ყოველთვის უნდა იყოს ჭდიანი. GOTO ოპერატორს მეორე სახეც აქვს: GOTO (n_1, n_2, \dots, n_m) i , სადაც n_1, n_2, \dots, n_m შემსრულებელი ოპერატორების ჭდეებია, i არის მთელი მარტივი ცვლადი. თუ $1 \leq i \leq m$ და $i=j$, მაშინ გადასვლა მოხდება n_j ჭდიან ოპერატორზე. თუ i მოცემული დიაპაზონის გარეთაა, მაშინ სრულდება GOTO ოპერატორის შემდეგ მდგომი ოპერატორი. მაგ.

1...5	6	7
		GOTO (4, 13, 14) i
14		B(K) = A1
4		A=0.25 * X
	
13	

თუ $i=1$, მაშინ შესრულდება 4 კდის მქონე ოპერატორი. თუ $i=2$, მაშინ შესრულდება 13 კდიანი ოპერატორი. თუ $i=3$, მაშინ კი 14 კდიანი ოპერატორი. თუ $i>4$, მაშინ შესრულდება GOTO-ს შემდეგ მდგომი ოპერატორი.

ართმეტიკული IF ოპერატორს აქვს სახე: $IF(a) m_1, m_2, m_3$, ეს პირობითი გადასვლის ოპერატორია, რომელიც დამოკიდებულია a გამოსახულებას მნიშვნელობაზე. ა) თუ $a>0$, მაშინ შესრულდება m_1 კდიანი ოპერატორი.

ბ) თუ $a=0$, მაშინ შესრულდება m_2 კდიანი ოპერატორი.

გ) თუ $a<0$, მაშინ შესრულდება m_3 კდიანი ოპერატორი.

აქაც IF ოპერატორის შემდეგ მდგომი ოპერატორი უნდა იყოს კდიანი.

ციკლის ოპერატორია DO (გაკეთდეს), რომელსაც აქვს სახე:

$$DO \text{ } n \text{ } i = m_1, m_2, m_3$$

სადაც $n \in \mathbb{N}$ არის უკანასკნელი ოპერატორის კდე, რომელიც უნდა შესრულდეს ციკლში. i მთელი ცვლადია, ანუ ციკლის მთვლელია, რომელიც მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს. m_1 მთვლელის საწყისი მნიშვნელობაა, m_2 ბოლო, m_3 — კი მთვლელის ცვლადების ბიჯი. თუ $m_3=1$, მაშინ მისი გამოტოვება შეიძლება. ციკლში ოპერატორები მეორდებიან მანამ, სანამ $i \leq m_2$. თუ $m_1 > m_2$, მაშინ ციკლის ოპერატორები მხოლოდ ერთხელ შესრულდება. იმ ოპერატორების ერთობლიობას, რომლებიც უნდა განმეორდნენ, ეწოდება DO ოპერატორის მოქმედების არე და ქმნიან ციკლს.

ახლა განვიხილოთ ლოგიკური IF ოპერატორი. ოპერაციის ნიშნები: $< \cdot LT \cdot$ — ნაკლებია, $\leq \cdot LE \cdot$ — ნაკლებია ან ტოლი, $=, EQ$ — ტოლია, $\neq \cdot NE \cdot$ — არატოლი, $> \cdot GT \cdot$ — მეტია, $\geq \cdot GE \cdot$ — მეტია ან ტოლი, $\vee \cdot OR \cdot$ — დიზიუნქცია, $\wedge, \cdot AND \cdot$ — კონიუნქცია, \neg — $\cdot NOT \cdot$ — ინვერსია. ლოგიკური გამოსახულება ღებულობს ორი მნიშვნელობიდან ერთ — ერთს: „მცდარი“ (0) ან „ქეშმარიტი“ (1).

შედარების დროს თუ პირობა შესრულებულია, მაშინ გამოსახულებას მიენიჭება მნიშვნელობა „ქეშმარიტი“, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი „მცდარი“. ლოგიკურ IF ოპერატორს აქვს სახე: $IF(a) S$ სადაც a ლოგიკური გამოსახულებაა, S ნებისმიერი ოპერატორი, გარდა ციკლისა და ლოგიკური IF ოპერატორისა. თუ a ქეშმარიტია, მაშინ შესრულდება S ოპერატორი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მოხდება S გამოტოვება და შესრულდება შემდეგი ოპერატორი. მაგალითად,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{როცა } x < 0 \\ -x + 1, & \text{როცა } x \geq 0. \end{cases}$$

1...5	6	7
		IF (X·LT·0·0) GOTO 10
		Y = - X + 1·0
		GOTO 11
10		Y = X + 1·0
11	

საწინი მონაცემების მოცემა უორტარეზი

ზოგჯერ უკეთესია ზოგიერთ ცვლადებს მიენიჭოთ განსაზღვრული მნიშვნელობანი თავიდან მანქანაში პროგრამის შეტანის დროს, რომლისთვისაც გამოიყენებთ ოპერატორ DATA-ს. მას აქვს შემდეგი სახე:

$$DATA \ v_1, \ v_2, \dots, \ v_n / r_1 \cdot X_1, \ r_2 \cdot X_2, \dots, \ r_m \cdot X_m /.$$

სადაც v_1, v_2, \dots, v_n ცვლადები მიიღებენ X_i მნიშვნელობას r_1 -ჯერ, X_2 მნიშვნელობას r_2 -ჯერ და ა. შ. ამ შემთხვევაში ცვლადების და რიცხვების რაოდენობა უნდა იყოს ერთი და იგივე, ე. ი. $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$

ცვლადებად შეგვიძლია ავიღოთ მარტივი ან მუდმივ ინდექსიანი ცვლადები, ან მასივის სახელები. DATA ოპერატორის შესრულების დროს არ ხდება რიცხვითი მონაცემების გარდაქმნა იმ ტიპამდე, როგორცაა v . ამიტომ ამაზე უნდა იზრუნოს პროგრამისტმა.

$$\text{მაგ. } \bullet \left| \text{DATA } F(1), F(2), F(3) \mid 3 \cdot 1,25 \mid, U(1), U(2) \mid 12, 15 \mid, \right. \\ \left. \mid L1, L2 \mid. \text{ TRUE. }, \text{ .FALSE. } \mid z \mid 1,0, 2, 1 \mid \right.$$

აქ $F(1), F(2), F(3)$ მიენიჭება 1.25 მნიშვნელობა, $U(1) = 12, U(2) = 15, L1$ მიენიჭება TRUE, $L2$ კი FALSE, z კომპლექსური ცვლადია და ის ჩაიწერება ორ უჯრაში და ასეთი რიცხვი იქნება $L+2, 1 i$.

პროგრამის მოდული და ოპერატორების მიმდებარეობის რიგი

პროგრამის მოდული შესდგება ძირითადი და პროგრამული ერთეულისაგან (ქვეპროგრამა). პროგრამული ერთეულის (ქვეპროგრამის) პირველი ოპერატორია FUNCTION ან SUBROUTINE ოპერატორები, რომლებიც განსაზღვრავენ ქვეპროგრამას. ამ ოპერატორების შემდეგ დგას ტიპისა და მასივის აღწერითი ოპერატორები, შემდეგ

DATA, EXTERNAL, COMMON, შემდეგ მოდის ოპერატორული ფუნქციები. ამათ შემდეგ იწერება შემსრულებელი ოპერატორები. ქვე-პროგრამა მთავრდება END-ით, ძირითადი პროგრამა უნდა მთავრდებოდეს ოპერატორი STOP-ით, რომელიც უნდა იყოს END წინ, რომლითაც ბოლოვდება ნებისმიერი პროგრამა.

ყველა პროგრამაში შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სპეციალური ფუნქციები, რომლებიც მანქანის მესსიერებაში მუდმივად არის შენახული. სპეციალური ფუნქციები პროგრამის შიგნით არ საჭიროებენ აღწერას.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -2 & 8 & -10 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} 22 \\ 29 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 13. $AB =$
 $= \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$. 14. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
15. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $BA = (16)$. 16. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.
18. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{pmatrix}$. 20. $AE = EA = A$.
21. $AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$. 22. $AB = BA =$
 $= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $AB = BA = 42 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $AB = BA = E =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 25. $(AB)C = A(BC) = (51 \ 6 \ 14)$. 26. $A(B + C) =$
 $= AB + AC = (9 \ 30)$. 35. -48 . 36. 8. 37. 29. 38. -12 . 39. 0.
40. 4. 41. 2. 42. 4. 43. $2a^3$. 44. $-2X$. 45. $3abc - a^3 - b^3 - c^3$.
 46. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. 47. $2x^3 - (a + b + c)x^2 + abc$. 48. $(ab + bc + ca)x + abc$.
 49. $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. 50. 0. 51. $-4a^3$. 52. ab . 53. 1.
54. $4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. 55. $\sin(\beta - \alpha)$. 56. $\sin(\alpha + \beta)$. 64. 2. 65. -3 .

66. -9 ; 2. 67. 2; 3. 68. $-4 \pm \sqrt{22}$. 69. $z=0$. 70. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, 71. $x > 7/2$. 72. $-6 < X < -4$. 82. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 15 & 23 & 7 \\ 0 & 18 & 0 \\ -5 & -3 & -21 \end{pmatrix}$. 84. 3. 85. 2. 86. 3. 87. 2. 88. 2. 89. 2.

90. 3. 91. 2. 92. 2. 93. 3. 94. 2. 95. 3. 96. 2. 97. 3. 98. 0, როცა $\lambda=0$ და 2, როცა $\lambda \neq 0$ 99. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. 100. $\begin{pmatrix} -1/8 & 5/8 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

101. $1/5 \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 102. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. 103. 1; 2; 3.

104. $53/22$; $-41/44$; $9/4$. 105. 1; 3; 6. 106. 5; 6; 10. 107. 1; 1; 1. 108. 1; 3; 5. 109. -2 ; 0; 3. 110. სისტემა არათავსებადია. 111. სისტემა არათავსებადია. 112. 8; 4; 2; 113. 3; -1 ; 0. 114. 3; -2 ; -5 . 115. 1; 2; 3. 116. 0; 0; -2 . 117. 0; 0; 0. 118. $x=t$; $y=2t$; $z=3t$, t ლებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. 119. $x=1$; $y=-1$; $z=0$, თუ $a+b+c \neq 0$. 120. 0; 0; 0. 121. 0; 0; 0. 122. $x=5t$; $y=-11t$; $z=-7t$, სადაც t ლებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. 123. $x=2t$; $y=-3t$; $z=5t$, სადაც t ლებულობს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას. 124. $y=x+z$, სადაც x და z ნებისმიერია. 125. $x=y-4z$, სადაც y და z ნებისმიერია. 126. 3; 0. 127. სისტემა არათავსებადია. 128. 5. 129. 1) აქვს ერთადერთი ამონახსენი, როცა $a \neq -3$; 2) არა აქვს ამონახსენი, როცა $a = -3$; $b \neq \frac{1}{3}$, 3) აქვს

უამრავი ამონახსენი, როცა $a = -3$, $b = \frac{1}{3}$. 130. $x = \frac{11-z}{5}$, $y = \frac{2(z-1)}{5}$, სადაც z ნებისმიერია, 131. $x = \frac{11-7z}{7}$, $y = \frac{7z+1}{7}$,

სადაც z ნებისმიერია. 132. $x = \frac{57-z}{26}$, $y = \frac{8z-1}{13}$, სადაც z ნებისმიერია.

133. $x = \frac{4+10z}{11}$, $y = \frac{19-13z}{11}$, სადაც z ნებისმიერია.

134. არათავსებადია. 135. -1 ; 3; 2. 136. 1; 5; 2. 137. 1; 2; 3; 4.

138. 5; 4; 3; 2. 139. სისტემა არათავსებადია. 140. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

141. $X = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 142. $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. 143. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

144. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 145. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 146. თუ A ნულო-

ვანი მატრიცაა, მაშინ X ნებისმიერი მეორე რიგის მატრიცაა; თუ $\det A \neq 0$, მაშინ X არის მეორე რიგის ნულოვანი მატრიცა, ხოლო თუ $\det A = 0$, მაგრამ A არ არის ნულოვანი მატრიცა, მაშინ მისი სვეტები პროპორციულია; დაეშვათ $\alpha : \beta$ არის A მატრიცის პირველი და მეორე სვეტის შესაბამისი ელემენტების შეფარდება, მაშინ: $X = \begin{pmatrix} -\beta\rho & \alpha\rho \\ -\alpha q & \alpha q \end{pmatrix}$, სადაც ρ და q ლეზ-

ბულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან.

151. (10; 0; 13/5). 152. (-1; 2; 4). 153. 1) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$,

$y = \frac{y_2 + y_2 + y_3}{3}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. 2) (6; 3; 20/3). 154. $x =$

$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$; $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$.

მითითება: ტეტრაედრის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მონაკვეთზე, რომელიც აერთებს მის ნებისმიერ წვეროს მოპირდაპირე წახნაგის სიმძიმის ცენტრთან და ამ მონაკვეთს ყოფს $\lambda = 3 : 1$ ფარდობით. 155. $A(-1; 2; 3)$.

156. $|\vec{p}| = 3\sqrt{5}$; $\cos \alpha = -2/3\sqrt{5}$; $\cos \beta = -4/3\sqrt{5}$; $\cos \gamma = 5/3$.

157. $\vec{p}(1; -1; \pm\sqrt{2})$. 158. 60° ან 120° . 159. $M(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{5};$

$\pm\sqrt{3})$. 160. $\vec{e}(6/7; -2/7; -3/7)$ და $\vec{e}(3/13; 4/13; -12/13)$. \vec{p}

ვექტორის \vec{e} მგზავი განისაზღვრება ფორმულით $\vec{e} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. 161. $\vec{Q}(\pm 48;$

$\mp 45; \pm 36)$. 162. (5; 10). 163. (4; -2; 5). 164. $\vec{R}(-3; 15; 12)$.

165. $\frac{7}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{j}$. 173. $5\sqrt{10}$. 174. $\vec{AM} = \frac{|\vec{a}|b + |\vec{b}|a}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$.

175. $\sqrt{3}$ და 1. 176. $\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$. 177. თუ A_1, B_1, C_1 წერტი-

ლები მდებარეობენ გვემილთა სიბრტყის ერთ მხარეზე, მაშინ $\frac{1}{2}(a + b + c)$;

თუ გვემილთა სიბრტყე გამოყოფს C_1 წერტილს A_1 და B_1 წერტილებიდან,

მაშინ $\frac{1}{3}|a + b - c|$ და ა. შ. 178. არსებობს. 179. 1) 428; 2) 804.

180.. 1) 18; 2) -3. 181. -1,5. 182. $\alpha = 31,5$. 183. $\cos A = -12/49$;

$$\cos B = \cos C = \sqrt{122}/14. \quad 184. \cos A = \sqrt{2}/6; \cos B = 4/21; \cos C = 9\sqrt{2}/14. \quad 185. \vec{R}(8\sqrt{2}; 0; 8\sqrt{2}). \quad 186. \vec{P}\left(\pm \frac{15}{\sqrt{17}}; \pm \frac{25}{\sqrt{17}}; 0\right).$$

$$187. \vec{e}\left(0; \mp \frac{4}{5}; \pm \frac{3}{5}\right). \quad 188. \vec{e}\left(\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{6}{11}\right). \quad 189. \vec{R}(-6;$$

$$-24; 8). \quad 190. \vec{p}\left(\frac{3 \mp 4\sqrt{3}}{5}; \frac{4 \pm 3\sqrt{3}}{5}\right). \quad 191. \frac{19}{5}. \quad 192.$$

$$6\sqrt{\frac{2}{11}}. \quad 193. 1) 6; 2) -6. \quad 194. 10. \quad 195. \sqrt{3}. \quad 196. -5.$$

$$197. -3. \quad 198. -120^\circ. \quad 199. \sqrt{7} \text{ და } \sqrt{13}. \quad 200. 15 \text{ და } \sqrt{593}.$$

$$201. 16\sqrt{3}. \quad 202. \pm 36. \quad 203. -15. \quad 204. \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad 205. \vec{a} - \vec{b} \text{ და } \vec{a} + \vec{b}$$

ვექტორები გამოსახავს \vec{a} და \vec{b} ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალებს. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ \vec{a} და \vec{b} ვექტორებზე

აგებული პარალელოგრამის გაორკეცებული ფართობი უდრის $\vec{a} - \vec{b}$ და $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობს.

$$206. 7\sqrt{5}. \quad 207. S = \sqrt{6}; |\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{P} - \vec{Q}| = 5. \quad 208. 11.$$

$$209. S = \sqrt{21}; h = \sqrt{4,2}. \quad 210. 37,5. \quad 211. 1,5\sqrt{2}. \quad 212. S = 14. |\vec{BD}| = 14/\sqrt{13}.$$

$$213. S = 12,5 |\vec{BD}| = 5. \quad 214. 1) (-58; -20; 1); 2) -80. \quad 215. (-7; 14; -7). \quad 216. 5. \quad 217. 33. \quad 218. კი.$$

$$219. კი. \quad 220. 154/3; 11. \quad 221. 22,5; 45/\sqrt{109}. \quad 222. 2\sqrt{2}/3.$$

$$223. 52. \quad 224. 1) \sqrt{69}; 2) \frac{1}{2}\sqrt{1397} \text{ კვ. ერთ. } 3) \approx \arccos 0,5406 \approx$$

$$\approx 57^\circ 61'.4) \frac{96}{\sqrt{1397}} \approx 2,57. \quad 231. \text{ გაღის } A \text{ და } C \text{ წერტილებზე.}$$

$$232. 1) \frac{x}{-6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{12} = 1; \quad 2) \frac{x}{-6} + \frac{z}{3} = 1; \quad 3) \frac{x}{7} + \frac{y}{-7} = 1;$$

$$4) \frac{x}{7} = 1. \quad 235. 1) \frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0; \quad 2) -\frac{5}{13}x +$$

$$+\frac{12}{13}y - 2 = 0; \quad 3) -y - 2 = 0; \quad 4) z - \frac{1}{2} = 0. \quad 236. 6.$$

$$237. \frac{5}{2\sqrt{2}}. \quad 238. 4. \quad 239. 3x + y - z - 4 = 0. \quad 240. x - 4y + 5z +$$

$$+15 = 0. \quad 241. x + y + z - 2 = 0. \quad 242. 3x + 4y + 6z - 12 = 0.$$

$$243. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 244. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$245. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 246. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$247. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 248. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$249. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 250. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$251. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 252. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$253. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 254. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$255. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 256. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

$$257. 10x + 2y + 11z - 148 = 0. \quad 258. 6x - 6y + 7z - 125 = 0.$$

245. $3x+5y+7z-100=0$. 246. $23x-17y+z-50=0$. 247. 1) $y+5=0$; 2) $x+3y=0$; 3) $9y-z-2=0$. 248. 1) $y-2=0$; 2) $y-3z=0$. 3) $3x+2z-5=0$. 249. 1) 45° ; 2) $\arccos \frac{8}{21}$; 3) 90° . 250. 1) 60° ; 2) $\arccos \frac{1}{5}$; 3) 0° . 251. $2x+2y+z+4=0$ და $2x+2y+z-20=0$. 252. $\rho=5$; $\cos \alpha = \frac{2}{7}$; $\cos \beta = \frac{3}{7}$; $\cos \gamma = \frac{6}{7}$. 253. $11x+4y-5z-9=0$. 254. 8. 255. $2x-6y+2z-7=0$. 256. $x-y+z-a=0$. 257. $3x-5y+2z-49=0$. 258. $35y+12z=0$ და $3y-4z=0$. 259. $3x+y+2z-23=0$. 260. $x-y+z-2=0$. 261. $2x+3y+4z-3=0$ 262. $5x-y-3z+4=0$. 263. 1) (1; -1; 2); 2) არა აქვს. 264. 1) (3; -1; 0); 2) არა აქვს; 3) აქვს უამრავი ამონახსნი. 265. $x-8y+9z-21=0$. 266. $7x+14y+5=0$; 267. $2x+2y-2z-1=0$. 268. $x+20y+7z-12=0$ და $x-z+4=0$. 269. 3. 270. $4x+y+z-1=0$ და $x+2y-6z+3=0$; 271. $M(10; 10; 10)$. 272. $M(\pm\sqrt{2}; 1; 1)$. 273. $y=\pm z$. 274. $(0; \frac{73}{12}; 0)$ და $(0; -\frac{73}{282}; 0)$. 275. $39x-29y-7z=0$. მითითებდა. სამი მოცემული $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა სხეულის განტოლება არის $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\beta(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0$, სადაც λ და β პარამეტრებია. 276. $x+y+2z-4=0$. 277. 1) $3x-7y+5=0$; 2) $7x+3y-27=0$. 278. $x+2y+1=0$. 279. $5x+2y-25=0$; $5x+2y+4=0$. 280. (0; 7); (6; -1); (2; 1). 281. $x+3y=0$ (AB); $x-3=0$ (AC); $x-2y+3=0$ (BC). 282.. 1) 3; 2) 2,2. 283. 1) 4; 2) $5\frac{2}{3}$. 284. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{13}}{2}$. 285. 1) $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{3}{2}=0$; 2) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}=0$; 3) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y=0$ და $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y=0$. 286. 1) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 3=0$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{2}{\sqrt{13}}=0$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}=0$. 287. $25x-15y-24=0$. 288. $12x+5y-26=0$, $12x+5y-78=0$.

289. $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-3} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$.
290. $y = 0$; $y = 3$; $y = -x + 4$; $y = x + 4$. 291. 1) 3; 2) $2 \frac{2}{15}$.
292. 5; (3; 4). მიითითება. თუ მოცემულ განტოლებას დავიყვანთ ნორმალურ სახეზე, მაშინ მართობის ფუძის კოორდინატები იქნება $x = p \cos \alpha$, $y = p \sin \alpha$. 293. $x + \sqrt{3}y - 10 = 0$. 294. $x - \sqrt{3}y + 14 = 0$.
295. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. 296. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$, 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$. 297. 1) $x - y + 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}x - y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$; 3) $x + y - 5 = 0$. 298. $5x + y - 10 = 0$; $x - 5y - 28 = 0$.
299. $\sqrt{10}$. 300. $\frac{10}{\sqrt{65}}$. 301. $\sqrt{10}$. 302. $2x - 5y + 4 = 0$; $x - 2y + 2 = 0$. 303. $x + 4y \pm 4 = 0$. 304. $12x - 5y - 31 \pm 26 = 0$. 305. $x + 3y - 2 = 0$. 306. $11x + 22y - 74 = 0$. 307. (10; 21). 308. (11; -11). 309. $3x - 2y - 27 = 0$. 310. $2x - y - 10 = 0$. 311. (0; -12); $\left(0; \frac{4}{3}\right)$. 312. (2; -1); (0; 3). 313. $\frac{\pi}{4}$. 314. $3x - y + 9 = 0$; $3x + y + 9 = 0$. 315. $3x - y - 3 = 0$; $x + 3y - 19 = 0$. 316. $5x - 4y + 2 = 0$; $4x - 5y + 1 = 0$. 317. $2x - y - 5 = 0$; $x - 3y + 12 = 0$. 318. $\frac{24}{\sqrt{13}}$.
319. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{2}$. 320. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$. $x = -1 + t$, $y = 1 - 3t$, $z = -3 + 4t$. 321. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}$, $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{0}$. 322. $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{4}$. 323. $x = -z + 3$, $y = -z + 5$; $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-1}$; $x = t + 3$, $y = t + 5$, $z = -t$. 324. $\frac{x-27}{9} = \frac{y-14}{5} = \frac{z}{1}$; $\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{107}}$; $\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{107}}$; $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{107}}$. 325. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$; $\cos \alpha = 0,3\sqrt{2}$; $\cos \beta = 0,4\sqrt{2}$; $\cos \gamma = -0,5\sqrt{2}$; 326. 1) $\frac{x+5}{2} =$

$$= \frac{y-7}{6} = \frac{z}{1}; \quad 2) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-12}{3}. \quad 327. \quad 1) \frac{\pi}{4}; \quad 2) \cos \varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}. \quad 328. \quad 1) \cos \varphi = \frac{106}{119}; \quad 2) \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad 329. \quad 1) \frac{x-2}{3} =$$

$$= \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{5}; \quad 2) \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+8}{1}. \quad 330. \quad \frac{x-5}{1} =$$

$$= \frac{y-4}{9} = \frac{z}{2}. \quad 331. \quad 1) \text{ კი}; \quad 2) \text{ არა}. \quad 332. \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}. \quad 333. \quad x =$$

$$= t-2, \quad y = -2t+1, \quad z = 3t-1. \quad 334. \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

$$335. \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{0}. \quad 336. \quad \frac{x-a}{L} = \frac{y-b}{M} = \frac{z-c}{0}.$$

$$337. \quad \frac{x}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}. \quad 338. \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}. \quad 339. \quad \frac{x+2}{2} =$$

$$= \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0}. \quad 340. \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}. \quad 341. \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$342. \quad \frac{x-3}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{+1}. \quad 344. \quad (1; 2; 3). \quad 345. \quad 1) \sin \varphi =$$

$$= \frac{13}{7\sqrt{6}}; \quad 2) \sin \varphi = \frac{3}{133}. \quad 346. \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}. \quad 348. \quad k = -\frac{1}{3}.$$

$$349. \quad x + 3y + 2z = 0. \quad 350. \quad 2y + 5z - 30 = 0. \quad 351. \quad \frac{x-1}{1} =$$

$$= \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}. \quad 352. \quad A = 4; \quad B = -8. \quad 353. \quad 1) (0; 0; -2);$$

2) წრფე პარალელურია სიბრტყისა. 354. 1) (5; -1; 2) წრფე ძევს სიბრტყეზე. 355. (1; 4; -7). 356. $\sin \varphi = \frac{18}{91}$. 357. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} =$

$$= \frac{z-4}{-7}. \quad 358. \quad 5x - 7y - 2z + 39 = 0. \quad 359. \quad 9x - 4y + 13 = 0,$$

$z=0; 15x - 8z + 3=0, y=0; 5y - 6z - 1=0, x=0$. მიითითება სიბრტყე, რომელიც მოცემულ წრფეს აგვემილებს, მაგალითად, xOy სიბრტყეზე, უნდა აკმაყოფილებდეს ორ პირობას; 1) ის უნდა გადიოდეს მოცემულ წრფეზე და 2) მართობი უნდა იყოს xOy სიბრტყისა, ანუ Oz ღერძის პარალელური; ამიტომ მოცემული წრფის განტოლებებიდან უნდა გამოვრიცხოთ z . 360. $\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}; 0\right)$ წერტილი xOy სიბრტყეზე; $y = \frac{8}{5}$

წრფე yOz სიბრტყეზე; $x = \frac{12}{5}$ წრფე xOz სიბრტყეზე. 361. $2x - 3y -$

$-2z + 1 = 0$, $5x + 2y + 2z - 7 = 0$. მითითება. იპოვეთ სიბრტყე, რომელიც გადის მოცემულ წრფეზე მოცემული სიბრტყის მართობულად, მაშინ საძიებელი გვეპოვოთ განისაზღვრება. როგორც ამ სიბრტყისა და მოცემული სიბრტყის გადაკვეთის წრფე. 362. $4x - 9y + 10z - 9 = 0$, $2x +$

$+2y + z - 15 = 0$. 363. (5; -1; 0). 364. (3; -2; 4). 365. (1; 3; 3). 366. $\lambda = 3$. 367. (-3; 5; -3). 368. $L = 3$. 369. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} =$

$= \frac{z-1}{2}$. 370. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$. 371. $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 13$.

