ეთერ ალშიბაია

დიფერენციალური გეომეტრია

ლექციების კურსი

სახელმძღვანელოები სტუდენტებისათვის

ეთერ ალშიბაია

დიფერენციალური გეომეტრია

ლექციების კურსი

მექანიკა-მათემატიკისა და ფიზიკის ფაკულტეტების
სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1998

22.12
510.6
ფ 998

წარმოდგენილი ნაშრომი შედგენილია იმ ლექციების ბაზაზე, რომლებსაც ავტორი მრავალი წლის განმავლობაში კითხულობს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე.

სალექციო კურსი, რომელიც მთლიანად ეფუძნება დიფერენციალური გეომეტრიის საუნივერსიტეტო პროგრამას, შედგება ორი ნაწილისაგან. პირველში განხილულია წირები და ზედაპირები სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში, მეორე კი n-განზომილებიან დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტებს შეიცავს.

ნაშრომში გამახვილებულია ყურადღება იმაზე, რომ ბუნებრივად და სისტემატურად იყოს გადმოცემული ის ობიექტები და ცნებები, რომლებიც ინვარიანტულია როგორც კოორდინატთა სისტემის შერჩევის, ისე პარამეტრების შეცვლის მიმართ.

გარდა მექანიკა-მათემატიკისა და ფიზიკის ფაკულტეტებისა, წიგნი გამოადგება, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, სხვა ფაკულტეტებსა და უმაღლეს სასწავლებლებს, სადაც კი აღნიშნული საკითხები ისწავლება.

რედაქტორი დოც.: ტ. ჯინჭარაძე

რეცენზენტები: პროფ.: თ. ვეფხვაძე
დოც.: ი. მებონია
დოც.: ვ. სიმონია
დოც.: გ. ლაითაძე

ა 1602050000 / 608(06)-98

ISBN 5-511-902-4

წინასიტყვაობა

წინამდებარე სახელმძღვანელო თუმცა შეიქმნა იმ ლექციების ბაზაზე, რომელიც სხვადასხვა წლებში იკითხებოდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, მაგრამ იგი არ წარმოადგენს ერთი გარკვეული კურსის ჩანაწერებს. ხდებოდა გადასინჯვა მათემატიკური დისციპლინების ტრადიციულად ჩამოყალიბებული სისტემისა, იცვლებოდა ფაკულტეტის სასწავლო გეგმები და შესაბამისად იცვლებოდა დიფერენციალური გეომეტრიის როგორც ადგილი ამ გეგმებში, ისე მისთვის განკუთვნილი დრო. ამიტომ, წიგნში გადმოცემული მასალა გამიზნულია საათების სხვადასხვა რაოდენობაზე.

აუცილებელი ნაწილი გეომეტრიის ნებისმიერი კურსისა, და კერძოდ ჩვენი კურსისა, წარმოადგენს წირთა და ზედაპირთა თეორიას სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში. იგი საგულისხმოა როგორც თავისი შინაარსით, ისე როგორც წყარო თვალსაჩინო წარმოდგენებისა და ამავე დროს როგორც მაგალითი რიმანის სივრცისა.

პირველი ნაწილი სახელმძღვანელოსი სწორედ ამ საკითხების შესწავლისათვის არის განკუთვნილი.

სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილი n-განზომილებიან დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტების გაცნობას ეძღვნება. ჯერ შემოთავაზებულია გამოთვლითი ტექნიკა, რომელიც გამოიყენება თანამედროვე დიფერენციალურ გეომეტრიაში — ძირითადად, ტენზორული ანალიზი და ე. კარტანის გარე დიფერენციალური აღრიცხვა, შემდეგ კი ტენზორული ანალიზი ზედაპირისათვის არის მისადაგებული. ამ შემთხვევის განხილვა განპირობებულია იმით, რომ ამ შემთხვევაში რიმანის სივრცეს ეძლევა თვალსაჩინო და რეალური აზრი და ამასთან ტენზორული აღრიცხვა, რომელიც თვალსაჩინო გეომეტრიულ წარმოდგენებთან დაკავშირებით აიგება. დიდი შრომის გარეშე განზოგადოვდება მრავალგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში.

ამოცანები წიგნში, როგორც წესი, ტრივიალურია და განკუთვნილია მხოლოდ საკუთარი თავის კონტროლის მიზნით.

წიგნში გადმოცემული მასალა ყოველთვის არ თავსდება საგნისათვის დათმობილ დროში. ამ შემთხვევაში, ჩემი აზრით, შეიძ-

ლება გამოტოვებულ იქნეს ვექტორულ სივრცეთა ტენზორული ნამრავლი (დავეყრდნოთ ტენზორთა თეორიის კლასიკურ გადმოცემას), გარე ალგებრა და გარე დიფერენციალური ალგებრა, სრულად ინტეგრებადი პფაფის სისტემა და შესაბამისად სხვადასხვა სივრცის სტრუქტურის განტოლებები. აზ საკითხების შესწავლა შეიძლება გადატანილ იქნეს არჩევით კურსებში.

I ნაწილი

წირები და ზედაპირები სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში

I თავი

წირთა თეორია

§1. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია

დიფერენციალურ გეომეტრიაში, ისევე როგორც ანალიზურში, დიდი გამოყენება აქვს ვექტორებს. თუ ანალიზური გეომეტრიისათვის ძირითადი იყო ვექტორთა ალგებრა, აქ გამოიყენება ვექტორთა ანალიზი. ამასთან დაკავშირებით გავეცნობით ვექტორ-ფუნქციებს, რომლებიც დაედება საფუძვლად ჯერ წირების, შემდეგ კი ზედაპირების შესწავლის საქმეს.

ვთქვათ, V სამგანზომილებიანი ევკლიდეს ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ხოლო (a,b) რაიმე რიცხვითი ინტერვალი. განვიხილოთ ასახვა

$$(a,b) \to V,$$

რომელიც ყოველ რიცხვს $t \in (a,b)$ უთანადებს გარკვეულ ვექტორს V-დან, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\vec{v}(t)$. ამ ასახვას უწოდებენ სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციას განსაზღვრულს (a,b) ინტერვალზე.

ამბობენ, რომ $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა $t_0 \in (a,b)$ წერტილის მახლობლობაში, თუ ნორმა $|\vec{v}(t)|$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა ამ წერტილის მახლობლობაში. ე. ი. $\lim\limits_{t \to t_0}|\vec{v}(t)| = \vec{0}$.

ვთქვათ, $\vec{a}$ რაიმე ფიქსირებული ვექტორია. $\vec{a}$ ვექტორი არის $\vec{v}(t)$

ვექტორ-ფუნქციის ზღვარი, როცა $t \to t_0$, თუ $\vec{v}(t)-\vec{a}$ არის უსასრულოდ მცირე ვექტორი t_0 წერტილის მახლობლობაში. ეს შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}\,.$$

ან „ε, δ“ ტერმინებში, $\vec{a}$ ვექტორი წარმოადგენს $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის ზღვარს, როცა $t \to t_0$, თუ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, რომ

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{v}(t) - \vec{a}| < \varepsilon\,.$$

ვექტორ-ფუნქციებისათვის იგივე ალგებრული ოპერაციები არის განსაზღვრული, რაც ჩვეულებრივი ვექტორებისათვის. სახელდობრ:

$$(\vec{u}+\vec{v})(t) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t),$$
$$(\vec{u}-\vec{v})(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t),$$
$$(f\vec{v})(t) = f(t)\vec{v}(t),$$
$$(\vec{u},\vec{v})(t) = (\vec{u}(t),\vec{v}(t)),$$
$$[\vec{u},\vec{v}](t) = [\vec{u}(t),\vec{v}(t)],$$
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})(t) = (\vec{u}(t),\vec{v}(t),\vec{w}(t)).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ სკალარული ფუნქციების ზღვრების თვისებები სამართლიანია ვექტორ-ფუნქციებისათვისაც, სახელდობრ: თუ $\vec{v}(t)$ და $\vec{w}(t)$ ვექტორ-ფუნქციებია, ხოლო $\lambda(t)$ სკალარული ფუნქცია არის და ამასთან

$$\lim_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}\,, \quad \lim_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{b}\,, \quad \lim_{t \to t_0} \lambda(t) = \lambda_0\,,$$

მაშინ

$$1.\ \lim_{t \to t_0} \{\vec{v}(t) + \vec{w}(t)\} = \lim_{t \to t_0} \vec{v}(t) + \lim_{t \to t_0} \vec{w}(t)$$

ე. ი. ვექტორ-ფუნქციათა ჯამის ზღვარი ტოლია ვექტორ-ფუნქციათა ზღვართა ჯამისა. მართლაც, განვიხილოთ

$$\left|\left\{\vec{v}(t)+\vec{w}(t)\right\}-\{\vec{a}+\vec{b}\}\right|=\left|\{\vec{v}(t)-\vec{a}\}+\{\vec{w}(t)-\vec{b}\}\right|\le$$

$$\le\left|\vec{v}(t)-\vec{a}\right|+\left|\{\vec{w}(t)-\vec{b}\right|.$$

უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში თითოეული შესაკრები $\to 0$, ამიტომ, როცა $t\to t_0$

$$\left|\left\{\vec{v}(t)+\vec{w}(t)\right\}-\{\vec{a}+\vec{b}\}\right|\to 0\,,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ

$$\lim_{t\to t_0}\left\{\vec{v}(t)+\vec{w}(t)\right\}=\{\vec{a}+\vec{b}\}=\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)+\lim_{t\to t_0'}\vec{w}(t)\,.$$

2. სკალარული ფუნქციის ვექტორ-ფუნქციაზე ნამრავლის ზღვარი შესაბამისი თანამამრავლების ზღვართა ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\vec{v}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)\,.$$

განვიხილოთ

$$\lambda(t)\vec{v}(t)-\lambda_0\vec{a}=\lambda(t)\{\vec{v}(t)-\vec{a}\}+\{\lambda(t)-\lambda_0\}\vec{a}\,.$$

აქედან

$$\left|\lambda(t)\vec{v}(t)-\lambda_0\vec{a}\right|\le\left|\lambda(t)\right|\left|\vec{v}(t)-\vec{a}\right|+\left|\lambda(t)-\lambda_0\right|\left|\vec{a}\right|.$$

როცა $t\to t_0$, რამდენადაც $\left|\vec{v}(t)-\vec{a}\right|\to 0$, $\left|\lambda(t)-\lambda_0\right|\to 0$, ხოლო $\lambda(t)$ ზღვარი არის λ_0, $\vec{a}$ კი მუდმივია, ამიტომ $\left|\lambda(t)\vec{v}(t)-\lambda_0\vec{a}\right|\to 0$, რაც ნიშნავს, რომ

$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\vec{v}(t)=\lambda_0\vec{a}=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)\,.$$

3. ორი ვექტორ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლის ზღვარი ტოლია თანამამრავლთა ზღვართა სკალარული ნამრავლისა, ე. ი.

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{v}(t),\vec{w}(t))=\left(\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t),\lim_{t\to t_0}\vec{w}(t)\right).$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\left\{(\vec{v}(t),\vec{w}(t))-(\vec{a},\vec{b})\right\}=\left\{(\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{w}(t))+(\vec{w}(t)-\vec{b},\vec{a})\right\}.$$

აქედან ვიღებთ

$$\left|(\vec{v}(t),\vec{w}(t))-(\vec{a},\vec{b})\right|\le\left|(\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{w}(t))\right|+\left|(\vec{w}(t)-\vec{b},\vec{a})\right|.$$

საზოგადოდ, $(\vec{p},\vec{q})=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q})$, ამიტომ $|(\vec{p},\vec{q})|\le|\vec{p}||\vec{q}|$. ამის გათვალისწინებით გვექნება, როცა $t\to t_0$

$\left|(\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{w}(t))\right|\to 0$, რადგან $\left|\vec{v}(t)-\vec{a}\right|\to 0$, $\vec{w}(t)\to\vec{b}$, ასევე $\left|(\vec{w}(t)-\vec{b},\vec{a})\right|\to 0$, რადგან $\left|\vec{w}(t)-\vec{b}\right|\to 0$, $\vec{a}$ კი მუდმივი ვექტორია. გამოდის, რომ

$$\left|(\vec{v}(t),\vec{w}(t))-(\vec{a},\vec{b})\right|\to 0,$$

და $$\lim_{t\to t_0}(\vec{v}(t),\vec{w}(t))=(\vec{a},\vec{b})=\left(\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t),\lim_{t\to t_0}\vec{w}(t)\right).$$

4. ორი ვექტორ-ფუნქციის ვექტორული ნამრავლის ზღვარი ტოლია თანამამრავლთა ზღვართა ვექტორული ნამრავლისა, ე. ი.

$$\lim_{t\to t_0}\left[\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t),\lim_{t\to t_0}\vec{w}(t)\right].$$

განვიხილოთ სხვაობა

$$\left[(\vec{v}(t),\vec{w}(t)\right]-\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{w}(t)\right]+\left[\vec{a},\vec{w}(t)-\vec{b}\right].$$

აქედან

$$\left\| \left[\vec{v}(t), \vec{w}(t)\right] - \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \right\| \le \left\| \left[\vec{v}(t) - \vec{a}, \vec{w}(t)\right] \right\| + \left\| \left[\vec{a}, \vec{w}(t) - \vec{b}\right] \right\|.$$

განმარტებით, $|[\vec{p},\vec{q}]| = |\vec{p}||\vec{q}|\sin\angle(\vec{p},\vec{q})$, ხოლო $|[\vec{p},\vec{q}]| \le |\vec{p}||\vec{q}|$. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ავიღოთ რაიმე $t_0 \in (a,b)$ და განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}, \ (a < t < b, t_0 \ne t).$$

თუ არსებობს ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $t \to t_0$, ამბობენ, რომ $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოებადია t_0 წერტილში. თვით ამ ზღვარს ეწოდება ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული და აღინიშნება $\vec{v}'(t)$ (ან $\frac{d\vec{v}}{dt}$):

$$\vec{v}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}.$$

t_0 წერტილში $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის დიფერენციალია

$$d\vec{v} = \vec{v}'(t_0)dt$$

ვექტორი.

ვთქვათ, V ვექტორული სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი არის $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. $\vec{v}(t)$ ვექტორი დავშალოთ ამ ბაზისის მიხედვით. მივიღებთ

$$\vec{v}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3, \tag{1}$$

სადაც $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ იქნება $\vec{v}(t)$-ს კოორდინატები.

განვიხილოთ $\vec{a}$ ვექტორი:

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3.$$

ვიპოვოთ

$$|\vec{v}(t)-\vec{a}|=\sqrt{\{x(t)-\alpha\}^2+\{y(t)-\beta\}^2+\{z(t)-\gamma\}^2}\,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad (\lim_{t\to t_0}x(t)=\alpha,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=\beta,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=\gamma).$$

თუ $\vec{a}$ არის $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის ზღვარი, მაშინ ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების ზღვრები $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატების ტოლია და შებრუნებით.

მართლაც, ვთქვათ

$$\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a}\,.$$

მაშინ $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$, რომ

$$0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |\vec{v}(t)-\vec{a}|<\varepsilon\,. \tag{*}$$

მაგრამ

$$|x(t)-\alpha|\le|\vec{v}(t)-\vec{a}|\,.$$

(ეს უშუალოდ ნორმის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს).

თუ გავითვალისწინებთ (*) გამოსახულებას, მივიღებთ, რომ როცა $|t-t_0|<\delta$, მაშინ

$$|x(t)-\alpha|<\varepsilon\,.$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=\alpha\,.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება $\lim_{t\to t_0}y(t)=\beta,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=\gamma$.

ვთქვათ ახლა

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=\alpha,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=\beta,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=\gamma.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a}$.

მართლაც, ავიღოთ $\varepsilon>0$. განვიხილოთ $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$. რადგან $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=\alpha$, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}>0$ $\exists\delta_1>0$, რომ

$$0<|t-t_0|<\delta_1 \Rightarrow |x(t)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

რადგან $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=\beta$, გვექნება $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}>0$ $\exists\delta_2>0$, რომ

$$0<|t-t_0|<\delta_2 \Rightarrow |y(t)-\beta|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

$\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=\gamma$ გვაძლევს, რომ $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}>0$ $\exists\delta_3>0$, რომ

$$0<|t-t_0|<\delta_3 \Rightarrow |z(t)-\gamma|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

აღვნიშნოთ $\delta=\min\delta_i\,(i=1,2,3)$. როცა $|t-t_0|<\delta$, მაშინ $|x(t)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, $|y(t)-\beta|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, $|z(t)-\gamma|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ და ამიტომ

$$|\vec{v}(t)-\vec{a}|=\sqrt{(x(t)-\alpha)^2+(y(t)-\beta)^2+(z(t)-\gamma)^2}<\varepsilon.$$

ეს ნიშნავს, რომ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a}$. რაც უნდა გვეჩვენებინა.

ამრიგად, $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის ზღვარი ისეთი ვექტორია, რომლის კოორდინატები აღებული ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების ზღვრების ტოლია.

როგორი იქნება ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის კოორდინატები?

$\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის განმარტების თანახმად, $\vec{v}'(t)$ ისეთი ვექტორია, რომ

$$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)}{t-t_0}-\vec{v}'(t_0)\right|=0.$$

თუ $\vec{v}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ და $\vec{v}(t_0)=\{x(t_0),y(t_0),z(t_0)\}$, მაშინ

$$\frac{\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)}{t-t_0}=\left\{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right\}.$$

აღვნიშნოთ კოორდინატები $\vec{v}'(t_0)=\{A,B,C\}$. ზემოთ დამტკიცებული დებულების თანახმად

$$A=\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},$$

$$B=\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},$$

$$C=\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ჩანს, რომ $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წარმოებადია $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ სკალარული ფუნქციები და ამასთან

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{e}_1+\frac{dy}{dt}\vec{e}_2+\frac{dz}{dt}\vec{e}_3. \tag{2}$$

ვექტორ-ფუნქციის წარმოებადობა დადის მისი კოორდინატების $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ წარმოებადობის საკითხზე. თუ კი ისინი არსე-

ბობს, მაშინ ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის კოორდინატები ამ ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების წარმოებულების ტოლია.

ვექტორ-ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს გაწარმოების ჩვეულებრივ წესებს, სახელდობრ

1. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{d\vec{u}}{dt}+\dfrac{d\vec{v}}{dt}$,

2. $\dfrac{d}{dt}(f\cdot\vec{u})=\dfrac{df}{dt}\vec{u}+f\dfrac{d\vec{u}}{dt}$, სადაც f სკალარული ფუნქციაა.

3. $\dfrac{d}{dt}(\vec{u},\vec{v})=\left(\dfrac{d\vec{u}}{dt},\vec{v}\right)+\left(\vec{u},\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)$,

4. $\dfrac{d}{dt}[\vec{u},\vec{v}]=\left[\dfrac{d\vec{u}}{dt},\vec{v}\right]+\left[\vec{u},\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right]$.

ყველა ეს ფორმულა ერთნაირი სქემით და ადვილად მტკიცდება, ამიტომ დავამტკიცოთ ერთ-ერთი, დავუშვათ მეორე.

ვთქვათ

$$\vec{u}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},$$

მაშინ

$$f(t)\vec{u}(t)=\{f(t)x(t),f(t)y(t),f(t)z(t)\}.$$

ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის კოორდინატები ტოლია ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების წარმოებულებისა, ამიტომ

$$\frac{d}{dt}(f\vec{u})=\frac{d}{dt}(fx)\vec{e}_1+\frac{d}{dt}(fy)\vec{e}_2+\frac{d}{dt}(fz)\vec{e}_3.$$

გამოვიყენებთ რა სკალარული ფუნქციების გაწარმოების წესებს, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}(f\vec{u})=\frac{df}{dt}(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)+f\left(\frac{dx}{dt}\vec{e}_1+\frac{dx}{dt}\vec{e}_2+\frac{dx}{dt}\vec{e}_3\right)=$$

$$=\frac{df}{dt}\vec{u}+f\frac{d\vec{u}}{dt},$$

რაც ამტკიცებს მეორე ფორმულის სამართლიანობას.

მაგალითი: გავაწარმოოთ ვექტორ-ფუნქციების შერეული ნამრავლი $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. გვექნება

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \frac{d}{dt}([\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}) = \left(\frac{d}{dt}[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}\right) + \left([\vec{u}, \vec{v}], \frac{d\vec{w}}{dt}\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}\right] + \left[\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right], \vec{w}\right) + \left([\vec{u}, \vec{v}], \frac{d\vec{w}}{dt}\right) =$$

$$= \left(\left[\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}\right], \vec{w}\right) + \left(\left[\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right], \vec{w}\right) + \left([\vec{u}, \vec{v}], \frac{d\vec{w}}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}, \vec{w}\right) + \left(\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{w}\right) + \left(\vec{u}, \vec{v}, \frac{d\vec{w}}{dt}\right).$$

ჩვენ განვსაზღვრეთ ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული. პირველი რიგის წარმოებულის წარმოებული იქნება მეორე რიგის წარმოებული. მეორე რიგის წარმოებულის წარმოებული იქნება მესამე რიგის წარმოებული და ა. შ. ამგვარად განისაზღრება ვექტორ-ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმოებული და ამასთან გვექნება:

$$u_{(t)}^{(s)} = x^{(s)}(t)\vec{e}_1 + y^{(s)}(t)\vec{e}_2 + z^{(s)}(t)\vec{e}_3, \qquad (3)$$

ე. ი. ვექტორ-ფუნქციის s-რიგის წარმოებულის კოორდინატები ტოლია ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების s რიგის წარმოებულებისა.

თუ ვექტორ-ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებულები k რიგის ჩათვლით, მაშინ ამბობენ, რომ ვექტორ-ფუნქცია მიეკუთვნება C^k კლასს.

თუ ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატები ეკუთვნის C^k კლასს, მაშინ ვექტორ-ფუნქციაც ეკუთვნის C^k კლასს და შებრუნებით.

ვექტორ-ფუნქციისთვის, რომელიც ეკუთვნის C^k კლასს, ადგილი აქვს ტეილორის ფორმულას. სახელდობრ

$$
\begin{aligned}
\vec{u}(t+\Delta t) = \vec{u}(t) + \Delta t\vec{u}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{u}''(t) + \cdots + \\
+\frac{\Delta t^k}{k!}(\vec{u}^{(k)}(t) + \varepsilon(t,\Delta t)),
\end{aligned} \tag{4}
$$

სადაც

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)\right| = 0.$$

მართლაც,

$$\vec{u}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}.$$

რამდენადაც $\vec{u}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის C^k კლასს, ამიტომ სკალარული x(t), y(t), z(t) ფუნქციებიც ეკუთვნის C^k კლასს. დავშალოთ ისინი ტეილორის მწკრივად, გვექნება

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}x''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^k}{k!}(x^{(k)}(t) + \varepsilon_1(t,\Delta t)),$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}y''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^k}{k!}(y^{(k)}(t) + \varepsilon_2(t,\Delta t)),$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta t z'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}z''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^k}{k!}(z^{(k)}(t) + \varepsilon_3(t,\Delta t)).$$

სადაც $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon_1(t,\Delta t) = 0,\quad \lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon_2(t,\Delta t) = 0,\quad \lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon_3(t,\Delta t) = 0.$

თუ თითოეულ ტოლობას სკალარულად გავამრავლებთ შესაბამისად $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (3)-ს, მივიღებთ ტეილორის ფორმულას ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ტეილორის (4) ფორმულა ასეც შეიძლება გადაიწეროს:

$$\Delta\vec{u} = \Delta t\vec{u}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{u}''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^k}{k!}(\vec{u}^{(k)}(t) + \vec{\varepsilon}),$$

სადაც $\Delta\vec{u} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$, ან დიფერენციალებში

$$\Delta\bar{u} = d\bar{u} + \frac{1}{2!}d^2\bar{u} + \cdots + \frac{1}{k!}(d^{(k)}\bar{u} + \bar{\varepsilon}).$$

როგორც აღნიშნული გვქონდა, ვექტორ-ფუნქცია განისაზღვრება მისი კოორდინატებით, რომლებიც სკალარული ფუნქციებია, ეს იძლევა საშუალებას ინტეგრების ოპერაციის გადატანისა ვექტორ-ფუნქციებზე.

ასე მაგალითად, [a,b]-ზე განსაზღვრული $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატები $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ბაზისის მიმართ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ თუ ინტეგრებადი სკალარული ფუნქციებია [a,b]-ზე, ბუნებრივია მივიღოთ

$$\int_a^b \vec{v}(t)dt = \vec{e}_1\int_a^b x(t)dt + \vec{e}_2\int_a^b y(t)dt + \vec{e}_3\int_a^b z(t)dt.$$

$\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ინტეგრებადია $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ფუნქციები.

ვიტყვით, რომ $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით, თუ სკალარული ფუნქციები (კოორდინატები) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ინტეგრებადია რიმანის აზრით და ამასთან

$$\int_a^b \vec{v}(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt\right).$$

რიმანის აზრით ინტეგრალს ვექტორ-ფუნქციიდან ახასიათებს ჩვეულებრივი თვისებები. სახელდობრ:

1. თუ $\vec{v}(t)$ უწყვეტი ვექტორ-ფუნქცია [a,b]-ზე და $a < c < b$, მაშინ

$$\int_a^b \vec{v}(t)dt = \int_a^c \vec{v}(t)dt + \int_c^b \vec{v}(t)dt.$$

---

[1] ინტეგრალი $\vec{v}(t)$ ვექტორ-ფუნქციიდან შეიძლება უშუალოდ განისაზღვროს როგორც $\vec{v}(t)$ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამების ზღვარი.

2. თუ m რაიმე მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b m\vec{v}(t)dt = m\int_a^b \vec{v}(t)dt\,.$$

3. თუ $\vec{p}$ რაიმე ფიქსირებული ვექტორია, მაშინ

$$\int_a^b \vec{p}\vec{v}(t)dt = \vec{p}\int_a^b \vec{v}(t)dt$$

და

$$\int_a^b [\vec{p},\vec{v}(t)]dt = \left[\vec{p},\int_a^b \vec{v}(t)dt\right].$$

4. ადგილი აქვს განუსაზღვრელი ინტეგრალის გაწარმოების წესს

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \vec{v}(t)dt = \vec{v}(x)\,.$$

§2. ვექტორ-ფუნქციისა და მისი წარმოებულის გეომეტრიული არსი, მხები წრფე

აქამდე ჩვენ შევეცადეთ ანალიზის ზოგიერთი დებულება გადმოგვეტანა ვექტორ-ფუნქციებისათვის. ახლა კი ჩვენი ამოცანა იქნება ვექტორ-ფუნქციასა და მის წარმოებულს მივცეთ გეომეტრიული ახსნა.

დავიწყოთ სკალარული არგუმენტის

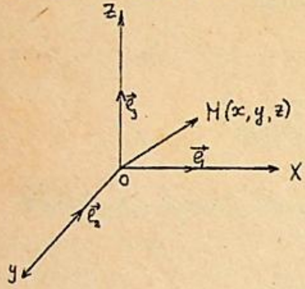
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1}$$

ვექტორ-ფუნქციის განხილვით, რომელიც განსაზღვრულია (a,b)-ზე. სივრცეში ავიღოთ რაიმე მკვიდრი წერტილი O და მასზე მოვდოთ

$\vec{r}(t)$ ვექტორები, რომლებიც მიიღება t-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ყოველი t-თვის მივიღებთ გარკვეულ ვექტორს

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM},$$

რომლის სათავე O წერტილია, ხოლო ბოლო M წერტილი t-ზე იქნება დამოკიდებული.



ნახ. 1

ავიღოთ O წერტილში საკოორდინატო სისტემა. აღვნიშნოთ OX,OY,OZ ღერძების მგეზავები $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -ით.

ნებისმიერი ვექტორისათვის გვექნება

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3,$$

სადაც x(t), y(t), z(t) არიან $\vec{r}(t)$ ვექტორის კოორდინატები. რადგან $\vec{r}(t)$ ვექტორები O წერტილზეა მოდებული, ისინი იქნებიან ამავე დროს ამ ვექტორების ბოლო M წერტილების რადიუს-ვექტორები, ამიტომ M წერტილების კოორდინატები (x,y,z) იგივე იქნება, რაც $\vec{r}(t)$ ვექტორის კოორდინატები ე. ი.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\,. \qquad (2)$$

როგორც ანალიზიდანაა ცნობილი (2) განტოლებებით, საზოგადოდ, წირი მოიცემა.

გამოდის, რომ სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია, საზოგადოდ წირს განსაზღვრავს.

თუ $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის C^k კლასს, მაშინ x(t), y(t), z(t) სკალარული ფუნქციებიც განეკუთვნებიან C^k კლასს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წირი ეკუთვნის C^k კლასს.

(2) განტოლებები წირის პარამეტრული განტოლებებია, ხოლო (1), რომელიც (2) განტოლებების ეკვივალენტურია, წირის ვექტორული განტოლება იქნება.

(2) განტოლებებიდან t პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ წირის ზოგად განტოლებას

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

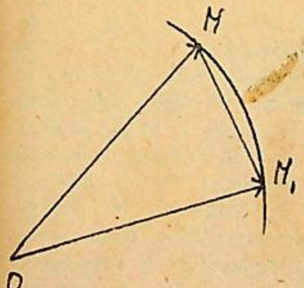
გავარკვიოთ ახლა ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული არსი.

განვიხილოთ კვლავ ვექტორ-ფუნქცია

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

და ვიგულისხმოთ, რომ წარმოებული (a,b)-ს ყოველ წერტილზე არსებობს და

$$\vec{r}'(t) \neq 0.$$



ნახ. 2

ავილოთ პარამეტრის რაიმე t მნიშვნელობა. მას ეთანადება ვექტორ-ფუნქციის გარკვეული მნიშვნელობა $\vec{r}(t)$ და გარკვეული M წერტილი წირზე, $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$. თუ პარამეტრს ავილებთ $t + \Delta t$, მას შეესაბამება $\vec{r}(t + \Delta t)$ და M_1 წერტილი წირზე, ისე, რომ

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM_1}$$

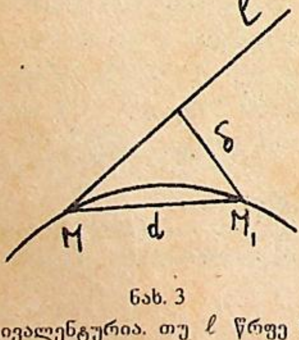
განვიხილოთ

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM_1}.$$

MM_1 მკვეთის მიმართულებას განსაზღვრავს როგორც $\Delta\vec{r}$, ისე მისი კოლინეარული $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ვექტორი. როცა $\Delta t \to 0$, მაშინ $|\Delta\vec{r}| \to 0$ ($\vec{r}(t)$-ს უწყვეტობის გამო). მაშასადამე, $|\overrightarrow{MM_1}| \to 0$, ე. ი. $M_1 \to M$. როცა $M_1 \to M$, მაშინ მკვეთი MM_1 ბრუნავს M წერტილის გარშემო ისე, რომ ყოველთვის აქვს $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ მიმართულება. მკვეთის ზღვრულ მდგომარეობას განსაზღვრავს $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$-ს ზღვრული მნიშვნელობა. უკანასკნელი კი $\vec{r}'(t)$-ს ტოლია.

წირის M წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფის ზღვრულ წრფეს, როცა მეორე M_1 თანაკვეთის წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ, ეწოდება **წირის მხები**. გამოდის, რომ ვექტორფუნქციის წარმოებული $\vec{r}'(t)$ ვექტორი განსაზღვრავს წირის მხების მიმართულებას.

მოვიტანოთ მხები წრფის სხვა განმარტებაც.



ნახ. 3

ავიღოთ წირი და მასზე M წერტილი. ამ წერტილზე გავატაროთ რაიმე ℓ წრფე. ვთქვათ, M_1 არის M წერტილის მეზობელი წერტილი წირზე. მანძილი M_1 წერტილიდან M წერტილამდე აღვნიშნოთ d-თი, ხოლო M_1 წერტილიდან ℓ წრფემდე – δ-თი. ℓ წრფეს უწოდებენ წირის მხებს M წერტილში, თუ $\dfrac{\delta}{d} \to 0$, როცა $M_1 \to M$. ახლა განხილული განმარტება მხებისა ძველის ეკვივალენტურია. თუ ℓ წრფე წირის მხებია M წერტილში, მაშინ

იგი უნდა დაემთხვეს MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როცა $M_1 \to M$ და, მაშასადამე, მის მიმართულებას უნდა განსაზღვრავდეს $\vec{r}'(t)$ ვექტორი.

ავიღოთ ℓ წრფეზე ერთეულოვანი $\vec{m}$ ვექტორი. მანძილი M და M_1 წერტილებს შორის ტოლი იქნება $|\vec{\Delta r}|$ ე. ი. $|\vec{\Delta r}| = d$, ხოლო δ კი შეგვიძლია $|[\vec{\Delta r}, \vec{m}]|$ ვექტორული ნამრავლის სიგრძით გამოვსახოთ: $|[\vec{\Delta r}, \vec{m}]| = |\vec{\Delta r}| \sin \angle(\vec{\Delta r}, \vec{m}) = \delta$.

განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{\delta}{d} = \frac{|[\vec{\Delta r}, \vec{m}]|}{|\vec{\Delta r}|} = \frac{\left\|\left[\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}, \vec{m}\right]\right\|}{\left|\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{|[\vec{r}'\vec{m}]|}{|\vec{r}'|}, \quad \text{როცა } M_1 \to M.$$

თუ $\frac{\delta}{d} \to 0$, მაშინ $[\vec{r}', \vec{m}] = 0$ და რადგან $\vec{r}' \neq 0$, ამიტომ $\vec{r}'$ და $\vec{m}$ ვექტორები კოლინეარულია, ე. ი. მხებს ექნება $\vec{r}'$ ვექტორის მიმართულება.

პირიქით, M წერტილზე გამავალი $\vec{r}'$ მიმართულების მქონე ℓ წრფე იქნება მხები (ახალი განმარტებით). ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$\frac{\delta}{d} \to 0, \qquad \text{როცა } M_1 \to M.$$

მართლაც, რადგან ამჯერად $\vec{m} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$, ამიტომ

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\left\|\left[\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}, \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\right]\right\|}{\left|\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\left|\left[\vec{r}' \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\right]\right|}{|\vec{r}'|} = \frac{|[\vec{r}, \vec{r}']|}{|\vec{r}'|^2} = 0$$

ე. ი. $\frac{\delta}{d} \to 0$, როცა $M_1 \to M$. რის ჩვენებაც გვინდოდა.

I. მხები წრფის სხვადასხვა განტოლება

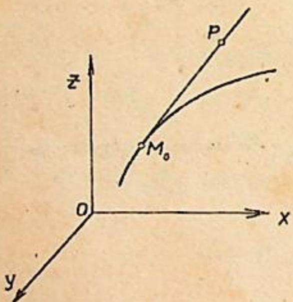
განვიხილოთ წირი მოცემული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{r}'(t) \neq 0$ ვექტორ-ფუნქციის განსაზღვრის არეზე.

წირის M წერტილზე გავატაროთ მხები წრფე და მასზე რაიმე P წერტილი ავიღოთ. რამდენადაც მხების მიმართულებას განსაზღვრავს $\vec{r}'$ ვექტორი, ამიტომ

$$\overrightarrow{MP} = \lambda \vec{r}',$$



ნახ. 4

ან რაც იგივეა

$$\vec{p} = \vec{r} + \lambda \vec{r}, \tag{1}$$

სადაც $\vec{p}$ და $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორებია შესაბამისად P და M წერტილის. მიღებული (1) განტოლებას ეწოდება **მხების ვექტორული განტოლება**.

თუ ამ განტოლებას სამი სკალარული განტოლებით შევცვლით

$$\begin{aligned} X &= x + \lambda x', \\ Y &= y + \lambda y', \\ Z &= z + \lambda z', \end{aligned} \tag{2}$$

მივიღებთ მხების წრფის პარამეტრულ განტოლებებს. აქ X, Y, Z მხები წრფის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებია, x, y, z — შეხების წერტილის კოორდინატები, ხოლო x', y', z' — წარმოებულების მნიშვნელობანი შეხების წერტილში.

უკანასკნელი (2) განტოლებებიდან პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ მხები წრფის განტოლებას მიმართულების კოეფიციენტებში:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}. \tag{3}$$

განვიხილოთ წირი მოცემული ზოგადი განტოლებით

$$F(x,y,z)=0,$$
$$\Phi(x,y,z)=0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{Vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{Vmatrix}$$

მატრიცის რანგი რაიმე (x_0, y_0, z_0) წერტილის მახლობლობაში ორის ტოლია. ვთქვათ, (x_0, y_0, z_0) წერტილის მახლობლობაში წირი ასეთი პარამეტრული განტოლებით ჩაიწერება

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

თუ მათ წირის მოცემულ განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ იგივეობებს

$$F(x(t),y(t),z(t))=0,$$
$$\Phi(x(t),y(t),z(t))=0.$$

მათი გაწარმოება მოგვცემს

$$F_x x'+F_y y'+F_z z'=0,$$
$$\Phi_x x'+\Phi_y y'+\Phi_z z'=0.$$

აქედან ჩანს, რომ მხების მიმმართველი ვექტორი (x', y', z') ართობი იქნება (F_x, F_y, F_z) და (Φ_x, Φ_y, Φ_z) ვექტორების და ამი- ომ მას ექნება ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის მიმარ-

თულება, ე. ი. მხების მიმართულებას განსაზღვრავს ვექტორი, რომლის კოორდინატებია

$$(F_x\Phi_z - F_z\Phi_y, F_z\Phi_x - F_x\Phi_z, F_x\Phi_y - F_y\Phi_x),$$

და მხების განტოლებას ასეთი სახე ექნება:

$$\frac{X-x}{F_y\Phi_z - F_z\Phi_y} = \frac{Y-y}{F_z\Phi_x - F_x\Phi_z} = \frac{Z-z}{F_x\Phi_y - F_y\Phi_x}. \tag{4}$$

თუ წირი ბრტყელია (ვგულისხმობთ, რომ XOY სიბრტყეშია), მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$X = x + \lambda x',$$
$$Y = y + \lambda y'.$$

ან

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}.$$

თუ ბრტყელი წირი მოცემულია განტოლებით $y = f(x)$, მაშინ ადვილად მივიღებთ მხების განტოლების ასეთ სახეს:

$$Y - y = f'(x)(X - x),$$

ხოლო ზოგადი $F(x, y) = 0$ განტოლებით მოცემული ბრტყელი წირის მხების განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$F_x(X-x) + F_y(Y-y) = 0.$$

ვაჩვენოთ **მხები წრფის** ასეთი **თვისება**: წირის M წერტილის (შეხების წერტილის) მეზობელი M_1 წერტილი წირზე, მხებსაც ეკუთვნის პირველი რიგის სიზუსტით, ან ასეც ამბობენ: წირის M წერტილის მეზობელი წერტილი წირზე და მხებზე ერთი და იგივეა პირველი რიგის სიზუსტით.

შევნიშნავთ, რომ რაიმე სიდიდის პირველი რიგის სიზუსტით განხილვა მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეს გამორიცხვას აღნიშნავს, ორი სიდიდის პირველი რიგის სიზუსტით თანატოლობა, მათ

მორის მეორე რიგის უსასრულოდ მცირით განსხვაებას გამოხატავს და ა. შ.

ავიღოთ შეხების M წერტილის მეზობელი P_1 წერტილი მხებზე, რომელიც λ პარამეტრის $\lambda = \Delta t$ მნიშვნელობას ეთანადება. (1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\vec{p}_1 = \vec{r} + \Delta t\, \vec{r}\,',$$

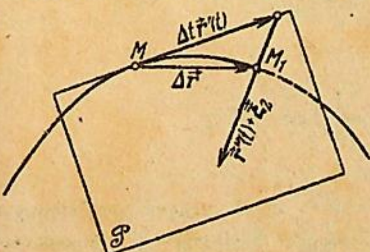
ხოლო M წერტილის მეზობელი წერტილი წირზე, ტეილორის ფორმულის გამოყენებით მოიცემა

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}\,'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{r}\,''(t) + \cdots ,$$

მიღებული ტოლობების შედარება გვიჩვენებს, რომ მათ შორის განსხვაება მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეთი იწყება. ეს კი ამტკიცებს გამოთქმულ დებულებას.

§3. წირის მიმხები სიბრტყე

წირის მხებზე გამავალ ყოველ სიბრტყეს ეწოდება წირის მხები სიბრტყე. განვიხილოთ სიბრტყე, რომელიც გადის წირის მხებზე და შეხების M წერტილის მეზობელ M_1 წერტილზე.



ნახ. 5

წირის მხებზე და შეხების M წერტილის მეზობელ M_1 წერტილზე გამავალ სიბრტყის ზღვარს, როცა $M_1 \to M$ წერტილისაკენ, ეწოდება **წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში.**

ვთქვათ, წირი მოცემულია ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1}$$

სადაც ეს ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია (a,b)-ზე. ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{r}(t)$ ეკუთვნის C^2 კლასს და რომ (a,b)-ზე

$$[\vec{r}', \vec{r}''] \neq 0. \tag{2}$$

გამოვიყვანოთ მიმხები სიბრტყის განტოლება. ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ვექტორი $\vec{r}'$ და $\vec{r}''$ მდებარეობს მიმხებ სიბრტყეში.

იმ სიბრტყეში, რომელიც გადის წირის მხებზე და შეხების M წერტილის მეზობელ M_1 წერტილზე, მოთავსებული იქნება

$$\vec{r}'(t) \text{ და } \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

ვექტორი. ვისარგებლოთ ტეილორის ფორმულით $\overrightarrow{\Delta r}$ წარმოდგენისათვის, როცა $k = 2$. მივიღებთ

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2}(\vec{r}''(t) + \vec{\varepsilon}_2),$$

სადაც

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\vec{\varepsilon}_2| = 0.$$

აქედან

$$\vec{r}'' + \vec{\varepsilon}_2 = \frac{2}{\Delta t^2}\left(\overrightarrow{\Delta r} - \Delta t \vec{r}'(t)\right).$$

$\vec{r}'' + \vec{\varepsilon}_2$ ვექტორი დაიშალა $\overrightarrow{\Delta r}$ და $\vec{r}'$ ვექტორების მიხედვით, რომლებიც განსახილველ სიბრტყეში მდებარეობენ. ამიტომ ისიც იმავე სიბრტყეში იქნება მოთავსებული.

როცა $\Delta t \to 0$ (ან $M_1 \to M$) აღნიშნული სიბრტყე მიისწრაფვის მიმხები სიბრტყისაკენ, რომელზედაც განლაგდება $\vec{r}'(t)$ და $\vec{r}'' + \vec{\varepsilon}_2$ ვექტორების ზღვრები

$$\lim_{\Delta t\to 0}\vec{r}'(t)=\vec{r}'(t) \text{ და } \lim_{\Delta t\to 0}(\vec{r}''(t)+\vec{\varepsilon}_2)=\vec{r}''(t).$$

მაშ, $\vec{r}'$ და $\vec{r}''$ ვექტორები მიმხებ სიბრტყეშია მოთავსებული და თუ $[\vec{r}',\vec{r}'']\neq 0$, მას განსაზღვრავენ კიდეც.

წირის იმ წერტილებს, სადაც $[\vec{r}',\vec{r}'']=0$, **წირის გაწრფევების წერტილებს** უწოდებენ.

ვიგულისხმოთ, რომ ადგილი აქვს (2) პირობას და გამოვიყვანოთ M წერტილზე გამავალი მიმხები სიბრტყის განტოლება. $\vec{r}'$ და $\vec{r}''$ ვექტორები მოვდოთ M წერტილში. მაშინ მიმხებ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი P წერტილისათვის გვექნება

$$\overrightarrow{MP}=\lambda\vec{r}+\mu\vec{r}''.$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\vec{p}=\vec{r}+\lambda\vec{r}'+\mu\vec{r}'' \tag{3}$$

მიმხები სიბრტყის ვექტორულ განტოლებას. აქ $\vec{p}$ და $\vec{r}$ შესაბამისად P და M წერტილების რადიუს-ვექტორებია, ხოლო წარმოებულები $\vec{r}'$ და $\vec{r}''$ აღებულია M წერტილში.

თუ (3) ვექტორულ განტოლებას ჩავწერთ კოორდინატებში, მივიღებთ მიმხები სიბრტყის პარამეტრულ განტოლებებს

$$\begin{aligned} X&=x+\lambda x'+\mu x'',\\ Y&=y+\lambda y'+\mu y'',\\ Z&=z+\lambda z'+\mu z'', \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც X, Y, Z მიმხები სიბრტყის მიმდინარე წერტილის კოორდინატებია, ხოლო x, y, z შეხების M წერტილის კოორდინატები და შესაბამისად წარმოებულებიც M წერტილშია აღებული.

თუ მიმხები სიბრტყის (4) პარამეტრული განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ λ და μ პარამეტრებს, მივიღებთ მიმხები სიბრტყის ზოგად განტოლებას. ამ განტოლებას უფრო მარტივად დავწერთ,

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ვექტორი $[\vec{r}', \vec{r}'']$ არის მიმხები სიბრტყის მართობი და გამოდგება მის მიმმართველ ვექტორად.

თუ

$$\vec{r}' = (x', y', z') \text{ და } \vec{r}'' = (x'', y'', z''),$$

მაშინ

$$[\vec{r}', \vec{r}''] = (y'z'' - y''z', z'x'' - z''x', x'y'' - x''y')$$

და **მიმხები სიბრტყის ზოგად განტოლებას** ასეთი სახე ექნება:

$$\begin{gathered}(y'z'' - y''z')(X - x) + (z'x'' - z''x')(Y - y) + \\ + (x'y'' - x''y')(Z - z) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

შევნიშნავთ, რომ მხები წრფის (როგორც მკვეთის ზღვრული მდებარეობა) განმარტების გათვალისწინებით, მიმხები სიბრტყე ასეც შეგვიძლია განვსაზღვროთ: წირის M წერტილზე და მის მეზობელ ორ წერტილზე გამავალ სიბრტყის ზღვარს, როცა მეზობელი წერტილები აღებული M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, ეწოდება წირის მიმხები სიბრტყე M წერტილში.

დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგ სახელმძღვანელოში შეხვდებით მიმხები სიბრტყის სხვა განმარტებასაც:

წირის რაიმე M წერტილზე გავატაროთ Π სიბრტყე. ავიღოთ M წერტილის მეზობელი M_1 წერტილი და მისი დაშორება M წერტილიდან აღვნიშნოთ d-თი, ხოლო Π სიბრტყემდე – δ-თი. წირის M წერტილზე გამავალ სიბრტყეს უწოდებენ მიმხებ სიბრტყეს აღებულ წერტილში, თუ $\frac{\delta}{d^2} \Rightarrow 0$, როცა $M_1 \to M$.

ძნელი არ არის ჩვენება იმისა, რომ ეს განმარტება ეკვივალენტურია მიმხები სიბრტყის ზევით მოტანილი განმარტებისა.

აღსანიშნავია, რომ მიმხები სიბრტყე უფრო მჭიდროდ უკავშირდება წირს, ვიდრე მხები წრფე. წირის M წერტილის მეზობელი წერტილი წირზე მიმხებ სიბრტყესაც ეკუთვნის მეორე რიგის სიზუსტით.

მართლაც, ავიღოთ M წერტილის მეზობელი M_1 წერტილი წირზე, რომელიც ეთანადება პარამეტრის $t+\Delta t$ მნიშვნელობას, ე. ი. $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t+\Delta t)$. ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{r}''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!}\vec{r}'''(t) + \cdots$$

იყოს P_1 წერტილი M წერტილის მეზობელი წერტილი მიმხებ სიბრტყეში და ვიგულისხმოთ, რომ იგი ეთანადება (3) განტოლებაში შემავალ λ და μ პარამეტრების ასეთ მნიშვნელობებს: $\lambda = \Delta t,\ \mu = \dfrac{\Delta t^2}{2}$.

მივიღებთ

$$\vec{P}_1 = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{r}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{r}''(t) .$$

ამ განტოლების შედარებით წინა განტოლებასთან ვრწმუნდებით, რომ მათ შორის განსხვავება იწყება მესამე რიგის უსასრულოდ მცირეთი, რაც ნიშნავს, რომ M_1 და P_1 წერტილები ერთი და იგივეა მეორე რიგის სიზუსტით. მიმხებ სიბრტყეს წირთან აქვს მეორე რიგის თანახება.

§4. ფრენეს რეპერი

(ბუნებრივი სამწახნაგი)

წირის ყოველ წერტილს სხვადასხვანაირად შეიძლება დაუკავშიროთ საკოორდინატო სისტემა. ჩვენ ავაგებთ ერთ სპეციალურად შერჩეულ სისტემას, რომელსაც ფრენეს რეპერი ეწოდება.

უკვე განვმარტეთ წირის მხები წრფე და მიმხები სიბრტყე. განვმარტოთ ახლა წირის ნორმალი. წირის მხები წრფის მართობ წრფეს შეხების წერტილში **წირის ნორმალი** ეწოდება. წირის აღებულ წერტილში უამრავი ნორმალი გაივლება. ამ ნორმალე-

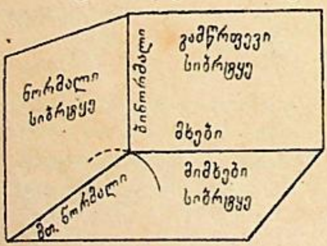
ბიდან გამოყოფენ ორს: ერთი, რომელიც მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს, მეორე კი — მიმხები სიბრტყის მართობია.

მხების მართობ წრფეს შეხების წერტილში, რომელიც მიმხებ სიბრტყეში მდებარეობს, ეწოდება **წირის მთავარი ნორმალი**.

მიმხები სიბრტყის მართობ წრფეს შეხების წერტილში ეწოდება **წირის ბინორმალი**.

ასეთნაირად, წირის ყოველ წერტილს შეიძლება დავუკავშიროთ სამი ურთიერთმართობი წრფე: მხები, მთავარი ნორმალი, ბინორმალი. შესაბამისად განისაზღვრება სამი ურთიერთმართობი სიბრტყე: მიმხები სიბრტყე, ნორმალი სიბრტყე — სადაცაა მოთავსებული აღებული წირის ყველა ნორმალი მოცემულ წერტილში და გამწრფევი სიბრტყე, რომელიც მართობია მთავარი ნორმალისა.

როგორი იქნება აღნიშნული სიბრტყეების და წრფეების განტოლებანი? მოვიგონოთ, რომ წრფის მიმმართველი ვექტორი წრფის პარალელურია, სიბრტყისა კი — მართობი.



ნახ. 6

მხები წრფის მიმართულებას $\vec{r}\,'=(x',y',z')$ ვექტორი განსაზღვრავს. ნორმალი სიბრტყე მართობია მხები წრფის, ამიტომ იგივე $\vec{r}\,'$ ვექტორი დაახასიათებს ნორმალ სიბრტყეს ისე, რომ ნორმალი სიბრტყის განტოლებას ექნება სახე:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0\,.$$

მიმხები სიბრტყის მიმმართველი ვექტორია ვექტორული ნამრავლი $[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']$. იგივე ვექტორი იქნება ბინორმალის მიმმართველი ვექტორი, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ ბინორმალის განტოლება

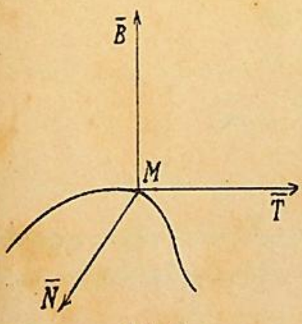
$$\frac{X-x}{y'z''-y''z'}=\frac{Y-y}{z'x''-z''x'}=\frac{Z-z}{x'y''-x''y'}.$$

მთავარ ნორმალსა და გამწრფევ სიბრტყეს ერთი და იგივე მიმმართველი ვექტორი დაახასიათებს. ჩვენ უკვე ვიცით მხების მიმმართველი ვექტორი $\vec{r}'$ და ბინორმალის მიმმართველი ვექტორი $[\vec{r}',\vec{r}'']$. მთავარი ნორმალის, ასევე გამწრფევი სიბრტყის, მიმართულებას განსაზღვრავს $\vec{r}'$ და $[\vec{r}',\vec{r}'']$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ე. ი. ვექტორი $[\vec{r}',[\vec{r}',\vec{r}'']]$.

გამოვთვლით რა ამ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის კოორდინატებს, ადვილად დავწერთ შესაბამისად მთავარი ნორმალისა და გამწრფევი სიბრტყის განტოლებებს.

მიღებული სამი ურთიერთმართობი წრფე: მხები, მთავარი ნორმალი და ბინორმალი რომ გამოდგეს საკოორდინატო სისტემად, საჭიროა განვსაზღვროთ მათი მოგეზულობა.

ავღნიშნოთ მხების მგეზავი $\vec{T}$-თი, მაშინ $\vec{T}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$. ბინორმალის მგეზავი ავღნიშნოთ $\vec{B}$. იგი ასე გამოისახება $\vec{B}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}$. მთავარი ნორმალის მგეზავი იყოს $\vec{N}$. ვიგულისხმოთ, რომ $\{M,\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ სისტემა მარცხენა მოგეზულობისაა.



ნახ. 7

მგეზავების წყვილ-წყვილად აღებული ვექტორული ნამრავლები გვაძლევს

$$\vec{N}=[\vec{B},\vec{T}],\quad \vec{T}=[\vec{N},\vec{B}],\quad \vec{B}=[\vec{T},\vec{N}].$$

ასეთნაირად შერჩეულ საკოორდინატო სისტემას უწოდებე **ფრენეს რეპერს**, ბუნებრივ სამღერძს, თანმხლებ ტრიედრს და ასე აღნიშნავენ:

$$R_M = \{M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}.$$

განვიხილოთ მაგალითი: მოცემულია წირი პარამეტრული განტოლებით

$$x = t,\ y = t^3,\ z = t^2 + 4.$$

განვსაზღვროთ ამ წირის ფრენეს რეპერის ღერძებისა და სიბრტყეების განტოლებანი, ვიპოვოთ მგეზავები $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, როცა $t = 1$.

ამოხსნა: ჩავწეროთ ეს განტოლება ვექტორული სახით. გვექნება

$$\vec{r} = (t, t^3, t^2 + 4).$$

ვიპოვოთ $\vec{r}', \vec{r}''$, $[\vec{r}', \vec{r}'']$, $[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']]$ ვექტორები, გვექნება:

$$\vec{r}' = (1, 3t^2, 2t),$$
$$\vec{r}'' = (0, 6t, 2),$$

$$[\vec{r}', \vec{r}''] = (-6t^2, -2, 6t),$$

$$[\vec{r}', [\vec{r}', \vec{r}'']] = (4t + 18t^3, -6t - 12t^3, 18t^4 - 2).$$

მხები წრფის და ნორმალი სიბრტყის მიმმართველი ვექტორი იქნება $\vec{r}' = (1, 3t^2, 2t)$, ამიტომ მხები წრფის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$\frac{X - t}{1} = \frac{Y - t^3}{3t^2} = \frac{Z - t^2 - 4}{2t}.$$

$t = 1$-თვის გვექნება:

$$\frac{X-1}{1}=\frac{Y-1}{3}=\frac{Z-5}{2}.$$

ნორმალი სიბრტყის განტოლება კი ასე ჩაიწერება:

$$(X-t)+3t^2(Y-t^3)+2t(Z-t^2-4)=0.$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$X-1+3(Y-1)+2(Z-5)=0,$$

ან რაც იგივეა,

$$X+2y+2z-14=0.$$

ბინორმალის და მიმხები სიბრტყის მიმმართველი ვექტორია

$$[\vec{r}',\vec{r}'']=(-6t^2,-2,6t),$$

ბინორმალის განტოლება იქნება

$$\frac{X-t}{3t^2}=\frac{Y-t^3}{1}=\frac{Z-t^2-4}{-3t}.$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$\frac{X-1}{3}=\frac{Y-1}{1}=\frac{Z-5}{-3}.$$

მიმხები სიბრტყის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$3t^2(X-t)+(Y-t^3)-3t(Z-t^2-4)=0.$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$3(X-1)+(Y-1)-3(Z-5)=0,$$

ან

$$3X+Y-3Z+11=0.$$

მთავარი ნორმალი და გამწრფევი სიბრტყე დახასიათდება

$$\left[\vec{r}',[\vec{r}',\vec{r}'']\right]=(4t+18t^3,-6t-12t^3,18t^4-2)$$

ვექტორით, ამიტომ მთავარი ნორმალის განტოლება ასე ჩაიწერე

$$\frac{X-t}{9t^3+2t}=\frac{Y-t^3}{-6t^3-3t}=\frac{Z-t^2-4}{9t^4-1}.$$

როცა $t=1$, გვექნება:

$$\frac{X-1}{11}=\frac{Y-1}{-9}=\frac{Z-5}{8}.$$

გამწრფევი სიბრტყის განტოლება იქნება

$$(9t^3+2t)(X-t)-(6t^3+3t)(Y-t^3)+(9t^4-1)(Z-t^2-4)=0,$$

ხოლო წერტილში, როცა $t=1$, მივიღებთ

$$11(X-1)-9(Y-1)+8(Z-5)=0,$$

ან რაც იგივეა,

$$11X-9Y+8Z+42=0.$$

ვიპოვოთ ახლა მგეზავები. მხების მგეზავი $\vec{T}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$, ამიტო

ჩვენ შემთხვევაში გვექნება

$$\vec{T}=\left(\frac{1}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}},\frac{3t^2}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}},\frac{2t}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}}\right).$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$\vec{T}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

ბინორმალის მგეზავისათვის გვაქვს $\vec{B}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}$, ამიტომ ალებული წირისათვის გვექნება

$$\vec{B}=\left(\frac{-6t^2}{\sqrt{36t^4+36t^2+4}},\frac{-2}{\sqrt{36t^4+36t^2+4}},\frac{6t}{\sqrt{36t^4+36t^2+4}}\right).$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$\vec{B}_0=\left(-\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{3}{\sqrt{17}}\right).$$

მთავარი ნორმალის მგეზავი ასეთია $\vec{N}=\frac{[[\vec{r}',\vec{r}''],\vec{r}']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|\cdot|\vec{r}'|}$.

