

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. M. Smirnov, Shape theory for G -pairs, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1985, Volume 40, Issue 2(242), 151–165

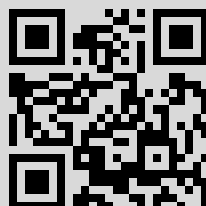
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 92.54.221.70

May 27, 2021, 14:35:11



УДК 513.83

ТЕОРИЯ ШЕЙПОВ ДЛЯ G -ПАР

Ю. М. Смирнов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	151
§ 1. Замкнутые вложения	152
§ 2. Ассоциированность	158
Литература	164

Введение

Одним из достоинств теории шейпов [14] является, в частности, то, что она дает общий, удобный в самых различных обстоятельствах метод определения функторов типа Александра — Чеха из сингулярных. Здесь строится эквивариантная теория шейпов для следующих категорий: метризуемые компакты ($\mathcal{M}\mathcal{C}_G$), метризуемые пространства (\mathcal{M}_G), хаусдорфовы компакты (\mathcal{C}_G) и p -паракомпактные¹⁾ пространства (\mathcal{P}_G), а также и для более общего нужного случая замкнутых пар для каждой из этих категорий — в случае произвольной компактной хаусдорфовой действующей группы G . Для всех этих категорий, по существу, получена одна и та же шейповая теория методом Борсука — Фокса [9], [28]. Как естественное следствие мы строим эквивариантные шейповые гомологии, гомотопии и когомологии, которые непрерывны в очень широком смысле (для ассоциированных [26], [36] обратных систем). Эти результаты продолжают программу, изложенную мною на Московской международной конференции по топологии [15] в 1982 г. Они были рассказаны мною на Ленинградской международной конференции по топологии [16] для абсолютного случая. Работа состоит из двух частей. В § 1 доказываются теоремы о замкнутых вложениях G -пар в G -пары из AE (в соответствующих категориях). В § 2 даны необходимые определения и известные факты [26], [36] и доказываются, что в каждой из рассматриваемых категорий ассоциированных обратных систем «достаточно много». Здесь используются результаты и идеи, найденные моими учениками Б. Левшенко и С. Антоном [4], [6]. Излагается также общая конструкция [15] непрерывных эквивариантных гомологий, гомотопий и когомологий типа Александра — Чеха. Параграф 3 «Эквивариантные гомологии, гомотопии и когомологии типа Александра — Чеха» откладывается из-за большой величины статьи. В нем показывается, что все такие функторы удовлетворяют аксиомам Эйленберга — Стиррода [20] (с полуточностью вместо точности) и некоторым другим, изложенным Иллманом [30] и Ванером [41] для сингулярного эквивариантного случая.

¹⁾ В смысле Морита[†]— Архангельского [7], [35] паракомпактность эквивалентна [37] возможности замкнутого вложения в произведения вида $M \times C$, $M \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{C}$.

Теория эквивариантных шейпов для любых топологических пространств в случае конечной группы G независимо дана Попом [38]. Однако в том же случае соответствующие эквивариантные гомологии, гомотопии и когомологии были известны еще ранее Бредону [25], [10]. Если же G — компактная группа Ли, то по словам Мардежича, эта теория получена независимо Матумото и другим способом (с помощью G — CW -комплексов), но в литературе я этого не нашел: Мэй [34] ссылается на Матумото [33], но в цитированной статье эквивариантной теории шейпов нет. Если это верно (что очень вероятно), то наш способ (см. теорему 1.4) даст из теории Матумото теорию шейпов и в случае любой компактной хаусдорфовой группы G , а способ получения функторов типа Александра — Чеха из сингулярных верев и в этом общем случае.

В заключение приношу глубокие извинения профессору Дольду, прослушавшему мой доклад в Ленинграде, которому я обещал представить мою работу в *Lecture Notes in Mathematics*, но не смог из-за многих горьких бед: смерти моих дорогих друзей и учителей П. С. Александра и А. С. Пархоменко и тяжелой болезни моей любимой жены Тамары.

§ 1. Замкнутые вложения

Рассматриваются категории \mathcal{M} (метризуемых), \mathcal{C} (компактных), $\mathcal{M}\mathcal{C}$ (метризуемых компактных), \mathcal{P} (p -паракомпактных) хаусдорфовых пространств, категории \mathcal{M}_G , \mathcal{C}_G , $\mathcal{M}\mathcal{C}_G$, \mathcal{P}_G тех же пространств, что и в соответствующих предыдущих категориях, но берущихся с непрерывными действиями компактной хаусдорфовой группы G и с эквивариантными непрерывными отображениями в качестве морфизмов, и наконец, категории \mathcal{M}_G^2 , \mathcal{C}_G^2 , $\mathcal{M}\mathcal{C}_G^2$, \mathcal{P}_G^2 замкнутых инвариантных пар из четырех последних категорий.

В категориях пар важно правильно определить понятия ретракции, замкнутого вложения, чтобы ввести необходимые понятия AR-пары, AE-пары, ANR-пары и ANE-пары. *Ретракция* — это пара $r, r': Y, Y' \rightarrow X, X'$ согласованных (т. е. $r' \upharpoonright_Y = r$) ретракций. Но тогда выполнено условие $X = Y \cap X'$ согласованности пары Y, Y' с лежащей в ней парой X, X' . Поэтому *замкнутым вложением* назовем такую пару согласованных замкнутых вложений $i, i': X, X' \rightarrow Y, Y'$, что пары Y, Y' и $iX, i'X'$ согласованы. Так же определяется и *вложение* пар. *Окрестностью* пары A, A' , лежащей в X, X' , назовем пару U, U' окрестностей $U \supset A$ и $U' \supset A'$, согласованных друг с другом, т. е. $U = X \cap U'$.

После всего этого определения AE-пары, AR-пары, ANE-пары и ANR-пары получаются повторением обычных определений. Заметим, что в определениях ANE-пары и ANR-пары окрестности можно брать и без условия согласованности.

Легко проверить, что композиция замкнутых вложений и произведение замкнутых вложений будут также замкнутыми вложениями.

Т е о р е м а 1.1. *В категории \mathcal{M}^2 всякую замкнутую пару X, X' можно замкнуто вложить в замкнутую пару из выпуклых множеств, а значит, и из AE.*

Можно считать [41], что $\text{diam } X' \leq 1$. Известное ([8], [41]) изометрическое вложение $i': X' \rightarrow \mathcal{C}^*(X')$ заключается в том, что каждому $x' \in X'$ сопоставляется функция $f_{x'}$, заданная формулой $f_{x'}(x'') = d(x', x'')$, где d — функция расстояния. Если i' рассматривать как вложение в $Y' = \text{conv}(i'X')$, то оно оказывается замкнутым. Пусть $Y = \text{conv}(iX)$, где $i = i' \upharpoonright_X$, а замыкание берется в Y' , пара $i, i': X, X' \rightarrow Y, Y'$ вложений искома! X замкнуто в Y , так как X замкнуто в X' , а X' замкнуто в Y' . Проверим условие согласованности: $iX = Y \cap i'X'$. Левая часть, очевидно, лежит в правой. Пусть $f \in Y \cap i'X'$. Тогда $f = f_{x'}$, $x' \in X'$, и существует последовательность функций f_n из $\text{conv}(iX)$, сходящаяся к f . Пусть $f_n = \sum_i \mu_i^n f_{x_i^n}$, где все $x_i^n \in X$.

Предположим, что $x' \notin X$. Тогда все $d(x', x_i^n) \neq 0$. Пусть при каждом n число $d(x', x_{i(n)}^n)$ — наименьшее из всех $d(x', x_i^n)$. Тогда $d(f, f_n) \geq \geq |f(x') - f_n(x')| = |d(x', x') - \sum_i \mu_i^n d(x', x_i^n)| \geq |\sum_i \mu_i^n d(x', x_{i(n)}^n)| = = d(x', x_{i(n)}^n)$. Так как $f_n \rightarrow f$, то $x_{i(n)}^n \rightarrow x'$. Так как X замкнуто в X' , то $x' \in X$, а $f = f_{x'} \in iX$. Итак, вложение i, i' замкнутое, а Y и Y' выпуклы в $\mathcal{E}^*(X')$. ■

Теорема 1.2. *В категории \mathcal{M}_G^2 всякую замкнутую инвариантную пару X, X' можно замкнуто и инвариантно вложить в замкнутую инвариантную метрическую пару из АЕ для категории \mathcal{P}_G .*

Здесь группу G предполагаем даже локально компактной и σ -компактной (и как всегда — хаусдорфовой).

