მალხაზ აშორდია

დიფერენციალური განტოლებები

თბილისი
2018

მალხაზ აშორდია

დიფერენციალური განტოლებები

თბილისი 2018

წანამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია საუნივერსიტეტო სწავლების სამივე საფეხურის: ბაკალავრიატის, მაგისტრატურისა და დოქტორანტურის სტუდენტებისთვის. მისი გამოყენება შეუძლია ნებისმიერ მკვლევარსაც, რომელსაც შეხება აქვს ჩვეუკლებრივი დიფერენციალურიო განტოლებების თეორიასთან. სახელმძღვანელოში განხილულია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების თეორიის ის საკითხებიც, რომლების არ განიხილებოდა ქართულ ენაზე გამოცემულ ადრეულ წლების ლიტერატურაში, ან ცალკეული საკითხები განხილული იყო ცალკეულ გამოცემებში.

სახელმძღვანელოში მრავლადაა განხილული მაგალითები და ის ფიზიკური თუ სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში აღძრული ამოცანები. განხულილია ის თეორიული საკითხებიც, რომლებიც დაკავშირებულია ასეთი სახის განტოლებების ამოხსნის მეთოდებთან. ბაკალავრიატის სწალების ეტაპზე ძირითადი ყურადღება უნდა დაეთმოს მაგალითებისა და ამოცანების პრაქტიკული ამოხსნის საკითხებს, რათა სტუდენტებმა მიიღოს მაღალი კვალიფიკაცია ამ მიმართულებით. რეკონემდირებულია აგრეთვე თეორიის ძირითად თეორიულ საკითხებზე ყურადრების გასახვილება. გარდა ამისა, შესაძლებელია მარტივი თეორიულ საკითთების დამტკიცების განხილვა ბაკალავრიატის სტდენთებთან ერთად.

დიფერენციალური განტოლებების თეორიის სწავლების გაგრძელება რეკომენდებულია მაგისტრატურაშიც. ამ ეტაპზე უნდა მოხდეს თეორიის ღრმა და საფუძვლიანი სწავლება. კერძოდ, უნდა დამტკიცდეს მთელი სიღრმითა და სისრულით ძირითადი კლასიკური სახის თეორემები დიფერენციალირი განტოლებების თეორიის ყველა მიმართულებიდან, რათა მაგისტრანტმა შეძლოს მისთვის საინტერესო მიმართულეემით კვლევების წარმართვა.

დოქტორანტურაში სწავლებისას საჭიროა უფრო ღრმად შესწავლილ იქნეს კვლევის ამირჩეული მიმართულებით თეორიული საკითხები. დოქტორანტს შეიძლება დასჭირდეს აგრეთვე საკვლევი საკითხებთან დაკავშირებული სხვა თეორიული საკითხების შესწავლაც, რასაც იგი ამოიკითხავს სახელმძღვანელოში და გააღრმავებს თანამედროვე კვლევების შესახებ გამოქვეყნებულ ნაშრომების გაცნობისას.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

მათემატიკისა და მეცნიერების სხვადასხვა დარგში დიფერენციაური განტოლებების თეორიას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. დიფერენციალური განტოლებები წარმოადგენს უაღრესად ეფექტურ საშუალებას ამოიხსნას საბუნებისმეტყველო და ტექნიკოს დარგის მრავალი ამოცანა. ასეთი განტოლებების საშუალებით მრავალი რეალური პროცესი აღიწერება საკმაოდ მარტივად და სრულად. დიფერენციალური გამტოლება არისა განტოლება, სადაც აუცილებლად მონაწილეობს უცნობი ფუ–ნქცისს სხვადასხვა რიგის წარმოიებულები. ამასთან, უცნობ ფუნქცია, საზოგადოდ, დამოკიდებულია რამდენიმე არგუმენტზე. გან–ტოლებებს, სადაც საძიებელი ფუნქცია დამოკიდებუელია მხოლოდ ერთ არგუმენტზე ეწოდება ჩვეულებრივი დიფერენცი–ალური განტოლება, ხოლო თუ არგუმენტების რიცხვი ერთზე მეტია, მაშინ ასეთი ტიპის განტოლებებს ეწოდება განტოლებები კერძო წარმოებულებით. ჩვენ შევისწავლით პირველი ტიპის, ანუ ჩვეულებრივი დიფერენცილური განტოლებების თეორიას.

როგორც აღვნიშნეთ ზემოთ, მრავალი საბუნებისმეტყველო ამოცანა, მათ შორის სხეულთა ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის, ფინანსური, სოციალური პროცესების სხვა დარგების ამოცანები. მაგ. სხეულთა, მათ შორის, რაკეტები მოძრაობის, სხეულებში სითბოს გავრცელების, რადიოაქტიური ნივთიერებების დაშლის, რეაქტორებში აღძრული პროცესების, ქიმიური რეაქციების, მოსახლეობის გამრავლების და სხვა მრავალი ამოცანა.

რადგანაც ერთ–ერთი პირველი ამოცანა, რომელიც აღწერილი იყო ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებით იყო წერტილის მოძრაობის განტოლება, ამიტომ დამოუკიდებელ ცვლადს ჩვენ აღვნიშნავთ t–თი (დროის ანალოგიურად), ხოლო საძიებელ ფუნქციას x–ით. თუმცა ეს აღნიშვნები არ არის საყოველთაოდ მიღებული (ხშირად x–ით აღნიშნავენ დამოუკიდებლ ცვლადს, ხოლო საძიებელ ფუნქციას y–ით).

საზოგადოდ n–ური რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{0.1}$$

სადაც $F(t, x_0, x_1, \dots, x_n)$ არის მოცემული $(n+2)$ ცვლადის ფუნქცია. ამასთან, იგულისხმება, რომ (0.1) ტოლობაში n არის უცნობი x ფუნქციის მაქსიმალური რიგის წარმოებული, რომელიც რეალურად შედის აღნიშნულ ტოლობაში. შევნიშნოთ, რომ (0.1) ტოლობის მარცხენა მხარეში შეიძლება არ შედიოდეს x ფუნქციის რომელიმე რიგის წარმოებული n–რიგამდე (თვითონ x ფუნქცია), მაგრამ ეს უკანასკნელი აუცილებლად უნდა მონაწილეობდეს ტოლობაში. მაგალითად, $x'''x + tx' - t^2 = 0$ არის მესამე რიგის დიფერენციალური განტოლება.

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ქვეშ განიხილება (0.1) სახის რამდენიმე განტოლების ერთობ–ლიობა.

ჩვენ შევისწავლით (0.1) განტოლების ამონახსნის (არსებობის შემთხვევაში) მოძებნის საკითხს. შევნიშნოთ, რომ საზო–გადოდ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის აგება ცხადი სახით შეუძლებელია. გარდა ამისა, შეიძლება განტოლებას ჰქონდეს რამდენიმე, უფრო მეტიც, უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. ეს საკითხიც იქნება განხილული ჩვენს კურსში.

იმედია, რომ მკითხველი მიიღებს გარკვეულ ესთეტიურ სიამოვნებას ამ თეორიის შესწავლისას აღმოჩენილი მოულოდ–ნელი ფაქტებისგან.

გისურვებთ წარმატებებს!

ძირითადი აღნიშვნები და განსაზღვრებები

$\mathbb{N}$ – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$\mathbb{Z}$ – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$;

$\mathbb{C}$ – კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე

$|z|$ – კომპლექსური z რიცხვის მოდული;

δ_{ik} – კრონეკერის სიმბოლო ($\delta_{kk} = 1, \delta_{kl} = 0$, როცა $k \neq l$);

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ - n-ჯერ, $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ - n-ჯერ;

$G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება არე, თუ იგი ღიაა და ბმული; $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ იგი შეიცავს მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებსლ მონაკვეთს, ანუ $\alpha x + \beta y \in G$, როცა $x, y \in G$, სადაც α და β ისეთი არაუარყოფითი მუდმივებია, რომ $\alpha + \beta = 1$.

$x = (x_i)_{i=1}^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ - n–განზომილებიანი სვეტ–ვექტორი ($\mathbb{R}^n$–ის ან $\mathbb{C}^n$–ის ელემენტი), რომლის კომპონენტებია $x_1, \ldots, x_n$ რიცხვები (ნამდვილი ან კომპლექსური);

$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ - $x = (x_i)_{i=1}^n$ ვექტორის ნორმა;

$|x| = (|x_i|)_{i=1}^n$ - $x = (x_i)_{i=1}^n$ ვექტორის მოდული;

0_n - n–განზომილკებიანი სვეტ–ვექტორი, რომლის ყოველი კომპონენტი ნულის ტოლია;

თუ $x = (x_i)_{i=1}^n$ და $y = (y_i)_{i=1}^n$, მაშინ უტოლობა $x \leq y$ ნიშნავს, რომ $x_i \leq y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$;

$\mathbb{R}^{n\times m}$ – ნამდვილ ელემენტებიან $n \times m$–მატრიცთა სიმრავლე;

$\mathbb{C}^{n\times m}$ - კომპლექსურ ელემენტებიან $n \times m$–მატრიცთა სიმრავლე;

$X = (x_{ik})_{i,k=1}^{n,m}$ –$n\times m$–მართკუთხა მატრიცა, რომლის i–ურ სტრიქონსა და –ურ სვეტში მდგომი ელემენტია x_{ik} რიცხვი;

$\|X\| = \max\left\{\sum_{i=1}^n |x_{ik}| : k = 1, \ldots, m\right\}$ - X მატრიცის ნორმა;

$|X| = (|x_{ik}|)_{i,k=1}^{n,m}$ - X მატრიცის მოდულია;

$O_{n\times m}$ - $n \times m$–განზომილკებიანი მატრიცა, რომლის ყოველი ელემენტი ნულის ტოლია;

I_n - ერთეულოვანი $n \times n$–მატრიცა;

X^{-1} – კვადრატული X მატრიცის შებრუნებული მატრიცა:

$det(X)$ - კვადრატული X მატრიცის დეტერმინანტი:

$Tr(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}$ - კვადრატული $X = (x_{ik})_{i,k=1}^n$ მატრიცის კვალი;

$\mathrm{sgn}(t)$ – ნიშნის ფუნქცია, ანუ $\mathrm{sgn}(t) = 1$, თუ $t > 0$; $\mathrm{sgn}(t) = 0$, თუ $t = 0$ და $\mathrm{sgn}(t) = -1$ თუ $t < 0$.

$I =< a, b >\subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი შუალედია (ჩაკეტილი, ღია, ნახევრადჩაკეტილი, სასრული ან უსასრულო). რომელიც წერტილად არ არის გადაგვარებული. $|I|$ – სასრული I შუალედის სიგრძე

$\rho(x, G) = \inf\{\|x - y\| : y \in G\}$ არის მანძილი ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილიდან $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლემდე.

თუ $A \subset \mathbb{R}^n (A \subset \mathbb{R}^{n\times m})$, მაშინ $C(I; A)$ და $C^{(k)}(I; A)$ არის სიმრავლეები იმ ვექტორული $x : I \to A$ (მატრიცული $X : I \to A$) ფუნქციებისა, რომელთა კომპონენტები სათანადოდ უწყვეტია და k–ჯერ უწყვეტად წარმოებადია I სიმრავლის ყველა წერტილში (ამასთან, I შუალედის კიდურა წერტილებში იგულისმება შესაბამისი ცალმხრივი წარმოებულები);

თუ $x(t) = (x_i(t)_{i=1}^n)$ და $X(t) = (x_{ik}(t)_{i,k=1}^{n,m})$, მაშინ

$$x'(t) = (x_i'(t)_{i=1}^n), \quad X'(t) = (x_{ik}'(t)_{i,k=1}^{n,m});$$

$$\int_a^b x(t)dt = \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)_{i=1}^n, \quad \int_a^b X(t) = \left(\int_a^b x_{ik}(t)\right)_{i,k=1}^{n,m}.$$

თავი 1

წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის განტოლებები

1. ზოგადი საკითხები.

1.1. კოშის ამოცანა. ვთქვათ, $I \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი შუალედია, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ არის $\mathbb{G} = \{(x, y) : x \in I, y \in (\alpha, \beta)\} \subset \mathbb{R}^2$ მართკუთხედზე განსაზღვრული უწყვეტი ნამდვილი ფუნქცია. განტოლებას

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.1}$$

ეწოდება წარმოებულის მიმართ ამოხსნილი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლენა * (სქოლიოში –ყველგან, თუ საწიააღმდეგო არ იქნება თქმული, ვიგულისხმბეთ,რომ f უწყვეტი ფუნქცია). აქ x დამოუკიდებლი ცვლადია, ხოლო y კი x არგუმენტის საძიებელი ფუნქციაა. განტოლება (7.1) შეიძლება ჩაჭერილი იქნეს ექვივალენტური

$$y' = f(x, y)$$

ფორმით.

აქ და შემდგომშიც, ყველგან ვიგულისმებთ, რომ თუ რომელიმე ფუნქციასთან მითითებულია არგუმენტი, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ეს ფუმქცია ცნობილია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ვიგულისხმებთ, რომ იგი უცნობია.

განსაზღვრება 1.1. $y \in C^{(1)}(I_0; \mathbb{R})$–ფუნქციას, სადაც $I_0 \subset I$ რაიმე შუალედია, ეწოდება (7.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, თუ $y(x) \in (\alpha, \beta)$ ყოველი $x \in I_0$–თვის და

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{ყოველი} \quad x \in I_0\text{–თვის.} \tag{1.2}$$

როგორც განსაზღვრებიდან ჩანს, (7.1) განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება ლოკალურად. თუ I_0 შუალედია არის I–ს საკუთრივი ქვესიმრავლე, მაშინ ამონახსნს ვუწოდებთ ლოკალურ ამონახსნს, ხოლო თუ $I_0 = I$–ს, მაშინ ასეთ ამონახსნს ვუწობეთ გლობალურს.

შევნიშნოთ, რომ თუ f ფუნქცია წრფივია y ცვლადის მიმართ, მაშინ (7.1) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი (განსაზღვრის მაქსიმალური შუალედით) გლობალურია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ეს ფაქტი, საზოგადოდ, არ არის სამართლიიანი (ეს საკითხი დაწვრილებით განხილული იქნება პარაგრაფ ??–ში).

ამასთან დაკავშირებით, მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითები. განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება

$$y' = 1 + y^2,$$

სადაც $\mathbb{G} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

ამ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი მოიცემა ტოლობით $y(x) = \tan(x + c)$, სადაც $c \in \mathbb{R}$ რაიმე მუდმივია და, პირიქით, ყოველი მუდმივი c–თვის აღნიშნული ტოლობით განსაზღვრული გუნქცია არის ამ განტოლების ამონახსნი. ამასთან, ამ ამონახსნების განსაძვრის მაქსიმალური შუალედებია π სიგრძის ღია ინტერვალები $]-\pi/2 - c + \pi k, \pi/2 - c + \pi k[$ $(k = 0, \pm 1, \pm, \dots)$. ასე რომ, განტოლების ყველა ამონახსნი ლოკალურია და გლობალური ამონახსნი არ გააჩნია.

(ნ ა ხ ა ზ ი)

განვიხილოთ ახლა იმავე $\mathbb{G}$ სიმავლეზე განტოლება

მაგალითი 1.1. ავაგოთ

$$y' = y^2. \tag{1.3}$$

ამ განტოლებას, განსხვავებით წინა განტოლებისგან, გააჩნია როგორც გლობალური, ასევე ლოჯალური ამონახსნები. ცხადია, რომ $y(x) \equiv 0$ წარმოადგენს განტოლების ერთადერთ გლობალურ ამონახსნს. რაც შეეხება ლოკალურ ამონახსნებს ისინი მიიღება $y(x) = (c - x)^{-1}$ ($c \in \mathbb{R}$ ფუნქციების შეზღუდვით ღია $(-\infty, c)$ და $(c, +\infty)$ შუალედებზე.

(ნ ა ხ ა ზ ი)

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ (7.1) დიფერენცილურ განტოლებას შეიძლება უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. შემდგომში დავადგენთ, რომ ეს ფაქტი ზოგადია. ამიტომ, როცა საჭიროა დიფერენციალური განტოლების კონკრეტული ამონახსნის მოძებნა, განიხლება დამატებითი პირობა, რომლის მიხედვიტაც შეურცევა შესაბამისი ამონახსნი. ერთი ასეთი პირობათაგანი არის საწყისი პირობა

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.4}$$

სადაც $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ წინასწარ დასახელებული წყვილია. ამ პირობას კოშის პირობასაც უწოდებენ.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

კოშის ამოცანა: აქვს თუ არა (7.1) განტოლებას ისეთი ამონახსნი, რომელიც წინასწარ მოცემული $x_0 \in I$ წერტილისა და $c < y_0 < d$ რიცხვისთვის აკმაყოფილებს (7.2) პირობას და თუ აქვს რამდენი.

კოშის ამოცანა ჩაიწერება ასეთი სახით(7.1), (7.2). ხშირად, ამ ამოცანას საწყის ამოცანასაც უწოდებენ. (7.2) ტოლობას კოშის ან საწყის პირობას უწოდეებენ.

განსაზღვრება 1.2. ვიტყვით, რომ კოშის (7.1), (7.3) ამოცანა ამონხსნადია, თუ მოიძებნება ისეთი შუალედი $I_0 \subset I$, $x_0 \in I$, და მასზე განსაზღვრული (7.1) განტოლების ისეთი y ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (7.3) ტოლობას.

კოშის ამოცანის პარალელურად განვიხოლოთ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალური განტოლება

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, x(s))ds. \tag{1.5}$$

განსაზღვრება 1.3. $y \in C(I_0; \mathbb{R})$–ფუნქციას, სადაც $I_0 \subset I$ რაიმე შუალედია, ეწოდება (7.4) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, თუ $x_0 \in I_0, y(x) \in (\alpha, \beta)$ და ადგილი აქვს (7.4) ტოლობას ყოველი $x \in I_0$–თვის.

შევნიშნოთ, რომ კოშის ამოცანის შემთხვევაშიც, ამონახსნი განისაზღვრება ლოკალურად. საზოგადოდ, არაწრფივი განტოლების შემთხვევაში, ამ ამოცანას შეიძლება არცკი ჰქონდეს მთლიანად I შუალედზე განსაზღვერული (გლობალური) ამონახსნი. (იხ.ზემოთ მოყვანილი მაგალითები).

დებულება 1.1. $y = y(x)$ ფუნქცია არის კოშის (7.1), (7.3) ამოცანისს ამონხსნს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი წარმოადგენს (7.4) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y \in C^{(1)}(I_0; \mathbb{R})$ არის კოშის (7.1), (7.3) ამოცანის ამონახსნი. მაშინ ადგილი აქვს (7.2) ტოლობას. თუ ყოველი $x \in I_0$–თვის ამ ტოლობას ვაინტეგრებთ ინტეგრებით x_0–დან და x–მდე, ადვილად დავრწმჯნებით (7.5) ტოლობის სამართლიანობაში. ახლა ვაჩვენოთ საკმარისობა. რადგანაც f უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ (7.5) ტოლობის მარჯვენა მხარე და, მაშასადამე, მარცხენა მხარეც, ე.ი. y ფუნქციაც უწყვეტად წარმოებადია. ცხადია, რომ (7.2) ტოლობა მიიღება (7.5) ტოლობის x ცვლადით გაწარმოებით. $\square$

თეორემა 1.1. ვთქვათ, $f \in C(\mathbb{G}, \mathbb{R})$ ნენისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ ყოველი საწყისი $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ მონაცემებისთვის კოშის ამოცანა ამოხსნადია.

აღნიშნული თეორემა დამტკიცებული იქნება პარაგრაფ ??–ში.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა არ იძლევა არავითარ ინფორმაციას კოშის ამოცანის ამონახსნების რაოდენობაზე. აქვე დავძენთ, რომ წრფივი განტოლების შემთხვევაში კოშის ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი (გლობალური). დეტალურად ეს საკიტხი გამოკვლეულია იქნება ქვემოთ (იხ. პარაგრაფები ??).

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის გრაფიკს ინტეგრალური წირი ეწოდება. ყოველ $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ წერტილს შევუთანადოთ ამ წერtილზე გამავალი წრფე დახრის კოეფიციენტით $k = f(x_0, y_0)$. მიღებული სურათს ეწოდება (7.1) განტოლების შესაბამისი ე.წ. მიმართულებების ველი. თითოეულ წრფეს ეწოდება ველის მიმარტულება შესაბამის წერტილში. განსაზღვრება (1.1)–დან გამომდინარეობს, რომ G სიმრავლეში მოთავსებული წირი არის ინტეგრალური წირი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი გლუვია და ყოველ წერტილში მისი მხები ემთხვევა ველის მიმარტულებას ამავე წერტილში. ეს მიდგომა შეიძლება გამოყრნრბულ იქნეს ინტეგრალური წირების მიახლოებითი აგებისტვის.

განტოლების შესაბამისი მიმართულების ველის ასაგებად მიზანშეწონილია გამოყენებულიი იქნეს ე.წ. ი ზ ო კ ლ ი ნ ე ბ ი. იზოკლინი არის $\mathbb{G}$ სიმრავლის იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომლის თითოეულ წერტილში ველის მიმარტულებას აქვს ეწოდება ერთი და იგიეე საკუთხო კოეფიციენი. ცხადია, რომ იზოკლინები განისაზღვრება განტოლებით $f(x, y) = k$, სადაც $k \in \mathbb{R}$ რომელიმე მუდმიცია.

განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.2. ავაგოთ

$$y' = \frac{y}{x}$$

განტოლების მიმართულებების ველი. $\mathbb{G}$ სიმრავლედ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნახევარსიბრტყე $x < 0$, ასევე ნახევარსიბრტყე $x > 0$. იზოკლინები, რომლებიც შეესაბამება ველის იმ მიმართულებებს, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტია k, არის $y = kx$ $(x \neq 0)$ სხივები. მიმართულებების ველი $X > 0$ ნახევერსიბრტყეში გამოსახული ნახაზზე ??. ინტეგრალური წირები ნახევარპარაბოლებია. ადვილი საჩვენებელია, რომ ისინი მართლაც აღიწერება ტოლობებით $y = cx^2$, როცა $x > 0$ ან $x < 0$, სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერ მუდმივია.

(ნახაზი)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.3. ავაგოთ

$$y' = x^2 + y^2$$

განტოლების მიმართულებების ველი. G სიმრავლედ შეგვიძლია განვიხილოთ მთელი სიბრტყე. იზოკკლინები, რომლებიც შეესაბამება ველის იმ მიმართულებებს, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტია $k = r^2$, არის r-რადიუსიანი წრეწირები ცენტრით კოორდინატთა სათავეში $x^2 + y^2 = r^2$. მიმართულებების ველი $X > 0$ ნახევერსიბრტყეში გამოსახული ნახაზზე ??.

(ნახაზი)

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.4. ვთქვათ, მოცემულია ერთ c პარამეტრზე დამოკიდებული ბრტყელ წირთა ოჯახი

$$F(x, y, c) = 0. \tag{1.6}$$

წირს, რომელიც (1.6) ოჯახის ყველა წირს კვეთს ერთი და იგივე φ კუთხით, ამ ოჯახის ი ზ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი ტრაექტორია ეწოდება.

ტრაექტორიისა და წირების Ox ღერძთან დახრის β და α კუთხეები ერთმანეთთან დაკავშირებული ტოლობით $\beta = \alpha \pm \varphi$.

ვთქვათ, წირთა (1.6) ოჯახი აღიწერება

$$y' = f(x, y) \tag{1.7}$$

განტოლებით, ხოლო იზოგონალური ტრაექტორიების ოჯახი კი განტოლებით

$$y' = f_1(x, y). \tag{1.8}$$

ცხადია, რომ $\tan \alpha = f(x, y)$, $\tan \beta = f_1(x, y)$. მასასადამე, თუ (1.7) განტოლება ამოწერილია და φ კუთხე ცნობილია, მაშინ ადვილად მოიძებნება $\tan \beta$ და, მაშასადამე, ჩაიწერება იზოგონალური წირების (1.8) განტოლება.

ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ (იხ. პარაგრაფი ???).

1.2. ამონახსნების გაგრძელებადობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.5. ვიტყვით, (7.1) განტოლების $< a, b >$ შუალედზე განსაზღვრული $y(x)$ ამონახსნი გაგრძელებადია მარჯვნივ, თუ მოიძებენა $b^* > b$ და (7.1) განტოლების $< a, b^* >$ შუალედზე განსაზღვრული $y^*(x)$ ამონახსნი ისეთი, რომ $y(x) = y^*(x)$, როცა $x \in < a, b >$. ამასთან, $y^*(x)$ ამონახსნს ეწოდება $y(x)$ ამონახსნის მარჯვნივ გაგრძელება. ანალოგიურად განიმარტება ამონახსნის მარცხნივ გაგრძელებადობა.

განვიხილოთ ახლა (7.1) განტოლების ისეთი $y = y(x)$ ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია მარჯვნიდან ჩაკეტილ $< a, b]$ შუალედზე, სადაც $b < \sup I$. ვაჩვენოთ, რონ იგი გაგრძელებადია მარჯვნივ. განვიხილოთ კოშის (7.1), (7.3) ამოცანა, სადაც $x_0 = b$ და $y_0 = y(b)$. თეორენმა 1.1 ძალით ამ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი y_δ, რომელიც განსაზღვრულია b წერტილის რაიმე ორმხრივ $(b-\delta, b+\delta)$ $(\delta > 0)$ მიდამოში. ცხადია, რომ $f(b, y(b)) = f(b, y_\delta(b))$ და, მაშასადამე, $y = y(x)$ ამონახსნის მარცხენა წარმოებული b წერტილში ტოლი იქნება y_δ ამონახსნის მარჯვენა წარმოებულის იმავე b წერტილში. ასე რომ,

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in < a, b], \\ y_\delta(x) & x \in (b, b+\delta) \end{cases}$$

ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქცია არის (7.1) განტოლების ამონახსნი $< a, b+\delta >$ შუალედზე.

ანალოგიურად ვაცვენებთ, რომ თუ $y = y(x)$ არის (7.1) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია მარცხნიდან ჩაკეტილ $[a, b >$ შუალედზე, სადაც $a > \inf I$. მაშინ იგი იგი გაგრძელებადია მარცხნივ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.6. (7.1) განტოლების ამონახსნი ეწოდება არაგაგრძელებადი ან სრული, თუ იგი არ არის გაგრძელებადი არც მარცხნიც და არც მარჯვნივ.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ არაგაგძელებადი (სრული) ამონახსნის განსაზღვრის შუალედი ყოველთვის ღია (a, b) ინტერვალია, რომელსაც ამონახსნის არსებობის მაქსიმალურ ინტერვალს უწოდებენ. ამონახსნები გაგრძელებადობის სალითხს უფრო დაწვრილებით ქვემოთ განვიხილავთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.4. განვიხილოთ უმარტივესი დიფერენციალური განტოლება

$$y' = f(x),$$

სადაც f არის (a, b) ინტერვალზე განსაზღვრული უწტვეტი ფუნქცია, ანუ $f \in C((a, b); \mathbb{R})$. ვთქვათ, $\mathbb{G} = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in \mathbb{R}\}$. ამ განტოლების სრული ამონახსნებია f ფუნქციის

$$y = c + \int f(x)dx, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{ნებისმიერი მუდმივია,}$$

პირველადები და მხოლოდ ისინი. თითიეული მათგანი განსაზღვრულია (a, b) ინტერვალზე.

1.3. კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.7. ვიტყვით, რომ კოშის (7.1), $(7.3$ ამოცანას, სადაც $x_0 \in I$ $y_0 \in]\alpha, \beta[$ გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, თუ როგორიც არ უნდა იყოს ამ ამოცანის ორი ამონახსნი ისინი ერთმანეთის ტოოლია განსაზღვრების საერთო შუალედზე.

ეს გასაზღვრება ტოლფასია შემდეგი განსაზღრების. ვიტყვით, რომ $A = I_0 \times]\alpha_0, \beta_0[\subset G$ არის (7.1) განტოლების ერთადერთობის სიმრავლე, თუ ამ განტოლების ნებისმიერი ორი ამონახსნი ერთმანეთის ტოლია განსაზღვრის საერთო შუალედში თუკი მათი გარფიკები შედის A სიმრავლეში და იკვეთებიან.

ამ განსაზღვრების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1.5. განვიხილოთ განტოლება

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \tag{1.9}$$

სადაც $\mathbb{G}$ მთელი Oxy სიბრტყეა. (7.1) ტოლობიდან თეორემა 2.1-ის ძალით დავასკვნით, რომ $y = (x+c)^3$ ფუნქცია წარმოადგენს (7.12) განტოლების ამონახსნს $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე ყოველი $c \in \mathbb{R}$-თვის. გარდა ნიშნული ამონახსნების ოჯახისა ამ განტოლებას გააჩნია ამონახსნი $y \equiv 0$. ამას გარდა, გვაქვს ასეთი ამონახსნებიც

$$y = \begin{cases} (x+c_1)^3, \quad \text{როცა} \quad x \le c_1, \\ 0, \quad \text{როცა} \quad c_1 < x < c_2, \\ (x+c_2)^3 \qquad x \ge c_2 \end{cases}$$

ყოველი $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$–თვის. მაშასადამე, $y = 0$ წრფის ნებისმიერ წერტილზე გადის უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\mathbb{G}$ სიმრავლე არ არის კოშის ამოცანის ერთადერთონის სიმრავლე. თუმცა, როგორც თეორემა 2.1–დან გამომდინარეობს, (7.12) განტოლებისთვსი კოშის ამოცანის ერტადერთობის საიმრავლეებია ნახევარსიბრტყეებიa $y > 0$ და $y < 0$. (ნახაზე)

სამაღთლიანია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2. ვთქვათ, f ფუნქციას $\mathbb{G}$ სიმრავლეზე გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial y}$. მაშინ ყოველი $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$–თვის კოშის (7.1) (7.3) ამოცანას გააჩნია ერთადერთ ამონახსნი.

ეს თეორემა დამტკიცებული იქნება პარაგრაფ ??–ში. შევნიშნოთ, რომ ერტადერტბას შეიძლენბა ადგილი ჰქონდეს მაშინაც, როდესაც $f(x, y)$ ფუნქციას გააჩნია მხოლოდ უწყვეტობის თვისება.

როგორც თეორემა 2.1 დამტკიცებიდა ჩანს, იგი ასეც შეიძლება ჩამოყალიბდეს

თ ე ო რ ე მ ა 1.3. ვთქვათ, $f \in C(I; \mathbb{R}), g \in C((\alpha, \beta); \mathbb{R})$ და შესრულებულია (7.6) პირობა. მაშინ ყოველი $x_0 \in I$ და $y_0 \in]\alpha, \beta[$–თვის კოშის (7.5), (7.3) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა (7.1) ტოლობით, სადაც $G(y)$ და $F(x, x_0)$ ფუნქციები განსაზღვრულია შესაბამისად (7.10) და (7.11) ტოლობებით, ხოლო I_0 შუალედი კი ისეა შერჩეული, რომ ადგილი აქვს (7.8) პირობას.

(4.9) განტოლებიდან გამომდინარე დავასკვნით, რომ თეორემა 1.3–ში $g(y) \neq 0$ პირობა არაა აუცილებელი იმისთვის, რომ $\mathbb{G}$ იყოს (7.5) განტოლების ერთადერთობის სიმრავლე. ამასთანავე, (7.12) განტოლება გვიჩვენებს, რომ აღნიშნული პირობის დარღვევის შემთხვევაში (7.5) განტოლებისთვის $\mathbb{G}$ სიმრავლე აღარ იყოს ერტადერთობის საირავლე.

1.4. ზოგადი ამონახსნი. ვთქვათ, $\mathbb{G}$ არის (7.1) განტოლების ერთადერთობის სიმრავლე. ცხადია, რომ ამ განტოლების ამონახსნი კოშის (7.3) იირობით არის საწყისი x_0, y_0x მონაცემების $y(x, x_0, y_0)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია

$$\mathbb{D} = \{(x, x_0, y_0) : x_0 \in I, y \in]\alpha, \beta[,\ x \in I(x_0, y_0)\}$$

სიმრავლეზე, სადაც $I(x_0, y_0)$ ამ ამონახსნის არსებობის შუალედია. () განტოლების ყველა ამონახსნი გაგრძელებადობის სიზუსტით მოიცემა

$$y = y(x, x_0, y_0) \tag{1.10}$$

ფორმულით.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.8. უწყვეტ $y = \varphi(x, c)$ ფუნქციას ეწოდება (7.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი $\mathbb{A} = I_0 \times]\alpha_0, \beta_0[\subset G$ სიმრავლეზე, თუ ყოველი $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$–თვის $y_0 = \varphi(x_0, c)(1.1)$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთ ამონახსნი $c_0 = \psi(x_0, y_0)$ და $y = \varphi(x, c_0)$ ფუნქცია წარმოადგენს (7.1) განტოლებისთვის კოშის ამოცანის ამონახსნს საწყისი x_0 და y_0 მონაცემებით.

მოცემული გასაზღვრებიდან გამომდინარეოს, რომ $\psi(x, y)$ ფუნქცია უწყვეტია. მაღთლაც, ვთვქათ, $(x_k, y_k) \in \mathbb{A}$ $(k = 1, 2, \dots)$ ისეთი მიმდევრობაა, რომ $x_k \to x_0$ და $y_k \to y_0$, როცა $k \to +\infty$. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $c_0 = \lim_{k \to +\infty} \psi(x_k, y_k)$.?? (რატომ არსბობს ეს ზრვარი??–კიდევ უნდა ვიფიქრო!!!) თუ გადავალთ $y_k = \varphi(x_k, \psi(x_k, y_0))$ ტოლობაში ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$ და გავითვალისწინებთ, რომ φ ფუნქცია უწყვეტია, დავასკვნით რომ $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$. ამ განტოლებას კი, პირობის ძალით გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. მაშასადამე, $c_0 = \psi(x_0, y_0)$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ვთქვათ, $\mathbb{H}$ არის იმ (x, c) წყვილების სიმარვლე, სადაც $c = \psi(x, y), (x, y) \in A$. ანუ

$$\mathbb{H} = \{(x, c) : c = \psi(x, y),\ x \in I_0,\ y \in]\alpha_0, \beta_0[\}.$$

განვიხილოთ $T : \mathbb{H}H \to \mathbb{A}$ ასახვა, განსაზთვრული $T : (x, c) \to (x, \varphi(x, c))$ წესით. ცხადია, რომ T არის ურთიერთცალსახა ასახვა. ამსათან, როგორც T, ასევე მისი შებრუნებული T^{-1} ასახვაც უწყვეტია (ანუ T არის ჰომეომერფიზმი). T ასახვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს,რომ იგი $\mathbb{A}$ სიმრავლეში მდებარე ყოველ ინტეგრალურ $y = \varphi(x, c_0)$ წირს $\mathbb{H}$ სიმრავლეში შეუსაბამებს $c = c_0$ წრფის მონაკვეთს. შეიძლება ითქვას, რომ T ჰომეომორფიზმით ხდება ინტეგრალუტი წირების გაწრფივება. ??????(კარგად უნდა გავერკვე)!!!!!!!

თ ე ო რ ე მ ა 1.4. (**ზოგადი ამონახსნის არსებობის შესახებ**) ვთქვათ, $\mathbb{G}$ არის (7.1) განტოლების ერტადერთობის სა-იმრავლე. მაშინ ყოველი $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ წერილისთვის მოიძებნება ისეთი მიდამო $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, რომელშიც (7.1) განტოლებას გააჩნია ზოგადი ამონახსნი.

თეორემის დამტკიცებული იქნება პარაგრაფ ??–ში.

ამ თეორემას 1.4–ს ზოგჯერ ამონახსნების გაწრფივების თეორემას უწოდებენ, რადგანაც იგი ამტკიცებს "გამწრფივებელი" T ჰომეომორფიზმის არსებობას ერტადერთობის სიმრავლის ყოველ წერტილში. ეს ტეორემა გვიჩვენებს, რომ (7.1) განტო-ლების ამონახსნთა სიმრავლე ერთადერტობის სიმრავლეში ლოკალურად მოიცემა ერთადერთი პარამეტრის საშუალებით, განსხვავებით (7.14) ფორმულისგან.

მაგალითად, (4.9) განტოლებისთვის ფუნქცია $y = (c-x)^{-1}$) წარმოადგენს ზოგად ამონახსნს $y > 0$ და $y < 0$ ნახევარსიბრტყეებში, ხოლო ფუნქცია $y = c(1-cx)^{-1}$ კი ზოგად ამონახსნს სამრავლეებზე, რომლებიც განისაზღვრება $xy > -1$ და $xy < -1$ ყტოლობებით. (7.12) განტოლებისთვის ფუნქცია $y = (x-c)^3$ წარმოადგენს ზოგად ამონახსნს ნახევარსიბრტყეებზე $y > 0$ და $y < 0$, მაგრამ არა მთელ Oxy სიბრტყეზე, რადგანაც იგი არ არის ერთადერთობის სიმრავლე.

განსაზღვრება **??**–დან გამომდინარეობს, რომ (7.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი რაიმე $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$ სიმრავლეში განისა-ძღვრება ამ განტოლების ნებისმიერი ისეთი ამონახსნით, რომლის გრაფიკი მდებარეობს ამ სიმრავლეში. ამიტომ დიფერენ-ციალური განტოლებების თეორიისა უპირველესი ამოცანაა განტოლებების იმ კლასების დადგენაა, რომელთა ზოგადი ამონა-ხსნების ჩაწერა შესაძლებელია ცხადი სახით.

ერთ–ერთი ასეთი კლასთაგანია (შეიძლება ითქვას ძირითადი კლასი) ზემოთ აღწერილი განტოლება განცალებად ცვლა-დებში (7.5).

ადვილი საჩვენებელია, რომ თეორემა 1.3–ის პირობებში (7.1) განტოლებას G სიმრავლეში გააჩნია ზოგადი ამონახსნი და მას აქვს შემდეგი სახე

$$y = G^{-1}(F(x) + c), \tag{1.11}$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია, F და G კი, შესაბამისად, f და $\frac{1}{g}$ ფუნქციების პირველყოფილებია.

მართლაც, ვთქვათ, $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$. განვიხილოთ განტოლება

$$y_0 = G^{-1}(F(x_0) + c).$$

ამ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $c_0 = G(y_0) - F(x_0)$. (7.1) ტოლობის გამო $y = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G_0)$ ფუნქცია იქნება კოშის ამონახსნი (x_0, y_0) საწყისი მონაცემებით. მაშასადამე, (7.15) ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრება 1.8–დან.

2. განტოლებები განცალებად ცვლადებში

კონკრეტული ტიპის განტოლებების განხილვისას, აუცილებელი შემთხვევების გარდა, ჩვენ არ დავაკონკრეტებთ $\mathbb{G}$ სიმ-რავლის სახე, რადგანაც იგი განისაზღვრება კონტექსტიდან და მას შეიძლება სხვადასხვა სახე ჰქონდეს. განვიხილოთ დიფე-რენციალური განტოლება

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{2.1}$$

სადაც $f \in C(I; \mathbb{R})$, $g \in C((\alpha, \beta); \mathbb{R})$. აქ $\mathbb{G} = \{(x, y) : x \in I, y \in (\alpha, \beta)\}$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$g(y) \neq 0 \quad \text{ყოველი} \quad y \in (\alpha, \beta)\text{-თვის}. \tag{2.2}$$

ვთქვათ, $y \in C^{(1)}(I_0,]\alpha, \beta[)$ ამ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნია განსაზღვრის $I_0 \subset I$ შუალედით, $y_0 = y(x_0)$, სადაც $x_0 \in I_0$ რაიმე ფიქსირებული წერტილია.