ალებული წირისათვის გვექნება

$$\vec{N}=\left(\begin{array}{c}\dfrac{-2t-9t^3}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}\sqrt{9t^4+9t^2+1}},\\ \dfrac{3t+6t^3}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}\sqrt{9t^4+9t^2+1}},\\ \dfrac{-9t^4+1}{\sqrt{9t^4+4t^2+1}\sqrt{9t^4+9t^2+1}}\end{array}\right)$$

როცა $t=1$, მივიღებთ:

$$\vec{N}_0=\left(-\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{19}},\frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{19}},-\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{19}}\right).$$

§5. ფრენეს ფორმულები; სიმრუდე და გრეხა

1. ბუნებრივი პარამეტრი; წირითი ელემენტი. განვიხილოთ წირი მოცემული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

$\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული $\frac{d\vec{r}}{dt}$ წირის მხებ ვექტორს განსაზღვრავს.

ვთქვათ, t პარამეტრი შეიცვალა $s=\varphi(t)$ ისე, რომ $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t) > 0$.

ვნახოთ, მხები ვექტორი როგორ შეიცვლება.

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

ამ ვექტორის სკალარული კვადრატი გვაძლევს

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

საიდანაც

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| : \frac{ds}{dt}. \qquad (*)$$

გამოდის, რომ ვექტორს მიმართულება არ შეუცვლია, მისი მოდული კი გაიყო $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t)$-ზე.

პარამეტრის შესაფერისი შერჩევით მოდული მიიყვანება ერთზე. ისეთ s პარამეტრს, რომლისთვისაც $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ვექტორის სიგრძე $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$, უწოდებენ ბუნებრივს, ნატურალურს.

მაშინ მხები ვექტორი ხდება ერთეულოვანი

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T},$$

ხოლო

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

და

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt.$$

s(t) ფუნქციას მარტივი გეომეტრიული ახსნა აქვს. როგორც მათემატიკური ანალიზიდანაა ცნობილი, იგი წირის რკალის სიგრძეს გამოსახავს. მაშ, ბუნებრივი პარამეტრი რკალის სიგრძე ყოფილა.

(*) ტოლობის კვადრატში ამაღლება გვაძლევს:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2,$$

ან, რაც იგივეა,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

აქედან ვიღებთ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad -$$

წირის **წირით ელემენტს**.

2. **ფრენეს ფორმულები.** განვიხილოთ წირი მოცემული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(s),$$

სადაც s ბუნებრივი პარამეტრია. ვიგულისხმოთ, რომ ის ეკუთვნის C^3 კლასს მაინც.

წირის M წერტილს დავუკავშიროთ ფრენეს რეპერი $R_M = \{M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ და შევისწავლოთ მისი მოძრაობა.

ამისათვის ვექტორები $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{T}}{ds}, \frac{d\vec{N}}{ds}, \frac{d\vec{B}}{ds}$ გამოვსახოთ $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ვექტორების საშუალებით.

რაც შეეხება $\frac{d\vec{r}}{ds}$ ვექტორს, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}. \tag{1}$$

გადავიდეთ $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ვექტორზე. (1) ტოლობის გათვალისწინებით

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

როგორც რადიუს-ვექტორის მეორე რიგის წარმოებული, იგი უნდა მდებარეობდეს წირის მიმხებ სიბრტყეში. მეორე მხრივ, $\vec{T}$ მხების მგეზავია, ამიტომ

$$\vec{T}^2 = 1.$$

ამ ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0.$$

ე. ი. $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ვექტორი $\vec{T}$ ვექტორის მართობია (საზოგადოდ, მუდმივ სიგრძიანი ვექტორის წარმოებული აღებული ვექტორის მართობია) და უნდა მდებარეობდეს ნორმალ სიბრტყეში. გამოდის, რომ იგი კოლინეარულია მთავარი ნორმალის მგეზავის

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k \cdot \vec{N}. \qquad (2)$$

k კოეფიციენტს **წირის სიმრუდეს** უწოდებენ.

რამდენადაც $\vec{N}$ მთავარი ნორმალის მგეზავეია, ამიტომ $\frac{d\vec{N}}{ds}$ ვექტორი მართობი იქნება $\vec{N}$-ის და უნდა მდებარეობდეს გამწრფევ სიბრტყეში. ე. ი.

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \alpha\vec{T} + \chi\vec{B}. \qquad (3)$$

ვიპოვოთ დაშლის კოეფიციენტები. გავაწარმოოთ ტოლობა

$$\vec{T} \cdot \vec{N} = 0.$$

მივიღებთ

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\vec{N} + \vec{T}\frac{d\vec{N}}{ds} = 0.$$

(2) და (3) ტოლობის გამოყენება მოგვცემს:

$$k\vec{N}^2 + \alpha\vec{T}^2 + \chi\vec{T}\vec{B} = 0,$$

საიდანაც ვიღებთ

$$k + \alpha = 0, \text{ ე. ი. } \alpha = -k$$

და (3) ასე გადაიწერება

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -k\vec{T} + \chi\vec{B}. \qquad (4)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ $\frac{d\vec{B}}{ds}$-ის დაშლა, გავაწარმოოთ $\vec{B} = [\vec{T}, \vec{N}]$ ტოლობა, გვექნება:

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=\left[\frac{d\vec{T}}{ds},\vec{N}\right]+\left[\vec{T},\frac{d\vec{N}}{ds}\right]=[k\vec{N},\vec{N}]+[\vec{T},-k\vec{T}+\chi\vec{B}]=-\chi\vec{N}\ ,$$

ე. ი.

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\chi\vec{N} \tag{5}$$

კოეფიციენტ χ-ს **წ ი რ ი ს გ რ ე ხ ა ს** უწოდებენ.

საბოლოოდ, მივიღეთ ფრენეს შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{ds}&=\vec{T},\\
\frac{d\vec{T}}{ds}&=k\vec{N},\\
\frac{d\vec{N}}{ds}&=-k\vec{T}+\chi\vec{B},\\
\frac{d\vec{B}}{ds}&=-\chi\vec{N},
\end{aligned} \tag{6}$$

რომლებიც წირთა თეორიის ძირითად ფორმულებს წარმოადგენს შევნიშნავთ, რომ ზოგჯერ ფრენეს ფორმულებად ბოლო სამი აიღე ბა.

მიღებულ ფორმულებში გარდა $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ მგეზავებისა, შედის ორი სკალარი – k და χ, რომელთაც **ს ი მ რ უ დ ე** და **გ რ ე ხ ა** ეწ წოდეთ. გადავიდეთ მათ დახასიათებაზე.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ წირის სიმრუდე ყოველთვის დადებითია მართლაც, გვაქვს

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{T}}{ds}=k\vec{N}=k[\vec{B},\vec{T}]=k\left[\vec{B},\frac{d\vec{r}}{ds}\right].$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ სკალარულად $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$-ზე, მივიღებთ:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2 = k\left(\vec{B}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) = k\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\vec{B} = k\left\|\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\right\|.$$

აქედან კი ჩანს, რომ $k > 0$. უკანასკნელის გათვალისწინებით, (2) ფორმულიდან ვიღებთ

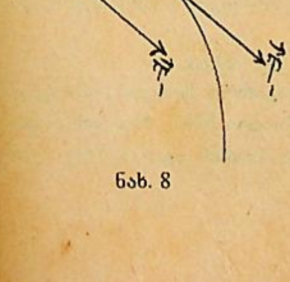
$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = k, \tag{7}$$

ე. ი. წირის მხების მგეზავის რკალით წარმოებულის სიგრძე წირის სიმრუდის ტოლია.

(5) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right| = \pm\chi. \tag{8}$$

წირის ბინორმალის რკალით წარმოებულის სიგრძე მხოლოდ ნიშნით შეიძლება განსხვავდებოდეს გრეხისაგან.



ნახ. 8

3. გავარკვიოთ **სიმრუდისა და გრეხის გეომეტრიული არსი**. წირზე $\vec{r} = \vec{r}(s)$, ავიღოთ ორი M და M_1 წერტილი, რომლებიც ეთანადება პარამეტრის s და $s + \Delta s$ მნიშვნელობას. ამ წერტილში გავატაროთ მხების მგეზავები $\vec{T}(s)$ და $\vec{T}_1 = \vec{T}(s+\Delta s)$. გადავიტანოთ $\vec{T}_1$ M წერტილში და კუთხე $\vec{T}$ და $\vec{T}_1$ შორის ალ-

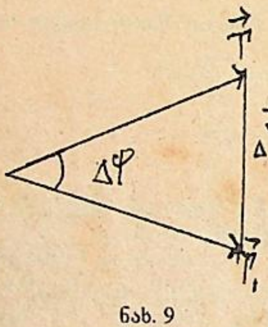
ვნიშნოთ $\Delta\varphi$, ხოლო M და M_1 წერტილებს შორის რკალის სიგრძე იყოს $|\Delta s|$.

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$|\Delta\vec{T}| = |\vec{T}(s+\Delta s) - \vec{T}(s)| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

განვიხილოთ

$$\left|\frac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}\right| = \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}.$$



ნახ. 9

როცა $\Delta s \to 0$, მაშინ $\Delta\varphi \to 0$ ($\vec{T}(s)$-ის უწყვეტობის გამო), ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლისას და (7) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}.$$

მაშასადამე, წირის M წერტილში და მის მეზობელ M_1 წერტილში გავლებულ მხებთა შორის კუთხისა და შესაბამისი რკალის სიგრძის შეფარდების ზღვარი, როცა მეზობელი M_1 წერტილი აღებულ M წერტილისაკენ მიისწრაფვის, არის წირის სიმრუდე M წერტილში.

ახლა გრეხას მივცეთ გეომეტრიული ახსნა.

წირის M და M_1 წერტილზე გავატაროთ მიმხები სიბრტყეები. კუთხე მათ შორის აღვნიშნოთ $\Delta\theta$, ხოლო MM_1 რკალის სიგრძე იყოს $|\Delta s|$. კუთხე მიმხებ სიბრტყეებს შორის იგივეა, რაც კუთხე ბინორმალებს შორის.

ანალოგიურად წინა შემთხვევისა (როცა მხებთა მგეზავები განვიხილეთ), გვექნება, რომ

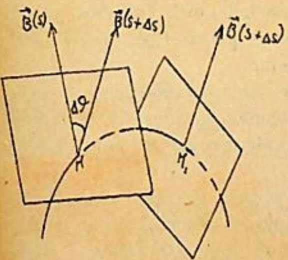
$$|\Delta\vec{B}|=|\vec{B}(s+\Delta s)-\vec{B}(s)|=2\sin\frac{\Delta\theta}{2},$$

ხოლო

$$\left|\frac{\Delta\vec{B}}{\Delta s}\right|=\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $M_1 \to M$ და გავითვალისწინებთ (8) ფორმულას, მივიღებთ

$$|\chi|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$



ნახ. 10

ე. ი. წირის M წერტილში გრეხის აბსოლუტური მნიშვნელობა ეს არის წირის M და მეზობელ M_1 წერტილში გავლებულ მიმხებ სიბრტყეთა შორის კუთხისა და შესაბამისი რკალის სიგრძის შეფარდების ზღვარი, როცა მეზობელი M_1 წერტილი მიისწრაფვის M წერტილისაკენ.

§6. ინვარიანტული ფორმულები

თუ წირის განტოლება ბუნებრივი პარამეტრით არის მოცემული

$$\vec{r} = \vec{r}(s),$$

მაშინ ფრენეს რეპერის მგეზავები $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, სიმრუდე k და გრეხა χ მარტივად არის დაკავშირებული წირის მიმდინარე წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებულებთან. სახელდობრ

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{N} = \frac{1}{k}\frac{d\vec{T}}{ds}, \quad \vec{B} = [\vec{T}, \vec{N}], \quad k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|, \quad \chi = -\vec{N}\frac{d\vec{B}}{ds}.$$

მაგრამ ამ ფორმულების გამოყენება რთულდება, თუ წირი ნებისმიერი პარამეტრით არის განსაზღვრული. ამიტომ სასურველია, რომ სიმრუდე, გრეხა, მგეზავები $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ გამოვსახოთ რადიუს-ვექტორის წარმოებულებით იმავე პარამეტრის მიმართ. ეს შეიძლებოდა პირდაპირ ფორმულების გარდაქმნით მიგვეღო, მაგრამ ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი მოსაზრებით:

ყოველი გეომეტრიული ცნება, რომელიც განსახილველ ნაკვეთთან არის დაკავშირებული, იმით გამოირჩევა სხვებისაგან, რომ იგი მთლიანად ნაკვეთით არის განსაზღვრული და არ არის დამოკიდებული მის მოცემის წესზე.

შებრუნებით, ნაკვეთთან დაკავშირებული ყოველი „ინვარიანტული ცნება" ე. ი. ისეთი, რომელიც ნაკვეთით არის განსაზღვრული და არ არის დამოკიდებული ამ ნაკვეთის მოცემის წესზე — არის გეომეტრიული.

გეომეტრიულ ცნებათა ეს ინვარიანტობა საშუალებას გვაძლევს მათემატიკური მეთოდები გამოვიყენოთ იმისათვის, რომ გამოვყოთ ის ცნებები და სიდიდეები, რომელთაც გეომეტრიული აზრი აქვთ იმათგან, რომელთაც არა აქვთ ასეთი აზრი და კოორდინატთა სისტემის შემთხვევით არჩევაზე ან ექსპერიმენტის პირობებზე დამოკიდებულია (როცა ფიზიკურ არსზეა ლაპარაკი). აქვე საშუალებას იძლევა განსახილველი ნაკვეთისათვის ავაგოთ

ახალი გეომეტრიული სიდიდეები და ცნებები, ხოლო შემდეგ მოვუძებნოთ მათ გეომეტრიული არსი.

განვიხილოთ წირი მოცემული განტოლებით

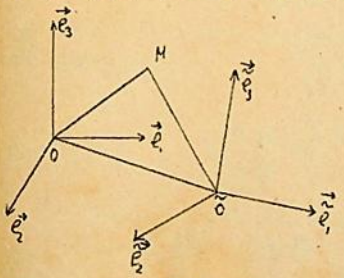
$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1}$$

ან, რაც ეკვივალენტურია განტოლებების:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

გეომეტრიისათვის საინტერესოა წირის ის თვისებები, რომელნიც არც კოორდინატთა სისტემაზეა დამოკიდებული და არც პარამეტრის შერჩევაზე.

ვთქვათ, გვქონდა კოორდინატთა $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ სისტემა და იგი შეიცვალა $\widetilde{R} = \{\widetilde{O}, \vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2, \vec{\tilde{e}}_3\}$.



ნახ. 11

ნაკვთის ნებისმიერი M წერტილის რადიუს-ვექტორი ახალი სისტემის მიმართ

$$\overrightarrow{\widetilde{O}M} = \overrightarrow{\widetilde{O}O} + \overrightarrow{OM}$$

მუდმივი $\overrightarrow{\widetilde{O}O}$ ვექტორით განსხვავდება $\overrightarrow{OM}$ ვექტორისაგან. ამიტომ წარმოებულები

$$\left(\overrightarrow{\widetilde{O}M}\right)' = \left(\overrightarrow{OM}\right)'.$$

გამოდის, რომ წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებული ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის შეცვლის მიმართ. იგივე თვისება ექნება მაღალი რიგის $\vec{r}'', \vec{r}''', \ldots$ წარმოებულებსაც. ასევე კოორდინატთა სისტემის შეცვლის მიმართ ინვარიანტული იქნება მათი სკალარული, ვექტორული, შერეული ნამრავლები და ა. შ.

ჩვენ წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებულებისაგან შე-ვადგენთ სხვადასხვა კომბინაციებს და იქიდან ავირჩევთ ისეთს, რომელიც პარამეტრის შეცვლაზე არ იქნება დამოკიდებული. ამ გზით ჩვენ მივიღებთ ჩვენთვის ცნობილ სიდიდეებსაც, რომლებიც გამოსახული იქნება ნებისმიერი პარამეტრის მიმართ.

დავუბრუნდეთ განსახილველ წირს, რომელიც მოცემულია (1) განტოლებით. ვთქვათ, პარამეტრი შეიცვალა

$$t = \varphi(t_1).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\dfrac{dt}{dt_1} > 0$, ე. ი. t პარამეტრის ზრდასთან ერთად t_1-იც იზრდება.

თანამიმდევრობით გამოვთვალოთ ვექტორ-ფუნქციის წარმო-ებულები t_1 პარამეტრის მიმართ. გვექნება:

$$\frac{d\bar{r}}{dt_1} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{dt_1}, \tag{2}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt_1^{\,2}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2t}{dt_1^{\,2}}, \tag{3}$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt_1^{\,3}} = \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3 + 3\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\frac{dt}{dt_1}\frac{d^2t}{dt_1^{\,2}} + \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^3\bar{r}}{dt_1^{\,3}}, \tag{4}$$

. . . .

ამ ფორმულების გამოყენებით თუ შევადგენთ გამოსახულე-ბებს, რომლებიც არ იქნება დამოკიდებული პარამეტრის შეცვლა-ზე, მივიღებთ ინვარიანტებს.

ინვარიანტს უწოდებენ m რიგისას, თუ მის გამოსახულებაში უმაღლესი რიგის წარმოებული არის m რიგის.

(2) ტოლობიდან ვიღებთ

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt_1}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \frac{dt}{dt_1}, \qquad (5)$$

ხოლო (2)-ის (5)-ზე შეფარდება გვაძლევს

$$\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt_1}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt_1}\right|} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|}.$$

როგორც ხედავთ, $\dfrac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|}$ ვექტორი ინვარიანტულია, მისი გეომეტრიული არსის გასარკვევად პარამეტრად ავიღოთ ბუნებრივი s პარამეტრი, გვექნება

$$\frac{\dfrac{d\vec{r}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|} = \vec{T},$$

ე. ი. მიღებული პირველი რიგის ინვარიანტული ვექტორი მხების მგეზავია და მისი გამოსახვა ნებისმიერი t პარამეტრის მიმართ ასეთია:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}. \qquad (6)$$

განვიხილოთ ახლა ვექტორული ნამრავლი $\left[\dfrac{d\vec{r}}{dt_1}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dt_1^{\,2}}\right]$. (2) და (3) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1}, \frac{d^2\vec{r}}{dt_1^{\,2}}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3,$$

ხოლო ამ ვექტორული ნამრავლის სიგრძისათვის გვექნება:

$$\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^{\,2}}\right]\right|=\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3.$$

მათი შეფარდება კი გვაძლევს

$$\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^{\,2}}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^{\,2}}\right]\right|}=\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}$$

ინვარიანტს. აქაც, მისი გეომეტრიული არსის გასაგებად პარამ-
რად ავილოთ ბუნებრივი s პარამეტრი. მივიღებთ:

$$\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\right|}=\frac{[\vec{T},k\vec{N}]}{|[\vec{T},k\vec{N}]|}=\vec{B}.$$

განხილული მეორე რიგის ინვარიანტი ბინორმალის მგეზა-
და მის გამოსათვლელად კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემ-
გვექნება

$$\vec{B}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}.$$

$\vec{B}$ და $\vec{T}$ მგეზავების ვექტორული ნამრავლი მოგვცემს კი-
ერთ მეორე რიგის ინვარიანტულ ვექტორს $\vec{N}=[\vec{B},\vec{T}]$, მთავ-
ნორმალის მგეზავს, რომელიც ნებისმიერი t პარამეტრის საშუა-
ბით ასე გამოისახება

$$\vec{N}=\frac{[[\vec{r}',\vec{r}''],\vec{r}']}{|[\vec{r}',\vec{r}'']|\cdot|\vec{r}'|}.$$

მოვძებნოთ ახლა სკალარული ინვარიანტები. განვიხილოთ შეფარდება:

$$\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt_1}\right|^3}=\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}.$$

როგორც ჩანს, ეს შეფარდებაც ინვარიანტულია, მისი გეომეტრიული მნიშვნელობის მოსაძებნად გადავიდეთ კვლავ s პარამეტრზე. გვექნება:

$$\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|^3}=\frac{|[\vec{T},k\vec{N}]|}{|\vec{T}|^3}=k|\vec{B}|=k\,.$$

სიმრუდე k ყოფილა მეორე რიგის ინვარიანტი და მისი გამოსახვა ნებისმიერი პარამეტრის მიმართ ასეთია

$$k=\frac{|[\vec{r}\,',\vec{r}\,'']|}{|\vec{r}\,'|^3}. \tag{9}$$

ასევე დავრწმუნდებით, რომ შეფარდება $\dfrac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt_1^3}\right)}{\left[\frac{d\vec{r}}{dt_1},\frac{d^2\vec{r}}{dt_1^2}\right]^2}$ გვაძლევს მესამე რიგის ინვარიანტს.

თუ პარამეტრად ბუნებრივ s პარამეტრს ავილებთ, გვექნება:

$$\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)}{\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]^2}=\frac{\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left[\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]^2}=\frac{k\vec{B}(\frac{dk}{ds}\vec{N}+k(-k\vec{T}+\chi\vec{B}))}{k^2\vec{B}^2}=\chi\,.$$

მივიღებთ, რომ წირის გრეხა მესამე რიგის სკალარული ინ-
რიანტია. გრეხის გამოსათვლელ ფორმულას ნებისმიერი პარ-
მეტრის მიმართ ექნება შემდეგი სახე:

$$\chi = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{[\vec{r}', \vec{r}'']^2}. \quad ($$

§7. წირის ბუნებრივი განტოლებანი

განვიხილოთ წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(s),$$

სადაც s ბუნებრივი პარამეტრია. ვიგულისხმოთ, რომ წირი ეკუ-
ვნის C^k კლასს, სადაც $k \geq 3$.

ფრენეს ფორმულების გამოყენებით ადვილად შეიძლება რ-
დიუს-ვექტორის ნაზრდის განსაზღვრა ბუნებრივი სისტემის მ-
მართ. როგორც ცნობილია, რადიუს-ვექტორის ნაზრდის ტეილ-
რის მწკრივად დაშლის ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$\Delta\vec{r} = \Delta s \vec{r}'(s) + \frac{\Delta s^2}{2!}\vec{r}''(s) + \frac{\Delta s^3}{3!}\vec{r}'''(s) + \cdots ,$$

მაგრამ

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}, \quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\vec{N} + k(-k\vec{T} + \chi\vec{B}), \cdots$$

და ა. შ. რადიუს-ვექტორის ნებისმიერი რიგის წარმოებული შ-
ვიძლია დავშალოთ $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ვექტორების მიმართ. ამის გათვალ-
წინებით გვექნება

$$\Delta\vec{r} = \Delta s\vec{T} + \frac{\Delta s^2}{2!}k\vec{N} + \frac{\Delta s^3}{3!}(k'\vec{N} - k^2\vec{T} + k\chi\vec{B}) + \cdots ,$$

ან

$$\Delta\vec{r}=\left(\Delta s-\frac{\Delta s^3}{3!}k^2+\cdots\right)\vec{T}+\left(\frac{\Delta s^2}{2!}k+\frac{\Delta s^3}{3!}k'+\cdots\right)\vec{N}+$$

$$+\left(\frac{\Delta s^3}{3!}k\chi+\cdots\right)\vec{B}.$$

თუ დეკარტეს საკოორდინატო სისტემას ავიღებთ წირის M წერტილში და მხებს, მთავარ ნორმალს, ბინორმალს მივიღებთ დეკარტეს საკოორდინატო სისტემის OX, OY, OZ ღერძებად, მივიღებთ წირის განტოლებას ბუნებრივი სისტემის მიმართ:

$$x=\Delta s-\frac{\Delta s^3}{3!}k^2+\cdots$$

$$y=\frac{\Delta s^2}{2!}k+\frac{\Delta s^3}{3!}k'+\cdots$$

$$z=\frac{\Delta s^3}{3!}k\chi+\cdots$$

როგორც ჩანს, ვექტორ-ფუნქციის Δs-ის ხარისხებად დაშლის კოეფიციენტები გამოისახება მხოლოდ წირის სიმრუდისა და გრეხის საშუალებით. ეს გვაძლევს საფუძველს ვიფიქროთ, რომ სიმრუდე და გრეხა გარკვეულნაირად განსაზღვრავს წირს. სახელდობრ, ადგილი აქვს შემდეგ **თეორემას:**

ვთქვათ, $f(s)$ და $g(s)$ რაიმე $[s_1,s_2]$ მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქციებია და ამასთან $f(s)>0$ ამავე მონაკვეთზე, მაშინ არსებობს მდებარეობამდე სიზუსტით ერთადერთი წირი, რომლისთვისაც $f(s)$ იქნება სიმრუდე, ხოლო $g(s)$ გრეხა წერტილში, რომელიც ეთანადება s რკალს.

დამტკიცება: თუ ასეთი წირი არსებობს, რომლისთვისაც $f(s)$ სიმრუდეა და $g(s)$ გრეხა, მაშინ ამ წირის მხების მგეზავი $\vec{T}(s)$, მთავარი ნორმალის მგეზავი $\vec{N}(s)$ და ბინორმალის მგეზავი $\vec{B}(s)$, ფრენეს ფორმულების ძალით, აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\vec{T}'(s) = f(s)\vec{N}(s),$$
$$\vec{N}'(s) = -f(s)\vec{T}(s) + g(s)\vec{B}, \qquad (1$$
$$\vec{B}'(s) = -g(s)\vec{N}(s).$$

ამიტომ ბუნებრივია, ჩვენთვის საინტერესო წირის მოსაძებ-
ნად მივმართოთ ამ სისტემის ამოხსნებს.

ეს სისტემა მატრიცული სახით ასე შეიძლება გადაიწეროს

$$X'(s) = A(s)X(s), \qquad (2$$

სადაც

$$A(s) = \begin{Vmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (3$$

ხოლო X არის $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ვექტორების მდგენელებისაგან შედგენილ-
მატრიცი.

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის არსებო-
ბისა და ერთადერთობის ძალით, დიფერენციალურ (2) განტოლე-
ბათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$X(s) = (\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)), \qquad (4$$

რომელიც, როცა $s = s_0$, $X(s_0) = (\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0)$, სადაც $\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0$
ვექტორები ორთონორმირებულ ბაზისს ქმნის. ვიგულისხმოთ, რომ
შერეული ნამრავლი

$$(\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0) = 1. \qquad (5$$

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი s-სთვის ვექტორები $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$
ორთონორმირებულია. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ
$X(s)$ მატრიცი ორთოგონალურია, ე. ი. რომ

$$X(s)^t X(s) = E.$$

აქ $X(s)^t$ არის $X(s)$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცი, ხოლო E ერთეულოვანი მატრიცი.

განვიხილოთ წარმოებული

$$\frac{d}{ds}\left(X(s)^t X(s)\right) = \left(\frac{d}{ds} X(s)^t\right) X(s) + X(s)^t \frac{d}{ds} X(s).$$

თუ გავითვალისწინებთ (2) და მის საფუძველზე, რომ $\frac{d}{ds} X(s)^t = X(s)^t A(s)^t$, მივიღებთ:

$$\frac{d}{ds}\left(X(s)^t X(s)\right) = X(s)^t A(s)^t X(s) + X(s)^t A(s) X(s) =$$
$$= X(s)^t \left(A(s)^t + A(s)\right) X(s) = 0,$$

რადგან $A(s)$ მატრიცი ანტისიმეტრიულია: $A(s)^t = -A(s)$. გამოდის, რომ მატრიცი $X(s)^t X(s)$ მუდმივია, მაგრამ როცა $s = s_0$, ეს მატრიცი ერთეულოვანია, რადგან $\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0$ ორთონორმირებული ვექტორებია, ამიტომ საზოგადოდ $X(s)^t X(s) = E$, ე. ი. ნებისმიერი s-თვის $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ ორთონორმირებულია. ამასთან, რადგანაც $(\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0) = 1$, როცა $s = s_0$, ხოლო $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ შერეული ნამრავლი s-ის მიმართ უწყვეტია, ამიტომ იგი ტოლი იქნება ერთისა ნებისმიერი s-თვის.

გადავიდეთ წირის მოძებნაზე.

განვიხილოთ წირი განსაზღვრული

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + \int_{s_0}^{s} \vec{T}(s) ds \qquad (6)$$

ვექტორ-ფუნქციით, სადაც $\vec{r}_0$ არის M_0 წერტილის რადიუს-ვექტორი, ხოლო $\vec{T}(s)$ – (1) სისტემის ამონახსნია.

ჩვენ ჯერჯერობით არ ვიცით აღებული s პარამეტრი იქნება თუ არა ბუნებრივი, ან როგორია ამ წირის სიმრუდე და გრეხა.

(6) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{T}(s)$. რამდენადაც $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\left|\vec{T}(s)\right|=1$, ამიტომ s ბუნებრივი პარამეტრია. ვიპოვოთ (6)-ით განსაზღვრული წირის სიმრუდე და გრეხა. გვექნება, სიმრუდე

$$k(s)=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=|f(s)|=f(s),$$

ხოლო გრეხა

$$\chi(s)=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{[\vec{r}',\vec{r}'']^2}=\frac{f^2g\ (\vec{T},\vec{N},\vec{B})}{f^2}=g(s).$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{d}{ds}(f\vec{N})=f'\vec{N}+f(-f\vec{T}+g\vec{B})=-f^2\vec{T}+f'\vec{N}+fg\vec{B}.$$

მაშასადამე, (6) ფორმულით განსაზღვრული წირისათვის f(s) იქნება სიმრუდე, ხოლო g(s) – გრეხა წერტილში, რომელიც ეთანადება s პარამეტრს. ამგვარად, წირის არსებობა დამტკიცებულია.

ახლა ვაჩვენოთ ერთადერთობა.

ვთქვათ, ორი γ_1 და γ_2 ისეთი წირებია, რომ s-ის შესაბამის წერტილებში აქვთ ერთნაირი სიმრუდე და გრეხა. პარამეტრის $s=s_0$ მნიშვნელობას, ვთქვათ γ_1 წირზე, ეთანადება M_0 წერტილი, ხოლო γ_2-ზე – $\widetilde{M}_0$. გადმოვიტანოთ γ_1 წირი, როგორც მყარი სხეული ისე, რომ M_0 წერტილი შეუთავსდეს γ_2 წირის $\widetilde{M}_0$ წერტილს. შემდეგ γ_1 შემოვაბრუნოთ M_0 წერტილის გარშემო ისე, რომ მოძრავი სამღერძი ამ წერტილში ერთმანეთს დაემთხვეს. ეს ცხადია მოხდება, რადგან ორივე სამღერძი ერთი ორიენტაციისაა.

და ურთიერთმართობი ერთეულოვანი ვექტორებისაგან შედგება. ვაჩვენოთ, რომ ასეთი მოძრაობისას მთლიანად γ_1 წირი დაემთხვევა γ_2 წირს. იყოს $\vec{T}_1(s), \vec{N}_1(s), \vec{B}_1(s)$ და $\vec{T}_2(s), \vec{N}_2(s), \vec{B}_2(s)$ აღებული წირების ფრენეს რეპერის მგეზავები. ისინი წარმოადგენენ ერთი და იმავე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს, რომელთა საწყისი მნიშვნელობები ემთხვევა. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების ერთადერთობის თეორემით ეს ამონახსნები იგივურად უნდა ემთხვეოდეს. კერძოდ $\vec{T}_1(s) = \vec{T}_2(s)$, ან რაც იგივეა $\vec{r}_1'(s) = \vec{r}_2'(s)$. უკანასკნელის ინტეგრება $s_0 s$ საზღვრებში გვაძლევს $\vec{r}_1(s) = \vec{r}_2(s)$. γ_1 წირი შესაბამისი გადაადგილებით დაემთხვა γ_2 წირს, ამიტომ γ_2 წირი მხოლოდ მდებარეობით შეიძლება განსხვავდებოდეს γ_1 წირისაგან.

ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

ტოლობებს

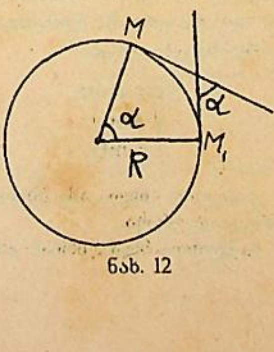
$$k = k(s), \qquad \chi = \chi(s)$$

წირის ბუნებრივი განტოლებები ეწოდება.

დამტკიცებული თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბუნებრივი განტოლებები წირს განსაზღვრავენ მდებარეობამდე სიზუსტით.

ეს არის წირთა თეორიის ძირითადი თეორემა.

მაგალითები: განვიხილოთ ზოგიერთი წირის სიმრუდე და გრეხა.



ნახ. 12

1) ავიღოთ წრფე. როგორი იქნება მისი სიმრუდე? წრფის მხები ყოველ წერტილში დაემთხვევა აღებულ წრფეს და ე. ი. კუთხე მხებებს შორის ნულის ტოლია, რის შედეგადაც მისი სიმრუდე იქნება ნული. ადვილი საჩვენებელია, რომ ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც: თუ სიმრუდე წირის ყოველ წერტილში ნულია, ასეთი

წირია წრფე.

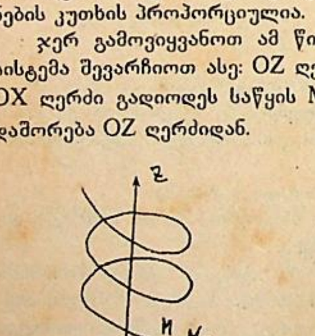
2) განვიხილოთ წრეწირი, რომლის რადიუსია R. გამოვითვალოთ წრეწირის სიმრუდე. ავიღოთ წრეწირზე ორი მეზობელი M და M_1 წერტილი და მათზე გავავლოთ მხებები. კუთხე ამ მხებებს შორის იყოს α, ხოლო MM_1 რკალის სიგრძე – $|\Delta s|$. როგორც ცნობილია $|\Delta s| = R\alpha$, ამიტომ

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}.$$

მაშ, წრეწირის სიმრუდე მისი რადიუსის შებრუნებულია.

3) განვიხილოთ მუდმივსიმრუდიანი და მუდმივგრეხიანი წირი. ვაჩვენოთ, რომ ასეთია ხრახნწირი. **ხრახნწირს** უწოდებენ წირს, რომელსაც შემოწერს მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილი, როცა ეს სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო და თან სრიალებს ამ ღერძის გასწვრივ ისე, რომ გადაადგილება მობრუნების კუთხის პროპორციულია.

ჯერ გამოვიყვანოთ ამ წირის განტოლება. საკოორდინატო სისტემა შევარჩიოთ ასე: OZ ღერძი იყოს ბრუნვის ღერძი, ხოლო OX ღერძი გადიოდეს საწყის M_0 წერტილში. იყოს a წერტილის დაშორება OZ ღერძიდან.



ნახ. 13

ვთქვათ, სხეული t კუთხით შემობრუნდა და ერთდროულად გასრიალდა OZ ღერძის გასწვრივ. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები იქნება:

$$x = a\cos t,$$
$$y = a\sin t,$$
$$z = mt.$$

ვიპოვოთ ახლა ამ წირის სიმრუდე და გრეხა.

ჩავწეროთ ახლა წირის გან-

ტოლება ვექტორული სახით, გვექნება:

$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, mt).$$

გამოვთვალოთ $\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''', [\vec{r}', \vec{r}''], |\vec{r}'|, |[\vec{r}', \vec{r}'']|, (\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$. მივიღებთ:

$$\vec{r}' = (-a\sin t, a\cos t, m),$$
$$\vec{r}'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$
$$\vec{r}''' = (a\sin t, -a\cos t, 0),$$
$$[\vec{r}', \vec{r}''] = (am\sin t, -ma\cos t, a^2),$$
$$|[\vec{r}', \vec{r}'']| = \sqrt{a^2m^2\sin^2 t + a^2m^2\cos^2 t + a^4} = a\sqrt{a^2 + m^2},$$
$$|\vec{r}'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + m^2} = \sqrt{a^2 + m^2},$$
$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = [\vec{r}', \vec{r}'']\vec{r}''' = a^2m\sin^2 t + a^2m\cos^2 t = a^2m.$$

ხრახნწირის სიმრუდე

$$k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + m^2}}{\left(\sqrt{a^2 + m^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2 + m^2}$$

მუდმივია.

გრეხა

$$\chi = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{[\vec{r}', \vec{r}'']^2} = \frac{a^2m}{a^2(a^2 + m^2)} = \frac{m}{a^2 + m^2}$$

ასევე მუდმივია.

მივიღეთ, რომ ხრახნწირი მუდმივსიმრუდიანი და მუდმივგრეხიანი წირია.

§8. ბრტყელი წირები

ვთქვათ,

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

განტოლებით განსაზღვრული წირი ბრტყელია, ე. ი. მისი ყველა წერტილი მოთავსებულია ერთ სიბრტყეში. ვიგულისხმოთ, რომ წირის ყოველ წერტილში სიმრუდე $k \neq 0$.

ბრტყელი წირის მიმხები სიბრტყე (როგორც მიმხები სიბრტყის განმარტებიდან ჩანს) დაემთხვევა თვით წირის სიბრტყეს წირის ყოველ წერტილში. ამიტომ მთავარი ნორმალიც ამ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული, ხოლო ბინორმალი – წირის სიბრტყის მართობი. ბინორმალის მგეზავი წირის ყოველ წერტილში იქნება ერთი და იგივე, ამიტომ

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; \chi = 0 .$$

ბრტყელი წირის გრეხა წირის ყოველ წერტილში ნულია.

შებრუნებით, თუ წირის ყოველ წერტილში გრეხა ნულია – წირი ბრტყელია. მართლაც, ფრენეს უკანასკნელი ფორმულიდან ვიღებთ:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \text{ და } \vec{B} = \vec{b} ,$$

სადაც $\vec{b}$ მგეზავი აღარ არის დამოკიდებული s-ზე. ბინორმალის მგეზავი მართობია მხების მგეზავის, ამიტომ

$$\vec{b}\vec{T} = 0 \text{, ან, რაც იგივეა, } \vec{b}\frac{d\vec{r}}{ds} = 0 .$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$\frac{d(\vec{b}\vec{r})}{ds} = 0 \text{, ე. ი. } \vec{b}\vec{r} = \text{const} . \qquad (*)$$

თუ $R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ ორთონორმირებული რეპერის მიმართ

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3,$$

მაშინ (*) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$b_1x + b_2y + b_3z = c.$$

ეს კი **სიბრტყის განტოლება**.

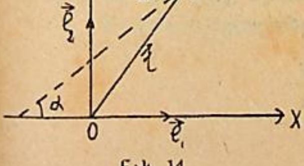
როგორც ვხედავთ, წირის ყოველი წერტილი მდებარეობს მიღებულ განტოლებით განსაზღვრულ სიბრტყეში და ამიტომ მთელი წირი ამ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული.

მივიღეთ, რომ წირი (თუკი ის წრფეზე არ არის მოთავსებული) მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ბრტყელი, როცა წირის ყოველ წერტილში გრეხა ნულის ტოლია.

ბრტყელი წირისათვის ($\chi = 0$) ფრენეს ფორმულები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}, \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -k\vec{T}.$$

ბრტყელი წირისათვის **მთავარი ნორმალი** იწოდება უბრალოდ ნორმალად (წირის მხების მართობი წრფე შეხების წერტილში). შევჩერდეთ ბრტყელი წირის სიმრუდეზე.



ნახ. 14

ვიგულისხმოთ, რომ წირი OXY სიბრტყეშია მოთავსებული.

ავიღოთ დეკარტის საკოორდინატო სისტემა, მაშინ წირის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

სადაც $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ მგეზავებია OX და OY ღერძებისა. აღვნიშნოთ

α-თი კუთხე, რომელსაც $\vec{T}$ მხების მგეზავი ადგენს $\vec{e}_1$-თან (კუთხე აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით). გვექნება:

$$\vec{T} = \cos\alpha\vec{e}_1 + \sin\alpha\vec{e}_2 .$$

ბრტყელი წირის სიმრუდისათვის მივიღებთ:

$$k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}\vec{e}_1 + \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}\vec{e}_2\right| =$$

$$= \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \cdot \left|-\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_2\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

სიმრუდე თავის განმარტებით არაუარყოფითია, მაგრამ ბრტყელი წირისათვის სიმრუდეს ნიშნით განიხილავენ და ასე განსაზღვრავენ:

$$\widetilde{k} = \frac{d\alpha}{ds} .$$

ე. ი. ბრტყელი წირის ნიშნით აღებული სიმრუდე მხების მიერ OX ღერძთან შედგენილი კუთხის რკალით წარმოებულის ტოლია. დადებითია, თუ s-ის ზრდასთან ერთად α-ც იზრდება, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში უარყოფითია.

გამოვთვალოთ ბრტყელი წირის სიმრუდე, თუ წირი პარამეტრული სახით არის მოცემული

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

წირის მიმდინარე წერტილის რადიუს-ვექტორის წარმოებული $\vec{r}'(x', y')$ განსაზღვრავს მხების მიმართულებას, ამიტომ

$$tg\alpha = \frac{y'}{x'}$$

აქედან ვიღებთ

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}, \quad d\alpha = \frac{\frac{x'y''-x''y'}{(x')^2}}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}dt = \frac{x'y''-x''y'}{(x')^2+(y')^2}dt,$$

ხოლო ბრტყელი წირისათვის

$$ds = \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

(ვგულისხმობთ, რომ s-ის ზრდასთან ერთად t-ც იზრდება).

ბრტყელი წირის სიმრუდისათვის, თუ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით, ვიღებთ

$$\widetilde{k} = \frac{x'y''-x''y'}{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}.$$

ადვილად მივიღებთ სიმრუდის გამოსათვლელ ფორმულას, თუ ბრტყელი წირი მოცემულია განტოლებით $y = f(x)$. ამისათვის საკმარისია ავიღოთ $x = t$. გვექნება $x' = 1$, $x'' = 0$ და

$$\widetilde{k} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}.$$

თუ წირი პოლარი განტოლებითაა მოცემული $\rho = \rho(\varphi)$, მაშინ

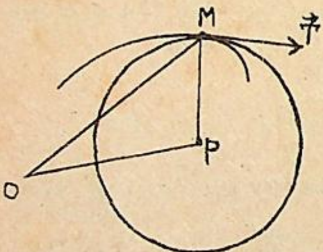
$$\widetilde{k} = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{\left[\rho^2+(\rho')^2\right]^{3/2}},$$

აჩვენეთ!

§9. სიმრუდის წრეწირი, ევოლუტი, ევოლვენტი

სიმრუდის წრეწირი წირის M წერტილში ეწოდება წრეწირს, რომელიც გადის M წერტილში. ამ წერტილში წირთან აქვს საერთო მხები და ერთნაირი სიმრუდე და მხების იმ მხარესაა მოთავსებული, საითაცაა მიმართული მთავარი ნორმალის მგეზავი.

სიმრუდის წრეწირის ცენტრს ეწოდება **წირის სიმრუდის ცენტრი**, ხოლო მის რადიუსს – **სიმრუდის რადიუსი**. რამდენადაც წრეწირის სიმრუდე მისი რადიუსის შებრუნებულია, ხოლო სიმრუდის წრეწირის სიმრუდე ტოლია წირის სიმრუდისა, გამოდის, რომ წირის სიმრუდე სიმრუდის რადიუსის შებრუნებული სიდიდეა. როცა M წერტილი წირზე გადაადგილდება, სიმრუდის ცენტრიც გადაინაცვლებს და საზოგადოდ რაღაც წირს აღწერს. ამ წირს ეწოდება მოცემული **წირის ევოლუტი**, ხოლო თვით წირს ევოლუტის მიმართ – **ევოლვენტი**.



ნახ. 15

აღვნიშნოთ წირის M წერტილის შესაბამისი სიმრუდის ცენტრი P-თი, მაშინ

$$\overrightarrow{MP} = \rho\vec{N},$$

სადაც ρ სიმრუდის რადიუსია. აქედან ვიღებთ

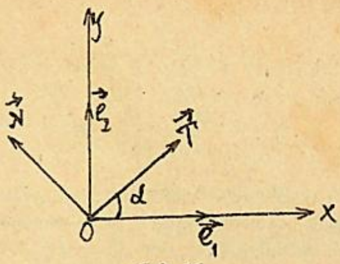
$$\vec{P} = \vec{r} + \rho\vec{N} \qquad (1)$$

ევოლუტის განტოლებას ვექტორული სახით. აქ $\vec{p}$ და $\vec{r}$ არის P და M წერტილების რადიუს-ვექტორები.

ევოლუტის პარამეტრული განტოლების მისაღებად გავითვალისწინოთ, რომ თუ

$$\vec{T} = \cos\alpha\vec{e}_1 + \sin\alpha\vec{e}_2,$$

მაშინ



ნახ. 16

$$\vec{N} = -\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha\vec{e}_2.$$

მეორე მხრივ

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right),$$

ამიტომ

$$\vec{N} = \left(-\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}, \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}\right).$$

თუ P წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ ξ, η და ზემოთქმულს გავითვალისწინებთ, (1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \xi &= x - \rho\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}, \\ \eta &= y + \rho\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}. \end{aligned} \qquad (2)$$

ან, რაც იგივეა

$$
\left.\begin{aligned}
\xi &= x-\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\,y',\\
\eta &= y+\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}\,x'.
\end{aligned}\right. \tag{2'}
$$

სადაც სიმრუდის რადიუსის გამოსახულებაა შეტანილი.

(2′) ევოლუტის პარამეტრული განტოლებებია, რომლებიც ეთანადება წირის პარამეტრულ მოცემას. თუ წირი მოცემულია $y=f(x)$ სახით, ადვილად მივიღებთ შესაბამის ევოლუტის განტოლებას:

$$
\xi = x-\frac{1+(y')^2}{y''}\,y', \quad \eta = y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{2''}
$$

აღვნიშნოთ ევოლუტის ზოგიერთი თვისება.

პარამეტრად ავიღოთ გამოსავალი წირის s რკალი. (1) განტოლება გავაწარმოოთ s-ის მიმართ. გვექნება:

$$
\frac{d\vec{p}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{ds}+\frac{d\rho}{ds}\vec{N}+\rho\frac{d\vec{N}}{ds}=\vec{T}+\frac{d\rho}{ds}\vec{N}-\rho k\vec{T}=\frac{d\rho}{ds}\vec{N}. \tag{3}
$$

ნახ. 17

$\dfrac{d\vec{p}}{ds}$ განსაზღვრავს წირის ევოლუტის მხების მიმართულებას. იგი კოლინეარულია $\vec{N}$-ისა. გამოდის, რომ ევოლუტის მხები წრფე ემთხვევა წირის ნორმალს.

(3) ტოლობიდან ვიღებთ:

$$
(d\vec{p})^2 = d\rho^2.
$$

თუ ევოლუტის რკალს აღვნიშნავთ σ, $d\sigma^2=(d\vec{p})^2$, ამიტომ გვექნება

$$d\rho^2 = d\sigma^2 . \tag{4}$$

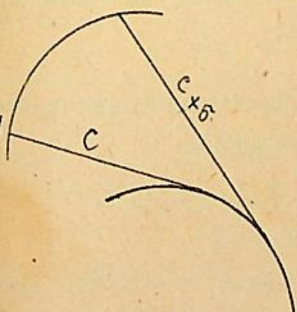
წირის აღებულ წერტილში სიმრუდის რადიუსის დიფერენციალის კვადრატი ტოლია ევოლუტის წირითი ელემენტისა M წერტილის შესაბამის P წერტილში.

თუ σ ავთვლით ρ მზარდი მიმართულებით, მივიღებთ:

$$d\rho = d\sigma \text{ და } \rho = \sigma + c. \tag{5}$$

უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს მოცემული წირის ევოლ-ვენტის აგების საშუალებას.

მოცემულ წირზე მოვჭიმოთ ღუნვადი, მაგრამ უჭიმვადი ძაფი. ძაფის ერთ მხარეს დავტოვოთ გადაუჭიმავი ნაწილი ისე; რომ და-ტოვებული ნაწილი მხების მდგომარეობაში იყოს წირის მიმართ. ძაფის დატოვებული ნაწილის სიგრძე იყოს c. მოვახდინოთ ძაფის აცილება წირიდან ისე, რომ იგი წირის მხებად რჩებოდეს ყოველ-თვის. ძაფის მოძრავი ბოლო, თანახმად (5) ფორმულისა, მოცემუ-ლი წირის ევოლვენტს აღწერს.



ნახ. 18

აღებული წირის (ევოლუ-ტის) მხებები ევოლვენტისათვის იქნება ნორმალები. ევოლვენტი წარმოგვიდგება როგორც წი-რის მხებ წრფეთა ორთოგონა-ლური ტრაექტორია (წირს ეწოდება წირთა რაიმე ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორია, თუ იგი მართი კუთხით ჰკვეთს ამ ოჯახის ყოველ წირს).

ევოლვენტის განტოლების მისაღებად (2) განტოლებიდან განვსაზღვროთ x და y და წარმოებულები x' და y' გამოვსახოთ ξ' და η'-ის საშუალებით (ვისარგებლოთ იმით, რომ ევოლუტის მხები მართობია ევოლვენტის მხებისა, ე. ი. $\frac{y'}{x'} = -\frac{\xi'}{\eta'}$), გვექნება:

$$x = \xi - \rho \frac{\xi'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}},$$

$$y = \eta - \rho \frac{\eta'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}}.$$

თუ გამოვიყენებთ (5) ფორმულასაც, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$x = \xi - (\sigma + c) \frac{\xi'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}},$$

$$y = \eta - (\sigma + c) \frac{\eta'}{\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2}} \quad (6$$

ევოლვენტის განტოლებას.

როგორც (6) განტოლებიდან ჩანს, ალებული წირისათვის გვე
ნება უსასრულოდ ბევრი ევოლვენტი.

§10. ზოგადი განტოლებით მოცემული წირის განკუთრი წერტილები

განვიხილოთ წირი მოცემული ზოგადი განტოლებით

$$F(x,y) = 0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ იგივე წირი შემდეგი პარამეტრული განტ
ლებებით შეიძლება გამოისახოს

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

თუ (2) ტოლობებს შევიტანთ (1)-ში, მივიღებთ იგივეობას, რ
მელიც სამართლიანია ნებისმიერი t-თვის.

$$F(x(t), y(t)) = 0.$$

უკანასკნელის გაწარმოება გვაძლევს:

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} = 0. \tag{4}$$

(4)-დან მხების მიმართულებას ცალსახად ვერ განვსაზღვრავთ იმ წერტილში, სადაც ერთდროულად

$$F_x(x_0,y_0) = 0, \quad F_y(x_0,y_0) = 0.$$

ასეთ (x_0,y_0) წერტილს ზოგადი განტოლებით მოცემული წირის **განსაკუთრებული** ან **განკუთრი წერტილი** ჰქვია.

ამრიგად, განკუთრი წერტილი იმით ხასიათდება, რომ

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F_x(x_0,y_0) = 0, \quad F_y(x_0,y_0) = 0. \tag{5}$$

განკუთრ წერტილს უწოდებენ ორჯერადს, თუ მეორე რიგის წარმოებულებიდან ამ წერტილზე ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. განკუთრი წერტილის ჯერადობა სამის ტოლია, თუ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები ყველა ნულია ამ წერტილზე, ხოლო მესამე რიგის წარმოებულებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ა. შ.

განკუთრი წერტილი იქნება m-ჯერადი, თუ ამ წერტილზე ნული ხდება ყველა წარმოებული m რიგამდე, ხოლო m რიგის წარმოებულებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან.

შევჩერდეთ ორჯერად განკუთრ წერტილებზე. ასეთ წერტილში მხების მიმართულება რომ განვსაზღვროთ, (4) ტოლობა კვლავ უნდა გავაწარმოოთ. გვექნება:

$$F_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2F_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + F_{yy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + F_x\frac{d^2x}{dt^2} + F_y\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

განკუთრ წერტილზე ეს განტოლება შემდეგ სახეს იღებს:

$$F_{xx}^0\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2F_{xy}^0\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + F_{yy}^0\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0, \tag{6}$$

სადაც $F^0_{xx}, F^0_{xy}, F^0_{yy}$ -ით აღნიშნულია წარმოებულების მნიშვნელობანი განკუთრ წერტილში. უკანასკნელი განტოლება ასე გადავწეროთ

$$F^0_{yy}y'^2 + 2F^0_{xy}y' + F^0_{xx} = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right). \qquad (6')$$

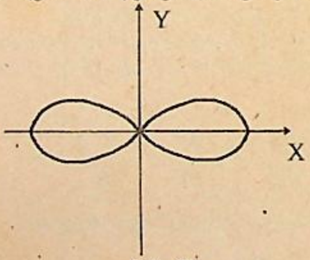
რამდენადაც განკუთრი წერტილი ორჯერადია, ამიტომ F^0_{xx}, F^0_{xy}, F^0_{yy} ყველა ერთდროულად არ უდრის ნულს და (6)-დან განისაზღვრება წირის მხების საკუთხო კოეფიციენტი განკუთრ წერტილში.

განვიხილოთ ($6'$) კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი

$$D = F^0_{xx}F^0_{yy} - (F^0_{xy})^2.$$

1. თუ $D < 0$, მაშინ აღებულ განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი და სხვადასხვა ფესვი. წირს განკუთრ წერტილში ექნება ორი სხვადასხვა მხები. ასეთ წერტილს კვანძითი ორჯერადი წერტილი ეწოდება. ამ წერტილში გაივლის წირის ორი შტო, რომელთაც სხვადასხვა მხებები ექნებათ. მაგალითად ბერნულის ლემნისკატა

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$



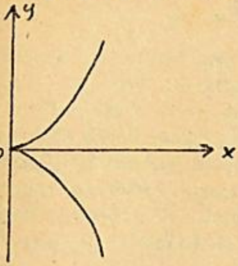
ნახ. 19

კოორდინატთა სათავე იქნება ამ წირის კვანძითი ორჯერადი წერტილი (ნახ. 19).

2. $D = 0$, (6) განტოლებას ორი ტოლი ფესვი აქვს, წირს ექნება ორი შეთავსებული მხები. აქ შესაძლებელია:

ა) წირის შტოები მხების ორივე მხარეს განლაგდეს, ვთქვათ, ნახევრად კუბური პარაბოლის შემთხვევაში $y^2 = ax^3$. ასეთ გან-

კუთრ წერტილს **პირველი გვარის უკუქცევის ორჯერადი წერტილი** ეწოდება (ნახ. 20).



ნახ. 20

ბ) მეორე გვარის უკუქცევის წერტილი. ამ შემთხვევაში წირის ორივე შტო საერთო მხების ერთ მხარესაა მოთავსებული. ასე მაგალითად,

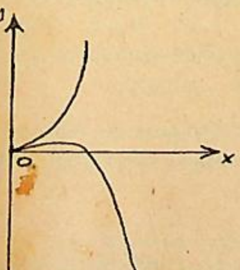
$$(y-x^2)^2 - x^5 = 0$$

წირის შემთხვევაში სათავე არის **მეორე გვარის უკუქცევის ორჯერადი წერტილი** (ნახ. 21).

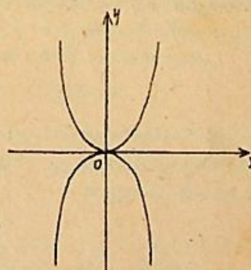
გ) თვითშეხების (თავისთავის შეხების) წერტილი. წირის ორი შტო ერთმანეთს ეხება განკუთრ წერტილში. მაგალითად:

$$y^2 - x^4 = 0$$

წირი ორი პარაბოლისაგან შედგება, რომლებიც ეხება ერთმანეთს კოორდინატთა სათავეში. კოორდინატთა სათავე (0,0) იქნება



ნახ. 21



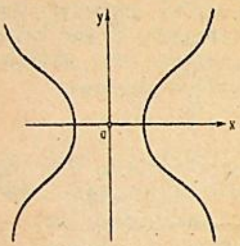
ნახ. 22

განხილული წირისათვის **თვითშეხების წერტილი** (ნახ. 22).

