გ. ლომაძე

ლექციები უმაღლეს ალგებრაში

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 2006

უაკ (UDC) 512 (042·2)
ლ 811

ამ წიგნში მოცემულია უმაღლესი ალგებრის საფუძვლები, რაც წლების განმავლობაში იკითხებოდა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე.

ლექციების კურსი განკუთვნილია მათემატიკური და საბუნებისმეტყველო პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის. შეიძლება გამოყენებულ იქნეს აგრეთვე როგორც ცნობარი აღნიშნული კურსით დაინტერესებულ პირთა მიერ.

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭოს მიერ რეკომენდებულია მათემატიკური და საბუნებისმეტყველო პროფილის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის.

რედაქტორი დოც. ქ. შავგულიძე

რეცენზენტები: პროფ. მ. ამაღლობელი
დოც. ა. თავაძე

ISBN 99940-38-35-4

ᲨᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ

თავი 1. რგოლები და ველები

§1. სიმრავლეები

მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი და საწყისი ცნება არის სიმრავლის ცნება. სიმრავლის ქვეშ გვესმის ნებისმიერი ერთობლიობა ობიექტებისა (საგნებისა), რომლებსაც სიმრავლის ელემენტები ეწოდებათ.

მათემატიკისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია რიცხვითი სიმრავლეები, ე. ი. სიმრავლეები, რომელთა ელემენტები რიცხვებია. უმარტივესი რიცხვითი სიმრავლეები არის:

ა) **N** – ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე: 1, 2, 3, ...;

ბ) **Z** – ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე: 0, ±1, ±2, ±3, ...;

გ) **Q** – ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ე. ი. $\frac{a}{b}$ სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც a და b ნებისმიერი მთელი რიცხვებია, ამასთანავე $b\neq 0$;

დ) **R** – ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ჩვენ მომავალში არარიცხვით სიმრავლეებთან გვექნება საქმე. ამ მიზნით ჯერ გავეცნოთ ზოგიერთ ტერმინსა და აღნიშვნას. სიმრავლის ელემენტებს აღნიშნავენ მცირე ლათინური ასოებით, ხოლო თვით სიმრავლეებს დიდი ლათინური ასოებით.

იმის აღსანიშნავად, რომ a არის (არ არის) M სიმრავლის ელემენტი წერენ: $a\in \mathrm{M}(a\overline{\in}\mathrm{M})$. იმის აღსანიშნავად, რომ M არის a, b, c ელემენტებისაგან შედგენილი სიმრავლე წერენ: $\mathrm{M}=\{a,b,c\}$. სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. თუ a, b, c უსასრულო სიმრავლის ელემენტებია, მაშინ წერენ: $\{a,b,c,\ldots\}$. რაიმე M სიმრავლის აღსანიშნავად ხშირად წერენ:

$$\mathrm{M}=\{x|\mathrm{P}(x)\},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ M არის ყველა იმ x ელემენტის სიმრავლე, რომელთათვისაც დამახასიათებელია $P(x)$ თვისება. მაგალითად, $M=\{x|x\in \mathbf{Z},\ x\geq 0\}$ (ყველა არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე), $M=\{x|x\in \mathbf{R},\ x \overline{\in} \mathbf{Q}\}$ (ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე) და ა. შ.

ორ M და N სიმრავლეს ტოლი ეწოდება, თუ ისინი ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგება და წერენ $M=N$. თუ M სიმრავლის ყოველი ელემენტი N სიმრავლესაც ეკუთვნის, მაშინ M სიმრავლეს N სიმრავლის ქვესიმრავლე ეწოდება, N-ს კი M სიმრავლის გაფართოება და წერენ:

$$M\subseteq N \text{ ან } N\supseteq M.$$

ცხადია, რომ $M\subseteq M$ და $\varnothing\subseteq M$. თუ $M\subseteq N$ და $N\subseteq M$, მაშინ $M=N$.

თუ $M\subseteq N$ და N სიმრავლის ერთი ელემენტი მაინც არ ეკუთვნის M-ს, მაშინ M-ს ეწოდება N სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე და წერენ: $M\subset N$ ან $N\supset M$.

ცხადია, რომ

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

M და N სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება M .N სიმბოლოთი და ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც შედგება M და N სიმრავლეების საერთო ელემენტებისაგან, ე.ი.

$$M\ .N=\{x|x\in M \text{ და } x\in N\}.$$

M და N სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება M .N სიმბოლოთი და ეწოდება სიმრავლეს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებისა, რომლებიც M და N სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნიან, ე. ი.

$$M\ .N=\{x|x\in M \text{ ან } x\in N\}.$$

M და N სიმრავლეების სხვაობა – აღინიშნება $M\backslash N$ სიმბოლოთი და ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც შედგება M სიმრავლის ყველა იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც N-ს არ ეკუთვნიან.

M და N არაცარიელი სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი – აღინიშნება $M\times N$ სიმბოლოთი და ეწოდება ყველა იმ (x,y) წყვილების სიმრავლეს, სადაც $x\in M$ და $y\in N$, ე. ი

$$M\times N=\{(x,y)|x\in M,\ y\in N\}.$$

M სიმრავლის გარკვეული რიგით აღებულ, არა აუცილებლად განსხვავებულ, ელემენტთა (x,y) წყვილს დალაგებული წყვილი ეწოდება. M სიმრავლის ყველა დალაგებული წყვილის სიმრავლეს რომელიც აღინიშნება M^2 სიმბოლოთი – ეწოდება M სიმრავლის დეკარტული კვადრატი, ე. ი.

$$M^2=M\times M=\{(x,y)|x,y\in M\}.$$

ვთქვათ M ელემენტთა არაცარიელი სიმრავლეა.

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია ბინარული ალგებრული ოპერაცია, თუ M სიმრავლის ელემენტთა ყოველ დალაგებულ (a,b) წყვილს ეთანადება ამავე M სიმრავლის ერთადერთი c ელემენტი.

სიმარტივის მიზნით, თუ ამ ოპერაციას შეკრებას ვუწოდებთ, მაშინ c ელემენტს a და b ელემენტების ჯამს უწოდებენ და წერენ: $c=a+b$; ხოლო თუ ამ ოპერაციას გამრავლებას ვუწოდებთ, მაშინ c ელემენტს a და b ელემენტების ნამრავლს უწოდებენ და წერენ: $c=ab$. M სიმრავლეზე განსაზღვრული ალგებრული ოპერაციისათვის შეიძლება სხვა სახელწოდებაც იყოს შემოღებული.

<u>განსაზღვრება.</u> ელემენტთა არაცარიელ სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია ერთი ან რამდენიმე ალგებრული ოპერაცია, რომლებიც გარკვეულ აქსიომებს აკმაყოფილებენ, ალგებრული სტრუქტურა ეწოდება.

ჩანაწერი (M,+) აღნიშნავს, რომ M არის ალგებრული სტრუქტურა, რომელზედაც განსაზღვრულია შეკრების ბინარული ალგებრული ოპერაცია. ანალოგიური აზრი აქვს ჩანაწერებს: (M,·), (M,+,·) და ა. შ.

§2. რგოლი და მისი თვისებები

<u>განსაზღვრება.</u> R ალგებრულ სტრუქტურას, რომელზედაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული – ალგებრული ოპერაციები რგოლი ეწოდება, თუ R-ზე სამართლიანია შემდეგი აქსიომები:

1) **კომუტაციურობის აქსიომა შეკრების მიმართ:** $a+b=b+a$;
2) **ასოციაციურობის აქსიომა შეკრების მიმართ:** $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) **ასოციაციურობის აქსიომა გამრავლების მიმართ:** $(ab)c=a(bc)$;
4) **დისტრიბუციულობის აქსიომები:** $(a+b)c=ac+bc,\ a(b+c)=ab+ac$

(აქ ყველგან a,b,c — R–ის ნებისმიერი ელემენტებია);

5) R -ში არსებობს ე. წ. ნულოვანი ელემენტები, რომელიც 0 სიმბოლოთი აღინიშნება და ის თვისება აქვს, რომ ნებისმიერი a-სთვის R-დან $a+0=a$;

6) R-ის ყოველი a ელემენტისათვის R-ში არსებობს ე. წ. a-ს მოპირდაპირე ელემენტი, რომელიც $-a$ სიმბოლოთი აღინიშნება და ის თვისება აქვს, რომ $a+(-a)=0$.

თუ დამატებით R-ის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის სამართლიანია კომუტაციურობის აქსიომა გამრავლების მიმართ, ე.ი. $ab=ba$, მაშინ R-ს **<u>კომუტაციური რგოლი</u>** ეწოდება. ამ შემთხვევაში დისტრიბუციულობის მხოლოდ ერთი აქსიომის მოთხოვნაა საჭირო.

Z, Q, R რიცხვითი სიმრავლეები რიცხვთა ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების არითმეტიკული მოქმედებების მიმართ კომუტაციური რგოლების უმარტივესი მაგალითებია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა ლუწ რიცხვთა **2Z** სიმრავლე აგრეთვე კომუტაციური რგოლია.

შევისწავლოთ ახლა რგოლის ძირითადი თვისებები, რომლებიც გამომდინარეობენ რგოლის განმსაზღვრელი აქსიომებიდან.

ასოციაციურობის აქსიომების შედეგები. რგოლზე განსაზღვრულია მხოლოდ ორი ნებისმიერი ელემენტის ჯამის ცნება. მაგრამ იმის გამო, რომ $(a+b)+c$ და $a+(b+c)$, ასოციაციურობის აქსიომის თანახმად, რგოლის ერთსა და იმავე ელემენტს გასახავს, ამიტომ ბუნებრივია რგოლის სამი a, b, c ელემენტის ჯამად სწორედ ეს ელემენტი მივიღოთ, ე. ი. განსაზღვრების თანახმად,

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c). \tag{1}$$

საზოგადოდ, რგოლის n ელემენტის ჯამი განვსაზღვროთ

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \tag{2}$$

ტოლობით.

<u>**თვისება.**</u> **რგოლის n ელემენტის ჯამი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ სად დავსვამთ ფრჩხილებს.**

ვთქვათ $0<r<s<t<n$ სადაც r, s, t, $n\in\mathbf{N}$ და ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$(a_1+\ldots+a_r)+\ldots+(a_{s+1}+\ldots+a_t)+(a_{t+1}+\ldots+a_n)=a_1+a_2+\ldots+a_n. \tag{3}$$

(3) ტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით ყველა ნატურალური $n\geq3$ რიცხვისათვის. როცა $n=3$, მაშინ (3) ტოლობა სამართლიანია (1)-ის ძალით. დავუშვათ, რომ დასამტკიცებელი სწორია ნებისმიერი k-სთვის, რომელიც ნაკლებია n-ზე და ამ დაშვების საფუძველზე ვაჩვენოთ (3) ტოლობის სამართლიანობა. მართლაც, რამდენიმე ელემენტის ჯამის განსაზღვრების თანახმად,

$$(a_1+\ldots+a_r)+\ldots+(a_{s+1}+\ldots+a_t)+(a_{t+1}+\ldots+a_n)=[(a_1+\ldots+a_r)+\ldots+(a_{s+1}+\ldots$$
$$+a_t)]+(a_{t+1}+\ldots+a_n)=(a_1+\ldots+a_t)+(a_{t+1}+\ldots+a_n)=(a_1+\ldots+a_t)+$$
$$+[(a_{t+1}+\ldots+a_{n-1})+a_n]=[(a_1+\ldots+a_t)+(a_{t-1}+\ldots+a_{n-1})]+a_n=$$
$$=(a_1+\ldots+a_{n-1})+a_n=a_1+\ldots+a_n.$$

ანალოგიურად, რგოლის n ელემენტის ნამრავლი განისაღვრება

$$a_1a_2\ldots a_n=(a_1a_2\ldots a_{n-1})a_n \tag{4}$$

ტოლობით და გამრავლების მიმართ ასოციაციურობის აქსიომის საფუძველზე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ n ელემენტის ნამრავლი არაა დამოკიდებული ფრჩხილების განლაგებაზე.

დისტრიბუციულობის აქსიომების შედეგები. მათემატიკური ინდუქციით ყველა ნატურალური $n\geq2$ რიცხვისათვის შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)b=a_1b+a_2b+\ldots+a_nb,$

$a(b_1+b_2+\ldots+b_n)=ab_1+ab_2+\ldots+ab_n.$

ამ ტოლობებიდან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_n)=(a_1+a_2+\ldots+a_m)b_1+$$
$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)b_2+\ldots+(a_1+a_2+\ldots+a_m)b_n=(a_1b_1+a_2b_1+\ldots+a_mb_1)+$$
$$+(a_1b_2+a_2b_2+\ldots+a_mb_2)+\ldots+(a_1b_n+a_2b_n+\ldots+a_mb_n)=$$
$$a_1b_1+a_2b_1+\ldots+a_mb_1+a_1b_2+\ldots+a_1b_n+\ldots+a_mb_n.$$

თვისება. **ყოველ რგოლში არსებობს მხოლოდ ერთი ნულოვანი ელემენტი.**

ვიცით, რომ ყოველი a-სთვის R-დან გვაქვს: $a+0=a$. ვთქვათ $0'$ არის R-ის ნებისმიერი ნულოვანი ელემენტი, ე. ი. $a+0'=a$. აქედან, კერძოდ, გვექნება: $0+0'=0$. მაგრამ $0+0'=0'+0=0'$. მაშასადამე, $0'=0$.

თვისება. **რგოლის ყოველ ელემენტს გააჩნია მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე.**

ვიცით რომ ყოველი a-სთვის R-დან გვაქვს: $a+(-a)=0$. ვთქვათ a' არის a ელემენტის ნებისმიერი მოპირდაპირე ელემენტი, ე. ი. $a+a'=0$ ანუ

$$a'+a=0 \Rightarrow (a'+a)+(-a)=0+(-a) \Rightarrow a'+(a+(-a))=-a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a'+0=-a \Rightarrow a'=-a.$$

რგოლის *a* და *b* ელემენტების სხვაობა აღინიშნება *a–b* სიმბოლოთი და ეწოდება *a* ელემენტისა და *b* ელემენტის მოპირდაპირე (– *b*) ელემენტის ჯამს, ე. ი.

$$a-b=a+(-b). \tag{5}$$

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$a-a=a+(-a)=0 \quad \text{და} \quad 0-a=0+(-a)=-a. \tag{6}$$

თვისება. ***a–b* არის R რგოლის ერთადერთი ელემენტი, რომ**

$$\mathbf{(a-b)+b=a.}$$

მართლაც, $(a-b)+b=(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a.$

ვთქვათ ახლა c არის R-ის ნებისმიერი ელემენტი თვისებით: $c+b=a$, მაშინ

$(c+b)+(-b)=a+(-b) \Rightarrow c+(b+(-b))=a+(-b) \Rightarrow c+0=a-b \Rightarrow c=a-b.$

<u>თვისება.</u> რგოლში სამართლიანია დისტრიბუციულობის კანონი გამოკლების მიმართაც $(a-b)c=ac-bc$.

მართლაც, იქიდან, რომ $(a-b)+b=a \Rightarrow [(a-b)+b]c=ac \Rightarrow (a-b)c+bc=ac \Rightarrow [(a-b)c+bc]+(-bc)=ac+(-bc) \Rightarrow (a-b)c+ +[bc+(-bc)]=ac-bc \Rightarrow (a-b)c=ac-bc$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$a(b-c)=ab-ac. \tag{7}$$

რგოლის ელემენტებისათვის სამართლიანია შემდეგი <u>**თვისებები;**</u>

ა) $-(-a)=a,$

ბ) $-(a+b)=(-a)+(-b),$

გ) $a\cdot 0=0, \quad 0\cdot a=0,$

დ) $(-a)b=-ab,\ a(-b)=-ab,\ (-a)(-b)=ab$.

ა) მართლაც, ერთის მხრივ გვაქვს

$$(-a)+[-(-a)]=0;$$

მეორე მხრივ,

$$-a+a=0, \tag{8}$$

ე. ი. $a=-(-a)$, რადგანაც $(-a)$- ს ერთადერთი მოპირდაპირე გააჩნია.

ბ) ვაჩვენოთ, რომ

$$-(a+b)=(-a)+(-b). \tag{9}$$

მართლაც, მოპირდაპირე ელემენტის განსაზღრების თანახმად,

$$(a+b)+[-(a+b)]=0;$$

მეორე მხრივ,

$(a+b)+[(-a)+(-b)]=(a+b)+[(-b)+(-a)]=a+[b+(-b)]+(-a)= =a+0+(-a)=a+(-a)=0$. მაშასადამე, $(-a)+(-b)$ ყოფილა $a+b$ ელემენტის მოპირდაპირე.

გ) ახლა ვაჩვენოთ, რომ რგოლის ნებისმიერი a ელემენტი აკმაყოფილებს

$$a\cdot 0=0, \quad 0\cdot a=0 \tag{10}$$

ტოლობებს. მართლაც,

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0\ .$$

ანალოგიურად დამტკიცდება მეორე ტოლობაც.

დ) ვაჩვენოთ, რომ

$$(-a)b=-ab,\quad a(-b)=-ab,\qquad (-a)(-b)=ab. \tag{11}$$

მართლაც,

$$ab+(-a)b=(a+(-a))b=0\cdot b=0.$$

მამასადამე, $(-a)b$ ყოფილა ab ელემენტის მოპირდაპირე, ანალოგიურად დამტკიცდება (11)-ის მეორე ტოლობაც.

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-(ab)=ab.$$

<u>განსაზღვრება.</u> **რგოლის a ელემენტის n-ჯერადი (n ნატურალური რიცხვია) ეწოდება $\overbrace{a+\ldots+a}^{n-\text{ჯერ}}$ ჯამს და აღინიშნება na სიმბოლოთი.** ე.ი.(2)-ის ძალით,

$$na=\overbrace{a+\ldots+a}^{n-\text{ჯერ}}=\overbrace{a+\ldots+a}^{(n-1)-\text{ჯერ}}+a=(n-1)a+a. \tag{12}$$

ახლა განვსაზღვროთ რგოლის ელემენტის მთელი უარყოფითი ჯერადის ცნება. ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ, რომ რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$n(-a)=-na. \tag{13}$$

ეს ტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით ყველა ნატურალური n-სათვის. როცა $n=1$, ეს ცხადია. ვთქვათ (13) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი n-სათვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სთვის. მართლაც,(12)-ისა და (9)-ის ძალით,

$$(n+1)(-a)=n(-a)+(-a)=(-na)+(-a)=-(na+a)=-(n+1)a.$$

ამრიგად, $n(-a)$ და $-na$ რგოლის ერთსა და იმავე ელემენტს გამოსახავს, რომელიც $(-n)a$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ და რგოლის a ელემენტის მთელი უარყოფითი ჯერადი ვუწოდოთ, ე. ი. განსაზღვრების თანახმად,

$$(-n)a=n(-a)=-na. \tag{14}$$

დასასრულს, რგოლის a ელემენტის ნულჯერადად მივიღოთ რგოლის ნულოვანი ელემენტი, ე. ი.

$$0a=0. \tag{15}$$

რგოლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის და ნებისმიერი მთელი m და n რიცხვებისათვის სამართლიანია

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.} \quad ma+na=(m+n)a, \\ &\mathbf{2.} \quad m(na)=(mn)a, \\ &\mathbf{3.} \quad n(a+b)=na+nb \end{aligned} \tag{16}$$

ტოლობები.

1. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

ა) $m, n>0$ (12)-ის ძალით გვექნება

$$ma+na=\overbrace{a+\ldots+a}^{m\text{-ჯერ}}+\overbrace{a+\ldots+a}^{n\text{-ჯერ}}=\overbrace{a+\ldots+a}^{m+n\text{-ჯერ}}=(m+n)a;$$

ბ) $m,n<0 \Rightarrow m=-m',\ n=-n',\ m'>0,\ n'>0,$ (14)-ის ძალით გვექნება:

$$ma+na=(-m')a+(-n')a=m'(-a)+n'(-a)=(m'+n')(-a)=$$
$$=(-m'-n')a=(m+n)a;$$

გ) $m>0,\ n<0 \Rightarrow n=-n',\ n'>0.$ განვიხილოთ 2 შემთხვევა

$გ_1)$ თუ $m\geq n' \Rightarrow ma+na=ma+(-n')a=(m-n'+n')a-n'a=$
$$=(m-n')a+n'a-n'a=(m+n)a;$$

$გ_2)$ თუ $m<n' \Rightarrow ma+na=ma+(-n')a=ma+(n'-m+m)(-a)=$
$$=(n'-m)(-a)=(m-n')a=(m+n)a.$$

2. ახლა დავამტკიცოთ (16)-ის მეორე ტოლობა.

ა) $m,n>0$, მაშინ

$$m(na)=\overbrace{na+\ldots+na}^{m\text{-ჯერ}}=\overbrace{\overbrace{a+\ldots+a}^{n\text{-ჯერ}}+\ldots+\overbrace{a+\ldots+a}^{n\text{-ჯერ}}}^{m\text{-ჯერ}}=\overbrace{a+\ldots+a}^{mn\text{-ჯერ}}=(mn)a$$

ბ) $m,\ n<0 \Rightarrow m=-m',\ n=-n',\ m'>0, n'>0 \Rightarrow$

$$m(na)=(-m')[(-n')a]=m'[-(-n'a)]=m'(n'a)=(m'n')a=(mn)a;$$

გ) $m>0,\ n<0 \Rightarrow n=-n',\ n'>0 \Rightarrow$

$$m(na)=m[(-n')a]=m[n'(-a)]=(mn')(-a)=(-mn')a=(mn)a;$$

დ) $m<0,\ n>0 \Rightarrow m=-m',\ m'>0 \Rightarrow$
$m(na)=(-m')(na)=m'(-na)=m'[n(-a)]=(m'n)(-a)=(mn)a.$

3. დავამტკიცოთ (16)-ის მესამე ტოლობა.

ა) თუ $n>0$, მაშინ დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. როცა $n=1$ ტოლობა სამართლიანია, დავუშვათ ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი n-სათვის და ამ დაშვების საფუძველზე ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სთვის. მართლაც, (12)-ისა და შეკრების მიმართ კომუტაციურობის და ასოციაციურობის აქსიომების ძალით,

$$(n+1)(a+b)=n(a+b)+(a+b)=(na+nb)+(a+b)=(na+nb)+(b+a)=na+(nb+b)+a=na+(n+1)b+a=[na+(n+1)b]+a=[(n+1)b+na]+a=$$
$$=(n+1)b+(na+a)=(n+1)b+(n+1)a=(n+1)a+(n+1)b;$$

ბ) თუ $n<0$, მაშინ $n=-n'$, $n'>0$ და (14)-ისა და (9)-ის ძალით,

$$n(a+b)=(-n')(a+b)=-n'(a+b)=-(n'a+n'b)=(-n'a)+$$
$$+(-n'b)=(-n')a+(-n')b=na+nb.$$

<u>განსაზღვრება.</u> რგოლის a ელემენტის n-ური ხარისხი (n ნატურალური რიცხვია), ეწოდება $\overbrace{a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ჯერ}}$ ნამრავლს და აღინიშნება a^n სიმბოლოთი.

ე. ი. (4)-ის ძალით,

$$a^n=\overbrace{a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{-ჯერ}}=\overbrace{a\cdot\ldots\cdot a}^{(n-1)\text{-ჯერ}}\cdot a=a^{n-1}a. \tag{17}$$

რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნებისმიერი ნატურალური m და n რიცხვებისათის სამართლიანია

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn} \tag{18}$$

ტოლობები.

მართლაც, ეს ტოლობები ადვილად მტკიცდება a ელემენტის n-ური ხარისხის განსაზღვრების გამოყენებით.

თუ რგოლი კომუტაციურია, მაშინ სამართლიანია აგრეთვე

$$(ab)^n=a^nb^n \tag{19}$$

ტოლობაც. მართლაც, მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით, გვექნება

$$(ab)^{n+1}=(ab)^n(ab)=(a^nb^n)(ba)=a^n(b^nb)a=a^nb^{n+1}a=$$
$$=a^n(b^{n+1}a)=a^n(ab^{n+1})=(a^na)b^{n+1}=a^{n+1}b^{n+1}.$$

განსაზღვრება. რგოლის ორ $a\neq 0$ და $b\neq 0$ ელემენტს, რომელთათვისაც $ab=0$, რგოლის ნულის გამყოფები ეწოდება.

რგოლს, რომელიც შეიცავს ნულის გამყოფთა ერთ წყვილს მაინც ნულგამყოფიანი რგოლი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში – უნულგამყოფო რგოლი.

თეორემა. უნულგამყოფო რგოლებში შეიძლება შეკვეცა ამ რგოლის ნებისმიერ არანულოვან ელემენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $ac=bc$, სადაც a და b უნულგამყოფო რგოლის ნებისმიერი ელემენტებია, ხოლო $c\neq 0$. გამოკლების მიმართ დისტრიბუციულობის კანონისა და (6)-ის თანახმად,

$ac=bc \Rightarrow ac-bc=bc-bc \Rightarrow (a-b)c=0 \Rightarrow$

რადგანაც $c\neq 0$ და რგოლი უნულგამყოფოა. ამიტომ,

$$a-b=0 \Rightarrow (a-b)+b=0+b \Rightarrow a=b.$$

თუ R რგოლში არსებობს ისეთი e ელემენტი, რომ

$$ae=ea=a \tag{20}$$

ნებისმიერი $a\in$R-სთვის, მაშინ ამ e ელემენტს R-ის ერთეულოვანი ელემენტი ეწოდება, ხოლო R-ს ერთეულიანი რგოლი. თუ კი R-ში ასეთი e ელემენტი არ არსებობს, მაშინ მას უერთეულო რგოლი ეწოდება. მაგალითად: **Z** ერთეულიანი რგოლია, 2**Z** კი უერთეულო რგოლი.

ყოველ ერთეულიან რგოლში მხოლოდ ერთი ერთეულოვანი ელემენტი არსებობს. მართლაც, ვთქვათ e' არის R-ის ნებისმიერი ერთეულოვანი ელემენტი, ე. ი. $ae'=e'a=a$ ნებისმიერი $a\in$R. აქედან, კერძოდ, გვექნება: $ee'=e'e=e$, მაგრამ e-ც ერთეულოვანია, ე. ი. $e'e=ee'=e'$, მაშასადამე $e'=e$.

ერთეულიან რგოლში, მისი ნებისმიერი a ელემენტისათვის მივიღოთ, რომ

$$a^0=e.$$

ამრიგად, ერთეულიან რგოლებში (18) და (19) თანაფარდობანი სამართლიანია ნებისმიერი m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვე-ბისათვის. მართლაც,

$$a^0 \cdot a^n=e \cdot a^n=a^n=a^{0+n},\ a^0 \cdot a^0=e \cdot e=e=a^0=a^{0+0};$$
$$(a^m)^0=e=a^0=a^{m0},\ \ (a^0)^n=e=a^0=a^{0n},\ (a^0)^0=e=a^{0 \cdot 0};$$
$$(ab)^0=e=e \cdot e=a^0b^0.$$

<u>**განსაზღვრება.**</u> **კომუტაციურ ერთეულიან უნულგამყოფო რგოლს მთელობის არე ეწოდება.** ასეთია მაგალითად **Z**.

რგოლს, რომელიც მხოლოდ ნულოვანი ელემენტისაგან შედგება ნულოვანი რგოლი ეწოდება. ასეთ რგოლში ნულოვანი ელემენტი ერთეულოვანი ელემენტიც არის, რადგანაც (10)-ის ძალით, $0 \cdot 0=0$.

ნულოვანი რგოლი ერთადერთი რგოლია, სადაც $e=0$. მართლაც, ვთქვათ R ნებისმიერი ასეთი რგოლია, მაშინ ნებისმიერი a-სთვის R-დან გვექნება: $a \cdot 0=0 \cdot a=a$, მეორე მხრივ, (10)-ის ძალით, $a \cdot 0=0 \cdot a=0$, ე. ი. $a=0$ და R$=\{0\}$.

ერთეულიანი რგოლის *a* ელემენტს ეწოდება შებრუნებადი, თუკი R-ში არსებობს ისეთი b ელემენტი, რომ

$$ab=ba=e\ , \tag{21}$$

ამ *b* ელემენტს ეწოდება *a* ელემენტის შებრუნებული და a^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. $a \cdot a^{-1}=a^{-1}a=$e. ერთეულიანი რგოლის ნულოვანი ელემენტი შებრუნებადი არაა. მართლაც, ვთქვათ 0 შე-ბრუნებადია, მაშინ (21)-ის ძალით, R-ზე არსებობს ისეთი b, რომ $0 \cdot b=b \cdot 0=e$, რაც შეუძლია, რადგან (10)-ის ძალით $0 \cdot b=b \cdot 0=0$ და $0 \neq e$ იმის გამო, რომ R$\neq\{0\}$.

ვაჩვენოთ, **რომ შებრუნებადი ელემენტი ნულის გამყოფი არაა.** მართლაც, ვთქვთ a შებრუნებადია, $aa^{-1}=a^{-1}a=e$, მაშინ $a \neq 0$, ვაჩვენოთ, რომ a არ არის ნულის გამყოფი. ვთქვათ $ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}0 \ \ \Rightarrow \ \ (a^{-1}a)b=0 \ \Rightarrow \ b=0.$

ყოველ შებრუნებად ელემენტს მხოლოდ ერთი შებრუნებული გააჩნია. ვთქვათ a' არის a-ს ნებისმიერი შებრუნებული, ე. ი. $aa'=a'a=e \Rightarrow a^{-1}(aa')=a^{-1}e \Rightarrow (a^{-1}a)a'=a^{-1} \Rightarrow a'=a^{-1}$.

ვთქვათ a და b ელემენტების შებრუნებული ელემენტებია a^{-1} და b^{-1} შესაბამისად. მაშინ $(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=aea^{-1}=e$ და $(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}(a^{-1}a)b=e$. ე. ი.

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})=(b^{-1}a^{-1})(ab)=e.$$

მაშასადამე, შებრუნებად ელემენტთა ნამრავლი შებრუნებადია და

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}. \tag{22}$$

§3. ველი და მისი თვისებები

<u>განსაზღვრება.</u> K არანულოვან კომუტაციურ ერთეულიან რგოლს, რომლის ყოველი არანულოვანი ელემენტი შებრუნებადია ველი ეწოდება.

ვაჩვენოთ, **რომ ველის ნებისმიერი არანულოვანი a ელემენტის შებრუნებულიც არანულოვანია.** დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $a\neq 0$ და $a^{-1}=0$. მაშინ $aa^{-1}=a\cdot 0=0$, მაგრამ $aa^{-1}=e$, ე. ი. $0=e$, რაც შეუძლებელია, რადგან ველი არანულოვანი რგოლია.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $a\neq 0$, მაშინ სამართლიანია

$$(a^{-1})^{-1}=a$$

ტოლობა. მართლაც, $a\neq 0 \Rightarrow a^{-1}\neq 0 \Rightarrow (a^{-1})(a^{-1})^{-1}=e$; მეორე მხრივ $a^{-1}a=e$. მაშასადამე, $a=(a^{-1})^{-1}$ იმის გამო, რომ a^{-1} ელემენტს მხოლოდ ერთი შებრუნებული გააჩნია.

<u>თეორემა.</u> ველი უნულგამყოფო რგოლია.

<u>დამტკიცება,</u> ველის ყოველი არანულოვანი ელემენტი შებრუნებადია. ჩვენ კი ზემოთ ვნახეთ, რომ რგოლის ყოველი შებრუნებადი ელემენტი ნულის გამყოფი არაა.

იმის გამო, რომ ველი კომუტაციური რგოლია, ამიტომ (22)-ის ძალით,

$$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1} \qquad \text{თუ } a\neq 0,\ b\neq 0. \tag{23}$$

ველის a და b ელემენტების განაყოფი, სადაც $b \neq 0$ – აღინიშნება $\dfrac{a}{b}$ სიმბოლოთი – ეწოდება a ელემენტისა და b-ს შებრუნებული b^{-1} ელემენტის ნამრავლს, ე. ი.

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}. \tag{24}$$

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{b}{b}=bb^{-1}=e \quad \text{და} \quad \frac{e}{b}=eb^{-1}=b^{-1}, \text{ თუ } b\neq 0. \tag{25}$$

ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$ არის K ველის ერთადერთი ელემენტი თვისებით:

$$\frac{a}{b}\cdot b=a.$$

მართლაც, $\dfrac{a}{b}\cdot b=(ab^{-1})b=a(b^{-1}b)=ae=a.$ ვთქვათ ახლა c არის K-ს ნებისმიერი ელემენტი თვისებით: $cb=a,$ მაშინ $(cb)b^{-1}=ab^{-1}$ $\Rightarrow c(bb^{-1})=\dfrac{a}{b} \Rightarrow c=\dfrac{a}{b}.$

ვაჩვენოთ, რომ ტოლობა $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $ad=bc,$ თუ $b\neq 0$ და $d\neq 0$.

მართლაც, თუ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ab^{-1}=cd^{-1}\Rightarrow (ab^{-1})(bd)=(cd^{-1})(bd)\Rightarrow$$

$$a(b^{-1}b)d=c(d^{-1}d)b\Rightarrow ad=cb,$$

ხოლო, თუ

$$ad = bc \Rightarrow (ad)(b^{-1}d^{-1})(bc)(b^{-1}d^{-1}) \Rightarrow (ad)(d^{-1}b^{-1}) = (cb)(b^{-1}d^{-1})$$

$$\Rightarrow a(dd^{-1})b^{-1} = c(bb^{-1})d^{-1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ველზე სამართლიანია ტოლობები:

$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$, თუ $bd \neq 0$,

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, თუ $bd \neq 0$,

$\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, თუ $bdc \neq 0$,

$\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$, თუ $b \neq 0$,

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$,, თუ $ab \neq 0$.

მართლაც,

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = ab^{-1} \pm cd^{-1} = (ab^{-1} \pm cd^{-1})\left[(bd)(bd)^{-1}\right] =$$

$$= \left[(ab^{-1} \pm cd^{-1})(bd)\right](bd)^{-1} = \left[(ab^{-1})(bd) \pm (cd^{-1})bd)\right](bd)^{-1} =$$

$$= (ad \pm cb)(bd)^{-1} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right) = a(b^{-1}c)d^{-1} = a(b^{-1}d^{-1})c = a\left[(bd)^{-1}c\right] =$$

$$= a\left[c(bd)^{-1}\right] = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} \cdot \frac{bd}{bd} = \frac{(ab^{-1})(bd)}{(cd^{-1})(bd)} = \frac{a(b^{-1}b)d}{c(d^{-1}d)b} = \frac{ad}{bc};$$

$$\frac{-a}{b}=(-a)b^{-1}=-ab^{-1}=-\frac{a}{b},\frac{a}{-b}=a(-b)^{-1}=a(-b^{-1})=$$

$$=-ab^{-1}=-\frac{a}{b}$$

(რადგან $(-b)(-b)^{-1}$=e და $(-b)(-b^{-1})=bb^{-1}=e$, ამიტომ $(-b)^{-1}=(-b^{-1})$);

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=(ab^{-1})^{-1}=a^{-1}(b^{-1})^{-1}=a^{-1}b=ba^{-1}=\frac{b}{a}$$

იმის გამო, რომ ველი ერთეულიანი რგოლია, ამიტომ მასზე განსაზღვრულია ნებისმიერი ელემენტის მთელი არაუარყოფითი ხარისხი.

ახლა განვსაზღვროთ ველის არანულოვანი ელემენტის მთელი უარყოფითი ხარისხი. ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ველის ნებისმიერი $a\neq 0$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის სამართლიანია

$$(a^{-1})^n=(a^n)^{-1} \tag{26}$$

ტოლობა (აქ $a^n\neq 0$, რადგან $a\neq 0$ და ველი უნულგამყოფოა). ეს ტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით ყველა ნატურალური n-სათვის. როცა n=1, (26) ტოლობა სამართლიანია. დავუშვათ მისი სამართლიანობა ნებისმიერი n-სათვის და ამ დაშვების საფუძველზე ვაჩვენოთ სამართლიანობა (n+1)-სათვის. მართლაც, (18)-ისა და (23)-ის ძალით,

$$(a^{-1})^{n+1}=(a^{-1})^n(a^{-1})=(a^n)^{-1}a^{-1}=(a^na)^{-1}=(a^{n+1})^{-1}$$

ამრიგად, $(a^{-1})^n$ და $(a^n)^{-1}$ ველის ერთსა და იმავე ელემენტს გამოსახავს, რომელიც a^{-n} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ და ველის $a\neq 0$ ელემენტის მთელი უარყოფითი ხარისხი ვუწოდოთ, ე. ი. განსაზღვრების თანახმად,

$$a^{-n}=(a^{-1})^n=(a^n)^{-1} \tag{27}$$

ჩვენ ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ (18) და (19) ტოლობები სამართლიანია ერთეულიანი რგოლის ნებისმიერი a ელემენტისათვის და ნეპისმიერი m და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისათვის. ახლა ვაჩვენოთ, რომ (18) და (19) ტოლობები სამართლიანია ველის ნების-

მიერი $a\neq 0$ ელემენტებისათვის და ნებისმიერი მთელი m და n რიცხვებისათვის. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

ა) $m<0,\ n<0 \Rightarrow m=-m',\ n=-n',\ m'>0,\ n'>0$. (27)-ის ძალით გვექნება: $a^m \cdot a^n=a^{-m'}\cdot a^{-n'}=(a^{-1})^{m'}(a^{-1})^{n'}=(a^{-1})^{m'+n'}=a^{-(m'+n')}=a^{m+n}$;

ბ) $m>0,\ n<0 \Rightarrow a^m a^n=a^m a^{-n'}=a^m(a^{n'})^{-1}$. აქ შესაძლებელია,

ბ$_1$) $m\geq n' \Rightarrow a^m(a^{n'})^{-1}=a^{(m-n')+n'}(a^{n'})^{-1}=(a^{m-n'}a^{n'})(a^{n'})^{-1}=$
$=a^{m-n'}[a^{n'}(a^{n'})^{-1}]=a^{m-n'}=a^{m+n}$

ბ$_2$) $m<n' \Rightarrow a^m(a^{n'})^{-1}=a^m[a^{(n'-m)+m}]^{-1}=a^m[a^{n'-m}a^m]^{-1}=$
$=a^m[(a^{n'-m})^{-1}(a^m)^{-1}]=a^m[(a^m)^{-1}(a^{n'-m})^{-1}]=a^{m-n'}=a^{m+n}$;

ახლა დავამტკიცოთ (18)-ის მეორე ტოლობა.

ა) $m,n<0 \Rightarrow m=-m',\ n=-n',\ m'>0,\ n'>0 \Rightarrow (a^m)^n=(a^m)^{-n'}=$

$$=\left((a^m)^{-1}\right)^{n'}=\left((a^{-m'})^{-1}\right)^{n'}=\left[\left((a^{m'})^{-1}\right)^{-1}\right]^{n'}=(a^{m'})^{n'}=a^{m'n'}=a^{mn};$$

ბ) $m>0,\ n<0 \Rightarrow (a^m)^n=(a^m)^{-n'}=[(a^m)^{n'}]^{-1}=(a^{mn'})^{-1}=a^{-mn'}=a^{mn}$;

გ) $m<0, n>0 \Rightarrow (a^m)^n=(a^{-m'})^n=[(a^{-1})^{m'}]^n=(a^{-1})^{m'n}=a^{-m'n}=a^{mn}$;

ზემოთ იყო ნაჩვენები, რომ (19) ტოლობა სამართლიანია კომუტაციური ერთეულიანი რგოლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის და ნებისმიერი მთელი არაუარყოფითი n რიცხვისათვის. ახლა ვაჩვენოთ, რომ (19) ტოლობა სამართლიანია ველის ნებისმიერი $a\neq 0$ და $b\neq 0$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი უარყოფითი მთელი n რიცხვისათვის. მართლაც, ვთქვათ $n<0$, $n=-n'$. მაშინ (27)-ის და (23)-ის ძალით,

$$(ab)^n=(ab)^{-n'}=\left[(ab)^{-1}\right]^{n'}=(a^{-1}b^{-1})^{n'}=a^{-n'}b^{-n'}=a^n b^n.$$

Q და **R** სიმრავლეები რიცხვთა ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების არითმეტიკული მოქმედებების მიმართ ველების უმარტივესი მაგალითებია.

<u>თეორემა</u>. Q რაციონალურ რიცხვთა ველი მინიმალური რიცხვითი ველია.

<u>დამტკიცება</u>. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი რიცხვითი K ველი ქვესიმრავლის სახით შეიცავს **Q**-ს. რადგანაც K რიცხვითი ველია, ამიტომ ის შეიცავს 0-ს და 1-ს.

მაშასადამე, ის შეიცავს 1+1=2, 2+1=3 და ა. შ. ყველა ნატურალურ რიცხვს. ამიტომ K შეიცავს ყოველი ნატურალური რიცხვის მოპირდაპირე რიცხვს, ე. ი. ყველა უარყოფით მთელ რიცხვს. ამრიგად, $K \supset \mathbf{Z}$. რადგან K ველია, ამიტომ უნდა შეიცავდეს მთელ რიცხვთა ყველა შესაძლებელ განაყოფს, ე. ი. ყველა წილად რიცხვს. ამნაირად, $K \supset \mathbf{Q}$.

<u>**განსაზღვრება.**</u> **ამბობენ, რომ K ველს აქვს მახასიათებელი *p*, ან *p* არის K ველის მახასიათებელი, თუ კი *p* არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $pe=0$. თუ კი ასეთი თვისების ნატურალური რიცხვი არ არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ K ველს აქვს მახასიათებელი 0 ან K არის 0 მახასითებლის ველი.** შესაბამისად წერენ: $\mathrm{char}K=p$ და $\mathrm{char}K=0$.

ვაჩვენოთ, რომ

თუ K ველს აქვს მახასიათებელი *p*, მაშინ რიცხვი *p* იქნება მარტივი.

მართლაც, თუ p მარტივი არაა, მაშინ $p=st$, სადაც $1<s<p$ და $1<t<p$. ამიტომ

$$pe=0 \Rightarrow (st)e=0 \Rightarrow \overbrace{e+\ldots+e}^{st-\text{ჯერ}}=0 \Rightarrow \overbrace{(e+\ldots+e)}^{s-\text{ჯერ}}\overbrace{(e+\ldots+e)}^{t-\text{ჯერ}}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (se)(te)=0.$$

აქედან ან $se=0$, ან $te=0$, რადგან ველში ნულის გამყოფები არაა. ეს კი ეწინააღმდეგება p მახასიათებლის განსაზღვრებას.

თუ K ველს აქვს მახასიათებელი *p*, მაშინ $pa=0$ ყოველი $a \in \mathbf{K}$.

მართლაც

$$pa=p(ae)=\overbrace{ae+\ldots+ae}^{p-\text{ჯერ}}=a\overbrace{(e+\ldots+e)}^{p-\text{ჯერ}}=a(pe)=0.$$

ცხადია, რომ ყველა რიცხვით ველს აქვს მახასიათებელი 0, რადგან $n1\neq 0$ ყოველი $n \in \mathbf{N}$. ამასთანავე ყველა რიცხვითი ველი

უსასრულოა, რადგან მინიმალური რიცხვითი ველი არის რაციონალურ რიცხვთა ველი.

თუ char$K=p$ და $p\,|\,n$, მაშინ ნებისმიერი $a\in K$ გვექნება: $na=0$.

მართლაც, $na=(pq)a=p(qa)=0$.

§4. ქვერგოლი, ქვეველი.

<u>განსაზღვრება.</u> R რგოლის R' ქვესიმრავლეს ეწოდება R-ის ქვერგოლი, თუ R' თვითონ არის რგოლი R-ზე განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციების მიმართ.

<u>თეორემა.</u> იმისათვის, რომ R რგოლის R' ქვესიმრავლე R რგოლის ქვერგოლი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ R' თავის ნებისმიერ a და b ელემენტებთან ერთად შეიცავდეს $(a-b)$-ს და ab-ს.

<u>**დამტკიცება.**</u> აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ საკმარისობა. მართლაც, 1) თუ $a\in R'$, მაშინ პირობის ძალით $a-a\in R'\Rightarrow$ $\Rightarrow a-a=0$, ე.ი. $0\in R'$; 2) ისევ პირობის ძალით, $0,a\in R'\ \Rightarrow 0-a\in R\Rightarrow$ $\Rightarrow 0-a=-a$, ე.ი. $-a\in R'$; 3) $a,b\in R'\Rightarrow a,-b\in R'\Rightarrow\ a-(-b)=a+[-(-b)]=a+b$, ე.ი. $a+b\in R'$. რადგანაც რგოლის განმსაზღვრელი პირველი ოთხი აქსიომა R-ზე სამართლიანია, ამიტომ ისინი სამართლიანი იქნება მის R' ქვესიმრავლეზედაც.

<u>განსაზღვრება.</u> K ველის K' ქვესიმრავლეს ეწოდება K-ს ქვეველი, თუ K' თვითონ არის ველი K-ზე განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციების მიმართ.

<u>თეორემა.</u> იმისათვის, რომ K ველის K' ქვესიმრავლე K-ს ქვეველი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ K' თავის ნებისმიერ a და b ელემენტებთან ერთად შეიცავდეს $(a-b)$-ს და თუ $b\neq 0$ აგრეთვე ab^{-1}-ს.

<u>დამტკიცება.</u> აუცილებლობა ცხადია. დავამტკიცოთ საკმარისობა. წინა თეორემის ძალით, $a+b\in K'$. თუ $a\in K'$ და $a\neq 0$, მაშინ პირობის ძალით $aa^{-1}\in K'\Rightarrow aa^{-1}\in K\Rightarrow aa^{-1}=e$, ე.ი. $e\in K'$. ამიტომ, კვლავ პირობის თანახმად, $e,a\in K'$, ე. ი. $ea^{-1}\in K'\Rightarrow\ ea^{-1}=a^{-1}\in K'\Rightarrow$. მაშასადამე, თუ $b\neq 0$, და $a,b\in K'\Rightarrow a,b^{-1}\in K'\Rightarrow a(b^{-1})^{-1}\in K'$, მაგრამ $a(b^{-1})^{-1}=ab$, ე. ი. $ab\in K'$. დანარჩენი უკვე დამტკიცებულია წინა თეორემაში.

<u>თეორემა</u>. K ველის ნებისმიერი რაოდენობის ქვეველთა თანაკვეთა K-ს ქვეველია.

<u>დამტკიცება.</u> ცხადია, რომ K ველის ნებისმიერი რაოდენობის ქვეველთა თანაკვეთა არის K-ს ქვესიმრავლე. თუ a და b K ველის აღებულ ქვეველთა თანაკვეთას ეკუთვნის, მაშინ ეს a და b ყოველ აღებულ ქვეველსაც ეკუთვნის და ამიტომ წინა თეორემის ძალით ამ ქვეველებს ეკუთვნის აგრეთვე a-b და ab^{-1} (თუ $b\neq 0$). მაშასადამე, a-b და ab^{-1} აღებულ ქვეველთა თანაკვეთასაც ეკუთვნის, ე. ი. ეს თანაკვეთა, კვლავ წინა თეორემის ძალით, K-ს ქვეველია.

<u>შედეგი.</u> K ველის ყველა ქვეველთა თანაკვეთა K ველის მინიმალური ქვეველია.

ვთქვათ $\widetilde{K}$ არის K-ს ყველა ქვეველთა თანაკვეთა; უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\widetilde{K}$-ს თავის თავის გარდა არცერთი ქვეველი არ გააჩნია. ვთქვათ K' არის $\widetilde{K}$ ველის ნებისმიერი ქვეველი, ე. ი. $K'\subseteq\widetilde{K}\subseteq K$. მაშასადამე, K', როგორც K-ს ქვეველი, უნდა შეიცავდეს $\widetilde{K}$-ს, ე.ი. $K'\supseteq\widetilde{K}$. ამრიგად, $K'\subseteq\widetilde{K}\subseteq K'\Rightarrow K'=\widetilde{K}$.

ვთქვათ, K' არის K-ს ქველი და $c\in K$, მაგრამ $c\,\overline{\in}\,K'$. ვიპოვოთ K-ს მინიმალური ქვეველი, რომელიც K'-საც შეიცავს და c-საც. განვიხილოთ K ველის ყველა ის ქვეველები, რომლებიც K'-საც შეიცავს და c-საც. მაშინ, წინა თეორემის ძალით, მათი თანაკვეთაც იქნება K-ს ქვეველი; ამასთანავე ეს თანაკვეთაც ცხადია K'-საც შეიცავს და c-საც. ამიტომ შედეგის ძალით იქნება K-ს მინიმალური ქვეველი, რომელიც K'-საც შეიცავს და c-საც. ამ ველს $K'(c)$ სიმბოლოთი აღ-

ნიშნავენ და ამბობენ, რომ ის მიღებულია K' ველთან c ელემენტის მიკავშირებით.

$K'(c)$ ველი, გარდა c-სი და K'-ის ყველა ელემენტისა, შეიცავს აგრეთვე ყველა იმ ელემენტს, რომელიც მიიღება მათგან შეკრებით, გამოკლებით, გამრავლებით და გაყოფით.

§5. იზომორფიზმი

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ f არის M სიმრავლის ასახვა M' სიმრავლეში, თუ M სიმრავლის ყოველ a ელემენტს M' სიმრავლეში ეთანადებოდა ერთი და მხოლოდ ერთი a' ელემენტი. სიმბოლურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$f: M \to M' \text{ ან } M \xrightarrow{f} M'.$$

M' სიმრავლის a' ელემენტს ეწოდება M სიმრავლის a ელემენტის ანასახი M' სიმრავლეში f ასახვის დროს, ხოლო a ელემენტს ეწოდება a' ელემენტის წინარე სახე. სიმბოლურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$f: a \to a' \text{ ან } a' = f(a), \text{ ან კიდევ } a \to f(a).$$

f ასახვის დროს M სიმრავლის ყველა ელემენტის M' სიმრავლეში ანასახების სიმრავლეს ეწოდება M სიმრავლის ანასახი f ასახვის დროს – აღინიშნება $f(M)$, ან Imf სიმბოლოთი, ე. ი.

$\mathrm{Im}f=f(M)=\{f(a)|a\in M\}\subseteq M'$,

ხოლო M-ს ეწოდება $f(M)$ სიმრავლის წინარე სახე.

თუ $f(M)=M'$, ე. ი. თუ M' სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის ანასახი M სიმრავლის ერთი ელემენტისა მაინც, მაშინ ვიტყვით, რომ f არის M სიმრავლის ასახვა M' სიმრავლეზე. მაშასადამე, ვიტყვით, რომ f არის M სიმრავლის ასახვა M' სიმრავლეზე, თუ M სიმრავლის ყოველ a ელემენტს M' სიმრავლეზე ეთანადება ერთი და მხოლოდ ერთი a' ელემენტი და M' სიმრავლის ყოველი a' ელემენტი ეთანადება M სიმრავლის ერთ a ელემენტს მაინც.

ვიტყვით, რომ f არის M სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვა M' სიმრავლეზე, თუ M სიმრავლის ყოველ a ელემენტს M' სიმრავ-

ლეზე ეთანადება ერთი და მხოლოდ ერთი a' ელემენტი და M' სიმრავლის ყოველი a ელემენტი ეთანადება M სიმრავლის ერთ და მხოლოდ ერთ a ელემენტს.

<u>განსაზღვრება.</u> ვთქვათ M და M' არაცარიელი სიმრავლეებია, რომლებზედაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციები. მაშინ M სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვას M' სიმრავლეზე ეწოდება M სიმრავლის იზომორფიზმი M' სიმრავლეზე და წერენ:

$$M \cong M',$$

თუ კი იქიდან, რომ M სიმრავლის a და b ელემენტების ანასახები M' სიმრავლეზე შესაბამისად არის a' და b' გამომდინარეობს, რომ M სიმრავლის $a+b$ და ab ელემენტების ანასახები M' სიმრავლეზე იქნება შესაბამისად $a'+b'$ და $a'b'$, ე. ი.

$$a \to a' \text{ და } b \to b' \Rightarrow a+b \to a'+b' \text{ და } ab \to a'b'$$

<u>თეორემა.</u> რგოლის იზომორფოზული ანასახი რგოლია.

<u>დამტკიცება.</u> ვთქვათ მოცემულია R რგოლის იზომორფიზმი M' სიმრავლეზე, რომელზედაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები, ე. ი. $R \cong M'$ ვაჩვენოთ, რომ M' იქნება რგოლი. ვთქვათ, რომ a', b', c' ნებისმიერი ელემენტებია M'-დან, ამიტომ რომელიღაც a, b, c ელემენტებისათვის R-დან გვექნება:

$a \to a'$ და $b \to b'$, $c \to c'$ მაშასადამე, იზომორფიზმის გამო, გვექნება:

1) $a+b \to a'+b'$, მაგრამ $a+b=b+a \to b'+a'$, ე. ი. $a'+b'=b'+a'$;

2) $(a+b)+c \to (a'+b')+c'$, მაგრამ $(a+b)+c=a+(b+c) \to a'+(b'+c')$ ე. ი. $(a'+b')+c'=a'+(b'+c')$;

3) $(ab)c \to (a'b')c'$, მაგრამ $(ab)c=a(bc) \to a'(b'c')$, ე.ი. $(a'b')c'=a'(b'c')$;

4) $(a+b)c \to (a'+b')c'$, მაგრამ $(a+b)c=ac+bc \to a'c'+b'c'$, ე. ი. $(a'+b')c'=a'c'+b'c'$;

ანალოგიურად $a'(b'+c')=a'b'+a'c'$;

5) ვთქვათ a' ნებისმიერი ელემენტია M′-დან, ე.ი. რომელიღაც a-სთვის R-დან გვექნება:

$a \to a'$ და $0 \to b'$. მაშასადამე, იზომორფიზმის გამო, გვექნება:

$a+0 \to a'+b'$, მაგრამ $a+o=a \to a'$, ამიტომ $a'+b'=a'$ ნებისმიერი a'-სთვის M′-დან, ე. ი. $b'=0'$;

6) ვთქვათ ისევ a' არის M′-ის ნებისმიერი ელემენტი, ე. ი. $a \to a'$ და $-a \to b'$. მაშასადამე, იზომორფიზმის გამო გვექნება:

$a+(-a) \to a'+b'$, მაგრამ $a+(-a)=0 \to 0'$, ამიტომ $a'+b'=0'$, ე. ი. $b'=-a'$.

<u>თეორემა</u>. ველის იზომორფული ანასახი ველია.

<u>დამტკიცება.</u> ვთქვათ მოცემულია K ველის იზომორფიზმი M′ სიმრავლეზე, რომელზედაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები, ე. ი. $K \cong M'$. რადგანაც ყოველი ველი რგოლიც არის, ამიტომ წინა თეორემის ძალით, M′ იქნება რგოლი. რადგანაც ველი არანულოვანი რგოლია და იზომორფიზმი ურთიერთცალსახა ასახვაა, ამიტომ M′-იც იქნება არანულოვანი რგოლი. ვთქვათ a' და b' ნებისმიერი ელემენტებია M′-ის. მაშინ, იზომორფიზმის გამო, თუ $a \to a'$ და $b \to b'$, გვექნება: $ab \to a'b'$, მაგრამ $ab=ba \to b'a'$, ე. ი. $a'b'=b'a'$ და M′ კომუტაციური რგოლია. თუ $a \to a'$ და $e \to b'$, მაშინ $ae \to a'b'$, მაგრამ $ae=a \to a'$, ე.ი. $a'b'=a'$ ნებისმიერი a'-სათვის M′-დან; ამრიგად, $b'=e'$ და M′ კომუტაციური ერთეულიანი რგოლი ყოფილა. ვთქვათ ახლა a' არის M′-ის ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტი და მისი წინარე სახე არის a, მაშინ $a \neq 0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა, რომ $a'=0'$. ამრიგად, a არის K ველის შებრუნებადი ელემენტი, ე.ი. $a \to a'$ და $a^{-1} \to b' \Rightarrow aa^{-1} \to a'b'$, მაგრამ $aa^{-1}=e \to e'$, ამიტომ $a'b'=e'$, ე.ი. $b'=(a')^{-1}$.

<u>თეორემა.</u> რგოლის იზომორფული წინარე სახე რგოლია.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ $f: M \to R'$ არის M სიმრავლის (რომელზედაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები) იზომორფიზმი R′ რგოლზე. რადგანაც იზომორფიზმი ურთიერთ-

ცალსახა ასახვაა, ამიტომ როგორც ცნობილია ანალიზიდან, არსებობს მისი შებრუნებული ასახვა $f^{-1}:R'\to M$, რომელიც აგრეთვე ურთიერთცალსახაა. ვაჩვენოთ, რომ f^{-1} ასახვაც იზომორფიზმია. მართლაც, ვთქვათ a' და b' ნებისმიერი ელემენტებია R' რგოლიდან. რადგანაც f ურთიერთცალსახა ასახვაა, ამიტომ ვთქვათ $a'=f(a)$ და $b'=f(b)$. ე. ი. $f^{-1}(a')=a$ და $f^{-1}(b')=b$. იმის გამო, რომ f იზომორფიზმია, გვექნება;

1) $a'+b'=f(a)+f(b)=f(a+b)$, ე.ი. $f^{-1}(a'+b')=a+b=$
$=f^{-1}(a')+f^{-1}(b')$,

2) $a'b'=f(a)f(b)=f(ab)$, ე. ი. $f^{-1}(a'b')=ab=f^{-1}(a')\cdot f^{-1}(b')$.

მაშასადამე, M , როგორც R' რგოლის ანასახი f^{-1} იზომორფიზმის დროს, რგოლია.

ანალოგიურად მტკიცდება.

__თეორემა.__ ველის იზომორფული წინარე სახე ველია.

§6. გადანაცვლებები

n ელემენტიანი გადანაცვლებები ეწოდება ერთსა და იმავე n ელემენტისაგან შედგენილ დალაგებულ სიმრავლეებს, ე.ი. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტთა დალაგებით.

__თეორემა__ n ელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა n!-ის ტოლია.

__დამტკიცება__. თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციით ყველა $n\geq 2$ რიცხვისათვის. როცა $n=2$ გვექნება შემდეგი 2 გადანაცვლება: 1, 2 და 2, 1. დავუშვათ, რომ თეორემა სწორია ნებისმიერი ნატურალური $n\geq 2$ რიცხვისათვის და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ თეორემა $(n+1)$-სათვის. ამოვწეროთ $n+1$ ელემენტიანი ყველა გადანაცვლება, რომლებშიც პირველი ელემენტია რიცხვი 1. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა ინდუქციის დაშვების ძალით იქნება n!, რადგანაც ადგილს იცვლიან მხოლოდ 2, 3, ...n, n+1 რიცხვები. ახლა ამოვწეროთ ყველა n+1ელემენტიანი გადანაცვლება,

რომლებშიაც პირველი ელემენტია რიცხვი 2. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა კვლავ იქნება $n!$, რადგანაც ადგილს იცვლიან მხოლოდ $1, 3, \ldots, n+1$ რიცხვები. განვაგრძოთ ეს პროცესი. ბოლოს ამოვწერთ ყველა $n+1$ ელემენტიან გადანაცვლებას, რომლებშიც პირველი ელემენტი არის რიცხვი $n+1$. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა აგრეთვე იქნება $n!$, რადგან ადგილს იცვლიან მხოლოდ $1, 2, \ldots, n$ რიცხვები. ამრიგად, სულ მივიღებთ $(n+1)n!=(n+1)!$ გადანაცვლებას.

გადანაცვლებას, რომელშიაც ელემენტები დალაგებულია მათი ნომრების მიხედვით, მთავარი გადანაცვლება ეწოდება. სიმარტივის მიზნით, გადანაცვლების ჩაწერისას, ელემენტების მაგივრად წერენ მათ ნომრებს. მაგალითად, n ელემენტიანი მთავარი გადანაცვლება ჩაიწერება ასე: $1, 2, 3, \ldots, n$.

