Мир МАТЕМАТИКИ

4

Когда прямые искривляются

Неевклидовы геометрии

DeAGOSTINI

Мир математики

Мир математики

Жуан Гомес

Когда прямые искривляются

Неевклидовы геометрии

Москва — 2014

DeAGOSTINI

УДК 51(0.062)
ББК 22.1
М63

М63 **Мир математики:** в 40 т. Т. 4: **Жуан Гомес.** Когда прямые искривляются. Неевклидовы геометрии. / Пер. с англ. — М.: Де Агостини, 2014. — 160 с.

Многие из нас слышали о том, что современная наука уже довольно давно поставила под сомнение основные постулаты евклидовой геометрии. Но какие именно теории пришли на смену классической доктрине? На ум приходит разве что популярная теория относительности Эйнштейна. На самом деле таких революционных идей и гипотез гораздо больше. Пространство Минковского, гиперболическая геометрия Лобачевского и Бойяи, эллиптическая геометрия Римана и другие любопытные способы описания окружающего нас мира относятся к группе так называемых неевклидовых геометрий. Каким образом пересекаются параллельные прямые? В каком случае сумма внутренних углов треугольника может составить больше 180°? Ответы на эти и многие другие вопросы вы найдете в данной книге.

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0635-2 (т. 4)

УДК 51(0.062)
ББК 22.1

Иллюстрации предоставлены:
age fotostock, Aisa, Album, Corbis, Getty Images, iStockphoto.

Оглавление

Предисловие 9

Глава 1. Поездка на такси 11
Заколдованные улицы 13
Расстояние такси 15
Пример с треугольниками 18
Круги 19
Эллипсы 21
Соединяющие улицы 22

Глава 2. Евклидова геометрия 25
«Начала» Евклида и пятый постулат 25
Утверждения, эквивалентные пятому постулату 32
Геометрия в картинах эпохи Ренессанса 34
Теория Евклида под сомнением 38

Глава 3. Конкуренты Евклида 43
Последний греческий мастер 43
Средневековые хранители греческого наследия 46
Современный период 46
Четырехугольники Саккери 48
На пути к неевклидовой геометрии 51

Глава 4. Становление неевклидовой геометрии 53
Николай Лобачевский: русская душа гиперболической геометрии 53
Янош Бойяи: математик и кавалерист 55
Вклад Гаусса 57
Переписка между Гауссом и Бойяи 58
Совместные достижения Лобачевского и Бойяи 60
Основные модели гиперболической геометрии 61
Риман и эллиптическая геометрия 67

Похожие, но разные 70
Муравьиные бега 73
Эйнштейн и Евклид 74
Теория относительности 75
Правильная геометрия 77

Глава 5. Удивительные результаты гиперболической геометрии 79
Углы параллельности 80
Эквидистанты 82
Пифагор, треугольники и длины 82
Треугольники 83
Круги 84
Теорема Пифагора 86
Гиперболическая тригонометрия 88
Классическая и гиперболическая тригонометрии 93

Глава 6. Эллиптическая геометрия 95
Третья геометрия 95
Терминология сферической геометрии 97
Мир сферических треугольников 103
Сумма углов и сумма сторон сферического треугольника 103
Площадь треугольника 103
Длина окружности 104
Теоремы синусов и косинусов 105
Теорема Пифагора 105

Глава 7. Геометрия Земли 107
Параллели и меридианы 108
От Mappa Mundi до Google™ Планета Земля 113
Как найти кратчайшее расстояние между Барселоной и Токио? 113

Глава 8. Геометрия в XXI веке 117
Интегральная геометрия 117
От циркуля к компьютерам 120
Искусственные глаза для роботов 122
Магнитный резонанс 125

Цифровые изображения 128
Системы автоматизированного проектирования (САПР) 133
Дистанционное зондирование: географические информационные системы 135

Приложение. Теория относительности и новые геометрии: 139

Список литературы 147

Алфавитный указатель 149

Посвящается памяти моих родителей, Висенса и Монсеррат

Предисловие

Во всей истории науки нет ничего более революционного, чем развитие неевклидовых геометрий, которое до основания потрясло веру в то, что теория Евклида является вечной истиной.

Эдвард Каснер и Джеймс Ньюмен
(«Математика и воображение», 1941)

Все мы знаем множество геометрических понятий, потому что постоянно используем этот раздел математики в нашей повседневной жизни. Но эти понятия относятся к так называемой «классической», или «евклидовой», геометрии. Однако существуют другие геометрии, которые устроены совсем не так, как нас учили в школе. Эта книга не сделает вас специалистом в нетрадиционных геометриях, зато покажет, что реальность гораздо богаче, чем кажется на первый взгляд.

В этой книге описаны другие способы мышления и отношения к геометрии, способы, отличающиеся от тех, которые прочно укоренились в нашей повседневной жизни, и которые определяют наши действия в соответствии с евклидовой геометрией. Можно подумать, что новые геометрии понятны лишь великим ученым, но мы постараемся в последующих главах в наиболее ясной и понятной форме изложить их основы.

Возможно, самым простым способом открытия новых миров является попытка увидеть их проявления в более понятных и очевидных сферах нашей повседневной жизни. Таким образом, наше изложение начнется с короткого путешествия в «геометрию такси», которая основана на так называемом «расстоянии Минковского», отличающемся от расстояния в обычном понимании. Как бы мы ни хотели улететь в дальние экзотические страны, для начала мы должны не терять землю под ногами. Нам придется обратиться к Евклиду, чтобы понять, как основные элементы геометрии используются в повседневной жизни. Лишь тогда мы сможем перейти к обсуждению таких понятий, как «пятый постулат» и «проблема параллелей», из которых рождаются интересующие нас новые геометрии.

Лишь владея лучшими инструментами математической теории, мы можем вступить в мир новых геометрий. Сначала проведем разведку, чтобы узнать, как обстоят дела. Мы рассмотрим различные попытки доказательства пятого постулата. Ведь только в XVIII в. непоколебимое на протяжении столетий учение Евклида было наконец поставлено под сомнение самыми выдающимися математиками того времени.

Неудачные попытки доказать пятый постулат поставили под сомнение, казалось бы, неоспоримые основы традиционной геометрии. В это время и проявили себя одни из самых замечательных ученых в области математики. История альтернативных интерпретаций пятого постулата является в равной мере историей неудач и гениальных открытий. С ней связаны самые известные в истории математики имена: Лобачевский, Бойяи, Гаусс, Риман... Мы более подробно рассмотрим удивительные результаты первой из новых геометрий — гиперболической геометрии Лобачевского и Бойяи. Мы увидим, как она кардинально изменила наше понимание физической реальности и как она повлияла на исследования Альберта Эйнштейна и открытие им теории относительности.

Эллиптическая геометрия Римана перенесет нас в удивительный мир сфер, где у треугольников сумма внутренних углов больше 180°. Мы воспользуемся сферической геометрией, чтобы ответить на многие вопросы. Что является кратчайшим расстоянием между двумя городами на поверхности Земли? Можно ли измерить внутренние углы треугольника, вершинами которого являются Париж, Лондон и Мадрид? Решения этих геометрических задач оказываются весьма полезными в нашем глобализованном мире, где GPS позволяет определить координаты любой точки нашей планеты.

Словно река, прорвавшая древнюю плотину, новые идеи смели́ традиционные научные понятия и породили сотни новых. Мы коснемся также геометрии XXI в. — интегральной и вычислительной геометрии, являющейся основой новых технологий. Читатели, желающие поглубже изучить эти вопросы, найдут в конце книги список литературы. Алфавитный указатель позволит легко ориентироваться в тексте книги.

Глава 1

Поездка на такси

Нам часто приходится в повседневной жизни измерять предметы. Математическую дисциплину, изучающую такие задачи, древние греки называли геометрией. Это слово происходит от греческого geometrein, где geo означает «земля», а metrein — «измерять». Когда мы говорим о геометрии, мы всегда используем единственное число. Казалось бы, множественное число — геометрии — подразумевает существование целого ряда возможных дисциплин на выбор. Такой подход звучит слишком заумно, эта идея находится за пределами понимания обычных людей. Тем не менее, так оно и есть: другие геометрии существуют.

Разве ученые абсолютно точно знают, что такое на самом деле точка в пространстве или прямая линия, проходящая через нее? Может ли круг иметь форму прямоугольника? Знаем ли мы, что означает «параллельность»?

Ответы на эти вопросы не являются вечными истинами, а меняются на протяжении времени. Евклид с полной убежденностью утверждал, что «через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной», но Лобачевский показал, что можно провести много параллельных прямых, практически бесконечное число. Риман был не согласен с обоими и считал, что параллельные прямые не существуют. Кто же из этих великих математиков прав? Может, все они правы? Или они все ошибаются?

В данной главе мы как раз и разрешим все эти неопределенности, но, пожалуй, нам лучше начать с простого примера, который наглядно демонстрирует, почему возникает путаница относительно самой природы физической реальности.

Отправляясь из дома на работу или в другое место, мы вычисляем время, которое потребуется на дорогу, исходя из расстояния. Но часто оказывается, что расчеты не соответствуют реальному времени. Пробки, светофоры, дорожные работы — список таких задержек можно продолжать бесконечно. Все это, казалось бы, идет наперекор нашим тщательным планам.

Проблема заключается в том, что мысленно мы моделируем наше путешествие геометрически идеальным образом, представляя наш путь в виде почти прямой линии. Однако реальность вовсе не является геометрически идеальной. Наши расчеты нарушают не только неисправные светофоры или разгружающие товары грузовики. Дело еще и в том, что блоки городских зданий не образуют идеальных квадратов, а улицы не пересекаются под идеально прямыми углами... Означает ли это, что невозможно найти оптимальную дорогу, чтобы утром добраться до работы?

ИЛЬДЕФОНСО СЕРДА (1815–1876)

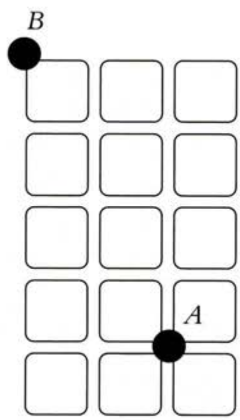
Известный главным образом как инженер и архитектор, Ильдефонсо Серда обладал многими талантами, занимаясь также экономикой, правом и политикой. Его реформа городского планирования в Барселоне в XIX в., получившая название «План Серда», изменила лицо города, в результате чего появился один из самых впечатляющих районов – Эшампле. По-каталонски (l'Eixample) или по-испански (el Ensanche) это означает «расширение». Улицы Эшампле образуют прямоугольные кварталы, пересекаясь на равных расстояниях друг от друга.

Вид с воздуха на район Эшампле в Барселоне.

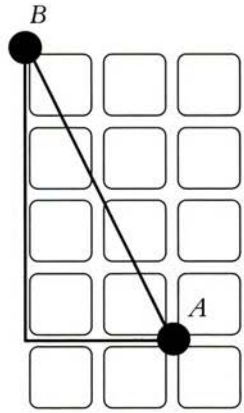
Заколдованные улицы

Как и следовало ожидать, реальность никогда не бывает геометрически идеальной, иначе бы мир был очень скучным, представляя из себя утомительные повторения упорядоченных форм. Однако рациональность и упорядоченность являются важными критериями, которые необходимо учитывать на практике, например, в городском планировании. По вполне разумным причинам улицы многих современных городов образуют квадратные блоки. Одним из первых примеров такого городского планирования был район Эшампле в испанском городе Барселоне, детище архитектора Ильдефонсо Серда. Этот район послужит идеальным вводным примером к нашей теме.

Представьте, что вы находитесь в районе Эшампле и хотите попасть из точки A в точку B. Если каждый городской квартал считать за единицу пути, то каким будет в этих единицах расстояние между точками A и B?



Глядя на этот рисунок, можно представить треугольник с гипотенузой (прямая линия между точками A и B) и двумя другими сторонами (вдоль улиц от одной точки к другой). Тогда длина одной стороны составит 4 единицы, а другой — 2. Применяя теорему Пифагора ($a^2 = b^2 + c^2$), мы можем найти длину гипотенузы: $\sqrt{(4^2 + 2^2)} = \sqrt{20} = 4{,}47$ единиц. Если нам нужно рассчитать время в пути, то очевидно, что это расстояние обманчиво, потому что мы не можем передвигаться из одной точки в другую по прямой линии. Реальное расстояние будет суммой двух других сторон треугольника, то есть 6 единиц.



Мы могли бы попробовать различные другие маршруты, чтобы найти наименьшее расстояние. Вариантов множество. Мы можем двигаться по вертикали и по горизонтали, поворачивая на первую улицу, а затем на вторую, или сделать поворот через две улицы и так далее. Однако общее расстояние всегда будет 6 единиц.

На следующем рисунке изображены различные маршруты между точками A и B. Всего имеется 15 возможностей.

Выходит, что фактический маршрут вовсе не является прямой линией. Здесь появляется другое понятие расстояния, которое называется *расстоянием такси*. Это понятие нелинейного расстояния лежит в основе *геометрии такси*.

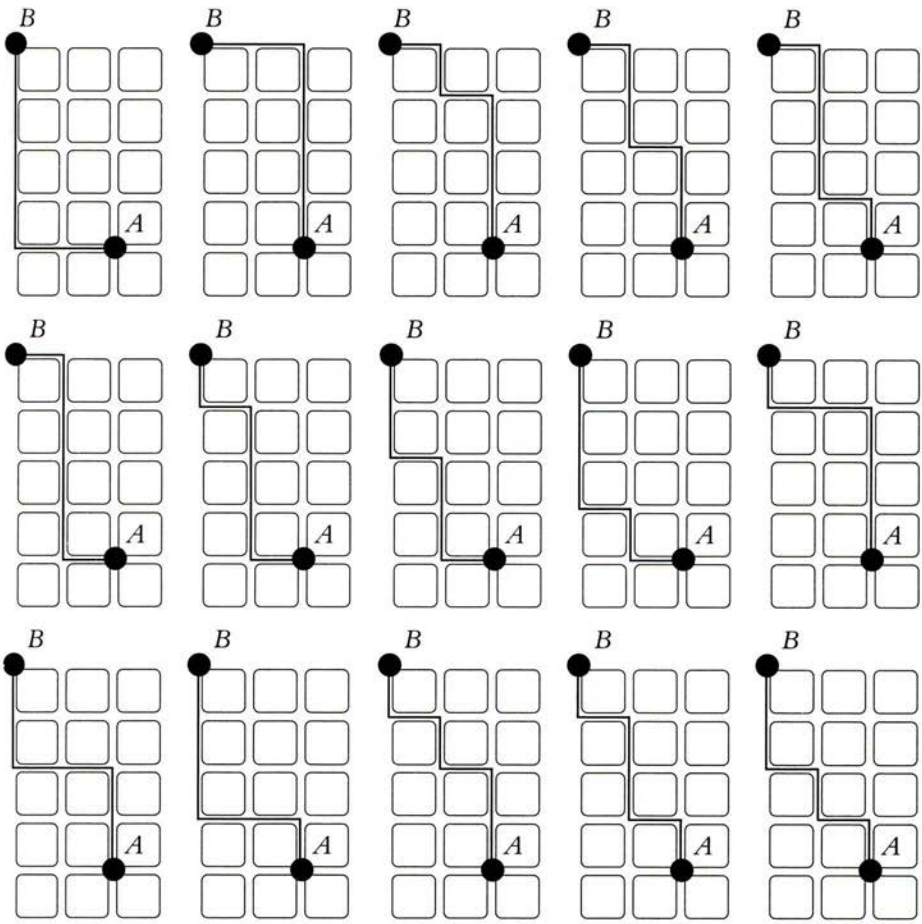
ВОЗМОЖНЫЕ МАРШРУТЫ

Формула, выражающая количество всех возможных маршрутов для *n* вертикальных и *m* горизонтальных движений, выглядит следующим образом:

$$BM^{n,m} = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}.$$

Здесь *n!* означает факториал числа *n*, который равен $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Например, $5! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 120$. В нашем примере формула записывается так:

$$BM^{4,2} = \frac{(4+2)!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ возможных маршрутов.}$$



Расстояние такси

Расстояние, которое изучается в школе, является евклидовым расстоянием. Оно находится по теореме Пифагора, поэтому расстояние между двумя точками P и Q с координатами $P = (x_1, y_1)$ и $Q = (x_2, y_2)$ выражается следующей формулой:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

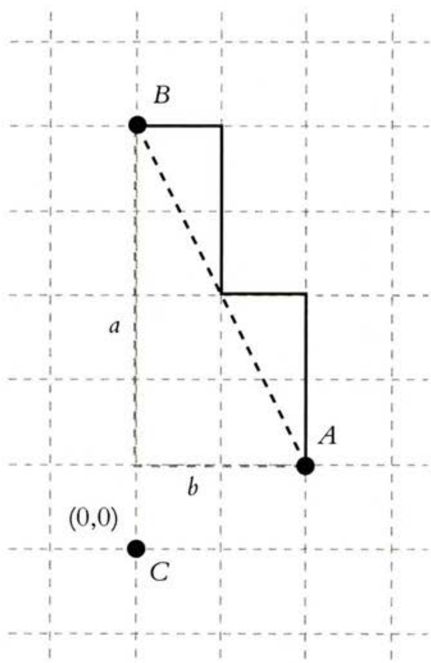
В отличие от евклидова расстояния, минимальное расстояние в городе с прямоугольной сеткой улиц считается как $d_T(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

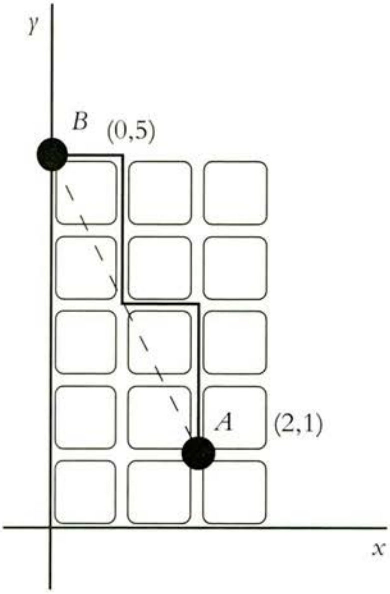
АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Выражение $|A|$ означает «абсолютное значение числа A», которое получается путем игнорирования знака числа. Если число A положительно, то $|A| = A$, а если число A отрицательно, то $|A| = -A$, например, $|-5| = 5$.

Это альтернативное расстояние называется *манхэттенским расстоянием*, или *расстоянием Минковского*, в честь немецкого математика Германа Минковского. На более популярном языке это расстояние называют также *расстоянием такси*.

На рисунке ниже пунктирная линия отмечает евклидово расстояние, а сумма длин вертикальных и горизонтальных отрезков соответствует расстоянию такси. Если точка C является началом координат, то точка A имеет координаты (2, 1), а точка B — координаты (0, 5). Таким образом, евклидово расстояние составляет 4,47 единиц, а расстояние такси — 6 единиц. Обратите внимание, что положение начала координат не влияет на результат при расчете расстояний.





В математике *метрикой* или расстоянием между двумя точками A и B называется такое соотношение, которое удовлетворяет условиям положительности, симметрии и неравенства треугольника. А именно,
1) $\delta(A, B) \geqslant 0$, и из $\delta(A, B) = 0$ следует, что $A = B$;
2) $\delta(A, B) = \delta(B, A)$;
3) $\delta(A, B) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B)$.
Евклидово расстояние $d(A, B)$ и расстояние такси $d_T(A, B)$ — два примера расстояний, которые удовлетворяют указанным выше условиям. В общем случае $d(A, B) \leqslant d_T(A, B)$.

ГЕРМАН МИНКОВСКИЙ (1864–1909)

Немецкий математик Герман Минковский разработал геометрическую теорию чисел – геометрический метод решения задач из теории чисел. В 1907 г. он понял, что специальная теория относительности Эйнштейна может быть лучше выражена в терминах неевклидовой геометрии четырехмерного пространства. Это пространство с тех пор называется *пространством Минковского*. В нем время и пространство являются взаимосвязанными измерениями и образуют четырехмерное пространство, так называемое *пространство-время*. Именно таким подходом позже воспользовался Эйнштейн при работе над общей теорией относительности.

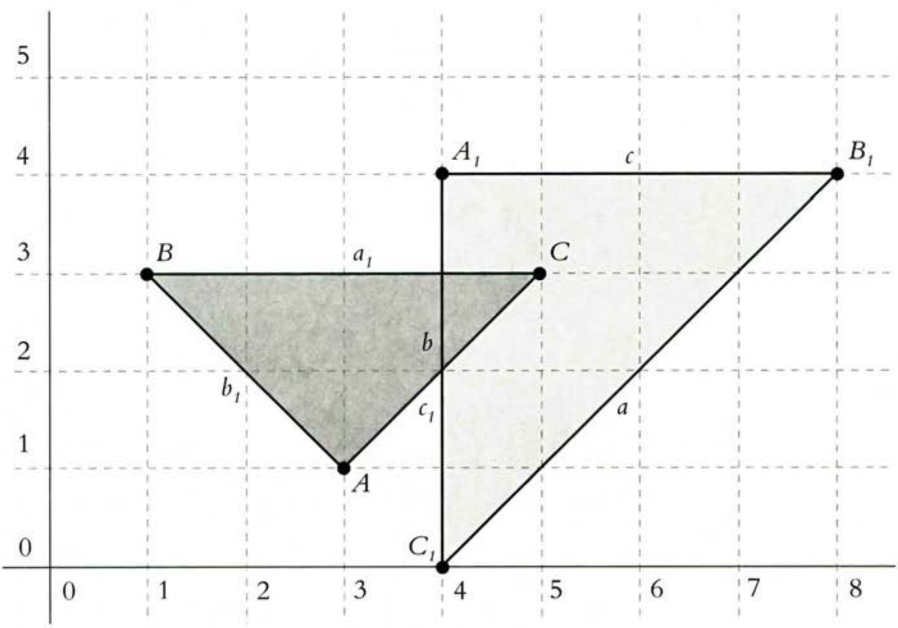
Пример с треугольниками

В евклидовой геометрии имеется признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, который работает следующим образом.

Пусть у нас имеются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ со сторонами соответственно AB, AC, BC и A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1. Тогда, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$, то сторона BC равна стороне B_1C_1, то есть треугольники равны.

Другими словами, если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то третьи стороны в треугольниках также будут равны. Такие треугольники равны.

Однако этот очевидный результат оказывается ложным в геометрии такси. Рассмотрим треугольники с вершинами $A = (3, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (5, 3)$ и $A_1 = (4, 4)$, $B_1 = (8, 4)$, $C_1 = (4, 0)$, как изображено на рисунке:



Можно показать, что

$$d_T(A, B) = 4 = d_T(A_1, B_1),$$

а также

$$d_T(A, C) = 4 = d_T(A_1, C_1).$$

Таким образом, по формуле расстояния такси $b = b_1$ и $c = c_1$. Обратите внимание, что угол BAC также равен углу $B_1A_1C_1$ (в данном примере они равны 90°). Несмотря на выполнение условий признака равенства, стороны a и a_1 наших треугольников имеют разную длину. Это совершенно разные треугольники, так что для них признак равенства треугольников из евклидовой геометрии не работает.

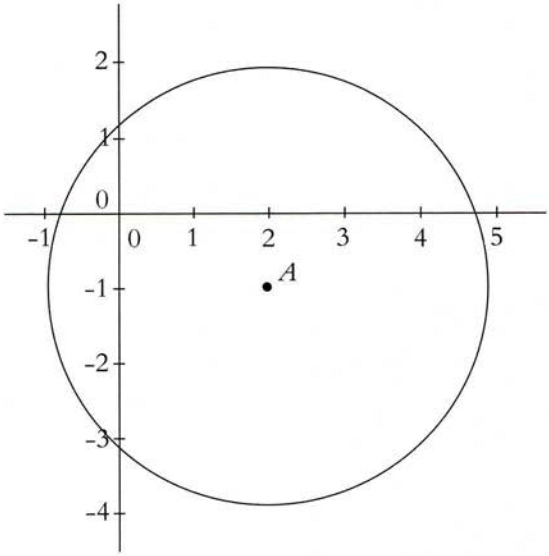
Круги

Круги встречаются повсеместно, как в естественных, так и в искусственных мирах, и, следовательно, это, пожалуй, простейшая из геометрических фигур, и ее легче всего описать. Подумав о круге, мы сразу вспоминаем множество круглых объектов, так что нам совсем нетрудно представить себе эту форму. Например, если взять колесо велосипеда, очевидно, что все спицы имеют одинаковую длину, иначе было бы невозможно на нем ездить. Все спицы одинаковой длины, потому что все точки на ободе находятся на одном и том же расстоянии от центра. Теперь сформулируем точное определение окружности на плоскости.

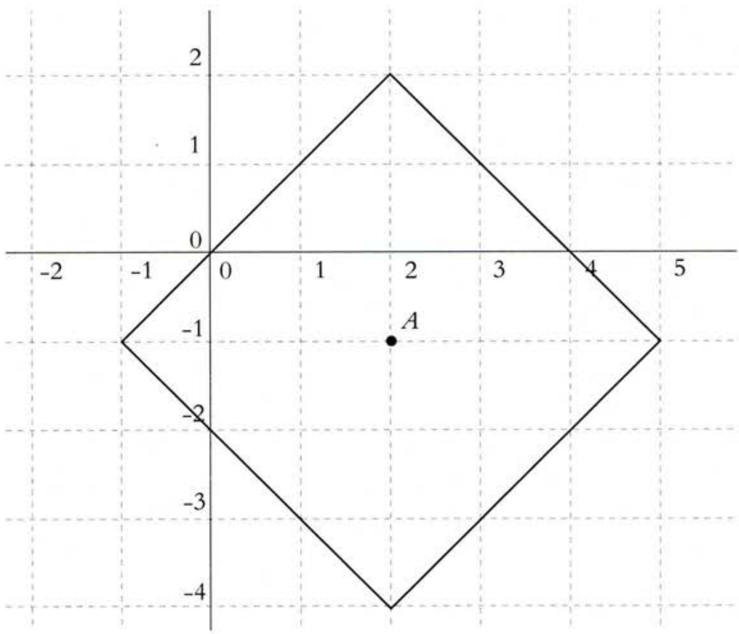
Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки на заданное расстояние, называется *окружностью*.

Данная фиксированная точка называется *центром* окружности, а заданное расстояние — *радиусом* окружности.

Таким образом, если мы выберем точку P на окружности (с центром в точке A и радиусом r), то $d(P, A) = r$. Например, если центр находится в точке $(2, -1)$, а радиус равен 3, то все точки P, удовлетворяющие нашему соотношению для A и r, образуют окружность.



На приведенном выше рисунке для изображения точек окружности использовалась формула евклидова расстояния, но если применять формулу расстояния такси, то получится совсем другой, очень странный результат, как можно видеть на следующем рисунке.



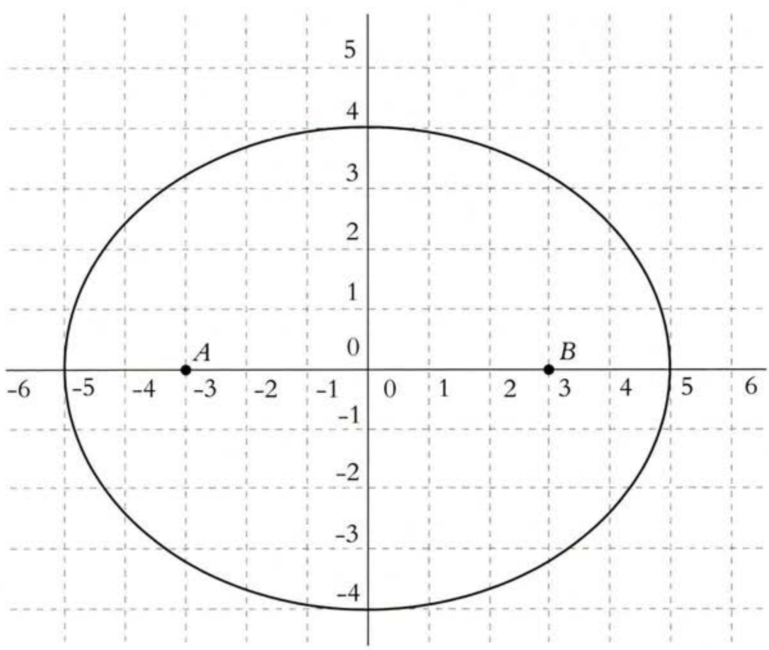
Мы можем проверить, что точки P на этой «окружности» такси действительно удовлетворяют соотношению $d_T = (P, A) = r$ при $A = (2, -1)$ и $r = 3$. В геометрии такси возможно то, что всегда казалось абсурдным: мы можем круг превратить в квадрат!

Если вычислить длину окружности нашего такси-круга по классической формуле $l = 2 \cdot \pi \cdot r$, то мы получим $l = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18{,}849$. Однако по формуле расстояний такси длина окружности составит $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ единицы, и, кроме того, результат совсем не будет содержать π.

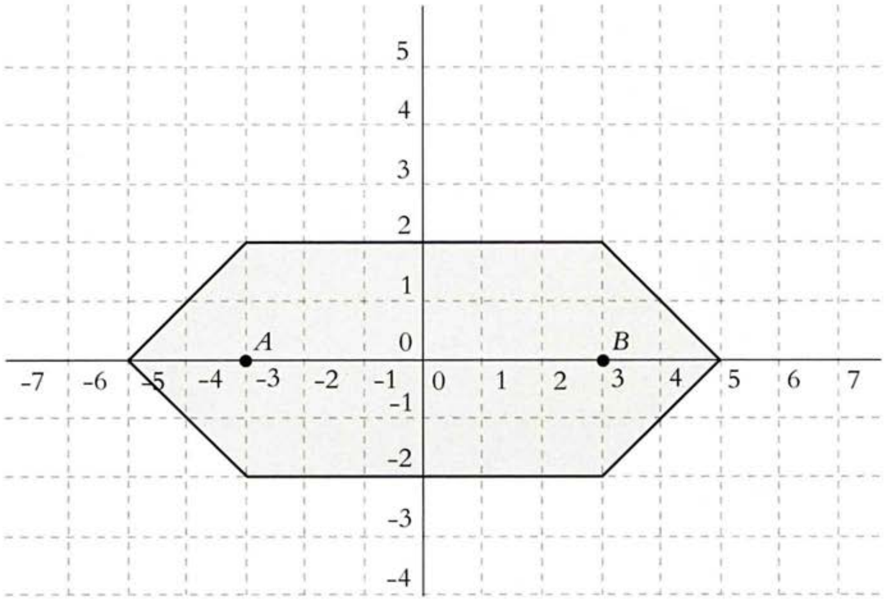
Эллипсы

Многие другие формы, известные из геометрии Евклида, выглядят странно в геометрии такси. Например, эллипс представляет собой множество точек, расположенных вокруг двух фиксированных точек, называемых *фокусами*. Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов постоянна. Круг является частным случаем эллипса, когда оба фокуса находятся в одной точке.

В следующем примере фокусами являются точки $A = (-3, 0)$ и $B = (3{,}0)$, а большая ось эллипса (наибольший диаметр) составляет 10 единиц. Следовательно, эллипс состоит из всех точек P, удовлетворяющих условию $d(P, A) + d(P, B) = 10$:



Если евклидово расстояние заменить расстоянием такси, то множество точек P, удовлетворяющих условию $d(P, A) + d(P, B) = 10$, будет выглядеть весьма странно:



Эти примеры показывают, что формы геометрических фигур не являются универсальными, вечными и неизменными. Любая форма относительна, каким бы странным этот факт ни казался. Формы зависят от метрики — так называется тип используемого «расстояния». Другими словами, они зависят от подхода к данной задаче.

Тем не менее, расстояние такси вовсе не является курьезом. Оно имеет множество применений в городском планировании. Например, оно играет важную роль при планировании эффективной дорожной сети и удобного расположения государственных учреждений (больниц, школ, туристических достопримечательностей и т. д.).

Соединяющие улицы

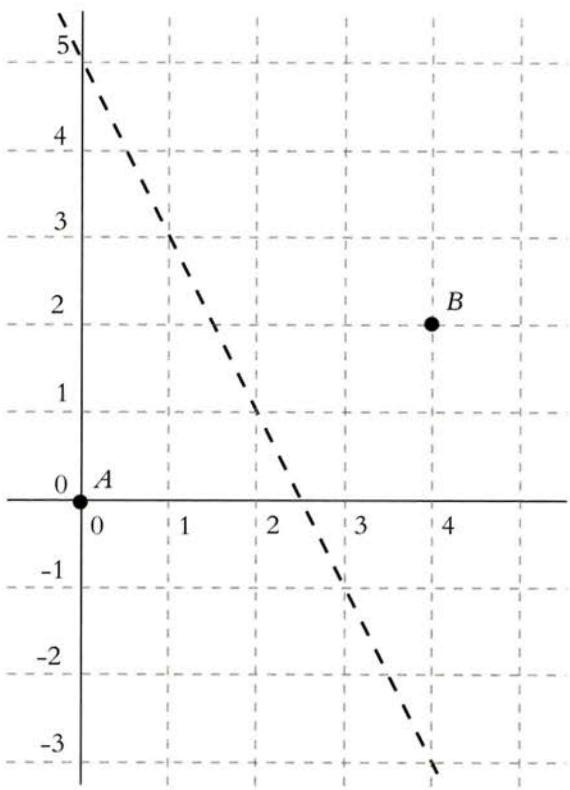
Давайте представим, что в некотором городе приняли решение соединить между собой два городских округа. Эти районы называются A и B, а улицы в них образуют прямоугольные кварталы, как в реальном Эшампле в Барселоне. Для соединения двух округов было решено построить дорогу таким образом, чтобы выполнялось одно сложное условие: в любой точке этой дороги автомобиль должен находиться на одинаковом расстоянии от точек A и B. Как можно спроектировать такую дорогу?

В математических терминах этот вопрос можно сформулировать следующим образом: какие точки на плоскости равноудалены от точек A и B?

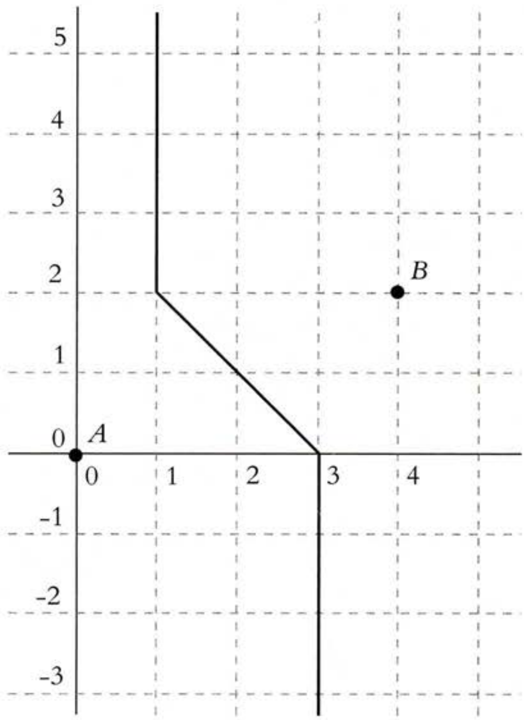
Как всегда, в евклидовой геометрии имеется простое решение. Если на плоскости XY точка A имеет координаты $(0, 0)$, а точка B — $(4, 2)$, то можно провести линию, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через его середину. Эта линия и будет состоять из точек P, удовлетворяющих условию:

$$d(P, A) = d(P, B).$$

Но этот подход не работает в геометрии такси. Обратите внимание, что евклидово решение потребует снести большое количество зданий, чтобы построить такой идеальный маршрут.