3. $D > 0$, (6) განტოლებას ექნება წარმოსახვითი ფესვები, წირს – ორი წარმოსახვითი მხები. ასეთ წერტილს **განმხოლოებული** ან **იზოლირებული** წერტილი ეწოდება. წირის ამ

წერტილში არც ერთი ნამდვილი შტო არ გადის. ამ წერტილის არც ერთი მეზობელი წერტილი წირზე არ მდებარეობს. მაგალითად:

$$y^2 = -4x^2 + x^4$$



ნახ. 23

წირისათვის სათავე არის განმხოლოებული წერტილი (ნახ. 23).

თუკი განკუთრი წერტილის ჯერადობა ორზე მეტია, მაშინ მხებების მიმართულებების განსასაზღვრელად გვექნება მაღალი ხარისხის განტოლება, რომლის ამოხსნითაც მივიღებთ მხებების საკუთხო კოეფიციენტებს.

§11. ბრტყელი წირის ასიმპტოტი

ზოგჯერ წირის უსასრულობაში მიმავალი შტო ისეთია, რომ იგი უსაზღვროდ უახლოვდება რაიმე წრფეს. იმისათვის, რომ წარმოდგენა ვიქონიოთ წირზე, საჭიროა ვიცოდეთ ამ წრფეების (ასიმპტოტების) მოძებნა.

განვიხილოთ წირი მოცემული პარამეტრული განტოლებით

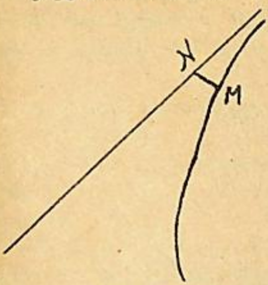
$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in (a,b), \tag{1}$$

ვთქვათ, რომ როცა $t \to a$ ($t \to b$) წირზე M წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, ე. ი. მანძილი კოორდინატთა სათავიდან უსასრულოდ იზრდება

$$x^2(t) + y^2(t) \to \infty.$$

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წირს აქვს უსასრულოდ დაშორებული შტო ერთი მიმართულებით. თუ $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$, როცა $t \to a$ და $t \to b$, მაშინ წირი ორივე მიმართულებით მიდის უსასრულობაში (აქვს უსასრულოდ დაშორებული შტო ორივე მიმართულებით).

ვიგულისხმოთ, რომ წირს აქვს უსასრულოდ დაშორებული



ნახ. 24

შტო, როცა $t \to a$. რაიმე წრფე წარმოადგენს მოცემული წირის ასიმპტოტს, თუ მანძილი წირის წერტილსა და წრფეს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $t \to a$.

როგორი იქნება პირობა იმისა, რომ წრფე

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

იყოს (1) წირის ასიმპტოტი? როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაა ცნობილი, მანძილი წერტილიდან წრფემდე გამოისახება ფორმულით

$$d(t) = \frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

თვით ასიმპტოტის განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი: (2) წრფე რომ იყოს ასიმპტოტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს მანძილი $\to 0$, როცა $t \to a$. რამდენადაც მნიშვნელში მუდმივი გვაქვს, ამიტომ ეს დადის ასეთ პირობაზე

$$Ax(t) + By(t) + C \to 0, \text{ როცა } t \to a.$$

დავუშვათ, რომ წირს აქვს ასიმპტოტი, რომელიც არ არის პარალელური OY ღერძის, ე. ი. იგი მოიცემა განტოლებით

$$y = kx + b.$$

მიღებული პირობის თანახმად, ეს წრფე რომ იყოს ასიმპტოტი, როცა $t \to a$, მაშინ უნდა

$$y(t) - kx(t) - b \to 0.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $t \to a$, მაშინ $|x(t)| \to \infty$. მართლაც, როცა M წერტილი წირზე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მაშინ რადგანაც მანძილი M და N წერტილებს შორის $\to 0$, ამიტომ N წერ-

ტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ ასიმპტოტზე, რომელიც ა
არის პარალელური OY ღერძის. ეს კი შესაძლებელია მაში
როცა N წერტილის აბსცისი $|x|\to\infty$. ამიტომ M წერტილისათვ
საც $|x(t)|\to\infty$.

(4) ტოლობას თუ გავყოფთ $x(t)$-ზე, გვექნება, რომ როცა $t\to a$

$$\frac{y(t)}{x(t)}-k-\frac{b}{x(t)}\to 0.$$

აქედან ვიღებთ

$$\frac{y(t)}{x(t)}-k\to 0\text{, ან რაც იგივეა } \lim_{t\to a}\frac{y(t)}{x(t)}=k. \qquad (5)$$

b-ს განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ კვლავ (4) ტოლობით
გვექნება:

$$y(t)-kx(t)\to b\text{, ან } b=\lim_{t\to a}(y(t)-kx(t)). \qquad (6)$$

მაშ, $y=kx+b$ განტოლებით მოცემული წრფე იქნება აღ
ბული წირის ასიმპტოტი, თუ k და b აკმაყოფილებს (5) და (6) პი
რობებს.

თუკი ასიმპტოტი OY ღერძის პარალელურია, მაშინ მისი გან
ტოლება იქნება

$$x-p=0.$$

(3)-ის თანახმად ეს წრფე რომ იყოს ასიმპტოტი, უნდა შეს
რულდეს

$$x(t)-p\to 0\text{, როცა } t\to a,$$

საიდანაც

$$x(t)\to p\text{, ან რაც იგივეა } p=\lim_{t\to a}x(t). \qquad (7)$$

განხილული შემთხვევები ეხებოდა წირის პარამეტრულ მოცე
მას, თუ წირი მოცემულია $y=f(x)$ განტოლებით, სადაც $x_0<x<\infty$

მაშინ k და b მოსაძებნად საკმარისია (5) და (6) ფორმულებში x მივიღოთ პარამეტრად. გვექნება

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx) \tag{8}$$

OY ღერძის პარალელური ასიმპტოტი მაშინ ექნება წირს, როცა $y(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას. როცა $x \to p$ თუ $y(x) \to \infty$, მაშინ $x = p$ იქნება OY ღერძის პარალელური ასიმპტოტის განტოლება.

ზოგჯერ ასიმპტოტს სხვა თვალსაზრისითაც შეიძლება მივუდგეთ. სახელდობრ, **ასიმპტოტი** ვუწოდოთ წირის მხები წრფის ზღვრულ წრფეს, როცა შეხების წერტილი წირის უსასრულოდ შორი წერტილისაკენ მიისწრაფვის ან სხვანაირად წირის მხებს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში.

ამ თვალსაზრისით მოვძებნოთ ალგებრული წირის ასიმპტოტი. წირს უწოდებენ ალგებრულს, თუ იგი მოიცემა განტოლებით

$$P(x,y) = 0,$$

სადაც $P(x,y)$ n ხარისხის მრავალწევრია x და y-ის მიმართ. ჯერ ვეძებოთ დახრილი ასიმპტოტი, $y = kx + b$. როგორც ცნობილია, მხებს წირთან თანაკვეთის ორი წერტილი შეთავსებული აქვს. გადავკვეთოთ წირი წრფით, ე. ი. განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 0, \\ y &= kx + b. \end{aligned}$$

თანაკვეთის წერტილის აბსცისის განსასაზღვრავად მივიღებთ n ხარისხის განტოლებას:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n = 0, \tag{9}$$

რომელსაც უნდა ჰქონდეს ჯერადი ფესვი. ასიმპტოტს, როგორც მხებს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში, წირთან უნდა ჰქონდეს ორი შეთავსებული წერტილი უსასრულობაში. (9) განტოლებას უნდა ჰქონდეს ორი უსასრულოდ დიდი ამონახსნი (შეთავსებული).

შემოვიტანოთ დამხმარე ცვლადი $z=\frac{1}{x}$. იმისათვის, რომ z-ის მნიშვნელობა ეთანადებოდეს (9) განტოლების ორჯერად ფესვს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ის იყოს ორჯერადი ფესვი განტოლებისა:

$$A_0+A_1z+\cdots+A_nz^n=0 \tag{10}$$

და ამიტომ უნდა აკმაყოფილებდეს (10) განტოლების გაწარმოებით მიღებულ განტოლებასაც.

$$A_1+2A_2z+\cdots+nA_nz^{n-1}=0. \tag{11}$$

თუ წერტილი ისე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, რომ $x\to\infty$, მაშინ $z\to0$, ე. ი. განტოლებებს (10) და (11) უნდა ჰქონდეთ ნულოვანი ფესვი. ამისათვის კი A_0 და A_1 უნდა იყოს ნული.

მივიღეთ, რომ თუკი $y=kx+b$ ასიმპტოტის განტოლებაა, მაშინ (9) განტოლების უფროსი წევრების A_0 და A_1 კოეფიციენტები უნდა გახდეს ნული. გვექნება ორი განტოლება k და b კოეფიციენტების განსასაზღვრავად. $A_0=0$ განტოლებიდან მოვძებნით k (რადგან მხოლოდ მას შეიცავს), შევიტანთ მიღებულ მნიშვნელობას მეორე $A_1=0$ განტოლებაში და საზოგადოდ, მივიღებთ b-ს მნიშვნელობასაც.

შეიძლება მოხდეს, რომ k კოეფიციენტის მიღებული მნიშვნელობა იგივეობად აქცევს $A_1=0$ განტოლებას და ვერ განვსაზღვრავთ b-ს. მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ უსასრულოდ დაშორებული წერტილი, რომელიც ამ k მიმართულებას ეთანადება, განკუთრია. არ დავიწყოთ მისი გამოკვლევა და გადავიდეთ შემდეგ კოეფიციენტზე. თუ პირველი კოეფიციენტი, რომელიც იგივურად ნული არ ხდება k მნიშვნელობის შეტანის შედეგად არის A_m, მაშინ $A_m=0$ განტოლებიდან ვიპოვით b კოეფიციენტსაც და წირის ასიმპტოტიც მოძებნილი გვექნება.

ვერტიკალური ასიმპტოტის განსასაზღვრავად განვიხილავთ სისტემას

$$P(x,y) = 0, \qquad x = a.$$

მივიღებთ

$$B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \cdots + B_n = 0 .$$

იმისათვის, რომ $x = a$ იყოს წირის ასიმპტოტი, უნდა $B_0 = 0$, $B_1 = 0$. მაგრამ B_0 არ შეიცავს a-ს. გამოდის, რომ ვერტიკალური ასიმპტოტის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ წირის განტოლება არ შეიცავდეს y-ის უმაღლეს ხარისხს. თუ ეს პირობა შესრულებულია, a განისაზღვრება $B_1 = 0$ განტოლებიდან. განკუთრი წერტილის შემთხვევაში კი – განტოლებით $B_m = 0$.

§12. წირთა ოჯახის მომვლები

ჩვენ აქამდე ერთ წირს შევისწავლიდით. ზოგჯერ საჭიროა არა ერთი, არამედ წირთა მთელი ოჯახის განხილვა. განვიხილოთ ერთ λ პარამეტრზე დამოკიდებული წირთა ოჯახი, რომელიც მოიცემა განტოლებით

$$F(x,y,\lambda) = 0, \tag{1}$$

ნახ. 25

სადაც ფუნქცია F უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი ყველა არგუმენტის მიმართ. λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის (1)-დან გამოიყოფა წირი, ხოლო λ-ს ცვლით მივიღებთ წირთა ოჯახს.

თუ არსებობს ისეთი წირი, რომელიც ყოველ თავის წერტილში ეხება ამ ოჯახის რომელიმე წირს, მას ეწოდება ალებულ წირთა ოჯახის მომვლები. ამ წირების შეხების წერტილებს მომვლებთან ეწოდება **წირების დამახასიათებელი წერტილები**.

ვიგულისხმოთ, რომ (1) განტოლებით განსაზღვრულ წირთა ოჯახს აქვს მომვლები.

განსაზღვრის თანახმად ყოველი წერტილი მომვლებისა ეკუთვნის რომელიმე წირს, რომელიც განისაზღვრება პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობით. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მომვლები წირის წერტილების კოორდინატები დამოკიდებულია λ პარამეტრზე:

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda) \tag{2}$$

და ეს დამოკიდებულებანი განვიხილოთ როგორც მომვლების პარამეტრული განტოლებანი.

თუ $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ შევიტანთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ იგივეობას λ-ს მიმართ:

$$F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0. \tag{3}$$

უკანასკნელის გაწარმოება გვაძლევს

$$F_x x' + F_y y' + F_\lambda = 0. \tag{4}$$

რადგან მომვლები ეხება ოჯახის ყოველ წირს, ამიტომ მომვლების წირთან შეხების წერტილში მათ ექნებათ საერთო მხები, ხოლო მათი მიმმართველი ვექტორები იქნებიან კოლინეარული. მომვლების მხების მიმმართველი ვექტორის კოორდინატები იქნება (x', y'), ხოლო წირისა – $(F_y, -F_x)$. რამდენადაც ისინი კოლინეარულია, ამიტომ

$$\frac{x'}{F_y} = \frac{y'}{-F_x}, \text{ ან, რაც იგივეა } F_x x' + F_y y' = 0. \tag{5}$$

ამ განტოლების შედარება (4)-თან გვაძლევს $F_\lambda = 0$. გამოდის, რომ $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებათა სისტემას

$$F(x,y,\lambda) = 0, \qquad F_\lambda(x,y,\lambda) = 0, \tag{6}$$

რაც ნიშნავს, რომ მომვლები უნდა ვეძებოთ (6) სისტემით.

აქ თუ λ-ს მივცემთ რაიმე მნიშვნელობას, პირველი განტოლე-ბიდან გამოიყოფა მოცემული ოჯახიდან გარკვეული წირი. ხოლ

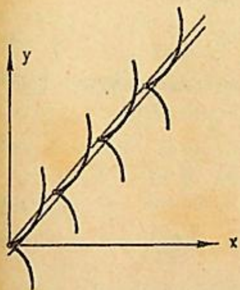
მეორე განტოლებიდან კი განისაზღვრება ამ წირის დამახასიათებელი წერტილი – ის წერტილი, სადაც ეს წირი ეხება მომვლებს.

შევნიშნოთ, რომ (6) სისტემის ამოხსნით მიღებული წირი, ეგრეთ წოდებული დისკრიმინანტული წირი, ყოველთვის არ წარმოადგენს მომვლებს. მომვლები თუ არსებობს, ამ დისკრიმინანტული წირის შემადგენლობაში უნდა შედიოდეს.

საქმე იმაშია, რომ განკუთრი წერტილის კოორდინატები იგივურად აკმაყოფილებს (5) განტოლებას (რადგან $F_x = 0$, $F_y = 0$), დისკრიმინანტული წირის მხები აღარ დაემთხვევა მოცემული ოჯახის წირის მხებს, ამიტომ (6) განტოლებით განსაზღვრული დისკრიმინანტული წირი მაშინ იქნება მომვლები, თუ ის არ შედგება აღებული ოჯახის წირების განკუთრი წერტილებისაგან.

მაგალითი. განვიხილოთ წირთა ოჯახი

$$3(y-\lambda)^2 - 2(x-\lambda)^3 = 0.$$



ნახ. 26

ვიპოვოთ მომვლები.

გავაწარმოოთ λ-თი, გვექნება:

$$-6(y-\lambda) + 6(x-\lambda)^2 = 0$$

ან

$$y-\lambda = (x-\lambda)^2.$$

სისტემის ამოხსნა გვაძლევს

$$x-\lambda = 0, y-\lambda = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$x-\lambda = \frac{2}{3}, y-\lambda = \frac{4}{9} \Rightarrow x-y = \frac{2}{9}.$$

დისკრიმინანტული წირი ორი წრფის სახით წარმოგვიდგება:

$$x = y, \quad x-y = \frac{2}{9},$$

მაგრამ პირველ წრფეზე

$$F_x = -6(x-\lambda)^2 = 0, \qquad F_y = 6(y-\lambda) = 0.$$

ე. ი. $x=y$ განკუთრი წერტილებისაგან შედგება და აღებულ წირთა ოჯახის მომვლები იქნება $x-y=\frac{2}{9}$ წრფე.

ჩვენ განვიხილეთ წირის ევოლუტი და ვნახეთ, რომ წირის ნორმალები წარმოადგენენ ევოლუტის მხებებს. ვაჩვენოთ, რომ ევოლუტი წარმოადგენს წირის ნომრალთა ოჯახის მომვლებს.

თუ წირი მოცემულია განტოლებით $y=f(x)$, მისი ნორმალი ყოველ წერტილში (x,y) განისაზღვრება განტოლებით:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),\ \text{ან რაც იგივეა}\ X-x+y'(Y-y)=0. \quad (7)$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მომვლები, (7)-თან ერთად უნდა განვიხილოთ განტოლება, რომელიც მიიღება (7)-ის x-ით გაწარმოების შედეგად (აქ x არის პარამეტრი). მივიღებთ

$$-1-(y')^2+y''(Y-y)=0. \quad (8)$$

(7) და (8) სისტემიდან განისაზღვრება დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატები X,Y. სახელდობრ:

$$\begin{aligned} X&=x-\frac{1+(y')^2}{y''}y', \\ Y&=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \end{aligned} \quad (9)$$

მივიღეთ **მომვლები წირის პარამეტრული განტოლება.**

თუ (9) განტოლებებს შევადარებთ ევოლუტის განსაზღვრულ განტოლებებს, ვნახავთ, რომ ისინი ემთხვევა ერთმანეთს. მაშ, წირის ნორმალთა ოჯახის მომვლები ყოფილა ევოლუტი.

II თავი

ზედაპირთა თეორია

§13. ორი სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია

განვიხილოთ სიბრტყეზე რაიმე ღია W არე, რომლის წერტილები ნამდვილ რიცხვთა (u,v) წყვილებია და სამგანზომილებიანი ევკლიდეს ვექტორული V სივრცე ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

ასახვას

$$W \to V,$$

რომელიც ყოველ წერტილს $(u,v) \in W$ უთანადებს გარკვეულ ვექტორს $\vec{r} \in V$, უწოდებენ ორი არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციას განსაზღვრულს W არეზე და აღნიშნავენ $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ სახით.

ვთქვათ, ვექტორ-ფუნქცია $\vec{r}$ განსაზღვრულია M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $\vec{a}$ რაიმე ფიქსირებული ვექტორია.

ამბობენ, რომ $\vec{a}$ არის $\vec{r}$ ვექტორ-ფუნქციის ზღვარი, როცა $M \to M_0$, თუ $\forall \varepsilon > 0$, მოიძებნება $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, რომ როცა $0<|MM_0|<\delta \Rightarrow |\vec{r}(M)-\vec{a}|$, რაც ასე ჩაიწერება $\vec{a}=\lim\limits_{M\to M_0}\vec{r}(M)$.

ორი არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციისათვის ადგილი აქვს იგივე თეორემებს ზღვრების შესახებ, რასაც ადგილი ჰქონდა ერთი სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ამბობენ, რომ ვექტორ-ფუნქცია უწყვეტია M_0 წერტილში, თუ

$$\lim_{M\to M_0}\vec{r}(M)=\vec{r}(M_0).$$

ისევე, როგორც სკალარული ფუნქციებისათვის, ვექტორ-ფუნქციებისათვის განიმარტება კერძო წარმოებულები. ვექტორ-ფუნქციის კერძო წარმოებული რაიმე არგუმენტის მიმართ, ესაა ჩვეუ-

ლებრივი წარმოებული აღებული არგუმენტის მიმართ გამო
ვლილი იმ დაშვებით, რომ მეორე არგუმენტი განიხილება რ
გორც მუდმივი. ვექტორ-ფუნქციის კერძო წარმოებული u-ს
მართ; რომელიც აღინიშნება $\vec{r}_u$, იქნება

$$\vec{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v)}{\Delta u},$$

ხოლო კერძო წარმოებული v-ს მიმართ – $\vec{r}_v$, ასე გამოისახება:

$$\vec{r}_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v)}{\Delta v}.$$

მაღალი რიგის წარმოებულებს მივიღებთ შემდგომი თანმ
დევრული გაწარმოებით

$$\vec{r}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}(\vec{r}_u) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \quad \vec{r}_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}_v) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}, \quad \vec{r}_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{r}_u) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}$$

და ა. შ. ვიგულისხმებთ, რომ ვექტორ-ფუნქციის კერძო წარმოე
ლები არა მარტო არსებობს, არამედ უწყვეტიცაა განსახილვე
არგუმენტების მიმართ. რის შედეგადაც ვიგულისხმებთ, რომ
წარმოების რიგს არა აქვს მნიშვნელობა (ადგილი აქვს შვარც
დებულებას), რომ $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ და ა. შ.

ვექტორ-ფუნქციის დიფერენციალს, მსგავსად სკალარუ
ფუნქციებისა, ექნება სახე

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

ასევე თანმიმდევრობით გადიფერენციალებით მიიღება მაღ
ლი რიგის დიფერენციალები:

$$d(d\vec{r}) = d^2\vec{r}, \quad d(d^2\vec{r}) = d^3\vec{r}, \ldots, d(d^{(k-1)}\vec{r}) = d^k\vec{r}, \ldots$$

ვიტყვით, რომ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის C^k კლასს, თუ ე
უწყვეტად წარმოებადია k რიგამდე ჩათვლით. C^k კლასს ვექტო
ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტეილორის ფორმულას:

$$\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \frac{1}{2!}d^2\vec{r} + \frac{1}{3!}d^3\vec{r} + \cdots + \frac{1}{k!}d^k\vec{r} + \frac{1}{k!}\rho^k\vec{\xi}_k,$$

სადაც $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}|\vec{\xi}_k| = 0$.

თუ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ვექტორული სივრცის რაიმე ორთონორმირებული ბაზისია, მაშინ

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{e}_1 + y(u,v)\vec{e}_2 + z(u,v)\vec{e}_3,$$

სადაც სკალარული ფუნქციები $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ იქნებიან ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატები. ისევე, როგორც ერთი სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციისათვის, ადგილი აქვს **დებულებას:** ვექტორ-ფუნქცია წარმოებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წარმოებადია სკალარული ფუნქციები $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ და ამასთან ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის კოორდინატები ტოლია ვექტორ-ფუნქციის შესაბამისი კოორდინატების წარმოებულებისა. ასე მაგალითად, თუ $\vec{r} = (x, y, z)$, მაშინ

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v).$$

განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია

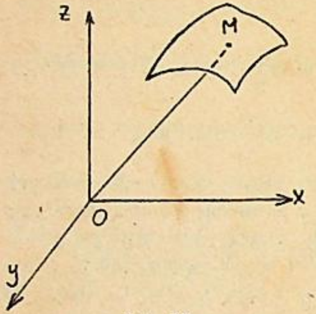
$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \tag{1}$$

განსაზღვრული რაიმე W არეზე. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი (u,v) წყვილისათვის გვექნება გარკვეული ვექტორი $\vec{r}(u,v)$. u და v-ს ცვლით მივიღებთ ვექტორთა სიმრავლეს. მოვდოთ ეს ვექტორები კოორდინატთა სათავეს. მაშინ ეს ვექტორები იქნებიან მათი ბოლო M წერტილების რადიუს-ვექტორები და მათი კოორდინატები $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ იქნებიან M წერტილის კოორდინატები, ე. ი.

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v). \tag{2}$$

თუ ამ განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ u და v პარამეტრებს, რაც შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix} = 2,$$



ნახ. 27

მივიღებთ

$$F(x,y,z) = 0. \qquad (3)$$

როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, (3) სახის განტოლებით, საზოგადოდ, ზედაპირი არის მოცემული.

ამრიგად, ორი სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია, საზოგადოდ, ზედაპირს განსაზღვრავს. (3) ზედაპირის ზოგადი განტოლებაა, (2) – პარამეტრული, ხოლო (1), რომელიც (2)-ის ეკვივალენტურია – ვექტორული. ზედაპირი შეიძლება მოცემული იყოს

$$z = f(x,y)$$

სახით. აქ უბრალოდ x და y პარამეტრებად არის მიღებული.

§14. წირები ზედაპირზე

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v). \qquad (1)$$

სადაც ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია W არეზე.

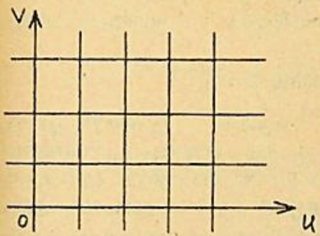
ვთქვათ u და v ისეთია, რომ

$$u = u(t),\ v = v(t). \qquad (2)$$

თუ u და v-ს ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{r}(t),$$

რომ ვექტორ-ფუნქცია გამოისახება მხოლოდ t პარამეტრის საშუალებით და ამიტომ, საზოგადოდ, წირს გამოსახავს. ამ წირზე იტყვიან, რომ იგი მდებარეობს ზედაპირზე. წირის (2) განტოლებებს ეწოდებათ ზედაპირზე მდებარე წირის შინაგანი განტოლებები. ზოგჯერ t პარამეტრად აღებულ (2) განტოლებებში მიღებულია u, მაშინ გვექნება $v = v(u)$.



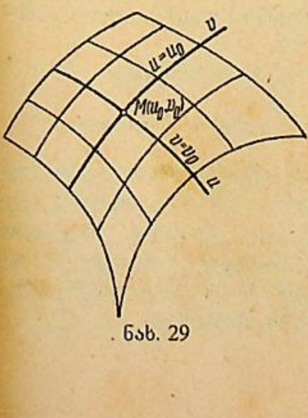
ნახ. 28

W არეზე ავიღოთ საკოორდინატო სისტემა OUV. თუ $v = \text{const}$, ვთქვათ $v = v_0$, და u იცვლება, მივიღებთ OU ღერძის პარალელურ წრფეს, ხოლო ზედაპირზე

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$$

წირს, რომელსაც „u წირს“ უწოდებენ.

ანალოგიურად, როცა $u = \text{const} = u_0$ და v იცვლება, W არეზე გვექნება OV ღერძის პარალელური წრფე, ხოლო ზედაპირზე $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ წირი, რომელსაც „v წირი“ ეწოდება. რამდენადაც მუდმივის მნიშვნელობანი ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ, მივიღებთ u და v წირთა ოჯახებს. ზედაპირი დაიფარება u და v წირთა ბადით. ზედაპირის ყოველ წერტილზე გაივლის, საზოგადოდ, ერთი წირი v წირებიდან და ერთი წირი u წირებიდან. ისე, რომ ყოველი წერტილი ზედაპირისა ასეთ წირთა წყვილის თანაკვეთის წერტილს წარმოადგენს.

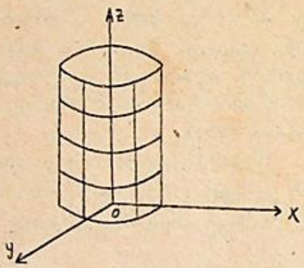


ნახ. 29

ეს წირთა წყვილი ამ წერტილებისათვის კოორდინატთა სისტემი
როლს ასრულებს. ამიტომ u და v პარამეტრებს წერტილი
მრუდწირულ კოორდინატებს უწოდებენ, ხოლო თვი
ბადეს – **მრუდწირულ საკოორდინატო ბადეს**.

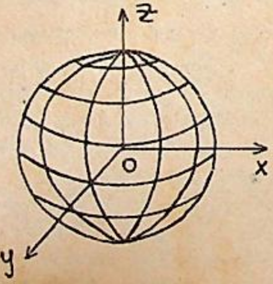
მაგალითები: 1. განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული შემდე-
გი პარამეტრული განტოლებებით:

$$x = a\cos u,\ y = a\sin u,\ z = v.$$



ნახ. 30

ადვილი შესამოწმებელია, რომ იგი წრიული ცილინდრი $x^2 + y^2 = a^2$. რა იქნება აქ u და v წირები? თუ $v = const$, მივიღებთ OXY სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებს, რომლებიც ცილინდრზე ამოკვეთენ წრეწირებს. მაშ, u წირები წრეწირებია, რომლებიც ცილინდრის ღერძის მართობ სიბრტყეში მდებარეობენ. თუ $u = const$, მივიღებთ $y = x\,tgu$ – OZ ღერძზე გამავალ სიბრტყეებს, რომლებიც ცილინდრზე მსახველებს ამოკვეთს.



ნახ. 31

2. ვთქვათ, ზედაპირი შემდეგი პარამეტრული განტოლებითაა მოცემული

$$x = a\cos u\cos v,$$

$$y = a\sin u\cos v,\ z = a\sin v.$$

ეს იქნება a რადიუსიანი სფერო $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, როცა u იცვლება და $v = const$, მივიღებთ OXY სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებს, რომლებიც სფეროზე წრეწირებს ამოკვეთს, მათ **პარალელები** ეწოდებათ.

როცა $u = \text{const}$ და v იცვლება, მივიღებთ $y = x\,\text{tg}\,u$ – OZ ღერძზე გამავალ სიბრტყეებს, რომლებიც სფეროს პოლუსებზე გამავალ დიდ წრეწირებს, ე. წ. მერიდიანებს მოგვცემს. მაშ, u და v წირები ყოფილა სფეროს პარალელები და მერიდიანები.

§15. ზედაპირის მხები წრფე, მხები სიბრტყე და ნორმალი წრფე

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \tag{1}$$

სადაც ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე W არეზე. ვიგულისხმოთ, რომ განსახილავ არეზე $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$.

ზედაპირის რაიმე M წერტილზე გავატაროთ წირი

$$u = u(t),\ v = v(t). \tag{2}$$

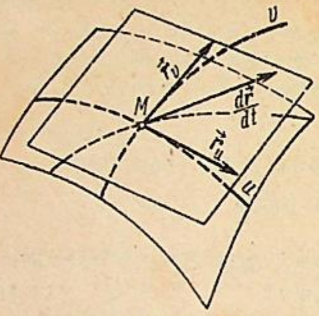
ზედაპირზე გავლებული წირის მხებს ეწოდება ზედაპირის მხები წრფე. ზედაპირის აღებულ წერტილზე უამრავი წირი გაივლება და შესაბამისად აღებულ წერტილში გვექნება უამრავი მხები წრფე.

წირის მხების მიმართულებას განსაზღვრავს $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ვექტორი, რომელიც ზედაპირზე გავლებული წირის შემთხვევაში გვაძლევს

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}, \tag{3}$$

როგორც უკანასკნელი გამოსახულებიდან ჩანს, ზედაპირის აღებულ წერტილში გავლებული ყველა მხები მოთავსდება ერთ სიბრტყეში, იმ სიბრტყეში, სადაცაა $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორები.

ზედაპირის M წერტილში გავლებულ სიბრტყეს, რომელშიც მოთავსებულია ამ წერტილზე გავლებული ზედაპირის ყველა მხები წრფე, ეწოდება ზედაპირის მხები სიბრტყე.



ნახ. 32

გამოდის, რომ მხები სიბრტყე განისაზღვრება M წერტილითა და $\vec r_u$ და $\vec r_v$ ვექტორებით. გავარკვიოთ მათი გეომეტრიული არსი. ვთქვათ, ზედაპირის M წერტილზე გამავალი u წირის განტოლებაა

$$u = t, \; v = v_0,$$

მაშინ მისი მხები (3)-ის თანახმად იქნება

$$\frac{d\vec r}{dt} = \vec r_u .$$

მაშასადამე, $\vec r_u$ ვექტორი ყოფილა u წირის მხები ვექტორი. ასევე ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $\vec r_v$ ვექტორი იქნება v წირის მხები.

გამოვიყვანოთ ზედაპირის M წერტილზე გამავალი მხები სიბრტყის განტოლება. მხებ სიბრტყეში ავიღოთ რაიმე P წერტილი. მაშინ

$$\overrightarrow{MP} = \lambda \vec r_u + \mu \vec r_v ,$$

საიდანაც

$$\vec p = \vec r + \lambda \vec r_u + \mu \vec r_v , \tag{4}$$

სადაც $\vec p$ და $\vec r$ შესაბამისად P და M წერტილების რადიუს-ვექტორებია. (4)-ს ეწოდება მხები სიბრტყის ვექტორული განტოლება.

ადვილად მივიღებთ მხები სიბრტყის ზოგად განტოლებას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\overrightarrow{MP}, \vec r_u, \vec r_v$ ვექტორები კომპლანარულია, ე. ი. მათი შერეული ნამრავლი ნულია

$$\left(\overrightarrow{MP}, \vec{r}_u, \vec{r}_v\right) = 0,$$

რაც კოორდინატებში ასე ჩაიწერება

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

აქ (x,y,z) შეხების M წერტილის კოორდინატებია და წარმოებულებიც $(x_u, y_u, z_u) = \vec{r}_u$, $(x_v, y_v, z_v) = \vec{r}_v$ ამ წერტილშია აღებული, (X,Y,Z) კი მხები სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს აღნიშნავს.

თუ ზედაპირი ცხადი სახით არის მოცემული

$$z = f(x,y),$$

მაშინ x და y მივიღებთ პარამეტრებად. გვექნება

$$x = u, \; y = v, \; z = f(u,v),$$

ხოლო ვექტორები

$$\vec{r}_u = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = (1, 0, p),$$

$$\vec{r}_v = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (0, 1, q).$$

$p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ – მონჟის აღნიშვნებია.

მოცემულის გათვალისწინებით (5) ასე გადაიწერება

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = 0,$$

ან

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \qquad (6)$$

განვიხილოთ ზედაპირი ზოგადი განტოლებით მოცემული

$$F(x,y,z) = 0.$$

ვთქვათ,

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

ამ ზედაპირის რაიმე პარამეტრული წარმოდგენაა, მაშინ

$$F(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0.$$

მისი გაწარმოება u და v-თი მოგვცემს

$$F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0,$$

$$F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ვექტორი კოორდინატებით (F_x,F_y,F_z) მართობია $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებისა და, მაშასადამე, მხები სიბრტყისაც; ამიტომ გამოდგება მის მიმმართველ ვექტორად და მხები სიბრტყის განტოლება ასე ჩაიწერება:

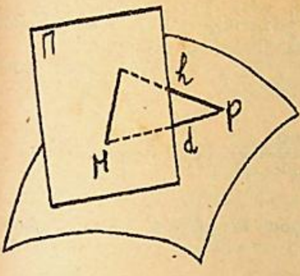
$$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0, \qquad (7)$$

წარმოებულები F_x,F_y,F_z აღებულია შეხების (x,y,z) წერტილში.

შენიშვნა: დიფერენციალური გეომეტრიის ზოგიერთ სახელმძღვანელოში შევხვდებით მხები სიბრტყის სხვა განმარტებას მოვიტანოთ იგი. ზედაპირის M წერტილში გავატაროთ Π სიბრტყე. ავიღოთ M წერტილის მეზობელი P წერტილი ზედაპირზე და მისი დაშორება M წერტილიდან აღვნიშნოთ d-თი, ხოლო Π სიბრტყიდან h-ით. Π სიბრტყეს ეწოდება ზედაპირის მხები სიბრტყე, თუ

$$\frac{h}{d} \to 0\text{, როცა } P \to M.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $\frac{h}{d}\to 0$, მაშინ $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორები პარალელურია მხები სიბრტყისა და შებრუნებით, თუ სიბრტყე პარალელურია $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებისა, მაშინ $\frac{h}{d}\to 0$, როცა $P\to M$.



ნახ. 33

ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან დაკავშირებით შემოდის ზედაპირის ჩვეულებრივი და განკუთრი წერტილის ცნება.

ზედაპირის იმ წერტილს, რომელზედაც ერთადერთი მხები სიბრტყე გაივლება, **ჩვეულებრივი წერტილი** ეწოდება, დანარჩენ წერტილებს კი – **განკუთრი.**

მხები სიბრტყე ცალსახად იქნება განსაზღვრული, თუ $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\neq 0$, განკუთრ წერტილებში კი პირიქით $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]=0$.

თუ ზედაპირი ზოგადი განტოლებითაა მოცემული, მაშინ ზედაპირის განკუთრი წერტილები დახასიათდება პირობებით:

$$F_x=0,\ F_y=0,\ F_z=0. \qquad (8)$$

ზედაპირის მხები სიბრტყის მართობ წრფეს შეხების წერტილში ეწოდება **ზედაპირის ნორმალი წრფე**. რამდენადაც $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორები ზედაპირის მხებ სიბრტყეშია მოთავსებული, ამიტომ $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ ვექტორული ნამრავლი იქნება ამ სიბრტყის მართობი და დაახასიათებს ზედაპირის ნორმალის მიმართულებას.

ზედაპირის ნორმალის განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\frac{X-x}{y_u z_v - y_v z_u}=\frac{Y-y}{z_u x_v - z_v x_u}=\frac{Z-z}{x_u y_v - x_v y_u}. \qquad (9)$$

თუ ზედაპირის ნორმალის მგეზავს $\vec{n}$ -ით აღვნიშნავთ, მაშინ

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$$

ვთქვათ ზედაპირი მოცემულია განტოლებით $z = f(x,y)$, მაშინ $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = (-p,-q,1)$, $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{1+p^2+q^2}$, ამიტომ $\vec{n}$ ნორმალის მეგზავის კოორდინატები იქნება

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

ზოგადი $F(x,y,z) = 0$ განტოლებით მოცემული ზედაპირისათვის კი გვექნება

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

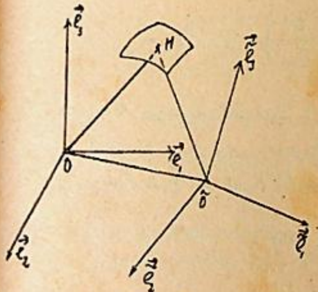
§16. ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა, ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე, კუთხე ორ წირს შორის, ფართის ელემენტი

ჩვენ შევეცდებით მოვძებნოთ ზედაპირთან დაკავშირებული ინვარიანტული სიდიდეები, ე. ი. ისეთი სიდიდეები, რომლებიც არც კოორდინატთა სისტემის შეცვლაზეა დამოკიდებული და არც პარამეტრის შერჩევაზე.

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v).$$

ისევე, როგორც წირის შემთხვევაში, ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას მხოლოდ მუდმივი ვექტორით შეიცვლება



ნახ. 34

$$\overrightarrow{\tilde{O}M}=\overrightarrow{\tilde{O}O}+\overrightarrow{OM}.$$

ისე, რომ თუ განვიხილავთ რადიუს-ვექტორის კერძო წარმოებულებს, ისინი არ იქნებიან კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე დამოკიდებული.

ვთქვათ, შეიცვალა პარამეტრები

$$u=u(u_1,v_1),\ v=v(u_1,v_1).$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial u_1} & \dfrac{\partial u}{\partial v_1}\\ \dfrac{\partial v}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v}{\partial v_1}\end{vmatrix}=\frac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)}\neq 0.$$

ვნახოთ, როგორ შეიცვლება $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორები. ვიპოვოთ $\vec{r}_{u_1}$ და $\vec{r}_{v_1}$, გვექნება:

$$\vec{r}_{u_1} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial u_1},$$

$$\vec{r}_{v_1} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial v_1}.$$

როგორც ჩანს, პარამეტრების შეცვლისას რადიუს-ვექტორის კერძო წარმოებულები შეიცვალა. ეს ვექტორები მობრუნდა მხებ სიბრტყეში.

რა მოუვა $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ ვექტორულ ნამრავლს?

გამოვითვალოთ $[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{v_1}]$, გვექნება

$$[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{v_1}] = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]\frac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)}.$$

ვექტორული ნამრავლი $[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{v_1}]$ განსაზღვრავს ზედაპირის ნორმალის მიმართულებას ახალ პარამეტრებში, $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ კი — ძველი პარამეტრების მიმართ. გამოდის, რომ ეს მიმართულებები ემთხვევა, როცა $\dfrac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)} > 0$ და იცვლება საწინააღმდეგოთი, თუ $\dfrac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)} < 0$. ან, როგორც ამბობენ, პარამეტრების შეცვლისას როცა $\dfrac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)} > 0$, ზედაპირის ორიენტაცია არ იცვლება, ხოლო, როცა $\dfrac{D(u,v)}{D(u_1,v_1)} < 0$ — ზედაპირის ორიენტაცია იცვლება საწინააღმდეგოთი.

განვიხილოთ რადიუს-ვექტორის დიფერენციალი:

$$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv\,.$$

თუ პარამეტრები შეიცვლება, მაშინ

$$du=\frac{\partial u}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial u}{\partial v_1}dv_1,$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial v}{\partial v_1}dv_1.$$

უკანასკნელი ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$d\vec{r}=\left(\vec{r}_u\frac{\partial u}{\partial u_1}+\vec{r}_v\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)du_1+\left(\vec{r}_u\frac{\partial u}{\partial v_1}+\vec{r}_v\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)dv_1=$$

$$=\vec{r}_{u_1}du_1+\vec{r}_{v_1}dv_1.$$

ე. ი. რადიუს-ვექტორის დიფერენციალი ინვარიანტულია როგორც კოორდინატთა სისტემის შეცვლის, ისე პარამეტრების შეცვლის მიმართ. ინვარიანტული იქნება მისი კვადრატიც

$$(d\vec{r})^2=\left(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv\right)^2=(\vec{r}_u)^2du^2+2\vec{r}_u\vec{r}_v du dv+(\vec{r}_v)^2dv^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$E=\left(\vec{r}_u\right)^2,\quad F=\vec{r}_u\vec{r}_v,\quad G=(\vec{r}_v)^2,$$

ხოლო თვით ფორმა აღვნიშნოთ $\mathfrak{I}_1$, გვექნება

$$\mathfrak{I}_1=(d\vec{r})^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2. \qquad (1)$$

მიღებულ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას უწოდებენ ზედაპირის პირველ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას, ან **გაუსის პირველ კვადრატულ ფორმას**.

ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა.

მართლაც, იყოს $|\vec{r}_u|=a$, $|\vec{r}_v|=b$, ხოლო კუთხე $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებს შორის γ, მაშინ

$$E = a^2, \quad G = b^2, \quad F = ab\cos\gamma,$$

$$EG - F^2 = a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\gamma = a^2b^2\sin^2\gamma.$$

მივიღეთ, რომ

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0,$$

რაც უზრუნველყოფს აღებული კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრას.

რაც შეეხება F კოეფიციენტს, ის როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი შეიძლება იყოს იმისდა მიხედვით საკოორდინატო კუთხე ($\vec{r}_u$ ვექტორის მობრუნების კუთხე $\vec{r}_v$-მდე) მახვილია, თუ ბლაგვი.

შევნიშნოთ, რომ

$$\left|[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{v_1}]\right| = |\vec{r}_u||\vec{r}_v|\sin\gamma = ab\sin\gamma = \sqrt{EG - F^2},$$

ამიტომ ზედაპირის ნორმალის $\vec{n}$ მგეზავი ასე ჩაიწერება

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა ზედაპირის ძირითადი მეტრიკული ფორმაა. ამ ფორმის საშუალებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე, კუთხე ორ წირს შორის, ფართის ელემენტი.

ზედაპირზე გავლებულია, ვთქვათ, ℓ წირი:

$$u = u(t), v = v(t), t \in [a,b].$$

გამოვთვალოთ ზედაპირზე მდებარე წირისათვის

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2.$$

გვექნება

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = [\vec{r}_u u'(t) + \vec{r}_v v'(t)]^2 =$$

$$= E(t)[u'(t)]^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)[v'(t)]^2.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$ds^2 = \{E(t)[u'(t)]^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)[v'(t)]^2\}dt^2,$$

ხოლო

$$s = \int_a^b \sqrt{E(t)[u'(t)]^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)[v'(t)]^2}\, dt.$$

უკანასკნელი ასეც შეიძლება გადავწეროთ

$$s = \int_\ell \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_\ell \sqrt{\Im_1}.$$

როგორც ვხედავთ, ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძის გამოსათვლელად საჭიროა ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმის ცოდნა. ამასთან დაკავშირებით ამბობენ, რომ პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა ზედაპირზე მეტრიკას განსაზღვრავს.

მიღებული ფორმულიდან ჩანს, რომ ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა განხილული აღებული წირის გასწვრივ ამ წირის წირითი ელემენტის ტოლია

$$\Im_1\big|_\ell = ds^2$$

(ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმის შეზღუდვა ნებისმიერი წირის გასწვრივ). ამიტომ პირველ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას ხშირად ზედაპირის წირით ელემენტსაც უწოდებენ და შესაბამისად აღნიშნავენ ds^2:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმის საშუალებით გამოითვლება კუთხე ზედაპირზე გავლებულ ორ წირს შორის.

ვთქვათ, ზედაპირზე ორი თანამკვეთი წირია გავლებული, რომელთა შინაგანი განტოლებებია

$$u = u_1(t), \quad v = v_1(t);$$
$$u = u_2(t), \quad v = v_2(t).$$

ამ წირებისათვის შესაბამისად გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1(t), v_1(t)) = \vec{r}_1(t),$$
$$\vec{r} = \vec{r}(u_2(t), v_2(t)) = \vec{r}_2(t).$$

φ კუთხე ორ თანამკვეთ წირს შორის საერთო M წერტილში ეწოდება კუთხეს ამ წერტილში გავლებულ მხებ $\vec{r}_1'(t)$ და $\vec{r}_2'(t)$ ვექტორებს შორის, ისე, რომ

$$\cos\varphi = \frac{\vec{r}_1'\vec{r}_2'}{|\vec{r}_1'||\vec{r}_2'|}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_u u_1' + \vec{r}_v v_1',$$
$$\vec{r}_2' = \vec{r}_u u_2' + \vec{r}_v v_2',$$

გვექნება

$$\cos\varphi = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{E(u_1')^2 + 2Fu_1'v_1' + G(v_1')^2}\sqrt{E(u_2')^2 + 2Fu_2'v_2' + G(v_2')^2}}.$$

აღვნიშნოთ

$$du = u_1'dt, \quad dv = v_1'dt,$$
$$\delta u = u_2'dt, \quad \delta v = v_2'dt.$$

მაშინ მიღებული ფორმულა ასე გადაიწერება

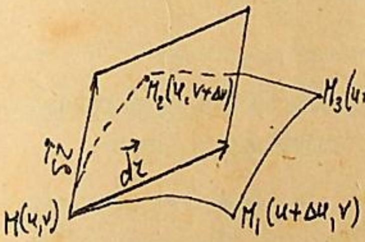
$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

საკოორდინატო წირებს შორის კუთხე

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$$

(რადგან საკოორდინატო წირებისათვის $v = \text{const}$ და $u = \text{const}$, შესაბამისად $dv = 0$ და $\delta u = 0$), საიდანაც ჩანს, საკოორდინატო ბადე ზედაპირზე რომ იყოს ორთოგონალური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $F = 0$.

ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმის საშუალებით გამოისახება ზედაპირის ფართის ელემენტიც.



ნახ. 35

განვიხილოთ ზედაპირზე მრუდწირული ოთხკუთხედი შედგენილი (u), (u + Δu), (v), (v + Δv) წირებისაგან, რომლებიც იკვეთებიან M, M_1, M_2, M_3 წერტილებში.

MM_1 და MM_2 ქორდები განსაზღვრავენ ვექტორებს

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u,v) = \Delta_u\vec{r},$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u,v) = \Delta_v\vec{r}.$$

ეს ვექტორები შეიძლება აპროქსიმირებული იქნენ ვექტორებით

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du \text{ და } \delta\vec{r} = \vec{r}_v dv,$$

ხოლო მრუდწირული ოთხკუთხედის ფართობი – $d\vec{r}$ და $\delta\vec{r}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობით. პარალელოგრამის ფართობი იმ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის სიგრძის ტოლია, რომელზედაც არის აგებული. თუ აგებულ პარალელოგრამის ფართობს, ან როგორც იტყვიან ფართის ელემენტს $d\sigma$-თი აღვნიშნავთ, გვექნება

$$d\sigma = |[d\vec{r}, \delta\vec{r}]| = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

რაც შეეხება ზედაპირის ფართობს, როგორც ანალიზის კურსიდანაა ცნობილი. გამოითვლება ფორმულით

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

§17. ზედაპირის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა

ზედაპირისათვის განისაზღვრა პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა:

$$\Im_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

რომელიც ინვარიანტულია როგორც კოორდინატთა სისტემის შეცვლის, ისე პარამეტრების შერჩევის მიმართ. ეს კვადრატული ფორმა დაკავშირებული იყოს ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალთან და კერძოდ

$$\Im_1 = (d\vec{r})^2.$$

ჩვენ ახლა შევეცდებით ზედაპირისთვის ავაგოთ მეორე ინვარიანტული დიფერენციალური კვადრატული ფორმა. ამჯერად მას საფუძვლად დავუდებთ მეორე რიგის დიფერენციალს.

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

და ვიგულისხმოთ, რომ ეს ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის C^2 კლასს.

პარამეტრების შეცვლა:

$$u = u(u_1, v_1), \ v = v(u_1, v_1)$$

მეორე რიგის დიფერენციალებისათვის უფრო რთულ ფორმულებს იძლევა, ვიდრე ეს იყო პირველი რიგის დიფერენციალებისათვის. თუ u და v განვიხილავთ როგორც u_1 და v_1 პარამეტრების ფუნქციებს, მაშინ

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v. \qquad (*)$$

მეორე რიგის დიფერენციალი იძენს დამატებით წევრებს. როგორ შევასწოროთ ეს გამოსახულება, რომ მივიღოთ ინვარიანტული ფორმა.

გავამრავლოთ $d^2\vec{r}$ სკალარულად ზედაპირის ნორმალის $\vec{n}$ მგეზავზე. რამდენადაც $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორები ზედაპირის მხებ სიბრტყეშია მოთავსებული, ამიტომ

$$\vec{n}\vec{r}_u = 0, \quad \vec{n}\vec{r}_v = 0$$

და მივიღებთ:

$$\vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uv}dudv + \vec{n}\vec{r}_{vv}dv^2.$$

მიღებულ კვადრატულ ფორმას, რომელიც წარმოადგენს $d^2\vec{r}$ ვექტორის გეგმილს ზედაპირის ნორმალზე, ეწოდება ზედაპირის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა. იგი აღვნიშნოთ $\mathfrak{I}_2$ და ასე გადავიწეროთ:

$$\mathfrak{I}_2 = \vec{n}d^2\vec{r} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

სადაც

$$L = \vec{n}\vec{r}_{uu}, \quad M = \vec{n}\vec{r}_{uv}, \quad N = \vec{n}\vec{r}_{vv}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ზედაპირის ნორმალის მგეზავი $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$ გამოსახულებას, მივიღებთ

$$L = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

ზედაპირის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმაც, ისევე როგორც პირველი, ინვარიანტულია როგორც კოორდინატთა სისტემისა, ისე პარამეტრების შეცვლის მიმართ ($\vec{n}(u,v) = \pm\vec{n}(u,v)$, $\vec{n}d^2\vec{r} = \pm\vec{n}(u_1,v_1)d^2\vec{r}(u_1,v_1)$). მას ისეთივე ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს ზედაპირთა თეორიაში, როგორც პირველს.

შენიშვნა: საკოორდინატო წირების მხები ვექტორები ნორმალის მგეზავის მართობია, ამიტომ

$$\vec{n}\vec{r}_u = 0, \quad \vec{n}\vec{r}_v = 0.$$

მათი გაწარმოება მოგვცემს:

$$\vec{n}_u\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uu} = 0, \quad \vec{n}_u\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0,$$

$$\vec{n}_v\vec{r}_u + \vec{n}\vec{r}_{uv} = 0, \quad \vec{n}_v\vec{r}_v + \vec{n}\vec{r}_{vv} = 0.$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$L = \vec{n}\vec{r}_{uu} = -\vec{n}_u\vec{r}_u, \quad M = \vec{n}\vec{r}_{uv} = -\vec{n}_u\vec{r}_v = -\vec{n}_v\vec{r}_u,$$

$$N = \vec{n}\vec{r}_{vv} = -\vec{n}_v\vec{r}_{vv}.$$

და თვით მეორე კვადრატული ფორმა კი ასე წარმოვიდგინოთ

$$\Im_2 = -d\vec{n}d\vec{r}.$$

მაგალითები: 1. მოცემულია ზედაპირი $z = f(x,y)$ განტოლებით, როგორი იქნება მისი პირველი და მეორე კვადრატული ფორმა?

ზედაპირის განტოლება ჩავწეროთ პარამეტრული სახით:

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v) \text{ ან } \vec{r} = \vec{r}(u, v, f(u, v)).$$

ვიპოვოთ რადიუს-ვექტორის კერძო წარმოებულები $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$.

გვექნება

$$\vec{r}_u = (1,0,p), \quad \text{სადაც} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\vec{r}_v = (0,1,q), \quad \text{სადაც} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\vec{r}_{uu} = (0,0,r), \quad \text{სადაც} \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x},$$

$$\vec{r}_{uv} = (0,0,s), \quad \text{სადაც} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\vec{r}_{vv} = (0,0,t), \quad \text{სადაც} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}.$$

პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ

$$E = (\vec{r}_u)^2 = 1 + p^2, \quad F = \vec{r}_u \vec{r}_v = pq, \quad G = (\vec{r}_v)^2 = 1 + q^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

შესაბამისად აღებული ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა ასე ჩაიწერება

$$\Im_1 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2,$$

ან რაც იგივეა

$$\Im_1 = (1 + z_x^2)dx^2 + 2z_x z_y dxdy + (1 + z_y^2)dy^2.$$

ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის გვექნება:

$$L=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

ამიტომ

$$\Im_2=\frac{rdu^2+2sdudv+tdv^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ან რაც იგივეა

$$\Im_2=\frac{z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

2. როგორი იქნება სიბრტყისათვის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმა?

ვთქვათ, სიბრტყე შეთავსებულია OXY სიბრტყესთან, მაშინ მისი განტოლება იქნება $z=0$ ან $\vec{r}=\vec{r}(x,y,0)$. რადიუს-ვექტორის წარმოებულებისათვის გვექნება

$$\vec{r}_u=(1,0,0),\ \vec{r}_v=(0,1,0),\ \vec{r}_{uu}=(0,0,0),\ \vec{r}_{uv}=(0,0,0),\ \vec{r}_{vv}=(0,0,0).$$

ხოლო პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები ასე გამოისახება:

$$E=1,\ F=0,\ G=1.$$

პირველ კვადრატულ ფორმას ექნება სახე:

$$\Im_1=dx^2+dy^2.$$

რაც შეეხება მეორე კვადრატულ ფორმას, იგი იგივურად ნულია

$$(L=M=N=0).$$

სიბრტყისათვის და მხოლოდ სიბრტყისათვის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა იგივურად ნულია.

§18. ზედაპირზე გავლებული წირის სიმრუდე

ზედაპირზე

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

განვიხილოთ წირი მოცემული შინაგანი განტოლებებით

$$u = u(s),\ v = v(s),$$

სადაც s ბუნებრივი პარამეტრია.

ფრენეს ფორმულების თანახმად

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}.$$

ნებისმიერი **წირის** (კერძოდ, ზედაპირზე გავლებული წირის) **სიმრუდის ვექტორი** ეწოდება $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ ვექტორს. ე. ი. ისეთ ვექტორს, რომელსაც წირის მთავარი ნორმალის მიმართულება აქვს, ხოლო სიდიდით კი წირის სიმრუდის ტოლია.

ზედაპირზე გავლებული წირის სიმრუდის ვექტორის გეგმილს ზედაპირის ნორმალზე, განსახილავ წერტილში, **წირის ასიმპტოტური სიმრუდე** ეწოდება.

თუ ასიმპტოტურ სიმრუდეს აღვნიშნავთ k_n, გვექნება

$$k_n = \text{გეგ}_{\vec{n}} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2},$$

ან რაც იგივეა

$$k_n = \vec{n}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1}.$$

ე. ი. ზედაპირზე გავლებული წირის ასიმპტოტური სიმრუდე ზედაპირის მეორე და პირველი კვადრატული ფორმების შეფარდების ტოლია.

გადავიწეროთ ასიმპტოტური სიმრუდის გამოსახულება ასე:

$$k_n = \frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G}.$$

უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ზედაპირის აღებულ წერტილზე გამავალი წირის ასიმპტოტური სიმრუდე მხოლოდ წირის მხების მიმართულებაზეა დამოკიდებული. მართლაც, თუ ზედაპირი მოცემულია, მაშინვე გამოითვლება პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების კოეფიციენტები ნებისმიერ წერტილში, რჩება დიფერენციალების შეფარდება, რომელიც მხების მიმართულებითაა განსაზღვრული.

ზედაპირის აღებულ წერტილზე გამავალი წირის მხები, ზედაპირის გარკვეულ მიმართულებას განსაზღვრავს განსახილველ წერტილში. გამოდის, რომ ზედაპირის ყოველ მიმართულებას გარკვეული ასიმპტოტური სიმრუდე ეთანადება და ზედაპირზე გავლებულ იმ წირებს, რომელთაც საერთო მხები აქვთ, მათ ერთნაირი ასიმპტოტური სიმრუდე ექნებათ აღებულ წერტილში.

გავარკვიოთ ახლა, თუ როგორ არის დაკავშირებული ზედაპირზე გავლებული წირის სიმრუდე ასიმპტოტურ სიმრუდესთან.

თუ კუთხეს წირის მთავარ ნორმალსა და ზედაპირის ნორმალს შორის θ-თი აღვნიშნავთ, ასიმპტოტური სიმრუდის განმარტების თანახმად, გვექნება

$$k_n = k\cos\theta, \tag{1}$$

ან

$$\rho = R\cos\theta,$$

სადაც ρ წირის სიმრუდის რადიუსია, ხოლო R – ასიმპტოტური სიმრუდის რადიუსი.