372. $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 36$. 373. $(x+3)^2 + y^2 = 9$. 374. 1) 2; (2; -1); 2) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$; $(-\frac{5}{4}; \frac{3}{4})$; 3) $\frac{3}{2}$; $(0; -\frac{3}{2})$. 375. 1) 4;

(3; 0); 2) $\frac{1}{2}$; $(-\frac{1}{2}; 0)$; 3) $\frac{\sqrt{58}}{6}$; $(-\frac{5}{6}; \frac{1}{2})$. 376. $(x -$

$-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ და $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$. 377. $x^2 + (y+2)^2 = 4$; (0; 0); (2; -2); (-2; -2) 378. $4x - 2y - 9 = 0$. 379. $2x - 5y +$

$+19 = 0$. 380. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ და $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. 381. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. 382. $(x-3)^2 + (x+5)^2 = 100$.

383. $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. 384. M_1 წერტილი ძვეს წრეწირზე, M_2 წერტილი მოთავსებულია მის შიგნით, ხოლო M_3 წერტილი — მის გარეთ.

386. 1) ეხება წრეწირს; 2) კვეთს; 2) გადის მის გარეთ. 387. $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -6$, $E = -4$, $F = -12$. 388. 1) (3; -1) და

(2; -2); 2) (-4; 6); 3) არ იკვეთება. 389. $7x - 4y = 0$. 390. $8x -$

$-20y + 1 = 0$; $5x - 2y - 7 = 0$. 391. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$. 392. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. 393. 7. 394. 2. 395. 1) $x^2 + y^2 = 8$;

2) $x^2 + y^2 = a^2$ 396. $x^2 + y^2 = ax$. 397. $(x-3)^2 + y^2 = 9$. 398. $(x -$

$-2a)^2 + y^2 = 4a^2$. 399. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

400. 1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$. 401. 1) $2a = 10$; $2b = 6$;

$F_1(4; 0)$; $F_2(-4; 0)$; $e = \frac{4}{5}$; 2) $2a = 2$; $2b = 8$; $F_1(0; \sqrt{15})$;

$F_2(0; -\sqrt{15})$; $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 402. 1) $2a = 26$; $2b = 10$; $F_1(12; 0)$;

$F_2(-12; 0)$; $e = \frac{12}{13}$; 2) $2a = 4$; $2b = 12$; $F_1(0; 4\sqrt{2})$;

- $F_2(0; -4\sqrt{2}); e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 403. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. 404. 1) (3; -3);
 $(\frac{69}{13}; \frac{21}{13})$; 2) $(3; \frac{8}{5})$; 3) არ იკვეთება. 405. *A* წერტილი ძვეს
 ელიფსზე. *B* — მის შიგნით, *C* — მის გარეთ. 406. შითითება. $c^2 =$
 $= a^2 - b^2$ დამოკიდებულებიდან ჩანს, რომ *c* არის იმ მართკუთხა სამკუთ-
 ხედის კათეტი, რომლის ჰიპოტენუზა და მეორე კათეტი შესაბამისად არის *a*
 და *b*. 407. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$. 408. 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) 0, 8;
 409. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. 410. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; e = \frac{\sqrt{3}}{2}; r_1 = 3; r_2 = 9$.
 411. $\frac{48}{5}\sqrt{2}$. 412. $\frac{2b^2}{a}$. 413. $(\pm 5; \pm 2)$. 414. $(-5; 7)$.
 415. $(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{2\sqrt{6}}{3})$. 416. $(-\frac{15}{4}; \pm \frac{8\sqrt{7}}{4})$. 417.
 $(\frac{2}{7}; \pm \frac{4\sqrt{3}}{7})$; 418. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$; 419. $x = \pm 9$. 420. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 421. $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{24} = 1$ ან $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$. 422. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$.
 423. $(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$ და $(0; -1)$. 424. $(\pm \sqrt{15}; \pm 1)$. 425. 1)
 კვეთს. როცა $|m| < 5$; 2) ეხება, როცა $m = \pm 5$; 3) გადის მის გარეთ,
 როცა $|m| > 5$. 426. $a^2k^2 + b^2 = m^2$. 427. 10 და $5\sqrt{3}$. 428. 60° .
 429. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 430. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. 431. ელიფსი. 432. $X^2 +$
 $+ 4Y^2 = R^2$. 433. 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.
 434. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1$. 435. 1) $2a = 5; 2b = \frac{10}{3}$;
 $F_1(\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0); F_2(-\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0); e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; 2) $2a = 6$;
 $2b = 8; F_1(0; 5); F_2(0; -5); e = \frac{5}{4}$. 436. 1) $a = 3; b = 4; F_1(5; 0);$
 $F_2(-5; 0); e = \frac{5}{3}$; 2) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{36} = 1$. 437. $x^2 - y^2 = 16$.

438. $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$. 439. მითითება. $c^2 = a^2 + b^2$ დამოკიდებუ-
 ლებიდან ჩანს, რომ c არის იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუსა, რომ-
 ლის კათეტებია a და b . აქედან აგება ვასაგებია; ასიმპტოტებია $y = \pm \frac{5}{7} x$
 წრფეები. 440. $y = \pm \frac{4}{3} x$; $e = \frac{5}{4}$. 441. $x - 10 = 0$; $x + 4\sqrt{5}y +$
 $+ 10 = 0$. 442. $10 \frac{1}{4}$ და $2 \frac{1}{4}$. 443. b ; $2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. 444. 1) 2;
 2) $\sec \alpha$. 445. $x - 2y - 12 = 0$; $x + 2y + 8 = 0$. 446. $d_1 d_2 =$
 $= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$. 447. $(\pm \sqrt{6}; \pm \sqrt{2})$. 448. 1) (10; 2); (-10;
 -2); 2) (10; -2); 3) არ იკვეთება.
 449. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 450. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 451. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$;
 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 452. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
 453. $(10; \pm \frac{9}{2})$. 454. $(\frac{43}{5}; \pm \frac{3}{5} \sqrt{119})$. 455. $y = \pm \frac{4}{3} (x+5)$.
 456. (0; 0); (6; $\pm 2\sqrt{3}$). 457. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. 458. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.
 459. 1) $y^2 = 16x$; 2) $x^2 = 8y$. 460. 1) $x^2 = -18y$; 2) $y^2 = 12x$.
 461. $F(6; 0)$; $x + 6 = 0$. 462. $y^2 = -28x$. 463. (3; $\pm 3\sqrt{2}$).
 464. (9; ± 12). 465. 12. 466. 6. 467. 10. 468. 2p. 469. 1) (-6; 9);
 (2; 1); 2) (-4; 6); 3) არ იკვეთება. 470. 1) კვეთს, როცა $k < \frac{1}{2}$.
 2) ეხება, როცა $k = \frac{1}{2}$; 3) გადის მის გარეთ, როცა $k > \frac{1}{2}$.
 471. $p = 2kb$. 472. $x - 2 = 0$. 473. $y^2 = -3x$. 474. $x^2 = -2y$.
 475. $4p\sqrt{3}$. 476. (0; 0); (6; $\pm 2\sqrt{3}$). 477. $y^2 = -4x$.
 478. $x^2 = -32y$. 479. $y = -\sqrt{3}(x+1)$; $\frac{16}{3}$. 480. $2x - y - 3 = 0$.
 481. 1) $y^2 = 8(x-2)$; 2) $Y^2 = \frac{p}{2} X$. 482. 1) $x^2 = -4(y-3)$;
 2) $Y^2 = pX$.

582. SUBROUTINE SUMMA (A, B, C, M, N)
 DIMENSION A (M, N), B (M, N), C (M, N)
 DO 4 I = 1, M
 DO 4 J = 1, N
 4 C (I, J) = A (I, J) + B (I, J)
 RETURN
 ENO
583. SUBROUTINE RNAMR (B, M, N, BETA)
 DIMENSION B (M, N)
 DO 3 I = 1, M
 DO 3 J = 1, N
 3 B (I, J) = BETA * A (I, J)
 RETURN
 END
584. SUBROUTINE, TRANS (B, M)
 DIMENSION B (M, N)
 N = M - 1
 DO 2 I = 1, N
 K = I + 1
 DO 2 J = K, M
 C = B (I, J)
 B (I, J) = B (J, I)
 2 B (J, I) = C
 RETURN
 END
585. SUBROUTINE MFAMR (A, B, C, M, N, K)
 DIMENSION A (M, N), B (N, K), C (M, K)
 DO 3 I = 1, M
 DO 3 J = 1, K
 C (I, J) = 0
 2 C (I, J) = C (I, J) + A (I, L) * B (L, J)
 3 CONTINUE
 RETURN
 END
586. ა) DIMENSION A (2, 4), B (4, 2), AB (2, 2), BA (4, 4), C (2, 4)
 READ (1, 4) A, B, BETA
 4 FORMAT (8F4, 1, 8F 6.3, F2.1)
 CALL RNAMR (A, 2, 4, BETA)
 CALL MFAMR (A, B, AB, 2, 4, 2)
 CALL MFAMR (B, A, BA, 4, 2, 4)

```

1 FORMAT (3X, ' AB = ', 4 F 10 3)
2 FORMAT (3X, ' BA = ', 4 F 61.3/3X, ' A = ', 4F10.3)
WRITE (3, 1) ((AB (I, J), J = 1, 2), I = 1, 2)
WRITE (3, 2) BA, A
STOP
END

```

b) DIMENSION A (3, 3), B (3, 3), C (3, 3), D (3, 3), D1(3, 3),

• ATBT (3, 3)

READ (1, 3) A, B, C

3 FORMAT (9 F 3.1, 9F3.1, 9F3.1)

CALL SUMMA (A, B, D, 3, 3)

CALL SUMMA (A, C, D1, 3, 3)

WRITE (3, 1) D, D1

1 FORMAT (4X, ' A+B = ', 3 (3F10.4)/4X, ' A + C = ',

• 3 (3 F 10.4/)

CALL TRANS (A, 3)

CALL TRANS (B, 3)

CALL (A, B, ATBT, 3, 3, 3)

WRITE (3, 2) A, B, ATBT

2 FORMAT (3X, ' AT = ', 3 (3F3, 1)/3X, ' BT = 3(F3.1)/3X,

• ATBT = ', 3 (3F/10.4/)

STOP

END

587.

SUBROUTINE OBRMAT (A, B, M)

DIMENSION A (M, M), B (M, M)

DO 1 I = 1, M

DO 1 J = 1, M

B (I, J) = 0

IF (I - J) 1, 2, 1

2 B (I, J) = 0

1 CONTINUE

K = 1

3 N = K

A 1 = ABS (A (N, K))

4 N = N + 1

A 2 = ABS (A (N, K))

IF (A1, GE. A2) GOTO 5

A 1 = A 2

```

5 IF (A1·NE·0) GOTO 6
  GOTO 20
6 DO 8 J = 1, M
  IF (J·LE·K) GOTO 9
  AKJ = A (K, J) / A (K, K)
9 BKJ = B (K, J) / A (K, K)
  DO 10 I = 1, M
  IF (I·EQ·K) GOTO 10
  IF (I·LE·K) GOTO 11
  A (I, J) = A (I, J) - AKJ · A (I, K)
11 B (I, J) = B (I, J) - BKJ · A (I, K)
10 CONTINUE
  IF (J, LE. K) GOTO 31
  A (K, J) = AKJ
31 B (K, J) = BKJ
8 CONTINUE
  K = K + 1
  IF (K. LE. M) GOTO 3
  GOTO 41
20 WRITE (3, 7)
  7 FORMAT (5X, ' DET = 0 ' )
41 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

588. DIMENSION A (4, 4), B (4, 4)
      READ (1, 3) A
3  FORMAT (4 F2.0)
   CALL OBRMAT (A, B, 4)
   WRITE (3, 2) B
2  FORMAT (3X, 4F / 0. 4 /)
   STOP
   END

```

```

589. DIMENSION A (2, 2), C (2, 2), X (2, 2), B (2, 2),
      • A1 (3, 3), C1 (3, 3), B1 (3, 3), Y (3,3)
      READ (1, 3) A, C
3  FORMAT (2 F 2.0)
   CALL OBRMA (A, B, 2)
   CALL MFAMR (B, C, X, 2, 2, 2)
   WRITE (3, 4) X

```

```

4 FORMAT (3X, 2F4.1 /)
  READ (1, 2) A1, C1
2 FORMAT (3F2.0)
  CALL OBRMAT (A1, B1, 3)
  CALL MFAMR (B1, C1, Y, 3)
  WRITE (3,5) Y
5. FORMAT (3X, 3F4.1 /)
  READ (1, 3) A, C
  CALL OBRMAT (A, B, 2)
  CALL MFAMR (C, B, X, 2)
  WRITE (3, 4) X
  STOP
  END

```

592.

```

FUNCTION DET (A, M)
DIMENSION A (M, M)
  K = 1
  DET = 1
1 L = K
  AMA = ABS (A (L, K))
  LR = K
2 L = L + 1
  AMB = ABS (A (L, K))
  IF (AMA * GE * AMB) GOTO 3
  LR = L
  AMA = AMB
3 IF (L. LT. N) GOTO 2
  IF (LR. NE. K) GOTO 4
  SIGN = 1
  GOTO 6
4 SIGN = - 1
  DO 5 J = K, M
  S = A (K, J)
  A (K, J) = A (LR, J)
5 A (LR, J) = S
  IF (A (K, K). NE. 0) GOTO 6
  DET = 0
  RETURN
6 DET = SIGN * A (K, K) * DET
  K1 = K + 1
  DO 7 I = K1, M

```

```

DO 7 J = K 1, M
7 A(I, J) = A(I, J) - A(I, K) * A(K, J) / A(K, K)
K = K + 1
IF (K. LT. N) GOTO 1
DET = DET * A(M, M)
RETURN
END

```

```

593. DIMENSION A(4, 4), B(4, 4)
      READ(1, 2) A, B
2  FORMAT(16. F 3. 0, 16 F 3. 1)
      C = DET(A, 4)
      E = DET(B, 4)
      WRITE(3, 4) C, E
4  FORMAT(3X, 'DETA = ', F 10. 4, ' DETB = ', F 10. 4)
      STOP
      END

```

```

594. SOBROUTINE RESIS(A, B, M)
      DIMENSION A(M, M), B(M)
      K = 1
1  L = K
      AMA = ABS(A(L, K))
      LR = L
2  L = L + 1
      AMB = ABS(A(L, K))
      IF(AMA. GE. AMB) GOTO 3
      LR = L
      AMA = AMB
3  IF(L. LT. N) GOTO 2
      IF(LR. NE. K) GOTO 4
      GOTO 6
4  DO 5 J = K, M
      S = A(K, J)
      A(K, J) = A(LR, J)
5  A(LR, J) = S
6  IF(A(K, K). NE. 0) GOTO 7
      WRITE(3, 30)
30  FORMAT(' DET = 0')
      RETURN

```

```

7 K1 = K + 1
  DO 8 I = K1, M
    C = A(I, K) / A(K, K)
    B(I) = B(I) - B(K) * C
  DO 8 J = K1, M
8 A(I, J) = A(I, J) - A(K, J) * C
  K = K1
  IF (K. LT. M) GOTO 1
  B(M) = B(M) / A(M, M)
  N1 = M - 1
  DO 10 I = 1, N1
    S = 0
    N1 = M - I + 1
    DO 9 J = N1, M
9 S = A(M - 1, J) * B(J) + S
10 B(M - 1) = B(M - 1) - S
  RETURN
  END

```

595.

```

DIMENSION A(5, 5), B(5)
READ(1, 3) A, B
3 FORMAT(25 F8. 4 / 5 F8. 4)
GALL RESIS(A, B, 5)
WRITE(3, 5) B
5 FORMAT(3X, ' X = ', 5F8. 4)
STOP
END

```

1. 3,7986; -1,4748; 1,3855; 5,9921; -2,5013.
2. -1,9950; 9,6424; 5,1280; 0,0531; -- 2; 1421.
3. -0,6769; 5,5707; -2,1141; 3, 1908; -1, 4175.
4. 4,6721; -5,9120; 2,6386; 3,7501; -1,9016.
5. 2,5210; -8,6077; -1,5960; 6,2991; 2,5011.
6. 6,1295; 8,7423; 1,5807; 4,1623; 2,4552.
7. 2,8900; 4,9130; -1,4608; 6,0975; 0,2319.
8. 1,1292; -6,3308; -3,7813; 7,2299; -2,0938.
9. -0,7576; -2,1734; 10,5502; -7,0809; -1,9709.
10. 13,0051; -5,8820, -5,9031; 3,4991; -4,6994.
11. -5,8853; -3,8129, 9,3279; 16,7301; 5,2273.
12. 6,5533; 3, 6893; -16, 7972; -11,2201; -8,2452,
13. -16,2349; -24, 0152; 10, 5692; -3,9921; 24,4738.
14. -2, 3561; 4, 1977; -10,2672; 17, 3025; 1, 1927.

709. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 710. $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$. 711. $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$.
712. 1) 12; 13; 17; 20; 2) $\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{29}{15}$; $\frac{7x + 4x^2}{2 + 3x^2}$. 713.
- 1) 1 ; $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$; 2) 0 ; $-\frac{15}{4}$; $\frac{5}{2}$. 714. $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.
715. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$; 716. 1) 0 და 2; 2) -1 და 3.
717. 1; -3 ; 2. 719. 1) $3 \lg 2$; 2) $3 \lg a$; 3) $(\lg a)^3$. 720. 2^{2x} და 2^{x^2} .
721. $y = \sqrt[3]{a^t + 1}$. 722. $(x + 2)^2$. 723. 1) $y = u^3$, $u = \sin x$; 2) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 3x + 1$; 3) $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = \frac{x}{2}$. 724. 1) $y = 2^u$, $u = \cos x$; 2) $y = \sqrt[3]{u}$, $u = v^2$, $v = 1 + x$; 3) $y = \arcsin u$, $u = 3^v$, $v = -x^2$.
725. 1) $y = \pm \sqrt{3 - x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x} \log_2 5$; 3) $y = -\cos x^2$;
- 4) $y = \lg(10 - 10^x)$. 726. 1) $y = \log_2 \frac{x^3 + 7}{x^2 - 2} - x$; 2) $y = 10^{4 - \lg x} - 1$;
- 3) $y = x$ და $y = \frac{x}{3}$. 727. 1) $y = \frac{x - 3}{2}$; 2) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x$; 3) $y = 1 \pm \sqrt{1 + x}$;
- 4) $y = \lg x - 1$; 5) $y = 2^{\frac{1}{x}}$. 728. 1) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
- 2) $y = -\log_2(1 - x)$; 3) $y = 10^{x-1} - 2$; 4) $y = \log_2 \frac{x}{1 - x}$. 729. 1) და 4) ლუწია; 2) და 5) კენტია; 3) არც ლუწია, არც კენტი. 730. 1) და 4) კენტია; 3) ლუწია; 2) არც ლუწია, არც კენტი. 731. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π ;
- 3) $6\pi^2$; 4) $\frac{16}{5}\pi$. მითითება. $y = \sin kx$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი განისაზღვრება $l = \frac{2\pi}{k}$ ფორმულით. 732. 1) 1; 2) $\frac{8}{3}$;
- 3) 4π ; 4) π . 733. 1) $x - y^2 = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$. 734. 1) $y = \frac{1}{1 + x}$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = 2px$.
735. 1) 0 და 0; 3 და 5; 2) 1 და 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ და 1. 736. 1) 15 და

- 26; $-\frac{3}{4} \infty - \frac{9}{8}$; 2) $\frac{5}{4} \infty \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$; $\frac{7}{4} \infty \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$.
787. 1) 2; 2) $\frac{\pi}{4} + k\pi$. 788. 1) -1 ; 2) $\frac{\pi}{2}$. 789. 1) $[-1; +\infty)$;
 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. 740. 1) $[-3; 3]$; 2) $(-\infty;$
 $-2]$; $[2; +\infty)$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. 741. 1) $(-\infty; -2)$;
 $(-2; 2)$; $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty, -1)$; $(-1; 4)$; $(4, +\infty)$. 742.
 1) $(-\infty, -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty, -3)$; $(-3; 1)$;
 $(1, +\infty)$. 743. 1) $(-2; 0]$; 2) $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$. 744.
 1) $[-4; 0]$; 2) $[1; 5)$. 745. 1) $[0; 4]$; 2) $(-\infty, -2]$; $[6, +\infty)$.
 746. 1) $[-1; 2]$; 2) $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$; $[1, +\infty)$. 747. 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;
 2) $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$. 748. 1) $(0; 1]$; 2) $(-2; 2)$. 749. $\left(0; \frac{7}{2}\right)$;
 $(4, +\infty)$. 750. $[1; 4]$. 751. $[-1; 3]$. 752. $[-2; 2]$. 753. $[-1; 3]$.
 754. $[1; 4)$. 755. $[1; 100]$. 756. $[-3; 0)$; $(0; 1)$. 757. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.
 758. $(-\infty, -2]$; $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 759. $x=2$. 760. $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cdot (2, +\infty)$.
 761. $(3; 5)$. 762. $[8; 10]$. 763. $(-1; 1]$; $[2; 3)$. 764. $(4; 5)$; $(6, +\infty)$.
 778. 1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 3) $y = 1$.
 779. 1) $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$; 3) $x = 1$.
 780. 1) $x^2 + y^2 = ay$; 2) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$; 3) $(x^2 + y^2)^2 = ay(3x^2 - y^2)$.
 781. 1) $x^2 + y^2 = ax$; 2) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$; 3) $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - 3y^2)$.
 782. 1) $x^2 + y^2 - ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$; 2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. 783.
 1) $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$; 2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. 784. 1) $r^2 =$
 $= \frac{1}{2} \sin 2\varphi$; 2) $r = a(1 - \cos \varphi)$. 785. 1) $r = a \cos \varphi$; 2) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
 786. 1) $x = 2a \cos^2 \varphi$, $y = a \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{a}{\varphi} \cos \varphi$, $y = \frac{a}{\varphi} \sin \varphi$.
 787. 1) $x = a \sin 2\varphi$, $y = 2a \sin^2 \varphi$; 2) $x = 2p \operatorname{ctg}^2 \varphi$, $y = 2p \operatorname{ctg} \varphi$.

790. 1) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots$; 2) $-3, 5, -7, 9, \dots, (-1)^n(2n+1), \dots$; 3) $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$.

791. 1) $0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots, n + (-1)^n, \dots$; 2) $2, 2, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{5}, \dots, \frac{3 + (-1)^n}{n}, \dots$; 3) $1, 0, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{3}, 0, -\frac{7}{4}, \dots, \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}, \dots$.

792. 1) $x_n = \frac{2n+1}{2n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 3) $x_n = \frac{4n+3}{2n+1}$.

793. 1) $x_n = \frac{4n+1}{n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 3) $x_n = \frac{3n-1}{2n+3}$.

794. 9. 795. 100. 796. 1) $n > 10$; 2) $n \geq 32$. 797. 1) 9; 2) 99.

798. 3. 799. 1. 800. 0. 801. 2. 802. $1/2$. 803. $2/3$. 804. $4/3$. 805. 1.

806. 1. 808. 2. 809. $-1/2$. 810. -1 . 811. $4/3$. 812. 0. 813. 1.

814. 5. 815. 1. 816. $3/4$. 817. $1/3$. მითითებდა. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. 818. $1/3$. 819. 1. 822. 0,1. 823. 0,01.

830. როცა $\varepsilon \leq 1$, მაშინ $N \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, ხოლო როცა $\varepsilon < 1$, მაშინ

$N=0$. 831. $|x| > 7$. 833. 0,1; 0,01. 834. x^2 და $2x \cos x \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, ვიდრე x ; $\sin 3x$ და x ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია: $x e^{2x}$ და x ტოლფასი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია. 835. $x - 3x^2$ და $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$ ტოლ-

ფასია x -ის მიმართ; $x^3 + 3x^4$ x -ის მიმართ უფრო მაღალი რიგისაა; $5 \sqrt[3]{x^2}$ x -ის მიმართ უფრო დაბალი რიგისაა. 836. 1) მეორე რიგის; 2) პირველი რიგის; 3) მესამე რიგის; 4) პირველი რიგის. 837. 1) პირველი რიგის; 2) მესამე რიგის; 3) მეოთხე რიგის. 838. 1) მეორე რიგის; 2) $\frac{1}{2}$

რიგის; აქ $x \rightarrow +\infty$. 839. 1) მეოთხე რიგის; 2) $\frac{2}{3}$ რიგის. 840. უსას-

რულოდ მცირეა: $2x^2$; $1 - \cos x$; $\sin x$; სასრულია: $3 - x$; $\sqrt{9-x}$; e^x ; უსასრულოდ დიდია: $\frac{2}{x}$; $\ln x$; $\operatorname{ctg} x$. 841. უსასრულოდ მცირეა:

447444 4400

$\sin \frac{3}{x}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$; $\frac{\sin x}{x}$; სსრულობა: $3 - \frac{1}{x}$; $\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$; $e^{\frac{1}{x}}$; უსას-
 რულოდ დიდია: $\sqrt[3]{x^2}$; e^{x^2} . 842. 5. 843. 11/7. 844. 0. 845. 0.
 846. ∞ . 847. ∞ . 848. 7. 849. -2. 850. 7/9. 851. -16/7. 852. 1/2.
 853. 3. 854. -2,5. 855. -2/3. 856. $3x^2$. 857. $-4x^3$. 858. 1) 3/5;
 2) *m/n*. 859. na^{n-1} 860. -1/2. 861. -3/4. 862. 1/2. 863. 2.
 864. ∞ . 865. ∞ . 866. 0. 867. 0. 868. 15. 869. 24. 870. 0.
 871. -1/16. 872. -2/7. 873. 3. 874. 2. 875. 1. 876. 0. 877. 1,
 როცა $x \rightarrow +\infty$; -1, როცა $x \rightarrow -\infty$. 878. $64\sqrt{2}$. 879. 2/3.
 880. 3/2. 881. -6/5. 882. $3\sqrt{5}$. 883. 2,5. 884. 12. 885. $-4\sqrt{3}$.
 886. 0. 887. 3. 888. 1/2, როცა $x \rightarrow +\infty$; $-\infty$, როცა $x \rightarrow -\infty$.
 889. 0. 890. 1) 4; 2) $\frac{m}{n}$. 891. 1) 1; 2) 6/7. 892. 1) 1/9; 2) 1.
 893. 1) 0; 2) 1. 894. 10. 895. 4/3. 896. 1) 1; 2) 2,5. 897. 1) 1;
 2) 4/7. 898. 0,5. 899. 1/8. 900. -1/7. 901. -2/7. 902. 0. 903. 1/4.
 904. $\cos a$. 905. π . 906. -2/3. 907. $-\pi/4$. 908. $2/\pi$. 909. $1/4\sqrt{3}$.
 910. 1. 911. -1. 912. 1/5. 913. 3/7. 914. 1/12. 915. -0,5.
 916. 1/3. 917. -1/16. 918. 1/6. 919. $2\sqrt[5]{3}/15$. 920. 3/4. 921.
 1/5. 922. $1/\ln a$. 923. $3/2 \ln 10$. 924. $1/a$. 925. $\ln 3$. 926. -6.
 927. 1. 928. a . 929. m^2/π^2 . 930. $\ln \frac{a}{b}$. 931. $\ln a$. 932. $1/e$. 933. e .
 934. $\ln 8$. 935. 1. 936. 1, 5. 937. 1. 938. 1) 81; 2) 1. 939. 1) 20;
 2) $-1/64$. 940. 0. 941. $+\infty$. 942. e^k . 943. $1/e$. 944. e^2 . 945. e^{12} .
 946. e^2 . 947. e . 948. 0. 949. e^{-2} . 950. e^{-1} . 951. e^3 . 952. e^2 . 953. e^8 .
 954. \sqrt{e} . 955. 1. 956. 1. 957. $e^{3/2}$. 958. alb . 959. 1,5. 960. -2.
 961. 2. 962. -1. 963. -0,5. 964. 1/8. 965. 0,5. 966. 1/4.
 967. -2. 968. π . 969. 0. 970. $\sqrt{3}$. 971. 2. 972. $-1/\sqrt{3}$.
 973. $\sin 2a/2a$. 974. 4/9. 975. 1,5. 976. $4 \ln a$. 977. -2.
 978. $-\pi^2/2$. 979. -1. 980. $\cos^3 a$. 981. $1/\ln a$. 982. e . 983. ab .
 984. $\ln^2 a$. 985. \sqrt{ab} . 986. ∞ . 987. $1/e$. 988. $1/\sqrt{e}$. 989. 1,
 როცა $a > 1$; 0, როცა $a < 1$; 1/2, როცა $a = 1$. 990. 1, როცა $a > 1$;
 -1, როცა $a < 1$; 0, როცა $a = 1$. 1001. 1 და -1. 1002. $\pi/2$ და
 $-\pi/2$. 1003. $+\infty$ და $-\infty$. 1004. -3 და 3. 1005. $+\infty$ და 0.
 1006. 0 და 1. 1007. 2 და 0. 1008. 1 და -1. 1009. $-\sqrt{2}$.
 1010. $-1/\sqrt{2}$. 1015. მეორე ვერის წყვეტის წერტილებია: 1) $x=5$;

$$2) x = 3-3) x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}. \quad 1016. \quad 1) x = -3 - \text{მეორე გვარის}$$

წყვეტის წერტილი; 2) $x = 2$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = 1$; 3) $x = 1$ — მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. 1017. 1) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = 1$; 2) $x = \pi$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = \pi$; 3) $x = -1$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = 2$. 1018. 1) $x = k\pi$ — მეორე გვარის წყვეტის წერტილები ($k = 0, \pm 2, \dots$); 2) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = \pi$; 3) $x = 0$ — პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, $|x| = 1$; 1019. 1) $0; \pm 2$; 2) უწყვეტი ყველგან; 3) $\frac{2}{(2k + 1)\pi}$ ($k = 0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots$); 4) 0 ; 5) 1 ; 6) $k\pi$. 1020. 1) $0; -1; \pm \sqrt{2}$; 2) უწყვეტია ყველგან; 3) $\frac{1}{k\pi}$; 4) 0 ; 5) 0 ; 6) $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$).