Решение должно быть найдено в терминах геометрии такси. Нужно найти линию, все точки P которой удовлетворяют условию $d_T(P, A) = d_T(P, B)$. Тогда расстояние от любой точки этой линии до точки A будет равно расстоянию до точки B. Кроме того, это решение позволяет свести к минимуму количество сносимых зданий.



Глава 2

Евклидова геометрия

В живописи точка является наиболее важным элементом.

Василий Кандинский

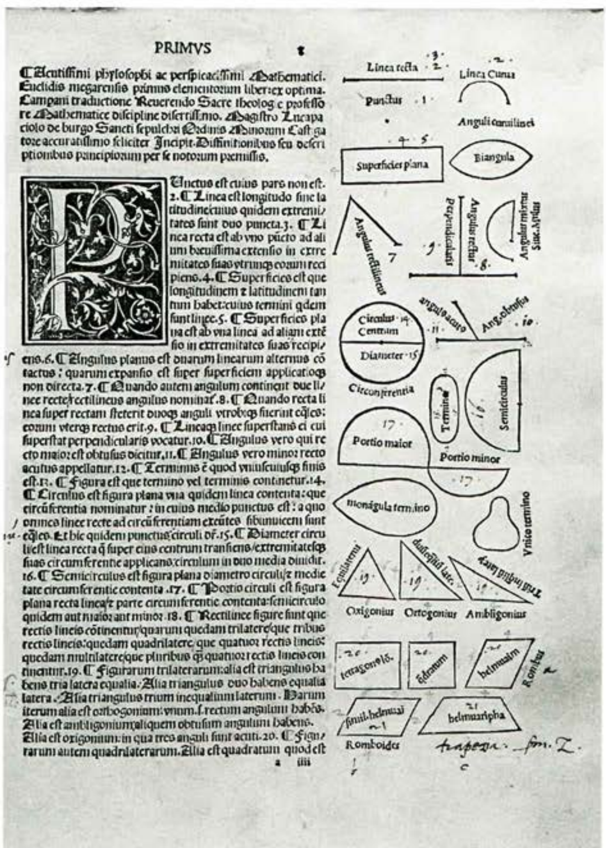
Геометрия первоначально была наукой об измерениях. Греческие геометры умели измерять отрезки линий (как прямых, так и кривых), площадь поверхности, ограниченной линиями, и объемы фигур, ограниченных поверхностями. Однако глагол «измерять» вскоре принял более широкий смысл: «устанавливать отношения между геометрическими объектами». Появились геометрические формулировки, которые используются и сегодня: «прямая линия r параллельна прямой q», «отрезок AC в три раза длиннее отрезка AB», «отношение периметра окружности к ее диаметру есть число, которое не может быть выражено в виде дроби».

Для установления истинности таких отношений геометры древности разработали и довели до совершенства особую систему доказательств, которая стала основным методом математики. Система греческих геометров состояла в выводе важнейших результатов (теорем) из набора основополагающих аксиом с помощью «длинных цепочек рассуждений», как называл доказательства Декарт в своем трактате «Рассуждение о методе». Этот практически творческий подход является характерной чертой евклидовой геометрии.

«Начала» Евклида и пятый постулат

Как и в случае со многими другими выдающимися деятелями далекого прошлого, сведения о Евклиде крайне скудны. Ни дата, ни город его рождения точно не известны. Все имеющиеся сведения содержатся в толкованиях древних документов, упоминающих геометрию. Оттуда известно, что он жил до Архимеда, ок. 325—265 гг. до н. э., и был почти современником Птолемея (367—283 гг. до н. э.). Стиль его рассуждений указывает на то, что он учился в Афинах с другими учениками Платона. Достоверно известно, что Евклид жил в Александрии, где преподавал математику на протяжении более чем 20 лет. Именно там он основал знаменитую школу, с которой и связан расцвет его научной деятельности.

Около 300 г. до н.э. Евклид написал свой *магнум опус*, великий труд «Начала», содержащий практически все известные в то время математические сведения. Эта книга является, по-видимому, наиболее читаемой после Библии. В самом деле, она использовалась в качестве учебного пособия в течение почти 2000 лет и считалась нерушимой основой не только геометрии, но даже здравого смысла. Первая печатная версия «Начал» появилась в Венеции в 1482 г. Это был перевод с арабского языка на латинский. Первая версия прямого перевода с греческого на латынь была опубликована в 1505 г.



Страница из первой книги «Начал» Евклида. Издание Леонардо де Базилея и Гильермо де Павия, 1491 г.

«Начала геометрии» (или «Начала») состоят из 13 книг, содержащих 465 утверждений, 372 теоремы и 93 задачи. Они не содержат обычного набора рутинных расчетов, которыми нагружают учеников в школе, а представляют собой логичный и структурированный свод современных знаний в стиле Платона. В соответствии со своими научными идеалами Платон говорил, что геометрия — это наука, которой занимаются ради познания. В седьмой книге диалога «Государство» он так объясняет свои представления об этой науке:

«Как если бы они были заняты практическим делом, геометры употребляют выражения «построим» четырехугольник, «проведем» линию, «произведем наложение» и так далее. А между тем, все это наука, которой занимаются ради познания».

В «Началах» все предложения доказываются шаг за шагом. Первые четыре книги называют пифагорейскими, так как они содержат главным образом материал, который изучали Пифагор и его последователи. Эти книги посвящены геометрии на плоскости: теореме Пифагора, свойствам треугольников, параллелограммов, кругов, многоугольников и так далее.

Следующие две книги излагают понятия пропорциональности и подобия многоугольников и содержат первое упоминание о золотой пропорции (в терминах «крайнего и среднего отношения»).

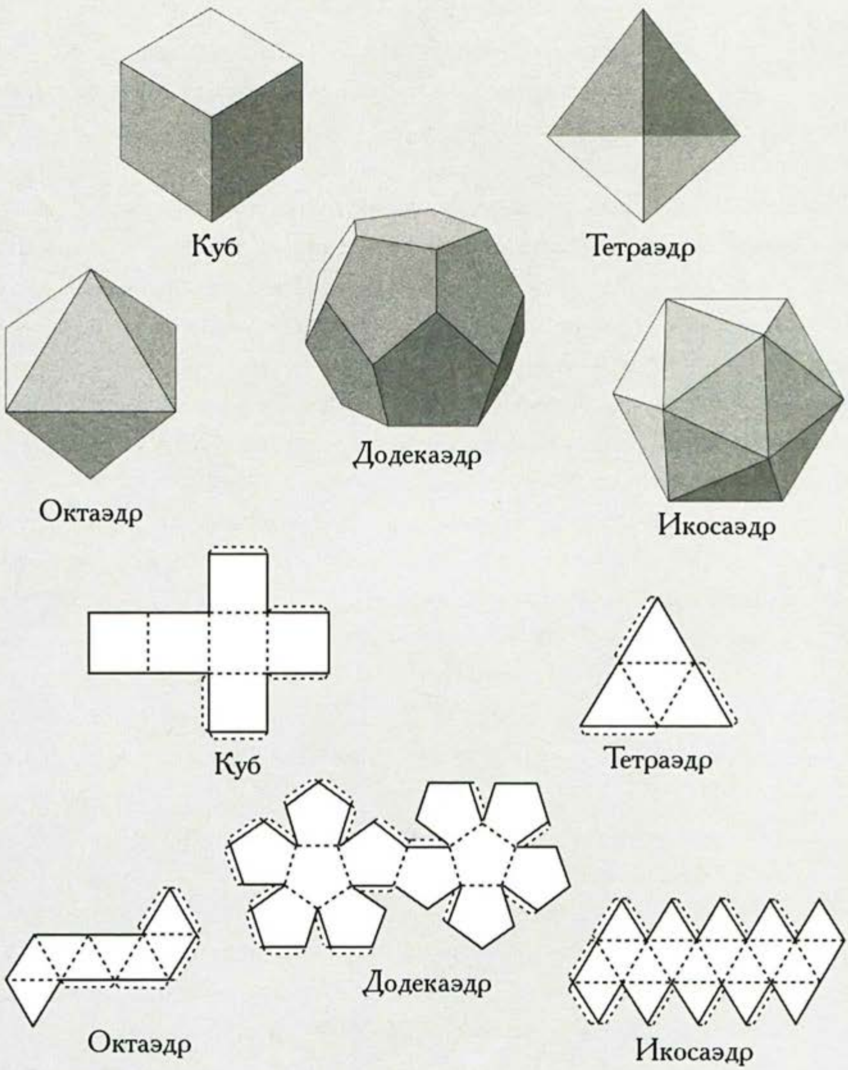
Книги с седьмой по девятую посвящены арифметике и рассматривают задачи, связанные с теорией чисел: делимость, простые числа, совершенные числа и так далее. Здесь определяется евклидово понятие числа. Евклид рассматривал все числа как геометрические отрезки, что соответствует современному понятию измеряемых величин.

Десятая книга дает классификацию чисел, называемых иррациональными, то есть таких чисел, которые не могут быть выражены в виде дроби. Последние три книги посвящены стереометрии (многогранникам, сферам и так далее). Здесь также рассматриваются пять правильных многогранников, так называемых «платоновых тел», все грани которых равны и при этом являются правильными многоугольниками.

Евклид начинает изложение с простых, очевидных утверждений, которые могут быть легко и интуитивно поняты и не подлежат сомнению. Он называет их определениями, постулатами и аксиомами, и из них он выводит свои предложения, которые доказываются с помощью цепочек рассуждений. Основы учения Евклида сформулированы в первой книге «Начал», которая содержит 23 определения, 5 постулатов и 48 предложений.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Существует только пять правильных выпуклых многогранников. Возможно, именно поэтому греки уделяли им особое значение, соотнося их с четырьмя стихиями: тетраэдр (огонь), куб (земля), октаэдр (воздух), икосаэдр (вода); а додекаэдр олицетворял Вселенную. Правильные многогранники также известны как пять «платоновых тел».



ТЕРМИНОЛОГИЯ ЕВКЛИДА

Предложение – истинное утверждение, которое уже доказано или должно быть доказано.

Теорема – предложение, которое может быть логически выведено из аксиом или из других ранее доказанных теорем с помощью принятых правил доказательства.

Постулат – предложение, истинность которого принимается без доказательства и лежит в основе дальнейших рассуждений; другими словами, допущение, лежащее в основе доказательства.

Аксиома – предложение, настолько ясное и очевидное, что оно не требует доказательств. Аксиомы более очевидны, чем постулаты.

Первоначальные определения из первой книги даются для точки, прямой линии, прямого угла и параллельных линий и лежат в основе евклидовой геометрии и других геометрий.

Определение 1. Точка есть то, что не имеет частей.

Определение 2. Линия — это длина без ширины.

[...]

Определение 4. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

[...]

Определение 10. Когда же прямая, восставленная на другой прямой, образует смежные углы, равные между собой, то каждый из углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

[...]

Определение 23. Параллельные — суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются.

Затем формулируются следующие аксиомы.

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. Целое больше части.

В отношении фигур Евклид не говорит об их равенстве, а старается использовать слово «конгруэнтность». В общем случае под конгруэнтностью геометрических фигур понимается тот факт, что при наложении друг на друга они совпадают.

Далее Евклид формулирует пять знаменитых постулатов.

I. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

II. Любой отрезок можно непрерывно продолжать по прямой линии.

III. Имея любой отрезок, можно описать круг с радиусом, равным длине этого отрезка, и с центром в одном из концов этого отрезка.

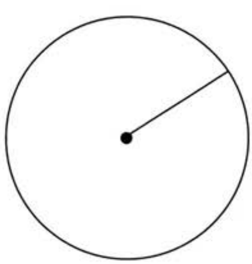
IV. Все прямые углы равны между собой.

V. Если две прямые пересекаются третьей, так что с одной стороны сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то эти две прямые неизбежно пересекаются друг с другом по эту сторону, будучи продленными достаточно далеко.

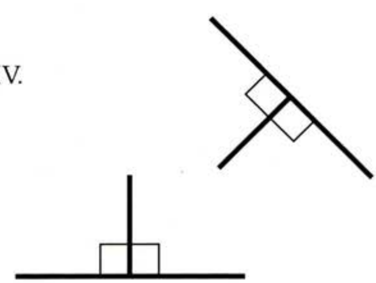
I.

II.

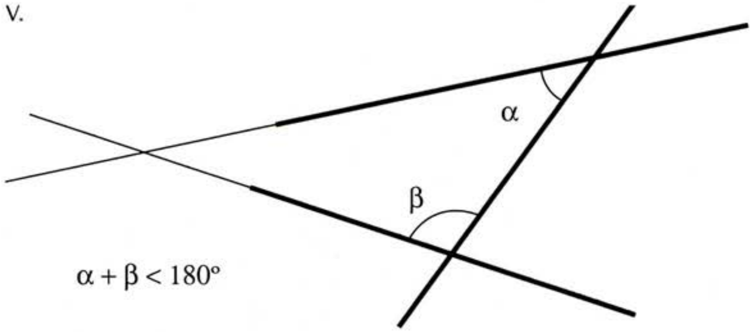
III.



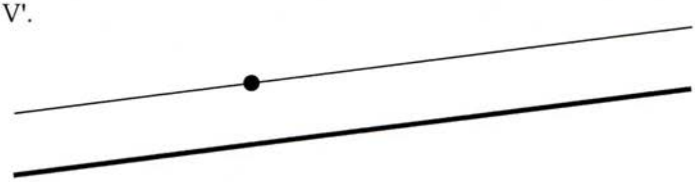
IV.



V.



V'.



В соответствии с пятым постулатом, если сумма углов меньше двух прямых углов, то прямые линии будут сходиться (пересекутся). Значит, верно и обратное: если сумма углов больше двух прямых углов, то прямые линии никогда не пересекутся (они будут расходиться). Что произойдет, если сумма углов равна двум прямым углам? Тогда прямые линии и не сходятся, и не расходятся, то есть они будут параллельными и никогда не пересекутся. Однако пятый постулат вскоре стал вызывать сомнения. Во-первых, его формулировка является более сложной, чем у других постулатов, и не кажется интуитивно ясной. Даже Евклид долго не использует пятый постулат, пока не формулирует предложение 32:

«*Сумма углов треугольника равна двум прямым углам* (180°)».

Как потом доказал сам Евклид, это утверждение эквивалентно пятому постулату. Все треугольники образованы пересечением двух непараллельных прямых, которые затем пересекаются третьей. Параллельные линии в пятом постулате представляют собой особый случай, когда третья прямая перпендикулярна двум другим, и тогда два угла в сумме равны 180°, не оставляя ничего третьему углу треугольника. Следовательно, по Евклиду нельзя построить треугольник с двумя прямыми углами.

Знаменитая теорема Пифагора также является еще одним частным случаем пятого постулата, когда только один из углов равен 90°:

«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух других сторон».

Таким образом, оказывается, что, по сути, существует несколько утверждений, эквивалентных пятому постулату, о которых сам Евклид, возможно, не догадывался.

Утверждения, эквивалентные пятому постулату

Пятый постулат, по сути, вызвал сумятицу. Понятие параллельных прямых, которые можно неограниченно продолжать, фактически вводило понятие бесконечности. Кроме того, по формулировке Евклида пятый постулат больше похож на теорему, чем на универсальную истину. Таким образом, на протяжении веков многие математики были убеждены, что это на самом деле свойство прямых, которое может быть доказано, и поэтому пытались найти доказательство. В результате появилось большое количество эквивалентных формулировок пятого постулата. Наиболее важные из них (именно с точки зрения новых геометрий) приведены ниже.

Греческий философ Прокл (410–485) был самым известным представителем афинской школы математики. Его постулат о равноудаленности формулируется следующим образом:

«Прямая, параллельная данной прямой, сохраняет постоянное расстояние от нее».

ГЕОМЕТРИЯ В ИСКУССТВЕ

Художники в своих работах используют точки, прямые линии и другие геометрические объекты. Их работы очень помогают при ответе на вопросы «что такое точка?», «что такое прямая линия?», «что мы имеем в виду под параллельностью?» Василий Кандинский (1866–1944) был русским художником, поэтом, драматургом и педагогом. Научные исследования в области права и экономики он сочетал с занятиями графикой и живописью. Его преподавательский опыт отражен в трактате «Точка и линия на плоскости» (1925), где Кандинский определил прямую линию как «след перемещающейся точки».

Великий французский математик Адриен Мари Лежандр (1752—1833) пытался доказать пятый постулат в книге «Начала геометрии», которая многократно переиздавалась и переводилась на многие языки. Более 40 лет он искал доказательство пятого постулата, которое было бы математически строгим, но в то же время понятным читателям и студентам. К сожалению, он умер, так и не увидев развития неевклидовых геометрий. Однако именно он сформулировал постулат для углов треугольника:

«Существует треугольник, сумма углов которого равна двум прямым».

Тут мы должны упомянуть Яноша Бойяи, о котором мы позже расскажем более подробно. Отец Бойяи, который также был математиком, безуспешно пытался доказать пятый постулат и поэтому не хотел, чтобы его сын зря тратил время на решение этой задачи. Однако Яношу было суждено сделать гораздо большее. Все началось с постулата о трех точках:

«Через любые три точки, не лежащие на прямой линии, всегда можно провести окружность».

Мы также более подробно рассмотрим результаты «принца математики» Карла Фридриха Гаусса, который начал работать над пятым постулатом в 1792 г. в возрасте 15 лет и к 1817 г. убедился, что этот постулат совершенно независим от других четырех. Гаусс сформулировал постулат о площади треугольника:

«Существует треугольник сколь угодно большой площади».

Особенно важным был результат шотландского математика и геолога Джона Плейфера (1748—1819). Именно его «аксиома параллельности», в отличие от сложной формулировки Евклида, в настоящее время преподается в школах и наиболее часто встречается в учебниках. И действительно, ее часто принимают за оригинальную формулировку пятого постулата Евклида. Ее ценность заключается в простоте — аксиому Плейфера гораздо легче понять, чем формулировку Евклида:

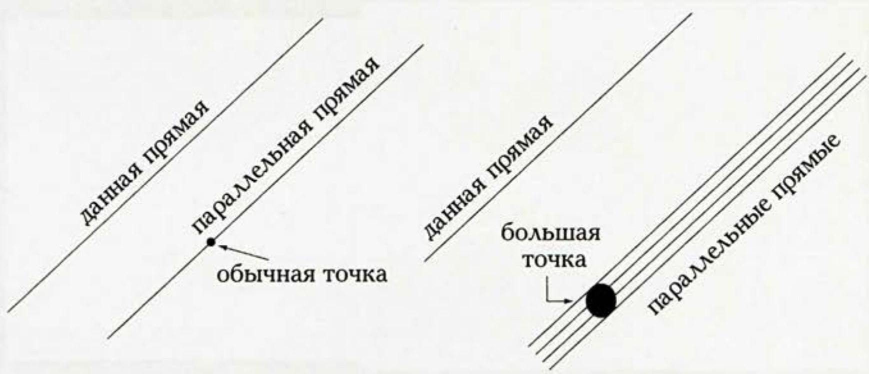
«В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной».

Эту аксиому также можно сформулировать следующим образом: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, которая не пересекает данную прямую (см. рис. V' на стр. 31).

ТЕОРЕМА О БОЛЬШОЙ ТОЧКЕ

Эта теорема представляет собой довольно необычный результат, который можно сформулировать следующим образом:

«Число прямых, параллельных данной прямой, которые можно провести через точку вне этой прямой, зависит от того, насколько большой является эта точка».



Через большую точку вне прямой можно провести более одной прямой, параллельной данной. Из этого также следует, что «через большую точку вне прямой можно провести сколь угодно много параллельных (и перпендикулярных) прямых к данной прямой».

Конечно, это всего лишь математическая шутка, но тем не менее эта формулировка наводит на интересные мысли. Откуда мы знаем, сколько линий (в евклидовом смысле) содержится в кончике грифеля карандаша? Чтобы проверить параллельность этих линий, нам придется продолжить их в бесконечность, а на это не хватит никакой бумаги в мире. Поэтому пятый постулат Евклида не может быть доказан экспериментально.

Как бы то ни было, даже такое ясное и очевидное утверждение, как аксиома Плейфера не смогло убедить многих геометров. Откуда же эта одержимость идеей бросить вызов бессмертному Евклиду?

Геометрия в картинах эпохи Ренессанса

Эта одержимость объединяла Леонардо да Винчи (1452—1519) и Альбрехта Дюрера (1471—1528), превратив их в выдающихся художников эпохи Возрождения

РАЗМЕРНОСТИ

На самом деле идеи Евклида представляют собой абстракцию, а не реальность: точка, не имеющая размеров; линия, не имеющая ширины, а только длину... Это дает понятие размерности, где длина и ширина определяют каждое измерение.

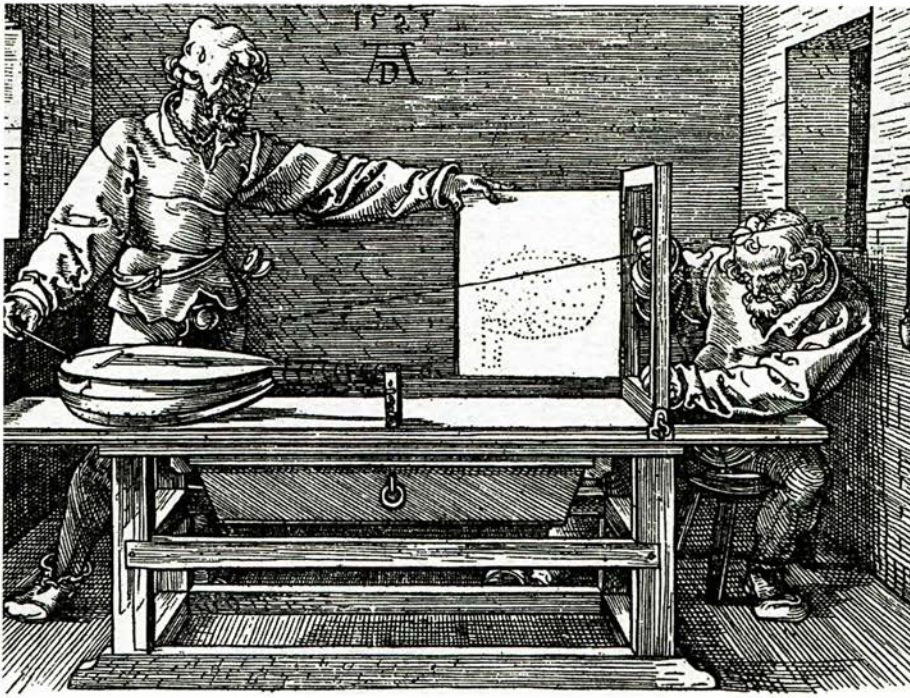
Так как точка не имеет размеров, она не имеет размерности. Так как прямая линия имеет только длину, ее размерность равна единице. Поверхность не имеет толщины и является двумерной. И, наконец, пространственные тела (например, куб) имеют три измерения. Фактически в евклидовой геометрии возможны только размерности, имеющие целые значения: 0, 1, 2 и 3.

и в величайших теоретиков за всю историю искусства. В своем трактате Institutiones Geometricae (латинский перевод с немецкого Underweysung der Messung, «Об измерениях»), опубликованном в Германии в 1525 г., Дюрер писал:

«Немецкие художники не имеют себе равных в использовании цвета, но их работы имеют некоторые недостатки в отношении пропорции, перспективы и так далее. Без правильных пропорций картина не может быть совершенной, как бы тщательно она ни была написана. Таким образом, те, кто желает овладеть искусством живописи, должны прежде всего изучать пропорции и понимать, как рисовать объекты в проекции и в перспективе».

И Леонардо да Винчи, и Дюрер искали способы изображения трехмерных объектов в двух измерениях. Как картине придать ощущение глубины? Этот вопрос привел их к понятиям перспективы, проекции и сечения, которые изучает специальный раздел геометрии, называемый проективной геометрией.

Проективная геометрия является математической теорией, разработанной в произведениях искусства эпохи Возрождения. Поверхность картины считалась стеклом окна, через которое художник видит объект. Точки объекта соединяются с глазом наблюдателя прямыми линиями. Эти линии, проходя через стекло, образуют на нем изображение, которое является проекцией объекта на поверхность стекла. Этот процесс показан на гравюре Дюрера «Рисующий лютню», где художник демонстрирует, как на картине изобразить проекцию в соответствии с методом из трактата «Об измерениях». Помощник художника (слева) держит лист стекла, на котором объект на столе изображен в перспективе.

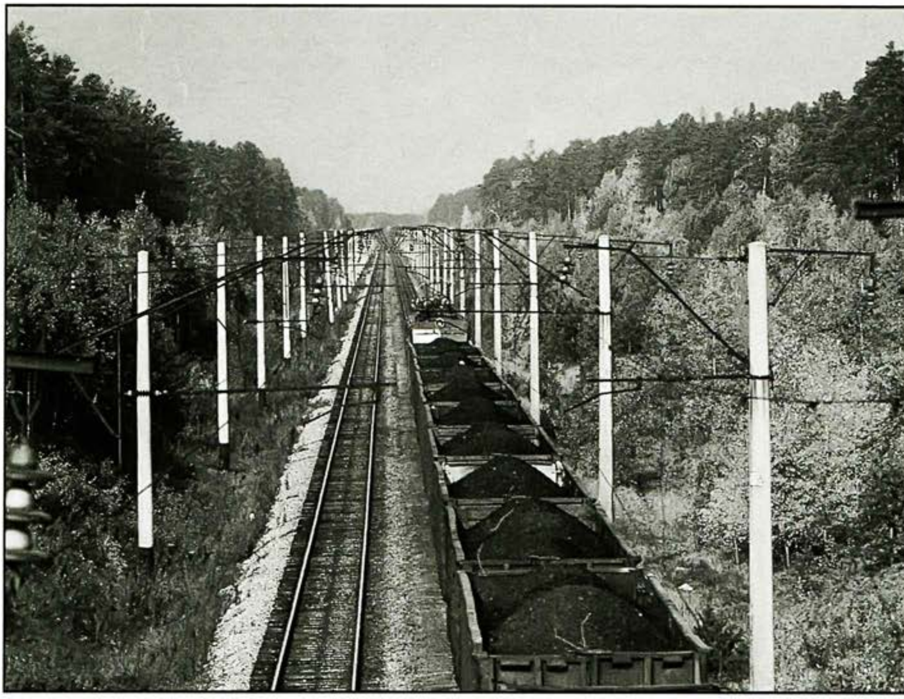


Эта гравюра включена в трактат «Об измерениях» (1525) и известна под названием «Рисующий лютню». На ней Дюрер показывает, как получить изображение в перспективе с помощью проекции.

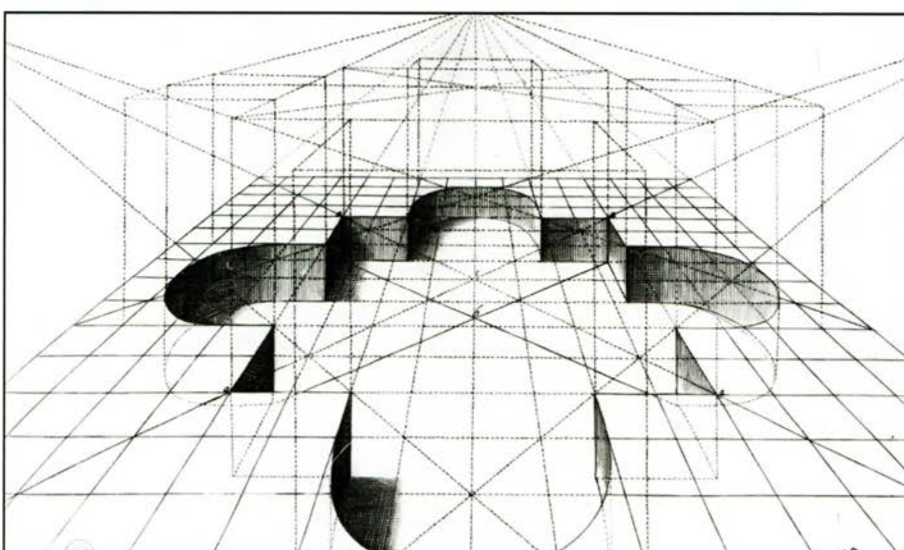
Чтобы получить такое изображение, стекло помещается в рамку, которую держит художник справа. Лучи света (прямые линии) от изображаемого объекта, попадая в глаз художника, проходят через стекло и образуют на нем так называемую проекцию. Таким образом, для художника ключевыми понятиями являются перспектива и проекция.

Обратите внимание, что в проективной геометрии параллельные линии сходятся в точке, называемой точкой схода, или точкой бесконечности. Понятие параллельных линий превращается в понятие прямых, которые пересекаются в точке, расположенной на бесконечном расстоянии. Однако эта бесконечно удаленная точка все еще находится в поле зрения наблюдателя.

Хорошим примером точки схода на плоскости является точка, где сходятся железнодорожные рельсы. Другим примером являются чертежи архитектора с плоскостными проекциями для изображения более реалистичного варианта дизайна.



Точка схода в реальности при взгляде на рельсы (сверху).
Точка схода на художественной проекции. Иллюстрация из опубликованного в 1565 г. «Трактата о перспективе» фламандского художника Вредемана де Вриса (снизу).



Методы проективной геометрии приводят к искажению изображений: длины отрезков, величины углов и размеры фигур евклидовой геометрии не обязательно сохраняются. В сущности, проективная геометрия является геометрией художников. Поэтому параллельные линии изображались художниками эпохи Возрождения совсем не так, как у Евклида. Изменилось само понятие параллельности.

Теория Евклида под сомнением

Вплоть до конца XVIII в. роль математики заключалась в обосновании физической реальности мира, в котором мы живем. В следующем же веке эта роль изменилась с появлением неевклидовых геометрий. Время «Начал» Евклида, являвшихся непререкаемой истиной на протяжении 23 веков, подошло к концу, и вместе с этим пошатнулось само понятие реальности в том абстрактном смысле, который в него вкладывали до сих пор.

Иммануил Кант утверждал, что пространство является системой отсчета, существующей в человеческом сознании, и, следовательно, аксиомы и постулаты геометрии Евклида являются предопределенным знанием, понятиями, априори запечатленными в уме человека. Без этих аксиом и постулатов невозможно даже рассуждать о пространстве. Тем не менее он был первым, кто допускал возможность существования другого типа геометрии. В своей первой работе, опубликованной в 1746 г., Кант рассматривает пространство с более чем тремя измерениями и говорит:

> *«Если возможно существование пространств с другими измерениями, то, скорее всего, Бог создал бы их, ибо его творения заключают в себе все величие и разнообразие, на которое они способны».*

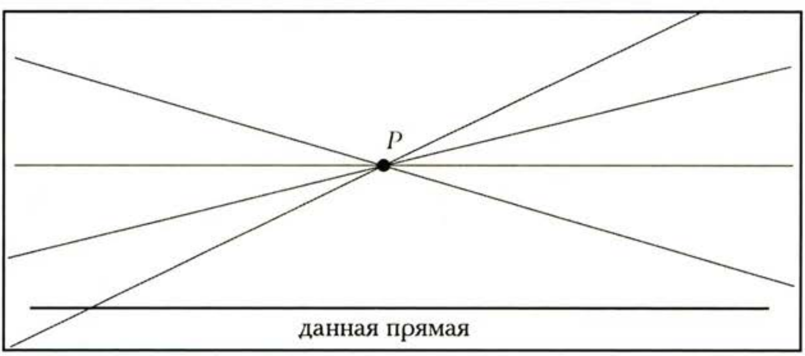
Геометриями, которые предсказал Кант, являются известные в наше время многомерные неевклидовы геометрии.

В формальном смысле евклидова геометрия определена в первых шести книгах «Начал», а неевклидовы геометрии получаются путем отказа от пятого постулата. В формулировке Плейфера этот отказ означает две возможности: либо отрицать уникальность параллельной прямой, либо отрицать ее существование. Это может быть выражено следующими альтернативными утверждениями.

1. В плоскости через точку P, не лежащую на данной прямой l, проходит более одной прямой, параллельной данной.

ИММАНУИЛ КАНТ (1724–1804)

Знаменитый немецкий философ Иммануил Кант получил строгое образование, при котором латинскому языку и религии уделялось больше внимания, чем математике и естественным наукам. И только в университете он по-настоящему занялся физикой и математикой. Но когда умер его отец, Кант был вынужден оставить учебу и работать репетитором, чтобы прокормить себя. В 1755 г. благодаря помощи друга он продолжил образование и получил докторскую степень. Кант в конечном счете стал преподавателем, работая в университетах в течение 15 лет, читая лекции по истории, естественным наукам и математике, а также по философии. Кант считается одним из самых ярких мыслителей современной Европы. С самого начала его теории оказывали огромное влияние на интеллигенцию и до сих пор являются основой современной философии, которая постоянно ссылается на него. Идеи Канта нашли отражение во многих дисциплинах: в философии, праве, этике, логике... Вместе с Платоном, Аристотелем и Декартом Кант является одним из основоположников западной философской мысли, отцом современной философии.



2. В плоскости через точку P, не лежащую на данной прямой l, не проходит ни одна прямая, параллельная данной.

Чтобы в полной мере понять эти формулировки, нам в первую очередь необходимо выйти за рамки нашего восприятия того, чем являются параллельные линии. Новая геометрия может быть построена таким способом: мы сохраним все постулаты Евклида, но только заменим пятый постулат его альтернативой. Такая геометрия позволяет получать логичные результаты и не имеет внутренних противоречий. Первая такая геометрия, так называемая гиперболическая геометрия, была предложена Николаем Лобачевским (1792–1856) и Яношем Бойяи (1802–1860). Другую геометрию, так называемую эллиптическую геометрию, сформулировал Бернхард Риман (1826–1866).

Развитие неевклидовых геометрий проходило в два этапа: сначала были попытки доказать пятый постулат Евклида, а потом появились новые геометрии с альтернативным пятым постулатом, которые сосуществовали с евклидовой геометрией. Такой подход предполагает существенные изменения в нашем восприятии реальности. Например, пятый постулат Евклида можно рассматривать в формулировке о сумме углов треугольника и сформулировать альтернативные постулаты. Сумма трех внутренних углов любого треугольника равна 180° — но только в мире Евклида, где параллельные линии можно продолжать до бесконечности и пространство не искривлено. А если бы Евклид побывал в бесконечности и увидел, что там произошло с параллельными линиями? А вдруг они бы пересеклись? Это бы значило, что пространство искривлено, а сумма углов треугольника больше 180°, как если бы треугольник был нарисован на поверхности апельсина. Аналогично в гиперболической геометрии, где параллельные линии неумолимо расходятся, сумма углов треугольника меньше 180°.

Евклидова геометрия содержит основные понятия любой геометрии, такие как точки, прямые и плоскости, но эти понятия в других геометриях необходимо пересмотреть. В новой геометрии прямой линией будет называться любая линия, которая является кратчайшим расстоянием между двумя точками, а плоскостью будет такая поверхность, которая обладает следующим свойством: если две точки на прямой

НАПОМИНАНИЕ

До сих пор никто не смог доказать ни одно из следующих утверждений.

1. Через точку вне прямой проходит только одна прямая, параллельная данной.
2. Через точку вне прямой проходит более одной прямой, параллельной данной.
3. Через точку вне прямой не проходит ни одна прямая, параллельная данной.

Все эти постулаты возможны и приводят к новым геометриям.