მოვლენას, როცა გადანაცვლებაში ელემენტი უფრო დიდი ნომრით წინ უსწრებს ელემენტს მცირე ნომრით, ინვერსია ეწოდება. მთავარ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი ნულის ტოლია. გადანაცვლებაში ყოველი ელემენტი იმდენ ინვერსიას ქმნის, რამდენი ელემენტიც უფრო დიდი ნორმით მას წინ უსწრებს. $k_1,k_2,\ldots k_n$ გადანაცვლებაში ინვერსიათა საერთო რაოდენობა $I(k_1,k_2,\ldots k_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. მაგალითად, 6, 3, 1, 2, 4, 7, 5 გადანაცვლებაში; 1 ქმნის 2 ინვერსიას, 2 – 2 ინვერსიას, 3 – 1 ინვერსიას, 4 – 1 ინვერსიას, 5 – 2 ინვერსიას, 6 – 0 ინვერსიას, 7 – 0 ინვერსიას, ე. ი. $I(6,3,1,2,4,7,5)=2+2+1+1+2+0+0=8$.

გადანაცვლებას ეწოდება ლუწი, თუ ის შეიცავს ინვერსიათა ლუწ რაოდენობას; გადანაცვლებას ეწოდება კენტი, თუ ის შეიცავს ინვერსიათა კენტ რაოდენობას. ამრიგად, მთავარი გადანაცვლება ლუწია.

გადანაცვლებაში ორი ელემენტის ადგილების ურთიერთშენაცვლებას ტრანსპოზიცია ეწოდება.

თეორემა. n ელემენტიანი ყველა $n!$ გადანაცვლება შეიძლება ისე დავალაგოთ, რომ შემდეგი მიიღებოდეს წინასაგან ერთი ტრანსპოზიციის შედეგად.

<u>დამტკიცება.</u> თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. როცა $n=2$ დასამტკიცებელი ცხადია. ვთქვათ თეორემა სამართლიანია n ელემენტის შემთხვევაში და ამ დაშვების საფუძველზე ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სათვის. ჯერ ამოვწეროთ ყველა $n+1$ ელემენტიანი გადანაცვლება, რომლებშიაც პირველ ადგილას დგას ელემენტი ნომრით 1; მათი რაოდენობა იქნება $n!$ და ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით, ისინი ისე შეიძლება დავალაგოთ, რომ ყოველი შემდეგი მიიღებოდეს წინასგან ერთი ტრანსპოზიციით. უკანასკნელში მოვახდინოთ ტრანსპოზიცია ორი ელემენტისა, რომელთა ნომრებია 1 და 2 და ამოვწეროთ ყველა გადანაცვლება, რომლებშიც პირველ ადგილას დგას ელემენტი ნომრით 2. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა კვლავ იქნება $n!$ და ამიტომ ისინიც შეიძლება სათანადოდ გადავალაგოთ. უკანასკნელში მოვახდინოთ ტრანსპოზიცია იმ ორი ელემენტისა, რომელთა ნომრებია 2 და 3 და ა. შ. სულ მივიღებთ სათანადოდ დალაგებულ $n!$ გადანაცვლებას.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი n ელემენტიანი გადანაცვლება მიიღება მთავარისაგან ტრანსპოზიციათა გარკვეული რიცხვის საშუალებით. $t(k_1,k_2,\ldots k_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ რაოდენობა ტრანსპოზიციებისა, რომელთა საშუალებით $k_1,k_2,\ldots k_n$ გადანაცვლება მიიღება მთავარისაგან.

<u>თეორემა.</u> გადანაცვლებაში ყოველი ორი ელემენტის ტრანსპოზიცია ცვლის გადანაცვლების წყვილადობას

<u>დამტკიცება</u>. ჯერ განვიხილოთ ის კერძო შემთხვევა როდესაც გადანაცვლებაში ტრანსპოზიცია ხდება ორი მეზობელი ელემენტის, ე. ი. ვთქვათ $k_1,k_2,\ldots k_s,a,b,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t$ გადანაცვლებიდან მიღებულია $k_1,k_2,\ldots k_s,b,a,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t$ გადანაცვლება. ცხადია, რომ

$$I(k_1,k_2,\ldots k_s,a,b,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t)=I(k_1,k_2,\ldots k_s,b,a,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t)\pm 1$$

მაშასადამე, ჩვენი გადანაცვლებანი სხვადასხვა წყვილადობისაა.

ახლა ვთქვათ $k_1,k_2,\ldots k_s,a,h_1,h_2,\ldots h_r,b,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t$ გადანაცვლებიდან მიღებულია $k_1,k_2,\ldots k_s,b,h_1,h_2,\ldots h_r,a,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t$ გადანაცვლება. თუ მოცემულ გადანაცვლებაში ჯერ მოვახდენთ a და h_1 ელემენტების ტრანსპოზიციას, მერე a და h_2 ელემენტებისა და ა. შ, ბოლოს a-სი h_r -ის და შემდეგ a და b ელემენტების ტრანსპოზიციას, მივიღებთ

$k_1,k_2,\ldots k_s,h_1,h_2,\ldots h_r,b,a,\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_t$ გადანაცვლებას; ამრიგად, ეს უკანასკნელი მიღებულია მოცემულისაგან მეზობელი ელემენტების $r+1$ ტრანსპოზიციის შედეგად. ახლა თუ ამ უკანასკნელს გადანაცვლებაში მოვახდენთ b და h_2-ის, მერე b და h_{r-1} და ა. შ., ბოლოს b და h_1-ის ტრანსპოზიციებს, ე.ი. მეზობელი ელემენტების r ტრანსპოზიციას, მივიღებთ მისაღებ გადანაცვლებას. მაშასადამე, ეს უკანასკნელი გადანაცვლებიდან მიღებულია მეზობელი ელემენტების $2r+1$ ტრანსპოზიციის შედეგად, ამიტომ უკვე ზემოთ განხილული კერძო შემთხვევის თანახმად, ჩვენი გადანაცვლებანი სხვადასხვა წყვილადობისაა.

<u>**შედეგი.**</u> **n ელემენტიანი n! გადანაცვლებათა შორის ნახევარი ლუწია და ნახევარი კენტი.**

მართლაც, თუ ყველა n! გადანაცვლებაში მოვახდენთ ერთი და იმავე ორი ელემენტის ტრანსპოზიციას, მაშინ თეორემის თანახმად, ლუწი გადანაცვლებანი გადავა კენტ და კენტი გადანაცვლებანი ლუწ გადანაცვლებაში, ე. ი. ორივე ტიპის გადანაცვლებათა რაოდენობა ერთნაირია.

<u>**შედეგი.**</u> **ერთი და იმავე წყვილადობის გადანაცვლებანი ერთმანეთისაგან მიიღება ტრანსპოზიციათა ლუწი რიცხვის საშუალებით, ხოლო სხვადასხვა წყვილადობის გადანაცვლებანი – ტრანსპოზიციათა კენტი რიცხვის საშუალებით.**

<u>**შედეგი.**</u> **$t(k_1,k_2,\ldots k_n)$ და $I(k_1,k_2,\ldots k_n)$ რიცხვებს ერთი და იგივე წყვილადობა აქვთ.**

მართლაც, თუ $I(k_1,k_2,\ldots k_n)$ ლუწი (კენტი) რიცხვია, მაშინ $k_1,k_2,\ldots k_n$ გადანაცვლებაც ლუწია (კენტია) და ამიტომ წინა შედეგის ძალით $t(k_1,k_2,\ldots k_n)$ აგრეთვე ლუწი (კენტი) რიცხვი იქნება, რადგანაც მთავარი გადანაცვლება ლუწია.

§7. ჩასმები

n-ური ხარისხის <u>ჩასმა</u> ეწოდება პირველი n ნატურალური რიცხვის ურთიერთცალსახა ასახვას თავის თავზე აღინიშნება

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

სიმბოლოთი. მაშასადამე, ჩასმის ზედა გადანაცვლების ყოველ რიცხვს ჩასმის ქვედა გადანაცვლებაში ეთანადება ერთი და მხოლოდ ერთი რიცხვი და ჩასმის ქვედა გადანაცვლების ყოველი რიცხვი ეთანადება ზედა გადანაცვლების ერთ და მხოლოდ ერთ რიცხვს. სხვადასხვა n-ური ხარისხის ჩასმათა რაოდენობა n ელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობის ტოლია, ე. ი. $n!$-ის ტოლია.

n-ური ხარისხიან σ ჩასმის სვეტების რამოდენიმე ტრანსპოზიციის შედეგად შეიძლება მივიღოთ მისი ჩაწერის მრავალი სხვა სახეც. მაგალითად, მესამე ხარისხის $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ჩასმის ყველა სხვა შესაძლებელი ჩაწერა იქნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ყველა ამ ჩაწერაში 1-ის ანასახი არის 3, 2-ის ანასახი არის 1, 3-ის ანასახი არის 2.

n-ური ხარისხის ჩასმას ეწოდება <u>ლუწი</u>, თუ მისი ზედა გადანაცვლება მთავარია და ქვედა ლუწია; n-ური ხარისხის ჩასმას ეწოდება <u>კენტი</u>, თუ მისი ზედა გადანაცვლება მთავარია, ხოლო ქვედა კენტია. ადვილი საჩვენებელია, რომ ჩასმა ლუწია, თუ მისი ზედა და ქვედა გადანაცვლებების ინვერსიების ჯამი ლუწია და ჩასმა კენტია, თუ მისი ზედა და ქვედა გადანაცვლებების ინვერსიების ჯამი კენტია.

ორი σ და τ, n-ური ხარისხის ჩასმების ნამრავლი – აღინიშნება στ სიმბოლოთი და ეწოდება n-ური ხარისხის ჩასმას, რომელიც მიიღება σ და τ ჩასმების მიმდევრობით შესრულების შედეგად. ვთქვათ მოცემულია n-ური ხარისხის ჩასმები

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n\end{pmatrix} \text{ და } \tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n\end{pmatrix}$$

σ ჩასმის ზედა გადანაცვლების რიცხვი 1-ის ანასახი ქვედა გადანაცვლებაში არის i_1, ხოლო τ ჩასმის ზედა გადანაცვლების რიცხვი i_1-ის ანასახი ქვედა გადანაცვლებაში ვთქვათ არის k_1, მაშინ $\sigma\tau$ ჩასმის ზედა გადანაცვლების რიცხვი 1-ის ანასახი ქვედა გადანაცვლებაში იქნება k_1. თუ ასეთ მსჯელობას გავაგრძელებთ, მივიღებთ:

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n\end{pmatrix}.$$

n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლეში ერთეულოვანი ელემენტი იქნება იგივური ჩასმა

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

მართლაც, ჩასმათა ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად, $\sigma e=e\sigma=\sigma$.

ჩასმათა ნამრავლი, საზოგადოდ, არაკომუტაციურია. მაგალითად,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

მაგრამ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$

ჩასმათა ნამრავლი ასოციაციურია, ე. ი.

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3=\sigma_1(\sigma_2\sigma_3).$$

მართლაც, ვთქვათ σ_1 ჩასმაში a გადადის b-ში, σ_2 ჩასმაში ვთქვათ b გადადის c-ში, ხოლო σ_3 ჩასმაში c გადადის d-ში. მაშინ $\sigma_1\sigma_2$ ჩასმაში a გადავა c-ში, $\sigma_2\sigma_3$ ჩასმაში b გადავა d-ში. ამიტომ $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$ და $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ ორივე ჩასმაში a გადავა d-ში.

ყოველი n-ური ხარისხის ჩასმა შებრუნებადია. მართლაც,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ ჩასმის შებრუნებული ჩასმა იქნება

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

G ალგებრულ სტრუქტურას <u>ჯგუფი</u> ეწოდება, თუ მასზე განსაზღვრულია ერთი ბინარული ალგებრული ოპერაცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

1) ასოციაციურობის აქსიომა: ნებისმიერი a, b, c-სთვის G-დან

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

2) G-ზე არსებობს ე. წ. ერთეულოვანი e ელემენტი ისეთი, რომ ნებისმიერი a-სთვის G –დან $a \circ e = e \circ a = a$;

3) G-ს ყოველი ელემენტი შებრუნებადია, ე. ი. გ-ს ნებისმიერი a ელემენტისათვის G-ში არსებობს ე. წ. a-ს შებრუნებული a^{-1} ელემენტი ისეთი, რომ

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

თუ დამატებით G-ს ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის სამართლიანია კომუტაციურობის აქსიომა, ე. ი.

$$a \circ b = b \circ a,$$

მაშინ G-ს <u>კომუტაციური ჯგუფი</u> ეწოდება.

G ჯგუფს ეწოდება <u>ადიციური</u>, თუ მასზე განსაზღვრულ ოპერაციას შეკრებას ვუწოდებთ; G-ს ეწოდება <u>მულტიპლიკაციური</u> ჯგუფი, თუ მასზე განსაზღვრულ ოპერაციას გამრავლებას ვუწოდებთ.

ადიციურ ჯგუფებში ერთეულოვან ელემენტს უწოდებენ ნულოვან ელემენტს და 0 სიმბოლოთი აღნიშნავენ, ხოლო შებრუნებულ

ელემენტს უწოდებენ მოპირდაპირეს და $-a$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ადიციური ჯგუფების მაგალითებია: **Z, Q, R**.

n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლე მულტიპლიკაციური ჯგუფია და მას <u>n-ური ხარისხის სიმეტრიული ჯგუფი</u> ეწოდება და S_n სიმბოლოთი აღინიშნება. მულტიპლიკაციური ჯგუფებია აგრეთვე $Q\setminus\{0\}$, $R\setminus\{0\}$.

§8. დეტერმინანტი და მისი თვისებები

$m \times n$ მატრიცი K ველის მიმართ ეწოდება m სტრიქონიან და n სვეტიან მართკუთხოვან ცხრილს, რომელშიაც გარკვეული რიგით ჩაწერილია K ველის mn რაოდენობის ნებისმიერი ელემენტები, რომლებსაც მატრიცის ელემენტები ეწოდება. მატრიცის ელემენტი a_{ij} იმყოფება i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე. ამრიგად, mxn მატრიცის ზოგადი სახე იქნება:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

ადგილის შემცირების მიზნით ზოგჯერ დავწერთ $A=(a_{ij})$, სადაც $i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n$).

თუ m=n (ე. ი. სტრიქონთა რიცხვი სვეტების რიცხვის ტოლია), მაშინ A მატრიცს n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი ეწოდება.

<u>განსაზღვრება</u> n-ური რიგის A მატრიცის n-ური რიგის დეტერმინანტი ეწოდება n! წევრის ჯამს, სადაც ყოველი წევრი არის A მატრიცის n ელემენტის ნამრავლი; ამასთანავე, მატრიცის ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან დეტერმინანტის წევრის თანამამრავლად აღებულია ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი. დეტერმინანტის წევრი აიღება „+“ ნიშ-

ნით ან „-“ ნიშნით იმისდა მიხედვით თანამამრავლების სვეტე-ბის ნომრებისაგან შედგენილი გადანაცვლება ლუწია თუ კენ-ტია, როცა თანამამრავლები დალაგებულია სტრიქონების ნომრების ზრდის მიხედვით. n-ური რიგის დეტერმინანტი აღინიშ-ნება სიმბოლოთი:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \dots a_{1i_n},$$

სადაც $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ გაირბენს პირველი n ნატურალური რიცხვის ყველა n! გადანაცვლებას.

დეტერმინანტის თვისებები. A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცი ეწოდება

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})$$

მატრიცს (აქაც შეიძლება დავწეროთ $A^T=(a_{ji})$). ანალოგიურად $|A|$ დეტერმინანტის ტრანსპონირებული ეწოდება

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტს.

<u>თვისება 1</u>. **ტრანსპონირებული დეტერმინანტები ტოლია.** მართლაც, $|A|$-ს ყოველ წევრს უნიშნოდ აქვს $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ სახე. მაგრამ ეს წევრი $|A^T|$-შიც შედის, ოღონდ აქ პირველი ინდექსები აღ-

ნიშნავენ სვეტების ნომრებს, ხოლო მეორე ინდექსები – სტრიქონებისას. ანალოგიურად $|A^{\mathrm{T}}|$-ის ყოველი წევრი უნიშნოდ $|A|$-შიც შედის. აღებული წევრის ნიშანი $|A|$-ში განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \qquad (28)$$

ჩასმის წყვილადობით, ხოლო $|A^{\mathrm{T}}|$-ში

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \qquad (29)$$

ჩასმის წყვილადობით. (28) და (29) ჩასმებს ერთი და იგივე წყვილადობა აქვთ, ამიტომ აღებულ წევრს ორივე დეტერმინანტში ერთი და იგივე ნიშანი ექნება.

<u>თვისება 2.</u> თუ დეტერმინანტში მოვახდენთ ნებისმიერი ორი სტრიქონის ტრანსპოზიციას, მაშინ ის მოპირდაპირეთი შეიცვლება.

ვთქვათ

$$\Delta = \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ . & . & . & . & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (k) \\ . & . & . & . & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & (j) \\ . & . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}, \quad \Delta_1 = \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ . & . & . & . & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & (k) \\ . & . & . & . & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (j) \\ . & . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}$$

Δ-ს ყოველ წევრს უნიშნოდ აქვს $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ki_k}\dots a_{ji_j}\dots a_{ni_n}$ სახე. ეს წევრი Δ_1-შიც შედის, მაგრამ აქ a_{ki_k} არის j-ური სტრიქონის, ხო-

ლო a_{ji_j} –k-ური სტრიქონის წარმომადგენელი. აღებული წევრის ნიშანი Δ-ში განისაზღვრება

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & j & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & i_j & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

ჩასმის წყვილადობით, ხოლო Δ_1-ში

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots j \cdots k \cdots n \\ i_1 & i_2 \cdots i_k \cdots i_j \cdots i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & j & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_j & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

ჩასმის წყვილადობით. მაგრამ (30) ჩასმის და (31)-ის მარჯვენა ჩასმის ზედა გადანაცვლება მთავარია, ხოლო ქვედა გადანაცვლება (31)-ის მარჯვენა ჩასმაში მიღებულია (30) ჩასმის ქვედა გადანაცვლებიდან მხოლოდ i_k და i_j ნომრების ტრანსპოზიციის შედეგად. მაშასადამე, (30) და (31) ჩასმებს სხვადასხვა წყვილადობა აქვთ. ამიტომ Δ-ს აღებულ წევრს Δ_1-ში ექნება მოპირდაპირე ნიშანი. ცხადია, Δ-ს ყველა სხვა წევრსაც Δ_1-ში ექნება მოპირდაპირე ნიშანი. ამრიგად, $\Delta_1 = -\Delta$.

<u>თვისება 3</u>. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის ყველა შესაბამისი ელემენტი ტოლია, მაშინ ეს დეტერმინანტი K ველის ნულის ტოლია.

ვთქვათ n-ური რიგის დეტერმინანტის j-ური და i-ური სტრიქონების შესაბამისი ელემენტები ტოლია, მაშინ თუ მოვახდენთ ამ ორი სტრიქონის ტრანსპოზიციას, წინა თეორემის ძალით, დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის, მეორეს მხრივ, რადგან სტრიქონები ერთი და იგივეა, მათი ტრანსპოზიციით დეტერმინანტი არ შეიცვლება. ე.ი. $\Delta = -\Delta$ ანუ $2\Delta = 0$, $\Delta = 0$.

<u>თვისება 4.</u> თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტს გავამრავლებთ K ველის ერთსა და იმავე ელემენტზე, მაშინ დეტერმინანტიც გამრავლდება ამავე ელემენტზე.

ვთქვათ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_k} \cdots a_{ni_n}.$$

მაშინ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdots \left(ca_{ki_k}\right) \cdots a_{ni_n} =$$

$$= c \sum_{(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_k} \cdots a_{ni_n} = c\Delta$$

დამტკიცებული თვისება შემდეგნაირადაც შეიძლება ჩამოყალიბდეს: **დეტერმინანტის რაიმე სტრიქონის ყველა ელემენტის საერთო მამრავლი შეიძლება გატანილ იქნეს დეტერმინანტის გარეთ.**

ამ თვისებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

ა) **დეტერმინანტი K ველის ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი K ველის ნულია;**

ბ) **დეტერმინანტი K ველის ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე ორი სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები პროპორციულია.**

<u>თვისება 5.</u> **თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტი ორი შესაკრების ჯამია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ორი დეტერმინანტის ჯამის ტოლია. ამასთანავე პირველი დეტერმინანტის შესაბამისი სტრიქონის ელემენტები პირველი შესაკრებებია, ხოლო მეორე დეტერმინანტის შესაბამისი სტრიქონის ელემენტები მეორე შესაკრებებია, დანარჩენი**

სტრიქონები კი ორივე დეტერმინანტში იგივეა რაც მოცემულ დეტერმინანტში.

მართლაც,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots$$

$$\cdots \left(a_{ki_k} + b_{ki_k}\right) \cdots a_{ni_n} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ki_k} \cdots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(i_1,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)} a_{1i_1} \cdots b_{ki_k} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ამ თვისებიდან და წინა თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ყველა ელემენტს დავუმატებთ სხვა რომელიმე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს K ველის ერთსა და იმავე ელემენტზე.

ყველა ჩამოთვლილი თვისება, თვისება 1-ის ძალით, სამართლიანია დეტერმინანტის სვეტებისთვისაც.

თუ n-ური რიგის დეტერმინანტში ამოვშლით იმ სტრიქონს და იმ სვეტს, რომელთა გადაკვეთაზე დგას a_{ik} ელემენტი, მივიღებთ n-1 რიგის მატრიცს, რომლის n-1 რიგის დეტერმინანტს ეწოდება მოცემული დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის M_{ik} მინორი.

დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის A_{ik} ალგებრული დამატება ეწოდება M_{ik} მინორის $(-1)^{i+k}$ ჯერადს, ე. ი. $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$.

<u>თვისება 6.</u> თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა K ველის ნულია, მაშინ ასეთი დეტერმინანტი ამ არანულოვანი ელემენტისა მისი ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლის ტოლია.

<u>დამტკიცება.</u> ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $a_{11}\neq 0$, ხოლო დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ყველა დანარჩენი ელემენტი ნულოვანია. მაშინ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\substack{(1,i_2,\dots,i_n)\\ i_2,\dots,i_n\neq 1}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{11}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} + \sum_{\substack{(1,i_2,\dots,i_n)\\ i_1\neq 1}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} =$$

$$= a_{11}\sum_{\substack{(i_2,\dots,i_n)\\ i_2,\dots,i_n\neq 1}} (-1)^{I(i_2,\dots,i_n)} a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \;(\text{რადგანაც მეორე ჯამში } a_{1i_1}=0, \text{ როცა } i_1\neq 1) =$$

$$= a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

ვთქვათ ახლა

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,n+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ ამ დეტერმინანტში მოვახდენთ i-ური და i-1 სტრიქონების ტრანსპოზიციას, შემდეგ მიღებული i-1 და i-2 სტრიქონების ტრანსპოზიციას და ა. შ. მიღებული მეორე და პირველი სტრიქონების ტრანსპოზიციას, მაშინ i-ური სტრიქონი გადავა პირველ სტრიქონში და თვისება 2-ის ძალით, გვექნება:

$$\Delta = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

თუ ახლა k-ური სვეტს თანდათანობითი გადაადგილებით პირველ სვეტად მოვათავსებთ, კვლავ თვისება 2-ის ძალით, მივიღებთ:

$$\Delta = (-1)^{(i-1)+(k-1)}\begin{vmatrix} a_{ik} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i) \ ,$$

ე. ი. მივიღეთ წინა შემთხვევაში განხილული დეტერმინანტი; ამრიგად,

$$\Delta = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik} \, .$$

<u>თვისება 7</u>. n-ური რიგის დეტერმინანტი ტოლია მისი ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის შესაბამის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლთა ჯამის.

<u>**დამტკიცება.**</u> გვაქვს

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}+\overbrace{0+\ldots+0}^{(n-1)\text{-ჯერ}} & 0+a_{i2}+\overbrace{0+\ldots+0}^{(n-2)\text{-ჯერ}} & \cdots & \overbrace{0+\ldots+0}^{(n-1)\text{-ჯერ}}+a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}\,.$$

მაშასადამე, სამართლიანია დეტერმინანტის შემდეგი დაშლა სტრიქონის ელემენტების მიხედვით:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,.$$

ამიტომ თვისება 1-ის ძალით, სამართლიანი იქნება აგრეთვე დეტერმინანტის შემდეგი დაშლაც სვეტის ელემენტების მიხედვით:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{ki}\,.$$

<u>თვისება 8</u>. **n-ური რიგის დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის ამავე დეტერმინანტის სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლთა ჯამი ნულოვანი ელემენტის ტოლია.**

<u>**დამტკიცება.**</u> ვთქვათ მოცემულია დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

განვიხილოთ აგრეთვე დამხმარე

$$\Delta_1 = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

დეტერმინანტი, რომლის i-ური და j-ური სტრიქონები ერთნაირია, ხოლო დანარჩენი სტრიქონები, გარდა j-ურისა, იგივეა რაც Δ-ში. თვისება 3-ის ძალით, $\Delta_1 = 0$. მეორე მხრივ, თეორემა 5-ის ძალით, თუ Δ_1-ს დავშლით j-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} ,$$

რადგანაც Δ_1 დეტერმინანტის j-ური სტრიქონის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება ემთხვევა Δ დეტერმინანტის j-ური სტრიქონის a_{jk} ელემენტის A_{jk} ალგებრულ დამატებას. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 .$$

ანალოგიურად, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0 .$$

ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის Δ დეტერმინანტი. ამოვარჩიოთ k სტრიქონი და k სვეტი, $1 \le k \le n-1$, განვიხილოთ დეტერმინანტი, რომლის ელემენტებიც არის ამორჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტები, მიღებულ დეტერმინანტს ეწოდება Δ დეტერმინანტის **k-ური რიგის მინორი** და აღინიშნება

M-ით, ხოლო თუ ამოვშლით ამორჩეულ k სტრიქონს და k სვეტს, მაშინ დარჩენილ n-k რიგის დეტერმინანტს ეწოდება **k-ური რიგის მინორის <u>დამატებითი მინორი</u>** და აღინიშნება $\widetilde{M}$ სიმბოლოთი. მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია მე-5 რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

ამოვარჩიოთ მაგალითად, 3 სტრიქონი და 3 სვეტი; ვთქვათ სტრიქონები ნომრით: 1, 3, 4 და სვეტები ნომრით: 2, 4, 5. მაშინ ამორჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებით მიღებული დეტერმინანტი იქნება

$$M=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix},$$

ხოლო თუ ამოვშლით ამორჩეულ სტრიქონებს და სვეტებს, მაშინ დარჩენილი მე-2 რიგის დეტერმინანტი არის M მინორის დამატებითი $\widetilde{M}$ მინორი და

$$\widetilde{M}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix}.$$

M მინორის **<u>ალგებრული დამატება</u>** ეწოდება $A=(-1)^s\widetilde{M}$ სიდიდეს, სადაც s არის M მინორში სტრიქონებისა და სვეტების ნომრების ჯამი, ჩვენს მაგალითში $s=1+3+4+2+4+5$.

<u>ლემა</u>. Δ დეტერმინანტის ნებისმიერი მინორის მის ალგებრულ დამატებაზე ნამრავლის ყოველი წევრი Δ-ს წევრიც არის.

<u>დამტკიცება</u>. ავიღოთ k-ური რიგის M მინორი, იგი შეიცავს k! წევრს, ხოლო მისი ალგებრული დამატება A, კი შეიცავს (n-k)! წე-

ვრს, Δ შეიცავს n! წევრს. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა M მინორი არის Δ დეტერმინანტის მარცხენა ზედა კუთხეში

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\
. & M & . & . & . & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\
\hline
a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\
. & . & . & . & \widetilde{M} & . \\
a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|.$$

M მინორის ზოგად წევრს აქვს სახე:

$$(-1)^t a_{1\alpha_1}\dots a_{k\alpha_k},$$

$\widetilde{M}$ -ის ზოგად წევრს კი - $(-1)^s a_{k+1\beta_1}\dots a_{n\beta_{n-k}}$ სახე. მაშინ $M\widetilde{M}$ ნამრავლის ზოგად წევრს ექნება სახე: $(-1)^{t+s} a_{1\alpha_1}\dots a_{k\alpha_k} a_{k+1\beta_1}\dots a_{n\beta_{n-k}}$, საიდანაც ჩანს, რომ ამ ნამრავლში დეტერმინანტის ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან წევრის თანამამრავლად აღებულია ერთადერთი ელემენტი. ახლა უნდა ვაჩვენოთ, რომ $t+s$ არის $\alpha_1\dots\alpha_k\beta_1\dots\beta_{n-k}$ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რაოდენობა, მართლაც, რადგანაც α–ების ინვერსიათა რაოდენობა არის t, β–ების ინვერსიათა რაოდენობა კი s, ხოლო β არ ქმნის ინვერსიას α–სთან იმიტომ, რომ α იცვლება 1-დან k–მდე და β კი იცვლება k+1-დან n–მდე.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა M მინორი ნებისმიერად დგას დეტერმინანტში და მისი სტრიქონების ნომრებია: $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k$, ხოლო სვეტების ნომრები $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_k$. მაშასადამე, M -ის პირველ სტრიქონს Δ-ში უჭირავს α_1 სტრიქონი, მან რომ დაიკავოს პირველი სტრიქონი დაგვჭირდება α_1-1 ტრანსპოზიცია, α_2 სტრიქონმა რომ დაიკავოს მეორე სტრიქონი დაგვჭირ-

დება α_2-2 ტრანსპოზიცია და ა.შ. α_k სვეტისთვის საჭირო იქნება α_k-k ტრანსპოზიცია. თუ ანალოგიურად მოვიქცევით სვეტებისთვისაც, სულ დაგვჭირდება

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+...+(\alpha_k-k)+(\gamma_1-1)+(\gamma_2-2)+...+(\gamma_k-k)=$$

$$=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k+\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_k-2\,(1+2+...+k)=$$

$$=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k+\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_k-2\,m.=s_M-2\,m.$$

ტრანსპოზიცია, მივიღებთ, რომ

$$\Delta=(-1)^{s_M-2m}\Delta_1=(-1)^{s_M}\Delta_1.$$

ანუ $\Delta_1=(-1)^{s_M}\Delta$. რადგან $M\widetilde{M}$-ის ყოველი წევრი არის Δ_1-ის წევრი, ამიტომ $(-1)^{s_M}M\widetilde{M}$ - ის ყოველი წევრი იქნება $(-1)^{s_M}\Delta_1$-ის წევრი ანუ MA-ს ყოველი წევრი იქნება Δ-ს წევრი.

<u>**ლაპლასის თეორემა.**</u> **თუ n-ური რიგის Δ დეტერმინანტში ამოვარჩევთ k სტრიქონს (ან k სვეტს), მაშინ ამორჩეულ k სტრიქონში (ან k სვეტში) მოთავსებული ყველა k-ური რიგის მინორის სათანადო ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი Δ–ს ტოლია.**

<u>**დამტკიცება.**</u> n-ური რიგის Δ დეტერმინანტში ავირჩიოთ k სტრიქონი, ამორჩეულ k სტრიქონში მოთავსდება $t=C_n^k$ რაოდენობის k-ური რიგის მინორი. ვაჩვენოთ, რომ

$$M_1A_1+M_2A_2+...+M_tA_t=\Delta.$$

მართლაც, M_i შეიცავს $k!$ წევრს, A_i შეიცავს $(n-k)!$ წევრს,

$$k!\,(n-k)!\,t=k!\,(n-k)!\,C_n^k=n!.$$

ე.ი. მარცხენა მხარეში არის $n!$ წევრი, თუ გამოვიყენებთ წინა ლემას, ეს წევრები Δ–ს წევრებიც არიან, ამასთანავე განსხვავებული, რადგანაც M_i–ს და M_j–ს ერთნაირი წევრები არა აქვთ.

განვიხილოთ ორმაგი ჯამი $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$; სადაც a_{ij} არის K ველის რაიმე ელემენტები. გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}) = a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m}+$$

$$+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2m}+$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm},$$

მეორე მხრივ,

$$+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{n2}+$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+a_{1m}+a_{2m}+\cdots+a_{nm}.$$

ამ ორივე ტოლობის მარჯვენა მხარეები ერთნაირია, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

ე. ი. ორმაგ ჯამში შესაძლებელია შეჯამების რიგის შეცვლა.
განვიხილოთ ჯამები:

$$c\sum_{k=1}^{n} a_k = c(a_1+a_2+\cdots+a_n) = ca_1+ca_2+\cdots+ca_n = \sum_{k=1}^{n} ca_k,$$

$$c_k\sum_{k=1}^{n} a_k = c_k(a_1+a_2+\cdots+a_n) = c_k a_1+c_k a_2+\cdots+c_k a_n \neq$$

$$\neq c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k,$$

მაშასადამე, ჯამის ნიშნის შიგნით შეტანა და ჯამის ნიშნის გარეთ გატანა შეიძლება მხოლოდ ისეთი მამრავლის, რომელიც არ არის დამოკიდებული შეჯამების ასოზე.

§ 9. წრფივ განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ K ველის მიმართ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{33}$$

სადაც უცნობების a_{ik} კოეფიციენტები და b_i თავისუფალი წევრები K ველის ელემენტებია. უცნობთა რიცხვი და განტოლებათა რიცხვი შეიძლება ტოლი იყოს და შეიძლება არა.

<u>განსაზღვრება</u> (33) სისტემის ამონახსენი ეწოდება K ველის ელემენტთა (ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_n) დალაგებულ n-ეულს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ თუ სისტემაში x_1-ის ნაცვლად ჩავწერთ ξ_1-ს, x_2-ის ნაცვლად ξ_2-ს და ა.შ. x_n-ის ნაცვლად ξ_n-ს, მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში მივიღებთ K ველის ტოლ ელემენტებს. თუ (33) სისტემას ერთი ამონახსნი მაინც აქვს, მაშინ მას თავსებადი სისტემა ეწოდება, ხოლო თუ მას არც ერთი ამონახსნი არ გააჩნია, მაშინ არათავსებადი სისტემა ეწოდება.

ჯერ შევისწავლოთ ის კერძო შემთხვევა, როცა (33) სისტემაში m=n, ე. ი. განტოლებათა რიცხვი უდრის უცნობთა რიცხვს. ასეთი სისტემის უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს ეწოდება განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი.

სამართლიანია შემდეგი

<u>კრამერის თეორემა</u>. თუ K ველის მიმართ n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი არ არის K ვე-

ლის ნულოვანი ელემენტის ტოლი, მაშინ სისტემა თავსებადია და ამასთანავე აქვს ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც გამოითვლება კრამერის ფორმულებით.

__დამტკიცება.__ დავუშვათ, რომ სისტემა თავსებადია და ვთქვათ $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ მისი ერთ-ერთი ამონახსენია, ე. ი.

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases} \tag{34}$$

ვთქვათ k ნებისმიერი რიცხვია 1, 2, ..., n რიცხვებიდან. (34) სისტემის პირველი ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A_{1k}-ზე, ე. ი. Δ დეტერმინანტის a_{1k} ელემენტის ალგებრულ დამატებაზე; მეორე ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ A_{2k}-ზე და ა.შ. უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარე – A_{nk}-ზე. მიღებული ტოლობების შეკრების შემდეგ, მივიღებთ ტოლობას:

$$\begin{gathered} (a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \cdots + a_{n1}A_{nk})\xi_1 + \cdots + \\ + (a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk})\xi_k + \cdots + \\ + (a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \cdots + a_{nn}A_{nk})\xi_n = \\ = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \cdots + b_nA_{nk}. \end{gathered}$$

ამ ტოლობაში, დეტერმინანტების მე-7 თვისების ძალით,

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} = \Delta$$

ტოლობის მარცხენა მხარის დანარჩენი ჯამები კი, მე-8 თვისების ძალით K ველის ნულოვანი ელემენტის ტოლია. ამრიგად, ჩვენი ტოლობა ღებულობს

$$\Delta\xi_k = \sum_{i=1}^{n} b_j A_{jk} \tag{35}$$

სახეს. ვნახოთ, თუ რას წარმოადგენს (35) ტოლობის მარჯვენა მხარე. ამ მიზნით განვიხილოთ

$$\Delta_k = \overset{(k)}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

დეტერმინანტი, რომელიც მიღებულია Δ დეტერმინანტისაგან, თუ ამ უკანასკნელში k სვეტს შევცვლით სვეტით, შედგენილს განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრებისაგან. თუ ახლა Δ_k დეტერმინანტს დავშლით k-ური სვეტის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^{n} b_j A_{jk}.$$

მაშასადამე, (35) ტოლობა ღებულობს

$$\Delta\, \xi_k = \Delta_k$$

სახეს. საიდანაც $\xi_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, რადგან პირობის ძალით $\Delta \neq 0$. ამრიგად, თუ განტოლებათა ჩვენი სისტემა თავსებადია და $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ მისი ამონახსნია, მაშინ

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \xi_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{36}$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ (36) n-ეული მართლაც არის ჩვენი განტოლებათა სისტემის ამონახსნი. თუ განტოლებათა (33) სისტემის i-ურ განტოლებაში უცნობების ნაცვლად ჩავწერთ შესაბამისად (36) n-ეულის ელემენტებს, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\Delta_k}{\Delta} = \Delta^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k = \Delta^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j A_{jk}\right) = \Delta^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}\left(b_j A_{jk}\right) =$$

$$= \Delta^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ik}A_{jk}\right)b_j = \Delta^{-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}A_{jk}\right)b_j = \Delta^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}A_{jk}\right)\right)b_j =$$

$$= \Delta^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}A_{ik}\right)\right)b_i = \Delta^{-1}\left(\Delta b_i\right) = b_i,$$

რადგანაც, მე-7 თვისების ძალით, $\sum_{j=1}^{n}$ გარე ჯამის წევრი როცა j=i არის Δ-ს ტოლი, ხოლო ამ ჯამის წევრები, როცა j≠i, მე-8 თვისების ძალით 0-ის ტოლია. ამით დამტკიცებულია, რომ (36) n-ეული არის ჩვენი განტოლებათა სისტემის ამონახსენი. ეს ამონახსენი ერთადერთია, რადგანაც ზემოთ იყო ნაჩვენები, რომ სისტემის ამონახსენს აქვს (36) სახე. (36) ფორმულებს კრამერის ფორმულები ეწოდება.

<u>განსაზღვრება</u> წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ ყველა თავისუფალი წევრი ველის ნულოვანი ელემენტია; სისტემას ეწოდება არაერთგვაროვანი, თუ ერთი თავისუფალი წევრი მაინც არანულოვანი ელემენტია.

ვთქვათ მოცემულია K ველის მიმართ n უცნობიანი n წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

რომლის დეტერმინანტი Δ≠0. მაშინ კრამერის ფორმულების ძალით,

$$\xi_1 = \frac{0}{\Delta}, \xi_2 = \frac{0}{\Delta}, \cdots, \xi_n = \frac{0}{\Delta},$$

რადგანაც ყველა $\Delta_k = 0$ (k=1,2,…, n). მაშასადამე, კრამერის თეორემის თანახმად, n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი გააჩნია, თუ სისტემის დეტერმინანტი Δ≠0.

§1. კომპლექსურ რიცხვთა ველის აგება

ლემა. ვთქვათ R_0 არის S_0 რგოლის ქვერგოლი და ვთქვათ R_0 იზომორფულად აისახება R რგოლზე, რომელსაც S_0-თან არც ერთი საერთო ელემენტი არ აქვს. მაშინ ნებისმიერი მოცემული $\varphi : R_0 \to R$ იზომორფიზმისათვის არსებობს ისეთი S რგოლი, რომელიც ქვერგოლის სახით შეიცავს R რგოლს და რომელზედაც იზომორფულად აისახება S_0 რგოლი; ამასთანავე არსებობს ისეთი $\psi : S_0 \to S$ იზომორფიზმი, რომელიც R_0 რგოლზე ემთხვევა მოცემულ φ იზომორფიზმს, ე. ი. ისეთი, რომ $\psi(a)=\varphi(a)$ ნებისმიერი a ელემენტისათვის R_0-დან. თუ S_0 ველია, მაშინ S-იც ველი იქნება; თუ R_0 არის S_0 რგოლის ქვეველი, მაშინ R-იც იქნება S რგოლის ქვეველი.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $S_0=S_0\backslash R_0.R_0$. აღვნიშნოთ S-ით სიმრავლე, რომელიც მიიღება S_0-დან, თუ ამ უკანასკნელში R_0-ის ელემენტებს შევცვლით მათი ანასახებით R-დან, ე. ი. $S=S_0\backslash R_0.R$. განვიხილოთ ახლა ასახვა ψ: $S_0 \to S$, რომელიც შემდეგნაირად იყოს განსაზღვრული:

$$\psi(a)=\begin{cases} a, & \text{თუ } \alpha \in S_0 \setminus R_0, \\ \varphi(a), & \text{თუ } \alpha \in R_0, \end{cases}$$

სადაც $\varphi(a)$ არის R_0-ის a ელემენტის ანასახი R-ზე მოცემული $\varphi : R_0 \to R$ იზომორფიზმის დროს, ვაჩვენოთ, რომ ψ არის ურთიერთცალსახა ასახვა S_0 რგოლისა S სიმრავლეზე. პირობის თანახმად, φ არის ურთიერთცალსახა ასახვა R_0 რგოლისა R რგოლზე; ხოლო განსაზღვრის თანახმად ψ არის ურთიერთცალსახა ასახვა $S_0\backslash R_0$ სიმრავლისა თავის თავზე; ამასთანავე, აგრეთვე პირობის თანახმად, $S_0\backslash R_0$ და R სიმრავლეებს არც ერთი საერთო ელემენტი არ აქვთ.

მაშასადამე, ψ მართლაც ყოფილა S_0 რგოლის ურთიერთცალსახა ასახვა S სიმრავლეზე.

ახლა S სიმრავლეზე განვსაზღვროთ შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ოპერაციები S_0 რგოლზე უკვე განსაზღვრული შესაბამისი ოპერაციების S-ზე გადატანის გზით, ψ ასახვის საშუალებით. S-ზე ავიღოთ ორი ნებისმიერი ელემენტი a' და b', ვთქვათ $a' = \psi(a)$ და $b' = \psi(b)$. ახლა დავუშვათ, რომ

$$\psi(a)+\psi(b)=\psi(a+b) \text{ და } \psi(a)\psi(b)=\psi(ab) \tag{1}$$

აქ ჯამისა და ნამრავლის ცალსახობა უზრუნველყოფილია ψ ასახვის ურთიერთცალსახობით.

(1) ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ ψ ასახვა არის იზომორფიზმი S_0 რგოლისა S სიმრავლეზე. მართლაც,

$$\left.\begin{array}{l} a \to \psi(a) \\ b \to \psi(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b \to \psi(a+b)=\psi(a)+\psi(b), \\ ab \to \psi(ab)=\psi(a)\psi(b). \end{array}\right.$$

მაშასადამე, S სიმრავლე, როგორც S_0 რგოლის იზომორფული ანასახი, აგრეთვე რგოლია. კერძოდ, თუ S_0 ველია, მაშინ S-იც ველი იქნება.

S-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $R \subset S$. პირობის თანახმად R რგოლია; ვაჩვენოთ, რომ R არის S-ის ქვერგოლი. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ S-ზე ზემოთ განმსაზღვრელი ორივე ბინარული ოპერაცია, გამოყენებული მისი ქვესიმრავლის R-ის ელემენტებზე, ემთხვევა R-ზე განსაზღვრულ შესაბამის ოპერაციებს. თუ (1) ტოლობებში $\psi(a)\in R$ და $\psi(b)\in R$, მაშინ ψ ასახვის ძალით, $a\in R_0$ და $b\in R_0$ რადგანაც R_0 რგოლია, ამიტომ $a+b$ და $ab\in R_0$ და კვლავ ψ ასახვის ძალით, გვექნება:

$$\psi(a)+\psi(b)=\psi(a+b)=\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$$

და

$$\psi(a)\psi(b)=\psi(ab)=\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b); \tag{2}$$

რადგანაც ასახვა $\varphi: R_0 \to R$ არის იზომორფიზმი. მაშასადამე, S-ზე განსაზღვრული ორივე ბინარული ოპერაცია, გამოყენებული R-ის

ელემენტებზე, დაემთხვა R-ზე განსაზღვრულ შესაბამის ოპერაციებს, ე.ი. R მართლაც ყოფილა S რგოლის ქვერგოლი. თუ R_0 არის S_0 რგოლის ქვეველი, მაშინ R-იც იქნება S რგოლის ქვეველი. მართლაც, თუ R_0 ველია, მაშინ $\varphi:R_0\rightarrow R$ იზომორფიზმის გამო, R-იც ველი იქნება. ის, რომ R იქნება S რგოლის ქვეველი, ეს (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს.

კომპლექსური რიცხვების შემოტანის აუცილებლობა ნაკარნახევია შემდეგი გარემოებით: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არაა საკმარისი ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამოსახსნელად. მაგალითად, ერთ-ერთი ასეთი განტოლება, რომელსაც არ აქვს ნამდვილი ფესვები არის $x^2+1=0$.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ველის დეკარტული კვადრატი, ე. ი.

$$\mathbf{R}^2=\{(a,b)|a,b\in\mathbf{R}\}$$

სიმრავლე. ამ სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ოპერაციები შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \tag{3}$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc), \tag{4}$$

ორ (a,b) და (c,d) წყვილს ტოლი ეწოდება და წერენ

$$(a,b)=(c,d),\ \text{თუ}\ a=c\ \text{და}\ b=d.$$

ადვილია იმის შემოწმება, რომ ეს ორივე ოპერაცია აკმაყოფილებს კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის აქსიომებს შეკრებისა და გამრავლების მიმართ და დისტრიბუციულობის აქსიომას. მართლაც, ერთი მხრივ

$$[(a,b)+(c,d)](g,h)=(a+c,b+d)(g,h)=[(a+c)g-(b+d)h,\ (a+c)h+(b+d)g]$$

მეორე მხრივ

$$(a,b)(g,h)+(c,d)(g,h)=(ag-bh,\ ah+bg)+(cg-dh,\ ch+dg)=$$

$$=[(ag-bh)+(cg-dh),\ (ah+bg)+(ch+dg)].$$

ამ ორივე ტოლობის მარჯვენა მხარეში ნამდვილ რიცხვთა ტოლი წყვილებია, ამიტომ

$$[(a,b)+(c,d)](g,h)=(a,b)(g,h)+(c,d)(g,h).$$

ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{R}^2$ სიმრავლეზე ნულოვანი ელემენტი არის (0, 0) წყვილი. მართლაც, $(a,b)+(0,0)=(a+0, b+0)=(a,b)$.

(a,b) წყვილის მოპირდაპირე წყვილი კი იქნება $(-a,-b)$ წყვილი, რადგან

$$(a,b)+(-a,-b)=[a+(-a),\ b+(-b)]=(0,0).$$

ამრიგად, $\mathbf{R}^2$ ყოფილა კომუტაციური რგოლი. მისი ერთეული იქნება (1,0) წყვილი, რადგან

$$(a,b)(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,\ a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველ $(a,b)\neq(0,0)$ წყვილს გააჩნია შებრუნებული. ჯერ ენახოთ თუ როგორი სახის შეიძლება იყოს ნამდვილ რიცხვთა წყვილის შებრუნებული, თუ კი ის არსებობს. ვთქვათ, (a,b) არანულოვანი წყვილის შებრუნებული არის (x,y) წყვილი, ე. ი. $(a,b)(x,y)=(1,0)$; მაგრამ $(a,b)(x,y)=(ax-by,\ ay+bx)$. მაშასადამე, $(ax-by,\ ay+bx)=(1,0)$. ამრიგად, ორი წყვილის ტოლობის განსაზღვრების თანახმად,

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსენი კი არის

$$x=\frac{a}{a^2+b^2}, \quad y=-\frac{b}{a^2+b^2}.$$

ამრიგად, (a,b) წყვილის შებრუნებული, თუ კი ის არსებობს, უნდა იყოს

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

წყვილი, ვაჩვენოთ რომ ეს წყვილი მართლაც არის (a,b) წყვილის შებრუნებული. მართლაც,

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

როგორც ვხედავთ, ნამდვილ რიცხვთა ყველა დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე არის ველი.

ახლა $\mathbf{R}^2$ ველში ჩავდგათ $\mathbf{R}$ ველი. ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. ვთქვათ $\mathbf{R}_0^2$ არის $\mathbf{R}^2$ ველის $(a,0)$ სახის ყველა წყვილის სიმრავლე, ე. ი.

$$\mathbf{R}_0^2=\{(a,0)|a,0\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^2.$$

ასახვა $\varphi\colon\mathbf{R}_0^2\to\mathbf{R}$, ისეთი, რომ $\varphi(a,0)\to a$, არის $\mathbf{R}_0^2$-ის იზომორფიზმი $\mathbf{R}$-ზე. მართლაც,

$$\left.\begin{matrix}(a,0)\to a\\(b,0)\to b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(a,0)+(b,0)=(a+b,0)\to a+b,\\(a,0)(b,0)=(ab,0)\to ab.\end{cases}$$

მაშასადამე, $\mathbf{R}_0^2$ სიმრავლე, როგორც ველის იზომორფული წინარე სახე, აგრეთვე ველია და ამასთანავე იმავე ოპერაციების მიმართ, რომლებიც $\mathbf{R}^2$-ზეა განსაზღვრული. ცხადია, რომ $\mathbf{R}^2=$ $=\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}_0^2\,.\,\mathbf{R}_0^2$. ამრიგად, $\mathbf{R}_0^2$ არის $\mathbf{R}^2$ ველის ქვეველი, ამას გარდა $\mathbf{R}$ $\mathbf{R}^2=\varnothing$. ამიტომ თანახმად ლემისა, მოცემული φ იზომორფიზმისათვის, $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}_0^2\,.\mathbf{R}$ სიმრავლე იქნება ველი, რომელიც ქვეველის სახით შეიცავს $\mathbf{R}$ ველს და რომელზედაც იზომორფულად აისახება $\mathbf{R}^2$ ველი. ამავე ლემის ძალით, იარსებებს ისეთი $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$ იზომორფიზმი, რომელიც $\mathbf{R}_0^2$-ზე დაემთხვევა მოცემულ φ იზომორფიზმს. ლემის ძალით, ეს ψ იზომორფიზმი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\psi(a,b)=\begin{cases}(a,b),\text{თუ }(a,b)\in\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{R}_0^2,\quad\text{ე.ი.}\quad\text{როცა}\quad b\neq0,\\\varphi(a,b)=a,\ \text{თუ }(a,b)\in\mathbf{R}_0^2,\text{ე.ი.}\quad\text{როცა}\quad b=0.\end{cases}$$

$\mathbf{C}$ ველს ეწოდება კომპლექსურ რიცხვთა ველი, ხოლო მის $\psi(a,b)$ ელემენტებს, რომლებსაც ჩვენ მცირე ბერძნული ასოებით აღვნიშნავთ – კომპლექსური რიცხვები.

$\mathbf{R}^2$ ველზე, ცხადია, სამართლიანია ტოლობა:

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0).$$

$\mathbf{C}$ ველზე კი, $\psi\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$ იზომორფიზმის ძალით, სამართლიანი იქნება ტოლობა:

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=-1.$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $\mathbf{C}$ ველი შეიცავს $(0,1)$ წყვილს, რომლის კვადრატი (-1)-ის ტოლია. $(0,1)$ კომპლექსური რიცხვი აღინიშნება i სიმბოლოთი, მას წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება და აქვს თვისება: $i^2=-1$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველ α კომპლექსურ რიცხვს, რომლის წინარე სახე $\mathbf{R}^2$-ზე ψ იზომორფიზმის დროს არის ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (a,b) წყვილი, შეიძლება მიეცეს სახე $\alpha=a+bi$. მართლაც, $\mathbf{R}^2$-ზე სამართლიანია ტოლობა:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1).$$

აქედან, ψ იზომორფიზმის ძალით, $\mathbf{C}$-ზე გვექნება: $\alpha=a+bi$. კომპლექსური რიცხვის ამ სახეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ჩვეულებრივი სახე. კომპლექსური რიცხვების ხმარებისას, საზოგადოდ მათ ჩვეულებრივ სახეს იყენებენ. bi სახის კომპლექსურ რიცხვებს წმინდა წარმოსახვითი რიცხვები ეწოდება. α კომპლექსური რიცხვის $\alpha=a+bi$ ჩაწერაში a ნამდვილ რიცხვს ეწოდება α რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და აღინიშნება $\mathrm{Re}\alpha$ სიმბოლოთი, bi წმინდა წარმოსახვით რიცხვს კი ეწოდება α რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი, ხოლო b ნამდვილ რიცხვს ეწოდება α რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი – აღინიშნება $\mathrm{Im}\alpha$ სიმბოლოთი.

ვიცით, რომ $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$, $\mathrm{i}\in\mathbf{C}$, $\mathrm{i}\notin\mathbf{R}$. დავამტკიცოთ, რომ

$$\mathbf{R}(i)=\mathbf{C} \tag{5}$$

$\mathbf{R}(i)$ ველის განსაზღვრების ძალით, $\mathbf{R}(i)\subseteq\mathbf{C}$. მაშასადამე, (5)-ის დასამტკიცებლად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{R}(i)$, ე. ი. რომ $\mathbf{C}$-ს ყოველი α რიცხვი $\mathbf{R}(i)$-საც ეკუთვნის. ეს მართლაც ასეა, რადგან $\alpha=a+bi$; მაგრამ a, b, $i\in\mathbf{R}(i)$ და $\mathbf{R}(i)$ კი ველია, ამიტომ $a+bi\in\mathbf{R}(i)$. ამრიგად, **კომპლექსურ რიცხვთა ველი ეს არის მინიმალური რიცხვითი ველი, რომელიც შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა ველს და i წარმოსახვით ერთეულს**.

დავადგინოთ ახლა წესები, კომპლექსურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებებისათვის. (3) და (4) ტოლობებისა და $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$ იზომორფიზმის ძალით, $\mathbf{C}$-ზე გვექნება:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \qquad \text{და}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \tag{6}$$

პირველი ტოლობიდან, ველში ელემენტთა სხვაობის განსაზღვრების თანახმად, გვექნება:

$$(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+[-(c+di)]=(a+bi)+[(-c)+(-di)]=$$
$$=[a+(-c)]+[b+(-d)]=(a-c)+(b-d)i. \tag{7}$$

თუ $(c,d)\neq(0,0)$, მაშინ $\mathbf{R}^2$-ზე გვექნება:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)(c,d)^{-1}=(a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2}\right)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

აქედან ψ იზომორფიზმის ძალით, $\mathbf{C}$-ზე გვექნება:

$$(a+bi)(c+di)^{-1}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

რადგანაც იზომორფიზმის დროს შებრუნებული ელემენტის ანასახი ანასახის შებრუნებულის ტოლია. მაშასადამე, ველში ორი ელემენტის განაყოფის განსაზღვრების თანახმად გვექნება:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \qquad \text{თუ } c+di\neq 0. \tag{8}$$

ვთქვათ, მოცემულია $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი. $a-bi=a+(-bi)=a+(-b)i$ კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც $\overline{\alpha}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ეწოდება α რიცხვის შეუღლებული. ცხადია, რომ $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$. (6) და (7) ტოლობების ძალით გვექნება:

$$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+[a+(-b)i]=2a=2\mathrm{Re}\alpha,$$
$$\alpha-\overline{\alpha}=(a+bi)-[a+(-b)i]=2bi=2i\mathrm{Im}\alpha,$$
$$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)[a+(-b)i]=a^2+b^2$$

a^2+b^2 სიდიდეს $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ნორმა ეწოდება და $\mathrm{N}\alpha$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. $\alpha\overline{\alpha}=\mathrm{N}\alpha$.

ვთქვათ, მოცემულია $\alpha=a+bi$ და $\beta=c+di$ კომპლექსური რიცხვები. თუ გავითვალისწინებთ (6) და (7) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}=[a+(-b)i]\pm[c+(-d)i]=(a\pm c)+[(-b)\pm(-d)]i=$$
$$=(a\pm c)+[-(b\pm d)]i=(a\pm c)-(b\pm d)i=\overline{\alpha\pm\beta};$$

აგრეთვე (6) ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = (a - bi)(c - di) = [a + (-b)i][c + (-d)i] =$$
$$= (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{\alpha\beta};$$

ბოლოს, (8) ტოლობის ძალით გვექნება:

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{a + (-b)i}{c + (-d)i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

მაშასადამე,

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta},\ \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta},\quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}.$$

ამრიგად, ნებისმიერ რაციონალურ თანაფარდობაში კომპლექსურ რიცხვებს შორის, თუ ყოველ კომპლექსურ რიცხვს შეუღლებულით შევცვლით, მაშინ შედეგიც შეუღლებულით შეიცვლება.

თეორემა. **კომპლექსურ რიცხვთა ველი იზომორფიზმამდე სიზუსტით ერთადერთია.**

დამტკიცება. ვიცით, რომ $\mathbf{C}=\mathbf{R}(i)$. ვთქვათ, რომ F არის ნებისმიერი ველი, რომელიც ქვეველის სახით შეიცავს **R**-ს და ვთქვათ F-ში არსებობს ისეთი j ელემენტი, რომ $j^2=-1$, ე.ი. F.**R**, j.F, j.**R**. ვთქვათ, P არის F-ის მინიმალური ქვეველი, რომელიც შეიცავს **R**-ს და j-ს, ე. ი. $P=\mathbf{R}(j)\subset F$. ნებისმიერი a და b-სათვის **R**-დან, ცხადია ელემენტი $a+bj\in\mathbf{R}(j)$ (აქ შეკრება და გამრავლება F-ზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციებია). ვაჩვენოთ, რომ **R**-ის განსხვავებულ (a,b) და (c,d) დალაგებულ წყვილებს F-ზე განსხვავებული $a+bj$ და $c+dj$ ელემენტები ეთანადება. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $a+bj=c+dj$ და $b\neq d$ (რადგან $b=d\Rightarrow a=c$). უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $-c+(-b)j$ ელემენტი, მივიღებთ: $a\text{-}c=(d\text{-}b)j$; რადგანაც $d\text{-}b\neq 0$, ამიტომ თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $(d\text{-}b)^{-1}$-ზე, მივიღებთ: $j = \dfrac{a - c}{d - b} \in \mathbf{R}$, რაც შეუძლებელია.