Пусть $i, i': X, X' \rightarrow Y, Y'$ — замкнутое вложение в категории \mathcal{M}^2 , где Y, Y' — замкнутая пара из АЕ. Так как $Y \subset Y'$, то имеется естественное вложение $\mathcal{E}(G, Y) \subset \mathcal{E}(G, Y')$. Здесь мы рассматриваем компактно-открытые топологии. Это вложение — топологическое (даже в точечно-открытой топологии), так как элемент предбазы $\Gamma_{K,U} = \Gamma_{K,U'} \cap \mathcal{E}(G, Y)$, если $U = U' \cap Y$. Оно замкнутое (даже в точечно-открытой топологии), так как Y замкнуто в Y' : ведь если $f \notin \mathcal{E}(G, Y)$, то найдется такое $g \in G$, что $f(g) \in \in V = Y' \setminus Y$, и значит, $f \in \Gamma_{g,V'} \subset \mathcal{E}(G, Y') \setminus \mathcal{E}(G, Y)$. В $\mathcal{E}(G, Y)$ и $\mathcal{E}(G, Y')$ действие задается следующей формулой: $(gf)y = f(yg)$, где $g, y \in \in G$, а f принадлежит одному из наших пространств. Легко показать, что это и в самом деле непрерывное действие [17]. Легко видеть, что $\mathcal{E}(G, Y)$ инвариантно в $\mathcal{E}(G, Y')$. Известно, что если Y и Y' суть АЕ для \mathcal{P} , то $\mathcal{E}(G, Y)$ и $\mathcal{E}(G, Y')$ будут АЕ для \mathcal{P}_G . Известно [12], что всякий метризуемый АЕ для \mathcal{M} будет АЕ для \mathcal{P} . Поэтому в наших условиях $\mathcal{E}(G, Y)$ и $\mathcal{E}(G, Y')$ будут метризуемыми [22] АЕ для \mathcal{P}_G . Искомое вложение $i, i': X, X' \rightarrow \mathcal{E}(G, Y), \mathcal{E}(G, Y')$ задается формулами: $\check{i}(x)(g) = i(gx)$ и $\check{i}'(x')(g) = i'(gx')$. Известно [17], что \check{i} и \check{i}' — эквивариантные замкнутые вложения. Легко проверить, что они согласованы, т. е. что $\check{i} = \check{i}'|_X$, так как согласованы i и i' . Искомое вложение замкнуто. Пусть $\check{i}'(x') \in \mathcal{E}(G, Y)$. Тогда $\check{i}'(x')(g) = i'(gx') \in Y$ для всякого g . Так как i' — биекция, согласованная с i , то $\check{i}'(gx') = i(gx')$, а $gx' \in X$. Поэтому $x' \in X$, а $\check{i}'(x') \in \check{i}(X)$. Итак, $\check{i}'(X') \cap \mathcal{E}(G, X) \subset \check{i}(X)$. Обратное включение очевидно. ■

Теорема 1.3. *В категории \mathcal{P}_G^2 всякую замкнутую инвариантную пару X, X' можно замкнуто и инвариантно вложить в замкнутую инвариантную пару из АЕ.*

Группу G предполагаем компактной. Считаем, что аналогичная теорема в категории \mathcal{E}_G^2 доказана в более сильной форме, именно, что объемлющая компактная пара будет состоять из АЕ для \mathcal{P}_G^2 (см. далее теорему 1.8).

По одному из свойств p -паракомпактности ([7], [35]) существует совершенное отображение пространства X' на метрическое пространство. Отсюда и по теореме о вложении ([8], [41]) существует совершенное отображение $f: X' \rightarrow V$ в метрическое пространство, являющееся АЕ для \mathcal{M} , а значит [12], и для \mathcal{P} . Тогда отображение $\check{f}: X' \rightarrow \mathcal{E}(G, V)$, заданное формулой $\check{f}(x')(g) = = f(gx)$, будет эквивариантным и совершенным [17]. Известно [40], что X' обладает эквивариантным компактным расширением bX' . Пусть $b: X' \subset \subset bX'$ — естественное вложение. Тогда [37] диагональ $b\Delta f: X' \rightarrow bX' \times \times \mathcal{E}(G, V)$ будет эквивариантным замкнутым вложением. Пусть $Y' = = bX' \times \mathcal{E}(G, V)$, а $Y = \bar{X} \times \mathcal{E}(G, V)$, где замыкание берется в bX' . Пара Y, Y' , очевидно, замкнута и инвариантна. Пара i, i' , где $i' = b\Delta f$, а $i = i'|_X$ — замкнутое вложение. В самом деле, ясно, что $iX \subset Y$ и что i' согласовано с i . Далее, пусть $\check{i}'(x') \in Y$. Тогда $x' \in X' \cap \bar{X} = X$. Значит, $\check{i}'(x') \in i(X)$. Итак, $Y \cap \check{i}'(X') \subset i(X)$. Обратное очевидно.

Пару \bar{X} , bX' можно замкнуто и эквивариантно вложить в компактную пару C , C' , состоящую из АЕ для \mathcal{F}_G (теорема 1.8). Тогда пара $\bar{X} \times \mathcal{E}(G, V)$, $bX' \times \mathcal{E}(G, V)$ замкнуто и эквивариантно вкладывается в замкнутую пару $C \times \mathcal{E}(G, V)$, $C' \times \mathcal{E}(G, V)$ из r -паракомпактных пространств, являющихся АЕ для \mathcal{F}_G . Но тогда исходная пара X , X' замкнуто и эквивариантно вкладывается в последнюю пару.

Для теоремы вложения в категории \mathcal{E}_G^2 нужны совсем другие идеи, так как пространства $\mathcal{E}(G, Y)$ даже при достаточно хороших Y , вообще говоря, слишком бедны для необходимых построений, которые прежде всего заключаются в следующих аппроксимационных теоремах:

Т е о р е м а 1.4¹⁾. Если группа G , действующая на хаусдорфовом пространстве X , является таким пределом обратной системы $\{G_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}\}$, что ядра $K_\alpha = \text{Кер } \pi_\alpha$ «предельных» проекций $\pi_\alpha: G \rightarrow G_\alpha$ компактны, то X будет пределом обратной системы $\{X/K_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$, где $p_{\alpha\alpha'}$ при $\alpha' \geq \alpha$ определены включениями $K_{\alpha'}x \subset K_\alpha x$.

Так как каждое ядро K_α является подгруппой группы G , то оно действует непрерывно на X и орбитальная проекция $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha = X/K_\alpha$ также непрерывна. Так как $\pi_\alpha = \pi_{\alpha\alpha'} \pi_{\alpha'}$ при $\alpha' \geq \alpha$, то $\pi_\alpha^{-1}(\pi_{\alpha\alpha'}^{-1}e) = \pi_\alpha^{-1}(e)$ и, значит, $K_{\alpha'} \subset K_\alpha$ и $K_{\alpha'}x \subset K_\alpha x$ для любого x . Так что проекции $p_{\alpha\alpha'}$ определены корректно. Они коммутируют с проекциями p_α , так как $p_{\alpha\alpha'}(p_\alpha x) = p_{\alpha\alpha'}(K_\alpha x) = K_{\alpha'}x = p_\alpha(x)$ для любого x . Они непрерывны, так как при $\alpha' \geq \alpha$ прообраз $p_\alpha^{-1}(V) = p_\alpha^{-1}(\pi_{\alpha\alpha'}^{-1}(V))$ открытого множества V открыт, а его образ $p_{\alpha'}(p_\alpha^{-1}V) = p_\alpha^{-1}V$ также открыт в силу открытости и непрерывности проекций p_α и $p_{\alpha\alpha'}$. На каждом X_α действует группа G по закону: $g(K_\alpha x) = K_\alpha(gx)$. Аксиомы действия легко проверяются. Отсюда для действий ω на X и ω_α на X_α имеем: $p_\alpha \omega = \omega_\alpha(1 \times p_\alpha)$. Значит, прообраз $(1 \times p_\alpha)^{-1}(\omega_\alpha^{-1}V) = \omega^{-1}(p_\alpha^{-1}V)$ открытого множества V открыт, и его образ $(1 \times p_\alpha)(\omega^{-1}V) = \omega_\alpha^{-1}V$ открыт, так как $1 \times p_\alpha$ открыто. Поэтому действие ω_α группы G на X_α непрерывно. Легко проверить, что $p_{\alpha\alpha'}$ и p_α эквивариантны, если помнить, что

$$gK_\alpha = K_\alpha g$$

для любого g . Далее нам понадобится

Л е м м а. В наших условиях система $\{K_\alpha x\}$ при каждом x является убывающей центрированной измельчающейся системой.

Последнее означает, что для любой окрестности V точки x найдется такое α , что $K_\alpha x \subset V$. Покажем сначала, что $\{K_\alpha\}$ — убывающая центрированная измельчающаяся система. Убывание доказано выше. Центрированность вытекает из того, что $e \in K_\alpha$ для всех α . Докажем, что $e = \bigcap K_\alpha$. Пусть $K = \bigcap_\alpha K_\alpha \neq e$. Тогда для отображений $\pi_\alpha|_K: K \rightarrow G_\alpha$ найдутся два отображения, коммутирующие с π_α и $\pi_\alpha|_K$: включение $i: K \subset G$ и постоянное отображение $s: K \rightarrow e$, так как $\pi_\alpha K = e$ для всех α . Это противоречит тому, что $G = \varprojlim G_\alpha$. Итак, $\bigcap_\alpha K_\alpha = e$. Так как все K_α компактны, то по лемме Шур-Бури для каждой окрестности O единицы e найдутся такие $\alpha_1 \dots \alpha_n$, что $\bigcap_i K_{\alpha_i} \subset O$. Но тогда для $\alpha \geq \alpha_i$ для всех i ядро $K_\alpha \subset O$. Пусть теперь V является окрестностью точки x в X . В силу непрерывности действия существует такая окрестность O единицы e в G , что $Ox \subset V$. Тогда $K_\alpha x \subset V$, как только $K_\alpha \subset O$. Из последнего следует, что $\bigcap_\alpha (K_\alpha x) = x$. Измельчаемость доказана. ■

Пусть, далее, $q_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ — эквивариантные отображения, коммутирующие с $p_{\alpha\alpha'}$. Покажем, что множества $K_\alpha x_\alpha = q_\alpha(y)$, $y \in Y$, составляют

¹⁾ Эта теорема принадлежит С. А. Автояну.

