

С. И. Баскаков

**Радиотехнические цепи и сигналы.
Руководство к решению задач**

Москва
Высшая школа
2002

Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач М.: Высшая школа, 2002, 214 с.

ISBN: 5-06-003994-3

Пособие содержит задачи по всем разделам одноименного курса. В нем приведены условия задач, примеры решений, методические указания и ответы. При работе с пособием рекомендуется пользоваться учебником Баскакова С. И. "Радиотехнические цепи и сигналы" (М. : Высш. шк., 2000). Во второе издание добавлены задачи по вейвлет-анализу сигналов и методам оценки информационных характеристик радиоканала. Предложены задачи, связанные с компьютерным анализом цепей и сигналов с помощью программных продуктов MathCAD и Electronics Workbench. Для студентов вузов, обучающихся по радиотехническим специальностям.

«Пример иногда полезнее правила»

И. Ньютон

Из собственного опыта читатель, безусловно, знает, что неотъемлемой частью процесса изучения точных — прежде всего, математики и физики, а также многих естественных наук является решение задач. Впервые столкнувшись с задачами в школьные годы, мы затем настолько привыкаем к ним, что не утруждаем себя вопросами о том, что же представляет собой задача как таковая, в чем состоит ее познавательная роль. Более того, иные учащиеся отвосятся к задачам как к неизбежному злу, которое нужно просто терпеливо пережить. В связи с этим полезно отметить, что европейские наука и педагогика, история которых насчитывает не одно тысячелетие, лишь к концу XVII века пришли к выводу о том, что обучение, основанное на механическом заучивании теоретических положений, чрезвычайно неэффективно. Слова Ньютона из его учебника «Алгебра», взятые в качестве эпиграфа, удачно подчеркивают принцип, который вряд ли устареет — залогом успешного учения служат активное познавательное творчество учащегося, который получает возможность на собственном опыте увидеть теорию в действии.

Учебные задачи по своей природе близки к шахматным этюдам или, скорее к тем гаммам и арпеджио, без которых не обошелся ни один начинающий музыкант. Хорошо составленная задача несет в себе все черты небольшого научно-педагогического сочинения — ее научная тематика строго очерчена и, что самое главное, для успешного решения задачи нужно самостоятельно сконструировать тот мыслительный алгоритм, который заранее известен педагогу и который учащийся должен продемонстрировать.

Как и все на свете, метод обучения с помощью решения задач имеет собственное внутреннее ограничение: постановка задачи неизбежно беднее той реальности, к которой эта задача относится. С этим обстоятельством непременно нужно считаться, соотнося выводы теории с практикой.

Как научиться решать задачи? По этому поводу написано много серьезных книг. Ни в коей мере не претендуя на обобщение, подчеркнем следующее.

Во-первых, следует выработать в себе отношение к этой деятельности как к увлекательному труду, позволяющему широко

раскрыть интеллектуальные способности человека. Приемы разнообразны — успешно решив задачу, подумайте, какие другие схожие задачи можно решить найденным методом. Не забудьте похвалить себя, если работа ладится. И главное, не впадайте в уныние, если задача упорно «не желает решаться». Отдохнув, принимайтесь за работу снова, — настойчивость в достижении цели является неприменной личностной чертой настоящего профессионала. Если не удалось справиться с трудностью самостоятельно и приходится обращаться к преподавателю, не ставьте во главу угла «рецептурную» сторону дела — ведь цель не просто получить верный ответ, а как можно глубже понять, почему надо действовать именно так, а не иначе.

Во-вторых, открыв учебник, не следует сводить дело к подыскиванию формулы, которая немедленно даст нужный ответ. Формальное знание теории является необходимым, но отнюдь не достаточным условием успешного решения задачи. Самой главной мыслительной процедурой всегда была некоторая догадка, а это и есть, по сути дела, начало любого творчества. Если сразу ясно, как решать ту или иную задачу, ею все равно не следует пренебрегать. Аккуратное доведение до конца всех выкладок и расчетов очень важно для формирования навыка самостоятельной работы.

Пользуюсь возможностью высказать признательность рецензенту книги — проф. М. П. Демину за полезные советы и благожелательную критику.

Автор

Настоящая книга содержит материал к упражнениям по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы».

Раздел I включает шестнадцать отдельных тем, которые охватывают всю программу курса. Тематические заголовки повторяют названия глав учебника [1].

Подбор задач и их расстановка выполнена таким образом, что учащимся предлагается внутренне организованная система упражнений, отвечающая общим и частным принципам построения курса «Радиотехнические цепи и сигналы». Так, читатель найдет здесь задачи, преследующие цель закрепить теоретический материал. Имеются задачи следующей степени сложности, когда приемы и методы познавательной деятельности должны быть обобщены учащимся для анализа более сложных ситуаций. Наконец, в пособие включены задачи, предусматривающие перенос знаний на новые объекты, выработку навыков творческого мышления.

Раздел II пособия содержит указания к решению ряда задач. В разделе III приведены образцы решений. Последний раздел IV включает в себя ответы к задачам.

Автор стремился написать пособие, которое активно помогало бы студенту в наиболее сложной фазе работы — в поиске плана решения задач. Для этого была проведена классификация всех помещенных в книге задач. Классификационные символы располагаются в скобках вслед за номером задачи и имеют следующий смысл:

УР — к задаче приведены указания (для хорошо подготовленных студентов, намеренных решить задачу «без подсказки») и решение;

Р — приведено только решение;

УО — данную задачу сопровождают указания и ответ;

У — приводится только указание;

О — приводится только ответ.

Изучение каждой темы следует начинать с проработки установочных задач типов УР и Р. При выполнении упражнений студенту целесообразно иметь под рукой учебник по теории цепей, например, [2] и математические справочники, такие, как [3] и [4].

Задачи и упражнения

Тема I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

● Математические модели сигналов

1.1(Р). Импульсный сигнал $u(t)$, имеющий размерность напряжения (В), описывается формулой

$$u(t) = 25 [\exp(-10^5 t) - \exp(-2 \cdot 10^5 t)] \sigma(t).$$

Постройте график данного импульса. Определите максимальное значение сигнала u_{\max} , а также момент времени достижения максимума t_{\max} . Вычислите длительность импульса τ_n , определив ее как длину отрезка времени от нуля до той точки, в которой мгновенное значение сигнала уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальным значением.

1.2(О). Математическая модель импульсного сигнала задана выражением

$$u(t) = A_0 t e^{-at} \sigma(t).$$

Вычислите и построьте график данного сигнала в зависимости от безразмерного аргумента at . Определите длительность импульса τ_n , приняв в качестве критерия окончания импульса спад мгновенных значений до уровня 0.1 от максимального значения.

1.3(УО). Осциллограмма сигнала $s(t)$ приведена на рис. I.1.1. Запишите математическую модель данного сигнала, применив функции Хевисайда.

1.4(Р). Сигнал $s(t)$ имеет математическую модель вида (рис. I.1.2):

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0, \\ s_0 (t/t_0) & , \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ s_0 & , \quad t > t_0. \end{cases}$$

Представьте данную зависимость в виде суммы кусочно-линейных функций.

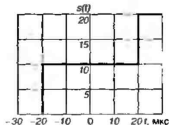


Рис. 1.1.1

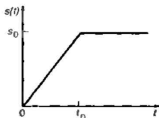


Рис. 1.1.2

1.5(О). На рис. 1.1.3, *a*, *b*, *в* изображены осциллограммы импульсных сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$. Найдите математические модели данных сигналов, выраженные посредством сумм, которые составлены из произведений линейных функций и функций Хевисайда.

1.6(О). Найдите формулы, описывающие математические модели следующих импульсных сигналов (рис. 1.1.4): а) однополярного импульса $s_1(t)$, представляющего собой отрезок синусоиды с амплитудой A и частотой ω_0 ; длительность импульса равна половине периода (a); б) двухполярного импульса $s_2(t)$, отвечающего целому периоду синусоиды с такими же параметрами (*б*).

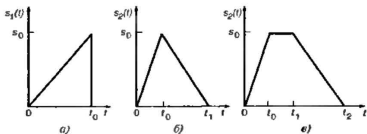


Рис. 1.1.3

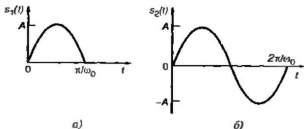


Рис. 1.1.4

1.7(О). Математическая модель сигнала задана некоторой функцией $f(t)$, существующей в бесконечном промежутке времени $-\infty < t < \infty$. Представьте функцию $f(t)$ в виде суммы четной и нечетной частей:

$$f(t) = f_{\text{ч}}(t) + f_{\text{н}}(t)$$

и найдите явные выражения для функций $f_{\text{ч}}(t)$ и $f_{\text{н}}(t)$.

● **Динамическое представление сигналов**

1.8(О). Используя функции Хевисайда, найдите динамическое представление колебания $s(t)$, описывающего переход некоторой физической системы от нулевого уровня к постоянному уровню B . Данный переход происходит за интервал времени T по линейному закону:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0, \\ B(t/T), & 0 < t < T, \\ B & , \quad t > T. \end{cases}$$

1.9(О). Экспоненциальный видеоимпульс напряжения (B) $s(t) = 25 \exp(-10^6 t) \sigma(t)$ действует на входе цепи, достаточно инерционной для того, чтобы можно было приближенно представить данный сигнал в виде $s(t) = A \delta(t)$. Определите числовое значение коэффициента A .

1.10(Р). Убедитесь, что при $n \rightarrow \infty$ пределом последовательности функций

$$f_n(t) = (n/2) e^{-n|t|}$$

служит функция Дирака $\delta(t)$.

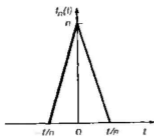


Рис. 1.1.5

1.11(Р). Докажите, что пределом последовательности функций $f_n(t)$, одна из которых изображена на рис. 1.1.5, при $n \rightarrow \infty$ является функция $\delta(t)$.

1.12(У). Докажите, что функция Дирака $\delta(t)$ может рассматриваться как предел последовательности классических функций

$$f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp(-nt^2/2) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

● Геометрические методы в теории сигналов

1.13(P). Вычислите энергию E_u и норму $\|u\|$ экспоненциального видеосигнала напряжения (В)

$$u = (t) = 30 \exp(-10^5 t) \sigma(t).$$

1.14(O). Вычислите энергию E_s и норму $\|s\|$ сигнала $s(t)$, представляющего собой прямоугольный видеосигнал напряжения (В) с амплитудой U_0 и длительностью τ_a .

1.15(O). Выведите формулу для нахождения энергии радиосигнала длительностью τ_a с огибающей прямоугольной формы, описываемого выражением

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ U_m \sin(\omega t + \varphi), & 0 < t < \tau_a, \\ 0 & , t > \tau_a. \end{cases}$$

1.16(P). Даны два сигнала: прямоугольный видеосигнал $u(t) = U_0[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_a)]$ и экспоненциальный видеосигнал $v(t) = U_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$ (параметры U_0 , α и τ_a — положительные вещественные числа). Считая длительность τ_a фиксированной, найдите величину параметра α , при которой расстояние $\rho(u, v)$ минимально.

1.17(P). Сигнал $f(t) = t^2$ существует на отрезке времени $0 \leq t \leq 1$. Найдите приближение к этому сигналу с помощью линейной функции $u(t) = At + B$, наилучшее в смысле минимума расстояния (метрики).

1.18(O). На отрезке времени $-T/2 \leq t \leq T/2$ задан импульсный сигнал $u(t) = U_0 \cos(\pi t/T)$, тождественно обращающийся в нуль вне указанного отрезка (рис. 1.1.6). Сигнал $v(t)$ представляет собой прямоугольный импульс длительностью $2t_0$, вписанный в импульс $u(t)$. Определите параметр t_0 таким образом, чтобы расстояние $\rho(u, v)$ было минимальным.

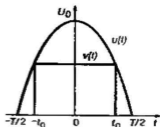


Рис. 1.1.6

● Теория ортогональных сигналов

1.19(P). Пусть $\{u_n(t)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ — система ортогональных сигналов, существующих на общем отрезке $a \leq t \leq b$ и являющихся векторами некоторого гильбертова пространства. Докажите, что эта система сигналов линейно независима.

1.20(P). Докажите, что конечная система сигналов $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, заданная на отрезке времени $a \leq t \leq b$, является линейно зависимой в том случае, когда обращается в нуль определитель Грамма:

$$G_N = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_N) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \dots & (u_2, u_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_N, u_1) & (u_N, u_2) & \dots & (u_N, u_N) \end{vmatrix}.$$

1.21(O). Сигналы $u(t)$ и $v(t)$ представляют собой прямоугольные видеосигналы с амплитудами A_1 и A_2 и длительностями τ_{u1} и τ_{u2} соответственно (рис. 1.1.7). Оба сигнала одновременно отличны от нуля на отрезке времени длительностью τ . Докажите, что угол ψ между этими сигналами, рассматриваемыми как векторы в гильбертовом пространстве, не зависит от величин A_1 и A_2 . Получите формулу, определяющую угол ψ .

1.22(O). Два одинаковых по форме экспоненциальных видеосигналов, разнесенных во времени на величину t_0 , описываются выражениями

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_0 e^{-\alpha t} \sigma(t), \\ u_2(t) &= U_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \sigma(t-t_0). \end{aligned}$$

Определите зависимость угла ψ между этими векторами от параметра t_0 . Найдите величину t_0 , при которой $\psi = 89^\circ$ (практически ортогональные импульсы).

1.23(У). В гильбертовом пространстве сигналов заданы два вектора u и v с одинаковыми энергиями: $\|u\|^2 = \|v\|^2$. Докажите, что при этом сигналы $s_1 = u + v$ и $s_2 = u - v$ ортогональны, т. е. $(s_1, s_2) = 0$.

1.24(У). Для произвольных сигналов $u(t)$ и $v(t)$, являющихся элементами гильбертова пространства, докажите равенство параллелограмма

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

1.25(P). Сигналы $u(t)$ и $v(t)$ являются элементами некоторого вещественного гильбертова пространства. Рассматриваемые сигналы линейно независимы, т. е. равенство $u = \lambda v$ не имеет места ни при каком значении вещественного параметра λ . Докажите справедливость неравенства Коши — Буняковского

$$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|.$$

1.26(У). Докажите, что в вещественном гильбертовом пространстве сигналов имеет место неравенство Минковского

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

1.27(У). В гильбертовом пространстве сигналов заданы произвольный вектор u и вектор v , такой, что $\|v\| = 1$. По аналогии с геометрией обычных векторов на плоскости вектор $w = (u, v)v$ называют ортогональной проекцией вектора u на направление v (рис. I.1.8). Докажите, что вектор $y = u - w$ ортогонален вектору v .

1.28(У). Обобщая результат задачи 1.27, докажите, что если $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ — система взаимно ортогональных векторов с единичными нормами, то вектор

$$y = u - (u, v_1)v_1 - (u, v_2)v_2 - \dots - (u, v_N)v_N$$

при любом u ортогонален по отношению к каждому из векторов рассматриваемой системы.

1.29(Р). Пусть в гильбертовом пространстве сигналов задана система взаимно неортогональных векторов $\{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$. Постройте на ее основе ортонормированную систему $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ таким образом, чтобы каждый вектор u_k являлся линейной комбинацией вида

$$u_k = c_{k0}g_0 + c_{k1}g_1 + \dots + c_{kn}g_n + \dots$$

с постоянными коэффициентами.

1.30(УО). Используя прием, найденный при решении задачи 1.29, вычислите три первых базисных вектора u_0, u_1 и u_2 , получаемых путем ортогонализации и нормировки системы степенных функций $\{1, t, t^2, \dots\}$ на отрезке $-1 \leq t \leq 1$.

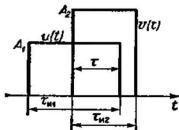


Рис. I.1.7

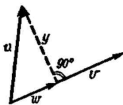


Рис. I.1.8

1.31(УО). Найдите первые три коэффициента c_0 , c_1 и c_2 обобщенного ряда Фурье, получаемого при разложении сигнала $f(t) = e^t$ на отрезке $-1 \leq t \leq 1$ по системе базисных функций $\{u_k\}$, исследованных в задаче 1.30.

Вычислите норму

$$\left\| f - \sum_{k=0}^2 c_k u_k \right\|$$

абсолютной ошибки аппроксимации данного сигнала тремя членами ряда. Получите числовую оценку для относительной ошибки

$$\left\| f - \sum_{k=0}^2 c_k u_k \right\| / \|f\|$$

данной аппроксимации.

1.32(УО). Решите предыдущую задачу в другой постановке: найдите коэффициенты многочлена второй степени $z(t) = A + Bt + Ct^2$ таким образом, чтобы данный многочлен с наименьшей среднеквадратичной ошибкой аппроксимировал сигнал $f(t) = e^t$ на отрезке $-1 \leq t \leq 1$.

1.33(У). Докажите, что комплексные экспоненциальные функции

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(j \frac{2\pi n t}{T}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ образуют ортонормированный базис.

1.34(У). На отрезке $a \leq t \leq b$ задана бесконечная полная система ортонормированных сигналов $\{u_n(t)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Докажите, что дельта-функция, сосредоточенная в некоторой внутренней точке t_0 ($a < t_0 < b$), может быть представлена как бесконечный ряд

$$\delta(t - t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t_0) u_n(t).$$

1.35(О). Сигнал $s(\vartheta)$, зависящий от безразмерного аргумента ϑ , на отрезке $-1/2 \leq \vartheta \leq 1/2$ представляется формулой $s(\vartheta) = 16\vartheta^2$. Вычислите коэффициент c_2 разложения данного сигнала в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша:

$$s(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}(k, \vartheta).$$

1.36(О). Вычислите коэффициенты c_0 и c_2 в разложении сигнала $s(t) = 45 \exp(-0,7|t|)$, заданного на отрезке $-1/2 \leq t \leq 1/2$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша.

1.37(УО). Найдите коэффициент c_1 обобщенного ряда Фурье по функциям Уолша для сигнала $f(t)$, рассмотренного в задаче 1.31.

Тема 2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

● Периодические сигналы и ряды Фурье

2.1(Р). Периодический сигнал $s(t)$ с периодом T на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ задан выражением $s(t) = U_0 \cos(\pi t/T)$ (рис. 1.2.1). Найдите выражения для коэффициентов C_n ряда Фурье этого сигнала.

2.2(УО). Периодическое колебание $u(t)$ имеет период T . На отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ данное колебание представлено в виде $u(t) = U_0 \exp(-\beta|t|)$, причем параметр β велик настолько, что $\beta T/2 \gg 1$ и поэтому отдельные импульсы, образующие периодический сигнал, практически не «перекрываются» (рис. 1.2.2). Найдите коэффициенты $a_0/2$ и a_n , входящие в ряд Фурье данного сигнала

$$u(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T}.$$

2.3(О). Периодический комплексный сигнал $s(t)$ с периодом T представлен следующими выражениями:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -T/2 < t < -\tau/2, \\ A \exp(j\alpha t) & , \quad -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & , \quad \tau/2 < t < T/2, \end{cases}$$

где A , α , τ — заданные вещественные числа.

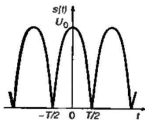


Рис. 1.2.1

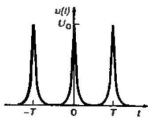


Рис. 1.2.2

Вычислите коэффициенты C_n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ряда Фурье в комплексной форме для данного сигнала.

2.4(О). График мгновенных значений вещественного периодического сигнала $s(t)$, относящихся к отрезку $-T/2 \leq t \leq T/2$, изображен на рис. 1.2.3. Получите формулу, определяющую общий член последовательности $\{C_n\}$ коэффициентов комплексного ряда Фурье данного сигнала.

2.5(О). Прямоугольные видеопульсы положительной полярности, образующие бесконечную последовательность с периодом T , имеют амплитуду U_0 . Длительность каждого импульса равна $T/3$, точка $t=0$ совпадает с серединой импульса. Вычислите коэффициент C_1 комплексного ряда Фурье указанного сигнала.

2.6(О). Периодический сигнал $s(t)$ на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ задан выражением $s(t) = U_0(1 - 2|t|/T)$ (рис. 1.2.4). Получите выражения, определяющие коэффициенты C_n ряда Фурье для этого колебания. Постройте график частичной суммы ряда Фурье, содержащей постоянную составляющую и две гармоники низших номеров.

2.7(УО). Осциллограмма периодического пилообразного сигнала $s(t)$ приведена на рис. 1.2.5. Получите выражения для коэффициентов C_n комплексного ряда Фурье. Запишите явное выражение этого сигнала в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами. Постройте график частичной суммы, состоящей из трех первых членов. Сравните данное приближенное представление с исходным сигналом.

2.8(УО). Найдите связь между коэффициентами C_n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) комплексного ряда Фурье периодического сигнала $f(t)$ и коэффициентами \tilde{C}_n ряда Фурье сигнала $\tilde{f}(t) = f(t - t_0)$, полученного из исходного сигнала $f(t)$ путем сдвига во времени на t_0 секунд.

2.9(У). Комплексный периодический сигнал $s(t)$ на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ имеет вид

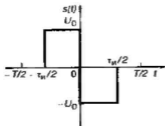


Рис. 1.2.3

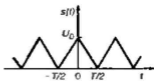


Рис. 1.2.4

$$s(t) = s_1(t) + js_2(t).$$

Покажите, что если функция $s_1(t)$ четна, а $s_2(t)$ — нечетна, то коэффициенты C_n ряда Фурье при любом n являются вещественными числами.

2.10(О). Периодический вещественный сигнал $s(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq T$ задан выражением $s(t) = U_0 \exp(-\alpha t)$ (рис. I.2.6). Найдите выражения для коэффициентов C_n комплексного ряда Фурье, отвечающего данному сигналу. Вычислите амплитуду пятой гармоники A_5 при следующих параметрах:

$$U_0 = 15 \text{ В}, \alpha T = 3.$$

2.11(О). Найдите амплитуду A_2 второй гармоники сигнала, рассмотренного в задаче 2.1, если $U_0 = 25 \text{ В}$.

2.12(О). Применительно к условиям задачи 2.2 при $U_0 = 300 \text{ В}$, $T = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ и $\beta = 6 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ определите постоянную составляющую $a_0/2$, а также амплитуды первой, второй и третьей гармоник сигнала.

2.13(Р). Периодический сигнал $s(t)$, в общем случае комплексный, имеет заданный период T . Получите выражение, связывающее среднюю за период мощность этого сигнала P_{cp} с коэффициентами C_n его ряда Фурье.

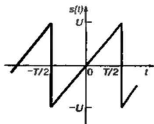


Рис. I.2.5

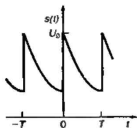


Рис. I.2.6

2.14(УО). Найдите среднюю за период мощность P_{cp} сигнала, рассмотренного в задаче 2.6, а также среднюю мощность $P_{cp(3)}$, отвечающую сумме постоянной составляющей, первой и второй гармоник. Вычислите относительную погрешность δ представления средней мощности указанным способом.

● **Спектральные представления непериодических сигналов. Преобразование Фурье**

2.15(Р). Осциллограмма видеоимпульса напряжения $s(t)$ представлена на рис. 1.2.7. На отрезке времени $0 \leq t \leq \tau_n = 5$ мкс функция $s(t)$ имеет вид $s(t) = A \exp(-\alpha t)$, где A и α — параметры, определяемые видом осциллограммы. Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ данного импульса.

2.16(Р). Покажите, что спектральная плотность $S(\omega)$ импульса, рассмотренного в задаче 2.15, не обращается в нуль ни при каких конечных значениях частоты ω .

2.17(Р). Периодический сигнал $s_{\text{пр}}(t)$ образован бесконечной последовательностью одинаковых импульсов $s_0(t)$, повторяющихся через одинаковые интервалы времени T . Найдите формулу, связывающую коэффициенты C_n ($n=0, \pm 1, \dots$) ряда Фурье периодического сигнала со спектральной плотностью $S_0(\omega)$ одиночного импульса $s_0(t)$.

2.18(Р). Импульсная последовательность $s(t)$ образована множеством $2N+1$ непересекающихся во времени одинаковых импульсов (N — целое положительное число или нуль). Интервал повторения последовательности равен T (рис. 1.2.8).

Считая известной спектральную плотность $S_0(\omega)$ одиночного импульса, вычислите спектральную плотность $S(\omega)$ последовательности.

2.19(Р). Вычислите спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала $s(t) = A(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})\sigma(t)$. Постройте график зависимости модуля спектральной плотности от частоты для следующих значений параметров: $A=6$ В, $\alpha=10^6$ с $^{-1}$, $\beta=3 \cdot 10^6$ с $^{-1}$.

2.20(Р). Для сигнала $s(t)$, рассмотренного в предыдущей задаче, выведите формулу, позволяющую рассчитать граничную частоту спектра $\omega_{\text{гр}}$, на которой модуль спектральной плотности уменьшается в 10 раз по сравнению с тем значением, которое имеет место на нулевой частоте. Получите числовое значение

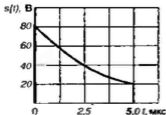


Рис. 1.2.7

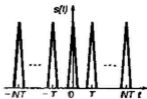


Рис. 1.2.8

$\omega_{\text{гр}}$ применительно к тем параметрам α и β , которые заданы в условиях задачи 2.19.

2.21(О). Экспоненциальный видеосигнал тока (А) задается выражением $i(t) = 0.75 \exp(-4 \cdot 10^7 t) \sigma(t)$. Найдите модуль и аргумент спектральной плотности данного колебания на частоте $f = 10$ МГц.

2.22(УО). Определите спектральную плотность $S(\omega)$, отвечающую сигналу $s(t) = A t \exp(-\alpha t) \sigma(t)$.

2.23(УР). На экране телевизионного приемника с длиной строки 500 мм требуется создать изображение вертикальной черной линии шириной 3 мм (рис. 1.2.9). Электронный луч пробегает строку телевизионного раstra за отрезок времени длительностью 64 мкс. Оцените ширину спектра видеосигнала, управляющего яркостью свечения экрана кинескопа в рассматриваемом случае.

2.24(О). Найдите связь между спектральной плотностью $S(\omega)$ вещественного сигнала $s(t)$ и спектральной плотностью $Q(\omega)$ сигнала $q(t) = s(-t)$.

2.25(УО). Четный сигнал $q_1(t)$ и нечетный сигнал $q_2(t)$ связаны с исходным колебанием $s(t)$ соотношениями:

$$q_1(t) = s(t) + s(-t),$$

$$q_2(t) = s(t) - s(-t).$$

Найдите связь спектральных плотностей $Q_1(\omega)$ и $Q_2(\omega)$ данных сигналов со спектральной плотностью $S(\omega)$ сигнала $s(t)$.

2.26(О). Пусть $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. Найдите сигнал $f(t)$, которому отвечает спектральная плотность: а) $F(\omega) = S^2(\omega)$, б) $F(\omega) = S(\omega) S^*(\omega) = |S(\omega)|^2$, в) $F(\omega) = S^*(\omega)$.

2.27(О). Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала $s(t)$, математическая модель которого описывается n -й производной функции $\delta(t)$.

2.28(Р). Определите спектральную плотность $S(\omega)$ симметричного треугольного импульса $s(t)$ (рис. 1.2.10).

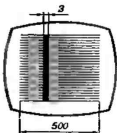


Рис. 1.2.9

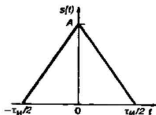


Рис. 1.2.10

2.29(Р). Сигнал $u(t)$ представляет собой последовательность из трех разнополярных видеоимпульсов с длительностью T и амплитудой U_0 каждый (рис. 1.2.11). Вычислите спектральную плотность $U(\omega)$ данного сигнала. Постройте график зависимости спектральной плотности от безразмерного аргумента $\omega T/2$.

2.30(УО). Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ несимметричного треугольного видеоимпульса $s(t)$, осциллограмма которого изображена на рис. 1.2.12.

2.31(У). На примере треугольного видеоимпульса, рассмотренного в задаче 2.30, покажите, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса, т. е. $S(0) = A\tau_m/2$.

2.23(УР). Импульсный сигнал $s(t)$ отличен от нуля на отрезке времени $[0, \tau_m]$. Получите приближенное выражение спектральной плотности $S(\omega)$ на достаточно низких частотах ω , удовлетворяющих условию $\omega\tau_m \ll 1$.

2.33(УО). Осциллограмма импульса напряжения изображена на рис. 1.2.13. Найдите приближенное числовое значение спектральной плотности этого импульса на частоте $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$.

2.34(УО). Осциллограмма импульса тока приведена на рис. 1.2.14. Вычислите приближенное значение спектральной плотности этого импульса на частоте $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

2.35(УР). Найдите сигнал $s(t)$, спектральная плотность которого задана выражением

$$S(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

где S_0, τ — некоторые постоянные.

2.36(УО). Найдите сигнал $s(t)$, исходя из его спектральной плотности

$$S(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^4 \tau^4}$$

2.37(УО). Определите функцию $s(t)$, описывающую сигнал со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{A}{(\alpha + j\omega)^3}$$

где A — постоянная, $\alpha > 0$ — вещественное число.

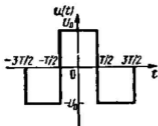


Рис. 1.2.11

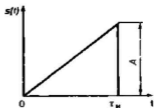


Рис. 1.2.12

2.38(О). Найдите сигнал $s(t)$, заданный своей спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{A}{(\alpha + j\omega)(\beta + j\omega)},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$.

2.39(О). Найдите сигнал $s(t)$, которому отвечает спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{A}{(\omega - \omega_0 - j\alpha)(\omega + \omega_0 - j\alpha)},$$

где A , ω_0 , α — положительные вещественные числа.

2.40(УР). Вычислите спектральную плотность $U(\omega)$ сигнала $u(t)$, представляющего собой синусоиду, начинающуюся в момент времени $t=0$: $u(t) = U_0 \sin \omega_0 t \cdot \sigma(t)$.

2.41(УО). Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ импульса включения комплексного экспоненциального сигнала, представляемого формулой $s(t) = \exp(j\omega_0 t) \sigma(t)$.

2.42(УО). Вычислите спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ \exp(j\vartheta), & t \geq 0, \end{cases}$$

где ϑ — постоянное число.

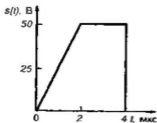


Рис. 1.2.13

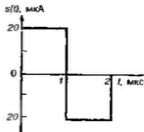


Рис. 1.2.14

2.43(УО). Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ комплексного экспоненциального сигнала

$$s(t) = \begin{cases} \exp(j\omega_0 t), & t < 0, \\ \exp[j(\omega_0 t + \theta)], & t \geq 0, \end{cases}$$

имеющего скачок фазы на θ радиан при $t=0$.

2.44(О). Определите спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала $s(t) = \cos^2 \omega_0 t$, $-\infty < t < +\infty$. Задачу решите двумя способами: а) путем сведения заданного сигнала к сумме двух сигналов с известными спектрами, б) с помощью теоремы о спектре произведения двух функций.

2.45(Р). Непосредственным вычислением докажите, что свертка

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t-\tau) d\tau$$

двух сигналов $u(t)$ и $v(t)$ с известными спектральными плотностями $U(\omega)$ и $V(\omega)$ соответственно имеет спектральную плотность $F(\omega) = U(\omega)V(\omega)$.

2.46(Р). Вычислите свертку $f(t)$ двух экспоненциальных видеопульсов $s_1(t) = A_1 \exp(-\alpha_1 t) \sigma(t)$ и $s_2(t) = A_2 \exp(-\alpha_2 t) \sigma(t)$ двумя способами: а) прямым нахождением интеграла свертки, б) с помощью теоремы о преобразовании Фурье свертки.

2.47(УО). Вычислите сигнал $q(t)$, являющийся сверткой двух функций Хевисайда $\sigma(t)$.

● Преобразование Лапласа

2.48(УР). Найдите оригинал $u(t)$, которому отвечает изображение $U(p) = 1/p^2$.

2.49(Р). Найдите функцию $f(t)$, которая является оригиналом по отношению к изображению

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)},$$

где a, b, c — постоянные числа.

2.50(УР). Докажите следующую формулу соответствия между изображением по Лапласу и оригиналом:

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}).$$

2.51(У). Докажите следующие соответствия между изображениями по Лапласу и оригиналами:

$$а) \frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at}),$$

$$б) \frac{p^2}{(p+a)(p+b)} \doteq \delta(t) + \frac{1}{b-a} (a^2e^{-at} - b^2e^{-bt}).$$

2.52(У). Докажите, что изображению $F(p) = 1/(p+a)^{n+1}$ соответствует оригинал $f(t) = t^n e^{-at}/n!$ Здесь $n \geq 0$ — натуральное число, a — произвольная величина.

2.53(У). Докажите, что оригиналу $\cos(\omega t + \varphi)$ отвечает изображение по Лапласу $(p \cos \varphi - \omega \sin \varphi)/(p^2 + \omega^2)$.

2.54(УО). Найдите изображение по Лапласу $U(p)$ для прямоугольного видеопульса $u(t)$ с амплитудой U_0 и длительностью τ , который начинается в момент времени $t=0$.

2.55(О). Сигнал $s(t)$, начавшийся в момент времени $t=0$, представляет собой бесконечную последовательность импульсов, следующих во времени с периодом T . Полагая известной функцию $S_0(p)$ — изображение отрезка данного сигнала, отличного от нуля на отрезке $0 \leq t \leq T$, найдите преобразование Лапласа $S(p)$ для периодического сигнала.

2.56(УО). Вычислите преобразования Лапласа $S_1(p)$, $S_2(p)$ и $S_3(p)$ сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$, описанных в условиях задачи 1.5.

● Вейвлет-анализ

2.57(О). Напишите явные выражения функций, представляющие вейвлеты Хаара $\Psi_{10}(\vartheta)$, $\Psi_{11}(\vartheta)$ и $\Psi_{44}(\vartheta)$. Здесь ϑ — безразмерная переменная, связанная с текущим временем t и длительностью T рассматриваемых сигналов соотношением $\vartheta = t/T$.

2.58(Р). На отрезке времени $[0, T]$ задан импульсный сигнал треугольной формы $s(t) = 40(t/T)$, равный нулю в остальных точках оси t . Найдите коэффициент c_{11} , входящий в расположение этого сигнала по элементам вейвлет-базиса Хаара.

2.59(Р). В состав математической системы MathCAD входит библиотечная функция $\text{wave}(X)$, которая возвращает множество коэффициентов разложения входного вектора X по элементам вейвлет-базиса Добеши. Число компонентов вектора X должно составлять 2^m , где m — целое число. Имеется также функция обратного вейвлет-преобразования $\text{iwave}(Y)$, которая восстанавливает вектор отсчетов сигнала по известным коэффициентам разложения.

Проведите численные эксперименты по вейвлет-анализу одноканального прямоугольного видеопульса и его обратному восстановлению. Сделайте выводы о влиянии числа вейвлет-коэффициентов, используемых при восстановлении сигнала.

Тема 3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ. ПРИНЦИПЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

● Обобщенная формула Рэлея.

Энергетические спектры

3.1(УР). Используя обобщенную формулу Рэлея, найдите скалярное произведение (u, v) экспоненциальных видеопульсов $u(t) = A_1 \exp(-\alpha_1 t) \sigma(t)$ и $v(t) = A_2 \exp(-\alpha_2 t) \sigma(t)$.

3.2(УО). В области физических частот $\omega > 0$ спектральные плотности $S_u(\omega)$ и $S_v(\omega)$, которые отвечают сигналам $u(t)$ и $v(t)$, представлены графически на рис. 1.3.1. Вычислите скалярное произведение (u, v) данных сигналов.

3.3(УО). Вычислите скалярное произведение (u, v) экспоненциального видеопульса $u(t) = A \exp(-\alpha t) \sigma(t)$ и такого же импульса $v(t) = A \exp[-\alpha(t - t_0)] \sigma(t - t_0)$, сдвинутого относительно сигнала $u(t)$ на t_0 (с) в сторону запаздывания.

3.4(О). Найдите взаимный энергетический спектр $W_{uv}(\omega)$ двух гауссовых видеопульсов $u(t) = A_1 \exp(-\beta_1 t^2)$ и $v(t) = A_2 \exp(-\beta_2 t^2)$, заданных при $-\infty < t < +\infty$.

3.5(О). Определите взаимный энергетический спектр $W_{uv}(\omega)$ гауссова видеопульса $u(t) = A_1 \exp(-\beta t^2)$ и экспоненциального видеопульса $v(t) = A_2 \exp(-\alpha t) \sigma(t)$.

3.6(УО). Найдите взаимный энергетический спектр $W_{uv}(\omega)$ прямоугольных видеопульсов $u(t)$ и $v(t)$ с амплитудами U_1 и U_2 соответственно, имеющих одинаковую длительность T .

3.7(О). Вычислите энергию E_u сигнала $u(t)$, энергетический спектр которого в области положительных частот задан графически на рис. 1.3.2.

3.8(УР). Прямоугольный видеопульс $u(t)$ имеет амплитуду U_0 и длительность τ_u . Выведите формулу для расчета энергии E_{ω_2} , заключенной в пределах интервала положительных частот от нуля по некоторой верхней граничной частоте ω_2 .

3.9(Р). Импульсное колебание задано формулой

$$s(t) = 15 \exp(-10^7 t) \sigma(t).$$

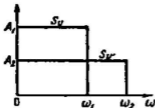


Рис. 1.3.1

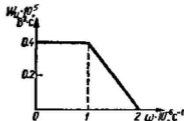


Рис. 1.3.2

Определите граничную частоту $f_{гр}$ (Гц) таким образом, чтобы в интервале частот $(0, f_{гр})$ было сосредоточено 90% всей энергии импульса.

3.10(УО). Определите, какая доля полной энергии прямоугольного видеопульса, имеющего длительность 5 мкс, содержится в пределах частотного интервала от нуля до 575 кГц.

3.11(УО). Сигнал $s(t)$ представляет собой прямоугольный видеопульс. Найдите относительную долю полной энергии этого сигнала, содержащуюся в пределах первых десяти лепестков спектра этого сигнала.

● Автокорреляционная функция

3.12(УР). Получите аналитическое выражение для автокорреляционной функции $B_s(\tau)$ двустороннего экспоненциального видеопульса $s(t) = A \exp(-\beta |t|)$, где A — постоянная величина, $\beta > 0$ — вещественное число.

3.13(Р). Вычислите автокорреляционную функцию $B_s(\tau)$ сигнала $s(t) = A \exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t \cdot \sigma(t)$, имеющего экспоненциально убывающую огибающую и гармоническое высокочастотное заполнение.

3.14(УО). Найдите функцию автокорреляции $B_s(\tau)$ экспоненциального видеопульса $s(t) = A \exp(-\alpha t) \sigma(t)$.

3.15(О). Сигнал $s(t)$ представляет собой треугольный видеопульс (рис. 1.3.3), заданный выражениями:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ \frac{U_0(\tau_n - t)}{\tau_n} & , 0 \leq t < \tau_n, \\ 0 & , t \geq \tau_n. \end{cases}$$

Получите формулу, описывающую автокорреляционную функцию $B_s(\tau)$ данного сигнала.

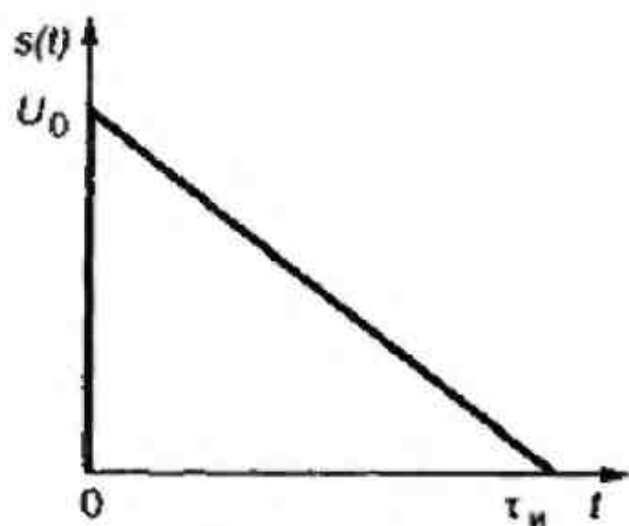


Рис. 1.3.3

3.16(Р). Найдите аналитическое выражение для автокорреляционной функции $B_s(\tau)$ радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & 0 < t < \tau_n, \\ 0 & , t > \tau_n \end{cases}$$

с огибающей прямоугольной формы.

3.17(УО). Основываясь на условиях задачи 3.12, определите интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ рассматриваемого сигнала, понимаемый как сдвиг во времени τ , при котором величина $B_s(\tau_{\text{кор}})$ становится равной $0.1B_s(0)$.

3.18(УО). Вычислите автокорреляционные функции $\hat{B}_s(n)$ следующих пятипозиционных дискретных сигналов: а) $s_1 = (1, 1, 1, -1, 1)$, б) $s_2 = (1, 1, -1, -1, 1)$.

● Функция взаимной корреляции

3.19(О). Сигналы $u(t)$ и $v(t)$ являются прямоугольными радиоимпульсами с амплитудами U_1 и U_2 соответственно; оба сигнала имеют одинаковую длительность T . Найдите функцию взаимной корреляции $B_{uv}(\tau)$ этих колебаний.

3.20(УО). Получите аналитическое выражение функции взаимной корреляции $B_{uv}(\tau)$ двух прямоугольных видеоимпульсов $u(t)$ и $v(t)$, имеющих одинаковую амплитуду U_0 и длительности T_1 и $T_2 > T_1$ соответственно.

3.21(УО). Сигнал $u(t)$ имеет постоянную вещественную спектральную плотность S_0 в пределах полосы частот $[-\omega_n, \omega_n]$. На остальных частотах спектральная плотность этого сигнала равна нулю. Сигнал $v(t)$ получен из сигнала $u(t)$ путем сдвига последнего во времени на t_0 (с) в сторону запаздывания. Найдите взаимную функцию корреляции $B_{uv}(\tau)$ этих сигналов.

3.22(УО). Вычислите значения функции взаимной корреляции $\hat{B}_{uv}(n)$ для трехпозиционных дискретных сигналов $u = (1, 1, -1)$ и $v = (-1, 1, 1)$.

МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

● Сигналы с амплитудной модуляцией

4.1(О). Однотональный АМ-сигнал описывается выражением $u(t) = 500(1 + 0.8 \cos(10^4 t + 45^\circ)) \cos(10^7 t + 90^\circ)$. Постройте в масштабе векторную диаграмму данного сигнала, отвечающую моменту времени $t=0$.

4.2(Р). Амплитудно-модулированный сигнал (В) описывается следующим выражением:

$$u(t) = 12(1 + 0.6 \cos \Omega t + 0.2 \cos 2\Omega t) \cos \omega_0 t.$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения огибающей $U(t)$ данного сигнала.

4.3(У). Покажите, что для однотонального АМ-сигнала $u(t) = U_0(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ коэффициенты модуляции «вверх» M_+ и «вниз» M_- совпадают: $M_+ = M_- = M$.

4.4(УО). Осциллограмма однотонального АМ-сигнала при $M < 1$ изображена на рис. 1.4.1. Получите формулу для расчета коэффициента модуляции M на основании измерения экстремальных значений амплитуд U_{\max} и U_{\min} .

4.5(УО). На рис. 1.4.2 изображена осциллограмма однотонального АМ-сигнала $u(t)$ при $M > 1$, когда имеет место явление перемодуляции. Определите коэффициент модуляции M на основании известных значений амплуд U_{\max} и U_{\min} .

4.6(О). Однотональный АМ-сигнал характеризуется тем, что $U_{\max} = 130$ В, $U_{\min} = 20$ В (см. рис. 1.4.1). Найдите коэффициент модуляции M , а также амплитуду U_0 несущего колебания.

4.7(УО). Оцените ширину полосы частот Π , занимаемую в эфире телеграфным радиоканалом, работающим по принципу АМ со скоростью передачи 300 знаков/мин. Для упрощения

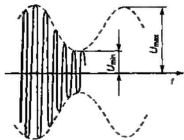


Рис. 1.4.1

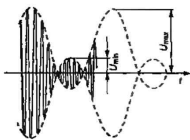


Рис. 1.4.2



Рис. 1.4.3

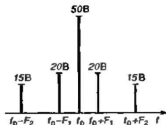


Рис. 1.4.4

расчета положите, что передаваемый сигнал является периодической последовательностью точек кода Морзе. Длительность паузы равна длительности передаваемого радиоимпульса (рис. 1.4.3).

4.8(О). Спектральная диаграмма АМ-сигнала, имеющего две низкие частоты модуляции F_1 и F_2 , изображена на рис. 1.4.4. Определите парциальные коэффициенты модуляции M_1 и M_2 .

4.9(Р). Источник ЭДС с амплитудной модуляцией $u(t) = U_0(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ замкнут на резистивную нагрузку с сопротивлением R . Получите выражения для составляющих мгновенной мощности в нагрузке $p_0(t)$ и $p_{2\Omega}(t)$, которые изменяются во времени с частотами Ω и 2Ω соответственно.

4.10(УО). Источник АМ-сигнала создает на резистивной нагрузке $R_x = 2 \text{ кОм}$ напряжение (В)

$$u(t) = 75(1 + 0.4 \cos 10^3 t) \cos 10^6 t.$$

Вычислите минимальное P_{\min} и максимальное P_{\max} значения активной мощности источника, усредненной за период несущего колебания.

4.11(О). Радиопередающее устройство с амплитудной модуляцией в режиме «молчания», т. е. при отсутствии модулирующего сигнала, излучает мощность $P_0 = 4 \text{ кВт}$. Найдите пиковое значение излучаемой мощности P_{\max} однотонового АМ-сигнала, если $M = 0.8$.

● Сигналы с угловой модуляцией

4.12(Р). Колебание с угловой модуляцией описывается выражением

$$u(t) = 15 \cos(10^6 t + 3 \sin 10^6 t + 1.4 \sin 10^5 t + \pi/4).$$

Найдите величину мгновенной частоты $\omega(t)$ данного сигнала в момент времени $t = 1 \text{ мкс}$.

4.13(О). Найдите максимальное ω_{\max} и минимальное ω_{\min} значения мгновенной частоты $\omega(t)$ ЧМ-сигнала, представляемого выражением

$$u(t) = U_0(3 \cdot 10^9 t + 2 \sin 10^7 t + \pi/6).$$

4.14(О). Одиотональный ЧМ-сигнал имеет несущую частоту $f_0 = 50$ МГц и частоту модуляции $F = 7$ кГц. Вычислите, в каких пределах $[f_{\min}, f_{\max}]$ должна изменяться мгновенная частота этого колебания для того, чтобы индекс модуляции m был равен 40.

4.15(УО). Получите спектральное представление сигнала с угловой модуляцией

$$u(t) = 8 \cos(10^6 t + 0.06 \sin 10^4 t).$$

4.16(О). Однотональный ЧМ-сигнал имеет частоту модуляции $F = 12$ кГц и индекс модуляции $m = 25$. Вычислите практическую ширину спектра $\Pi_{\text{практ}}$ данного колебания.

4.17(УО). Радиосигнал с фазовой модуляцией имеет индекс $m = 16$. Оцените величину N — число боковых колебаний, присутствующих в пределах полосы частот, центр которой совпадает с несущей частотой, а ширина соответствует практической ширине спектра сигнала $\Pi_{\text{практ}}$.

4.18(УР). Однотональный ЧМ-сигнал имеет девиацию частоты $\Delta\omega = 6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Найдите наибольшее из возможных значений частот модуляции Ω_{\max} , при котором в спектре сигнала будет отсутствовать составляющая с несущей частотой.

4.19(УО). Вычислите, при каком наибольшем значении модулирующей частоты F_{\max} в спектре одитонального ЧМ-сигнала, имеющего девиацию частоты $\Delta f = 40$ кГц, будут отсутствовать компоненты на частотах $f_0 \pm F_{\max}$, где f_0 — частота несущего колебания.

4.20(УР). Для сигнала, рассмотренного в задаче 4.15, найдите приближенные значения амплитуд U_{m2} и U_{m3} спектральных составляющих с частотами $\omega_0 \pm 2\Omega$ и $\omega_0 \pm 3\Omega$ соответственно.