ცხადია, რომ სიმრავლე

$$M=\{a+bj|a,b\in\mathbf{R}\}\subseteq\mathbf{R}(j).$$

ვაჩვენოთ, რომ M არის $\mathbf{R}(j)$-ს ქვეველი. რადგანაც $a+bj,\ c+dj\in$F, ამიტომ $(a+bj)-(c+dj)\in$F, ე. ი.

$$(a+bj)-(c+dj)=(a+bj)+[-(c+dj)]=(a-c)+(b-d)j\in M;$$

ვთქვათ $c+dj\neq 0$, ამიტომ $(a+bj)(c+dj)^{-1}\in$F და რადგან $j^2=-1$, გვექნება:

$$(a+bj)(c+dj)^{-1}=$$

$$=\frac{a+bj}{c+dj}=\frac{a+bj}{c+dj}\cdot\frac{c+(-d)j}{c+(-d)j}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}j\in M.$$

მამასადამე, M არის $\mathbf{R}(j)$-ს ქვეველი. ახლა ცხადია, რომ ნებისმიერი $a\in\mathbf{R}$: $a+0j\in$M, ე. ი. R$\subset$M; ხოლო $j=0+1\cdot j\in$M, ამრიგად, M არის F-ის ქვეველი, რომელიც შეიცავს $\mathbf{R}$-ს და j-ს და რადგანაც ჩვენი დაშვების ძალით ასეთი მინიმალური ველი არის P, ამიტომ

$$P=\{a+bj|a,b\in R\}.$$

ასახვა f: P$\to\mathbf{C}$ ისეთი, რომ f : $a+bj\to a+bi$ არის P ველის იზომორფიზმი $\mathbf{C}$ ველზე. მართლაც:

$$\left.\begin{array}{l}a+bj\to a+bi\\ c+dj\to c+di\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+bj)+(c+dj)=(a+c)+(b+d)j\to(a+c)+(b+d)i=(a+bi)+(c+di),\\(a+bj)(c+dj)=(ac-bd)+(bc+ad)j\to(ac-bd)+(bc+ad)i=(a+bi)(c+di).\end{cases}$$

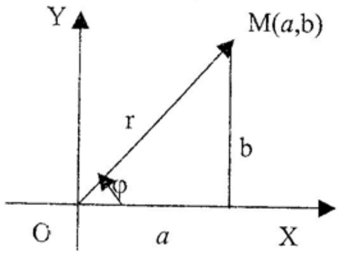
§ 2. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული და ტრიგონომეტრიული სახე

$\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი გამოვსახოთ XOY სიბრტყეზე M(a,b) წერტილით, ე.ი. წერტილით, რომლის კოორდინატებია a=Reα და b=Imα. ცხადია, რომ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული წერტილი XOY სიბრტყეზე და XOY სიბრტყის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული კომპლექსური რიცხვი. M(a,b)

წერტილს XOY სიბრტყეზე ეწოდება $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის <u>აფიქსი</u>. როგორც ვიცით ნამდვილი რიცხვები გამოისახებიან XOY სიბრტყეზე წერტილებით, რომლის ორდინატებიც 0-ის ტოლია. ე. ი. წერტილებით აბსცისთა ღერძზე. ორდინატთა ღერძზე განლაგდებიან წმინდა წარმოსახვითი bi რიცხვები. კოორდინატთა სათავეს შეესაბამება რიცხვი 0.

XOY სიბრტყეს, რომელზედაც გამოისახებიან კომპლექსური რიცხვები, ეწოდება კომპლექსური სიბრტყე. მის აბსცისთა ღერძს ეწოდება ნამდვილი ღერძი, ხოლო ორდინატთა ღერძს – წარმოსახვითი ღერძი.

კომპლექსურ რიცხვს შეიძლება აგრეთვე შევუსაბამოთ ვექტორი, რომლის სათავე კოორდინატთა სათავეშია, ხოლო ბოლო კომპლექსური რიცხვის აფიქსშია, ე.ი. აფიქსის რადიუს-ვექტორი. მაშასადამე, $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი a და წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი b წარმოადგენენ ამ რადიუს. ვექტორის გეგმილებს ნამდვილ და წარმოსახვით ღერძებზე შესაბამისად (a და b-ს ნიშნების მხედველობაში მიღებით).



r მანძილს კოორდინატთა სათავიდან α რიცხვის აფიქსამდე ანუ რაც იგივეა, α რიცხვის აფიქსის რადიუს-ვექტორის სიგრძეს ეწოდება <u>α რიცხვის მოდული</u> და როგორც ვიცით აღინიშნება $|\alpha|$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $|\alpha|\geq 0$, ამასთანავე $|\alpha|=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=0$. φ კუთხეს ნამდვილი ღერძის დადებით მიმართულებასა და α რიცხვის აფიქსის რადიუს-ვექტორს შორის ეწოდება α <u>რიცხვის არგუმენტი</u> და აღინიშნება $\arg\alpha$ სიმბოლოთი. შევნიშნოთ, რომ $\arg\alpha$-ს აქვს აზრი

მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha \neq 0$. როცა $\alpha=0$, მაშინ მისი არგუმენტი განუსაზღვრელია.

როგორც ნახაზიდან ჩანს,

$$a=\mathrm{r}\cos\varphi,\ b=\mathrm{r}\sin\varphi.$$

მაშასადამე,

$$a+bi=\mathrm{r}\cos\varphi+\mathrm{ir}\sin\varphi=\mathrm{r}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

კომპლექსური რიცხვის ასეთ სახეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის <u>ტრიგონომეტრიული სახე.</u>

ვნახოთ როგორია კომპლექსურ რიცხვთა ნამრავლის ტრიგონომეტრიული სახე. ვთქვათ

$\alpha=\mathrm{r}_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ და $\beta=\mathrm{r}_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

მაშინ

$$\alpha\beta=\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=$$

$$=\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$

$$=\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \tag{9}$$

ე. ი. $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ და $\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta$.

ვიპოვოთ α კომპლექსური რიცხვის შეუღლებულის და შებრუნებულის ტრიგონომეტრიული სახეები. გვაქვს

$$\overline{\alpha}=\mathrm{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\mathrm{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)), \tag{10}$$

რადგანაც cos არის ლუწი ფუნქცია, sin კი კენტი, ე. ი.

$$|\overline{\alpha}|=|\alpha| \text{ და } \arg\overline{\alpha}=-\arg\alpha.$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ არის α-ს შეუღლებული, მაგრამ ეს არ არის მისი ტრიგონომეტრიული სახე, რადგანაც ტრიგონომეტრიულ სახეში ნამდვილ და წმინდა წარმოსახვის ნაწილებს შორის აუცილებლად უნდა იყოს ნიშანი „+“.

ვთქვათ $\alpha \neq 0$, მაშინ (10)-ის ძალით,

$$\alpha^{-1}=(\mathrm{r}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi))^{-1}=\frac{1}{\mathrm{r}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}=$$

$$= \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi)} = \frac{r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \tag{11}$$
$$= r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),$$

ე.ი. $|\alpha^{-1}|=|\alpha|^{-1}$ და $\arg(\alpha^{-1})= -\arg\alpha$.

ვნახოთ ახლა როგორია კომპლექსურ რიცხვთა განაყოფის ტრიგონომეტრიული სახე. ვთქვათ $\alpha=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, ხოლო $\beta=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, მაშინ, (11)-ის ძალით, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}$,

ე.ი.

$$\alpha\beta^{-1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(r_2^{-1}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))) =$$
$$= r_1 \cdot r_2^{-1}(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 +$$
$$+ \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

მამასადამე, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ და $\arg\frac{\alpha}{\beta} = \arg\alpha - \arg\beta$.

დავამტკიცოთ, რომ ე. წ. <u>მუავრის ფორმულა</u>

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{12}$$

სამართლიანია ნებისმიერი მთელი n რიცხვისთვის.

1) ვთქვათ $n>0$. (12) ფორმულა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. როცა $n=2$, მაშინ (9)-ის ძალით

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

დავუშვათ, რომ

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{n-1} = r^{n-1}\left(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi\right) \tag{13}$$

(13)-ის და (9)-ის თანახმად

$$\begin{aligned}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{n} &= \left(r^{n}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{n-1} r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= r^{n-1}\left(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi\right) r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= r^{n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).\end{aligned} \tag{14}$$

2) ვთქვათ $n=0$. ერთეულოვანი ელემენტის განსაზღვრების თანახმად,

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{0} = 1.$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ $r^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1$. მაშასადამე,

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{0} = r^{0}(\cos 0 + i\sin 0).$$

3) ვთქვათ $n<0$. დავუშვათ $n=-m$, სადაც $m>0$ მთელი რიცხვია. ამიტომ, (11)-ის და (14)-ის ძალით გვექნება:

$$\begin{aligned}&\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{n} = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{-m} = \\ &= \left(\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{-1}\right)^{m} = \left(\left(r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)\right)^{m} = \\ &= r^{-m}(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)) = r^{n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).\end{aligned}$$

§ 3. ფესვის ამოღება კომპლექსური რიცხვიდან

ვთქვათ n ნატურალური რიცხვია. n-ური ხარისხის ფესვი $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან ეწოდება $\beta=\rho(\cos\psi+ +i\sin\psi)$ კომპლექსურ რიცხვს (თუ კი ასეთი საზოგადოდ არსებობს), რომელიც $\sqrt[n]{\alpha}$ სიმბოლოთი აღინიშნება და ის თვისება აქვს, რომ $\beta^n=\alpha$, ე. ი.

$$\left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^{n} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{15}$$

ვთქვათ, რომ ასეთი β რიცხვი არსებობს, მაშინ მუავრის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$\rho^n = r$, და $n\psi = \varphi + 2k\pi$

[illegible] $= \varphi + 2k\pi$ (k ნებისმიერი მთელია),

[illegible]

$\sqrt[n]{r}$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{და} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

აქ $\sqrt[n]{r}$ არის დადებითი r რიცხვიდან ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობა. ამგვარად, თუ კი არსებობს (15) თვისების მქონე β კომპლექსური რიცხვი, მაშინ მას ექნება სახე:

$$\beta = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

აქედან, მუავრის ფორმულის თანახმად და სინუს და კოსინუს ფუნქციების პერიოდულობის გამო, ვღებულობთ, რომ $\beta^n = \alpha$, ე.ი.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{16}$$

აქ k ნებისმიერი მთელია, მაგრამ k-ს განსხვავებული მნიშვნელობებისათვის საძიებელი ფესვის მნიშვნელობები როდია განსხვავებული. ვაჩვენოთ, რომ თუ k-ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს: $0, 1, 2, \ldots, n-1$, მაშინ მივიღებთ ფესვის n განსხვავებულ მნიშვნელობას. მართლაც, ვთქვათ $0 \le k_1 < k_2 \le n-1$, მაშინ

$\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = 2\frac{k_2 - k_1}{n}\pi$, მაგრამ $0 < k_2 - k_1 < n$, ე.ი. $\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n}$ და $\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n}$ არგუმენტები არ განსხვავდებიან 2π-ს ჯერადით; მაშასადამე, როცა $k = k_1$ და $k = k_2$, შესაბამისი ფესვების მნიშვნელობები განსხვავებულია.

ვთქვათ, ახლა k ნებისმიერი მთელია, მაშინ

$k = nq + r$, $0 \le r \le n-1$ (q და r მთელი რიცხვებია) და

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

ე. ი. k-ს და r-ის შესაბამისი ფესვების არგუმენტები განსხვავდებიან 2π-ს ჯერადით; მაშასადამე, k-ს შესაბამისი ფესვის მნიშვნელობა იგივეა რაც r-ის შესაბამისი ფესვის მნიშვნელობა.

ამგვარად, n-ური ხარისხის ფესვი კომპლექსური α რიცხვიდან ყოველთვის არსებობს და მას აქვს n განსხვავებული მნიშვნელობა, რომლებიც მიიღება (16) ფორმულიდან, როცა k=0, 1, 2, . . . , n-1 .

ცხადია, რომ $\sqrt[n]{\alpha}$ ფესვის ყველა მნიშვნელობის აფიქსები წარმოადგენენ წვეროებს, წესიერი მრავალკუთხედისა, რომელიც ჩაწერილია $\sqrt[n]{r}$ რადიუსიან წრეწირში ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

განსხვავებული მნიშვნელობა აქვს n-ური ხარისხის ფესვებს რიცხვიდან 1. (16) ფორმულის თანახმად,

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\rho_k\,(k=0,1,...,n-1).$$

1-დან n-ური ხარისხის ფესვის ნებისმიერი მთელი ხარისხი კვლავ არის 1-დან n-ური ხარისხის ფესვი. მართლაც,

$$\left(\rho_k^h\right)^n=\rho_k^{hn}=\rho_k^{nh}=\left(\rho_k^n\right)^h=1.$$

1-დან n-ური ხარისხის ρ_k და ρ_ℓ ფესვთა ნამრავლი და განაყოფი კვლავ არის 1-დან n-ური ხარისხის ფესვი. მართლაც,

$$\left(\rho_k\rho_\ell\right)^n=\rho_k^n\rho_\ell^n=1,\quad \left(\frac{\rho_k}{\rho_\ell}\right)^n=\left(\rho_k\rho_\ell^{-1}\right)^n=1.$$

<u>**განსაზღვრება**</u> **ვიტყვით, რომ 1-დან n-ური ხარისხის ρ_k ფესვი ეკუთვნის m მაჩვენებელს, თუ m არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც** $\rho_k^m=1$. ცხადია, რომ $0<m\le n$, რადგანაც $\rho_k^n=1$ ტოლობა ყოველთვის სამართლიანია.

სამართლიანია შემდეგი

<u>**თეორემა.**</u> **ვთქვათ 1-დან n-ური ხარისხის ρ_k ფესვი ეკუთვნის m მაჩვენებელს. მაშინ იმისათვის, რომ სრულდებოდეს** $\rho_k^h=1$ **ტოლობა, სადაც h მთელი რიცხვია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $m|h$.**

<u>დამტკიცება</u> **<u>საკმარისობა</u>**.. მართლაც, თუ $m|h$, მაშინ $h=mq$, ე.ი. $\rho_k^h=\rho_k^{mq}=\left(\rho_k^m\right)^q=1$

<u>აუცილებლობა.</u> ვთქვათ $\rho_k^h=1$ და $h=mq+r$, $0\le r<m$ მაშინ გვექნება:

$$\rho_k^h=\rho_k^{mq+r}=\left(\rho_k^m\right)^q\rho_k^r=\rho_k^r,\ \text{ე.ი.}\ \rho_k^r=1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $r=0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში r იქნებოდა ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\rho_k^r=1$, რაც იმას ეწინააღმდეგება, რომ ρ_k ეკუთვნის m მაჩვენებელს.

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ 1-დან n-ური ხარისხის ρ_k ფესვი არის პირველადი n-ური ხარისხის ფესვი 1-დან, თუ ის ეკუთვნის n მაჩვენებელს, ე. ი. n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\rho_k^n=1$.

ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია

<u>თეორემა.</u> ყოველი ნატურალური $n\ge 2$ რიცხვისათვის ρ_1 არის პირველადი n-ური ხარისხის ფესვი 1-დან.

მართლაც, ვთქვათ ρ_1 ეკუთვნის m მაჩვენებელს, მაშინ მუავრის ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\rho_1^m=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^m=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}=1;$$

ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\cos\frac{2m\pi}{n}=1$ და $\sin\frac{2m\pi}{n}=0$, ე. ი. როცა $n|m$ და $n|2m$ და მაშასადამე, როცა $n|m$; ამრიგად $n\le m$, რადგან n და m ორივე ნატურალურია. მაგრამ მეორეს მხრივ, ვიცით, რომ $m\le n$, მაშასადამე $m=n$.

ყოველი n-ური ხარისხის ფესვი 1-დან არის ρ_1 პირველადი ფესვის რომელიღაც ხარისხი. მართლაც,

$$\rho_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\rho_1^k.$$

მაშასადამე, 1-დან პირველადი n-ური ხარისხის ფესვის ρ_1^k (k=0, 1, ..., n-1) ხარისხებით ამოიწურება 1-დან n-ური ხარისხის ყველა ფესვთა სიმრავლე.

ვთქვათ, ρ_s არის ნებისმიერი პირველადი n-ური ხარისხის ფესვი 1-დან. განვიხილოთ მათი ხარისხები: $\rho_s^0,\rho_s^1,\rho_s^2,\cdots,\rho_s^{n-1}$. ვაჩვენოთ, რომ ყველა ეს ხარისხი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $0\le t<r\le n-1$ და $\rho_s^r=\rho_s^t$. მაშინ ავექნება: $\rho_s^{r-t}=1$, საიდანაც $n|r-t$, რაც შეუძლებელია, რადგან $r-t<n$ და r-t და n ორივე ნატურალური რიცხვია, ე. ი. $\rho_s^r\neq\rho_s^t$. მაშასადამე, 1-დან ნებისმიერი პირველადი n-ური ხარისხის ρ_s (და არა მარტო ρ_1) ფესვის ρ_s^h (h=0,1, ..., n-1) ხარისხებით ამოიწურება 1-დან n-ური ხარისხის ყველა ფესვთა სიმრავლე.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი:

<u>**თეორემა.**</u> **იმისათვის, რომ 1-დან n-ური ხარისხის ρ_k ფესვი იყოს პირველადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ (k,n)=1.**

დავიწყოთ **საკმარისობის** დამტკიცებით. ვთქვათ (k,n)=1 და ρ_k ეკუთვნის m მაჩვენებელს, ე. ი. $\rho_k^m=1$, მაგრამ $\rho_k^m=\left(\rho_1^k\right)^m=\rho_1^{km}$, ე.ი. $\rho_1^{km}=1$, რადგანაც ρ_1 ფესვი ეკუთვნის n მაჩვენებელს, ამიტომ $n|km$, და ამრიგად $n|m$; აქედან გამომდინარეობს, რომ $n\le m$. მეორე მხრივ ვიცით, რომ $m\le n$, ე. ი. m=n და ρ_k პირველადი ფესვი ყოფილა.

აუცილებლობა დავამტკიცოთ წინააღმდეგობის გზით, ე. ი. დავუშვათ, რომ ρ_k პირველადი ფესვია, მაგრამ (k,n)=d>1. აქედან ავექნება: $k=dk_1$ და $n=dn_1$, ე. ი. $d=\frac{k}{k_1}=\frac{n}{n_1}$ ანუ $nk_1=kn_1$. გვაქვს:

$$\rho_k^{n_1}=\left(\rho_1^k\right)^{n_1}=\rho_1^{kn_1}=\left(\rho_1^n\right)^{k_1}=1;$$

მაგრამ $n_1=\frac{n}{d}<n$, რაც შეუძლებელია, რადგან ρ_k ეკუთვნის n მაჩვენებელს. ამნაირად, $(k,n)=1$.

ახლა გამოვსახოთ α კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვები 1-დან პირველადი n-ური ხარისხის ფესვების ხარისხების საშუალებით. ვთქვათ, β არის α რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობა, ე. ი. $\beta^n=\alpha$; ვიცით აგრეთვე, რომ $\rho_k^n=1$, ე.ი. $\left(\beta\rho_k\right)^n=\beta^n\rho_k^n=\alpha$. ანუ $\left(\beta\rho_1^k\right)^n=\alpha$ მაშასადამე, თუ β არის $\sqrt[n]{\alpha}$-ს, ერთ-ერთი მნიშვნელობა, მაშინ ამ თვისების ყველა n განსხვავებული მნიშვნელობა იქნება: $\beta=\beta\rho_1^0,\ \beta\rho_1,\ \beta\rho_1^2,\ \ldots,\beta\rho_1^{n-1}$.

განვიხილოთ ე. წ. ორწევრა განტოლება $x^n-\alpha=0$, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ხოლო α ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი. ცხადია, რომ

$$x^n=\alpha\Rightarrow x=\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

სადაც $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. ორწევრა განტოლება სხვა გზითაც შეიძლება იქნეს ამოხსნილი: თუ როგორმე ვიპოვეთ $\sqrt[n]{\alpha}$-ს რომელიმე β მნიშვნელობა, მაშინ,

$$x=\beta\rho_1^k\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

§4. უტოლობანი კომპლექსურ რიცხვთა ჯამისა და სხვაობისათვის

დავამტკიცოთ, რომ თუ α და β კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|. \tag{17}$$

მართლაც, ვთქვათ

$\alpha=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ და $\beta=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, სადაც r_1 და $r_2\ \ge 0$, მაშინ

$$|\alpha+\beta|=|r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2+i(r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2)|=$$

$$=\sqrt{(r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2)^2+(r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2)^2}=$$

$$=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\le\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2}=r_1+r_2=|\alpha|+|\beta|.$$

მაშასადამე $\quad |\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

აქ $b+d=0$, რადგანაც $|\alpha+\beta|$ ნამდვილი რიცხვია.

დამტკიცებულის ძალით, გვექნება:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha+(-\beta)|\le|\alpha|+|-\beta|=|\alpha|+|\beta| \tag{18}$$

(17) და (18) უტოლობათა გაერთიანებით, ვღებულობთ, რომ

$$|\alpha\pm\beta|\le|\alpha|+|\beta|.$$

ვაჩვენოთ ახლა, რომ

$$|\alpha\pm\beta|\ge||\alpha|-|\beta||.$$

მართლაც,

$|\alpha|=|(\alpha\pm\beta)\mp\beta|\le|\alpha\pm\beta|+|\beta|$; ე.ი. $|\alpha\pm\beta|\ge|\alpha|-|\beta|$;

ასევე

$|\beta|=|(\beta\pm\alpha)\mp\alpha|\le|\beta\pm\alpha|+|\alpha|$; ე.ი. $|\alpha\pm\beta|\ge|\beta|-|\alpha|$,

აქედან კი გამოდის, რომ $\quad |\alpha\pm\beta|\ge||\alpha|-|\beta||$

§1. უცნობთა წრფივი გარდაქმნის მატრიცი

<u>განსაზღვრება</u> $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ უცნობთა წრფივი გარდაქმნა $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ უცნობებად K ველის მიმართ ეწოდება უცნობთა პირველი სისტემიდან უცნობთა მეორე სისტემაზე ისეთ გადასვლას, როცა მეორე სისტემის ყოველი უცნობი წრფივად გამოისახება პირველი სისტემის უცნობების საშუალებით კოეფიციენტებით K ველიდან, ე. ი.

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_m = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $b_{kj} \in \mathrm{K}$. b_{kj} კოეფიციენტებისაგან შედგენილ mxn

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n.1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

მატრიცს ეწოდება <u>უცნობთა წრფივი გარდაქმნის მატრიცი</u>. ცხადია, რომ უცნობთა წრფივ გარდაქმნებსა და მატრიცებს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა თანადობა.

(1) უცნობთა წრფივი გარდაქმნა მოკლედ ჩაიწერება ასე:

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}x_j \qquad (k=1,2,\ldots,\mathrm{m});$$

ან კიდევ უფრო მოკლედ, (1) გარდაქმნას აღნიშნავენ S_B სიმბოლოთი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემულია უცნობთა წრფივი გარდაქმნა B მატრიცით. უცნობთა S_B წრფივი გარდაქმნა არის ასახვა $S_B\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ ისეთი, რომ

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{S_B} (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

ვთქვათ ახლა S_A არის $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ უცნობთა წრფივი გარდაქმნა K ველის მიმართ $(z_1, z_2, \ldots, z_\ell)$. უცნობებად, ე. ი.

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \qquad (i=1,2,3, \ldots, \ell). \tag{3}$$

ამ გარდაქმნის მატრიცი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell m} \end{pmatrix} \tag{4}$$

იქნება $\ell x m$ მატრიცი.

მიმდევრობით ჩავატაროთ ჯერ S_B, შემდეგ S_A გარდაქმნები, ე.ი.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{S_B} (y_1, y_2, \ldots, y_m) \xrightarrow{S_A} (z_1, z_2, \ldots, z_\ell).$$

მაშინ მივიღებთ

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right) x_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j ,$$

სადაც

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad (i=1,2,3, \ldots, \ell; j=1, 2, \ldots, \mathrm{n}). \tag{5}$$

მაშასადამე, უცნობთა

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3, \ldots, \ell). \tag{6}$$

წრფივი გარდაქმნა არის

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{S_C} (z_1, z_2, \ldots, z_\ell).$$

ასახვა.

უცნობთა S_C წრფივ გარდაქმნას ეწოდება S_A და S_B უცნობთა წრფივი გარდაქმნების ნამრავლი, ე. ი. განსაზღვრების თანახმად,

$$S_A \cdot S_B = S_C. \tag{7}$$

S_C უცნობთა წრფივი გარდაქმნის

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{\ell 1} & c_{\ell 2} & \cdots & c_{\ell n} \end{pmatrix}$$

მატრიცი არის ℓxn მატრიცი.

<u>**განსაზღვრება**</u> **ℓxn ზომის C მატრიცს ეწოდება ℓxm ზომის A მატრიცის ნამრავლი mxn ზომის B მატრიცზე და წერენ $C=A\cdot B$. ამასთანავე C მატრიცის ელემენტები გამოითვლება ე.წ. კოში-ბინეს (5) ფორმულებით, ე.ი. C მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი ტოლია A მატრიცის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის B მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამის.**

მაშასადამე, (7) ტოლობა საბოლოოდ ღებულობს სახეს:

$$S_A \cdot S_B = S_{AB}.$$

mxn ორ $A=(a_{ik})$ და $B=(b_{ik})$ მატრიცს <u>ტოლი</u> ვუწოდოთ და დავწეროთ $A=B$, თუ მათი ყველა შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე. ი. $a_{ik}=b_{ik}$.

იმის გამო, რომ ასახვათა კომპოზიციას ახასიათებს ასოციაციურობის თვისება, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$(S_A S_B)S_C = S_A(S_B S_C).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(\underset{l\times m}{A} \cdot \underset{m\times n}{B}) \cdot \underset{n\times s}{C} = \underset{l\times m}{A} \cdot (\underset{m\times n}{B} \cdot \underset{n\times s}{C}), \tag{8}$$

რადგანაც უცნობთა წრფივ გარდაქმნებსა და მატრიცებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

mxn ორი $A=(a_{ik})$ და $B=(b_{ik})$ მატრიცების ჯამი ეწოდება $C=(a_{ik}+b_{ik})$ მატრიცს და წერენ $C=A+B$.

რადგანაც ველის ელემენტები აკმაყოფილებენ კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის აქსიომებს შეკრების მიმართ, ამიტომ ადვილია იმის შემოწმება, რომ mxn მატრიცთა შეკრება აგრეთვე კომუტაციურია და ასოციაციურია, ე. ი.

$$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\underset{m\times n}{B}+\underset{m\times n}{A} \text{ და } (\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B})+\underset{m\times n}{C}=\underset{m\times n}{A}+(\underset{m\times n}{B}+\underset{m\times n}{C}) \tag{9}$$

მართკუთხოვანი მატრიცებისათვის სამართლიანია დისტრიბუციულობის კანონები, თუ სტრიქონებისა და სვეტების რიცხვი უზრუნველყოფს ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების შესაძლებლობას. სახელდობრ, დავამტკიცოთ, რომ

$$(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B})\underset{n\times s}{C}=\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times s}{C}+\underset{m\times n}{B}\,\underset{n\times s}{C}$$

$$\underset{m\times n}{C}(\underset{n\times s}{A}+\underset{n\times s}{B})=\underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times s}{A}+\underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times s}{B} \tag{10}$$

მართლაც, (10)-ის პირველი ტოლობის მარცხენა მატრიცის ელემენტი, რომელიც დგას მისი i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე, კოში-ბინეს (5) ფორმულის თანახმად, იქნება

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj};$$

მიღებული ტოლობის მარჯვნივ კი დგას (10)-ის პირველი ტოლობის მარჯვენა მატრიცის შესაბამისი ელემენტი. ანალოგიურად მტკიცდება (I)-ის მეორე ტოლობაც.

შევნიშნოთ, რომ AB და BA ნამრავლები ერთდროულად განისაზღვრება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B ერთი და იმავე რიგის კვადრატული მატრიცებია.

§2. მატრიცთა რგოლი

K ველის მიმართ n-ური რიგის მატრიცთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $M_n(K)$ სიმბოლოთი. ვაჩვენოთ, რომ **$M_n(K)$ არის არაკომუტაციური, ერთეულიანი, ნულგამყოფიანი რგოლი.**

მართკუთხოვანი მატრიცებისათვის ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ოპერაციები ცხადია ძალაში იქნება n-ური რიგის კვადრატული მატრიცების შემთხვევაშიც. (8)–(10) ტოლობის თანახმად, ძალაში დარჩება აგრეთვე კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის კანონები შეკრების მიმართ, ასოციაციურობის კანონი გამრავლების მიმართ და დისტრიბუციულობის ორივე კანონი. კომუტაციურობის კანონი გამრავლების მიმართ არ კმაყოფილდება, რადგანაც საზოგადოდ $AB \neq BA$ იმის გამო, რომ $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \neq \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kij}$ ნებისმიერი a_{rs} და b_{rs} ელემენტებისათვის.

$M_n(K)$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი იქნება მატრიცი, რომლის ყველა ელემენტი არის K ველის ნულოვანი ელემენტი. ეს მატრიცი O ასოთი აღინიშნება და ნულოვანი მატრიცი ეწოდება, რადგანაც $A+O=A$, შეკრების ოპერაციის და ტოლობის განსაზღვრების ძალით.

$A=(a_{ik})$ მატრიცის მოპირდაპირე მატრიცი ეწოდება $-A=(-a_{ik})$ მატრიცს, რადგანაც $A+(-A)=O$.

$M_n(K)$ რგოლის ერთეულოვანი ელემენტი იქნება მატრიცი, რომელიც E ასოთი აღინიშნება და რომლის მთავარ დიაგონალზე განლაგებულია K ველის ერთეულოვანი ელემენტები, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი არის K ველის ნულოვანი ელემენტი. მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$AE=EA=A.$$

$M_n(K)$ რგოლი ნულგამყოფიანია. მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} = 0.$$

განვიხილოთ

$y_1 = x_1$

$y_2 = \quad x_2$

$y_n = \qquad x_n$

უცნობთა წრფივი გარდაქმნა. ამ გარდაქმნას ეწოდება უცნობთა იგივური წრფივი გარდაქმნა, მისი მატრიცი არის ერთეულოვანი E მატრიცი. ეს გარდაქმნა უცნობთა წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლეზე, რომელთა მატრიცები n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებია, ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს, რადგანაც (7') ტოლობის თანახმად,

$$S_A \cdot S_E = S_E \cdot S_A = S_A.$$

<u>განსაზღვრება.</u> *A* მატრიცს $M_n(K)$ რგოლიდან ეწოდება გადაუგვარებელი, თუ მისი დეტერმინანტი $|A| \neq 0$, ხოლო *A*-ს ეწოდება გადაგვარებული, თუ $|A|=0$.

თუ A მატრიცი გადაუგვარებელია (გადაგვარებულია), მაშინ S_A უცნობთა წრფივ გარდაქმნასაც გადაუგვარებელი (გადაგვარებული) ეწოდება.

§ 3. შებრუნებული მატრიცი

მოვიგონოთ, რომ K ველის მიმართ n-ური რიგის A მატრიცის $|A|$ დეტერმინანტი არის

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_n)} (-1)^{I(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

რომელიც აგრეთვე შემდეგნაირადაც ჩაიწერება:

$$| A |= \sum_{i_1,i_2,\cdots i_n=1}^{n} \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} , \tag{11}$$

სადაც $i_1, i_2, \cdots, i_n$ ინდექსები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ღებულობენ 1,2,…,n მნიშვნელობებს და

$$\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} (-1)^{I(i_1,i_2,\cdots,i_n)}, \text{ როცა } i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ ინდექსები განსხვავებულია}, \\ 0, \text{ როცა } i_1,i_2,\cdots,i_n \text{ ინდექსებს შორის არის ერთნაირი}. \end{cases}$$

(11) ფორმულაში $|A|$ დეტერმინანტის წევრების თანამამრავლები დალაგებულია პირველი ინდექსების ზრდის მიხედვით. პირველი ინდექსების ყოველი სხვა დალაგების დროს, ან მათი გამეორების შემთხვევაში გვექნება:

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \delta_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_{k_1 i_1} a_{k_2 i_2} \cdots a_{k_n i_n} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} (-1)^{I(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{k_1 i_1} a_{k_2 i_2} \cdots a_{k_n i_n} +$$

$$+ 0 = (-1)^{t(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \; | A | +0 =$$

(რადგანაც დეტერმინანტთა თვისების ძალით, ყოველი ორი სტრიქონის ტრანსპოზიცია დეტერმინანტს ნიშანს უცვლის და $k_1, k_2, \cdots, k_n$ გადანაცვლება მიღებულია 1,2, . . ., n გადანაცვლებიდან $t(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ტრანსპოზიციის შედეგად)

$$= (-1)^{I(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \; | A | +0 =$$

(რადგანაც $I(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ და $t(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ რიცხვებს ერთნაირი წყვილადობა აქვთ).

$$= \delta_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \; | A |. \tag{12}$$

<u>თეორემა.</u> **მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი თანამამრავლი მატრიცების დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.**

<u>**დამტკიცება.**</u> ვთქვათ $C=AB$. მაშინ (11) და (5) ფორმულების ძალით, გვექნება:

$$|C|=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}c_{1i_1}c_{2i_2}\cdots c_{ni_n}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}\sum_{k_1=1}^{n}a_{1k_1}b_{k_1i_1}\sum_{k_2=1}^{n}a_{2k_2}b_{k_2i_2}\cdots$$

$$\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{nk_n}b_{k_ni_n}=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}b_{k_1i_1}b_{k_2i_2}\cdots$$

$$\cdots b_{k_ni_n}=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}b_{k_1i_1}b_{k_2i_2}\cdots b_{k_ni_n}=$$

$$=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{n}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\left(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}b_{k_1i_1}b_{k_2i_2}\cdots b_{k_ni_n}\right)=$$

((12) ფორმულით ძალით)

$$=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{n}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\left(\delta_{k_1,k_2,\cdots,k_n}|B|\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}\left(\delta_{k_1\cdots k_n}|B|\right)a_{1k_1}\cdots a_{nk_n}=\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}|B|\left(\delta_{k_1\cdots k_n}a_{1k_1}\cdots a_{nk_n}\right)=$$

$$=\left(\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}\delta_{k_1k_2\cdots k_n}a_{1k_1}\cdots a_{nk_n}\right)|B|=|A||B|.$$

მაშასადამე, $|AB|=|C|=|A||B|$ და თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცი. A მატრიცის ტრანსპონირებული იქნება

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცი. თუ A^{T} მატრიცის ყველა ელემენტის ნაცვლად დავწერთ მათ ალგებრულ დამატებებს, მივიღებთ

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცს, რომელსაც A მატრიცის <u>მიკავშირებული მატრიცი</u> ეწოდება.

<u>თეორემა.</u> იმისათვის, რომ n-ური რიგის A მატრიცი იყოს შებრუნებადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ ის იყოს გადაუგვარებელი.

<u>დამტკიცება.</u> ვთქვათ A მატრიცი გადაუგვარებელია, ე. ი. $|A|\neq 0$. განვიხილოთ მატრიცი, რომლის ელემენტებია A^* მატრიცის ელემენტების განაყოფები $|A|$-ზე, ე. ი.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

მატრიცი. თუ A მატრიცს გავამრავლებთ B მატრიცზე, მივიღებთ:

$$AB=BA=E.$$

მართლაც, A მატრიცის i-ური სტრიქონის (i ნებისმიერი რიცხვია 1,2, . . ., n რიცხვებიდან) ყველა ელემენტის B მატრიცის i-ური სვეტების შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი

$$a_{i1}\frac{A_{i1}}{|A|} + a_{i2}\frac{A_{i2}}{|A|} + \cdots + a_{in}\frac{A_{in}}{|A|} = |A|^{-1}\,(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) =$$

$=|A|^{-1}|A|=$e, ე. ი. AB ნამრავლის მთავარ დიაგონალზე იქნება e ელემენტი; A მატრიცის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის B მატრიცის j-ური სვეტის (j≠I) შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი კი

$$a_{i1}\frac{A_{j1}}{|A|}+a_{i2}\frac{A_{j2}}{|A|}+\cdots+a_{in}\frac{A_{jn}}{|A|}=|A|^{-1}\left(a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}\right)=$$

$=|A|^{-1}\cdot 0=0$, ე. ი. AB ნამრავლის მთავარი დიაგონალის გარეთ მდგომი ელემენტები იქნება 0. ამიტომ $AB=E$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $BA=E$. მაშასადამე,

$$B=A^{-1}$$

და თეორემის საკმარისობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ ახლა აუცილებლობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ A მატრიცი შებრუნებადია, ე. ი.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|AA^{-1}|=|E|=e^{n}=e; \tag{13}$$

მეორე მხრივ

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}| \tag{14}$$

(13) და (14)-დან გამომდინარეობს, რომ

$|AA^{-1}|=e$ ე.ი. $|A|\neq 0$.

§4. სკალარული მატრიცი

ვთქვათ A და B ნებისმიერი მატრიცებია $M_n(K)$ რგოლიდან, ხოლო h და l ნებისმიერ ელემენტებია K ველიდან, რომლებსაც სკალარები ვუწოდოთ.

განსაზღვრება. ***h* სკალარისა და *A* მატრიცის ნამრავლი – აღინიშნება *hA* სიმბოლოთი და ეწოდება მატრიცს, რომელსაც მივიღებთ თუ *A* მატრიცის ყველა ელემენტს *h*-ზე გავამრავლებთ.** ადვილია იმის შემოწმება, რომ

$$hA=Ah,\ h(A+B)=hA+hB,\ (h+\ell)A=hA+\ell A,\ h(\ell A)=(h\ell)A$$

აგრეთვე სამართლიანია ტოლობები:

$$(hA)B=A(hB)=h(AB)$$

მართლაც, ვთქვათ $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$, მაშინ ნებისმიერი i და j-სთვის

$$\sum_{k=1}^{n}(ha_{ik})b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}h(a_{ik}b_{kj})=h\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,$$

აქ მარცხენა მხარე არის $(hA)B$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტები, ხოლო მარჯვენა მხარე არის $h(AB)$ მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი, ამიტომ $(hA)B=h(AB)$. აგრეთვე

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(hb_{kj})=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}h)b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(ha_{ik})b_{kj}=h\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,$$

ე. ი.

$$A(hB)=h(AB).$$

<u>განსაზღვრება.</u> h სკალარისა და E მატრიცის hE ნამრავლს ეწოდება სკალარული მატრიცი.

სკალარული მატრიცი კომუტაციურია $M_n(K)$-ს ნებისმიერ A მატრიცთან. მართლაც,

$$(hE)A=E(hA)=(hA)E=A(hE).$$

§ 5. მატრიცული განტოლება

ვთქვათ მოცემულია K ველის მიმართ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad&\cdot\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m.
\end{aligned}\qquad(15)$$

განვიხილოთ შემდეგი სამი მატრიცი:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A არის mxn მატრიცი, შედგენილი უცნობების კოეფიციენტებისაგან; B არის mx1 (ერთსვეტიანი) მატრიცი, შედგენილი თავისუფალი წევრებისაგან; X არის nx1 (ერთსვეტიანი) მატრიცი, შედგენილი უცნობებისაგან.

(15)-ის ძალით, გვექნება:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ე. ი.

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{X}=\underset{m\times 1}{B} \tag{16}$$

(16) არის (15) სისტემის მატრიცული ჩაწერა და მას მატრიცული განტოლება ეწოდება.

განვიხილოთ განტოლება:

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{X}=\underset{m\times 1}{B} \qquad \text{სადაც } |A|\neq 0.$$

მაშინ გვექნება, A^{-1} მატრიცის განსაზღვრებისა და (12) ფორმულის თანახმად,

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B \;\Rightarrow\; X=A^{-1}B=(|A|^{-1}A^*)B=|A|^{-1}(A^*B).$$

მაგრამ

$$A^*B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & aA_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1}b_j \\ \sum_{j=1}^{n} A_{j2}b_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn}b_j \end{pmatrix},\text{ ე. ი.}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=|A|^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1}b_j \\ \sum_{j=1}^{n} A_{j2}b_j \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn}b_j \end{pmatrix},$$

აქედან, მატრიცთა ტოლობის განსაზღვრების ძალით,

$$x_k=|A|^{-1}\sum_{j=1}^{n} A_{jk}b_j=\frac{\Delta_k}{\Delta}. \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

ამრიგად, მივიღეთ კრამერის ფორმულების ახალი დამტკიცება.

§ 1. ერთუცნობიან პოლინომთა რგოლი

ვთქვათ K მოცემული ველია. განვიხილოთ K ველის ნებისმიერ ელემენტთა უსასრულო დალაგებული

$$f=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots), \qquad a_i \in K$$

მიმდევრობა, რომელიც შეიცავს არაუმეტეს ვიდრე სასრული რაოდენობის არანულოვან ელემენტებს. საზოგადოდ $n \geq 0$. მაგრამ თუ $n>0$, მაშინ $a_n \neq 0$. ყველა ასეთი შესაძლებელი მიმდევრობების სიმრავლე $\overline{K}$-ით აღვნიშნოთ.

ორ

$$f=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots) \text{ და } g=(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots)$$

მიმდევრობას ტოლი ვუწოდოთ, თუ $a_i=b_i$ ყოველი i...-სთვის, $i=0, 1, 2, \ldots$ ახლა $\overline{K}$-ზე განვსაზღვროთ შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები. f და g მიმდევრობების ჯამი ვუწოდოთ

$$f+g=(c_0, c_1, c_2, \ldots)$$

მიმდევრობას, სადაც $c_i=a_i+b_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. f და g მიმდევრობების ნამრავლი ვუწოდოთ

$$fg=(d_0, d_1, d_2, \ldots)$$

მიმდევრობას, სადაც

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l \quad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

კერძოდ,

$$d_0=a_0b_0, \ d_1= a_0b_1+a_1b_0, \ d_2= a_0b_2+a_1b_1+ a_2b_0, \ \ldots,$$

$$d_{n+m-1}=a_{n-1}b_m+ a_nb_{m-1}, \ d_{n+m}= a_nb_m, \ d_{n+m+1}= d_{n+m+2}= \ldots=0$$

თუ $n>0$ და $m>0$, მაშინ $d_{n+m} \neq 0$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$f+g=g+f \text{ და } fg=gf.$$

ავიღოთ კიდევ ერთი ნებისმიერი მიმდევრობა $h=(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ და ვაჩვენოთ, რომ

$$(f+g)+h=f+(g+h) \text{ და } (fg)h=f(gh).$$

პირველი ტოლობა ადვილი შესამოწმებელია. (fg)h მიმდევრობის კომპონენტი

$$p_j = \sum_{i+s=j} d_i c_s = \sum_{i+s=j} \left(\sum_{k+\ell=i} a_k b_\ell \right) c_s = \sum_{k+\ell+s=j} a_k b_\ell c_s ,$$

ხოლო f(gh) მიმდევრობის კომპონენტი

$$q_j = \sum_{k+i=j} a_k d'_i = \sum_{k+i=j} a_k \sum_{\ell+s=i} b_\ell c_s = \sum_{k+\ell+s=j} a_k b_\ell c_s ,$$

ე.ი. $p_j=q_j$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$(f+g)h=fh+gh.$$

მართლაც, (f+g)h მიმდევრობის კომპონენტი i ინდექსით იქნება

$$\sum_{k+\ell=i} (a_k + b_k) c_\ell = \sum_{k+\ell=i} a_k c_\ell + \sum_{k+\ell=i} b_k c_\ell$$

მარჯვენა მხარე ცხადია არის fh+gh მიმდევრობის კომპონენტი i ინდექსით.

ცხადია, რომ $\overline{\mathrm{K}}$ სიმრავლის ნულოვანი ელემენტი იქნება

$$(0,0,\ldots)$$

მიმდევრობა, ხოლო

$$f=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

მიმდევრობის მოპირდაპირე ელემენტი კი იქნება

$$-f=(-a_0, -a_1, -a_2, \ldots)$$

მიმდევრობა.

ამგვარად, $\overline{\mathrm{K}}$ სიმრავლე არის კომუტაციური რგოლი. ადვილია იმაში დარწმუნება, რომ $\overline{\mathrm{K}}$ რგოლის ერთეულოვანი ელემენტი იქნება

$$(e, 0, 0, \ldots)$$

მიმდევრობა.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ $\overline{\mathrm{K}}$ უნულგამყოფო რგოლია. მართლაც, ვთქვათ

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0 \ldots)(b_0, b_1, \ldots, b_m, 0 \ldots)=(d_0, d_1, \ldots, d_{n+m}, 0 \ldots),$$

სადაც $a_n\neq0$, $b_m\neq0$. მაშინ $d_{n+m}=a_nb_m\neq0$. ამრიგად, $\overline{\mathrm{K}}$ მთელობის არეა.

ახლა $\overline{K}$ რგოლში ჩავდგათ K ველი. ამ მიზნით შემდეგნაირად მოვიქცეთ. ვთქვათ $\overline{K}_0$ არის $\overline{K}$ რგოლის $(a_0, 0, 0, \ldots)$ სახის ყველა მიმდევრობის სიმრავლე, ე. ი.

$$\overline{K}_0=\{(a_0, 0, 0, \ldots) \mid a_0, 0\in K\}\subset\overline{K}.$$

განვიხილოთ ასახვა $\varphi:\overline{K}_0\to K$, რომელიც შემდეგნაირად იყოს განსაზღვრული:

$$\varphi:(a_0,0,0,\ldots)\to a_0.$$

ცხადია, რომ φ ასახვა არის $\overline{K}_0$-ის იზომორფიზმი K-ზე. მაშასადამე, $\overline{K}_0$ სიმრავლე, როგორც K ველის იზომორფული წინარე სახე, აგრეთვე ველია და ამასთანავე იმავე ოპერაციების მიმართ, რომლებიც $\overline{K}$-ზეა განსაზღვრული. ამრიგად, $\overline{K}_0$ არის $\overline{K}$ რგოლის ქვეველი. ცხადია აგრეთვე, რომ $\overline{K}=\overline{K}\setminus\overline{K}_0 . \overline{K}_0$ და $K . \overline{K}_0=\varnothing$. ამიტომ თანახმად ლემისა ჩადგმის შესახებ, მოცემული φ იზომორფიზმისათვის არსებობს რგოლი, სახელდობრ $\overline{K}\setminus\overline{K}_0 . K$, რომელიც ქვეველის სახით შეიცავს K ველს და რომელზედაც იზომორფულად აისახება $\overline{K}$ რგოლი. ამავე ლემის ძალით, არსებობს $\psi:\overline{K}\to\overline{K}\setminus\overline{K}_0 . K$ იზომორფიზმი, რომელიც შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$\psi((a_0,a_1,\cdots a_n,0,0,\cdots))=\begin{cases}(a_0,a_1,\cdots a_n,0,0,\cdots), \text{ თუ } (a_0,a_1,\cdots a_n,0,\cdots)\in\overline{K}\setminus\overline{K}_0 \text{ ე.ი. } n>0\\ a_0, \text{ თუ } (a_0,a_1,\cdots a_n,0,\cdots)\in\overline{K}_0, \quad \text{ე.ი. } n=0.\end{cases}$$

მაშასადამე, $\overline{K}\setminus\overline{K}_0 . K$ მთელობის არეა და K ველი კი მისი ქვეველია.

ახლა განვიხილოთ

$$x=(0,e,0,0,\ldots)$$

მიმდევრობა. $\overline{K}$ რგოლის ამ ელემენტს ვუწოდოთ უცნობი და გამრავლების ოპერაციის განსაზღვრების თანახმად, გვექნება:

$$x^k=(\overbrace{0,0,\cdots 0}^{k\text{-ჯერ}},e,0,\ldots) \qquad (k=1,2,\ldots) \qquad (1)$$

შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისა და (1) ტოლობების მხედველობაში მიღებით, $\overline{K}$-ზე გვექნება:

$$f=(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots)=(a_0, 0, 0, \dots)+(0, a_1, 0,\dots)+$$
$$+(0, 0, a_2, 0, \dots)+\dots+(0, 0, \dots 0, a_n, 0, \dots)=$$
$$=(a_0,0, 0, \dots)+(a_1, 0, 0, \dots)(0, e, 0, \dots)+(a_2,0, 0, \dots)(0, 0, e, 0,\dots)+$$
$$+\dots+(a_n,0,0,..)\ (\overbrace{0,0,\cdots 0}^{n\text{-ჯერ}},e,0,\dots)$$

ხოლო $\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$ რგოლზე, ψ იზომორფიზმის ძალით, გვექნება:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ .\ \text{სადაც } f(x)=\psi(f).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K=K[x] \tag{2}$$

მართლაც, $K\subset\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$, $x\in\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$, $x\overline{\in}K$. ამიტომ $\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$ რგოლის მინიმალური ქვერგოლი, რომელიც შეიცავს K ველს და x ელემენტს, როგორც ვიცით იქნება $K[x]$, ე.ი. $K[x]\subseteq\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$. მაშასადამე, (2) ტოლობის დასამტკიცებლად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K\subseteq K[x]$, ე. ი. რომ $\overline{K}\setminus\overline{K}_0.K$ რგოლის ყოველი ელემენტი $K[x]$ -საც ეკუთვნის. ეს მართლაც ასეა, რადგან

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n; \tag{3}$$

მაგრამ $a_0,a_1, \dots, a_n, x\in K[x]$ და $K[x]$ რგოლია, ამიტომ $f(x)\in K[x]$.

$K[x]$ მთელობის არეს ეწოდება ერთუცნობიან პოლინომთა რგოლი K ველის მიმართ, ხოლო მის $f(x)$ ელემენტებს – ერთუცნობიანი პოლინომები K ველის მიმართ.

ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ $\overline{K}$-ზე გვაქვს:

$$(a_0,a_1, \dots, a_n,0,0,\dots)+(b_0,b_1, \dots, b_m,0,0\dots)=$$
$$=\begin{cases}(c_0,c_1,\dots,c_n,0,0,\dots) & \text{თუ}\quad n\geq m,\\ (c_0,c_1,\dots,c_m,0,0,\dots) & \text{თუ}\quad m\geq n,\end{cases}$$

სადაც $c_i=a_i+b_i$;

და

$$(a_0,a_1, \dots, a_n,0,0,\dots)(b_0,b_1, \dots, b_m,0,0\dots)=$$

$=(d_0, d_1, \ldots, d_{n+m}, 0, 0, \ldots)$, სადაც $d_i = \sum\limits_{k+\ell=i} a_k b_\ell$

ამიტომ ψ: $\overline{\mathrm{K}} \to \mathrm{K}[x]$ იზომორფიზმის ძალით, $\mathrm{K}[x]$ -ზე გვექნება:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) x^k , \qquad (4)$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \cdot \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell x^\ell = \sum_{i=0}^{n+m} d_i x^i = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k+\ell=i} a_k b_\ell \right) x^i . \qquad (5)$$

ეს ორივე ტოლობა, სიმარტივის მიზნით შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩაიწეროს:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell x^\ell = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=i} a_k b_\ell \right) x^i ,$$

სადაც იგულისხმება, რომ სათანადო ადგილიდან a_k, b_k, c_k, d_i ნულოვანი ელემენტებია

(3)-ის ნაცვლად უფრო ხშირად წერენ:

$$\mathrm{f}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

K ველის $a_0, a_1, \ldots, a_n$, ელემენტებს ეწოდება f(x) პოლინომის კოეფიციენტები; a_0x^n, a_1x^{n-1}, …, $a_{n-1}x$, a_n-ს ეწოდებათ f(x) პოლინომის წევრები. თუ $a_0 \neq 0$, მაშინ a_0-ს ეწოდება პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი, a_0x^n-ს – უფროსი წევრი, ხოლო $n \geq 0$ რიცხვს – f(x) პოლინომის ხარისხი და წერენ

$$n = \deg \mathrm{f}(x).$$

თუ $n=0$, მაშინ f(x) ნულხარისხის პოლინომია, თუ $\mathrm{f}(x) = a_n \neq 0$; ხოლო f(x) პოლინომს ეწოდება ნულოვანი პოლინომი და იწერება $\mathrm{f}(x)=0$, თუ მისი ყველა კოეფიციენტი K ველის ნულოვანი ელემენტია, ე. ი. ნულოვანი პოლინომი არის K ველის ნულოვანი ელემენტი; ნულოვან პოლინომს ხარისხი არ მიეწერება.

(4) და (5) ტოლობების თანახმად,

$$\deg(f(x)+g(x)) \le \max(\deg f(x), \deg(x)) \qquad (6)$$

[illegible]

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x)+\deg(x). \qquad (7)$$

§ 2. პოლინომთა გაყოფადობა

ვთქვათ $f(x), g(x) \in K[x]$, ამასთანავე $g(x) \neq 0$.

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ $g(x)$ ყოფს $f(x)$-ს, ან $f(x)$ იყოფა $g(x)$-ზე და დავწერთ $g(x)|f(x)$, თუ კი $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ისეთი $q(x)$ პოლინომი, რომ $f(x)=g(x)q(x)$.

თუ კი ასეთი პოლინომი $K[x]$ -ში არ მოიძებნება, მაშინ ვიტყვით, რომ $g(x)$ არ ყოფს $f(x)$-ს და დავწერთ $g(x) \dagger f(x)$. გაყოფადობის შემთხვევაში $q(x)$ პოლინომი ცალსახად განისაზღვრება. მართლაც, ვთქვათ

$f(x)=g(x)q(x)$ და $f(x)=g(x)q_1(x)$, მაშინ $g(x)q(x)=g(x)q_1(x)$, ე.ი. $q(x)=q_1(x)$, რადგანაც $g(x) \neq 0$ და $K[x]$ უნულგამყოფო რგოლია.

<u>თეორემა</u>. (ნაშთით გაყოფის ალგორითმი). $K[x]$ რგოლის ნებისმიერი $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომებისათვის, სადაც $g(x) \neq 0$, $K[x]$ **-ში მოიძებნება $q(x)$ და $r(x)$ პოლინომთა ერთი ისეთი წყვილი, რომ შესრულდება ტოლობა:**

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, სადაც $r(x)=0$ ან $\deg r(x)<\deg g(x)$.

<u>დამტკიცება</u>. 1) ჯერ ვაჩვენოთ ასეთი $q(x)$ და $r(x)$ პოლინომების არსებობა. ცხადია, რომ $f(x)=g(x)\cdot 0+f(x)$. ამ ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი, როცა $f(x)=0$ ან $\deg f(x)<\deg g(x)$. ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. ვთქვათ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0 \neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m,\ b_0 \neq 0.$$

განვიხილოთ

$$f(x)-a_0b_0^{-1}x^{n-m}g(x)=f_1(x)$$

პოლინომი. თუ $f_1(x)=0$, მაშინ თეორემა უკვე დამტკიცებულია. ამიტომ ვთქვათ $f_1(x)\neq 0$, რადგანაც $f(x)$ პოლინომის უფროსი წევრი არის a_0x^n, ხოლო $-a_0b_0^{-1}x^{n-m}g(x)$ პოლინომის უფროსი წევრი არის $-a_0b_0^{-1}b_0x^n$, ამიტომ, (6)-ის ძალით, $\deg f_1(x)<\deg f(x)$. თუ $f_1(x)=n_1<m$, მაშინ თეორემა კვლავ დამტკიცებული იქნება. ამიტომ ვთქვათ $n_1\geq m$ და განვიხილოთ

$$f_1(x)-a_{10}b_0^{-1}x^{n_1-m}g(x)=f_2(x)$$

პოლინომი, სადაც a_{10} არის $f_1(x)$-ის უფროსი კოეფიციენტი. თუ $f_2(x)=0$, მაშინ პროცესს შევწყვეტთ; თუ $f_2(x)\neq 0$, მაშინ ისევე, როგორც ზემოთ, გვექნება: $\deg f_2(x)<\deg f_1(x)$ და თუ $\deg f_2(x)=n_2<m$, მაშინ პროცესს აგრეთვე შევწყვეტთ. თუ კი $n_2\geq m$, მაშინ

$$f_2(x)-a_{20}b_0^{-1}x^{n_2-m}g(x)=f_3(x),$$

სადაც a_{20} არის $f_2(x)$-ის უფროსი კოეფიციენტი და ა. შ.

რადგანაც $f_1(x)$, $f_2(x)$, … პოლინომების ხარისხები ადგენენ $n>n_1>n_2\dots$ ნატურალურ რიცხვთა კლებად მიმდევრობას, ამიტომ რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ, მივიღებთ

$$f_{k-1}(x)-a_{k-1,0}b_0^{-1}x^{n_{k-1}-m}g(x)=f_k(x)$$

პოლინომს, სადაც $a_{k-1,0}$ არის $f_{k-1}(x)$-ის უფროსი კოეფიციენტი. ეს $f_k(x)$ პოლინომი ან ნულოვანია, ან მისი ხარისხი $n_k<m$. თუ მიღებულ ტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ:

$$f(x)-b_0^{-1}\left(a_0x^{n-m}+a_{10}x^{n_1-m}+\dots+a_{k-1,0}x^{n_{k-1}-m}\right)g(x)=f_k(x),$$

ე. ი.

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

სადაც $q(x)=b_0^{-1}\left(a_0x^{n-m}+a_{10}x^{n_1-m}+\dots+a_{k-1,0}x^{n_{k-1}-m}\right)$ და $r(x)=f_k(x)$.

2) ახლა დავამტკიცოთ $q(x)$, $r(x)$ პოლინომთა წყვილის ერთადერთობა. ვთქვათ

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, სადაც $r(x)=0$ ან $\deg r(x)<\deg g(x)$

და

$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$, სადაც $r_1(x)=0$ ან $\deg r_1(x)<\deg g(x)$.

მაშასადამე,

$$g(x)q(x)+r(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x) \Rightarrow g(x)(q(x)-q_1(x))=r_1(x)-r(x).$$

თუ $q(x)-q_1(x)\neq 0$, მაშინ

$$\deg[g(x)(q(x)-q_1(x))]=\deg g(x)+\deg(q(x)-q_1(x))\geq m,$$

ხოლო $\deg(r_1(x)-r(x))<m$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $q_1(x)=q(x)$ და ამიტომ $r_1(x)=r(x)$. $q(x)$ პოლინომს ეწოდება განაყოფი, ხოლო $r(x)$ პოლინომს ნაშთი.

<u>შედეგი.</u> იმისათვის რომ $K[x]$ რგოლის $f(x)$ პოლინომი იყოფოდეს ამავე რგოლის $g(x)\neq 0$ პოლინომზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $r(x)$ ნაშთი იყოს ნულოვანი პოლინომი.

<u>პოლინომთა გაყოფადობის ძირითადი თვისებები:</u>

1) თუ $g(x)|f(x)$ და $h(x)|g(x)$, მაშინ $h(x)|f(x)$.

მართლაც, პირობის თანახმად, $f(x)=g(x)q_1(x)$ და $g(x)=h(x)q_2(x)$. ამიტომ

$$f(x)=(h(x)q_2(x))q_1(x)=h(x)q_2(x)q_1(x), \text{ ე.ი. } h(x)|f(x).$$

2) თუ $g(x)|f_1(x)$ და $g(x)|f_2(x)$, მაშინ $g(x)|f_1(x)\pm f_2(x)$.

მართლაც, პირობის თანახმად, $f_1(x)=g(x)q_1(x)$ და $f_2(x)=g(x)q_2(x)$.

ამიტომ

$$f_1(x)\pm f_2(x)=g(x)(q_1(x)\pm q_2(x)) \text{ ე.ი. } g(x)|f_1(x)\pm f_2(x)..$$

3) თუ $g(x)|f(x)$, მაშინ $g(x)|f(x)h(x)$, სადაც $h(x)$ ნებისმიერი პოლინომია.

მართლაც, თუ $f(x)=g(x)q(x)$, მაშინ $f(x)h(x)=g(x)(q(x)h(x))$.

4) თუ $g(x)|f_1(x)$ და $g(x)|f_2(x)$, მაშინ $g(x)|f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)$, სადაც $h_1(x)$ და $h_2(x)$ ნებისმიერი პოლინომებია.

მართლაც, 3) თვისების ძალით, $g(x)|f_1(x)h_1(x)$ და $g(x)|f_2(x)h_2(x)$. ამიტომ 2) თვისების ძალით, $g(x)|f_1(x)h_1(x)+ +f_2(x)h_2(x)$.

5) თუ $c\neq$, მაშინ $c|f(x)$.

მართლაც, $f(x)=(cc^{-1})f(x)=c(c^{-1}f(x))$, ე. ი. $c|f(x)$.

6) თუ $g(x)|f(x)$, მაშინ $cg(x)|f(x)$, სადაც $c\neq 0$ ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტია მოცემული K ველიდან.

მართლაც, თუ $f(x)=g(x)q(x)$, მაშინ $f(x)=(c^{-1}c)(g(x)q(x))= =c^{-1}(cg(x))q(x)=(cg(x))(c^{-1}q(x))$, ე.ი. $cg(x)|f(x)$.