центрированную систему. Действительно, для $\alpha_1 \dots \alpha_n$ берем такое α , что $\alpha \geq \alpha_i$ для всех i . Тогда $q_{\alpha_i} = p_{\alpha_i \alpha} q_\alpha$, и поэтому $q_{\alpha_i}(y) = p_{\alpha_i \alpha}(p_\alpha(y))$, и, значит, $K_{\alpha_i} x_{\alpha_i} = p_{\alpha_i \alpha}(K_\alpha x_\alpha) = K_{\alpha_i} x_\alpha$. Поэтому $x_\alpha \in K_{\alpha_i} x_{\alpha_i}$ для всех i . Так как, кроме того, $K_\alpha x_\alpha$ компактны, то $\bigcap_\alpha K_\alpha x_\alpha \neq \emptyset$. Пусть $x \in \bigcap_\alpha K_\alpha x_\alpha$. Тогда $K_\alpha x_\alpha = K_\alpha x$ для всех α . Значит, по лемме $x = \bigcap_\alpha K_\alpha x_\alpha$. Вспомним, что $K_\alpha x_\alpha = K_\alpha x = q_\alpha(y)$. Положим $q(x) = y$. Получим отображение $q: Y \rightarrow X$. Так как $p_\alpha(q(y)) = K_\alpha x = q_\alpha(y)$ для любых α и y , то $p_\alpha q = q_\alpha$ для любого α . Согласованность доказана. Докажем эквивариантность. Пусть $q(y) = x$, а $q(gy) = x'$. Тогда $K_\alpha x' = q_\alpha(gy) = g(K_\alpha x) = K_\alpha(gx)$. Значит, $x' \in K_\alpha(gx)$ для любого α . Но тогда $x' \in \bigcap_\alpha K_\alpha(gx)$ и $x' = gx$, т. е. $q(gx) = g(qx)$ для любого x . Докажем непрерывность. Пусть $x = q(y) \in U$. Так как $x = \bigcap_\alpha K_\alpha x$ и U открыто, то найдется такое α , что $K_\alpha x \subset U$. В силу непрерывности действия и компактности K_α существует такая окрестность V точки x , что $K_\alpha V \subset U$. Но $K_\alpha V = p_\alpha^{-1}(p_\alpha(K_\alpha V))$ и открыто в X . Тогда и $p_\alpha(K_\alpha V)$ открыто в X_α . Значит, $W = q_\alpha^{-1}(p_\alpha(K_\alpha V))$ открыто в Y . Так как $q_\alpha(y) = K_\alpha x \subset K_\alpha V$, то $q_\alpha(y) = K_\alpha x \in p_\alpha(K_\alpha V)$, а $y \in W$. Наконец, так как $p_\alpha(qW) = q_\alpha(W)$, то $qW \subset p_\alpha^{-1}(q_\alpha W) = p_\alpha^{-1}(p_\alpha(K_\alpha V)) = K_\alpha V$. Докажем единственность q . Пусть имеется еще такое $\bar{q}: Y \rightarrow X$, что $p_\alpha \bar{q} = q_\alpha$ для всех α . Тогда для любой точки y имеем: $p_\alpha(\bar{q}(y)) = q_\alpha(y) = p_\alpha(q(y))$, и поэтому $\bar{q}(y) \in p_\alpha^{-1}(p_\alpha(q(y))) = K_\alpha q(y)$ для каждого α . Значит, $\bar{q}(y) \in \bigcap_\alpha K_\alpha q(y)$, т. е. $\bar{q}(y) = q(y)$ для каждого y . Значит, $\bar{q} = q$. Этим полностью доказано, что \bar{X} является пределом обратной системы $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$ при предельных проекциях p_α . ■

Теми же методами получаем и аналогичную теорему для пар:

Т е о р е м а 1.5. *В тех же предположениях для всякой хаусдорфовой инвариантной пары X, X' объект $X = \lim\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$, а объект $X' = \lim\{X'_\alpha, p'_{\alpha\alpha'}\}$, где X_α — инвариантный подобъект объекта $X'_\alpha = \overleftarrow{X'} / \text{Ker } \pi_\alpha, p_{\alpha\alpha'} = p'_{\alpha\alpha'} |_{x_\alpha}$ и $p_\alpha = p'_\alpha |_{x_\alpha}$. При этом если X замкнуто в X' , то X_α замкнуто в X'_α при любом α .*

Перейдем к обещанным теоремам вложения для компактов.

Т е о р е м а 1.6¹⁾. *Всякое тихоновское пространство X с компактной действующей группой G эквивариантно вкладывается в $\prod_\beta E_\beta$, где E_β — конечномерное евклидово пространство, на котором G действует ортогонально, причем $\text{вес } w(\prod_\beta E_\beta) = wX$.*

Для этого необходимо и достаточно доказать следующее:

Т е о р е м а 1.6'¹⁾. *Для всякого тихоновского пространства X с компактной действующей группой G существует система мощности wX из эквивариантных отображений $\mathcal{F}_\beta: X \rightarrow E_\beta$ в конечномерные евклидовы пространства (на которых G действует ортогонально), разделяющая точки от замкнутых множеств.*

По теореме Понтрягина [13] G является пределом такой обратной системы $\{G_\alpha, \pi_{\alpha\alpha'}\}$ из групп Ли, что предельные проекции π_α сюръективны. Тогда $K_\alpha = \text{Ker } \pi_\alpha$ компактны. Пусть A замкнуто в X , а $x \notin A$. Тогда найдется такое α , что $A \cap K_\alpha x = \emptyset$. Поэтому $p_\alpha(x) = K_\alpha x \notin p_\alpha A$. Так как K_α компактно, то орбитальная проекция $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ совершенна. Значит, $p_\alpha A$ замкнуто в X_α . Заметим, что на X_α действует не только G , но и $G_\alpha = \pi_\alpha G$ по правилу: $(\pi_\alpha g)x = gx$. Так как $g^{-1}g' \in K_\alpha$ в случае $\pi_\alpha(g) = \pi_\alpha(g')$, то это — действие! Непрерывность этого действия ω_α^ω доказывается точно

1) Эти теоремы принадлежат С. А. Антопяну.

так же, как и непрерывность действия ω_α в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow \pi_\alpha \times p_\alpha & & \downarrow p_\alpha \\ G_\alpha \times X_\alpha & \longrightarrow & X_\alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \omega_\alpha \\ \omega_\alpha \end{array}$$

непрерывности ω_α и p_α и открытости произведения $\pi_\alpha \times p_\alpha$ проекций. Так как G_α — группа Ли, то по одной теореме Пале [39] существует эквивариантное (по действию ω_α^ζ группы G_α) отображение $\Phi: X_\alpha \rightarrow E$ (где E — конечномерное евклидово пространство, на котором ортогонально действует группа G_α), разделяющее точку $p_\alpha(x)$ от $p_\alpha(A)$. Но тогда отображение $\mathcal{F} = \Phi p_\alpha$ разделяет точку x от A . Оно непрерывно. Определим действие группы G на E формулой: $gy = (\pi_\alpha g)y$. Легко проверить, что это и в самом деле действие и ортогональное. Докажем, что \mathcal{F} эквивариантно. Достаточно показать, что эквивариантно Φ как отображение пространства с действиями группы G . Это так: $\Phi(gy) = \Phi((\pi_\alpha g)y) = ((\pi_\alpha g)\Phi)y = g\Phi(y)$ для любого y .

Итак, система всех эквивариантных отображений $\mathcal{F}: X \rightarrow E$ в конечномерные евклидовы пространства с ортогональными действиями группы G разделяют точки от замкнутых множеств в X . Применим прием Урысона [1]: возьмем в X базу \mathcal{B} открытых множеств мощности wX . Рассмотрим систему B всех таких пар $\beta = (U, V)$, что: 1°) $U, V \in \mathcal{B}$ и 2°) существует эквивариантное отображение $\mathcal{F}: X \rightarrow E$, разделяющее \bar{U} от $X \setminus V$. Мощность системы B не больше wX . Для каждого β выбираем одно отображение $\mathcal{F}_\beta: X \rightarrow E_\beta$, эквивариантное и разделяющее \bar{U} от $X \setminus V$. Семейство $\{\mathcal{F}_\beta: X \rightarrow E_\beta\}$ искомого. Пусть A замкнуто в X , а $x \notin A$. Найдется такое $V \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset X \setminus A$. Найдется такое эквивариантное отображение $\mathcal{F}: X \rightarrow E$, что $\mathcal{F}(x) \notin \overline{\mathcal{F}(X \setminus V)}$. Так как \mathcal{F} непрерывно, а X регулярно, то найдется и такое $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U$ и $\mathcal{F}(\bar{U}) \cap \overline{\mathcal{F}(X \setminus V)} = \emptyset$. Значит, пара $\beta = (U, V) \in B$. Поэтому \mathcal{F}_β разделяет \bar{U} от $X \setminus V$, а тем более x от A . Отсюда следует, что мощность системы B не меньше wX , а значит, равна wX .