რადგან კუთხე წირის მთავარ ნორმალსა და ზედაპირის ნორმალს შორის არის θ, ამიტომ კუთხე ზედაპირის მხებ სიბრტყესა და წირის მიმხებ სიბრტყეს შორის იქნება $\frac{\pi}{2} - \theta$.

ვთქვათ, ცნობილია ზედაპირზე გამავალი წირის მიმხები სიბრტყე. მაშინ მისი თანაკვეთა ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან გან-

საზღვრავს მხების მიმართულებას. მხების მიმართულება კი — ნორმალურ სიმრუდეს. ამასთანავე გვეცოდინება θ კუთხე და (1) ფორმულით ვიპოვით წირის სიმრუდეს.

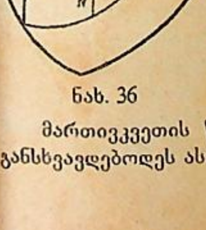
გამოდის, რომ წირის სიმრუდე სავსებით განისაზღვრება თუ ვიცით წირის მიმხები სიბრტყე. სხვანაირად წირებს, რომელთაც საერთო მიმხები სიბრტყე აქვთ, მათ ერთნაირი სიმრუდე ექნებათ.

ეს გვაძლევს საფუძველს ზედაპირზე გავლებული წირის სიმრუდის შესწავლა დავიყვანოთ ზედაპირის ბრტყელი კვეთის წირის სიმრუდის განხილვაზე. მართლაც, თუ გვინდა ზედაპირზე გავლებული რაიმე წირის სიმრუდე გავიგოთ, ჩვენ ზედაპირს გავკვეთთ ამ წირის მიმხები სიბრტყით. კვეთაში მიღებულ წირს ექნება იგივე სიმრუდე, რაც აღებულ წირს (რადგან მათ ერთი და იგივე მიმხები სიბრტყე ექნებათ).

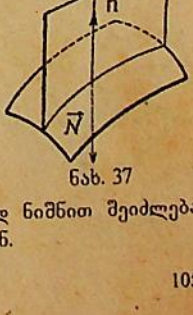
ბრტყელი კვეთის წირებიდან გამოიყოფა ეგრეთ წოდებული **ბრტყელი მართივი კვეთის წირი**. ასე ეწოდება წირს, რომელიც მიიღება ზედაპირის ნორმალზე გამავალი სიბრტყით თანაკვეთისას. ამ შემთხვევაში წირის მთავარი ნორმალი შეუთავსდება ზედაპირის ნორმალს. რაც შეეხება კუთხეს $\vec{N}$ და $\vec{n}$ მგეზავებს შორის, იქნება ან ნული, ან π (შესაბამისად ჩაზნექილი და ამოზნექილი მართივი კვეთების შემთხვევაში).

თუ მართივკვეთის წირის სიმრუდის რადიუსს აღვნიშნავთ ρ_n, მაშინ

$$\rho_n = \pm R.$$



ნახ. 36



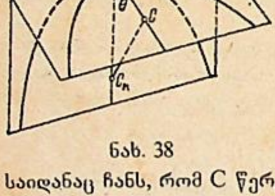
ნახ. 37

მართივკვეთის წირის სიმრუდე მხოლოდ ნიშნით შეიძლება განსხვავდებოდეს ასიმპტოტური სიმრუდისაგან.

§19. მენიეს დებულება

(1′) ტოლობას მარტივი გეომეტრიული ახსნა აქვს. ზედაპირის მოცემულ M წერტილზე რაიმე მიმართულებით ავიღოთ ორი კვეთი: ერთი დახრილი, მეორე მართივი. ვიგულისხმოთ, რომ ნორმალი ზედაპირზე ისეა შერჩეული, რომ ასეთი მართივი კვეთისათვის $\rho_n = R$, მაშინ ტოლობა (1′) მიიღებს სახეს

$$\rho = \rho_n \cos\theta \qquad (1'')$$



ნახ. 38

ავაგოთ მართივკვეთის წირის სიმრუდის ცენტრი. გადავზომოთ ნორმალზე ρ_n-ის ტოლი მონაკვეთი $\rho_n = MC_n$. ასევე დახრილ სიბრტყეში მთავარ ნორმალზე ავაგოთ C წერტილი ისე, რომ $\rho = MC$. (1″) ფორმულით

$$MC = MC_n \cos\theta,$$

საიდანაც ჩანს, რომ C წერტილში სამკუთხედს აქვს მართი კუთხე. აქედან ვიღებთ **მენიეს დებულებას:** ზედაპირზე რაიმე მიმართულებით აღებული ბრტყელი დახრილი კვეთის წირის სიმრუდის ცენტრი მიიღება ამავე მიმართულებით აღებულ მართივკვეთის წირის სიმრუდის ცენტრის დაგეგმილებით დახრილ სიბრტყეზე.

ნახ. 39

თუ განვიხილავთ ერთი და იმავე მიმართულებით სხვადასხვა დახრილ კვეთებს და ავაგებთ შესაბამის სიმრუდის ცენტრებს, ისინი იქნებიან იმ მართი კუთხეების წვეროები, რომლებიც ეყრდნობიან მართივკვეთის წირის სიმრუდის რადიუსს. ამიტომ სიმრუდის ცენტრები განლაგდებიან წრეწირზე, რომლის დიამეტრია MC_n-ის ტოლი. ყველა იმ წირიდან, რომელიც მოცემულ წერტილზე გადის და აქვს საერ-

თო მხები, უმცირესი სიმრუდე ექნება იმას, ვისი მიმხები სიბრტყეც გადის ზედაპირის ნორმალზე. როგორც ნახაზიდანაც ჩანს, როცა θ კუთხე იზრდება, სიმრუდის რადიუსი მცირდება, ხოლო სიმრუდე წირისა იზრდება.

§20. ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი, მთავარი სიმრუდეები, საშუალო და სრული სიმრუდე

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული ვექტორული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

დავუბრუნდეთ ზედაპირზე გავლებული წირის ასიმპტოტურ სიმრუდეს.

ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე გადის უამრავი წირი. ყოველი წირის მხები ზედაპირზე განსაზღვრავს რაიმე მიმართულებას. ყოველ მიმართულებას ეთანადება გარკვეული ასიმპტოტური სიმრუდე:

$$k_n = \frac{1}{R} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi + N}{E\xi^2 + 2F\xi + G}, \qquad \text{სადაც } \xi = \frac{du}{dv}. \tag{1}$$

ასიმპტოტური სიმრუდე აღებულ წერტილში ზედაპირის მიმართულებაზეა დამოკიდებული. შევისწავლოთ ამ ფუნქციის ექსტრემუმი. ვიპოვოთ ის მიმართულებანი, რომელზედაც ასიმპტოტური სიმრუდე აღწერს ექსტრემალურ მნიშვნელობებს. ამისათვის (1) გავაწარმოოთ ξ-თი და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ:

$$L\xi + M - \frac{1}{R}(E\xi + F) = 0.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით, მარტივი გარდაქმნების შედეგად, (1) ასე გადაიწერება

$$M\xi + N - \frac{1}{R}(F\xi + G) = 0.$$

საბოლოოდ, რამდენადაც $\xi = \dfrac{du}{dv}$, გვექნება:

$$
\begin{aligned}
&Ldu + Mdv - \frac{1}{R}(Edu + Fdv) = 0, \\
&Mdu + Ndv - \frac{1}{R}(Fdu + Gdv) = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

უკანასკნელი განტოლებებიდან განისაზღვრება როგორც ასიმპტოტური სიმრუდის ექსტრემალური მნიშვნელობანი, ისე ის მიმართულებანი, რომელზედაც მიიღწევა ექსტრემუმი.

ასიმპტოტური სიმრუდის ექსტრემალურ მნიშვნელობებს უწოდებენ ზედაპირის მთავარ სიმრუდეებს, ხოლო იმ მიმართულებებს, რომელზედაც მიიღწევა ეს ექსტრემუმი – ზედაპირის მთავარი მიმართულებები ეწოდება.

რომ ვიპოვოთ ზედაპირის მთავარი მიმართულებები, განტოლებათა (2) სისტემიდან უნდა გამოვრიცხოთ $\dfrac{1}{R}$. მივიღებთ

$$
\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0, \tag{3}
$$

ან უფრო სიმეტრიული სახით

$$
\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{3'}
$$

მთავარი მიმართულებები არ განისაზღვრება, როცა $L = M = N = 0$ (გამკვრივების წერტილში) და იმ შემთხვევაში, როცა მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები პირველის პროპორციულია (სფერული წერტილი). ორივე შემთხვევაში მთავარი მიმართულებების განმსაზღვრელი განტოლებანი კმაყოფილდება იგივურად. ზედაპირის ყოველი მიმართულება არის მთავარი.

მთავარი სიმრუდეების განსასაზღვრელად განტოლებათა (2) სისტემა ასე გადავიწეროთ:

$$\left(L-\frac{E}{R}\right)du+\left(M-\frac{F}{R}\right)dv=0,$$

$$\left(M-\frac{F}{R}\right)du+\left(N-\frac{G}{R}\right)dv=0.$$

ამ სისტემას ექნება არანულოვანი ამონახსნი, როცა

$$\begin{vmatrix} L-\dfrac{E}{R} & M-\dfrac{F}{R} \\ M-\dfrac{F}{R} & N-\dfrac{G}{R} \end{vmatrix}=0, \qquad (5)$$

ან გაშლილად

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}-(EN-2FM+GL)\frac{1}{R}+LN-M^2=0 \qquad (5')$$

მიღებული კვადრატული განტოლების ფესვები იქნება ზედაპირის მთავარი სიმრუდეები და შესაბამისად აღინიშნება $\frac{1}{R_1}$ და $\frac{1}{R_2}$-ით.

მთავარი სიმრუდეების ნამრავლს ეწოდება ზედაპირის სრული სიმრუდე, ხოლო მთავარი სიმრუდეების ნახევარჯამს – ზედაპირის საშუალო სიმრუდე. თუ მათ შესაბამისად აღვნიშნავთ K და H, გვექნება

$$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2},\quad H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

სრული და საშუალო სიმრუდე ზედაპირის ძირითადი ინვარიანტებია. როცა ლაპარაკობენ მუდმივსიმრუდიან ზედაპირებზე, მხედველობაში აქვთ მაშინ ზედაპირის სრული სიმრუდე. $H=0$

გამოიყოფა შესანიშნავი კლასი ზედაპირებისა, რომლებიც მინიმა-
ლური ზედაპირებით არის ცნობილი. ეს ზედაპირები მოცემულ
კონტურის შემთხვევაში უმცირეს ფართობს იძლევიან.

გამოვსახოთ საშუალო და სრული სიმრუდე პირველი და მეო-
რე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტების საშუალებით. ვიეტას
ფორმულების გამოყენება (5′) განტოლების მიმართ მოგვცემს:

$$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \qquad (6)$$

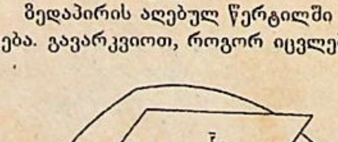
$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{EL-2FM+GL}{EG-F^2}. \qquad (7)$$

§21. დიუპენის ინდიკატრისი; ეილერის ფორმულა

ასიმპტოტური სიმრუდის ცვლილების თვალსაჩინო სურათ
გვაძლევს დიუპენის ინდიკატრისი.

როგორც გაირკვა, ზედაპირზე გავლებული წირის სიმრუდი
შესწავლა დადის ზედაპირის ბრტყელი კვეთის წირის სიმრუდი
შესწავლაზე. ეს კი მარტივად არის დამოკიდებული მართივი კვე
თის წირის სიმრუდესთან.

ზედაპირის აღებულ წერტილში უამრავი მართივი კვეთა გაივ
ლება. გავარკვიოთ, როგორ იცვლება ასიმპტოტური სიმრუდე ერ
თი მართივი კვეთიდან მეო
რეზე გადასვლისას. ამისათ
ვის ვისარგებლოთ დიუპენი
მიერ შემოთავაზებული მე
თოდით.



ნახ. 40

ზედაპირის რაიმე M
წერტილში, ყოველი მარ
თივკვეთის წირის მხებზ
გადავზომოთ $\sqrt{\rho_n}$ სიგრძი
ტოლი მონაკვეთი, სადაც ρ_n

არის შესაბამისი მართივკვეთის წირის სიმრუდის რადიუსი. ამ მონაკვეთების ბოლო წერტილები მოგვცემს გარკვეულ ნაკვთს ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, **რომელსაც დიუპენის ინდიკატრისი, ან სიმრუდის ინდიკატრისი** ჰქვია. გამოვიყვანოთ მისი განტოლება. ამისათვის ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, შეხების M წერტილში ავილოთ საკოორდინატო სისტემა $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ღერძებით.

თუ P ინდიკატრისის წერტილია, მაშინ

$$\overrightarrow{MP} = \xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v, \tag{1}$$

სადაც ξ და η არის P წერტილის კოორდინატები ალებული სისტემის მიმართ.

მეორე მხრივ, აგების თანახმად

$$\overrightarrow{MP} = \sqrt{\rho_n}\,\vec{T},$$

სადაც $\vec{T}$ მართივკვეთის წირის მხების მგეზავია. რადგან

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds},$$

ამიტომ

$$\overrightarrow{MP} = \sqrt{\rho_n}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right) = \sqrt{\rho_n}\frac{du}{ds}\vec{r}_u + \sqrt{\rho_n}\frac{dv}{ds}\vec{r}_v. \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობების შედარება გვაძლევს, რომ

$$\xi = \sqrt{\rho_n}\frac{du}{ds}, \quad \eta = \sqrt{\rho_n}\frac{dv}{ds}. \tag{3}$$

ასიმპტოტური სიმრუდის გამოსახულებას მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{R}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავამრავლებთ შესაბამისი მართივკვეთის წირის სიმრუდის რადიუსზე, მივიღებთ

$$\frac{\rho_n}{R}=L\left(\sqrt{\rho_n}\frac{du}{ds}\right)^2+2M\left(\sqrt{\rho_n}\frac{du}{ds}\right)\left(\sqrt{\rho_n}\frac{dv}{ds}\right)+N\left(\sqrt{\rho_n}\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

(3) ტოლობების გათვალისწინება კი გვაძლევს

$$L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2=\pm1,\quad (R=\pm\rho_n) \tag{4}$$

დიუპენის ინდიკატრისის განტოლებას.

დიუპენის ინდიკატრისის მიხედვით ხდება ზედაპირის წერტილთა კლასიფიკაცია.

თუ

$$LN-M^2<0,$$

ინდიკატრისი ორი შეუღლებული ჰიპერბოლია, ზედაპირის ასეთ წერტილს ჰიპერბოლური ტიპის წერტილი ეწოდება.

თუ

$$LN-M^2>0,$$

დიუპენის ინდიკატრისი ელიფსია. ზედაპირის ასეთი წერტილი ელიფსური ტიპისაა.

როცა

$$LN-M^2=0,$$

ინდიკატრისი ორი პარალელური წრფეა. ზედაპირის ასეთ წერტილს პარაბოლური ტიპის წერტილს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ინდიკატრისის განტოლების დისკრიმინანტის ნიშანი ემთხვევა ზედაპირის სრული სიმრუდის ნიშანს, ამიტომ ზედაპირის წერტილი იქნება ჰიპერბოლური, ელიფსური, თუ პარაბოლური ტიპისა იმისდა მიხედვით, თუ შესაბამისად

$$K<0,\ \ K>0,\ \ K=0.$$

დავუბრუნდეთ ისევ ინდიკატრისის განტოლებას და შევეცადოთ გავამარტივოთ იგი. ამას ჩვენ მივაღწევთ კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით. სივრცის საკოორდინატო სისტემის სათავე მოვათავსოთ ზედაპირის M წერტილში ისე, რომ OXY სიბრტყე შეუთავსდეს ზედაპირის მხებ სიბრტყეს ამ წერტილში, ხოლო OX და OY ღერძები – ინდიკატრისის მთავარ ღერძებს. კოორდინატთა სისტემის ასეთი შერჩევისას მეორე რიგის წირის განტოლებაში აღარ შევა კოორდინატთა ნამრავლის შემცველი წევრი და განტოლება მიიღებს სახეს:

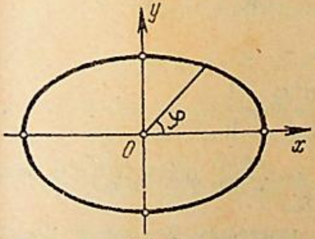
$$L_0x^2 + N_0y^2 = \pm 1. \tag{5}$$

თუ φ-თი აღვნიშნავთ კუთხეს ინდიკატრისის მთავარ მიმართულებასა და ნებისმიერ მიმართულებას შორის, მაშინ

$$x = \sqrt{\rho_n}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\rho_n}\sin\varphi$$

და ინდიკატრისის განტოლება ასე გადაიწერება

$$L_0\cos^2\varphi + N_0\sin^2\varphi = \pm\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{R}. \tag{6}$$



ნახ. 41

ვიპოვოთ L_0 და N_0 კოეფიციენტები.

ვიგულისხმოთ, რომ

$$N_0 > L_0.$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ინდიკატრისის მთავარი მიმართულებანი ამავე დროს ზედაპირის მთავარი მიმართულებებია. (6) განტოლება ასე გადავიწეროთ

$$\frac{1}{R} = L_0 + (N_0 - L_0)\sin^2\varphi. \tag{7}$$

$\varphi = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ეთანადება ინდიკატრისის მთავარ ღერძებს. ვაჩვენოთ, რომ ასიმპტოტური სიმრუდე აღწერს ექსტრემუმებს სწორედ როცა $\varphi = 0$ და $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. მართლაც, როგორც (7) განტოლებებიდან ჩანს, როცა $\varphi = 0$, ასიმპტოტური სიმრუდე იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, ხოლო როცა $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ – მაქსიმალურს, რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

$\varphi = 0$-ის შესაბამის ასიმპტოტური სიმრუდის ექსტრემალურ მნიშვნელობას თუ აღვნიშნავთ $\dfrac{1}{R_1}$, ხოლო $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$-ის შესაბამისს კი – $\dfrac{1}{R_2}$, მივიღებთ

$$L_0 = \frac{1}{R_1}, \quad N_0 = \frac{1}{R_2},$$

მაშინ (6) ფორმულა ასე ჩაიწერება

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{R}. \tag{8}$$

ეს არის **ეილერის ფორმულა**, რომელიც ასიმპტოტურ სიმრუდეს უკავშირებს მთავარ სიმრუდეებს.

ახლა გადავიდეთ ზედაპირზე გავლებულ ზოგიერთი წირის განხილვაზე.

§22. ასიმპტოტური წირები; შეუღლებულ წირთა ბადე

ზედაპირის M წერტილში აღებულ $(du:dv)$ მიმართულებას ეწოდება ასიმპტოტური, თუ ამ მიმართულებით ასიმპტოტური სიმრუდე უდრის ნულს. ისე რომ, $(du:dv)$ მიმართულება ასიმპტოტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \tag{1}$$

აქედან ვილებთ, რომ ზედაპირის ელიფსურ წერტილში არ გვექნება ასიმპტოტური მიმართულება, ჰიპერბოლურ წერტილზე გვექნება ორი სხვადასხვა, პარაბოლურზე – ერთი.

ზედაპირზე გავლებულ წირს ეწოდება **ასიმპტოტური წირი**, თუ მის ყოველ წერტილში გავლებულ მხებს აქვს ასიმპტოტური მიმართულება. (1) განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს ასიმპტოტურ მიმართულებებს, იქნება ასიმპტოტური წირების დიფერენციალური განტოლება.

ალვნიშნოთ **ასიმპტოტური წირების ზოგიერთი თვისება**:

ასიმპტოტური წირის ყოველ წერტილში ასიმპტოტური სიმრუდე ნული უნდა იყოს. ასიმპტოტური სიმრუდე კი (როგორც უკვე გვქონდა ნორმალური სიმრუდე $k_n = k\cos\theta$, სადაც $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{N})$) ნულს უდრის, როცა $k = 0$, ან როცა $\cos\theta = 0$, ე. ი. $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

თუ წირის ყოველ წერტილში სიმრუდე ნულია, ასეთი წირი წრფეა. გამოდის, რომ თუ ზედაპირზე წრფეა მოთავსებული, ის იქნება ასიმპტოტური წირი.

თუ კუთხე ზედაპირის ნორმალსა და წირის მთავარ ნორმალს შორის $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, მაშინ მთავარი ნორმალი ზედაპირის მხებ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული (წირის მხები თავისთავად ზედაპირის მხებ სიბრტყეშია) და ასიმპტოტური წირის მიმხები სიბრტყე დაემთხვევა ზედაპირის მხებ სიბრტყეს. ზოგჯერ ასიმპტოტური წირის ამ თვისებას მის განმარტებად იღებენ, ე. ი. ზედაპირზე გავლებულ წირს უწოდებენ ასიმპტოტურს, თუ მისი მიმხები სიბ-

რტყე შეთავსებულია ზედაპირის მხებ სიბრტყესთან წირის ყოველ წერტილში.

ვნახოთ რა შემთხვევაში იქნება საკოორდინატო წირები ასიმპტოტური წირები.

საკოორდინატო წირების გასწვრივ, ან u იცვლება და $v = \text{const}$, ან $u = \text{const}$ და v იცვლება. შესაბამისად გვექნება $du \neq 0$ და $dv = 0$, ან $du = 0$ და $dv \neq 0$. (1) განტოლებაში მათი თანმიმდევრობით ჩასმა მოგვცემს, რომ

$$L = N = 0.$$

გამოდის, რომ ასიმპტოტური წირები მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება საკოორდინატო წირები, როცა მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები $L = N = 0$.

განვიხილოთ ზედაპირზე ორი მიმართულება $(du{:}dv)$ და $(\delta u{:}\delta v)$ ან მოკლედ (d) და (δ). ამ მიმართულებებს ეწოდებათ შეუღლებული, თუ მათი შემცველი წრფეები დიუპენის ინდიკატრისის შეუღლებული დიამეტრებია. როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაა ცნობილი, მეორე რიგის წირის შეუღლებული დიამეტრების მიმართულებები განისაზღვრება განტოლებით

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0.$$

აქ a_{11}, a_{12}, a_{22}, მეორე რიგის წირის განტოლების უფროსი წევრების კოეფიციენტებია.

ჩვენ შემთხვევაში

$$k_1 = \frac{dv}{du}, \quad k_2 = \frac{\delta v}{\delta u}, \quad a_{11} = L, \quad a_{12} = M, \quad a_{22} = N,$$

ამიტომ განტოლება ასე გადაიწერება:

$$L du \delta u + M(du \delta v + \delta u dv) + N dv \delta v = 0. \qquad (2)$$

მიღებული (2) პირობა აუცილებელი და საკმარისია იმისათვის, რომ ზედაპირის (d) და (δ) მიმართულებები იყოს შეუღლებული.

ზედაპირზე გავლებულ წირთა წყვილს, რომელთა მხებები შეუღლებულია, **შეუღლებული წირები** ეწოდება.

როგორც ასიმპტოტური წირების დიფერენციალური განტოლე-ბებიდან ჩანს, ასიმპტოტური წირები თავისთავის შეუღლებული წირებია.

ვთქვათ, ზედაპირზე გვაქვს წირთა ორი ოჯახი, რომელიც ქმნის ბადეს, ე. ი. ზედაპირის ყოველ წერტილზე გადის თითო წი-რი თითოეული ოჯახიდან.

წირთა ბადეს ეწოდება შეუღლებული, თუ ყოველ წერტილში სხვადასხვა ოჯახის წირები შეუღლებულია.

თუ საკოორდინატო წირები ზედაპირზე შეუღლებულ ბადეს ქმნის, მაშინ მეორე კვადრატული ფორმის M კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ამის შესამოწმებლად (2) განტოლებაში უნდა შევიტანოთ $dv = 0\ (du \neq 0)$ და $\delta u = 0\ (\delta v \neq 0)$.

§23. სიმრუდის წირები

ზედაპირზე გავლებულ წირს, რომლის მხებსაც ყოველ წერ-ტილში აქვს ზედაპირის მთავარი მიმართულება, ეწოდება **სიმ-რუდის წირი.**

ვთქვათ, ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

გავლებულია წირი მოცემული შინაგანი განტოლებებით

$$u = u(t),\ v = v(t). \tag{1}$$

იმისათვის, რომ ეს წირი იყოს სიმრუდის წირი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წირის გასწვრივ du და dv აკმაყოფილებ-დეს განტოლებას, რომელიც ზედაპირის მთავარ მიმართულებებს განსაზღვრავს

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

ამიტომ (2) იქნება სიმრუდის წირების დიფერენციალური განტოლება.

(2) განტოლება გაშლილად ასე ჩაიწერება

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0. \quad (2')$$

ჩვენ გამოვრიცხავთ იმ შემთხვევას, როცა სამივე კოეფიციენტი ერთდროულად უდრის ნულს, ე. ი. როცა პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები პროპორციულია.

ვთქვათ

$$EM - FL \neq 0,$$

მაშინ განტოლების მარცხენა მხარე გავყოთ $(dv)^2$-ზე. მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $(du{:}dv)$ მიმართ:

$$(EN - FL)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (EN - GL)\frac{du}{dv} + FN - GM = 0.$$

მიღებული კვადრატული განტოლების ამოხსნა მოგვცემს ზედაპირის ორ მთავარ მიმართულებას ყოველ წერტილში:

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v).$$

მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებათა ინტეგრებით კი მივიღებთ სიმრუდის წირთა ორ ოჯახს.

ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი ემთხვევა დიუპენის ინდიკატრისის მთავარ ღერძებს. ისინი კი ურთიერთმართობი და შეუღლებულია. ამიტომ სიმრუდის წირები ურთიერთმართობი და შეუღლებული წირებია.

თუ საკოორდინატო წირებად ავიღებთ სიმრუდის წირებს, მაშინ $F = 0$, რადგან წირები ურთიერთმართობია, და $M = 0$, რადგან წირები შეუღლებულია.

§24. როდრიგის ფორმულები

დავუბრუნდეთ განტოლებებს, საიდანაც ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი და მთავარი სიმრუდეები განისაზღვრება

$$Ldu + Mdv - \frac{1}{R}(Edu + Fdv) = 0,$$

$$Mdu + Ndv - \frac{1}{R}(Fdu + Gdv) = 0.$$

თუ E, F, G, L, M, N კოეფიციენტების მნიშვნელობებს გავითვალისწინებთ, აღებული სისტემა ასე შეგვიძლია გადავწეროთ

$$\vec{r}_u\left\{\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv + \frac{1}{R}(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)\right\} = 0,$$

$$\vec{r}_v\left\{\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv + \frac{1}{R}(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)\right\} = 0.$$

ან მოკლედ

$$\vec{r}_u\left(d\vec{n} + \frac{1}{R}d\vec{r}\right) = 0,$$

$$\vec{r}_v\left(d\vec{n} + \frac{1}{R}d\vec{r}\right) = 0,$$

რომელსაც დავუმატოთ მესამე

$$\vec{n}\left(d\vec{n} + \frac{1}{R}d\vec{r}\right) = 0,$$

რომელიც ყოველთვის სრულდება.

რამდენადაც $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$ ვექტორები არ არის კომპლანარული, ამიტომ უკანასკნელი სამი განტოლებიდან ვიღებთ, რომ

$$d\vec{n} + \frac{1}{R} d\vec{r} = 0.$$

საიდანაც გვაქვს

$$d\vec{n} = -\frac{1}{R} d\vec{r}. \qquad (1)$$

მიღებულ ფორმულას **როდრიგის ფორმულას** უწოდებენ. მას ადგილი აქვს მთავარი მიმართულებებისათვის და მთავარი სიმრუდეებისათვის.

თუ საკოორდინატო წირებად სიმრუდის წირებს მივიღებთ, მაშინ

$$\vec{n}_u = -\frac{1}{R_1}\vec{r}_u, \quad \vec{n}_v = -\frac{1}{R_2}\vec{r}_v. \qquad (2)$$

ეს ფორმულებიც როდრიგის ფორმულების სახელს ატარებს. იმისათვის, რომ (1) ფორმულა გეომეტრიულად დავახასიათოთ, შემოვიღოთ სფერული ასახვის ცნება.

§25. ზედაპირის სფერული ასახვა, გაუსის სიმრუდის გეომეტრიული მნიშვნელობა

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

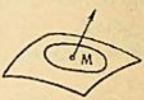
ვიგულისხმოთ, რომ

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$$

ვექტორ-ფუნქციის განსაზღვრის არეზე.

ავიღოთ ამ ზედაპირზე წერტილთა რაიმე სიმრავლე $\mathfrak{R}$ და ამ წერტილებზე გავატაროთ ზედაპირის ნორმალთა მგეზავები. თუ ამ მგეზავებს პარალელურად გადავიტანთ სივრცის რაიმე ფიქსირებულ O წერტილში, მაშინ მათი ბოლოები განლაგდება ერთეულ

რადიუსთან სფეროზე და განსაზღვრავენ გარკვეულ სიმრავლეს $\mathfrak{R}^*$ წერტილებისა, რომელსაც უწოდებენ $\mathfrak{R}$ სიმრავლის სფერულ ანასახს, ხოლო თვით ასახვას კი ეწოდება **ზედაპირის სფერული ასახვა**.



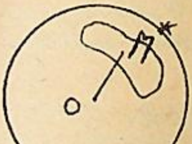
ნახ. 42

აღვნიშნოთ სფერული ანასახის წერტილების რადიუს-ვექტორები $\vec{r}^*$. თუ ზედაპირზე ვიმოძრავებთ რაიმე წირის გასწვრივ, სფეროზე მივიღებთ შესაბამის წირს, რომლის გასწვრივაც აგების თანახმად $d\vec{r}^* = d\vec{n}$.

სიმრუდის წირებისათვის კი როდრიგის ფორმულის გათვალისწინებით გვექნება

$$d\vec{r}^* = -\frac{1}{R} d\vec{r}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ ზედაპირის სფერული ასახვისას ზედაპირის მთავარი მიმართულებანი პარალელურია მათი სფერული ანასახის მიმართულებისა.



ნახ. 43

ადგილი აქვს შებრუნებულ **დებულებასაც**: თუ ზედაპირის რაიმე მიმართულება პარალელურია მისი სფერული ანასახისა, მაშინ ეს მიმართულება ზედაპირის მთავარი მიმართულებაა.

მართლაც, თუ $d\vec{r}^* = d\vec{n}$ და $d\vec{r}$ პარალელურია, გვექნება

$$d\vec{n} = \lambda d\vec{r},$$

ან რაც იგივეა

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv - \lambda(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = 0.$$

თუ უკანასკნელს თანმიმდევრობით სკალარულად გავამრავლებთ $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებზე, მივიღებთ

$$Ldu + Mdv + \lambda(Edu + Fdv) = 0,$$
$$Mdu + Ndv + \lambda(Fdu + Gdv) = 0.$$

საიდანაც თუ λ-ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ განტოლებას, რომელიც ზედაპირის მთავარ მიმართულებებს განსაზღვრავს.

ზედაპირზე რომ ავიღოთ ასიმპტოტური მიმართულება, იგი მართობი იქნება შესაბამისი სფერული ანასახისა.

მართლაც, ასიმპტოტური მიმართულებები განისაზღვრება განტოლებით

$$d\vec{n} \cdot d\vec{r} = 0 .$$

მაგრამ სფერული ასახვისას $d\vec{r}^{\,*} = d\vec{n}$, გამოდის, რომ

$$d\vec{r}^{\,*} \cdot d\vec{r} = 0,$$

ე. ი. $d\vec{r}^{\,*}$ და $d\vec{r}$ მიმართულებები ურთიერთმართობია.

ვთქვათ, ზედაპირის M წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოში აღებულია G არე (ვიგულისხმოთ, რომ $K \neq 0$). G არის სფერული ანასახი იყოს G^*. ფართის ელემენტები შესაბამისად აღვნიშნოთ $d\sigma$ და $d\sigma^*$. გვექნება

$$d\sigma = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|dudv, \quad d\sigma^* = |[\vec{n}_u, \vec{n}_v]|dudv .$$

თუ საკოორდინატო წირებად ავიღებთ სიმრუდის წირებს, როდრიგის ფორმულების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$d\sigma^* = \left|\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}\right| |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|dudv = |K|d\sigma ,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = |K| .$$

ზედაპირის სრული სიმრუდის აბსოლუტური მნიშვნელობა ზედაპირის სფერული ანასახის ფართის ელემენტის ზედაპირის ფართის ელემენტთან შეფარდების ტოლია.

§26. ზედაპირის მესამე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა

ზედაპირის ორ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმასთან

$$\Im_1 = (d\vec{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$\Im_2 = (\vec{n}d^2\vec{r}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

ერთად განიხილავენ მესამე დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას

$$\Im_3 = (d\vec{n})^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

სადაც

$$e = (\vec{n}_u)^2, \quad f = \vec{n}_u\vec{n}_v, \quad g = (\vec{n}_v)^2.$$

მესამე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა წარმოადგენს ზედაპირის სფერული ანასახისათვის პირველ კვადრატულ ფორმას.

ზედაპირის მესამე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა ზედაპირთა თეორიაში იგივე როლს არ ასრულებს, როგორც პირველი ორი. იგი შეიძლება მიღებულ იქნეს ალგებრულად პირველი ორის საშუალებით. სახელდობრ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Im_3 + K\Im_1 - 2H\Im_2 = 0, \tag{*}$$

სადაც K და H ზედაპირის სრული და საშუალო სიმრუდეა.

ვაჩვენოთ ეს. გამოთვლების გასამარტივებლად საკოორდინატო წირებად ავიღოთ სიმრუდის წირები. მაშინ $F = 0$, $M = 0$. გარდა ამისა, გავითვალისწინოთ როდრიგის ფორმულები. გვექნება

$$L = -\vec{n}_u \vec{r}_u = \frac{1}{R_1}(\vec{r}_u)^2 = \frac{E}{R_1},$$

$$N = -\vec{n}_v \vec{r}_v = \frac{1}{R_2}(\vec{r}_v)^2 = \frac{G}{R_2},$$

$$e = \vec{n}_u^2 = \frac{1}{R_1^2}(\vec{r}_u)^2 = \frac{E}{R_1^2},$$

$$f = \vec{n}_u \vec{n}_v = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}\vec{r}_u \vec{r}_v = \frac{F}{R_1 R_2} = 0,$$

$$g = \vec{n}_v^2 = \frac{1}{R_2^2}(\vec{r}_v)^2 = \frac{G}{R_2}.$$

ამიტომ ზედაპირის დიფერენციალური კვადრატული ფორმები ასე ჩაიწერება

$$\Im_1 = Edu^2 + Gdv^2,$$

$$\Im_2 = \frac{E}{R_1}du^2 + \frac{G}{R_2}dv^2,$$

$$\Im_3 = \frac{E}{R_1^2}du^2 + \frac{G}{R_2^2}dv^2.$$

განვიხილოთ (*) ტოლობის მარცხენა მხარე, მასში შევიტანოთ $\Im_1, \Im_2, \Im_3$-ის მიღებული გამოსახულებანი და K, H მნიშვნელობები, გვექნება

$$\Im_3 + K\Im_1 - 2H\Im_2 =$$

$$= \left(\frac{E}{R_1^2} + KE - 2H\frac{E}{R_1}\right)du^2 + \left(\frac{G}{R_2^2} + KG - 2H\frac{G}{R_2}\right)dv^2 =$$

$$= \left\{\frac{E}{R_1^2} + \frac{E}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{E}{R_1}\right\}du^2 +$$

$$+\left\{\frac{G}{R_2^2}+\frac{G}{R_1R_2}-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{G}{R_2}\right\}dv^2=0,$$

რადგან ორივე კოეფიციენტი ნული ხდება. რაც ამტკიცებს დებულებას.

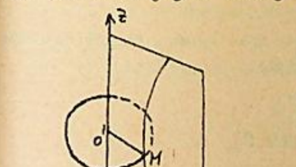
გარდა ამისა, ამ სამი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა

$$(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(eg-f^2).$$

მეორე კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი საშუალო პროპორციულია პირველი და მესამე კვადრატული ფორმების დისკრიმინანტებისა.

§27. ბრუნვითი ზედაპირი, დადებით და უარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირები

ბ რ უ ნ ვ ი თ ი ეწოდება ზედაპირს, რომელიც მიიღება ბრტყელი წირის ბრუნვით რაიმე წრფის გარშემო, რომელიც მის სიბრტყეშია მოთავსებული. იმ წრფეს, რომლის გარშემოც ხდება წირის ბრუნვა, ბრუნვის ღერძი ეწოდება. ღერძზე გამავალი სიბრტყეები ამ ზედაპირზე ამოკვეთს ეგრეთ წოდებულ მერიდიანებს, ხოლო ბრუნვის ღერძის მართობი სიბრტყეებით თანაკვეთა კი განსაზღვრავს პარალელებს.



ნახ. 44

გამოვიყვანოთ ბრუნვითი ზედაპირის განტოლება. საკოორდინატო სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ ბრუნვის ღერძი იყოს OZ ღერძი.

Π-თი აღვნიშნოთ სიბრტყე, რომელშიც მდებარეობს განსახი-ლავი წირი. Π სიბრტყეში შემოვიღოთ კოორდინატთა ორთო-გონალური სისტემა OUZ, სადაც $(OU) = \Pi \cap (OXY)$. ვთქვათ, ამ სიბრტყეში წირი მოიცემა განტოლებით $z = f(u)$. კუთხე XOU აღვნიშნოთ v-თი. როცა v იცვლება $[0, 2\pi]$ შუალედში, მაშინ M წერტილი აღწერს წრეწირს O' ცენტრით OZ ღერძზე.

ეს წრეწირი OZ ღერძის მართობ სიბრტყეში იქნება მოთავ-სებული.

თუ M წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x, y, z, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u) \tag{1}$$

M წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორისათვის კი გვექნება

$$\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, f(u)). \tag{2}$$

(1) წარმოადგენს ბრუნვითი ზედაპირის პარამეტრულ განტო-ლებებს, ხოლო (2) კი ვექტორულად არის ჩაწერილი.

ვიპოვოთ ბრუნვითი ზედაპირის პირველი და მეორე დიფერ-ენციალური კვადრატული ფორმა, გამოვითვალოთ მისი სრული სიმრუდე.

ჯერ რადიუს-ვექტორის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები განვსაზღვროთ, გვექნება

$$\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, f'),$$
$$\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$
$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, f''),$$
$$\vec{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),$$
$$\vec{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = 1 + (f')^2, \quad F = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v^{\,2} = u^2.$$

ამიტომ პირველ კვადრატულ ფორმას ექნება სახე

$$\Im_1 = \{1+(f')^2\}du^2 + u^2dv^2,$$

ხოლო მისი დისკრიმინანტი კი იქნება ტოლი

$$EG - F^2 = u^2(1+(f')^2).$$

მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისათვის გვექნება

$$L = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}}, \quad M = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} = 0,$$

$$N = \frac{(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{uf'}{\sqrt{1+(f')^2}}.$$

ხოლო მეორე კვადრატული ფორმა ასე ჩაიწერება:

$$\Im_2 = \frac{f''du^2 + uf'dv^2}{\sqrt{1+(f')^2}}.$$

მივიღეთ, რომ კვადრატული ფორმების კოეფიციენტები $F = 0$, $M = 0$, ე. ი. საკოორდინატო წირები სიმრუდის წირებია. u წირები ($v = const$) იქნება მერიდიანები, ხოლო v წირები ($u = const$) – პარალელები.

მეორე კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი იქნება ტოლი

$$LN - M^2 = \frac{uf'f''}{1+(f')^2}.$$

ბრუნვითი ზედაპირის სრული სიმრუდე კი ასე მოიცემა

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f'f''}{u(1+(f')^2)^2} \tag{1}$$

განვიხილოთ ბრუნვითი ზედაპირის ორი კერძო შემთხვევა:

I. **სფერო.** როგორი იქნება მისთვის პირველი და მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა და სრული სიმრუდე. სფერო

შეგვიძლია მივიღოთ $z^2+u^2=a^2$ წრეწირის ბრუნვით OZ ღერძის გარშემო.

განტოლების $z^2+u^2=a^2$ გაწარმოებით ვიღებთ

$$2zz'+2u=0,$$

$$(z')^2+zz''+1=0,$$

საიდანაც გვექნება

$$z'=-\frac{u}{z},\quad z''=-\frac{u^2+z^2}{z^3}=-\frac{a^2}{z^3}.$$

სფეროსათვის პირველ და მეორე კვადრატულ ფორმას ექნება სახე:

$$\Im_1=\frac{a^2}{a^2-u^2}du^2+u^2dv^2,$$

$$\Im_2=-\frac{\dfrac{a^2}{a^2-u^2}du^2+u^2dv^2}{a}.$$

ე. ი. სფეროსათვის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები პროპორციულია.

სრული სიმრუდისათვის კი მივიღებთ

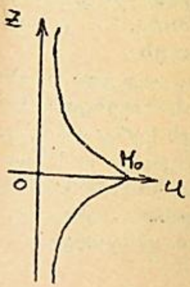
$$K=\frac{\dfrac{a^2u}{(a^2-u^2)^2}}{u\left(\dfrac{a^2}{a^2-u^2}\right)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

სფერო მუდმივ დადებით სიმრუდიანი ზედაპირია.

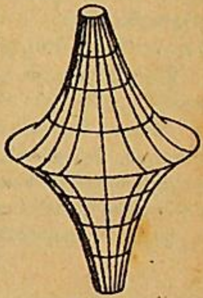
2. **ფსევდოსფერო.** ეს არის ბრუნვითი ზედაპირი, რომელიც მიიღება ტრაქტრისის ბრუნვით მისი ასიმპტოტის გარშემო (ეს წირი იმით არის შესანიშნავი, რომ მხების სიგრძე შეხების წერტილიდან ღერძთან თანაკვეთამდის მუდმივია). განვიხილოთ ტრაქტრისი მოცემული პარამეტრული განტოლებით:

$$z=a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad u=a\sin t\quad (a=\text{const}>0).$$

ამ წირის ბრუნვით OZ ღერძის გარშემო მიიღება ფსევდოსფერო.



ნახ. 45



ნახ. 46

ვიპოვოთ მისი სრული სიმრუდე.

ვისარგებლოთ (1) ფორმულით. ამისათვის გამოვითვალოთ f' და f''.

$$f'=\frac{z'}{u'}=\frac{a\left(\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}}-\sin t\right)}{a\cos t}=\operatorname{ctg} t,\quad (t\neq\frac{\pi}{2})$$

$$f''=-\frac{1}{a\sin^2 t\cos t}.$$

სრული სიმრუდისათვის მივიღებთ:

$$K=-\frac{\dfrac{1}{a\sin^3 t}}{a\sin t(1+\operatorname{ctg}^2 t)^2}=-\frac{1}{a^2}.$$

ფსევდოსფერო მუდმივ უარყოფითსიმრუდიანი ზედაპირია.

§28. ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ ზედაპირთა ოჯახის მომვლები

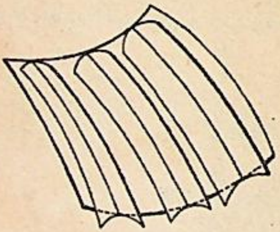
განვიხილოთ ერთ λ პარამეტრზე დამოკიდებულ ზედაპირთა ოჯახი. თუ არსებობს ისეთი ზედაპირი, რომელიც ყოველ თავის წერტილში ეხება ამ ოჯახის ერთ ზედაპირს მაინც, მას ეწოდება **ზედაპირთა მოცემული ოჯახის მომვლები**.

წირს, რომლის გასწვრივ მომვლები ეხება აღებული ოჯახის ზედაპირს, ეწოდება ამ **ზედაპირის დამახასიათებელი წირი**. რადგან მომვლები ზედაპირი ყოველ თავის წერტილში ეხება რომელიმე ზედაპირს, ხოლო შეხების წერტილები კი დამახასიათებელ წირებზეა მოთავსებული, ამიტომ მომვლები წარმოგვიდგება როგორც დამახასიათებელი წირებისაგან შექმნილი ზედაპირი.

ვთქვათ, ზედაპირთა ოჯახი განსაზღვრულია განტოლებით

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad (1)$$

სადაც F არის C^2 კლასის ფუნქცია ყველა არგუმენტის მიმართ. λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის (1) განტოლებიდან გამოიყოფა გარკვეული ზედაპირი, λ-ს ცვლილებით კი მივიღებთ ზედაპირთა მთელ ოჯახს.



ნახ. 47

ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ზედაპირთა ოჯახის მომვლები. მომვლების განმარტების თანახმად, მისი ყოველი წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს ოჯახის რომელიმე ზედაპირს, რომელიც ხასიათდება λ პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობით. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მომვლების ყოველ წერტილს ეთანადება λ პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობა ისე, რომ λ იქნება მომვლების წერტილის კოორდინატებზე დამოკიდებული

$$\lambda = \lambda(x, y, z).$$

ზედაპირთა ოჯახის განტოლებაში მომვლების წერტილის კო-
ორდინატების და λ-ს შესაბამისი მნიშვნელობის შეტანით იგივე-
ობას მივიღებთ.

მომვლები უნდა ეხებოდეს ოჯახის ზედაპირებს. ეს ნიშნავს,
რომ მომვლებ ზედაპირზე თუ ავიღებთ წირს

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

ამ წირის წერტილების კოორდინატებმა უნდა დააკმაყოფილონ (1)
განტოლება

$$F(x(t), y(t), z(t), \lambda(t)) = 0.$$

მისი გაწარმოება გვაძლევს

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} + F_\lambda \frac{d\lambda}{dt} = 0. \qquad (2)$$

წირის მხები უნდა იყოს ამავე დროს მხები შესაბამისი ზედაპი-
რისა და ამიტომ მართობი ზედაპირის ნორმალისა, ე. ი.

$$\vec{n} \frac{d\vec{r}}{dt} = 0,$$

ნ რაც იგივეა

$$F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0. \qquad (3)$$

(2) და (3) ტოლობების შედარებით ვიღებთ

$$F_\lambda \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

ასაც ადგილი უნდა ჰქონდეს მომვლებზე აღებული ნებისმიერი
ირისათვის. წირი შეიძლება აერთიანებდეს სხვადასხვა ზედაპი-
ის წერტილებს, ამიტომ საზოგადოდ

$$\frac{d\lambda}{dt} \neq 0,$$

გამოდის, რომ

$$F_\lambda = 0.$$

ამრიგად, მომვლები ზედაპირის წერტილების კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \quad F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \tag{4}$$

ამ განტოლებებიდან λ პარამეტრის გამორიცხვით მიიღება მომვლების განტოლება.

ახლა ასე დავსვათ საკითხი: (4) განტოლებიდან λ პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად მიღებული ეგრეთ წოდებული დისკრიმინანტული ზედაპირი ყოველთვის იქნება თუ არა მომვლები?

დისკრიმინანტული ზედაპირის ყოველი წერტილი მიეკუთვნება ოჯახის ერთ-ერთ ზედაპირს, რადგან მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს

$$F(x, y, z, \lambda) = 0$$

განტოლების λ-ს რომელიმე მნიშვნელობისათვის.

რაც შეეხება დისკრიმინანტული ზედაპირის თანახებას ოჯახის ზედაპირთან, იგი ისევ (3) პირობით განისაზღვრება: დისკრიმინანტული ზედაპირის მხები მართობი უნდა იყოს ოჯახის ზედაპირის ნორმალისა. ეს პირობა ვერ შესრულდება, როცა ერთდროულად

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0,$$

ე. ი. ზედაპირების განკუთრ წერტილებში.

მაშასადამე, დისკრიმინანტული ზედაპირი მაშინ წარმოადგენს ზედაპირთა ოჯახის მომვლებს, თუკი იგი არ შედგება აღებული ზედაპირების განკუთრი წერტილებისაგან.

ზედაპირთა (1) ოჯახიდან განვიხილოთ ზედაპირი, რომელიც ეთანადება λ-ს რაიმე ფიქსირებულ მნიშვნელობას. ვუწოდოთ მას (λ) ზედაპირი

$$F(x, y, z, \lambda) = 0. \tag{*}$$

საინტერესოა ამ ზედაპირის ის წერტილები, სადაც მომვლები ეხება მას. როგორც უკვე ვიცით, ასეთი წერტილების კოორდინატები λ პარამეტრის შესაბამის მნიშვნელობასთან დაკავშირებული არიან (4) განტოლებებით. ამიტომ ჩვენთვის საინტერესო წერტილების მოსაძებნად უნდა (*) განტოლებასთან ერთად ავიღოთ

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0,$$

ე. ი. განვიხილოთ (4) განტოლებები ფიქსირებული λ-ს შემთხვევაში. მივიღებთ საზოგადოდ წირს, რომელიც მდებარეობს როგორც (λ) ზედაპირზე, ისე მომვლებზე. ამ წირის გასწვრივ მომვლები შეეხება (λ) ზედაპირს. ეს წირი იქნება (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წირი.

ამგვარად, (4) განტოლებებით განისაზღვრება დამახასიათებელი წირი, როცა λ პარამეტრი ფიქსირებულია.

დამახასიათებელი წირის ცნებას შეიძლება მივუდგეთ სხვა თვალსაზრისითაც, რომელიც მის გეომეტრიული ბუნების შესწავლას ზოგჯერ საკმაოდ აადვილებს.

ზედაპირთა ოჯახიდან გამოვყოთ ორი ზედაპირი, რომლებიც ეთანადებიან პარამეტრების მახლობელ λ და $\lambda + \Delta\lambda$ მნიშვნელობებს – (λ) და $(\lambda + \Delta\lambda)$ ზედაპირი. ვიგულისხმოთ, რომ ეს ზედაპირები თანაიკვეთება.

(λ) და $(\lambda + \Delta\lambda)$ ზედაპირების თანაკვეთის წირის წერტილების კოორდინატები დააკმაყოფილებენ განტოლებებს

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \tag{1}$$

$$F(x, y, z, \lambda + \Delta\lambda) = 0 \tag{1'}$$

და ასევე, თუ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას,

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda_1) = 0 \tag{1''}$$

განტოლებას, სადაც λ_1 მოთავსებულია λ და $\lambda + \Delta\lambda$ პარამეტრებს შორის.

ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta\lambda \to 0$, გვექნება

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0.$$

მიღებული განტოლება (1) განტოლებასთან ერთად განსაზღვრავს განხილული წირის ზღვრულ მდებარეობას, მიღებული განტოლებები ემთხვევა (4) განტოლებებს, როცა λ ფიქსირებულია.

მამასადამე, (λ) ზედაპირის და ($\lambda + \Delta\lambda$) ზედაპირის თანაკვეთის წირის ზღვარი, როცა $\Delta\lambda \to 0$, (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წირია.

დამახასიათებელი წირები მომვლებ ზედაპირზე ქმნიან ერთ პარამეტრზე დამოკიდებულ წირთა ოჯახს. ამ წირთა ოჯახის მომვლებს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება **ზედაპირთა ოჯახის უკუქცევის წიბო**.

ვთქვათ, რომ ზედაპირთა განხილულ ოჯახს აქვს უკუქცევის წიბო და მისი განტოლებაა

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t).$$

რამდენადაც უკუქცევის წიბო მომვლებ ზედაპირს ეკუთვნის, ამიტომ ამ წირის წერტილების კოორდინატების $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ შეტანა (4) განტოლებებში მოგვცემს იგივეობებს. აქედან მეორე განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$F_{\lambda x}\frac{dx}{dt} + F_{\lambda y}\frac{dy}{dt} + F_{\lambda z}\frac{dz}{dt} + F_{\lambda\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = 0. \qquad (*)$$

უკუქცევის წიბოს მხები განისაზღვრება $\vec{r}\,' \doteq (x', y', z')$ ვექტორით. მაგრამ უკუქცევის წიბოს მხები მის ყოველ წერტილში უნდა დაემთხვეს დამახასიათებელი წირის მხებს. ეს უკანასკნელი კი მართობია დამახასიათებელ წირზე გამავალ ზედაპირების ნორმალებისა, კერძოდ $F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$ ზედაპირის ნორმალისა, რომელიც $(F_{\lambda x}, F_{\lambda y}, F_{\lambda z})$ ვექტორით განისაზღვრება. ამიტომ გვექნება

$$F_{\lambda x}\frac{dx}{dt} + F_{\lambda y}\frac{dy}{dt} + F_{\lambda z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

მიღებული განტოლების შედარება (*) განტოლებასთან გვაძლევს

$$F_{\lambda\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0$$

(უკუქცევის წიბოზე λ პარამეტრი იცვლება და არ არის მუდმივი). საბოლოოდ მივიღებთ, რომ უკუქცევის წიბო განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით:

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \quad F_{\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0, \quad F_{\lambda\lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 \quad (5)$$

ამ განტოლების ამოხსნით x, y, z გამოისახება λ პარამეტრის საშუალებით და ამიტომ $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ იქნება უკუქცევის წიბოს განტოლება. λ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ წერტილს, რომელშიც შესაბამისი (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წირი ეხება უკუქცევის წიბოს და მაშ თვით (λ) ზედაპირსაც. ამ წერტილს (λ) ზედაპირის დამახასიათებელი წერტილი ეწოდება.

ამგვარად, მოცემულ ზედაპირთა ოჯახის ზედაპირები ეხებიან მომვლებ ზედაპირს დამახასიათებელი წირების გასწვრივ; ხოლო უკუქცევის წიბოს კი დამახასიათებელ წერტილებში.

§29. სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები

(განფენადი ზედაპირები)

განვიხილოთ ერთ λ პარამეტრზე დამოკიდებული სიბრტყეთა ოჯახი

$$A(\lambda)x + B(\lambda)y + C(\lambda)z + D(\lambda) = 0$$

და ვიპოვოთ მისი მომვლები.

ვინაიდან ზედაპირთა ოჯახის ყოველი ზედაპირი სიბრტყეა, ამიტომ დამახასიათებელი წირი, როგორც ორი მეზობელი სიბრტყის თანაკვეთა, იქნება წრფე, ხოლო მომვლები – წრფოვანი ზედაპირი, ე. ი. ისეთი ზედაპირი, რომლებიც წრფეებით ალიწერება. ამ წრფეებს წრფოვანი ზედაპირის მსახველებს უწოდებენ.

მომვლები ზედაპირი ეხება ოჯახის ზედაპირებს დამახასიათებელი წირების გასწვრივ. ამიტომ აღებული ოჯახის სიბრტყეები შეეხება მომვლებ ზედაპირს მსახველების გასწვრივ, სხვანაირად

მსახველის გასწვრივ მომვლებ წრფოვან ზედაპირს ექნება ერ- და იგივე მხები სიბრტყე. ასეთ წრფოვან ზედაპირს განფენად- უწოდებენ.

ამგვარად, სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები (თუკი ის არსებობ- განფენადი ზედაპირია.

სიბრტყეთა ოჯახის დამახასიათებელი წირები რომ ვიპოვო- საჭიროა განვიხილოთ განტოლებები:

$$A(\lambda)x+B(\lambda)y+C(\lambda)z+D(\lambda)=0,$$
$$A'(\lambda)x+B'(\lambda)y+C'(\lambda)z+D'(\lambda)=0.$$

აქედან λ-ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის განისაზღვრება დ- მახასიათებელი წირი, ჩვენ შემთხვევაში წრფე, თუკი (1) სიბრტ- ების მიმმართველი ვექტორები $\vec{n}(A,B,C)$ და $\vec{n}'(A',B',C')$ ა- არის პარალელური. წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$\vec{n}=\mu\vec{n}',$$

ჩვენ გვექნება პარალელურ სიბრტყეთა ოჯახი, რომელსაც არ ე- ნება მომვლები. შემდეგში ჩვენ ამ შემთხვევას გამოვრიცხავთ ღ- ვიგულისხმებთ, რომ λ პარამეტრის შეცვლასთან ერთად იცვლ- სიბრტყის ნორმალი ვექტორების მიმართულებაც.

განტოლებათა (1) სისტემას დავუმატოთ განტოლება

$$F_{\lambda\lambda}(x,y,z)=0,$$

მივიღებთ

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2')$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0, \qquad (2'')$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0. \qquad (2''')$$

განტოლებებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს დამახასია- ბელი წერტილის კოორდინატები.

განვიხილოთ ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$
\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},
$$

ომელიც $\vec{n}, \vec{n}'$ და $\vec{n}''$ ვექტორების შერეული ნამრავლის სახით ეიძლება ჩაიწეროს

$$
\Delta = (\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}'').
$$

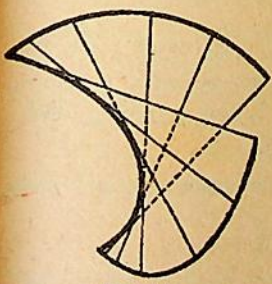
ვთქვათ, $\Delta \neq 0$, მაშინ (2) სისტემა ცალსახად ამოიხსნება და ივიღებთ დამახასიათებელი წერტილის კოორდინატებს გამოსა-ულს λ პარამეტრით და მაშ, ამ წერტილის რადიუს-ვექტორსაც გივე პარამეტრით განსაზღვრულს

$$
\vec{r} = \vec{r}(\lambda).
$$

თუკი ეს განტოლება წირს გვაძლევს, ის იქნება უკუქცევის წიბო.