ამონახსნის განსაზღვრებისა და (7.6) იროხის გამო გვაქვს

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad \text{როცა} \quad x \in I_0.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0.$$

მაშასადამე, $y(x)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს ტოლობას

$$G(y(x)) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0, \tag{2.3}$$

სადაც

$$G(y) \equiv \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{g(z)} \tag{2.4}$$

ფუნქცია განსაზღვრულია $]\alpha, \beta[$ შუალედზე. მეორე მხრივ, რადგანაც (7.6)-ის გამო $G'(y) \neq 0$, ამიტომ ეს ფუნქცია უწყვეტია და მკაცრად მონოტონური, რაც უზრუნველყოფს სასრული ან უსასრულო ცალმხრივი $G(a+0)$ და $G(b-0)$ ზღვრების არსებობას. აქედან გამომდინარე, G ფუნქცისს მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]a, b[$ ინტერვალი, სადაც $a = \min\{G(\alpha+0), G(\beta-0)\}$ და $b = \max\{G(\alpha+0), G(\beta-0)\}$. რადგანაც $y_0 \in]\alpha, \beta[$ და $G(y_0) = 0$, ამიტომ $a < 0 < b$. ასე რომ, (7.7)-ს აზრი რომ ჰქონდეს საკმარისია, რომ დაცული იყოს პირობა

$$a < F(x, x_0) < b, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0, \tag{2.5}$$

სადაც

$$F(x, x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(s)ds. \tag{2.6}$$

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ I_0 შერჩეულია – ასეთი ინტერვალის შერჩევა შესაძლებელია, რადგანაც $\varphi(x, x_0)$ ინტეგრალი უწყვეტია x მიმართ და, გარდა ამისა, $F\varphi(x_0, x_0) = 0$. (7.8) პირობისა და G ფუჰქციის მკაცრად მონოტონურობის ფამო (7.7) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ

$$y(x) = G^{-1}(F(x, x_0)), \quad \text{როცა} \quad x \in I_0. \tag{2.7}$$

ე.ი. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ $y(x)$ არის (7.5) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, მაშინ იგი მოიცემა (7.1) ტოლობით და მისი განსაზღვრიას შუალედი შედის I_0-ში, სადაც x_0 ნებისმიერი წერტილია $]\alpha, \beta[$ ინრევალიდან, ხოლო I_0 შუალედი კი შერჩეულია ზემოთ აღწერილი წესით. ადვილი საჩვენებელია, რომ პირიქით, (7.1) ტოლობით განსაზღვრული $y(x)$ ფუნქცია იქნება (7.5) განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე, დამტკიცდა ასეთი

თეორემა 2.1. ვთქვათ, $f \in C(I; \mathbb{R}), g \in C((\alpha, \beta); \mathbb{R})$ და შესრულებულია (7.6) პირობა. მაშინ (7.5) განტოლების ნებისმიერი $y(x)$ ამონახსნი განისაზღვრება (7.1) ტოლობით, სადაც $x_0 \in]\alpha, \beta[$ ნებისმიერია, $G(y)$ და $Fx, x_0)$ ფუნქციები განსაზღვრულია შესაბამისად (7.10) და (7.11) ტოლობებით, $y_0 = y(x_0)$, ხოლო I_0 შუალედი კი ისეა შერჩეული, რომ ადგილი აქვს (7.8) პირობას. პირიქით, (7.1) ტოლობით განსაზღვრული $y(x)$ ფუნქცია წარმოადგენა (7.5) განტოლების ამონახსნს I_0 შუალედზე.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ

$$\int_{-\alpha}^{\gamma} \frac{ds}{f(s)} = \int_{\gamma}^{\beta} \frac{ds}{f(s)} = +\infty, \quad \text{რომელიმე} \quad \gamma \in]\alpha, \beta[-\text{თვის},$$

პირობები აუცილებელია და საკმარისი იმისათვის, რომ (7.5) განტოლების ყველა ამონახსნი გაგრძელებადი იყოს მთლიანად $]\alpha, \beta[I$ შუალედზე. მართლაც, ამ შემთხვევაში $a = -\infty$ და $b = +\infty$. მაშასადამე, (7.8) პირობა შესრულბული იქნება ნებისმიერი $x_0 \in]\alpha, \beta[$-თვის. ამით საკმარისობა დამტკიცებულია. ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია

ვიგულისმებთ, რომ f ფუნქცია დადებითია. ვთქვათ, ბოლო პირობა ირღვევა რომელიმე $\gamma\in]\alpha,\beta[$–თვის. მაშინ ან $a>0$ ან $b>0$ სასრულია. ასე რომ, ყოველი $x_0\in]\alpha,\beta[$–თვის მოიძებნება ამ წერტილის შემცველი ისეთი I_0 შუალედი, რომელზეც (7.8) პირობა დარღვეულია.

ვთქვათ, ახლა $\alpha=-\infty,\beta=+\infty$. ე.ი. f არის $I=]-\infty,+\infty[$ შუალედში განსაზღვრული უწყვეტი და დადებითი (ზოგადობის შეუზღუდავად) ფუნქცია. მაშინ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{ds}{f(s)}=\int_{0}^{+\infty}\frac{ds}{f(s)}=+\infty$$

პირობები აუცილებელია და საკმარისი იმისათვის, რომ (7.5) განტოლების ყველა ამონახსნი გაგრძელებადი იყოს მთლიანად $]-\infty,+\infty[$ შუალედზე.

ანალოგიურ წინადადებებს აქვს ადგილი, როვა ბოლო ორი ინეგრალიდან მხოლოდ პირველი ან მხოლოდ მეორე ინტეგრალია განშლადია – პირველ შემთხვევაში ამონახსნი გაგრძელებადია $]-\infty,\beta[$ შუალედზე, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი $]\alpha,+\infty[$ შუალედზე.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც f ფუნქვია ნულდბა I ინტერვალის რომელიმე წერტილში გააჩნია ნული. ვთქვათ, $f(\alpha_0)=0$ და $f(x)\neq 0$, როცა $x\in I,\ \neq\alpha_0$. მაშინ ამოცაბა დაიყვენება წინა შემთხვევაზე, სადაც $I=]\alpha,\alpha_0[$ ან $I=]\alpha_0,\beta$. თუ α_0 და β_0 $(\alpha_0<\beta_0)$ f ფუნქციის ორი მეზობელი ნულია, მაშინ ამოცანა დაიყვანება განხილულ შმთხვევაზე, სადაც $I=]\alpha,\alpha_0[,I=]\alpha_0,\beta_0[$ ან $I=]\beta_0,\beta[$.

მაგალითის სახით განვიხილოთ განტოლება (4.9). ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{c}\frac{dy}{y^2}\quad\text{და}\quad\int_{-\infty}^{c}\frac{dy}{y^2}$$

ინტეგრალები კრებადია ყოველი $c>0$–თვის. განვიხილოთ ეს განტოლება $y>0$ და $y<0$ ნახევარსიბრტყეებზე. თეორემა 2.1–ის ძალით ამ განტოლების არც ერთი ამონახსნი, გარდა ნულოვანი ამონახსნისა, არ არის გაგრძელებადი მთელ $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე (იხ. ნახაზი).

3. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები.

ასეთი განტოლებები მიეკუთვნება იმ განტოლებათა ტიპს, რომლებიც გარკვეული გარდაქმნებით დაიყვანება განტოლებაზე განცალებად ცვლადებში. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები განიხილება $\mathbb{G}=]-\infty,0[\times\mathbb{R}$ ან $\mathbb{G}=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ სიმრავლეებზე.

განტოლებას

$$y'=f(x,y) \tag{3.1}$$

ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $f(t,x)$ არის თავისი არგუმენტების ნულივანი განზომილების ერთგვაროვან ფუნქციას,ანუ ყოველი $\lambda>0$–თვის ადგილი აქვს შემდეგ იგივეობას

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv f(x,y) \tag{3.2}$$

განსაზღვრების თანახმად, $f(x,y)$–ს ეწოდება k–ური რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, თუ ყოყველი $\lambda>0$–თვის ადგილი აქვს იგივეობას

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^k f(x,y);$$

თუ $k=0$, მაშინ გვაქვს

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^0 f(x,y)=f(x,y).$$

ასეთი ფუნქციებია ნებისმიერი k რიგის ფორმა (ერთგვაროვანი მრავალწევრი). მაგალითად,

$$\frac{x^3y+y^4}{x^2y^2},\quad\frac{x^2-xy}{x+y},\quad y^2+5xy,\quad x^{k-1}y-4x^2y^{k-2}-y^k,$$

შესაბამისად, 0,1,2,k რიგების ერთგვაროვანი ფუმქციებია.

თუ (8.16) ტოლობაში ავიღებთ $t = \frac{1}{x}$, მივიღებთ შემდეგ იგივეობას

$$f(x,y) \equiv f\Big(1, \frac{y}{x}\Big).$$

ე.ი. მარჯვენა მხარეში დგას ერთი $\frac{y}{x}$ არგუმენტის ფუნქცია. თუ მას აღვნიშნავთ $\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$–ით, მივიღებთ, რომ ერთგვაროვანი განტოლება ყოველთვის გადაიწერება შემდეგი სახით

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{3.3}$$

ცხადია, რომ საზოგადოდ (8.17) განტოლებაში ცვლადები არ განცალდება. შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ეს განტოლება გამარტივდება თუ შემოვიტანთ ახალ საძიებელ ფუნქციას ტოლობით

$$u = \frac{y}{x},$$

საიდანაც გვაქვს

$$y = ux. \tag{3.4}$$

თუ $y' = xu' + u$ გამოსახულებას შევიტანთ (8.17) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ განტოლებას განცალებად ცვლადებში

$$u' = \varphi(u) - u,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ თუ $\varphi(z) - z \neq 0$, მაშინ

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + c, \tag{3.5}$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია. თუ ამ გამოსახულებაში u–ს ნაცვლად შევიტანთ $\frac{y}{x}$ გამოსახულებას, მივიღებთ (8.17) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

ვთქვათ, ახლა $\varphi(u) - u \equiv 0$. მაშინ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე $y' = \frac{y}{x}$. მიღებული განცალებად ცვლადებიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ტოლობით $y = cx$, სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია. თუ $\varphi(u) - u$ ხდება ნულის ტოლი რომელიმე $u = u_0$–თვის, მაშინ (8.19) ფორმულით მოცმული ამონახხნების გარდა არსებობს ასეთი ამონახსნი $y = u_0 x$.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1.

$$y' = \frac{2xy}{x - y}. \tag{3.6}$$

ცხადია, რომ ეს განტოლება შეიძლება განხილული იყოს $y > x$ და $y < x$ ნახევარსიბრტყეებზე ცალ–ცალკე.

$y = ux$ ჩასმით (8.20) განტოლება დაიყვანება

$$u + xu' = \frac{2u}{1-u} \quad \text{ანუ} \quad xu' = \frac{u + u^2}{1-u}$$

გამტოლებაზე განცალებად ცვლადებში. მაშასადამე, გვაქვს

$$\int \frac{(1-u)du}{u^2 + u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{როცა} \quad u \neq 0 \quad \text{და} \quad u \neq -1.$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\int \frac{(1-u)du}{u^2 + u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{როცა} \quad u \neq 0 \quad \text{და} \quad u \neq -1.$$

ინტეგრებით ვღებულობთ, რომ

$$\ln|u| - 2\ln|u+1| = \ln|x| + c \quad \text{ანუ} \quad \frac{u}{(u+1)^2 x} = \pm \exp c \cdot x$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია. თუ უკანასკნელ ტოლობაში ჩავსვავთ $u\frac{y}{x}$ მნიშვნელობას მივიღებთ

$$y = c(y+x)^2, \quad \text{სადაც} \quad c \quad \text{ნებისმიერი } \textbf{არანულოვანი} \text{ მუდმივია.}$$

გარდა ამი ამონახსნების გვაქვს ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამება $u = 0$ და $u = -1$ მნიშვნელობებს — კერძოდ, $y = 0$ და $y = -x$ ამონახსნები. ამასთან ისინი, როგორც ამონახსნები არის განსაზღვრული $]-\infty, 0$ და $]0, +\infty[$ ღია ინტერვალებზე.

3.1. ერთგვაროვანზე დაყვანადი განტოლებები. ა) განვიხილოთ განტოლება

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Big), \tag{3.7}$$

სადაც f თავისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო a, b, c, a_1, b_1, c_1 კი ნამდვილი მუდმივებია. შევნიშნოთ, რომ თუ $c = c_1 = 0$, მაშინ განტოლება ერთგვაროვანია, რომლის ამოხსნაც უკვე ცნობილია. ეს განტოლება დაიყვანება ერთგვაროვანზე ცვლადების გარკვეული წრფივი გარდაქმნებით. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები

$$x = t + x_0, \quad y = z + y_0,$$

სადაც x_0 და y_0 უცნობი მუდმივებია. გვაქვს

$$dx = dt, \quad dy = dz.$$

თუ (3.7) განტოლებაში შევიტანთ x და y ცვლადების ნაცვლად მათ გამოსახულებებს, მივიღებთ განტოლებას

$$z' = f\left(\frac{at+bz+ax_0+by_0+c}{a_1t+b_1z+a_1x_0+b_1y_0+c_1}\right).$$

მიღებული ვანტოლება იქნება ერთგვაროვანი, თუ თავისუფალოი წევრები მრიცხველისა და მნიშვნელში ნულის ტოლია, ანუ

$$\begin{cases} ax_0+by_0+c = 0, \\ a_1x_0+b_1y_0+c_1 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

თუ x_0 და y_0 ამ სისტემის ამონახსნებია, მაშინ t და z ცვლადებისთვის მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას

$$z' = f\left(\frac{at+bz}{a_1t+b_1z}\right).$$

ამ განტოლების ამონახსნში თუ t–ს შევცვლით $x - x_0$–ით, ხოლო z–ს $y - y_0$–ით, მივიღებთ (3.7) განტოლების ამონახსნს.

(3.8) სისტემას არ აქვს ამონახსნი, თუ მისი კოეფიციენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი $ab_1 - a_1b = 0$. მაშინ ეს მეთოდი მიუღებელია. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ და განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y' = f\Big(\frac{ax+by+c}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_1}\Big). \tag{3.9}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$z = ax + by,$$

მაშინ $z' = a + by'$ და (3.9) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{1}{b}z' = \frac{a}{b} + f\Big(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\Big), \quad \text{თუ} \quad b \neq 0,$$

ე.ი. მივიღებთ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს x ცვლადს, ანუ ცვლადები განცალდება. თუ $b = 0$, მაშინ (3.9) განტოლების მარჯვენა მხარეში არ მონაწილეობს y ცვლადი – მივიღებთ ისევ განტოლებას განცალებად ცვლადებში.

ვთქვათ, ახლა $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \lambda$. მაშინ (3.9) განტოლების მარჯვენა მხარე მუდმივია და ამ შემთხვევაშის მისი ამონახსნი მოიცემა ცხადი სახით.

განხილულ მეთოდს აქვს შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: ერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში (3.9) განტოლების მარჯვენა მხარეში განხილული მრიცხველი და მნიშვნელი წარმოადგენს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ ორ წრფეს. ზოგად შემთხვევაში ეს წრფეები კოორდინატტა სათავეზე არ გაივლის. ზემოთ განხილული ჩასმა მდგომარეობს იმაში,

რომ კოორდტნატთა სათავე გადადის ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილში. განსაკუთრებული შემთხვევაა, როცა ეს წრფეები პარალელურია ან ერთმანეტს ემთხვევა.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 3.2.

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

ზემოთ განხილულ აღნიშვნებში განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს ნ

$$z' = 2\left(\frac{z+y_0+2}{t+z+x_0+y_0-1}\right)^2.$$

(3.8) სისტემის ამოხსნით მივიღებთ $x_0 = -2$ და $y_0 = 3$. ასე რომ, $x = t+3$ და $y = z-2$ გარდაქმნით განტოლება დაიყვანება ერთგვაროვან განტოლებაზე

$$z' = 2\left(\frac{z}{t+z}\right)^2.$$

ბ) $g(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება k რიგის კვაზიერთგვაროვანი, თუ მოიძებნება α და β ისეთი, რომ ყოველი $\lambda > 0$–თვისა

$$g(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k g(x,y).$$

?? ამასთან, α და β–ს ეწოდება x და y ცვლადების წონები. გადამრავლების დროს ვაზიერთგვაროვანი წონები იკრიბება. მაგალითად, თუ x–ის წონაა α, ხოლო y–ს კი β, მაშინ ??

დიფერენციალურ (7.1) განტოლებას ეწოდება კვაზიერთგვაროვანი α და β წონებით, თუ ფუნქცია $f(x,y)$ არის $\beta-\alpha$ რიგია კვაზიერთგვაროვანი ფუნქცია α და β წონებით, ე.ი.

$$f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x,y).$$

ასეთი სახის განტილება $y = zx^{\beta-\alpha}$ გარდაქმნით დაიყვენება განცალებად ცვლადებიან განტოლებაზე. საილუსტრაციო გან–ვიხილოთ მაგალითი

მაგალითი 3.3.

$$y' = \frac{2x^6+y^4}{2x^4y}.$$

ვთქვათ, x–ის რიგია α, ხოლო y–ის კი β. განტოლება იყოს კვაზიერთგვაროვანი აუცილებელია, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{2\lambda^{6\alpha}x^6+\lambda^{4\beta}y^4}{2\lambda^{6\alpha+\beta}x^4y} = \lambda^{\beta-\alpha}\frac{2x^6+y^4}{2x^4y}.$$

ე.ი. განტოლებათა $6\alpha-4\alpha-\beta = 4\beta-4\alpha-\beta = \beta-\alpha$ იყოს თავსებადი. ამ სისტემის ამოხსნით დავასკვნით, რომ მისი ამონახსნებია (α,β) წყვილები, რომლების დაკავშირებული ერთმანათტან $2\beta-3\alpha$ ტოლობით.მაშასადამე, განტოლება არის კვაზიერთგვაროვანი. იგი დაიყვანება ერთგვაროვანზე $y = zx^{\frac{3}{2}}$ გარდაქმნით.კერძოდ, იგი დაიყვანება შემდეგ განცალებად ცვლადებიან განტოლებაზე

$$z' = \frac{z^4-3z^2+2}{2xz}.$$

ამ უკანასკნელის ამონახსნს თუ ჩავსვავთ გარდაქმის ზემოთ მოცემულ ტოლობაში, მივიღებთ განხილული მაგალითის ამონა–ხსნს.

გ) ზოგიერთი განტოლება დაიყვანება ერთგვაროვანზე $y = z^m$ ჩასმით, სადაც m რაღაც მუდმივია, რომელიც უნდა შეირჩეს განტოლების მარჯვენა მხრიდან გამომდინარე. ეს შესაძლებელი მაშინ, როდესაც განტოლებაში მონაწილე ყველა წევრს აქვს ერთი და იგივე რიგი, თუ x ცვლადს მივანჭებთ 1–ის ტოლ რიგს, y ცვლადს – m რიგს, ხოლო y'–ს კი $m-1$–ს. განვიხილოთ მაგალითი,

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4.

$$y' = xy^5 - \frac{y}{2x}.$$

ვთქვათ,$y = z^m$. მაშინ განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mz^{m-1}z' = xz^{5m} - \frac{z^m}{2x}.$$

m უნდა შეირჩეს ისეთნაირად, რომ $m-1 = 1+5m = m-1$. ეს სისტემა თავსებადია და მისი ამონახსნია $m = -\frac{1}{2}$. ასე რომ, მოცემული განტოლება დაიყვანება ერთგვაროვან $z' = \frac{z}{x} - 2\frac{x}{z}$ განტოლებაზე $y = z^{-\frac{1}{2}}$ გარდაქმნით.

შევნიშნოთ, რომ თუ შესაბამისი სისტემა არათავსებადია, მაშინ აღნიშნული გარდაქმნით არაერთგვაროვანი განტოლება არ დაიყვანება ერთგვაროვანზე.

3.2. ინტეგრალური წირების გეომეტრიული თვისებები. განვიხილოთ განტოლება, რომელიც არ შეიცავს y ცვლადს

$$y' = f(x). \tag{3.10}$$

თუ ამ განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადთა

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + c, \tag{3.11}$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ $dx = dx_1$ და $dy = dy_1$ ტოლობების გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ განტოლება გადადის თავის თავში. ასე რომ, თუ $F(x,y) = 0$ არის (3.10) განტოლბის კერძო ინტეგრალი, მაშინ $F(x_1, y_1) = 0$, ანუ

$$F(x, y+c) = 0 \tag{3.12}$$

აგრეთვე იქნება კერძო ინტეგრალი ნებისმიერი $c \in \mathbb{R}$–თვის.

ადვილი საჩვენებელია, რომ პირიქითაც, თუ დიფერებციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს აქვს (3.12) სახე, მაშინ ნებისმიერი მუდმივის გამორიცხვით მივიღებთ (3.10) სახის განტოლებას. (3.11) გარდამნის გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ სიბრტყის ყველა წერტილი (x,y) გადადის Oy ღერძის პარალელურად ერთი და იგივე c სიდიდეზე(ანუ გვაქვს ე.წ. ??გადატანა––იტალიკ??). ცსადია, რომ (3.11) გარდაქმნით (3.10) დიფრენციალური განტოლების მიმართულების ველი არ იცვლება. მართლაც, Oy ღერძის პარალელური $x = x_0$ წრფეები არის ამ განტოლების იზოკლინები, რადგანაც ამ წრფეებზე კუთხური y' კოეფიციენტი მუდმისი სიდიდეა და იგივ $f(x_0)$–ს ტოლია. ცხადია, რომ ინტეგრალური წირების ოჯახი (3.11) გარდაქმნით არ იცველაბ, ანუ გადადის თავის თავში. თუმცა ცალკეული $F(x, y, c_0)$ წირი გადადის სხვა, კერძოდ, $F(x, y, c_0 + c)$ წირში.

ამავე დროს, ნათელის, რომ თუ გვაქვს ორი გადატანა $x_1 = x,\ y_1 = y + c_1$ და $x_2 = x_1,\ y_2 = y_1 + c_2$, მაშინ მათი კომპოზიციაც კვლავ იქნება გადატანა - $x_2 = x,\ y_2 = y + c_1 + c_2$ (გადატანა $c_1 + c_2$ სიდიდეზე). ამ შემთხვევაში ვიტყვით, (3.10) განტოლების გადატანების სიმრავლე წარმოადგენს ერთპარამეტრიან ჯგუფს. იმავე სახის ჯგუფს ქმნის ამ განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახი.

ანალოგიური მდგომარეობას აქვს ადგილი

$$y' = f(y) \tag{3.13}$$

განტოლებისთვის. ამ განტოლებისთვის გვაქვს

$$x_1 = x + c,\ y_1 = y, \quad c \in \mathbb{R}$$

გადატანების (Ox ღერძის პარალელური) ერთპარამეტრიანი ოჯახი. იგივე ოჯახს ქმნის ამ განტოლების ინტეგრალურ წირთა ოჯახი. ზოგადი ინეგრალი მიიღბა კერძო ინტეგრალიდან x ცვლადის $x + c$–თი შეცვლით.

ამ თვალსაზრისით განვიხილოთ ზოგადი სახის ერთგვაროვანი განტოლება

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{3.14}$$

ამ განტოლებისთვის გვაქვს $x_1 = cx,\ y_1 = cy \quad (c \in \mathbb{R})$ გარდაქმნათა ჯგუფი, რადგანაც $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$. ეს არის ??მსგავსების გარდაქმნა–იტალიკ (ჰომოთეტია) მსგავსების ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. მასასადამე, კოორდინატთა

სათავეზე გამავალ თითოეულ წრფეზე ველის მიმართულება მუდმივია. ასე რომ, ეს წრფეები წარმოადგენს იზოკლინებს. ცხადია, რომ თუ (3.14) განტოლების კერძო ინტეგრალი მოიცემა $F(x,y)$ ფორმულით, მაშინ $F(cx,cy)$ $(c \in (R))$ იქნება ზოგადი ინტეგრალი. ინტეგრალური წირების ოჯახი შედგება მსაგვსი წირებისგან.

გამომდინარე თქმულიდან, შეგვიძლია (3.14) განტოლების ინტეგრებადობის საკითხი განვიხილოთ ახალი თვალსაზრისით. კერძოდ, თუ ახალ ცვლადებად ავიღებთ $u = \frac{y}{x}$ და x–ს, მაშინ გარდაქმნების ჯგუფი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$u_1 = u, \quad x_1 = cx$$

დაბოლოს, თუ შემოვიყვანთ ცავლადს $\xi = \ln x$, მივიღებთ გარდაქმნას

$$u_1 = u, \quad \xi_1 = \xi + c',$$

(სადაც $c' = \ln c$).

ახალ u, ξ ცვლადებში ჩვენ მივიღეთ (3.11) ფადატანების ჯგუფი, რაც იმას ნიშნაბს ამ ცვლადებში განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{d\xi}{du} = \varphi(u),$$

რომელიც ცხადად არ შეიცავს ξ ცვლადს.

აქვე შევნიშნოთ, რომ x და u ცვლადებში ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du} = \psi(u)$$

სახის განტოლებაზე.

ერთგვარობანზე დაყვანადი (3.7) განტოლებისთვის გვაქვს გადატანების ჯგუფი, ცენტრით $ax + by + c = 0$ და $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილში. სხვა დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაშიც, თუ ცნობილია მათი დასაშვები გარდაქმნები უწყვეტი ჯგუფი, მაშინ შესაძლებელია ხდება მათი მათი კვადრატურებში ინტეგრება.

განციხილოთ ახლა ერთი ფიზიკური ამოცანა, რომელიც აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5. **(სარკე, რომელიც აფოკუსირებს პარალელურ სხივებს)** როგორი ფორმა უნდა ჰქონდეს სარკეს, რომელიც იკრებს მისი ოპტიკური ღერძის ყველა პარალელურ სხივს.

ამოხსნა. ვთქვათ, არეკლილი ხსივები ფოკუსირდება კოორდინატთა სათავეში.

(ნახაზი) აბსცისთა Ox ღერძი მივმართოთ სარკის ოპტიკური ღერძის გასწვრივ და შევადგინოთ xOy სიბრტყით საძიებელი ზედაპირის კვეთის განტოლება. პარალელური კონის ყოველი QM სხივმა არეკლის შემდეგ უნდა გაიაროს კოორდინატტა სათავეში. არეკლის კანონის თანახმად $< \alpha =< \beta$. მაშასადამე, MON სმკუთხედი ტოლფერდაა და $OM = ON$, ანუ $M(x,y)$ წეტილის რადიუს–ვექტორი ტოლია იმ მონაკვეთის სიგრძის, რომელსაც M წერტილში აღმართული ნორმალი კვეთს Ox ღერძა:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + yy'.$$

მივიღეთ ერტგვაროვანი დიფერენციალური გამტოლეა, რომლის ამონახსნები მოიცემა ფორმულიათ

$$y^2 = 2c\Big(x + \frac{c}{2}\Big), \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R} \quad .$$

მიღებული წირტა ოჯახი წარმოადგენს პარაბულებს საერთო ფოკუსით კოორდინატთა სათვეში და $p = c$ პარამეტრით.

რადგნაც xOy სიბრტყე არჩეული იყო ნებისმიერად, ამიტომ ანალოგიური კვეთა მიიღება ნებისმიერი სიბრტყით, რომელიც გადის Ox ღერძზე. ამიტომ საძიებელი სარკისებური ზედაპირი არის პარაბოლოიდი, რომელიც მიიღება ზემოთ მოღებული პარაბოლის ბრუნვით Ox ღერძის ირგვლივ.

თუ, მაგალიტად, საჭიროა იმ სარკის ზედაპირის ფორმის დადგენა რომლის ფოკალური ქორდა $2P = 8,\ C = 4,$ მაშინ საძიებელი სარკის ფორმა იქნება $y^2 + z^2 = 8(x + 2)$ ბრუნვითი პარაბოლოიდი. '

4. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

$\mathbb{G} = \{x \in I, y \in \mathbb{R}\}$ სიმრავლეზე განვიხილოთ განტოლება

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{4.1}$$

სადაც $p, q \in C(I, \mathbb{R})$.

სამართლიანია შემდეგი

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 4.1. თუ $p,\ q \in C(I;\mathbb{R})$, მაშინ ყოველი $x_0 \in I$ და $y_0 \in \mathbb{R}$–თვის (8.37), (7.3) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი წარმოდგინდება შემდეგი ფორმულით

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right) + \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad x \in I. \tag{4.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (8.37), (7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი $y(x)$. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია z შემდეგი ტოლობით

$$y(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right) z(x), \quad \text{როცა} \quad x \in I. \tag{4.3}$$

ცხადია, $z \in C^{(1)}(I;\mathbb{R})$, $z(x_0) = y(x_0) = y_0$ და, გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ (8.37) განტოლების ამონახსნის განსაზღვრებას, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$z'(x) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right)(-p(x)y(x) + y'(x)) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right)q(x), \quad \text{როცა} \quad x \in I.$$

მაშასადამე, z წარმოადგენს

$$\frac{dz}{dx} = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right)q(x), \tag{4.4}$$

$$z(x_0) = y_0, \tag{4.5}$$

კოშის ამოცანის ამონახსნს. ადვილი დასანახია აგრეთვე, რომ, პირიქით, თუ z არის (7.19), (7.20) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ (7.18) ტოლობით განსაზღვრული y ფუნქცია იქნება (8.37), (7.3) ამოცანის ამონახსნი (შეამოწმეთ).

რადგან (7.20) განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, (7.20), (7.21) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი z და მას აქვს შემდეგი სახე

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{\tau} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad x \in I. \tag{4.6}$$

თუ მიღებულ (7.22) ტოლობას ჩავსვამთ (7.18)–ში მივეიღებთ (8.38) ტოლობას.

ე.ი. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ (8.37), (7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი,მაშინ იგი აუცილებლად მოიცემა (8.38) ტოლობით. მეორე მხრივ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია y წარმოადნეს აღნიშნული ამოცანის ამონახსნს (შეამოწმეთ). ამით დებულება დამტკიცებულია. □

როგორც დებულები 4.1 დამტკიცებიდან ჩანს, (8.37) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$y = c\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds\right) + \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{x} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad x \in I. \tag{4.7}$$

ამ განტოლების ამონახსნი განუსაზღვრელი ინტეგრალით შეიძლება ჩაწერილ იქნეს ასე

$$y = \exp\left(\int p(x)dx\right) \cdot \left(c + \int \exp\left(-\int p(x)dx\right)q(x)dx\right), \quad \text{როცა} \quad x \in I. \tag{4.8}$$

განხილულ მაგალითებში განტოლებების ზიგადი ამონახსნები გამოიანგარიშება სასრულო რაოდენობის ელემენტარული ოპერაციებით განტოლებაში შემავალ ფუნქციებზე და, აგრეთვე, ამ ფუქციების ინტეგრებოთა და სასრულო რაოდენობის სუპერპოზიციებით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ დიფერენციალური განტოლება ინტეგრებადია კვადრატურებში.

თუ $q(x) \equiv 0$, მაშინ (8.37) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$y' = p(x)y \tag{4.9}$$

და მას **წრფივი ერთგვაროვანი** განტოლება ეწოდება. ეს კი არის განტოლბა განცალებად ცვლადებში და მისი ნულოვანი ამონახსნი არ მოიცემა კვადრატურებში. ამონახსნი მოიცემა ფორმულით ერ

შევნიშნოთ, რომ (4.8) ტოლობის პირველი წევრი $y = c \exp\big(\int p(x)dx\big)$ წარმოადგენს (4.9) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს, ხოლო მეორე წევრი $\exp\big(\int p(x)dx\big) \cdot \int \exp\big(-\int p(x)dx\big)q(x)dx,$ რომელიც მიიღება თუ დავუშვებთ, რომ $c = 0,$ წარმოადგენს არაერთგვაროვანი დანტოლების კერძო ამონახსნს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი, მაშინ არაერთგავეროვანი ამონახსნი დაიყვანება ერთგვაროვანზე. მართლაც, ვთქვათ, y_* არის (8.37) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნი. შემოვიტანოთ ახალი z ცვლადი ტოლობით:

$$y = y_* + z.$$

თუ ამ ტოლობას შევიტანთ (8.37)-ში, მივიღებთ

$$y_*' + z' = p(x)y_* + p(x)z + q(x).$$

აქედან, $y_*' = p(x)y_* + q(x)$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$z' = p(x)z.$$

მაშასადამე, ??იტალიკ თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი, მაშინ ზოგადი ამონასნი მიირება ერთი კვადრატურით. დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების სტანდარტული გზაა მათი დაყვანა რომელიმე ზემოთ გამოკვლეულ განტოლებაზე.??

მეორე მხრივ, თუ ცნობილია ერთგვაროვანი (4.9) განტოლების რაიმე კერძო y_1 ამონახსნი, მაშინ cy გამოსახულება კვლავ იქნება ამონახსნი ნებისმიერი $c \in \mathbb{R}$-თვის. ასე რომ, ეს არის ზოგადი ამონახსნი და იგი მოიზებნა კვადრატურების გარეშე.

განვიხილოT ახლა ის შემთხვევა,როცა ცნობილია არაერთგვაროვანი განტოლების ორი y_1 და y_2 კერძო ამონახნი. ცხადია, რომ გვაქვს ტოლობები

$$y_1' = p(x)y_1 + q(x), \quad y_2' = p(x)y_2 + q(x).$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად გამოკლებით მოვიღებათ

$$(y_2 - y_1)' = p(x)(y_2 - y_1).$$

მაშასადამე, $y_2 - y_1$ არის ერტგვაროვანი განტოლბის კერძო ამონახსნი. ზემოთქმულის ზალიტ დვასკვნით, რომ (8.37) განტოლბის ზოგად ამონხცნი მოიცემა ტოლობით

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1),$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმოვია.

ე.ი. თუ ცნობილია არაერთგვაროვანი განტოლების ორი კერძო ამონახსნი, მაშინ ზოგადი ამონასნი მიიცემა კვადრატურების გარეშე.??

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.1. (4.8) ფორმულა შეიზელაბა მირებული იქნეს შემდეგი მსჯელობით. მოვახდინოთ ე.წ. ბ ე რ ნ უ ლ ი ს $y = zu$ გარდაქმნა. მაშინ (8.37) განტოლება მიიღებს სახეს

$$z'u + z(u' - p(x)u) = q(x).$$

შევაეჩიოთ u ფუნქცია ისე, რომ z-ის კოეფიციენტი ნულის ტოლო გახდეს, ანუ

$$u' - p(x)u = 0,$$

საიდანაც ბღებულობთ. რომ $u = \exp\big(-\int p(x)dx\big)$ (საკმარისია ვიპოვოთ ერთი მაინც ამონახსნი და ამიტომაც ჩვენ ვუშ–ვებთ, რომ $c = 1$). ამის შემდეგ z ფუნქცია განისაზღვრება კვადრატურით $uz' = q(x)$ განტოლებიდან. საიდანაც მივიღებთ

$$z = \int u^{-1}(x)q(x)dx + c,$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია, იქნება (8.37) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

$$y = u(x)\bigg(c + \int u^{-1}(x)q(x)dx\bigg),$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია,

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.2. როგორც (4.8) ფორმულიდან ჩანს, წრფივი განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y = c\varphi(x) + \psi(x),$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. სამართლიანია პირიქითი დებულებაც. თუ რაიმე განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ამ უკანასკნელი ფორმულით, მაშინ განტოლება წრფივია. ამ ფაქტის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით თუ გამოვ–რიცხავთ c მუდმივს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4.3. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წრფივი (8.37) განტოლება ინარჩუნებს თავის სახეს ცვლადების შემდეგი გარდაქმნებისას:

1) დამოუკიდებელი ცვლადის $x = \varphi(\xi)$ გარდაქმნისას, სადაც $\varphi(\xi)$ ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა;

2) დამოკიდებელი ცვლადის $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ გარდაქმნისას, სადაც $\alpha(x) \neq 0$ და $\beta(x)$ არის x ცვლადის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციები.

ამ პუნქტში მოცემული დებულება 1.2–ის მარტივი შედეგებია. მათ ხშირად იყენებენ. განსაკუთრებით კი ლემა 1.2–ს, რომელიც გრონუოლ–ბელმანის ლემის სახელიტ არის ცნობილი.

შემდეგ ლემას, რომელიც გრონუოლ–ბელმანის ლემის სახელითაა ცნობილი ხშირად იყენებენ დიფერენციალურ განტო–ლებათა თეორიაში. იგი გამომდინარეობს წინადადება 4.1–დან.

ლ ე მ ა 4.1. (გრონუოლ-ბელმანი). ვთქვათ, $p \in C(I;\mathbb{R}_+)$, $t_0 \in I$ და $c_0 \in \mathbb{R}_+$. მაშინ ყოველი $u \in C(I;R)$ ფუნქციისთვის, რომელიც I შუალედში აკმაყოფილებს უტოლობას

$$u(t) \le c_0 + \bigg|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\bigg|, \tag{4.10}$$

ამავე შუალედზე სამართლიანია შეფასება

$$u(t) \le c_0 \exp\bigg(\bigg|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\bigg|\bigg). \tag{4.11}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$v(t) = c_0 + \bigg|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\bigg|.$$

მაშინ (8.37)–ის გამო

$$u(t) \le v(t), \quad \text{როცა} \quad \in I. \tag{4.12}$$

განვიხილოთ ინტერვალი $I_+ = \{t \in I : t \ge t_0\}$. ცხადია, რომ v ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია ა I_+ შუალედში და

$$v'(t) = p(t)u(t) \le p(t)v(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

ასე რომ, I_+ შუალედზე v ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი კოშის ამოცანის ამონახსნს

$$v'(t) = p(t)v(t) + \delta(t), \quad v(t_0) = c_0, \tag{4.13}$$

სადაც $\delta(t) \equiv v'(t) - p(t)v(t)$. ცხადია, რომ

$$\delta(t) \leq 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I_+. \tag{4.14}$$

წინადადება 4.1–ის ძალით ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მას აქვს შემდეგი სახე

$$v(t) = c_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

საიდანაც, (8.41) გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$v(t) = c_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds\right), \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

აქედან, (8.39)–ის ძალით დავასკვნით, რომ (8.38) შეფასება შესრულებულია, როცა $t \geq t_0$.

ანალოგიურად მომდება (8.38) შეფასება, როცა $t \leq t_0$. ლემა დამტკიცებულია. □

ლ ე მ ა 1.1. ვთქვათ, $p_0,\ p_1 \in C(I;\mathbb{R})$ და $t_0 \in I$. მაშინ ყოველი $u \in C(I;R)$ ფუნქციისთვის, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია $I \setminus \{t_0\}$ სიმრავლეზე და აღნიშნულ სიმრავლეზე აკმატოფილებს უტოლობას

$$u'(t)\,\mathrm{sgn}(t-t_0) \leq p_1(t)u(t) + p_0(t), \tag{4.15}$$

I შუალედზე სამართლიანია შეფასება

$$u(t) \leq u(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{p}_1(s)ds\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \tilde{p}_1(s)ds\right)\tilde{p}_0 d\tau, \tag{4.16}$$

სადაც $\tilde{p}_k(t) = p_k(t)\,\mathrm{sgn}(t-t_0)$ $(k = 0, 1)$. დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა ვაჩვენოთ, რომ თუ $t_0 < \sup$, მაშინ $I_1 = \{t \in I : t > t_0\}$ შუალედში სამართლიანის შეფასება (7.15) .