Т е о р е м а 1.7. *Для всякой тихоновской инвариантной замкнутой пары X, X' существует эквивариантное вложение $i, i': X, X' \rightarrow \prod_{\beta} C_\beta, \prod_{\beta} C'_\beta$, где C_β, C'_β — выпуклая компактная инвариантная пара, замкнуто вложенная в конечномерную евклидову инвариантную пару E_β, E'_β , рассматриваемую с ортогональным действием компактной группы G . При этом $\prod_{\beta} C_\beta$ и $\prod_{\beta} C'_\beta$ суть АЕ для \mathcal{N}_G , а $w(\prod_{\beta} E_\beta) = wX'$.*

Произведения берутся здесь с тихоновской топологией и с действием, определенным покоординатно, \mathcal{N} — категория нормальных пространств. В силу одной теоремы Антоняна [6] X' обладает компактным эквивариантным расширением bX' того же веса, что и X . Взяв компакт $bX = \bar{X}$, где замыкание берется в bX' , получим компактную инвариантную пару bX, bX' . Поэтому теорему 1.7 достаточно доказать лишь для компактных инвариантных пар. Пусть X, X' — такая пара, а $\{\mathcal{F}_\beta: X' \rightarrow E_\beta\}$ — система отображений, построенная в теореме 1,6', но с заменой X на X' . Тогда $\mathcal{F}_\beta X'$ метризуемо, а $\mathcal{F}_\beta X$ замкнуто в нем. Пусть $o_\beta: \mathcal{F}_\beta(X') \rightarrow \mathcal{F}_\beta(X')|_G$ — орбитальная проекция. Так как G компактно, то o_β замкнуто, и поэтому $o_\beta(\mathcal{F}_\beta(X)) = \mathcal{F}_\beta(X)/G$ замкнуто в метризуемом компакте $o_\beta(\mathcal{F}_\beta(X'))$. Поэтому существует такая непрерывная функция $\varphi_\beta: o_\beta(\mathcal{F}_\beta(X')) \rightarrow \mathbb{R}$, что $o_\beta(\mathcal{F}_\beta(X)) = \varphi_\beta^{-1}(0)$. Снабдив каждое $\mathbb{R}_\beta = \mathbb{R}$ тривиальным действием группы G , получим эквивариантную функцию $f_\beta = \varphi_\beta \circ o_\beta: \mathcal{F}_\beta: X' \rightarrow \mathbb{R}_\beta$, причем действие на \mathbb{R}_β — ортогонально. Отображение $\mathcal{F}'_\beta = \mathcal{F}_\beta \Delta f_\beta: X' \rightarrow E_\beta \times \mathbb{R}_\beta = E'_\beta$ — эквивариантное отображение в конечномерное евклидово пространство с ортогональным действием группы G , а $\mathcal{F}'_\beta(X) = \mathcal{F}_\beta(X) \times O \subset E_\beta \times O = E'_\beta$. Из $\mathcal{F}'_\beta(x) \in$

$\in E_\beta \times O$ следует, что $f_\beta(x) = 0$, и поэтому $x \in \mathcal{F}_\beta^{-1}(\mathcal{F}_\beta(X))$, а $\mathcal{F}'_\beta(x) \in \mathcal{F}_\beta(X) \times O$. Таким образом, $\mathcal{F}'_\beta(X') \cap (E_\beta \times O) = \mathcal{F}_\beta(X) \times O$. Значит, вложение $\mathcal{F}'_\beta(X)$, $\mathcal{F}'_\beta(X') \subset E_\beta$, E'_β замкнутое, что существенно для дальнейшего. Компакт $\mathcal{F}'_\beta(X)$ имеет в E'_β компактную окрестность U_β . Так как группа G компактна, то можно считать окрестность U_β инвариантной [25]. Разность $\mathcal{F}'_\beta(X') \setminus \text{Int } U_\beta$ инвариантна, компактна и не пересекается с E_β в силу замкнутости включения пар. Она имеет компактную и даже инвариантную окрестность V_β , не пересекающуюся с $E_\beta \times O = E'_\beta$. Тогда $U_\beta \cup V_\beta$ — инвариантная компактная окрестность компакта $\mathcal{F}'_\beta(X)$ и $(U_\beta \cup V_\beta) \cap E_\beta = U_\beta \cap E_\beta$. Множества $C'_\beta = \overline{\text{conv}(U_\beta \cup V_\beta)}$ и $C_\beta = C'_\beta \cap E_\beta$ искомые; они выпуклы, компактны и инвариантны, так как действие группы G линейно и непрерывно, а линейные операции непрерывны [5]. Причем C'_β будет окрестностью компакта $\mathcal{F}'_\beta(X')$ в E'_β , а C_β — окрестностью компакта $\mathcal{F}_\beta(X)$ в $E_\beta = E'_\beta \times O$ (обычное отождествление), так как $U_\beta \cap E_\beta$ — окрестность компакта \mathcal{F}_β в E_β . Но $F_\beta(X) = E_\beta \cap F'_\beta(X')$. Значит, пара $\mathcal{F}_\beta(X)$, $\mathcal{F}'_\beta(X')$ замкнуто вложена в пару C_β , C'_β для любого β .

Искомыми вложениями будут: $i' = \Delta \mathcal{F}'_\beta: X' \rightarrow \prod_\beta C'_\beta$ и $i = i' \upharpoonright_{\prod_\beta C_\beta}$.

Так как система $\{\mathcal{F}_\beta\}$ разделяет точки от замкнутых множеств в X' , то и система $\{\mathcal{F}'_\beta\}$ разделяет точки от замкнутых множеств в X' , ведь $\mathcal{F}'_\beta = \mathcal{F}_\beta \Delta f_\beta$ для любого β . Значит, i' , а вместе с ним и i , будут эквивариантными вложениями (при этом $p_\beta i' = \mathcal{F}'_\beta$ для любого β , значит, $C_\beta C'_\beta$ является окрестностью пары $p_\beta(iX)$, $p_\beta(i'X')$). Далее, пусть $i'(x) \in i'(X') \cap \prod_\beta C_\beta \subset i'(X') \cap \prod_\beta (E_\beta \times O)$. Так как еще $i' = \Delta \mathcal{F}'_\beta = \Delta \mathcal{F}_\beta \Delta f_\beta$, то все образы $f_\beta(x) = 0$. Значит, $\varphi_\beta(o_\beta(\mathcal{F}_\beta(x))) = 0$, а $o_\beta(\mathcal{F}_\beta(x)) \in o_\beta(\mathcal{F}_\beta(X))$ для любого β , т. е. в силу инвариантности множества $\mathcal{F}_\beta(X)$ точка $\mathcal{F}_\beta(x) \in \mathcal{F}_\beta(X)$ для любого β . Поэтому $(\Delta \mathcal{F}_\beta)x \in \prod_\beta \mathcal{F}_\beta(X) \subset \prod_\beta C_\beta$. Итак, вложение пар замкнуто. С весом тоже все в порядке. Остается проверить лишь свойство АЕ. По несколько улучшенной теореме Пале [39] всякое выпуклое инвариантное множество C евклидова пространства E , на котором ортогонально действует компактная группа Ли H , есть АЕ для категории \mathcal{N}_H нормальных пространств. Но в наших условиях имеется непрерывный эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$ и действие gx группы G связано с действием группы H формулой: $gx = (\pi g)x$. Поэтому потребуется

Л е м м а. *Всякий непрерывный эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$ порождает функтор $\pi: \mathcal{T}_H \rightarrow \mathcal{T}_G$ категорий топологических пространств. Если $K = \text{Ker } \pi$ компактно, то для любого объекта Y из \mathcal{T}_H , являющегося АЕ (АНЕ) для категории \mathcal{N}_H , объект $\pi(Y)$ будет АЕ (соответственно АНЕ) для \mathcal{N}_G .*