ყოველი სიბრტყე სიბრტყეთა ოჯახიდან ეხება განფენად ზე-დაპირს მსახველის გასწვრივ. ვნახოთ ეს სიბრტყეები როგორ არის დაკავშირებული უკუქცევის წიბოსთან.

რადგან დამახასიათებელი წრფე, რომელიც (2′) და (2″) სიბრტყეების თანაკვეთით მიიღება, ეხება უკუქცევის წიბოს, ამი-ტომ უკუქცევის წიბოს მიმმართვე-ლი ვექტორი $\vec{r}'$ მართობი იქნება (2′) და (2″) სიბრტყეების ნორმა-ლი ვექტორებისა, ე. ი.



ნახ. 48

$$
\vec{n}\,\vec{r}' = 0, \quad \vec{n}'\,\vec{r}' = 0.
$$

აქედან პირველი ტოლობის გა-წარმოება მეორე ტოლობის გათვა-ლისწინებით მოგვცემს, რომ

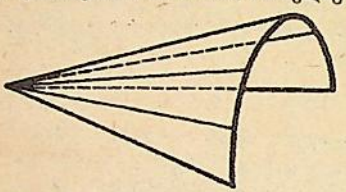
$$
\vec{n}\,\vec{r}'' = 0.
$$

გამოდის, რომ სიბრტყე ეხება რა უკუქცევის წიბოს, შეიცავს $\vec{r}''$ ვექ-ტორსაც. ეს კი ნიშნავს, რომ ეს სიბრტყე უკუქცევის წიბოსათვის ყოფილა მიმხები სიბრტყე.

მივიღეთ, რომ თუ უკუქცევის წიბო რაიმე გრეხილი წირია, მაშინ მსახველები იქნებიან ამ წირის მხებები, ხოლო თვით სიბრტყეები – ამ წირის მიმხები სიბრტყეები.

განფენადი ზედაპირი, რომელიც სიბრტყეთა ოჯახის მომვლებს წარმოადგენს, ამ შემთხვევაში გრეხილი წირის მხებებით აღიწერება (ნახ. 48).

შესაძლოა, რომ $\Delta \neq 0$, მაგრამ რადიუს-ვექტორი არ იყოს დამოკიდებული λ პარამეტრზე, ე. ი. $\vec{r} = \vec{r}_0 = c$. უკუქცევის წიბო გადაგვარდება, გვექნება მხოლოდ წერტილი და დამახასიათებელი წირები გაივლის ამ წერტილში. განფენადი ზედაპირი აღიწერება წრფის ისეთი მოძრაობით, რომელიც გადის ფიქსირებულ წერტილში. ასეთი ზედაპირი კი კონუსური ზედაპირია (ნახ. 49).



ნახ. 49

ამგვარად, თუ უკუქცევის წიბო წერტილია, მაშინ სიბრტყეთა ოჯახის მომვლები იქნება კონუსური ზედაპირი, ოჯახის სიბრტყეები შეეხებიან მას დამახასიათებელი წირების გასწვრივ, რომლებიც ამავე დროს ზედაპირის წრფოვან მსახველებს წარმოადგენენ.

ვთქვათ, ახლა $\Delta = 0$.

მაშინ $(\vec{n},\vec{n}',\vec{n}'') = 0$, ე. ი. $\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''$ ვექტორები კომპლანარულია. $\vec{p}$-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი ვექტორი, რომელიც მართობია იმ სიბრტყის, რომელიც გადის სამივე ვექტორზე, მაშინ

$$\vec{n}\vec{p} = 0, \quad \vec{n}'\vec{p} = 0, \quad \vec{n}''\vec{p} = 0.$$

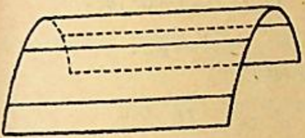
ამ ტოლობების გათვალისწინებით, პირველი ორი ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\vec{n}\vec{p}' = 0, \quad \vec{n}'\vec{p}' = 0.$$

გამოდის, რომ $\vec{p}'$ ვექტორი მართობია როგორც $\vec{n}$, ისე $\vec{n}'$ ვექტორის და მაშასადამე, პარალელურია $\vec{p}$. ეს კი შეუძლებელია,

რადგან $\vec{p}$ ერთეულოვანი ვექტორია და მართობი უნდა იყოს $\vec{p}'$ ვექტორის. ამიტომ $\vec{p}'=0$ და მაშ, $\vec{p}=\text{const}$ და $\vec{n}(\lambda)$ ვექტორები ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური იქნება, ხოლო ოჯახის სიბრტყეები — იგივე სიბრტყის მართობი. დამახასიათებელი წირები (როგორც მოცემული ოჯახის ორი სიბრტყის თანაკვეთის წრფის ზღვარი) მართობი იქნებიან იმავე სიბრტყისა და ამიტომ ერთმანეთის პარალელური.

ამ შემთხვევაში განფენადი ზედაპირი აღიწერება წრფის ისეთი მოძრაობით, რომელიც არ იცვლის მიმართულებას. ასეთი ზედაპირი კი ცილინდრული ზედაპირია (ნახ. 50).



ნახ. 50

მივიღეთ სამი სახის განფენადი ზედაპირი: გრეხილი წირის მხებებისაგან აღწერილი, კონუსური და ცილინდრული ზედაპირები. განფენად ზედაპირებს სიბრტყეც მიეკუთვნება.

როგორია წრფოვანი და კერძოდ განფენადი ზედაპირის სრული სიმრუდე?

გამოვიყვანოთ ჯერ წრფოვანი ზედაპირის განტოლება. ავიღოთ რაიმე გრეხილი წირი, რომლის განტოლება $\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)$. იყოს ის მიმმართველი წირი. ამ წირის ყოველ წერტილზე განვსაზღვროთ ერთეულოვანი $\vec{a}=\vec{a}(u)$ ვექტორი. წრფოვანი ზედაპირი მიიღება წრფის (რომლის მიმართულებასაც $\vec{a}$ ვექტორი ახასიათებს) მოძრაობით აღებული წირის გასწვრივ.

თუ M ზედაპირის რაიმე წერტილია, მაშინ მისი რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$ ტოლი იქნება:

$$\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{a}(u),$$

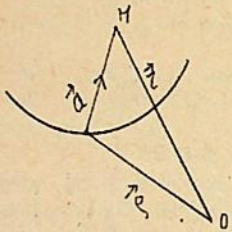
სადაც v აღნიშნავს M წერტილის დაშორებას მიმმართველი წირიდან (ნახ. 51).

გამოვითვალოთ რადიუს-ვექტორის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები. გვექნება:

$$\vec{r}_u = \vec{\rho}' + v\vec{a}, \qquad \vec{r}_v = \vec{a},$$

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\rho}'' + v\vec{a}'', \quad \vec{r}_{uv} = \vec{a}', \quad \vec{r}_{vv} = 0.$$

შერეული ნამრავლი



ნახ. 51

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}) = 0,$$

ამიტომ მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტი $N = 0$, ხოლო

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}) = (\vec{\rho}', \vec{a}, \vec{a}'),$$

რის გამოც კვადრატული ფორმის შუა კოეფიციენტი

$$M = \frac{(\vec{\rho}', \vec{a}, \vec{a}')}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

სრული სიმრუდე

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

წრფოვანი ზედაპირისათვის ტოლი იქნება

$$K = -\frac{(\vec{\rho}', \vec{a}, \vec{a}')^2}{(EG - F^2)^2}. \tag{1}$$

გამოდის, რომ წრფოვანი ზედაპირის სრული სიმრუდე არ არის დადებითი.

განფენადი ზედაპირებისათვის გვექნება:

1. წირის მხებებით აღწერილი ზედაპირის შემთხვევაში $\vec{\rho}' = \vec{a}$ და ამიტომ $K = 0$,

2. კონუსისათვის $\vec{\rho}' = 0$ და (1) ფორმულიდან ვიღებთ $K = 0$,

3. ცილინდრისათვის $\vec{a}' = 0$ და აქაც $K = 0$.

მაშასადამე, განფენადი ზედაპირების სრული სიმრუდე ნულის ტოლია.

III თავი

ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები

§30. დერივაციული ფორმულები

წირთა თეორიაში ძირითადი იყო ფრენეს ფორმულები. წირის ყოველ წერტილს უკავშირდებოდა $R_M = \{M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ფრენეს რეპერი და ფრენეს ფორმულები ახასიათებდა ამ რეპერის მოძრაობას.

ასევე ზედაპირის ყოველ წერტილს შეგვიძლია დავუკავშიროთ $\{M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ რეპერი, სადაც $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ საკოორდინატო წირების მხები ვექტორებია, ხოლო $\vec{n}$ – ზედაპირის ნორმალის მგეზავი, და შევისწავლოთ ამ რეპერის მოძრაობა. ამისათვის საკოორდინატო ვექტორების $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$ წარმოებულები, ისევე როგორც წირების შემთხვევაში, დავშალოთ კვლავ იმავე ვექტორების მიმართ და შემდეგ ვიპოვოთ დაშლის კოეფიციენტები. გვექნება

$$\vec{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{r}_v + \lambda_{11} \vec{n}, \tag{1}$$

$$\vec{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_v + \lambda_{12} \vec{n}, \tag{2}$$

$$\vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \vec{r}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{r}_v + \lambda_{22} \vec{n}, \tag{3}$$

$$\vec{n}_u = \alpha_{11} \vec{r}_u + \alpha_{12} \vec{r}_v, \tag{4}$$

$$\vec{n}_v = \alpha_{21} \vec{r}_u + \alpha_{22} \vec{r}_v. \tag{5}$$

$\vec{n}_u$ და $\vec{n}_v$ ვექტორებს არ ექნებათ მდგენელები ნორმალის მიმართულებით, რადგან $\vec{n}$ მუდმივსიგრძიანი ვექტორია.

განვსაზღვროთ თანდათანობით დაშლის კოეფიციენტები. პირველი სამი განტოლება სკალარულად გავამრაველოთ $\vec{n}$ ვექტორზე. მივიღებთ

$$\lambda_{11} = \vec{r}_{uu}\vec{n} = L, \quad \lambda_{12} = \vec{r}_{uv}\vec{n} = M, \quad \lambda_{22} = \vec{r}_{vv}\vec{n} = N. \tag{6}$$

(4) განტოლების სკალარულად გამრავლება $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებზე მოგვცემს

$$\alpha_{11}E + \alpha_{12}F = \vec{r}_u\vec{n}_u = -L,$$
$$\alpha_{11}F + \alpha_{12}G = \vec{r}_v\vec{n}_u = -M.$$

რადგან $EG - F^2 \neq 0$, ამიტომ მიღებული სისტემიდან გვექნება, რომ

$$\alpha_{11} = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, \quad \alpha_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}. \tag{7}$$

ასევე, თუ (5) განტოლებას სკალარულად გავამრავლებთ $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებზე, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\alpha_{21}E + \alpha_{22}F = \vec{r}_u\vec{n}_v = -M,$$
$$\alpha_{21}F + \alpha_{22}G = \vec{r}_v\vec{n}_v = -N.$$

საიდანაც

$$\alpha_{21} = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{FM - EN}{EG - F^2}. \tag{8}$$

სანამ Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$ კოეფიციენტების გამოთვლას დავიწყებდეთ, განვიხილოთ E, F, G ფუნქციების წარმოებულები u და v-ს მიმართ:

$$E_u = 2\vec{r}_u\vec{r}_{uu}, \qquad E_v = 2\vec{r}_u\vec{r}_{uv},$$
$$F_u = \vec{r}_{uu}\vec{r}_v + \vec{r}_u\vec{r}_{uv}, \quad F_v = \vec{r}_{uv}\vec{r}_v + \vec{r}_u\vec{r}_{vv},$$
$$G_u = 2\vec{r}_v\vec{r}_{uv}, \qquad G_v = 2\vec{r}_v\vec{r}_{vv}.$$

გაემრავლოთ ახლა (1), (2), (3) განტოლებები $\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებზე. შესაბამისად მივიღებთ

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \vec{r}_{uu}\vec{r}_u = \frac{E_u}{2},$$

$$\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \vec{r}_{uu}\vec{r}_v = F_u - \frac{E_v}{2}.$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემიდან განისაზღვრება Γ_{11}^1 და Γ_{11}^2:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u G - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v E - 2EF_u + E_u F}{2(EG - F^2)}.$$

ასევე გვექნება სისტემა

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \vec{r}_{uv}\vec{r}_u = \frac{E_v}{2},$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \vec{r}_{uv}\vec{r}_v = \frac{G_u}{2}.$$

საიდანაც განისაზღვრება Γ_{12}^1 და Γ_{12}^2:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v G - G_u F}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}. \tag{9}$$

დაბოლოს

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \vec{r}_{vv}\vec{r}_u = F_v - \frac{G_u}{2},$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \vec{r}_{vv}\vec{r}_v = \frac{G_v}{2}.$$

ამ სისტემიდან მივიღებთ, რომ

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u G - 2F_v G + G_v F}{2(EG - F^2)}, \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + G_u F}{2(EG - F^2)}. \quad (10)$$

როგორც Γ_{ij}^k-ს მიღებულ გამოსახულებიდან ჩანს, ეს სიდიდეები, ან როგორც მათ უწოდებენ ბმულობის კოეფიციენტები, განისაზღვრებიან მხოლოდ ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით.

ამგვარად, $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$ ვექტორების წარმოებულები თვით $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ და $\vec{n}$ ვექტორებით არის წარმოდგენილი. ამასთან დაშლის კოეფიციენტები ზედაპირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებით არის გამოსახული.

(1), (2), (3), (4), (5) განტოლებებს, სადაც კოეფიციენტები (6), (7), (8), (9), (10) ფორმულებით არის განსაზღვრული, ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები ეწოდებათ. პირველ სამს გაუსის დერივაციული ფორმულები ჰქვია, უკანასკნელ ორს კი — ვაინგარტენის.

§31. ᲒᲐᲣᲡ-ᲞᲔᲢᲔᲠᲡᲝᲜ-ᲙᲝᲓᲐᲪᲘᲡ ᲤᲝᲠᲛᲣᲚᲔᲑᲘ

(ᲖᲔᲓᲐᲞᲘᲠᲘᲡ ᲫᲘᲠᲘᲗᲐᲓᲘ ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠᲘ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲔᲑᲘᲡ ᲘᲜᲢᲔᲒᲠᲔᲑᲘᲡ ᲞᲘᲠᲝᲑᲔᲑᲘ)

ზედაპირის პირველი და მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმები ერთმანეთთან არის დაკავშირებული. ეს კავშირი რომ გავარკვიოთ, ამისათვის საჭიროა: ზედაპირის ძირითადი განტოლებები კვლავ გავაწარმოოთ და ვისარგებლოთ შვარცის ღებულებით, ე. ი. განვიხილოთ შემდეგი სისტემა

$$(\vec{r}_{uu})_v = (\vec{r}_{uv})_u, \quad (\vec{r}_{uv})_v = (\vec{r}_{vv})_u, \quad (\vec{n}_u)_v = (\vec{n}_v)_u.$$

თუ მიღებულ ტოლობებში კვლავ დერივაციული ფორმულებით ვისარგებლებთ და წევრებს დავალაგებთ $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ და $\vec{n}$ ვექტორების მიხედვით, მივიღებთ შემდეგ ვექტორულ ტოლობებს

$$A_1\vec{r}_u + B_1\vec{r}_v + C_1\vec{n} = 0,$$

$$A_2\vec{r}_u + B_2\vec{r}_v + C_2\vec{n} = 0,$$

$$A_3\vec{r}_u + B_3\vec{r}_v + C_3\vec{n} = 0.$$

$\vec{r}_u, \vec{r}_v$ და $\vec{n}$ ვექტორების წრფივად დამოკიდებულების გამო აქედან მივიღებთ ცხრა სკალარულ ტოლობას:

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ C_1 = 0,\ A_2 = 0,\ B_2 = 0,\ C_2 = 0,\ A_3 = 0,\ B_3 = 0,\ C_3 = 0.$$

იმისათვის, რომ ვნახოთ თუ რა სახე აქვთ ამ ტოლობებს, განვიხილოთ მაგალითისათვის $B_1 = 0$ ტოლობა. B_1 არის $\vec{r}_v$ ვექტორის კოეფიციენტი გამოსახულებაში

$$W = (\vec{r}_{uu})_v - (\vec{r}_{uv})_u,$$

ან რაც იგივეა

$$W = (\Gamma_{11}^1\vec{r}_u + \Gamma_{11}^2\vec{r}_v + L\vec{n})_v - (\Gamma_{12}^1\vec{r}_u + \Gamma_{12}^2\vec{r}_v + M\vec{n})_u$$

გამოსახულებაში. აქ ჩვენ შესაბამისად u და v-თი გაწარმოების შემდეგ კვლავ უნდა ვისარგებლოთ ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებებით და შემდეგ ამოვიწეროთ $\vec{r}_v$ ვექტორის კოეფიციენტი. გვექნება

$$B_1 = \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\frac{MF - NE}{EG - F^2} + (\Gamma_{11}^2)_v -$$

$$- \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - M\frac{LF - ME}{EG - F^2} - (\Gamma_{12}^2)_u.$$

რადგან $B_1 = 0$, ამიტომ უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2=$$
$$=E\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

საიდანაც

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{E}\{(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+$$
$$+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2\},$$

ან, რაც იგივეა, რამდენადაც ზედაპირის სრული სიმრუდე

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$$K=\frac{1}{E}\{(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2\}.$$

ეს ფორმულა პირველად გაუსის მიერ იქნა მიღებული. როგორც ამ გამოსახულებიდან ჩანს, ზედაპირის სრული სიმრუდე მხოლოდ ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით გამოისახება. ეს არის გაუსის ცნობილი თეორემა.

რაც შეეხება დანარჩენ ტოლობებს, როგორც უშუალო გამოთვლებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, კიდევ ორია წრფივად დამოუკიდებელი. ისინი მიღებული იყო პეტერსონისა და კოდაცის მიერ და ამიტომ მათ სახელსაც ატარებენ.

გაუს-პეტერსონ-კოდაცის ფორმულები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$K=-\frac{1.}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix}E & E_u & E_v\\ F & F_u & F_v\\ G & G_u & G_v\end{vmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_u\right\},$$

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) +$$
$$+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) +$$
$$+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0.$$

§32. ბონეს თეორემა

წირების შემთხვევაში ჩვენ ვნახეთ, რომ წირის სიმრუდე და გრეხა წირს განსაზღვრავს მდებარეობამდე სიზუსტით. თუ როგორ განსაზღვრავს ზედაპირს მისი პირველი და მეორე კვადრატული ფორმები, ამაზე პასუხს გვაძლევს ბონეს თეორემა.

ბონეს თეორემა: ვთქვათ

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ და } Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

ნებისმიერი ორი დიფერენციალური კვადრატული ფორმაა, რომლიდანაც პირველი დადებითად არის განსაზღვრული. თუ ამ ფორმების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ გაუს-პეტერსონ-კოდაცის პირობებს, მაშინ არსებობს მდებარეობამდე სიზუსტით ერთადერთი ზედაპირი, რომლისათვისაც ეს ფორმები იქნება შესაბამისად პირველი და მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა.

მივიღოთ დაუმტკიცებლად.

IV თავი

ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის ელემენტები

§33. გეოდეზიური წირები

განვიხილოთ ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

რაიმე წირი

$$u = u(s),\ v = v(t),$$

სადაც s ბუნებრივი პარამეტრია. ვიგულისხმოთ, რომ ზედაპირი $C^k\ (k \geq 2)$ კლასისაა.

ჩვენ განვიხილეთ სიმრუდის ვექტორის $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{N}$ გეგმილი ზედაპირის ნორმალზე. ახლა განვიხილოთ ამ ვექტორის გეგმილი ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე.

სიმრუდის ვექტორის გეგმილს ზედაპირის მხებ სიბრტყეზე ეწოდება ზედაპირზე გავლებული წირის გეოდეზიური სიმრუდე.

კუთხე წირის მთავარ ნორმალსა და ზედაპირის ნორმალს შორის თუ არის θ, მაშინ კუთხე ზედაპირის მხებ სიბრტყესა და წირის მთავარ ნორმალს შორის იქნება $\dfrac{\pi}{2} - \theta$. ამიტომ გეოდეზიური სიმრუდე, რომელსაც აღენიშნავთ k_g, ტოლი იქნება

$$k_g = k\sin\theta \tag{1}$$

ზედაპირზე გავლებულ წირს, რომლის გეოდეზიური სიმრუდე ყოველ წერტილში უდრის ნულს, ეწოდება **გეოდეზიური წირი.**

ცხადია, წრფის მონაკვეთი, რომელიც ზედაპირზე იქნება მოთავსებული – იქნება გეოდეზიური წირი. მართლაც, წრფის სიმრუდე ყოველ წერტილში ნულია და (1) ტოლობის საფუძველზე გეოდეზიური სიმრუდეც იქნება ნული. გეოდეზიური სიმრუდე იმ შემთხვევაშიც არის ნული, როცა $\theta = 0$, ან $\theta = \pi$. ამ შემთხვევაში წირის მთავარი ნორმალი შეუთავსდება ზედაპირის ნორმალს და ამიტომ მიმხები სიბრტყე გაივლის ზედაპირის ნორმალზე. ზოგჯერ გეოდეზიურ წირს ასეც განმარტავენ: ზედაპირზე გავლებულ წირს, რომლის ყოველ წერტილში მთავარი ნორმალი შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალთან, ეწოდება გეოდეზიური წირი.

გამოვიყვანოთ გეოდეზიური წირის განტოლება.

რადგან გეოდეზიური წირის მთავარი ნორმალი შეთავსებულია ზედაპირის ნორმალთან, ამიტომ მთავარი ნორმალის მგეზავი $\vec{N}$ მართობი იქნება როგორც $\vec{r}_u$, ისე $\vec{r}_v$ ვექტორებისა, ე. ი.

$$\vec{r}_u\vec{N} = 0, \quad \vec{r}_v\vec{N} = 0.$$

ან, რაც იგივეა,

$$\vec{r}_u \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0, \quad \vec{r}_v \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0.$$

გაშლილად ეს ტოლობები ასე გადაიწერება

$$\vec{r}_u\left\{\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\right\} = 0,$$

$$\vec{r}_v\left\{\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\right\} = 0.$$

თუ ვისარგებლებთ დერივაციული ფორმულებით, მივიღებთ:

$$\left\{\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{d^2u}{ds^2}\right\}E +$$

$$+\left\{\Gamma_{11}^{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^{2}+2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}+\frac{d^{2}v}{ds^{2}}\right\}F=0,$$

$$\left\{\Gamma_{11}^{1}\left(\frac{du}{ds}\right)^{2}+2\Gamma_{12}^{1}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^{1}\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}+\frac{d^{2}u}{ds^{2}}\right\}F+$$

$$+\left\{\Gamma_{11}^{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^{2}+2\Gamma_{12}^{2}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}+\frac{d^{2}v}{ds^{2}}\right\}G=0.$$

ვინაიდან $EG-F^2\neq 0$, ამიტომ ამ სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს, ე.ი.

$$\frac{d^{2}u}{ds^{2}}+\Gamma_{11}^{1}\left(\frac{du}{ds}\right)^{2}+2\Gamma_{12}^{1}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^{1}\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}=0,$$

$$\frac{d^{2}v}{ds^{2}}+\Gamma_{11}^{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^{2}+2\Gamma_{12}^{2}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^{2}=0.$$

მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც გეოდეზიურ წირებს განსაზღვრავს.

თუ $\Gamma_{ij}^{k}\,(i,j,k=1,2)$ უწყვეტი ფუნქციებია რაიმე D არეზე (ეს კი გამომდინარეობს, თუ კი ზედაპირი C^k კლასისაა, სადაც $k\geq 0$) მაშინ, როგორც ეს დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში მტკიცდება, დიფერენციალურ განტოლებათა ალებულ სისტემას $(u_0,v_0)\in D$ წერტილის საკმაოდ მცირე მიდამოში აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს

$$u|_{s=s_0}=u_0,\quad v_{s=s_0}=v_0,\quad \left.\frac{du}{ds}\right|_{s=s_0}=a_0,\quad \left.\frac{dv}{ds}\right|_{s=s_0}=b_0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ზედაპირის ყოველ M_0 წერტილში, ყოველი მიმართულებით $du:dv=a_0:b_0$ ერთადერთი გეოდეზიური გაივლება.

§34. იზომეტრიული ზედაპირები, ზედაპირთა ღუნვა

განვიხილოთ Φ_1 და Φ_2 ზედაპირი. ვიტყვით, რომ Φ_1 და Φ_2 იზომეტრიული ზედაპირებია, თუ არსებობს ისეთი ბიექციური ასახვა $\Phi_1 \to \Phi_2$, რომლის დროსაც შესაბამის წირებს აქვთ ერთნაირი სიგრძე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ იზომეტრიულ თანადობაში მყოფ ზედაპირებს შესაბამის წერტილებში ექნებათ ერთნაირი პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა.

მართლაც, ვთქვათ, იზომეტრიულ თანადობაში მყოფი ზედაპირები ისეა პარამეტრიზებული, რომ შესაბამის წერტილებს აქვთ ერთნაირი მრუდწირული კოორდინატები. მაშინ თუ Φ_1 ზედაპირზე წირის განტოლებებია ვთქვათ $u = u(t)$, $v = v(t)$, იგივე იქნება ანასახისათვისაც Φ_2 ზედაპირზე. იყოს

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ და } E_1du^2 + 2F_1dudv + G_1dv^2$$

შესაბამისად Φ_1 და Φ_2 ზედაპირების პირველი კვადრატული ფორმები.

რადგან Φ_1 და Φ_2 ზედაპირები იზომეტრიულია, ამიტომ შესაბამის წირებს ექნებათ ერთნაირი სიგრძე, ე. ი.

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2}\,dt.$$

ეს ტოლობა სამართლიანი უნდა იყოს ნებისმიერი t-სთვის. ამიტომ

$$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2.$$

წირი აღებულია ნებისმიერად, უკანასკნელ ტოლობას ადგილი ექნება ნებისმიერი u' და v'-თვის, რაც გვაძლევს, რომ

$$E = E_1, F = F_1, G = G_1,$$

ე. ი. იზომეტრიული ზედაპირების ისეთი პარამეტრიზაციაა შესაძლებელი, რომ მათ პირველი კვადრატული ფორმები ექნებათ ერთნაირი.

რამდენადაც კუთხე ზედაპირზე გავლებულ ორ წირს შორის, ზედაპირის ფართი, გამოისახება პირველი კვადრატული ფორმით, ამიტომ იზომეტრიულ თანადობაში მყოფ ზედაპირებზე შეინახება კუთხე წირებს შორის და შესაბამის არეებს ექნებათ ერთნაირი ფართი.

ზედაპირის სრული სიმრუდე, გაუსის თეორემით, გამოისახება პირველი კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით, ამიტომ იზომეტრიულ ზედაპირებს ერთნაირი სრული სიმრუდე ექნებათ.

იზომეტრიულ თანადობაში მყოფ ზედაპირებს დაფენად ზედაპირებსაც უწოდებენ. ცხადია, განფენადი ზედაპირი $(k = 0)$ სიბრტყეზე დაიფინება. აქედანაა მისი სახელწოდებაც.

ზედაპირის ისეთ უწყვეტ დეფორმაციას, რომლის დროსაც არ იცვლება ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე, უწოდებენ ზედაპირის ღუნვას.

ღუნვის ყოველ მომენტში ზედაპირი იქნება იზომეტრიული აღებული ზედაპირისა, ამიტომ ღუნვისას ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა არ შეიცვლება.

ზედაპირის იმ თვისებას, რომელიც არ იცვლება ზედაპირის ღუნვისას — ზედაპირის შინაგან თვისებას უწოდებენ.

ზედაპირის შინაგანი თვისებებია:

1. ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე;
2. კუთხე ზედაპირზე გავლებულ წირებს შორის;
3. ზედაპირის ფართი;
4. ზედაპირის სრული სიმრუდე

და საერთოდ, ყველა ის თვისება, რომელიც ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმით გამოისახება.

გეომეტრიის იმ ნაწილს, რომელიც ზედაპირის შინაგან თვისებებს შეისწავლის, ან სხვანაირად იმ თვისებებს, რომლებიც ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმით განისაზღვრება, ეწოდება ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია.

ზედაპირის შინაგანი გეომეტრია უახლოვდება პლანიმეტრიას, რომელიც სიბრტყის შინაგანი გეომეტრიაა.

§35. გაუს-ბონეს ფორმულა

რაიმე Φ გლუვ ზედაპირზე განვიხილოთ G არე შემოსაზღვრული ჩაკეტილი წირით, რომელიც შედგება გლუვი $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, რკალებისაგან, რომლებიც შეხვედრის წერტილებში ქმნიან $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ კუთხეებს. ადგილი აქვს გაუს-ბონეს ფორმულას

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} k_g ds + \sum_{k=1}^{m} (\pi - \varphi_k) = 2\pi - \iint_G K d\sigma,$$

სადაც k_g შესაბამისი რკალის გეოდეზიური სიმრუდეა, K – ზედაპირის სრული სიმრუდე, ხოლო $d\sigma$ – ზედაპირის ფართის ელემენტი. (მივიღოთ დაუმტკიცებლად).

ვთქვათ, G არე შემოსაზღვრულია სამი გეოდეზიური წირის რკალით, ან სხვანაირად, ზედაპირზე განვიხილოთ გეოდეზიური სამკუთხედი. მაშინ $k_g = 0$ თითოეული წირის გასწვრივ, მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{3} (\pi - \varphi_k) = 2\pi - \iint_G K d\sigma,$$

ან

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \iint_G K d\sigma.$$

გეოდეზიური სამკუთხედის შიდა კუთხეთა ჯამი $> \pi$, თუ ზედაპირი დადებითსიმრუდიანია, გეოდეზიური სამკუთხედის შიდა კუთხეთა ჯამი $< \pi$ უარყოფითსიმრუდიან ზედაპირზე, ხოლო განფენად ზედაპირზე სამკუთხედის შიდა კუთხეთა ჯამი π-ის ტოლია.

სფეროზე გეოდეზიური სამკუთხედის შიდა კუთხეთა ჯამი მეტია π-ზე. ფსევდოსფეროზე (რომელიც მუდმივ უარყოფით სიმრუდიანი ზედაპირია) შიდა კუთხეთა ჯამი ნაკლებია π-ზე.

ფსევდოსფეროსა და სფეროს შინაგანი გეომეტრიები არ არის ევკლიდური. სანამ ფსევდოსფეროს შინაგან გეომეტრიას შეისწავლიდნენ, ნ. ლობაჩევსკიმ (რუსი მათემატიკოსი 1793-1856) 1826 წ. ყაზანის უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭოს წარუდგინა ნაშრომი, რომელშიც აგებული ჰქონდა ახალი გეომეტრიული სისტემა. ამ გეომეტრიაში ადგილი აქვს ევკლიდეს გეომეტრიის ყველა აქსიომას, გარდა ე. წ. პარალელობის აქსიომისა, რომელიც ტოლფასია იმისა, რომ სამკუთხედის შიდა კუთხეთა ჯამი ნაკლებია π-ზე. ბელტრამიმ აღმოაჩინა, რომ ფსევდოსფეროს შინაგანი გეომეტრია ლოკალურად ემთხვევა ლობაჩევსკის გეომეტრიას, თუკი წრფეებად ავიღებთ გეოდეზიურ წირებს.

არაევკლიდური გეომეტრიის შემქმნელებად ლობაჩევსკისთან ერთად ითვლებიან ბოია (1802-1860) და გაუსი (1777-1855).

II ნაწილი

n-განზომილებიანი დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები

V თავი

ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

§36. ზოგიერთი შეთანხმება აღნიშვნების მიმართ

ცნობილია, რომ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტების ჯამი მოკლედ ასე იწერება

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

ზოგჯერ ამ ჯამს ასეც დავწერთ $\sum\limits_{i} a_i$. იქ, სადაც ინდექსის ცვლილება არ არის მითითებული, ვიგულისხმოთ, რომ იგი იცვლება ერთიდან n-მდე. ინდექსის ცვლილება ერთიდან n-მდე აღვნიშნოთ $\overline{1,n}$. თუ აჯამვა ხდება რამდენიმე ინდექსის მიხედვით, რომლებიც ერთიმეორის დამოუკიდებლად იცვლება $\overline{1,n}$, ჩვენ დავწერთ აჯამვის ერთ ნიშანს და ქვეშ მივუწერთ ყველა იმ ინდექსს, რომლის მიხედვითაც ხდება აჯამვა. ე. ი. დავწერთ

$$\sum_{i,j,k} a_{ijk} \text{ ნაცვლად } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} .$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში აჯამვის რიგსაც არა აქვს მნიშვნელობა.

ჩვენ შევხვდებით ისეთ სიდიდეებსაც, რომლებსაც ზოგი ინდექსი ზევით აქვს აღნიშნული, ზოგი ქვევით.

ჯამის ნიშანს არ დავწერთ და ვიგულისხმებთ იმ შემთხვევაში, როცა ერთი და იგივე ინდექსი გვხვდება ორჯერ: ერთხელ ზევით, მეორედ ქვევით. ასე მაგალითად:

$$a_i^i = \sum_{i=1}^{n} a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n,$$

ან კიდევ

$$a_k b^k = \sum_{k=1}^{n} a_k b^k = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n .$$

აჯამვის ინდექსს ყრუ ან მუნჯი ინდექსი ჰქვია. რასაკვირველია, არა აქვს მნიშვნელობა a_k^k დავწერთ, თუ a_i^i-ს. ინდექსებს, რომლის მიხედვითაც არ ხდება აჯამვა, თავისუფალ ინდექსებს უწოდებენ.

მაგალითად: $a_{ik}^k = a_{i1}^1 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^n$.
აქ „i“ ინდექსი თავისუფალია, ხოლო „k“ – ყრუ.
ან კიდევ

$$a_{js} b^s = a_{j1} b^1 + a_{j2} b^2 + \cdots + a_{jn} b^n .$$

ჯამში „j“ ინდექსია თავის-უფალი, „s“ კი – ყრუ.

ჩაწერა

$$a_{ik}^k = b_{ik}^k$$

ნიშნავს n ტოლობის მოცემას, რომელიც მიიღება, თუ i ინდექსს მივცემთ თანამიმდევრობით მნიშვნელობებს $\overline{1,n}$.

ეგრეთ წოდებული კრონეკერის სიმბოლო δ_i^j განისაზღვრება ფორმულით

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{როცა} \quad i = j. \end{cases}$$

მისი ძირითადი თვისებები მოიცემა ტოლობებით:

$$a^i \delta_i^j = a^j, \quad b_j \delta_i^j = b_i.$$

მართლაც, აღნიშნულ ჯამებში მხოლოდ ის შესაკრებები გვრჩება, რომლებიც მიიღება როცა $i = j$ და შესაბამისად გვექნება

$$a^j \cdot 1 = a^j, \quad b_i \cdot 1 = b_i.$$

§37. ვექტორული სივრცის შეუღლებული სივრცე, კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები

განვიხილოთ n-განზომილებიანი ვექტორული V სივრცე ნამდვილ რიცხვთა R ველის მიმართ. ვთქვათ, $\{e_i\}$ $i=\overline{1,n}$ ვექტორები ამ სივრცის ბაზისს შეადგენს. მაშინ, როგორც ცნობილია $\forall x \in V$ ვექტორი ცალსახად წარმოიდგინება აღებული ბაზისის მიხედვით, ე. ი.

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n = x^i e_i, \ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

სადაც $x^i \in R$ სიდიდეები x ვექტორის კოორდინატებია $\{e_i\}$ ბაზისის მიხედვით.

წრფივი ξ ფორმა ეწოდება ასახვას

$$\xi : V \to R,$$

რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

$$\begin{aligned} &1.\ \xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y), && \forall x, y \in V, \\ &2.\ \xi(\lambda x) = \lambda \xi(x), && \forall x \in V, \forall \lambda \in R. \end{aligned} \tag{2}$$

(1) და (2) ფორმულების გათვალისწინებით, წრფივი ფორმის მნიშვნელობა x ვექტორზე, $\xi(x)$ ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\xi(x) = \xi(x^i e_i) = x^i \xi(e_i).$$

თუ წრფივი ფორმის მნიშვნელობებს საბაზისო e_i ვექტორებზე აღვნიშნავთ

$$\xi_i = \xi(e_i), \tag{3}$$

მივიღებთ

$$\xi(x) = \xi_i x^i. \tag{3'}$$

ნებისმიერი $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in R$ სიდიდეებისათვის (3′) ფორმულით ცალსახად განისაზღვრება წრფივი ფორმა, რომლისთვისაც ადგილი აქვს (3). მართლაც, თუკი ფორმა (3′) ფორმულით არის წარმოდგენილი, მაშინ $\forall x, y \in V$ და $\forall \lambda \in R$ გვექნება:

$$\begin{aligned}
&\xi(x+y) = \xi_1(x^1+y^1) + \xi_2(x^2+y^2) + \cdots + \xi_n(x^n+y^n) = \\
&= \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \cdots + \xi_n x^n + \xi_1 y^1 + \xi_2 y^2 + \cdots + \xi_n y^n = \\
&= \xi(x) + \xi(y) \\
&\xi(\lambda x) = \xi_1(\lambda x^1) + \xi_2(\lambda x^2) + \cdots + \xi_n(\lambda x^n) = \\
&= \lambda(\xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \cdots + \xi_n x^n) = \lambda \xi(x).
\end{aligned}$$

გარდა ამისა,

$$\xi(e_i) = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 0 + \cdots + \xi_i \cdot 1 + \cdots + \xi_n \cdot 0 = \xi_i .$$

აღვნიშნოთ V^*-ით წრფივ ფორმათა სიმრავლე. წრფივ ფორმათა სიმრავლეში შემოვიტანოთ შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები :

$$\begin{aligned}
&(\xi+\eta)(x) = \xi(x) + \eta(x), \qquad && \forall \xi, \eta \in V^*, \forall x \in V, \\
&(\lambda\xi)(x) = \lambda\xi(x), && \forall \xi \in V^*, \forall x \in V, \forall \lambda \in R.
\end{aligned}$$

წრფივ ფორმათა სიმრავლე V^* ადგენს ვექტორულ სივრცეს. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ წრფივ ფორმათა ჯამი კვლავ წრფივი ფორმაა. მართლაც, განვიხილოთ

$$(\xi+\eta)(x+y)=\xi(x+y)+\eta(x+y)=\xi(x)+\xi(y)+$$
$$+\eta(x)+\eta(y)=\{\xi(x)+\eta(x)\}+\{\xi(y)+\eta(y)\}=$$
$$=(\xi+\eta)(x)+(\xi+\eta)(y),$$

შემდეგ

$$(\xi+\eta)(\lambda x)=\xi(\lambda x)+\eta(\lambda x)=\lambda\xi(x)+\lambda\eta(y)=$$
$$=\lambda\{\xi(x)+\eta(x)\}=\lambda(\xi+\eta)(x).$$

ამრიგად, წრფივ ფორმათა ჯამი კვლავ წრფივი ფორმაა. შევამოწმოთ ახლა წრფივი ფორმის ნამრავლი სკალარზე, რომ წრფივი ფორმაა. განვიხილოთ

$$(\lambda\xi)(x+y)=\lambda\xi(x+y)=\lambda\{\xi(x)+\xi(y)\}=$$
$$=\lambda\xi(x)+\lambda\xi(y)=(\lambda\xi)(x)+(\lambda\xi)(y),$$
$$(\lambda\xi)(\alpha x)=\lambda\xi(\alpha x)=\alpha\lambda\xi(x)=\alpha(\lambda\xi)(x).$$

მივიღეთ, რომ $\xi+\eta\in V^*, \lambda\xi\in V^*, \forall\xi,\eta\in V^*, \forall\lambda\in R$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ V^* სიმრავლეში შემოტანილი შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები აკმაყოფილებს ვექტორული სივრცის ყველა აქსიომას.

აქ ნულოვანი ელემენტი იქნება ისეთი წრფივი ფორმა Θ, რომელიც ნულს უდრის $\forall x\in V$ ვექტორზე, ხოლო $(-1)\xi$ იქნება ξ ფორმის მოპირდაპირე წრფივი ფორმა.

მიღებულ ვექტორულ V^* სივრცეს, რომლის ელემენტები V ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფორმებია, V ვექტორული სივრცის შეუღლებული ვექტორული სივრცე ეწოდება.

V^* სივრცე, ცხადია, იგივე R ველზე იქნება განსაზღვრული. ვაჩვენოთ, რომ თუ განზომილება $\dim V=n$, მაშინ $\dim V^*=n$.

V^* სივრცეში განვიხილოთ n წრფივი ფორმა $\{e^j\}$ $j=\overline{1,n}$ ასეთნაირად განსაზღვრული

$$e^j(e_i)=\delta_i^j=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad i\neq j,\\ 1, & \text{როცა} \quad i=j.\end{cases}$$

(ეს ფორმები (3′) ძალით ცალსახად იქნება განსაზღვრული!) ეს წრფივი ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, განვიხილოთ გამოსახულება

$$\alpha_1 e^1+\alpha_2 e^2+\cdots+\alpha_n e^n=\Theta.$$

$\forall e_j$ ვექტორისათვის ადგილი ექნება ტოლობას

$$(\alpha_1 e^1+\alpha_2 e^2+\cdots+\alpha_n e^n)(e_j)=0,$$

ან რაც იგივეა

$$\alpha_1 e^1(e_j)+\alpha_2 e^2(e_j)+\cdots+\alpha_j e^j(e_j)+\cdots+\alpha_n e^n(e_j)=0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j=0.$$

მივიღებთ, რომ ყველა $\alpha_j=0, \quad j=\overline{1,n}$.

ე. ი. $\{e^j\}$ $(j=\overline{1,n})$ წრფივი ფორმები წრფივად დამოუკიდებელია. ამასთან ნებისმიერი წრფივი ფორმა გამოისახება $e^1, e^2, \ldots, e^n$ ფორმების საშუალებით.

მართლაც, ჩვენ ვნახეთ, რომ ყოველი წრფივი ფორმა ცალსახად განისაზღვრება $\xi_i=\xi(e_i)$ სიდიდეებით.

მეორე მხრივ, იგივე მნიშვნელობებით განისაზღვრება

$$\xi_1 e^1+\xi_2 e^2+\cdots+\xi_n e^n$$

წრფივი ფორმაც:

$$(\xi_1 e^1+\xi_2 e^2+\cdots+\xi_n e^n)(e_j)=\xi_j,$$

ამიტომ

$$\xi = \xi_i e^i. \tag{4}$$

მაშასადამე, $\{e^j\}$ $(j=\overline{1,n})$ – წრფივი ფორმები ადგენს V^* სივრცის ბაზისს. მას ეწოდება $\{e_i\}$ $i=\overline{1,n}$ ბაზისის დუალი (ორადული) ბაზისი.

ჩვენ ავაგეთ V^* სივრცის ბაზისი, რომელიც n წრფივ ფორმას შეიცავს. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ V^* სივრცის განზომილებაც n-ია. ე. ი. $\dim V^* = \dim V = n$.

განვიხილოთ $e^i(x)$ საბაზისო ვექტორების მნიშვნელობანი x ვექტორზე,

$$e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j e_i(e_j) = x^j \delta^i_j = x^i, \tag{5}$$

ე. ი. x ვექტორის კოორდინატები $\{e_i\}$ ბაზისის მიხედვით x^i არის დუალი ბაზისის მნიშვნელობანი ამ ვექტორზე.

$\forall x \in V$ -თვის გვაქვს $x = x^i e_i$, სადაც $x^i = e^i(x)$, ხოლო $\forall \xi \in V^*$ კი – $\xi = \xi_i e^i$, სადაც $\xi_i = \xi(e_i)$.

ვთქვათ, V ვექტორული სივრცის ბაზისი $\{e_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ შეიცვალა $\{e_{i'}\}$-ით ისე, რომ

$$e_{i'} = a^i_{i'} e_i \quad (\text{ასევე შეგვეძლო დაგვეწერა } e_i = a^{i'}_i e_{i'}) \tag{6}$$

ნიშანი i' შტრიხი ინდექსზე აღნიშნავს მხოლოდ განსხვავებულ ბაზისს. ისე კი იგი ისევე იცვლება, როგორც ვთქვათ ინდექსი i – $i' = \overline{1,n}$.

აღვნიშნოთ A-თი (6) გარდაქმნის მატრიცი:

$$A = \begin{Vmatrix} a^1_{1'} & a^2_{1'} & \cdots & a^n_{1'} \\ a^1_{2'} & a^2_{2'} & \cdots & a^n_{2'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^1_{n'} & a^2_{n'} & \cdots & a^n_{n'} \end{Vmatrix}$$

ვგულისხმობთ, რომ ამ მატრიცის დეტერმინანტი $\det A \neq 0$ (მატრიცი არ არის გადაგვარებული).

$\forall x \in V$ ვექტორისათვის გვექნება:

$$x^i e_i = x^{i'} e_{i'} = x^{i'} a^i_{i'} e_i \,.$$

აქედან ვიღებთ:

$$x^i = a^i_{i'} x^{i'} \,, \tag{7}$$

სადაც მატრიცი

$$\begin{Vmatrix} a^1_{1'} & a^1_{2'} & \cdots & a^1_{n'} \\ a^2_{1'} & a^2_{2'} & \cdots & a^2_{n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_{1'} & a^n_{2'} & \cdots & a^n_{n'} \end{Vmatrix} = A^t \,,$$

A მატრიცის ტრანსპონირებულია.

(7) ტოლობა ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$X = A^t X' \,,$$

ხოლო აქედან X' რომ ამოვხსნათ, უნდა გავამრავლოთ $(A^t)^{-1}$, A მატრიცის ტრანსპონირებულის შებრუნებულზე, მივიღებთ

$$X' = (A^t)^{-1} X \,.$$

კოორდინატებში უკანასკნელი ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$x^{j'} = a^{j'}_j x^j \,. \quad (8)$$

გავარკვიოთ ახლა როგორ იცვლება წრფივი ფორმის კოორდინატები.

განმარტებით და (6) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\xi_{i'} = \xi(e_{i'}) = \xi(a^i_{i'} e_i) = a^i_{i'} \xi(e_i) = a^i_{i'} \xi_i$$

ე. ი.

$$\xi_{i'} = a^i_{i'}\xi_i . \tag{9}$$

წრფივი ფორმის კოორდინატები ისე იცვლება, როგორც V ვექტორული სივრცის საბაზისო ვექტორები.

ვთქვათ, $\{e_{i'}\}$ ბაზისის დუალი $\{e^{j'}\}$ ბაზისია,

ე. ი.

$$e^{j'}(e_{i'}) = \delta^{j'}_{i'} .$$

$e^{j'}$ წრფივი ფორმები დავშალოთ $\{e^j\}$ ბაზისის მიხედვით. გვექნება:

$$e^{j'} = e^{j'}(e_i)e^i = e^{j'}(a^{i'}_i e_{i'})e^i = a^{i'}_i e^{j'}(e_{i'})e^i = a^{i'}_i \delta^{j'}_{i'} e^i = a^{j'}_i e^i .$$

ე. ი.

$$e^{j'} = a^{j'}_i e^i . \tag{10}$$

დუალი ბაზისის ვექტორები ისე იცვლება, როგორც V ვექტორული სივრცის ვექტორის კოორდინატები.

(6) ფორმულით მოცემულ გარდაქმნას უწოდებენ გარდაქმნას კოვარიანტული წესით, ხოლო (8) ფორმულით მოცემულ გარდაქმნას – გარდაქმნას კონტრავარიანტული წესით.

V ვექტორული სივრცის ყოველი ვექტორის კოორდინატები გარდაიქმნება კონტრავარიანტული წესით. V^* შეუღლებული სივრცის ვექტორების კოორდინატები კი – კოვარიანტული წესით. შესაბამისად, V სივრცის ვექტორებს უწოდებენ კონტრავარიანტულს, ხოლო V^* შეუღლებული სივრცის ელემენტებს კი – კოვარიანტულ ვექტორებს ან კოვექტორებს.

როგორც ვნახეთ, შეუღლებული V^* სივრცის ვექტორის კოორდინატები გარდაიქმნება A მატრიცის საშუალებით:

$$\xi_{i'} = a^i_{i'}\xi_i \quad \left(A = \left\| a^i_{i'} \right\|, \quad \det A \neq 0\right),$$

(იგივენაირად, როგორც V ვექტორული სივრცის საბაზისო ვექტორები – $e_{i'} = a^i_{i'} e_i$), ხოლო V სივრცის ვექტორის კოორდინა-

ტები კი – $(A^t)^{-1}$, აღებული მატრიცის ტრანსპონირებულის შებრუნებულის მიხედვით: $x^{i'} = a_i^{i'} x^i$.

საინტერესოა, რა შემთხვევაში დაემთხვევა ეს გარდაქმნები. ე. ი. როდის სრულდება ტოლობა:

$$A = (A^t)^{-1}.$$

თუ ორივე მხარეს მარცხნიდან გავამრავლებთ A^t-ზე, მივიღებთ:

$$A^t A = E.$$

ეს კი იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როცა მატრიცი და შესაბამისად გარდაქმნა არის ორთოგონალური.

§38. ვექტორულ სივრცეთა ტენზორული ნამრავლი

განვიხილოთ V და W ვექტორული სივრცე ერთი და იგივე K ველის მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ $\dim V = n$, ხოლო $\dim W = m$ (შეიძლება უსასრულოც იყოს). ამ ვექტორული სივრცეების ვექტორების საშუალებით აიგება ახალი ობიექტები, რომელთა სიმრავლეს ჩვენ აღვნიშნავთ T-თი, T სიმრავლის ელემენტებად ავიღებთ ყველა შესაძლო წყვილს x, y ვექტორებისას, სადაც $x \in V$, $y \in W$ და ასეთ წყვილთა ყველა შესაძლო სასრულო ერთობლიობებს. ისე, რომ ნებისმიერ $t \in T$ ელემენტს ექნება სახე:

$$t = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_k y_k\}, \tag{1}$$

სადაც $x_1, x_1, \dots, x_k \in V$, ხოლო $y_1, y_1, \dots, y_k \in W$.

შევთანხმდეთ, რომ პირველ ადგილას წყვილში დავწეროთ V სივრცის ელემენტი. თუკი V ემთხვევა W სივრცეს, მაშინ იგულისხმება, რომ წყვილები დალაგებულია, რომ წყვილებში ვექტორების ჩაწერის რიგი არსებითია, საზოგადოდ $xy \neq xy$.

შემდეგისათვის უფრო მოხერხებულია „xy წყვილის“ ნაცვლად ვიხმაროთ x და y ელემენტების ტენზორული ნამრავლი და

აღვნიშნოთ $x \otimes y$, ხოლო „წყვილთა ერთობლიობის" ნაცვლად – ფორმალური ჯამი და (1) ასე გადავწეროთ:

$$t = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \dots + x_k \otimes y_k. \qquad (1')$$

ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ

1. ფორმალური ჯამები, რომლებიც მხოლოდ შესაკრებთა დალაგებით განსხვავდება, არ განვასხვაოთ ერთმანეთისგან და რომ

$$\begin{aligned} &2.\ (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \quad \forall x_1, x_2 \in V, \forall y \in W, \\ &3.\ x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \quad \forall x \in V, \forall y_1, y_2 \in W, \qquad (2) \\ &4.\ (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda (x \otimes y), \ \forall \lambda \in K, \forall x \in V, \forall y \in W. \end{aligned}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენ დასაშვებად ვთვლით ჯამში წყვილების რიგის შეცვლას, ჯამში ერთი წყვილის მაგიერ, ორი წყვილის ჯამით წარმოდგენას, ან პირიქით, ორი წყვილის ჯამის ნაცვლად ერთის დაწერას. მამრავლის გადატანას მოცემული წყვილის ერთი ვექტორიდან იმავე წყვილის მეორე ვექტორზე.

ორი ელემენტი $t_1, t_2 \in T$-დან ტოლად ჩაითვლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი დაიყვანება წყვილთა ერთი და იგივე ერთობლიობაზე სასრული რაოდენობა დასაშვები გარდაქმნების შედეგად.

T სიმრავლეში შემოვიტანოთ შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები:

1. $t_1 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \dots + x_k \otimes y_k$

და

$$t_2 = x_{k+1} \otimes y_{k+1} + x_{k+2} \otimes y_{k+2} + \dots + x_{k+\ell} \otimes y_{k+\ell}$$

($t_1, t_2 \in T$) ელემენტების ჯამი ვუწოდოთ T-ს ელემენტს, რომელიც წარმოადგენს t_1 და t_2 ელემენტების წყვილების გაერთიანებას. ე. ი.

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 = {} & x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \dots + x_k \otimes y_k + \\ & + x_{k+1} \otimes y_{k+1} + x_{k+2} \otimes y_{k+2} + \dots + x_{k+\ell} \otimes y_{k+\ell} \end{aligned}$$

2. t ელემენტის ნამრავლი რაიმე $\lambda \in K$ სკალარზე განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\lambda t = (\lambda x_1) \otimes y_1 + (\lambda x_2) \otimes y_2 + \cdots + (\lambda x_k) \otimes y_k .$$

ვაჩვენოთ, რომ T სიმრავლე შემოტანილი ჯამისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს.

შევამოწმოთ, რომ სრულდება ვექტორული სივრცის აქსიომები:

1. $t_1 + t_2 = t_2 + t_1, \qquad \forall t_1, t_2 \in T,$

2. $t_1 + (t_2 + t_3) = (t_1 + t_2) + t_3, \qquad \forall t_1, t_2, t_3 \in T,$

3. $\exists \Theta \in T$, რომ $\forall t \in T$-თვის

$$t + \theta = t$$

4. $\forall t \in T, \quad \exists t_1 \in T$, რომ

$$t + t_1 = \Theta.$$

5. $1 \cdot t = t$,

6. $\alpha(\beta t) = (\alpha\beta)t, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall t \in T,$

7. $(\alpha + \beta)t = \alpha t + \beta t,$

8. $\alpha(t_1 + t_2) = \alpha t_1 + \beta t_2, \qquad \forall \alpha \in K, \quad \forall t_1, t_2 \in T.$

ამ აქსიომებიდან შევამოწმოთ მე-3 და მე-4. დანარჩენების შესრულება აშკარაა შემოტანილი ოპერაციების და (2) პირობების გამო.

T-ში მოვძებნოთ ნულოვანი ელემენტი. ვაჩვენოთ, რომ თუ Θ და $\widetilde{\Theta}$ შესაბამისად V და W სივრცეების ნულოვანი ელემენტებია, მაშინ $\Theta \otimes \widetilde{\Theta}$ იქნება T-ს ნულოვანი ელემენტი.

ჯერ დავადგინოთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $y \in W$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Theta \otimes \widetilde{\Theta} = \Theta \otimes y .$$

(ანალოგიურად, $\forall x \in V$-თვის ადგილი აქვს $x \otimes \widetilde{\Theta} = \Theta \otimes \widetilde{\Theta}$).
მართლაც, (2)-ის მეორე ტოლობის საფუძველზე

$$\Theta \otimes \widetilde{\Theta} = \Theta \otimes (Oy) = O\Theta \otimes y = \Theta \otimes y.$$

ამიტომ

$$x \otimes y + \Theta \otimes \widetilde{\Theta} = x \otimes y + \Theta \otimes y = (x + \Theta) \otimes y = \Theta \otimes y.$$

თუ ავიღებთ $\forall t \in T$, სადაც $t = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_k \otimes y_k$, მაშინ

$$\begin{aligned} t + \Theta \otimes \widetilde{\Theta} &= x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_k \otimes y_k + \Theta \otimes \widetilde{\Theta} = \\ &= x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_k \otimes y_k + \Theta \otimes y = \\ &= x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_{k-1} \otimes y_{k-1} + \{x_k \otimes y_k + \Theta \otimes y\} = \\ &= x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_{k-1} \otimes y_{k-1} + x_k \otimes y_k = t. \end{aligned}$$

ამგვარად, ვექტორული სივრცის მესამე აქსიომა სრულდება.

რაც შეეხება მე-4, ესეც მარტივად მიიღება. დავრწმუნდეთ, რომ $\forall t \in T$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი $(-1)t$ იქნება. მართლაც:

$$\begin{aligned} t + (-1)t &= x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_k \otimes y_k + (-1)(x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_k \otimes y_k) = \\ &= x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_k \otimes y_k + (-1)x_1 \otimes y_1 + \cdots + (-1)x_k \otimes y_k = \\ &= \{x_1 + (-1)x_1\} \otimes y_1 + \cdots + \{x_k + (-1)x_k\} \otimes y_k = \\ &= \Theta \otimes y_1 + \cdots + \Theta \otimes y_k = \Theta \otimes \widetilde{\Theta} + \cdots \Theta \otimes \widetilde{\Theta} = \Theta \otimes \widetilde{\Theta}. \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ T სიმრავლე წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს. მას ეწოდება V და W ვექტორული სივრცეების ტენზორული ნამრავლი და ასე აღინიშნება:

$$T = V \otimes W.$$

როგორია $T = V \otimes W$ სივრცის განზომილება?