7) $f(x)$ პოლინომის გამყოფებს, რომლებსაც იგივე ხარისხი აქვთ რაც $f(x)$, აქვთ სახე: $cf(x)$, სადაც $c\neq0$.

მართლაც, 6) თვისების ძალით, $cf(x)|f(x)$. მეორე მხრივ, თუ $g(x)|f(x)$ და $\deg g(x)=\deg f(x)$, მაშინ $f(x)=g(x)c$, ე.ი. $g(x)=c^{-1}f(x)$.

8) ორი $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომი ერთმანეთს ყოფს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნულხარისხის მამრავლით განსხვავდებიან.

მართლაც, ვთქვათ $g(x)|f(x)$ და $f(x)|g(x)$. მაშინ $\deg g(x)\leq\deg f(x)$ და $\deg f(x)\leq\deg g(x)$, ე.ი. $\deg g(x)=\deg f(x)$ და წინა თვისების ძალით ისინი მხოლოდ ნულხარისხის მამრავლით განსხვავდებიან.

9) $f(x)$-ის ყოველი გამყოფი არის $cf(x)$-ის გამყოფი, თუ $c\neq0$ და პირუკუ.

მართლაც, თუ $g(x)|f(x)$, მაშინ 3) თვისების ძალით, $g(x)|cf(x)$. ვთქვათ ახლა $g(x)|cf(x)$; მაგრამ 6) თვისების ძალით, $cf(x)|f(x)$;. ამიტომ 1) თვისების ძალით, $g(x)|f(x)$.

<u>**განსაზღვრება**</u> **ვიტყვით, რომ $K[x]$ რგოლის $d(x)\neq0$ პოლინომი არის ამავე რგოლის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების საერთო გამყოფი, თუ $d(x)|f(x)$ და $d(x)|g(x)$. $K[x]$ რგოლის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება ამ პოლინომების იმ $D(x)$ საერთო გამყოფს, რომელიც თვითონ იყოფა მათ ნებისმიერ საერთო გამყოფზე.** იმის აღსანიშნავად, რომ $D(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი წერენ:

$$D(x)=(f(x),g(x)).$$

<u>**ევკლიდეს ალგორითმი.**</u> ვაჩვენოთ ახლა, რომ $K[x]$ რგოლის **ყოველ ორ პოლინომს, რომელიც ერთდროულად ნულოვანი არაა. გააჩნია უდიდესი საერთო გამყოფი.**

ვთქვათ $f_1(x), f_2(x)\in K[x]$ და $f_2(x)\neq0$. ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $f_2(x)\nmid f_1(x)$ (რადგან თუ $f_2(x)|f_1(x)$ მაშინ $(f_1(x),f_2(x))=f_2(x)$), ამიტომ ნაშთით გაყოფის ალგორითმის თანახმად, გვექნება: $f_1(x)=f_2(x)q_1(x)+f_3(x)$, სადაც $\deg f_3(x)<\deg f_2(x)$. კვლავ

ალგორითმის ძალით, $f_2(x)=f_3(x)q_2(x)+f_4(x)$, სადაც ან $f_4(x)=0$ ან $\deg f_4(x)<\deg f_3(x)$. თუ $f_4(x)=0$, მაშინ პროცესს შევწყვეტთ ხოლო თუ $\deg f_4(x)<\deg f_3(x)$. მაშინ პროცესს განვაგრძობთ და ა. შ. რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ, ეს პროცესი აუცილებლად შეწყდება, რადგან $\deg f_2(x)>\deg f_3(x)>\deg f_4(x)>\ldots$

ამრიგად, გვექნება:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x)=f_2(x)q_1(x)+f_3(x), & \deg f_3(x)<\deg f_2(x), \\
f_2(x)=f_3(x)q_2(x)+f_4(x), & \deg f_4(x)<\deg f_3(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
f_i(x)=f_{i+1}(x)q_i(x)+f_{i+2}(x), & \deg f_{i+2}(x)<\deg f_{i+1}(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
f_{k-2}(x)=f_{k-1}(x)q_{k-2}(x)+f_k(x), & \deg f_k(x)<\deg f_{k-1}(x), \\
f_{k-1}(x)=f_k(x)q_{k-1}(x). &
\end{array}
$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $f_k(x)|f_{k-1}(x)$; ამიტომ ბოლოდან მეორე ტოლობისა და გაყოფადობის 4 თვისების ძალით, $f_k(x)|f_{k-2}(x)$; და ა.შ. მივიღებთ, რომ $f_k(x)|f_2(x)$; და $f_k(x)|f_1(x)$; ე.ი. $f_k(x)$ არის $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების საერთო გამყოფი. ვთქვათ ახლა, $d(x)$ არის $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების ნებისმიერი საერთო გამყოფი, მაშინ პირველი ტოლობისა და კვლავ გაყოფადობის თვისების ძალით, $d(x)|f_3(x)$; ამიტომ მეორე ტოლობის ძალით, $d(x)|f_4(x)$; და ა.შ. მივიღებთ, რომ $d(x)|f_k(x)$. მაშასადამე, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების საერთო გამყოფი $f_k(x)$ იყოფა $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, ე.ი. $f_k(x)=(f_1(x),f_2(x))$.

წესს, რომლის საშუალებითაც ვიპოვეთ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი $(f_1(x),f_2(x))$, ევკლიდეს ალგორითმი ეწოდება. მაშასადამე, $K[x]$ რგოლის ორი პოლინომის უდიდესი საერთო გამყოფი არის ევკლიდეს ალგორითმის უკანასკნელი არანულოვანი ნაშთი.

$K[x]$ რგოლის ორი პოლინომის უდიდესი საერთო გამყოფი ცალსახად არ განისაზღვრება, რადგანაც გაყოფადობის 5 თვისებების ძალით, D(x)-თან ერთად cD(x)-იც იქნება ამავე პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფი, ნებისმიერი $c\neq 0$ ელემენტისათვის K-დან. ამიტომ მომავალში, ცალსახობის უზრუნველსაყოფად, ორი პოლინომის უდიდესი საერთო გამყოფად ჩავთვლით იმ უდიდეს საერთო გამყოფს, რომლის უფროსი კოეფიციენტი K ველის ერთეულოვანი ელემენტია.

<u>განსაზღვრება.</u> თუ $K[x]$ რგოლის ორ f(x) და g(x) პოლინომს არ გააჩნია საერთო გამყოფი გარდა K ველის არანულოვანი ელემენტებისა, მაშინ მათ თანამარტივი პოლინომები ეწოდება (გაყოფადობის 5 თვისების ძალით კი, ყოველი ნულ ხარისხის პოლინომი არის ნებისმიერი ორი. პოლინომის საერთო გამყოფი), და ზემოთ ნათქვამის თანახმად მათი უდიდესი საერთო გამყოფი იქნება K ველის ერთეულოვანი ელემენტი, ე.ი. $(f(x),g(x))=1$ (ეს შემდეგნაირად იკითხება: f(x) და g(x) პოლინომები თანამარტივია).

<u>თეორემა</u> თუ $K[x]$ რგოლის $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების უდიდესი საერთო გამყოფია D(x), მაშინ $K[x]$-ში მოიძებნება ისეთი ორი u(x) და v(x) პოლინომი, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)=D(x). \tag{8}$$

ამასთანავე, თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომების ხარისხი მეტია ნულზე, მაშინ u(x) და v(x) პოლინომები ისე შეიძლება შევარჩიოთ, რომ ან $u(x)=0$, ან $\deg u(x)<\deg f_2(x)$ და ან $v(x)=0$, ან $\deg v(x)<\deg f_1(x)$.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ევკლიდეს ალგორითმის ყოველი $f_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,k)$, პოლინომისათვის $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ისეთი $u_j(x)$ და $v_j(x)$ პოლინომები, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$f_1(x)u_j(x)+f_2(x)v_j(x)=f_j(x). \tag{9}$$

ეს ტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ყველა ნატურალური $1\leq j\leq k$ რიცხვისათვის. ცხადია, რომ

$$f_1(x)=f_1(x)\cdot 1+f_2(x)\cdot 0 \text{ და } f_2(x)=f_1(x)\cdot 0+f_2(x)\cdot 1$$

ახლა დავუშვათ, რომ ყველა $f_j(x)$ პოლინომისათვის, სადაც $1\le j\le i+1<k$, $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ისეთი $u_j(x)$ და $v_j(x)$ პოლინომები, რომ შესრულდება (9) ტოლობა და ამ დაშვების საფუძველზე ვაჩვენოთ ამ ტოლობის სამართლიანობა $(i+2)$-სთვისაც. ევკლიდეს ალგორითმის ზოგადი ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\begin{aligned} f_{i+2}(x)&=f_i(x)-f_{i+1}(x)q_i(x)=(f_1(x)u_i(x)+f_2(x)v_i(x))- \\ &-(f_1(x)u_{i+1}(x)+f_2(x)v_{i+1}(x))q_i(x)= \\ &=f_1(x)(u_i(x)-u_{i+1}(x)\,q_i(x))+f_2(x)(v_i(x)-v_{i+1}(x)\,q_i(x))= \\ &=f_1(x)u_{i+2}(x)+f_2(x)v_{i+2}(x) \end{aligned}$$

ამრიგად, (9) ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური $1\le j\le k$ რიცხვისათვის; კერძოდ, $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ისეთი $u_k(x)$ და $v_k(x)$ პოლინომები, რომ შესრულდება

$$f_1(x)u_k(x)+f_2(x)v_k(x)=f_k(x)$$

ტოლობა. მაგრამ ვიცით, რომ $f_k(x)=(f_1(x),f_2(x))=D(x)$. ამიტომ, თუ $u_k(x)$-ის მაგივრად დავწერთ $u(x)$-ს და $v_k(x)$-ის მაგივრად $v(x)$-ს, მივიღებთ (8) ტოლობას.

გადავიდეთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. ვთქვათ მოვძებნეთ $K[x]$ რგოლში ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (8) ტოლობას, მაგრამ $\deg u(x)\ge \deg f_2(x)$. მაშინ ნაშთით გაყოფის ალგორითმის თანახმად, მივიღებთ, რომ

$$u(x)=f_2(x)q(x)+r(x), \text{ სადაც ან } r(x)=0, \text{ ან } \deg r(x)<\deg f_2(x).$$

აქედან და (8) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$f_1(x)(f_2(x)q(x)+r(x))+f_2(x)v(x)=D(x)$$

ანუ

$$f_1(x)r(x)+f_2(x)(f_1(x)q(x)+v(x))=D(x) \tag{10}$$

სადაც ან $r(x)=0$, ან $\deg r(x)<\deg f_2(x)$.

ვაჩვენოთ ახლა, რომ ან $f_1(x)q(x)+v(x)=0$, ან $\deg(f_1(x)q(x)+v(x))<\deg f_1(x)$ დავუშვათ წინააღმდეგი, ე. ი. ვთქვათ, რომ

$$\deg(f_1(x)q(x)+v(x))\ge \deg f_1(x).$$

მაშინ

$$\deg[f_2(x)(f_1(x)q(x)+v(x))]=\deg f_2(x)+\deg(f_1(x)q(x)+v(x))\ge$$

$$\geq \deg f_2(x)+\deg f_1(x)=\deg(f_1(x)f_2(x))>\deg D(x) \tag{11}$$

(10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\deg D(x)=\deg[f_2(x)\,(f_1(x)q(x)+v(x))] \tag{12}$$

მართლაც (12) ტოლობა ცხადია, თუ (10) ტოლობაში $r(x)=0$, ხოლო თუ კი (10) ტოლობაში $\deg r(x)<\deg f_2(x)$, მაშინ

$$\deg[f_2(x)\,(f_1(x)q(x)+v(x))]\geq \deg f_2(x)+\deg f_1(x)>\deg r(x)+\deg f_1(x)=$$

$$=\deg(f_1(x)r(x)),$$

ანუ თუ გავითვალისწინებთ (10)-ს, ადგილი აქვს (12) ტოლობას.

(11) უტოლობა კი ეწინააღმდეგება (12) ტოლობას. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ $\deg(f_1(x)q(x)+v(x))<\deg f_1(x)$.

<u>შედეგი.</u> იმისათვის, რომ $K[x]$ რგოლის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომები თანამარტივი იყოს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $K[x]$ რგოლში მოიძებნებოდეს ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომი, რომ სრულდებოდეს ტოლობა:

$$\mathbf{f(x)u(x)+g(x)v(x)=1} \tag{13}$$

ჯერ დავამტკიცოთ აუცილებლობა. თუ $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომები თანამარტივია, ანუ $(f(x),g(x))=1$, მაშინ დამტკიცებული თეორემის ძალით, $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომი, რომ შესრულდება (13) ტოლობა.

გადავიდეთ საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ $K[x]$ რგოლში არსებობს ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომი, რომ სრულდება (13) ტოლობა. დავუშვათ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომები თანამარტივი არაა, ე.ი. $(f(x),g(x))=D(x)$ და $D(x)>0$. მაშინ გაყოფადობის 4 თვისების ძალით $D(x)|f(x)u(x)+g(x)v(x)$; მაშასადამე $D(x)|1$. რაც შეუძლებელია, რადგან $\deg D(x)>0$.

გავეცნოთ ახლა $K[x]$ რგოლის თანამარტივ პოლინომთა ზოგიერთ თვისებას:

<u>თვისება 1.</u> თუ $(f(x),g(x))=1$ და $(f(x),h(x))=1$, მაშინ

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

მართლაც, პირობის ძალით, $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომი, რომ შესრულდება

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

ტოლობა. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $h(x)$ პოლინომზე, მივიღებთ:

$$f(x)[u(x)h(x)]+[g(x)h(x)]v(x)=h(x).$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ $f(x)$ და $g(x)h(x)$ პოლინომები თანამარტივი არაა, მაშინ გაყოფადობის 4 თვისების ძალით,

$(f(x),g(x)h(x))=D(x)$ და $\deg(D(x)>0 \Rightarrow D(x)|f(x),\ D(x)|g(x)h(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow D(x)|f(x)[u(x)h(x)]+[g(x)h(x)]v(x) \Rightarrow D(x)|h(x).$$

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ $D(x)|f(x)$, $D(x)|h(x)$ და $\deg D(x)>0$, რაც შეუძლებელია, რადგან $(f(x),h(x))=1$.

<u>**თვისება**</u> 2. თუ $g(x)|f(x)h(x)$ და $(g(x),f(x))=1$, მაშინ $g(x)|h(x)$.

მართლაც, პირობის ძალით, $K[x]$ რგოლში მოიძებნება ორი ისეთი $u(x)$ და $v(x)$ პოლინომი, რომ შესრულდება

$$g(x)u(x)+f(x)v(x)=1$$

ტოლობა, ე.ი. $g(x)[u(x)h(x)]+[f(x)h(x)]v(x)=h(x)$, მაგრამ ამასთანავე $g(x)|f(x)h(x)$ ამიტომ $g(x)|h(x)$.

<u>**თვისება**</u> 3. თუ $g(x)|f(x)$, $h(x)|f(x)$ და $(g(x),h(x))=1$, მაშინ

$$g(x)h(x)|f(x).$$

მართლაც, პირობის ძალით, $f(x)=g(x)q(x)$ და $h(x)|g(x)q(x)$. ამიტომ, წინა თვისების ძალით, რადგან $(g(x),h(x))=1$, ამიტომ $h(x)|q(x)$, ე. ი. $q(x)=h(x)q_1(x)$ და $f(x)=[g(x)h(x)]q_1(x)$.

§ 3. პოლინომის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად

<u>განსაზღვრება.</u> **ვთქვათ $f(x) \in K[x]$ და $\deg f(x) > 0$. ვიტყვით, რომ $f(x)$ დაყვანადია K ველის მიმართ, თუ $K[x]$ რგოლში მო-იძებნება ისეთი ორი $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომი, რომ $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, ამასთანავე $\deg f_1(x)<\deg f(x)$, $\deg f_2(x)<\deg f(x)$.** თუ კი ასეთი ორი პოლინომი $K[x]$-ში არ მოიძებნება, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ დაუყვანადია K ველის მიმართ. ასე მაგალითად, $x^2-1 \in \mathbf{Q}[x]$ პოლინომი დაყვანადია $\mathbf{Q}$ ველის მიმართ, რადგანაც $x^2-1=(x-1)(x+1)$; $x^2-5 \in \mathbf{Q}[x]$ პოლინომი კი დაუყვანადია $\mathbf{Q}$-ს მიმართ, მაგრამ დაყვანადია $\mathbf{R}$-ის მიმართ, რადგან $x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$; x^2+1 პოლინომი დაუყვანადია, როგორც $\mathbf{Q}$-ს, ისე $\mathbf{R}$-ის მიმართ, მაგრამ დაყვანადია $\mathbf{C}$-ს მიმართ, რადგან $x^2+1=(x-i)(x+i)$.

დაუყვანად პოლინომთა თვისებები:

<u>თვისება</u> 1. **პირველი ხარისხის პოლინომი დაუყვანადია ნებისმიერი ველის მიმართ.**

მართლაც, თუ $ax+b=f_1(x)f_2(x)$ და $\deg f_1(x)=\deg f_2(x)=0$, მაშინ $1=\deg(ax+b)=\deg(f_1(x)f_2(x))=0$; რაც შეუძლებელია.

<u>თვისება</u> 2. **თუ $p(x) \in K[x]$ და დაუყვანადია K-ს მიმართ, მაშინ ნებისმიერი არანულოვანი c-სთვის K-დან $cp(x)$-იც აგრეთვე დაუყვანადია K-ს მიმართ.**

მართლაც, $cp(x)$ თუ დაყვანადია, მაშინ $p(x)$-იც უნდა იყოს დაყვანადი, რადგანაც გაყოფადობის 6 თვისებების ძალით $cp(x) \mid p(x)$.

<u>თვისება</u> 3. **თუ $f(x)$ არის $K[x]$ რგოლის ნებისმიერი, ხოლო *$p(x)$ არის K-ს მიმართ დაუყვანადი პოლინომი, მაშინ ან* $p(x) \mid f(x)$, ან $(f(x),p(x))=1$.**

მართლაც, ვთქვათ $(f(x),p(x))=D(x)$. რადგანაც $D(x) \mid p(x)$ და $p(x)$ დაუყვანადია, ამიტომ ან $D(x)=c\neq 0$, ან $D(x)=cp(x)$. პირველ შემთხვევაში $(f(x),p(x))=1$. ხოლო მეორე შემთხვევაში $cp(x) \mid f(x)$, ე.ი. $p(x) \mid f(x)$.

<u>თვისება</u> 4 თუ $K[x]$ რგოლის $f(x)$ და $g(x)$ პოლინომების ნამრავლი იყოფა K ველის მიმართ დაუყვანად $p(x)$ პოლინომზე, ე.ი. $p(x) \mid f(x)g(x)$, მაშინ ან $p(x) \mid f(x)$, ან $p(x) \mid g(x)$.

მართლაც, თუ $p(x) \nmid f(x)$, მაშინ წინა თვისების ძალით $(f(x),p(x))=1$, ამიტომ თანამარტივ პოლინომთა 2 თვისების ძალით $p(x) \mid g(x)$.

<u>თეორემა</u>. $K[x]$ რგოლის ყოველი $f(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი $n>0$, K ველის მიმართ იშლება დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად და ეს დაშლა ერთადერთია ნულხარისხის პოლინომებამდე სიზუსტით.

თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. როცა $n=1$, მაშინ $f(x)$ პოლინომი დაუყვანადია K-ს მიმართ და ნამრავლი ნულხარისხის პოლინომამდე სიზუსტით მხოლოდ ერთი თანამამრავლისაგან შედგება. ვთქვათ თეორემა სამართლიანია $K[x]$ რგოლის ნებისმიერი პოლინომისათვის, რომლის ხარისხი $<n$. თუ ჩვენი $f(x)$ პოლინომი დაუყვანადია K-ს მიმართ, მაშინ თეორემა კვლავ დამტკიცებულია. თუ კი $f(x)$ დაყვანადია, მაშინ $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, სადაც $\deg f_1(x)<n$ და $\deg f_2(x)<n$, და ინდუქციის დაშვების ძალით, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ პოლინომები დაიშლებიან დაუყვანად მამრავლთა ნამრავლად.

ახლა გადავიდეთ ერთადერთობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\ldots p_r(x)=q_1(x)q_2(x)\ldots q_t(x). \tag{14}$$

დასამტკიცებელია, რომ $r=t$ და $q_i(x)=c_ip_i(x)(i=1,\ldots,r)$. იმის გამო, რომ $p_1(x) \mid p_1(x)\ldots p_2(x)$, ამიტომ $p_1(x) \mid q_1(x)\ldots q_t(x)$ და, ზოგადობის დაურღვევლად, დაუყვანად პოლინომთა 4 თვისების ძალით, ვთქვათ

$p_1(x) \mid q_1(x)$, ე. ი. $q_1(x)=c_1p_1(x)$, რადგანაც $q_1(x)$ დაუყვანადია. ხოლო რადგან $K[x]$ რგოლი უნულგამყოფოა, ამიტომ (14) ტოლობიდან, $p_1(x)$-ზე შეკვეცის შემდეგ, მივიღებთ:

$$p_2(x)\dots p_r(x)=(c_1q_2(x))q_3(x)\dots q_t(x).$$

რადგანაც ამ უკანასკნელი პოლინომის ხარისხი $<n$, ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით, $r-1=t-1$ და $c_1q_2(x)=c'p_2(x)$, $q_i(x)=c_ip_i(x)$ ($i=3, 4,\dots,r$). თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $f(x)$ პოლინომის დაუყვანად მამრავლებად ნებისმიერ დაშლაში თითოეული დაუყვანადი მამრავლიდან გავიტანთ უფროს კოეფიციენტს, მივიღებთ დაშლას:

$$f(x)=ap_1(x)p_2(x)\dots p_r(x), \tag{15}$$

სადაც a ცხადია $f(x)$-ის უფროსი კოეფიციენტია და თითოეული $p_i(x)$-ის უფროსი კოეფიციენტი K ველის ერთეულია. ეს დაშლა უკვე სავსებით ერთადერთია.

(15) დაშლაში შემავალი დაუყვანადი მამრავლები შეიძლება არ იყოს განსხვავებული. თუ რომელიმე დაუყვანადი $p(x)$ მამრავლი (15) დაშლაში გვხვდება ზუსტად k-ჯერ, ე. ი.

$$p^k(x) \mid f(x), \text{ მაგრამ } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

მაშინ მას **<u>f(x) პოლინომის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი</u>** ეწოდება. კერძოდ, თუ $p(x)$ მამრავლი (2) დაშლაში მხოლოდ ერთხელ შედის, ე. ი. $p(x) \mid f(x)$, მაგრამ $p^2(x) \nmid f(x)$, მაშინ მას $f(x)$ **<u>პოლინომის მარტივი დაუყვანადი მამრავლი</u>** ეწოდება.

თუ ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმებთ, რომ (15) დაშლაში $p_1(x),\dots,p_s(x)$ ($1\le s\le r$) მამრავლები ერთმანეთისგან განსხვავებულია და ჯერადობა შესაბამისად არის $k_1,\dots,k_s$, მაშინ მივიღებთ დაშლას:

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_s^{k_s}(x),$$

რომელსაც ეწოდება $K[x]$ რგოლის <u>f(x) პოლინომის კანონიკური დაშლა</u> დაუყვანად მამრავლებად K ველის მიმართ.

§ 4. პოლინომის წარმოებული და ფესვები

ვთქვათ

$$\mathrm{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

არის $K[x]$ რგოლის პოლინომი. $\mathrm{f}(x)$ პოლინომის წარმოებული ეწოდება

$$\mathrm{f}'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \tag{16}$$

პოლინომს. $\mathrm{f}'(x)$ პოლინომის წარმოებულს, ე. ი.

$$\mathrm{f}''(x) = 2a_2 + \ldots + (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} + (n-1)na_n x^{n-2} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)ka_k x^{k-2}$$

პოლინომს ეწოდება $\mathrm{f}(x)$ პოლინომის მეორე წარმოებული, და ა. შ. შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{f}(x)$ პოლინომის n-ური წარმოებული იქნება $\mathrm{f}^{(n)}(x)=n!a_n$.

ვთქვათ $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, მაშინ $g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1}$, და გვექნება:

$$(\mathrm{f}(x)+g(x))' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}k(a_k+b_k)x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}ka_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}kb_k x^{k-1} =$$

$$= \mathrm{f}'(x) + g'(x).$$

ასევე გვექნება

$$(\mathrm{f}(x)g(x))' = (\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{k+l=i} a_k b_l)x^i)' = \sum_{i=1}^{\infty}(i\sum_{k+l=i} a_k b_l)x^{i-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k+l=i}(k+l)(a_k b_l))x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k+l=i} k(a_k b_l)x^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k+l=i} l(a_k b_l)x^{i-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k-1+l=j}(ka_k)b_l)x^j + \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k+l-1=j} a_k(lb_e))x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{h+l=j}((h+1)a_{h+1})b_l)x^j + \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k+m=j} a_k((m+1)b_{m+1}))x^j =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)a_{h+1}x^h \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_{m+1}x^m = \qquad (17)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{l=1}^{\infty} lb_l x^{l-1} = \mathrm{f}'(x)g(x) + \mathrm{f}(x)g'(x).$$

მათემატიკური ინდუქციით მივიღებთ, რომ

$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x))' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_k(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_k(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_k'(x)$;

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს,რომ

$$(f^k(x))' = (f(x)\cdots f(x))' = k\, f^{k-1}(x)\, f'(x).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

ახლა ისმის საკითხი: K[x] რგოლის·რა f(x) პოლინომებისათვის სრულდება, რომ $f'(x)=0$. (16)-ის თანახმად, $f'(x)=0$, თუ

$$k\, a_k=0, \text{ როცა } k=1,2,\ldots,n. \qquad (18)$$

თუ K ველის მახასიათებელი, char K=0, (18) ტოლობები შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_k=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$, ანუ, როცა პოლინომი არის ნულხარისხის:

$$f(x)=c. \qquad (19)$$

თუ კი charK=p, მაშინ (18) ტოლობები შესრულდება მაშინ და ÷ხოლოდ მაშინ, როცა $a_k=0$, $p\dagger k$, ე.ი. როცა პოლინომი არის

$$f(x)=a_o+a_px^p+a_{2p}x^{2p}+\ldots a_{mp}x^{mp}$$

სახის.

<u>თეორემა</u>. თუ p(x) არის K[x] რგოლის f(x) პოლინომის k-ჯერადი ($k\geq 1$) დაუყვანადი მამრავლი, მაშინ $f'(x)$ პოლინომისათვის p(x) იქნება (k–1)-ჯერადი მამრავლი. კერძოდ, თუ p(x) არის f(x)-ის მარტივი დაუყვანადი მამრავლია, მაშინ ის არ გაყოფს $f'(x)$-ს.

<u>დამტკიცება</u>. მართლაც, ვთქვათ

$$f(x)=p^k(x)g(x),\ \ p(x)\dagger g(x).$$

მაშინ

$$f'(x)=\left(p^k(x)\right)'g(x)+p^k(x)g'(x)=kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)+p^k(x)g'(x)=$$
$$=p^{k-1}(x)\left(kp'(x)g(x)+p(x)g'(x)\right).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $p^{k-1}(x)\,|\,f'(x)$. მეორე მხრივ, $p(x)\dagger kp'(x)g(x)$; წინააღმდეგ შემთხვევაში, დაუყვანად პოლინომთა თვისება 4-ის ძალით, ან $p(x)\,|\,g(x)$, ან $p(x)\,|\,p'(x)$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $p^k(x)\dagger f'(x)$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ f(x)-ის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი $f'(x)$-სთვის იქნება (k–1)-ჯერადი, $f''(x)$-სთვის იქნება (k–2)-ჯერადი, და ა. შ. $f^{(s)}(x)$-სთვის (s=1,2,…,k-1) იქნება (k-s)-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი, ხოლო $p(x)\dagger f^{(k)}(x)$.

ვთქვათ

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

და Λ ველი არის K ველის გაფართოება. თუ f(x)-ში x უცნობის ნაცვლად დავწერთ K ველის ან მისი Λ გაფართოების c ელემენტს, მივიღებთ ახალ

$$f(c)=a_0+a_1c+\ldots+a_{n-1}c^{n-1}+a_nc^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_kc^k$$

ელემენტს, შესაბამისად K ველიდან ან მის Λ გაფართოებიდან, რომელსაც ეწოდება f(x) პოლინომის მნიშვნელობა, როცა x=c. თუ g(x) არის K[x] რგოლის სხვა ნებისმიერი პოლინომი და g(c) მისი მნიშვნელობაა, როცა x=c, მაშინ

$$h(x)=f(x)+g(x) \quad \text{და} \quad l(x)=f(x)g(x)$$

ჯამსა და ნამრავლს, როცა x=c, ცხადია ექნებათ შესაბამისად

$$h(c)=f(c)+g(c) \quad \text{და} \quad l(c)=f(c)g(c)$$

მნიშვნელობები.

განსაზღვრება. K ველის ან მისი Λ გაფართოების c ელემენტს ეწოდება f(x) პოლინომის ფესვი თუ f(c)=0, ე.ი. f(x) პოლინომის მნიშვნელობა, როცა x=c, არის ნული.

თეორემა. იმისათვის რომ c ელემენტი იყოს f(x) პოლინომის ფესვი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $x-c \mid f(x)$.

დამტკიცება. საკმარისობა. თუ $x-c \mid f(x)$, მაშინ $f(x)=(x-c)q(x)$, საიდანაც

$$f(c)=(c-c)q(c)=0.$$

აუცილებლობა. ვთქვათ ახლა f(c)=0. ნაშთით გაყოფის ალგორითმის თანახმად, $f(x)=(x-c)q(x)+r(x)$, სადაც $r(x)=0$ ან $\deg r(x)<1$, ე.ი.

$$f(x)=(x-c)q(x)+r, \tag{20}$$

სადაც r არის K-ს ან Λ-ს ელემენტი. თუ მიღებულ ტოლობაში დავწერთ x-ის მაგივრად c-ს, გვექნება:

$$f(c)=(c-c)q(c)+r=r,$$

ე.ი. r=0 და (20)-ის ძალით, $x-c \mid f(x)$.

მაშასადამე, თუ c არის f(x) პოლინომის ფესვი, მაშინ f(x)-ის დამლაში დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად შედის პირველი ხარისხის x–c დაუყვანადი მამრავლი. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ x–c არის f(x) პოლინომის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი. ე.ი. **$(x-c)^k \mid f(x)$, მაგრამ $(x-c)^{k+1} \nmid f(x)$. ამ შემთხვევაში ამბობენ,** რომ **c არის f(x) პოლინომის k-ჯერადი ფესვი.**

__თეორემა.__ **იმისათვის რომ c ელემენტი იყოს f(x) პოლინომის k-ჯერადი ფესვი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ**

$$f(c)=f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(k-1)}(c)=0,\ f^{(k)}(c)\neq 0. \qquad (21)$$

__**დამტკიცება**__. __**აუცილებლობა.**__ თუ c არის f(x)-ის k-ჯერადი ფესვი, მაშინ x–c არის f(x)-ის k-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი; ამიტომ x–c იქნება $f^{(s)}(x)$-ის (s=1,2,…,k–1) (k-s)-ჯერადი დაუყვანადი მამრავლი, ე.ი.

$(x-c)^{k-s} \mid f^{(s)}(x) \Rightarrow x-c \mid f^{(s)}(x) \Rightarrow f^{(s)}(c)=0$ (s=1,2,…,k–1), ხოლო $x-c \nmid f^{(k)}(x) \Rightarrow f^{(k)}(c)\neq 0$.

ხოლო რადგან $(x-c)^k \mid f(x) \Rightarrow x-c \mid f(x) \Rightarrow f(c)=0$.

__**საკმარისობა**__. ვთქვათ (21) პირობები შესრულებულია. მაშასადამე, c არის f(x)-ის ფესვი. დავუშვათ c არის (k+1)-ჯერადი ფესვი, მაშინ აუცილებლად $f^{(k)}(c)=0$, რაც (21) პირობას ეწინააღმდეგება, ე.ი. არ არის (k+1)-ჯერადი და მით უმეტეს არც მეტი ჯერადობის. ვთქვათ ახლა c არის (k–1)-ჯერადი ფესვი, მაშინ აუცილებლად $f^{(k-1)}(c)\neq 0$, რაც კვლავ პირობას ეწინააღმდეგება, ე.ი. c არც (k–1)-ჯერადია და მით უმეტეს არც ნაკლები ჯერადობისა. მაშასადამე, c არის k-ჯერადი ფესვი.

შევნიშნოთ, რომ K[x] რგოლის f(x) პოლინომს, რომლის ხარისხი $n\geq 1$, არ შეიძლება ჰქონდეს არც K-ში და არც მის ნებისმიერ Λ გაფართოებაში n-ზე მეტი ფესვი, მაშინაც კი თუ ყოველ ფესვს იმდენჯერ დავთვლით, რამდენიც არის მისი ჯერადობა.

დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ K-ში ან მის რაიმე Λ გაფართოებაში f(x)-ს აქვს n-ზე მეტი ფესვი. $c_1c_2,\ldots c_s$ იყოს f(x)-ის განსხვავებული ფესვები, შესაბამისად $k_1k_2,\ldots k_s$ ჯერადობის, სადაც $k_1+k_2+,\ldots+k_s>n$. იმის გამო, რომ c_1 არის f(x)-ის k_1-ჯერადი ფესვი, გვექნება:

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1} f_1(x), \quad x-c_1 \nmid f_1(x).$$

რადგანაც c_2 არის $f(x)$-ის k_2-ჯერადი ფესვი, ამიტომ $(x-c_2$ [illegible]
$(x-c_2)^{k_2} \mid (x-c_1)^{k_1} f_1(x)$. მაგრამ $x-c_2 \nmid (x-c_1)^{k_1}$, რადგან $(c_2-c$ [illegible] $=$ [illegible]
ამიტომ დაუყვანად პოლინომთა 3 თვისების ძალით, $(x-c_2)^{k_2} \mid f_1(x$ [illegible]
ამრიგად,

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} f_2(x).$$

თუ დანარჩენი ფესვების მიმართაც ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატარებთ, რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_s)^{k_s} f_s(x).$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის ხარისხი $>n$, რაც შეუძლებელია.

<u>**განსაზღვრება**</u> **$K[x]$ რგოლის n-ური ხარისხის $f(x)$ პოლინომის დაშლის ველი ეწოდება K ველის ისეთ გაფართოებას, რომელიც შეიცავს $f(x)$-ის n ფესვს** (აქ ყოველი ჯერადი ფესვი იმდენჯერ არის დათვლილი, რამდენიც არის მისი ჯერადობა).

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის თანახმად, $f(x)$ პოლინომის კანონიკური დაშლა დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად $f(x)$-ის დაშლის ველის მიმართ იქნება:

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_s)^{k_s}, \text{ სადაც } k_1+k_2+\ldots k_s=n. \quad (22)$$

ვთქვათ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

არის $K[x]$ რგოლის n-ური ხარისხის პოლინომი და $c_1,c_2,\ldots c_n$ – მისი ფესვებია, რომლებიც დაშლის ველში მდებარეობენ და იმდენჯერ არის დაწერილი რამდენიც არის მათი ჯერადობა. მაშინ დაშლის ველის მიმართ $f(x)$-ის (22) დაშლა დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად მიიღებს სახეს:

$$f(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

თუ აქ წრფივ მამრავლებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0[x^n-(c_1+c_2+\ldots+c_n)x^{n-1}+(c_1c_2+c_1c_3+\ldots+c_{n-1}c_n)x^{n-2}-$$
$$-(c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+\ldots+c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3}+\ldots+$$

$+(-1)^{n-1}(c_1 c_2 \ldots c_{n-1} + c_1 \ldots c_{n-2} c_n + \ldots + c_2 \ldots c_n)\, x + (-1)^n c_1 c_2 \ldots c_n]$,

ე. ი.

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad c_1c_2 + c_1c_3 + c_{n-1}c_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -\frac{a_3}{a_0}, \; \ldots, \; c_1c_2\ldots c_{n-1} +$$

$$+ c_1c_2\ldots c_{n-2}c_n + \ldots + c_2\ldots c_n = (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0}, \; c_1c_2\ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

ამ ფორმულებს ვიეტის ფორმულები ეწოდება.

<u>განსაზღვრება.</u> K ველს ეწოდება ალგებრულად ჩაკეტილი ველი, თუ K[x] რგოლის ყოველ f(x) (degf(x)>0) პოლინომს თვით K ველში აქვს ერთი ფესვი მაინც.

მაშასადამე, ალგებრულად ჩაკეტილი ველის მიმართ f(x) პოლინომის კანონიკური დაშლა დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად იქნება:

$$f(x) = a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_s)^{k_s}, \quad k_1+k_2+\ldots+k_s=n.$$

მართლაც, ვთქვათ K ალგებრულად ჩაკეტილი ველია და $f(x)\in K[x]$. ვთქვათ $c_1\in K$ არის f(x)-ის k_1-ჯერადი ფესვი, მაშინ

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1} f_1(x),$$

სადაც $f_1(c_1)\neq 0$ და გაყოფადობის ცნების თანახმად $f_1(x)\in K[x]$. ამიტომ ვთქვათ $c_2\in K$ არის $f_1(x)$-ის k_2-ჯერადი ფესვი, მაშინ

$$f_1(x)=(x-c_2)^{k_2} f_2(x),$$

სადაც $f_2(c_2)\neq 0$ და კვლავ $f_2(x)\in K[x]$. რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ:

$$f_{s-1}(x)=(x-c_2)^{k_s} f_s(x),$$

სადაც $\deg f_s(x)=0$, რადგანაც $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$, და ამიტომ $f_s(x)=a_0$, სადაც a_0 არის f(x)-ის უფროსი კოეფიციენტი.

თავი 5. მრავალუცნობიანი პოლინომები

§1. მრავალუცნობიან პოლინომთა რგოლი

<u>განსაზღვრება.</u> ვთქვათ K მოცემული ველია. $x_1,x_2,\dots,x_n$-ის პოლინომი K ველის მიმართ ეწოდება

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} + \dots + A_s x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} \qquad (1)$$

$s>0$, გამოსახულებას, სადაც, $A_1,\dots,A_s \in K$ და მათ ეწოდება f პოლინომის კოეფიციენტები; $k_1,k_2,\dots,k_n$ და $l_1,l_2,\dots,l_n$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია

$A_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \dots, A_s x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$, გამოსახულებებს ეწოდება (1) პოლინომის წევრები, ამასთანავე იგულისხმება, რომ მსგავსი წევრები პოლინომში არ არის. შევთანხმდეთ, რომ თუ წევრის კოეფიციენტი K ველის ერთეულია, მაშინ ის შეიძლება გამოტოვებულ იქნეს, ე.ი. $1x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n} = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}$ და აგრეთვე, რომ x_i^0-იც შეიძლება გამოვტოვოთ, კერძოდ, $Ax_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n} = A$, თუ $h_1=h_2=\dots=h_n=0$, ე.ი. K ველის ყოველი A ელემენტი განიხილებოდა, როგორც $x_1,x_2,\dots,x_n$-ის ერთწევრა პოლინომი. გამოსახულებანი $x_i^{h_i}$, $Ax_1^{h_1} x_2^{h_2}, \dots x_n^{h_n}$ და ნიშანი + აქ განიხილება უბრალოდ როგორც სიმბოლოები; $x_1,x_2,\dots,x_n$ სიმბოლოებს ეწოდება უცნობები და ისინიც განიხილება, როგორც ერთწევრა პოლინომები, ე. ი.

$$x_i = 1x_1^0 \dots x_{i-1}^0 x_i x_{i+1}^0 \dots x_n^0.$$

სიმრავლე $x_1,x_2,\dots,x_n$ უცნობების ყველა პოლინომებისა K ველის მიმართ აღინიშნება $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ სიმბოლოთი. განვსაზღვროთ ამ სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები. ჯერ განვსაზღვროთ პოლინომთა ტოლობის ცნება. ვიტყვით, რომ ორი $f=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ და $g=g(x_1,x_2,\dots x_n)$ პოლი-

ნომი K ველის მიმართ ტოლია და დავწერეთ f=g, თუ ისინი დალ-აგებამდე სიზუსტით ერთსა და იმავე წევრებისაგან შედგება, გარდა შეიძლება ნულ კოეფიციანტებიანი წევრებისა. **ვიტყვით, რომ f პოლინომი ნულოვანია, თუ მისი ყველა კოეფიციენტი K ველის ნულოვანი ელემენტია**. იგი აღინიშნება 0 სიმბოლოთი.

K ველის მიმართ ორი f და g პოლინომის ჯამი ვუწოდოთ პოლინომს K ველის მიმართ, რომელიც f+g სიმბოლოთი აღინიშნება და რომელსაც მივიღებთ, თუ f-ს ნიშნით + მიუწერთ g-ს წევრებს და შემდეგ მივიყვანთ მსგავს წევრებამდე.

K ველის მიმართ ორი ერთწევრა $f = Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ და $g = Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$ პოლინომის ნამრავლი ვუწოდოთ პოლინომს:

$$fg = (AB)x^{k+l_1}x_2^{k_2+l_2}\dots x_n^{k_n+l_n}\ . \qquad (2)$$

K ველის მიმართ ნებისმიერი ორი $f=f(x_1,\dots,x_n)$ და $g=g(x_1,\dots,x_n)$ პოლინომის ნამრავლი ვუწოდოთ პოლინომს, რომელსაც მივიღებთ, თუ f პოლინომის ყველა წევრს (2) წესით გავამრავლებთ g პოლი-ნომის ყველა წევრზე და შემდეგ მივიყვანთ მსგავს წევრებამდე.

ვთქვათ f და g არის $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ სიმრავლის ორი ნებისმიერი პოლინომი. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მათი შესაბამისი წევრები მსგავსია, რადგან საჭიროების შემთხვევაში ნულკოეფიციენტებიანი წევრების დამატებით ეს პოლი-ნომები არ შეიცვლებიან, ე. ი.

$$f = A_1x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} + \dots + A_sx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n},$$

$$g = B_1x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} + \dots + B_sx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$f + g = (A_1 + B_1)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} + \dots + (A_s + B_s)x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n} = g + f,$$

რადგან $A_i + B_i = B_i + A_i \qquad (i = 1,2,\dots s)$.

პოლინომთა გამრავლების ბინარული ოპერაციის განსაზღვრე-ბის თანახმად, fg=gf, რადგანაც (2) წესის ძალით,

$$(Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n})(Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n}) = (AB)x_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\dots x_n^{p_n+q_n}.$$

$$(Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n})(Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}) = (BA)x_1^{q_1+p_1}x_2^{q_2+p_2}\dots x_n^{q_n+p_n}.$$

ვთქვათ, ახლა

$$h = C_1x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} + \dots + C_sx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$$

არის $K[x_1,x_2,\dots x_n]$ სიმრავლის კიდევ ერთი ნებისმიერი პოლინომი. მაშინ, ცხადია, რომ $(f+g)+h=f+(g+h)$, რადგანაც $(A_i+B_i)+C_i= =A_i+(B_i+C_i)$ $(i=1,2,\dots,s)$.

(2) წესის ძალით, გვექნება:

$$\begin{aligned}
&\left[(Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n})(Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n})\right](Cx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}) = \\
&= \left((AB)x_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}\right)(Cx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}) = \\
&= (AB)Cx_1^{(p_1+q_1)+r_1}x_2^{(p_2+q_2)+r_2}\dots x_n^{(p_n+q_n)+r_n} = \\
&= A(BC)x_1^{p_1+(q_1+r_1)}x_2^{p_2+(q_2+r_2)}\dots x_n^{p_n+(q_n+r_n)} = \\
&= (Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n})\left[(Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n})(Cx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n})\right],
\end{aligned}$$

ე. ი. პოლინომთა გამრავლების ბინარული ოპერაციის განსაზღვრების თანახმად გვექნება: $(fg)h=f(gh)$.

ასევე სამართლიანია $(f+g)h=fh+gh$ ტოლობაც, რადგანაც

$$\begin{aligned}
&\left[(A+B)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\right](Cx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}) = \\
&= (A+B)Cx_1^{k_1+l_1}\cdots x_n^{k_n+l_n} = (AC+BC)x_1^{k_1+l_1}\cdots x_n^{k_n+l_n} = \\
&= (AC)x_1^{k_1+l_1}\cdots x_n^{k_n+l_n} + (BC)x_1^{k_1+l_1}\cdots x_n^{k_n+l_n}
\end{aligned}$$

იმის გამო, რომ $K[x_1,x_2,\dots x_n]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული შეკრების ბინარული ოპერაცია აკმაყოფილებს კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის აქსიომებს, ამიტომ ნებისმიერი პოლინომი შეიძლება განვიხილოთ როგორც მისი წევრების ჯამი. ასევე, $x_i^{k_i}$ სიმბოლოები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც x_i უცნობის ხარისხები. მართლაც,

$$x_i^2 = 1x_1^0 \dots x_i^2 \dots x_n^0 = (1x_1^0 \dots x_i \dots x_n^0) \cdot (1x_1^0 \dots x_i \dots x_n^0) = x_i \cdot x_i,$$
$$x_i^3 = 1x_1^0 \dots x_i^3 \dots x_n^0 = (1x_1^0 \dots x_i^2 \dots x_n^0) \cdot (1x_1^0 \dots x_i \dots x_n^0) = x_i^2 \cdot x_i$$
და ა. შ. $x_i^{k_i} = x_i^{k_i - 1} \cdot x_i$. შემდეგ
$$x_i^{k_i} x_j^{k_j} = 1x_1^0 \dots x_i^{k_i} \dots x_j^{k_j} \dots x_n^0 = (1x_1^0 \dots x_i^{k_i} \dots x_j^0 \dots x_n^0) \cdot (1x_1^0 \dots x_i^0 \dots x_j^{k_j} \dots x_n^0) = $$
$$= x_i^{k_i} \cdot x_j^{k_j},$$
ე. ი. $x_i^{k_i} x_j^{k_j}$ სიმბოლოც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $x_i^{k_i}$ და $x_j^{k_j}$ ხარისხების ნამრავლი. რადგანაც
$$Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n} = (A \cdot 1) x_1^{0+k_1} x_2^{0+k_2} .. x_n^{0+k_n} = (Ax_1^0 x_2^0 .. x_n^0)(1x_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n}) =$$
$$= A \cdot (x_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n}),$$
ამიტომ f პოლინომის ყოველი წევრი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მისი A კოეფიციენტის ნამრავლი უცნობთა ხარისხების ნამრავლზე. პოლინომთა ტოლობისა და ნულოვანი პოლინომის განსაზღვრების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ: f+0=f.

თუ
$$f = A_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} + \dots + A_s x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n},$$
მაშინ პოლინომი
$$(-A_1) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} + \dots + (-A_s) x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$$
აღვნიშნოთ $-f$ სიმბოლოთი და პოლინომთა შეკრების ოპერაციის განსაზღვრების თანახმად, გვექნება: f+(−f)=0.

(2) წესის მხედველობაში მიღებით, გვექნება:
$$(Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n}) \cdot 1 = (Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n}) \cdot (1x_1^0 x_2^0 .. x_n^0) = Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} .. x_n^{k_n},$$
ამიტომ გამრავლების ბინარული ოპერაციის განსაზღვრების თანახმად, ნებისმიერი f პოლინომისათვის გვექნება: f·1=f.

მაშასადამე, K [$x_1, x_2, \dots, x_n$] **სიმრავლე ყოფილა კომუტაციური ერთეულიანი რგოლი და მას უწოდებენ <u>n უცნობიან</u>**

პოლინომთა რგოლს K ველის მიმართ. შემოვიტანოთ ახლა მრავალუცნობიანი პოლინომის ხარისხის ცნება. **f პოლინომის** $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}\,(A\neq 0)$ **წევრის ხარისხი ეწოდება უცნობების** $k_1+k_2+\dots+k_n$ **ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამს, ხოლო f** პოლინომის **ყველა წევრის** (რომლის კოეფიციენტი K ველის არანულოვანი ელემენტია) **ხარისხებს შორის უდიდესს ეწოდება პოლინომის ხარისხი**. ნულოვან პოლინომს ხარისხი არ მიეწერება. **ნულოვანი ხარისხის პოლინომი იქნება K ველის არანულოვანი ელემენტები და მხოლოდ ისინი.**

თუ $f\neq 0$ პოლინომის ყოველი წევრის ხარისხი არის m, მაშინ მას m ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი ან m ხარისხის ფორმა ეწოდება. ცხადია, რომ $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ რგოლის ყოველი პოლინომი ერთადერთი გზით შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ რგოლის ერთგვაროვან პოლინომთა ჯამი.

მრავალუცნობიანი პოლინომის შემთხვევაში, ერთუცნობიანი პოლინომისაგან განსხვავებით. აზრი არ აქვს ვილაპარაკოთ მის უფროს წევრზე, რადგან მას შეიძლება გააჩნდეს უდიდესი ხარისხის რამდენიმე წევრი. ამის გამო, უკვე არ შეიძლება მრავალუცნობიანი პოლინომის წევრების დალაგება მათი ხარისხების ზრდისა ან კლების მიხედვით.

განვიხილოთ არანულოვანი მრავალუცნობიანი პოლინომის წევრების ე.წ. ლექსიკოგრაფიული დალაგება, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}\,(A\neq 0)$ და $Bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}\,(B\neq 0)$ არის f პოლინომის ორი ნებისმიერი წევრი. **ვიტყვით, რომ პირველი წევრი უფრო მაღალია ვიდრე მეორე, ხოლო მეორე უფრო დაბალია ვიდრე პირველი, თუ კი**

$$k_1-r_1,\quad k_2-r_2,\dots,\ k_n-r_n$$

სხვაობებს შორის პირველი ნულისაგან განსხვავებული სხვაობა დადებითია. თუ კი (3) სხვაობებს შორის პირველი

ნულისაგან განსხვავებული სხვაობა უარყოფითია, მაშინ ვიტყვით, რომ პირველი წევრი უფრო დაბალია ვიდრე მეორე, ხოლო მეორე უფრო მაღალი ვიდრე პირველი. პოლინომის წევრების დალაგებას მათი სიმაღლის მიხედვით ეწოდება პოლინომის წევრების ლექსიკოგრაფიული დალაგება. ასეთი დალაგების შემთხვევაში პირველ ადგილას მდგომ წევრს ეწოდება f პოლინომის უმაღლესი წევრი, რომელსაც HG(f) სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

<u>თეორემა.</u> $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ რგოლის ორი არანულოვანი პოლინომის ნამრავლის უმაღლესი წევრი თანამამრავლი პოლინომების უმაღლესი წევრების ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

$$HG(fg)=HG(f)\cdot HG(g). \tag{4}$$

დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით უცნობთა რიცხვის მიმართ. როცა $n=1$, გვექნება:

$f(x)g(x)=(a_0x_0+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1$. ცხადია, რომ $HG(fg)=a_0b_0x^2=(a_0x)(b_0x)= HG(f)\cdot HG(g)$. დავუშვათ თეორემის სამართლიანობა, როცა პოლინომები $n-1$ უცნობიანია, და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ თეორემა n უცნობიანი პოლინომებისათვის. ამ მიზნით პოლინომები დავალაგოთ x_1 უცნობის ხარისხების მიხედვით. ვთქვათ

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^r\varphi_r(x_2,\ldots,x_n)+x_1^{r-1}\varphi_{r-1}(x_2,\ldots,x_n)+\\ \ldots+\varphi_0(x_2,\ldots,x_n),$$

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1^s\psi_s(x_2,\ldots,x_n)+x_1^{s-1}\psi_{s-1}(x_2,\ldots,x_n)+\\ \ldots+\psi_0(x_2,\ldots,x_n),$$

სადაც $\varphi_i(x_2,\ldots x_n)$ და $\psi_i(x_2,\ldots x_n)$ პოლინომებია $x_2,\ldots x_n$ უცნობების მიმართ. $f(x_1,x_2,\ldots x_n)g(x_1,x_2,\ldots x_n)$ ნამრავლის უმაღლეს წევრში x_1-ს უნდა ჰქონდეს უდიდესი ხარისხის მაჩვენებელი. მაშასადამე,

$$HG(fg)=x_1^{r+s}HG(\varphi_r\psi_s).$$

რადგან φ_r და ψ_s პოლინომები $n-1$ უცნობიანი პოლინომებია, ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით

$$HG(\varphi_r\psi_s) = HG(\varphi_r)HG(\psi_s).$$

ამრიგად, გვექნება

$$HG(fg) = x_1^{r+s}HG(\varphi_r)HG(\psi_s) = (x_1^r HG(\varphi_r))(x_1^s HG(\psi_s)) =$$
$$= HG(f)\cdot HG(g).$$

<u>თეორემა.</u> $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ რგოლი მთელობის არეა.

ვთქვათ f და g არანულოვანი პოლინომებია K ველის მიმართ, და ვთქვათ, რომ

$$HG(f) = Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} \text{ და } HG(g) = Bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}.$$

მაშინ დამტკიცებული თეორემის თანახმად

$$HG(fg) = (AB)x_1^{k_1+r_1}x_2^{k_2+r_2}\ldots x_n^{k_n+r_n},$$

ვინაიდან $A\neq 0$ და $B\neq 0$, ვღებულობთ, რომ $fg \neq 0$. ე.ი. $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ რგოლი მთელობის არეა.

§ 2. სიმეტრიული პოლინომები

<u>განსაზღვრება.</u> მრავალუცნობიან პოლინომებს K ველის მიმართ ეწოდება სიმეტრიული, თუ ის არ იცვლება უცნობების ნებისმიერი გადანაცვლების დროს.

უმარტივესი და განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი სიმეტრიული პოლინომები K ველის მიმართ არის ე. წ. ელემენტარული ანუ ძირითადი სიმეტრიული ფუნქციები:

$\sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n$,

$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$,

$\sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$,

. . . .

$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$.

__თეორემა__. $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ **ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციების ყოველი $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ პოლინომი K ველის მიმართ შეიძლება გამოვსახოთ როგორც $x_1, x_2, \cdots, x_n$ უცნობების $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ სიმეტრიულ პოლინომი K ველის მიმართ.**

მართლაც,

$$\varphi(\sigma_1,\sigma_2,..\sigma_n)=A_1\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}..\sigma_n^{k_n}+...+A_s\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}..\sigma_n^{l_n}=A_1(x_1+x_2+...+$$
$$+x_n)^{k_1}(x_1x_2+x_1x_2+...+x_{n-1}x_n)^{k_2}...(x_1x_2..x_n)^{k_n}+...+A_s(x_1+x_2+...+x_n)^{l_1}(x_1x_2+$$
$$+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n)^{l_2}...(x_1x_2..x_n)^{l_n}=f(x_1,x_2,..x_n)$$

ის, რომ $f(x_1,x_2,...x_n)$ პოლინომია K ველის მიმართ – ეს ცხადია; მაგრამ f სიმეტრიულიც არის, რადგანაც $x_1, x_2,..., x_n$ უცნობების ნებისმიერი გადანაცვლებით $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ არ შეიცვლება, ე. ი. არ შეიცვლება f პოლინომიც.

__ლემა__. **თუ $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ არის $f(x_1,x_2,...,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომის უმაღლესი წევრი, მაშინ $k_1 \geq k_2 \geq. . ..\geq k_n$.**

მართლაც, დავუშვათ წინააღმდეგი და ვთქვათ

$$Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_i^{k_i}x_{i+1}^{k_{i+1}}...x_n^{k_n} \tag{5}$$

უმაღლეს წევრში, რომელიღაც i-სათვის $k_i<k_{i+1}$. რადგანაც $f(x_1,x_2,...,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომია, ამიტომ ის შეიცავს

$$Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_{i+1}^{k_i}x_i^{k_{i+1}}...x_n^{k_n}=Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}...x_n^{k_n}$$

წევრსაც, რომელიც მიიღება (5) წევრისაგან x_i და x_{i+1} უცნობების ტრანსპოზიციით. იმის გამო, რომ ორივე წევრში $x_1,x_2,\ldots x_{i-1}$ უცნობების ხარისხის მაჩვენებლები ერთი და იგივეა, ამიტომ უნდა გვქონდეს $k_i \geq k_{i+1}$, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება.

__ძირითადი თეორემა სიმეტრიული პოლინომების შესახებ__. **$x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების ყოველი $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომი K ველის მიმართ ერთადერთი გზით შეიძლება გა-**

მოვსახოთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციების პოლინომად იმავე K ველის მიმართ.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ გამოსახვის შესაძლებლობა. ვთქვათ ჩვენი პოლინომის უმაღლესი წევრია $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, სადაც ლემის ძალით, $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. განვიხილოთ ერთწევრა პოლინომი

$$\varphi_1 = A\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n},$$

რომელიც წინა თეორემის თანახმად არის $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების სიმეტრიული პოლინომი K ველის მიმართ. მისი უმაღლესი წევრი ადრე დამტკიცებული თეორემის თანახმად იქნება:

$$Ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2\ldots x_n)^{k_n} =$$
$$= Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

ე. ი. ემთხვევა f-ის უმაღლეს წევრს. მაშასადამე,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\phi_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (6)$$

სიმეტრიული პოლინომის უმაღლესი წევრი $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ უფრო დაბალი იქნება, ვიდრე f-ის უმაღლესი წევრი. ახლა თუ განვიხილავთ

$$\varphi_2 = B\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\ldots\sigma_n^{l_n}$$

პოლინომს, იმავე მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ მისი უმაღლესი წევრი დაემთხვევა f_1-ის უმაღლეს წევრს. ამიტომ

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\phi_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n). \qquad (7)$$

სიმეტრიული პოლინომის უმაღლესი წევრი უფრო დაბალი იქნება, ვიდრე f_1-ის უმაღლესი წევრი. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ K ველის მიმართ n-უცნობიან

$$f,\quad f_1,\quad f_2 \qquad (8)$$

სიმეტრიულ პოლინომთა მიმდევრობას, რომელსაც ის თვისება ექნება, რომ მისი ყოველი პოლინომის უმაღლესი წევრი უფრო დაბალი იქნება ვიდრე წინასი. ეს პროცესი, რა თქმა უნდა, უსასრულოდ ვერ გაგრძელდება და რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ შეწყდება, რადგანაც ყოველ ეტაპზე უმაღლესი წევრის ხარისხის მაჩვენებლები აკ-

მაყოფილებს პირობას $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ და ასეთ n-ეულთა სიმრავლე კი სასრულია. თუ f_s არის (8) მიმდევრობის უკანასკნელი არანულოვანი წევრი, ე.ი.

$$f_s(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\phi_{s+1}=f_{s+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,$$

მაშინ (6), (7), . . . ძალით გვექნება:

$$f=\varphi_1+f_1=\varphi_1+\varphi_2+f_2=\ldots=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{s+1}=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n).$$

ახლა გადავიდეთ ერთადერთობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)= \varphi_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ და $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)= \varphi_2(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ სადაც $\varphi_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) \neq \varphi_2(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, ე. ი.

$$\varphi_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) - \varphi_2(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)= \varphi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) \neq 0.$$

წინა თეორემის ძალით კი გვექნება:

$$\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = g(x_1, x_2,\ldots,x_n)$$

სადაც $g(x_1, x_2,\ldots,x_n)=0$

ვაჩვენოთ, რომ ეს შეუძლებელია, ე. ი. თუ $\omega(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\neq 0$, მაშინ მისი შესაბამისი $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომიც აგრეთვე არანულოვანია. ვთქვათ $A\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\ldots\sigma_n^{k_n}$ არის ω პოლინომის ერთ-ერთი წევრი, სადაც $A\neq 0$. წინა თეორემის ძალით, ეს წევრი შეიძლება გამოვსახოთ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების სიმეტრიულ პოლინომად, რომლის უმაღლესი წევრი იქნება

$$Ax_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{k_n} = Ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n},$$

სადაც

$$\begin{aligned}
l_1&=k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n,\\
l_2&=\quad\;\; k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_{n-1}&=\qquad\qquad k_{n-1}+k_n,\\
l_n&=\qquad\qquad\qquad\; k_n.
\end{aligned}$$

აქედან ვღებულობთ:

$k_n=l_n$,

$k_{n-1}= l_{n-1}- l_n,$

. . . .