По определению функтор π сопоставляет каждому объекту X из \mathcal{T}_H то же пространство X , но с действием группы G , заданной формулой: $gx = (\pi(g))x$. По определению π каждому отображению $f: X \rightarrow Y$, эквивариантному в \mathcal{T}_H , сопоставляет то же отображение. Оно эквивариантно и в \mathcal{T}_G : $f(gx) = f((\pi(g))x) = (\pi(g))f(x) = gf(x)$. Легко видеть, что π — функтор. Пусть дано отображение $f: A \rightarrow Y$, эквивариантное в \mathcal{T}_G , где A — инвариантно и замкнуто в $X \in \mathcal{N}_G$. A инвариантно и в $X \in \mathcal{N}_H$ (ведь $(\pi(g))a = ga \in A$ для любого $\pi(g) \in H$), а f эквивариантно в \mathcal{T}_H (ведь $f((\pi(g))a) = f(ga) = g(fa) = (\pi(g))f(a)$). Если Y есть АНЕ для \mathcal{N}_H , то найдутся инвариантная окрестность U множества A в $X \in \mathcal{N}_H$ и эквивариантное в \mathcal{T}_H продолжение $\mathcal{F}: U \rightarrow Y$ отображения f . U инвариантно и в \mathcal{T}_G (ведь $gu = (\pi(g)u) \in U$), а \mathcal{F} эквивариантно в \mathcal{T}_G (ведь $\mathcal{F}(gu) = \mathcal{F}((\pi(g))u) = (\pi(g))\mathcal{F}(u) = g\mathcal{F}(u)$). Итак, Y есть АНЕ для \mathcal{N}_G . В случае АЕ доказательство проще. Тем самым доказана и теорема 1.7. ■

Как следствие получается

Т е о р е м а 1.8. *Всякая компактная инвариантная пара X , X' эквивариантно и замкнуто вкладывается в пару $\prod_\beta C_\beta$, $\prod_\beta C'_\beta$, где C_β , C'_β — выпуклая*

компактная инвариантная пара, замкнуто вложенная в пару E_β, E'_β для любого β , удовлетворяющую условиям теоремы 1.7. При этом PC_β и PC'_β суть АЕ даже для \mathcal{N}_G , а $w(PC'_\beta) = wX'$.

Это как раз то, что мы требовали без доказательства в самом начале доказательства теоремы 1.3. Итак, теперь полностью доказана и теорема 1.3. ■

Ясно также, что PC_β и PC'_β являются компактными инвариантными выпуклыми множествами в некоторой степени \mathbb{R}^τ , $\tau = wX'$. Поэтому в категории $\mathcal{N}\mathcal{E}_G^2$ как следствие получается

Т е о р е м а 1.9. *Всякая компактная метризуемая инвариантная пара X, X' эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторую компактную инвариантную выпуклую пару C, C' множеств из счетной степени \mathbb{R}^∞ , на которой группа G действует линейно и непрерывно.*

§ 2. Ассоциированность

Понятие ассоциированности обратной системы с объектом мне кажется самым основным в теории шейпов. Его роль примерно такая, какова роль предела обратной системы для построения гомологий и когомологий типа Александрова — Чеха. Так как нам придется иметь дело не только с объектами, но и с парами объектов, то удобно определить понятие ассоциированности в самом общем случае: в случае произвольной категории.

Пусть даны категория \mathcal{K} и ее подкатегория \mathcal{L} . Обратную систему $X = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$ называют ассоциированной ([26], [36]) с объектом X , если выполнены следующие условия:

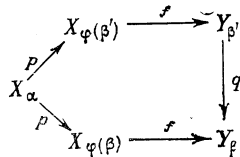
0) Имеются такие морфизмы $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$, что $p_{\alpha\alpha'}p_\alpha = p_{\alpha'}$, если $\alpha' \geq \alpha$.

1) Для каждого морфизма $f: X \rightarrow P \in \mathcal{L}$ существует такой морфизм $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow P$, что $f_\alpha p_\alpha = f$.

2) Для любых двух таких морфизмов $f_\alpha, f'_\alpha: X_\alpha \rightarrow P \in \mathcal{L}$, что $f_\alpha p_\alpha = f'_\alpha p_\alpha$ существует такое $\alpha' \geq \alpha$, что $f_\alpha p_{\alpha\alpha'} = f'_\alpha p_{\alpha\alpha'}$.

В этом случае пишем $X = \text{ass } X$.

Эти условия удобны для проверки, но неудобны для доказательств. За удобство надо платить заданием ([23], [32]) важной категории $\text{pro-}\mathcal{K}$. Определим ее в два приема. Сначала определим вспомогательную категорию $p\text{-}\mathcal{K}$. Ее объектами являются все обратные системы \underline{X} над категорией \mathcal{K} (с направленными множествами индексов), а морфизмами — такие системы $\{f_\beta, \varphi\}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y} = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}\}$ морфизмов $f_\beta: X_{\varphi(\beta)} \rightarrow Y_\beta$ (где φ — произвольное отображение множества индексов β во множество индексов α), что для любых β и β' , $\beta' \geq \beta$, существует такое α , что следующая диаграмма имеет смысл и коммутативна:

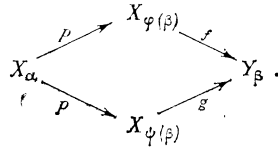


(ясно, как поставить индексы у отображений).

Единичными морфизмами в $p\text{-}\mathcal{K}$ являются морфизмы вида $\{1_\alpha, 1\}: \underline{X} \rightarrow \underline{X}$. Композиция морфизмов $\{f_\beta, \varphi\}$ и $\{g_\gamma, \psi\}: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z} = \{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}\}$ определяется как система $\{g_\gamma f_{\varphi(\gamma)}, \psi\}$. Легко проверить, что это будет морфизм категории $p\text{-}\mathcal{K}$ и что $p\text{-}\mathcal{K}$ и в самом деле является категорией [32]. Примером морфизма категории $p\text{-}\mathcal{K}$ является система морфизмов $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$, удовлетворяющая условию 0) определения ассоциированности, так как X можно отождествить с обратной системой из одного объекта X (φ не пишем в этом случае, так как оно однозначно задается спектром X). Известно, что в терминах категории $p\text{-}\mathcal{K}$ предел обратной системы \underline{X}

определяется как объект X , для которого существует такой морфизм $\{p_\alpha\}: X \rightarrow \underline{X}$, что для всякого морфизма $\{g_\alpha\}: Y \rightarrow \underline{X}$ существует единственный такой морфизм $q: Y \rightarrow X$, что $\{p_\alpha\}q = \{g_\alpha\}$. Понятие ассоциированного спектра, таким образом, в категории $p\text{-}\mathcal{K}$ не получится, так как она слишком широка.

Назовем морфизмы $\{f_\beta, \varphi\}: X \rightarrow Y$ и $\{g_\beta, \psi\}: X \rightarrow Y$ эквивалентными (гомотопными), если для любого β существует такое α , что следующая диаграмма имеет смысл и коммутативна:



Легко проверить [32], что это и в самом деле эквивалентность. Категория $\text{pro-}\mathcal{K}$ получается из $p\text{-}\mathcal{K}$ факторизацией по этой эквивалентности, т. е. объектами являются обратные системы \underline{X} , а морфизмами $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ — классы эквивалентных морфизмов категории $p\text{-}\mathcal{K}$ из \underline{X} в \underline{Y} . Легко проверить, что мы снова получим категорию, в которой операция композиции определяется по представителям [32]. В категории $\text{pro-}\mathcal{K}$ ассоциированность можно определить двойственным образом к определению обратного предела:

Т е о р е м а 2.1. *Обратная система \underline{X} ассоциирована с объектом X в точности тогда, когда существует такой морфизм $\underline{p}: X \rightarrow \underline{X}$, что для всякого морфизма $q: X \rightarrow Y = \{Y_\beta, q_{\beta\beta'}\}$, где все $Y_\beta \in \mathcal{L}$, существует единственный такой морфизм $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$, что $\underline{f}\underline{p} = q$.*

В категории $p\text{-}\mathcal{K}$ это неверно: не получится единственности. Доказательство заключается в утомительно длинной проверке, и мы его опустим. Необходимость — очевидна.

Так же как и для обратных пределов, отсюда получаем

С л е д с т в и е 1. *Для каждого объекта X все ассоциированные с ним системы $\text{ass } X$, принадлежащие $\text{pro-}\mathcal{L}$, естественно изоморфны друг другу.*

То есть для любых морфизмов $\underline{p}: X \rightarrow \text{ass } X$ и $\hat{p}: X \rightarrow \widehat{\text{ass } X}$ имеется такой изоморфизм $\underline{i}: \text{ass } X \rightarrow \widehat{\text{ass } X}$, что $\underline{i}\underline{p} = \hat{p}$.