4.21(УО). В радиопередающем устройстве, излучающем одитональные ЧМ-сигналы, мгновенная частота колебаний изменяется за счет того, что емкость конденсатора LC- контура в задающем генераторе переменна во времени

$$C(t) = C_0 + C_m \cos \Omega t.$$

Частота немодулированной несущей $f_0 = 28$ МГц, емкость конденсатора при отсутствии модуляции $C_0 = 30$ пФ. Частота модуляции $F = \Omega/(2\pi) = 2$ кГц; индекс модуляции $m = 0.4$. Вычислите амплитуду изменения емкости C_m , обеспечивающую заданные параметры сигнала.

● Сигналы с линейной частотной модуляцией

4.22(О). Прямоугольный ЛЧМ-импульс длительностью $\tau_n = 40$ мкс имеет значение базы $B = 500$. Определите девиацию частоты Δf в данном импульсе.

4.23(О). ЛЧМ-импульс с огибающей прямоугольной формы имеет длительность $\tau_n = 15$ мкс. Девиация частоты за время импульса $\Delta f = 25$ МГц. Определите базу B данного сигнала и скорость нарастания частоты μ .

4.24(О). Вычислите величину энергетического спектра W_n прямоугольного ЛЧМ-импульса, имеющего девиацию частоты $\Delta\omega = 10^9$ с⁻¹, базу $B = 5 \cdot 10^3$ и амплитуду $U_0 = 50$ мкВ.

4.25(Р). Вычислите приближенное значение энергии E_n прямоугольного ЛЧМ-импульса $u(t)$ длительностью τ_n с заданной амплитудой U_0 и известной скоростью нарастания частоты μ . Задачу решите двумя способами: а) непосредственным интегрированием во временной области, б) используя понятие энергетического спектра сигнала W_n . Положите, что база сигнала $B \gg 1$.

4.26(О). Выведите формулу, определяющую связь величины квадратичного слагаемого Φ_1 фазового спектра прямоугольного ЛЧМ-импульса на границе полосы частот сигнала со значением базы B .

4.27(О). Найдите формулу, определяющую ширину основного лепестка $\tau_{\text{осн}}$ автокорреляционной функции ЛЧМ-импульса с заданными параметрами τ_n и B . Вычислите величину $\tau_{\text{осн}}$ для импульса, имеющего базу $B = 2 \cdot 10^3$ и длительность $\tau_n = 8$ мкс.

4.20(УР). Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ ЛЧМ-импульса

$$s(t) = U_0 e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right),$$

заданного в бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$ и имеющего гауссову форму огибающей (рис. 1.4.5).

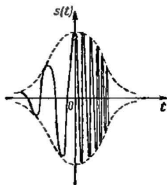


Рис. 1.4.5

● Сигналы для стереофонии

4.29(О). В системе стереофонического радиовещания сигналы левого $l(t)$ и правого $r(t)$ каналов занимают область частот, ограниченную сверху значением 10 кГц. Вычислите минимально возможное значение поднесущей частоты $f_{\text{осн}}$, позволяющее избе-

жать наложения каналов друг на друга. Считайте, что наивысшее значение частоты колебаний, воспринимаемых человеческим слухом, составляет 18 кГц.

4.30(О). В левом канале стереофонической системы передается низкочастотный гармонический сигнал с частотой 3 кГц, а в правом канале — такой же сигнал с частотой 5 кГц. Известно, что частота поднесущего колебания равна 38 кГц. Найдите значения частот всех спектральных составляющих, входящих в состав сигнала с полярной модуляцией.

Тема 5

СИГНАЛЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

● Сигналы с ограниченным спектром низкочастотного типа.

Ряд Котельникова

5.1(Р). Сигнал $s(t)$ с ограниченным спектром имеет спектральную плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_n, \\ S_0 \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_n}\right), & -\omega_n \leq \omega \leq \omega_n, \\ 0, & \omega > \omega_n. \end{cases}$$

Получите представление данного сигнала в виде суммы двух идеальных низкочастотных сигналов, спектральные плотности которых постоянны в пределах частотного интервала $[-\omega_n, \omega_n]$.

5.2(О). Сигнал звукового сопровождения в телевизионном канале ограничен верхней частотой $f_n = 12$ кГц. Определите интервал t_0 между отсчетами этого сигнала, необходимый для неискаженного воспроизведения сигнала при передаче его дискретным способом.

5.3(Р). Сигнал $u(t)$, дискретизованный в соответствии с условиями теоремы Котельникова, имеет два ненулевых отсчета, изображенных на рис. 1.5.1. Вычислите мгновенные значения исходного аналогового сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

5.4(УО). Ряд Котельникова сигнала $s(t)$ содержит три ненулевых слагаемых (рис. 1.5.2). Все отсчеты измерены в вольтвх. Вычислите энергию E_s данного сигнала.

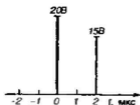


Рис. 1.5.1

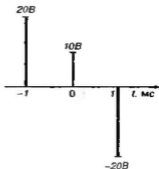


Рис. 1.5.2

5.5(УР). Гауссов видеопулс $s(t) = U_0 \exp(-\beta t^2)$, заданный при $-\infty < \omega < +\infty$, приближенно заменяется сигналом с ограниченным спектром $s_{oc}(t)$, спектральная плотность которого в интервале частот $0 < \omega < \omega_0$ совпадает со спектральной плотностью сигнала $s(t)$, а при $\omega > \omega_0$ обращается в нуль. Найдите норму $\|s_{oc}\|$ сигнала ошибки подобной аппроксимации.

● **Сигналы полосового типа. Комплексная огибающая**

5.6(У). Пусть $s_1(t), s_2(t), \dots$ — сигналы, которым при выборе в качестве опорной частоты некоторого конкретного значения ω_0 соответствуют комплексные огибающие $\tilde{U}_1(t), \tilde{U}_2(t), \dots$. Докажите, что сумма произвольного числа таких сигналов имеет комплексную огибающую, равную сумме комплексных огибающих отдельных слагаемых.

5.7(О). Получите выражения для комплексных огибающих следующих сигналов:

$$a) s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t & , t < 0, \\ U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & , t \geq 0, \end{cases}$$

$$b) s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t & , t < 0, \\ U_0 \cos(\omega_0 + \Omega_0)t & , t \geq 0. \end{cases}$$

В обоих случаях положите, что значение опорной частоты равно ω_0 .

5.8(О). Узкополосный сигнал $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = 10 \cos \Omega t \cos \omega_0 t + [30 \sin \Omega t + 5 \sin(2\Omega t + \pi/4)] \sin \omega_0 t.$$

Найдите выражение для комплексной огибающей $\tilde{U}_r(t)$ данного колебания.

5.9(УО). Найдите комплексную огибающую $\tilde{U}_r(t)$, а также синфазную амплитуду $A_r(t)$ и квадратурную амплитуду $B_r(t)$ для однотонового АМ-сигнала

$$s(t) = U_m(1 + M \cos \Omega t) \cos(\omega t + \pi/4).$$

5.10(УО). Сигнал $s(t)$ с однотоновой угловой модуляцией описывается зависимостью

$$s(t) = U_m \cos(\omega t + m \sin \Omega t).$$

Положив, что опорная частота сигнала равна несущей частоте ω , получите выражение для комплексной огибающей $\tilde{U}_r(t)$, синфазной $A_r(t)$ и квадратурной $B_r(t)$ амплитуд сигнала. Докажите, что частота сигнала $\omega_s(t) = \omega + m \Omega \cos \Omega t$.

5.11(Р). Найдите комплексную огибающую гармонического сигнала $s(t) = U_0 \sin \omega_0 t$, $-\infty < t < +\infty$, выбрав в качестве опорной частоты величину ω_0 . Получите выражения для спектральной плотности $G_s(\omega)$ комплексной огибающей, а также для спектральной плотности $S(\omega)$ колебания $s(t)$.

5.12(УО). Вычислите спектральную плотность $S(\omega)$ узкополосного сигнала

$$s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & t \geq 0. \end{cases}$$

Отдельно рассмотрите частный случай $\varphi_0 = 180^\circ$.

5.13(УО). Найдите физическую огибающую $U_r(t)$, полную фазу $\psi_s(t)$ и мгновенную частоту $\omega_s(t)$ однотонового ОБП-сигнала с подавленной нижней боковой полосой:

$$s(t) = U_0 \cos \omega_0 t + (MU_0/2) \cos(\omega_0 + \Omega)t,$$

где $M < 1$ — коэффициент амплитудной модуляции.

5.14(О). Вычислите минимальное ω_{\min} и максимальное ω_{\max} значения мгновенной частоты простейшего сигнала с одной боковой полосой (см. задачу 5.13) при следующих числовых параметрах: $\omega_0 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$, $M = 1$.

5.15(УО). Найдите физическую огибающую $U_r(t)$, соответствующую идеальному низкочастотному сигналу $s(t)$, спектральная плотность которого постоянна и равна S_0 в интервале частот $-\omega_n < \omega < \omega_n$, а на других частотах обращается в нуль.

5.16(О). Найдите комплексную огибающую $\tilde{U}_s(t)$ экспоненциального радиопульса $s(t) = U_0 \exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t \cdot \sigma(t)$. Получите выражения спектральной плотности $G_s(\omega)$ комплексной огибающей и спектральной плотности $S(\omega)$ сигнала $s(t)$.

5.17(О). Идеальный прямоугольный радиопульс длительностью τ_n описывается выражением

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_n/2, \\ U_0 \cos \omega_0 t, & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t > \tau_n/2. \end{cases}$$

Получите выражение комплексной огибающей $\tilde{U}_s(t)$ данного сигнала, полагая, что опорная частота равна ω_0 . Найдите спектральную плотность $S(\omega)$ сигнала $s(t)$.

● Аналитический сигнал. Преобразования Гильберта

5.18(Р). Спектральная плотность сигнала $s(t)$ задана выражениями

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_n, \\ S_0 \exp(-\alpha |\omega|), & -\omega_n \leq \omega \leq \omega_n, \\ 0, & \omega > \omega_n, \end{cases}$$

где S_0, α, ω_n — положительные числа. Найдите соответствующий аналитический сигнал $z_s(t)$.

5.19(УО). Сигнал $s(t)$ имеет вещественную спектральную плотность $S(\omega)$, график которой при $\omega > 0$ изображен на рис. 1.5.3. Вычислите аналитический сигнал $z_s(t)$ и определите закон изменения во времени мгновенной частоты $\omega_s(t)$ рассматриваемого сигнала.

5.20(О). Сигнал $s(t)$ при $\omega > 0$ имеет спектральную плотность $S(\omega) = S_0 e^{-b\omega}$. Найдите соответствующий аналитический сигнал $z_s(t)$.

5.21(У). Докажите, что если $s(t)$ — сигнал с ограниченной энергией, то он ортогонален по отношению к сигналу, сопряженному по Гильберту, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \hat{s}(t) dt = 0.$$

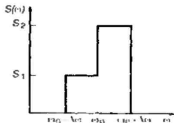


Рис. 1.5.3

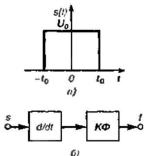


Рис. 1.5.4

5.22(У). Докажите, что двукратное применение преобразования Гильберта к сигналу $s(t)$ равносильно перемене знака сигнала, т. е. $\hat{\hat{s}}(t) = -s(t)$.

5.23(О). Вычислите преобразование Гильберта $\hat{s}(t)$ сигнала $s(t) = \delta(t)$, используя фильтрующее свойство δ -функции.

5.24(УР). Прямоугольный видеосигнал $s(t)$, симметричный относительно начала отсчета времени (рис. 1.5.4, а), поступает на вход системы, состоящей из идеального дифференциатора и квадратурного фильтра КФ, выполняющего операцию преобразования Гильберта (рис. 1.5.4, б). Определите сигнал $f(t)$ на выходе системы.

5.25(УО). Мгновенные значения сигнала $s(t)$ изменяются во времени в соответствии с формулой $s(t) = \alpha / (\alpha^2 + t^2)$. Вычислите преобразование Гильберта $\hat{s}(t)$ данного колебания.

5.26(У). Докажите, что мгновенная частота $\omega_s(t)$ узкополосного сигнала $s(t)$, которому соответствует преобразование Гильберта $\hat{s}(t)$, вычисляется по формуле

$$\omega_s(t) = \frac{\hat{s}s - s\hat{s}}{s^2 + \hat{s}^2}.$$

5.27(УО). Вычислите преобразование Гильберта $\hat{s}(t)$, отвечающее прямоугольному видеосигналу

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < -t_0, \\ U_0, & -t_0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

● Случайные события и их вероятности

6.1(УР). Два лица, А и В, по очереди бросают игральную кость. Игру начинает А. Выигрывает тот, кто первым выбросит шесть очков. Найдите вероятность P_A того, что выиграет лицо А.

6.2(УО). Некоторый цифровой сигнал представлен кодовыми комбинациями — шестизначными двоичными числами, которые образованы случайными комбинациями нулей и единиц. Вероятность появления символа «1» в каждом разряде составляет величину $P_1=0.6$, а вероятность символа «0» составляет величину $P_0=0.4$. Найдите вероятность P возникновения конкретной кодовой комбинации 101101, считая появления того или иного символа в каждом разряде независимыми случайными событиями.

6.3(УО). В четырехразрядном цифровом сигнале (см. условия задачи 6.2) появление нуля или единицы в первом разряде равновероятно; в следующих разрядах перемена символа по сравнению с предыдущим значением имеет вероятность 0.8, а сохранение символа имеет вероятность 0.2. Найдите вероятность P того, что будет реализована кодовая комбинация 0110.

6.4(УО). Изучение большой партии радиоэлектронных изделий показало, что из 10000 изделий в течение 4 лет исправно работают 8200 экземпляров, а по прошествии 7 лет число исправно работающих изделий составляет 3800. Определите вероятность того, что случайно взятое изделие из числа проработавших 4 года окажется также работоспособным через 7 лет.

6.5(УО). Некоторая система, предназначенная для передачи сигналов из точки a в точку b , изображена на рис. 1.6.1. Система содержит элементы 1 и 2, резервирующие друг друга. Нормальное функционирование обеспечивается, если исправен хотя бы один из этих элементов.

Известно, что в течение некоторого промежутка времени элемент 1 исправен с вероятностью $P_1=0.8$, а элемент 2 — с вероятностью $P_2=0.7$. Найдите вероятность P исправной работы резервированной системы за тот же промежуток времени.

6.6(УО). На входы сумматора (рис. 1.6.2) поступают четыре независимых постоянных во времени случайных напряжения u_1 , u_2 , u_3 и u_4 . Каждое из этих напряжений с равной вероятностью принимает либо значение 0.5 В («низкий» уровень потенциала),

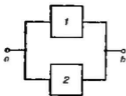


Рис. 1.6.1

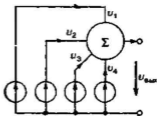


Рис. 1.6.2

либо 4.5 В («высокий» уровень потенциала). Определите всю совокупность напряжений $u_{\text{вых}}$ на выходе сумматора вместе с вероятностями их появления.

● **Функция распределения и плотность вероятности. Моменты**

6.7(О). Постройте график функции распределения $F(u_{\text{вых}})$ для случайной величины $u_{\text{вых}}$, рассмотренной в задаче 6.6. Выведите аналитическое выражение плотности вероятности $p(u_{\text{вых}})$.

6.8(Р). Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2/(1+x)^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ данной случайной величины, а также вероятность $P(0 \leq X \leq 1)$ попадания случайной точки внутрь отрезка $[0, 1]$.

6.9(УО). Случайная величина X может принимать лишь два значения: $x=1$ с вероятностью 0.25 и $x=1.5$ с вероятностью 0.75. Аналогично, случайная величина Y , независимая от X , может принимать лишь два значения: $y=3$ и $y=5$ с одинаковыми вероятностями 0.5. Найдите плотность вероятности случайной величины $Z=X+Y$.

6.10(О). Непрерывная случайная величина X имеет график плотности вероятности $p(x)$ треугольного вида (рис. 1.6.3). Параметр a — заданное число, величина A заранее неизвестна. Получите формулу, описывающую функцию $p(x)$.

6.11(Р). Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m=0$, $\sigma=2$. Найдите вероятность попадания этой случайной величины в полуотрезок $0 < x \leq 2$.

6.12(О). Вычислите вероятность того, что случайная величина X , рассмотренная в задаче 6.10, попадает в полуотрезок $0 < x \leq a/2$.

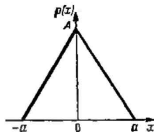


Рис. 1.6.3

6.13(Р). Найдите плотность вероятности случайной величины R — сопротивления параллельного соединения двух резисторов, один из которых имеет фиксированное сопротивление R_0 , в то время как сопротивление другого резистора r — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[R_0 - a, R_0 + a]$, где $a < R_0$ — постоянное число.

6.14(Р). Независимые случайные величины X и Y имеют заданные плотности вероятности $p_1(x)$ и $p_2(y)$ соответственно. Найдите плотность вероятности $p_3(z)$ случайной величины $Z = X + Y$.

6.15(УО). Пусть X и Y — две независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Найдите аналитическое выражение функции $p(z)$ — плотности вероятности суммы $Z = X + Y$ этих двух величин.

6.16(О). Вычислите плотность вероятности $p_z(z)$ случайной величины Z , каждая реализация которой представляет собой сумму реализаций независимых случайных величин X и Y с одинаковыми плотностями вероятности экспоненциального вида.

$$p_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \sigma(x), \quad p_y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \sigma(y).$$

6.17(У). Докажите, что случайная величина X , имеющая распределение Коши с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

характеризуется бесконечно большой дисперсией.

6.18(О). Вычислите математическое ожидание m_{\max} и дисперсию σ_{\max}^2 случайного напряжения на выходе сумматора, рассмотренного в задаче 6.6.

6.19(Р). Вычислите среднее значение \bar{x} и средний квадрат \bar{x}^2 случайной величины X , рассмотренной в задаче 6.8.

6.20(О). Случайная величина U принимает значения 0.5, 0.8 и 1.3 с вероятностью 0.35, 0.45 и 0.2 соответственно. Вычислите величины m_u и σ_u^2 .

6.21(Р). Непрерывная случайная величина X равномерно распределена на полуотрезке $a < x \leq b$. Вычислите среднее значение $m_1 = \bar{x}$, средний квадрат $m_2 = \bar{x}^2$ и дисперсию $\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2$ данной случайной величины.

6.22(УО). Случайная величина X имеет одностороннюю экспоненциальную плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найдите среднее значение \bar{x} и дисперсию σ_x^2 этой случайной величины.

6.23(У). Докажите, что если X и Y — независимые гауссовы случайные величины с математическими ожиданиями m_x и m_y и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно, то случайная величина $Z = aX + bY$, где a и b — константы, также обладает свойством нормальности, имея математическое ожидание $m_z = am_x + bm_y$, и дисперсию $\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$.

6.24(Р). Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z , каждая реализация которой равна произведению длин отрезков, разделенных случайной точкой x .

● **Функциональные преобразования случайных величин. Многомерные случайные величины**

6.25(Р). Найдите плотность вероятности случайной величины Z , рассмотренной в задаче 6.24.

6.26(О). Исходная случайная величина X имеет плотность вероятности экспоненциального вида

$$p_{\text{исх}}(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

с фиксированным значением параметра $\lambda > 0$. Случайная величина Y получается из X путем функционального преобразования, график которого изображен на рис. 1.6.4. Определите плотность вероятности $p_{\text{сп}}(y)$ преобразованной случайной величины.

6.27(УО). Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, \pi/2]$. Найдите среднее значение и дисперсию случайной величины Y , реализация которой связаны с реализациями случайной величины X следующим образом: $y = 5 \cos x + 12 \cos 2x$.

6.28(О). Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$. Получите выражение, описывающее плотность вероятности $p(y)$ случайной величины $Y = X^2$. Найдите математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 .

6.29(Р). Три независимые случайные величины X , Y и Z имеют одинаковые нормальные плотности вероятности

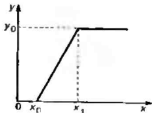


Рис. 1.6.4

$p(\xi) = \exp(-\xi^2/(2\sigma^2))/(\sqrt{2\pi}\sigma)$, где ξ — символ, соответствующий x , y и z . Пусть (x, y, z) — три декартовы координаты точки в трехмерном пространстве, связанные со сферическими координатами (r, ϑ, φ) известными соотношениями:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Найдите одномерную плотность вероятности $p(r)$ случайной величины R , представляющей собой длину радиуса-вектора в сферической системе координат.

● Характеристическая функция случайной величины

6.30(О). Найдите характеристическую функцию случайной величины X , имеющей плотность вероятности $p_x(x) = \lambda \exp \times (-\lambda x) \sigma(x)$.

6.31(О). Вычислите характеристическую функцию $\Theta(u)$ случайной величины X , равномерно распределенной на отрезке $a \leq x \leq b$.

6.32(Р). Используя результат, полученный в задаче 6.31, найдите среднее значение \bar{x} рассмотренной здесь случайной величины.

6.33(Р). Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $-1/2 \leq x \leq 1/2$. Вычислите плотность вероятности случайной величины Y , каждая реализация которой равна сумме трех независимых реализаций случайной величины X .

6.34(О). Определите вероятность того, что модуль случайной величины Y , рассмотренной в задаче 6.33, принимает значения, превышающие единицу.

6.35(УР). Случайная величина X имеет гауссову плотность вероятности с известным математическим ожиданием m_x и заданной дисперсией σ_x^2 . Вычислите среднее значение случайной величины Y , отдельные реализации которой связаны с реализациями случайной величины X соотношением $y = \exp(x)$.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

● Функция корреляции и спектр мощности

7.1(УР). Случайный процесс $X(t)$ задан ансамблем своих реализаций вида $x(t) = a \cos \omega_0 t$, где ω_0 — фиксированная величина, a — случайная величина с нулевым математическим ожиданием \bar{a} и конечной дисперсией $\sigma_a^2 = \bar{a}^2$. Докажите, что процесс $X(t)$ не является стационарным в широком смысле.

7.2(О). Случайный процесс $X(t)$ имеет ансамбль постоянных во времени реализаций, который описывается нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и некоторой известной дисперсией a^2 . Найдите среднее значение \bar{x} и функцию автокорреляции $K_x(\tau)$ данного случайного процесса.

7.3(У). Докажите, что случайный процесс, рассмотренный в задаче 7.2, неэргодичен.

7.4(У). Реализации случайного процесса $X(t)$ представляют собой гармонические колебания вида $x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ с фиксированной частотой ω_0 ; амплитуды a и b являются случайными величинами.

Докажите, что процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле тогда и только тогда, если: 1) $\bar{a} = \bar{b} = 0$; 2) $\sigma_a^2 = \sigma_b^2$; 3) $\overline{ab} = 0$.

7.5(УО). Найдите функцию корреляции $R_x(\tau)$ случайного процесса $X(t)$, рассмотренного в задаче 7.4, предполагая, что выполнены все условия, обеспечивающие его стационарность в широком смысле.

7.6(У). Докажите, что случайный процесс $X(t)$, рассмотренный в задаче 7.5, является эргодическим.

7.7(Р). Пусть $X(t)$ — стационарный дельта-коррелированный случайный процесс (белый шум), имеющий нулевое математическое ожидание и функцию корреляции $R_x(\tau) = W_0 \delta(\tau)$, где W_0 — постоянный на всех частотах спектр мощности данного процесса. Случайный процесс $Y(t)$, реализации которого $y(t)$ связаны с реализациями $x(t)$ интегральным соотношением

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi,$$

принято называть случайным процессом Винера.

Выведите формулу для функции корреляции этого случайного процесса. Докажите, что процесс Винера нестациона-

рен. Получите закон изменения дисперсии этого процесса во времени.

7.8(УО). Найдите спектр мощности $W_x(\omega)$ случайного процесса $X(t)$, рассмотренного в задаче 7.5.

7.9(О). Стационарный случайный процесс $X(t)$ с размерностью напряжения (В) на некоторой фиксированной частоте ω_0 имеет значение спектра мощности $W_x(\omega_0)$, равное $1.7 \cdot 10^{-15} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$. Вычислите величины односторонних спектров мощности $F_x(\omega_0)$ и $F_x(f_0)$.

7.10(О). Найдите спектр мощности $W_x(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, имеющего нулевое математическое ожидание и функцию корреляции $R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cdot \cos \omega_0 \tau$.

7.11(О). Получите выражение для функции корреляции $R_x(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ со спектром мощности $W_x(\omega)$ полосового вида (рис. 1.7.1):

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0, & -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ W_0, & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

7.12(Р). Найдите функцию корреляции $R_x(\tau)$ случайного процесса $X(t)$ вида «случайного телеграфного сигнала». Его реализации $x(t)$ (рис. 1.7.2) являются разрывными функциями, принимающими с равными вероятностями лишь два значения: $+a$ и $-a$. В случайные моменты времени знак реализации изменяется скачком. Вероятность события, состоящего в том, что за время T произойдет n перемен знака, описывается формулой закона Пуассона

$$P_T(n) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp(-\lambda T),$$

где $\lambda > 0$ — параметр с размерностью частоты, определяющий среднюю скорость протекания процесса.



Рис. 1.7.1

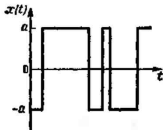


Рис. 1.7.2

7.13(О). Определите значение одностороннего спектра мощности $F_x(\omega)$ случайного телеграфного сигнала $X(t)$, рассмотренного в задаче 7.12, на частоте $\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ при следующих параметрах: $a = 15 \text{ В}$; $\lambda = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$.

7.14(О). Найдите интервал корреляции τ_x стационарного случайного процесса $X(t)$ с односторонним спектром мощности

$$F_x(\omega) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega > \omega_s, \end{cases}$$

где ω_s — значение верхней граничной частоты спектра.

7.15(УО). Найдите интервал корреляции τ_x случайного телеграфного сигнала $X(t)$ (см. задачу 7.12) для значения $\lambda = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Оцените значение ω_s , ограничивающее область частот $0 \leq \omega \leq \omega_s$, в пределах которой данный случайный процесс может приближенно рассматриваться как белый шум.

● Дифференциальные свойства случайных процессов

7.16(Р). Стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет спектр мощности низкочастотного вида:

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0, & -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega < -\omega_s, \omega > \omega_s. \end{cases}$$

Найдите спектр мощности производной $Y(t) = dX/dt$. Вычислите функцию корреляции производной $R_y(\tau)$.

7.17(УО). Определите эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ случайного процесса $Y(t)$, рассмотренного в задаче 7.16.

7.18(УР). Гауссов стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет односторонний спектр мощности, описанный в условиях задачи 7.14. Получите формулу для расчета квазичастоты $n(0)$ данного случайного процесса.

7.19(УО). График частотной зависимости спектра мощности стационарного гауссова процесса $X(t)$ изображен на рис. 1.7.3. Вычислите квазичастоту данного процесса.

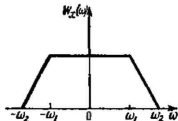


Рис. 1.7.3

● Узкополосные случайные процессы

7.20(Р). Узкополосный нормальный случайный процесс $X(t)$ характеризуется дисперсией $\sigma_x^2 = 10 \text{ В}^2$. Найдите вероятность того, что в некоторый фиксированный момент времени огибающая этого процесса превосходит уровень 4 В .

7.21(О). Узкополосный нормальный случайный процесс, имеющий дисперсию $\sigma_x^2 = 2.5 \text{ В}^2$, приложен ко входу идеального детектора огибающей. Вычислите дисперсию и среднее значение напряжения на выходе детектора.

7.22(Р). Отдельные реализации огибающей $U(t)$ нормального узкополосного случайного процесса $X(t)$ наблюдаются в течение отрезка времени длительностью 1 с . Определите средние длительности суммарных промежутков времени, когда $4.9 \text{ В} < U \leq 5.1 \text{ В}$ при дисперсиях узкополосного процесса, равных 1 В^2 , 12 В^2 и 96 В^2 соответственно.

7.23(О). Узкополосный случайный процесс $X(t)$, нормальный и стационарный в широком смысле, имеет функцию корреляции (В^2)

$$R_x(\tau) = 3.5 \exp(-10^4 |\tau|) \cos 10^7 t.$$

Найдите функцию корреляции $R_U(\tau)$ огибающей $U(t)$ данного процесса.

7.24(О). Применительно к условиям задачи 7.24 найдите спектр мощности $W_U(\omega)$ ($\text{В}^2 \cdot \text{с}$) огибающей $U(t)$ рассматриваемого случайного процесса.

7.25(Р). На основании результата, полученного в задаче 7.24, определите эффективную ширину спектра огибающей с учетом одного и двух членов в разложении функции корреляции.

7.26(У). Докажите, что средний квадрат огибающей $U(t)$ узкополосного нормального случайного процесса $X(t)$ вычисляется по формуле $\bar{U}^2 = 2\sigma_x^2$, где σ_x^2 — дисперсия процесса $X(t)$.

7.27(У). Рассматривается сумма гармонического сигнала $u(t) = U_m \cos \omega_0 t$ и узкополосного нормального шума $X(t)$, спектральная плотность мощности которого симметрична относительно центральной частоты ω_0 . Дисперсия σ_x^2 случайного процесса $X(t)$ задана. Докажите, что средний квадрат огибающей суммы этих двух колебаний вычисляется по формуле $\bar{U}^2 = U_m^2 + 2\sigma_x^2$.

7.28(Р). Используя средства математической системы MathCAD, составьте программу, позволяющую строить графики распределения Райса в соответствии с формулой (7.78) из [1] при произвольных отношениях U_m/σ_x .

ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ

● Дифференциальные уравнения линейных цепей. Собственные колебания

8.1(УР). Исследуйте собственные колебания цепи, схема которой приведена на рис. 1.8.1 вместе со стрелками, указывающими положительные направления токов в ветвях, и знаками положительных напряжений на конденсаторах. Начальные напряжения $u_1(0)$ и $u_2(0)$ на конденсаторах C_1 и C_2 в момент времени $t=0$ считаются заданными.

8.2(УО). В соответствии с постановкой задачи 8.1, полагая $C_1=C_2=0.1$ мкФ, $R_1=1.6$ кОм, $R_2=2.4$ кОм, $R_3=6.8$ кОм, вычислите корни характеристического уравнения цепи. Найдите функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ при начальных условиях $u_1(0)=8$ В, $u_2(0)=0$. Определите момент времени t_0 , начиная с которого прекращается зарядка конденсатора C_2 .

8.3(Р). Выведите характеристическое уравнение, описывающее частоты собственных колебаний цепи, схема которой представлена на рис. 1.8.2. Найдите частоты собственных колебаний в следующих частных случаях: а) $M=0$; б) $R=\infty$; в) $R=0$.

8.4(УО). Для RL -цепи, схема которой приведена на рис. 1.8.3, запишите систему дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания. Составьте характеристическое уравнение данной системы и найдите его корни, положив $R_1=R_2=3.9$ кОм, $R_3=1.6$ кОм, $L_1=15$ мкГн, $L_2=35$ мкГн.

8.5(Р). Найдите частоты собственных колебаний в системе двух связанных колебательных контуров без потерь (рис. 1.8.4) для частного случая $L_1=L_2=L$, $C_1=C_2=C$.

8.6(О). Колебательный контур имеет добротность Q . Найдите число полных периодов N собственных колебаний, которые со-

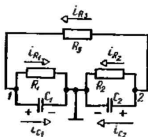


Рис. 1.8.1

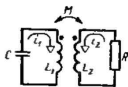


Рис. 1.8.2

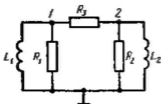


Рис. 1.8.3

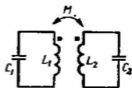


Рис. 1.8.4

вершаются за отрезок времени от $t=0$ до того момента времени, когда амплитуда колебаний уменьшается в 10 раз по сравнению с начальным уровнем.

● Передаточная функция и частотный коэффициент передачи цепи

8.7(О). В сложной RC -цепи (рис. 1.8.5) входным сигналом служит напряжение $u(t)$, а выходным сигналом — ток $i_C(t)$. Найдите передаточную функцию $K(p)$ данной системы.

8.8(О). Вычислите передаточную функцию $K(p)$ цепи, схема которой приведена на рис. 1.8.6. Входным сигналом служит ток $i(t)$, а выходным — напряжение $u(t)$.

8.9(О). Найдите передаточную функцию $K(p)$ цепи (рис. 1.8.7), равную отношению изображений токов $i_{\text{max}}(t)$ и $i_{\text{ax}}(t)$.

8.10(Р). Линейная цепь, схема которой изображена на рис. 1.8.8, возбуждается со стороны входа идеальным источником тока $i_{\text{ax}}(t)$. Выходным сигналом служит напряжение $u_{\text{max}}(t)$. Получите выражения передаточной функции $K(p) = U_{\text{max}}(p)/I_{\text{ax}}(p)$ и частотного коэффициента передачи $K(j\omega)$. Выведите формулы, описывающие амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазочастотную характеристику (ФЧХ) данной цепи.

8.11(О). Схема двухзвенного RC -фильтра приведена на рис. 1.8.9. Входным сигналом служит напряжение источника ЭДС $e(t)$, выходным сигналом является напряжение $u_{\text{max}}(t)$. Полагая известными значения R и C , выведите формулы для расчета передаточной функции $K(p)$ и частотного коэффициента передачи $K(j\omega)$ данной цепи. Получите выражения, описывающие АЧХ и ФЧХ. Определите частоту ω_{max} , на которой АЧХ достигает максимума, если $R=2$ кОм, $C=0.1$ мкФ.

8.12(УР). Схема трехзвенного RC -фильтра нижних частот приведена на рис. 1.8.10. Получите выражение передаточной функции $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$ данного фильтра. Положив $R=6.8$ кОм, $C=0.2$ мкФ, вычислите частоты f_1 и f_2 (Гц), на которых фазовый сдвиг, вносимый фильтром, составляет -90° и -180° соответственно.

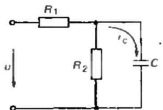


Рис. 1.8.5

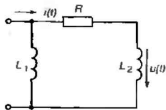


Рис. 1.8.6

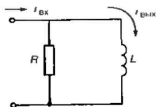


Рис. 1.8.7

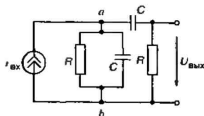


Рис. 1.8.8

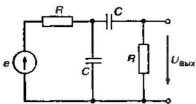


Рис. 1.8.9

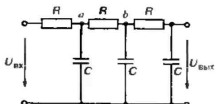


Рис. 1.8.10

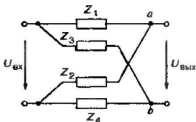


Рис. 1.8.11

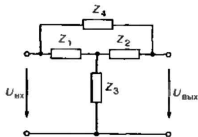


Рис. 1.8.12

8.13(УО). Вычислите координаты полюсов передаточной функции трехзвенного RC -фильтра, рассмотренного в задаче 8.12, при следующих параметрах цепи: $R=1$ МОм, $C=1$ мкФ.

8.14(УР). На рис. 1.8.11 изображена схема линейного четырехполюсника мостовой («скрещенной») структуры, который образован операторными сопротивлениями Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 . Выведите формулу для расчета функции $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$.

8.15(О). Найдите передаточную функцию $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$ «перекрытого» четырехполюсника (рис. 1.8.12), образованного линейными двухполюсниками с известными операторными сопротивлениями $Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p)$.

8.16(Р). Основываясь на критерии Пэли-Вивера, рассмотрите вопрос о физической реализуемости фильтра нижних частот с АЧХ гауссова вида

$$|K(j\omega)| = K_0 \exp(-b\omega^2), \quad 0 < \omega < \infty.$$

● Импульсная и переходная характеристики

8.17(УО). Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ усилителя напряжения с апериодической нагрузкой (рис. 1.8.13). Дифференциальную крутизну характеристики S электронного прибора в выбранной рабочей точке, а также внутреннее сопротивление R_i положите известными.

8.18(Р). Для учета инерционности процессов в биполярном транзисторе часто используют упрощенную модель, согласно которой статическая дифференциальная крутизна S является комплексной и зависит от частоты

$$S(\omega) = S_0 / (1 + j\omega/\omega_{\text{гп}}).$$

Здесь $\omega_{\text{гп}}$ — граничная частота усиления транзистора.

Получите аналитическое выражение импульсной характеристики $h(t)$ усилителя (см. рис. 1.8.13), в котором применен подобный транзистор.

8.19(УР). Получите формулу, описывающую импульсную характеристику $h(t)$ для N ступенчатого усилителя малых сигналов с одинаковыми апериодическими нагрузками, предполагая, что частотный коэффициент передачи одной ступени

$$K_1(j\omega) = -K_0 / (1 + j\omega\tau_s).$$

Здесь K_0 — коэффициент усиления ступени на нулевой частоте, τ_s — эквивалентная постоянная времени ступени. Постройте графики импульсных характеристик для $N=2, 3$ и 4 в зависимости от безразмерного аргумента t/τ_s .

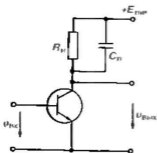


Рис. 1.8.13

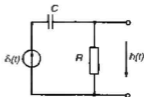


Рис. 1.8.14

8.20(УО). Источником входного сигнала в RC -цепи (рис. 1.8.14) служит идеальный источник ЭДС. Выходное напряжение снимается с резистора. Найдите импульсную характеристику данной цепи.

8.21(О). Найдите импульсную характеристику $h(t)$ идеального полосового фильтра, АЧХ которого изображена на рис. 1.8.15.

8.22(О). Получите импульсную характеристику $h(t)$ идеального линейного фильтра нижних частот, коэффициент передачи $K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi_K(\omega)}$ которого задается равенствами:

$$|K(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_2, \\ K_0, & -\omega_2 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega > \omega_2, \end{cases} \quad \varphi_K(\omega) = \begin{cases} \varphi_0, & \omega < 0, \\ -\varphi_0, & \omega > 0, \end{cases}$$

где φ_0 — постоянная величина.

8.23(Р). Найдите импульсную характеристику $h(t)$ и переходную характеристику $g(t)$ цепи, принципиальная схема которой изображена на рис. 1.8.16.

8.24(О). Рассчитайте и постройте график переходной характеристики $g(t)$ двухконтурной цепи, рассмотренной в задаче 8.23. Параметры цепи: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 2$ кОм, $L_1 = L_2 = 15$ мГн, $M = 7$ мГн.

8.25(Р). Исследуйте способы, которые дают возможность в индуктивно связанной цепи (см. задачу 8.23) улучшить качество передачи на выход ступенчатого перепада входного напряжения, т. е. сократить длительность фронта и уменьшить относительный спад плоской части выходного сигнала.

8.26(УО). Определите переходную характеристику $g(t)$ двухступенчатого усилителя малых сигналов с одинаковыми ступеня-

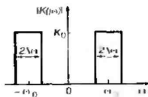


Рис. I.8.15

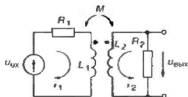


Рис. I.8.16

ми, которые содержат резистивно-емкостные нагрузки. Заданы величины: K_0 — коэффициент усиления одной ступени на нулевой частоте, τ_0 — эквивалентная постоянная времени ступени. Постройте график переходной характеристик в зависимости от аргумента t/τ_0 . Определите время установления $t_{уст}$ системы, понимаемое как отрезок времени, в течение которого напряжение на выходе достигает уровня 90% от установившегося значения.

8.27(УР). Вычислите импульсную и переходную характеристики симметричного RC -четырёхполюсника мостового типа, схема которого изображена на рис. I.8.17.

8.28(О). В последовательном LCR -контуре входной сигнал создает идеальный источник ЭДС, подключенный к внешним зажимам цепи. Выходной сигнал представляет собой ток $i(t)$ в цепи. Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ данной системы, если $L=0.35$ мГн, $R=15$ Ом, $C=4$ нФ.

8.29(УО). На входе сложного колебательного контура без потерь с двумя конденсаторами C_1 и C_2 (рис. I.8.18) действует идеальный источник тока $i(t)$. Выходным сигналом служит напряжение $u(t)$ на конденсаторе C_2 . Определите импульсную характеристику $h(t)$ данной цепи.

8.30(Р). Найдите переходную характеристику $g(t)$ идеального ФНЧ с заданными параметрами K_0 и ω_p . Определите время установления $t_{уст}$ колебаний в данной системе (см. задачу 8.26).

8.31(Р). Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ линейной системы, частотный коэффициент передачи которой имеет вид

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 \exp(-j\beta^2 \omega^2), & \omega \geq 0 \\ K_0 \exp(j\beta^2 \omega^2), & \omega < 0 \end{cases}$$

(K_0, β — постоянные величины).

8.32(УО). Импульсная характеристика $h(t)$ стационарной линейной системы представляет собой прямоугольный видеосигнал длительностью T с амплитудой A , начинающийся в момент времени $t=0$. Найдите частотный коэффициент пере-

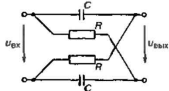


Рис. 1.8.17

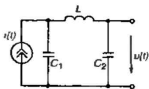


Рис. 1.8.18

двух $K(j\omega)$ и амплитудно-частотную характеристику данной системы.

8.33(Р). Импульсная характеристика $h(t)$ некоторой стационарной линейной системы представляет собой затухающую последовательность разнополярных импульсов одинаковой длительности T (рис. 1.8.19). Амплитуды импульсов убывают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой a ($0 < a < 1$) — вещественное число. Найдите частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ данной системы.

8.34(УО). Постройте график переходной характеристики $g(t)$ системы, рассмотренной в задаче 8.33 при $a=0.8$.

8.35(О). Найдите частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ линейной системы, импульсная характеристика $h(t)$ которой изображена на рис. 1.8.20.

8.36(О). Импульсная характеристика некоторой линейной стационарной системы имеет вид

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t - kT), & t \geq 0, \end{cases}$$

где $\{a_k\}$ — последовательность вещественных коэффициентов, T — параметр с размерностью времени. Найдите частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ данной системы. Изобразите структурную схему ее реализации.

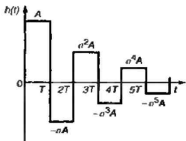


Рис. 1.8.19

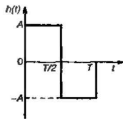


Рис. 1.8.20

8.37(УР). Линейный стационарный фильтр, для которого связь между входным сигналом $u_{\text{вх}}(t)$ и выходным сигналом $u_{\text{вых}}(t)$ устанавливается с помощью соотношения

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u_{\text{вх}}(\xi) d\xi,$$

принято называть фильтром «скользящего среднего». Здесь T — постоянный параметр с размерностью времени. Выведите выражения для импульсной характеристики $h(t)$ и частотного коэффициента передачи $K(j\omega)$ данной системы.

● **Спектральный и операторный методы анализа линейных систем**

8.38(Р). Идеальный фильтр нижних частот с частотным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_s, \\ K_0, & -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s, \\ 0, & \omega > \omega_s, \end{cases}$$

возбуждается входным сигналом $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \sigma(t)$. Найдите выходной сигнал $u_{\text{вых}}(t)$.

8.39(Р). Вход идеального ФНЧ с известными параметрами K_0 , ω_s возбуждается прямоугольным видеосигналом, имеющим амплитуду U_0 и длительность τ_n . Передний фронт входного сигнала возникает в момент времени $t=0$. Вычислите сигнал на выходе фильтра.

8.40(О). Найдите сигнал $u_{\text{вых}}(t)$ на выходе идеального полосового фильтра, частотный коэффициент передачи которого отображается графиком на рис. 1.8.15, если ко входу фильтра приложено колебание $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \sigma(t)$. Фазовый сдвиг, вносимый фильтром, равен нулю на всех частотах.

8.41(Р). На входе последовательной RL -цепи в момент времени $t=0$ начинает действовать источник линейно нарастающей ЭДС $u_{\text{вх}}(t) = At$ ($A > 0$). Определите закон изменения во времени выходного напряжения $u_R(t)$, предполагая, что при $t < 0$ запас энергии в индуктивном элементе равен нулю.

● Интеграл Дюамеля

8.42(УР). На входе RC -цепи (рис. 1.8.21) действует источник ЭДС, создающий прямоугольный видеосигнал с амплитудой U_0 и длительностью τ_n :

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_n)].$$

Вычислите выходной сигнал $u_{\text{вых}}(t)$.

8.43(Р). На входе RC -цепи (рис. 1.8.21) включен источник ЭДС $u_{\text{вх}}(t) = at\sigma(t)$, где $a > 0$ — постоянное число. Найдите закон изменения во времени выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$. Постройте соответствующий график, выбрав в качестве аргумента отношение t/τ , где $\tau = RC$.

8.44(УО). Ко входу RC -цепи (рис. 1.8.21) приложен источник ЭДС, создающий одиночный импульс треугольной формы:

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0 t / \tau_n, & 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0, & t > \tau_n. \end{cases}$$

Полагая, что длительность импульса $\tau_n = RC$, найдите выходной сигнал $u_{\text{вых}}(t)$ и постройте его график.

8.45(УР). На входе мостовой RC -цепи (см. рис. 1.8.17) с параметрами $R = 5.6$ кОм, $C = 0.02$ мкФ действует идеальный источник ЭДС, создающий прямоугольный видеосигнал с амплитудой $U_0 = 50$ В и длительностью $\tau_n = 150$ мкс. Вычислите и постройте график импульса напряжения на выходе $u_{\text{вых}}(t)$.

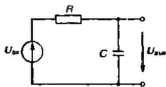


Рис. 1.8.21

Тема 9

ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

● Частотные характеристики узкополосных цепей

9.1(УО). Одноконтурный резонансный усилитель малых сигналов содержит колебательный контур с резонансной частотой $f_{\text{рез}} = 60$ МГц и эквивалентной добротностью $Q_{\text{экр}} = 40$. Модуль коэффициента усиления на резонансной частоте $K_{\text{рез}} = 35$. Вычис-

лите частотный коэффициент передачи усилителя $K(j2\pi f)$ на частотах $f_1 = 52$ МГц и $f_2 = 68$ МГц.

9.2(О). Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) одноконтурного резонансного усилителя описывается выражением

$$|K(j\omega)| = \frac{K_{\text{рез}}}{\sqrt{1 + \tau_x^2 (\omega - \omega_{\text{рез}})^2}},$$

где τ_x — постоянная времени колебательной системы. Определите частоты $\omega_{1,2}$, на которых крутизна скатов АЧХ усилителя максимальна.

9.3(Р). Резонансный усилитель образован каскадным включением N одинаковых одноконтурных ступеней с известным значением постоянной времени контура τ_x . Выведите выражение для расчета полосы пропускания $\Pi_{0,707}$ данного усилителя.

9.4(О). Применительно к постановке задачи 9.3 определите величину $\Pi_{0,707}$ при числе ступеней $N=1$ и $N=5$.

9.5(УО). Рассчитайте и постройте графики нормированных АЧХ одно-, двух- и трехступенчатого резонансных усилителей. Постоянные времени контуров τ_x и их резонансные частоты $\omega_{\text{рез}}$ одинаковы.

9.6(О). Резонансный усилитель, собранный из трех одинаковых ступеней, имеет частотный коэффициент передачи $K(j2\pi f_{\text{рез}}) = -90$. Найдите величину $K_{0\text{рез}}$ — модуль коэффициента передачи одной ступени при $f = f_{\text{рез}}$.

9.7(О). Одноконтурный резонансный усилитель имеет известные параметры $\omega_{\text{рез}}$ и τ_x . Найдите групповое время запаздывания $T_{\text{гр}}$ в таком усилителе для узкополосного радиоимпульса с частотой заполнения $\omega_0 = \omega_{\text{рез}}$.

9.8(О). Обобщите результат, полученный в задаче 9.7, на случай, когда $\omega_0 \neq \omega_{\text{рез}}$.

● Прохождение сигналов через узкополосные цепи

9.9(Р). Усилитель образован каскадным включением двух резонансных ступеней с одинаковыми резонансными частотами $\omega_{\text{рез}}$. Коэффициенты усиления $K_{\text{рез}1}$ и $K_{\text{рез}2}$ и постоянные времени τ_{x1} и τ_{x2} в общем случае различны. Найдите импульсную характеристику $h(t)$ данной узкополосной системы.

9.10(УО). Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ двухступенчатого усилителя, у которого коллекторной нагрузкой каждой ступени служит одиночный колебательный контур. Обе ступени имеют одинаковые резонансные коэффициенты усиления $K_{0\text{рез}}$ и одинаковые постоянные времени τ_x . Резонансная частота

первого контура $\omega_{\text{рез1}}$ меньше резонансной частоты второго контура $\omega_{\text{рез2}}$ на величину $\Delta\omega$, такую, что $\Delta\omega/\omega_{\text{рез1}} \ll 1$. Постройте ориентировочный график функции $h(t)$.