$k_2=l_2-l_3,$

$k_1=l_1-l_2.$

ამრიგად, $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ და $(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ n-ეულებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობაა. მაშასადამე, $\omega(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ პოლინომის განსხვავებულ წევრებს, განხილულს როგორც $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების სიმეტრიული პოლინომები, გააჩნიათ განსხვავებული უმაღლესი წევრები. ავიღოთ ახლა ω პოლინომის ყველა წევრი, ისინი განსხვავებულია – მრავალუცნობიანი პოლინომის განსაზღვრების თანახმად, ამიტომ თუ მას განვიხილავთ როგორც $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების სიმეტრიულ პოლინომებს, მათი უმაღლესი წევრებიც განსხვავებული იქნება. ამ უმაღლეს წევრებს შორის უმაღლესი არც ერთ სხვა წევრთან არ გაბათილდება და იქნება $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ სიმეტრიული პოლინომის უმაღლესი წევრი, ე. ი. $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq 0$.

სიმეტრიულ ერთგვაროვან პოლინომს ეწოდება მონოგენური პოლინომი.

§ 1. კომპლექსურკოეფიციენტებიან პოლინომთა თვისებები

ვაჩვენოთ, რომ ყოველ კომპლექსურკოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი კომპლექსური ფესვი. მართლაც, ვთქვათ მოცემულია

$$x^2+px+q=0 \quad (p,q\in \mathbf{C})$$

კვადრატული განტოლება. ამ განტოლების მარცხენა მხარე შევავსოთ სრულ კვადრატამდე, გვექნება: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$, ხოლო $\frac{p^2}{4}-q$ კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატულ ფესვს, როგორც ვიცით, აქვს ორი მნიშვნელობა, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან; მაშასადამე, $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ე. ი.

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}..$$

<u>ლემა</u> უფროსი წევრის მოდულის შესახებ. ვთქვათ მოცემულია n-ური ხარისხის კომპლექსურკოეფიციენტებიანი

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

პოლინომი და ნებისმიერი დადებითი k რიცხვი. მაშინ x ცვლადის მნიშვნელობათათვის, რომელთა მოდული საკმაოდ დიდია, სამართლიანია

$$|a_0x^n|>k\,|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n|$$

უტოლობა.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, \ . \ . \ . \ , |a_n|),$$

მაშინ გვექნება:

$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n| \le |a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \ldots + \ + |a_{n-1} x +$
$+ a_n| = |a_1||x|^{n-1} + |a_2||x|^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}||x| + |a_n| \le A(|x|^{n-1} + +|x|^{n-2} + \ldots$

$$\ldots + |x| + 1) = A\frac{|x|^n - 1}{|x|-1} = A\frac{|x|^n}{|x|-1} - \frac{A}{|x|-1}.$$

აქედან, თუ $|x| > 1$, ვღებულობთ:

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n| < A\frac{|x|^n}{|x|-1}.$$

ეს უტოლობა მით უმეტეს შესრულდება, თუ

$$|x| \ge \frac{kA}{|a_0|} + 1, \Rightarrow |x| - 1 \ge \frac{kA}{|a_0|}, \Rightarrow \frac{1}{|x|-1} \le \frac{|a_0|}{kA}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\frac{|x|^n}{|x|-1} \le \frac{A|x|^n|a_0|}{kA} = \frac{|a_0 x^n|}{k},$$

ე.ი. თუ $|x| \ge \dfrac{kA}{|a_0|} + 1$, მაშინ

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n| < \frac{|a_0 x^n|}{k},$$

<u>შედეგი:</u> x ცვლადის ნამდვილ მნიშვნელობათათვის, რომელთა აბსოლუტური მნიშვნელობა საკმაოდ დიდია, ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომს იგივე ნიშანი აქვს, რაც მის უფროს წევრს.

მართლაც, თუ ლემაში დავუშვებთ, რომ $k=1$ და $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, მივიღებთ:

$$|a_0 x^n| > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n|.$$

<u>თეორემა.</u> კენტი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომს აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.

დამტკიცება: ვთქვათ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbf{R}[x]$$

ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $a_0>0$. მაშინ თუ $x=a>0$ საკმაოდ დიდია, გვექნება: $f(a)>0$, რადგან $a_0a^n>0$; თუ კი $x=b<0$, სადაც b აბსოლუტური მნიშვნელობით საკმაოდ დიდია, გვექნება: $f(b)<0$, რადგან n კენტია და ამიტომ $a_0b^n<0$. ანალიზიდან ცნობილია, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი პოლინომი არის x ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია მთელ აბსცისათა ღერძზე; ანალიზიდან აგრეთვე ცნობილია, რომ თუ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე და სეგმენტის ბოლო წერტილებზე სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ სეგმენტის შიგნით მოიძებნება წერტილი, რომელზედაც ფუნქცია ნულოვან მნიშვნელობას მიიღებს. მაშასადამე, $[b,a]$ სეგმენტში არსებობს წერტილი $x=c$ ისეთი, რომ $f(c)=0$, ე. ი. $x=c$ არის $f(x)$ პოლინომის ფესვი.

<u>გაუსის ლემა</u>. ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომს, რომლის ხარისხი $n\geq1$ აქვს ერთი მაინც კომპლექსური ფესვი.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbf{R}[x], \quad n\geq1.$$

ცხადია, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი $n=2^k u$, სადაც $k\geq0$ მთელი რიცხვია და $2\nmid u$. თუ $k=0$, მაშინ n კენტია და როგორც ზემოთ ვნახეთ, $f(x)$-ს აქვს ერთი მაინც ნამდვილი, ე. ი. კომპლექსური ფესვი. ამიტომ, ზოგადობის დაურღვევლად, ვიგულისხმოთ, რომ $k\geq1$ და ლემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით k–ს მიმართ, ე. ი. დავუშვათ, რომ ლემა სამართლიანია ყველა ნამდვილკოეფიციენტებიანი $F(x)$ პოლინომისათვის, რომელთათვისაც $2^{k-1}|\deg F(x)$, მაგრამ $2^k\nmid\deg F(x)$ და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ, რომ ლემა სამართლიანია ჩვენი $f(x)$ პოლინომისათვის, რომლისათვისაც $2^k|n$, მაგრამ $2^{k+1}\nmid n$. როცა $2^0|\deg F(x)$ და $2\nmid\deg F(x)$, მაშინ $F(x)$ – კენტი ხარისხისაა და ამიტომ ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი აქვს.

ვთქვათ, მოცემული f(x) პოლინომის დაშლის ველი **C**-ს მიმართ არის Λ და ვთქვათ f(x)-ის ფესვებია $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n \in \Lambda$. ვთქვათ $c\in\mathbf{R}$ და განვიხილოთ Λ -ს

$$\beta_{ij} = \gamma_i \gamma_j + c\,(\gamma_i + \gamma_j) \qquad (i<j) \tag{1}$$

ელემენტები. β_{ij} ელემენტთა რაოდენობა აღვნიშნოთ m-ით, ცხადია, რომ

$$m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k u(2^k u-1)}{2} = 2^{k-1} v, \tag{2}$$

სადაც $v=u(2^k u-1)$ კენტი რიცხვია.

განვიხილოთ

$$g_c(x) = \prod_{1\le i<j\le n}(x-\beta ij) = x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1}x +$$

$$+\alpha_m \in \Lambda[x]$$

პოლინომი. ამ პოლინომის კოეფიციენტები β_{ij} ელემენტთა ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციებია და ამიტომ, (1)-ის ძალით, γ_1, γ_2, . . ., γ_n სიდიდეთა პოლინომებია **R**-ის მიმართ, ე. ი.

$$\alpha_h = \psi_h(\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n) \qquad (h = 1,2,\dots,m).$$

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ψ_h პოლინომი არის γ_1, γ_2, ... ,γ_n-ის სიმეტრიული პოლინომი **R**-ის მიმართ, ე. ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ის არ იცვლება γ-ების ნებისმიერი, ვთქვათ γ_k და γ_l -ის $(k<l)$, გადანაცვლების დროს. მართლაც, (1)-ის ძალით,

$$\beta_{kl} = \gamma_k \gamma_l + c(\gamma_k + \gamma_l) \leftrightarrow \gamma_l \gamma_k + c(\gamma_l + \gamma_k) = \gamma_k \gamma_l + c(\gamma_k + \gamma_l) = \beta_{kl}$$

ანალოგიურად, თუ $k<j$ და $j\neq l$, მაშინ

$$\beta_{kj} = \gamma_k\gamma_j + c(\gamma_k + \gamma_j) \leftrightarrow \gamma_l\gamma_j + c(\gamma_l + \gamma_j) = \begin{cases} \beta_{lj}, & \text{თუ } l<j, \\ \gamma_j\gamma_l + c(\gamma_j + \gamma_l) = \beta_{jl}, & \text{თუ } l>j; \end{cases}$$

ახლა, თუ $i<l$ და $i\neq k$, მაშინ

$$\beta_{il}=\gamma_i\gamma_l+c(\gamma_i+\gamma_l)\leftrightarrow\gamma_i\gamma_k+c(\gamma_i+\gamma_k)=\begin{cases}\beta_{ik}, & \text{თუ } i<k,\\ \gamma_k\gamma_i+c(\gamma_k+\gamma_i)=\beta_{ki}, & \text{თუ } i>k;\end{cases}$$

თუ $i\neq l$ და $j\neq l$, მაშინ

$$\beta_{ij}=\gamma_i\gamma_j+c(\gamma_i+\gamma_j)\leftrightarrow\gamma_i\gamma_j+c(\gamma_i+\gamma_j)=\beta_{ij};.$$

ამრიგად, γ_k და γ_l-ის გადანაცვლების დროს, $x-\beta_{ij}$ მამრავლები ან თავის ადგილს შეინარჩუნებენ, ან მხოლოდ ურთიერთ ადგილს შეიცვლიან. $g_c(x)$ პოლინომის კოეფიციენტები ცხადია არ შეიცვლებიან მისი ფესვების გადაადგილების დროს, ამიტომ, თანახმად ძირითადი თეორემისა სიმეტრიული პოლინომების შესახებ, $g_c(x)$ პოლინომის კოეფიციენტები ერთადერთი გზით შეიძლება გამოვსახოთ $f(x)$ პოლინომის $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, ფესვების $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ელემენტარული სიმეტრიული ფუნქციების პოლინომებად **R**-ის მიმართ, ე. ი. ვიეტის ფორმულების გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\alpha_h=\varphi_h(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=\varphi_h\left(-\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},\dots,(-1)^n\frac{a_n}{a_0}\right)\in \mathrm{R}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $g_c(x)\in\mathbf{R}[x]$. (2)-ის ძალით, $2^{k-1}\mid \deg g_c(x)$, მაგრამ $2^k\nmid\deg g_c(x)$, ამიტომ ინდუქციის დაშვების თანახმად, $g_c(x)$ პოლინომის ერთი ფესვი მაინც კომპლექსურია, ე.ი. ერთი β_{ij} მაინც, ვთქვათ $\beta_{rs}\in\mathbf{C}$. თუ (1) ფორმულაში c-ს მაგივრად ავიღებთ სხვა ნამდვილ c' რიცხვს, ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $g_{c'}(x)\in\mathbf{R}[x]$ და მისი ერთი β_{ij}' ფესვი მაინც იქნება კომპლექსური. იმის გამო, რომ (1) ფორმულაში ნამდვილი c რიცხვი შეიძლება ვცვალოთ უამრავჯერ, ხოლო i,j წყვილთა რაოდენობა ყოველთვის m-ის ტოლია, ამიტომ მოიძებნება ისეთი c და c' ნამდვილი რიცხვები, რომ β_{rs}, და β_{rs}' იქნება კომპლექსური რიცხვები. მაშასადამე,

$$\beta_{rs}=\gamma_r\gamma_s+c(\gamma_r+\gamma_s)\quad\text{და}\quad\beta_{rs}'=\gamma_r\gamma_s+c'(\gamma_r+\gamma_s)$$

აქედან $\beta_{rs} - \beta'_{rs} = (c - c')(\gamma_r + \gamma_s) \Rightarrow \gamma_r + \gamma_s = \dfrac{\beta_{rs} - \beta'_{rs}}{c - c'} \in \mathbf{C}$ და

$$\gamma_r \gamma_s = \beta_{rs} - c\,(\gamma_r + \gamma_s) \in \mathbf{C}.$$

ახლა შევადგინოთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია γ_r და γ_s. ეს განტოლება იქნება:

$$x^2 - (\gamma_r + \gamma_s)x + \gamma_r\gamma_s = 0.$$

ამ კომპლექსურკოეფიციენტებიანი განტოლების γ_r და γ_s ფესვები, როგორც ზემოთ ვნახეთ, კომპლექსური რიცხვებია. ამით დამტკიცდა, რომ f(x) პოლინომს აქვს ორი კომპლექსური ფესვი მაინც.

<u>**ალგებრის ძირითადი თეორემა**</u>: **კომპლექსურ კოეფიციენ-ტებიან პოლინომს, რომლის ხარისხი $n \geq 1$ აქვს ერთი მაინც კომპლექსური ფესვი.**

<u>**დამტკიცება**</u>. ვთქვათ მოცემული გვაქვს პოლინომი

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbf{C}[x].$$

ავიღოთ მისი შეუღლებული

$$g(x) = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_n \in \mathbf{C}[x],$$

და განვიხილოთ ნამრავლი

$$F(x) = f(x)g(x) = b_0 x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \ldots + b_{2n-1} x + b_{2n},$$

პოლინომთა ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად,

$$b_i = \sum_{k+l=i} a_k \bar{a}_l, \qquad \text{ამიტომ} \quad \overline{b}_i = \sum_{k+l=i} \bar{a}_k a_l = \sum_{l+k=i} a_l \bar{a}_k = b_i,$$

ე. ი. $F(x) \in \mathbf{R}[x]$. გაუსის ლემის თანახმად, $F(x)$-ს აქვს ერთი მაინც γ კომპლექსური ფესვი. ამრიგად $F(\gamma) = f(\gamma)g(\gamma) = 0$, და მაშასადამე ან $f(\gamma) = 0$, ან $g(\gamma) = 0$. თუ $f(\gamma) = 0$, თეორემა დამტკიცებულია. თუ $f(\gamma) \neq 0$, მაშინ

$$g(\gamma) = \bar{a}_0 \gamma^n + \bar{a}_1 \gamma^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1} \gamma + \bar{a}_n = 0$$

თუ ამ ტოლობაში შემავალი კომპლექსურ რიცხვებს შევცვლით მათი შეუღლებულით, მივიღებთ

$$a_0 \overline{\gamma}^n x^n + a_1 \overline{\gamma}^{n-1} + a_2 \overline{\gamma}^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \overline{\gamma} + a_n = 0 .$$

ე. ი. $f(\overline{\gamma}) = 0$, და თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{C}$ არის ალგებრულად ჩაკეტილი ველი. ამიტომ $\mathbf{C}[x]$ რგოლის $f(x)$ პოლინომის კანონიკური დაშლა დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად $\mathbf{C}$-ს მიმართ იქნება:

$$f(x) = a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_s)^{k_s},\ k_1+k_2+\ldots+k_s = n. \qquad (3)$$

ნებისმიერი რიცხვით კოეფიციენტებიანი პოლინომი, რომლის ხარისხი n>1, კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ იშლება დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად. კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ დაუყვანადია მხოლოდ პირველი ხარისხის პოლინომები.

§ 2. ნამდვილკოეფიციენტებიან პოლინომთა თვისებები

<u>თეორემა.</u> თუ c არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი f(x) პოლინომის კომპლექსური, მაგრამ არანამდვილი ფესვი, მაშინ მისი შეუღლებულიც $\overline{c}$ იქნება f(x)-ის ფესვი.

<u>დამტკიცება</u> მართლაც, ვთქვათ

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbf{R}[x]$$

და $f(c)=0$, სადაც $c\in\mathbf{C}$, მაგრამ $c \overline{\in} \mathbf{R}$. მაშინ

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n = 0.$$

თუ ამ ტოლობის ყველა რიცხვს შეუღლებულით შევცვლით, მივიღებთ

$$a_0\overline{c}^{\,n} + a_1\overline{c}^{\,n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{c} + a_n = 0$$

ტოლობას. მაშასადამე, $f(\overline{c}) = 0$.

თუ c და $\overline{c}$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი f(x) პოლინომის ფესვებია, მაშინ

$$x-c \mid f(x) \quad \text{და} \quad x-\bar{c} \mid f(x);$$

ამიტომ, თანამარტივ პოლინომთა 3 თვისების ძალით, $\varphi(x)|f(x)$, სადაც

$$\varphi(x)=(x-c)(x-\bar{c})=x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}=x^2+px+q \tag{4}$$

ე. ი. $f(x)$ პოლინომი იყოფა ნამდვილკოეფიციენტებიან კვადრატულ სამწევრზე. ვაჩვენოთ, რომ ამ სამწევრის დისკრიმინანტი უარყოფითია. მართლაც, ვთქვათ $c=a+bi$ და $\bar{c}=a-bi$, მაშინ

$p=-(c+\bar{c})=-2a$ და $q=c\bar{c}=a^2+b^2$,

ე. ი.

$$p^2-4q=4a^2-4(a^2+b^2)=-4b^2<0.$$

მაშასადამე, **თუ ნამდვილ კვადრატულ სამწევრს აქვს (არანამდვილი) კომპლექსური ფესვები, მაშინ მისი დისკრიმინანტი უარყოფითია.**

ვაჩვენოთ, **რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი f(x) პოლინომის c და $\bar{c}$ შეუღლებულ კომპლექსურ ფესვებს აქვთ ერთი და იგივე ჯერადობა.** დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ c არის f(x) პოლინომის k-ჯერადი, ხოლო $\bar{c}$ ამავე პოლინომის l-ჯერადი ფესვი და $k>l$. მაშინ $(x-c)^k|f(x)$, $(x-c)^{k+1}\nmid f(x)$ და $(x-\bar{c})^l \mid f(x)$, $(x-\bar{c})^{l+1}\nmid f(x)$. რადგანაც $k>l$, ამიტომ (4)-ის ძალით, $\varphi^l(x)|f(x)$, მაგრამ $\varphi^{l+1}(x)\nmid f(x)$. იმის გამო, რომ $f(x)\in\mathbf{R}[x]$ და $\varphi(x)\in\mathbf{R}[x]$, ამიტომ გაყოფადობის ცნების თანახმად,

$f(x)=\varphi^l(x)q(x)$, სადაც $q(x)\in\mathbf{R}[x]$ და $\varphi(x)\nmid q(x)$.

რადგანაც $k>l$, ამიტომ

$$x-c|q(x)\Rightarrow q(c)=0\Rightarrow q(\bar{c})=0\Rightarrow(x-\bar{c})|q(x),$$

რაც შეუძლებელია იმიტომ, რომ $(x-c)(x-\bar{c})\nmid q(x)$.

მაშასადამე, $k=l$.

ვთქვათ $f(x)\in\mathbf{R}[x]$, ე. ი. $f(x)\in\mathbf{C}[x]$,. ამიტომ, (3)-ის ძალით, გვექნება:

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_s)^{k_s}, \qquad k_1+k_2+\dots+k_s=\deg f(x)$$

სადაც $c_1,c_2,\dots,c_s$ საზოგადოდ $f(x)$ პოლინომის კომპლექსური ფესვებია.

აქ შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) $c_1,c_2,\dots,c_s\in\mathbf{R}$. მაშინ $\mathbf{R}[x]$ რგოლის $f(x)$ პოლინომის კანონიკური დაშლა დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად $\mathbf{R}$-ის მიმართ იქნება:

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_s)^{k_s}, \qquad k_1+k_2+\dots+k_s=\deg f(x) \tag{5}$$

2) $c_1,c_2,\dots,c_r\in\mathbf{R}$; $c_{r+1},c_{r+2},\dots,c_s\in\mathbf{C}$. მაშინ, (4)-ის ძალით, ამავე $f(x)$-ის კანონიკური დაშლა $\mathbf{R}$-ის მიმართ იქნება:

$$\begin{gathered}f(x)=a_0(x-c_1)^{k_1}\dots(x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},\\ k_1+\dots+k_r+2(l_1+\dots+l_t)=\deg f(x).\end{gathered} \tag{6}$$

3) $c_1,c_2,\dots,c_r\in\mathbf{C}$. მაშინ გვექნება:

$$f(x)=a_0(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_ux+q_u)^{l_u}, \quad 2(l_1+l_2+\dots+l_u)=\deg f(x) \tag{7}$$

(5)–(7) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

ნებისმიერი ნამდვილკოეფიციენტებიანი პოლინომი, რომლის ხარისხი n>2, ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ იშლება დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად. მეორე ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი პოლინომი ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ იშლება დაუყვანად პოლინომთა ნამრავლად, თუ მისი დისკრიმინანტი ≥0. ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ დაუყვანადია ყველა პირველი ხარისხის და ის მეორე ხარისხის პოლინომები, რომელთა დისკრიმინანტი <0.

§ 1. წრფივი სივრცის თვისებები

<u>განსაზღვრება.</u> L სიმრავლეს ეწოდება წრფივი სივრცე K ველის მიმართ (L–ის ელემენტებს ვექტორებს უწოდებენ, K ველის ელემენტებს კი სკალარებს) თუ

ა) L-ის u და v ვექტორთა ყოველ დალაგებულ წყვილს L-შივე ეთანადება ერთადერთი ვექტორი, რომელსაც u და v ვექტორების ჯამი ეწოდება და u+v სიმბოლოთი აღინიშნება;

ბ) K-ს ყოველ α სკალარს და L-ის ყოველ u ვექტორს L-ში ეთანადება ერთადერთი ვექტორი, რომელსაც α სკალარისა და u ვექტორის ნამრავლი ეწოდება და αu სიმბოლოთი აღინიშნება.

ეს ორი ოპერაცია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ 8 აქსიომას:

1) კომუტაციურობის აქსიომა: u+v=v+u ნებისმიერი u და v-სთვის L-დან;

2) ასოციაციურობის აქსიომა: (u+v)+w=u+(v+w) ნებისმიერი u,v,w-სთვის L-დან;

3) L-ში არსებობს ვექტორი 0 ისეთი, რომ u+0=u ნებისმიერი u-სთვის L-დან. 0-ს ეწოდება ნულოვანი ვექტორი;

4) ყოველი u-სთვის L-დან, L-ში არსებობს u ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი –u ისეთი, რომ u+(–u)= 0;

5) ნებისმიერი u-სთვის L-დან: 1·u=u;

6) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ ნებისმიერი α,β-სთვის K-დან და ნებისმიერი u-სათვის L-დან;

7) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ ნებისმიერი α,β-სთვის K-დან და ნებისმიერი u-სთვის L-დან;

8) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ ნებისმიერი α-სთვის K-დან და ნებისმიერი u,v-სათვის L-დან.

წრფივ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა ველის – **R**-ის მიმართ ეწოდება ნამდვილი წრფივი სივრცე; წრფივ სივრცეს კომპლექსურ რიცხვთა ველის – **C**-ს მიმართ ეწოდება კომპლექსური წრფივი სივრცე.

ადვილია იმის შემოწმება, რომ სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი თავისუფალი ვექტორებისა სიბრტყეზე არის ნამდვილი წრფივი სივრცე (აღინიშნება V^2 სიმბოლოთი); ასევე სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი თავისუფალი ვექტორებისა სივრცეში არის ნამდვილი წრფივი სივრცე (აღინიშნება V^3 სიმბოლოთი).

ვაჩვენოთ, **რომ სიმრავლე K ველის ელემენტთა ყველა შესაძლებელი დალაგებული n-ეულებისა არის წრფივი სივრცე K ველის მიმართ.** მართლაც, ორი ასეთი $u=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ და $v=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ n-ეულის ჯამი ვუწოდოთ $u+v=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots,\xi_n+\eta_n)$ n-ეულს; ხოლო α სკალარისა და $u=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ n-ეულის ნამრავლი ვუწოდოთ $\alpha u=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\ldots,\alpha\xi_n)$ n-ეულს. ადვილია იმის შემოწმება, რომ ეს ორივე ოპერაცია აკმაყოფილებს ზემოთ ჩამოთვლილ 8 აქსიომას. **ამ სივრცეს ეწოდება არითმეტიკული წრფივი სივრცე და K^n სიმბოლოთი აღინიშნება**.

თუ მოვიგონებთ სკალარისა და მატრიცის ნამრავლის ცნებას დავრწმუნდებით, რომ $M_n(K)$ არის წრფივი სივრცე K ველის მიმართ.

ადვილად შემოწმდება, რომ სიმრავლე ყველა უწყვეტი ფუნქციებისა $[a,b]$ სეგმენტზე არის ნამდვილი წრფივი სივრცე; იგი აღინიშნება $C[a,b]$ სიმბოლოთი.

ზუსტად ისევე როგორც რგოლის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ **ნებისმიერ წრფივ სივრცეში არსებობს მხოლოდ ერთი ნუ-**

ლოვანი ვექტორი და ყოველ ვექტორს გააჩნია მხოლოდ ერთი მოპირდაპირე.

წრფივი სივრცის u და v ვექტორების სხვაობა (აღინიშნება $u-v$ სიმბოლოთი) ეწოდება u ვექტორისა და v ვექტორის მოპირდაპირე $-v$ ვექტორის ჯამს, ე. ი. $u-v=u+(-v)$.

წრფივი სივრცის განმსაზღვრელი აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ

1) ნულოვანი სკალარისა და ნებისმიერი u ვექტორის ნამრავლი არის ნულოვანი ვექტორი, ე. ი. $0u=0$. მართლაც, $u=1\cdot u=(1+0)u=$ $=1\cdot u+0u=u+0u$, ე. ი. $u+0u=u$, ამრიგად $0u=0$ (აქ 0 აღნიშნავს K ველის ნულოვან ელემენტს და L სივრცის ნულოვან ვექტროსაც) .

2) ნებისმიერი სკალარისა და ნულოვანი ვექტორის ნამრავლი არის ნულოვანი ვექტორი, ე. ი. $\alpha 0=0$. მართლაც, $\alpha u+\alpha 0=\alpha(u+0)=\alpha u$, ამრიგად $\alpha 0=0$.

3) თუ $\alpha u=0$, მაშინ ან $\alpha=0$, ან $u=0$. მართლაც, ვთქვათ $\alpha\neq 0$, მაშინ $u=1\cdot u=(\alpha^{-1}\alpha)u=\alpha^{-1}(\alpha u)=\alpha^{-1}0=0$.

4) $(-\alpha)u=-\alpha u$. მართლაც, $\alpha u+(-\alpha)u=(\alpha+(-\alpha))u=0u=0$, ე. ი. $(-\alpha)u=-\alpha u$ აქედან, კერძოდ გამომდინარეობს, რომ $(-1)u=-u$.

5) $\alpha(-u)=-\alpha u$. მართლაც, $\alpha u+\alpha(-u)=\alpha(u+(-u))=\alpha 0=0$, ე.ი. $\alpha(-u)=-\alpha u$.

6) $-(u+v)=-u-v$. მართლაც $-(u+v)=(-1)(u+v)=(-1)u+(-1)v=-u-v$.

§ 2 ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება

<u>განსაზღვრება.</u> ვთქვათ L არის წრფივი სივრცე K ველის მიმართ და v, $u_1,u_2,\ldots u_s$ ვექტორებია L-დან. ვიტყვით, რომ v ვექტორი წრფივად გამოისახება $u_1,u_2,\ldots,u_s$, ვექტორების საშუალებით, ან v ვექტორი არის $u_1,u_2,\ldots,u_s$ ვექტორების წრფივი

კომბინაცია, თუ K-ში მოიძებნება ისეთი $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სკალარები, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$v=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_s u_s.$$

<u>განსაზღვრება.</u> $u_1,u_2,\ldots u_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება <u>წრფივად დამოკიდებული</u>, თუ არსებობს ისეთი $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც არ არის ნულოვანი, და სრულდება

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_s u_s=0$$

ტოლობა.

<u>განსაზღვრება.</u> $u_1,u_2,\ldots u_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება <u>წრფივად დამოუკიდებელი</u>, თუ კი

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_s u_s=0$$

ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=0$.

ერთი ნულოვანი ვექტორისგან შედგენილი სისტემა, რა თქმა უნდა, წრფივად დამოკიდებულია. მაგრამ ერთი $u\neq 0$ ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც 3) თვისების ძალით, $\alpha u=0$ ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha=0$.

<u>თეორემა.</u> იმისათვის, რომ ვექტორთა სისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებული აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი მათგანი მაინც წრფივად გამოისახებოდეს დანარჩენი ვექტორების საშუალებით.

<u>დამტკიცება</u>. <u>აუცილებლობა</u>. ვთქვათ $u_1,u_2,\ldots,u_s$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ არსებობს $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_s$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც არ არის 0, რომ შესრულდება

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_s u_s=0 \tag{1}$$

ტოლობა. ზოგადობის დაურღვევლად, ვთქვათ $\alpha_1\neq 0$. (1) ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $-\alpha_1 u_1$ ვექტორი, მივიღებთ რომ

$\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s= -\alpha_1u_1$. ამ ტოლობის ორივე მხარეს თუ გავამრავლებთ $(-\alpha_1^{-1}\alpha_2)$-ზე მივიღებთ $(-\alpha_1^{-1}\alpha_2)u_2+\ldots+(-\alpha_1^{-1}\alpha_s)u_s=1\cdot u_1$,

ე. ი. $u_1 = \left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)u_2 + \ldots + \left(-\dfrac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)u_s$. შემდგომისათვის შევნიშნოთ, რომ ის ვექტორი გამოისახება დანარჩენების საშუალებით, რომლის სკალარი მამრავლიც არანულოვანია (1) ტოლობაში.

საკმარისობა. ვთქვათ ახლა $u_1,u_2,\ldots,u_s$ ვექტორთა სისტემის u_s ვექტორი წრფივად გამოისახება დანარჩენი ვექტორების საშუალებით, ე. ი.

$$u_s=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_{s-1}u_{s-1}.$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატოთ $-u_s=(-1)u_s$ ვექტორი. გვექნება:

$$0=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_{s-1}u_{s-1}+(-1)u_s.$$

მამასადამე, $u_1,u_2,\ldots,u_s$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

თუ ვექტორთა სისტემის რაიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მთელი სისტემაც ცხადია იქნება წრფივად დამოკიდებული. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ **ვექტორთა ყოველი სისტემა, რომელიც 0 ვექტორს შეიცავს, წრფივად დამოკიდებულია**

ძირითადი თეორემა ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულების შესახებ. თუ

$$\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_t} \tag{2}$$

ვექტორთა სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება

$$\mathbf{v_1, v_2, \ldots, v_s} \tag{3}$$

ვექტორების საშუალებით და s<t, მაშინ (2) სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული.

დამტკიცება. ზოგადობის დაურღვევლად ვგულისხმობთ, რომ (2) სისტემის არც ერთი ვექტორი არ არის ნულოვანი. თეორემა და-

ვამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. ვთქვათ $s=1$. მაშინ, პირობის ძალით,

$$u_1=\alpha_1 v_1,\ u_2=\alpha_2 v_1,\ \ldots,\ u_t=\alpha_t v_1,$$

სადაც ყველა $\alpha_i \neq 0$. (წინააღმდეგ შემთხვევაში (2) სისტემაში იქნებოდა ნულოვანი ვექტორი.) ამიტომ $v_1=\alpha_1^{-1}u_1$ და $u_2=\alpha_2 v_1=$ $=\alpha_2(\alpha_1^{-1}u_1)=(\alpha_2\alpha_1^{-1})u_1$. მაშასადამე, u_1, u_2 სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და ამგვარად წრფივად დამოკიდებული იქნება მთელი სისტემაც.

დავუშვათ, რომ ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა, რომლის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება $s-1$ ვექტორისაგან შედგენილი სისტემის საშუალებით, წრფივად დამოკიდებულია თუკი იგი შეიცავს $(s-1)$-ზე მეტ ვექტორს. ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ, რომ t ვექტორისაგან შედგენილი (2) სისტემა, რომლის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება s ვექტორისაგან შედგენილი (3) სისტემის საშუალებით, წრფივად დამოკიდებულია თუ $s<t$. პირობის თანახმად,

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}v_1+\alpha_{12}v_2+\ldots+\alpha_{1,s-1}v_{s-1}+\alpha_{1s}v_s,\\ u_2 &= \alpha_{21}v_1+\alpha_{22}v_2+\ldots+\alpha_{2,s-1}v_{s-1}+\alpha_{2s}v_s,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_{t-1} &= \alpha_{t-1,1}v_1+\alpha_{t-1,2}v_2+\ldots+\alpha_{t-1,s-1}v_{s-1}+\alpha_{t-1,s}v_s,\\ u_t &= \alpha_{t1}v_1+\alpha_{t2}v_2+\ldots+\alpha_{t,s-1}v_{s-1}+\alpha_{ts}v_s. \end{aligned} \tag{4}$$

ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება დავუშვათ, რომ $\alpha_{ts}\neq 0$. განვიხილოთ

$$u_1'=u_1-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}u_t,\ u_2'=u_2-\frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}u_t,\ldots,u_{t-1}'=u_{t-1}-\frac{\alpha_{t-1s}}{\alpha_{ts}}u_t \tag{5}$$

ვექტორთა სისტემა. (4) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$u_1'=(\alpha_{11}-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t1})v_1+(\alpha_{12}-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t2})v_2+\ldots+(\alpha_{1s-1}-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{ts-1})v_{s-1},$$

$$u_2' = (\alpha_{21} - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t1})v_1 + (\alpha_{22} - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t2})v_2 + \ldots + (\alpha_{2s-1} - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{ts-1})v_{s-1},$$

. . . .

$$u_{t-1}' = (\alpha_{t-11} - \frac{\alpha_{t-1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t1})v_1 + (\alpha_{t-12} - \frac{\alpha_{t-1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{t2})v_2 + \ldots + (\alpha_{t-1s-1} - \frac{\alpha_{t-1s}}{\alpha_{ts}}\alpha_{ts-1})v_{s-1}.$$

ამრიგად, $u_1', u_2', \ldots, u_{t-1}'$ ვექტორთა სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახა $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ ვექტორების საშუალებით და $s-1<t-1$; ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით $u_1', u_2', \ldots, u_{t-1}'$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი. არსებობს $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{t-1}$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც $\neq 0$, რომ შესრულდება

$$\beta_1 u_1' + \beta_2 u_2' + \ldots + \beta_{t-1} u_{t-1}' = 0$$

ტოლობა. აქედან, (5) ტოლობების გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\beta_1\left(u_1 - \frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}u_t\right) + \beta_2\left(u_2 - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}u_t\right) + \ldots + \beta_{t-1}\left(u_{t-1} - \frac{\alpha_{t-1,s}}{\alpha_{ts}}u_t\right) = 0$$

ტოლობას, საიდანაც

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_{t-1}u_{t-1} + \left(-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{ts}}\beta_1 - \frac{\alpha_{2s}}{\alpha_{ts}}\beta_2 - \ldots - \frac{\alpha_{t-1,s}}{\alpha_{ts}}\beta_{t-1}\right)u_t = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია, რადგანაც ერთი მაინც $\beta_i \neq 0$.

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ ვექტორთა სისტემის რანგი არის $r \geq 1$ (და აღვნიშნავთ rank ($u_1, u_2, \ldots u_n$)=r), თუ ეს სისტემა შეიცავს r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორისგან შედგენილ ერთ ქვესისტემას მაინც, მაგრამ სისტემის ყოველი r+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. ვიტყვით, რომ რანგი არის 0, თუ სისტემის ყველა ვექტორი ნულოვანია.

<u>თეორემა.</u> იმისათვის, რომ ვექტორთა სისტემის რანგი იყოს $r\geq 1$, აუცილებელი და საკმარისია, იგი შეიცავდეს ისეთ r წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, რომლის საშუალებით წრფივად გამოისახება მოცემული სისტემის ყოველი ვექტორი.

<u>დამტკიცება</u>. **<u>აუცილებლობა.</u>** ვთქვათ $u_1,u_2,\dots,u_s$ ვექტორთა სისტემის რანგი არის $r\geq 1$. მაშინ რანგის განსაზღვრების თანახმად, მოცემული სისტემა შეიცავს r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორისაგან შედგენილ ქვესისტემას. ზოგადობის დაურღვევლად ვთქვათ ეს არის $u_1,u_2,\dots,u_r$. ვაჩვენოთ, რომ ამ უკანასკნელის საშუალებით წრფივად გამოისახება მოცემული სისტემის ყოველი u_i ვექტორი $(i=1,2,\dots,s)$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) როცა $i=1,2,\dots,r$, მაშინ დასამტკიცებელი ცხადია, რადგან

$$u_i=0\,u_1+0\,u_2+\dots+1\,u_i+\dots+0\,u_r,$$

ბ) როცა $i=r+1,r+2,\dots,s$, მაშინ რანგის განსაზღვრების თანახმად,

$$u_1,u_2,\dots,u_r,u_i \tag{6}$$

ვექტორთა სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებელი, ე.ი. შესრულდება

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_r u_r+\alpha_i u_i=0 \tag{7}$$

ტოლობა, სადაც ერთი α მაინც $\neq 0$. ცხადია, რომ $\alpha_i\neq 0$., ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში (7) ტოლობა მიიღებდა სახეს: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_ru_r=0$, სადაც ერთი α მაინც $\neq 0$, რაც შეუძლებელია იმის გამო, რომ $u_1,u_2,\dots,u_r$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. რადგანაც ვექტორთა (6) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და (7) ტოლობაში $\alpha_i\neq 0$, ამიტომ u_i ვექტორი წრფივად გამოისახება $u_1,u_2,\dots,u_r$ ვექტორების საშუალებით.

<u>საკმარისობა</u>. ვთქვათ $u_1,u_2,\dots,u_s$ ვექტორთა სისტემა შეიცავს $u_1,u_2,\dots,u_r$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორებს, რომელთა საშუალებით წრფივად გამოისახება მოცემული $u_1,u_2,\dots,u_s$ სისტემის ყო-

ველი ვექტორი. მაშინ მოცემული სისტემის ნებისმიერი $r+1$ ვექტორისაგან შედგენილი ქვესისტემის ყოველი ვექტორი აგრეთვე წრფივად გამოისახება $u_1, u_2, \ldots, u_r$ ვექტორების საშუალებით. ამიტომ ძირითადი თეორემის თანახმად ეს ქვესისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული, რადგანაც $r<r+1$. მაშასადამე, $u_1, u_2, \ldots, u_s$ სისტემის რანგი იქნება $r\geq 1$.

<u>თეორემა</u> ვექტორთა სისტემის რანგი არ შეიცვლება თუ ამ სისტემას დავუმატებთ, ან ჩამოვაცილებთ ვექტორს, რომელიც წრფივად გამოისახება დანარჩენი ვექტორების საშუალებით.

<u>**დამტკიცება**</u>. 1) ვთქვათ

$$u_1, u_2, \ldots, u_s \tag{8}$$

ვექტორთა სისტემის რანგია $r\geq 1$. მაშინ წინა თეორემის ძალით, ეს სისტემა შეიცავს ისეთ r წრფივად დამოუკიდებელ $u_1, u_2, \ldots, u_r$, ვექტორს, რომ (8) სისტემის ყოველი ვექტორი

$$u_i=\alpha_{i1}u_1+\alpha_{i2}u_2+\ldots+\alpha_{ir}u_r \quad (i=1,2,\ldots,s). \tag{9}$$

განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, u \tag{10}$$

სადაც $u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\ldots+\beta_s u_s$. (9) ტოლობის ძალით, გვექნება:

$$u=\beta_1(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2+\ldots+\alpha_{1r}u_r)+\beta_2(\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2+\ldots+\alpha_{2r}u_r)+\ldots+$$
$$+\beta_s(\alpha_{s1}u_1+\alpha_{s2}u_2+\ldots+\alpha_{sr}u_r)=\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\ldots+\gamma_r u_r, \tag{11}$$

სადაც $\gamma_i=\beta_1\alpha_{1i}+\beta_2\alpha_{2i}+\ldots+\beta_s\alpha_{si} \quad (i=1,2,\ldots,r)$.

(9) და (11) ტოლობებისა და წინა თეორემის ძალით, (10) სისტემის რანგი იქნება $r\geq 1$.

2) ვთქვათ ახლა $u_1, u_2, \ldots, u_s, u$ ვექტორთა სისტემის რანგი არის $r\geq 1$ და u ვექტორი წრფივად გამოისახება $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ვექტორების საშუალებით. მაშინ $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ვექტორთა სისტემის რანგი $r'\leq r$, რადგან ვექტორის ჩამოცილების შედეგად დარჩენილი სისტემის რანგი არ გაიზრდება. ვაჩვენოთ, რომ $r'=r$. მართლაც, თუ $r'<r$, მაშინ

1) შემთხვევის თანახმად, $u_1,u_2,\ldots,u_s,u$ სისტემის რანგიც იქნება $r'<r$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

თუ ვექტორთა სისტემის რომელიმე ვექტორს გავამრავლებთ არანულოვან სკალარზე ან ვექტორთა სისტემის რომელიმე ვექტორს დავუმატებთ ამავე სისტემის სხვა რომელიმე ვექტორს, მაშინ იტყვიან, რომ ვექტორთა ეს ახალი სისტემა მიღებულია მოცემულისაგან ელემენტარული გარდაქმნით.

თეორემა. **ვექტორთა სისტემის რანგი ინვარიანტულია ვექტორთა ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ.**

დამტკიცება. ვთქვათ

$$u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k,\ldots,u_s \tag{12}$$

ვექტორთა სისტემის რანგი არის $r\geq1$.

1) მოცემულ ვექტორთა სისტემას დავუმატოთ αu_i ვექტორი, სადაც $(\alpha\neq0)$. მიღებული

$$u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k,\ldots,u_s,\ \alpha u_i$$

ვექტორთა სისტემის რანგი აგრეთვე იქნება r, შემდეგ ჩამოვაცილოთ u_i ვექტორი

$$u_1,\ldots,\alpha u_i,\ldots,u_k,\ldots,u_s, \tag{13}$$

ამით რანგი არ შეიცვლება

მაგრამ (13) სისტემა მიღებულია (12)-საგან ელემენტარული გარდაქმნით.

2) ახლა თუ მოცემულ ვექტორთა სისტემას დავუმატებთ u_i+u_k ვექტორს და შემდეგ ჩამოვაცილებთ u_i ვექტორს, ამით რანგი არ შეიცვლება. ე.ი.

$$u_1,\ldots,u_i+u_k,\ldots,u_k,\ldots,u_s. \tag{14}$$

ვექტორთა სისტემის რანგიც იქნება r.

მაგრამ (14) სისტემა მიღებულია (12)-საგან ელემენტარული გარდაქმნით.

§ 3. მატრიცის რანგი

<u>განსაზღვრება.</u> ვთქვათ A არის მატრიცი K ველის მიმართ. ვიტყვით, რომ A მატრიცის რანგი არის $r \geq 1$ (და აღვნიშნავთ rank$A$=r), თუ ის შეიცავს ერთს მაინც r რიგის დეტერმინანტს, რომელიც არ არის K ველის ნულოვანი ელემენტი, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის დეტერმინანტი კი K ველის ნულოვანი ელემენტია. ვიტყვით, რომ მატრიცის რანგი არის 0, თუ მატრიცი ნულოვანია.

<u>ლემა.</u> თუ K ველის მიმართ A მატრიცი შეიცავს r რიგის Δ დეტერმინანტს, რომელიც არ არის K ველის ნულოვანი ელემენტი, ხოლო ყველა r+1 რიგის დეტერმინანტი, რომელიც Δ-ს შეიცავს მინორად, K ველის ნულია, მაშინ A მატრიცის ჰორიზონტარულ ვექტორთა სისტემის რანგი იქნება $r \geq 1$.

<u>**დამტკიცება**</u>. ზოგადობის დაურღვევლად დავუშვათ, რომ A მატრიცის Δ დეტერმინანტი, რომელიც არ არის K ველის 0, იმყოფება A მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში. A მატრიცის ჰორიზონტალური ვექტორები იყოს $u_1,u_2,\ldots,u_m$; ეს ვექტორები K^n სივრცეს ეკუთვნიან.

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \overset{\Delta\neq 0}{\cdots} & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \cdots & \alpha_{rn} \\ \hline \alpha_{r+1,1} & \cdots & \alpha_{r+1,r} & \alpha_{r+1,r+1} & \cdots & \alpha_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mr} & \alpha_{m,r+1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_m \end{array}$$

დავამტკიცოთ, რომ $u_1, u_2 ,\ldots, u_r$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ ეს ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ ერთი მათგანი იქნება დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაცია. თუ ამ ვექტორს გამოვაკლებთ ამ წრფივ

კომბინაციას, A მატრიცის შესაბამის სტრიქონში მივიღებთ K ველის ნულებს და ამიტომ Δ-ც იქნება K ველის ნული, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

რადგანაც $\Delta\neq0$, ამიტომ მისი პირველი სტრიქონის ერთი ელემენტი მაინც, ვთქვათ $\alpha_{1k}\neq0$ $(1\leq k\leq r)$. განვიხილოთ K ველში განაყოფები: $\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{1k}},\frac{\alpha_{3k}}{\alpha_{1k}},\ldots,\frac{\alpha_{mk}}{\alpha_{1k}}$. A მატრიცის u_1 ვექტორი გავამრავლოთ $\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{1k}}$ სკალარზე და გამოვაკლოთ A მატრიცის u_2 ვექტორს, შემდეგ A მატრიცის u_1 ვექტორი გავამრავლოთ $\frac{\alpha_{3k}}{\alpha_{1k}}$ სკალარზე და გამოვაკლოთ A მატრიცის u_3 ვექტორს და ა. შ. ბოლოს u_1 ვექტორი გავამრავლოთ $\frac{\alpha_{mk}}{\alpha_{1k}}$, სკალარზე და გამოვაკლოთ A მატრიცის u_m ვექტორს. A მატრიცის ჰორიზონტალურ ვექტორთა სისტემის რანგი, ჩატარებული გარდაქმნების შედეგად, არ შეიცვლება, ხოლო A მატრიცი მიიღებს სახეს:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\
\beta_{21\Delta\neq0} & \cdots & 0 & \cdots & \beta_{2r} & \beta_{2,r+1} & \cdots & \beta_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{r1} & \cdots & 0 & \cdots & \beta_{rr} & \beta_{r,r+1} & \cdots & \beta_{rn} \\
\hline
\beta_{r+1,1} & \cdots & 0 & \cdots & \beta_{r+1,r} & \beta_{r+1,r+1} & \cdots & \beta_{r+1,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\beta_{m1} & \cdots & 0 & \beta_{mr} & \beta_{mr} & \beta_{m,r+1} & \cdots & \beta_{mn}
\end{array}\right).$$

რადგანაც $\Delta\neq0$, ამიტომ მისი მეორე სტრიქონის ერთი ელემენტი მაინც, ვთქვათ $\beta_{2l}\neq0$ $(1\leq l\leq r,\ l\neq k)$. განვიხილოთ K ველში განაყ-

ოფები: $\frac{\beta_{3l}}{\beta_{2l}},\frac{\beta_{4l}}{\beta_{2l}},\ldots,\frac{\beta_{ml}}{\beta_{2l}}$. მატრიცის მეორე ვექტორი გავამრავლოთ $\frac{\beta_{3l}}{\beta_{2l}}$ სკალარზე და გამოვაკლოთ მესამე ჰორიზონტალურ ვექტორს და ა. შ., ბოლოს მეორე ჰორიზონტალური ვექტორი გავამრავლოთ $\frac{\beta_{ml}}{\beta_{2l}}$ სკალარზე და გამოვაკლოთ მატრიცის უკანასკნელ ჰორიზონტალურ ვექტორს. ამ ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად, მატრიცის მე-l-ე სვეტშიც β_{2l} ელემენტის ქვეშ მივიღებთ K ველის ნულებს.

როცა ანალოგიურ მსჯელობას r-ჯერ ჩავატარებთ, მივიღებთ მატრიცს:

$$\begin{pmatrix} & & & \delta_{1,r+1} & \cdots & \delta_{1n} \\ & & \Delta\neq 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \delta_{r,r+1} & \cdots & \delta_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{r+1,r+1} & \cdots & \delta_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{m,r+1} & \cdots & \delta_{mn} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

ამ მატრიცის ყველა r+1 რიგის დეტერმინანტს, რომელიც Δ-ს შეიცავს მინორად, ექნება სახე:

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} & & & \delta_{1k} \\ & \Delta\neq 0 & & \vdots \\ & & & \delta_{rk} \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{ik} \end{vmatrix} \quad (i = r+1, \ldots, m; \quad k = r+1, .., n).$$

ლემის პირობის ძალით ყველა $D_{ik}=0$; მეორე მხრივ $D_{ik}=\delta_{ik}\Delta$. მაშასადამე, $\delta_{ik}\Delta=0 \Rightarrow \delta_{ik}=0$, ე. ი. (15) მატრიცი შემდეგი სახისაა:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \delta_{1,r+1} & \cdots & \delta_{1n} \\ \Delta\neq 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \delta_{r,r+1} & \cdots & \delta_{rn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

როგორც ვხედავთ, A მატრიცის ჰორიზონტალურ ვექტორებზე ჩატარებული ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად, $u_{r+1}, u_{r+2},\ldots,u_m$ ვექტორები ნულოვან ვექტორებად გადაიქცნენ, ე. ი.

$$u_j-\lambda_1u_1-\lambda_2u_2-\ldots-\lambda_ru_r=0 \qquad (j=r+1,r+2,\ldots m),$$

ანუ $u_j=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_ru_r$. მაშასადამე, დავამტკიცეთ, რომ $u_1,u_2,\ldots,u_m$ ვექტორთა სისტემა შეიცავს $u_1,u_2,\ldots,u_r$ წრფივად დამოუკიდებულ ვექტორთა ქვესისტემას, რომლის საშუალებით წრფივად გამოისახება A მატრიცის ყოველი ჰორიზონტალური ვექტორი, ამიტომ აღრე დამტკიცებული თეორემის ძალით, $u_1,u_2,\ldots,u_m$ ვექტორთა სისტემის რანგი იქნება $r\geq 1$.

<u>თეორემა</u> მატრიცის რანგის შესახებ. მატრიცის რანგი ტოლია მატრიცის ჰორიზონტალურ (ვერტიკალურ) ვექტორთა სისტემის რანგის.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ A მატრიცის რანგი არის $r\geq 1$. მაშინ ის შეიცავს ერთს მაინც r რიგის Δ დეტერმინანტს, რომელიც $\neq 0$, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის დეტერმინანტი 0-ის ტოლია; კერძოდ 0-ის ტოლი იქნება ყველა $r+1$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც Δ-ს მინორად შეიცავს. ამიტომ, ლემის ძალით A მატრიცის ჰორიზონტალურ ვექტორთა სისტემის რანგიც იქნება r.

<u>შედეგი</u>. იმისათვის, რომ n-ური რიგის დეტერმინანტი, ნულის ტოლი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი

ჰორიზონტალური (ვერტიკალური) ვექტორები იყოს წრფივად დამოკიდებული.

დამტკიცება. ვთქვათ n-ური რიგის Δ დეტერმინანტი 0-ის ტოლია. განვიხილოთ n-ური რიგის A მატრიცი, რომლის დეტერმინანტი არის Δ. მაშინ A მატრიცის რანგი $r<n$, ამიტომ, თეორემის ძალით, A მატრიცის და, მაშასადამე, Δ დეტერმინანტის ჰორიზონტალურ ვექტორთა სისტემის რანგიც იქნება r, ე. ი. Δ-ს ჰორიზონტალური ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

ვთქვათ ახლა Δ დეტერმინანტის, ე. ი. აგრეთვე მატრიცის, ჰორიზონტალური ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ წრფივად დამოუკიდებელ ჰორიზონტალურ ვექტორთა რაოდენობა ნაკლებია n-ზე. ამიტომ მატრიცის რანგიც ნაკლებია n-ზე, ე. ი. $|A| = \Delta = 0$.

თეორემა. მატრიცთა ნამრავლის რანგი არ აღემატება თითოეული თანამამრავლის რანგს.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1, & u_2, & \dots, & u_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \mathrm{mxn} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \end{array} \\ \mathrm{nx}l \end{array},
$$

$$
AB = C = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} w_1, & w_2, & \cdots, & w_l \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\
. & . & . & . \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ml}
\end{pmatrix} . & \begin{array}{c} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_m \end{array} \\
mxl &
\end{array} .
$$

როგორც ვიცით

$$
\begin{aligned}
c_{1j} &= a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj}, \\
c_{2j} &= a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{nj}, \\
. \quad . & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
c_{mj} &= a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \ldots + a_{mn}b_{nj}.
\end{aligned}
$$

ამიტომ

$$
w_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}u_1 + b_{2j}u_2 + \ldots + b_{nj}u_n \quad (j=1,2,\ldots,l)
$$

ანუ ყოველი w_j ვექტორი არის $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია, ამიტომ $\operatorname{rank}\{ w_1, w_2, \ldots, w_l) \leq \operatorname{rank}\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, მაშასადამე თუ A მატრიცის რანგი არის r_A, მაშინ

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\{ u_1, u_2, \ldots, u_n\} \geq \operatorname{rank}\{ w_1, w_2, \ldots, w_l) = \operatorname{rank} C$$

ე.ი. $r_C \leq r_A$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $r_C \leq r_B$.

<u>შედეგი</u>. რანგი A მატრიცის ნამრავლისა გადაუგვარებელ კვადრატულ B მატრიცზე ტოლია A მატრიცის რანგის.

ვთქვათ $AB=C$. $|B| \neq 0$, მაშინ თეორემის ძალით, $r_C \leq r_A$. ცხადია, რომ $(AB)B^{-1}=CB^{-1} \Rightarrow A=CB^{-1}$; ამიტომ, კვლავ თეორემის ძალით, $r_A \leq r_C$. მაშასადამე $r_C=r_A$.

თეორემა. თუ AB ნამრავლი არსებობს, მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\underset{l\times m}{A}\ \underset{m\times n}{B}=\underset{l\times n}{C} \qquad \text{და} \qquad \underset{n\times m}{B^{T}}\ \underset{m\times l}{A^{T}}=\underset{n\times l}{D}$$

თუ დავამტკიცებთ, რომ $C^{T}=D$, მაშინ თეორემაც იქნება დამტკიცებული. ვთქვათ $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ და $D=(d_{ij})$, ხოლო $A^{T}=(a'_{ij})$, $B^{T}=(b'_{ij})$, $C^{T}=(c'_{ij})$, სადაც $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$, $c'_{ij}=c_{ji}$, კოშიბინეს ფორმულების ძალით გვექნება:

$$c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{m}b'_{ik}a'_{kj}=d_{ij};$$

ე.ი. $C^{T}=D$.

§4. წრფივ განტოლებათა სისტემა

ვთქვათ მოცემულია K ველის მიმართ n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m\end{cases} \tag{16}$$

ამ სისტემის კოეფიციენტებისგან შედგენილ

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1, & u_2, & \cdots, & u_n \end{array}\\ A= & \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\end{array}$$

მატრიცს ეწოდება განტოლებათა სისტემის მატრიცი. $u_1,u_2,\ldots,u_n$ იყოს A მატრიცის ვერტიკალური ვექტორები. თუ A მატრიცს დავუმატებთ კიდევ ერთ სვეტს, შედგენილს განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრებისაგან, მივიღებთ ე. წ. გაფართოებულ

$$\begin{array}{c} \\ B= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1, & u_2, & \cdots, & u_n & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix} \end{array}$$

მატრიცს. ამ მატრიცის ბოლო სვეტი აღვნიშნოთ u-თი.

<u>კრონეკერ-კაპელის თეორემა</u>. **იმისათვის, რომ K ველის მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის მატრიცისა და გაფართოებული მატრიცის რანგები იყოს ტოლი.**

<u>დამტკიცება</u>: 1) ვთქვათ (16) სისტემა თავსებადია და $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ მისი ამონახსნია, მაშინ

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n=\beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n=\beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}\xi_1+\alpha_{m2}\xi_2+\ldots+\alpha_{mn}\xi_n=\beta_m. \end{gathered}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ B მატრიცის ბოლო u ვექტორი წრფივად გამოისახება u_1, $u_2,\ldots$, u_n ვექტორების საშუალებით, ანუ $u=\xi_1u_1+\xi_2u_2+\ldots+\xi_nu_n$ ამიტომ, თანახმად თეორემისა მატრიცის რანგის შესახებ

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\operatorname{rank}(u_1, u_2, \ldots, u_n, u)=\operatorname{rank}B.$$

2) ვთქვათ ახლა ორივე მატრიცს აქვს ერთი და იგივე რანგი r. ე.ი. A მატრიცი შეიცავს r წრფივად დამოუკიდებელ ვერტიკალურ ვექტორს, ვთქვათ $u_1,u_2,\ldots,u_r$ ვექტორების საშუალებით წრფივად

გამოისახება ყოველი სხვა ვერტიკალური ვექტორი. ეს ვექტორები B მატრიცის ვექტორებსაც წარმოადგენენ, და რადგანაც B მატრიცის ვერტიკალურ ვექტორთა სისტემის რანგი არის r, ამიტომ მისი ბოლო u ვექტორი წრფივად გამოისახება $u_1, u_2, \ldots, u_r$ ვექტორების მეშვეობით. ეს ნიშნავს იმას, რომ მოიძებნება სკალარები $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$u=\xi_1 u_1+\xi_2 u_2+\ldots+\xi_r u_r. \tag{17}$$

ავიღოთ $\xi_{r+1}=\ldots=\xi_n=0$. ცხადია $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ იქნება (16) სისტემის ამონახსენი.

<u>თეორემა.</u> ვთქვათ K ველის მიმართ n უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადია. თუ განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r=n$, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r<n$, მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, როცა K ველი უსასრულოა და რამდენიმე ამონახსნი, როცა K ველი სასრულია.

<u>დამტკიცება.</u> ვთქვათ განტოლებათა (16) სისტემა თავსებადია, ე. ი. A და B ორივე მატრიცის რანგი r-ის ტოლია. მაშინ, თანახმად თეორემისა მატრიცის რანგის შესახებ, A და B მატრიცების რომელიღაც ერთი და იგივე r ჰორიზონტალური ვექტორი იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, ხოლო ამ მატრიცების ნებისმიერი სხვა ჰორიზონტალური ვექტორი კი იქნება ამ r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის წრფივი კომბინაცია. ამიტომ განტოლებათა (16) სისტემიდან დავიტოვოთ მხოლოდ ის r განტოლება, რომელთა კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები არიან A და B მატრიცების ამორჩეული r წრფივად დამოუკიდებელი ჰორიზონტალური ვექტორების კომპონენტები. განტოლებათა (16) სისტემის დანარჩენი $m-r$ განტოლება შეიძლება უკუვაგდოთ, რადგანაც ყოველ მათგანს, როგორც ამორჩეული r განტოლების წრფივ კომბინაციას, დააკმაყოფილებს ამ

r განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი. ამრიგად, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r \end{cases} \tag{18}$$

შესაძლებელია ორი შემთხვევა: $r=n$ და $r<n$.

1) თუ $r=n$, მაშინ (18) სისტემა იქნება r უცნობიან r წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$. ამიტომ, კრამერის თეორემის ძალით, მას და ამიტომ (16) სისტემასაც, ექნება ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოითვლება კრამერის ფორმულებით.