ვთქვათ $\{e_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ V სივრცის ბაზისია, ხოლო $\{\widetilde{e}_j\}$ $(j=\overline{1,m})$ – W სივრცის ბაზისი. მაშინ $\forall x \in V$ ასე წარმოიდგინება $x=x^i e_i$ $(i=\overline{1,n})$, ხოლო $\forall y \in W-$ $y=y^j \widetilde{e}_j$ $(j=\overline{1,m})$. რაც შეეხება ტენზორულ ნამრავლს $x \otimes y$, გვექნება:

$$x \otimes y = x^i y^j e_i \otimes \widetilde{e}_j .$$

ავიღოთ $\forall t \in T$:

$$t_1 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_k \otimes y_k =$$
$$= \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell^i y_\ell^j e_i \otimes \widetilde{e}_j = t^{ij} e_i \otimes \widetilde{e}_j,$$

სადაც

$$t^{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell^i y_\ell^j, \quad x_\ell = x_\ell^i e_i, \quad y_\ell = y_\ell^j e_j.$$

ამგვარად, $V \otimes W$ სივრცის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება როგორც წრფივი კომბინაცია $e_i \otimes \widetilde{e}_j$ წყვილებისა, რომლებიც ამავე დროს წრფივად დამოუკიდებელია, რაც ნიშნავს, რომ $\{e_i \otimes \widetilde{e}_j\}$ $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ წყვილები ქმნის $V \otimes W$ სივრცის ბაზისს. მათი რაოდენობა nm-ის ტოლია, ამიტომ მიღებული სივრცის განზომილება

$$\dim V \otimes W = nm.$$

$T = V \otimes W$ ვექტორული სივრცის ყოველ ვექტორს ეწოდება V და W ვექტორულ სივრცეებზე აგებული ტენზორი.

რამდენადაც განსაზღვრულია ორი სიერცის ტენზორული ნამრავლი, შეგვიძლია ავაგოთ ნებისმიერ რიცხვ ვექტორული სივრცეების ტენზორული ნამრავლი. ამისათვის საკმარისია მათი თანამიმდევრობით გადამრავლება რაიმე რიგით. ასე მაგალითად, თუ

მოცემულია V_1, V_2, V_3 ვექტორული სივრცეები, მაშინ $T=(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ ტენზორული ნამრავლის ელემენტები იქნება $(x \otimes y) \otimes z$ სახის შესაკრებთა სასრულო ფორმალური ჯამები, სადაც $x \in V_1$, $x \in V_1$, $x \in V_1$. აქ (2) პირობების მსგავსი პირობები მიიღება $V_1 \otimes V_2$ ნამრავლის ეკვივალენტობის პირობების და $V_1 \otimes V_2$ და V_3 ნამრავლის პირობების გათვალისწინებით. მაგრამ გარდა ამისა, უნდა მოვითხოვოთ ასოციაციურობა

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$

რაც ნიშნავს, რომ $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$.

ეს გვაძლევს საშუალებას დავწეროთ $x \otimes y \otimes z$ ნაცვლად $(x \otimes y) \otimes z$ და $x \otimes (y \otimes z)$.

ნებისმიერ რიცხვ ვექტორულ სივრცეთა ტენზორული ნამრავლი განისაზღვრება ინდუქციით.

$V_1, V_2, \ldots, V_m$ ვექტორულ სივრცეთა ტენზორული ნამრავლი ასე აღინიშნება

$$\bigotimes_{i=1}^{m} V_i = T.$$

თუ $\dim V_1 = n_i$, მაშინ $\dim T = n_1 n_2 \ldots n_m$.

როცა ყველა მამრავლი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ტენზორულ ნამრავლს უწოდებენ ვექტორული სივრცის ტენზორულ m ხარისხს და აღნიშნავენ

$$\overset{m}{\otimes} V = T.$$

გეომეტრიისათვის საინტერესოა ის შემთხვევები, როცა ტენზორული ნამრავლის თითოეული მამრავლი ან აღებულ ვექტორულ სივრცეს ემთხვევა, ან მის შეუღლებულს. ტენზორული ნამრავლი, სადაც შედის p-ჯერ V სივრცე და q-ჯერ მისი შეუღლებული V^*, აღინიშნება:

$$T_q^p = \overset{p}{\otimes} V \overset{q}{\otimes} V^* .$$

ამ ვექტორული სივრცის განზომილება იქნება $\dim T_q^p = n^{p+q}$, ... $\dim V = n$.

მიღებული სივრცის ელემენტები იწოდებიან $(p+q)$ რანგ... p-ჯერ კონტრავარიანტულ და q-ჯერ კოვარიანტულ ან (p, q) ტ... პის ტენზორებად, რომლებიც განსაზღვრულია V ვექტორულ სი... რცეზე.

ფორმალურად სკალარები ნული რანგის ტენზორებია. პირვ... ლი რანგის ტენზორებია V და V^* სივრცის ვექტორები. V სივრც... ელემენტებს ეწოდება პირველი რანგის კონტრავარიანტული $(1, 0)$ ტიპის ტენზორი, ხოლო V^* სივრცის ელემენტებს – პირველ... რანგის $(0, 1)$ ტიპის კოვარიანტული ტენზორი.

$\forall t \in V \otimes V$ იქნება მეორე რანგის ორჯერ კონტრავარია... ტული ტენზორი ანუ $(2, 0)$ ტიპისა, ხოლო $\forall t \in V^* \otimes V^*$ იქნებ... მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტული ტენზორი, $(0, 2)$ ტიპის... რაც შეეხება $\forall t \in V \otimes V^*$ – ის იქნება ერთჯერ კონტრავარია... ტული და ერთჯერ კოვარიანტული, $(1, 1)$ ტიპის ტენზორი და ა. შ.

თუ $\{e_i\}$ $(i = \overline{1,n})$ V სივრცის ბაზისია, ხოლო $\{e^j\}$ $(j = \overline{1,n})$ – V^* სივრცის ბაზისი, მაშინ T_q^p სივრცის ბაზისი ასეთი სახის ელე... მენტებისაგან შედგება:

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}\},$$

სადაც $i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_q = \overline{1,n}$ (მათი რაოდენობა იქნებ... n^{p+q}). ნებისმიერი (p,q) ტიპის ტენზორი ე. ი. $t \in T_q^p = \overset{p}{\otimes} V \overset{q}{\otimes} V^*$ ... ამ ბაზისის მიხედვით ასე წარმოიდგინება:

$$t = t^{i_1, i_2, \dots, i_p}_{j_1, j_2, \dots, j_q} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} \qquad (3)$$

n^{p+q} რაოდენობის სიდიდეებს $t^{i_1, i_2, \dots, i_p}_{j_1, j_2, \dots, j_q}$ ტენზორის კომპონენტები ან ტენზორის კოორდინატები ეწოდებათ. ქვედა ინდექსებს კოვარიანტულს უწოდებენ, ხოლო ზედას – კონტრავარიანტულს.

შენიშვნა: რამდენადაც ტენზორი განისაზღვრება კოორდინატებით, ამიტომ ხშირად როცა ამბობენ „მოცემულია ტენზორი" – წერენ მის კოორდინატებს. მაგალითად, თუ წერია „ t^{ij}_k ", ეს ნიშნავს რომ საქმე გვაქვს მესამე რანგის ორჯერ კონტრავარიანტულ და ერთხელ კოვარიანტულ ტენზორთან.

ვნახოთ, როგორ იცვლება ტენზორის კომპონენტები, როცა ვექტორული სივრცის ახალ ბაზისზე გადავდივართ.

განვიხილოთ $(p+q)$ რანგის (p, q) ტიპის ტენზორი. ვაჩვენოთ, რომ ახალ ბაზისზე გადასვლისას მისი კოორდინატები გარდაიქმნება კონტრავარიანტული წესით ყველა ზედა ინდექსის მიმართ და კოვარიანტული წესით ყველა ქვედა ინდექსის მიხედვით. სახელდობრ, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$t^{i'_1, i'_2, \dots, i'_p}_{j'_1, j'_2, \dots, j'_q} = a^{i'_1}_{i_1} a^{i'_2}_{i_2} \cdots a^{i'_p}_{i_p} a^{j_1}_{j'_1} a^{j_2}_{j'_2} \cdots a^{j_q}_{j'_q} t^{i_1, i_2, \dots, i_p}_{j_1, j_2, \dots, j_q}. \qquad (4)$$

მართლაც, ჩვენ გვქონდა $e_{i'} = a^{i}_{i'} e_i$, $e^{j'} = a^{j'}_{j} e^{j}$. (ასევე $e_i = a^{i'}_{i} e_{i'}$, $e^{j} = a^{j}_{j'} e^{j'}$) თუ ვიგულისხმებთ, რომ ტენზორი ინვარიანტულია ბაზისის გარდაქმნის მიმართ, იგივე ტენზორი ახალ ბაზისში ასე ჩაიწერება:

$$t = t^{i'_1, i'_2, \dots, i'_p}_{j'_1, j'_2, \dots, j'_q} e_{i'_1} \otimes e_{i'_2} \otimes \cdots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes e^{j'_2} \otimes \cdots \otimes e^{j'_q}.$$

მისი შედარება (3)-თან აღნიშნული გარდაქმნის ფორმულების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$t^{i'_1, i'_2, \dots, i'_p}_{j'_1, j'_2, \dots, j'_q} e_{i'_1} \otimes e_{i'_2} \otimes \cdots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes e^{j'_2} \otimes \cdots \otimes e^{j'_q} =$$

$$= t^{i_1, i_2, \ldots, i_p}_{j_1, j_2, \ldots, j_q} a^{i'_1}_{i_1} \cdots a^{i'_p}_{i_p} a^{j_1}_{j'_1} \cdots a^{j_q}_{j'_q} \, e_{i'_1} \otimes \cdots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \cdots \otimes e^{j'_q} ,$$

საიდანაც მივიღებთ (4) ტოლობას.

ტენზორთა თეორიის კლასიკური გადმოცემისას ამ (4) ფორმულას უდებენ საფუძვლად ტენზორის განმარტებას. სახელდობრ, $(p+q)$ რანგის (p, q) ტიპის $(p \geq 0, q \geq 0)$ ტენზორი ეწოდება ობიექტს, რომელიც V ვექტორული სივრცის ყოველ ბაზისში განისაზღვრება n^{p+q} სიდიდით და ბაზისის შეცვლისას ისინი (მისი კომპონენტები) გარდაიქმნება შემდეგი წესით:

$$t^{i'_1, \ldots, i'_p}_{j'_1, \ldots, j'_q} = a^{i'_1}_{i_1} \cdots a^{i'_p}_{i_p} a^{j_1}_{j'_1} \cdots a^{j_q}_{j'_q} t^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} ,$$

სადაც $\left\| a^{i}_{i'} \right\|$ მატრიცი არის $\{e_i\}$ ბაზისიდან $\{e_{i'}\}$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, ხოლო $\left\| a^{k'}_{k} \right\|$ მატრიცი კი შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს:

$$a^{i}_{i'} a^{i'}_{k} = \delta^{i}_{k}, \quad a^{i'}_{i} a^{i}_{k'} = \delta^{i'}_{k'}.$$

ჩვენ ხშირად ამ განმარტებითაც ვსარგებლობთ.

ფიზიკაში, გეომეტრიაში, ალგებრაში ხშირად ვხვდებით ობიექტებს, რომლებიც რიცხვთა გარკვეული სისტემით ხასიათდება. მაგალითად, წრფივი ფორმა, ორად წრფივი ფორმა, წრფივი გარდაქმნა, სიჩქარე და სხვ. როცა კოორდინატთა სისტემა იცვლება, ის სისტემა რიცხვებისა, რომელიც აღებულ ობიექტს განსაზღვრავს, სხვადასხვანაირად იცვლება. იმისათვის, რომ სრულად დახასიათდეს ესა თუ ის ობიექტი, საჭიროა ვიცოდეთ არა მარტო ის მნიშვნელობანი, რომელსაც იღებენ ახალ სისტემებში ეს სიდიდეები, არამედ ის წესიც უნდა გავარკვიოთ, თუ როგორ იცვლება ეს სიდიდეები კოორდინატთა გარდაქმნის დროს.

რომ გავიგოთ აღებული ობიექტი, რომელიც სიდიდეთა სისტემით ხასიათდება, წარმოადგენს თუ არა ტენზორს, ამისათვის უფრო მოხერხებულია გამოვიყენოთ ტენზორის ბოლო განმარტება.

მოვიყვანოთ **ტენზორის მაგალითები:**

ვექტორი არის ტენზორის ყველაზე თვალსაჩინო მაგალითი. ტენზორის ტრივიალური მაგალითია სკალარი, ნული რანგის ტენზორი, რომელიც არ იცვლება კოორდინატთა გარდაქმნისას.

სიჩქარის ვექტორი

როგორც ცნობილია

$$x^i = x^i(t), (i = 1,2,3)$$

წირის გასწვრივ სიჩქარის ვექტორის კოორდინატები, როცა $t = t_0$, იქნება

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)_{t=t_0} = (b^1, b^2, b^3).$$

კოორდინატთა შეცვლისას

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) = x^{i'}(t).$$

მივიღებთ იმავე ვექტორის სხვა კოორდინატებს

$$\left(\frac{dx^{1'}}{dt}, \frac{dx^{2'}}{dt}, \frac{dx^{3'}}{dt}\right)_{t=t_0} = (b^{1'}, b^{2'}, b^{3'}),$$

ამასთან

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt},$$

ე. ი. $b^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} b^i$ ან $b^{i'} = a_i^{i'} b^i$,

სადაც $\left\| a_i^{i'} \right\| = \left\| \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|$.

გამოდის, რომ სიჩქარის ვექტორი ყოფილა პირველი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი (1, 0) ტიპისა.

სკალარული ფუნქციის გრადიენტი

ფუნქცია $f(x^1, x^2, x^3)$-ის გრადიენტი დეკარტეს კოორდინატებში, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება შემდეგი კომპონენტებით:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

ვთქვათ, კოორდინატები შეიცვალა

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3),$$

მაშინ

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial f}{\partial x^{2'}}, \frac{\partial f}{\partial x^{3'}}\right) = (\xi_{1'}, \xi_{2'}, \xi_{3'}).$$

მაგრამ

$$\frac{df}{dx^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

ან რაც იგივეა

$$\xi_{i'} = a^i_{i'}\xi_i, \qquad \text{სადაც } \left\|a^i_{i'}\right\| = \left\|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right\|.$$

როგორც კომპონენტების უკანასკნელი გარდაქმნის წესიდან ჩანს, ფუნქცია f-ის გრადიენტი არის პირველი რანგის კოვარიანტული ტენზორი.

შევნიშნოთ ტენზორის **ერთი საინტერესო თვისება**:

თუ ტენზორის კომპონენტები ერთ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში ნულია, ნული იქნება კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში. ეს ცხადად ჩანს (4) ფორმულიდან.

§39 მოქმედებანი ტენზორებზე, სიმეტრირება, ალტერნირება

1. **ტენზორთა შეკრება.** განვიხილოთ $(p+q)$ რანგის ერთი და იგივე (p, q) ტიპის t_1 და t_2 ტენზორი: $t_1, t_2 \in \overset{p}{\otimes} V \overset{q}{\otimes} V^{*}$. რადგან ორივე მიეკუთვნება ერთი და იგივე ვექტორულ სივრცეს, ამიტომ ისინი შეიკრიბება ვექტორთა ცნობილი წესით (შესაბამისი კოორდინატების ჯამები განიხილება). გამოდის, რომ ორი ერთნაირი ბუნების ტენზორის ჯამი ამავე ტიპის ისეთი ტენზორია, რომლის კოორდინატები აღებული ტენზორების შესაბამისი კოორდინატების ჯამების ტოლია.

ეს უშუალოდ შეგვიძლია შევამოწმოთ.

მაგალითად, განვიხილოთ მესამე რანგის $(1, 2)$ ტიპის P^i_{jk} და Q^i_{jk} ტენზორთა ჯამი. ამისათვის კოორდინატთა აღებულ სისტემაში, i, j, k ინდექსების ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის შევადგინოთ ჯამები

$$P^i_{jk} + Q^i_{jk} = S^i_{jk}.$$

უნდა მივიღოთ S^i_{jk} სიდიდეებით განსაზღვრული მესამე რანგის $(1, 2)$ ტიპის ტენზორი. მართლაც, ვთქვათ კოორდინატთა სისტემა შეიცვალა, რომელსაც მოკლედ ასე აღვნიშნავთ

$$(x) \to (x').$$

კოორდინატთა ახალ სისტემაში შევადგინოთ სიდიდეები

$$S^{i'}_{j'k'} = P^{i'}_{j'k'} + Q^{i'}_{j'k'}$$

მაგრამ P^i_{jk} და Q^i_{jk} ტენზორებია, ამიტომ

$$P^{i'}_{j'k'} = a^{i'}_i a^j_{j'} a^k_{k'} P^i_{jk}, \quad Q^{i'}_{j'k'} = a^{i'}_i a^j_{j'} a^k_{k'} Q^i_{jk}.$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S^{i'}_{j'k'} = a^{i'}_{i} a^{j}_{j'} a^{k}_{k'} (P^{i}_{jk} + Q^{i}_{jk}) = a^{i'}_{i} a^{j}_{j'} a^{k}_{k'} S^{i}_{jk}.$$

ე. ი. S^{i}_{jk} სიდიდეები განსაზღვრავს ტენზორს.

2. **სკალარის ტენზორზე ნამრავლი.** ვთქვათ, $\alpha \in R$ ველის რაიმე სკალარია, ხოლო t არის $(p+q)$ რანგის, (p,q) ტიპის ტენზორი, ე. ი. $t \in \overset{p}{\otimes} V \overset{q}{\otimes} V^{*}$ ვექტორული სივრცის ვექტორია. ამიტომ სკალარი რომ გავამრავლოთ ტენზორზე, საჭიროა კოორდინატთა ყოველ სისტემაში ეს სკალარი გავამრავლოთ აღებულ ტენზორის კოორდინატებზე.

ავიღოთ მეორე რანგის $(1, 1)$ ტიპის ტენზორი a^{i}_{j} და $\alpha \in R$. α რომ გავამრავლოთ აღებულ ტენზორზე, კოორდინატთა აღებულ სისტემაში, ინდექსთა ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის ეს სკალარი გავამრავლოთ ტენზორის კოორდინატებზე და მიღებული სიდიდეები აღვნიშნოთ P^{i}_{j}, $P^{i}_{j} = \alpha Q^{i}_{j}$.

ვთქვათ, კოორდინატთა სისტემა შეიცვალა $(x) \to (x')$, მაშინ გვექნება:

$$P^{i'}_{j'} = \alpha Q^{i'}_{j'} = \alpha a^{i'}_{i} a^{j}_{j'} Q^{i}_{j} = a^{i'}_{i} a^{j}_{j'} P^{i}_{j}.$$

რაც ნიშნავს, რომ P^{i}_{j} სიდიდეები ადგენს მეორე რანგის იგივე $(1, 1)$ ტიპის ტენზორს.

3. **ტენზორთა გამრავლება.** ვთქვათ, $r \in \overset{p_1}{\otimes} V \overset{q_1}{\otimes} V^{*}$ არის (p_1+q_1) რანგის (p_1, q_1) ტიპის ტენზორი, ხოლო $s \in \overset{p_2}{\otimes} V \overset{q_2}{\otimes} V^{*}$ კი – (p_2+q_2) რანგის (p_2, q_2) ტიპისა. იყოს $r^{i_1,\dots,i_{p_1}}_{j_1,\dots,j_{q_1}}$ სიდიდეები კოორდინატები r ტენზორისა, ხოლო $s^{k_1,\dots,k_{p_2}}_{\ell_1,\dots,\ell_{q_2}}$ – კოორდინატები s ტენზორის. ნამრავლით

$$r^{i_1,\dots,i_{p_1}}_{j_1,\dots,j_{q_1}} s^{k_1,\dots,k_{p_2}}_{\ell_1,\dots,\ell_{q_2}} = u^{i_1,\dots,i_{p_1}k_1,\dots,k_{p_2}}_{j_1,\dots,j_{q_1}\ell_1,\dots,\ell_{q_2}}$$

განისაზღვრება u ვექტორი, რომელიც წარმოადგენს r და s ვექტორების ტენზორულ ნამრავლს. იგი იქნება ტენზორი (p_1+q_1, p_2+q_2) ტიპის. მაშ, იმისათვის, რომ გავამრავლოთ r და s ტენზორი, საჭიროა პირველის ყოველი კოორდინატი გავამრავლოთ მეორის ყოველ კოორდინატზე. მივიღებთ $u = r \otimes s$. ასევე შეგვეძლო მიგვეღო $w = s \otimes r$.

u და w ერთი და იგივე სივრცის ვექტორებია, საზოგადოდ, $r \otimes s \neq s \otimes r$. ე. ი. ტენზორთა გამრავლება არ არის კომუტაციური, მაგრამ ადვილად შესამოწმებელია, რომ ასოციაციურია.

განვიხილოთ T_{ij} და Q^{ℓ}_{k} ტენზორის ნამრავლი. კოორდინატთა აღებულ სისტემაში პირველი ტენზორის ყოველი კოორდინატი გავამრავლოთ მეორე ტენზორის ყოველ კოორდინატზე. ასეთნაირად მივიღებთ n^4 რაოდენობის სიდიდეებს S^{ℓ}_{ijk}:

$$S^{\ell}_{ijk} = T_{ij} Q^{\ell}_{k}.$$

ვაჩვენოთ, რომ S^{ℓ}_{ijk} სიდიდეები ადგენს ტენზორს. ვთქვათ, კოორდინატთა სისტემა შეიცვალა $(x) \to (x')$, გვექნება:

$$S^{\ell'}_{i'j'k'} = T_{i'j'} Q^{\ell'}_{k'} = a^{i}_{i'} a^{j}_{j'} a^{k}_{k'} a^{\ell'}_{\ell} T_{ij} Q^{\ell}_{k} = a^{i}_{i'} a^{j}_{j'} a^{k}_{k'} a^{\ell'}_{\ell} S^{\ell}_{ijk}.$$

მივიღეთ მეოთხე რანგის (1,3) ტიპის ტენზორი, რომელიც წარმოადგენს მოცემული ტენზორების ნამრავლს.

4. **ტ ე ნ ზ ო რ თ ა შ ე კ უ მ შ ვ ა.** განვიხილოთ $(p+q)$ რანგის (p, q) ტიპის A ტენზორი. ვიგულისხმოთ, რომ $p \neq 0$, $q \neq 0$; $A \in \overset{p}{\otimes} V \overset{q}{\otimes} V^*$. ამ ტენზორის $a^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ კომპონენტებიდან ამოვკრიბოთ ისინი, რომელთათვისაც $i_t = j_s$ და განვიხილოთ მათი ჯამი

$$a^{i_1,\dots,i_{t-1},k,i_{t+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{s-1},k,j_{s+1},\dots,j_q} = b^{i_1,\dots,i_{t-1},i_{t+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{s-1},j_{s+1},\dots,j_q} \quad \text{(აჯამვა k-ს მიხედვითაა)}$$

მიღებული სიდიდეები განსაზღვრავს $(p-1, q-1)$ ტიპის B ტენზორს, რომელზედაც ამბობენ, რომ იგი მიღებულია A ტენზო- რის შეკუმშვით i_t და j_s ინდექსების მიხედვით.

მაგალითად, აჵიღოთ $(1, 2)$ ტიპის T^i_{js} ტენზორი და მოვახდი- ნოთ მისი შეკუმშვა i და j ინდექსების მიხედვით. ეს ნიშნავს s-ი ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის უნდა განვიხილოთ ჯამი $T^i_{is} = Q_s$. მივიღებთ Q_s სიდიდეებს. ვაჩვენოთ, რომ მიღე- ბული სიდიდეები ჰქმნის ტენზორს. მართლაც, ვთქვათ, კოორდი- ნატთა სისტემა შეიცვლა $(x) \to (x')$, მაშინ

$$Q_{s'} = T^{i'}_{i's'} = a^{i'}_{\ell} a^{k}_{i'} a^{s}_{s'} T^{\ell}_{ks} = \delta^k_\ell a^s_{s'} T^\ell_{ks} = a^s_{s'} T^\ell_{\ell s} = a^s_{s'} Q_s\,.$$

მესამე რანგის $(1, 2)$ ტიპის ტენზორის შეკუმშვისას მივიღებთ პირველი რანგის $(0, 1)$ ტიპის ტენზორს. გამოდის, რომ შეკუმშვით ტენზორის რანგმა ორით დაიკლო. თუ $p = q$, თანდათანობით ტენ- ზორის შეკუმშვით მივიღებთ ინვარიანტს. მაგალითად, T^i_j ტენზო- რის შეკუმშვა i და j ინდექსების მიხედვით მოგვცემს ინვარიანტს:

$$T^{i'}_{i'} = a^{i'}_{i} a^{k}_{i'} T^{i}_{k} = \delta^k_i T^i_k = T^i_i\,,$$

იგი არ შეიცვლება კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას.

ა) **ტენზორის ინდექსების აწევ-დაწევა.** განვიხილოთ a_{ij} და b^s_k ტენზორები. ჯერ გავამრავლოთ, მივიღებთ მეოთხე რანგის $(1, 3)$ ტიპის ტენზორს $a_{ij} b^s_k$, შემდეგ კი შევკუმშოთ j და s ინდექსების მიხედვით:

$$a_{ij} b^j_k = b_{ik}\,,$$

მივიღებთ მეორე რანგის (0, 2) ტიპის ტენზორს. ამ ოპერაციას უწოდებენ a_{ij} ტენზორის საშუალებით b^j_k ტენზორის ზედა ინდექსის დაწევას.

ასევე, თუ მოცემულია a^{ij} და b^s_k ტენზორი, მათი გამრავლებით მივიღებთ მეოთხე რანგის (3, 1) ტიპის ტენზორს $a_{ij}b^s_k$, მიღებული ტენზორის j და k ინდექსების მიხედვით შეკუმშვა კი განსაზღვრავს მეორე რანგის (2, 0) ტიპის ტენზორს.

$$a^{ij}b^k_j = b^{ik}.$$

ამ ოპერაციას ეწოდება b^j_k ტენზორის ქვედა ინდექსის აწევა a^{ij} ტენზორის საშუალებოთ.

ბ) ავიღოთ მეორე რანგის (0, 2) ტიპის A_{ij} ტენზორი და ვექტორები u^k და v^ℓ. განვიხილოთ ნამრავლი

$$A_{ij}u^k v^\ell.$$

ეს მოგვცემს მეოთხე რანგის (2, 2) ტიპის ტენზორს. ამ ტენზორში მოვახდინოთ შეკუმშვა j და k ინდექსების მიხედვით, მივიღებთ მეორე რანგის (1, 1) ტიპის ტენზორს. ამ ტენზორის კიდევ ერთხელ შეკუმშვა მოგვცემს ინვარიანტს.

პრაქტიკაში, რაიმე სიდიდეთა ტენზორული ბუნების დასადგენად ხშირად იყენებენ წესს, რომელიც ერთგვარად შებრუნებულია ზევით განხილული წესისა. სახელდობრ: ვთქვათ, დასადგენია რაიმე B_{ij} სიდიდეთა ტენზორული ბუნება. ამისათვის იღებენ კონტრავარიანტულ ვექტორებს, ე. ი. (1, 0) ტიპის u^k და v^ℓ ტენზორებს და განიხილავენ ჯამს

$$B_{ij}u^i v^j.$$

თუ ეს ჯამი ინვარიანტია, მაშინ B_{ij} სიდიდეები ჰქმნიან ტენზორს. მართლაც, თუ ჯამი ინვარიანტია კოორდინატთა შეცვლის მიმართ, მაშინ

$$B_{i'j'}u^{i'}v^{j'} = B_{ij}u^iv^j.$$

რადგანაც u^i და v^j სიდიდეები ტენზორებს ქმნის, ამიტომ $u^{i'} = a_i^{i'}u^i$ და $v^{j'} = a_j^{j'}v^j$ და

$$B_{i'j'}a_i^{i'}a_j^{j'}u^iv^j = B_{ij}u^iv^j.$$

აქედან კი ვიღებთ, რომ $B_{ij} = a_i^{i'}a_j^{j'}B_{i'j'}$ ე. ი. B_{ij} ადგენს ტენზორს.

ასევე, $A_k^s u^k v_s$ ჯამი თუ ინვარიანტია, სადაც u^k – (1, 0) ტიპის ტენზორია, ხოლო v_s – (0, 1) ტიპისა, მაშინ A_k^s იქნება (1, 1) ტიპის ტენზორი.

ამ თვისების გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ δ_i^j სიდიდეთა ტენზორულ ბუნებას.

მართლაც, განვიხილოთ

$$\delta_j^i u^j v_i = u^i v_i,$$

სადაც u^i არის (1, 0) ტიპის ტენზორი, ხოლო v_s კი – (0, 1) ტიპის ტენზორი. მივიღეთ, რომ აღებული ჯამი ინვარიანტია, ამიტომ δ_j^i სიდიდეები ქმნიან (1, 1) ტიპის ტენზორს.

5. **ტენზორთა სიმეტრირება და ალტერნირება.** ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული რაიმე ინდექსების მიმართ, თუ ამ ინდექსთა ნებისმიერი გადასმით არ იცვლება ტენზორის კომპონენტები (საქმე ეხება ერთნაირი ტიპის ინდექსებს). ავილოთ ტენზორი, რომელსაც ორი კოვარიანტული ინდექსი მაინც აქვს, მაგალითად, $T_{ij\ldots}^{\ldots}$. ეს ტენზორი, ვიტყვით, რომ სიმეტრიულია i და j ინდექსების მიმართ, თუ ადგილი აქვს ტოლობას $T_{ij\ldots}^{\ldots} = T_{ji\ldots}^{\ldots}$.

ასევე, თუ ავიღებთ ტენზორს, რომელსაც ორი კონტრავარიანტული ინდექსი მაინც აქვს, მაგალითად $P^{st\cdot}_{-}$, მაშინ იგი იქნება სიმეტრიული s და t ინდექსების მიმართ, თუ $P^{st-}_{-} = P^{ts-}_{-}$.

ვაჩვენოთ, რომ ტენზორის კომპონენტებში ინდექსთა გადასმით მიღებული სიდიდეები კვლავ გვაძლევს ტენზორს.

მართლაც, განვიხილოთ გამოსახულება

$$A_{ij}u^i v^j.$$

აქ A_{ij} მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტული ტენზორია, u^i და v^j კი – კონტრავარიანტული ვექტორები. განხილული ჯამი ინვარიანტია (ტენზორთა ნამრავლი მოგვცემს მეოთხე რანგის (2, 2) ტიპის ტენზორს, ხოლო მისი ორჯერ შეკუმშვით კი მივიღებთ ინვარიანტს). შევცვალოთ ინდექსები $i \rightleftarrows j$, მივიღებთ

$$A_{ji}u^j v^i.$$

იგი კვლავ ინვარიანტია (ვინაიდან i და j მუნჯი ინდექსებია). ამიტომ A_{ji} სიდიდეებიც ჰქმნიან ტენზორს.

ტენზორი თუ სიმეტრიულია კოორდინატთა ერთ სისტემაში, სიმეტრიული იქნება ნებისმიერ სისტემაში.

მართლაც, ვთქვათ, A_{ij} სიმეტრიული ტენზორია. კოორდინატთა $(x) \to (x')$ გარდაქმნისას ტენზორის კომპონენტები ასე გარდაიქმნება:

$$A_{i'j'} = a^i_{i'} a^j_{j'} A_{ij} = a^i_{i'} a^j_{j'} A_{ji} = A_{j'i'}.$$

ე. ი. $$A_{i'j'} = A_{j'i'}.$$

ანტისიმეტრიული (ირიბსიმეტრიული) ეწოდება ტენზორს, რომელიც ნიშანს იცვლის მისი ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმით (აქაც ან მხოლოდ ზედა ან ქვედა ინდექსებზეა ლაპარაკი).

ავიღოთ (0, 2) ტიპის მეორე რანგის B_{ij} ტენზორი. იგი იქნება ანტისიმეტრიული i და j ინდექსების მიმართ, თუ

$$B_{ij} = -B_{ji}.$$

ანტისიმეტრიული ტენზორის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ რაიმე ინდექსთა ჯგუფის მიმართ ანტისიმეტრიული ტენზორის კომპონენტები არ შეიცვლება, თუ ინდექსთა გადანაცვლება ლუწია, და ნიშანს შეიცვლის, თუ გადანაცვლება კენტია. ანტისიმეტრიული ტენზორის კომპონენტები ორი ერთნაირი ინდექსით ნულს უდრის.

მართლაც,

$$B_{ii} = -B_{ii} \Rightarrow B_{ii} = 0.$$

ისევე, როგორც სიმეტრიულობა, ანტისიმეტრიულობა არ ცვლის სიდიდეთა ტენზორულ ბუნებას. ასევე, თუ ტენზორი ანტისიმეტრიულია კოორდინატთა ერთ სისტემაში, ანტისიმეტრიული იქნება კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში.

ტენზორის სიმეტრიულობა და ანტისიმეტრიულობა არ განიმარტება ზედა და ქვედა ინდექსების მიხედვით, რადგან ეს თვისება არ ინახება კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეში გადასვლისას.

რამდენი სხვადასხვა კომპონენტი ექნება, ვთქვათ, მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ B_{ij} ტენზორს? ინდექსები i და j იცვლება $\overline{1,n}$, მაგრამ

$$B_{ij} = -B_{ji}, \qquad B_{ii} = 0.$$

ამიტომ სხვადასხვა კომპონენტთა რაოდენობა იქნება იმდენი, რამდენიცაა ჯუფთება $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. როცა $n = 3$ კომპონენტების რიცხვი სამია. მესამე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის არსებითი კომპონენტების რიცხვი იქნება C_n^3 და ა. შ. k რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის არსებითი კომპონენტების რიცხვი იქნება ტოლი C_n^k.

აღსანიშნავია, რომ n-ზე მეტ რიცხვ ინდექსიანი ანტისიმეტრიული ტენზორი არ არსებობს, რადგან ასეთი ტენზორის ინდექსებში

შევა აუცილებლად ორი ერთნაირი ინდექსი, ასეთი კომპონენტები კი ნულია.

განვიხილოთ n რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი. მაგალითად $(0, n)$ ტიპის $a_{i_1\cdots i_n}$. რამდენადაც გვაქვს n ინდექსი, რომელიც ღებულობს განსხვავებულ მნიშვნელობებს $\overline{1,n}$, ამიტომ ისინი ერთმანეთისაგან მხოლოდ ინდექსთა დალაგებით იქნებიან განსხვავებული. ასეთ ტენზორს მხოლოდ ერთი არსებითი კომპონენტი ექნება, აღვნიშნოთ იგი a-თი. იყოს

$$a_{12\cdots n} = a\,.$$

მაშინ

$$a_{i_1\cdots i_n} = \pm a\,,$$

სადაც „+" აიღება, $i_1,\ldots,i_n$ ინდექსთა გადანაცვლება თუ ლუწია, ხოლო „–" კი კენტი გადანაცვლების შემთხვევაში. ადვილი საჩვენებელია, რომ სხვა კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლისას a მრავლდება გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტზე.

მართლაც, ვთქვათ, კოორდინატთა სისტემა შეიცვლება $(x) \to (x')$, მაშინ

$$a_{1'2'\cdots n'} = a^{i_1}_{1'} a^{i_2}_{2'} \cdots a^{i_n}_{n'} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} = a\left(\sum_{i_1\cdots i_n} \pm a^{i_1}_{1'} a^{i_2}_{2'} \cdots a^{i_n}_{n'}\right) = a \det\left\|a^{i}_{i'}\right\|.$$

როცა $n = 2$, გვექნება

$$a_{1'2'} = a^{i}_{1'} a^{j}_{2'} a_{ij} = a^{1}_{1'} a^{2}_{2'} a_{12} + a^{2}_{1'} a^{1}_{2'} a_{21} = a_{12}(a^{1}_{1'} a^{2}_{2'} + a^{2}_{1'} a^{1}_{2'}) =$$

$$= a \det\left\|a^{i}_{i'}\right\|, \quad (a_{12} = -a_{21} = a).$$

ჩვენ უკვე შეგვიძლია გავარკვიოთ რომელი ტენზორი სიმეტრიულია აღებული ინდექსების მიმართ და რომელი ანტისიმეტრიული გარკვეული ინდექსების მიმართ.

თუ ტენზორი სიმეტრიული არ არის აღებული რაიმე ინდექსთა მიმართ, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ტენზორი, რომელიც სიმეტრიული იქნება მოცემულ ინდექსთა მიმართ. ამ ოპერაციას სიმეტრირებას უწოდებენ. სახელდობრ, მეორე რანგის A_{ij} ტენზორის სიმეტრირება $A_{(ij)}$ აღინიშნება და ასე აიღება:

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}).$$

მესამე რანგის ტენზორის სიმეტრირება $A_{(ijk)}$ მოგვცემს:

$$A_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(A_{ijk} + A_{kij} + A_{jki} + A_{jik} + A_{ikj} + A_{kji}).$$

თუ გვინდა მესამე რანგის A_{ijk} ტენზორის სიმეტრირება მხოლოდ i და k ინდექსების მიხედვით, მაშინ

$$A_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(A_{ijk} + A_{kji}).$$

ინდექსი, რომელიც არ მონაწილეობს სიმეტრირებაში, გამოიყოფა ვერტიკალური ხაზებით. ამ შემთხვევაში $|j|$.

საზოგადოდ, (p, q) ტიპის ტენზორის სიმეტრირება პირველი k კოვარიანტული ინდექსის მიხედვით შემდეგნაირად ხდება: განიხილება გამოყოფილი k ინდექსის ყოველგვარი გადანაცვლება $(k!)$ და შემდეგ აიღება მათი საშუალო არითმეტიკული:

$$A^{i_1 \dots i_p}_{(j_1 \dots j_k) j_{k+1} \dots j_q} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} A^{i_1 \dots i_p}_{\sigma(j_1 \dots j_k) j_{k+1} \dots j_q},$$

სადაც $\sigma(j_1, j_2, \dots, j_k)$ აღნიშნავს $j_1, j_2, \dots, j_k$ ინდექსების გარკვეულ გადანაცვლებას, ხოლო ჯამი ვრცელდება $j_1, j_2, \dots j_k$ ინდექსების ყოველგვარ გადანაცვლებაზე.

ანალოგიურად ხდება ტენზორის სიმეტრირება ზედა (კონტრავარიანტული) ინდექსების მიხედვით. სახელდობრ:

$$B^{(i_1\dots i_p)i_{p+1}\dots i_q} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma} B^{\sigma(i_1\dots i_p)i_{p+1}\dots i_q}.$$

ალტერნირების ოპერაცია სიმეტრირების ანალოგიურად შემოდის და საშუალებას გვაძლევს მოცემული ტენზორის საშუალებით ავაგოთ ტენზორი, რომელიც ანტისიმეტრიული იქნება სასურველი ინდექსების მიმართ.

მაგალითად, განვიხილოთ $(0, 2)$ ტიპის A_{ij} ტენზორი. მისი ალტერნირება i და j ინდექსების მიხედვით აღინიშნება $A_{[ij]}$ და ასე აიღება:

$$A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}).$$

მესამე რანგის A_{ijk} ტენზორის ალტერნირება i, j, k ინდექსების მიხედვით კი იქნება:

$$A_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(A_{ijk} + A_{kij} + A_{jki} - A_{jik} - A_{ikj} - A_{kji}).$$

თუ გვინდა A_{ijk} ტენზორის ალტერნირება j და k ინდექსების მიხედვით, მაშინ ასე ვიქცევით:

$$A_{i[jk]} = \frac{1}{2}(A_{ijk} - A_{ikj}).$$

$s + m$ რანგის (s, m) ტიპის ტენზორის ალტერნირება პირველი k კოვარიანტული ინდექსის მიხედვით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$A^{j_1\dots j_s}_{[i_1\dots i_k]i_{k+1}\dots i_m} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)A^{j_1\dots j_s}_{\sigma(i_1\dots i_k)i_{k+1}\dots i_m},$$

სადაც ჯამი $i_1\dots i_k$ ინდექსების ყოველგვარ გადანაცვლებაზე ვრცელდება, ხოლო $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ იმისდა მიხედვით, გადანაცვლება ლუწია თუ კენტი. ანალოგიურად განიმარტება ტენზორის ალტერნირება ზედა ინდექსთა რაიმე ჯგუფის მიმართ:

$$B^{(j_1\dots j_\ell)j_{\ell+1}\dots j_p}_{i_1\dots i_q}=\frac{1}{\ell!}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)B^{\sigma(j_1\dots j_\ell)j_{\ell+1}\dots j_p}_{i_1\dots i_q}.$$

შევნიშნოთ, რომ სიმეტრიული ტენზორის ალტერნირება გვაძ ლევს ნულოვან ტენზორს. მართლაც:

$$A_{[ij]}=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ij})=0 \text{ (რადგან } A_{ij}=A_{ji}).$$

ასევე ანტისიმეტრიული ტენზორის სიმეტრირება გვაძლევს ნულო ვან ტენზორს.

მართლაც,

$$A_{(ij)}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ij})=0, \quad A_{ij}=-A_{ji}.$$

ანტისიმეტრიული ტენზორის ალტერნაცია ემთხვევა აღებულ ტენზორს. ვთქვათ გვაქვს A_{ij} ანტისიმეტრიული ტენზორი. მოვახ დინოთ მისი ალტერნირება, გვექნება

$$A_{[ij]}=\frac{1}{2}[A_{ij}-A_{ji}]=\frac{1}{2}[A_{ij}+A_{ij}]=A_{ij},$$

მივიღეთ

$$A_{[ij]}=A_{ij}, \text{ თუ } A_{ij}=-A_{ji}.$$

სიმეტრიული ტენზორის სიმეტრირებაც გვაძლევს აღებულ ტენზორს:

$$A_{(ij)}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ij})=A_{ij},$$

ე. ი. $A_{(ij)}=A_{ij}$ თუ $A_{ij}=A_{ji}$.

ხშირად, სიმეტრიული ტენზორის ამ თვისებას ილებენ განმარ ტებად. სახელდობრ, ტენზორს უწოდებენ სიმეტრიულს ინდექსთა რაიმე ჯგუფის მიმართ, თუ იგი არ იცვლება სიმეტრირებით აღე ბული ინდექსების მიმართ.

ასევე ტენზორს ეწოდება ანტისიმეტრიული გარკვეული ინდექსების მიმართ, თუ იგი არ იცვლება ალტერნირებით აღებული ინდექსების მიმართ.

(p, 0) ან (0, q) ტიპის ყველა ინდექსის მიმართ ანტისიმეტრიულ ტენზორს უწოდებენ პოლივექტორს.

(1, 1) ტიპის ტენზორს ეწოდება აფინორი. ვთქვათ, აფინორის კომპონენტებია a_i^j. ყოველ ვექტორს $x = x^i e_i \in V$ აფინორი უთანადებს ვექტორს $y = y^i e_i$, სადაც $y^i = a_j^i x^j$ ან მოკლედ, $y = ax$ ე. ი. ყოველი აფინორი წრფივ ოპერატორს (გარდაქმნას) განსაზღვრავს ვექტორულ სივრცეში. შებრუნებული დებულებაც სამართლიანია: ყოველი წრფივი გარდაქმნა გარკვეული აფინორის საშუალებით ხორციელდება.

ჩვენ ახლა ანტისიმეტრიულ ტენზორებზე შევჩერდებით. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ტენზორი, ვთქვათ

$$A_{ij} = A_{[ij]} + A_{(ji)},$$

წარმოიდგინება თავისი ანტისიმეტრიული და სიმეტრიული ნაწილით.

VI თავი

გარე ალგებრა

§40. წრფივ ფორმათა გარე ნამრავლი

განვიხილოთ V ვექტორული სივრცე K ველის მიმართ და ვიგულისხმოთ, რომ $\dim V = n$. იყოს V^* მოცემული V სივრცის შეუღლებული სივრცე. V^* სივრცის ელემენტები წრფივი ფორმებია, რომლებსაც კოვექტორებსაც უწოდებენ.

ξ და η წრფივი ფორმების, $\xi, \eta \in V^*$, გარე ნამრავლი ეწოდება ანტისიმეტრიულ ტენზორს, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi$$

და აღინიშნება $\xi \wedge \eta$, სადაც „$\wedge$" გარე გამრავლების ნიშანია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ გარე გამრავლებას შემდეგი თვისებები ახასიათებს:

$$1.\ (\xi + \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge \zeta + \eta \wedge \zeta, \qquad \forall \xi, \eta, \zeta \in V^*$$

$$2.\ \xi \wedge (\eta + \zeta) = \xi \wedge \eta + \xi \wedge \zeta, \qquad \forall \xi, \eta, \zeta \in V^*$$

$$3.\ (\lambda \xi) \wedge \eta = \xi \wedge (\lambda \eta), \qquad \forall \xi, \eta \in V^*, \quad \forall \lambda \in K$$

$$4.\ \xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi, \qquad \forall \xi, \eta \in V^*,$$

რაც შეეხება პირველ სამ თვისებას, თვით ტენზორული ნამრავლის დამახასიათებელია, ხოლო მეოთხე კი – გარე გამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს.

ცხადია, $\xi \wedge \eta \in V^* \otimes V^*$. ვთქვათ $\{e^i\}, 1 \le i \le n$ არის V^* სივრცის ბაზისი. მაშინ $\xi = \xi_i e^i$, $\eta = \eta_j e^j$, $(i, j = \overline{1,n})$, ამიტომ

$$\xi \wedge \eta = \xi_i \eta_j e^i \otimes e^j - \eta_j \xi_i e^j \otimes e^i =$$

$$= \xi_i \eta_j e^i \otimes e^j - \eta_i \xi_j e^i \otimes e^j = (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) e^i \otimes e^j = t_{ij} e^i \otimes e^j, \qquad (1)$$

სადაც

$$t_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix}$$

სიდიდეები, ξ და η კოვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{Vmatrix}$$

მეორე რიგის მინორებია.

$V^* \otimes V^*$ სივრცის ბაზისია $\{e^i \otimes e^j\}_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le n}$ ტენზორული ნამრავლები. გამოდის, რომ $\xi \wedge \eta \in V^* \otimes V^*$ დაიშალა აღებული სივრცის ბაზისის მიხედვით, ამიტომ t_{ij} სიდიდეებს ეწოდებათ $\xi \wedge \eta$ გარე ნამრავლის კოორდინატები ან კომპონენტები.

თუ გავითვალისწინებთ V^* სივრცის ბაზისი $\{e^i\}$ ვექტორების გარე ნამრავლის გამოსახულებას:

$$e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i,$$

გარე ნამრავლი $\xi \wedge \eta$ სხვანაირადაც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ. სახელდობრ:

$$\xi \wedge \eta = t_{ij} e^i \otimes e^j = \frac{1}{2}(t_{ij} e^i \otimes e^j + t_{ij} e^i \otimes e^j) =$$

$$= \frac{1}{2}(t_{ij} e^i \otimes e^j + t_{ji} e^j \otimes e^i) = \frac{1}{2}(t_{ij} e^i \otimes e^j - t_{ij} e^j \otimes e^i) =$$

$$= \frac{1}{2} t_{ij}(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i) = \frac{1}{2} t_{ij} e^i \wedge e^j. \qquad (2)$$

i და j ინდექსები იცვლება ერთიდან n-მდე. ამ მნიშვნელობებიდან ავიღოთ რომელიმე ორი, ვთქვათ, i_0 და j_0 და ვიგულისხმოთ, რომ $i_0 < j_0$.

(2) გამოსახულებაში შეგვხვდება როგორც

$$\frac{1}{2} t_{i_0 j_0} e^{i_0} \wedge e^{j_0},$$

ისე

$$\frac{1}{2} t_{j_0 i_0} e^{j_0} \wedge e^{i_0}.$$

მათი ჯამი მოგვცემს:

$$\frac{1}{2} t_{i_0 j_0} e^{i_0} \wedge e^{j_0} + \frac{1}{2} t_{j_0 i_0} e^{j_0} \wedge e^{i_0} =$$

$$= \frac{1}{2} t_{i_0 j_0} e^{i_0} \wedge e^{j_0} + \frac{1}{2}(-t_{i_0 j_0}) e^{j_0} \wedge e^{i_0} =$$

$$= \frac{1}{2} t_{i_0 j_0} e^{i_0} \wedge e^{j_0} + \frac{1}{2}(-t_{i_0 j_0})(-1) e^{j_0} \wedge e^{i_0} = t_{i_0 j_0} e^{i_0} \wedge e^{j_0}.$$

მიღებულის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\xi \wedge \eta = \sum_{i<j} t_{ij} e^i \wedge e^j. \tag{3}$$

როგორც ხედავთ, ამ ჯამში, განსხვავებით (2)-ისაგან, მსგავსი წევრები გაერთიანებულია.

ანალოგიურად შეგვიძლია განვმარტოთ $\xi, \eta, \zeta \in V^*$ წრფივი ფორმების გარე ნამრავლი. ეს იქნება ანტისიმეტრიული ტენზორი, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$\xi \wedge \eta \wedge \zeta = \xi \otimes \eta \otimes \zeta + \zeta \otimes \xi \otimes \eta + \eta \otimes \zeta \otimes \xi -$$

$$- \eta \otimes \xi \otimes \zeta - \xi \otimes \zeta \otimes \eta - \zeta \otimes \eta \otimes \xi.$$

ვთქვათ $\xi = \xi_i e^i$, $\eta = \eta_j e^j$, $\zeta = \zeta_k e^k$, მაშინ

$$
\begin{aligned}
\xi\wedge\eta\wedge\zeta_k &= \xi_i\eta_j\zeta_k e^i\otimes e^j\otimes e^k+\zeta_k\xi_i\eta_j e^k\otimes e^i\otimes e^j+\\
&+\eta_j\zeta_k\xi_i e^j\otimes e^k\otimes e^i-\eta_j\xi_i\zeta_k e^j\otimes e^i\otimes e^k-\\
&-\xi_i\zeta_k\eta_j e^i\otimes e^k\otimes e^j-\zeta_k\eta_j\xi_i e^k\otimes e^j\otimes e^i=\\
&=(\xi_i\eta_j\zeta_k+\zeta_i\xi_j\eta_k+\eta_i\zeta_j\xi_k-\eta_i\xi_j\zeta_k-\xi_i\zeta_j\eta_k-\\
&-\zeta_i\eta_j\xi_k)e^i\otimes e^j\otimes e^k=t_{ijk}e^i\otimes e^j\otimes e^k,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

სადაც

$$
t_{ijk}=\begin{vmatrix}\xi_i & \xi_j & \xi_k\\ \eta_i & \eta_j & \eta_k\\ \zeta_i & \zeta_j & \zeta_k\end{vmatrix}
$$

კოვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის

$$
\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n\end{Vmatrix}
$$

მესამე რიგის მინორებია.

გარე ნამრავლი $\xi\wedge\eta\wedge\zeta\in V^*\otimes V^*\otimes V^*$.

აქაც თუ გავითვალისწინებთ ბაზისი ვექტორების $e^i\wedge e^j\wedge e^k$ გარე ნამრავლებს, რომელიც ტოლია:

$$
\begin{aligned}
e^i\wedge e^j\wedge e^k &= e^i\otimes e^j\otimes e^k+e^k\otimes e^i\otimes e^j+e^j\otimes e^k\otimes e^i-\\
&-e^j\otimes e^i\otimes e^k-e^i\otimes e^k\otimes e^j-e^k\otimes e^j\otimes e^i,
\end{aligned}
$$

გვექნება

$$
\xi\wedge\eta\wedge\zeta=\frac{1}{3!}(t_{ijk}e^i\otimes e^j\otimes e^k+\cdots+t_{ijk}e^i\otimes e^j\otimes e^k)=
$$

$$=\frac{1}{3!}(t_{ijk}e^i\otimes e^j\otimes e^k+t_{kij}e^k\otimes e^i\otimes e^j+t_{jki}e^j\otimes e^k\otimes e^i+$$

$$+t_{jik}e^j\otimes e^i\otimes e^k+t_{kji}e^k\otimes e^j\otimes e^i+t_{ikj}e^i\otimes e^k\otimes e^j)=$$

$$=\frac{1}{3!}t_{ijk}(e^i\otimes e^j\otimes e^k+e^k\otimes e^i\otimes e^j+e^j\otimes e^k\otimes e^i- \tag{5}$$

$$-e^j\otimes e^i\otimes e^k-e^i\otimes e^k\otimes e^j-e^k\otimes e^i\otimes e^j)=\frac{1}{3!}t_{ijk}e^i\wedge e^j\wedge e^k.$$

(5) გამოსახულებაში მოვახდინოთ მსგავსი წევრების გაერთიანება. ავიღოთ 1, 2, …, n რიცხვებიდან, ვთქვათ i_0, j_0, k_0 ისე, რომ $i_0<j_0<k_0$ და ამოვიწეროთ ის წევრები, რომელთა ინდექსები ამ მნიშვნელობებს მიიღებს, გვექნება

$$\frac{1}{3!}(t_{i_0j_0k_0}e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+t_{k_0i_0j_0}e^{k_0}\otimes e^{i_0}\otimes e^{j_0}+t_{j_0k_0i_0}e^{j_0}\otimes e^{k_0}\otimes e^{i_0}+$$

$$+t_{j_0i_0k_0}e^{j_0}\otimes e^{i_0}\otimes e^{k_0}+t_{i_0k_0j_0}e^{i_0}\otimes e^{k_0}\otimes e^{j_0}+t_{k_0j_0i_0}e^{k_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{i_0})=$$

$$=\frac{1}{3!}(t_{i_0j_0k_0}e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+t_{i_0j_0k_0}e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+t_{i_0j_0k_0}e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+$$

$$+(-t_{i_0j_0k_0})(-1)e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+(-t_{i_0j_0k_0})(-1)e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}+$$

$$+(-t_{i_0j_0k_0})(-1)e^{i_0}\otimes e^{j_0}\otimes e^{k_0}=t_{i_0j_0k_0}e^{i_0}\wedge e^{j_0}\wedge e^{k_0}.$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\xi\wedge\eta\wedge\zeta=\sum_{i<j<k}t_{ijk}e^i\wedge e^j\wedge e^k. \tag{6}$$

$\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$ წრფივი ფორმების გარე ნამრავლი, მსგავსად წინა შემთხვევებისა, ეს იქნება p რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$\xi^1\wedge\xi^2\wedge\ldots\wedge\xi^p=p!\,\xi^{[1}\otimes\ldots\otimes\xi^{p]}. \tag{7}$$

იგი იქნება გარკვეული ელემენტი $\overset{p}{\otimes} V^{*}$ სივრცის და ამ სივრცის ბაზისის მიხედვით ასე დაიშლება

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = t_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}, \qquad (8)$$

სადაც

$$t_{i_1 \cdots i_p} = \begin{vmatrix} \xi^1_{i_1} & \xi^1_{i_2} & \cdots & \xi^1_{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^p_{i_1} & \xi^p_{i_2} & \cdots & \xi^p_{i_p} \end{vmatrix}, \quad (\xi^\alpha = \xi^\alpha_i e^i, \quad \alpha = \overline{1,s}, \quad i = \overline{1,n})$$

წარმოადგენენ

$$\begin{Vmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_2 & \cdots & \xi^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^p_1 & \xi^p_2 & \cdots & \xi^p_n \end{Vmatrix}$$

მატრიცის p რიგის მინორებს.

აქაც, თუ გავითვალისწინებთ ბაზისი ვექტორების გარე ნამრავლს $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} = p! e^{[i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \ldots \otimes e^{i_n]}$, მივიღებთ, რომ

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = \frac{1}{p!} t_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \qquad (9)$$

ხოლო მსგავსი წევრების გაერთიანება მოგვცემს:

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} t_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \qquad (10)$$

და საზოგადოდ, ყოველი p რანგის ანტისიმეტრიული კოვარიანტული A ტენზორი

$$A = a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \qquad (11)$$

შეიძლება ჩაიწეროს

$$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \qquad (12)$$

ან ასე:

$$A = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \qquad (13)$$

მართლაც, რამდენადაც ანტისიმეტრიული ტენზორის ალტერნაცია თვით აღებულ ტენზორს გვაძლევს, ამიტომ

$$A = a_{i_1 \cdots i_p} e^{[i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p]} = \frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p},$$

რაც ამტკიცებს (12) ფორმულას. (13) კი მიიღება (12)-ში მსგავსი წევრების გაერთიანებით.

განვიხილოთ გარე გამრავლების ერთი გეომეტრიული გამოყენება.

იმისათვის, რომ წრფივი ფორმები $\xi^1, \ldots, \xi^p$ იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი გარე ნამრავლი იყოს ნული.