(7.7)–ის გამო I_1 შუალედში ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$u'(t) = p_1(t)u(t) + p_0(t) - \delta(t),$$

სადაც $\delta \in C(I;\mathbb{R}_+)$. აქედან, დებულება 1.1–ის თანახმად, ყოველი ნებისმიერად მცირე $\delta > 0$–თვის გვაქვს

$$u(t) = u(t_\varepsilon) \exp\left(\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} p_1(s)ds\right) + \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p_1(s)ds\right)(p_0(\tau) - \delta(\tau))d\tau$$

$$\leq u(t_\varepsilon) \exp\left(\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} p_1(s)ds\right) + \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p_1(s)ds\right)p_0(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_\varepsilon, \quad t \in I,$$

სადაც $t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon$. თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ (7.15) შეფასებას I_1 შუალედში.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ $t_0 > \inf I$, მაშინ (7.15) შეფასება სამართლიანია $I_2 = \{t \in I : t < t_0\}$ შუალედში. ლემა დამტკიცებულია. □

განვიხილოთ გეომეტრიული ამოცანა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1. ვიპოვოთ $(1, 2)$ წერტილზე გამავალი წირი, რომლის ყოველ წერტილში გამავალი მხები $y = x^2$ პარაბოლას კვეთს წერტილში, რომლის აბსცისა შეხების წერტილის აბსცისის გაორმაგებული მნიშვნელობის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, (x, y) საძიებელი წირის ნებისმიერი წერტილია. ამ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებას აქვს სახე

$$z - y = y'(t - x),$$

სადაც z და t მხების მიმდინარე წერტილების კოორდინატებია. ვთქვათ, (x_0, y_0) წერტილი ამ წრფისა და $y = x^2$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილია. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს

$$y_0 - y = y'(x_0 - x),$$

სადაც $x_0 = 2x$ და $y_0 = x_0^2 = 4x^2$. აქედან დავასკვნით, რომ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებს საძიებელი წირი აქვს შემდეგი სახე

$$4x^2 - y = y'(2x - x), \qquad xy' = -y + 4x^2.$$

????????????

მაშასადამე, საძიებამ წრფის პარაბოლასთან გადაკვეთის

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.2. განვიხილოთ ელექტრული წრედი, რომლის წინაღობა ომური წინაღობაა R, ხოლო თვითინდუქციის კოეფიციენტი კი არის L. ამ წრედში გამავალი დენის i ძალა აკმაყოფილებს წრფივ განტოლებას

$$\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{4.17}$$

სადაც $E(t)$ არის დროის t მომენტში ელექტრომამოძრავებელი ძალის სიდიდე. ვიპოვოთ დენის $i(t)$ ძალის კავშირი t დროზე, თუ E იცვლება სინუსოიდური კანონით $E(t) = E_0 \sin \omega t$ და $i(0) = 0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (4.17) განტოლების ამონასხნი ვეძებოთ $i(t) = z(t)u(t)$ სახით. თუ ამოგამოსახულებას შევტანთ (1.33)–ში, მივიღებთ

$$z'(t)u(t) + z(t)(u'(t) + gu(t)) = E(t), \tag{4.18}$$

სადაც $\alpha = \frac{R}{L}$. ვთქვათ, $u(t)$ არის $u' + gu = 0$ განტოლების რომელიმე ამონახსნი. მაგალითად, $u(t) = \exp(-\alpha t)$. მაშინ (4.18)–დან დავასკვნით, რომ $z'(t) = \frac{E_0}{L} \exp(\alpha t) \sin \omega t$. საიდანაც მივიღებთ

$$z(t) = \frac{E_0}{L} \int \exp(\alpha t) \sin \omega t dt + c, \tag{4.19}$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია. მეორე მხრივ, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ორჯერადი გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$\int \exp(\alpha t) \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \exp(\alpha t) \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \int \exp(\alpha t) \cos \omega t dt$$
$$-\frac{1}{\omega} \exp(\alpha t) \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega^2} \exp(\alpha t) \sin \omega t - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \int \exp(\alpha t) \sin \omega t dt.$$

აქედან კი გვაქვს

$$\int \exp(\alpha t) \sin \omega t dt = \frac{(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \exp(\alpha t)}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

თუ მიღებულ ტოლობას შევიტანთ ()–ში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$i(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} + c \exp(-\alpha t) \right).$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან, თუ გამოვიყენებთ საწყის $i(0) = 0$ პირობას, დავასკვნით, რომ $c = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$. მაშასადამე, მივიღებთ

$$i(t) = \frac{E_0}{L(\alpha^2 + \omega^2)} (\gamma \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega \exp(-\alpha t)).$$

ცხადია, რომ $\lim_{t \to +\infty} \exp(-\alpha t) = 0$, როცა $\alpha > 0$ და, მაშასადამე, $i(t)$ მიისწრაფვის სტაციონალური

$$i(t) = \frac{E_0}{L \sqrt[n]{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

რეჟიმისკენ, სადაც $\varphi = \arctan \frac{\omega}{\alpha}$ დენის საწყისი ფაზაა.

5. წრფივ განტოლებაზე დაყვანადი განტოლებები

5.1. ბერნულის განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდგი სახე

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \tag{5.1}$$

სადაც $p, q \in C(I, \mathbb{R})$, ხოლო n კი ნამდვილი რიცხვია. თუ $n = 0$, მაშინ (7.25) არის განტოლბა განცალებად ცვლადებში, ხოლო თუ $n = 1$, მაშინ გვაქვს წრფივი განტოლება. ასე რომ, ჩვენ განვიხილავთ შემტხვევას, როც $n \neq 0, n \neq 1$. ამ შემთხვევაში განტოლებას განვიხილავთ $\mathbb{G} = I \times]0, +\infty[$ სიმრავლეზე. განხილოთ კოშის (7.25) ამოცანა, სადაც $x_0 \in I$ და $y_0 > 0$.

თეორემა 1.1–ის ძალით (7.25),(7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი y, განსაზღვრული რაიმე I_0 შუალედზე. ცხადია, რომ $y(x) > 0)$, როცა $x \in I_0$. შემოვიტანით, აღნიშნა

$$z(x) = y(x)^{1-n}, \qquad x \in I_0. \tag{5.2}$$

მაშინ $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n(x)$ ტოლობის გათვალისწინებით ადვილად დავასკვნით, რომ

$$z'(x) = (1-n)y^{-n}(x)y'(x) = (1-n)p(x)z(x) + (1-n)q(x), \qquad x \in I_0.$$

მაშასადამე, z არის შემდეგი კოშის ამოცანის ამონახსნი

$$z' = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x)y^n, \tag{5.3}$$

$$z(x_0) = y_0^{1-n} \tag{5.4}$$

(7.25),(7.3) და (7.25),(5.4) ამოცანები არ არის ტოლფასი, რადგანაც მეორე განტოლების ამონახსნი განსაზღვრულია მთლიანად I შუალედში, მაშინ როცა პირველის ამონახსნის განსაზღვრის I_0 შუალედი შეიძლება არ დაემთხვეს I–ს. ამის მიზეზი მდგომარეობს იმაში, რომ (7.26) გარდაქმნა არ არის შებრუნებადი მთელ I შუალედზე.

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები (7.25),(5.4) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$z(x) = \exp\left((1-n)\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right)\left(y_0^{1-n} + (1-n)\int_{x_0}^{x} \exp\left((n-1)\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau\right), \quad \text{როცა} \quad x \in I.$$

რადგანაც, $z(x_0) = y_0^{1-n} > 0$, ამიტომ მოიძებნება $I_0 \subset I$ შუალედი ისეთი, რომ

$$y_0^{1-n} + (1-n)\int_{x_0}^{x} \exp\left((n-1)\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau\right) > 0, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0. \tag{5.5}$$

ასე რომ, ამ შუალედში (7.26) გარდაქმნა შებრუნებადია და

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)ds\right)\left(y_0^{1-n} + (1-n)\int_{x_0}^{x} \exp\left((n-1)\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds\right)q(\tau)d\tau\right)^{1-n}, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0. \tag{5.6}$$

მაშასადამე, დამტკიცდა შემდეგი

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 5.1. თუ $p, q \in C(I; \mathbb{R})$, მაშინ ყოველი $x_0 \in I$ და $y_0 > 0$–თვის (7.25), (7.3) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი I_0 შუალედში და იგი მოიცემა (7.2) ფორმულით, ამსასთან I_0 შუალედი შერჩეულია ისე, რომ ადგილი აქვს (7.28)–ს.

შევნიშნოთ, რომ თუ $n > 0$, მაშინ ბერნულის განტოლება გააჩნია აგრეთვე $y(x) \equiv 0$ ამონახსნი.

---

[1]) ეს განტოლება განსახილველად წარმოადგინა იაკობ ბერნულიმ 1695 წელს, მისი ამოხსნა კი პირველად გამოაქვეყნა იოან ბერნულიმ 1697 წელს (მგონი, პირველ ბერნულის შვილია. ძალიან საინტერესოა ბერნულების მათემატიკოსთა დიდ გვარის ისტორია (იხ.დანართი)).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.1. ამოვხსნათ ბერნულის განტოლება

$$y' + 2y = \exp x \cdot y^2. \tag{5.7}$$

განტოლების არანულოვანი ამონახსნების მოსაძებნად საჭიროა მისი ორივე მხარე გავყოთ y^2–ზე და შემოვიტანოთ ახალი უცნობი z ფუნქცია ტოლობით $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$. ცხადია, რომ $z' = -\frac{1}{y^2}y'$. მასასადამე,

$$z' = 2z - \exp x.$$

მივიღეთ წრფივი დიფერენციალური განტოლება z უცნობის მიმართ, რომლის მაოხცნითაც მივიღებთ

$$z = \exp x + c\exp 2x$$

და, მასასადამე, $y(\exp x + c\exp 2x) = 1$, სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია. გარდა ასეთი ამონახსნებისა განტოლებას აქვს აგრეთვე $y \equiv 0$ ამონახსნი.

ბერნულის განტოლება შეიძლება უფრო მარტივად ამოიხსნას ზემოთ აღწერილი ბერნულის გარდაქმნის საშუალებით. განტოლების არანულივან ამონახსნი ვეძიოთ $y = zv$ ფორმით, სადაც z და u უცნობი გუნქციებია. თუ ამ გამოსახულება შევიტანთ (1.25)–ში,მივიღებთ

$$z'u = z(u' - p(x)u) + z^n u^n.$$

ვთქვათ, $u_0(x)$ არის რაიმე ფუნქცია ისეთი, რომ $u_0'(x) - p(x)u_0(x) \equiv 0$. მაშინ გვექნება

$$z^{-n}z'u_0 = u_0^{n-1}(x).$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობას, მივიღებთ

$$z(x) = \left(c + (1-n)\int u_0^{n-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

მაშასადამე, ბერნული განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y = u_0(x)\left(c + (1-n)\int u_0^{n-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{1-n}},$$

სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია.

ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ბერნულის განტოლება

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.2.

$$xy' = 4y + 2x^2\sqrt{y}.$$

ვთქვათ, $y = zu$. მაშინ

$$xz'u + z(xu' - 4u) = 2x^2\sqrt{zu}.$$

u ფუნქცია შევარჩიოთ ისე, რომ $xu' - 4u = 0$. ცხადია, რომ $u(x) = x^4$ აკმაყოფელბს ამ განტოლებას. მაშასადამე, z ფუნქცია იქნება

$$xz' = 2\sqrt{z}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ბოლო განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ, რომ $z = (\ln|x| + c)2$; ასე რომ, $y = (\ln|x| + c)2x^4$ ფუნქცია, სადაც $c \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი მუდმივია, იქნება მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი. გარდა ამ ამონახს–ნებისა გვაქვს ტრივიალური ამონახსნიც $y \equiv 0$.

5.2. დარბუს განტოლება. ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{5.8}$$

სადაც M და N არის m ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქციები, ხოლო P კი არის l ხარისხის ერთგვაროვანი ფუნქცია. თუ $l = m-1$, მაშინ დარბუს განტოლება იქნება ერთგვაროვანი განტოლება.

დარბუს განტოლება $y = zx$ გარდაქმნით, სადაც z ახალი უცნობი ფუნქციაა, დაიყვანება ბერნულის განტოლებაზე. ცხადია, რომ (5.8) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$x^m M(1, \frac{y}{x})dx + x^m N(1, \frac{y}{x}y)dy + x^l P(1, \frac{y}{x})(xdy - ydx) = 0.$$

ასე რო, თუ გავითვალისწინებთ

$$dy = zdx + xdz \quad \text{და} \quad xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 z$$

ტოლობვბს, დავასკვნით, რომ

$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(zdx + xdz) + x^{l+2} P(1,z)dz = 0.$$

აქედან გვაქვს ან $x = 0$, ან

$$\big(M(1,z) + N(1,z)z\big)dx + \big(N(1,z)x + P(1,z)x^{l+2-m}\big)dz = 0.$$

თუ უკანასკნელ განტოლებაში z–ს ჩავთვლით დამოუკიდებლ ცვლადად, ხოლო x–ს კი საძიებელ ფუნქციად და დავუშვებთ, რომ $M(1,z) + N(1,z)z \neq 0$, მივიღებთ ბერნულის განტოლებას

$$x' = p(z)x + q(z)x^{l+2-m},$$

სადაც

$$p(z) = -\frac{N(1,z)}{M(1,z) + N(1,z)z}, \quad q(z) = -\frac{P(1,z)}{M(1,z) + N(1,z)z}.$$

ბერნულის მიღებული განოლების ინტეგრებით მივიღენთ, $x = \varphi(z,c)$, სადაც $c \in \mathbb{R}$. მაშასადამე, დარბუს განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება ექნება $x = \varphi(\frac{y}{x}, c)$, სადაც $c \in \mathbb{R}$. ასევე ცხადია, რომ $y = z_* x$ სახის წრფეები, სადაც z_* არის $M(1,z) + N(1,z)z = 0$ განტოლების ფესვი, აგრეთვე იქნება დარბუს განტოლების ამონახსნები, ამასთამ ისინი შეიძლება იყოს განზაკუთრებული ამონახსნები. გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღწერილი გარდაქმნებისას ჩვენ შეგვეძლო დაგვეკარგა მაონახსნი $x = 0, m > 0$ და $N(0,y) \equiv 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.3. განვიხილოთ განტოლება

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0.$$

ვთქვათ, $y = zx$, მაშინ მივიღებთ

$$(1+z^2)dx + (zx + x^3)dz = 0.$$

საიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ $x \equiv 0$ არ წაარმოადგენს განტოლების ამონახსნს, დავასკვნით, რომ

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{z}{1+z^2}x - \frac{1}{1+z^2}x^3.$$

მივიღეთ ბერნულის განტოლება, რომლის ინტეგრებითაც მივიღებთ

$$\frac{1}{x^2} = c(1+z^2) + (1+z^2)\arctan z + z, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

მაშასადამე, x და y ცვლადების მიმართ მივიღებთ თანაფარდობას

$$c(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy - 1 = 0, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

5.3. რიკატის განტოლება. რიკატის განტოოებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + g(x), \tag{5.9}$$

სადაც $p, q, g \in C(I; \mathbb{R})$, ამასთან, $p(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, როცა $x \in I$ (თუ $p(x) \equiv 0$, მაშინ რიკატის განტოლება გადაგვარდებს წრფივ განტოლებად, ხოლო თუ $g(x) \equiv 0$, მაშინ რიკატის განტოლება გადაგვარდებს ბერნულის განტოლებად).

p, q და g ფუნქციებზე დადებული პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ რიკატის განტოლებას გააჩნია ერთაფერთი ამონახსნი საწყისი

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.10}$$

პირობით, სადაც $x_0 \in I$, ხოლო $y_0 \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი წერტილებია.

მართლაც, ყოველთვის არის შესაძლებელია ისეთი $Q = \{x, y \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq a_0,\ |y - y_0| \leq ab_0\}$ მართკუთხედის აგება, რომელიც მთლიანად შედის $I \times \mathbb{R}$ ზოლში. ამ მართკუთხედში (5.9) განტოლების მარჯბენა მხარე აკმაყოფილებს თეორემა 1.2) პირობებს. ასე რომ, ამ უკანასკნელი თეორემის ძალით (5.9), (5.9) ამოცანას გააჩნის ერთადერთი ამონახსნი (ლოკალური) x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში. ამასთან არ არის გარანტირებული ამონახსნის არსებობა განტლებაში შემავალი ფუნქციების უწყვეტობის მთელ შუალედში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.4. განვიხილოთ განტოლება

$$y' = y^2 - 2y + 1.$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარე განსაზღვრული და უწყვეტია მთელ $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეზე, მაგრამ მისი ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$y = 1 - \frac{1}{x - c}, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

აქედან დავასკვნთ, რომ არც ერთი ამონახსნი არ არის განსაზღვრული მთელ $\mathbb{R}$ ღერძზე.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ რიკატის განტოლებას არ გააჩნია განსაკუთრებული ამონახსნი. ყველა მისი ამონახსნი კერძო ამონახსნია.

რიკატის განტოლებას აქვს შემდეგი ორი თვისება:

1. რიკატის განტოლება, ისევე როგორც წრფივი განტოლება, ინარჩუნებს თავის სახეს დამოუკიდებელი ცვლადის $x = \varphi(t)$ გარდაქმნისას, სადაც $\varphi(t)$ არის (t_0, t_1) ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი ისეთი ფუნქცია, რომ $\varphi'(t) \neq$, როცა $t \in (t_0, t_1)$.

მართლაც, რადგანაც $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\varphi'(t)$, ამიტომ გარდაქმნილ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dt}y = \{p((\varphi(t)))y^2 + q(\varphi(t))y + g(\varphi(t))\}\varphi'(t).$$

რაც კვლავ წარმოადგენს რიკატის განტოლებას.

2. წრფივი განტოლებისგან განსხვავებით, რიკატის განტოლება ინარჩუნებს თავის სახეს საძიებელი ფუნქციის არა მარტო წრფივი გარდაქმნისას, არამედ წილად–წრფივი

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)} \tag{5.11}$$

გარდაქმნისასაც, სადაც $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ და $\delta(x)$ არის I შუალედზე განსაზღვრული ისეთი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები, რომ $\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$.

მართლაც, (5.11) ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$y' = \frac{\alpha_1(x)z' + \beta_1(x)z^2 + \gamma_1(x)z + \delta_1(x)}{(\gamma(x)z + \delta(x))^2},$$

სადაც

$$\alpha_1(x) = \alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x), \quad \beta_1(x) = \alpha'(x)\gamma(x) - \alpha(x)\gamma'(x),$$
$$\gamma_1(x) = \alpha'(x)\delta(x) + \beta'(x)\gamma(x) - \alpha(x)\delta'(x) - \beta(x)\gamma'(x), \ \ \delta_1(x) = \beta'(x)\delta(x) - \beta(x)\delta'(x).$$

თუ y'–ის მიღებულ მნიშვნელობას შევიტანთ (5.9) განტოლების მარცხენა მხარეში, ხოლო მერჯვენა მხარეში y–ს შევცვლით (5.11) ტოლობით, ცხადია, რომ მივიღებთ რიკატის განტოლებას z–ის მიმართ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ რიკასტის განტოლება წრფივი გარდაქმნებით გარკვეულ ინტერვალზე დაიყვანება შემდეგ სახეზე

$$y' = \pm y^2 + g(x), \tag{5.12}$$

განვიხილოთ ასეთი გარდაქმნა

$$y = \alpha(x)z, \tag{5.13}$$

სადაც $\alpha(x)$ ჯერ–ჯერობით უცნობი ფუნქციაა, ხოლო z კი ახალი უცნობი ფუნქციაა. მინ ცხადია, რომ

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = p(x)\alpha^2(x)z^2 + q(x)\alpha(x)z + g(x),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$z' = p(x)\alpha(x)z^2 + \left(q(x) - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)z + \frac{g(x)}{\alpha(x)}.$$

ასე რომ, თუ ავიღებთ

$$\alpha() = \pm\frac{1}{p(x)},$$

როცა x ეკუთვნის იმ საიმრავლეს, სადაც $p(x) \neq 0$, ე.ი. მოვახდენთ გარდაქმნას

$$y = \pm\frac{1}{p(x)}z,$$

z^2–ის კოეფიციენტი გახდეაბ $\pm$–ის ტოლი. ასე რომ, გარდაქმნილ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$z' = \pm z^2 + \left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)z \pm g(x)p(x). \tag{5.14}$$

გარდა ამისა, შესაძლებელია (5.14)–ის მარჯვენა მხარეშრ z^2–ის კოეფიციენტის განულება. ამისათვის საჭიროა მოვახდინოთ საძიებელი z ფუნქციის ასეთი გარდაქმნა

$$z = u + \beta(x),$$

სადაც $\beta(x)$ ჯერ–ჯერობით უცნობი ფუნქციაა, ხოლო u კი ახალი უცნობი ფუნქციაა. მამინ მივიღებთ

$$u' = \pm u^2 + \left(\pm 2\beta(x) + q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)u \pm \beta^2(x) + \left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)\beta(x) \pm g(x)p(x) - \beta'(x).$$

იმისთვის, რომ u–ს კოეფიციენტი განულდეს, საკმარისია ავიღოთ

$$\beta(x) = \mp\frac{1}{2}\left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right).$$

მაშასადამე, აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ

$$u' = \pm u^2 \pm \frac{1}{4}\left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2 \pm g(x)p(x) \pm \frac{1}{2}\left(q'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{p'^2(x)}{p^2(x)}\right).$$

ასე რომ, თუ განვიხილავთ გაერთიანებული

$$y = \pm\frac{1}{p(x)}\left(u \mp \frac{1}{2}\left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)\right.$$

გარდაქმნით რიკატის (5.9) განტოლება დაიყვანება

$$u' = \pm u^2 + g_1(x) \tag{5.15}$$

სახის განტოლებაზე, სადაც

$$g_1(x) = \pm\frac{1}{4}\left\{\left(q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(q'(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{p'^2(x)}{p^2(x)}\right)\right\} \pm g(x)p(x).$$

მაშასადამე, საძიებელი ფუნქციის წრფივი გარდაქმნით რიკატის განტილება დაიყვანება (5.13) სახეზე ყოველ ინტერვალზე,სადაც $p(x)$ არ ხდება ნულის ტოლი. რიკატის განტოლების ასეთ სახეს ამ განტოლების კანონიკური სახე ეწოდება.

საზოგადოდ რიკატის განტოლება არ არის ინტეგრებადი კვადრატურებში. მაგრამ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ეს შესაძლებელია. კერძოდ, როცა p, q და g ფუნქციებია მუდმივია. ამ შემთხვევაში რიკატის განტოლება დაიყვანება განტოლებაზე განცალებად ცვლადებში. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ამონახსნი აღიწერება ელემენტარულ ფუნქციებში.

განვიხილოთ ახლა უმარტივესი სახის ცვლადკოეფიციენტებიანი რიკატის განტოლებები, რომლებიც ინტეგრაბადის კვადრატურებში.

განვიილოთ განტოლებები

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c)$$

და

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c, \tag{5.16}$$

სადაც a, b და c ისეთი მუდმივებია, რომ $a^2 + c^2 \neq 0$, ხოლო $\varphi(x)$ კი უყვეტი ფუნქციაა. ცხადია, რომ პირველი განტოლება დაიყვანება განტოლებაზე განცალებად ცვლადებში, ხოლო მეორე კი ერთგვაროვანზე.

რიკატის განტოლება

$$y' = a\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + c$$

დაიყვანება (5.3) განტოლებაზე $y = z\sqrt{x}$ გარდაქმნით.

შემდეგი სახის რიკატის განტოლება

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}, \tag{5.17}$$

სადაც a, b და c მუდმივებია, ინტეგრებადია კავდრატურებში და, უფრო მეტიც, ელემენტარულ ფუნქციებში. მართლაც, ეს განტოლება $y = \frac{z}{x}$ ჩასმით დაიყვანება შემდეგ განტოლებაზე განცალებად ცვლადებში

$$xz' = az^2 + (b+1)z + c.$$

ამ უკანასკნელი ზოგადი ინტეგრალი კი გამოისახება ელემენტრული ფუნქციების საშუალებით.

ზოგადი ამონახსნის კვადრატურებში აგების თვალსაზრისით რიკატის განტოლება გამოირჩევა არაწრფივი განტოლებებისგან იმით, რომ თუ ცნობილია მისი რომელიმე კერძო ამონახსნი, მაშინ შესაძლებელია მისი ზოგადი ამონახსნის აგება კვადრატურებში. ეს ფაქტი გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან.

თ ე ო რ ე მ ა 5.1. თუ ცნობილია რიკატის განოლების ერთი მაინც კერძო ამონახსნი, მაშინ ეს განტოლება დაიყვანება ბერნულის განტოლებაზე.

დამკიცება. ვთქვათ, y_1 არის რიკატის (5.9) განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი. ასე რომ,

$$y_1' \equiv p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + g(x). \tag{5.18}$$

(5.9) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $y = z + y_1$, სადაც z ახალი საძიებელი ფუნქციაა. მაშინ გვაქვს

$$z' + y_1' = p(x)z^2 + 2p(x)zy_1 + p(x)y_1^2 + q(x)z + q(x)y_1 + g(x).$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინებთ (5.19) იგივეობას, მივიღებთ ბერნულის

$$z' = (2p(x)y_1 + q(x))z + p(x)z^2 \tag{5.19}$$

განტოლებას, რომელიც, თავის მხრივ, $z = \frac{1}{u}$ გარდაქმნით დაიყვანება წრფივ განტოლებაზე

$$u' = -(2p(x)y_1 + q(x))u - p(x). \tag{5.20}$$

მაშასადამე, ბერნული განტოლება, როდესაც ცნობილია მისი რომელიმ კერძო ამონახსნი, ინტეგრირდება ორი კვადრატურით. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ერთჯერადი

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \tag{5.21}$$

ჩასმით რიკატის განტოლება პიდაპირ დაიყვანება წრფივ განტოლებაზე.

აღვნიშნოთ ორი შემთხვევა, რომლებისთვისაც შესაძლებელია კერძო ამონხნის მარტივად აგება:

$$g(x) = -p(x)b^2 - q(x)b, \quad y_1 = b,$$
$$g(x) = -p(x)x^2 - q(x)x + 1, \quad y_1 = x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.5. განვიცილოთ განტოლება

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1.$$

აქ $y_1 = x$ არის კერძო ამონახსნი. განტოლება $y = x + \frac{1}{u}$ გარდაქმნით დაიყვანება

$$u' = -3x^2u - x$$

განტოლებაზე, საიდანაც გვაქვს

$$u = \mathsf{exp}(-x^3)\left(c - \int \mathsf{exp}(x^3)xdx\right)$$

და, მაშასადამე,

$$y = x + \mathsf{exp}(x^3)\left(c - \int \mathsf{exp}(x^3)xdx\right)^{-1}.$$

1. ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურა.

თეორემა 5.1–ის დამტკიცებისას მიღებული წრფივი განოლების ზოგად ამონახნს (ისე როგორც ადრე გვქონდა ნაჩვენები ზოგადი სახის წრფივ განტოლებისთვის) აქვს შემდეგი სახე

$$u = a(x)c + b(x), \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

თუ მიღებულ გამოსახულებას შევიტანთ (5.21)–ში, მივიღებთ რიკატის განტოლების ზოგად ამონახსნს შემდეგი სახით

$$y = \frac{\varphi_1(x)c + \varphi_2(x)}{\psi_1(x)c + \psi_2(x)}x, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.22}$$

სადაც $\varphi_1(x) = y_1a(x)$, $\varphi_2(x) = y_1b(x) + 1$, $\psi_1(x) = a(x)$, ხოლო $\psi_2(x) = b(x)$,

ასე რომ, რიკატის განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს მუდმივი c–ს წილად–წრფივ ფუნქციას.

ასეთი სახის ზოგადი ამონახსნი გააჩნია მხოლოდ რიკატის განტოლებას. მართლაც, ვთქვათ, (5.22) არის რომელიღაც დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს, ამასთან, $\varphi_1(x)\psi_2(x) - \varphi_2(x)\psi_1(x) \neq 0$. თუ (5.22)–ს ამოვხცნით c–ს მიმართ და მიღებულ ტოლობას გავაწარმოებთ, მივიღებთ

$$c = \frac{\varphi_2(x) - y\psi_2(x)}{y\psi_1(x) - \varphi_1(x)}.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x) = 0,$$

სადაც

$$a(x) = \varphi_1(x)\psi_2(x) - \varphi_2(x)\psi_1(x), \quad b(x) = \psi_2(x)\psi_1'(x) - \psi_1(x)\psi_2'(x),$$
$$c(x) = \psi_1(x)\varphi_2'(x) + \varphi_1(x)\psi_2'(x) - \varphi_2(x)\psi_1'(x) - \psi_2(x)\varphi_1'(x), \quad d(x) = \varphi_2(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x).$$

მაშასადამე, y აკმაყოფილებს რიკატის (5.9) განტოლებას, სადაც

$$p(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}, \quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}, \quad g(x) = -\frac{d(x)}{a(x)}$$

განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევები, როცა ცნობილია რიკატის განტოლების ორი ან სამი ამონახსნი.

თუ ცნობილია ორი ამონახსნი, მაშინ რუიკატის განტოლების ზოგაი ამონახსნი მიიღება ერთი კვადრატურით. მართლაც, ვთქვათ, y_1 და y_2 რიკატის განტოლების ორი ამონახსნია. მაშინ (5.21) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

იქნება წრფივი (5.20 განტოლების კერძო ამონახსნი. ხოლო ამ უკანასკნელია ზოგადი ამონახსნი კი ამ შემთხვევაში მოიცემა ერთი კვადრატურით.

დაბოლოს, განვიხილოთ შემთხვევა, როესაც ცნობილია რიკატის განტოლების სამი კერძო ამონახსნი. ვთქვათ, ეს ამონახსნებია y_1, y_2 და y_3. მაშინ

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \text{და} \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

იქნება წრფივი (5.20 განტოლების ორი კერძო ამონახსნი. მაშინ, როგორც ზემოთ ??? გვქონდა ნაჩვენები ამ უკანასკნელის ზოგადი ამონახსნი მოიცმა კვარატურების გარეშე

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + c\left(\frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1}\right), \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

თუ ამ ტოლობას ამოვხსნით c–ს მიმართ, რიკატის განტოლების ზოგად ამონახსნს მივიღებთ შემდეგი სახით

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

ამ თანაფარდობიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ რიკატის განტოლების ნებისმიერი ოთხი ამონახსნისთვის აგილი აქვს იგივეობას

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = const.$$

2. სპეციალური სახის რიკატის განტოლება. ზემოთ ჩვენ ვაჩვენეთ, თუ როგორ მოვნახოთ რიკატის განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როდესაც ცნობილია ერთი, ორი ან სამი კერძო ამონახსნი. ახლა ჩვენ განვიხილავთ რიკატის განტოლების კერძო შემთხვევას, რომლისთვისაც გარკვეულ პირობებში ზოგადი ამონახსნი გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამავე დროს ეს ხერხდება კერძო ამონახსნების წინასწარი ცოდნის გარეშე.

ამ განტოლებას აქვს შემეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + bx^m, \tag{5.23}$$

სადაც a, b და m მუდმივებია.

ასეთ განტოლებას რიკატის სპეციალური სახის განტოლება ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ სწორედ ასეთი სახის განტოლება შეისწავლა რიკატიმ მე–18 საუკუნეში.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ორ შემთხვევას, როცა (5.23) განტოლება ინტეგრირდება კვადრატურებში:

ა) $m = 0$. მაშინ (5.23) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + b. \tag{5.24}$$

მივიღეთ განტოლება განცალებად ცვლადებში. ამასთან ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ელემენტარულ ფუნქციებში.

ბ) $m = -2$. ამ შემთხვევაში (5.23) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + \frac{b}{x^2},$$

რომელიც არმოაგენს ზემოთ განხილული (5.25) განტოლების კერძო შემთხვევას და, მაშასადამე, ინეტეგრირებაია კვარატურებში.

გარდა m–ის აღნიშნული მნიშვნელობისა რიკატის სპეციალური განტოლება ინტეგრირდება ელემენტარულ ფუნქციებში, თუ

$$\frac{m}{2m+4} \tag{5.25}$$

გამოსახულება მთელია (ადებითი ან უარყოფით). კერძოდ, ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ მაჩვენებელი m აკმაყოფილებს ამ ოირობას, მაშინ დამოუკიდებლი ცვლადის შესაბამისი გარდაქმნისას და საძიებელი ფუნქციის წფივი და წილად–წრფივი გარ–დაქმნებით რიკატის სპეციალური განტოლება (5.23) შეიძლება დაყვანილი იქნეს (5.24) განტოლებაზე, ანუ $= 0$ შემთხვევაზე, ან (5.16) სახის რიკატისნ განტოლებაზე. აქვე შევნიშნოთ, რომ როგორც ლიუვილმა აჩვენა, m–ის სხვა მნიშვნელობებისთვის რიკატის სპეციალური განტოლება არ არის ინტეგრებადი კვადრატურებშიც კი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.6. განვიხილოთ განტოლება

$$y' = y^2 + x^{-4}.$$

აქ $m = -4$. ასე რომ,

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-4}{-8+4} = 1.$$

მაშასადამე, განტოლება ინტეგრებადია ელემენტარულ ფუნქციებში.

ზუსტად ასევე განტოლება

$$y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}$$

ინტეგრირდება ელემენტარულ ფუნქციებში, რადგანაც $m = -\frac{4}{3}$ და

$$\frac{m}{2m+4} = -1.$$

რაც შეეხება განტოლებას

$$y' = y^2 + x^2,$$

იგი არ ინტეგრირდება კვადრატურებში, რადგანაც $m = 2$ და

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{1}{4}$$

(არ არის მთელი რიცხვი).

5.4. განტოლებები სრულ დიფერენციალებში. განციხილოთ განტოლება

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.26}$$

სადაც $M,\ N \in C(I\times]\alpha,\beta[;\mathbb{R})$, ანუ M და N ფუნქციები უყვეტია ორივე არგუმენტის მიმართ $Q = I\times]\alpha,\beta[$ მართკუ–თხედზე. ამასთან, $|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0$, როცა $(x,y) \in Q$, ანუ ისინი ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდეაბ. აქ, როგორც ყველგან, იგულისხმება, რომ $I \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი შუალედია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 5.1. (8.21) დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება განტოლება სრულ დიფერენციალებში, თუ მისი მარცენა მხარე წარმოადგენს რაიმე $U(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს.

ასე რომ, განტოლება სარულ დიფერენციალებში ასე ჩაიწერეაბა

$$dU(x,y) = 0.$$

თუ y არის განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$dU(x,y(x)) \equiv 0,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$U(x,y(x)) = c$$

, c ნებისმიერი მუდმივია. პირიქით, ამ ტოლობით განსაზთვრული ნებისიერი $y = y(x)$ ფუნქცია იქნება ამ განტოლების ამონახსნი. მაშასადამე,

$$U(x, y) = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.27}$$

იქნება (8.21) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.7. განვიხილოთ განტოლება

$$2x \sin y dx - x^2 \cos y dy = 0.$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $U(x, y) = x^2 \sin y$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x^2 \sin y = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

ასე რომ, თუ (8.21) განტოლება არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ ზოგადი ამონახსნის მისაღებად საკმარისია ვიპოვოთ ისეთი $U(x, y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი ტოლოა $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ გამოსახეულების, ანუ

$$dU(x, y) \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

და $U(x, y)$ ფუნქცია გავუტოლოთ ნებისმიერ c მუდმივს.

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 5.2. ვთქვათ, $M(x, y)$ და $N(x, y)$ ფუნქციები უწყვეტია Q მართკუთხედზე და გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial M}{\partial y}$ და $\frac{\partial N}{\partial x}$ იმავე მართკუთხედზე. მაშინ იმისათვის, რომ $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ წარმოადგენდეს რაიმე U ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \text{როცა} \quad x \in I,\, y \in]\alpha, \beta[, \tag{5.28}$$

ტოლობას

(8.22) ტოლობას შვარცის პირობას უწოდებენ. დამტკიცება. ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ვთქვათ, $U(x, y)$ ისეთი დიფერენცირებაი ფუნქციაა, რომ

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y), \quad \text{როცა} \quad x \in I,\, y \in]\alpha, \beta[, \tag{5.29}$$

სრული დიფერენციალის განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$dU(x, y) \equiv \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}dy.$$

ბოლოო ორი ტოლობიდაბ დავასკვნით, რომ

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \equiv M(x, y),\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \equiv N(x, y). \tag{5.30}$$

მიღებული ტოლობების გაქარმოებით მივიღებთ,

$$\frac{\partial U^2(x, y)}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial U^2(x, y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

რადგანაც წინადადების პირობის თანახმად U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U^2}{\partial x \partial y,\, \frac{\partial U^2}{\partial y \partial x}}$ უწყვეტი ფუნქციებია Q–ში, ამიტომ U ფუნქცია აკმაყოფილებს შვარცის (იხ. დან.) თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\frac{\partial U^2(x, y)}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial U^2(x, y)}{\partial y \partial x}. \tag{5.31}$$

(8.24) და (8.25) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (8.22) ტოლობა. ასე რომ, აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია (8.22) ტოლობა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ მოიძებნება ისეთი U ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (8.24) ტოლობებს.

(8.24)ის პირველი ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \varphi(y), \tag{5.32}$$

სადაც, $x_0 \in I$ ნებისმიერი წერტილია, ხოლო $\varphi(y)$ არის y–ის რომელიმე წარმოებადი ფუნქციაა. ეს ფუნქცია ისე უნდა შეირჩეს, რომ (2.26) ტოლობით განსაზღვრულმა U ფუნქციამ დააკმატოფილოს (8.24)ის მეორე ტოლობა. ასე რომ, φ ფუნქცია განისაზღვრება

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \varphi(y)\right) = N(x,y), \quad \text{როცა} \quad x \in I,\ y \in]\alpha, \beta[. \tag{5.33}$$

ტოლობიდან.

აქედან, (8.22) ტოლობოს გათვალისინებით დავასკვნოთ, რომ

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \varphi(y)\right) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(s,y)}{\partial y}ds + \varphi'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(s,y)}{\partial s}ds + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y).$$

მაშსადამე, (8.27)–ის გამო გვაქვს

$$\varphi'(y) \equiv N(x_0, y),$$

ასე რომ, $\varphi(y)$–ის ერთ–ერთი მნიშვნელობა იქნება

$$\varphi(y) \equiv \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt,$$

სადაც $y_0 \in]\alpha, \beta[$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. თუ $\varphi(y)$–ის ნიღებულ მნიშვნელობას შევიტანთ (8.26)–ში, მივიღებთ საძიებელ $u(x,y)$ ფუნქციას

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt. \tag{5.34}$$

ამით საკმარისობა დამტკიცენულია. □

ამგვარად, არა მარტო დამტკიცდა (8.22) პირობის აუცილებლობა და საკმარისობა იმისთვის, რომ (8.21) იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, არამედ აგებული იქნა $U(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი $M(x,y)dx + N(x,y)$–ის ტოლია. ასე რომ, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა კვადრატურებში

$$\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5.35}$$

აქ, x_0 და y_0 ნებისმიერი წერტილებია I და $]\alpha, \beta[$ შუალედებიდან, შესაბამისად.

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $U(x,y)$ ფუნქციის აგებისთვის გამოვალთ (8.22)–ის მეორე ტოლობიდან, მაშინ (8.21) განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება (8.30)–ის სიმეტრიული სახე

$$\int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

განვიცილოთ ახლა (8.21) განტოლებისთვის კოშის ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი.

თ ე ო რ ე მ ა 5.2. ვთქვათ, $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ფუნქციები უწყვეტია Q მართკუთხედზე და გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები $\frac{\partial M}{\partial y}$ და $\frac{\partial N}{\partial x}$ იმავე მართკუთხედზე. ვთქვათ, გარდა ამისა, შესრულებული (8.22) პირობა და $N(x,y) \neq 0$, როცა $(x,y) \in Q$. მაშინ ყოველი $(x_0,y_0) \in Q$–თვის (8.21) განტოლებას გააჩნია ერთადერთ ამონახსნი $y(x_0) = y_0$ საწყისი პირობით.