принадлежат этой поверхности, то все другие точки на этой прямой также будут принадлежать этой поверхности.

Эти идеи действительны во всех геометриях и характеризуют новый подход к восприятию форм. Неевклидовы прямые линии могут оказаться искривленными, а в так называемой сферической геометрии сфера считается плоскостью и большие окружности на ее поверхности являются прямыми линиями. Обе геометрии имеют общую терминологию, потому что и там, и там прямая линия является самой простой линией, а плоскость — самой простой поверхностью.

Как же мы можем быть уверены в том, что две прямые параллельны? Нам нужно продолжить их в бесконечность и убедиться, что они никогда не пересекутся. Человеческий разум владеет абстрактным понятием прямой линии, имеющей только длину, но не ширину. Можно представить себе две линии, которые никогда не пересекаются и всегда находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Все это можно представить, но нельзя доказать экспериментально. В конце концов, евклидова геометрия является такой же абстрактной идеей, как и все остальные.

ЗЛОПОЛУЧНАЯ ФРАЗА

В конце 1950 гг. математики со всего мира встречались на семинарах и конгрессах в Европе и Америке, обсуждая необходимость преподавания так называемой «современной математики» в средней школе. Самый известный конгресс состоялся в Руайомоне (Франция) в ноябре 1959 г. Там французский математик Жан Дьёдонне (1906–1992), заканчивая свой доклад, посвященный «Началам» Евклида, воскликнул: «Долой Евклида!» Эта фраза стала популярной в математическом сообществе и ассоциируется с наступлением эры современной математики.

К сожалению, эти слова были сказаны одним из самых влиятельных математиков XX в. Нет необходимости еще раз говорить о значении «Начал» и вкладе их автора: без Евклида мы были бы не в состоянии объяснить окружающую реальность или развивать другие геометрии. К счастью, специалисты в области образования во всем мире отстояли наследие Евклида, и его геометрию продолжают изучать в школе.

Глава 3

Конкуренты Евклида

На протяжении веков пятый постулат вызывал обильные комментарии и критику в трудах самых известных геометров. Многие из них были убеждены, что этот постулат можно доказать с помощью других постулатов, и сосредоточили свои усилия на поиске доказательства, чтобы, наконец, объявить его теоремой.

После многих столетий развития математических теорий никто так и не смог доказать ни сам постулат, ни ложность тех геометрий, которые этот постулат отвергают.

Последний греческий мастер

Список математиков, которые пытались доказать пятый постулат Евклида, содержит много самых знаменитых имен в истории науки. Результаты этих ученых открыли дорогу новым геометриям, и мы не должны забывать их новаторских работ в этой области.

Тем не менее, несмотря на усилия лучших математиков, все попытки были тщетны. Каждый, кто брался за решение этой задачи, получал результаты, эквивалентные пятому постулату, но строгое доказательство так и не было найдено. Одна из первых попыток была сделана Проклом в V в.

Прокл оставил ряд своих комментариев, например:

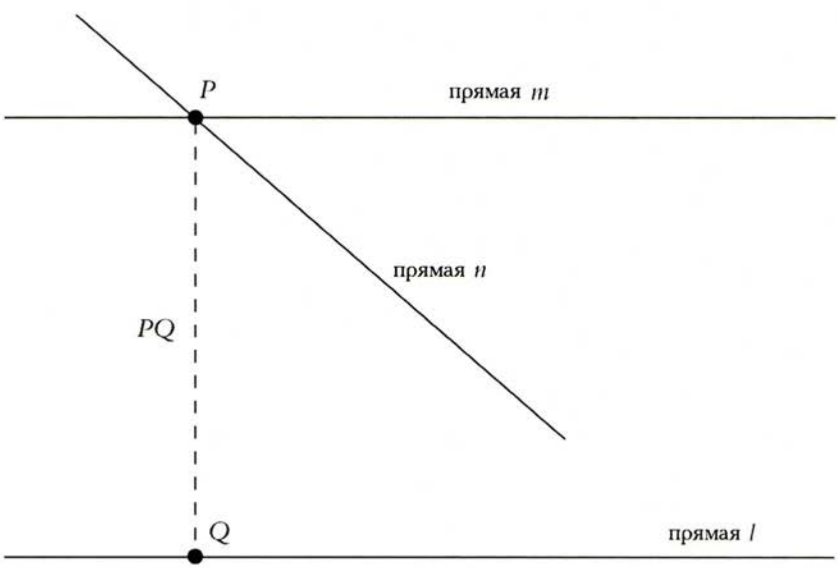
«Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений, которые Птолемей пытался разрешить в одной из своих книг, и его доказательство потребовало сложных определений и теорем. Кроме того, обратное утверждение было доказано самим Евклидом в качестве теоремы. Утверждение, что «две прямые неизбежно пересекаются, будучи продленными достаточно далеко», представляется правдоподобным, но не необходимым. Таким образом, совершенно ясно, что должно быть найдено доказательство настоящей теоремы, а такое требование природе постулатов совершенно чуждо».

ПРОКЛ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (410–485)

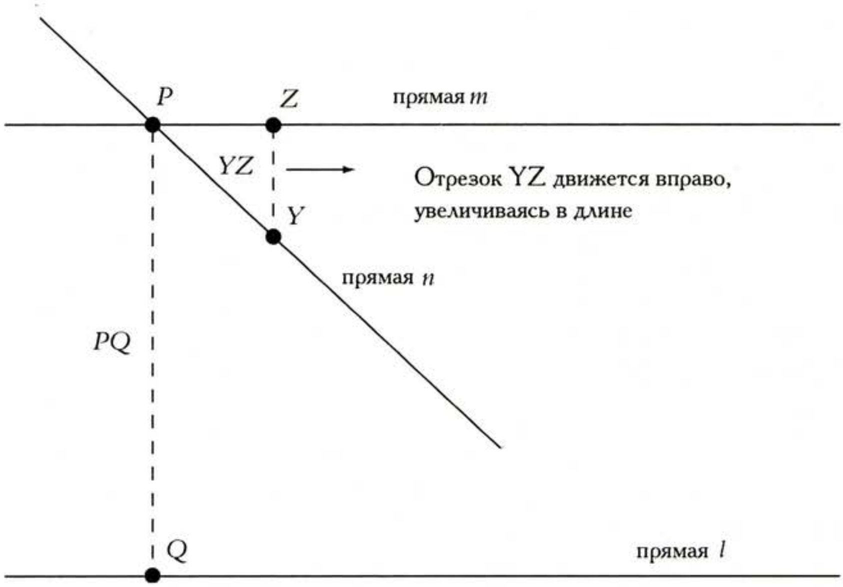
Греческий математик Прокл родился в Константинополе и умер в Афинах. Он был последним крупным языческим ученым. Из-за своего язычества он был изгнан из Афин на целый год. Он был выдающимся комментатором Евклида и Птолемея, а потому является важной фигурой древнегреческой геометрии.

Фактически греческий математик хотел показать, что только одна параллельная прямая m проходит через точку P вне прямой l.

Прокл предположил, что по крайней мере одна прямая, параллельная l, проходит через точку P, и он обозначил ее буквой m. Затем он хотел доказать, что любая другая прямая, проходящая через P и отличная от m, пересекает прямую l. Таким образом было бы показано, что если существует параллельная прямая, проходящая через P, то она должна быть единственной. Итак, Прокл провел через точку P прямую n, отличную от m, и опустил из точки P перпендикуляр на прямую l, обозначив его основание буквой Q.



Далее, если прямая n проходит через точки P и Q, то n пересекает прямую l в точке Q. Но что если n не проходит через точки P и Q? В этом случае на прямой n можно отметить точку Y и опустить из нее перпендикуляр на прямую m, обозначив его основание точкой Z.



На рисунке выше мы видим, что отрезок PY ограничен прямой m и отрезком YZ, а точка Y может двигаться вправо по прямой n.

Далее Прокл отмечает, что длина отрезка YZ увеличивается по мере продвижения вправо (и может стать бесконечно большой). Поскольку расстояние между прямыми m и l постоянно, то n обязательно пересечет l в некоторой точке. Таким образом, как думал Прокл, пятый постулат был доказан.

Обратите внимание: рассуждения греческого ученого опираются на то, что расстояние между прямыми m и l постоянно. Таким образом, единственным аргументом является то, что прямые m и l не пересекаются.

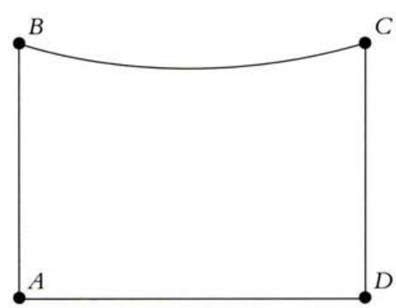
Кроме того, длина отрезка может увеличиваться бесконечно, но не превышать некоторой фиксированной величины. Фактически Прокл свел доказательство пятого постулата к доказательству того, что параллельные прямые находятся на постоянном расстоянии друг от друга, что эквивалентно аксиоме параллельности Плейфера.

Средневековые хранители греческого наследия

Арабские математики также пытались доказать пятый постулат. Первым из них был Ибн ал-Хайсам (965—1039), известный на Западе как Альхазен. Он исходил из предположения, что если четырехугольник имеет три прямых угла, то четвертый угол тоже должен быть прямым, откуда Альхазен заключил, что через точку вне прямой проходит только одна параллельная линия. Его заключение основывается на том, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, является прямой линией. Обратите внимание, что его аргументы тоже основаны на понятии равноудаленности, хотя и не так явно. Таким образом, его предположение (если четырехугольник имеет три прямых угла, то четвертый угол тоже прямой) эквивалентно пятому постулату Евклида: Альхазен использует пятый постулат, чтобы доказать пятый постулат!

Персидский математик Омар Хайям (1050—1123) был известен как в арабском мире, так и на Западе благодаря своим работам по астрономии, алгебре и, в частности, благодаря вкладу в геометрию. Его знаменитая работа «Об истинном смысле параллельных и об известных сомнениях» содержит аргументированные рассуждения с использованием четырехугольников. Эта теория лишь через 600 лет была развита итальянским философом и математиком Джироламо Саккери.

Хайям рассматривал четырехугольник с вершинами A, B, C и D, такой, что стороны AB и CD конгруэнтны (то есть одна из них может быть наложена на другую), а углы при вершинах A и D являются прямыми. Омар Хайям доказал, что углы при вершинах B и C также конгруэнтны, но он не утверждал, что они должны быть прямыми. Четырехугольник такого типа имеет следующий странный вид:



Современный период

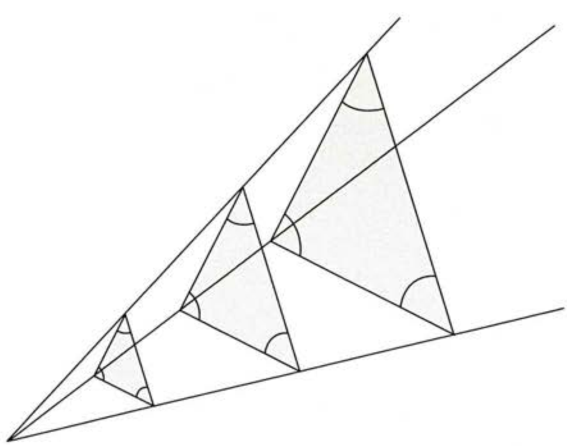
В эпоху Возрождения дальнейшие исследования связаны с работой Христофора Клавия (1538—1612), который в 1584 г. составил комментарии к «Началам». Он добавил также свои предложения, увеличив их количество до 1234.

Между 1603 и 1607 гг. он выпустил первое издание «Начал», предназначенное для Китая. Именно этот текст позднее использовали в своих исследованиях Саккери и Декарт.

Из-за своих дополнений к «Началам» Клавий прославился как «Евклид шестнадцатого века». Его работа была довольно радикальной, но он многое сделал в других областях. Он являлся активным сторонником григорианского календаря, и именно благодаря ему после четверга, 4 октября 1582 г. по юлианскому календарю, идет пятница, 15 октября 1582 г. по григорианскому календарю. Расчеты Клавия позволили перейти от одного календаря к другому, удалив 10 дней из истории человечества!

Клавий привел доказательство пятого постулата, снова использовав для этого сам пятый постулат: линия, равноудаленная от данной прямой линии, также является прямой. Несмотря на другие свои достижения, Клавий не достиг успеха в попытке исправить и дополнить великого мастера.

Преподаватель Оксфордского университета Джон Валлис (1616—1703) был одним из пионеров современной математики. Он ввел новую интерпретацию пятого постулата, отказавшись от идеи равноудаленности и использовав рассуждения с треугольниками. Валлис показал, что «для любого треугольника можно построить другой треугольник с теми же углами и пропорциональными сторонами». Однако и это утверждение также эквивалентно исходному постулату:



Все аргументы так или иначе сводились к утверждениям, эквивалентным пятому постулату, потому что сам подход был ошибочным: в доказательстве уже использовалось то, что они хотели доказать.

Четырехугольники Саккери

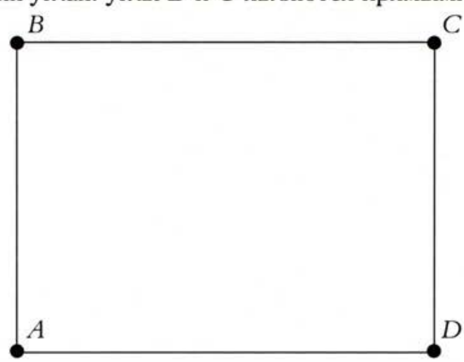
Казалось, ситуация зашла в тупик, но тут появился Джироламо Саккери. Итальянский математик воспользовался методом доказательства от противного, при котором сначала формулируют предположение, противоположное тому, что хотят доказать, а затем логически доказывают, что это предположение ведет к противоречию. Таким образом, Саккери подумал, что ему удалось доказать постулат, но потом он понял, что так и не получил убедительного противоречия.

Его работа неявно предполагает существование других геометрий, которые возникают именно из-за невозможности достижения противоречия, исходя из предположения о ложности пятого постулата. Сам не осознавая того, Саккери создал новую геометрию, в которой пятый постулат заменен противоположным ему утверждением.

Саккери начал с идеи Омара Хайяма и рассмотрел тот же четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AB и CD конгруэнтны, а углы при вершинах A и D прямые. Четырехугольники такого вида называются теперь четырехугольниками Саккери.

Чтобы доказать пятый постулат, Саккери показал, что углы при вершинах B и C прямые. В соответствии с пятым постулатом, угол B равен углу C. В этом случае существует три возможности.

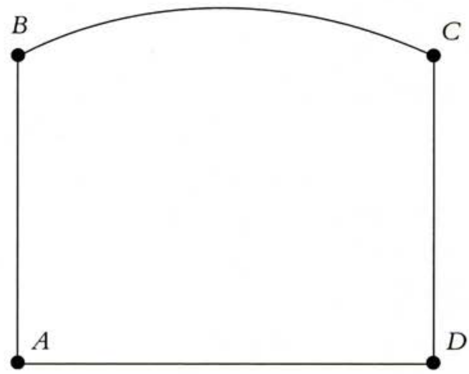
1. Гипотеза о прямых углах: углы B и C являются прямыми.



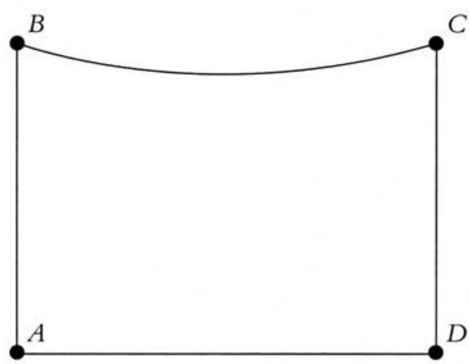
ДЖИРОЛАМО САККЕРИ (1667—1733)

Саккери еще молодым человеком вступил в орден иезуитов и преподавал теологию в иезуитском колледже в Милане. Позднее он преподавал философию в Турине. Но его интересы этим не ограничивались. Работая преподавателем математики в университете Павии, он занимался пятым постулатом Евклида и представил результаты исследований в своем главном труде Euclides ab omni naevo vindicatus («Евклид, очищенный от всех пятен»).

2. Гипотеза о тупых углах: углы B и C являются тупыми, то есть их величина больше 90° и меньше 180°.



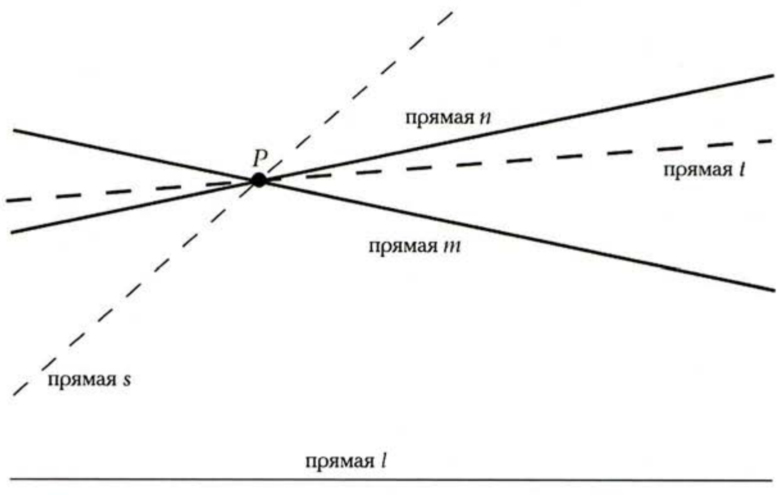
3. Гипотеза об острых углах: углы B и C являются острыми, то есть их величина больше 0° и меньше 90°.



Саккери показал, что пятый постулат эквивалентен гипотезе о прямых углах, а затем попытался доказать, что другие гипотезы приводят к противоречию. Если бы ему это удалось, то постулат был бы доказан. Рассматривая вторую гипотезу (случай тупых углов), он получил противоречие и отбросил эту возможность. Еще раньше он показал, что сумма четырех углов должна быть меньше или равна 360°. Но для гипотезы острых углов ему не удалось получить противоречия. Теперь-то мы точно знаем, что противоречия не существует, и гипотеза об острых углах является одной из основ неевклидовой геометрии. Спустя столетие Ламберт, о котором мы подробнее расскажем позже, также безуспешно попытался доказать постулат исходя из того, что углы A, B и D являются прямыми.

Исходя из гипотезы об острых углах, Саккери получил различные результаты неевклидовой геометрии. Например, он показал, что гипотезы о прямых, тупых и острых углах эквивалентны тому, что сумма внутренних углов треугольника равна, больше или меньше двух прямых углов соответственно. Он также доказал некоторые результаты, необычные для евклидовой геометрии. Вот один из них.

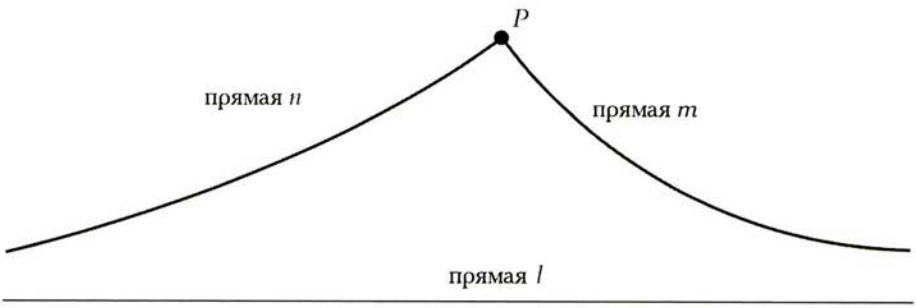
Пусть точка P находится вне прямой линии l. Если мы рассмотрим все прямые, проходящие через P, то увидим, что существуют две предельные прямые (в математических терминах они называются «асимптотическими»), обозначенные на рисунке буквами m и n. Они делят пучок всех прямых на две части, в одной из которых находятся все прямые линии, которые пересекают прямую l (например, пунктирная прямая s), а в другой — все прямые, которые l не пересекают (например, пунктирная прямая t).



Геометрия, построенная на гипотезе об острых углах и тем самым отрицающая пятый постулат, в наше время известна как гиперболическая.

На следующем рисунке показано, как в гиперболической геометрии выглядит предыдущий рисунок. Теперь прямые линии m и n изображены в виде кривых не потому, что они действительно такие, а для того чтобы не возникло путаницы с евклидовой ситуацией. На таком рисунке хорошо видно, что представляют собой асимптотические прямые m и n.

Представление прямых линий кривыми очень полезно для понимания и изучения гиперболической геометрии, каким бы нелогичным это ни казалось в евклидовом смысле.



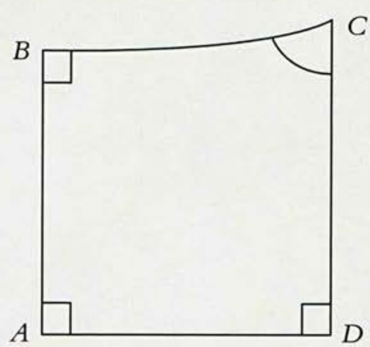
Работа Саккери содержит первые результаты этой новой геометрии. Достижение итальянского математика поразительно, но, к сожалению, ему не хватило смелости. Осознавая странность своих выводов, он пишет в предложении XXXIII своего трактата: «Гипотеза об острых углах является абсолютно ложной, поскольку противоречит самому понятию прямой линии». Казалось, что задача о параллельных прямых останется нерешенной еще многие годы.

На пути к неевклидовой геометрии

В XVIII в., в эпоху Просвещения, была посмертно издана книга швейцарского математика Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777) под названием «Теория параллельных». В ней Ламберт выразил сомнение, что пятый постулат может быть выведен из других, и предположил, что, возможно, необходимы некоторые дополнительные гипотезы.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК ЛАМБЕРТА

Ламберт составил список нескольких утверждений, которые должны быть доказаны, среди них — и пятый постулат. В последней главе своей книги он рассматривал четырехугольники с тремя прямыми углами (*A*, *B* и *D*). Для четвертого угла снова было три возможности. Четырехугольником Ламберта называют такой четырехугольник *ABCD*, у которого углы *A*, *B* и *D* прямые, а угол *C* не равен 90°.



Саккери и Ламберт так и не нашли неопровержимого доказательства того, что пятый постулат невозможно доказать. Последующие попытки доказательства всегда возвращались к исходной точке, лишь порождая новые запутанные понятия. Как мы уже говорили, проблема заключалась в том, что все доказательства неявно использовали результат, который нужно было доказать.

Математическое сообщество убедилось, что постулат о параллельных прямых является настоящим постулатом, а не теоремой, и поэтому не требует доказательства. С другой стороны, хотя все попытки доказательства потерпели неудачу, получаемые результаты не содержали противоречий. Попытки доказать пятый постулат Евклида приводили математиков к понятиям неевклидовой геометрии.

Глава 4

Становление неевклидовой геометрии

Самой первой неевклидовой геометрией была гиперболическая геометрия, которая возникла путем замены пятого постулата Евклида следующим утверждением:

«Через точку P вне данной прямой проходит более одной прямой, параллельной данной».

Этим утверждением Лобачевский и Бойяи решили проблему постулата о параллельных прямых, и поэтому они являются основоположниками первой неевклидовой геометрии. Они оба считаются авторами гиперболической геометрии, хотя они даже не слышали друг о друге и совершили открытие независимо друг от друга.

Тому было несколько причин. Лобачевский писал только на русском языке, и его работы стали широко известны лишь через много лет после его смерти. Однако в настоящее время гиперболическая геометрия чаще всего ассоциируется именно с ним, а не с Бойяи, его коллегой из Венгрии.

Николай Лобачевский: русская душа гиперболической геометрии

Николай Лобачевский

23 февраля 1826 г. бывший учитель Николай Лобачевский поразил научное сообщество своей теорией о параллельных прямых на конференции, состоявшейся на физико-математическом факультете Казанского университета. Его первые результаты были опубликованы в 1829 г. в журнале Казанского университета. В 1835 г. он опубликовал работу целиком под названием «Новые начала геометрии», где утверждал:

«Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден, и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 г.»

История гиперболической геометрии является историей первопроходцев и полна несправедливостей, а слава и почести пришли к ним слишком поздно. Нечто похожее часто происходит в истории науки на протяжении веков: два гения, опередившие время, независимо друг от друга получают одни и те же результаты примерно в одно и то же время.

Лобачевский происходил из бедной семьи государственных служащих. Родившись в Нижнем Новгороде, он большую часть жизни провел в Казани, ведя аскетичный образ жизни и полностью посвятив себя математике. Молодой Николай смог получить образование благодаря государственной стипендии и оказался удачной инвестицией царской России.

В 1814 г. он получил место преподавателя в Казанском университете, а через два года стал экстраординарным профессором. Он также отвечал за библиотеку и астрономическую обсерваторию.

В 1827 г. Лобачевский был избран ректором Казанского университета. Он занимал этот пост в течение 19 лет, которые стали периодом процветания университета. Лобачевский провел фундаментальные реформы и всячески поддерживал научные исследования. Парадоксально, но его блестящие результаты в работе над пятым постулатом привели к его увольнению. Согласно одной из мрачных легенд в истории математики, в 1846 г. Лобачевский был уволен ведущим математиком того времени Михаилом Остроградским, который не мог принять того, что Лобачевский бросил вызов самому Евклиду.

Здоровье Лобачевского начало быстро ухудшаться, и в конечном итоге он потерял зрение. Ему пришлось диктовать многие из своих работ, в том числе свой последний труд «Пангеометрия» (1855). Умирая в Казани 24 февраля 1856 г., он понятия не имел о том, насколько была важна его работа для дальнейшего развития математики. Его научное наследие включает такие работы, как «О началах геометрии» (1829), «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836) и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1834–1838). В 1840 г. Лобачевский опубликовал небольшую книгу в 60 страниц, озаглавленную «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Эта короткая работа широко разошлась в научных кругах того времени, но, несмотря на это, математическое сообщество было не готово принять заключенные в ней идеи.

В «Геометрических исследованиях» Лобачевский с большой ясностью объясняет, как работает неевклидова геометрия:

«Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на пересекающие ее и непересекающие. Граничная линия одного и другого класса этих линий называется параллельной заданной линии».

Его знаменитую формулировку альтернативной версии пятого постулата Евклида мы уже упоминали:

«Существуют две линии, параллельные данной прямой линии, которые проходят через данную точку вне данной прямой».

Исходя из этих предпосылок, Лобачевский вывел множество тригонометрических тождеств, лежащих в основе так называемой гиперболической тригонометрии.

Янош Бойяи: математик и кавалерист

Для венгра Яноша Бойяи (1802–1860) математика была лишь хобби, так как по профессии он был кавалерийский офицер. С его интеллектуальными способностями эта профессия, возможно, казалась ему довольно скучной. Наряду с увлечением математикой Янош виртуозно играл на скрипке, выступал в Вене, был также талантливым лингвистом, говорил на девяти языках, включая китайский и тибетский.

Блестящий ум он унаследовал от отца, Фаркаша Бойяи, который тоже был математиком и обучил сына исчислению бесконечно малых и аналитической механике, когда тому было всего 13 лет.

ЗАПОЗДАЛОЕ ПРИЗНАНИЕ

Только в 1945 г. в знак признания вклада Бойяи в математику румынский университет имени Бабеша был переименован в университет Бабеша – Бойяи. В 2002 г. отмечалось 200-летие со дня рождения великого математика. В Будапеште прошли различные мероприятия, посвященные памяти Бойяи, наиболее значительным из которых была международная конференция по гиперболической геометрии. Также к 100-летию со дня смерти Яноша были выпущены почтовые марки (см. рис. справа) и юбилейные монеты достоинством в 3000 форинтов с изображением гиперболических диаграмм из «Аппендикса».

Военная карьера молодого Яноша началась с поступления в королевский военно-инженерный колледж в Вене, после чего он в течение 11 лет служил в армии в инженерных войсках. Это может показаться сюжетом из романа XIX века, но, по общему мнению, Янош был лучшим фехтовальщиком и танцором в императорской австрийской армии. В 1833 г. он заболел лихорадкой и был вынужден оставить военную службу.

Хотя Янош Бойяи за всю жизнь опубликовал лишь одну работу по математике, после его смерти было обнаружено более 20000 рукописных страниц, которые в настоящее время хранятся в библиотеке имени Телеки и Бойяи в городе Тыргу-Муреш.

Для Яноша задача о параллельных прямых стала навязчивой идеей. Он опубликовал свои результаты в приложении к одной из работ отца, Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducenti («Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики»). В настоящее время это приложение известно просто как «Аппендикс». Как и Лобачевскому, Бойяи потребовалось лишь несколько страниц (а именно 24), чтобы изложить свои геометрические идеи. Прочитав сочинение, Гаусс написал в письме к Фаркашу Бойяи: «Этот юный геометр Бойяи — гений высшего класса».

Вклад Гаусса

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), математический авторитет не только прошлых времен, но и современности, оказал существенное влияние на работу Бойяи. Еще Кант неявно предсказывал возможность существования других геометрий, но Гаусс, возможно, был первым человеком, который воспринимал геометрию не так, как Евклид, оставив подтверждение своих идей на бумаге. В одной из записных книжек он пишет:

Портрет Карла Фридриха Гаусса работы художника Кристиана Альбрехта Йенсена.

«Я убежден, что отказ от постулата о параллелях не приводит к противоречию, хотя это правда, что получаемые результаты кажутся парадоксальными».

В течение почти 40 лет Гаусс работал над постулатом о параллелях, никому не показывая своих результатов и держа их в строжайшем секрете. Наиболее важными документами, свидетельствующими о его исследованиях, является переписка с семьей Бойяи и комментарии в его записных книжках.

Нет ничего удивительного в дружбе Гаусса и семьи Бойяи. Гаусс был вундеркиндом, тоже ставшим образованным интеллектуалом. Он в очень раннем возрасте начал заниматься математикой, астрономией и физикой — именно в этих областях он достиг наивысших результатов. В возрасте семи лет он пошел в школу, где поражал учителей своими способностями выполнять сложные вычисления.

Учась в Коллегиуме Каролинум в Брауншвейге, Гаусс самостоятельно открыл астрономический закон, известный как правило Тициуса — Боде, а также несколько алгебраических теорем, таких как бином Ньютона. В 1795 г. он поступил в Гёттингенский университет, где изучал математику и получил докторскую степень в возрасте 22 лет.

ГАУСС, ЮНЫЙ ГЕНИЙ

Легендарные таланты Гаусса говорят о том, что он был типичным гением. Еще ребенком он делал открытия, которые с трудом могли понять взрослые. В возрасте десяти лет он открыл формулу для суммы арифметической прогрессии, быстро сложив первые сто натуральных чисел. Как ему это удалось? Он применил особый трюк, совершенно удивительный для ребенка его возраста. Он понял, что сумма первого члена с последним, второго с предпоследним и так далее, является постоянной:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 97, 98, 99, 100$$

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = \ldots = 101.$$

Сто чисел образуют 50 пар, так что для решения достаточно найти произведение $101 \times 50 = 5050$. Гаусс вывел формулу, выражающую сумму первых n членов арифметической прогрессии, S_n, где a_1 обозначает первый член, а a_n – последний:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Талант Гаусса проявился во многих областях математики: в статистике, теории чисел, геометрии... Он был также научным руководителем докторской диссертации Римана, о чем мы подробнее расскажем позже. В возрасте 30 лет, в 1807 г., он руководил обсерваторией Гёттингена, в которой шесть лет изучал магнетизм. Он внес также существенный вклад в физику. В конце его академической карьеры в 1849 г. он уже был известен как «принц математики».

Переписка между Гауссом и Бойяи

Гаусс был близким другом Фаркаша Бойяи, отца Яноша, и в своей переписке они не раз обсуждали пятый постулат. Гаусс сам работал над этой проблемой, но очень осторожно, о чем говорит то, что он так и не опубликовал свои результаты. Фаркаш также пытался доказать пятый постулат, но безуспешно. На основании собственного опыта и переписки с Гауссом Фаркаш посоветовал сыну не тратить «ни одного часа на эту задачу». Янош так и поступил: он потратил на эту работу не один час, а целых два года! В 1832 г. Фаркаш Бойяи написал своему другу Гауссу и выразил озабоченность по поводу одержимости сына. В том же письме он попросил совета, как убедить Яноша оставить эти исследования. Гаусс ответил, что он сам получил аналогичные результаты, которые решил не разглашать. Он не мог оценить работу Яноша или убедить его остановиться, о чем ясно написал в одном из писем:

«Если я скажу, что не могу оценить эту работу, вы, несомненно, будете удивлены. Но дело обстоит вот как. Оценить эту работу — все равно что оценить себя. Потому что все содержание работы вашего сына и результаты, к которым он пришел, практически совпадают с моими собственными размышлениями на эту тему за последние 30–35 лет. Я действительно поражен...»

Когда Янош с головой погрузился в работу над пятым постулатом Евклида, Фаркаш написал сыну тревожное предупреждение:

«Молю тебя, не делай попыток одолеть теорию параллельных линий. Ты затратишь на это все свое время, а теоремы останутся недоказанными. В этом беспросветном мраке могут утонуть тысячи таких гигантов, как Ньютон. Этот вопрос никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не достигнет ничего совершенного, даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе. Ради Бога, молю тебя, оставь эту материю. Страшись ее не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни...»

Несмотря на трагический тон этого письма, Янош так и не внял предупреждениям отца и вскоре убедился, что пятый постулат не только недоказуем, но и к тому же не зависит от других постулатов. Этот результат стал основой альтернативной, но непротиворечивой геометрической теории.

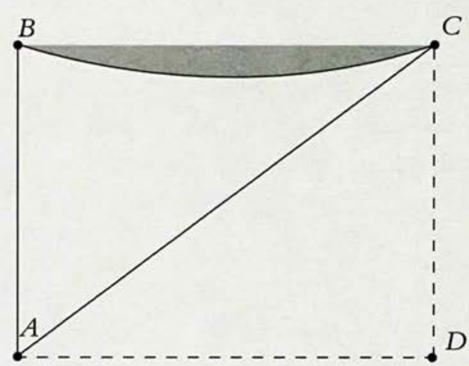
Совместные достижения Лобачевского и Бойяи

Лобачевский и Бойяи заложили основы неевклидовой геометрии и неевклидовой тригонометрии. Они показали, что сумма углов треугольника меньше 180°, а также что не все треугольники имеют одинаковую сумму углов. Чем больше площадь треугольника, тем меньше сумма его углов. Таким образом, не существует подобных треугольников, то есть не существует треугольников одинаковой формы, но разного размера. В этой геометрии если два треугольника имеют конгруэнтные углы (одинакового размера), то и сами треугольники конгруэнтны, то есть они совпадают при наложении друг на друга. Не существует там и прямоугольников в евклидовом смысле: если три угла четырехугольника прямые (90°), то четвертый угол должен быть меньше. Потому что когда прямоугольник делится на две части, сумма углов каждого треугольника должна быть меньше 180°.

Несмотря на похожие результаты, задачи Лобачевского и Бойяи были различными. Янош Бойяи особенно интересовался разделением различных теорем и результатов на те, которые зависят от пятого постулата Евклида, и на те, которые не зависят от него. Николай Лобачевский был более радикален и совсем отказался от пятого постулата, предложив вместо него другой: через точку вне прямой проходит более одной параллельной линии.