$\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p = 0 \Leftrightarrow \xi^1, \ldots, \xi^p$ წრფივად დამოკიდებულია. მართლაც, შევადგინოთ ამ კოვექტორების კოორდინატებისაგან მატრიცი

$$\begin{Vmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^p & \cdots & \xi_n^p \end{Vmatrix}.$$

როგორც ვიცით, ამ მატრიცის p რიგის მინორები $\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \ldots \wedge \xi^p$ ტენზორის კომპონენტებია. თუ კოვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ამ მატრიცის რანგი ნაკლები იქნება p-ზე. ეს კი ნიშნავს, რომ გარე ნამრავლის კოორდინატები, რომლებიც p რანგის მინორებია, $t_{i_1 \cdots i_p} = 0$, უდრის ნულს და მაშ, ნულოვან ტენზორს განსაზღვრავს.

ახლა პირიქით, ვთქვათ $\xi^1\wedge\ldots\wedge\xi^p=0$. ეს ნიშნავს, რომ ამ ნამრავლით განსაზღვრული ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულია, $t_{i_1\cdots i_p}=0$. ესენი კი p რიგის მინორებია მატრიცის, რომელიც შედგენილია მოცემული კოვექტორების კოორდინატებისაგან. გამოდის, რომ ასეთი მატრიცის რანგი p-ზე ნაკლებია. რაც კოვექტორების წრფივად დამოკიდებულების მაჩვენებელია.

აქედან ასეთი **შედეგი** გამომდინარეობს:

$$\xi^1\wedge\ldots\wedge\xi^p\neq 0,$$

$\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^p$ კოვექტორთა გარე ნამრავლის ნულისაგან განსხვავებულობა იქნება მათი წრფივად დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი ნიშანი.

§41. V^* შეუღლებული სივრცის გარე P ხარისხი $\wedge^p V^*$, გრასმანის ალგებრა

განვიხილოთ p რანგის კოვარიანტულ ანტისიმეტრიულ ტენზორთა (p ვექტორთა) სიმრავლე $\overset{p}{\otimes}V^*$ ვექტორული სივრციდან და აღვნიშნოთ იგი $\wedge^p V^*$. ვაჩვენოთ, რომ $\wedge^p V^*$ წარმოადგენს $\overset{p}{\otimes}V^*$ ვექტორული სივრცის ქვესივრცეს.

თუ A და $B\in\wedge^p V^*$ p რანგის კოვარიანტული ანტისიმეტრიული ტენზორებია, მაშინ ტენზორთა შეკრების წესის თანახმად $A+B$ ჯამიც იგივე რანგის კოვარიანტული ანტისიმეტრიული ტენზორი იქნება და მაშ, მიეკუთვნება $\wedge^p V^*$ სიმრავლეს.

განვიხილოთ αA, სადაც $A\in\wedge^p V^*$, ხოლო $\alpha\in K$. ტენზორის ანტისიმეტრიულობა არ დაირღვევა α სკალარზე გამრავლების შედეგად: ყოველი კომპონენტი გამრავლდება ამ სკალარზე და ნებისმიერი ორი ინდექსის ადგილების შეცვლა ყოველ კომპონენ-

ტში გამოიწვევს ნიშნის შეცვლას αA ნამრავლში, αA იქნება ანტისიმეტრიული ტენზორი, ამიტომ $\alpha A \in \wedge^p V^*$ სიმრავლეს.

გამოდის, რომ თუ A და $B \in \wedge^p V^*$, მაშინ $A + B \in \wedge^p V^*$ და $\alpha A \in \wedge^p V^*$, სადაც $A \in \wedge^p V^*$, $\alpha \in K$. ე. ი. ერთი და იგივე რანგის კოვარიანტულ ანტისიმეტრიულ ტენზორთა სიმრავლე წარმოადგენს $\overset{p}{\otimes} V^*$ სივრცის ქვესივრცეს. მიღებულ ვექტორულ $\wedge^p V^*$ სივრცეს ეწოდება V^* შეუღლებული სივრცის გარე p ხარისხი, ხოლო მის ელემენტებს – p ხარისხის გარე ფორმები.

გავარკვიოთ მიღებული სივრცის განზომილება.

როგორც ვიცით, $\overset{p}{\otimes} V^*$ ვექტორული სივრცის ბაზისს წარმოადგენს ნამრავლები

$$\{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}\}, \text{ სადაც } i_1, \ldots, i_p = \overline{1, n}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\wedge^p V^*$ სივრცის ბაზისი იქნება

$$\{e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}\}, \; i_1, i_2, \ldots, i_p = \overline{1, n}; \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_p.$$

როგორც ვნახეთ, ყოველი ანტისიმეტრიული ტენზორი წარმოიდგინება $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ ნამრავლების საშუალებით:

$$A = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \tag{*}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}\}$ ნამრავლები წრფივად დამოუკიდებელია.

ვთქვათ, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} = 0, \tag{**}$$

სადაც $a_{i_1 \cdots i_p}$ რაღაც სკალარებია და ამასთან ისეთი, რომ $i_1 < \cdots < i_p$.

შევნიშნოთ, რომ (*) ტოლობიდან შეგვიძლია აღვადგინოთ ჯამი

$$a_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\ldots\otimes e^{i_p},$$

სადაც $i_1,\ldots,i_p$ ინდექსები ნებისმიერად იცვლება $\overline{1,n}$. (**) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$a_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}=0.$$

$a_{i_1\cdots i_p}$ ინდექსებში არ ურევია ორი ერთნაირი ინდექსი, მათი ცვლით ჩვენ ჯამში მივიღებთ $\overset{p}{\otimes}V^*$ სივრცის ბაზისი ვექტორების წრფივ კომბინაციებს $\pm a_{i_1\cdots i_p}$ კოეფიციენტებით, ამიტომ ეს ჯამი ნულოვან ვექტორს (ტენზორს) განსაზღვრავს მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა

$$a_{i_1\cdots i_p}=0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\{e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}\}\quad(i_1<i_2<\cdots<i_p)$$

გარე ნამრავლები წრფივად დამოუკიდებელია.

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ

$$\{e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}\}\ \ i_1<i_2<\cdots<i_p\quad i_1,i_2,\ldots,i_p=\overline{1,n};$$

ქმნის $\wedge^p V^*$ ვექტორული სივრცის ბაზისს. რადგან მათი რიცხვია C_n^p, ამიტომ

$$\dim\wedge^p V^*=C_n^p.$$

თუ $p=n$, ე. ი. თუ გვაქვს V^* სივრცის გარე n ხარისხი $\wedge^n V^*$, მისი განზომილება ტოლია C_n^n. ე. ი. $\dim\wedge^n V^*=1$, მისი

ბაზისი კი იქნება გარე ნამრავლი $e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n$. თუ $p > n$, მაშინ

$$\wedge^p V^* = \{0\}.$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ V^* სივრცის ნებისმიერი k-ური გარე ხარისხი $\wedge^k V^*$, სადაც $k \le n$. გვექნება C_n^k განზომილების ვექტორული სივრცე, რომლის ელემენტებია k ვექტორები ან k ხარისხის გარე ფორმები.

ვთქვათ, $A \in \wedge^p V^*$ p ვექტორია (p რანგის კოვარიანტული ანტისიმეტრიული ტენზორი).

$$A = \frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$$

და $B \in \overset{q}{\wedge} V^*$ – q ვექტორი

$$B = \frac{1}{q!} b_{j_1 \cdots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q},$$

სადაც $p + q \le n = \dim V$.

A და B ვექტორების გარე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $(p+q)$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$A \wedge B = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} \qquad (1)$$

ეს განმარტება გავრცელდება იმ შემთხვევაშიც, როცა $p = 0$ ან $q = 0$, თუ შევთანხმდებით, რომ

$$\alpha \wedge B = \alpha B \text{ და } A \wedge \alpha = \alpha A, \text{ სადაც } \alpha \in K.$$

როცა $p = 1$ და $q = 1$, მივიღებთ კოვექტორების ნამრავლს, რომელსაც **ბივექტორი** ეწოდება. A, B პოლივექტორების გარე ნამრავლების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

1. $(\alpha A) \wedge B = A \wedge (\alpha B) = \alpha(A \wedge B),$

$$\forall A \in \wedge^p V^*, \forall B \in \wedge^q V^*, \forall \alpha \in K$$

2. $A \wedge (B_1 + B_2) = A \wedge B_1 + A \wedge B_2, \quad \forall A \in \wedge^p V^*, \forall B_1, B_2 \in \wedge^q V^*$

3. $(A_1 + A_2) \wedge B = A_1 \wedge B + A_2 \wedge B, \quad \forall A_1, A_2 \in \wedge^p V^*, \forall B \in \wedge^q V^*$

4. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C),$

$$\forall A \in \wedge^p V^*, \forall B \in \wedge^q V^*, \forall C \in \wedge^r V^*$$

5. $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A, \quad \forall A \in \wedge^p V^*, \forall B \in \wedge^q V^*.$

ვაჩვენოთ მეხუთე ტოლობის სამართლიანობა.

განვიხილოთ საბაზისო ვექტორების გარე ნამრავლი

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} = (-1)^p e^{j_1} \wedge e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_2} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} =$$

$$= \cdots = (-1)^{pq} e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} \wedge e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}.$$

უკანასკნელის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$A \wedge B = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} =$$

$$= (-1)^{pq} \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} a_{j_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} \wedge e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} =$$

$$= (-1)^{pq} \left(\frac{1}{q!} b_{j_1 \cdots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} \right) \wedge \left(\frac{1}{p!} a_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \right) =$$

$$= (-1)^{pq} B \wedge A.$$

ადვილად შემოწმდება დანარჩენი თვისებებიც.

პირდაპირი ჯამი $\wedge^p V^*$ ვექტორული სივრცეებისა, სადაც $p = 0, 1, \ldots, n$, აღვნიშნოთ $\wedge V^*$. ე. ი. განიხილება $(n+1)$ ვექტორული სივრცის $\wedge^0 V^* = K, \wedge^1 V^*, \ldots, \wedge^n V^*$ პირდაპირი ჯამი. ყო-

ველი ელემენტი $z \in \wedge V^*$ ამ ჯამისა ცალსახად წარმოიდგინება, როგორც

$$z=\sum_{p=0}^{n} z_p\text{, სადაც } z_p \in \wedge^p V^*.$$

რადგან $\wedge V^*$ წარმოადგენს $\wedge^p V^*$ სივრცის პირდაპირ ჯამს, ამიტომ

$$\dim \wedge V^* = \sum_{p=0}^{n} \dim \overset{p}{\wedge} V^* = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n.$$

ე. ი. $\wedge V^*$ არის 2^n განზომილების ვექტორული სივრცე.

თუ $z=\sum_{p=0}^{n} z_p$ და $z'=\sum_{q=0}^{n} z_q$ ამ $\wedge V^*$ სივრცის ელემენტებია, მაშინ მივიღოთ

$$z \wedge z' = \sum_{p,q} (z_p \wedge z_q).$$

ასეთნაირად განსაზღვრული გამრავლების ოპერაცია ზევით აღებულ ხუთ პირობას დააკმაყოფილებს.

როგორც ცნობილია, თუ ვექტორულ სივრცეში, K ველის მიმართ, განსაზღვრულია გამრავლების ოპერაცია, რომელიც ასოციაციურობის, ორმხრივ დისტრიბუციულობის, ნამრავლში სკალარული მამრავლის გადასმის გარკვეული წესით მოიცემა, მაშინ ის განსაზღვრავს ალგებრას K ველის მიმართ.

მიღებულ ალგებრას ეწოდება V^* ვექტორული სივრცის **გარე ალგებრა**, ან **გრასმანის ალგებრა**.

V^* სივრცის ყოველი ელემენტი წრფივი ფორმაა V სივრცეზე განსაზღვრული.

$\wedge^p V^*$ სივრცის ყოველი ელემენტი (კოვარიანტული p ვექტორი) კი p ხარისხის გარე ფორმაა V ვექტორულ სივრცეზე.

გარე გამრავლებაზე განვიხილოთ **მაგალითი:**
მოცემულია

$$\Omega_2 = 3e^1 \wedge e^2 - 2e^2 \wedge e^3,$$

$$\Omega_3 = e^1 \wedge e^5 \wedge e^4 - 3e^2 \wedge e^4 \wedge e^3 + 2e^3 \wedge e^4 \wedge e^5$$

ვიპოვოთ

$$\Omega_2 \wedge \Omega_3.$$

Ω_2 გადავამრავლოთ Ω_3-ზე როგორც მრავალწევრი მრავალწევრზე გარე გამრავლების წესების დაცვით. გვექნება:

$$\Omega_2 \wedge \Omega_3 = 6e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 - 2e^2 \wedge e^3 \wedge e^1 \wedge e^5 \wedge e^4 =$$
$$= 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5.$$

§42. კარტანის ლემა

გარე ფორმათა თეორიაში დიდი გამოყენება აქვს დებულებას, რომელიც კარტანის ლემით არის ცნობილი.

ვთქვათ, φ^k, $(k = \overline{1,r})$ r წრფივად დამოუკიდებელი წრფივი ფორმაა, ხოლო ψ_k – r წრფივი ფორმა ისეთი, რომ

$$\psi_k \wedge \varphi^k = 0 . \tag{1}$$

კარტანის ლემა: $\psi_k \wedge \varphi^k = 0$ $(k = \overline{1,r})$ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ψ_k ფორმები წარმოადგენენ φ^k წრფივი ფორმების წრფივ კომბინაციებს სიმეტრიული კოეფიციენტებით. ე. ი. როცა

$$\psi_\ell = c_{\ell k}\varphi^k \text{, სადაც } c_{\ell k} = c_{k\ell} \; (\ell, k = \overline{1,r}). \tag{2}$$

დამტკიცება: რადგანაც φ^k $(k = \overline{1,r})$, წრფივად დამოუკიდებელი წრფივი ფორმებია, მივიღოთ ისინი საბაზო ვექტორებად

და შევავსოთ $\varphi^{k+1},\ldots,\varphi^{n}$ ფორმებით V^* სივრცის ბაზისამდის. მაშ სივრცის ბაზისად ვიღებთ $(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^r,\varphi^{r+1},\ldots,\varphi^n)$ ფორმებს. ნებისმიერი $\psi_\ell(\ell=\overline{1,r})$ წრფივი ფორმა წარმოიდგინება ამ ბაზისის მიხედვით

$$\psi_\ell = c_{\ell\alpha}\varphi^\alpha, \quad (\ell=\overline{1,r}, \quad \alpha=\overline{1,n}). \tag{2}$$

ვთქვათ, ადგილი აქვს (1) ტოლობას. (2) გამოსახულება შევიტანოთ (1)-ში, გვექნება:

$$c_{k\alpha}\varphi^\alpha \wedge \varphi^k = 0.$$

ეს ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$c_{k\ell}\varphi^\ell \wedge \varphi^k + c_{ka}\varphi^a \wedge \varphi^k = 0, \text{ სადაც } \quad a=\overline{r+1,n}.$$

მსგავსი წევრების გაერთიანებით მივიღებთ

$$\sum_{\ell<k}(c_{k\ell}-c_{\ell k})\varphi^\ell \wedge \varphi^k - c_{ka}\varphi^k \wedge \varphi^a = 0.$$

გარე კვადრატული ფორმა, რომელიც $\wedge^2 V^*$ ვექტორული სივრცის ელემენტია, დაიშალა ამ სივრცის $\varphi^\alpha \wedge \varphi^\beta$ $(\alpha<\beta)$ ბაზისის მიხედვით. რადგან იგი ნულოვანი ფორმაა, ამიტომ

$$c_{k\ell}-c_{\ell k}=0, \quad c_{ka}=0.$$

გამოდის, რომ ყოველი ψ_ℓ $(\ell=\overline{1,r})$ ასე წარმოიდგინება

$$\psi_\ell = c_{\ell k}\varphi^k, \quad c_{k\ell}=c_{\ell k}.$$

ახლა პირიქით, ვთქვათ ადგილი აქვს (2). განვიხილოთ ჯამი

$$\psi_k \wedge \varphi^k = c_{k\ell}\varphi^\ell \wedge \varphi^k = \sum_{\ell<k}(c_{k\ell}-c_{\ell k})\varphi^\ell \wedge \varphi^k = 0,$$

რადგან $c_{k\ell}=c_{\ell k}$.

ამგვარად, საბოლოოდ დამტკიცდა კარტანის ლემა.

VII თავი

გრასმანის დიფერენციალური ალგებრა

§43. გარე დიფერენციალური ფორმები

ჩვენ ავაგეთ გრასმანის ალგებრა ნებისმიერი K ველის მიმართ. ეს 2^n განზომილების ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ, რომელშიც განსაზღვრული გარე გამრავლების ოპერაცია აკმაყოფილებს ასოციაციურობას, ორმხრივ დისტრიბუციულობას და ნამრავლში სკალარული მამრავლის გადატანის გარკვეულ წესს.

ახლა, K ველის ნაცვლად ავიღოთ R^n სივრცის რაიმე G არეზე განსაზღვრული n ნამდვილ $x^i (i=\overline{1,n})$ ცვლადზე დამოკიდებულ C^k $(k \geq 1)$ კლასის ფუნქციათა რგოლი. ე. ი. ისეთ ფუნქციებს განვიხილავთ, რომლებიც უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი k რიგამდე ჩათვლით. სივრცის ბაზისად $\{e^i\}$ $i=\overline{1,n}$ ნაცვლად ავიღებთ $\{dx^i\}$ $(i=\overline{1,n})$ და გარე ნამრავლებს

$$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}\}; \quad (i_1, \ldots, i_p = \overline{1,n})$$

შევცვლით ნამრავლებით

$$\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\}.$$

ასეთი შერჩევა გამართლებულია იმით, რომ $\{dx^i\}$ სიდიდეები ისეთნაირადვე გარდაიქმნება, როგორც $\{e^i\}$ სიდიდეები. მართლაც, როგორც უკვე გვქონდა

$$e^{i'} = a_i^{i'} e^i.$$

რაც შეეხება dx^i, როცა $(x) \to (x')$, მაშინ

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} dx^{i} .$$

როგორც ვხედავთ, $\{dx^i\}$ სიდიდეების გარდაქმნის წესი იგივეა, რაც $\{e^i\}$ სიდიდეებისა.

ასეთნაირად მიღებულ ალგებრას ეწოდება გრასმანის დიფერენციალური ალგებრა. წრფივ დიფერენციალურ ფორმებს, რომელთაც აქვთ სახე

$$\omega = a_i(x^1, \ldots, x^n) dx^i ,$$

გრასმანის დიფერენციალურ ალგებრაში უწოდებენ **პფაფის ფორმებს**, ხოლო როცა $p \geq 1$, p ხარისხის გარე დიფერენციალურ ფორმებს, $\Omega = a_{i_1 \cdots i_p}(x^1, \ldots, x^n) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, p – ფორმებს. ნული ხარისხის დიფერენციალური ფორმა სკალარული ფუნქციაა.

გრასმანის ალგებრის ყველა ძირითადი ოპერაცია დარჩება გრასმანის დიფერენციალურ ალგებრის შემთხვევაში, მაგრამ აქ დამატებით შემოდის გარე დიფერენციალის ცნება.

§44. გარე დიფერენციალი და მისი თვისებები

ვთქვათ

$$\omega = a_{i_1 \cdots i_p}(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, (i_1, i_2, \ldots, i_p = \overline{1,n})$$

p ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმაა. ამ ფორმის გარე დიფერენციალი ეწოდება $p+1$ ხარისხის გარე დიფერენციალურ ფორმას, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$d\omega = da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, (i_1, \ldots, i_p = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

(ზოგჯერ გარე დიფერენციალის ნიშნად იღებენ D-ს).

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

1. ფუნქციის სრული დიფერენციალის გარე დიფერენციალი ნულია.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია $f(x^1, \ldots, x^n)$-ის სრული დიფერენციალი:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad (i = \overline{1,n})$$

და ავიღოთ მისი გარე დიფერენციალი

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} dx^k \wedge dx^i =$$

$$= \sum_{k<i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}\right) dx^k \wedge dx^i = 0,$$

რადგან

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}.$$

2. ვთქვათ ω_1 და ω_2 არის p ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმები.

ერთი და იგივე ხარისხის გარე დიფერენციალურ ფორმის ჯამის გარე დიფერენციალი შესაკრებთა გარე დიფერენციალების ჯამის ტოლია:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

მართლაც, ვთქვათ

$$\omega_1 = a_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = b_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

მაშინ

$$\omega_1+\omega_2=(a_{i_1\cdots i_p}+b_{i_1\cdots i_p})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$

ხოლო

$$d(\omega_1+\omega_2)=d(a_{i_1\cdots i_p}+b_{i_1\cdots i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}=$$
$$=da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}+db_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}=$$
$$=d\omega_1+d\omega_2.$$

3. ვთქვათ ω არის p ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმა, ხოლო θ – q ხარსისხისა, მაშინ

$$d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge d\theta.$$

მართლაც, პირობით

$$\omega=a_{i_1\cdots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$
$$\theta=b_{j_1\cdots j_q}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q},$$

მათი გარე ნამრავლი მოგვცემს:

$$\omega\wedge\theta=a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q}\;dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}.$$

გარე დიფერენციალის აღების წესის თანახმად გვექნება:

$$d(\omega\wedge\theta)=d(a_{i_1\cdots i_p}b_{j_1\cdots j_q})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}=$$
$$=(b_{j_1\cdots j_q}da_{i_1\cdots i_p}+a_{i_1\cdots i_p}db_{j_1\cdots j_q})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}=$$
$$=b_{j_1\cdots j_q}da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}+$$
$$+a_{i_1\cdots i_p}db_{j_1\cdots j_q}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}=$$
$$=(da_{i_1\cdots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge b_{j_1\cdots j_q}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}+$$

$$+(-1)^p(a_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\wedge db_{j_1\cdots j_q}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q})=$$

$$=d\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge d\theta.$$

4. თუ f ნული ხარისხის ფორმაა და ω – q ხარისხის გარე დიფერენციალური, მაშინ

$$d(f\omega)=df\wedge\omega+fd\omega,\quad (p=0)$$

და

$$d(c\omega)=cd\omega,\quad c=\text{const}.$$

ცხადია!

5. თუ გარე დიფერენციალურ ფორმას აქვს სახე:

$$\omega=df^1\wedge\cdots\wedge df^p,$$

სადაც f^i ნებისმიერი ფუნქციებია, მაშინ:

$$d\omega=0.$$

მართლაც, ω გარე ფორმა ასე წარმოვიდგინოთ

$$\omega=(df^1\wedge\cdots\wedge df^{p-1})\wedge df^p.$$

გარე ფორმათა ნამრავლის გარე დიფერენციალი მოგვცემს

$$d\omega=d(df^1\wedge\cdots\wedge df^{p-1})\wedge df^p=$$
$$=d(df^1\wedge\cdots\wedge df^{p-2})\wedge df^{p-1}\wedge df^p=\cdots=d(df^1)\wedge df^2\wedge\cdots\wedge df^p=0,$$

რადგან $d(df^1)=0$.

6. **პუანკარეს თეორემა:** გარე დიფერენციალის გარე დიფერენციალი ნულია.

მართლაც, თუ

$$\omega=a_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

p ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმაა, მაშინ ამ ფორმის გარე დიფერენციალია

$$d\omega = da_{i_1\cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$

ხოლო კვლავ გარე დიფერენციალი

$$d(d\omega) = 0$$

2 და 5 თვისების ძალით.

პუანკარეს თეორემას ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს თუნდაც იმიტომ, რომ გარე დიფერენციალური აღრიცხვა დადის მხოლოდ პირველ გარე დიფერენციალზე.

გარე დიფერენციალურ ფორმას ეწოდება ჩაკეტილი, თუ მისი გარე დიფერენციალი უდრის ნულს ($d\omega = 0$).

ω ფორმას ეწოდება ზუსტი, თუ არსებობს ისეთი θ ფორმა, რომ

$$\omega = d\theta,$$

ω არის ამ ფორმის გარე დიფერენციალი.

პუანკარეს თეორემით ყოველი ზუსტი ფორმა არის ჩაკეტილი.

განვიხილოთ **მაგალითი:** ავიღოთ წრფივი ფორმა

$$\Omega = 3xe^y dx - y\sin x dy + y^2 z dz$$

და ვიპოვოთ მისი გარე დიფერენციალი.

გვექნება

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(3xe^y)\wedge dx - d(y\sin x)\wedge dy + d(y^2 z)\wedge dz = \\ &= 3xe^y dy\wedge dx - y\cos x dx\wedge dy + 2yzdy\wedge dz = \\ &= (3xe^y + y\cos x)dy\wedge dx + 2yzdy\wedge dz. \end{aligned}$$

§45. სტოქსის ზოგადი ფორმულა და მისი კერძო შემთხვევები

გარე დიფერენციალური აღრიცხვა გამოიყენება მათემატიკური ანალიზის ბევრ საკითხში, განსაკუთრებით კი მოსახერხებელია ინტეგრალური აღრიცხვისათვის.

მოვიგონოთ ანალიზიდან ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a) \quad \left(\text{ან} \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)\right),$$

რომელიც მონაკვეთზე აღებულ ინტეგრალს ფუნქციის დიფერენციალიდან უკავშირებს ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს მონაკვეთის საზღვარზე.

ცნობილია აგრეთვე გრინის, სტოქსის, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულები, რომლებიც ინტეგრალს აღებულს ზედაპირზე, უკავშირებენ ამ ზედაპირის საზღვარზე აღებულ ინტეგრალს. ყველა ჩამოთვლილი ფორმულა კერძო სახეა სტოქსის ზოგადი ფორმულისა, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$\int_{F(D)} \omega = \int_D d\omega, \tag{*}$$

სადაც ω არის p ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმა, D – $(p+1)$ განზომილების არე, ხოლო $F(D)$ მისი საზღვარი.

ჩვენ აქ არ დავამტკიცებთ ამ თეორემას და არც გამოვარკვევთ იმ პირობებს, რომელიც ედება D არეს და მის საზღვარს, და არც ორიენტაციის საკითხზე ვიმსჯელებთ. განვიხილავთ ამ ფორმულის კერძო შემთხვევებს ორ და სამგანზომილებიან სივრცეში. ეს იქნება გარკვეული ვარჯიში გარე დიფერენცირებაში.

1. ევკლიდეს სიბრტყეზე განვიხილოთ წრფივი ფორმა

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

და ავიღოთ მისი გარე დიფერენციალი. გვექნება:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

თუ D რაიმე არეა შემოსაზღვრული F(D) ჩაკეტილი წირით, მაშინ სტოქსის ზოგადი ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\int_{F(D)} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \qquad (1)$$

ეს ანალიზში კარგად ცნობილი გრინის ფორმულაა.

2. ახლა სივრცეში განვიხილოთ წრფივი ფორმა:

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

ვიპოვოთ ამ დიფერენციალური ფორმის გარე დიფერენციალი. გვექნება:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$

თუ D არის ზედაპირზე აღებული რაიმე არე, ხოლო F(D) მისი საზღვარი, სტოქსის ზოგადი ფორმულიდან გვექნება, რომ

$$\int\limits_{F(D)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

მივიღეთ სტოქსის ცნობილი ფორმულა ზედაპირული ინტეგრალებისათვის.

3. ახლა ვთქვათ, ω მეორე ხარისხის გარე დიფერენციალური ფორმაა

$$\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy.$$

ავიღოთ მისი გარე დიფერენციალი. გვექნება:

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

თუ R^3-ში ავიღებთ რაიმე D არეს შემოსაზღვრულს ჩაკეტილი F(D) ზედაპირით, გვექნება:

$$\iint\limits_{F(D)} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

ეს კი გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულაა.

დაბოლოს, წრფეზე (*) ფორმულა დადის ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულაზე.

ველის თეორიაში f(x,y,z) ფუნქციას უკავშირებენ ვექტორულ ველს, რომელსაც ამ ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება. მას, როგორც ცნობილია, დეკარტეს კოორდინატებში აქვს სახე

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

ვექტორული ველისათვის $X = (P, Q, R)$ განისაზღვრება ვექტორული ველი

$$\mathrm{rot} X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

და ფუნქცია X – ველის დივერგენცია:

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} .$$

მრუდწირულ ინტეგრალს

$$\int_\gamma P dx + Q dy + R dz$$

უწოდებენ $X = (P, Q, R)$ ველის მუშაობას γ გზის გასწვრივ, ხოლო თუ ინტეგრების გზა ჩაკეტილია – ამ ველის ცირკულაციას.

ზედაპირულ ინტეგრალს

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

ეწოდება $X = (P, Q, R)$ ვექტორული ველის ნაკადი S ზედაპირში.

ნიუტონ-ლაიბნიცის, სტოქსის და ოსტროგრადსკის ფორმულები მოკლედ ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს.

ფუნქციის გრადიენტის მუშაობა რაიმე გზაზე ტოლია გზის ბოლოსა და თავში აღებული ფუნქციების მნიშვნელობათა სხვაობის. X ვექტორის ველის როტორის ნაკადი D ზედაპირში ტოლია X ვექტორული ველის ცირკულაციისა ამ ზედაპირის გასწვრივ. ვექტორული ველის ნაკადი D არის საზღვარზე ტოლია D არეზე აღებული ინტეგრალისა $\mathrm{div} X$-დან.

VIII თავი

პფაფის სისტემა

§46. პფაფის სრულად ინტეგრებადი სისტემა, ფრობენიუსის თეორემა

ვთქვათ

$$\omega^{\alpha} = a_i^{\alpha} dx^i, \quad i = \overline{1,n};\ \alpha = \overline{1,s};\ s < n$$

წრფივი დიფერენციალური ფორმებია განსაზღვრული რაიმე G არეზე. ვიგულისხმოთ, რომ ისინი წრფივად დამოუკიდებელია. ე. ი.

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^s \neq 0 \quad (\operatorname{rang}\left\| a_i^{\alpha} \right\| = s).$$

განტოლებათა სისტემას

$$\omega^{\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1,s},$$

უწოდებენ პფაფის განტოლებათა სისტემას, ან მოკლედ **პფაფის სისტემას**.

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

პფაფის სისტემის კერძო სახეა: $s = 1, n = 2$.

ამბობენ, რომ m განზომილების ზედაპირი

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m), \quad \operatorname{rang}\left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \right\| = m \qquad (2)$$

წარმოადგენს (1) სისტემის ინტეგრალურ მრავალნაირობას, თუ (1) იქცევა იგივეობად, როცა მასში შევიტანთ x^i ნაცვლად (2), ხოლო dx^i ნაცვლად კი – $\frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k$-ს.

მაგალითად

$$x^3 dx^1 + x^3 dx^2 - dx^3 = 0 \qquad (*)$$

განტოლებისათვის

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = ce^{u_1+u_2}, \text{ სადაც } c = \text{const}.$$

წარმოადგენს ინტეგრალურ მრავალნაირობას.

მართლაც,

$$dx^1 = du^1, \quad dx^2 = du^2, \quad dx^3 = ce^{u_1+u_2} d(u_1 + u_2).$$

მათი შეტანით (*) განტოლებაში მივიღებთ:

$$ce^{u_1+u_2} du^1 + ce^{u_1+u_2} du^2 - ce^{u_1+u_2} d(u_1 + u_2) = 0 .$$

ინტეგრალური მრავალნაირობის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ზედაპირი, რომელიც ეკუთვნის ინტეგრალურს, თვით იქნება ინტეგრალური, ხოლო $(n-s)$-ზე მეტი განზომილების ინტეგრალური მრავალნაირობა არ იარსებებს, რადგან დიფერენციალები dx^b ამ ზედაპირზე ვერ დააკმაყოფილებენ s წრფივად დამოუკიდებელ დამოკიდებულებებს.

პფაფის სისტემას ყოველთვის აქვს ერთგანზომილებიანი ინტეგრალური მრავალნაირობა.

მართლაც, ვთქვათ

$$\det\left\| a_\alpha^\beta \right\| \neq 0, \quad \alpha, \beta = \overline{1, s}. \qquad (3)$$

(1) ტოლობა ასე გადავწეროთ:

$$a_\beta^\alpha dx^\beta + a_\sigma^\alpha dx^\sigma = 0, \quad (\sigma = \overline{s+1, n}).$$

აქედან ამოვხსნათ dx^α, $(\alpha = \overline{1, s})$, მივიღებთ

$$dx^\alpha = b^\alpha_\sigma dx^\sigma \text{, სადაც } b^\alpha_\sigma = -\tilde{a}^\alpha_\beta a^\beta_\sigma .$$

x^σ ცვლადების სივრცეში ავიღოთ წირი

$$x^\sigma = x^\sigma(t).$$

ამ წირის გასწვრივ მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = b^\alpha_\sigma \frac{dx^\sigma}{dt} = c^\alpha(x^\alpha, t),$$

რომელსაც მოცემული საწყისი პირობებისათვის ექნება ერთადერთი ამონახსნი.

პფაფის სისტემას ეწოდება სრულად ინტეგრებადი, თუ არის ყოველ წერტილზე გადის მაქსიმალური განზომილების ერთადერთი ინტეგრალური მრავალნაირობა.

ფრობენიუსის თეორემა: იმისათვის, რომ პფაფის სისტემა იყოს სრულად ინტეგრებადი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი მარცხენა მხარის გარე დიფერენციალები იგივურად ნული ხდებოდეს მოცემული სისტემის საფუძველზე (ან ამბობენ, გარე დიფერენცირებით მიღებული სისტემა წარმოადგენს აღებული სისტემის ალგებრულ შედეგს).

ფრობენიუსის თეორემას ასეც აყალიბებენ: პფაფის სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინაა სრულად ინტეგრებადი, როცა მოიძებნება ისეთი წრფივი ფორმები θ^α_β, რომ

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta .$$

ჩვენ ფრობენიუსის თეორემას მივიღებთ დაუმტკიცებლად[1].

---

[1] ვისაც სურს გაეცნოს ამ თეორემის დამტკიცებას და საერთოდ შეისწავლოს ეს საკითხები, ვურჩევდი:

1. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М. 1962.
2. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М. 1960.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М. 1948.
4. Малаховский В.С. Введения в теорию внешних форм. Калининград. 1978.

განვიხილოთ **მაგალითი**.

ვთქვათ, მოცემულია პფაფის სისტემა:

$$dz = udx + zdy,$$

$$du = u(dx + dy),$$

$$dv = vdx + udy,$$

$$dx \wedge dy \neq 0.$$

გავარკვიოთ არის თუ არა აღებული სისტემა სრულად ინტეგრებადი.

ავიღოთ მოცემული სისტემის გარე დიფერენციალი. გვექნება:

$$du \wedge dx + dz \wedge dy = 0,$$

$$du \wedge dx + du \wedge dy = 0,$$

$$dv \wedge dx + du \wedge dy = 0.$$

dz, du, dv განვსაზღვროთ მოცემული სისტემიდან და შევიტანოთ მიღებულ განტოლებებში, გვექნება:

$$udy \wedge dx + udx \wedge dy = 0,$$

$$udy \wedge dx + udx \wedge dy = 0,$$

$$udy \wedge dx + udx \wedge dy = 0.$$

რაც ნიშნავს, რომ აღებული პფაფის სისტემა სრულად ინტეგრებადია.

§47. ევკლიდეს სივრცის სტრუქტურის განტოლებანი

პფაფის განტოლებათა სისტემის სრულად ინტეგრებადობი განხილული აუცილებელი და საკმარისი პირობა გამოიყენებ დიფერენციალური გეომეტრიის ბევრ საკითხში, და უპირველე ყოვლისა, სხვადასხვა სივრცის სტრუქტურის განტოლებების მიღე ბისას. განტოლებებისა, რომლებითაც განისაზღვრება სივრცი ფუნდამენტური ჯგუფის[2] უსასრულოდ მცირე გარდაქმნების კომ პონენტები. ესენი თავის მხრივ შეიძლება განისაზღვროს შესაბამი სი სივრცის რეპერის უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებით.

ევკლიდეს სივრცეში განვიხილოთ რაიმე ორთონორმირე ბული რეპერი სათაეით O წერტილში და $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \ldots, \vec{J}_n$ ღერძებით

$$R_O = (O, \vec{J}_1, \vec{J}_2, \ldots, \vec{J}_n)$$

(უძრავი რეპერი).

ვთქვათ

$$R_M = (M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$$

სხვა რეპერია, რომლის M სათავის რადიუს-ვექტორი და $\{\bar{e}_i\}\ 1 \le i \le n$ ღერძები R_O რეპერის მიმართ ასე წარმოიდგინება:

$$\vec{M} = x^i \vec{J}_i, \quad \bar{e}_k = \xi_k^j \vec{J}_j, \quad i, j, k = \overline{1, n}. \tag{1}$$

აქ $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ M წერტილის კოორდინატებია, ხოლო $(\xi_k^1, \xi_k^2, \ldots, \xi_k^n)$ კი – $\bar{e}_k$ ვექტორისა.

თუ გვინდა, რომ R_M რეპერიც იყოს ორთონორმირებული, უნ- და მოვითხოვოთ, რომ $\bar{e}_i$ ვექტორების სკალარული ნამრავლები

---

2 კლაინის მიხედვით, ყოველ უწყვეტ გარდაქმნათა ჯგუფის n ცვლადით, n განზომილებიან სივრცეში ეთანადება გეომეტრია, რომელიც შეის- წავლის ამ გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ ფიგურათა ინვარიანტულ თვისებებს. ამ ჯგუფს ეწოდება სივრცის ფუნდამენტური ჯგუფი.

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad i = j \\ 0, & \text{როცა} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

სხვანაირად ეს ნიშნავს, რომ ამ $\vec{e}_i$ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცი

$$\left\|\xi_k^j\right\|, \quad i, j = \overline{1, n}$$

იყოს ორთოგონალური. ე. ი. ადგილი უნდა ჰქონდეს ტოლობებს:

$$\xi_i^1\xi_j^1 + \xi_i^2\xi_j^2 + \cdots + \xi_i^n\xi_j^n = 0, \text{ როცა } i \neq j$$

და

$$(\xi_i^1)^2 + (\xi_i^2)^2 + \cdots + (\xi_i^n)^2 = 1, \text{ როცა } i = j.$$

გამოდის, რომ $\left\|\xi_k^j\right\|$ მატრიცის n^2 ელემენტს დაედება

$$C_n^2 + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

პირობა, ამიტომ დამოუკიდებელი დარჩება

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ელემენტი.

R_M რეპერი დამოკიდებული იქნება

$$r = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

პარამეტრზე (დაემატა M სათავის n კოორდინატი).

პარამეტრების მნიშვნელობათა ყოველი r სისტემა განსაზღვრავს თავის ორთონორმირებულ რეპერს.

ვთქვათ u^{α} $(\alpha=\overline{1,r})$ ის პარამეტრებია, რომლებიც R_M რეპერს განსაზღვრავს. განვიხილოთ $u^{\alpha}+du^{\alpha}$ მნიშვნელობანი. მივიღებთ ახალ ორთონორმირებულ

$$R_{M'}=(M',\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n')$$

რეპერს. აქ M' წერტილის რადიუს-ვექტორია $\vec{M}'=\vec{M}+\vec{\Delta M}$, ხოლო $\vec{e}_i'=\vec{e}_i+\vec{\Delta e}_i$.

განვიხილოთ $\vec{\Delta M}$ და $\vec{\Delta e}_i$ ნაზრდების მთავარი ნაწილები $\vec{dM}$ და $\vec{de}_i$ და დავშალოთ ისინი $\vec{e}_i$ ვექტორების მიხედვით. გვექნება

$$\begin{aligned}\vec{dM}&=\omega^i\vec{e}_i,\\ \vec{de}_i&=\omega_i^k\vec{e}_k.\end{aligned}\tag{4}$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ევკლიდეს სივრცის რეპერის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, ω^i, ω_j^i – რეპერის მოძრაობის კომპონენტებია.

ω^i, ω_j^i წრფივი დიფერენციალური ფორმებია du^{α}-ს $(\alpha=\overline{1,r})$ მიმართ. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ყველა $du^{\alpha}=0$, მაშინ $\vec{\Delta M}=0$ და $\vec{\Delta e}_i=0$, ამიტომ $\omega^i=0$, $\omega_j^i=0$.

პირიქით, თუ ვთქვათ $\omega^i=0$, $\omega_j^i=0$, მაშინ (4)-ის თანახმად $\vec{dM}=0$, $\vec{de}_i=0$ და პირველი რიგის სიზუსტით $\vec{M}'=\vec{M}$, $\vec{e}_i'=\vec{e}_i$. გამოდის, რომ $R_{M'}=R_M$, ამიტომ ყველა $du^{\alpha}=0$.

ω^i, ω_j^i წრფივი დიფერენციალური ფორმები ნებისმიერად არ იცვლება. ჯერ ერთი (2)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$d\vec{e}_i\vec{e}_j + \vec{e}_i d\vec{e}_j = 0\,.$$

(4)-ის გათვალისწინებით ეს ტოლობები მიიღებს სახეს:

$$\omega_i^k \vec{e}_k \vec{e}_j + \omega_j^k \vec{e}_i \vec{e}_j = 0\,.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2), გვექნება:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \qquad (5)$$

კერძოდ, როცა $i = j$, მივიღებთ

$$\omega_i^i = 0 \quad (i = \overline{1,n}) \text{ (არ აიჯამება!)} \qquad (5')$$

გარდა (5) და (5′), რეპერის მოძრაობის კომპონენტები აკმაყოფილებენ ევკლიდეს სივრცის ე. წ. სტრუქტურის განტოლებებს.

მივიღოთ ეს განტოლებანი. ამისათვის (4) განტოლებანი ჩავწეროთ კოორდინატებში, გვექნება:

$$d(x^k \vec{J}_k) = \omega^i \xi_i^k \vec{J}_k,$$
$$d(\xi_i^k \vec{J}_k) = \omega_i^j \xi_j^k \vec{J}_k.$$

აქედან ვიღებთ (4)-ის ეკვივალენტურ სისტემას

$$\begin{aligned} dx^k &= \xi_i^k \omega^i, \\ d\xi_i^k &= \xi_j^k \omega_i^j. \end{aligned} \qquad (4')$$

გამოვსახოთ ω^i და ω_j^i ფორმები $\vec{M}$ და $\{\vec{e}_i\}$ $i = \overline{1,n}$ ვექტორების კოორდინატებისა და მათი დიფერენციალების საშუალებით. ამისათვის (4′) სისტემიდან განვსაზღვროთ ω^i და ω_j^i. გვექნება

$$\omega^i = \tilde{\xi}_k^i dx^k, \quad \omega_j^i = \tilde{\xi}_k^i d\xi_j^k, \qquad (6)$$

სადაც $\tilde{\xi}_k^i$ აღნიშნულია $\left\|\xi_j^k\right\|$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცის ელემენტები. ვიპოვოთ გარე დიფერენციალი $d\omega^i$ და $d\omega_j^i$.

$$d\omega^i = d\tilde{\xi}^i_k \wedge dx^k, \quad d\omega^i_j = d\tilde{\xi}^i_k \wedge d\xi^k_j. \qquad (7)$$

რადგან ξ^i_k და $\tilde{\xi}^k_j$ ურთიერთშებრუნებული მატრიცების ელემენტებია, ამიტომ

$$\xi^i_k \tilde{\xi}^k_j = \delta^k_i.$$

უკანასკნელი ტოლობის გადიფერენციალება მოგვცემს:

$$\xi^i_k d\tilde{\xi}^k_j + d\xi^i_k \tilde{\xi}^k_j = 0,$$

საიდანაც

$$\xi^i_k d\tilde{\xi}^k_j = -\tilde{\xi}^k_j d\xi^i_k$$

და

$$d\tilde{\xi}^\ell_j = -\tilde{\xi}^\ell_i \tilde{\xi}^k_j d\xi^i_k,$$

ხოლო

$$d\omega^i = -\tilde{\xi}^i_\ell \tilde{\xi}^m_k d\xi^\ell_m \wedge dx^k = -\omega^i_m \wedge \omega^m = \omega^m \wedge \omega^i_m,$$

$$d\omega^i_j = -\tilde{\xi}^i_\ell \tilde{\xi}^m_k d\xi^\ell_m \wedge d\xi^k_j = -\omega^i_m \wedge \omega^m_j = \omega^m_j \wedge \omega^i_m.$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ω^i და ω^i_j ფორმები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} &d\omega^i = \omega^\ell \wedge \omega^i_\ell, \\ &d\omega^i_j = \omega^\ell_j \wedge \omega^i_\ell, \qquad (i, j, \ell = \overline{1, n}) \\ &\omega^j_i + \omega^i_j = 0, \end{aligned} \qquad (8)$$

რომელთაც ევკლიდეს სივრცის სტრუქტურის განტოლებები ეწოდებათ.

თუ ფორმები ω^i, ω_j^i აკმაყოფილებს (8), მაშინ (4′) ან რაც იგივეა (4), სრულად ინტეგრებადია და განსაზღვრავს ერთადერთ ამონახსნს აღებულს საწყისი პირობებით. აქ უცნობებია x^k და ξ_k^i კოორდინატები $\vec{M}$ და $\vec{e}_i$ ვექტორებისა, რომლებიც რეპერს ქმნის.

აღსანიშნავია, რომ ω^i, ω_j^i დიფერენციალური ფორმები არ არის დამოკიდებული უძრავი $R_0=(O,\vec{J}_1,\vec{J}_2,\ldots,\vec{J}_n)$ რეპერის შერჩევაზე (ისინი მხოლოდ $\vec{R}_{M'}$ მდებარეობაზეა დამოკიდებული R_M-ის მიმართ). მართლაც, თუ კოორდინატთა O სათავეს გადავიტანთ $\widetilde{O}$, ე. ი. განვიხილავთ $R_{\widetilde{O}}=(\widetilde{O},\vec{J}_1,\vec{J}_2,\ldots,\vec{J}_u)$, მაშინ

$$\overrightarrow{\widetilde{O}M}=\overrightarrow{\widetilde{O}O}+\overrightarrow{OM}$$

და

$$d\left(\overrightarrow{\widetilde{O}M}\right)=d\left(\overrightarrow{OM}\right)=\omega^i\vec{e}_i\,.$$

თუ საკოორდინატო ვექტორებს შევცვლით, გადავალთ $R_0'=(O,\vec{J}_1',\vec{J}_2',\ldots,\vec{J}_u')$, მაშინ ვექტორების კოორდინატები კი შეიცვლება, მაგრამ იგივე დარჩება $\vec{M}$ და $\vec{e}_i$ ვექტორები. ამიტომ არ შეიცვლება (4) სისტემაში $d\vec{M},\vec{e}_i,d\vec{e}_i$, შეუცვლელი დარჩება ω^i და ω_j^i კომპონენტებიც.

თუ საწყისი პირობები ისეა შერჩეული, რომ შესაბამისი რეპერი $R_{M_0}=(M_0,(\vec{e}_i)_0)$ ორთონორმირებულია, მაშინ ეს საწყისი პირობები განსაზღვრავს ისეთ ამონახსნს $\vec{M}$, $\vec{e}_i$, რომლისთვისაც R_M იქნება ორთონორმირებული.

მართლაც, განვიხილოთ $R_M = (M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ რეპერი, სადაც

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + d\vec{M}, \quad \vec{e}_i = (\vec{e}_i)_0 + \omega_i^j (\vec{e}_j)_0$$

ნამრავლი

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \{(\vec{e}_i)_0 + \omega_i^t (\vec{e}_t)_0\}\{(\vec{e}_j)_0 + \omega_j^k (\vec{e}_k)_0\} =$$
$$= (\vec{e}_i)_0 (\vec{e}_j)_0 + \omega_i^j + \omega_j^i + \omega_i^t \omega_j^k (\vec{e}_t)_0 (\vec{e}_k)_0.$$

ამ ჯამში $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ სტრუქტურის განტოლებების მიხედვით, უკანასკნელი შესაკრებიც არ გვექნება, რადგან მხოლოდ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრებით ვიფარგლებით. დაგვრჩება მხოლოდ პირველი შესაკრები, რაც ამტკიცებს ჩვენს ნათქვამს.

თუ იგივე პროცედურას გავაგრძელებთ მიღებული რეპერის მახლობელ რეპერისათვის, ვნახავთ, რომ ისიც ორთონორმირებულია და ა. შ. რეპერთა მთელი ოჯახი, რომლებიც (4) სისტემის ამონახსნებისაგან შედგება, იქნება ორთონორმირებული.

შევნიშნოთ, რომ როგორც (8)-ის პირველი განტოლებიდან ჩანს, ω^i ფორმები სრულად ინტეგრებადია და $\omega^i = 0$ სისტემის პირველი ინტეგრალები (6)-ის მიხედვით იქნება M წერტილის x^k კოორდინატები. თუ დავუშვებთ, რომ

$$x^k = x^k(t^1, \ldots, t^p), \quad \operatorname{rang}\left\|\frac{\partial x^k}{\partial t^j}\right\| = p,$$

მაშინ ω^i დამოკიდებული იქნება p დამოუკიდებელ dt^s დიფერენციალზე და $(4')$-ის ინტეგრების შედეგად მივიღებთ რეპერთა ოჯახს, რომელთა წვეროები შეავსებენ ზედაპირს.

§48. აფინური სივრცის სტრუქტურის განტოლებანი

აფინურ სივრცეში რეპერი განისაზღვრება O წერტილით და n წრფივად დამოუკიდებელი $\vec{a}_i(i=\overline{1,n})$ ვექტორით

$$R_O=(O,\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n).$$

ვთქვათ, R_0 გამოსავალი უძრავი რეპერია. ნებისმიერი სხვა $R_M=(\vec{M},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ განისაზღვრება M წერტილის რადიუს-ვექტორით $\vec{M}=x^i\vec{a}_i$ და $\vec{e}_i=\xi_i^k\vec{a}_k$ $(i,k=\overline{1,n})$ ვექტორებით. აფინურ სივრცეში რეპერი დამოკიდებული იქნება

$$r=n^2+n=n(n+1)$$

პარამეტრზე. ესენი იქნება M წერტილის x^k კოორდინატები და $\vec{a}_i$ ვექტორების ξ_i^k კოორდინატები.

ვთქვათ, u^α $(\alpha=\overline{1,r})$ ის პარამეტრებია, რომლებიც R_M რეპერს განსაზღვრავს, ხოლო $u^\alpha+du^\alpha$ კი – $R_{M'}=(M',\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n')$, სადაც $\vec{M}'=\vec{M}+\Delta\vec{M}$, $\vec{e}_i'=\vec{e}_i+\Delta\vec{e}_i$. მსგავსად ევკლიდეს სივრცისა, აქაც ნაზრდების მთავარი ნაწილებისათვის გვექნება განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} d\vec{M}&=\omega^i\vec{e}_i,\\ d\vec{e}_i&=\omega_i^k\vec{e}_k \end{aligned}\qquad (i,k=\overline{1,n})\qquad (1)$$

სადაც $\vec{e}_i$ ვექტორები მხოლოდ წრფივად დამოუკიდებელია, მატრიცი $\left\|\xi_i^k\right\|$ კი – გადაუგვარებელი. ევკლიდეს სივრცისაგან განსხვავებით, აფინური რეპერის მოძრაობის კომპონენტები ω^i, ω_k^i მხოლოდ ასეთ განტოლებებს დააკმაყოფილებენ

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,$$
$$d\omega_k^i = \omega_k^j \wedge \omega_j^i, \qquad (2)$$

რომელთაც ეწოდებათ აფინური სივრცის სტრუქტურის განტოლებები. შებრუნებით, თუ ω^i, ω_j^i ფორმები აკმაყოფილებენ (2) განტოლებებს, მაშინ (1) სისტემა სრულად ინტეგრებადია და განსაზღვრავს აფინურ რეპერთა ოჯახს, რომლის საწყისი რეპერი დაემთხვევა ნებისმიერად აღებულ $(R_M)_O$ რეპერს.

აქაც თუ ω^i $(i=\overline{1,n})$ ფორმები მხოლოდ p დამოუკიდებელ დიფერენციალზეა დამოკიდებული, მივიღებთ აფინურ რეპერთა ოჯახს, რომელთა წვეროები შეავსებენ რაიმე p ზედაპირს, ხოლო (1) განსაზღვრავს არა მარტო ამ ზედაპირს, არამედ ნებისმიერ მის აფინურად ეკვივალენტურს.

კერძოდ, ჰიპერზედაპირისათვის მივიღებთ, რომ ω^i დამოკიდებული იქნება $(n-1)$ დამოუკიდებელ დიფერენციალზე და ამიტომ

$$x^k = x^k(t^1, \ldots, t^{n-1}).$$

თუ რეპერის $(n-1)$ ვექტორს მოვათავსებთ ჰიპერზედაპირის მხებ სიბრტყეში, მაშინ ასეთი რეპერის მოძრაობის განტოლებებს ექნება სახე:

$$d\vec{M} = \omega^s \vec{e}_s, \qquad (s=\overline{1,n-1})$$
$$d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k \qquad (i,k=\overline{1,n})$$

$d\vec{M}$-ს არ ექნება მდგენელი $\vec{e}_n$ ვექტორის მიმართ. ე. ი.

$$\omega^n = 0.$$

ეს იქნება სწორედ ჰიპერზედაპირის დიფერენციალური განტოლება. მისი გაგრძელებით მივიღებთ ახალ ობიექტებს, რომლებიც განსაზღვრავენ ჰიპერზედაპირის დიფერენციალურ გეომეტრიას.

IX თავი

კოვარიანტული წარმოებული

§49. ვექტორისა და კოვექტორის კოვარიანტული წარმოებული

R^n სივრცის რაიმე G არეზე განვიხილოთ სკალარული ფუნქცია $f(x^1,x^2,\ldots,x^n)$. ვიგულისხმოთ, რომ იგი უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი. როგორც ცნობილია, ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\ (i=\overline{1,n})$ განსაზღვრავს ფუნქციის გრადიენტს

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

რომელიც პირველი რანგის კოვარიანტული ტენზორია. ე. ი. როცა კოორდინატები იცვლება

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,\ldots,x^n).$$

ან მოკლედ, როცა

$$(x)\to(x'),$$

მაშინ

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

გამოდის, რომ ნული რანგის ტენზორის წარმოებული კვლავ განსაზღვრავს ტენზორს. მაგრამ თუ ტენზორის რანგი $r\geq 1$, მაშინ საზოგადოდ ეს ასე არ არის.

ვთქვათ, G არის ყოველ წერტილზე განსაზღვრულია პირველი რანგის კოვარიანტული T_i ტენზორი, ან როგორც ამბობენ, განიხი-

ლება T_i ტენზორის ველი, წერტილიდან წერტილზე გადასვლისას ტენზორი იცვლება. ტენზორი წერტილის ფუნქციაა.

ვიგულისხმოთ, რომ იგი უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადი სასურველ რიგამდე.

რადგანაც T_i სიდიდეები ქმნის პირველი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს, ამიტომ კოორდინატთა გარდაქმნისას ე. ი. როცა $(x) \to (x')$, გვექნება

$$T_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} T_i \ . \tag{1}$$

გავაწარმოოთ უკანასკნელი ტოლობა $x^{k'}$-ით, მივიღებთ

$$\frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} T_i \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T_i}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} T_i , \tag{2}$$

ველარ მივიღეთ ტენზორი. მას ხელს უშლის მეორე შესაკრები.

ასევე, რომ აგველო პირველი რანგის კონტრავარიანტული T^i ტენზორის ველი, მისთვის გვექნებოდა:

$$T^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i ,$$

მისი $x^{k'}$-ით გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^{k'}} T^i . \tag{3}$$

აქაც მეორე შესაკრები უშლის ხელს, რომ გაწარმოების შედეგმა მოგვცეს ტენზორი.

როგორც (2) გამოსახულებიდან ჩანს, $\frac{\partial T_i}{\partial x^k}$ სიდიდეები მაშინ განსაზღვრავენ ტენზორს, როცა $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = 0$. უკანასკნელს კი ად-

გილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კოორდინატთა აფინური გარდაქმნა გვაქვს.

მართლაც, ვთქვათ

$$x^i = a^i_{k'} x^{k'} + b^i ,$$

სადაც

$$a^i_{k'} = \mathrm{const}, \quad b^i = \mathrm{const} .$$

გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = a^i_{k'} = \mathrm{const} .$$

ამიტომ შემდეგი გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} = 0 .$$

პირიქით, თუ

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = p^i_{i'} = \mathrm{const} ,$$

ხოლო

$$x^i = p^i_{i'} x^{i'} + p^i .$$

როგორც გაირკვა, მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში ტენზორის წარმოებული კვლავ ტენზორს გვაძლევს. საზოგადოდ კი ასე არ არის. ამასთან დაკავშირებით შემოდის ტენზორის ეგრეთ წოდებული კოვარიანტული წარმოებული.