9.11(УО). Трехступенчатый резонансный усилитель содержит колебательные контуры, настроенные на частоты $\omega_{\text{рез1}} = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_{\text{рез2}} = \omega_0$, $\omega_{\text{рез3}} = \omega_0 + \Delta\omega$. Параметры $K_{\text{рез}}$ и τ_x одинаковы для всех трех ступеней. Система в целом является узкополосной, т. е. $Q \gg 1$ и $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ усилителя. Изобразите примерный график этой функции. Результат сравните с тем, который получен в задаче 9.10.

9.12(УО). Узкополосный гауссов радиопропускатель имеет частотный коэффициент передачи, представляемый формулой

$$K(j\omega) = K_0 e^{-b(\omega + \omega_0)^2} + K_0 e^{-b(\omega - \omega_0)^2},$$

где K_0 — масштабный коэффициент, ω_0 — центральная частота полосы пропускания, b — размерная постоянная, такая, что $b\omega_0^2 \gg 1$. Найдите частотный коэффициент передачи $K_{\text{мн}}(j\Omega)$ низкочастотного эквивалента данного фильтра и соответствующую импульсную характеристику $h_{\text{мн}}(t)$.

9.13(О). Вычислите импульсную характеристику $h(t)$ узкополосного гауссова радиопропускателя, рассмотренного в задаче 9.12. Проанализируйте возможность физической реализации данной модели узкополосной системы.

9.14(У). Докажите, что время установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе малых сигналов при подаче на его вход импульса включения гармонического сигнала с частотой заполнения $\omega_0 = \omega_{\text{рез}}$ не зависит от величины резонансной частоты и вычисляется по формуле $t_{\text{уст}} = 0.73/\Pi_{0.707}$, где $\Pi_{0.707}$ (Гц) — полоса пропускания колебательной системы по уровню 0.707 от резонансного значения сигнала.

9.15(УО). Одноконтурный резонансный усилитель напряжения имеет параметры: $K_{\text{рез}} = 50$, $f_{\text{рез}} = 1$ МГц, $Q_{\text{мн}} = 80$. На вход усилителя подан АМ-сигнал (мВ)

$$u_{\text{вх}}(t) = 15(1 + 0.8 \cos 2\pi \cdot 10^4 t) \cos 2\pi \cdot 10^6 t.$$

Найдите напряжение $u_{\text{мн}}(t)$ на выходе усилителя.

9.16(О). Применительно к условиям задачи 9.15 найдите время запаздывания $t_{\text{мн}}$ огибающей выходного сигнала по отношению к огибающей сигнала на входе.

9.17(УР). Одноконтурный резонансный усилитель напряжения имеет заданные параметры $\omega_{\text{рез}}$, $K_{\text{рез}}$ и τ_x . Ко входу усилителя приложен источник напряжения, имеющий скачок частоты при $t=0$:

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_{\text{рес}} t, & t < 0, \\ U_m \cos (\omega_{\text{рес}} + \delta \omega) t, & t \geq 0, \end{cases}$$

где $\delta \omega$ — частотная расстройка.

Вычислите функцию $\tilde{U}_{\text{вых}}(t)$ — комплексную огибающую выходного сигнала. Постройте графики зависимости от времени физической огибающей $U_{\text{вых}}(t)$ при $\delta \omega \cdot \tau_x = 1$ и при $\delta \omega \cdot \tau_x = 3$.

9.18(УР). Вычислите сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, возникающий на выходе узкополосного гауссова радиопередатчика (см. задачу 9.12) при подаче на его вход колебания $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \cos \omega_0 t \sigma(t)$, частота заполнения которого совпадает с центральной частотой АЧХ фильтра.

9.19(О). Двухступенчатый резонансный усилитель малых сигналов имеет одинаковые резонансные коэффициенты усиления $K_{\text{орес}}$ и постоянные времена τ_x каждой ступени; резонансные частоты контуров $\omega_{\text{рес}}$ и $\omega_{\text{рес}} = \omega_{\text{рес}} + \Delta \omega$ различны. Ко входу усилителя приложен источник ЭДС

$$u_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_m \cos (\omega_{\text{рес}} t + \varphi), & t \geq 0. \end{cases}$$

Найдите закон изменения во времени физической огибающей $U_{\text{вых}}(t)$ на выходе усилителя.

9.20(Р). Одноконтурный усилитель малых высокочастотных колебаний имеет частотно-избирательную систему в виде простого колебательного контура. Параметры усилителя $K_{\text{орес}}$, $\omega_{\text{рес}}$ и τ_x считаются заданными. На вход устройства подано колебание $u_{\text{вх}}(t) = at \cos [(\omega_{\text{рес}} + \delta \omega)t] \cdot \sigma(t)$, имеющее линейно нарастающую во времени физическую огибающую и частоту заполнения, которая на величину $\delta \omega$ превышает частоту $\omega_{\text{рес}}$. Найдите выражение комплексной огибающей $\tilde{U}_{\text{вых}}(t)$ выходного сигнала.

9.21(УО). Одноконтурный резонансный усилитель имеет заданные параметры $K_{\text{орес}}$, $\omega_{\text{рес}}$ и τ_x . На вход усилителя подан сигнал $u_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{-at} \cos [(\omega_{\text{рес}} + \delta \omega)t] \sigma(t)$, который имеет экспоненциально уменьшающуюся во времени амплитуду и частоту заполнения $\omega = \omega_{\text{рес}} + \delta \omega$. Найдите комплексную огибающую $\tilde{U}_{\text{вых}}(t)$ сигнала на выходе и соответствующую ей физическую огибающую $U_{\text{вых}}(t)$.

9.22(Р). Используя средства системы MathCAD, составьте программу для анализа физической огибающей $U_{\text{вых}}$ сигнала, изученного в задаче 9.21.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦЕПИ

● Спектр мощности и функция корреляции случайного сигнала на выходе линейной системы

10.1(УР). Некоторая линейная стационарная система имеет импульсную характеристику $h(t)$. На входе системы действует стационарный случайный сигнал $X(t)$ с нулевым средним значением. Получите аналитическое выражение функции корреляции $R_y(t_1, t_2)$ выходного случайного процесса $Y(t)$.

10.2(О). Основываясь на результате, полученном в задаче 10.1, получите формулы, описывающие функции корреляции $R_y(\tau)$ на выходе линейных систем с импульсными характеристиками вида:

$$а) h(t) = \frac{1}{T} \exp(-t/T) \cdot \sigma(t),$$

$$б) h(t) = A [\sigma(t) - \sigma(t - T)]$$

($A > 0, T > 0$ — постоянные величины).

В обоих случаях входным сигналом является белый шум с постоянным спектром мощности W_0 .

10.3(Р). Линейная цепь (рис. I.10.1) состоит из устройства задержки сигнала на T (с) и сумматора. На входе цепи действует стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 0$ и известной функцией корреляции $R_x(\tau)$. Найдите функцию корреляции $R_y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе.

10.4(УО). Применительно к условиям задачи 10.3 найдите дисперсию случайного выхода сигнала, если известно выражение функции корреляции случайного колебания на входе $R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$.

10.5(О). Найдите взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(\tau)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ для линейной системы, которая описана в условиях задачи 10.3.

10.6(УО). Некоторая линейная система осуществляет преобразование входного сигнала $x(t)$ таким образом, что выходной сигнал

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(\xi) d\xi,$$

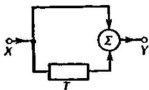


Рис. I.10.1

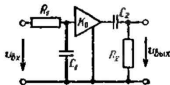


Рис. I.10.2

где T — постоянный параметр с размерностью времени. На вход системы подается напряжение, имеющее вид белого шума с двусторонним спектром мощности $W_0 = 10^{-12} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$. Найдите значение времени t' , за которое среднеквадратичный уровень напряжения на выходе системы достигнет 0.2 В, если $T = 1 \text{ мкс}$.

18.7(О). Электрическая цепь содержит два RC -звена, разделенных идеальным усилителем напряжения, коэффициент передачи K_0 постоянный на всех частотах (рис. I.10.2). Входное сопротивление усилителя неограниченно велико, а выходное равно нулю. На входе цепи действует источник шумовой ЭДС (белый шум) со спектром мощности W_0 . Найдите спектр мощности $W_{\text{вых}}(\omega)$ выходного сигнала.

10.8(О). Колебательный LC -контур (рис. I.10.3) подключен к источнику шумового тока, имеющего функцию корреляции $R_i(\tau) = \sigma_i^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Найдите спектр мощности $W_u(\omega)$ выходного напряжения $u(t)$.

10.9(О). Рассчитайте шумовую полосу $\Pi_{\text{ш}}$ для RL -цепи (рис. I.10.4).

18.10(УО). Получите формулу для расчета шумовой полосы узкополосного гауссова радиопередатчика с частотным коэффициентом передачи

$$K(j2\pi f) = K_0 e^{-b|f-f_0|}, \quad f > 0.$$

10.11(УО). Получите выражения для дисперсии и функции корреляции $R_u(\tau)$ выходного сигнала цепи, рассмотренной в задаче 10.7.

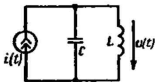


Рис. I.10.3

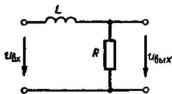


Рис. I.10.4

10.12(О). На входе RC -цепи (рис. 1.10.5) действует источник шумовой ЭДС, создающий случайный сигнал вида белого шума, имеющий на всех частотах постоянную спектральную плотность мощности W_0 . Выходной случайный сигнал $u(t)$ снимается с резистора R . Найдите функцию корреляции $R_x(\tau)$.

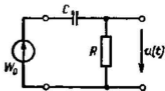


Рис. 1.10.5

10.13(УО). Цепь представляет собой каскадное соединение N одинаковых RC -цепей, между которыми включены идеальные элементы развязки с единичными коэффициентами передачи (рис. 1.10.6). На входе цепи включен источник ЭДС вида белого шума с односторонним спектром мощности F_0 ($B^2 \cdot c$). Получите выражение для расчета дисперсии σ_{\max}^2 выходного напряжения $u_{\max}(t)$.

10.14(О). Цепь, схема которой изображена на рис. 1.10.7, называют пропорционально-интегрирующим фильтром. На входе фильтра действует источник напряжения $u_{\text{вх}}(t)$ с функцией корреляции $R_{u_{\text{вх}}}(t) = \sigma_{u_{\text{вх}}}^2 \exp(-\alpha |t|)$. Найдите дисперсию $\sigma_{u_{\text{вых}}}^2$ выходного сигнала $u_{\text{вых}}(t)$.

10.15(О). На входе RC -цепи (рис. 1.10.8) включен источник напряжения вида белого шума с двусторонним спектром мощности W_0 , постоянным на всех частотах. Получите выражение функции корреляции $R_x(\tau)$ выходного сигнала.

10.16(Р). Линейная система имеет частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}),$$

где $A > 0$, $T > 0$ — постоянные величины. На входе системы действует белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 . Найдите функцию корреляции $R_{u_{\text{вых}}}(t)$ выходного сигнала.

10.17(Р). Идеальный фильтр нижних частот, имеющий единичный коэффициент передачи в полосе частот $0 \leq \omega \leq \omega_c$ и нулевой коэффициент передачи на остальных частотах, возбуждается

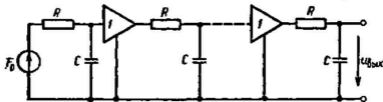


Рис. 1.10.6

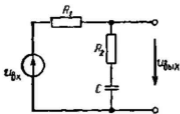


Рис. 1.10.7

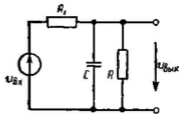


Рис. 1.10.8

со стороны входа источником стационарного шума $X(t)$ с функцией корреляции $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Найдите дисперсию σ_y^2 выходного случайного процесса.

10.18(О). Линейный стационарный фильтр нижних частот имеет коэффициент передачи по напряжению $K_0 = 250$ в полосе частот $0 \leq f \leq 140$ кГц и нулевой коэффициент передачи на остальных частотах. Ко входу фильтра подключен источник белого шума с постоянным двусторонним спектром мощности $W_0 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$. Найдите эффективное напряжение шума $\sigma_{\text{вых}}$ на выходе фильтра.

10.19(УО). На входе идеального полосового фильтра действует источник белого шума с односторонним спектром мощности F_0 ($\text{В}^2 \cdot \text{с}$). Фильтр имеет постоянный коэффициент передачи K_0 в пределах полосы частот $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$. На остальных частотах коэффициент передачи фильтра равен нулю. Определите дисперсию σ_y^2 и функцию корреляции $R_y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе фильтра.

10.20(О). Источник ЭДС вида белого шума с односторонним спектром мощности F_0 подключен на вход последовательного колебательного контура, образованного элементами L , C и R . Найдите односторонний спектр мощности $F_u(\omega)$ и функцию корреляции $R_u(\tau)$ напряжения $u(t)$ на конденсаторе цепи. Положите, что $R < 2\sqrt{L/C}$, т. е. свободный процесс в цепи имеет колебательный характер.

10.21(УО). Параллельный колебательный контур с потерями (рис. 1.10.9) возбужден идеальным источником шумового тока, который создает белый шум с постоянным на всех частотах двусторонним спектром мощности W_0 . Предполагая, что добротность контура $Q \gg 1$, получите выражение функции корреляции $R_u(\tau)$ выходного напряжения $u(t)$ в данной цепи.

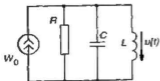


Рис. 1.10.9

10.22(О). На вход одноконтурного резонансного усилителя малых колебаний с параметрами $K_{\text{рц}} = 120$, $f_{\text{рц}} =$

$= 6.5$ МГц, $Q_{\text{эм}} = 55$ подан случайный сигнал вида белого шума с односторонним спектром мощности $F_0 = 2 \cdot 10^{-18}$ В²/Гц. Определите величину $\sigma_{\text{мк}}$ — эффективное значение шумового напряжения на выходе усилителя.

● Источники шума в радиотехнических цепях

10.23(О). Идеальный фильтр нижних частот имеет полосу пропускания $0 - 200$ кГц. Коэффициент передачи напряжения в полосе пропускания $K_0 = 300$. На входе фильтра включен резистор с сопротивлением 160 кОм, находящийся при температуре 400 К. Найдите эффективное напряжение шумового сигнала на выходе устройства.

10.24(О). Найдите дисперсию σ_n^2 шумового напряжения, возникающего на конденсаторе простой RC-цепи под действием теплового шума резистора. Вычислите эффективное напряжение шума при следующих параметрах: $C = 1$ нФ, $T = 300$ К.

10.25(О). В электронном приборе протекает постоянный ток $I_0 = 4$ мА. Вычислите дисперсию тока σ_I^2 , относящуюся к интервалу частот $0.5 - 30$ МГц.

10.26(О). Найдите вероятность P_0 события, заключающегося в том, что на анод электронного прибора со средним током $I_0 = 0.2$ мкА за отрезок времени длительностью 10^{-12} с не поступит ни одного электрона.

10.27(УО). Резистор R с сопротивлением 10^5 Ом, находящийся при абсолютной температуре T , включен в цепь, содержащую диод, работающий в режиме насыщения, и источник постоянной ЭДС (рис. 1.10.10). В цепи протекает ток со средним значением $I_0 = 1$ мкА. Найдите величину T , при которой удельные дисперсии напряжений, создаваемых на резисторе за счет дробового и теплового эффектов, оказываются равными.

10.28(О). Вход приемника соединен с антенной кабельной линией передачи длиной 3 м. Погонное затухание волн в кабеле составляет 1.4 дБ/м. Кабель находится при температуре окружающей среды 290 К. Найдите шумовую температуру $T_{\text{ш}}$ кабельной линии, а также ее коэффициент шума F .

10.29(О). Усилитель образован каскадным соединением трех ступеней. Коэффициенты усиления мощности ступеней равны K_{P1} , K_{P2} , K_{P3} , а их коэффициенты шума F_1 , F_2 , F_3 соответственно. Выведите формулу, определяющую коэффициент шума F данного усилителя.



Рис. 1.10.10

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

● Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

11.1(Р). Полевой транзистор имеет три вывода — исток, сток и затвор. На рис. 1.11.1 изображена экспериментально снятая проходная характеристика $i_c(u_{зк})$ полевого транзистора КП303Е — зависимость тока стока i_c от управляющего напряжения на промежутке затвор — исток. Характеристика получена при постоянном напряжении $u_{см} = 10$ В. Получите аппроксимацию этой характеристики многочленом 2-й степени на интервале $-1.5 \text{ В} \leq u_{зк} \leq \leq -0.5 \text{ В}$, т. е. определите числовое значение коэффициентов a_0, a_1, a_2 , входящих в выражение $i_c = a_0 + a_1(u_{зк} + 1) + a_2(u_{зк} + 1)^2$.

11.2(УО). Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника приведена на рис. 1.11.2. Найдите коэффициенты аппроксимации этой характеристики в виде многочлена 3-й степени в окрестности рабочей точки $U_0 = 10$ В:

$$i = a_0 + a_1(u - 10) + a_2(u - 10)^2 + a_3(u - 10)^3.$$

Аппроксимация должна быть пригодной в интервале напряжений $5 \text{ В} < u < 12.5 \text{ В}$.

11.3(О). Проходная характеристика биполярного транзистора КТ306, т. е. зависимость $i_x = f(u_{бэ})$ (А), задана в виде

$$i_x = 1.33 \cdot 10^{-7} \exp[u_{бэ}/(2.6 \cdot 10^{-2})],$$

где $u_{бэ}$ — напряжение на промежутке база — эмиттер, В. Найдите многочлен 2-й степени, аппроксимирующий данную характеристику в окрестности рабочей точки $U_0 = 0.25$ В.

11.4(О). Ток i (мА) в нелинейном резисторе зависит от приложенного напряжения u (В) следующим образом:

$$i = \begin{cases} 15u^2 - 30, & u \geq 1.41 \text{ В}, \\ 0, & u < 1.41 \text{ В}. \end{cases}$$

Найдите коэффициенты разложения этой вольт-амперной характеристики в степенной ряд

$$i(u) = a_0 + a_1(u - 2.5) + a_2(u - 2.5)^2$$

при смещении $U_0 = 2.5$ В.

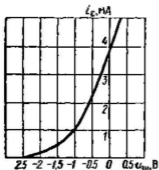


Рис. I.11.1

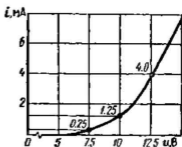


Рис. I.11.2

11.5(О). Вольт-амперная характеристика полупроводникового диода при $u > 0$ задана выражением

$$i = i_0 [\exp(u/u_T) - 1],$$

где $i_0 = 1.5 \cdot 10^{-6}$ А — обратный ток насыщения, $u_T = 2.6 \cdot 10^{-2}$ В — температурный потенциал перехода. Определите напряжение u , при котором дифференциальная крутизна характеристики $S_{\text{диф}}$ составит 8 мА/В.

● **Спектральный состав тока в нелинейном двухполоснике**

11.6(Р). Ток в нелинейном резисторе i связан с приложенным напряжением u кусочно-линейной зависимостью

$$i = \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ S(u - U_n), & u \geq U_n, \end{cases}$$

где $S = 15$ мА/В, $U_n = 0.8$ В. Найдите постоянную составляющую тока I_0 и амплитуду первой гармоники тока I_1 , если напряжение (В) $u = 0.5 + 0.5 \cos \omega t$.

11.7(О). К нелинейному резистору с ВАХ вида

$$i(u) = 15 + 0.8(u - 2.5) + 0.16(u - 2.5)^2 + 0.07(u - 2.5)^3$$

(ток измеряется в миллиамперах, а напряжение — в вольтах) приложено напряжение $u = 2.5 + 0.6 \cos \omega t$. Найдите амплитуды гармонических составляющих тока I_0 , I_1 , I_2 и I_3 .

11.8(О). Прямая характеристика (мА) биполярного транзистора $i_x = f(u_{бэ})$ в окрестности рабочей точки $U_0 = 1.2$ В задана многочленом

$$i_x = 15 + 40(u_{бэ} - 1.2) + 6.5(u_{бэ} - 1.2)^2 + 2.5(u_{бэ} - 1.2)^3.$$

Найдите выражение колебательной характеристики $I_1 = F(U_m)$, полагая, что к базе транзистора приложено напряжение (В) $u_{бэ} = 1.2 + U_m \cos \omega t$.

11.9(Р). Ко входу усилителя, транзистор которого имеет ВАХ, заданную в условиях задачи 11.8, приложено напряжение (В) $u_{бэ} = 0.9 + 0.75 \cos \omega t$.

Определите постоянную составляющую коллекторного тока I_0 .

11.10(О). В одноступенчатом усилителе напряжения (рис. 1.11.3) использован полевой транзистор КП303Е. К промежутку затвор — исток приложено напряжение (В) $u_{зш} = -1 + 0.5 \cos \omega t$. Используя коэффициенты аппроксимации, полученные в задаче 11.1, определите постоянную составляющую I_0 тока в стоковой цепи. Влияние переменного напряжения на стоке считайте пренебрежимо малым.

11.11(УО). Входная характеристика биполярного транзистора КТ805, т. е. зависимость $i_b = f(u_{бэ})$, аппроксимирована зависимостью (мА),

$$i_b = \begin{cases} 0, & u_{бэ} < 0.6 \text{ В}, \\ 10(u_{бэ} - 0.6), & u_{бэ} \geq 0.6 \text{ В}. \end{cases}$$

К промежутку база — эмиттер приложено напряжение (В) $u_{бэ} = 0.4 + 0.75 \cos \omega t$. Определите мощность P_6 , выделяемую в цепи базы.

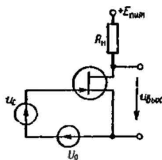


Рис. 1.11.3

11.12(УО). К промежутку база — эмиттер транзистора КТ803А подключен источник напряжения (В) $u_{бэ} = 0.6 + 0.5 \cos \omega_0 t$. Входная характеристика $i_b = f(u_{бэ})$ допускает кусочно-линейную аппроксимацию с параметрами: $S = 0.66$ А/В, $U_n = 0.7$ В. Определите входное сопротивление цепи $R_{вх1}$ по первой гармонике.

11.13(Р). Нелинейный резистор имеет ВАХ вида

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_{н1}, \\ S(u - U_{н1}), & U_{н1} \leq u \leq U_{н2}, \\ S(U_{н2} - U_{н1}), & u > U_{н2}. \end{cases}$$

К зажимам резистора приложено напряжение $u = U_0 + U_m \cos \omega t$. Получите формулы для расчета спектрального состава тока.

11.14(О). Найдите постоянную составляющую I_0 и амплитуду первой гармоники тока I_1 в нелинейном элементе, рассмотренном в задаче 11.13, при следующих данных: $U_m = 1.5$ В, $U_0 = 0.1$ В, $U_{н1} = 0.7$ В, $U_{н2} = 1.2$ В, $S = 6$ мА/В.

11.15(УР). В ряде случаев, например для описания свойств мощных трансформаторов, оказывается удобной так называемая кусочно-параболическая аппроксимация ВАХ:

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ B(u - U_n)^2, & u \geq U_n, \end{cases}$$

где B — численный параметр (A/V^2), находимый экспериментально. Выведите формулы для расчета амплитуд гармонических составляющих тока, возникающего под действием напряжения $u = U_0 + U_m \cos \omega t$.

11.16(О). Полевой транзистор КП303Е (см. задачу 11.1) применен в одноступенчатом усилителе напряжения с резистивной нагрузкой (рис. 1.11.3). На вход усилителя подана сумма гармонического сигнала $u_{вх}(t) = U_{mвх} \cos \omega t$ и постоянного напряжения смещения U_0 . Найдите амплитуду второй гармоники напряжения $U_{m2вх}$ на выходе усилителя, если $R_n = 5.1$ кОм, $U_{mвх} = 0.25$ В, $U_0 = -1$ В.

11.17(УО). Применительно к условиям задачи 11.16 постройте график зависимости коэффициента нелинейных искажений $k_{нл}$ от амплитуд $U_{mвх}$ входного сигнала, изменяющейся в пределах от 0 до 250 мВ. Положите, что напряжение смещения $U_0 = -1$ В.

● Нелинейные усилители гармонических колебаний. Умножители частоты

11.10(Р). Резонансный усилитель собран по схеме, изображенной на рис. 1.11.4. В усилителе применен транзистор КТ803А, входная характеристика которого приведена в условиях задачи

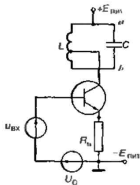


Рис. 1.11.4

11.12. Ток коллектора i_c связан с током базы i_b линейной зависимостью $i_c = 12i_b$. Напряжение источника питания $E_{пит} = 70$ В. Нагрузкой транзистора является колебательный контур со следующими параметрами: $R_{pec} = 30$ кОм (относительно точек $a-b$), коэффициент включения контура в цепь коллектора $k_{вл} = 0.04$. Ко входу усилителя приложено напряжение (В)

$$u_{вх} = 0.3 + 0.8 \cos \omega_{pec} t.$$

Пренебрегая инерционностью процессов в транзисторе и обратным влиянием коллекторного напряжения на ток базы, рассчитайте следующие величины:

а) постоянные составляющие $I_{0б}$ и $I_{0к}$, а также амплитуды первых гармоник $I_{1б}$ и $I_{1к}$ токов базы и коллектора соответственно;

б) полезную мощность $P_{1вых}$, выделяемую током первой гармоники в колебательном контуре;

в) мощность P_0 , поступающую от источника питания, мощность $P_{пот}$, выделяемую в виде теплоты на коллекторе транзистора, а также КПД η усилителя;

г) амплитуды колебательных напряжений $U_{мк}$ на коллекторе и $U_{мкв}$ на колебательном контуре;

д) коэффициент усиления мощности K_p .

11.19(О). Одноконтурный резонансный усилитель питается от источника с напряжением $E_{пит} = 12$ В. Резонансное сопротивление контура (с учетом неполного включения) $R_{pec} = 20$ кОм. Постоянное напряжение смещения на базе $U_0 = 0.5$ В. Проходная характеристика транзистора $i_c = f(u_{бк})$ аппроксимирована кусочно-линейной функцией с параметрами $S = 15$ мА/В, $U_n = 0.8$ В. Определите амплитуду $U_{мк}$ входного сигнала, при которой усилитель работает в критическом режиме. Частота входного сигнала совпадает с резонансной частотой контура.

11.20(О). На вход резонансного усилителя, рассмотренного в задаче 11.19, подан гармонический сигнал с амплитудой $U_{мк} = 0.75$ В. Определите напряжение смещения U_0 , при котором в усилителе устанавливается критический режим.

11.21(О). Применительно к данным задачи 11.19 определите мощность P_0 , потребляемую усилителем от источника питания, полезную мощность $P_{1вых}$, выделяемую током первой гармоники в колебательном контуре, мощность $P_{пот}$, рассеиваемую в виде теплоты на коллекторе транзистора, а также КПД η усилителя.

11.22(О). Коллекторная цепь усилителя, рассмотренного в задаче 11.19, содержит колебательный контур, настроенный на частоту второй гармоники входного сигнала. Резонансное сопротивление контура $R_{\text{рез}} = 8.6 \text{ кОм}$. Найдите амплитуду колебательного напряжения $U_{\text{тmax}}$ на коллекторе транзистора.

11.23(Р). Резонансный удвоитель частоты работает в критическом режиме, т. е. амплитуда выходного напряжения $U_{\text{тmax}}$ равна напряжению источника питания $E_{\text{пит}}$. Найдите зависимость КПД удвоителя η от величины угла отсечки тока при постоянной амплитуде входного сигнала $U_{\text{тmax}}$.

● Амплитудная модуляция. Детектирование АМ-сигналов

11.24(Р). Если в амплитудном модуляторе используют нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой, то обычно стремятся к тому, чтобы в режиме «молчания», т. е. при отсутствии модулирующего сигнала, напряжение смещения U_0 совпадало с напряжением начала характеристики U_n . Постройте модуляционную характеристику — зависимость первой гармоники тока через элемент от величины $(U_0 - U_n)/U_m$ — нормированного отклонения рабочей точки.

11.25(О). Используя график модуляционной характеристики, полученный в задаче 11.24, оцените наибольшее значение коэффициента модуляции M_{max} , при котором еще обеспечивается приближенно линейность закона модуляции.

11.26(УО). Детектор АМ-колебаний содержит нелинейный резистивный элемент с квадратичной ВАХ вида

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2.$$

Вычислите низкочастотную составляющую тока $i_{\text{н}}(t)$, протекающего через нелинейный резистор для случаев:

а) детектирование однотонового АМ-сигнала

$$u = U_0 + U_m(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

б) детектирование ОБП-сигнала с подавленной нижней боковой частотой

$$u = U_0 + U_m \cos \omega_0 t + \frac{MU_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t.$$

11.27(УО). Проходная характеристика транзистора, работающего в схеме коллекторного детектора (рис. 1.11.5), аппроксимирована многочленом второй степени:

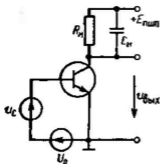


Рис. I.11.5

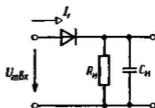


Рис. I.11.6

$$i_x = a_0 + a_1(u_{\text{вх}} - U_0) + a_2(u_{\text{вх}} - U_0)^2.$$

На вход детектора подан сигнал

$$u_{\text{вх}} = U_0 + U_m(1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t) \cos \omega_0 t.$$

Найдите переменную низкочастотную составляющую $u_{\text{вых}}(t)$ напряжения на выходе детектора.

11.28(УР). Входное сопротивление диодного детектора (рис. I.11.6) определяют как отношение амплитуды входного гармонического напряжения $U_{\text{вх}}$ к амплитуде первой гармоники тока через диод: $R_{\text{вх}} = U_{\text{вх}}/I_1$. Докажите, что если $SR_n \gg 1$, то $R_{\text{вх}} \approx R_n/2$.

11.29(УР). На языке Pascal составьте программу для решения трансцендентного уравнения, определяющего угол отсечки тока в диодном детекторе. Исходные данные: сопротивление резистора нагрузки, крутизна ВАХ диода и абсолютная погрешность вычислений $\epsilon \approx 10^{-3}$. Предусмотрите вывод на экран монитора коэффициента детектирования $k_{\text{дет}} = \cos \theta$.

11.30(У). Используя средства программного продукта Electronics Workbench, проведите моделирование процесса детектирования АМ-сигнала в схеме диодного детектора.

● Преобразование случайных сигналов в нелинейных цепях

11.31(Р). На входе безынерционного нелинейного элемента действует стационарный гауссов случайный процесс $X(t)$, имеющий одномерную плотность вероятности

$$p_{\text{вх}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Характеристика, связывающая входной сигнал $x(t)$ с выходным сигналом $y(t)$, задана системой равенств:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найдите одномерную плотность вероятности $p_{\text{вых}}(y)$ выходного случайного сигнала.

11.32(О). Решите задачу 11.31 для случая, когда нелинейный элемент имеет двустороннюю квадратичную характеристику $y = ax^2$ ($a > 0$).

11.33(Р). Нелинейный элемент имеет характеристику следующего вида:

$$y = \begin{cases} b, & x < 0, \\ a, & x \geq 0, \end{cases}$$

где a, b — постоянные числа. На вход элемента подан гауссов случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 0$. Найдите математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 сигнала $Y(t)$ на выходе устройства.

11.34(О). Безынерционный нелинейный элемент с характеристикой $y = a|x|$ возбуждается со стороны входа стационарным нормальным шумом $X(t)$ с нулевым средним значением и известной дисперсией σ_x^2 . Найдите среднее значение m_y и дисперсию σ_y^2 выходного случайного процесса $Y(t)$.

11.35(УО). Найдите функцию корреляции $R_y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$, возникающего на выходе нелинейного звена с характеристикой $y = x^2$. На входе звена действует стационарный нормальный случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и функцией корреляции $R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$.

Тема 12

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

● Прохождение сигналов через резистивные параметрические цепи. Преобразование частоты

12.1(О). Идеальный источник ЭДС создает напряжение (В) $u = 1.5 \cos 2\pi \cdot 10^7 t$. К зажимам источника подключен резистивный элемент с переменной во времени проводимостью (См) $G(t) = 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} \sin 2\pi \cdot 10^6 t$. Найдите амплитуду тока I_m , имеющего частоту 9.9 МГц.

12.2(О). Вещательный приемник длинноволнового диапазона предназначен для приема сигналов в диапазоне частот от $f_{с\text{min}} = 150$ кГц до $f_{с\text{max}} = 375$ кГц. Промежуточная частота приемника $f_{\text{пр}} = 465$ кГц. Определите, в каких пределах следует перестраивать частоту гетеродина f_r данного приемника.

12.3(УО). В супергетеродинном приемнике гетеродин создает гармонические колебания с частотой $f_r = 7.5$ МГц. Промежуточная частота приемника $f_{\text{пр}} = 465$ кГц; из двух возможных частот принимаемого сигнала основному каналу приема отвечает большая, а зеркальному каналу — меньшая частота. Для подавления зеркального канала на входе преобразователя частоты включен одиночный колебательный контур, настроенный на частоту основного канала. Найдите значение добротности Q этого контура, при которой ослабление зеркального канала составит -25 дБ по отношению к основному каналу приема.

12.4(О). Дифференциальная крутизна резистивного параметрического элемента, входящего в преобразователь частоты, изменяется по закону $S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_r t$, где S_0, S_1 — постоянные числа, ω_r — угловая частота гетеродина. Считая, что промежуточная частота $\omega_{\text{пр}}$ известна, найдите частоты сигнала ω_s , при которых возникает эффект на выходе преобразователя.

12.5(Р). Проходная характеристика полевого транзистора, т. е. зависимость тока стока i_c (мА) от управляющего напряжения затвор — исток $u_{\text{зи}}$ (В) при $u_{\text{зи}} \geq -2$ В, аппроксимирована квадратичной параболой: $i_c = 7.5(u_{\text{зи}} + 2)^2$. Ко входу транзистора приложено напряжение гетеродина $u_{\text{зи}} = U_{\text{пр}} \cos \omega_r t$. Найдите закон изменения во времени дифференциальной крутизны $S_{\text{диф}}(t)$ характеристики $i_c = f(u_{\text{зи}})$.

12.6(УО). Применительно к условиям задачи 12.5 выберите амплитуду напряжения гетеродина $U_{\text{пр}}$ таким образом, чтобы обеспечить крутизну преобразования $S_{\text{пр}} = 6$ мА/В.

12.7(О). В преобразователе частоты использован полупроводниковый диод, ВАХ которого описана зависимостью (мА)

$$i = \begin{cases} 25(u - 0.2), & u \geq 0.2 \text{ В,} \\ 0, & u < 0.2 \text{ В.} \end{cases}$$

К диоду приложено напряжение гетеродина (В) $u_r = 1.2 \cos \omega_r t$. Вычислите крутизну преобразования $S_{\text{пр}}$ данного устройства.

12.8(УО). В диодном преобразователе частоты, который описан в задаче 12.7, к диоду приложено напряжение (В) $u(t) = U_0 + 1.2 \cos \omega_r t$. Определите,

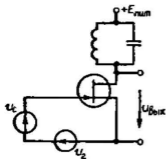


Рис. 1.12.1

при каком напряжении смещения $U_0 < 0$ крутизна преобразования составит величину 1.5 мА/В.

12.9(УО). Схема преобразователя частоты на полевом транзисторе изображена на рис. 1.12.1. Колебательный контур настроен на промежуточную частоту $\omega_{mp} = |\omega_c - \omega_r|$. Резонансное сопротивление контура $R_{res} = 18$ кОм. Ко входу преобразователя приложена сумма напряжения полезного сигнала (мкВ) $u_c(t) = 50 \cos \omega_c t$ и напряжения гетеродина (В) $u_r(t) = 0.8 \cos \omega_r t$. Характеристика транзистора описана в условиях задачи 12.5. Найдите амплитуду U_{mmp} выходного сигнала на промежуточной частоте.

● Прохождение сигналов через параметрические реактивные цепи.

Параметрические усилители

12.10(Р). Дифференциальная емкость параметрического диода (варактора) в окрестности рабочей точки U_0 зависит от приложенного напряжения u следующим образом: $C_{диф}(u) = b_0 + b_1(u - U_0)$, где b_0 (пФ) и b_1 (пФ/В) — известные числовые коэффициенты. К варактору приложено напряжение $u = U_0 + U_m \cos \omega_0 t$. Получите формулу, описывающую ток $i(t)$ через варактор.

12.11(УО). Дифференциальная емкость варактора описана выражением $C_{диф}(u) = b_0 + b_1(u - U_0) + b_2(u - U_0)^2$. К зажимам варактора приложено напряжение $u = U_0 + U_m \cos \omega_0 t$. Вычислите амплитуду I_3 третьей гармоники тока через варактор, если $f_0 = 10$ ГГц, $U_m = 1.5$ В, $b_2 = 0.16$ пФ/В².

12.12(О). Варактор имеет параметры: $b_0 = 4$ пФ, $b_2 = 0.25$ пФ/В². К варактору приложено высокочастотное напряжение с амплитудой $U_m = 0.4$ В. Определите, во сколько раз возрастет амплитуда первой гармоники тока I_1 , если величина U_m станет равной 3 В.

12.13(УО). Емкость параметрического конденсатора изменяется во времени по закону $C(t) = C_0 \exp(-t/\tau) \sigma(t)$, где C_0 , τ — постоянные величины. К конденсатору подключен источник линейно нарастающего напряжения $u(t) = at \sigma(t)$. Вычислите закон изменения во времени тока $i(t)$ в конденсаторе.

12.14(УО). Применительно к условиям задачи 12.13 найдите момент времени t_1 , в который мгновенная мощность, потребляемая конденсатором из источника сигнала, максимальна, а также момент времени t_2 , в который максимальной оказывается мощность, отдаваемая конденсатором во внешние цепи.

12.15(Р). Одноконтурный параметрический усилитель подключен со стороны входа к источнику ЭДС (генератору) с внут-

режимом сопротивлением $R_c = 560 \text{ Ом}$. Усилитель работает на резистивную нагрузку с сопротивлением $R_n = 400 \text{ Ом}$. Найдите величину вносимой проводимости $G_{вн}$, которая обеспечивает коэффициент усиления мощности $K_p = 25 \text{ дБ}$.

12.16(О). Для параметрического усилителя, описанного в задаче 12.15, найдите критическую величину вносимой проводимости $G_{вн,кр}$, при которой система оказывается на пороге самовозбуждения.

12.17(УО). К зажимам управляемого параметрического конденсатора приложено напряжение сигнала $u(t) = U_m \cos(\omega_c t + \pi/3)$. Емкость конденсатора изменяется во времени по закону $C(t) = C_0 [1 + \beta \cos(2\omega_c t + \varphi_\kappa)]$, где φ_κ — начальный фазовый угол колебания накачки. Выберите наименьшее по модулю значение φ_κ , которое обеспечивает нулевое значение вносимой проводимости.

12.18(О). Применительно к условиям задачи 12.17 для значений параметров $C_0 = 0.3 \text{ пФ}$, $\beta = 0.25$ и $\omega_c = 2\pi \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ вычислите наибольшее по модулю значение отрицательной проводимости $G_{вн,макс}$, а также наименьший по модулю фазовый угол φ_κ , обеспечивающий такой режим.

12.19(Р). Двухконтурный параметрический усилитель предназначен для работы на частоте $f_c = 2 \text{ ГГц}$. Холостая частота усилителя $f_{хол} = 0.5 \text{ ГГц}$. Использованный в усилителе варактор изменяет свою емкость (пФ) с частотой накачки ω_n по закону $C(t) = 2(1 + 0.15 \cos \omega_n t)$. Источник сигнала и устройство нагрузки имеют одинаковые активные проводимости $G_r = G_n = 2 \cdot 10^{-3} \text{ См}$. Вычислите величину резонансного сопротивления холостого контура $R_{рез,хол}$, при котором в усилителе возникает самовозбуждение.

Тема 13

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

● Синтез пассивных двухполюсников

13.1(УО). Среди функций, описывающих входную проводимость двухполюсника:

$$\text{а) } Y_1(p) = \frac{p(p^2 + 0.25)}{p^2 + 16},$$

$$\text{б) } Y_2(p) = \frac{p^2 + 9}{(p^2 + 1)(p^2 + 25)},$$

$$в) Y_3(p) = \frac{p(p^2 + 1.44)}{(p^2 + 0.81)(p^2 + 2.56)}$$

$$г) Y_4(p) = \frac{p(p^2 + 2p + 0.5)}{(p^2 + 4)(p^2 + 6)}$$

найдите ту, которая отвечает физически реализуемой LC -цепи.

13.2(УР). Синтезируйте двухполюсник, имеющий входное сопротивление (Ом)

$$Z(p) = \frac{16p^3 + 4p}{(2p^2 + 1)(6p^3 + 1)}$$

13.3(УО). Осуществите синтез двухполюсника с входным сопротивлением (Ом)

$$Z(p) = \frac{3 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-6}p + 1}$$

13.4(О). Получите аналитическое выражение входного сопротивления последовательного LC -контура. На его основе синтезируйте цепь с входным сопротивлением (Ом)

$$Z(p) = \frac{8 \cdot 10^{-12}p^2 + 10^4}{4 \cdot 10^{-6}p}$$

13.5(УО). Проведите синтез двухполюсника по заданному входному сопротивлению (Ом)

$$Z(p) = \frac{6 \cdot 10^{-10}p^2 + 1.2 \cdot 10^{-3}p + 1}{3 \cdot 10^{-7}p}$$

13.6(О). Выведите формулу, описывающую входное сопротивление параллельного LC -контура. Используя ее, синтезируйте цепь, имеющую входное сопротивление (Ом)

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-2}p}{1.5 \cdot 10^{-11}p^2 + 10^3}$$

13.7(УО). Найдите схему двухполюсника, имеющего входное сопротивление (Ом)

$$Z(p) = \frac{1.5 \cdot 10^{-7}p^2 + 2.5 \cdot 10^{-4}p + 300}{5 \cdot 10^{-10}p^2 + 1}$$

13.8(УО). Осуществите синтез двухполосника по заданному входному сопротивлению (Ом)

$$Z(p) = \frac{1.225 \cdot 10^{-9} p^2 + 1.05 \cdot 10^{-2} p}{3.5 \cdot 10^{-5} p + 1.5 \cdot 10^3}$$

13.9(Р). Используя метод Кауэра, проведите синтез двухполосника с входным сопротивлением (Ом)

$$Z(p) = \frac{8p^3 + 4p}{3p^2 + 1}$$

13.18(О). Синтезируйте схему двухполосника, входное сопротивление которого указано в задаче 13.9, таким образом, чтобы первым элементом служила последовательно включенная индуктивная катушка с индуктивностью 2 Гн.

13.11(УО). Осуществите синтез цепи со входной проводимостью (См)

$$Y(p) = \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)}$$

13.12(УО). Синтезируйте двухполосник, обладающий входным сопротивлением (Ом)

$$Z(p) = \frac{10^{-6} p + 2}{10^{-9} p + 10^{-3}}$$

13.13(О). Найдите схему цепи, входное сопротивление (Ом) которой описывается формулой

$$Z(p) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-9} p} + \frac{1}{3 \cdot 10^{-6} p + 1/(0.125 p)}$$

13.14(О). Найдите схему цепи, имеющей входную проводимость (См)

$$Y(p) = 6 \cdot 10^{-10} p + \frac{1}{6 \cdot 10^{-7} p + \frac{1}{1.3 \cdot 10^{-9} p + \frac{1}{8.5 \cdot 10^{-7} p}}}$$

● Синтез фильтров нижних частот

13.15(Р). Линейный стационарный четырехполюсник имеет частотный коэффициент передачи мощности

$$K_p(\omega_n) = \frac{1}{1 + \omega_n^2 + 0.5\omega_n^4}$$

Вычислите передаточную функцию $K(p_n)$ данного четырехполюсника, зависящую от нормированной частотной переменной $p_n = j\omega_n$.

13.16(УО). Вычислите передаточную функцию четырехполюсника, имеющего следующую зависимость частотного коэффициента передачи мощности от нормированной частоты ω_n :

$$K_p(\omega_n) = \frac{\omega_n^2}{1 + \omega_n^4}$$

13.17(Р). Фильтр с частотной характеристикой максимально плоского типа второго порядка имеет частоту среза $f_c = 15$ кГц и коэффициент передачи на нулевой частоте $K_0 = 0.92$. Ко входу фильтра подключен источник гармонического сигнала с амплитудой $U_{\text{вх}} = 7.5$ В и частотой 41 кГц. Определите величину $U_{\text{вых}}$ — амплитуду сигнала на выходе фильтра.

13.18(Р). Покажите, что RC -цепь, нагруженная на резистор R_n (рис. 1.13.1), имеет передаточную функцию по напряжению, соответствующую ФНЧ с максимально плоской характеристикой первого порядка. Подберите параметры R и C фильтра таким образом, чтобы при $R_n = 2$ кОм получить значение частоты среза $\omega_c = 3 \cdot 10^5$ с⁻¹.

13.19(О). Покажите, что RL -цепь (рис. 1.13.2) имеет передаточную функцию $K(p)$ по напряжению, соответствующую ФНЧ первого порядка с максимально плоской характеристикой при заданной частоте среза. Найдите величину L , если $R_n = 450$ Ом, $\omega_c = 2.8 \cdot 10^3$ с⁻¹.

13.20(УО). Найдите передаточную функцию $K(p_n)$ фильтра нижних частот четвертого порядка с характеристикой Баттервор-

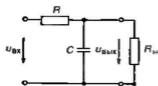


Рис. 1.13.1

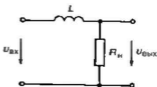


Рис. 1.13.2

та. Коэффициент передачи фильтра на нулевой частоте должен быть равен 25.

13.21(УО). Вычислите координаты полюсов передаточной функции ФНЧ с максимально плоской характеристикой пятого порядка, имеющего частоту среза 30 кГц.

13.22(О). Фильтр нижних частот с максимально плоской частотной характеристикой передачи мощности вносит ослабление $\Delta_1 = -8.426$ дБ на частоте $\omega_1 = 10^4$ с⁻¹ и ослабление $\Delta_2 = -45.923$ дБ на частоте $\omega_2 = 3 \cdot 10^4$ с⁻¹. Вычислите частоту среза фильтра ω_c и его порядок n .

13.23(УО). Найдите наименьший порядок n_{\min} фильтра нижних частот с максимально плоской характеристикой, исходя из того, чтобы при изменении частоты от ω_c до $2\omega_c$ усиление фильтра изменялось бы не менее чем на 15 дБ.

13.24(Р). Схема ФНЧ, работающего от источника ЭДС на резистивную нагрузку R_n , представлена на рис. I.13.3. Определите номиналы элементов L и C таким образом, чтобы данная цепь обладала частотным коэффициентом передачи по напряжению, отвечающим характеристике Баттерворта второго порядка. Заданы частота среза фильтра $\omega_c = 7.5 \cdot 10^4$ с⁻¹ и сопротивление нагрузки $R_n = 1.2$ кОм.

13.25(Р). Выведите формулу для расчета ФЧХ фильтра нижних частот с характеристикой типа Баттерворта второго порядка. В качестве независимой переменной используйте нормированную частоту ω_n .

13.26(О). Найдите выражение, определяющее ФЧХ фильтра нижних частот с максимально плоской характеристикой третьего порядка. Каково предельно возможное значение фазового угла, вносимого данным фильтром при $\omega_n \rightarrow \infty$?

13.27(УО). ФНЧ с характеристикой Баттерворта первого порядка имеет частоту среза 85 кГц. Для данного фильтра определите групповое время запаздывания $T_{гр}$ узкополосного сигнала с центральной частотой спектра 40 кГц. Решите эту же задачу применительно к фильтру третьего порядка с аналогичными параметрами.

13.28(Р). Выберите коэффициент ϵ , входящий в выражение частотной характеристики передачи мощности чебышевским ФНЧ n -го порядка таким образом, чтобы в пределах полосы пропускания неравномерность частотной характеристики не превосходила 2 дБ.