Это позволяет в важном случае, когда всякий объект X обладает ассоциированной с ним системой $\text{ass } X \in \text{pro-}\mathcal{L}$, определить категорию шейпов $\text{sh-}\mathcal{K}$ и шейповый функтор $\text{sh}: \mathcal{K} \rightarrow \text{sh-}\mathcal{K}$. Для этого выбираем для каждого X какую-нибудь одну ассоциированную систему $\text{ass } X$ из $\text{pro-}\mathcal{L}$ с морфизмом $\underline{p}: X \rightarrow \text{ass } X$, так как в силу теоремы получаем еще одно нужное

С л е д с т в и е 2. *Для каждого морфизма $f: X \rightarrow Y$ категории \mathcal{K} существует ровно один такой морфизм $\text{ass } f: \text{ass } X \rightarrow \text{ass } Y$ категории $\text{pro-}\mathcal{K}$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & \text{ass } X \\
 \downarrow f & \underline{p} & \downarrow \text{ass } f \\
 Y & \longrightarrow & \text{ass } Y \\
 & \underline{q} &
 \end{array}$$

Отсюда, так же как и для обратных пределов, вытекает

С л е д с т в и е 3. *Всякое, получающееся таким образом «отображение» $\text{ass}: \mathcal{K} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{L}$ является функтором.*

Интуитивно категория шейпов состоит из объектов $X \in \mathcal{K}$ в качестве объектов и из морфизмов $f: \text{ass } X \rightarrow \text{ass } Y$ в качестве морфизмов из X в Y . Более строго, ее объектами являются выбранные по одному для каждого X морфизма $\underline{p}: X \rightarrow \text{ass } X \in \text{pro-}\mathcal{L}$, а морфизмами — всевозможные диаграммы

$X \xrightarrow{p} \text{ass } X \xrightarrow{f} \text{ass } Y \xleftarrow{q} Y$. Легко понять, какие морфизмы должны быть единичными и как определить композицию морфизмов, чтобы получилась настоящая категория. Шейповый функтор sh тождествен на объектах категории \mathcal{K} , а каждому морфизму f сопоставляет морфизм $\text{ass } f$. Легко видеть, что sh — функтор. Важно заметить, что шейповые категории, получающиеся при разных выборах ассоциированных систем, будут естественно изоморфными друг другу, а им соответствующие шейповые функторы — естественно эквивалентны друг другу в силу следствия 3. Важность категории шейпов видна из следующего.

Т е о р е м а 2.2. Пусть для категории \mathcal{K} с подкатегорией \mathcal{L} существует функтор $\text{ass}: \mathcal{K} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{L}$, а для категории \mathcal{G} существует функтор $\text{lim}: \text{pro-}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Тогда каждый функтор $\mathcal{F}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$ порождает функтор $\check{\mathcal{F}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G}$ по формуле $\check{\mathcal{F}} = \text{lim} \circ \text{pro-}\mathcal{F} \circ \text{ass}$. При этом функторы $\check{\mathcal{F}}$, порожденные функтором \mathcal{F} при разных выборах функторов lim и ass , естественно эквивалентны друг другу.

Здесь функтор $\text{pro-}\mathcal{F}: \text{pro-}\mathcal{L} \rightarrow \text{pro-}\mathcal{G}$ сопоставляет каждой обратной системе $\underline{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}$ обратную систему $\{\check{\mathcal{F}}(X_\alpha), \check{\mathcal{F}}(p_{\alpha\alpha'})\}$, а каждому морфизму $f: X \rightarrow Y$, заданному системой $\{f_\beta, \varphi\}$, морфизм, заданный системой $\{\check{\mathcal{F}}(f_\beta), \varphi\}$. Легко проверить, что последняя и в самом деле является морфизмом категории $\text{pro-}\mathcal{G}$ и что при этой операции эквивалентные системы переходят в эквивалентные, т. е. что морфизм категории $\text{pro-}\mathcal{L}$ перейдет в морфизм категории $\text{pro-}\mathcal{G}$.

Доказательство этой теоремы нетрудное, но весьма длинное. Удобно воспользоваться следующей коммутативной диаграммой [14]:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{L} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\
 & & \downarrow i & & \downarrow j \\
 \mathcal{K} & \xrightarrow{\text{ass}} & \text{pro-}\mathcal{L} & \xrightarrow{\text{pro-}f} & \text{pro-}\mathcal{G} & \xrightarrow{\text{lim}} & \mathcal{G} \\
 & & & & & \nearrow 1 & \\
 & & & & & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

где $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ — включение, а i и j — вложения, сопоставляющие каждому объекту обратную систему из одного этого же объекта, а каждому морфизму $f: X \rightarrow Y$ — морфизм, заданный системой $\{f, 1\}$. От функтора ass требуем, чтобы $X = \text{ass } X$ для каждого $X \in \mathcal{L}$, что возможно. ■

П р и м е р ы. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{H}\text{-}\mathcal{M}\mathcal{C}$ — гомотопическая категория метризуемых компактов, а \mathcal{L} — полная подкатегория компактных полиэдров. Определим функтор ассоциированности по Александру ([2], [3], [21]): каждому компакт X сопоставим обратную систему из нервов его конечных открытых покрытий и из гомотопических классов проекций, естественно возникающих при вписывании. Тогда указанным в теореме способом любой сингулярный гомологический функтор $H_n(\cdot, \Gamma): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ в категории абелевых групп порождает гомологический функтор $\check{H}_n(\cdot, \Gamma): \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ типа Александра — Чеха. Заметим, что в категории $\mathcal{H}\text{-}\mathcal{M}$ метризуемых пространств с гомотопическими классами отображений функтор ass можно получить по-другому (Борсук [9], Фокс [28]): Пусть каждое X замкнуто в некоторый абсолютный ретракт M категории \mathcal{M} . Тогда, взяв обратную систему из всевозможных окрестностей пространства X в M , получим $\text{ass } X$ (можно брать и любую конфинальную систему окрестностей). А в категории $\mathcal{H}\text{-}\mathcal{C}$ компактов с гомотопическими классами отображений функтор ass получается и третьим важным способом (Мардежич — Сегал [32]): известно [3], что всякий компакт X является обратным пределом обратной системы из конечных полиэдров. Оказывается, что всякая такая система ассоциирована с X ! Таким образом, имеем не только другие способы получе-

ния групп гомологий типа Александрова — Чеха из сингулярных, но и теоремы о непрерывности функторов $\check{H}_n(\ ; \Gamma)$.

Всеми этими тремя способами можно из гомотопических функторов $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{GR}$ в категорию групп можно получить так называемые шейповые (фундаментальные) гомотопические функторы $\check{\mathcal{L}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{GR}$ типа Александрова — Чеха (конечно, пространства берутся с отмеченными точками).

Наконец заметим, что теорема 2.2 верна и для кофункторов \mathcal{F} : надо только требование существования обратного предела в \mathcal{G} заменить на требование существования прямого предела $\lim: \text{inj-}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, где категория $\text{inj-}\mathcal{G}$ получается способом, двойственным к способу получения категории $\text{pro-}\mathcal{G}$. Также оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{L} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{G} & & \\
 & & \downarrow i & & \downarrow j & \searrow 1 & \\
 \mathcal{K} & \xrightarrow{\text{ass}} & \text{pro-}\mathcal{L} & \xrightarrow{\text{pro-}\mathcal{F}} & \text{inj-}\mathcal{G} & \xrightarrow{\lim} & \mathcal{G} .
 \end{array}$$

Кофунктор \mathcal{F} аналогично порождает кофунктор $\check{\mathcal{F}} = \lim \circ \text{pro-}\mathcal{F} \circ \text{ass}$. Именно таким образом когомологии Александрова — Чеха получаются из сингулярных когомологий.

Известно, что в категориях \mathcal{GR} и \mathcal{AR} обратные и прямые пределы существуют. Поэтому для нас очень важно знать, для каких эквивариантных категорий существует функтор ass , если за \mathcal{L} принять полную подкатегорию абсолютных окрестностных эквивариантных ретрактов (с эквивариантно-гомотопическими классами отображений).

Т е о р е м а 2.3. *В категории $H\text{-}\mathcal{M}_G^2$ (соответственно, $H\text{-}\mathcal{P}_G^2$) существует функтор ass , если за \mathcal{L} принять полную подкатегорию всех таких пар Y, Y' из \mathcal{M}_G^2 (соответственно \mathcal{P}_G^2), что Y и Y' суть ANE для \mathcal{M}_G (соответственно, для \mathcal{P}_G)¹⁾.*

Пусть сначала пара $(X, X') \in \mathcal{M}_G^2$. По теореме 1.2 существует замкнутое эквивариантное вложение в замкнутую инвариантную метризуемую пару Y, Y' из АЕ даже для категории \mathcal{P}_G . Искомой ассоциированной системой будет система $X, X' = \{(X_\alpha, X'_\alpha), (p_{\alpha\alpha'}, p'_{\alpha\alpha'})\}$, где X'_α — открытые инвариантные окрестности объекта X' в Y' , $X_\alpha = Y \cap X'_\alpha$, $p'_{\alpha\alpha'}$ — включения $X'_\alpha \subset X'_\alpha$, а $p_{\alpha\alpha'}$ — включения $X_\alpha \subset X_\alpha$. Морфизм $p, p' = \{(p_\alpha, p'_\alpha)\}: (X, X') \rightarrow X, X'$, естественно, состоит из включений $p'_\alpha: X'_\alpha \subset X'_\alpha$ и $p_\alpha: X \subset X_\alpha$. Легко видеть, что $p_{\alpha\alpha'}, p'_{\alpha\alpha'}$, p_α и p'_α нужным образом согласованы друг с другом. Каждое X'_α и каждое X_α , будучи инвариантным открытым множеством в АЕ для \mathcal{P}_G , будет ANE для \mathcal{P}_G . Остается лишь проверить условия 1) и 2) ассоциированности.