1021. $f(-1) = 3$. 1022. $f(5) = -0,5$. 1023. $f(0) = 4,5$. 1024. $f(0) = 1$. 1029. 1. 1030. 4. 1031. -1 . 1032. π . 1034. $x = 0$ არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. 1035. უწყვეტია ყველგან. 1036. ფუნქცია განიცილის პირველი გვარის წყვეტას ყოველ $x = n$ წერტილზე (n მთელი რიცხვა). 1037. 1) $3x^2$; 2) $-1/x^2$; 3) $\cos x$; 4) $1/\cos^2 x$; 5) $1/\sqrt{1+2x}$.

1038. 1) $1/2\sqrt{x}$; 2) $4x - 1$; 3) $\sin 2x$; 4) e^x ; 5) $-1/2x\sqrt{x}$. 1039. 1) $0, 1; -0,20$; 2) -1 ; 2. 1040. $5; 70$. 1041. 1) $0, 1$; 2) -3 . 1042. 1) $0, 1; 10$; 2) $-1; 1/90$. 1043. $-1/8$. 1044. -1 . 1045. 3. 1046. 1) -4 ; 2) -1 . 1047. 7. 1048. 2. 1049 10. 1050. 24.

1051. 3; 0; -9 . 1052. 4 და 8 წამის შემდეგ. 1058. $4x^3 + 6x$. 1054. $6x^5 + 8x^3 - 5$. 1055. $x^2 - x + 1$. 1056. $x^4 - 2x^2 - 3$, 1057. $3x^2 + 1/\sqrt{x}$. 1058. $14x/a + 1/\sqrt[3]{x^2}$. 1059. $anx^{n-1} +$

$+bm x^{m-1}$. 1060. $5x^4/(a+b) - 2x/(a-b)$. 1061. $2/\sqrt[3]{x} +$
 $+ 4/\sqrt[5]{x} - 2/2x\sqrt{x}$. 1062. $21x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + 2$. 1063. $1 -$
 $- 2/x^3 + 1/x^6$. 1064. $5/x^2\sqrt[4]{x} - 2/x\sqrt[3]{x^2}$. 1065. $4x(1 +$
 $+ 3x + 10x^3)$. 1066. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$. 1067. 1) $x(2\cos x - x\sin x)$;

2) $3^x(\ln 3 \cdot \arcsin x + 1/\sqrt{1-x^2})$. 1068. 1) $3x^2 \operatorname{ctg} x - x^3/\sin^2 x$;
2) $x^2 e^x$. 1069. $\frac{1}{x} \left(1 - \frac{3}{x}\right)$. 1070. $-\pi/x^2$. 1071. $\frac{-3x^2 + 4x - 13}{(x^2 + 4x - 7)^2}$.

1072. $\frac{1}{1 - \sin x}$. 1073. $\frac{t^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2}$. 1074. $\frac{2e^t}{(1 - e^t)^2}$. 1075. $t^2 \sin t$.
1076. $2t \operatorname{arctg} t$. 1077. 0 . 1078. $-\frac{1 + 2x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2}$. 1079. $4x^2 \ln x$.

1080. $3/x + \ln x \cdot x^2$. 1081. $e^x (\arctg x + 1 / (1 + x^2))$. 1082. $\frac{4x - \sin 2x}{4x \sqrt{x \cos^2 x}}$. 1083. $\frac{2 \ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x}$. 1084. $3^x x^4 (5 + x \ln 3)$.
 1085. $x e^x (2 \sin x + x \sin x + x \cos x)$. 1086. $x^2 a^x (3 \ln x + x \ln a \cdot \ln x + 1)$.
 1087. $3 \cos - 3$ 1088. -1 . 1089. $-1/8$. 1090. 4 . 1091. $6 \cos 6x$.
 1092. $-3 \cos^2 x \sin x$. 1093. $20x(x^2-1)(x^4-2x^2+3)^4$. 1094. $4(5x^2-2x+4)(5x-1)$. 1095. $2 \sin 4x$. 1096. $\frac{6 \sin 3x}{\cos^3 3x}$. 1097. $2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 3x \cdot \sin 2x$. 1098. $2 + 15 \sin^2 x \cos x$. 1099. $\frac{1}{2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\arcsin x}}$.
 1100. $\frac{2x+1}{3 \sqrt{(x^2+x+1)^2}}$. 1101. $3(x^{12}/6 + 4 \sqrt{x^5} - 3)^2 \cdot (2x^{11} + 5 / 2 \sqrt{x^3})$. 1102. $\frac{2x+3}{4 \sqrt{(x^2+3x)^3}} - \frac{12}{5 \sqrt{(6x-1)^3}}$. 1103. $a \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$. 1104. $\frac{2x e^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$. 1105. $\frac{\cos(\ln x)}{x}$. 1106. $\frac{1}{\ln \lg x \cdot \sin x \cos x}$. 1107. $e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$. 1108. $e^x (\ln \sin x + \operatorname{ctg} x)$.
 1109. $\operatorname{tg}^4 x$. 1110. $1 / \cos x$. 1111. $4x / (1-x^4)$. 1112. $1 / (e^x + 1)$.
 1113. $1 / \sin^3 x \cos x$. 1114. $\operatorname{tg}^3 x$. 1115. 1) $e^{\sqrt{x}} / 2\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{e^x} / 2$.
 1116. 1) $x^2 7^{5x} (3 + 5x \ln 7)$; 2) $2x (\sin 3^{2x} + x \cos 3^{2x} \cdot 3^{2x} \ln 3)$.
 1117. $2e^{-x} / (e^{-x} - 1)^2$. 1118. $-\frac{1}{(x+1)^2} \operatorname{ctg} \frac{2x+3}{x+1}$. 1119. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 1120. $\frac{2}{x \sqrt{2x^2-1}}$. 1121. $\frac{5 \arctg \sqrt{x^2-1} \ln 5}{x \sqrt{x^2-1}}$. 1122. $-\frac{e^{\arcsin \frac{1}{x}}}{x \sqrt{x^2-1}}$. 1123. $4 \cdot 3^{\arctg^2(4x+1)} \frac{\arctg(4x+1)}{8x^2+4x+1} \ln 3$. 1124. $7 \cdot \cos^3 x \ln 7 \cos^2 x (\cos x - 3x \sin x)$. 1125. $-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. 1126. $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$. 1127. $-\frac{1+6 \operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x}$. 1128. $\frac{3 \sqrt{x} \cdot \ln 3}{2 \sqrt{x}} + 2x(x \sin 2x - \cos 2x)$. 1129. $\left(\frac{2}{\left(\arctg \frac{x}{2} + \cos^2 4x \right) (x^2+4)} - 4 \sin 8x \right)$.

$$\times \ln x + \frac{1}{x} \ln \cos x \Big). \quad 1178. \frac{1}{\ln^2 \sin x} \left(\frac{2 \ln \sin x}{\sin 2x} - \operatorname{ctg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x \right).$$

$$1179. x^5 (a+3x)^3 (a-2x)^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{9}{a+3x} - \frac{4}{a-2x} \right). \quad 1180. x^6 (x^2 + 1)^{10} \cdot (x^3 + 1)^5 \left(\frac{6}{x} + \frac{20x}{x^2 + 1} + \frac{15x^2}{x^2 + 1} \right).$$

$$1181. \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4} \times \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3} \right).$$

$$1182. \frac{x^3 (x^2 + 1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \left(\frac{5}{2x} + \frac{8x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2(x-1)} \right).$$

$$1183. \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right).$$

$$1184. \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2(x-1)}{\sin^2 x}} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - 2 \operatorname{ctg} x \right). \quad 1185. \operatorname{ch} x.$$

$$1186. \operatorname{sh} x. \quad 1187. 1/\operatorname{ch}^2 x. \quad 1188. -1/\operatorname{sh}^2 x. \quad 1189. \frac{2x \operatorname{ch} x - x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$1190. -\frac{3(x \ln x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x \operatorname{sh}^2 x}. \quad 1191. 6 \operatorname{sh}^2 2x \operatorname{ch} 2x. \quad 1192. -\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}.$$

$$1193. 2 \operatorname{ct} h 2x. \quad 1194. 4 \operatorname{sh} 4x. \quad 1195. \operatorname{sh} 2x e^{\operatorname{ch}^2 x}. \quad 1196. \frac{2}{\operatorname{sh} 2x}.$$

$$1197. -\frac{(5x-2)^2}{19}. \quad 1198. -\frac{(1+x^4)^2}{8x^3}. \quad 1199. \frac{1}{\cos x - \operatorname{tg} x}.$$

$$1200. 1 / \left(x + e^{\frac{x}{2}} \right). \quad 1201. \frac{\sqrt{1-2^{2x}}}{2^x \ln 2}. \quad 1202. \frac{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$1203. 18. \quad 1204. 120x. \quad 1205. -108 \sin 6x. \quad 1206. 2e^{x^2} (1 + \dots).$$

$$1207. -1/x^2. \quad 1208. \frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}. \quad 1209. -\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}^3}. \quad 1210.$$

$$-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 1211. -3 \cos x \sin^2 x. \quad 1212. -\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

$$1213. 4(3 \cos 2x - 6x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x). \quad 1214. 24 \ln x + 50. \quad 1215. 480.$$

$$1216. 4/e. \quad 1217. 0,5. \quad 1218. 7\sqrt{3}/36. \quad 1219. a^n \cos \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1220. a^n \sin \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right). \quad 1221. 2^{n-1} a^n \cos \left(2ax + n \frac{\pi}{2} \right).$$

$$1222. -2^{n-1} a^n \cos \left(2ax + n \frac{\pi}{2} \right). \quad 1223. (k \ln a)^n a^{kx}. \quad 1224. n!.$$

1225. $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 1226. $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1227. $\frac{(-1)^{n-1} (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$.
 1228. $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1229. $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$; $-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$. 1230. $-\operatorname{tg} t$;
 $\frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}$. 1231. $\frac{3t^2+1}{2t}$; $\frac{3t^2-1}{4t^3}$. 1232. $y'_x = y''_x = e^{t^2}$.
 1233. $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$; $-\frac{1}{4 \sin^4 \frac{t}{2}}$. 1234. $-2 \operatorname{tg}^3 t$; $6 \operatorname{tg}^4 t$. 1235. $\operatorname{tg} 2t$;
 $-\frac{\operatorname{tg}^2 2t}{2 \cos 2t}$. 1236. $\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$; $\frac{2}{e^t (\cos t - \sin t)^3}$. 1237. $\frac{2t}{1-t^2}$.
 1238. $\frac{4t}{t^2-4t-2}$. 1239. 1. 1240. 5. 1241. $-6e^{3t}(t^2+3t+1)$.
 1242. $-\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$. 1243. 1, 5. 1244. $-\frac{2x+y}{x+2y}$. 1245. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.
 1246. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. 1247. $-\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$. 1248. $e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. 1249.
 $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. 1250. $\frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$. 1251. $\frac{1}{3}$. 1252. 0,5.
 1253. $-4a^2/y^3$. 1254. $y/(1-y)^3$. 1255. $-2(1+y^2)/y^5$.
 1256. $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$. 1257. 4. 1258. $3a^2 x/y^5$. 1259. $-10x(a^2-x^2)^4 dx$.
 1260. $\frac{4(1+\operatorname{tg} x)^3}{\cos^2 x} dx$. 1261. $\ln x dx$. 1262. $\frac{dx}{\cos^4 x}$. 1263. $4 \sin^2 \varphi d\varphi$.
 1264. $\frac{4 t dt}{(t^2+1)^2}$. 1265. $\sin 2t dt$. 1266. $-\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi$. 1267. $\frac{adx}{a^2+x^2}$.
 1268. $\frac{\cos x dx}{(1+\sin^2 x) \operatorname{arctg}(\sin x)}$. 1269. $-2 \cdot 3^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 3 \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx$.
 1270. $\frac{1-x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2) \sqrt{1+x^2}} dx$. 1271. $\frac{y+x}{y-x} dx$. 1272. $\frac{y(3x^2 y+5)}{x(2x^2 y+5)} dx$.
 1273. $\frac{y dx}{x-y}$. 1274. $\frac{x+y}{x-y} dx$. 1275. $\frac{mn}{\ln mx} dx$. 1276. $\frac{dx}{3x^2-2}$.
 1277. $-\frac{2\pi \operatorname{tg} 2\pi x}{\ln 2} dx$. 1278. $\frac{2 \operatorname{tg} x dx}{(1+\operatorname{tg}^4 x) \cos^2 x}$. 1279. $-\frac{dx}{x \ln^2 x}$.
 1280. $(\sin x)^{\cos x} (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x \ln \sin x) dx$. 1281. $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}^{-\sin^2 x} \times$

- $\times \left(\sin 2x \ln x + \frac{\sin^2 x}{x} \right) dx.$ 1282. $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} a^{\sqrt{\cos x}} (1 + \sqrt{\cos x} \cdot \ln a) dx.$ 1283. $\operatorname{cth} x \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{sh} x} \right) dx.$ 1284. $\frac{dx}{\operatorname{ch} 2x}.$
 1285. $e^{-x} (a \operatorname{ch} ax - \operatorname{sh} ax) dx.$ 1286. $-\frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$ 1287. $\frac{dx}{x}.$ 1288. $\frac{adx}{ax+b}.$
 1289. $\frac{4dx}{(4x-2) \ln 3}.$ 1290. $\frac{dx}{\sin x}.$ 1291. $\frac{6x-5}{3x^2-5x+6} dx.$ 1292. $\operatorname{ctg} x dx.$
 1293. $\frac{dx}{\cos x}.$ 1294. $\frac{dx}{2\sqrt{x(x+a)}}.$ 1295. $\frac{dx}{x \ln x}.$ 1296. $\frac{x(2 \ln x + 1)}{\ln 3} dx.$
 1297. $\frac{(2x \ln x - 2x - 1) \ln 2}{x \ln^2 x} dx.$ 1298. $(x^2 (3 \ln x + 1) + \sin 2x) dx.$
 1299. $\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \cdot x^{\cos x} dx.$ 1300. $\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx.$ 1301. $x(1+x)\sqrt{1-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2(1-x)} \right) dx.$
 1302. $x^{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x} - \frac{\ln x}{\sin^2 x} \right) dx.$ 1304. $\cos x e^{\sin x} dx.$ 1305. $e^{-x^2} (1 - 2x^2) dx.$ 1306. $\frac{dx}{1+e^x}.$ 1307. $\frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a} \right) dx.$ 1308. $e^{-x^2} ((1-2x) \cos x - (1+2x) \sin x) dx.$ 1309. $-\frac{x dx}{1+x}.$ 1310. $-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2} dx.$ 1311. $2xe^{x^2+3} dx.$ 1312. $2\alpha (e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}) dx.$
 1313. $-25 \cos 5x dx^2.$ 1314. $-\frac{2 dx^2}{9x \sqrt[3]{x}}.$ 1315. $3^n \sin \left(3x + n \frac{\pi}{2} \right) dx^n.$
 1316. $\left(2 \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x} \right) dx^2.$ 1317. $2 \ln 2 \cdot 2^{x^2} (1 + 2x^2 \ln 2) dx^2.$
 1318. $\frac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^3.$ 1319. $32 \sin^4 x dx^3.$ 1320. $e^x (x^2 + 6x + 6) dx^3.$
 1321. 1) 0,5; 2) $48 \Delta x.$ 1322. 1) $\frac{0,005}{\sqrt{x}};$ 2) $16x \Delta x.$ 1323. $\Delta y = 0,53; dy = 0,5.$ 1324. $\Delta y = 0,91; dy = 0,9.$ 1325. 1) $\pi/36;$ 2) $1/2700.$ 1326. $\pi/45.$ 1327. $\approx 1,96.$ 1328. $\approx 2,01.$ 1329. $\approx 1,495.$ 1330. $\approx 3,02.$ 1331. $\approx 0,08.$ 1332. $\approx 1,99.$ 1333. $\approx 2,98.$ 1334. $\approx 2,975.$ 1335. $\approx 1,231.$ 1336. $\approx 1,07.$ 1337. $\approx 0,958.$

1338. $\approx 1,02$, 1339. $\approx 65,92$. 1340. $\approx 2,02$. 1359. $n!$ 1374. სპი
 ნამდვილი ფესვი, მოთავსებული (1; 2), (2; 3), (3; 4) შტალებში.
 1375. 2,5. 1376. $\pm 1/\sqrt{3}$. 1377. არა 1378. არა 1379. $9/4$.
 1380. $1/\ln 2$. 1381. 1. 1382. $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - 1$. 1383.] 2; 4[. 1384.
] - 0,5; 15/4 [. 1385. 14/9. 1386. $\pi/4$. 1387. არა 1388. 4/3.
 1389. 1. 1390. 2/3. 1391. $\sqrt{2}$. 1392. 1. 1393. 1/3. 1394. - 1/3.
 1395. 1. 1396. 1,5. 1397. $\frac{m}{n} a^{m-n}$. 1398. $\cos \varphi$. 1399. 2. 1400. 1/3.
 1401. 0. 1402. ∞ . 1403. - 1/8. 1404. a . 1405. 0. 1406. $+\infty$
 1407. 1,5. 1408. - 5/8. 1409. 0. 1410. 1. 1411. $\pi^2/2$. 1412. - 4/π.
 1413. 3. 1414. 0. 1415. 1. 1416. 1. 1417. 0. 1418. 0. 1419. 2/π.
 1420. 2. 1421. a . 1422. - 2. 1423. 1. 1424. 1. 1425. 0. 1426. 0.
 1427. 0. 1428. 1/2. 1429. - 1/2. 1430. 1/3. 1431. 1/3. 1432. 0.
 1433. - 1/3. 1434. - 1. 1435. 1/2. 1436. - 1/2. 1437. 1. 1438. 1.
 1439. e^{-6} . 1440. e . 1441. e^{-1} . 1442. $e^{2/\pi}$. 1443. 1. 1444. $1/\sqrt{e}$.
 1445. 1. 1446. 1. 1447. e^{-5} . 1448. 1. 1449. 1. 1450. 1. 1451. 1.
 1452. 1. 1453. e^2 . 1454. 1. 1455. 1. 1456. 1. 1457. 0. 1458. 1) 1;
 2) 0. 1459. $(x+1)^2 + 2(x+1)^2 - 4(x+1) - 8$. 1460. $(x-2)^3 +$
 $+ 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 11$. 1461. $(x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 5(x-$
 $- 1) + 2$. 1462. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.
 1463. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$. 1464. $\ln(1 +$
 $+ x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \times$
 $\times \frac{1}{(1 + \theta x)^{n+1}}$. 1465. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n} \sin \frac{n\pi}{2} +$
 $+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin \left[\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right]$; თუ $n = 2k + 1$, მაშინ $\sin x = x -$
 $- \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin \theta x$;
 თუ $n = 2k$, მაშინ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x$;
 $0 < \theta < 1$. 1466. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2} +$
 $+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left[\theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right]$; თუ $n = 2k + 1$, მაშინ $\cos x =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x; \text{ თუკი } n = 2k,$$

$$\text{მაშინ } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad 1467. (1+x)^m = 1 + mx +$$

$$\frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \frac{m^{\cdot}(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} \times$$

$$\times x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}. \quad 1468. 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3. \quad 1469. 1 +$$

$$+ 2x + x^2. \quad 1470. x + \frac{x^3}{3!}. \quad 1471. -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}. \quad 1472. 1 + 2x + 2x^2.$$

$$1473. \text{ ცლობილება ნაკლებია } \frac{1}{40}\text{-ზე. } 1474. \ln 1,5 \approx 0,4010; \text{ ცლობილება}$$

ნაკლებია 0,01-ზე. 1477. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია

$]1, +\infty[$ შუალედში. 1478. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია

$]1, +\infty[$ შუალედში. 1479. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში.

1480. ზრდალია $]0, +\infty[$ შუალედში. 1481. კლებადია $]1, +\infty[$ და $]2, +\infty[$ შუალედებში. 1482. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში.

1483. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]0; \frac{1}{e}[$ შუალედ-

ში. 1484. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]1, +\infty[$ და $]0; \frac{1}{e}[$ შუალედებში.

1485. ზრდალია $]1, +\infty[$ და $]2, +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]0; 2[$ შუალედში. 1486. ზრდალია $]1, +\infty[$ და $]1, +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]1, +\infty[$ და $]1, +\infty[$ შუალედში.

1487. ზრდალია $]2, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]1, +\infty[$ და $]2, +\infty[$ შუალედში. 1488. ზრდალია $]1, +\infty[$ შუალედში, კლებადია $]0; 1[$ შუალედში. 1489. $y(1) = 2$ მინიმუმი.

1490. $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ მაქსიმუმი. 1491. $y(4) = 1$ მაქსიმუმი.

1492. $y(0) = -1$ მინიმუმი. 1493. $y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ მაქსიმუმი

1494. $y(\pm 1) = 0$ მინიმუმი; $y(0) = 1$ მაქსიმუმი. 1495. $y(-1) = 1$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი. 1496. $y(0) = 0$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{2}{5}\right) = -$

$-\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ მინიმუმი. 1497. არა აქვს ექსტრემუმი. 1498. არა აქვს

ექსტრემუმის წერტილები. 1499. $y(0) = 1$ მაქსიმუმი; $y(\pm 1) = \frac{1}{2}$ მინი-
 მუმი. 1500. $y(0) = 1$ მინიმუმი; $y(\pm 2) = 5$ მაქსიმუმი. 1501. $y(0) = 1$
 მაქსიმუმი; $y(1) = 0$. 1502. $y(2) = 33$ მაქსიმუმი; $y(6) = 1$ მინიმუმი.
 1503. $y(1) = 4$ მაქსიმუმი; $y(5) = -28$ მინიმუმი. 1504. $y(-1) = 0$
 მაქსიმუმი; $y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{32}{27}$ მინიმუმი. 1505. $y(0) = -2$ მაქსიმუმი;
 $y(2) = 2$ მინიმუმი. 1506. $y(1) = -4$ მაქსიმუმი; $y(5) = 4$ მინიმუმი.
 1507. $y(0) = 1$ მინიმუმი. 1508. $y(1) = 0$ მინიმუმი. 1509. არა აქვს
 ექსტრემუმი. 1510. არა აქვს ექსტრემუმი. 1511. $y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 მაქსიმუმი; $y\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ მინიმუმი. 1512. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$
 მინიმუმი; $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1$ მაქსიმუმი. 1513. $y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
 მაქსიმუმი; $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ მინიმუმი. 1514. $y(1) = 0$ მინიმუმი;
 $y(e^{-2}) = 4e^{-2}$ მაქსიმუმი. 1515. $y(1) = 1$ მაქსიმუმი. 1516. $y(0) = 0$
 მინიმუმი. 1517. $y(-\ln \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ მინიმუმი. 1518. $y(0) = 0$ მინიმუმი;
 $y(2) = \frac{4}{e^2}$ მაქსიმუმი. 1519. $y(-1) = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$ მინიმუმი.
 1520. $y(1) = 3$ მაქსიმუმი; $y(e) = e$ მინიმუმი. 1521. $y(1) = 1$ უმცო-
 რესი მნიშვნელობა; $y(-1) = 5$ უდიდესი მნიშვნელობა. 1522. $y(-1) =$
 $= -\frac{13}{3}$ უმც.; $y(5) = \frac{23}{3}$ უდიდ. 1523. $y(\pm 2) = -25$ უმც.;
 $y(\pm 1) = 2$ უდიდ. 1524. $y(-1) = -10$ უმც.; $y(1) = 2$ უდიდ.
 1525. $y(1) = 23$ უდიდ.; $y(-1) = -53$ უმც. 1526. $y(0) = 0$ უმც.;
 $y(4) = 8$ უდიდ. 1527. $y(0) = 0$ უმც.; $y(2\pi) = 2\pi$ უდიდ. 1528. $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$
 $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ უდიდ.; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$ უმც. 1529. $y(0) = 0$ უმც.; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
 უდიდ. 1530. $y(0) = \frac{\pi}{4}$ უდიდ.; $y(1) = 0$ უმც. 1531. $y(2) = 0,2$ უდიდ.;
 $y(0) = -1$ უმც. 1532. $y(0) = y(1) = 1$ უდიდ.; $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$ უმც.
 1533. $a/2$ დი და $a/2$. 1534. 6 და 6. 1535. 10 მ. 1536. 50 მ და 100 მ.
 1537. ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდია 6 სმ. 1538. 4 და 2. 1539. ფუძის

გვერდი უნდა უდრიდეს ვაორკეცებულ სიმაღლეს. 1540. 3 სმ, 4 სმ, 6 სმ.
 1541. $\frac{18}{\pi + 4} \approx 2.5$ მ. 1542. 20 სმ. 1543. 1) (1; 1); 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{23}{4}\right)$.
 1544. $M(1,5; 0)$. 1545. კათეტები $\frac{h}{\sqrt{2}}$ და $\frac{h}{\sqrt{2}}$. 1546. კვადრა-
 ტი, რომლის გვერდია $R\sqrt{2}$. 1547. 4 სმ და $\sqrt{3}$ სმ. 1548. $\frac{3}{5}p, \frac{3}{5}p$
 და $\frac{4}{5}p$. 1549. 60° . 1550. ტრაპეციის ფერდია $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$. 1551. $\alpha =$
 $= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ ცენტრალური კუთხე. 1552. კვადრატის, რომლის გვერ-
 დია $\frac{p}{2}$. 1553. 1) ცილინდრის ფუძის რადიუსი $r = R \sqrt{\frac{2}{3}}$, ხოლო
 ცილინდრის სიმაღლე $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; 2) $R\sqrt{2}$. 1554. 1) $h = \frac{4}{3}R$ (კო-
 ნუსის სიმაღლე), $V = \frac{8}{27} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$; 2) $h = 4R$ (კონუსის სიმაღლე),
 $V = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. 1555. $h = \frac{H}{2}$ (ცილინდრის სიმაღლე), $V = \frac{4}{27} \pi R^2 H$;
 $h = 2$, $V = \frac{128}{9} \pi$. 1556. $R = \frac{3}{2}r$ (კონუსის ფუძის რადიუსი).
 1557. $R\sqrt{2}$ (ფუძის გვერდი) და $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ (სიმაღლე). 1558. $a/\sqrt{3}$.
 1559. კვადრატის, რომლის გვერდია $\frac{D}{\sqrt{2}}$. მითითება. თუ ძელის კვე-
 თის ზომებია x და y , მაშინ მისი გამძლეობა არის $I = Cxy$, სადაც C პრო-
 პორციულობის კოეფიციენტი. 1560. 10 სმ. 1561. $\frac{a}{\sqrt{2}}$, სადაც a არის
 მანძილი იატაკზე ნათურის გეგმილიდან A წერტილამდე მითითება.
 განათება $I = c \frac{\sin \varphi}{r^2}$, სადაც φ არის კუთხე, რომელსაც სხივი ადგენს
 სიბრტყესთან A წერტილში, ხოლო r მანძილია ნათურიდან A წერტილამდე
 (c დადებითი მუდმივა). 1562. 1-სანთლანის ნათურიდან 1 მ-ით დაშორე-
 ბული წერტილი. 1563. წირი ამოზნექილია ყველგან. 1564.] — ∞ , 0 [
 შუალედში ამოზნექილია,] 0, + ∞ [შუალედში ჩაზნექილია, 0 (0; 0)
 გადაღუნვის წერტილია. 1565. წირი ჩაზნექილია ყველგან. 1566. წირი ამო-
 ზნექილია] 0, + ∞ [შუალედში. 1567.] — π ; 0 [-ში ჩაზნექილია,

$]0; \pi[-$ ში ამოზნექილია, $O(0; 0)$ გადაღუნვის წერტილია. 1568. $] -\frac{\pi}{0}; 0[-$ ში

ამოზნექილია, $]0; \frac{\pi}{2}[-$ ში ჩაზნექილია, $O(0; 0)$ გადაღუნვის წერტილია.