13.29(УО). На плоскости нормированной комплексной частоты p_n определите координаты полюсов переда-

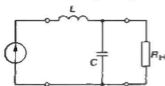


Рис. I.13.3

точной функции $K(p_n)$ для ФНЧ третьего порядка с характеристикой чебышевского типа, имеющей неравномерность коэффициента передачи мощности в полосе пропускания, равную 2 дБ.

13.30(О). Применительно к условиям задачи 13.29 вычислите передаточную функцию $K(p_n)$ рассматриваемого фильтра.

13.31(У). На языке Pascal составьте программу расчета частотного коэффициента передачи мощности $K_p(\omega_n)$ чебышевского ФНЧ третьего порядка с некоторым заданным шагом δ по переменной ω_n . Положите, что заданным является безразмерный параметр ϵ — коэффициент неравномерности частотной характеристики фильтра в пределах полосы пропускания.

Тема 14

АКТИВНЫЕ ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

● Цепи и системы с обратной связью

14.1(Р). Получите формулу для расчета коэффициента усиления по напряжению $K_U = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$ в схеме эмиттерного повторителя (рис. 1.14.1) (в задачах 14.1 — 14.3 имеются в виду малые приращения напряжений на входе и выходе).

14.2(УО). В эмиттерном повторителе (рис. 1.14.1) применен транзистор с дифференциальной крутизной проходной характеристики $S = di_x/di_{c0} = 7$ мА/В. Сопротивление резистора нагрузки $R_n = 3$ кОм. Вычислите коэффициент усиления данного устройства по напряжению. Определите, при каком направлении $u_{\text{вх}}$ на входе цепи величина напряжения $u_{c0} = 0.15$ В.

14.3(УР). Одноступенчатый транзисторный усилитель (рис. 1.14.2) содержит резистор нагрузки R_n и резистор обратной связи R_{oc} . Полагая известной крутизну S проходной характеристики транзистора $i_x = f(u_{c0})$ в окрестности выбранной рабочей точки, выведите формулу для расчета коэффициента усиления $K_U = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$. Найдите параметр β , определяющий коэффициент передачи цепи обратной связи.

14.4(УО). Структурная схема системы с двухпетлевой обратной связью изображена на рис. 1.14.3. Найдите передаточную функцию $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$.

14.5(УР). Активный RC-фильтр (рис. 1.14.1) содержит усилитель с вещественным и положительным коэффициентом усиления по напряжению K_0 . Входное сопротивление усилителя бесконечно велико, а выходное сопротивление равно нулю.

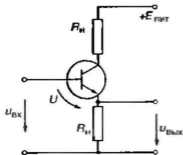


Рис. I.14.1

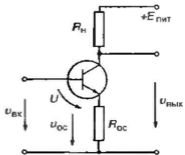


Рис. I.14.2

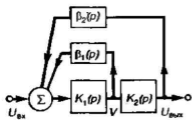


Рис. I.14.3

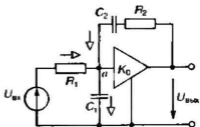


Рис. I.14.4

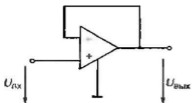


Рис. I.14.5

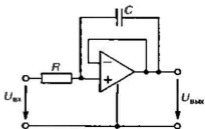


Рис. I.14.6

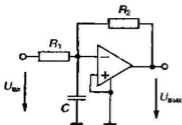


Рис. I. 14.7

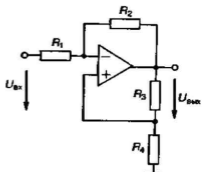


Рис. I.14.8

Выведите формулы, определяющие передаточную функцию $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$, а также АЧХ данного устройства. Найдите критическое значение коэффициента усиления $K_{0\text{кр}}$, при котором система теряет устойчивость. Положив $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$, $K_0 = 2,95$, постройте график нормированной АЧХ $|K(j\xi)|/K_0$, выбрав в качестве независимой переменной безразмерную величину $\xi = \omega RC$.

14.6(Р). Найдите передаточную функцию $K(p)$ активной цепи, схема которой изображена на рис. I.14.5. Входящий в цепь идеальный усилитель имеет постоянный на всех частотах коэффициент усиления K_0 .

14.7(УО). Решите задачу 14.6, предполагая, что передаточная функция операционного усиления (ОУ) описывается выражением

$$K_{\text{ОУ}}(p) = \frac{K_0}{1 + p\tau_{\text{ОУ}}}$$

где $\tau_{\text{ОУ}}$ — постоянная времени ОУ, определяющая ширину полосы пропускания усилителя, не охваченного цепями обратной связи. Вычислите граничную частоту $\omega_{\text{гр}}$ рассматриваемого устройства, определив ее как ту частоту, на которой модуль коэффициента передачи по напряжению уменьшается до значения 0.707 от максимальной величины, достигаемой на нулевой частоте.

14.8(УО). Активная цепь (рис. I.14.6) содержит ОУ с вещественным, не зависящим от частоты коэффициентом усиления K_0 . Получите выражение для передаточной функции $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$ данной системы.

14.9(О). Цепь (рис. I.14.7) содержит ОУ с бесконечно большим входным и нулевым выходным сопротивлением. Коэффициент усиления K_0 постоянен на всех частотах. Найдите передаточную функцию системы $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$.

14.10(УО). Вычислите передаточную функцию $K(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p)$ системы, принципиальная схема которой изображена на рис. I.14.8. Входящий в цепь идеальный ОУ на всех частотах имеет бесконечно большой вещественный коэффициент усиления. Определите, при каком наименьшем сопротивлении резистора R_4 система становится неустойчивой, если $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 5$ кОм, $R_3 = 15$ кОм.

● Устойчивость цепей с обратной связью

14.11(Р). С помощью критерия Найквиста исследуйте устойчивость замкнутого контура из трех идентичных усилителей, каждый из которых имеет передаточную функцию

$$K(p) = \frac{-K_0}{1+p\tau}$$

где K_0 , τ — заданные числа.

14.12(О). Решите предыдущую задачу для случая, когда имеется каскадное соединение нечетного числа $n > 3$ идентичных усилительных звеньев. Получите формулу для расчета $K_{\text{кр}}$ — критического значения коэффициента усиления по напряжению одного звена на нулевой частоте, при которой происходит самовозбуждение замкнутой системы.

14.13(О). Напишите уравнение амплитудно-фазовой характеристики для одноступенчатого усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой, у которого вход соединен с выходом посредством идеальной линии задержки на T_0 секунд. Выведите формулу для расчета $K_{\text{кр}}$ — критического значения коэффициента усиления на нулевой частоте.

14.14(О). Одноступенчатый усилитель (см. задачу 14.13) имеет параметры: $S = 15$ мА/В, $R_n = 1.3$ кОм, $C_n = 60$ пФ. Вход усилителя соединен с выходом посредством идеальной линии задержки с параметром T_0 . Пренебрегая влиянием выходного сопротивления электронного прибора, определите критическое значение $T_{\text{кр}}$, при котором система оказывается на границе устойчивости.

14.15(УО). Двухступенчатый усилитель с одинаковыми звеньями имеет передаточную функцию по напряжению

$$K(p) = \frac{K_0^2}{(1+p\tau)^2}$$

Вход усилителя соединен с его выходом через дифференцирующую цепь с передаточной функцией

$$\beta(p) = \frac{p\tau}{1+p\tau}$$

Найдите критическое значение $K_{\text{кр}}$ параметра K_0 .

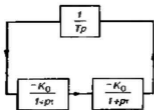


Рис. 1.14.9

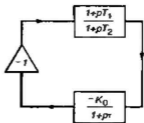


Рис. 1.14.10

14.16(О). Решите предыдущую задачу при условии, что

$$\beta(p) = \frac{pT}{1+pT},$$

где $T=0.1 \tau$.

14.17(УО). Исследуйте устойчивость замкнутой системы (рис. 1.14.9), в которой каскадное соединение двух идентичных усилительных звеньев с апериодическими нагрузками замкнуто через идеальный интегратор, имеющий передаточную функцию $\beta(p) = 1/(Tp)$, где T — постоянный параметр.

14.18(О). Исследуйте зависимость устойчивости замкнутой системы (рис. 1.14.10) от величины коэффициента усиления K_0 .

● Автогенераторы гармонических колебаний

14.19(Р). Схема RC-генератора гармонических колебаний приведена на рис. 1.14.11. Найдите коэффициент усиления K_0 активного звена, при котором происходит самовозбуждение системы, если $R_1 = R_3 = 3.6 \text{ кОм}$, $C_1 = 0.15 \text{ мкФ}$, $C_2 = 0.05 \text{ мкФ}$. Определите значение генерируемой частоты $\omega_{\text{ген}}$.

14.20(УО). Автогенератор собран по схеме с трансформаторной связью (рис. 1.14.12). Параметры системы: $L = 16 \text{ мкГн}$, $L_{\text{св}} = 3 \text{ мкГн}$, $C = 90 \text{ пФ}$, $R = 25 \text{ Ом}$. Дифференциальная крутизна проходной характеристики транзистора в выбранной рабочей точке $S_{\text{диф}} = 1.4 \text{ мА/В}$. Найдите коэффициент связи $k_{\text{св}}$ между катушками автогенератора, при котором возникает самовозбуждение данного устройства.

14.21(О). Туннельный диод вместе с источником смещения подключен к колебательному контуру (рис. 1.14.13). Дифференциальная крутизна ВАХ диода в рабочей точке $S_{\text{диф}} = -5 \text{ мА/В}$. Резонансное сопротивление контура при полном включении $R_{\text{рез}} = 32 \text{ кОм}$. Определите, при каком минимальном значении

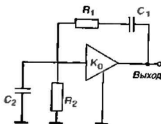


Рис. 1.14.11

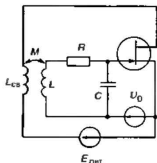


Рис. 1.14.12

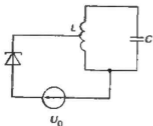


Рис. 1.14.13

коэффициента включения $k_{\text{вкл}}$ активного элемента в контур возникает самовозбуждение системы.

14.22(УО). Нелинейный двухполосник имеет ВАХ кусочно-линейного вида со следующими параметрами: $U_{\text{н}} = 0.8$ В, $S = 45$ мА/В. Вычислите среднюю крутизну характеристики данного элемента для случая, когда к зажимам двухполосника приложено напряжение (В) $u(t) = 0.55 + 1.2 \cos \omega t$.

14.23(Р). В автогенераторе с трансформаторной связью применен электронный прибор, у которого зависимость средней крутизны S_1 (мА/В) от управляющего напряжения U (В) аппроксимирована многочленом 2-й степени:

$$S_1(U) = a_1 + 3/4 a_3 U^2,$$

где $a_1 = 1$ мА/В, $a_3 = -2.5$ мА/В³. Колебательный контур генератора имеет параметры: $\omega_0 = 6 \cdot 10^8$ с⁻¹, $Q = 25$. Определите, при каком минимальном значении коэффициента взаимной индукции $M_{\text{мин}}$ в системе возникнут автоколебания. Вычислите амплитуду $U_{\text{ст}}$ в стационарном режиме, если $M = 3M_{\text{мин}}$.

14.24(О). Автогенератор содержит электронный прибор с характеристикой средней крутизны (мА/В) следующего вида:

$$S_1(U) = 4 + 0.3U^2 - 0.12U^4,$$

где U — амплитуда управляющего напряжения (В). Известно, что некоторый стационарный режим характеризуется амплитудой $U_{\text{ст}} = 1.5$ В. Определите, устойчив ли этот режим.

Тема 15

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ. ПРИНЦИПЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

● Спектры дискретных сигналов. Дискретное преобразование Фурье

15.1(О). Аналоговый сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный верхней граничной частотой $f_{\text{н}} = 7.5$ МГц. В некотором устройстве обработки (например, в осциллографе с памятью) проводится запись отрезка такого сигнала длительностью $T = 60$ мкс. Устройство осуществляет дискретизацию колебания

таким образом, что длительность интервала между выборками в 4 раза короче того значения, которое устанавливает теорема Котельникова. Каждое выборочное значение отображается 8-битовым двоичным числом. Определите величину N — объем памяти (бит), требуемой для записи данного отрезка сигнала.

15.2(УР). Сигнал $\xi(t)$ представляет собой бесконечную периодическую последовательность прямоугольных видеопульсов единичной амплитуды. Период последовательности равен Δ , длительность одного импульса составляет τ . Вычислите спектральную плотность $S_{\xi}(\omega)$ данной последовательности.

15.3(УО). Вычислите спектральную плотность $S_{x_d}(\omega)$ дискретного сигнала $x_d(t)$, который возникает при дискретизации непрерывного колебания $x(t)$ с помощью последовательности $\xi(t)$, рассмотренной в задаче 15.2. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ сигнала $x(t)$ предполагается известной. Постройте примерный график модуля функции $S_{x_d}(\omega)$.

15.4(О). Экспоненциальный видеопульс $u(t) = U_0 \exp \times \times (-at) \sigma(t)$ дискретизируется во времени с шагом Δ . Выберите величину Δ таким образом, чтобы на граничной частоте $\omega_{гп} = \pi/\Delta$ модуль спектральной плотности $S_u(\omega_{гп})$ уменьшался до уровня $0.01 S_u(0)$.

15.5(УО). Применительно к условиям задачи 15.4 вычислите величину $S_1(0)$ — вклад в спектральную плотность дискретизированного сигнала на нулевой частоте, который вносится ближайшими «копиями» спектра исходного колебания, имеющими центральные частоты $\pm 2\pi/\Delta$.

15.6(Р). Оцените величину $S_{доп}(0)$ — дополнительный вклад в спектральную плотность на нулевой частоте для дискретизированного сигнала, описанного в задачах 15.4 и 15.5, который вносится всей бесконечной совокупностью «копий» спектра исходного аналогового сигнала.

15.7(О). Периодический дискретный сигнал $x_d(t)$ на интервале своей периодичности задан пятью равноотстоящими отсчетами (0.25, 0.8, 1, -1.5, -0.2). Вычислите постоянную составляющую S_0 дискретного преобразования Фурье данного сигнала.

15.8(У). Докажите, что если все N отсчетов дискретного сигнала, заданные на интервале периодичности, равны между собой, то все коэффициенты ДПФ такого сигнала, за исключением S_0 , равны нулю.

15.9(Р). Периодическая последовательность прямоугольных видеопульсов с амплитудой U_0 , периодом T и длительностью отдельного импульса $T/3$ дискретизована таким образом, что на один период последовательности приходится N отсчетов. Вычис-

лите величины коэффициента C_1 в ДПФ данного сигнала при $N=8$ и при $N=32$.

15.10(Р). Вычислите коэффициенты ДПФ C_n ($n=0, 1, 2$) дискретного периодического сигнала $x_n(t)$, заданного тремя отсчетами $(0, 10, 20)$.

15.11(У). Покажите, что коэффициент C_3 ДПФ сигнала, рассмотренного в задаче 15.10, в точности равен коэффициенту C_0 .

15.12(О). Дискретный периодический сигнал $x_n(t)$ задан четырьмя отсчетами $(1, 0, -1, 0)$. Вычислите коэффициенты ДПФ C_n ($n=0, 1, 2, 3$).

15.13(УО). Получите выражение периодического аналогового сигнала $x(t)$, каждому периоду которого отвечает дискретный сигнал, состоящий из четырех равноотстоящих выборок $(1, 0, -0.5, 0)$.

15.14(УО). Восстановите аналоговый сигнал $x(t)$ по коэффициентам ДПФ, вычисленным в задаче 15.12. Убедитесь, что значения сигнала $x(t)$ в отсчетных точках совпадают со значениями дискретного сигнала. Предполагайте, что период T сигнала задан.

15.15(Р). На алгоритмическом языке Pascal напишите текст программы для расчета коэффициентов ДПФ. Исходные данные заключены в массиве вещественных отсчетов сигнала $\{x_i\}$ ($i=0, \dots, N-1$) длиной N . Предусмотрите вывод на экран вещественной и мнимой частей коэффициентов ДПФ.

15.16(Р). Имеется дискретный периодический сигнал, отсчеты которого на интервале периодичности образуют шестикомпонентный вектор

$$X = (1.5, 4, 5, 3.5, 7, -4).$$

Используя средства математической системы MathCAD, найдите вектор Y , являющийся быстрым преобразованием Фурье (БПФ) исходного вектора X . Осуществите проверку полученного результата, выполнив обратное преобразование вектора Y .

● Теория z -преобразования. Дискретная свертка

15.17(УО). Получите формулу z -преобразования $X(z)$ дискретной ступенчатой функции $\{x_k\}$, общий член которой задан выражением

$$x_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

15.18(О). Найдите z -преобразование $X(z)$ дискретного сигнала $\{x_k\}$, имеющего общий член $x_n = a^n$, $n=0, 1, 2, \dots$

15.19(О). Получите формулу, описывающую z -преобразование $X(z)$ дискретного сигнала $\{x_k\}$ с общим членом $x_n = a^n/n!$ при $n \geq 0$.

15.20(Р). Найдите дискретный сигнал $\{x_n\}$, которому отвечает z -преобразование

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}}.$$

15.21(О). Вычислите седьмой член x_6 дискретной последовательности $\{x_n\}$, z -преобразование которой

$$X(z) = 25/(1 - 0.9z^{-1}).$$

15.22(УО). Задано z -преобразование

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.6z^{-1})}.$$

Найдите общий член x_n последовательности $\{x_n\}$.

15.23(Р). Найдите дискретный сигнал $\{x_n\}$, z -преобразование которого $X(z) = z^{-2}$.

15.24(О). Вычислите z -преобразование $F(z)$ свертки $\{f_n\}$ дискретных сигналов $\{x_n\} = (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$ и $\{y_n\} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

15.25(УО). Получите выражение свертки $\{f_n\}$ двух сигналов, рассмотренных в задаче 15.24.

15.26(Р). Путем непосредственного вычисления найдите свертку $\{f_n\}$ дискретных сигналов $\{x_n\} = (15, 15, 7, 5, 3, 1, 0, \dots)$ и $\{y_n\} = (10, 5, 2, 1, 0, \dots)$.

● Линейные стационарные цифровые фильтры

15.27(Р). Трансверсальный (нерекурсивный) цифровой фильтр (ЦФ) работает в соответствии с алгоритмом $y_i = 4x_i - 2.5x_{i-1} + 0.8x_{i-2}$. Найдите импульсную характеристику $\{h_n\}$, системную функцию $H(z)$ и частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ этого фильтра.

15.28(О). Найдите частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ трансверсального цифрового фильтра второго порядка, имеющего алгоритм $y_i = x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}$. Исследуйте вид функции $K(j\omega)$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$.

15.29(У). Покажите, что трансверсальный ЦФ, алгоритм которого описывается разностным соотношением $y_i = x_i - 3x_{i-1} + 3x_{i-2} - x_{i-3}$, осуществляет приближенно трехкратное дифферен-

пирование относительно медленных входных сигналов, спектр которых содержит лишь частоты ω , удовлетворяющие неравенству $\omega\Delta \ll 1$.

15.30(Р). ЦФ имеет системную функцию

$$H(z) = \frac{2.5}{z - 0.6}$$

Вычислите импульсную характеристику $\{h_k\}$ данного фильтра.

15.31(УО). Некоторый ЦФ имеет следующий алгоритм:

$$y_i = x_{i-2} + 0.4y_{i-1} + 0.32y_{i-2}$$

Найдите системную функцию $H(z)$, частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ и импульсную характеристику $\{h_k\}$ фильтра.

15.32(Р). Найдите аналитическое выражение m -го члена в импульсной характеристике $\{h_k\}$ рекурсивного ЦФ, работающего в соответствии с алгоритмом

$$y_i = x_i + y_{i-1} - 0.5y_{i-2}$$

15.33(О). Цифровой фильтр имеет следующий алгоритм:

$$y_i = 1.5x_i + 4x_{i-1} - 0.85y_{i-1}$$

Фильтр работает с шагом дискретизации по времени $\Delta = 0.1$ мс. Найдите модуль $|K(j\omega)|$ и фазовый угол $\varphi_K(\omega)$ частотного коэффициента передачи фильтра на частоте $\omega = 2 \cdot 10^4$ с⁻¹.

15.34(О). Собственные колебания в рекурсивном ЦФ второго порядка описываются разностным уравнением

$$y_i = y_{i-1} - 0.5y_{i-2}$$

Исследуйте устойчивость данного фильтра.

15.35(УО). Аналоговый сигнал, поступающий на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), изменяется в пределах от 0 до 15 В. Для представления отсчетов этого сигнала в АЦП выделено восемь двоичных разрядов. Найдите величину шага квантования $q_{\text{кв}}$, а также дисперсию $\sigma_{\text{ш}}^2$ шума квантования.

15.36(УО). Шум квантования, рассмотренный в задаче 15.35, поступает на вход рекурсивного ЦФ первого порядка. Фильтр преобразует последовательность входных отсчетов $\{x_k\}$ в последовательность $\{y_k\}$ отсчетов на выходе в соответствии с алгоритмом $y_i = 0.9y_{i-1} + x_i$. Найдите дисперсию $\sigma_{\text{шк}}^2$ шума квантования на выходе фильтра.

15.37(Р). На алгоритмическом языке Pascal составьте программу, позволяющую рассчитывать импульсную характеристику рекурсивного ЦФ второго порядка. Фильтр работает в соответствии с алгоритмом

$$y_i = a_0 x_i + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2}.$$

Тема 16

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

● Оптимальная фильтрация сигнала известной формы

16.1(Р). На входе RC -цепи (рис. I.16.1) действуют два последовательно включенных источника ЭДС. Один из них создает белый шум с постоянным на всех частотах значением спектра мощности W_0 . Второй источник создает гармонический сигнал $U_{m \max} \cos \omega_0 t$, амплитуда и частота которого известны. Определите постоянную времени RC , при которой отношение сигнал/шум на выходе $Q = U_{m \max} / \sigma_{\max}$ окажется максимальным.

16.2(О). Применительно к условиям задачи 16.1 найдите максимально возможное отношение сигнал/шум на выходе RC -цепи. Объясните, почему эффективность работы данного фильтра ухудшается с ростом частоты ω_0 . Найдите амплитуду входного сигнала $U_{m \max}$, при которой $q_{\max} = 10$, если $\omega_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $W_0 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$.

16.3(О). Найдите максимальное значение отношения сигнал/шум Q_{\max} , которое достигается в оптимальном фильтре, согласованном с прямоугольным радиоимпульсом. Заданными являются плотность спектра мощности белого шума W_0 , а также амплитуда $U_{m \max}$ и длительность τ_x радиоимпульса.

16.4(Р). Одноконтурный резонансный усилитель имеет частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{-K_{\text{рез}}}{1 + j(\omega - \omega_{\text{рез}})\tau_x}.$$

На вход усилителя поступает сумма белого шума с плотностью спектра мощности W_0 и прямоугольного радиоимпульса, имеющего частоту заполнения $\omega_{\text{рез}}$, длительность τ_x и амплитуду $U_{m \max}$. Определите предельно достижимое значение $Q_{\text{рез}}$ отношения сигнал/шум в данном усилителе.

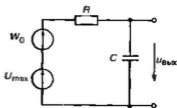


Рис. I.16.1

Получите формулу для расчета оптимальной добротности $Q_{\text{опт}}$ колебательного контура усилителя.

16.5(УО). Получите выражения частотного коэффициента передачи $K_{\text{опт}}(j\omega)$ и импульсной характеристики $h(t)$ оптимального линейного фильтра, согласованного с треугольным видеосигналом

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ At/t_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

16.6(О). Линейный фильтр согласован с треугольным видеосигналом (см. задачу 16.5). Параметры входного сигнала: $t_0 = 15$ мкс, $A = 25$ мкВ. Найдите максимальное значение $s_{\text{вх}} \text{ макс}$ сигнала на выходе системы при условии, что фильтр имеет параметр $B = 10^{15} \text{ В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$.

16.7(О). Сигнал $s_{\text{вх}}(t)$, выделяемый согласованным фильтром из аддитивной смеси с белым гауссовым шумом, представляет собой пачку радиоимпульсов с амплитудой $U_0 = 3$ мкВ и длительностью $\tau_{\text{и}} = 2$ мкс каждый. Плотность спектра мощности белого шума $W_0 = 1.5 \cdot 10^{-17} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$. Определите, при каком числе импульсов в пачке N отношение сигнал/шум на выходе достигнет десяти.

16.8(УО). Полезный сигнал представляет собой ЛЧМ-импульс с огибающей прямоугольной формы. Импульс имеет длительность $\tau_{\text{и}} = 8$ мкс и девиацию частоты $\Delta f = 3.5$ МГц. Для выделения данного сигнала из смеси с нормальным белым шумом применен согласованный фильтр. Найдите длительность основного лепестка $\tau_{\text{вх}}$ сигнала на выходе согласованного фильтра.

16.9(Р). Найдите частотный коэффициент передачи $K_{\text{опт}}(j\omega)$ оптимального линейного фильтра, обеспечивающего на своем выходе максимально возможное отношение сигнал/шум при обработке сигнала известной формы с заданной спектральной плотностью на фоне небелого шума, у которого известен спектр мощности $W(\omega)$.

● Оптимальная фильтрация случайных сигналов

16.10(УО). Случайный процесс $U(t)$ (полезный сигнал) имеет нулевое математическое ожидание и функцию корреляции $R_{\text{и}}(\tau) = \sigma_u^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Помеха $V(t)$ представляет собой нормальный стационарный случайный процесс с нулевым математическим

ким ожиданием и функцией корреляции $R_u(\tau) = \sigma_u^2 \exp(-\beta|\tau|)$. Получите выражение АЧХ оптимального фильтра, выделяющего сигнал $U(t)$ из смеси $U(t) + V(t)$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой.

16.11(О). Выделяемый случайный процесс $U(t)$ имеет двусторонний спектр мощности $W_u(\omega)$, плотность которого равна постоянной величине A в пределах интервала частот $(-\omega_c, \omega_c)$. На остальных частотах величина $W_u(\omega)$ равна нулю. Помеха $V(t)$ имеет вид белого шума с постоянным параметром W_0 . Получите формулу для расчета минимально возможной дисперсии $\sigma_{\text{сгмн}}^2$ ошибки выделения сигнала $U(t)$ из аддитивной смеси $U(t) + V(t)$.

16.12(О). Применительно к постановке задачи 16.11 покажите, что при $A \gg W_0$ минимальная дисперсия ошибки, реализуемая оптимальным фильтром, не зависит от уровня спектра мощности полезного сигнала. Найдите для этих условий величину $\sigma_{\text{сгмн}}^2$, если $\omega_c = 6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $W_0 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$.

16.13(УО). Найдите минимально возможную дисперсию ошибки выделения стационарного случайного процесса $U(t)$ с функцией корреляции $R_u(\tau) = \sigma_u^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ из аддитивной смеси с гауссовым стационарным белым шумом $V(t)$, который имеет плотность спектра мощности W_0 .

16.14(О). Получите числовое значение дисперсии $\sigma_{\text{сгмн}}^2$ для случая оптимальной фильтрации сигналов, рассмотренных в задаче 16.13, при следующих числовых данных: $W_0 = 10^{-12} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$, $\sigma_u^2 = 0.02 \text{ В}^2$, $\alpha = 10^6 \text{ с}^{-1}$.

16.15(Р). Ко входу линейного стационарного фильтра приложена сумма напряжений полезного сигнала $u(t)$ и помехи $v(t)$, которые являются реализациями стационарных нормальных случайных процессов $U(t)$ и $V(t)$ соответственно. Известно, что полезный случайный процесс $U(t)$ имеет функцию корреляции $R_u(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \cos \omega_0 t$ с заданными значениями дисперсии σ^2 , а также параметров α и ω_0 . Случайный процесс помехи $V(t)$ является дельта-коррелированным процессом вида белого шума, характеризующимся постоянным на всех частотах значением спектральной плотности мощности W_0 . Получите формулу, описывающую частотную зависимость величины $|K_{\text{сгт}}(j\omega)|$ — модуля частотного коэффициента передачи фильтра, который обеспечивает минимум среднеквадратичной ошибки выделения полезного сигнала из аддитивной смеси с помехой при условии, что выполняется неравенство $\omega_0 \gg \alpha$. Исследуйте вопрос о физической реализуемости данного фильтра.

● Оценка информационных параметров радиоканала

16.16(УО). По некоторому каналу связи передается сообщение, представляющее собой слово «ИНФОРМАЦИЯ» на русском языке. Найдите количество информации, заключенной в этом сообщении.

16.17(УО). Оцените энтропию H источника сообщений, создающего осмысленный текст на русском языке.

16.18(О). Текстовая информация в компьютере записывается с помощью кода ASCII (American Standart Code for Information Interchange), в котором каждая буква естественного языка кодируется восьмиразрядным двоичным словом. Найдите объем информации, содержащейся в книге на русском языке из 100 страниц, закодированной подобным образом. Считайте, что страница состоит из 30 строк по 60 букв в каждой. Определите избыточность кодовой системы ASCII как отношение информационных объемов сообщения после и до кодирования.

16.19(О). Диктор читает одну страницу книжного текста (см. предыдущую задачу) за две минуты. Электрический сигнал на выходе микрофона лежит в интервале частот с верхней границей 6 кГц. Этот сигнал дискретизируется по времени в соответствии с минимальным требованием теоремы Котельникова, а затем каждый отсчет кодируется восьмибитовым двоичным словом. Вычислите объем информации, которая содержится в записи этого отрезка сигнала. Найдите избыточность описанного информационного преобразования.

16.20(Р). Проводной телефонный канал связи способен равномерно пропускать колебания в интервале частот $[0, 30 \text{ кГц}]$; на более высоких частотах коэффициент передачи канала полагается равным нулю. В канале присутствует белый шум, такой, что отношение средней мощности полезного сигнала к средней мощности шума составляет 35 дБ. Вычислите пропускную способность C рассматриваемого канала.

Указания

Тема 1

1.3. Обратите внимание на то, что вид аргументов функций Хевисайда должен отвечать наличию скачков сигнала при $t = -20, 20$ и 30 мкс.

1.12. Воспользуйтесь значением табличного интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ при } a > 0.$$

1.23. Примите во внимание известные свойства скалярного произведения двух сигналов.

1.24. Представьте квадраты норм в виде скалярных произведений.

1.26. Вычислите квадрат нормы суммы двух сигналов и воспользуйтесь неравенством Коши — Буняковского (см. задачу 1.25).

1.27. Вычислите скалярное произведение (u, v) .

1.28. См. указание к предыдущей задаче.

1.30. Обратите внимание на то, что полученные здесь функции $u_0(t)$, $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с точностью до постоянных коэффициентов совпадают с известными из математики многочленами Лежандра:

$$P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.31. Воспользуйтесь формулой для коэффициентов ряда Фурье.

1.32. Найдите выражение для квадрата нормы ошибки $\|f - z\|^2$. Приравняв нулю частные производные по A , B и C , получите систему линейных уравнений, определяющую искомые коэффициенты. Убедитесь, что полученное решение в точности совпадает с тем, которое получено в задаче 1.31 другим методом.

1.33. Воспользуйтесь формулой скалярного произведения комплексных сигналов.

1.34. Представьте дельта-функцию в виде формального ряда

$$\delta(t-t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t)$$

с неизвестными пока коэффициентами a_n . Умножьте скалярно обе части этого равенства на функцию $u_m(t)$ с производным номером m . Примите во внимание фильтрующее свойство дельта-функции.

1.37. Учтите, что амплитуды функций Уолша, заданных на отрезке $-1 \leq t \leq 1$, должны равняться $1/\sqrt{2}$.

Тема 2

2.2. Исходя из условий задачи, перейдите к интегрированию в бесконечных пределах.

2.7. Воспользуйтесь приемами, изложенными в решении задачи 2.1.

2.8. В общей формуле для коэффициентов C_n введите новую переменную $\xi = t - t_0$.

2.9. В подынтегральном выражении формулы, определяющей коэффициент C_n , разложите функцию $\exp(-jn\omega_1 t)$ по формуле Эйлера.

2.14. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2.13.

2.22. Примените интегрирование по частям.

2.23. Положите, что верхняя частота в спектре сигнала приближенно совпадает с границей основного лепестка графика зависимости модуля спектральной плотности сигнала от частоты, т. е. $f_{\text{верх}} = 1/\tau_n$, где τ_n — длительность прямоугольного видеопульса.

2.25. Используйте результат, полученный в задаче 2.24.

2.30. Вычислите преобразование Фурье путем интегрирования по частям. Полезно также решить эту задачу с помощью двукратного дифференцирования импульса (см. задачу 2.28).

2.31. Воспользуйтесь приближенным разложением в ряд Тейлора

$$e^{-j\omega\tau_n} \approx 1 - j\omega\tau_n - \frac{\omega^2\tau_n^2}{2}$$

и вычислите предел выражения $S(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$.

2.32. Сформированное в условиях задачи неравенство означает, что импульс является «коротким» в том смысле, что $\tau_n \ll 1/\omega$, где ω — характерное значение частоты в интересующей нас области.

2.33. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2.32, ограничившись учетом лишь момента M_0 .

2.34. Убедитесь, что дополнительное слагаемое, вносимое моментом M_2 , пренебрежимо мало по сравнению с тем, которое определяется моментом M_1 .

2.35. Воспользуйтесь методами теории вычетов, считая переменную ω комплексным числом. Обратите внимание на выбор контура интегрирования в плоскости ω .

2.36. Примените метод, изложенный в решении задачи 2.35.

2.37. Обратите внимание на то, что в точке $\omega = j\alpha$ подынтегральная функция обратного преобразования Фурье имеет полюс третьего порядка.

2.40. Воспользуйтесь теоремой о преобразовании Фурье произведения двух сигналов.

2.41. См. указания к задаче 2.40.

2.42. Выделите в сигнале $s(t)$ постоянную составляющую.

2.43. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2.41.

2.47. Обратите внимание на то, что при $t < 0$ одна из функций, входящих под знак интеграла свертки, не будет обладать положительным значением аргумента ни при каком значении переменной интегрирования.

2.48. Для двух возможных случаев $t > 0$ и $t < 0$ замкните контур интегрирования либо в левой, либо в правой части полуплоскости переменной p . Воспользуйтесь теорией вычетов.

2.50. Разложите изображение на простые дроби. Воспользуйтесь тем, что изображению $1/(p+a)$ отвечает оригинал $\exp(-at)$.

2.51. Разлагая изображение на простые дроби, выделите его целую часть, дополнив числитель до величины знаменателя, а затем вычтя прибавленное количество.

2.52. Предположите, что справедливо соответствие $1/(p+a)^n \doteq t^{n-1} e^{-at} / (n-1)!$ и воспользуйтесь методом математической индукции, применяя теорему об оригинале, который отвечает произведению двух изображений.

2.53. Воспользуйтесь свойством линейности преобразования Лапласа.

2.54. Решите задачу двумя способами: а) прямым вычислением преобразования Лапласа, б) путем представления данного колебания в виде разности двух сдвинутых во времени функций включения.

2.56. Воспользуйтесь теорией об изображении сигнала, смещенного во времени (см. формулу (2.62) из [1]).

Тема 3

3.1. Проверьте ответ, вычислив величину (u , v) во временной области.

3.2. Примените обобщенную формулу Рэлея.

3.3. Воспользуйтесь табличным интегралом

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\gamma^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\gamma} e^{-a\gamma}, \quad (a > 0, \gamma > 0).$$

3.6. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2.28.

3.8. Проведите интегрирование по частям.

3.10. Используйте результат, полученный в задаче 3.8. Воспользуйтесь тем, что при значениях аргумента $z \gg 1$ имеет место приближенное равенство

$$\text{Si}(z) \approx \pi/2 - \cos z/z.$$

3.11. См. указания к задаче 3.10.

3.12. Воспользуйтесь связью между энергетическим спектром сигнала и его автокорреляционной функцией.

3.14. Обратите внимание на четность автокорреляционной функции.

3.17. Для нахождения $\tau_{\text{кор}}$ составьте трансцендентное уравнение. Решите это уравнение методом последовательных приближений, используя микрокалькулятор (см. решение задачи 1.1).

3.18. Обратите внимание на то, что сигнал s_2 по сравнению с сигналом s_1 имеет существенно больший уровень боковых лепестков автокорреляционной функции.

3.20. Постройте совместно графики функций $u(t)$ и $v(t-\tau)$. Определите интервалы значений аргумента, в которых импульсы u и v «перекрываются».

3.21. Найдите взаимный энергетический спектр $W_{uv}(\omega)$, воспользовавшись формулой преобразования Фурье.

3.22. При выполнении операции сдвига дополните сигналы u и v нулями на «пустых» позициях слева и справа.

Тема 4

4.3. Примите во внимание, что $M_{\text{н}} = (U_{\text{max}} - U_0)/U_0$, $M_{\text{п}} = (U_0 - U_{\text{min}})/U_0$.

4.4. Коэффициент модуляции M определяется из системы двух равенств $U_{\text{max}} = U_0(1 + M)$; $U_{\text{min}} = U_0(1 - M)$.

4.5. Воспользуйтесь двумя соотношениями, которые вытекают из графика:

$$U_0(1+M) = U_{\max}; \quad U_0(1-M) = -U_{\min}.$$

4.7. Приблизительно положите, что ширина спектра огибающей радиоимпульсов ограничена шириной основного лепестка ее спектральной диаграммы.

4.10. Исходите из того, что если U_m — амплитуда напряжения на резистивной нагрузке, то активная мощность

$$P = U_m^2 / (2R).$$

4.15. Обратите внимание на то, что $m = 0.06 \ll 1$ и поэтому данный сигнал является узкополосным, содержащим лишь три спектральные составляющие.

4.17. Примите во внимание, что в данном случае $m \gg 1$. Воспользуйтесь приближенным выражением для расчета $\Pi_{\text{фронт}}$.

4.18. Воспользуйтесь тем, что наименьший корень уравнения $J_0(m) = 0$ равен 2.405.

4.19. Основывайтесь на том, что уравнение $J_1(m) = 0$ имеет наименьший корень 3.832.

4.20. Разложите функции $\cos(m \sin \Omega t)$ и $\sin(m \sin \Omega t)$ при $m \ll 1$ в ряды Тейлора. Ограничьтесь двумя членами каждого ряда.

4.21. Убедитесь, что здесь девятая частота мала по сравнению со значением несущей частоты и поэтому приращение $\Delta f_{\text{рез}}$ резонансной частоты контура связано с приращением емкости ΔC соотношением $\Delta f_{\text{рез}} = (df_{\text{рез}}/dC) \cdot \Delta C$ (производная вычисляется при $f = f_0$).

4.28. В данной задаче анализируется единственный, по-видимому, случай, когда спектральная плотность ЛЧМ-колебания явно выражается через элементарные функции.

При решении используйте значение табличного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin}{\cos}(px^2 + 2qx) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 + p^2}} \exp\left[-\frac{aq^2}{a^2 + p^2}\right] \frac{\sin}{\cos}\left[\frac{1}{2} \arctg \frac{p}{a} - \frac{pq^2}{a^2 + p^2}\right].$$

Тема 5

5.4. Воспользуйтесь принципом ортогональности системы базисных функций, входящих в ряд Котельникова.

5.5. Примите во внимание, что спектральные плотности сигналов $s_{\text{ос}}(t)$ и $s_{\text{ом}}(t)$ не «перекрываются» и поэтому данные сигналы взаимно ортогональны.

5.6. Отдельные слагаемые суммы $s = s_1 + s_2 + \dots$ представьте в виде $s_i(t) = \text{Re}(\vec{U}_i e^{j\omega_i t})$. Воспользуйтесь тем, что операции суммирования и вычисления вещественной части переставочны.

5.9. В качестве опорной частоты выберите частоту несущего колебания.

5.10. Воспользуйтесь формулой (5.35) из [1].

5.12. Примените формулу (5.36) из [1].

5.13. При вычислении преобразования Гильберта учтите, что здесь $\omega > 0$ и поэтому $\text{sgn } \omega = 1$.

5.15. Примите функцию $U_s(t)$ равной модулю аналитического сигнала $z_s(t)$.

5.19. Обратите внимание на то, что несимметрия графика $S(\omega)$ относительно точки ω_0 ведет к непостоянству во времени мгновенной частоты. Рассмотрите отдельные частные случаи: а) $S_1 = 0$, б) $S_2 = 0$, в) $S_1 = S_2$.

5.21. Примените обобщенную формулу Рэлея.

5.22. Используйте связь между спектральными плотностями сигналов, сопряженных по Гильберту. Примените обобщенную формулу Рэлея.

5.24. Примените результат, полученный в задаче 5.23.

5.25. Разложите подынтегральное выражение в преобразовании Гильберта на простые дроби.

5.26. Определите мгновенную частоту $\omega_s(t)$ как производную по времени от полной фазы $\psi_s(t) = \text{arctg}(\hat{s}/s)$. Воспользуйтесь правилом дифференцирования сложной функции.

5.27. Отдельно рассмотрите случаи: а) точка t находится вне интервала $(-t_0, t_0)$, б) $-t_0 < t < t_0$.

Тема 6

6.1. Воспользуйтесь правилом вычисления вероятности суммы несовместных событий.

6.2. Используйте правило умножения вероятностей.

6.3. См. указания к задаче 6.2.

6.4. Воспользуйтесь принципом определения эмпирической вероятности.

6.5. Составьте полную группу событий, отвечающих исправной работе системы. Примените правило вычисления вероятности группы несовместных событий.

6.6. Воспользуйтесь статистической независимостью входных напряжений. Составьте полную группу событий.

6.9. См. указания к задаче 6.6.

6.15. Отдельно рассмотрите случаи $0 \leq z \leq 1$ и $1 < z \leq 2$.

6.17. Непосредственно рассмотрите интеграл, описывающий средний квадрат данной случайной величины.

6.22. Воспользуйтесь табличным интегралом

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = n! \alpha^{-n-1}.$$

6.23. Примените свойство характеристической функции суммы независимых случайных величин.

6.27. Используйте принцип усреднения функции от случайной величины.

6.35. Воспользуйтесь выражением характеристической функции гауссовой случайной величины.

Тема 7

7.1. Убедитесь, что дисперсия $\sigma_x^2(t)$ явно зависит от времени.

7.3. Примените условие Слуцкого (см. формулу (6.47) из [1]).

7.4. Убедитесь, что \bar{x} и \bar{x}^2 не зависят от времени, если справедливы приведенные в задаче условия.

7.5. Обозначьте посредством σ_x^2 средние квадраты величин a и b .

7.6. См. указания к задаче 7.3.

7.8. Воспользуйтесь выражением спектральной плотности гармонического колебания.

7.15. Положите, что на частоте ω , спектр мощности уменьшается до уровня 0.9 от того значения, которое наблюдается на левей частоте.

7.17. Перейдите к одностороннему спектру мощности $F_x(\omega)$.

7.18. Используйте формулу (7.34) из [1], приняв во внимание, что здесь $r_x(\tau) = \sin \omega_s \tau / (\omega_c \tau)$.

7.19. Выразите дисперсию производной случайного процесса $X(t)$ через его односторонний спектр мощности.

7.26. Воспользуйтесь выражениями для моментов рэлеевской случайной величины.

7.27. Представьте огибающую в виде $U(t) = \sqrt{(U_m + A)^2 + B^2}$, где $A(t)$ и $B(t)$ — синфазная и квадратурная составляющие амплитуды случайного процесса.

Тема 8

8.1. Для составления системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику процессов в цепи, используйте метод узловых потенциалов.

8.2. При нахождении момента времени t_0 учтите, что режимы заряда и разряда отличаются направлением тока в конденсаторе.

8.4. В качестве искомым функций используйте потенциалы u_1 и u_2 узлов 1 и 2.

8.12. Введите вспомогательные величины — напряжения U_a и U_b в узлах a и b соответственно. Примените метод узловых потенциалов.

8.13. Для нахождения корней кубического уравнения используйте формулы Кардано. Обратите внимание на характер расположения полюсов передаточной функции на комплексной плоскости.

8.14. Введите в рассмотрение переменные U_a и U_b — изображения электрических потенциалов точек a и b соответственно. При этом $U_{\text{вых}} = U_a - U_b$.

8.17. Используйте выражение импульсной характеристики RC -цепи.

8.19. Учтите, что при каскадном соединении звеньев их частотные коэффициенты передачи перемножаются. Найдите импульсную характеристику, применив методы теории вычетов.

8.20. Воспользуйтесь импульсной характеристикой RC -цепи, у которой выходной сигнал снимается с конденсатора. Примите во внимание спектральное представление δ -функции.

8.26. Время установления найдите, численно решив трансцендентное уравнение методом последовательных приближений.

8.27. Обратите внимание на то, что при $at \ll 1$ значения $g(t) \approx 1$, поскольку в начальной стадии процесса оба конденсатора практически обеспечивают непосредственное соединение вход с выходом. Напротив, если $at \gg 1$, то $g(t) \approx -1$, так как резисторы соединяют вход с выходом скрещенным образом.

8.29. Воспользуйтесь операторным методом. Введите в рассмотрение вспомогательное напряжение $v(t)$ на конденсаторе C_1 . Получив изображение импульсной характеристики, разложите его на сумму простых дробей.

8.32. Обратите внимание на размерность величины A .

8.34. Воспользуйтесь тем, что $h(t) = dg/dt$.

8.37. Положите $u_{\text{вх}}(\xi) = \delta(\xi)$. Воспользуйтесь фильтрующим свойством δ -функции.

8.42. Примите во внимание, что при $t > \tau_n$ входной сигнал тождественно обращается в нуль.

8.44. Представьте входной сигнал в виде суммы трех колебаний, заданных на полубесконечных интервалах времени,— двух линейной нарастающих функций с разными знаками, сдвинутых во времени на отрезок τ_n , и импульса включения с отрицательной полярностью:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{U_0 t}{\tau_n} \sigma(t) - \frac{U_0}{\tau_n} (t - \tau_n) \sigma(t - \tau_n) - U_0 \sigma(t - \tau_n).$$

8.45. Воспользуйтесь выражением импульсной характеристики цепи, полученным в задаче 8.27.

Тема 9

9.1. Примените формулу (9.19) из [1].

9.5. Воспользуйтесь в качестве аргумента безразмерной переменной $\xi = \tau_x (\omega - \omega_{\text{рез}})$.

9.10. Получите выражение для частотного коэффициента передачи двухступенчатой системы. Перейдите к частотному коэффициенту передачи низкочастотного эквивалента, взяв в качестве опорной частоты величину $\omega_{\text{рез}}$. Воспользуйтесь операторным методом, положив $p = j\Omega$.

9.11. Выберите в качестве опорной частоту ω_0 . Импульсную характеристику $h_{\text{вх}}(t)$ низкочастотного эквивалента усилителя найдите операторным методом.

9.12. Примените табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right).$$

9.14. Воспользуйтесь формулой связи между добротностью, резонансной частотой и полосой пропускания колебательного контура.

9.15. Представьте входной сигнал в виде суммы несущего колебания и двух боковых составляющих. Примените принцип суперпозиции.

9.17. Используйте метод интеграла Дюамеля применительно к комплексным огибающим. В качестве опорной частоты выберите величину $\omega_{\text{рез}}$. Введите безразмерный аргумент $x = t/\tau_x$.

9.18. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 9.12.

9.21. Исходите из того, что комплексная огибающая сигнала на входе $\tilde{U}_{вх}(t) = U_0 e^{-\alpha t} e^{j\omega_0 t} \sigma(t)$. Примените формулу (9.54) из [1].

Тема 10

10.1. Рассмотрите конкретную реализацию $x(t)$ и найдите функцию $y(t)$ методом интеграла Дюамеля. Проведите соответствующие усреднения.

10.4. Воспользуйтесь свойством четности функции корреляции.

10.6. Используйте результат, полученный в задаче 7.7. Учтите, что дисперсия случайной величины пропорциональна квадрату постоянного коэффициента пропорциональности.

10.10. Для приближенного вычисления интеграла используйте условие узкополосности $b f_0^2 \gg 1$. Примите во внимание, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi/2}.$$

10.11. Примените спектральный метод и теорию вычетов.

10.13. Воспользуйтесь тем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^N} = \frac{(2N-3)!!}{(2N-2)!!}$$

где N — целое число.

10.19. Обратите внимание, что дисперсия выходного сигнала равна произведению квадрата коэффициента передачи, одностороннего спектра мощности F_0 и полосы пропускания $2\Delta\omega$.

10.21. Воспользуйтесь приближенным выражением импульсной характеристики (см. формулу (8.84) из [1])

$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \cdot \sigma(t),$$

справедливым при $Q \gg 1$.