დამტკიცება. როგორც დებულება 5.2–ის საკმარისობის დამტკიცებიდან ჩანს, (8.21) განტოლების ნებისმირი $y = y(x)$ ამონახსნი აკამყოფილებს $U(x,y(x)) = c$ ტოლობას თავის განსაზღვრის შუალეში, სადაც $U(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (8.28) ტოლობით, ხოლო c გარკვეული მუდმივია. ე.ი. თუ (8.21), (7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი $y(x)$ განსაზღვრის $I_0 \subset I$, $x_0 \in I_0$, შუალედით, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას $U(x_0,y(x_0)) = 0$. ასე რონ, $u(x,y(x)) = u(x_0,y(x_0)) = 0$, როცა $x \in I_0$. ანუ $y(x)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y(x)} N(x_0,t)dt = 0, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0. \tag{5.37}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (8.32) ტოლობიდან შესაძლებელია $y(x)$–ის განსაზღვრა. გვაქვს $U(x,y(x)) = 0$, $u(x_0,y_0) = 0$, $U(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $I \times]\alpha,\beta[$ სიმრავლეზე და $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y} = q(x_0,y_0) \neq 0$. ამიტომ არაცხადი ფუნქციოს არსებობის შესახებ თეორემის გამო, x_0–ის გარკვეულ $I_0 \subset I$ მიდამოში (8.32) ტოლობიდან ცალსახად განისაზღვრება უწყვეტად წარმოებადი $y = y(x)$ ფუნქცია. ცხადია, რომ ასე განსაზღვრული ფუნქცია იქნება (8.21), (7.3) ამოცანას ამონახსნი I_0 შუალედზე. თეორემა დამტკიცებულია.□

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.8. განვიხილოთ განტოლება

$$xy^2dx + \left(x^2y + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad (y > 0).$$

აქ

$$M(x,y) = xy^2, \quad N(x,y) = x^2y + \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy.$$

ასე რო სრულდება (8.22) პირობა და, მაშასადამე, განტოლება არის სრულ დოფერენციალებში. ახლა თუ ფამოვიყენბთ (8.31) ფორმულას, როცა $x_0 = 0$ და $y = 1$, მივიღებთ, რომ განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln y = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R}.$$

მაინტეგრებელი მამრავლი. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, თუ (8.21) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ შესაძლებელია ამ განტოლების ინტეგრება კვადრატურებში. ვთქვათ, ეს ჰანტოლება არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალბეში, ე. ი. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. მაშინ ბუნებრივად ისმისა შეკითხავა: ხომ არ შეიძლება მოიძისებნოს ისეთი $\mu = \mu(x,y)$ ფუნქცია, რომ განტოლება

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{5.38}$$

წარმოადგენდეს განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ასეთ $\mu = \mu(x,y)$ ფუნქციას, თუკი ის არსებობს, ეწოდება (2.21) განტოლების **მაინტეგრებელი მამრავლი**.

ასეთ შემთხვევაში (8.21) არის განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოიცემა ფორმულით $U(X,Y) = c$ ტოლობით, სადაც $U(x,y)$ ისეთი ორი ცვლადის ფუნქციაა, რომ

$$dU(x,y) \equiv \mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{5.39}$$

M და N ფუნქციებზე ზემოთ დადებული პირობების გარდა ვიგულისხმებთ, რომ მათ გააჩნია უწყვეტი კერძო არმოებულები იგივე Q მართკუთხეზე. რაც შეეხება მაინტეგრებელ მამრავლებს, ჩვენ მოვითხოვთ, რომ ისინი იყოს ნულისგან განსხვავებული და ჰქონდეს პირველი რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები.

ისმის შეკითხვა: პირველი რიგის ყოველი განტოლებისთვის არსებობს თუ არა მაინტეგრებელი მამრავლი? ამ შეკიტხვაზე დადებით პასუხს იძლევა შემდეგი

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 5.3. ვთქვათ, (ref2.21) განტოლებას გააჩნია ზოგადი ინტეგრალი (5.27),

$$U(x,y) = c, \quad \text{სადაც} \quad c \in \mathbb{R},$$

სადაც U არის განსახილველ არეში (ref2.21) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელსაც გააჩნია მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოენულები. მაშინ ამ განტოლებას გააჩნია მაინტეგრებელი მამრავლი.

*****

$$dU(x,y) \equiv \mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{5.40}$$

წინადადება 5.2–ის ძალით, იმისათვის როა (8.33) იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში აუცილებალია და საკმარისი, რომ შესრულდეს შვარცის პირობა, ანუ ტოლობა

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას ჩავწერთ გაშლილი სახით, μ–ის მიმართ ნივიღებთ ე.წ. განტოლებას კერძო წარმოებულებში

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{5.41}$$

საზოგადოდ, (8.35) განტოლების ინტეგრება არაა უფრო მარტივი, ვიდრე თავიდან მოცემული (8.21) განტოლების. ეს განტოლებები ექვივალენტურია. მაგრამ, ზოგიერთ შემთხვევაში ამ უკანასკნელი განტოლების ამონახსნი და, მაშასადამე, მაინტეგრებელი მამრავლიც მარტივად მოიძებნება. ქვემოთ განვიხაილავთ ასეთი სახის რამდენიმე შემთხვევას.

ა). მაინტეგრებელი მამრავლი დამოკიებულია მხოლოდ x ცვლადზე. დავუშვათ, რომ (8.21) განტოლებას გააჩნია მაინტეგრებელი მამრავლი, რომელიც მხოლოდ x ცვლადზეა დამოკიდებული, ანუ $\mu = \mu(x)$. ამ შემთხვევაში $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$. ასე რომ, (8.35) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{5.42}$$

აქედან,თუ მოვითხოვთ, რომ $N(x,y) \neq$, დავასკვნით,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(x), \tag{5.43}$$

სადაც

$$\psi(x) \equiv \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}, \tag{5.44}$$

თუკი ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული y–ზე. (8.36)–დან დავასკვნით, რომ

$$\mu = c\,\mathrm{exp}\left(\int \psi(x)dx\right), \quad () \quad c \in \mathbb{R}.$$

ასე რომ, თუ (8.21) განტოლებას გააჩნია $\mu = \mu(x)$ სახის მაინტეგრებელი მამრავლი, მაშინ იგი მოიცემა (5.45) ტოლობით. სიმარტივისთვის ავიღოთ $c = 1$. მაშინ

$$\mu = \mathrm{exp}\left(\int \psi(x)dx\right). \tag{5.45}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ შესრულებულია (5.49) პირობა, ანუ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე არ არის დამოკიდებული y ცვლადზე, მაშინ (5.45) ტოლობით განსაზღვრული μ ფუნქცია იქნება (5.49) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი. მართლაც, ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = N\psi(x)\mu.$$

უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, (5.45) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია იქნება ამ განტოლების ამონახსნი და, მაშასადამე, 8.21) განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი.

საილუსტრაციოდ მოვნახოთ წრფივი დიფერენციალური

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{5.46}$$

განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლი. გადავწეროთ ეს განტოლება ასეთი ფორმით

$$(p(x)y + q(x))dx - dy = 0. \tag{5.47}$$

გვაქვს $M(x, y) = p(x)y + q(x)$ და $N(x, y) = -1$. ასე რომ,

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x, y)} = p(x) \equiv \psi(x)$$

და, მაშასადამე, განხილული წრფივი განტოლების მაინტეგრებელი მამრავლია

$$\mu = \exp\bigg(\int p(x)dx\bigg).$$

ბ). მაინტეგრებელი მამრავლი დამოკიებულია მხოლოდ y ცვლადზე. მოვნახოთ პირობა, რომლის დროსაც მაინ–ტეგრებელი მამრავლი დამოკიდებულია მხოლოდ y ცვლადზე, ანუ $\mu = \mu(y)$. ამ შემთხვევაში (8.35) განტოლებას ექნება შენდეგი სახე

$$M\frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \bigg(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\bigg)\mu(\omega),$$

საიდანაც, თუ $M \neq 0$, დავასკვნით,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(y),$$

სადაც

$$\psi(y) \equiv \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x, y)},$$

თუკი ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული x–ზე. მაშასადამე, მაინტეგრებელ მამრავლც ექნება შემდეგი სახე

$$\mu = \exp\bigg(\int \psi(y)dy\bigg).$$

გ). მაინტეგრებელი მამრავლს აქვს შემდეგი სახე $\mu = \mu(\omega(x, y))$. განვიხილოთ ახალა უფრო ზოგადი შემთხვე–ვა, როცა მაინტეგრებელ მამრავლს აქვს შემდეგი სახე $\mu = \mu(\omega(x, y))$, სადაც $\omega(x, y)$ არის x და y ცვლადების წინასწარ მოცემული ფუნქცია. ამ შემთხვევაში (8.35) განტოლება გადაიწერება შენდეგნაირად

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \bigg(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\bigg)\mu,$$

საიდანაც, თუ $M\omega'_x - M\omega'_y \neq 0$, დავასკვნით,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(\omega),$$

სადაც

$$\psi(\omega) \equiv \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x, y)},$$

თუკი ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არის ω–ს ფუნქცია. მაშასადამე, მაინტეგრებელ მამრავლც ექნება შემდეგი სახე

$$\mu = \exp\bigg(\int \psi(\omega)d\omega\bigg) \equiv f(\omega) = f(\omega(x, y)).$$

ცხადია, რომ ა) და ბ) შემთხვევები წარმოადგენს გ)–ს კერძო შემთხვევებსა, როცა $\omega(x,y) = x$ და $\omega(x,y) = y$, შესაბამისად. შესაძლებელია სხვადასხვა სახის მაინტეგრებელი მამრავლის არსებობის პირობების ჩაწერა. მაგალითად, $\mu = \mu(xy)$ სახის მაინტეგრებელი მამრავლი არსებობს, თუ შესრულებულია პირობა

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)y - M(x,y)x} \equiv \psi(xy) \quad (\omega(x,y) = xy). \tag{5.48}$$

$\mu = \mu(x+y)$ სახის მაინტეგრებელი მამრავლი არსებობისთვის კი უნდა შესრულებულდეს პირობა

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y) - M(x,y)} \equiv \psi(x+y) \quad (\omega(x,y) = x+y). \tag{5.49}$$

$****************$ (8.22) ტოლობას შვარცის პირობას უწოდებენ. თუ დაცულია ეს უკანასკნელი, მაშინ (8.21)–ს უწოდებენ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში. ეს სახელწოდება წარმოდგება იქიდან, რომ,როგორც ცნობილია მატემატი–კური ანალიზიდან, თუ დაცული (8.22) პირობა, მაშინ არსებობს ორი ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია $z(t,x)$, რომლის სრული დიფერენციალი მოიცემა ტოლობით

$$dz(x,y) \equiv p(x,y)dx + q(x,y)dy.$$

კერძოდ,

$$z(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} p(s,y_0)ds + \int\limits_{y_0}^{y} q(x,\xi)d\xi.$$

მართლაც, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = q(x,y)$. გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ (8.22) ტოლობას, დავასკვნით

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = p(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial p(x,\xi)}{\partial x} d\xi = p(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} d\xi = p(x,y_0) + p(x,y) - p(x,y_0) = p(x,y).$$

ე.ი. თუ (8.21), (7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი $y(x)$ განსაზღვრის $I_0 \subset I$ შუალედით, (8.21)–ის თანახმად გვაქვს

$$p(x,y(x))dx + q(x,y(x))dy(x) = 0, \quad \text{როცა} \quad x \in I_0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ $dz(,y(x)) = 0$, როცა $x \in I_0$. ანუ z, როგორც x–ის ფუნქცია მუდმივია მუდმივია და $z(x,y(x)) = z(x_0,y(x_0)) = 0$. მაშასადამე,ჩვენ ვაცვენით, რომ თუ (8.21), (7.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი $y(x)$ განსაზღვრის $I_0 \subset I$ შუალედით, მაშინ იგივ აკმაყოფილებს (8.23) ტოლობას ყოველუ $x \in I_0$–თვის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (8.23) ტოლობიდან შესაძლებელია $y(x)$–ის განსაზღვრა. გვაქვს $z(x,y(x)) = 0$, $z(x,y)$ ფუ–ნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $I \times]\alpha, \beta[$ სიმრავლეზე და $\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = q(x_0,y_0) \neq 0$. ამიტომ არაცხადი ფუნქცისს არსებობის შესახებ თეორემის გამო, x_0–ის გარკვეულ $I_0 \subset I$ მიდამოში (8.23) ტოლობიდან ცალსახად განისაზღვრება უწყ–ვეტად წარმოებადი $y = y(x)$ ფუნქცია. ცხადია, რომ ასე განსაზღვრული ფუნქცია იქნება (8.21), (7.3) ამოცანას ამონახსნი I_0 შუალედზე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.$\square$

შევნიშნოთ, რომ თუ (8.21) არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ე.წ. არანუ–ლოვანი მაინტეგრებელი მამრავლი $m(x,y)$ ისეთი, რომ განტოლბა

$$y' = -\frac{m(x,y)\,p(x,y)}{m(x,y)\,q(x,y)} \tag{5.50}$$

იქნება განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ამ საკითხს დაწვრილებით შევეხებით პარაგრაფ ??–ში.

თ ა ვ ი 2

ამონახსნების არსებობა და ზოგადი თვისებები

6. ზოგადი სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები და განტოლებები

ამ თავში განიხილება ზოგადი სახის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები და განტოლებების ამოხსნადობის საკითხები და მათი ამონახსნების ზოგადი თვისებები. დამტკიცდება ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ თეორემები. შევნიშნოთ, რომ განტოლებებისთვის განცალებად ცვლადებში ასეთი სახის დებულებები ზემოთ დამტკიცებული იყო დამოუკიდებლად გამომდინარე მათი სახიდან.

6.1. ნორმალური სახის დიფერენციალური სისტემები. ნორმალური სახის (ანუ წარმოებულის მიმართ ამოხსნილ) სისტემას აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{6.1}$$

სადაც $f_i \in C(I \times D, \mathbb{R})$ $(i = 1, \dots, n)$, $I \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი შუალედია, ხოლო $D \subset \mathbb{R}^n$ კი არეა, ანუ ღია ბმული სიმრავლე.

შევნიშნო რომ (6.1) სისტემაში განტოლებების რიცხვი ემთხვევა საძიებელი $x_1, \dots, x_n$ ფუნქციების რაოდენობას.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n),$$

მაშინ, (6.1) სისტემა ჩაიწერება კომპაქტური სახით, როგორც ერთი ვექტორული განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{6.2}$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6.1. $I_0 \subset I$ შუალედზე განსაზღვრულ უწყვეტად წარმოებად ვექტორულ $x = (x_i)_{i=1}^n \in C^1(I_0, D)$ ფუნქციას ეწოდება (6.1) სისტემის ამონახსნი, თუ

$$x(t) \in D \quad \text{და} \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{როცა} \quad t \in I_0. \tag{6.3}$$

შვნიშნოთ, რომ (6.1) სისტემის ამონახსნი აუცილებლად უნდა იყოს უწყვეტად წარმოებადი, რადგანაც ჩვენ მოვითხოვეთ ვექტორული f ფუმქციის უწყვეტობა.

ცხადია, რომ (6.1) სისტემის ნებისმიერი $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$ ამონახსნის გრაფიკი წარმოადგენს $(n+1)$–განზომილებიას სივრცეში წირს, რომლის კოორდინატებია $t, x_1(t), \dots, x_n(t)$. ამ წირის ყოველ წერტილში მისი მხების საკუთხო კოეფიციენტები, (6.1) და (6.2) ტოლობების გამო, შესაბამისად ტოლია $f_1(t, x_1(t), \dots, f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)))$. ასე რომ, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, (6.1) სისტემა განსაზღვრავს მიმართულების ველს იქ, სადაც განსაზღვრულია $f_1, \dots, f_n$ ფუნქციები, ხოლო სისტემის ამონახსნი კი წარმოადგენს წირს, რომელიც ყოველ მის წერტილში ეხება მიმართულების ვექტორს ამ წერტილში.

(6.1) სისტემას, ისევე როგორც ერთ დიფერენციალურ განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს მრავალი ამონახსნი. ამიტომ, რომელიმე ერთი ამონახსნი ამოსარჩევად საჭიროა მოცემული ე.წ. საწყისი პირობები

$$x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0},$$

სადაც $t_0 \in I$ და $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in D$ წინასწარ დასახელებული წერტილი და n–განზომილებიანი ვექტყორია. ცხადია, რომ საწყისი პირობა ჩაიწერება შემდეგი ვექტორული სახით

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.4}$$

აღნიშნული ამოცანა ასე ჩაიწერება (6.2), (6.4) და მას საწყის ან კოშის ამოცანას უწოდებენ, (6.4) პირობას კი საწყის ან კოშის პირობას უწოდებენ. კოშის ამოცანის ამონხსნის ქვეშ გაიგება () სისტემის ისეთი $x \in C^{(1)}(I_0, D), t_0 \in I_0$, ამონახსნი, რომელიც აკმატოფილებს (6.4) ტოლობას.

როგორც სისტემის ამონახსნის განსაზღვრებიდან ჩანს, იგი შეიძლება არ იყოს განსაზღვრული მთლიანად I შუალედ–ზე (შესაბამისი მაგალითი განხილული იყო ზემოთ, იხ ...?). ანუ, რეალურად, არაწრფივი სისტემების შემთხვევაში ამონახსნი განისაზღვრება ლოკალურად (განსხვავებით წრფივისგან, იხ. ქვემოთ). ასეთ ამონახსნებს ხშირად ლოკალურ ამონახსნებს უწოდებენ განსხვავებით გლობალურისგან, ანუ როცა $I_0 = I$.

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი ისეთი არაწრფივი განტოლებისა, რომელსაც არ გააჩნია გლობალური ამონახსნი. განვი–ხილოთ განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

ცხადია, ამ განტოლების მარჯვენა მხარე განსაზღვრულია მთელ $I = \mathbb{R}$ ღერძზე. მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ მას არ გააჩნია გლობალური ამონახსნი, ანუ მისი ნებისმიერი ამონახსნი არ არის განსაზღვრული მთლიანად ნამდვილ ღერძზე.

6.2. დამხმარე დებულებები და განსაზღვრებები. შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი მარტივი შეფასებები:

1. ინტეგრალის შეფასება. თუ ვექტორული $g = (g_i)_{i=1}^m$(ფუნქცია ინტეგრებადია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$\left\| \int_a^b g(t)dt \right\| \le \left| \int_a^b \|g(t)\|dt \right|. \tag{6.5}$$

დამტკიცება. ნორმის განსაზღვრების გამო გვაქვს

$$\left\| \int_a^b g(t)dt \right\| = \sum_{i=1}^m \left| \int_a^b g_i(t)dt \right| \le \sum_{i=1}^m \left| \int_a^b |g_i(t)|dt \right| = \left| \sum_{i=1}^m \int_a^b |g_i(t)|dt \right|$$
$$= \left| \int_a^b \sum_{i=1}^m |g_i(t)|dt \right| = \left| \int_a^b \|g(t)\|dt \right|. \qquad \square$$

2. ვექტორული ფუნქციის ნაზრდის შეფასება. თუ ვექტორული ფუნქციები $x(t)$ და $y(t) = x'(t)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგ–მენტზე და $\|x'(t)\| \le m$, მაშინ (**??**)–ის გამო

$$\|x(b) - x(a)\| \le m|b - a|. \tag{6.6}$$

3. მატრიცის და ვექტორის ნამრავლის ნორმის შეფასება. ვთქვათ, $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ და $x = (x_k)_{k=1}^n$. მაშინ

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|. \tag{6.7}$$

მართლაც, ვთქვათ, $y = Ax$ და $y = (y_i)_{i=1}^n$. მაშინ $y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$. მაშინ ვექტორის და მატრიცის ნორმების განსაზღვრის გამო (იხ. ძირითადი აღნიშვნები) გვაქვს

$$\|y\| = |y_1| + \cdots + |y_n| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x_k| \le \|A\| \sum_{k=1}^m |x_k| = \|A\| \cdot \|x\|.$$

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიურ შეფასებას მივიღებთ თუ დავუშვებთ, რომ გვაქვს ევკლიდური ნორმები

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|}.$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამო გვაქვს

$$|y_i|^2 \le \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \cdot \|x\|^2,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\|Ax\|^2 = \|y\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \cdot \|x\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2.$$

ასე რომ, ვექტორის და მატრიცის კონკრეტული ნორმები ისე უნდა შეირჩეს, რომ ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ ე.წ. მათი შეთანხმობილობის (6.7) პირობას.

ვთქვათ, $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$ და $f(x) = (f_i(x_1, \dots, x_n))_{i=1}^n$ ისეთი სვეტ–ვექტორებია, რომ $x_i'(t)$ და $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ უწყვეტი ფუნქციებია. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად დავასკვნით, რომ

$$\frac{df_i(x(t))}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} x_n'(t) \quad (i = 1, \dots). \tag{6.8}$$

აქედან დავასკვნით, რომ

$$\frac{df(x(t))}{dt} = Ax'(t), \quad \text{სადაც} \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n. \tag{6.9}$$

4. ლიფშიცის პირობა. ვიტყვით, რომ ვექტორული ფუნქცია $f : I \times D \to \mathbb{R}^m$ აკმაყოფილებს x ცვლადის მიმართ ლიფშიცის პირობას D არეზე, თუ მოიძებნება ისეთი მუდმივი L, რომ

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le L\|x - y\|, \quad \text{როცა} \quad t \in I, \quad x, y \in D. \tag{6.10}$$

ლ ე მ ა 6.1. ვთქვათ, $D \subset \mathbb{R}^n$ ამოზნექილი არეა, ვექტორულ $f : I \times D \to \mathbb{R}^m$ ფუნქციას $I \times D$ გააჩნია კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ და $\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\| \le l$, როცა $t \in I, \ x \in D \ (i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n)$, სადაც l მუდმივია. მაშინ $f(t, x)$ ვექტორული ფუნქცია $I \times D$ სიმრავლეზე აკმაყოგილებს ლიფშიცის პირობას $L = ml$ კოეფიციენტით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $t \in I, x, y \in D, z(s) = y + s(x - y)$ და $g(s) = f(t, z(x))$, სადაც $s \in [0, 1]$. მაშინ

$$f(t, x) - f(t, y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s)ds. \tag{6.11}$$

მეორე მხრივ, (6.9)–ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$g'(s) = Az'(s) = A(x - y), \quad \text{სადაც} \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1}^n.$$

D სიმრავლის ამოზნექილობის გამო გვაქვს $z(s) \in D$, როცა $s \in [0, 1]$. მაშასადამე, $\|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\| \le l \ (i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n)$ და $\|A\| \le ml$. აქედან და ბოლო ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $|g'(s)| \le ml$. ასე რომ, (6.10) შეფასება, სადაც $L = ml$, უშუალოდ გამომდინრეობს (6.11) ტოლობიდან. □

6.3. ზოგიერთი შენიშვნა ვექტორულ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მწკრივების შესახებ. ვექტორულ ფუნქციათა

$$x_k = (x_{ik})_{i=1}^n : I \to \mathbb{R}^n \ \ (k = 1, 2, \dots)$$

მიმდევრობას ეწოდება თანაბრად კრებადი (კრებადი) I შუალედზე $x_0 = (x_{i0})_{i=1}^n : I \to \mathbb{R}^n$ ვექტორული ფუნქციისკენ, თუ ყოველი $i \in \{1, ..., n\}$–თვის ფუნქციათა $(x_{ik})_{k=1}^\infty$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია (კრებადია) I–ზე x_{i0} ფუნქციისკენ.

მოყვანილი განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ $x_k : I \to \mathbb{R}^n \ (k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობისთვის (კრებადობისთვის) I შუალედზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$–კენ აუცილებელია და საკმარისი თანაბრად (ყველგან) I–ზე სრულდებოდეს პირობა

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k(t) - x_0(t)\| = 0.$$

ვექტორულ ფუნქციათა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) \tag{6.12}$$

მწკრივს, სადაც $y_k : I \to \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, \dots)$, ეწოდება თანაბრად კრებადი (კრებადი) I შუალედზე, თუ მისი კერძო ჯამების მომდევრობა

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t) \ \ (m = 1, 2, \dots)$$

თანაბრად კრებადია (კრებადია) I–ზე. აღნიშნული მიმდედვრობის ზღვარს კი (7.18) მწკრივის ჯამი ეწოდება.

ქვემოთ ჩვენ არაერთგზის მოგვიხდება ვექტორულ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მწკრივებისთვის ანალიზის შემდეგი კარგად ცნობილი დებულებების გამოყენება.

ა) (**ვაიერშტრასის თეორემა**.) თუ $x_k \in C(I; \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა ნებისმიერი $[a, b] \subset I$–თვის თანაბ–რად კრებადია $[a, b]$–ზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$–კენ, მაშინ $x_0 \in C(I; \mathbb{R}^n)$.

ბ) (**ვაიერშტრასის თეორემა**.) თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი რიცხვითი r_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა, რომ $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k$ მწკრივი კრებადია და ყოველი ნატურალური k–თვის I შუალედში სრულდება უტოლობა

$$\|y_k(t)\| \le r_k,$$

მაშინ (7.18) მწკრივი თანაბრად კრებადია I–ზე.

ბ) (**რიმანის თეორემა**.) თუ $x_k \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია [a,b]–ზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$ ფუნქციისკენ, მაშინ

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b x_k(t)dt = \int_a^b x_0(t)dt. \tag{6.13}$$

ძემოთ მოყვანილ თეორემებს ჩვენ გამოვიენებთ სპეციალური მითითებების გარეშე.

ჩვენ აგრეთვე დაგვჭირდება ზოგიერთი განსაზღვრება და კარგად ცნობილი ლემა ფუნქციათა თეორიიდან.

განსაზღვრება 6.2. ვექტორულ ფუნქციათა $x_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობას ეწოდება ერთობლივ შემოსაზღვრული თუ მოიძებნება ისეთი არაუარყოფითი მუდმივი l, რომ

$$\|x_k(t)\| \le l, \quad \text{როცა} \quad t \in I \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

განსაზღვრება 6.3. ვექტორულ ფუნქციატა $x_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობას ეწოდება ერთობლივ უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$–თვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad |t - s| < \delta, \ \ t, s \in I \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

ეს განსაზღვებები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი. მოვიყვნოთ შესაბამისი მაგალითები. მიმდევრობა $x_k(t) \equiv k$ $(k = 1, 2, \dots)$ ინტერვალზე $I = [0, 1]$ ერთობლივ უწყვეტია, მაგრამ ერთობლივ უწყვეტია, მაგრამ ერთობლივ შემოსაზღვრული არ არის. რაც შეეხება მიმდევრობას $x_k(t) \equiv t^k$ $(k = 1, 2, \dots)$ ინტერვალზე $I = [0, 1]$ ერთობლივ შემოსაზღვრულია, მაგრამ ერთობლივ უწყვეტი არ არის. მართლაც, პირველყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ ეს მიმდევრობა წერტილოვნად კრებადია წყვეტილი $x_*(t) = 0$, როცა $t \in [0, 1[$, $x_*(1) = 1$ ფუნქციისკენ. ასე რომ, თუ დავუშვებთ, რომ იგი ერთობლივ უწყვეტია, მაშინ ქვემოთ მოყვანილი არცელა–ასკოლის ლემის თანახმად მისგან გამოიყოფოდა თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა, რომ–ლის ზღვარი იქნებოდა იგივე იგივე წყვეტილი x_* ფუნქცია, რაც ანალიზის ცნობილი (ვაიერშტრასი??) თეორემის თანახმად შეუძლებელი იქნებოდა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $x_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა ერთობლივ უწყვეტია, I შუალედი სასრულია და ეს მიმდევრობა ერთ წერტილში მაინც შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი ერთობლივ შემოსაზღვრულიც იქნება. მართლაც, ვთქვათ, $t_0 \in I$ ისეთია, რომ $\|x_k(t_0)\| \le r$ $(k = 1, 2, \dots)$. ავიღოთ რაიმე $\varepsilon > o$. რადგანაც მიმდევრობა ერთობლივ უწყვეტია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომელიც აკმაყოფილებს ერთობლივი უყვეტობის პირობას. ცხადია, რომ

$$\|x_k(t)\| \le \|x_k(t) - x_k(t_0)\| + \|x_k(t_0)\| \le r + \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\ \ (k = 1, 2, \dots).$$

ასე რომ, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია t_0 წერტილის δ მიდამოში. რადგანაც I შუალედი სასრულია, ამიტომ ამ პროცესის სასრულო რაოდენობის ჩატარების შემდეგ გავალთ შუალედის ბოლოებამდე.

ლ ე მ ა 6.2. **(არცელა–ასკოლი)** ვთქვათ, I სასრული შუალედია, ხოლო $x_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტი მიდევრობაა. მაშინ მისგან გამოიყოფა I–ში თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა.

დამტკიცება. ვთქვათ, t_1 არის I შუალედის შუა წერტილი. მივიღებთ ორ ტოლ შუალედს. ვთქვათ, ახლა t_2 და t_3 ამ შუალედების შუა წერტილებია. თუ ამ პროცესს უსასრულოდ გავაგრძელებთ, მაშინ k–ური ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ $t_1, \dots, t_{2^k-1}$ წერტილებს. თითოეული ეს წერტილი I შუალედს ყოფს 2^k რაოდენობის ტოლ $|I|/2^k$ სიგრძის შუალედებად. ასეთი წესით აიგება t_k $(k = 1, 2, \dots)$ წერტილთა მიმდევრობა, რომელიც, ცხადია, ყველგან მკვრივია I–ში.

განვიხილოთ მიმდევრობა x_k $(k = 1, 2, \dots)$. ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{1k}(t_1)\}_{k=1}^{+\infty}$. ე.ი. მიმდევრობა $\{x_{1k}(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ კრებადია t_1 წერტილში. განვიხილოთ ახლა მიმდევრობა $\{x_{1k}(t_2)\}_{k=1}^{+\infty}$. ეს მიმდევრობაც შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგანაც გამოიყფა კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x_{2k}(t_2)\}_{k=1}^{+\infty}$. მაშასადამე, მიმდევრობა $\{x_{2k}(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ კრებადია t_1 და t_2 წერტილებში. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდა მივიღებთ მიმდევრობათა უსასურულო $\{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ სისტემას $(i = 1, 2, \dots)$. ამასთან ადგილი აქვს ჩართვებს $\{x_{i+1\,k}(t)\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i = 1, 2, \dots)$.

განვიხილოთ ახლა დიაგონალური მიმდევრობა $y_k(t) \equiv x_{kk}(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$. ვაჩვენოთ, რომ $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ არის საძიებელი მიმდევრობა. ცხადია, რომ $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ არის $\{x_{mk}\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა ყოველი $m \leq k$–თვის. ცხადია, რომ $\{y_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა კრებადია ყოველი $t \in \{t_1, t_2, \dots\}$–თვის. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. რადგანაც ვექტორულ ფუნქციათა $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა ერთობლივ უქყვეტია და ერთობლივ შემოსაზღვრული, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\|y_k(t) - y_k(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა} \quad]t - s| \leq \delta \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

ამ δ–თვის შევარჩიოთ k_0 ისე, რომ $|I|/2^{k_0} < \delta$, ხოლო ამ k_0–თვის კი ისე შევარჩიოთ k_*, რომ

$$\|y_k(t_i) - y_m(t_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{როცა} \quad k, m \geq k_* \ \ (i = 1, \dots, 2^{k_0} - 1).$$

ვთქვათ, ახლა $k \geq k_*$ და $m \geq k_*$ ფიქსირებულია. ცხადია, რომ ნებისმიერი t-თვის მოიძებნება ისეთი $i \in \{1, \dots, 2^{k_0} - 1\}$, რომ $|t - t_i| < |I|/2^{k_0} \leq \delta$. მაშასადამე,

$$\|y_k(t) - y_m(t)\| \leq \|y_k(t) - y_k(t_i)\| + \|y_k(t_i) - y_m(t_i)\| + \|y_m(t_i) - y_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ასე რომ $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია I შუალედზე. $\square$

შ ე დ ე გ ი 6.1. ვთქვათ, ვექტორულ ფუნქციათა $x_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია უსასრული I შუალედზე. მაშინ მისგან გამოიყოფა ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც ამ შუალედის ყოველ სასრულ შუალედზე თანაბრად კრებადია გარკვეული უწყვეტი φ ფუნქციისკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ სასრულ შუალედთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i = I.$$

არცელა–ასკოლის ლემის თანახმად $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა სასრულ I_1 შუალედზე თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა $\{y_{1k}\}_{k=1}^{+\infty}$. ვთქვათ, ვექტორული ფუნქცია $\varphi_1 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ისეთია, რომ

$$\lim_{k \to +\infty} y_{1k}(t) = \varphi_1(t) \quad \text{თანაბრად როცა} \quad t \in I_1.$$

ცახადია, რომ ვექტორულ ფუნქციათა $\{y_{1k}\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია სასრული I_2 შუალედზე. თუ ამ მიმდევრობისთვის კვლავ გამოვიყენებთ არცელა–ასკოლის ლემას, დავასკვნით, რომ მისგან გამოიყოფა სასრულ I_2 შუალედზე თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა $\{y_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$. ვთქვათ, $\varphi_2 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ვექტორული ფუნქცია ისეთია, რომ

$$\lim_{k \to +\infty} y_{2k}(t) = \varphi_2(t) \quad \text{თანაბრად როცა} \quad t \in I_1.$$

ცხადია, რომ $\varphi_1(t) = \psi_2(t)$, როცა $t \in I_1$.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მივიღებთ ვექტორულ ფუნქციათა ისეთ $\{y_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i = 1, 2, \dots)$ და $\varphi_i \in C(I, \mathbb{R}^n)$ $(i = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობებს, რომ $\{y_{i+1\,k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{y_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}$ $(i = 1, 2, \dots)$, $\varphi_i(t) = \psi_{i+1}(t)$, როცა $t \in I_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ და

$$\lim_{k\to+\infty} y_{ik}(t) = \varphi_i(t) \quad \text{თანაბრად როცა} \quad t \in I_i \;\; (i = 1, 2, \dots).$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობის $z_k(t) \equiv y_{kk}$ $(k = 1, 2, \dots)$ ქვემიმდევრობა თანაბრად კრებადია I შუალედის ყოველ სასრულ შუალედზე თანაბრად კრებადია $\varphi(t) = \varphi_i(t)$, როცა $t \in I_i$, $i = 1, 2, \dots$, ვექტორული ფუნქციისკენ. $\square$

6.4. არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები. ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ კოშის (6.2), (**??**) ამოცანის არსებობის თეორემის ორ დამტკიცებას. ერთი ეკუთვნის ტონელის და იგი ეფუძნება ე.წ. დაგვიანებულ არგუმენტებიან განტოლებაზე გადასვლას, ხოლო მეორე კი მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს, რომლის დამტკიცება ეკუთვნის პიკარს.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. **(კოში–პეანო)** ვთქვათ,

$$f \in C(I \times D, \mathbb{R}^n). \tag{6.14}$$

მაშინ ყოველი $x_0 \in D$ და $t_0 \in I$–თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანა ამოხსნადია.

ამონახსნადობა, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, გაიგება ლოკალურად, ანუ t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება ვოლტერას ტიპის შემდეგი არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის განხილვა

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \quad (t \in I). \tag{6.15}$$

ამ სისტემის ამონახსნი, ისევე როგორც კოშის (6.2), (**??**) ამოცანის ამონახსნი გაიგება ლოკალურად. ანუ რაიმე $I_0 \subset I$, $t_0 \in I_0$, შუალედში განსაზღვრულ უყვეტ ვექტორულ $x \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ ფუნქციას ეწოდება (6.15) სისტემის ამონახსნი თუ იგი აკმაყოფილებს (6.15) ტოლობას ყოველი $t \in I_0$–თვის. შევნიშნოთ, რომ f ვექტორული ფუნქციის უწყვეტობის გამო ეს ამონახსნი იქნება უწყვეტად წარმოებადიც I_0 შუალედზე.

ადვილი საჩვენებილია, რომ კოშის (6.2), (**??**) ამოცანა ექვივალენტურია ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა აღნიშნული სისტემის. მართლაც, თუ $x \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ არის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ I_0 შუალედზე ადგილი აქვს (6.4), რომლის ინტეგრებითაც t_0 და t საზღვრბში, (**??**) ტოლობის გათვალისინებით დავასკვნით, რომ ამავე I_0 შუალედში ადგილი აქვს (6.15) ტოლობას. რაც შეეხება პირუკუ დებულებას. იგი უშუალოდ გამომდინარეობ (6.15) ტოლობის გაარმოებით t ცვლადით.

ვაჩვენოთ, რომ (6.15) ინტეგრალური სისტემა ამოხსნადია.

რადგანაც $x_0 \in D$ და D არის ღია სიმრავლე, ამიტომ არსებობს ისეთი $r_0 > 0$, რომ პარალელეპიპედი $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r_0\} \subset D$. მეორე მხრივ, რადგანაც $t_0 \in I$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ჩაკეტილი ინტერვალი $I_* \subset I$, რომ $t_0 \in I_*$ (თუ I ჩაკეტილია, მაშინ $I_* = I$).

(6.14) პირობის თანახმად ვექტორული ფუნქცია f უწყვეტია ჩაკეტილ $I_* \times D_0$ სიმრავლეზე და, მაშასადამე, შემოსაზღვრულია ამ სიმრავლეზე. ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი M, რომ

$$\|f(t, x)\| \le M, \quad \text{როცა} \;\; (t, x) \in I_* \times D_0). \tag{6.16}$$

შევარჩიოთ $\alpha \in \mathbb{R}$ და $\beta \in \mathbb{R}$ ისე, რომ $t_0 \in [\alpha, \beta] \subset I_*$ და

$$\max\{t_0 - \alpha, \beta - t_0\} \le \frac{r_0}{M}. \tag{6.17}$$

ვაჩვენოთ, რომ (6.15) ინტეგრაკურ განტოლებათა სისემას გააჩნია ამონახსნი $C(I_0, \mathbb{R}^n)$, სადაც $I_0 = [\alpha, \beta]$.

დავუშვათ, რომ $\beta > t_0$ და დავამტკიცოთ ამონასნის არსებობა $[t_0, \beta]$ შუალედში.

დამტკიცების მეთოდი ალგორითმული ხასიათისაა, ანუ ის არა მარტო ამტკიცებს ამონახსნის არსებობას, არამედ მიუთითებს მისი პოვნის გზაზეც. ეს მეთოდი ეკუთვნის იტალიელ მათემატიკოს ტონელის.

განვიხილოთ ვექტორულ ფუმქციათა x_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა, სადაც

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0, & \text{როცა} \quad t_0 \le t < t_0 + \frac{\delta}{k}, \\ x_0 + \int\limits_{t_0}^{t-\frac{\delta}{k}}, & \text{როცა} \quad t_0 + \frac{\delta}{k} \le t \le \beta \end{cases} \tag{6.18}$$

$(k = 1, 2, \dots)$, სადაც $\delta = \beta - t_0$.