1569. $] -\infty; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია. 1570. $] -\infty; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია. 1571. $] -\infty; -3[-$ ში ამოზნექილია, $] -3; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს. 1572. $] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ და

$]-\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$ შუალედებში ჩაზნექილია. $] -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ შუა-

ლედში ამოზნექილია, $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ გადაღუნვის წერტილებია.

1573. $] -\infty; 0[-$ ში ამოზნექილია, $]0; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია, $O(0; 0)$ გადაღუნვის წერტილია. 1574. $] -\infty; -2[-$ ში ჩაზნექილია, $] -2; +\infty[-$ ში ამოზნექილია, $(-2; 0)$ გადაღუნვის წერტილია. 1575. $] -\infty; 2[-$ ში ამოზნექილია, $]2; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია, $(2; 12)$ გადაღუნვის წერტილია.

1576. $] -\infty; 1[-$ ში ამოზნექილია, $]1; +\infty[-$ ში ჩაზნექილია. $(1; -1)$ გადაღუნვის წერტილია. 1577. $] -\infty; \frac{1}{2}[-$ ში ჩაზნექილია, $]\frac{1}{2}; +\infty[-$ ში

ამოზნექილია, $(\frac{1}{2}; e^{\arctg \frac{1}{2}})$ გადაღუნვის წერტილია. 1578. $] -\infty; -1[$

და $]1; +\infty[$ შუალედებში ამოზნექილია, $] -1; 1[-$ ში ჩაზნექილია, $(\pm 1; \ln 2)$ გადაღუნვის წერტილებია. 1579. $x=1$. 1580. $x=-2; y=0$.

1581. $y=1$. 1582. $x=0$. 1583. $x=1, y=x$. 1584. $x=\pm 1, y=0$.

1585. $y=\pm \frac{\pi}{2}$. 1586. $x=0, y=1$. 1587. $y=2$. 1588. $x=0;$

$y=0$ — მარჯვენა ჰორიზონტალური, $y=1$ — მარცხენა ჰორიზონტალური.

1589. არა აქვს ასიმპტოტი. 1590. $x=1, y=-\frac{x+1}{2}$. 1591. $x=-1,$

$y=\frac{1}{2}x-1$. 1592. $y=0$. 1593. $x=-1, y=0$. მითითება. რო-

ცა წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x=f(t), y=\varphi(t)$,

მაშინ; თუ $f(t_0)=\infty$, ხოლო $\varphi(t_0)=c$, წირს აქვს $y=c$ ჰორიზონტალური

ასიმპტოტი; თუ $\varphi(t_0)=\infty$, ხოლო $f(t_0)=c$, — წირს აქვს $x=c$ ვერტიკალური

ასიმპტოტი; თუკი $f(t_0)=\varphi(t_0)=\infty$ და მასთან $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t)}{f(t)} = k$,

$\lim_{t \rightarrow t_0} [\varphi(t) - kf(t)] = b$, წიის აქვს დახრილი ასიმპტოტი $y = kx + b$,

როცა წიის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r = f(\varphi)$, მაშინ ის უნდა ჩავწეროთ პარამეტრული სახით შემდეგნაირად: $x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi$. 1594. $y = x \pm \pi$. 1595. $y(0) = 1$

მაქსიმუმი; $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4} \right)$ გადალუნვის წერტილებია; $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$
და $]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ შუალედებში ჩაზნექილია; $]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$

შუალედში ამოზნექილია; $y = 0$ — ასიმპტოტი 1596. $y(0) = 1$ მინიმუმი; $]-\infty, -1[$ და $]1, +\infty[$ შუალედებში ამოზნექილია; $] -1; 1[$ შუალედში ჩაზნექილია; $x = \pm 1, y = 0$ — ასიმპტოტები. 1597. $]0; 0[$ გადალუნვის წერტილია; $] -1; 0[$ -ში ამოზნექილია, $]0; 1[$ -ში ჩაზნექილია; $x = \pm 1$ — ასიმპტოტები. 1598. $y(1) = \frac{1}{2}$ მაქსიმუმი; $]\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}[$,

$(0; 0)$ გადალუნვის წერტილებია; $]0; \sqrt{3}[$ -ში ამოზნექილია; $]\sqrt{3}; +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $y = 0$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ. 1599. $y(1) = \frac{7}{3}$ მაქსიმუმი; $y(3) = 1$ მინიმუმი; $\left(2; \frac{5}{3} \right)$ გადა-

ლუნვის წერტილია; $] -\infty, 2[$ -ში ამოზნექილია; $]2, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; 1600. $y(-5) = 0$ მაქსიმუმი; $y(-1) = -32$ მინიმუმი; $] -3; -16[$ გადალუნვის წერტილია; $] -\infty, -3[$ -ში ამოზნექილია; $] -3, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია. 1601. $y(0) = 0$ მაქსიმუმი; $]0; 2[$ -ში ამოზნექილია, $]2, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $x = 2, y = 1$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. 1602. $y(0) = 2$ მინიმუმი; $]0, \frac{1}{2}[$ -ში ჩაზნექილია;

$]\frac{1}{2}; +\infty[$ -ში ამოზნექილია; $x = \frac{1}{2}; y = 1$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. 1603. $y(-1) = -\frac{1}{4}$ მინიმუმი;

$\left(-2; -\frac{2}{9} \right)$ გადალუნვის წერტილია; $] -\infty, -2[$ -ში ამოზნექილია; $] -2; 1[$ -ში და $]1, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $x = 1, y = 0$ — ასიმპტოტები.

1604. $y(-3) = -\frac{27}{4}$ მინიმუმი; $(-2; 4), (0; 0)$ გადალუნვის წერტილებია; $] -\infty, -2[$ და $]0, +\infty[$ შუალედებში ჩაზნექილია; $] -2; 0[$ -ში ამოზნექილია. 1605. $y(3) = -4,5$ მაქსიმუმი; $(0; 0)$ გადალუნვის წერტი-

ლია; $]0; \sqrt{3}[$ -ში ჩაზნექილია; $]\sqrt{3}, +\infty[$ -ში ამოზნექილია; $x = \sqrt{3}$,

$y = -x$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ.

1606. $y(-2) = -4$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი; $] -\infty, -1[$ -ში ამოზნექილია; $] -1, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $x = -1, y = x - 1$ — ასიმპტოტები. 1607. $y(\sqrt{2}) = 2$ მინიმუმი; $] \sqrt{2}, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $x = 1, y = x$ — ასიმპტოტები; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

1608. $y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ მინიმუმი; $(0; 0)$ გადაღუნვის წერტილია;

$] 0; 1[$ -ში და $] 3, +\infty[$ -ში ამოზნექილია; $] 1; \sqrt{3}[$ -ში ჩაზნექილია; $x = 1$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ. 1609. $y(-1) = 1$ მაქსიმუმი; $y(0) = 0$ მინიმუმი; $] -\infty, 0[$ -ში და $] 0, +\infty[$ -ში ამოზნექილია. 1610. $y(0) = 0$ მაქსიმუმი; $y\left(-\frac{2}{5}\right) = -0,33$ მინიმუმი; $x = -\frac{1}{5}$ —

გადაღუნვის წერტილის აბსცისა; $] -\infty, -\frac{1}{5}[$ -ში ამოზნექილია;

$] -\frac{1}{5}, 0[$ -ში და $] 0, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია. 1611. $y(1) = \sqrt{2}$ მაქსიმუმი; $(1, +\infty)$ -ში ჩაზნექილია; $y = 0$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. 1612. $(-\infty, 0)$ -ში ჩაზნექილია; $(0, +\infty)$ -ში ამოზნექილია; $x = 0, y = x + 2$ — ასიმპტოტები.

1613. $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ მინიმუმი; $y(0) = 0; y(1) = 0; (0, +\infty)$ -ში

ჩაზნექილია. 1614. $y(e) = \frac{1}{e}$ მაქსიმუმი; $\left(e^{\frac{2}{3}}; \frac{3}{3e^2}\right)$ გადაღუნვის წე-

რტილია $] 0; e^{\frac{3}{2}}[$ -ში ამოზნექილია; $] e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$ -ში ჩაზნექილია; $x = 0, y = 0$ — ასიმპტოტები. 1615. $] 1, +\infty[$ -ში ამოზნექილია; $x = 1$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. 1616. $y(0) = 0$ მინი-

მუმი; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; e^{-\frac{3}{2}}\right)$ გადაღუნვის წერტილია; $] 0; \sqrt{\frac{2}{3}}[$ -ში ჩაზ-

ნექილია; $] \sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$ -ში ამოზნექილია; $y = 1$ — ასიმპტოტი; გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. 1617. ფუნქცია პერიოდულია 2π პერიოდით; $[0; 2\pi]$ სეგმენტზე; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

$= -\sqrt{2}$ მინიმუმი; $\left(\frac{3\pi}{4}; 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}; 0\right)$ ვადალუნვის წერტილებია.

1618. ფუნქცია პერიოდულია 2π პერიოდით; $[0; 2\pi]$ სეგმენტზე $y\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$= y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ მაქსიმუმი; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ და $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$ მინიმუ-

მი; $x_1 \approx \frac{3\pi}{10}, x_2 \approx \frac{2\pi}{3}, x_3 \approx \frac{11}{9}\pi, x_4 \approx \frac{16}{9}\pi$ ვადალუნვის წერტი-

ლების აბსცისებია. 1619 — 1622 მითითება. თუ წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით $x = f(t), y = \varphi(t)$, მაშინ ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება შესრულდება ისევე, როგორც $y = f(x)$

განტოლებით მოცემული წირისათვის. გამოვითვლით $\frac{dx}{dt} = f'(t), \frac{dy}{dt} = \varphi'(t)$

წარმოებულებს. გარდა ამისა, გამოვითვლით $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$ (A) წარმოე-

ბულს. ვიპოვით t პარამეტრის იმ t_1, t_2, \dots, t_k მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც $f'(t)$ ან $\varphi'(t)$ წარმოებულები ნულის ტოლი ხდება, ან განიციდის წყვეტას (ესენია ე. წ. კრიტიკული წერტილები). (A) ფორმულის მიხედვით ყოველ $(t_1, t_2); (t_2, t_3); \dots; (t_{k-1}, t_k)$ ინტერვალში და, მაშასადამე, ყოველ $(x_1, x_2); (x_2, x_3); \dots; (x_{k-1}, x_k)$ ინტერვალში (სადაც $x_i = f(t_i)$) განვა-

ზღვრავთ $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის ნიშანს და ამით დავადგენთ ზრდადობისა და

კლებადობის შუალედებს. შემდეგ გამოვითვლით $\frac{d^2y}{dx^2}$ წარმოებულს და გან-

ვსაზღვრავთ წირის ჩაზნექილობასა და ამოზნექილობას. ასიმბტოტების მოსა-

ძებნად ვიპოვით t -ს იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც x ან y ან ორივე ერთად უსასრულოდ დიდი ხდება. 1623. $3x + y - 2 = 0; x - 3y + 6 = 0$.

1624. $4x + y - 8 = 0; x - 4y - 2 = 0$. 1625. $y = 0; x + 1 = 0$.

1626. $8x - y - 22 = 0; x + 8y - 19 = 0$. 1627. 1) $y = 2x; y =$

$= -\frac{1}{2}x$; 2) $y = x - 1; y = 1 - x$. 1628. $2x + y - 3 = 0; x - 2y +$

$+ 1 = 0; 2x - y + 3 = 0; x + 2y - 1 = 0$. 1529. 1) $xx_0 + yy_0 = R^2;$

$xy_0 - yx_0 = 0$; 2) $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1; \frac{xy_0}{b^2} - \frac{yx_0}{a^2} = \frac{c^2 x_0 y_0}{a^2 b^2}$ ($c^2 =$

$= a^2 - b^2$). 1630. 1) $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1; \frac{xy_0}{b^2} + \frac{yx_0}{a^2} = \frac{c^2 x_0 y_0}{a^2 a^2}$ ($c^2 =$

$= a^2 + b^2$); 2) $yy_0 = p(x + x_0); xy_0 + py = y_0(p + x_0)$. 1631. $y = a;$

- $x=0$. 1632. $y=0$; $x=0$. 1633. $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$.
 1634. $4x+3y-30=0$. 1635. $3x-5y+30=0$. 1636. $4x+3y-12\sqrt{2}=0$. 1637. 1) $y=0$; 2) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}=0$.
 1638. $x+2y-4$; $2x-y-3=0$. 1639. $4x+2y-3=0$; $2x-4y+1=0$. 1640. $y=1+x\ln a$; $y=1-\frac{x}{\ln a}$. 1641. $2x+3y\pm 26=0$. 1642. $y=x+5$. 1643. $2x-y\pm 1=0$. 1644. $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$.
 1645. 45° . 1646. $\arctg 2\sqrt{2}$. 1647. 0 ; $\arctg \frac{1}{7}$. 1648. $\arctg \frac{4}{3}$.
 1649. $\operatorname{tg} \omega = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$. 1650. $\arctg \frac{41}{2}$. 1651. $\arctg 3$.
 1652. 90° . 1653. $TM = MN = 2\sqrt{2}$; $TK = KN = 2$. 1654. $TM = MN = \sqrt{2}$; $TK = KN = 1$. 1655. $1/\ln 2$. 1657. $TM = \frac{a}{2}\sqrt{5}$;
 $MN = a\sqrt{5}$; $TK = \frac{a}{2}$; $KN = 2a$; $2x-y-a=0$; $x+2y-3a=0$.
 1658. $TM = MN = a\sqrt{2}$; $TK = KN = a$. 1660. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm\sqrt{2}$;
 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm\sqrt{2}$. 1663. $\arctg \frac{1}{k}$. 1664. $\frac{\pi}{2} + 2\varphi$. 1665. $TM = \sqrt{a^2 + r_0^2}$;
 $MN = \frac{r_0}{a}\sqrt{a^2 + r_0^2}$; $OT = a$; $ON = \frac{a}{r_0^2}$; $\operatorname{tg} \mu = -\varphi_0$.
 1666. $TM = 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $MN = a\sqrt{1+4\pi^2}$; $OT = 4\pi a^2$; $ON = a$;
 $\operatorname{tg} \mu = 2\pi$. 1667. $ds = \frac{a}{y}dx$; $\cos \alpha = \frac{y}{a}$; $\sin \alpha = -\frac{x}{a}$. 1668. $ds = \frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}dx$;
 $\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}$; $\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$. 1669. $ds = \sqrt{1+9a^2x^4}dx$;
 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+9a^2x^4}}$; $\sin \alpha = \frac{3ax^2}{\sqrt{1+9a^2x^4}}$.
 1670. $ds = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}dx$; $\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$; $\sin \alpha = -\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. 1671. $ds = 3a \sin t \cos t dt$;
 $\cos \alpha = -\cos t$; $\sin \alpha = \sin t$. 1672. $ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$;

$$\cos \alpha = \sin \frac{t}{2}; \quad \sin \alpha = \cos \frac{t}{2}. \quad 1673. \quad ds = a \sqrt{1+\varphi^2} d\varphi; \quad \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}; \quad \sin \beta = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}. \quad 1674. \quad ds = \frac{a}{\varphi^2} \sqrt{1+\varphi^2} d\varphi;$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}; \quad \sin \beta = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}. \quad 1675. \quad ds = r \sqrt{1+\ln^2 a} d\varphi;$$

$$\cos \beta = \frac{\ln a}{\sqrt{1+\ln^2 a}}; \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}. \quad 1676. \quad 1) \quad ds = ad\varphi; \quad \cos \beta =$$

$$= \cos \varphi; \quad \sin \beta = \sin \varphi; \quad 2) \quad ds = 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi; \quad \cos \beta = \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \sin \beta = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

$$1677. \quad K = 24/125; \quad R = 125/24. \quad 1678. \quad K = -2; \quad R = 1/2. \quad 1679.$$

$$1) \quad K=0; \quad R=+\infty; \quad 2) \quad |K|=1/5; \quad R=5. \quad 1680. \quad |K_A|=|K_{A1}|=2;$$

$$|K_B|=|K_{B1}|=1/4; \quad R_A=R_{A1}=1/2; \quad R_B=R_{B1}=4. \quad 1681. \quad 1) \quad K=$$

$$= \frac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}}; \quad R=1/|K|; \quad 2) \quad K = \frac{4a^2}{(4a^2+x^2)^{3/2}}; \quad R=1/K.$$

$$1682. \quad K=3/80\sqrt{10}; \quad R=1/K. \quad 1683. \quad 1) \quad K=1/2\sqrt{2}; \quad R=|2\sqrt{2};$$

$$2) \quad K=-1; \quad R=1. \quad 1684. \quad R = \frac{1}{|\cos x|}; \quad K = \cos x. \quad 1685. \quad K=6/13\sqrt{13};$$

$$R=1/K. \quad 1686. \quad K=-1/6; \quad R=6. \quad 1687. \quad K=-1/4a; \quad R=4a.$$

$$1688. \quad K=-2/3a \sin 2t; \quad R=1/|K|. \quad 1689. \quad K=1/\sqrt{2}; \quad R=\sqrt{2}.$$

$$1690. \quad K = \frac{r^2+2a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}; \quad R=1/K. \quad 1691. \quad K=2/a; \quad R=a/2. \quad 1692. \quad K=$$

$$= 3/4a \cos \frac{\varphi}{2}; \quad R=1/|K|. \quad 1693. \quad M \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2} \ln 2 \right) \text{წერტილ-}$$

$$\text{ზე. } R_{\text{ნოს.}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}. \quad 1694. \quad M \left(-\frac{1}{2} \ln 2; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{წერტილზე. } R_{\text{ნოს.}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad 1695. \quad (4; 4); \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 8. \quad 1696. \quad (3; 1, 5);$$

$$(x-3)^2 + (y-1,5)^2 = 0,25. \quad 1697. \quad (-2; 3); \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8.$$

$$1698. \quad (3; -2); \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 8. \quad 1699. \quad Y^2 = \frac{8}{27\rho} (X-\rho)^3.$$

$$1700. \quad O(0; 0) \text{ წერტილი. } \quad 1701. \quad (X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}.$$

$$1702. \quad \left(\frac{X}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad 1703. \quad X=a(t+\sin t), \quad Y=$$

$$= -a(1-\cos t). \text{ შემოვიღოთ ახალი პარამეტრი } \tau = t - \pi, \text{ მაშინ მარ-}$$

ტივი ვარაქმნებით მივიღებთ: $X' = a(\tau - \sin \tau)$, $Y' = a(1 - \cos \tau)$, სადაც $X' = X - a\pi$, $Y' = Y + 2a$. ციკლოიდის ევოლუტი არის ისევ ციკლოიდი, მხოლოდ კოორდინატთა სათავე გადატანილია $O'(a\pi; -2a)$.

წერტილში. 1704. $X^3 + Y^2 = a^2$. 1705. $(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

1706. $(X + Y)^{\frac{2}{3}} + (X - Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$. 1707. $X = \frac{a}{3}(1 + \cos \varphi)$; $Y =$

$= -\frac{2}{3} a \sin \varphi$. 1708. 1) $X = \frac{a\varphi}{\varphi^2 + 2}$; $Y = \frac{a(\varphi^2 + 1)}{\varphi^2 + 2}$; 2) $X = 0$;

$Y = ae^{a\varphi}$. 1709. $8 - i$. 1710. $\frac{14}{5} i$. 1711. $-32 + 16i$. 1712. $\frac{1}{2} +$

$+ i \frac{3}{2}$. 1713. -1 . 1714. $x = 2$; $y = 3$. 1715. $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{4}$.

1716. $x = \frac{17}{7}$; $y = -\frac{13}{7}$. 1717. $x = \frac{-b}{a^2 + b^2}$; $y = \frac{-a}{a^2 + b^2}$.

1718. $z_1 = 1$; $z_2 = i$. 1719. $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$. 1720. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} +$

$+ i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. 1721. $\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$.

1722. $2 \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$. 1723. $\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)$.

1724. -2^{10} . 1725. $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$. 1726. 2^{20} . 1727. $\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$,

$k = 0, 1, 2$. 1728. $\cos(2k + 1) \frac{\pi}{4} + i \sin(2k + 1) \frac{\pi}{4}$, $k = 0, 2, 3$.

1729. $\cos \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right)$, $k = 0, 1$. 1730. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{8k + 1}{8} \pi +$

$+ i \sin \frac{8k + 1}{8} \pi \right)$, $k = 0, 1$. 1731. $\frac{x^6}{3} + C$. 1732. $a^2 x^5 + C$.

1733. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$. 1734. $2x^3 + 2x^2 + \ln|x| + C$. 1735. $\frac{x^2}{2} +$

$+ 2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$. 1736. $2 \ln|x| - x + \frac{x^2}{2} + C$. 1737. $6\sqrt[3]{x} -$

$-\frac{x^2 \sqrt{x}}{10} + C$. 1738. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x}(x - 4) + C$. 1739. $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C. \quad 1741. \frac{24}{13} x \sqrt[12]{x} + \frac{4}{3} x^2 \sqrt[4]{x} + C. \quad 1742. \frac{8}{15} x \times \\
& \times \sqrt[5]{x^7} + C. \quad 1743. \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C. \quad 1744. \frac{(ae)^x}{\ln a + 1} + C. \quad 1745. e^x - \\
& - x + C. \quad 1746. \frac{a^x}{\ln a} - \frac{1}{3x^3} + C. \quad 1747. e^x + \frac{1}{x} + C. \quad 1748. \operatorname{tg} x - \\
& - x + C. \quad 1749. -\operatorname{ctg} x - x + C. \quad 1750. \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \sin x + C. \quad 1751. \\
& 2 \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcsin} x + C. \quad 1752. \cos x - \operatorname{ctg} x + C. \quad 1753. x - \cos x + C. \\
& 1754. x - \sin x + C. \quad 1755. x + \sin x + C. \quad 1756. -\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t + C. \\
& 1757. \operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t + C. \quad 1758. \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + x) + C. \quad 1759. 3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + C. \\
& 1760. x + \ln |3x + 2| + C. \quad 1761. 4(x + 7 \ln |x - 7|) + C. \\
& 1762. -\frac{1}{9(3x + 2)^3} + C. \quad 1763. -\sqrt{3 - 2x} + C. \quad 1764. \frac{1}{2} \ln^2 x + C. \\
& 1765. -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C. \quad 1766. \frac{1}{5} e^{5x} + C. \quad 1767. \ln(1 + x^2) + C. \\
& 1768. \frac{2^{5x+3}}{5 \ln 2} + C. \quad 1769. 3 \sin \frac{x+1}{3} + C. \quad 1770. -\ln |\cos x| + C. \\
& 1771. \ln |\sin x| + C. \quad 1772. e^x - e^{-x} + C. \quad 1773. \frac{3^{\sin x}}{\ln 3} + C. \\
& 1774. 3 \ln \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C. \quad 1775. \frac{1}{6} \sqrt{(1 + 4 \sin x)^3} + C. \quad 1776. \\
& -\frac{1}{\operatorname{arcsin} x} + C. \quad 1777. 2 \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C. \quad 1778. 2 \sqrt{1 + \sin^2 x} + C. \\
& 1779. \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 x + C. \quad 1780. \frac{1}{3} \ln^3 |x| + C. \quad 1781. -e^{\frac{1}{x}} + C. \\
& 1782. 2 \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + C. \quad 1783. \frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C. \quad 1784. \\
& -\frac{1}{2} \sqrt{\cos 2x} + C. \quad 1785. \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C. \quad 1786. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C. \\
& 1787. -\sqrt{a^2 - x^3} + C. \quad 1788. \ln(e^x + 1) + C. \quad 1789. x - \ln(e^x + 1) + C. \\
& 1790. \ln(e^x + e^{-x}) + C. \quad 1791. -\ln |\sin x + \cos x| + C. \quad 1792. \\
& \frac{2 \operatorname{arctg} x}{\ln 2} + C. \quad 1793. \frac{1}{\ln 3} \operatorname{arctg} 3^x + C. \quad 1794. -\frac{1}{3} \cos(1 + x^3) + C.
\end{aligned}$$