КАК ВЫГЛЯДИТ НЕЕВКЛИДОВ ТРЕУГОЛЬНИК

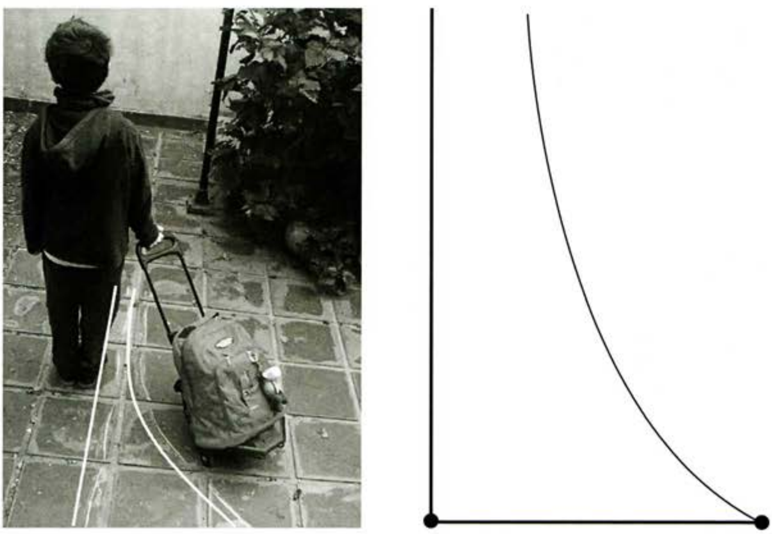
Рисунок справа дает представление о том, как в гиперболической геометрии выглядит неевклидов треугольник *ABC*, полученный из прямоугольника. Мы видим, что сумма углов *A*, *B* и *C* действительно меньше 180°.



Основные модели гиперболической геометрии

Моделью евклидовой геометрии является обычная плоскость с обычными понятиями точки и прямой линии. Модели, описанные ниже, помогут нам лучше представить и понять гиперболическую геометрию, а также эллиптическую геометрию, о которой мы расскажем позже.

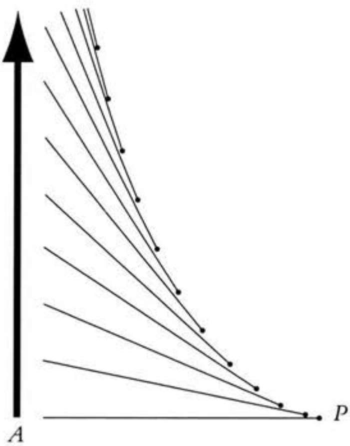
Первая модель гиперболической геометрии строится на особой поверхности. Чтобы представить себе такую поверхность, мы должны представить человека, который катит магазинную тележку, или ребенка, который тянет игрушку на веревочке.



Когда ребенок движется по прямой линии и тянет за собой небольшую сумку на колесиках, траекторией ее движения является кривая линия, приближающаяся к траектории движения ребенка. Эта линия называется трактрисой.

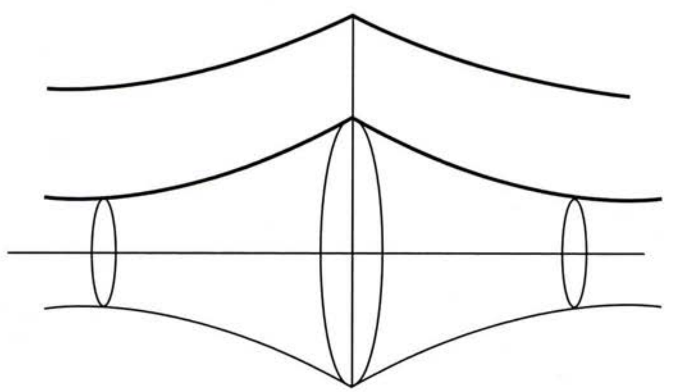
Представьте себе человека, который тянет за собой какой-то предмет, и они оба движутся с одинаковой скоростью. В то время как траектория человека является прямой линией, траектория предмета представляет собой кривую линию, постепенно приближающуюся к траектории человека. Этот вид траектории иногда называют «собачьей кривой». В математических терминах это звучит более сложно: говорят, что кривая асимптотически приближается к прямой линии.

Эта кривая также называется трактрисой. Такую траекторию описывает объект, который находился на фиксированном расстоянии и двигался, приближаясь к прямой линии. Это показано на следующем графике:

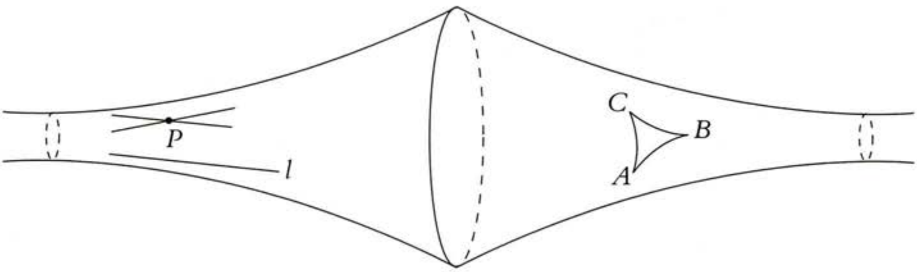


Здесь точка A движется по прямой линии в направлении, указанном стрелкой, и тянет за собой точку P. Траектория точки P называется трактрисой.

Представим теперь, что эта кривая вращается вокруг прямой, образуя поверхность, называемую псевдосферой. Эта поверхность и является моделью гиперболической геометрии. Другими словами, фигуры, изображенные на псевдосфере (например, параллельные линии и треугольники) будут вести себя согласно законам неевклидовой геометрии, не приводя к каким-либо противоречиям.

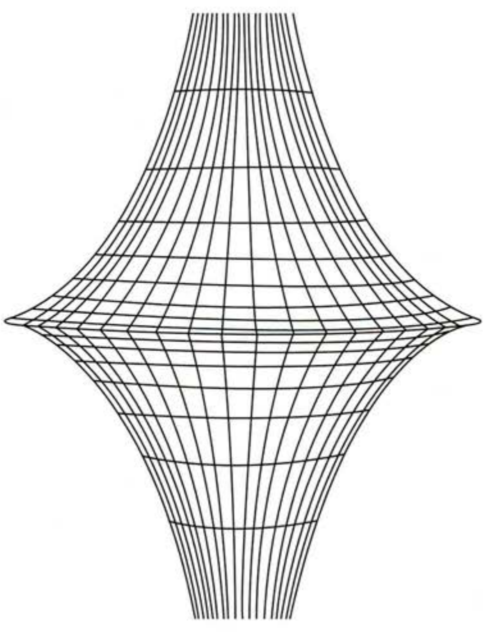


Аксиомы геометрии Лобачевского следуют из свойств точек и прямых на этой поверхности.



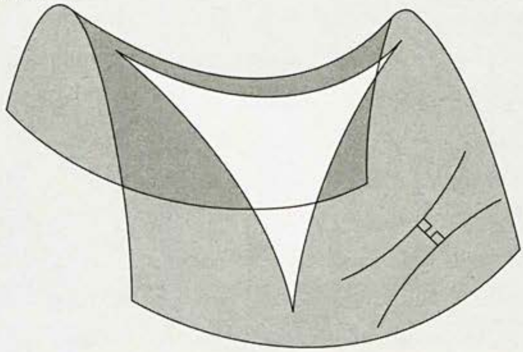
Лобачевский предложил альтернативу пятому постулату: через точку P вне прямой l можно провести бесконечное число прямых линий, не пересекающихся с прямой l. На этой поверхности параллельные линии не всегда являются эквидистантами — принципиальная разница с евклидовой геометрией — и сумма углов A, B и C меньше $180°$.

Прямые линии на этой поверхности являются кратчайшими линиями между точками на ней. Такие линии называются геодезическими. Обратите внимание, что с точки зрения евклидовой геометрии, отказаться от которой очень трудно для неподготовленного ума, эти прямые линии оказываются кривыми. На рисунке ниже изображены несколько параллельных линий с точки зрения геометрии Лобачевского. Они изображены на поверхности псевдосферы.

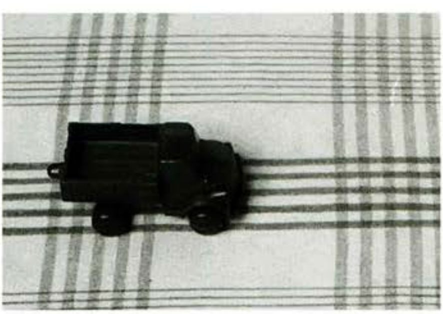


РЕАЛЬНОСТЬ УДИВИТЕЛЬНЕЙ АБСТРАКЦИИ

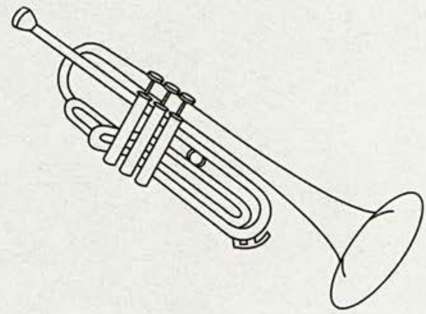
В реальном мире тоже можно легко найти модели гиперболических поверхностей. Не стоит далеко ходить, достаточно рассмотреть в качестве гиперболической поверхности седло для верховой езды. Сумма углов любого треугольника, нарисованного на такой поверхности, составляет менее 180°, и параллельные линии здесь не находятся друг от друга на фиксированном расстоянии, а постепенно расходятся.



Такую поверхность можно увидеть в любом доме. В обычной спальне можно провести небольшой эксперимент, чтобы понаблюдать, как в гиперболическом мире движутся различные предметы. Нам потребуется кровать с ровной поверхностью, как на евклидовой плоскости. На нее мы поставим подвижный объект (см. рисунок ниже). Рядом с ним положим тяжелый предмет, так чтобы постель прогнулась. Мы теперь видим, что поверхность уже не является плоской, она искривилась. Из-за этой кривизны подвижный объект будет скользить к тяжелому предмету. Поверхность постели вокруг тяжелого предмета похожа на гиперболическую поверхность.



ДРУГАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ДРУГОЙ МИР

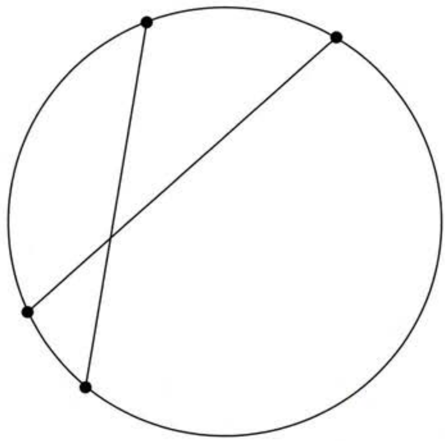


Раструб трубы представляет собой хорошую модель гиперболической поверхности. Можно ли на этой поверхности двигаться по прямой линии?

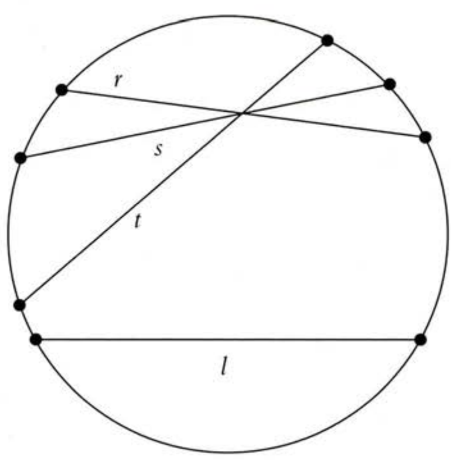
Представьте себе, что два неевклидовых жителя трубы идут по направлению к раструбу. Внешний наблюдатель увидит, что их пути постепенно расходятся. Однако, жители гиперболического мира будут продолжать двигаться по строго параллельным линиям. Хотя для ученых эта воображаемая ситуация может показаться легкомысленной, реалии гиперболического мира оказываются увлекательной идеей для научной фантастики. О гиперболических мирах было написано множество романов, включая «Опрокинутый мир» Кристофера Приста.

Такая гиперболическая модель была предложена Альбертом Эйнштейном при определении пространства-времени. Вселенная Эйнштейна четырехмерная, так как она содержит три пространственных координаты и четвертую координату — время (позже мы расскажем об этом подробнее). Человек не может воспринимать четырехмерную вселенную, поэтому трудно перенести модель с предметами на кровати (это лишь трехмерные объекты) в четырехмерное пространство. Однако мы можем представить, что произойдет. Как и в других областях математики, людям приходится полагаться на воображение и ум.

В 1870 г. немецкий математик Феликс Клейн (1849–1925) представил еще одну модель гиперболической геометрии на плоскости, а затем обобщил ее для пространства. В своей модели Клейн рассмотрел обычный евклидов круг и предложил новые определения точки, прямой, параллельной линии и так далее. Он назвал внутренность круга плоскостью, точки определил как обычные точки внутри круга, за исключением лежащих на окружности, и прямыми линиями назвал хорды круга, но не включающие концов, то есть без точек на окружности. (Напомним, что хордой круга называется отрезок, концы которого лежат на окружности.) Кроме того, параллельными прямыми он называл хорды с одним общим концом. Пересекающимися линиями назывались те, что пересекаются внутри круга, а если линии пересекаются вне круга, то они назывались непересекающимися.



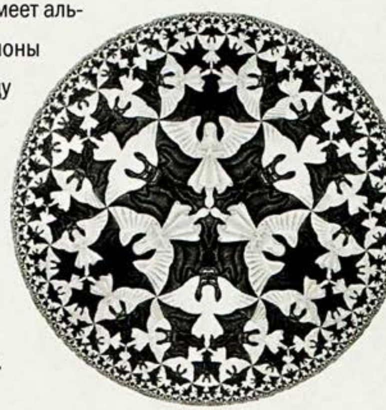
В этой модели, то есть когда плоскостью является только внутренность круга, а хорды являются прямыми линиями, мы видим, что прямые *r*, *s* и *t* проходят через точку вне прямой *l* и не пересекаются с прямой *l* в неевклидовом смысле, так как они не пересекаются с прямой *l* внутри круга. Таким образом, в этой модели через точку вне прямой можно провести бесконечное число линий, не пересекающихся с данной прямой.



Клейн показал, что геометрия в его круге эквивалентна гиперболической геометрии, то есть его геометрия удовлетворяет всем аксиомам Евклида, кроме пятого постулата, и сохраняет все результаты гиперболической геометрии.

ПРЕДЕЛ — КРУГ IV

Этот рисунок Маурица Корнелиса Эшера (1898–1972) имеет альтернативное название «Ад и рай». На нем ангелы и демоны изображены в виде мозаики, так что пространство между фигурами одного вида образует фигуры другого вида. Еще один замечательный факт: фигуры становятся все меньше и меньше по мере приближения к краю круга, как будто уходят в бесконечность. Эшер создал этот рисунок, чтобы изобразить поверхность, невозможную в двух измерениях. Свойства этого пространства знакомят нас с неевклидовой гиперболической геометрией.



Риман и эллиптическая геометрия

Вскоре после того как Лобачевский и Бойяи построили новую геометрию, появилась другая неевклидова геометрия. Ее создал известный немецкий математик Бернхард Риман, который заменил пятый постулат Евклида другой аксиомой:

> *«Через точку P, не лежащую на данной прямой l, не проходит ни одной прямой, параллельной данной».*

Бернхард Риман (1826–1866) родился в Ганновере и уже в юном возрасте был математически одаренным ребенком. В 16 лет, учась в Люнебургской гимназии, он проявил большие математические способности, и директор школы разрешал мальчику брать из своей личной библиотеки книги по математике. В 1846 г. Риман поступил в Гёттингенский университет, где изучал теологию по совету своего отца. Однако, в конце концов он перешел на философский факультет, где также преподавалась математика. Его учителями были такие светила, как Мориц Штерн и сам Гаусс. В 1847 г. Риман перешел в Берлинский университет, где преподавали Штайнер, Якоби, Дирихле и Эйзенштейн. Затем он вернулся в Гёттинген и получил докторскую степень по философии под руководством Гаусса. В 1854 г. Риман начал преподавать в университете и прочитал лекции по основам новой геометрии, но эти лекции

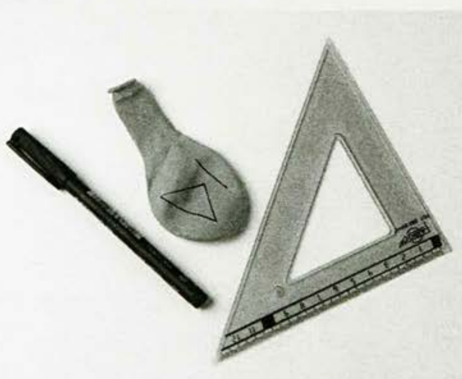
Бернхард Риман

были опубликованы лишь через два года после его смерти. Риман был избран членом Берлинской академии наук, но в конце концов был вынужден уехать из Германии для лечения от туберкулеза. Он закончил свои дни в Италии.

Однажды, когда Риман учился у Гаусса в Гёттингенском университете, профессору нужно было выбрать одного студента в качестве представителя группы. Он придумал следующий метод отбора: «Каждый из вас предложит три темы. Руководство факультета выберет одну из них, и этот студент выступит с трехчасовым докладом по этой теме». Риман решил проком-

СФЕРИЧЕСКИЙ МИР РИМАНА

С обычным воздушным шариком можно провести интересный эксперимент, который поможет лучше понять геометрию Римана. На плоском ненадутом воздушном шарике нарисуйте отрезок прямой линии и измерьте его длину. Рядом с ним нарисуйте треугольник. Если теперь шарик надуть, то рисунки на его поверхности трансформируются. Как выглядят теперь отрезок и треугольник? Остался ли отрезок прямым? Равна ли сумма углов в треугольнике 180°?



На надутом воздушном шарике прямая превращается в кривую, называемую геодезической линией, которая является большим кругом на сфере. Риман не мог провести этот простой, но наглядный эксперимент. В его время воздушные шарики еще не были изобретены.

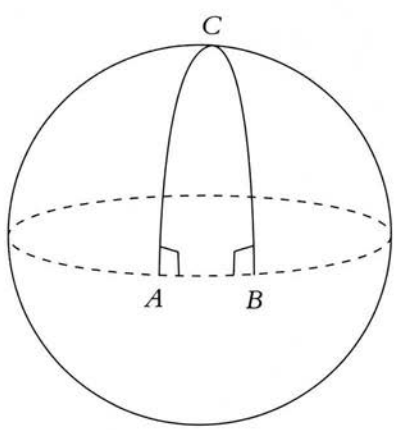
ментировать книгу Лобачевского «Новые начала геометрии». В своем предложении он написал знаменитые слова:

«Евклид утверждал, что через точку вне данной прямой можно провести только одну параллельную ей линию, Лобачевский писал, что параллельных ей линий можно провести сколько угодно, а я говорю, что нельзя провести ни одной».

Там же Риман добавляет:

«Следовательно, бесконечной прямой не существует, потому что в конце концов она стала бы кривой, и не существует совершенно плоской поверхности, потому что при продолжении она должна следовать кривизне Вселенной. Но так как плоскость будет искривляться во всех направлениях, искривленная плоскость оказывается сферической. Единственная геометрия, которая действительно существует, является сферической».

Эта спонтанная презентация содержала самую суть будущей геометрии Римана, которая отличается и от евклидовой, и от геометрии Лобачевского. В геометрии Римана нет прямых линий, а сумма углов треугольника больше 180°. Поверхность сферы является лучшей моделью для геометрии Римана. Сфера является частным случаем эллипсоида, удлиненной сферы. В этой модели прямые, как и в гиперболической геометрии, называются геодезическими линиями и являются большими окружностями, то есть такими окружностями, которые делят сферу на два равных полушария.



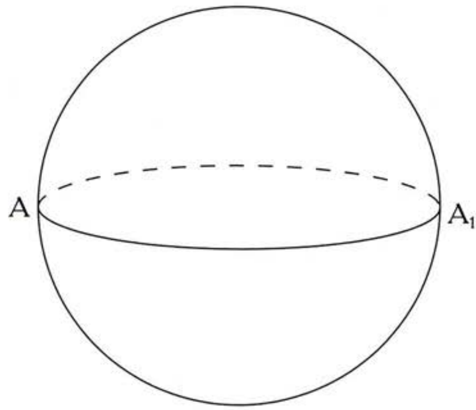
Все геодезические линии пересекаются, а треугольник ABC содержит два прямых угла, так что сумма его углов больше 180° (см. рисунок на предыдущей странице). В этой геометрии чем больше площадь треугольника, тем больше сумма его углов, и подобными являются только конгруэнтные треугольники, то есть те, которые совпадают при наложении друг на друга. Таким образом, поверхность сферы является моделью эллиптической геометрии. Как видно на предыдущей странице, сумма углов треугольника на такой поверхности больше 180°.

Риман не только построил эллиптическую геометрию, он также использовал алгебраические выражения (дифференциальные уравнения) для вычисления минимальных расстояний. Ему также удалось посчитать кривизну любого трехмерного пространства. Кроме того, его вычисления могут быть применены для многомерных пространств. Его результаты позже использовал Альберт Эйнштейн при работе над теорией относительности.

Похожие, но разные

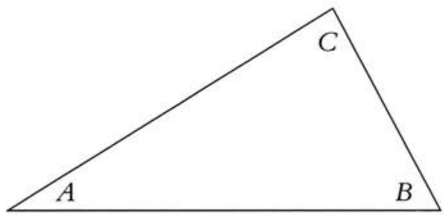
Первыми математиками, которые разделили все геометрии на три типа, были Феликс Клейн и основатель современной британской школы чистой математики Артур Кэли (1821–1895). Выделив гиперболическую и эллиптическую геометрии, они описали евклидову геометрию как параболическую. О причинах этого мы расскажем позже.

Неевклидовы геометрии не затмили их знаменитую предшественницу. Конечно, они все отличаются, но и сходств между ними достаточно много. В евклидовой геометрии две прямые пересекаются в точке, то же самое происходит в геометрии Лобачевского. У Римана две прямые (большие окружности) всегда пересекаются в точке и в ее антиподе с другой стороны сферы.

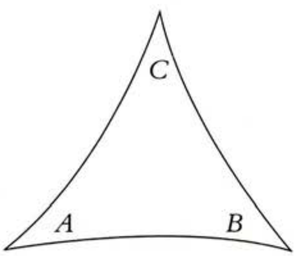


У Евклида через точку вне прямой проходит только одна прямая, параллельная данной. Лобачевский утверждал, что таких прямых по крайней мере две. По словам Римана, таких прямых вообще не бывает.

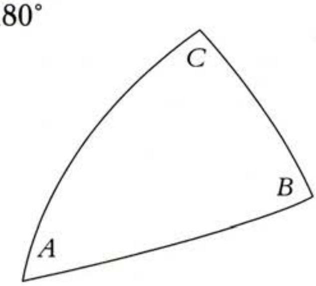
У Евклида параллельные прямые находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, у Лобачевского это не так. Что касается суммы углов треугольника, у Евклида она всегда 180°, у Лобачевского — меньше 180°, а у Римана — больше 180°.



Евклидова геометрия
$A + B + C = 180°$



Гиперболическая геометрия
$A + B + C < 180°$



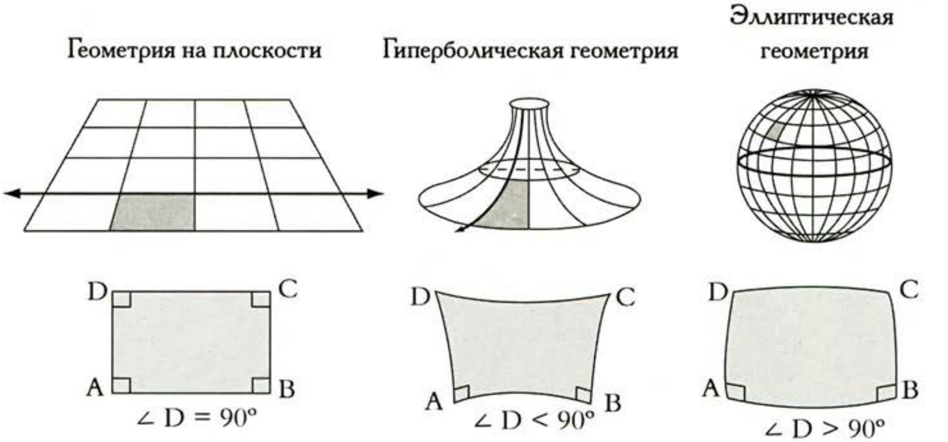
Эллиптическая геометрия
$A + B + C > 180°$

Если взять точку на прямой линии, то у Евклида и Лобачевского линия будет разделена на две части, но у Римана это не так. У Евклида два треугольника с одинаковыми углами подобны, а у Лобачевского и Римана такие треугольники конгруэнтны.

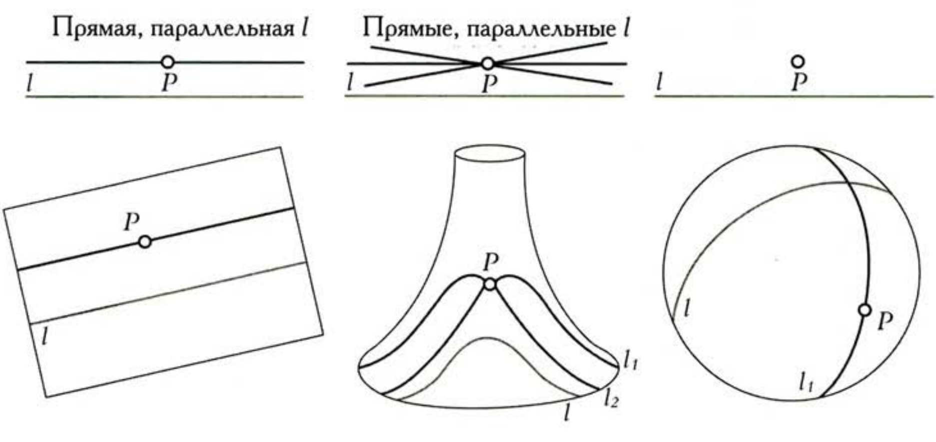
В следующей таблице приведены основные различия этих геометрий:

Геометрия	Автор	Количество параллельных линий, проведенных через точку вне прямой	Сумма углов треугольника	Прямые линии являются
На плоскости	Евклид	Одна	180°	Бесконечными
Гиперболическая	Бойяи-Лобачевский	Больше одной	Меньше 180°	Бесконечными
Эллиптическая	Риман	Ни одной	Больше 180°	Конечными

Евклидова геометрия может быть построена на плоскости, гиперболическая геометрия — на поверхности псевдосферы, а эллиптическая — на поверхности сферы. Эти модели наглядно показывают интерпретацию пятого постулата в каждой геометрии, что изображено на следующих рисунках вместе с соответствующими проекциями. Обратите также внимание на то, как выглядят прямоугольники в каждой геометрии.

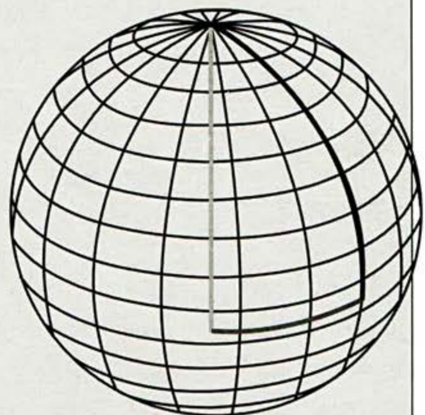


В евклидовом прямоугольнике все углы по 90°, в геометрии Лобачевского углы «прямоугольника» меньше 90°, а в эллиптической геометрии — больше 90°.



На евклидовой плоскости только одна прямая параллельна l. На псевдосфере бесконечное число прямых, проходящих через P и лежащих между прямыми l_1 и l_2, не пересекаются с прямой l. На сферической поверхности через точку P не проходит ни одной линии, параллельной l. Прямая l пересекает любую другую, проходящую через точку P.

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ В РЕАЛЬНОСТИ



На всех глобусах Земли изображены меридианы. Все эти линии, перпендикулярные экватору, пересекаются в двух точках, в полюсах сферы. Кроме того, меридианы являются конечными линиями.

Тот же эффект можно наблюдать вдоль длинной прямой дороги: кажется, что параллельные линии встречаются на горизонте. Даже евклидова реальность предполагает существование других геометрий.

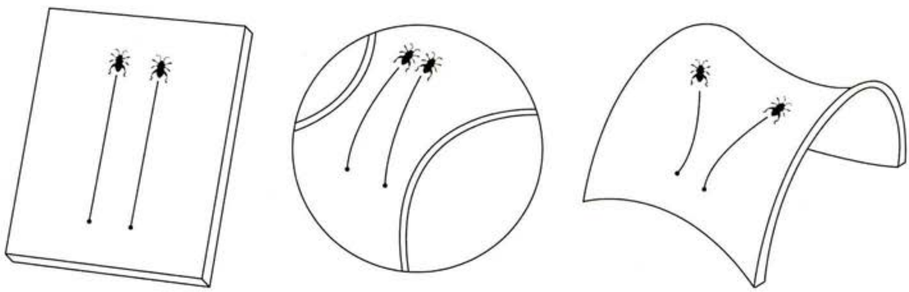
С другой стороны, если мы представим себя на поверхности шара и нарисуем там треугольник, чему будет равна сумма его внутренних углов? А если мы представим себя на внутренней поверхности шара, чему тогда будет равна сумма внутренних углов треугольника? А теперь представьте себе огромный воздушный шар, бесконечно большой, на поверхности которого живут крошечные, бесконечно малые существа. В их мире, кривая поверхность будет казаться плоской, то есть, евклидовой.

Муравьиные бега

Воображаемые муравьиные бега являются очень удобным способом ясно и наглядно смоделировать три типа геометрии и проиллюстрировать их сходства и различия. Представьте себе двух муравьев, участвующих в бегах. Они начинают бежать примерно одновременно, и в принципе они бегут параллельно друг другу. Муравьи всегда бегут вперед, не поворачивая налево или направо, но их прямолинейная траектория будет выглядеть по-разному в зависимости от типа геометрии, используемой для описания поверхности.

Если два муравья бегут по идеально ровной поверхности — евклидовой плоскости, — их пути не будут ни сходиться, ни расходиться, а будут оставаться на равном расстоянии друг от друга.

Если муравьи бегут по искривленной поверхности, их пути либо сходятся, либо расходятся, поскольку являются прямыми линиями на данной поверхности. Как показано на следующем рисунке, если поверхность имеет сферическую форму, муравьи в конечном итоге встретятся, потому что пространство, в котором они движутся, не просто кривое, но и вогнутое. Если поверхность гиперболическая, муравьи постепенно разойдутся, потому что это пространство выпуклое.



Чтобы оставаться на одинаковом расстоянии друг от друга в сферическом или гиперболическом мире, его жителям придется постоянно корректировать свои пути, двигаться не по параллельным линиям и вообще отказаться от постулата о параллелях. Действительно, если такой мир существует, понятие параллельных линий там будет сильно отличаться от евклидова. Таким образом, важно понимать, что жители сферического или гиперболического мира даже не замечают, что их пути сходятся или расходятся, потому что приборы для измерения расстояния в их мире также другие. Они бы могли что-то заметить, если бы имели измерительное оборудование из евклидова мира.

Эйнштейн и Евклид

Неевклидовы геометрии, в частности, работы Римана, легли в основу теорий великого Альберта Эйнштейна (1879–1955). Теория относительности использует математические понятия искривленного пространства и времени. Объединив обе концепции и опираясь на последние научные достижения того времени, Эйнштейн смог объяснить движение Солнца, планет и звезд. Понятия неевклидовой геометрии помогли ему найти математические уравнения, связывающие кривизну пространства-времени с массой и энергией.

Теория относительности

Теория относительности описывает Вселенную в терминах пространства-времени. В этой теории масса (m) и энергия (E) связаны знаменитым уравнением $E = mc^2$, где c обозначает скорость света (299 792,458 километров в секунду). Теория относительности использует неевклидову геометрию в качестве математической модели, чтобы скорректировать ошибки классических теорий, описывающих природные явления. Такие модели, особенно теория Римана, помогают создать более полную, хотя и менее интуитивную картину мира. В теории относительности пространство и время являются физическими величинами, которые определяют расстояния между объектами и их движение относительно друг друга. Вселенная искривлена из-за наличия в ней огромных объектов (препятствий), которые заставляют прямые лучи света искривляться в пространстве в соответствии с геодезическими линиями.

ОТЕЦ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Альберт Эйнштейн родился в южно-германском городе Ульме. Он увлекался математикой с самого раннего возраста, но был также независимым вольнодумцем, не принимавшим укоренившуюся систему механического заучивания и зубрежки. Он переехал в Швейцарию, где получил диплом по физике, но, будучи молодым специалистом, работал клерком в бюро патентов в Берне: как еврей, он был лишен возможности получить место учителя.

Несмотря на недостаток свободного времени, Эйнштейн продолжал учиться и заниматься исследованиями. В 1905 г. он опубликовал статьи по специальной теории относительности (обобщенной в 1916 г. до общей теории относительности), которая описывала понятия пространства, времени и скорости. Его работа обобщила классическую теорию Ньютона, введя новые представления о Вселенной на основе геометрии, которая не обязательно является евклидовой.

ПАРАДОКС БЛИЗНЕЦОВ

Теория относительности требует неевклидова пространства. Основной причиной этого является открытие физических законов, которые утверждают, что ничто не может двигаться быстрее света.

Противоречивость пространства-времени наглядно иллюстрируется парадоксом близнецов. Представьте себе двух близнецов, один из которых улетает на космическом корабле со скоростью, близкой к скорости света, в то время как брат-близнец остается на Земле. Через несколько десятилетий близнец-путешественник возвращается. Его брат уже состарился, а путешественник так и остался молодым. Если космическая экспедиция отправилась к некоторой звезде со скоростью 240000 км/с, измеряемой с Земли, она достигнет пункта назначения через 50 лет. Однако, для экипажа космического корабля пройдет только 30 лет. Таким образом, после возвращения на Землю члены экипажа постареют на 60 лет, а каждый житель Земли станет старше на 100 лет.

Течение времени зависит от скорости наблюдателя. Пространство и время могут сокращаться и расширяться. Физика и геометрия определяют время и форму Вселенной. А в основе этих теорий лежит неевклидова геометрия.

Согласно Эйнштейну искривление пространства-времени обуславливает действие силы тяжести. Мы уже рассматривали пример плоской кровати, на которой тяжелый предмет вызвал искривление поверхности, и это искривление заставило предметы двигаться. Сила тяжести вызывается искажением ровной — и плоской — евклидовой Вселенной подобно тому, как тяжелый предмет в предыдущем примере продавливает покрывало на кровати. Пространство Вселенной искажается любым телом, и именно искривление пространства вызывает гравитационное притяжение.

Развитие неевклидовой геометрии открыло научному сообществу широкие возможности и поставило серьезную задачу: как узнать, является ли наше физическое пространство евклидовым? А если нет, то что может служить правильной геометрической моделью? Мы также не должны исключать возможность того, что пространство неоднородно, то есть существуют места с различной геометрической структурой: евклидовой, гиперболической или эллиптической. Но чтобы ответить на этот вопрос, нам нужны экспериментальные доказательства аксиомы Евклида или ее альтернатив.

Правильная геометрия

Из общей теории относительности следует интересный вывод: три геометрии — евклидова, гиперболическая и эллиптическая — совершенно равноправны. Теория относительности не исключает ни одну из этих возможностей. Все геометрии эквивалентны на относительно небольших расстояниях. Однако в случае астрономических расстояний или в таких областях современной физики, как теория относительности или распространение волн, неевклидовы геометрии дают более точное описание наблюдаемых явлений. Можно сказать, что в реальном мире работают все геометрии, но каждая из них имеет свою область применения. В разных исследованиях используются различные геометрии, более подходящие для конкретной области знаний. Ни одна из них не может претендовать на универсальность.