ყოველი ნატურალური k–თვის ვექტორული ფუნქცია x_k განისაზღვრება შემდეგი წესით. ჩაკეტილი $[t_0, \beta]$ ინტერვალი დაიყოფა k ტოლ ნაწილად. $[t_0, t_0 + \frac{\delta}{k}[$ ინტერვალში $x_k(t)$ განისაზღვრება (6.18)–ის პირველი ტოლობით. $[t_0 + \frac{\delta}{k}, t_0 + \frac{2\delta}{k}[$ ინტერვალში $x_k(t)$ განისაზღვრება (6.18)–ის მეორე ტოლობით – ეს შესაძლებელია, რადგანაც როცა $t \in [t_0 + \frac{\delta}{k}, t_0 + \frac{2\delta}{k}[$, მაშინ $t - \frac{\delta}{k} \in [t_0, t_0 + \frac{\delta}{k}\beta[$, რასაც უზრუნველყოფს ინტეგრალის ზედა საზღვარი. ასე რომ, ყოველ მომდევნო შუალედში $x_k(t)$ განისაძღვრება წინა შუალედში მისი მნიშვნელობებით. ეს პროცესი დასრულდება β ბოლოში გასვლით.

ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ x_k ვექტორული ფუნქცია უწყვეტია $[t_0, \beta]$ შუალედში და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|x_k(t) - x_0\| \le r_0, \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, \beta]. \tag{6.19}$$

ცხადია, რომ $[t_0, t_0 + \frac{\delta}{k}[$ შუალედზე x_k ვექტორულ ფუნქციას გააჩნია ეს თვისებები. დავუშვათ, ახლა რომ ვექტორული ფუნქცია x_k უყვეტია და აკმაყოფილებს (6.19) შეფასებას $[t_0, t_0 + \frac{i\delta}{k}[$ შუალედზე რომელიმე $i \in \{1, \dots, k-1\}$–თვის. ვაჩვენოთ, რომ იგივე სამართლიანია $[t_0, t_0 + \frac{(i+1)\delta}{k}]$ შუალედზეც. უწყვეტობისთვის საეჭვოა მხოლოდ $t_0 + \frac{i\delta}{k}$ წერტილი, მაგრამ ამ წერტილში მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია. შევამომოთ ახლა (6.19). თუ $t \in [t_0 + \frac{i\delta}{k}, t_0 + \frac{(i+1)\delta}{k}]$, მაშინ $t - \frac{\delta}{k} \in [t_0 + \frac{(i-1)\delta}{k}, t_0 + \frac{i\delta}{k}]$. ამიტომ ინდუქციის დაშვებისა და (6.16)–ის გამო გვაქვს .

$$\|x_k(t) - x_0\| \le \int\limits_{t_0}^{t_0-\frac{\delta}{k}} \|f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \le M(t - \frac{\delta}{k} - t_0) \le M(\beta - t_0) \le M\frac{r_0}{M} = r_0.$$

ასე რომ, (6.19)–ის გამო x_k $(k = 1, 2, \dots)$ ერთობლივ შემოსაზღვრულია $[t_0, \beta]$ შუალედზე.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ეს მიმდევრობა ერთობლივ უწყვეტია იმავე შუალედზე. ვთქვათ, $s, t \in [t_0, \beta]$ და $s < t$. მაშინ (6.16) და (6.19)–ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\text{ა)} \ \|x_k(t) - x_k(s)\| = 0, \quad \text{როცა} \quad t_0 \le t \le s < t_0 + \frac{\delta}{k},$$

$$\text{ბ)} \ \|x_k(t) - x_k(s)\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t-\frac{\delta}{k}} f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \right\| \le \int\limits_{t_0}^{t-\frac{\delta}{k}} \|f(\tau, x_k(\tau))\| d\tau s \le M\Big(t - \Big(t_0 + \frac{\delta}{k}\Big)\Big)$$

$$\le M(t - s) \quad \text{როცა} \quad t < t_0 + \frac{\delta}{k} \le s,$$

$$\text{გ)} \ \|x_k(t) - x_k(s)\| = \left\| \int\limits_{t-\frac{\delta}{k}}^{s-\frac{\delta}{k}} f(\tau, x_k(\tau)) d\tau \right\| \le \int\limits_{t-\frac{\delta}{k}}^{s-\frac{\delta}{k}} \|f(\tau, x_k(\tau))\| d\tau s$$

$$\le M(t - s) \quad \text{როცა} \quad t_0 + \frac{\delta}{k} \le t \le s \le \beta$$

$(k = 1, 2, \dots)$. ასე რომ, სამივე შემთხვევაში ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \le M|t - s|, \quad \text{როცა} \quad t, s \in [t_0, \beta] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

ამ შეფასებებიდან გამომდინარეონს, რომ ვექტორულ ფუნქციათა აღნიშნული მიმდევრობა ერთობლივ უწყვეტია ჩაკეტილ $[t_0, \beta]$ შუალედზე.

არველა–ასკოლის ლემის თანახმად x_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა $[t_0, \beta]$ ინტევრვალზე თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრფობა x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორული ფუნქცია $x(t) = \lim_{i\to+\infty} x_{k_i}(t)$ წარმოად- გენს (5.14) სისტემის ამონახსნს $[t_0, b]$ შუალედზე. ვთქვათ, $t \in]t_0, \beta]$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. მაშინ დაყებული საკმარისად დიდი i_0–დან $t > t_0 + \frac{\delta}{k_i}$, როცა $i \geq i_0$. ასე რომ, (6.15)–ის გამო გვაქვს

$$x_{k_i}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\delta}{k_i}} f(\tau, x_{k_i}(\tau))d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k_i}(\tau))d\tau + \int_{t}^{t-\frac{\delta}{k_i}} f(\tau, x_{k_i}(\tau))d\tau. \tag{6.20}$$

ყოველი $i \geq i_0$–თვის.

(6.17) და (6.19) პირობებიდან დავასკვნით, რომ

$$\left\| \int_{t}^{t-\frac{\delta}{k_i}} f(\tau, x_{k_i}(\tau))d\tau \right\| \leq M\frac{\delta}{k_i} \ \ (i \geq i_0).$$

ასე რომ, (6.20)–ის მეორე ინტეგრალი მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $i \to +\infty$. გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$\lim_{i\to+\infty} f(\tau, x_{k_i}(\tau)) = f(\tau, x(\tau)) \quad \text{თანაბრად} \quad [t_0, t] - \text{ზე}.$$

გამომდინარე თქმულიდან, თუ (6.20)–ში გადავალ ზღვარზე, როცა $i \to +\infty$, ადვილად დავსკვნით, რომ (6.16) ტოლობა სრულდება ყოველი $t \in]t_0, b$–თვის. რაც შეეხება t_0 წერტილს, ამ წერტიშიც სრულდება აღნიშნული ტოლობა, რადგანაც ორივე მხარე x_0–ის ტოლია.

მაშასადამე, ვექტორული ფუნქცია x არის (6.16) სისტემის ამონახსნი $[t_0, \beta]$ შუალედზე.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ (6.16) სისტემას $[t_0, \beta]$ შუალედზეც გააჩნია ამონახსნი $Y \in C([a, t_0], \mathbb{R}^n)$ თუ $\alpha < t_0$. მაშინ ცხადია, რომ

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & \text{როცა} \quad t \in [\alpha, t_0], \\ x(t), & \text{როცა} \quad t \in]t_0, \beta] \end{cases}$$

ტოლობებით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქცია z იქნება (6.16) სისტემის ამონახსნი $[\alpha, \beta]$ შუალედზე. □

კოში–პეანოს თეორემა წარმოადგენს ე.წ. არსებობის თეორემას. ანუ თუ (6.2) სისტემაში მოვითხოვთ, რომ ვექტორული ფუნქცია მხოლოდ უწყვეტია, მაშინ შეიძლება კოშის ამოცანას ჰქონდეს ერთზე მეტი ამონახსნი და, უფრო მეტიც, უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი (შესაბამისი მაგალითი ჩვენ განვიხილეთ ზემოთ). ეს იმიტომ ხდება, რომ კოში–პეანოს დამტკიცებაში შეიძ- ლება არსებობდეს ერთზე მეტი რაოდენობი თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობებისა, რომლებიც კრებადია განსხვავვებული ვექტორული ფუნქციებისკენ (ამონახსნებისკენ).

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებს. ცხადია, რომ ვექტორულ f ფუნქციაზე გარდა უყვეტობის უნდა მოვითხოვოთ დამატებითი შეზღუდვები.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6.4. ვიტყვით, რომ კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, თუ როგორიც არ უნდა იყოს ამ ამოცანის ორი ამონახსნი $x \in C^1(I_1; \mathbb{R}^n), t_0 \in I_1$, და $y \in C^1(I_2; \mathbb{R}^n), t_0 \in I_2$, ისინი ერთმანეტის ტოლია განსაზღვრის საერთო შუალედზე, ანუ $x(t) = y(t), t \in I_1 \cap I_2$.

თ ე ო რ ე მ ა 6.2. **(ოსგუდი)** ვთქვათ, შესრულებულია (6.14) პირობა და

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \quad \text{როცა} \quad t \in I, \ \ x, y \in D, \tag{6.21}$$

სადაც $\omega \in C([0, +\infty), \mathbb{R}_+), \omega(s) > s \ (s > 0), \omega(0) = 0, \omega$ არაკლებადია და

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty. \tag{6.22}$$

მაშინ ყოველი $x_0 \in D$ და $t_0 \in I$–თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

ω ფუნქციაზე თეორემაში დადებულ პირობებს ოსგუდის პირობები ეწოდება. (6.21) პირობა ნიშნავს, რომ f ფუნქცია თანაბრად უქყვეტია x ცვლადის მიმართ, რადგანაც ω უწყვეტია და $\omega(0) = 0$. მაგრამ აქ უფრო მეტი მოთხოვნაა, ვიდრე უწყვეტობა. კერძოდ, შეიძლება უწყვერტი ფუნქცია არ აკმაყოფილებდე ოსგუდის ყველა პირობას. განვვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

ვთქვათ, ფუნქცია $f(x) = \sqrt[3]{x}$ რომელიმე ω–თვის აკმაყოფილებს (6.21) პირობას, ანუ $|f(x)-f(y)| = |\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}| \leq \omega(|x-y|)$. ამ შეფასებაში თუ ავიღებთ $y = 0$, მივიღებთ $\sqrt[3]{|x|} \leq \omega(|x|)$, ანუ $\sqrt[3]{s} \leq \omega(s)$, როცა $s > 0$. აქედან გამომდინარე, დავასკვნით, რომ

$$\int\limits_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} \leq \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt[3]{s}} < +\infty.$$

ე.ი.(6.22) ტოლობა დარღვეულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ფუნქციაა არ აკმაყოფილებს ოსგუდის თეორემის პირობებს და ეს ბუნებრივიცაა, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში კოშის ამოცანას ექნებოდა მხოლოდ ერთი ამონახსნი, მაგრამ ჩვენ ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ შესაბამისი განტილებისთვის კოშის ამოცანას ნულოვანი საწყისი ირობებით აქვს უსასრულოდ ბევტი ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ (6.22) პირობაში ზედა საზღვრი 1 არაფერ შუაშია და იგი შეგვიძლია შევცვალოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვით. აღნიშნული პირობა უბრალოდ არის ω ფუნქციის ნულისკენ მისწრაფების რიგზე დადებული პირობა.

ოსგუდის თეორემის დამტკიცება. ამოცანის ამონახსნის არსებობა გამომდინარეობს კოში–პეანოს თეორემიდან. ვაჩვენოთ, რომ (6.2), (**??**) ამოცანას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი განსხვავებული ამონახსნი.

დავუშვათ საწინააღნდეგო, რომ ამ ამოცანას გააჩნის ორი განსხვავებული ამონახსნი x და y განსაზღვრის საერთო შუალედით $[\alpha,\beta]$, $t_0 \in [\alpha,\beta]$. ვთქვათ, $t_* \in [\alpha,\beta]$ ისეთია, რომ $x(t_*) \neq y(t_*)$. ცხადია, რომ $t_* \neq t_0$ (რადგანაც $x(t_0) = y(t_0) = x_0$) და $\|x(t_*) - y(_*)\| > 0$. ვიგულისხმოთ, რომ $t_* > t_0$ ($t_* < t_0$ შემთხვევისთვის მსჯელობა ანალოგიურია).

შემოვიტანოთ ფუნქცია $u(t) = \|x(t) - y(t)\|$. ცხადია, $u(t)$ უწყვეტი და არაუარყოფითია $[t_0, t_*]$–ზე. $u(t_*) > 0$ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $u(t) > 0$ წერტილ t_*–ის გარკვეულ მიდამოში. გარდა ამისა, $u(t_0)$. ამიტომ მოიძებნება $t_1 \in [t_0, t_*)$, რომ

$$u(t_1) = 0 \quad \text{და} \quad u(t) > 0, \quad \text{როცა} \quad t_1 < t \leq t_* \tag{6.23}$$

(კერძოდ, შეიძლება t_1 ტოლი იყოს t_0–ის , მაგრამ $t_1 \neq t_*$).

(6.23)–დან გამომდინარეობს, რომ $x(t_1) = y(t_1)$. მაშასადამე,

$$y(t) = x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \;\; \text{და} \quad x(t) = x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \quad \text{როცა} \;\; t \in [\alpha,\beta].$$

ამ ტოლობებიდან (6.21)–ის გათვალისინებით დავასკვნით, რომ

$$u(t) \leq \xi(t), \quad \text{როცა} \quad t_1 \leq t \leq t_*, \tag{6.24}$$

$\xi(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \omega(u(\tau))d\tau$. (6.23)–ის გამო

$$\xi(t) > 0, \quad \text{როცა} \quad t_1 < t \leq t_*. \tag{6.25}$$

მეორე მხრივ, ω ფუნქციის არაკლებადობის ძალით (6.24)–დან გვაქვს

$$\omega(u(t)) \leq \omega(\xi(t)), \quad \text{როცა} \quad t_1 < t \leq t_*, \tag{6.26}$$

ხოლო (6.23) და (6.25)–დან კი დავასკვნით, რომ

$$\omega(\xi(t)) > 0, \quad \text{როცა} \quad t_1 < t \leq t_*.$$

ამიტომ (6.26)–დან ვღებულობთ

$$\frac{\xi'(t)}{\omega(\xi(t))} \leq 1, \quad \text{როცა} \quad t_1 < t \leq t_*. \tag{6.27}$$

ვთქვათ, ახლა $\varepsilon > 0$ ისეა შერჩეული, რომ $t_1 + \varepsilon < t_*$. (6.27) ტოლობის ინტეგრებით $t_1 + \varepsilon$-დან t_*-მდე მივიღებთ

$$\int_{t_1+\varepsilon}^{t} \frac{\xi'(t)}{\omega(\xi(t))dt} \leq t_* - t_1 - \varepsilon < t_* - t_1$$

და, მაშასადამე,

$$\int_{\xi(t_1+\varepsilon)}^{\xi(t_*)} \frac{s}{\omega(s)} < t_* - t_1.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ

$$\int_{0}^{\xi(t_*)} \frac{s}{\omega(s)} < t_* - t_1 < +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (6.22) პირობას. □

შ ე დ ე გ ი 6.2. ვთქვათ, ვექტორული ფუნქცია f აკმაყოფილებს (6.14) და ლიფშიცის (6.11) პირობებს. მაშინ ყოველი $x_0 \in D$ და $t_0 \in I$-თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს ოსგუდის თეორემიდან, თუ ვიგულისმებთ, რომ $\omega(s) = Ls$. □

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება აკმყოფილებდეს ოსგუდის პირობას, მაგრამ არ აკმაყოფილებდეს ლიფშიცის პირობას. ამ საკითხთან მიმართებით საინტერესო თვისებები გააჩნია ვაიერშრასის ფუნქციას

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k cos(b^k x),$$

სადაც a და b პარამეტრებია (იხ. ახიეზრ "ლექციები აპროქსიმაციის თეორიაში")

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ თუ დარღვეულია (6.22) პირობა, მაშინ კოშის ამოცანას ამონხსნის ერტადერთობ ირღვევა, ანუ ვექტორული f ფუნქციაზე მარტო უწყვეტობის მოტხოვნა ვერ უზრუნველჰყოფს კოშის ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობას.

უფრო მეტიც, გარკვეული აზრით სამართლიანია პურუკუ დებულებაც. ??????????
????????

თ ე ო რ ე მ ა 6.3. **(ნაგუმო)** ვთქვათ, დაცულია (6.14) პირობა და

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{\|x-y\|}{|t-t_0|}, \quad \text{როცა} \quad t \in I \setminus \{t_0\}, \quad x, y \in D, \tag{6.28}$$

მაშინ ყოველი $x_0 \in D$-თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

(6.1)-ს ნაგუმო-პერონის პირობა ეწოდება. თუ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ იგი t_0-ის საკმარისად მცირე მიდამოში იგი დააკმაყოფილებს (6.1) პირობასაც.

ნაგუმოს თეორემის დამტკიცება. ამოცანის ამონახსნის არსებობა გამომდინარეობს კოში-პეანოს თეორემიდან. ვაჩვენოთ ერთადერთობა. ვთქვათ, გვაქვს პრი ამონახსნი x და y განსაზღვრის საერთო შუალედით $[\alpha, \beta]$. ვთქვათ, რომელიმე $t_* \in [\alpha, \beta]$-თვის $\|x(t_*) - y(t_*)\| > 0$. ვიგულისმოთ, რომ $t > t_0$. შემოვიტანოთ ფუქცია

$$u(t_0) = 0, \quad u(t) = \frac{\|x(t) - y(t)\|}{t - t_0}, \quad \text{როცა} \quad t_0 < t \leq t_*.$$

u უწყვეტი ფუნქციაა u შუალედზე. საეჭვო წერტილია t_0. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, მივიღებთ

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{x(t) - y(t)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0+} \frac{x'(t) - y'(t)}{1} = \lim_{t \to t_0+} (f(t, x(t)) - f(t, y(t)))$$
$$= f(t_0, x(t_0)) - f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, x_0) - f(t_0, x_0) = 0.$$

ასე რომ,

$$\lim_{t \to t_0+} u(t) = 0.$$

u უწყვეტობიდან და $u(t_0) = 0, u(t_*) > 0$ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ მოიძებნების ისეთი $\tilde{t} \in (t_0, t_*]$, სადაც u ფუნქცია მიაღწევს მაქსიმუმს.

მეორე მხრივ, ამონახსნის გნსაზღვერების გამო ადვილი შესამოწმებელია, რომ ადგილო აქვს ეფასებას

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(y(\tau,))\| d\tau, \quad \text{როცა} \quad t_0 \leq t \leq t_*,$$

საიდანაც (**??**)–ის ძალით დავასკვნით, რომ

$$u(t) \leq \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau, \quad \text{როცა} \quad t_0 < t \leq t_*.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში ავიღებთ $t = \tilde{t}$, გავითვალისინებთ, რომ $u(t) \leq u(\tilde{t})$ და ერთ წერტილი მაინც გვაქვს მკაცრი უტოლობა $(u(t_0) < u(\tilde{t}))$, დავასკვნით

$$u(\tilde{t}) \leq \frac{1}{\tilde{t} - t_0} \int_{t_0}^{\tilde{t}} u(\tau) d\tau < \frac{1}{\tilde{t} - t_0} \int_{t_0}^{\tilde{t}} u(\tilde{t}) d\tau = u(\tilde{t}).$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, კოშის ამოცანას ჰქონია ერთადერთი ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 6.1. (6.1) პირობის მარჯვენა მხარეში არ შეიძლება დაიწეროს მუდმივი $l > 1$. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6.1. ვთქვათ, მოცემულია კოშის ამოცანა

$$\frac{dx}{dt} = t^{\mu} \sin \frac{lx}{t^{1+\mu}}, \quad x(0) = 0,$$

სადაც $\mu > 0$ და $l > 1$ ფიქსირებული მუდმივებია. ცხადია, რომ $x(t) \equiv 0$ არის ამ ამოცანის ამონახსნი. ამ განტოლების სხვა ამონახსნები ვეძებოთ ასეთი სახით $x(t) = \frac{c}{l} t^{1+\mu}$ სახით, სადაც c უცნობი პარამეტრია. ამონახსნის განსაზღვრების გამო გვაქვს ტოლობა

$$\left(\frac{c}{l} t^{1+\mu} \right)' = t^{\mu} \sin c.$$

ასე რომ,

$$\mu = l \frac{\sin c}{c} - 1.$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{c \to 0} l \frac{\sin c}{c} = l > 1$. ამიტომ, მოიძებნება ისეთი c_0, რომ

$$\frac{1}{l} < \frac{\sin c}{c} < 1, \quad \text{როცა} \quad 0 < |c| < |c_0|. \tag{6.29}$$

ცხადია, რომ არსებობს უსასრულო რაოდენობა c მუდმივებისა, რომლებიც აკმაყოფილებს (6.5) უტოლობას. მაშასადამე, კოშის აღნიშნულ ამოცანას გააჩნია ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა. მეორე მხრივ, შევნიშნოთ აღნისნული განტოლების მარჯვენა მხარეა $f(t, x) = t^{\mu} \sin \frac{lx}{t^{1+\mu}}$, რომლისთვისაც (6.1) უტოლობას აქვს შემდეგი სახე

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{l|x - y|}{|t|}, \quad \text{როცა} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

სადაც $l > 1$.

6.5. კოშის ამოცანის ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

თ ე ო რ ე მ ა 6.4. **(პიკარ–ლინდელოფი.)** ვთქვათ, ვექტორული ფუნქცია f აკმაყოფილებს (6.14) და ლიფშიცის (6.11) პირობებს. მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ და $x_0 \in D$–თვის მოიძებნება ისეთი ჩაკეტილი შუალედი $[\alpha, \beta] \subset I, t_0 \in [\alpha, \beta]$, რომელზედაც კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა როგორც შემდეგი მიმდევრობის თანაბარი ზღვარი

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta] \;\; (k = 1, 2, \dots). \tag{6.30}$$

დამტკიცება. შევარჩიოთ $r_0 > 0$ და ჩაკეტილი $I_* \subset I$ და $[\alpha, \beta] \subset, t_0 \in [\alpha, \beta]$, შუალედები და ჩაკეტილი პარალელეპიპედი $D_0 \subset$ ისე, როგორც კოში–პეანოს თეორემის დამტკიცებისას, ანუ ვიგულისხმებთ, რომ შესრულებულია (6.16) და (6.17) შეფასებები. გარდა ამისა, როგორც აღნიშნული თეორემის დამკციბისას ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური k–თვის, (6.5) ტოლობით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქცია უეყვეტია $[\alpha, \beta]$ შუალედში და ადგილი აქვს (6.19) შეფასებას.

ვაჩვენოთ, რომ (6.5) ტოლობებით განსაზღვრული

$$x_k \in C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n) \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{6.31}$$

მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[\alpha, \beta]$ შუალედზე.

(6.31) მიმდევრობის თანაბარი კრებადობა ტოლფასია

$$x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t)) \tag{6.32}$$

მწკრივის თანაბარი კრებადობის იმავე შუალედზე.

ამიტომ, უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ დაგვჭირდება $x_k(t) - x_{k-1}(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ სხვაობების შეფასება.

(6.5)–დან, (6.16), (6.17) და (6.19)–ის ძალით, ნათელია, რომ

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le r_0, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

და

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \le L \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)\| d\tau \right|, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta] \;\; (k = 1, 2, \dots). \tag{6.33}$$

როგორც ვნახეთ $k = 1$–თვის სამართლიანია უტოლობა

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \le r_0 \frac{L^{k-1}}{(k-1)!} |t - t_0|^{k-1}, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta] \;\; (k = 1, 2, \dots). \tag{6.34}$$

დავამტკოცოთ ამ უტოლობის სამარლიანობა ინდუქციის მეთოდით.

დავუშვათ ამ უტოლობის სამართლიანობა რაიმე k–თვის. მაშინ (6.5) და (6.34)–დან მივიღებთ

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \le r_0 \frac{L^k}{(k-1)!} \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\tau - t_0|^{k-1} d\tau \right| = r_0 \frac{L^k}{k!} |t - t_0|^k, \quad \text{როც} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

მაშასადამე, (6.34) შეფასება დამტკიცებული ნებისმიერი ნატურალური k–თვის.

(6.34)–დან ვხადია, რომ (6.32) ფუნქციური მწკრივის მაჟორანტული მწკრივი იქნება კრებადი რიცხვითი მწკრივი

$$\|x_0\| + r_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^{k-1}}{(k-1)!},$$

სადაც

$$r = L(\beta - \alpha).$$

აქედან, ვაიერშტრასის ცნობილი თეორემის თანახმად გამომდინარეობს, რომ (6.32) ფუნქციური მწკრივი და, მაშასადამე, $x_k(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობაც თანაბრად კრებადია ჩაკეტილ $[\alpha, \beta]$ შუალედზე. ვთქვათ,

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t), \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

ვაიერშტრასის ზემოაღნიშნული თეორემის ძალით

$$x \in C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n).$$

თუ -ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$, დავასკვნით, რომ ვექტორული ფუნქცია x იქნება (6.2), (**??**) ამოცანის ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე რადგანაც f ვექტორული ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[\alpha, \beta] \times D_0$ სიმრავლეზე და x_{k-1} $(k = 1, 2, \dots)$ თანაბრად კრებადია ვექტორული x ფუნქციისკენ $[\alpha, \beta]$ შუალედზე და ამიტომ ვექტორულ ფუნქციათა $f(t, x_{k-1}(t))$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობაც თანაბრად კრებადი იქნება იმავე შუალედზე $f(t, x)$ ვექტორული ფუნქციისკენ. ერთადერთობა გამომდინარეონს შედეგი 6.2-დან.

ერთადერთობის დამტკიცება შესაძლებელია ზემოთ მოცემული გრონუოლ-ბელმანის ლემის გამოყენებითაც. მართლაც, თუ

ამ ამოცანის ორი ამონახნია, მაშინ

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \quad \text{და} \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta]\beta]$$

ტოლობებიდა ლიფშიცის (6.11) პირობის გათვალისინებით ვღებულობთ, რომ

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - y\tau\| d\tau \right|, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

საიდანაც გრონუოლ-ბელმანის ლემის ძალით დავასკვნით, რომ

$$u(t) \equiv 0, \quad x(t) \equiv y(t).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდთან დაკავშირებით საინტერესოა შემდეგი საკითხების განხილვა:

1) შეიძლებოდა თუ არა კოში-პეანოს დამტკიცენისას განხილულ (6.18) ფორმულის ნაცვლად გაგვეხილა (6.5) მიმდევრონა. ამ შემთხვევაშიც დამტკიცდებოდა ამ მიმდევრობის ერთობლივ სემოსაზღვრულობდა და ერთობლივ უწყვეტობა და არცელა-ასკილის ლემის თანახმად კვლავ გამოიყოფოდა თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$. (6.5) მიმდევრონა კი მიიღებდა შემდეგ სახეს

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{k_i}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k_i - 1}(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [\alpha, \beta] \;\; (i = 1, 2, \dots).$$

მაგრამ ამ თოლობაში ზღვარზე გადასვლა არაფერს მოგვცემდა, რასდგანაც ჩვენ ვერაფერს ვიტყოდით $x_{k_i - 1}$ $(i = 1, 2, \dots)$ კრებადობის შესახებ.უფრო მეტიც, ის შეიძლება არცკი ყოფილიყო კრებადი მიუხედავადე იმისა, რომ x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$ და $x_{k_{i-1}}$ $(i = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობები კრებადია.

2) დამაძტკიცებულ თეორემაში ერთადერთობა ახალი არ იყო. მაგრამ ამ თეორემის მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი საშუალებას იძლევა ამონახსნი მიახლოებით აიგოს ისეთი მარტივი და მოხერხებული მეთოდით, როგორიცაა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი. ასეთი რამ ყოველთვის არაა შესაძლებელი. შეიძლება (6.2), (**??**) ამოცანას ჰქონდეს ერთადერთ ამონახსნი, მაგრამ (6.5) მიმდევრონა ამონახსნს არ იძლეოდეს. უფრო მეტიც, შეიძლება განშლადიც კი იყოს. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ (6.5) მიმდევრონა თანაბრდა კრებაიდა (6.2), (**??**) ამოცანას ერტადერთი ამონახსნისკენ უფრო ზოგად პირობებეში, კერძოდ, 6.2 და 6.3 თეორემების პირობებშიც.

6.6. კოშის ამოცანის ამონახსნის გაგრძელებადობა.

განსაზღვრება 6.5. კოშის (6.2), (**??**) ამოცანის (α, β) შუალედზე განსაზღვრულ $x(t)$ ამონახსნს ეწოდება გაგრძელებადი მარჯვნივ, თუ მოიძებენა $\beta* > \beta$ და ამ ამოცანის $(\alpha, \beta*)$ შუალედში განსაზღვრული $x^*(t)$ ამონახსნი ისეთი, რომ $x(t) = x^*(t)$, როცა $x \in (\alpha, \beta)$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $y^*(x)$ ამონახსნს ეწოდება მარჯვნივ არაგაგრძელებადი. ანალოგიურად განიმარტება ამონახსნის მარცხნივ გაგრძელებადობა და არაგაგრძელებადობა. ამონახსნს ეწოდება არაგაგრძელებადიან სრული, თუ ის არ არის გაგრძელებადი არც მარცხნივ და არც მარჯვნივ.

შემდეგი თეორემა იძლევა ამონახსნის არაგაგეძელებადობის სუცილებელ და საკმარის პირობებს.
ჩვენ დაგვჭირდება შმდეგი ლემა.

ლემა 6.3. ვთქვათ, $D \subset \mathbb{R}^n$ არეა Γ საზღვრით. მაშინ ყოველი $x_0 \in D$-თვის

$$D_0 \subset D,$$

სადაც $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \rho(x_0, \Gamma)\}$, ხოლო $\rho(x_0, \Gamma)$ კი არის მანძილი x_0-დან D არის საზღვრამდე.

დამტკიცება. დავუშვათ საინააღმდეგო, რომ მოიძებნება $y_0 \in D_0$ ისეთი, რომ $y_0 \notin D$. განვიხილოთ ბმული შუალედი $J_0 = \{tx_0 + (1-t)y_0 : t \in (0, 1)\}$. თუ დავუშვებთ, რომ $J_0 \cap \Gamma = \varnothing$, მაშინ $J_0 = J_1 \cup J_2$, სადაც $J_1 = J_0 \cap D$, $J_2 = J_0 \cap \{\mathbb{R}^n \setminus \{D \cup \Gamma\}\}$, რაც წინააღმდეგობაა, რადგანაც J_1 და J_2 თანაუკვეთი ბმული შუალედებია. მაშასადამე, $J_0 \cap \Gamma \neq \varnothing$. ვთქვათ, $z_0 \in \Gamma$, ხოლო $t_0 \in (0, 1)$ ისეთია, რომ $z_0 = t_0 x_0 + (1 - t_0) y_0$. ცხადია, რომ

$$\rho(x_0, \Gamma) \le \|x_0 - z_0\| = \|(1 - t_0)(x_0 - y_0)\| \le (1 - t_0)\|x_0 - y_0\| < (1 - t_0)\rho(x_0, \Delta).$$

აქედან დავასკვნით, რომ $t_0 < 0$. მიღებული წინააღნდეგობა ამტკიცებს ლემას. $\square$

შემდგომში, ამ ლემას გამოვიყენებთ ხშირად მასზე მითითების გარეშე.

თეორემა 6.5. იმისათვის, რომ (6.2), (**??**) ამოცანის $(\alpha, \beta) \subset I$ შუალედზე განსაზღვრულ $x(t)$ ამონახსნი იყოს არაგაგრძელებადი მარჯვნივ აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს ერთ–ერთი შემდეგი სამი პირობიდან:

$$1)\ \beta = \sup I; \quad 2)\ \lim_{t \to \beta-} \|x(t)\| = +\infty; \quad 3)\ \lim_{t \to \beta-} \rho(x(t), \Gamma) = 0;$$

სადაც Γ არის D არის საზღვარი, ხოლო $\rho(x, \Gamma) = \inf\{\|x - y\| : y \in \Gamma\}$ არის მანძილი ნებისმიერი x წერტილიდან Γ საზღვერამდე.

დამტკიცება. ამ თითოეული ამ პირობების საკმარისობა ცხადია. მართლაც, თუ შესრულებულია 1) პირობა, მაშინ,ცხადია, რომ ამონახსნი არაგაგრძელებადია; თუ დაცულია 2) პირობა, მაშინ x ამონახსნს β–ს მარჯვნივ ვერ გაგრძელდება არამც თუ როგორც ამონახსნი, არამედ, საეერთოდ, როგორც უწყვეტი ფუნქცია; დაბოლოს, თუ დაცულია 3) პირობა და x გაგრძელებადია მარჯვნივ, მაშინ მისი x^* გაგრძელების მნშვნელობა β წერტილში ონდა მოხვდეს D არის საზღვარზე f–ის უწყვეტობისა და საზღვრის ჩაკეტილობის გამო. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც Γ საზღვარზე f ფუნქცია განსაზვრული არ არის (ეს შემთხვევა კარგად უნდა გავიაზრო–მ.ა.).

ვაჩვენოთ ახლა აუცილებლობა. დავუშვათ ახლა, რომ არ სრულდება არცერთი ამ სამი პირობიდან. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში x ამონახსნი გაგრძელებადია მარჯვნივ. რადგანაც მე–2) პირობა არ სრუკდება, ამიტომ

$$\lim_{t \to \beta-} \inf \|x(t)\| < +\infty.$$

მაშასადამე, მოიძებნება წერტილთა $t_k \in (\alpha, \beta)$ $(k = 1, 2, \dots)$, მიმდევრობა ისეთი, რომ $t_k \to \beta-$ და $\|x_k(t_k)\|$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ამიტომ მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა $x(t_{k_i})$ $(i = 1, 2, ...)$. ვთქვათ,

$$\lim_{i \to +\infty} x(\beta_i) = x^*, \tag{6.35}$$

სადაც $\beta_i = t_{k_i}$ $(i = 1, 2, \dots)$. შევნიშნოთ, რომ, რადგანა მე–3) პირობა დარღვეულია, ამიტომ ისე შეიძლება შეირჩეს t_k $(k = 1, 2, \dots)$, რომ $x^* \in D$. ასე რომ, მოიძებნება ისეთი $r^* > 0$, რომ $D^* \subset$, სადაც $D^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\|\}$.

შევარჩიოთ i_0 ისე, რომ

$$\|x(\beta_{i_0}) - x^*\| < \frac{r^*}{2} \tag{6.36}$$

და

$$M(\beta - \beta_{i_0}) < \frac{r^*}{2}, \tag{6.37}$$

სადაც

$$M = \max\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in [t_0, \beta] \times D^*\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$x(t) \in D^*, \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, \beta). \tag{6.38}$$

მართლაც, (6.36)–დან გამომდინარეობს, რომ β_{i_0}–ის მარჯვენა მიდამოში $\|x(t) - x^*\| < r^*$, ანუ $x(t) \in D$ აღნიშნულ მიდამოში. დავუშვათ ახლა, რომ (6.38) პირობა არ სრულდება მთლიანად $[\beta_{i_0}, \beta)$ შუალედში. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\beta^* \in (\beta_{i_0}, \beta)$, რომ $x(t) \in D^*, t \in [\beta_{i_0}, \beta^*)$ და

$$\|x(\beta^*) - x^*\| = r^*. \tag{6.39}$$

მეორე მხრივ,

$$x(\beta^*) = x(\beta_{i_0}) + \int_{\beta_{i_0}}^{\beta^*} f(\tau, x(\tau))d\tau = r^*$$

ტოლობიდან (6.36) და (6.37) შეფასებების ძალით დავასკვნით, რომ

$$\|x(\beta^*) - x^*\| \leq \|x(\beta_{i_0}) - x^*\| + \int_{\beta_{i_0}}^{\beta^*} \|f(\tau, x(\tau) < \frac{r^*}{2} + M(\beta - \beta_{i_0}) < r^*.$$

(6.39) ტოლობასთან მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (6.38)–ს.

ცხადია, რომ საკმარისად დიდი i–თვის $\beta_i > \beta_{i_0}$. ამიტომ,

$$x(t) - x(\beta_i) = \int_{\beta_i}^{\beta^*} f(\tau, x(\tau))d\tau \quad (t \in [\beta_i, \beta)$$

ტოლობიდან, (6.38)–ის ძალით დავასკვნით, რომ

$$\|x(t) - x(\beta_i)\| \leq M(\beta - \beta_i), \quad \text{როცა} \quad t \in [\beta_i, \beta).$$

გარდა ამისა,

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x(t) - x(\beta_i)\| + \|x(\beta_i) - x^*\|, \quad \text{როცა} \quad t \in [\beta_i, \beta).$$

ასე რომ,

$$\lim_{t \to \beta-} \sup \|x(t) - x^*\| \leq M(\beta - \beta_i) + \|x(\beta_i) - x^*\|.$$

ყოველი საკმარისად დიდი i–თვის. თუ უკანასკნელ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to +\infty$, და გავითვალისინებთ (6.35)–ს, მივიღებთ

$$\lim_{t \to \beta-} \sup \|x(t) - x^*\| \leq 0.$$

მაშასადამე, არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t \to \beta-} x(t) = x^*.$$

რადგანაც $\beta < \sup I$ და $x^* \in D$, ამიტომ (6.2) სისტემისთვის შეგვიძლია დავსვათ კოშის ამოცანა

$$x(\beta) = x^*. \tag{6.40}$$

კოში–პეანოს თეორემის თანახმად (6.2), (6.43) ამოცანას β–ს საკმარისად მცირე მარჯვენა $[\beta, \beta_1]$, $\beta_1 > \beta$ მიდამოში გააჩნია ამონახსნი y. მაშინ $(\alpha, \beta_1]$ შუალედში განსაზღვრული $z(t) = x(t)$, როცა $t \in (\alpha, \beta)$, $z(t) = y(t)$ როცა $t \in [\beta, \beta_1]$, იქნება (6.2), (**??**) ამოცანის ამონახსნი $(\alpha, \beta_1]$ შუალედში. ე.ი. x ამონახსნი გაგრძელებადია მარჯვნივ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ანალოგიური თეორემა სამართლიანია მარცხნივ გაგრძელებადობის შესახებაც.

ბუნებრივია ისმის შეკითხვა – არსებობს თუ არა არაგაგრძელებადი ამონახსნები. ქვემოთ დამტკიცებული თეორემა იძლევა დადებით პასუხს ა შეკითხვაზე.

თ ე ო რ ე მ ა 6.6. ნებისმიერი $t_0 \in I$ და $x_0 \in D$–თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია არაგაგრძელებადი ამონახსნი.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ მატჯვნივ არაგაგრძელებადი ამონახსნის არსებობა. ანლოგიურად ვაჩვენებთ მარცხნივ არაგაგრძელებადი ამონახსნის არსებობას. ამ ამონხსნების გადაბმით (t_0, x_0) წერტილში კი მივიღებთ ამ ამოცანის არაგაგრძელებად ამონახსნს.

ვთქვათ, Γ არის D–ს საზღვარი, ხოლო

$$r_0 = \min\left\{\frac{\rho(x_0, \Gamma)}{2}, 1\right\},$$

სადაც $\rho(x, \Gamma)$ არის მანძილი ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილიდან Γ–მდე. r_0–ის განსაზღვრებაში მინიმუმი იმიტომ ავიღეთ, რომ შესაძლოა D არე შემოუსაზღვრელი იყოს და ამ შემთხვევაში $\rho\{x_0, D\}$ უსასრულობა იქნება.

განვიხილოთ ნამდვილ $t_0 < \beta_k < \beta_{k+1} < \sup I$ $(k = 0, 1, \dots)$ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{k \to +\infty} \beta_k = \sup I. \tag{6.41}$$

ვთქვათ,

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r_0\};$$

$$M_0(t) = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_0, t] \times D_0\} \quad \text{და} \quad \mu_0(t) = (t - t_0) M_0(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

ლემა 6.3–ის ძალით ცხადია, რომ $D_0 \subset D$.