1796. $\ln|x+\cos x|+C$. 1796. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. 1797. $\frac{1}{3\cos^3x}+C$.
 1798. $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+C$. 1799. $\frac{5}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C$. 1800. $\ln|\sin 2x|+C$.
 1801. $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$. 1802. $\ln|\ln|x||+C$. 1803.
 $\frac{1}{2}\arcsin^2x+C$. 1804. $\arcsin(\ln x)+C$. 1805. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$.
 1806. $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. 1807. $\frac{1}{48}(4x^2-1)^6+C$. 1808. $\frac{1}{2}\sin(x^2+3)+C$.
 1809. $-\frac{1}{2}\cos^4x+C$. 1810. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4)^4}+C$. 1811. $\frac{1}{2}\sqrt{7+x^4}+C$.
 1812. $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^2}+C$. 1813. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$. 1814. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}+C$.
 1815. $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$. 1816. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.
 1817. $-\frac{1}{3\ln 2}2^{-x^3}+C$. 1818. $\sin(\ln x)+C$. 1819. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3x+C$.
 1820. $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$. 1821. $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$. 1822. $2(\sqrt{x+1}+\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$.
 1823. $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|+C$. 1824. $\ln|\sin e^x|+C$. 1825. $-\frac{4}{x-2}-\frac{11}{2(x-2)^2}+C$. 1826. $\frac{4}{3}\times$
 $\times\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$. 1827. $\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}e^x)^3}+C$. 1828. $2e^{\sqrt{x}}+C$.
 1829. $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}+C$. 1830. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}x+C$. 1831. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x+C$.
 1832. $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C$. 1833. $\frac{1}{80}\ln\left|\frac{6x+5}{6x-5}\right|+C$.
 1834. $\frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a}x+C$. 1835. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{4}x+C$. 1836. $\ln|x+$
 $+\sqrt{x^2+a}|+C$. მიითხოვება. ისარგებლოთ $\sqrt{x^2+a}=t-x$ ჩასმით,
 საიდანაც მარტივი გარდაქმნებით მიიღება $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$. 1837. $\frac{1}{b}\ln|bx+$
 $+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C$. 1838. $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C$. 1839. $\frac{1}{3}\ln|x^3+$

- $+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$ 1741. $\frac{24}{13}x\sqrt[12]{x}+\frac{4}{3}x^2\sqrt[4]{x}+C.$ 1742. $\frac{8}{15}x\times$
 $\times\sqrt[5]{x^7}+C.$ 1743. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C.$ 1744. $\frac{(ae)^x}{\ln a+1}+C.$ 1745. e^x-
 $-x+C.$ 1746. $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{1}{3a^3}+C.$ 1747. $e^x+\frac{1}{x}+C.$ 1748. $\operatorname{tg}x-$
 $-x+C.$ 1749. $-\operatorname{ctg}x-x+C.$ 1750. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C.$ 1751.
 $2\arctg x-3\arcsin x+C.$ 1752. $\cos x-\operatorname{ctg}x+C.$ 1753. $x-\cos x+C.$
 $1754. x-\sin x+C.$ 1755. $x+\sin x+C.$ 1756. $-\operatorname{ctgt}-\operatorname{tgt}+C.$
 $1757. \operatorname{tgt}-\operatorname{ctgt}+C.$ 1758. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C.$ 1759. $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+C.$
 $1760. x+\ln|3x+2|+C.$ 1761. $4(x+7\ln|x-7|)+C.$
 $1762. -\frac{1}{9(3x+2)^3}+C.$ 1763. $-\sqrt{3-2x}+C.$ 1764. $\frac{1}{2}\ln^2x+C.$
 $1765. -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C.$ 1766. $\frac{1}{5}e^{5x}+C.$ 1767. $\ln(1+x^2)+C.$
 $1768. \frac{2^{5x+3}}{5\ln 2}+C.$ 1769. $3\sin\frac{x+1}{3}+C.$ 1770. $-\ln|\cos x|+C.$
 $1771. \ln|\sin x|+C.$ 1772. $e^x-e^{-x}+C.$ 1773. $\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C.$
 $1774. 3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C.$ 1775. $\frac{1}{6}\sqrt{(1+4\sin x)^3}+C.$ 1776.
 $-\frac{1}{\arcsin x}+C.$ 1777. $2\sqrt{\operatorname{tg}x-1}+C.$ 1778. $2\sqrt{1+\sin^2x}+C.$
 $1779. \frac{1}{2}\arctg^2x+C.$ 1780. $\frac{1}{3}\ln^3|x|+C.$ 1781. $-e^{\frac{1}{x}}+C.$
 $1782. 2\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+C.$ 1783. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C.$ 1784.
 $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C.$ 1785. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3x}+C.$ 1786. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x+C.$
 $1787. -\sqrt{a^2-x^3}+C.$ 1788. $\ln(e^x+1)+C.$ 1789. $x-\ln(e^x+1)+C.$
 $1790. \ln(e^x+e^{-x})+C.$ 1791. $-\ln|\sin x+\cos x|+C.$ 1792.
 $\frac{2\arctg x}{\ln 2}+C.$ 1793. $\frac{1}{\ln 3}\arctg 3^x+C.$ 1794. $-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)+C.$

$$1795. \ln|x + \cos x| + C. \quad 1796. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C. \quad 1797. \frac{1}{3 \cos^3 x} + C.$$

$$1798. \frac{1}{\ln 2} \arcsin 2^x + C. \quad 1799. \frac{5}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + C. \quad 1800. \ln|\sin 2x| + C.$$

$$1801. -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C. \quad 1802. \ln \ln|x| + C. \quad 1803.$$

$$\frac{1}{2} \arcsin^2 x + C. \quad 1804. \arcsin(\ln x) + C. \quad 1805. \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + \ln x)^4} + C.$$

$$1806. \frac{1}{3} e^{x^3} + C. \quad 1807. \frac{1}{48} (4x^2 - 1)^6 + C. \quad 1808. \frac{1}{2} \sin(x^2 + 3) + C.$$

$$1809. -\frac{1}{2} \cos^4 x + C. \quad 1810. \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 4)^4} + C. \quad 1811. \frac{1}{2} \sqrt{7 + x^4} + C.$$

$$1812. \frac{2}{3} \sqrt{1 + x^2} + C. \quad 1813. -\frac{1}{2} \sqrt{1 - x^4} + C. \quad 1814. \frac{1}{4 \sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{5}} +$$

$$+ C. \quad 1815. \frac{1}{4} \arcsin x^4 + C. \quad 1816. \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$1817. -\frac{1}{3 \ln 2} 2^{-x^3} + C. \quad 1818. \sin(\ln x) + C. \quad 1819. \frac{1}{3} \operatorname{sh}^2 x + C.$$

$$1820. \frac{1}{a} e^{ax+b} + C. \quad 1821. \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C. \quad 1822. 2(\sqrt{x+1} -$$

$$+ \ln(1 + \sqrt{x+1})) + C. \quad 1823. -2 \ln|\cos \sqrt{x-1}| + C. \quad 1824.$$

$$\ln|\sin e^x| + C. \quad 1825. -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C. \quad 1826. \frac{4}{3} \times$$

$$\times \sqrt{(1 + \sqrt{x})^3} + C. \quad 1827. \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3} + C. \quad 1828. 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$1829. \frac{a^{\sin x}}{\ln a} + C. \quad 1830. \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} x + C. \quad 1831. \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} x + C.$$

$$1832. \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right| + C. \quad 1833. \frac{1}{60} \ln \left| \frac{6x + 5}{6x - 5} \right| + C.$$

$$1834. \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a} x + C. \quad 1835. \frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4} x + C. \quad 1836. \ln|x +$$

$$+ \sqrt{x^2 + a}| + C. \quad \text{მითითებულია ისარგებლოთ } \sqrt{x^2 + a} = t - x \quad \text{ჩასვით,}$$

$$\text{საიდანაც მარტივი გარდაქმნებით მიიღება } \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{dt}{t}. \quad 1837. \frac{1}{b} \ln|bx +$$

$$+ \sqrt{b^2 x^2 - a^2}| + C. \quad 1838. \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4}) + C. \quad 1839. \frac{1}{3} \ln|x^3 +$$

- $+ \sqrt{x^6-1} + C.$ 1849. $\frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2} + C.$ 1841. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x-1} + C.$
 1842. $2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) \right) + C.$ 1843. $\frac{2}{15} (3x -$
 $- 2a) \sqrt{(a+x)^3} + C.$ 1844. $\frac{1}{2} \ln^2 \operatorname{tg} x + C.$ 1845. $\ln|x| - \ln 2 + C.$
 1846. $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C.$
 1847. $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C.$ 1848. $\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}} + C.$ 1849.
 $\frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C.$ 1850. $\sqrt{x^2-a^2} - a + C.$ 1851. $\frac{1}{4} \arccos \frac{2}{x}$
 $- \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2} + C.$ 1852. $\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C.$ 1853. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$
 1854. $e^x (x-1) + C.$ 1855. $\frac{2^x}{\ln^2 2} (x \ln 2 - 1) + C.$ 1856. $x \ln|x| -$
 $- x + C.$ 1857. $\frac{x^2}{4} (2 \ln|x| - 1) + C.$ 1858. $\frac{1}{3} x \sin 3x +$
 $+\frac{1}{9} \cos 3x + C.$ 1859. $\frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x) + C.$ 1860. $x \arcsin x +$
 $+ \sqrt{1-x^2} + C.$ 1861. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$ 1862.
 $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln|x| - \frac{1}{n+1} \right) + C.$ 1863. $x \ln(x^2+1) - 2x +$
 $+ 2 \operatorname{arctg} x + C.$ 1864. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$ 1865. $\frac{2x^2-1}{4} \arcsin x +$
 $+ \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$ 1866. $\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C.$ 1867. $(x^3 -$
 $- 3x^2 + 6x - 6) e^x + C.$ 1868. $x(\ln^2|x| - 2 \ln|x| + 2) + C.$
 1869. $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C.$ 1870. $2\sqrt{x} (\ln|x| - 2) + C.$
 1871. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$ 1872. $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x -$
 $- \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C.$ 1873. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$ 1874.
 $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.$ 1875. $\frac{x}{3} \operatorname{tg} 3x +$

- $+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|+C.$ 1876. $2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C.$ 1877.
 $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$ 1878. $\ln x\cdot(\ln(\ln x)-1)+C.$ 1879. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+$
 $+\cos(\ln(x))+C.$ 1880. $\frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$ 1881.
 $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$ 1882. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$
1883. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$ 1884. $-\frac{1}{x+1}+C.$
1885. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$ 1886. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$
1887. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ 1888. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C.$
1889. $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$ 1890. $\frac{2}{3}\ln(3x^2+$
 $+2x+5)+\frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.$ 1891. $\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+3)+$
 $+\frac{9}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$ 1892. $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$
1893. $\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$ 1894. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$ 1895.
 $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3}|+C.$ 1896. $3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$
1897. $-4\sqrt{3-2x-x^2}+3\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ 1898. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-3}-$
 $-\frac{7}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}|+C.$ 1899. $\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+$
 $+\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+C.$ 1900. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+C.$
1901. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2x-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x^2-3x+1}\right)+C.$
1902. $\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(1-x)}+C.$ 1903. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{1+x}\right|+C.$
1904. $\ln\left|\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\right|+C.$ 1905. $-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}x}+C.$ 1906.

$$\begin{aligned}
& \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C. \quad 1907. \ln \left| \frac{(x-2^2)}{x-3} \right| + C. \quad 1908. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^6}{(x+5)^5 (x+1)} \right| + \\
& + C. \quad 1909. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3(x-2)^2}{(x+1)^5} \right| + C. \quad 1910. \frac{5}{6} \ln |x| + \frac{9}{10} \ln |x-2| - \\
& - \frac{26}{15} \ln |x+3| + C. \quad 1911. \ln \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + C. \quad 1912. 5x + \\
& + \ln \left| \frac{\sqrt{x} \sqrt{(x-4)^{161}}}{\sqrt{(x-1)^7}} \right| + C. \quad 1913. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C. \\
& 1914. \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \quad 1915. \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C. \quad 1916. \\
& \frac{6}{x+1} + \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + C. \quad 1917. \frac{2}{x-1} + \ln |x(x-1)| + C. \quad 1918. \frac{1}{x} + \\
& + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad 1919. \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \frac{x^2}{(x+1)^2} + C. \quad 1920. \\
& - \frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C. \quad 1921. \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 - \frac{5x+12}{x^2+6x+16} + \\
& + C. \quad 1922. \frac{4}{x+2} + \ln |x+1| + C. \quad 1923. 3x + 5 \ln |x+2| + \\
& + \frac{6}{x-1} + C. \quad 1924. \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C. \quad 1925. x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C. \\
& 1926. \frac{1}{10\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{5\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 1927. \frac{1}{2} \ln |x+1| - \\
& - \frac{1}{4} \ln (x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C. \quad 1928. \ln \left| \frac{(x^2-2x+5)^{3/2}}{x-1} \right| + \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C. \quad 1929. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \\
& 1930. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 1931. \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \times \\
& \times \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C. \quad 1932. \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \\
& + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 1933. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (x+1) - \\
& - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \quad 1934. \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad 1935. \\
& \frac{1}{8a^4} \left(\frac{x(3x^2+5a^2)}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + C. \quad 1936. \frac{2x-1}{2(x^2+2x+1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1991. & \frac{x^3}{6\sqrt{(2+x^2)^3}} + C. \quad 1992. \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \quad 1993. \frac{\cos^3 x}{3} - \\
& - \cos x + C. \quad 1994. -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \quad 1995. \sin x - \\
& - \sin^3 x + \frac{3\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C. \quad 1996. \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C. \quad 1997. \\
& \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \quad 1998. \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C. \quad 1999. -\frac{\cos^7 x}{7} + \\
& + \frac{2\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^{11} x}{11} + C. \quad 2000. \frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12} + C. \quad 2001. \frac{3x}{8} + \\
& + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad 2002. \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \quad 2003. \frac{5x}{16} - \\
& - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \quad 2004. \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C. \\
2005. & \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \quad 2006. \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \\
2007. & \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C. \quad 2008. -\frac{1}{\sin x} + C. \quad 2009. \frac{1}{\cos x} + \\
& + C. \quad 2010. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C. \quad 2011. -\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{2} - \\
& - 2\ln|\sin x| + C. \quad 2012. \frac{1}{2\cos^2 x} + 2\ln|\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2} + C. \quad 2013. \\
& \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \quad 2014. \frac{\sin^3 x}{\cos x} - \frac{3x}{2} + \frac{3\sin 2x}{4} + C. \quad 2015. - \\
& - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \quad 2016. \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C. \\
2017. & \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2\ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad 2018. 1) -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \\
& - \operatorname{ctg} x + C. \quad 2) \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C. \quad 2019. \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \\
2020. & \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \quad 2021. \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x - \\
& - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C. \quad 2022. 1) \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C. \\
2) & \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C. \quad 2032. \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sin x} + C. \quad 2024. \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C. \quad 2025. \quad -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \\
& + \operatorname{ctg} x + x + C. \quad 2026. \quad \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \quad 2027. \quad -\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} \\
& -\frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8} + C. \quad 2028. \quad -\operatorname{ctg} x - \frac{2 \operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C. \quad 2029. \quad \frac{2}{7} \operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x + \\
& + \frac{2}{11} \operatorname{tg}^{\frac{11}{2}} x + C. \quad 2030. \quad \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 11x}{22} + C. \quad 2031. \quad 3 \sin \frac{x}{6} + \\
& + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + C. \quad 2032. \quad \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C. \quad 2033. \quad \frac{\sin(2x+15)}{4} \\
& -\frac{\sin(8x+1)}{16} + C. \quad 2034. \quad \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C. \quad 2035. \quad -\frac{\sin 4x}{8} \\
& -\frac{\cos 6x}{12} + C. \quad 2036. \quad -\frac{\cos 2x}{8} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} + C. \quad 2037. \quad \frac{\sin 2x}{8} + \\
& + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{x}{4} + C. \quad 2038. \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad 2039. \quad \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{x}{2} \right) \right| + C. \quad 2040. \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \quad 2041. \quad \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \times \\
& \times \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C. \quad 2042. \quad \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C. \quad 2043. \\
& \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C. \quad 2044. \quad x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad 2045. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \\
& + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C. \quad 2046. \quad \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + C. \quad 2047. \\
& \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - x + C. \quad 2048. \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \right) + C. \quad 2049. \\
& \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) + C. \quad 2050. \quad \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C. \quad 2051. \quad \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \\
& + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \quad 2052. \quad \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C. \quad 2053. \quad -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.
\end{aligned}$$

2054. $\arctg(\operatorname{tg}^2 x) + C$. 2055. $-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}^3 x)} + C$. 2056. $\frac{1}{\sqrt{13}} \times$
 $\times \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$. 2057. $-\frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right) +$
 $+ C$. 2058. $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$. 2059. $4 \sqrt{\operatorname{tg} x} + C$. 2060. $\frac{2}{5} \operatorname{tg}^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C$.
 2061. $2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C$. 2062. $\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C$. 2063.
 $\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C$. 2064. $\ln \operatorname{ch} x + C$. 2065. $\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C$.
 2066. $\frac{1}{4} \operatorname{sh}^4 x + C$. 2067. $\ln |\operatorname{th} x| + C$. 2068. $\frac{x}{2} + \operatorname{ch} 2x + \frac{\operatorname{sh} 4x}{8} + C$.
 2069. $\ln \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + C$. 2070. $\operatorname{th} \frac{x}{2} + C$. 2071. $2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{x}{2} + C$.
 2072. $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{2} + C$. 2073. $\operatorname{th} x - \frac{2}{\operatorname{ch} x} + C$. 2074. $2\sqrt{x^2-1} -$
 $- \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C$. 2075. $\frac{1}{2} (\arcsin 2x + \sqrt{1-4x^2}) + C$.
 2076. $2 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) + C$. 2077. $\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right| + C$. 2078.
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right| + C$. 2079. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x+\varphi}{2} \right| + C$.
 2080. $\frac{2}{3} (\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{(x-2)^3}) + C$. 2081. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
 2082. $\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$. 2083. $\frac{\sqrt{(x^2+2x)^3}}{3} + C$. 2084. $\frac{1}{3} (x^3 -$
 $- \sqrt{(x^2-1)^3}) + C$. 2085. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-2}) + C$. 2086. $\arctg e^x + C$.
 2087. $-\frac{1}{\operatorname{lg} e} \cos(\operatorname{lg} x) + C$. 2088. $e^{e^x} + C$. 2089. $\frac{1}{4} e^{2x^2} + C$.
 2090. $\frac{1}{\ln 4} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + C$. 2091. $\frac{a^{2x} b^{2x}}{\ln(a^3 b^2)} + C$. 2092. $\ln(e^x +$
 $+ \frac{1}{2} + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}) + C$. 2093. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{1+x^2}{\sqrt{2}} + C$. 2094.
 $-\frac{1}{2(e^{2x}-1)} + C$. 2095. $\ln |\ln \sin x| + C$. 2096. $\frac{e^{2x}}{2} + e^x + \ln |e^x -$

$$\begin{aligned}
& -1| + C. \quad 2097. \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}} + C. \quad 2098. -\ln|\cos x + 2| + \\
& \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}| + C. \quad 2099. 2\sqrt{1 + \ln x} + 2 \ln|\sqrt{1 + \ln x} - \\
& -1| - \ln|\ln x| + C. \quad 2100. \frac{x^2 - 4}{3} \sqrt{x^2 + 2} + C. \quad 2101. \frac{3}{4} \left(\frac{t^2}{2} - t + \right. \\
& \left. + \ln|t + 1| \right) + C, \quad t = \sqrt[3]{x^2 + 1}. \quad 2102. \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \\
& 2103. \frac{1}{20} \operatorname{arctg} \frac{5x}{4\sqrt{9 - x^2}} + C. \quad 2104. \sqrt{1 + x^2} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right| + C. \\
& 2105. \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{x^3} + C. \quad 2106. -\frac{1}{12\sqrt{(x^2 - 4)^3}} + \\
& + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{1}{32} \arccos \frac{2}{x} + C. \quad 2107. 2\sqrt{x - 1} \left(\frac{(x - 1)^3}{7} + \right. \\
& \left. + \frac{3(x - 1)^2}{5} + x \right) + C. \quad 2108. \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2} (x - 2) + \frac{1}{2} \ln|x + \\
& + \sqrt{x^2 - 1}| + C. \quad 2109. \arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C. \quad \text{Һәһәһәһә. } x = \frac{1}{t}. \\
& 2110. 2\sqrt{\frac{x - 2}{x - 1}} + C. \quad \text{Һәһәһәһә. } \frac{x - 1}{x - 2} = t^2. \quad 2111. -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x - 1}} + C. \\
& \text{Һәһәһәһә. } \frac{x + 1}{x - 1} = t^3. \quad 2112. \sqrt{1 - x} \times (\sqrt{x} - 2) - \arcsin \sqrt{x} + C \\
& \text{Һәһәһәһә. } t = \sqrt{x}. \quad 2113. 3(\ln|t| - \ln|1 + \sqrt{1 - t^2}| - \arcsin t) + C, \\
& t = \sqrt[3]{x}. \quad 2114. \operatorname{tg} x \cdot \ln|\cos x| + \operatorname{tg} x - x + C. \quad 2115. \frac{e^{x^2} (x^2 - 1)}{2} + C. \\
& 2116. \frac{e^x}{x + 1} + C. \quad \text{Һәһәһәһәһәһә. } u = x e^x, \quad dv = \frac{dx}{(x + 1)^2}. \quad 2117. \\
& -\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} - \arcsin \frac{1}{x} + C. \quad 2118. \frac{x}{\ln|x|} + C. \quad 2119. 2(\sqrt{x} - \\
& - \sqrt{1 - x} \arcsin \sqrt{x}) + C. \quad 2120. -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C. \\
& 2121. x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad \text{Һәһәһәһәһәһә. } u = x + \sin x, \quad dv = \frac{dx}{1 + \cos x}. \\
& 2122. \frac{1}{4} \left(\ln(1 + x^4) + \frac{1}{1 + x^4} \right) \text{Һәһәһәһә. } 1 + x^4 = t. \quad 2123. \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right| + \\
& + C. \quad 2124. \operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + C. \quad 2125. \frac{1}{8} \ln \frac{x^8}{x^8 + 1} + C. \quad \text{Һәһәһәһә}
\end{aligned}$$

$$y_c = \frac{2a(\pi^2 - 6)}{\pi^2}. \quad 2346. s = 250 \text{ მ}; v_{\text{სა}} = 25 \text{ მ წმ.} \quad 2347. \frac{mT^2}{2}$$

$$2348. v_0 T - \frac{gT^2}{2}. \quad 2349. 10^4 \text{ მ.} \quad 2350. 0,18 \text{ კმ.} \quad 2351. 0,024 \text{ კმ.}$$

$$2352. \frac{1}{2} \pi R^2 H^2 \text{ კმ.} \quad 2353. 25 \cdot 10^5 \pi \text{ კმ.} \quad 2354. 18,24. \quad 2355. 0,719.$$

$$2356. -1,96; \quad 2357. -0,995. \quad 2358. 1,9541. \quad 2359. -1,9541.$$

$$2360. 0,75. \quad 2361. 0,69. \quad 2362. 0,78. \quad 2363. 0,31. \quad 2364. n = 10.$$

$$2355. n = 10. \quad 2366. n = 12. \quad 2386. 0,10682. \quad 2387. 0,08593.$$

$$2388. 16,3325. \quad 2389. 2,574. \quad 2390. 0,15635. \quad 2391. 17,23571.$$

$$2392. 46892,986. \quad 2393. 0,2319. \quad 2394. 0,15771. \quad 2395. 3,812. \quad 2399. 1.$$

$$2400. 1/3. \quad 2401. 1 \ln 2. \quad 2402. \pi 2. \quad 2403. \text{განშლადია.} \quad 2404. \text{განშლადია.}$$

$$2405. 1) \text{განშლადია.} \quad 2) 1 \ln 3. \quad 2406. 1. \quad 2407. 1/3. \quad 2408. \pi^2/8.$$

$$2409. \pi / \sqrt{5}. \quad 2410. \pi. \quad 2411. \text{კრებადია.} \quad 2312. \text{კრებადია.} \quad 2413. \text{განშლადია.}$$

$$2414. \text{განშლადია.} \quad 2415. \text{კრებადია.} \quad 2416. \text{განშლადია.} \quad 2417.$$

$$\text{განშლადია.} \quad 2418. \text{კრებადია.} \quad 2419. \text{კრებადია.} \quad \text{მიითითება.} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad \text{აქედან პირველი ინტეგრალი მარჯვენა ნაწილში}$$

$$\text{არ არის განსაკუთრებული, ამიტომ იგი არსებობს, ხოლო როცა } x \geq 1, \text{ მაშინ } e^{-x^2} \leq x e^{-x^2}, \text{ რის გამოც ვეუქნება;}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2e}. \quad 2270. \text{კრებადია.} \quad 2271. \frac{\pi}{2}. \quad 2420. \text{კრებადია.} \quad 2421. \pi 2.$$

$$2422. 1. \quad 2423. \text{განშლადია.} \quad 2424. 1/e. \quad 2425. 2. \quad 2426. -1. \quad 2427. 8/3.$$

$$2428. 2. \quad 2429. \text{განშლადია.} \quad 2430. \sqrt[3]{125} \quad 2421. \text{განშლადია.} \quad 2432. 6.$$

$$2433. 10/7. \quad 2434. 14 \frac{4}{7}. \quad 2435. 6. \quad 2436. 6 \sqrt[3]{2}. \quad 2437. \text{კრებადია.}$$

$$2438. \text{კრებადია.} \quad 2439. 1) \text{კრებადია.} \quad 2) \text{განშლადია.} \quad 2440 \text{ კრებადია.}$$

$$2441. s = \sqrt{\rho(\rho - x)(\rho - y)(x + y - \rho)}. \quad 2442. V = \frac{\pi}{3} y(x^2 - y^2).$$

$$2443. \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}. \quad 2444. \frac{2}{3} \lambda (y^2 - x^2). \quad 2445. 1) \frac{5}{3}; \quad -2;$$

- 2) $1/5$; $-1/7$; 3) $-13/12$; $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$; 4) 1. 2446. 1) 16 ; 2) 3) $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$;
- $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$. 2447. განსაზღვრულია ყველაგან. 2448. განსაზღვრულია ყველაგან, გარდა $O(0; 0)$ წერტილისა. 2449. განსაზღვრულია $x^2 + y^2 = 4$ წრეწირის შიგნით. 2450. განსაზღვრულია, როცა $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \neq x$.
2451. განსაზღვრულია, როცა $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 2452. განსაზღვრულია ყველაგან, გარდა $y = x$ წრფის წერტილებისა. 2453. განსაზღვრულია, როცა $y > -x$. 2454. განსაზღვრულია, როცა $x < \frac{y^2}{4} + 2$. 2455. განსაზღვრულია პირველ და მესამე საკოორდინატო კუთხეებში. 2456. განსაზღვრულია $1 \leq x^2 + y^2 < 4$ წრიულ რგოლში. 2457. განსაზღვრულია $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$ მართკუთხედში. 2458. განსაზღვრულია, როცა $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$. 2459. განსაზღვრის არეობა: 1) $-2 \leq x \leq 0$, $-\infty < y \leq 0$; 2) $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y < +\infty$. 2460. განსაზღვრულია ყველაგან. 2461. 1) განსაზღვრულია $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ სფეროს ზედაპირზე და მის შიგნით; 2) განსაზღვრულია პირველ ოქტანტში. 2462. განსაზღვრულია, როცა $x^2 + y^2 + z^2 > 1$. 2463. განსაზღვრულია, როცა $y \geq |x - 1|$. 2464. განსაზღვრულია $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$ და $(x - 1)^2 + x^2 \leq 1$ რგოლში.
2465. განსაზღვრის არეობა: 1) $x > 1$; $y \leq x$; $y \geq -x + 2$; 2) $x < 1$; $y \geq x$; $y \leq -x + 2$. 2466. განსაზღვრულია, როცა $y \leq x$, $x^2 + y^2 < 9$.
2467. განსაზღვრულია $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} < 1$ ელიფსის შიგნით. 2468. 1) $x + y = c$ ($y = -x$ წრფის პარალელური წრფეები); 2) $x^2 - y^2 = c$ (ტოლფერდა ჰიპერბოლები); 3) $y = c - x^2$ ($c > 0$, პარაბოლები); 4) $xy = c$ ($c > 0$, ტოლფერდა ჰიპერბოლები). 2469. 1) $x^2 + y^2 = c$ (კონცენტრული წრეწირები); 2) $y = \frac{c}{x^2}$; 3) $x = cy^2$ (პარაბოლები); 4) $\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$ (წრეწირები) 2470. 1) $x + y + z = c$ ($x + y + z = 0$ სიბრტყის პარალელური სიბრტყეები); 2) $x^2 + y^2 = cz$ (ბრუნვის პარაბოლოიდები); 3) $x^2 + y^2 = c$ (ცილინდრები); 4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c$ (ელიფსოიდები). 2471. 1) $2x + 3y - z = c$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = c$ (კონცენტრული სფეროები); 3) $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2}$ (კონუსური ზედაპირები).