10.27. Примите во внимание, что $\overline{u_{у.л.дроб}^2} = \overline{i_{у.л.дроб}^2} R^2$.

11.2. В качестве узлов аппроксимации используйте точки $u_m = 5, 7.5, 10$ и 12.5 В.

11.11. Найдите по отдельности, а затем сложите мощности, поступающие в цепь базы от обоих источников.

11.12. Входное сопротивление нелинейного элемента по первой гармонике определите в соответствии с формулой $R_{вх} = U_{вх} / I_1$, где $U_{вх}$ — амплитуда входного напряжения.

11.15. Введите угол отсечки тока

$$\vartheta = \arccos[(U_{к} - U_0)/U_m]$$

и найдите амплитуды гармоник тока в виде

$$I_n = BU_m^2 \cdot \gamma_n(2, \vartheta), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

где $\gamma_n(2, \vartheta)$ — коэффициенты разложения при кусочно-параболической аппроксимации.

11.17. По определению, коэффициент нелинейных искажений

$$k_{нл} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} 100\%.$$

11.26. В случае детектирования АМ-сигнала обратите внимание на появление в низкочастотном компоненте тока составляющей с удвоенной частотой модуляции за счет нелинейного взаимодействия двух боковых колебаний.

11.27. Положите, что на эквивалентной схеме транзистор может быть заменен идеальным управляемым источником тока. Считайте, что нагрузочная RC-цепь полностью отфильтровывает все высокочастотные компоненты спектра.

11.28. Воспользуйтесь тем, что при $SR_n \gg 1$ угол отсечки тока ϑ мал и поэтому можно воспользоваться приближенными выражениями для тригонометрических функций, определяющих коэффициенты Берга $\gamma_1(\vartheta)$.

11.30. Схема моделируемой цепи изображена на рис. П.11.1.

Отметим, что здесь использован стандарт графического изображения схемных элементов, принятый в США.

Проводя моделирование, варьируйте частоты несущего колебания в моделирующего сигнала, а также параметры нагрузочной цепи детектора таким образом, чтобы можно было оценить роль условий неискаженного детектирования (11.51) из [1].

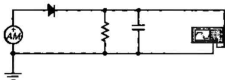


Рис. П.11.1

11.35. Воспользуйтесь выражением двумерной плотности вероятности гауссова случайного процесса

$$p(x, x_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-R_x^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2R_x x x_t + x_t^2}{2\sigma_x^2(1-R_x^2)}\right].$$

Тема 12

12.3. Используйте точную формулу $\xi = Q(f/f_{\text{рез}} - f_{\text{рез}}/f)$ для обобщенной расстройки контура. Полученный результат округлите до целого числа десятков.

12.6. Воспользуйтесь формулой (12.14) из [1].

12.8. Обратите внимание на то, что данная задача допускает еще одно решение при $U_0 > 0$.

12.9. Вычислите амплитуду выходного тока на промежуточной частоте, воспользовавшись понятием крутизны преобразования.

12.11. Примените тригонометрическую формулу

$$\sin x \cdot \cos^2 x = 1/4 (\sin x + \sin 3x).$$

12.13. Учтите, что заряд $q = C u$, в то время как ток $i = dq/dt$.

12.14. Обратите внимание на то, что знак напряжения неизменен, в то время как ток меняет свой знак при $t = \tau$.

12.17. Имейте в виду, что уравнение $\sin \Phi = 0$ имеет корни $\Phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Тема 13

13.1. Обратите внимание на расположение нулей и полюсов проводимости на комплексной плоскости. Воспользуйтесь теоремой о числе нулей и полюсов реализуемого двухполосника.

13.2. Примените метод Фостера.

13.3. Перейдите от сопротивления к проводимости цепи.

13.5. Используйте результат, полученный в задаче 13.4.

13.7. Выделите целую часть функции $Z(p)$ и примените результат, полученный в задаче 13.6.

13.8. Выделите целую часть дроби и в остатке перейдите от сопротивления к проводимости.

13.11. Перейдите от проводимости к сопротивлению. Примените метод Кауэра.

13.12. Воспользуйтесь методом Кауэра.

13.16. Выполните замену переменной $p_n = j\omega_n$ и воспользуйтесь принципом квадрантной симметрии.

13.28. Найдите корни уравнения $1 + p^8 = 0$, имеющие отрицательные вещественные части.

13.21. Проведите денормирование частотной переменной с учетом приведенного значения частоты среза фильтра.

13.23. Усиление (дБ), вносимое фильтром с максимально плоской характеристикой, вычисляют по формуле

$$\Delta(\omega_x) = -10 \lg(1 + \omega_x^{2n}).$$

13.27. Фазовая характеристика фильтра третьего порядка получена в задаче 13.26.

13.29. Исходя из заданной неравномерности, определите параметр ε .

13.31. Воспользуйтесь тем, что многочлен Чебышева третьего порядка $T_3(\omega_x) = 4\omega_x^3 - 3\omega_x$.

Тема 14

14.2. Воспользуйтесь тем, что $u_{ax} = u_{e_1} + u_{axx}$.

14.3. Введите в рассмотрение напряжение $v = u_{e_1}$, и примите во внимание, что переменная составляющая коллекторного тока $i_c = Sv$. Пренебрегите влиянием внутреннего сопротивления транзистора.

14.4. Введите в рассмотрение величину $V(p)$ — изображение сигнала в промежуточной точке (см. рис. I.14.3).

14.5. Введите вспомогательную величину $U_a(p)$ — изображение напряжения в узле a . Примите во внимание, что входная цепь усилителя не потребляет тока. Составьте уравнение состояния цепи из условия обращения в нуль алгебраической суммы токов в узле a .

14.7. Обратите внимание на эффект расширения полосы пропускания системы под действием обратной связи.

14.8. Введите в рассмотрение величину $V(p)$ — изображение напряжения на неинвертирующем входе усилителя. Учтите, что ток между входными и выходными зажимами течет только по RC -цепи, не ответвляясь ко входу усилителя из-за бесконечно большого входного сопротивления.

14.10. Введите в рассмотрение вспомогательные напряжения на инвертирующем и неинвертирующем входах усилителя с изображениями V_1 и V_2 соответственно. Положите вначале, что K_0 — конечная величина, перейдя затем к пределу при $K_0 \rightarrow \infty$. Границу устойчивости системы определите из условия обращения в бесконечность модуля передаточной функции.

14.15. Составьте характеристическое уравнение системы. Воспользуйтесь упрощенной формой критерия Рауса — Гурвица,

согласно которой характеристическое уравнение устойчивой системы третьего порядка должно содержать члены всех степеней и иметь коэффициенты лишь одного знака.

14.17. Примените критерий Рауса — Гурвица.

14.20. Как известно из теории цепей, $k_{\alpha} = M/\sqrt{L_1 L_2}$.

14.22. Вычислите угол отсечки θ и воспользуйтесь функцией Берга $\gamma_1(\theta)$.

Тема 15

15.2. Разложите функцию $\xi(t)$ в комплексный ряд Фурье и воспользуйтесь формулой (2.35) из [1].

15.3. Примените теорему о спектре произведения двух сигналов.

15.5. Обратите внимание на то, что величина $S_1(0)$ состоит из двух комплексно-сопряженных слагаемых, которые отвечают положительным и отрицательным частотам.

15.8. Воспользуйтесь формулой суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-j2\pi/N)$.

15.11. Проведите расчет коэффициента C_3 по общей формуле ДПФ.

15.13. Воспользуйтесь тем, что выборочные значения сигнала вещественны.

15.14. Примените формулу (15.11) из [1].

15.17. Примените формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии. Заметьте, что функция $X(z)$ определена во внешней области единичного круга, т. е. при $|z| > 1$.

15.22. Разложите z -преобразование на простые дроби. Воспользуйтесь приемом, использованным в задаче 15.20.

15.25. Решите задачу двумя способами — путем обращения z -преобразования и непосредственным вычислением.

15.29. Рассмотрите характер функции $K(j\omega)$ при $\omega\Delta \rightarrow 0$. Для проверки результата убедитесь, что данный алгоритм дает нулевую последовательность $\{y_k\}$, если $\{x_k\}$ представляет собой равноотстоящие во времени отсчеты квадратичной параболы.

15.31. Разложите функцию $H(z)$ на простые дроби. Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 15.30.

15.35. Положите, что случайные отсчеты шума квантования имеют равномерный закон распределения.

15.36. Импульсная характеристика рассматриваемого фильтра имеет вид $(1, 0.9, (0.9)^2, (0.9)^3, \dots)$.

Тема 16

16.5. Для нахождения спектральной плотности входного сигнала используйте прием, основанный на дифференцировании сигнала и на свойстве спектра производной.

16.8. Воспользуйтесь формулой (16.40) из [1].

16.10. Стационарный случайный процесс с функцией корреляции вида $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ имеет спектр мощности $W(\omega) = 2\alpha\sigma^2/(\alpha^2 + \omega^2)$.

16.13. См. указания к задаче 16.10.

16.16. Положите, что алфавит русского языка состоит из 32 букв. Предположите для простоты, что появление любой буквы в сообщении равновероятно.

16.17. Считайте, что весь текст записывается без учета того, является ли буква строчной или прописной.

Тема 1

1.1. График изменения во времени мгновенных значений сигнала приведен на рис. III.1.1. Из условия $u'(t_{\max})=0$ получаем уравнение для определения t_{\max} :

$$-\exp(-10^5 t_{\max}) + 2\exp(-2 \cdot 10^5 t_{\max}) = 0,$$

откуда

$$10^5 t_{\max} = -\ln(1/2),$$

т. е. $t_{\max} = 6.931 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 6.931 \text{ мкс}$. При этом $u_{\max} = 6.25 \text{ В}$.

Длительность импульса по условию задачи является корнем уравнения

$$\exp(-10^5 \tau_n) - \exp(-2 \cdot 10^5 \tau_n) = 0.025.$$

Введя безразмерную величину $x = 10^5 \tau_n$, имеем

$$\exp(-x) - \exp(-2x) = 0.025,$$

откуда, переходя к уравнению, разрешенному относительно x , получаем

$$x = -\ln(0.025 + e^{-2x}). \quad (*)$$

Корни таких трансцендентных уравнений удобно находить методом последовательных приближений [5], используя микрокалькулятор. Ориентируясь на график сигнала, выбираем нулевое приближение x_0 , достаточно близкое к предполагаемому корню. Положим, что $x_0 = 3$. Подставляя это значение в (*), находим первое приближение

$$x_1 = -\ln(0.025 + e^{-6}) = 3.5943422.$$

Указанный процесс продолжаем по итерационному принципу:

$$x_n = -\ln(0.025 + e^{-2x_{n-1}}), \quad n = 2, 3, \dots$$

до тех пор, пока два последовательных приближенных значения не станут отличаться на заданное заранее малое число, определя-

ющее точность расчета. Выполнив данные действия, находим корень $x=3.6628862$ (все цифры точные).

Сохранять значащие цифры во всех десятичных разрядах на практике нет необходимости. Дело в том, что исходные данные обычно известны с гораздо меньшей точностью. Поэтому представление результата с большим количеством разрядов *создает лишь иллюзию достоверности*. Принимая, что $x=3.66$, находим $\tau_x=3.66 \times 10^{-5} \text{ с}=36.6 \text{ мкс}$.

1.4. Рассматриваемый сигнал $s(t)$ можно представить как сумму двух линейно нарастающих функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$ (рис. III.1.2) с одинаковыми по величине и различными по знаку угловыми коэффициентами наклона. Отсюда

$$s(t) = (s_0/t_0) t \sigma(t) - (s_0/t_0) (t - t_0) \sigma(t - t_0).$$

1.10. Функция $f_n(t)$ является четной; площадь, ограниченная правой половиной кривой,

$$\frac{n}{2} \int_0^{\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} d\xi = 1/2.$$

Отсюда видно, что площадь, ограниченная всей кривой, равна единице независимо от n .

При любом $t \neq 0$ предельное значение $f_n(t)$ равно нулю. Действительно, по правилу Лопиталья

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} (te^{nt})^{-1} = 0.$$

Таким образом, пределом последовательности $f_n(t)$ является обобщенная функция $\delta(t)$.

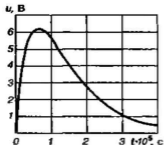


Рис. III.1.1

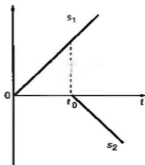


Рис. III.1.2

1.11. При $n \rightarrow \infty$ длина отрезка, на котором сосредоточена функция $f_n(t)$, равная $2/n$, стремится к нулю. При этом площадь, ограниченная функцией f_n , равна единице независимо от n .

1.13. По определению, энергия сигнала

$$E_u = \int_0^{\infty} u^2 dt = 900 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^3 t} dt = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с.}$$

Норма данного сигнала

$$\|u\| = (E_u)^{1/2} = 6,708 \cdot 10^{-2} \text{ В} \cdot \text{с}^{1/2}.$$

1.16. Квадрат расстояния между сигналами

$$\begin{aligned} \rho^2(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u-v)^2 dt = \\ &= U_0^2 \int_0^{\tau_n} (1 - e^{-\alpha t})^2 dt + U_0^2 \int_{\tau_n}^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \\ &= U_0^2 \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \tau_n}) + \tau_n \right]. \end{aligned}$$

По условию задачи требуется найти минимум функции

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} - 2(1 - e^{-\alpha \tau_n}) \right] = \frac{2e^{-\alpha \tau_n} - 1,5}{\alpha}.$$

Примерный график, приведенный на рис. III.1.3, указывает на то, что минимум функции $F(\alpha)$ существует и является единственным.

Из условия $F'(\alpha) = 0$ находим, что параметр α должен являться корнем трансцендентного уравнения

$$\alpha^{-\alpha \tau_n} = \frac{0,75}{1 + \alpha \tau_n}.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений (см. задачу 1.1), получаем $\alpha = 0,961/\tau_n$.

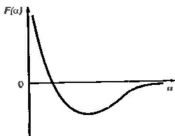


Рис. III.1.3

1.25. Так как сигналы u и v линейно независимы, то $(u + \lambda v, u + \lambda v) > 0$, откуда

$$\lambda^2 (v, v) + 2\lambda (u, v) + (u, u) > 0.$$

Квадратичный трехчлен относительно λ не имеет вещественных корней и поэтому $(u, u) \cdot (v, v) - (u, v)^2 > 0$, т. е. $|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|$, что и требовалось доказать.

1.29. Нормируем элемент g_0 и положим $u_0 = g_0 / \|g_0\|$. Вектор $h_1 = g_1 - (g_1, u_0)u_0$ ортогонален к u_0 (см. задачу 1.27). Нормируя h_1 , получаем новый элемент ортонормированной системы: $u_1 = h_1 / \|h_1\|$. Действуя по аналогии, получаем элемент $h_2 = g_2 - (g_2, u_0)u_0 - (g_2, u_1)u_1$, ортогональный как к u_0 , так и к u_1 . Нормируем его и получаем $u_2 = h_2 / \|h_2\|$. Продолжая этот процесс, имеем на k -м шаге ($k = 3, 4, \dots$):

$$h_k = g_k - (g_k, u_0)u_0 - (g_k, u_1)u_1 - \dots - (g_k, u_{k-1})u_{k-1}.$$

Данный способ построения ортонормированной системы базисных векторов известен в математике под названием процедуры Грамма — Шмидта.

Тема 2

2.1. Так как $s(t) = U_0 \cos \frac{\omega_1 t}{2}$, то

$$C_n = \frac{2U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \frac{\omega_1 t}{2} \cos n\omega_1 t dt.$$

Воспользуемся тем, что

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

Тогда

$$C_n = \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \omega_1 \left(n - \frac{1}{2}\right) t dt = \frac{U_0}{T} \frac{\sin \omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right)} \Bigg|_0^{T/2} +$$

$$+ \frac{U_0 \sin \omega_1 \left(n - \frac{1}{2} \right)}{T \omega_1 \left(n - \frac{1}{2} \right)} \Bigg|_0^{T/2} = \frac{2U_0 (-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}.$$

2.13. Средняя за период мощность комплекснозначного сигнала

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s^*(t) dt.$$

Так как

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t},$$

то

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_1 t} dt = 0$$

для всех $k \geq 1$. Итак,

$$P_{\text{cp}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = C_0 C_0^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^*.$$

2.15. Из рисунка, полагая $t=0$, непосредственно находим $A = 80$ В. Так как $80 \exp(-\alpha \cdot 5 \cdot 10^{-6}) = 20$, то $\alpha = 2.773 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} [1 - e^{-(\alpha + j\omega)\tau}],$$

2.16. Значение частоты ω , при котором спектральная плотность обращается в нуль, должна удовлетворять уравнению

$$e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} = 1,$$

или

$$e^{-\alpha_n} \cos \omega \tau_n = 1,$$

$$e^{-\alpha_n} \sin \omega \tau_n = 0.$$

Очевидно, что эта система уравнений несовместна.

2.17. Коэффициент C_n комплексного ряда Фурье выражается следующим интегралом:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_0(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Пределы интегрирования в последней формуле могут быть расширены от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку функция $s_0(t)$ определена только на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$. Таким образом,

$$C_n = \frac{1}{T} S_0(n\omega_1).$$

2.18. Используя теорему о спектре смещенного во времени сигнала и группируя отдельные импульсы в пары, равноотстоящие от начала отсчета, имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &= S_0(\omega) \cdot (1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} + e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots \\ &\dots e^{jN\omega T} + e^{-jN\omega T}) = S_0(\omega) (1 + 2 \cos \omega T + \\ &+ 2 \cos 2\omega T + \dots + 2 \cos N\omega T). \end{aligned}$$

Для того чтобы проанализировать зависимость модуля спектральной плотности от числа импульсов, введем функцию

$$F_N(\omega T) = |1 + 2 \cos \omega T + \dots + 2 \cos N\omega T|.$$

На рис. III.2.1, *a*, *b* изображены графики функций $F_1(\omega T)$ (последовательность из трех импульсов) и $F_2(\omega T)$ (последовательность из пяти импульсов). Можно заметить следующую закономерность: с ростом N функция F_N приобретает вид локализованных «всплесков», расположенных в точках $\omega T = 2\pi n$ ($n=0, 1, 2, \dots$). В пределе при $N \rightarrow \infty$ происходит переход от непрерывного к дискретному спектру; частоты отдельных спектральных составляющих соответствуют гармоникам частоты повторения импульсной последовательности.

2.19. Используя выражение для спектральной плотности экспоненциального видеопульса, имеем

$$S(\omega) = A \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) = \frac{A(\beta - \alpha)}{(\alpha\beta - \omega^2) + j(\alpha + \beta)\omega}$$

При заданных числовых параметрах

$$|S(\omega)| = \frac{1.2 \cdot 10^7}{\sqrt{(3 \cdot 10^{12} - \omega^2)^2 + 1.6 \cdot 10^{13} \omega^2}}$$

Для построения графика удобно нормировать частоту, введя новую переменную $\xi = \omega/10^6$. Тогда

$$|S(\xi)| = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(3 - \xi^2)^2 + 16\xi^2}}$$

График данной зависимости приведен на рис. III.2.2.

2.20. Гранничная частота удовлетворяет биквадратному уравнению

$$(\alpha\beta - \omega_{гр}^2)^2 + (\alpha + \beta)^2 \omega_{гр}^2 = 100\alpha^2\beta^2,$$

положительный корень которого

$$\omega_{гр} = \left(\sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{4} + 99\alpha^2\beta^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)^{1/2}.$$

Подставляя числовые значения α и β , имеем

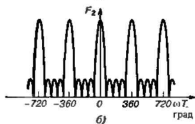
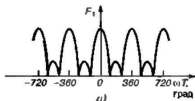


Рис. III.2.1

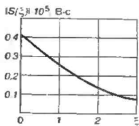


Рис. III.2.2

$$\omega_{\text{эф}} = 5.026 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

2.23. Длительность видеопульса, создающего на экране темную полосу, $\tau_n = 3 \cdot 64/500 = 0.384$ мкс, откуда $f_{\text{верх}} = 1/\tau_n = 2.6$ МГц.

2.28. Излагаемый ниже способ удобен для нахождения спектральных плотностей импульсных колебаний, представляемых отрезками прямых. Дифференцируя исходный сигнал, получаем два разнополярных прямоугольных импульса (рис. III.2.3); вторая производная имеет вид трех δ -функций (рис. III.2.4). Математическая модель второй производной такова:

$$s''(t) = \frac{2A}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] - \frac{4A}{\tau} \delta(t).$$

Спектральная плотность второй производной

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{2A}{\tau} \left(e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega\tau/2} - 2 \right) = \\ &= \frac{4A}{\tau} \left(\cos \frac{\omega\tau}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Используя связь между спектрами сигналов и их производных, находим

$$\begin{aligned} S(\omega) &= -G(\omega)/\omega^2 = \frac{4A}{\omega^2\tau} \left(1 - \cos \frac{\omega\tau}{2} \right) = \\ &= \frac{A\tau}{2} \cdot \frac{\text{шд}^2 \frac{\omega\tau}{4}}{\left(\frac{\omega\tau}{4} \right)^2}. \end{aligned}$$

Следует заметить, что при $\omega \rightarrow \infty$ $|S| \sim 1/\omega^2$, т. е. модуль спектральной плотности убывает здесь с ростом частоты гораз-

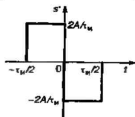


Рис. III.2.3

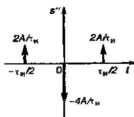


Рис. III.2.4

до быстрее, чем в случае прямоугольного видеоимпульса, для которого $|S| \sim 1/\omega$. Это связано с тем, что рассматриваемый треугольный импульс описывается непрерывной функцией времени, в то время как прямоугольный импульс является разрывным.

2.29. Пусть $f(t) = du/dt$ и пусть имеет место соответствие $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$. На основании математической модели исходного сигнала функция $f(t)$ выражается в виде суммы δ -функций:

$$f(t) = -U_0 \delta\left(t + \frac{3T}{2}\right) + 2U_0 \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \\ - 2U_0 \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + U_0 \delta\left(t - \frac{3T}{2}\right).$$

Таким образом, ее спектральная плотность

$$F(\omega) = j\omega U(\omega) = -U_0 e^{j\frac{3\omega T}{2}} + 2U_0 e^{j\frac{\omega T}{2}} - \\ - 2U_0 e^{-j\frac{\omega T}{2}} + U_0 e^{-j\frac{3\omega T}{2}} = \\ = -j2U_0 \sin \frac{3\omega T}{2} + j4U_0 \sin \frac{\omega T}{2}.$$

Отсюда

$$U(\omega) = \frac{4U_0}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} - \frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{3\omega T}{2}.$$

Введя безразмерный аргумент $x = \omega T/2$, получаем

$$U(x)/(U_0 T) = (2 \sin x - \sin 3x)/x.$$

График нормированного модуля спектральной плотности, рассчитанный по данной формуле, изображен на рис. III.2.5.

2.32. Рассмотрим импульсный сигнал $s(t)$, отличный от нуля на отрезке времени $[0, \tau_a]$. Спектральная плотность этого сигнала

$$S(\omega) = \int_0^{\tau_a} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (*)$$

Будем интересоваться значениями функции $S(\omega)$ на достаточно низких частотах, удовлетворяющих неравенству $\omega \ll 1/\tau_x$.

Малость безразмерной величины ωt в показателе экспоненты, входящей в (*), дает возможность воспользоваться рядом Маклорена

$$e^{-j\omega t} = 1 - j\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \dots$$

Тогда, ограничиваясь учетом первых трех слагаемых, имеем

$$\begin{aligned} S(\omega) &\approx \int_0^{\tau_x} s(t) \left(1 - j\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right) dt = \\ &= M_0 - j\omega M_1 - \frac{\omega^2}{2} M_2, \end{aligned}$$

где символами M_0 , M_1 и M_2 обозначены определенные интегралы, называемые *моментами* рассматриваемого импульса:

$$M_n = \int_0^{\tau_x} s(t) t^n dt, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что точное разложение таково:

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k (j\omega)^k / k!$$

Если длительность импульса $\tau_x \rightarrow 0$, то очевидно, что

$$\lim_{\tau_x \rightarrow 0} S(\omega) = M_0,$$

т. е. предельное значение спектральной плотности импульса, длительность которого стремится к нулю, равна площади этого импульса.

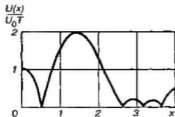


Рис. III.2.5

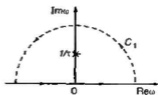


Рис. III.2.6

2.35. На основании обратного преобразования Фурье

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Здесь подынтегральная функция имеет два простых полюса, определяемых из уравнения $1 + \omega^2 \tau^2 = 0$. Данные полюсы сосредоточены в точках с координатами $\omega_{1,2} = \pm j/\tau$.

Для вычисления сигнала $s(t)$ при $t > 0$ следует провести интегрирование по контуру C_1 (рис. III.2.6), включающему в себя бесконечно протяженную вещественную ось и дугу бесконечно большого радиуса, расположенную в верхней полуплоскости $\text{Im}\omega > 0$. Интеграл по указанной дуге стремится к нулю с ростом ее радиуса и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = 2\pi j \cdot \text{res} \left(\frac{e^{j\omega t}}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \Big|_{\omega = j/\tau}$$

Вычет подынтегральной функции в точке полюса

$$\text{res} = e^{-t/\tau} / (2j\tau)$$

Итак,

$$\int_{C_1} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\pi e^{-t/\tau}}{\tau}$$

Аналогичный результат, отличающийся знаком в показателе экспоненты, будет получен для значений $t < 0$; при этом интегрирование следует провести по контуру, замыкающемуся дугой бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости. В результате получаем окончательно

$$s(t) = S_0 e^{-|t|/\tau} / (2\tau)$$

2.40. Воспользуемся тем, что

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)],$$

$$\sigma(t) \leftrightarrow \sigma \delta(\omega) + 1/(j\omega)$$

Тогда, вычисляя свертку этих спектральных плотностей, имеем

$$\begin{aligned}
U(\omega) &= \frac{-j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\xi - \omega_0) - \delta(\xi + \omega_0)] \times \\
&\times \left[\pi \delta(\omega - \xi) + \frac{1}{j(\omega - \xi)} \right] d\xi = -j \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \omega_0) \times \\
&\times \delta(\omega - \xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \omega_0) \frac{d\xi}{\omega - \xi} + \\
&+ j \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi + \omega_0) \delta(\omega - \xi) d\xi + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi + \omega_0) \frac{d\xi}{\omega - \xi} = -j \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) - \\
&- \frac{1}{2(\omega - \omega_0)} + j \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2(\omega + \omega_0)} = \\
&= -j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] - \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}.
\end{aligned}$$

2.45. В соответствии с определенным понятием спектральной плотности

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau. \quad (*)$$

В данном выражении функцию $v(t - \tau)$ можно выразить через соответствующую спектральную плотность

$$v(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) e^{j\eta(t - \tau)} d\eta. \quad (**)$$

Подставив (***) в (*), а затем, изменив порядок следования операций интегрирования по переменным τ и η , получим

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) e^{j\eta(t-\tau)} d\eta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) e^{j\eta t} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\eta\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Заметим, что внутренний интеграл здесь представляет собой функцию $U(\eta)$. Тогда

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) U(\eta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta(t-\omega)} dt \right].$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta(t-\omega)} dt = \delta(\eta - \omega),$$

то

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) U(\eta) \delta(\eta - \omega) = V(\omega) U(\omega),$$

что и требовалось доказать.

2.46. а) По определению свертки

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\xi) s_2(\xi) d\xi = \\
 &= A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1(t-\xi)} \sigma(t-\xi) e^{-a_2\xi} \sigma(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Положим, что $t > 0$. Графики сигналов $s_1(t-\xi)$ и $s_2(\xi)$, образующих подынтегральное выражение, приведены на рис. III.2.7. Так как произведение этих сигналов отлично от нуля лишь в промежутке $0 < \xi < t$, то

$$f(t) = A_1 A_2 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{-\xi(\alpha_2 - \alpha_1)} d\xi =$$

$$= \frac{A_1 A_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}).$$

Если $t < 0$, то графики сигналов $s_1(t - \xi)$ и $s_2(\xi)$ оказываются разнесенными во времени, произведение этих сигналов равно нулю при любых ξ и поэтому $f(t) = 0$ (рис. III.2.8).

б) Преобразуя сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ по Фурье, имеем следующие соответствия:

$$s_1(t) \leftrightarrow \frac{A_1}{\alpha_1 + j\omega}; \quad s_2(t) \leftrightarrow \frac{A_2}{\alpha_2 + j\omega},$$

откуда

$$f(t) \leftrightarrow \frac{A_1 A_2}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)},$$

т. е.

$$f(t) = \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} d\omega}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)}.$$

Разложив дробно-рациональную функцию подынтегрального выражения на простые дроби, имеем

$$\frac{1}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{1}{\alpha_1 + j\omega} - \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} \right).$$

Воспользовавшись известной формулой для спектральной плотности экспоненциального видеопульса, получаем отсюда

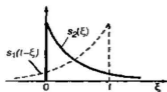


Рис. III.2.7

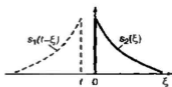


Рис. III.2.8

$$f(t) = \frac{A_1 A_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}),$$

что, естественно, совпадает с результатом, полученным выше прямым методом.

2.48. В точке $p=0$ функция $U(p)$ имеет полюс второго порядка. Для $t > 0$ контур интегрирования состоит из бесконечной вертикальной прямой с некоторой абсциссой $a > 0$ (рис. III.2.9) и дуги C_1 радиуса $R \rightarrow \infty$, расположенной в левой полуплоскости. Так как при $R \rightarrow \infty$ величина $1/p^2 \rightarrow 0$ равномерна относительно аргумента p , то по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{pt}}{p^2} dp = 0.$$

Точка полюса оказывается внутри контура интегрирования. Вычет подынтегральной функции в точке полюса

$$\operatorname{res} \left(\frac{e^{pt}}{p^2} \right) \Big|_{p=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} (e^{pt}) = t.$$

Отсюда для $t > 0$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{e^{pt}}{p^2} dp = t.$$

Для вычисления функции $u(t)$ при $t < 0$ контур интегрирования следует замкнуть дугой C_2 , расположенной в правой полуплоскости, где подынтегральная функция не имеет особых точек. Поэтому при $t < 0$ имеем $u(t) = 0$.

2.49. Заданное изображение представим в виде

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \frac{C}{p+c}.$$

Коэффициенты A , B и C можно найти обычным способом, который используется при разложении на про-

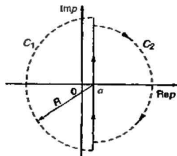


Рис. III.2.9

стые дроби. Однако это сопряжено с громоздкими выкладками. Более короткий путь состоит в следующем. Из последней формулы видно, например, что величина A есть вычет функции, стоящей в левой части, вычисленный при $p = -a$:

$$A = \operatorname{res} \Big|_{p=-a} = \frac{1}{(b-a)(c-a)}.$$

Аналогично находим коэффициенты B и C :

$$B = \operatorname{res} \Big|_{p=-b} = \frac{1}{(a-b)(c-b)},$$

$$C = \operatorname{res} \Big|_{p=-c} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

Отсюда

$$f(t) = \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}.$$

2.50. Разлагая изображение на простые дроби, имеем

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}.$$

Неизвестные величины A и B удовлетворяют уравнению

$$pA + bA + pB + aB = 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем систему двух алгебраических уравнений

$$A + B = 0,$$

$$bA + aB = 1,$$

решение которой очевидно:

$$A = \frac{1}{b-a}; \quad B = -\frac{1}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right),$$

откуда вытекает формула из условий задачи.

2.58. Принимая во внимание результат, полученный в предыдущей задаче, на основании формулы (2.69) из [1] имеем:

$$c_{11} = 40\sqrt{2} \left[\int_{1/2}^{3/4} \vartheta d\vartheta - \int_{3/4}^1 \vartheta d\vartheta \right] =$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{2}} = -3.536.$$

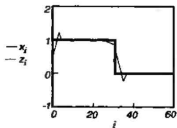


Рис. III.2.10

2.59. Возможный текст рабочего листа программы представлен ниже (рис III.2.10):

```

i: = 0.63,
Xi: = if(i < 32, 1, 0),
Y: = wave(X),
Wi: = if(i < 20, Yi, 0)
Z: = iwave(W).

```

Здесь исследуемый сигнал представлен 64 отсчетами, первая половина из которых положена равными единице, а остальные нулю. Из этих отсчетов сформирован входной вектор X . Его вейвлет-преобразованием является вектор Y . Затем из его первых двадцати компонентов формируется вектор W . Его обратным вейвлет-преобразованием служит вектор Z .

Следует заметить, что уменьшение числа компонентов, используемых при обратном преобразовании, ведет к появлению характерных осцилляций сигнала в окрестностях точек разрыва. Это явление хорошо изучено в математике и носит название *эффекта Гиббса*.

Тема 3

3.1. Зная спектральные плотности данных сигналов, имеем

$$(u, v) = \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha_1 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega)}$$

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{(\alpha_1 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega)} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_1 - j\omega} + \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} \right).$$

Интеграл от каждой из простых дробей вычисляем одним и тем же приемом. Так,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha_2 + j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_2 - j\omega) d\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} = \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} = \pi.$$

В результате имеем

$$(u, v) = A_1 A_2 / (\alpha_1 + \alpha_2).$$

3.8. Возводя в квадрат вещественную спектральную плотность прямоугольного видеоимпульса, получаем энергетический спектр

$$W_u(\omega) = U_0^2 \tau_n^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau_n}{2}}{(\omega \tau_n / 2)^2}.$$

По теореме Рэлея в узком смысле

$$E_{\omega_n} = \frac{U_0^2 \tau_n^2}{\pi} \int_0^{\omega_n} \frac{\sin^2(\omega \tau_n / 2)}{(\omega \tau_n / 2)^2} d\omega.$$

Выполнив замену переменной $\xi = \omega \tau_n / 2$, имеем

$$E_{\omega_n} = \frac{2U_0^2 \tau_n}{\pi} \int_0^{\omega_n \tau_n / 2} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} E_{\omega_n} &= \frac{2U_0^2 \tau_n}{\pi} \left[-\frac{\sin^2 \xi}{\xi} \Big|_0^{\frac{\omega_n \tau_n}{2}} + \int_0^{\frac{\omega_n \tau_n}{2}} \frac{\sin 2\xi}{\xi} d\xi \right] = \\ &= \frac{2U_0^2 \tau_n}{\pi} \left[\text{Si}(\omega_n \tau_n) - \frac{\sin^2(\omega_n \tau_n / 2)}{(\omega_n \tau_n / 2)^2} \right], \end{aligned}$$

где

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

неэлементарная функция, называемая интегральным синусом [4].

3.9. Энергетический спектр рассматриваемого сигнала задается формулой

$$W_s(\omega) = \frac{225}{10^{14} + \omega^2}$$

Граничная частота $\omega_{гп}$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\omega_{гп}} \frac{d\omega}{10^{14} + \omega^2} = 0.9 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{10^{14} + \omega^2}$$

или

$$\text{arctg}(\omega_{гп}/10^7) = 0.45\pi.$$

Решая его, находим $\omega_{гп} = 10^7 \cdot \text{tg}0.45\pi$, т. е. $f_{гп} = 10.049$ МГц.

3.12. Спектральная плотность

$$S(\omega) = 2B \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt = \frac{2B\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

откуда энергетический спектр

$$W_s(\omega) = 4B^2\beta^2 / (\beta^2 + \omega^2)^2.$$

Автокорреляционная функция $K_s(\tau)$ представляется следующим интегралом Фурье:

$$K_s(\tau) = \frac{2B^2\beta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{(\beta^2 + \omega^2)^2}$$

Здесь подынтегральная функция имеет два полюса второго порядка в точках с координатами $\omega = \pm j\beta$. Для вычисления функции $K_s(\tau)$ при $\tau > 0$ находим

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[\frac{e^{j\omega\tau}}{(\beta^2 + \omega^2)^2} \right] \Big|_{\omega=j\beta} &= \frac{d}{d\omega} \left[\frac{e^{j\omega\tau} (\omega - j\beta)^2}{(\beta^2 + \omega^2)^2} \right] \Big|_{\omega=j\beta} = \\ &= -j e^{-\beta\tau} (1 + \beta\tau) / (4\beta^2). \end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{(\beta^2 + \omega^2)^2} = 2\pi j \cdot \operatorname{res} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta\tau} \frac{1 + \beta\tau}{\beta^2},$$

откуда, приняв во внимание четность автокорреляционной функции, имеем

$$K_x(\tau) = \frac{B^2}{\beta} e^{-\beta|\tau|} (1 + \beta|\tau|).$$

3.13. Здесь

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= A^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \cdot e^{-\alpha(t+\tau)} \sin \omega_0(t+\tau) dt = \\ &= A^2 e^{-\alpha\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t+\tau) dt. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

Поэтому

$$K_x(\tau) = \frac{A^2 e^{-\alpha\tau}}{2} \cos \omega_0 \tau \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt - \frac{A^2 e^{-\alpha\tau}}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt.$$

Используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \cos(qx + \lambda) dx = \frac{1}{p^2 + q^2} (p \cos \lambda - q \sin \lambda),$$

получаем

$$K_s(\tau) = \frac{A^2 e^{-\alpha|\tau|}}{4} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2} \right) \cos \omega_0 \tau - \frac{\omega_0}{\alpha^2 + \omega_0^2} \sin \omega_0 |\tau| \right].$$

3.16. Положим, что $\tau > 0$. Тогда для $0 \leq \tau \leq \tau_n$ имеем

$$K_s(\tau) = \int_0^{\tau_n - \tau} s(t) s(t + \tau) dt = \\ = A^2 \int_0^{\tau_n - \tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi_0] dt.$$

Так как

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

то

$$K_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \int_0^{\tau_n - \tau} \cos \omega_0 \tau dt + \frac{A^2}{2} \int_0^{\tau_n - \tau} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \\ + 2\varphi_0) dt = \frac{A^2}{2} (\tau_n - \tau) \cos \omega_0 \tau + \\ + \frac{A^2}{4\omega_0} \sin[\omega_0(2\tau_n - \tau) + 2\varphi_0].$$

Имея в виду четность функции $K_s(\tau)$, отсюда получаем

$$K_s(\tau) = \frac{A^2 \tau_n}{2} \times \left\{ \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2\omega_0 \tau_n} \sin[\omega_0(2\tau_n - |\tau|) + 2\varphi_0] \right\}.$$

В практических случаях, как правило, $\omega_0 \tau_n \gg 1$, т. е. длительность ра-

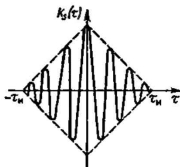


Рис. III.3.1

дью импульса значительно превосходит длительность одного периода высокочастотного заполнения. Тогда приближенно

$$K_s(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_x, \\ \frac{A^2 \tau_x}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_x}\right) \cos \omega_0 \tau, & -\tau_x \leq \tau \leq \tau_x, \\ 0, & \tau > \tau_x. \end{cases}$$

Соответствующий график изображен на рис. III.3.1.

Тема 4

4.2. Огибающая сигнала (В) задается выражением $U(t) = 12(1 + 0.6 \cos \Omega t + 0.2 \cos 2\Omega t)$. Введя безразмерный аргумент $x = \Omega t$, видим, что значения x , при которых огибающая достигает экстремальных значений, должны являться корнями уравнения

$$0.6 \sin x + 0.4 \sin 2x = 0. \quad (*)$$

Очевидный корень $x=0$ соответствует максимуму огибающей $U_{\max} = 21.6$ В. Другой корень уравнения (*) найдем, разделив обе части на $\sin x \neq 0$, откуда $\cos x = -0.75$, т. е. $x = 2.419$ и $U_{\min} = 6.9$ В.

4.9. Вычисляя мгновенную мощность, имеем

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{U_0^2}{R} (1 + M \cos \Omega t)^2 \cos^2 \omega_0 t = \\ &= \frac{U_0^2}{R} \left(1 + 2M \cos \Omega t + M^2 \frac{1 + \cos 2\Omega t}{2}\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$p_0(t) = \frac{U_0^2 M}{R} \cos \Omega t; \quad p_{2\Omega}(t) = \frac{U_0^2 M^2}{4R} \cos 2\Omega t.$$

4.12. Полная фаза данного сигнала

$$\psi(t) = 10^8 t + 3 \sin 10^6 t + 1.4 \sin 10^5 t + \pi/4.$$

Мгновенная частота есть производная от полной фазы:

$$\omega(t) = 10^6 + 3 \cdot 10^6 \cos 10^6 t + 1.4 \cdot 10^5 \cos 10^5 t.$$

Подставляя значение $t = 10^{-6}$ с, получаем $\omega = 1.0176 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

4.18. Спектральная составляющая на несущей частоте будет отсутствовать при всех значениях индекса модуляции m , которые являются корнями трансцендентного уравнения $J_0(m) = 0$. Множество таких корней бесконечно; наименьший корень $m = 2.405$. Этому значению соответствует наибольшая частота модуляции $\Omega_{\max} = 6 \cdot 10^4 / 2.405 = 24948 \text{ с}^{-1}$.

4.20. Оставляя по два члена в разложении гармонических функций малого аргумента, имеем

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - \\ &- U_0 \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t \approx U_0 \cos \omega_0 t (1 - (m^2 \sin^2 \Omega t) / 2) - \\ &- U_0 \sin \omega_0 t (m \sin \Omega t - (m^3 \sin^3 \Omega t) / 6). \end{aligned}$$

Раскрывая по известным правилам степени тригонометрических функций, находим, что

$$U_{m2} = U_0 m^2 / 8 = 3.6 \cdot 10^{-3},$$

$$U_{m3} = U_0 m^3 / 48 = 3.6 \cdot 10^{-5}.$$

4.25. а). Полагая, что начало отсчета времени совпадает с серединой импульса, имеем

$$\begin{aligned} E_u &= \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} \cos^2 \left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2} \right) dt = \\ &= U_0^2 \int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2} \frac{1 + \cos 2 \left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2} \right)}{2} dt. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в числителе подынтегрального выражения представляет собой знакопеременную функцию; вклад от него стремится к нулю с ростом базы сигнала. Таким образом,

$$E_u \approx U_0^2 \tau_u / 2.$$

б). Энергетический спектр сигнала практически постоянен в пределах полосы частот $\Delta\omega = \mu\tau_u$ и равен $W_u = \pi U_0^2 / (2\mu)$. Тогда энергия сигнала $E_u = W_u \cdot \Delta\omega / \pi = U_0^2 \tau_u / 2$, что было получено выше другим способом.

4.28. Представим спектральную плотность сигнала $s(t)$ следующим образом: $S(\omega) = I_1 - jI_2$, где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) \cos \omega t \, dt = \\
 &= \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \left\{ \cos\left[(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left[(\omega_0 - \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] \right\} dt, \\
 I_2 &= U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) \sin \omega t \, dt = \\
 &= \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \left\{ \sin\left[(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sin\left[(\omega_0 - \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись табличным интегралом, приведенным в указаниях к данной задаче (см. раздел II), получаем

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{U_0}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta^2 + \mu^2/4}} e^{-\beta(\omega_0 + \omega)^2/4(\beta^2 + \mu^2/4)} \times \\
 &\times \exp(-jA_1) + \frac{U_0}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta^2 + \mu^2/4}} e^{-\beta(\omega_0 - \omega)^2/4(\beta^2 + \mu^2/4)} \times \\
 &\quad \times \exp(jA_2),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu(\omega_0 + \omega)^2}{8(\beta^2 + \mu^2/4)}, \\
 A_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu(\omega_0 - \omega)^2}{8(\beta^2 + \mu^2/4)}.
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последней формуле описывает спектральные компоненты, имеющие максимум в области отрицательных частот при $\omega \sim -\omega_0$; второе слагаемое соответствует той части спектра, которая имеет максимум при $\omega \sim \omega_0$. Во всех случаях, которые интересны для практики, обе указанные части спектра взаимно не «перекрываются».

Тема 5

5.1. Вычисляя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right) \cos \omega t \, d\omega = \\
 &= \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \cos \omega \left(t + \frac{\pi}{2\omega_0}\right) d\omega + \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \cos \omega \left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right) d\omega = \\
 &= \frac{S_0\omega_0}{2\pi} \left[\frac{\sin \omega_0 \left(t + \frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{\omega_0 \left(t + \frac{\pi}{2\omega_0}\right)} + \frac{\sin \omega_0 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{\omega_0 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что рассматриваемый сигнал есть полусумма двух идеальных низкочастотных сигналов с одинаковыми параметрами S_0 , ω_0 . Сигналы сдвинуты во времени на отрезки $\pm \pi/(2\omega_0)$ относительно начала отсчета времени.

5.3. В соответствии с рисунком определяем интервал дискретизации $t_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ с, откуда находим верхнюю частоту в спектре сигнала $\omega_0 = \pi/t_0 = 1.57 \cdot 10^6$ с⁻¹. Ряд Котельникова рассматриваемого сигнала имеет вид

$$s(t) = 20 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} + 15 \frac{\sin(\omega_0 t - \pi)}{\omega_0 t - \pi},$$

из которого при $t = 10^{-6}$ с получаем $s(10^{-6}) = 22.28$ В.

5.5. Так как энергетический спектр сигнала $s(t)$

$$W_s(\omega) = \frac{U_0^2 \pi}{\beta} e^{-\omega^2 \kappa(2\beta)},$$

$$\|s_{\text{ош}}\| = \left(\frac{U_0^2}{\beta} \int_{\omega_2}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2\beta}} d\omega \right)^{1/2}.$$

Воспользовавшись известной неэлементарной функцией — интегралом вероятностей [4]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

для которой $\Phi(\infty) = 1$, получаем

$$\|s_{\text{ош}}\| = \left(U_0^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega_2}{\sqrt{\beta}}\right) \right) \right)^{1/2}.$$

Если $\omega_2 = 0$, то естественно, что $\|s_{\text{ош}}\| = \|s\|$. Действительно, $\Phi(0) = 0.5$ и поэтому $\|s_{\text{ош}}\| = U_0 \sqrt{\pi/(2\beta)} = \|s\|$.

Функция $\Phi(x)$ быстро стремится к единице с ростом x . Это ведет к тому, что при достаточно больших значениях ω , норма сигнала ошибки становится достаточно малой. Например, если $\omega_2/\sqrt{\beta} = 3$, то $\Phi(\omega_2/\sqrt{\beta}) = 0.9986$ и $\|s_{\text{ош}}\| = 0.052 \|s\|$.

5.11. Поскольку $\sin x = \cos(x - 90^\circ)$, имеем

$$s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t - 90^\circ) = \operatorname{Re} \left(U_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_0 t} \right),$$

откуда комплексная огибающая представляется постоянным во времени числом

$$\vec{U}_s = U_0 e^{-j\pi/2} = -jU_0.$$

Спектральная плотность комплексной огибающей

$$G_s(\omega) = -j2\pi U_0 \delta(\omega).$$

Искомая спектральная плотность

$$S(\omega) = -j\pi U_0 [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

5.18. Здесь

$$\begin{aligned}
 z_x(t) &= \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_0} e^{(-\alpha+jt)\omega} d\omega = \\
 &= \frac{S_0}{\pi(\alpha-jt)} [1 - e^{(-\alpha+jt)\omega_0}] = \\
 &= \frac{S_0(\alpha+jt)}{\pi(\alpha^2+t^2)} [1 - e^{-\alpha\omega_0} \cos \omega_0 t - j e^{-\alpha\omega_0} \sin \omega_0 t].
 \end{aligned}$$

5.24. Производная от входного колебания

$$s'(t) = U_0 \delta(t+t_0) - U_0 \delta(t-t_0).$$

Сигнал на выходе квадратурного фильтра

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{U_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau+t_0)}{t-\tau} d\tau - \frac{U_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau-t_0)}{t-\tau} d\tau = \\
 &= \frac{U_0}{\pi} \left(\frac{1}{t+t_0} - \frac{1}{t-t_0} \right) = -\frac{2U_0}{\pi} \frac{t_0}{t^2-t_0^2}.
 \end{aligned}$$

Тема 6

6.1. Обозначим выпадение шестерки символом X , выпадение любого другого числа от единицы до пяти — символом Y . К выигрышу лица A приводят следующие ситуации: X — с вероятностью $1/6$, YYX — с вероятностью $(5/6)^2 \cdot 1/6$, $YYYYX$ — с вероятностью $(5/6)^4 \cdot 1/6$ и т. д. Отсюда легко видеть, что вероятность выигрыша A

$$P_A = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \right]^{-1} = 0.545,$$

т. е. лицо, начавшее игру, имеет некоторое, хотя и небольшое, преимущество.