Когда мы путешествуем по поверхности сферы или выполняем на ней какие-то измерения, мы находимся во Вселенной, в которой работает эллиптическая геометрия. Если мы будем двигаться со скоростью, близкой к скорости света, нам придется воспользоваться геометрией Минковского в пространстве-времени. Однако все говорит о том, что человеческие существа живут в гиперболическом мире. Гипотеза Брентано, названная в честь немецкого психолога Франца Брентано (1838–1917), утверждает, что люди склонны преувеличивать малые углы и приуменьшать большие. Эта гипотеза была доказана эмпирическим путем. Также большинство оптических иллюзий и классических экспериментов по восприятию показывают, что люди воспринимают пространство как гиперболическое.

До XIX в. вопрос о «правильной» геометрии прозвучал бы совершенно абсурдно, даже непонятно. Результаты открытия неевклидовой геометрии и теории относительности настолько впечатляют, что не возникает никаких сомнений в том, что новые геометрии являются основой важнейших научных теорий последних лет, которые в буквальном смысле изменили место человека во Вселенной. Новые геометрии применяются и в астрономических масштабах теории относительности, и в мини-мирах атомных ядер.

Однако все это не означает, что от геометрии Евклида следует отказаться как от бесполезного пережитка прошлого. Евклидова геометрия по-прежнему является наиболее практичной в повседневной жизни: именно она помогает решать нам основные задачи. Вовсе не обязательно использовать гиперболическую геометрию, чтобы переставить мебель в комнате — если, конечно, дом не находится на псевдосфере.

Глава 5

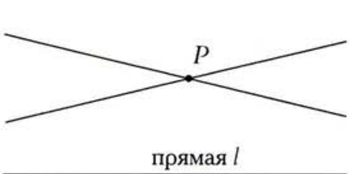
Удивительные результаты гиперболической геометрии

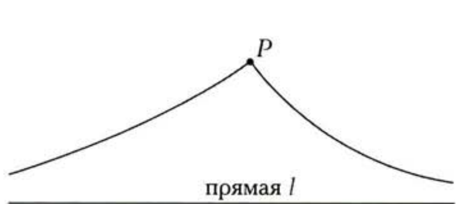
До сих пор мы рассматривали основные понятия неевклидовых геометрий, а также исторические обстоятельства их появления и биографии первооткрывателей. В этой главе мы разберем одну из них более подробно, обращая внимание на математические последствия отказа от пятого постулата Евклида.

Для начала мы изложим основные результаты Бойяи и Лобачевского, чтобы лучше понять, как выглядит и работает их геометрия, но мы, конечно, не будем приводить полный перечень всех теорем и доказательств.

Наиболее важным результатом являются изменения в восприятии пространства человеческим разумом. Графические иллюстрации, конечно, играют вспомогательную роль и не являются строгими математическими аргументами, хотя они помогают наглядно пояснить эти понятия.

Как мы уже видели, гиперболическая геометрия является неевклидовой, когда пятый постулат о параллельных прямых заменен следующим: через точку P вне прямой l можно провести по крайней мере две прямые, параллельные данной. Этот так называемый гиперболический постулат о параллельных прямых может быть проиллюстрирован двумя способами. Оба они эквивалентны и показаны на следующем рисунке:

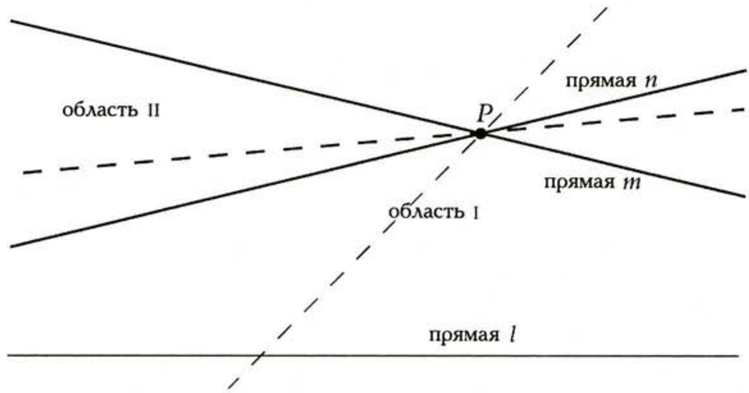




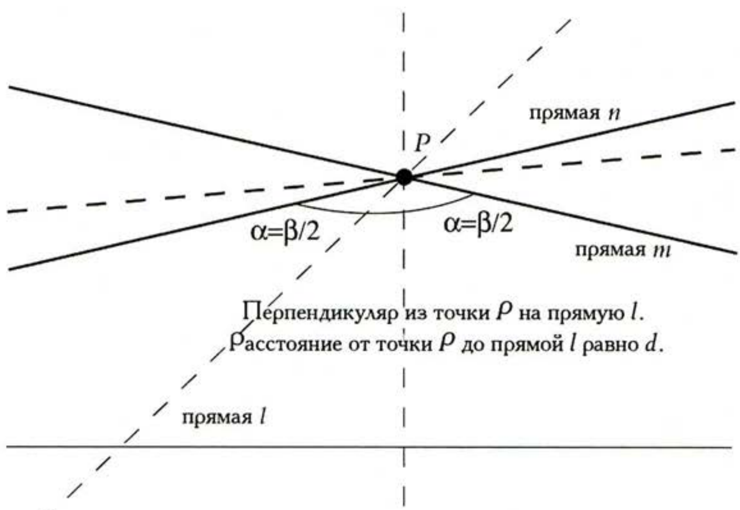
Из этой гипотезы вытекают различные понятия, лежащие в основе гиперболической геометрии. Мы начнем с основной теоремы.

Углы параллельности

Результат, связанный с углами параллельности, считается основной теоремой гиперболической геометрии. Начнем со следующего рисунка:



Через точку P вне данной прямой l проходят по крайней мере две прямые, m и n, параллельные l, так что все прямые внутри области I пересекаются с прямой l, а прямые в области II не пересекаются с прямой l. Это означает, что существует бесконечное число прямых, проходящих через точку P и не пересекающих прямую l. Две крайние параллельные l прямые, m и n, разграничивают две области (I и II).



Таким образом, область I ограничена линиями m и n, образующими угол β, который меньше двух прямых углов (180°), как видно на предыдущем рисунке.

Угол $\beta/2 = \alpha$ называется углом параллельности. Обратите внимание, что α является острым углом (меньшим, чем прямой угол). Это важный факт, так как в евклидовой геометрии такие углы всегда прямые.

На рисунке из точки P на прямую l опущен перпендикуляр, а расстояние от точки P до прямой l обозначено буквой d. Мы видим, что угол α зависит от длины d (напомним, что мы рассматриваем не плоскую поверхность), так что

1) при уменьшении d α стремится к прямому углу (90°);

2) при увеличении d α стремится к 0.

Этот результат можно наглядно представить с помощью резиновой ленты. Точка P является концом растянутой резинки, расположенной перпендикулярно прямой l, так что точка P может двигаться вверх-вниз, увеличивая и уменьшая длину резинки, вместе с которой будут двигаться прямые, проходящие через точку P. Таким образом, мы увидим, как будет меняться угол параллельности.

При этом существует постоянная величина, которую мы обозначим k, зависящая от единицы измерения длины d и выражаемая следующим образом:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{d}{k}}.$$

Предыдущий результат можно получить по-другому. Когда значение d увеличивается, правая часть уравнения будет стремиться к 0, и поэтому значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ также стремится к 0, что означает, что α практически 0.

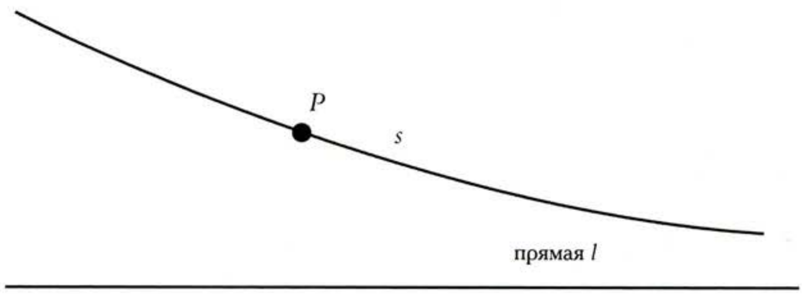
Аналогично, когда d очень мало, значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ будет приближаться к 1, что означает, что $\frac{\alpha}{2} \cong \frac{\pi}{4}$, то есть α будет прямым углом, так как $\pi/2 = 90°$.

В евклидовой геометрии этот угол не меняется при изменении расстояния. В гиперболической геометрии, как мы видим, угол всегда зависит от величины d.

Эквидистанты

В евклидовой геометрии расстояние между параллельными прямыми на всем их протяжении всегда одно и то же. Как и следовало ожидать, в мире гиперболической геометрии ситуация оказывается несколько иной.

Рассмотрим прямую l и параллельную ей прямую s. Выберем точку P на s, как на следующем рисунке:



При перемещении точки P вправо мы видим, что расстояние от P до прямой l уменьшается. Выражаясь математическим языком, это расстояние стремится к нулю.

Мы также можем сказать, что прямые l и s асимптотически сходятся справа. Аналогично, если точка P движется налево, мы видим, что расстояние от P до прямой l увеличивается. В этом случае говорят, что прямые l и s расходятся.

Поэтому, когда в гиперболической геометрии имеются прямые, расстояние между которыми остается постоянным, то такие прямые не могут быть параллельны. Иначе это противоречило бы пятому постулату гиперболической геометрии. Прямая, находящаяся на постоянном расстоянии от данной прямой, называется эквидистантой.

Пифагор, треугольники и длины

Теперь мы рассмотрим результаты, связанные с треугольниками, кругами и отношениями между площадью и длинами. Эти результаты включают теорему Пифагора, и мы увидим, как она работает в гиперболической геометрии на примере некоторых задач, знакомых нам со школы.

Треугольники

Формула для площади треугольника в евклидовой геометрии всегда одинакова для любого треугольника: $S = \frac{b \cdot h}{2}$, то есть площадь равна половине произведения основания треугольника на высоту. В основе этого выражения лежит тот факт, что сумма внутренних углов треугольника всегда равна $180°$.

Но в гиперболической геометрии, как ни странно, площадь треугольника зависит от суммы его углов. Как мы уже говорили, в гиперболической геометрии сумма углов треугольника всегда меньше $180°$. Следовательно, сумма углов в четырехугольнике также будет меньше $360°$.

В евклидовой геометрии если три угла A, B и C одного треугольника и три угла A', B' и C' другого треугольника соответственно равны, то эти треугольники являются подобными. Это не означает, что их соответствующие стороны имеют одинаковую длину. В гиперболической геометрии у таких треугольников с соответственно равными углами будут равны и соответствующие стороны.

Теперь рассмотрим этот случай более подробно. Пусть A, B и C — углы одного треугольника. Их сумма меньше двух прямых углов ($180°$), и поэтому разность $180 - (A + B + C)$ будет положительна. Эта разность называется *угловым дефектом*, и мы имеем следующий результат: площадь любого треугольника пропорциональна его угловому дефекту.

Если мы обозначим через k коэффициент пропорциональности, то формула для площади треугольника (S) будет выглядеть следующим образом:

$$S = \frac{\pi}{180} \cdot k^2 \cdot \big(180 - (A + B + C)\big);$$

так что максимальное значение площади треугольника равно $\pi \cdot k^2$ (в гиперболической геометрии не бывает треугольников с бесконечной площадью). Мы не приводим доказательство этого результата, так как оно достаточно сложное. Мы лишь записали окончательную формулу, какой бы странной она ни казалась.

Выражение для площади треугольника подтверждает то, о чем мы говорили раньше. На самом деле в евклидовом случае два треугольника с одинаковыми углами не обязательно имеют одинаковую площадь и, следовательно, не обязательно равны. Однако в гиперболическом мире одинаковые углы (и, следовательно, одинаковый угловой дефект) означают одинаковый размер.

Также в гиперболической геометрии чем больше треугольник, тем больше его площадь и тем меньше сумма его углов. Для очень малых площадей (для бесконечно малых, в терминах математики) сумма углов треугольника стремится к 180°. Таким образом, можно сказать, что геометрия Евклида является предельным случаем гиперболической геометрии.

Иоганн Генрих Ламберт, о котором мы уже упоминали в третьей главе, еще в середине XVIII в. заметил, что, отказавшись от пятого постулата Евклида, он получил следующий результат: сумма углов треугольника увеличилась, приближаясь к 180° по мере уменьшения площади треугольника.

Круги

В школьной геометрии изучаются не только треугольники. В школьную программу входят и другие геометрические фигуры, например, круги, поэтому каждый знает, что такое радиус круга. В геометрии Евклида длина окружности C пропорциональна радиусу r. Это соотношение включает в себя знаменитое число π:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Однако, в гиперболической геометрии длина окружности рассчитывается по следующей формуле:

$$C = k \cdot \pi \cdot (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) = k \cdot \pi \cdot (2 \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k}).$$

В этом выражении k является коэффициентом пропорциональности, а sh — так называемым гиперболическим синусом. Число e нам уже знакомо, с точностью до нескольких десятичных знаков оно записывается как 2,718281828 ...Также напомним, что

$$\operatorname{sh} A = \frac{e^{A} - e^{-A}}{2}.$$

Теперь возьмем предыдущее выражение

$$C = k \cdot \pi \cdot (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) = k \cdot \pi \cdot (2 \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{k}),$$

и разложим его в ряд:

$$C = k \cdot \pi \cdot (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^2}{k^2} + ...),$$

Таким образом получим новое выражение для длины окружности в виде бесконечной суммы слагаемых.

Если мы посмотрим на вторую часть выражения

$$C = k \cdot \pi \cdot (e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^2}{k^2} + ...),$$

то заметим, что при очень малых r множитель $(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^2}{k^2} + ...)$ будет стремиться к 1, и поэтому формула сведется к известному выражению евклидовой геометрии:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Это можно доказать с помощью простых вычислений. Для простоты мы будем измерять расстояния в километрах. Возьмем выражение для длины окружности в виде степенного ряда. Пусть коэффициент k имеет значение $k = 10^{17}$, и мы хотим посчитать длину окружности радиуса 100 км.

Подставим эти значения в выражение

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^2}{k^2} + ...),$$

а также в евклидову формулу $2\pi r$, и мы увидим, что разница составляет лишь 10^{-9}.

Если два значения длины окружности посчитать для радиуса в 1 км, разница будет порядка 10^{-12}. Продолжим вычисления с меньшими значениями по мере того, как круг сжимается. Для радиуса в один метр разница составит примерно 10^{-15}. Таким образом, мы показали, что при небольших размерах длина окружности в гиперболической геометрии приближается к длине окружности в геометрии Евклида. Такие же рассуждения можно применить и к формулам для площади треугольника.

РЯДЫ ТЕЙЛОРА

При определенных условиях можно записать следующее разложение в ряд: $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + ...$

Это выражение для e^A называется рядом Тейлора, в честь английского математика Брука Тейлора (1685–1713). Если у вас есть простейший калькулятор с четырьмя основными операциями (сложение, вычитание, умножение и деление), эта формула позволяет посчитать *e* в любой степени, просто подставив его значение вместо *A*; чем больше членов ряда будет посчитано, тем выше точность результата. Выражение *n!* означает произведение $n(n-1)\ (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ и читается как «*n* факториал». Например: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Если выражение для ряда Тейлора применить к формуле длины гиперболической окружности, $k \cdot \pi \cdot (e^{r/k} - e^{-r/k})$, то мы получим:

$$2\pi r + \frac{\pi}{3k^2} r^3 + \frac{\pi}{60k^4} r^5 + \frac{\pi}{2520k^6} r^7 + \frac{\pi}{181440k^8} r^9 + O(r^{11}),$$

где последний член очень мал и содержит *r* в 11-й степени. Если в этом выражении вынести общий множитель $2 \cdot \pi \cdot r$ за скобки, то мы получим следующую формулу:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r^2}{k^2} + ...).$$

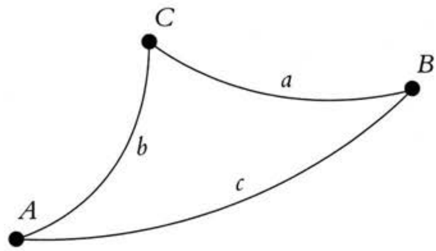
Отношение $\frac{n}{k}$ указывает на различие в свойствах фигур в гиперболической и евклидовой геометриях, где *n* означает размер фигуры (радиус окружности, длина стороны треугольника). Однако в астрономических масштабах отношение $\frac{n}{k}$ нельзя не учитывать.

На самом деле результаты, о которых мы говорили, служат подтверждением того, что гиперболическая геометрия является обобщением евклидовой геометрии. Лобачевский особенно подчеркивал это свойство своей теории, назвав ее пангеометрией, то есть «универсальной геометрией».

Теорема Пифагора

Всегда полезно взглянуть на известные результаты через призму другой теории. Но именно в теореме Пифагора эффект новых геометрий наиболее заметен. В гиперболической геометрии теорема Пифагора играет столь же важную роль, как и в геометрии Евклида, и, как можно было ожидать, для небольших расстояний она ведет себя так же, как и другие гиперболические объекты. Другими словами, на небольших расстояниях она совпадает с евклидовой версией. Однако при увеличении расстояния ситуация меняется.

Рассмотрим гиперболический треугольник, стороны которого мы обозначим a, b и c, где c является гипотенузой; вершинами треугольника будут точки A, B и C. Форма гиперболического треугольника отличается от классической:



Для этого треугольника справедливо равенство

$$2\cdot(e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}})=(e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{-a}{k}})\cdot(e^{\frac{b}{k}}+e^{\frac{-b}{k}}),$$

которое может быть переписано в терминах гиперболической геометрии как:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\cdot\operatorname{ch}\frac{b}{k}.$$

Раскладывая выражение $2\cdot(e^{\frac{c}{k}}+e^{\frac{-c}{k}})=(e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{-a}{k}})\cdot(e^{\frac{b}{k}}+e^{\frac{-b}{k}})$ в степенной ряд, как мы это делали для формулы длины окружности, мы получим следующее равенство:

$$c^2+\frac{c^4}{12\cdot k^4}+\ldots=a^2+b^2+\frac{a^4 6\cdot\frac{a^2}{b^2}+b^4}{12\cdot k^2}+\ldots$$

Отсюда видно, что в случае небольших сторон треугольника формула Пифагора остается в силе:

$$c^2=a^2+b^2,$$

принимая традиционный вид, как в евклидовой геометрии.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Гиперболические функции называются так потому, что по свойствам они напоминают классические тригонометрические функции. Они таким же образом связаны с гиперболой, как традиционные тригонометрические функции связаны с окружностью.

Гиперболический синус	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
Гиперболический косинус	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Гиперболический тангенс	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
Гиперболический котангенс	$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$
Гиперболический секанс	$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$
Гиперболический косеканс	$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$

Все эти примеры говорят об общем результате, поэтому мы можем утверждать, что параллельные прямые на гиперболической плоскости в малых областях не отличаются от евклидовых параллельных прямых. С другой стороны, в этих вычислениях использовались гиперболические тригонометрические функции — особые аналоги традиционных функций синуса и косинуса. Они называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом. Добро пожаловать в гиперболическую тригонометрию.

Гиперболическая тригонометрия

Работая над своими сложными математическими теориями, Бойяи и Лобачевский вывели тригонометрические выражения для гиперболической геометрии. Удивительным является тот факт, что, как и все остальное, они сделали это независимо друг от друга. Это свидетельствует об их гениальности, но также показывает, что результаты, которые они получили, действительно являются правильными.

Соотношения, выведенные Бойяи и Лобачевским, в малых областях могут быть сведены к формулам классической тригонометрии, но в других случаях они характеризуют новые, совершенно неисследованные миры.

Для переменной x гиперболический синус и гиперболический косинус определяются следующим образом:

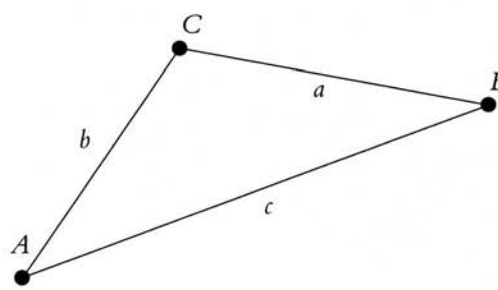
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Аналогично элементарной тригонометрии, гиперболический тангенс определяется следующей формулой:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Здесь мы вкратце напомним так называемую теорему синусов.

В треугольнике со сторонами a, b и c и с углами A, B и C

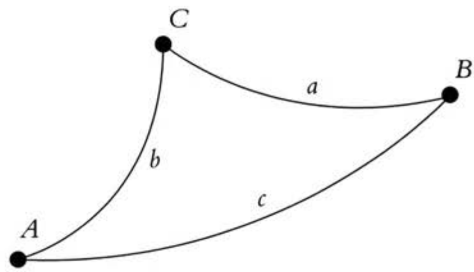


справедливо следующее соотношение:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Аналогичное соотношение можно сформулировать в гиперболической тригонометрии:

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}.$$



Чтобы проверить гиперболические равенства, нужно подставить вместо гиперболических функций их определения:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

и затем, выполнив соответствующие расчеты, убедиться, что получится один и тот же ответ.

Используя определения гиперболических синуса и косинуса, можно вывести и другие тригонометрические тождества, аналогичные известным тождествам из евклидовой геометрии. Например, мы можем проверить, что

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$$

аналогично традиционному выражению

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

ОСНОВНОЕ ТОЖДЕСТВО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

В евклидовой тригонометрии есть важное соотношение, называемое основным тригонометрическим тождеством, которое утверждает, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Аналогом в гиперболической тригонометрии является следующее тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

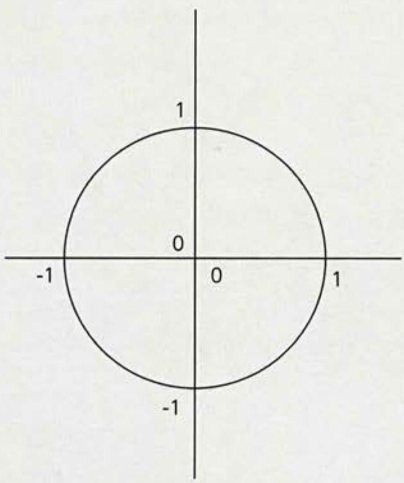
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

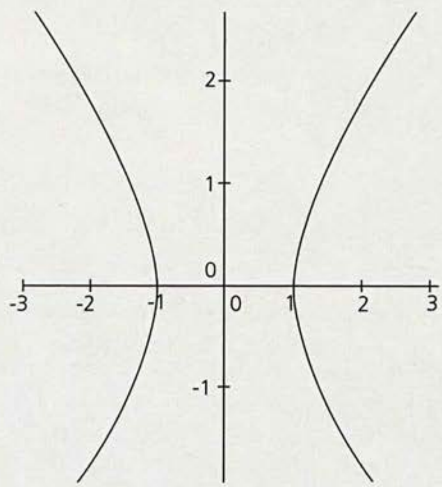
$$= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^x \cdot e^{-x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^x \cdot e^{-x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} = \frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ВОПРОС ТЕРМИНОЛОГИИ

В евклидовой терминологии синус и косинус называются круговыми функциями, поскольку они получаются из свойств круга. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат. Уравнение этой окружности записывается как $x^2 + y^2 = 1$. В этом простом уравнении мы можем сделать замену переменной, выразив переменные x и y через параметр t следующим образом: $x = \cos t$ и $y = \sin t$. Здесь x и y удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = 1$. Такое уравнение называется параметрическим уравнением окружности.

Если вместо круга мы возьмем гиперболу, график функции $x^2 - y^2 = 1$, то $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ удовлетворяют соотношению $x^2 - y^2 = 1$. Это уравнение называется «уравнением гиперболы». Эти графики нам уже знакомы. Гипербола напоминает нам псевдосферу.





Что касается тангенсов, то можно показать, что

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$$

аналогично традиционному выражению

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

ЕВКЛИДОВА ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрические тождества для суммы и разности выглядят следующим образом:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ЕГО УГЛАМ

Пусть в гиперболическом треугольнике даны внутренние углы $A = 8°$, $B = 22°$ и $C = 40°$. Надо найти угловой дефект и длины сторон треугольника.

Угловой дефект считается по формуле $180° - (8° + 22° + 40°) = 110°$. Для вычисления длин сторон мы воспользуемся гиперболической теоремой косинусов и получим

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos B \cdot \cos C + \cos A}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{\cos 22 \cdot \cos 40 + \cos 8}{\sin\ 22 \cdot \sin\ 40} = \frac{1{,}700532108}{0{,}2407924768} = 7{,}062231057.$$

Это позволяет нам вычислить значение *a*. Для этого воспользуемся калькулятором и посчитаем функцию, обратную гиперболическому косинусу. Получим значение 2,642857562. Далее

$$\operatorname{ch} b = \frac{\cos C \cdot \cos A + \cos B}{\sin C \cdot \sin A} = \frac{\cos 40 \cdot \cos 48 + \cos 22}{\sin\ 40 \cdot \sin\ 8} = \frac{1{,}685773206}{0{,}0894587449} = 18{,}84414104,$$

что дает нам длину $b = 3{,}628644458$. И наконец

$$\operatorname{ch} c = \frac{\cos A \cdot \cos B + \cos C}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\cos 8 \cdot \cos 22 + \cos 40}{\sin\ 8 \cdot \sin\ 22} = \frac{1{,}684205008}{0{,}05213516125} = 32{,}30458999.$$

К счастью, современные калькуляторы имеют эти функции, и расчеты можно делать без утомительных промежуточных вычислений.

Аналогично можно проверить другие соотношения с помощью определений гиперболических синуса и косинуса.

По таблице традиционных тригонометрических тождеств можно составить аналогичные соотношения гиперболической геометрии. Просто надо от функций $sin\ x$ и $cos\ x$ перейти к гиперболическим функциям $sh\ x$ и $ch\ x$ соответственно, внося необходимые поправки, поскольку, как мы видели, разница состоит не только в обозначениях. Необходимо, например, изменить знак каждого члена, содержащего произведение двух гиперболических синусов.

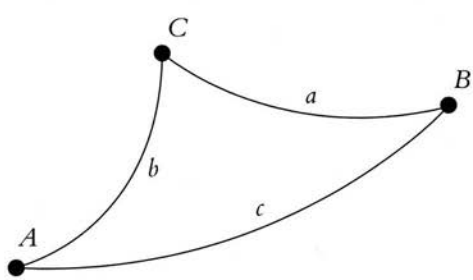
Это простое правило позволяет получить соотношения для гиперболической тригонометрии из их евклидовых аналогов:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{sh}y \\
\mathrm{sh}(x-y) &= \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}y - \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{sh}y \\
\mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y \\
\mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y - \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y
\end{aligned}$$

Классическая и гиперболическая тригонометрии

Как мы видели, гиперболическая тригонометрия похожа на традиционную, изучаемую в школе: обе имеют аналогичные соотношения. Приведенные ниже выражения содержат функции из обеих тригонометрий.

Рассмотрим треугольник с углами A, B и C и сторонами a, b и c, как показано на рисунке:



Для него справедливы следующие соотношения:

1) гиперболическая теорема косинусов для углов:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \mathrm{ch}\, a;$$

2) гиперболическая теорема косинусов для сторон:

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \cos A;$$

3) $\cos A = \operatorname{ch} a \cdot \sin B$;

4) $\beta/2 = \alpha$.

Приведенные выше выражения также справедливы, если мы заменим a, b, c и A, B, C на b, c, a и B, C, A соответственно в результате так называемой круговой перестановки. Таким образом мы можем составить полную таблицу соотношений между традиционной и гиперболической тригонометриями.

Глава 6

Эллиптическая геометрия

Имя немецкого математика Бернхарда Римана вписано большими буквами в историю математики. Эллиптическая геометрия — это удивительное детище его математического гения. Именно он представил прямые линии на таких поверхностях, как шар или мяч для регби, в виде окружностей.

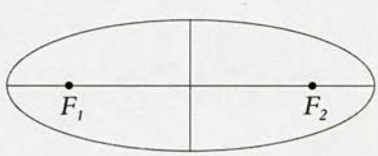
Третья геометрия

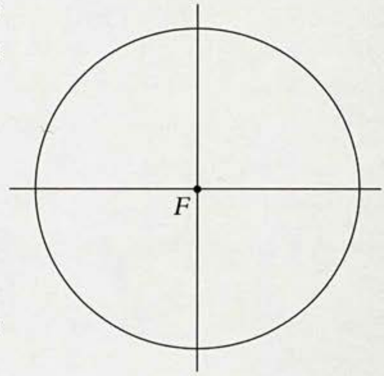
Поверхность эллипсоида наиболее часто используется для визуализации и интерпретации эллиптической геометрии, отсюда и термин «эллиптическая геометрия». Чтобы наиболее ясно продемонстрировать свойства этой геометрии, мы рассмотрим поверхность сферы, которая представляет собой самый простой, частный случай эллипсоида.

С помощью эллипсоида можно представить эту геометрию в очень интересной форме. Рассмотрим сначала более подробно поверхность эллипсоида.

ЭЛЛИПС

Эллипсом называется такая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек (так называемых фокусов) является постоянной.

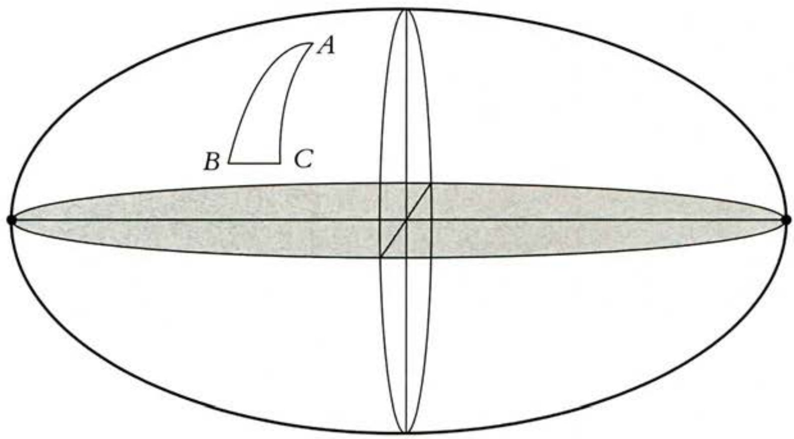




Круг является частным случаем эллипса, когда оба фокуса находятся в одной точке.

Эллипсоид получается путем вращения эллипса вокруг одной из его осей симметрии. Эллипсоид напоминает апельсин или лимон, а также планету Земля. Земля на самом деле является не сферой, а эллипсоидом, так как она приплюснута на полюсах. Однако для простоты мы будем считать земной шар идеальной сферой.

Для того чтобы понять следующий пример, нам придется включить воображение и вспомнить про Гулливера, путешествующего по стране лилипутов. Представим себе, что эти существа живут на поверхности эллипсоида, и им нужно сделать несколько измерений с помощью транспортира.



На поверхности эллипсоида нарисован треугольник, вершинами которого являются точки A, B и C. Представьте себе, что два внутренних угла при основании треугольника равны 90° каждый, их измерили живущие на поверхности лилипуты с помощью гигантского транспортира. Верхний угол треугольника будет очень мал, но нам не нужно знать его величину в градусах, так как мы уже видим, что сумма внутренних углов треугольника, нарисованного на поверхности эллипсоида, больше 180°. Это противоречит одной из основных теорем геометрии Евклида: сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180°. В эллиптической геометрии все совсем иначе: сумма внутренних углов треугольника, нарисованного на поверхности эллипсоида, всегда будет больше 180°.

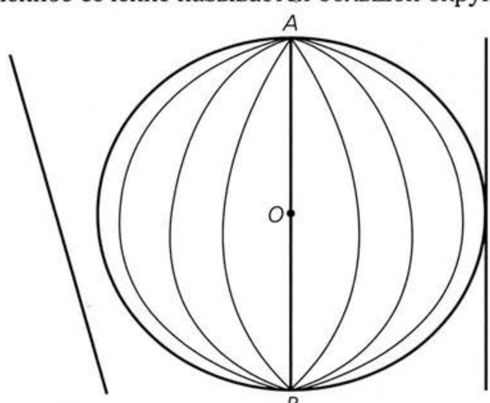
В эллиптической геометрии невозможно провести прямую, параллельную данной прямой. Поэтому мы можем сказать, что эллиптическая геометрия отказывается от пятого постулата Евклида, заменяя его другим:

«Через точку вне данной прямой не проходит ни одной прямой, параллельной данной».

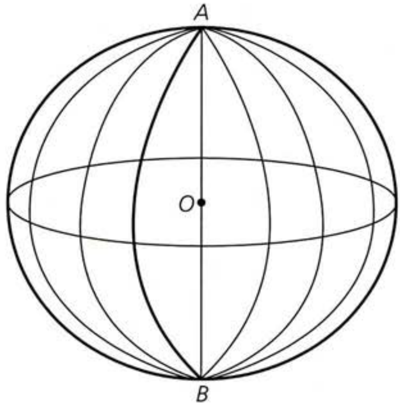
Сферическая геометрия является частным случаем геометрии на поверхности эллипсоида. Она очень проста и интуитивно понятна и позволяет довольно легко визуализировать результаты Римана. Поэтому ее стоит рассмотреть в качестве модели эллиптической геометрии.

Терминология сферической геометрии

Сфера — это поверхность, полученная путем вращения окружности вокруг ее диаметра. Плоскость, которая не пересекает сферу, называется внешней по отношению к ней. Если плоскость пересекает сферу только в одной точке, она называется касательной к сфере; в противном случае она будет пересекать сферу по окружности и будет называться секущей плоскостью. Если секущая плоскость проходит через центр сферы, полученное сечение называется большой окружностью.

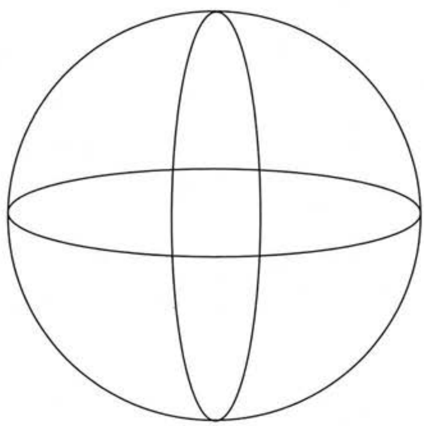


Рассмотрим две точки A и B, такие что отрезок, соединяющий их, проходит через центр сферы O. Эти две точки называются диаметрально противоположными. В этом случае большие круги, проходящие через диаметр AOB, называются меридианами, а точки A и B называются полюсами. Для каждой пары таких точек A и B существует один большой круг, перпендикулярный диаметру AOB, который называется экватором.



Перпендикуляры к экватору — меридианы — можно наглядно представить. Достаточно рассмотреть очищенный мандарин. Линии, разделяющие дольки, будут пересекаться на полюсах.

Обратите внимание, что два больших круга делят поверхность шара на четыре части.



Три больших круга, которые не пересекаются в одной точке, делят поверхность сферы на восемь областей, называемых сферическими треугольниками.