2472. $-\frac{1}{4}$. ამოხსნა: აღნიშნოთ $xy = \alpha$; როცა $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$,

მაშინ $\alpha \rightarrow 0$, რის გამოც საკითხი დაიყვანება $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{\alpha + 4}}{\alpha}$ ზღვრის

მოძებნამდე; ეს ზღვარი უდრის $-\frac{1}{4}$ -ს. 2473. 2. 2474. e^k . 2475. $\ln 2$

(ზღვარი გამოითვლება უშუალო ჩასმით). 2476. 0. მითითება. შემოიღეთ პოლარული კოორდინატები; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$; როცა $x \rightarrow \infty$,

$y \rightarrow \infty$, მაშინ $r \rightarrow \infty$ და მივიღებთ $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{r}$ ზღვარს, რაც

ნულის ტოლია. 2477. არ არსებობს. 2478. 0. 2479. 0. 2480. 1) 2;

2) $1/2$. 2481. 1. 2482. 1) წყვეტას განიცილის $x^2 + y^2 = 9$ წრეწირის

წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცილის $y = x$ და $y = -x$ წრფეების წერტი-

ლებზე; 3) წყვეტას განიცილის კოორდინატთა სათავეზე; 4) წყვეტის ზედა-

პირია $z^2 = x^2 + y^2$ კონუსი. 2483. 1) წყვეტას განიცილის $y = x$ წრფის

წერტილებზე; 2) წყვეტას განიცილის კოორდინატთა სათავეზე; 3) წყვეტას

განიცილის $y = x^2$ პარაბოლის წერტილებზე; 4) წყვეტას განიცილის $x = 0$,

$y = 0$ ღერძებზე. 2484. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 2y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 3x^3 - 4xy$.

2485. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$. 2486. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \sin 2y$.

2487. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{5}{(x + 2y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{10}{(x + 2y)^2}$. 2488. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$\frac{2y}{(x + y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x + y)^2}$. 2489. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. 2490. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

2491. $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{ctg}(x - 2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2 \operatorname{ctg}(x - 2y)$. 2492. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$= 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$.

2493. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x(x + 2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^2 - y^2)$. 2494. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. 2495. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$= \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$. 2496. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

26. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული 401

$$\begin{aligned}
2497. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}. & 2498. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}. & 2499. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-y|x|}{x^2 \sqrt{|x^2 - y^2|}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{|x|}{x \sqrt{|x^2 - y^2|}} \\
2500. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{3 \sqrt{(x^2 - y^2)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3 \sqrt{(x^2 - y^2)^2}}. & 2501. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \\
&= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
2502. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}. & 2503. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \\
&= -\frac{2y}{x \sqrt{x^2 - y^2}} e^{\arcsin \frac{y}{x^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} e^{\arcsin \frac{y}{x^2}}. & 2504. \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin 2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sin 2(x + \sqrt{x^2 + y^2})} \\
2505. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= 7 \left(xy + \frac{y}{x} \right)^6 \left(y - \frac{y}{x^2} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 7 \left(xy + \frac{y}{x} \right)^6 \times \\
&\times \left(x + \frac{1}{x} \right). & 2506. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{3y \operatorname{arctg}^2 \sqrt{xy}}{2(1+xy)\sqrt{xy}} \cdot 2 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{xy} \cdot \ln 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \\
&= \frac{3x \operatorname{arctg}^2 \sqrt{xy}}{2(1+xy)\sqrt{xy}} \cdot 2 \operatorname{arctg}^3 \sqrt{xy} \cdot \ln 2. & 2507. \quad \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \sin y \cdot (x^2 + 1)^{\sin y - 1}; \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= (x^2 + 1)^{\sin y} \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot \cos y. & 2508. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. & 2509. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= y + z; \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x + z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y + x. & 2510. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 y^2 z + 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \\
&= 2x^3 yz - 3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^3 y^2 + 1. & 2511. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x e^{x^2 + y^2 + z^2} \frac{\partial u}{\partial y} = \\
&= 2y e^{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z e^{x^2 + y^2 + z^2}. & 2512. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= yz (xy)^{z-1}; \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= xy (xy)^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy). & 2513. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= y z^{xy} \ln z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \\
&= x z^{xy} \ln z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy \cdot z^{xy-1}. & 2514. \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2}{\sqrt{z^2 - (x+y)^2}} \times
\end{aligned}$$

$$\times \arccos \frac{x+y}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2 \arccos \frac{x+y}{z}}{\sqrt{z^2 - (x+y)^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2(x+y)}{z\sqrt{z^2 - (x+y)^2}} \times$$

$$\times \arccos \frac{x+y}{z}. \quad 2515. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{\sqrt{y}(z - \sqrt{y})^2 \sin^2 \frac{z + \sqrt{y}}{z - \sqrt{y}}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2\sqrt{y}}{(z - \sqrt{y})^2 \sin^2 \frac{z + \sqrt{y}}{z - \sqrt{y}}}. \quad 2516. \quad \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= \frac{3(yz(x+z)^2 - 2\sqrt{xyz})}{2(x+z)(\sqrt{xyz} + (x+z)xyz)} \ln^2 \left(\sqrt{xyz} + \frac{1}{x+z} \right). \quad \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \frac{3xz(x+z)}{2((x+z)xyz + \sqrt{xyz})} \ln^2 \left(\sqrt{xyz} + \frac{1}{x+z} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= \frac{3(xz(x+z)^2 - 2\sqrt{xyz})}{2(x+z)(\sqrt{xyz} + (x+z)xyz)} \ln^2 \left(\sqrt{xyz} + \frac{1}{x+z} \right). \quad 2517.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{zx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \sin \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{zy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \times$$

$$\times \sin \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \sin \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$2518. \quad f'_x(2; 3) = 4; \quad f'_y(2; 3) = 27. \quad 2519. \quad f'_x(2; 1) = \frac{1}{2}; \quad f'_y(2; 1) = 0.$$

$$2520. \quad f'_x(1; 2; 0) = 1; \quad f'_y(1; 2; 0) = \frac{1}{2}; \quad f'_z(1; 2; 0) = \frac{1}{2}. \quad 2521.$$

$$f'_x(0; 0; 1) = -2; \quad f'_y(0; 0; 1) = 0; \quad f'_z(0; 0; 1) = -6. \quad 2522. \quad dz =$$

$$= 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy. \quad 2523. \quad dz = 3(x^2 - y) dx + 3(y^2 - x) dy$$

$$2524. \quad dz = (2x + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy. \quad 2525. \quad dz = \frac{y dx + x dy}{xy}$$

$$2526. \quad dz = \frac{x dy + y dy}{x^2 + y^2}. \quad 2527. \quad dz = \sin 2x dx - \sin 2y dy. \quad 2528. \quad dz =$$

$$= 2x \cos(x^2 + y^2) dx + 2y \cos(x^2 + y^2) dy. \quad 2529. \quad dz = 0. \quad 2530. \quad dz =$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y dx - x dy}{xy}. \quad 2531. \quad dz = -\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{x}{y^2}\right) dy. \quad 2532. \quad dz = \frac{2xy dy - (3y^2 + x^2) dx}{x^4}. \quad 2533. \quad dz =$$

$$= 3\left(x^2 y + \frac{y}{x}\right)^2 \left(\left(2xy - \frac{y}{x^2}\right) dx + \frac{x^3 + 1}{x} dy\right). \quad 2534. \quad dz =$$

$$= y^x (1 + \ln x) dx + x^2 y^{x-1} dy. \quad 2535. \quad dz = \frac{(x^2 - y) dx + (y^2 - x) dy}{\sqrt{(x^3 + y^3 - 3xy)^2}}$$

$$2536. \quad dz = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (y dx - x dy). \quad 2537. \quad dz = \dots$$

$$\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{y}{x} + 1 \right)} \cdot \frac{y dx - x dy}{x^2}. \quad 2538. \quad dz = \frac{1}{\sin^2 \frac{x+y}{x^2 + y^2}} \times$$

$$\times \frac{(y^2 - 2xy - x^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad 2539. \quad dz = -\operatorname{tg} \frac{x}{y} \times$$

$$\times \frac{y dx - x dy}{y^2}. \quad 2540. \quad du = yz dx + xz dy + xy dz. \quad 2541. \quad du = x^{yz-1} (yz dx +$$

$$+ zx \ln x dy + xy \ln x dz). \quad 2542. \quad du = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad 2543. \quad du =$$

$$= 3^{xy} \left(y \ln 3 \cdot \operatorname{tg} 3z dx + x \ln 3 \cdot \operatorname{tg} 3z dy + \frac{3dz}{\cos^2 3z} \right). \quad 2544. \quad du = -$$

$$- z^{\cos x + \cos y} \left(\sin x \cdot \ln z dx + \sin y \cdot \ln z dy - \frac{\cos x + \cos y}{z} dz \right).$$

$$2545. \quad du = -(\cos x + \cos y)^{2-1} \cdot (z \sin x dx + z \sin y dy - (\cos x + \cos y) \times$$

$$\times \ln |\cos x + \cos y| dz). \quad 2546. \quad \Delta f = 36; \quad df = 28,5. \quad 2547. \quad \Delta f \approx 0,071; \quad df = 0,075.$$

$$2548. \quad \Delta f(x, y) = 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3. \quad 2549. \quad \Delta f(x, y) = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k.$$

$$2550. \quad \approx 1,06. \quad 2551. \quad \approx 4,998; \quad 2552. \quad \approx 1. \quad 2553. \quad \approx 0,788. \quad 2554. \quad \Delta l \approx 0,062 \text{ სმ. (პროცენტებში).} \quad 2555.$$

$$\Delta v \approx -31,4 \text{ სმ}^3 \text{ (შეშვობები).} \quad 2556. \quad 1) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{e^t (t \ln t - 1)}{t \ln^2 t}.$$

$$2) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{3(1 - 4t^2)}{\sqrt{1 - (3t - 4t^2)^2}}. \quad 3) \quad \frac{dz}{dt} = -4e^{2 \cos 2t} \sin 2t. \quad 4) \quad \frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}. \quad 5) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{3t^2 - 2 \sin 2t}{1 + (t^3 + \cos 2t)^2}. \quad 6) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{6t(2^{3t^2} \ln 2 + 2t^{10})}{2^{3t^2} + t^{12}}.$$

$$7) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2\sqrt{t} - \sin 2\sqrt{t}}{4 \cos^2 \sqrt{t} (\operatorname{tg}^2 \sqrt{t} + t)^{3/2}}; \quad 8) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2}{t} \cdot 3^{4 \cos^2 \frac{4}{t} + \ln^2 t} \left(\ln t +$$

$$+ \frac{8 \sin \frac{8}{t}}{t} \right). \quad 9) \quad \frac{dz}{dt} = \sin \frac{\operatorname{sh} 2t + 4t}{\sqrt{2t \operatorname{sh} 2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t \operatorname{sh} 2t}} \left(\operatorname{ch} 2t -$$

$$- 4 \operatorname{cth} 2t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2t} \right). \quad 10) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2(\sin t \cdot \operatorname{tg} t - \cos t \ln |\cos t|)}{(\cos t)^2 \sin t}.$$

$$11) \frac{dz}{dt} = \frac{2}{\cos^2(2^{2(1-\cos t)} - \ln^2 t)} \cdot \left(2^{2(1-\cos t)} \cdot \sin t \cdot \ln 2 - \frac{\ln t}{t} \right).$$

$$12) \frac{dz}{dt} = 4 \cos^3 t \cdot \frac{4 \sin^2 t (1 + \cos^2 t) \cdot \ln 4 (1 + \cos^2 t) \sin^2 t + 1}{\sin t \cdot (1 + \cos^2 t) \cdot \ln 4 (1 + \cos^2 t) \sin^2 t}.$$

$$14) \frac{dz}{dt} = e^{-(t+1)} \cdot \frac{3(1 - \operatorname{tg} e^{-(t+1)})^2}{\cos^2 e^{-(t+1)}}. \quad 15) \frac{dz}{dt} = \frac{1}{4 t^{3.4}} \times$$

$$\times \frac{(12 + \ln t) \ln^2 t}{1 + \sqrt{t} \ln^3 t}. \quad 16) \frac{dz}{dt} = 2 t \ln 3 - \frac{t}{t^2 + 1}. \quad 17) \frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{2t}{\cos^2 \frac{t^2 \operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^4 t + t^4}} \cdot \frac{t^4 - \operatorname{tg}^4 t}{(t^4 + \operatorname{tg}^4 t)^2} \cdot \operatorname{tg} t \cdot \left(\frac{t}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t \right). \quad 9) \frac{dz}{dt} =$$

$$- e^{\operatorname{arc} \sin \frac{t-2}{t^2}} \cdot \frac{t-4}{t \sqrt{t^4 - (t-2)^2}}. \quad 20) = \frac{2 \sin^2 t}{(t \sin^3 t - \cos t)^2} \cdot (\cos t \sin t +$$

$$+ 3 t^2 \cos^2 t + t \sin^2 t). \quad 2557. \quad 1) \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \quad 2) \frac{dz}{dx} = 2x +$$

$$+ \frac{\cos x}{2 \sqrt{\sin x}}. \quad 2558. \quad 1) \frac{du}{dt} = 2t \ln t \cdot \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}.$$

$$2) 0. \quad 2559. \quad 1) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y} \left(1 - \frac{x}{y} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{x}{y} \left(4 + \frac{x}{y} \right).$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial u} = 2 \left(u + \frac{\ln(u+v)}{u+v} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \cos v + \frac{2 \ln(u+v)}{u+v}.$$

$$3) \frac{\partial z}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1; \quad 4) \frac{\partial z}{\partial u} = e^{\sin u - 2(u^3 + v^3)} (\cos u - 6u^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= -6v^2 e^{\sin u - 2(u^3 + v^3)}. \quad 5) \frac{\partial z}{\partial u} = e^{\ln^2(u^2 + v) - \frac{3u^2}{v^2}} \left(\frac{4u \ln(u^2 + v)}{u^2 + v} - \frac{6u}{v^2} \right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{\ln^2(u^2 + v) - \frac{3u^2}{v^2}} \left(\frac{2 \ln(u^2 + v)}{u^2 + v} + \frac{6u^2}{v^3} \right). \quad 6) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{3u^2(v-1) \sin v}{(v-1)^2 \sin^2 v + u^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^3(\sin v - (v-1)\cos v)}{(v-1)^2 \sin^2 v + u^6}. \quad 7) \frac{\partial z}{\partial u} = 4u^3 \sin^2 v + \frac{3 \ln^2(u+v)}{u+v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= u^4 \sin 2v + \frac{3 \ln^2(u+v)}{u+v}. \quad 8) \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{v^2} + \frac{\cos \frac{u}{v}}{v \sqrt{2 \sin \frac{u}{v}}}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= -\frac{u}{v^2} \left(2u + \frac{\cos \frac{u}{v}}{\sqrt{2 \sin \frac{u}{v}}} \right) \cdot 9) \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{u^2}{1+v^2} \cdot \left(3 \operatorname{arctg} \frac{v^3}{1+u^2} - \frac{2u^2 v^3}{(1+u^2)^2 + v^6} \right); \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u^2 v^3}{1+v^2} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v^3}{1+u^2} - \frac{3v(1+u^2)}{(1+u^2)^2 + v^6} \right),$$

$$10) \frac{\partial z}{\partial u} = \left(u + \frac{v}{u} \right) \left(v + \frac{u}{v} \right)^2 \frac{v^2 + u}{v^2} \left(2 \ln \left(u + \frac{v}{u} \right) + \frac{(v^2 + u)(u^2 - v)}{u(u^2 + v)} \right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(u + \frac{v}{u} \right) \left(v + \frac{u}{v} \right)^2 \frac{v^2 + u}{v^2} \left(\frac{2(v^2 - u)}{v} \ln \left(u + \frac{v}{u} \right) + \frac{v^2 + u}{u^2 + v} \right).$$

$$11) \frac{\partial z}{\partial u} = \operatorname{tg} \frac{v e^{uv} + u}{2v} \cdot \frac{v^2 e^{uv} + 1}{2v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = \frac{u(v^2 e^{uv} - 1)}{2v^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v e^{uv} + u}{2v}.$$

$$12) \frac{\partial z}{\partial u} = (2^{uv} + uv)^{uv} v \left(\ln(2^{uv} + uv) + \frac{uv(2^{uv} \ln 2 + 1)}{2^{uv} + uv} \right); \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= (2^{uv} + uv)^{uv} \cdot u \left(\ln(2^{uv} + uv) + \frac{uv(2^{uv} \ln 2 + 1)}{2^{uv} + uv} \right). 13) \frac{\partial z}{\partial u} =$$

$$= \frac{-3 \cos^2 \frac{u}{v} \sin \frac{u}{v} + 6uv - 6uv \cos \frac{u}{v} + 3u^2 \sin \frac{u}{v}}{2v \sqrt{\cos^3 \frac{u}{v} + u^6 - 3u^2 \cos \frac{u}{v}}}; \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= \frac{3u \sin \frac{u}{v} \left(\cos^2 \frac{u}{v} - u^2 \right)}{2v^2 \sqrt{\cos^3 \frac{u}{v} + u^6 - 3u^2 \cos \frac{u}{v}}}. 14) \frac{\partial z}{\partial u} = 3 \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{u^2 v} \cdot \ln^2 \frac{u}{v} \left(u^2 - v^2 \right) \ln \frac{u}{v} + u^2 + v^2; \frac{\partial z}{\partial v} = -3 \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right)^2 \frac{1}{u v^2} \ln^2 \frac{u}{v} \left((u^2 - v^2) \ln \frac{u}{v} + u^2 + v^2 \right). 15) \frac{\partial z}{\partial u} =$$

$$= \frac{uv \cos v (2 \sin u + u \cos u)}{v^2 \cos^4 v + u^4 \sin^2 u}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^2 \sin u (\cos^2 v - v \sin 2v)}{v^2 \cos^4 v + u^4 \sin^2 u}.$$

$$16) \frac{\partial z}{\partial u} = -\sin \ln \left(u^2 + v + \frac{u}{v-2} \right) \cdot \frac{2uv - 4u + 1}{(u^2 + v)(v-2) + u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= -\sin \ln \left(u^2 + v + \frac{u}{v-2} \right) \cdot \frac{(v-2)^2 - u}{(v-2)((u^2 + v)(v-2) + u)}.$$

$$17) \frac{\partial z}{\partial u} = (1+u+v)^{\ln(u^2+v^2)} \cdot \left(\frac{2u \ln(1+u+v)}{u^2+v^2} + \frac{\ln(u^2+v^2)}{1+u+v} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (1+u+v)^{\ln(u^2+v^2)} \cdot \left(\frac{2v \ln(1+u+v)}{u^2+v^2} + \frac{\ln(u^2+v^2)}{1+u+v} \right).$$

$$2560. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}. \quad 2561. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

$$2562. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy;$$

$$2563. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}.$$

$$2564. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2}.$$

$$2565. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin xy - xy \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$-x^2 \cos xy. \quad 2566. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{9 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{-x^2}{16 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}. \quad 2567.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$2568. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8y^2}{(2x+y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-8xy}{(2x+y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(2x+y)^3}.$$

$$2569. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1} (1+x \ln y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}.$$

$$2570. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-4xy}{(x^2+4y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2}{(x^2+4y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2}.$$

$$2571. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 2^{\sin xy} (\cos^2 xy - \sin xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2^{\sin xy} (xy \cos^2 xy -$$

$$-y^2 \sin xy + \cos xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 2^{\sin xy} (\cos^2 xy - \sin xy). \quad 2572. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u}{v^2} \left(2u + \frac{\cos \frac{u}{v}}{\sqrt{2 \sin \frac{u}{v}}} \right); \quad 9) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{u^2}{1+v^2} \cdot \left(3 \operatorname{arctg} \frac{v^3}{1+u^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2u^2 v^3}{(1+u^2)^2 + v^6} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u^2 v}{1+v^2} \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v^3}{1+u^2} - \frac{3v(1+u^2)}{(1+u^2)^2 + v^6} \right), \\
10) \quad \frac{\partial z}{\partial u} &= \left(u + \frac{v}{u} \right) \left(v + \frac{u}{v} \right)^2 \frac{v^2+u}{v^2} \left(2 \ln \left(u + \frac{v}{u} \right) + \frac{(v^2+u)(u^2-v)}{u(u^2+v)} \right). \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \left(u + \frac{v}{u} \right) \left(v + \frac{u}{v} \right)^2 \frac{v^2+u}{v^2} \left(\frac{2(v^2-u)}{v} \ln \left(u + \frac{v}{u} \right) + \frac{v^2+u}{u^2+v} \right). \\
11) \quad \frac{\partial z}{\partial u} &= \operatorname{tg} \frac{v e^{uv} + u}{2v} \cdot \frac{v^2 e^{uv} + 1}{2v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = \frac{u(v^2 e^{uv} - 1)}{2v^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v e^{uv} + u}{2v}. \\
12) \quad \frac{\partial z}{\partial u} &= (2^{uv} + uv)^{uv} v \left(\ln(2^{uv} + uv) + \frac{uv(2^{uv} \ln 2 + 1)}{2^{uv} + uv} \right); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= (2^{uv} + uv)^{uv} \cdot u \left(\ln(2^{uv} + uv) + \frac{uv(2^{uv} \ln 2 + 1)}{2^{uv} + uv} \right). \quad 13) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \\
&= \frac{-3 \cos^2 \frac{u}{v} \sin \frac{u}{v} + 6uv - 6uv \cos \frac{u}{v} + 3u^2 \sin \frac{u}{v}}{2v \sqrt{\cos^3 \frac{u}{v} + u^6 - 3u^2 \cos \frac{u}{v}}}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= \frac{3u \sin \frac{u}{v} \left(\cos^2 \frac{u}{v} - u^2 \right)}{2v^2 \sqrt{\cos^3 \frac{u}{v} + u^6 - 3u^2 \cos \frac{u}{v}}}. \quad 14) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 3 \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right)^2 \times \\
&\times \frac{1}{u^2 v} \cdot \ln^2 \frac{u}{v} \left((u^2 - v^2) \ln \frac{u}{v} + u^2 + v^2 \right); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -3 \left(\frac{u}{v} + \right. \\
&\left. + \frac{v}{u} \right)^2 \frac{1}{uv^2} \ln^2 \frac{u}{v} \left((u^2 - v^2) \ln \frac{u}{v} + u^2 + v^2 \right). \quad 15) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \\
&= \frac{uv \cos v (2 \sin u + u \cos u)}{v^2 \cos^4 v + u^4 \sin^2 u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u^2 \sin u (\cos^2 v - v \sin 2v)}{v^2 \cos^4 v + u^4 \sin^2 u}. \\
16) \quad \frac{\partial z}{\partial u} &= -\sin \ln \left(u^2 + v + \frac{u}{v-2} \right) \cdot \frac{2uv - 4u + 1}{(u^2 + v)(v-2) + u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \\
&= -\sin \ln \left(u^2 + v + \frac{u}{v-2} \right) \cdot \frac{(v-2)^2 - u}{(v-2)((u^2 + v)(v-2) + u)}.
\end{aligned}$$

$$17) \frac{\partial z}{\partial u} = (1 + u + v)^{\ln(u^2 + v^2)} \cdot \left(\frac{2u \ln(1 + u + v)}{u^2 + v^2} + \frac{\ln(u^2 + v^2)}{1 + u + v} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (1 + u + v)^{\ln(u^2 + v^2)} \cdot \left(\frac{2v \ln(1 + u + v)}{u^2 + v^2} + \frac{\ln(u^2 + v^2)}{1 + u + v} \right).$$

$$2560. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$2561. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

$$2562. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy;$$

$$2563. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1 - 2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1 - 2y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1 - 2y)^3}.$$

$$2564. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \ln y - \frac{\sin y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{\cos y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^x}{y^2}.$$

$$2565. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin xy - xy \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy.$$

$$2566. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{9 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-x^2}{4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}.$$

$$2567. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-x^2}{16 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{4 \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^3}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$2568. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8y^2}{(2x + y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-8xy}{(2x + y)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(2x + y)^3}.$$

$$2569. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1} (1 + x \ln y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}.$$

$$2570. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + 4y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2}{(x^2 + 4y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{16xy}{(x^2 + 4y^2)^2}.$$

$$2571. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 2^{\sin xy} (\cos^2 xy - \sin xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2^{\sin xy} (xy \cos^2 xy -$$

$$-y^2 \sin xy + \cos xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 2^{\sin xy} (\cos^2 xy - \sin xy).$$

$$2572. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{3(2xy^2 - x^4)}{(x^3 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-6x^3 y}{(x^3 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^3 - y^2)}{(x^3 + y^2)^2}. \quad 2573.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x}{y^2}. \quad 2574. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{2(x-y)(2xy + (x+y)^2)}{(x^2 + y^2)^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2(x+y)((x-y)^2 - 2xy)}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(y-x)((x+y)^2 + 2xy)}{(x^2 + y^2)^3}. \quad 2575. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y+1)(x-2)^{y-1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (x-2)^y (y + (y+1) \ln|x-2|); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x-2)^{y+1} \cdot \ln^2|x-2|.$$

$$2576. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2} (2x^2 + 1); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy e^{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= 2e^{x^2+y^2} (2y^2 + 1). \quad 2577. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \left(y + \frac{1}{y} \right)^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{2x^2(y+1)^2(y^2 - 2y + 2)}{y^4}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2(y^4 + 3)}{y^4}. \quad 2580. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 1. \quad 2581. \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} =$$

$$= -x(2 \sin xy - xy \cos xy). \quad 2582. \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial y} = 2y^3 e^{xy^2} (2 + xy^2). \quad 2583.$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = abc x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1}. \quad 2584. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + xy) e^{xy} \cos z.$$

$$2585. \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yz e^{x+y^2}. \quad 2586. \quad f''_{xx}(0; 0) = m(m-1);$$

$$f''_{yy}(0; 0) = n(n-1). \quad 2589. \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

$$2590. \quad 1) \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y + y^2 + 1}{2xy - 2x + 1}; \quad 2) \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - y^2 - 2}{3x - 2xy + 3};$$

$$3) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad 4) \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y^2 + 1}{2(2xy + 1)}; \quad 5) \frac{dy}{dx} = -$$

$$\frac{3x^2 y^2 \sqrt{x^2 + 3y} + x}{4x^3 y \sqrt{x^2 + 3y} + 3}; \quad 6) \frac{dy}{dx} = \frac{6xy^3 \sqrt[3]{(x+2y)^2} - 1}{2 - 9x^2 y^2 \sqrt[3]{(x+2y)^2}};$$

$$7) \frac{dy}{dx} = \frac{16x^3 y \sqrt[3]{(x+5y)^3} + 1}{4x^4 \sqrt[3]{(x+5y)^3} + 5}; \quad 8) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - e^y}{xe^y - 4xy + 1};$$