6.8. По определению

$$F(x) = \int_0^x p(\xi) d\xi = 2 \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+\xi)^3}.$$

Выполнив замену переменной $\eta = 1 + \xi$, имеем

$$F(x) = 2 \int_1^{1+x} d\eta/\eta^3 = 1 - (1+x)^{-2}.$$

Далее,

$$P(0 < x \leq 1) = F(1) - F(0) = 0.75.$$

6.11. Основываемся на том, что

$$P(a < x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

В данном случае

$$P(0 < x \leq 2) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.341.$$

6.13. Так как $R = rR_0/(r + R_0)$, то обратная функции $r = -RR_0/(R_0 - R)$; ее производная $dr/dR = R_0^2/(R_0 - R)^2$. Плотность вероятности сопротивления r имеет вид $p(r) = 1/(2a)$, поэтому

$$p(R) = p(r) \cdot |dr/dR| = R_0^2/(2a(R_0 - R)^2).$$

Сопротивление R изменяется в пределах от

$$R_{\min} = \frac{R_0(R_0 - a)}{2R_0 - a} \text{ до } R_{\max} = \frac{R_0(R_0 + a)}{2R_0 + a}.$$

Окончательно

$$p(R) = \begin{cases} 0 & , R < R_{\min}, \\ R_0^2/(2a(R_0 - R)^2), & R_{\min} < R < R_{\max}, \\ 0 & , R > R_{\max}. \end{cases}$$

6.14. Рассмотрим двумерную случайную величину $W = (X, Y)$. Так как X и Y независимы, то $p_w(x, y) = p_1(x)p_2(y)$. Перейдем от аргументов (x, y) к новым аргументам (x, z) , где $z = x + y$. Так как якобиан преобразования $D = 1$, то в новых переменных двумерная плотность вероятности $p_w(x, z) = p_1(x)p_2(z - x)$. Отсюда плотность вероятности суммы есть свертка плотностей вероятности слагаемых:

$$p_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(z - x) dx.$$

Говорят, что данное выражение описывает *композицию* двух законов распределения.

6.19. В соответствии с принципом усреднения

$$\bar{x} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(1+\xi)^3} = 2 \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} - 2 \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} = 1.$$

Нахождение среднего квадрата сводится к вычислению интеграла

$$\bar{x}^2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{(1+\xi)^3} = 2 \left[\ln(1+\xi) + \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{2(1+\xi)^2} \right] \Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Таким образом, рассмотренная здесь случайная величина имеет неограниченно большую дисперсию.

6.21. В данном случае

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b+a}{2},$$

т. е. среднее значение совпадает с серединой отрезка.

Далее,

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Наконец,

$$\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.24. Очевидно, что $z = x(1-x)$. Плотность вероятности $p(x) = 1$. Тогда

$$\bar{z} = \int_0^1 x(1-x) dx = 1/6.$$

Далее,

$$\bar{z}^2 = \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = 1/30.$$

Отсюда

$$\sigma_x^2 = 1/30 - 1/36 = 1/180.$$

6.25. Если $z = x(1-x)$ (рис. III.6.1, а), то обратная функция $x = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - z}$ двузначна (рис. III.6.1, б). Ее производная

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\mp 1}{2\sqrt{1/4 - z}},$$

откуда

$$p(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1/\sqrt{1/4 - z}, & 0 < z \leq 1/4, \\ 0, & z > 1/4. \end{cases}$$

6.29. Якобиан преобразования от переменных x, y, z к переменным r, ϑ, φ

$$D = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta.$$

Таким образом, преобразованная плотность вероятности

$$p(r, \vartheta, \varphi) = \frac{r^2 \sin \vartheta}{(2\pi)^{3/2} \sigma^3} \exp(-r^2/(2\sigma^2)).$$

Для нахождения одномерной плотности вычисляем:

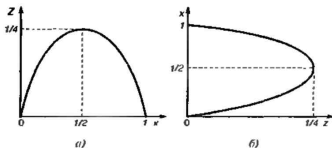


Рис. III.6.1

$$p(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \cdot p(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2r^2}{(2\pi)^{1/2} \sigma^3} \exp(-r^2/(2\sigma^2)).$$

6.32. Воспользуемся известной связью между моментами и характеристической функцией:

$$m_n = j^{-n} \Theta^{(n)}(0).$$

Производная характеристической функции

$$\Theta'(u) = \frac{1}{j(b-a)} \frac{j u (b e^{jbu} - a e^{jau}) - e^{jbu} + e^{jau}}{\alpha^2}. \quad (*)$$

При $u \rightarrow 0$ в правой части возникает неопределенность. Чтобы раскрыть ее, следует воспользоваться разложениями

$$e^{jau} = 1 + j a u - \frac{a^2 u^2}{2} - \dots; \quad e^{jbu} = 1 + j b u - \frac{b^2 u^2}{2} - \dots$$

Подставив эти выражения в правую часть (*), имеем

$$\Theta'(0) = \frac{j(a+b)}{2}; \quad m_1 = \bar{x} = \frac{a+b}{2}.$$

6.33. На основании решения задачи 6.31

$$\Theta_x(u) = \frac{e^{ju/2} - e^{-ju/2}}{ju} = \sin(u/2)/(u/2),$$

откуда

$$\Theta_y(u) = \sin^3(u/2)/(u/2)^3.$$

Чтобы от характеристической функции перейти к плотности вероятности $p(y)$, необходимо вычислить интеграл Фурье

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_y(u) e^{-jyu} du,$$

который в силу четности функции $\Theta_y(u)$ можно записать так:

$$p(y) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3(u/2) \cos uy}{u^3} du.$$

Соответствующий табличный интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3(u/2) \cos uy}{u^3} du = \begin{cases} \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{4} - y^2 \right), & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{16} \left(\frac{3}{2} - y \right)^2, & \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & y > \frac{3}{2} \end{cases}$$

приводит к следующему выражению плотности вероятности $p(y)$ при $y > 0$:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} - y^2, & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - y \right)^2, & \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & y > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Очевидно, что функция $p(y)$ является четной и должна быть дополнена соответствующей ветвью при $y < 0$. Сказанное здесь отображается графиком на рис. III.6.2. Следует обратить внима-

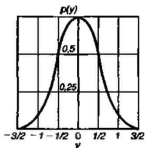


Рис. III.6.2.

ние на то, что плотность вероятности суммы трех независимых случайных величин отображается вполне «гладкой» кривой, несмотря на то, что плотность вероятности отдельных слагаемых носит разрывный характер. В этом проявляется закон, согласно которому при неограниченном увеличении числа слагаемых закон распределения суммы асимптотически стремится к нормальному (центральная предельная теорема в теории вероятностей).

6.35. По определению, характеристическая функция $\Theta_x(u) = \overline{\exp(jux)}$, поэтому $\overline{\exp(x)} = \Theta_x(-j)$. Для гауссовой случайной величины $\Theta_x(u) = \exp(jm_x u - \sigma_x^2 u^2 / 2)$, откуда $\overline{\exp(x)} = \exp(m_x + \sigma_x^2 / 2)$.

Тема 7

7.1. Среднее значение $\overline{x(t)}$ не зависит от времени: $\overline{x(t)} = \overline{a \cos \omega_0 t} = 0$, однако дисперсия $\sigma_x^2(t) = \overline{a^2 \cos^2 \omega_0 t} = \overline{a^2 (1 + \cos 2\omega_0 t) / 2}$ является функцией времени. Отсюда следует, что случайный процесс $X(t)$ нестационарен в широком смысле.

7.7. Так как $\overline{x} = 0$ при всех ξ , то

$$\overline{y} = \int_0^t \overline{x}(\xi) d\xi = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \overline{y(t_1)y(t_2)} = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= W_0 \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} \delta(\xi_1 - \xi_2) d\xi_2. \end{aligned}$$

Как видно из данного равенства, на плоскости ξ_1, ξ_2 подынтегральная функция равна нулю во всех точках, кроме точек прямой с уравнением $\xi_2 = \xi_1$, где эта функция имеет δ -образную способность. Эта прямая соответствует отрезку OA на рис. III.7.1, а, б, где изображены прямоугольные области, в пределах которых проводится интегрирование.

Возможны два случая. Если $t_1 > t_2$ (рис. III.7.1, а), то интегрирование по ξ_2 даст не равный нулю результат только вдоль отрезка вида BC , начальная точка которого B принадлежит области $0 \leq \xi_2 \leq t_2$. Поэтому $R_y(t_1, t_2) = W_0 t_2$, если $t_1 > t_2$.

В случае, когда $t_1 < t_2$, интеграл по ξ_2 вдоль любого отрезка вида BC равен единице всегда (рис. III.7.1, б). Отсюда $R_y(t_1, t_2) = W_0 t_1$, если $t_1 < t_2$. Так как в обоих случаях функция корреляции явно зависит от t_1 или t_2 , а не от разности $t_1 - t_2$, то винеровский случайный процесс нестационарен в широком смысле.

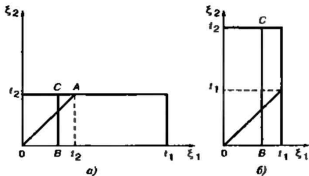


Рис. III.7.1

Полагая, что $t_1 = t_2 = t$, находим, что дисперсия $\sigma_y^2 = R_y(t, t) = W_0 t$ линейно растет во времени.

7.12. Очевидно, что $\overline{x(t)} = 0$. Что касается величины $x(t)x(t+\tau)$, то она равна либо a^2 , либо $-a^2$ в зависимости от того, будет ли реализация процесса за отрезок времени τ иметь четное число скачков (включая нуль), либо нечетное. Используя принцип усреднения, получаем при $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = a^2(P_\tau(0) + P_\tau(2) + \dots) - \\
 &\quad - a(P_\tau(1) + P_\tau(3) + \dots) = \\
 &= a^2 e^{-\lambda\tau} \left(1 - \lambda\tau + \frac{1}{2!}(\lambda\tau)^2 - \frac{1}{3!}(\lambda\tau)^3 + \dots \right) = a^2 e^{-2\lambda\tau}.
 \end{aligned}$$

Так как функции корреляции четва, то

$$R_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

7.16. Находим спектр мощности производной:

$$W_y(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_s, \\ \omega^2 W_0, & -\omega_s < \omega < \omega_s, \\ 0, & \omega > \omega_s. \end{cases}$$

Далее,

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_s} \omega^2 \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0}{\pi\tau^3} \int_0^{\omega_s\tau} \xi^2 \cos \xi d\xi.$$

Используем табличный интеграл

$$\int z_1^2 \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \left(z_1^2 - \frac{2bz_1}{k^2} \right) \sin kx + \frac{2bz_1}{k^2} \cos kx,$$

где $z_1 = a + bx$, $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$, так что $z_1 = \xi$. В результате получаем

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 \omega_s^3}{\pi} \left[\left(1 - \frac{2}{(\omega_s \tau)^2} \right) \frac{\sin \omega_s \tau}{\omega_s \tau} + \frac{2 \cos \omega_s \tau}{(\omega_s \tau)^2} \right].$$

7.18. В данном случае коэффициент корреляции случайного процесса $r_x(\tau) = \sin \omega_s \tau / (\omega_s \tau)$. Поэтому

$$r_x(\tau) = \frac{(\omega_s \tau)^2 \sin \omega_s \tau + 2 \omega_s \tau \cdot \cos \omega_s \tau - 2 \sin \omega_s \tau}{\omega_s \tau^3}.$$

В последнем выражении следует раскрыть неопределенность, возникающую при $\tau \rightarrow 0$. Для этого следует воспользоваться правилом Лопитала. Тогда $r_x'(0) = -\omega_s^2/3$, откуда $n(0) = \omega_s / (2\pi\sqrt{3})$.

7.20. Известно, что плотность вероятности огибающей

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp(-U^2/(2\sigma_x^2)).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P(U \geq U_0) &= \int_{U_0}^{\infty} \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-U^2/2\sigma_x^2} dU = \\ &= \int_{U_0^2/(2\sigma_x^2)}^{\infty} e^{-\xi} d\xi = e^{-U_0^2/2\sigma_x^2} = 0.449. \end{aligned}$$

7.22. Так как длина отрезка [4.9 В, 5.1 В] достаточно мала по сравнению с центральным значением $U = 5$ В, то вероятность

$$P(4.9 \text{ В} < U \leq 5.1 \text{ В}) \approx p(5) \cdot 0.2.$$

Используя формулу распределения Рэлея, получаем таблицу

$\sigma_{x'}^3, \text{В}^2$	1	12	96
p	$3.72 \cdot 10^{-6}$	0.0294	$9.2 \cdot 10^{-3}$

Данные вероятности характеризуют собой относительное время пребывания огибающей в пределах рассматриваемого полуинтервала. Переходя от относительных величин к абсолютным длительностям, получаем таблицу средних длительностей пребывания:

$\sigma_{x'}^3, \text{В}^2$	1	12	96
$t_{\text{ср}}$	3.72 мкс	29.4 мс	9.2 мс

7.25. При учете одного члена разложения функция корреляции огибающей соответствующий спектр мощности

$$W_U(\omega) = \frac{5.498 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^8 + \omega^2}$$

Максимальное значение этой функции

$$W_{U_{\text{max}}} = W_U(0) = 1.3745 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с.}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\text{эф}} &= \frac{1}{W_{U_{\text{max}}}} \int_0^{\infty} W_U(\omega) d\omega = \\ &= 4 \cdot 10^6 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{4 \cdot 10^8 + \omega^2} = 3.142 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

При учете двух членов разложения

$$W_U(\omega) = \frac{5.498 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^8 + \omega^2} + \frac{6.968 \cdot 10^3}{1.6 \cdot 10^8 + \omega^2}$$

Эта функция также имеет максимальное значение при $\omega=0$:

$$W_{U_{\text{max}}} = W_U(0) = 1.418 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с.}$$

Поэтому эффективная ширина спектра огибающей

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = 3.877 \cdot 10^8 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{4 \cdot 10^8 + \omega^2} +$$

$$+ 4.914 \cdot 10^7 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1.6 \cdot 10^8 + \omega^2} =$$

$$= 3.238 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

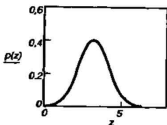


Рис. III.7.2

Таким образом, относительная ошибка, возникающая при упрощенном представлении функции автокорреляции отгибающей лишь одним членом ряда, составляет около 3%.

7.20. Один из возможных вариантов решения задачи представлен следующей программой (рис. III.7.2):

$$\alpha = 3,$$

$$z = 0.01..8,$$

$$p(z) = z \cdot \exp\left[\frac{-(z^2 + \alpha^2)}{2}\right] \cdot 10(\alpha \cdot z).$$

Интересно провести ряд экспериментов с этой программой, наблюдая, в частности, как проявляется нормализация райсовского распределения при увеличении значения безразмерного отношения $\alpha = U_m / \sigma_x$.

Тема 8

0.1. На основании первого закона Кирхгофа, считая положительным ток, входящий в узел, и отрицательным ток, выходящий из узла, запишем уравнения баланса токов в узлах 1 и 2:

$$-C_1 \frac{du_1}{dt} - \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2 - u_1}{R_0} = 0,$$

$$-C_2 \frac{du_2}{dt} - \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_1}{R_3} = 0.$$
(1)

Введем обозначения

$$1/R_{13} = 1/R_1 + 1/R_3; \quad 1/R_{23} = 1/R_2 + 1/R_3.$$

Тогда (1) приобретает вид системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_{13}C_1} - \frac{\alpha_2}{R_3C_1} &= 0, \\ -\frac{u_1}{R_3C_2} + \frac{u_2}{R_{23}C_2} + \frac{du_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение системы (2) будем искать в виде: $u_1 = Ae^{\gamma t}$, $u_2 = Be^{\gamma t}$ с неизвестными заранее постоянными A и B . Подставляя эти выражения в (2) и сокращая на общий экспоненциальный множитель, приходим к системе алгебраических уравнений относительно A и B :

$$\begin{aligned} \left(\gamma + \frac{1}{R_{13}C_1}\right)A - \frac{B}{R_3C_1} &= 0, \\ -\frac{A}{R_3C_2} + \left(\gamma + \frac{1}{R_{23}C_2}\right)B &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для разрешимости этой системы необходимо потребовать, чтобы ее определитель был равен нулю. Отсюда получаем характеристическое уравнение системы

$$\left(\gamma + \frac{1}{R_{13}C_1}\right)\left(\gamma + \frac{1}{R_{23}C_2}\right) - \frac{1}{R_3^2C_1C_2} = 0,$$

или

$$\gamma^2 + \left(\frac{1}{R_{13}C_1} + \frac{1}{R_{23}C_2}\right)\gamma + \frac{1}{C_1C_2}\left(\frac{1}{R_{13}R_{23}} - \frac{1}{R_3^2}\right) = 0, \quad (4)$$

имеющее корни γ_1 и γ_2 .

Если величина γ совпадает с γ_1 или γ_2 , то система (3) имеет бесконечное множество решений, отличающихся друг от друга общим коэффициентом пропорциональности. При этом на основании, например, первого уравнения из (3) получаем соотношение

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{R_3C_1} \left/ \left(\gamma + \frac{1}{R_{13}C_1}\right)\right.$$

Таким образом, общее решение системы (2) приобретает вид

$$u_1(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t},$$

$$u_2(t) = R_0 C_1 \left(\gamma_1 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) A_1 e^{\gamma_1 t} + \quad (5)$$

$$+ R_0 C_1 \left(\gamma_2 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) A_2 e^{\gamma_2 t},$$

причем коэффициенты A_1 и A_2 должны быть найдены из начальных условий при $t=0$:

$$A_1 + A_2 = u_1(0),$$

$$R_0 C_1 \left[\left(\gamma_1 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) A_1 + \left(\gamma_2 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) A_2 \right] = u_2(0).$$

Решая эту систему, находим:

$$A_1 = \frac{(\gamma_2 + 1/(R_{13} C_1)) u_1(0) - u_2(0)/(R_3 C_1)}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{-(\gamma_1 + 1/(R_{13} C_1)) u_1(0) + u_2(0)/(R_3 C_1)}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Подставив коэффициенты (6) в (5), приходим к окончательным выражениям, описывающим собственные колебания в рассматриваемой цепи:

$$u_1(t) = \frac{e^{\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[\left(\gamma_2 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) u_1(0) - \frac{u_2(0)}{R_3 C_1} \right] +$$

$$+ \frac{e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[\frac{u_2(0)}{R_3 C_1} - \left(\gamma_1 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) u_1(0) \right],$$

$$u_2(t) = \frac{e^{\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\gamma_1 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) \left[R_3 C_1 \left(\gamma_2 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) u_1(0) - \right.$$

$$\left. - u_2(0) \right] + \frac{e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\gamma_2 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) \left[u_2(0) - \right.$$

$$\left. - R_3 C_1 \left(\gamma_1 + \frac{1}{R_{13} C_1} \right) u_1(0) \right].$$

8.3. Выбрав в качестве динамических переменных токи i_1 и i_2 , имеем следующую систему уравнений:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Находя решения в виде $i_1(t) = Ae^{\gamma t}$, $i_2(t) = Be^{\gamma t}$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\left(\gamma L_1 + \frac{1}{\gamma C} \right) A + \gamma MB = 0,$$

$$\gamma MA + (\gamma L_2 + R) B = 0.$$

Для разрешимости этой системы необходимо, чтобы определитель был равен нулю, откуда вытекает характеристическое уравнение

$$(\gamma^2 L_1 C + 1)(\gamma L_2 + R) - \gamma^3 M^2 C = 0 \quad (1)$$

Если $M=0$, то контуры оказываются несвязанными. Уравнение (1) имеет три корня, один из которых $\gamma_1 = -R/L_1$ веществен, а два других $\gamma_{2,3} = \pm j/\sqrt{L_1 C}$ — чисто мнимые. Корню γ_1 отвечает экспоненциально затухающий процесс в RL -цепи; корням $\gamma_{2,3}$ соответствуют гармонические колебания с частотой $\omega_{\text{соб}} = 1/\sqrt{L_1 C}$ в LC -контуре без потерь.

При $R=\infty$ RL -контур разомкнут; в LC -контуре могут существовать незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_{\text{соб}}$.

Если $R=0$, то уравнение (1) приобретает вид

$$\gamma^2 (L_1 L_2 - M^2) C = -L_1, \quad (2)$$

откуда

$$\gamma_{1,2} = \pm \frac{j}{\sqrt{(1-k_c^2)L_1 C}}, \quad (3)$$

где $k_c = M/\sqrt{L_1 L_2} \leq 1$ — коэффициент индуктивной связи контуров. При этом в системе будут наблюдаться гармонические собственные колебания с частотой

$$\omega_{\text{сoб}} = 1/\sqrt{(1-k_c^2)L_1C} > 1/\sqrt{L_1C}. \quad (4)$$

Итак, наличие индуктивной связи с короткозамкнутым контуром приводит к повышению собственной частоты колебательной системы.

8.5. Система дифференциальных уравнений рассматриваемой цепи имеет вид:

$$L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_1}{C} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{i_2}{C} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0.$$

Перейдем от переменных i_1 и i_2 к новым переменным ξ и η таким, что относительно последних система (1) превратится в два не связанных между собой дифференциальных уравнения. Если такое преобразование возможно, то переменные ξ , η называют *нормальными координатами* системы. Переход к нормальным координатам — важный прием в теории колебаний.

Для данного случая нормальные координаты находятся просто:

$$\xi = i_1 + i_2; \quad \eta = i_1 - i_2. \quad (2)$$

Действительно, складывая и вычитая уравнения, входящие в (1), получаем:

$$(L+M) d^2 \xi / dt^2 + \xi / C = 0, \quad (3)$$

$$(L-M) d^2 \eta / dt^2 + \eta / C = 0. \quad (4)$$

Решениям уравнения (3) отвечают гармонические колебания с частотой $\omega_{\text{сoб}1} = 1/\sqrt{(L+M)C}$. Аналогично для уравнения (4) имеем частоту собственных колебаний $\omega_{\text{сoб}2} = 1/\sqrt{(L-M)C}$. Говорят, что в рассматриваемой системе возможны два *нормальных колебания*, называемых также *модами*. Моды сложной колебательной системы полностью независимы друг от друга. Так, при соответствующих начальных условиях в системе может быть селективно возбуждена первая (низкочастотная или медленная мода). При другом способе возбуждения можно добиться существования лишь второй (высокочастотной или быстрой моды). В общем случае в системе одновременно наблюдаются обе моды, которые, интерферируя, образуют *биения*.

8.10. Между узлами a и b цепи включены ветви с операторными проводимостями

$$Y_1 = pC + \frac{1}{R}; \quad Y_2 = pC/(1 + pRC).$$

Изображения токов связаны уравнениями, вытекающими из законов Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 = I_{\text{вх}}; \quad I_1/I_2 = Y_1/Y_2.$$

Отсюда

$$I_2 = I_{\text{вх}} Y_2 / (Y_1 + Y_2)$$

и поэтому передаточная функция

$$K(p) = \frac{RY_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{pR^2C}{(RC)^2 p^2 + 3RCp + 1}.$$

Обозначая $\tau = RC$ и выполняя замену переменной $p = j\omega$, находим частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{j\omega\tau R}{1 - \omega^2\tau^2 + j3\omega\tau} \quad (1)$$

Отсюда нормированная АЧХ:

$$|K(j\omega)|/R = \frac{\omega\tau}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + 9\omega^2\tau^2}}.$$

Фазочастотная характеристика $\varphi_K(\omega)$ представляет собой разность аргументов двух комплексных чисел, стоящих в числителе и знаменателе формулы (1). Если $\omega\tau < 1$, то знаменатель отображается точкой в первом квадранте комплексной плоскости и поэтому

$$\varphi_K(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3\omega\tau/(1 - \omega^2\tau^2)).$$

Если же $\omega\tau > 1$, то точка, отображающая знаменатель, перемещается во второй квадрант, так что

$$\varphi_K(\omega) = -\operatorname{arctg}[(\omega^2\tau^2 - 1)/(3\omega\tau)].$$

8.12. Пусть ко входу фильтра подключен идеальный источник ЭДС с изображением $U_{\text{вх}}(p)$. Выберем в качестве положительных

направления токов в ветвях, указанные стрелками на рис. III.8.1. Равенство нулю алгебраических сумм токов в узлах a , b и c приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}(U_{\text{вх}} - U_a)/R - pCU_a - (U_a - U_b)/R &= 0, \\ (U_a - U_b)/R - pCU_b - (U_b - U_{\text{вых}})/R &= 0, \\ (U_b - U_{\text{вых}})/R - pCU_{\text{вых}} &= 0.\end{aligned}$$

Для нахождения передаточной функции цепи следует исключить вспомогательные переменные U_a и U_b . Выполнив эту операцию, получаем

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{вых}}(p^3 R^3 C^2 + 5p^2 R^2 C^2 + 6pRC + 1),$$

откуда

$$\begin{aligned}K(p) &= (p^3 R^3 C^2 + 5p^2 R^2 C^2 + 6pRC + 1)^{-1}, \\ K(j\omega) &= [(1 - 5\omega^2 R^2 C^2) + j\omega(6RC - \omega^2 R^3 C^3)]^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда фазочастотная характеристика

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg \frac{\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2)}{1 - 5\omega^2 R^2 C^2}.$$

Частота f_1 найдется из условия $1 - 5\omega_1^2 R^2 C^2 = 0$, соответственно для частоты f_2 имеем уравнение $6 - \omega_2^2 R^2 C^2 = 0$. Используя числовые данные, приведенные в условии задачи, получаем $f_1 = 52.34$ Гц, $f_2 = 286.65$ Гц.

8.14. Здесь изображения потенциалов

$$U_a = \frac{Z_2 U_{\text{вх}}}{Z_1 + Z_2}; \quad U_b = \frac{Z_1 U_{\text{вх}}}{Z_3 + Z_4}.$$

Тогда

$$U_{\text{вых}} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right) U_{\text{вх}},$$

$$K(p) = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}.$$

8.16. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(j\omega)| d\omega}{1 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K_0 - b\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega.$$

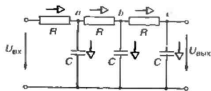


Рис. III.8.1

Так как

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega^2 / (1 + \omega^2)] = 1,$$

то данный интеграл расходится и поэтому рассматриваемый фильтр физически нереализуем.

8.18. Частотный коэффициент передачи данной системы

$$K(j\omega) = \frac{-S_0 R_s \omega \tau_p}{(\omega \tau_p + j\omega)(1 + j\omega \tau_s)}$$

откуда

$$h(t) = \frac{S_0 R_s \omega \tau_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{(\omega \tau_p + j\omega)(1 + j\omega \tau_s)}$$

На плоскости комплексной переменной ω подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках с координатами $\omega_1 = j\omega_{TP}$ и $\omega_2 = j/\tau_s$. Находя вычеты

$$\text{res} \Big|_{\omega = \omega_1} = \frac{e^{-\omega t}}{j(1 - \omega \tau_p \tau_s)}$$

и

$$\text{res} \Big|_{\omega = \omega_2} = -\frac{e^{-t/\tau_s}}{j(1 - \omega \tau_p \tau_s)}$$

получаем

$$h(t) = -\frac{S_0 R_s \omega \tau_p}{1 - \omega \tau_p \tau_s} (e^{-\omega \tau_p t} - e^{-t/\tau_s}).$$

8.19. Для N -ступенчатой системы, собранной из идентичных звеньев,

$$K_N(j\omega) = (-K_0)^N / (1 + j\omega \tau_s)^N.$$

Тогда

$$h(t) = \frac{(-K_0)^N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{(1 + j\omega \tau_s)^N}$$

Подынтегральная функция имеет N -кратный полюс в точке $\omega = j/\tau_2$, с вычетом

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \Big|_{\omega=j/\tau_2} &= \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{d\omega^{N-1}} \left[\frac{e^{j\omega t} (\omega - j/\tau_2)^{N-1}}{(1 + j\omega\tau_2)^N} \right] \Big|_{\omega=j/\tau_2} = \\ &= -\frac{j}{(N-1)!} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{N-1} e^{-t/\tau_2} / \tau_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h(t) = \frac{(-K_0)^N}{(N-1)!} \cdot \frac{1}{\tau_2} \left(\frac{t}{\tau_2} \right)^{N-1} e^{-t/\tau_2} \sigma(t).$$

На рис. III.8.2 представлены графики функций

$$f_N(t/\tau_2) = (t/\tau_2)^{N-1} \exp(-t/\tau_2) / (N-1)!,$$

пропорциональных импульсным характеристикам. Графики построены для $N=2, 3$ и 4 . Видно, что рост числа ступеней усилителя ведет к увеличению задержки импульсного отклика.

8.23. Используя изображения напряжения и токов, имеем систему уравнений

$$U_{\text{вх}} = R_1 I_1 + pL_1 I_1 + pM I_2,$$

$$0 = R_2 I_2 + pL_2 I_2 + pM I_1.$$

Исключив с помощью второго уравнения данной системы изображение $I_2(p)$, получаем связь между $U_{\text{вх}}$ и I_1 :

$$U_{\text{вх}} = \left[pM - \frac{(R_2 + pL_2)(R_1 + pL_1)}{pM} \right] I_1.$$

Передаточная функция цепи

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \\ &= \frac{pMR_2}{p^2(L_1L_2 - M^2) + p(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $U_{\text{вых}} = -I_2R_2$, поскольку увеличение контурного тока

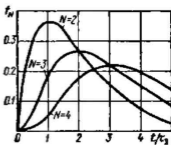


Рис. III.8.2

i_2 в том направлении, которое принято за положительное, ведет к повышению потенциала нижнего зажима резистора R_2 , т. е. к уменьшению выходного напряжения. Используя обозначение $L_1 L_2 - M^2 = L_1 L_2 (1 - k_c^2)$, где $k_c = M / \sqrt{L_1 L_2}$ — коэффициент связи, представим передаточную функцию в виде

$$K(p) = \frac{MR_2}{L_1 L_2 (1 - k_c^2)} \cdot \frac{p}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

где $p_{1,2}$ — корни характеристического уравнения

$$p^2 + p \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 (1 - k_c^2)} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 (1 - k_c^2)} = 0.$$

Используя таблицы преобразований Лапласа, получаем

$$h(t) = \frac{MR_2}{L_1 L_2 (1 - k_c^2)} \cdot \frac{1}{p_1 - p_2} (p e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \sigma(t),$$

$$g(t) = \frac{MR_2}{L_1 L_2 (1 - k_c^2)} \cdot \frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \sigma(t).$$

8.25. Сокращения длительности фронта и уменьшения спада плоской вершины можно добиться, если модуль одного из корней характеристического уравнения сокращать, а модуль другого увеличивать. Так как

$$p_{1,2} = [-(\alpha_1 + \alpha_2) \pm ((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(1 - k_c^2) \times \\ \times \alpha_1 \alpha_2)^{1/2}] / (2(1 - k_c^2)),$$

где $\alpha_1 = R_1 / L_1$, $\alpha_2 = R_2 / L_2$, то ясно, что имеются два пути: а) устремить величину k_c к единице, получив в пределе идеальный трансформатор без рассеяния; б) устремить α_1 и (или) α_2 к нулю, т. е. увеличить постоянные времена первого и (или) второго контура.

8.27. Здесь

$$K(p) = \frac{pRC - 1}{pRC + 1} = \frac{p - \alpha}{p + \alpha},$$

где $\alpha = 1/(RC)$. Импульсная характеристика является оригиналом по отношению к передаточной функции. Используя таблицы преобразований Лапласа, получаем

$$h(t) = \delta(t) - 2\alpha e^{-\alpha t} \sigma(t).$$

Аналогично,

$$g(t) \doteq K(p)/p; g(t) = (2e^{-at} - 1)\sigma(t).$$

8.30. Воспользуемся тем, что переходная характеристика есть интеграл от импульсной характеристики. Тогда

$$g(t) = \frac{K_0 \omega_n}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_n \xi}{\omega_n \xi} d\xi.$$

Выполнив замену переменной $x = \omega_n \xi$, находим

$$g(t) = \frac{K_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_n t} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Данный интеграл выражается через специальную функцию — интегральный синус

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\omega_n t} = - \int_0^{-\infty} + \int_0^{\omega_n t}$$

и, кроме того, $\text{Si}(-\infty) = -\pi/2$, то

$$g(t) = \frac{K_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Si}(\omega_n t) \right].$$

График полученной зависимости приведен на рис. III.8.3.

Так как $\text{Si}(\infty) = \pi/2$, то величина $t_{y_{ст}}$ должна удовлетворять уравнению

$$\pi/2 + \text{Si}(\omega_n t_{y_{ст}}/2) = 0.9\pi$$

или

$$\text{Si}(\omega_n t_{y_{ст}}/2) = 1.2566.$$

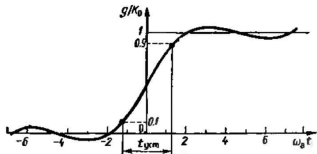


Рис. III.8.3

По таблицам интегрального синуса [4] находим $\omega_0 t_{уст} = 2.8$, т. е. $t_{уст} = 0.44/f_n$.

8.31. Здесь

$$h(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{j(\beta^2 \omega^2 + \omega t)} d\omega + \frac{K_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j(\beta^2 \omega^2 - \omega t)} d\omega = I_1 + I_2.$$

Возьмем первое слагаемое в правой части и дополним выражение $\beta^2 \omega^2 + \omega t$ до полного квадрата:

$$\beta^2 \omega^2 + \omega t = \left(\beta \omega + \frac{t}{2\beta} \right)^2 - \frac{t^2}{4\beta^2}.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{K_0}{2\pi} e^{-j^2/4\beta^2} \int_{-\infty}^0 e^{j(\beta\omega + t/2\beta)^2} d\omega.$$

Вводя новую переменную $\eta = \beta\omega + t/(2\beta)$, получим

$$I_1 = \frac{K_0}{2\pi\beta} e^{-j^2/4\beta^2} \int_0^{\infty} e^{j\eta^2} d\eta.$$

Входящий сюда интеграл вычисляется так:

$$\int_0^{\infty} e^{j\eta^2} d\eta = \int_0^{\infty} \cos \eta^2 d\eta + j \int_0^{\infty} \sin \eta^2 d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + j).$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{K_0}{4\pi\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu^2/4\beta^2} (1+j).$$

Аналогично вычисляем второе слагаемое:

$$I_2 = \frac{K_0}{4\pi\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\mu^2/4\beta^2} (1-j).$$

Объединив оба результата, находим окончательно

$$h(t) = \frac{K_0}{\sqrt{8\pi}\beta} \cos\left(\frac{t^2}{4\beta^2}\right).$$

График импульсной характеристики представлен на рис. III.8.4.

8.33. Функцию $K(j\omega)$, являющуюся преобразованием Фурье от импульсной характеристики $h(t)$, удобно вычислить следующим образом. Находим производную

$$\begin{aligned} h'(t) &= A\delta(t) - A(a+1)\delta(t-T) + A(a+ \\ &+ a^2)\delta(t-2T) - A(a^2+a^2)\delta(t-3T) + A(a^4+ \\ &+ a^3)\delta(t-4T) - \dots = A\delta(t) - A(a+1)[\delta(t- \\ &- T) - a\delta(t-2T) + a^2\delta(t-3T) - a^2\delta(t-4T) + \dots]. \end{aligned}$$

Ее преобразование Фурье

$$G(\omega) = A - A(a+1)e^{-j\omega T} [1 - ae^{-j\omega T} + a^2e^{-j2\omega T} - \dots].$$

Суммируя бесконечную геометрическую прогрессию, получаем

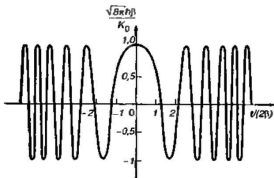


Рис. III.8.4

$$G(\omega) = A \left[1 - \frac{(a+1)e^{j\omega T}}{1+ae^{-j\omega T}} \right],$$

откуда

$$K(j\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} = AT \left(\frac{1}{\omega T} \right) \left[\frac{1 - e^{-j\omega T}}{1+a} \right] e^{-j\pi/2}.$$

Несложные тригонометрические выкладки приводят к следующей формуле для нормированной АХЧ данной системы:

$$\frac{|K(j\omega T)|}{AT} = \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{T \sqrt{1 + 2a \cos \omega T + a^2}}$$

На рис. П.8.5 представлены кривые, построенные по этой формуле при $a=0.4$ и $a=0.8$.

8.37. Так как

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \delta(\xi) d\xi,$$

то при $0 \leq t \leq T$ точка $\xi=0$, в которой сосредоточена δ -функция, принадлежит области интегрирования и поэтому $h(t) = 1/T$. Если же $t < 0$ или $t > T$, то очевидно, что $h(t) = 0$. Отсюда видно, что данный фильтр является физически реализуемым. Выполняя преобразование Фурье, получаем

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}).$$

8.38. В соответствии с принципом спектрального метода

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{U_0 K_0}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{\omega_n} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{U_0 K_0}{2} + \frac{U_0 K_0}{\pi} \int_0^{\omega_n} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = U_0 K_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_n t) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что аналогичное решение другим методом было получено в задаче 8.30.

8.39. Используя метод интеграла Дюамеля, основываясь на том, что импульсная характеристика идеального ФНЧ

$$h(t) = \frac{K_0 \omega_s \sin \omega_s t}{\pi \omega_s t}$$

Поскольку входной сигнал отличен от нуля лишь на отрезке времени $[0, \tau_n]$, получим

$$u_{\text{max}}(t) = \frac{U_0 K_0 \omega_s}{\pi} \int_0^{\tau_n} \frac{\sin \omega_s (t-\tau)}{\omega_s (t-\tau)} d\tau.$$

Выполнив замену переменной $x = \omega_s (t - \tau)$, имеем

$$u_{\text{max}}(t) = -\frac{U_0 K_0}{\pi} \int_{\omega_s t}^{\omega_s (t-\tau_n)} (\sin x/x) dx.$$

Данный интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_{\omega_s t}^{\omega_s (t-\tau_n)} = - \int_{\omega_s (t-\tau_n)}^{\omega_s t},$$

откуда

$$u_{\text{max}}(t) = \frac{U_0 K_0}{\pi} [\text{Si}(\omega_s t) - \text{Si}(\omega_s (t - \tau_n))].$$

На рис. III.8.6, а, б изображены графики зависимостей, построенные по последней формуле применительно к достаточно коротким импульсам ($\omega_s \tau_n = 1$ и 2), а также применительно к более длинному импульсу с параметром $\omega_s \tau_n = 20$. Следует обратить внимание на различный характер искажений коротких и длинных импульсов.

8.41. Передаточная функция системы

$$K(p) = \frac{R}{R + pL} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau},$$

где $\tau = L/R$ — постоянная времени цепи.

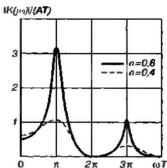


Рис. III.8.5

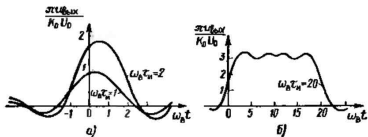


Рис. III.8.6

Изображение выходного сигнала

$$U_R(p) = \frac{A(1/\tau)}{p^2(p+1/\tau)}$$

Используя соответствие

$$\frac{a^2}{p^2(p+a)} \doteq at - (1 - e^{-at}),$$

получаем выходной сигнал

$$u_R(t) = A(t - \tau) + A\tau e^{-t/\tau},$$

$$t > 0.$$

График полученной зависимости представлен на рис. III.8.7. Видно, что напряжение u_R при $t \rightarrow \infty$ стремится к прямой, которая повторяет закон изменения во времени входного напряжения, будучи, однако, смещенной на постоянную времени τ в сторону запаздывания.

8.42. Воспользуемся выражением импульсной характеристики RC-цепи:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} \sigma(t).$$

При $t < \tau_n$ имеем

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{U_0}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau =$$

$$= U_0(1 - e^{-t/RC}).$$

Соответственно при $t > \tau_n$

$$\begin{aligned}
 u_{\text{max}}(t) &= U_0 \int_0^t h(t-\tau) d\tau = \\
 &= \frac{U_0}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau = \\
 &= U_0 e^{-t/RC} (e^{t/RC} - 1).
 \end{aligned}$$

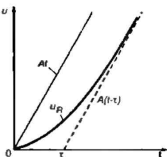


Рис. III.8.7

8.43. Входной сигнал равен нулю при $t < 0$ и поэтому для $t > 0$

$$u_{\text{max}}(t) = \frac{a}{\tau} \int_0^t \xi e^{-(t-\xi)/\tau} d\xi.$$

Введем переменную интегрирования $x = \xi/\tau$. Тогда

$$u_{\text{max}}(t) = a\tau e^{-t/\tau} \int_0^{t/\tau} x e^x dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$u_{\text{max}}(t) = a\tau \left[\left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) + e^{-t/\tau} \right].$$

График данной зависимости представлен на рис. III.8.8 (кривая 1). Здесь же изображена прямая 2, соответствующая входному сигналу.

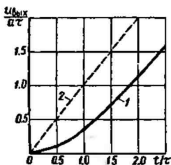


Рис. III.8.8

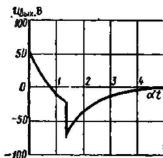


Рис. III.8.9

8.45. При $t < \tau_n$

$$\begin{aligned} u_{\text{max}}(t) &= U_0 \int_0^t [\delta(t-\tau) - 2\alpha e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau = \\ &= U_0 - 2\alpha U_0 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = U_0(2e^{-\alpha t} - 1). \end{aligned}$$

При $t > \tau_n$

$$\begin{aligned} u_{\text{max}}(t) &= U_0 \int_0^{\tau_n} [\delta(t-\tau) - 2\alpha e^{-\alpha(t-\tau)}] d\tau = \\ &= -2\alpha U_0 e^{-\alpha t} \int_0^{\tau_n} e^{\alpha\tau} d\tau = -2U_0 e^{-\alpha t} (e^{\alpha\tau_n} - 1). \end{aligned}$$

Расчитанная осциллограмма выходного напряжения показана на рис. П.8.9.

Тема 9

9.3. Частотный коэффициент передачи N -ступенчатого усилителя

$$K(j\omega) = \frac{(-K_{\text{pec}})^N}{[1 + j\tau_x(\omega - \omega_{\text{pec}})]^N}$$

Выражение АЧХ данной системы имеет вид

$$|K(j\omega)| = \frac{K_{\text{pec}}^N}{[1 + \tau_x^2(\omega - \omega_{\text{pec}})^2]^{N/2}}$$

На граничной частоте полосы пропускания $\omega_{\text{гп}}$ имеет место равенство

$$[1 + \tau_x^2(\omega_{\text{гп}} - \omega_{\text{pec}})^2]^{N/2} = \sqrt{2},$$

откуда

$$\Pi_{0.707} = \frac{1}{\pi\tau_x} \sqrt{\sqrt{N/2} - 1}.$$

9.9. В выражении для частотного коэффициента передачи усилителя

$$K(j\omega) = \frac{K_{\text{pec1}} K_{\text{pec2}}}{[1 + j(\omega - \omega_{\text{pec}}) \tau_{x1}] \cdot [1 + j(\omega - \omega_{\text{pec}}) \tau_{x2}]}$$

делаем замену переменной $\omega = \omega_{\text{pec}} + \Omega$ и переходим к частотному коэффициенту передачи низкочастотного эквивалента

$$K_{\text{нч}}(j\Omega) = \frac{K_{\text{pec1}} K_{\text{pec2}}}{(1 + j\Omega \tau_{x1})(1 + j\Omega \tau_{x2})}$$

Соответствующая передаточная функция

$$K_{\text{нч}}(p) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 K_0}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$$

где $K_0 = K_{\text{pec1}} K_{\text{pec2}}$, $\alpha_1 = 1/\tau_{x1}$, $\alpha_2 = 1/\tau_{x2}$. Используя таблицы преобразований Лапласа, получаем

$$h_{\text{нч}}(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 K_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \sigma(t),$$

откуда

$$h(t) = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 K_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \cos \omega_{\text{pec}} t \sigma(t).$$

9.17. Комплексная огибающая сигнала на входе

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} U_m, & t < 0, \\ U_m e^{j\omega_{\text{pec}} t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Так как

$$h_{\text{нч}}(t) = (-K_{\text{pec}}/\tau_x) e^{-t/\tau_x} \sigma(t),$$

то при $t < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{вх}}(t) &= \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{вх}}(\xi) h_{\text{нч}}(t - \xi) d\xi = \\ &= -K_{\text{pec}} U_m e^{-t/\tau_x} \int_{-\infty}^{t/\tau_x} e^x dx = -K_{\text{pec}} U_m \end{aligned}$$

При $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\max}(t) &= -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_x} \int_{-\infty}^0 e^{-(t-\xi)/\tau_x} d\xi - \\ &= -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{\tau_x} \int_0^t e^{j\delta\omega\xi} e^{-(t-\xi)/\tau_x} d\xi = -K_{\text{рез}} U_m e^{-t/\tau_x} - \\ &= -K_{\text{рез}} U_m e^{-t/\tau_x} \int_0^{t/\tau_x} e^{x(1+jb)} dx, \end{aligned}$$

где $b = \delta\omega \cdot \tau_x$ — безразмерный параметр, характеризующий отношение частотной расстройки к полосе пропускания контура. Проводя интегрирование, получаем

$$\tilde{U}_{\max}(t) = -\frac{K_{\text{рез}} U_m}{1+jb} (jb e^{-t/\tau_x} + e^{b t/\tau_x}).$$

Для построения графиков удобно ввести переменную $x = t/\tau_x$. При этом физическая огибающая для $i \geq 0$

$$\begin{aligned} U_{\max}(x) &= |\tilde{U}_{\max}(x)| = \\ &= K_{\text{рез}} U_m f(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} [\cos^2 bx + \\ &+ (\sin bx + b e^{-x})^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

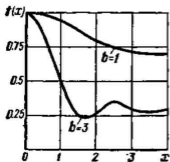


Рис. III.9.1

Графики функции $f(x)$ для случаев $b=1$ и $b=3$ представлены на рис. III.9.1.

9.18. Здесь

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(t) = U_0 \sigma(t); \quad h_{\text{вх}}(t) = \frac{K_0}{2\sqrt{\pi b}} e^{-t^2/(4b)}.$$

Тогда

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{вх}}(t-\xi) h_{\text{вх}}(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{K_0 U_0}{2\sqrt{\pi b}} \times \int_{-\infty}^t e^{-\xi^2/(4b)} d\xi = K_0 U_0 \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{2b}}\right).$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

9.20. Используя метод интеграла Дюамеля, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{U}_{\max}(t) &= -\frac{K_{\text{рвн}} a}{\tau_x} \int_0^t \xi e^{j\delta\omega\xi} e^{-(t-\xi)/\tau_x} d\xi = \\ &= -\frac{K_{\text{рвн}} a e^{-t/\tau_x}}{\tau_x} \int_0^t \xi \exp\left[\left(\frac{1}{\tau_x} + j\delta\omega\right)\xi\right] d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\ddot{U}_{\max}(t) = -\frac{K_{\text{рвн}} a e^{j\delta\omega t}}{\tau_x \left(\frac{1}{\tau_x} + j\delta\omega\right)^2} F\left(\frac{t}{\tau_x}\right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} F\left(\frac{t}{\tau_x}\right) &= \left[\frac{t}{\tau_x} - 1 + e^{-t/\tau_x} \cos\left(b\left(\frac{t}{\tau_x}\right)\right) \right] + \\ &+ j \left[b\left(\frac{t}{\tau_x}\right) - e^{-t/\tau_x} \sin\left(b\left(\frac{t}{\tau_x}\right)\right) \right], \end{aligned}$$

где $b = \delta\omega \cdot \tau_x$ — параметр, характеризующий расстройку колебательной системы относительно частоты заполнения входного сигнала.