ვთქვათ, $\mu_0(\beta_0) \le r_0$. მაშინ

$$\beta_0 - t_0 \le \frac{r_0}{M_0(\beta_0)}.$$

თუ გავიხსენებთ კოში–პეანოს თეორემის დამტკიცებას, დავასკვნით, რომ (6.2), (**??**) ამოცანას აქვს $[t_0, t_1]$ შუალედზე განსაზღვრული ამონახსნი x_1 ისეთი, რომ $x_1(t) \in D$, როცა $t \in [t_0, t_1]$, სადაც $t_1 = t_0 + \delta_0$, ხოლო

$$\delta_0 = \min\left\{\beta_0 - t_0, \frac{r_0}{M_0(\beta_0)}\right\} = \beta_0 - t_0.$$

ასე რომ, $t_1 = \beta_0$. ვთქვათ, ახლა $\mu_0(\beta_0) > r_0$. რადგანაც $\mu_0(t_0) = 0$ და μ_0 უწყვეტია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\beta_* \in (t_0, \beta_0)$, რომ $\mu_0(\beta_*) = 0$. ასე რომ, ამ შემთხვევაშიც (6.2), (**??**) ამოცანას აქვს $[t_0, t_1]$ შუალედში განსაზღვრული ამონახსნი x_1 ისეთი, რომ $x_1(t) \in D$, როცა $t \in [t_0, t_1]$, სადაც $t_1 = t_0 + (\beta_* - t_0) = \beta_*$. მაშასადამე, ორივე შემთხვევაში გვაქვს

$$M_0(t_1) \le \frac{r_0}{\beta_0 - r_0}.$$

(6.2) სისტემისთვის განვიხილოთ კოშის შემდეგი ამოცანა

$$x(t_1) = x_1(t_1). \tag{6.42}$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ მივიღებთ შემდეგ მიმდევრობებს $t_k = t_{k-1} + \delta_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$, $x_k(t_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$,

$$
\begin{aligned}
&r_k = \min\left\{\frac{\rho(x_k(t_k), \Gamma)}{2}, 1\right\} \quad (k = 1, 2, \dots),\\
&D_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_k(t_k)\| \le r_k\} \subset D \quad (k = 1, 2, \dots),\\
&M_k(t) = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_k, t] \times D_k\}, \quad M_k(t_{k+1}) \le \frac{r_k}{\beta_k - r_k} \quad (k = 1, 2, \dots)
\end{aligned}
$$

და

$$
\delta_k = \min\left\{\beta_k - t_k, \frac{r_k}{M_k(t_{k+1})}\right\} = \beta_k - t_k \quad (k = 1, 2, \dots).
$$

ცხადია, რომ $[t_k, t_{k+1}]$ შუალეზე, სადაც $t_{k+1} = t_k + \delta_k$, (6.2) სისტემას გააჩნია ამომხსნი x_k ასეთი საწყისი პირობით $x(t_k) = x_k(t_k)$, ხოლო, რადგანაც $t_{k+1} = \beta_k$, ამიტონ $t_{k+1} < \sup I$ ნებისმიერი ნატურალური k–თვის. ასე რომ, არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = t^* \in I$.

ცხადია, რომ ვექტორული ფუნქცია x, განსაზღვრული $x(t) = x_k(t)$, როცა $t \in [t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \dots)$ ტოლობებით, იქნება (6.2), (**??**) ამოცანის ამონახსნი $[t_0, t^*)$ შუალედში.

ვაჩვენოთ, რომ ეს x ამონახსნი არაგაგრძელებადია მარჯვნივ. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ იგი გაგრძელებადია. მაშინ ისევე, როგორც თეორემა 6.5–ის აუცილებლობის დამტკიცებისას, დავასკვნით, რომ მოიძებნება t_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობის ისეთი $\tau_i = t_{k_i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ ქვემიმდებრობა, რომ ვექტორთა $x(\tau_i)$ $(i = 1, 2, \dots)$ მიმდებრობა კრებადია, ანუ $\lim_{i\to+\infty} x(\tau_i) = x_*$. რადგანაც დარღვეულია თეორემა 6.5–ის მე–3) პირობა, ამიტომ $x^* \in D$. ზოგადობის შეუზღუდავადვ შეგვიძლია ვიგულისმოთ, რომ t_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა არის ასეთი.

ვთქვათ,

$$
r^* = \min\left\{\frac{3\rho(x^*, \Gamma)}{4}, 2\right\}, \quad D^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \le r^*\} \subset D.
$$

ვაჩვენოთ, რომ გარკვეული ნატურალური k_0–დან დაწყებული $D_k \subset D^*$. მართლაც, თუ $D = \mathbb{R}^n$, მაშინ $r_k = 1$ და $r^* = 2$. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი ნატურალური k_0, რომ $\|x_k - x^*\| < 1/2$, როცა $k \ge k_0$; ასე რომ, თუ $\|x_k - x^*\| < 1/2$, მაშინ $\|x - x^*\| < 2$. ანალოგიურად შემოწმდება აღნიშნული ჩართვა იმ შემთხვევაშიც, როცა $D \ne \mathbb{R}^n$.

ვთქვათ, ახლა

$$
M^* = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_0, t^*] \times D^*\}.
$$

რადგანაც $D_k \subset D^*$, ამიტომ $M_k \le M^*$, როცა $k \ge k_0$. მეორე მხრივ, რადგანაც $\rho(x^*, \Gamma) > 0$ და $x_k \to x^*$, როცა $k \to +\infty$, ადვილი შესამოწმებელია, რომ $r_k > 0$, როცა $(k \ge k_0)$, სადაც r_0 რაღაც დადებითი რიცხვია. მაშასადამე, მოიძებნება ისეთი η, რომ $\delta_k > \eta > 0$. გარდა ამისა, ცხადია, რომ $t_k = t_0 + \delta_0 + \dots + \delta_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$. ასე რომ $t_k > t_0 + k\eta \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე.ი. x არის მარჯვნივ არაგაგრძელებადი ამონახსნი. თეორემა დამტკიცებულია.

6.7. კოშის ამოცანის ზედა და ქვედა ამონახსნები. განვიხილოთ კოშის ამოცანა სკალარული დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$
\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{6.43}
$$

$$
x(a) = x_0, \tag{6.44}
$$

სადაც $f \in C(I \times D; \mathbb{R})$, I და D შუალედებია $\mathbb{R}$–დან, $a \in I$, $a < \sup I$, $x_0 \in D$.

განსაზღვრება 6.6. (6.43), (6.44) ამოცანის $[a,b)$ შუალედზე განსაზღვრულ x^* ამონახსნს ეწოდება აღნიშნული ამოცანის ზედა ამონახსნი, თუ როგორიც არ უნდა იყოს ამ განტოლების $[a,b_0)$ შუალედზე განსაზღვრული x ამონახსნი, ადგილი აქვს უტოლობას

$$x(t) \le x^*(t), \quad \text{როცა} \quad t \in [a,b) \cap [a,b_0). \tag{6.45}$$

შენიშვნა 6.2. ზემოთ მოყვანილ გაბსაზღვეამაში ჩვენ არ მოგვითხოვია, რომ (6.45) შეფასება მხოლოდ $[a,b)$–ზე განსაზღვრული x ამონახსნისთვის სრულდებოდეს. საქმე იმაშია, რომ შეიძლება ზოგიერთი ამონახსნი ვერ გაგრძელდეს b წერტილამდე, (6.45) კი უნდა სრულდებოდეს ასეთი ამონახსნებისთვისაც.

თეორემა 6.7. (6.43), (6.44) ამოცანას გააჩნია ზედა ამონახსნი a წერტილის საკმარისად მცირე მარჯვენა მიდამოში ნებისმიერი $x_0 \in D$–თვის.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

ლემა 6.4. ვთქვათ, x არის (6.43), (6.44) ამოცანის რაიმე ამონახსნი განსაზღვრული $[a,b)$ შუალედზე, ხოლო $y : [a,b) \to D$ არის უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია ისეთი, რომ

$$y'(t) < f(t, y(t)), \quad \text{როცა} \quad t \in [a,b) \tag{6.46}$$

$$y(a) \le x_0. \tag{6.47}$$

მაშინ

$$y(t) < x_0, \quad \text{როცა} \quad t \in (a,b). \tag{6.48}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $u(t) \equiv x(t) - y(t)$. მაშინ (6.44) და (6.48)–დან გამომდინარეობს, რომ $u(a) \ge 0$. გვაქვს ორი შემთხვევა: $u(a) > 0$ ან $u(a) = 0$. პირველ შემთხვევაში ცხადია, რომ a წერტილის გარკვეულ მარჯვენა მიდამოში $u(t) > 0$. მეორე შემთხვევაში, (6.48)–ის ძალით, გვაქვს $x(a) = y(a)$ და $u'(a) = x'(a) - y'(a) = f(x, x(a)) - y'(a) > 0$. ე.ი. t–ს მარჯვენა მიდამოშიც $u'(t) > 0$. აქედან, $u(t) = \int\limits_0^t u'(\tau)d\tau > 0$ და, მასასადამე, ორივე შემთხვევაში მოიძებნები ისეთი $b_0 \in [a,b)$, რომ $u(t) > 0$, როცა $t \in (a,b_0)$. დავუშვათ ახლა, რომ (6.48) არ სრულდება. მაშინ მოიზებნება ისეთი $t^* \in [a,b)$, რომ $u(t) > 0$, როცა $t \in (a,t^*)$ და $u(t^*) = 0$, ანუ $x(t^*) = y(t^*)$. ამ შემთხვევაში კი კვლავ (6.48)–ის ძალით, გვაქვს

$$u'(t^*) = f(t^*, x(t^*)) - y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) - y'(t^*) > 0.$$

აქედან დავასკვნით, რომ u ფუნქცია ზრდადი უნდა იყოს t^* წერტილის მარცხენა მიდამოში, ე.ი. ამ მიდამოში u ფუნქცია დადებითია, კერძოდ, $u(t^*) > 0$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. □

თეორემა (6.3)–ის დამტკიცება. რადაგანაც D ღიაა და $x_0 \in D$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $r_0 > 0$, რომ $D_0 = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \le r_0\} \subset D$.

ვთქვათ, k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \frac{1}{k}. \tag{6.49}$$

როგორც კოში–პეანოს (თეორემა 6.1) თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს, (6.49), (6.44) ამოცანას $[a, a+\delta]$ შუალედზე გააჩნია x_k ამონახსნი, სადაც

$$\delta = \min\left\{b - a, \frac{r_0}{M}\right\}, \quad M = 1 + \max\{|f(t,x)| : (t,x) \in [a,b] \times D_0\},$$

სადაც $[a,b] \subset I$ ნებისმიერი ფიქსირებული შუალედია. ცხადია, რომ $[a, a+\delta]$ შუალედია არ არის დამოკიდებული k–ზე. ამასთან სრულდება უტოლობა

$$|x_k(t) - x_0| \le r_0, \quad \text{როცა} \quad t \in [a, a+\delta] \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{6.50}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ x_k $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია ჩაკეტილ $[a, a+\delta]$ შუალედზე. მეორე მხრივ, (6.49) და (6.50) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $|x_k'(t)| \le M$, როცა $t \in [a, a+\delta]$

$(k = 1, 2, \dots)$. ასე რომ, ეს მიმდევრობა ერთობლივ უწყვეტიცაა $[a, a + \delta]$ შუალედზე. ამიტომ, არცელა–ასკოლის ლემის თანახმად მისგან გამოიყოფა თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$. ვთქვათ, $\lim_{i \to +\infty} x_{k_i}(t) = x^*(t)$, $(t \in [a, a + \delta])$. მეორე მხრივ,

$$x_{k_i}(t) = x_0 + \int_a^t \left(f(\tau, x_{k_i}(\tau)) + \frac{1}{k_i} \right) d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [a, a + \delta] \quad (i = 1, 2, \dots). \tag{6.51}$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to +\infty$ და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ x_{k_i} მიმდევრობის თანაბარი კრებადობის გამო შესაძლებელია ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა (იხ. რიმანის თეორემა), დავასკვნით, რომ

$$x^*(t) = x_0 + \int_a^t f(\tau, x^*(\tau))\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [a, a + \delta].$$

მაშასადამე, x^* არის კოშის (6.43), (6.44) ამოცანის ამონახსნი $[a, a + \delta]$ შუალედში. ვაჩვენოთ, რომ იგი წარმოადგენს ამ ამოცანის ზედა ამონახსნს ამავე შუალედსი.

ვთქვათ, x არის აღნიშნული ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განსაზღვრული რაიმე $[a, \beta)$ შუალედში. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$x(t) \le x^*(t), \quad \text{როცა} \quad t \in [a, \beta_0), \tag{6.52}$$

სადაც $\beta_0 = \min\{\beta, a + \delta\}$.

ცხადია, რომ

$$x'(t) = f(t, x(t)) < f(t, x(t)) + \frac{1}{k_i}, , \quad \text{როცა} \quad t \in [a, \beta_0) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

ამიტომ, ლემა (6.4)–ის ძალით გვაქვს $x(t) < x_{k_i}(t)$, როცა $t \in [a, \beta_0)$ $(i = 1, 2, \dots)$. თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to +\infty$, მივიღებთ (6.52) შეფასებას. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 6.3. ზედა ამონახსნის ანალოგიურად შემოდის კოშის ამოცანის ქვედა ამონახსნის ცნება. თეორემა –ის ანალოგიურად მტკიცდება, რომ კოშის (6.43), (6.44) ამოცანას გააჩნია ქვედა ამონახსნი a წერტილის საკმარისად მცირე მარჯვენა მიდამოში. ამ შემთხვევაში განხილული უნდა იყოს

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) - \frac{1}{k}$$

სახის დამხმარე განტოლება. ამასთან გამოყენებული უნდა იქნეს ლემა 6.4–ის ანალოგიური ლემა იმ განსხვავებით, რომ უტოლობები უნდა შეიცვალოს საიწააღმდეგო უტოლობებბით.

ზუსტად ისევე, როგორც 6.6 თეორემის დამტკიცებისას, შეიძლება ნაჩვენები იქნეს, რომ (6.43), (6.44) ამოცანას აქვს მარგვნივ არაგაგრძელებადი ზედა და ქვედა ამონახსნები. ამისათვის საჭიროა ამ ტეორემაში აღწერილი პროცესის გამეორება იმ განსხვავებით, რომ ყოველ შემდეგ ეტაპზე ნებისმიერ ამონახსნს კი არ ავირებთ, არამედ ზედა (შესაბამისად, ქვედა) ამონახნებს. საბოლოოდ მივითღბთ გარკვეულ $[a, t_*)$ შუალედში განსაზღვრულ მარჯვნივ არაგაგრძელებად ამონახნს, რომელიც ზედა (შესაბამისად ქვედა) ამონახსნი იქნება ამ შუალედში. დაბოლოს, შევნიშნოთ, რომ თუ (6.43), (6.44) ამოცანას აქვს ერთადერთა ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზედა და ქვედა ამონახსნები ერთმანეთს ემთხვევა.

თ ე ო რ ე მ ა 6.8. ვთქვათ, (6.43), (6.44) ამოცანას გააჩნია ზედა ამონახსნი x^* განსაზღვრული $[a, b) \subset I$ შუალედზე, ხოლო $y : [a, b] \to D$ კი არის ისეთი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, რომ

$$y'(t) \le f(t, y(t)), \quad \text{როცა} \quad t \in [a, b) \tag{6.53}$$

$$y(a) \le x_0. \tag{6.54}$$

მაშინ

$$y(t) \le x^*(t), \quad \text{როცა} \quad t \in [a, b). \tag{6.55}$$

დამტკიცება. $I\times D$ სიმრავლეზე შემივიღოთ ფუნქცია

$$\tilde f(t,x)=\begin{cases} f(t,x), & \text{როცა} \quad x>y(t),\\ f(t,y(t)), & \text{როცა} \quad x\le y(t).\end{cases}$$

ცხადია, რომ ყოველი ფიქსირებული $t\in I$–თვის $\tilde f(t,x)$ ფუნქცია ემთხვევა $f(t,x)$–ს, $y(t)$ წირის ზემოთ, ხილო ამ წირის ქვემოთ იგი მუდმივია x–ის მიმართ. ამათანავე იგი უწყვეია $I\times D$ სიმრავლეზე.

განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dx}{dt}=\tilde f(t,x). \tag{6.56}$$

ვთქვათ, x არის (6.54), (6.44) ამოცანის მარჯვნივ არაგაგრძელებადი ამონახსნი განსაზღვრის $[a,\beta)$ შუალედით. ვაჩ–ვენოთ, რომ

$$y(t)\le x(t), \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b)\cap[a,\beta]. \tag{6.57}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი წერტილი $t^*\in[a,b)\cap[a,\beta)$, რომ $y(t^*)>x(t^*)$. რადგანაც (6.54)–ის გამო $y(a)\le x(a)$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $t_*\in[a,t^*)$, რომ

$$x(t_*)=y_*(t) \quad \text{და} \quad x(t)<y(t), \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b). \tag{6.58}$$

ვთქვათ, $u(t\equiv y(t)-x(t))$. მაში $\tilde f$ ფუნქციის განსაზღვრის, (6.53) და (6.95–ის გამო გვაქვს

$$u'(t)=y'(t)-x'(t)=y'(t)-\tilde f(t,x(t))=y'(t)-f(t,y(t))\le 0), \quad \text{როცა} \quad t\in[t_*,t^*]. \tag{6.59}$$

მეორე მხრივ, (6.95)–ის ძალით გვაქვს $u(t_*)=0$ და $u(t)>0$, როცა $t\in(t_*,t^*]$, რაც ეწინააღმდეგება (6.59)–ს. მაშასა–დამე, (6.57) დამტკიცებულია.

(6.57)–დან გამომდინარეობს, რომ x არის (6.43), (6.44) ამოცანის ამონახსნი $[a,b)\cap[a,\beta)$ შუალედში, რადგანაც x–ის გრაფიკი მოთავსებულია y–ის გრაფიკის ქვემოთ და აქ კი $\tilde f(t,x)=f(t,x)$. ამიტომ ზედა ამონახსნის განსაზღვრების გამო $x(t)\le x^*(t)$ და ე.ი. $y(t)\le x(t)\le x^*(t)$, როცა $t\in[a,b)\cap[a,\beta)$. ეს შეფასება, ერთი მხრივ, ამტკიცებს (6.55) შეფასებას და, მეორე მხრივ, გვიჩვენებს, რომ $[a,b)\cap[a,\beta)=[a,b)$. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $\beta<b$, მაშინ გამოვიდოდა, რომ x ამონახსნი მოთავსებული იქნებოდა y და x^*–ს შორის. ამიტომ თეორემა 6.5–ის ძალით იგი არ იქნებოდა არაგაგრძელებადი.
□

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა 6.6 არის ე.წ. დიფერენციალურ უტოლობათა ტიპის დებულება. ანალოგიური თეორემას ადგილი აქვს ე.წ. ინტეგრალურ უტოლობათა შესახებავ.

თ ე ო რ ე მ ა 6.9. ვთქვათ, f ფუნქცია არაკლებაიდია მეორე არგუმენტის მიმართ და (6.43), (6.44) ამოცანას გააჩნია ზედა ამონახსნი x^* განსაზღვრული $[a,b)\subset I$ შუალედზე, ხოლო $y:[a,b]\to D$ კი არის ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომ

$$y(t)\le x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,y(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b) \tag{6.60}$$

(6.61)

მაშინ სამართლიანია (6.55) შეფასება.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$z(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,y(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b).$$

მაშინ (6.60) ასე გადაიწერება

$$y(t)\le z(t),; \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b). \tag{6.62}$$

მეორე მხრივ, $z(a) = x_0$ და f ფუნქციის მეორე არგუმენტის მიმართ არაკლებადობი გამო გვაქვს

$$z'(t) = f(t, y(t)) \leq f(t, z(t)), ; \quad \text{როცა} \quad t \in [a, b).$$

ასე რომ, z ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 6.6-ის პირობებს. მაშასადამე, $z(t) \leq x^*(t)$, როცა $t \in [a, b)$. აქედან კი, თავის მხრივ, (6.6) შეფასების ძალით გამომდინარეობს (6.55) შეფასება. □

ამ თეოემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს პირველ თავში დამტკიცებული გრონუოლ–ბელმანის ლემა (იხ. ლემა 7.2); კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ $f(t, x) \equiv p(t)x$, სადაც $p \in C(I; \mathbb{R}_+)$, ანუ არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა. მართლაც, ამ შემთხვევაში (6.53) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x,$$

ხოლო (6.53), (6.55) ამოცანას ექნება ერთადერთი ამონახსნი

$$x^*(t) = x_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right).$$

ცხადია, რომ ეს ამონახსნი იქნება როგორც ზედა, ასევე ქვედა ამონახსნი.

თეორემა 6.9 საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ სხვადასხვა სახის ანალოგიური შეფასება. მაგალითად, თუ $\omega : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ უქყვეტი, არაკლებადი ფუნქციაა ისეთი, რომ

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty, \tag{6.63}$$

ხოლო $p : [a, b] \to [0, +\infty)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$y(t) \leq x_0 + \int\limits_{a}^{t} p(\tau)\omega(y(\tau))d\tau, ; \quad \text{როცა} \quad t \in [a, b),$$

გამომდინარეობს შეფასება

$$y(t) \leq G^{-1}\left(\int\limits_{a}^{t} p(\tau)d\tau\right), ; \quad \text{როცა} \quad t \in [a, b),$$

სადაც

$$G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{\omega(s)}, \quad \text{როცა} \quad x \in [0, +\infty).$$

მართლაც, ამ სემთხვევაში (6.43) განტოლება წარმოადგენს განტოლებას განცალებადი ცვლადებით და (6.43), (6.44) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც მოიცემა

$$x^*(t) = G^{-1}\left(\int\limits_{a}^{t} p(\tau)d\tau\right)$$

ტოლობით (იხ. (7.1)). ამასთან, (6.63) პირობა უზრუნველყოფს, რომ $\int_a^t p(\tau)d\tau$ Φ^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არეში მოხვდეს.

6.8. კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის არალოკალური თეორემა. ზემოთ დამტკიცებულ კოშის ამოცანის არსებობის თეორემები (კოში–პეანო, რიკატი, ოსგუიდს, ნაგუმო–პერონი) იყო ლოკალური სახის, ანუ შეეხებოდა ლოკალური ამონახსნების არსებობას. ცხადია, რომ ინტერესს წარმოადგენს ისეთი თეორემები, სადაც მტკიცდება არალოკალყრი ამონახსნების არსებობა.

ამ პუნქტიში ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $f \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

თ ე ო რ ე მ ა 6.10. (ა. უინტნერი) ვთქვათ,

$$\|f(t,x)\| \leq g(t)\omega(\|x\|), \quad \text{როცა}, \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \tag{6.64}$$

სადაც $g \in C(I, \mathbb{R}_+)$, ხოლო $\omega \in C(\mathbb{R}_+, (0, +\infty)$ ლი ისეთი არაკლებასდი ფუნქციაა, რომ

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty. \tag{6.65}$$

მაშინ ყოველი $x_0 \in \mathbb{R}$ და $t_0 \in I$–თვის კოშის (6.2), (**??**) ამოცანის ნებისმიერი არაგაგრზელებადი ამონახსნი განსაზღვრული მთელ I შუალედზე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ (6.2), (**??**) ამოცანას გააჩნია არაგაგრძელებადი ამონახსნი x, რომელიც განსაზთვრული $I_0 \subset I$ შუალედზე და ამასთან $I_0 \neq I$. ე.ი. ან $\sup I_0 < \sup I$, ან $\inf I_0 > \inf I$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისმოთ, რომ $\sup I_0 < \sup I$ (მეორე შემთხვევაც განიხილება ანალოგიურად).

ვთქვათ, $t^* = \sup I_0$. ამონახსნის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, t^*).$$

აქედან, (6.64)–ის ძალით მივიღებთ

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int\limits_0^t g(\tau)\omega(\|x(\tau)\|)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, t^*). \tag{6.66}$$

რადგანაც ω არაკლებადი ფუნქციაა, ამიტომ, როგორც ეს თეორემა 6.9–ის დამტკიცებიდან ჩანს, $\|x(t)\|$ არ აღემატება

$$\frac{dx}{dt} = g(t)\omega(\rho),$$
$$\rho(t_0) = \|x_0\|$$

ამოცანის ზედა ამონახსნს.

როგორც მეორე თავში ნაჩვენები იყო, რომ ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ცხადია იგი არის ზედა ამონასნიც, და იგი მოიცემა ფორმულით (იხ. (7.1

$$\rho^*(t) = G^{-1}\left(\int\limits_a^t g(\tau)d\tau\right), \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, t^*),$$

სადაც

$$G(s) = \int\limits_{\|x_0\|}^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}, \quad \text{როცა} \quad s \in [0, +\infty).$$

შევნიშნოთ, რომ აქ ვისარგებლეთ (6.4) პირობით. მართლაც, ამ პირობის თანახმად G გუნქციის განსაზღვრის არეა $[a, +\infty)$, სადაც $a = G(0) \leq 0$. ასე რომ, $\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau$ მიეკუთვნება G^{-1}–ის განსაზღვრის არეს, როცა $t \in [t_0, t^*)$. თეორემა 6.9–ის ძალით გვაქვს

$$\|x(t)\| \leq \rho^*(t), \quad \text{როცა} \quad t \in [t_0, t^*).$$

აქედან კი, ρ ფუნქციის უწყვეტობის გამო დავასკვნით, რომ

$$\lim_{t\to t^*}\inf \|x(t)\| \le \rho^*(t^*) < +\infty. \tag{6.67}$$

მეორე მხრივ, კოშის ამოცანის ამონახსნის არაგაგრძელებადობის შესახებ თეორემის (იხ. თეორემა 6.2) 1) და 3) პირობები არ სრულდება. ასე რომ, სრულდება ამ უკანასკნელი თეორემის პირობა 2), ანუ

$$\lim_{t\to t*}\|x(t)\| = +\infty,$$

რაც (6.2) პირობას ეწინააღმდეგება. □

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვექტორული ფუნქცია $f(t,x)$ არის წრფივი, ანუ $f(t,x) \equiv P(t)x + q(t)$, სადაც $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ და $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$ მოცემული უწყვეტი, შესაბამისად, მატრიცული და ვექტორული ფუნქციებია. მაშინ ადგილი აქვს (6.64) შეფასებას, კერძოდ,

$$\|f(t,x)\| \le g(t)(1+\|x\|), \quad \text{როცა} \quad (t,x) \in I\times\mathbb{R}^n,$$

სადაც $g(t) \equiv \max\{\|P(t)\|, \|q(t)\|\}$. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $\omega(s) \equiv s$ და კმაყოფილდება (6.65) პირობა. ასე რომ, წრფივ შემთხვევაში კოშის ამოცანის ამონახსნი გაგრძელებადია იმ შუალედზე, სადაც განხილულია გააჩნია გლობალური ამონახსნი, ანუ ამონახსნი გაგრძელებადია მთლიანად იმ შუალედზე, სადაც განხილულია (6.2) სისტემა.

6.9. კოშის ამოცანის ამონახსნის უწყვეტად დამოკიდებულება საწყის მონაცემებსა და განტოლების მარჯვენა მხარეზე. კოშის (6.2), (6.2) ამოცანის პარალელურად განვიხილოთ კოშის ამოცანათა მიმდევრობა

$$\frac{dx}{dt} = f_k(t,x), \tag{6.68}$$

$$x(t_k) = x_{0k}, \tag{6.69}$$

სადაც $f_k \in C(I\times D;\mathbb{R}^n)$, $t_k \in I$ და $x_k \in D$ $(k=1,2,\dots)$.

ამ პარაგრაფში განხხილავთ შემდეგ საკითხს. ვთქვათ, ვექტორული ფუნქცია f_k გარკვეული აზრით ახლოა ვექტორული ფუნქცია f-თან, წერტილი t_k წერტილ t_0-თან, ხოლო საწყისი ცექტორი x_k კი x_0-თან. მაშინ უზრუნველგოფს თუ არა კოშის (6.2), (6.2) ამოცანის ამოხსნადობა (6.68), (6.69) ამოცანის ამოხსნადობას საკმარისად დიდი k-თვის და ამ უკანასკნელის ამონახსნის სიახლოვეს (6.2), (6.2) ამოცანის პამონახსნთან.

თ ე ო რ ე მ ა 6.11. ვთქვათ, (6.2), (6.2) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი x, განსაზღვრული ჩაკეტილ $I_0 \subset I$ სეგმენტზე. ვთქვათ, გარდა ამისა

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = t_0, \quad \lim_{k\to+\infty} x_{0k} = x_0 \tag{6.70}$$

და

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(t,x) = f(t,x) \quad \text{თანაბრად} \quad I\times D\text{-ზე}. \tag{6.71}$$

მაშინ:

1) მოიძებნება ისეთი k_0, რომ ყოველი $k > k_0$-თვის (6.68), (6.69) ამოცანის ნებისმიერი არაგაგრძელებადი ამონახსნის განსაზღვრის შუალედი მოიცავს ან ემთხვევა I_0-ს;

2) თუ x_k არის (6.68), (6.69) ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განსაზღვრული I_0-ზე. მაშინ

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t) = x(t) \quad \text{თანაბრად} \quad I_0\text{-ზე}. \tag{6.72}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 6.4. შევნიშნოთ, რომ თეორემაში არაფერია მოთხოვნილი (6.68), (6.69) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ, რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორიც არ უნდა შევარჩიოთ ამ ამოცანის ამონახსნი სხვადასახვა k-თვის, ისინი მაინც მიისწრაფვის x-კენ.

თეორემის დამტკიცება. რადგანაც $x(t) \in D$, როცა I_0,I_0 კომპაქტურია, ხოლო D კი ღიაა, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $r_0 > 0$, რომ

$$D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x(t)\| < r_0\} \subset D, \quad \text{როცა} \quad t \in I_0. \tag{6.73}$$

შევნიშნოთ, რომ r_0 არ არის დამოკიდებული t–ზე, რადგანაც I_0 კომპაქტია.

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$–თვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური k_0, რომ (6.68), (6.69) ამოცანის ნებისმირი არაგაგრძელებადი x_k ამონახსნის განსაზღვრის შუალედი მოიცავს I_0–ს და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|x_k(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t \in I_0, \tag{6.74}$$

ყოველი $k > k_0$–თვის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$, მიმდევრობები $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$ და $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $t_{k_i} \in (a_i, b_i) \subset I_0$ $(i = 1, 2, \dots)$; აგრეთვე, მოიძებნება (6.68), (6.69) ამოცანების $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ ამონახსნთა მიმდევრობა, რომლებიც არ შეიძლება გაგრძელდეს I_0 ისე რომ არ დაირღვეს (6.74) პირობა, ისეთი რომ

$$\|x_{k_i}(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t \in (a_i, b_i) \ \ (i = 1, 2, \dots) \tag{6.75}$$

და

$$\|x_{k_i}(a_i) - x(a_i)\| = \varepsilon \quad \text{ან} \quad \|x_{k_i}(b_i) - x(b_i)\| = \varepsilon \ \ (i = 1, 2, \dots). \tag{6.76}$$

თითოეული x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$ ამონახსნი გავაგრძელოთ უქყვეტად (a_i, b_i)–ს გარეთ I_0 შუალედზე შემდეგი წესით: $x_{k_i}(t) = x_{k_i}(a_i)$, როცა $t \le a_i$ და $x_{k_i}(t) = x_{k_i}(b_i)$, როცა $t \ge b_i$. (6.75)–დან გამომდინარეობს, რომ $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია.ვაჩვენოთ, რომ იგი აგრეთვე ერთობლივ უწყვეტია.

ვთქვათ,

$$M = \max\{\|f(t, x)\| : t \in I_0, \, x \in D_t\}. \tag{6.77}$$

(6.72)–ის გამო ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისმოთ, რომ

$$\|f_{k_i}(t, x) - f(t, x)\| < 1, \quad \text{როცა} \quad t \in I_0, \, x \in D \ \ (i = 1, 2, \dots). \tag{6.78}$$

(6.76) და (6.78)–დან და $\varepsilon < r_0$ უტოლობის ძალით დავასკვნით, რომ

$$\|f_{k_i}(t, x_{k_i}(t))\| \le \|f_{k_i}(t, x_{k_i}(t)) - f(t, x_{k_i}(t))\| + \|f(t, x_{k_i}(t))\| < M + 1, \quad \text{როცა} \quad t \in [a_i, b_i] \ \ (i = 1, 2, \dots).$$

მაშასადამე,

$$\|x'_{k_i}(t)\| < M + 1, \quad \text{როცა} \quad t \in [a_i, b_i] \ \ (i = 1, 2, \dots)$$

(ბოლოებზე იგულისხმევა ცალმხრივი წარმოებულები). ასე რომ, თუ გავითვალისინებთ ახლა, რომ (a_i, b_i)–ის გარეთ x_{k_i} მუდმივია ყოველი ნატურალური i–თვის, ბოლო შეფასებიდან დავსკვნით, რომ x_{k_i} $(i = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა ერთობლივ უWყვეტია. ამიტომ, არცელა–ასკოლის ლემის ძალით ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიფულისხმოთ, რომ ეს მიმდევრობა თანაბრად კრებადია I_0 შუალედში. გარდა ამისა, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\{a_0\}_{i=1}^{+\infty}$ და $\{a_0\}_{i=1}^{+\infty}$ მიმდევრობები კრებადია. ვთქვათ,

$$\lim_{i \to +\infty} a_i = a_0, \quad \lim_{i \to +\infty} b_i = b_0$$

და

$$\lim_{i \to +\infty} x_{k_i}(t) = x_0(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I_0. \tag{6.79}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $a_0 = b_0$, მაშინ $t_0 = a_0 = b_0$ და გვექნებოდა

$$\lim_{i \to +\infty} x_{k_i}(a_i) = \lim_{i \to +\infty} x_{k_i}(b_i) = x_0 = x_0(t_0).$$

ე.ი. $x_0(t_0) = x_0$. მეორე მხრივ, (6.76)–დან დავასკვნით, რომ $\|x_0(t_0) - x_0\| = \varepsilon$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ასე რომ, $a_0 \ne b_0$ და, მაშასადამე, $a_0 < b_0$.

ვთქვათ, $t \in (a_0, b_0)$ ფიქსირებულია. ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$x_{k_i}(t) = x_{0k_i} + \int\limits_{t_{k_i}}^{t} f_{k_i}(\tau, x_{k_i}(\tau))d\tau, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

თუ ამ უკანასკნელში გადავალთ ზღვარზე, როცა $i \to +\infty$, გავითვალისწინებთ (6.70) და (6.70) ტოლობებს და იმ ფაქტს, რომ ზღვრული (6.9) ტოლობა სრულდება თანაბრად $[a_0, b_0]$–ზე, მივიღებთ

$$x_0(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))d\tau.$$

ასე რომ, x_0–ის შეზღუდვა (a_0, b_0)–ზე არის (6.2), (6.2) ამოცანის ამონახსნი. მაგრამ თეორემის პირობის ძალით ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მაშასადამე, $x_0(t) = x(t)$, როცა $t \in (a_0, b_0)$. მეორე მხრივ, (6.75) და (6.76)–დან გამომდინარეობს, რომ

$$\max\{\|x_0(t) - x(t)\| : t \in [a_0, b_0]\} = \varepsilon > 0.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (6.74)–ს. ??ასე რომ, თეორემის დასლვნის მეორე ნაწილი დამტკიცებულია. რაც შეეხება პირველ ნაწილს, იგი უშუალოდ გამომდინარეობს (6.74) და თეორემა 6.5–დან. □

6.10. კოშის ამოცანის ამონახსნის წარმოებადობა პარამეტრის მიმართ. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვხალიავთ კოშის ამოცანას არაწრფივი დიფერრნციალური

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \tag{6.80}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{6.81}$$

სისტემისთვის, რომლიც მარჯვენა მხარე f დამოკიდებულია ვექტორულ $\mu \in H$ პარამეტრზე, სადაც $H \subset \mathbb{R}^m$ პარამტრის ცვალებადობის არეა. ვთქვათ, ყოველი ფოქსირებული $\mu \in H$–თვის (6.80), (6.81) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი განსაზღვრული რაიმე I_0 შუალედზე, რომელიც საერთოა ყოველი μ-თვის. ასე რომ, (6.80), (6.81) ამოცანის ამონახსნი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ასახვა $x : I_0 \times H \to \mathbb{R}^n$. ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ, თუ f არის წარმოებადი μ–ს მიმართ, მაშინ ექნება თუ არა იგივე თვისაბა x ასახვასაც.

ძირითადი ტეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭიფრდება ლემა, რომელიც ფრანგ მათემატიკოს ?. ადამარს ეკუთვნის.

ლ ე მ ა 6.5. ვთქვათ, $\varphi : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \to \mathbb{R}$ ასახვას, სადაც $\mathcal{G}_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ და $\mathcal{G}_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ არეებია, ამასთან $\mathcal{G}_1$ ამოზნექილია, გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები p–რიგის ჩათვლით პირველი m_1 არგუმენტის მიმართ. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, \dots, x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) - \varphi(y_1, \dots, y_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) \\
&= \sum_{k=1}^{m_1} l_k(x_1, \dots, x_{m_1}; y_1, \dots, y_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) \cdot (x_k - y_k), \\
&\qquad \text{როცა} \quad x_1, \dots, x_{m_1};\ y_i, \dots y_{m_1};\ z_1, \dots, z_{m_2} \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{6.82}$$

სადაც $l_k : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, m_1)$ ასახვებს გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოენულები $p - 1$–რიგის ჩათვლით პირველი $2m_1$ არგუმენტის მიმართ.

დამტკიცება. ყოველი ფიქსირებული $x_1, \dots, x_{m_1};\ y_i, \dots y_{m_1};\ z_1, \dots, z_{m_2} \in \mathbb{R}$–თის განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(t) = \varphi(tx_1 + (1-t)y_1\ , \dots, tx_{m_1} + (1-t)y_m; z_1, \dots, z_{m_2}) \quad (t \in [0,1])$$

(რადგანაც $\mathcal{G}_1$ სიმრავლე ამოზნქილია, ამიტომ ამ გუნქციას, ცხადია, აზრი აქვს).

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ φ ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი კრძო წარმოებულები პირველი m_1 ცვლადის მიმართ. ადვილად დავასკვნით, რომ $g(t)$ გუნქცია უწყვეტად წარმოებადია. ასე რომ, ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt. \tag{6.83}$$

მეორე მხრივ, $g(1) - g(0)$ ტოლია (6.84) ტოლობის მარცხენა მხრის და, გარდა ამისა,

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx_1 + (1-t)y_1 \,, \dots, tx_{m_1} + (1-t)y_m; z_1, \dots, z_{m_2}) \cdot (x_k - y_k), \quad \text{როცა} \quad t \in [0,1].$$

ასე რომ, (6.85)–ის ძალით ადგილი აქვს (6.85) ტოლობას, სადაც

$$l_k(x_1, \dots, x_{m_1}; y_1, \dots, y_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx_1 + (1-t)y_1 \,, \dots, tx_{m_1} + (1-t)y_m; z_1, \dots, z_{m_2})dt.$$

რადგანაც ლემის პირობით φ ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები p–რიგის ჩათვლით პირველი m_1 არგუმენ–ტის მიმართ, ამიტომ, ინტეგრალის პარამეტრით გაქარმოების წესის თანახმად, ცხადია, რომ l_k $(k = 1, \dots, m_1)$ ასახვებს გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები $p-1$–რიგის ჩათვლით პირველი $2m_1$ არგუმენტის მიმართ. ლემა დამტკიცებულია. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 6.5. ვთქვათ, $k \in \{1, \dots, m_1\}$ ფიქსირებულია. თუ (6.84) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $x_i = y_i$ $(i \neq k;\ i = 1, \dots, m_1)$, მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) - \varphi(x_1, \dots, y_k, \dots x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) \\
&= l_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_{m_1}; x_1, \dots, y_k, \dots, x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) \cdot (x_k - y_k).
\end{aligned}$$

თუ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $x_k - y_k$–ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $y_k \to x_k$, მივიღებთ

$$l_k(x_1, \dots, x_{m_1}; x_1, \dots, x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2}) = \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_{m_1}; z_1, \dots, z_{m_2})}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, m_1).$$

ადამარის ლემა შეიძლება განზოგადდეს იმ შემთხვევისთვისაც, როცა გვაქვს არა მაინცდამაინც ნამდვილი ფუნქცია, არამედ ასახვა ნებისმიერ განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში. შემდეგი ლემა მტკიცდება ადამარის ლემის ანალოგიურად ზემოთ განხილული შენიშვნის გათვალისწინებით.