$$\begin{aligned}
& 9) \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{e^y + x}; \quad 10) \frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2} + y^2}{e^{y-1} + 2xy}; \quad 11) \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-1} + y}{2e^{2y} + x - 3}; \\
& 12) \frac{dy}{dx} = \frac{e^{y-1} + 3(x-1)^2 y^2}{(x+1)e^{y-1} + 2y(x-1)^3}; \quad 13) \frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y - 3x^2 y^3}{x + y - 2x^3 y^2}; \\
& 14) \frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)x(2 \ln(y-1) - 3xy)}{x^2 + y - 1 - x^3(y-1)}; \\
& 15) \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \cos y^2 - 2x \sin(y-1) - 5}{3 - 6x^3 y \sin y^2 - x^2(\cos(y-1))}; \quad 16) \frac{dy}{dx} = \frac{3(e^{x-2} + y^3)}{4e^{\frac{4}{3}y} - 9(x-2)y^2}; \\
& 17) \frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 \lg 3y - 3x^2 y^2 + e^y}{3x^5 - 2x^3 y - (1-x)e^y}; \\
& 18) \frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2 - (1+x)e^{xy})}{(3y^2 \ln(1+x) - xe^{xy} - 1)(1+x)}; \quad 19) \frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy}(1-y^2) - 2y}{2y(2 - e^{xy}) \ln(2 - e^{xy}) + xe^{xy}(1-y^2) - 2x}; \\
& 20) \frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 y^3 \sqrt{x^2 + 4y} + x}{3y^2 x^5 \sqrt{x^2 + 4y} + 2}; \quad 21) \frac{dy}{dx} = \frac{2xy \ln y - y^4}{x^2 + y - 3xy^3}; \\
& 22) \frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 5x^4 \ln y)}{3(x-1)y^3 - x^5}; \quad 23) \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)y^5 - 4x^3 e^y}{5(x+1)^2 y^4 + x^4 e^y}; \\
& 24) \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x \cos^2 y + \ln y - 5)}{3y - x^2 y \sin y 2x - x}; \quad 25) \frac{dy}{dx} = \frac{e^{y^2} + 2(x-2)y^3}{2y(x-2)e^{y^2} - 3(x-2)^2 y^2 + 2}; \\
& 26) \frac{dy}{dx} = \frac{2(xe^{2y} - y^2)}{2x^2 e^{2y} - 4xy + 1}; \\
& 27) \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2y} + 2y}{2x - e^{2x}}; \quad 28) \frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - xc^{4x^2}}{e^{2y-4} + 8xy}; \quad 29) \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2y} - 8y^2}{2xe^{2x} - 16xy + 2}; \\
& 30) 1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3-x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}; \\
& 2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + 3z^3}{9xz^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y + z}{9xz^2 - y^2}; \quad 3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}; \\
& \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}; \quad 4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2};
\end{aligned}$$

$$5) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 y^2 z}{e^z - x^3 y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^3 y^1 z}{e^z - x^3 y^2}; \quad 6) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x^1}{a^2 z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{a^2 z}. \quad 2592. \quad x + 2y + 3z - 14 = 0; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} =$$

$$= \frac{z-1}{3}. \quad 2593. \quad 2x + 4y - z - 3 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$2594. \quad 3x + 4y - 6z = 0; \quad \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}. \quad 2595. \quad 8x +$$

$$+ 9y + 9\sqrt{11}z - 36 = 0; \quad \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{9} = \frac{6z - \sqrt{11}}{36\sqrt{11}}. \quad 2596.$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1; \quad \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z-z_1}{-\frac{z_1}{c^2}}.$$

$$2597. \quad x + 11y + 5z - 18 = 0; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}. \quad 2598. \quad x +$$

$$+ 4y + 6z \pm 21 = 0. \quad 2599. \quad x + y - z \pm 9 = 0. \quad 2600. \quad \frac{x-3}{3} =$$

$$= \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{-5}. \quad \text{ნორმალის განსაზღვრული არ არის } O(0, 0, 0)$$

$$\text{წერტილში. } 2601. \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}; \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = -\frac{1}{3}. \quad 2602.$$

$$3x - 3y + z - 2 = 0. \quad \text{მითითება. } u \text{ და } v \text{ პარამეტრების გამორიცხვ.} \\ \text{გაძლევს } x^3 - 3xy + 2z = 0 \text{ განტოლებას. } 2603. \quad 2x + y - z - 2 = 0$$

$$2604. \quad \frac{9}{2} a^3. \quad 2606. \quad 60^\circ \text{ ან } 120^\circ. \quad \text{მითითება. } \text{კუთხე ორ ზედაპირს}$$

შორის ეწოდება ამ ზედაპირების გადაკვეთის წირის წერტილში მათდამი

გავლებულ მხებ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ კუთხეს. 2607. ზედაპირებს ეწოდება ორთოგონალური, თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთება

მათი გადაკვეთის წირის ყოველ წერტილში. 2608. $f(x+h, y+k) =$

$$= x^3 + 2y^3 - xy + h(3x^2 - y) + k(6y^2 - x) + 3xh^2 - hk + 6yk^2 +$$

$$+ h^3 + 2k^3. \quad 2609. \quad f(x+h, y+k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax +$$

$$+ by)h + 2(bx + cy)k + ah^2 + 2bhk + ck^2. \quad 2610. \quad f(x, y) = 1 -$$

$$- (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2. \quad 2611. \quad 1 + ((x-1) +$$

$$+ (y+1)) + \frac{((x-1) + (y+1))^2}{21} + \frac{((x-1) + (y+1))^3}{31}.$$

2612. $y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3!}$. 2613. $y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$. 2614. $z(4; -2) = 13$ მაქსიმუმი. 2615. $z(1; 2) = -1$ მინიმუმი. 2616. $z(1; 0) = -1$ მინიმუმი. 2618. $z(-1; -1) = 1$ მაქსიმუმი. 2619. $Z(4; 4) = 12$ მაქსიმუმი. 2620. არა აქვს ექსტრემუმი. 2621. არა აქვს ექსტრემუმი. 2622. $Z(2; 1) = -28$ მინიმუმი; $Z(-2; -1) = 22$ მაქსიმუმი. 2623. $Z(1; 1) = 4$ მინიმუმი. 2624. $Z(1; 0) = 0$ მინიმუმი. 2626. $Z(2; 0) = 0$ მინიმუმი. 2628. $Z(1; 0) = -1$ მინიმუმი. 2630. $Z(3; 2) = 108$ მაქსიმუმი. 2632. $Z(4; -2) = 13$ მაქსიმუმი. 2634. $Z(-1; 1) = 1$ მაქსიმუმი. 2636. $Z(3; 4) = -54$ მინიმუმი; $Z(-2; -1) = 28$ მაქსიმუმი. 2638. $Z\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right) = -\frac{13}{3}$ მინიმუმი. 2640. $Z(1; 1) = 9$ მინიმუმი. 2642. არა აქვს ექსტრემუმი. 2644. არა აქვს ექსტრემუმი. 2646. $Z(-1; 0) = -2/e$ მინიმუმი. 2654. $Z\left(\frac{1}{2}; -1\right) = -\frac{e}{2}$ მინიმუმი. 2655. $Z(-1; 0) = \frac{1}{e}$ მინიმუმი. 2656. $Z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ მაქსიმუმი. 2657. $Z\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ მაქსიმუმი. 2658. არა აქვს ექსტრემუმი. 2659. $Z(\pm\sqrt{2}; \mp\sqrt{2}) = -8$ მინიმუმი. 2660. $Z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ მაქსიმუმი. 2661. $Z\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$ მინიმუმი. 2662. $Z\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $k \in Z$ მაქსიმუმი. 2663. $Z\left(-\frac{1}{2}; -1\right) = -2,5$ მინიმუმი; $Z\left(\frac{1}{2}; 1\right) = 2,5$ მაქსიმუმი. 2666. $Z(1; 1) = 2$ მინიმუმი. 2667. $Z(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$ მაქსიმუმი; $Z(-a\sqrt{2}; -a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$ მინიმუმი. 2668. $Z\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = 11$ მაქსიმუმი; $Z\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right) = 1$ მინიმუმი. 2669. $Z\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$ მინიმუმი. 2670. $Z(0; 1) = 3$ უდიდესი მნიშვნელობა. 2671. $Z(1; 2) = 17$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(1; 0) = -3$ უმცირესი მნიშვნელობა; $(-4, 6)$ სტაციონარული წერტილი ძვეს მართკუთხედის გა-

რეთ. 2672. $Z\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(4; 2) = -128$

უმცირესი მნიშვნელობა. 2673. $Z(-3; 0) = Z(0, -3) = 6$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(-1; -1) = -1$ უმცირესი მნიშვნელობა. 2674. $Z(\pm 2; 0) = 4$ უდიდესი მნიშვნელობა; $Z(0, \pm 2) = -4$ უმცირესი მნიშვნელობა; სტაციონარული წერტილი $(0, 0)$ არ იძლევა ექსტრემუმს. 2675.

$Z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ უდიდესი მნიშვნელობა. $Z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -\sqrt{2}$ უმცირესი მნიშვნელობა. 2676. $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}$ და $\frac{a}{3}$. 2683.

$xy' - y = 0$. 2684. $x + yy' = 0$. 2685. $y - 2xy' = 0$. 2686. $y'' =$

$= xy' + y'^2$. 2687. $xy' - y \ln y' = 0$. 2688. $y = xy' \ln \frac{x}{y}$. 2689.

$2yy'' - y'^2 = 0$. 2690. $y'' - y' - 2y = 0$. 2691. $y = x^3 - x^2 + x + C$;
 $y = x^3 - x^2 + x + 1$. 2692. $y = Cx$; $y = 4x$. 2693. $y = Ce^x$; $y = 4e^{x+2}$.

2694. $(1-x)(1+y) = C$. 2695. $x^2(1+y^2) = C$. 2696. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.

2697. $y = C \sin x$. 2698. $\arcsin x + \arcsin y = C$. 2699. $\sqrt{1+x^2} +$
 $+ \sqrt{1+y^2} = C$. 2700. $y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C$.

2701. $\sqrt{1+x^2} e^{\arctg y} = C$. 2702. $y = C e^{\sqrt{1-x^2}}$. 2703. $Cy =$

$= \sqrt{1+e^{2x}}$. 2704. $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C$. 2705. $c \sqrt{1+4x+2y} =$

$= e^{x+y}$. 2706. $10^x + 10^{-y} = C$. 2707. $e^x + e^{-y} = c$. 2708. $x^2 y = c e^y$.

2709. $y = x - \frac{1}{x-c}$. 2710. $x + c = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right)$. 2711. $8x +$

$+ 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + c)$. 2712. $\frac{x+t}{xt} + \ln \frac{x}{t} = c$. 2713. $z^{2a} =$

$= C \frac{t-a}{t+a}$. 2714. $r = C e^{\theta} + a$. 2715. $\sin^2 \varphi + \sin^2 \theta = C$. 2716 $\operatorname{tg} |y =$

$= C(1 - e^x)^3$. 2717. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C$. 2718. $y = e^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$. 2719. $\frac{y^2}{2} =$

$= \ln(1 + e^x) + C$; $y^2 - 1 = 2 \ln \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 2720. $2y = C \sin^2 x - 1$;

$y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$. 2721. $\ln x - \frac{x}{y} = C$. 2722. $y = x \ln \frac{c}{x}$. 2723.

$\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C$. 2724. $y = x \ln \frac{y}{C}$. 2725. $1 + 2Cy + C^2 x^2 = 0$.

2726. $y = x \sqrt[3]{3 \ln Cx}$. 2727. $\sin \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{x}$. 2728. $\ln Cx = -$
 $-e^{-\frac{y}{x}}$. 2729. $x = ce^{\frac{y^2}{x^2}}$. 2730. $x = C \operatorname{tg} \frac{y}{2x}$. 2731. $y^2 + 2xy =$
 $-x^2 = C$. 2732. $y - x = Ce^{\frac{y}{x}}$. 2733. $x^3 = C(y^2 - x^2)$; $3x^3 =$
 $= 8(x^2 - y^2)$. 2734. $y = x \sqrt{C + 2 \ln |x|}$; $y = x \sqrt{2 \ln |x|}$. 2735.
 $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ 2736. $y =$
 $= \frac{2x}{1 - Cx^2}$; $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$. 2737. $y = Ce^{-2\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $y = e^{2(1 - \sqrt{\frac{x}{y}})}$.
 2738. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$; $y = x^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. 2739. $y = Cx + x^2$.
 2740. $y = e^x(C + x)$; 2741. $y = \sqrt{1 + x^2}(C + \sqrt{1 + x^2})$. 2742
 $y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}$. 2743. $y = x^n(C + e^x)$. 2744. $y = e^{-x^3}(C + \frac{2}{3}x^3)$.
 2745. $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$. 2746. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$. 2747. $y =$
 $= C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}$. 2748. $x = Ce^{-\operatorname{arctg} y} + \operatorname{arctg} y - 1$. 2749. $y =$
 $= \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + 1$; $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$. 2750. $y = \frac{C}{x} + x \ln x$; $y =$
 $= x \ln x$. 2751. $y = \frac{c+x}{\cos x}$; $y = \frac{x}{\cos x}$, 2752. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$;
 $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$. 2753. $y = \frac{c}{x^2} + x$; $y = \frac{8}{x^2} + x$. 2754. $y =$
 $= c\sqrt{1-x^2} + x$; $y = \sqrt{1-x^2} + x$. 2755. $y^2(ce^{x^2} + 1) = 1$. 2756.
 $y(c + \frac{x^7}{7}) = x^3$. 2757. $y = x^4(C + \frac{1}{2} \ln x)^2$. 2758. $y^n = ce^{-x} +$
 $+ x - 1$. 2759. $y^3(ce^{\cos x} + 3) = 1$. 2760. $y(cx + \ln x + 1) = 1$. 2761. $y =$
 $= \frac{1}{c\sqrt{1-x^2} - 1}$; $y = \frac{1}{3\sqrt{1-x^2} - 1}$. 2762. $y = |c\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1|$;
 $y = \sqrt{2\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$. 2763. $y^3(ce^{\cos x} + 3) = 1$; $3y^3(1 - e^{\cos x}) = 1$.
 2764. $7x^2 + 6xy - 5y^2 = C$. 2765. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$. 2766. $x^2e^y -$
 $- y = C$. 2767. $xe^y - y^2 = C$. 2768. $x^2 + \cos^2 y + y^2 = C$. 2769.

- $\frac{x^2}{2} \cos 2y + x = C$. 2770. $x^y = C$. 2771. $\ln|x+y| + \frac{y}{x+y} = C$.
 2772. $x + y + \frac{y}{x} = C$; $x + y + \frac{y}{x} = 3$. 2773. $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C$;
 $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. 2774. $u = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + C$. 2775. $u = x^3 -$
 $-x^2y + xy^2 - y^3 + C$. 2776. $u = \frac{x^2}{2} + x \ln y - \cos y + C$ 2777. $u =$
 $= \sqrt{x^2 + y^2} + C$. 2778. $2xe^x - y^2e^x = C$. 2779. $e^{-y} \cos x = x + C$.
 2780. $x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C$. 2781. $x \sin y + y \ln x = C$. 2782. $x^2y +$
 $+ \frac{1}{y} = C$. 2783. $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$. 2784. $\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$.
 2785. $y \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x = C$. 2786. $y + C \pm \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| = 0$.
 2787. $15y + C \pm (6\sqrt{(1-x)^5} - 10\sqrt{(1-x)^3})$. 2788. $x = 2p -$
 $-\frac{1}{p^2}$, $y = p^2 - \frac{2}{p} + C$. 2789. $x = \sin p + \ln p$, $y = p \sin p + \cos p +$
 $+ p + C$. 2790. $x = ap + bp^2$, $6y = 3ap^2 + 4bp^3 + C$. 2791. $x = e^p + p$,
 $y = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + C$. 2792. $x = C - \ln(e^y - 1)$. 2793. $x =$
 $= \pm \frac{1}{2} (\arcsin y - y \sqrt{1-y^2}) + C$. 2794. $x = 2q + \frac{3}{2} p^2 + C$, $y =$
 $= p^2 + p^3$. 2795. $x = 2p - \frac{2}{p} + C$, $y = p^2 + 2 \ln p$. 2796. $x =$
 $= \frac{1}{2} \ln^2 p + \ln p + C$, $y = p \ln p$. 2797. $x = e^p(p+1) + C$,
 $y = p^2 e^p$. 2798. $(x^2 - 2y + C) \cdot (x + y - 1 - Ce^{-x}) = 0$. 2799. $(xy - C) \times$
 $\times (x^2y - C) = 0$. 2800. $(\sqrt{y} - c)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0$. 2801. $\left(y -$
 $-\frac{C}{1 + \cos x} \right) \cdot \left(y - \frac{C}{1 - \cos x} \right) = 0$. 2802. 1) ზოგადი ამონა-
 ხსნი $y = Cx^2$ წარმოადგენს იმ პარაბოლების ოჯახს, რომელთა წვერო-
 ები კოორდინატთა სათავეშია. გარდა ამისა, განტოლებას აქვს კიდევ
 ინტეგრალური წირი $x = 0$, კოორდინატთა სათავეზე როგორც

$f(x, y) = \frac{2y}{x}$, ასევე $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ განიცილის წყვეტას. ასეთ განსაკუთრებულ წერტილს კვანძითი წერტილი ეწოდება; 2) $y = Cx$ ($x \neq 0$) — ნახევარწრფეთა ოჯახი. $O(0; 0)$ წერტილი წარმოადგენს კვანძით წერტილს. 2803. $x^2 + y^2 = C^2$ — წრეწირთა ოჯახი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში). თვით განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის არც ერთი ინტეგრალური წირი. ასეთ წერტილს ეწოდება ცენტრი. 2801. $xy = C$ — ჰიპერბოლების ოჯახი. როცა $C = 0$, მივიღებთ საკოორდინატო ღერძებს $x = 0$, $y = 0$. ეს წირები გადის სათავეზე. დანარჩენი წირები განსაკუთრებულ წერტილზე არ გადის. ასეთი სახის განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება უნაგირა წერტილი.

2805. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctg \frac{y}{x}}$ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ $r = Ce^{\varphi}$. $O(0; 0)$ განსაკუთრებულ წერტილს ეწოდება ფოკუსი. 2806. $y - 1 = (x - C)^2$; $y = 1$. 2807. $y^3 = (x + C)^2$; განსაკუთრებული ამონახსნი არა აქვს. $y = 0$ წრფე არის მიღებულ წირთა ოჯახის უქუჩევის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. 2808. $(x - C)^2 + y^2 = a^2$; $y = \pm a$. 2809. $(x + \sqrt{2}C)^2 + y^2 = C^2$; $y = \pm x$.

2810. $y = \frac{1}{2} \cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$. 2811. $y = 1 - \frac{x^2}{4}$; $y = x - \frac{x^2}{4}$.

2812. $x = \frac{C}{p^2} + \frac{2p}{3}$, $y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}$. 2813. $x = \frac{C + \ln p}{p^2}$,

$y = \frac{2}{p}(C + \ln p) + \frac{1}{p}$. 2814. $x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$, $y = x(1 + p) + p^2$.

2815. $x = \frac{1}{p^2}(C - p \sin p - \cos p)$, $y = 2xp + \sin p$. 2816. $y =$

$\frac{C + \sqrt{x + 1}}{x}$; $y = 0$ განსაკუთრებული ამონახსენი. 2817. $Cy = (x - C)^2$; $y = 0$ და $y = -4x$ — განსაკუთრებული — ამონახსენები.

2818. $y = Cx + Cx^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 2819. $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$.

2820. $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = C^2$. 2821. $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$;

$y^3 = \frac{27}{8}x^2$. 2822. $y = Cx + C - C^2$; $y = \frac{(x + 1)^2}{4}$. 2823. $y =$

$Cx + C + e^c$. 2824. $2x^2 + y^2 = C$. 2825. $x^2 - y^2 = C$. 2826. $y = Cx$.

2827. $2x^2 + 3y^2 = C$. 2828. $y = Cx^2$. 2829. $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$.

2830. კონფოკალური ჰიპერბოლები. 2831. $x^2 + y^2 = 2a^2 \cdot \ln Cx$. მითი-

თება. მოცემული ელიფსების ოჯახის განტოლებაა $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, სადაც a მუდმივია, ხოლო b — ცვლადი პარამეტრი. 2832. $r = 2C \cos \varphi$. მიითითება. როცა წიბთა ოჯახი მოცემულია პოლარული კოორდინატებით $F(r, \varphi, a) = 0$ და $\Phi(r, \varphi, r') = 0$ არის ამ ოჯახის დიფერენციალური განტოლება, მაშინ ოთოგონალური და იზოგონალური ტრაექტორიების დიფერენციალური განტოლებები შესაბამისათ არის; $\Phi\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$,

$$\Phi\left(r, \varphi, \frac{r' + kr}{r - kr'}\right) = 0 \quad (k = \operatorname{tg} \alpha). \quad 2833. \quad r = C(1 - \cos \varphi). \quad 2834.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \quad \text{ან პოლარულ კოორდინატებში; } r = C e^{\frac{\varphi}{k}}$$

$$2835. \quad r = C. \quad 2836. \quad x = \frac{Cp}{\sqrt{p^2 + 1}} + 2p, \quad y = p^2 - \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}} - 2.$$

$$2837. \quad x = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \left(C + \frac{h}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{p^2 + 1} + 1}{p} - \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p^2} \right) \right), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \left(C + \frac{h}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{p^2 + 1} + 1}{p} - \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p^2} \right) \right) - \frac{h}{2p^2}.$$

$$2838. \quad x = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \left(C + a \left(\frac{1}{p} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} p \right) \right), \quad y = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \left(C + a (\operatorname{arc} \operatorname{tg} p - p) \right).$$

$$2839. \quad x = \frac{Cp}{\sqrt{p^2 + 1}} + \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}} + \frac{1}{p}.$$

$$2940. \quad y = Cx; \quad y = \frac{C}{x}. \quad 2841. \quad y = C e^y. \quad 2842. \quad (x - y)^2 - Cy = 0.$$

$$2843. \quad y^2 = 2x^2 \ln \frac{C}{x}. \quad 2844. \quad x^2 + y^2 = a^2(x - C)^2. \quad 2845. \quad y = \frac{x}{2} \left(\left(\frac{C}{x} \right)^a - \left(\frac{x}{C} \right)^a \right).$$

$$2846. \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}. \quad 2847. \quad x^2 = C(2y + C). \quad 2848. \quad 2Cx = y^2 - C^2. \quad 2849. \quad 1), \quad 2) \quad xy = 6 \quad 2850. \quad y = \frac{x}{2} \left(C e^{\frac{a}{x}} - \frac{1}{C} e^{-\frac{a}{x}} \right).$$

$$2851. \quad y^2 = 4ax + 4a^2 \left(1 - e^{\frac{x}{a}} \right).$$

$$2852. \quad y = Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}. \quad 2853. \quad Cy^2 - xy + 2 = 0; \quad 3y^2 + 2xy - 4 = 0.$$

2854. $y^2=Cx$; $y^2=8x$. 2855. $y=\frac{1}{2C}\left(C^2 e^{\pm\frac{x}{a}}+a^2 e^{\mp\frac{x}{a}}\right)$, $y=$
 $=\frac{a}{2}\left(e^{\pm\frac{x}{a}}+e^{\mp\frac{x}{a}}\right)$. 2856. $\approx 3,9$ კგ. 2857. $x=Ce^{-\frac{bt}{a}}$, სადაც

x -ით აღნიშნულია მარილის რაოდენობა ქურქელში მოცემული t მომენტისათვის. 2858. $t \approx 10$ წამს. მითითება. ხერვლიდან ვამოსული წყლის სიჩქარე გამოითვლება $V=0,6\sqrt{2gh}$ სმ/წმ ფორმულით, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო h —მანძილი წყლის ზედაპირიდან ხერვლამდე.