ამბობენ, რომ ნებისმიერი ტენზორისათვის განსაზღვრულია კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაცია, თუ კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში $(x^1,\ldots,x^n)$, მოცემულია $\Gamma^k_{ij}(x)$ ფუნქციათა ერთობლიობა, რომელიც კოორდინატთა შეცვლისას, ე. ი. როცა

$$(x) \to (x') ,$$

გარდაიქმნება შემდეგი წესით:

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}. \tag{4}$$

განვსაზღვროთ კოვარიანტული წარმოებული ჯერ კოვარიანტული T_i და კონტრავარიანტული T^j ვექტორებისათვის. (4) ტოლობიდან ამოვხსნათ $\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$. ამისათვის (4) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \cdot \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} = \delta_k^{\ell} \right)$. გვექნება:

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^{\ell} + \frac{\partial^2 x^{\ell}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 x^{\ell}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{k'}} \Gamma_{i'j'}^{k'} - \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^{\ell}. \tag{5}$$

მიღებული გამოსახულება შევიტანოთ (2) ტოლობაში. გვექნება:

$$\frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T_i}{\partial x^{k}} - \left(\frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{\ell'}} \Gamma_{i'k'}^{\ell'} - \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ik}^{\ell} \right) T_{\ell},$$

ან რაც იგივეა

$$\frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{k'}} - \frac{\partial x^{\ell}}{\partial x^{\ell'}} T_{\ell} \Gamma_{i'k'}^{\ell'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^{k}} - \Gamma_{ki}^{\ell} T_{\ell} \right),$$

ან თუ ვისარგებლებთ (1), მივიღებთ:

$$\frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{k'}} - \Gamma^{\ell'}_{k'i'} T_{\ell'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ki} T_\ell \right).$$

საიდანაც ჩანს, რომ სიდიდეები

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ki} T_\ell$$

ქმნიან მეორე რანგის (0,2) ტიპის ტენზორს. მას ეწოდება კოვარიანტული ვექტორის (ან პირველი რანგის (0, 1) ტიპის ტენზორის) კოვარიანტული წარმოებული და აღინიშნება ასე:

$$\nabla_k T_i = T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ki} T_\ell. \tag{6}$$

შენიშვნა. ზოგჯერ უფრო მოსახერხებელია (4) ფორმულის სხვა სახით წარმოდგენა. განვიხილოთ ტოლობა:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}.$$

გავაწარმოოთ იგი $x^{\ell'}$-ით, გვექნება:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{\ell'}} = 0.$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} = -\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}.$$

მიღებული ტოლობის გათვალისწინებით (4) ასე გადაიწერება:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} - \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{4'}$$

ვიპოვოთ ახლა კონტრავარიანტული ვექტორის ((1, 0) ტიპის პირველი რანგის ტენზორის) კოვარიანტული წარმოებული.

ჩვენ ვნახეთ, რომ

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}T^i=$$

$$=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\ell'}}T^{\ell'}.$$

გამოვიყენოთ (4′) ტოლობა. გვექნება

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial T^i}{\partial x^k}-\Gamma^{i'}_{k'\ell'}T^{\ell'}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\Gamma^i_{k\ell}T^{\ell'}.$$

აქედან კი ვიღებთ:

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}}+\Gamma^{i'}_{k'\ell'}T^{\ell'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{k\ell}T^\ell\right).$$

საიდანაც ჩანს

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{k\ell}T^\ell$$

სიდიდეების ტენზორული ბუნება. მიღებულ გამოსახულებას ეწოდება კონტრავარიანტული T^i ვექტორის (პირველი რანგის (1, 0) ტიპის ტენზორის) კოვარიანტული წარმოებული და ასე აღინიშნება

$$\nabla_k T^i = T^i_{;k}=\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{k\ell}T^\ell. \tag{7}$$

მივიღეთ, რომ თუ კოორდინატთა ნებისმიერ სისტემაში განსაზღვრულია Γ^k_{ij} სიდიდეები, რომლებიც კოორდინატთა $(x)\to(x')$ შეცვლისას გარდაიქმნება (4) ან (4′) წესით, მაშინ ვექტორის და კოვექტორის კოვარიანტული წარმოებული წარმოადგენს ტენზორს, რომელიც კოორდინატთა ყოველ სისტემაში ასე ჩაიწერება:

$$\nabla_k T^i = T^i_{;k} = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{k\ell} T^\ell, \quad \nabla_k T_i = T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^\ell_{ki} T_\ell .$$

ახლა შებრუნებით: ვთქვათ კოორდინატთა ნებისმიერ $(x^1,\ldots,x^n)$ სისტემაში მოცემულია $\Gamma^k_{ij}(x)$ სიდიდეები. თუ ვექტორის და კოვექტორის წარმოებულებს განვსაზღვრავთ (6) და (7) ფორმულებით და მოვითხოვთ, რომ კოვარიანტული გაწარმოების შედეგი იყოს ტენზორი, მაშინ Γ^k_{ij} სიდიდეები კოორდინატთა $(x) \to (x')$ გარდაქმნისას შეიცვლება (4) ან (4′) წესით.

მართლაც, დავუშვათ, რომ

$$\nabla_j T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{j\ell} T^\ell$$

წარმოადგენს ტენზორს.

მაშინ კოორდინატთა შეცვლისას $(x) \to (x')$ გვექნება

$$\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{\ell'} \Gamma^{i'}_{j'\ell'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{j\ell} T^\ell \right) =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\ell'}} T^{\ell'} \right) + \Gamma^i_{j\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} T^{\ell'} \right] = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\ell'}} T^{\ell'} \right) +$$

$$+ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \Gamma^i_{j\ell} T^{\ell'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\ell'}} \frac{\partial T^{\ell'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\ell'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^{\ell'} +$$

$$+ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \Gamma^i_{j\ell} T^{\ell'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} \Gamma^i_{j\ell} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\ell'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) T^{\ell'} .$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების შედარება გვარწმუნებს, რომ Γ^k_{ij} სიდიდეები სწორედ (4) ფორმულის მიხედვით იცვლება.

§50. ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული

ნებისმიერი რანგის კოვარიანტული წარმოებული ცალსახად განისაზღვრება, თუ მოვითხოვთ, რომ

1. კოვარიანტული გაწარმოება წრფივი ოპერაციაა;

2. ნული რანგის ტენზორის (ე. ი. ფუნქციის) კოვარიანტული წარმოებული ჩვეულებრივი წარმოებულის ტოლია

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

3. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორთა ველებისათვის კოვარიანტული წარმოებული მოიცემა (6) და (7) ფორმულებით.

4. ტენზორთა ნამრავლის კოვარიანტული წარმოებული აიღება ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად:

თუ $T^{ij}_{pq} = R^i_p S^j_q$, მაშინ

$$\nabla_k T^{ij}_{pq} = (\nabla_k R^i_p) S^j_q + R^i_p \nabla_k S^j_q.$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ ადგილი აქვს ჩამოთვლილ ოთხ პირობას, მაშინ მეორე რანგის ტენზორების კოვარიანტული წარმოებულები ასე მოიცემა

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ki} T_{\ell j} - \Gamma^{\ell}_{kj} T_{i\ell}, \tag{8}$$

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^{i}_{k\ell} T^{\ell j} + \Gamma^{j}_{k\ell} T^{i\ell}, \tag{9}$$

$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^{i}_{k\ell} T^{\ell}_j - \Gamma^{\ell}_{kj} T^i_{\ell} \tag{10}$$

და საზოგადოდ, $(p+q)$ რანგის (p, q) ტიპის ტენზორის კოვარიანტულ წარმოებულს ექნება შემდეგი სახე:

$$\nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \frac{\partial T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k} + \Gamma^{i_1}_{k\ell} T^{\ell i_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \cdots + \Gamma^{i_p}_{k\ell} T^{i_1\cdots i_{p-1}\ell}_{j_1\cdots j_q} -$$

$$- \Gamma^{\ell}_{kj_1} T^{i_1\cdots i_p}_{\ell\cdots j_q} - \cdots - \Gamma^{\ell}_{kj_q} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}\ell}.$$

დავრწმუნდეთ, რომ ტოლობა (8) სამართლიანია.

განვიხილოთ მეორე რანგის T_{ij} ტენზორთან ერთად A^k და B^s ვექტორები. მათი ნამრავლი მოგვცემს მეოთხე რანგის ტენზორს (2, 2) ტიპისას, ხოლო მისი ორჯერ შეკუმშვით მივიღებთ ინვარიანტს $T_{ij}A^iB^j$, ამიტომ

$$\nabla_k (T_{ij}A^iB^j) = \frac{\partial}{\partial x^k}(T_{ij}A^iB^j)$$

გავაწარმოოთ

$$(\nabla_k T_{ij})A^iB^j + T_{ij}(\nabla_k A^i)B^j + T_{ij}A^i(\nabla_k B^j) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}A^iB^j +$$

$$+ T_{ij}\frac{\partial A^i}{\partial x^k}B^j + T_{ij}A^i\frac{\partial B^j}{\partial x^k};$$

$$(\nabla_k T_{ij})A^iB^j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}A^iB^j - \left(\nabla_k A^i - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\right)T_{ij}B^j -$$

$$-\left(\nabla_k B^j - \frac{\partial B^j}{\partial x^k}\right)T_{ij}A^i,$$

$$(\nabla_k T_{ij})A^iB^j = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\ell}_{ki}T_{\ell j} - \Gamma^{\ell}_{kj}T_{i\ell}\right)A^iB^j,$$

საიდანაც ვიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

იმავე სქემით დამტკიცდება სხვა ტოლობებიც.

§51. სიმრუდისა და გრეხის ტენზორი

სიდიდეებს, რომელთა საშუალებით აიღება ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული, **ბმულობის კოეფიციენტები** ეწოდება. როგორც ენახეთ, ეს სიდიდეები არ ქმნიან ტენზორს.

განვიხილოთ

$$S_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}-\Gamma_{ji}^{k}.$$

როცა კოორდინატთა სისტემა იცვლება $(x)\to(x')$, მაშინ

$$S_{i'j'}^{k'}=\Gamma_{i'j'}^{k'}-\Gamma_{j'i'}^{k'}=\Big(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\Gamma_{ij}^{k}+\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}-$$

$$-\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\Gamma_{j'i'}^{k'}-\frac{\partial^2 x^{k}}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}\Big)=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}}S_{ij}^{k}.$$

მაშასადამე, S_{ij}^{k} სიდიდეები ადგენს ტენზორს. მას ეწოდება **გრეხის ტენზორი.**

კოვარიანტულ გაწარმოების ოპერაციას დიფერენციალურ-გეომეტრიულ ბმულობასაც უწოდებენ.

ბმულობას ეწოდება სიმეტრიული, თუ გრეხის ტენზორი უდრის ნულს. ან რაც იგივეა, როცა $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$.

ბმულობას ეწოდება ევკლიდური, თუ არსებობს ისეთი კოორდინატები $(x^1,x^2,\ldots,x^n)$, რომ $\Gamma_{ij}^{k}(x)=0$.

ასეთ კოორდინატებს **ევკლიდური** ეწოდება.

ცხადია, ევკლიდური ბმულობა სიმეტრიულია.

ახლა გადავიდეთ სიმრუდის ტენზორის განსაზღვრაზე.

ვთქვათ, T^i პირველი რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია. როგორც ვიცით, მისი კოვარიანტული წარმოებული არის

$$\nabla_k T^i=\frac{\partial T^i}{\partial x^k}+\Gamma_{k\ell}^{i}T^{\ell},$$

რომელიც მეორე რანგის $(1,\,1)$ ტიპის ტენზორია.

განვიხილოთ მისი განმეორებითი კოვარიანტული წარმოებული:

$$\nabla_j\nabla_k T^i = \frac{\partial}{\partial x^j}(\nabla_k T^i) - \Gamma^{\ell}_{jk}\nabla_{\ell}T^i + \Gamma^i_{j\ell}\nabla_k T^{\ell} = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^j}T^{\ell} +$$

$$+\Gamma^i_{k\ell}\frac{\partial T^{\ell}}{\partial x^j} + \Gamma^i_{j\ell}\left(\frac{\partial T^{\ell}}{\partial x^k} + \Gamma^{\ell}_{kt}T^t\right) - \Gamma^{\ell}_{jk}\nabla_{\ell}T^i.$$

შევადგინოთ გამოსახულება

$$\nabla_j\nabla_k T^i - \nabla_k\nabla_j T^i = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{k\ell} - \Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{j\ell}\right)T^{\ell} - S^{\ell}_{jk}\nabla_{\ell}T^i. \quad (1)$$

აღვნიშნოთ

$$R^i_{\ell jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} + \Gamma^s_{k\ell}\Gamma^i_{js} - \Gamma^s_{j\ell}\Gamma^i_{ks}. \quad (2)$$

ცხადია, უკანასკნელი გამოსახულება ასეც შეგვეძლო ჩაგვეწერა:

$$R^i_{\ell,jk} = 2\left(\frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{k\ell}\Gamma^i_{js}\right)_{[j,k]},$$

ე. ი. როგორც ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულებების ალტერნირების შედეგი j და k ინდექსების მიხედვით.

(2) ტოლობის გათვალისწინებით (1) ასე გადაიწერება:

$$\nabla_j\nabla_k T^i - \nabla_k\nabla_j T^i = R^i_{\ell jk}T^{\ell} - S^{\ell}_{jk}\nabla_{\ell}T^i. \quad (3)$$

როგორც ვხედავთ, კოვარიანტული გაწარმოების რიგი სიმრუდისა და გრეხის ტენზორზეა დამოკიდებული.

$R^i_{\ell,jk}$ სიდიდეები ქმნის მეოთხე რანგის (1, 3) ტიპის ტენზორს. მას ეწოდება **სიმრუდის ტენზორი** ან **რიმანის ტენზორი**.

სიმეტრიული ბმულობის შემთხვევაში, ე. ი. როცა $S^i_{jk} = 0$, (3) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\nabla_j\nabla_k T^i - \nabla_k\nabla_j T^i = R^i_{\ell,jk} T^\ell \tag{4}$$

ხოლო ევკლიდეს ბმულობის შემთხვევაში

$$\nabla_j\nabla_k T^i - \nabla_k\nabla_j T^i = 0 . \tag{5}$$

როგორც სიმრუდის ტენზორის აგებულებიდან ჩანს

$$R^i_{\ell,jk} = -R^i_{\ell,kj} , \tag{6}$$

ე. ი. სიმრუდის ტენზორი ანტისიმეტრიულია j და k ინდექსების მიხედვით.

სიმეტრიული ბმულობის შემთხვევაში ადგილი აქვს იგივეობას

$$R^i_{\ell,jk} + R^i_{k,\ell j} + R^i_{j,k\ell} = 0 , \tag{7}$$

(რომლის სამართლიანობაში უშუალო გამოთვლებით დაერწმუნდებით), რომელსაც **რიჩის იგივეობა** ეწოდება.

სიმრუდის ტენზორს უკავშირდება მეორე რანგის ტენზორი, რომელიც მისგან $R^i_{\ell,jk}$, i და j ინდექსების მიხედვით შეკუმშვით მიიღება

$$R^i_{\ell,ik} = R_{\ell k} .$$

ამ ტენზორს **რიჩის ტენზორი** ჰქვია.

X თავი

ზედაპირთან დაკავშირებული ზოგიერთი ტენზორი

§52. ფუნდამენტური ტენზორი; ასიმპტოტური ტენზორი

განვიხილოთ ზედაპირი მოცემული განტოლებით

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

სადაც u და v წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია. ტენზორული აღნიშვნების გამოსაყენებლად უმჯობესია u და v შევცვალოთ u^1 და u^2-ით. რაც შეეხება კერძო წარმოებულებს

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ შეიცვლება } \vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \text{ და } \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \text{ კი } - \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2},$$

ე. ი. ჩვენ აღვნიშნავთ $\vec{r}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$ $(i = 1,2)$. ვექტორ-ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულებს ასე ჩავწერთ:

$$\vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \quad (i, j = 1,2)$$

და საზოგადოდ, ნებისმიერი რიგის წარმოებული ქვედა ინდექსებით იქნება აღნიშნული. ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალს ექნება სახე:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv = \vec{r}_i du^i .$$

შესაბამისად ზედაპირის პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა იქნება:

$$\Im_1 = (d\vec{r})^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 = \\ = \vec{r}_i\vec{r}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j, \tag{1}$$

სადაც $g_{ij} = \vec{r}_i\vec{r}_j$ აღნიშნულია $\vec{r}_i$ და $\vec{r}_j$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი. აქ

$$g_{11} = \vec{r}_1\vec{r}_1 = E, \quad g_{12} = g_{21} = \vec{r}_1\vec{r}_2 = F, \quad g_{22} = \vec{r}_2\vec{r}_2 = G.$$

ცხადია,

$$g_{ij} = g_{ji}$$

ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმის დისკრიმინანტი

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix},$$

ახალ აღნიშვნებში იქნება

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g \text{ ე. ი. } g = \det\|g_{ij}\|.$$

ზედაპირის პირველი კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული. ამიტომ

$$g_{11} > 0, g > 0.$$

რაც შეეხება ზედაპირის მეორე კვადრატულ დიფერენციალურ ფორმას

$$\Im_2 = \vec{n}d^2\vec{r} = -d\vec{n}d\vec{r} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2,$$

თუ აქ აღვნიშნავთ:

$$b_{11} = \vec{n}\vec{r}_{11} = -\vec{n}_1\vec{r}_1 = L,$$
$$b_{12} = b_{21} = \vec{n}\vec{r}_{12} = -\vec{n}_1\vec{r}_2 = -\vec{n}_2\vec{r}_1 = M,$$
$$b_{22} = \vec{n}\vec{r}_{22} = -\vec{n}_2\vec{r}_2 = N.$$

მაშინ, ზედაპირის მეორე დიფერენციალური კვადრატული ფორმა ასე ჩაიწერება:

$$\Im_2 = b_{ij} du^i du^j, \qquad (2)$$

სადაც $b_{ij} = \vec{n}\vec{r}_{ij} = -\vec{n}_i\vec{r}_j = -\vec{n}_j\vec{r}_i$.

თუ გავითვალისწინებთ ზედაპირის ნორმალის მგეზაეის განმარტებას

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{\sqrt{g}},$$

გვექნება

$$b_{ij} = \frac{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{ij})}{\sqrt{g}}.$$

$\vec{r}_1$ და $\vec{r}_2$ ვექტორები, რომლებიც საკოორდინატო წირების მხები ვექტორებია, ქმნის ზედაპირის შინაგან ბაზისს. ვექტორი, რომელიც კომპლანარული იქნება ამ ვექტორების, ზედაპირის მხებ სიბრტყეს მიეკუთვნება და მას **ზედაპირის ვექტორს** უწოდებენ.

ვაჩვენოთ, რომ ზედაპირის პირველი და მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტული ტენზორებია. დავადგინოთ ჯერ g_{ij} სიდიდეთა ტენზორული ბუნება.

ვთქვათ, კოორდინატები შეიცვალა $(u) \to (u')$, მაშინ რადგან

$$\vec{r}_{i'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \vec{r}_i,$$

ამიტომ

$$g_{i'j'} = \vec{r}_{i'}\vec{r}_{j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} \vec{r}_i\vec{r}_j = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} g_{ij}.$$

როგორც უკანასკნელი გამოსახულებიდან ჩანს, g_{ij} სიდიდეებ ადგენს მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტულ სიმეტრიულ ($g_{ij} = g_{ji}$) ტენზორს.

ასევე ზედაპირის მეორე კვადრატული ფორმის კოეფიციენტებს თუ ავიღებთ, გვექნება

$$b_{i'j'} = -\vec{n}_{i'}\vec{r}_{j'} = -\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\vec{n}_i\vec{r}_j = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}b_{ij}$$

$$\left(\vec{n}_{i'} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\vec{n}_i\right).$$

b_{ij} სიდიდეებიც ქმნის მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტულ სიმეტრიულ ტენზორს, რომელსაც **ასიმპტოტური ტენზორი** ეწოდება.

g_{ij} და b_{ij} სიდიდეთა ტენზორული ბუნება თვით პირველი და მეორე კვადრატული ფორმების ინვარიანტობიდანაც გამომდინარეობს ($du^{i'} = \dfrac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}du^i$ სიდიდეები ხომ ვექტორს განსაზღვრავს).

g_{ij} ეწოდება ზედაპირის ფუნდამენტური ტენზორი. რამდენადაც $\det\|g_{ij}\| = g \neq 0$, ამიტომ $\|g_{ij}\|$ მატრიცთან ერთად შეგვიძლია განვსაზღვროთ მისი შებრუნებული $\|g^{ik}\|$ მატრიცი. ე. ი. ისეთი, რომ

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \qquad (3)$$

განსაზღვრავდეს ერთეულოვან მატრიცას. g^{ik} სიდიდეებიც ქმნის ტენზორს (δ^i_j და g_{ij} ტენზორებია, ამიტომ g^{ik}-ც იქნება ტენზორი). იგი იქნება მეორე რანგის ორჯერ კონტრავარიანტული ტენზორი.

g_{ij} ტენზორისა და კონტრავარიანტული A^k ვექტორის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ კოვარიანტული ვექტორი

$$A_i = g_{ik}A^k. \qquad (4)$$

ანალოგიურად მიიღება

$$A^j = g^{ji} A_i \tag{5}$$

კონტრავარიანტული ვექტორი. A_i და A^j სიდიდეები შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ერთი და იგივე ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები. (4) და (5) ფორმულები გვიჩვენებენ თუ როგორ გარდაიქმნება ერთი მეორეში.

ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით შეგვიძლია მაღალი რანგის ტენზორების ინდექსების აწევ-დაწევა.

მაგალითად: $g_{ik} A^k_{sj} = A_{ksj}$, $g^{ik} A_{kj} = A^i_j$ და ა. შ.

ასევე ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით განისაზღვრება

1. ზედაპირის ორი $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

მართლაც, ვთქვათ

$$\vec{P} = P^i \vec{r}_i, \quad \vec{Q} = Q^j \vec{r}_j,$$

მაშინ

$$\vec{P}\vec{Q} = P^i Q^j \vec{r}_i \vec{r}_j = P^i Q^j g_{ij} = P^i Q_i = P_j Q^j = g^{ij} P_j Q_j,$$

ხოლო

$$\vec{P}^2 = g_{ij} P^i P^j = P^i P_i = g^{ij} P_i P_j.$$

2. ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}\, dt;$$

3. კუთხე ზედაპირის ორ $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij} A^i B^j}{\sqrt{g_{ij} A^i A^j} \sqrt{g_{ij} B^i B^j}} \quad (\vec{A} = A^i \vec{r}_i, \vec{B} = B^j \vec{r}_j).$$

§53. ბმულობის კოეფიციენტების გამოსახვა ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით

ზედაპირის ყოველ წერტილს უკავშირდება რეპერი

$$\{M, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\},$$

სადაც $\vec{r}_1$ და $\vec{r}_2$ საკოორდინატო წირების მხებებია, ხოლო $\vec{n}$ ზედაპირის ნორმალის მგეზავი (ძველ აღნიშვნებში $\{M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$). $\vec{r}_1$ და $\vec{r}_2$ ვექტორების წარმოებულები არ იქნებიან ზედაპირის მხებ სიბრტყეში. მათ ექნებათ მდგენელები ზედაპირის ნორმალის გასწვრივაც. ისე, რომ გვექნება[1]

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + \lambda_{ij} \vec{n}. \tag{1}$$

განვსაზღვროთ დაშლის Γ_{ij}^k და λ_{ij} კოეფიციენტები. (1) ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად თუ გავამრავლებთ $\vec{n}$-ზე, მივიღებთ

$$\vec{r}_{ij}\vec{n} = \lambda_{ij} = b_{ij}, \tag{2}$$

ხოლო $\vec{r}_\ell$-ზე გამრავლება მოგვცემს

$$\vec{r}_{ij}\vec{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k \vec{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell}. \tag{3}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან ამოვხსნათ Γ_{ij}^k სიდიდეები. გავამრავლოთ (3) ტოლობის ორივე მხარე $g_{k\ell}$ ტენზორის შებრუნებულზე. გვექნება:

$$\vec{r}_{ij}\vec{r}_\ell g^{\ell m} = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} g^{\ell m} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^m. \tag{4}$$

---

[1] ეს განტოლებანი უკვე გვქონდა განხილული, ახლა ისინი ტენზორულ აღნიშვნებში ჩავწერეთ

ვაჩვენოთ, რომ დაშლის Γ_{ij}^{m} კოეფიციენტები ემთხვევა ბმულობის კოეფიციენტებს. ამისათვის დავადგინოთ ამ სიდიდეთა გარდაქმნის კანონი.

ვთქვათ, კოორდინატები შეიცვალა $(u) \to (u')$, მაშინ

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \vec{r}_{i'j'} \vec{r}_{\ell'} g^{\ell' k'} = \frac{\partial}{\partial u^{j'}} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^{i'}} \right) \vec{r}_{\ell'} g^{\ell' k'} = \frac{\partial}{\partial u^{j'}} \left(\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \vec{r}_{i} \right) \vec{r}_{\ell'} g^{\ell' k'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^{j}} \left(\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \vec{r}_{i} \right) \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j'}} \vec{r}_{\ell'} g^{\ell' k'} = \left(\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j'}} \vec{r}_{ij} + \frac{\partial^2 u^{i}}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \vec{r}_{i} \right) \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}} \vec{r}_{\ell} g^{\ell k} =$$

$$= \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}} \vec{r}_{ij} \vec{r}_{\ell} g^{\ell k} + \frac{\partial^2 u^{i}}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}} \vec{r}_{i} \vec{r}_{\ell} g^{\ell k} =$$

$$= \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}} \Gamma_{ij}^{k} + \frac{\partial^2 u^{k}}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}}.$$

როგორც Γ_{ij}^{k} სიდიდეთა გარდაქმნის წესიდან ჩანს, ეს სიდიდეები ბმულობის კოეფიციენტებია. (4) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k},$$

ე. ი. ბმულობა სიმეტრიულია, გრეხის ტენზორი ნულს უდრის.

Γ_{ij}^{k} სიდიდეებთან ერთად განიხილავენ $\Gamma_{ij,k}$ სიდიდეებს

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} = \vec{r}_{ij} \vec{r}_{k} \quad (\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}). \tag{5}$$

$\Gamma_{ij,k}$ სიდიდეებს ქრისტოფელის პირველი გვარის სიმბოლოები ეწოდება, ხოლო Γ_{ij}^{k}-ს კი – ქრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლოები. ქრისტოფელის ეს სიმბოლოები დავუკავშიროთ ფუნდამენტურ g_{ik} ტენზორს.

ამისათვის განვიხილოთ

$$g_{ik} = \vec{r}_i \vec{r}_k$$

ფუნდამენტური ტენზორის წარმოებულები:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{r}_{ik}\vec{r}_j + \vec{r}_i\vec{r}_{jk} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i},$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \vec{r}_{ij}\vec{r}_k + \vec{r}_i\vec{r}_{kj} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i},$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \vec{r}_{ji}\vec{r}_k + \vec{r}_j\vec{r}_{ki} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}.$$

თუ უკანასკნელ ორ ტოლობას შევკრებთ და გამოვაკლებთ პირველს, გვექნება:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right), \tag{6}$$

ხოლო (4)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right). \tag{7}$$

ასეთია ბმულობის კოეფიციენტების გამოსახვა ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით.

რამდენადაც გვაქვს ბმულობის კოეფიციენტები, შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული.

ვნახოთ როგორია ფუნდამენტური ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული $\nabla_k g_{ij}$:

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ki}^{\ell} g_{\ell j} - \Gamma_{kj}^{\ell} g_{\ell i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ki,j} - \Gamma_{kj,i} = 0, \tag{8}$$

ე. ი. $\nabla_k g_{ij} = 0$.

ფუნდამენტური ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ნულია. ფუნდამენტური ტენზორი კოვარიანტული გაწარმოების მი-

მართ იგივე როლს ასრულებს, როგორც მუდმივი ჩვეულებრივი გაწარმოების მიმართ.

მაგალითად,

$$\nabla_k(g_{ij}A^j)=g_{ij}\nabla_k A^j .$$

δ_i^j ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულიც ნულია. მართლაც:

$$\nabla_k\delta_j^i=\frac{\partial\delta_j^i}{\partial u^k}-\Gamma_{kj}^{\ell}\delta_{\ell}^i+\Gamma_{k\ell}^i\delta_j^{\ell}=-\Gamma_{kj}^i+\Gamma_{kj}^i=0, \tag{9}$$

ასევე

$$\nabla_k g^{ij}=0 . \tag{10}$$

ამ ტოლობის საჩვენებლად

$$g^{ik}g_{kj}=\delta_j^i$$

ტოლობის კოვარიანტული წარმოებული ავიღოთ. გვექნება:

$$(\nabla_s g^{ik})g_{kj}+g^{ik}(\nabla_s g_{kj})=0 .$$

აქედან

$$\nabla_s g^{i\ell}=-g^{\ell j}g^{ik}\nabla_s g_{kj}=0 .$$

აღვნიშნოთ ქრისტოფელის სიმბოლოების ერთი საინტერესო თვისება, სახელდობრ

$$\Gamma_{ik}^i=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^k}=\frac{1}{2g}\frac{\partial \ln g}{\partial u^k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^k}. \tag{11}$$

ვაჩვენოთ ეს. განვიხილოთ

$$g=\det\|g_{ij}\| .$$

ვიპოვოთ

$$\frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} A_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g g^{ij} \quad \left(g^{ij} = \frac{A_{ij}}{g} \right).$$

აქედან

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g^{ij} = \Gamma_{ik,j} g^{ij} + \Gamma_{jk,i} g^{ij} = 2\Gamma^i_{ik},$$

საიდანაც ვიღებთ:

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^k}.$$

განვიხილოთ რაიმე A ვექტორი. ვთქვათ მისი კონტრავარიანტული კოორდინატებია A^i. ავიღოთ მისი კოვარიანტული წარმოებული

$$\nabla_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial u^k} + A^\ell \Gamma^i_{k\ell}$$

და შემდეგ შევკუმშოთ k და i ინდექსების მიხედვით. მივიღებთ ინვარიანტს, რომელიც წარმოადგენს A ვექტორის დივერგენცს:

$$\operatorname{div} A = \nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial u^k} + A^\ell \Gamma^k_{k\ell} =$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial u^k} + A^k \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}A^k}{\partial u^k}.$$

მივიღეთ დივერგენცის გამოსახულება ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

§54. სიმრუდის ტენზორის გამოსახვა ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით

ზედაპირს ევკლიდეს სივრცეში უკავშირდება ინვარიანტული კვადრატული დიფერენციალური ფორმები. შევჩერდეთ ჩვენ პირველზე, რომელიც ზედაპირზე მეტრიკას განსაზღვრავს (ზედაპირზე გავლებული წირის რკალის სიგრძე, კუთხე ორ წირს შორის, ფართის ელემენტი და სხვ.). მას ხშირად ზედაპირის წირით ელემენტსაც უწოდებენ და აღნიშნავენ ds^2. ისე, რომ

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad (i, j = 1,2),$$

სადაც

$$g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j, \quad g_{11} > 0, \quad \det\|g_{ij}\| = g > 0.$$

როგორც ვნახეთ, g_{ij} სიდიდეები ქმნის მეორე რანგის ორჯერ კოვარიანტულ სიმეტრიულ ტენზორს. გარდა ამისა, გავარკვიეთ, რომ

$$\Gamma_{ij}^{k} = \vec{r}_{ij} \vec{r}_{\ell} g^{\ell k}$$

სიდიდეები ბმულობის კოეფიციენტებს განსაზღვრავს და ისიც ვიცით, თუ როგორ გამოისახება Γ_{ij}^{k} სიდიდეები ზედაპირის ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით. სახელდობრ ადგილი აქვს:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right).$$

ბმულობის კოეფიციენტების საშუალებით განისაზღვრება კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაცია. მოვიგონოთ კონტრავარიანტული T^i ტენზორის მეორე რიგის ალტერნირებული კოვარიანტული წარმოებული. მას აქვს სახე:

$$2\nabla_{[j}\nabla_{k]} T^i = R_{\ell jk}^{i} T^\ell - S_{jk}^{\ell} \nabla_\ell T^i,$$

სადაც

$$R^i_{\ell jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial u^k} + \Gamma^s_{k\ell}\Gamma^i_{js} - \Gamma^s_{j\ell}\Gamma^i_{ks}$$

სიმრუდის (რიმანის) ტენზორია.

რაც შეეხება გრეხის S^ℓ_{jk} ტენზორს, ჩვენ შემთხვევაში

$$S^\ell_{jk} = 0 \quad (\Gamma^\ell_{ij} = \Gamma^\ell_{ji}).$$

რიმანის $R^i_{\ell jk}$ ტენზორთან ერთად განიხილავენ ოთხჯერ კოვარიანტულ ე. ი. (0, 4) ტიპის ტენზორს $R_{i\ell jk}$, რომელიც ასე მიიღება:

$$R_{i\ell jk} = g_{im} R^m_{\ell jk}.$$

რამდენადაც

$$R^i_{\ell jk} = -R^i_{\ell kj},$$

ამიტომ

$$R_{i\ell jk} = -R_{i\ell kj}.$$

ეს ტენზორი სიმეტრიულია ინდექსთა $i\ell$ და jk წყვილების მიმართ. ე. ი.

$$R_{jk\ell i} = -R_{\ell ijk}.$$

გამოვსახოთ სიმრუდის ოთხჯერ კოვარიანტული $R_{i\ell kj}$ ტენზორი ზედაპირის ფუნდამენტური g_{ij} ტენზორის საშუალებით.

მაშ, ვიხილავთ:

$$R_{i\ell kj} = g_{im}R^m_{\ell kj} = g_{im}\left(\frac{\partial\Gamma^m_{j\ell}}{\partial u^k} - \frac{\partial\Gamma^m_{k\ell}}{\partial u^j} + \Gamma^r_{j\ell}\Gamma^m_{kr} - \Gamma^r_{k\ell}\Gamma^m_{jr}\right) =$$

$$= \{\frac{\partial g_{im}\Gamma^m_{j\ell}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{im}\Gamma^m_{k\ell}}{\partial u^j} + \Gamma^m_{k\ell}\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \Gamma^m_{j\ell}\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} + g_{im}(\Gamma^r_{j\ell}\Gamma^m_{kr} -$$

$$-\Gamma^r_{k\ell}\Gamma^m_{jr})\} = \{\frac{\partial\Gamma_{j\ell,i}}{\partial u^k} - \frac{\partial\Gamma_{k\ell,i}}{\partial u^j} - \Gamma^m_{j\ell}(\Gamma_{ik,m} + \Gamma_{km,i}) + \Gamma^m_{k\ell}(\Gamma_{ij,m} + \Gamma_{mj,i}) +$$

$$+\Gamma^r_{j\ell}\Gamma_{kr,i} - \Gamma^r_{k\ell}\Gamma_{jr,i}\} = \{\frac{\partial}{\partial u^k}(\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i}) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial u^j}\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial u^i}) - \Gamma^m_{j\ell}\Gamma_{ikm} + \Gamma^m_{k\ell}\Gamma_{ij,m}\} =$$

$$= \{\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial u^\ell\partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial u^j\partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial u^i\partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^\ell\partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{\ell i}}{\partial u^k\partial u^j} +$$

$$+\frac{\partial^2 g_{k\ell}}{\partial u^i\partial u^j}) + \Gamma^m_{k\ell}\Gamma_{ij,m} + \Gamma^m_{j\ell}\Gamma_{ik,m}\} = \{\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial u^\ell\partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial u^i\partial u^k} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^\ell\partial u^j} +$$

$$+\frac{\partial^2 g_{k\ell}}{\partial u^i\partial u^j}) + \Gamma^m_{k\ell}\Gamma_{ij,k} - \Gamma^m_{j\ell}\Gamma_{ik,m}\}.$$

ამრიგად, $R_{i\ell kj}$ ტენზორი გამოისახა g_{ij} ტენზორის საშუალებით (რამდენადაც ქრისტოფელის სიმბოლოები გამოისახება ფუნდამენტური ტენზორის საშუალებით).

§55. სკალარული სიმრუდე; კავშირი სკალარულ სიმრუდესა და გაუსის სიმრუდეს შორის (ორი განზომილების შემთხვევა)

ფუნდამენტური ტენზორის სრულ შეკუმშვას რიჩის ტენზორთან უწოდებენ სკალარულ სიმრუდეს და აღნიშნავენ R-ით:

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

სკალარული სიმრუდე გამოისახება რიმანის ტენზორის საშუალებით. გვექნება:

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}R^{m}_{i,mj} = g^{ij}g^{m\ell}R_{\ell imj}.$$

ვნახოთ რა კავშირია სკალარულ სიმრუდესა და ზედაპირის სრულ სიმრუდეს შორის (ორი განზომილების შემთხვევაში).

ვთქვათ, ზედაპირი მოცემულია განტოლებით

$$z = f(x,y).$$

ვიპოვოთ მისი სრული სიმრუდე ზედაპირის რაიმე P წერტილში.

მოვიგონოთ სრული სიმრუდის გამომსახველი ფორმულა

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\det\|b_{ij}\|}{\det\|g_{ij}\|}.$$

გამოვითვალოთ აქ შემავალი სიდიდეები.

ჩავწეროთ ზედაპირის განტოლება პარამეტრული სახით:

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v),$$

ან რაც ეკვივალენტურია

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, f(u, v)).$$

ვიპოვოთ კერძო წარმოებულები:

$$r_u = (1,0,f_u = f_x),$$
$$r_v = (0,1,f_v = f_y),$$
$$r_{uu} = (0,0,f_{uu} = f_{xx}),$$
$$r_{uv} = (0,0,f_{uv} = f_{xy}),$$
$$r_{vv} = (0,0,f_{vv} = f_{yy}).$$

შესაბამისად მივიღებთ:

$$E = 1 + f_x^2 = g_{11},$$
$$F = f_x f_y = g_{12} = g_{21},$$
$$G = 1 + f_y^2 = g_{22},$$

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2 = g = \det\|g_{ij}\|$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = b_{11},$$

$$M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = b_{12} = b_{21},$$

$$N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = b_{22},$$

$$LN - M^2 = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2} = \det\|b_{ij}\|.$$

ამიტომ

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

დეკარტეს კოორდინატთა სისტემას თუ ავიღებთ ზედაპირის P წერტილში, ხოლო OXY სიბრტყეს შევუთავსებთ ზედაპირის მხებ სიბრტყეს იმავე წერტილში, მაშინ

$$f_x\big|_p = 0, \quad f_y\big|_p = 0.$$

($\vec{r}_u$ და $\vec{r}_v$ ვექტორებს არ ექნებათ მდგენელები OZ ღერძის გასწვრივ) და სრული სიმრუდე ამ წერტილში ტოლი იქნება:

$$K(P) = f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P).$$

გამოვითვალოთ ახლა სკალარული სიმრუდე იგივე წერტილში.

შევნიშნოთ, რომ სიმრუდის ტენზორს ექნება მხოლოდ ერთი არსებითი კოორდინატი, როცა $n = 2$, ამიტომ სკალარული სიმრუდე მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R = g^{k\ell}R_{\ell k} = g^{k\ell}g^{is}R_{s\ell ik} = g^{k\ell}(g^{11}R_{1\ell 1k} + g^{12}R_{2\ell 1k} + g^{21}R_{1\ell 2k} +$$
$$+ g^{22}R_{2\ell 2k}) = g^{22}g^{11}R_{1212} + g^{12}g^{12}R_{2112} + g^{21}g^{21}R_{1221} +$$
$$+ g^{11}g^{22}R_{2121} = 2(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12})R_{1212}.$$

რაც შეეხება g^{ik} სიდიდეებს, ისინი ადვილად მოიძებნება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\det\|g_{ij}\| = g$, გვექნება:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

ხოლო

$$g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12} = \frac{g}{g^2} = \frac{1}{g}.$$

მივიღეთ, რომ სკალარული სიმრუდე

$$R = \frac{2}{g}R_{1212}.$$

ჩვენ შემთხვევაში

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial y\partial x}\right)+\Gamma_{12}^m\Gamma_{12,m}-\Gamma_{22}^m\Gamma_{11m}.$$

გამოვითვალოთ g_{ij} ფუნდამენტური ტენზორის წარმოებულე-ბი:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x}=2f_xf_{xx},\quad \frac{\partial g_{11}}{\partial y}=2f_xf_{xy},\quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x}=f_{xx}f_y+f_xf_{yx},$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial y}=f_{xy}f_y+f_xf_{yy},\quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x}=2f_{yx}f_y,\quad \frac{\partial g_{22}}{\partial y}=2f_{yy}f_y,$$

$$\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}=2f_{xy}f_{xy}+2f_xf_{xyy},\quad \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}=2f_{xy}f_{xy}+2f_yf_{yxx},$$

$$\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\partial y}=f_{xx}f_{yy}+f_{xy}f_{xy}+f_yf_{xxy}+f_xf_{xyy}.$$

რამდენადაც P წერტილში

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x}(P)=0 \text{ და } \frac{\partial g_{ij}}{\partial y}(P)=0,$$

ამიტომ

$$\Gamma_{ij}^k(P)=0.$$

იმავე წერტილში

$$g(P)=1$$

და

$$R_{1212}(P)=\frac{1}{2}\{2f_{xx}(P)f_{yy}(P)+2f_{xy}(P)f_{xy}(P)-2f_{xy}(P)f_{xy}(P)-$$

$$-2f_{xy}(P)f_{xy}(P)\}=f_{xx}(P)f_{yy}(P)-f_{xy}^2(P),$$

ხოლო სკალარული სიმრუდე

$$R(P) = 2\{f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}^2(P)\} = 2K(P).$$

ამგვარად, კოორდინატთა აღებულ სისტემაში ზედაპირის გაორკეცებული სრული სიმრუდე სკალარული სიმრუდის ტოლია. მაგრამ რადგან ორივე სკალარებია, მათი მნიშვნელობანი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ამიტომ ყოველთვის ზედაპირის გაორკეცებული სრული სიმრუდე დაემთხვევა სკალარულ სიმრუდეს.

XI თავი

რიმანის სივრცის შესახებ

ყველა ის ობიექტი, რომელიც კი შეგვხვედრია აქამდე დიფერენციალურ გეომეტრიაში, განიხილებოდა გარკვეულგანზომილებიანი სივრცის რაიმე არეზე. ბევრ შემთხვევაში საჭიროა ისეთი სიმრავლეების განხილვაც, რომელიც ყოველი წერტილის მიდამოში ისეთა მოწყობილი, ისეთივე თვისებები აქვს, როგორც რაიმე განზომილების არეს, ხოლო მთლიანად კი აქვს უფრო რთული აგებულება.

ის სიმრავლეები, რომელზედაც ამჟამად განიხილება მათემატიკური ანალიზის და დიფერენციალური გეომეტრიის ამოცანები, იწოდება n განზომილებიან დიფერენცირებად ან გლუვ მრავალნაირობად.

სანამ რიმანის სივრცეს განვმარტავდეთ, გავერკვეთ ევკლიდეს სიბრტყისა და სივრცის წირითი ელემენტის აგებულებაში.

განვიხილოთ ევკლიდეს სიბრტყეზე ორი უსასრულოდ მახლობელი წერტილი $M(x,y)$ და $M(x+dx, y+dy)$. მანძილი ამ წერტილებს შორის, დეკარტეს მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის მიმართ, როგორც ცნობილია, ტოლია:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{1}$$

თუ ავიღებთ პოლარ კოორდინატთა სისტემას (ρ, φ), დეკარტეს კოორდინატებიდან პოლარ კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულების

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$dx = d\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi d\varphi, \; dy = d\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi d\varphi$$

და

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \tag{2}$$

სამგანზომილებიან სივრცის შემთხვევაში მანძილი ორ მახლო-
ბელ $M(x,y,z)$ და $M(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ წერტილებს შორი
დეკარტეს მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის მიმართ ტოლია

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3}$$

ცილინდრულ (ρ, φ, z) კოორდინატებს თუ გამოვიყენებთ, სადა

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,$$

მივიღებთ

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{4}$$

ხოლო სფერული (ρ, φ, θ) კოორდინატებისათვის

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$$

გვექნება:

$$dx = d\rho\cos\varphi\sin\theta - \rho\sin\varphi\sin\theta d\varphi + \rho\cos\varphi\cos\theta d\theta,$$
$$dy = d\rho\sin\varphi\sin\theta + \rho\cos\varphi\sin\theta d\varphi + \rho\sin\varphi\cos\theta d\theta,$$
$$dz = d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta d\theta$$

და

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta d\varphi + \rho^2 d\theta^2. \tag{5}$$

ყველა ეს შემთხვევა შეგვიძლია გავაერთიანოთ და ვთქვათ,
რომ წირითი ელემენტი ევკლიდეს სივრცისა არის დადებითად
განსაზღვრული კვადრატული დიფერენციალური ფორმა

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{6}$$

სადაც $g_{ij} = g_{ji}$, $\det\|g_{ij}\| = g \neq 0$, $g > 0$

მართლაც, პირველ შემთხვევაში

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_{11} = 1 > 0, \quad g = 1 > 0.$$

(2) ფორმულისათვის

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{Vmatrix}, \quad g_{11} = 1 > 0, \quad g = \rho^2 > 0.$$

სამგანზომილებიან სივრცის შემთხვევაში

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad g = 1 > 0.$$

შემდეგ

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = \rho^2 > 0, \quad g = \rho^2 > 0.$$

დაბოლოს, (5) ფორმულისათვის მივიღებთ

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{Vmatrix}, \quad g_{11} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} = \rho^2 \sin^2\theta > 0, \quad g = \rho^4 \sin^2\theta > 0.$$

(6) დიფერენციალური კვადრატული ფორმის საშუალებით აიგება ევკლიდეს გეომეტრია.

1854 წ. გეტინგენის უნივერსიტეტში რიმანი კითხულობს ლექციას თემაზე: „იმ ჰიპოთეზების შესახებ, რომლებიც საფუძვლად უდევს გეომეტრიას". იგი აქ პირველი განიხილავს n განზომილებიან მრავალნაირობას, რომელზეც მანძილი ორ უსასრულოდ მახლობელ (x^i) და $(x^i + dx^i)$ წერტილებს შორის განისაზღვრება დადებითად განსაზღვრულ დიფერენციალური კვადრატული ფორმით და შეისწავლის ასეთი მრავალნაირობის თვისებებს. რიმანმა ამით მოახდინა სივრცის ცნების განზოგადება. მან იმდენად გასწია

კლასიკური გეომეტრიის ჩარჩოები, რომ ერთ სქემაში შესაძლებელი გახადა მოეთავსებინა სრულიად სხვადასხვა გეომეტრიული სისტემები და მათ შორის ლობაჩევსკის სისტემაც. შემდეგში რიმანის მიერ შემოტანილი სივრცეები მის სახელს ატარებს.

რიმანის V^n სივრცე ეწოდება მრავალნაირობას, რომელზედაც მოცემულია ინვარიანტული დიფერენციალური კვადრატული ფორმა

$$g_{ij}(x^1,x^2,\ldots,x^n)dx^i dx^j, \ (i,j=\overline{1,n}),$$

სადაც

$$g_{ij}=g_{ji},\ \det\|g_{ij}\|\neq 0,\ g_{ij}\in C^2 \text{ კლასს.}$$

ეს დიფერენციალური კვადრატული ფორმა აღვნიშნოთ ds^2, მსგავსად ევკლიდეს სივრცისა. ისე რომ,

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j.$$

კვადრატული ფორმის ინვარიანტობიდან და იქიდან, რომ dx^i სიდიდეები ადგენს ტენზორს, გამომდინარეობს, რომ g_{ij} სიდიდეებიც ქმნის მეორე რანგის სიმეტრიულ ორჯერ კოვარიანტულ ტენზორს. უკანასკნელის გათვალისწინებით, რიმანის სივრცე ასეც შეიძლება განიმარტოს:

რიმანის სივრცე ეწოდება მრავალნაირობას, რომელზედაც განსაზღვრულია ორჯერ კოვარიანტული, სიმეტრიული და გადაუგვარებელი $g_{ij}(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ ტენზორის ველი. g_{ij} უწოდებენ **მეტრიკულ ტენზორს**.

თუ დიფერენციალური კვადრატული ფორმა დადებითად არის განსაზღვრული, მრავალნაირობას ეწოდება **საკუთრივ რიმანის სივრცე**. სხვა შემთხვევაში **ფსევდორიმანის**.

ევკლიდეს სივრცეს, მსგავსად რიმანის სივრცისა, გააჩნია მეტრიკული ტენზორი, რომელიც მის გეომეტრიას განსაზღვრავს. ამიტომ ევკლიდეს სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რიმანის სივრცე. რაშია მისი თავისებურება?

ევკლიდეს სივრცის შემთხვევაში შეიძლება გადავიდეთ ისეთ საკოორდინატო სისტემაზე, რომ

$$g_{ij} = \mathrm{const},$$

მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები იყოს მუდმივები, რასაც ნებისმიერი რიმანის სივრცისათვის არა აქვს ადგილი.

რიმანის სივრცეში განვიხილოთ წირი

$$x^i = x^i(t),\ t \in [a,b].$$

წირის რკალის სიგრძედ მიიღება ინტეგრალი

$$S = \int_a^b \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt .$$

საკუთრივ რიმანის სივრცეში მეტრიკული კვადრატული ფორმა დადებითია და ds ყოველთვის ნამდვილი. ფსევდორიმანის სივრცეში კი ds შეიძლება იყოს ნამდვილი, წარმოსახვითი და ნული. შესაბამისად წირები გვექნება სამი სახის: ნამდვილი სიგრძის მქონე, წარმოსახვით სიგრძიანი და ნული სიგრძის (იზოტროპული).

განვიხილოთ ზედაპირი

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m),\ (i = \overline{1,n}) .$$

ვიგულისხმოთ, რომ x^i ფუნქციები ეკუთვნის C^N კლასს (N მრავალნაირობის რიგია) და

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{Vmatrix} = m .$$

როცა $m = 1$, დავუბრუნდებით წირს, ხოლო როცა $m = n - 1$, გვექნება ჰიპერზედაპირი.

გამოეითვალოთ ამ ზედაპირზე გამავალი წირის წირითი ელემენტი. ამ შემთხვევაში

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(t), \quad (\alpha = \overline{1,m})$$

და

$$dx^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}} du^{\alpha}.$$

ამიტომ გვექნება

$$ds^{2} = g_{ij} \frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial x^{j}}{\partial u^{\beta}} du^{\alpha} du^{\beta}.$$

აღვნიშნოთ

$$G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^{i}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial x^{j}}{\partial u^{\beta}} \qquad (**)$$

საკოორდინატო წირების მხები ვექტორების სკალარული ნამრავლი, მივიღებთ ზედაპირზე გამავალი წირებისათვის

$$ds^{2} = G_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}.$$

ზედაპირზე წარმოიქმნება ინვარიანტული (რკალის დიფერენციალის კვადრატი) დიფერენციალური კვადრატული ფორმა. თუ გამოვიყენებთ რიმანის სივრცის განმარტებას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ზედაპირი რიმანის სივრცეში თვით წარმოადგენს V^{m} რიმანის სივრცეს თუკი

$$\det\|G_{\alpha\beta}\| \neq 0.$$

რაც შეეხება სიმეტრიულობას $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$. ეს გამომდინარეობს (**) ტოლობიდან, სადაც $g_{ij} = g_{ji}$. იმ შემთხვევაში, როცა

$$\det\|G_{\alpha\beta}\| = 0$$

ზედაპირს ეწოდება **იზოტროპიული**.

საკუთრივ რიმანის სივრცეში ყველა ზედაპირი იქნება არაიზოტროპიული. მართლაც, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ არა ყველა du^α უდრის ნულს, მაშინ გამოდის, რომ შესაბამისი $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ არ იქნება ყველა ნული და მაშ

$$G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta (= g_{ij} dx^i dx^j) > 0.$$

ჩვენ გავარკვიეთ, რომ ზედაპირი რიმანის სივრცეში თვით წარმოადგენს რიმანის სივრცეს. ეს გვაძლევს მოხერხებულ და გეომეტრიულად თვალსაჩინო ხერხს რიმანის სივრცის მიღებისა, თუ კერძოდ V^n სივრცედ ავიღებთ ევკლიდეს R_n სივრცეს.

ამის უმარტივესი მაგალითია ზედაპირთა თეორია სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში.

ზედაპირისათვის აიგება დადებითად განსაზღვრული პირველი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა (წირითი ელემენტი)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad (***)$$

ამიტომ ზედაპირი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ორგანზომილებიან რიმანის სივრცედ, რომლის მეტრიკული ფორმაა (***) და შესაბამისად მეტრიკული ტენზორი იქნება

$$g_{11} = E,\ g_{12} = g_{21} = F,\ g_{22} = G.$$

რიმანის გეომეტრია, რომელიც (***) მეტრიკული ფორმით წარმოიდგინება, ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის სახელს ატარებს.

ტენზორული ანალიზი ჩვენ ამ შემთხვევისათვის გამოვიყენეთ. ამ შემთხვევის განხილვა საგულისხმოა, ჯერ ერთი იმით, რომ რიმანის სივრცეს ეძლევა თვალსაჩინო და რეალური აზრი; და მეორე, ტენზორული ანალიზი, რომელიც თვალსაჩინო გეომეტრიულ წარმოდგენებთან დაკავშირებით აიგება, დიდი შრომის გარეშე განზოგადოვდება მრავალგანზომილებიან სივრცის შემთხვევისათვის.

მრავალგანზომილებიან ევკლიდურ (ფსევდოევკლიდურ) სივრცეში შეიძლება განვიხილოთ ნებისმიერი V^m ზედაპირი და მივიღოთ შესაბამისად გარკვეული რიმანის გეომეტრია.

დგება საკითხი: შეიძლება თუ არა ნებისმიერი V^m რიმანის სივრცე რეალიზებულ იქნეს ევკლიდეს სივრცის რაიმე ზედაპირზე? მტკიცდება, რომ ევკლიდეს სივრცის განზომილება თუ საკმაოდ დიდია, სახელდობრ

$$n = \frac{m(m+1)}{2},$$

ეს შესაძლებელია.

შევნიშნოთ, რომ საკითხი განიხილება ლოკალურად. აიღება V^m არა მთლიანად, არამედ მისი ნებისმიერი წერტილის რაიმე მიდამო. ამასთან, თუ V^m ფსევდორიმანის სივრცეა, უნდა აეიღოთ ფსევდოევკლიდური სივრცე შესაბამისი ინდექსით.

საინტერესოა, რომ როცა $m = 2$, აღნიშნული ფორმულით ვიღებთ, რომ $n = 3$. ე. ი. ნებისმიერი ორგანზომილებიანი რიმანის სივრცე შეგვიძლია ლოკალურად განვიხილოთ როგორც სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის ზედაპირი.

ძირითადი ლიტერატურა

1. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის საფუძვლები, თბ., 1976
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, М., 1956
3. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии, М., 1958
4. Финаков С.П. Курс дифференциальной геометрии, М., 1963
5. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия, М., 1974
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия, М., 1979
7. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных, Т. 1-2, М., 1971
9. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1974
10. Под редакцией Феденко А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии, М., 1979

დამხმარე ლიტერატურა

11. ნიკოლაძე ვ., დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები, თბ., 1934
12. ჭილაშვილი ვ., ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები, თბ., 1978
13. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия, Калинин, 1977
14. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ф. Геометрия, М., 1990
15. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия, 2, М., 1975
16. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий, М., 1989
17. Белько И.В., Бурдун А.А., Ведерников В.Н., Феденко А.С. Дифференциальная геометрия, Минск, 1982
18. Васильев А.Н., Соловьев Ю.П. Дифференциальная геометрия, М., 1981
19. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов, М., 1978
20. Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм, М., 1977

21. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.1,2, М., 1981
22. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980
23. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., 1960
24. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии, М., 1987
25. Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии, М., 1949
26. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979
27. Постников М.М. Дифференциальная геометрия, М., 1988
28. Розендорн Э.Р. Задачи по дифференциальной геометрии, М., 1971
29. Рудин У. Основы математического анализа, М., 1976
30. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии, М., 1970
31. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии, М., 1960
32. Фиников С.П. Метод внешних форм Картаха, М., 1948

შინაარსი

ნაწილი I

წირები და ზედაპირები სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში

თავი I. წირთა თეორია

თავი II. ზედაპირთა თეორია

თავი III. ზედაპირის ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები

თავი IV. ზედაპირის შინაგანი გეომეტრიის ელემენტები

ნაწილი II

n-განზომილებიანი დიფერენციალური გეომეტრიის ელემენტები

თავი V. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

გამომცემლობის რედაქტორი მ. ყორღანაშვილი

კორექტორი ც. მოლოდინი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 14.04.98

საბეჭდი ქაღალდი 60X84 1/16.

პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 17. სააღრ.-საგამომც. თაბახი 9,41.

ტირაჟი 300 შეკვეთის № 25

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.

დაიბეჭდა თბილისის უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო კომპიუტერულ სამსახურში
380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1.

გამომცემლობის რედაქტორი მ. ყორღანაშვილი
კორექტორი ც. მოლოდინი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 14.04.98

საბეჭდი ქაღალდი 60X84 1/16.

პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 17. სააღრ.-საგამომც. თაბახი 9,41.

ტირაჟი 300 შეკვეთის №25

ფასი სახელშეკრულებო