შ ე დ ე გ ი 6.3. ვთქვათ, $\varphi : \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \to \mathbb{R}^n$ ასახვას, სადაც $\mathcal{G}_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ და $\mathcal{G}_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ არეებია, ამასთან $\mathcal{G}_1$ ამოზნექილია, გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები p–რიგის ჩათვლით პირველი m_1 არგუმენტის მიმართ. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა

$$\varphi(x, z) - \varphi(y, z) = L(x, y, z) \cdot (x - y) \quad \text{როცა} \quad x, y \in \mathbb{R}^{m_1},\ z \in \mathbb{R}^{m_2}, \tag{6.84}$$

სადაც $L(x, y, z)$ არის $n \times m_1$ მატრიცა, რომლის ელემენტებსაც აქვს შესაბამისი თვისებები, ამასთან,

$$L(x, x, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z),$$

ხოლო $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m_1}} \right)$ კი არის φ ვექტორული ფუნქციის იაკობიანი.

თ ე ო რ ე მ ა 6.12. ვთქვათ, $f : I \times D \times H \to \mathbb{R}^n$ უწყვეტი და შემოსაზღვრული ვექტორული გუნქციაა, სადაც $I \subset \mathbb{R}$ შუალედია, $D \subset \mathbb{R}^n$ და $H \subset \mathbb{R}^m$ არეებია. ვთქვათ, გარდა ამისა, f ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები p–რიგის ჩათვლით უკანასკნელი $n+m$ არგუმენტის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in I$ და $x_0 \in D$–თვის მოიძებნება ჩაკეტილი შუალდი $[a, b] \subset I$, $t_0 \in [a, b]$, ისეთი, რომ ყოველი $\mu \in H$–თვის (6.80), (6.81) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x(., \mu)$ განსაზღვრული $[a, b]$–ზე. ამასთან, ამ ამონახსნს, როგორც $[a, b] \times H$ არეზე განსაზღვრულ ვექტორულ ფუნქციას, ექნება უწყვეტი კერძო წარმოებულები p–რიგის ჩათვლით უკანასკნელი m არგუმენტის მიმართ.

დამტკიცება. ვექტორული f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის გამო მიძებნება $M>0$ ისეთი, რომ

$$\|f(t,x,\mu)\| \le M \quad \text{როცა} \quad t\in I,\ x\in D,\ \mu\in H. \tag{6.85}$$

რადგანაც $x_0\in D$, ამიტომ მოიძებნება $r>0$ ისეთი, რომ

$$D_0=\{x\in D:\|x-x_0\|\le r\}\subset D.$$

შევარჩიოთ a და b ისე, რომ $[a,b]\subset I$ და

$$\max\{t_0-a,b-t_0\}\le \frac{r}{M}.$$

როგორც კოში–პეანოს თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს (6.80), (6.81) ამოცანას გააჩნია $[a,b]$ შუალედზე განსაზღვრული ამონახსნი ყოველი μ–თვის. ამასთან, $[a,b]$ შუალედის საერთოა ყველა μ–თვის; გარდა ამისა, ამ მონახსნის მნიშვნელობა ყოველი $t\in[a,b]$–თვის მიეკუთვნება D_0 არეს. მეორე მხრივ, რადგანაც ვექტორულ f გუნქციას გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოენულები უკანასკნელი $n+m$ ცვლადის მიმართ, ამოტომ D არის ნებისმიერ ქვეკომპაკტზე დაცულია ლიფშიცის პირობა შუა n ცვლადის მიმართ. ასე რომ, აღნიშნულ კოშის ამოცანას ნებისმიერ μ–თვის გააჩნია ერთადერთ ამონახსნი $x(.,\mu)$: $[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ამასთან

$$x(t,\mu)\in D_0, \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b]. \tag{6.86}$$

კოში ამოცანის კორქტლობის სესახებ თეორემის (იხ. თეორემა 6.11) ძალით, ვექტორული $x:[a,b]\times H\to\mathbb{R}^n$ ფუნქცია უწყვეტია. მართლაც, ვთქვათ, $t_k\to t_*$ და $\mu_k\to\mu_*$, როცა $k\to+\infty$ და $\varepsilon>0$ ნებისმიერია. მაშინ (6.72)–ის გამო მოიძებნება $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$\|t_k-t_*\|\le\varepsilon,\ \ \|x(t,\mu_k)-x(t,\mu_*)\|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad t\in[a,b]\ \ (k\ge N(\varepsilon)).$$

აქედან, (6.85)–ის გათვალისწინებით დავასკვნით

$$\|x(t_k,\mu_k)-x(t_*,\mu_*)\|<\|x(t_k,\mu_k)-x(t_k,\mu_*)\|+\|x(t_k,\mu_*)-x(t_*,\mu_*)\|$$
$$\le\varepsilon+\left|\int_{t_*}^{t_k}\|x'(\tau,\mu_*)\|\right|=\varepsilon+\left|\int_{t_*}^{t_k}\|f(\tau,x(\tau,\mu_*),\mu_*)\|\right|\le\varepsilon+M|t_k-t_*|<(M+1)\varepsilon\ \ (k\ge N(\varepsilon)).$$

ამონახსნის წარმოებადობის დასამტკიცებლად ზოგადობის შეუზღდავად ვიგულისხმებთ, რომ $H\subset\mathbb{R}$ ინტერვალია, ანუ μ სკალარული პარამეტრია, რადგანაც რომელიმე არგმენტის მიმართ კერძო წარმოებულის განხილვისას ყველა პარამეტრი გარდა ამ ერთისა უნდა იყოს ფიქსირებული.

ვაჩვენოთ, რომ განსახილველი კოშის ამოცანის ამონახსნი წარმოებადიაა μ პარამეტრის მიმართ. ვთქვათ, $\mu\in H$ ფიქსირებულია. შევარჩიოთ იმდენად მცირე $\Delta\mu$ ისეთნაირად, რომ $\mu+\Delta\mu\in H$. მაშინ

$$\Delta x(t,\Delta\mu)=x(t,\mu+\Delta\mu)-x(t,\mu).$$

აქედან (6.80), (6.81) ტოლობების ძალით დავასკვნით,

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t,\Delta\mu)=f(t,x(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,x(t,\mu),\mu) \tag{6.87}$$

და

$$\Delta x(t_0,\Delta\mu)=0. \tag{6.88}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $D_0\times H$ ამოზნექილი საიმრავლეა, მაშინ ადამარის ლემის ძალით $I\times D_0\times H$ საიმრავლეზე ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$f(t,x,\mu+\Delta\mu)-f(t,y,\mu)=f(t,x,\mu+\Delta\mu)-f(t,y,\mu+\Delta\mu)+f(t,y,\mu+\Delta\mu)-f(t,y,\mu)$$
$$=L(t,x,y,\mu+\Delta\mu)\cdot(x-y)+l(t,y,\mu+\Delta\mu,\mu)\cdot\Delta\mu,$$

სადაც L არის $n \times n$-მატრიცა, რომლის ელემნტები წარმოადგენს ასახვებს $I \times D_0^2 \times H \to \mathbb{R}^n$, რომლენსაც აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები $p-1$ რიგის ჩათვლით უკანასკნელი $2n+1$ არგუმენტის მიმართ, ხოლო l კი n-განზომილებიანი ვექტორია, რომლის ელემენტები არია ასახვები $I \times D_0 \times H^2 \to \mathbb{R}^n$, რომლებსაც აქვს კერძო წარმოებულები უკანასკნელი $n+2$ არგუმნტის მიმართ. ასე რომ, (6.87) ასე გადაიწერება

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t,\Delta\mu) = L^*(t,\Delta\mu)\cdot\Delta(x,\Delta\mu) + l^*(t,\Delta\mu)\cdot\Delta\mu, \tag{6.89}$$

სადაც $L^*(t,\Delta\mu) = L(t, x(t,\mu+\Delta\mu), x(t,\mu), \mu+\Delta\mu)$, ხოლო $l^*(t,\Delta\mu) = l(t, x(t,\mu), \mu+\Delta\mu, \mu)$.

რადგანაც $x : [a,b]\times H \to \mathbb{R}^n$ ასახვა უწყვეტია, ამიტომ L^* იქნება უწყვეტი მატრიცული ფუნქცია, რომლის ელემენტები უწყვეტი ასახვებია $[a,b]\times H_0$-დან $\mathbb{R}^n$-ში, სადაც H_0 არის ნულის საკმარისად მცირე მიდამო. ანალოგიურ მდგმარეობას აქვს ადგილი l^* ვექტორული ფუნქციისთვისაც.

ვთქვათ, $\Delta\mu \neq 0$ და $\Delta\mu \in H_0$. მაშინ

$$\frac{dy}{dt} = L^*(t,\Delta\mu)\cdot y + l^*(t,\Delta\mu) \tag{6.90}$$

საწყისი

$$y(t_0) = 0 \tag{6.91}$$

პირობით.

მეორე მხრივ, (6.90), (6.91) ამოცანას $[a,b]$-ზე გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ამიტომ

$$y(t,\Delta\mu) \equiv x(t,\Delta\mu), \quad \text{თუ} \quad \Delta\mu) \neq 0.$$

მაგრამ, განსხვავებით ამ ტოლობის მარჯვენა მხრისგან, მის მარცხენა მხარეს აზრი აქვს მაშინაც, როცა $\Delta = 0$, რადაჰაც (6.90) სისტემა ამ შემთხვევშიც განსაზღვრულია. ეორე მხრივ, კოშის ამოცანის შესახებ კორექტულობის თეორემას თუ გამოვიყენებთ აღნიშნული წრფივი ამოცანისთვის, ისევე როგორც ზემოთ, დავასკვნით, რომ $y : [a,b]\times H_0 \to \mathbb{R}^n$ უწყვეტი ასახვაა. ე. ი.

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x(t,\Delta\mu)}{\Delta\mu} = y(t,0) \quad \text{თანაბრად} \quad [a,b]-\text{ზე}.$$

მაშასადამე, $x(t,\mu)$ ფუნქცია წარმოებადია μ-ს მიმართ. ე. ი. $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$ იქნება

$$\frac{dy}{dt} = L^*(t,0)\mu)\cdot y + l^*(t,0) \tag{6.92}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი (6.91) პირობით.

ცხადია, რომ $L^*(t,0) = L(t,x(t,\mu),x(t,\mu),\mu+\Delta\mu)$, ხოლო $l^*(t,0) = l(t,x(t,\mu),\mu,\mu)$; ამასთან, შედეგი –ის თანახმად

$$L(t,x,x,\mu) = \frac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial x}, \quad l(t,x,\mu,\mu) = \frac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial\mu}.$$

ასე რომ, (6.92) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t,x(t,\mu),\mu)}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial f(t,x(t,\mu),\mu)}{\partial\mu}. \tag{6.93}$$

მაშასადამე, $\frac{\partial f(t,x(t,\mu),\mu)}{\partial x}$ წარმოადგენს (6.10), (6.91) ამოცანის ამონახსნს. მაგრამ, რადგანაც $x(t,\mu)$ უწყვეტია, ამიტომ განტოლების კოეფიციენტებიც უწყვეტია. გამომდინარე აქედან, მისი ამონახნიც $y(t,\mu) = \frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$ აგრეთვე უწყვეტი იქნება, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ $x(t,\mu)$ უწყვეტად წარმოებაიდია μ პარამეტრის მიმართ. ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია $p = 1$ შემთხვევისთვის.

ნებისმიერი p–თვის თეორემა დამტკიცება უნდუქციის მეთოდით. მართლაც, ვთქვათ, თეორემა დამტკიცებულია -1–თვის. მაშინ $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$–თვის კვლავ სამართლიანია (6.10) წარმოდგენა. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს y–ის და μ–ს მიმართ გააჩნია $p-1$–რიგის ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ამიტომ, ინდუქციის დაშვების გამო $\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial\mu}$–ს გააჩნია $p-1$–რიგის ჩათვლით უწყვეტი წარმოებული μ–ს მიმართ. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 6.6. ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევა, როცა საწყისი მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული პარამეტრ–ზე. შემთხვევა, როცა საწყისი მნიშვნელობები დამოკიდებული პარამეტრზე დაიყვანება განხილულ შემთხვევაზე. მართლაც, ვტქვათ, გვაქვს ამოცანა

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu),$$
$$x(t_{mu}) = x_{\mu 0}.$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $\tau = t - t_{mu}$, $y = x - x_\mu$. მაშინ ამოცანა მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{dy}{d\tau} = f(\tau + t_\mu, y + x_\mu, \mu),$$
$$y(0) = 0.$$

ეს კი განილული კოშის ამოცანაა. ასე რომ, შესაძლებელია, თეორემა 6.12–ის სარგებლობა ოღონდ, ცხადია, რომ დაგვჭირ–დება დამატებითი მოთხოვნები f წარმოებადობის შსახებ t–ს მიმართ და t–სა და x_μ–ს μ–ზე დამოკიდებულების შესახებ.

****

განვიხილოთ ახლა (7.1) განტოლების ისეთი $y = y(x)$ ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია მარჯვნიდან ჩაკეტილ $< a, b]$ შუალედზე, სადაც $b <$ sup I. ვაჩვენოთ, რონ იგი გაგრძელებადია მარჯვნივ. განვიხილოთ კოშის (7.1), (7.3) ამოცანა, სადაც $x_0 = b$ და $y_0 = y(b)$. თეორენმა 1.1 ძალით ამ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი y_δ, რომელიც განსაზღვრულია b წერტილის რაიმე ორმხრივ $(b - \delta, b + \delta)$ $(\delta > 0)$ მიდამოში. ცხადია, რომ $f(b, y(b)) = f(b, y_\delta(b))$ და, მაშასადამე, $y = y(x)$ ამონახსნის მარცხენა წარმოებული b წერტილში ტოლი იქნება y_δ ამონახსნის მარჯვენა წარმოებულის იმავე b წერტილში. ასე რომ,

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in < a, b], \\ y_\delta(x) & x \in (b, b + \delta) \end{cases}$$

ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქცია არის (7.1) განტოლების ამონახსნი $< a, b + \delta >$ შუალედზე.

ანალოგიურად ვაცვენებთ, რომ თუ $y = y(x)$ არის (7.1) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია მარცხნიდან ჩაკეტილ $[a, b >$ შუალედზე, სადაც $a >$ inf I. მაშინ იგი იგი გაგრძელებადია მარცხნივ.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6.7. (7.1) განტოლების ამონახსნი ეწოდება არაგაგრძელებადი ან სრული, თუ იგი არ არის გაგრ–ძელებადი არც მარცხნიც და არც მარჯვნივ.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ არაგაგძელებადი (სრული) ამონახსნის განსაზღვრის შუალედი ყოველთვის ღია (a, b) ინტერვალია, რომელსაც ამონახსნის არსებობის მაქსიმალურ ინტერვალს უწოდებენ.

6.11. კოშის ამოცანა n–ური რიგის დიფერენციალური განტოლებისთვის. განვიხილოთ n–ური რიგის ნორმალური სახის დიფერენციალური განტოლება

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{n-1}), \tag{6.94}$$

სადაც $F \in C(I \times D; \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი შუალედია, ხოლო $D \subset \mathbb{R}^n$ კი არეა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6.8. $I_0 \subset I$ შუალედზე განსაზღვრულ n–ჯერ უწყვეტად წარმოებად $y \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ ფუნქციას ეწოდება (6.94) განტოლების ამონახსნი, თუ

$$(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in D \quad \text{და} \quad y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \quad \text{როცა} \quad t \in I_0. \tag{6.95}$$

************ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x_1 = y, \; x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}, \tag{6.96}$$

მაშინ იგი შეიძლება ჩაიწეროს (6.1) სისტემის სახით, სადაც

$$f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv x_2, \ldots, f_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv x_n, \quad f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv F(t, x_1, \ldots, x_n).$$

ანუ (6.94) ექვივალენტურის ნორმალური სახის

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} = F(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{6.97}$$

სისტემის. ასე რომ, ნებისმიერი დებულება, რომელიც დამტკიცებული იქნება (6.1) სისტემისთვის შესაბამისი მოდიფიკაციით სამართლიანი იქნება (6.94) განტოლებისთვისაც.

****

თ ა ვ ი 2

კოშის ამოცანა წრფივი დიფერენციალური სისტემებისა და განტოლებებისთვის

7. ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

7.1. ამოცანის დასმა. ამ თავში განიხილება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა n–ური რიგის სისტემა

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)x_k + q_i(t) \ \ (i = 1, \dots, n),$$

სადაც $p_{ik} : I \to \mathbb{R}$, $q_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, k = 1, \dots, n)$ მოცემული, ხოლო $x_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ საძიებელი ფუნქციებია; ამასთან ყველგან იგულისხმება, რომ $I \subset \mathbb{R}$ წარმოადგენს შუალედს, რომელიც წერტილად არ არის გადაგვარებული. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ სისტემა განსაზღვრულია (მოცემულია) I შუალედზე. ცხადია, რომ თუ სისტემა განსაზღვრულია I შუალედზე,მაშინ მისი განხილვა შესაძლებელია ამ შუალედის ნებისმიერ ქვეშუალედზე.

აქ და შემდგომშიც, ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ თუ რომელიმე ფუნქციასთან მითითებულია არგუმენტი, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ეს ფუმქცია ცნობილია, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ვიგულისხმებთ, რომ იგი უცნობია.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n, \quad P(t) = (p_{ik}(t))_{i,k=1}^n, \quad q(t) = (q_i(t))_{i=1}^n,$$

მაშინ ხსენებული სისტემა გადაიწერება ვექტორული სახით

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t). \tag{7.1}$$

(7.1) სისტემას ეწოდება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (ან მოკლედ წრფივი დიფერენციალური სისტემა), რადგანაც მასში წრფივად შედის როგორც საძიებელი ვექტორული ფუნქცია x, ასევე მისი წარმეფბული. ამ სისტემას ხშირად ნორმალური სახის წრფივ დიფერენციალურ სისტემას უწოდებენ განსხვავებით

$$P_1(t)\frac{dx}{dt} + P_2(t)x = q(t).$$

სახის წრფივი დიფერენციალური სისტემისგან, რომელიც არ არის ამოხსნილი საძიებელი ვექტორული ფუნქციის წარმოებულის მიმართ.

თუ $q(t) \equiv 0_n$, მაშინ (7.1) ერთგვაროვანს უწოდებენ, ხოლო წინააღმდეგ შემტხვევაში კი არაერთგვაროვანს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1. $x : I \to \mathbb{R}^n$ ვექტორულ ფუნქციას ეწოდება (7.1) სისტემის ამონახსნი, თუ იგი უწყვეტად წარმოებადია (ე.ი. $x \in C^{(1)}(I; \mathbb{R}^n)$) და I შუალედის ყოველ t წერტილში აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(t)x(t) + q(t)$$

(თუ t არის I შუალედის მარცხენა (მარჯვენა) ბოლო, მაშინ $\frac{dx(t)}{dt}$–ს ქვეშ გაიგება x–ის მარცხენა (მარჯვენა) წარმოებული t წერტილში).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.1. როგორც განსაზღვრება 1.1–დან ჩანს, (7.1) წრფივი სისტემის ამონახსნი განსაზღვრული უნდა იყოს იმავე I შუალედზე, სადაც მოცემულია ეს სისტემა. ჩვენ ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ წრფივი სისტემისთვის მართლაც არსებობს მთლიან I შუალედზე განსაზღვრული ამონახსნი. ეს ფაქტი, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი არაწრფივი განტოლებებისთვის, ე.ი. არსებობს ისეთი არაწრფივი განტოლებები, რომელთაც არ გააჩნიათ ამონახსნი მთლიანად იმ I შუალედზე, სადაც განიხილება ეს განტოლება. ამიტომ, არაწრფივი განტოლებებსთვის ამონახსნი განიმარტება ლოკალურად, ანუ I შუალედის გარკვეულ მიდამოში. ასეთ ამონახსნებს ხშირად ლოკალურ ამონახსნებს უწოდებენ. განსხვავებით გლობალურისგან. ასე რომ, წრფიც შემთხვევაში ამონახსნი განიმარტება გლობალურად (ანუ მთელ I შუალედზე), ხოლო არაწრფივის კი ლოკალურად. აქვე შევნიშნოთ, რომ ეს თვისება არაა დამახასიათებელი მხოლოდ წრვივი განტოლებებისთვის, ანუ არსებობს ისეთი არაწრფივი

განტოლებები, რომელთაც გააჩნია გლობალური ამონახსნები (კერძოდ, თუ განტოლება აკმაყოფილებს ე.წ. "უინტნერის" (მათემატიკოსია) პირობას, მაშინ მას გააჩნია გლობალური ამონახსნი (შესაბამის თეორემას ჩვენ განვიხილავთ კურსის მეორე ნაწილში).

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი ისეთი არაწრფივი განტოლებისა, რომელსაც არ გააჩნია გლობალური ამონახსნი. განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2.$$

ცხადია, ამ განტოლების მარჯვენა მხარე განსაზღვრულია მთელ $I = \mathbb{R}$ ღერძზე. მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ მას არ გააჩნია გლობალური ამონახსნი, ანუ მისი ნებისმიერი ამონახსნი არ არის განსაზღვრული მთლიანად ნამდვილ ღერძზე.

მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ $q \in C(I, \mathbb{R}^n)$, მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ და $c_0 \in (R)^n$-თვის

$$\frac{dx}{dt} = q(t)$$

დიფერენციალურ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x(t_0) = c_0 \tag{7.2}$$

საწყის პირობას და ეს ამონახსნი მოიცემა

$$x(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau \quad (t \in I)$$

ტოლობით. ამგვარად, როცა P ნულოვანი მატრიცული ფუნქციაა, მაშინ (7.1) სისტემის მაონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა და ყველა ბექტორული ფუნქცია ამ სიმრავლიდან ცალსახად განისაზღვრება მისი მნიშვნელობით I შუალედის ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილში. ბუნებრივია, ისმის შეკითხვა – ინარჩუნებს თუ არა (7.1) სისტემა ამ თვისებას ნებისმიერი $P \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ მატრიცული ფუნქციისთვის. ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა ნიშნავს ამოვხსნათ შემდეგი, ე.წ.

კ ო შ ი ს ა მ ო ც ა ნ ა: აქვს თუ არა (7.1) სისტემას ისეთი ამონახსნი, რომელიც წინასწარ მოცემული ნებისმიერი $t_0 \in I$ წერტილისა და $c_0 \in \mathbb{R}^n$ ვექტორისთვის აკმაყოფილებს (7.2) პირობას და თუ აქვს რამდენი.

კოშის ამოცანა ჩაიწერება ასეთი სახით(7.1), (7.2). ხშირად, ამ ამოცანას საწყის ამოცანასაც უწოდებენ. (7.2) ტოლობას კოშის ან საწყის პირობას უწოდეებენ. ამ პარაგრაფში ჩვენ დავანტკიცბთ, რომ კოშის ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

(7.1) სისტემის პარალელურად ჩვენ შევისწავლით n–ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} + p_0(t), \tag{7.3}$$

სადაც $p_k : I \to \mathbb{R}$ $(k = 0, \dots, n)$ მოცემული, ხოლო $u : I \to \mathbb{R}$ უცნობი ფუნქციებია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.2. $u : I \to (R)$ ფუნქციას ეწოდება (7.3) განტოლების ამონახსნი თუ იგი n–ჯერ უწყვეტად წარმოებადია (ე.ი. $u \in C^{(n)}(I; \mathbb{R})$) და I შუალედის ყოველ t წერტილში აკმაყოფილებს ტოლობას

$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)}(t) + p_0(t).$$

შევნიშნოთ, რომ, როგორც (7.1) სისტემის შემთხვევაში, წრფივი (7.3) განტოლების ამონახსნიც განისაზღვრება მთლიანად იმ შუალედზე, სადაც მოცემულია ეს განტოლება. ქვემოთ დავრწმუნდებით, რომ ეს ბუნებრივი მოთხოვნაა.

(7.3) განტოლებისთვის კოშის ამოცანა ისმის შემდეგნაირად. წინასწარ მოცემული ნებისმიერი $t_0 \in I$ წერტილისა და $c_{0i} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ რიცხვებისთის უნდა ვიპოვოთ ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს

$$u^{(i-1)}(t_0) = c_{0i} \ \ (i = 1, \dots, n). \tag{7.4}$$

იგი ჩაიწერება ასეთი სახით (7.3), (7.4). (7.4)–ს ეწოდება კოშის (ან საწყისი) პირობა (7.3) განტოლებისთვის.

ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, რომ (7.1) სისტემასა და (7.3) განტოლებას შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი. კერძოდ, ვაჩვენებთ რომ (7.3) განტოლება შეიძლება გაიგივებული იქნეს (7.1) სისტემის კერძო შემთხვევასთან.

მართლაც, ვთქვათ, $u : I \to \mathbb{R}$ არის (7.3) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი. განვიხილოთ ვექტორული ფუნქცია $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$ $(t \in I)$, რომლის კომპონენტები განსაზღვრულია ტოლობებით

$$x_i(t) = u^{(i-1)}(t) \ \ (i = 1, \dots, n). \tag{7.5}$$

ე.ი. $x_1(t) = u(t)$,...,$x_n(t) = u^{(n-1)}(t)$.

ცხადია, რომ $x_1'(t) = u'(t) = x_2(t)$, $x_2'(t) = u''(t) = x_3(t)$,...,$x_{n-2}'(t) = u^{(n-1)}(t) = x_{n-1}(t)$. გარდა ამისა, (7.3) განტოლების ამონახსნის განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$x_n'(t) = u^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^n p_k(t)u^{(k-1)}(t) + p_0(t) = \sum_{k=1}^n p_k(t)x_k(t) + p_0(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

მეორე მხრივ, (7.5) ტოლობებისა და (7.3) განტოლების ამონახსნის განსაზღვრის გამო გვაქვს $x = (x_i)_{i=1}^n \in C^{(1)}(I;\mathbb{R})$. ასე რომ, ვექტორული ფუნქცია $x = (x_i)_{i=1}^n$ იქნება (7.1) სისტემის ამონახსნი, სადაც

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \dots & p_{n-1}(t) & p_n(t) \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ p_0(t) \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

სამართლიანია შებრუნებული წინადადებაც. კერძოდ, თუ ვექტორული ფუნქცია $x = (x_i)_{i=1}^n$ არის (7.1) სისტემის ამონახსნი, სადაც მატრიცული $P(t)$ და ვექტორული $q(t)$ ფუნქციები განსაზღვრულია (7.6) ტოლობებით, მაშინ ამ ვექტორული ფუნქციის პირველი კომპონენტა $x_1(t) = u(t)$ იქნება (7.3) განტოლების ამონახსნი. ამავე დროს ცხადია, რომ თუ u ფუნქცია აკმაყოფილებს კოშის (7.4) პირობას, მაშინ (7.5) ტოლობებით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქცია $x = (x_i)_{i=1}^n$ დააკმაყოფილებს კოშის (7.2) პირობას, სადაც $c_0 = (c_{0i})_{i=1}^n$. მაშასადამე, დამტკიცდა შემდეგი

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 1.1. n–ური რიგის განტოლებისთვის კოშის (7.3), (7.4) ამოცანა ტოლფასია n–ური რიგის სისტემისთვის კოშის (7.1), (7.2) ამოცანის, სადაც მატრიცული $P(t)$ და ვექტორული $q(t)$ ფუნქციები და მუდმივი ვექტორი c_0 განსაზღვრულია როგორც ზემოთ.

1.2. <u>პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.</u> განვიხილოთ (7.3), (7.4) ამოცანა, როცა $n = 1$. მაშინ ამ ამოცანას აქვს სახე:

$$\frac{du}{dt} = p_1(t)u + p_0(t), \tag{7.7}$$

$$u(t_0) = c_0, \tag{7.8}$$

სადაც p_0, $p_1 \in C(I;\mathbb{R})$, $t_0 \in I$ და $c_0 \in \mathbb{R}$. ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია არა მარტო მისი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის დამტკიცება, არამედ ამონახსნის ცალსახად აგებაც, სახელდობრ სამართლიანის შემდეგი დებულება

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 1.2. თუ

$$p_0,\, p_1 \in C(I;\mathbb{R}),$$

მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ და $c_0\mathbb{R}$–თვის (7.7), (7.8) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი წარმოდგინდება შემდეგი ფორმულით

$$u(t) = c_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} p_1(s)ds\right)p_0(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{7.9}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (7.7), (7.8) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი u. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია v შემდეგი ტოლობით

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds\right) v(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{7.10}$$

ცხადია, $v \in C^{(1)}(I;\mathbb{R})$, $v(t_0) = u(t_0) = c_0$ და, გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ (7.7) განტოლების ამონახსნის განსაზღვრებას, ადვილად დავასკვნით, რომ

$$v'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds\right)(-p_1(t)u(t) + u'(t)) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds\right)p_0(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

მაშასადამე, v წარმოადგენს

$$\frac{dv}{dt} = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds\right)p_0(t), \tag{7.11}$$

$$v(t_0) = c_0, \tag{7.12}$$

ამოცანის ამონახსნს. ადვილი დასანახია აგრეთვე, რომ, პირიქით, თუ v არის (7.11), (7.12) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ (7.10) ტოლობით განსაზღვრული u ფუნქცია იქნება (7.7), (7.8) ამოცანის ამონახსნი (შეამოწმეთ).

რადგან (7.11) განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ, როგორც ზემოთ გვქონდა აღნიშნული, (7.11), (7.12) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი v და მას აქვს შემდეგი სახე

$$v(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} p_1(s)ds\right)p_0(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{7.13}$$

თუ მიღებულ (7.13) ტოლობას ჩავსვამთ (7.10)–ში მივეიღებთ (7.1) ტოლობას.

ე.ი. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ (7.7), (7.8) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი,მაშინ იგი აუცილებლად მოიცემა (7.1)(7.1) ტოლობით. მეორე მხრივ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია u წარმოადნეს აღნიშნული ამოცანის ამონახსნს (შეამოწმეთ). ამით დებულება დამტკიცებულია. □

1.3. <u>ლემები პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ და ინტეგრალურ უტოლობათა შესახებ.</u> ამ პუნქტში მოცემული დებულება 1.2–ის მარტივი შედეგებია. დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში მათ ხშირად იყენებენ. განსაკუთრებით კი ლემა 1.2–ს, რომელიც გრონუოლ–ბელმანის ლემის სახელიტ არის ცნობილი.

ლ ე მ ა 1.1. ვთქვათ, p_0, $p_1 \in C(I;\mathbb{R})$ და $t_0 \in I$. მაშინ ყოველი $u \in C(I;R)$ ფუნქციისთვის, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია $I \setminus \{t_0\}$ სიმრავლეზე და აღნიშნულ სიმრავლეზე აკმატოფილებს უტოლობას

$$u'(t)\,\mathrm{sgn}(t-t_0) \leq p_1(t)u(t) + p_0(t), \tag{7.14}$$

I შუალედზე სამართლიანია შეფასება

$$u(t) \leq u(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \tilde{p}_1(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} \tilde{p}_1(s)ds\right)\tilde{p}_0 d\tau, \tag{7.15}$$

სადაც $\tilde{p}_k(t) = p_k(t)\,\mathrm{sgn}(t-t_0)$ $(k = 0,1)$. დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა ვაჩვენოთ, რომ თუ $t_0 <$ sup, მაშინ $I_1 = \{t \in I : t > t_0\}$ შუალედში სამართლიანის შეფასება (7.15) .

(7.7)–ის გამო I_1 შუალედში ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$u'(t) = p_1(t)u(t) + p_0(t) - \delta(t),$$

სადაც $\delta \in C(I;\mathbb{R}_+)$. აქედან, დებულება 1.1–ის თანახმად, ყოველი ნებისმიერად მცირე $\delta > 0$–თვის გვაქვს

$$u(t) = u(t_\varepsilon) \exp\left(\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} p_1(s)ds\right) + \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p_1(s)ds\right)(p_0(\tau) - \delta(\tau))d\tau$$

$$\leq u(t_\varepsilon) \exp\left(\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} p_1(s)ds\right) + \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p_1(s)ds\right)p_0(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_\varepsilon, \quad t \in I,$$

სადაც $t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon$. თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ (7.15) შეფასებას I_1 შუალედში.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ $t_0 > \inf I$, მაშინ (7.15) შეფასება სამართლიანია $I_2 = \{t \in I : t < t_0\}$ შუალედში. ლემა დამტკიცებულია. □

ლ ე მ ა 1.2 (გრონუოლ–ბელმანი). ვთქვათ, $p \in C(I;\mathbb{R}_+)$, $t_0 \in I$ და $c_0 \in \mathbb{R}_+ I$. მაშინ ყოველი $u \in C(I;R)$ ფუნქციისთვის, რომელიც I შუალედში აკმაყოფილებს უტოლობას

$$u(t) \leq c_0 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\right|, \tag{7.16}$$

ამავე შუალედზე სამართლიანია შეფასება

$$u(t) \leq c_0 \exp\left(\left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right|\right). \tag{7.17}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$v(t) = c_0 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\right|.$$

მაშინ (8.37)–ის გამო

$$u(t) \leq v(t), \quad \text{როცა} \quad \in I.$$

მეორე მხრივ, v ფუნქცია უწყვეტია I შუალედში, უწყვეტად წარმოებადია $I \setminus \{t_0\}$ სიმრავლეზე და

$$v'(t)\,\mathrm{sgn}(t - t_0) = p(t)u(t) \leq p(t)v(t).$$

ამიტომ ლემა 1.1–ის ძალით გვაქვს შეფასება

$$u(t) \leq v(t) \leq c_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{sgn}(\tau - t_0)d\tau\right) \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

მაშასადამე, სამართლიანის (8.38) შეფასება. ლემა დამტკიცებულია. □

7.2. ზოგიერთი შენიშვნა ვექტორულ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მწკრივების შესახებ. ვექტორულ ფუნქციათა

$$x_k = (x_{ik})_{i=1}^n : I \to \mathbb{R}^n \ \ (k = 1, 2, \dots)$$

მიმდევრობას ეწოდება თანაბრად კრებადი (კრებადი) I შუალედზე $x_0 = (x_{i0})_{i=1}^n : I \to \mathbb{R}^n$ ვექტორული ფუნქციისკენ, თუ ყოველი $i \in \{1, ..., n\}$–თვის ფუნქციათა $(x_{ik})_{k=1}^\infty$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია (კრებადია) I–ზე x_{i0} ფუნქციისკენ.

მოყვანილი განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ $x_k : I \to \mathbb{R}^n$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობისთვის (კრებადობისთვის) I შუალედზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$–კენ აუცილებელია და საკმარისი თანაბრად (ყველგან) I–ზე სრულდებოდეს პირობა

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k(t) - x_0(t)\| = 0.$$

ვექტორულ ფუნქციათა

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) \tag{7.18}$$

მწკრივს, სადაც $y_k : I \to \mathbb{R}^n$ $(k=1,2,\dots)$, ეწოდება თანაბრად კრებადი (კრებადი) I შუალედზე, თუ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა

$$x_m(t)=\sum_{k=1}^{m} y_k(t) \ \ (m=1,2,\dots)$$

თანაბრად კრებადია (კრებადია) I–ზე. აღნიშნული მიმდედვრობის ზღვარს კი (7.18) მწკრივის ჯამი ეწოდება.

ქვემოთ ჩვენ არაერთგზის მოგვიხდება ვექტორულ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მწკრივებისთვის ანალიზის შემდეგი კარგად ცნობილი დებულებების გამოყენება.

ა) (**ვაიერშტრასის თეორემა**.) თუ $x_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\dots)$ მიმდევრობა ნებისმიერი $[a,b]\subset I$-თვის თანაბ–რად კრებადია $[a,b]$–ზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$-კენ, მაშინ $x_0 \in C(I;\mathbb{R}^n)$.

ბ) (**ვაიერშტრასის თეორემა**.) თუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი რიცხვითი r_k $(k=1,2,\dots)$ მიმდევრობა, რომ $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k$ მწკრივი კრებადია და ყოველი ნატურალური k–თვის I შუალედში სრულდება უტოლობა

$$\|y_k(t)\| \le r_k,$$

მაშინ (7.18) მწკრივი თანაბრად კრებადია I–ზე.

ბ) (**რიმანის თეორემა**.) თუ $x_k \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\dots)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია [a,b]–ზე $x_0 : I \to \mathbb{R}^n$ ფუნქციისკენ, მაშინ

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b x_k(t)dt=\int_a^b x_0(t)dt. \tag{7.19}$$

7.3. არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა წრფივი დიფერენციალური სისტემისთვის.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. . ვთქვათ,

$$P\in C(I;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad q\in C(I;\mathbb{R}^n). \tag{7.20}$$

მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ და $c_0 \in \mathbb{R}^n$–თვის (7.1), (7.2) ამოცანას აქვს I შუალედში განსაზღვრული ერთადერთი ამონახსნი. ამასთან, ეს ამონახსნი წარმოდგინდება როგორც

$$x_0(t)\equiv c_0, \ \ x_k(t)\equiv c_0+\int_{t_0}^{t}(P(\tau)x_{k-1}(\tau)+q(\tau))d\tau \ \ (k=1,2,\dots). \tag{7.21}$$

მიმდევრობის თანაბარი ზღვარი I შუალედის ნებისმიერ $[a,b]$ ქვესეგმენტზე.

დამტკიცება. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ (7.1), (7.2) ამოცანა ექვივალენტურია ვოლტერას ტიპის წრფივ ინ–ტეგრალურ განტოლებათა

$$x(t)=c_0+\int_{t_0}^{t}(P(\tau)x(\tau)+q(\tau))d\tau \quad (t\in I) \tag{7.22}$$

სისტემის. ამ სისტემის ამონახსნის ქვეშ გაიგება ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $x : I \to \mathbb{R}^n$, რომელიც I შუალედის ყოველ წე–რტილში აკმაყოფილებს (7.22) ტოლობას. თუ x არის (7.22) სისტემის ამონახსნი, მაშინ (7.20 პირობის გამო $Px+q \in C^{(1)}(I,\mathbb{R}^n)$. მაშასადამე, $x \in C^{(1)}(I,\mathbb{R}^n)$ და იგი წარმოადგენს (7.1), (7.2) ამოცანის ამონახსნს. ასევე ცხადია, რომ (7.1), (7.2) ამოცანის ყოველი ამონახსნი ამავე დროს წარმოადგენს (7.22) ინტეგრალური სისტემის ამინახსნს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალურ განტოლებათა (7.22) სისტემას გააჩნია ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

თავდაპირველად დავამტკიცებთ, რომ (7.1) სისტემას გააჩნია ამონახსნი. ჩვენ გამოვიყენებთ ე.წ. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს, რომელიც ე. პიკარს ეკუთვნის.