Л е м м а. *Если объекты Z и Z' замкнутой инвариантной пары Z, Z' суть ANE для категории \mathcal{K}_G нормальных пространств (не обязательно всех), то эта пара будет ANE для \mathcal{K}_G .*

Здесь, как и всюду, группа G компактна. Пусть замкнутая инвариантная пара X, X' замкнуто и эквивариантно вложена в замкнутую инвариантную пару Y, Y' из \mathcal{K}_G^2 , а $f, f': X, X' \rightarrow Z, Z'$ — эквивариантный морфизм. Так как Z есть ANE, то существует эквивариантное продолжение $f_U: U \rightarrow Z$ отображения f на инвариантную окрестность U множества X в Y . Так как Y нормально, а G компактно, то можно считать окрестность U замкнутой. Так как X' и U инвариантны и замкнуты в Y' , то $X' \cup U$ инвариантно и замкнуто в Y' . В силу согласованности отображений f и f' имеется эквивариантное отображение $\varphi = f' \cup f_U: X' \cup U \rightarrow Z'$, совпадающее с f' на X' и с f_U на U . Так как Z' есть ANE, то найдется эквивариантное продолже-

¹⁾ Это эквивалентно тому, что пара Y, Y' есть ANE для \mathcal{M}_G^2 (или \mathcal{P}_G^2).

ние $\mathcal{F}' : V' \rightarrow Z'$ отображения φ на инвариантную окрестность V' множества $X' \cup U$. Полагаем $V = Y \cap V'$. Тогда $X \subset Y \cap U \subset Y' \cap V' = V$. Значит, $\mathcal{F}(x') = \varphi(x') = f'(x')$ для любого $x' \in X'$ и $\mathcal{F}(x) = \varphi(x) = f_U(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Итак, пара $\mathcal{F}|_V, \mathcal{F}'$ является эквивариантным продолжением пары f, f' на окрестность V, V' пары X, X' . ■

Условие 0) очевидно. Условие 1) непосредственно следует из леммы, так как все метризуемые пространства нормальны. Докажем условие 2). Пусть даны два таких эквивариантных морфизма $f_\alpha, f'_\alpha : X_\alpha, X'_\alpha \rightarrow Z, Z'$ и $g_\alpha, g'_\alpha : X_\alpha, X'_\alpha \rightarrow Z, Z'$, где Z и Z' суть ANE, что композиции $f_\alpha p_\alpha, f'_\alpha p'_\alpha$ и $g_\alpha p_\alpha, g'_\alpha p'_\alpha$ эквивариантно гомотопны. Пусть $H, H' : X \times I, X' \times I \rightarrow Z, Z'$ — эквивариантная гомотопия между ними, где $I = [0, 1]$, а действие на нем тривиально. Как и в лемме, в силу нормальности пространства Y' и компактности группы G можно считать, что f_α, f'_α и g_α, g'_α определены на замкнутой паре $P_\alpha, \overline{X'_\alpha}$, где $P_\alpha = \overline{Y \cap X'_\alpha}$ (нужна еще имеющаяся согласованность для отображений и множеств в парах). В силу последнего равенства пара инвариантных замкнутых множеств $\Phi = (P_\alpha \times 0) \cup (X \times I) \cup (P_\alpha \times 1)$ и $\Phi' = (\overline{X'_\alpha} \times 0) \cup (X' \times I) \cup (\overline{X'_\alpha} \times 1)$ замкнуто вложена в пару $Y \times I, Y' \times I$. В силу согласованности всех рассматриваемых отображений найдется такой эквивариантный морфизм $\varphi, \varphi' : \Phi, \Phi' \rightarrow Z, Z'$, что φ совпадает с $f_\alpha \times 0$ на $P_\alpha \times 0$, с H на $X \times I$ и с $g_\alpha \times 1$ на $P_\alpha \times 1$, а φ' совпадает с $f'_\alpha \times 0$ на $\overline{X'_\alpha} \times 0$, с H' на $X' \times I$ и с $g'_\alpha \times 1$ на $\overline{X'_\alpha} \times 1$. Так как Z и Z' суть ANE, а $Y' \times I$ метризуемо, то по лемме морфизм φ, φ' можно продолжить в эквивариантный морфизм $\mathcal{F}, \mathcal{F}' : V, V' \rightarrow Z, Z'$ на инвариантную «окрестность» V, V' пары Φ, Φ' в $Y \times I, Y' \times I$. Так как I — компакт, то существует такая открытая окрестность U' множества X' в Y' , что $U' \times I \subset V'$. Можно считать, что $U' \subset X'_\alpha$. Так как группа G компактна, то можно считать окрестность U' инвариантной, т. е. что $U' = X'_\alpha$, при некотором $\alpha' \geq \alpha$. Тогда $X_{\alpha'} \times I = (Y \cap X'_{\alpha'}) \times I \subset (Y \times I) \cap V' = V$. Значит, ограничения $\mathcal{F}|_{X_{\alpha'} \times I}$ и $\mathcal{F}'|_{X'_{\alpha'} \times I}$ имеют смысл и составляют пару, являющуюся эквивариантной гомотопией между морфизмами $f_\alpha p_{\alpha\alpha'}, f'_\alpha p'_{\alpha\alpha'}$ и $g_\alpha p_{\alpha\alpha'}, g'_\alpha p'_{\alpha\alpha'}$. Это легко проверить, так как $p_{\alpha\alpha'}$ и $p'_{\alpha\alpha'}$ являются включениями и при $x' \in X'_\alpha$ значение $\mathcal{F}'(x', 0) = \varphi'(x', 0) = f'_\alpha(x')$ и аналогично $\mathcal{F}'(x', 1) = g'_\alpha(x')$, а при $x \in X_{\alpha'}$ точно так же получаем, что $\mathcal{F}(x, 0) = f_\alpha(x)$ и $\mathcal{F}(x, 1) = g_\alpha(x)$.

В категории \mathcal{P}_G^2 доказательство проходит с единственным изменением: надо за окрестности X_α, X'_α взять все инвариантные открытые окрестности типа \mathcal{F}_σ (с условием $X_\alpha = Y \cap X'_\alpha$), так как они p -паракомпактны и составляют конфинальную часть в системе всех инвариантных окрестностей, что легко показать с помощью пространства орбит Y'/G (пользуясь совершенностью орбитальной проекции). ■

Т е о р е м а 2.4. В категории $H\text{-}\mathcal{M}\mathcal{E}_G^2$ (соответственно $H\text{-}\mathcal{E}_G^2$) существует функтор ass , если за \mathcal{L} принять полную подкатегорию из всех таких пар $(Y, Y') \in \mathcal{M}\mathcal{E}_G^2$ (соответственно \mathcal{E}_G^2), что Y и Y' суть ANE для $\mathcal{M}\mathcal{E}_G$ (соответственно \mathcal{E}_G).

Это намного сложнее предыдущего, так как не во всяком абсолютном экстензоре (= ретракте) категории $\mathcal{M}\mathcal{E}$ у точек имеются сколь угодно малые замкнутые окрестности, являющиеся абсолютными окрестностными экстензорами [8] (= абсолютными окрестностными ретрактами). Но в случае специального вложения, даваемого теоремой 1.8, это верно:

Т е о р е м а 2.5. Пусть компактная инвариантная пара X, X' замкнута и эквивариантно вложена в пару пространств $C = \prod C_\beta, C' = \prod C'_\beta$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.7. Тогда для каждой окрестности Γ' множества X' в $Y' = \prod E'_\beta$ существует такая компактная инвариантная окрестность X'_α , что X'_α и $X_\alpha = Y \cap X'_\alpha$, где $Y = \prod E_\beta$, суть ANE для \mathcal{E}_G и $X'_\alpha \subset \Gamma'$.

Сведем общий случай к частному, когда множество индексов β конечно (не обращая внимание на то, что при этом может нарушиться замкнутость вложения пар).

Так как Γ' — окрестность компакта X' в $\prod C'_\beta \subset \prod E'_\beta$, то имеется такое конечное множество α' индексов β , что $X'' = (p_{\alpha'} X') \times \prod_{\beta \notin \alpha'} C'_\beta$ лежит в Γ' , где $p_{\alpha'}: \prod E'_\beta \rightarrow \prod_{\beta \in \alpha'} E'_\beta$ — естественная проекция. Так как X'' — компакт в $\prod E'_\beta$, то можно считать, что $\Gamma' = \Gamma'' \times \prod_{\beta \in \alpha''} E'_\beta$, где α'' — конечное множество индексов β , а Γ'' открыто в $\prod_{\beta \in \alpha''} E'_\beta$. Пусть $\alpha = \alpha' \cup \alpha''$. Тогда $\Gamma' = \Gamma'_\alpha \times \prod_{\beta \in \alpha'} E'_\beta$, где $\Gamma'_\alpha = \Gamma'' \times \prod_{\beta \in \alpha''} E'_\beta$, и $(p_\alpha X') \times \prod_{\beta \in \alpha} C'_\beta \subset (p_{\alpha'} X') \times \prod_{\beta \in \alpha'} C'_\beta \subset \Gamma' = \Gamma'_\alpha \times \prod_{\beta \in \alpha'} E'_\beta$. Значит, $p_\alpha X' \subset \Gamma'_\alpha$. Таким образом, Γ'_α является окрестностью компакта $A' = p_\alpha X'$ в $E' = \prod_{\beta \in \alpha} E'_\beta$, который инвариантен в E'' , так как p_α эквивариантно. Ясно, что $A = p_\alpha X \subset (p_\alpha X') \cap E$, где $E = \prod_{\beta \in \alpha} E'_\beta$ (равенства $A = A' \cap E$ может не быть), и что $p_\alpha X \subset \Gamma_\alpha =$

$= \Gamma'_\alpha \cap E$. Так как A' компактно, то можно считать, что $\bar{\Gamma}'_\alpha$ (а с ним и $\bar{\Gamma}_\alpha$) компактно. Та как группа G компактна, то можно считать Γ'_α и Γ_α инвариантными. Этим сведение закончено.