2) თუ $r<n$, მაშინ (18) სისტემის თითოეული განტოლების მარცხენა მხარეში დავტოვოთ მხოლოდ ის r წევრი, რომელთა კოეფიციენტები შედიან A მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული r რიგის Δ დეტერმინანტში, დანარჩენი $n-r$ წევრი გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეში. მივიღებთ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობების მიმართ შემდეგ r განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1r}x_r = \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2r}x_r = \beta_2 - \alpha_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}x_n \end{cases} \tag{19}$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ უცნობებს ეწოდება თავისუფალი უცნობები. თუ თავისუფალი უცნობების ნაცვლად დავწერთ K ველის ნებისმიერ ელემენტებს და (19) სისტემას ამოვხსნით $x_1, x_2, \ldots, x_r$ უცნობების მიმართ კრამერის ფორმულებით, მივიღებთ:

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}=$$

$$=\Delta^{-1}\begin{vmatrix} \alpha_{11}\cdots\alpha_{1,k-1} & \overbrace{\beta_1-\alpha_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{1n}x_n}^{k-\text{ური სვეტი}} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}\cdots\alpha_{2,k-1} & \beta_2-\alpha_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{2n}x_n & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{r1}\cdots\alpha_{r,k-1} & \beta_r-\alpha_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{rn}x_n & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}=$$

$$=\Delta^{-1}\begin{vmatrix} \alpha_{11}\cdots\alpha_{1,k-1} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}\cdots\alpha_{2,k-1} & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{r1}\cdots\alpha_{r,k-1} & \beta_r & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\cdots+\Delta^{-1}\begin{vmatrix} \alpha_{11}\cdots\alpha_{1,k-1} & -\alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}\cdots\alpha_{2,k-1} & -\alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{r1}\cdots\alpha_{r,k-1} & -\alpha_{rn} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}\cdot x_n \tag{20}$$

($k=1,2,\ldots r$). თუ (20) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს ალვნიშნავთ γ_{ko}-ით, x_{r+1}-ის კოეფიციენტს γ_{k1}-ით და ა. შ. x_n-ის კოეფი-ციენტს $\gamma_{k,n-r}$-ით, მაშინ (20) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$x_k=\gamma_{ko}+\gamma_{k1}x_{r+1}+\ldots+\gamma_{k,n-r}x_n. \tag{21}$$

(21) ფორმულები გვაძლევენ (16) განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსნს, რომელიც დამოკიდებულია n−r თავისუფალ უცნობზე და რომლისგანაც მიიღება ყველა კერძო ამონახსნი, თუ თავისუფალი უცნობების მაგივრად დავწერთ K ველის ამა თუ იმ ელემენტებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა თუ K ველი უსასრულოა.

თუ განტოლებათა (16) სისტემა ერთგვაროვანია, მაშინ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად, ის ყოველთვის თავსებადია. მართლაც, ამ შემთხვევაში B მატრიცი განსხვაედება A მატრიცისაგან მხოლოდ უკანასკნელი ნულოვანი ვერტიკალური ვექტორით, რაც რანგს არ გაზრდის. თუ A მატრიცის რანგი $r=n$, მაშინ **ერთგვაროვან სისტემას ექნება ერთადერთი ნულოვანი ამონახსნი. თუ A მატრიცის რანგი $r<n$, მაშინ ერთგვაროვან სისტემას, ნულოვანი ამონახსნის გარდა, ექნება უამრავი არანულოვანი ამონახსნი თუ K ველი უსასრულოა და რამდენიმე ამონახსნი თუ K ველი სასრულია.**

§ 5. წრფივი სივრცის განზომილება

<u>განსაზღვრება.</u> L წრფივ სივრცეს K ველის მიმართ ეწოდება n-განზომილებიანი, თუ მასში არსებობს n წრფივად დამოკიდებული ვექტორი, ხოლო მისი ნებისმიერი n+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. აღინიშნება L^n სიმბოლოთი.

თუ L სივრცეში მოიძებნება წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ნებისმიერი რაოდენობა, მაშინ მას უსასრულო განზომილებიანი ეწოდება.

V^2 სივრცე ორგანზომილებიანია, რადგანაც სიბრტყის ნებისმიერი ორი ვექტორი, რომელიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ნებისმიერი სამი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. V^3 სივრცე სამგანზომილებიანია, რადგანაც ჩვეულებრივი სივრცის ნებისმიერი სამი ვექტორი, რომელიც ერთ სიბრტყეზე არ მდებარეობს, წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ნებისმიერი ოთხი ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

<u>ლემა.</u> თუ L წრფივი სივრცე K ველის მიმართ შეიცავს ისეთ n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს, რომლის საშუ-

ალებით წრფივად გამოისახება L-ის ყოველი ვექტორი, მაშინ **L წრფივი სივრცე n-განზომილებიანია.**

<u>**დამტკიცება.**</u> ვთქვათ

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \tag{22}$$

L-ის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, ხოლო

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{23}$$

L-ის ნებისმიერი ვექტორებია. მაშინ პირობის ძალით, (23) სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება (22) სისტემის ვექტორების საშუალებით. მაშასადამე, თანახმად ძირითადი თეორემისა ვექ-ტორთა წრფივად დამოკიდებულების შესახებ, (23) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც $n<n+1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ L არის n-განზომილებიანი.

ვაჩვენოთ, რომ არითმეტიკული K^n სივრცე n-განზომილებიანია. ამ სივრცის

$$v_1=(1,0,\ldots,0),\quad v_2=(0,1,\ldots,0),\quad \ldots,\quad v_n=(0,0,\ldots,1) \tag{24}$$

ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n=(\alpha_1,0,\ldots,0)+(0,\alpha_2,\ldots,0)+(0,0,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=$$
$$=(0,0,\ldots,0)$$

ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. ვთქვათ $u=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ არის K^n-ის ნებისმიერი ვექტორი. ცხადია, რომ

$$u=\xi_1(1,0,\ldots,0)+\xi_2(0,1,\ldots,0)+\ldots+\xi_n(0,0,\ldots,1)=\xi_1 v_1+\xi_2 v_2+\ldots+\xi_n v_n.$$

მაშასადამე, ლემის ძალით K^n არის n-განზომილებიანი.

L^n წრფივი სივრცის ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდე-ბელ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება L^n-ის <u>ბაზისი</u>. ასე მაგალითად, როგორც ცნობილია ანალიზური გეომეტრიიდან, V^3 სივრცის ბაზისი იქნება i,j,k ორტები; K^n არითმეტიკული სივრცის ბაზისი იქნება (24) ვექტორთა სისტემა.

<u>თეორემა.</u> **L^n სივრცის ყოველი u ვექტორი ერთადერთი გზით გამოისახება ბაზისის ვექტორების წრფივ კომბინაციად.**

დამტკიცება. ვთქვათ L^n სივრცის ბაზისი არის $e_1,e_2,...,e_n$ ვექტორთა სისტემა, ხოლო u იყოს L^n-ის ნებისმიერი ვექტორი. მაშინ $u, e_1,e_2,...,e_n$ სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული. ამიტომ შესრულდება

$$\alpha_0 u+\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n=0$$

ტოლობა. α_0 სკალარი არაა ნულოვანი (რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში $e_1,e_2,...,e_n$ სისტემა იქნებოდა წრფივად დამოკიდებული), მაშასადამე, u წრფივად გამოისახება $e_1,e_2,...,e_n$ ვექტორების საშუალებით. ვაჩვენოთ ახლა ამ გამოსახვის ერთადერთობა. დავუშვათ, რომ

$$u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n \qquad \text{და} \qquad u=\eta_1e_1+\eta_2e_2+...+\eta_ne_n.$$

მაშინ გვექნება

$$(\xi_1-\eta_1)e_1+(\xi_2-\eta_2)e_2+...+(\xi_n-\eta_n)e_n=0.$$

ე. ი. $\xi_1-\eta_1=\xi_2-\eta_2=...=\xi_n-\eta_n=0$ რადგანაც $e_1,e_2,...,e_n$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ამრიგად, $\xi_1=\eta_1,\ \xi_2=\eta_2,\ ...\ ,\xi_n=\eta_n$.

თუ $e_1,e_2,...,e_n$ არის L^n-ის ბაზისა და

$$u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n,$$

მაშინ $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ სკალარებს ეწოდება <u>u ვექტორის კოორდინატები $e_1, e_2, ..., e_n$ ბაზისში</u>, რომლებიც დამტკიცებულის ძალით, ცალსახად განისაზღვრებიან.

თუ $u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n$ და $v=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots+\eta_ne_n$, მაშინ

$$u+v=(\xi_1+\eta_1)e_1+(\xi_2+\eta_2)e_2+\ldots+(\xi_n+\eta_n)e_n \qquad \text{და}$$

$$\alpha u=(\alpha\xi_1)e_1+(\alpha\xi_2)e_2+\ldots+(\alpha\xi_n)e_n.$$

ე. ი. ვექტორების შეკრების დროს, მათი კოორდინატები იკრიბება და ვექტორის სკალარზე გამრავლების დროს, მისი კოორდინატები მრავლდება ამ სკალარზე.

ნულოვან ვექტორს და მხოლოდ მას ნებისმიერ ბაზისში აქვს ყველა კოორდინატი ნულის ტოლი, რადგანაც

$$0=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n$$

ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ მაშინ როცა ყველა $\xi_i=0$.

ვნახოთ როგორ არის ერთმანეთთან დაკავშირებული წრფივი სივრცის ორი ბაზისი. ვთქვათ მოცემულია K ველის მიმართ L^n სივრცის ორი ბაზისი: ძველი $e_1,e_2,\ldots,e_n$ და ახალი – $e_1',e_2',\ldots,e_n'$. ახალი ბაზისის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება ერთადერთი გზით ძველი ბაზისის ვექტორებით:

$$\begin{cases} e_1' = \gamma_{11}e_1 + \gamma_{12}e_2 + \ldots + \gamma_{1n}e_n \\ e_2' = \gamma_{21}e_1 + \gamma_{22}e_2 + \ldots + \gamma_{2n}e_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ e_n' = \gamma_{n1}e_1 + \gamma_{n2}e_2 + \ldots + \gamma_{nn}e_n \end{cases} \tag{25}$$

განვიხილოთ

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\gamma_{12}\cdots\gamma_{1n} \\ \gamma_{21}\gamma_{22}\cdots\gamma_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \gamma_{n1}\gamma_{n2}\cdots\gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცი, რომლის სტრიქონების ელემენტები წარმოადგენენ ახალი ბაზისის ვექტორების კოორდინატებს ძველ ბაზისში. C **მატრიცს ეწოდება ძველი ბაზისიდან ახალ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი**. (25) ტოლობები მატრიცულად შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\gamma_{12}\cdots\gamma_{1n} \\ \gamma_{21}\gamma_{22}\cdots\gamma_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \gamma_{n1}\gamma_{n2}\cdots\gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

ანუ

$$e' = Ce,$$

სადაც e′ არის ერთსვეტიანი მატრიცი შედგენილი ახალი ბაზისის ვექტორებისაგან, ხოლო e – ძველი ბაზისის ვექტორებისაგან. ანალოგიურად გვექნება:

$$e=C_1e',$$

სადაც C_1 არის ახალი ბაზისიდან ძველ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი. მაშასადამე,

$$e'=Ce=C(C_1e')=(CC_1)e', \quad \text{ე. ი. } CC_1=E$$

და

$$e=C_1e'=C_1(Ce)=(C_1C)e, \quad \text{ე. ი. } C_1C=E$$

ამრიგად, $CC_1=C_1C=E$, ე. ი. $C_1=C^{-1}$ და $e=C^{-1}e'$. ამით დამტკიცებულია, რომ **ძველი ბაზისიდან ახალ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი არის გადაუგვარებელი**. ამასთანავე გვექნება:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{C_{11}}{|C|}e_1' + \frac{C_{21}}{|C|}e_2' + \ldots + \frac{C_{n1}}{|C|}e_n' \\ e_2 &= \frac{C_{12}}{|C|}e_1' + \frac{C_{22}}{|C|}e_2' + \ldots + \frac{C_{n2}}{|C|}e_n' \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_n &= \frac{C_{1n}}{|C|}e_1' + \frac{C_{2n}}{|C|}e_2' + \ldots + \frac{C_{nn}}{|C|}e_n' \end{aligned} \tag{26}$$

(25) და (26) ტოლობები მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} e_j \ (i=1,2,\ldots,n) \text{ და } e_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{ij}}{|C|} e_i' \ (j=1,2,\ldots,n) \tag{27}$$

შესაბამისად.

ვთქვათ L^n სივრცის u ვექტორის კოორდინატები ძველ ბაზისში არის $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ხოლო ახალ ბაზისში $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, ე. ი.

$$u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \quad \text{და} \quad u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i'. \tag{28}$$

(27) ტოლობების ძალით გვექნება:

$$u=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{ij}}{|C|}e_i'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{ij}}{|C|}\xi_j\right)e_i'.$$

აქედან და (28)-დან, იმის გამო, რომ ვექტორის კოორდინატები ცალსახად განისაზღვრებიან, ვღებულობთ, რომ

$$\xi_i'=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_{ij}}{|C|}\xi_j\quad (i=1,2,...,n).$$

თუ მიღებულ ტოლობებს გაშლილად გადავწერთ, მივიღებთ:

$$\begin{cases}\xi_1'=\dfrac{C_{11}}{|C|}\xi_1+\dfrac{C_{12}}{|C|}\xi_2+...+\dfrac{C_{1n}}{|C|}\xi_n,\\ \xi_2'=\dfrac{C_{21}}{|C|}\xi_1+\dfrac{C_{22}}{|C|}\xi_2+...+\dfrac{C_{2n}}{|C|}\xi_n,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \xi_n'=\dfrac{C_{n1}}{|C|}\xi_1+\dfrac{C_{n2}}{|C|}\xi_2+...+\dfrac{C_{nn}}{|C|}\xi_n.\end{cases}$$

მაშასადამე,

u ვექტორის კოორდინატები ძველ ბაზისში გარდაიქმნებიან მის კოორდინატებად ახალ ბაზისში ძველი ბაზისიდან ახალ ბაზისზე გადასვლის მატრიცის შებრუნებულის ტრანსპონირებულის დახმარებით, ან რაც იგივეა ძველი ბაზისიდან ახალ ბაზისზე გადასვლის მატრიცის ტრანსპონირებულის შებრუნებულის დახმარებით,

$$(C^{-1})^T=(C^T)^{-1}.$$

§ 6. წრფივ სივრცეთა იზომორფიზმი

<u>განსაზღვრება</u>. ვთქვათ L და L′ წრფივი სივრცეებია ერთი და იმავე K ველის მიმართ. მაშინ L-ის ურთიერთცალსახა ასახვას L′-ზე ეწოდება L სივრცის იზომორფიზმი L′ სივრცეზე და წერენ $L \cong L'$, თუ კი იქიდან, რომ L-ის u და v ვექტორების ანასახები L′ სივრცეზე შესაბამისად არის u′ და v′ გამომდინარეობს, რომ L-ის u+v და αu ვექტორების ანასახები L′-ზე იქნება შესაბამისად u′+ v′ და α u′, ე. ი.

$u \leftrightarrow u'$ და $v \leftrightarrow v' \Rightarrow u+v \leftrightarrow u'+v'$ და $\alpha u \leftrightarrow \alpha u'$.

ვთქვათ $u \leftrightarrow u'$. მაშინ იზომორფიზმის გამო გვექნება:

ა) $0u \leftrightarrow 0u'$, მაგრამ $0u=0$ და $0u'=0'$, ე. ი. $0 \leftrightarrow 0'$;

ბ) $(-1)u \leftrightarrow (-1)u'$, მაგრამ $(-1)u=-u$ და $(-1)u'=-u'$, ე. ი. $-u \leftrightarrow -u'$,.

<u>ლემა.</u> იზომორფიზმის დროს წრფივად დამოკიდებული ვექტორების ანასახები წრფივად დამოკიდებულია, ხოლო წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების ანასახები წრფივად დამოუკიდებელია.

მართლაც, ვთქვათ $L \cong L'$ და ვთქვათ $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ვექტორებია L-დან, ხოლო $u'_1, u'_2, \ldots, u'_s$ მათი ანასახებია L′-ში. თუ პირველი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ K ველში მოიძებნება $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც $\neq 0$, რომ L-ში შესრულდება $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s = 0$ ტოლობა. ამიტომ, იზომორფიზმის გამო, L′-ში გვექნება: $\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \ldots + \alpha_s u'_s = 0'$, მაგრამ აქ ერთი α_i. მაინც $\neq 0$, ე. ი. $u'_1, u'_2, \ldots, u'_s$ სისტემაც წრფივად დამოკიდებულია. ვთქვათ ახლა $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაგრამ ანასახთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ L′-ში შესრულდება $\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \ldots + \alpha_s u'_s = 0'$ ტოლობა, სადაც ერთი

α_i მაინც $\neq 0$. ამიტომ იზომორფიზმის გამო, L-ში გვექნება $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s=0$, ე. ი. $u_1,u_2,\ldots,u_s$ ვექტორთა სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

<u>თეორემა</u>. იმისათვის, რომ ორი წრფივი სივრცე ერთსა და იმავე ველის მიმართ იყოს იზომორფული აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი განზომილებანი ტოლი იყოს.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ $\dim L=\dim L'=n$. ვთქვათ L-ის ბაზისი არის $e_1,e_2,\ldots,e_n$, ხოლო L'-ის ბაზისი არის $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$. L სივრცის

$$u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n \tag{29}$$

ვექტორს შევუსაბამოთ L' სივრცეში

$$u'=\xi_1e'_1+\xi_2e'_2+\ldots+\xi_ne'_n \tag{30}$$

ვექტორი, ე. ი. ვექტორი, რომლის კოორდინატები იგივეა რაც u-ს. ასეთნაირად განსაზღვრული ასახვა L-ისა L'-ზე არის ურთიერთცალსახა. მართლაც, ყოველ u ვექტორს ცალსახად ეთანადება მისი ξ_i კოორდინატები, ხოლო ამ ξ_i სკალარებს თავის მხრივ ცალსახად ეთანადება u' ვექტორი. და პირუკუ ყოველი u' ვექტორი ცალსახად ეთანადება ξ_i კოორდინატებს, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ u ვექტორს. ვთქვათ ახლა L სივრცის

$$v=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots+\eta_ne_n \tag{31}$$

ვექტორის ანასახი L' სივრცეში არის

$$v'=\eta_1e'_1+\eta_2e'_2+\ldots+\eta_ne'_n \tag{32}$$

ვექტორი. (29) და (31) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u+v=(\xi_1+\eta_1)e_1+(\xi_2+\eta_2)+\ldots+(\xi_n+\eta_n)e_n \quad \text{და}$$

$$\alpha u=(\alpha\xi_1)e_1+\ldots+(\alpha\xi_n)e_n$$

ამიტომ, განსაზღვრული ასახვის ძალით,

$$(u+u)'=(\xi_1+\eta_1)e'_1+(\xi_2+\eta_2)e'_2+\ldots+(\xi_n+\eta_n)e'_n=u'+v' \text{ და}$$

$$(\alpha u)'=(\alpha\xi_1)e'_1+(\alpha\xi_2)e'_2+\ldots+(\alpha\xi_n)e'_n=\alpha u'.$$

მაშასადამე, $L\cong L'$.

გადავიდეთ ახლა აუცილებლობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ $L \cong L'$ და $\dim L = n$, $\dim L' = n'$. ვთქვათ L სივრცის ბაზისი არის $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ხოლო $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ შესაბამისად მათი ანასახებია L' სივრცეში, ე.ი. L'-ში უკვე არის n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ამიტომ $n' \geq n$. ზუსტად ასევე, $n \geq n'$. მაშასადამე, $n' = n$.

დამტკიცებული თეორემის თანახმად, ნებისმიერი L^n სივრცე K ველის მიმართ იზომორფულად აისახება K^n არითმეტიკულ წრფივ სივრცეზე, ე. ი. $L^n \cong K^n$.

L წრფივი სივრცის L' ქვესიმრავლეს ეწოდება L-ის ქვესივრცე, თუ L' თვითონ არის წრფივი სივრცე L-ზე განსაზღვრული ვექტორთა შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

ყოველ სივრცეს გააჩნია ორი ტრივიალური ქვესივრცე: თვითონ და ნულოვანი ქვესივრცე–სივრცე, რომელიც შედგება მხოლოდ ერთი ნულოვანი ვექტორისაგან.

ვაჩვენოთ, რომ **წრფივი სივრცის ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება სივრცის განზომილებას**, ე. ი. თუ $L' \subseteq L \Rightarrow \dim L' \leq \dim L$. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ $\dim L' = n' > \dim L = n$, ე. ი. L'-ში არსებობს n' წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, მაგრამ ეს n' ვექტორი L-საც ეკუთვნის, რაც შეუძლებელია, რადგან L-ის ნებისმიერი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

განვიხილოთ K ველის მიმართ n-უცნობიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{33}$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ სისტემის ყველა ამონახსნთა სიმრავლე არის K^n სივრცის ქვესივრცე. ვთქვათ $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ და $(\eta_1, \eta_2,\dots, \eta_n)$ ორი ნებისმიერი ამონახსნია. ვაჩვენოთ, რომ $(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\dots,\xi_n+\eta_n)$ და $(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\dots,\lambda\xi_n)$, სადაც λ არის K ველის ნებისმიერი ელემენტი, (33) სისტემის ამონახსნები იქნება. მართლაც,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\xi_k+\eta_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\eta_k=0$$
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\lambda\lambda_k)=\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_k=0; \qquad (i=1,2,\dots m).$$

მაშასადამე, (33) სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე, არის რა K^n-ის ქვესივრცე, თვითონ არის წრფივი სივრცე, რადგან K^n-ის განმსაზღვრელი აქსიომები, ცხადია, სამართლიანია ამონახსნების სიმრავლეშიც. მიღებულ სივრცეს ეწოდება **წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცე**.

თუ (33) სისტემის მატრიცის რანგი r=n, მაშინ როგორც ვიცით სისტემას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ნულოვანი ამონახსნი, ამიტომ ამ შემთხვევაში ამონახსნთა სივრცე არის ნულოვანი ქვესივრცე.

თუ (33) სისტემის მატრიცის რანგი r<n, მაშინ როგორც ვიცით მას ექნება ამონახსნთა უსასრულო ან სასრული სიმრავლე იმისდა მიხედვით K ველი უსასრულოა თუ სასრული.

<u>განსაზღვრება.</u> **წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ყოველ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას, რომლის საშუალებით წრფივად გამოისახება განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი, ეწოდება განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.**

<u>თეორემა</u>. **n უცნობიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, რომლის მატრიცის რანგი r<n, ყოველთვის გააჩნია ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, რომელიც შედგება n−r ამონახსნისაგან.**

დამტკიცება. თუ (33) განტოლებათა სისტემის მატრიცის რანგი $r<n$, მაშინ, როგორც ვიცით, მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_{11}x_{r+1} + \gamma_{12}x_{r+2} + \ldots + \gamma_{1,n-r}x_n \\ x_2 = \gamma_{21}x_{r+1} + \gamma_{22}x_{r+2} + \ldots + \gamma_{2,n-r}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_r = \gamma_{r1}x_{r+1} + \gamma_{r2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_{r,n-r}x_n . \end{cases} \tag{34}$$

თუ ამ ტოლობაში $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ თავისუფალი უცნობების ადგილას შესაბამისად ჩავწერთ K ველის ჯერ $\xi_{r+1}^{(1)}, \xi_{r+2}^{(1)}, \cdots, \xi_n^{(1)}$ შემდეგ $\xi_{r+1}^{(2)}, \xi_{r+2}^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}$ და ა.შ. $\xi_{r+1}^{(n-r)}, \xi_{r+2}^{(n-r)}, \ldots, \xi_n^{(n-r)}$ ელემენტებს, მივიღებთ (33) განტოლებათა სისტემის შემდეგ $n-r$ კერძო ამონახსნს:

$$\begin{cases} \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_r^{(1)}, \xi_{r+1}^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \\ \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_r^{(2)}, \xi_{r+1}^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_1^{(n-r)}, \xi_2^{(n-r)}, \ldots, \xi_r^{(n-r)}, \xi_{r+1}^{(n-r)}, \ldots, \xi_n^{(n-r)} \end{cases} \tag{35}$$

ამ (35) ამონახსნებში $\xi_{r+1}^{(i)}, \xi_{r+2}^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots n-r)$ ელემენტები K ველში ვთქვათ, ისეა შერჩეული, რომ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{r+1}^{(1)} & \xi_{r+2}^{(1)} \cdots & \xi_n^{(1)} \\ \xi_{r+1}^{(2)} & \xi_{r+2}^{(2)} \cdots & \xi_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \xi_{r+1}^{(n-r)} & \xi_{r+2}^{(n-r)} \ldots & \xi_n^{(n-r)} \end{vmatrix} \neq 0$$

განვიხილოთ ახლა

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} u_1, & u_2, & \dots, & u_r, & u_{r+1}, & \dots, & u_n \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{ccccccc}
\xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \dots & \xi_r^{(1)} & \xi_{r+1}^{(1)} & \dots & \xi_n^{(1)} \\
\xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \dots & \xi_r^{(2)} & \xi_{r+1}^{(2)} & \dots & \xi_n^{(2)} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\xi_1^{(n-r)} & \xi_2^{(n-r)} & \dots & \xi_r^{(n-r)} & \xi_{r+1}^{(n-r)} & \dots & \xi_n^{(n-r)} \\
\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & \xi_{r+1} & \dots & \xi_n
\end{array}\right)
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-r} \\ v_{n-r+1} \end{array}
\end{array}
$$

მატრიცი, რომლის პირველი $n-r$ სტრიქონი ესაა ჩვენს მიერ სათანადოდ შერჩეული (35) კერძო ამონახსნები, ხოლო უკანასკნელი სტრიქონი არის (33) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი კერძო ამონახსნი. A მატრიცის ვერტიკალური ვექტორები იყოს $u_1,u_2,\dots,u_n$, ხოლო ჰორიზონტალური – $v_1,v_2,\dots,v_{n-r+1}$. რადგანაც $\Delta\neq 0$, ამიტომ $u_{r+1},\dots,u_n$ ვერტიკალურ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.. ვაჩვენოთ, რომ $u_1,\dots,u_r$ ვერტიკალური ვექტორები წრფივად გამოისახება $u_{r+1},\dots,u_n$ ვექტორების საშუალებით. მართლაც, (34)-ის პირველი ტოლობის ძალით,

$$
\begin{cases}
\xi_1^{(1)} = \gamma_{11}\xi_{r+1}^{(1)} + \gamma_{12}\xi_{r+2}^{(1)} + \dots + \gamma_{1,n-r}\xi_n^{(1)}, \\
\xi_1^{(2)} = \gamma_{11}\xi_{r+1}^{(2)} + \gamma_{12}\xi_{r+2}^{(2)} + \dots + \gamma_{1,n-r}\xi_n^{(n)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\xi_1^{(n-r)} = \gamma_{11}\xi_{r+1}^{(n-r)} + \gamma_{12}\xi_{r+2}^{(n-r)} + \dots + \gamma_{1,n-r}\xi_n^{(n-r)}, \\
\xi_1 = \gamma_{11}\xi_{r+1} + \gamma_{12}\xi_{r+2} + \dots + \gamma_{1,n-r}\xi_n,
\end{cases}
$$

ე.ი. $u_1=\gamma_{11}u_{r+1}+\gamma_{12}u_{r+2}+\dots+\gamma_{1,n-r}u_n$; ანალოგიურად, $u_2,\dots,u_r$ ვექტორებიც წრფივად გამოისახება $u_{r+1},\dots,u_n$ ვექტორების საშუალებით. მაშასადამე, $u_1,u_2,\dots u_n$ ვექტორთა სისტემის რანგი არის $n-r\geq 1$.

[illegible] მატრიცის რანგიც იქნება $n-r$, ე.ი. $v_1,v_2,\ldots v_{n-r},v_{n-r+1}$ ჰორიზონტალურ ვექტორთა სისტემის რანგიც იქნება $n-r$. ამრიგად $v_1,v_2,\ldots v_{n-r},v_{n-r+1}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და მაშასადამე მოიძებნება $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-r+1}$ სკალარები, რომელთა შორის ერთი მაინც $\neq 0$, რომ შესრულდება $\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\ldots+\beta_{n-r}v_{n-r}+$ $+\beta_{n-r+1}+v_{n-r+1}=0$ ტოლობა, სადაც $\beta_{n-r+1}\neq 0$ (რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $v_1,v_2,\ldots,v_{n-r}$ ვექტორთა სისტემა იქნება წრფივად დამოკიდებული, რაც გამორიცხულია იმის გამო, რომ $\Delta\neq 0$). ამრიგად, ვექტორი v_{n-r+1} არის $v_1,v_2,\ldots,v_{n-r}$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია, ე.ი. A მატრიცის პირველი $n-r$ კერძო ამონახსნი წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო უკანასკნელი ნებისმიერი ამონახსნი მათი წრფივი კომბინაციაა.

დასასრულს შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ყოველი ფუნდამენტური სისტემა ამონახსნთა სივრცის ბაზისს წარმოადგენს, იგი შეიცავს ზუსტად $n-r$ ამონახსნს.

თეორემა. წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი კერძო ამონახსნის და შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსენის ჯამი არის არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსენი.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j=\beta_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{36}$$

წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა თავსებადი სისტემა, და ვთქვათ $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ არის მისი რომელიღაც კერძო ამონახსენი. ავიღოთ ნებისმიერი $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)\in K^n$. ადვილი დასანახია, რომ

$$(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)+(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots,\xi_n+\eta_n)$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ჩვენი სისტემის ამონახსენი როცა $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსენი. ეს ამტკიცებს თეორემას.

§ 7. წრფივი სივრცის გარდაქმნები

ვთქვათ L არის წრფივი სივრცე K ველის მიმართ. ვიტყვით, რომ L სივრცეში განსაზღვრულია **A** ოპერატორი ან, სხვა სიტყვებით, **A** არის L სივრცის გარდაქმნა, თუ კი L-ის ყოველ u ვექტორს L-შივე ეთანადება $v=\mathbf{A}u$ ვექტორი, რომელსაც ეწოდება u ვექტორის ანასახი **A** გადრაქმნის მიმართ, ხოლო u-ს ეწოდება v-ს წინარე სახე **A**-ს მიმართ. L-ში განსაზღვრულ **A** და **B** ოპერატორებს ტოლი ეწოდება და წერენ $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, თუ ნებისმიერი u-სათვის L-დან $\mathbf{A}u=\mathbf{B}u$.

L-ში განსაზღვრულ **A** ოპერატორს ეწოდება წრფივი ოპერატორი, თუ

ა) $\mathbf{A}(u+v)=\mathbf{A}u+\mathbf{A}v$ ნებისმიერი u და v-სთვის L-დან,

ბ) $\mathbf{A}(\lambda u)=\lambda\mathbf{A}u$ ნებისმიერი u-სათვის L-დან და ნებისმიერი λ-სათვის K-დან.

ცხადია, რომ თუ **A** წრფივი ოპერატორია, მაშინ ნებისმიერი u-სათვის L-დან

$$\mathbf{A}0=\mathbf{A}(0u)=0\mathbf{A}u=0 \text{ და } \mathbf{A}(-u)=\mathbf{A}((-1)u)=(-1)\mathbf{A}u=-\mathbf{A}u.$$

მათემატიკური ინდუქციით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\mathbf{A}(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_su_s)=\lambda_1\mathbf{A}u_1+\lambda_2\mathbf{A}u_2+\ldots+\lambda_s\mathbf{A}u_s$$

ნებისმიერი $u_1,\ldots,u_s$ ვექტორებისათვის L-დან და ნებისმიერი $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ სკალარებისათვის K-დან.

L-ში განსაზღვრული **A** და **B** წრფივი ოპერატორების ჯამი ეწოდება **C** ოპერატორს და წერენ $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ თუ კი ნებისმიერი u-სთვის L-დან $\mathbf{C}u=\mathbf{A}u+\mathbf{B}u$.

წრფივ ოპერატორთა ჯამი წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

ა) $\mathbf{C}(u+v)=\mathbf{A}(u+v)+\mathbf{B}(u+v)=(\mathbf{A}u+\mathbf{A}v)+(\mathbf{B}u+\mathbf{B}v)=(\mathbf{A}u+\mathbf{B}u)+$
$+(\mathbf{A}v+\mathbf{B}v)=\mathbf{C}u+\mathbf{C}v$ ნებისმიერი u და v-სთვის L-დან,

ბ) $\mathbf{C}(\lambda u)=\mathbf{A}(\lambda u)+\mathbf{B}(\lambda u)=\lambda \mathbf{A}u+\lambda \mathbf{B}u=\lambda(\mathbf{A}u+\mathbf{B}u)=\lambda \mathbf{C}u$

ნებისმიერი u-სთვის L-დან და ნებისმიერ λ-სთვის K-დან.

L-ში განსაზღვრული **A** და **B** წრფივ ოპერატორთა ნამრავლი ეწოდება **D** ოპერატორს და წერენ **D=AB** თუ კი ნებისმიერი u-სთვის L-დან

$$\mathbf{D}u=\mathbf{A}(\mathbf{B}u),$$

ე. ი. რომ ვიპოვოთ u-ს ანასახი **D**-ს მიმართ, ჯერ უნდა ვიპოვოთ u-ს ანასახი **B**-ს მიმართ და შემდეგ **B**u-ს ანასახი **A**-ს მიმართ.

წრფივ ოპერატორთა ნამრავლი წრფივი ოპერატორია. მართლაც,

ა) $\mathbf{D}(u+v)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(u+v))=\mathbf{A}(\mathbf{B}u+\mathbf{B}v)=\mathbf{A}(\mathbf{B}u)+\mathbf{A}(\mathbf{B}v)=\mathbf{D}u+\mathbf{D}v$

ნებისმიერი u და v-სთვის L-დან;

ბ) $\mathbf{D}(\lambda u)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(\lambda u))=\mathbf{A}(\lambda \mathbf{B}u)=\lambda \mathbf{A}(\mathbf{B}u)=\lambda \mathbf{D}u$

ნებისმიერი u-სთვის L-დან და ნებისმიერი λ-სთვის K-დან.

L-ში განსაზღვრულ ოპერატორს, რომლის მიმართ L-ის ნებისმიერი u ვექტორის ანასახი ნულოვანი ვექტორია, ეწოდება ნულოვანი ოპერატორი და აღინიშნება **0**-ით. ცხადია იგი წრფივი ოპერატორია.

L-ში განსაზღვრულ ოპერატორს ეწოდება ერთეულოვანი ოპერატორი ან იგივური გარდაქმნა, თუ მის მიმართ L-ის ნებისმიერი u ვექტორის ანასახი ისევ არის u. ერთეულოვანი ოპერატორი აღინიშნება **E** ასოთი, ე. ი. **E**u=u ნებისმიერი u-სთვის L-დან. ერთეულოვანი ოპერატორიც, ცხადია, წრფივი ოპერატორია.

ვთქვათ **A** ოპერატორია. მისი მოპირდაპირე ოპერატორი, (აღინიშნება **−A** სიმბოლოთი), ეწოდება ოპერატორს, რომელიც განისაღვრება ტოლობით $(-\mathbf{A})u=-\mathbf{A}u$.

თუ **A** წრფივი ოპერატორია, მაშინ **−A**-ც იქნება წრფივი, მართლაც

ა) $(-\mathbf{A})(u+v)=-\mathbf{A}(u+v)=-(\mathbf{A}u+\mathbf{A}v)=(-\mathbf{A}u)+(-\mathbf{A}v)=(-\mathbf{A})u+(-\mathbf{A})v,$

ბ) $(-\mathbf{A})(\lambda u)=-\mathbf{A}\lambda u=-\lambda\,\mathbf{A}u=\lambda(-Au)$.

ვთქვათ L^n წრფივი სივრცეა K ველის მიმართ და $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ამ სივრცის მოცემული ბაზისია. ვთქვათ L^n სივრცეში განსაზღვრულია $\mathbf{A}$ წრფივი ოპერატორი. მაშინ $\mathbf{A}e_1$, $\mathbf{A}e_2$, … $\mathbf{A}e_n$ აგრეთვე ეკუთვნიან L^n-ს, ამიტომ

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\,e_1 &= \alpha_{11}e_1+\alpha_{21}e_2+\ldots+\alpha_{n1}e_n\\
\mathbf{A}\,e_2 &= \alpha_{12}e_1+\alpha_{22}e_2+\ldots+\alpha_{n2}e_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{A}\,e_n &= \alpha_{1n}e_1+\alpha_{2n}e_2+\ldots+\alpha_{nn}e_n
\end{aligned}$$

ე. ი.

$$\mathbf{A}e_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i \qquad (j=1,2,\ldots,n). \tag{37}$$

n-ური რიგის A მატრიცს K ველის მიმართ, რომლის სვეტებია $\mathbf{A}e_1$, $\mathbf{A}e_2,\ldots$, $\mathbf{A}e_n$ ვექტორების კოორდინატები, ე. ი.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ . & . & . & .\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

მატრიცს ეწოდება $\mathbf{A}$ წრფივი ოპერატორის მატრიცი L^n სივრცის $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ბაზისში. ცხადია, რომ L^n წრფივ სივრცეში განსაზღვრულ ყოველ $\mathbf{A}$ წრფივ ოპერატორს სივრცის მოცემულ ბაზისში მხოლოდ ერთი მატრიცი ეთანადება.

ვთქვათ $u\in L^n$ და ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_n მისი კოორდინატებია L^n ბაზისში, ე. ი.

$$u=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\,. \tag{38}$$

ისმის საკითხი, თუ როგორ ვიპოვოთ $\mathbf{A}$-ს მიმართ u-ს ანასახის,

ე. ი. **Au**-ს კოორდინატები ამავე $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში. დავუშვათ, რომ **Au**-ს საძიებელი კოორდინატებია $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, ე. ი.

$$\mathbf{A}\mathrm{u} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i, \tag{39}$$

(39) და (37)-ის ძალით, ვღებულობთ:

$$\mathbf{A}\mathrm{u} = \mathbf{A}\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}(\xi_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{A} e_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_j (\alpha_{ij} e_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ((\alpha_{ij} \xi_j) e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j) e_i,$$

ე. ი. (39)-ის ძალით, რადგანაც ვექტორის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში ცალსახად განისაზღვრებიან,

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ამრიგად

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 &= \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \eta_n &= \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n, \end{aligned}$$

L^n წრფივ სივრცეში განსაზღვრული **E** ერთეულოვანი ოპერატორის მატრიცი L^n-ის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში იქნება ერთეულოვანი მატრიცი

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

რადგანაც $\mathbf{E}\, e_j = e_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$.

L^n-ში განსაზღვრული $\mathbf{0}$ ნულოვანი ოპერატორის მატრიცი ნებისმიერ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ბაზისში ცხადია იქნება ნულოვანი მატრიცი.

L^n -ში განსაზღვული $\mathbf{A}$ წრფივი ოპერატორის მოპირდაპირე $-\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცი მოცემულ ბაზისში იქნება $\mathbf{A}$ ოპერატორის A მატრიცის მოპირდაპირე $-A$ მატრიცი, რადგანაც (37)-ის ძალით

$$(-\mathbf{A})e_j= -\mathbf{A}e_j= -\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\, e_i =\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_{ij}\, e_i) =\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_{ij})\, e_i \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

<u>თეორემა.</u> **1) წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივ ოპერატორთა ჯამის მატრიცი მოცემულ ბაზისში ტოლია შესაკრები ოპერატორების იმავე ბაზისში მატრიცების ჯამის.**

2) **წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივ ოპერატორთა ნამრავლის მატრიცი მოცემულ ბაზისში ტოლია თანამამრავლი ოპერატორების იმავე ბაზისში მატრიცთა ნამრავლის.**

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ L^n -ში განსაზღვრული $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ წრფივი ოპერატორების მატრიცები L^n -ის $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ბაზისში შესაბამისად არიან

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ . & . & . & .\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n11} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n}\\ . & . & . & .\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn}\end{pmatrix}.$$

1) ვთქვათ $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$. მაშინ (37)-ის ძალით,

$$\mathbf{C}e_j = \mathbf{A}e_j + \mathbf{B}e_j =\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\, e_i +\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\, e_i =\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij} + \beta_{ij})\, e_i\ ,$$

ე. ი. $\mathbf{C}$ ოპერატორის C მატრიცი იქნება

$$C=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}+\beta_{2n}\\ . & . & . & .\\ \alpha_{n1}+\beta_{n1} & \alpha_{n2}+\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}+\beta_{nn}\end{pmatrix}=A+B.$$

2) ვთქვათ $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, მაშინ

$$\mathbf{D}e_j = \mathbf{A}(\mathbf{B}e_j) = \mathbf{A}\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\mathbf{A}e_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}e_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\beta_{ij}\alpha_{ki})e_k = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\alpha_{ki})e_k = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\beta_{ij})e_k.$$

თუ k-ს მაგივრად დავწერთ i-ს და i-ს მაგივრად k-ს, მივიღებთ

$$\mathbf{D}e_j = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj})e_i = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}e_i,$$

ე. ი. $\mathbf{D}$ ოპერატორის მატრიცი $e_1, e_2, \ldots e_n$ ბაზისში იქნება

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ . & . & . & . \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ . & . & . & . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = AB.$$

განვიხილოთ K ველის მიმართ L^n წრფივ სივრცეში განსაზღვრული ყველა წრფივი ოპერატორების სიმრავლე. ამ სიმრავლეზე, როგორც ვიცით, განსაზღვრულია შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციები. ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ L^n-ში განსაზღვრულ ყოველ წრფივ ოპერატორს L^n-ის მოცემულ ბაზისში შეესაბამება ერთადერთი n-ური რიგის მატრიცი ელემენტებით K ველიდან, ე. ი. მატრიცი $M_n(K)$ რგოლიდან. ვთქვათ L^n-ში განსაზღვრული $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ წრფივი ოპერატორების მატრიცები მოცემულ ბაზისში არიან შესაბამისად A და B. მაგრამ იქიდან, რომ $\mathbf{A} \to A$ და $\mathbf{B} \to B$, როგორც ვნახეთ, გამომდინარეობს $\mathbf{A} + \mathbf{B} \to A + B$ და $\mathbf{A}\,\mathbf{B} \to A$

B. მაშასადამე, L^n წრფივი სივრცე K ველის მიმართ იზომორფულად აისახება $M_n(K)$ რგოლზე. ამიტომ, თანახმად თეორემისა, რომ რგოლის იზომორფული წინარე სახე რგოლია, ვასკვნით, რომ

L^n **წრფივ სივრცეში K ველის მიმართ განსაზღვრული ყველა წრფივ ოპერატორთა სიმრავლე რგოლია**.

ვნახოთ როგორი კავშირია L^n წრფივ სივრცეში განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის მატრიცებს შორის L^n-ის სხვადასხვა ბაზისში. ვთქვათ **A** წრფივი ოპერატორის მატრიცები $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისებში შესაბამისად არიან

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n11} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ . & . & . & . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

ამიტომ (37)-ის ძალით,

$$\mathbf{A}e_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i \quad \mathbf{A}e'_j=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}e'_i \qquad (j=1,2,\ldots n).$$

ვთქვათ

$$C=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ . & . & . & . \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

არის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი, ე. ი.

$$e'_i=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}e_k \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

მაშასადამე,

$$C^T=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{n2}\\ . & . & . & .\\ \gamma_{1n} & \gamma_{2n} & \cdots & \gamma_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma'_{11} & \gamma'_{12} & \cdots & \gamma'_{1n}\\ \gamma'_{21} & \gamma'_{22} & \cdots & \gamma'_{2n}\\ . & . & . & .\\ \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn}\end{pmatrix},$$

ე. ი. $e'_i=\sum_{k=1}^{n}\gamma'_{ik}e_k$. ერთი მხრივ გვექნება:

$$\mathbf{A}e'_j=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}e'_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}e_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_{ik}e_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_{ik})e_k=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\beta_{ij})e_k=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\gamma'_{ki}\beta_{ij})e_k, \quad (40)$$

ხოლო მეორე მხრივ

$$\mathbf{A}e'_j=\mathbf{A}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}e_k=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\mathbf{A}e_k=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{jk}\alpha_{ik})e_i$$

თუ ამ ჯამში i-ს ნაცვლად დავწერთ k-ს და k-ს ნაცვლად i-ს, მაშინ მივიღებთ

$$\mathbf{A}e'_j=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}\alpha_{ki})e_k=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\gamma'_{ij})e_k, \quad (41)$$

რადგანაც (40) და (41) ტოლობებში მარცხენა მხარეები ტოლია, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\gamma'_{ki}\beta_{ij})e_k=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\gamma'_{ij})e_k,$$

ე. ი.

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma'_{ki}\beta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\gamma'_{ij},$$

მაშასადამე, $C^TB=AC^T$ ანუ $B=(C^T)^{-1}AC^T$.

§ 8. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორები

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ B მატრიცი მსგავსია A მატრიცის, თუ არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი C მატრიცი, რომ

$$B=C^{-1}AC.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $A=CBC^{-1}$, ე.ი. A-ც მსგავსია B-სი. ამიტომ უბრალოდ ამბობენ, რომ A და B მატრიცები მსგავსია. მაშასადამე, წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის მატრიცები სივრცის სხვადასხვა ბაზისში მსგავსი მატრიცებია.

მსგავსი მატრიცების დეტერმინანტები ტოლია. მართლაც, თუ

$$B=C^{-1}AC,$$

მაშინ $|B|=|C^{-1}||A||C|=|A||C||C^{-1}|=|A||E|=|A|$

მსგავსი მატრიცების რანგებიც ტოლია, რადგანაც როგორც ვიცით

$$\text{rank } B=\text{rank } C^{-1}AC=\text{rank } AC=\text{rank } A.$$

ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

არის მატრიცი K ველის მიმართ, მაშინ

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

მატრიცს, სადაც λ არის უცნობი, ეწოდება <u>A მატრიცის</u> <u>მახასიათებელი მატრიცი.</u> ამ უკანასკნელის დეტერმინანტს, ე.ი. $|A-\lambda E|$ პოლი-
ეწოდება <u>A მატრიცის</u> <u>მახასიათებელი პოლინომი</u>. ეს იქნება

$K[\lambda]$ რგოლის n-ური ხარისხის პოლინომი. მართლაც n-ური რიგის დეტერმინანტის განსაზღვრების თანახმად, $|A-\lambda E|$-ის ერთ-ერთი წევრი იქნება

$$(\alpha_{11}-\lambda)(\alpha_{22}-\lambda)\ldots(\alpha_{nn}-\lambda)=(-1)^n(\lambda-\alpha_{11})(\lambda-\alpha_{22})\ldots(\lambda-\alpha_{nn})=$$
$$=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}.$$

სხვა წევრები n-ზე ნაკლები ხარისხის პოლინომებია.

მსგავსი მატრიცების მახასიათებელი პოლინომები ტოლია. მართლაც, თუ B მატრიცი მსგავსია A მატრიცის, მაშინ

$$|B-\lambda E|=|C^{-1}AC-C^{-1}\lambda EC|=|C^{-1}(A-\lambda E)C|=|C^{-1}||A-\lambda E||C|=$$
$$=|A-\lambda E|.$$

A მატრიცის მახასიათებელი პოლინომის ფესვებს ეწოდება $\underline{A}$ <u>მატრიცის მახასიათებელი ფესვები</u>. მსგავს მატრიცებს ერთი და იგივე მახასიათებელი ფესვები აქვთ.

წრფივ სივრცეში განსაზღვრული <u>**A** წრფივი ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომი</u> ეწოდება სივრცის ნებისმიერ ბაზისში **A** ოპერატორის მატრიცის მახასიათებელ პოლინომს. წრფივი ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომი ცალსახად განისაზღვრება, რადგანაც სხვადასხვა ბაზისის მიმართ წრფივი ოპერატორის მატრიცები მსგავსია, ამიტომ ყოველ **A** წრფივ ოპერატორს მხოლოდ ერთი მახასიათებელი პოლინომი გააჩნია.

<u>**A** წრფივი ოპერატორის მახასიათებელი ფესვები</u> ეწოდება მისი მახასიათებელი პოლინომის ფესვებს.

L წრფივ სივრცეში K ველის მიმართ განსაზღვრული <u>**A** წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი</u> ეწოდება L-ის ნებისმიერ არანულოვან u ვექტორს, რომლისთვისაც K-ში მოიძებნება ისეთი λ სკალარი, რომ

$$\mathbf{A}u=\lambda u;$$

λ-ს კი ეწოდება <u>**A** ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა</u>.

<u>თეორემა.</u> ყოველ წრფივ ოპერატორს, განსაზღვრულს წრფივ სივრცეში ალგებრულად ჩაკეტილი ველის მიმართ, გააჩნია ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ L^n წრფივი სივრცეა K ალგებრულად ჩაკეტილი ველის მიმართ, და ვთქვათ L^n-ში განსაზღვრულია **A** წრფივი ოპერატორი, რომლის მატრიცი სივრცის $e_1,e_2...,e_n$ ბაზისში არის

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

ნებისმიერი $u\neq 0$ ვექტორისათვის L^n-დან გვექნება $u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+...+\xi_ne_n$, სადაც $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ სკალარებია K-დან. ამიტომ (39) ფორმულის ძალით,

$$\mathbf{A}u=\eta_1e_1+\eta_2e_2+...+\eta_ne_n, \tag{42}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \eta_1&=\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+...+\alpha_{1n}\xi_n, \\ \eta_2&=\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+...+\alpha_{2n}\xi_n, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \eta_n&=\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+...+\alpha_{n2}\xi_n. \end{aligned} \tag{43}$$

$u\neq 0$ ვექტორი, რომ იყოს **A**-ს საკუთრივი ვექტორი, K ველში უნდა მოიძებნოს ისეთი λ სკალარი, რომ შესრულდეს $\mathbf{A}u=\lambda u$ ტოლობა. თუ ასეთი λ არსებობს, მაშინ გვექნება

$$\lambda u=\lambda\xi_1e_1+\lambda\xi_2e_2+...+\lambda\xi_ne_n. \tag{44}$$

ამიტომ (42), (44) და (43)-ის თანახმად, უნდა შესრულდეს

$$\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+...+\alpha_{1n}\xi_n=\lambda\xi_1$$

$$\alpha_{2n}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+...+\alpha_{2n}\xi_n=\lambda\xi_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad(45)$$

$$\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n=\lambda\xi_n$$

ტოლობები. **A** ოპერატორის მახასიათებელი პოლინომი, როგორც ვიცით არის $|A-\lambda E|$. ვინაიდან K ალგებრულად ჩაკეტილია, მას K-ში გააჩნია ერთი ფესვი მაინც, ვთქვათ λ_0, ე. ი. $|A-\lambda_0 E|=0$.

განვიხილოთ n უცნობიან წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$(\alpha_{11}-\lambda_0)\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n=0,$$
$$\alpha_{21}\xi_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)\xi_n=0.$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი $|A-\lambda_0 E|=0$, და მაშასადამე მას აქვს არანულოვანი ამონახსნები. ვთქვათ $\xi_{10}, \xi_{20}, \ldots, \xi_{n0}$ არის ერთი ასეთი ამონახსნი, და ავიღოთ ვექტორი $u_0=\xi_{10}e_1+\xi_{20}e_2+\ldots+\xi_{n0}e_n$. (42), (43) და (45)-ის ძალით, $\mathbf{A}u_0=\lambda_0 u_0$.

ამ თეორემიდან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ წრფივ ოპერატორს განსაზღვრულს კომპლექსურ სივრცეში გააჩნია ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი. ამავე თეორემის დამტკიცებიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები უნდა ვეძიოთ მისი მახასიათებელი პოლინომის ფესვებს შორის.

<u>თეორემა</u>. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებიან განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობებს, წრფივად დამოუკიდებელი არიან.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ L წრფივ სივრცეში K ველის მიმართ განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებია $u_1, u_2, \ldots u_s$, ხოლო შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობებია $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$, ე. ი. $\mathbf{A}u_i=\lambda_i u_i$ $(i=1,2,\ldots s)$, სადაც $\lambda_i\neq\lambda_j$, როცა $i\neq j$. თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციით. როცა $s=1$ დასამტკიცებელი

არაფერია. დავუშვათ, რომ [illegible] ვექტორის შემთხვევაში. და [illegible] ვექტორის შემთხვევაში. დავუშვათ [illegible] ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია. [illegible] სადაც ზოგადობის დაურღვევლად, ვთქვათ [illegible]

$$\lambda_s(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_{s-1}u_{s-1}+\alpha_s u_s) = \lambda_s 0 = 0.$$

ე.ი.

$$(\lambda_s\alpha_1)u_1+(\lambda_s\alpha_2)u_2+\ldots+(\lambda_s\alpha_{s-1})u_{s-1}+(\lambda_s\alpha_s)u_s=0, \qquad (46)$$

ხოლო მეორე მხრივ

$$\mathbf{A}(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_{s-1}u_{s-1}+\alpha_s u_s) = \mathbf{A}0,$$

ანუ

$$(\alpha_1\lambda_1)u_1+(\alpha_2\lambda_2)u_2+\ldots+(\alpha_{s-1}\lambda_{s-1})u_{s-1}+(\alpha_s\lambda_s)u_s=0. \qquad (47)$$

თუ (46)-ს გამოვაკლებთ (47)-ს მივიღებთ:

$$(\lambda_s-\lambda_1)\alpha_1 u_1+(\lambda_s-\lambda_2)\alpha_2 u_2+\ldots+(\lambda_s-\lambda_{s-1})\alpha_{s-1}u_{s-1}=0.$$

რადგანაც, დაშვების თანახმად, $u_1,u_2,\ldots u_{s-1}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ყველა სკალარი მამრავლი ნულოვანია. კერძოდ, $(\lambda_s-\lambda_1)\alpha_1=0$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $\lambda_s\neq\lambda_1$, და $\alpha_1\neq 0$.

თეორემა. იმისათვის, რომ K ველის მიმართ L^n წრფივი სივრცეში განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის მატრიცი L^n-ის ბაზისში იყოს დიაგონალური აუცილებელი და საკმარისი, რომ ეს ბაზისი შედგებოდეს **A** ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან.

დამტკიცება. ვთქვათ $e_1,e_2,\ldots e_n$ არის ბაზისი. თუ ეს ვექტორები **A**-ს საკუთრივ ვექტორებს წარმოადგენენ, ე. ი. $\mathbf{A}e_j=\lambda_j e_j$ $(j=1,2,..n)$, მაშინ **A** ოპერატორის მატრიცს ამ ბაზისში ექნება სახე

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

და პირიქით, თუ **A** ოპერატორის მატრიცს ამ ბაზისში ასეთი სახე აქვს, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ $.\mathbf{A}e_j=\lambda_j e_j$ $(j=1,2,..n)$, ანუ ბაზისის ვექტორები **A**-ს საკუთრივი ვექტორებია.

§ 9. ევკლიდური სივრცე

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ ნამდვილ წრფივ სივრცეში განსაზღვრულია ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ სივრცის u და v ვექტორთა ყოველ წყვილს ეთანადება ნამდვილი რიცხვი, რომელიც (u,v) სიმბოლოთი აღინიშნება და შესრულებულია შემდეგი აქსიომები:

1) სიმეტრიის აქსიომა: $(u,v)=(v,u)$;

2) სკალარი მამრავლის სკალარული ნამრავლის გარეთ გატანის აქსიომა: $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, სადაც α ნამდვილი რიცხვია;

3) დისტრიბუციულობის აქსიომა: $(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)$;

4) სკალარული კვადრატის აქსიომა: $(u,u)\geq 0$ და 0-თან ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ როცა $u=0$.

ნამდვილ წრფივ სივრცეს, რომელშიაც განსაზღვრულია ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება ევკლიდური სივრცე.

მოვიყვანოთ ევკლიდური სივრცის რამდენიმე მაგალითი.

1) ჩვენ უკვე ვიცით, რომ V^2 – სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი ვექტორებისა სიბრტყეზე და V^3 – სიმრავლე ყველა ჩვეულებრივი ვექტორებისა სივრცეში – ნამდვილი წრფივი სივრცეებია. ანალიზურ გეომეტრიაში ამ ორივე სივრცეში $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით:

$$(\vec{P},\vec{Q})=|\vec{P}||\vec{Q}|\cos(\widehat{\vec{P}\vec{Q}})$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განსაზღვრება აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ ოთხივე აქსიომას. მაშასადამე, V^2 და V^3 ევკლიდური სივრცეებია.

2) $\mathbf{R}^n$ არითმეტიკულ წრფივ სივრცეში, რომლის ვექტორებია ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულები, $u=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ და $v=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით:

$$(u,v)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+...+\xi_n\eta_n.$$

ადვილად მოწმდება, რომ ზემოთ მოყვანილი ოთხივე აქსიომა ძალაშია და მაშასადამე, R^n არის ევკლიდური სივრცე.

3) $C[a,b]$ წრფივ სივრცეში, რომლის ვექტორები $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია, სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ფორმულით: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$. მათემატიკური ანალიზიდან ვიცით, რომ $\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx$, ე. ი. $(f,g)=(g,f)$;

$$\int_a^b \alpha f(x)g(x)dx=\alpha\int_a^b g(x)f(x)dx \quad \text{ე. ი. } (\alpha f,g)=\alpha(f,g);$$

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))g(x)dx=\int_a^b f_1(x)g(x)dx+\int_a^b f_2(x)g(x)dx, \text{ ე.ი.}$$

$(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$; $\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$ და $\int_a^b f^2(x)dx=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა f იგივურად ნულის ტოლია, ე. ი. $(f,f)\geq 0$ და 0-თან ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ როცა $f=0$.

ამრიგად $C[a,b]$ ევკლიდური სივრცეა.

ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმსაზღვრელი აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ

$(u,\alpha v)=(\alpha v,u)=\alpha(v,u)=\alpha(u,v)$ და

$(u,v_1+v_2)=(v_1+v_2,u)=(v_1,u)+(v_2,u_2)=(u,v_1)+(u,v_2)$.

ევკლიდურ სივრცეში <u>u ვექტორის სიგრძე</u> ეწოდება $\sqrt{(u,u)}$ ფესვის არითმეტიკულ მნიშვნელობას და აღინიშნება $|\mathbf{u}|$ სიმბოლოთი. <u>კუთხე u და v ვექტორებს შორის</u> ეწოდება φ ნამდვილ რიცხვს, რომლისთვისაც

$$\cos\varphi=\frac{(u,v)}{|u||v|} \tag{48}$$

იმისათვის, რომ აზრი ჰქონდეს ამ ცნებას, უნდა დამტკიცდეს, $-1\le\cos\varphi\le 1$, ე. ი. რომ $-1\le\frac{(u,v)}{|u||v|}\le 1$ ანუ რაც იგივეა, $\frac{(u,v)^2}{|u|^2|v|^2}\le 1$.

მაშასადამე, იმისათვის რომ ორ ვექტორს შორის კუთხე განისაზღვრებოდეს (48) ფორმულით უნდა დამტკიცდეს რომ **ევკლიდურ სივრცეში სამართლიანია**

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})^2\le(\mathbf{u},\mathbf{u})(\mathbf{v},\mathbf{v}) \tag{49}$$

უტოლობა, რომელსაც <u>კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა</u> ეწოდება.