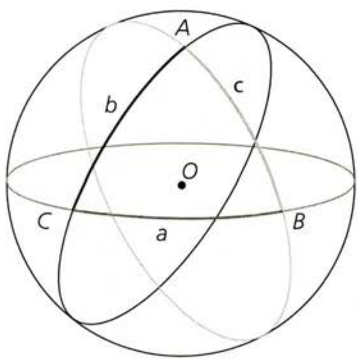
Сферический треугольник также может быть определен как часть поверхности сферы, получаемая в результате пересечения трехгранника и сферы. Дуги на сфере между вершинами A, B и C называются сторонами треугольника.

Внешняя поверхность долек мандарина образована двумя меридианами.

ТРЕУГОЛЬНИКИ И ТРЕХГРАННИКИ

Сферический треугольник определяется как часть поверхности сферы, ограниченная тремя большими кругами. Если вершинами такого треугольника являются точки *A*, *B* и *C*, то фигура, определенная точками *A*, *B*, *C* и центром сферы *O*, называется трехгранником.

Таким образом, на следующем рисунке мы можем ввести такие обозначения: сторону BC назовем буквой a, сторону AC — b, а сторону AB — c. Буквы A, B и C также часто используются для обозначения внутренних углов сферического треугольника.



Выполним некоторые вычисления, используя нашу Землю в качестве модели. Для сферы существует несколько полезных формул. Пусть R обозначает радиус Земли, тогда объем (V) и площадь (S) Земли вычисляются следующим образом:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}, \ S = 4 \cdot \pi \cdot R^2.$$

Если радиус Земли взять равным примерно 6350 км, тогда общая площадь Земли составит:

$$S \approx 4 \cdot \pi\, 6350^2 \text{км}^2 \approx 506\,692\,535 \ \text{км}^2 \approx 5{,}066992535 \cdot 10^8 \cdot \text{км}^2.$$

ГРАДУСЫ И РАДИАНЫ

Радиан определяется как величина центрального угла окружности, длина дуги которого равна радиусу окружности. Эта величина составляет примерно 55 градусов 17 минут и 44 секунды. Радиан (часто обозначаемый как рад, rad) используется в качестве единицы измерения так называемой «круговой меры угла». Если круговая мера угла в радианах равна a, то угол будет равен $\frac{180°\cdot a}{\pi}$ градусов, и наоборот если угол равен G°, то круговая мера угла составит $\frac{\pi\cdot G}{180}$ радиан. То есть угол в 360° полной окружности составит $2\cdot\pi$ радиан. В общем случае эти вычисления осуществляются следующим образом.

Если π радиан соответствует 180°, то R радиан соответствует G°, что дает нам следующую пропорцию: $\frac{\pi}{180}=\frac{R}{G}$. Например, сколько радиан имеет угол в 30°? Подставляя в формулу, получим $\frac{\pi}{180}=\frac{R}{30}$, откуда находим R:

$$R=\frac{30\cdot\pi}{180}=\frac{\pi}{6}\text{ рад.}$$

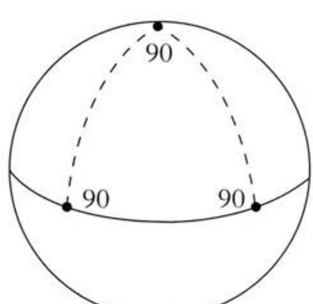
Мы также можем решить обратную задачу. Сколько градусов имеет угол в $\frac{\pi}{4}$ радиан? Подставляя в формулу, получим $\frac{\pi}{180}=\frac{\frac{\pi}{4}}{G}$, откуда находим G:

$$G=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot180}{\pi}=45°.$$

Применим теперь формулу для объема и получим:

$$V=\frac{4\cdot\pi\cdot6\,350^3}{3}=1{,}072499199\cdot10^{12}\cdot\text{ км}^3.$$

С этими результатами мы можем вычислить площадь октанта, одной восьмой части земной поверхности. Просто разделим значение площади Земли на 8. Это дает нам 63 336 566,88 км^2.



Как мы видим, каждый октант очерчивает сферический треугольник с углами $90^\circ = \pi/2$ радиан. Обратите внимание, что общая сумма составляет $270^\circ = 3\pi/2$ радиан (то есть более чем $180^\circ = \pi$ радиан). Тогда чему будет равна каждая из сторон?

Каждая из сторон представляет собой дугу большого круга. Используя формулу для длины дуги, получим:

$$(\alpha \cdot R) = \frac{\pi}{2}\ 6\,350 = 9\,974{,}2625 \text{ км}.$$

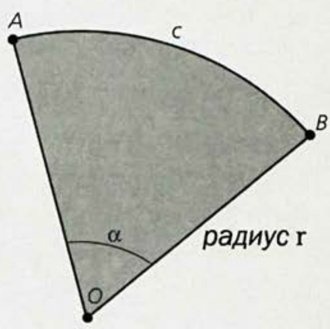
Этот же результат можно получить и другим способом: разделить длину большого круга на четыре (напомним, что длина окружности составляет $2\pi R$):

$$\frac{2\pi \cdot 6\,350}{4} = 9\,974{,}2625 \text{ км}.$$

Ясно, что ту же процедуру можно повторить для Луны, радиус которой равен 1736 км.

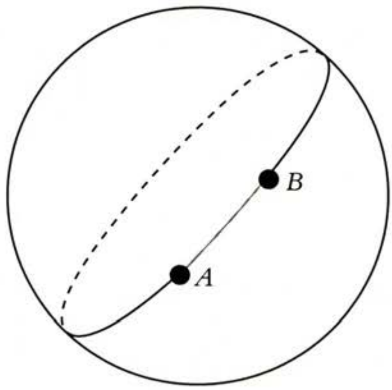
ДЛИНА ДУГИ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Для части окружности с центром O и радиусом r, изображенной на рисунке, обозначим α угол, измеряемый, как правило, в радианах, а c – дугу между точками A и B. Тогда длина дуги выражается следующим образом: $c = \alpha \cdot r$.



Имея дело с длиной стороны сферического треугольника, мы обычно используем круговую меру угла, которую фактически нужно лишь умножить на радиус.

Вернемся к нашему общему вопросу. Геодезической линией называется кратчайшая линия, соединяющая две точки на поверхности и сама принадлежащая этой поверхности. На совершенно плоской, то есть евклидовой поверхности, геодезической линией является отрезок. Между двумя точками A и B на сферической поверхности из всех окружностей, проходящих через эти точки и расположенных на этой сфере, геодезической линией является большой круг. Другими словами, геодезическая линия получается путем пересечения сферы плоскостью AOB. Таким образом, геодезическим отрезком между точками A и B является меньшая из дуг большого круга, проходящего через A и B. Обратите внимание, что случай с этим кругом — единственный, когда A и B не являются диаметрально противоположными точками.



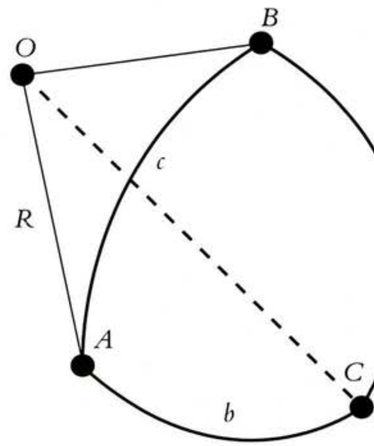
В геометрии на сфере прямыми линиями являются дуги больших кругов. Таким образом, параллельные линии не существуют, так как большие круги всегда пересекаются в диаметрально противоположных точках. Для наглядности достаточно взглянуть на дольки очищенного апельсина.

ПОВЕРХНОСТЬ ЗЕМЛИ

Является ли единственным кратчайший путь между двумя европейскими столицами, например, между Лондоном и Парижем? Ответ на этот вопрос положителен: существует только одна геодезическая линия, соединяющая эти города. Аналогично, уникален ли маршрут между Северным и Южным полюсами? Здесь ответ отрицательный: существует бесконечное количество геодезических линий, соединяющих эти две точки, так как они диаметрально противоположны.

Мир сферических треугольников

Мир сферических треугольников иллюстрирует много математических свойств эллиптической геометрии. Поэтому стоит его рассмотреть подробнее. Для начала рассмотрим на сфере радиуса R сферический треугольник с вершинами A, B, C и сторонами a, b, c.



Сумма углов и сумма сторон сферического треугольника

Одним из результатов, о котором мы уже говорили, является тот факт, что сумма углов сферического треугольника больше 180°, или π радиан, и меньше $360^\circ = 2\pi$ радиан. То есть

$$\pi < A + B + C < 2 \cdot \pi.$$

Таким образом, можно сказать, что сумма сторон сферического треугольника удовлетворяет неравенству:

$$a + b + c < 2 \cdot \pi \cdot R.$$

Площадь треугольника

Величина $(A + B + C - 180^\circ)$ называется сферическим избытком, так что площадь сферического треугольника S находится по следующей формуле:

$$S = \left(\frac{A+B+C-180°}{180°}\right)\ \pi\ R^2,$$

где R — радиус сферы.

Следует отметить, что чем больше площадь треугольника, тем больше сумма его углов. Кроме того, чем больше площадь треугольника, тем больше сферический избыток, и именно поэтому больше значение $A + B + C$.

Длина окружности

В евклидовой геометрии имеется следующий результат: длина окружности радиуса r равна $2\pi r$. В эллиптической геометрии этот результат выглядит следующим образом: длина окружности радиуса r всегда больше, чем $2\pi r$.

ПЛОЩАДЬ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Давайте решим следующую задачу: какова должна быть площадь сферического треугольника на поверхности Земли, чтобы сумма его углов была больше 180° хотя бы на 1°? По формуле для площади сферического треугольника имеем:

$$A+B+C=180°+\frac{180°\cdot S}{\pi\cdot R^2}.$$

Мы хотим найти значение S, такое что

$$A+B+C=180°+\frac{180°\cdot S}{\pi\cdot R^2}=180°+1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{180°\cdot S}{\pi\cdot R^2}=1.$$

Выражая S и подставляя 6350 км вместо R, имеем

$$S=\frac{\pi\cdot R^2}{180°}=\frac{\pi\ 6\,350^2}{180°}=703\,739{,}6319\text{ км}^2.$$

Следовательно, у любого треугольника на поверхности Земли, площадь которого равна или больше 703739,6319 км², сумма углов будет превышать 180° по крайней мере на 1°.

Теоремы синусов и косинусов

В сферической геометрии теоремы синусов и косинусов выглядят следующим образом:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Теорема косинусов также работает после так называемой круговой перестановки (замены a на b, b на c и c на a).

Теорема Пифагора

И снова теорема Пифагора из евклидовой геометрии имеет свой аналог в другом геометрическом пространстве. Но в сферической геометрии теорема Пифагора ведет себя несколько иначе. В этой геометрии она формулируется следующим образом: пусть R — радиус сферы, c — гипотенуза, a и b — две другие стороны сферического треугольника, а угол C — прямой угол, тогда:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R} \cdot \cos\frac{b}{R}.$$

Для большей ясности это утверждение может быть выражено в словесной форме. И хотя оно совсем не напоминает оригинальную теорему Пифагора, мы сформулируем его в любом случае:

«В любом прямоугольном треугольнике на поверхности сферы радиуса R косинус отношения гипотенузы c к радиусу R равен произведению косинусов отношений других сторон к радиусу».

В следующей таблице сравниваются основные математические характеристики традиционной и сферической геометрий — самой простой версии эллиптической геометрии.

Евклидова геометрия	Сферическая геометрия
Прямая линия является кратчайшей линией между двумя точками.	Геодезическая линия является кратчайшей линией между двумя точками.
Прямые линии бесконечны. Расстояние между двумя точками не ограничено.	Геодезические линии имеют максимальную конечную длину, равную πR. Максимальное расстояние между двумя точками равно πR.
Существует только одна прямая линия, соединяющая две точки.	Геодезическая линия будет единственной тогда и только тогда, когда две точки не являются диаметрально противоположными. В противном случае существует бесконечное число геодезических линий.
Существуют прямые без общих точек, и они называются параллельными линиями.	Прямыми линиями являются большие круги, и они всегда пересекаются. Не существует параллельных линий в евклидовом смысле.
Две перпендикулярные прямые образуют четыре прямых угла.	Две перпендикулярные геодезические линии образуют 8 прямых углов.
Треугольник имеет не более одного прямого угла.	У сферического треугольника может быть 0, 1, 2 или даже 3 прямых угла.

Глава 7

Геометрия Земли

Рассмотрим две классические задачи, связанные с геометрией Земли. Они были сформулированы известным математиком и педагогом Дьёрдем Пойа (1887—1985). Первая — рассказ-шутка, но с математическим содержанием. Она известна как задача о полярном медведе.

«Смелый охотник, выйдя из лагеря, прошел 1 км на юг. Затем он прошел 1 км на восток. И в этот момент он увидел медведя, достал пистолет и выстрелил. Довольный своей добычей, охотник пошел на север и ровно через 1 км возвратился в лагерь. Какого цвета был медведь?»

Охотник двигался по дугам меридианов, когда шел на юг и на север. Идя на восток, он двигался по дуге параллели.

Если охотник возвращается в исходную точку по другому меридиану, а не по тому, по которому вышел из лагеря, то его лагерь должен быть на Северном полюсе. Другое решение предполагает, что двигаясь на восток по параллели, охотник опишет одну, две или три полных окружности вокруг полюса. В любом случае медведь, находящийся в одном километре от Северного полюса, может быть только белым.

Другая задача Пойа не так хорошо известна, но не менее занимательна. Это задача о земле Роберта.

«Роберт хочет купить участок земли, совершенно плоский и ограниченный четырьмя строго прямыми линиями. Две из этих линий должны проходить с севера на юг, а две другие — с востока на запад. Длина каждой должна быть ровно 1000 метров. Может ли Роберт найти такой участок земли в Мексике?»

Рассуждения в этой задачи аналогичны предыдущим. Участок земли, который хочет купить Роберт, ограничен двумя меридианами и двумя параллелями. Представьте себе два фиксированных меридиана и параллель между ними. При движении от экватора дуга параллели будет уменьшаться. Таким образом, описанный в задаче участок можно найти только на экваторе. Взглянув на карту Земли, мы сразу поймем, что Роберт не сможет найти такой участок в Мексике, так как эта страна расположена в северном полушарии.

Параллели и меридианы

И во времена Пифагора, и в эпоху GPS (Глобальная система позиционирования) для определения точки на поверхности Земли (или на любой сфере) используется система позиционирования на основе понятий долготы и широты.

Большие круги, проходящие через полюса, называются меридианами, а линии, перпендикулярные им, — параллелями. Как уже говорилось, Земля напоминает апельсин, в котором края долек являются меридианами, а точки, где они пересекаются, — Северным и Южным полюсами. Единственный большой круг, одновременно являющий-

ся параллелью, называется экватором, который делит Землю на два равных полушария. Нулевой меридиан проходит через город Гринвич в Англии.

Широтой называется расстояние до Северного или Южного полюса, в зависимости от полушария, в котором мы находимся. Широта измеряется в градусах от экватора. Долгота — это расстояние на восток или запад, то есть направо или налево от нулевого, или Гринвичского, меридиана. Долгота также измеряется в градусах. Все точки на одной параллели находятся на одной и той же широте.

Из всей этой информации вытекает следующий вопрос: если целью системы позиционирования является определение положения точек на поверхности Земли, то почему широта и долгота измеряются в градусах, а не в километрах?

Для начала заметим, что поверхность, на которой производятся расчеты, является сферой. Чтобы отметить точку на ней, нам нужны только две координаты, потому что, хотя сфера искривляется, она не имеет третьего измерения и является двумерной поверхностью.

Это требует дополнительного разъяснения. Представьте себе круг, разделенный на 360°. Если через центр провести две перпендикулярные линии, то получатся четыре области (квадранта) в 90°, называемые круговыми секторами. Проводя через центр еще линии, можно получить сектора меньшего размера. Их дуги характеризуются размером угла. Это значит, что угловые измерения могут быть применены к любой точке окружности.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ ЗЕМЛИ

Земля может быть разделена на бесчисленные дольки, величина каждой из которых выражается в градусах. Некоторые из этих областей используются в навигации и метеорологии и поэтому имеют специальные названия. Наиболее известными являются полярные круги, тропики и экватор.

Теперь представьте себе не круг, а сферу, такую как Земля. Если ее разделить на две части от одного полюса к другому, то можно использовать угловые измерения так же, как и в круге, и, следовательно, можно определять положение точки по угловым значениям широты и долготы.

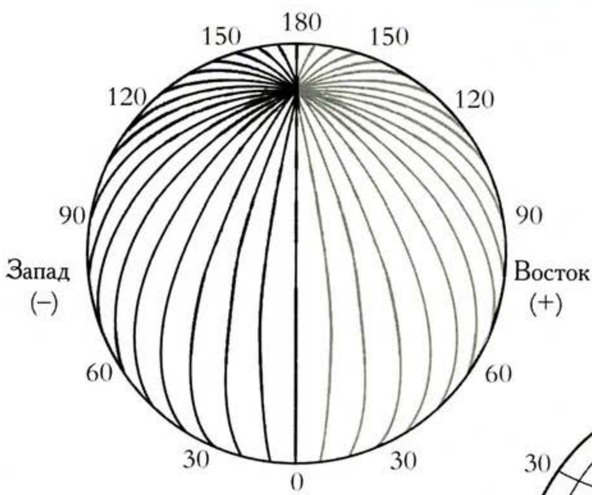
Углы измеряются на восток (направо) и на запад (налево) от нулевого меридиана до диаметрально противоположного ему антимеридиана. Таким образом, долгота имеет значения от 0° до 180°, то есть до половины от 360°, или, другими словами, 90° + 90°. Экватор и Гринвичский меридиан можно рассматривать в качестве осей координат.

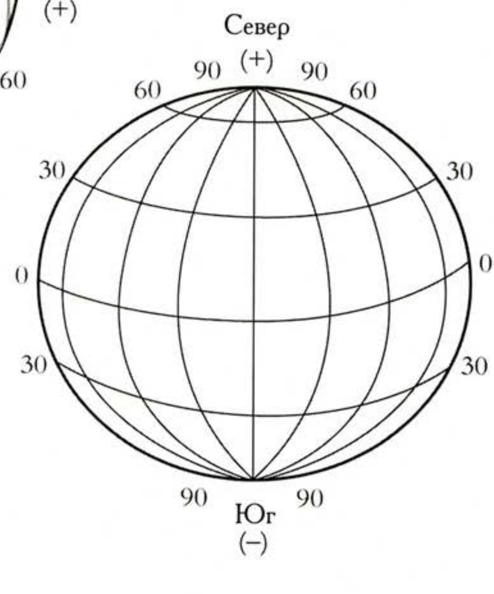
Что касается широты, она измеряется от 0° до 90° с указанием Северного или Южного полушария.

ДВА КОНЦА ЗЕМЛИ

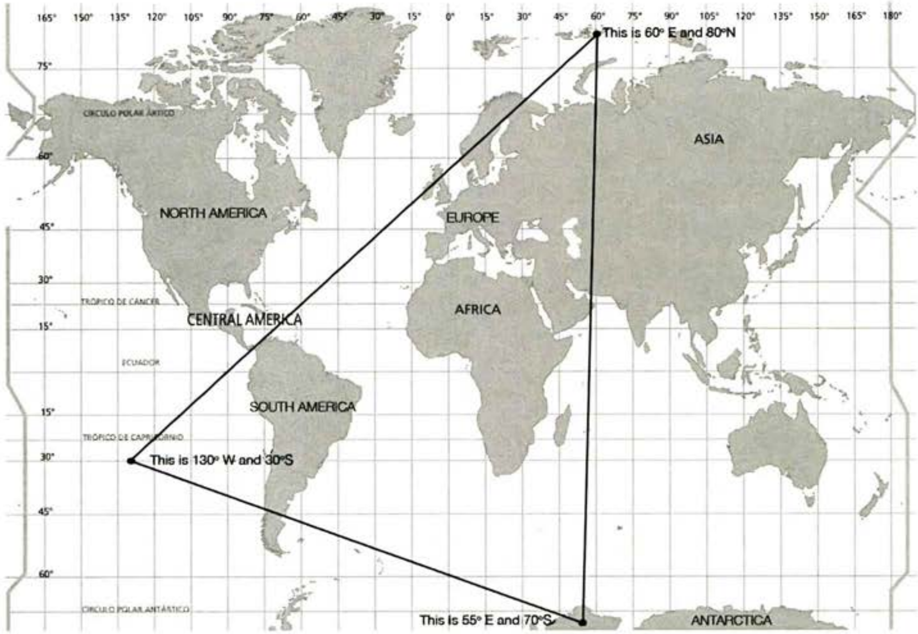
Нью-Йорк и Сидней не являются антиподами, то есть на поверхности планеты они не находятся в диаметрально противоположных точках, но, конечно, они очень далеки друг от друга. Тем не менее по их координатам широты и долготы это неочевидно.

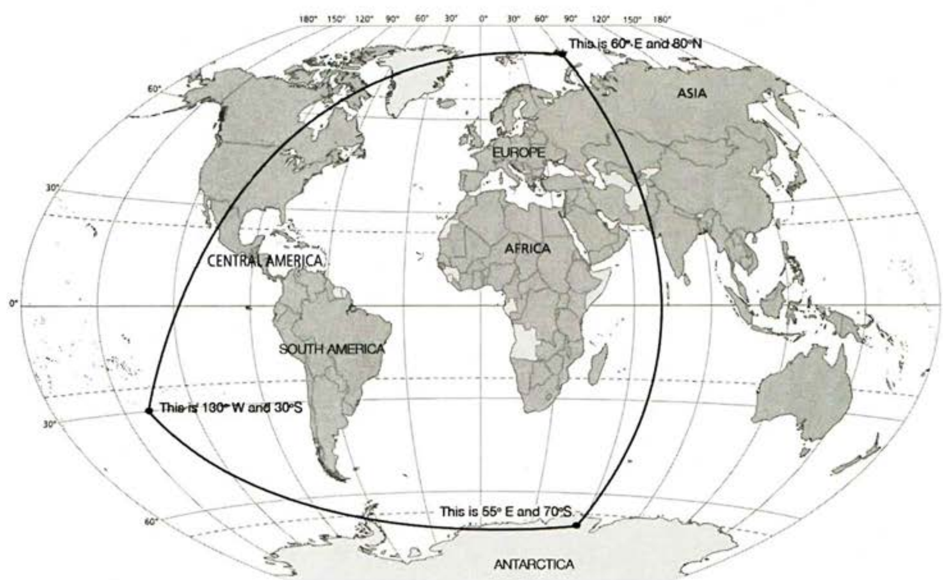
Страна	Город	Широта	Долгота
США	Нью-Йорк	40°47' северной широты	73°58' западной долготы
Австралия	Сидней	33°13' южной широты	151°42' восточной долготы





Сфера Земли с меридианами и параллелями. Эти линии используются для определения точного положения точки на поверхности.





Три точки с разными координатами широты и долготы на двух проекциях Земли. На плоской проекции (вверху) мы получаем обычный треугольник, в то время как на сферической проекции (внизу) мы получаем сферический треугольник.

От Mappa Mundi до Google™ Планета Земля

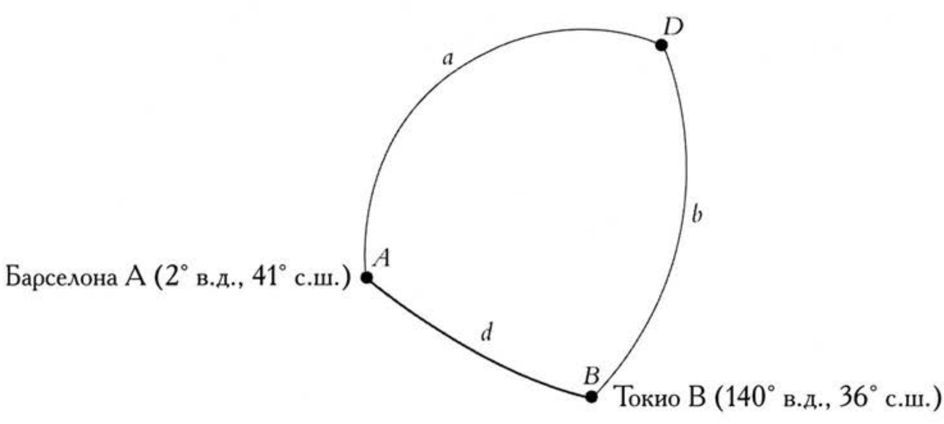
Традиционный глобус Земли, используемый сегодня во многих школьных классах, представляет собой сферу с сеткой координатных линий, представляющих меридианы и параллели планеты. Очень часто в классах также имеется карта мира с линиями, напоминающими декартовы координаты.

Вертикальные линии показывают долготу. Слева от начала координат — западная долгота, справа — восточная долгота.

Горизонтальные линии указывают широту; вверх от начала координат — северная широта, вниз — южная. На предыдущей странице изображен один и тот же регион мира на двух типах карт. На первом рисунке меридианы и параллели — прямые линии, а на втором они искривлены.

Как найти кратчайшее расстояние между Барселоной и Токио?

На карте мира мы видим, что Барселона находится в точке с координатами 2° восточной долготы и 41° северной широты, а Токио — около 140° восточной долготы и 36° северной широты. Рассмотрим сферический треугольник с вершинами A (Барселона), B (Токио) и D (Северный полюс).



Обозначим буквой d геодезическую линию, соединяющую Барселону и Токио. Длина d и будет минимальным расстоянием между двумя городами. Для вычисления этой длины мы используем теорему косинусов для сферических треугольников:

$$\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos D.$$

Чтобы найти d, мы должны знать величины сторон a и b и угла D. Чтобы вычислить длину стороны сферического треугольника, возьмем экватор за горизонтальную ось и вычтем из 90° широту каждой точки. Для нахождения угла D мы поступаем аналогично, на этот раз беря в качестве оси координат Гринвичский меридиан:

$$a = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$
$$b = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$
$$D = 140^\circ - 2^\circ = 138^\circ.$$

Подставляя эти значения в теорему косинусов и используя калькулятор, получим:

$$\cos(d) = \cos(49^\circ) \cdot \cos(54^\circ) + \sin(49^\circ) \cdot \sin(54^\circ) \cdot \cos(138^\circ) =$$
$$= 0{,}656059029 \cdot 0{,}5877852523 + 0{,}7547095802 \cdot 0{,}809016944 \cdot (-0{,}7431448255) =$$
$$= -0{,}06812225162.$$

Используя клавишу $\cos^{-1}$, мы найдем расстояние d: $93{,}90614266^\circ$.

Однако, было бы более полезно определить это расстояние в километрах. Учитывая, что радиус Земли составляет 6350 км, длина окружности большого круга на поверхности земного шара может быть вычислена по формуле:

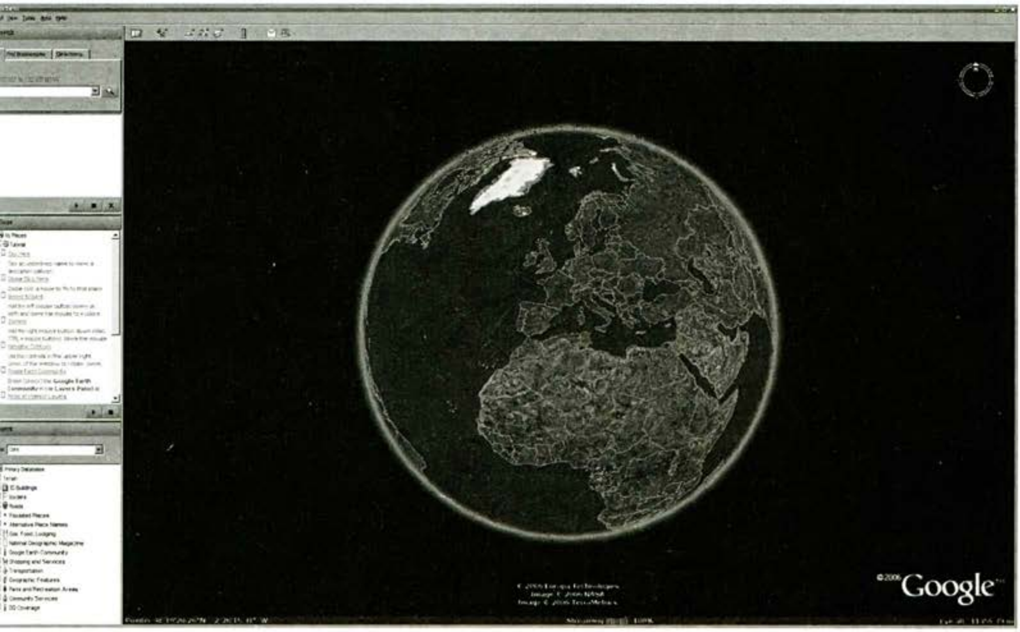
$$2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 6\,350 = 39\,898{,}23 \text{ км}.$$

Таким образом, длина 39898,23 км соответствует полному кругу в 360°. Остается узнать, скольким километрам соответствует угол в $93{,}90614266^\circ$.

Обозначим это значение за x и посчитаем следующую пропорцию:

$$\frac{360}{39\,898{,}23} = \frac{93{,}90614266}{x}.$$

Выражая отсюда x, получим $x = 10407{,}46911$ км.



Первая страница приложения Google™ Планета Земля позволяет «перенестись» в любую точку планеты и рассчитать расстояние между двумя точками на поверхности Земли.

Таким образом, расстояние между Токио и Барселоной составляет около 10407 км. Пожалуй, самое удивительное, что этот результат может быть получен лишь с помощью координат на карте мира.

Современные технологии позволяют рассчитывать расстояния с гораздо большей точностью. Такие программы, как Google™ Планета Земля, позволяют сделать эти расчеты очень быстро и точно. Например, Google™ Планета Земля показывает, что расстояние от Барселоны до Токио равно 10442,62 км.

Расчеты, сделанные вручную, как, например, приведенные выше, не слишком отличаются от результатов специализированного программного обеспечения. Результат программы Google™ Планета Земля отличается от нашего лишь на 35 км. Однако эти компьютерные программы позволяют вычислять расстояния между конкретными точками, например, между конкретными зданиями на той или иной улице.

Такие сложные расчеты невозможно сделать с помощью обычной бумажной карты мира. На самом деле использование компьютеров породило новую область геометрии под названием *вычислительная геометрия*.

Наш рассказ о геометрии поверхности Земли мы закончим классическим описанием сферы из диалога Платона «Тимей, или О природе»:

«По такой причине Бог построил во всем его разнообразии единое целое, совершенное и непричастное дряхлению и недугам. Что касается формы целого, то ему подобают такие очертания, которые содержат в себе все другие. Именно поэтому Он округлил Землю до состояния сферы, поверхность которой повсюду равно отстоит от центра. Эти очертания из всех очертаний наиболее совершенные и подобные самим себе, потому что подобное он нашел в мириады раз более прекрасным, чем неподобное».

Глава 8

Геометрия в XXI веке

Открытие неевклидовых пространств совершенно изменило роль геометрии. Древняя наука об «измерении форм» проникла во все области человеческого знания. Геометрия превратилась из математического ручейка в полноводное море, она перестала быть ограничена узкими рамками евклидова мира и теперь сама открывает безграничный простор воображению. Из наблюдения за объектами и явлениями возникли различные другие виды геометрии. Именно геометрия повышает сложность науки. В этой главе мы подробнее — хотя, конечно, не во всей полноте — рассмотрим возрастающую важность геометрии в наше время.

Интегральная геометрия

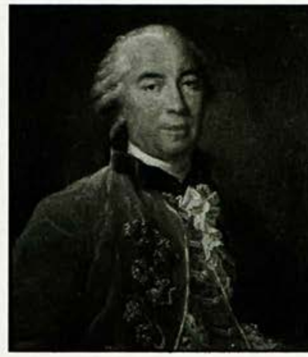
В конце XX века появился раздел геометрии, который включил в себя статистику и теорию вероятностей. Эта современная геометрия, совершенно не похожая на евклидову, называется интегральной геометрией. Одним из ее основоположников был Луи Сантало (1911–2001), выдающийся испанский математик и педагог. Как это часто бывает, новая дисциплина возникла при попытке решить классическую задачу. Результаты многолетних исследований Сантало опубликовал в своей книге «Интегральная геометрия и геометрические вероятности».

Задача, известная как «игла Бюффона», с которой началась интегральная геометрия, была сформулирована Жоржем Луи Леклерком, графом де Бюффоном (1707–1788). В 1777 г. граф опубликовал четвертый том своей важнейшей работы «Дополнение к естественной истории». Он включил в него статью со странным названием Essai d'Arithmétique Moral («Опыт моральной арифметики»). В этой статье граф попытался применить математику к изучению условий жизни человека. Именно там приведена задача об игле Бюффона:

«На листе бумаги имеются горизонтальные прямые линии, расположенные на расстоянии d друг от друга. Мы бросаем иглу длиной l, где $l < d$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из линий?»

Эксперимент состоит в том, что на лист бумаги, расчерченный параллельными линиями на расстоянии d друг от друга, бросается игла длиной l. Игла может пересечь одну из параллельных линий, а может и не пересечь. Самым удивительным является то, что этот эксперимент позволяет получить число π с хорошим приближе-

БЮФФОН И МОРАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА



Портрет графа де Бюффона, интеллектуала эпохи Просвещения, написанный Друэ в 1753 г.

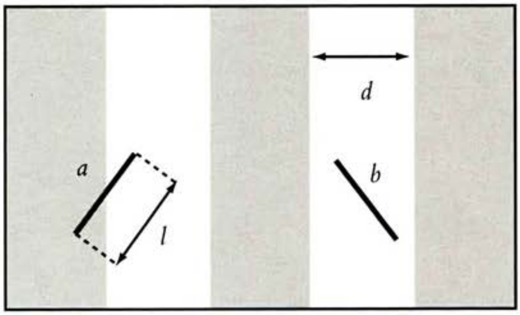
Граф де Бюффон был французским интеллектуалом в эпоху Просвещения. Его настоящее имя Жорж-Луи Леклерк, титул графа был пожалован ему Людовиком XV. Граф де Бюффон был выдающимся естествоиспытателем, его главная работа, «Естественная история», содержит 36 томов. Его геологические исследования и попытка определить возраст Земли привели к серьезным проблемам с католической церковью. Несмотря на то, что он сильно ошибся, его цифра значительно превышала библейские 6000 лет. Его судили, и ему пришлось отречься от своей теории, но втайне он продолжал уточнять свои расчеты. Бюффон был избран членом Парижской Академии наук в 1734 г.

В своей работе «Опыт моральной арифметики» граф попытался измерить эмоции, надежды и страхи человечества. Для этого ему нужно было найти количественные единицы для своих измерений. За основу он выбрал страх смерти, который мог иметь положительное или отрицательное значение (надежда или страх) при перемене знака.

Граф де Бюффон считал азартные игры самой вредной человеческой страстью, и это привело его к изучению сущности вероятности. Будучи знакомым с теорией вероятностей, основы которой заложил Якоб Бернулли в 1713 г., Бюффон связал вероятность с числами, а затем попытался количественно описать влияние вероятности на поведение людей. Эти результаты легли в основу «моральной арифметики».

Граф де Бюффон предположил, что геометрия может быть эффективным инструментом для вычисления вероятностей. Он писал: «Анализ – единственное средство, которым до сего дня пользовались в науке о вероятностях, а геометрия представлялась малопригодной в столь тонком деле. Тем не менее, если обдумать это как следует, нетрудно распознать, что это преимущество анализа перед геометрией чисто случайно и что шанс находится равным образом в ведении и геометрии, и анализа».