(7.1) სისტემას ამონახსნის ნულოვან მიახლოებად მივიჩნიოთ (7.21) ტოლობით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქცია x_0. ამონახსნის პირველ მიახლოებად მივიჩნიოთ (7.21) ტოლობით გასაზღვრული ვექტორული ფუნქცია x_1, ანუ

$$x_1(t) \equiv c_0 + \int_{t_0}^{t} (P(\tau)x_0(\tau) + q(\tau))d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

თუ (7.21) სისტემის ამინახსნის $k-1$-ე მიახლოებაა x_{k-1}, მაშინ მისი k-უყი მიახლოება განისაზღვრება (7.21) ტოლობით, რომლის თანახმადაც ცხადია, რომ

$$x_k \in C(I; \mathbb{R}^n) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია I შუალედში შემავალ ნებისმიერ სეგმენტზე და მისი ზღვარი წარმოადგენს (7.22) იტეგრალური სისტემის ამონახსნს. მაგრამ ამ მიმდევრობის კრებადობა

$$x_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t)) \quad (t \in I) \tag{7.23}$$

მწკრივის კრებადობის ექვივალენტურია. ამიტომ, უპირველეს ყოვლისა, ჩვენ დაგვჭირდება $x_k(t) - x_{k-1}(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ სხვაობების შეფასება.

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$l_0(t) = \left| \int_{t_0}^{t} \|P(\tau)c_0 + q(\tau)\| d\tau \right|, \quad l_1(t) = \int_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| d\tau \quad (t \in I).$$

(7.21)-დან ნათელია, რომ

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \le l_0(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I$$

და

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} l'(\tau) \|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)\| d\tau \right|, \quad \text{როცა} \quad t \in I \ \ (k = 1, 2, \dots) \tag{7.24}$$

როგორც ვნახეთ $k = 1$-თვის სამართლიანია უტოლობა

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \le l_0(t) \frac{\|l(t)\|^{k-1}}{(k-1)!} tau) \|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)\|, \quad \text{როცა} \quad t \in I \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{7.25}$$

დავამტკოცოთ ამ უტოლობის სამარლიანობა ინდუქციის მეთოდით.

დავუშვათ ამ უტოლობისწ სამართლიანობა რაიმე $k \ge q$-თვის. მაშინ (7.1)-დან მივიღებთ

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \le \frac{1}{(k-1)!} \left| \int_{t_0}^{t} l_0(\tau) |l(\tau)|^{k-1} l'(\tau) \| d\tau \right|$$

$$\le \frac{1}{(k-1)!} l_0(t) \left| \int_{t_0}^{t} (l(\tau))^{k-1} l'(\tau) d\tau \right| = l_0(t) \frac{\|l(t)\|^k}{k!}, \quad \text{როც} \quad t \in I.$$

მაშასადამე, (7.25) შეფასება დამტკიცებული ნებისმიერი ნატურალური k-თვის.

(7.25)–დან ვხადია, რომ (7.23) ფუნქციური მწკრივის მაჟორანტული მწკრივი ნებისმიერ $I_0 \subset I$ სეგმენტზე იქნება კრებადი რიცხვითი მწკრივი

$$\|c_0\| + r_0(I_0) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^{k-1}(I_0)}{(k-1)!},$$

სადაც

$$r_0(I_0) = \max\{l_0(t) : t \in I_0\}, \quad r(I_0) = \max\{\|l(t)\| : t \in I_0\}.$$

აქედან, ვაიერშტრასის თოერემის (ბ)) თანახმად გამომდინარეობს, რომ (7.23) ფუნქციური მწკრივი და, მაშასადამე, $x_k(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $I_0 \subset I$ სეგმენტზე. ვთქვათ,

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

ვაიერშტრასის ზემოთაღნიშნული თეორემის (ა)) ძალით

$$x \in C(I; \mathbb{R}^n).$$

აქედან, (7.20)–ის გათვალისწინებით დავასკნნით, რომ ვექტორულ ფუნქციათა $Px_{k-1} + q$ $(k = 1, 2, \dots)$ მიმდევრობა აგრეთვე თანაბრად კრებადი იქნება $Px + q$ ვექტორული ფუნქციისკენ I შუალედში შემავალ ნებისმიერ სეგმენტზე.

თუ ახლა (7.21) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როვა $k \to +\infty$ და გამოვიყენებთ რიმანის ზემოთ აღნიშნულ თეორემას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის შესახებ, დაბრწმუნდებით, რომ x არის (7.22) სისტემის ამონახსნი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (7.22) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. ვთქვათ, $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ არის (7.22) სისტემის ნებისმიერ ამონახსნი. მაშინ, სისრტემის ამონახსნის განსაზღვრების გამო გვაქვს

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} (P(\tau)y(\tau) + q(\tau))d\tau \quad (t \in I).$$

აქედან და (7.22) ტოლობიდან ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\|x(t) - y(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| \, \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau \right|, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $u(t) \equiv \|x(t) - y(t)\|$ და $p(t) \equiv \|P(t)\|$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობა გადაიწერება (8.37) სახით. ამიტომ ლემა 1.2–ის გამო დავასკვნით, რომ

$$\|x(t) - y(t)\| = 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

ასე რომ, $x(t) \equiv y(t)$ და x წარმოადგენს (7.22) სისტემის ერთადერთ ამონახსნს. თეორემა დამტკიცებულია. □

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 7.1. (7.23) ტოლობიდან გვაქვს

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t)) \quad (t \in I), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

მაშასადამე,

$$x(t) - x_k(t) = \sum_{j=k}^{+\infty} (x_{j+1}(t) - x_j(t)), \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

აქედან კი, თავის მხრივ, (7.25) შეფასების ძალით დავასკვნით, რომ (7.1), (7.2) ამოცანის

–ური მიახლოების გადახრის შემდეგ შეფასებას

$$\|x(t) - x_k(t)\| = l_0(t) \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{|l(t)|^j}{j!} \le l_0(t) \frac{|l(t)|^k}{k!} \exp(|l(t)|), \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{7.26}$$

შენიშვნა 7.2. თუ $I =]a, b[, -\infty \leq a < b \leq +\infty$ და გარდა (7.20)–სა სრულდება პირობები

$$\int_a^b \|P(t)\|dt < +\infty, \quad \int_a^b \|q(t)\|dt < +\infty, \tag{7.27}$$

მაშინ (7.1) სისტემის ყოველ ამონახსნს გააჩნია სასრული ზღვრები, როცა $t \to a$ და $t \to b$. მართლაც, ნებისმერი ფიქსირებული $t_0 \in I$–თვის სამართლიანია (7.21) წარმოდგენა, სადაც $c_0 = x(t_0)$. მეორე მხრივ, (7.26)–სა და (7.27)–ის თანახმად

$$\|x(t) - c_0\| \leq r_0, \qquad a < t < b,$$

სადაც

$$r_0 = \int_a^b \|P(t)c_0 + q(t)\|dt \times \exp\left(\int_a^b \|P(t)\|dt\right) < +\infty.$$

მაშასადამე, x შემოსაზღვრულია $]a, b[$ შუალედში. ამ გარემოებისა და $(7.27$ პირობების გამო (7.21) წარმოდგენიდან, ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის გამოყებენით დავასკვნით, რომ არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{t\to a} x(t) \quad \text{და} \quad \lim_{t\to b} x(t).$$

სავარჯიშო 1.1. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1.$$

თეორემა 1.1.–ის ძალით ამ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x(t) \equiv \exp(t)$. შეამოწმეთ, რომ ეს ამონახსნი წარმოიდგინება, როგორც თეორემაში აღწერილი (7.21) მიმდევვრობის თანაბარი ზღვარი (R)–ის ნებისმიერ ჩაკეტილ ქვესეგმენტზე (გამოიყენეთ მაკლორენის ფორმულა).

იგივე საკითხი განიხილეთ კოშის შემდეგი ამოცანისთვის მეორე რიგის დიფერებციალური სისტემისთვის

სავარჯიშო 1.2. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1; \end{cases} \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

ამ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$. ამ შემთხვევაშიც უნდა გამოყენებუოლ იქნეს მაკლორენის ფორმულა.

1.6. არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა n–ური რიგირ წრფივი დიფერენციალური განტოლებისთვის.

როგორც უკვე აღნიშნული გვქონდა, (7.3), (7.27) ამოცანა ტოლფასია (7.1), (7.2) ამოცანის, სადაც $c_0 = (c_{0i})_{i=1}^n$, ხოლო მატრიცული P და ვექტორული q ფუნქციები განისაზღრება (7.6) ტოლობებით. ამიტომ თეორემა 1.1–დან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.2. ვთქვათ,

$$p_k \in C(I; \mathbb{R}) \ \ (k = 0, \dots, n). \tag{7.28}$$

მაშინ ყოველი $t_0 \in I$ და $c_{0i} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$–თვის (7.3), (7.4) ამოცანას აქვს I შუალედში განსაზღვრული ერთადერთი ამონახსნი. ამასთან, ეს ამონახსნი წარმოდგინდება როგორც

$$\begin{gathered} u_0^{(i-1)}(t) \equiv c_{0i} \ \ (i = 1, \dots, n), \\ u_k^{(i-1)}(t) \equiv c_{0i} - u_{k-1}^{(i-1)}(t_0) + u_{k-1}^{(i-1)}(t) \ \ (i = 1, \dots, n-1; \ \ k = 1, 2, \dots), \\ u_k^{(n-1)}(t) \equiv c_{0n} + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t p_i(\tau) u_{k-1}^{(i-1)}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t p_0(\tau)d\tau \ \ (k = 1, 2, \dots). \end{gathered} \tag{7.29}$$

მიმდევრობის თანაბარი ზღვარი I შუალედის ნებისმიერ $[a, b]$ ქვესეგმენტზე.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო 1.3. განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$`u''' + 8u = 0; \quad u(0) = 1, \;\; u'(0) = -2, \;\; u''(0) = 4.$$

ამ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u(t) = \exp(-2t) sint$. შეამოწმეთ, რომ ეს ამონახსნი წარმოიდგინება, როგორც თეორემაში აღწერილი (7.2) მიმდევვრობის თანაბარი ზღვარი (R)–ის ნებისმიერ ჩაკეტილ ქვესეგმენტზე. ამ შემთხვევაშიც უნდა გამოყენებულ იქნეს მაკლორენის ფორმულა.

8. წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური სისტემები და განტოლებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{8.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას და

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t) u^{(k-1)} \tag{8.2}$$

დიფერენციალურ განტოლებას. ამასთან, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ

$$P \in C(I; \mathbb{R}^{n \times n}) \tag{8.3}$$

და

$$p_k \in C(I; \mathbb{R}) \;\; (k = 1, \dots, n). \tag{8.4}$$

2.1. ფუნქციების წრფივად დამოკიდებულება. ვრონსკის დეტერმინანტი. გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.1. ვექტორულ ფუნქციათა

$$x_k : I \to \mathbb{R}^n \;\; (k = 1, \dots, m). \tag{8.5}$$

სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ მოიძებნება ნამდვილი $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ მუდმუვები ისეთი, რომ $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| > 0$ (ანუ მათ შორის ერთი მაინც განსხვავდება ნულისგან) და

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k(t) = 0_n, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში აღნიშნულ სისტემას ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი.

განსაზღვრება 2.1–დან ცხადია, რომ ვექტორულ ფუნქციათა (8.5) წრფივად დამოუკიდებელობისთვის საკმარისია რაიმე $t_0 \in I$–თვის ვექტორთა სისიტემა

$$x_k(t_0) \;\; (k = 1, \dots, m)$$

შევნიშნოთ, რომ (8.5) ვექტორულ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებლობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ვექ–ტორთა (8.6) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა. მართლაც, თუ

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$

მაშინ ვექტორულ ფუნქციათა $x_k : I \to \mathbb{R}^2$ $(k = 1, 2)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ვექტორთა

$$x_1(t_0), \quad x_2(t_0) \tag{8.6}$$

სისტემა კი წრფივად დამოკიდებულია ყოველი $t_0 \in \mathbb{R}$–თვის.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.2. ვექტორულ ფუნქციატა

$$x_k : I \to \mathbb{R}^n \;\; (k = 1, \dots, n). \tag{8.7}$$

სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი (ანუ ვრონსკიანი) ეწოდება ისეთ $W(x_1, \dots, x_n): I \to \mathbb{R}$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა I შუალედის ყოველ წერტილში მოიცემა ტოლობით

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \det(X(t)),$$

სადაც $X(t)$ არის $n \times n$–მატრიცა, რომლის სვეტებია $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

ლ ე მ ა 2.1. თუ რაიმე $t_0 \in I$–თვის

$$W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0, \tag{8.8}$$

მაშინ ვექტორულ ფუნქციათა (8.7) სისტემა წრფიბად დამოუკიდებელია.

ამ ლემის სამართლიანობაში დასარწმუნებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (8.8) პირობა უზრუნველყოფს

$$x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$$

ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.3. (n–1)–ჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა

$$u_k : I \to \mathbb{R} \ \ (k = 1, \dots, n) \tag{8.9}$$

სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი (ანუ ვრონსკიანი) ეწოდება ისეთ $W(x_1, \dots, x_n): I \to \mathbb{R}$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა I შუალედის ყოველ წერტილში მოიცემა ტოლობით

$$W_0(u_1, \dots, u_n)(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & u_n(t) \\ . & \dots & . \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)(t)} \end{pmatrix}.$$

ლ ე მ ა 2.2. თუ $u_k \in C^{(n-1)}(I; \mathbb{R})$ $(k = 1, \dots, n)$ და რაიმე $t_0 \in I$–თვის

$$W_0(u_1, \dots, u_n)(t_0) \neq 0, \tag{8.10}$$

მაშინ ვექტორულ ფუნქციათა (8.9) სისტემა წრფიბად დამოუკიდებელია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ ვექტორული ფუნქციები

$$x_k(t) = (u_k^{(j-1)}(t))_{j=1}^n, \quad \text{როცა} \quad t \in I \ \ (k = 1, \dots, n). \tag{8.11}$$

ადვილი დასანახია, რომ ერთი მხრივ, (8.9) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისთვის აუცილებელი და საკმარისია (8.7) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა, ხოლო მეორე მხრივ,

$$W_0(u_1, \dots, u_n)(t_0) = W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{8.12}$$

(8.10) და (8.12) პირობებიდან გამომდინარეობს (8.8) პირობა.ამიტომ ლემა 2.1–ის თანახმად (8.7) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ლემა დამტკიცებულია. □

უნდა აღინიშნოს, რომ (8.9) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი შეიძლება იყოს იმ შემთხვევაშიც, როცა მისი ვრონსკის დეტერმინანტი იგივურად ნულის ტოლია. მართლაც, თუ

$$u_1(t) = \begin{cases} t^2, & \text{როცა} \quad t \leq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad t > 0; \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad t \leq 0, \\ t^3, & \qquad t > 0. \end{cases}$$

მაშინ ფუნქციათა $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ამასთან, $W_0(u_1, \dots, u_n)(t_0) = 0$, როცა $t \in \mathbb{R}$.

2.2. <u>(2.1) დიფერენციალური სისტემის ამონახსნთა სივრცე.</u> ადვილი დასანახია, რომ თუ x_1 და x_2 არის (8.1) სისტემის ამონახსნები, მაშინ ყოველი α_1 და $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ მუდმივებისთვის ვექტორული ფუნქცია $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ კვლავ იქნება ამ სისტემის ამონახსნი. მაშასადამე, (8.1) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის წრფივი სივრცე. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ამ სივრცის თვისებებს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.4. (8.1) დიფერენციალური სისტემის ამონახსნთა სისტემას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ იგი წრფივად დამოუკიდებელია და შეიცავს n ამონახსნს.

ვაჩვენოთ, რომ (8.1) სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა. ვთქვათ, $t_0 \in I$, ხოლო e_k და არის n–განზომილებიანი ვექტორი, რომლის k–ური კომპონენტა უდრის 1–ს, ხოლო ყველა დანარცენი კომპონენტა კი ნულის ტოლია. თეორემა 1.1–ის თანახმად ყოველი $k \in \{1, \dots, n\}$–თვის (8.1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი x_k, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$x_k(t_0) = e_k.$$

ცხადია, რომ $W(x_1, \dots, x_n) = 1$. ამიტომ ლემა 2.1–ის ძალით $x_1, \dots, x_n$ სისტემა წრივად დამოუკიდებელია. ამიტომ იგი იქნება (8.1)სისტემი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა თუკი $P \in C(I; \mathbb{R})$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.1. როგორც ამ დამტკიცებიდან ჩანს, ნაცვლად ვექტორთა $e_1, \dots, e_n$ სისტემისა შეგვციძლია განვიხილოთ ნებისმიერ ვექტორთა $c_1, \dots, c_n$ სისტემა, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\det(c_1, \dots, c_n) \neq 0$. აქვე აღვნიშნოთ, რომ (8.1) სისტემას გააჩნია ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის უსასრულო რაოდენობა, ამასთან ე.წ. კონტინიუმის რაოდენობის.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ $x_1, \dots, x_m$ არის (8.1) ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ყოველი $t_0 \in I$–თვის ვექტორთა $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$ სისტემა აგრეთვე იქნება წრფივად დამოუკიდებელი.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ რაიმე $t_0 \in I$–თვის ვექტორთა $x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი.,მოიძებნება ისეთი $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, \alpha_m)$ მუდმივები, რომ $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m| > 0$ და

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k(t_0) = 0_n.$$

განვიხილოთ ვექტორული ფუნქცია

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k(t).$$

ცხადია, რომ x არის (8.1) სისტემის ამონახსნი და

$$x(t_0) = 0_n.$$

რადგან x ამონახსნი t_0 წერტილში ემთხვევა (8.1) სისტემის ტრივიალურ ამონახსნს, ამიტომ თეორემა 1.1–ის თანახმად $x(t) \equiv 0_n$. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k(t) = 0_n, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

რაც ეწინააღმდეგება $x_1, \dots, x_m$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას.

შ ე დ ე გ ი 2.1. თუ $x_1, \dots, x_m$ არის (8.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

ხოლო თუ $x_1, \dots, x_m$ არის (8.1)–ის ამონახსნთა წრფივად დამოკიდებული სისტემა, მაშინ

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. (8.1) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის n–განზომილებიანი წრფივი სივრცე, რომლის ბაზისია ამონახნთა ფუნდემენტური სისტემა.

დამტკიცება. ზემოთ აღნიშნული გვქონდა, რომ (8.1) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს წრფივს სივრცეს და რომ (8.1)–ს გააჩნია ამონახსნთა ფუნდემენტური სისტემა. ამგვარად, ჩვენ დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ თუ $x_1, \dots, x_n$ არის (8.1)–ის ამონახსნთა რაიმე ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ ამ სისტემის ნებისმიერი x ამონახსნისთვის მოიძებნება ისეთი $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ მუდმივები, რომ

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I. \tag{8.13}$$

ავიღოთ ნებისმიერად t_0 და განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$x_(t_0), x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0). \tag{8.14}$$

რადგანაც n–განზომილებიან სივრცეში ნებისმიერი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, ამიტომ მუდმივ ვექტორთა (8.14) სისტემა იქნება წრივად დამოკიდებულია. აქედან, თეორემა 2.1–ის ძალით დავასკვნით, რომ ამონახსნთა $x, x_1, \ldots, x_n$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშასადემე, მოძებნება $\beta_0, \beta_0, \ldots, \beta_n$ მუდმივები ისეთი, რომ $|\beta_0| + \ldots, |\beta_n| \neq 0$ და

$$\beta_0 x(t) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k(t) = 0_n, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

$x_1, \ldots, x_n$ სისტემის ფუნდამენტურობის გამო ცხადია, რომ β_0. ამიტომ უკანასკბელი იგივეობიდან გამომდინარეობს (8.13) წარმოდგენა, სადაც $\alpha_k = -\frac{\beta_k}{\beta_0}$ $(k = 1, \ldots, n.$ □

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.5. $X : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ მატრიცულ ფუნქციას ეწოდება (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა, თუ მისი სვეტების ქმნის ამ სისტემის ამომახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას.

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 2.1 იმისათვის, რომ მატრიცული ფუნქცია $X \in C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ იყოს (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა აუცილებელი და საკმარისია, რომ I შუალედში სრულდებოდეს პირობები

$$x'(t) = P(t)X(t) \tag{8.15}$$

and

$$\det(X(t)) \neq 0. \tag{8.16}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, X არის (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა, რომლის სვეტებია $x_1, \ldots, x_n$. მაშინ

$$x_k'(t) = P(t)x_k(t) \ \ (k = 1, \ldots, n). \tag{8.17}$$

ე.ი. სამართლიანია (8.15) ტოლობა. რას შეეხება (8.16) პირობას, იგი გამომდინარეობს შედეგი 2.1–დან.

ვთქვათ, ახლა $X \in C^1(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ (8.1) სისტემის რაიმე ფუნდამენტური მატრიცაა, რომელიც I შუალედში აკმაყოფილებს (8.15) და (8.16) პირობებს. (8.15)–დან გამომდინარეობს (8.17) ტოლობები, სადაც $x_1, \ldots, x_n$ არის X მატრიცის სვეტები. ლემა 2.1 და (8.16) პირობიდან კი გამომდინარეობს $x_1, \ldots, x_n$–ის წრფივად დამოუკიდებლობა. ამგვარად, $x_1, \ldots, x_n$ (8.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა. დებულება დამტკიცებულია. □

თეორემა 2.2 ფუნდამენტური მატრიცის ენაზე შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება.

დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 2.2. ვთქვათ, X არის (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა. მაშინ ამ სისტემის ნებისმიერი x ამონახსნისთვის მოიძებნება ისეთი მუდმივი ვექტორი $\alpha \in \mathbb{R}^n$, რომ

$$x(t) = X(t)\alpha \tag{8.18}$$

და, პირიქით, როგორიც არ უნდა იყოს $\alpha \in \mathbb{R}^n$, (8.18) ტოლობით განსაზრვრული ვექტორული ფუნქცია x არის (8.1) სისტემის ამონახსნი.

(8.18) ფორმულით განსაზღვრულ ვექტორულ ფუნქციას, სადაც $\alpha \in \mathbb{R}^n$ მუდმივი ვექტორია, უწოდებენ (8.1) სისტემის ზ ო გ ა დ ამონახსნს.

ბოლო ორი დებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს დ ე ბ უ ლ ე ბ ა 2.3. ვთქვათ, X არის (8.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა. მაშინ ამ სისტემის ნებისმიერი ფუნდამენტური y მატრიცისთვის მოიძებნება ისეთი მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცა $A \in \mathbb{R}^{n\times}$, რომ

$$Y(t) = AX(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I \tag{8.19}$$

და, პირიქით, როგორიც არ უნდა იყოს მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცა $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (8.19) ტოლობით განსაზღვრული მატრიცული ფუნქცია Y იქნება (8.1) სისტემის ფუნდმენტური მატრიცა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.6. მატრიცულ $C : I^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ფუნქციას ეწოდება (8.1) სისტემის კ ო შ ი ს მატრიცა, თუ ყოველი $t_0 \in I$–თვის $C(., t_0)$ არის ამ სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა და

$$C(t_0, t_0) = I_n. \tag{8.20}$$

თეორემა 1.1–დან გამომდინარეობს, რომ (8.1) სისტემას აქვს ერთადერთ კოშის მატრიცა

თ ე ო რ ე მ ა 2.3. ვთქვათ, C არის (8.1) სისტემის კოშის მატრიცა. მაშინ:

ა) (8.1) სისტემის ნებისმიერი ფუნდამენტური X მატრიცისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$C(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0);. \tag{8.21}$$

ბ) (8.1) სისტემის ნებისმიერი x ამონახსნისთვის სამართლიანია ტოლობა მატრიცისთვის

$$x(t) = C(t, t_0)x(t_0). \tag{8.22}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, t_0 ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილია I–დან, X კი არის (8.1) სისტემის რაიმე ფუნდამენტური მატრიცა. რადგან $C(., t_0)$ არის ამავე სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა, ამიტომ დებულება 2.3–ის თანახმად მოიძებნება ისეთი გადაუგვარებელი $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ მატრიცა, რომ

$$C(t, t_0) = X(t)A. \tag{8.23}$$

აქედან, (8.20) პირობის გამო გვაქვს

$$X(t_0)A = I_n$$

და, მაშასადამე,

$$A = X^{-1}(t_0).$$

თუ A–ს მიღებულ მნიშვნელობას შევიტანთ (8.23) ტოლობაში, მივიღებთ (8.21) ფორმულას.

განვიხილით ახლა (8.1) სისტემის ნებისმიერი x ამონახსნი. დებულება 2.2–ის თანახმად მოიძებნება მუდმივი ვექტორი $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ისეთი, რომ

$$x(t) = C(t, t_0)\alpha.$$

აქედან, (8.20)–ის გამო გვაქვს

$$\alpha = x(t_0).$$

მაშასადამე, სამართლიანია (8.20) ფორმულა. თეორემა დამტკიცებულია. □

(8.22) ფორმულას ეწოდება კ ო შ ი ს ფორმულა წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური სისტემისათვის.

2.3. (8.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სივრცე. როგორც პირველ პარაგრაფში იყო აღნიშნული 8.2 დიფერენციალური განტოლება გაიგივებულია 8.1 სისტემასთან, სადავ

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & ... & p_{n-1}(t) & p_n(t) \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

უფრო ზუსტად, თუ u არის (8.2) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი. მაშინ ვექტორული ფუნქცია $x = (u^{(j-1)})_{j=1}^n$ იქნება (8.1) სისტემის ამონახსნი და, პირიქით, თუ x არის (8.1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი, მაშინ მისი პირველი კომპონენტა იქნება (8.2) განტოლების ამონახსნი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.7. (8.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სისტემას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ იგი წრფივად დამოუკიდებელია და შეიცავს n ამონახსნს.

ვთქვათ, t_0 არის I შუალედის ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილი. ყოველი $k \in \{1,\dots,n\}$–თვის u_k–თი აღვნიშნოთ (8.2) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$u^{(j-1)}(t_0) = \delta_{jk} \ \ (j = 1,\dots,n) \tag{8.25}$$

საწყის პირობებს, სადაც δ_{jk} კრონეკერის სიმბოლოა. მაშინ $W_0(u_1,\dots,u_n) \equiv 1$ და ამიტომ, ლემა 2.2–ის თანახმად, $u_1,\dots,u_n$ იქნება (8.2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $u_1,\dots,u_n$ არი (8.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა რაიმე ფუნდამეწნტური სისტემა, მაშინ (8.11) ტოლობებით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქციები ქმნის (**??**) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ამასთან სამართლიანია (8.12) იგივეობა.

2.1 და 2.2 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები.

თ ე ო რ ე მ ა 2.4. თუ $u_1,\dots,u_m$ არის (8.2) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, მაშინ ყოველი $t_0 \in I$–თვის ვექტორთა სისტემა

$$(u_1^{(j-1)}(t_0))_{j=1}^n,\dots,(u_m^{(j-1)}(t_0))_{j=1}^n$$

აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებეკლია.

შ ე დ ე გ ი 2.3. თუ $u_1,\dots,u_n$ არის (8.2) დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ

$$W_0(u_1,\dots,u_n)(t) \neq 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

$u_1,\dots,u_m$ არის (8.2) დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ

$$W_0(u_1,\dots,u_n)(t) = 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.5. (8.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის n–განზომილებიანი წრფივი სივრცე, რომლის ბაზისია ამონახსნთა ნებისმიერი ფუნდამენტური სისტემა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.5. (8.2) ვთქვათ, $c_k : I^2 \to \mathbb{R}\ (k = 1,\dots,n)$ ისეთი ფუნქციებია, რომ ყოველი $(k = 1,\dots,n)$ და $t_0 \in I$–თვის $c_k(.,t_0)$ არის (8.2), (8.2) ამოცანის ამონახსნი:

ა) (8.2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ნებისმიერი ფუნდამენტური $u_1,\dots,u_n$ სისტემისთვის სამართლი–ანია ტოლობებო

$$c_k(t,t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{w_{kj}(u_1,\dots,u_n)(t_0)}{W_0(u_1,\dots,u_n)(t_0)}\, u_j(t), \quad \text{როცა} \quad t,t_0 \in I \ \ (k = 1,\dots,n), \tag{8.26}$$

სადაც $w_{kj}(u_1,\dots,u_n)(t_0)$ არის $W_0(u_1,\dots,u_n)(t_0)$ დეტერმინანტის

–

–ურ სვეტში მდგომი ელემენტის ალგებრული დამატება;

ბ) (8.2) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი u ამონახსნი ყოველი $t_0 \in I$–თვის გამოისახება ფორმულით

$$u(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t,t_0)\, u^{(k-1)}(t_0). \tag{8.27}$$

დამტკიცება. რადგან $c_k(.,t_0)$ არის (8.2), (8.25) ამოცანის ამონახსნი, ამიტომ თეორემა 2.5–ის თანახმად

$$c_k(t,t_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}(t_0)\, u_j(t), \quad \text{როცა} \quad t,t_0 \in I \ \ (k = 1,\dots,n),$$

სადაც $\alpha_{k1}(t_0),,\alpha_{kn}(t_0)$ არის

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj}(t_0)\, u_j(t_0) = \delta_{ik} \ \ (i = 1,\dots,n),$$

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. აქედან კი, კრამერის ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$\alpha_{kj}(t_0) = \frac{w_{kj}(u_1,\ldots,u_n)(t_0)}{W_0(u_1,\ldots,u_n)(t_0)}, \quad (j=1,\ldots,n),$$

მაშასადამე, სამართლიანია (8.26) ტოლობები.

ვთქვათ, ახლა U არის (8.2) განტოლების რაიმე ამონახსნი. მაშინ ვექტორული ფუნქცია

$$x(t) = (u^{(j-1)})_{j=1}^{n}$$

იქნება (8.1) სისტემის ამონახსნი, სადაც P არის (8.24) ტოლობით განსაზღვრული მატრიცული ფუნქცია. ამიტომ თეორემა 2.3–ის თანახმად, სამართლიანია (8.22) იგივეობა, სადაც C არის (8.1) სისტემის კოშის მატრიცა. $c_1,\ldots,c_n$ ფუნქციების განსაზღვრიდან ნათელია, რომ

$$C(t,t_0) = \left(\frac{\partial^{j-1}c_k(t,t_0)}{\partial t^{j-1}}\right)_{j,k=1}^{n}.$$

ამიტომ (8.22) ტოლობიდან გამომდინარეობს (8.27) ფორმულა. თეორემა დამტკიცებულია. □

(8.22)–ს ეწოდება კ ო შ ი ს ფორმულა n–ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისთვის, ხოლოხ C_n–ს კი აღნიშნული განტოლების კ ო შ ი ს ფუნქცია.

2.5. ლ ი უ ვ ი ლ ი ს ფორმულა (8.1) დიფერენციალური სისტემისთვის.

ჩვენ დაგვჭირდება ერთი ლემა, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს დეტერმინანტის განსაზღვრებიდან.

ლ ე მ ა 2.3. ვთqვათ, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ მუდმივი მატრიცაა. მაშინ

$$\det(I_n + sA) = 1 + s\,Tr(A) + \sum_{k=1}^{n+1} s^{k+1} f_k(A), \quad \text{როცა} \quad s\in\mathbb{R},$$

სადაც $f_1(A),\ldots,f_{n-1}$ არის A მატრცის ელემენტებისგან შედგენილი მრავალწევრები.

თ ე ო რ ე მ ა 2.8. ვთქვათ, $x_1,\ldots,x_n$ არის (8.1) სისტემი ნებისმიერი ამონახსნები. მაშინ ყოველი t და $t_0 \in I$–თვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$W(x_1,\ldots,x_n)(t) = W(x_1,\ldots,x_n)(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} Tr(P(tau))d\tau), \tag{8.28}$$

სადაც $W(x_1,\ldots,x_n)$ ამონახსნათა აღნიშნული სისტემის ვრონსკიანი.

დამტკიცება. თუ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ (8.28) ტოლობა ცხადია, რადგანაც ამ შემთხვევაში იგი იგივურად ნულის ტოლია (იხ. შედედგი 2.1). მაშასადამე, შეგვიძლია ვიგულისმოთ, რომ ამონახსნთა $x_1,\ldots,x_n$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ე.ი (8.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდემენტური სისტემა.

ვთქვათ, $X(t)$ არის მატრიცა, რომლის სვეტებია $x_1(t,\ldots,x_n(t))$. ვრონსკიანის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$W(x_1,\ldots,x_n)(t) = \det X(t). \tag{8.29}$$

მეორე მხრივ, დებულება 2.1–ის ძალით ადგილი აქვს (8.15) და (8.16) ტოლობებს.

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად ადგილი აქვს ტოლობას

$$X(t+s) = X(t) + s(X'(t) + Y(t,s)), \quad \text{როცა} \quad t, t+s \in I,$$

სადაც $Y(t,s)$ მატრიცული ფუნქციაა ისეთი, რომ

$$\lim_{s\to 0} Y(t,s) = O_{n\times n}.$$

აქედან (8.15) და (8.16) ტოლობების ძალით დავასკვნით, რომ

$$X(t+s) = \big(I_n + s(P(t) + Z(t,s))\big)X(t), \tag{8.30}$$

სადაც

$$\lim_{s\to 0} Z(t+s) = Y(t,s)X^{-1}(t) = O_{n\times n}. \tag{8.31}$$

ლემა 2.3-სა და (8.29)-ის გამო

$$\det\big(I_n + s(P(t)+Z(t,s)\big) = 1 + sTr(P(t)) + s\varepsilon(t,s), \tag{8.32}$$

სადაც

$$\lim_{s\to 0}\varepsilon(t,s) = 0.$$

მეორე მხრივ, (8.29), (8.30) და (8.32) ტოლობების გამო გვაქვს

$$\frac{W(x_1,\dots,x_n)(t+s) - W(x_1,\dots,x_n)(t)}{s} = \big(Tr(P(t)) + \varepsilon(t,s)\big)\, W(x_1,\dots,x_n)(t),$$
$$\text{როცა} \quad s\neq 0, \quad t \quad \text{და} \quad t+s\in I.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $s\to 0$, მივიღებთ

$$W'(x_1,\dots,x_n)(t) = Tr(P(t))\, W(x_1,\dots,x_n)(t), \quad \text{როცა} \quad t\in I.$$

ამ უკანასკნელის ამონახსნი კი მოიცემა (8.28) ტოლობით. თეორემა დამტკიცებულია. □

(8.28)-ს ეწოდება ლ ი უ ვ ი ლ ი ს ფორმულა (8.1) სისტემისთვის.

2.6. ლ ი უ ვ ი ლ ი ს ფორმულა (8.2) განტოლებისთვის.

თ ე ო რ ე მ ა 2.9. ვთქვათ, $u_1,\dots,u_n$ არის (**??**2.2)) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნები. მაშინ ყოველი t და $t_0\in I$-თვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$w_0(u_1,\dots,u_n)(t) = w_0(u_1,\dots,u_n)(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} p_n(tau))d\tau), \tag{8.33}$$

სადაც $w_0(u_1,\dots,u_n)$ ამონახსნათა აღნიშნული სისტემის ვრონსკიანია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $x_1,\dots,x_n$ არის (8.11) ტოლობით განსაზღვრული ვექტორული ფუნქციები, ხოლო P კი (8.24) ტოლობით განაზღვრული მატრიცული ფუნქციაა. მაშინ ყოველი x_k წარმოადგენს (8.1) სისტემის ამონახსნს. გარდა ამისა სამართლიანის (8.12) იგივეობა.

თეორემა 2.8-სა და (8.24) ტოლობის გამო ადგილი აქვს (8.28) წარმოდგენას, სადაც

$$Tr(P(t)) \equiv p_n(t).$$

აქედან, (8.28) გათვალისწინებით ადვილად დავასკვნით (8.33) ტოლობის სამართლიანობას. □

განვიხილოთ ახლა მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$u'' = p_1(t)\,u + p_2(t)\,u', \tag{8.34}$$

სადაც p_1 და $p_2\in C(I;\mathbb{R})$.

ვთქვათ, ცნობილია ამ განტოლების რომელიმე ნულისაგან განსხვავებული კერძო ამონახსნი. მაშინ, თეორემა 2.9-ის გამოყენებით შესაძლებელია ამ განტოლების ყველა ამონახსნის აგება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი შ ე დ ე გ ი 2.6. ვთქვათ, u_1 არის (8.34) ჰანტოლების რაიმე ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$u_1(t)\neq 0, \qquad t\in I_0, \tag{8.35}$$

სადაც I_0 არის I-ს რაიმე ქვეშუალედი. მაშინ ყოველი $t_0\in I_0$-თვის

$$u_2(t) = u_1(t)\int_{t_0}^{t} u_1^{-2}(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s} p_2(\tau)\right), \quad \text{როცა} \quad t\in I_0, \tag{8.36}$$

ფუნქცია წარმოადგენს (8.34) განტოლების ამონახსნს, რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია u_1–გან. გარდა ამისა, (8.34) განტოლების ნებისმიერი u ამონახსნისთვის მოიძებნება ისეთი მუდმივები c_1 და $c_2\mathbb{R}$, რომ სამართლიანია

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2(t)u_2(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I_0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $t_0 \in I$. თეორემა 1.2–ის ზალით (8.34) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი u_2

$$u_2(t_0) = 0, \quad u_2'(t_0) = \frac{1}{u_1(t_0)}.$$

საწყის პირობებში.

ცხადია, რომ

$$w_0(u_1, u_2)(t_0) = 1.$$

ამიტომ თეორემა 2.9–სა და (8.35) პირობის გამო გვაქვს

$$\left(\frac{u_2(t)}{u_1(t)}\right)' = \frac{u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)}{u_1^2(t)} = u_1^{-2}(t)w_0(u_1, u_2)(t)$$
$$= u_1^{-2}(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p_2(\tau)d\tau\right), \quad \text{როცა} t \in I_0.$$

ამ ტოლობიდან კი უშუალოდ გამომდინარეობს (8.36) ტოლობა.

ლ ე მ ა 1.2 (გრონუოლ–ბელმანი). ვთქვათ, $p \in C(I; \mathbb{R}_+)$, $t_0 \in I$ და $c_0 \in \mathbb{R}_+I$. მაშინ ყოველი $u \in C(I; R)$ ფუნქციისთვის, რომელიც I შუალედში აკმაყოფილებს უტოლობას

$$u(t) \leq c_0 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\right|, \tag{8.37}$$

ამავე შუალედზე სამართლიანია შეფასება

$$u(t) \leq c_0 \exp\left(\left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right|\right). \tag{8.38}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია

$$v(t) = c_0 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\tau\right|.$$

მაშინ (8.37)–ის გამო

$$u(t) \leq v(t), \quad \text{როცა} \quad \in I. \tag{8.39}$$

განვიხილოთ ინტერვალი $I_+ = \{t \in I : t \geq t_0\}$. ცხადია, რომ v ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია ა I_+ შუალედში და

$$v'(t) = p(t)u(t) \leq p(t)v(t), \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

ასე რომ, I_+ შუალედზე v ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი კოშის ამოცანის ამონახსნს

$$v'(t) = p(t)v(t) + \delta(t), \quad v(t_0) = c_0, \tag{8.40}$$

სადაც $\delta(t) \equiv v'(t) - p(t)v(t)$. ცხადია, რომ

$$\delta(t) \leq 0, \quad \text{როცა} \quad t \in I_+. \tag{8.41}$$

წინადადება 4.1–ის ძალით ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მას აქვს შემდეგი სახე

$$v(t) = c_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} p(s)ds\right) q(\tau)d\tau, \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

საიდანაც, (8.41) გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$v(t) =\leq c_0 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds\right), \quad \text{როცა} \quad t \in I_+.$$

აქედან, (8.39)–ის ძალით დავასკვნით, რომ (8.38) შეფასება შესრულებულია, როცა $t \geq t_0$.

ანალოგიურად მომდება (8.38) შეფასება, როცა $t \leq t_0$. ლემა დამტკიცებულია. □

****