Решим теперь нашу задачу ¹⁾ для множеств A, A' и Γ'_α в E, E' . Так как A' — компакт, а Γ'_α — его окрестность, то [24] существует такая гладкая функция $\varphi: E' \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, что $\varphi(A') = 0$, а $\varphi(E' \setminus \Gamma'_\alpha) = 1$. Положим $f(x) = \int \varphi(gx) dg$, где интегрирование берется по нормированной мере Хаара на G [10], [13], для каждого $x \in E'$. Легко проверить, что $f(E') \subset [0, 1]$, что $f(A') = 0$ и $f(E' \setminus \Gamma'_\alpha) = 1$ и что f инвариантна. Докажем, что она гладкая.

Для этого допустим, что имеется производная следующего вида: $\tilde{f}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(x) = \int \tilde{\varphi}(gx) dg$, где $\tilde{\varphi} = \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$ при $\sum_1^n m_j = m$, $n = \dim E'$. Тогда $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x) = \int \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}(gx) dg$. По предположению индукции $\int \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}$ существует при любом j . Значит, существуют все частные производные $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$. Итак, существуют все частные производные функции f на E' . Поэтому f , а с нею и $f|_E$, будет бесконечно гладка. По теореме Сарда [18] множество всех критических значений функции $f|_E$ имеет меру 0. Значит, найдется такое число $t_0 \in (0, 1)$, что $\text{grad}(f|_E) \neq 0$ для любой такой точки x из X , что $f(x) = t_0$. Поэтому $\text{grad} f \neq 0$ для любой такой точки x из E' , что $f(x) = t_0$. Пусть $M' = \{x \in E' \mid f(x) \leq t_0\}$, а $M = \{x \in E \mid f(x) \leq t_0\}$. Легко видеть, что $M' \cap E = M$. Так как $\bar{\Gamma}'_\alpha$ компактно, а $M' \subset \bar{\Gamma}'_\alpha$, то M' и M также компактны. Они инвариантны, так как инвариантно f . Они являются окрестностями множеств A' и, соответственно, A , так как $t_0 > 0$. Так как $t_0 < 1$, то $M' \subset \Gamma'_\alpha$, а $M \subset \Gamma_\alpha$. По теореме Сарда [19], [24] края $\partial M' = \{x \in E' \mid f(x) = t_0\}$ и $\partial M = \{x \in E \mid f(x) = t_0\}$ являются гладкими многообразиями. Вспомним, что G действует на E' ортогонально, и поэтому имеет непрерывный эпиморфизм $\pi: G \rightarrow H$, где H — компактная группа Ли,

¹⁾ Это утверждение принадлежит С. Антопяву, Б. Левшенко и мне, но точное доказательство (приведенное здесь) принадлежит Б. Левшенко.

действующая на E' также ортогонально по правилу $(\pi(g))x = gx$. Отсюда по теореме из [19] и M' и M будут гладкими многообразиями.

Остается показать, что M' и M будут ANE для \mathcal{E}_G . Так как M' — компактное n -мерное многообразие в E' , где $n = \dim E'$, то $N' = \overline{E' \setminus M'}$ будет замкнутым многообразием размерности n и $\partial N' = \partial M'$. По теореме Монтгомери — Циппина [10] об инвариантном воротнике («кромке») $\partial N'$ имеет в N' окрестность V' вида $\partial N' \times [0, \varepsilon)$ вместе с естественной эквивариантной ретракцией $s': V' \rightarrow \partial N'$. Множество $U' = M' \cup V'$ будет инвариантной окрестностью компакта M' , а отображение $r': U' \rightarrow M'$, тождественное на M' и совпадающее с s' на V' , будет эквивариантной ретракцией. Значит, M' будет ANE в категории \mathcal{E}_G , так как это верно и для U' , — ведь U' является открытым инвариантным множеством пространства E' , которое по известной теореме Глисона ([29], [39]), есть AE для \mathcal{E}_G .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.
- [2] П. С. Александров. Комбинаторная топология. — М.: Гостехиздат, 1947.
- [3] П. С. Александров. Общая теория гомологий. — М.: Наука, 1979.
- [4] С. А. Антонян. Классификация бикомпактных G -расширений с помощью колец эквивариантных отображений. ДАН АрмССР, 1979, 69 : 5, с. 260—264.
- [5] С. А. Антонян. Ретракты в категории G -пространств. — Изв. АН АрмССР, 1980, 15 : 5, с. 365—378.
- [6] С. А. Антонян, Ю. М. Смирнов. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований. — ДАН СССР, 1981, 257:3, с. 521—526.
- [7] А. В. Архангельский. Об одном классе пространств, содержащих все метрические и все локально компактные пространства. — Мат. сб., 1965, 67 : 1, с. 55—88.
- [8] К. Борсук. Теория ретрактов. — М.: Мир, 1971.
- [9] К. Борсук. Теория шейпов. — М.: Мир, 1976.
- [10] Г. Бредон. Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
- [11] К. Куратовский. Топология, том 2. — М.: Мир, 1969.
- [12] Ю. Т. Лисица. Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема. — Сиб. мат. журн., 1973, 14 : 1, с. 128—139.
- [13] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. — М.: Гостехиздат, 1954.
- [14] Ю. М. Смирнов. Теория шейпов, I. — Итоги науки и техники (алгебра, топология, геометрия). — М.: ВИНТИ, 1981, 19, с. 181—207.
- [15] Ю. М. Смирнов. Теория шейпов и непрерывные группы преобразований. — УМН, 1979, 34 : 6, с. 119—123.
- [16] Ю. М. Смирнов. Эквивариантные шейпы. — Сердика, 1984, 10, с. 223—228.
- [17] Ю. М. Смирнов. Об эквивариантных вложениях G -пространств. — УМН, 1976, 31 : 5, с. 137—147.
- [18] С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
- [19] М. Хирш. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.
- [20] Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. — М.: Физматгиз, 1958.
- [21] P. Alexandroff. General combinatorial topology. — Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49 : 1, p. 41—105.
- [22] R. Arens. Topologies for homeomorphism groups. — Amer. J. Math., 1946, 68, p. 593—610.
- [23] M. Artin, B. Mazur. Etale Homotopy. — Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1969, 100.
- [24] W. M. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. — New York; London: Acad. Press, 1975.

- [25] G. E. Bredon. Equivariant cohomology theories.— Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, p. 266—268.
- [26] J. Dydak, J. Segal. Shape theory.— Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1978, 688.
- [27] D. A. Edwards, H. M. Hastings. Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology.— Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1976, 542.
- [28] R. H. Fox. On shape.— Fund. Math., 1972, 74, p. 47—71.
- [29] A. Gleason. Spaces with a compact Lie group transformations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1:1, p. 35—43.
- [30] S. Illman. Equivariant singular homology and cohomology, I.— Memoirs Amer. Math. Soc., 1975, 1:156.
- [31] S. Mardešić. Shapes for topological spaces.— Gen. Top. Appl., 1973, 3, p. 265—282.
- [32] S. Mardešić, J. Segal. Shape of compacta and ANR-Systems.— Fund. Math., 1971, 72, p. 41—59.
- [33] T. Matumoto. On G -CW-complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead.— J. Fac. Sci. Tokyo, 1971, 18, p. 363—374.
- [34] J. P. May. Equivariant homotopy and cohomology theory.— Contemp. Math., 1982, 12, p. 209—217.
- [35] K. Morita. Products of normal spaces with metric spaces.— Math. Ann., 1964, 154, p. 365—382.
- [36] K. Morita. On shapes of topological spaces.— Fund. Math., 1975, 86, p. 251—259.
- [37] J. Nagata. A note on M -spaces and topologically complete spaces.— Proc. Japan. Acad., 1969, 45, p. 541—543.
- [38] I. Pop. An equivariant shape theory.— Anal. Sti. Univ. Iasi, 1984, sec. 1a, 30:2, p. 53—67.
- [39] R. S. Palais. The classification of G -spaces.— Memoirs Amer. Math. Soc., 1960, № 36.
- [40] J. de Vries. On the existence of G -compactifications.— Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astr., Phys., 1978, 26, p. 275—280.
- [41] S. Waner. Equivariant homotopy theory and Milnor's theorem.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 258, p. 351—368.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
26 июня 1984 г.