нием. Эксперимент связывает элементы классической геометрии, такие как области и расстояния, с теорией вероятностей.



Пусть P — вероятность того, что прямая линия будет пересекаться с иглой, тогда мы имеем:

$$P = \frac{\text{количество пересеченных линий}}{\text{количество бросков}} = \frac{v}{n}.$$

Если $l \leqslant d$, то мы имеем $\frac{v}{n} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$, откуда $\pi = \frac{2 \cdot l \cdot n}{v \cdot d}$.

Бюффон доказал формулу $\pi = \frac{2 \cdot l \cdot n}{v \cdot d}$ прямыми, но очень сложными вычислениями.

Частота, с которой событие происходит, приближается к значению вероятности, то есть значение частоты становится все более и более точным при увеличении количества бросков. Результат Бюффона подвергся серьезной проверке в 1901 г., когда доктор Лазарони бросал иглу 34080 раз и получил значение $\pi = 3{,}1415929$. В настоящее время этот эксперимент можно быстро выполнить с помощью компьютера.

Кроме того, задача Бюффона дает возможность измерять геометрические объекты (длины, площади и т. д.), то есть позволяет формализировать понятие измерения множества линий, плоскостей и т. д. Интегральная геометрия оперирует этими понятиями с большой точностью. Интегральная геометрия широко применяется в биологии и медицине. Например, она лежит в основе компьютерной томографии. В 1979 г. британец Годфри Хаунсфилд получил Нобелевскую премию по медицине за работы по созданию компьютерной томографии на основе интегральной геометрии. Недавняя научная дисциплина, стереология, тоже возникла из интегральной геометрии. Стереология представляет собой набор научных методов для изучения трехмерного пространства по двумерным сечениям или проекциям на плоскость. Например, она позволяет определить точную форму маски или точную кривизну поверхности. Она используется во всех областях: от статистики и геометрии до медицины и геологии.

От циркуля к компьютерам

Традиционными инструментами евклидовой геометрии являются линейка и циркуль, незаменимые для построения простых фигур. Однако в настоящее время новые технологии позволяют строить более сложные изображения.

Бурное развитие компьютерных технологий позволило нам с помощью компьютеров изображать сложные геометрические структуры и моделировать новые методики, которые невозможно воспроизвести вручную, тем более за разумное время. Эта область математики называется вычислительной геометрией и объединяет математику с новейшими технологиями. У Евклида, конечно, не было возможности работать в этом направлении.

В первой половине XX века казалось, что классическая геометрия уступает свои позиции другой, более абстрактной геометрии. Однако, как ни парадоксально, новые технологии пришли на помощь классической геометрии, которая стала развиваться дальше, объединившись с информатикой. Сегодня часто используются такие выражения, как 2D-проекция или 3D-изображение. Следует отметить, что эти выражения, которыми мы так легко оперируем, относятся к двум евклидовым понятиям: двумерной плоскости и трехмерному пространству.

Благодаря компьютеризации не только возникли новые дисциплины, такие как вычислительная геометрия, но и получили новую жизнь другие классические предметы, например, дискретная и комбинаторная геометрия. Их развитие взаимосвязано: вычислительная геометрия нуждается в очень сложных инструментах, а дискретной и комбинаторной геометрии требуются различные математические теории, такие как векторный, тензорный и гармонический анализ, матричная алгебра и информационные технологии, в частности, алгоритмика.

Дискретная и комбинаторная геометрия изучает сложные комбинации геометрических объектов. Ее основная задача — определение количества основных операций, необходимых для решения задачи данного размера. Таким образом, поиск эффективного алгоритма, который позволяет решить проблему за определенное количество операций, дает ценную информацию о «комбинаторной» сложности задачи.

Эта геометрия изучает отдельные геометрические объекты, такие как многогранники и сферы, а также их расположение в пространстве. Напомним, что в трехмерном пространстве существует только пять правильных выпуклых многогранников, так называемых «платоновых тел».

Вычислительная геометрия позволяет строить изображения внутренних органов человеческого тела, например, томограмму (срез) головы.

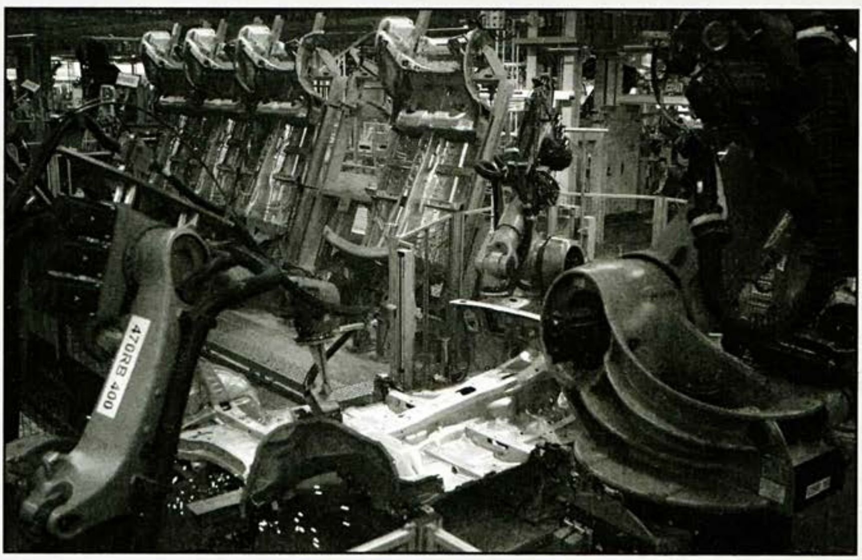
Многие задачи, изучаемые этими новыми теориями, имеют важное значение в таких областях, как теория сигналов, машинное зрение и робототехника. Вычислительная геометрия использует сочетание нескольких математических инструментов для решения задач современной жизни, например, в области медицины, особенно в компьютерной томографии или в магнитно-резонансной томографии (МРТ). Вычислительная геометрия также используется в навигаторах, в картографическом программном обеспечении, о котором говорилось в предыдущей главе, и в компьютерном дизайне. Одним из примеров являются системы автоматизированного проектирования (САПР), позволяющие рассматривать проектируемые объекты под разными углами без использования физических моделей.

Вычислительная геометрия также решает простые геометрические задачи в двумерном пространстве. Чтобы задать программу компьютеру, собирается вся необходимая информация с наибольшей точностью вплоть до мельчайших деталей и связей между элементами. Этот набор процедур и упорядоченных инструкций, являющихся частью алгоритма, используется для разработки программ САПР. Компьютеры могут решать геометрические задачи только с помощью программ САПР. Более общие задачи САПР основаны на анализе многогранников и их свойств.

АЛГОРИТМИКА

Целью алгоритмики является нахождение вычислительных решений различных задач, возникающих в процессе разработки программ. Эти решения не зависят от конкретного языка программирования, они используют более высокий уровень абстракции. Алгоритмом называется математическое выражение выполняемой задачи. Алгоритм состоит из данных, условий и действий. Это список последовательных инструкций, которые необходимо выполнить, своего рода рецепт автоматизированных действий.

Список инструкций переводится на язык программирования, который может быть понят электронным устройством, например, компьютером. Программа контролирует действия машины. Хорошим примером являются роботы, работающие на линии по сборке автомобилей (см. рисунок ниже). Их действия запрограммированы с помощью алгоритмов. Инструкции алгоритма не обязательно соответствуют физическим движениям. Они также могут определять, как следует делать очень сложные расчеты.



Искусственные глаза для роботов

Искусственный интеллект является разделом информатики и занимается разработкой неживых мыслящих приборов. В принципе, таким прибором является любой предмет или вещь, которая способна воспринимать свое окружение, то есть получать информацию, обрабатывать ее и затем выполнять заданные действия. Задача

ПРЕДЕЛЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Проблемы искусственного интеллекта занимают умы ученых, философов и художников. Современные исследования вызывают огромный интерес средств массовой информации, а научная фантастика будоражит воображение людей картинами будущего, в котором машины настолько умны, что различия между людьми и роботами начинают стираться. Хотя работа над искусственным интеллектом является передним краем технологических исследований, огромный разрыв между вычислительной мощностью человеческого мозга и самых быстрых компьютеров настолько велик, что даже самые умные программы сегодня не могут сравниться с биологическим разумом. Возможные применения искусственного интеллекта ограничены лишь воображением программистов — людей — и нашей способностью понять, как именно наш мозг делает нас такими умными.

искусственного интеллекта вовсе не тривиальна: она заключается в разработке процессов, при выполнении которых производительность машины будет максимальной для определенного набора данных и имеющейся информации. Другими словами, цель заключается в том, чтобы машина сама решала, какие действия лучше выполнять, а также училась на собственном опыте.

Существуют различные типы данных и способы представления знаний, а также наборы процессов для получения оптимальных результатов. Основные процессы искусственного интеллекта включают контроль систем, автоматическое планирование, способность реагировать на тесты и запросы пользователей, распознавание речи, почерка и образов. Все это достигается с помощью различных математических инструментов: моделирования, интерпретации образов, статистики, геометрии, обработки изображений, графики и так далее.

Пионером новой науки стал британский ученый-информатик Алан Тьюринг (1912–1954), который в 1930 г. писал:

> *«Искусственный интеллект будет достигнут тогда, когда мы не сможем провести различие между человеком и компьютерной программой, ведя с ними разговор с завязанными глазами».*

Тьюринг был математиком, программистом, криптографом и философом. Он считается отцом современной кибернетики и известен тем, что работал во время германских бомбежек Великобритании. Во время Второй мировой войны он был директором отдела расшифровки в Блетчли-парке, который занимался исследованием

РОБОТ-ХУДОЖНИК

В 2007 г. швейцарский исследователь-робототехник Сильвен Калинон из лаборатории изучения систем и алгоритмов (Learning Algorithms and Systems Laboratory — LASA) построил робота, способного нарисовать портрет сидящего перед ним человека, используя механическую руку и гусиное перо, периодически опускаемое в чернила. Целью проекта была разработка приложений, таких как автоматизированное создание фотороботов подозреваемых в совершении преступлений и распознавание форм и фигур в трехмерном пространстве.

Этот проект не так уж сложен, как может показаться. Робот фиксирует изображение человека и отделяет его от окружающего фона. Для этого робот использует алгоритмы распознавания образов и различия в освещении и позе модели. Затем блок управления робота преобразует фотографию в векторный рисунок, как и любая другая программа по обработке изображений. Получив четкое изображение модели, робот приступает к рисованию, но вместо принтера у него имеется «рука» с четырьмя степенями свободы, которая позволяет держать перо и рисовать на бумаге наподобие картографа.

и расшифровкой сообщений противника, закодированных немецкой шифровальной машиной «Энигма».

Его теоретические работы заключались в формализации понятия алгоритма и вычислений, что теперь называется «машиной Тьюринга». Однако он также работал в практической области, помогая в разработке одной из первых программируемых электронно-вычислительных машин. Результаты его работы стали важным аргументом в дискуссии о том, может ли машина — или сможет ли когда-либо — думать.

Вычислительная геометрия играет важную роль в таком разделе теории искусственного интеллекта, как искусственное зрение, компьютерное зрение и техническое зрение. Искусственное зрение означает возможность запрограммировать компьютер так, чтобы он мог визуально распознавать различные элементы изображения.

В промышленных процессах, когда продукция многократно производится из одинаковых компонентов, искусственное зрение означает, что тысячи производимых деталей могут быть проверены за одну секунду с высокой эффективностью обнаружения дефектов. Надо сказать, что такие системы не могут функционировать без человека, они являются лишь дополнением к нашим органам чувств.

Магнитный резонанс

Хотя, казалось бы, вычислительная геометрия существует в абстрактном мире, она помогает нам самым реальным способом: в диагностике заболеваний. Она лежит в основе устройств, которые используют так называемый магнитный резонанс. Он применяется для очень точного определения расположения атомов в человеческом теле. Оборудование для обработки изображений, используемое в такой диагностической работе, очень сложное не только потому, что является высокочувствительным, но и потому, что оно ни в коем случае не должно наносить вред пациенту.

МАТЕМАТИКА ДЕЛАЕТ МИР ЛУЧШЕ

Швейцарский физик Феликс Блох и американский физик Эдвард Пёрселл открыли магнитный резонанс в 1946 г. В 1952 г. они оба получили Нобелевскую премию по физике за развитие новых способов точного измерения ядерных магнитных эффектов.

На следующем рисунке показано, как просто и компактно выглядит магнитно-резонансный томограф. В основе его работы лежит сложная высшая математика, но томографы быстро стали привычным медицинским диагностическим оборудованием. Процесс, при котором математические теории получают техническое применение в нашей повседневной жизни, все более ускоряется.

Основным компонентом устройства является магнит, который генерирует сильное магнитное поле. Его силовые линии ориентируют атомные ядра в двух направлениях: параллельно вектору силового поля и антипараллельно, в противоположном направлении. Интенсивность магнитного поля определяет частоту, с которой резонирует каждый атом. Электромагнитное излучение определенной частоты, обычно радиоволны, пропускается через человека. Тогда излучение, которое высвобождается в результате переориентации атомов, фиксируется сканером томографа.

Поскольку магнит создает постоянное поле, все ядра одного и того же вещества резонируют с одной и той же частотой, поэтому зоны, содержащие различные вещества, будут излучать или больше, или меньше электромагнитных отголосков. Вся эта информация, которую несут электромагнитные сигналы, поступающие от пациента, обрабатывается количественно с помощью математического аппарата, называемого преобразованием Фурье.

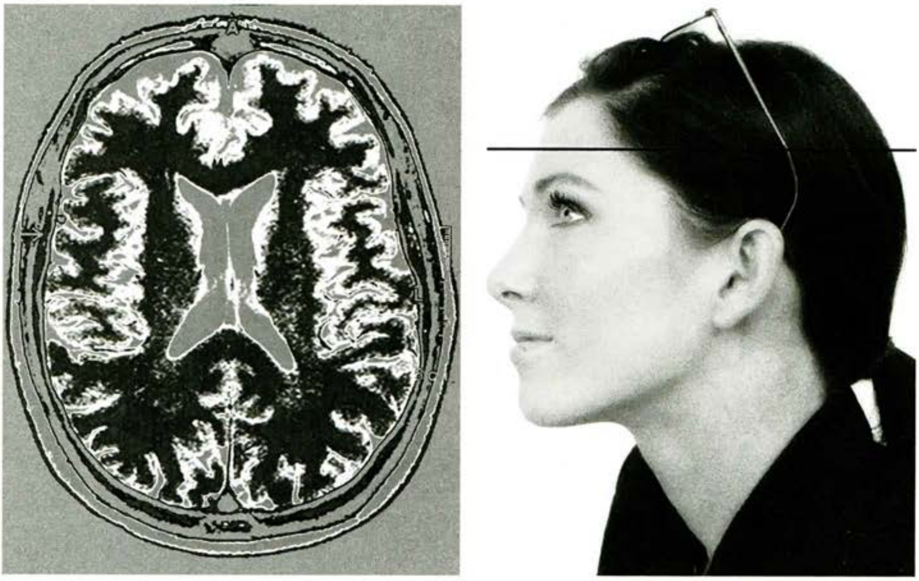
Магнитный резонанс сначала применялся для томографии, другими словами, чтобы получать изображения срезов человеческого тела. Каждый срез имеет определенную толщину и состоит из элементов объемного изображения, называемых вокселями. Это слово образовано из слов «объемный» (англ. volumetric) и «пиксель» (англ. pixel). Воксель является элементом трехмерного изображения. Его более известный аналог — пиксель — является элементом двумерного изображения.

Для создания трехмерного изображения необходимо изменить непрозрачность вокселей. Каждый воксель получает различные значения непрозрачности в зависимости от того, сколько в данной области срезонировало элементов, что определяется количественно. Именно благодаря этому эффекту врачи могут наблюдать внутренние органы человека, которые иначе были бы невидимы за более непрозрачными внешними слоями. Объем вокселя составляет около трех кубических миллиметров. Каждый срез состоит из большого количества вокселей.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье изучается в разделе математики, называемом гармоническим анализом. Этот математический оператор используется, чтобы разложить сигнал на составляющие разной частоты. Математически это очень сложно. Этот оператор задается для функций f и g комплексного переменного следующим образом:

$$g(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$



Магнитный резонанс позволяет изображать срезы внутренних органов. Изображение слева — горизонтальный срез головного мозга в месте, указанном стрелкой на фотографии справа.

И наконец, изображение представляется в виде точек, яркость которых пропорциональна силе магнитно-резонансного сигнала в соответствии с содержанием вокселей в изучаемом объекте. Эта информация отображается и распечатывается в виде изображения с числовыми значениями, так что медицинские специалисты могут визуально интерпретировать его и точно диагностировать состояние пациента.

Цифровые изображения

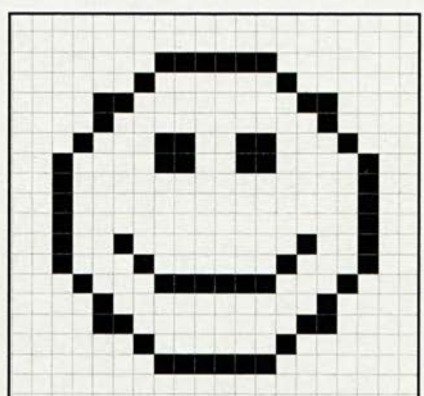
Отправка и получение фотографий по электронной почте, фотографирование цифровой камерой, сканирование изображений — все это теперь часть нашей повседневной жизни. Благодаря многочисленным программам для обработки изображений и плоским экранам во всех языках появились новые регулярно и повсеместно используемые слова. Например, пиксель, уже упомянутый выше, а также растровые и векторные изображения с поразительной легкостью из специализированных терминов стали общеупотребительными словами.

Как и новые термины, приходящие из других языков, понятие «растровое изображение» может принимать различные обличья: битовая матрица, матричное изображение или пиксельное изображение. Это файл, представленный в виде матрицы, таблицы пикселей или цветных точек, называемый растром, который можно просматривать на экране компьютера или в распечатанном виде. Слово *растр* происходит от латинского rastrum, означающего «грабли», и radere — «скрести».

Векторное изображение представляет собой цифровой рисунок, образованный отдельными геометрическими объектами, то есть линиями, многоугольниками, дугами и т. д. Векторные изображения, в отличие от растровых, могут быть увеличены до бесконечности без потери их очертаний, и поэтому они используются в графическом дизайне или в компьютерных играх для создания виртуальной реальности. У растровых изображений графический контур не сохраняется по мере увеличения размера.

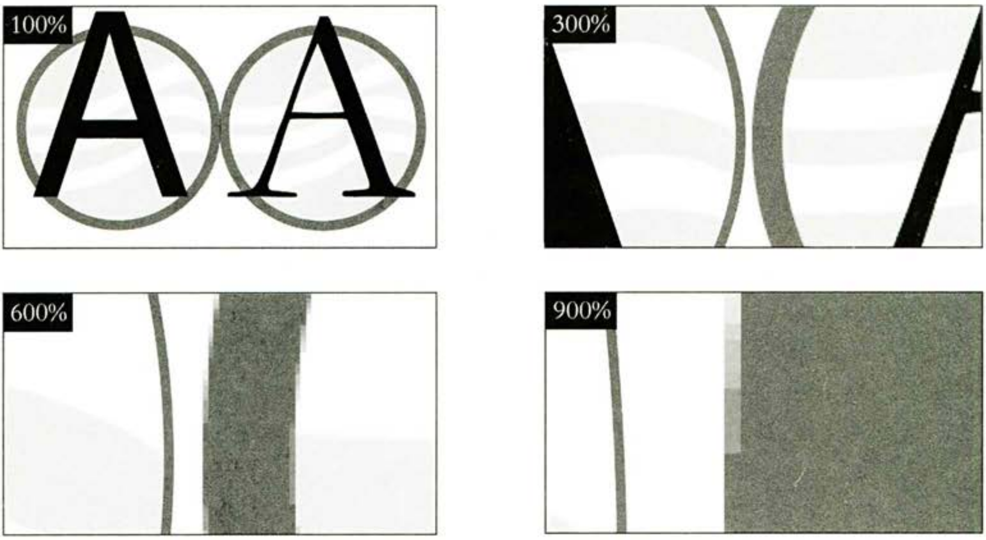
ПИКСЕЛЬ

Слово «пиксель» является неологизмом. Оно означает «элемент изображения» и служит минимальной единицей цифрового изображения, которое можно просматривать на различных устройствах, как правило, подключенных к компьютеру, например, на мониторе. Размер пикселя не одинаков, он меняется в зависимости от устройства, используемого для просмотра изображения. Большинство компьютерных мониторов имеют 72 пикселя на дюйм экрана.



Изображение размером 16 на 16 пикселей.

Следующие фотографии являются увеличением исходного изображения (100%). Буква А слева — векторное изображение, а буква А справа — растровое изображение.



Многократное увеличение выявляет различие между этими двумя типами. При увеличении векторная буква А (слева) сохраняет качество изображения, в то время как растровая буква А (справа) постепенно превращается в размытую мозаику пикселей. Если мы увеличим изображение достаточно сильно, например, на экране компьютера, мы сможем разглядеть пиксели, из которых оно состоит. Изображение является прямоугольной матрицей пикселей, каждый из которых представляет собой крошечную часть общей картины. Они похожи на маленькие квадраты или прямоугольники и могут быть цветными, черными, белыми или серыми.

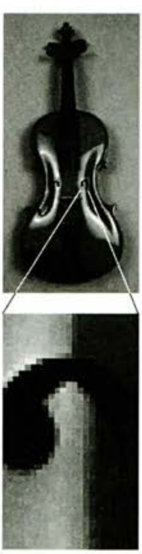
Чтобы преобразовать цифровую информацию пикселя в цвет, мы должны знать глубину и яркость цвета, закодированного в пикселе, а также используемую цветовую систему. Например, RGB-система (Red Green Blue — красный, зеленый, синий) позволяет создавать цвета из трех основных цветов: красного, зеленого и синего. Их сочетание определяет, какой цвет мы видим. Большинство компьютерных периферийных устройств — мониторы, сканеры и т. д. — используют систему RGB.

Каждый пиксель кодируется в двоичной системе с помощью строки определенного количества битов. Число различных цветов, которые могут быть представлены пикселями, зависит от количества битов на пиксель (англ. bits per pixel, bpp). Можно рассчитать количество цветов, которое могут содержать пиксели. Для этого нужно возвести число 2 в степень, равную количеству битов на пиксель.

Ниже приведены наиболее употребительные значения.

1 бит на пиксель: $2^1 = 2$ цвета, так называемые монохромные, или «черно-белые», системы.
2 бита на пиксель: $2^2 = 4$ цвета, видеокарта CGA (цветной графический адаптер).
4 бита на пиксель: $2^4 = 16$ цветов, видеоадаптер VGA (Video Graphics Array).
8 битов на пиксель: $2^8 = 256$ цветов, видеоадаптер Super VGA.
16 битов на пиксель: $2^{16} = 65\,536$ цветов, система Highcolor.
24 бита на пиксель: $2^{24} = 16\,777\,216$ цветов, система Truecolor.
48 битов на пиксель: $2^{48} = 281\,474\,976\,710\,656$ цветов, используются в высококачественной полиграфии.

Матричное изображение, или битовая матрица, используется в фотографии или видеофильме. Действительно, сканеры и цифровые камеры являются аналого-цифровыми преобразователями. Количество пикселей в изображении называется

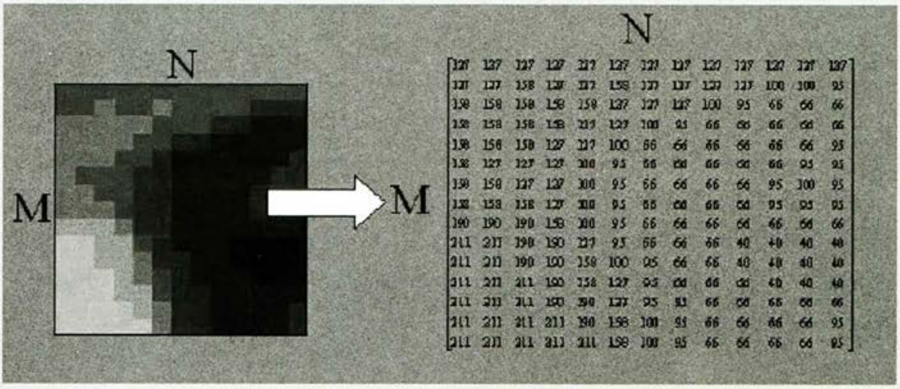


170	170	180	181	186	189	191	186	179	172	164	152	98	56	57	53	50	55	50	44	45	41	41	45	46	47
168	175	177	177	188	194	187	186	179	169	161	153	93	59	55	49	50	49	47	43	44	46	44	45	43	40
169	171	182	183	190	194	192	187	172	171	158	136	90	62	53	55	52	48	49	42	45	48	43	40	43	41
175	175	185	192	195	194	193	187	174	172	164	150	87	55	52	51	48	47	48	47	46	42	40	43	43	43
176	181	185	189	191	192	195	190	178	174	165	145	85	54	48	47	46	48	49	49	42	45	41	42	43	43
178	180	189	194	197	197	196	189	181	174	164	146	73	53	58	48	46	45	45	50	46	46	43	41	43	43
182	186	192	197	200	201	198	190	184	184	176	156	74	46	48	45	45	39	41	42	43	44	42	40	41	43
182	189	195	200	209	217	215	205	190	165	142	116	79	49	45	43	43	42	46	47	43	42	41	41	39	44
183	187	200	211	236	223	140	56	28	16	11	7	12	13	23	38	49	48	46	46	45	41	40	38	40	43
191	191	220	214	143	43	9	5	7	7	8	6	8	7	7	12	23	33	44	43	44	42	42	40	42	43
196	227	190	45	5	6	7	9	8	7	6	7	4	9	7	6	7	11	24	47	37	39	41	44	43	41
215	182	25	4	8	8	9	7	9	6	7	46	44	7	8	8	6	8	9	19	31	38	40	42	45	41
180	21	6	8	9	8	9	9	2	25	122	178	164	39	9	7	9	7	7	8	15	30	38	38	41	38
63	2	8	8	7	9	8	4	22	142	203	179	163	126	50	8	6	8	7	9	6	16	33	38	39	41
11	8	9	8	8	8	6	31	141	183	187	181	168	167	112	35	9	8	8	7	9	8	14	31	40	40
5	9	8	8	7	8	9	117	172	169	187	182	163	158	131	65	21	7	7	7	6	8	8	18	37	37
8	9	8	8	9	7	6	62	174	172	183	180	165	149	127	85	33	12	8	7	8	8	8	9	21	37
10	7	9	8	8	7	7	12	134	181	181	174	160	153	128	88	41	26	8	8	8	7	7	7	8	27
9	8	8	8	7	7	7	7	68	182	176	170	164	154	119	92	41	35	17	8	7	8	7	7	7	14
9	9	7	8	8	7	7	7	21	152	176	168	160	151	126	87	41	39	29	8	6	7	7	8	7	8
9	8	9	8	8	7	8	7	10	117	182	166	150	147	120	75	39	39	35	16	6	8	7	6	7	6
10	9	9	7	8	8	7	8	8	108	177	167	159	151	105	82	42	39	37	27	8	8	7	7	7	8
10	9	8	8	7	8	8	8	11	122	172	160	152	152	117	80	49	42	37	33	13	6	8	7	8	7
10	10	9	10	8	8	8	6	26	146	168	160	150	144	110	82	44	38	39	34	18	8	7	8	7	8
7	10	10	9	9	9	8	6	97	167	157	161	149	147	102	66	49	42	36	34	25	7	8	6	8	8
35	9	7	9	8	7	4	42	151	161	162	160	153	150	105	77	43	40	35	35	30	9	7	8	7	6
115	50	24	12	13	26	66	142	157	155	163	160	152	148	107	67	48	40	35	34	31	12	9	7	7	8
140	123	117	95	92	129	154	153	158	159	162	157	151	148	105	62	44	38	38	34	32	17	7	8	6	8
136	134	145	146	143	152	151	157	166	167	166	160	153	147	112	78	43	39	41	36	33	23	7	7	9	7
138	142	144	144	150	153	156	158	168	171	171	157	149	155	108	61	51	43	40	37	34	24	8	7	6	9
143	141	145	149	153	159	159	157	167	176	170	163	160	154	110	62	48	43	38	35	32	30	12	8	8	7
148	150	145	151	156	159	158	162	169	172	167	162	156	153	114	59	53	45	38	35	30	33	17	7	7	8
150	150	150	157	164	164	166	170	174	172	174	166	155	151	116	71	51	47	41	36	34	33	21	8	9	9
145	148	153	158	160	168	168	171	178	178	170	165	161	153	104	66	47	43	40	37	34	33	21	8	8	8
151	151	156	157	163	166	165	174	176	177	170	165	163	154	118	67	45	41	40	35	33	34	25	9	7	8
147	152	156	161	167	169	167	171	177	180	180	167	154	155	128	80	52	38	37	37	34	34	26	10	7	8
154	153	158	164	170	169	171	172	185	181	173	171	159	156	128	81	60	43	42	40	36	33	27	10	8	8
150	155	162	167	168	172	172	176	179	180	175	169	163	155	133	77	54	44	44	38	38	33	29	11	8	8
148	157	161	166	172	169	167	174	179	182	184	174	162	164	134	81	57	42	43	38	38	34	31	14	8	8
155	160	160	164	171	169	173	178	182	182	182	177	164	158	133	98	69	43	41	41	37	35	31	16	8	8
152	158	161	165	168	173	176	180	179	186	186	174	167	157	136	96	74	47	44	40	37	34	33	17	8	8

В изображении пиксели расположены в виде матрицы — таблицы, состоящей из строк и столбцов.

SUPER VGA

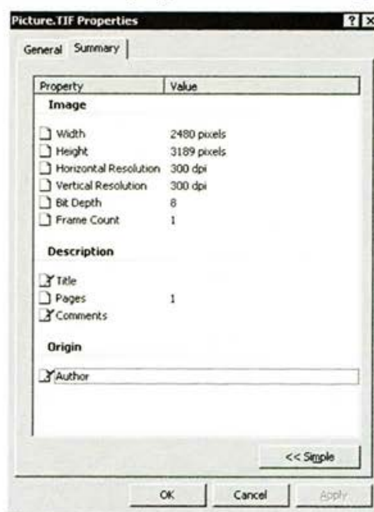
Изображение Super VGA формируется M x N пикселями и представляет собой матрицу размером M x N элементов, имеющих 256 значений от 0 до 255.



разрешением. Чтобы не перегружать потребителей техническими деталями, торговые марки выражают количество пикселей в изображении одной цифрой. Например, на цифровой камере может быть написано «5 мегапикселей», что означает, что она имеет пять миллионов пикселей. Это также может быть обозначено двумя числами. Например, разрешение 640 х 480 означает, что матрица пикселей содержит 640 столбцов и 480 строк. Вертикальный формат цифрового телевидения имеет 720 столбцов и 576 строк, телевидение высокой четкости (HDTV) — 1080 строк.

Растровые изображения описываются высотой и шириной (в пикселях) и глубиной цвета (в битах на пиксель), что определяет количество цветов, которые могут храниться в каждом пикселе, другими словами, качество цветопередачи изображения.

Компьютерные изображения развиваются очень быстро, достигая все большего качества. Но эта гонка ограничивается еще одним условием — размером файла. Изображения высокого качества требуют для хранения много места.



Свойства файла показывают характеристики изображения.

ВИДЕОКАМЕРЫ

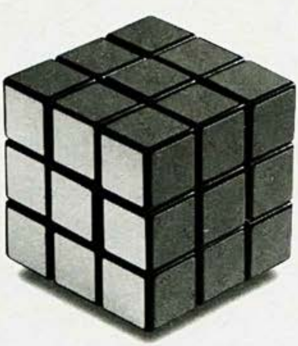
Камеры видеонаблюдения, реагирующие на движение, записывают ряд изображений в виде отдельных снимков. Они могут быстро сравнивать каждый снимок с предыдущим путем вычитания матриц двух изображений. Если в результате получается матрица с нулевыми элементами, это означает, что в данном интервале времени не было никакого движения. Ненулевые показатели означают, что два изображения различны. Если изображение изменилось, значит, произошло некоторое движение.

Когда офис банка закрыт, камеры видеонаблюдения с детектором движения записывают и сравнивают фотографии. Если изменений нет (два последовательных изображения одинаковы, разность матриц равна нулю), устройство стирает предыдущую фотографию, чтобы сэкономить место на диске. Сохраняются только изображения с видимыми изменениями. Математика следит за нами!

Программы для обработки изображений пытаются решить эту проблему различными методами сжатия данных. На профессиональном уровне результаты впечатляют, но для персональных компьютеров простого решения не существует. Чтобы сэкономить место на диске, при сжатии изображений приходится жертвовать данными и, следовательно, качеством. В информатике такие методы называются необратимым сжатием или сжатием с потерей информации.

Часто решение использовать векторное или растровое изображение зависит от метода сжатия. Растровое изображение не может быть увеличено без существенной потери качества. Векторная графика предоставляет возможность рассматривать изображения на любом экране с максимальным разрешением.

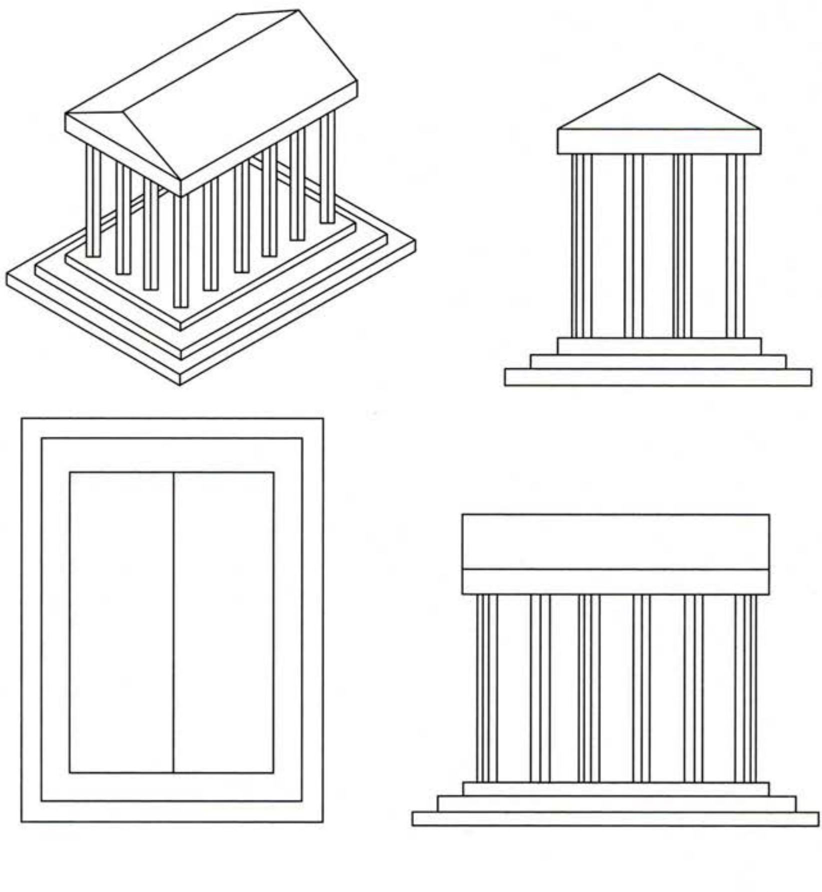
ТРЕХМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ



Понятие пиксельной таблицы или матрицы может быть обобщено для трехмерной компьютерной графики, где аналогичная трехмерная таблица состоит из кубических блоков — вокселей. В этом случае информация о цвете хранится в кубических элементах, расположенных в трехмерной матрице. Хотя воксели являются мощным инструментом для передачи сложных форм, они требуют много памяти. Поэтому трехмерные изображения, как правило, хранятся в виде векторной графики.