2859. $t=\frac{D^2\sqrt{H}}{0,3a^2\sqrt{2g}}$; $t \approx 5$ წუთს და 56 წამს. 2860. $y=\frac{x^3}{6}+$

$+C_1x+C_2$; $y=\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}$. 2861. $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$

$+C_2$; $y=-\cos 2x+1$. 2862. $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$; $y=-\ln|\cos x|$. 2863. $y=3\ln x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=3\ln x+$

$+2x^2-6x+6$. 2864. $y=-e^{-x}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$; $y=-e^{-x}+$

$+\frac{x^2}{2}-x+1$. 2865. $y=\frac{1}{8}e^{2x+1}+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2866. $y=$

$=\cos x+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$. 2867. $y=\ln|\sin x|+C_1x^2+$

$+C_2x+C_3$. 2868. $y=\frac{x^3}{6}\ln x-\frac{11x^2}{36}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

2869. $\left(y-\frac{x^2}{2}-C_1x-C_2\right)\cdot\left(y-x^2-C_1x-C_2\right)=0$. 2870. $x=$

$=p^3+1$; $y=\frac{9}{28}p^7+C_1p^3+C_2$. 2871. $x=e^p+p$; $y=\left(\frac{1}{2}p+\right.$

$-\frac{3}{4}\left.)e^{2p}+\left(\frac{1}{2}p^2-1+C_1\right)e^p+\frac{p^3}{6}+C_1p+C_2$. 2872. $y=$

$=\frac{x^3}{9}+C_1\ln x+C_2$. 2873. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. 2874. $y=$

$=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1\ln x+C_2$. 2875. $y=c_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

2876. $y=\frac{C_1}{3}x^3+C_1x+C_2$; $y=x^3+3x+1$. 2877. $y=\ln(x^2+$

- $+2C_1) + C_2; y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}$. 2878. $y = C_1 x \ln x + C_2 x + C_3 +$
 $+\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}$. 2879. $y = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 - C_1^2 (x+C_1) (\ln(x +$
 $+C_1) - 1)$. 2880. $y^2 = C_1 x + C_2; y = C$. 2881. $x = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y+C_1} \right| + C_2;$
 $y = C$. 2882. $(x+C_2) \cdot (y-1) = C_1$. 2883. $\frac{3}{2} C_1 x + C_2 = (C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}}$.
 2884. $y = \frac{(x+9)^2}{16}$. 2885. $y = x + 1$. 2886. წრფივად დამოკიდებუ-
 ლა. 2887. წრფივად დამოკიდებულება. 2888. წრფივად დამოკიდებუ-
 ლა. 2889. წრფივად დამოკიდებულება. 2890. წრფივად დამოკიდებუ-
 ლა. 2891. წრფივად დამოკიდებულება. 2892. წრფივად დამოკიდებ-
 ულება. 2893. წრფივად დამოკიდებულება. 2894. წრფივად დამოკიდებ-
 ულება. 2895. წრფივად დამოკიდებულება. 2896. წრფივად დამოკიდებ-
 ულება. 2897. წრფივად დამოკიდებულება. 2898. წრფივად დამოკიდებ-
 ულება. 2899. წრფივად დამოკიდებულება. 2900. წრფივად დამო-
 კიდებულება. 2901. წრფივად დამოკიდებულება. 2902. $x^2 y'' - 2xy' +$
 $+ 2y = 0$. მოკლედ $y = C_1 x + C_2 x^2$. ამოცანის პირობების მიხედვით ამოხსნი-
 ნი უნებ, $y = C_1 x + C_2 x^2$, აქედან $y' = C_1 + 2C_2 x$, $y'' = 2C_2$. მიღებ-
 ულ სისტემად C_1 და C_2 უდრებულების ვარიაციებზე მოგვცემს სპეცი-
 ფიკურ განტოლებას. 2903. $y'' + y = 0$. 2904. $\sin 2x \cdot y'' - 2\cos 2x \cdot y' = 0$.
 2905. $y'' - 2y' + y = 0$. 2906. $y = 3x^2 - 2x^3$. 2907. $y = 3x^2 -$
 $- 5x^3 + 2x^4$. 2908. $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$. 2909. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$.
 2910. $y = C_1 x + C_2 \ln x$. 2911. $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$. 2912. $y =$
 $= C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$. 2913. $y(1-x) = C_1 x + C_2 (1-x^2 + 2x \ln x)$.
 2914. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. 2915. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 2916. $y = C_1 e^{2x} +$
 $+ C_2 e^{3x}$. 2917. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$. 2918. $y = C_1 + C_2 e^x$. 2919. $y =$
 $= C_1 + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. 2920. $y = C_1 e^{-\frac{3}{4}x} + C_2 e^{2x}$. 2921. $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t$.
 2922. $y = 4e^x + e^{2x}$. 2923. $y = 2e^{-\frac{x}{2}} + 3e^{-\frac{3}{4}x}$. 2924. $y = (C_1 +$
 $+ C_2 x) e^{-x}$. 2925. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{3}{2}x}$. 2926. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{3}{4}x}$.
 2927. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{x}{4}}$. 2928. $y = (2-3x) e^{-2x}$. 2929. $y = 2x e^{3x}$.

$$2930. y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x}. \quad 2831. y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^{2x}$$

$$2832. y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}} \quad 2833. y = (C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x) e^{-2x}. \quad 2834. x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad 2835. y = C_1 \cos x +$$

$$+ C_2 \sin x. \quad 2836. y = \sin 2x. \quad 2837. y = (\cos x + 2 \sin x) e^{-x}. \quad 2838. y =$$

$$= (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}. \quad 2839. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x -$$

$$- x^2 - 3. \quad 2840. y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{3}} - x^2 + 4x - 15. \quad 2841. y =$$

$$= \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}} + 3x - 5. \quad 2842. y = C_1 +$$

$$+ C_2 e^{-x} + 3x. \quad 2843. y = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2. \quad 2844. y = C_1 + C_2 e^{2x} +$$

$$+ \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}. \quad 2915. y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{7x}{25} - \frac{3x^2}{5} + \frac{x^3}{3}.$$

$$2916. y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{e^{2x}}{9}. \quad 2947. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x +$$

$$+ 2e^x. \quad 2948. y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x} - 3x e^x. \quad 2949.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} x + 1 \right) e^{3x}. \quad 2950. y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

$$2951. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x \left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25} \right) e^{2x}. \quad 2952. y = C_1 e^x +$$

$$+ C_2 e^{6x} + \frac{1}{74} (5 \sin x + 7 \cos x). \quad 2953. y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} -$$

$$- \frac{2}{5} (3 \sin 2x + \cos 2x). \quad 2954. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - e^x (2 \cos 2x +$$

$$+ \sin 2x) \quad 2955. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2 \cos 3x - \sin 3x. \quad 2956.$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x. \quad 2957. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x -$$

$$- \frac{x}{4} \cos 2x. \quad 2958. y = C_1 + C_2 e^x - x - x^2 - 3x e^x. \quad 2959. y =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x. \quad 2960. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} -$$

$$- \frac{1}{34} \cos 4x - \frac{1}{10} \cos 2x. \quad \cos x \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 4x +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos 2x. \quad 2961. \quad y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^{2x} + \frac{x+1}{8}. \quad 2962. \quad y = e^x + x^2$$

$$2968. \quad y = \frac{3}{2} x^2 e^{-2x}. \quad 2964. \quad y = e^x (e^x - x^2 - x + 1). \quad 2965. \quad y = -$$

$$- \cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x. \quad 2966. \quad [y = A \cos x + B \sin x - \cos x \times$$

$$\times \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right|. \quad 2967. \quad y = (A + Bx) e^x + x e^x \ln x. \quad 2968. \quad y =$$

$$= (x + B) e^x - (e^x + 1) \ln (e^x + 1) + A. \quad 2969. \quad y = A \cos x + B \sin x -$$

$$- x \cos x + \sin x \ln \sin x. \quad 2970. \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad 2971. \quad y = e^{-x} (\cos x +$$

$$+ 2 \sin x). \quad 2972. \quad y = \frac{5}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x}. \quad 2973. \quad s_1^2 = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin t \quad \delta \circ \circ \circ \circ \delta$$

$$\delta \circ. \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad 2974. \quad s = \left(1 + \frac{t}{2} \right) \sin 2t. \quad 2975. \quad y =$$

$$= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \quad 2976. \quad y = 1000 - 490,5 t^2; \quad t \approx 1,43 \text{ в.д.}$$

$$2977. \quad y = y_0 + 100t - 490,5 t^2; \quad t \approx 0,1 \text{ в.д.} \quad 2978. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} +$$

$$+ C_3 e^{3x}. \quad 2979. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}. \quad 2980. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} +$$

$$+ C_3 e^{3x}. \quad 2981. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \quad 2982. \quad y = C_1 e^{-x} +$$

$$+ C_2 e^{4x} + C_3 e^{-3x}. \quad 2983. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}. \quad 2984. \quad y = C_1 e^x +$$

$$+ C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}. \quad 2985. \quad y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} +$$

$$+ C_5 e^{-3x}. \quad 2986. \quad y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x) e^{2x}. \quad 2987. \quad y = C_1 e^{-x} +$$

$$+ (C_2 + C_3 x) e^{2x}. \quad 2988. \quad (y = (C_1 + C_2 x) C_3 x^2) e^{2x}. \quad 2989. \quad y = (C_1 +$$

$$+ C_2 x + C_3 x^2) e^x. \quad 2990. \quad y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^{-x}. \quad 2991. \quad y =$$

$$= (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}. \quad 2992. \quad y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3} x +$$

$$+ C_3 \sin \sqrt{3} x). \quad 2993. \quad y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$2994. \quad y = C_1 e^x + e^{-2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x). \quad 2995. \quad y = C_1 e^x +$$

$$+ e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x). \quad 2996. \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x +$$

$$+ C_4 \sin 2x. \quad 2997. \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

$$2998. \quad y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x). \quad 2999. \quad y =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x. \quad 3000. \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} +$$

$$+ C_3 \cos x + C_4 \sin x. \quad 3001. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

$$3002. \quad y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x. \quad 3003. \quad y = (C_1 +$$

- $+ C_2 x) \cos \sqrt{3} x + (C_3 + C_4 x) \sin \sqrt{3} x$. 3004. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos 2x +$
 $+ (C_4 + C_5 x) \sin 2x$. 3005. $y = \left((C_1 + C_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (C_3 + \right.$
 $\left. + C_4 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}}$. 3006. $y = 1 + \cos x$, 3007. $y = 1$. 3008.
 $y = e^x$. 3009. $y = e^x + \cos x - 2$. 3010. $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$
 $\left. + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - x^3 - 5$. 3011. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \frac{x^3}{2} + x^2$.
3012. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$. 3013. $y = C_1 + C_2 x +$
 $+ (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2$. 3014. $y = C_1 e^{-x} +$
 $+ C_2 \cos x + C_3 \sin x + \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8} \right) e^x$. 3015. $y = (C_1 + C_2 x) e^x +$
 $+ C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1) e^{-x}$. 3016. $y = C_1 + \left(C_2 + C_3 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x$.
3017. $y = C_1 e^{2x} + \left(C_2 - \frac{x}{4} \right) e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$. 3018 $y =$
 $= (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-x} + (C_3 \cos x + C_4 \sin x) e^x + \frac{\sin 2x}{20}$. 3019. $y =$
 $= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088} (4 \cos 4x - \sin 4x)$. 3020. $y =$
 $= C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \left(\frac{3}{2} x - \frac{15}{4} \right) e^x$.
3021. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8} e^x - \frac{x \sin x}{4}$.
3022. $y = A + B \cos x + C \sin x + \sec x + \cos x \ln |\cos x| - \operatorname{tg} x \times$
 $\times \sin x + x \sin x$. 3023. $y = A + Bx + C e^{-x} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2$.
3024. $y = e^x + x^3$. 3025. $y = e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$
 $\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x - 2$. 3026. $y = 2e^x - x - 1$. 3027. $y =$
 $= -2 - 2x - x^2$. 3028. $y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \dots$. 3029. $y =$

$$= x e^{x^3}, \quad 3030. \quad y = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1)^{3k}} + \dots$$

$$3031. \quad y_1' = \frac{\sin x}{x}, \quad 3032. \quad y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \dots \quad 3033.$$

$$y = \sqrt{1-x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \dots \quad 3034. \quad y_1' = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \dots$$

$$3035. \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 9} + \dots \quad 3036. \quad y = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$3037. \quad y = 1 + \frac{e x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^2 x^4}{4!} + \frac{e x^5}{5!} + \dots$$

$$3038. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad z = C_2 \cos x - C_1 \sin x. \quad 3039. \quad y = C_1 e^{abx} + C_2 e^{-abx}; \quad z = \frac{b}{a} (C_1 e^{abx} - C_2 e^{-abx}).$$

$$3040. \quad y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}; \quad z = (C_2 - C_1 - C_2 x) e^{-2x}. \quad 3041. \quad y = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x); \quad z = e^{-6x} ((C_2 + C_1) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x).$$

$$3042. \quad x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{t^2}{2}; \quad y = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t^2 + t. \quad 3043. \quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t};$$

$$y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \quad 3044. \quad y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}; \quad z = C_2 e^{C_1 x};$$

$$y = x - e^x; \quad z = e^{-x}. \quad 3045. \quad y = C_1 C_2 e^{C_1 x}; \quad z = C_2 e^{C_1 x}; \quad y = e^x; \quad z = e^x.$$

$$3046. \quad y = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x; \quad z = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

$$3047. \quad y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x + e^x; \quad z = C_1 e^{\sqrt{2}x} - C_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{C_3}{4} \cos x - \frac{C_4}{4} \sin x + x - \frac{e^x}{2}.$$

$$3048. \quad x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right);$$

$$y = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{C_1 \sqrt{3}}{2} - C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{C_2 \sqrt{3} + C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right);$$

$$z = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{C_3 \sqrt{3} - C_2}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{C_2 \sqrt{3} - C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

$$3049. \quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}; \quad y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}; \quad z = -(C_1 + C_3) e^{-t} +$$

- $| C_2 e^{2t}$. 3050. $x = C_1 + 3C_2 e^{2t}$; $y = -2C_2 e^{2t} - \frac{C_3}{2} e^{-t}$; $z = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$. 3051. $x = -C_1 + e^t (C_3 \cos t - C_2 \sin t) + t^2 + 2t$; $y = -C_1 + e^t (C_2 \cos t + C_3 \sin t) + t^2 - 2$; $z = C_1 + e^t (C_2 \cos t + C_3 \sin t) - t^2$. 3052. $y = C_1 x$; $z = C_2 x$. 3053. $y = C_1 x$; $xy = z^2 + C_2$.
 3054. 1) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1$; $z - \sqrt{x} = C_2$; 2) $y = C_1$; $z = C_2 e^{\frac{x}{y}}$.
 3055. $x + y + z = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. 3056. $z - x = C_1 (y - x)$; $(x + y + z) \cdot (x - y)^2 = C_2$. 3057. $y^2 - z^2 = C_1$; $2x + (z - y)^2 = C_2$.
 3058. $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = -kx^2$, взаимн $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$. 3059. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = -\frac{y_2}{x} - y_1$, взаимн $y_1 = y$, $y_2 = y'$. 3060. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_1$, взаимн $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$. 3061. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_4$, $y'_4 = -x^2 y_1$, взаимн $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $y_4 = y'''$.
 3062. $y = C_1 + C_2 e^{-x}$; $z = -2C_1 - 3C_2 e^{-x}$. 3063. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; $z = 2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x}$. 3064. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$; $z = -C_1 e^x - \frac{3}{2} C_2 e^{2x}$; $y = e^x - 2e^{2x}$; $z = -e^x + 3e^{2x}$. 3065. $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$; $z = -\frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{4x}$; $y = e^{4x}$; $z = e^{4x}$. 3066. $x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$; $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$. 3067. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2e^{-x}$; $z = -x_1 e^x - \frac{3}{2} C_2 e^{2x} + e^{-x}$. 3068. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$; $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}$; $z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$.
 3069. $x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$; $y = \frac{3}{2} C_1 - 2C_3 e^{2t}$; $z = \frac{1}{2} C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t}$. 3070. $x = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}$; $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$; $z = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$. 3071. $x = C_2 e^{-3t} - C_3 e^{3t}$; $y = C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-3t} + C_3 e^{3t}$; $z = -C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}$.

3072. SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
 DIMENSION Y (N)

L = 1

DO 6 I = 1, N

6 Y (I) = C

7 X = X0

Z = Y 0

DO 9 K = 1, N

DO 8 J = 1, L

Q1 = F(X, Z) * H

Q2 = F(X + H/2, Z + Q1/2) * H

Q3 = F(X + H/2, Z + Q2/2) * H

Q4 = F(X + H, Z + Q3) * H

DEY = (Q1 + 2 * Q2 + 2 * Q3 + Q4) / 6

Z = Z + DEY

8 X = X + H

C = ABS(Z - Y(K)) / 15

Y(K) = Z

IF (C. GT. EPS) KIND = 1

9 CONTINUE

IF (KIND. EQ. 1) GOTO 10

RETUPN

10 H = H/2

L = L * 2

KIND = 0

GOTO 7

END

3073. SUBROUTINE EUL (F, X0, Y0, N, H, Y)

DIMENSION Y(N)

DO 1 I = 1, N

1 Y(I) = 0

3 X = X0

U = Y0

DO 4 I = 1, N

A = F(X, U) * H

Y(I) = U + A

U = Y(I)

4 X = X + H

RETURN

END

3074. SUBROUTINE EULRK (F, X0, Y0, N, H, Y, EPS)

DIMENSION Y(N)

X = X0

Z = Y0

L = 0

```

7 A = F (X, Z)
  Y 1 = Z + H * A
5 Y 2 = (Z + (A + F (X, Y 1)) * H) / 2
  B = ABS (Y 2 - Y 1)
  IF (B * LT * EPS) GOTO 10
  Y 1 = Y 2
  GOTO 5
10 L = L + 1
  Y (L) = Y 2
  X = X + H
  IF (L * LT * N) GOTO 7
  RETURN
  END

```

```

3075. SUBROUTINE MILN (F, X 0, H, N, Y, EPS)
  DIMENSION Y (N)
  M = N - 4
  EPS = 0
  X = X 0
  F 1 = F (X + H, Y (2))
  F 2 = F (X + 2 * H, Y (3))
  F 3 = F (X + 3 * H, Y (4))
  DO 2 K = 1, M
  YKX = Y (K) + (2 * F 1 - F 2 + 2 * F 3) * 4 * H / 3
  Y(K+4) = Y(K+2) + (F 2 + 4 * F 3 + F (X + 4 * H, YKX)) * H / 3
  B = ABS (YKX - Y (K + 4))
  EPS = AMAX 1 (B, EPS)
  F 1 = F 2
  F 2 = F 3
  F 3 = Y (K + 4)
2 X = X + H
  RETURN
  END

```

3076. გვექნება სამი პროგრამა ერთეული.

ა) ქვეპროგრამა

```

SUBROUTINE RK (F, X 0, Y 0, H, N, Y, EPS)

```

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

```

FUNCTION F (X, Y)

```

```

F = X * Y / (3 + COS (X) * * 2)

```

```

RETURN

```

```

END

```

3) ძირითადი პროგრამა

EXTERNAL F

DIMENSION Y (30)

CALL RK (F, 0, 1, 0.05, 30, Y, 1 E - 6)

WRITE (3, 1) Y

1 FORMAT (5 (2X, 6F 12. 6))

STOP

END

$y(0,25) = 1,007904$, $y(0,5) = 1,032735$, $y(1) = 1,149478$

$y(1,25) = 1,255612$, $y(1,5) = 1,405889$.

3077. ა) ქვეპროგრამა

EUL (F, X0, Y0, N, H, Y)

ბ) ქვეპროგრამა -- ფუნქცია

FUNCTION F (X, Y)

$F = \text{SQRT}(X \cdot X + Y \cdot Y) / (4.563 + \text{TAN}(X/Y) \cdot \cdot 2)$

RETURN

END

გ) ძირითადი პროგრამა

EXTERNAL F

DIMENSION Y (25)

CALL EUL (F, 1, 3, 25, 0.04, Y)

WRITE (3, 1) Y

• FORMAT (5 (2X, 5F 12.5))

STOP

END

$y(1,25) = 3,39024$, $y(1,5) = 3,83433$, $y(1,75) = 4,33876$, $y = 4,91069$

3078. ა) ქვეპროგრამა

SUBROUTINE EULRK (F, X0, Y0, N, H, Y, EPS)

ბ) ქვეპროგრამა -- ფუნქცია

FUNCTION F (X, Y)

$F = \text{EXP}(X \cdot X + Y) / (6 \cdot \text{SIN}(X) \cdot \cdot 2 + Y \cdot Y \cdot X \cdot \cdot 4)$

RETURN

END

გ) ძირითადი პროგრამა

EXTERNAL F

DIMENSION Y (10)

CALL EULRK (F, -1, -4.632, 10, 0.01, Y, 1E - 4)
WRITE (3,1) Y

1 FORMAT (2X, 10 F 10. 5)

STOP

END

$y(-0,9) = -4,55848.$

3079. ა) ქვეპროგრამა

SUBROUTINE MILN (F, X 0, H, N, Y, EPS)

ბ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

FUNCTION F (X, Y)

$F = \exp(X * X + Y) / (6 * \sin(X) * * 2 + Y * Y * X * * 4)$

RETURN

END

ვ) ძირითადი პროგრამა

EXTERNAL

DIMENSION Y (21)

DATA Y (1) 0.3, Y (5) 0.621, Y (9) 0.7202, Y (13) 0.8011

CALL MILN (F, 1, 0, 05, 21, Y, EPS)

WRITE (3, 1) Y, EPS

1 FORMAT (3 (2X, 7F 12. 6), 'EPS = ', F 10.6)

STOP

END

$y(1,25) = 0,8281, y(1,5) = 1,1274, y(1,75) = 1,4038, y(2) =$
 $= -1,6679.$

3080. $y(1,25) = 0,51021; y(2,5625) = 0,82708; y(2,66) = 1,03512.$

3081. $y(2,25) = 3,30285; y(2,5) = 3,53471; y(2,75) = 3,74642.$

$y(3) = 3,93234. 3082. y(1,98) = 2,60671; y(1,73) = 2,87318;$

$y(1,55) = 3,13885; y(2,23) = 3,40355; y(2,56) = 3,75144, 3083.$

$y(2,1875) = 1,63523; y(2,25) = 2,10538; y(2,3125) = 2,55755;$

$y(2,625) = 4,61886; y(3,17) = 7,83070. 3084. y(0,00097656) =$

$= 3,6665651; y(0,00195312) = 3,0019774; y(0,0027046) = 3,0090162.$

3085. $y(0,015625) = 3,01512; y(0,03125) = 3,02992; y(0,28125) =$

$= 3,30555; y(0,765625) = 5,87155; y(1) = 5,90691. 3086.$

$y(1,09875) = 2,04295; y(1,17220) = 2,05752; y(1,35970) =$

$= 2,04892; y(1,48470) = 1,97217; y(1,57080) = 1,89133. 3087.$

$y(0,03125) = 1,89494; y(0,0625) = 2,13772; y(0,1443125) = 4,72251;$

$y(0,16455078) = 21,53611; y(0,1655766) = 95,54486; y(0,16560173) =$

$= 215,87120. 3088. y(2,02245338) = 2,04298; y(2,27245339) =$

$= 2,07659; y(2,50662818) = 2,1017. 3089. y(1,37) = 4,55240;$

$y(1,62) = 4.55525$; $y(1,87) = 4.55864$; $y(2,12) = 4.56268$; $y(2,15) = 4.56322$. 3090. $y(2,5) = -2.99791$; $y(3) = -2.99666$; $y(4) = -2.99527$. 3091. $y(1) = 3.46735$; $y(1,6) = 3.40556$; $y(2,8) = 4.01080$; $y(x) = 4.55792$. 3092. $y(1,3) = 1.43217$; $y(1,8) = 2.49471$; $y(2) = 2.857372$; $y(2,8) = 4.035644$; $y(3) = 4.276436$. 3093. $y(0,5) = 2.221510$; $y(1) = 2.588922$; $y(2) = 2.744293$. 3094. $y(1,71) = 1.25153$; $y(3) = 1.44620$. 3095. $y(0,018) = -0.48714$; $y(0,089) = -0.44211$; $y(0,21) = -0.37618$; $y(0,33) = -0.31318$. 3096. $y(1,4) = 0.75162$; $y(1,6) = 0.92964$; $y(1,8) = 1.12586$; $y(2) = 1.43970$. 3097. $y(2,2) = -0.03211$; $y(2,40) = -0.32448$; $y(2,8) = -1.04209$; $y(3) = -1.40856$.

3098. SUBROUTINE RKS (F1, F2, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
 DIMENSION Y (N), Z (N)

K = 1

DO 7 I = 1, N

Y (I) = 0

7 Z (I) = 0

8 X = X0

A = Y0

B = Z0

DO 10 J = 1, N

DO 9 M = 1, K.

YQ1 = F1 (X, A, B) * H

ZQ1 = F2 (X, A, B) * H

YQ2 = F1 (X + H/2, A + YQ1/2, B + ZQ1/2) * H

ZQ2 = F2 (X + H/2, A + YQ1/2, B + ZQ1/2) * H

YQ3 = F1 (X + H/2, A + YQ2/2, B + ZQ2/2) * H

ZQ3 = F2 (X + H/2, A + YQ2/2, B + ZQ2/2) * H

YQ4 = F1 (X + H, A + YQ3, B + ZQ3) * H

ZQ4 = F2 (X + H, A + YQ3, B + ZQ3) * H

DEY = (YQ1 + 2 * YQ2 + 2 * YQ3 + YQ4) / 6

ZED = (ZQ1 + 2 * ZQ2 + 2 * ZQ3 + ZQ4) / 6

A = A + DEY

B = B + ZED

9 X = X + H

C = ABS ((A - Y (J)) / 15)

C1 = ABS ((B - Z (J)) / 15)

Y (J) = A

Z (J) = B

IF (C. GT. EFS. OR. CI. CT. EPS) KA = 1.

10 CONTINUE

IF (KA. EQ. 1) GOTO 11

RFTURN

11 H = H/2

K = K * 2

KA = 1

GOTO 8

END

3099. SUBROUTINE RK 99 (F1, F2, F3, X0, Y0, Z0, U0, H, N,
Y, Z, U, EPS)

DIMENSION Y (N), Z (N), U (N)

M = 1

DO 1 I = 1, N

Y (I) = 0

Z (I) = 0

1 U (I) = 0

2 X = X0

A = Y0

B = Z0

C = U0

DO 4 J = 1, N

DO 3 K = 1, M

Q1Y = F1 (X, A, B, C) * H

Q1Z = F2 (X, A, B, C) * H

Q1U = F3 (X, A, B, C) * H

Q2Y = F1 (X + H/2, A + Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H

Q2Z = F2 (X + H/2, A + Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H

Q2U = F3 (X + H/2, A + Q1Y/2, B + Q1Z/2, C + Q1U/2) * H

Q3Y = F1 (X + H/2, A + Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H

Q3Z = F2 (X + H/2, A + Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H

Q3U = F3 (X + H/2, A + Q2Y/2, B + Q2Z/2, C + Q2U/2) * H

Q4Y = F1 (X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H

Q4Z = F2 (X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H

Q4U = F3 (X + H, A + Q3Y, B + Q3Z, C + Q3U) * H

DY = (Q1Y + 2 * Q2Y + 2 * Q3Y + Q4Y)/6

QZ = (Q1Z + 2 * Q2Z + 2 * Q3Z + Q4Z)/6

$$DU = (Q1U + 2 \cdot Q2U + 2 \cdot Q3U + Q4U)/6$$

$$A = A + DY$$

$$B = B + DZ$$

$$C = C + DU$$

3 $X = X + H$

$$A1 = ABS(A - Y(J)) \quad 15$$

$$B1 = ABS(B - Z(J)) \quad 15$$

$$C1 = ABS(C - U(J)) \quad 15$$

$$Y(J) = A$$

$$Z(J) = B$$

$$U(J) = C$$

IF(A1. GT. EPS, OR. B1. GT. EPS, OR. C1. GT. EPS)

KIND = 1

4 CONTINUE

IF (KIND. EQ. 1) GOTO 5

RETURN

5 $H = H/2$

$$M = M * 2$$

KIND = 0

END.

3100. ა) ქვეპროგრამა

SUBROUTINE RKS (F1, F2, X2, Y0, Z0)

ბ) ქვეპროგრამა-ფუნქცია

FUNCTION F1 (X, Y, Z)

$$F1 = Z/X + 1$$

RETURN

END

გ) ქვეპროგრამა — ფუნქცია

FUNCTION F2 (X, Y, Z)

$$F2 = 3 * Z * Z * (X * (Y - 1)) + X/Z$$

RETURN

END

დ) ძირითადი პროგრამა

EXTERNAL F1, F2

DIMENSION Y (25), Z (25)

CALL RK (F1, F2, 1, 0, 1, , , Y, Z, 1E-4)

WRITE (3, 1) Y, Z

1 FORMAT (2X; 5F 10. 4)

STOP

END.

| | |
|---|-----|
| § 9. განსაკუთრებული წერტილები და ამონახსნები | 286 |
| § 10. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები | 267 |
| § 11. იზოგონალური და ორთოგონალური ტრანსფორმაციები, ევოლუციონები | 288 |
| § 12. ამოცანები პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა შედგენაზე | 290 |
| § 13. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები | 292 |
| § 14. მაღალი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები | 295 |
| § 15. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება | 301 |
| § 16. n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება | 307 |
| § 17. დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრება ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით | 310 |
| § 18. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები | 311 |
| § 19. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ინტეგრება | 314 |

XIII თავი

სკალარული არგუმენტის ვექტორული ფუნქცია

| | |
|---|-----|
| 1. ვექტორული ფუნქციის წარმოებელი | 323 |
| 2. სივრცის წირის ელემენტები | 325 |
| 3. სივრცის წირის სიმრუდე და გრესა | 328 |
| ფორტრან-IV შემოყლებული აღწერა | 329 |
| პასუხები | 343 |
| ზოგიერთი მნიშვნელოვანი წირი | 434 |
| ლიტერატურა | 439 |

დურგლიშვილი Николай Егорович
Буалдзе Алексей Иосифович
Иოსავა Мимозა Джонდоевна
მსლადზე ოთარი Баგრათович
სიგუა ლეილა Филлимоновна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть I

(На грузинском языке)

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ნ. ძნელიძე
უფროსი კორექტორი მ. ოდილავეძე
კორექტორი ნ. ჩხიკვიშვილი
გამომცემი ლ. დავითური

ИБ № 3724. Учебное издание

გადაეცა ასაწყობად 30.11.87. ხელმოწერილია დამატებულად № 64.89. საბეჭდი ქალაქი № 2. ქალაქის ზომა 60×90^{1/16}. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 27,75. საღებავგატარება 27,75. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 26,28. ტირაჟი 20.000. შეკვეთა № 506.

ფასი 1 მან. 20 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.

Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50

1989

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ო. ქავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская Книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, пр. Дружбы № 7.