9.22. Возможный текст программы представлен ниже (рис. III.9.2):

x:=0,0..10

j:=sqrt(-1) b:=5 d:=0.0

K0:=25 U0:=2

$$U(x) := \left| \frac{-K_0 \cdot U_0}{1-d+j \cdot b} \cdot (\exp(-d \cdot x + j \cdot b) - \exp(-x)) \right|$$

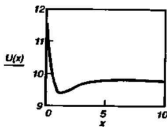


Рис. III.9.2

В соответствии с обозначениями, принятыми в задаче 9.21, здесь введено безразмерное время x , а также безразмерный параметр b и d . Заданы также численные значения величин U_0 и K_0 . Полезно провести серию численных экспериментов, подбирая различные значения b и d и наблюдая за тем, как этот выбор влияет на протекание процесса.

Тема 10

10.1. Реализация сигнала на выходе системы

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) h(t - \xi) d\xi,$$

откуда

$$\overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\xi)} h(t - \xi) d\xi = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \overline{y(t_1)y(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\xi_1)x(\xi_2)} h(t_1 - \xi_1) h(t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\xi_1, \xi_2) h(t_1 - \xi_1) h(t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Если входной процесс — белый шум со спектром мощности W_0 , то $R_x(\xi_1, \xi_2) = W_0 \delta(\xi_1 - \xi_2)$. Поэтому

$$R_y(t_1, t_2) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \xi) h(t_2 - \xi) d\xi.$$

Обозначим $t_2 = t_1 + \tau$; $t_1 - \xi = \eta$; $t_2 - \xi = \eta + \tau$.

Тогда

$$R_y(\tau) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) h(\eta + \tau) d\eta.$$

10.3. Рассмотрим два подхода к решению данной задачи.

а) Прямой метод

Ясно, что $y(t) = x(t) + x(t-T)$. Тогда

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t+\tau)} = \\ &= \overline{[x(t) + x(t-T)] \cdot [x(t+\tau) + x(t+\tau-T)]} = \\ &= \overline{x(t)x(t+\tau)} + \overline{x(t)x(t+\tau-T)} + \\ &+ \overline{x(t-T)x(t+\tau)} + \overline{x(t-T)x(t+\tau-T)} = \\ &= 2R_x(\tau) + R_x(\tau-T) + R_x(\tau+T). \end{aligned}$$

б) Спектральный метод.

Частотный коэффициент передачи цепи $K(j\omega) = 1 + e^{-j\omega T}$.

Квадрат модуля коэффициента передачи

$$K(j\omega)K^*(j\omega) = 2(1 + \cos \omega T).$$

Если $W_x(\omega)$ — спектр мощности входного случайного сигнала, то по теореме Винера — Хинчина

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \left(1 + \frac{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}}{2} \right) e^{j\omega \tau} d\omega = \\ &= 2R_x(\tau) + R_x(\tau-T) + R_x(\tau+T), \end{aligned}$$

что совпадает с результатом, который получен прямым методом.

10.16. Здесь

$$|K(j\omega)|^2 = A^2 T^2 \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}.$$

Для нахождения функции корреляции необходимо вычислить

$$R_{\max}(\tau) = \frac{W_0 A^2 T^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2} \cos \omega \tau d\omega.$$

Имеется табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax \cdot \cos 2bx}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(a-b), & b < a, \\ 0, & b \geq a, \end{cases}$$

Таким образом,

$$R_{\max}(\tau) = \begin{cases} W_0 A^2 (T - |\tau|), & |\tau| < T, \\ 0, & |\tau| \geq T. \end{cases}$$

10.17. Находим спектр мощности

$$W_x(\omega) = 2\sigma_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau \, d\tau = \frac{2\sigma_x^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Односторонний спектр мощности

$$F_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Дисперсия сигнала на выходе

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_0^{\omega_p} F_x(\omega) \, d\omega = \frac{2\sigma_x^2 \alpha}{\pi} \int_0^{\omega_p} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{2\sigma_x^2}{\pi} \int_0^{\omega_p/\alpha} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2\sigma_x^2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_p}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Тема 11

11.1. На основании графика ВАХ составляем таблицу значений аппроксимируемой функции в выбранных узлах:

$u_{\text{ш}}, \text{В}$	-1.5	-1	-0.5
$i_{\text{с}}, \text{мА}$	0.5	1	2.5

Отсюда получаем систему уравнений

$$a_0 - 0.5a_1 + 0.25a_2 = 0.5,$$

$$a_0 = 1,$$

$$a_0 + 0.5a_1 + 0.25a_2 = 2.5.$$

Решив ее, находим, что $a_0 = 1 \text{ мА}$, $a_1 = 2 \text{ мА/В}$, $a_2 = 2 \text{ мА/В}^2$.

11.6. Угол отсечки тока ϕ находим из соотношения

$$\cos \vartheta = \frac{0.8 - 0.5}{0.5} = 0.6,$$

откуда $\vartheta = 0.927$ рад = 53° . Соответствующие коэффициенты Берга

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) = 0.077,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) = 0.142.$$

Спектральные составляющие тока

$$I_0 = SU_m \gamma_0 = 0.581 \text{ мА},$$

$$I_1 = SU_m \gamma_1 = 1.067 \text{ мА}.$$

Так как точность кусочно-линейной аппроксимации не слишком велика, то полученные цифры целесообразно округлить: $I_0 = 0.6$ мА, $I_1 = 1.1$ мА.

11.9. Записываем ВАХ транзистора относительно рабочей точки $U_0 = 0.9$ В в виде

$$i_x = a_0 + a_1 (u_{\text{бэ}} - 0.9) + a_2 (u_{\text{бэ}} - 0.9)^2 + \\ + a_3 (u_{\text{бэ}} - 0.9)^3 \text{ мА}.$$

При этом

$$a_0 = i_x \Big|_{u_{\text{бэ}}=0.9} = 15 - 40 \cdot 0.3 + 6.5 \cdot 0.09 - \\ - 2.5 \cdot 0.027 = 3.52 \text{ мА},$$

$$a_1 = i_x' \Big|_{u_{\text{бэ}}=0.9} = 40 - 13 \cdot 0.3 + 7.5 \cdot 0.09 = \\ = 36.78 \text{ мА/В},$$

$$a_2 = \frac{i_x''}{2} \Big|_{u_{\text{бэ}}=0.9} = 13 \cdot 0.5 + 2.5 \cdot 6 \cdot (-0.3) / 2 = \\ = 4.25 \text{ мА/В}^2,$$

$$a_3 = \frac{i_x'''}{6} \Big|_{u_{\text{бэ}}=0.9} = 2.5 \text{ мА/В}^3.$$

Отсюда

$$I_0 = a_0 + a_2 \frac{U_m^2}{2} = 4.7 \text{ мА}.$$

11.13. Воспользуемся тем, что ВАХ данного нелинейного резистора есть разность двух кусочно-линейных функций. Вводим два угла отсечки тока ϑ_1 и ϑ_2 в соответствии с формулами:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{U_{н1} - U_0}{U_m}; \quad \cos \vartheta_2 = \frac{U_{н2} - U_0}{U_m}.$$

Тогда

$$I_n = S U_m (\gamma_n(\vartheta_1) - \gamma_n(\vartheta_2)).$$

11.15. На основании общих принципов вычисления коэффициентов ряда Фурье имеем:

$$\gamma_0(2, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \xi - \cos \vartheta)^2 d\xi,$$

$$\gamma_n(2, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \xi - \cos \vartheta)^2 \cos n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Явные выражения двух первых коэффициентов разложения имеют вид

$$\gamma_0(2, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \left[\vartheta \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \vartheta \right) - \frac{3}{4} \sin 2\vartheta \right],$$

$$\gamma_1(2, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta - \frac{\sin^3 \vartheta}{3} \right).$$

Соответствующие графики представлены на рис. III.11.1.

11.18. Косинус угла отсечки

$$\cos \vartheta = (0.7 - 0.3) / 0.8 = 0.5,$$

откуда $\vartheta = \pi/3 = 1.047$ рад.

Соответствующие коэффициенты Берга $\gamma_0 = 0.109$, $\gamma_1 = 0.196$.

Составляющие токов $I_{сб} = 0.058$ А, $I_{сн} = 0.696$ А, $I_{1с} = 0.103$ А, $I_{1н} = 1.236$ А.

Входное сопротивление колебательной системы

$$R_{вх} = k_{вкл}^2 R_{рст} = 48 \text{ Ом.}$$

Полезная мощность на выходе

$$P_{\text{imax}} = \frac{1}{2} I_{1x}^2 R_{\text{ex}} = 36.7 \text{ Вт.}$$

Амплитуда колебательного напряжения на коллекторе

$$U_{\text{max}} = I_{1x} R_{\text{ex}} = 59.3 \text{ В.}$$

Амплитуда напряжения на контуре

$$U_{\text{max0B}} = U_{\text{max}} / k_{\text{вкл}} = 1480 \text{ В.}$$

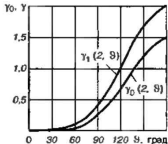


Рис. III.11.1

Мощность, потребляемая от источника питания,

$$P_0 = I_{0x} E_{\text{пит}} = 48.7 \text{ Вт.}$$

Мощность потерь

$$P_{\text{пот}} = P_0 - P_{\text{imax}} = 12 \text{ Вт.}$$

КПД усилителя

$$\eta = \frac{36.7}{48.7} \cdot 100\% = 75.4\%.$$

Мощность первой гармоники на входе

$$P_{1\text{вх}} = U_{\text{max}} I_{1\text{в}} / 2 = 0.041 \text{ Вт.}$$

Коэффициент усиления мощности

$$K_p = P_{\text{imax}} / P_{1\text{вх}} = 890 \text{ или } 29.5 \text{ дБ.}$$

11.23. Мощность, потребляемая от источника питания,

$$P_0 = E_{\text{пит}} I_0 = E_{\text{пит}} S U_{\text{max}} \gamma_0(\vartheta).$$

Полезная мощность

$$P_2 = U_{\text{max}} I_2 / 2 \approx E_{\text{пит}} S U_{\text{max}} \gamma_2(\vartheta).$$

Отсюда КПД

$$\eta = \frac{\gamma_2(\vartheta)}{2\gamma_0(\vartheta)} = \frac{1}{6} \frac{\sin 2\vartheta \cdot \cos \vartheta - 2 \cos 2\vartheta \cdot \sin \vartheta}{\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}.$$

График, построенный на основании этой формулы, изображен на рис. III.11.2. Из графика видно, что для обеспечения приемлемого КПД угол отсечки тока в удвоителе следует выбирать существенно меньше 90° .

11.24. Так как $I_1 = SU_{m \max} \gamma_1(\vartheta)$, то для решения поставленной задачи достаточно проанализировать зависимость безразмерной величины $I_1/(SU_m) = \gamma_1$ от параметра $\xi = (U_0 - U_n)/U_m = -\cos \vartheta$. Известно, что

$$\gamma_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta),$$

откуда

$$\gamma_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} [\arccos(-\xi) + \xi \sqrt{1 - \xi^2}].$$

График, построенный по этой формуле, приведен на рис. III.11.3.

11.28. Входное сопротивление детектора не зависит от амплитуды входного сигнала:

$$R_{вх} = U_{m \max} / I_1 = 1 / (S \gamma_1(\vartheta)).$$

Так как $\vartheta \ll 1$, то

$$\gamma_1(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \left(\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right) \approx 2\vartheta^3 / (3\pi)$$

и из уравнения $\operatorname{tg} \vartheta - \vartheta = \pi / (R_n S)$ следует, что

$$\vartheta^3 / 3 = \pi / (R_n S).$$

Итак,

$$\gamma_1(\vartheta) \approx 2 / (R_n S),$$

откуда

$$R_{вх} \approx R_n / 2.$$

11.29. Один из возможных вариантов текста программы приведен ниже:

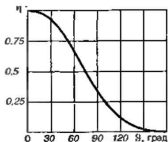


Рис. III.11.2

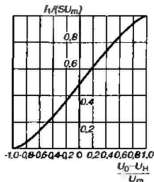


Рис. III.11.3


```

uses WinCrt;
var
    E, R, S, T, B, T1, KDET:real;
begin
    WriteLn('РАСЧЕТ ДИОДНОГО ДЕТЕКТОРА');
    WriteLn;
    WriteLn('Вводим сопротивление нагрузки R');
    ReadLn(R);
    WriteLn('Вводим крутизну ВАХ диода S');
    ReadLn(S);
    WriteLn('Вводим погрешность вычисления угла отсечки');
    ReadLn(E);
    B:= Pi/(R*S);
    T:= 0;T1:= 0;
repeat
    T:= T1;
    T1:=ArcTan(B+T);
until Abs(T1-T)<E;
    WriteLn('Угол отсечки=', T:5:3,'радиан');
    WriteLn;
    KDET:= cos(T);
    WriteLn('Коэффициент детектирования=',KDET:5:3)
end.

```

Данная программа, а также другие Pascal — программы, приведенные в книге, написаны с использованием среды программирования Turbo Pascal for Windows фирмы Borland. С небольшими изменениями программа может быть воспринята любыми другими компиляторами языка Pascal.

Имена переменных в программе выбраны следующим образом: R — сопротивление резистора нагрузки, S — крутизна ВАХ диода, T — угол отсечки тока, E — абсолютная погрешность вычисления угла отсечки, KDET — коэффициент детектирования, T1 — вспомогательная переменная, необходимая для организации итерационного процесса.

11.31. В данном случае обратная функция $x = \sqrt{y/a}$ однозначна. Ее производная

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y/a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

Так как всем отрицательным значениям входного сигнала, имеющим общую вероятность 1/2, отвечает единственное значение выходного сигнала $y=0$, то

$$P_{\text{max}}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi a y \sigma_x}} e^{-\frac{y}{2a\sigma_x^2}}, & y \geq 0. \end{cases}$$

11.33. Так как математическое ожидание входного сигнала равно нулю, то очевидно, что $P_a = P_b = 1/2$. Используя принцип усреднения, получаем

$$\bar{y} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$\sigma_y^2 = \bar{y}^2 - (\bar{y})^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Тема 12

12.5. По определению, дифференциальная крутизна

$$S_{\text{лиф}} = di_c / du_{\text{ли}}.$$

Подставляя сюда выражение для напряжения, создаваемого гетеродином, получаем (мА/В)

$$S_{\text{лиф}} = 30 + 15U_{\text{мг}} \cos \omega_1 t.$$

12.10. Варактор является нелинейным конденсатором, ток в котором

$$i = dq/dt = (dq/du) \cdot (du/dt) = C_{\text{лиф}}(u) \cdot (du/dt).$$

В рассматриваемом случае

$$i(t) = -b_0 \omega_0 U_m \sin \omega_0 t - \frac{b_1 \omega_0 U_m^2}{2} \sin 2\omega_0 t.$$

Таким образом, данный варактор можно использовать для создания удвоителя частоты гармонического сигнала.

12.15. По условию задачи усиление системы

$$\Delta = 10 \lg K_p = 20 \lg \frac{G_r + G_n}{G_r + G_n + G_{\text{эл}}} = 25.$$

Отсюда

$$G_{\text{эл}} = -4.045 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

12.19. Для самовозбуждения усилителя необходимо обеспечить вносимую отрицательную проводимость $G_{\text{вн}} = -4 \cdot 10^{-3}$ См. Применим формулу для расчета активной проводимости, вносимой в сигнальный контур данного усилителя [1]:

$$G_{\text{вн}} = -\beta^2 \omega_c \omega_{\text{хол}} C_0^2 R_{\text{рез. хол}} / 4.$$

Подставив числовые значения, получаем $R_{\text{рез. хол}} = 4.5$ кОм.

Тема 13

13.2. В соответствии с методом Фостера разложим входное сопротивление на элементарные дроби:

$$Z(p) = \frac{16p^3 + 4p}{(2p^2 + 1)(6p^3 + 1)} = \frac{ap + b}{2p^2 + 1} + \frac{cp + d}{6p^3 + 1},$$

где a , b , c и d — подлежащие определению коэффициенты. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем систему уравнений

$$6a + 2c = 16,$$

$$6b + 2d = 0,$$

$$a + c = 4,$$

$$b + d = 0,$$

из которой следует, что $a = 2$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$. Таким образом,

$$Z(p) = \frac{2p}{2p^2 + 1} + \frac{2p}{6p^3 + 1}.$$

Легко показать, что входное сопротивление параллельного LC-контура

$$Z_{LC}(p) = \frac{pL}{p^2LC + 1}.$$

Учитывая это, получаем схему синтезированной цепи, приведенную на рис. III.13.1.

13.9. Проводя деление числителя на знаменатель, начиная со старших степеней, на первом этапе получаем

$$\begin{array}{r} -8p^3 + 4p \quad | \quad 3p^2 + 1 \\ \underline{8p^3 + 8p/3} \quad \quad 8 \\ \hline \quad \quad \quad 4p/3 \quad \quad 3^p \end{array}$$

Таким образом,

$$Z(p) = \frac{8}{3}p + \frac{\frac{4p}{3}}{3p^2 + 1}.$$

Инвертируя остаток, имеем

$$Z(p) = \frac{8}{3}p + \frac{1}{\frac{3p^2 + 1}{4p/3}}.$$

Проводим следующий этап деления:

$$\begin{array}{r} -3p^2 + 1 \mid 4p/3 \\ \underline{3p^2} \\ 1 \end{array}$$

Окончательно получаем представление функции $Z(p)$ в виде цепной дроби:

$$Z(p) = \frac{8p}{3} + \frac{1}{\frac{9p}{4} + \frac{1}{\frac{4p}{3}}}$$

Легко видеть, что этой дроби отвечает цепь, схема которой изображена на рис. III.13.2.

Если делить числитель на знаменатель, начиная с младших степеней, то на первом же этапе остаток получается отрицательным:

$$\begin{array}{r} -4p + 8p^3 \mid 1 + 3p^2 \\ \underline{4p + 12p^3} \\ -4p^3 \end{array}$$

что ведет к физически нереализуемой цепи.

13.15. Коэффициент передачи мощности как функция переменной p , выражается формулой

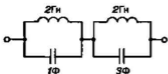


Рис. III.13.1

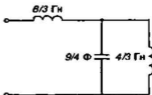


Рис. III.13.2

$$K_p(p_n) = \frac{2}{p_n^4 - 2p_n^2 + 2}$$

Полюсами данной функции являются корни биквадратного уравнения

$$p_n^4 - 2p_n^2 + 2 = 0,$$

равные

$$p_{n1,2,3,4} = \pm \sqrt{1 \pm j}.$$

Так как

$$1 + j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}; \quad 1 - j = \sqrt{2} e^{-j\pi/4},$$

то

$$\sqrt{1 + j} = \sqrt[4]{2} e^{j\pi/8}; \quad \sqrt{1 - j} = \sqrt[4]{2} e^{-j\pi/8}.$$

Имея в виду, что $K_p(p_n) = K(p_n) \cdot K(-p_n)$, получаем выражение для $K(p_n)$, учитывая лишь те полюсы, которые лежат в левой полуплоскости:

$$K(p_n) = \frac{\sqrt{2}}{(p_n - \sqrt[4]{2} e^{j\pi/8})(p_n - \sqrt[4]{2} e^{-j\pi/8})}$$

13.17. Нормированная частота источника сигнала

$$f_n = 41/15 = 2.733.$$

Коэффициент передачи мощности

$$K_p = K_0^2 / (1 + f_n^4) = 0.015.$$

Модуль коэффициента передачи напряжения

$$K_U = K_p^{1/2} = 0.122.$$

Отсюда амплитуда выходного сигнала

$$U_{\text{max}} = 7.5 \cdot 0.122 \approx 0.92 \text{ В.}$$

13.18. Обозначив посредством $Z'(p)$ операторное сопротивление параллельного соединения C и R_n :

$$Z'(p) = R_n / (1 + pR_n C),$$

получаем следующее выражение передаточной функции фильтра по напряжению:

$$K(p) = \frac{Z'(p)}{R + Z'(p)} = \frac{R'/R}{1 + pR'C}$$

где $R' = RR_n/(R + R_n)$.

Отсюда следует, что функция $K(p)$ имеет единственный полюс в точке с вещественной отрицательной координатой $p_1 = -1/(R'C)$. Если положить, что $1/(R'C) = \omega_c$, то рассматриваемая система имеет свойства ФНЧ с характеристикой Баттерворта первого порядка при заданной частоте среза.

Обращаясь к конкретному расчету, выберем $R = R_n = 2 \cdot 10^3$ Ом. При этом $R' = 10^3$ Ом, откуда $C = 1/(3 \cdot 10^8) = 3.33$ нФ.

13.24. Коэффициент передачи напряжения

$$K(p) = \frac{R_n/(1 + pR_nC)}{pL + R_n/(1 + pR_nC)} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2},$$

где $\alpha = 1/(2R_nC)$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Данная функция имеет полюсы в точках с координатами

$$p_{1,2} = \pm -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Для того чтобы фильтр обладал требуемой частотной характеристикой, необходимо, чтобы

$$\alpha = \omega_c j\sqrt{2}; \quad \omega_0 = \omega_c,$$

откуда

$$C = 1/(\sqrt{2} R_n \omega_c) = 7.86 \text{ нФ}; \quad L = 1/(\omega_c^2 C) = 22.6 \text{ мГн}.$$

13.25. Фильтр нижних частот с максимальной плоской характеристикой второго порядка на плоскости нормированной комплексной частоты имеет два полюса частотного коэффициента передачи в точках с координатами $p_{1,2} = -1/\sqrt{2} = \pm j/\sqrt{2}$. Передаточная функция фильтра

$$K(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = |K| e^{j\varphi_K}.$$

Выбирая на вертикальной оси произвольную точку с ординатой ω_n (рис. III.13.3), видим, что ФЧХ фильтра определяется двумя углами φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_K(\omega_n) = -\varphi_1 - \varphi_2.$$

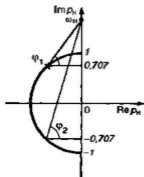


Рис. III.13.3

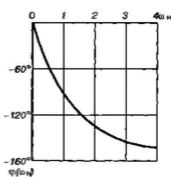


Рис. III.13.4

Отсюда

$$\varphi_K(\omega_n) = -\arctg(\sqrt{2}\omega_n - 1) - \arctg(\sqrt{2}\omega_n + 1).$$

График, рассчитанный по данной формуле, представлен на рис. III.13.4.

13.28. Многочлены Чебышева $T_n(\omega_n)$ принимают значения, лежащие в интервале $(-1, 1)$. На границе полосы пропускания $T_n(1) = 1$ при любом n . Таким образом, коэффициент передачи мощности колеблется в пределах от 1 до $1/(1+\varepsilon^2)$. Неравномерность частотного коэффициента передачи, выраженная в децибеллах, составит величину $\Delta = 10 \lg(1+\varepsilon^2)$. Из условия задачи найдем, что

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.7648.$$

Тема 14

14.1. Выходное напряжение эмиттерного повторителя

$$u_{\text{вых}} = R_n i_x = SR_n \phi = SR_n (u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}).$$

Деля обе части этого равенства на величину $u_{\text{вх}}$, получаем

$$K_U = SR_n (1 - K_U),$$

откуда

$$K_U = \frac{SR_n}{1 + SR_n}.$$

Следует отметить, что здесь параметр обратной связи $\beta = -1$. Так как в данном случае все выходное напряжение приложено ко

входу цепи, имея полярность, противоположную полярности входного сигнала, то говорят, что эмиттерный повторитель охвачен 100%-ной отрицательной обратной связью.

14.3. Так как входное напряжение $u_{вх} = v + u_{ос}$, то напряжение на резисторе обратной связи

$$u_{ос} = SR_{ос}(u_{вх} - u_{ос}),$$

откуда

$$u_{ос} = \frac{SR_{ос}}{1 + SR_{ос}} u_{вх}.$$

Возрастание тока коллектора ведет к повышению потенциала коллектора относительно общей точки усилителя и поэтому

$$u_{вх} = -R_x i_x = -SR_x \left(1 - \frac{SR_{ос}}{1 + SR_{ос}} \right) u_{вх}.$$

Отсюда коэффициент усиления

$$K_U = -SR_x / [1 + SR_x(R_{ос}/R_x)].$$

Так как $K_0 = -SR_x$, то параметр $\beta = -R_{ос}/R_x$.

14.5. Условно примем в качестве положительных такие направления токов в ветвях, которые указаны стрелками на рис. 1.14.4. На основании первого закона Кирхгофа имеем следующее уравнение состояния цепи, записанное относительно изображений $U_{вх}$, $U_{вх}$ и U_a :

$$\frac{U_{вх} - U_a}{R_2 + 1/(pC_2)} + \frac{U_{вх} - U_a}{R_1} - U_a pC_1 = 0. \quad (1)$$

Так как $U_{вх} = K_0 U_0$, то из (1) следует, что

$$\frac{U_{вх}(1 - 1/K_0)}{R_2 + 1/(pC_2)} + \frac{U_{вх} - U_{вх}/K_0}{R_1} - \frac{U_{вх} pC_1}{K_0} = 0,$$

откуда

$$\frac{K(p)(1 - 1/K_0)}{R_2 + 1/(pC_2)} + \frac{1 - K(p)/K_0}{R_1} - \frac{K(p)}{K_0} pC_1 = 0. \quad (2)$$

Разрешив данное уравнение относительно $K(p)$, получаем

$$K(p) = \frac{-K_0}{p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + p[R_1 C_1 + R_2 C_2 - (K_0 - 1)R_1 C_2] + 1} \quad (3)$$

Частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ находим, выполнив замену переменной $j\omega = p$:

$$K(j\omega) = \frac{-K_0}{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega[R_1 C_1 + R_2 C_2 - (K_0 - 1)R_1 C_2]}$$

Для того чтобы полюсы функции $K(p)$ располагались в левой полуплоскости переменной p (условие устойчивости), необходимо, чтобы все коэффициенты при различных степенях p в знаменателе формулы (3) были положительны. Отсюда получаем неравенство

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 - (K_0 - 1)R_1 C_2 > 0.$$

Таким образом, критическое значение коэффициента усиления активного звена

$$K_{\text{крит}} = 1 + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}.$$

При заданных в условиях задачи параметрах системы нормированная АЧХ фильтра

$$\frac{|K(j\xi)|}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 0.0025\xi^2}},$$

где $\xi = \omega RC$. Соответствующий график приведен на рис. III.14.1. Можно сделать вывод о том, что рассмотренный RC-фильтр пригоден для выделения полосового сигнала, спектральные составляющие которого концентрируются вблизи «резонансной» частоты $\omega_{\text{рез}} = 1/(RC)$.

14.6. Так как потенциалы на выходе и на инвертирующем входе ОУ совпадают, то изображение выходного сигнала

$$U_{\text{вых}} = K_0 (U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}),$$

откуда

$$K(p) = \frac{K_0}{1 + K_0}.$$

При $K_0 \rightarrow \infty$ $K(p) \rightarrow 1$. Таким образом, данная цепь может быть использована как повторитель уровня напряжения, имеющий высокое входное и низкое выходное сопротивление.

14.11. Уравнение АФХ разомкнутой системы имеет вид

$$w(j\omega) = -K_0^3 / (1 + j\omega\tau)^3 = \frac{K_0^3}{(1 + \omega^2\tau^2)^{3/2}} \exp[j(\pi - 3 \operatorname{arctg} \omega\tau)].$$

Легко проверить, что $\operatorname{arg} w(j0) = \pi$, в то время как $\operatorname{arg} w(j\infty) = -\pi/2$. Это указывает на то, что годограф Найквиста, отвечающий интервалу частот $0 < \omega < +\infty$, имеет вид витка спирали. Соответствующий чертеж представлен на рис. III.14.2; виток, отвечающий полубесконечному интервалу отрицательных частот, показан пунктиром. На частоте ω_1 , при которой $\pi - 3 \operatorname{arctg} \omega_1\tau = 0$, аргумент АФХ равен нулю. Для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо, чтобы

$$K_0^3 / (1 + \omega_1^2\tau^2)^{3/2} < 1.$$

Так как $\omega_1\tau = 1.732$, то $K_0 < 2$.

14.19. Воспользуемся условием самовозбуждения [1]

$$K_0 > 1 + (R_1C_1 + R_2C_2) / (R_2C_1).$$

Подставляя сюда номиналы элементов, приведенные в условии задачи, получаем, что $K_0 > 2.33$. Генерируемая частота

$$\omega_{\text{ген}} = 1 / \sqrt{R_1R_2C_1C_2} = 3.208 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

14.23. На пороге самовозбуждения, при $U = 0$, должно выполняться

$$a_1 = RC / M_{\min} = 1 / (\omega_0 Q M_{\min}).$$

Отсюда $M_{\min} = 1 / (a_1 \omega_0 Q) = 6.66 \cdot 10^{-8}$ Гн. Если $M = 3M_{\min}$, то

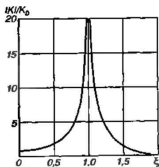


Рис. III.14.1

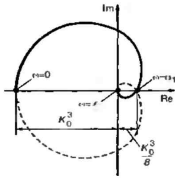


Рис. III.14.2

$1/\omega_0 QM) = 3.34 \cdot 10^{-4}$ См. Амплитуда колебаний в стационарном режиме должна удовлетворять уравнению

$$10^{-3} - 1.875 \cdot 10^{-3} U_{\text{ст}}^2 = 3.34 \cdot 10^{-4},$$

решив которое получаем $U_{\text{ст}} = 0.596$ В.

Тема 15

15.2. Коэффициенты комплексного ряда Фурье C_n при $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ равны

$$C_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2n\pi t/\Delta} dt = \frac{\tau \sin(n\pi\tau/\Delta)}{\Delta n\pi\tau/\Delta}.$$

Суммируя вклады всех гармонических составляющих, имеем

$$S_{\zeta}(\omega) = \frac{2\pi\tau}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sin(n\pi\tau/\Delta) (n\pi\tau/\Delta)] \delta(\omega - 2n\pi/\Delta).$$

15.6. Будем полагать, что интервал дискретизации Δ мал настолько, что $\Delta \ll 1/\alpha$. Тогда приближенно

$$\begin{aligned} S_{\text{диск}}(0) &\approx 2\alpha U_0 \left[\frac{1}{(2\pi/\Delta)^2} + \frac{1}{(4\pi/\Delta)^2} + \frac{1}{(6\pi/\Delta)^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{2\alpha U_0 \Delta^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Полученный здесь ряд суммируем, основываясь на том, что, согласно [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \zeta(x),$$

где $\zeta(x)$ — так называемая дзета-функция Римана, имеющая частное значение $\zeta(2) = \pi^2/6$. Итак,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \zeta(2) - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Отсюда $S_{\text{диск}}(0) \approx \alpha U_0 \Delta^2 / 12$. Следует отметить, что $S_u(0) = U_0 / \alpha$ и поэтому $S_{\text{диск}}(0) / S_u(0) = (\alpha \Delta)^2 / 12$. Если, например, $\alpha \Delta = \pi / 100$, то $S_{\text{диск}}(0) / S_u(0) = 8.22 \cdot 10^{-5}$, т. е. дополнительный вклад в спектральную плотность, возникающий за счет дискретизации, достаточно мал.

15.9. При $N=8$ в пределах импульса оказывается три отсчета. Тогда, положив $n=1$, имеем

$$C_1 = \frac{U_0}{8} \sum_{k=0}^2 e^{-j\pi k/4}.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$C_1 = \frac{U_0}{8} \frac{1 - e^{-j3\pi/4}}{1 - e^{-j\pi/4}} = 0.301 U_0 e^{-j45^\circ}. \quad (1)$$

Если $N=32$, то в пределах импульса оказываются 11 отсчетов. Поэтому

$$C_1 = \frac{U_0}{32} \sum_{k=0}^{10} e^{-j\pi k/16} = \frac{U_0}{32} \frac{1 - e^{-j11\pi/16}}{1 - e^{-j\pi/16}} = 0.2814 U_0 e^{-j56.28^\circ}. \quad (2)$$

Легко найти, что коэффициент C_1 ряда Фурье аналогового сигнала

$$C_1 = 0.276 U_0 e^{-j60^\circ}. \quad (3)$$

Сравнивая выражения (1), (2) и (3), убеждаемся, что с ростом N коэффициент C_1 ДПФ стремится к соответствующему коэффициенту ряда Фурье того аналогового сигнала, который был подвергнут дискретизации.

15.10. По общей формуле находим:

$$C_0 = \frac{1}{3} (10 + 20) = 10,$$

$$C_1 = \frac{1}{3} (10e^{-j120^\circ} + 20e^{-j240^\circ}),$$

$$C_2 = \frac{1}{3} (10e^{-j240^\circ} + 20e^{-j480^\circ}).$$

Так как

$$e^{-j120^\circ} = e^{-j480^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$e^{-j240^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$C_1 = \frac{5}{3}(-3 + j\sqrt{3}); \quad C_2 = \frac{5}{3}(-3 - j\sqrt{3}).$$

15.15. Возможный текст программы приведен ниже:

```
uses WinCRt;
const
  N=10;
var i,M:integer;
var X:array[1..16] of real;
var A,B,T:real;
begin
  WriteLn('Расчет коэффициентов ДПФ');
  WriteLn('Массива действительных отсчетов');
  WriteLn('      из ',N,' Элементов');
  WriteLn;
  WriteLn('Введите значения элементов массива');
  for i:=1 to N do ReadLn(X[i]);
  WriteLn('Вещественная и мнимая части ДПФ');
  WriteLn;
  for i:=0 to N-1 do
    begin
      WriteLn('Гармоника номер',i);
      A:=0;B:=0;
      for M:=0 to N-1 do
        begin
          T:=2*pi*M*i/N;
          A:=A+X[M]*cos(T);
          B:=B+X[M]*sin(T);
        end;
      A:=A/N; B:=B/N;
      WriteLn(A:7:3,B:7:3);
    end;
end.
```

Для определенности длина входного массива N выбрана равной десяти и описана в разделе констант. Перед компиляцией это значение можно произвольно изменять.

15.16. Так как число компонент вектора X не совпадает с целой степенью двойки, то по правилам системы MathCAD для вычисления БПФ следует использовать библиотечную функцию $\text{cfft}(X)$. Результаты представлены ниже:

Вычисление прямого и обратного быстрого преобразования Фурье средствами пакета MathCAD

$$X := \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \\ 5 \\ 3.5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \quad Y := \text{fft}(X) \quad Y := \begin{bmatrix} 6.94 \\ -3.266 + 2.121i \\ -0.408 + 3.536i \\ 4.082 \\ -0.408 - 3.536i \\ -3.266 - 2.121i \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{ifft}(Y) \quad Z := \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \\ 5 \\ 3.5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

15.20. Воспользуемся разложением

$$(1 - \xi)^{-1} = 1 + \xi + \xi^2 + \dots$$

Тогда

$$X(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 0.09z^{-2} + 0.027z^{-3} + \dots,$$

откуда

$$\{x_n\} = (1, 0.3, 0.09, 0.027, \dots).$$

Общий член последовательности $x_n = (0.3)^n$.

15.23. Функция $X(z)$ аналитична во всей z -плоскости, за исключением точки $z=0$. Поэтому в формуле обратного z -преобразования интегрирование можно вести по любой замкнутой кривой L , которая охватывает начало координат. Согласно теореме Коши о вычетах

$$\oint_L z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases}$$

Отличным от нуля оказывается лишь отсчет

$$x_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_L dz/z = 1.$$

Итак, $\{x_n\} = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

15.26. Используем алгоритм дискретной свертки [1]. На одной полоске бумаги через равные интервалы записываем сигнал $\{x_n\}$, а затем на другой полоске — сигнал $\{y_n\}$, в котором позиции расположены справа налево (рис. III.15.1, а). Совместив первые позиции записей (рис. III.15.1, б) и перемножив отсчеты, находящиеся на одной вертикали, находим $f_0 = 15 \cdot 10 = 150$. Чтобы получить величину f_1 , следует передвинуть полоски на одну позицию (рис. III.15.1, в). Тогда $f_1 = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 5 = 225$. Выполняя эти операции до тех пор, пока ненулевые отсчеты не перестанут накладываться, находим

$$\{f_n\} = (150, 225, 175, 130, 84, 42, 16, 5, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

15.27. Импульсная характеристика

$$\{h_n\} = (4, -2.5, 0.8).$$

Системная функция есть z -преобразование от $\{h_n\}$:

$$H(z) = 4 - 2.5/z + 0.8/z^2.$$

Выполнив замену переменной $z = \exp(j\omega\Delta)$, получаем

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= 4 - 2.5 \exp(-j\omega\Delta) + 0.8 \exp(-j2\omega\Delta) = \\ &= 4 - 2.5 \cos \omega\Delta + 0.8 \cos 2\omega\Delta - j(2.5 \sin \omega\Delta + \\ &\quad + 0.8 \sin 2\omega\Delta). \end{aligned}$$

15.30. В соответствии с формулой обратного z -преобразования

$$h_m = \frac{2.5}{2\pi j} \oint \frac{z^{m-1}}{z-0.6} dz.$$

При $m \neq 0$ подынтегральная функция имеет один простой полюс в точке $z = 0.6$ с вычетом $\text{res} = (0.6)^{m-1}$. Отсюда по теореме Коши $h_m = 2.5 (0.6)^{m-1}$. Если же $m = 0$, то

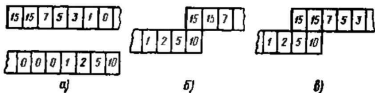


Рис. III.15.1

$$\oint \frac{dx}{z(z-0.6)} = 0,$$

поскольку вычеты в точках полюсов $z=0$ и $z=0.6$ равны по модулю и противоположны по знаку: $\text{res}_1 = 1/(-0.6)$, $\text{res}_2 = 1/0.6$. Окончательно

$$h_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ 2.5(0.6)^{m-1}, & m=1,2,3,\dots \end{cases}$$

15.32. Выполнив z -преобразование разностного уравнения фильтра, имеем

$$Y(z)(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}) = X(z).$$

Отсюда системная функция ЦФ

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}.$$

Общий член импульсной характеристики находим из обратного z -преобразования:

$$h_m = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{m+1} dx}{z^2 - z + 0.5}.$$

Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{z^{m+1}}{z^2 - z + 0.5} = \frac{z^{m+1}}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Очевидно, что точки полюсов имеют координаты

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm j) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j\pi/4}.$$

Вычеты подынтегральной функции в точках полюсов

$$\text{res}_1 = \frac{z_1^{m+1}}{z_1 - z_2}, \quad \text{res}_2 = \frac{z_2^{m+1}}{z_2 - z_1}.$$

Сумма вычетов

$$\sum_i \text{res}_i = \frac{1}{z_1 - z_2} (z_1^{m+1} - z_2^{m+1}) = 2^{(1-m)/2} \sin \left[\frac{\pi}{4} (m+1) \right].$$

$$h_m = 2^{(1-m)/2} \sin \left[\frac{\pi}{4} (m+1) \right], m=0, 1, 2, \dots$$

15.37. Возможный текст программы представлен ниже:

```
uses WinCrt;
const
  a0=2.5;b1=1.5;b2=-1.33;
var
  y,y1,y2:real;
  X:array[1..100] of real;
  N:integer;
begin
  {Подготавливаем массив входных данных}
  for N:=1 to 100 do
    if N=1 then X[N]:=1 else X[N]:=0;
    y1:=0;y2:=0;
  {рассчитываем импульсную характеристику фильтра}
  for N:=1 to 20 do
    begin
      y:=a0*X[N]+b1*y1+b2*y2;
      y2:=y1;y1:=y;
      WriteLn(N,y:12:3);
    end;
end
```

Для простоты коэффициенты, входящие в алгоритм цифровой фильтрации, конкретно определены в разделе констант. Массив входных чисел выбран длиной в 100 отсчетов, что в данном случае вполне достаточно. Следует провести ряд численных экспериментов с данной программой, подбирая значения коэффициентов фильтра таким образом, чтобы реализовать как устойчивые, так и неустойчивые режимы работы ([1], с. 412).

Тема 16

16.1. Рассматриваемая цепь линейна. Для нее справедлив принцип суперпозиции. Поэтому напряжения шума и гармонического сигнала на выходе могут быть найдены по отдельности. В данном случае

$$\sigma_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{W_0}{2RC}}; U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{1+\omega_0^2 R^2 C^2}}$$

Отношение сигнал/шум удобно представить в виде

$$Q = U_{\max} \sqrt{\frac{2}{\omega_0 W_0}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_0 RC}{1 + \omega_0^2 (RC)^2}}$$

Обозначим $x = \omega_0 RC$. Функция

$$F(x) = \sqrt{x/(1+x^2)}$$

имеет единственный максимум при $x = 1$. Отсюда $(RC)_{\text{опт}} = 1/\omega_0$.

16.4. Амплитуда выходного колебания в конце импульса

$$U_{\max}(\tau_n) = K_{\text{рес}} U_{\max} (1 - \exp(-\tau_n/\tau_x)).$$

Дисперсия шума на выходе усилителя

$$\sigma_{\max}^2 = 2W_0 K_{\text{рес}}^2 \Pi_{\text{ш}} = W_0 K_{\text{рес}}^2 / \tau_x.$$

Таким образом, при $t = \tau_n$

$$Q = \frac{U_{\max} (1 - \exp(-\tau_n/\tau_x))}{\sqrt{W_0/\tau_x}}$$

Преобразуем эту формулу, учтя, что оптимальный фильтр обеспечивает отношение сигнал/шум

$$Q_{\max} = U_{\max} \sqrt{\tau_n/(2W_0)} \quad (\text{см. задачу 16.3}):$$

$$Q = Q_{\max} F(\tau_n/\tau_x),$$

где

$$F(\tau_n/\tau_x) = \frac{1 - \exp(-\tau_n/\tau_x)}{\sqrt{(\tau_n/\tau_x)/2}}$$

Функция $F(\tau_n/\tau_x)$ принимает максимальное значение, равное 0.9 при $\tau_n/\tau_x = 1.25$. Итак, $Q_{\text{сред}} = 0.9 Q_{\max}$. Так как $\tau_x = 2Q/\omega_{\text{рес}}$, то $Q_{\text{опт}} = 0.4 \omega_{\text{рес}} \tau_n$.

16.9. Пусть $K_{\text{отб}}(j\omega)$ — частотный коэффициент передачи оптимального фильтра, который нужно найти. Мысленно дополним структурную схему устройства фильтрации так называемым «отбеливающим» фильтром, который преобразует заданный случайный процесс в белый шум с параметром W_0 . Легко видеть, что функция $K_{\text{отб}}(\omega)$ должна быть такова, чтобы

$$|K_{\text{отб}}(j\omega)|^2 W(\omega) = W_0.$$

Для того чтобы не изменить общий частотный коэффициент передачи, предположим, что отбеливающий фильтр каскадно соединен с еще одним фильтром, имеющим частотную характеристику $1/K_{отб}(j\omega)$ (рис. III.16.1).

В точке 1 полезный сигнал имеет спектральную плотность $S'_{\text{вх}}(\omega) = K_{отб}(j\omega)S_{\text{вх}}(\omega)$. Поэтому звено, отмеченное на рисунке пунктиром, должно работать как оптимальный фильтр при белом шуме и иметь частотный коэффициент передачи

$$K'(j\omega) = BS_{\text{вх}}^*(\omega)K_{отб}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (1)$$

Но, с другой стороны,

$$K'(j\omega) = K_{\text{онт}}(j\omega)/K_{отб}(j\omega). \quad (2)$$

Приравняв правые части (1) и (2), находим, что

$$K_{\text{онт}}(j\omega) = BS_{\text{вх}}^*(\omega)|K_{отб}(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0},$$

или

$$K_{\text{онт}}(j\omega) = BW_0 S_{\text{вх}}^*(\omega) e^{-j\omega t_0} / W(\omega).$$

Видно, что числовые значения АЧХ такого фильтра должны уменьшаться в той области частот, где велика спектральная плотность мощности шума.

Концепция отбеливающего фильтра часто используется в теоретических исследованиях задач обработки сигналов при наличии шумов.

16.15. Спектр мощности случайного процесса вида $U(t)$ исследовался в задаче 7.10. Условие $\omega_0 \gg a$ означает, что процесс $U(t)$ является узкополосным. Поэтому можно ограничиться лишь первым слагаемым в формуле, определяющей спектр мощности этого процесса, которое отвечает полубесконечному интервалу положительных частот:

$$W_u(\omega) = \alpha\sigma^2 / [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2].$$

На основании формулы (16.50) из [1] при $\omega > 0$ имеем

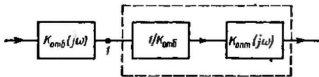


Рис. III.16.1

$$|K_{\text{опт}}(j\omega)| = \frac{W_u(\omega)}{W_u(\omega) + W_0} = \frac{1}{1 + W_0[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]/(\alpha\sigma^2)}$$

Видно наличие резкого подъема АЧХ фильтра в окрестности частоты ω_0 , что свойственно резонансной цепи. Однако, строго говоря, данный фильтр физически нереализуем, так как его ФЧХ должна принимать нулевые значения на всех частотах (см. [1], с. 442).

16.20. Воспользовавшись формулой (16.72) из [1], имеем:

$$C = 3 \cdot 10^4 \cdot 3.32 \lg(1 + 10^{3.5}) \approx 348.6 \text{ Кбит/с.}$$

Полученная цифра достаточно оптимистична, однако не следует забывать, что она относится к случаю, когда мощность сигнала в 3162 раза превышает мощность шума. Если эти мощности окажутся равными (вполне вероятная ситуация для линии связи низкого качества), то пропускная способность снизится до 99.6 Кбит/с.