Системы автоматизированного проектирования (САПР)

Архитектурные чертежи и промышленные модели традиционно представлялись двумерными проекциями различных видов, например, виды сверху, спереди и сбоку и перспективный вид. Такие чертежи использовались инженерами для изображения своих идей и, в частности, для показа другим. Компьютеры произвели настоящую революцию в мире дизайна.



Сегодня системы автоматизированного проектирования являются основным инструментом для рисования проекций. Однако прежде чем сесть за работу над проектом, инженеру необходимо запрограммировать оборудование так, чтобы оно понимало, что от него требуется. Вычислительная геометрия предоставляет математический аппарат, с помощью которого системы автоматизированного проектирования могут создавать чертежи.

Во-первых, программа использует набор геометрических фигур: прямые и ломаные линии, многоугольники, окружности, эллипсы и кривые Безье.

Кривые Безье были разработаны в 1962 г. для изображения кривых в технических чертежах. Пьер Безье (1910–1999), инженер компании «Рено», описал кривые этого вида в математических терминах. Они первоначально использовались для проектирования самолетов и автомобилей, но позже стали одним из элементов систем автоматизированного проектирования. Компьютерный язык PostScript (Постскрипт), используемый высококачественными принтерами, также основан на кривых Безье. Различные графические редакторы используют термин «безье» для названия некоторых из своих функций. Эти программы просты в использовании и уже давно стали стандартом в графическом дизайне. Все они основаны на векторных изображениях.

В мире систем автоматизированного проектирования растровые изображения считаются примитивным форматом, по крайней мере, с концептуальной точки зрения, поскольку они хранят информацию в пикселях и поэтому не столь гибки, как векторные изображения. Программы систем автоматизированного проектирования, которые генерируют векторную графику, позволяющую вращать, перемещать, увеличивать и изменять наклон отдельных деталей изображения, применяют точные преобразования и отдельные основные компоненты, чтобы показать полностью готовое изделие на экране.

КРИВЫЕ БЕЗЬЕ

Определять формы геометрически не так уж сложно. Точки на плоскости можно задать их координатами. Например, точка A имеет координаты (x_1, y_1), а точка B – (x_2, y_2). Это все, что нам нужно знать, чтобы провести прямую линию между ними. Квадратичные кривые Безье являются кривыми второго порядка и задаются тремя опорными точками. Например, шрифты типа True Type состоят из кривых на основе квадратичных кривых Безье. Существуют также кубические кривые Безье и другие кривые, более высоких порядков.

Векторная графика идеальна, если изображение по каким-либо причинам необходимо увеличить. Как мы видели, векторные изображения можно увеличивать без ограничений.

С другой стороны, векторная графика не подходит для кодирования фотографий или видео. Практически все цифровые камеры сохраняют изображения в растровом формате. Почему? Одной из причин является то, что данные, описывающие векторную графику, должны пройти довольно сложную обработку, прежде чем они создадут окончательное изображение. Процессор должен быть достаточно мощным, чтобы выполнить необходимые расчеты и сделать это быстро. Если объем данных велик, вывод даже небольшого изображения на экран камеры может занять довольно много времени. Тем не менее, существует несколько форматов, которые используют комбинации векторных и растровых изображений.

Помимо преимуществ и недостатков различных форматов, все данные, выводимые на экран или распечатываемые на принтере, нужно сначала переводить в пиксели — основные строительные элементы современных изображений.

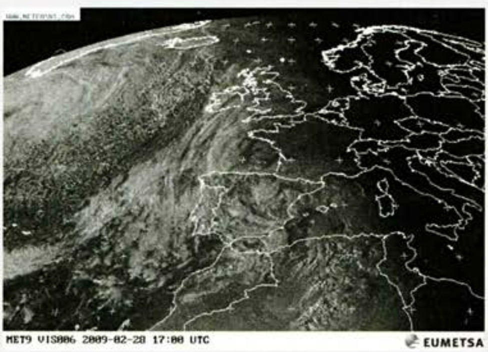
Дистанционное зондирование: географические информационные системы

Дистанционное зондирование — относительно новое направление, появившееся в середине XX века. В качестве исследовательского инструмента используются спутниковые снимки. Одним из самых известных искусственных спутников на орбите Земли является Meteosat. Это отличный пример того, как спутниковые изображения применяются для практических целей. Этот спутник используется для составления прогнозов погоды в Европе и Северной Африке. Он является одним из пяти метеорологических спутников, находящихся над экватором и передающих примерно каждые полчаса информацию о состоянии атмосферы. Другими спутниками являются два спутника GOES, передающие информацию для Америки, спутник Insat — для Индии и GMS — для Японии. Они передают фотографии атмосферы, которые можно видеть каждый день на экранах телевизоров по всему миру. Но существует много других спутников, наблюдающих за Землей, которые используются не только в метеорологических целях, но и для нужд картографии, и для изучения природных ресурсов.

Спутники — это огромные цифровые фотокамеры, вращающиеся вокруг Земли на постоянной орбите и делающие снимки поверхности, которые затем пересылаются на компьютеры.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПУТНИКОВЫХ ФОТОГРАФИЙ

Инфракрасная фотография Западной Европы со спутника Meteosat.



То же изображение с камеры видимого света...

...и с камеры, передающей изображения паров воды в атмосфере.

Метеорологические спутники передают три вида изображений: инфракрасные, в видимом свете и изображения паров воды.

Инфракрасные фотографии иногда показывают по телевизору. На них изображены теплые объекты в более темных цветах, а холодные — в более светлых. Таким образом, безоблачные регионы, как правило, темнее, хотя так же могут выглядеть очень низкие облака и туман. Высокие облака очень холодные.

На фотографиях в видимом свете безоблачные океаны и суша выглядят темнее, в то время как облака и снег — светлее. Густые облака в большей степени отражают свет и выглядят ярче, чем тонкие облака. Однако на этих изображениях трудно отличить высокие и низкие облака, поэтому также используются инфракрасные фотографии. А ночью камеры видимого света практически бесполезны, и снова используются инфракрасные фотографии.

Изображения паров воды показывают, сколько водяного пара находится в атмосфере. Они очень полезны для определения области, где может пойти дождь. Темные цвета соответствуют сухому воздуху, в то время как яркие белые области показывают, что воздух там более влажный.

Датчики, используемые спутниками, очень похожи на обычные цифровые камеры, хотя, конечно, несравненно более эффективны.

Кроме мощности, есть еще одно важное функциональное различие между датчиками на спутниках и обычными фотокамерами: датчики спутников фотографируют на определенной длине волны света в диапазоне от инфракрасного до ультрафиолетового излучения и сохраняют фотографии в виде цифровых изображений. Существуют также датчики, которые фиксируют только невидимый человеческому глазу инфракрасный свет.

Инфракрасные датчики могут определять попадающие в поле действия излучения вещества, такие как дым. В фильмах этот эффект часто показывается как луч цветного света. Спутники оснащены инфракрасными датчиками, которые работают на определенных частотах, и с их помощью можно увидеть мир таким, как он выглядит в других длинах волн, то есть в других «цветах».

Все объекты на Земле характеризуются светом, который они отражают. Объект воспринимается человеком как красный, если он отражает свет определенной длины волны. Другие визуальные системы могут видеть объекты по-другому. Объекты отражают свет с разной длиной волны: если бы это было не так, мы не смогли бы их различать лишь с помощью зрения. Тот же эффект позволяет датчикам спутниковой камеры отличать лес от полей и воды, которые отражают свет разной длины волны. Спутники оснащены многими другими видами датчиков, например, для измерения температуры, то есть улавливающими инфракрасные волны. Они позволяют отличить белый снег от белых облаков и определить, является ли данная область горячей или холодной. С помощью специальной обработки изображения можно определить, являются деревья в лесу живыми или мертвыми, сгоревшими.

Несмотря на уровень сложности, изображения, передаваемые спутниками, тоже являются цифровыми, как и фотографии, сделанные нами в отпуске. Разница лишь в разрешении. Как и для обычных камер, размер пикселей в изображениях варьируется в зависимости от производителя, но спутники используют свой собственный параметр, называемый пространственным разрешением. Высокое разрешение обеспечивают более маленькие пиксели. Чем меньше пиксель, тем больше разрешение изображения, тем больше оно содержит информации. Разрешение спутниковых фотографий зависит от второго, более сложного параметра, называемого временным разрешением. Это время, которое требуется спутнику для повторного прохождения над той же точкой поверхности.

Как мы убедились по прочтении этой книги, новые геометрии не только возможны, но они также открывают перед человечеством новые области знаний. Хотя эти области могут показаться сложными, на самом деле они являются практическим применением математики. Они не только помогают нам полнее воспринимать реальность, но и широко используются в нашей повседневной жизни. Это не просто абстрактные идеи в умах гениальных математиков: эти открытия помогают нам диагностировать заболевания и ориентироваться во время путешествия. Можно сказать, что новые геометрии сделали видимым то, что на протяжении веков являлось незримым, и тем самым расширили наши горизонты. Таким образом, никогда еще отрицание какой-либо теории не оказывалось для человечества настолько полезным, как это произошло при отказе от пятого постулата Евклида.

Приложение

Теория относительности и новые геометрии

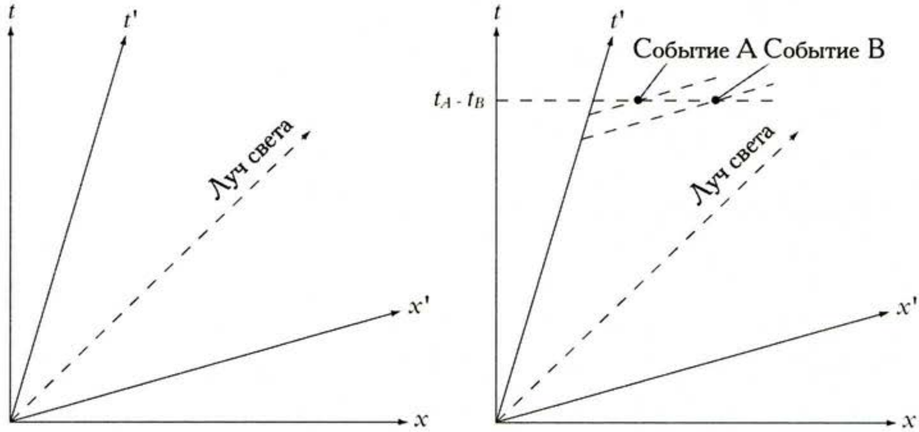
В 1905 г. Альберт Эйнштейн опубликовал «Специальную теорию относительности», которая вызвала сильнейшее потрясение основ физики со времен начала научной революции и фундаментального труда Исаака Ньютона Principia Mathematica («Математические начала натуральной философии»).

Эйнштейн предложил новый взгляд на реальность. Событие происходит в трехмерном пространстве в определенный момент времени. Другими словами, оно происходит в пространстве-времени и описывается четырьмя координатами: три из них определяют его положение в пространстве, а четвертая — во времени. Конечно, эти координаты задаются относительно некой системы координат. Поэтому место события в пространстве-времени зависит от положения наблюдателя, то есть от системы координат, используемой для определения события. Таким образом, различные наблюдатели видят событие по-разному, особенно если они сами движутся с разными скоростями.

Проанализируем эти понятия в геометрическом смысле. В теории относительности расстояние между двумя событиями называется интервалом и делится на две составляющие: пространство и время.

Пространственная составляющая — это расстояние между местонахождениями событий в трехмерном пространстве, в то время как временная составляющая — это промежуток времени между двумя событиями. Эти составляющие зависят от используемой системы координат и ее ориентации, поэтому различные наблюдатели могут получить разные результаты. Однако интервал, разделяющий два события в четырехмерном пространстве-времени, является абсолютным. Он один и тот же и для неподвижного наблюдателя, и для другого наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью относительно неподвижного.

Для наблюдателей, улетающих от Земли со скоростью, близкой к скорости света, пространственные и временные составляющие интервала будут совершенно разными. Один наблюдатель может решить, что два события разделяют 200 лет, в то время как другой может сделать вывод, что они происходят одновременно. Их



Ось t представляет собой время, а ось x — пространство. Оси под прямым углом (x, t) соответствуют системе в состоянии покоя, в то время как оси с острым углом между ними (x', t') — движущейся системе. Движущаяся система склоняется к лучу света. В неподвижной системе наблюдатель видит, что события A и B происходят одновременно, а в движущейся системе наблюдатель решит, что событие B произошло раньше A.

восприятие пространственных и временных составляющих может сильно отличаться от нашего. Геометрия пространства-времени оказывается странной. В четырехмерном пространстве расстояние между двумя точками (интервал между двумя событиями) является неизменным, в то время как две составляющие могут быть совершенно различны.

Через три года после того, как Эйнштейн опубликовал свою первую статью на эту тему, Герман Минковский упростил его теорию, предложив геометрическую интерпретацию, обосновывающую странные вычисления Эйнштейна. Конечно, геометрия Минковского была неевклидовой. Минковский использовал одну из самых важных идей Римана о том, что математическое пространство определяется способом измерения расстояний. Другими словами, формула расстояния определяет тип геометрии.

Если два события имеют координаты

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) \text{ и } (x_2, y_2, z_2, t_2),$$

то расстояние I между ними в геометрии Минковского вычисляется по формуле

$$I = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}\ ,$$

где c — скорость света.

С другой стороны, если бы эти две точки были в четырехмерном евклидовом пространстве, расстояние между ними считалось бы по формуле:

$$I = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Эта вторая формула является обобщением теоремы Пифагора из евклидовой геометрии на плоскости, в то время как первая формула со знаками минус в евклидовой геометрии не встречается.

Общая теория относительности

Через десять лет после публикации специальной теории относительности Эйнштейн сформулировал общую теорию относительности, которая снова потрясла научный мир. Одной из его революционных идей была мысль о том, что наше пространство искривлено. Другими словами, лучи света, которые всегда выбирают кратчайший маршрут, не распространяются по прямой линии, а изгибаются, что является кратчайшим расстоянием в искривленном пространстве. Лучи света изгибаются в разной степени в зависимости от области пространства: в сильном гравитационном поле они искривлены сильнее.

Это явление было экспериментально доказано в 1919 г. во время полного солнечного затмения. Во время затмения лучи света от далекой звезды, проходящие очень близко от Солнца, могут быть подробно изучены. Эйнштейн оказался прав, лучи были искривлены. Было также доказано, что прогнозы гения оказались очень близки к расчетам, сделанным на основе реальных данных, собранных в ходе наблюдения. Прямые линии в геометрии общей теории относительности отличаются от евклидовых прямых.

Какую из геометрий, рассмотренных в этой книге, использовал Эйнштейн? Как всегда в мире неевклидовых геометрий, простого ответа нет. Во-первых, понятие искривленного пространства берется из эллиптической геометрии, в которой прямые линии во Вселенной замкнуты. Во-вторых, Эйнштейн использовал вариант геометрии Минковского, в которой формула для расстояния учитывает физические условия в разных точках Вселенной в зависимости от силы гравитационного поля. Альберт Эйнштейн отметил роль неевклидовых геометрий в своей знаменитой лекции в 1921 г.:

«Я не могу не отдать должное всем альтернативным геометриям. Если бы я не знал их, я бы не смог развить теорию относительности».

Относительность материи и пространства

Возможно, Эйнштейн не открыл бы теории относительности, если бы не важнейший эксперимент, проведенный в 1880 г. Альбертом Майкельсоном (1852–1931) и Эдвардом Морли (1838–1923). Эти два физика попытались определить наличие вещества, называемого «эфиром», через которое, как считалось, распространяется свет и электромагнитное излучение. Звуковые волны не распространяются в вакууме, им необходима среда, воздух или вода, которая также позволяет измерить скорость звука. Таким образом, в XIX веке считалось, что световые волны распространяются не в космическом вакууме, а им также нужна среда, которая еще не открыта.

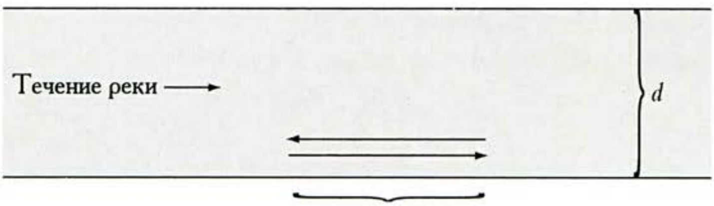
В эксперименте измерялось время, за которое луч света достигал зеркала и отражался от него. Сначала движение светового луча совпадало с направлением вращения Земли, так что когда луч летел к зеркалу, скорость планеты добавлялась к скорости света в эфире, а на его обратном пути вычиталась, что позволяло измерить скорость света в эфире. Затем световой луч пускался перпендикулярно вращению Земли, так что скорость вращения планеты не влияла на скорость света в эфире. Таким образом, в эксперименте вращение Земли учитывалось или исключалось.

Представьте себе подобную ситуацию. Мы стоим на берегу реки шириной d и хотим провести следующий эксперимент. Вместо того чтобы посылать луч света, мы переплывем реку туда и обратно. Пусть c будет наша скорость, которая соответствует скорости света, а v — скорость течения реки, соответствующая скорости вращения Земли.

По аналогии с экспериментом Майкельсона — Морли, мы сначала проплывем фиксированное расстояние d по течению, а затем против него. Пусть t_1 — время движения по течению, а t_2 — время движения против течения. Когда мы плывем по течению, мы движемся с нашей скоростью c, но по отношению к берегу скорость равна $(c + v)$. Аналогично, плывя против течения, мы движемся относительно берега со скоростью $(c - v)$.

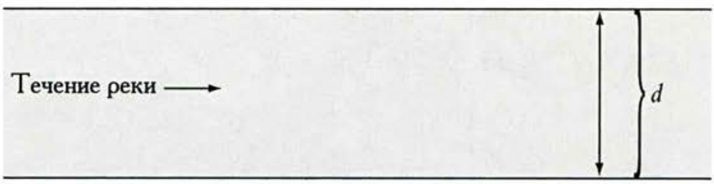
Используя формулу для нахождения расстояния при известных скорости и времени, мы получаем $d = (c + v)t_1$ и $d = (c - v)t_2$. Общее время по течению и назад считается следующим образом:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2dc}{(c+v)(c-v)} = \frac{2d/c}{1 - v^2/c^2}.$$



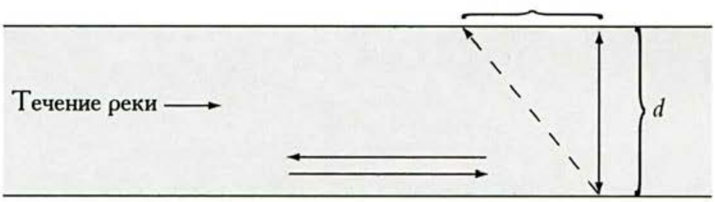
(a)

(a) *Движение по течению и против.*



(b)

(b) *Переплывание реки и возвращение в исходную точку.*



(c)

(c) *Чтобы оставаться напротив исходной точки, пловцу необходимо плыть против течения.*

Эти результаты можно проверить на конкретных числах. Представьте себе, что наша река шириной 500 метров (0,5 км), мы плаваем со скоростью $c = 2$ км/ч, а скорость течения реки $v = 1$ км/час. Тогда нам потребуется 1/6 часа, чтобы проплыть 500 метров по течению и полчаса — против течения, то есть в общей сложности 2/3 часа (около 0,67 часа).

Во второй части эксперимента Майкельсона и Морли мы переплываем на другую сторону реки и возвращаемся в исходную точку. Чтобы все время оставаться напротив исходной точки, мы должны плыть против течения. Таким образом, мы плывем не только поперек реки, но и против течения, чтобы компенсировать расстояние, на которое река относит нас вниз по течению. Нам постоянно приходится бороться с течением, и только часть работы, которую мы совершаем, помогает нам достичь другого берега. Таким образом, мы плывем вдоль гипотенузы прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен ширине реки, а другой — расстоянию, на которое река отнесла бы нас за это время вниз по течению.

Пусть t_0 — время, требуемое для переплывания реки. Связь между длиной пути и временем получается из теоремы Пифагора:

$$(c \cdot t_0)^2 = (vt_0)^2 + d^2.$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$c^2 t_0^2 - v^2 t_0^2 = d^2$$

$$t_0^2 = \frac{d^2}{c^2 - v^2}$$

$$t_0 = \frac{d}{c\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Время, затраченное на обратный путь, то же самое, поэтому общее время

$$t = \frac{2d / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Подставим в формулу числовые значения из предыдущего примера. Таким образом, время, требуемое для переплывания реки, составит $1/\sqrt{3} \approx 0{,}5777$ часа.

Обратите внимание, что значения времени в двух частях эксперимента (0,67 и 0,5777) различаются. Время, затраченное на движение вдоль течения реки, в $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ раз больше, чем время движения поперек реки.

Но в эксперименте Майкельсона — Морли результат был иным: значения времени в двух частях эксперимента были одинаковыми. И это не было связано с погрешностью измерений или с ошибкой в эксперименте, который был проведен с максимальной точностью. И никто не мог найти объяснение. Значит, неверна сама теория? Ученые были обеспокоены.

Затем была выдвинута гениальная идея: в некотором смысле скорость вращения Земли «уменьшила расстояние в направлении движения» ровно настолько, чтобы результаты в двух частях эксперимента Майкельсона — Морли получились одинаковыми. Таким образом, если бы Земля двигалась почти со скоростью света, то в направлении движения она была бы плоской, похожей на блин. Расстояние l' в направлении движения связано с расстоянием l в направлении, перпендикулярном направлению движения, следующим образом:

$$l' = l\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = l/\gamma \ ,$$

где множитель

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

называется фактором Лоренца—Фицджеральда.

Так как скорость света является очень большой (3×10^8 м/с), значение фактора Лоренца—Фицджеральда равно почти 1, пока скорость v меньше 10% от скорости света.

Почему Майкельсон и Морли не смогли измерить уменьшение длины в направлении движения? Потому что когда линейка расположена в направлении движения Земли, длина линейки тоже сокращается. Теория сокращения никогда не может быть доказана прямыми измерениями.

Если бы мы могли делать высокоскоростные фотографии, могли бы мы увидеть, что мяч, летящий почти со скоростью света, принимает форму блина? Нет, даже стоп-кадр не позволит нам это рассмотреть. Почему? Это объясняется тем, что оптические искажения компенсируют уплощение формы.

Человеческий глаз и объектив фотокамеры улавливают частицы света, фотоны, которые отражаются от объектов. Свету, идущему от очень удаленных объектов, может потребоваться много времени, чтобы достичь наших глаз. Например, свет доходит от Солнца до Земли за 8 минут, а свет далекой звезды, возможно, шел к нам миллионы лет. С другой стороны, переднюю и более удаленную часть движущегося объекта мы видим одновременно, хотя свет от передней части был отражен немного раньше. Разница существует, и связана она с тем, что скорость света конечна. Объект действительно должен выглядеть удлиненным в направлении движения, но этот эффект растяжения компенсируется эффектом сокращения в нашем восприятии.

Теория Лоренца—Фицджеральда была основана на сложной идее взаимодействия вещества с эфиром, но в конце концов ученые были вынуждены признать, что эфира не существует.

Через 24 года после эксперимента Майкельсона–Морли Эйнштейн понял, что скорость света не зависит от движения источника света или наблюдателя. Скорость Земли не может быть добавлена или вычтена из скорости света в опыте Майкельсона–Морли. Теория Эйнштейна предсказывает то же время, $2d/c$, для обратного движения, независимо от расположения оборудования.

Кроме того, теория относительности также позволяет предсказать сокращение длины в направлении движения точно на величину фактора Лоренца–Фицджеральда. Однако при объяснении результатов эксперимента Майкельсона–Морли это сокращение длины не имеет ничего общего с эфиром или с теорией Лоренца. Теория Эйнштейна вообще исключает необходимость эфира. Объяснить релятивистское сокращение длины можно в рамках самой теории относительности. Это объяснение заключается в относительном движении объекта и наблюдателя. Длина объекта, движущегося почти со скоростью света, уменьшается в направлении движения (хотя этот эффект мы не можем наблюдать, как уже говорилось). Для движущегося объекта, наоборот, именно мы кажемся летящими почти со скоростью света и похожими на плоский блин в направлении движения.

Другим следствием теории относительности является то, что время при движении тоже сокращается. Рассмотрим двух наблюдателей, которые движутся с постоянной скоростью v по отношению друг к другу. Каждый из них будет видеть, что часы у другого наблюдателя идут медленнее, чем его собственные, медленнее в γ раз. Этот странный результат известен как «парадокс времени».

Список литературы

Devlin, K.: The Language of Mathematics, New York, Freeman & Co., 1988.

Euclid: Euclid's Elements, Translated by Thomas L. Heath, Santa Fe, Green Lion Press, 2002.

Издание на русском языке: Начала Евклида. / Пер.с греч. и комм. Д. Д. Мордухая-Болтовского под ред. М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.–Л.: ГИТТЛ, Т.1. 1948; Т.2 1949; Т.3 1950.

Eves, H.: Fundamentals of Modern Elementary Geometry, Sudbury, MA, Jones and Bartlett Publishers, Inc, 1992.

Faber, R. L.: Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometries, New York, Dekker, 1983.

Garfunkel, S. (coord. COMAP): For All Practical Purposes, New York, Freeman, 2008.

Greenberg, M. J.: Euclidean and Non-Euclidean Geometries, New York, Freeman, 1993.

Jacobs, H. R.: Geometry, New York, Freeman, 2003.

Krause, E. F.: Taxicab Geometry, New York, Dover, 1988.

Parker, S.: Albert Einstein and the Laws of Relativity, New York, Chelsea House Publishers, 1994.

Smart, J. R.: Modern Geometries, California, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1988.

Алфавитный указатель

аксиома 29, 67, 84, 96
алгоритм 120, 122
Архимед 25

Безье, Пьер 134
Библия 26
бит на пиксель 130
Бойяи,
— Фаркаш 33, 55, 56, 58–59
— Янош 10, 33, 40, 53, 55–56, 57, 58, 60, 67, 79, 88
Бюффон Жорж-Луи Леклерк 117–119

Валлис, Джон 47
величина 27, 45, 86, 89, 91, 103
Вселенная 28, 65, 69, 70, 74–77, 141

Гаусс, Карл Фридрих 10, 33, 56–59, 67, 68
гиперболическая геометрия 10, 40, 50, 53–56, 60–66, 69–74, 76, 77, 79–94
глобус 10, 68, 73, 96, 99, 107–116
градус 96, 100, 109, 110, 114
Гринвич 109, 110, 114

Декарт, Рене 25, 39, 47
делимость 27
диаметр 25, 30, 97, 98
додекаэдр 28
долгота 18, 82–88, 100–102, 104–105, 109–114
Дюрер, Альбрехт 34–36

Евклид 9, 10, 11, 25–41, 43–52, 55, 59, 66, 69, 71–76, 79, 83, 84, 90, 96
— «Начала» 38, 41, 46–47, 54
евклидова геометрия 9, 15–23, 25–41, 53–77, 79, 81–92, 102, 105, 106, 120, 140, 141

Земля 10, 76, 95–99, 102, 104, 107–116, 135–137, 139, 142, 145, 146
значение, абсолютное 16

изображение 36, 124, 126, 127, 128–138
икосаэдр 28
искусственный интеллект 122, 124

Казанский университет 53, 54
Кандинский, Василий 32
Кант, Иммануил 38, 39, 57
Клавий, Христофор 46–47
Клейн, Феликс 65, 66, 70
компьютерная томография (КТ) 119, 120
конгруэнтность 48
косинус 88, 91, 105, 114
— гиперболический 88–93
кривая 25, 61–64, 68, 69, 73, 82, 95, 102
куб 28, 35, 132

Ламберт, Иоганн Генрих 49, 51, 52, 84
Лежандр, Адриен Мари 32

линия 25, 29, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 47, 55, 63, 82, 102, 106, 134
— бесконечная 71, 72, 106
— геодезическая 68, 102, 106, 113
— параллельная 9, 11, 25, 29, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 44—46, 49—52, 53—60, 62—67, 69—74, 79—82, 88, 97, 98, 102, 107—113, 118, 126
— прямая 11, 13, 25, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 43—47, 50, 51, 61—73, 79—82, 95, 97, 106, 108, 109, 117, 119, 141
Лобачевский, Николай Иванович 10, 40, 53—56, 60, 62, 63, 67, 68, 69—71, 79, 86, 88

магнитно-резонансная томография (МРТ) 121, 125—127
мегапиксели 130
меридиан 73, 97—99, 107—112, 113, 114
метод 25, 48, 102, 120, 134
многоугольник 27, 121, 128, 134

окружность 19—21, 30, 33, 65, 84—87, 91, 95, 97—98, 100—102, 104, 105, 114
октаэдр 28
отрезок 16, 23, 25, 27, 30, 65, 97, 102, 128, 139, 140

перестановки 14
пиксель 127—137
Пифагор 27, 82, 86
Платон 25, 27, 28, 116
— платоновы тела 28, 121
Плейфер, Джон 33, 38, 45
площадь 33, 60, 83—85, 100—104, 129
подобие 27, 85
постулаты 27, 29, 30, 31—33, 38, 40, 43
— пятый постулат 9, 10, 25—34, 38, 40, 43, 45, 46—52, 53—55, 58—67, 79, 82, 84, 97, 138
предложение 27, 29, 43, 46, 51, 60
Прокл, Диадох 32, 43—45
пропорциональность 27, 81, 83, 84
псевдосфера 62, 63, 77, 91
Птолемей 25, 43—44

радиан 100
размерность 35, 38, 65, 109
расстояние 9, 10, 11—24, 40, 45, 62, 73—75, 80—82, 102, 106, 113—116, 140—146
Риман, Бернхард 10, 11, 40, 58, 67—71, 74, 75, 95, 97, 140

САПР 121, 133—134
Саккери, Джироламо 46—52
Сантало, Луи 117
синус 88, 91, 105
— гиперболический 84, 88—93
сфера 41, 68—73, 77, 95, 96—99, 102—105, 108—116
сферическая геометрия 10, 41, 72, 97—102, 105—106, 112
стереология 120

тангенс 91, 97
— гиперболический 88, 89
Тейлор, Брук 86
теорема 25, 27, 29, 32, 43, 52, 96

— алгебраическая 57
— о большой точке 34
— основная теорема гиперболической геометрии 80, 90
— Пифагора 31, 82, 86–88, 105–106, 144
— синусов и косинусов 89, 105, 114
теория относительности 10, 16, 74–77, 139, 141–146
тетраэдр 28
точка 29, 30, 32, 33, 34–38, 40–41, 44–52, 53, 55, 60–63, 65–66, 69–71, 79–82, 84, 95–98, 102, 106, 140
трактриса 61, 62
треугольник 10, 13, 18, 31, 33, 40, 47, 50, 60, 68–71, 73, 83–84, 86–87, 89, 92, 93, 96–106, 112–114, 144
— сферический 98, 99
тригонометрия 55, 60, 87–94
Тьюринг, Алан 123, 124

угол 18–19, 48–51, 81, 92, 96, 100, 101, 114, 140
— острый 49, 50, 51, 81
— параллельности 80–81
— тупой 49, 50
— прямой 29, 49, 50, 81, 105, 106, 140

Хайям, Омар 46, 48

центр 19, 30, 91, 97, 99, 101
цифровой 120, 128–130, 137

четырехугольник 11, 46, 60, 83
— Ламберта 51
— Саккери 48–51
числа, простые 27

широта 108–114

Эйнштейн, Альберт 10, 16, 65, 70, 74–76, 139–142, 146
экватор 73, 98, 107–114, 135
эллипс 21, 95–97
эллиптическая геометрия 10, 40, 61, 67–72, 76, 77, 95–106, 141

Google Планета Земля 113, 115
GPS 135–138

Mappa Mundi 113–116
Meteosat 135, 136

RGB 129

Научно-популярное издание
Выходит в свет отдельными томами с 2014 года
Мир математики
Том 4
Жуан Гомес
Когда прямые искривляются.
Неевклидовы геометрии

РОССИЯ
Издатель, учредитель, редакция:
ООО «Де Агостини», Россия
Юридический адрес: Россия, 105066,
г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 3, стр. 1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
Генеральный директор: Николаос Скилакис
Главный редактор: Анастасия Жаркова
Старший редактор: Дарья Клинг
Финансовый директор: Наталия Василенко
Коммерческий директор: Александр Якутов
Менеджер по маркетингу: Михаил Ткачук
Менеджер по продукту: Яна Чухиль

Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ru, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в России:
☎ 8-800-200-02-01
Телефон горячей линии
для читателей Москвы:
☎ 8-495-660-02-02
Адрес для писем читателей:
Россия, 170100, г. Тверь, Почтамт, а/я 245,
«Де Агостини», «Мир математики»
Пожалуйста, указывайте в письмах свои контактные данные для обратной связи (телефон или e-mail).
Распространение:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»
УКРАИНА
Издатель и учредитель:
ООО «Де Агостини Паблишинг» Украина
Юридический адрес: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, 119
Генеральный директор: Екатерина Клименко
Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ua, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в Украине:
☎ 0-800-500-8-40
Адрес для писем читателей:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Мир математики»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
БЕЛАРУСЬ
Импортер и дистрибьютор в РБ:
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,
ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,
тел./факс: +375 17 331 94 27
Телефон «горячей линии» в РБ:
☎ + 375 17 279-87-87 (пн—пт, 9.00—21.00)
Адрес для писем читателей:
Республика Беларусь, 220040, г. Минск,
а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,
«Мир математики»
КАЗАХСТАН
Распространение:
ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую розничную цену книг. Издатель оставляет за собой право изменять последовательность заявленных тем томов издания и их содержание.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии:
Grafica Veneta S.p.A Via Malcanton 2
35010 Trebaseleghe (PD) Italy
Подписано в печать: 07.08.2013
Дата поступления в продажу на территории России: 11.02.2014
Формат 70 x 100 / 16. Гарнитура «Academy».
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 4,75.
Усл. печ. л. 6,156.
Тираж: 200 000 экз.

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0635-2 (т. 4)

12+ Данный знак информационной продукции размещен в соответствии с требованиями Федерального закона от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».
Издание для взрослых, не подлежит обязательному подтверждению соответствия единым требованиям, установленным Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности продукции, предназначенной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011 от 23 сентября 2011 г. № 797.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Когда прямые искривляются

Неевклидовы геометрии

Многие из нас слышали о том, что современная наука уже довольно давно поставила под сомнение основные постулаты евклидовой геометрии. Но какие именно теории пришли на смену классической доктрине? На ум приходит разве что популярная теория относительности Эйнштейна. На самом деле таких революционных идей и гипотез гораздо больше. Пространство Минковского, гиперболическая геометрия Лобачевского и Бойяи, эллиптическая геометрия Римана и другие любопытные способы описания окружающего нас мира относятся к группе так называемых неевклидовых геометрий. Каким образом пересекаются параллельные прямые? В каком случае сумма внутренних углов треугольника может составить больше 180°? Ответы на эти и многие другие вопросы вы найдете в данной книге.

ISBN 978-597740635-2

9 785977 406352

12+