<u>დამტკიცება:</u> ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი t, 4) აქსიომის ძალით $(u-tv,u-tv)\ge 0$. (2) და (3) აქსიომების ძალით კი

$$(u-tv,u-tv)=(u,u)+(-tv,u)+(u,-tv)+(tv,tv)=(v,v)t^2-2(u,v)t+(u,u).$$

ანუ

$$(v,v)t^2-2(u,v)t+(u,u)\ge 0. \tag{50}$$

ამ უტოლობის მარცხენა მხარეში დგას მუდმივკოეფიციენტებიანი კვადრატული სამწევრი t-ს მიმართ. ვინაიდან იგი ღებულობს მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს, მისი დისკრიმინანტი $4(u,v)^2-4(v,v)(u,u)$ არ შეიძლება იყოს დადებითი, ე. ი.

$$(u,v)^2-(u,u)(v,v)\le 0,$$

ანუ

$$(u,v)^2\le(u,u)(v,v).$$

$\mathbf{R}^n$ არითმეტიკულ სივრცეში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა ღებულობს სახეს:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2 .$$

$C[a,b]$ სივრცეში კი კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას აქვს სახე:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx .$$

§ 10. ორთოგონული ვექტორები

<u>განსაზღვრება.</u> ევკლიდური სივრცის ორ u და v ვექტორს ეწოდება ორთოგონული თუ (u,v)=0.

კერძოდ, (2) აქსიომის ძალით, ნულოვანი ვექტორი ორთოგონულია ნებისმიერ ვექტორთან.

ვექტორთა სისტემას ეწოდება ორთოგონული, თუ ამ სისტემის ვექტორები წყვილ-წყვილად ორთოგონულია.

<u>ლემა</u>. არანულოვან ორთოგონულ ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ $u_1,u_2,..,u_s$ ევკლიდური სივრცის ვექტორებია, სადაც $u_i\neq 0$ $(i=1,2,..,s)$ და $(u_i,u_j)=0$, როცა $i\neq j$. ვთქვათ

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s=0,$$

საიდანაც ერთი მხრივ

$(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s,\ u_i)=\alpha_1(u_1,u_i)+\alpha_2(u_2,u_i)+\ldots+\alpha_s(u_s,u_i)=\alpha_i(u_i,u_i)$ და მეორე მხრივ $(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_su_s\ ,\ u_i)=(0,u_i)=0$. გვექნება $\alpha_i(u_i,u_i)=0$, ამიტომ (4) აქსიომის ძალით $\alpha_i=0.$, ანუ $u_1,u_2,..,u_s$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ნებისმიერ n არანულოვან ორთოგონულ ვექტორთა სისტემას ეწოდება <u>ორთოგონული ბაზისი.</u>

<u>თეორემა</u>. ყოველ ევკლიდურ სივრცეში არსებობს ორთოგონული ბაზისი.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ რაიმე ბაზისია n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცისა. ამ ბაზისის საშუალებით ავაგოთ ამავე სივრცის ორთოგონული ბაზისი. ორთოგონული ბაზისის აგების ხერხს ეწოდება <u>ორთოგონალიზაციის პროცესი.</u>

ავიღოთ $e_1' = e_1$, და e_2' ვექტორი ვეძიოთ $e_2' = e_2 + \alpha e_1'$ სახით. რადგანაც $e_1' = e_1$, და e_1 და e_2 წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $e_2' \neq 0$ ნებისმიერი α რიცხვის შემთხვევაში. α რიცხვი ისე შევარჩიოთ, რომ მივიღოთ $(e_2', e_1') = 0$, ე.ი. რომ მივიღოთ $(e_2 + \alpha e_1', e_1') = 0$. ანუ $(e_2, e_1') + \alpha(e_1', e_1') = 0$, საიდანაც $\alpha = -\dfrac{(e_2, e_1')}{(e_1', e_1')}$. ამრიგად აგებულია ორი ორთოგონული და არანულოვანი e_1', e_2' ვექტორი. ინდუქციით დავუშვათ, რომ უკვე აგებულია წყვილ-წყვილად ორთოგონული და არანულოვანი $e_1', e_2', \ldots, e_{n-1}'$ ვექტორები და, რომ ნებისმიერი i-სთვის $(1 \le i \le n-1)$ e_i' არის $e_1, e_2, \ldots, e_i$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია. e_n' ვექტორი ვეძიოთ

$$e_n' = e_n + \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}' \tag{51}$$

სახით. რადგანაც ინდუქციის დაშვებით $e_i' (1 \le i \le n-1)$ არის $e_1, e_2, \ldots, e_i$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია, ამიტომ (51)-ის ძალით,

$$e_n' = e_n + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{n-1} e_{n-1}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $e_n' \neq 0$ როგორიც არ უნდა იყოს β_i რიცხვები.

(51) ტოლობაში $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ რიცხვები ისე შევარჩიოთ, რომ e_n' ვექტორი იყოს $e_1', e_2', \ldots, e_{n-1}'$ ვექტორების ორთოგონული, ე. ი. რომ

$$(e_n + \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \cdots + \alpha_{n-1} e'_{n-1}, \quad e_1') = 0,$$
$$(e_n + \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \cdots + \alpha_{n-1} e'_{n-1}, \quad e_2') = 0,$$

. . . .

$$(e_n + \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e'_{n-1}, \quad e'_{n-1}) = 0,$$

იმის გამო, რომ $e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}$ ვექტორები წყვილ-წყვილად ორთოგონულია, ამიტომ ეს ტოლობები შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$(e_n, e'_1) + \alpha_1 (e'_1, e'_1) = 0,$$
$$(e_n, e'_2) + \alpha_2 (e'_2, e'_2) = 0,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(e_n, e'_{n-1}) + \alpha_{n-1} (e'_{n-1}, e'_{n-1}) = 0,$$

საიდანაც

$$\alpha_1 = -\frac{(e_n, e'_1)}{(e'_1, e'_1)}, \alpha_2 = -\frac{(e_n, e'_2)}{(e'_2, e'_2)}, \quad ,\alpha_{n-1} = -\frac{(e_n, e'_{n-1})}{(e'_{n-1}, e'_{n-1})} . \tag{52}$$

მაშასადამე, თუ (51) ტოლობაში $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ სკალარებს შესაბამისად მივცემთ (52) მნიშვნელობებს, მაშინ e'_n ვექტორი იქნება $e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}$ ვექტორების ორთოგონული, ამრიგად აგებულია

$$e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}, e'_n \tag{53}$$

არანულოვან ორთოგონულ ვექტორთა სისტემა. ზემოთ დამტკიცებული ლემის ძალით კი არანულოვან ორთოგონულ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშასადამე (53) ორთოგონული ბაზისია.

ევკლიდური სივრცის ორთოგონულ ვექტორთა სისტემას ეწოდება <u>ორთონორმებული,</u> თუ ამ სისტემის ყოველი ვექტორის სიგრძე 1-ის ტოლია, ან რაც იგივეა, ყოველი ვექტორის სკალარული კვადრატი 1-ის ტოლია,

ე. ი.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j, \\ 0, & \text{თუ } i \neq j. \end{cases} \tag{54}$$

<u>თეორემა</u>. ყოველ ევკლიდურ სივრცეში არსებობს ორთონორმებული ბაზისი.

__**დამტკიცება**__. ვთქვათ $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, e'_n$ არის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ორთოგონული ბაზისი. თუ ამ ვექტორებს შევცვლით

$$e_i'' = \frac{e'_i}{|e'_i|} \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

ვექტორებით, მაშინ მივიღებთ წყვილ-წყვილად ორთოგონულ ვექტორებს სიგრძით 1. მართლაც

$$(e''_i, e''_j) = \left(\frac{e'_i}{|e'_i|}, \frac{e'_j}{|e'_j|}\right) = \frac{1}{|e'_i||e'_j|}(e'_i, e'_j) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } i \neq j, \\ 1, & \text{როცა } i = j \end{cases}$$

მაშასადამე $e''_1, e''_2, \dots, e''_n$ იქნება ორთონორმებული ბაზისი.

ვთქვათ $e_1, e_2, \dots, e_n$ არის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი. დავუშვათ, რომ ამ ბაზისში სივრცის u ვექტორის კოორდინატებია $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ხოლო v ვექტორის კოორდინატებია $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ე. ი.

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad \text{და} \quad v = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n.$$

მაშინ 3) და 2) აქსიომებისა და (54) ფორმულის ძალით

$$(u, v) = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n) =$$
$$= \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n.$$

მაშასადამე, **ევკლიდური სივრცის ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი სივრცის ორთონორმებულ ბაზისში ტოლია ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის.**

ევკლიდური L სივრცის ურთიერთცალსახა ასახვას L' ევკლიდურ სივრცეზე ეწოდება __L ევკლიდური სივრცის იზომორფიზმი L' ევკლიდურ სივრცეზე__ (და წერენ $L \cong L'$), თუ კი იქიდან, რომ L-ის u და v ვექტორების ანასახები L' სივრცეში შესაბამისად არის u' და v' გამომდინარეობს, რომ L-ის u+v და αu ვექტორების ანასახები L'-ში

შესაბამისად იქნება $u'+v'$ და $\alpha u'$ ვექტორები, და შესაბამისი წყვილების სკალარული ნამრავლები ტოლია; ე. ი. იქიდან რომ $u \leftrightarrow u'$ და $v \leftrightarrow v' \Leftrightarrow u+v \leftrightarrow u'+v'$, $\alpha u \leftrightarrow \alpha u'$ და $(u,v)=(u',v')$.

მაშასადამე, L და L' ევკლიდური სივრცეები იზომორფულია, თუ კი ისინი იზომორფულია როგორც წრფივი სივრცეები და ეს იზომორფიზმი აგრეთვე ინარჩუნებს სკალარულ ნამრავლს.

ვაჩვენოთ, რომ

ყოველი n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე – L იზომორფულია R^n არითმეტიკული წრფივი სივრცისა.

ვთქვათ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ არის მოცემული ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი, და განვიხილოთ ასახვა რომელსაც ეს ბაზისი გადაჰყავს $\mathbf{R}^n$-ის სტანდარტულ ბაზისში. L-ის $u=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n$ და $v=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots+\eta_ne_n$ ვექტორებს შევუსაბამოთ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში $u'=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ და $v'=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ ვექტორები, სადაც ξ_i და η_i $i=(1,2,..,n)$ ნამდვილი რიცხვებია. როგორც ვიცით, ორთონორმებულ ბაზისში გვექნება: $(u,v)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n$. მეორე მხრივ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად გვექნება:

$(u',v')=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n$. ამრიგად $(u,v)=(u',v')$.

§ 11. ორთოგონული მატრიცები

კვადრატულ A მატრიცს, რომლის ელემენტები ნამდვილი რიცხვებია ეწოდება ორთოგონული, თუ $AA^T=E$.

1) ორთოგონული მატრიცის დეტერმინანტი ±1-ის ტოლია. მართლაც, ვთქვათ $AA^T=E$, მაშინ $|A||A^T|=|E|=1 \Rightarrow |A|^2=1$, ე.ი. $|A|=\pm1$. მაშასადამე, ყოველი ორთოგონული მატრიცი გადაუგვარებელია.

2) ორთოგონული მატრიცის შებრუნებული და ტრანსპონირებული მატრიცები ტოლია.

ეს უშუალოდ გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან.

3) ორთოგონული მატრიცის შებრუნებული მატრიცი აგრეთვე ორთოგონულია. მართლაც, $A^{-1}(A^{-1})^{T}=A^{-1}(A^{T})^{T}=A^{-1}A=E$.

4) იმისათვის რომ A მატრიცი იყოს ორთოგონული აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ნებისმიერი ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამი იყოს 0-ის ტოლი, ხოლო ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების კვადრატების ჯამი იყოს 1-ის ტოლი.

დამტკიცება: **აუცილებლობა**. დავუშვათ რომ A მატრიცი ორთოგონულია, ე. ი. $AA^{T}=E$. ვთქვათ $A=(\alpha_{ij})$, $A^{T}=(\alpha'_{ij})$, $E=(\eta_{ij})$, სადაც $\eta_{ij}=1$ თუ $i=j$ და $\eta_{ij}=0$, თუ $i\neq j$. კოში-ბინეს ფორმულების თანახმად

$$\eta_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}\,.$$

მაშასადამე, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}=0$ თუ $i\neq j$ და $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha^{2}{}_{ik}=1$ თუ $i=j$.

საკმარისობა. ვთქვათ $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha'_{ik}\alpha_{jk}=0$, როცა $i\neq j$ და $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{ik}=1$, როცა $i=j$. თუ ამ ორ ტოლობას ერთი ტოლობის სახით ჩავწერთ, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\begin{cases}0, & \text{როცა } i\neq j,\\ 1, & \text{როცა } i=j.\end{cases}$$

ანუ რაც იგივეა

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha'_{kj}=\begin{cases}0, & \text{როცა } i\neq j,\\ 1, & \text{როცა } i=j.\end{cases}$$

მაგრამ $\eta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{როცა } i\neq j,\\ 1, & \text{როცა } i=j.\end{cases}$ მაშასადამე, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha'_{kj}=\eta_{ij}$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $AA^{T}=E$.

ჩამოყალიბებული დებულება სამართლიანია სვეტებისთვისაც.

5) ორი ორთოგონული A და B მატრიცების ნამრავლი აგრეთვე ორთოგონული მატრიცაა.

გვაქვს: $AA^{T}=E$ და $BB^{T}=E$. მაშასადამე,

$$(AB)(AB)^{T}=(AB)(B^{T}A^{T})=A(BB^{T})A^{T}=AEA^{T}=AA^{T}=E.$$

6) ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისიდან ნებისმიერ სხვა ორთონორმებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი ორთოგონულია.

მართლაც, ვთქვათ L^{n} ევკლიდურ სივრცეში მოცემულია ორი ორთონორმებული ბაზისი: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. პირველი ბაზისიდან მეორე ბაზისზე გადასვლის მატრიცი იყოს $C=(\gamma_{ij})$. ე. ი.

$$\begin{aligned} e'_1 &= \gamma_{11}e_1 + \gamma_{12}e_2 + \ldots + \gamma_{1n}e_n, \\ e'_2 &= \gamma_{21}e_1 + \gamma_{22}e_2 + \ldots + \gamma_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= \gamma_{n1}e_1 + \gamma_{n2}e_2 + \ldots + \gamma_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{55}$$

რადგანაც მეორე ბაზისი ორთნორმებულია, ამიტომ

$$(e'_i,\ e'_j)=0, \quad \text{როცა } i\neq j \text{ და } \qquad (e'_i, e'_i)=1 \tag{56}$$

მაგრამ იმის გამო, რომ პირველი ბაზისიც ორთონორმებულია, ამიტომ (55)-ის თანახმად,

$$(e'_i,\ e'_j)=\gamma_{i1}\gamma_{j1}+\gamma_{i2}\gamma_{j2}+\ldots+\gamma_{in}\gamma_{jn} \text{ და } (e'_i, e'_i)=\gamma_{i1}^2+\gamma_{i2}^2+\ldots+\gamma_{in}^2, \tag{57}$$

რადგანაც ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ორთონორმებულ ბაზისში ტოლია ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის. მაშასადამე, (56) და (57)-ის ძალით,

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\gamma_{jk}=0 \text{ და } \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}^2=1.$$

§ 12. ორთოგონული ოპერატორები

<u>განსაზღვრება.</u> ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრულ **A** წრფივ ოპერატორს ეწოდება <u>ორთოგონული ოპერატორი</u>, თუ ამ სივრცის ყოველი u ვექტორისათვის $|\mathbf{A}u|=|u|$ ანუ, რაც იგივეა, $(\mathbf{A}u,\mathbf{A}u)=(u,u)$.

ვაჩვენოთ, რომ, თუ **A** არის ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული ორთოგონული ოპერატორი, მაშინ ნებისმიერი u და v ვექტორისათვის ამ სივრციდან $(\mathbf{A}u,\mathbf{A}v)=(u,v)$. მართლაც, ერთი მხრივ

$(\mathbf{A}(u+v),\mathbf{A}(u+v))=(\mathbf{A}u+\mathbf{A}v,\mathbf{A}u+\mathbf{A}v)=(\mathbf{A}u,\mathbf{A}u)+2(\mathbf{A}u,\mathbf{A}v)+(\mathbf{A}v,\mathbf{A}v)$;

მეორე მხრივ

$$(\mathbf{A}(u+v), \mathbf{A}(u+v))=(u+v,u+v)=(u,u)+2(u,v)+ (v,v).$$

ვღებულობთ

$$(\mathbf{A}u,\mathbf{A}u)+2(\mathbf{A}u,\mathbf{A}v)+(\mathbf{A}v,\mathbf{A}v)=(u,u)+2(u,v)+(v,v).$$

მაგრამ $(\mathbf{A}u,\mathbf{A}u)=(u,u)$ და $(\mathbf{A}v,\mathbf{A}v)=(v,v)$. მაშასადამე,

$$(\mathbf{A}u,\mathbf{A}v)=(u,v).$$

<u>თეორემა</u>. **იმისათვის, რომ ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი იყოს ორთოგონული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ოპერატორის მატრიცი სივრცის ორთონორმებულ ბაზისში იყოს ორთოგონული.**

<u>დამტკიცება</u>. <u>აუცილებლობა:</u> ვთქვათ L^n ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრულია **A** ორთოგონული ოპერატორი და ვთქვათ $e_1,e_2,\dots,e_n$ არის L^n-ის ორთონორმებული ბაზისი. მაშინ ერთი მხრივ

$$(\mathbf{A}e_j,\mathbf{A}e_k)=(e_j,e_k)=0 \text{ და } (\mathbf{A}e_j,\mathbf{A}e_j)=(e_j,e_j)=1 \qquad (58)$$

მეორე მხრივ, თუ $A=(\alpha_{ij})$ არის **A** ოპერატორის მატრიცი მოცემულ ორთონორმებულ ბაზისში, მაშინ (37) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$(\mathbf{A}e_j,\mathbf{A}e_k)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{ik} \qquad (59)$$

და

$$(\mathbf{Ae}_j,\mathbf{Ae}_j)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^2.$$

(58) და (59)-ის ძალით,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{ik}=0 \text{ და } \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^2=1, \text{ ე. ი. } AA^T=E.$$

<u>**საკმარისობა.**</u> ახლა ვთქვათ, რომ L^n ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის $A=(\alpha_{ij})$ მატრიცი $e_1, e_2,\ldots,e_n$ ორთონორმებულ ბაზისში ორთოგონულია. მაშინ გვექნება:

$$(\mathbf{Ae}_j,\mathbf{Ae}_k)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{ik}=0.$$

და

$$(\mathbf{Ae}_j,\mathbf{Ae}_j)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}^2=1.$$

ე. ი. $\mathbf{Ae}_1$, $\mathbf{Ae}_2$, …, $\mathbf{Ae}_n$, აგრეთვე არის ორთონორმებული ბაზისი[1]

ამიტომ თუ $u=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$, მაშინ $\mathbf{Au}=\mathbf{A}\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\,\mathbf{Ae}_j$. მაშასადამე, $(\mathbf{Au}, \mathbf{Au}) = \sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=(u,u)$, ე. ი. **A** ოპერატორი ორთოგონულია.

ვაჩვენოთ, რომ **ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული ორი ორთოგონული ოპერატორის ნამრავლიც ორთოგონული ოპერატორია**.

ვთქვათ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ არის L^n ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი და **A** და **B** კი L^n-ში განსაზღვრული ორთოგონული

[1] ადრე დამტკიცებულია ლემა, რომ არანულოვან ორთოგონულ ვექტორთა (და მაშასადამე ორთონორმებულ ვექტორთა) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ოპერატორებია. მაშინ მათი A და B მატრიცები მოცემულ ორთონორმებულ ბაზისში იქნებიან ორთოგონული. ამიტომ, როგორც ვიცით AB მატრიციც იქნება ორთოგონული. მაგრამ AB არის **AB** ოპერატორის მატრიცი ორთონორმებულ ბაზისში. ამიტომ წინა თეორემის ძალით, **AB** ოპერატორი ორთოგონულია.

§13. სიმეტრიული ოპერატორები

<u>განსაზღვრება.</u> ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრულ **A** წრფივ ოპერატორს ეწოდება <u>სიმეტრიული ოპერატორი</u>, თუ $(\mathbf{A}u,v)=(u,\mathbf{A}v)$ ნებისმიერი u და v-სთვის ამ სივრციდან.

<u>თეორემა</u>. იმისათვის, რომ ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი იყოს სიმეტრიული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ოპერატორის მატრიცი სივრცის ორთონორმებულ ბაზისში იყოს სიმეტრიული.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ L^n ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრულია **A** სიმეტრიული ოპერატორი და ვთქვათ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ არის L^n-ის ორთონორმებული ბაზისი, მაშინ ერთი მხრივ

$$(\mathbf{A}e_j, e_k)=(e_j, \mathbf{A}e_k). \tag{60}$$

მეორე მხრივ, თუ $A=(\alpha_{ij})$ არის **A** ოპერატორის მატრიცი მოცემულ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ბაზისში, მაშინ (37) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$(\mathbf{A}e_j, e_k)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i, e_k\right)=\alpha_{kj}$$

და

$$(e_j, \mathbf{A}e_k)=\left(e_j, \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i\right)=\alpha_{jk}. \tag{61}$$

(60) და (61)-ის ძალით, $\alpha_{kj}=\alpha_{jk}$, ე. ი. $A=A^T$.

ახლა ვთქვათ, რომ L^n ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის $A=(\alpha_{ij})$ მატრიცი $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ორთონორმებულ ბაზისში სიმეტრიულია, ე.ი. $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. ვთქვათ $u=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$ ვექტორია L^n-დან. მაშინ (39)-ის ძალით,

$$\mathbf{A}u=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i, \qquad \text{სადაც} \qquad \eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j; \qquad \text{მაშასადამე,}$$

$\mathbf{A}u=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\right)e_i$. ვთქვათ აგრეთვე $v=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\xi}_i e_i$ ვექტორია L^n-დან, მაშინ $\mathbf{A}v=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\eta}_j e_j$, სადაც $\widetilde{\eta}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}\widetilde{\xi}_i$; მაშასადამე, $\mathbf{A}v$ $=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}\widetilde{\xi}_i\right)e_j$. ამიტომ ერთი მხრივ გვექნება:

$$(\mathbf{A}u,v)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\xi_j\right)e_i,\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\xi}_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\right)\widetilde{\xi}_i=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\widetilde{\xi}_i \tag{62}$$

მეორე მხრივ გვექნება:

$$(u,\mathbf{A}v)=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j,\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{ji}\widetilde{\xi}_i\right)e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\widetilde{\xi}_i\right)=\sum_{j,i=1}^{n}\alpha_{ji}\xi_j\widetilde{\xi}_i \tag{63}$$

(62) და (63)-ის ძალით, $(\mathbf{A}u,v)=(u,\mathbf{A}v)$, ე. ი. **A** ოპერატორი სიმეტრიულია.

ვაჩვენოთ, რომ **ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული ორი სიმეტრიული ოპერატორის ჯამიც სიმეტრიულია.**

ცხადია, რომ $A=(\alpha_{ij})$ და $B=(\beta_{ij})$ სიმეტრიულ მატრიცთა $A+B=C=(\gamma_{ij})$ ჯამიც სიმეტრიული მატრიცია. მართლაც,

$$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha_{ji}+\beta_{ji}=\gamma_{ji}, \text{ ე. ი. } C=C^T.$$

ვთქვათ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ არის L^n ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი, და ვთქვათ **A** და **B** სიმეტრიული ოპერატორებია. მაშინ მათი A და B მატრიცები მოცემულ ორთონორმებულ ბაზისში იქნებიან სიმეტრიული. ამიტომ $A+B$ მატრიციც იქნება სიმეტრიული. მაგრამ $A+B$ არის **A+B** ოპერატორის მატრიცი ორთონორმებულ ბაზისში. მაშასადამე, წინა თეორემის ძალით **A+B** ოპერატორი სიმეტრიულია.

__თეორემა__. ნამდვილ ელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცის მახასიათებელი ფესვები ნამდვილია.

__დამტკიცება__. ვთქვათ A არის n-ური რიგის ნამდვილ ელემენტებიანი სიმეტრიული მატრიცი, ე.ი. $A=A^T$, $A=(\alpha_{ij})$ $\alpha_{ij}\in\mathbf{R}$, და ვთქვათ λ_0 არის მისი ნებისმიერი კომპლექსური ფესვი. გვექნება n-უცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=0,\\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n&=0.\end{aligned}\tag{64}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულია, და მაშასადამე მას ექნება უამრავი არანულოვანი ამონახსნი. ვთქვათ ერთ-ერთი არის $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ კომპლექსურ რიცხვთა დალაგებული n-ეული; გვექნება:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n&=\lambda_0\xi_1,\\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n&=\lambda_0\xi_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n&=\lambda_0\xi_n.\end{aligned}\tag{65}$$

თუ პირველი ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ξ_1-ის შეუღლებულზე, მეორეს ξ_2-ის შეუღლებულზე და ა. შ., მივიღებთ

$$\alpha_{11}\xi_1\overline{\xi}_1+\alpha_{12}\xi_2\overline{\xi}_1+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n\overline{\xi}_1=\lambda_0\xi_1\overline{\xi}_1,$$
$$\alpha_{21}\xi_1\overline{\xi}_2+\alpha_{22}\xi_2\overline{\xi}_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n\overline{\xi}_2=\lambda_0\xi_2\overline{\xi}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n1}\xi_1\overline{\xi}_n+\alpha_{n2}\xi_2\overline{\xi}_n+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n\overline{\xi}_n=\lambda_0\xi_n\overline{\xi}_n.$$

ამ ტოლობების შეკრების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i=\lambda_0\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.$$

თუ დავამტკიცებთ, რომ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ნამდვილია, მაშინ λ_0-ც იქნება ნამდვილი, რადგან $\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ ნამდვილია. გვაქვს

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha}_{ij}\overline{\xi}_j\xi_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}\overline{\xi}_j\xi_i=$$

(ამ ჯამში ყველგან j-ს მაგივრად დავწეროთ i და i-ს მაგივრად j)

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\xi}_i\xi_j.$$

მაშასადამე, λ_0 ნამდვილია.

<u>შედეგი</u>. ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული სიმეტრიული ოპერატორის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.

ეს ცხადია, რადგან ნებისმიერ წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის მახასიათებელი ფესვი ეწოდება ნებისმიერ ბაზისში მისი მატრიცის მახასიათებელ ფესვს და ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული სიმეტრიული ოპერატორის მატრიცი სივრცის ორთონორმებულ ბაზისში სიმეტრიულია.

<u>თეორემა</u>. ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრულ ყოველ სიმეტრიულ ოპერატორს გააჩნია ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი.

დამტკიცება. ვთქვათ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის L^n ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი. განვიხილოთ L^n-ის $u \neq 0$ ვექტორი, რომლის კოორდინატები $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში იყოს $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – ერთ-ერთი არანულოვანი ამონახსნი (64) განტოლებათა სისტემისა (რადგანაც თეორემით დამტკიცდა, რომ λ_0 ნამდვილია, ამიტომ (64) განტოლებათა სისტემა არის ნამდვილ კოეფიციენტებიანი და მისი ამონახსნებიც ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულებია), ე.ი. $u=\xi_1 e_1+ +\xi_2 e_2+\ldots+\xi_n e_n$. მაშასადამე $\mathbf{A}u=\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\ldots+\eta_n e_n$, სადაც (39') და (65)-ის ძალით, $\eta_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{in}\xi_n = \lambda_0 \xi_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$; აქ $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ არიან $\mathbf{A}$ სიმეტრიული ოპერატორის მატრიცის ელემენტები. მაშასადამე,

$$\mathbf{A}u = (\lambda_0\xi_1)e_1 + (\lambda_0\xi_2)e_2 + \cdots + (\lambda_0\xi_n)e_n =$$
$$= \lambda_0(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = \lambda_0 u$$

ვაჩვენოთ, რომ **სიმეტრიული ოპერატორის ყოველი ორი საკუთრივი ვექტორი ორთოგონულია, თუ შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობები განსხვავებულია.**

მართლაც, ვთქვათ $\mathbf{A}$ სიმეტრიული ოპერატორია, ე. ი. $(\mathbf{A}u,v)=(u,\mathbf{A}v)$ ნებისმიერი u და v-სათვის. ვთქვათ აგრეთვე, რომ u და v არიან $\mathbf{A}$ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორები, ე. ი. $u\neq 0$ და $\mathbf{A}u=\lambda_1 u$, $\mathbf{A}v=\lambda_2 v$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. გვექნება: $(\lambda_1 u,v)=(u,\lambda_2 v)\Rightarrow \lambda_1(u,v)= =\lambda_2(u,v)\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)(u,v)=0$. მაშასადამე, $(u,v)=0$, რადგანაც $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$.

ვთქვათ $\mathbf{A}$ არის L წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი. L წრფივი სივრცის L' ქვესივრცეს ეწოდება ინვარიანტული $\mathbf{A}$ ოპერატორის მიმართ, თუ ყოველი u ვექტორისათვის L'-დან $\mathbf{A}u$ ვექტორიც ეკუთვნის L'-ს.

თეორემა. იმისათვის, რომ ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი იყოს სიმეტრიული აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცეში არსებობდეს ორთონორმე-

ბული ბაზისი შედგენილი ამ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან.

დამტკიცება. ვთქვათ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის L^n ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი შედგენილი L^n -ში განსაზღვრული **A** წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან, ე. ი. $\mathbf{A}e_1=\lambda_1 e_1$, $\mathbf{A}e_2=\lambda_2 e_2, \ldots, \mathbf{A}e_n=\lambda_n e_n$. მაშინ **A** ოპერატორის მატრიცი ამ ბაზისში იქნება

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=A^T..$$

მამასადამე, **A** წრფივი ოპერატორის მატრიცი L^n-ის ორთონორმებულ ბაზისში სიმეტრიულია, ამიტომ **A** ოპერატორი სიმეტრიულია. საკმარისობა დამტკიცებულია. აუცილებლობას ვამტკიცებთ ინდუქციით L^n სივრცის n განზომილების მიმართ. ვთქვათ $n=1$. მაშინ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი ცხადია გამოდგება სივრცის ბაზისად რადგან ის არის წრფივად დამოუკიდებელი. თუ ავიღებთ ისეთ e_1 ვექტორს, რომლის სიგრძეც 1-ის, ტოლია, $|e_1|=1$, მაშინ ეს იქნება ორთონორმებული ბაზისიც და **A** ოპერატორის საკუთრივი ვექტორიც, რადგან $\mathbf{A}e_1=\alpha e_1$.

დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი $(n-1)$ განზომილებიანი ევკლიდური სივრცისათვის. ვთქვათ L^n ევკლიდურ სივრცეში განსაზღვრული **A** ოპერატორი სიმეტრიულია, მაშინ **A** ოპერატორის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია. ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობები უნდა ვეძებოთ მის მახასიათებელ ფესვებს შორის. ვთქვათ ერთ-ერთი ასეთი არის λ_1. მაშინ L^n ევკლიდურ სივრცეში არსებობს $u\neq 0$ ვექტორი, ისეთი რომ $\mathbf{A}u=\lambda_1 u$. ცხადია, რომ

$e_1 = \frac{1}{|u|} u$ ვექტორი აგრეთვე იქნება **A** ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი იმავე λ_1 საკუთრივი მნიშვნელობით. რადგანაც L^n სივრცე ევკლიდურია, ამიტომ ამ სივრცეში ყოველთვის არსებობს ორთოგონული ბაზისი. ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ (ორთოგონალიზაციის პროცესის ჩატარებით) ისეთი ორთოგონული ბაზისი რომლის პირველი ვექტორი არის e_1. ვთქვათ ეს არის $\{e_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$. სიმრავლე იმ ვექტორებისა, რომელთა პირველი კოორდინატი ამ ბაზისში 0-ის ტოლია, ე. ი. სიმრავლე $\xi_2 e'_2 + \cdots + \xi_n e'_n$ სახის ყველა ვექტორისა აღვნიშნოთ L'-ით. ეს, რა თქმა უნდა, იქნება L^n-ის ქვესივრცე. ადვილი დასანახია, რომ L' შედგება L^n-ის ყველა იმ ვექტორებისაგან, რომლებიც e_1-თან ორთოგონულია. მართლაც, თუ

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e'_2 + \ldots + \xi_n e'_n,$$

მაშინ

$$(u, e_1) = \xi_1 (e_1, e_1) + \xi_2 (e'_2, e_1) + \ldots + \xi_n (e'_n, e_1) = \xi_1,$$

და მაშსადამე $(u,e_1)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\xi_1=0$.

თუ u ვექტორი ეკუთვნის L' ქვესივრცეს, მაშინ $\mathbf{A}u$ ვექტორიც ეკუთვნის L'-ს. მართლაც, იმის გამო, რომ **A** ოპერატორი სიმეტრიულია, მივიღებთ

$$(\mathbf{A}u, e_1)=(u,\mathbf{A}e_1)=(u,\alpha_1 e_1)=\alpha_1(u,e_1)=0,$$

ე. ი. $\mathbf{A}u \in L'$. ეს ნიშნავს, რომ L' ინვარიანტულია **A** სიმეტრიული ოპერატორის მიმართ. ამ ქვესივრცის განზომილება არის $n-1$, და, ინდუქციის დაშვების ძალით, მასში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი შედგენილი A სიმეტრიული ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან. ვთქვათ $e_2,\ldots,e_n$ არის ასეთი ბაზისი. მაშინ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ იქნება L^n ევკლიდური სივრცის ორთონორმებული ბაზისი შედგენილი A ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან.

თეორემა. ყოველი ნამდვილი სიმეტრიული A მატრიცისათვის არსებობს ისეთი ორთოგონული მატრიცა Q, რომ $Q^{T}AQ$ მატრიცი იქნება დიაგონალური.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის ნამდვილი სიმეტრიული A მატრიცი. ავიღოთ L^n ევკლიდური სივრცე და ავიღოთ მისი რაიმე $e_1, e_2, \dots, e_n$ ორთონორმებული ბაზისი. განვიხილოთ L^n-ში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორი $\mathbf{A}$ რომლის მატრიცა ამ ბაზისის მიმართ უდრის A-ს. ეს იქნება სიმეტრიული ოპერატორი. ამიტომ, L^n-ში არსებობს ორთონორმებული $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისი შედგენილი $\mathbf{A}$ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორებისაგან. ე.ი. არსებობს $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ნამდვილი რიცხვები ისეთი, რომ

$$\mathbf{A}e_1'=\lambda_1 e_1',\quad \mathbf{A}e_2'=\lambda_2 e_2',\ \dots,\ \mathbf{A}e_n'=\lambda_n e_n',$$

ამიტომ $\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცი $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისში იქნება

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

როგორც ვიცით წრფივ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერატორის მატრიცები სივრცის სხვადასხვა ბაზისში მსგავსია. მაშასადამე, $B=(C^{T})^{-1}AC$, სადაც C არის ძველი ბაზისიდან ახალ ბაზისში გადასვლის მატრიცი. მაგრამ ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ ევკლიდური სივრცის ერთი ორთონორმებული ბაზისიდან მეორე ორთონორმებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი ორთოგონულია, ე. ი. C მატრიცი ორთოგონულია. ამიტომ $C^{T}=C^{-1}$ და ორთოგონული მატრიცის შებრუნებული მატრიციც ორთოგონულია (იხ. ორთოგონული მატრიცი 6), 2) და 3) თვისებები). ამრიგად მოიძებნა $Q=C^{T}$ ორთოგონული მატრიცი, ისეთი, რომ $Q^{-1}AQ$ მატრიცი იქნება დიაგონალური.

თავი 8. კვადრატული ფორმები

§ 1 კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე

ზემოთ იყო ნათქვამი, რომ მრავალუცნობიან პოლინომს K ველის მიმართ ეწოდება m ხარისხის ფორმა, თუ მისი ყველა წევრის ხარისხი არის m. ახლა დაწვრილებით უნდა შევისწავლოთ კვადრატული ფორმები, ე. ი. მეორე ხარისხის ერთგვაროვანი მრავალუცნობიანი პოლინომები K ველის მიმართ, რომლის მახასიათებელი არ არის 2-ის ტოლი.

n-უცნობიანი კვადრატული ფორმა ეწოდება ჯამს:

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1,n-1}x_1x_{n-1} + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2,n-1}x_2x_{n-1} + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &+ a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\ &+ a_{nn}x_n^2\ , \end{aligned}$$

სადაც $a_{ij}\in$K. x_i^2-ის კოეფიციენტი არის a_{ii}, ხოლო x_ix_j-ის კოეფიციენტი არის $2a_{ij}$ $(i<j)$. თუ დავუშვებთ

$$a_{ji}=a_{ij},$$

გვექნება: $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$ და კვადრატული ფორმა მიიღებს სახეს:

$$
\begin{aligned}
f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n \\
& + . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . + \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

ანუ მოკლედ

$$
f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{2}
$$

სადაც $a_{ij}=a_{ji}$.

n-ური რიგის

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}
$$

სიმეტრიულ მატრიცს ეწოდება f კვადრატული ფორმის მატრიცი. მის რანგს ეწოდება კვადრატული f ფორმის რანგი და მის დეტერმინანტს – კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი. თუ კვადრატული ფორმის მატრიცი გადაუგვარებელია, ე.ი. კვადრატული ფორმის რანგი უდრის უცნობთა რიცხვს, მაშინ მას გადაუგვარებელი კვადრატული ფორმა ეწოდება. ცხადია, რომ n-უცნობიან კვადრატულ ფორმებსა და n-ური რიგის სიმეტრიულ მატრიცებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობაა.

ვაჩვენოთ, რომ n-უცნობიან f კვადრატულ ფორმას შეიძლება მიეცეს შემდეგი მატრიცული სახე:

$$
f = X^{\mathrm{T}}AX, \tag{4}
$$

სადაც, X არის ერთსვეტიანი მატრიცი, შედგენილი უცნობებისაგან, X^{T} – მისი ტრანსპონირებული, ე. ი. უცნობებისაგან შედგენილი ერთსტრიქონიანი მატრიცი, ხოლო A – მოცემული f ფორმის მატრიცი. მართლაც

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix},$$

$$X^T(AX) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = x_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + x_2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j +$$

$$+ \cdots + x_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = f.$$

თეორემა. **კვადრატული ფორმის რანგი ინვარიანტულია უცნობთა წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის მიმართ.**

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ji} = a_{ij}$$

ანუ მატრიცულად

$$f = X^{\mathrm{T}} AX, \;\; A = A^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

მოვახდინოთ უცნობთა წრფივი

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j, \quad (i = 1,2,\ldots n)$$

გარდაქმნა. ამ გარდაქმნის მატრიცი იყოს C. ეს გარდაქმნა შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს

$$X=CY, \tag{6}$$

სადაც $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

(5), (6) -ის ძალით, გვექნება:

$$f=X^TAX=(CY)^TA(CY)=(Y^TC^T)A(CY)=Y^TBY,$$

სადაც $B=C^TAC$. ამრიგად, გარდაქმნილი კვადრატული ფორმის მატრიცი უდრის მოცემული ფორმის მატრიცს, მარჯვნიდან გამრავლებულს უცნობთა წრფივი გარდაქმნის მატრიცზე, ხოლო მარცხნიდან მის ტრანსპონირებულზე.

გვექნება

$$|B|=|C^T||A||C|=|A||C|^2.$$

მამასადამე გარდაქმნილი კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი უდრის მოცემული კვადრატული ფორმის დეტერმინანტს გამრავლებულს უცნობთა წრფივი გარდაქმნის დეტერმინანტის კვადრატზე.

თეორემის პირობის ძალით, გარდაქმნის მატრიცი C (და მაშასადამე მისი ტრანსპონირებულიც C^T) გადაუგვარებელია, ამიტომ მატრიცთა ნამრავლის რანგის შესახებ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\text{rank}\, B=\text{rank}\, C^TA=\text{rank}\, A\,.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

კვადრატულ ფორმას, რომლის ნებისმიერი განსხვავებული უცნობების ნამრავლის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ეწოდება <u>კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე</u> ანუ დიაგონალური კვადრატული ფორმა. სამართლიანია

<u>თეორემა</u>. ყოველი კვადრატული ფორმა უცნობთა წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება კანონიკურ სახემდე.

<u>დამტკიცება</u>. თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით უცნობთა რიცხვის მიმართ. თუ უცნობთა რიცხვი $n=1$, მაშინ კვადრატულ ფორმას აქვს ax^2 სახე, ე. ი. კანონიკური სახე. დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ყველა $n-1$ უცნობიანი კვადრატული ფორმებისათვის და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ თეორემის სამართლიანობა n უცნობის შემთხვევაში.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ერთი a_{ii} კოეფიციენტი მაინც $\neq 0$. მართლაც ვთქვათ კვადრატულ ფორმაში ყველა a_{ii} ნულის ტოლია. მაშინ ერთი a_{ij} კოეფიციენტი მაინც არ იქნება 0-ის ტოლი. თუ გადავალთ ახალ უცნობებზე

$$\begin{cases} x_1 = x_1', \\ x_2 = x_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_i = x_i' - x_j', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_j = x_i' + x_j', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_n' \end{cases} \tag{7}$$

ამ გარდაქმნის დეტერმინანტი იქნება:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1\,0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0\,1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1\,0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0\,1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 1 & \cdots & 2\cdot 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\end{array} = 2\cdot 1 \neq 0,$$

რადგანაც charK≠2, უცნობთა (7) წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$f = 2a_{ij}x_i x_j + \ldots = 2a_{ij}(x'_i - x'_j)(x'_i + x'_j) + \ldots = 2a_{ij}x'^2_{i_i} - 2a_{ij}x'^2_j$$

სადაც უკვე უცნობის კვადრატის ორი კოეფიციენტიც კი ≠0.

ამრიგად, ვთქვათ კვადრატულ ფორმაში მაგალითად $a_{11} \neq 0$. მაშინ (1) სიმეტრიულ ჩაწერაში გვექნება:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_1x_{n-1} + a_{1n}x_1x_n = x_1F\,, \tag{8}$$

სადაც

$$F = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n\,, \tag{9}$$

მაშასადამე,

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \varphi(x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{10}$$

(9)-ის ძალით, გვექნება:

$$a_{11}^{-1}F^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \psi(x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{11}$$

(10) და (11) ფორმულებში φ და ψ კვადრატული ფორმებია. (10) და (11)-ის ძალით,

$$f - a_{11}^{-1}F^2 = \varphi(x_2, .., x_n) - \psi(x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_2, \ldots, x_n),$$

ე. ი.

$$f = a_{11}^{-1}F^2 + f_1\,. \tag{12}$$

ახლა მოვახდინოთ უცნობთა შემდეგი გარდაქმნა

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= \qquad\quad x_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \qquad\qquad\qquad x_n,
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

რომლის დეტერმინანტი იქნება:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix} = a_{11} \cdot 1 \neq 0 .
$$

(12) მიიღებს სახეს:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}^{-1} y_1^2 + f_1(y_2, \ldots, y_n), \qquad (14)$$

რადგანაც $f_1(y_2, \ldots, y_n)$ არის n-1 უცნობიანი კვადრატული ფორმა K ველის მიმართ, ამიტომ ინდუქციის დაშვების ძალით, არსებობს უცნობთა

$$
\begin{cases}
y_2 = b_{22}z_2 + b_{23}z_3 + \ldots + b_{2n}z_n \\
y_3 = b_{32}z_2 + b_{33}z_3 + \ldots + b_{3n}z_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n = b_{n2}z_2 + b_{n3}z_3 + \ldots + b_{nn}z_n
\end{cases}
$$

წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომლის საშუალებით f_1 მიიყვანება კანონიკურ სახემდე, ე. ი.

$$f_1(y_2, \ldots, y_n) = c_2 z_2^2 + \ldots + c_n z_n^2 . \qquad (15)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თუ მოვახდენთ უცნობთა

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \quad b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n = \quad b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n \end{cases}$$

წრფივ გარდაქმნას (ეს გარდაქმნა ცხადია გადაუგვარებელია). მაშინ (14) და (15)-ის თანახმად, მივიღებთ:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1z_1^2 + c_2z_2^2 + \ldots + c_nz_n^2, \tag{16}$$

სადაც $c_1 = a_{11}^{-1}$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ (16) არის

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე. კანონიკური სახის ზოგიერთი კოეფიციენტი შეიძლება ნული იყოს. ვაჩვენოთ, რომ (16)-ში არანულოვან კოეფიციენტთა რიცხვი f კვადრატული ფორმის რანგის ტოლია. ვთქვათ

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1z_1^2 + \ldots + c_rz_r^2, \quad r \le n,$$

სადაც $c_1, \ldots, c_r \neq 0$. ამ კანონიკური სახის მატრიცი იქნება

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & \\ & c_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & c_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ცხადია C მატრიცის რანგი $r_C=r$. მაგრამ, როგორც ვიცით, კვადრატული ფორმის რანგი ინვარიანტულია უცნობთა წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის მიმართ, ე. ი. f ფორმის რანგიც r-ის ტოლია.

§ 2. ნამდვილი კვადრატული ფორმები

ახლა გადავიდეთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კვადრატული ფორმების შესწავლაზე. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

კვადრატულ ფორმათა ინერციის კანონი. თუ ნამდვილი კვადრატული ფორმა უცნობთა ორი ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის საშუალებით მიყვანილია კანონიკურ სახემდე, მაშინ ორივე კანონიკურ სახეში დადებით კოეფიციენტთა რიცხვი ერთი და იგივეა.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij}=a_{ji},\ a_{ij}\in\mathbf{R}$$

კვადრატული ფორმა უცნობთა ორი

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j, \text{ და } z_i=\sum_{j=1}^{n} b'_{ij}x_j \ (i=1,2,\dots,n),\ b_{ij},b'_{ij}\in\mathbf{R} \quad (17)$$

წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნით დაყვანილია კანონიკურ

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\dots+c_ry_r^2$$

და

$$f=d_1z_1^2+d_2z_2^2+\dots+d_rz_r^2, \quad r\le n$$

სახეებამდე შესაბამისად. ვთქვათ პირველ კანონურ სახეში არის p დადებითი კოეფიციენტი, ხოლო მეორეში q და $q<p$. მაშინ

$$\begin{aligned} f&=h_1y_1^2+\dots+h_py_p^2-h_{p+1}y_{p+1}^2-\dots-h_ry_r^2=\\ &=\ell_1z_1^2+\dots+\ell_qz_q^2-\ell_{q+1}z_{q+1}^2-\dots-\ell_rz_r^2, \end{aligned} \quad (18)$$

სადაც ყველა h_i და ℓ_i – დადებითი რიცხვებია. განვიხილოთ წრფივ ერთგვაროვან

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ . \quad . \quad . \\ z_q = 0 \\ y_{p+1} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y_n = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემა, სადაც მარცხენა მხარეების ქვეშ იგულისხმება (17) გამოსახულებანი. ეს n-უცნობიანი წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა შედგება

$$q+(n-p)=n-(p-q)<n$$

განტოლებისაგან. ამიტომ მას გააჩნია უამრავი არანულოვანი ამონახსნი, რადგანაც მისი რანგი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე. ვთქვათ $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ ერთ-ერთი ასეთი არანულოვანი ამონახსნია, თუ ახლა (18)-ში x_1, x_2, ..., x_n-ის ნაცვლად შესაბამისად დავწერთ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ -ს, მივიღებთ

$$h_1 y_1^2(\xi_1,\ldots,\xi_n)+\ldots+h_p y_p^2(\xi_1,\ldots,\xi_n)=$$
$$=-\ell_{q+1} z_{q+1}^2(\xi_1,\ldots,\xi_n)-\ldots-\ell_r z_r^2(\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში ყველა წევრი ≥ 0, ხოლო მარჯვენა მხარეში კი ≤ 0. ამიტომ

$$\begin{cases} y_1(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_p(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=0 \\ z_{q+1}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_r(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=0 \end{cases}$$

მაშასადამე $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ არის

$$\begin{cases} y_1=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n=0 \end{cases}$$

n-უცნობიანი წრფივი ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის არანულოვანი ამონახსნი, რაც შეუძლებელია იმის გამო, რომ (17) გარდაქმნა გადაუგვარებელია, ანუ ჩვენი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი არანულოვანია. მაშასადამე, დაშვება რომ $p>q$ არ არის სწორი. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ დაშვება $p<q$ აგრეთვე არაა სწორი, ე. ი. $p=q$ და თეორემა დამტკიცებულია. p-ს, კანონიკურ სახეში დადებით წევრთა რაოდენობას, ეწოდება კვადრატული ფორმის ინდექსი.

თუ ნამდვილი კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეში ყველა ნულისაგან განსხვავებული კოეფიციენტი +1 ან -1-ის ტოლია, ასეთ კანონიკურ სახეს ეწოდება კვადრატული ფორმის ნორმალური სახე.

თეორემა. ყოველი ნამდვილი კვადრატული ფორმისათვის არსებობს ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომლის საშუალებით ის მიიყვანება ნორმალურ სახემდე.

დამტკიცება. ვიცით, რომ ნამდვილი კვადრატული ფორმა მიიყვანება კანონიკურ სახემდე. ვთქვათ ეს კანონიკური სახე არის

$$f=h_1y_1^2+\dots+h_py_p^2-h_{p+1}y_{p+1}^2-\dots-h_ry_r^2$$

$r\le n$, ყოველი $h_i>0$.

მოვახდინოთ ახლა უცნობთა წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა:

$$u_1 = \sqrt{h_1}\, y_1, \ldots, u_r = \sqrt{h_r}\, y_r, u_{r+1} = y_{r+1}, \ldots, u_n = y_n.$$

ეს გარდაქმნა მიიყვანს f ფორმას

$$f = u_1^2 + \ldots + u_1^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_r^2, \quad r \le n$$

ნორმალურ სახემდე.

ნამდვილ კვადრატულ ფორმათა კლასიფიკაცია.

ნამდვილ კვადრატულ ფორმას ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ მის კანონიკურ სახეში 0<p=r=n. ნამდვილ კვადრატულ ფორმას ეწოდება ნახევრად დადებითად განსაზღვრული, თუ მის კანონიკურ სახეში 0<p=r<n. მას ეწოდება განუსაზღვრელი, თუ მის კანონიკურ სახეში 0<p<r≤n და ეწოდება უარყოფითად განსაზღვრული თუ p=0.

თეორემა. ყოველი დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა უცნობის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობების დროს, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არაა, ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს.

დამტკიცება. ვთქვათ n-უცნობიანი დადებითად განსაზღვრული კვადრატული f ფორმა უცნობთა ნამრავლი წრფივი

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{19}$$

გადაუგვარებელი გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება

$$f = y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2$$

ნორმალურ სახემდე. ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, რომელთა შორის ერთი მაინც $\neq 0$. მაშინ

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = y_1^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + \ldots + y_n^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \ge 0.$$

თუ ეს ჯამი = 0-ს, მაშინ $y_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\ldots=y_n(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$, ე. ი. გამოდის, რომ წრფივ ერთგვაროვან

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას, რომლის დეტერმინანტი $\neq 0$, აქვს არანულოვანი ამონახსნი, რაც შეუძლებელია, ე. ი. $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)>0$.

თეორემა. ყოველ ნახევრად დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ არაუარყოფითი მნიშვნელობები.

მართლაც, განსაზღვრების თანახმად n-უცნობიანი ნახევრად დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა f უცნობთა (19) გარდაქმნით შეიძლება მიყვანილ იქნეს

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2, \quad p < n$$

ნორმალურ სახემდე. აქედან ცხადია, რომ იგი ღებულობს მხოლოდ არაუარყოფით მნიშვნელობებს.

თეორემა. ყოველი უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა უცნობების ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობების დროს ღებულობს მხოლოდ არადადებით მნიშვნელობებს.

მართლაც, უარყოფითად განსაზღვრული კვადრატული f ფორმა უცნობთა (19) გარდაქმნით შეიძლება მიყვანილ იქნეს

$$f = -y_1^2 - \ldots - y_r^2, \quad r \leq n$$

ნორმალურ სახემდე. ცხადია მას შეუძლია მიიღოს მხოლოდ არადადებითი მნიშვნელობები.

თეორემა. ყოველ განუსაზღვრელ კვადრატულ ფორმას უცნობების ნამდვილი მნიშვნელობების დროს, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არაა, შეუძლებელია მიიღოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობები.

თეორემა ადვილად გამომდინარეობს განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმის ნორმალური სახიდან:

$$f = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2, \quad r \le n.$$

ნამდვილი კვადრატული ფორმის მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხის ყველა დეტერმინანტს ეწოდება <u>მთავარი მინორი</u>.

<u>სილვესტრის თეორემა</u>. იმისათვის, რომ ნამდვილი კვადრატული ფორმა იყოს დადებითად განსაზღვრული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ყველა მთავარი მინორი იყოს მკაცრად დადებითი.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ მოცემულია ნამდვილი კვადრატული

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

ფორმა. თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით უცნობთა n რიცხვის მიმართ. როცა n=1, მაშინ თეორემა ცხადია, რადგან $f = a_{11}x_1^2$ თავისთავად არის კანონიკური სახე და ერთადერთი მთავარი მინორი არის a_{11}. ვთქვათ თეორემა სამართლიანი ყველა n-1 უცნობიანი კვადრატული ფორმისათვის და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა n უცნობის შემთხვევაში. (1)-ის ძალით, შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2, \qquad (20)$$

სადაც $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ არის (n-1)-უცნობიანი კვადრატული ფორმა.

დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ f არის დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა, მაშინ φ ფორმაც იქნება დადებითად განსაზღვრული. მართლაც, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ უცნობებს მივანიჭოთ ნებისმიერი ნამდვილი, მაგრამ არა ერთდროულად ნულის ტოლი მნიშვნელობები, ხოლო x_n იყოს 0. მაშინ (20) მიიღებს სხეს:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

რადგან f ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ამ ტოლობის მარცხენა და ამიტომ მარჯვენა მხარეც ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. ე.ი. φ იქნება დადებითად განსაზღვრული. ამრიგად, φ ფორმის ყველა მთავარი მინორი, ინდუქციის დაშვების ძალით, იქნება მკაცრად დადებითი, ე.ი. f ფორმის ყველა მთავარი მინორიც, გარდა შეიძლება უკანასკნელისა, აგრეთვე იქნება მკაცრად დადებითი. დავამტკიცოთ, რომ f-ის უკანასკნელი მთავარი მინორი, ე.ი. მისი $|A|$ დეტერმინანტი დადებითია. მართლაც, არსებობს უცნობთა ნამდვილი წრფივი გარდაქმნა, რომლის დეტერმინანტი $|C|\neq 0$ და რომლის საშუალებით f ფორმა მიიყვანება ნორმალურ სახემდე. ამ ნორმალური სახის დეტერმინანტი $|B|=1$, რადგანაც f დადებითად განსაზღვრულია. მაგრამ, ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ $|B|=|A||C|^2$, ე. ი. $|A|>0$.

გადავიდეთ საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ f-ის ყველა მთავარი მინორი მკაცრად დადებითია. მაშასადამე, φ-ს ყველა მთავარი მინორიც დადებითია, ე. ი. φ დადებითად განსაზღვრული ფორმაა ინდუქციის ძალით. ამიტომ არსებობს წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა, ვთქვათ

$$x_i = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} y_k \ \ (\ i=1,2,..,\text{n-1}) \tag{21}$$

რომლის საშუალებით φ მიიყვანება

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2$$

ნორმელურ სახემდე. განვიხილოთ ახლა უცნობთა

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1,n-1}y_{n-1} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n-1} = c_{n-1,1}y_1 + c_{n-1,2}y_2 + \ldots + c_{n-1,n-1}y_{n-1} \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{y_n} \end{cases} \tag{22}$$

წრფივი გარდაქმნა, რომელიც (21)-ის ძალით, აგრეთვე გადაუგვარებელია. ამ გარდაქმნის საშუალებით, (20)-ის ძალით, f ფორმა მიიყვანება სახემდე:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2+2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\left(\sum_{k=1}^{n-1}c_{ik}y_k\right)y_n+a_{nn}y_n^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_{in}c_{ik}y_ky_n+a_{nn}y_n^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}c_{ik}\right)y_ky_n+a_{nn}y_n^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(y_k^2+2b_{kn}y_ky_n)+a_{nn}y_n^2,$$

სადაც $b_{kn}=\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}c_{ik}$. მაგრამ

$$y_k^2+2b_{kn}y_ky_n=(y_k+b_{kn}y_n)^2-b_{kn}^2y_n^2,$$

ამიტომ

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(y_k+b_{kn}y_n)^2+\left(a_{nn}-\sum_{k=1}^{n-1}b_{kn}^2\right)y_n^2. \tag{23}$$

უცნობთა

$$\begin{cases} z_1=y_1+b_{1n}y_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ z_{n-1}=y_{n-1}+b_{n-1,n}y_n\\ z_n=\qquad\qquad y_n \end{cases} \tag{24}$$

წრფივი (ცხადია გადაუგვარებელი) გარდაქმნის საშუალებით, (23) ფორმა მიიყვანება კანონიკურ სახემდე:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n-1}z_k^2+dz_n^2,\ \text{სადაც}\ d=a_{nn}-\sum_{k=1}^{n-1}b_{kn}^2. \tag{25}$$

აქ მარჯვენა მხარის კანონიკური სახის დეტერმინანტი არის

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & d \end{vmatrix} = d .$$

მაგრამ ამ კანონიკურ სახემდე f ფორმა მიყვანილია (22) და (24) ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნების საშუალებით. ამიტომ ამ გარდაქმნების ნამრავლიც აგრეთვე იქნება ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა. ვთქვათ მისი დეტერმინანტი არის $|C|$. მაშასადამე,

$$d=|A||C|^2>0.$$

თეორემა დამტკიცებულია, რადგანაც (25) კანონიკურ სახეში ყველა კოეფიციენტი დადებითია.

<u>თეორემა.</u> (ნამდვილი კვადრატული ფორმის მთავარ ღერძებამდე მიყვანის შესახებ.) ყოველი n-უცნობიანი ნამდვილი კვადრატული ფორმა უცნობთა გარკვეული ორთოგონული გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება კანონიკურ სახემდე.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ მოცემულია n-უცნობიანი კვადრატული ფორმა $f=X^{\mathrm{T}}AX$, რომლის მატრიცი $A\in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ და $A=A^{\mathrm{T}}$.

ერთი მხრივ ჩვენ ვიცით, რომ თუ n-უცნობიანი კვადრატული ფორმა $f=X^{\mathrm{T}}AX$, რომლის მატრიცი $A\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ და $A=A^{\mathrm{T}}$, წრფივი გადაუგვარებელი $X=CY$ გარდაქმნით მიიყვანება $f=Y^{\mathrm{T}}BY$ კვადრატულ ფორმამდე, მაშინ მისი მატრიცი $B=C^{\mathrm{T}}AC$ და $B=B^{\mathrm{T}}$. მეორე მხრივ ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ ყოველი ნამდვილი სიმეტრიული A მატრიცისათვის არსებობს ისეთი Q ორთოგონული მატრიცი, რომ $B=Q^{\mathrm{T}}AQ$ მატრიცი იქნება დიაგონალური. ამ ორი ფაქტის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ ყოველი n-უცნობიანი ნამდვილი კვადრატული ფორმისათვის, რომლის A მატრიცი სიმეტრიულია, არსე-

ბობს უცნობთა $X=QY$ წრფივი ორთოგონული გარდაქმნა, რომლის საშუალებით ეს კვადრატული ფორმა მიიყვანება კანონიკურ სახემდე, რომლის მატრიცი იქნება $B=Q^{T}AQ$.

თეორემა. უცნობთა კვადრატების ჯამი ინვარიანტულია უცნობთა ნებისმიერი ორთოგონული გარდაქმნის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული ფორმა

$$f=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

თუ ამ კვადრატულ ფორმას მატრიცულად ჩავწერთ, მივიღებთ $f=X^{T}EX$. ამ კვადრატულ ფორმაში მოვახდინოთ უცნობთა ორთოგონული $X=QY$ გარდაქმნა, გვექნება:

$$f=X^{T}EX=(QY)^{T}E(QY)=(Y^{T}Q^{T})E(QY)=Y^{T}(Q^{T}EQ)Y=Y^{T}EY$$

მაშასადამე, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$.