ОТВЕТЫ

Тема I

1.2. График сигнала приведен на рис. IV.1.1, $\tau_{\text{д}} = 4.889/\alpha$.

$$1.3. s(t) = \left(\frac{s_0}{t_0}\right) t \sigma(t) - \left(\frac{s_0}{t_0}\right) (t - t_0) \sigma(t - t_0).$$

$$1.5. s_1(t) = \left(\frac{s_0}{t_0}\right) t \sigma(t) - \left(\frac{s_0}{t_0}\right) (t - t_0) \sigma(t - t_0) - s_0 \sigma(t - t_0),$$

$$s_2(t) = \left(\frac{s_0}{t_0}\right) t \sigma(t) - s_0 \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1 - t_2}\right) (t - t_0) \sigma(t - t_0) +$$

$$+ \left(\frac{s_0}{t_1 - t_0}\right) (t - t_1) \sigma(t - t_1),$$

$$s_3(t) = \left(\frac{s_0}{t_0}\right) t \sigma(t) - \left(\frac{s_0}{t_0}\right) (t - t_0) \sigma(t - t_0) -$$

$$- \left(\frac{s_0}{t_2 - t_1}\right) (t - t_1) \sigma(t - t_1) + \frac{s_0}{t_2 - t_1} (t - t_2) \sigma(t - t_2).$$

$$1.6. s_1(t) = A \sin \omega_0 t \left[\sigma(t) - \sigma\left(t - \frac{\pi}{\omega_0}\right) \right],$$

$$s_2(t) = A \sin \omega_0 t \left[\sigma(t) - \sigma\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \right].$$

$$1.7. f_{\text{н}}(t) = [f(t) + f(-t)]/2,$$

$$f_{\text{м}}(t) = [f(t) - f(-t)]/2.$$

$$1.8. s(t) = (B/T) \int_0^T \sigma(t - \tau) d\tau.$$

$$1.9. A = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{с}.$$

$$1.14. E_{\Sigma} = U_0^2 \tau_{\Sigma}, \|s\| = U_0 \sqrt{\tau_{\Sigma}}.$$

$$1.15. E_{\text{в}} = U_m^2 [2(\omega \tau_{\Sigma} + \varphi) - \sin 2(\omega \tau_{\Sigma} + \varphi)] / (4\omega).$$

$$1.18. t_0 = 0.2277887T.$$

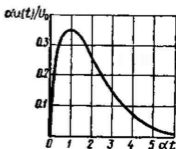


Рис. IV.1.1

$$1.21. \psi = \arccos(\tau/\sqrt{\tau_{\text{ш}}\tau_{\text{ш}}\Omega}).$$

$$1.22. \psi = \arccos(\exp(-\alpha t_0)), t_0 = 4.048/\alpha.$$

$$1.30. u_0 = 1/\sqrt{2}, u_1 = \sqrt{3/2}t, u_2 = \sqrt{45/8}(t^2 - 1/3).$$

1.31. $C_0 = 1.6620$, $C_1 = 0.9011$, $C_2 = 0.2263$, абсолютная ошибка равна 0.037815, относительная ошибка равна 0.0189.

$$1.32. A = 0.9963, B = 1.1036, C = 0.5367.$$

$$1.35. C_2 = -1.$$

$$1.36. C_0 = 37.9687, C_2 = 3.3188.$$

$$1.37. C_1 = (e - e^{-1} - 2)/\sqrt{2} = 0.768.$$

Тема 2

$$2.2. a_0/2 = 2U_0/(\beta T),$$

$$a_n = \frac{2U_0}{\pi} \frac{\beta T/(2\pi)}{(\beta T/(2\pi))^2 + \pi^2}$$

$$2.3. C_n = \frac{A\tau \sin[(\alpha - n\omega_1)\tau/2]}{T(\alpha - n\omega_1)\tau/2}$$

$$2.4. C_n = \frac{j2U_0}{\pi n} \sin^2\left(\frac{\pi n \tau_{\text{ш}}}{T}\right).$$

$$2.5. C_1 = 0.276U_0 \exp(-j60^\circ).$$

$$2.6. C_0 = U_0/2; \text{ при } |n| \geq 1$$

$$C_n = \begin{cases} 2U_0/(\pi^2 n^2), & n \text{ — нечетное,} \\ 0, & n \text{ — четное.} \end{cases}$$

$$2.7. C_0 = 0, C_n = \frac{jU}{\pi n} (-1)^n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$s(t) = \frac{2U}{\pi} \sin \omega_1 t - \frac{U}{\pi} \sin 2\omega_1 t + \frac{2U}{3\pi} \sin 3\omega_1 t - \dots$$

График суммы трех первых членов ряда Фурье изображен на рис. IV.2.1.

$$2.8. \tilde{C}_n = C_n \exp(-j2\pi n t_0/T),$$

где T — период сигнала.

$$2.10. A_0 = 2|C_3| = 0.903 \text{ В.}$$

$$2.11. A_2 = 2.122 \text{ В.}$$

$$2.12. a_0/2 = 5 \text{ В, } a_1 = 9.967 \text{ В, } a_2 = 9.888 \text{ В, } a_3 = 9.754 \text{ В.}$$

$$2.14. P_{\text{ср}} = U^2/3 = 0.333U^2,$$

$$P_{\text{ср}(3)} = U^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^4} + \frac{8}{81\pi^4} \right) = 0.333U^2,$$

$$\delta = (P_{\text{ср}} - P_{\text{ср}(3)})/P_{\text{ср}} = 5.749 \cdot 10^{-4}.$$

$$2.21. 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{c}, -57^{\circ}31'6''.$$

$$2.22. S(\omega) = \frac{A}{(\alpha + j\omega)^2}.$$

$$2.24. Q(\omega) = S^*(\omega).$$

$$2.25. Q_1(\omega) = 2\text{Re} S(\omega),$$

$$Q_2(\omega) = 2j\text{Im} S(\omega).$$

$$2.26. \text{a) } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) s(t - \xi) d\xi,$$

$$\text{б) } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) s(t + \xi) d\xi,$$

$$\text{в) } f(t) = s^*(-t).$$

$$2.27. S(\omega) = (j\omega)^n.$$

$$2.30. S(\omega) = A \left[\left(\frac{1}{\omega^2 \tau_n} + \frac{j}{\omega} \right) e^{-j\omega \tau_n} - \frac{1}{\omega^2 \tau_n} \right].$$

$$2.33. S(10^3) = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ B} \cdot \text{c}.$$

$$2.34. S(5 \cdot 10^3) = j 10^{-13} \text{ A} \cdot \text{c}.$$

$$2.36. s(t) = \frac{\sqrt{2} S_0}{4\tau} e^{-|t|/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{t}{\tau\sqrt{2}} + \sin \frac{t}{\tau\sqrt{2}} \right).$$

$$2.37. s(t) = \frac{At^2}{2} e^{-\alpha t} \sigma(t).$$

$$2.38. s(t) = \frac{A}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \sigma(t).$$

$$2.39. s(t) = \frac{A}{\omega_0} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \sigma(t).$$

$$2.41. S(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}.$$

$$2.42. S(\omega) = \pi (e^{j\nu} + 1) \delta(\omega) + \frac{e^{j\nu} - 1}{j\omega}.$$

$$2.43. S(\omega) = \pi (e^{j\nu} + 1) \delta(\omega - \omega_0) + \frac{e^{j\nu} - 1}{j(\omega - \omega_0)}.$$

$$2.44. S(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)].$$

$$2.47. q(t) = t \sigma(t).$$

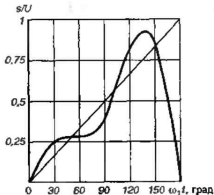


Рис. IV.2.1

$$2.54. U(p) = \frac{U_0}{p} (1 - e^{-p\tau_n}).$$

$$2.55. S(p) = S_0(p) / (1 - e^{-pT}).$$

$$2.56. S_1(p) = \frac{s_0}{t_0 p^2} (1 - e^{-pt_0}) - \frac{s_0 e^{-pt_0}}{p},$$

$$S_2(p) = \frac{s_0}{p^2} \left[\frac{1}{t_0} - \left(\frac{1}{t_0} - \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1 - t_0} \right) e^{-pt_0} + \frac{1}{t_1 - t_0} e^{-pt_1} \right) \right],$$

$$S_3(p) = \frac{s_0}{p^2} \left[\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_0} e^{-pt_0} - \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-pt_1} + \frac{1}{t_2 - t_1} e^{-pt_2} \right].$$

$$2.57. \Psi_{10}(\vartheta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 < \vartheta \leq 1/4, \\ -\sqrt{2}, & 1/4 < \vartheta \leq 1/2, \end{cases}$$

$$\Psi_{11}(\vartheta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 1/2 < \vartheta \leq 3/4, \\ -\sqrt{2}, & 3/4 < \vartheta \leq 1, \end{cases}$$

$$\Psi_{44}(\vartheta) = \begin{cases} 4, & 1/4 < \vartheta \leq 9/32, \\ -4, & 9/32 < \vartheta \leq 5/16. \end{cases}$$

Тема 3

$$3.2. (u, v) = A_1 A_2 \omega_1 / \pi.$$

$$3.3. (u, v) = A^2 \exp(-\alpha t_0) / (2\alpha).$$

$$3.4. W_{uv}(\omega) = \frac{\pi A_1 A_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} e^{-\omega^2 / 4(1/\beta_1 + 1/\beta_2)}$$

$$3.5. W_{uv}(\omega) = A_1 A_2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\omega^2 / 4\beta} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

$$3.6. W_{uv}(\omega) = U_1 U_2 T^2 \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}.$$

$$3.7. E_u = 0.191 B^2 \cdot c.$$

$$3.10. 0.974. \quad 3.11. 0.990.$$

$$3.14. B_s(\tau) = A^2 \exp(-\alpha |\tau|) / (2\alpha).$$

$$3.15. B_s(\tau) = U_0^2 \left[\frac{(\tau_n - |\tau|)^3}{3\tau_n^2} + (\tau_n - |\tau|)^2 \left(\frac{|\tau|}{2\tau_n^2} - \frac{1}{\tau_n} \right) + (\tau_n - |\tau|) \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right) \right], \quad |\tau| \leq \tau_n.$$

$$3.17. \tau_{\text{гор}} = 3.89/\beta.$$

$$3.18. \text{а) } \hat{E}_x(n) = (\dots, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

$$\text{б) } \hat{E}_x(n) = (\dots, 0, 0, 1, 0, -3, 0, 5, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

$$3.19. B_{\text{ин}}(\tau) = \begin{cases} U_1 U_2 (T - |\tau|), & |\tau| < T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

$$3.20. \text{При } \tau > 0 \quad B_{\text{ин}}(\tau) = \begin{cases} U_0^2 (T_1 - \tau), & \tau < T_1, \\ 0, & \tau > T_1. \end{cases}$$

$$\text{При } \tau < 0 \quad B_{\text{ин}}(\tau) = \begin{cases} U_0^2 T_1, & 0 > \tau > -(T_2 - T_1), \\ U_0^2 (T_1 + \tau), & -(T_2 - T_1) > \tau > -T_2, \\ 0, & \tau < -T_2. \end{cases}$$

$$3.21. B_{\text{ин}}(\tau) = \frac{S_0^2 \omega_s}{2\pi} \left[\frac{\sin \omega_s (m_0 + \tau)}{\omega_s (m_0 + \tau)} + \frac{\sin \omega_s (l_0 - \tau)}{\omega_s (l_0 - \tau)} \right]$$

3.22. Значения функции $\hat{E}_x(n)$ образуют множество $(\dots, 0, 1, 2, -1, -2, 1, 0, \dots)$.

Тема 4

4.1. Векторная диаграмма сигнала изображена на рис. IV.4.1. Здесь OK — ось отсчета углов, OA — вектор несущего колебания, AB — вектор верхнего бокового колебания, AC — вектор нижнего бокового колебания, OD — вектор результирующей амплитуды. Справа приведен масштаб чертежа.

$$4.4. M = \frac{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}.$$

$$4.5. M = \frac{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}.$$

$$4.6. M \approx 0.73, U_0 = 75 \text{ В}.$$

$$4.7. \Pi = 20 \text{ Гц}.$$

$$4.8. M_1 = 0.8, M_2 = 0.6.$$

$$4.10. P_{\text{min}} = 0.506 \text{ Вт}, P_{\text{max}} = 2.756 \text{ Вт}.$$

$$4.11. P_{\text{max}} = 12.96 \text{ кВт}.$$

$$4.13. \omega_{\text{max}} = 3.02 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \omega_{\text{min}} = 2.98 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

$$4.14. f_{\text{min}} = 49.86 \text{ МГц}, f_{\text{max}} = 50.14 \text{ МГц}.$$

$$4.15. u(t) \approx 8 \cos 10^6 t + 0.24 \cos 1.01 \cdot 10^6 t - 0.24 \cos 0.99 \cdot 10^6 t.$$

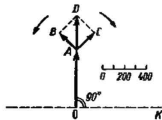


Рис. IV.4.1

4.16. $\Pi_{\text{практ}} = 624 \text{ кГц}$. 4.17. $N = 34$.

4.19. $F_{\text{max}} = 10\,438 \text{ Гц}$.

4.21. $C_m = 8.57 \cdot 10^{-4} \text{ нФ}$.

4.22. $\Delta f = 1.989 \text{ МГц}$.

4.23. $B = 2356$, $\mu = 1.047 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-2}$.

4.24. $W_\mu = 1.963 \cdot 10^{-23} \text{ В}^2 \cdot \text{с}^2$.

4.26. $\Phi_1 = -B/8$. 4.27. $\tau_{\text{осн}} = 5.03 \cdot 10^{-8} \text{ с}$.

4.29. 28 кГц .

4.30. 3 кГц , 5 кГц , 38 кГц , 35 кГц , 33 кГц , 41 кГц , 43 кГц .

Тема 5

5.2. $t_0 = 41.67 \text{ мкс}$. 5.4. $E_s = 0.9 \text{ В}^2 \cdot \text{с}$.

5.7. а)
$$U_x(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j\varphi_0}, & t \geq 0. \end{cases}$$

б)
$$U_x(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j\Omega_0 t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

5.8.
$$U_f(t) = 10 \cos \Omega t + j \left[30 \sin \Omega t + 5 \sin \left(2\Omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

5.9. $U_x(t) = U_m (1 + M \cos \Omega t) \exp(j\pi/4)$,

$$A_x(t) = B_x(t) = (U_m \sqrt{2}) (1 + M \cos \Omega t).$$

5.10. $U_x(t) = U_m \exp(jm \sin \Omega t)$,

$$A_x(t) = U_m \cos(m \sin \Omega t),$$

$$B_x(t) = U_m \sin(m \sin \Omega t).$$

5.12.
$$S(\omega) = \frac{(1 + e^{j\varphi_0}) \pi U_0}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{U_0 (e^{j\varphi_0} - 1)}{2j(m - \omega_0)} +$$
$$+ \frac{(e^{-j\varphi_0} + 1) \pi U_0}{2} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{U_0 (e^{-j\varphi_0} - 1)}{2j(\omega + \omega_0)}.$$

Если $\varphi_0 = 180^\circ$, то

$$S(\omega) = j2U_0 \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Важно отметить, что при $\varphi_0 = 180^\circ$ в спектре сигнала отсутствуют δ -особенности на частотах $\pm \omega_0$.

5.13.
$$U_x(t) = U_0 \sqrt{1 + M \cos \Omega t + \frac{M^2}{4}},$$

$$\psi_z(t) = \arctg \frac{\sin \omega_0 t + \frac{M}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t}{\cos \omega_0 t + \frac{M}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t},$$

$$\omega_z(t) = \frac{\omega_0 + \frac{M^2 \Omega}{4} + \frac{M}{2} (\omega_0 + \Omega) \cos \Omega t}{1 + M \cos \Omega t + M^2/4}.$$

5.14. $\omega_{\min} = 0.99 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, $\omega_{\max} = 1.003 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$.

5.15. $U_z(t) = \frac{S_0 \omega_0}{\pi} \left| \frac{\sin(\omega_z t/2)}{\omega_z t/2} \right|$

5.16. $\bar{U}_z(t) = -jU_0 e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t),$

$$G_z(\omega) = \frac{-jU_0}{\alpha + j\omega},$$

$$S(\omega) = \frac{U_0 \omega_0}{[\alpha + j(\omega - \omega_0)] [\alpha + j(\omega + \omega_0)]}$$

5.17. $\bar{U}_z(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_n/2, \\ U_0, & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t > \tau_n/2, \end{cases}$

$$S(\omega) = \frac{U_0}{2\tau_n} \left[\frac{\sin((\omega - \omega_0)\tau_n/2)}{(\omega - \omega_0)\tau_n/2} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)\tau_n/2)}{(\omega + \omega_0)\tau_n/2} \right]$$

5.19. $z_s(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{j\pi t} [S_1(1 - e^{-j\Delta\omega t}) + S_2(e^{j\Delta\omega t} - 1)],$

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \frac{(S_2^2 - S_1^2)\Delta\omega}{2(S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos \Delta\omega t)}.$$

5.20. $z_s(t) = \frac{S_0}{\pi(b^2 + t^2)} (b + jt).$

5.23. $\hat{s}(t) = 1/(\pi t).$

5.25. $\hat{s}(t) = t/(a^2 + t^2).$

$$5.27. \text{ Если } t \in [-t_0, t_0], \text{ то } f(t) = \frac{U_0}{\pi} \ln \frac{t+t_0}{t_0-t};$$

в противном случае

$$f(t) = \frac{U_0}{\pi} \ln \frac{t+t_0}{t-t_0}.$$

Тема 6

6.2. $P=0.0207$.

6.3. $P=0.064$.

6.4. $P=3800/8200=0.463$.

6.5. $P=P_1P_2+P_1(P_1-P_2)+P_2(1-P_1)=0.94$.

6.6. $u_{\max} = \{2 \text{ В}, 6 \text{ В}, 10 \text{ В}, 14 \text{ В}, 18 \text{ В}\}$.

Соответствующие вероятности: $P(2)=1/16$, $P(6)=4/16$, $P(10)=6/16$, $P(14)=4/16$, $P(18)=1/16$. Обратите внимание на малые вероятности как предельно малых, так и предельно больших значений выходного сигнала. Объясните данный результат.

6.7. График функции распределения $F(u_{\max})$ изображен на рис. IV.6.1,

$$p(u_{\max}) = \frac{1}{16} \delta(u_{\max}-2) + \frac{1}{4} \delta(u_{\max}-6) + \frac{3}{8} \delta(u_{\max}-10) + \frac{1}{4} \delta(u_{\max}-14) + \frac{1}{16} \delta(u_{\max}-18).$$

6.9. $p(x) = 0.125\delta(x-4) + 0.375\delta(x-4.5) + 0.125\delta(x-6) + 0.375\delta(x-6.5)$.

$$6.10. p(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ (a+x)/a^2, & -a \leq x < 0, \\ (a-x)/a^2, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

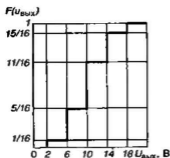


Рис. IV.6.1

6.12. $P(0 < x \leq a/2) = 0.375$.

$$6.15. p(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ 2-z, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & z \geq 2. \end{cases}$$

$$6.16. p(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \lambda^2 z \exp(-\lambda z), & z \geq 0. \end{cases}$$

6.18. $m_{\max} = 10 \text{ В}, \sigma_{\max}^2 = 16 \text{ В}^2$.

6.20. $m_w = 0.795, \sigma_w^2 = 0.081$.

$$6.22. \bar{x} = 1/\lambda, \sigma_x^2 = 1/\lambda^2.$$

$$6.26. p_{\text{вп}}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ (1 - e^{-\lambda x_0}) \delta(y) + \lambda e^{-\lambda x_0} e^{-\lambda y(x_1 - x_0)/y_0} \times \\ \times (x_1 - x_0)/y_0 + e^{-\lambda x_1} \delta(y - y_0), & 0 \leq y \leq y_0, \\ 0, & y > y_0. \end{cases}$$

$$6.27. \bar{y} = 3.183, \sigma_y^2 = 99.833.$$

$$6.28. p(y) = \begin{cases} 0, & y < a^2, \\ \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}}, & a^2 \leq y \leq b^2, \\ 0, & y > b^2, \end{cases}$$

$$m_y = (a^2 + ab + b^2)/3,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{4b^6 + 4a^6 + 10a^3b^3 - 9ab^3 - 9a^3b}{45(b-a)^2}.$$

$$6.30. \Theta(u) = \lambda/(\lambda - ju).$$

$$6.31. \Theta(u) = \frac{e^{ju} - e^{bu}}{j(b-a)u}.$$

$$6.34. P(|y| \geq 1) = 0.042.$$

Тема 7

$$7.2. \bar{x} = 0, K_x(\tau) = \bar{x}^2 = \sigma^2.$$

$$7.5. R_x(\tau) = \sigma_x^2 \cos \omega_0 \tau.$$

$$7.8. W_x(\omega) = \sigma_x^2 \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

$$7.9. F_x(\omega_0) = 5.41 \cdot 10^{-16} \text{ В}^2 \cdot \text{с}, F_x(f_0) = 3.4 \cdot 10^{-15} \text{ В}^2/\Gamma\text{ц}.$$

$$7.10. W_x(\omega) = \alpha \sigma^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

$$7.11. R_x(\tau) = \frac{W_0 \Delta \omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \omega}{2} \tau}{\frac{\Delta \omega}{2} \tau} \cdot \cos \omega_0 \tau.$$

$$7.13. F_x(\omega_0) = 2.387 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

$$7.14. \tau_x = \pi / (2\omega_n).$$

$$7.15. \tau_x = 10^{-7} \text{ с}, \omega_n = 3.332 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

$$7.17. \Delta\omega_{\text{эф}} = \omega_n / 3.$$

$$7.19. n(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} \left[\frac{\omega_1^3 + \omega_1^2\omega_2 + \omega_1\omega_2^2 + \omega_2^3}{\omega_1 + \omega_2} \right]^{1/2}.$$

$$7.21. \sigma_U^2 = 1.07 \text{ В}^2, \bar{U} = 1.98 \text{ В}.$$

$$7.23. R_U(\tau) = 1.374 \exp(-2 \cdot 10^4 |\tau|) + 0.087 \exp(-4 \cdot 10^4 |\tau|).$$

$$7.24. W_U(\omega) = \frac{5.498 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^8 + \omega^2} + \frac{6.968 \cdot 10^3}{1.6 \cdot 10^9 + \omega^2}.$$

Тема 8

$$8.2. \gamma_1 = -4.86 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \gamma_2 = -8.5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1},$$

$$u_1(t) = 1.714 \exp(\gamma_1 t) + 6.286 \exp(\gamma_2 t),$$

$$u_2(t) = 0.490 [\exp(\gamma_1 t) - \exp(\gamma_2 t)], t_0 = 153.4 \text{ мкс}.$$

$$8.4. \frac{du_1}{dt} + \frac{R_{13}}{L_1} u_1 - \frac{R_{13}}{R_3} \frac{du_2}{dt} = 0,$$

$$-\frac{R_{23}}{R_3} \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{R_{23}}{L_2} u_2 = 0,$$

где

$$R_{13} = R_1 R_3 / (R_1 + R_3); R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3).$$

Характеристическое уравнение

$$(1 - R_{13} R_{23} / R_3^2) \gamma^2 + (R_{23} / L_2 + R_{13} / L_1) \gamma + R_{13} R_{23} / (L_1 L_2) = 0.$$

При выбранных значениях параметров

$$\gamma_1 = -1.915 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \gamma_2 = -2.57 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

8.6. N — целое число, ближайшее к $0.733Q$.

$$8.7. K(p) = \frac{1}{R_1 + (1 + R_1/R_2)/(pC)}.$$

$$8.8. K(p) = \frac{p^2 L_2^2}{pL_2(1 + L_2/L_1) + L_2 R/L_1}.$$

$$8.9. K(p) = \frac{R}{pL + R}.$$

$$8.11. K(p) = \frac{1}{3 + pRC + 1/(pRC)}.$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{3 + j(\omega RC - 1/(\omega RC))}.$$

$$|K(j\omega)| = [9 + (\omega RC - 1/(\omega RC))^2]^{-1/2},$$

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg[(\omega RC - 1/(\omega RC))/3],$$

$$\omega_{\max} = 5 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}.$$

$$8.13. p_1 = -3.2469795 \text{ c}^{-1}, p_2 = -0.1980622 \text{ c}^{-1},$$

$$p_3 = -1.5549581 \text{ c}^{-1}.$$

$$8.15. K(p) = \frac{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_5}{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_3 Z_4}.$$

$$8.17. h(t) = -\frac{S}{C_{\Pi}} e^{-t/(R_{\Sigma} C_{\Pi})} \cdot \sigma(t),$$

$$\text{где } R_{\Sigma} = R_0 R_j / (R_x + R_j).$$

$$8.20. h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \cdot \sigma(t).$$

$$8.21. h(t) = \frac{2K_0 \Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cdot \cos \omega_0 t.$$

$$8.22. h(t) = \frac{K_0 \omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}}.$$

$$8.24. g(t) = 0.4798 (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \sigma(t).$$

Соответствующий график представлен на рис. IV.8.1.

$$p_1 = -172434 \text{ c}^{-1}, p_2 = -6592 \text{ c}^{-1}.$$

$$8.26. g(t) = K_0^2 [1 - (1 + t/\tau_2) e^{-t/\tau_2}] \sigma(t),$$

$t_{уст} = 3.89\tau_2$. Нормированный график переходной характеристики изображен на рис. IV.8.2.

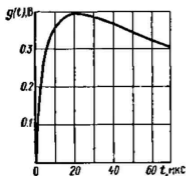


Рис. IV.8.1

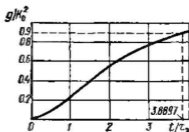


Рис. IV.8.2

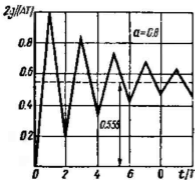


Рис. IV.8.3

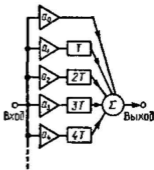


Рис. IV.8.4

$$8.28. h(t) = 2.857 \cdot 10^3 \cdot e^{-2.143 \cdot 10^3 t} (\cos 8.449 \cdot 10^3 t - 0.025 \sin 8.449 \cdot 10^3 t) \sigma(t).$$

$$8.29. h(t) = \frac{1}{C_1 + C_2} (1 - \cos \omega_0 t) \sigma(t).$$

$$8.32. K(j\omega) = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}),$$

$$|K(j\omega)| = AT \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right| / (\omega T / 2).$$

8.34. Нормированный график функции $g(t)$ изображен на рис. IV.8.3.

$$8.35. K(j\omega) = \frac{A}{j\omega} (1 - 2e^{-j\omega T/2} + e^{-j\omega T}).$$

$$8.36. K(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-jk\omega T}$$

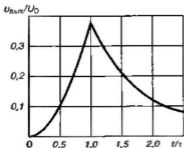


Рис. IV.8.5

Структурная схема цепи, реализующей данную импульсную характеристику, представлена на рис. IV.8.4. Она образована сумматором, а также совокупностью масштабных усилителей с коэффициентами $\{a_k\}$ и устройств задержки с параметрами $T, 2T, \dots$

$$8.40. u_{\text{вых}}(t) = \frac{U_0 K_0}{\pi} [\text{Si}(\omega_0 + \Delta\omega)t - \text{Si}((\omega_0 - \Delta\omega)t)].$$

$$8.44. u_{\text{вых}}\left(\frac{t}{\tau}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0 \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\eta t} \right), & 0 \leq t \leq \tau, \\ U_0 e^{-\eta t}, & t > \tau. \end{cases}$$

Соответствующий график изображен на рис. IV.8.5.

Тема 9

9.1. $K(j2\pi f_1) = -3.267 e^{j1.477}$; $K(j2\pi f_2) = -3.267 e^{-j1.477}$.

9.2. $\omega_{1,2} = \omega_{\text{рез}} \pm 1/(\sqrt{2} \tau_x)$.

9.4. $\Pi_{0.707} = \begin{cases} 12.73 \text{ кГц}, N=1, \\ 4.91 \text{ кГц}, N=5. \end{cases}$

9.5. Нормированные АЧХ усилителей приведены на рис. IV.9.1 (кривая 1 — одна ступень, кривая 2 — две ступени, кривая 3 — три ступени).

9.6. $K_{0\text{рез}} = 4.48$.

9.7. $T_{\text{гр}} = \tau_x$.

9.8. $T_{\text{гр}} = \frac{\tau_x}{1 + (\omega_0 - \omega_{\text{рез}})^2 \tau_x^2}$

9.10. $h(t) = \frac{2K_{0\text{рез}}^2}{\tau_x} \left(\frac{t}{\tau_x} \right) e^{-t/\tau_x} \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} \times \cos \left(\omega_{\text{рез}} + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t$.

Ориентировочный график данной функции изображен на рис. IV.9.2.

9.11. $h(t) =$

$$= -\frac{4K_{0\text{рез}}^2}{\tau_x} \left(\frac{t}{\tau_x} \right)^2 e^{-t/\tau_x} \frac{\sin^2 \Delta\omega t}{(\Delta\omega t)^2} \cos \omega_0 t$$

Примерный вид графика данной функции изображен на рис. IV.9.3.

9.12. $K_{\text{мг}}(\delta\Omega) = K_0 e^{-b\Omega^2}$,

$$h_{\text{мг}}(t) = \frac{K_0}{2\sqrt{\pi b}} \exp\left(-\frac{t^2}{4b}\right)$$

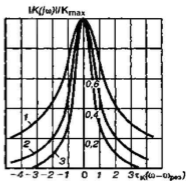


Рис. IV.9.1

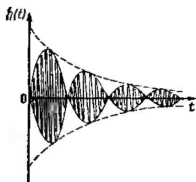


Рис. IV.9.2

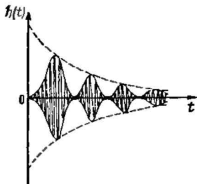


Рис. IV.9.3

$$9.13. h(t) = \frac{K_0}{\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{t^2}{4b}} \cos \omega_0 t.$$

Гауссов радиопольтер физически нереализуем.

$$9.15. u_{\text{вых}}(t) = -750 [1 + 0.424 \cos(2\pi \cdot 10^3 t - 1.012)] \times \\ \times \cos 2\pi \cdot 10^6 t.$$

$$9.16. t_{\text{зап}} = 16.1 \text{ мкс.}$$

$$9.19. U_{\text{вых}}(t) = \frac{K_0 U_m}{1 + \eta^2} \sqrt{\left[1 - e^{-x} \left(\cos \eta x - \frac{\sin \eta x}{\eta}\right)\right]^2 + \\ + \left[\eta - e^{-x} \left(\frac{1}{\eta} + \eta - \frac{\cos \eta x}{\eta} - \sin \eta x\right)\right]^2},$$

где $x = t/\tau_x$, $\eta = \Delta\omega \cdot \tau_x$.

$$9.21. U_{\text{вых}}(t) = -\frac{K_{\text{пр}} U_0}{1 - d + j\delta} (e^{-dx + j\delta t} - e^{-x}),$$

где $x = t/\tau_x$, $b = \delta\omega\tau_x$, $d = \alpha\tau_x$.

Тема 10

$$10.2. \text{ а) } R_y(\tau) = (W_0/(2T)) \exp(-|\tau|/T),$$

$$\text{ б) } R_y(\tau) = \begin{cases} A^2 W_0 (T - |\tau|), & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$$

$$10.4. \sigma_y^2 = 2\sigma_x^2 (1 + r_x(T)).$$

$$10.5. R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) + R_x(\tau - T).$$

$$10.6. r' = 0.04 \text{ с.}$$

$$10.7. W_{\max}(\omega) = \frac{K_0^2 W_0 \omega^2 T_2^2}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)},$$

$$\text{где } T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2.$$

$$10.8. W_u(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_i^2\omega^2}{C^2(\alpha^2 + \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$\text{где } \omega_0^2 = 1/(LC).$$

$$10.9. \Pi_{\text{м}} = R/(4L).$$

$$10.10. \Pi_{\text{м}} = \sqrt{\pi/(2b)}.$$

$$10.11. \sigma_u^2 = \frac{K_0^2 W_0}{2} \cdot \frac{T_2}{(T_1 + T_2) T_1},$$

$$r_u(\tau) = \frac{K_0^2 T_2^2 W_0}{2(T_2^2 T_1^2)} \left(\frac{e^{-\frac{|\tau|}{T_1}}}{T_1} + \frac{e^{-\frac{|\tau|}{T_2}}}{T_2} \right).$$

$$10.12. r_u(\tau) = W_0 \left[\delta(\tau) - \frac{1}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}} \right].$$

$$10.13. \sigma_{\max}^2 = \frac{\pi F_0}{2RC} \frac{(2N-3)!!}{(2N-2)!!}.$$

$$10.14. \sigma_{\max}^2 = a^2 \frac{(R_1 + R_2)C + R_1^2 C^2 \alpha}{(R_1 + R_2)C [1 + \alpha(R_1 + R_2)C]}.$$

$$10.15. r_u(\tau) = \frac{W_0}{2R_1 C (1 + R_1/R_2)} \cdot \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} |\tau|\right).$$

$$10.18. \sigma_{\max} = 0.023 \text{ В.}$$

$$10.19. \sigma_y^2 = 2K_0^2 F_0 \Delta \omega,$$

$$r_y(\tau) = 2K_0^2 F_0 \Delta \omega \frac{\sin \Delta \omega \tau}{\Delta \omega \tau} \cos \omega_0 \tau.$$

$$10.20. F_u(\omega) = \frac{F_0 \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2},$$

$$r_u(\tau) = \frac{F_0 \omega_0^4}{4\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_c \tau + \frac{\alpha}{\omega_c} \sin \omega_c |\tau| \right).$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\alpha = R/(2L)$, $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

$$10.21. r_u(\tau) = \frac{W_0}{4\alpha C^2} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\alpha = 1/(2RC)$.

10.22. $\sigma_{\text{вх}} = 73.1$ мкВ. 10.23. $\sigma_{\text{вх}} = 7.97$ мВ.

10.24. $\sigma_u^2 = kT/C$; $u_{\text{эф}} = 2.03$ мкВ.

10.25. $\sigma_i^2 = 3.776 \cdot 10^{-14}$ А².

10.26. $P_0 = 0.2865$. 10.27. $T = 580$ К.

10.28. $T_{\text{ш}} = 473$ К; $F = 2.63$.

$$10.29. F = F + \frac{F_2 - 1}{K_{P1}} + \frac{F_3 - 1}{K_{P1} K_{P2}}.$$

Тема 11

11.2. $a_0 = 1.25$ мА, $a_1 = 0.68$ мА/В,

$$a_2 = 0.14 \text{ мА/В}^2, a_3 = 0.01 \text{ мА/В}^3.$$

11.3. $i_x = 1.99 \cdot 10^{-3} + 0.077 (u_{63} - 0.25) + 1.475 (u_{63} - 0.25)^2$ А

11.4. $a_0 = 63.75$ мА, $a_1 = 75$ мА/В, $a_2 = 15$ мА/В²,

$$a_3 = a_4 = \dots = 0.$$

11.5. $\mu = 0.128$ В.

11.7. $I_0 = 15.03$ мА, $I_1 = 0.49$ мА, $I_2 = 0.29$ мкА,

$$I_3 = 3.78 \text{ мкА}.$$

11.8. $I_1 = 40U_m + 1.875U_m^3$

11.10. $I_{C0} = 1.25$ мА, 11.11. $P_6 = 1.52$ мВт.

11.12. $R_{\text{вх1}} = 4.05$ Ом.

11.14. $I_0 = 0.92$ мА, $I_1 = 1.56$ мА.

11.16. $U_{\text{м2вх}} = 0.32$ В.

11.17. График зависимости $k_{\text{вл}}(U_{\text{вх}})$ приведен из рис. IV.11.1.

11.19. $U_{\text{твх}} = 0.42$ В.

11.20. $U_0 = 0.19$ В.

11.21. $P_0 = 3.69$ мВт,

$$P_{\text{вх}} = 3.35 \text{ мВт},$$

$$P_{\text{пот}} = 0.34 \text{ мВт},$$

$$\eta = 91\%.$$

11.22. $U_{\max} = 10.28 \text{ В.}$

11.25. $M_{\max} = 0.9.$

11.26. а) $i_{\text{пр}}(t) = a_2 M U_m^2 \cos \Omega t +$

$$+ \frac{a_2 M^2 U_m^2}{4} \cos 2\Omega t,$$

б) $i_{\text{пр}}(t) = \frac{a_2 M U_m^2}{2} \cos \Omega t.$

11.27. $u_{\text{max пр}}(t) = -\frac{a_2 U_m^2 R_n}{4} (4M_1 \cos \Omega_1 t +$

$$+ 4M_2 \cos \Omega_2 t +$$

$$+ M_1^2 \cos 2\Omega_1 t + M_2^2 \cos 2\Omega_2 t + 2M_1 M_2 \cos (\Omega_1 + \Omega_2) t +$$

$$+ 2M_1 M_2 \cos (\Omega_1 - \Omega_2) t].$$

11.32. $p_{\text{max}}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha y}} \exp\left(-\frac{y}{2\alpha\sigma_x^2}\right), & y \geq 0. \end{cases}$

11.34. $m_y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha \sigma_x, \sigma_y^2 = \frac{\alpha^2}{\pi} \sigma_x^2.$

11.35. $K_y(\tau) = 2\sigma_x^2 R_x^2(\tau).$

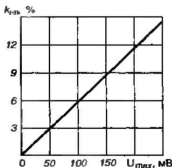


Рис. IV.11.1

Тема 12

12.1. $I_m = 150 \text{ мкА.}$

12.2. $f_{\Gamma\text{min}} = 615 \text{ кГц, } f_{\Gamma\text{max}} = 840 \text{ кГц.}$

12.3. $Q = 70.$ 12.4. $\omega_{s1} = \omega_r + \omega_{\text{вп}}, \omega_{s2} = \omega_r - \omega_{\text{вп}}.$

12.6. $U_{\text{пр}} = 0.8 \text{ В.}$ 12.7. $S_{\text{вп}} = 7.846 \text{ мА/В.}$

12.8. $U_0 = -0.978 \text{ В.}$ 12.9. $U_{\text{вп}} = 5.4 \text{ В.}$

12.11. $I_3 = 8.48 \text{ мА.}$ 12.12. В 8.53 раза.

12.13. $i(t) = a C_0 e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$

12.14. $t_1 = 0.382\tau, t_2 = 2.618\tau.$

12.16. $G_{\text{вп}} = -4.286 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$ 12.17. $\varphi_n = 2\pi/3.$

12.18. $G_{\text{впmax}} = -2.356 \cdot 10^{-4} \text{ См, } \varphi_n = -5\pi/6.$

13.1. Физически реализуемой LC -цепи отвечает лишь проводимость $Y_3(p)$.

13.3. Параллельная RC -цепь с параметрами: $R=3$ кОм, $C=3$ пФ.

13.4. Последовательный LC -контур с параметрами элементов: $L=2$ мкГн, $C=0.4$ пФ.

13.5. Последовательный LCR -контур с параметрами элементов: $C=0.3$ нкФ, $L=2$ мГн, $R=40$ Ом.

13.6. Параллельный LC -контур с параметрами элементов: $L=20$ мкГн, $C=750$ пФ.

13.7. Схема цепи изображена на рис. IV.13.1.

13.8. Схема цепи изображена на рис. IV.13.2.

13.10. Схема цепи, отвечающая условию задачи, приведена на рис. IV.13.3.

Сравнивая данный результат с тем, который получен в задаче 13.9, убеждаемся в неоднозначном характере процедуры синтеза.

13.11. Схема цепи приведена на рис. IV.13.4.

13.12. Схема цепи приведена на рис. IV.13.5.

13.13. Схема цепи приведена на рис. IV.13.6.

13.14. Схема цепи приведена на рис. IV.13.7.

$$13.16. K(p_n) = \frac{p_n}{(p_n - e^{j\pi/4})(p_n - e^{j5\pi/4})}$$

13.19. $L=0.161$ Гн.

13.20. $K(p_n) = 25/(p_n^4 + 2.6132p_n^3 + 3.4143p_n^2 + 2.6132p_n + 1)$

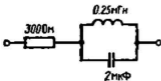


Рис. IV.13.1



Рис. IV.13.2

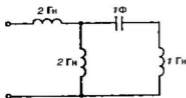


Рис. IV.13.3

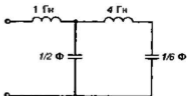


Рис. IV.13.4

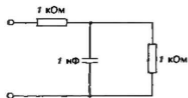


Рис. IV.13.5

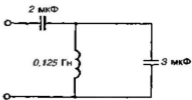


Рис. IV.13.6

$$13.21. p_{1,2} = -58.24831 \pm$$

$$\pm j179.26992 \text{ с}^{-1},$$

$$p_{3,4} = -152.49609 \pm$$

$$\pm j110.79489 \text{ с}^{-1},$$

$$p_5 = -188.49555 \text{ с}^{-1}.$$

$$13.22. \omega_0 = 8 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, n = 4.$$

13.23. $n_{\text{мин}} = 3$. Усиление фильтра составляет при этом -15.12 дБ.

$$13.26. \varphi_K(\omega_n) = -\text{arctg } \omega_n - \text{arctg}(2\omega_n - \sqrt{3}) - \\ -\text{arctg}(2\omega_n + \sqrt{3}); \varphi_K(\infty) = 3\pi/2.$$

13.27. $T_{\text{гp}} = 1.533$ мкс для фильтра первого порядка,

$T_{\text{гp}} = 4.295$ мкс для фильтра третьего порядка.

$$13.29. p_{\text{эл}2} = -0.18441 \pm j0.92303, p_{\text{эл}3} = -0.36883.$$

$$13.30. K(p) = \frac{1}{p_x^3 + 0.73766p_x^2 + 1.02203p_x + 0.32678}.$$

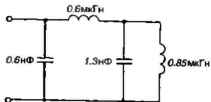


Рис. IV.13.7

Тема 14

$$14.2. K_U = 0.955, u_{\text{нх}} = 3.3 \text{ В}.$$

$$14.4. K(p) = \frac{K_1 K_2}{1 - (K_1 \beta_1 + K_2 K_1 \beta_2)}.$$

$$14.7. K(p) = \frac{K_0 / (K_0 + 1)}{1 + p\tau_{\text{ог}} / (K_0 + 1)},$$

$$\omega_{\text{гp}} = (K_0 + 1) / \tau_{\text{ог}}.$$

$$14.8. K(p) = \frac{K_0}{1 + K_0 + pRC}.$$

$$14.9. K(p) = \frac{-K_0}{1 + R_1(1 + K_0)/R_2 + pR_1C}.$$

$$14.10. K(p) = \frac{-R_2(R_3 + R_4)}{R_1 R_3 - R_2 R_4}.$$

Система становится неустойчивой, если $R_4 \geq 3$ кОм.

$$14.12. K_{\text{опр}}(n) = 1 / \cos(\pi/n).$$

$$14.13. w(j\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \exp j(\pi - \omega T_0);$$

$$K_{\text{опр}} = \sqrt{1 + \pi^2 (\tau_0)^2}.$$

14.14. $T_{\text{опр}} = 1.258 \cdot 10^{-8}$ с. 14.15. $K_{\text{опр}} = \sqrt{3}$.

14.16. $K_{\text{опр}} = 4.58$.

14.17. Система неустойчива при любом $K_0 \in (0, \infty)$.

14.18. Для устойчивости системы необходимо одновременное выполнение двух неравенств:

а) $K_0 < 1$, б) $K_0 < (\tau + T_2)/T_1$.

14.20. $k_{\text{сз}} = 0.23$. 14.21. $k_{\text{зхх}} = 0.08$.

14.22. $S_1 = 16.57$ мА/В.

14.24. Рассмотренный в задаче стационарный режим устойчив.

Тема 15

15.1. $N = 28800$ бит.

$$15.3. S_{x_x}(\omega) = \frac{\tau}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\tau/\Delta)}{n\pi\tau/\Delta} S_x\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta}\right).$$

Примерный вид зависимости $|S_{x_x}(\omega)|$ изображен на рис. IV.15.1.

15.4. $\Delta \approx \pi/(100\alpha)$.

15.5. $S_1(0) = 2\alpha U_0/(\pi^2 + 4z^2/\Delta^2)$. 15.7. $C_0 = 0.07$.

15.12. $C_0 = 0$, $C_1 = 1/2$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1/2$.

15.13. $x(t) = 0.125 + 0.75 \cos(2\pi t/T) + 0.125 \cos(4\pi t/T)$.

15.14. $x(t) = \cos(2\pi t/T)$. 15.17. $X(z) = z/(z-1)$.

15.18. $X(z) = 1/(1 - \alpha z^{-1})$. 15.19. $X(z) = \exp(\alpha z^{-1})$.

15.21. $x_0 = 13.286$. 15.22. $x_n = -2(0.4)^n + 3(0.6)^n$.

$$15.24. F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 2z + 1}{z^3}.$$

15.25. $\{f_n\} = (0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, \dots)$.

$$15.28. K(j\omega) = 1 - 2e^{-j\omega\Delta} + e^{-j2\omega\Delta}.$$

Разлагая экспоненты в ряды Маклорена и ограничиваясь учетом первых трех членов при $\omega\Delta \rightarrow 0$, находим, что $K(j\omega) \approx (j\omega\Delta)^2$, т. е. фильтр приближенно осуществляет операцию вычисления второй производной входного сигнала.

$$15.31. H(z) = \frac{1}{z^2 - 0.4z - 0.32}$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{e^{j2\omega\Delta} - 0.4e^{j\omega\Delta} - 0.32},$$

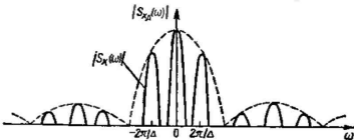


Рис. IV.15.1

$$h_m = \begin{cases} 0, & m=0, 1, \\ (0.8333(0.8))^{m-1} - 0.8333(-0.4)^{m-1}, & m=2, 3, \dots \end{cases}$$

15.33. $|K(j\omega)| = 3.470$, $\varphi_K(\omega) = -0.862$ рад.

15.34. Рассматриваемый фильтр устойчив.

15.35. $q_{\text{нз}} = 0.059$ В, $\sigma_{\text{нз}}^2 = 2.86 \cdot 10^{-4}$ В².

15.36. $\sigma_{\text{нз}}^2 = 1.505 \cdot 10^{-3}$ В².

Тема 16

16.2. $Q_{\text{нал}} = U_{\text{м вл}} / \sqrt{\omega_0 W_0}$; $U_{\text{м вл}} = 1.22$ мВ.

С ростом частоты ω_0 должна расширяться полоса пропускания. Это ведет к тому, что возрастает мощность шума, поступающего на выход цепи.

16.3. $Q_{\text{нал}} = U_{\text{м вл}} \sqrt{\tau_{\text{н}} / (2W_0)}$.

16.5. $K_{\text{онт}}(j\omega) = \frac{BA}{\omega^2 t_0} (1 - e^{-j\omega t_0}) + \frac{BA}{j\omega}$,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ BA(1 - t/t_0), & 0 < t < t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

16.6. $s_{\text{нз макс}} = 3.125$ В. 16.7. $N = 84$.

16.8. $\tau_{\text{нз}} = 45.5$ нс.

16.10. $|K(j\omega)| = \frac{1}{1 + k(\alpha^2 + \omega^2)/(\beta^2 + \omega^2)}$,

где

$$k = \beta \sigma_v^2 / (\alpha \sigma_w^2).$$

$$16.11. \sigma_{\text{сmin}}^2 = \frac{\omega_B AW_0}{\pi A + W_0}.$$

$$16.12. \sigma_{\text{сmin}}^2 = 9.549 \cdot 10^{-10} \text{ В}^2.$$

$$16.13. \sigma_{\text{сmin}}^2 = \frac{\sqrt{\alpha} \sigma_u^2}{(\alpha + 2\sigma_u^2/W_0)^{1/2}}.$$

$$16.14. \sigma_{\text{сmin}}^2 = 10^{-4} \text{ В}^2.$$

16.16. 50 бит.

16.17. 5 бит/СИМВОЛ

16.18. 900 кбит; 1.6 раза

16.19. 11.52 Мбит; 1280 раз.

1. Некоторые тригонометрические формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x).$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x).$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x).$$

2. Связь между изображениями и оригиналами

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$1/p$	$\sigma(t)$
$1/p^2$	t
$1/(p+a)$	$\exp(-at)$
$p/(p+a)$	$\delta(t) - a \exp(-at)$
$a/[p(p+a)]$	$1 - \exp(-at)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$1/(p+a)^2$	te^{-at}
$p/(p+a)^2$	$(1-at)e^{-at}$
$\omega/(p^2+\omega^2)$	$\sin \omega t$
$p/(p^2+\omega^2)$	$\cos \omega t$
$\omega/[(p+a)^2+\omega^2]$	$e^{-at} \sin \omega t$

$F(p)$	$f(t)$
$(p+a)/[(p+a)^2 + \omega^2]$	$e^{-at} \cos \omega t$
$a^2/[p^2(p+a)]$	$at - (1 - e^{-at})$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right]$
$\frac{1}{p[(p+a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} \left[1 - e^{-at} \times \left(\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$
$\frac{1}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} \left(e^{-at} - \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$
$\frac{p}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} (-a e^{-at} + a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$
$\frac{p^2}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} (a^2 e^{-at} - a \omega \sin \omega t + \omega^2 \cos \omega t)$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Высшая школа, 2000.
2. Попов В. П. Основы теории цепей.— М.: Высшая школа, 2000.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы: Пер. с нем./ Под ред. Л. И. Седова.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977.
5. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Вводные лекции по прикладной математике.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
6. Дьячков В. П., Абраменкова И. В. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet.— М.: Изд-во Нолидж, 1999.
7. Грызлов В. И., Грызлова Т. П. Турбо Паскаль 7.0.— М.: Изд-во ДМК, 1998.
8. Карлашук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение.— М.: Изд-во Солон-Р, 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
РАЗДЕЛ I. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ	6
Тема 1. Общи теория радиотехнических сигналов	6
Тема 2. Спектральные представления сигналов	13
Тема 3. Энергетические спектры сигналов. Принципы корреляционного анализа	22
Тема 4. Модулированные сигналы	25
Тема 5. Сигналы с ограниченным спектром	29
Тема 6. Основы теории случайных сигналов	34
Тема 7. Корреляционная теория случайных процессов	39
Тема 8. Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы	43
Тема 9. Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы	51
Тема 10. Воздействие случайных сигналов на линейные стационарные цепи	55
Тема 11. Преобразования сигналов в нелинейных радиотехнических цепях	60
Тема 12. Преобразование сигналов в линейных параметрических цепях	67
Тема 13. Основы теории синтеза линейных радиотехнических цепей	70
Тема 14. Активные цепи с обратной связью и автоколебательные системы	75
Тема 15. Дискретные сигналы. Принципы цифровой фильтрации	80
Тема 16. Оптимальная линейная фильтрация сигналов	85
РАЗДЕЛ II. Указания	89
РАЗДЕЛ III. Решения	104
РАЗДЕЛ IV. Ответы	189
Приложения	211
Рекомендуемая литература	213