თეორემა. თუ ნამდვილი კვადრატული ფორმა უცნობთა ორთოგონული გარდაქმნის საშუალებით მიყვანილია კანონიკურ სახემდე, მაშინ ამ კანონიკური სახის კოეფიციენტები წარმოადგენენ მოცემული კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელ ფესვებს და ყოველი კოეფიციენტი განმეორდება იმდენჯერ, რამდენიც არის მახასიათებელი ფესვის ჯერადობა.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ნამდვილი კვადრატული ფორმა

$$f=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k,\qquad \text{სადაც}\quad a_{ik}=a_{ki}. \tag{26}$$

დავუშვათ, რომ უცნობთა ორთოგონული $x_i=\sum_{k=1}^{n}q_{ik}y_k$ $(i=1,2,\ldots,n)$ გარდაქმნით, ე. ი. გარდაქმნით, რომლის $Q=(q_{ik})$ მატრიცი ორთოგონულია, (26) კვადრატული ფორმა მიყვანილია $f=\sum_{i=1}^{n}b_iy_i^2$

კანონიკურ სახემდე. მაგრამ რადგანაც ეს გარდაქმნა უცნობთა კვადრატების ჯამს ინვარიანტულს ტოვებს, ამიტომ თუ λ ახალი უცნობია, მაშინ

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k y_k^2 - \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (b_k - \lambda) y_k^2 .$$

ამ ტოლობის მარცხნივ დგას ნამდვილი კვადრატული ფორმა, რომლის დეტერმინანტი არის

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = |A\text{-}\lambda E|$$

ამ ტოლობის მარჯვენივ კი დგას ორთოგონული გარდაქმნის შედეგად მიღებული კვადრატული ფორმა, რომლის დეტერმინანტი არის

$$\begin{vmatrix} b_1-\lambda & & & 0 \\ & b_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{k-1}^{n} (b_k - \lambda),$$

მაგრამ, ერთი მხრივ ვიცით, რომ უცნობთა წრფივი გარდაქმნის შედეგად მიღებული კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი ტოლია მოცემული კვადრატული ფორმის დეტერმინანტის ნამრავლისა გარდაქმნის დეტერმინანტის კვადრატზე, ხოლო, მეორე მხრივ, აგრეთვე ვიცით, რომ ორთოგონული მატრიცის დეტერმინანტის კვადრატი 1-ის ტოლია, მაშასადამე,

$$|A\text{-}\lambda E| = \prod_{k=1}^{n} (b_k - \lambda) .$$

თუ ამ ტოლობაში λ უცნობის ნაცვლად ჩავწერთ A მატრიცის λ_1 მახასიათებელ ფესვს, მაშინ მივიღებთ $|A\text{-}\lambda_1 E| = 0$ და ამიტომ აგრეთვე

$\prod_{k=1}^{n}(b_k - \lambda_1) = 0$, ე. ი. რომელიმე k-სთვის გვექნება $b_k=\lambda_1$. თუ ანალოგიურ მსჯელობას ჩავატარებთ A მატრიცის ყველა მახასიათებელ ფესვზე, მივიღებთ დასამტკიცებელს.

<u>თეორემა</u> კვადრატულ ფორმათა წყვილის შესახებ. თუ f და g არიან n-უცნობიანი ნამდვილი კვადრატული ფორმები, ამასთანავე g დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ არსებობს უცნობთა ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომელიც ერთდროულად მიიყვანს g ფორმას ნორმალურ სახემდე, ხოლო f ფორმას კანონიკურ სახემდე.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ $X=CY$ არის $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობების ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნა, რომლის საშუალებით g ფორმა მიიყვანება ნორმალურ სახემდე, ე.ი. $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)= = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$. ვთქვათ ამ $X=CY$ გარდაქმნით f ფორმა გადავიდა $y_1, y_2,\ldots,y_n$ უცნობთა φ კვადრატულ ფორმაში, ე. ი. $f(x_1, x_2, \ldots,x_n)=\varphi(y_1, y_2,\ldots,y_n)$. მოვახდინოთ ახლა $y_1, y_2,\ldots,y_n$ უცნობთა ორთოგონული გარდაქმნა $Y=QZ$, რომ φ კვადრატული ფორმა მივიდეს კანონიკურ სახემდე, ე. ი.

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2,$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ არიან φ კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი ფესვები. მაშასადამე, $X=CY$ და შემდეგ $Y=QZ$ გარდაქმნების მიმდევრობით ჩატარების შედეგად, მივიღებთ, რომ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2, \tag{27}$$

და

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2. \tag{28}$$

რადგანაც $X=CY=C(QZ)=(CQ)Z$, ამიტომ (27) და (28) მიღებულია უცნობთა $X=(CQ)Z$ ნამდვილი წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნის შედეგად.

§ 1. კანონიკური λ მატრიცი

აქამდე ჩვენ ვსწავლობდით მხოლოდ ისეთ მატრიცებს, რომელთა ელემენტები რაიმე K ველს ეკუთვნოდენ. ახლა უნდა შევისწავლოთ n-ური რიგის კვადრატული მატრიცები, რომელთა ელემენტებია ნებისმიერი ხარისხის ერთი λ უცნობის პოლინომები კოეფიციენტებით K ველიდან, ე. ი. პოლინომები $K[\lambda]$ რგოლიდან. ასეთ მატრიცებს ეწოდება პოლინომური მატრიცები ანუ მოკლედ <u>λ-მატრიცები</u>. λ-მატრიცების მაგალითს წარმოადგენს K ველის ელემენტებიანი კვადრატული A მატრიცის მახასიათებელი A-λE მატრიცი, რომლის მთავარ დიაგონალზე მოთავსებულია პირველი ხარისხის პოლინომები, ხოლო მთავარი დიაგონალის გარეთ კი ნულ-ხარისხის პოლინომები ანუ კონსტანტები. კერძოდ, ჩვეულებრივი მატრიცები K ველის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც λ-მატრიცები, რომელთა ელემენტები კონსტანტებია.

ვთქვათ მოცემულია

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{11}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots & f_{2n}(\lambda) \\ . & . & . & . \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

λ-მატრიცი. λ-მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება ამ მატრიცის შემდეგ გარდაქმნებს:

1) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის გამრავლებას K ველის ნებისმიერ $\alpha\neq 0$ ელემენტზე;

2) $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი i-ური სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტთან ამ მატრიცის j-ური ($j\neq i$) სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი

ელემენტების მიმატებას, ამასთანავე გამრავლებულს $K(\lambda)$ რგოლის ნებისმიერ $\varphi(\lambda)$ პოლინომზე.

λ-მატრიცის ყოველი ელემენტარული გარდაქმნისათვის არსებობს შებრუნებული ელემენტარული გარდაქმნა. 1) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა იქნება ამავე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის გამრავლება α^{-1} ელემენტზე. 2) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა იქნება გარდაქმნა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ i-ური სტრიქონის (სვეტს) ყველა ელემენტს დავუმატებთ j-ური სტრიქონის შესაბამის ელემენტს გამრავლებულს $-\varphi(\lambda)$ პოლინომზე.

ლემა. რამდენიმე ელემენტარული გარდაქმნის საშუალებით შეიძლება $A(\lambda)$ მატრიცის ნებისმიერი ორი სტრიქონის (სვეტის) გადაადგილება.

დამტკიცება. ვთქვათ, მაგალითად, გვინდა $A(\lambda)$ მატრიცის i-ური და j-ური სტრიქონების გადაადგილება. ეს მიიღწევა შემდეგი ელემენტარული გარდაქმნის საშუალებით:

$$\begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda)+f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda)+f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda)+f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda)+f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \\ -f_{i1}(\lambda) & \cdots & -f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \\ -f_{i1}(\lambda) & \cdots & -f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

ვიტყვით, რომ $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ <u>მატრიცები ეკვივალენტურია</u> და დავწერთ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, თუ კი $A(\lambda)$ მატრიციდან შეიძლება მივიღოთ $B(\lambda)$ მატრიცი ელემენტარულ გარდაქმნათა საშუალებით. λ-მატრიცთა ეკვივალენტურობა სიმეტრიულია, ტრანზიტულია და რეფლექსურია, ე. ი.

1) $A(\lambda)\sim B(\lambda)\Rightarrow B(\lambda)\sim A(\lambda)$; 2) $A(\lambda)\sim B(\lambda)$ და $B(\lambda)\sim C(\lambda)\Rightarrow$ $\Rightarrow A(\lambda)\sim C(\lambda)$; 3) $A(\lambda)\sim A(\lambda)$.

მაშასადამე, ყველა n-ური რიგის λ-მატრიცების სიმრავლე იშლება ეკვივალენტურ მატრიცთა არათანამკვეთ კლასებად.

λ-მატრიცს ეწოდება <u>კანონიკური λ-მატრიცი</u> ან კიდევ ნორმალურ-დიაგონალური λ-მატრიცი, თუ კი ის აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

1) ეს მატრიცი დიაგონალურია, ე. ი. აქვს

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

სახე;

2) ყოველი $d_i(\lambda)$ პოლინომი (i=2,3,…,n) იყოფა $d_{i-1}(\lambda)$ პოლინომზე;

3) $d_i(\lambda)$ პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი ერთეულოვანი ელემენტია, თუ ეს პოლინომი არ არის ნულოვანი.

შევნიშნოთ, რომ თუ მთავარ დიაგონალზე მდგომი $d_i(\lambda)$ პოლინომებს შორის გვხვდება ნულოვანი პოლინომები, მაშინ, 2) თვისების ძალით, მათ აუცილებლად უკავიათ მთავარ დიაგონალზე ბოლო ადგილები. მეორე მხრივ, თუ $d_i(\lambda)$ პოლინომებს შორის გვხვდება ნული ხარისხის პოლინომი, მაშინ, 3) თვისების ძალით, ყველა ისინი ერთეულოვანი ელემენტია და 2) თვისების ძალით, უკავიათ მთავარი დიაგონალის პირველი ადგილები. კერძოდ, ნორმალურ-დიაგონალური მატრიცებია ერთეულოვანი და ნულოვანი მატრიცები.

<u>თეორემა</u>. ყოველი λ-მატრიცი ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით მიიყვანება კანონიკურ სახემდე.

<u>დამტკიცება</u>. თეორემას ვამტკიცებთ ინდუქციის მეთოდით მატრიცის n რიგის მიმართ. თუ n=1, მაშინ $A(\lambda)=(f(\lambda))$; თუ $f(\lambda)=0$, მაშინ $A(\lambda)$ თვითონაა კანონიკური; თუ კი $f(\lambda)\neq 0$, მაშინ $\left(\frac{1}{a_0}f(\lambda)\right)\sim A(\lambda)$, სადაც a_0 არის $f(\lambda)$-ს უფროსი კოეფიციენტი.

დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია n-1 რიგის λ-მატრიცებისათვის. ვთქვათ $A(\lambda)$ არის n-ური რიგის მატრიცი. თუ ის ნულოვანია, მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია. ამიტომ დავუშვათ, რომ $A(\lambda)$-ს ელემენტებს შორის არსებობს არანულოვანი პოლინომები. მაშინ სტრიქონების ან სვეტების გადაადგილებით ერთ-ერთი არანულოვანი პოლინომი შეგვიძლია მოვათავსოთ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში.

განვიხილოთ $A(\lambda)$ მატრიცის ეკვივალენტური λ-მატრიცები, რომელთა მარცხენა ზედა კუთხეში დგას არანულოვანი პოლინომი, და მათგან შევარჩიოთ ის, რომლისთვისაც ამ პოლინომის ხარისხი უმცირესია. ვთქვათ ეს არის

$$
\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & g_{12}(\lambda) & \cdots & g_{1n}(\lambda) \\ g_{21}(\lambda) & g_{22}(\lambda) & \cdots & g_{2n}(\lambda) \\ . & . & . & . \\ g_{n1}(\lambda) & g_{n1}(\lambda) & \cdots & g_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.
$$

ცხადია, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $d_1(\lambda)$ პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

დავამტკიცოთ, რომ მიღებული მატრიცის პირველი სტრიქონის და პირველი სვეტის ყველა ელემენტი იყოფა $d_1(\lambda)$ პოლინომზე. დავუშვათ წინააღმდეგი, და ვთქვათ მაგალითად $g_{1i}(\lambda)$ არ იყოფა $d_1(\lambda)$-ზე. მაშინ ნაშთით გაყოფის ალგორითმის თანახმად, გვექნება: $g_{1i}(\lambda)=d_1(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$, სადაც $r(\lambda)$ არანულოვანი პოლინომია და $\deg r(\lambda)<\deg d_1(\lambda)$. ელემენტარული გარდაქმნით ეს პოლინომი შეგვიძლია მოვათავსოთ მარცხენა ზედა კუთხეში. ეს კი $d_1(\lambda)$ პოლინომის შერჩევას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე,

$$
A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22}(\lambda) & \cdots & h_{2n}(\lambda) \\ . & . & . & . \\ 0 & h_{n2}(\lambda) & \cdots & h_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.
$$

ინდუქციის დაშვების ძალით,

$$
\begin{pmatrix} h_{22}(\lambda) & \cdots & h_{2n}(\lambda) \\ . & . & . \\ h_{n2}(\lambda) & \cdots & h_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d_2(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},
$$

და მაშასადამე

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

იმის დასამტკიცებლად, რომ მარჯვნივ მდგომი დიაგონალური მატრიცი არის ნორმალურ-დიაგონალური, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ $d_2(\lambda)$ იყოფა $d_1(\lambda)$–ზე. ისევე როგორც ზემოთ, ამის გაკეთება ადვილად შეიძლება საწინააღმდეგოს დაშვების გზით და ნაშთიით გაყოფის ალგორითმის გამოყენებით.

თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ $A(\lambda)$ არის ნებისმიერი n-ური რიგის λ-მატრიცი. განვიხილოთ $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორები ($1\leq k\leq n$). თუ ამ მინორებს გამოვთვლით, მივიღებთ λ-ს პოლინომების სასრულ რაოდენობას. პოლინომთა ამ სისტემის უდიდესი საერთო გამყოფი, რომლის უფროსი კოეფიციენტი K ველის ერთეულოვანი ელემენტია, აღვნიშნოთ $D_k(\lambda)$-თი. ამრიგად მივიღებთ $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, . . . , $D_n(\lambda)$ პოლინომთა სისტემას, რომელიც ცალსახადაა განსაზღვრული თვით $A(\lambda)$ მატრიცით. თუ ყველა k-ური რიგის მინორი K ველის ნულოვანი ელემენტის ტოლია, მაშინ ჩავთვლით, რომ $D_k(\lambda)=0$. ცხადია, რომ $D_1(\lambda)$ არის $A(\lambda)$ მატრიცის ყველა ელემენტის უდიდესი საერთო გამყოფი, რომლის უფროსი კოეფიციენტი ერთეულოვანი ელემენტია. $D_n(\lambda)$ კი არის $A(\lambda)$ მატრიცის დეტერმინანტი გამრავლებული მისი უფროსი კოეფიციენტის შებრუნებულზე.

<u>თეორემა</u>. ეკვივალენტური λ-მატრიცების k-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფები ტოლია.

დამტკიცება. თუ $A_1(\lambda)\sim A_2(\lambda)$, მაშინ დასამტკიცებელია, რომ $D_k^{(1)}(\lambda)=D_k^{(2)}(\lambda)$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) ვთქვათ

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix},\ A_2(\lambda)=\begin{pmatrix} . & . & . \\ \alpha f_{i1}(\lambda) & \cdots & \alpha f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix},$$

სადაც α არის K ველის არანულოვანი ელემენტი. ამ ორივე λ-მატრიცის k-ური რიგის მინორები, რომლებიც შეიცავენ i-ურ სტრიქონს, განსხვავებული იქნებიან მხოლოდ $\alpha\neq 0$ მამრავლით. ყველა დანარჩენი k-ური რიგის მინორი კი ორივე მატრიცში ერთი და იგივეა. მაგრამ ამ α მამრავლს ცხადია მნიშვნელობა არა აქვს. მაშასადამე, $D_k^{(1)}(\lambda)=D_k^{(2)}(\lambda)$.

2) ვთქვათ ახლა

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\ . & . & . \\ f_{ji}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix},$$

$$A_2(\lambda)=\begin{pmatrix} . & . & . \\ f_{i1}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ ამ მატრიცების შემდეგი სამი ტიპის k-ური რიგის მინორები:

ა) განვიხილოთ ის k-ური რიგის მინორები, რომლებიც არ შეიცავენ i-ურ სტრიქონს. ასეთი მინორები $A_1(\lambda)$ და $A_2(\lambda)$ მატრიცებში საერთოა, ე. ი. $M_k^{(2)}=M_k^{(1)}$;

ბ) განვიხილოთ ის k-ური რიგის მინორები, რომლებიც შეიცავენ i-ურ და j-ურ სტრიქონებს. დეტერმინანტთა თვისებების ძალით, $M_k^{(2)} = M_k^{(1)}$;

გ) განვიხილოთ ის k-ური რიგის მინორები, რომლებიც შეიცავენ i-ურ სტრიქონს და არ შეიცავენ j-ურ სტრიქონს. მაშინ $M_k^{(2)} = M_k^{(1)} + \varphi(\lambda)\widetilde{M}_k^{(1)}$, სადაც $M_k^{(1)}$ არის $A_1(\lambda)$ მატრიცის k-ური რიგის მინორი, რომელიც შეიცავს i-ურ სტრიქონს და არ შეიცავს j-ურ სტრიქონს, ხოლო $\widetilde{M}_k^{(1)}$ არის $A_1(\lambda)$-ს ის k-ური რიგის მინორი, რომელიც არ შეიცავს j-ურ სტრიქონს, მაგრამ i-ური სტრიქონი შეცვლილია j-ური სტრიქონით. მაშასადამე, $D_k^{(1)}(\lambda) \mid M_k^{(1)}$ და $D_k^{(1)}(\lambda) \mid \widetilde{M}_k^{(1)}$, ე.ი. $D_k^{(1)}(\lambda) \mid M_k^{(2)}$, ამიტომ $D_k^{(1)}(\lambda) \mid D_k^{(2)}(\lambda)$. მაგრამ იმის გამო, რომ განსახილავი ელემენტარული გარდაქმნისათვის არსებობს იმავე ტიპის შებრუნებული ელემენტარული გარდაქმნა, ამიტომ $D_k^{(2)}(\lambda) \mid D_k^{(1)}$. ამრიგად $D_k^{(2)}(\lambda) = D_k^{(1)}$, რადგანაც ორივეს აქვთ უფროს კოეფიციენტად K ველის ერთეულოვანი ელემენტი. ცხადია, რომ მსგავსი მსჯელობით იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ $A_1(\lambda)$ მატრიცის i-ურ სვეტს დავუმატებთ j-ურ სვეტს გამრავლებულს $\varphi(\lambda)$ პოლინომზე.

ამგვარად, ეკვივალენტური λ-მატრიცების k-ური რიგის მინორების უდიდეს საერთო გამყოფთა $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, … , $D_n(\lambda)$ ერთობლიობა საერთოა.

<u>თეორემა</u>. ყოველი λ-მატრიცი ეკვივალენტურია მხოლოდ ერთი კანონიკური მატრიცის.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ

$$A(\lambda) \sim N(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

სადაც $N(\lambda)$ კანონიკური მატრიცია. ცხადია, რომ $N(\lambda)$ მატრიცის ყოველ k-რიგის M_k მინორს, რომელიც დგას ამ მატრიცის ზედა კუთხეში აქვს სახე:

$$M_k = \begin{pmatrix} d_{h_1}(\lambda) & & & 0 \\ & d_{h_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{h_k}(\lambda) \end{pmatrix} = d_{h_1}(\lambda) d_{h_2}(\lambda) \ldots d_{h_k}(\lambda)$$

სადაც

$$1 \le h_1 < h_2 < \ldots < h_k \le n; \quad 1 \le h_1, 2 \le h_2, \ldots, k \le h_k. \qquad (1)$$

რადგანაც $N(\lambda)$ ნორმალურ-დიაგონალური მატრიცია, ამიტომ

$$d_1(\lambda) \mid d_{h_1}(\lambda), d_2(\lambda) \mid d_{h_2}(\lambda), \ldots, d_k(\lambda) \mid d_{h_k}(\lambda), \text{ ე. ი.}$$

$$d_1(\lambda) d_2(\lambda) \ldots d_k(\lambda) \mid d_{h_1}(\lambda) d_{h_2}(\lambda) \ldots d_{h_k}(\lambda). \qquad (2)$$

ა) თუ $d_1(\lambda)\ldots d_k(\lambda) \neq 0$, მაშინ $d_i \neq 0$ (i=1,2…k) და ამიტომ მათი უფროსი კოეფიციენტიც და მაშასადამე $d_1(\lambda)\ldots d_k(\lambda)$ ნამრავლის უფროსი კოეფიციენტიც, K ველის ერთეულოვანი ელემენტის ტოლია. $N(\lambda)$ მატრიცის ყოველი k-ური რიგის $d_{h_1}(\lambda)\ldots d_{h_k}(\lambda)$ მინორი, (2)-ის ძალით, იყოფა $d_1(\lambda)\ldots d_k(\lambda)$ მინორზე. მაგრამ, (1)-ის ძალით $d_1(\lambda)\ldots d_k(\lambda)$ აგრეთვე არის $d_{h_1}(\lambda)\ldots d_{h_k}(\lambda)$ სახის მინორი. ამიტომ $d_1(\lambda) d_2(\lambda)\ldots d_k(\lambda) = D_k(\lambda)$.

ბ) თუ $d_1(\lambda)\dots d_k(\lambda)=0$, მაშინ, (2)-ის ძალით, ყოველი $d_{h_1}(\lambda)\dots d_{h_k}(\lambda)=0$ და განსაზღვრების თანახმად, $D_k(\lambda)=0$.

მაშასადამე, ყოველთვის

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\dots d_k(\lambda) \qquad (k=1,2,..n). \tag{3}$$

ვთქვათ $A(\lambda)$ მატრიცის რანგი არის r. მაშინ $A(\lambda)$ მატრიცის ერთი r რიგის მინორი მაინც არაა ნული, ხოლო ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორი ნულია. ამიტომ r რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფი $D_r(\lambda)\neq 0$, ხოლო $D_{r+1}(\lambda)=0$ k-ური რიგის მინორების უდიდესი საერთო გამყოფის განსაზღვრების თანახმად გვექნება: $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda),\dots,D_r(\lambda)$ ყველა არანულოვანია, ხოლო $D_{r+1}(\lambda)=\dots$ $\dots=D_n(\lambda)=0$. (3)-ის ძალით, მივიღებთ:

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda), \qquad \text{ე. ი.} \qquad d_1(\lambda)=D_1(\lambda),$$

$$D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda), \qquad \text{ე. ი.} \qquad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \tag{4}$$

$$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\dots d_r(\lambda), \qquad \text{ე. ი.} \qquad d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

$$D_{r+1}(\lambda)=d_1(\lambda)\dots d_r(\lambda)d_{r+1}(\lambda), \text{ ე. ი.} \qquad d_{r+1}(\lambda)=\frac{D_{r+1}(\lambda)}{D_r(\lambda)}=0.$$

კანონიკური მატრიცის განსაზღვრების თანახმად,

$$d_{r+1}(\lambda)=\dots=d_n(\lambda)=0.$$

რადგანაც ეკვივალენტური λ-მატრიცებისათვის $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda),\dots,D_n(\lambda)$ უდიდეს საერთო გამყოფთა ერთობლიობა საერთოა, ამიტომ (4)-ის ძალით, საერთო იქნება $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$ პოლინომთა ერთობლიობაც. მაშასადამე, **ეკვივალენტური λ-მატრიცები დაიყვანებიან ერთსა და იმავე კანონიკურ სახეზე. $A(\lambda)$ მატრიცის კანო-**

ნიკური მატრიცის $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$,...,$d_n(\lambda)$ ელემენტებს ეწოდება $A(\lambda)$ მატრიცის <u>ინვარიანტული მამრავლები</u>.

(4) ფორმულები გვაძლევენ ხერხს უშუალოდ ვიპოვოთ $A(\lambda)$ მატრიცის ინვარიანტული მამრავლები.

λ-მატრიცების <u>ეკვივალენტურობის I პირობა</u>. იმისათვის, რომ ორი λ მატრიცი იყოს ეკვივალენტური აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი ინვარიანტული მამრავლები იყოს საერთო.

<u>დამტკიცება</u>. აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს წინა თეორემიდან და (4) ფორმულებიდან..

ვთქვათ ახლა $A_1(\lambda)\sim N(\lambda)$ და $A_2(\lambda)\sim N(\lambda)$ მაშინ λ-მატრიცთა სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის ძალით $A_1(\lambda)\sim A_2(\lambda)$.

§ 2. უნიმოდულური λ-მატრიცი

λ-მატრიცს ეწოდება უნიმოდულური, თუ მისი დეტერმინანტი K ველის არანულოვანი ელემენტის ტოლია.

მაგალითად,

$$U(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^3+5 & \lambda^2 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცი უნიმოდულურია, რადგან $|U(\lambda)|=\lambda^3+5-\lambda^3=5$. ცხადია, რომ

უნიმოდულურ მატრიცთა ნამრავლი უნიმოდულური მატრიცია.

რადგანაც $|U_1(\lambda)U_2(\lambda)|=|U_1(\lambda)||U_2(\lambda)|$.

ასევე ცხადია, რომ **უნიმოდულური მატრიცი შებრუნებადია და შებრუნებულიც უნიმოდულურია.**

თუ $|U(\lambda)|\neq 0$, მაშინ $|U(\lambda)^{-1}|=|U(\lambda)|^{-1}\neq 0$

ელემენტარული მატრიცები ეწოდება შემდეგი ორი სახის მატრიცს:

$$
\begin{array}{cc}
(i) & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & 0 & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & 0 & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\text{ და }
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & \varphi(\lambda) & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c}
\\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

სადაც $\alpha \neq 0$ ელემენტია K ველიდან და $\varphi(\lambda)$ პოლინომია $K[\lambda]$ რგოლიდან. ცხადია, რომ ეს მატრიცები უნიმოდულური მატრიცებია.

λ-მატრიცების ნებისმიერი ელემენტარული გარდაქმნა ტოლფასია ამ მატრიცის რომელიმე ელემენტარულ მატრიცზე მარცხნიდან ან მარჯვნიდან გამრავლების. მართლაც,

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & (i) & & \end{array} \\
(i) & \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . \\
0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & . \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & (i) & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
f_{11}(\lambda) & \cdots & f_{1i}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\
. & . & . & . & . \\
f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{ii}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\
. & . & . & . & . \\
f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{ni}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda)
\end{pmatrix}
\end{array}
=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
f_{11}(\lambda) & \cdots & f_{1i}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\
. & . & . & . & . \\
\alpha f_{i1}(\lambda) & \cdots & \alpha f_{ii}(\lambda) & \cdots & \alpha f_{in}(\lambda) \\
. & . & . & . & . \\
f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{ni}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda)
\end{pmatrix},
$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdots & 0\cdots & 0\cdots & 0 \\ . & .. & . & . \\ 0\cdots & 1\cdots & \varphi(\lambda) & 0 \\ . & . & . & . \\ 0\cdots & 0\cdots & 1\cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0\cdots & 0\cdots & 0\cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & \cdots & f_{1i}(\lambda) & \cdots & f_{1j}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{i1}(\lambda) & \cdots & f_{ii}(\lambda) & \cdots & f_{ij}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{ji}(\lambda) & \cdots & f_{jj}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{ni}(\lambda) & \cdots & f_{nj}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & \cdots & f_{1i}(\lambda) & \cdots & f_{1j}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{i1}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{ii}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{ji}(\lambda) & \cdots & f_{ij}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{jj}(\lambda) & \cdots & f_{in}(\lambda)+\varphi(\lambda)f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{j1}(\lambda) & \cdots & f_{ji}(\lambda) & \cdots & f_{jj}(\lambda) & \cdots & f_{jn}(\lambda) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{nj}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

ანალოგიური შედეგები მიიღება ელემენტარულ მატრიცზე მარჯვნიდან გამრავლებისას.

λ-მატრიცების <u>ეკვივალენტურობის II პირობა</u>. იმისათვის რომ n-ური რიგის ორი $A(\lambda)$ და $B(\lambda)$ λ-მატრიცები იყვნენ ეკვივალენტური, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს იმავე n-ური რიგის $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ უნიმოდულური მატრიცები, რომ $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$.

თუ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$, მაშინ $A(\lambda)$-დან შეიძლება მივიღოთ $B(\lambda)$ ელემენტარულ გარდაქმნათა სასრული რიცხვის საშუალებით. მაგრამ ახლახან დამტკიცებულის თანახმად, ყოველი ამ ელემენტარული გარდაქმნათაგანი შეიძლება შევცვალოთ $A(\lambda)$ მატრიცის მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ელემენტარულ მატრიცებზე გამრავლებით, ე. ი.

$$B(\lambda)=U_1(\lambda)\ldots U_s(\lambda)A(\lambda)V_1(\lambda)\ldots V_t(\lambda),$$

სადაც ყველა $U_i(\lambda)$ (i=1,…,s) და $V_i(\lambda)$ (i=1,…,t) ელემენტარული მატრიცია, ე.ი. უნიმოდულურია. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ უნიმოდუ-

ლურ მატრიცთა ნამრავლი უნიმოდულურია, ე.ი. $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$, სადაც $U(\lambda)=U_1(\lambda)\ldots U_s(\lambda)$ და $V(\lambda)=V_1(\lambda)\ldots V_t(\lambda)$.

ვთქვათ ახლა არსებობს ისეთი ორი $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ უნიმოდულური მატრიცი, რომ $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$. შევნიშნოთ რომ თუ $U(\lambda)$ უნიმოდულური მატრიცია, მაშინ $|U(\lambda)|=\alpha_0$ (K ველის ელემენტია), და მისთვის $D_n(\lambda)=\alpha_0^{-1}|U(\lambda)|=1$. ე.ი. n-ური რიგის უნიმოდულური მატრიცისთვის $D_n(\lambda)=1$, და მაშასადამე $d_1(\lambda)=\ldots\ldots=d_n(\lambda)=1$. ამრიგად, უნიმოდულური მატრიცის კანონიკური სახე წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცს. ამის გამო, არსებობენ ისეთი $P_1(\lambda)\ldots P_s(\lambda)$ და $Q_1(\lambda)\ldots Q_t(\lambda)$ ელემენტარული მატრიცები, რომ გვექნება

$$U(\lambda)=P_s(\lambda)\ldots P_1(\lambda)EQ_1(\lambda)\ldots Q_t(\lambda)=P_s(\lambda)\ldots P_1(\lambda)Q_1(\lambda)\ldots Q_t(\lambda).$$

ანალოგიურად

$$V(\lambda)=R_m(\lambda)\ldots R_1(\lambda)J_1(\lambda)\ldots J_n(\lambda).$$

რადგანაც $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$, ამიტომ ვღებულობთ

$$B(\lambda)=P_s(\lambda)\ldots P_1(\lambda)Q_1(\lambda)\ldots Q_t(\lambda)A(\lambda)R_m(\lambda)\ldots R_1(\lambda)J_1(\lambda)\ldots J_n(\lambda),$$

ე. ი. $A(\lambda)\sim B(\lambda)$.

§ 3. მატრიცული პოლინომები

n-ური რიგის <u>მატრიცული λ პოლინომი</u> K ველის მიმართ ეწოდება

$$A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \cdots A_{k-1}\lambda + A_k \tag{5}$$

პოლინომს, სადაც $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k$ კოეფიციენტები n-ური რიგის მატრიცებია K ველის მიმართ და $A_0\neq 0$, ამიტომ ამ პოლინომის $A_i\lambda^{k-i}$ წევრები n-ური რიგის λ მატრიცებია და ამიტომ მათი ჯამიც იქნება n-ური რიგის λ მატრიცი. k–ხარ[illegible]

ნებელს ეწოდება (5) მატრიცული λ პოლინომის ხარისხი. შებრუნებით, ყოველი n-ური რიგის $A(\lambda)$ მატრიცი წარმოადგენს n-ური რიგის λ-პოლინომს.

მატრიცული λ-პოლინომებისათვის სამართლიანია ნაშთით გაყოფის ალგორითმი.

<u>თეორემა</u>. ვთქვათ მოცემულია n-ური რიგის λ-მატრიცები K ველის მიმართ

$$A(\lambda)=A_0\lambda^k+A_1\lambda^{k-1}+\ldots+A_{k-1}\lambda+A_k$$

და

$$B(\lambda)=B_0\lambda^\ell+B_1\lambda^{\ell-1}+\ldots+B_{\ell-1}\lambda+B_\ell,$$

სადაც $A_0\neq 0$, ხოლო B_0 გადაუგვარებელი მატრიცია. მაშინ მოიძებნება იმავე n-ური რიგის λ-მატრიცები $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$A(\lambda)=B(\lambda)Q_1(\lambda)+R_1(\lambda),\ \text{სადაც}\ \deg R_1(\lambda)<\deg B(\lambda)\ \text{ან}\ R_1(\lambda)=0.$$

აგრეთვე მოიძებნება იმავე n-ური რიგის λ-მატრიცები $Q_2(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$, რომ შესრულდება ტოლობა:

$$A(\lambda)=Q_2(\lambda)B(\lambda)+R_2(\lambda),\ \text{სადაც}\ \deg R_2(\lambda)<\deg B(\lambda)\ \text{ან}\ R_2(\lambda)=0.$$

ამასთანავე, $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$ აგრეთვე $Q_2(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$ მატრიცები ცალსახად განისაზღვრებიან.

<u>დამტკიცება</u>. 1) ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $k\geq\ell$. განვიხილოთ სხვაობა

$$A(\lambda)-B(\lambda)B_0^{-1}A_0\lambda^{k-\ell}=A_1(\lambda), \tag{6}$$

თუ $A_1(\lambda)=0$, მაშინ პროცესს შევწყვეტთ. თუ $A_1(\lambda)\neq 0$, მაშინ მისი შესაბამისი მატრიცული პოლინომის ხარისხი $k_1<k$, მაგრამ თუ $k_1<k$ მაშინ ან $k_1<\ell$, ან $k_1\geq\ell$. თუ $k_1<\ell$, პროცესს აგრეთვე შევწყვეტთ. ამიტომ დავუშვათ, რომ $k_1\geq\ell$ და განვიხილოთ სხვაობა

$$A_1(\lambda)\text{-}B(\lambda)B_0^{-1}A_{01}\lambda^{k_1-\ell}=A_2(\lambda),$$

სადაც A_{01} არის $A_1(\lambda)$-ს შესაბამისი მატრიცული პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. თუ $A_2(\lambda)=0$, პროცესს კვლავ შევწყვეტთ. თუ $A_2(\lambda)\neq 0$, მაშინ მისი შესაბამისი მატრიცული პოლინომის ხარისხი $k_2<k_1$. თუ $k_2<\ell$, პროცესს აგრეთვე შევწყვეტთ. თუ კი $k_2\geq\ell$, მაშინ განვიხილავთ სხვაობას

$$A_2(\lambda)-B(\lambda)B_0^{-1}A_{02}\lambda^{k_2-\ell}=A_3(\lambda),$$

სადაც A_{02} არის $A_2(\lambda)$-ს შესაბამისი მატრიცული პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$, $A_3(\lambda)$, ... მატრიცებს, რომელთა შესაბამისი მატრიცული პოლინომების ხარისხები ადგენენ $k>k_1>k_2>k_3>\ldots$ ნატურალურ რიცხვთა კლებად მიმდევრობას, ამიტომ რამდენიმე ნაბიჯის შემდეგ პროცესი შეწყდება. ვთქვათ $A_{s-1}(\lambda)$ არის უკანასკნელი მატრიცი, რომლის შესაბამისი მატრიცული პოლინომის ხარისხი $k_{s-1}\geq\ell$. მაშინ

$$A_{s-1}(\lambda)-B(\lambda)B_0^{-1}A_{0,s-1}\lambda^{k_{s-1}-\ell}=A_s(\lambda),$$

ტოლობაში, სადაც $A_{0,s-1}$ არის $A_{s-1}(\lambda)$-ს შესაბამისი მატრიცული პოლინომის უფროსი კოეფიციენტი, ან $A_s(\lambda)=0$, ან მისი შესაბამისი მატრიცული პოლინომის ხარისხი $k_s<\ell$. თუ ყველა მიღებულ ტოლობას შევკრებთ, მივიღებთ:

$$A(\lambda)-B(\lambda)B_0^{-1}(A_0\lambda^{k-\ell}+A_{01}\lambda^{k_1-\ell}+\ldots+A_{0,s-1}\lambda^{k_{s-1}-\ell})=A_s(\lambda),$$

ამრიგად, $A(\lambda)=B(\lambda)Q_1(\lambda)+R_1(\lambda)$,

სადაც $Q_1(\lambda)=B_0^{-1}(A_0\lambda^{k-\ell}+A_{01}\lambda^{k_1-\ell}+\ldots+A_{0,s-1}\lambda^{k_{s-1}-\ell})$ და $R_1(\lambda)=A_s(\lambda)$.

ახლა დავამტკიცოთ $Q_1(\lambda)$ და $R_1(\lambda)$ წყვილის ერთადერთობა. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ

$A(\lambda)=B(\lambda)Q_1(\lambda)+R_1(\lambda)$, სადაც $R_1(\lambda)=0$ ან $\deg R_1(\lambda)<\deg B(\lambda)$ და აგრეთვე

$A(\lambda)=B(\lambda)\widetilde{Q}_1(\lambda)+\widetilde{R}_1(\lambda)$, სადაც $\widetilde{R}_1(\lambda)=0$ ან

$\deg \widetilde{R}_1(\lambda) < \deg B(\lambda)$.

მაშინ

$$B(\lambda)\left(Q_1(\lambda) - \widetilde{Q}_1(\lambda)\right) = \left(\widetilde{R}_1(\lambda) - R_1(\lambda)\right). \qquad (7)$$

თუ $Q_1(\lambda) - \widetilde{Q}_1(\lambda) \neq 0$, მაშინ $\deg B(\lambda)\left(Q_1(\lambda) - \widetilde{Q}_1(\lambda)\right) \geq \ell$, მაგრამ, $\deg\left(\widetilde{R}_1(\lambda) - R_1(\lambda)\right) < \ell$, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე $\widetilde{Q}_1(\lambda) = Q_1(\lambda)$ და ამიტომ, (7)-ის ძალით, $\widetilde{R}_1(\lambda) = R_1(\lambda)$.

2) ახლა თუ (6) სხვაობის ნაცვლად, განვიხილავთ

$$A(\lambda) - A_0\lambda^{k-\ell}B_0^{-1}B(\lambda) = \widetilde{A}_1(\lambda)$$

სხვაობას, და ჩავატარებთ 1) შემთხვევაში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურს, მივიღებთ, რომ

$A(\lambda)=Q_2(\lambda)B(\lambda)+R_2(\lambda)$, სადაც $R_2(\lambda)=0$ ან $\deg R_2(\lambda)<\deg B(\lambda)$.

ამასთანავე აქაც $Q_2(\lambda)$ და $R_2(\lambda)$ ცალსახად იქნებიან განსაზღვრული.

<u>თეორემა</u>. იმისათვის, რომ A და B მატრიცები ელემენტებით K ველიდან იყვნენ მსგავსი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი მახასიათებელი A-λE და B-λE მატრიცები იყვნენ ეკვივალენტური.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ B მატრიცი A მატრიცის მსგავსია. ე.ი. არსებობს K ველის მიმართ ისეთი Q გადაუგვარებელი მატრიცი, რომ $B=Q^{-1}AQ$. მაშინ

$$Q^{-1}(A-\lambda E)Q=Q^{-1}AQ-Q^{-1}\lambda EQ=B-\lambda E.$$

Q და Q^{-1} მატრიცები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც უნიმოდულური მატრიცები. მაშასადამე, $A-\lambda E\sim B-\lambda E$. აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ საკმარისობის დამტკიცებაზე, და ვთქვათ $A-\lambda E\sim B-\lambda E$. მაშინ არსებობენ $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$ ისეთი უნიმოდულური მატრიცები, რომ

$$B-\lambda E=U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda). \qquad (8)$$

რადგანაც უნიმოდულური მატრიცის შებრუნებული აგრეთვე უნიმოდულურია, ამიტომ (8)-დან ვღებულობთ, რომ

$$U(\lambda)(A-\lambda E)=(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda) \text{ და } (A-\lambda E)V(\lambda)=U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E). \quad (9)$$

ნაშთით გაყოფის ალგორითმის თანახმად

$$U(\lambda)=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1 \text{ და } V(\lambda)=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2. \quad (10)$$

გვექნება

$$R_1(A-\lambda E)R_2=[U(\lambda)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)](A-\lambda E)[V(\lambda)-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)]=$$

$$=U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda)+U(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-$$

$$-\lambda E)+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E).$$

აქედან, (8)-დან და (9)-დან ვღებულობთ, რომ

$$R_1(A-\lambda E)R_2=(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B-\lambda E)+$$

$$(B-\lambda E)V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=$$

$$(B-\lambda E)\{E-[Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)+V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)](B-\lambda E)\}$$

კვადრატული ფრჩხილი აქ უნდა იყოს ნულოვანი მატრიცული პოლინომი. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში ფიგურიანი ფრჩხილის ხარისხი 1 მაინც იქნებოდა და მაშასადამე მთელი მარჯვენა მხარის ხარისხი იქნებოდა 2 მაინც. ეს შეუძლებელია, რადგანაც მარცხენა მხარის ხარისხი არის 1.

მაშასადამე,

$$R_1(A-\lambda E)R_2=B-\lambda E, \text{ ანუ } R_1AR_2-R_1(\lambda E)R_2=B-\lambda E.$$

აქედან

$$R_1AR_2=B, \quad (11)$$

$$R_1R_2=E. \quad (12)$$

(12)-დან გამომდინარეობს, რომ $R_2^{-1}=R_1$, და ამიტომ (11) ტოლობა ღებულობს $R_2^{-1}AR_2=B$ სახეს. ამრიგად, A და B მატრიცები მსგავსია.

§ 4. ჟორდანის მატრიცი

K ველის λ_0 ელემენტის შესაბამისი k-ური რიგის ჟორდანის უჯრედი ეწოდება მატრიცს

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

რომლის მთავარ დიაგონალზე დგას K ველის λ_0 ელემენტი, მარჯვენა პარალელურ დიაგონალზე ყველგან დგას K ველის ერთეულოვანი ელემენტი, მატრიცის ყველა დანარჩენი ელემენტი კი K ველის ნულოვანი ელემენტია. ასე, მაგალითად,

$$(\lambda_0), \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

შესაბამისად არიან პირველი, მეორე და მესამე რიგის ჟორდანის უჯრედები. ჟორდანის k-ური უჯრედის მახასიათებელი მატრიცი იქნება

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_0-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix} \qquad (14)$$

k-ური რიგის მატრიცი. ცხადია, რომ $D_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$, რადგანაც $D_k(\lambda)$-ს უფროსი კოეფიციენტი, როგორც ვიცით, არის K ველის ერთეუ-

ლოვანი ელემენტი. $D_{k-1}(\lambda)=1$, $D_{k-2}(\lambda)=1$, და ასე შემდეგ. [illegible] ფორმულების ძალით, $d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}=(\lambda-\lambda_0)^k$

$d_{k-1}(\lambda)=d_{k-2}(\lambda)=...=d_1(\lambda)=1$. მაშასადამე, (14) მატრიცის კანონიკური მატრიცი იქნება შემდეგი k-ური რიგის λ-მატრიცი

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda-\lambda_0)^k \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

<u>ლემა</u>. თუ $K[\lambda]$ რგოლის $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $...f_s(\lambda)$ პოლინომები წყვილ-წყვილად თანამარტივია, მაშინ

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & & 0 \\ & f_1(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f_{s-1}(\lambda) & \\ 0 & & & & f_s(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \prod_{i=1}^{s} f_i(\lambda) \end{pmatrix}$$

დამტკიცება ჩავატაროთ ინდუქციის მეთოდით s-ის მიმართ. ვთქვათ s=2, ე. ი. $(f_1(\lambda), f_2(\lambda))=1$. მაშინ, როგორც ვიცით, $K[\lambda]$ რგოლში მოიძებნება $u_1(\lambda)$ და $u_2(\lambda)$ პოლინომები, რომ შესრულდება $f_1(\lambda)u_1(\lambda)+f_2(\lambda)u_2(\lambda)=1$ ტოლობა. ამიტომ

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & f_1(\lambda)u_1(\lambda) \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & f_1(\lambda)u_1(\lambda) + f_2(\lambda)u_2(\lambda) \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 1 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & f_1(\lambda) \\ 0 & -f_1(\lambda)f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -f_1(\lambda)f_2(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)f_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

დავუშვათ, რომ დებულება სწორია s რაოდენობის პოლინომთათვის და დავამტკიცოთ ლემის სამართლიანობა s+1 პოლინომის შემთხვევაში. მართლაც,

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & f_s(\lambda) & \\ 0 & & & f_{s+1}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \prod_{i=1}^{s} f_i(\lambda) & \\ 0 & & & & f_{s+1}(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \prod_{i=1}^{s+1} f_i(\lambda) \end{pmatrix}.$$

<u>n-ური რიგის ჟორდანის მატრიცა</u> ეწოდება n-ური რიგის

$$J=\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix} \quad (16)$$

მატრიცს, რომლის მთავარი დიაგონალის გასწვრივ დგანან J_1, J_2, ..., J_s ჟორდანის უჯრედები არა აუცილებლად განსხვავებული რიგის, რომლებიც შეესაბამებიან K ველის რაიმე ელემენტებს, რომლებიც აგრეთვე შეიძლება არ იყვნენ განსხვავებული; ამ უჯრედების გარეთ დგანან ნულოვანი ელემენტები. თუ s=1, მაშინ ჟორდანის მატრიცი წარმოადგენს n-ური რიგის ჟორდანის უჯრედს, თუ s=n მაშინ ჟორდანის მატრიცის ყველა უჯრედი პირველი რიგისაა და ამიტომ ის წარმოადგენს n-ური რიგის დიაგონალურ მატრიცს. ამიტომ **ჟორდანის მატრიცი წარმოადგენს განზოგადებულ დიაგონალურ მატრიცს და მას აგრეთვე კვაზი-დიაგონალურ მატრიცს უწოდებენ**.

განვიხილოთ ახლა ჟორდანის მატრიცის მახასიათებელი მატრიცი

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} \boxed{J_1-\lambda E_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2-\lambda E_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_s-\lambda E_s} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

აქ J_i (i=1,2,…,s) ჟორდანის უჯრედებია, ხოლო E_i(i=1,2,..,s) ერთეულოვანი მატრიცებია იმავე რიგის რაც ჟორდანის უჯრედი J_i. ვთქვათ J მატრიცის უჯრედები შეესაბამებიან K ველის λ_1, λ_2, …, λ_t განსხვავებულ ელემენტებს (1≤t≤s). შემდეგ დავუშვათ, რომ λ_i (i=1,2,…,t) ელემენტს შეესაბამება q_i რაოდენობის ჟორდანის

უჯრედი ($q_i \geq 1$) და ვთქვათ ამ უჯრედების რიგები არაზრდადი მიმდევრობით არის დალაგებული

$$k_{i1} \geq k_{i2} \geq \ldots \geq k_{iq_i} \quad (i=1,2,\ldots,s).$$

ცხადია, რომ $\sum_{i=1}^{t} q_i = s$ და $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{q_i} k_{ij} = n$.

$J\text{-}\lambda E$ მატრიცი ეკვივალენტურია დიაგონალური მატრიცის, რომლის მთავარ დიაგონალზე, გარდა K ველის ერთეულოვან ელემენტთა გარკვეული რაოდენობისა, დგანან აგრეთვე შემდეგი პოლინომები, რომლებიც შეესაბამებიან J მატრიცის ყველა ჟორდანის უჯრედს:

$$\begin{array}{l}
(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}},\\
(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
(\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}},\ (\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{k_{tq_t}};
\end{array} \tag{18}$$

აქ i-ურ სტრიქონებში (i=1,2,..,t) მოთავსებულია λ_i ელემენტების შესაბამისი ჟორდანის უჯრედების მახასიათებელი მატრიცების კანონიკური მატრიცების პოლინომები. ვთქვათ $q=\max(q_1, q_2, \ldots, q_t)$. რადგანაც k-ური რიგის (13) ჟორდანის უჯრედის (14) მახასიათებელი მატრიცის კანონიკური მატრიცი არის (15) და აგრეთვე (16) ჟორდანის მატრიცის ჟორდანის უჯრედები შეესაბამებიან K ველის განსხვავებულ λ_1, λ_2, …λ_t ელემენტებს, ამიტომ (18) ცხრილის j-ურ სვეტში (j=1,2, …,q) მდგომი პოლინომები წყვილ-წყვილად თანამარტივია. ამრიგად, ლემის ძალით, სტრიქონების გადაადგილების შემდეგ, (16) ჟორდანის მატრიცის (17) მახასიათებელი მატრიცი მიიყვანება

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & \ddots & & \\ & & & \prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{i1}} & & & & \\ & & & & \prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{i2}} & & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{iq}} \end{pmatrix}$$

კანონიკურ სახემდე. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$d_{n-j+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}} \qquad (j=1,2,\ldots,q) \tag{19}$$

მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$J-\lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & d_{n-q+1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & d_{n-1}(\lambda) & \\ 0 & & & & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

<u>თეორემა.</u> ორი ჟორდანის მატრიცი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი შესდგებიან ერთი და იმავე ჟორდანის უჯრედებისაგან, განსხვავება შეიძლება იყოს მხოლოდ მათ დალაგებაში მთავარი დიაგონალის გასწვრივ.

<u>დამტკიცება</u>. ვთქვათ J და J' მატრიცები მსგავსია, მაშინ, როგორც ვიცით, $J-\lambda E \sim J'-\lambda E$ და ამიტომ მათ (19) ინვარიანტული მამრავლები ექნებათ საერთო, ე. ი. საერთო ექნებათ პოლინომთა (18) ცხრილიც, რომლის საშუალებით შეიძლება აღდგენილი იქნეს J

და J' ჟორდანის მატრიცების ჟორდანის უჯრედები, რომლებიც ორივე მატრიცისათვის საერთო იქნებიან.

შებრუნებით, თუ J და J' ჟორდანის მატრიცების ჟორდანის უჯრედები საერთოა, მაშინ საერთო ექნებათ პოლინომთა (18) ცხრილი და ამიტომ საერთო ექნებათ (19) პოლინომთა ერთობლიობაც, ე. ი. $J-\lambda E$ და $J'-\lambda E$ მატრიცებს ექნებათ ერთი და იგივე ინვარიანტული მამრავლები. მაშასადამე, $J-\lambda E \sim J'-\lambda E$ და ამიტომ J და J' მატრიცები მსგავსია.

<u>შედეგი.</u> 1) ჟორდანის მატრიცი, რომელიც დიაგონალური მატრიცის მსგავსია, თვითონაა დიაგონალური.

2) ორი დიაგონალური მატრიცი მსგავსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი ერთმანეთისაგან მიიღებიან მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების გადანაცვლებით.

<u>განსაზღვრება.</u> ვიტყვით, რომ A მატრიცი ელემენტებით K ველიდან დაიყვანება K ველის მიმართ ჟორდანის ნორმალურ სახემდე, თუ კი მოიძებნება A მატრიცის მსგავსი ჟორდანის J მატრიცი ელემენტებით K ველიდან.

<u>ჟორდანის თეორემა</u>. იმისათვის რომ A მატრიცი ელემენტებით K ველიდან დაიყვანებოდეს K ველის მიმართ ჟორდანის ნორმალურ სახეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ A მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი ეკუთვნოდეს K ველს.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ n-ური რიგის A მატრიცი ელემენტებით K ველიდან დაიყვანება K ველის მიმართ ჟორდანის ნორმალურ სახეზე, ე.ი. არსებობს A მატრიცის მსგავსი ჟორდანის J მატრიცი ელემენტებით K ველიდან. როგორც ვიცით, მსგავს მატრიცებს აქვთ საერთო მახასიათებელი ფესვები. მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ A მატრიცის მსგავსი J მატრიცის მახასიათებელი ფესვები, ე.ი. $|J-\lambda E|$ პოლინომის ფესვები. მაგრამ $|J-\lambda E|$ პოლინომი K ველის მიმართ იშლება წრფივ მამრავლთა ნამრავ-

ლად, სახელდობრ $|J-\lambda E|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)$. ამრიგად, K ველის λ_i (i=1,2,…,n) ელემენტები, რომელთა შორის შეიძლება იყოს ტოლ-ებიც, წარმოადგენენ როგორც J მატრიცის, ასევე A მატრიცის, მახ-ასიათებელ ფესვებს.

გადავიდეთ საკმარისობის დამტკიცებაზე. ვთქვათ A არის n-ური რიგის მატრიცი ელემენტებით K ველიდან და მისი ყველა მახასი-ათებელი ფესვი K ველს ეკუთვნის. უნდა დავამტკიცოთ, რომ A მატ-რიცი მიიყვანება K ველის მიმართ ჟორდანის ნორმალურ სახემდე, ე.ი. რომ არსებობს A მატრიცის მსგავსი n-ური რიგის ჟორდანის J მატრიცი ელემენტებით K ველიდან.

ვიცით, რომ ყოველი λ-მატრიცი და მაშასადამე $A-\lambda E$ მატრიციც ეკვივალენტურია მხოლოდ ერთი $N(\lambda)$ ნორმალური დიაგონალური მატრიცის, ე.ი. $A-\lambda E\sim N(\lambda)$. ამიტომ λ-მატრიცების ეკვივალენტურო-ბის II პირობის თანახმად არსებობს ორი უნიმოდულური მატრიცი $U(\lambda)$ და $V(\lambda)$, რომ შესრულდება პირობა: $A-\lambda E=U(\lambda)N(\lambda)V(\lambda)$. გვექნება $|A-\lambda E|==|U(\lambda)||N(\lambda)||V(\lambda)|=c|N(\lambda)|$, სადაც c არის K ველის არანულოვანი ელემენტი. მაგრამ ჩვენ აგრეთვე ვიცით, რომ $|A-\lambda E|$ არის n-ური ხარისხის პოლინომი K ველის მიმართ და მისი უფროსი კოეფიციენტია $(-1)^n$. ამიტომ $|N(\lambda)|$ აგრეთვე არის n ხარისხის პო-ლინომი. მაგრამ მისი უფროსი კოეფიციენტი, როგორც ვიცით არის 1. მაშასადამე,

$$|A-\lambda E|=(-1)^n|N(\lambda)|=(-1)^n d_{n-q+1}(\lambda)\dots d_{n-1}(\lambda)\, d_n(\lambda), \qquad (19)$$

სადაც ყველა ინვარიანტული მამრავლი $\neq 0$ და $\neq 1$. მოცემული პირო-ბის ძალით, ეს ინვარიანტული მამრავლები K ველის მიმართ იშლე-ბიან წრფივ მამრავლთა ნამრავლად, სახელდობრ, (19)-ის თანახმად

$$d_{n-j+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}. \quad \mathbf{(j=1,2,..,q)}$$

$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}},(\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}},\ldots,(\lambda-\lambda_t)^{k_{tj}}$ წრფივ მამრავლებს ეწოდება $d_{n-j+1}(\lambda)$ პოლინომის ელემენტარული გამყოფები. ყველა $d_{n-j+1}(\lambda)$ (j=1,2,…,q) პოლინომების ელემენტარულ გამყოფებს, რომლებიც ამოწერილია (16) ცხრილში ეწოდება A მატრიცის ელემენტარული გამყოფები.

ახლა განვიხილოთ n-ური რიგის ჟორდანის J მატრიცი, რომლის ჟორდანის უჯრედები შემდეგნაირად შევარჩიოთ: A მატრიცის ყოველ $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ ელემენტარულ გამყოფს შევუსაბამოთ λ_i ელემენტის შესაბამისი k_{ij} რიგის ჟორდანის უჯრედი. სწორედ ეს ჟორდანის J მატრიცი მსგავსი იქნება ჩვენი A მატრიცის. მართლაც, ამ J მატრიცის მახასიათებელ $J-\lambda E$ მატრიცს ინვარიანტულ მამრავლებად ექნება ერთიანებთან ერთად, (19)-ის თანახმად, $d_{n-j+1}(\lambda)$ (j=1,2,…,q) პოლინომები და მხოლოდ ისინი. ამიტომ λ-მატრიცების ეკვივალენტურობის I პირობის თანახმად, $A-\lambda E \sim J-\lambda E$. მაშასადამე,, A და J მატრიცები მსგავსია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ მხოლოდ ერთი ჟორდანის მატრიცი შეიძლება იყოს A-ს მსგავსი. დავუშვათ წინააღმდეგი. ვთქვათ A მატრიცი მსგავსია J და J' ჟორდანის მატრიცების. ამიტომ, $A-\lambda E \sim J-\lambda E$ და $A-\lambda E \sim J'-\lambda E$. λ-მატრიცთა ეკვივალენტურობის სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის გამო მივიღებთ, რომ $J-\lambda E \sim J'-\lambda E$. მაშასადამე, λ მატრიცების ეკვივალენტურობის I პირობის ძალით, $J-\lambda E$ და $J'-\lambda E$ მატრიცებს ინვარიანტული მამრავლები აქვთ საერთო. ამიტომ J და J' მატრიცები ერთმანეთისაგან შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ ჟორდანის უჯრედების განლაგებით.

<u>შედეგი</u>. იმისათვის, რომ n-ური რიგის A მატრიცი ელემენტებით K ველიდან, K ველის მიმართ დაიყვანებოდეს დიაგონალურ სახემდე აუცილებელი და საკმარისია, რომ A

მატრიცის მახასიათებელი მატრიცის უკანასკნელი $d_n(\lambda)$ ინვარიანტული მამრავლის ყველა ფესვი იყოს მარტივი და ეკუთვნოდეს K ველს.

მართლაც, A მატრიცის, ელემენტებით K ველიდან, K ველის მიმართ დაყვანადობა დიაგონალურ სახეზე იმის ტოლფასია, რომ A მატრიცი მსგავსია ისეთი ჟორდანის მატრიცისა, ელემენტებით K ველიდან, რომლის ყველა ჟორდანის უჯრედი პირველი რიგისაა, და ამიტომ A მატრიცის ყველა ელემენტარული გამყოფი პირველი ხარისხის ორწევრებია K ველიდან. მაშასადამე, $d_n(\lambda)$ პოლინომის ყველა ელემენტარული გამყოფებიც პირველი ხარისხისაა, ე. ი. $d_n(\lambda)$ პოლინომის ყველა ფესვი მარტივია და K ველს ეკუთვნის.

საგნობრივი საძიებელი

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 4, Москва, 1971.

2. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 6, Москва, 1959.

3. Kochendörffer R., Einführung in die Algebra, zweite Auflage, Berlin, 1962.

4. Мальцев А. И, Основы линейной алгебры, Москва-Ленинград, 1948.

5. Окунев Л. Я., Высшая алгебра, изд. 2, Москва, 1966.

6. Сушкевич Л. К., Основы высшей алгебры, изд. 3, Москва-Ленинград, 1937.

7. Фаддеев Д. К., Лекции по алгебре, Москва, 1984.

8. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств, Москва-Ленинград, 1948.

გამომცემლობის რედაქტორი ე. წერეთელი
ტექ. რედაქტორი თ. ფირცხელანი
კორექტორები: ქ. გაჩეჩილაძე
ნ. ჩახაია
კომპიუტერული უზრუნველყოფა მ. სხირტლაძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 27.12.05
პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 15,5
შეკვეთის № 70
საბეჭდი ქაღალდი 60X84
სააღრ.-საგამომც. თაბახი 9,72
ტირაჟი 100

ფასი სახელშეკრულებო